第2章 静电场—静电场能量、电场力

静电场的能量

能量分布

电场力

2.9 静电场能量

■ 电容器类两导体系统——电场能量

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k q_k$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \vec{D} \bullet \vec{E}\,\mathrm{d}V$$

2.9.1 带电体系统中的静电场能量

1. 用场源表示静电能量

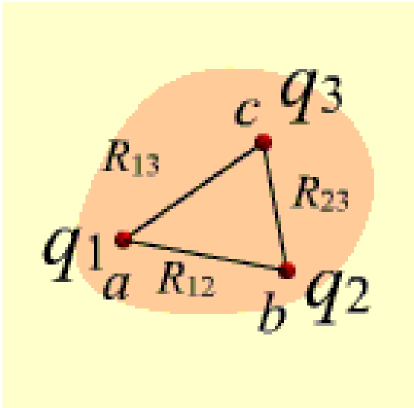
q_1 从 ∞ 移到 a 点不受力，所需能量 $W_1=0$，

q_2 从 ∞ 移到 b 点，需克服 q_1 的电场力做功，所需能量：

$$W_2 = q_2\varphi_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}}$$

q_3 从 ∞ 移到 c点，所需能量

$$W_3 = q_3\varphi_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_{31}} + \frac{q_2}{R_{23}}\right)$$



点电荷的能量

总能量 $W_e = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q_1 q_2}{R_{12}} + \frac{q_2 q_3}{R_{23}} + \frac{q_3 q_1}{R_{31}})$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[q_1(\frac{q_2}{R_{12}} + \frac{q_3}{R_{13}}) + q_2(\frac{q_1}{R_{12}} + \frac{q_3}{R_{23}}) + q_3(\frac{q_1}{R_{31}} + \frac{q_2}{R_{23}})]$$

$$= \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i\varphi_i$$

推广 1： 若有 ***n*** 个点电荷的系统，静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i$$

单位：**J**（焦耳）

推广2：对于具有面电荷分布的带电导体 $q_k = \int_{S_k} \sigma \mathrm{d}S$

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_{S_k} \sigma \mathrm{d}S \xlongequal{\left(\varphi_k|_{S_k}=C\right)} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \varphi_k \sigma \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{2}\int_{S(=S_1+S_2+\cdots+S_n)} \sigma\varphi \mathrm{d}S$$

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \varphi_k q_k$$

若场中，除带电导体外，还有以体电荷分布形态的电荷(体电荷密度为ρ)

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi \mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi \mathrm{d}V$$

2.9.2 电场能量的分布及其分布密度

2. 用场量表示静电能量

场中含带电导体和以体电荷分布形态的电荷(体电荷密度为ρ)

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi \mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi \mathrm{d}V$$

书P115推导

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\bullet\vec{E}\mathrm{d}V \qquad (2)$$

定义： $w_e' = \frac{1}{2}\vec{D}\bullet\vec{E}$ 电场能量密度 $W_e = \int_V w_e' \mathrm{d}V$

■ 说明：

1. 电场能量W_e系以能量密度w'_e方式分布在整个电场空间

$$w'_e = \frac{1}{2}\vec{D} \bullet \vec{E}$$

对各向同性线性介质 $$w'_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$

2. W_e的计算：

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k q_k$$

用源量表示电场能量

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \vec{D} \bullet \vec{E} \mathrm{d}V$$

用场量表示静电能量

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

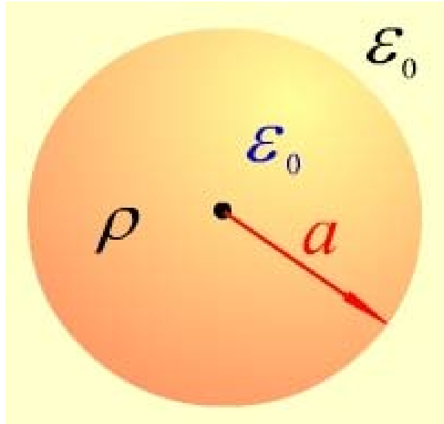
电容类两导体系统

自学： **P116**页　例**2-21**

例　试求真空中体电荷密度为ρ的带电球产生的静电能量。

解法一　由场源求静电能量

$$W=\frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\,\mathrm{d}V \qquad \textbf{(1)}$$



体电荷分布的球体

$$\varphi_P(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} & (r<a)\\[2ex] \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r} & (r>a)\end{cases}$$

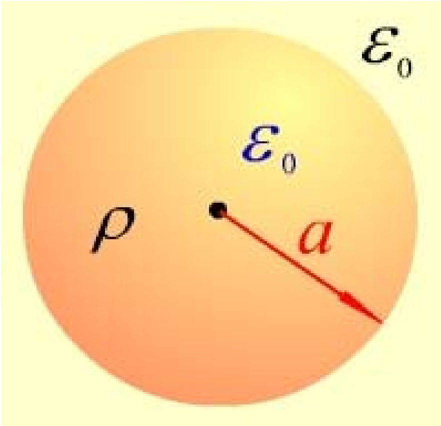
代入式（1）

$$W=\frac{1}{2}\int_0^a\left(\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r+0=\frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}$$

球外无电荷，球外ρ=0

解法二　由场量求静电能量

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r & r < a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & r > a \end{cases}$$



体电荷分布的球体

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_0^a \varepsilon_0 E_1^{\ 2} 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \frac{1}{2}\int_a^\infty \varepsilon_0 E_2^{\ 2} 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 a^5$$

2.10 电场力

库仑定律
$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$$

条件：点电荷(两)；无限大均匀介质 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 内

电场强度定义公式

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

这里的$\boldsymbol{E}$是除电荷$\boldsymbol{q}$外其余电荷产生的

对于电荷分布形态复杂的带电系统，用上述方法求解困难，引入——虚位移法

1. 虚位移法（Virtual Displacement Method）

原理：

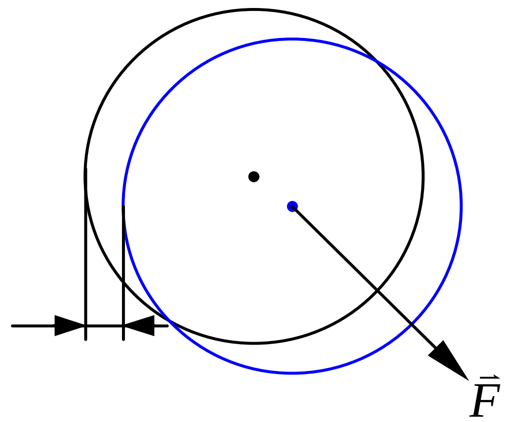
假设电场力作用下，带电体发生一定的位移，通过因“虚”位移引起的电场能量的变化，与外力及电场力作功之间的关系，计算电场力。

- **广义坐标 g：**

  用来确定带电导体形状、尺寸、相对位置的一组独立几何量（距离、面积、体积、角度等）。

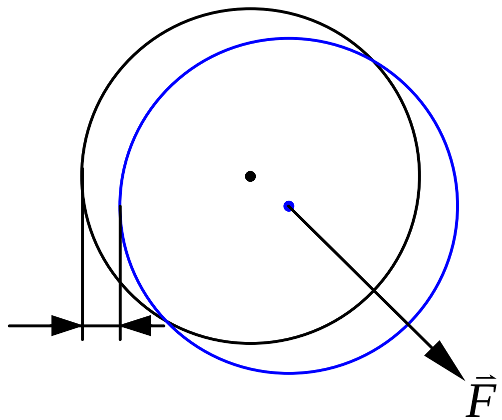
- **广义力 f：** 企图改变广义坐标的力。

- **力的方向：** f 的正方向为 g 增加的方向。



广义坐标	距　离	面　积	体　积	角　度
广义力	机械力	表面张力	压强	转矩
单　　位	N	N/m	N/m^2	N m

（广义）功 = 广义力 × 广义坐标的变化



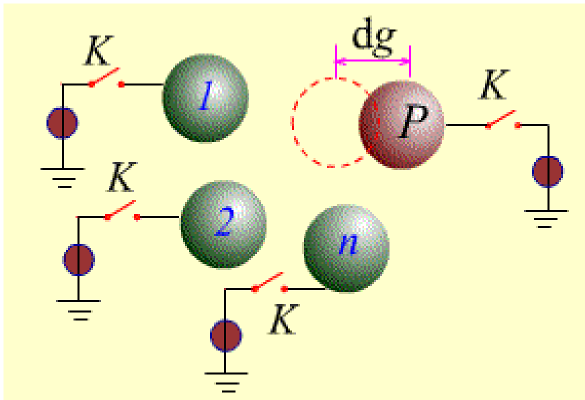
2. 虚位移法的功、能平衡关系

假设在电场力f的作用下，受力导体P有一个位移dg，从而电场力作功fdg；因这个位移会引起电场能量的变化，产生一个增量d_gW_e； 再根据能量守恒定律，电场力作功及场能增量之和应该等于外源供给带电系统的能量dW，即

外源提供能量 = 因dg变化产生静电能量增量
+ 电场力所作功

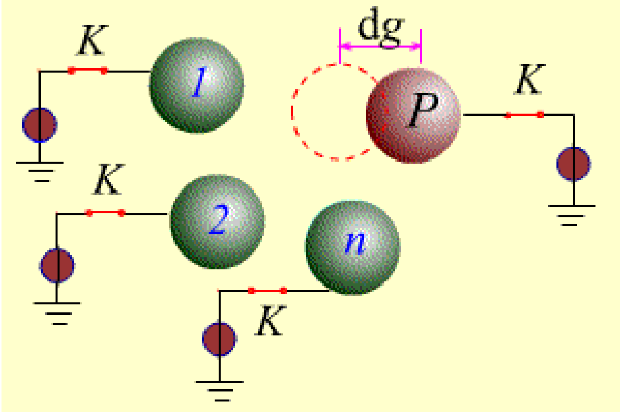
即

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}_{\mathrm{g}}W_{\mathrm{e}} + f\mathrm{d}g$$



即可计算出广义力。

$f$dg 的量纲为功或能的量纲。



多导体系统(K 闭合)

(1) 常电位系统（K 闭合）

给定φ：导体与外源连接

现设由于**dg**‘虚位移’引起第p号导体的电荷变化量为dq_k。则与各带电体相连接的外源提供的能量为：

$$dW = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k dq_k$$

外源提供的能量为： $\mathrm{d}W=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k \mathrm{d}q_k$

$$dW = d_g W_e + fdg$$

功能平衡关系

电能变化的能量

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k dq_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k dq_k + fdg$$

$$fdg = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k \mathrm{d}q_k = \mathrm{d}_g W_\mathrm{e}\Big|_{\varphi_k=C} \Rightarrow \boxed{f = \frac{d_g W_e}{dg}\Big|_{\varphi_k=\mathrm{C}} = \frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial g}\Big|_{\varphi_k=\mathrm{C}}}$$

说明：外源提供的能量有一半用于静电能量的增量，另一半用于电场力做功。

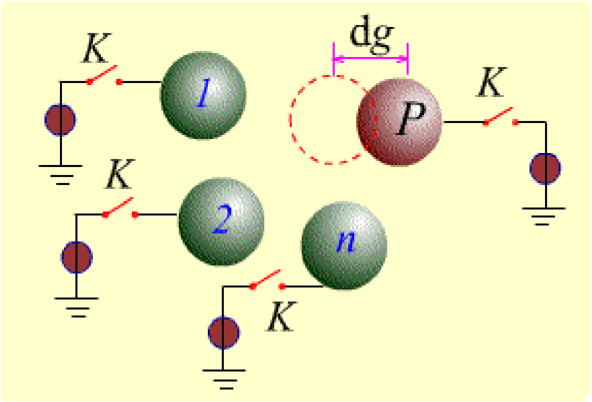
（1）常电荷系统（ *K*断开 ）

各导体不与外源连接

外源不提供能量，**d*W*=0**

$$0 = \mathrm{d}_g W_e + f\,\mathrm{d}g$$

$$f = -\left.\frac{\mathrm{d}_g W_\mathrm{e}}{\mathrm{d}g}\right|_{q_k=C} = -\left.\frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial g}\right|_{q_k=C}$$



多导体系统（*K* 断开）

表示取消外源后，电场力作功需要的能量来自电场中静电能量减少。

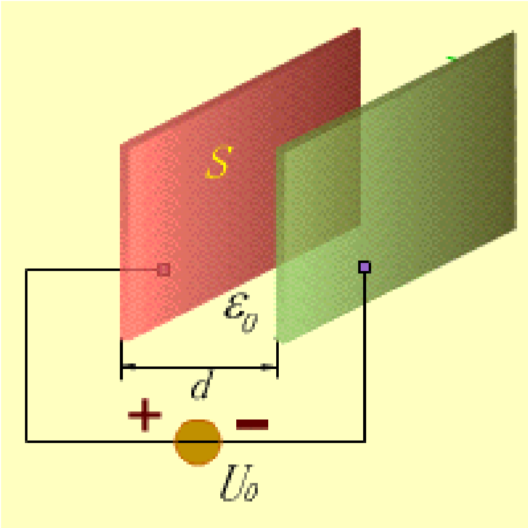
广义力是代数量，*f* 的假定正方向为广义坐标 *g* 增加的方向。根据 *f* 的“±”号判断力的方向。

注意：

- 常电荷、常电位假设得到计算结果应相同。这是因为，实际上带电体并没有发生位移，电场分布也没有变化，因此求得的是系统对应于同一状态的电荷和电位情况下的电场力。

- 看成常电荷系统时，电场能量需写成电荷的函数；看成常电位系统时，电场能量需写成电位（电压）的函数。

例 试求图示平行板电容器极板的电场力。



平行板电容器

解法一：常电位系统

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}CU_0^2 \qquad C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

取 d 为广义坐标（相对位置坐标）

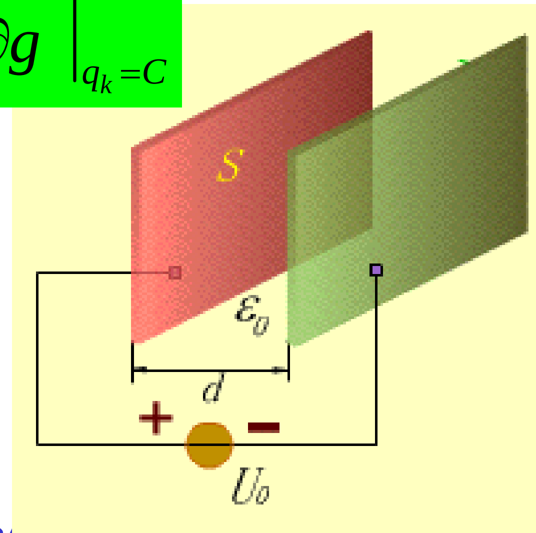
$$f=\left.\frac{\partial W_{\mathrm{e}}}{\partial d}\right|_{\varphi=c}=\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{1}{2}CU_0^2\right)=-\frac{U_0^2\varepsilon_0 S}{2d^2}<0$$

$$\boxed{f=\left.\frac{\partial W_{\mathrm{e}}}{\partial g}\right|_{\varphi_k=\mathrm{C}}}$$

负号表示电场力企图使 d 减小，即电容增大。

$$f=-\frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{q_k=C}$$

解法二：常电荷系统



$$W_e=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}=\frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

$$f=-\frac{\partial W}{\partial d}\bigg|_{q=c}=-\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}<0$$

负号表示电场力企图使 d 减小，即电容增大。

与解法一比较，

$$f=-\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}=-\frac{(SD)^2}{2\varepsilon_0 S}=-\frac{S\varepsilon_0{}^2E^2}{2\varepsilon_0}=-\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2d^2}$$

$$f=-\frac{U_0^2\varepsilon_0 S}{2d^2}$$

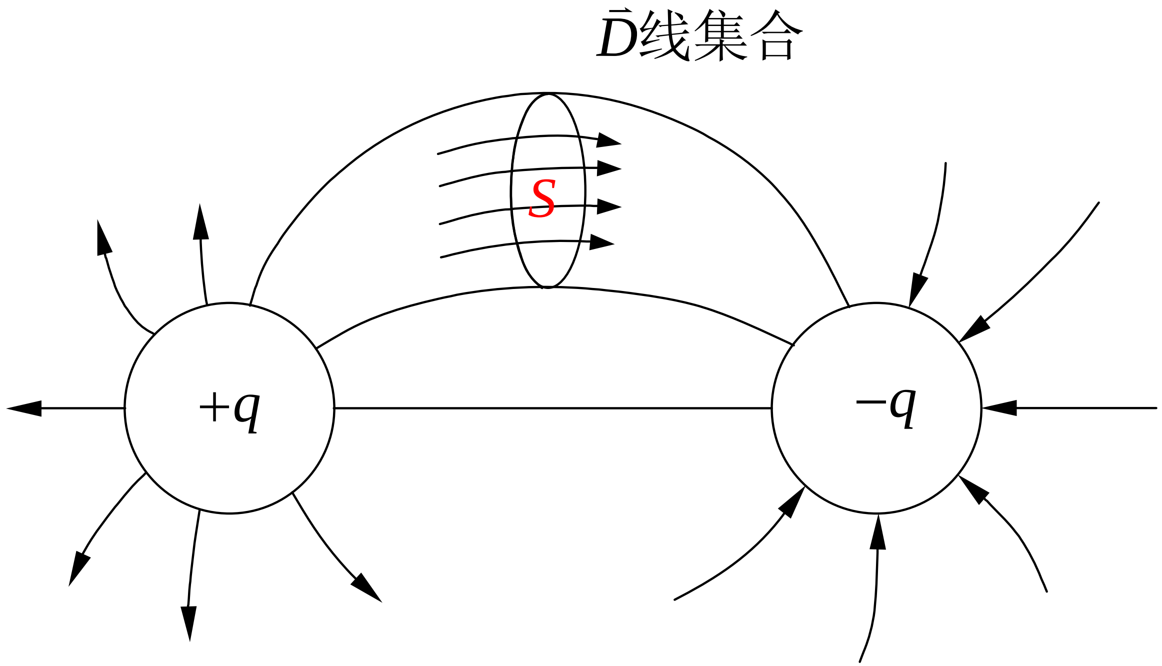
结果一致。

讨论：单位面积受力 $f_r=\dfrac{f}{S}=\dfrac{U_0^2\varepsilon_0}{2d^2}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\dfrac{1}{2}D\cdot E$

2. 法拉第观点（**Farade's review**）求电场力

（1）电位移管：

电场中通过某一面元S周界上各点的$\vec{D}$ 的集合，构成电位移管。



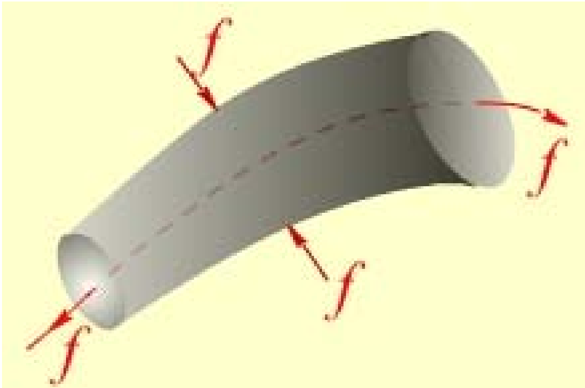
（2）法拉第观点：

- 电磁场中的机械力，都可归结为电场内部的力。即电磁力通过媒质以连续的方式传递。

在电场中的每一段电位移管，沿其轴向受到纵张力，垂直于轴向受到侧压力，其大小为

$$f=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\qquad(\mathrm{N/m^2})$$

单位面积受力

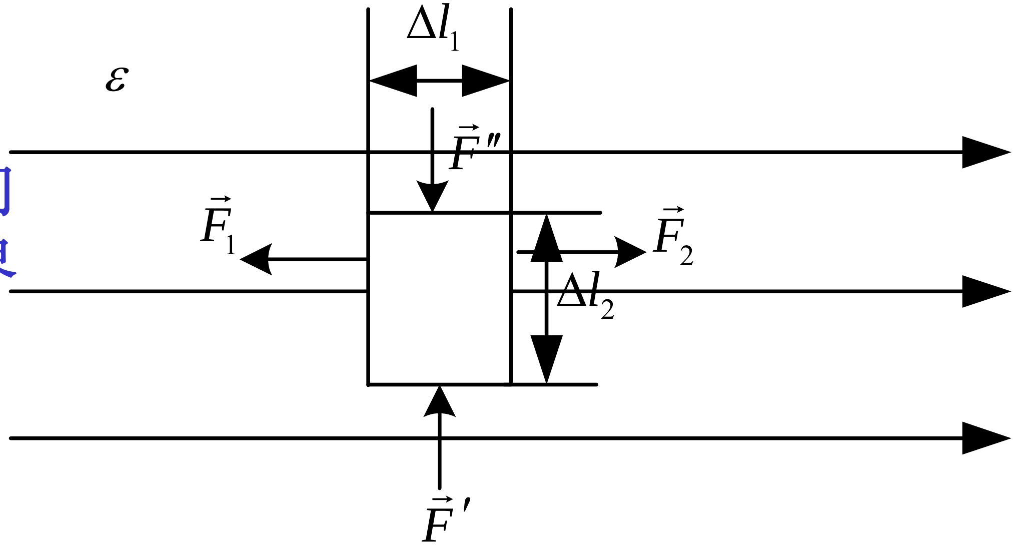


电位移管受力情况

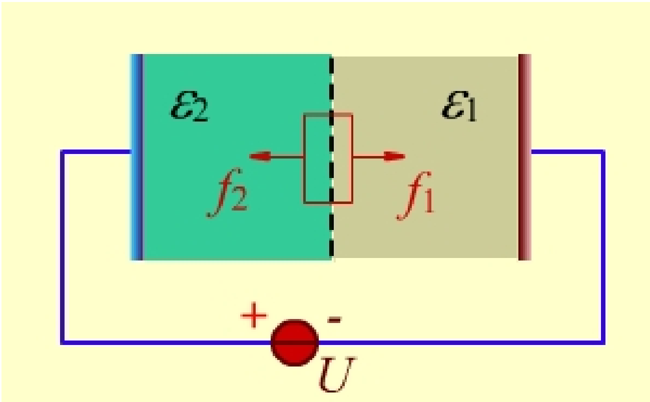
说明：

1. 场域内的介质中存在着电场力，但在同一均匀介质中并未表现出来，因为纵张力或侧压力总是成对出现，相互平衡的。但若在介质与导体交界面上，或不同介质分界面上，则力不平衡，将显现出净力的作用。

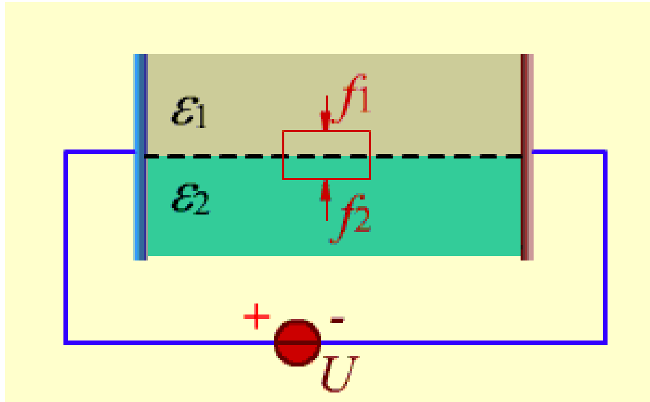
2. 在不同介质分界面上，电场力总是从 ε 大者指向小者，且其方向垂直于界面；



例：求作用于图示的平行板电容器中两种介质分界面上所受的电场力。



(*a*)



(*b*)

平行板电容器

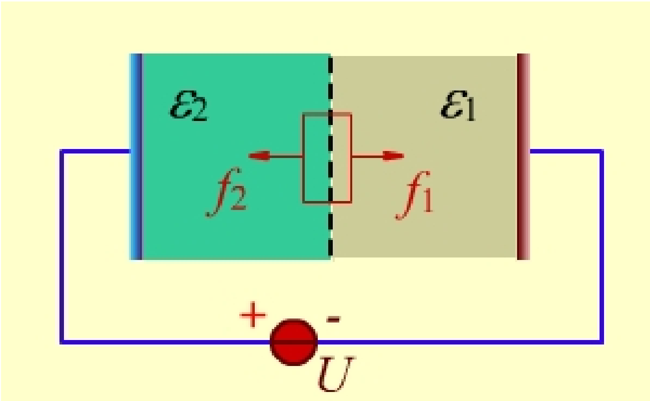
分析：图（***a***）

I. 在两种媒质中，$\vec{D}$ 相等。

II. 以分界面为基准，沿电场方向作一短 $\vec{D}$ 管，其长度趋于**0**。

III. 此时，上下两个面的侧压力相等。

返 回　上 页　下 页



(*a*)

解：图(*a*)

$$f_1=\frac{1}{2}DE_1,\quad f_2=\frac{1}{2}DE_2$$

$$f=f_1-f_2=\frac{1}{2}DE_1-\frac{1}{2}DE_2$$

$$=\frac{D^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

若$\varepsilon_1>\varepsilon_2$，则 $f<0$, $f_1<f_2$,力由ε_1指向ε_2。

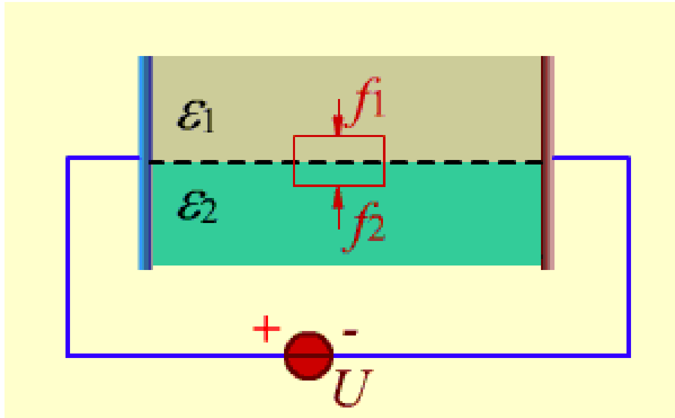
结论: 分界面受力总是从ε大的介质指向ε小的介质。

分析：图（b）

I. 在两种媒质中，$\vec{E}$ 相等

II. 以分界面为基准，沿电场方向作一短 $\vec{D}$ 管。

III. 此时，左右两个面的纵张力相等

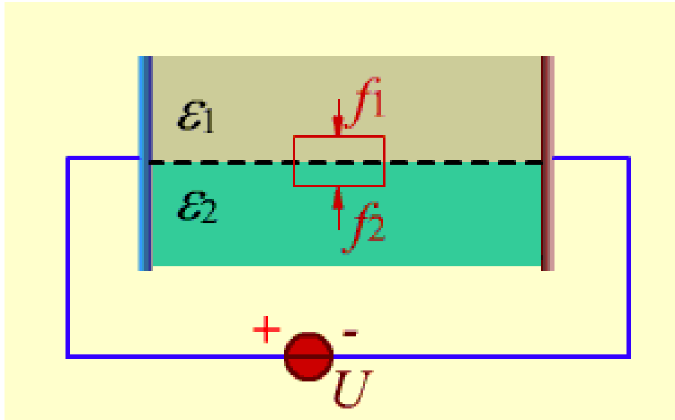


(b)

解：图(b)

$$f = f_1 - f_2$$

$$= \frac{1}{2}D_1E - \frac{1}{2}D_2E = \frac{E^2}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

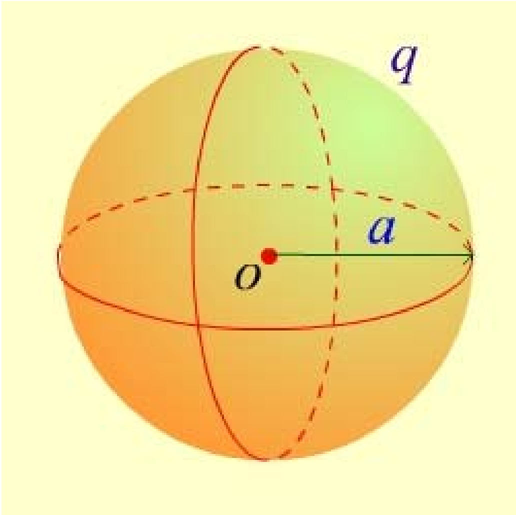


(b)

若$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，则 $f > 0$, $f_1 > f_2$,力由ε_1指向ε_2。

结论: 分界面受力总是从ε大的介质指向ε小的介质。

例　图示一球形薄膜带电表面(带电肥皂泡)，半径为a，其上带电荷为q，求薄膜单位面积所受的电场力(膨胀力)。



球形薄膜

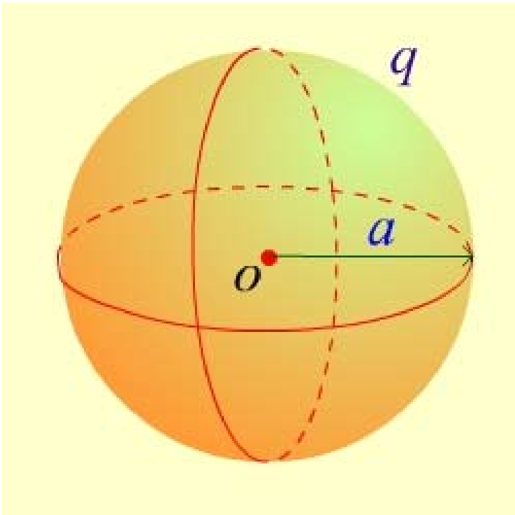
可用虚位移法和法拉第的观点求电场力。

分析：　虚位移法：　取体积为广义坐标

既可看成常电荷系统，亦可看成常电位系统

f 的方向是广义坐标V 增加的方向，表现为膨胀力。

解1：　取体积为广义坐标，常电荷系统



球形薄膜

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

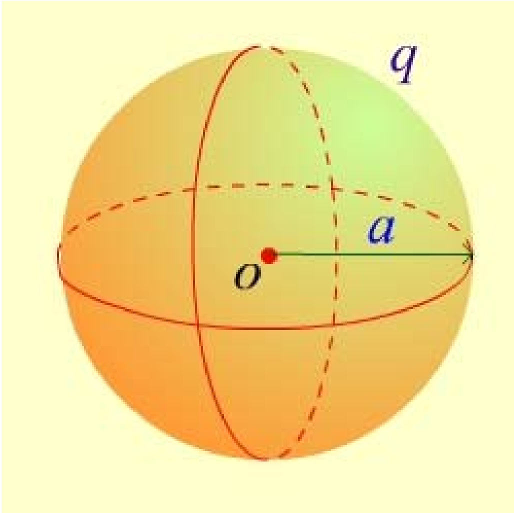
$$f = -\frac{\partial W_e}{\partial V}\bigg|_{q=c} = -\frac{\partial W_e}{\partial(\frac{4}{3}\pi a^3)}$$

$$= -\frac{\partial}{4\pi a^2 \partial a}\left(\frac{q^2}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

$$= \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 a^4} > 0$$

f 的方向是广义坐标V增加的方向，表现为膨胀力。

解2： 取体积$V=4\pi a^3/3$为广义坐标，常电位系统



球形薄膜

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\varphi q=\frac{1}{2}u\cdot Cu$$

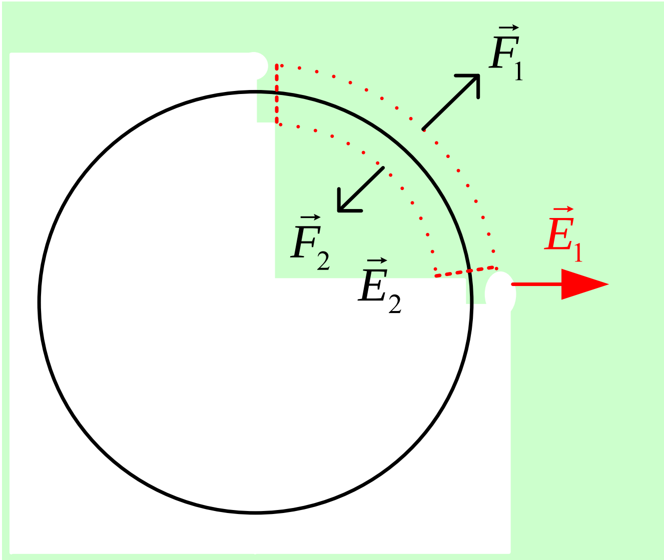
$$=\frac{1}{2}\times 4\pi\varepsilon_0 a u^2$$

$$=2\pi\varepsilon_0 a u^2$$

$$f=\left.\frac{\partial W_{\mathrm{e}}}{\partial g}\right|_{q=c}=\frac{\partial\left(2\pi\varepsilon_0 a u^2\right)}{\partial\left(\dfrac{4\pi a^3}{3}\right)}=\frac{\varepsilon_0 u^2}{2a^2}\quad(\mathrm{N/m^2})$$

$$=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^4}>0$$

解3：法拉第观点



$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$F_1 = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2$$

$$= \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^4} \quad (\mathrm{N/m^2})$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 = 0$$

$$F = F_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^4} \quad (\mathrm{N/m^2})$$

讨论：　取半径 *a* 为广义坐标，常电位系统

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\varphi q = \frac{1}{2}u \cdot Cu = \frac{1}{2} \times 4\pi\varepsilon_0 a u^2 = 2\pi\varepsilon_0 a u^2$$

$$f = \left.\frac{\partial W_{\mathrm{e}}}{\partial g}\right|_{q=c} = \frac{\partial\left(2\pi\varepsilon_0 a u^2\right)}{\partial a} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2} \quad (\mathrm{N})$$

单位面积力

$$f_r = \frac{f}{S} = \frac{\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}}{4\pi a^2} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^4} \qquad (\mathrm{N/m^2})$$

且：

$$f_r = \frac{q^2}{2\varepsilon_0(4\pi a^2)^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}DE \qquad (\mathrm{N/m^2})$$

作业：**2-35, 2-36, 2-39**

临时小测验：

1. 电磁场的基本规律性可由电磁场基本方程组（麦克斯韦方程组）予以描述，试写出此基本方程组的以下各种表述方式

方程 方程的称谓	积分形式	微分形式
全电流定律		
电磁感应定律		
磁通连续性原理或磁场中的高斯定理		
电场中的高斯定理		