

复杂网络

高一鸣 王方正 邵逸岚 庞冰瑶 赵帅 张永辉

计算机学院

2018.04.27

马尔科夫场

王方正

马尔科夫随机场，又称为概率无向图模型，是一个可以由无向图表示的联合概率分布。

图

图是由结点及连接结点的边组成的集合。结点和边分别记作 v 和 e ，结点和边的集合分别记作 V 和 E ，图记作 $G = (V, E)$ 。
无向图是指边没有方向的图。

概率图模型

概率图模型（PGM）是由图表示的概率分布。设有联合概率分布 $P(Y), Y \in \mathcal{Y}$ 是一组随机变量。由无向图 $G = (V, E)$ 表示概率分布，即在图 G 中，结点 $v \in V$ 表示一个随机变量 Y_v ， $Y = (Y_v)_{v \in V}$ ；边 $e \in E$ 表示随机变量之间的概率依赖关系。

马尔可夫性：三者等价

- 成对马尔可夫性: $P(Y_u, Y_v | Y_O) = P(Y_u | Y_O)P(Y_v | Y_O)$
- 局部马尔可夫性: $P(Y_v, Y_O | Y_W) = P(Y_v | Y_W)P(Y_O | Y_W)$
- 全局马尔可夫性: $P(Y_A, Y_B | Y_C) = P(Y_A | Y_C)P(Y_B | Y_C)$

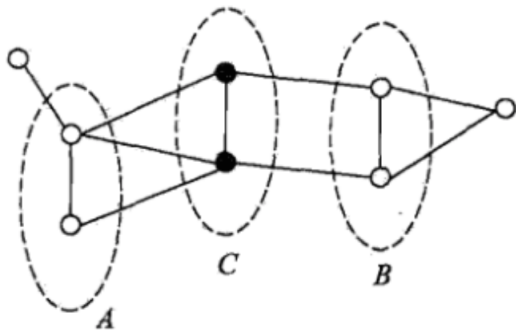


图 1: 局部马尔可夫性

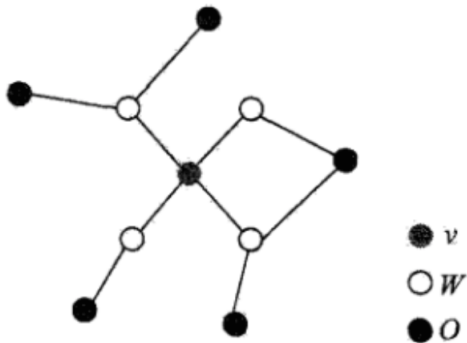


图 2: 全局马尔可夫性

概率无向图模型

设有联合概率分布 $P(Y)$ ，由无向图 $G = (V, E)$ 表示，在图 G 中，结点表示随机变量，边表示随机变量之间的依赖关系。如果联合概率分布 $P(Y)$ 满足成对、局部或全局马尔可夫性，就称此联合概率分布为概率无向图模型或马尔可夫随机场。

团

无向图 G 中任何两个结点均有边连接的结点子集称为团。

最大团

若 C 是无向图 G 的一个团，并且不能再加进任何一个 G 的结点使其成为一个更大的团，则称此 C 为最大团。

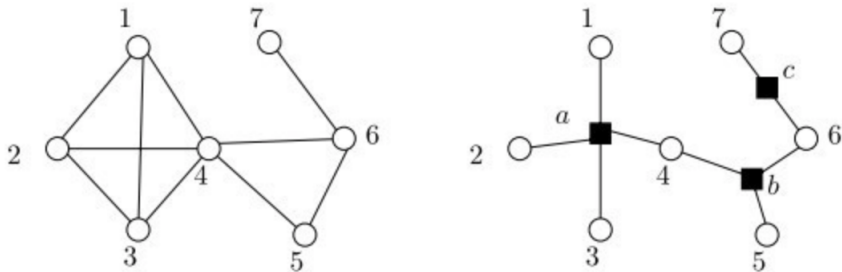


图 3: 无向图与因子图

将概率无向图模型的联合概率分布表示为其最大团上的随机变量的函数的乘积形式的操作，称为概率无向图模型的因子分解。具体公式为：

$$P(Y) = \frac{1}{Z} \prod_C \Psi_C(Y_C)$$

其中， Z 是规范化因子，由式

$$Z = \sum_Y \prod_C \Psi_C(Y_C)$$

给出。规范化因子保证 $P(Y)$ 构成一个概率分布。

函数 $\Psi_C(Y_C)$ 称为势函数，通常定义为指数函数：

$$\Psi_C(Y_C) = \exp^{-E(Y_C)}$$

势函数的作用是刻画变量之间的相关关系，它是非负函数，并且在所偏好的变量取值上有较大函数值。

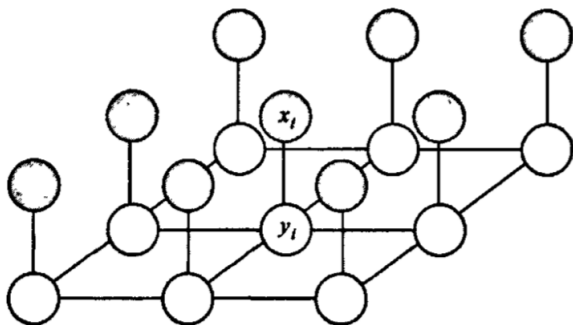


图 4: Pairwise MRF 模型

贝叶斯网络

邵逸岚

贝叶斯公式：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

后验概率=(相似度*先验概率)/标准化常量

贝叶斯网络(Bayesian Network)是一种经典的概率图模型，它借助有向无环图(Directed Acyclic Graph, DAG)来刻画属性之间的依赖关系，并使用条件概率表(Conditional Probability Table, CPT)来描述属性的联合概率分布。

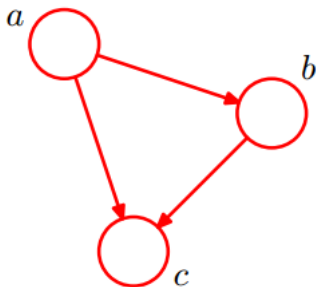


图 5: 贝叶斯网络结构图

贝叶斯网络 B 由结构 G 和参数 Θ 构成, 即 $B = \langle G, \Theta \rangle$ 。给定父结点集, 假设每个属性与它的非后裔属性独立, 于是将属性 x_1, x_2, \dots, x_d 的联合概率分布定义为:

$$P_B(x_1, x_2, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d P_B(x_i | \pi_i) = \prod_{i=1}^d \theta_{x_i | \pi_i}$$

以5中的网络结构为例, 联合概率分布可定义为:

$$P(a, b, c) = P(a)P(b|a)P(c|a, b)$$

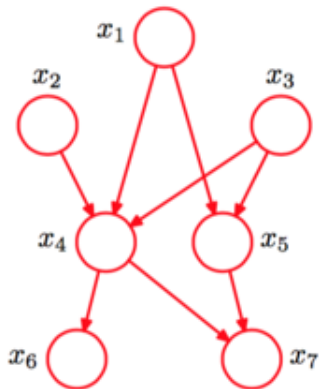


图 6: 较复杂的贝叶斯网络

其联合概率分布可定义为：

$$P(x_1, \dots, x_7) = P(x_1)P(x_2)P(x_3)P(x_4|x_1, x_2, x_3) \\ p(x_5|x_2, x_3)P(x_6|x_4)P(x_7|x_4, x_5)$$

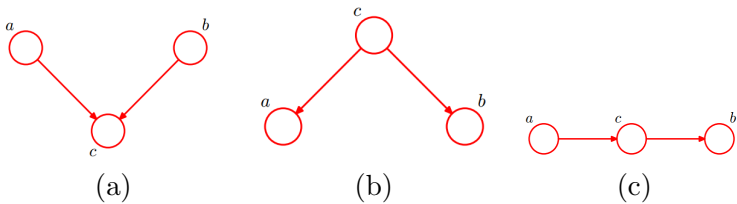


图 7: 贝叶斯网络中属性的典型依赖关系

$$\begin{aligned} \text{(a)} \sum_c P(a, b, c) &= \sum_c P(a)P(b)P(c|a, b) \\ \Rightarrow P(a, b) &= P(a)P(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} P(a, b, c) &= P(c)P(a|c)P(b|c) \\ \Rightarrow P(a, b|c) &= P(a|c)P(b|c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} P(a, b|c) &= P(a, b, c)/P(c) \\ &= P(a)P(c|a)P(b|c)/P(c) \\ &= P(a, c)P(b|c)/P(c) \\ &= P(a|c)P(b|c) \end{aligned}$$

- 贝叶斯网络的训练比较复杂，是一个 NP-complete 问题，也就是说，现阶段没有可以在多项式时间内完成的算法。但是对于某些应用，这个训练过程可以简化，并在计算上高效实现。
- 贝叶斯网络本身是一种不定性因果关联模型。它本身是将多元知识图解可视化的一种概率知识表达与推理模型，更为贴切地蕴含了网络节点变量之间的因果关系及条件相关关系。
- 贝叶斯网络具有强大的不确定性问题处理能力。贝叶斯网络用条件概率表达各个信息要素之间的相关关系，能在有限的、不完整的、不确定的信息条件下进行学习和推理。
- 贝叶斯网络能有效地进行多源信息表达与融合。贝叶斯网络可将故障诊断与维修决策相关的各种信息纳入网络结构中，按节点的方式统一进行处理，能有效地按信息的相关关系进行融合。

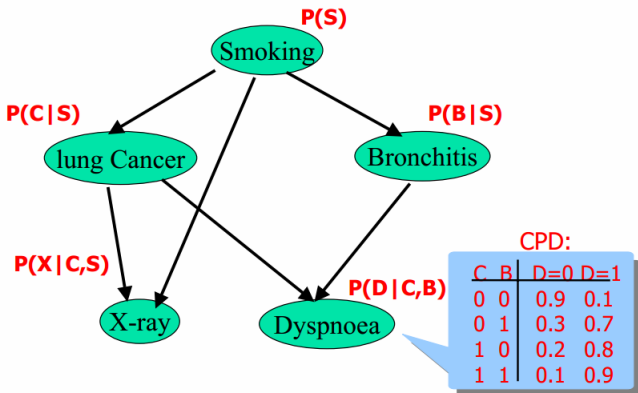


图 8: 贝叶斯网络实例

在给定 x_i 的条件下, x_{i+1} 的分布与 x_1, x_2, \dots, x_{i-1} 无关, 即 x_{i+1} 的分布只与 x_i 有关。这种顺次演变的随机过程, 叫做马尔科夫链。马尔科夫链是贝叶斯网络的一种特例。



图 9: 马尔科夫链结构

马尔科夫链可表示为：

$$P(X_{n+1} = x | X_0, X_1, \dots, X_n) = P(X_{n+1} = x | X_n)$$

随机变量 $X_1, X_2 \dots$ 取值范围的合集成为“状态空间”， X_i 的值表示在时间 i 的状态。马尔科夫链是时间和状态都是离散的马尔科夫过程。

如果状态空间是有限的，则转移概率分布可以表示为一个具有 (i,j) 元素的矩阵，称之为“转移矩阵” \mathbf{P} ：

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = i | X_n = j)$$

对于一个离散状态空间， k 步转移概率的积分即为求和，可以对转移矩阵求 k 次幂来求得。 \mathbf{P}^k 即是 k 步转移后的转移矩阵。

平稳分布是一个满足以下方程的向量：

$$\mathbf{P}\pi^* = \pi^*$$

在此情况下，稳态分布 π^* 是一个对应于特征根为1的、该转移矩阵的特征向量。