第二章 静电场—Part 3

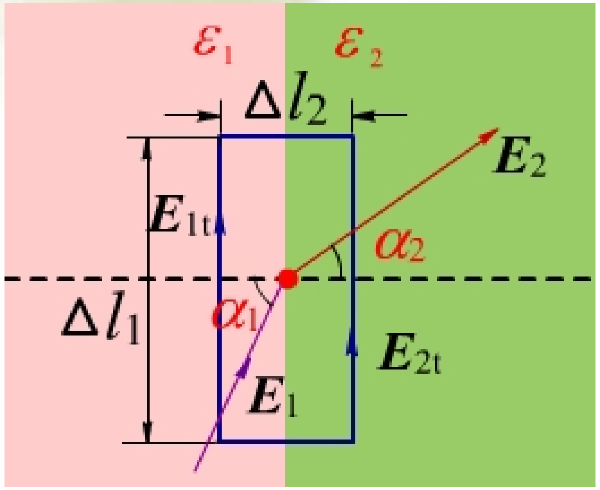
- 不同媒质分界面上的边界条件
- 边值问题 **(Boundary Value Problem，BVP）**

2.4.3 不同媒质分界面上的边界条件

由于媒质的特性不同，引起场量在两种媒质的交界面上发生突变，这种变化规律称为静电场的边界条件。为了方便起见，通常分别讨论边界上场量的切向分量和法向分量的变化规律。

1. 两种不同介质分界面上的边界条件

■ ***E*** 的衔接条件　　　　做跨越分界面的狭小矩形回路



介质分界面

1) 矩形的长边 $\Delta l_1 >> \Delta l_2 \ (\Delta l_2 \to 0)$

2) 回路的积分方向为逆时针

3) 场量的参考方向如图所示

$$\oint \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$E_{2t}\Delta l_1^{\,l} + 0 - E_{1t}\Delta l_1 + 0 = 0$$

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

在不同分界面上电场强度的切向分量连续

■ *D* 的衔接条件

包围点***P*** 作高斯面 $(\Delta l \to 0)$。
端面为**Δ*S*,**

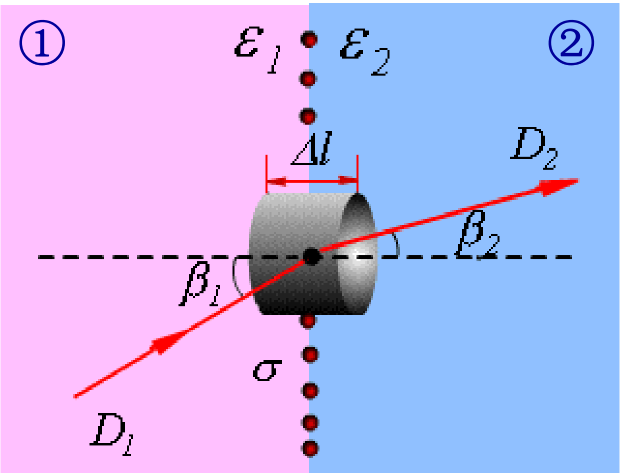
$$\oint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = q$$

$$\oint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = (D_{2\mathrm{n}} - D_{1\mathrm{n}})\Delta S = \sigma \Delta S$$

$$D_{2\mathrm{n}} - D_{1\mathrm{n}} = \sigma$$

$\sigma = 0$

$$\boxed{D_{2\mathrm{n}} = D_{1\mathrm{n}}}$$



边界法线的方向 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 规定为由介质①指向介质②。

在$\boldsymbol{\sigma}$ =0 分界面上电位移矢量的法向分量连续

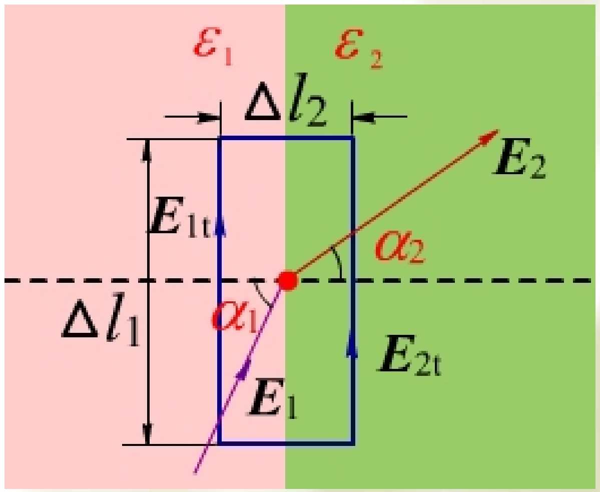
■ 静电场的折射定律

当分界面上σ =0时，若介质ε_1、ε_2皆为线性各向同性媒质

$$\left.\begin{aligned} E_{1t} = E_{2t} \qquad & E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \\ D_{1n} = D_{2n} \qquad & \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

静电场的折射定律



介质分界面

2. 导体与电介质交界面上的边界条件

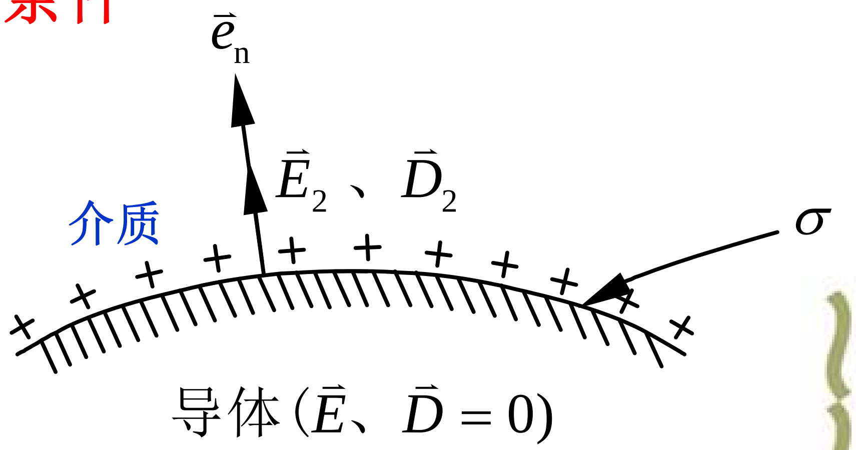
- 边界条件

$$\boldsymbol{E_{1t} = E_{2t} = 0}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$\Downarrow \quad \vec{D}_1 = 0$$

$$\boldsymbol{D_{2n} = \sigma}$$



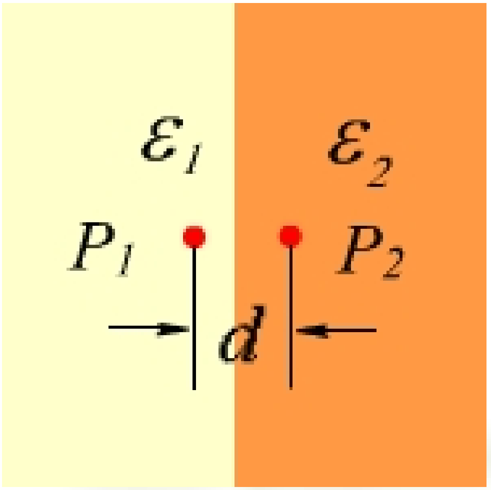
➢ $\vec{e}_n$方向设为由媒质1指向媒质2外法线方向，即导体的外法线方向

3. 由电位函数φ 表示媒质分界面上的边界条件

■ 介质—介质

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma \longrightarrow \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma \end{cases}$$



电位的衔接条件

或理解为：

设P_1 与P_2 位于分界面两侧，$d\to 0$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \lim_{d\to 0}\int_0^d \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

因此 $\varphi_1 = \varphi_2$ 电位连续

3. 由电位函数φ 表示媒质分界面上的边界条件

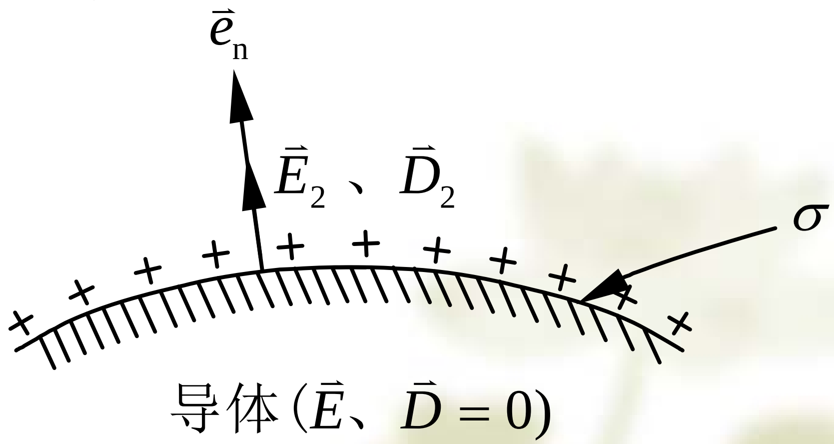
- 介质—介质

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{1t} = \boldsymbol{E}_{2t} & \longrightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2 \\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma & \longrightarrow \quad \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma \end{cases}$$

- 导体—电介质的分界面

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \text{const}$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma$$

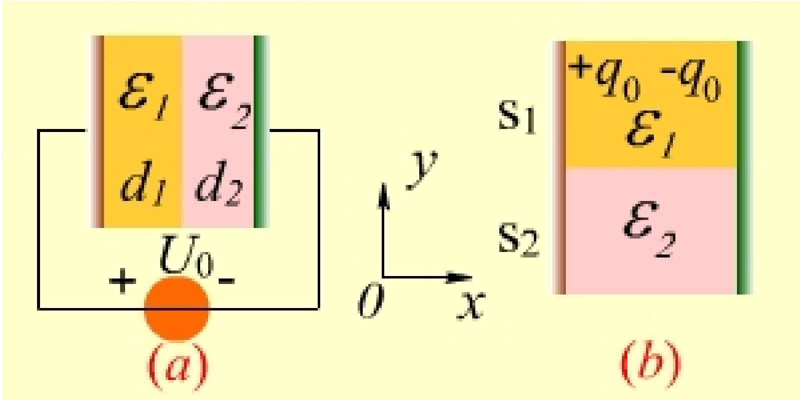


说明:导体表面是等位面，$\boldsymbol{E}$ 线与导体表面垂直；导体表面上任一点的 $\boldsymbol{D}$ 等于该点的 σ 。

4. 不同媒质交界电场问题的分析

例　试求两个平行板电容器的电场强度。

解：忽略边缘效应



平行板电容器

图(a)

$$\begin{cases} \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \quad (D_{1n} = D_{2n}) \\ E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0 \end{cases}$$

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \quad E_2 = \frac{\varepsilon_1 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

图(b)

$$\begin{cases} \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = q_0 \\ \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_2} \quad (E_{1t} = E_{2t}) \end{cases}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{q_0}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}$$

2.5 边值问题

1. 为什么研究边值问题

- 从场的基本分布规律出发，只能解决几何分布比较简单的电场问题

↓

需要探索更一般的方法

↓

偏微分方程的定解问题

- 边值问题计算法
  - 解析法
    - 积分法 √
    - 分离变量法 √
    - 镜像法、电轴法 √
    - 微分方程法
    - 保角变换法
    - ……
  - 数值法
    - 有限差分法
    - 有限元法
    - 边界元法
    - 矩量法
    - 积分方程法
    - ……

2. 边值问题的内容

以位函数(对于电场，则为电位φ）为待求场函数，研究它所满足的偏微分方程和在边界上的边界条件---边值问题

- 泛定方程

普适的、与数学物理规律对应的偏微分方程（组）（共性）

- 定解条件

给定关心场域边界上的值（个性），以及初始时刻的状态（对动态电磁场）

(1) 泛定方程—电位函数满足的偏微分方程

已知，电位φ 与电场强度$\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boxed{\vec{E}=-\nabla\varphi}$$

对上式两边取散度，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\nabla^{2}\varphi$$

对于线性各向同性的均匀介质，电场强度$\boldsymbol{E}$的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\implies\nabla^{2}\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

那么，线性各向同性的均匀介质中，电位满足的微分方程式为

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

该方程称为泊松方程。

对于无源区，上式变为 $\nabla^2\varphi = 0$

上式称为拉普拉斯方程。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

∇^2 拉普拉斯算子

(2) 定解条件—边界条件

- 第一类边界条件

  给定场域边界**S**上的电位值 $\varphi(\vec{r})\big|_S = f_1(\vec{r}_{\mathrm{b}})$

- 第二类边界条件

  给定场域边界**S**上电位的法向导数值 $\left.\dfrac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial n}\right|_S = f_2(\vec{r}_{\mathrm{b}})$

$\left.\dfrac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial n}\right|_S = 0$ 齐次二类边界条件

- 第三类边界条件

给定场域边界**S**上的电位及其法向导数的线性组合

$$\varphi(\vec{r}) + f_3(\vec{r})\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial n}\bigg|_S = f_4(\vec{r}_\mathrm{b})$$

- 远场条件

当场源分布在离坐标原点的有限距离内，而场域 ***D*** 扩展至无限远处时，则应有

$$\varphi\big|_{r\to\infty} = 0$$

- 不同媒质之间的分界面衔接条件

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma \end{cases}$$

- 初始条件

动态问题

（3）边值问题的求解：

- 泛定方程

$$\nabla^2\varphi = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{\varepsilon} & (x, y, z) \in D \quad \text{(domain)} \\ 0 & (D\text{域内处处有}\rho=0) \end{cases}$$

- 定解条件

方程定义域（场域）的边界上给定的边界条件（边值）、初始条件（初值）和媒质交界条件

注意：对于多种媒质的边值问题—每一种媒质都须列出其泛定方程

$$\nabla^2\varphi_i=\begin{cases}-\dfrac{\rho_i}{\varepsilon_i} & (x,y,z)\in D_i \quad \text{(domain)}\\ 0 & (D_i\text{域内处处有}\rho_i=0)\end{cases}$$

3. 边值问题的解析求解方法

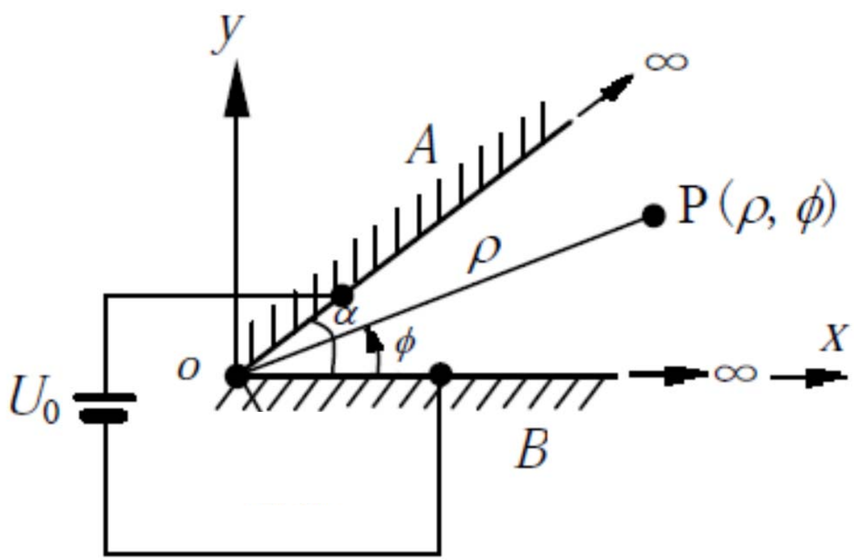
■ 直接积分法

当待求电位函数 $\varphi(r)$ 仅是一个坐标变量的函数时，边值问题可归结为常微分方程的定解问题。采用直接积分法求解。

例2-12 自学

例1：(P79例2-11）

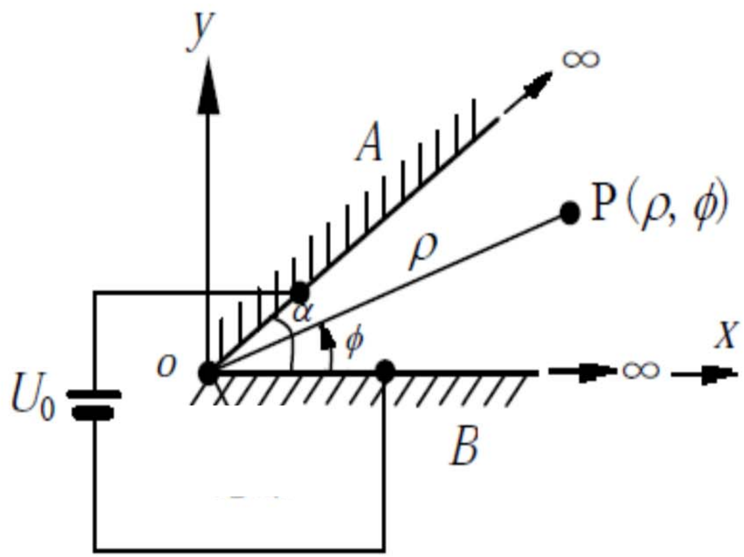
二块半无限大的导电平板构成夹角为 α 的电极系统，设板间电压为 U_0，如图所示。试求导板间电场，并绘出场图。



解：一平行平面场，设定极坐标系 (ρ, ϕ)

$$\varphi(\rho,\phi,z) \to \varphi(\rho,\phi) \to \varphi(\phi)$$

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0 & (\rho,\phi) \in D \\ \varphi\big|_{\phi=0} = 0 \\ \varphi\big|_{\phi=\alpha} = U_0 \end{cases}$$



解之得：

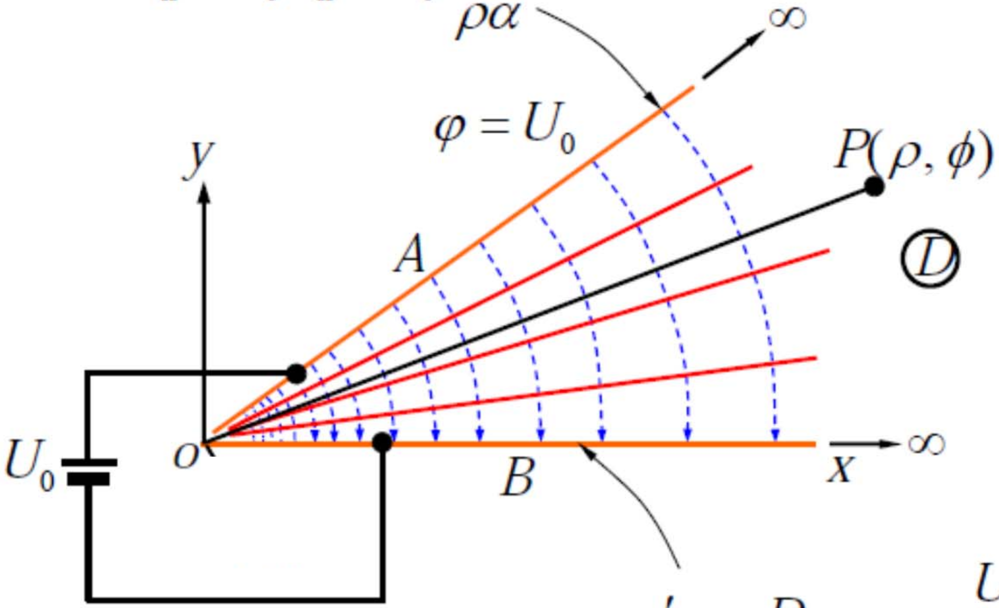
$$\varphi = C_1\phi + C_2$$

$$C_1 = \frac{U_0}{\alpha} \qquad C_2 = 0$$

$$\varphi(\phi) = \frac{U_0}{\alpha}\phi$$

$$\varphi(\phi)=\frac{U_0}{\alpha}\phi \rightarrow \vec{E}=-\nabla\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\rho\partial\phi}\vec{e}_\phi=-\frac{U_0}{\rho\alpha}\vec{e}_\phi$$

$$\sigma=D_n=\varepsilon_0 E_n=\varepsilon_0\frac{U_0}{\rho\alpha}$$

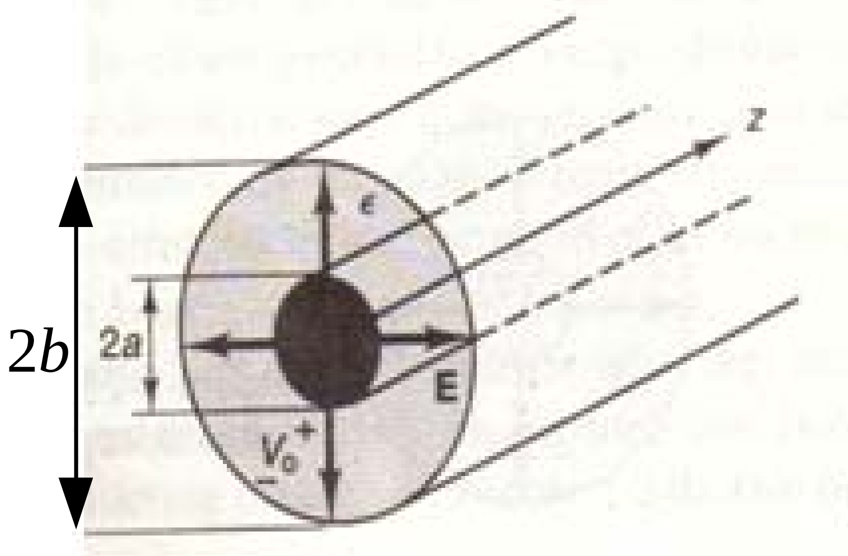


$$\sigma'=-D_n=-\varepsilon_0\frac{U_0}{\rho\alpha}=-\sigma$$

1. 等位面——等位线 $\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{C}$　　等分角线

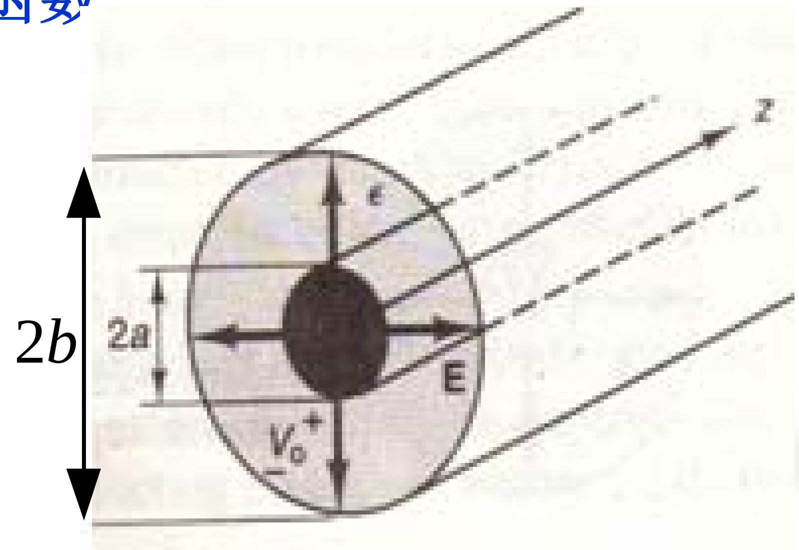
2. $\vec{E}$线　　　　与 ρ 成反比，顶点处电场强

例2：单芯同轴电缆的内、外径分别为a和b。其长度L远大于截面半径，内外导体间电介质的介电常数为ε、电压为V_0。试用边值问题计算介质中的电场强度。（P72书例2-9）



- 分析
  - 平行平面场，电位函数与z坐标无关
  - 轴对称场，电位函数与ϕ 坐标无关
  - 电位函数仅为ρ坐标的函数

应用圆柱坐标计算



解：■泛定方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

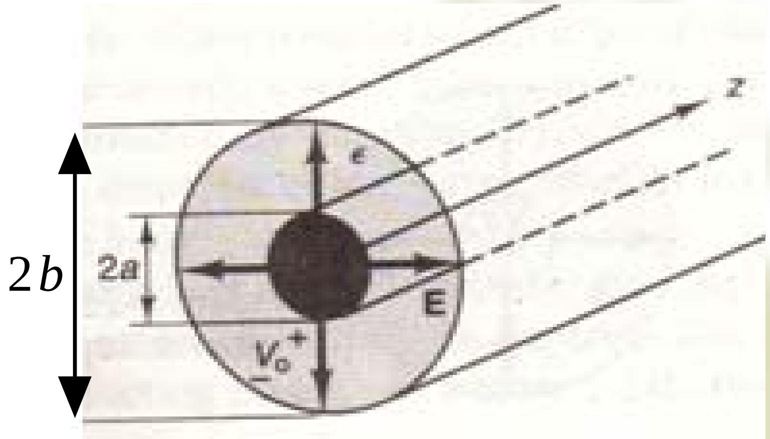
$$\rho = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\varphi}{d\rho}\right)=0$$

■边界条件

$$\varphi|_{\rho=a}=V_0$$

$$\varphi|_{\rho=b}=0$$



■泛定方程的通解

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\varphi}{d\rho}\right)=0$$

$$\varphi=C_1\ln\rho+C_2$$

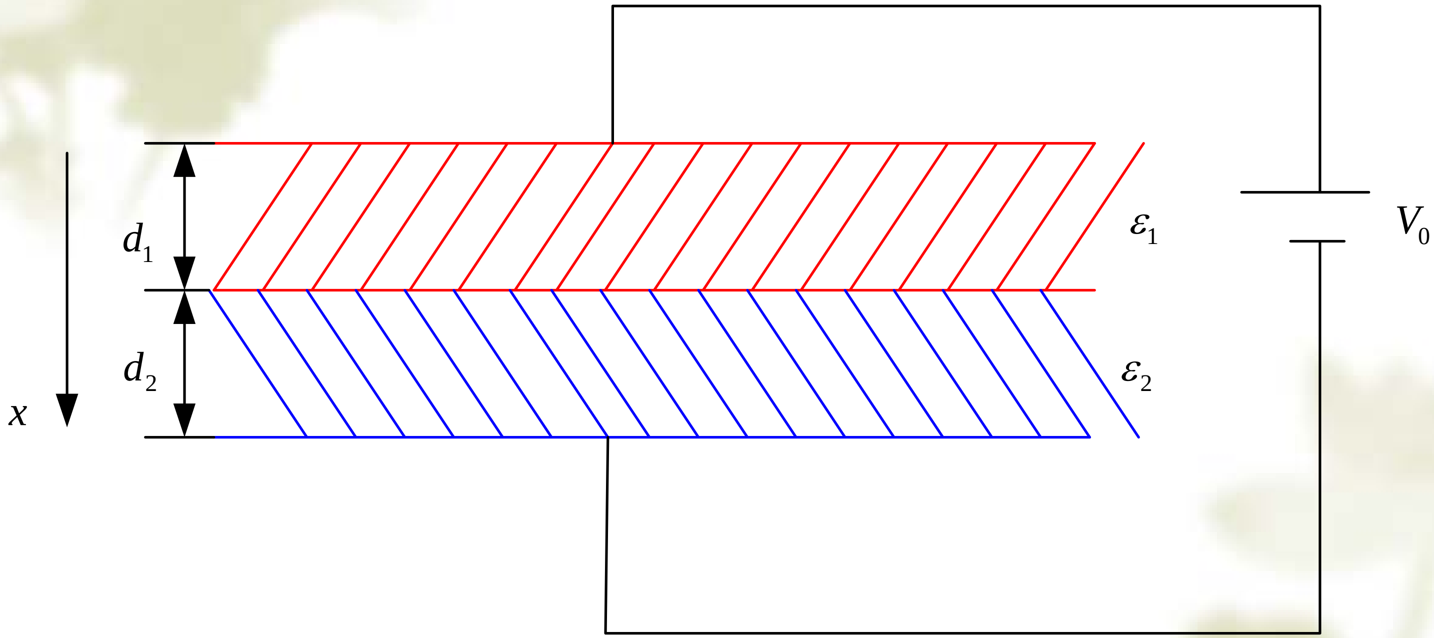
■确定未知系数

$$\varphi=-\frac{V_0}{\ln(\frac{b}{a})}\ln\rho+\frac{V_0}{\ln(\frac{b}{a})}\ln b \Longleftarrow \begin{aligned}&\varphi\,|_{\rho=a}=V_0\\&\varphi\,|_{\rho=b}=0\end{aligned}$$

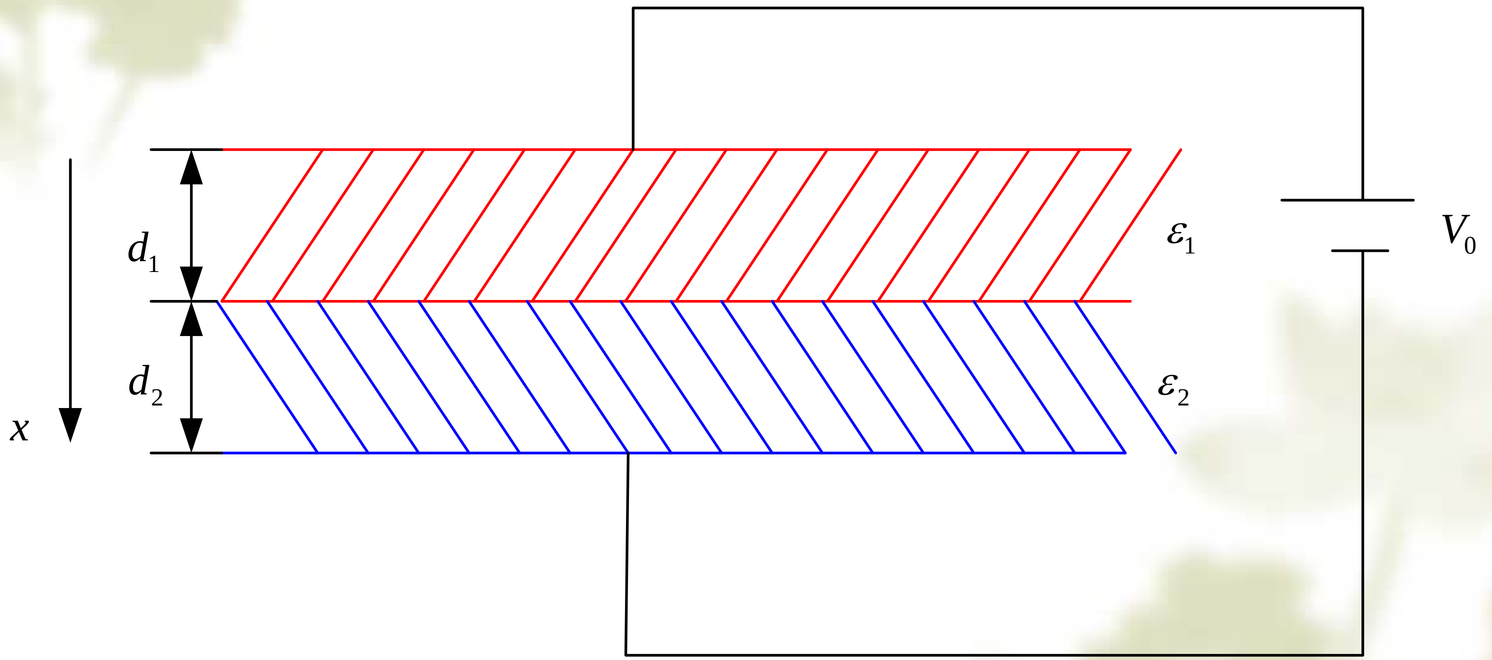
$$\vec{E}=-\nabla\varphi=\frac{V_0}{\rho\ln(\frac{b}{a})}\vec{e}_\rho$$

与例**2-9** 高斯定理求解结果一致。

例3：利用边值问题，计算图示的平行板电容器两种不同介质中的电场强度和上下极板的电荷面密度。



- 分析
  - 平行平面场，且电位函数仅为**x** 坐标的函数
  - 应用直角坐标计算



■ 边值问题

$$\varphi_1 = C_2 x + C_1$$
$$\varphi_2 = C_4 x + C_3$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma \end{cases}$$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = 0 \qquad (0 < x \le d_1)$$

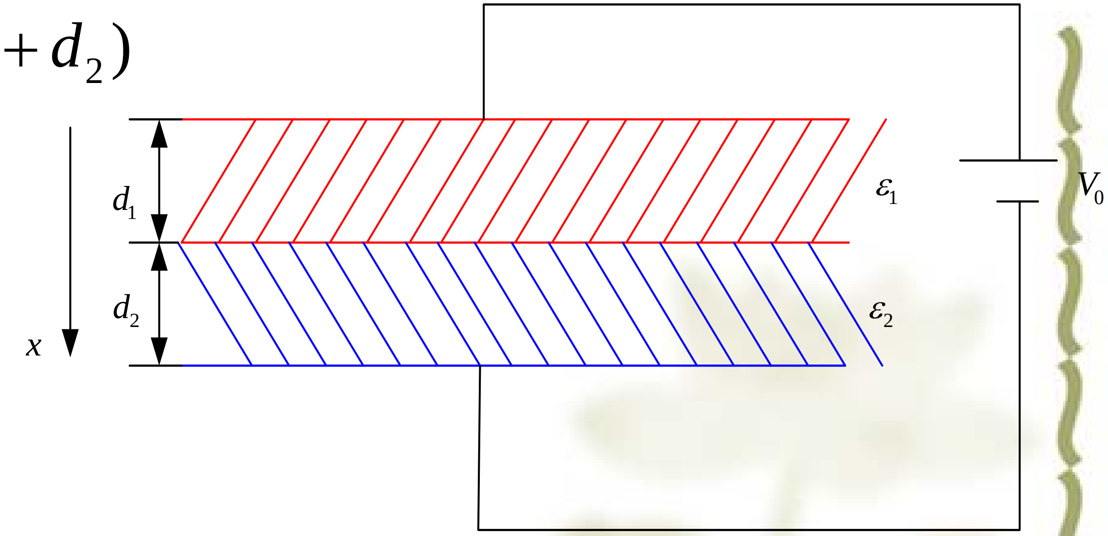
$$\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} = 0 \qquad (d_1 < x \le d_1 + d_2)$$

$$\varphi_1 |_{x=0} = V_0$$

$$\varphi_2 |_{x=d_1+d_2} = 0$$

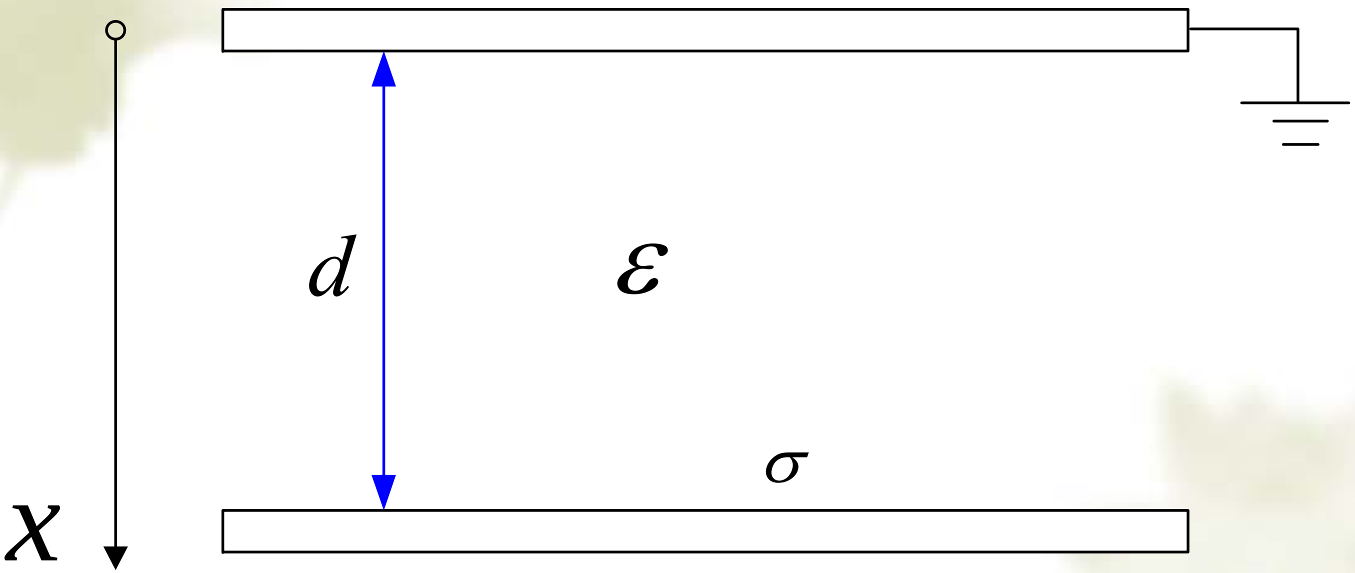
$$\varphi_1 |_{x=d_1} = \varphi_2 |_{x=d_1}$$

$$\varepsilon_1 \frac{d\varphi_1}{dx} |_{x=d_1} = \varepsilon_2 \frac{d\varphi_2}{dx} |_{x=d_1}$$



对于多种媒质的边值问题—每一种媒质都须列出其泛定方程。

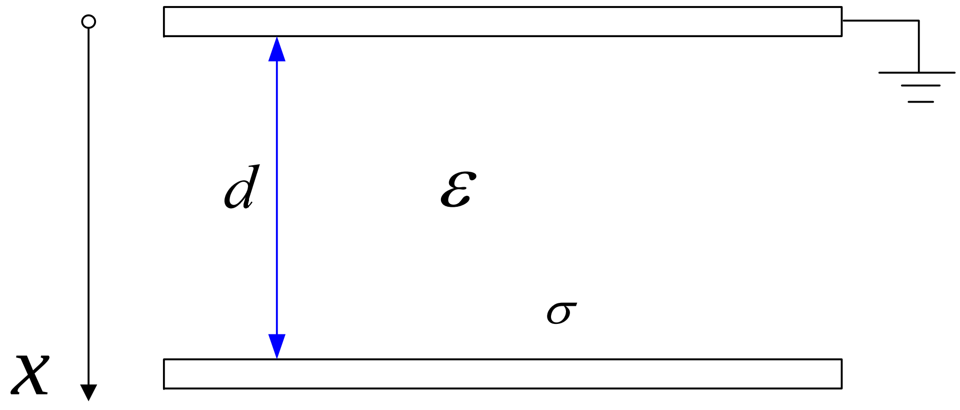
■ 例4：写出如下图所示平行板电容器间静电场的边值问题



解：

泛定方程

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0 \qquad (0<x\le d)$$



边界条件

$$\varphi\big|_{x=0}=0$$

$$\varepsilon\frac{d\varphi}{dx}\bigg|_{x=d}=\sigma$$

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\sigma\end{cases}$$

3. 边值问题的解析求解方法

- 分离变量法

当待求位函数是两个或大于两个坐标变量的函数时，分离变量法是直接求解偏微分方程定解问题的一种经典解法。当场域边界面(线)和某一正交曲线坐标系的坐标面(线)相吻合时，分离变量法往往是一种简便而有效的方法。

分离变量法求解的一般步骤：

- 根据场域的几何形状，选定合适的坐标系，写出边值问题（微分方程和边界条件）；
- 分离变量，将偏微分方程分离成几个常微分方程；
- 解常微分方程，并叠加得到通解；
- 利用边界条件确定积分常数，最终得到电位的解。

1）. 直角坐标系中的分离变量法（以二维场为例）

a. 据场域边界几何形状，选定相应的坐标系，写出B. V. P.;

$$\begin{cases} \nabla^2 U(x,y) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (x,y)\in D & (1) \\ U(x,y)\big|_L = f(\vec{r}_b) & (2) \end{cases}$$

b. 设定分离变量形式的试探解，并籍分离常数将方程分解为相应个数的常微分方程。

令 $$U(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda \qquad \text{(分离常数)}$$

只与x有关

只与y有关

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}=\lambda \qquad (分离常数)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}-\lambda X=0 & (3)\\ \dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+\lambda Y=0 & (4)\end{cases}$$

c. 求各常微分方程的通解，它们的积构成原偏微分方程的特解，其中含有待定的本征值和积分常数

- 当$\lambda=0$

$$X_0(x)=A_{10}+A_{20}x; \qquad Y_0(y)=B_{10}+B_{20}y$$

$$U_0(x,y)=X_0(x)Y_0(y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 X}{dx^2} - \lambda X = 0 & (3) \\ \dfrac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda Y = 0 & (4) \end{cases}$$

- 当$\lambda = m_n^2 > 0$ $(n=1, 2, \ldots\ldots)$

$$X(x) = a_{1n} e^{m_n x} + a_{2n} e^{-m_n x}$$
$$= A_{1n} \mathrm{ch} m_n x + A_{2n} \mathrm{sh} m_n x$$

$$Y(y) = b_{1n} e^{j m_n y} + b_{2n} e^{-j m_n y}$$
$$= B_{1n} \cos m_n y + B_{2n} \sin m_n y$$

$$U_n(x, y) = X(x) Y(y)$$

- 当$\lambda = -m_n^2 < 0$ $(n=1, 2, \ldots\ldots)$

$$X'(x) = A'_{1n} \cos m_n x + A'_{2n} \sin m_n x$$

$$Y'(y) = B'_{1n} \mathrm{ch} m_n y + B'_{2n} \mathrm{sh} m_n y$$

$$U'_n(x, y) = X'(x) Y'(y)$$

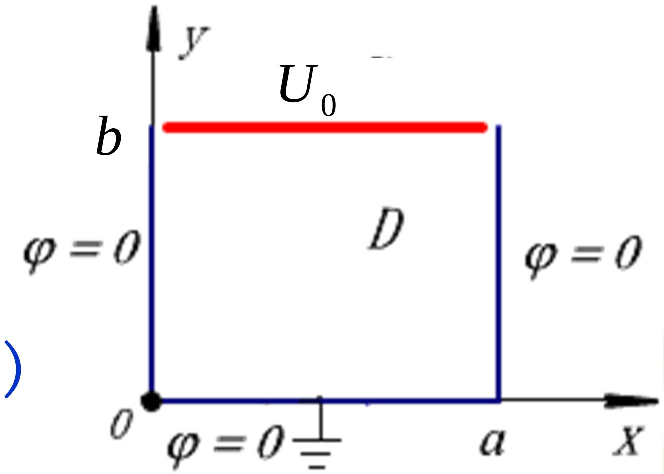
d. 据方程线性，由其特解的线性组合构成偏微分方程的通解，然后，通过给定的定解条件，逐一确定本征值和积分常数，最终得定解问题的确定解。

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}U_n'(x,y)+U_0(x,y)$$

$$\varphi(x,y)=\sum^{\infty}[\mathrm{A}_{1n}\cosh(\mathrm{m_n x})+\mathrm{A}_{2n}\sinh(m_n x)][\mathrm{B}_{1n}\cos(\mathrm{m_n\ y})+\mathrm{B}_{2n}\sin(m_n\ \mathrm{y})]$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}[\mathrm{A'}_{1n}\cos(\mathrm{m_n x})+\mathrm{A'}_{2n}\sin(m_n x)][\mathrm{B'}_{1n}\cosh(\mathrm{m_n\ y})+\mathrm{B'}_{2n}\sinh(m_n\ \mathrm{y})]$$
$$+(\mathrm{A}_{10}+\mathrm{A}_{20}\ x)(\mathrm{B}_{10}+\mathrm{B}_{20}\ y)$$

例 横截面为矩形的无限长接地金属导体槽，上部有电位为U_0的金属盖板；导体槽的侧壁与盖板间有非常小的间隙以保证相互绝缘。试求此导体槽内的电位分布。

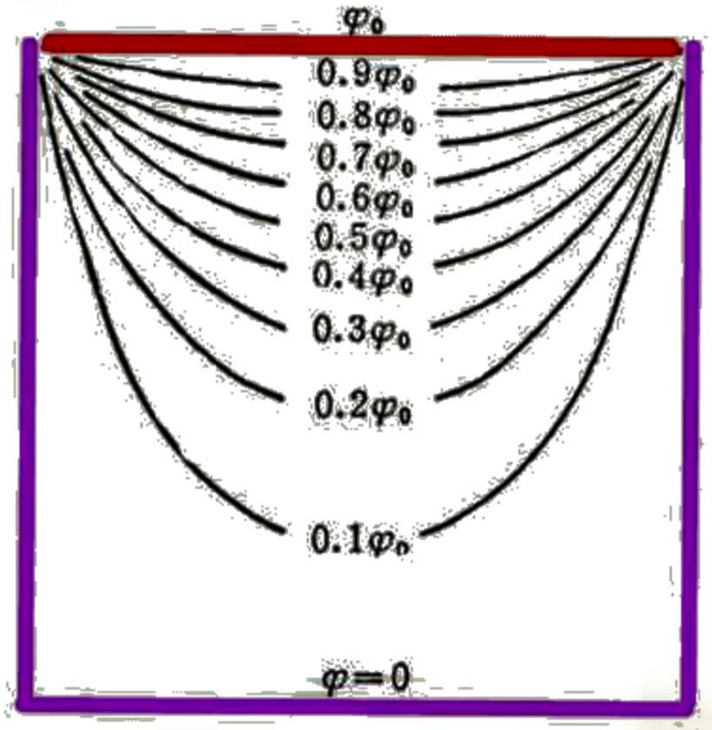
解：导体槽在 Z 方向为无限长，槽内电位满足直角坐标系中的二维拉普拉斯方程。



$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 & \textbf{(0<x<a,0<y<b)} \\ \varphi(0,y) = 0 & (0 \le y < b) \\ \varphi(a,y) = 0 & (0 \le y < b) \\ \varphi(x,0) = 0 & (0 \le x \le a) \\ \varphi(x,b) = U_0 & (0 \le \end{cases}$$

$$\varphi(x,y) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n\,\mathrm{sh}\dfrac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{sh}\frac{n\pi y}{a}$$

导体槽内电位分布情况为

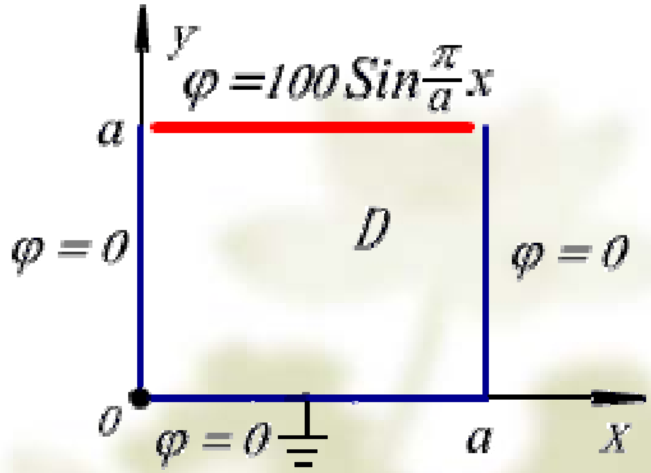


例　一无限长金属槽，其三壁接地，另一壁与三壁绝缘且保持电位为 $100\sin\dfrac{\pi}{a}x$，金属槽截面为正方形（边长为a），试求金属槽内电位的分布。

解：选定直角坐标系

$$
\begin{cases}
\nabla^2\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \\
\varphi\big|_{(x=0,0\le y\le a)}=0 \\
\varphi\big|_{(y=0,0\le x\le a)}=0 \\
\varphi\big|_{(y=a,0<x<a)}=100\sin\dfrac{\pi}{a}x \\
\varphi\big|_{(x=a,0\le y\le a)}=0
\end{cases}
$$

（D域内）



$$\varphi(x,y)=\frac{\varphi_m}{\sinh\pi}\sin\frac{\pi}{a}x\sinh\frac{\pi}{a}y$$

小结

静态电场的求解方法：

- 利用库仑定理求电场强度E √
- 通过电位求电场强度E √
- 利用高斯定理求E √
- 边值问题 √

  直接积分法 √

  分离变量法

  镜像法

唯一性定理

给定源和边界条件的泊松方程（拉普拉斯方程）的解是唯一的。

场域内场源不变

泛定方程不变

边界条件不变

作业：2-4，2-11，2-16 +补充一题

如图所示，在内外半径分别为R_1和R_3的球形电容器中均匀地分布着两种不同的电介质，两种电介质交界球面半径为R_2（为方便理解，这里只画出半个球）。现在电容器间施加电压U_0。（1）试写出该球形电容器中静电场问题的边值问题。（2）应用边值问题计算球形电容器两种不同介质内的电场强度和内外球表面的电荷密度。