第 1 章 电磁场的数学物理基础

1. 理解源量和场量的基本概念，以及各种源量的分布形式；

2. 理解标量和矢量的基本概念，并能在符号上加以区分；

3. 理解标量积（点积）、矢量积（叉积）的基本概念，并能在符号上加以区分；

4. 理解三度的表示形式以及所代表的物理意义；

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla \varphi$$

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$$

$$\mathrm{curl}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \nabla \times \vec{A}$$

5. 高斯散度定理

$$\int_V \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}\mathrm{d}V=\int_S \vec{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$$

S为包围体积V的外表面。

斯托克斯定理（STOKES’s Theorem）

$$\int_S(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\oint_l\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

S为围线***l***所包围的面积

亥姆霍兹定理(**Helmholtz’s Theorem**)

$$\vec{F}(\vec{r})=-\nabla\varphi(\vec{r})+\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\bullet\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' \qquad \vec{A}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

6. maxwell基本方程

相量形式？

积分形式　　　　微分形式

$$\oint_l \vec{H}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_S\left(\vec{J}_c+\vec{J}_v+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}=\left.\begin{matrix}\vec{J}_c\\ \vec{J}_v\end{matrix}\right\}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

全电流定律

$$\oint_l \vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet \mathrm{d}\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

电磁感应定律

$$\oint_S \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=0 \qquad \nabla\bullet\vec{B}=0$$

磁通连续性原理

$$\oint_S \vec{D}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\sum q \qquad \nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

电场中的高斯定理

四个方程所反映的物理意义：

- 全电流定律：麦克斯韦第一方程，表明传导电流和变化的电场都能产生磁场；
- 电磁感应定律：麦克斯韦第二方程，表明电荷和变化的磁场都能产生电场；
- 磁通连续性原理：表明磁场是无源场，磁力线总是闭合曲线；
- 高斯定律：表明电荷以发散的方式产生电场（变化的磁场以涡旋的形式产生电场）。

7. 媒质的电磁性能参数

反映媒质在电场作用下的导电性能——电导率 γ **(1/Ω·m=S/m)**

反映媒质在磁场作用下的磁化性能——磁导率 μ **(H/m)**

反映媒质在电场作用下的极化性能——介电常数 ε **(F/m)**

γ —— R　　　μ —— L　　　ε —— C

真空中，

$$\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12} \quad \mathrm{F/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7} \quad \mathrm{H/m}$$

$$\boldsymbol{c} = 3\times10^{8} \quad \mathrm{m/s}$$

电磁波传播速度等于光速

8. 媒质的构成方程

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \qquad \vec{J} = \gamma\vec{E}$$

第2章 静电场 有源(散)、无旋

- 基本方程

$$\oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V = q \qquad \nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

- 特征：有散（有源）、无旋场

- 媒质构成（本构）方程 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

静电场 有源(散)、无旋

- 位函数及其满足的微分方程

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \qquad \varphi_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

泊松方程（**Poisson's equation)**

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (\rho(\vec{r}') = 0)$$

拉普拉斯方程（**Laplace's equation)**

静电场 有源(散)、无旋

- 导体中静电场
  - 导体为等位体，导体内电场强度处处等于零
  - 在导体表面上电场线与导体表面正交
  - 电位移与电荷密度的关系

$$\sigma = \vec{e}_n \cdot \vec{D} = D_n$$

静电场 有源(散)、无旋

- 电介质中的电场
  - 极化

电介质内的束缚电荷在外电场的作用下，这些带电的粒子便会偏离原来的位置形成偶极矩（**Dipole**），作有规律的分布，对外呈现电性，影响电场分布。

- 电介质中的高斯定理—微分形式

$$\oint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\nabla \bullet \vec{D})\mathrm{d}V = \int_V \rho \mathrm{d}V = q$$

对称结构的电场

极化电荷面、体密度 $\sigma_P = \vec{P} \bullet \vec{e}_\mathrm{n}$ $\rho_P = -\nabla' \bullet \vec{P}$

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \left(\varepsilon_r - 1\right) \varepsilon_0 \vec{E}$$

静电场 有源(散)、无旋

- 两种不同介质分界面上的边界条件

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

- 由电位函数φ 表示媒质分界面上的边界条件

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma$$

静电场 有源(散)、无旋

- 边值问题的一般表述

  - 泛定方程 （方程数与媒质数一致）

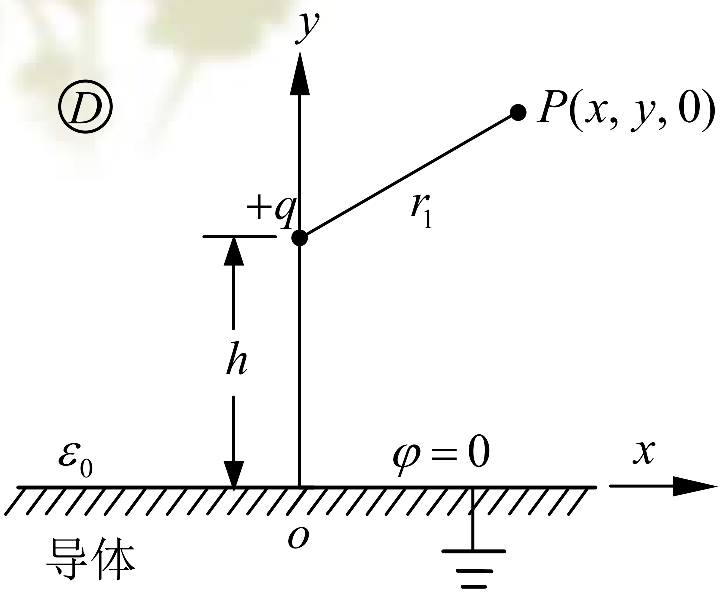
$$\nabla^2\varphi_i = \begin{cases} -\dfrac{\rho_i}{\varepsilon_i} & (x, y, z) \in D_i \quad (\text{domain}) \\ 0 & (D_i\text{域内处处有}\rho_i\text{=0}) \end{cases}$$

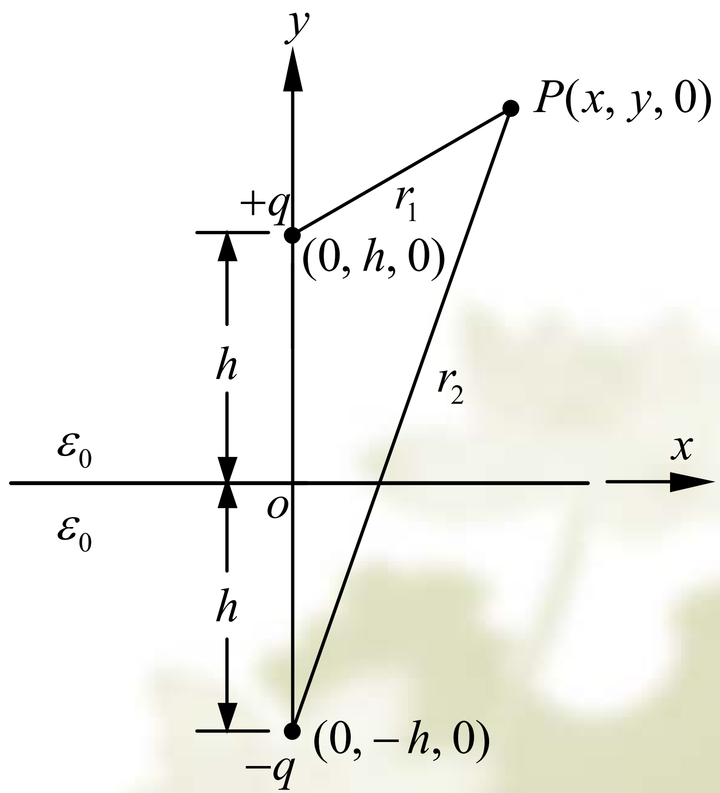
  - 定解条件

    方程定义域（场域）的边界上给定的边界条件（边值）和媒质交界面条件 **if applicable**。

静电场 有源(散)、无旋

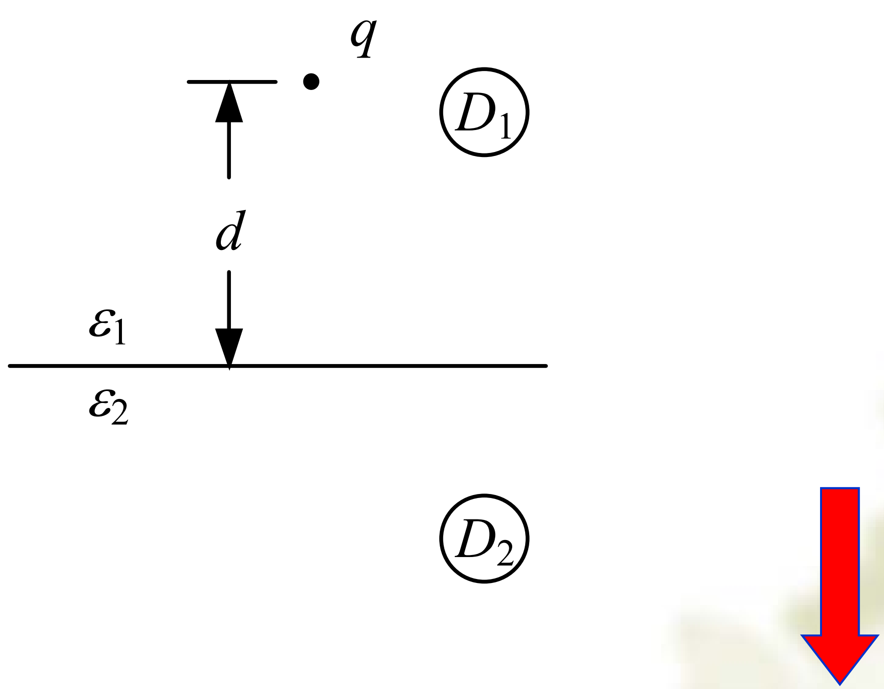
- 镜像法
  - 点电荷～无限大导板系统





静电场 有源(散)、无旋

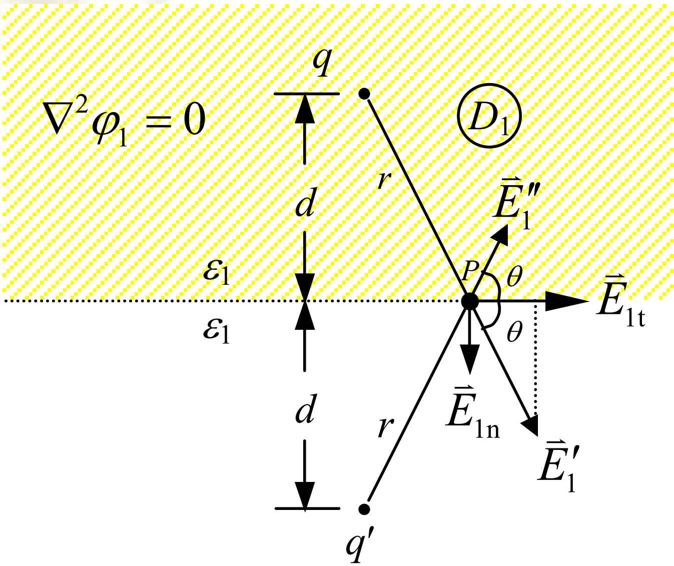
- 镜像法
  - 点电荷～ 无限大介质平面系统的电场



静电场 有源(散)、无旋

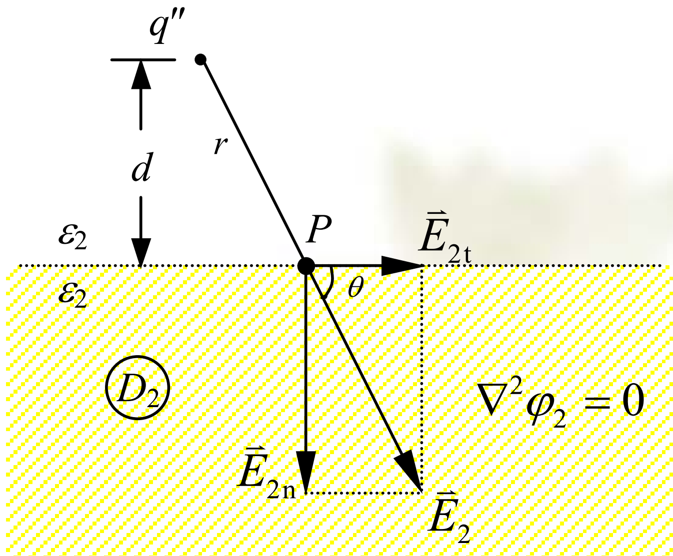
- 镜像法
  - 点电荷～无限大介质平面系统的电场

上半空间电场计算模型



$$q'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q$$

下半空间电场计算模型



$$q''=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q$$

静电场 有源(散)、无旋

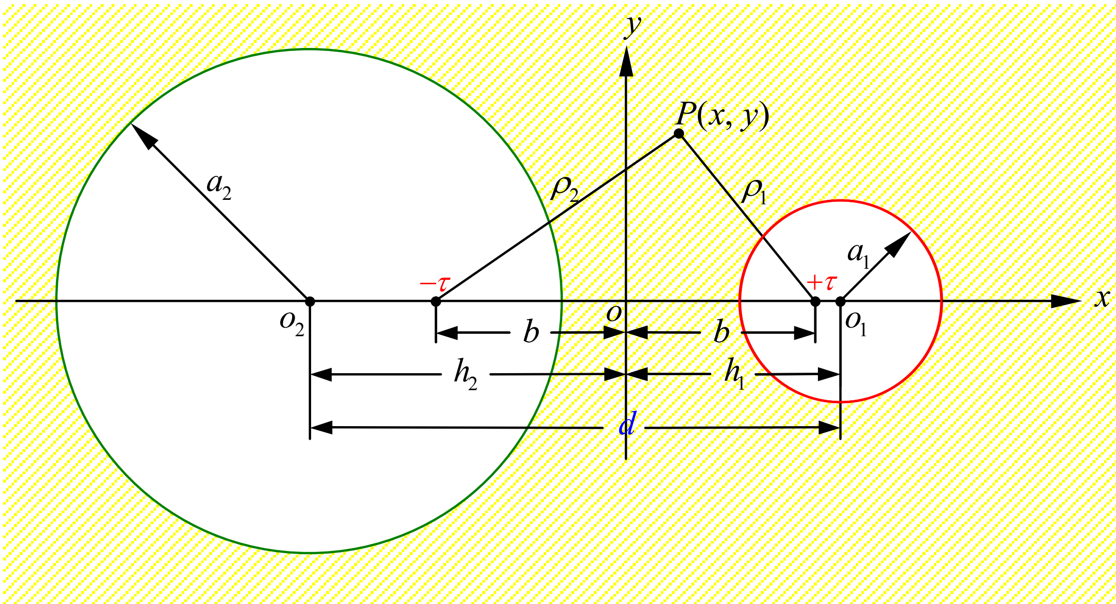
- 镜像法
  - 电轴法

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h_1 = \frac{d^2 + a_1{}^2 - a_2{}^2}{2d}$$

$$h_2 = \frac{d^2 + a_2{}^2 - a_1{}^2}{2d}$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - a_1^2} = \sqrt{h_2^2 - a_2^2}$$



适用区域

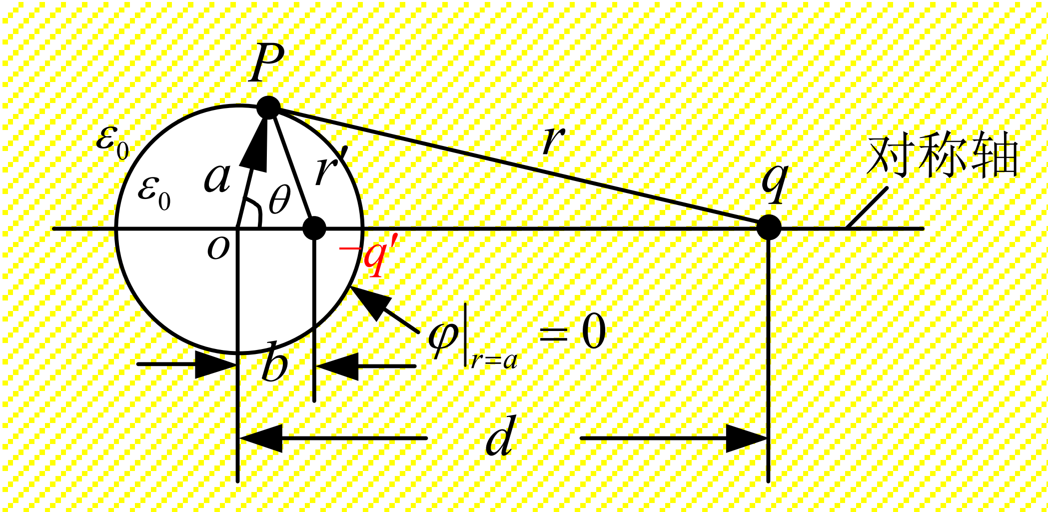
不包含不同半径
两导体内区域

静电场 有源(散)、无旋

- 镜像法
  - 点电荷 ~ 导体球 （导体球接地）

$$q' = \frac{a}{d}q$$

$$b = \frac{a^2}{d}$$

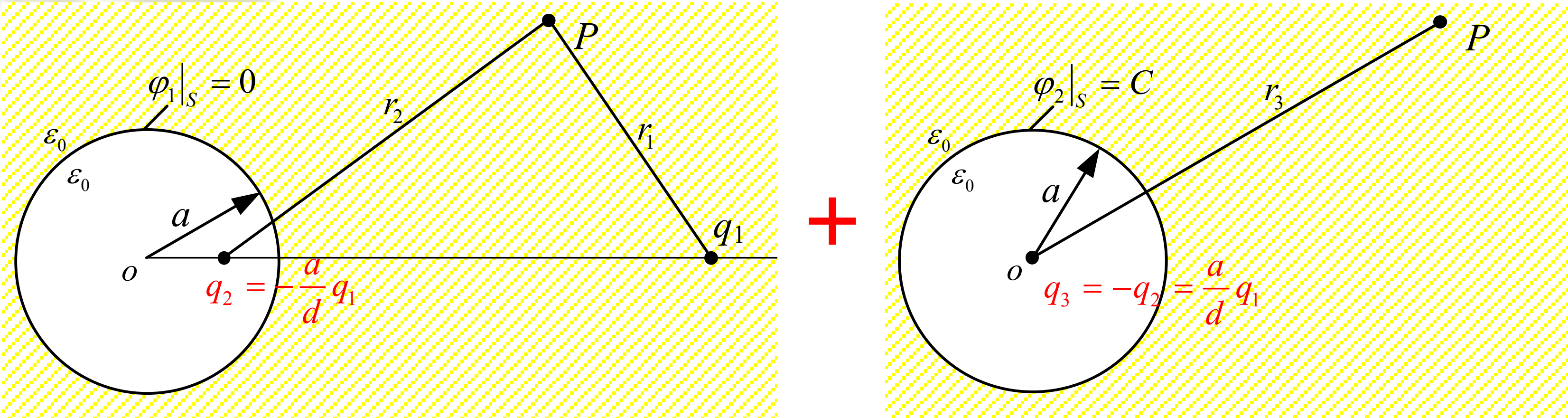


注意适用区域

仅适用于未引入电荷的区域

静电场 有源(散)、无旋

- 镜像法
  - 点电荷 ~ 导体球 （导体球不接地）

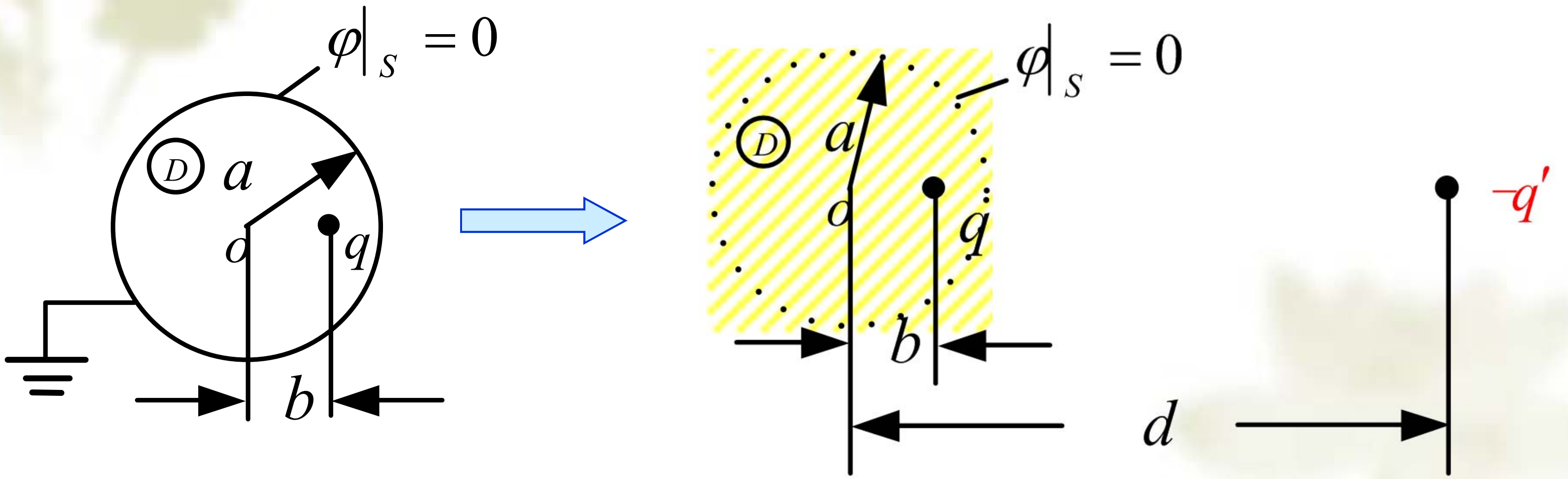


$$q_2 = -\frac{a}{d}q_1 \qquad b = \frac{a^2}{d}$$

注意适用区域　　仅适用于未引入电荷的区域

静电场 有源(散)、无旋

- 镜像法
  - 点电荷在导体球内（导体球接地）



$$d = \frac{a^2}{b} \qquad q' = \frac{d}{a} q$$

注意适用区域

未引入电荷的区域——球内

静电场 有源(散)、无旋

- 分析计算静电场的方法

  a) 根据场量(位函数)与源量的关系直接计算

  b) 迭加原理

  c) 高斯定理

  d) 边值问题

  e) 镜象法， 电轴法

静电场 有源(散)、无旋

- 电容和部分电容

$$C = \frac{q}{U}$$ 法拉，F

掌握简单电容器（包括孤立导体球）电容的分析和计算

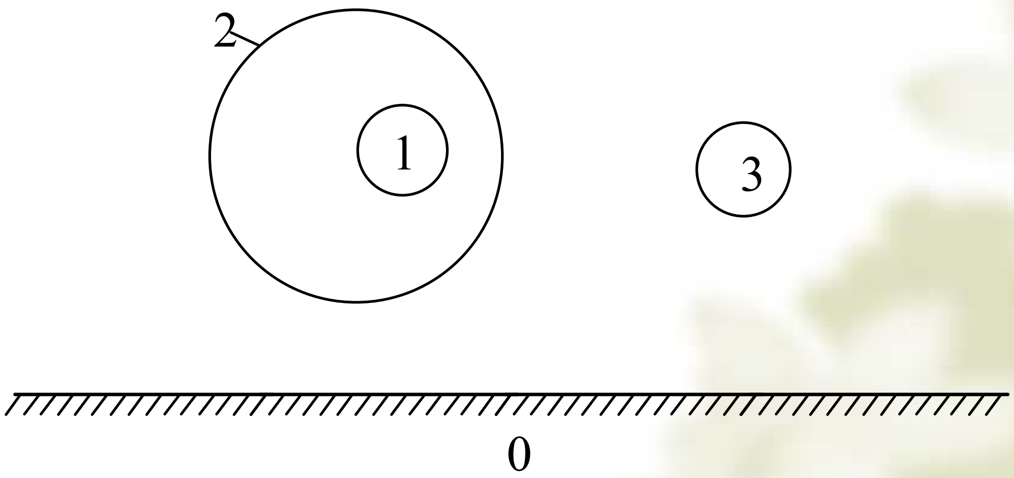
- 电容计算方法

  - 给定电荷 ***q*** $q \to \vec{E} \to U \to C$
  - 给定电压**U** $U \to \vec{E} \to q \to C$

静电场 有源(散)、无旋

- 导体中静电场
  - 静电屏蔽 (electric shielding)

用屏蔽体（导体2）将导体1包围，如果屏蔽体接地，可完全屏蔽外导体（导体3）对导体1的影响，或者导体1对导体3的影响。研究导体1与导体2之间的电场时，可不考虑导体3；研究导体2与导体3之间的电场时，可不考虑导体1。



静电场 有源(散)、无旋

- 电场能量

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k q_k$$

$$w'_e = \frac{1}{2}\vec{D}\bullet\vec{E}, \quad W_e = \int_V \frac{1}{2}\vec{D}\bullet\vec{E}$$

静电场 有源(散)、无旋

■ 电场力

计算方法：

1） 库仑定律： $\vec{F} = \dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$

条件：点电荷（两）；无限大均匀介质 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 内

2）电场强度定义公式：$\vec{F} = q\vec{E}$

这里的***E***是除电荷 ***q*** 外其余电荷产生的

3）虚位移法（广义力）

$$f = \frac{d_g W_e}{dg}\bigg|_{\varphi_k = \mathrm{C}} = \frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{\varphi_k = \mathrm{C}} \qquad f = -\frac{\mathrm{d}_g W_\mathrm{e}}{\mathrm{d}g}\bigg|_{q_k = C} = -\frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial g}\bigg|_{q_k = C}$$

静电场 有源(散)、无旋

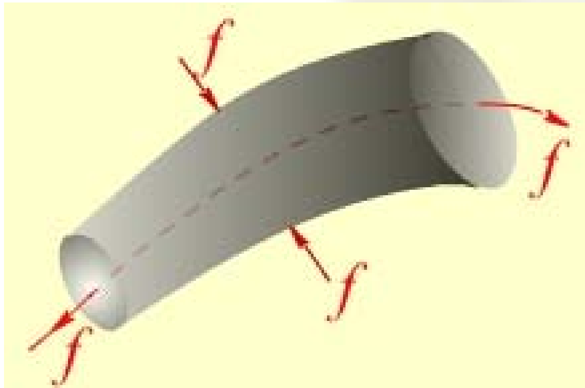
■ 电场力

计算方法：

4）法拉第观点

在电场中的每一段电位移管，沿其轴向受到纵张力，垂直于轴向受到侧压力，其大小为

$$f = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{D}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \qquad (\mathrm{N/m^2})$$



电位移管受力情况

基本关系式

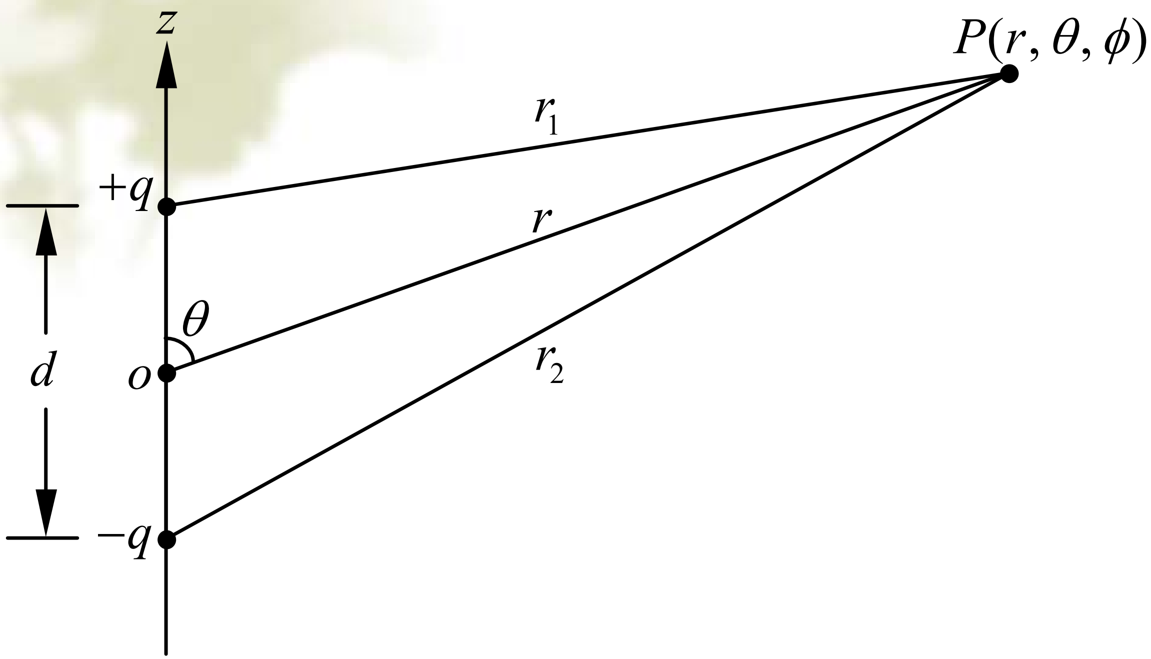
- 源量和场量的关系

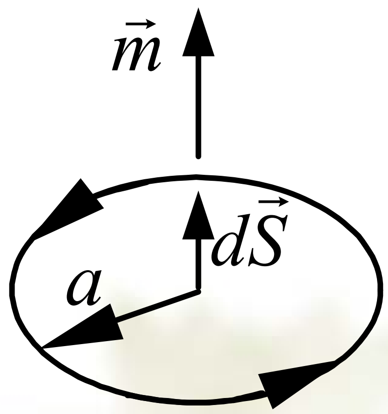
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_R \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_c(\vec{r}')\times\vec{e}_R}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}\mathrm{d}V'$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\mathrm{d}V' \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_c(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\mathrm{d}V'$$

基本关系式

- 基本单元





$$\varphi = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$(d \ll r)$$

$$\vec{A} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4r^2}$$

（$r>>a$）

第3章　恒定电流场（导电媒质）（无旋、无源）

- 基本方程和导出关系

$$\oint_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \nabla \bullet \vec{J} = 0$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

$$\oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = 0$$

位函数　$\vec{E} = -\nabla \varphi$

拉氏方程　$\nabla^2 \varphi = 0$

恒定电流场（导电媒质）（无旋、无源）

- 不同媒质分界面上的边界条件

$$E_{1t}=E_{2t} \qquad \varphi_1=\varphi_2$$

$$J_{1n}=J_{2n} \qquad \gamma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\gamma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$

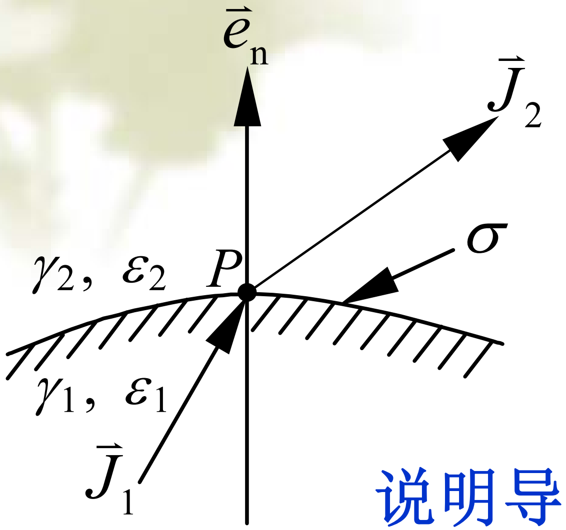
- 恒定电场的计算方法：

1. 直接计算

思路：设 $I \longrightarrow \vec{J} \longrightarrow \vec{E}=\vec{J}/\gamma \longrightarrow U=\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l} \longrightarrow R=U/I$

2. 静电比拟法

■ 两种有损电介质分界面上的B. C.



- $\boldsymbol{J_{1n} = J_{2n}}$ 即 $\boldsymbol{\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}}$ **(1)**
- $D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma$ (2)

$$\sigma = \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right) J_{2n}$$

说明导电媒质分界面上一般积累有自由面电荷。

只有满足 $\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \longrightarrow \sigma = 0$

恒定磁场（有旋、无源）

- 恒定磁场
  - 基本方程

$$\oint_l \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \sum I \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \vec{J}_\mathrm{c}$$ 有旋

$$\oint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \nabla \bullet \vec{B} = 0$$ 无源

媒质构成方程 $\vec{B} = \mu \vec{H}$

恒定磁场

- 恒定磁场--有旋、无源
  - 位函数及其满足的微分方程

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

库仑规范 $\quad \nabla \bullet \vec{A} = 0$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_c \quad \text{或} \quad \nabla^2 \vec{A} = 0 \qquad \vec{J}_c = 0$$

矢量泊松方程　　　　矢量拉氏方程

（仅适用于无电流区域）

$$\nabla^2 \varphi_m = 0 \qquad \vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

恒定磁场

- 恒定磁场--有旋、无源
  - 媒质中的磁场
    - 媒质的磁化（了解）

媒质中的原来随机分布的微观电流（安培电流）在外磁场不为零时将受到力矩的作用，形成一个与原磁场同向或反向的磁化磁场。

恒定磁场

- 恒定磁场--有旋、无源
  - 媒质中的磁场
    - 一般形式的安培环路定律

$$\oint_l \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \sum I = \int_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

用以简化对称磁场，如传输线和同轴电缆产生的磁场的计算

恒定磁场

- 恒定磁场--有旋、无源
  - 分析计算方法

1. 应用毕奥—萨伐尔定律求解B
2. 应用安培环路定律求解B
3. 通过矢量磁位A求解B
   - （1）直接积分法
   - （2）利用边值问题求解
     - 泛定方程
     - 定解条件—边界条件
4. 通过叠加原理求解B
5. 静像法

恒定磁场

- 不同媒质交界面上的边界条件（一般）

$$\boldsymbol{B}_{1n} = \boldsymbol{B}_{2n} \qquad H_{1t} - H_{2t} = K$$

- 一般条件——用矢量磁位**A**表示

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ \dfrac{1}{\mu_1}\left(\nabla \times \vec{A}_1\right)_t - \dfrac{1}{\mu_2}\left(\nabla \times \vec{A}_2\right)_t = K \end{cases}$$

- 一般条件——用标量磁位$\boldsymbol{\varphi_m}$表示

$$\begin{cases} \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \\ \mu_1 \dfrac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \dfrac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \end{cases}$$

恒定磁场

- 电感及其计算
  - 定义

电感(自感L和互感M) —— 描述一个电路或两个相邻电路间因电流变化而感生电动势效应的物理参数。

恒定磁场下

直流电感

自感—内自感、外自感　　长直载流导线的内自感 $L_i = \dfrac{\mu l}{8\pi}$

恒定磁场

- 电感及其计算
  - 计算
    - 根据定义计算

设定线圈中的电流 I $\nearrow$ 各类方法 $\longrightarrow \vec{H}、\vec{B} \longrightarrow \phi = \int_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$

设定线圈中的电流 I $\searrow$ $\begin{pmatrix} \text{1. B. V. P.} \\ \text{2. } \vec{A}\text{的特解} \end{pmatrix} \longrightarrow \cancel{\vec{A}} \longrightarrow \phi = \oint_l \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$

$\longrightarrow$

$$\phi_L(\phi_M) \xrightarrow{\times W} \psi_L(\psi_M) \longrightarrow L(M)$$

恒定磁场

- 电感及其计算
  - 计算
    - 利用电感和能量间的关系计算

$$W_{\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}W = \int_0^I iL\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2 \longrightarrow L = \frac{2W_{\mathrm{m}}}{I^2}$$

$$L = L_{ext} + L_{\mathrm{int}}$$

$$L_{ext} = \frac{1}{I^2}\int_{V_{ext}} \vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

$$L_{\mathbf{int}} = \frac{1}{I^2}\int_{V_{\mathbf{int}}} \vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

恒定磁场

- 电感及其计算
  - 计算
    - 与频率间的关系

由于集肤效应的影响，电流只分布在导体表面，内自感L_i近似为零，导体交流电感只包括外自感。

频率越高，交流电感越小；交流电阻越大。

$$R = X = \frac{l}{2\pi a}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \quad , \quad L = \frac{l}{2\pi a}\sqrt{\frac{\mu}{2\omega\gamma}}$$ （了解）

恒定磁场

- 磁场能量
  - 单回路线圈

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

  - 能量密度

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} \qquad W_m = \int_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

恒定磁场

- 磁场力
  - 虚位移法

$$F = \frac{\mathrm{d}_g W_\mathrm{m}}{\mathrm{d}g}\bigg|_{I_k = C} = \frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial g}\bigg|_{I_k = C}$$

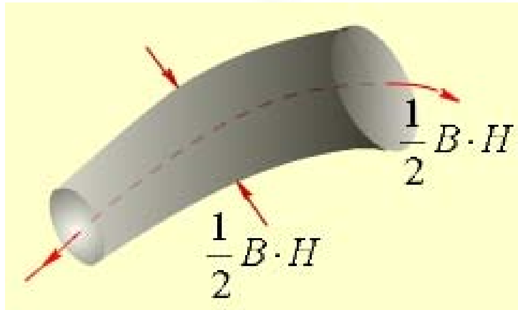
$$F = -\frac{\mathrm{d}_g W_\mathrm{m}}{\mathrm{d}g}\bigg|_{\psi_k = C} = -\frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial g}\bigg|_{\Psi_k = C}$$

恒定磁场

- 磁场力
  - 法拉第观点求磁场力

法拉第观点，通量管沿其轴向方向受到纵张力，垂直方向受到侧压力，其量值都等于

$$f=\frac{1}{2}HB=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{B^2}{2\mu}\quad \mathrm{N/m^2}$$



通量管受力

第4、5章 动态电磁场与波

- 动态电磁场的基本方程 –Maxwell’s 方程组
  - 积分形式

$$\oint_l \vec{H}\bullet d\vec{l} = \int_S \vec{J}_c \bullet d\vec{s} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{s} + \int_S \rho\vec{v}\bullet d\vec{s}$$ 全电流定律

$$\oint_l \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$$ 电磁感应定律

$$\oint_S \vec{B}\bullet d\vec{s} = 0$$ 磁通连续性原理/磁场中的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} = \sum q = \int_V \rho dv$$ 电场中的高斯定理

动态电磁场与波

- 动态电磁场的基本方程 **–Maxwell’s** 方程组
  - 微分形式

$$\nabla\times\vec{H}=\left.\begin{matrix}\vec{J}_c\\ \vec{J}_V\end{matrix}\right\}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

动态电磁场与波

- 动态电磁场的基本方程 –**Maxwell’s** 方程组
  - 媒质特性的构成方程 **Constitutive equation**

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J}_{\mathrm{c}} = \gamma \vec{E}$$

动态电磁场与波

- 动态电磁场的基本方程 –Maxwell’s 方程组
  - 相量形式(复数形式)

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}=\left.\begin{matrix}\dot{\vec{J}}_c\\ \dot{\vec{J}}_v\end{matrix}\right\}+\mathrm{j}\omega\dot{\vec{D}}\qquad \oint_l \dot{\vec{H}}\cdot d\vec{l}=\int_S(\dot{\vec{J}}+j\omega\dot{\vec{D}})\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\times\dot{\vec{E}}=-\mathrm{j}\omega\dot{\vec{B}}\qquad \oint_l \dot{\vec{E}}\cdot d\vec{l}=-\int_S j\omega\dot{\vec{B}}\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\bullet\dot{\vec{B}}=0\qquad \oint_S \dot{\vec{B}}\cdot d\vec{S}=0$$

$$\nabla\bullet\dot{\vec{D}}=\dot{\rho}\qquad \oint_S \dot{\vec{D}}\cdot d\vec{S}=\dot{q}$$

$$\dot{\vec{D}}=\varepsilon\dot{\vec{E}}\quad \dot{\vec{B}}=\mu\dot{\vec{H}}\quad \dot{\vec{J}}=\gamma\dot{\vec{E}}$$

动态电磁场与波

- 不同媒质交界面上的边界条件（一般）

$$H_{1t}-H_{2t}=K$$
$$E_{1t}=E_{2t}$$
$$B_{1n}=B_{2n}$$
$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma$$

- 不同媒质交界面上的边界条件（理想导体与理想电解质）

$$\boldsymbol{H_{2t}=-K} \qquad \boldsymbol{E_{2t}=0}$$
$$\boldsymbol{B_{2n}=0} \qquad \boldsymbol{D_{2n}=\sigma}$$

理想导体表面电流的面密度

$\vec{K}=\vec{e}_n\times\vec{H}$ $\quad \vec{e}_n$ 由理想导体指向电介质

动态电磁场与波

- 时变电磁场的功率平衡关系—坡印廷定理
  - 坡印廷定理

$$-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+P=\int_V \frac{\partial w}{\partial t}dV+\int_V \vec{E}\bullet\vec{J}\mathrm{d}V$$

$$-\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H})=\frac{\partial w}{\partial t}+p=\frac{\partial w}{\partial t}+\vec{E}\bullet\vec{J}$$

  - 坡印廷矢量

一般情况 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$

单位时间内穿入闭合面S流入体积V内的电磁能量

$$P_{in}=-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

动态电磁场与波

- 时变电磁场的功率平衡关系—坡印亨定理
  - 要求

对于简单电磁现象的电磁能量传输过程，应能定性分析、计算，如课堂讲的实例分析。

导线（输电线）的作用

1.传输线导线——导引电磁能量的作用，使电磁能量定向、集中;

2. 不论去线和回线，均把电磁场能量(以电磁波形式)从电源端引向负载端

动态电磁场与波

- 时变电磁场的功率平衡关系—坡印廷定理
  - 时谐电磁场

时谐电磁场

$$\vec{S} = \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*$$

$$\vec{S}_{av} = \cdots = \mathrm{Re}[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*]$$

注意，教材上时域表达式取的是相量的实部，即取余弦**COS**函数

动态电磁场与波

- 电磁位 （动态位、滞后位 ）
  - 定义

为分析计算方便，引入两个位函数

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

动态电磁场与波

- 电磁位 （动态位、滞后位 ）
  - 达朗贝尔方程（非齐次波动方程）

在洛仑兹规范 $\nabla\bullet\vec{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ 条件下

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_c$$

$$\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

达朗贝尔方程

（非齐次波动方程）

复数形式：

$$\nabla^2\dot{\vec{A}}+\frac{\omega^2}{v^2}\dot{\vec{A}}=-u\dot{\vec{J}}_c$$

$$\nabla^2\dot{\varphi}+\frac{\omega^2}{v^2}\dot{\varphi}=-\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon}$$

规范 不唯一，可引入其他规范

动态电磁场与波

- 电磁辐射
  - 电偶极子产生的动态电磁场 （原理、条件、场特点）
    - 近场

1. 近场定义： $kr << 1$ 的区域为近场区域

$$k = \frac{\omega}{v}$$

$$\boxed{kr << 1} \Longleftrightarrow \boxed{r << \lambda}$$

动态电磁场与波

- 电磁辐射
  - 电偶极子产生的动态电磁场 （原理、条件、场特点）
    - 近场

$$\dot{H}_r = \dot{H}_\theta = \dot{E}_\phi = 0 \qquad \dot{E}_r \approx 0$$

$$\dot{\vec{H}} \approx \frac{\dot{I}\Delta l \sin\theta}{4\pi r^2}\vec{e}_\phi \qquad \vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta\right)$$

特点：1）无推迟效应——似稳场；

2). $\vec{E} \perp \vec{H}$，且时间上相位差为90°，故 $\vec{S} = \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \neq 0$，但它对时间的平均值 $\vec{S}_{av} = 0$. 近区内主要是电磁能量交换。

动态电磁场与波

- 电磁辐射
  - 电偶极子产生的动态电磁场 （原理、条件、场特点）
    - 远区（$kr >> 1$，$r >> \lambda$）

$$\dot{H}_r = \dot{H}_\theta = \dot{E}_\phi = 0 \qquad \dot{E}_r \approx 0$$

$$\dot{H}_\phi = \mathrm{j}\frac{\dot{I}\Delta l k}{4\pi r}\sin\theta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

$$\dot{E}_\theta = \mathrm{j}\frac{\dot{I}\Delta l k^2}{4\pi\omega\varepsilon_0 r}\sin\theta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

特性阻抗

$$\eta = \frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{k}{\omega\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\ \Omega$$

远场特点：

1). $\vec{E}$、$\vec{H}$ 都是向 ***r*** 方向传播的电磁波，传播方向由相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$ 确定 ——“ωt-kr”；

换句话说，辐射区电磁场有推迟效应；

2). 电磁波的等相位面（相位相同的各点的空间轨迹，亦即波源作用“同时”传播到达的各点轨迹）——球面($r = C$)，故辐射区电磁波为球面波；

远区能量，一半存储在电场，一半存储在磁场。

能流方向为电磁波的传播方向，辐射是有方向的。

- 空间上 $\vec{E} \perp \vec{H}$，时间上 $\vec{E}$、$\vec{H}$ 同相；

$$\vec{\mathbf{S}}_{\mathrm{av}} = \mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*\right]\vec{e}_r = \eta\left(\frac{I\Delta l}{2\lambda r}\right)^2 \mathbf{sin}^2\theta\,\vec{e}_r$$

向外辐射的有功能量——辐射功率$\boldsymbol{P}_{\mathbf{e}}$

$$P_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{S}_{\mathrm{av}} \mathrm{d}\vec{S} = \frac{2\pi}{3}\eta\left(\frac{I\Delta l}{\lambda}\right)^2 \qquad P_e = I^2 R_r$$

表明电磁能量经空间向无限远处辐射；

$$R_r = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 \eta = 80\pi^2 (\frac{\Delta l}{\lambda})^2\ \Omega \qquad \text{为辐射电阻}$$

各类天线的辐射电阻是不同的，$\boldsymbol{R_r}$ 表征了天线辐射能力的强弱，不意味着损耗

动态电磁场与波

- 理想介质中的均匀平面波
  - 基本方程及表达式

波动方程

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0 \qquad \nabla^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{E}_x(z) = \dot{E}_{x0}^{+} e^{-jkz}$$

$$E_x(z,t) = \sqrt{2} E_{x0}^{+} \cos(wt - kz + \varphi^{+})$$

$$\dot{H}_y(z) = \dot{H}_{y0}^{+} e^{-jkz} = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{\eta} e^{-jkz}$$

$$H_y(z,t) = \sqrt{2} H_{x0}^{+} \cos(wt - kz + \varphi^{+})$$

$$= \sqrt{2} E_{x0}^{+} \cos(wt - kz + \varphi^{+}) / \eta$$

动态电磁场与波

- 理想介质中的均匀平面波
  - 参数之间的关系

i 波速，即相位速度 $$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

ii 波阻抗 $$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \Omega$$

iii 波数——每单位长度中相位的变化，或**2π** 米中所含的波长数

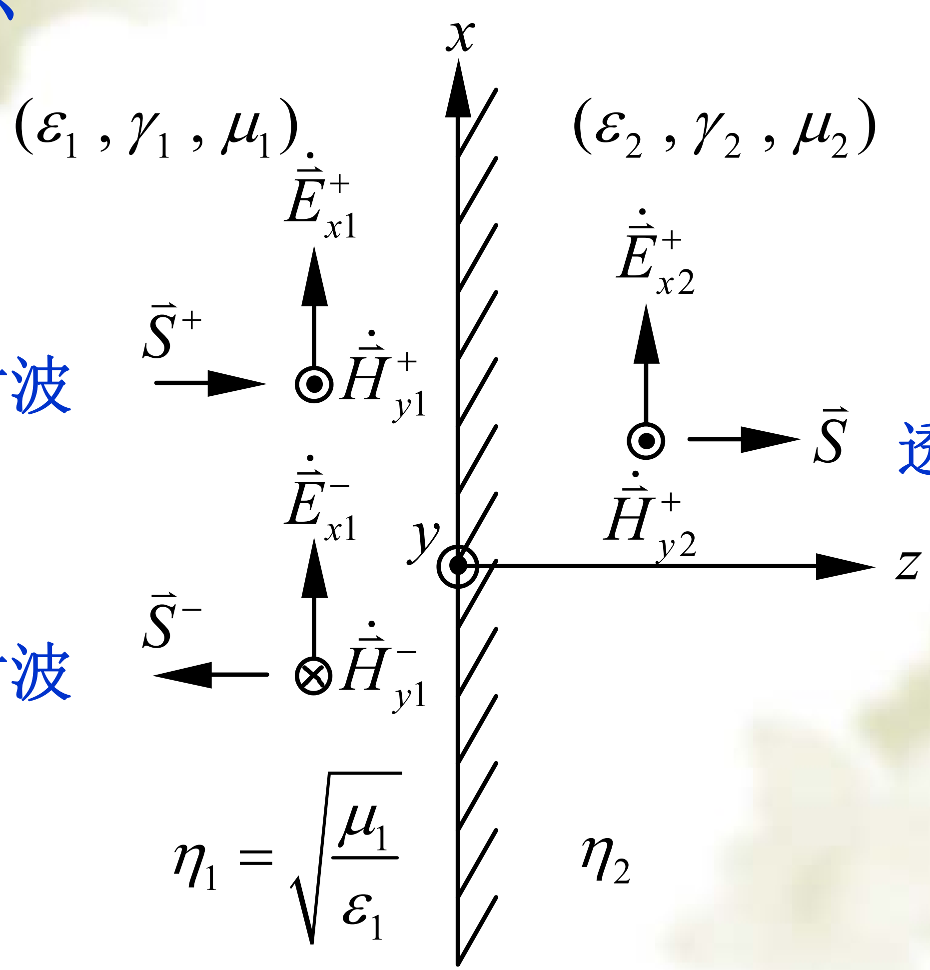
$$k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

iv 波长 $$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \upsilon T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

- 均匀平面波的正入射
  - 图示

入射波

反射波



透射波

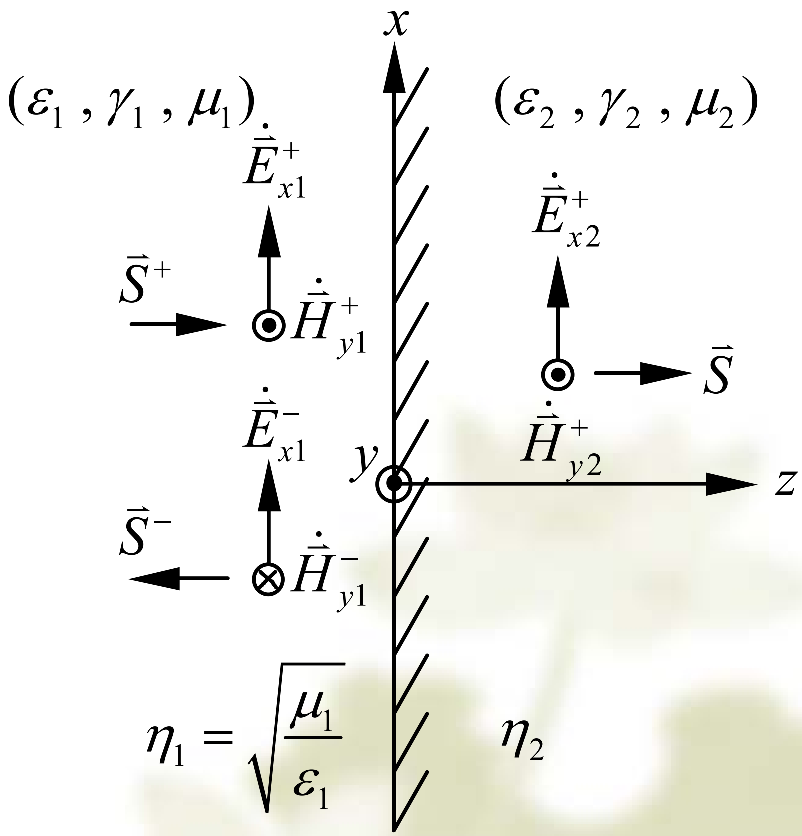
分界面入射波、反射波、透射波分布

动态电磁场与波

- 均匀平面波的正入射
  - 关系式

$$\dot{E}_{10}^{-} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\dot{E}_{10}^{+} = R\dot{E}_{10}^{+}$$

$$\dot{E}_{20} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\dot{E}_{10}^{+} = T\dot{E}_{10}^{+}$$



$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \qquad T = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

反射系数　　　透射系数

透射系数 $\boldsymbol{T = R + 1}$

动态电磁场与波

- 均匀平面波的正入射
  - 全反射（理想介质到理想导体）

$$R=-1$$

$$\dot{E}_x=\dot{E}_{x1}^{+}+\dot{E}_{x1}^{-}=\dot{E}_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz})=-\mathrm{j}2\dot{E}_0\sin kz$$

$$\dot{H}_y=\dot{H}_{y1}^{+}-\dot{H}_{y1}^{-}=\frac{\dot{E}_0}{\eta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz})=\frac{2\dot{E}_0}{\eta}\cos kz$$

导体表面的电流密度 $\vec{K}=\vec{e}_n\times\vec{H}$

理想介质中的波阻抗 $\eta=\dfrac{E_x}{H_y}$

动态电磁场与波

- 均匀平面波的正入射
  - 其他

时域形式⇔相量形式互相转化

准静态电磁场

■ 基本概念

激励源的频率较低时

在动态电磁场中可以忽略变化的磁场对电场的影响(感应电场)（感应电场远小于库仑电场）-电准静态场

或变化的电场对磁场的影响（位移电流远小于传导电流）-磁准静态场

$$\nabla\times\vec{H}=\left.\begin{matrix}\vec{J}_c\\ \vec{J}_V\end{matrix}\right\}+\cancel{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\cancel{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

1. 电准静态场（Electroquasistatic field, EQS）

(1) 电准静态场条件

时变电场由电荷和变化的磁场产生。

$$\nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{感应电场}$$

$$\vec{E}_i << \vec{E}_q$$

感应电场远小于库仑电场时，可忽略 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$，称为电准静态场（**EQS**）

电力传输系统和装置中的高压电场、各种常用电子器件和设备附近的电场，为电准静态场。

(2) EQS基本方程

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{\mathrm{c}}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\cancel{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

$$\longrightarrow$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{\mathrm{c}}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}\approx 0$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

磁场

电场

电准静态场与静态电场相同，也是有源无旋场。两种场的计算方法相同。

电场的计算独立于磁场，而磁场的计算则需考虑变化电场的影响。先计算电场，然后再计算磁场。

(3) 导出关系

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad \Leftarrow \quad \nabla\times\vec{E} \approx 0$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \bullet \vec{J}_{\mathrm{c}} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$ 电荷守恒定律

2. 磁准静态场(Magnetoquasistatic field, MQS)

(1) 磁准静态场(MQS)条件

$$\nabla \times \vec{H} \approx \vec{J}_{\mathrm{c}}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} << \vec{J}_{C}$$

位移电流远小于传导电流，可忽略 $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}$，

称为磁准静态场（**MQS**）。

运行于低频（工频）下的各类电磁装置中的磁场问题、涡流问题为磁准静态场。如变压器、电机、电磁测量仪表等。

(2) 基本方程

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} \approx \vec{J}_c$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \qquad \nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho \qquad \nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

磁场

电场

与恒定磁场相同，磁准静态场也是有旋无源场。两种场的计算方法相同。

磁场的计算独立于电场，电场的计算需考虑变化磁场的影响。先计算磁场，然后再计算电场。

（3）导出关系

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

传导电流连续 $\nabla \bullet \vec{J}_c = 0$

3. 低频或高频交变电流（时变场）的工况

当 $J_c = \gamma E >> J_D = \omega D = \omega\varepsilon E$

$\gamma >> \omega\varepsilon$ ——良导体条件

此时可以忽略位移电流的作用– **MQS场**

这类**MQS**问题的特点：

导体内传导电流的磁场所激励的感应电场与传导电流的电场相比，不能忽略。导致场量主要分布于导体表面的现象—趋（集）肤效应 **(Skin Effect)**。

正弦稳态下，电磁场扩散方程的相量形式(复数形式) 为：

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma\dot{\vec{E}} = p^2\dot{\vec{E}}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma\dot{\vec{H}} = p^2\dot{\vec{H}}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\dot{E}_y(x) = \dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{d}(1+\mathrm{j})x} = \dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{x}{d}}$$

$$\dot{J}_y(x) = \gamma\dot{E}_y = \dot{J}_y(0)\mathrm{e}^{-px} = \dot{J}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{x}{d}}$$

$$\dot{H}_z(x) = \dot{H}_z(0)\mathrm{e}^{-px} = \dot{H}_z(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{x}{d}}$$

工程上，为表征电的趋肤效应，即沿导体纵深方向场量衰减的特征，定义

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

透入深度

考试相关：

2016年7月3日 10:30-12:30   紫金港东2-203

考试答疑：

6月23日（上午1、2节，西2-203）

7月2日下午 （东3－304）

Attentions：

考试闭卷，可带计算器

矢量一定要写矢量符号

复习


Good
Luck