第2章 静态电磁场I—静电场
(Electrostatic Field)

2.1 基本方程与场的特性

2.2 自由空间的电场

2.3 静电场中的导体和介质

2.4 电介质中的电场

2.5 静电场的边值问题

2.6 镜像法

2.7 电容•部分电容

2.8 静电场能量

2.9 电场力

静电场是相对观察者静止，且量值不随时间变化的电荷所产生的电场。它是电磁理论最基本的内容。由此建立的物理概念、分析方法在一定条件下可应用推广到恒定电场,恒定磁场及时变场。

本章要求

深刻理解电场强度、电位移矢量、电位、极化等概念。掌握静电场基本方程和边界条件。掌握电位的边值问题及其解法。熟练掌握电场、电位、电容、电场力等的各种计算方法。

2.1 静态场基本方程与场的特性

当电磁场中的源量（电荷或电流）不随时间而变化，电场或磁场的场量也不随时间变化——静态场。

静态场麦克斯韦方程积分形式

$$\oint_l \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s}$$

$$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \int_V \rho dv$$

$$\oint_l \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s} + \cancel{\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \bullet d\vec{s} + \int_S \rho \vec{v} \bullet d\vec{s}$$

$$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\cancel{\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \bullet d\vec{s}$$

$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \sum q = \int_V \rho dv$$

静态场麦克斯韦方程微分形式

$$\nabla \times \vec{H} = \left.\begin{matrix} \vec{J}_c \\ \vec{J}_V \end{matrix}\right\}$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left.\begin{matrix} \vec{J}_c \\ \vec{J}_V \end{matrix}\right\} + \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \cancel{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

电场和磁场之间没有相互耦合关系，可分别进行讨论。

静电场是相对观察者静止且量值不随时间变化的电荷所产生的电场。没有磁效应，仅有电场。

2.1.1 静电场的基本方程及性质

1. 麦克斯韦方程　　积分形式　　微分形式

- 基本方程

$$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = q = \int_V \rho dv \qquad \nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

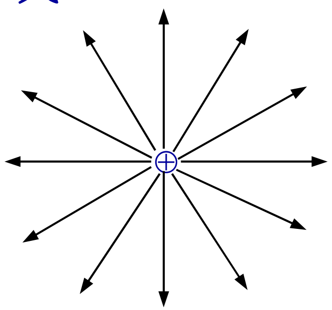
媒质方程

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

2. 静电场的有散性

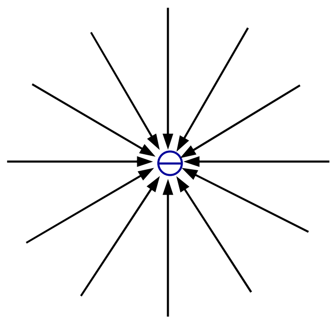
$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \int_V \rho dv \qquad \nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

静电场的有散性表示其通量源场的性质，源为正电荷，负电荷或**0**。



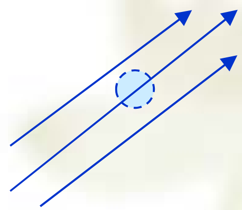
正电荷

炎 $\vec{D} = r > 0$



负电荷

炎 $\vec{D} = r < 0$



炎 $\vec{D} = r = 0$

3. 静电场的无旋性

- 无旋性（保守场）

$$\oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} \equiv 0$$

（1）静电场中，电场强度沿任意闭合路径的线积分恒等于零。电场强度矢量的环量恒等于零。

（2） 静电场是无旋场，静电场的电场线是不可能闭合的，而且也不可能相交。

（3）$\vec{E}$ 的线积分与积分路径无关。真空中的静电场和重力场一样，是保守场或位场。

2.2 自由空间中的电场

掌握求解场量的分析计算方法：

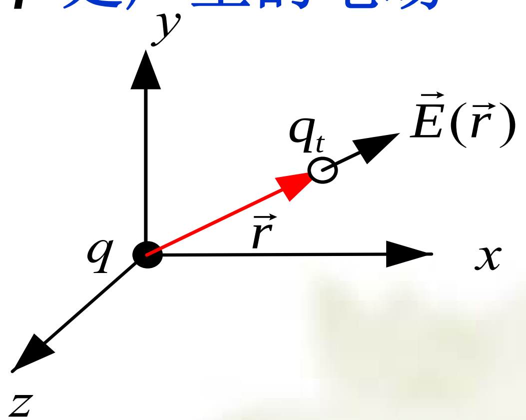
已知源量——求电场强度——求电位

已知源量——求电位——求电场强度

2.2.2 自由空间中的$\vec{E}(\vec{r})$

1. $\vec{E}(\vec{r})$的表达式——用电荷表示

- 当点电荷位于原点时，其在空间$\vec{r}$处产生的电场

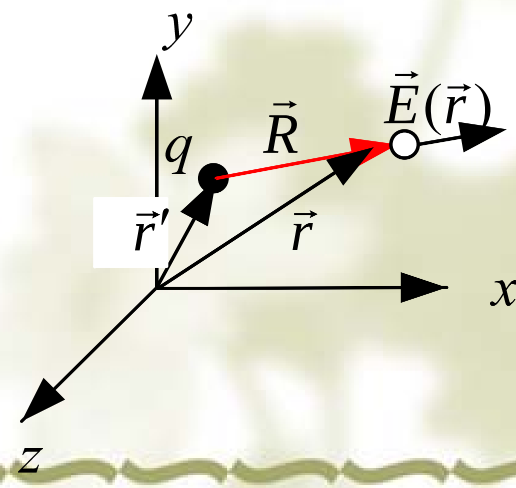


库仑定理

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_t \to 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

- 当点电荷位于任意位置$\vec{r}'$处，其在空间$\vec{r}$处产生的电场

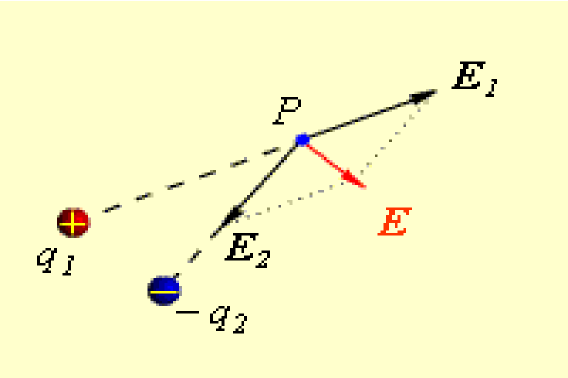
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^2}\vec{e}_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_R$$



(a)单个点电荷产生的电场强度

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_R \qquad \text{V/m}$$

(b)$\boldsymbol{n}$个点电荷产生的电场强度（ 矢量叠加原理 ）



$$\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\boldsymbol{q}_k}{\boldsymbol{R}_k{}^2}\vec{\boldsymbol{e}}_r$$

(c)连续分布电荷产生的电场强度

元电荷产生的电场

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{4\pi\varepsilon_0\boldsymbol{R}^2}\vec{\boldsymbol{e}}_R$$

体电荷分布 $$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}'}{\boldsymbol{R}^2}\vec{\boldsymbol{e}}_R$$

面电荷分布 $$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{\boldsymbol{R}^2}\vec{\boldsymbol{e}}_R$$

线电荷分布 $$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{\boldsymbol{R}^2}\vec{\boldsymbol{e}}_R$$

2. 电场强度$\vec{E}(\vec{r})$的计算——根据电荷分布计算

元电荷产生的电场

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{R}^2}\vec{\boldsymbol{e}}_R$$

体电荷分布 $$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho \mathrm{d}V'}{\boldsymbol{R}^2}\vec{\boldsymbol{e}}_R$$

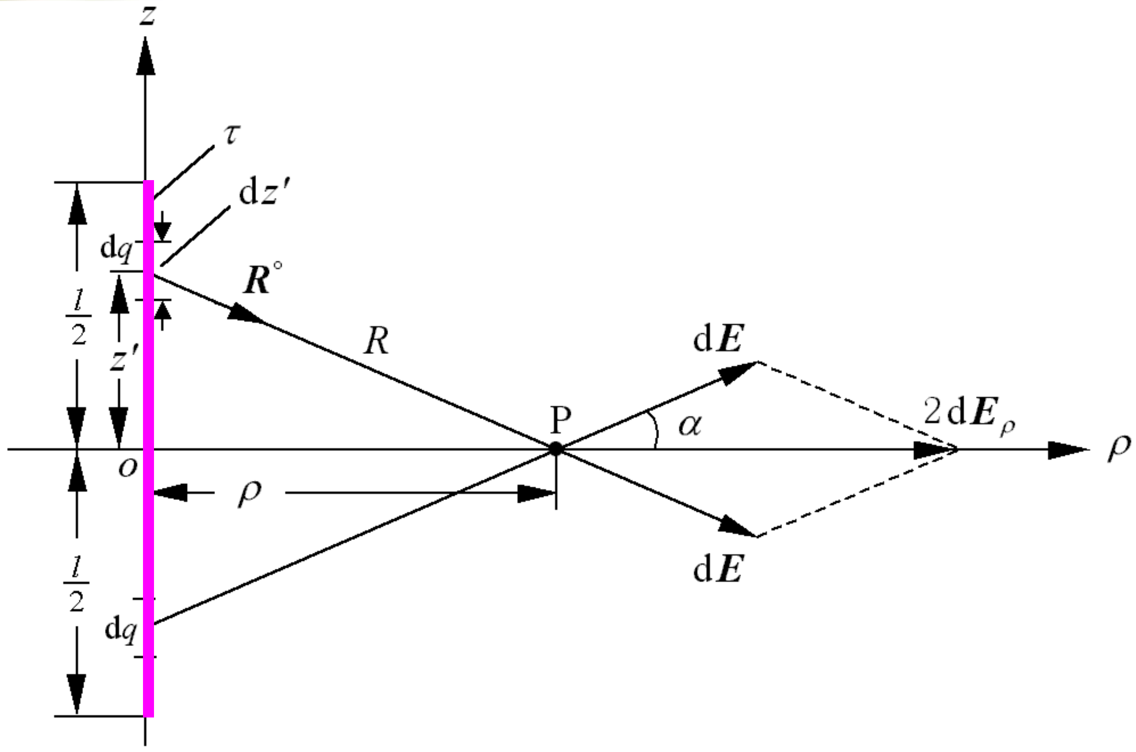
面电荷分布 $$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma \mathrm{d}S'}{\boldsymbol{R}^2}\vec{\boldsymbol{e}}_R$$

线电荷分布 $$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau \mathrm{d}l'}{\boldsymbol{R}^2}\vec{\boldsymbol{e}}_R$$

连续分布电荷的电场，按 $\vec{E}(\vec{r})$ 直接计算式——矢量积分关系式。

计算时，先将其化为三个标量积分关系，分别进行，然后再合成标量解答为最终解。

例1：真空中有限长直线段l上均匀分布有线电荷密度为 τ 的电荷，如图所示，求线外中垂面上任意场点P处的电场强度。

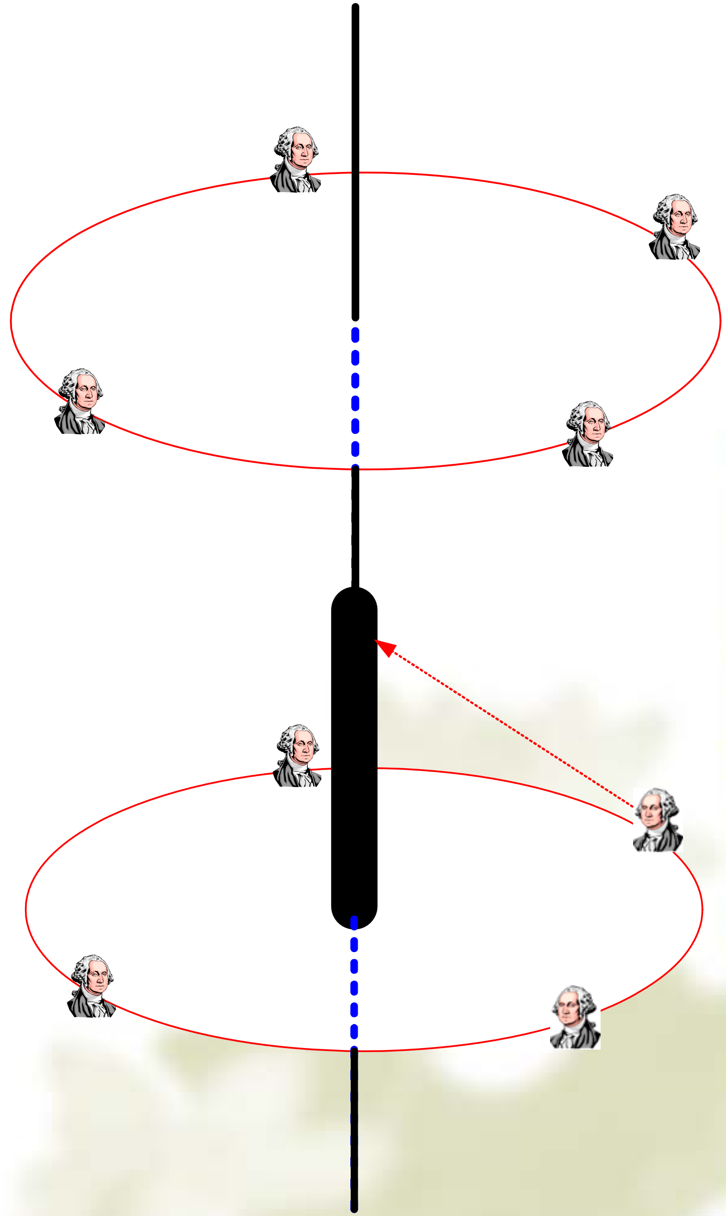


分析

站在ϕ为任意值的同心圆上，
源分布的“特征”一样

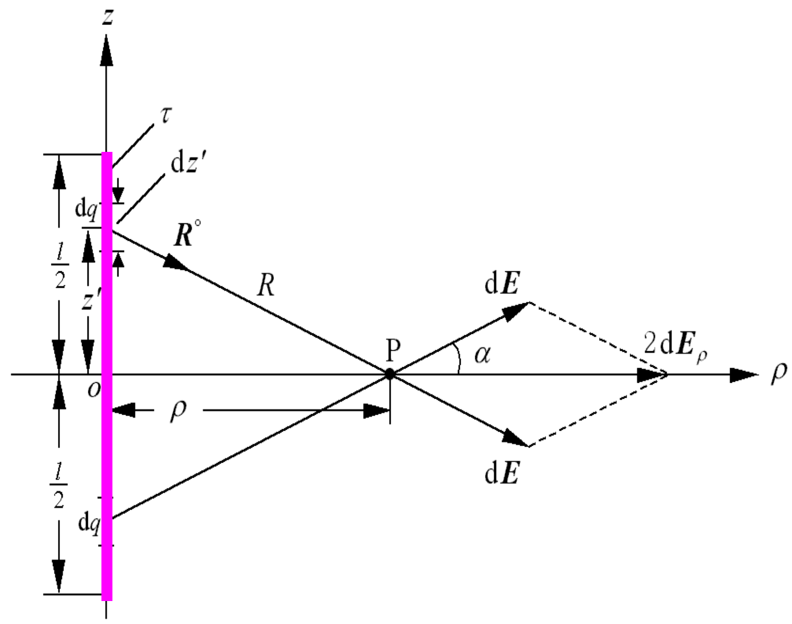
轴对称

E与ϕ无关，且 $\vec{E}_\phi = 0$



分析

考虑在z'处取元电荷$\mathrm{d}q=\tau\,\mathrm{d}z'$，同时在$-z'$处也取一对应的元电荷$\mathrm{d}q$。两元电荷在 ρ 轴上任意点$P(\rho，0，0)$处所引起的电场强度的z向分量互相抵消，ρ 向分量则互相增强，合成场强必有$E_z=0$。



最终只有$E=E_\rho$

计算 $\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \mathrm{d}E\cos\alpha = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\tau\mathrm{d}z'}{R^2}\cos\alpha = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\tau\mathrm{d}z'}{\left(\rho^2+z'^2\right)^2}\dfrac{\rho}{\sqrt{\left(\rho^2+z'^2\right)}}$

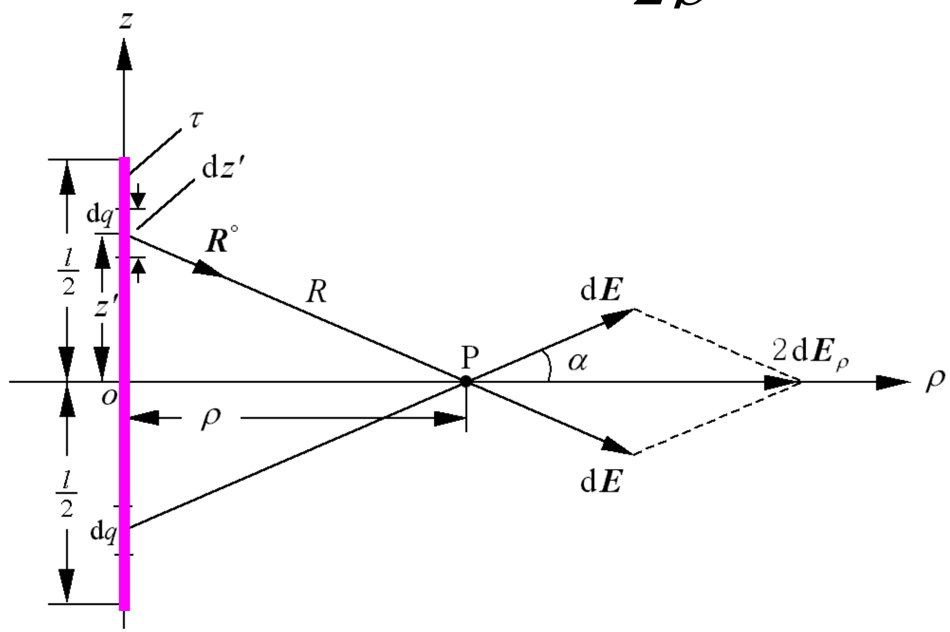
$$E_{\mathrm{p}}(\rho,0,0) = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dE_p = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\rho}{\left(\rho^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z' \quad \boxed{= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\rho\mathrm{d}z'}{\left(\rho^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

变量代换：$z' = \rho\mathrm{tg}\alpha,\ \mathrm{d}z' = \rho\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha \quad \alpha_0 = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{l}{2\rho}$

$$\vec{E}_{\mathrm{p}}(\rho,0,0)$$

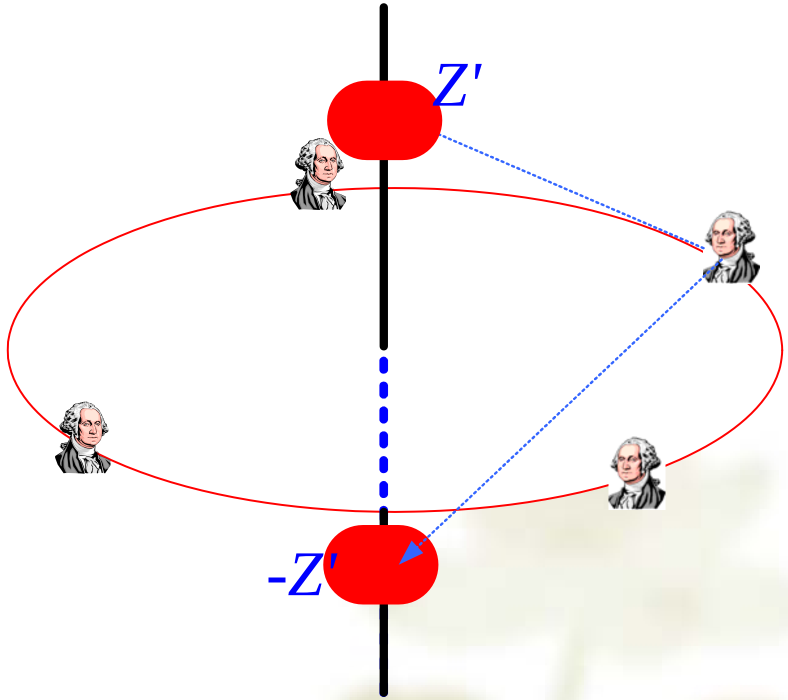
$$= 2\cdot\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}\int_0^{\alpha_0}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\vec{e}_\rho$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\sin\alpha_0\,\vec{e}_\rho$$



小结：解题的一般过程

按一般原则—先“分”后“合”，即：先计算元电荷产生的元电场，应用库仑定律给出元电荷产生元电场强度的三个分量，然后再对整个源积分，得到源产生的合成场.



讨论： $\vec{E}_p(\rho,0,0)=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\sin\alpha_0\,\vec{e}_\rho$ $\qquad \alpha_0=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{l}{2\rho}$

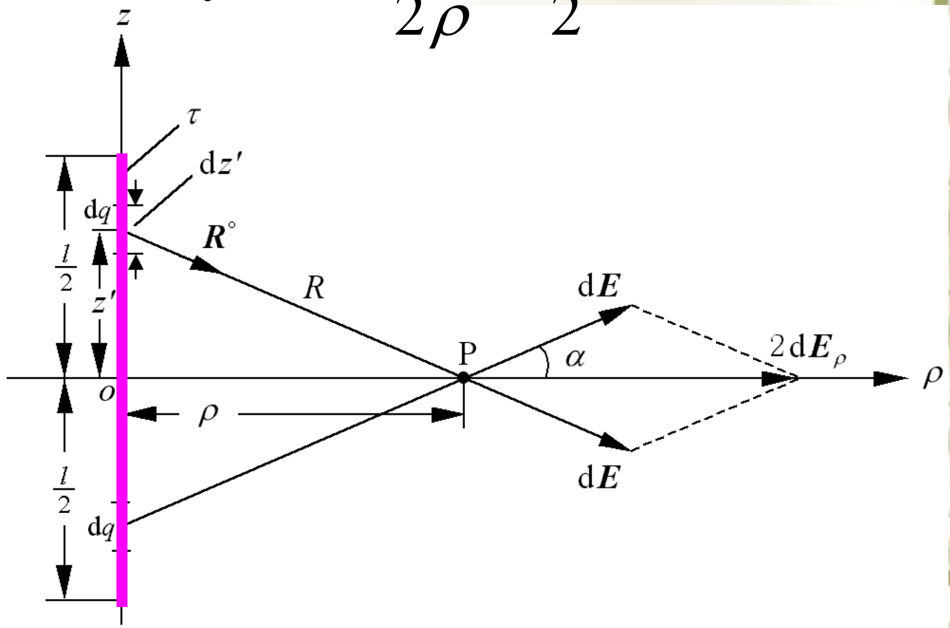
(1) 当 $\dfrac{l}{2\rho}<<1$ 时，l 很小或 ρ 很大，则 $\sin\alpha_0\approx\dfrac{l}{2\rho}$

$$\vec{\mathbf{E}}_p=\frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}\vec{e}_\rho$$

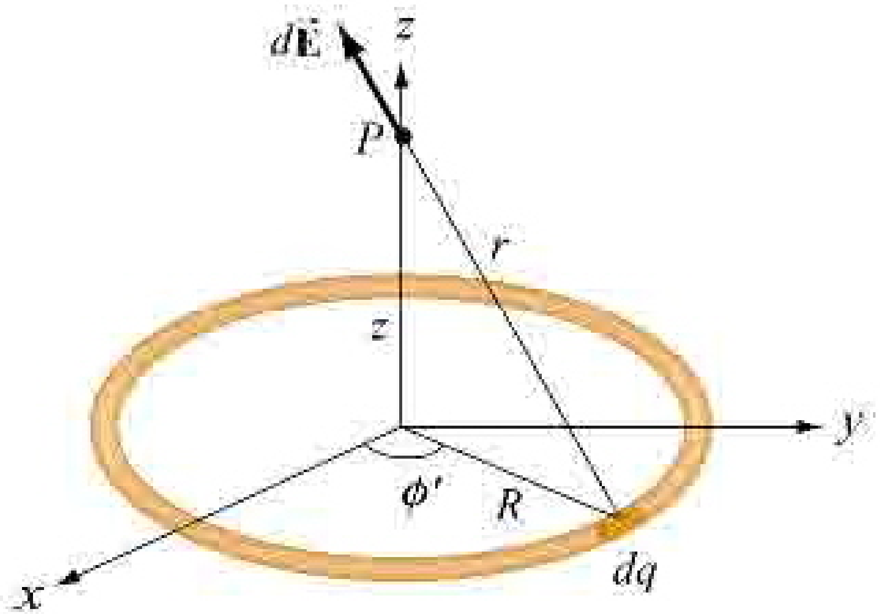
相当于点电荷τ*l* 产生的电场。短线电荷的远场(ρ>> *l*)效应等同于点电荷。

(2) 如果是无限长直导线，$\dfrac{l}{2\rho}>>1$，$\alpha_0=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{l}{2\rho}\approx\dfrac{\pi}{2}$

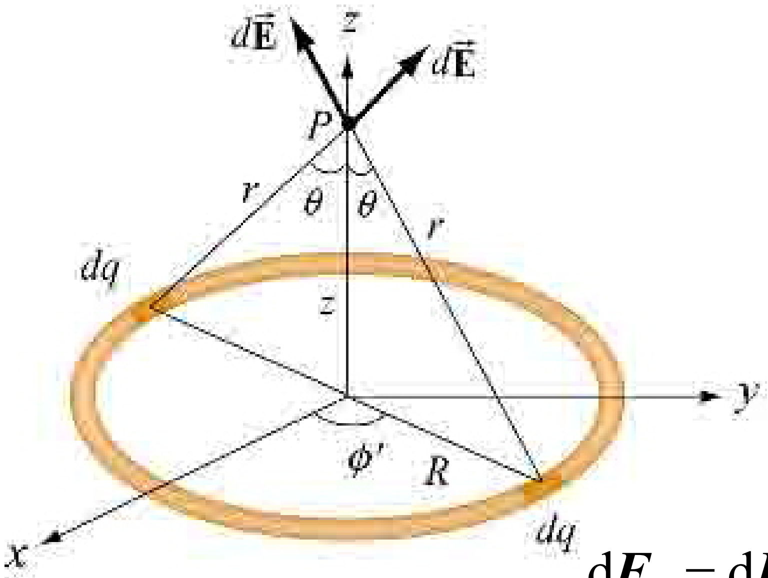
$$\vec{\mathbf{E}}_p=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{e}_\rho$$



例2：如图所示，半径为*R*、带有均匀分布的电荷**Q**（线密度为τ 库仑/米）的非导电圆环置于*xoy*平面上 。试计算圆环轴线*z*上任一点的电场强度。



例2:



解:分析题意,取一小段长度元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$

则环上的元电荷 $\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \tau \mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \tau \boldsymbol{R}\mathrm{d}\phi'$

则任一点P的电场:

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{4\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{r}^2}\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\tau \mathrm{R}\mathrm{d}\phi'}{4\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{r}^2}\vec{\boldsymbol{r}}$$

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau \mathrm{R}\mathrm{d}\phi'}{R^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{R}z\mathrm{d}\phi'}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

分析:对称性

—仅有z分量

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{R}z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\oint \mathrm{d}\phi' = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi \mathrm{R}z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

2.2.1&2.2.3 自由空间中的位函数φ

1. 标量电位函数 $\varphi(\vec{r})$ 定义

基于亥姆霍兹定理，可知

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) + \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\bullet\vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' = 0$$

（$\nabla\times\vec{E} = 0$）

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$$

静电场中任一点电场强度等于该点电位梯度的负值。

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}V'$$

对于不同的电荷分布，其相应的元电荷为

$$\mathrm{d}q = \rho\mathrm{d}V' = \sigma\mathrm{d}S' = \tau\mathrm{d}l'$$

相应的 $\varphi(\vec{r})$ 的计算式为

$$\rho(\vec{r}\,') \qquad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv'$$

$$\sigma(\vec{r}\,') \qquad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}S'$$

$$\tau(\vec{r}\,') \qquad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}l'$$

2. 电位与电场力作功之间的关系

根据电场强度的定义，试验电荷q_t在电场中受到的力为

$$f = q_t \vec{E}$$

将电荷q_t从点 P 移动到 Q 点电场力所作的功为

$$W = q_t \int_P^Q \vec{E} \bullet d\vec{l} = q_t \int_P^Q (-\nabla \varphi) \bullet d\vec{l} = q_t (\varphi_P - \varphi_Q)$$

$$\varphi_P - \varphi_Q = \frac{W}{q_t} = \int_P^Q \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$\nabla \varphi = \frac{d\varphi}{d\vec{l}}$$

静电场中任意两点间的电位差，等于在该两点间移动单位正电荷电场力所作的功。

3. 电位的参考点

既然电场力作功可以用电场中的两点电位差来表示，那么就需要规定一个所有电位的参考点Q（零电位）。

电位的参考点Q 确定后，任一场点 P 处的电位为

$$\varphi_P(\vec{r}) = \int_P^Q \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

电位参考点可以任意选取，在理论分析中，通常选择无穷远处为电位的参考点，则任意点P的电位为

$$\varphi_P(\vec{r}) = \int_P^\infty \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} \qquad \varphi_\infty = 0$$

工程上，以大地表面为电位参考面

$$\varphi_{大地} = 0$$

4. 标量电位函数的计算

（1）根据电荷分布计算电位

相应的 $\varphi(\vec{r})$ 的计算式为

$\rho(\vec{r}')$ $$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

$\sigma(\vec{r}')$ $$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}S'$$

$\tau(\vec{r}')$ $$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}l'$$

（2）电位函数由电场强度积分获得

• 当点电荷位于坐标原点时，其在空间 $\vec{r}$ 处产生的电场为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = -\nabla\varphi$$

$$\nabla\varphi = \vec{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} + \vec{e}_\phi \frac{\partial\varphi}{r\sin\theta\partial\phi}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

以无穷远点为电位的参考点

$$\varphi_\infty = 0$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- 任意的点电荷系统在空间点$\vec{r}$ 处产生的电位为

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k{}'|}$$

$\vec{r}_k{}'$ 第***k*** 个点电荷系统在空间的位置矢量

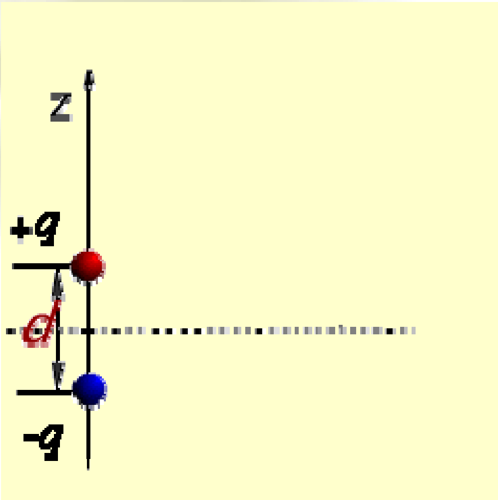
5. 标量电位函数的应用

通过标量电位函数的梯度运算得到电场强度

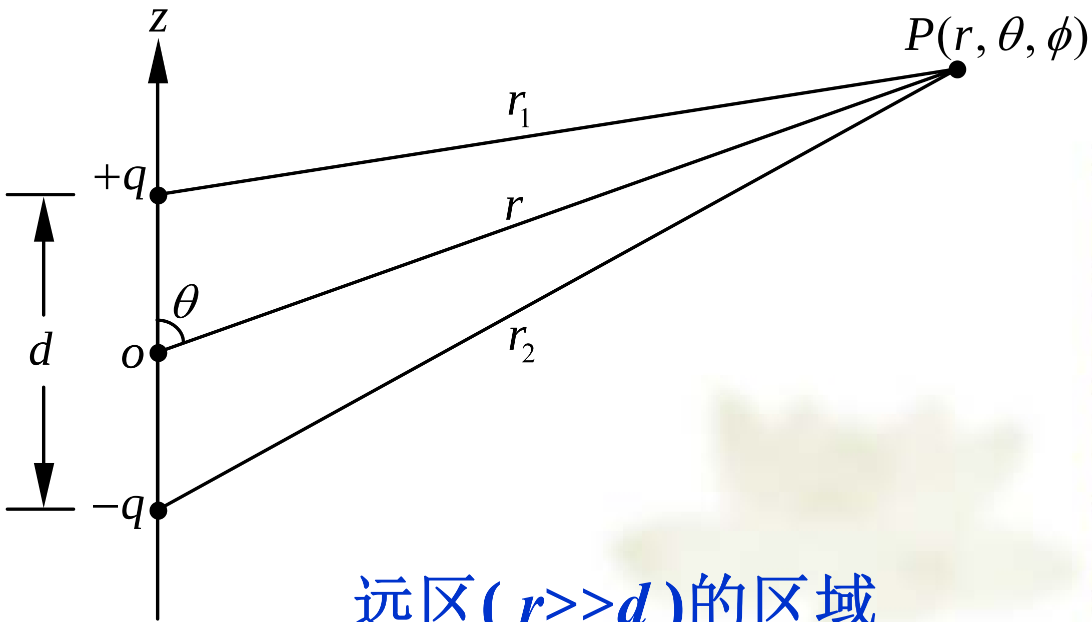
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$$

将直接求$\vec{E}(\vec{r})$的矢量积分转化为先求$\varphi(\vec{r})$标量积分，再求微分，计算简便。

电偶极子——一对等量异号的点电荷，间隔距离d 很小，组成的场源系统。



电偶极子

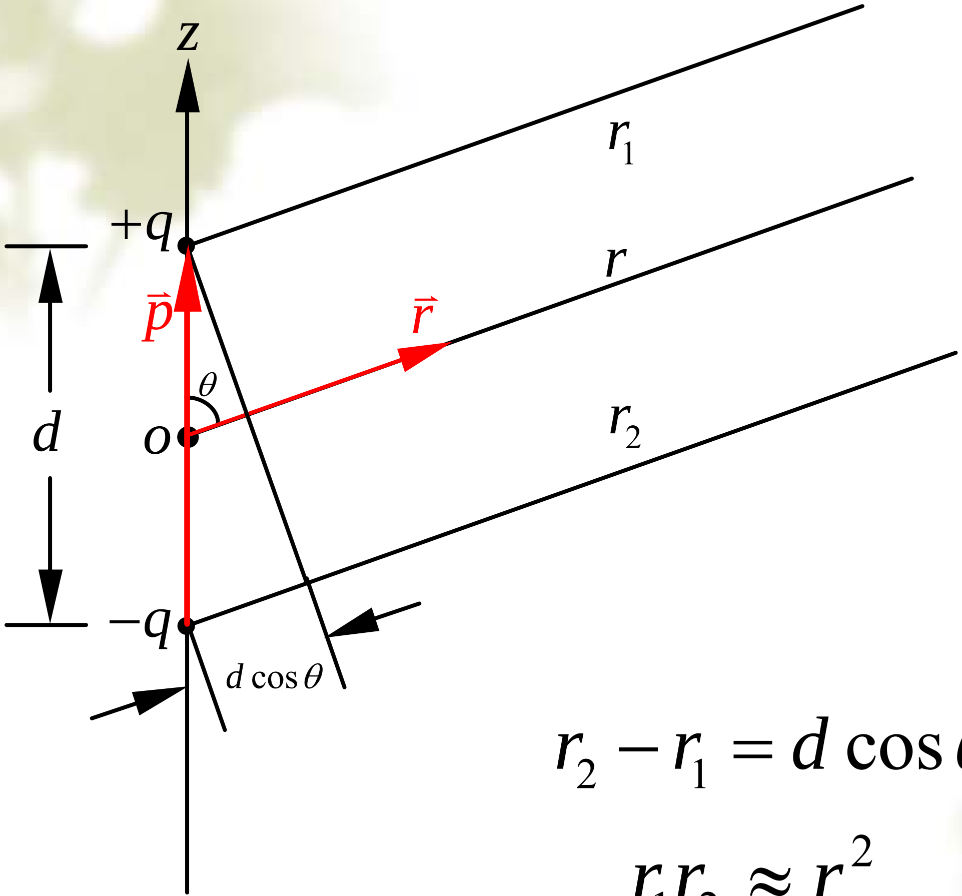


远区($r>>d$)的区域

定义电偶极矩　$\vec{p}=q\vec{d}$

d的方向由负电荷指向正电荷

例3 计算电偶极子的电场强度。



选坐标：轴对称场

$$\varphi_P(r,\theta,\phi)=\varphi_P(r,\theta)$$

$$\varphi_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}\right)$$

$$=\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{p}\bullet\vec{e}_r}{r^2}$$

$$r_2-r_1=d\cos\theta$$

$$r_1r_2\approx r^2$$

定义电偶极矩 $\vec{p}=q\vec{d}$

利用关系式 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ ， $\varphi_P(\vec{r}) = \varphi_P(r,\theta) = \dfrac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

求得电偶极子的电场强度为：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right)$$

$$= E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\nabla\varphi = \vec{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} + \vec{e}_\phi\frac{\partial\varphi}{r\sin\theta\partial\phi}$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta\right)$$

- 电偶极子远区的特征是：

$$\varphi \propto \frac{1}{r^2} \qquad E \propto \frac{1}{r^3}$$

电偶极子的电位与距离平方成反比，电场强度的大小与距离的三次方成反比。而且两者均与方位角 θ 有关。这些特点与点电荷显著不同。

总结计算静电场强度的方法：

1. 直接根据电荷分布计算电场强度

2. 通过电位求出电场强度

3. 利用高斯定理计算电场强度

应用高斯定律求电场

高斯定律适用于具有一定对称性的场。

计算技巧：

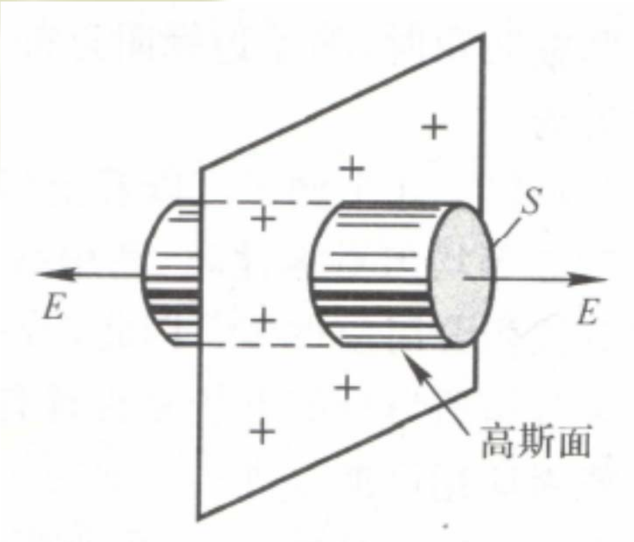
a）分析场分布的对称性，判断能否用高斯定律求解。

b）选择适当的闭合面作为高斯面，使$\oint_S \vec{\boldsymbol{D}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$

中的 $\boldsymbol{D}$ 可作为常数提出积分号外。

高斯定理应用示例——带电平板

例1　试求面电荷密度为σ的无限大带电平板的电场。



取高斯面为圆柱体，则有

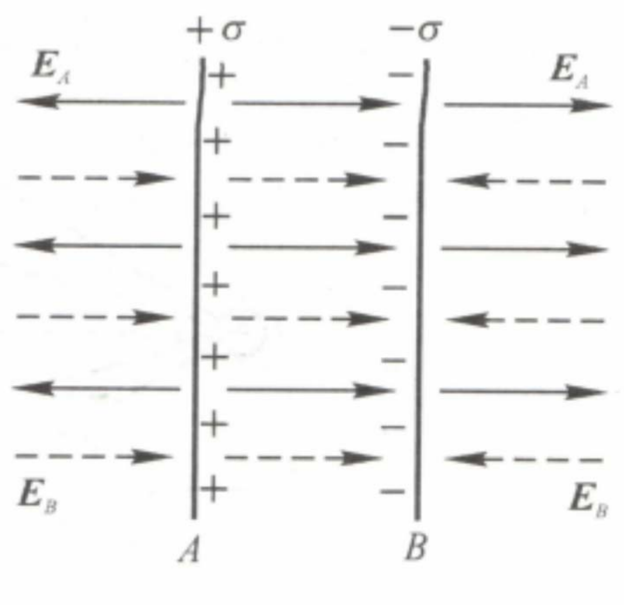
$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = ES + ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad D = \frac{\sigma}{2}$$

方向：平面向外

高斯定理应用示例——平行平面电场

例2 平行平面电场—平行板电容器—忽略边缘效应，设极板面电荷密度大小为σ，求其内部电场。



根据例1结果，得在两板内侧的场强为：

$$E_A + E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

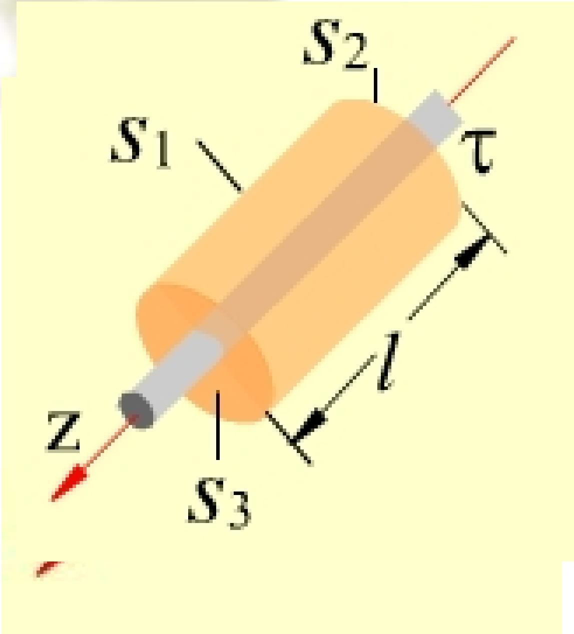
$$D = \sigma$$

在两板外侧的场强为：

$$E_A - E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$$

高斯定理应用示例——轴对称长线

例3　试求电荷线密度为 τ 的无限长均匀带电体的电场。



无限长均匀带电体

解：　分析场分布，取圆柱坐标系

由　$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} D\cdot \mathrm{d}S = \tau L$$

得　$$D\cdot 2\pi\rho L = \tau L$$

$$\vec{D} = \frac{\tau}{2\pi\rho}\vec{e}_\rho$$

$$E = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{e}_\rho$$

■ 高斯定理应用示例—— 球对称场

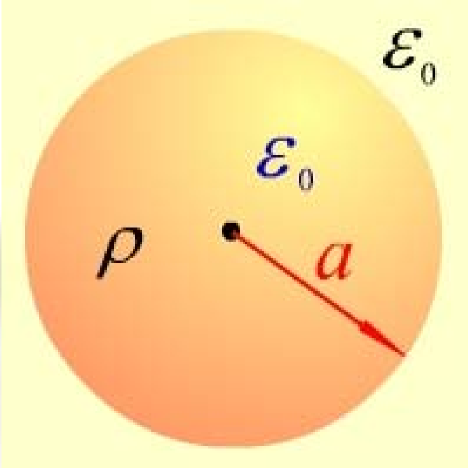
例4 设空气中有一球半径为a的均匀带电（呈体电荷密度分布 $\rho(\vec{r}') = \rho_0 = \text{const}$）球体。球内外介电常数均为$\varepsilon_0$。试求：

（1）球内外的电场强度 $\vec{E}(\vec{r})$

（2）该电荷分布所给定的静电场的旋度和散度

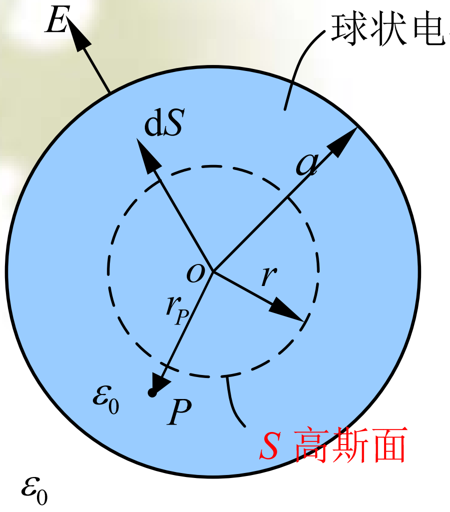
（3）球内外的电位分布 $\varphi(\vec{r})$

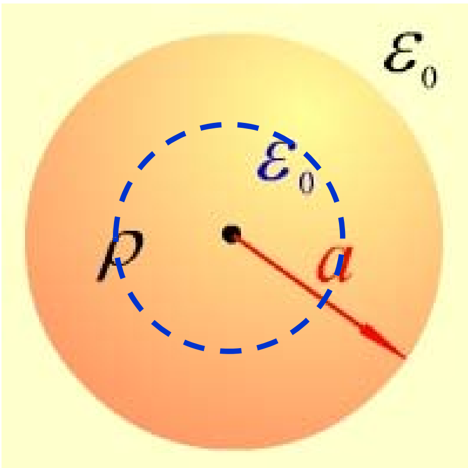
（4）画出球内外E、φ随r变化的分布图



体电荷分布的球体

(1) 球内外的电场强度：





体电荷分布的球体

1） *r* <*a*—包围的电荷，与半径有关

$$\oint_S \vec{E}_1 \bullet d\vec{S} = \oint_S E_1 dS = E_1 \oint_S dS$$

$$= E_1 \cdot 4\pi r^2$$

$$= \frac{\int_{V'} \rho dV'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r \qquad (r<a)$$

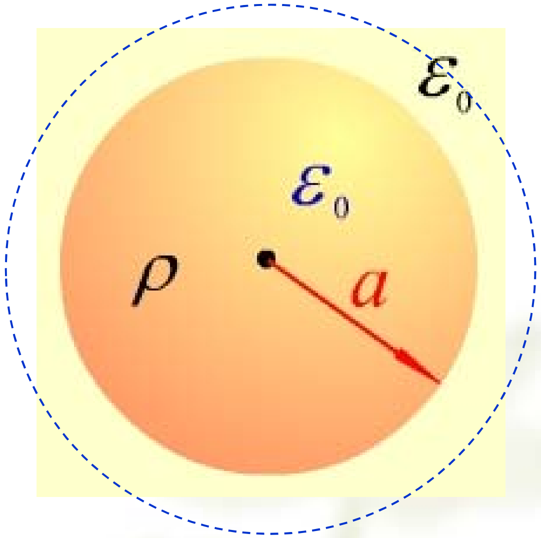
2）*r>a* –包围的电荷与半径无关

$$\oint_S \vec{E}_2 \bullet \mathrm{d}\vec{S} = E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \qquad (\, r>a \,)$$

$$Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$$

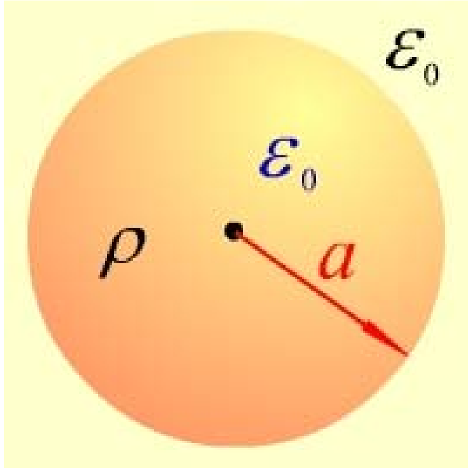
$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \qquad (\, r>a \,)$$



体电荷分布的球体

综合，球体内外产生的电场强度为：

$$\vec{E}(\vec{r})=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r & (r<a)\\[2ex] \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & (r>a)\end{cases}$$



体电荷分布的球体

（2）电场强度的旋度

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r \vec{e}_r$$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \vec{e}_\phi = 0 \qquad (r \geq 0 \quad 全空间)$$

无旋

（3）电场强度的散度

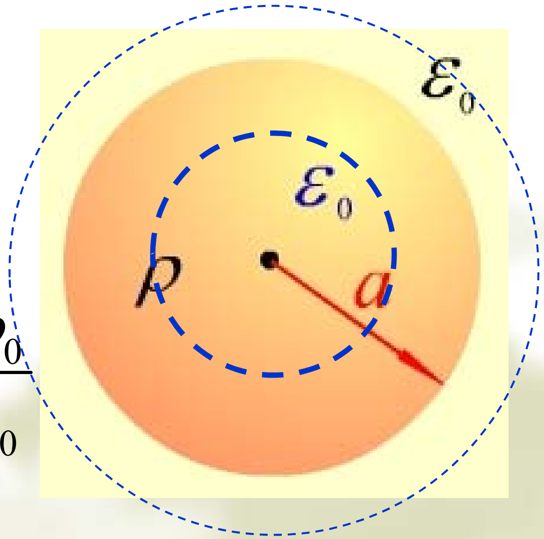
$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r \vec{e}_r$$

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r}$$

有源

当$r < a$ 时 $$\nabla \bullet \vec{E}_1 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

当$r>a$ 时 $$\nabla \bullet \vec{E}_2 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2} \right) = 0$$



体电荷分布的球体

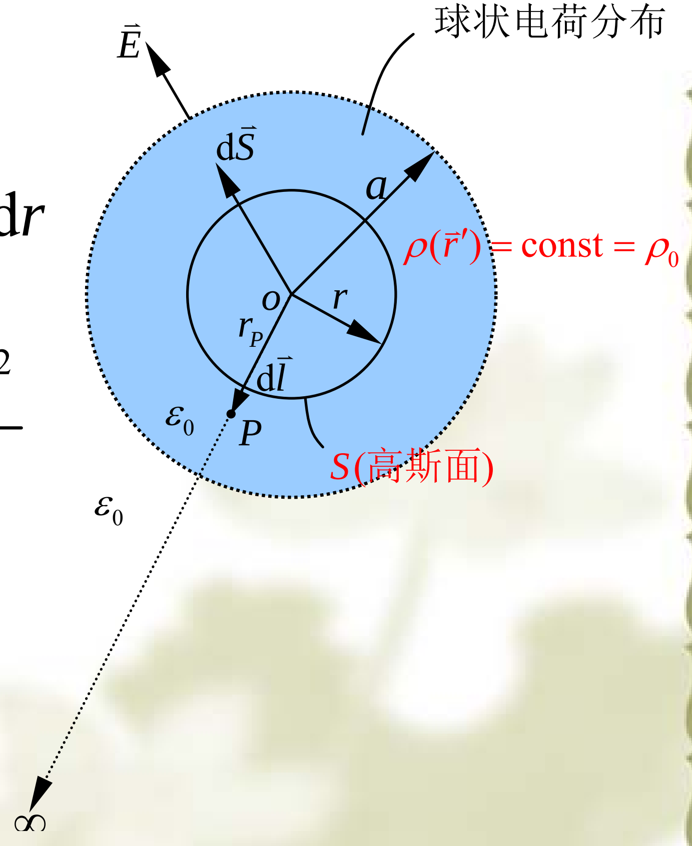
(4) 电位

以无穷远处为电位参考点（$\varphi_\infty = 0$），$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e}_r$

a. $r<a$

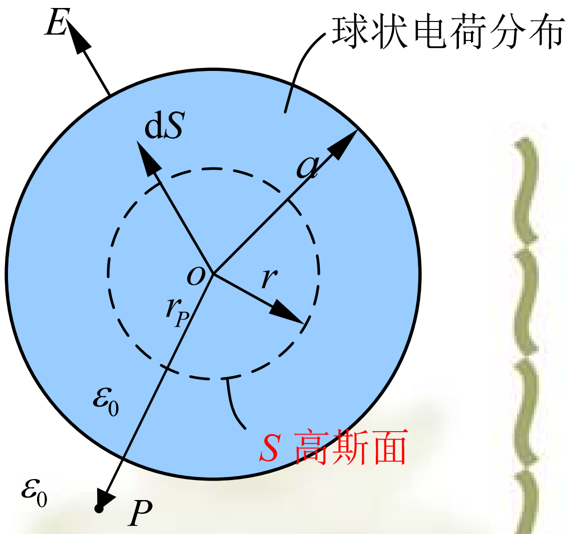
$$\varphi_P(\vec{r}) = \int_P^\infty \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_{r_P}^{a} \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}(a^2 - r_P{}^2) + \frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 r_P{}^2}{6\varepsilon_0}$$



b. $r>a$

$$\varphi_{P_2}(\vec{r}) = \int_P^{\infty} \vec{E}_2 \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^{\infty} E_2 \mathrm{d}r = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r_P}$$

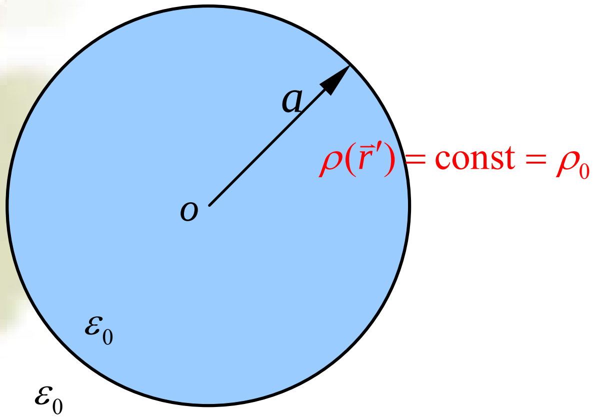


$$\varphi_{P_2}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_P} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r_P} \qquad Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$$

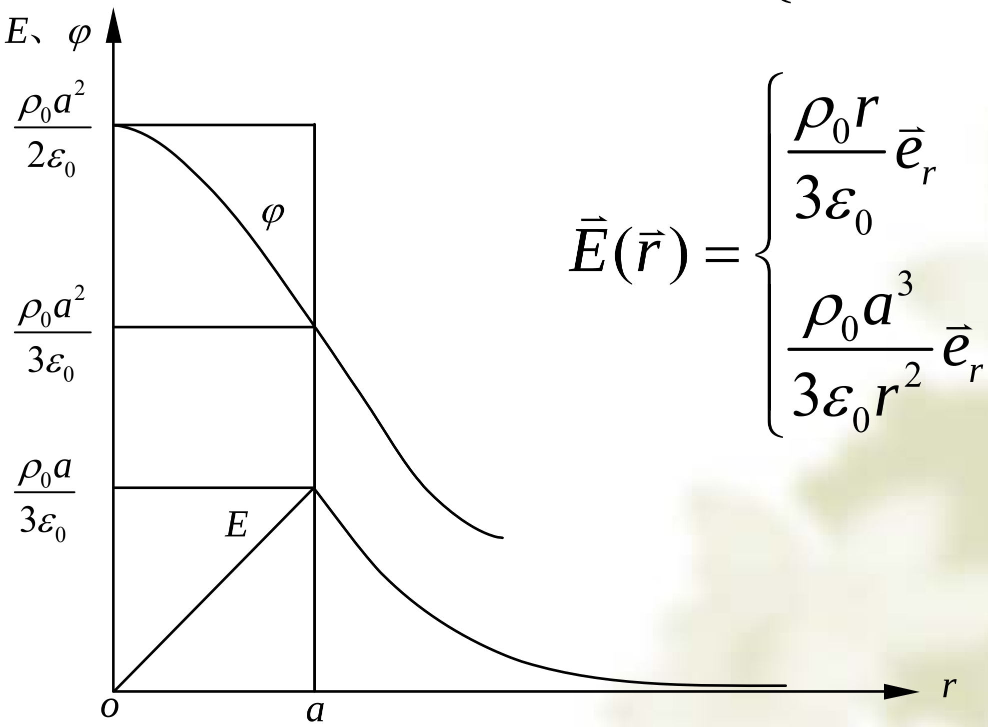
以无穷远处为电位参考点（$\boldsymbol{\varphi_\infty = 0}$），$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e}_r$

$$\varphi_P(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} & (r < a) \\[2ex] \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$

■ 作图



$$\varphi_P(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} & (r < a) \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r} & (r > a) \end{cases}$$



随 r 变化曲线

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r & (r < a) \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & (r > a) \end{cases}$$

作业： 2-1，2-2，2-3