1.4 电磁场的基本规律

- 法拉第电磁感应定律
- 全电流定律
- 麦克斯韦方程组

1.4.1 法拉第电磁感应定律 (Faraday’s law of induction)

当与回路交链的磁通发生变化时，回路中会产生感应电动势，这就是法拉弟电磁感应定律。

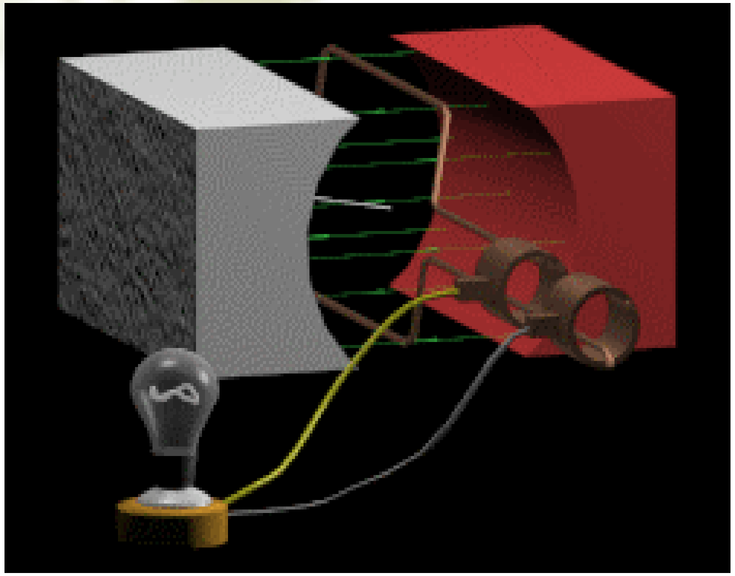
电磁感应定律： $e = -\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$

负号表示感应电动势的方向与原磁场的变化相反。

磁通变化的三种情况：　　?

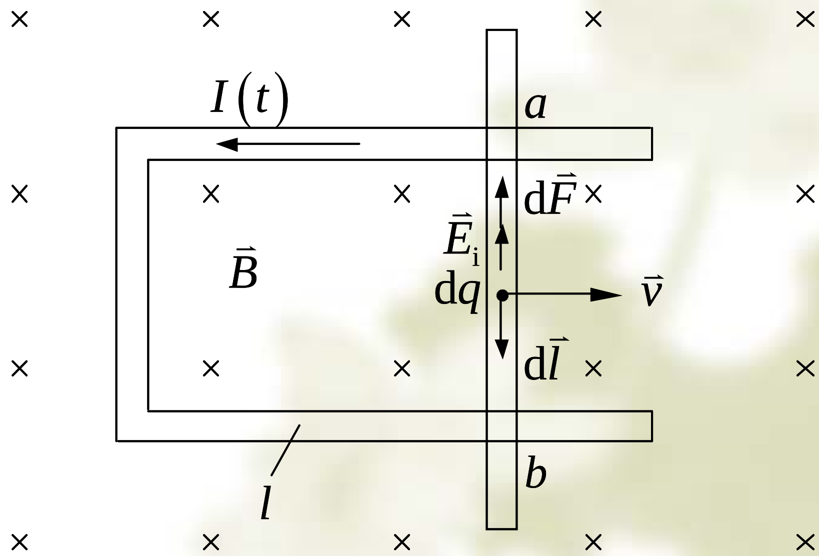
(1). 磁场不变，回路切割磁力线, 导电回路或部分导电回路对磁场有相对运动。

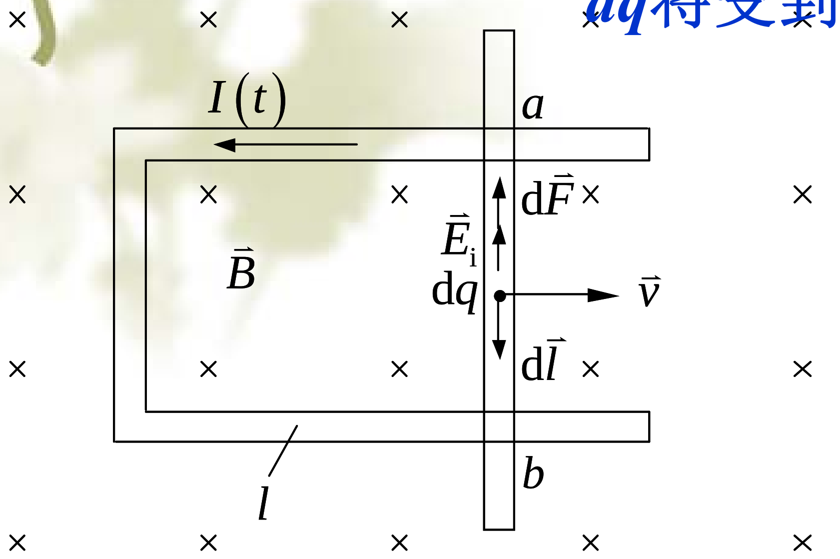
$$e=-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\oint_l(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$?



动生电动势

称为动生电动势，这是发电机工作原理，亦称为发电机电势。





*dq*将受到洛仑兹力 $\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$ 的作用

$$\vec{E}_\mathrm{i} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$e = \oint_l \vec{E}_\mathrm{i} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \oint_l \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet \mathrm{d}\vec{l} \qquad (2)$$

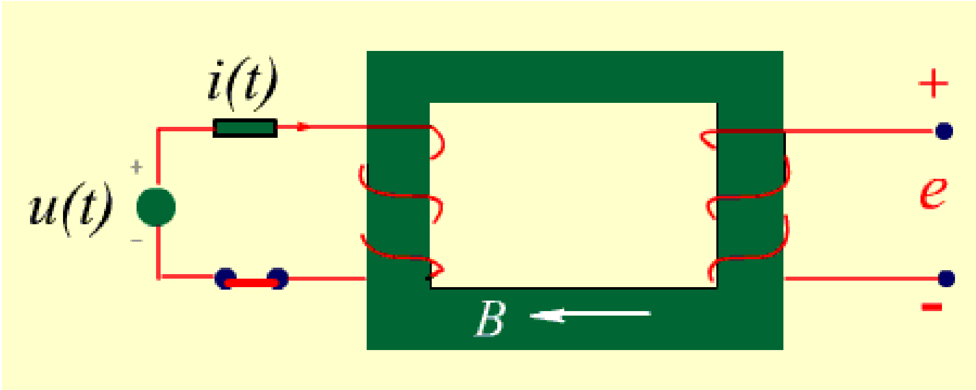
仅对*v*不为零部分线积分

(2). 回路不变，磁场随时间变化

$$e=-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=-\frac{d}{dt}\int_s \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_s \frac{d}{dt}(\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S})$$

$$=-\int_s\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial(\mathrm{d}\boldsymbol{S})}{\partial t}\right)$$

$$=-\int_s \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$



感生电动势

又称为感生电动势，这是变压器工作的原理，亦称为变压器电势。

（3）既有导电回路相对磁场运动，又有磁通随时间变化

$$e=-\frac{d\psi}{dt}=\oint_{l}(\vec{v}\times\vec{B})\bullet \mathrm{d}\vec{l}-\int_{s}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

实验表明：只要与回路交链的磁通发生变化，回路中就有感应电动势。与构成回路的材料性质无关，当回路是导体时，有感应电流产生。

产生电场的场源有：电荷和变化的磁场。

若空间同时存在库仑电场，则有

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_i$$

$\vec{E}_\mathrm{i}$ 感应电场强度，由变化的磁场产生

$\vec{E}_\mathrm{q}$ 库仑电场强度，由电荷产生

由于库仑电场为保守场：$\oint_l \vec{E}_\mathrm{q} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0$

$$e = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \oint_l \vec{E}_\mathrm{i} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \oint_l \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet \mathrm{d}\vec{l} - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \oint_l \vec{E}_{\mathrm{i}}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \oint_l \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{l} - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = e$$

由此可见，源于感应电场的旋涡源——磁通量的变化，合成电场为涡旋场(环量不为零)。

对于静止媒质（***v*=0**）

$$\boxed{\oint_l \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet \mathrm{d}\vec{S}}$$

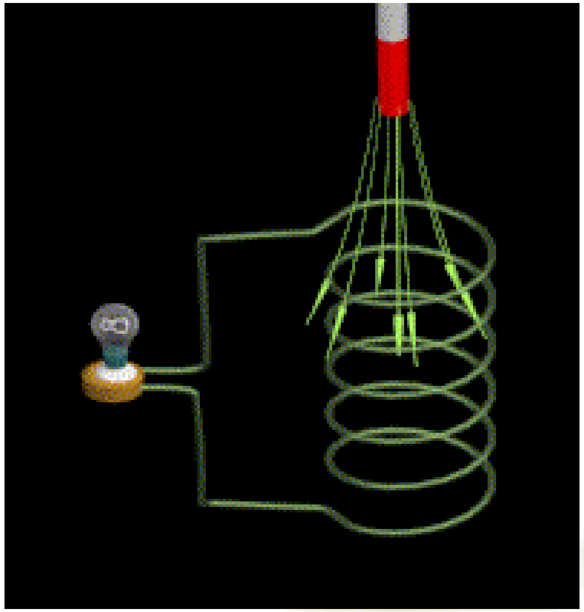
麦克斯韦第2方程

（积分形式）

推广：麦克斯韦把法拉第电磁感应定律推广到场域中任一假想闭合回路的情况（简称为数学环），提出了“涡旋电场”的假设，即只要与数学环相交链的磁通发生变化，即使没有感应电流产生，在该回路中的任一点总有感应电场存在，因此沿该数学环将产生感应电动势。

$$\oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

表明不仅电荷产生电场，变化的磁场也能产生电场。



变化的磁场产生感应电场

思考

- 根据自然界的对偶关系，变化的电场是否会产生磁场呢?

1.4.2 全电流定律 (Ampere’s Circuital law)

- 恒定磁场中的安培环路定律

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{s}$$

$\vec{J}_c$ 传导电流密度

磁场强度沿任一闭合回路的线积分等于穿过该回路所限定面积的传导电流的代数和。

由安培环路定律

$$\oint_l \vec{H} \bullet d\vec{l} = I = \int_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s}$$

$$\oint_l \vec{A} \bullet d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{A} \bullet d\vec{s}$$

$$\oint_l \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{H} \bullet d\vec{s} = \int_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c$$

安培环路定律微分形式

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c$$

$$\nabla \bullet (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\nabla \bullet \vec{J}_c = 0$$

$$\oint_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$ 电荷守恒定律

$$\oint_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{J}_c)\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

二者矛盾

问题—应用于时变电磁场时与电荷守恒定律矛盾

- 解决办法—引入位移电流（麦克斯韦）

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = q \qquad (\text{高斯定理})$$

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \int_V \nabla \bullet \vec{D} dv = q = \int_V \rho dv$$

$$\Longrightarrow \qquad \nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

代入电荷守恒定律： $$\nabla \bullet \vec{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bullet \vec{D})$$

$$\Longrightarrow \qquad \nabla \bullet (\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \equiv 0$$

定义： $\vec{J} = \vec{J}_c + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \bullet \vec{J} = 0$

与恒定磁场安培环路定律一致

$$\nabla \bullet (\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0 \qquad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{s}$$

定义 $\vec{J}_D = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 为位移电流密度

安培环路定律中的右端项除传导电流外，还需再增加一项位移电流

$$\oint_l \vec{H} \bullet d\vec{l} = \sum I = \int_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{s}$$

全电流

$$\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_D + \vec{J}_V$$

$\vec{J}_c$ 传导电流

$\vec{J}_V = \rho\vec{v}$ 运流电流（空间运动电荷形成）

$\vec{J}_D = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 位移电流

全电流定律

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{s}$$

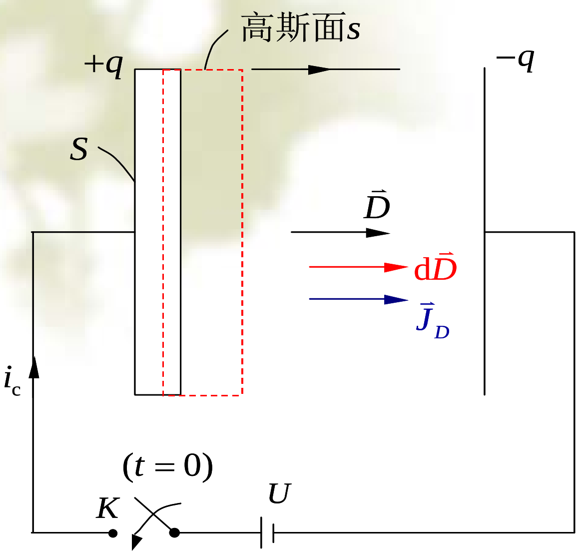
$$\oint_l \vec{H}\bullet d\vec{l} = \sum I = \int_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{s} + \int_S \rho\vec{v}\bullet d\vec{s}$$

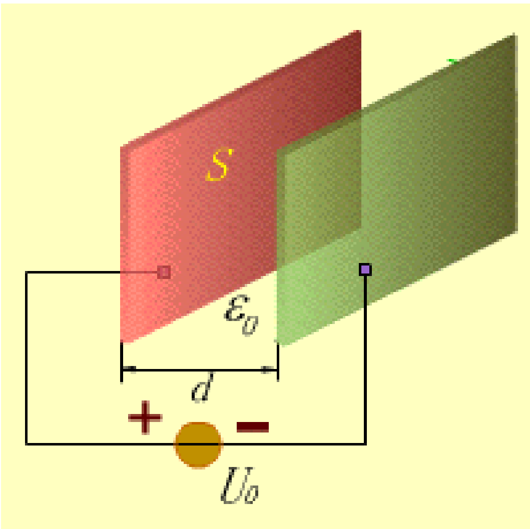
麦克斯韦第**1**方程（积分形式）

不仅传导电流产生磁场，变化的电场也能产生磁场。麦克斯韦预言电磁波的存在。

恒定磁场中的安培环路定律是全电流定律的特殊形式。

例1-2 电容器的充放电





平行板电容器

(1) 充电过程

$$i_C = \frac{\mathrm{d}q}{dt}$$

$$\oint_S \vec{D}\bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_S D\mathrm{d}s = D\int_S \mathrm{d}s$$

$$= DS = q$$

$$D = q/S = \sigma$$

$$i_D = \int_S \vec{J}_D \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t}$$

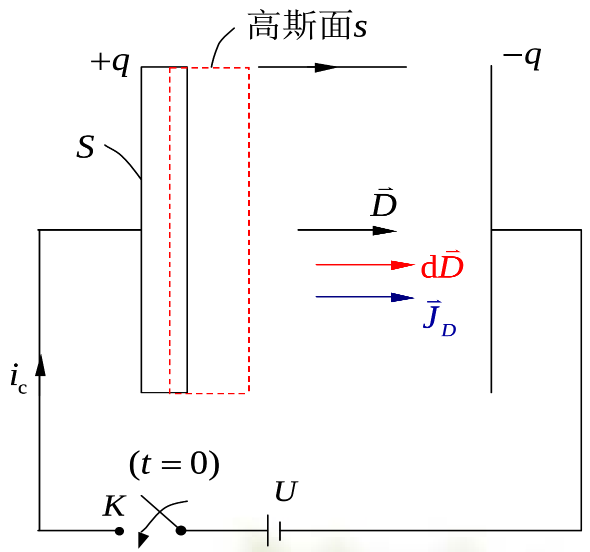
$$= i_C$$

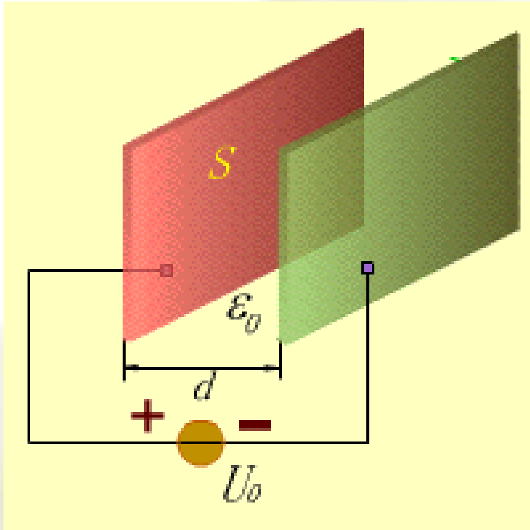
$\vec{J}_D$的方向与¶$\vec{D}$ 的方向一致；

(2) 稳态

$$i_{\mathrm{C}} = 0$$

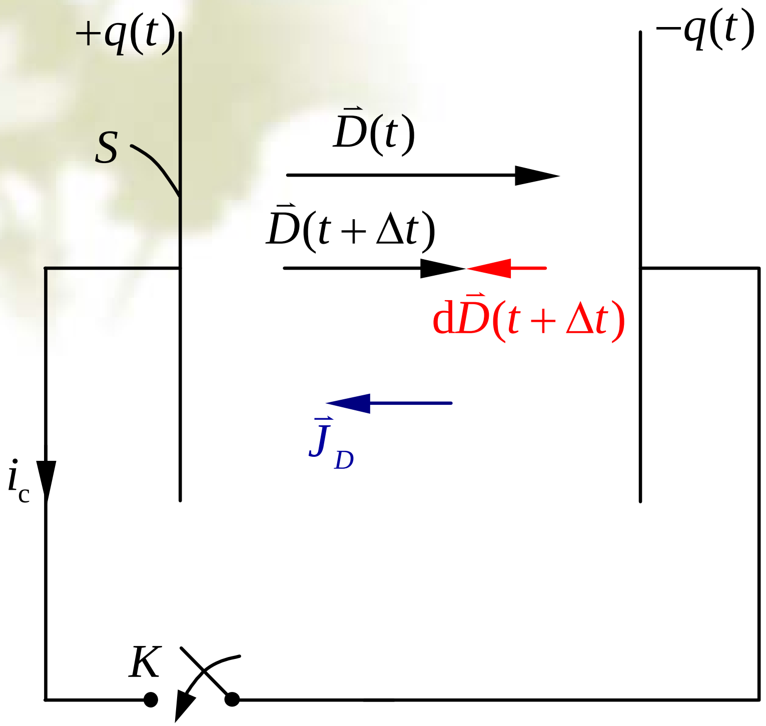
$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \rightarrow \quad \vec{J}_D = 0 \rightarrow \quad i_D = 0$$





平行板电容器

(3) 放电过程



$$
\begin{aligned}
i_D &= \int_S \vec{J}_D \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \frac{\partial q}{\partial t} \\
&= i_c
\end{aligned}
$$

$\vec{J}_D$的方向与¶$\vec{D}$ 的方向一致；

变化的电场产生位移电流，电流仍然是连续的。

1.4.3 麦克斯韦方程组（Maxwell’s equations）

- 积分形式

全电流定律：麦克斯韦第一方程，表明传导电流和变化的电场都能产生磁场。

$$\oint_l \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_s \vec{J}_c \bullet d\vec{s} + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{s} + \int_s \rho\vec{v} \bullet d\vec{s}$$

电磁感应定律：麦克斯韦第二方程，表明变化的磁场能产生电场（变化的磁场以涡旋的形式产生电场）。

$$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s}$$

磁通连续性原理：表明磁场是无源场，磁力线总是闭合曲线。

$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0$$

高斯定律：表明电荷产生电场。

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \sum q = \int_V \rho dv$$

■ 微分形式

(1) $$\oint_l \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{s} + \int_S \rho\vec{v} \bullet d\vec{s} = \int_S \nabla \times \vec{H} \bullet d\vec{s}$$

STOKES's Theorem

$$\Longrightarrow \nabla \times \vec{H} = \left.\begin{matrix} \vec{J}_c \\ \vec{J}_V \end{matrix}\right\} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(2) $$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s} = \int_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

$$\Longrightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(3) $$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0 = \int_V \nabla \bullet \vec{B} dv$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

Divergence Theorem

(4) $$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \sum q = \int_V \rho dv = \int_V \nabla \bullet \vec{D} dv$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

- 微分形式

$$\nabla\times\vec{H}=\left.\begin{matrix}\vec{J}_c\\ \vec{J}_V\end{matrix}\right\}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

- 总结：
  - 磁场不仅由实体电荷的运动产生，而且也由变化的电场产生;
  - 变化的电场产生磁场，反之变化的磁场亦产生电场;
  - 电磁场是一个有机的不可分割的整体.

- 各向同性媒质中各场量之间的关系

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J}_c = \gamma \vec{E}$$

- 高频电磁场/电磁波

$$\nabla\times\vec{H}=\left.\begin{matrix}\vec{J}_c\\ \vec{J}_V\end{matrix}\right\}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

（1）变化的电场与变化的磁场互为“源”向远方传播；
（2）交变电场、交变磁场相互垂直

第1章 小结

理解以下各物理量、定理、定律的表示及其物理意义

梯度 $\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi$

散度 $\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$

旋度 $\mathrm{curl}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \nabla\times\vec{A}$

$$\nabla = \vec{\mathbf{e}}_x\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} + \vec{\mathbf{e}}_y\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} + \vec{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}$$

∇ 哈密顿算符

高斯散度定理

$$\int_S \vec{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \int_V \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\mathrm{d}V$$

斯托克斯定理

$$\int_S(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

亥姆霍兹定理

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) + \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\bullet\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

麦克斯韦方程组

积分形式

$$\oint_l \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{s} + \int_S \rho\vec{v} \bullet d\vec{s}$$

全电流定律

$$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s}$$

法拉第电磁感应定律

$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0$$

磁通连续性原理

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \sum q = \int_V \rho dv$$

电场中的高斯定理

- 微分形式

$$\nabla\times\vec{H}=\left.\begin{matrix}\vec{J}_c\\ \vec{J}_V\end{matrix}\right\}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

全电流定律

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

法拉第电磁感应定律

$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$

磁通连续性原理

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

电场中的高斯定理

- 各向同性媒质中各场量之间的关系

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

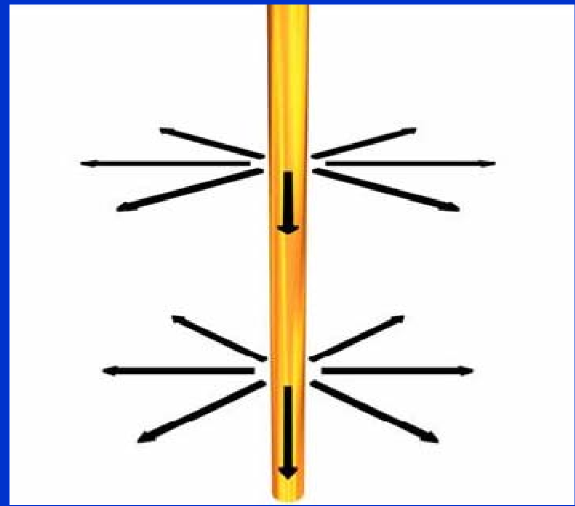
$$\vec{J}_c = \gamma \vec{E}$$

- 电磁场相关背景

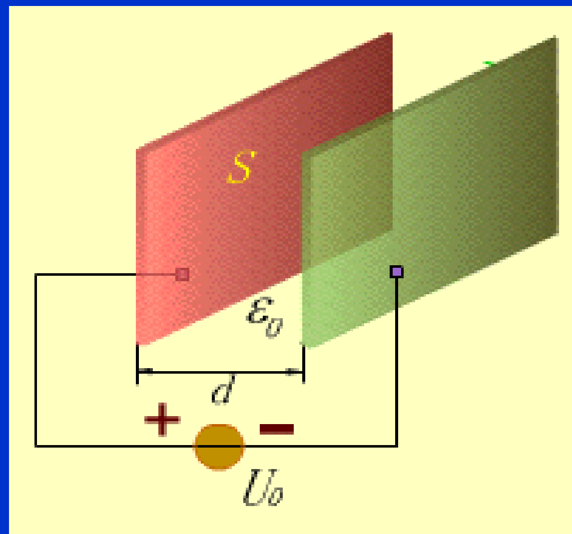
几种特殊形式的电磁场

1. 平行平面场

如果在一系列相互平行的平面上，场 $\boldsymbol{F}$ 的分布特征都相同，则称这个场为平行平面场。

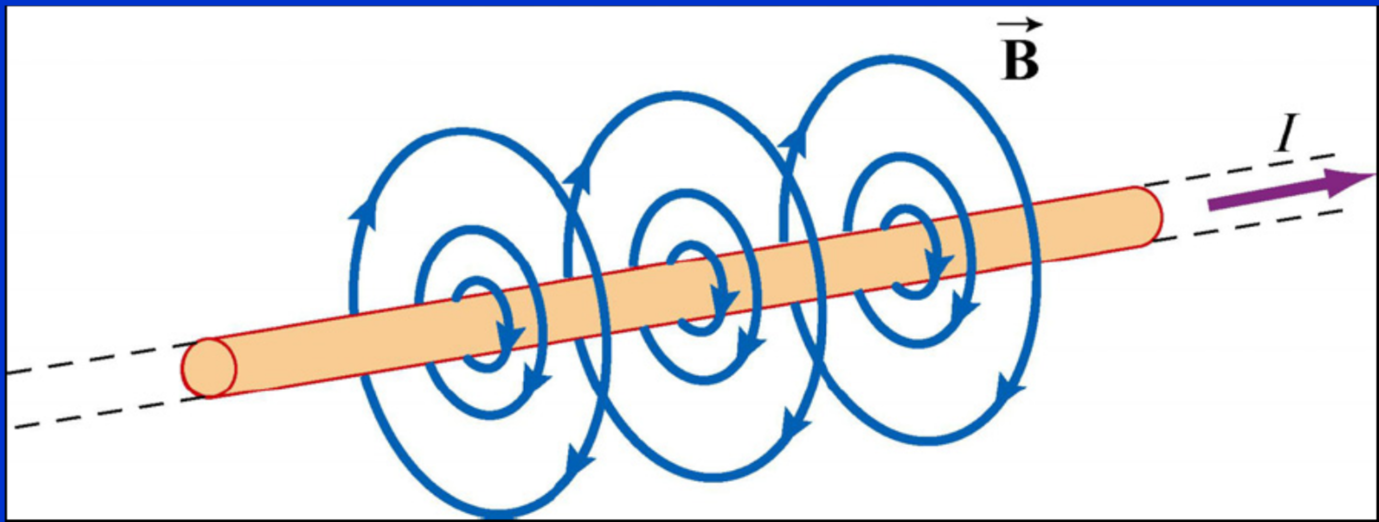


如平行板电容器、无限长直导线产生的电场。



2. 轴对称场

如果在经过某对称轴（设为 z 轴）的旋转平面上，场 $\boldsymbol{F}$ 的分布特征都相同，称这个场为轴对称场。



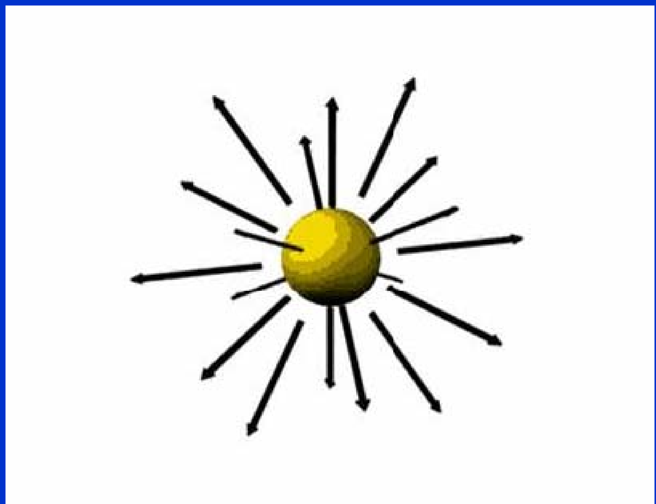
有限长直载流导线产生的磁场。

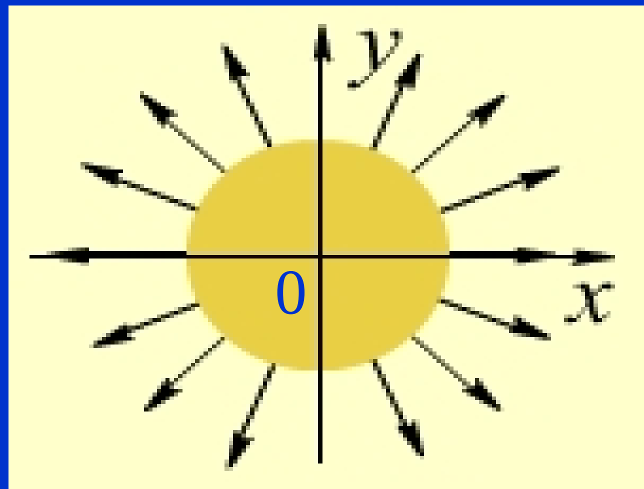
螺线管线圈产生的磁场；同轴电缆、圆柱形电容器产生的电场。

3. 球面对称场

如果在一族同心球面上（设球心在原点），场 $\boldsymbol{F}$ 的分布特征都相同 ，则称这个场为球面对称场。

如点电荷产生的电场；带电球体产生的电场。

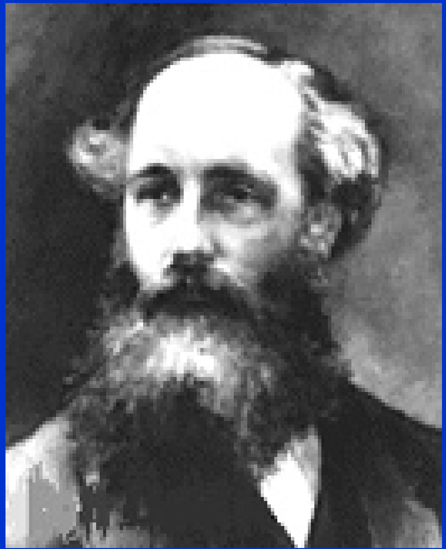




电力电缆

220kV XLPE交链聚乙烯高压电力电缆

电力电缆



麦克思维是19世纪伟大的英国物理学家、数学家。1831 年 11 月 13日生于苏格兰的爱丁堡，自幼聪颖，父亲是个知识渊博的律师，使麦克斯韦从小受到良好的教育。10岁进入爱丁堡中学学习，14岁就在爱丁堡皇家学会会刊上发表了一篇关于二次曲线作图问题的论文，已显露出出众的才华。1847年进入爱丁堡大学学习数学和物理。1850年转入剑桥大学三一学院数学系学习，1854年以第二名的成绩获史密斯奖学金，毕业留校任职两年。1856年在苏格兰阿伯丁的马里沙耳任自然哲学教授。1860年到伦敦国王学院任自然哲学和天文学教授。1861年选为伦敦皇家学会会员。1865年春辞去教职回到家乡系统地总结他的关于电磁学的研究成果，完成了电磁场理论的经典巨著《论电和磁》，并于1873年出版，1871年受聘为剑桥大学新设立的卡文迪什试验物理学教授，负责筹建著名的卡文迪什实验室，1874年建成后担任这个实验室的第一任主任，直到 1879年11月5日在剑桥逝世。

麦克斯韦主要从事电磁理论、分子物理学、统计物理学、光学、力学、弹性理论方面的研究。尤其是他建立的电磁场理论，将电学、磁学、光学统一起来，是19世纪物理学发展的最光辉的成果，是科学史上最伟大的综合之一。麦克斯韦大约于1855年开始研究电磁学，在潜心研究了法拉第关于电磁学方面的新理论和思想之后，坚信法拉第的新理论包含着真理。于是他抱着给法拉第的理论"提供数学方法基础"的愿望，决心把法拉第的天才思想以清晰准确的数学形式表示出来。他在前人成就的基础上，对整个电磁现象作了系统、全面的研究，凭借他高深的数学造诣和丰富的想像力接连发表了电磁场理论的三篇论文：《论法拉第的力线》（1855年12 月至1856年2月）；《论物理的力线》（1861至1862 年）；《电磁场的动力学理论》（1864 年12月8日）。对前人和他自己的工作进行了综合概括，将电磁场理论用简洁、对称完美数学形式表示出来，经后人整理和改写，成为经典电动力学主要基础的麦克斯韦方程组。据此，1865年他预言了电磁波的存在，电磁波只可能是横波，计算了电磁波的传播速度等于光速，

同时得出结论：光是电磁波的一种形式，揭示了光现象和电磁现象之间的联系。1888年德国物理学家赫兹用实验验证了电磁波的存在。麦克斯韦于1873年出版了科学名著《电磁理论》。系统、全面、完美地阐述了电磁场理论。这一理论成为经典物理学的重要支柱之一。在热力学与统计物理学方面麦克斯韦也作出了重要贡献，他是气体动理论的创始人之一。1859年他首次用统计规律禀麦克斯韦速度分布律，从而找到了由微观量求统计平均值的更确切的途径。1866年他给出了分子按速度的分布函数的新推导方法，这种方法是以分析正向和反向碰撞为基础的。他引入了驰豫时间的概念，发展了一般形式的输运理论，并把它应用于扩散、热传导和气体内摩擦过程。1867年引入了“统计力学”这个术语。麦克斯韦是运用数学工具分析物理问题和精确地表述科学思想的大师，他非常重视实验，由他负责建立起来的卡文迪什实验室，在他和以后几位主任的领导下，发展成为举世闻名的学术中心之一。他善于从实验出发，经过敏锐的观察思考，应用娴熟的数学

技巧，从缜密的分析和推理，大胆地提出有实验基础的假设，建立新的理论，再使理论及其预言的结论接受实验检验，逐渐完善形成系统、完整的理论。特别是汤姆逊卓有成效地运用类比的方法使麦克斯韦深受启示，使他成为建立各种模型来类比研究不同物理现象的能手。在他的电磁场理论的三篇论文中多次使用了类比研究方法，寻找到了不同现象之间的联系，从而逐步揭示了科学真理。

麦克斯韦严谨的科学态度和科学研究方法是人类极其宝贵的精神财富。

摘自《大学物理》1997（16）5 封三

- 作业1-5