- **3.6 电感（Inductance）**
- **3.7 磁场能量**
- **3.8 磁场力**

3.6 电感（Inductance）

1. 定义

电感(自感*L*和互感*M*)：描述一个电路或两个相邻电路间因电流变化而感生电动势效应的物理参数。

$$u_L = \frac{\mathrm{d}\psi_L}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad u_M = \frac{\mathrm{d}\psi_M}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}i_M}{\mathrm{d}t}$$

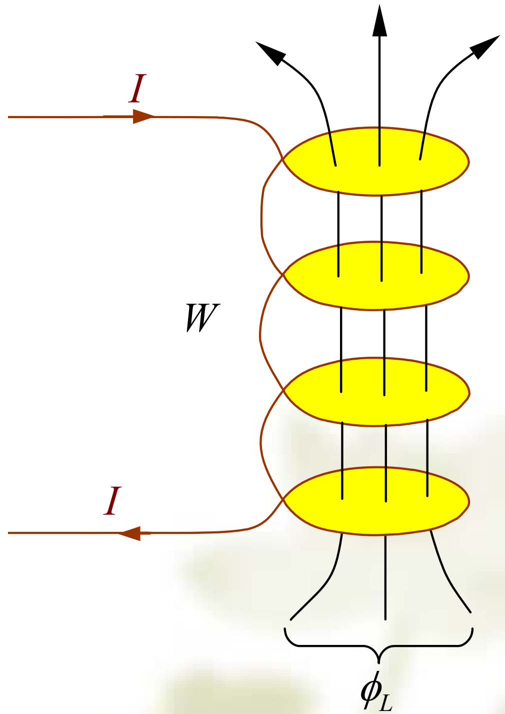
ψ 磁链：穿过线圈的磁通ϕ（wb）相应的磁力线与电流相交链的次数*W*（一般为匝数）的乘积 $\psi = W\phi$

磁通ϕ：穿过某一线圈的*B*通量 $\phi = \int B dS$

自感L(Self Inductance) ——本身电流引起的

A) 磁链与磁通关系：全交链

对应磁通ϕ的磁力线交链所有的电流回路—忽略匝间漏磁

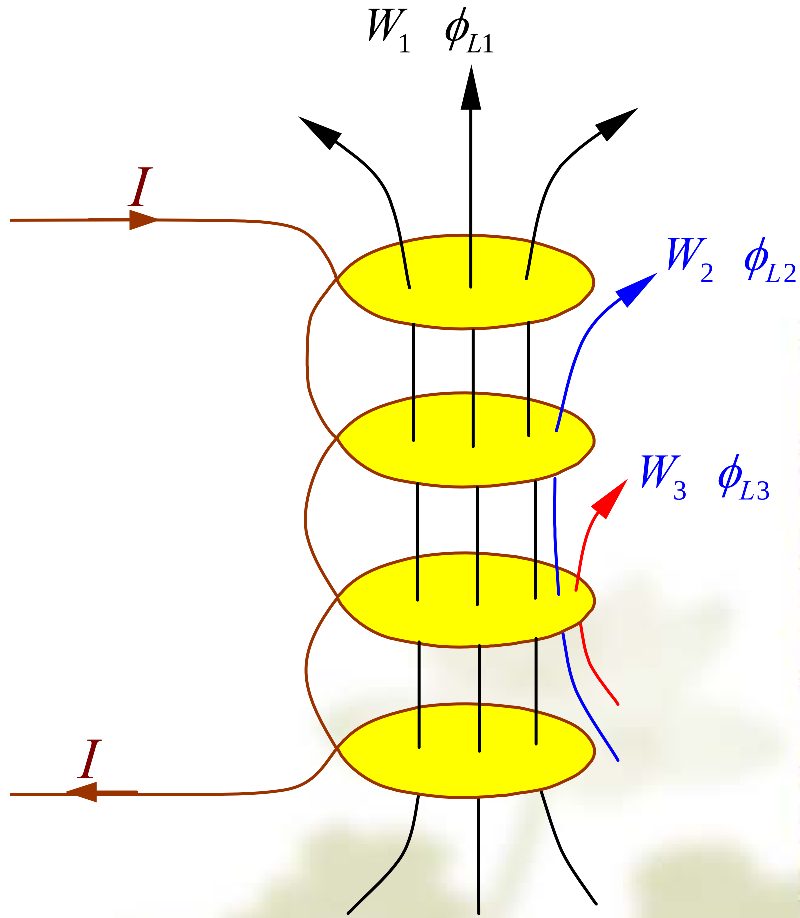


$$\psi_L = W\phi_L$$

$$L = \frac{\psi_L}{I} = \frac{W\phi_L}{I}$$

B)磁链与磁通关系：部分交链

对应磁通ϕ的磁力线交链部分电流回路—线匝间漏磁不可忽略



$$\psi_L = W_1\phi_{L1} + W_2\phi_{L2} + W_3\phi_{L3}$$

$$L = \frac{\psi_L}{I} = \frac{W_1\phi_{L1} + W_2\phi_{L2} + \cdots}{I}$$

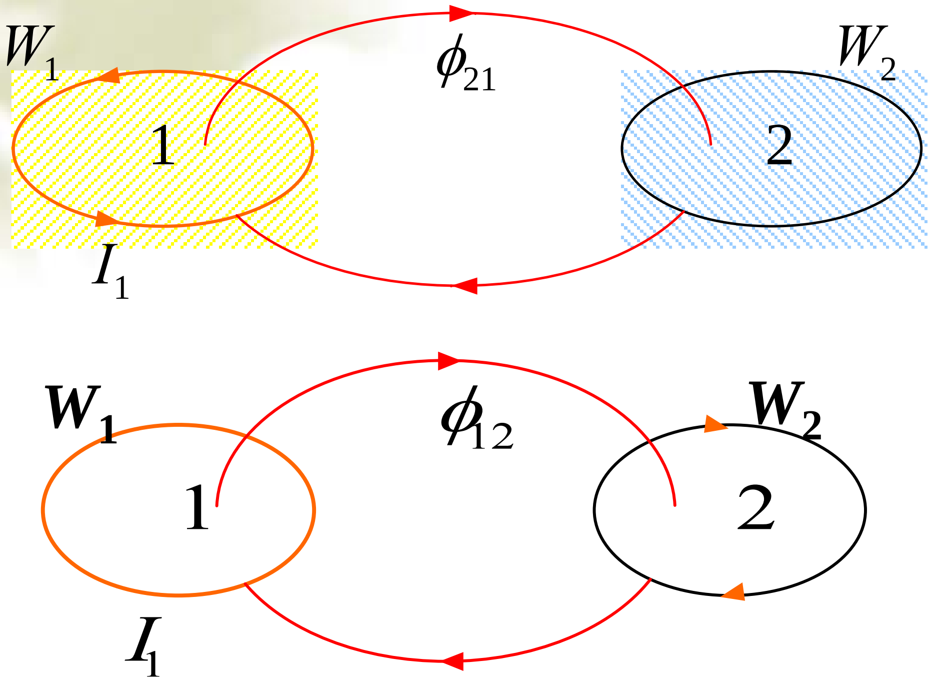
C) 非线性元件的电感 —动态电感

当场中含有铁磁媒质(媒质非线性)

$$L_{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d}\psi_L}{\mathrm{d}I}\Big|_{I=I_0}$$

动态自感或非线性元件在I_0处的工作电感

互感M (Mutual Inductance)—— 一个线圈电流在另一个线圈中引起磁链与电流的比值.



$$M=\frac{\psi_M}{I}$$

$$M_{21}=\frac{W_2\phi_{21}}{I_1}$$

$$M_{12}=\frac{W_1\phi_{12}}{I_2}$$

$$M_{21}=M_{12}$$

同样，对于铁磁物质，定义的动态互感为

$$M_d=\frac{d\psi_M}{dI}\Big|_{I=I_0}$$

动态互感或非线性元件在I_0处的工作互感

2. 电感和互感的计算

■ 根据定义计算

设定线圈中的电流 I

$$\nearrow \text{各类方法} \longrightarrow \vec{H}、\vec{B} \longrightarrow \phi = \int_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\searrow \begin{pmatrix} \text{1. B. V. P.} \\ \text{2. } \vec{A}\text{的特解} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{A} \longrightarrow \phi = \oint_l \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

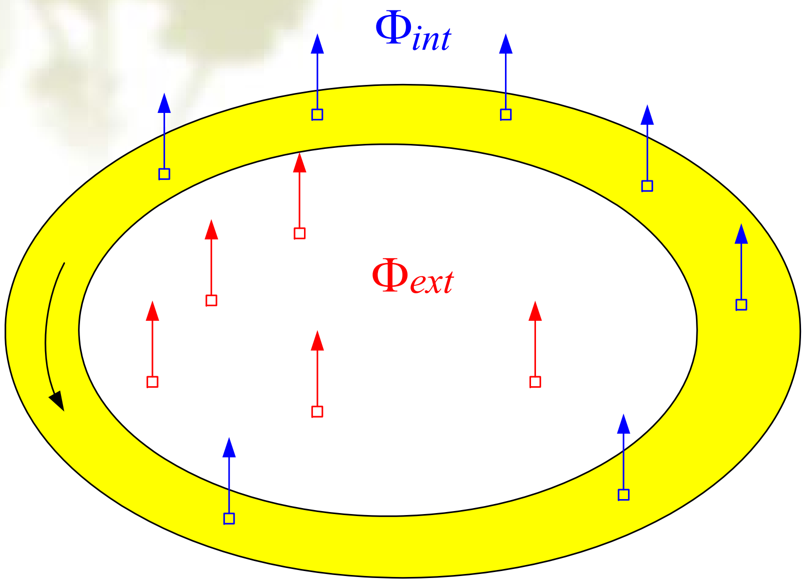
$$\longrightarrow$$

$$\phi_L(\phi_M) \xrightarrow{\times W} \psi_L(\psi_M) \longrightarrow L(M)$$

$$\phi = \int_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \bullet \mathrm{d}\vec{S} \overset{\text{S. T.}}{=\!=\!=} \oint_l \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$ **(了解)**

■ 内自感和外自感

当载流导体的横截面积不可忽略时，存在于载流导体内的磁场，也会对交链该载流回路的磁链有所贡献。



通过载流导线内部的磁通定义为内磁通.

通过载流回路其他部分的磁通定义为外磁通.

$$L_{ext} = \frac{\psi_{ext}}{I},\quad L_{\mathbf{int}} = \frac{\psi_{\mathbf{int}}}{I}$$

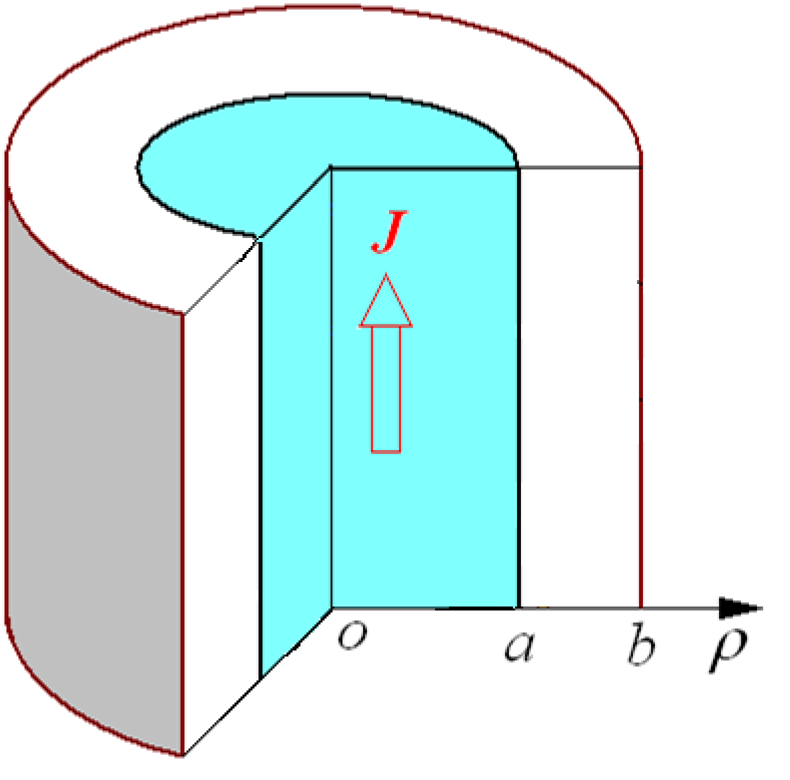
将回路的自感分为与内磁通对应的内自感和与外磁通对应的外自感两部分

$$L = L_{ext} + L_{\text{int}}$$

例1：计算长为l 的同轴电缆的电感L。

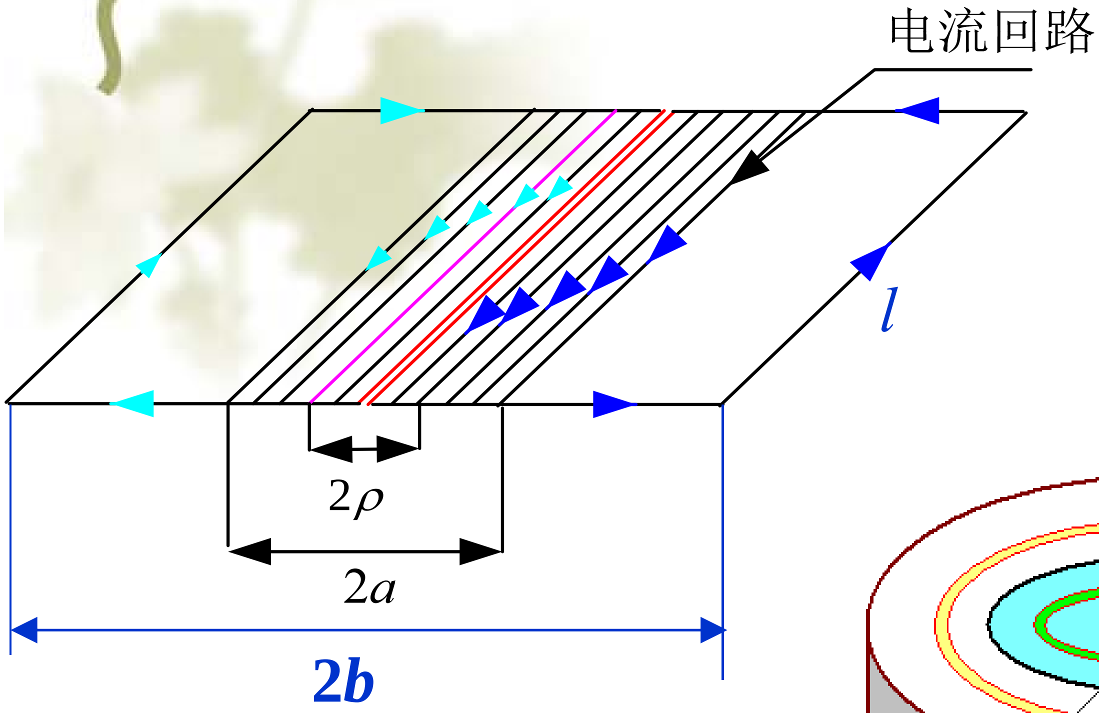
(电缆半径分别a,b忽略外壳厚度)

$l >> a , b$



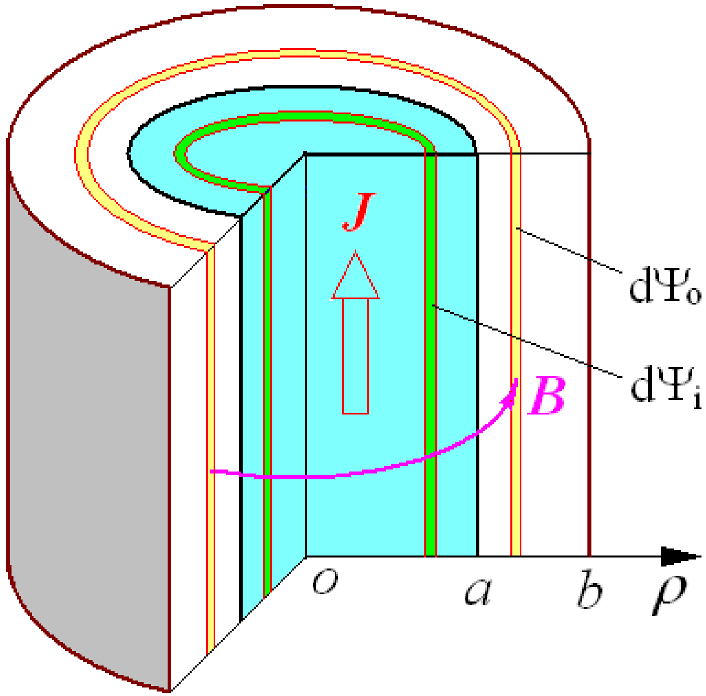
同轴电缆截面

场分布　　分析



1) 平形平面场，同时具有圆柱对称特征
2) 磁力线为与同轴电缆同心的圆，方向如左图

3）电流回路

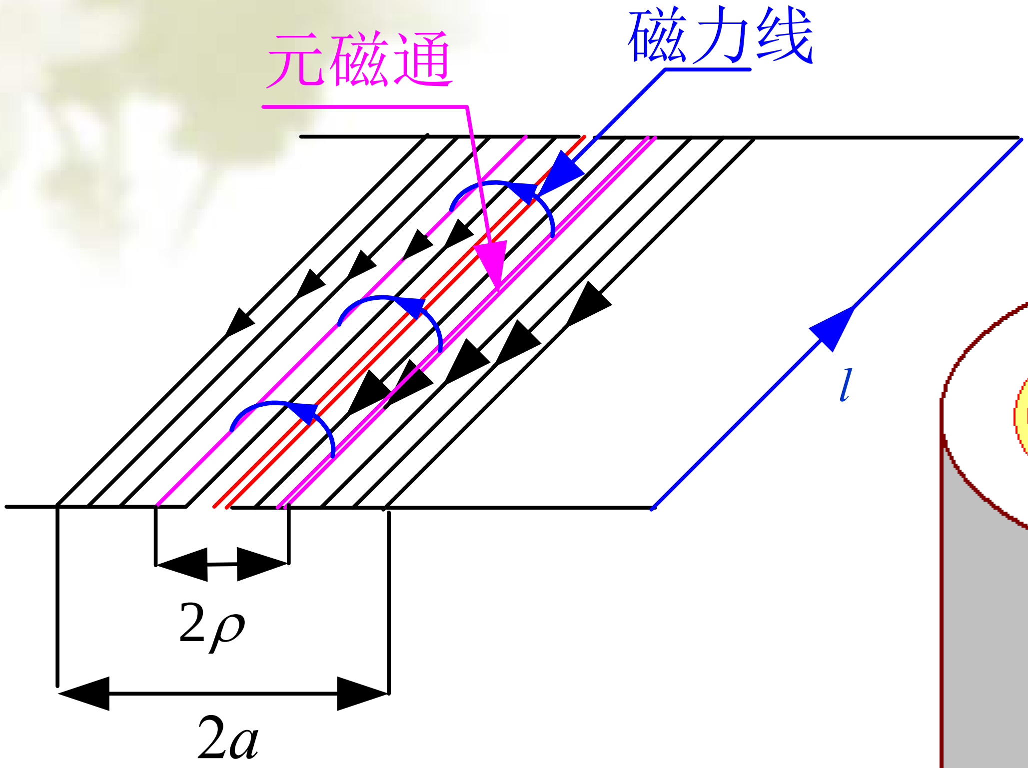


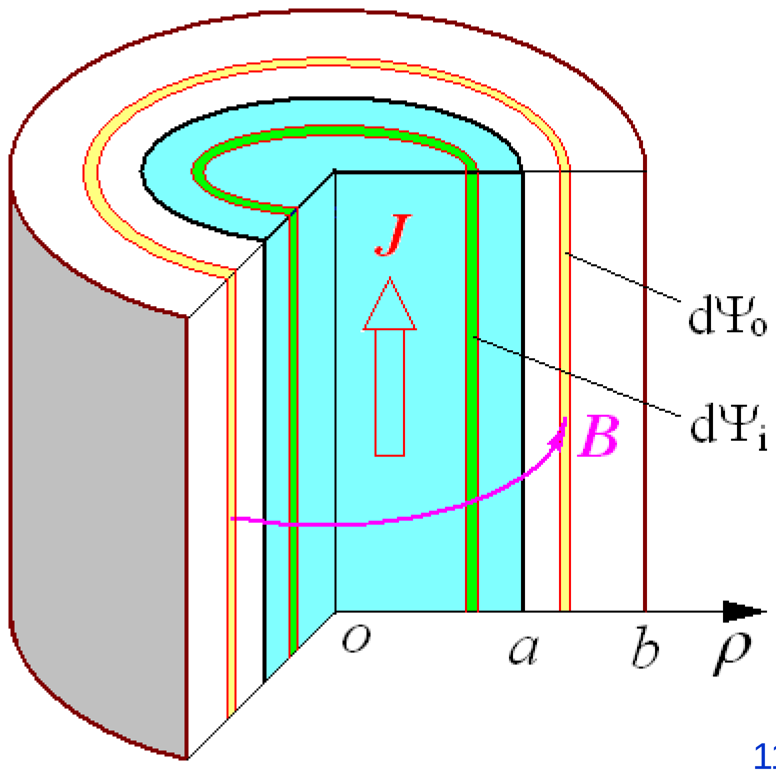
4）电流回路交链的磁链($0 < \rho < a$)

分析

部分交链

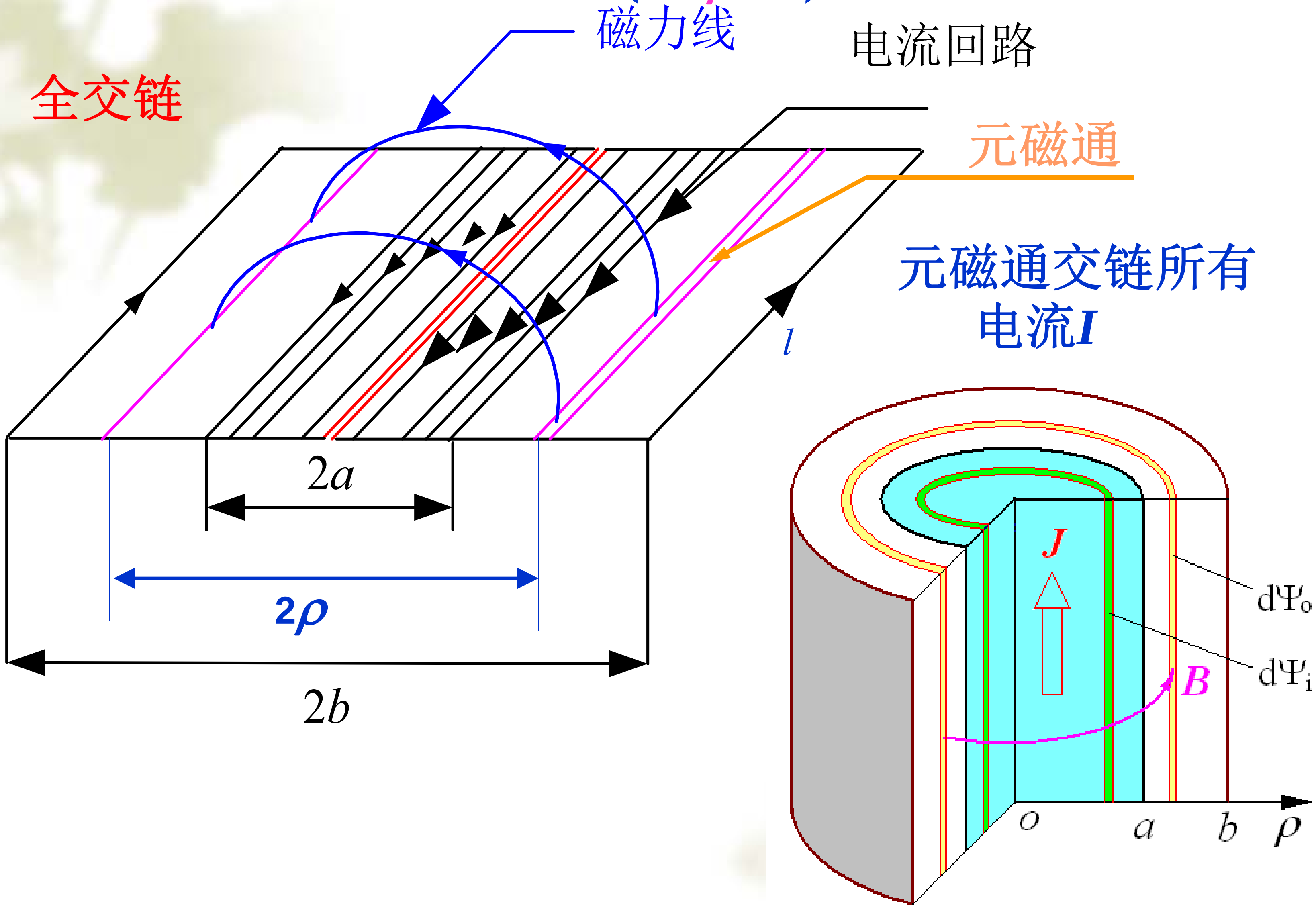
只交链半径为ρ的圆柱导体内的电流





5）电流回路及其交链的磁链($a< \rho <b$)

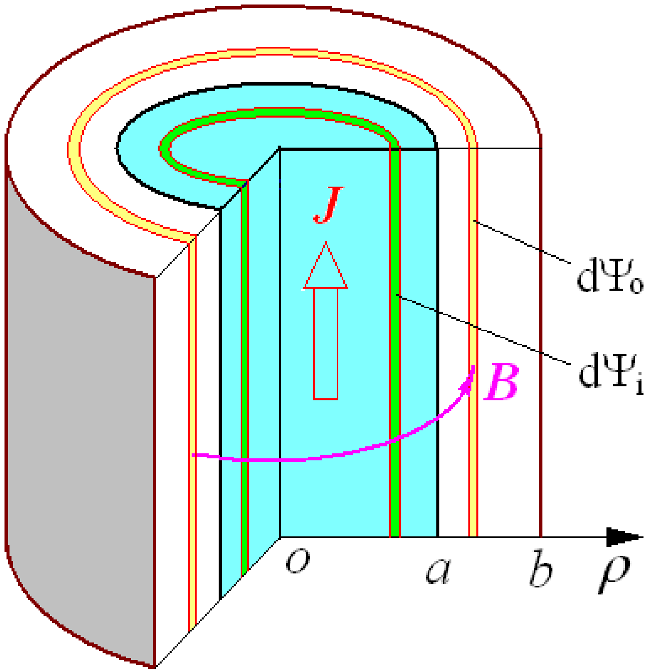
分析

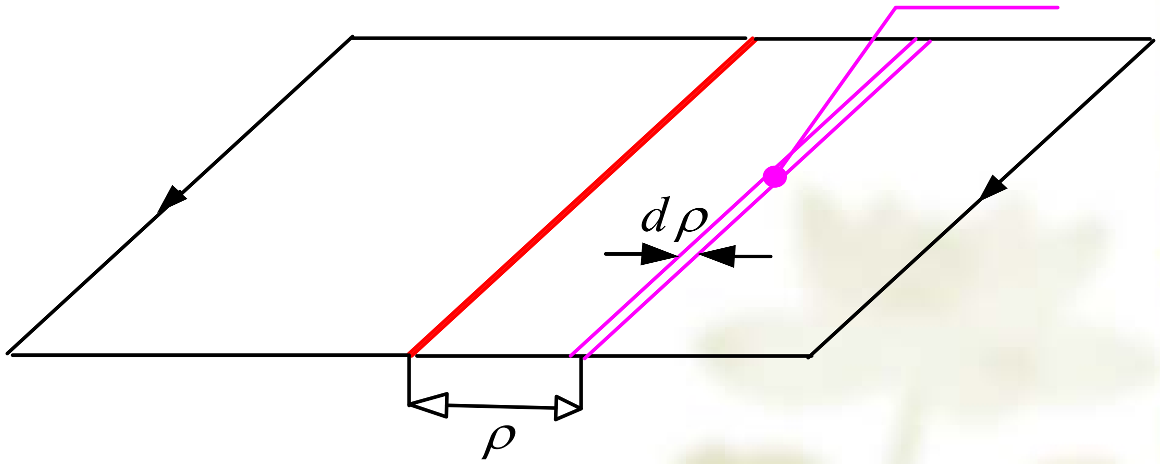


分析

6）根据磁场的对称性，可取距轴线距离为ρ、轴向长度为l、宽为dρ的面积元为考察对象，则穿过该面元的元磁通为

$$\mathrm{d}\phi = \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = B\mathrm{d}S = Bl\mathrm{d}\rho$$





解：先计算外自感。

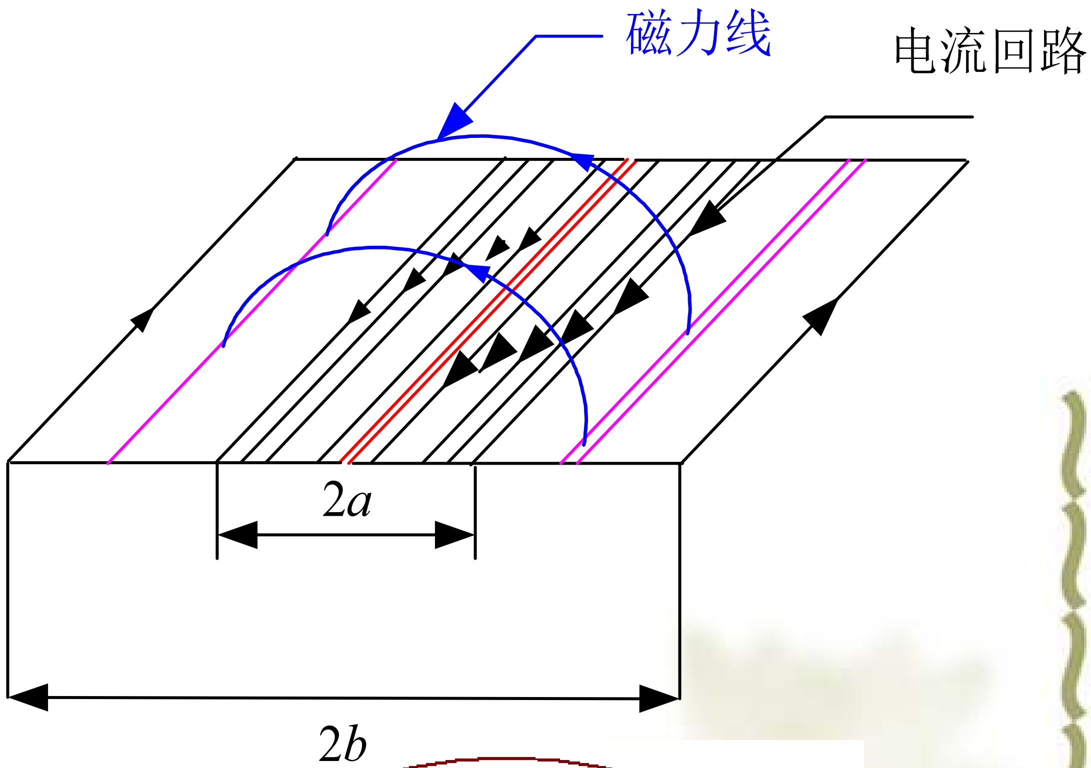
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho},\quad (a<\rho\le b)$$

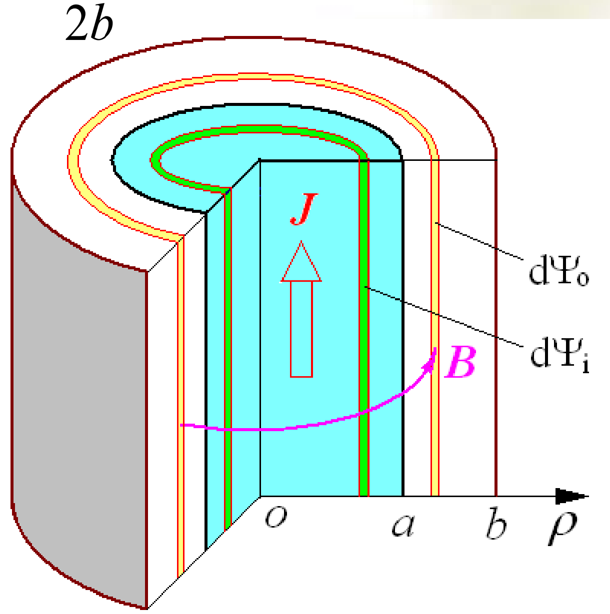
设：匝数 $W_0=1$

$$\mathrm{d}\Psi_0=W_0\mathrm{d}\Phi_0=\mathrm{d}\Phi_0$$

$$=\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}l\,d\rho$$

$$L_0=\frac{\Psi_0}{I}=\frac{1}{I}\int_a^b\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}l\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$





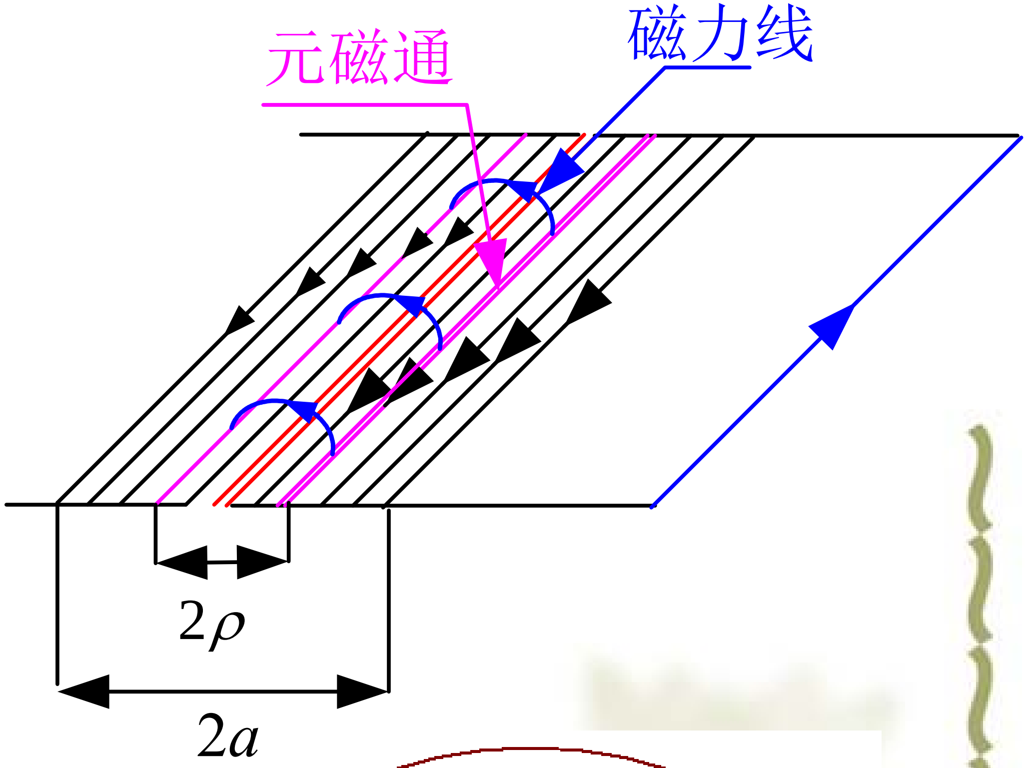
再计算内自感。

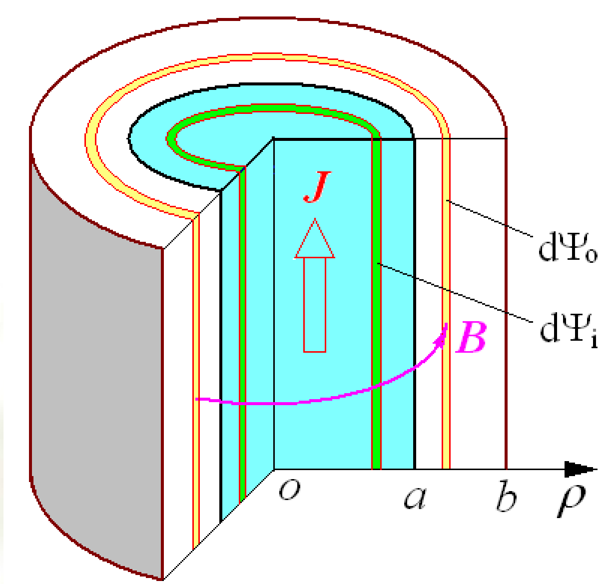
$$\oint_l \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I'$$

$$2\pi\rho' B_i = \mu_0 I' = \frac{I}{\pi a^2}\pi(\rho')^2$$

$$B_\mathrm{i} = \frac{\mu_0 I \rho'}{2\pi a^2} \qquad (\rho' \le a)$$

$$\mathrm{d}\phi_\mathrm{i} = \vec{B}_\mathrm{i} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = B_\mathrm{i}\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I \rho'}{2\pi a^2} l \mathrm{d}\rho'$$





由于整个载流导线仅有一匝

$$I \rightarrow W_o = 1$$

现有ρ'处磁力线交链电流

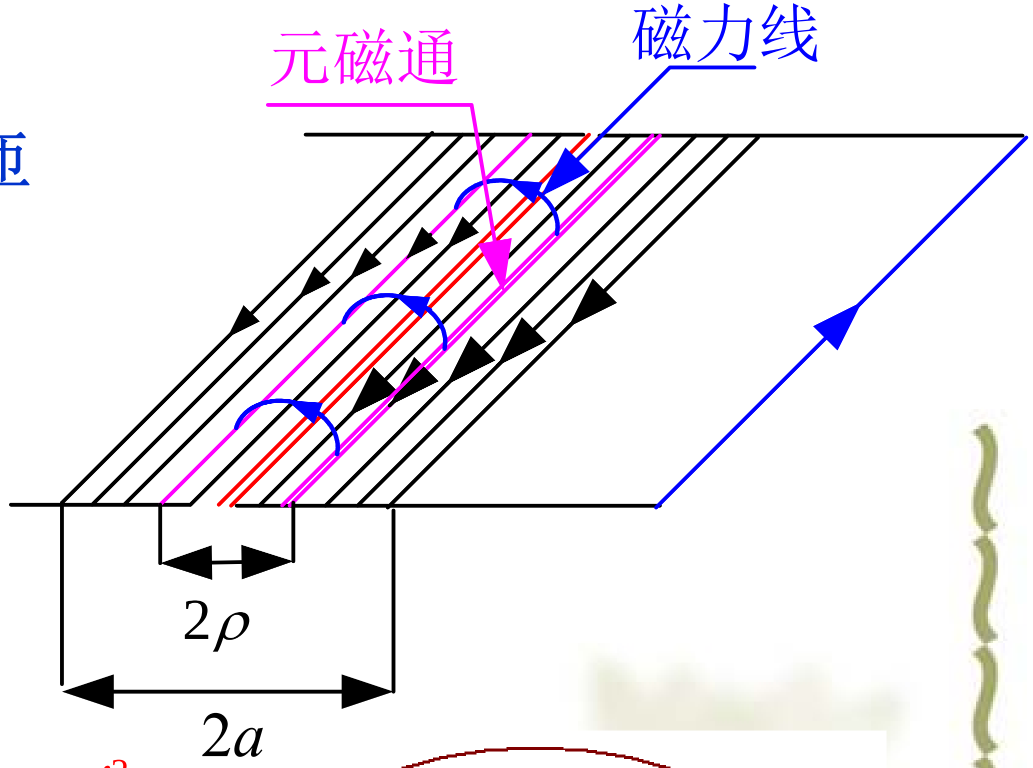
$$I' = \frac{\pi\rho'^2}{\pi a^2} I \ \rightarrow \ W_i < 1$$

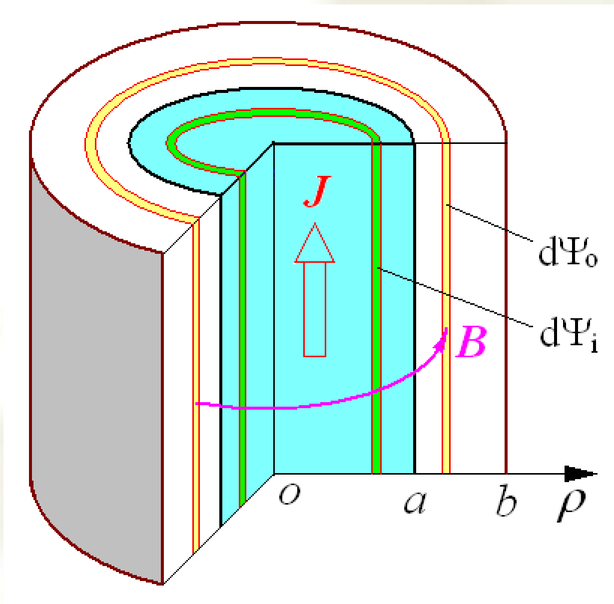
对应的匝数可计算为

$$\frac{\pi\rho'^2}{\pi a^2} I : I = W_i : 1 \ \longrightarrow \ W_i = \frac{\rho'^2}{a^2}$$

$$\psi_i = \int d\psi_i = \int W_i d\phi_i$$

$$= \int_0^a \frac{\mu_0 I \rho'^3}{2\pi a^4} l d\rho' = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

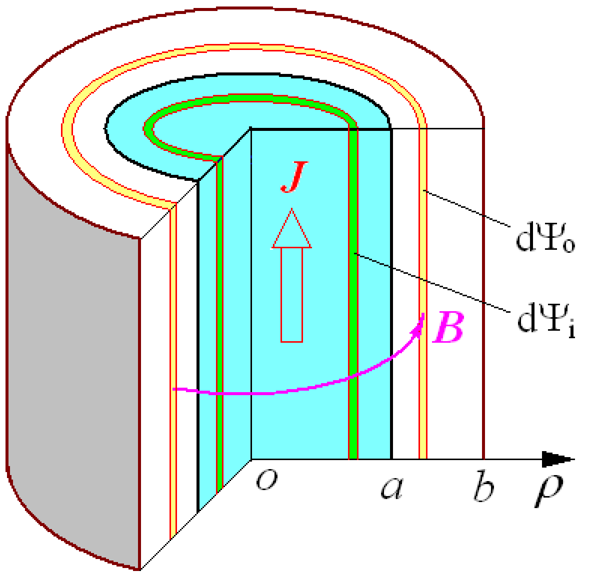




$$\psi_{\mathrm{i}} = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

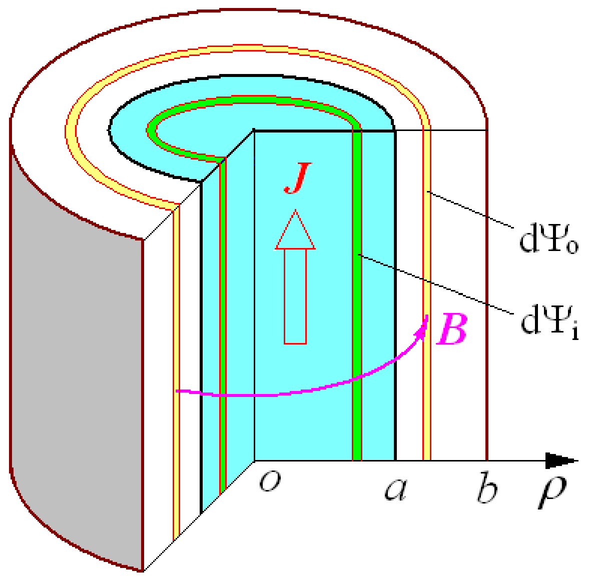
$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} = \frac{1}{I}\int_0^a \frac{\mu_0 \rho^3 I}{2\pi a^2} l \mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

内自感与导体直径无关

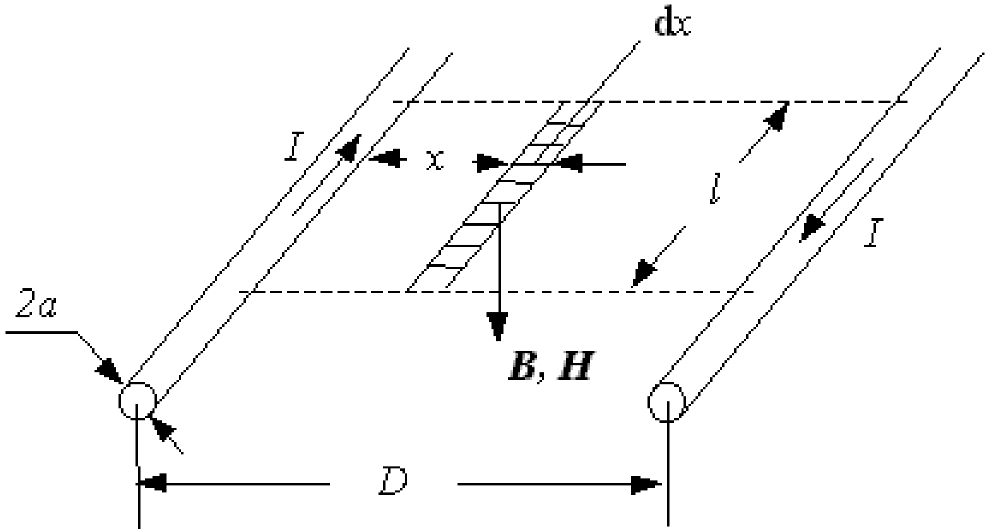


总电感为： $L=L_0+L_i=\dfrac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}+\dfrac{\mu_0 l}{8\pi}$

- 内自感L_i与导线尺寸无关，仅与磁导率和线长有关；
- 外自感$\boldsymbol{L_\mathrm{o}}$与导线几何尺寸、磁导率有关。
- 高频电磁场：由于集肤效应的影响，电流只分布在导体表面，内自感L_i近似为零，导体交流电感只包括外自感。



例2 计算两线传输线的自感。



解：总自感

$$L = 2L_i + L_0$$

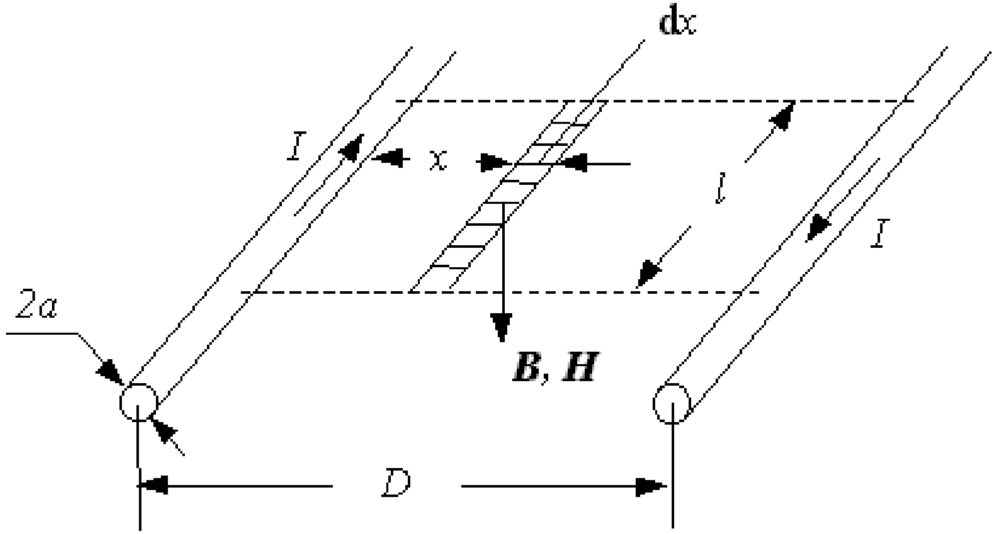
（1）内自感

$$2L_{\mathrm{i}} = 2 \times \frac{\mu_0 l}{8\pi} = \frac{\mu_0 l}{4\pi}$$

（2）两线传输线的外自感

应用安培环路定律，可得在距左侧导线轴 x 处的磁场强度

$$H=\frac{I}{2\pi x}+\frac{I}{2\pi(D-x)}$$



穿越面积元**d*S*=*l*dx**的元磁通**d*Φ*=*μ*₀*Hl*dx**，而外磁链等于外磁通

$$\Psi_o=\int \mathrm{d}\Psi_o=\int \mathrm{d}\Phi=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{D-a}{a}$$

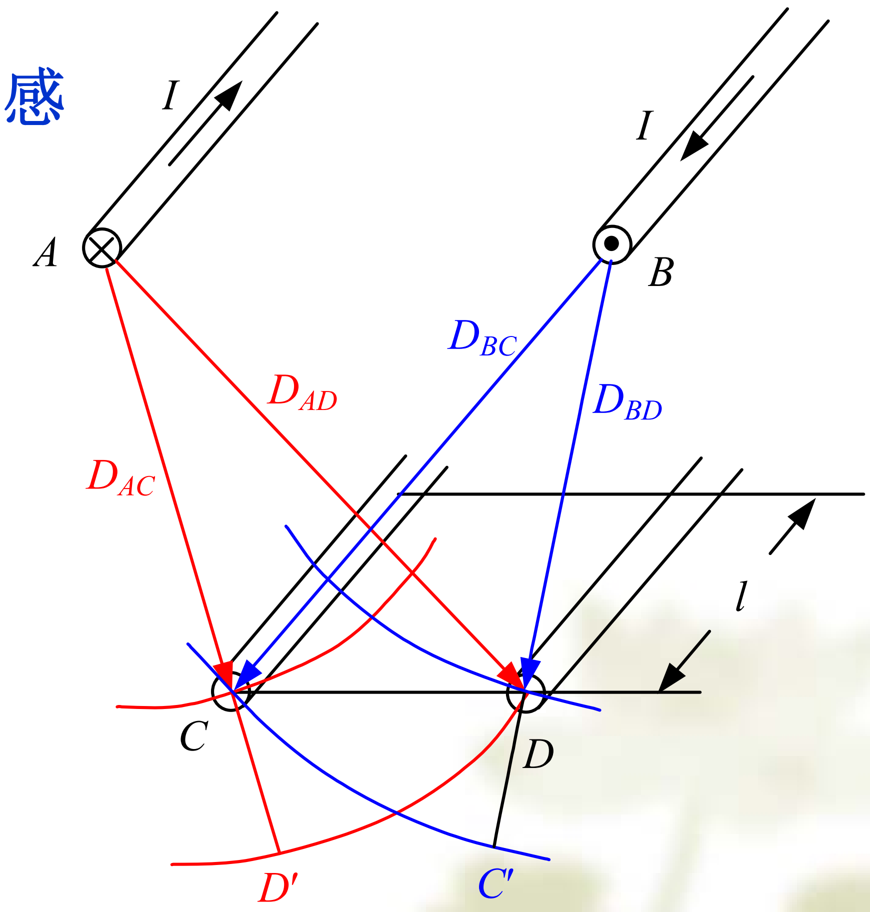
外自感为

$$L_{\mathrm{o}} = \frac{\Psi_{\mathrm{o}}}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

两线传输线的电感

$$L = L_{\mathrm{o}} + L_{\mathrm{i}} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{D-a}{a} + \frac{\mu_0 l}{4\pi}$$

例3 计算两对输电线间的互感



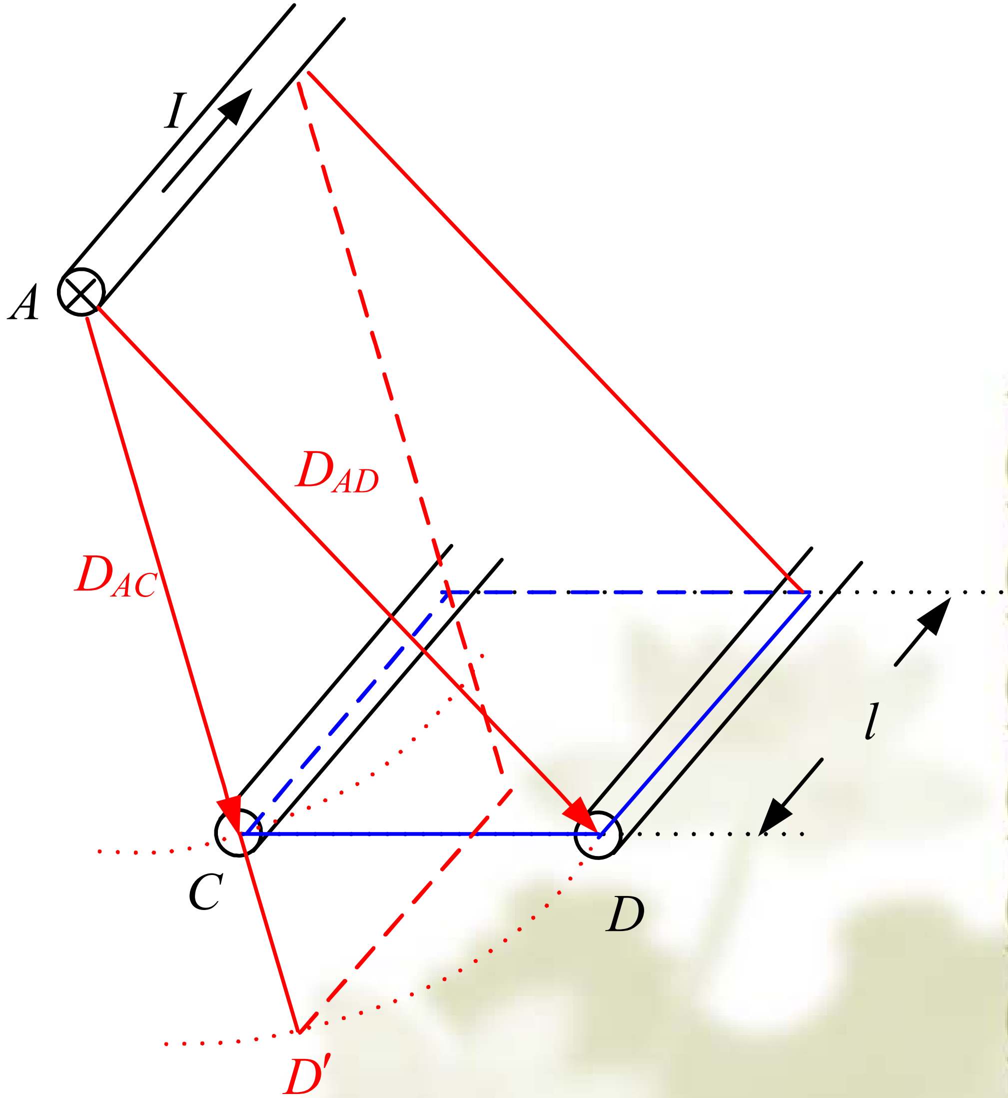
计算两回路的互感时，可假定任一回路带电，计算其在另一回路中产生的磁通（磁链），现设AB回路带电.

计算互感的一般步骤：

$$\underbrace{I_1 \rightarrow H_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_{21}}_{A} = \int_{S_2} B_1 \cdot \mathrm{d}S_2 \rightarrow \Psi_{21} \rightarrow M = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

分析

对于计算导线**A**产生的磁场在**CD**（轴向长度为***l***)回路中的磁通。根据磁场的分布特征，穿过**CD'**的磁力线一定穿过**CD**，反之亦然.



计算**CD*l***面的磁通，可转化为计算**CD'*l***面的磁通

在**CD'*l***面上，磁场强度**B**与面元**ds**的方向一致.

解:

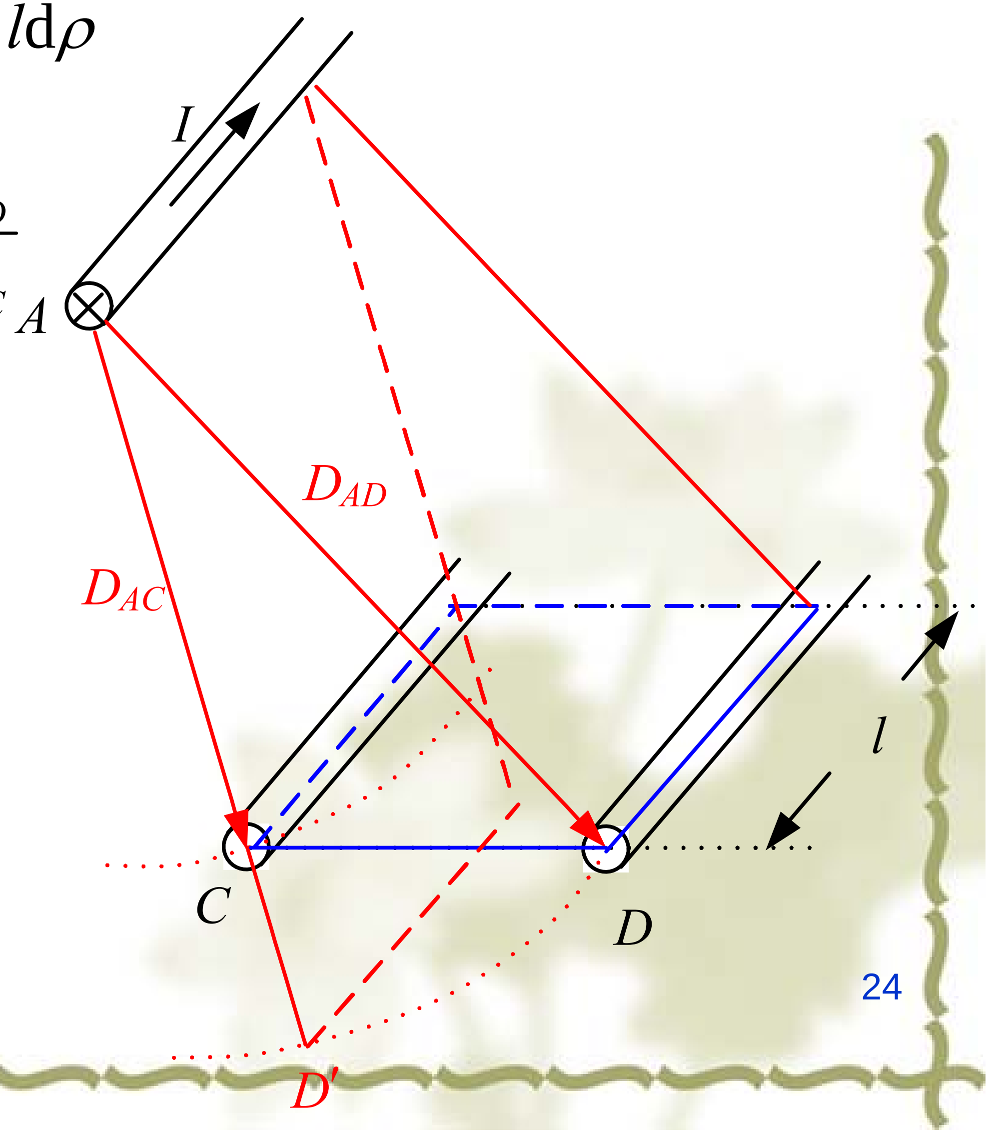
(1)

$$\psi_{\mathrm{MA}} = \phi_{MA} = \int_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} == \int_{D_{AC}}^{D_{AD'}} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{D_{AD'}}{D_{AC}} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{D_{AD}}{D_{AC}}$$

(2) 同理

$$\psi_{MB} = \phi_{MB} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{D_{BC}}{D_{BD}}$$



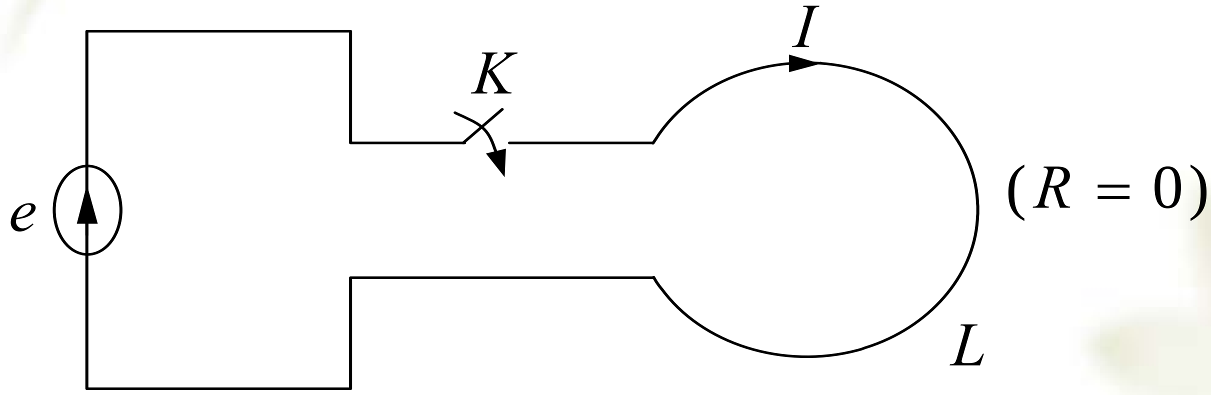
(3) $$\psi_M = \psi_{MA} + \psi_{MB} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{D_{AD} D_{BC}}{D_{AC} D_{BD}}$$

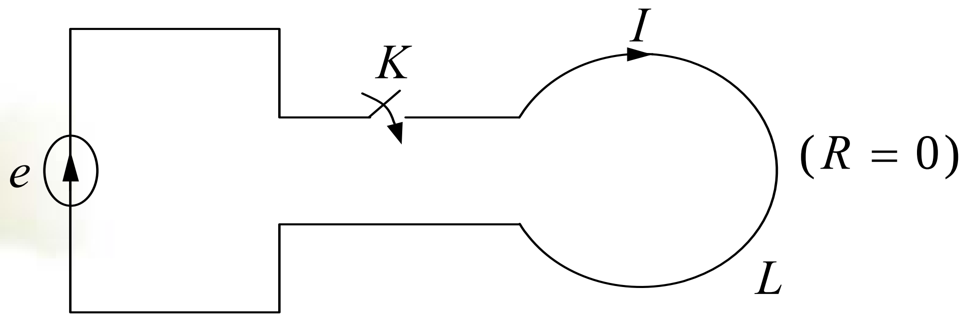
$$M = \frac{\psi_M}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{D_{AD} D_{BC}}{D_{AC} D_{BD}}$$

3.7 磁场能量

1) 单个载流回路的W_m

在如下的单个载流回路中，设导体为理想导体，无欧姆损耗。





接通电源开关**K**，则在**d*t*** 时间内，

$$\mathrm{d}W = ei\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\psi_L}{\mathrm{d}t} i\mathrm{d}t = i\mathrm{d}\psi_L$$

$$\xrightarrow[\psi_L \propto i]{\text{线性媒质}} = iL\mathrm{d}i \qquad \psi_L = iL$$

$$\boxed{W_\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}W = \int_0^I iL\mathrm{d}i = \boxed{\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\psi I}$$

2) n个载流回路系统的W_m

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\psi I$$

类比于静电场 $W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k q_k$

n个载流回路系统恒定磁场的能量为

$$\boxed{W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\psi_k I_k}$$

在各向同性线性媒质中，以第*k*个回路为例，其磁链可表示为

$$\psi_k = L_k I_K + M_{k1} I_1 + M_{k2} I_2 + \cdots + M_{kn} I_n$$

$$= L_k I_k + \sum_{\substack{h=1 \\ (h\neq k)}}^{n} M_{kh} I_h$$

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \psi_k I_k$$

***n*个载流回路系统**磁场的能量可表示为：

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} L_k I_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{h=1 \\ h\neq k}}^{n} M_{kh} I_h I_k$$

$$= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \cdots + \frac{1}{2} L_n I_n^2$$ 各载流回路的固有能

$$+\left(M_{12} I_1 I_2 + M_{13} I_1 I_3 + \cdots + M_{(n-1)n} I_{n-1} I_n\right)$$

相应回路间的互有能

磁场能量的表达式——用源量表示

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}L_kI_k^{\;2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}I_iI_j=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}I_k\psi_k$$

$(i\neq 0)$

各载流回路的固有能　　相应回路间的互有能

3）磁场能量的表达式——用场量表示

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_V \vec{\boldsymbol{H}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{V} = \int_V w_{\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}$$ ***J***（焦耳）

磁场能量密度 $$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu}$$

磁场能量是以密度形式储存在空间中。

4）用矢量磁位A表示的磁场能量（了解）

由磁链的计算公式

单匝 $\psi_k = \oint_{l_k} \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{l}_k$ $\qquad W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \psi_k I_k$

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k \oint_{l_k} \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{l}_k$$

$$I_k \mathrm{d}\vec{l}_k = \vec{J}\mathrm{d}V$$

求和式化为积分，并扩展至整个空间

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\int_V \vec{A} \bullet \vec{J}\mathrm{d}V$$

5) 基于磁场能量计算电感参数

- 自感

对于单个线圈组成的系统，根据

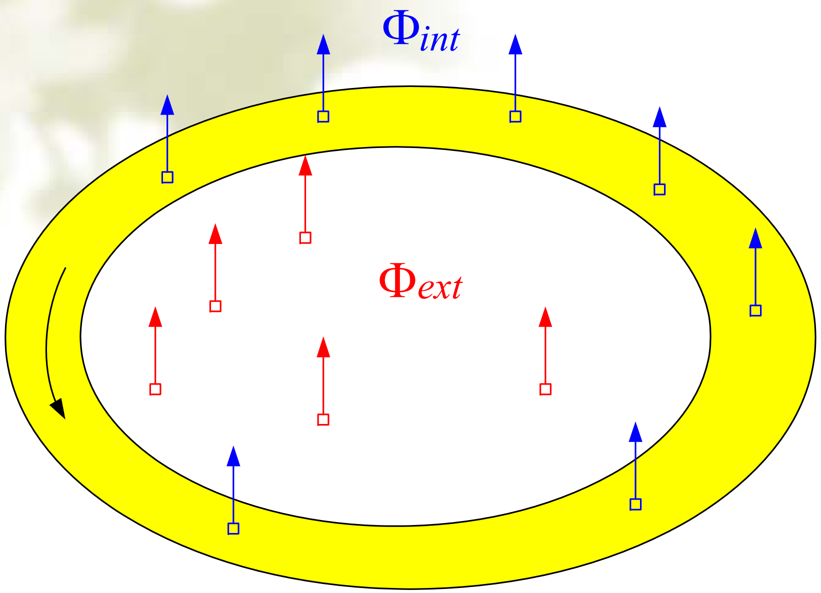
$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} L I^2 \Longrightarrow L = \frac{2W_{\mathrm{m}}}{I^2}$$

可由系统中存储的磁场能量，计算线圈的电感参数。

计算单个载流回路的自感：

$$\text{设定 } I \to \vec{H}、\vec{B} \to W_{\mathrm{m}} \to L = \frac{2W_{\mathrm{m}}}{I^2}$$

内自感和外自感



$$L = L_{ext} + L_{\text{int}}$$

内、外自感与磁场能量的关系分别为

$$L_{ext} = \frac{1}{I^2}\int_{V_{ext}} \vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

$$L_{\text{int}} = \frac{1}{I^2}\int_{V_{\text{int}}} \vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

$$\left(W_{\text{m}} = \int_V w'_{\text{m}}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\bullet\vec{B}\,\mathrm{d}V \right)$$

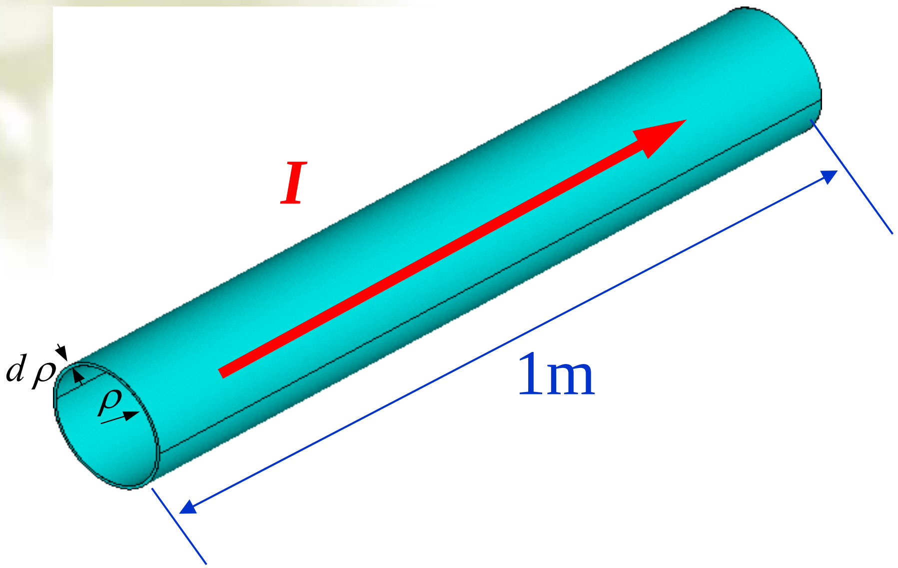
$$\left(L = \frac{2W_{\text{m}}}{I^2} \right)$$

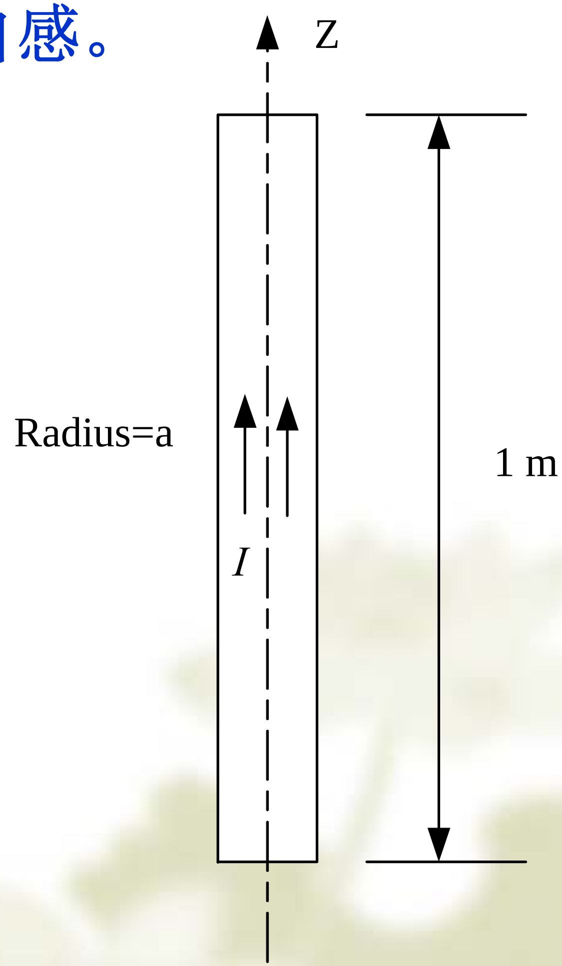
互感（计算式不要求掌握）

$$L_{ij}=\frac{2W_{m_{ij}}}{I_iI_j}=\frac{1}{I_iI_j}\int_V \vec{B}_i\cdot\vec{H}_j dV$$

$\boldsymbol{B}_{\mathbf{i}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathbf{j}}$ 分别由 $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{i}}$ 和 $\boldsymbol{I}_{\mathbf{j}}$ 产生.

例：求半径为a的单位长直导线的内自感。



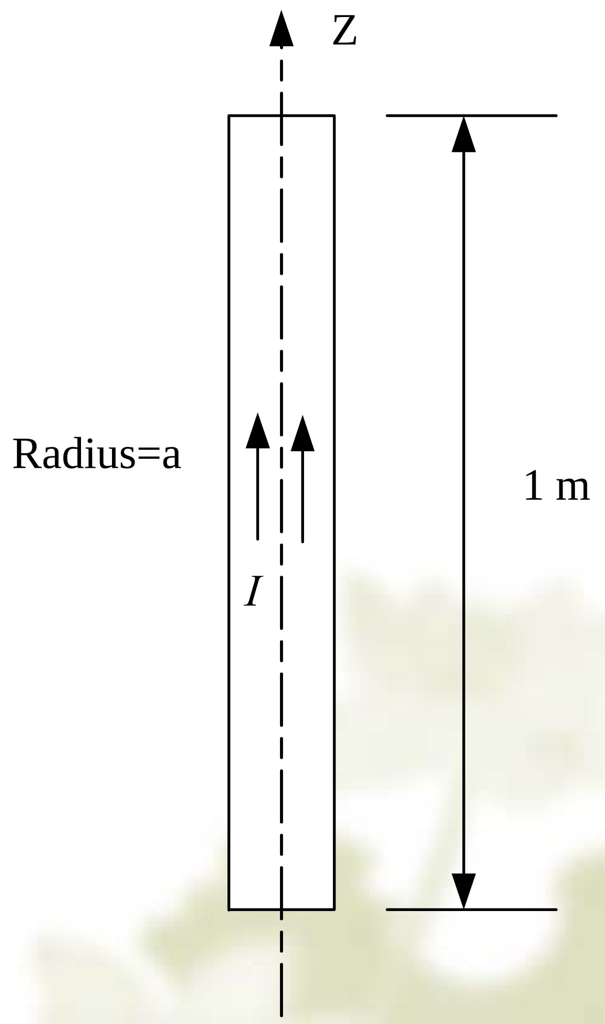


求右图半径为a的单位长直导线的内自感。

$$\vec{B} = \frac{\mu\rho I}{2\pi a^2}\vec{a}_\phi \quad (\rho < \mathrm{a})$$

$$(W_m)_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int_{V_{\text{int}}} \vec{B}\cdot\vec{H}dv$$

$$dv = 2\pi\rho l d\rho$$

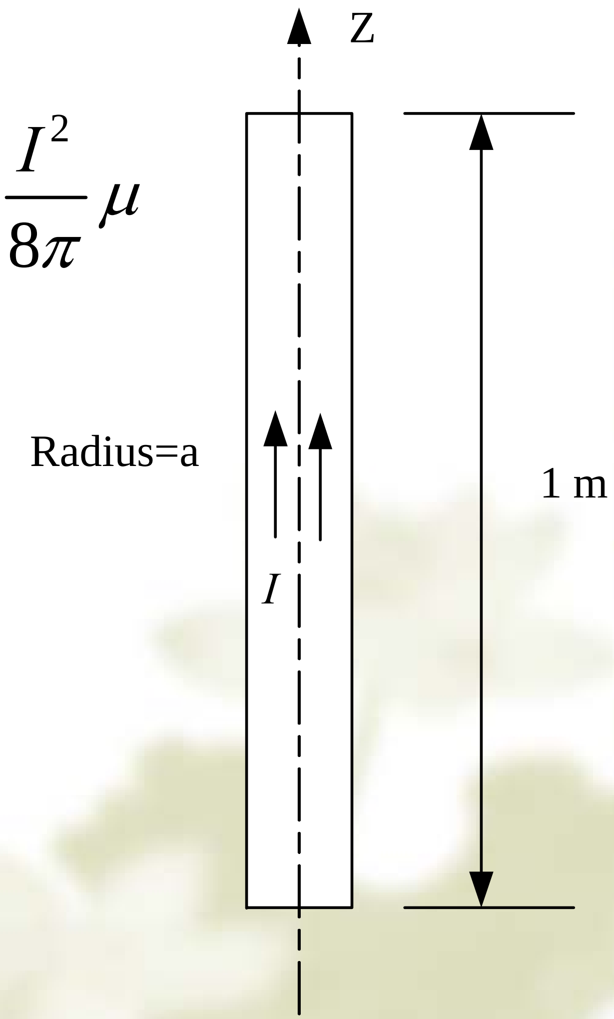


$$(W_m)_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int_{V_{\text{int}}} \vec{B}\cdot\vec{H}dv$$

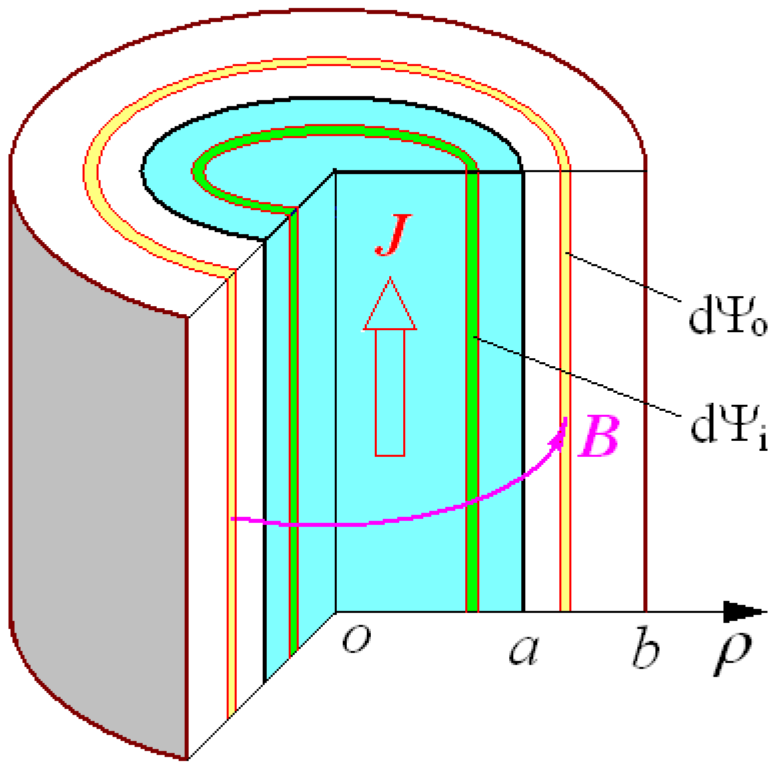
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{I}{2\pi a^2}\right)^2 \mu\int_0^a \rho^2 (2\pi\rho l d\rho) = \frac{1}{2}\frac{I^2}{8\pi}\mu$$

$$L_{\text{int}} = \frac{2(W_{\text{m}})_{\text{int}}}{I^2}$$

$$L_{\text{int}} = \frac{\mu l}{8\pi}$$



例2：计算同轴电缆的自感**L**。 $l >> a , b$



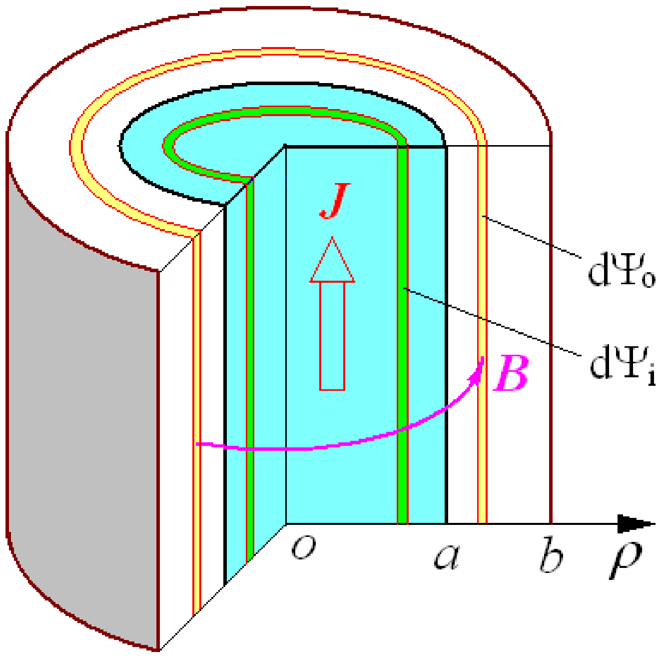
解：由安培环路定律

$$B_{\mathrm{i}} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \qquad (\rho \le a) \qquad B_{\mathrm{o}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \qquad (a \le \rho \le b)$$

则能量密度分别为 $\boldsymbol{w}_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{HB} = \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\boldsymbol{u}_0}$

$$w'_m = \frac{u_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \qquad (0 \le \rho \le a)$$

$$w''_m = \frac{u_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2} \qquad (a \le \rho \le b)$$



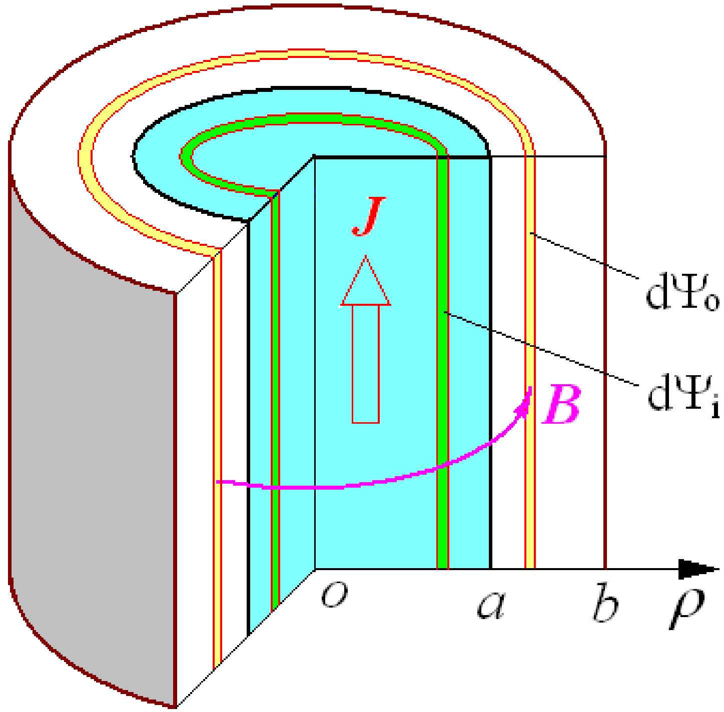
系统中储存的能量为

$$W_m = \int_{V_1} w'_m dv + \int_{V_2} w''_m dv$$

$$= \int_{V_1} (\frac{u_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4}) dv + \int_{V_2} (\frac{u_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2}) dv$$

$$dv = 2\pi\rho l d\rho$$

$$W_m = \frac{I^2 \mu_0 l}{4\pi}(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a})$$



由此，线圈的电感为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}(\frac{1}{4} + \mathbf{ln}\frac{b}{a})$$

$$L = \frac{\psi_L}{I} = L_i + L_o = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right)$$

如果内电缆的磁导率不等于真空中的磁导率，则

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{l}{2\pi}(\frac{\mu}{4} + \mu_0 \ln\frac{b}{a})$$

3.8 磁场力

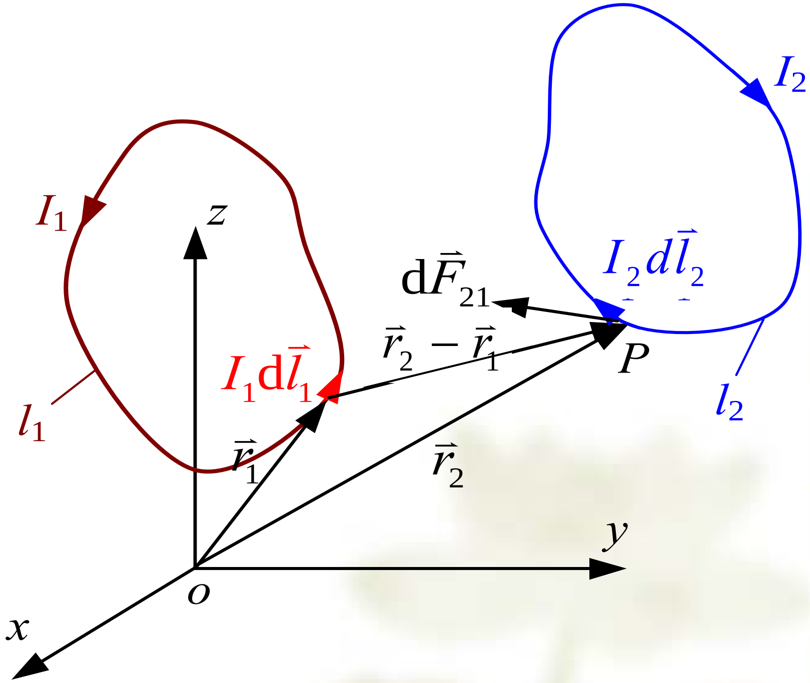
- 磁场力

磁场力(电磁力)是磁场具有能量的一种体现（载流回路之间、磁铁之间、电流和磁铁之间，均有此种磁场力的存在）。

磁场力

1. 安培力计算公式——载流回路在磁场中受力（了解）

$$\vec{F}=\oint_{l} I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$



根据**BSL**，回路电流$\boldsymbol{I_1}$在载流回路$\boldsymbol{l_2}$处产生的磁场为：

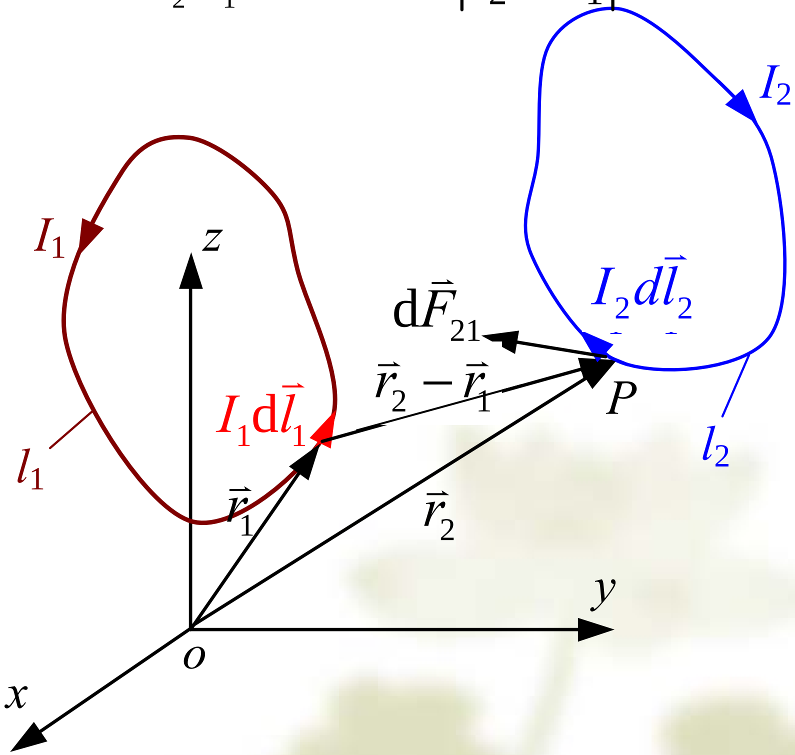
$$\vec{B}_1=\vec{B}_P=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}$$

载流回路 $\boldsymbol{l_2}$ 受到的磁场力为：

$$\vec{F}_{21}=\oint_{l_2} I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\vec{B}_P=\oint_{l_2}\mathrm{d}\vec{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\left[I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\right]}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}$$

$$\vec{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\left[I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\right]}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}$$

同理，回路电流I_2产生的磁场B2对载流回路 l_1 的作用力为：



$$\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\left[I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right]}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$$

2. 洛仑兹力计算公式——运动电荷受磁场力（了解）

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

3. 虚位移法

类比于静电场中的虚位移法，恒定磁场的功能平衡方程为：

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}_g W_\mathrm{m} + F\mathrm{d}g$$

电源提供的能量 = 磁场能量的增量 + 磁场力所做的功

d*W*——外源送入系统的能量

$$\mathrm{d}W = \sum_{k=1}^{n} I_k \mathrm{d}\psi_k$$

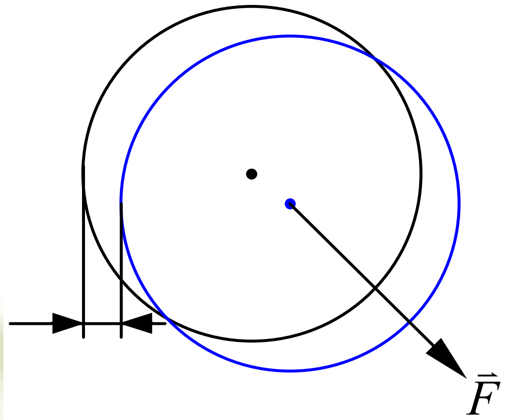
$\mathbf{d}_g\boldsymbol{W}_\mathbf{m}$ ——相应于某一广义坐标变化（**d*g***）而引起的$\boldsymbol{W}_\mathbf{m}$的增量

$$\mathrm{d}_g W_\mathrm{m} = \mathrm{d}_g \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} I_k \psi_k \right)$$

F*d*g —— 在**d*g***方向上，广义力（磁场力）所作的功

功 = 广义力×广义坐标

广义坐标	距　离	面　积	体　积	角　度
广义力	机械力	表面张力	压强	转矩
单　　位	N	N/m	N/m^2	N m



A. 常电流系统

$$I_k = \text{const} \qquad k = 1, n$$

$$\mathrm{d}W = \sum_{k=1}^{n} I_k \mathrm{d}\psi_k$$

$$\mathrm{d}_g W_\mathrm{m} = \mathrm{d}_g \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} I_k \psi_k \right)$$

$$\mathrm{d}_g W_\mathrm{m} \Big|_{I_k = \text{常量}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} I_k \mathrm{d}\psi_k = \frac{1}{2} \mathrm{d}W$$

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}_g W_\mathrm{m} + F\mathrm{d}g$$

$$F\mathrm{d}g = \mathrm{d}_g W_\mathrm{m} \Big|_{I_k = C}$$

$$F = \frac{\mathrm{d}_g W_\mathrm{m}}{\mathrm{d}g} \Bigg|_{I_k = C} = \frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial g} \Bigg|_{I_k = C}$$

外源不断提供能量，一半用于增加磁能，一半提供磁场力作功。

B. 常磁链系统

$$\psi_k = \text{const} \qquad k = 1, n$$

$$d\psi_k = 0$$

$$\mathrm{d}W = \sum_{k=1}^{n} I_k \mathrm{d}\psi_k$$

外源不提供能量

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}_g W_\mathrm{m} + F\mathrm{d}g$$

$$F = -\left.\frac{\mathrm{d}_g W_\mathrm{m}}{\mathrm{d}g}\right|_{\psi_k = C} = -\left.\frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial g}\right|_{\psi_k = C}$$

两种假设的结果相同，即

$$f=\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial g}\bigg|_{I_k=\mathrm{const}}=-\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial g}\bigg|_{\psi_k=\mathrm{const}}$$

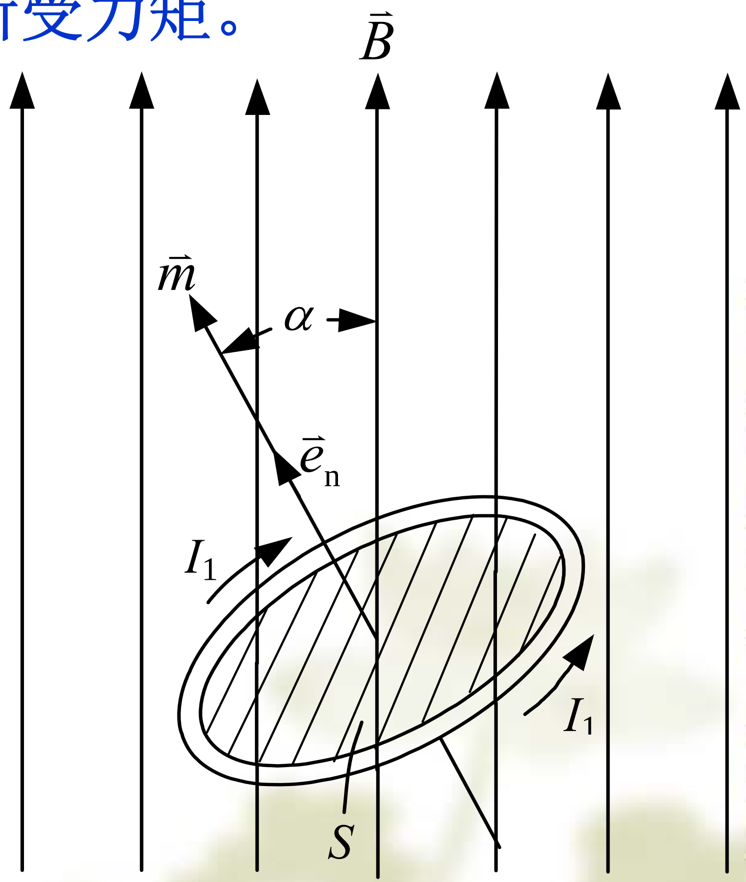
取两个回路的相对位置坐标为广义坐标，求出互有磁能，便可求得相互作用力。

例1： 求均匀外磁场B中载流线圈所受力矩。

分析：

把均匀磁场看作是另一载流系统所激发，则问题是求两个载流回路之间的作用力

应用虚位移法：该相互作用力（广义力）改变线圈位置——力矩。对应的广义坐标是——角度。



互有磁能

$$W_{m互} = M_{12} I_1 I_2 = I_1 \psi_{12}$$

$$F = \left.\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial g}\right|_{I_k=C} \qquad F = -\left.\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial g}\right|_{\Psi_k=C}$$

解：

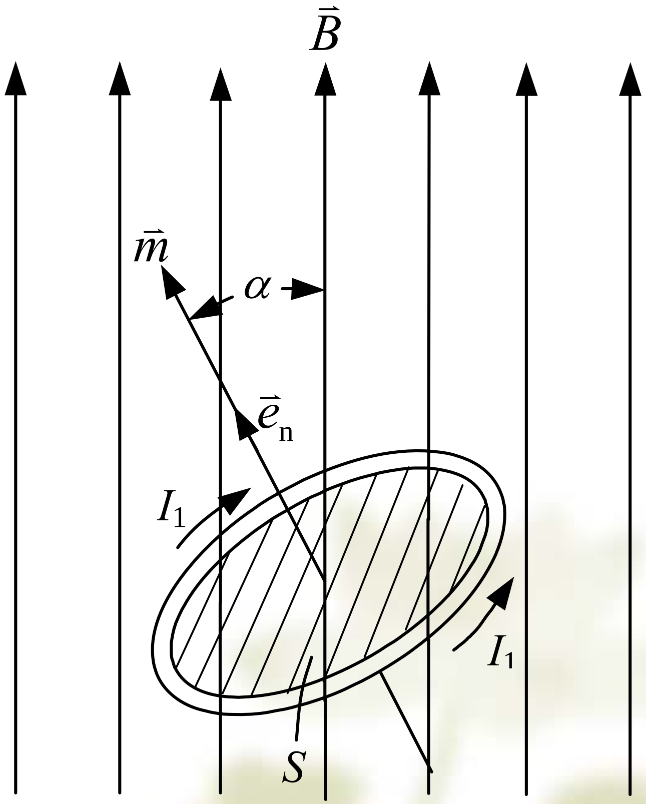
$$W_{m互} = M_{12}I_1I_2 = I_1\psi_{12} = I_1BS\cos\alpha$$

选α为广义坐标，对应的广义力是力矩，

$$\vec{T} = \left.\frac{\partial W_{m12}}{\partial \alpha}\right|_{I_1=C} = -BI_1S\sin\alpha$$

$$= -Bm\sin\alpha = \vec{m}\times\vec{B}$$

$m = I_1S$　　载流回路磁矩



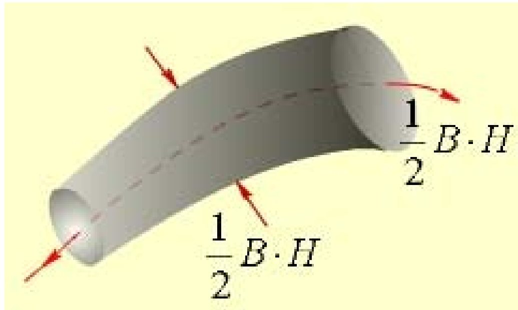
$T < 0$表示转矩企图使α减小，使该回路包围尽可能多的磁通。

4. 法拉第观点求磁场力

电磁场中的机械力，都可归结为电磁场内部的力，即电磁力通过媒质以连续的方式传递。

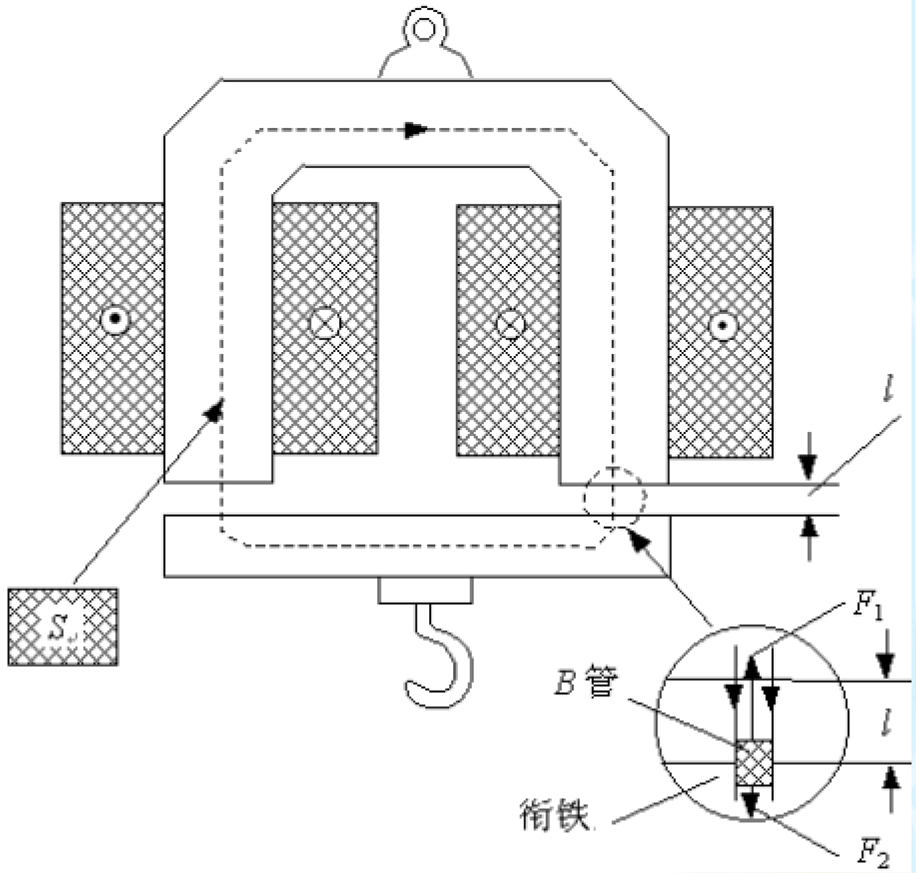
法拉第观点，通量管沿其轴向方向受到纵张力，垂直方向受到侧压力，其量值都等于

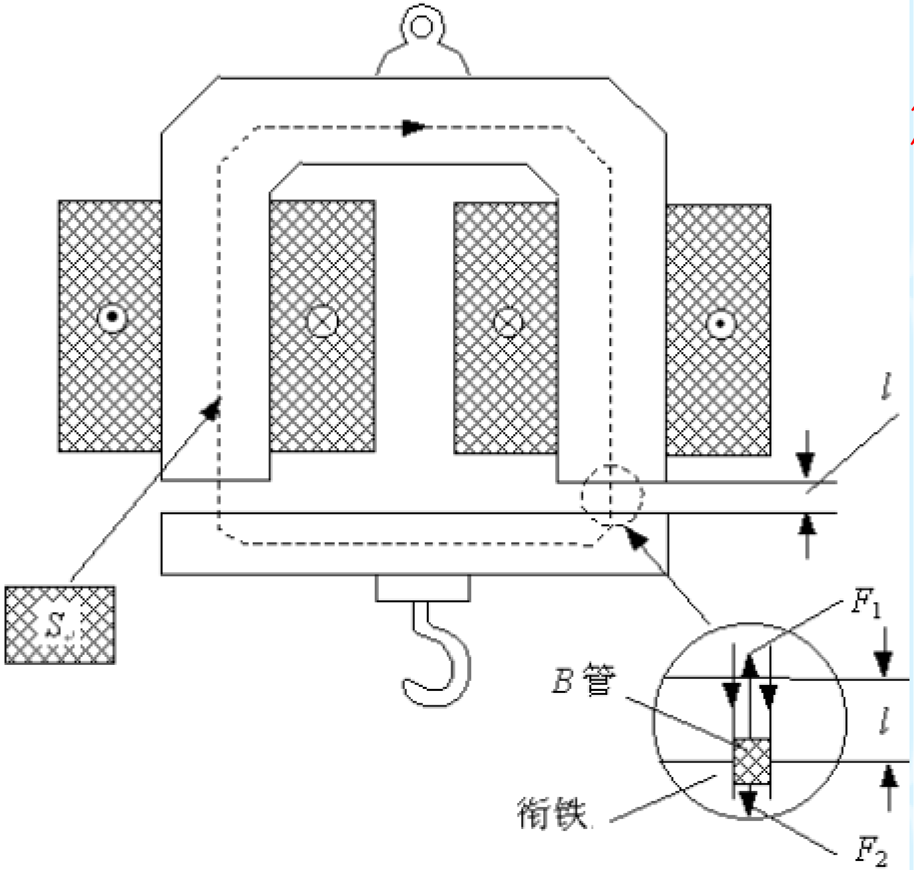
$$f=\frac{1}{2}HB=\frac{1}{2}\mu H^{2}=\frac{B^{2}}{2\mu}\quad \mathrm{N/m^{2}}$$



通量管受力

书例3-26　求电磁铁对衔铁的吸力。设铁心截面积为S，空气隙长度为 l，忽略气隙处边缘效应，认为气隙中磁场均匀分布为已知B。





解一： 用法拉第观点

取一小B管，如图：

铁心中，**H≈0**，**F_2 ≈0**

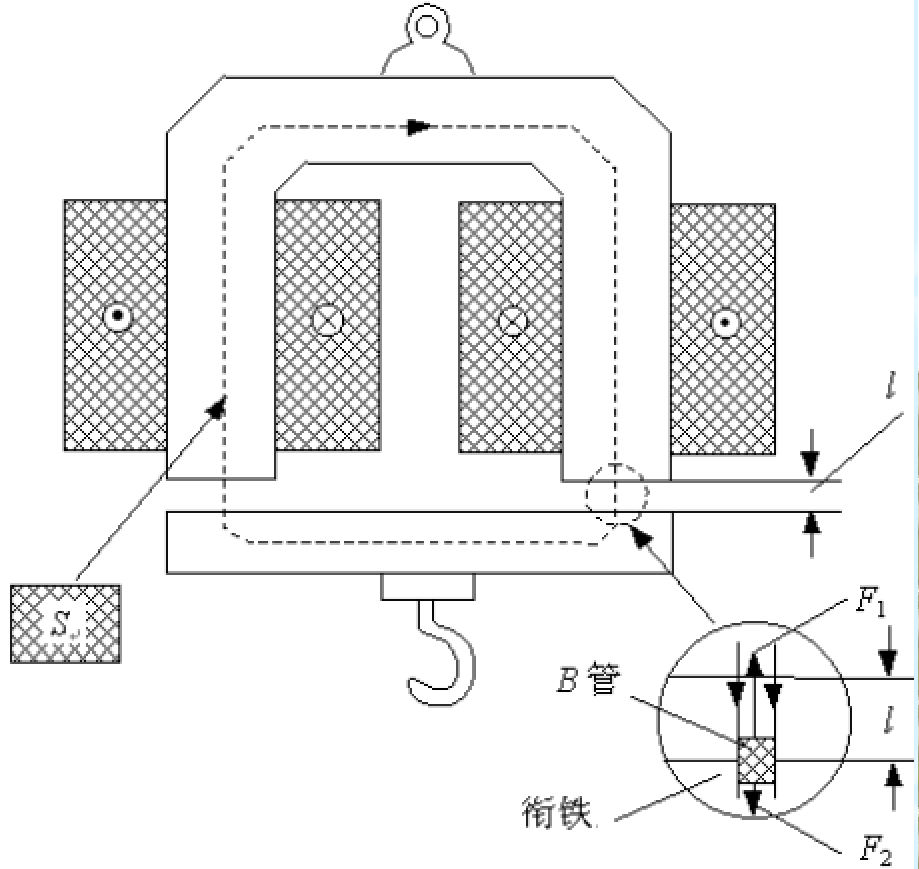
$$F_1 = \frac{1}{2}HB = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \mathrm{N/m^2}$$

$$F = 2SF_1 = \frac{B^2 S}{\mu_0} \quad \mathrm{N/m^2}$$

- 铁磁体与空气界面上的磁场力 $\boldsymbol{F} \propto \boldsymbol{B}^2$
- 在不同媒质分界面上的磁场力总是由μ大者指向μ小者，且方向垂直于分界面

解二：虚位移法

电磁铁系统的磁场能量近似等于两气隙处储存的磁场能量。即：



$$W_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot 2Sl = \frac{B^2}{\mu_0} \cdot Sl = \frac{\phi^2}{\mu_0 S} l$$

$$F = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial l}\right|_{\phi = C} = -\frac{\phi^2}{\mu_0 S} = -\frac{B^2 S}{\mu_0}$$

- 负号表示力企图减小气隙长度，表现为吸力。

作业：**3-17，3-18，3-25, 3-24**