每周一练(1)

一、填空题

1. 已知函数 $y=x^2-2x$，则此函数在区间[1，3]上的平均变化率为 2. （-1.3.）

2. 已知函数 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$，则 $y'=$ $4\cos x(\sin x)^3+4\sin x(\cos x)^3$

3. 已知函数 $y=\frac{1-x^2}{\sin x}$，则 $y'=$ $\frac{-2x\cdot\sin x-\cos x\cdot(1-x^2)}{\sin^2 x}$.

4. 已知曲线 $y=x^4+ax^2+1$ 在点 $(-1,a+2)$ 处切线的斜率为 8，则 $a=$ -6.

   $y'=4x^3+2ax$

5. 已知函数 $y=f(x)$，且 $f(x)=x^2+2f'(0)x+\sin x$，则 $f'(0)=$ 0.

   $f(0)=0^2+2f(0)\cdot0+\sin0$

6. 已知曲线 $y=x+\frac{\ln x}{k}$ 在点(1，1)处的切线与直线 $x+2y=0$ 垂直，则实数 k 的值为 1.

   $k=3.$ 2.

7. 已知函数 $y=e^x+(x+1)^2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积是 $\frac{2}{3}$. 0.

8. 若 $(2x-3)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=$ 10. （-243 810 -1080）

9. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=\frac{\sin\theta}{3}x^3+\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{2}x^2+\tan\theta$，$\theta\in\left[0,\frac{5}{12}\pi\right]$，则 $f'(1)=$ ________，其取值范围是 ________.

10. 法国数学家拉格朗日在其著作《解析函数论》中提出一个定理：如果函数 $y=f(x)$ 满足如下条件：

    ①在闭区间 $[a,b]$ 上是连续不断的；

    ②在开区间 (a,b) 上都有导数.

    则在区间 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，其中 ξ 称为拉格朗日中值. 则函数 $y=e^x$ 在区间[0，1]上的拉格朗日中值 $\xi=$ ~~ln(e-1)~~ $1+\ln(e-1)$

二、选择题

11. 如图，函数 $y=f(x)$ 的图像在点 $P(2,y)$ 处的切线是 l，则 $f(2)+f'(2)$ 的值为（ D ）

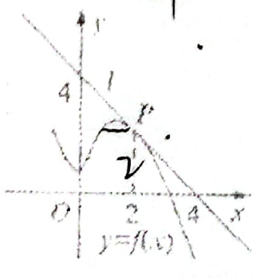
    A. -3；

    B. -2；

    C. 2；

    D. 1.

    2 -1



（第11题图）

修正处

$-2x$.

$-4-2a=8$

$y=-\frac{1}{2}x$.

$y'=1+\frac{1}{kx}$

$1+\frac{1}{k}=2$

$e^x+2(x+1)$.

$1+2=3$.

$y-2=3x$

$y=3x+2$

$T_{r+1}=C_5^r\cdot(2x)^{5-r}(-3)^r$

$f(2)-f(1)=f(3)\cdot1$

$e^2-e=e^{\xi}$.

$e(e-1)=e^{\xi}$.

$(e-1)=e^{\xi-1}$

$1+\ln(e-1)=\xi$

卄

12. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=x(e^x+ae^{-x})$，若 $f'(x)$ 是奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率为 (D)

A. $-2e$； B. $-\frac{1}{e}$； C. 2； D. $2e$.

13. 宁启铁路线将开行"绿巨人"动力集中"复兴号"动车组，最高时速为 160 km/h. 假设"绿巨人"开出站一段时间内，速度 v(m/s) 与行驶时间 t(s) 的关系为 $v=0.4t+0.6t^2$，则出站后"绿巨人"速度首次达到 24 m/s 时的加速度为 (B)

A. 6.8 m/s²； B. 7.6 m/s²；

C. 7 m/s²； D. 7.8 m/s².

14. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，则下列选项中 $x\cos x$：
正确的是 (A)

A. $f'(x)$ 为奇函数； B. $f'(x)$ 为偶函数；

C. $f'(0)=0$； 1 D. $f(\pi)+f'(\pi)=-\pi$. -1.

修正处

$f'(x)$
$=(e^x+ae^{-x})x$
$+(e^x+ae^{-x})$
$(e-ae^{-1})\cdot 1$
$+(e+a\cdot e^{-1})$
$2e$

$\sin(\frac{1}{2}\pi-x)$
$=\cos(x)$
~~$-x\cos x$~~

$x\cdot-\sin x+\cos x$
$-\sin x\cdot x+\cos x$

三、解答题

15. 求下列函数的导数：

(1) $y=(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$；

(2) $y=-\frac{1}{2}x\sin 4x$；

(3) $y=\frac{\ln(2x+3)}{x^2+1}$.

1) $y=1-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1$
$=x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$
$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2) $y'=-\frac{1}{2}(x\cdot 4\cos 4x+\sin 4x)$

3) $y'=\frac{\frac{2}{2x+3}(x^2+1)-\ln(2x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

16. 求曲线 $y=\ln(2x-1)$ 上的点到直线 $2x-y+3=0$ 的最短距离.

17. 已知曲线 $C: y=x^3-3x^2+2x$，直线 $l: y=kx$，且直线 l 与曲线 C 相切于点 $(x_0, y_0)(x_0\neq 0)$，求直线 l 的方程及切点坐标.

$y'=3x^2-6x+2=k$.

$\therefore l: y=\cancel{3x^0-6x^0}(3x_0^2-6x_0+2)\cdot x$.

切 $P(x_0,y_0)$.

18. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=e^x(\cos x-\sin x)$，将满足 $f'(x)=0$ 的所有正数 x 从小到大排成数列 $\{x_n\}$，证明：数列 $\{f(x_n)\}$ 为等比数列.

$f'(x)=e^x\cdot(0\cos x-\sin x)$

$+e^x\cdot(-\sin x+\cos x)$

$=2e^x(\cos x-\sin x)$

$=\cancel{2e^x}\ 2\sqrt{2}\,e^x\sin(x-\frac{1}{4}\pi)$

$\therefore x_n = k\pi+\frac{1}{4}\pi$

$\therefore \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})}=k$.

$\therefore$ 为等比

19. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x$.

(1) 若 $f'(1)=0$，求实数 a 的值；

(2) 若 $a\geq 1$，求证：当 $x\in[1,e]$ 时，$f'(x)\geq 0$. 其中 e 为自然对数的底数.

1) $f'(x)=2ax-(a+2)+\frac{1}{x}$

$a=1$.

2) $f'(x)=2ax+\frac{1}{x}-a+2$

$=a(2x-1)+\frac{1}{x}+2$

$\because a\geq 1$, $\because x\in[1,e]$

$\therefore a(2x-1)\geq 0$, $\frac{1}{x}\geq 0$.

$\therefore f'(x)\geq 0$

四、能力拓展题

20. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{4}x^2+cx+d$ (a、c、$d\in\mathbf{R}$) 满足 $f(0)=0$，$f'(1)=0$.

$\frac{c}{a}>0$

(1) 若 $f'(x)\geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，求 a、c、d 的值；

(2) 已知曲线 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线与曲线 $g(x)=\ln x$ 相切，求 a 的值.

$a-\frac{1}{2}+c=0$

1) $f'(x)=ax^2+1-\frac{1}{2}x+c$

2).

$\begin{cases} d=0 \\ a+c=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow a=c=\frac{1}{4}$

$d=0$

修正处

$\cos x-\sin x$

$=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$.

$k\pi$

$2a-(a+2)+1$

$a-1=0$.

$x\geq 0$