- 4.3 电磁场能量·坡印廷定理
- 4.4 电磁位

4.3 电磁场能量·坡印廷定理

- 电磁能量符合自然界物质运动过程中能量守恒和转化定律——坡印廷定理；
- 坡印廷矢量是描述电磁场能量流动的物理量。

1. 坡印廷定理—Poynting's Theorem

麦克斯韦认为，时变电磁场的能量以体密度分布于场域中

$$w = w_{\mathrm{e}} + w_{\mathrm{m}}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{E} \bullet \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H} \bullet \vec{B} \quad \mathrm{J/m^3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E} \bullet \vec{D}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H} \bullet \vec{B}\right)\right]$$

$$= \vec{E} \bullet \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \bullet \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

由矢量恒等式:

$$\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\bullet(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\bullet(\nabla\times\vec{H})$$

$$= -\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\bullet\left(\vec{J}_{\mathrm{c}} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$= -\vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\bullet\vec{J}_{\mathrm{c}}$$

$$= -\frac{\partial w}{\partial t} - p$$

$$\boxed{\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{\partial w}{\partial t} - \vec{E}\bullet\vec{J}_{\mathrm{c}}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_{\mathrm{c}} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$$

$$\boxed{p = \vec{E}\cdot\vec{J}}$$

坡印廷定理微分形式

$$\nabla \bullet (\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{\partial w}{\partial t} - \vec{E}\bullet\vec{J}_{c}$$

坡印廷定理微分形式

$$\int_V \nabla\bullet\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}V - \int_V \vec{E}\bullet\vec{J}\mathrm{d}V$$

$$\int_V w\mathrm{d}V = W,\quad \int_V \vec{E}\bullet\vec{J}\mathrm{d}V = P$$

$$-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\bullet\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_e + W_m) + P$$

坡印廷定理积分形式

物理意义：动态电磁场中，单位时间内穿过闭合面 S 流入体积 V 内的电磁能量=该体积内电磁场**(W_e+W_m)**能量的增加率+电磁能量的消耗率**P.**

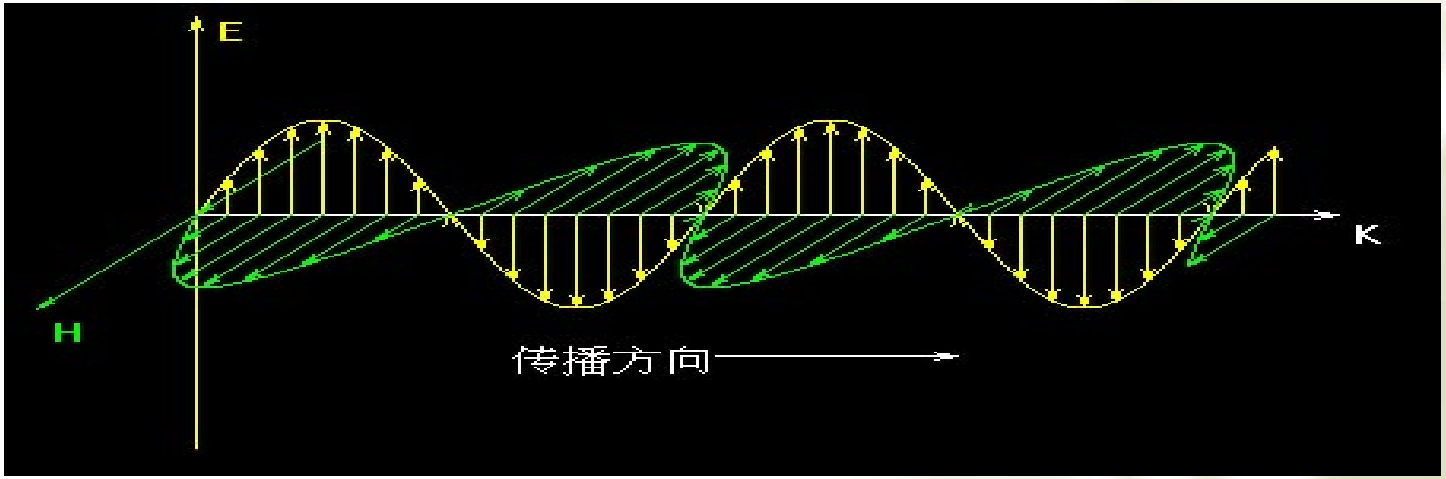
坡印廷定理　　动态电磁场的能量守恒和功率平衡关系

$$-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+P$$ 坡印廷定理

$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ **W/m²** 坡印廷矢量

坡印廷矢量：表征了单位时间内穿过（入）单位面积的电磁能量, 也叫电磁功率流面密度矢量（电磁能流密度）。

$\vec{S}$ 的方向总是与电场和磁场垂直， $\vec{S}$ 的方向代表电磁波传播的方向，也是电磁能量流动的方向。



电磁波的传播

$$-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + P$$

坡印廷定理

在恒定场中，场量是动态平衡下的恒定量，坡印廷定理为：

$$-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S} = P = \int_V \vec{E}\bullet\vec{J}\mathrm{d}V$$

恒定场中的坡印廷定理

2. 时谐电磁场的坡印廷定理

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}^{*}=\dot{\vec{J}}_{\mathrm{c}}^{*}-\mathrm{j}\omega\dot{\vec{D}}^{*}$$

$$\nabla\times\dot{\vec{E}}=-\mathrm{j}\omega\dot{\vec{B}}$$

$$\begin{aligned}\nabla\bullet(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*})&=\dot{\vec{H}}^{*}\bullet(\nabla\times\dot{\vec{E}})-\dot{\vec{E}}\bullet(\nabla\times\dot{\vec{H}}^{*})\\&=\dot{\vec{H}}^{*}\bullet(-j\omega\dot{\vec{B}})-\dot{\vec{E}}\bullet\left(\dot{\vec{J}}_{c}^{*}-j\omega\dot{\vec{D}}^{*}\right)\\&=-j\omega(\dot{\vec{H}}^{*}\bullet\dot{\vec{B}})-\dot{\vec{E}}\bullet\dot{\vec{J}}_{c}^{*}+j\omega(\dot{\vec{E}}\bullet\dot{\vec{D}}^{*})\\&=-\dot{\vec{E}}\bullet\dot{\vec{J}}_{c}^{*}-j\omega(\dot{\vec{H}}^{*}\bullet\dot{\vec{B}}-\dot{\vec{E}}\bullet\dot{\vec{D}}^{*})\end{aligned}$$

$$-\int_{V}\nabla\bullet(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*})\mathrm{d}V=\int_{V}[\dot{\vec{E}}\bullet\dot{\vec{J}}^{*}+\mathrm{j}\omega(\dot{\vec{B}}\bullet\dot{\vec{H}}^{*}-\dot{\vec{E}}\bullet\dot{\vec{D}}^{*})]\mathrm{d}V$$

$$-\oint_{S}(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*})\bullet\mathrm{d}\vec{S}=\int_{V}[\dot{\vec{E}}\bullet\dot{\vec{J}}^{*}+\mathrm{j}\omega(\dot{\vec{B}}\bullet\dot{\vec{H}}^{*}-\dot{\vec{E}}\bullet\dot{\vec{D}}^{*})]\mathrm{d}V$$

$$-\oint_S (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_V [\dot{\vec{E}} \bullet \dot{\vec{J}}^* + \mathrm{j}\omega(\dot{\vec{B}} \bullet \dot{\vec{H}}^* - \dot{\vec{E}} \bullet \dot{\vec{D}}^*)]\mathrm{d}V$$

定义： $\tilde{\vec{S}} = \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*$ 坡印廷矢量复数形式

（复坡印廷矢量）

实部为有功功率(平均功率)流密度，虚部为无功功率流密度。

[1] 媒质吸收的有功功率（平均功率）流密度

$$\vec{\mathbf{S}}_{\mathrm{av}} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{S}}\right) = \mathrm{Re}(\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*)$$

$$-\oint_S (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \bullet \mathrm{d}\vec{S} = -\oint_S (\tilde{\vec{S}}) \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

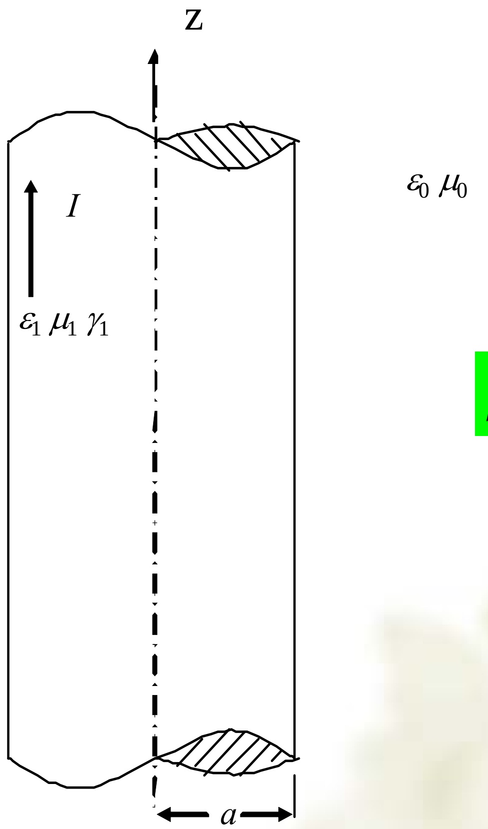
$$= \int_V [\dot{\vec{E}} \bullet \dot{\vec{J}}^* + \mathrm{j}\omega(\dot{\vec{B}} \bullet \dot{\vec{H}}^* - \dot{\vec{E}} \bullet \dot{\vec{D}}^*)]\mathrm{d}V = P + \mathrm{j}Q$$

[2] 基于场的分析，相应的等值电路参数

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{I^2}\left[-\mathrm{Re}\oint_S \tilde{\vec{S}} \bullet \mathrm{d}\vec{S}\right] \qquad X = \frac{Q}{I^2} = \frac{1}{I^2}\left[-\mathrm{Im}\oint_S \tilde{\vec{S}} \bullet \mathrm{d}\vec{S}\right]$$

3. 电磁能量传输的途径

例**1**：一半径为*a*的长直圆柱载流导线，求各区域中坡印廷矢量 $\vec{S}$ 的分布，并由此分析能量传输情况。圆柱导体中有电流 ***I*** 均匀分布。

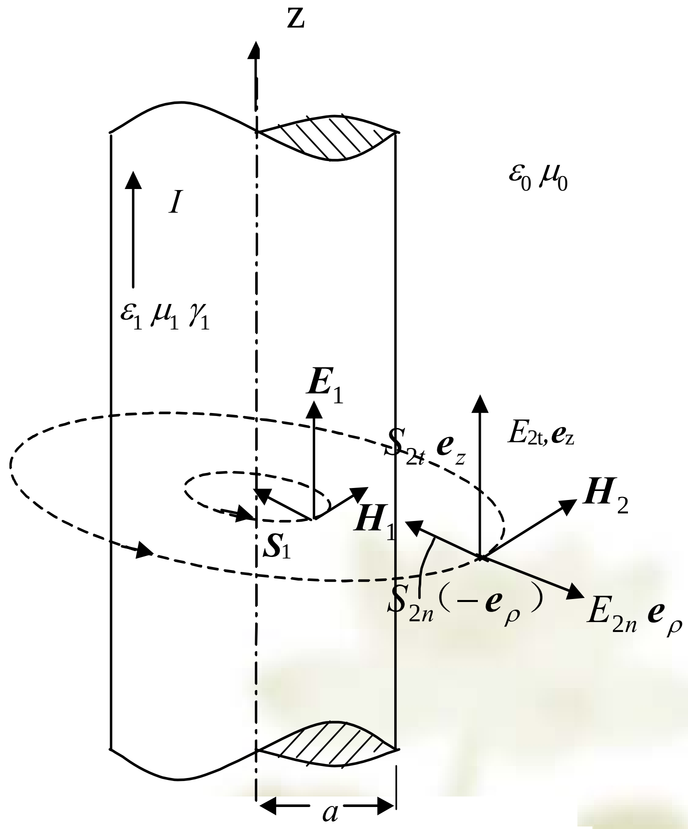


$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

（1）$\rho < a$（导体内部）：

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{J}}{\gamma} = \frac{I}{\pi a^2 \gamma}\vec{e}_z$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I'}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} I\,\vec{e}_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\vec{e}_\phi$$



导体中的坡印廷矢量

$$\vec{S}_1 = \vec{E}_1 \times \vec{H}_1 = -\frac{I^2\rho}{2\pi^2 a^4 \gamma}\vec{e}_\rho$$

可见 $\vec{S}_1$ 由外向里传输

$$\vec{S}_1\Big|_{\rho=0} = \vec{S}_{\min} = 0,$$

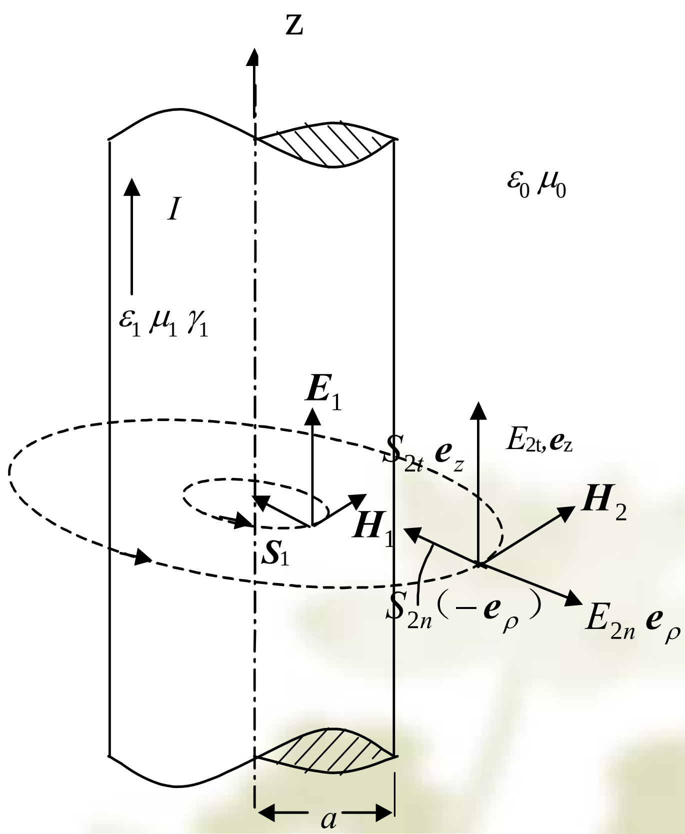
$$\vec{S}_1\Big|_{\rho=a} = \vec{S}_{\max} = -\frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \gamma}\vec{e}_\rho$$

在导体的两个端面上

$$\vec{S}_1=\vec{E}_1\times\vec{H}_1=-\frac{I^2\rho}{2\pi^2a^4\gamma}\vec{e}_\rho$$

$$d\vec{S}=\pm\vec{e}_z$$

$$P=-\int_S\vec{S}_1\bullet\mathrm{d}\vec{S}=0$$



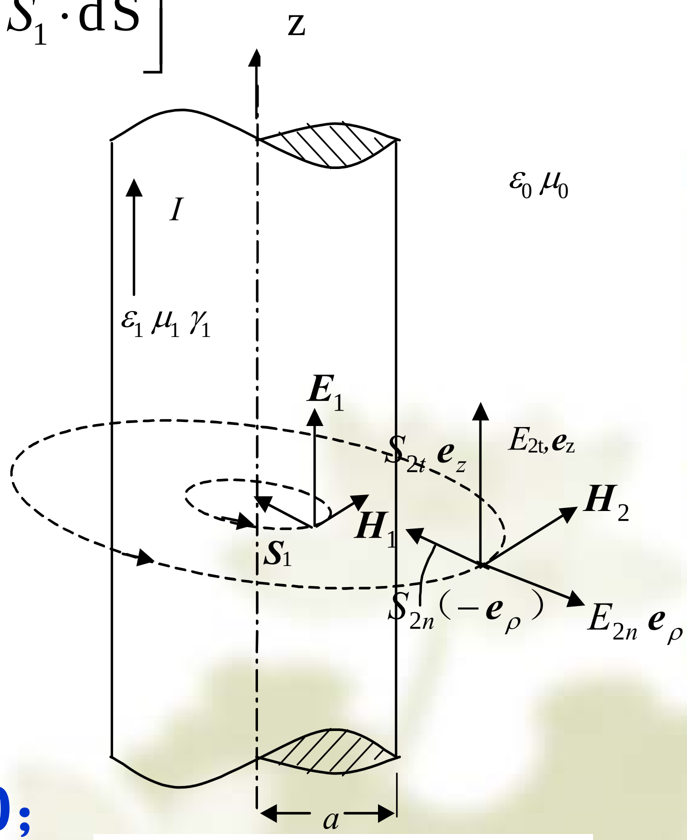
设导线长为*l*，由体表面穿入到长度为*l* 的一段体内的功率

$$-\oint_{S_1}\vec{S}_1\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\left[\int_{S_1上底}\vec{S}_1\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\int_{S_1下底}\vec{S}_1\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\int_{S_1侧}\vec{S}_1\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right]$$

$$=0+0-\frac{I^2}{2\pi^2a^3\gamma_1}\int_{S_1}\left(-\vec{e}_\rho\right)\cdot\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\frac{I^2}{2\pi^2a^3\gamma_1}\cdot 2\pi a l = \frac{l}{\pi a^2\gamma_1}I^2$$

$$=I^2R=P$$



由计算可知：①坡印廷矢量 $\vec{S}_1$

由导体表面向里传输，随 $\vec{S}_1$

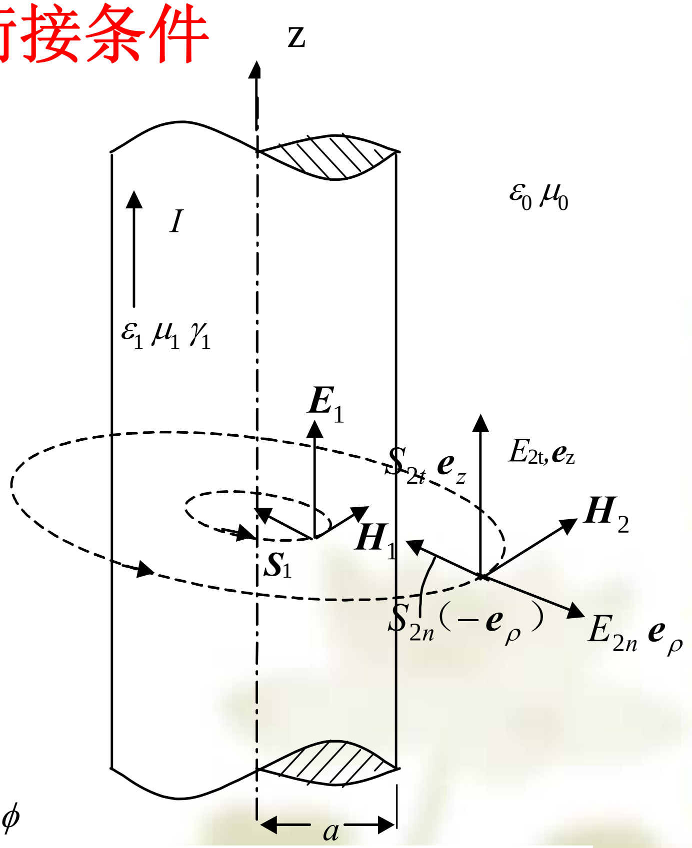
的穿入加深而衰减，最后 $\Rightarrow$ **0**；

②传输到导体内的电功率全部成了导体中的热损耗。

（2）在 $\rho = a$ 导体与空气分界面上的衔接条件

$$\begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \quad \Rightarrow \quad H_{1\phi} = H_{2\phi} \\ E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad E_{1z} = E_{2z} \\ B_{1n} = B_{2n} = 0 \Rightarrow H_{1\rho} = H_{2\rho} = 0 \\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma \Rightarrow D_{2\rho} = \sigma, \quad E_{2\rho} \neq 0 \end{cases}$$

$$E_{1n} = 0$$



（3）$\rho > a$（导体外部）

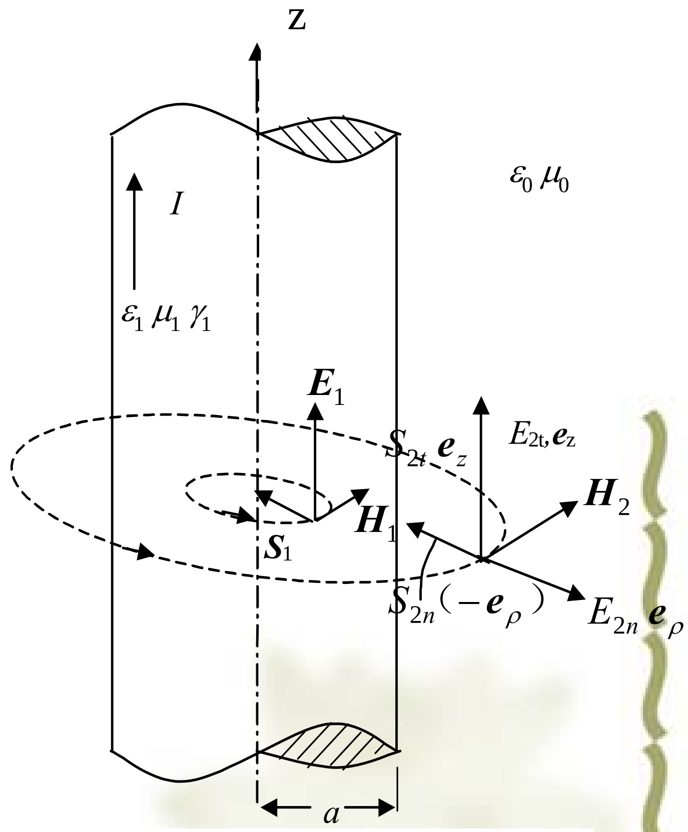
$$\vec{E}_2 = E_{2t}\,\vec{e}_z + E_{2n}\,\vec{e}_\rho \qquad \vec{H}_2 = H_{2t}\,\vec{e}_\phi$$

$$\vec{S}_2 = \vec{E}_2 \times \vec{H}_2 = \left(E_{2z}\,\vec{e}_z + E_{2\rho}\,\vec{e}_\rho\right) \times H_{2\phi}\,\vec{e}_\phi$$

$$= E_{2z} H_{2\phi}\left(-\vec{e}_\rho\right) + E_{2\rho} H_{2\phi}\,\vec{e}_z$$

$$= S_{2n}\left(-\vec{e}_\rho\right) + S_{2t}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{S}_2 = S_{2n}\left(-\vec{e}_\rho\right) + S_{2t}\,\vec{e}_z$$



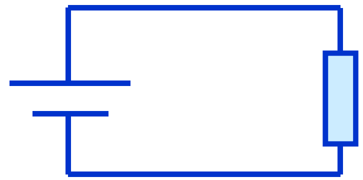
可知:

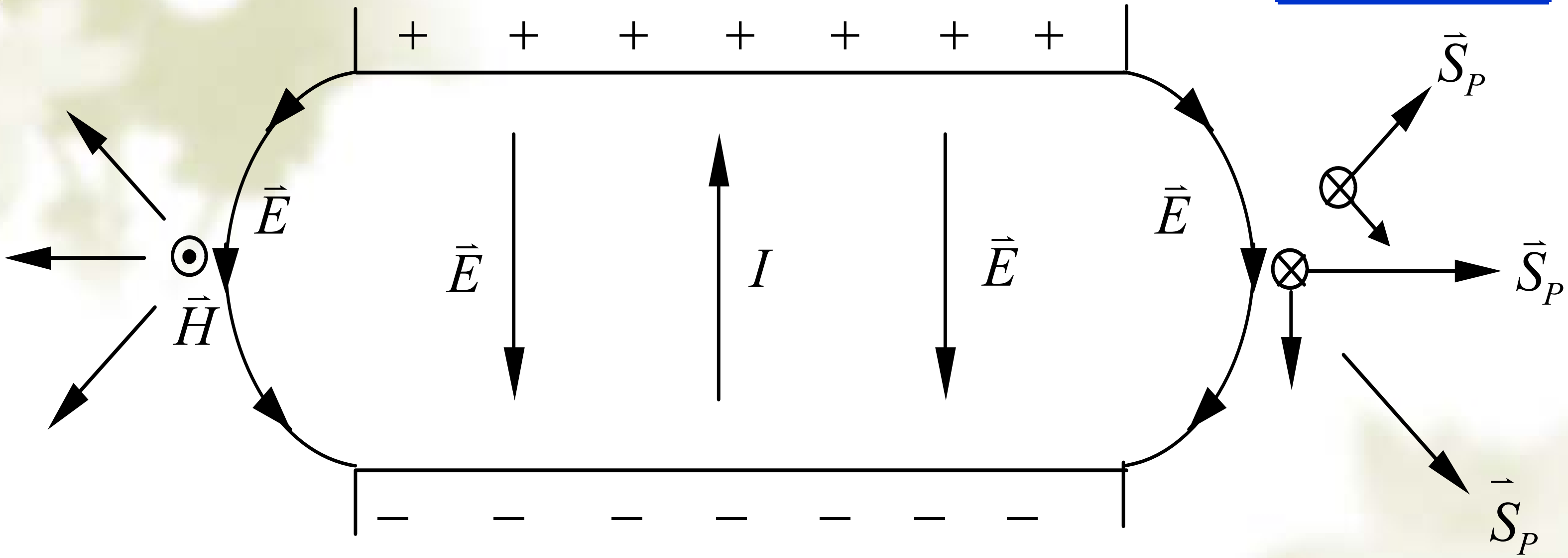
1). 有两个分量，其法向分量进入导体内，它的积分将提供热耗；其切向分量将沿导体轴向在导体周围空间传输的电磁场能量，供给负载。

2) 传输线导线——导引电磁能量的作用，即使电磁能量定向、集中；

3) 不论去线和回线，均把电磁场能量(以电磁波形式)从电源端引向负载端。

（4）电源区域的能量传输





$\vec{S}$ 指向外部空间——能量以场（波）的方式送向外空间，这就是导体周围电磁能量的来源。

电磁场能量由电源经导线导引，通过场空间中的电磁场（波），把能量输向负载。

讨论：若导体为理想导体

$$E_{1t} = E_{2t} = E_{2z} = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n} = B_{2\rho} = 0$$

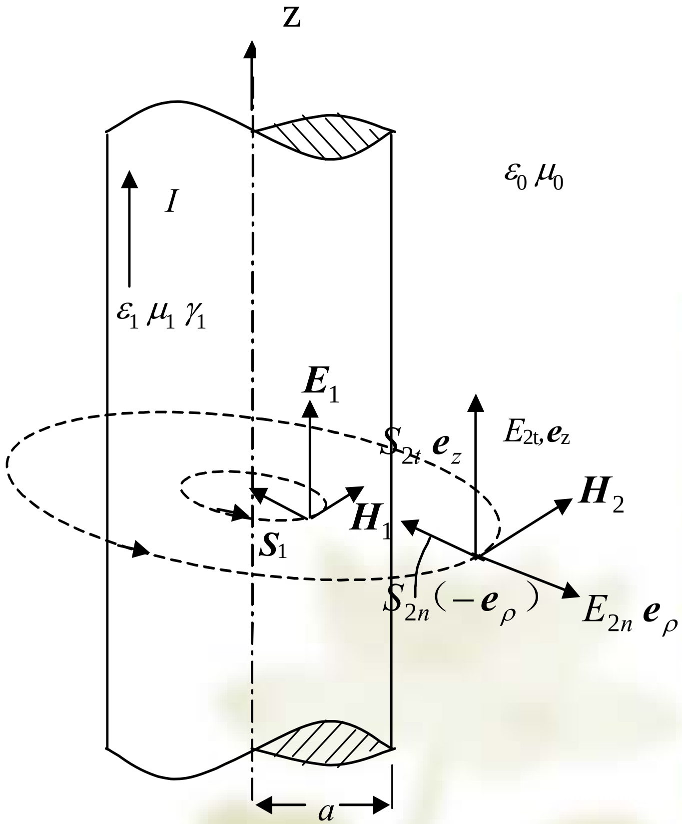
$$D_{2n} = \sigma \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_2 = E_{2\rho}\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{H}_2 = H_\phi \vec{e}_\phi$$

$\therefore$ $\boldsymbol{\rho < a}$ $\quad \vec{S}_1 = \vec{E}_1 \times \vec{H}_1 = 0$

$\boldsymbol{\rho > a}$

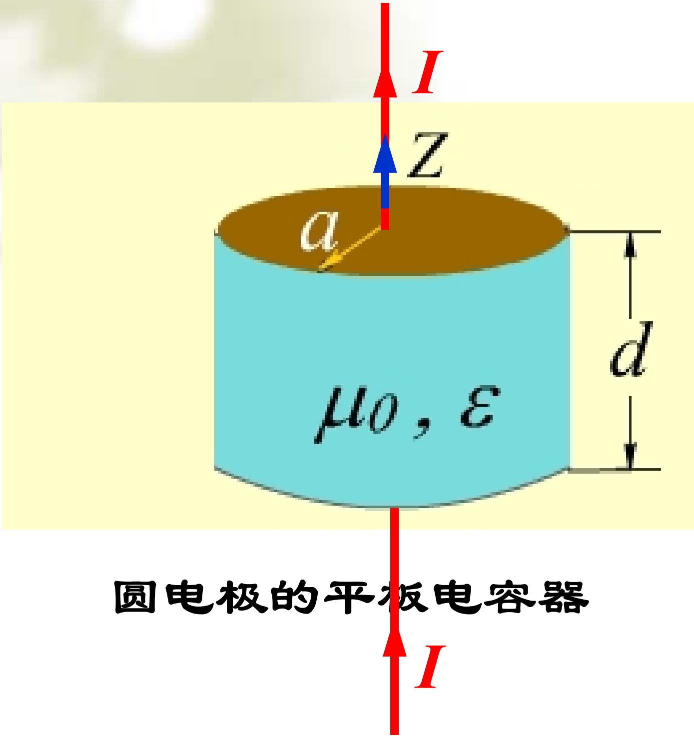
$$\vec{S}_2 = \vec{E}_2 \times \vec{H}_2 = E_{2\rho} H_\phi \left(\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi\right) = S_2 \vec{e}_z$$



结论

导体内不能传输电磁能量，电磁能量只能沿导体表面附近的媒质传输，而导线本身可以起到引导电磁能量定向传输的作用。

例2：分析下图平板电容器充电过程中的能量传输。



圆电极的平板电容器

计算

(1)进入电容器内的能流密度

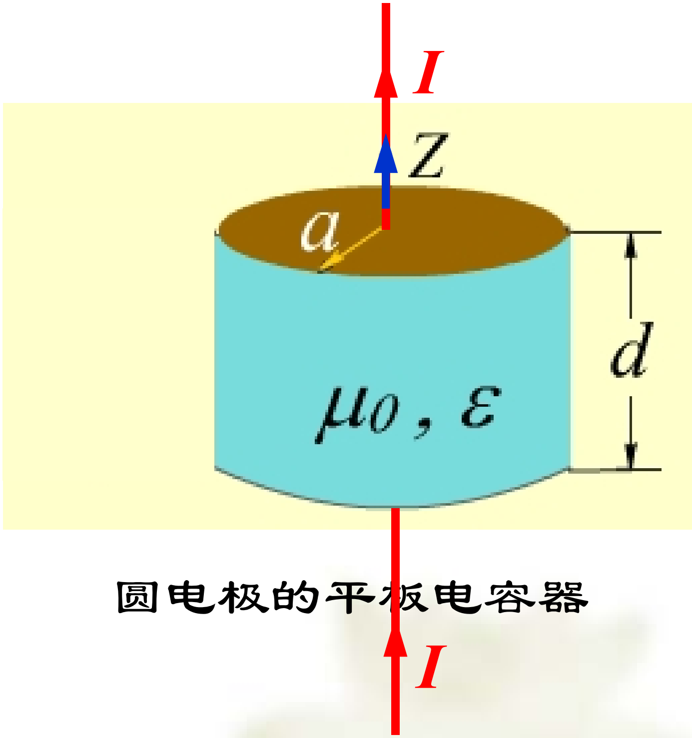
根据全电流定律

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ds$$

$$2\pi\rho H_\phi = \varepsilon A \frac{dE_z}{dt}$$

$$H_\phi = \frac{\varepsilon A}{2\pi\rho}\frac{dE_z}{dt}$$

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = E_z \frac{\varepsilon A}{2\pi\rho}\frac{dE_z}{dt}(-\vec{e}_\rho)$$



圆电极的平板电容器

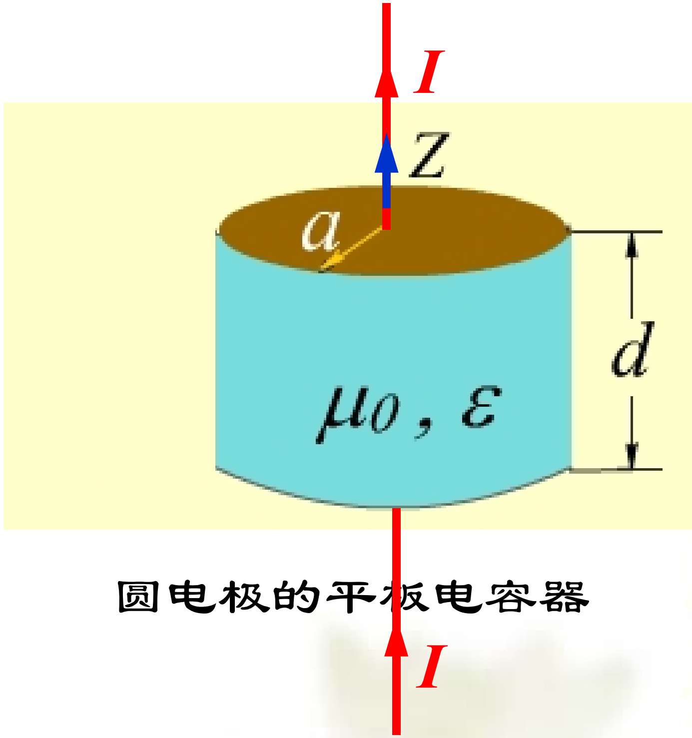
$$A = \pi a^2$$

进入电容器内的总能流密度

$$\oint -\vec{S}\cdot d\vec{S}$$

$$= 0 + 0 + \int_{S侧} E_z \frac{\varepsilon A}{2\pi\rho}\frac{dE_z}{dt}(\vec{e}_\rho)\cdot(\vec{e}_\rho)ds$$

$$= E_z \frac{\varepsilon A}{2\pi\rho}\frac{dE_z}{dt}(2\pi\rho\times d) = \varepsilon d A E_z \frac{dE_z}{dt}$$



圆电极的平板电容器

(2)电容器中电场能量

$$W_e = \int_V w_e dV = \frac{\varepsilon E_z^2}{2}\int_V dV = \frac{\varepsilon E_z^2}{2} A d \qquad A = \pi a^2$$

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon E_z^2}{2} A d\right) = \varepsilon A d E_z \frac{dE_z}{dt} \qquad P = 0$$

$$-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + P$$

进入电容器内的能量全部转化为电场能量存储在电场中

4.4 电磁位

4.4.1. 电磁位（动态位、滞后位）

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{F} \equiv 0$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{A}\right) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \longrightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

A, φ 称为电磁位（动态位），是时间和空间坐标的函数。

4.4.2. 洛仑兹规范　达朗贝尔方程

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{\mathrm{c}}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\ \xrightarrow[\vec{B}=\mu\vec{H},\,\vec{D}=\varepsilon\vec{E}]{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}\ \nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu\vec{J}_{\mathrm{c}}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\bullet\vec{A})-\nabla^2\vec{A}\qquad \vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla\bullet\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{J}_{\mathrm{c}}-\nabla\left(\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\bullet\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu\vec{J}_{\mathrm{c}}\qquad \textbf{(1)}$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho\ \xrightarrow{\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}\ \nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\bullet\vec{A})=-\frac{\rho}{\varepsilon}\qquad \textbf{(2)}$$

问题：因 $\nabla\bullet\vec{A}$ 尚未确定，故以上两方程联立解得的**A**、$\boldsymbol{\varphi}$不唯一

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\varphi}$ 相互耦合

解决之道： 规定一种 $\nabla\bullet\vec{A}$，使得A、φ相互解耦

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\bullet\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu\vec{J}_c \qquad (1)$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\bullet\vec{A})=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (2)$$

引入洛仑兹规范 **Lorentz Gauge** $\nabla\bullet\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$

方程**(1)**、**(2)**成为：

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_c$$

$$\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\xrightarrow{\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_c$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

非齐次波动方程

达朗贝尔方程

4.4.3. 电磁位的积分解

1. 电磁位积分解的得出

首先分析特殊情况下——静态场，达朗贝尔方程归结为

泊松方程

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_{\mathrm{c}} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_{\mathrm{c}}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \varphi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

位于坐标原点的元电荷 $\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V'$ 产生的元电势

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho \mathrm{d}V'}{4\pi \varepsilon r}$$

然后，分析动态电磁场

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_{\mathrm{c}}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

- 位于坐标原点的元电荷 $\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V'$
- 场分布为球对称 $\varphi(\vec{r},t)=\varphi(r,t)$仅是半径$r$和$t$的函数

无源空间$\rho=0$ $\nabla^2\varphi-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$

φ具有球对称性，按球坐标展开为：

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}$$

其通解为

$$r\varphi=f_1(t-\tfrac{r}{\upsilon})+f_2(t+\tfrac{r}{\upsilon})$$

式中***f*** 取决于场域中的媒质和**dq**的变化形式。

定性判断

$$\varphi(r\,,t)=\frac{f_1(t-\frac{r}{\upsilon})}{r}$$

参考静电场的特例

$$\varphi(\vec{r})=\frac{\rho\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon r}$$

$$\mathrm{d}\varphi(r\,,t)=\frac{\rho(t-\frac{r}{\upsilon})}{4\pi\varepsilon r}\mathrm{d}V'$$

r 为元体积**dV'**到场点的距离

当元电荷不在源点 $\mathrm{d}q=\rho\left(\vec{r}',t\right)\mathrm{d}V'$

$$\mathrm{d}\varphi(r,t)=\frac{\rho(t-\frac{r}{\upsilon})}{4\pi\varepsilon r}\mathrm{d}V'$$

$$\mathrm{d}\varphi(\vec{r},t)=\frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\upsilon})}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\Rightarrow\quad \varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\upsilon})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

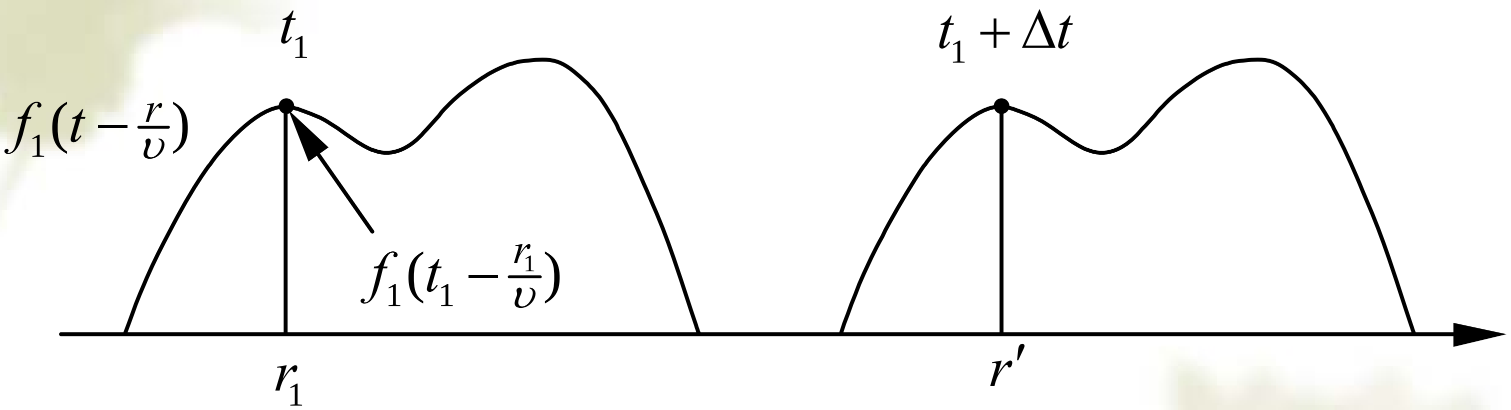
同理

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\upsilon})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

达朗贝尔方程解的形式表明：空间各点动态标量位φ和动态矢量位A随时间的变化总是滞后于场源的变化。即 t时刻的响应取决于$(t-|\vec{r}-\vec{r}'|/v)$时刻的激励源。又称 A, φ 为滞后位。

2. 动态电磁场特征的描述——通解的物理意义

$$r\varphi = f_1(t-\frac{r}{\upsilon}) + f_2(t+\frac{r}{\upsilon})$$



当时间从 $t_1 \to t_1+\Delta t$, 信号从 $r_1 \to r_1 + v\Delta t = r'$

$$f_1(t_1-\frac{r_1}{\upsilon}) = f_1(t_1+\Delta t-\frac{r'}{\upsilon})$$

由于v,t匀速变化时 $t-\frac{r}{\upsilon} = \theta = \text{const}$ 等相位点

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{1}{\upsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \upsilon > 0$$

(1) 场的波动性

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\upsilon>0$$

说明 $\boldsymbol{f_1}$ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 向着 $\boldsymbol{r}$ 增加的方向向前传播，构成一个波动—电磁波，$f_1(t-\frac{r}{\upsilon})$ 称为入射波

电磁场的波动性意味着电磁作用的传递是以有限速度进行的。

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\approx 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}=c\quad(\text{光速})$$

(2) 场的推迟作用

$f_1(t-\dfrac{r}{v})$的物理意义

时刻 t 时的波源作用，要经过时间为 $\frac{r}{\upsilon}$ 的推迟后，才能到达距波源为 r 的场点——推迟作用

或者说，t 时刻的响应是$(t-\frac{r}{\upsilon})$ 时刻的激励所产生。这是电磁波的滞后效应。

$f_2(t+\frac{r}{\upsilon})$ 以速度v向着$-r$增加的方向前进，

在无界空间中不存在，在有界空间中，称为反射波

3. 时谐场的非齐次波动方程与电磁位积分解

动态电磁场的非齐次波动方程为：

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_c \qquad \nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

时谐电磁场的非齐次波动方程的复数形式为：

$$\nabla^2 \dot{\vec{A}} - \mu\varepsilon (j\omega)^2 \dot{\vec{A}} = -\mu \dot{\vec{J}}_c \qquad \omega^2 \mu\varepsilon = k^2$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{A}} + k^2 \dot{\vec{A}} = -\mu \dot{\vec{J}}_c$$

$$\nabla^2 \dot{\varphi} + k^2 \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon}$$

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

波数　弧度/米（rad/m）

动态电磁场中，电磁位的积分解：

$$\varphi(\vec{r}\,,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}'\,,t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\upsilon})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

时谐电磁场中，时间延迟项以坐标原点为基准点

$$(t-\tfrac{r}{\upsilon})\rightarrow\omega(t-\tfrac{r}{\upsilon})=\omega t-\frac{\omega}{v}r=\omega t-kr \qquad k=\frac{\omega}{\upsilon}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

时域：推迟时间 $\frac{r}{v}$ ⟷ 频域：滞后相位 ***kr***

$$\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\rightarrow k|\vec{r}-\vec{r}'|$$

$$\varphi(\vec{r}, t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\upsilon})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\to k|\vec{r}-\vec{r}'|$$

傅立叶时域位移定理：

$$f(t-\tau)\leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

$$\dot{\varphi}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\dot{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\dot{\vec{A}}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

复数形式的电磁位积分解，依然按滞后效应的动态电磁波传播。

等相位点的传播过程 $\omega t - kr = \theta = \text{const}$

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega - k\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

波的传播方向为**r**方向，波长为：

$$\lambda = vT = \frac{\omega}{k}T = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k波数，单位长度上相位的变化，又称为相位系数，包含在**2π m** 长度中的波长数

讨论：什么条件下源点到场点的时间延迟效应可以忽略不计？

$$\dot{\varphi}(\vec{r}\,)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\dot{\rho}(\vec{r}\,'\,)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}V'$$

$$\dot{\vec{A}}(\vec{r}\,)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}V'$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\approx 1 \longrightarrow k|\vec{r}-\vec{r}\,'|\ll 1 \xrightarrow{k=\frac{\omega}{\upsilon}} |\vec{r}-\vec{r}\,'|\ll \lambda$$

源点到场点的距离远小于激励源信号的波长。似稳区

φ,A解的形式与恒定磁场、静电场类同，称之为似稳场。

$k|\vec{r}-\vec{r}\,'|\ll 1$ 或 $|\vec{r}-\vec{r}\,'|\ll \lambda$ 称为似稳条件。

($kr \ll 1 \rightarrow r \ll \upsilon/\omega \rightarrow r \ll \upsilon/2\pi f < \lambda$)

作业：4-1, 4-5