

一、填空题

1. 函数 $y = x^2 \cos x$ 的导数为 $y' = 2x \cos x - x^2 \sin x$.

2. 已知函数 $y = f(x)$, 其中 $f(x) = (2x+1)e^x$, 则 $f'(0) =$

0.

3. 函数 $y = \frac{x^2+1}{x+3}$ 的导数 $y' = \frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$.

4. 曲线 $y = -x^3 + 2x$ 在横坐标为 -1 的点处的切线为 l , 则点 (3, 2) 到 l 的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

5. 已知函数 $y = f(x)$, 其中 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x$, 若函数 $f(x)$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线不过第四象限且不过原点, 则实数 a 的取值范围为 $a < 1$.

二、选择题

6. 直线 $y = kx + 1$ 与曲线 $y = a \ln x + b$ 相切于点 $P(1, 2)$, 则 $a + b$ 等于

A. 1;

B. 4;

C. 3;

D. 2.

7. 已知函数 $y = f(x)$, 其中 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \cos x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数, 则 $f'(x)$ 的图像是



A.



B.



C.



D.

8. 已知函数 $y = f(x)$, 其中 $f(x) = x - \sin x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数, 若 $a = f'(\frac{\pi}{6})$, $b = f'(\frac{\pi}{3})$, $c = f'(\frac{\pi}{2})$, 则 a, b, c 的大小关系为 $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} > 1$.

A. $c < b < a$;

B. $a > b > c$;

C. $a < b < c$;

D. $b < a < c$.

三、解答题

9. 已知函数 $y = f(x)$, 其中 $f(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$, 求此函数 $f(x)$ 表示的曲线在 $x = 1$ 处的切线方程.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x + (\ln x + 2) \cdot (-1)}{x^2} = \frac{\ln x + 3}{x^2}$$

修正处

$$2x^2 \cos x - x^2 \sin x$$

$$\frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+3)^2}$$

$$\frac{2-3x^2}{x+3}$$

$$\frac{3+4x}{\sqrt{2}}$$

$$1 - \cos x$$

10. 曲线 $C: y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线为 $l_1: y = x + 1$, 在点 $(3, 4)$ 处的切线为 $l_2: y = -2x + 10$, 求曲线 C 的方程.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(3) = 4 \\ f'(0) = 1 \\ f'(3) = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

11. 已知函数 $y = f(x)$, 其中 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ ($x \in \mathbb{R}$),

$f(x)$ 的图像为曲线 C .

(1) 求曲线 C 上任意一点的切线的斜率的取值范围;

(2) 若在曲线 C 上存在两条相互垂直的切线, 求其中一条切线与曲线 C 的切点的横坐标的取值范围.

四、能力拓展题

12. 已知函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$, 其中 $f(x) = x - \frac{2}{x}$, $g(x) = a(2 - \ln x)$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线的斜率相同, 求实数 a 的值;

(2) 若存在一点, 使得曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在该点处的切线的斜率相同, 求实数 a 的取值范围.