

## 第2章 静电场—镜像法

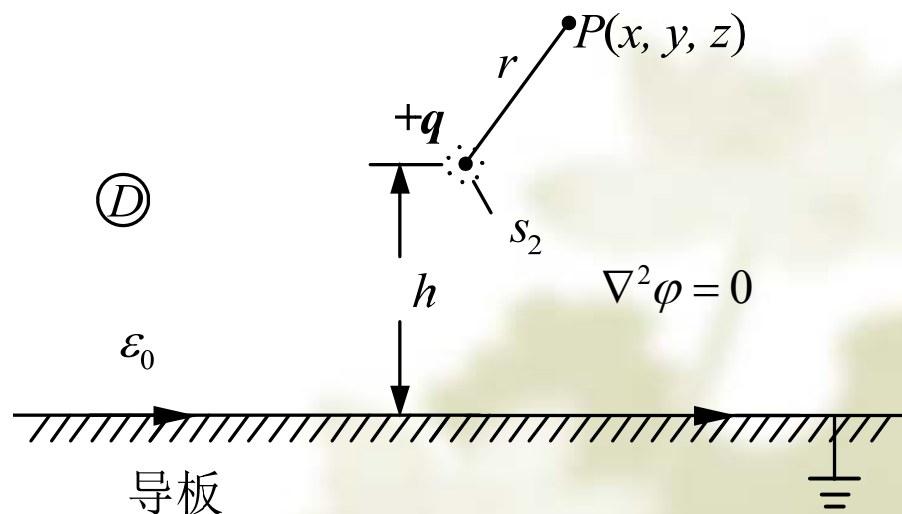
- 镜像法
- 点电荷~无限大的接地导板系统
- 电轴~无限大接地导电平面系统的电场

## 2.6 镜像法

### 2.6.1 点电荷~无限大的接地导电平面系统

#### 1. 背景

对于大地上方输电线、雷电形成的电场，可以典型化为最基本的问题：无限大接地导体上方点电荷激发的电场问题



## 2. 分析—直接求解是否可能

点电荷激励下，导体或介质面上有感应电荷或束缚电荷分布，电场为二者的合成电场。

1).  $\varphi_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  ? 不行, 非单一源

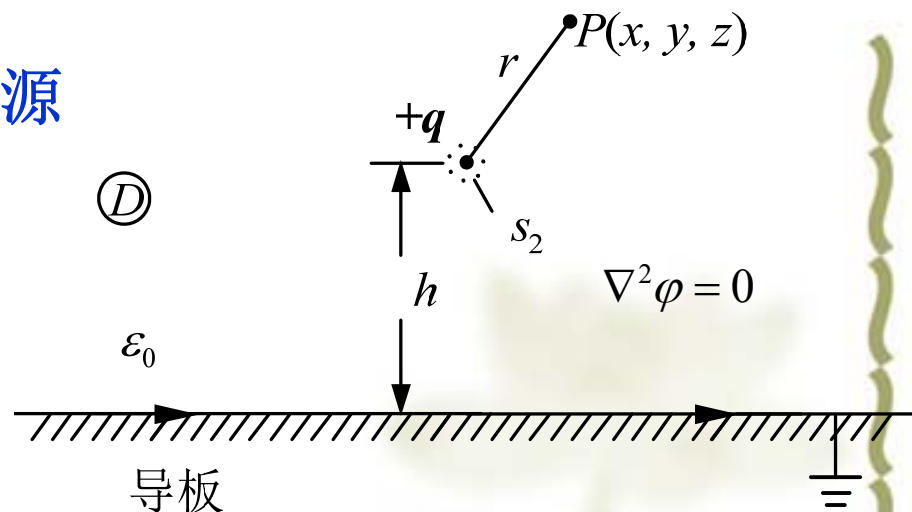
2). 已知场源分布, 求  $\vec{E}$

3). 高斯定理?

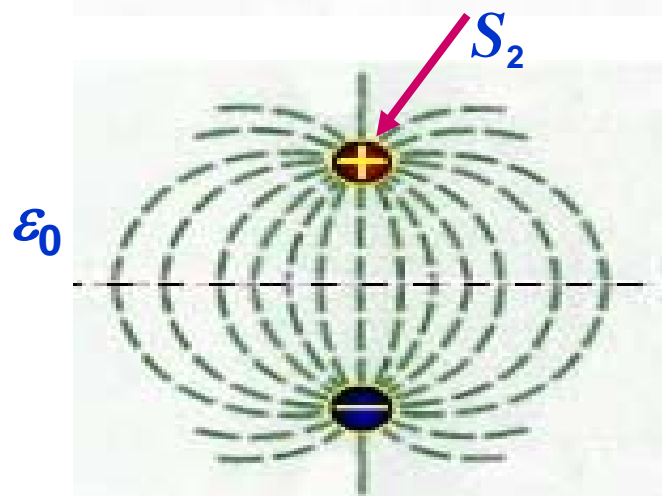
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \implies E \cdot S \text{ 或 } 0 \quad \text{不通}$$



需要探索新的求解方法



### 3. 镜像法



平面导体的镜像

### 1. 平面导体的镜像

*a*  $\nabla^2 \varphi = 0$  空气中除点电荷外

$$\varphi|_{\text{导体表面}} = 0$$

$$\oint_{s_2 \rightarrow 0} \sigma_1 dS \stackrel{\varphi|_{s_2}=C_1}{=} -\epsilon_0 \oint_{s_2 \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = q$$

*b*  $\nabla^2 \varphi = 0$  上半场域除点电荷外

$$\varphi|_{y=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0$$

$$\oint_{s_2 \rightarrow 0} \sigma_1 dS \stackrel{\varphi|_{s_2}=C_1}{=} -\epsilon_0 \oint_{s_2 \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = q$$

泛定方程相同，边界条件相同，解惟一。

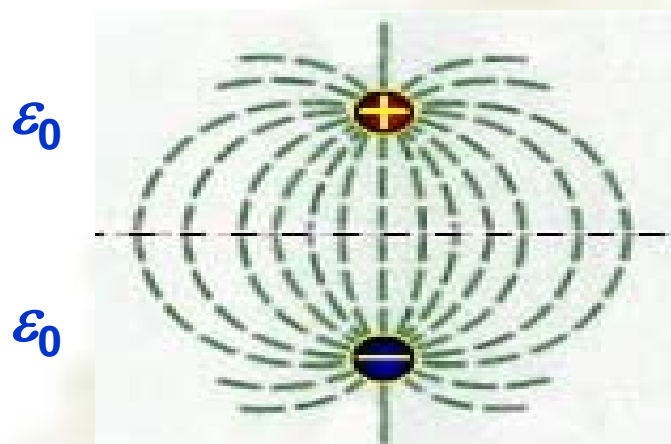
## 4. 结论

计算导板上方的电场时，可以把导板上的感应电荷的影响用一置于关于导板对称位置上的集中电荷等效

由于引入的电荷位于原电荷对导板的镜像处——镜像法

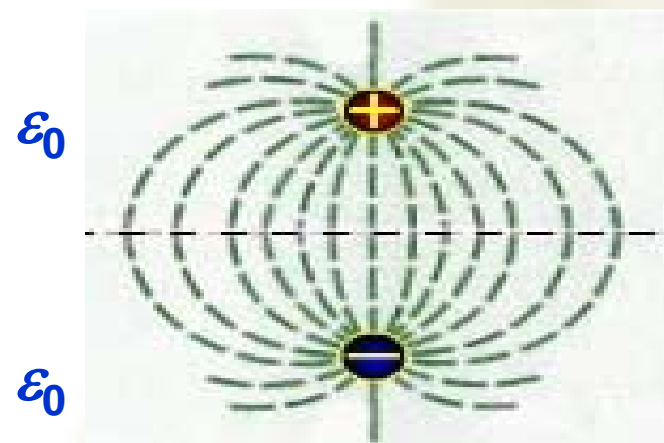
注意适用区域：

半空间等效：上述等效性仅对于导体平面的上半空间成立，因为在上半空间中，源及边界条件未变。

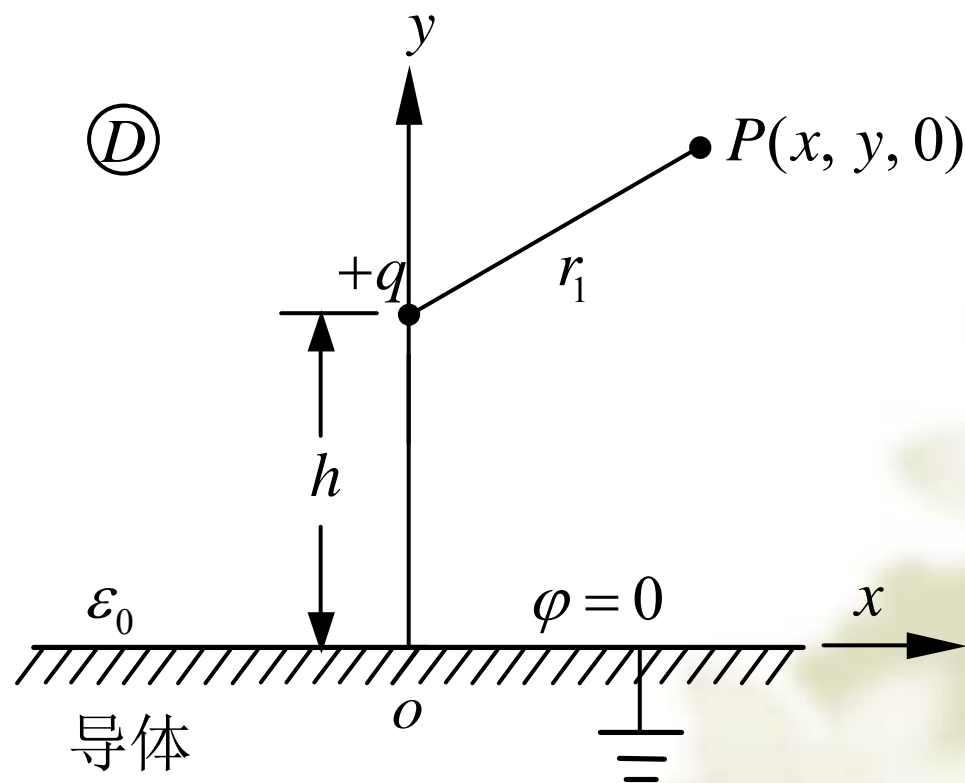


## 5. 应用镜像法的步骤:

- 整个空间用单一媒质填充
- 确定镜像电荷（数量、位置、电荷量）
- 应用镜像法模型分析、计算原问题



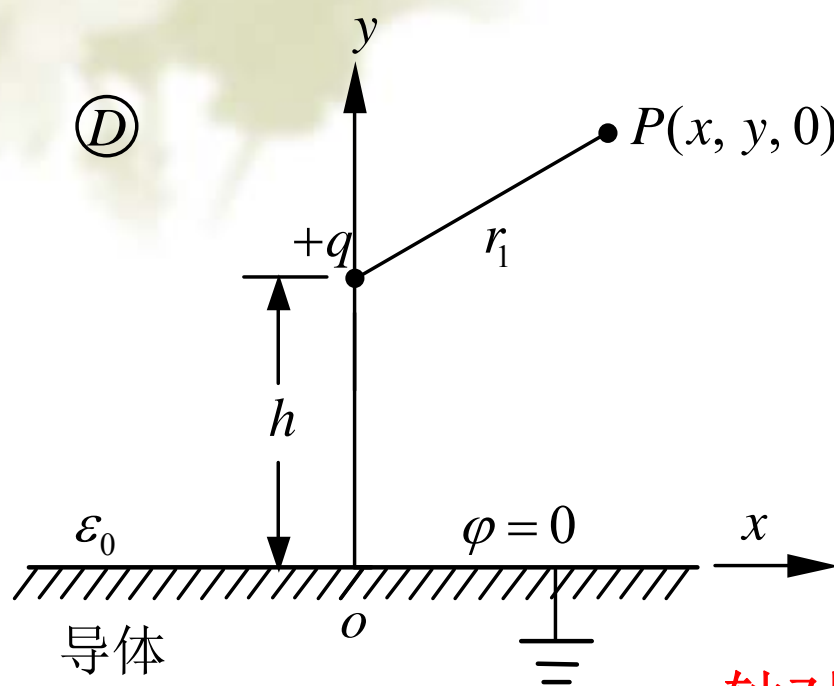
例 无限大导电平面上方空气中点电荷  $q$  引起的电场，试求（1）场中的电位分布；（2）求地面(导板)的感应电荷分布；（3）求导板上的感应电荷总量；（4）点电荷所受作用力。



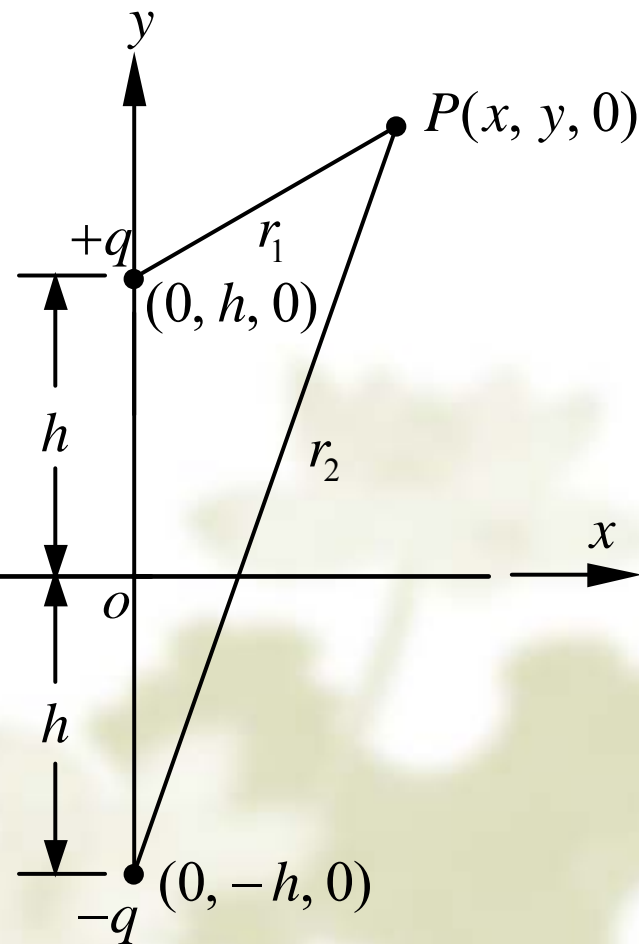


解：确定镜像法模型

场中电场分布, 等效于引入镜像电荷 $-q$ , 撤去导板, 整个空间充满同一种电介质的电场。



轴对称场  
电位的参考点  
不再任意确定

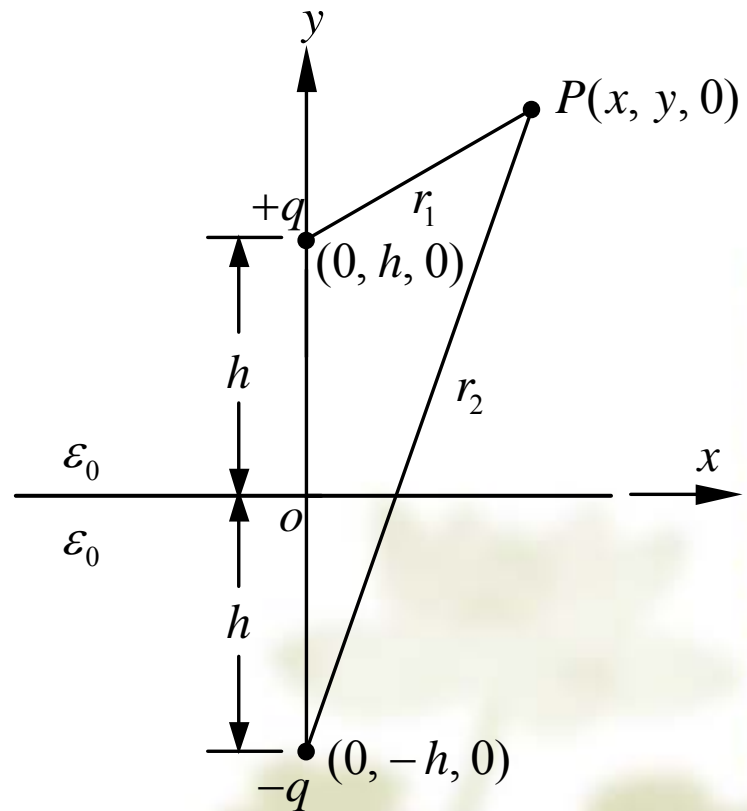




## 分析、计算

### (1) 场中电位分布:

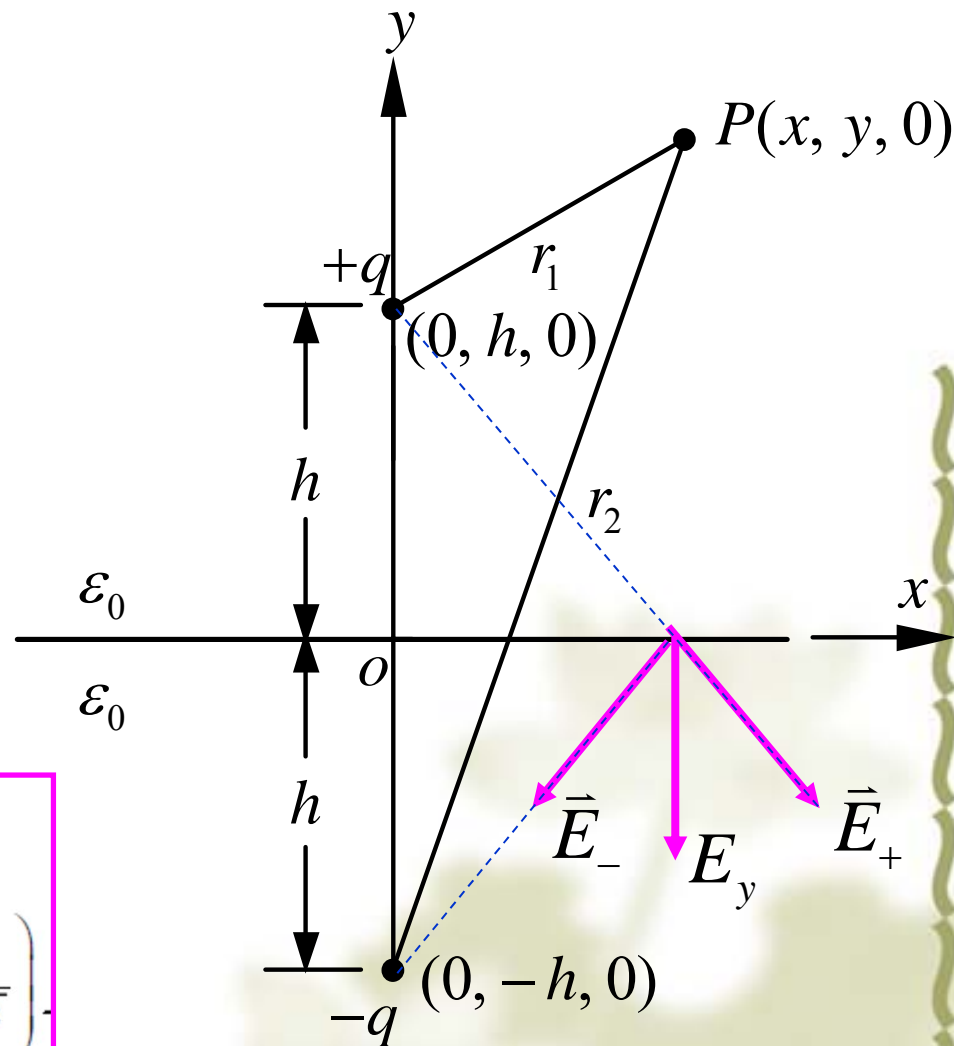
$$\begin{aligned}\varphi_P(x, y, 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+h)^2}} \right)\end{aligned}$$



## (2) 导板上感应电荷的分布:

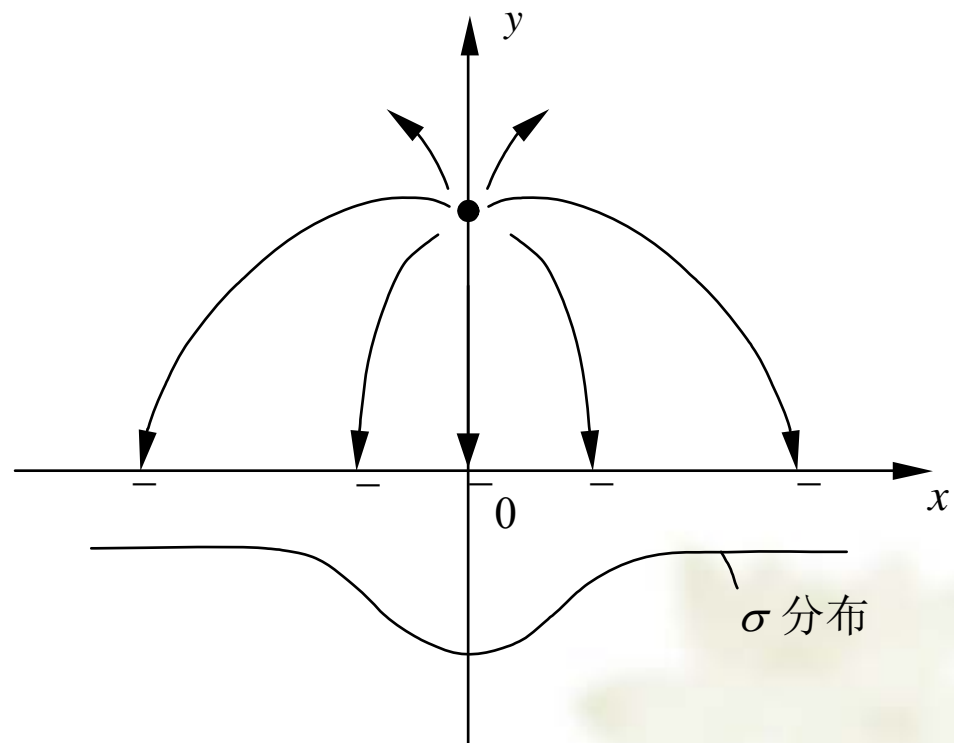
$$\sigma = \varepsilon_0 E_y = \varepsilon_0 \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \bigg|_{y=0}$$
$$= -\frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varphi_P(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+h)^2}} \right)$$



电荷分布和场图:

$$\sigma = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$



### (3) 导板上感应电荷总量

作薄圆柱高斯面， $\Delta h \rightarrow 0$ , 半径  $x$

$$\sigma = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

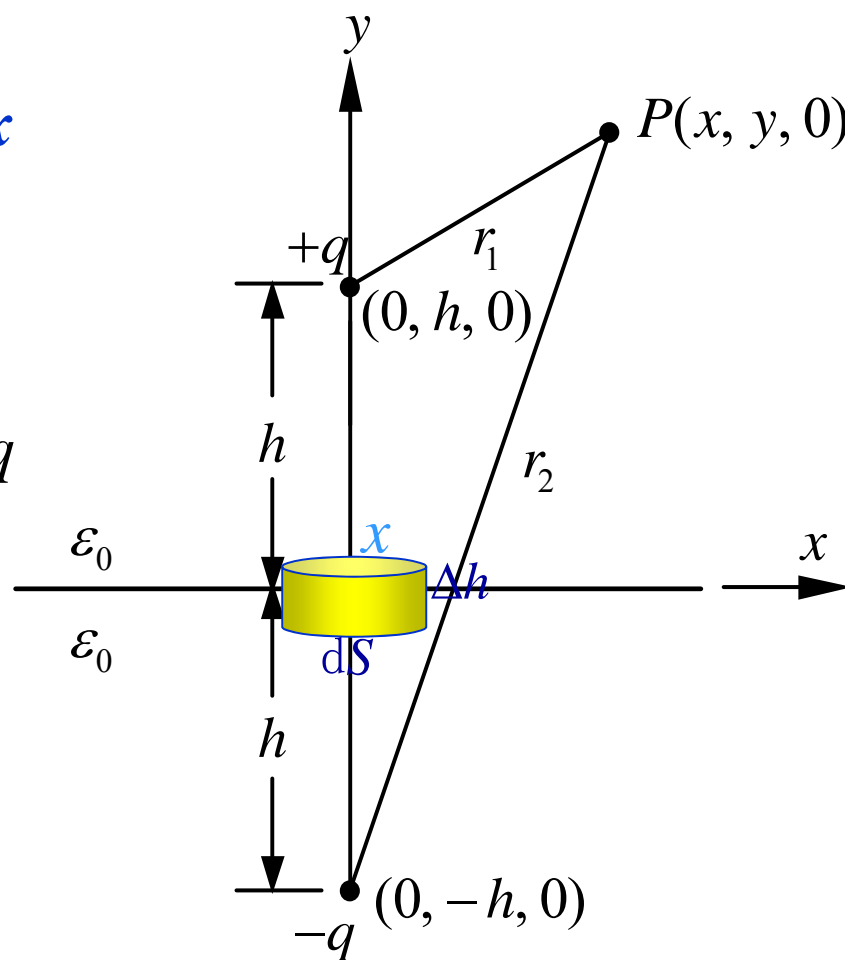
$$\int \sigma dS = \int_0^\infty \frac{-qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi x dx = -q$$

变量代换:

$$x = h \tan \alpha,$$

$$dx = h \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \frac{x}{h} \in (0, 90^\circ)$$



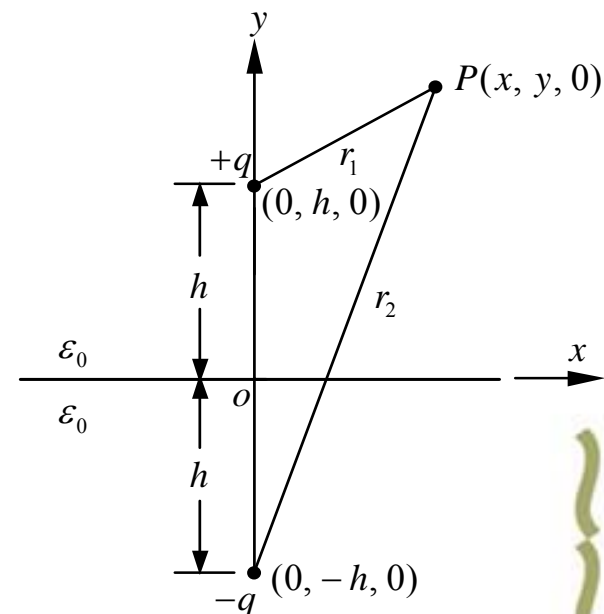
#### (4) 点电荷所受的作用力

$$\vec{f}_q = q\vec{E} = q \cdot \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(2h)^2} \vec{e}_n = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2} \vec{e}_n$$

$\vec{e}_n$  为向下方向

注意:

- 1) 电荷受力计算时, 电场强度不包括电荷本身产生的电场。
- 2)  $\vec{E}$  是导板上感应电荷所激发, 即等效于镜像电荷( $-q$ )激发的。
- 3) 此  $\vec{f}$  也即是导板所受到的作用力——作用力和反作用力。



说明：

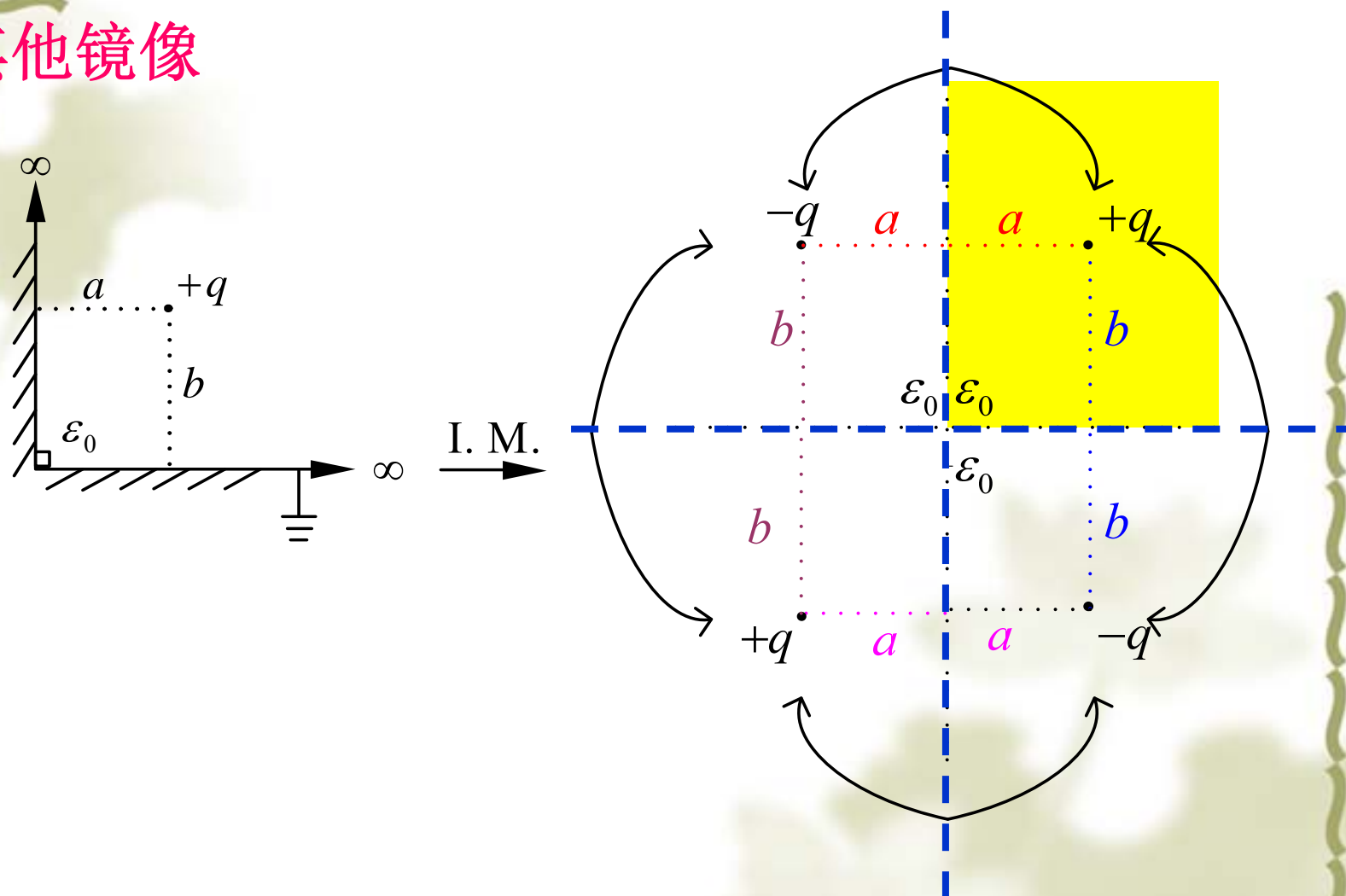
镜像法应用的关键：

- a. 镜像电荷的确定（位置、个数、电量大小）；
- b. 等效求解的“有效区域”

简单记法

哪个区域没有引入电荷  $\longleftrightarrow$  适用于哪个区域

## ■ 其他镜像

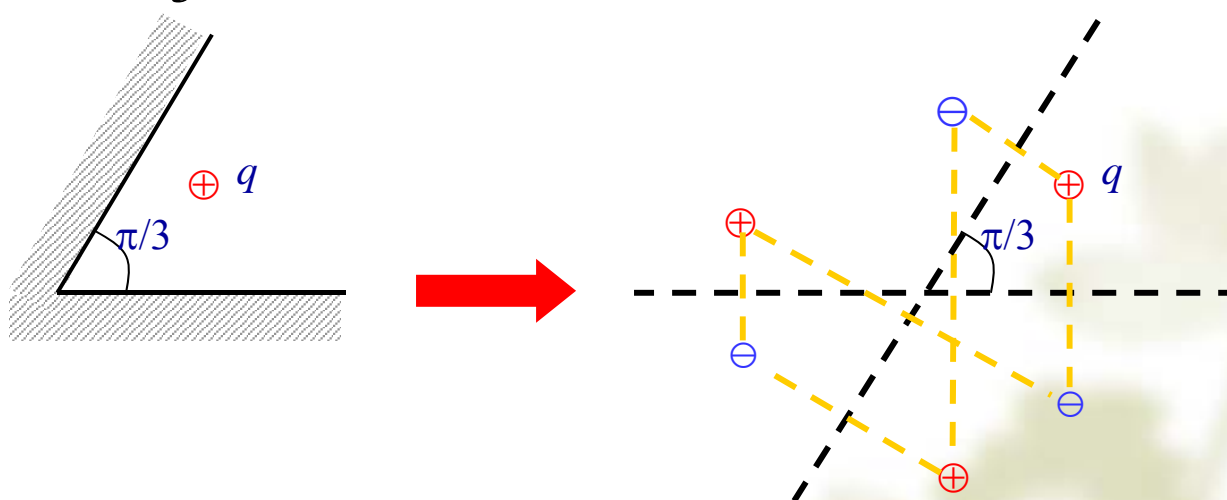




## ■ 导电劈的镜像法

对于半无限大导体平面形成的劈形边界也可应用镜像法。但是仅当这种导体劈的夹角等于  $\pi$  的整数分之一时，才可求出其镜像电荷。为了保证这种劈形边界的电位为零，必须引入几个镜像电荷。

例如，夹角为  $\frac{\pi}{3}$  的导电劈需引入 5 个镜像电荷。



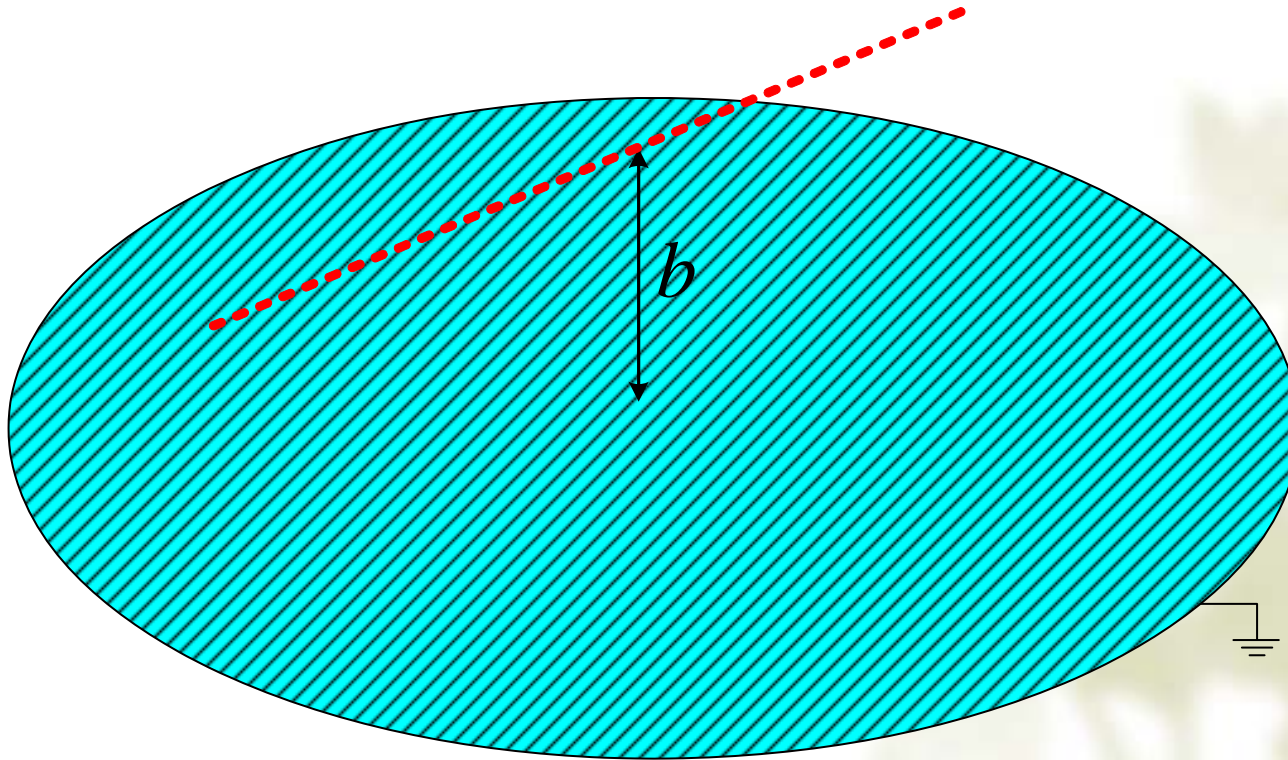
连续分布的线电荷位于无限大的导体平面附近时，根据叠加原理得知，同样可以应用镜像法求解。

## 2.6.2 电轴~无限大导电平面（接地）

### ■ 电轴

截面大小可以忽略不计的长直带电圆柱导体

### ■ 例：位于无限大导电平面附近的电轴产生的电场



分析:

由于电轴产生电场的作用，导电金属板的表面产生感应电荷

感应电荷反过来又影响空间电场

空间电场=电轴产生的电场+感应电荷产生的电场



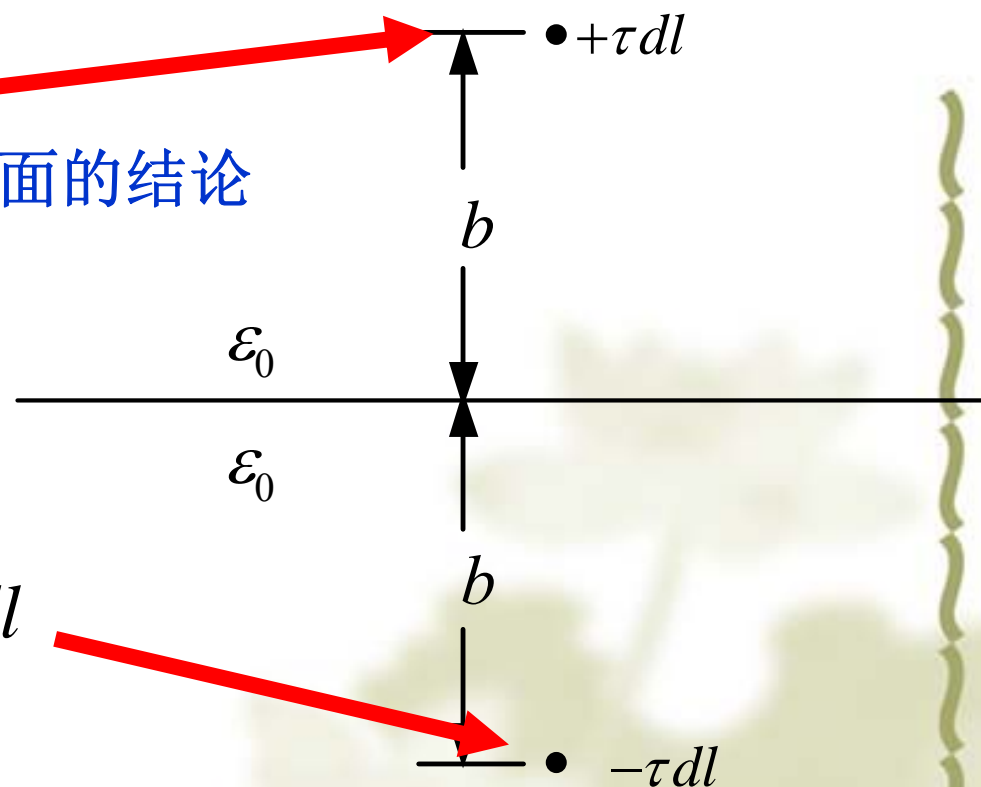
不能直接计算

■ 分析：能否用镜像法、如何应用？

线电荷可以看成是无限个点电荷  $dq = \tau dl$  的集合

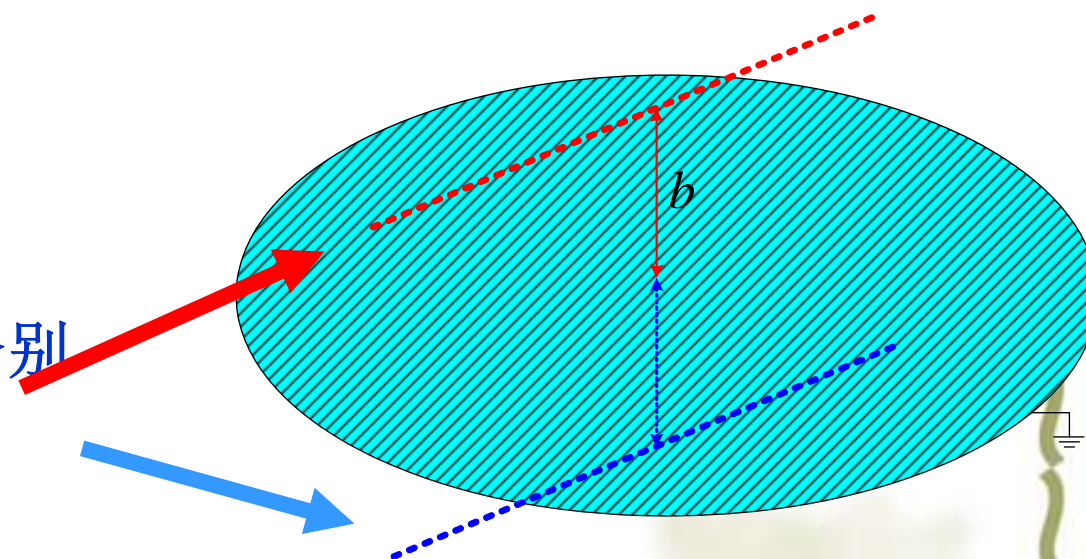
对每个点电荷  $dq = \tau dl$  ,应用前面的结论

得到其镜像电荷为  $-dq = -\tau dl$

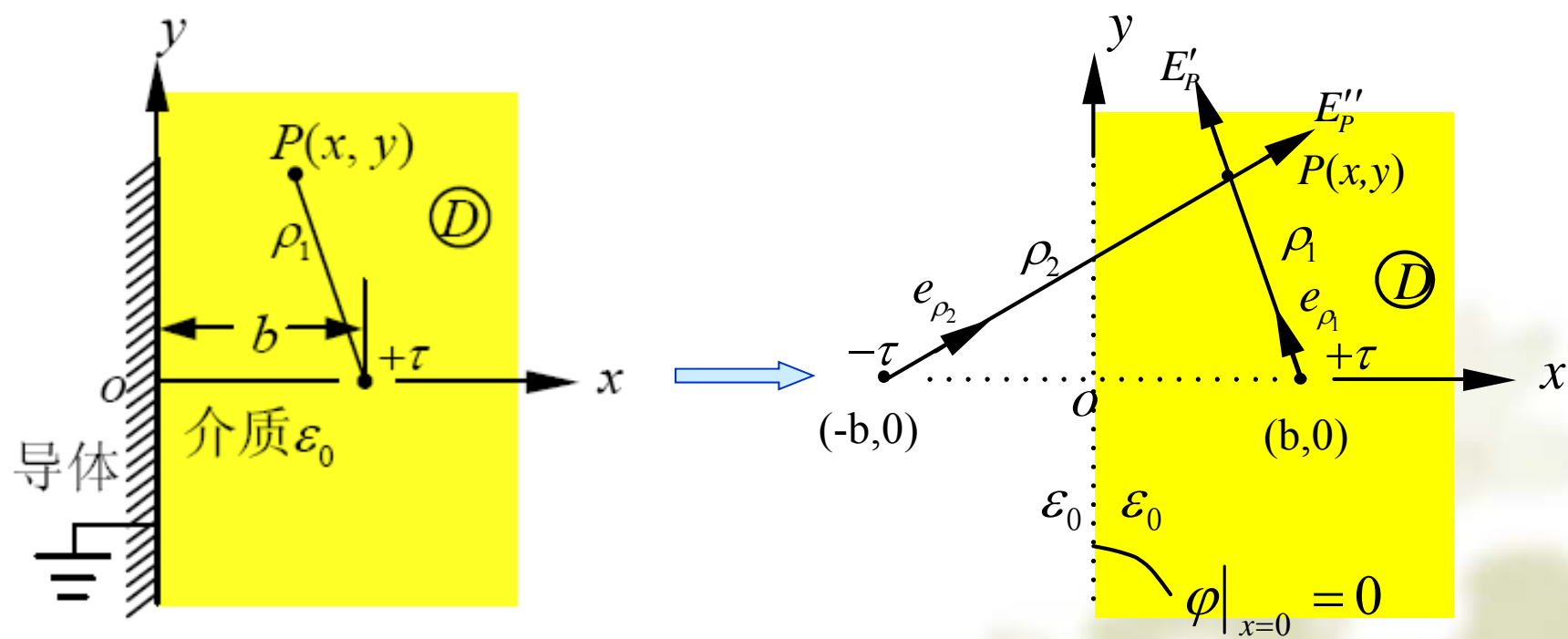


再应用叠加原理

等价为一对线电荷密度分别为 $+\tau$ 和 $-\tau$ 电轴产生的电场



计算:



## ■ 计算

### ■ 电场强度

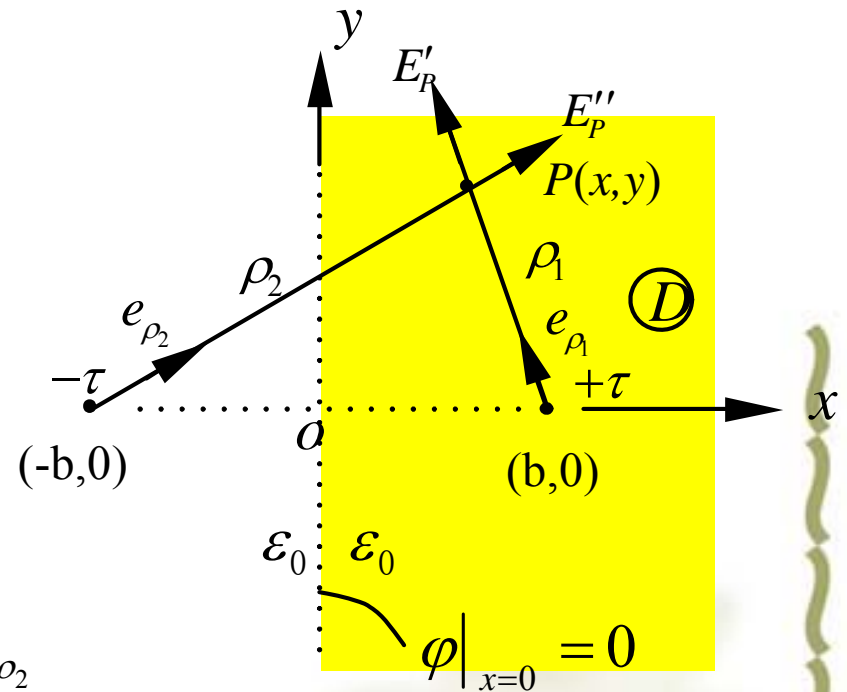
一根电轴产生的电场

$$\vec{E}_P = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} \vec{e}_\rho$$

一对电轴产生的电场

$$\vec{E}'_P = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho_1} \vec{e}_{\rho_1} \quad \vec{E}''_P = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_0\rho_2} \vec{e}_{\rho_2}$$

$$\vec{E}_P = \vec{E}'_P + \vec{E}''_P = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho_1} \vec{e}_{\rho_1} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho_2} \vec{e}_{\rho_2}$$





## ■ 计算

### ■ 电位分布—应用叠加原理

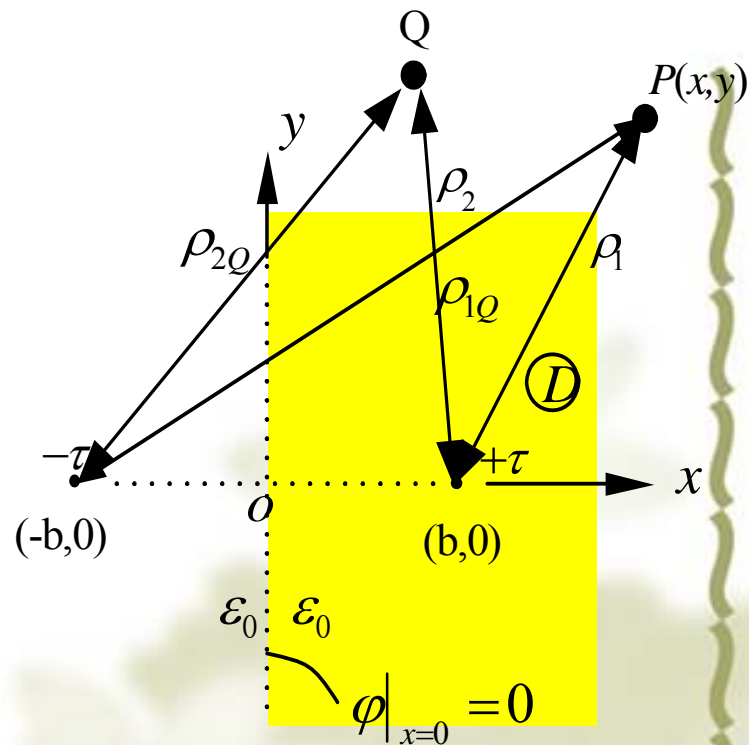
任取 $Q$ 点为电位参考点，则 $+\tau$  电轴产生的 $P$ 点电位为

$$\varphi'_P = \int_{\rho_1}^{\rho_{1Q}} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} d\rho = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_{1Q}}{\rho_1}$$

$$\varphi''_P = \int_{\rho_2}^{\rho_{2Q}} \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} d\rho = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_{2Q}}{\rho_2}$$

2个异号电轴在 $P$ 点产生的电位为

$$\varphi_P = \varphi'_P + \varphi''_P = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \ln \frac{\rho_{1Q}}{\rho_{2Q}}$$

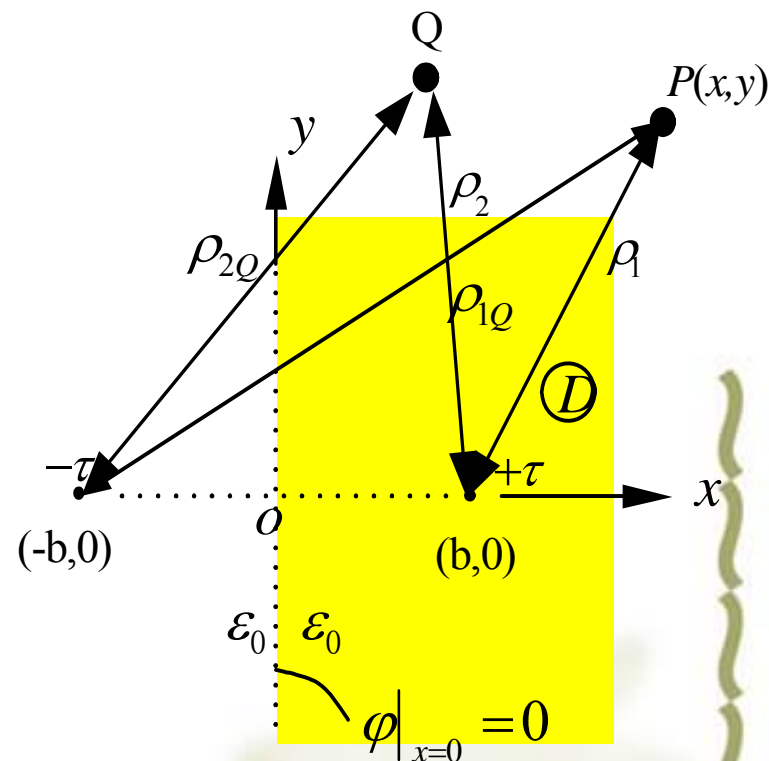


2个异号电轴在P点产生的电位为

$$\varphi_P = \varphi'_P + \varphi''_P = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \ln \frac{\rho_{1Q}}{\rho_{2Q}}$$

设 $\rho_{1Q}=\rho_{2Q}$ 处（中垂面） $\varphi=0$ 为电位参考点，则  $\ln(\rho_{1Q}/\rho_{2Q})=0$

$$\varphi_P = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$



## ■ 计算

### ■ 等位线方程

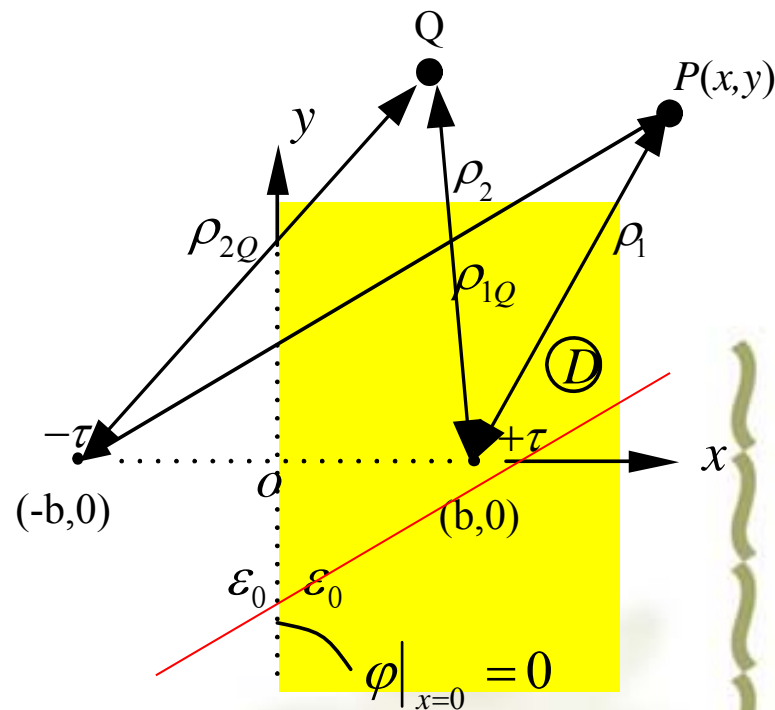
等位线方程:  $\varphi = \text{const.}$

$$\rho_2 / \rho_1 = K$$

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} = \frac{(x+b)^2 + y^2}{(x-b)^2 + y^2} = K^2$$

$$\left[ x - \left( \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \right) b \right]^2 + y^2 = \left( \frac{2bK}{K^2 - 1} \right)^2$$

$$\varphi_P = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$



$$\left[ x - \left( \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \right) b \right]^2 + y^2 = \left( \frac{2bK}{K^2 - 1} \right)^2$$

在 $xoy$ 平面内，等位线轨迹是一族偏心圆

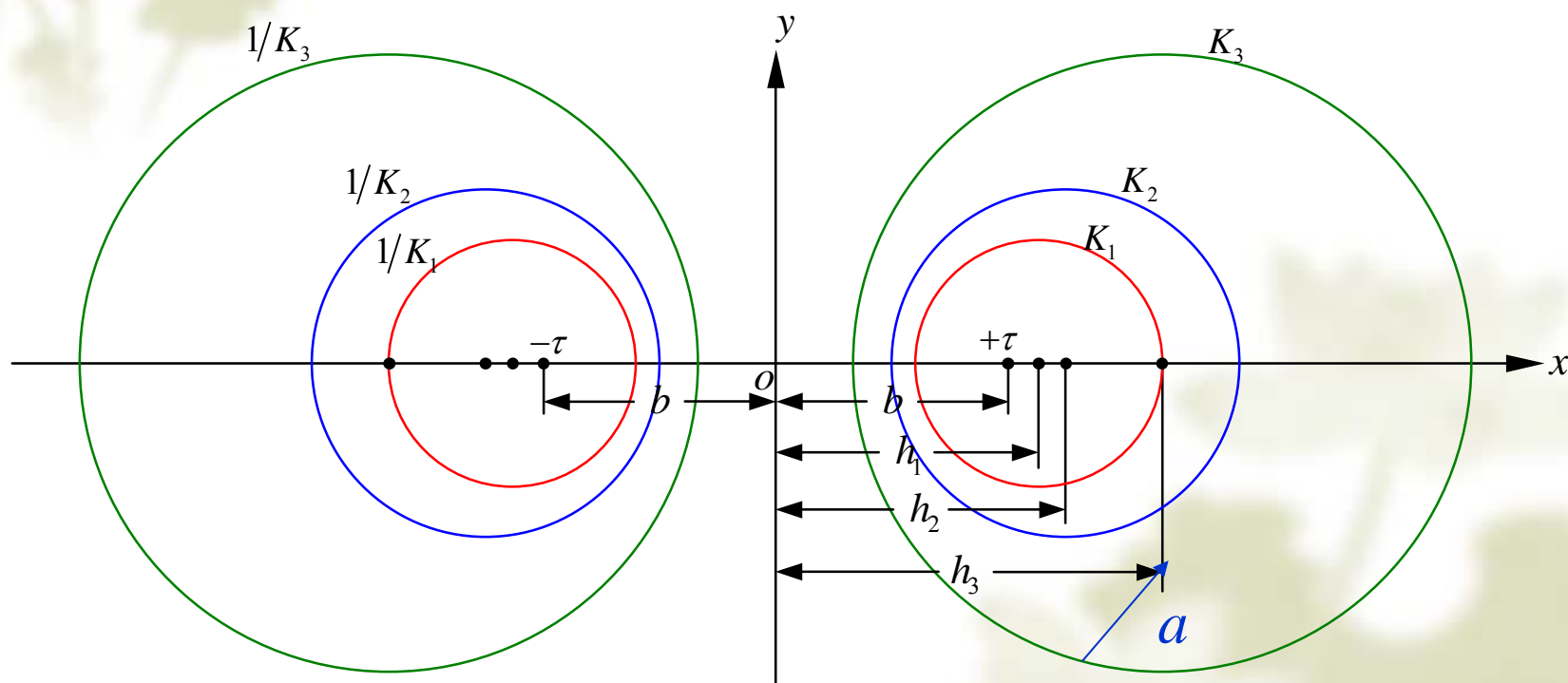
(1) 圆心:  $\left[ h = \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} b, 0 \right]$

(2) 半径:  $a = \left| \frac{2bK}{K^2 - 1} \right|$

$$K = \frac{h}{a} \pm \sqrt{\left( \frac{h}{a} \right)^2 - 1}$$

就每个等位圆轨迹而言，半径 $a$ ，圆心至原点的距离 $h$ ，  
线电荷至原点的距离 $b$ ，三者间有关系：

$$h^2 = a^2 + b^2, \quad \therefore a^2 = h^2 - b^2 = (h + b)(h - b)$$

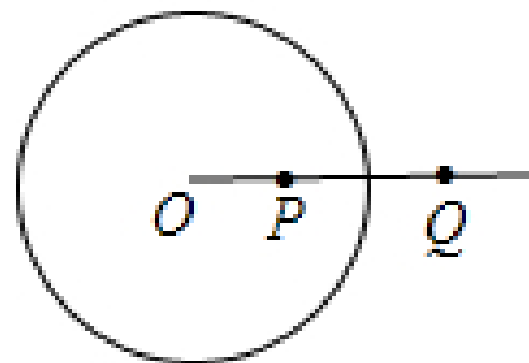


即  $(\pm\tau)$  电轴位置对每个等位圆的圆心来说，互为反演点。

## 反演点：

对于已知中心在点 $O$ ，半径为 $R$ 的圆，  
使异于 $O$ 的任一点 $P$ 与其对应点 $Q$ ，  
有 $O$ 、 $P$ 、 $Q$ 三点共线：

且 $OP \cdot OQ = R^2$ 。称 $Q$ 为 $P$ 的反演点，  
 $O$ 为反演中心， $R$ 为反演半径。



■ 启示

$$\varphi_P = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$a^2 = h^2 - b^2 = (h + b)(h - b)$$

- 如果一静电场的等位线为一族偏心圆，其电场的计算问题，可考虑等效为一对正负电轴产生的电场
- 电轴的位置则由上面的 $a, b, h$ 关系式确定
- 由于共有 $a, b, h$ 三个参数，因此至少给出**2**个等位圆（ $a$ 已知），才能确定电轴的位置。按已知**2**个等位圆的不同，可得不同的等效计算模型。

若电位 $\varphi$ 已知，则可确定 $\tau$ 大小；若 $\tau$ 已知，则可确定电位 $\varphi$ 值；





作业：2-21， 2-23(1)