4.4　数学归纳法

第 1 课时　数学归纳法

修正处

一、填空题

1. 用数学归纳法证明:“$2+3+4+\cdots+n=\frac{(n-1)(n+2)}{2}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$”时,第一步取 $n=$________验证.

2. 用数学归纳法证明等式“$1+2+3+\cdots+(2n+1)=(n+1)(2n+1)(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$”时,从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,等式左边需要增加的是________.

3. 若 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$,则 $f(k+1)-f(k)=$________.

4. 用数学归纳法证明 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$ 的过程中,从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,$f(k+1)$ 比 $f(k)$ 共增加了________项.

5. 在用数学归纳法证明等式“$1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$”时,某学生证明如下:(ⅰ)当 $n=1$ 时,左边$=1$,右边$=2^1-1=1$,∴原等式成立;(ⅱ)假设 $n=k$ 时等式成立,即 $1+2+4+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$,那么当 $n=k+1$ 时,$1+2+4+\cdots+2^{(k+1)-1}=\frac{1\cdot(1-2^{k+1})}{1-2}=2^{k+1}-1$,即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.根据(ⅰ)(ⅱ)可以判定,等式对任意 $n\in\mathbf{N},n\geqslant 1$ 都成立.评价该学生的证明情况:________(选填“正确”或“错误”).

二、选择题

6. 用数学归纳法证明 $1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1,a\neq 1)$的过程中,在验证 $n=1$ 成立时,左边的式子为　(　　)

A. 1;　　B. $1+a$;

C. $1+a+a^2$;　　D. $1+a+a^2+a^3$.

7. 用数学归纳法证明等式 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$的过程中,从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,等式左边所需添加的项是　(　　)

A. $\frac{1}{2k+1}$;　　B. $\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+1}$;

C. $-\frac{1}{2k+1}$;　　D. $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$.

修正处

8. 证明命题"凸 n 边形内角和等于 $(n-2)\cdot180°$"时，n 可取的第一个值是 ( )

A. 1； B. 2； C. 3； D. 4.

三、解答题

9. 用数学归纳法证明：$1+2+3+\cdots+2n=n(2n+1)(n\in\mathbf{N},n\geqslant1)$.

10. 用数学归纳法证明：$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ $(n\geqslant2,n\in\mathbf{N})$.

11. 用数学归纳法证明：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}(n\in\mathbf{N},n\geqslant1)$.

四、能力拓展题

12. 对于下列数的排列：

2，3，4

3，4，5，6，7

4，5，6，7，8，9，10

…

写出并证明第 n 行所有数的和 a_n 与 n 的关系式.

第2课时　数学归纳法的应用

修正处

一、填空题

1. 观察下列等式：$1=1^2$，$1+3=2^2$，$1+3+5=3^2$，$1+3+5+7=4^2$，可以猜想：$1+3+5+\cdots+(2n-1)=$________.
2. 在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1$，$a_2=2$. 若$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}(n\geqslant 3, n\in\mathbf{N})$，则$a_3=$________，$a_4=$________，$a_5=$________，进而猜想$a_n=$________.
3. 根据下列各式的规律：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$，$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$，归纳猜想用$n(n\in\mathbf{N}, n\geqslant 2)$表示的等式为________________.
4. 计算前几项：1，$2+3+4$，$3+4+5+6+7$，…各项的值，可以猜想第n个式子为________________________.
5. 若$f(x)=\frac{3x}{x+3}$，$x_1=1$，$x_n=f(x_{n-1})$，分别计算x_2、x_3、x_4，进而猜想$x_n=$________.

二、选择题

6. 猜测$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdots\left[1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right]$对$n\in\mathbf{N}$且$n\geqslant 1$成立的一个表达式为　　(　　)

   A. $-\frac{n+2}{n}$；　B. $\frac{2n+1}{2n-1}$；　C. $-\frac{2n+1}{2n-1}$；　D. $-\frac{n+1}{n-1}$.

7. 平面内原有k条直线，它们的交点个数记为$f(k)$，则增加一条直线l后，它们的交点个数最多为　　(　　)

   A. $f(k)+1$；　B. $f(k)+k$；

   C. $f(k)+k+1$；　D. $k\cdot f(k)$.

8. 若数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^2-na_n+1(n\in\mathbf{N}, n\geqslant 1)$，则通项公式可能是　　(　　)

   A. $n+2$；　B. $n(n+1)$；　C. $\frac{n+2}{2}$；　D. $n+1$.

三、解答题

9. (1)分别计算数列-1，$-1+3$，$-1+3-5$，$-1+3-5+7$各项的值；

   (2)根据(1)的计算猜想$a_n=-1+3-5+7-\cdots+(-1)^n(2n-1)$的表达式；

   (3)用数学归纳法证明你的猜想.

修正处

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\dfrac{1}{2}$,$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})$.

(1)求a_2、a_3、a_4;

(2)猜想出通项公式a_n,并用数学归纳法加以证明.

11. 已知$f(n)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$,且$g(n)=\dfrac{1}{f(n)-1}[f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)]$.

(1)写出$g(2)$、$g(3)$、$g(4)$的值;

(2)归纳$g(n)$的值,并用数学归纳法加以证明.

四、能力拓展题

12. 是否存在常数a、b,使等式$3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2=\dfrac{n}{3}(4n^2+an+b)(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$对任意正整数$n$成立?请证明你的结论.