■三度

■标量场的梯度

■矢量场的散度

■矢量场的旋度

1.2.4 标量场的梯度

标量场

场是一个标量的位置函数，即每一时刻每个位置该物理量都有一个确定的值，则称在该空间中确定了该物理量的场。

例如，在直角坐标下：

$$\varphi(x,y,z)=\frac{5}{4\pi[(x-1)^2+(y+2)^2+z^2]}$$

标量场

物理量为标量

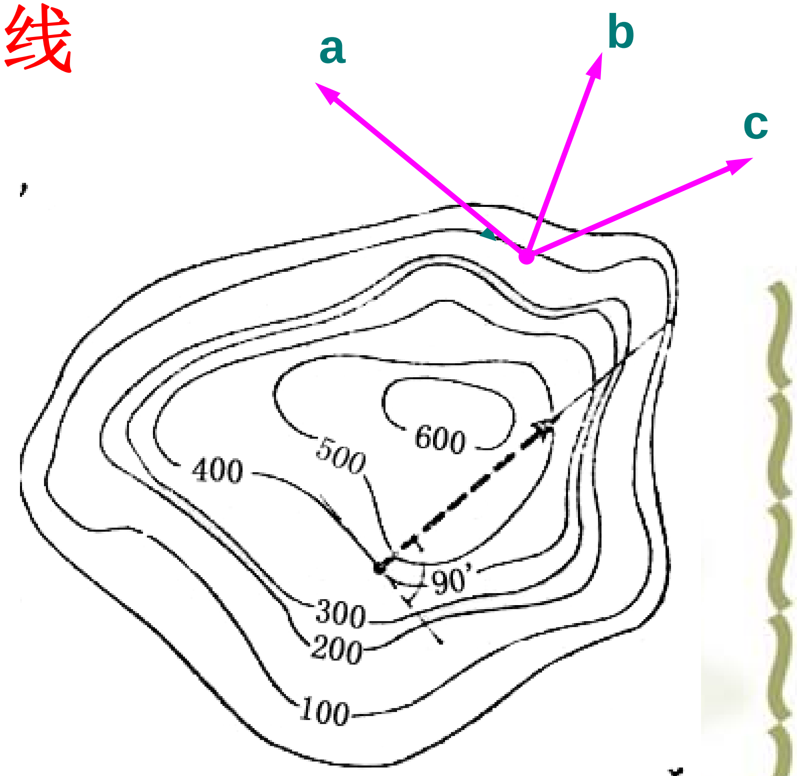
如温度场、电位场、高度场等；

形象描绘场分布的工具——场线

（1） 标量场--等值线(面)

其方程为:

$$h\ (x, y, z) = \text{const}$$



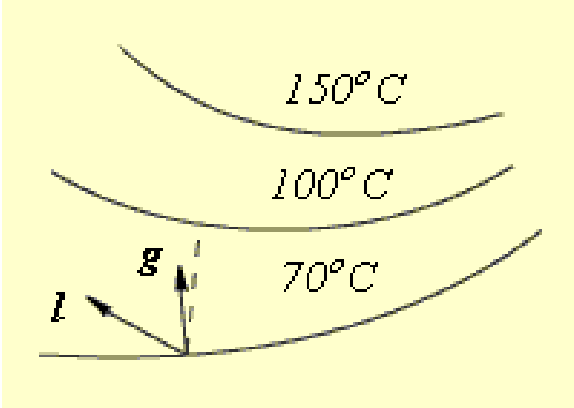
等高线分布

思考

- 在某一高度上沿什么方向高度变化最快?

思考

- 在某一温度上沿什么方向温度变化最快?



等温线分布

- 某标量沿不同路径（方向），变化率是否一样?
- 不一样，沿哪个方向变化率最大?
  - 为确定任一场点上标量场的空间变化率
  ——引入标量的梯度

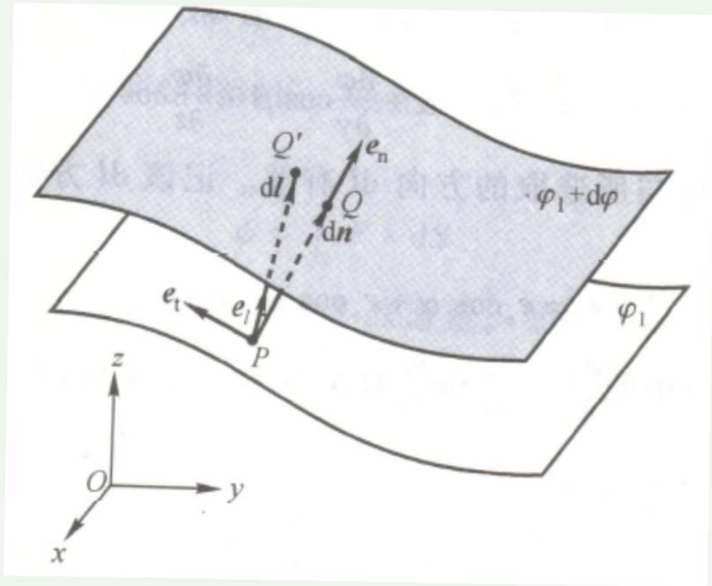
标量梯度的引入

方向导数：标量场在某点的方向导数表示标量场从该点沿某一方向上的变化率。

设一个标量函数φ（x，y，z），若函数φ 在P 点可微，则φ 在P点沿任意方向的$\vec{l}$方向导数为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma$$



式中α，β，γ，分别是P点任一方向$\vec{l}$与 x, y, z 轴的夹角

记 $\vec{l}$ 方向的单位矢量为 $\vec{e}_l$ $\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial l}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma$

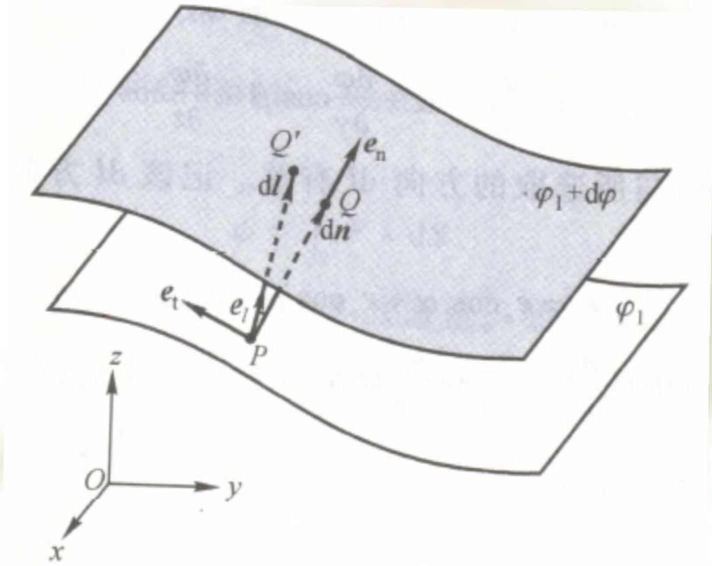
$$\vec{e}_l=(\vec{e}_x\cos\alpha+\vec{e}_y\cos\beta+\vec{e}_z\cos\gamma)$$

定义：$\vec{G}=(\vec{e}_x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{e}_y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{e}_z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z})$

则有：$\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}=\vec{G}\cdot\vec{e}_l=|G|\cos(\vec{G},\vec{e}_l)$

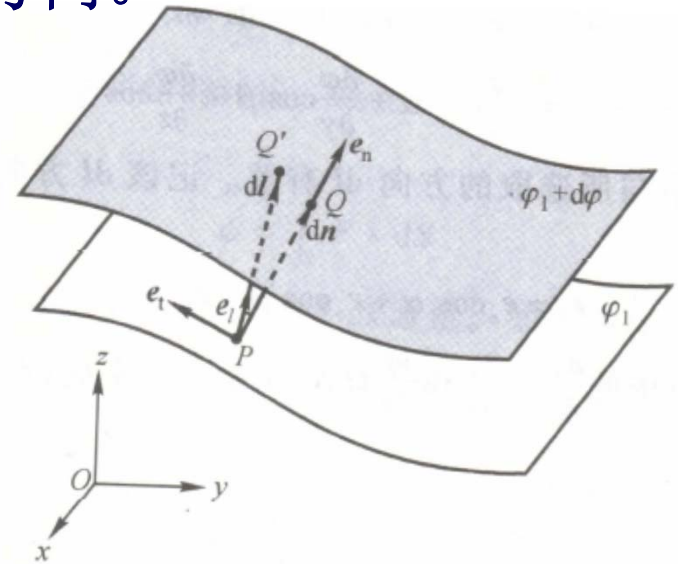
当 $\vec{G}$ 和 $\vec{e}_l$ 方向一致时，方向导数取得最大值。其值为：

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{\max}=|G|$$



$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\max} = |\boldsymbol{G}|$$

$\vec{G}$ 的方向就是取得最大方向导数的方向。



定义梯度为：

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{G} \qquad (\text{gradient})$$

$$= (\vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z})$$

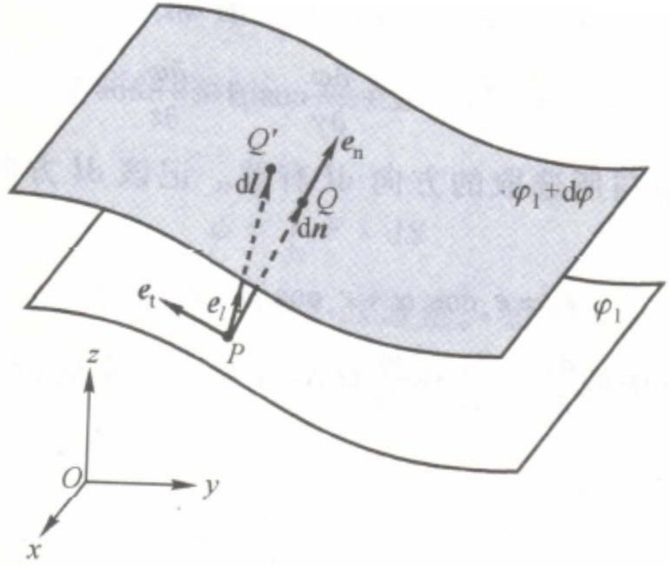
可见，梯度是一个矢量。

$$|\operatorname{grad}\varphi| = |\boldsymbol{G}| = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$$

梯度的值等于方向导数的最大值。

$$\mathrm{grad}\varphi = \vec{\boldsymbol{G}}$$

$$= (\vec{\boldsymbol{e}}_x \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{e}}_y \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{y}} + \vec{\boldsymbol{e}}_z \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{z}})$$



梯度的方向垂直于过场点的等值面，指向场量增加的方向。（过P点的切平面内，场量$\boldsymbol{\varphi}$ 的变化率为0）

在直角坐标系中，引入算符∇，

$$\nabla = \vec{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} + \vec{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} + \vec{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}$$

（∇ 哈密顿算符, **del**）

则梯度可表示为

$$\boxed{\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{y}}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{e}}_z}$$

梯度的意义

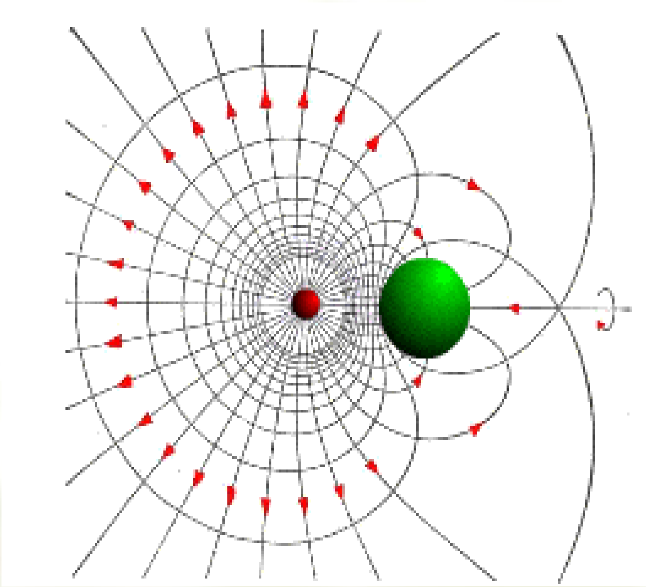
$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$

- 标量场的梯度是一个矢量，是空间坐标点的函数。
- 梯度的大小为该点标量函数φ 的方向导数的最大值。
- 梯度的方向为垂直于过该点的等值面的方向。

电位场的梯度

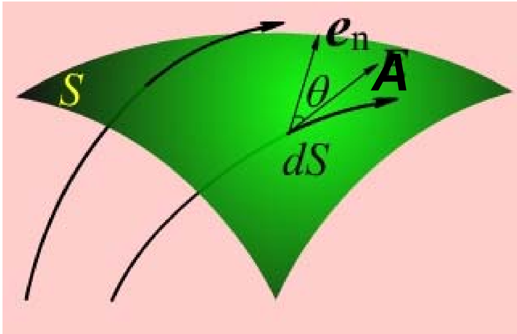
$$\overline{E} = -\nabla\varphi$$

- 电位场的梯度与过该点的等位线垂直；
- 数值等于该点的最大方向导数；
- 指向电位增加的方向。



1.2.5 矢量场的通量与散度

通量： 矢量 **A** 沿某一有向曲面 **S** 的面积分称为矢量 $\vec{A}$ 通过该有向曲面 **S** 的通量，以标量 Ψ 表示，即



$$\Psi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

闭合的有向曲面的方向通常规定为闭合面的外法线方向。

通量可为正、或为负、或为零。当 $\psi > 0$，表示有净通量流出，认为该闭合面中存在产生该矢量场的源(正源)；当 $\psi < 0$，表示有净通量流入，认为该闭合面中存在汇聚该矢量场的汇（负源）。$\psi = 0$，无源。

由物理得知，真空中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 通过任一闭合曲面的通量等于该闭合面包围的自由电荷的电量 q 与真空介电常数 ε_0 之比，即，

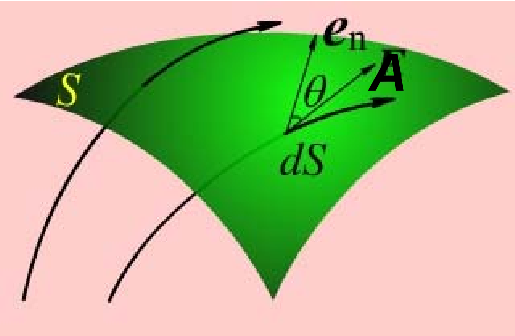
$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

高斯定理

可见，当闭合面中存在正电荷时，通量为正。当闭合面中存在负电荷时，通量为负。在电荷不存在的无源区中，穿过任一闭合面的通量为零。这一电学实例充分显示出闭合面中正源、负源及无源的通量特性。但是，通量仅能表示闭合面中源的总量，它不能显示源的分布特性，即场中各点的分布和强弱。为此需要研究矢量场的散度。

散度：当闭合面 S 向某点无限收缩时，矢量 $\vec{A}$ 过该闭合面S 的通量与该闭合面包围的体积之比的极限称为矢量场$\vec{A}$在该点的散度，以 $\mathrm{div}\vec{A}$ 表示，即

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}}{\Delta V}$$



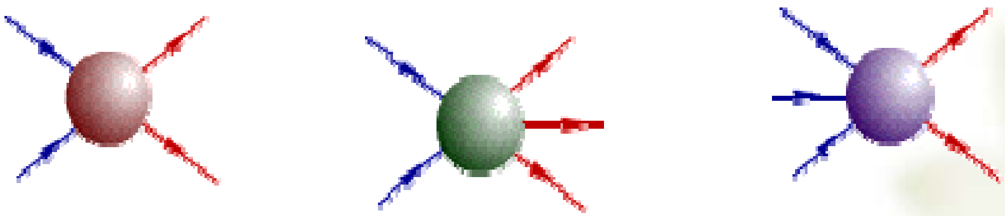
式中div 是divergence 的缩写， ΔV 为闭合面 S 包围的体积。

散度是一个标量。散度物理意义可理解为通过包围单位体积闭合面的通量。

散度描述场中给定点的通量密度，即该点场源的变化规律。

散度描述场中给定点的通量密度，即该点场源的变化规律。

若 $\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} > 0$，表示该点有发出通量线的源（正源）；若 $\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} < 0$ 表示该点有汇集通量线的汇（负源）；$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} = 0$ 表示该点的通量线是连续的。



$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} = 0$（无源）　$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} > 0$（正源）　$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} < 0$（负源）

直角坐标系中散度可表示为

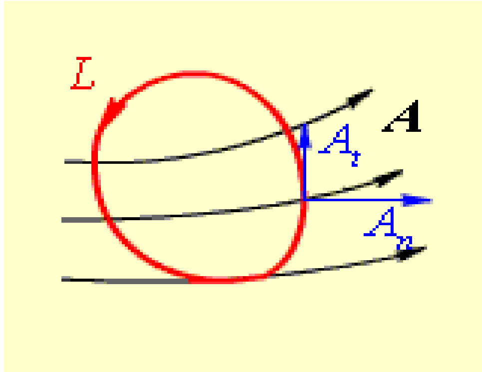
$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

因此散度可用算符 ∇ （哈密顿算符）表示

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}}$$

1.2.6 矢量场的环量与旋度

环量：矢量场 **A** 沿一条有向曲线 $\vec{l}$ 的线积分称为矢量场 $\vec{A}$ 沿该曲线的环量，以 Γ 表示，即



$$\Gamma = \oint_l \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

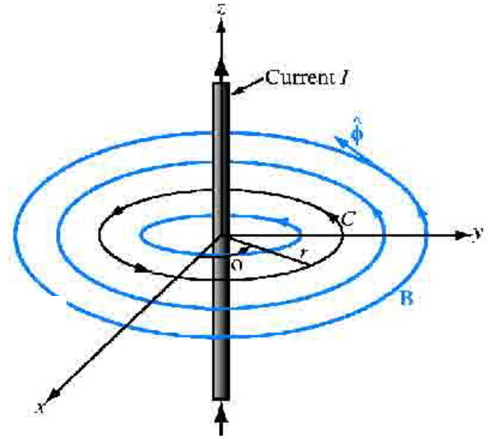
$\vec{l}$ 方向为曲线的切线方向；

环量的大小与闭合路径有关，它表示绕环线旋转趋势的大小。

可见，若在闭合有向曲线 $\vec{l}$ 上，矢量场 $\vec{A}$ 的方向处处与线元 $d\vec{l}$ 的方向保持一致，则环量 $\Gamma > 0$；若处处相反，则 $\Gamma < 0$。可见，环量可以用来描述矢量场的旋涡特性。

由物理学知，真空中磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿任一闭合有向曲线 $\boldsymbol{l}$ 的环量等于该闭合曲线包围的传导电流强度 I 与真空磁导率 μ_0 的乘积。即

$$\oint_l \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I$$

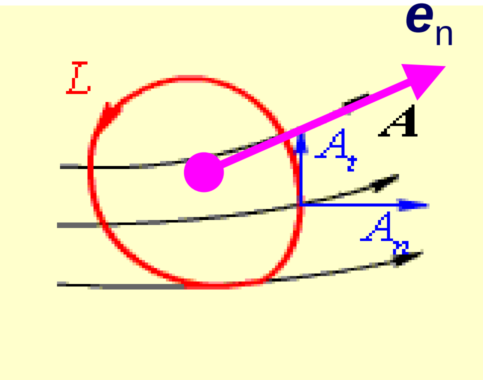


安培环路定理

I 的正方向与 d$\boldsymbol{l}$ 的方向构成 右旋 关系。由此可见，环量可以表示闭合曲线所包围的总的旋涡源强度，不能显示环线内每点源的分布特性。为此，需要研究矢量场的旋度。

旋度：将闭合曲线向观察点收缩，定义为环量与有向曲线所围成的面元ΔS之比的极限值的最大值.

$$curl\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \vec{e}_n \left[\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \right]_{\max}$$



$\vec{e}_n$ 为ΔS的法向单位矢量，ΔS为闭合曲线 l 包围的面积。

上式表明，旋度是一个矢量。其方向是使矢量 $\vec{A}$ 具有最大环量位置的面积元的法线方向。大小为单位面积上 $\vec{A}$ 的最大环量。

直角坐标系中旋度表示为:

矩阵形式

$$
\begin{aligned}
curl\vec{A} &= \nabla\times\vec{A} \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y \\
&\quad +\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{curl}\ \vec{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y & \vec{\mathbf{e}}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}
$$

或用算符 ∇ 表示为 $\mathrm{curl}\ \vec{\boldsymbol{A}} = \nabla\times\vec{A}$

说明：

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$curl\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{curl}\,\vec{A} = \nabla\times\vec{A}$$

应该注意，无论梯度、散度或旋度都是微分运算，它们表示场在某点附近的变化特性，场中各点的梯度、散度或旋度可能不同。因此，梯度、散度及旋度描述的是场的点特性或称为微分特性。函数的连续性是可微的必要条件。因此在场量发生不连续处，也就不存在前面定义的梯度、散度或旋度。

1.3 场论基础

- 高斯散度定理
- 斯托克斯定理
- 两个重要的恒等式
- 亥姆霍兹定理

1.3.1 高斯散度定理

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} \mathrm{d}V = \int_S \vec{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$$

S为包围体积V的外表面。

该公式表明：矢量 $\vec{A}$ 的散度的体积分等于矢量 $\vec{A}$ 流出围成该体积的闭合面的通量

从数学角度：高斯散度定理将矢量函数的面积分转化为标量函数的体积分或反之。

从物理角度：高斯散度定理建立了某一空间中的场与包围该空间的边界场之间的关系。

1.3.2 斯托克斯定理（STOKES’s Theorem）

矢量 $\vec{A}$ 的旋度的面积分等于矢量 $\vec{A}$ 流出围成该面积的有向闭曲线的环量；

$$\int_S (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_l \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

***S*为围线*l*所包围的面积**

数学角度：斯托克斯定理建立了面积分和线积分的关系。

物理角度：斯托克斯定理建立了区域 S 中的场和包围区域 S 的闭合曲线 l 上的场之间的关系。因此，如果已知区域 S 中的场，根据斯托克斯定理即可求出边界 l 上的场，反之亦然。

1.3.3 无散场和无旋场(两个重要的恒等式)

散度处处为零的矢量场称为无散场，旋度处处为零的矢量场称为无旋场。

两个重要公式(证明略)：

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})=0 \qquad \nabla\times(\nabla\varphi)=0$$

左式表明，任一矢量场$\vec{A}$的旋度的散度一定等于零 。因此，任一无散场可以表示为另一矢量场的旋度，或者说，任何旋度场一定是无散场。

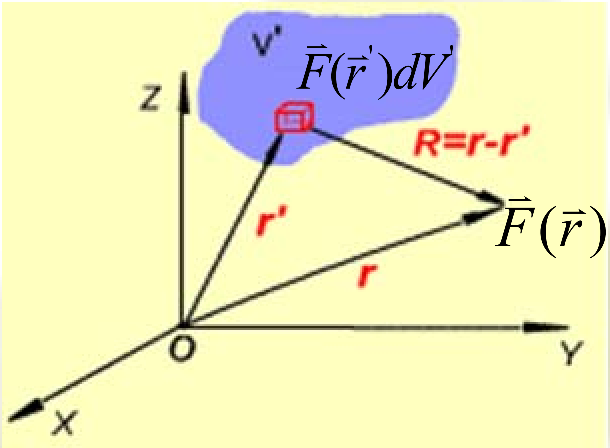
右式表明，任一标量场φ 的梯度的旋度一定等于零。因此，任一无旋场可以表示为一个标量场的梯度，或者说，任何梯度场一定是无旋场。

1.3.4亥姆霍兹定理(Helmholtz’s Theorem)

定理

若矢量场 $\vec{F}(\vec{r})$ 在无界空间中处处单值，且其导数连续有界，源分布在有限区域中，则该矢量场唯一地由其散度和旋度所确定，且可被表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和，即

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) + \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$



标量函数

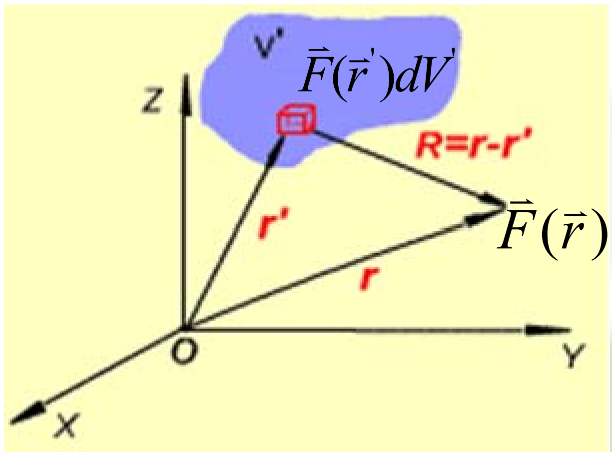
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\bullet\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

矢量函数

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

注意

- $|\vec{r}-\vec{r}'|$ 是源点($\vec{r}'$)到场点($\vec{r}$)的距离
- 算子$\nabla' = \frac{\partial}{\partial x'}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y'}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z'}\vec{e}_z$ 是对源点坐标进行运算
- 积分也对源点坐标展开



常用的几个恒等式

- $\nabla \times \nabla V = 0$ （任意标量函数梯度(∇V)的旋度恒等于零）；
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ （任意矢量函数旋度($\nabla \times \mathbf{A}$)的散度恒等于零）；
- $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
- $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi$
- $\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$

每周交一次作业，时间为周四上课时间。

本次课作业：**1-1+** 补充一题

图 1.10　例题 1.2 的图.

例 1.2　$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$，求证

1. $\nabla R = -\nabla' R$;

~~2.~~ $\cancel{\nabla f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R}}\nabla R$;

3. $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$.

证

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2},$$

由式(1.30)