284.4
@EJL

每周一练(3)

修正处

一、填空题

(±9,12)

1. 若抛物线 $y^2=16x$ 上一点到 x 轴的距离等于 12，则点 M 到此抛物线的焦点的距离为 13.

2. 若方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-4}=1$ 表示的曲线是双曲线，则实数 a 的取值范围是 $(-2,0)\cup(0,2)$.

$\begin{cases}a^2>0\\a^2-4<0\end{cases}$

3. 与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 有共同渐近线，且过点 $M(2,2)$ 的双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=3$.

$x^2-\frac{y^2}{4}=\lambda$

$4-1=\lambda$ $\lambda=3$

4. 若动圆 M 经过点 $A(3,0)$ 且与直线 $l:x=-3$ 相切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为 $y^2=\cancel{6x}\ 12x$.

5. 若 F_1、F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在双曲线上，且 $\angle F_1PF_2=90°$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 1.

$b^2\cot\frac{\alpha}{2}$

6. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的左右焦点为 F_1、F_2，过 F_2 作 x 轴的垂线与双曲线 C 相交于 A、B 两点，F_1B 与 y 轴交于点 D，若 $AD\perp F_1B$，则双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$.

7. 若直线 l 与抛物线 $y^2=16x$ 相交所得的弦 AB 被点 $P(3,2)$ 平分，则直线 l 的方程为 $y-2=4(x-3)$.

$y_1^2-y_2^2=16x_1-16x_2$

$\frac{(y_1-y_2)\cdot(y_1+y_2)}{x_1-x_2}=16$ $k=4$

$k\cdot4=16$

8. 若双曲线 $3mx^2-my^2=3$ 的一个焦点坐标为 $(0,-2)$，则 $m=$ -1.

$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}-\frac{y^2}{\frac{3}{m}}=1$. $\frac{4}{m}=4$ $m=1$

9. 已知双曲线 $\frac{y^2}{4}-x^2=1$ 的两条渐近线分别与抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线交于 A、B 两点，O 为坐标原点，若 $\triangle AOB$ 的面积为 1，则 p 的值为 $\sqrt{2}$.

少画

$\frac{y^2}{4}=x^2$

$y=\pm2x$.

$\frac{1}{2}p\cdot\frac{p}{2}\cdot4\cdot\frac{1}{2}=1$

$p=2$

10. 若抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $P(x,y)$ 为该抛物线上的动点，又点 $A(-1,0)$，则 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 的最小值是 0.

$\sin|\cos\alpha|$

二、选择题

11. 在抛物线的方程 $y^2=2px(p>0)$ 中，p 表示 (A)

A. 焦点到准线的距离；

B. 焦点到准线的距离的一半；

C. 焦点到准线的距离的 2 倍；

D. 焦点到顶点的距离.

12. 若一动圆的圆心在抛物线 $y^2=8x$ 上，且动圆恒与直线 $x+2=0$ 相切，则此动圆必过定点 (B)

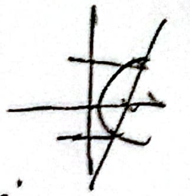
A. $(4,0)$； B. $(2,0)$； C. $(0,2)$； D. $(0,4)$.

修正处

13. 若抛物线 $y^2=4x$ 过焦点的弦被焦点分成长为 m 和 n 两部分，则 m 与 n 的关系式为 （ D ）

A. $m+n=4$； B. $mn=4$；

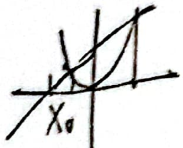
C. $m+n=mn$； D. $m+n=2mn$.



14. 已知 $y=ax^2\ (a>0)$ 与直线 $y=kx+b$ 交于两点，它们的横坐标是 x_1、x_2，若直线与 x 轴交点的横坐标是 x_3，则 （ C ）

A. $x_3=x_1+x_2$； B. $x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；

C. $x_1x_2=x_2x_3+x_3x_1$； D. $x_1x_3=x_1x_2+x_2x_3$.



$x_1\ y_1+y_2$

三、解答题

15. 求双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$ 的渐近线，并求出它们的夹角的大小(结果用反三角函数值表示).

令 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}y^2=0$

$x^2=\frac{y^2}{2}$ $y^2=2x^2$

$y=\pm\sqrt{2}x$.

$\therefore \alpha=\cancel{2\arctan\sqrt{2}}$

$\pi-2\arctan\sqrt{2}$.

16. 已知直线 $y=kx+1$ 与抛物线 $y^2=4x$ 有且只有一个公共点，求 k 的值.

$\begin{cases} y=kx+1 \\ y^2=4x \end{cases}$

$\Rightarrow k^2x^2+(2k-4)x+1=0$

1° $k=0$

$k=0$

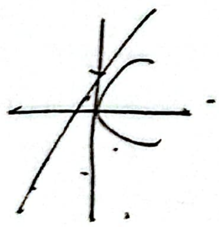
成立

2° $k\neq0$

$\Delta=0$

$k=1$

$\therefore k=0$ or 1.



17. 设平面内两向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足：$\vec{a}\perp\vec{b}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，点 $M(x,y)$ 的坐标满足：$x\vec{a}+(y^2-4)\vec{b}$ 与 $-x\vec{a}+\vec{b}$ 互相垂直.

求证：平面内存在两个定点 A、B，使对满足条件的任意一点 M，均有 $\left||\overrightarrow{MA}|-|\overrightarrow{MB}|\right|$ 等于定值.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$[x\vec{a}+(y^2-4)\vec{b}]\cdot[-x\vec{a}+\vec{b}]=0$

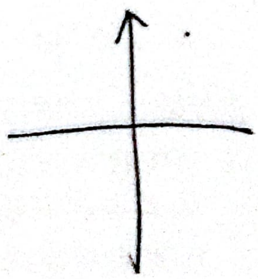
$-x|\vec{a}|^2+x\vec{a}\vec{b}+(y-4)\cancel{x\vec{a}\vec{b}}+(y^2-4)|\vec{b}|^2=0$

$-x^2\cdot4+(y^2-4)\cdot1=0$

$-4x^2+y^2-4=0$

且 $\frac{y^2}{4}-x^2=1$

$\therefore \left||\overrightarrow{MA}|-|\overrightarrow{MB}|\right|$ 为定值.



18. 已知抛物线 $y^2=-x$ 和直线 $y=k(x+1)$ 相交于 A、B 两点，O 为原点.

(1)求证：$OA\perp OB$；

(2)当△AOB 的面积为 $\sqrt{10}$ 时，求实数 k 的值.

1) 设 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$

$\begin{cases} y^2=-x \\ y=k(x+1) \end{cases}$

$y^2+\frac{y}{k}-1=0$

$ky^2+y-k=0$

$\therefore y_1y_2=-x_1x_2$

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$

$\therefore \vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$

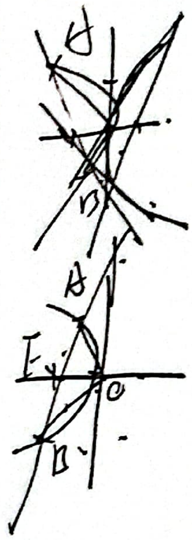
$\therefore \vec{OA}\perp\vec{OB}$

2) $S=\frac{1}{2}\cdot OF\cdot(|y_A|+|y_B|)$

$\sqrt{10}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(y_1+y_2)$

$\therefore y_1+y_2=2\sqrt{10}$

$\therefore k=\pm\frac{1}{6}$

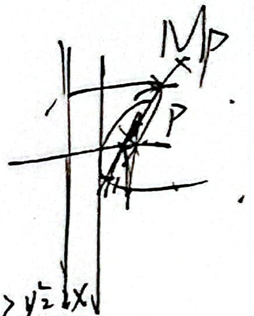


19. 若 M 是抛物线 $y^2=2x$ 上一动点，点 $P\left(3,\frac{10}{3}\right)$，设 d 是点 M 到准线的距离，要使 $d+|MP|$ 最小，求点 M 的坐标.

$F(\frac{1}{2},0)$，$P(3,\frac{10}{3})$

$\therefore l_{FP}: y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$

$\therefore M$ ~~( )~~ $(2,2)$



$\begin{cases} y^2=kx \\ \frac{4}{3}x \end{cases}$

$(-k,1)$ $(1,k)$

$x=\frac{y-b}{k}$

~~$x+\frac{-\frac{1}{2}}{1-\sqrt{3}}$~~ $(y-\frac{1}{2})=\frac{1-\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}}(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2})$ $y=kx+b$ $y-kx=$

四、能力拓展题

出 $(-1,\frac{1}{4})$

$(-\sqrt{3},\frac{3}{4})$

$\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{1-\sqrt{3}}=1$

$\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$

20. 如图，过抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线 C 于两点 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，且 $x_1x_2=-4$.

(1)求抛物线 C 的标准方程；

*(2)R、Q 是抛物线 C 上的两动点，R、Q 的纵坐标之和为 1，R、Q 的垂直平分线交 y 轴于点 T，求△MNT 的面积的最小值.

1) 设 $l_{MN}: y=kx+\frac{1}{2}p$

$\begin{cases} y=kx+\frac{1}{2}p \\ x^2=2py \end{cases}$

$\Rightarrow x^2-2kpx-p^2=0$

$\therefore x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-p^2=-4$

$p=2$

$\therefore x^2=4y$

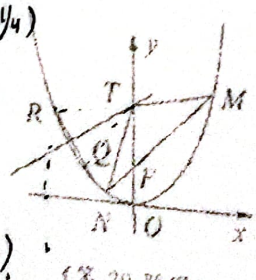
2) 设 $R(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$

$\therefore y_3+y_4=1$

$T(0,\frac{5}{2})$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot 2(|x_1|+|x_2|)$

≥ 3



(第 20 题图)

$y=kx+b$

~~$x^2-2pkx-2pb=0$~~

$\frac{(y-b)^2}{k^2}=4y$

$y^2-4k^2y-2by+b^2=0$