信号分析与处理

zjm54321

2025 年 4 月 22 日

1 单位信号

信号之间的关系：

$$r'(t) = u(t)$$
$$u'(t) = \delta(t)$$
$$\delta'(t) = \delta'(t)$$

1.1 单位冲激信号的性质

1.1.1 冲激信号

筛选特性：

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

抽样特性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

1.1.2 冲激偶信号

定义：

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

筛选特性：

$$f(t)\delta'(t-t_0) = f(t_0)\delta'(t-t_0) - f'(t_0)\delta(t-t_0)$$

抽样特性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt = -f'(t_0)$$

例题 1.1 求下列表达式的函数值：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}[\delta(t) - \delta(t-t_0)]dt$$

解：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}[\delta(t) - \delta(t-t_0)]dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-0)dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)dt \\
&= e^{-j\omega 0} - e^{-j\omega t_0} \\
&= 1 - e^{-j\omega t_0}
\end{aligned}$$

1.2 单位阶跃信号的性质

1.3 指数信号的积分与卷积

2 信号变化

2.1 信号的时间轴展缩、翻转、平移操作

步骤：

1. 展缩
2. 翻转
3. 平移

例题 2.1 已知连续时间信号 $x(t)$，画出 $x(2-\frac{t}{3})$ 的波形
解：

1. 展缩：$x(\frac{t}{3})$
2. 翻转：$x(-\frac{t}{3})$
3. 平移：$x(2-\frac{t}{3})$

2.2 微分方程求解

求系统的完全响应：

1. 由已知方程写出齐次方程
2. 由齐次方程写出特征方程
3. 解出特征根 $s_1, s_2, \cdots$
4. 根据特征根写出齐次解：$y_h(t)$
   (a) 特征根是不等实根时，$y_h(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \cdots$
   (b) 特征根是相等实根时，$y_h(t) = k_1 e^{st} + k_2 e^{st} + k_2 t^2 e^{st} + \cdots$
   (c) 特征根是共轭虚根时，$y_h(t) = e^{s_1 t}(k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t)) + \cdots$
5. 由输入 $f(t)$ 的形式，设出方程的特解：$y_p(t) = cf(t)$
6. 将特解带入原方程求出 c
7. 求解全解 $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
8. 解初始化条件代入可得系数
9. 写出 $y(t)$

例题 2.2 求解所 $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+2x(t)$ 描述的系统的单位冲激响应。
解:

1. 系统的齐次方程为 $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=0$
2. 系统的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+3=0$
3. 特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-3$
4. 齐次解为 $y_h(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-3t}$
5. 由单位冲激响应，故 $y(t)=y_h(t)u(t),x(t)=\delta(t)$
6. 特解为 $y_p(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$
7. 代入原方程, 求得 $k_1=\frac{1}{2},k_2=\frac{1}{2}$
8. $y_h(t)=(\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$

3 傅里叶变化

3.1 傅里叶级数系数的计算

角频率 $\omega=\frac{2\pi}{T}$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega t}dt$$

正弦余弦欧拉公式展开:

$$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$
$$\cos\omega t=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$$

3.2 周期信号的频谱分析

4 单边指数信号的傅里叶变换

傅里叶变换的性质:

1. 展缩: $f(at)\to\frac{1}{|a|}F(j\frac{\omega}{a})$
2. 时移: $f(t-t_0)\to F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. 频移: $f(t)e^{j\omega t}\to F(j(\omega-\omega_0))$
4. 卷积: $f_1(t)*f_2(t)\to F_1(j\omega)F_2(j\omega)$
5. 时域微分: $\frac{d^nf(t)}{dt^n}\to(j\omega)^nF(j\omega)$
6. 时域积分: $\int_{-\infty}^{t}f(t)dt\to\frac{1}{j\omega}F(j\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$

常用傅里叶变换:

1. $f(t) \rightarrow F(j\omega)$
2. $\delta(t) \rightarrow 1$
3. $1 \rightarrow 2\pi\delta(\omega)$
4. $e^{j\omega t} \rightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
5. $e^{-\alpha t}u(t) \rightarrow \frac{1}{\alpha+j\omega}$

例题 4.1 求 $x(t)=e^{-3(t-1)}\delta'(t-1)$ 的傅里叶变换。

解:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-3(t_0-1)}\delta'(t-1)-[-3e^{-3(t_0-1)}]\delta(t-1) \\ &= \delta'(t-1)+3\delta(t-1) \\ X(j\omega) &= [(j\omega)\cdot 1+3\cdot 1]\cdot e^{-j\omega t_0} \\ &= (j\omega+3)e^{-j\omega} \end{aligned}$$

例题 4.2 求 $x(t)=e^{-2t}u(t+1)$ 的傅里叶变换。

解:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^2\cdot e^{-2(t+1)}u(t+1) \\ X(j\omega) &= e^2\cdot\frac{1}{-2+j\omega}e^{-j\omega(-1)} \\ &= \frac{e^{2+j\omega}}{-2+j\omega} \end{aligned}$$

5 左边等的指数序列的 DTFT

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

例题 5.1 求 $x_1(n)=(\frac{1}{2})^n u(n+3)$ 的 *DTFT*

解:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^n u(n+3)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-3}^{\infty}(\frac{1}{2})^n e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

6 电路

6.1 电路的系统函数求解

6.2 无失真传输的频域条件