复变函数复习

ming

2024 年 12 月 30 日

1 复数

1.1 基本展开公式

1.1.1 三角式、指数式

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned} \tag{1}$$

1.1.2 乘法公式

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[\cos(r_1 + r_2) + i\sin(r_1 + r_2)] \\ &= r_1 r_2 e^{i(r_1+r_2)} \end{aligned} \tag{2}$$

1.1.3 次方公式

$$z^n = r^n e^{in\theta} \tag{3}$$

1.1.4 开方公式

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{4}$$

计算步骤：

1. 先把根号内的复数转换为三角式
2. cos 和 sin 部分变为 $\frac{\theta+2k\pi}{n}$: $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$; n 为开 n 次方

1.2 初等函数

1.2.1 指数函数

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \quad (z = x + iy) \tag{5}$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, (e^{z_1})^{z_2} \neq e^{z_1 z_2}, (e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{6}$$

$$Arg(e^z) = y + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{7}$$

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \tag{8}$$

1.2.2 三角函数

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \\ \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \end{aligned} \tag{9}$$

1.2.3 双曲函数

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \\ \cosh z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \end{aligned} \tag{10}$$

1.2.4 对数函数

$$\begin{aligned} Lnz &= \ln|z| + iArgz \quad (z \neq 0, \infty) \\ &= \ln|z| + iargZ + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{11}$$

1.2.5 幂函数

$$z^w = e^{wLnz} \tag{12}$$

2 解析函数

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{13}$$

2.1 C-R 条件

$f(z)$ 在区域 z 处可微的充分必要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 z 处：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{14}$$

2.1.1 推论 1

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \tag{15}$$

2.2 解析

$$\begin{tikzcd} {[f(z)\text{在}D\text{内解析}]} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & {[f(z)\text{在}D\text{内可导}]} \arrow[d, Rightarrow] \\ {[f(z)\text{在}z_0\text{解析}]} \arrow[r, Rightarrow] & {[f(z)\text{在}z_0\text{可导}]} \end{tikzcd}$$

2.3 做题步骤

判断可导性与解析性

1. 写出 u 和 v
2. 求出 u_x, u_y, v_x, v_y
3. 判断是否满足 C-R (14) 条件，若满足则可导，否则不可导
4. 判断是否解析

3 复积分

3.1 类型 1：复积分公式

$$\oint f(z)dz = \oint udx - vdy + i\oint vdx + udy \tag{16}$$

3.2 类型 2：参数方程

1. 线段：$AB, z(t) = A + t(B - A), \quad t \in [0, 1]$
2. 抛物线：$AB, y = x^2, z(t) = t + it^2, \quad t \in [0, 1]$
3. 圆：$z(t) = z_0 + Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\oint f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt \tag{17}$$

3.2.1 重要结论

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \tag{18}$$

注意：积分值与 z_0, r 均无关

3.3 类型 3：柯西积分定理

若 $f(z)$ 在 C 和其内部处处解析，C 为 D 内的任一闭曲线，则：

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{19}$$

3.4 类型 4：牛顿-莱布尼茨公式

若 $f(z)$ 在 D 内部处处解析，曲线 C 围成单连通区域 D，且起点终点在 D 内，则：

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1), \quad (z_1, z_2 \in D) \tag{20}$$

3.5 类型 5：柯西积分公式

$$\begin{gathered}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0), \quad (z_0 \in D) \\ \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0), \quad (z_0 \in D)\end{gathered} \tag{21}$$

4 级数

4.1 求收敛半径

1. 根值法：$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$，其中 $\overline{\lim}$ 代表上极限
2. 比值法：$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$

4.2 泰勒级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{22}$$

4.2.1 常见泰勒级数

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
2. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$

3. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
4. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
5. $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$

4.3 洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{23}$$

4.4 做题步骤

1. 求奇点，以奇点到展开中心的模的大小为分界
2. 凑出奇点形式，增补
3. 分类讨论中“谁大提谁”，相当于把谁塞到分母的分母里
4. 从 z_0 中心往外扩散，最先接触到奇点的部分先发生变化

5 留数

5.1 奇点

奇点：无定义点

1. 非孤立奇点：$f(z)$ 在 z_0 处无定义，但在 z_0 的某个邻域内有定义。非孤立奇点值为 $\lim\limits_{k\to\infty} z_k$
2. 孤立奇点：
   (a) 可去奇点：$f(z)$ 在 z_0 处解析，$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0 \neq \infty$
   (b) 极点：$f(z)$ 在 z_0 处有限，$\lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) = c_n \neq 0$, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$
   (c) 本性奇点：$f(z)$ 在 z_0 处无穷，$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在

5.1.1 孤立奇点判断方法

1.

$$\text{洛朗展开看负次幂项系数：}\begin{cases} 0, & z_0\text{为可去奇点} \\ m, & z_0\text{为极点} \\ \infty, & z_0\text{为本性奇点} \end{cases}$$

2.

$$\text{看}\lim_{z\to z_0} f(z)\text{：}\begin{cases} c_0, & z_0\text{为可去奇点} \\ \infty, & z_0\text{为极点} \\ \text{不存在}, & z_0\text{为本性奇点} \end{cases}$$

3.

$$\text{判断}m\text{阶：}\begin{cases} \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) = c_m \neq 0, \quad (z_0 \neq \infty) \\ f(z) = \dfrac{(z-z_0)^m p(z)}{(z-z_0)^n q(z)}, p(z), q(z)\text{在}z_0\text{解析}, p(z_0), q(z_0) \neq 0, \\ \text{则此时}z_0\text{为}\begin{cases} m-m, \text{阶极点}, & m > n \\ \text{可去奇点}, & m \leq n \end{cases} \end{cases}$$

4.

$$z_0\text{是}\frac{1}{f(z)}\text{的}m\text{阶零点}$$

5.1.2 奇点求法

1. 先找出所有奇点
2. 如存在奇点点列，其极限是非孤立奇点
3. 孤立奇点类型

5.2 留数法则

洛朗级数中 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 的系数，称为 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 处的留数，记为 $\mathrm{Res}f(z_0)$

1. 设 z_0 是 $f(z)$ 的 1 阶极点，则 $\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
2. 设 $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ，若 z_0 是 $f(z)$ 的 1 阶极点，则 $\mathrm{Res}f(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$
3. 设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则 $\mathrm{Res}f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$
4. $\mathrm{Res}f(\infty) = -\mathrm{Res}[f(\frac{1}{\zeta})\frac{1}{\zeta^2}, 0] = -c_{-1}, \quad z = \frac{1}{\zeta}$

5.3 留数基本定理

1. 若 $f(z)$ 在 D 内除有限个孤立奇点外处处解析，则 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res} f(z_k)$
2. 无穷远点的留数：$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res} f(z_k) + \mathrm{Res} f(\infty) = 0$

5.4 做题步骤

1. 求出所有奇点
2. 判断奇点类型
3. 求留数
4. “$2\pi i\times$ 留数和”求积分

6 拉普拉斯变换

6.1 重要变换

1. $L\{f(t)\} = F(s)$
2. $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
3. $L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
4. $L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
5. $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$
6. $L\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$

6.2 变换表

1. $L\{1\} = \frac{1}{s}$
2. $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$
3. $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$
4. $L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
5. $L\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

6. $L\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
7. $L\{t^n \sin \omega t\} = \frac{n!\omega}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}$
8. $L\{t^n \cos \omega t\} = \frac{n!(s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}$
9. $L\{e^{at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
10. $L\{e^{at} \cos \omega t\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
11. $L\{t^n e^{at} \sin \omega t\} = \frac{n!\omega(s-a)}{[(s-a)^2+\omega^2]^{n+1}}$
12. $L\{t^n e^{at} \cos \omega t\} = \frac{n![(s-a)^2-\omega^2]}{[(s-a)^2+\omega^2]^{n+1}}$