浙江大学 2009－2010 学年 夏 学期

《工程电磁场与波》课程期末考试试卷

课程号： 10120420 ，开课学院： 电气工程学院

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：√闭、开卷（请在选定项上打√），允许带 计算器 入场

考试日期： 2010 年 7 月 6 日,考试时间： 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：______________学号：______________所属院系：_____________

题序	一	二	三	四	五	总 分
得分						
评卷人						

一、简答题(40 分)

1.（14 分）电磁场的基本规律性可由电磁场基本方程组(麦克斯韦方程组)予以描述，试写出此基本方程组的以下各种表述方式（**除标出外，其他一空 1 分**）：

方程的称谓 \ 方程	积分形式	微分形式	时谐场中的相量（有效值）形式
全电流定律	$\oint_l \vec{H}\bullet d\vec{l}=\int_S(\vec{J}_c+\vec{J}_v+\vec{J}_D)\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{H}=\left.\begin{matrix}\vec{J}_c\\ \vec{J}_V\end{matrix}\right\}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\dot{\vec{H}}=\left.\begin{matrix}\dot{\vec{J}}_c\\ \dot{\vec{J}}_V\end{matrix}\right\}+\mathrm{j}\omega\dot{\vec{D}}$
电磁感应定律	$\oint_l \vec{E}\bullet d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_l \vec{E}\bullet d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$
磁通连续性原理或磁场中的高斯定理	$\oint_S \vec{B}\bullet d\vec{s}=0$	$\nabla\bullet\vec{B}=0$	$\nabla\bullet\dot{\vec{B}}=\dot{0}$
电场中的高斯定理	$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s}=\sum q=\int_V\rho dv$	$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$	$\nabla\bullet\dot{\vec{D}}=\dot{\rho}$

2.(6 分) 为分析与解算电磁场问题的需要，在动态电磁场中，通常引入的位函数为

动态矢量位 $\vec{A}$（**0.5 分**）和动态标量位φ（**0.5 分**）_。它们与基本场量 $\vec{B}(\vec{r},t)$ 、$\vec{E}(\vec{r},t)$

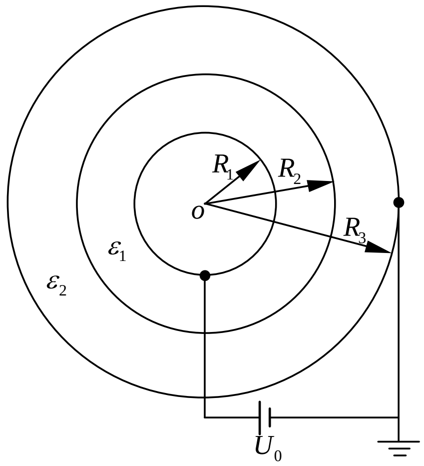
之间的关联关系

分别为 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$（**0.5 分**）和、$\vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$（**0.5 分**）; 在洛仑兹规范 $\nabla\bullet\vec{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$（**1 分**）条件下，上述动态位与场源 $\vec{J}(\vec{r}',t)$、$\rho(\vec{r}',t)$ 之间的关联关系可由 达朗贝尔方程或非齐次波动方程（**1 分**）方程予以描述，其时域微分形式的数学表述分别为：

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_c$$（**1 分**）

$$\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$**(1 分)**

3. (8 分) 如下图所示的同轴电缆（内、外径分别为 R_1、R_3）同轴地置有两层绝缘介质 ε_1 和 ε_2（其分界面半径为 R_2）。现在内、外导线间施加电压 U_0。试写出描述该同轴电缆内静电场问题的边值问题（不必写出相应数学算子在给定坐标系下的表达式，不必求解。)（注：圆柱坐标系下 $\nabla V=\vec{e}_\rho\dfrac{\partial V}{\partial\rho}+\vec{e}_\phi\dfrac{\partial V}{\rho\partial\phi}+\vec{e}_z\dfrac{\partial V}{\partial z}$）。



设电介质 ε_1、ε_2 中的电位函数分别为 φ_1、φ_2（**2 分**），采用圆柱坐标，则同轴电缆中的边值问题为

$\nabla^2\varphi_1=0\quad(R_1\le\rho\le R_2)$ （**1 分**）

$\nabla^2\varphi_2=0\quad(R_2\le\rho\le R_3)$ （**1 分**）

$\varphi_1|_{\rho=R_1}=U_0$

$\varphi_2|_{\rho=R_3}=0$ （**2 分**）

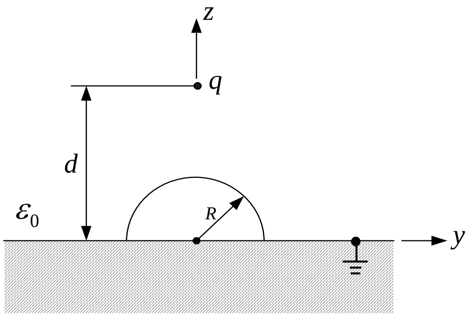
$\varphi_1|_{\rho=R_2}=\varphi_2|_{\rho=R_2}$

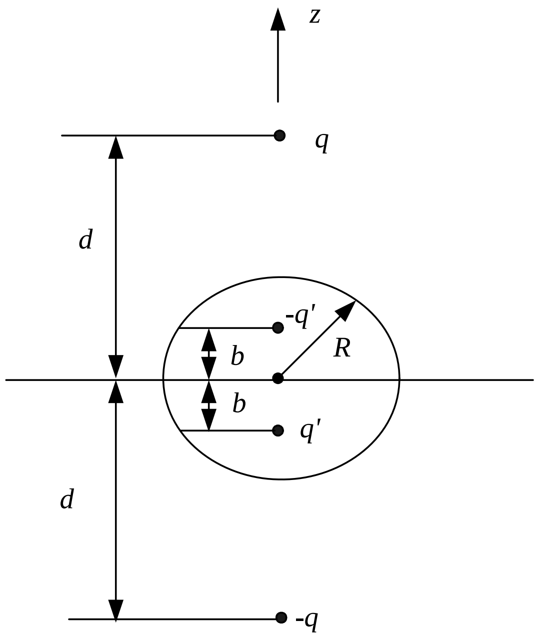
$\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}|_{\rho=R_2}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}|_{\rho=R_2}$ （**2 分**）

4. (6 分)如图所示，一半径为 R 的金属半球置于真空中无限大接地导电板上，在球外距半球心为 d 处有一点电荷 q。试画出应用镜像法求解该静电场问题的示意图（只需给出镜像电荷的位置与电量）。

解，应用平面镜像法和球面镜像像法（**1 分**），原问题可等价为原电荷和三个镜像电荷组成的点电荷系统产生的静电场问题。其中：$b=\dfrac{R^2}{d}$，$q'=\dfrac{R}{d}q$（**2 分**），**图正确（3 分，每个电**

荷 **1** 分）





5. (6 分) 在介电常数为ε的电介质中，若置有一孤立的球形导体球（半径为 b），设其带电量为 q (q>0)的静电电荷，则该导体球的电位 φ=__$\underline{\frac{q}{4\pi\varepsilon b}}$；导体球内、外的电场强度 $\vec{E}(\vec{r})$ 分别为 $\underline{0}$、$\underline{\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon b^2}\vec{e}_r}$，在球外空间中建立的电场能量密度 $w_e'=$_$\underline{\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon b^4}}$，电场能量 $W_e=\underline{\frac{q^2}{8\pi\varsigma b}}$；对应的电容参数 $C=\underline{4\pi\varepsilon b}$。（**每空 1 分**）

二、（12 分）在一半径为 a、体电荷密度为 ρ 的球形带电体内部有一半径为 b 的球形空洞（$d+b<a$），如图所示。试计算在经过两球心（O_1O_2）连线任意平面内的球外电场分布。

（1） 应用叠加原理，原问题等价于一半径为 a、体电荷密度为 ρ 的球形带电体与一 O_2 为圆心、以 b 为半径、体电荷密度为-ρ 的球形带电体产生场的叠加，见图（**4 分**）。

（2） 由半径为为 a、体电荷密度为 ρ 的球形带电体产生的球外任意一点的电场强度，可应用高斯定理计算，为：

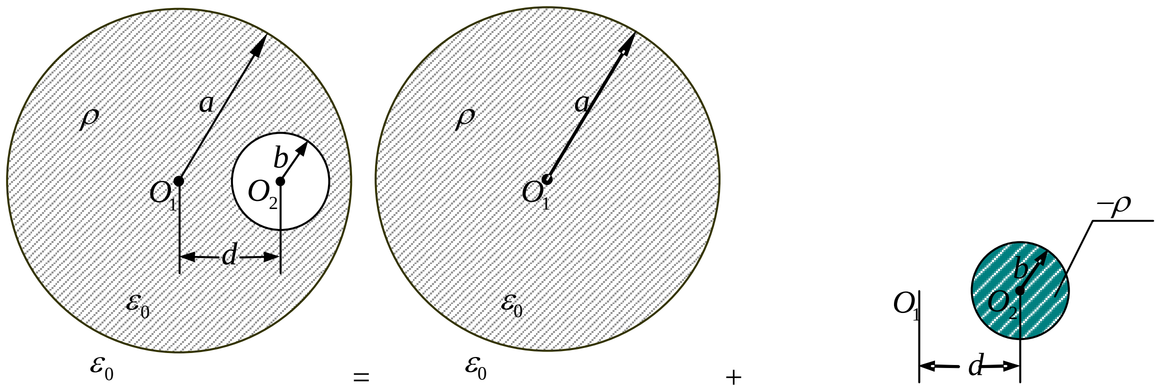
$$\vec{E}_1=\frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}$$ （$\vec{R}$ 为球心 O_1 到场点的位置矢量）（**3 分**）

（3） 由半径为为 b、体电荷密度为 -ρ 的球形带电体产生的球外任意一点的电场强度，可应用高斯定理计算，为：

$$\vec{E} = \frac{b^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$ （$\vec{r}$ 为球心 O_2 到场点的位置矢量）（**3 分**）

（4） 故原问题的解为：

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$ （**2 分**）



三、（26 分）如图所示的无限长直空心同轴电缆，内导体的内、外径分别为 R_1、R_2，内导体中直流电流 I 流向为 z 轴正向；外导体的内、外径分别为 R_3、R_4，流经内导体的直流电流全部经外导体返回，即 $\vec{H}=0(\rho>R_4)$。

Ⅰ. 在内外导体均为非理想导体条件下，计算：

（1）（**8 分**）空心内腔、内导体中、内外导体间和外导体中的磁场强度；

（2）（**6 分**）该同轴电缆单位长度的内自感 L_i、外自感 L_o；

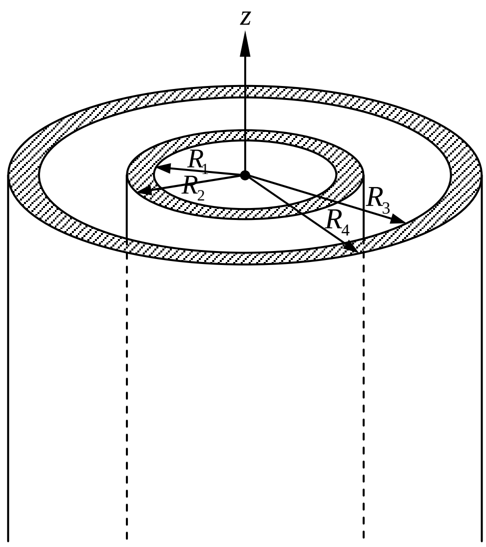
（3）（**4 分**）该空心电缆单位长度电容 C_o；

Ⅱ. 在内外导体均为理想导体条件下，计算：

（1）（**2 分**）空心内腔、内导体中、内外导体间和外导体中的磁场强度；

（2）（**4 分**）该同轴电缆单位长度的内自感 L_i、外自感 L_o；

（3）（**2 分**）该空心电缆单位长度电容 C_o；



Ⅰ. 在内外导体均为非理想导体条件下，计算：

（1）空心内腔、内导体中、内外导体间和外导体中的磁场强度

$$H_{\phi}(\rho)=\begin{cases}0 & (\rho<R_1\text{或}\rho>R_4)\\ \dfrac{I(\rho^2-R_1^2)}{2\pi\rho(R_2^2-R_1^2)} & (R_1<\rho<R_2)\\ \dfrac{I}{2\pi\rho} & (R_2<\rho<R_3)\\ \dfrac{I(R_4^2-\rho^2)}{2\pi\rho(R_4^2-R_3^2)} & (R_3<\rho<R_4)\end{cases}$$

（2）该同轴电缆单位长度的内自感 L_{i} 、外自感 L_{o}

导体内的磁场能量为：

$$(W_m)_{\mathrm{int}}=\int_{V_{conductor}}\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{\mu_0}{2}\int_{R_1}^{R_2}\left[\frac{I(\rho^2-R_1^2)}{2\pi(R_2^2-R_1^2)\rho}\right]^2 2\pi\rho\cdot l\mathrm{d}\rho+\frac{\mu_0}{2}\int_{R_3}^{R_4}\left[\frac{I(R_4^2-\rho^2)}{2\pi\rho(R_4^2-R_3^2)}\right]^2 2\pi\rho\cdot l\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{I^2l\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{(R_2^2-R_1^2)^2}\left[\frac{R_2^4-R_1^4}{4}+R_1^4\ln\frac{R_2}{R_1}-R_1^2(R_2^2-R_1^2)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(R_4^2-R_3^2)^2}\left[\frac{R_4^4-R_3^4}{4}+R_4^4\ln\frac{R_4}{R_3}-R_4^2(R_4^2-R_3^2)\right]\right\}$$

内外导体间的磁场能量

$$(W_m)_{ext}=\int_{V_{space}}\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{\mu_0}{2}\int_{R_2}^{R_3}(\frac{I}{2\pi\rho})^2 2\pi\rho\cdot l\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

由此可得单位长度内自感 L_{i} 、外自感 L_{o} 分别为：

$$L_{\mathrm{int}}=\frac{2(W_m)_{\mathrm{int}}}{I^2}=\frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\frac{1}{(R_2^2-R_1^2)^2}\left[\frac{R_2^4-R_1^4}{4}+R_1^4\ln\frac{R_2}{R_1}-R_1^2(R_2^2-R_1^2)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(R_4^2-R_3^2)^2}\left[\frac{R_4^4-R_3^4}{4}+R_4^4\ln\frac{R_4}{R_3}-R_4^2(R_4^2-R_3^2)\right]\right\}$$

$$L_0=\frac{2(W_m)_{ext}}{I^2}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

（3）该空心电缆单位长度电容 C_{o}；

设同轴电缆内外导体带电为+τ和 －τ。根据题意，绝缘介质中的电场具有圆柱对称的平行平面场特征，故可直接引用高斯定理得

$$\boldsymbol{E}_p=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\rho}\boldsymbol{e}_{\rho}\qquad（2 分）$$

从而，内外导体间的电位差

$$U=\int\boldsymbol{E}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}=\int_{R_2}^{R_3}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\mathrm{d}\rho=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_3}{R_2}\qquad（\mathbf{2} 分）$$

故所求的单位长度的电容

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{R_3}{R_2}} \qquad \text{(F/m)} \qquad \textbf{(2 分)}$$

Ⅱ. 在内外导体均为理想导体条件下，计算：

（1）空心内腔、内导体中、内外导体间和外导体中的磁场强度；

$$H_\phi(\rho) = \begin{cases} 0 & (\rho < R_2 \text{或} \rho > R_3) \\ \dfrac{I}{2\pi\rho} & (R_2 < \rho < R_3) \end{cases}$$

（2）该同轴电缆单位长度的内自感 $L_{\rm i}$、外自感 $L_{\rm o}$；

内自感 $L_{\rm i}$ 为零、外自感 $L_{\rm o}$ 不变：

$$L_{\rm int} = 0$$

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

（3）该空心电缆单位长度电容 $C_{\rm o}$；

电缆单位长度电容 $C_{\rm o}$ 不变：为

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{R_3}{R_2}}$$

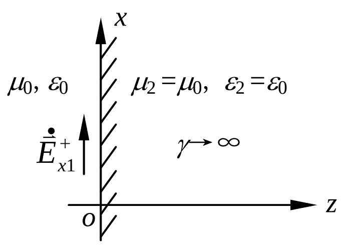
四、(14 分) 如图所示，设自由空间中有一沿 x 轴取向的线性极化波 $\dot{\vec{E}}_{x1}^{+} = E_0 e^{j\phi} e^{-j2.094z} \vec{e}_x$，由真空中正入射于一完纯导体的表面。已知导体表面的面电流密度为 $\dot{\vec{K}} = 1.061 e^{j20^\circ} \vec{e}_x$。

(1) （**4 分**）计算此平面波的频率 f、波速 υ；

(2) （**2 分**）求入射波电场强度的初始相位 ϕ；

(3) （**6 分**）求入射波电场强度、磁场强度及其反射分量、透射分量的相量形式；

(4) （**2 分**）写出自由空间中电场强度 $\bar{E}$ 和磁场强度 $\bar{H}$ 的瞬时表达式。



（1） 在自由空间中，波速 $\upsilon = c = 3\times10^8$ (m/s)，根据 $\dot{E}$ 的表达式，可知相位常数 $k = 2.094\,(\text{rad/m})$，根据 $k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\pi f}{v}$ 有：$f = \dfrac{kv}{2\pi} = 1\times10^8$ （Hz）。

（2） 当均匀平面电磁波由理想介质正入射到理想导体平面时，将要发生全反射。此时，

理想介质中的电磁波为驻波。其中的合成磁场强度 $\dot{H}_y$ 与入射波电场强度 $\dot{E}_0$ 的关系为：

$$\dot{H}_y = \dot{H}_{y1}^{+} - \dot{H}_{y1}^{-} = \frac{\dot{E}_0}{\eta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}) = \frac{2\dot{E}_0}{\eta}\cos kz$$

在理想导体的表面有：

$$\dot{H}_y = \frac{2\dot{E}_0}{\eta}\cos 0 = \frac{2\dot{E}_0}{\eta}$$

又由 $\vec{k} = \vec{n}_0 \times \vec{H}_y$ 可得

$$\dot{K}_x = \dot{H}_y = \frac{2\dot{E}_0}{\eta}\cos 0 = \frac{2\dot{E}_0}{\eta}$$

显然，$\dot{K}_x$ 与入射波电场强度同相位。根据导体表面的面电流密度为 $\dot{\boldsymbol{K}} = 1.061\mathrm{e}^{\mathrm{j}20^\circ}\boldsymbol{e}_x$，不难确定入射波电场强度的初始相位 $\phi=20^0$。

（3） 由（2）的解答，可知：$\dot{E}_0 = \dfrac{\eta\dot{K}}{2}$。所以：$E_0 = \dfrac{\eta K}{2} = \dfrac{377\times1.061}{2} = 200$ （V/m）。

因此，

$\dot{\boldsymbol{E}}_{x1}^{+} = 200\mathrm{e}^{\mathrm{j}20}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.094z}\boldsymbol{e}_x$ ， $\dot{\boldsymbol{E}}_{x1}^{-} = -200\mathrm{e}^{\mathrm{j}20}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2.094z}\boldsymbol{e}_x$ ， $\dot{H}_{y_1}^{+}(z) = \dfrac{200}{377}\mathrm{e}^{\mathrm{j}20^\circ}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.094z}$ ，

$\dot{\boldsymbol{H}}_{y1}^{-} = -\dfrac{\dot{E}_{x1}^{-}}{\eta} = \dfrac{200}{377}\mathrm{e}^{\mathrm{j}20}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2.094z}\boldsymbol{e}_x$，透射电场、磁场皆为零。

（4） 在自由空间中：$\dot{E}_{x_1}(z) = \dot{E}_{x_1}^{+}(z) + \dot{E}_{x_1}^{-}(z) = \dot{E}_{x_1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}) = -2\mathrm{j}\cdot200\mathrm{e}^{\mathrm{j}20^\circ}\sin kz = 400\mathrm{e}^{-\mathrm{j}70^\circ}\sin kz$，

$\dot{H}_y(z) = \dot{H}_{y_1}^{+}(z) - \dot{H}_{y_1}^{-}(z) = \dfrac{1}{\eta}(\dot{E}_{x_1}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - \dot{E}_{x_1}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}) = \dfrac{2\dot{E}_{x_1}}{\eta}\cos kz = 1.061\mathrm{e}^{\mathrm{j}20^\circ}\cos kz$，对应的瞬时表达式为：

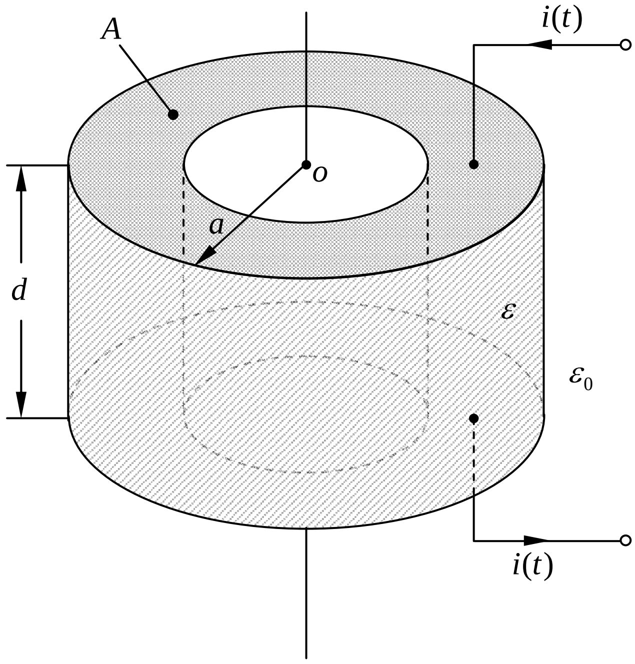
$$E_{x_1}(z,t) = \sqrt{2}\cdot400\sin kz\cos(\omega t - 70^\circ)\,(\mathrm{V/m}),$$

$$H_{y_1}(z,t) = \sqrt{2}\cdot1.061\cos kz\cos(\omega t + 20^\circ)\,(\mathrm{A/m})。$$

完纯导体内，电场、磁场皆为零。

五、(8 分)如图所示，一圆环形平行板电容器的电容为 $C=\varepsilon A/d$ （其中 A 为电容器的极板面积，d 为极板间的距离，ε 为极板间介质的介电常数）。现有充电电流 i 经连接线对电容器充电。充电过程中，平行板间将产生电场 $\boldsymbol{E}$，平行板间的电场能量密度为 $\varepsilon E^2/2$。

试应用坡印廷矢量和坡印廷定理 $-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+P$ 分析并证明平行板电容器间电场能量的来源，进而说明导线在电磁能量传输过程中的作用(计算平行板电容器内电磁场时，忽略边缘效应，即认为平行板间电磁场为均匀电场 ***E***，且除去极板间该介质 ε 的空间外，其余空间中无电场分布)。



忽略边缘效应，平行板电容器间的电磁场为平行平面电磁场，电场为均匀平行平面电场。

（1）（**1 分**）平行板电容器电场能量

$$W_e=\int_V w_e dv=\frac{\varepsilon E_z^2}{2}\int_V dv=\frac{\varepsilon E_z^2}{2}dA$$

（2）（**2 分**）若设 z 坐标轴方向向下，则电容器外表面（$\rho=a$）处的磁场强度为：

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}ds$$

$$2\pi a H_\phi=\varepsilon A\frac{dE_z}{dt}$$

$$H_\phi=\frac{\varepsilon A}{2\pi a}\frac{dE_z}{dt}$$

（3）由功能平衡关系式

（a）（**2 分**）单位时间内进入电容器内的电磁能量

由假设其他空间无电场，可得坡印廷矢量仅在电容器的侧面不为零，为

$$\vec{S}=\vec{E}_z\times\vec{H}_\phi=E_z\frac{\varepsilon A}{2\pi a}\frac{dE_z}{dt}(-\vec{e}_\rho)$$

由此可得单位时间内进入电容器内的电磁能量

$$\int_S -\vec{S}\cdot d\vec{s}=\int_S E_z\frac{\varepsilon A}{2\pi a}\frac{dE_z}{dt}(\vec{e}_\rho)\cdot(\vec{e}_\rho)ds=E_z\frac{\varepsilon A}{2\pi a}\frac{dE_z}{dt}(2\pi a\times d)=\varepsilon dAE_z\frac{dE_z}{dt}\quad（1）$$

（b）（**2 分**）功能平衡关系

由（1）得电场能量对时间的变化率为：

$$\frac{dW_e}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon E_z^2}{2}dA\right)=\varepsilon dAE_z\frac{dE_z}{dt}\quad（2）$$

由于电容器中的电介质没有损耗，因此 P=0。根据 $-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+P$，由式（1）和式（2）可得：

$$-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t}$$

即，在理想的假设条件下，充电过程进入电容器内的能量全部转化为电场能量存储在电场中。

导线——导引电磁能量的作用，使电磁能量定向、集中，不在导线中传播电磁能量。（**1 分**）。