FFT的算法原理

- 首先，将原函数分为奇数项和偶数项，通过不断的一个奇数一个偶数的相加（减），最终得到需要的结果。
- 也就是说FFT是将复杂的运算变成两个数相加（减）的简单运算的重复。这恰好符合计算机计算所擅长的计算规律。

FFT的算法步骤

1. 先将数据进行奇、偶分组。

例：

$$f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,\ f_8,f_9,f_{10},f_{11},f_{12},f_{13},f_{14},f_{15}$$

$f_0,f_2,f_4,f_6,f_8,f_{10},f_{12},f_{14},$

下标为2x

$f_1,f_3,f_5,f_7,f_9,f_{11},f_{13},f_{15}$

下标为2x+1

FFT算法步骤

分析偶数部分的数据项：

$f_0, f_2, f_4, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{14},$

如果下标用二进制数表示为：

0000，0010，0100，0110，1000，1010，1100，1110

末尾一位是0。

FFT算法步骤

分析奇数部分的数据项：

$f_1, f_3, f_5, f_7, f_9, f_{11}, f_{13}, f_{15}$

如果下标用二进制数表示为：

0001，0011，0101，0111，1001，1011，1101，1111

末尾一位是1。

FFT算法步骤

2. 对偶数部分进行分层分组排序

- 因为奇数部分的数据项排列规律为2x+1，所以只需要给出偶数项部分，奇数项部分则可以类推。

第一层下标为：0　2　4　6　8　10　12　14

二进制数为：0000，0010，0100，0110，1000，1010，1100，1110

FFT算法步骤

二进制数为：0000，0010，0100，0110，1000，1010，1100，1110

/2

移位：000，001，010，011，100，101，110，111

偶数组：000，010，100，110　奇数组：001，011，101，111

0　2　4　6　　1　3　5　7

*2

第一层下标分组为：0，4，8，12；　2，6，10，14

FFT算法步骤

第二层下标为：0　4　8　12

二进制数为：0000，0100，1000，1100

/4

移位：00，01，10，11

偶数组：00，10　奇数组：01，11

0　2　　1　3

*4

第二层下标分组为：0，8；　4，12；

FFT算法步骤

3. 根据每层偶数组的排序方式，获得奇数组的排序方式。

因为偶数项的系数为f(2x)，奇数项的系数为f(2x+1)，所以由第二层偶数排序：

0，8，4，12；

可以得到第一层偶数排序为：

0，8，4，12，2，6，10，14；

FFT算法步骤

再根据第一层的偶数排序：

0，8，4，12，2，6，10，14；

获得奇数项的排序为：

1，9，5，13，3， 7，11，15

最后，获得原始数据的排序为：

$f_0, f_8, f_4, f_{12}, f_2, f_6, f_{10}, f_{14}$ $f_1, f_9, f_5, f_{13}, f_3, f_7, f_{11}, f_{15}$

FFT算法步骤

4. 进行分层的奇、偶项相加。

对排好序的数据项，进行第一层计算有：

$f_0, f_8, f_4, f_{12}, f_2, f_{10}, f_6, f_{14}$

8个数一组

$F^{(e0)}(0) = f_0 + \omega_2^0 \cdot f_8$ $F^{(e0)}(1) = f_0 - \omega_2^0 \cdot f_8$

$F^{(e1)}(0) = f_4 + \omega_2^0 \cdot f_{12}$ $F^{(e1)}(1) = f_4 - \omega_2^0 \cdot f_{12}$

$F^{(e2)}(0) = f_2 + \omega_2^0 \cdot f_{10}$ $F^{(e2)}(1) = f_2 - \omega_2^0 \cdot f_{10}$

$F^{(e3)}(0) = f_6 + \omega_2^0 \cdot f_{14}$ $F^{(e3)}(1) = f_6 - \omega_2^0 \cdot f_{14}$

$f_1, f_9, f_5, f_{13}, f_3, f_{11}, f_7, f_{15}$

8个数一组

$F^{(o0)}(0) = f_1 + \omega_2^0 \cdot f_9$ $F^{(o0)}(1) = f_1 - \omega_2^0 \cdot f_9$

$F^{(o1)}(0) = f_5 + \omega_2^0 \cdot f_{13}$ $F^{(o1)}(1) = f_5 - \omega_2^0 \cdot f_{13}$

$F^{(o2)}(0) = f_3 + \omega_2^0 \cdot f_{11}$ $F^{(o2)}(1) = f_3 - \omega_2^0 \cdot f_{11}$

$F^{(o3)}(0) = f_7 + \omega_2^0 \cdot f_{15}$ $F^{(o3)}(1) = f_7 - \omega_2^0 \cdot f_{15}$

FFT算法步骤

对得到的偶数数据项，进行第二层计算有：

$F^{(e0)}(0), F^{(e1)}(0), F^{(e2)}(0), F^{(e3)}(0)$

4个数一组

$F^{(2e)}(0) = F^{(e0)}(0) + \omega_4^0 \cdot F^{(e1)}(0)$

$F^{(2e)}(1) = F^{(e0)}(1) + \omega_4^1 \cdot F^{(e1)}(1)$

$F^{(2e)}(2) = F^{(e0)}(0) - \omega_4^0 \cdot F^{(e1)}(0)$

$F^{(2e)}(3) = F^{(e0)}(1) - \omega_4^1 \cdot F^{(e1)}(1)$

$F^{(e0)}(1), F^{(e1)}(1), F^{(e2)}(1), F^{(e3)}(1)$

4个数一组

$F^{(eo)}(0) = F^{(e2)}(0) + \omega_4^0 \cdot F^{(e2)}(0)$

$F^{(eo)}(1) = F^{(e2)}(1) + \omega_4^1 \cdot F^{(e3)}(1)$

$F^{(eo)}(2) = F^{(e2)}(0) - \omega_4^0 \cdot F^{(e3)}(0)$

$F^{(eo)}(3) = F^{(e2)}(1) - \omega_4^1 \cdot F^{(e3)}(1)$

FFT算法步骤

对得到的奇数数据项，进行第二层计算有：

$F^{(o0)}(0), F^{(o1)}(0), F^{(o2)}(0), F^{(o3)}(0)$

4个数一组

$F^{(oe)}(0) = F^{(o0)}(0) + \omega_4^0 \cdot F^{(o1)}(0)$

$F^{(oe)}(1) = F^{(o0)}(1) + \omega_4^1 \cdot F^{(o1)}(1)$

$F^{(oe)}(2) = F^{(o0)}(0) - \omega_4^0 \cdot F^{(o1)}(0)$

$F^{(oe)}(3) = F^{(o0)}(1) - \omega_4^1 \cdot F^{(o1)}(1)$

$F^{(o0)}(1), F^{(o1)}(1), F^{(o2)}(1), F^{(o3)}(1)$

4个数一组

$F^{(2o)}(0) = F^{(o2)}(0) + \omega_4^0 \cdot F^{(o3)}(0)$

$F^{(2o)}(1) = F^{(o2)}(1) + \omega_4^1 \cdot F^{(o3)}(1)$

$F^{(2o)}(2) = F^{(o2)}(0) - \omega_4^0 \cdot F^{(o3)}(0)$

$F^{(2o)}(3) = F^{(o2)}(1) - \omega_4^1 \cdot F^{(o3)}(1)$

FFT算法步骤

对得到的偶数数据项，进行第三层计算有：

$F^{(2e)}(0), F^{(eo)}(0)$ ⇨ $F^{(3e)}(0) = F^{(2e)}(0) + \omega_8^0 \cdot F^{(eo)}(0)$, $F^{(3e)}(4) = F^{(2e)}(0) - \omega_8^0 \cdot F^{(eo)}(0)$

$F^{(2e)}(1), F^{(eo)}(1)$ ⇨ $F^{(3e)}(1) = F^{(2e)}(1) + \omega_8^1 \cdot F^{(eo)}(1)$, $F^{(3e)}(5) = F^{(2e)}(1) - \omega_8^1 \cdot F^{(eo)}(1)$

$F^{(2e)}(2), F^{(eo)}(2)$ ⇨ $F^{(3e)}(2) = F^{(2e)}(2) + \omega_8^2 \cdot F^{(eo)}(2)$, $F^{(3e)}(6) = F^{(2e)}(2) - \omega_8^2 \cdot F^{(eo)}(2)$

$F^{(2e)}(3), F^{(eo)}(3)$ ⇨ $F^{(3e)}(3) = F^{(2e)}(3) + \omega_8^3 \cdot F^{(eo)}(3)$, $F^{(3e)}(7) = F^{(2e)}(3) - \omega_8^3 \cdot F^{(eo)}(3)$

两个数一组

FFT算法步骤

对得到的奇数数据项，进行第三层计算有：

$F^{(oe)}(0), F^{(2o)}(0)$ ⇨ $F^{(3o)}(0) = F^{(oe)}(0) + \omega_8^0 \cdot F^{(2o)}(0)$, $F^{(3o)}(4) = F^{(oe)}(0) - \omega_8^0 \cdot F^{(2o)}(0)$

$F^{(oe)}(1), F^{(2o)}(1)$ ⇨ $F^{(3o)}(1) = F^{(oe)}(1) + \omega_8^1 \cdot F^{(2o)}(1)$, $F^{(3o)}(5) = F^{(oe)}(1) - \omega_8^1 \cdot F^{(2o)}(1)$

$F^{(oe)}(2), F^{(2o)}(2)$ ⇨ $F^{(3o)}(2) = F^{(oe)}(2) + \omega_8^2 \cdot F^{(2o)}(2)$, $F^{(3o)}(6) = F^{(oe)}(2) - \omega_8^2 \cdot F^{(2o)}(2)$

$F^{(oe)}(3), F^{(2o)}(3)$ ⇨ $F^{(3o)}(3) = F^{(oe)}(3) + \omega_8^3 \cdot F^{(2o)}(3)$, $F^{(3o)}(7) = F^{(oe)}(3) - \omega_8^3 \cdot F^{(2o)}(3)$

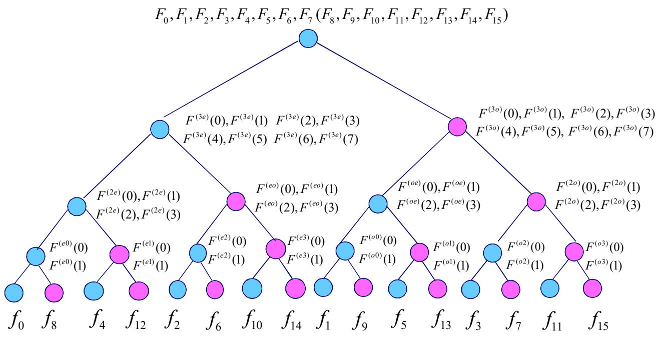
两个数一组

FFT算法步骤

最后，将获得的所有数据项进行合并：

$F^{(3e)}(0) + \omega_{16}^0 \cdot F^{(3o)}(0)$	⇨ $F(0)$	$F^{(3e)}(0) - \omega_{16}^0 \cdot F^{(3o)}(0)$	⇨ $F(8)$
$F^{(3e)}(1) + \omega_{16}^1 \cdot F^{(3o)}(1)$	⇨ $F(1)$	$F^{(3e)}(1) - \omega_{16}^1 \cdot F^{(3o)}(1)$	⇨ $F(9)$
$F^{(3e)}(2) + \omega_{16}^2 \cdot F^{(3o)}(2)$	⇨ $F(2)$	$F^{(3e)}(2) - \omega_{16}^2 \cdot F^{(3o)}(2)$	⇨ $F(10)$
$F^{(3e)}(3) + \omega_{16}^3 \cdot F^{(3o)}(3)$	⇨ $F(3)$	$F^{(3e)}(3) - \omega_{16}^3 \cdot F^{(3o)}(3)$	⇨ $F(11)$
$F^{(3e)}(4) + \omega_{16}^4 \cdot F^{(3o)}(4)$	⇨ $F(4)$	$F^{(3e)}(4) - \omega_{16}^4 \cdot F^{(3o)}(4)$	⇨ $F(12)$
$F^{(3e)}(5) + \omega_{16}^5 \cdot F^{(3o)}(5)$	⇨ $F(5)$	$F^{(3e)}(5) - \omega_{16}^5 \cdot F^{(3o)}(5)$	⇨ $F(13)$
$F^{(3e)}(6) + \omega_{16}^6 \cdot F^{(3o)}(6)$	⇨ $F(6)$	$F^{(3e)}(6) - \omega_{16}^6 \cdot F^{(3o)}(6)$	⇨ $F(14)$
$F^{(3e)}(7) + \omega_{16}^7 \cdot F^{(3o)}(7)$	⇨ $F(7)$	$F^{(3e)}(7) - \omega_{16}^7 \cdot F^{(3o)}(7)$	⇨ $F(15)$

FFT算法图示



FFT计算例

设对一个函数进行快速Fourier变换，函数在采样点上的值设为：

$$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$$

$$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$$

偶数项部分：

f_0, f_2, f_4, f_6 下标值分别为：000，010，100，110

排序为： 000， 100， 010， 110

奇数项部分：

f_1, f_3, f_5, f_7 下标值分别为：001，011，101，111

排序为： 001， 101， 011， 111

分成偶数、奇数为（偶数在左，奇数在右）：

f_0, f_2, f_4, f_6 | f_1, f_3, f_5, f_7

f_0, f_4 | f_2, f_6 → f_1, f_5 | f_3, f_7

按照前面叙述的FFT方法,第1层(4组2个点的运算):

偶数项部分

$$F^{(e0)}(0) = f_0 + \omega_2^0 \cdot f_4 = f_0 + f_4$$
$$F^{(e0)}(1) = f_0 - \omega_2^0 \cdot f_4 = f_0 - f_4$$
$$F^{(e1)}(0) = f_2 + \omega_2^0 \cdot f_6 = f_2 + f_6$$
$$F^{(e1)}(1) = f_2 - \omega_2^0 \cdot f_6 = f_2 - f_6$$

奇数项部分

$$F^{(o0)}(0) = f_1 + \omega_2^0 \cdot f_5 = f_1 + f_5$$
$$F^{(o0)}(1) = f_1 - \omega_2^0 \cdot f_5 = f_1 - f_5$$
$$F^{(o1)}(0) = f_3 + \omega_2^0 \cdot f_7 = f_3 + f_7$$
$$F^{(o1)}(1) = f_3 - \omega_2^0 \cdot f_7 = f_3 - f_7$$

第2层偶数部分:

$$F^{(2e)}(0)=F^{(e0)}(0)+\omega_4^0\cdot F^{(e1)}(0)=f_0+f_4+f_2+f_6$$
$$F^{(2e)}(2)=F^{(e0)}(0)-\omega_4^0\cdot F^{(e1)}(0)=f_0+f_4-f_2-f_6$$
$$F^{(2e)}(1)=F^{(e0)}(1)+\omega_4^1\cdot F^{(e1)}(1)=f_0-f_4+\omega_4^1(f_2-f_6)$$
$$F^{(2e)}(3)=F^{(e0)}(1)-\omega_4^1\cdot F^{(e1)}(1)=f_0-f_4-\omega_4^1(f_2-f_6)$$

第2层奇数部分:

$$F^{(2o)}(0)=F^{(o0)}(0)+\omega_4^0\cdot F^{(o1)}(0)=f_1+f_5+f_3+f_7$$
$$F^{(2o)}(2)=F^{(o0)}(0)-\omega_4^0\cdot F^{(o1)}(0)=f_1+f_5-f_3-f_7$$
$$F^{(2o)}(1)=F^{(o0)}(1)+\omega_4^1\cdot F^{(o1)}(1)=f_1-f_5+\omega_4^1(f_3-f_7)$$
$$F^{(2o)}(3)=F^{(e0)}(1)-\omega_4^1\cdot F^{(e1)}(1)=f_1-f_5-\omega_4^1(f_3-f_7)$$

第3层（1组8个点的运算）：

$$F_0=F^{(2e)}(0)+\omega_8^0\cdot F^{(2o)}(0)=f_0+f_4+f_2+f_6+f_1+f_5+f_3+f_7$$
$$F_1=F^{(2e)}(1)+\omega_8^1\cdot F^{(2o)}(1)=f_0-f_4+\omega_4^1\cdot(f_2+f_6)+\omega_8^1\cdot(f_1-f_5+\omega_4^1\cdot(f_3-f_7))$$
$$F_2=F^{(2e)}(2)+\omega_8^2\cdot F^{(2o)}(2)=f_0+f_4-f_2-f_6+\omega_4^1\cdot(f_1+f_5-f_3-f_7)$$
$$F_3=F^{(2e)}(3)+\omega_8^3\cdot F^{(2o)}(3)=f_0-f_4-\omega_4^1\cdot(f_2-f_6)+\omega_8^3\cdot(f_1-f_5-\omega_4^1\cdot(f_3-f_7))$$

$$F_4=F^{(2e)}(0)-\omega_8^0\cdot F^{(2o)}(0)=f_0+f_4+f_2+f_6-f_1-f_5-f_3-f_7$$
$$F_5=F^{(2e)}(1)-\omega_8^1\cdot F^{(2o)}(1)=f_0-f_4+\omega_4^1\cdot(f_2+f_6)-\omega_8^1\cdot(f_1-f_5+\omega_4^1\cdot(f_3-f_7))$$
$$F_6=F^{(2e)}(2)-\omega_8^2\cdot F^{(2o)}(2)=f_0+f_4-f_2-f_6-\omega_4^1\cdot(f_1+f_5-f_3-f_7)$$
$$F_3=F^{(2e)}(3)-\omega_8^3\cdot F^{(2o)}(3)=f_0-f_4-\omega_4^1\cdot(f_2-f_6)-\omega_8^3\cdot(f_1-f_5-\omega_4^1\cdot(f_3-f_7))$$

对函数: $f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7$

按照定义，可得其Fourier变换为:

$$F(\mu)=\sum_{x=0}^{7}f(x)w_8^{\mu x}$$

下面，我们以F3为例验证结果是否正确:

$$F_3=F(3)=\sum_{x=0}^{7}f(x)\cdot\omega_8^{3x}$$
$$=f_0\cdot\omega_8^{0\cdot3}+f_1\cdot\omega_8^{1\cdot3}+f_2\cdot\omega_8^{2\cdot3}+f_3\cdot\omega_8^{3\cdot3}+f_4\cdot\omega_8^{4\cdot3}+f_5\cdot\omega_8^{5\cdot3}+f_6\cdot\omega_8^{6\cdot3}+f_7\cdot\omega_8^{7\cdot3}$$

$$F_3=F^{(2e)}(3)+\omega_8^3\cdot F^{(2o)}(3)=f_0-f_4-\omega_4^1\cdot(f_2-f_6)+\omega_8^3\cdot(f_1-f_5-\omega_4^1\cdot(f_3-f_7))$$
$$=f_0-f_4-\omega_8^2\cdot f_2+\omega_8^2\cdot f_6+\omega_8^3\cdot f_1-\omega_8^3\cdot f_5-\omega_8^5\cdot f_3+\omega_8^5\cdot f_7$$
$$=f_0\cdot\omega_8^0+f_4\cdot\omega_8^4\cdot\omega_8^8+f_2\cdot\omega_8^4\cdot\omega_8^2+f_6\cdot\omega_8^{16}\cdot\omega_8^2+f_1\cdot\omega_8^{1\cdot3}+f_5\cdot\omega_8^8\cdot\omega_8^4\cdot\omega_8^3+f_3\cdot\omega_8^4\cdot\omega_8^5+f_7\cdot\omega_8^{16}\cdot\omega_8^5$$
$$=f_0\cdot\omega_8^{0\cdot3}+f_1\cdot\omega_8^{1\cdot3}+f_2\cdot\omega_8^{2\cdot3}+f_3\cdot\omega_8^{3\cdot3}+f_4\cdot\omega_8^{4\cdot3}+f_5\cdot\omega_8^{5\cdot3}+f_6\cdot\omega_8^{6\cdot3}+f_7\cdot\omega_8^{7\cdot3}$$