双曲线的离心率

一般求双曲线离心率的方法：

1. 直接法：直接求出 a,c，然后利用公式 $e=\dfrac{c}{a}$ 求解

2. 构造法：根据条件，可构造出 a,c 的齐次方程，通过等式两边同时除以 a^2，

   进而得到关于 e 的方程

3. 公式法：$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{b}{c}\right)^2}}$

$a^2+b^2=c^2$. a^2-4a^2
$-3a^2$
$b^2=3$

1．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的离心率为 2，则 $a=$（ 1 ）

$c^2-a^2=3$.
$\dfrac{c}{a}=2$.
$c=2a$.

A．2　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D．1

2．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm x$，则该双曲线的离心率为（ A ）

$\dfrac{b}{a}=1$　$a^2=b^2$.
$e=\sqrt{2}$

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

$a=\sqrt{3}$.
$c=2$, $b=1$, $\cancel{a=\sqrt{5}}$:　$\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

3．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1,(a>0)$ 的焦距为 4，则该双曲线的离心率为（ C ）

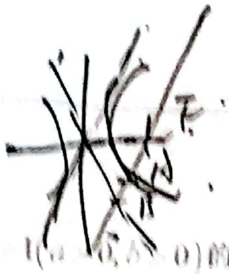
A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\cancel{\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$　$\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{2}$　$y^2=\dfrac{2}{a^2}x^2$
$\dfrac{2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$

4．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的一条渐近线的斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则双曲线的离心率为（ B ）

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

$a=\sqrt{6}$.　$\dfrac{2}{\sqrt{6}}$
$b=\sqrt{2}$.
$c=2$.



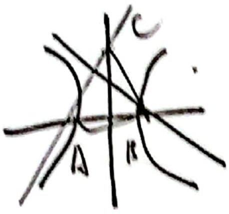
$y=\pm\frac{b}{a}x$.

5、已知过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F，且与双曲线的渐近线平行的直线 l 交双曲线于点 A，交双曲线的另一条渐近线于点 B（A，B 在同一象限内），满足 $|FB|=2|FA|$，则该双曲线的离心率为（ B ）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

$\frac{b}{a}x$.

6、已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A、B，点 $C(0,2b)$，若线段 AC 的垂直平分线过点 B，则该双曲线的离心率为 $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.



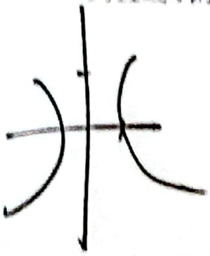
$B(a,0)$.
$AB=2a$.
$BC=\sqrt{a^2+4b^2}$

$4a^2=a^2+4b^2$
$3a^2=4b^2$
$a^2=\frac{4}{3}b^2$

$\cancel{c^2=a^2+b^2}$.

$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{\frac{4}{3}b^2}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

7、设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<a<b)$ 的半焦距为 c，直线 l 过 $(a,0)$，$(0,b)$ 两点，且原点到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$，求双曲线的离心率.



$y-b=\cancel{\frac{a}{-b}x}\ -\frac{b}{a}x$.

$\cancel{ax+by-1=0}$

$bx+ay-ab=0$

$\frac{|-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$.

$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=1}$

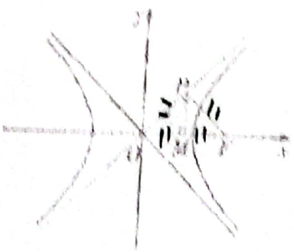
$\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$

$ab=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$

$ab=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$.

$e=2$

8、过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点 F 作一条渐近线的垂线，若垂足恰在线段 OF（O 为原点）的垂直平分线上，求双曲线的离心率.

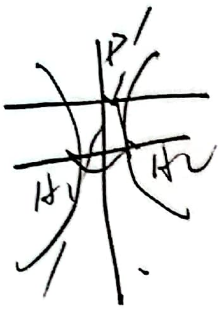


$OP=PF$.

$\therefore \angle O=\frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{b}{a}=1$.

$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$



$a^2+b^2=c^2$ $b^2=$

$y=\pm\frac{b}{a}x$. $-\frac{b}{a}c=x$

$4+2\sqrt{1-c^2}\cdot c$

$-(1-c^2)\cdot c^2-c^2=0$

9、已知直线 $y=a$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线交于点 P，双曲线 C 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，若 $|PA_2|=\frac{\sqrt{5}}{2}|A_1A_2|$，求双曲线 C 的离心率.

$A_2(a,0)$.

$P(-\frac{bc}{a},c)$.

$\sqrt{(\frac{bc}{a}-a)^2+c^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}|2a|$

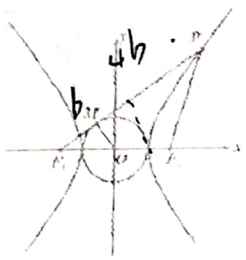
$(\frac{bc}{a}-a)^2+c^2=5a^2$

$a^2-2bc+\frac{b^2c^2}{a^2}+c^2=5a^2$

$4a^4+2a^2bc-b^2c^2-a^2c^2=0$

$e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

10．双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点为 F_1,F_2，P 是双曲线上一点，满足 $|PF_2|=|F_1F_2|$，直线 PF_1 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切，求双曲线的离心率.



$\begin{cases}4b-2c=2a\\a^2+b^2=c^2\end{cases}\Rightarrow e=\frac{5}{3}$