284.4
@EJL

第 2 课时　等比数列及其通项公式(2)

a_1+q

一、填空题

$2\quad 4\quad 8$

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为零，若a_2, a_3, a_6成等比数列，则这个等比数列的公比为 ~~甘~~ 5.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_4a_5a_6=27$，则$a_5=$ 3.

3. 若a_1, a_2, a_3, a_4成等比数列，且$a_1a_2=-\frac{32}{3}$，$a_2a_3=-24$，则公比$q=$ $\frac{3}{2}$.

$\frac{a_3}{a_1}=q^2 \quad \frac{-24}{-\frac{32}{3}}$

4. 在数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2a_n-5}$，若该数列既是等差数列，又是等比数列，则该数列的通项公式为 ~~年~~ 4.

5. 若等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_5a_6=9$，则$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=$ 10.

$\log_3(9^5)$. 5

二、选择题

6. 在等比数列$\{a_n\}$中，如果$a_n>0$且$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，那么$a_3+a_5=$ (A)

A. 5；　B. 15；　C. 20；　D. 25.

7. 下列命题中，正确的是 (D)

A. 公比$q>1$的等比数列满足$a_{n+1}>a_n(n\in \mathbf{N}, n\geq 1)$；

B. 公比$0<q<1$的等比数列满足$a_{n+1}<a_n(n\in \mathbf{N}, n\geq 1)$；

C. 常数列既是等差数列又是等比数列；

D. 数列$\{\lg 2^n\}$是等差数列.

8. 已知$\{a_n\}$是等比数列，下列命题中，不正确的是 (D)

A. 若$a_n>0(n\in \mathbf{N}, n\geq 1)$，则$\{\lg a_n\}$是等差数列；

B. 若$a_n>0(n\in \mathbf{N}, n\geq 1)$，则$\frac{a_1+a_{n+2}}{2}\geq\sqrt{a_1a_{n+2}}$；

C. a_{n+1}一定是a_n与a_{n+2}的等比中项；

D. a_{n-r}与$a_{n+r}(r<n, r、n\in \mathbf{N}, r、n\geq 1)$的等比中项一定是$a_n$.

三、解答题

9. 已知等比数列$\{a_n\}$为递增数列，且$a_3a_9=32$，$a_4+a_8=18$，求a_{10}.

$a_3\cdot a_9=32$

$a_3+a_9=18$

$\Rightarrow a^2-18x+32=0$

$a_3=2 \quad a_9=16$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ q=\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow a_{10}=a_1\cdot q^9=16\sqrt{2}$

$\frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{2}q+q}=\frac{q}{q+4q} \quad \frac{1}{5}$

修正处

$\frac{a_1+q}{a_1+q^2}=\frac{a_1+q^2+2q}{a_1+q+5q}$

$a_1^2+6qa_1+5q^2=a_1^2+4qa_1+4q^2$

$2qa_1=-q^2$

$2a_1=-q$

$a_1=-\frac{1}{2}q$

$\frac{a_n^2}{2a_n-5}$

$\begin{cases} a_1\cdot q^2=2 \\ a_1\cdot q^8=16 \end{cases}$

$\cancel{\text{⿰}}$ $\cancel{12}$ $\cancel{16\ 8\ 4\ 1}$. $\cancel{12\ 8\ 4\ 2}$. $\cancel{6\ 6\ 6}$ $0\ 4\ 8\ 16$ 17

$\quad 10\ 6\qquad 3\ 5\ 7$

修正处

10. 有四个数，前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，且第一个数与第四个数的和是 16，第二个数与第三个数的和是 12，求这四个数.

$a_1 a_2 a_3$ AP，a_2, a_3, a_4 GP　　$\cancel{a_2 = p}$、

$\begin{cases} a_1 + a_4 = 16 \\ a_2 + a_3 = 12 \end{cases}$　　$\begin{cases} \cancel{2(a_1+3p)=12} \\ \cancel{a_2(1+q)=12} \end{cases}$

$\cancel{a_1 + p + a_1 + 2p = a_1 q + a_1 q}$.　　$\cancel{3(a_1+3p)+a_4 = a_1 + (a_1+p)(1+q+q^2)}$.

$\cancel{a_1 + 3p = a_1 q}$.

$\{0, 4, 8, 16\}$.

11. 已知等比数列$\{a_n\}$，求证：对任意$n \in \mathbf{N}$，$n \geq 1$，关于x的方程$x^2 + (1 + a_{n+1}^2)x + a_n \cdot a_{n+2} = 0$都有一个相同的根，且另一根$x_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$仍组成一个等比数列.

$x_1 = -1$　　$\therefore x_1 = -1$.

$\cancel{1 + (1 + a_{n+1}) + a_n \cdot a_{n+1}}$　　$x_2 = (a_{n+1})^2$.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1 - a_{n+1}^2 = -1 - (a_1 \cdot q^{n})^2$　　$\because a_n$ 为 GP

$= -1 - a_1^2 \cdot q^{2n}$　　$\therefore a_{n+1}$ GP

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = a_n \cdot a_{n+2}$　　$\cancel{(a_{n+1}) \to GP}$.

$= a_1^2 \cdot q^{n-1+n+1}$.

$= a_1^2 \cdot q^{2n}$　　$(a_{n+1})^2$ GP.

四、能力拓展题

12. 若数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都是等差数列，s、t为已知常数，则数列$\{sa_n + tb_n\}$是等差数列. 类比以上命题的条件和结论，写出关于等比数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的类似结论，并予以证明.

$\{a_n\}\{b_n\}$ GP $\Rightarrow$ 记 $\{sa_n \cdot tb_n\}$ GP $(s, t \in N^*)$

$sa_n \cdot tb_n = s \cdot t \cdot a_1 \cdot q_1^{n-1} \cdot b_1 \cdot q_2^{n-1} = s \cdot t \cdot a_1 b_1 \cdot q_1^{n-1} \cdot q_2^{n-1}$

$\therefore \dfrac{sa_{n+1} \cdot tb_{n+1}}{sa_n \cdot tb_n} = q_1 \cdot q_2$ 为常数.