

(二十二) B 卷

一、选择题

1. 双曲线 $3x^2 - y^2 = 3$ 的渐近线方程为 (C).

(A) $y = \pm 3x$

(B) $y = \pm \frac{1}{3}x$

(C) $y = \pm \sqrt{3}x$

(D) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

2. 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点, 且与渐近线平行的直线是 (D).

(A) $y = \pm \sqrt{3}(x-2)$

(B) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$

(C) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$

(D) $y = \pm \sqrt{3}(x+2)$

3. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的两条渐近线的夹角大小等于 (B).

(A) $\arccos \frac{24}{25}$

(B) $\arccos \frac{7}{25}$

(C) $\pi - \arccos \frac{24}{25}$

(D) $\pi - \arccos \frac{7}{25}$

4. 以椭圆 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ 的右焦点为圆心且与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的渐近线相切的圆的方程是

(A) $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$

(B) $x^2 + y^2 - 10x - 9 = 0$

(C) $x^2 + y^2 + 10x - 9 = 0$

(D) $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$

二、填空题

5. 过点 $(2, -2)$, 且与双曲线 $x^2 - 2y^2 = 2$ 有相同渐近线的双曲线方程是 $x^2 - 2y^2 = -4$.6. 焦距是 10, 两顶点间距离为 6 的双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 或 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.7. 渐近线方程为 $y = \pm \frac{2}{3}x$, 虚轴长是 6 的双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$.8. 与椭圆 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 有公共焦点, 且实轴长与虚轴长之比为 4:3 的双曲线方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 或 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.9. 已知双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 焦点在 y 轴上, 焦距为 10, 则此双曲线的方程是 $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{20} = 1$.10. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的两条渐近线的夹角余弦值等于 $\frac{3}{5}$.

三、简答题

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 且 $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$ (c 为半焦距, $a > 0, b > 0$), F_1, F_2 为双曲线的两个焦

$$a^2 + b^2 = 4a^2 \Rightarrow b^2 = 3a^2 \Rightarrow b = \sqrt{3}a$$

点P为双曲线上一点, $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, $S_{\triangle F_1PF_2} = 12\sqrt{3}$, 求双曲线方程.
 据题意 $a = \frac{1}{2}c$, $b = \sqrt{3}a \Rightarrow a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $c = 4$.

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

12. 已知等轴双曲线的中心在原点, 焦点在x轴上, 直线 $y = \frac{1}{2}x$ 截双曲线所得弦长为 $2\sqrt{15}$, 求此双曲线的方程.

$$\text{设 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \\ \frac{1}{2}x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 - a^2 = 0$$

$$\therefore a = 9$$

$$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

13. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点, 过 F_2 作垂直于x轴的直线交双曲线于点P, 且 $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$, 求双曲线的渐近线方程.

$$\text{据题意 } \frac{2a}{c} = \frac{b}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} c = 2\sqrt{3}a \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\therefore b = \sqrt{2}a$$

$$\therefore y = \pm \frac{\sqrt{2}a}{a}x = \pm \sqrt{2}x$$

14. 已知倾斜角为 45° 的直线l过点A(1, -2)及点B, 点B在第一象限, 且 $|AB| = 3\sqrt{2}$.

(1) 求点B的坐标;

(2) 若直线l与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 相交于E、F两点, 且线段EF的中点坐标为(4, 1), 求a的值.

$$1) l: y = x - 3$$

$$\therefore |AB| = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore B(4, 1)$$

$$2) \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - a^2(x-3)^2 = a^2$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-6a^2}{1-a^2} = 8$$

$$a = 12$$

$$\therefore a = 20$$

$$\therefore a = 2$$

(二十二) B 卷

一、选择题

1. 双曲线 $3x^2 - y^2 = 3$ 的渐近线方程为 (C).

- (A) $y = \pm 3x$ (B) $y = \pm \frac{1}{3}x$ (C) $y = \pm \sqrt{3}x$ (D) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

2. 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点, 且与渐近线平行的直线是 (D).

- (A) $y = \pm \sqrt{3}(x-2)$ (B) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$
(C) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$ (D) $y = \pm \sqrt{3}(x+2)$

3. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的两条渐近线的夹角大小等于 (B).

- (A) $\arccos \frac{24}{25}$ (B) $\arccos \frac{7}{25}$
(C) $\pi - \arccos \frac{24}{25}$ (D) $\pi - \arccos \frac{7}{25}$

4. 以椭圆 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ 的右焦点为圆心且与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的渐近线相切的圆的方程是 (A).

- (A) $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 10x - 9 = 0$
(C) $x^2 + y^2 + 10x - 9 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$

二、填空题

5. 过点 $(2, -2)$, 且与双曲线 $x^2 - 2y^2 = 2$ 有相同渐近线的双曲线方程是 $x^2 - 2y^2 = -4$.

6. 焦距是 10, 两顶点间距离为 6 的双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 或 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.

7. 渐近线方程为 $y = \pm \frac{2}{3}x$, 虚轴长是 6 的双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$.

8. 与椭圆 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 有公共焦点, 且实轴长与虚轴长之比为 4:3 的双曲线方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 或 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.

9. 已知双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 焦点在 y 轴上, 焦距为 10, 则此双曲线的方程是 $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{20} = 1$.

10. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的两条渐近线的夹角余弦值等于 $\frac{3}{5}$.

三、简答题

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 且 $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$ (c 为半焦距, $a > 0, b > 0$), F_1, F_2 为双曲线的两个焦

$$c^2 + b^2 = 4a^2 \Rightarrow b^2 = 3a^2$$

点P为双曲线上一点, $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$, $S_{\triangle F_1 P F_2} = 12\sqrt{3}$, 求双曲线方程.

据题意 $a = \frac{1}{2}c$, $b = \sqrt{3}a \Rightarrow a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 4$.

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

12. 已知等轴双曲线的中心在原点, 焦点在x轴上, 直线 $y = \frac{1}{2}x$ 截双曲线所得弦长为 $2\sqrt{15}$, 求此双曲线的方程.

$$\text{设 } 2x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \\ \frac{1}{2}x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 - a^2 = 0$$

$$a = \sqrt{3}c$$

$$\therefore a = 9$$

$$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

13. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点, 过 F_2 作垂直于x轴的直线交双曲线于点P, 且 $\angle P F_1 F_2 = 30^\circ$, 求双曲线的渐近线方程.

据题意 $2a + 2c = \dots$

$$\frac{2a}{c} = \frac{b}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} a = c\sqrt{3} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\therefore b = \sqrt{2}a$$

$$\therefore y = \pm \frac{\sqrt{2}a}{a}x = \pm \sqrt{2}x$$

14. 已知倾斜角为 45° 的直线l过点 $A(1, -2)$ 及点B, 点B在第一象限, 且 $|AB| = 3\sqrt{2}$.

(1) 求点B的坐标;

(2) 若直线l与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 相交于E、F两点, 且线段EF的中点坐标为 $(4, 1)$, 求a的值.

$$1) \text{ 设 } l: y = x - 3$$

$$\therefore |AB| = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore B(4, 1)$$

$$2) \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - a^2(x-3)^2 = a^2$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-6a^2}{1-a^2} = 8$$

$$a = \pm 2$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore a = 2$$