

Analysis

记

$$S = \sum x$$

$$A = \frac{(S^2 - \sum x^2)}{2}$$

$$cnt_w = \sum_{i=1}^n [p_i = w]$$

则要求

$$\begin{aligned} & \left[\prod x_i^2 \right] \prod_{i=1}^n (A - x_{p_i}(S - x_{p_i})) \\ &= \left[\prod x_i^2 \right] \prod_{i=1}^n (A - x_{p_i}S + x_{p_i}^2) \\ &= \left[\prod x_i^2 \right] A^{cnt_0} \prod_{w=1}^n (A - x_w S + x_w^2)^{cnt_w} \end{aligned}$$

显然, x_w 的次数至多为 2。于是考虑展开 $(A - x_w S + x_w^2)^{cnt_w}$, 展开出来 x_w 的次数 > 2 的项全部舍弃: (为方便, 把 cnt_w 记作 c)

$$\begin{aligned} & (A - x_w S + x_w^2)^c \\ &= A^c (\text{选 } A) - \binom{c}{1} x_w S A^{c-1} (\text{选 } x_w S) + \binom{c}{2} x_w^2 S^2 A^{c-2} (\text{选 } x_w^2 S^2) + \binom{c}{1} x_w^2 A^{c-1} (\text{选 } x_w^2) \end{aligned}$$

通过 dp 来计算将 $\left[\prod x_i^2 \right] \prod_{w=1}^n (A - x_w S + x_w^2)^{cnt_w}$ 展开后的各项系数。

设最终选 (选 $x_w S$) 的有 j 个, 选 (选 $x_w^2 S^2$) 的有 k 个, 选 (选 x_w^2) 的有 l 个, 则选 (选 A) 的有 $n - j - k - l$ 个。设这一项的系数为 $dp_{j,k,l}$ 。

考虑最终的答案为

$$\left[\prod x_i^2 \right] \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \sum_{l=0}^{n-j-k} dp_{j,k,l} \prod_{w \in \text{选 } x_w S} x_w \prod_{w \in \text{选 } x_w^2 S^2} x_w^2 \prod_{w \in \text{选 } x_w^2} x_w^2 A^{n-j-k-l} S^{j+2k}$$

将 $A^{n-j-k-l}$ 写成 $\left(\frac{(S^2 - \sum x^2)}{2} \right)^{n-j-k-l}$ 并用二项式定理展开得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{n-j-k-l}} dp_{j,k,l} \prod_{w \in \text{选 } x_w S} x_w \prod_{w \in \text{选 } x_w^2 S^2} x_w^2 \prod_{w \in \text{选 } x_w^2} x_w^2 (S^2 - \sum x^2)^{n-j-k-l} S^{j+2k} \\ &= \frac{1}{2^{n-j-k-l}} \sum_{u=0}^{n-j-k-l} (-1)^{n-j-k-l-u} \binom{n-j-k-l}{u} dp_{j,k,l} \prod_{w \in \text{选 } x_w S} x_w \prod_{w \in \text{选 } x_w^2 S^2} x_w^2 \prod_{w \in \text{选 } x_w^2} x_w^2 (\sum x^2)^{n-j-k-l-u} S^{2u+j+2k} \end{aligned}$$

考虑如何计算。

使用组合意义, 将 $\prod_{w \in \text{选 } x_w S} x_w \prod_{w \in \text{选 } x_w^2 S^2} x_w^2$ 这些全部填完后, 有 j 个 x 次数为 1, 有 v 个 x 次数为 2, 有 $n - j - k - l$ 个 x 次数为 0。

显然先将 $(\sum x^2)^{n-j-k-l-u}$ 全部填到次数为 0 的 x 上 (因为它们填且仅能填到次数为 0 的 x 的地方), 有

$$\binom{n-j-k-l}{n-j-k-l-2k-u} (n-j-k-l-2k-u)!$$

种方案。

此时还剩下 $n - j - k - l - (n - j - k - l - 2k - u) = k + u$ 个 x 次数为 0。考虑现在有 $S^{2u+j+2k}$ 用来填满剩下的空余 ($k + u$ 个次数为 0 的 x , 每个有 2 个空位; j 个次数为 1 的 x , 每个有 1 个空位)。

不妨将所有 $2u + 2k + j$ 个空位先拿出来排成一列, 把颜色 (即 x 的下标) 相同的空位看做不同的, 用 $2u + 2k + j$ 个 S 两两匹配并填入。因为每个空位的颜色都是确定的, 所以方案数实际上只与每个空位与哪个 S 匹配有关, 也就是 $(2u + 2k + j)!$ 种方案。

然后每个次数为 0 的位置两个空位顺序无关，于是除以 2^{u+k} 。

所以最终答案即为

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \sum_{l=0}^{n-j-k} \sum_{u=0}^{n-j-l-2k} dp_{j,k,l} (-1)^{n-j-l-u} \binom{n-j-l-2k}{u} \binom{n-j-k-l}{n-j-l-2k-u} (n-j-l-2k-u)! \frac{(2u+2k+j)!}{2^{u+k+n-j-l-2k}}$$

考虑记 $q = j + l$ ，在 dp 状态中合并 j, l 为 q 。因为 (↵) 和 (↵) 两种转移的系数相同，都为 $\binom{c}{1} = c$ ，所以可以合并。可以理解为把 $-\binom{c}{1}x_wSA^{c-1}(\text{↵}) + \binom{c}{1}x_w^2A^{c-1}(\text{↵})$ 合并成 $\binom{c}{1}x_w(x_w - S)A^{c-1}$ ，在最后计算答案时再枚举 (↵) 的集合（实际上就是枚举 j 并使用二项式定理展开，也就是乘以 $(-1)^j\binom{q}{j}$ ），则式子变为

$\sum_{q=0}^n \sum_{k=0}^{n-q} \sum_{u=0}^{n-q-2k} \sum_{j=0}^q dp_{q,k} (-1)^{n-q-u+j} \binom{q}{j} \binom{n-j-l-2k}{u} \binom{n-q-k}{n-q-2k-u} (n-q-2k-u)! \frac{(2u+2k+j)!}{2^{u+n-q-k}}$ 发现与 j 有关的系数只与 q 和 $k+u$ 的值有关。记 $k+u = \prec$ ，将确定 \prec, q 时的与 j 有关的系数记作 $coe_{\prec,q} = \sum_{j=0}^q (-1)^{-q+j} \binom{q}{j}$ 。

先 $O(n^3)$ 预处理出所有的 coe ，再 $O(n^3)$ 枚举 q, k, u 的值并计算答案，这时不需要再枚举 j 了，只需要乘以 $coe_{k+u,q}$ 即可。

总时间复杂度 $O(n^3)$ 。

Code

```

1  #include<bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3
4  namespace MyNamespace {
5  typedef long long ll;
6
7  inline namespace MyIO {
8      inline ll rd() {
9          char ch = getchar();
10         ll s = 0, w = 1;
11         while (!isdigit(ch)) {
12             if (ch == '-') w = -1;
13             ch = getchar();
14         }
15         while (isdigit(ch)) {
16             s = (s << 3) + (s << 1) + (ch ^ 48);
17             ch = getchar();
18         }
19         return (s * w);
20     }
21     template<typename T>
22     inline void wr(T x) {
23         if (x < 0) x = -x, putchar('-');
24         if (x > 9) wr(x / 10);
25         putchar(x % 10 + 48);
26     }
27     inline void wrsp() {
28         // pass
29     }
30     template<typename T, typename... Args>
31     inline void wrsp(T x, Args... args) {
32         wr(x), putchar(' '), wrsp(args...);
33     }
34     inline void wrln() {
35         putchar('\n');
36     }
37     template<typename T>

```

```

38     inline void wrln(T x) {
39         wr(x), putchar('\n');
40     }
41     template<typename T, typename... Args>
42     inline void wrln(T x, Args... args) {
43         wr(x), putchar(' '), wrln(args...);
44     }
45 } // namespace MyIO
46
47 inline namespace Base {
48     #define bug(x) << #x << '=' << (x) << ' '
49     #define siz(A) ll((A).size())
50
51     template<typename T>
52     constexpr inline void Max(T &x, T y) {
53         x = max(x, y);
54     }
55     template<typename T>
56     constexpr inline void Min(T &x, T y) {
57         x = min(x, y);
58     }
59 } // namespace Base
60
61 constexpr int fn = 1500;
62 constexpr int N = fn + 10;
63
64 inline namespace ModInt {
65     constexpr ll MO = 998244353;
66     constexpr inline ll moa(ll x) {
67         return (x >= MO ? x - MO : x);
68     }
69     constexpr inline ll moi(ll x) {
70         return (x < 0 ? x + MO : x);
71     }
72     constexpr inline ll mo(ll x) {
73         return moi(x % MO);
74     }
75     constexpr inline ll& Moa(ll &x) {
76         return x = moa(x);
77     }
78     constexpr inline ll& Moi(ll &x) {
79         return x = moi(x);
80     }
81     constexpr inline ll& Mo(ll &x) {
82         return x = mo(x);
83     }
84     constexpr inline ll qpow(ll x, ll y) {
85         Mo(x);
86         ll k = 1;
87         while (y) {
88             if (y & 1) (k *= x) %= MO;
89             (x *= x) %= MO;
90             y >>= 1;
91         }
92         return k;
93     }

```

```

94     constexpr inline ll get_inv(ll x) {
95         return qpow(x, MO - 2);
96     }
97     constexpr ll MOI2 = get_inv(2);
98     inline string to_frac(ll k) {
99         for (ll v = 1; v <= 1000; ++v) {
100             ll u = k * v % MO;
101             if (u <= 1000) return to_string(u) + '/' + to_string(v);
102             else if (MO - u <= 1000) return to_string(u - MO) + '/' + to_string(v);
103         }
104         return "NaN";
105     }
106 } // namespace ModInt
107
108 inline namespace ModIntBase {
109     ll inv[N], jc[N], ji[N], pw2I[N];
110     void init_inv() {
111         jc[0] = 1;
112         for (int i = 1; i <= fn; ++i)
113             jc[i] = jc[i - 1] * i % MO;
114
115         ji[fn] = get_inv(jc[fn]);
116         for (int i = fn; i >= 1; --i)
117             ji[i - 1] = ji[i] * i % MO;
118
119         inv[0] = 1;
120         for (int i = 1; i <= fn; ++i)
121             inv[i] = jc[i - 1] * ji[i] % MO;
122
123         pw2I[0] = 1;
124         for (int i = 1; i <= fn; ++i)
125             pw2I[i] = pw2I[i - 1] * MOI2 % MO;
126     }
127     inline ll binom(int n, int m) {
128         return jc[n] * ji[n - m] % MO * ji[m] % MO;
129     }
130 } // namespace ModIntBase
131
132 int n, a[N], b[N];
133
134 ll dp[2][N][N], (*f)[N], (*g)[N];
135 ll coe[N][N];
136
137 /*
138 字母不够用了怎么办 /ll
139 好想用平假名作为变量名啊 (
140 算了, 用平假名命名情况吧
141 别问我为啥不用甲乙丙丁
142 q = j + 1
143 k
144 */
145
146 void NamespaceMain() {
147     init_inv();
148
149     n = rd();

```

```

150     for (int i = 1; i <= n; ++i)
151         a[i] = rd(), ++b[a[i]];
152
153     f = dp[0], g = dp[1];
154     f[0][0] = 1;
155     for (int i = 1; i <= n; ++i) {
156         for (int q = 0; q <= i; ++q)
157             for (int k = 0; k <= i - q; ++k)
158                 g[q][k] = 0;
159         for (int q = 0; q <= i - 1; ++q)
160             for (int k = 0; k <= i - 1 - q; ++k) {
161                 if (!f[q][k]) continue;
162
163                 // (あ)
164                 Moa(g[q][k] += f[q][k]);
165
166                 // (い) && (え)
167                 if (b[i] >= 1)
168                     (g[q + 1][k] += f[q][k] * b[i]) %= MO;
169
170                 // (う)
171                 if (b[i] >= 2)
172                     (g[q][k + 1] += f[q][k] * ll(b[i] * (b[i] - 1) / 2)) %= MO;
173             }
174         swap(f, g);
175     }
176
177     for (int ku = 0; ku <= n; ++ku) // k + u
178         for (int q = 0; q <= n; ++q)
179             for (int j = 0; j <= q; ++j) {
180                 ll val = binom(q, j) * jc[2 * ku + j] % MO;
181                 if ((-q + j) & 1)
182                     Moi(coe[ku][q] -= val);
183                 else
184                     Moa(coe[ku][q] += val);
185             }
186
187     ll ans = 0;
188     for (int q = 0; q <= n; ++q)
189         for (int k = 0; k <= n - q; ++k)
190             for (int u = 0; u <= n - q - k * 2; ++u) {
191                 ll val = f[q][k] * binom(n - q - 2 * k, u) % MO
192                     * jc[n - q - k] % MO * ji[k + u] % MO
193                     * pw2I[u + n - q - k] % MO
194                     * coe[k + u][q] % MO;
195                 // cerr bug(q) bug(j) bug(l) bug(k) bug(u) bug(f[q][k]) bug(val)
196                 bug(to_frac(val)) bug((n - q - u + j) & 1) bug(ans) << endl;
197                 if ((n - u) & 1)
198                     Moi(ans -= val);
199                 else
200                     Moa(ans += val);
201             }
202     wr(ans);
203 }
204 }

```

```
205 | int main() {  
206 |     MyNamespace::NamespaceMain();  
207 |     return 0;  
208 | }
```