第2章　静态场—镜像法

- 电轴法 (广义镜像法)
- 点电荷~ 无限大介质平面系统的电场
- 点电荷 ~ 导体球 (球面镜像法）

2.6.2 电轴~无限大接地导电平面系统的电场—结论

■ 等位线

在*xoy*平面内，等位线轨迹是一族偏心圆

半径a，圆心至原点的距离h，线电荷至原点的距离b，关系为：

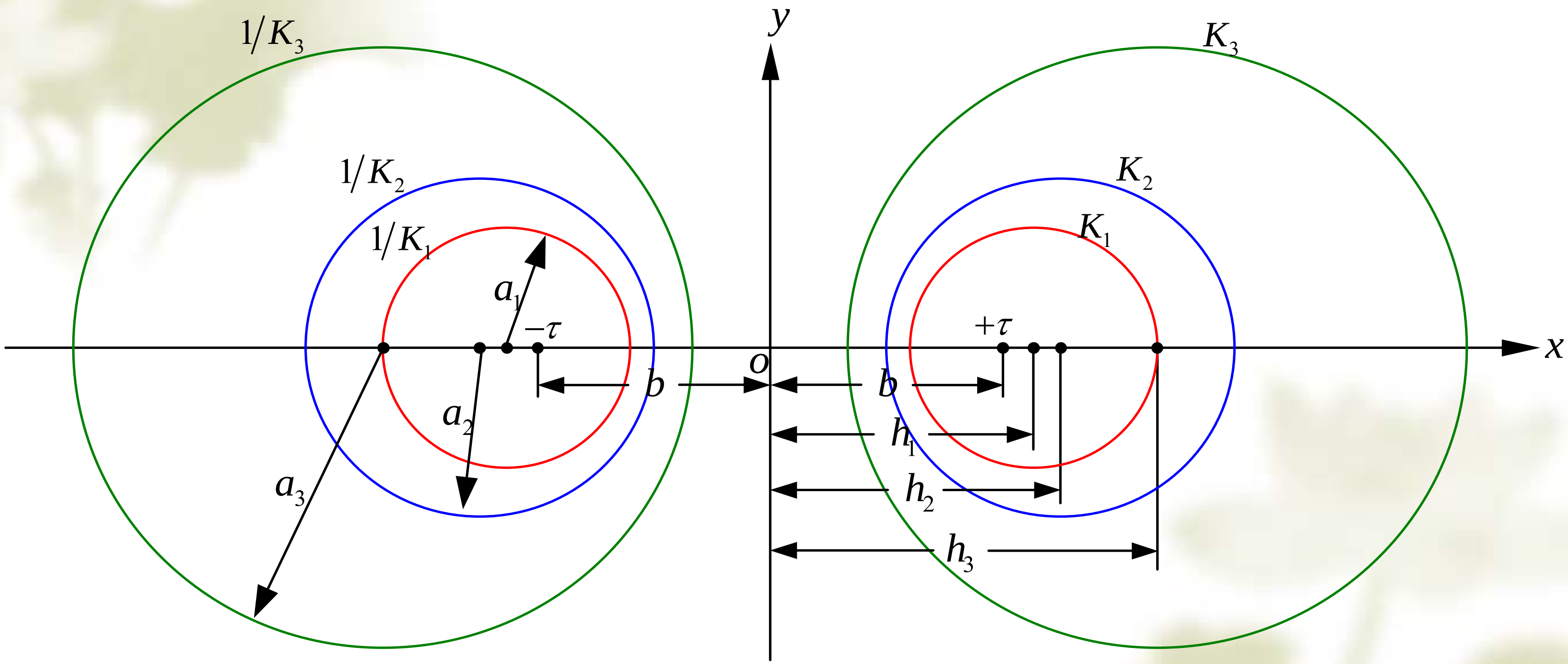
$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore a^2 = h^2 - b^2 = (h + b)(h - b)$$

■ 等位线-图示

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore\ a^2 = h^2 - b^2 = (h + b)(h - b)$$



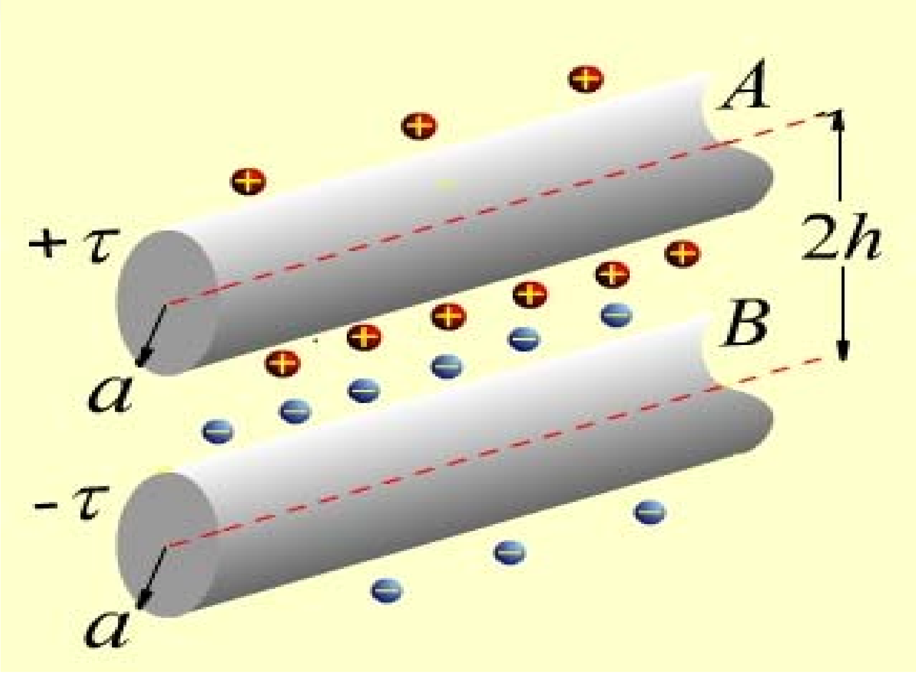
即 $(\pm\tau)$ 电轴位置对每个等位圆的圆心来说，互为反演点。

- 启示
  - 如果一静电场的等位线为一族偏心圆，其电场的计算问题，可考虑等效为一对正负电轴产生的电场
  - 电轴的位置则由上面的*a*,*b*,*h*关系式确定
  - 由于共有*a*,*b*,*h*三个参数，因此至少给出2个等位圆，才能确定电轴的位置。
  - 按已知2个等位圆的不同，可得不同的等效计算模型。

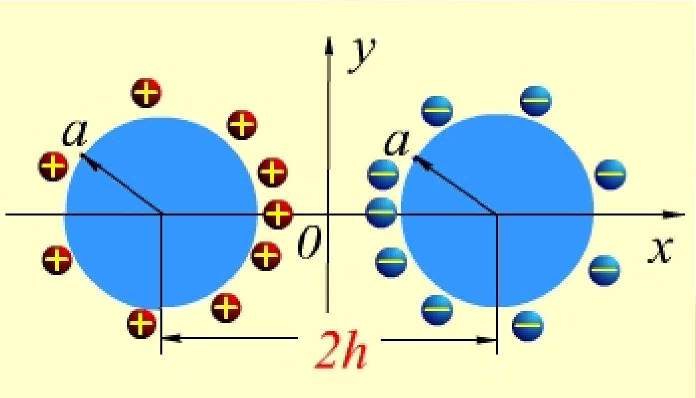
2.6.3 电轴法

1. 同半径的两线输电线电场

半径为*a* 的两输电线分别带有等量异号的线电荷（±τ），计算其产生的电场。



长直平行双传输线



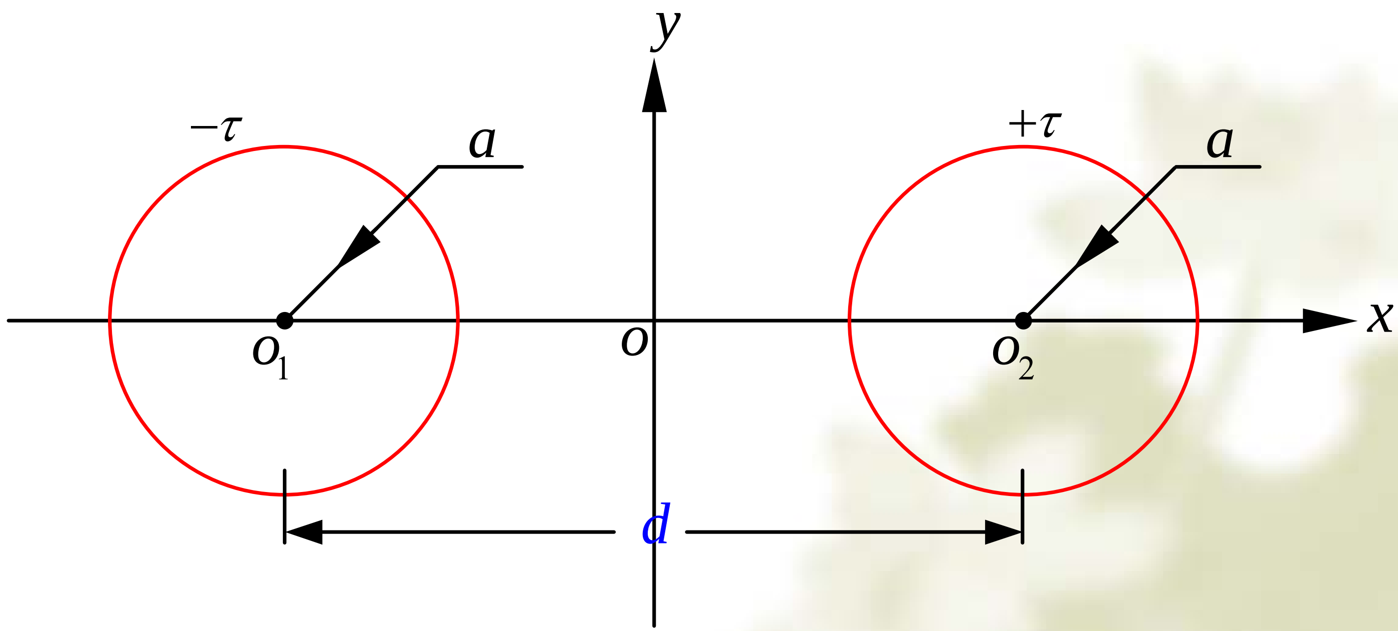
- 分析

输电线是导体，导体为等位体、导体表面为等位面

在*xoy*平面，两导体的圆表面迹线为等位线

等位线为同半径的两个偏心圆

可用一对电轴模型计算原场的分布



■ 电轴法模型　　关键：确定电轴位置

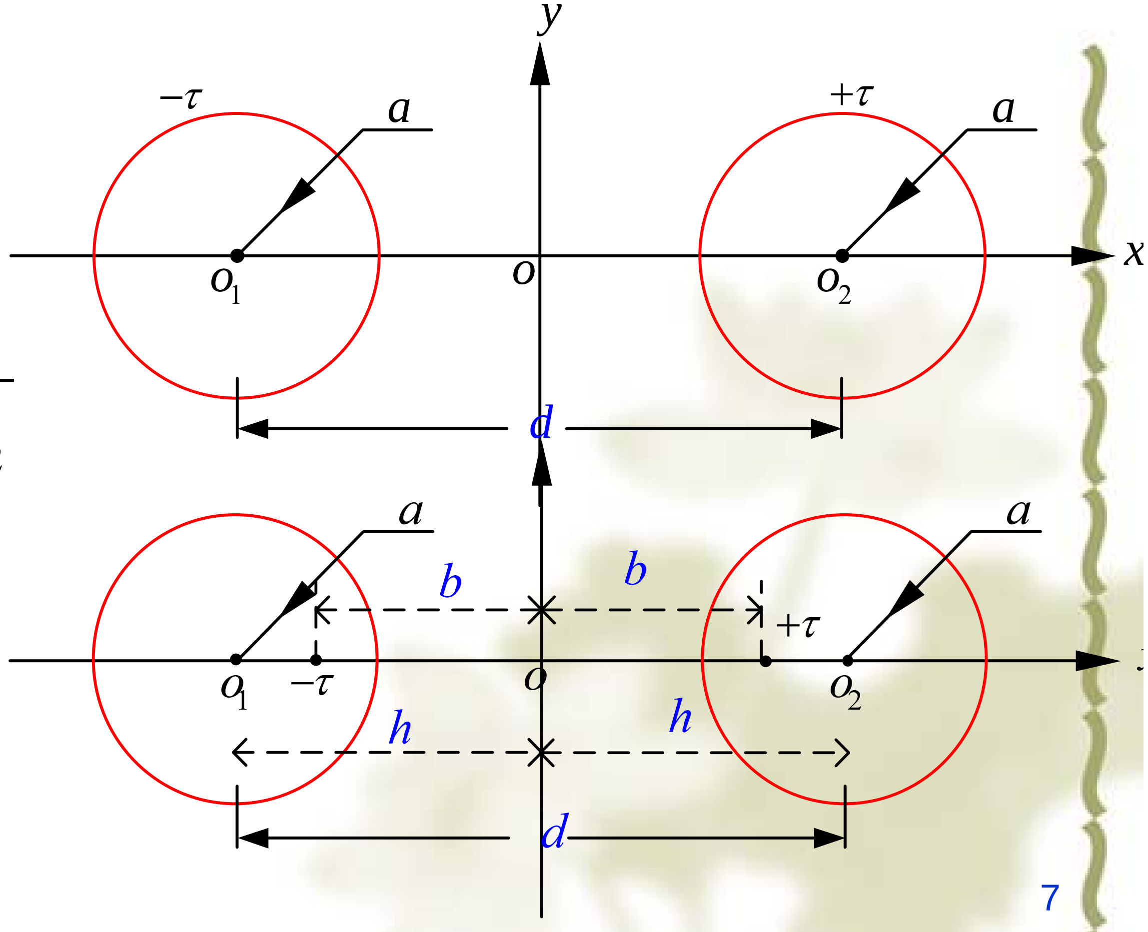
已知等位圆半径***a***, 等位圆圆心之间的距离***d***,

确定线电荷（电轴）至原点的距离***b***和***y***轴的位置变量***h***。

$$h = \frac{d}{2}$$

$$b = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2}$$

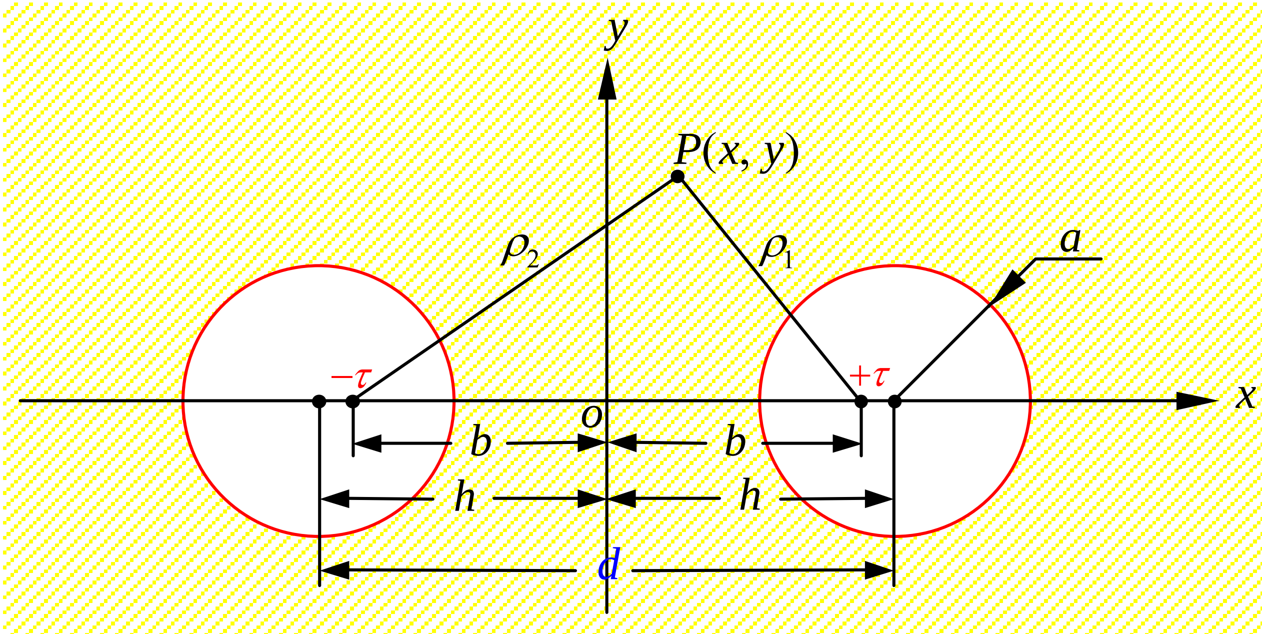
？适用区域



适用区域

哪个区域没有引入电荷==适用于那个区域

不包含同半径两导体的所有区域

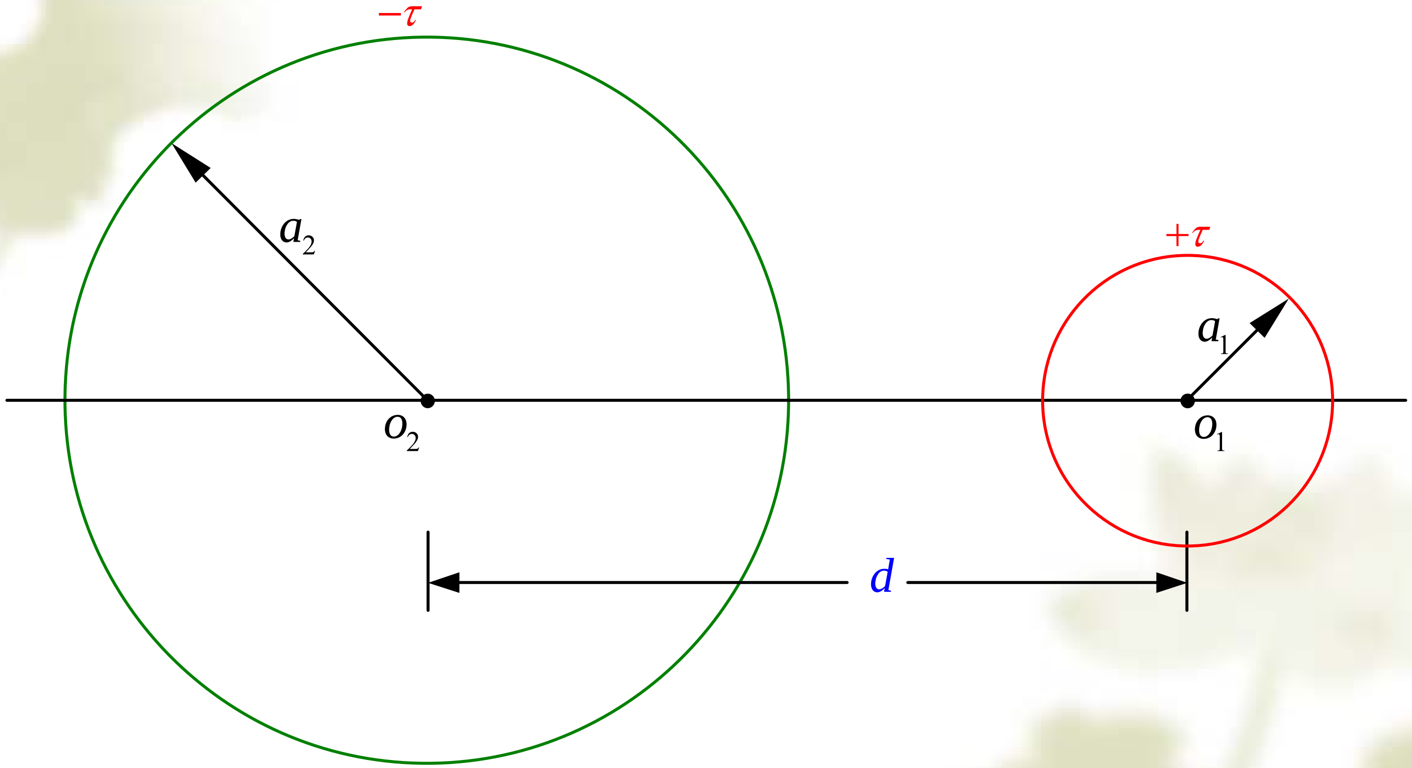


任意点电位

$$\varphi_P = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

电轴 $\pm\tau$ 的位置 $b = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2}$

2. 两个不同半径的两线输电线电场



- 电轴法模型

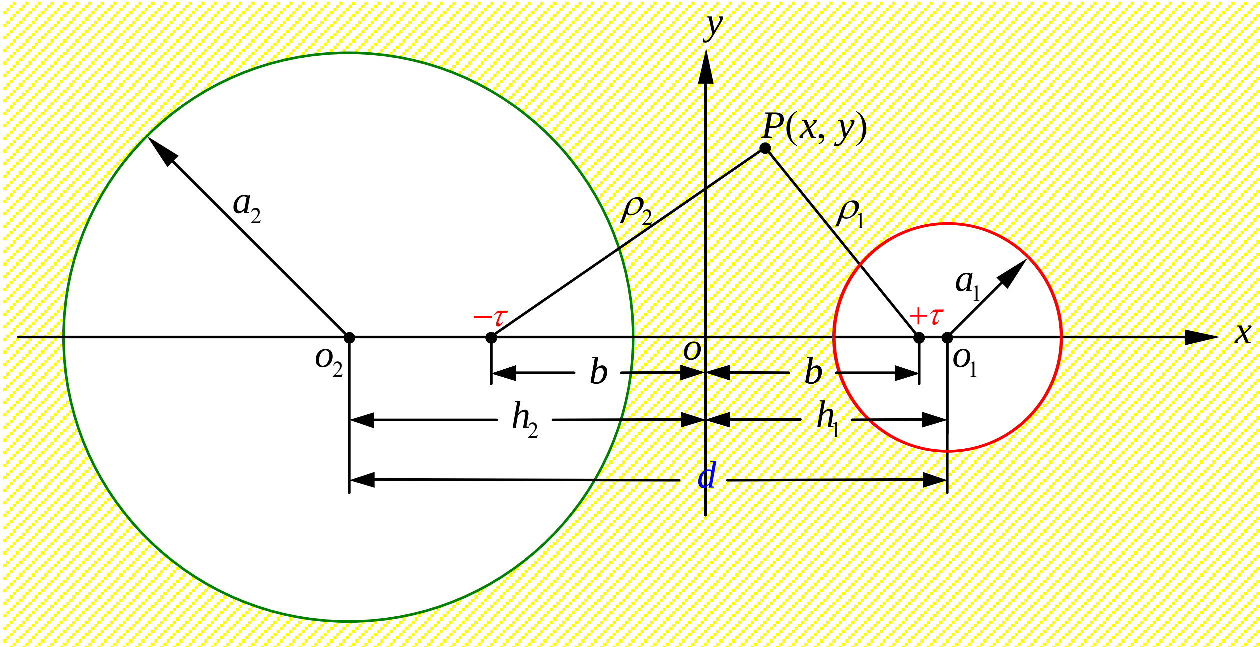
关键：确定电轴位置

■ 已知条件

两等位圆半径 $\boldsymbol{a_1}$ 、$\boldsymbol{a_2}$，及其圆心间的距离 $\boldsymbol{d}$

■ 待求量

两圆心与原点的距离$\boldsymbol{h_1}$ 、$\boldsymbol{h_2}$、线电荷与原点的距离 $\boldsymbol{b}$



■ 已知与待求量的关系

$$h^2 = a^2 + b^2$$

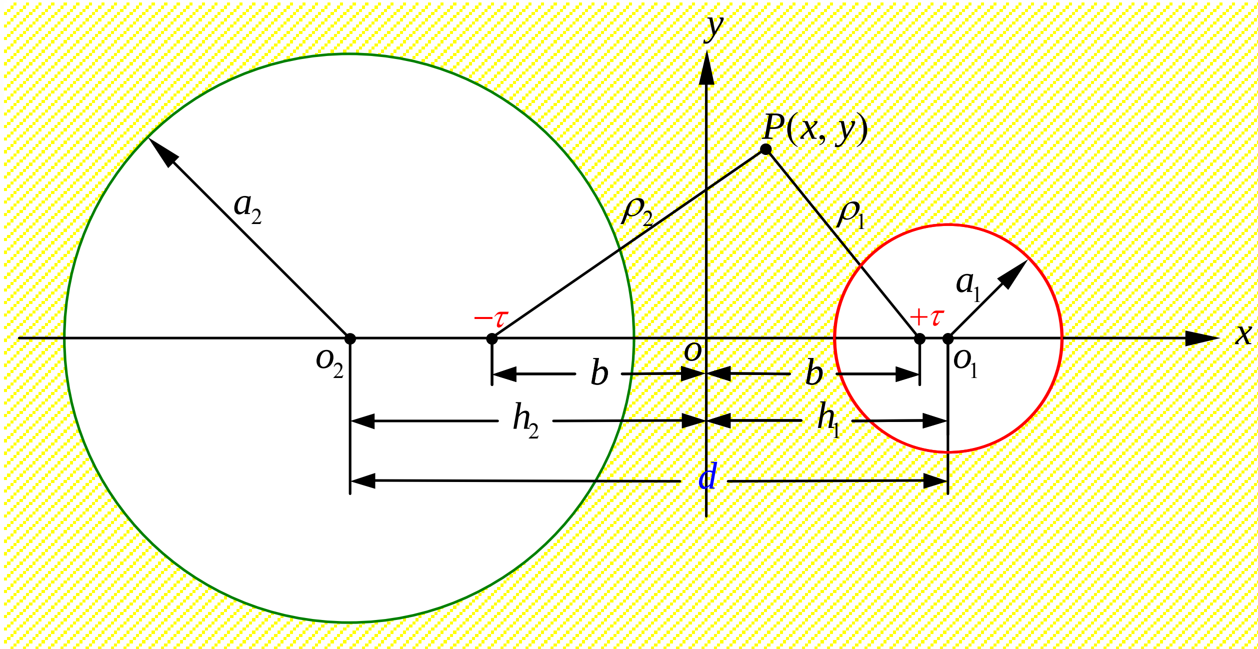
$$b^2 = h_1^{\ 2} - a_1^{\ 2}$$

$$b^2 = h_2^{\ 2} - a_2^{\ 2}$$

$$d = h_1 + h_2$$

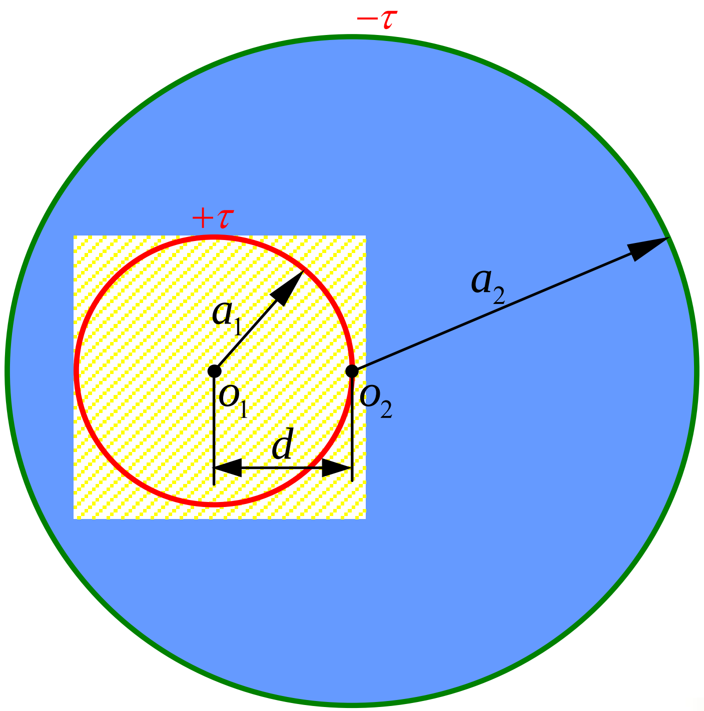
$$h_1 = \frac{d^2 + a_1^{\ 2} - a_2^{\ 2}}{2d}$$

$$h_2 = \frac{d^2 + a_2^{\ 2} - a_1^{\ 2}}{2d}$$



适用区域 :不包含不同半径两导体内区域

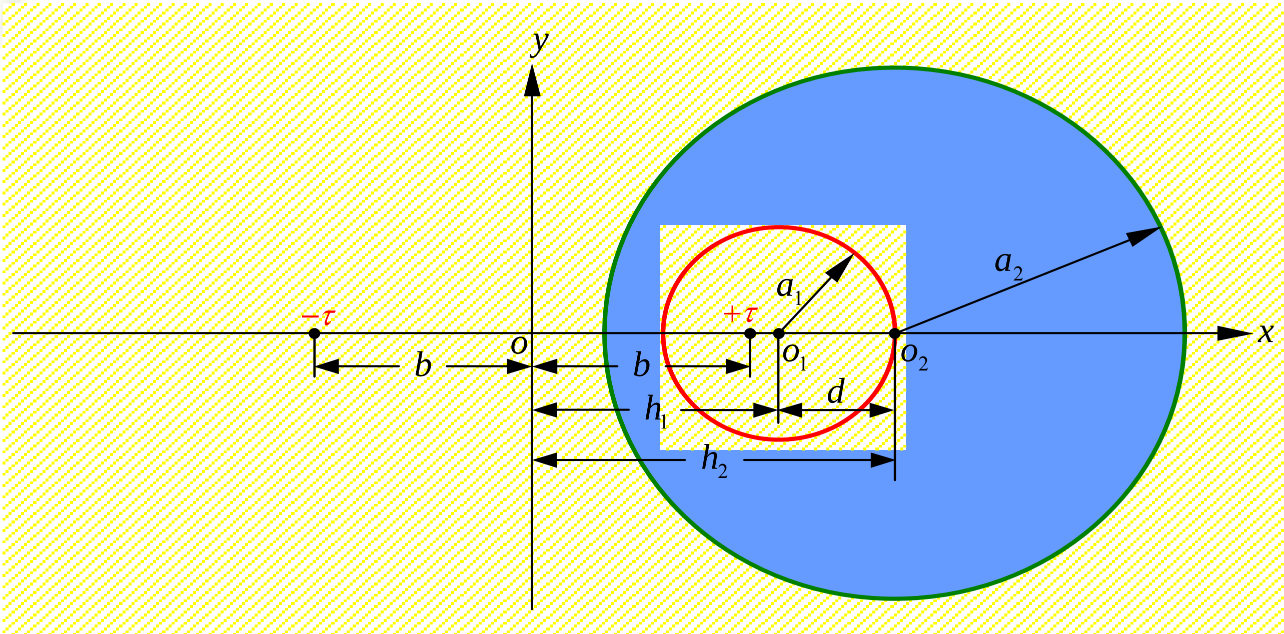
3. 偏心电缆的电场



■ 分析

仍可应用电轴法。显然，此时：$d = h_2 - h_1$

其他等同于两个不同半径的两线输电线条件 $h^2 = a^2 + b^2$



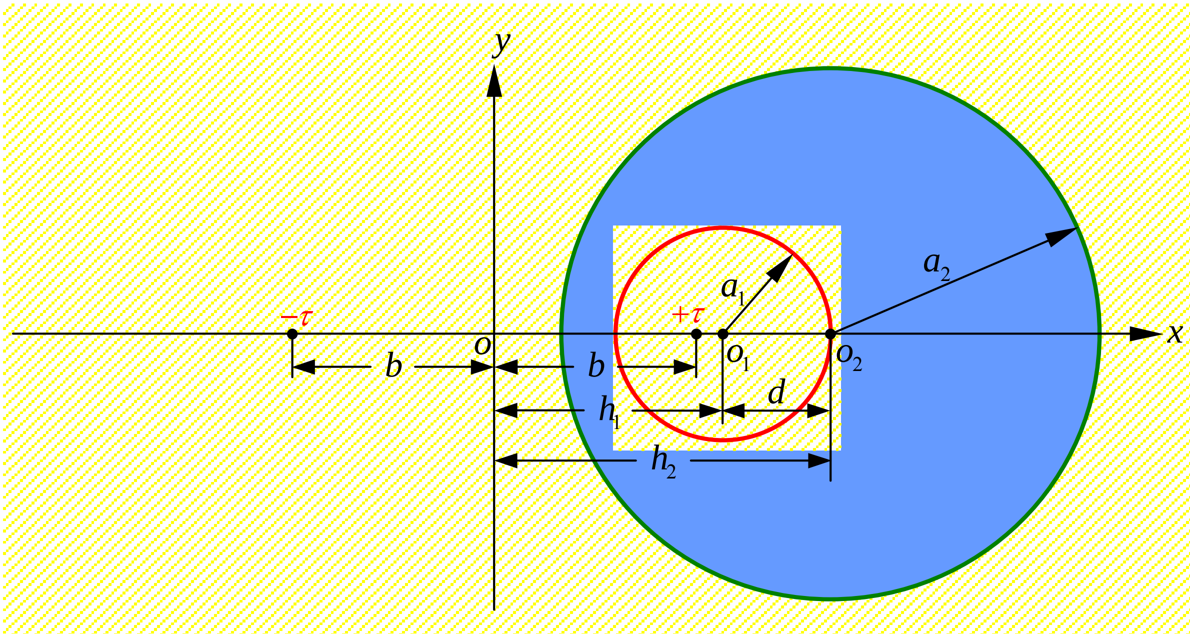
■ 镜像法模型

$$d = h_2 - h_1$$

$$h_1 = -\frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d}$$

$$h_2 = \frac{d^2 + a_2^2 - a_1^2}{2d}$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - a_1^2} = \sqrt{h_2^2 - a_2^2}$$



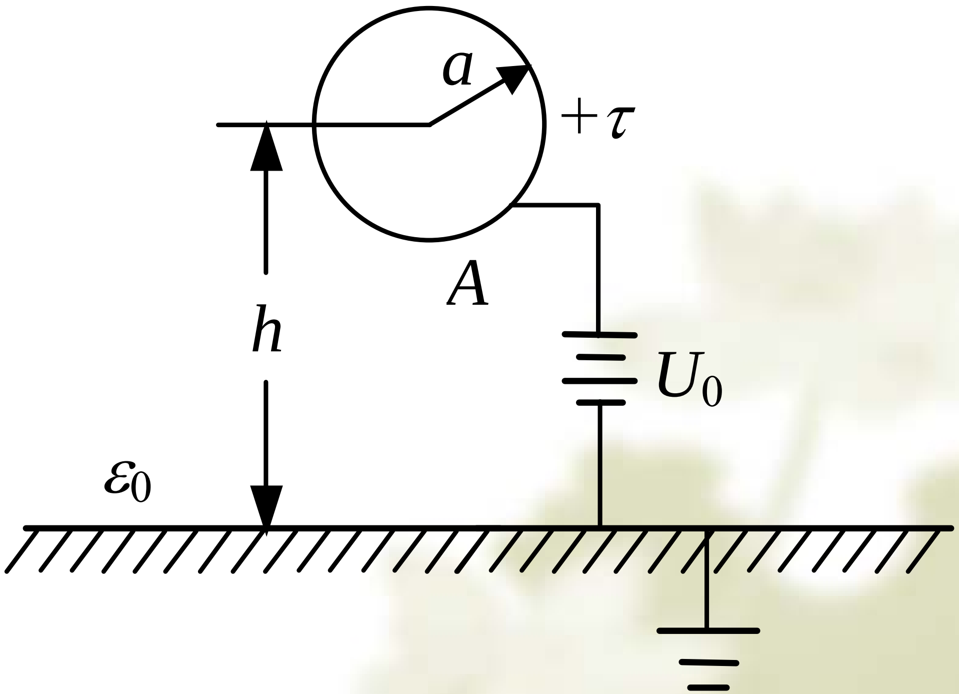
适用区域：仅适用于未引入电荷的区域：内外导体间的区域(图中蓝色部分)

- 例：一半径为a的传输线平行于地面，架设高度为h,对地电位差为U_0,试求：(1)大地上方传输线的电位；(2)系统中最大场强的位置及数值；(3)传输线对地的感应电荷分布；(4) 传输线对地电容(单位长度)。（书P94 例2-15）

分析：此问题为

“2.6.2 电轴~无限大接地导电平面系统的电场”

的典型问题

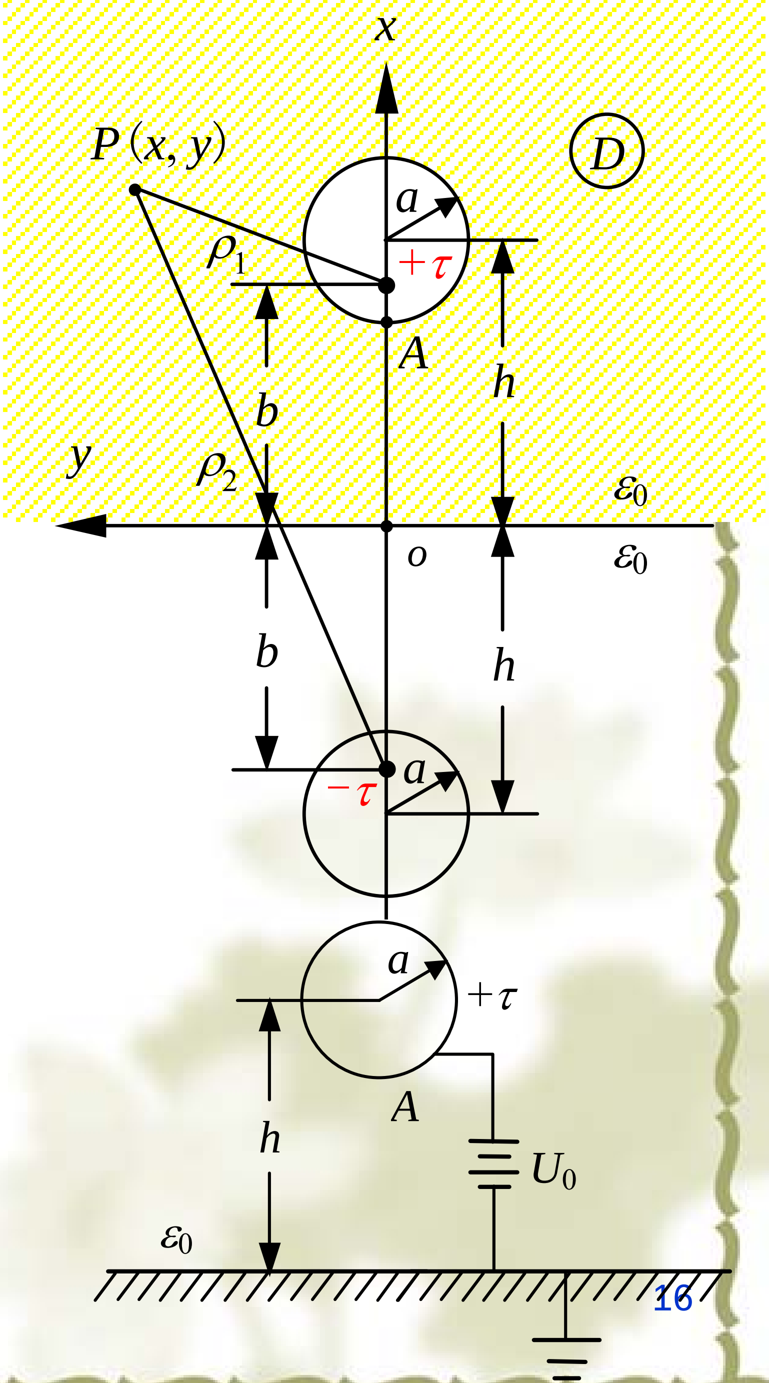


解：电轴法模型

$$b=\sqrt{h^2-a^2}$$

（1）任一点处的电位

$$\varphi_P=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\left[(x+b)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(x-b)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$



已知的是传输线的电压：

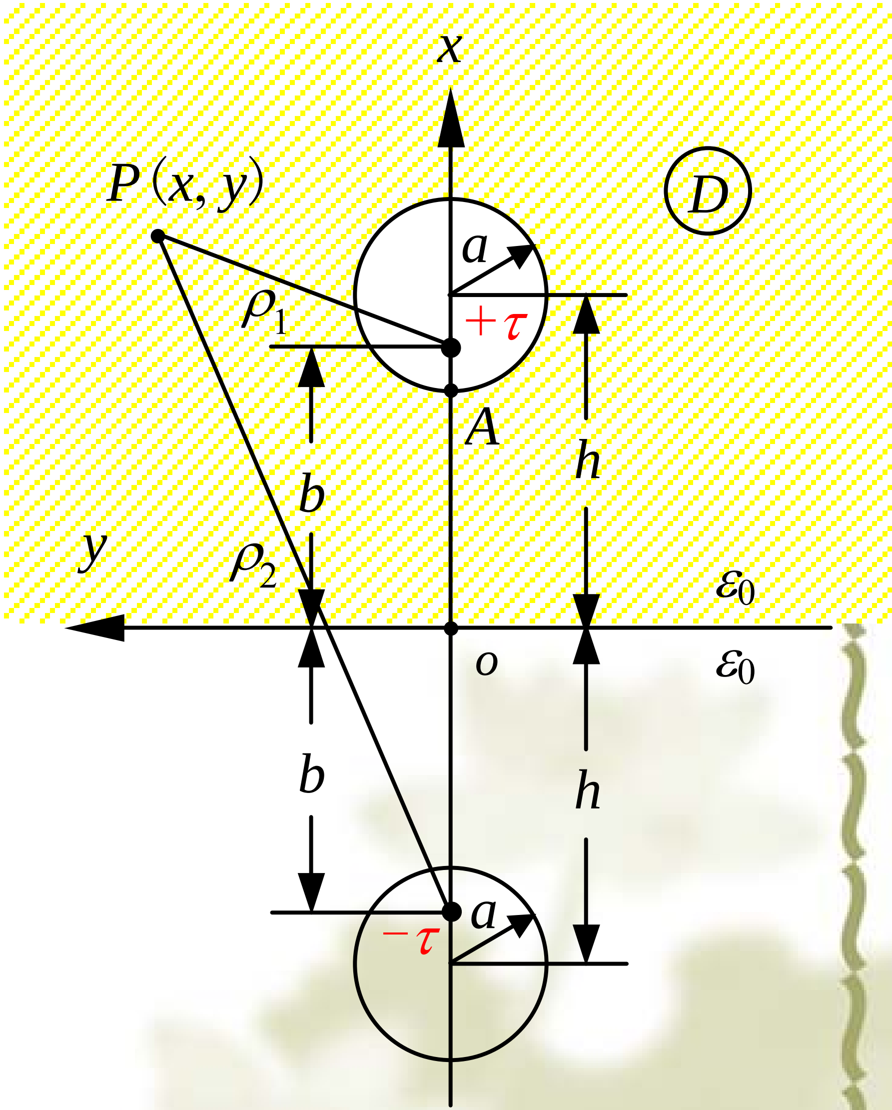
上式电荷密度换成电压

$$\varphi_A=U_0$$

$$U_0 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b+h-a}{a-(h-b)}$$

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_0 U_0}{\ln \dfrac{b+h-a}{a-(h-b)}}$$

$$\varphi_P = \frac{U_0}{\ln \dfrac{b+h-a}{a-(h-b)}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$



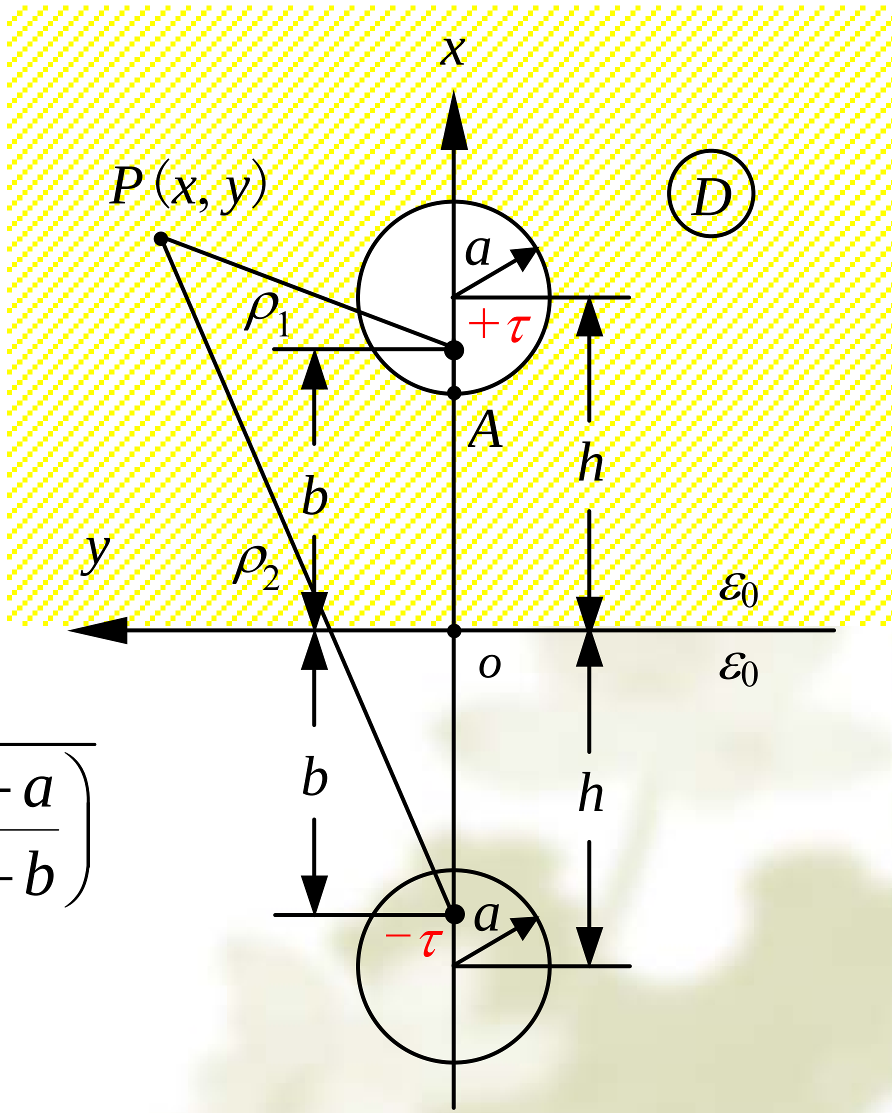
（2） $E_{\max}$

$$\left|\vec{E}_A\right| = E_{\max}$$

$$= \left|-\nabla\varphi\right|_{A\left(\substack{x=h-a \\ y=0}\right)}$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{A\left(\substack{x=h-a \\ y=0}\right)}$$

$$= \frac{2bU_0}{\left[(h-a)^2 - b^2\right]\ln\left(\dfrac{b+h-a}{a-h+b}\right)}$$

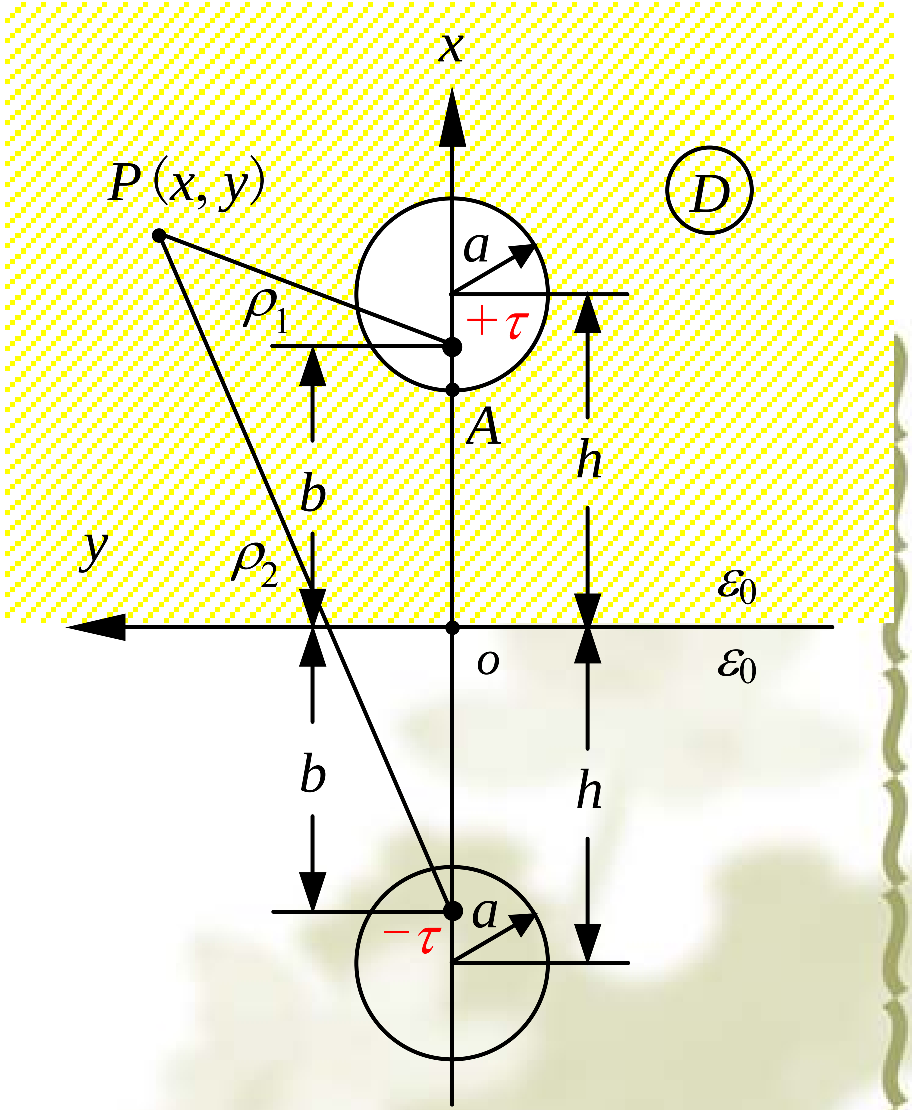


(3) 地面上的感应电荷分布

$$\sigma = D_{\mathrm{n}} = \varepsilon_0 E_{\mathrm{n}}$$

$$= \varepsilon_0 E_x = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=0}$$

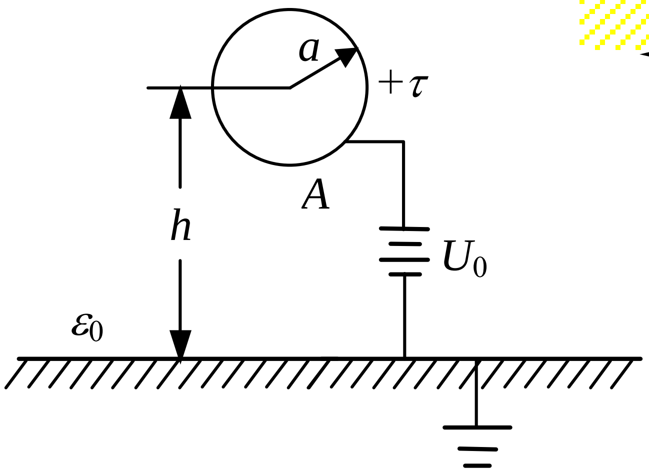
$$= -\frac{b\tau}{\pi(y^2 + b^2)}$$

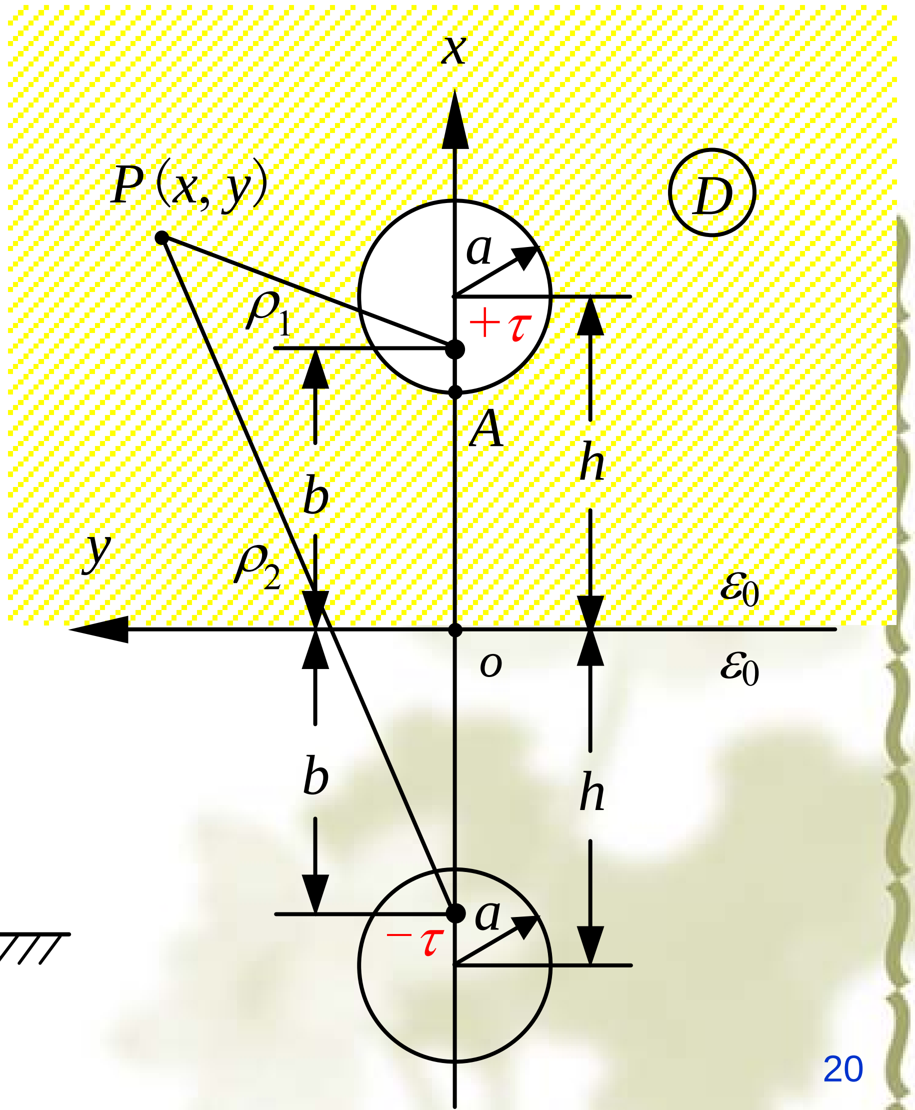


(4) 传输线对地电容—单位长度

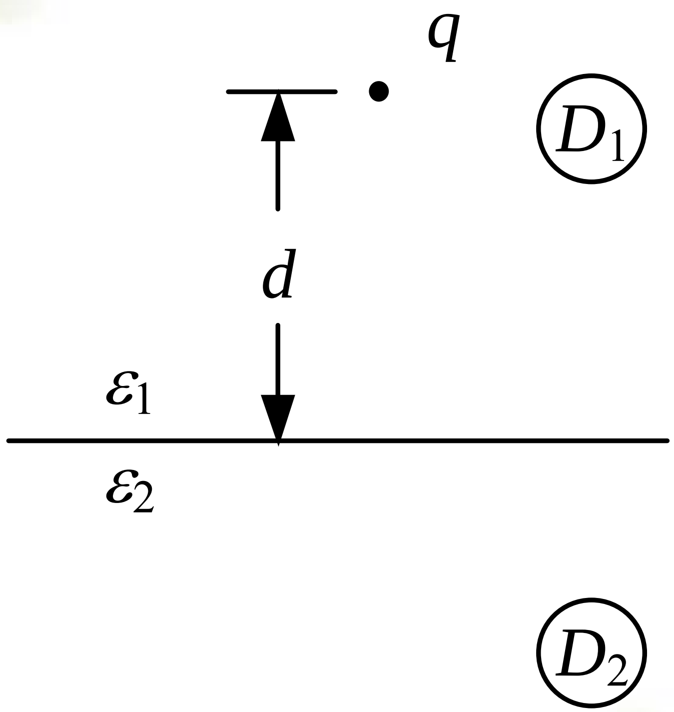
$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_0 U_0}{\ln\dfrac{b+h-a}{a-(h-b)}}$$

$$C_0 = \frac{\tau}{U_0} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{b+h-a}{a-(h-b)}}$$





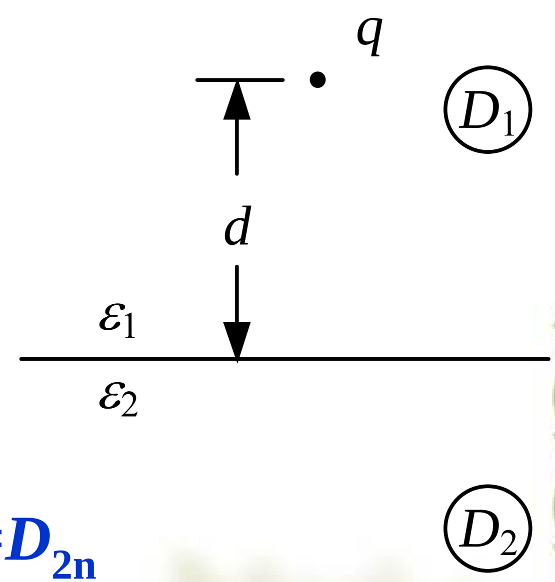
2.6.4 点电荷~无限大介质平面系统的电场



分析

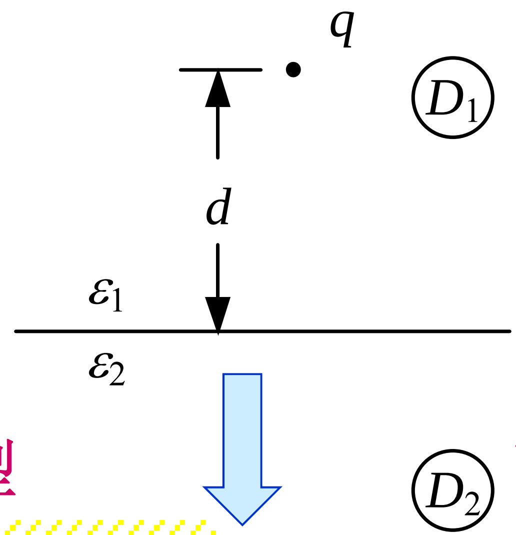
边值问题

- $\boldsymbol{\varepsilon_1}$中，除去$\boldsymbol{q}$所在点外，满足$\nabla^2\boldsymbol{\varphi_1}= 0$
- $\boldsymbol{\varepsilon_2}$中，满足$\nabla^2\boldsymbol{\varphi_2}= 0$
- 在$\boldsymbol{\varepsilon_1}$、$\boldsymbol{\varepsilon_2}$分界面上，满足$\boldsymbol{E_{1t}=E_{2t}}$，$\boldsymbol{D_{1n}=D_{2n}}$

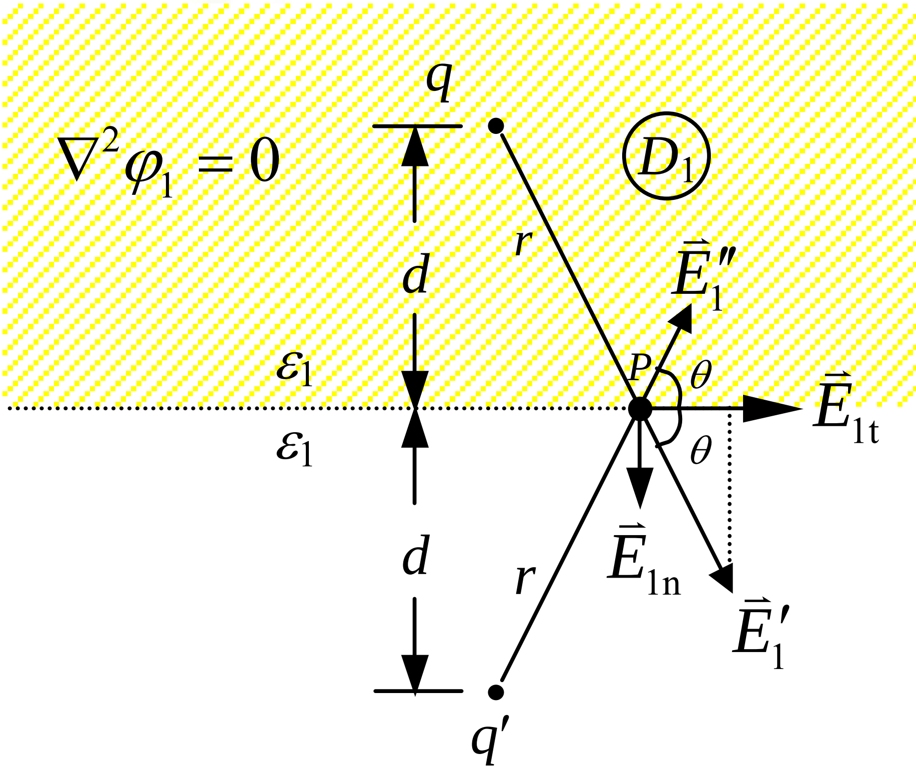


$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

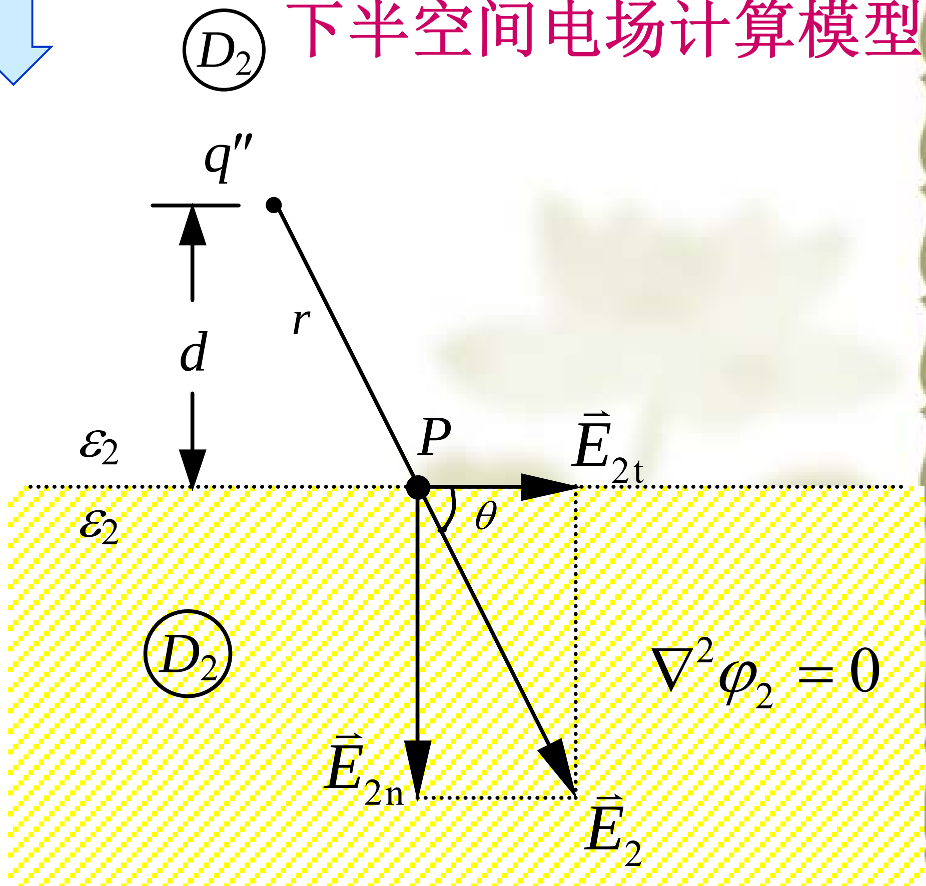
镜像法模型



上半空间电场计算模型



下半空间电场计算模型



为了求解上半空间的场可用镜像电荷 ***q'*** 等效边界上束缚电荷的作用，将整个空间变为介电常数为ε_1 的均匀空间。对于下半空间，可用位于原点电荷处的***q"***等效原来的点电荷 q 与边界上束缚电荷的共同作用，将整个空间变为介电常数为ε_2 的均匀空间。

所求得的场必须符合原先的边界条件，即

在分界面上$E_{1t}=E_{2t}$

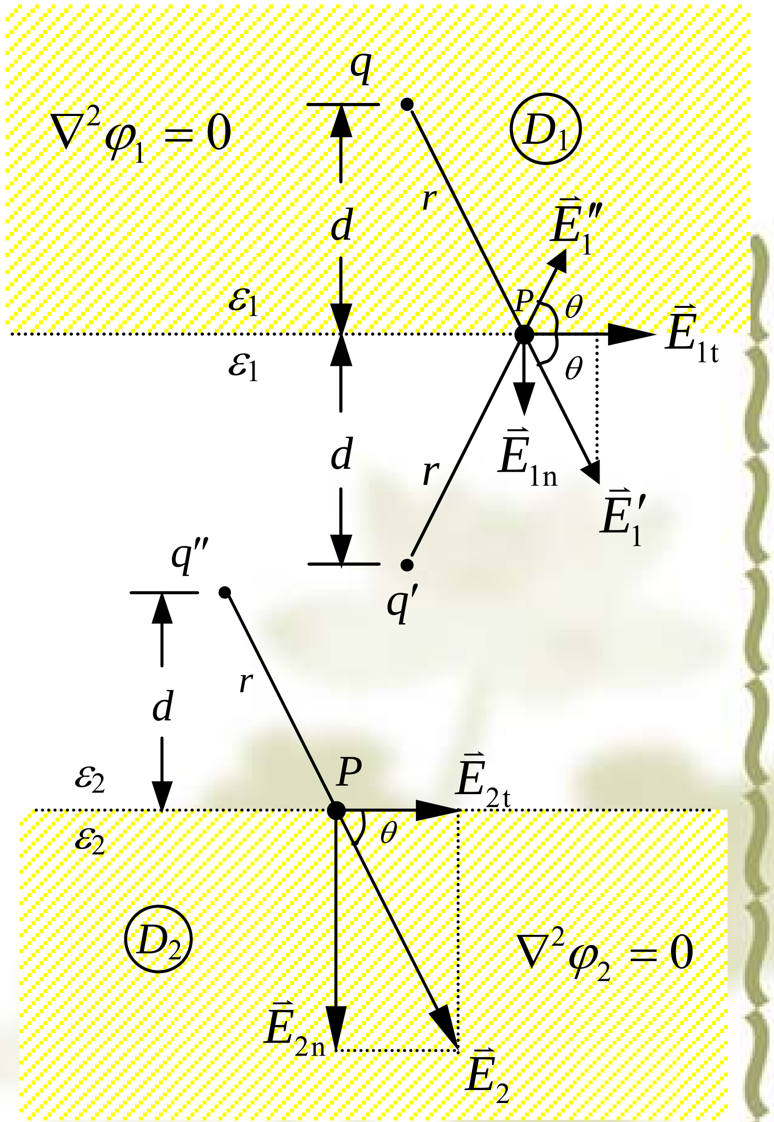
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta=\frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\cos\theta$$

在分界面上$D_{1n}=D_{2n}$

$$\frac{q}{4\pi r^2}\sin\theta-\frac{q'}{4\pi r^2}\sin\theta=\frac{q''}{4\pi r^2}\sin\theta$$

$$\Rightarrow$$

$$q'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \qquad q''=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q$$



■ 说明:

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \qquad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q = q + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$

I. q'反映了计算 ε_1内电场时，分界面上束缚电荷的效应。q'可正可负。

II. q''反映原来的点电荷 q 与边界上束缚电荷在ε_2的共同作用。令$q''= q+q_0$，则q_0反映在计算ε_2内电场时，分界面上束缚电荷的效应

$$q_0 = -q'$$

计算电荷受力时，电荷所在处的场不包括电荷本身产生的场。

思考

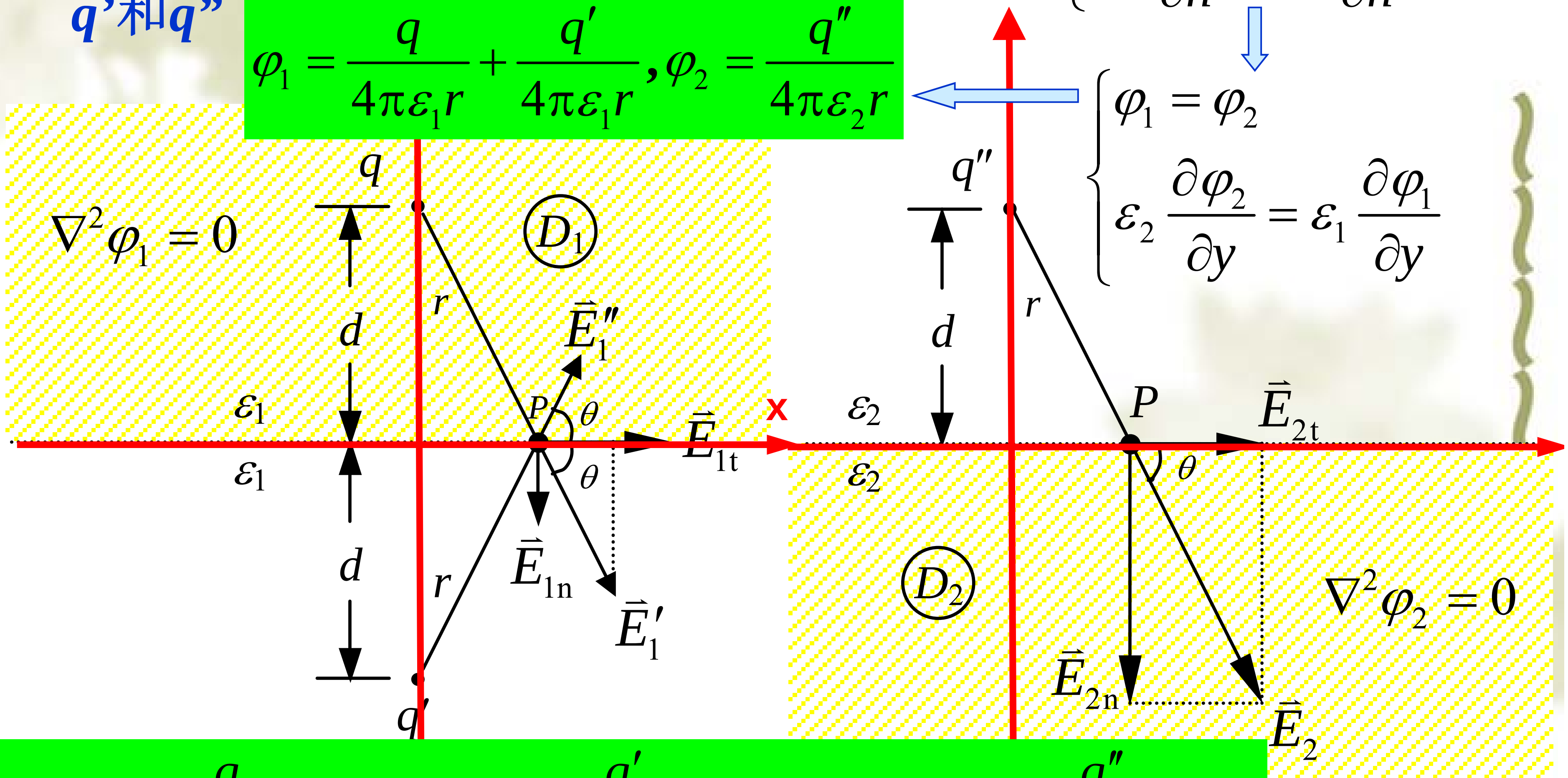
若用φ的边界条件，如何求出q'和q''

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}=\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\end{cases}$$

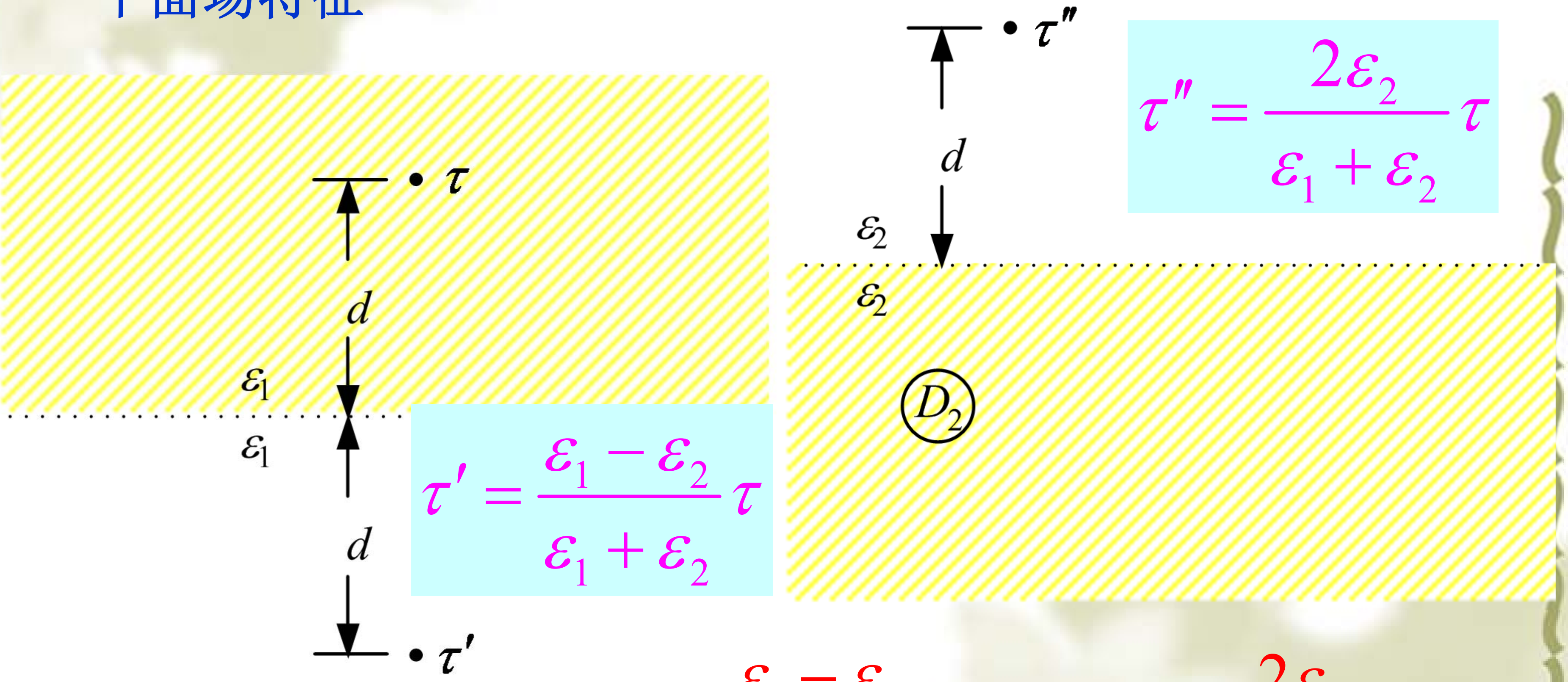
$$\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r},\varphi_2=\frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r}$$



$$\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r(x^2+(-y)^2)^{\frac{1}{2}}},\varphi_2=\frac{q''}{4\pi\varepsilon_2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

推广

线电荷τ~无限大介质平面系统的电场，此时的场分布呈行平面场特征



$$\tau' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau$$

$$\tau'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau$$

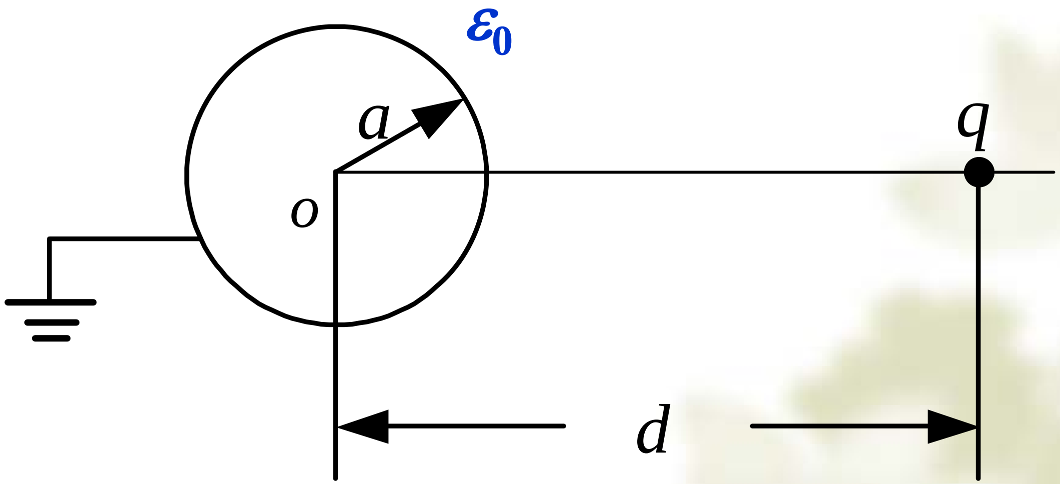
$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}q \qquad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}q$$

2.6.5 点电荷 ~ 导体球 （球面镜像法）

1. 基本问题——导体球接地

■ 例：

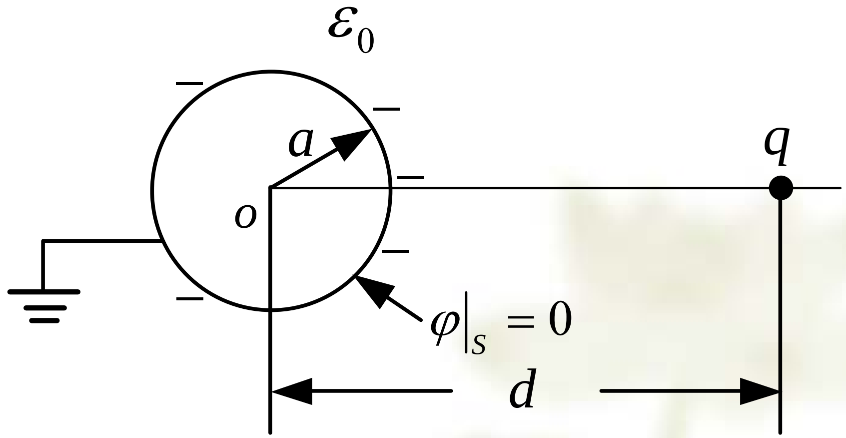
置于均匀电介质ε_0中半径为a的接地金属球附近有一点电荷q，点电荷离球心的距离为d。计算导体球空间外的电场。



■边值问题

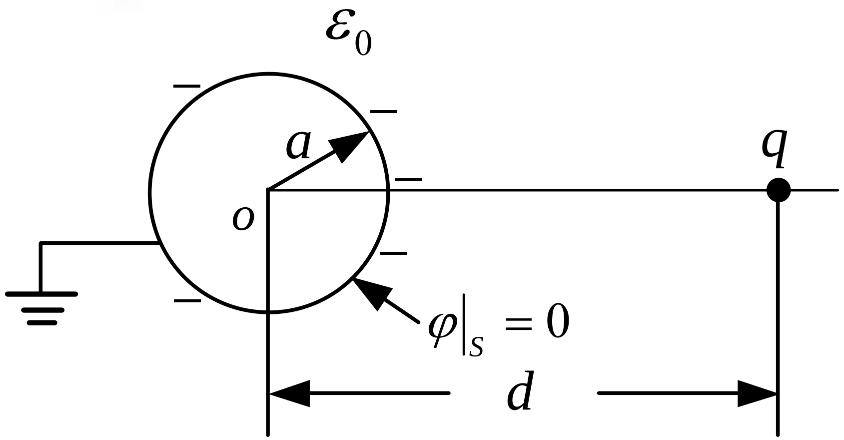
$\nabla^2 \varphi = 0$ （除点电荷q所在的点外）

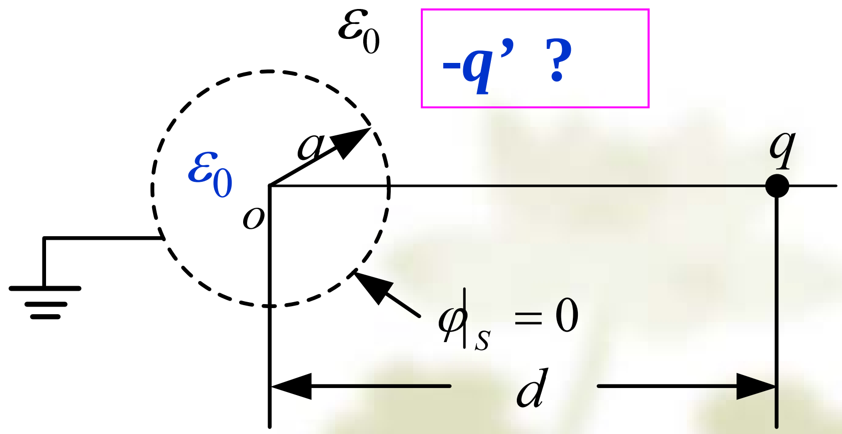
$\varphi|_{球面} = 0$ （接地）



■ 处理--应用镜像法

- 将导体球撤出，全部充以ε_0的电介质
- 导体表面的感应面电荷用集中电荷$-q'$代替（大小、极性同）

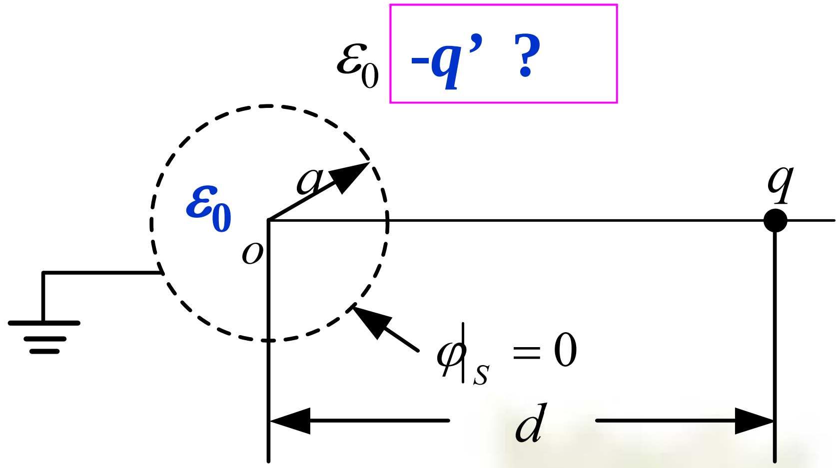




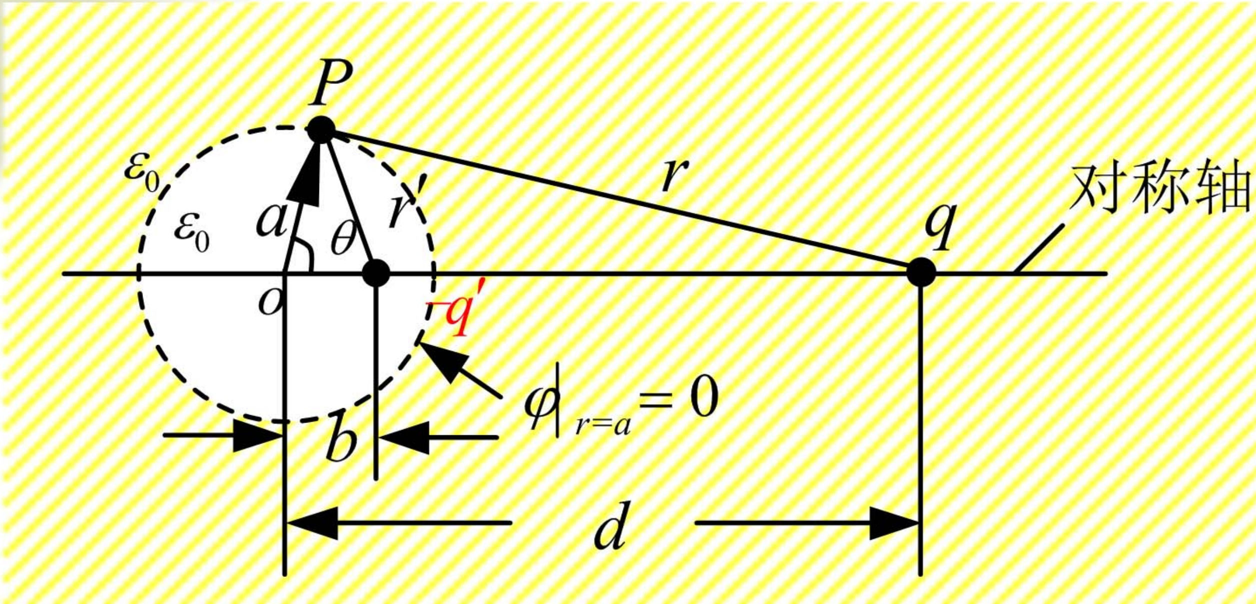
■ 定性确定镜像电荷的位置

轴对称场

镜像电荷一定位于对称轴（球心和点电荷连线）上



■ 镜像法模型

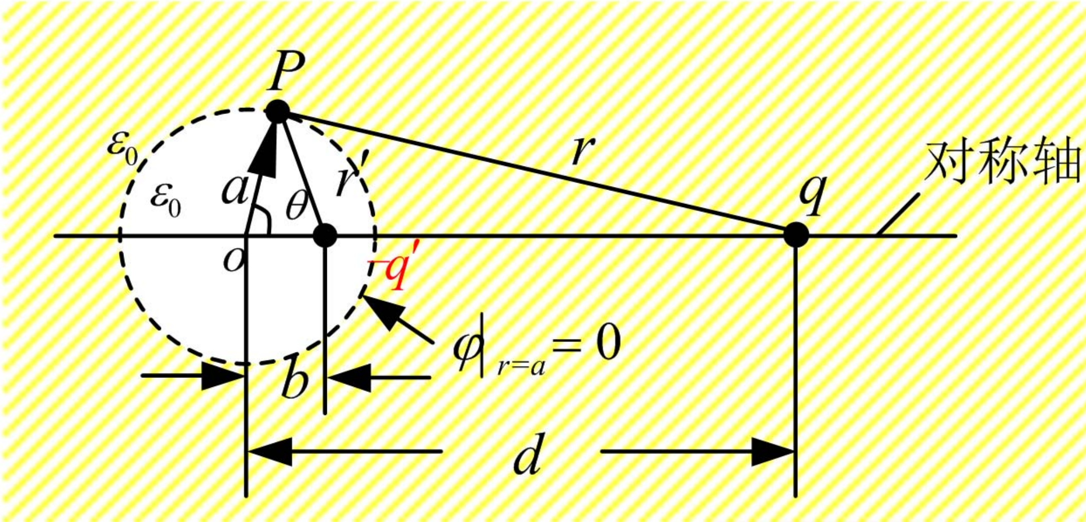


■ 确定镜像电荷的具体位置和电量

$$\varphi|_{\text{球面}}=0$$

$$\varphi_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'}=0$$

$$\frac{q}{q'}=\frac{r}{r'}$$



$$\frac{q^2}{q'^2}=\frac{r^2}{r'^2}\overset{\text{余弦定理}}{=\!=\!=\!=}\frac{a^2+d^2-2ad\cos\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

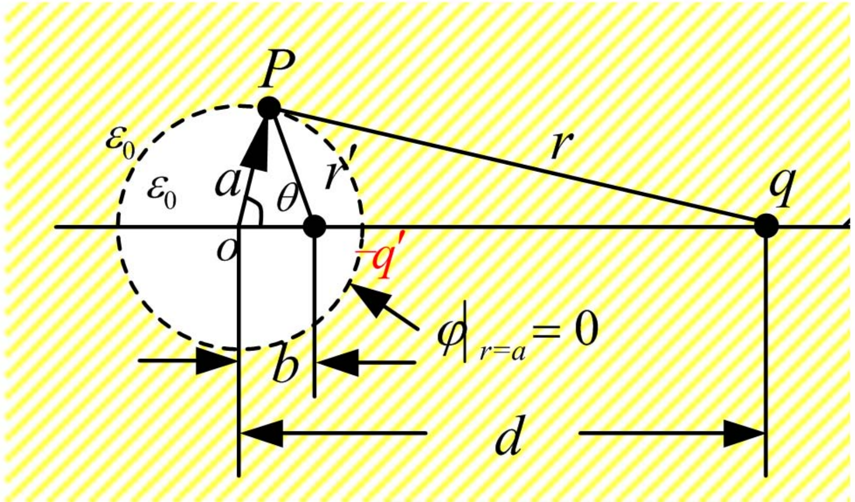
$$[q^2(a^2+b^2)-q'^2(a^2+d^2)]+2a(q'^2d-q^2b)\cos\theta=0$$

$$\left[q^2(a^2+b^2)-q'^2(a^2+d^2)\right]+2a(q'^2d-q^2b)\cos\theta=0$$

$$q^2\left(a^2+b^2\right)-q'^2\left(a^2+d^2\right)=0$$

$$q'^2d-q^2b=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b=\dfrac{a^2}{d} & \text{镜像电荷位置} \\ q'=\dfrac{a}{d}q & \text{镜像电荷大小} \end{cases}$$



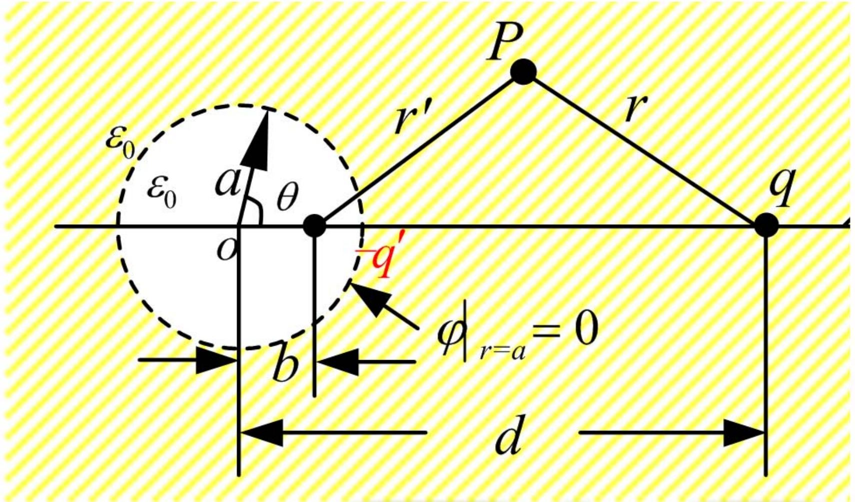
注意适用区域：仅适用于未引入电荷的区域

■ 计算场中电位分布

$$\varphi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{a}{dr'}\right)$$

$$\vec{E}_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r - \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 d r'^2}\vec{e}_{r'}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}\vec{e}_r - \frac{a}{dr'^2}\vec{e}_{r'}\right)$$



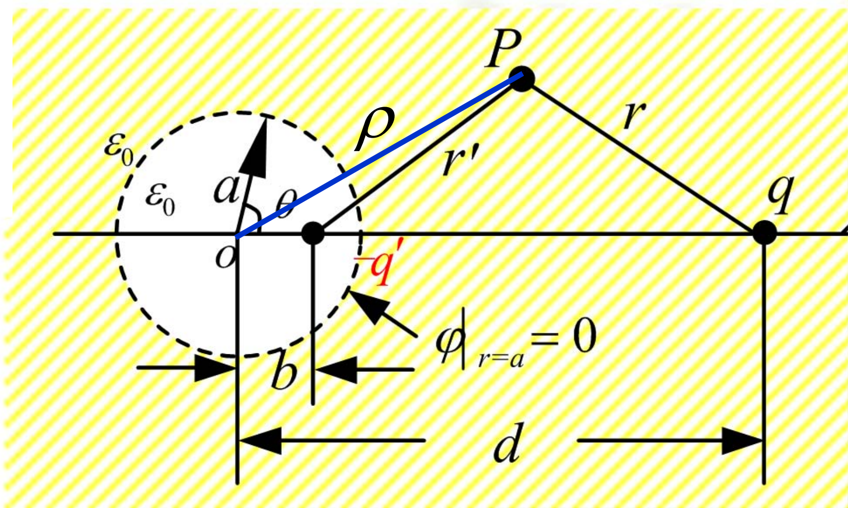
■ 导体球上电荷面密度分布

$$\varphi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{a}{dr'}\right)$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{\mathrm{n}}\Big|_{\rho=a} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_P}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a}$$

$$= -\varepsilon_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\left(\rho^2 - 2\rho d\cos\theta + d^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{d\left(\rho^2 - 2\rho b\cos\theta + b^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_{\rho=a}$$

$$= -\frac{q}{4\pi a}\cdot\frac{d^2 - a^2}{\left(d^2 - 2ad\cos\theta + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$



$$\theta = 0, \quad |\sigma|_{\max}$$

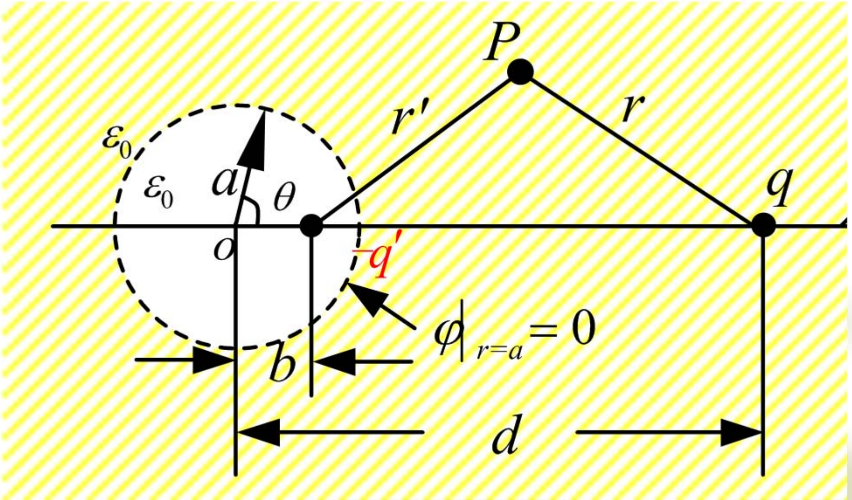
$$\theta = \pi, \quad |\sigma|_{\min}$$

■ 导体球上感应电荷总量

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{\mathrm{n}}\Big|_{\rho=a} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_P}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = -\frac{q}{4\pi a}\cdot\frac{d^2-a^2}{\left(d^2-2ad\cos\theta+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_S \sigma \mathrm{d}S = \cdots\cdots$$

$$= -\frac{a}{d}q = -q'$$

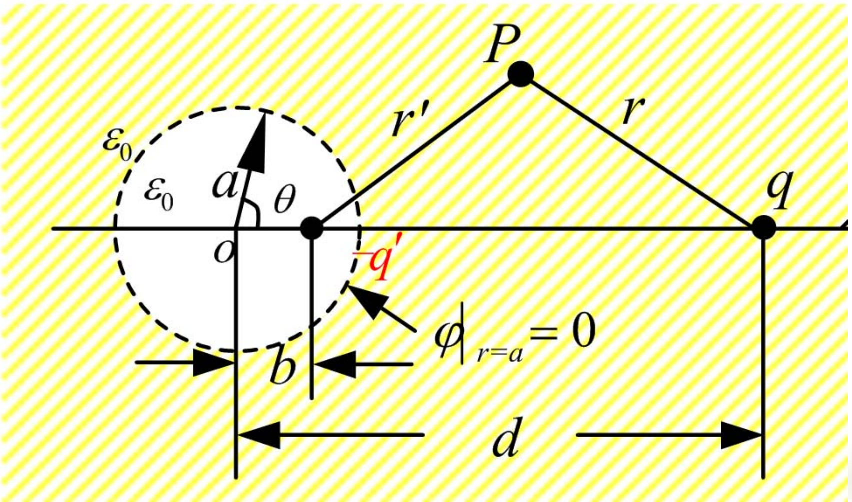


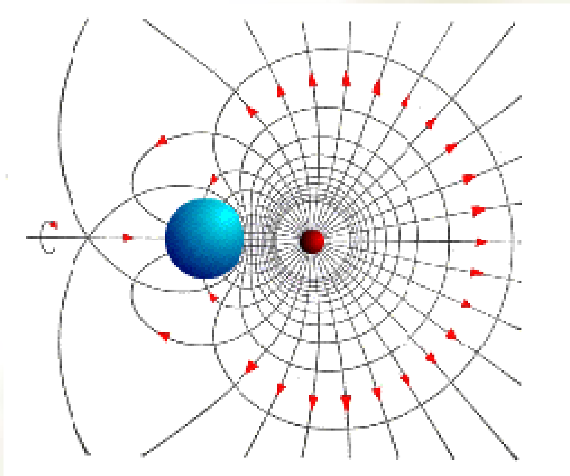
■ 说明:

$$b=\frac{a^2}{d} \qquad q'=\frac{a}{d}q$$

- 导体球上的感应电荷总量等于镜像电荷 $-q'$. $-q'<q$
- q' 和 q 的位置对球心 o 来说，互为反演点，$a^2=bd$
- 当导体球 → 平板时，即 a，$d\to\infty$ 时， $a=d$， $q'=q$

与无限大导板上方放置一点电荷结论一致

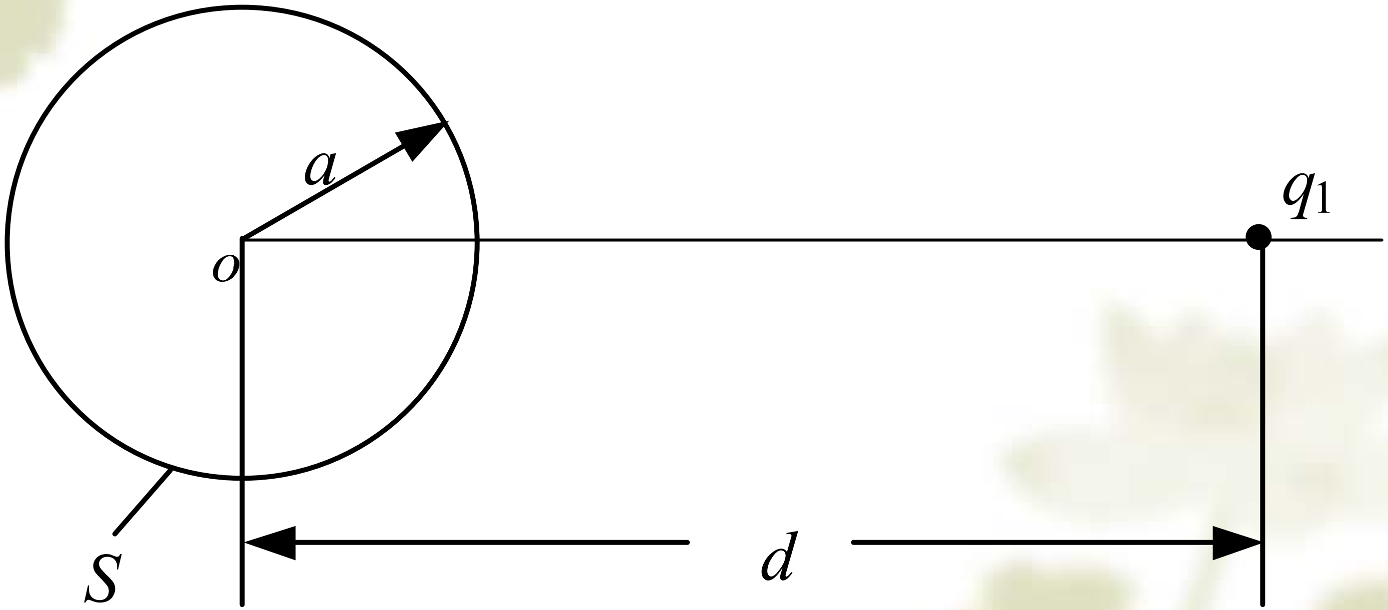




球外的电场分布

2. 导体球不接地，且呈电中性

例：



分析

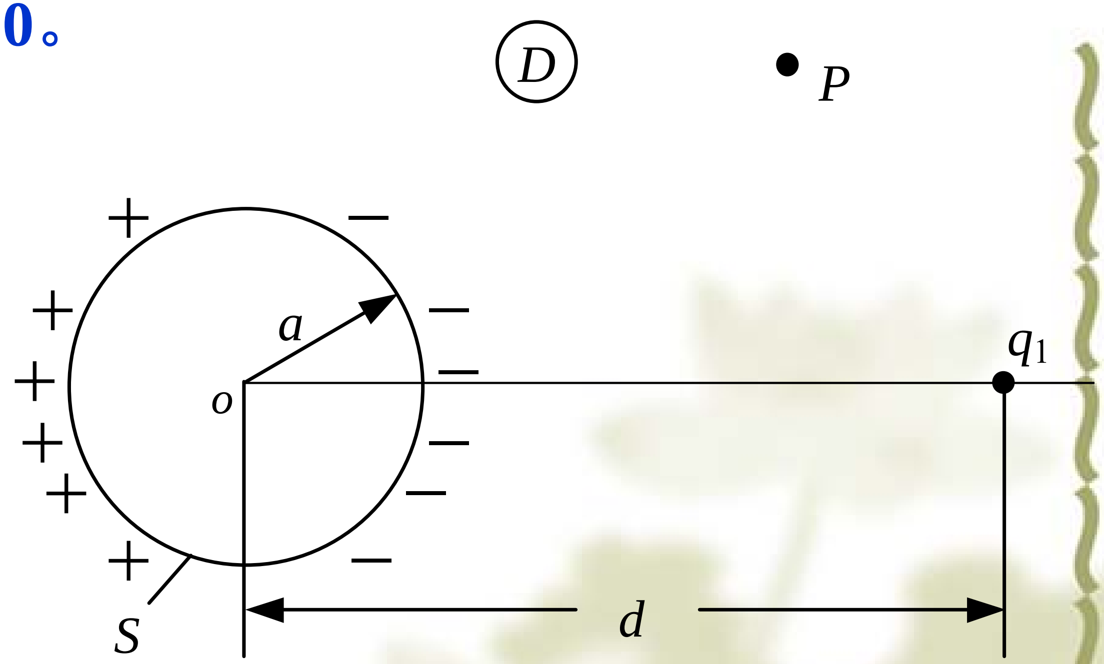
导体球面对点电荷的面上感生与原电荷极性相反的电荷，背对点电荷的面上感生与原电荷极性相同的电荷，导体球正负感应电荷总量为**0**。

边值问题

$$\nabla^2\varphi = 0$$

(除点电荷外空间)

$$\begin{cases} \varphi\big|_S = \text{const} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ \oint_S \vec{D}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = q = 0 \end{cases}$$



■ 边值问题

$$\begin{cases} \varphi|_S = \text{const} \\ \oint\limits_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = q = 0 \end{cases}$$

分解为2个问题的叠加

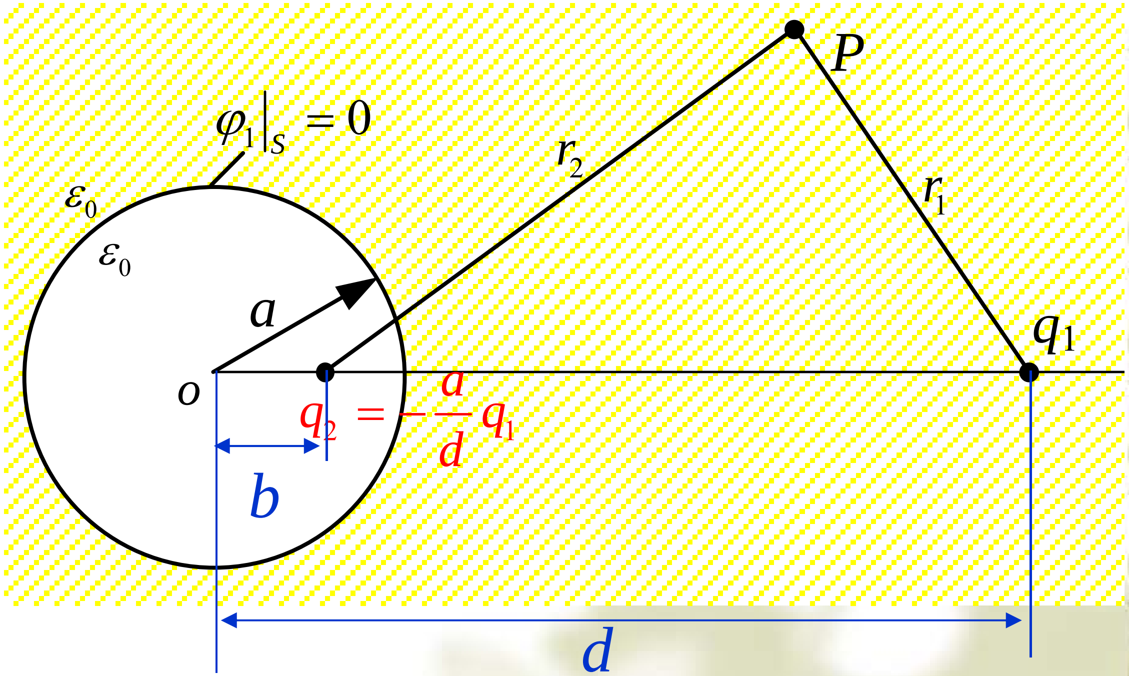
$$(1)\begin{cases} \varphi|_S = \text{const=0} \\ \oint\limits_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = -q' \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \varphi|_S = C \\ \oint\limits_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = q' \end{cases}$$

■ 问题（1）的镜像法模型

$$(1)\begin{cases}\varphi\big|_S = \text{const}=0\\ \oint_S \vec{D}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = -q' = q_2\end{cases}$$

$$q_2 = -\frac{a}{d}q_1$$

$$b = \frac{a^2}{d}$$

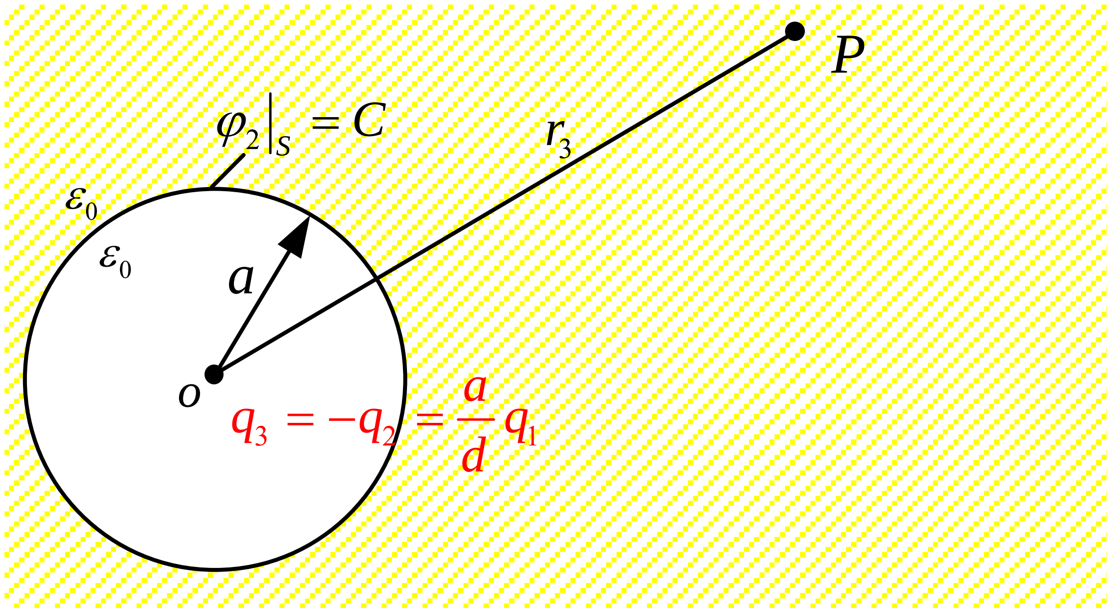


■ 问题（2）的镜像法模型

$$(2)\begin{cases}\varphi|_S = C \\ \oint_S \vec{D}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = q' = q_3\end{cases}$$

用分布于导体球球心处的点电荷代替

$q_3 = -q_2$



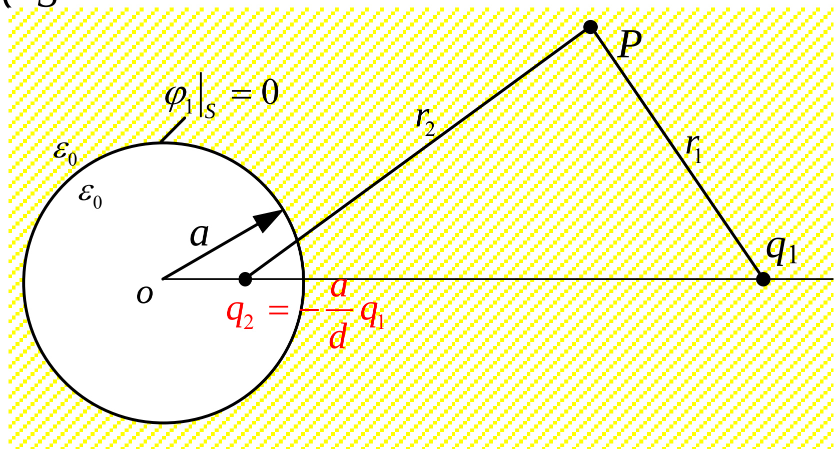
■ （1）+（2）的镜像法模型

综合(1)+(2) 镜像电荷边界条件：

$$\begin{cases} \varphi_1\big|_S + \varphi_2\big|_S = \varphi\big|_S = \text{const} = C \\ \oint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = q_2 + q_3 = 0 \end{cases}$$

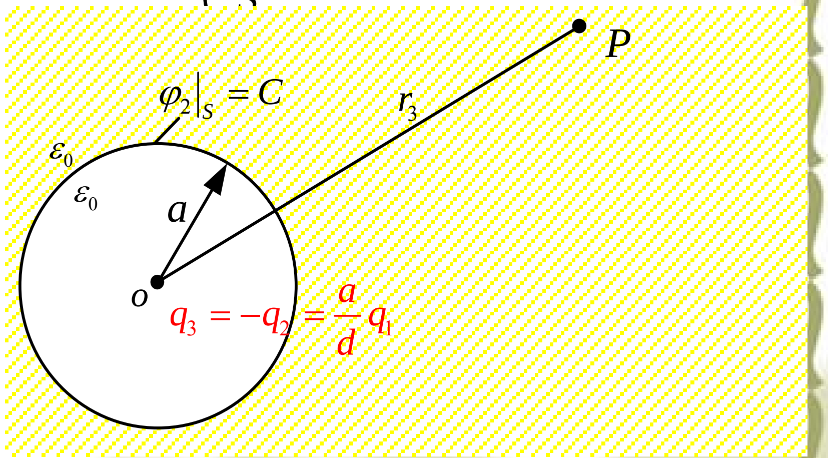
原问题边界条件

$$\begin{cases} \varphi\big|_S = \text{const} \neq 0 = C \\ \oint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = q = 0 \end{cases}$$



基本问题（1）

+



基本问题（2）

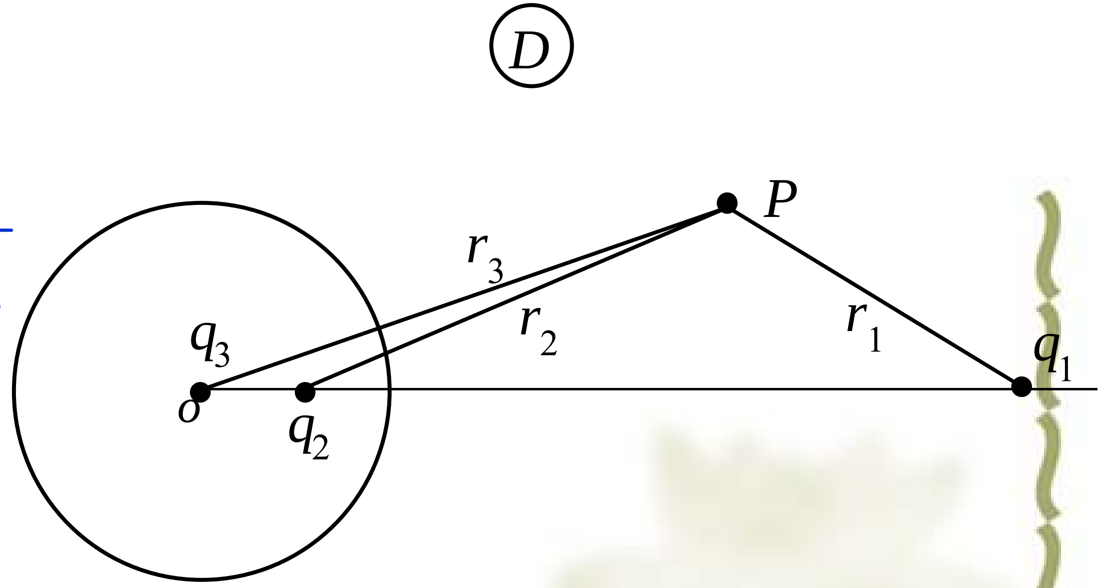
注意适用区域

■场分布

1）场中电位分布

$$\varphi_P=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

$$=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{a}{dr_2}+\frac{a}{dr_3}\right)$$



2) 导体球上电位

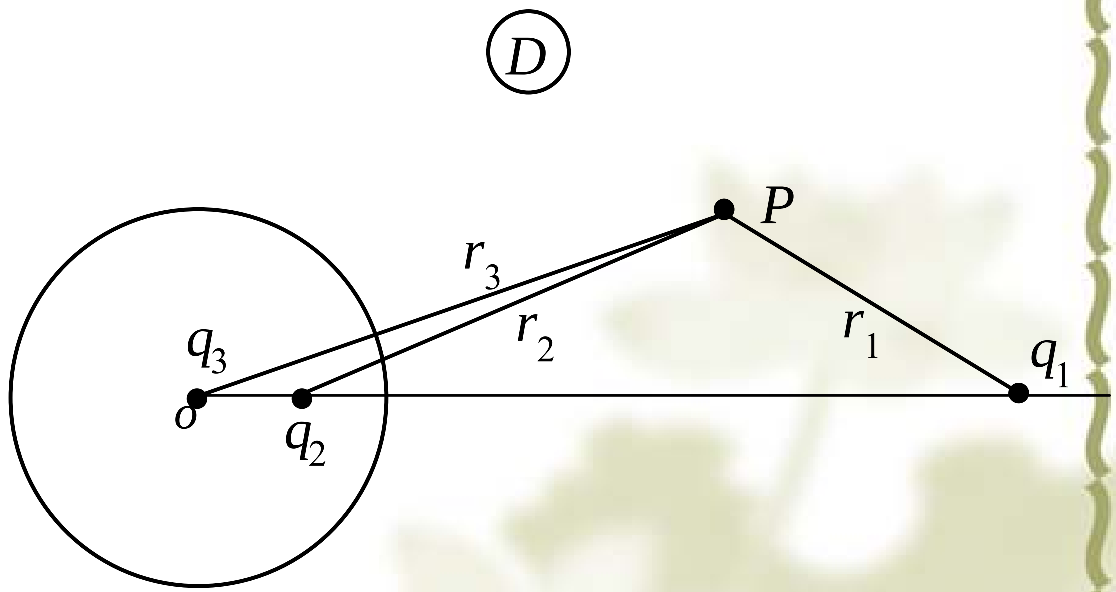
q_1和q_2（原来接地导体球等效的电荷）产生的，为零

球心处的第三个电荷q_3产生的

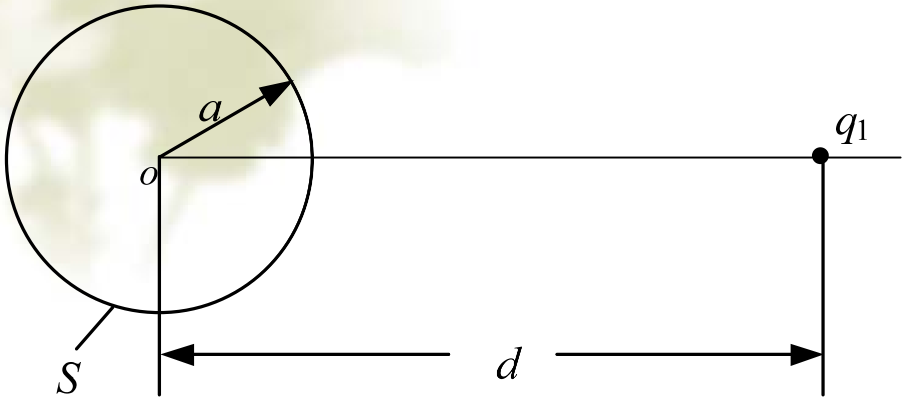
$$\varphi\big|_S = \varphi_1\big|_S + \varphi_2\big|_S$$

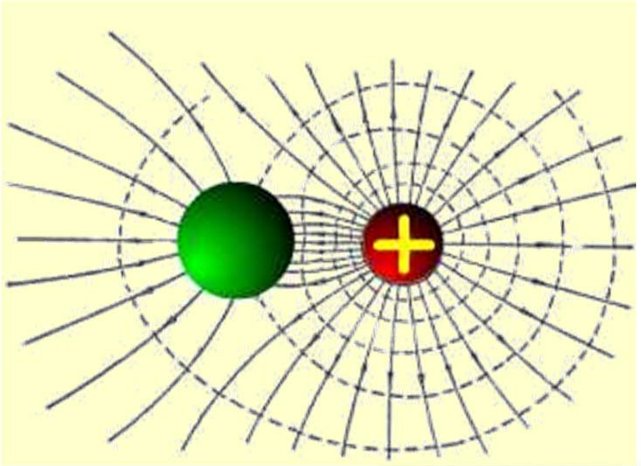
$$= C$$

$$= \frac{\frac{a}{d}q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}$$



导体球不接地，且呈电中性





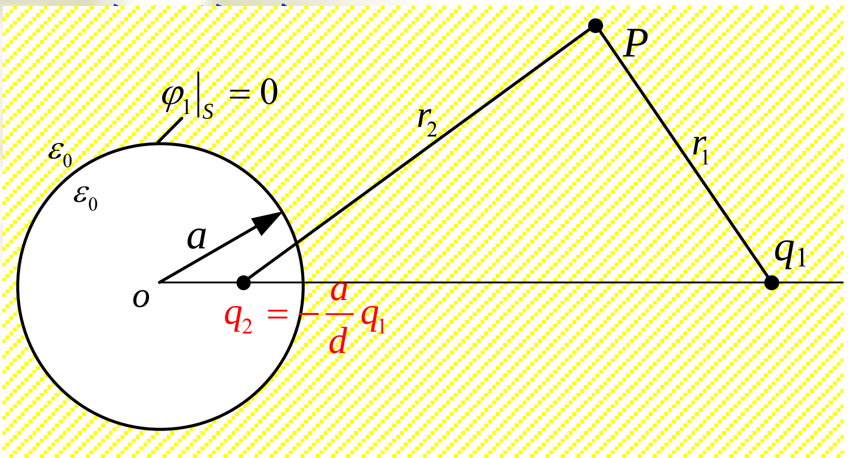
点电荷位于不接地导体球附近的场图

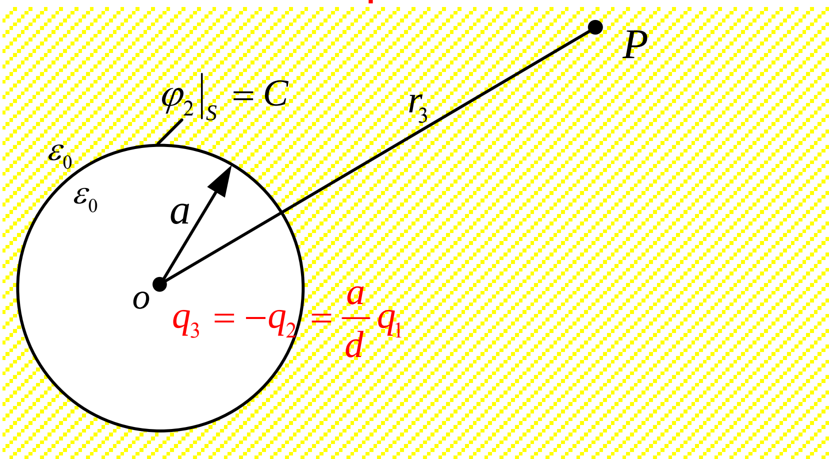
3. 带电导体球不接地但设带电量为Q

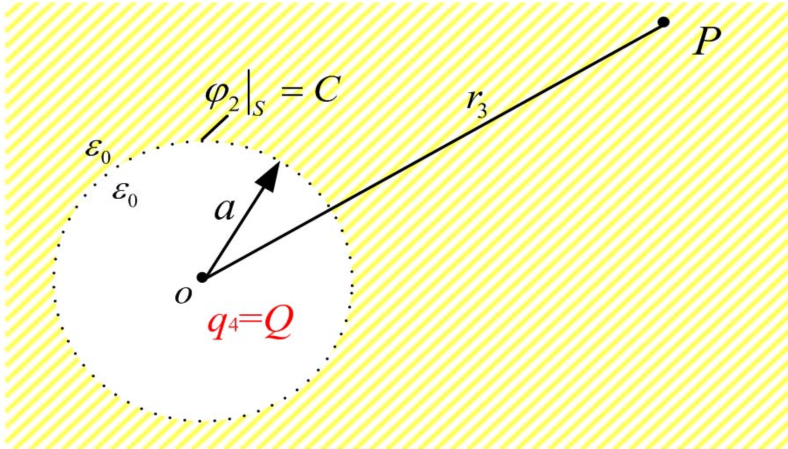
在前面的基础上，于球心O处，再放置一个$q_4 = Q$ 的电荷即可。

↓

带电导体球不接地（设带电量为Q）



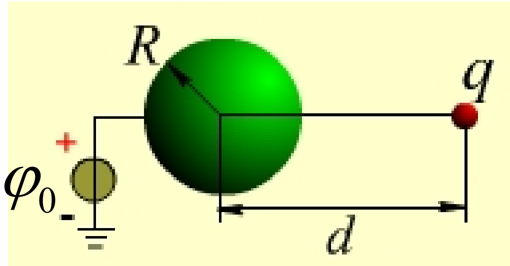


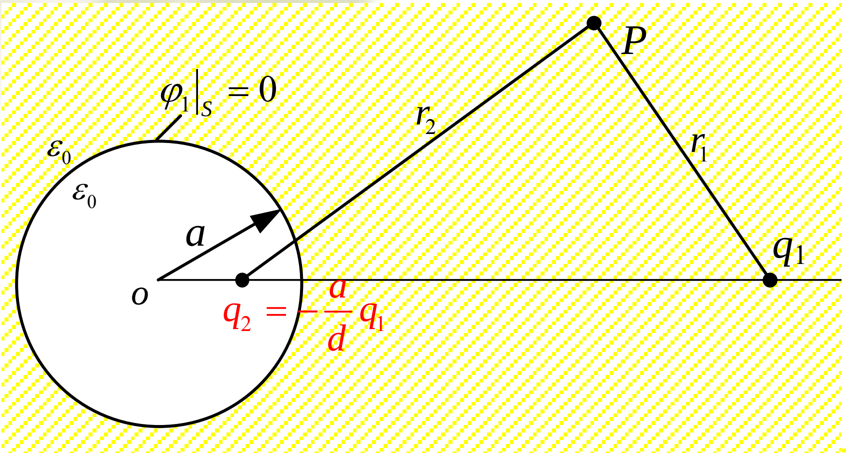


$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

4. 带电导体球已知电位为φ_0

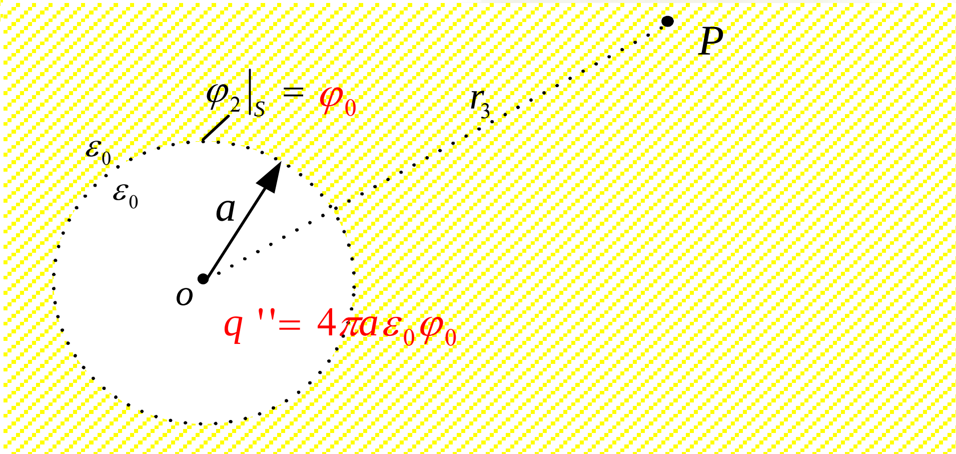
■ 基本问题+球心放一电荷q''





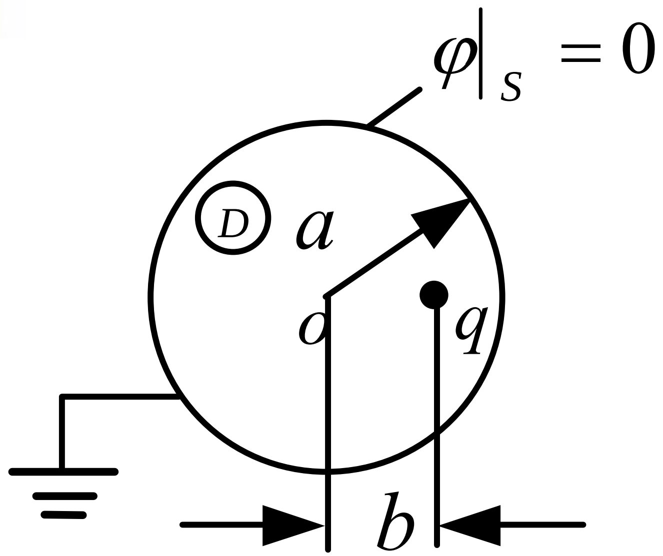
$$\varphi_0 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow q'' = 4\pi\varepsilon_0 a\varphi_0$$

+



5. 点电荷在导球内

1）球接地



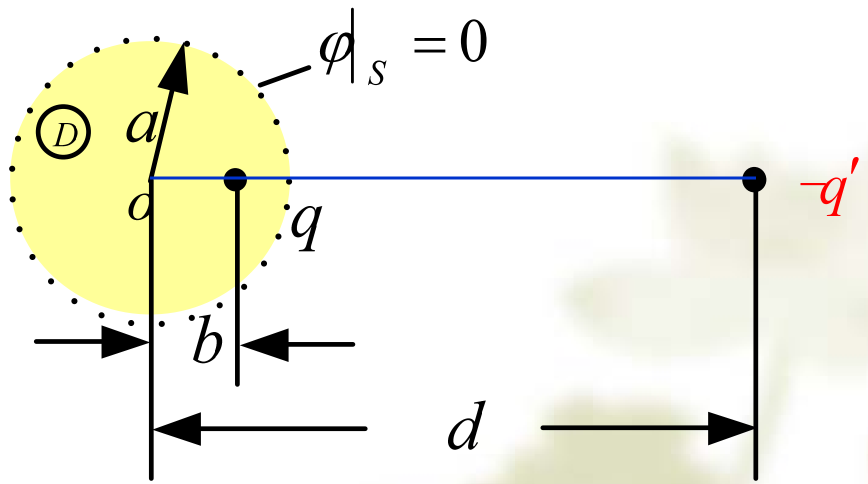
■分析

已知b和a，现求d和q'

$$q = -\frac{a}{d}q' \qquad b = \frac{a^2}{d}$$

$$d = \frac{a^2}{b}$$

$$q' = \frac{d}{a}q$$

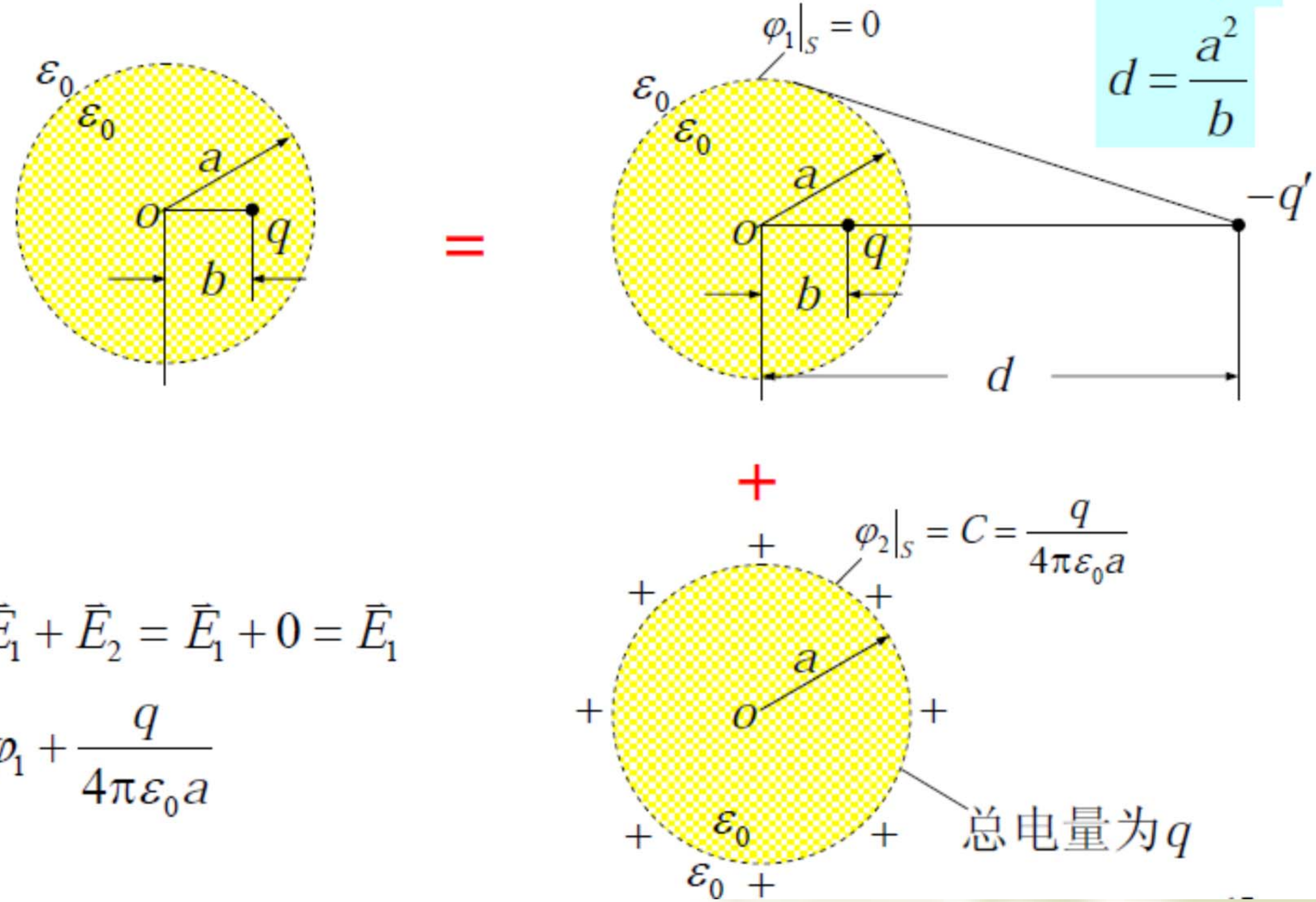


适用范围：球内场域。

2）球不接地（呈电中性）

$$q' = \frac{d}{a}q$$

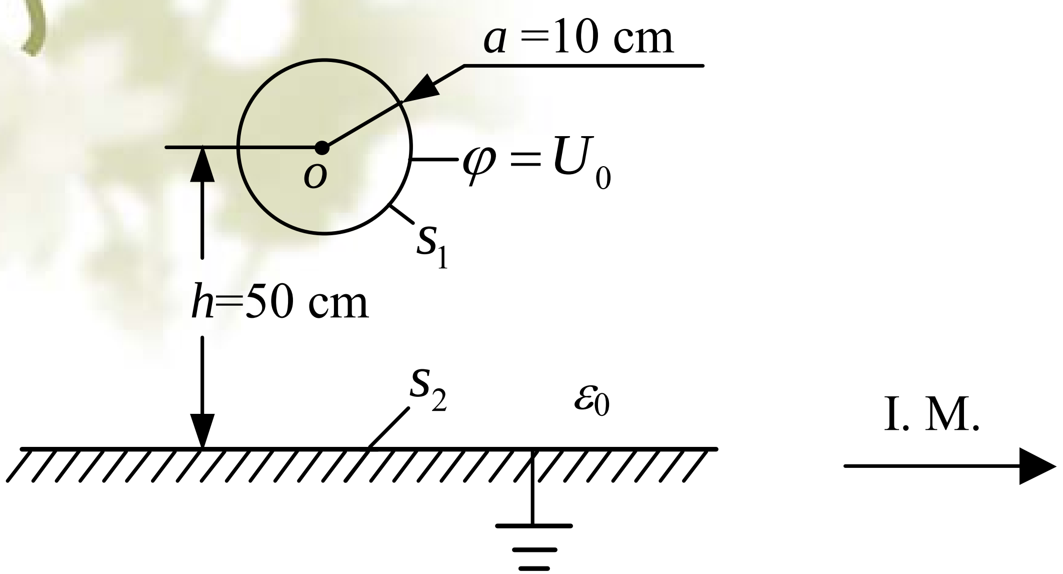
$$d = \frac{a^2}{b}$$

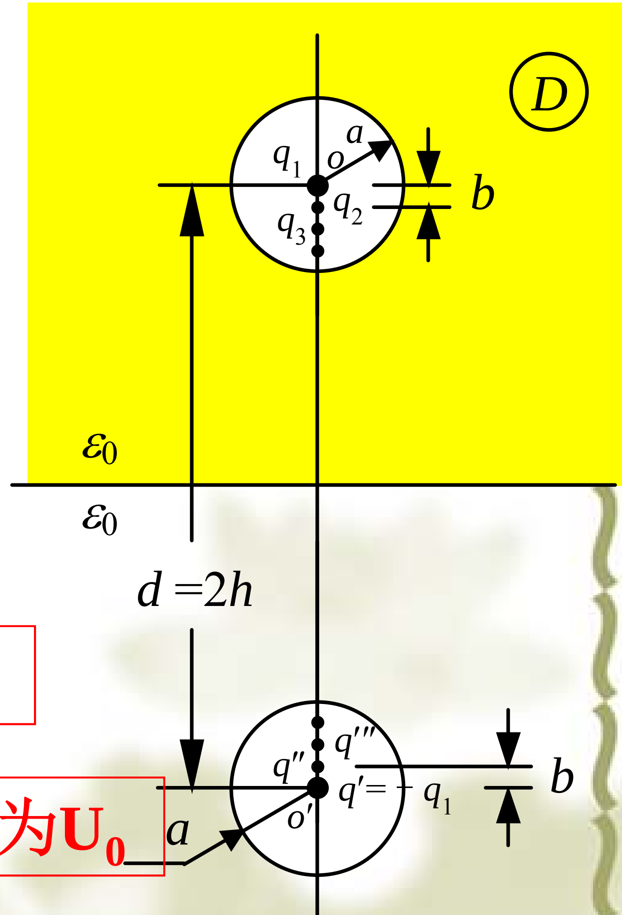


$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_1 + 0 = \vec{E}_1$$

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

例题：书例2-16） P98-100





注意：这是一个球，不是圆柱形的传输线

应用镜像法时

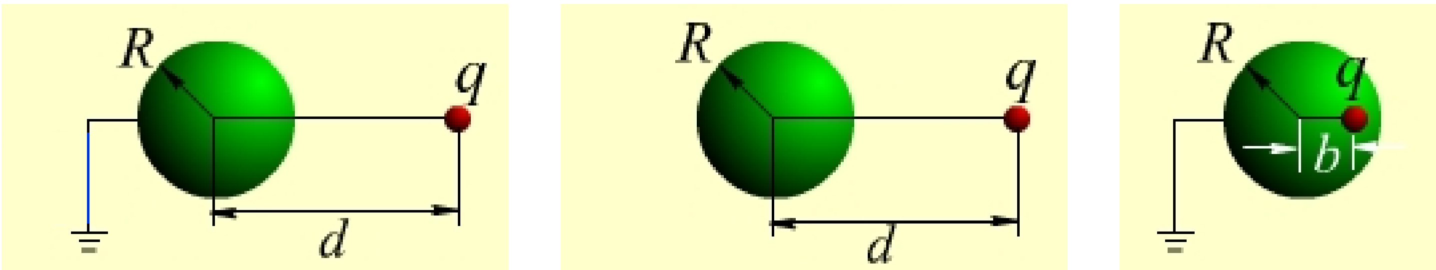
既要保证球表面的电位为U_0

又要保证大地的电位为零

B. C. $\varphi\big|_{s_1} = U_0$	$\varphi\big|_{s_2} = 0$
$q_1 = 4\pi\varepsilon_0 a U_0$	$q' = -q_1$
$q_2 = \frac{a}{d} q_1 = \frac{1}{10} q_1$	$q'' = -q_2$
$q_3 = \frac{a}{d'} q_2 = \frac{10}{99} q_2 = \frac{1}{99} q_1$	$q''' = -q_3$
$q_4 = \frac{a}{d''} q_3 = \frac{990}{9800} q_3 = \frac{1}{980} q_1$	$q'''' = -q_4$

思考

用镜像法求解下列问题，试确定镜像电荷的个数，大小与位置。



点电荷对导体球面的镜像

$$b=\frac{a^2}{d} \qquad b=\frac{a^2}{d} \qquad d=\frac{a^2}{b}$$

$$q'=\frac{a}{d}q \qquad q_2=-\frac{a}{d}q=-q_3 \qquad q'=\frac{d}{a}q$$

镜像法（电轴法）小结

镜像法（电轴法）的理论基础是：

静电场惟一性定理；

镜像法（电轴法）的实质是：

用虚设的镜像电荷（电轴）替代未知电荷的分布，使计算场域为无限大均匀媒质；

镜像法（电轴法）的关键是：

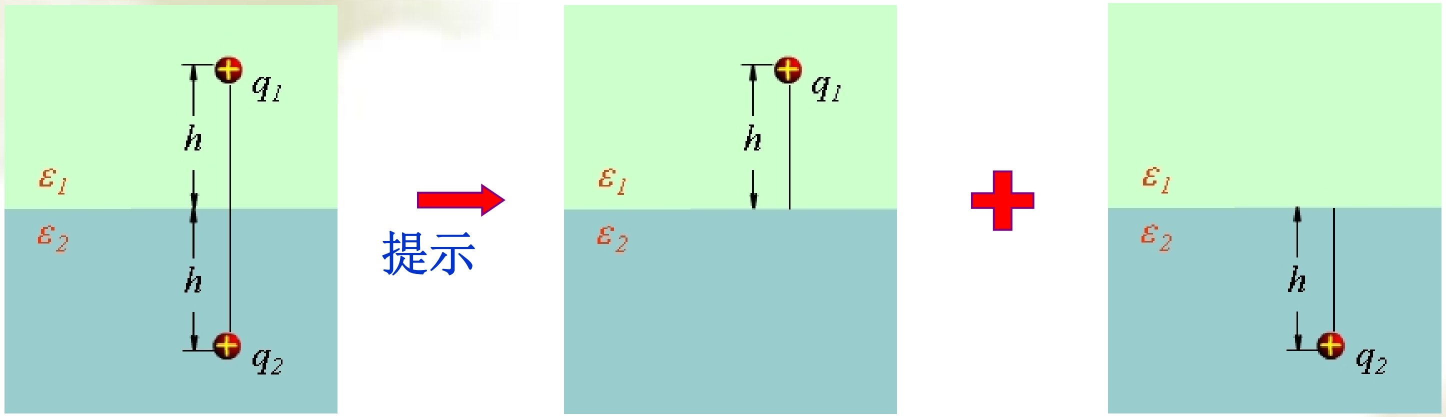
确定镜像电荷（电轴）的个数、大小及位置；

应用镜像法（电轴法）解题时，注意：

镜像电荷（电轴）只能放在待求场域以外的区域。叠加时，要注意场的适用区域。

作业：**2-26，2-25（2），**
2-27（其中（3）的球壳接地），
2-29

思考题：　　试确定下图镜像电荷的个数、大小与位置。



图中．　点电荷 q_1 与 q_2 分别置于 ε_1 与 ε_2 区域中