

第5章 导数及其应用

单元测试 (A卷)

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

班级_____ 姓名_____ 得分_____

一、填空题(每小题 4 分, 共 40 分)

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的最小值为_____.

2. 函数 $f(x) = e^x - ex$ 的单调减区间为_____.

3. 曲线 $y = \frac{2}{x} + x^2$ 在点 $(1, 3)$ 处的切线方程为_____.

4. 若函数 $f(x) = m \cdot e^x - x^2 + 2x$ ($m < 0$) 在 $(0, 1)$ 上有极值点, 则 m 的取值范围为_____.

5. 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \ln x$ 的单调减区间为_____.

6. 已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + \cos x$, 则不等式 $f(2m) > f(m-2)$ 的解集为_____.

7. 某箱子的容积与底面边长 x 的关系为 $V(x) = x^2 \left(\frac{60-x}{2} \right)$ ($0 < x < 60$), 当箱子的容积最大时, 箱子底面边长为_____.

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x}, & x \geq a, \\ x, & x < a. \end{cases}$ 若函数存在最大值, 则实数 a 的取值范围是_____.

9. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 若对任意 $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, 都有 $f(x_1) - f(x_2) \leq \frac{1}{e}$ 成立, 则实数 a 的最小值是_____.

10. 设函数 $f(x) = \cos \omega x$ ($\omega > 0$), 已知 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 有且仅有 2 个极小值点, 下述选项错误的是_____. (填序号)

① $\omega \in [6, 10)$

② $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 上单调递增

③ $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{12})$ 上单调递减

④ $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上至多有 2 个极大值点

二、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

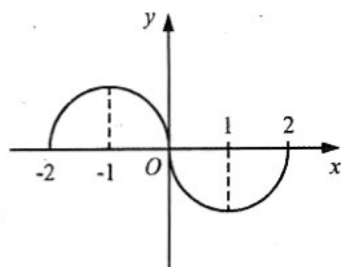
11. 设函数 $f(x) = \ln(\frac{e+x}{e-x})$, 则().

A. $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, e)$ 上是严格增函数

B. $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, e)$ 上是严格减函数

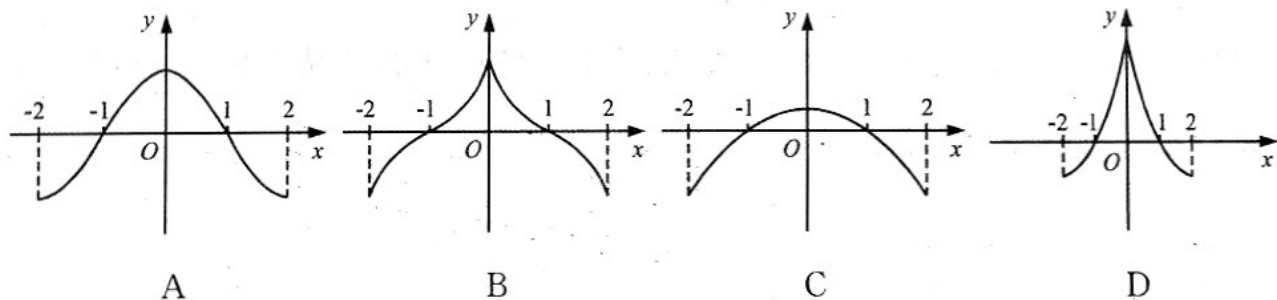
C. $f(x)$ 是偶函数, 且在 $(0, e)$ 上是严格增函数

D. $f(x)$ 是偶函数, 且在 $(0, e)$ 上是严格减函数



第 12 题图 1

12. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图像如图 1 所示, 则 $f(x)$ 的图像是图 2 四个图像中的().



第 12 题图 2

13. 已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 下列命题中错误的是().

A. 存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, $f(x_0) = 0$

B. 函数 $y = f(x)$ 的图像是中心对称图形

C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减

D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$

14. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = (a+1)x^2 - x + \sin x + \cos x + a - 2$, $x \in \mathbf{R}$. 记函数 $f(x)$ 的最小值为 M , 函数 $f(f(x))$ 的最小值为 N , 当 $M \geq N$ 时, a 的最大值是().

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

三、解答题(第 15、16、17 题各 6 分, 第 18、19 各 8 分, 第 20 题 10 分, 共 44 分)

15. 已知函数 $f(x)=x^2+3$.

求: (1) $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数; (2) $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数.

16. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ 的导函数, $f(-2)=-3$, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f'(x) < 2$.

(1) 求 $f(2)$; (2) 求解关于 x 的不等式 $f(e^x) < 2e^x - 1$.

17. 某厂生产产品 x 件的总成本 $c(x)=1200+\frac{2}{75}x^3$ (万元). 已知产品单价 P (万元) 与产品件数 x 满足: $P^2=\frac{k}{x}$. 生产 100 件这样的产品单价为 50 万元, 产量定为多少件时, 总利润最大?

18. 已知函数 $f(x)=x^3-x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

19. 已知 $f(x) = x - a \ln x - 1$.

(1) 若 $f(x)$ 有最值, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若当 $x \in (e, e^2)$ 时, $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a = 1$ 时, $g(x) = f(x) + (x - 2)e^x$, 记函数 $y = g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ 上的最大值为 m , 证明: $m < -3$.