4.5 准静态电磁场

- 准静态电磁场的基本方程及其特性
- 典型的电准静态场（**Electroquasistatic field, EQS**） 问题—导电媒质中的电荷弛豫现象
- 典型磁准静态**(Magnetoquasistatic field, MQS)** 的场问题—集肤效应与透入深度

准静态电磁场定义

对于低频电磁场，基于工程分析的观点，可忽略麦克斯韦方程组中的 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 或 $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 的作用，以简化分析计算，称为准静态电磁场，它具有静态场的某些特征。

动态(时变)电磁场
- 准静态电磁场
  - 忽略感应电场 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ —— 电准静态场
  - 忽略位移电流 $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ —— 磁准静态场
- 动态电磁场

➤ 无论电准静态场，还是磁准静态场，都是时变场，场量不仅是位置坐标的函数，同时也是时间的函数。

4.5.1 电准静态场和磁准静态场

1. 电准静态场（Electroquasistatic field, EQS）

(1) 电准静态场条件

时变电场由电荷和变化的磁场产生。

$$\nabla\times\vec{E}_i=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\text{感应电场}$$

$$\vec{E}_i<<\vec{E}_q$$

感应电场远小于库仑电场时，可忽略 $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$，称为电准静态场（**EQS**）

电力传输系统和装置中的高压电场、各种常用电子器件和设备附近的电场，为电准静态场。

(2) EQS基本方程

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{\mathrm{c}}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\cancel{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

$$\Longrightarrow$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{\mathrm{c}}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

磁场

$$\nabla\times\vec{E}\approx 0$$

电场

$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

电准静态场与静态电场相同，也是有源无旋场。两种场的计算方法相同。

电场的计算独立于磁场，而磁场的计算则需考虑变化电场的影响。先计算电场，然后再计算磁场。

(3) 导出关系

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad \Longleftarrow \quad \nabla\times\vec{E}\approx 0$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla\bullet\vec{J}_c = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$ 电荷守恒定律

附录二：$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H}) = 0$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\bullet\vec{D} = \rho$$

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right) = \nabla\cdot\vec{J}_c + \nabla\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$$

(4) 场量积分关系 （了解）

$$\vec{E}_q(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r},t)}{R^2}\vec{e}_R\mathrm{d}V'$$

与静电场表达式一致

（P55，式2-18）

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\left(\vec{J}_{\mathrm{c}}(\vec{r},t)+\dfrac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}\right)\times\vec{e}_R}{R^2}\mathrm{d}V'$$

与恒定磁场表达式

P147，式3-34

此时仅仅不考虑磁场对电场的影响，而没有忽略变化电场对磁场的影响。

2. 磁准静态场(Magnetoquasistatic field, MQS)

(1) 磁准静态场(MQS)条件

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \xrightarrow{\quad} \nabla \times \vec{H} \approx \vec{J}_c$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} << \vec{J}_C$$

位移电流远小于传导电流，可忽略 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$，称为磁准静态场（**MQS**）。

运行于低频（工频）下的各类电磁装置中的磁场问题、涡流问题为磁准静态场。如变压器、电机、电磁测量仪表等。

(2) 基本方程

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_c+\cancel{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}} \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\vec{H}\approx\vec{J}_c$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0 \qquad\qquad \nabla\bullet\vec{B}=0$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=\rho \qquad\qquad \nabla\bullet\vec{D}=\rho$$

磁场

电场

与恒定磁场相同，磁准静态场也是有旋无源场。两种场的计算方法相同。

磁场的计算独立于电场，电场的计算需考虑变化磁场的影响。先计算磁场，然后再计算电场。

（3）导出关系

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

传导电流连续 $\nabla \bullet \vec{J}_c = 0$

$$\nabla \times \vec{H} \approx \vec{J}_c$$

附录二：$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \nabla \cdot \vec{J}_c = 0$$

（4）场量积分关系式（了解）

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_{\mathrm{c}}(\vec{r},t)\times\vec{e}_R}{R^2}\,\mathrm{d}V'$$

$$\vec{E}_{\mathrm{i}}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\left(-\dfrac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\right)\times\vec{e}_R}{R^2}\,\mathrm{d}V'$$

$$\vec{E}=\vec{E}_q(\vec{r},t)+\vec{E}_{\mathrm{i}}(\vec{r},t)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\dfrac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}\vec{e}_R-\dfrac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\times\vec{e}_R}{R^2}\,\mathrm{d}V'$$

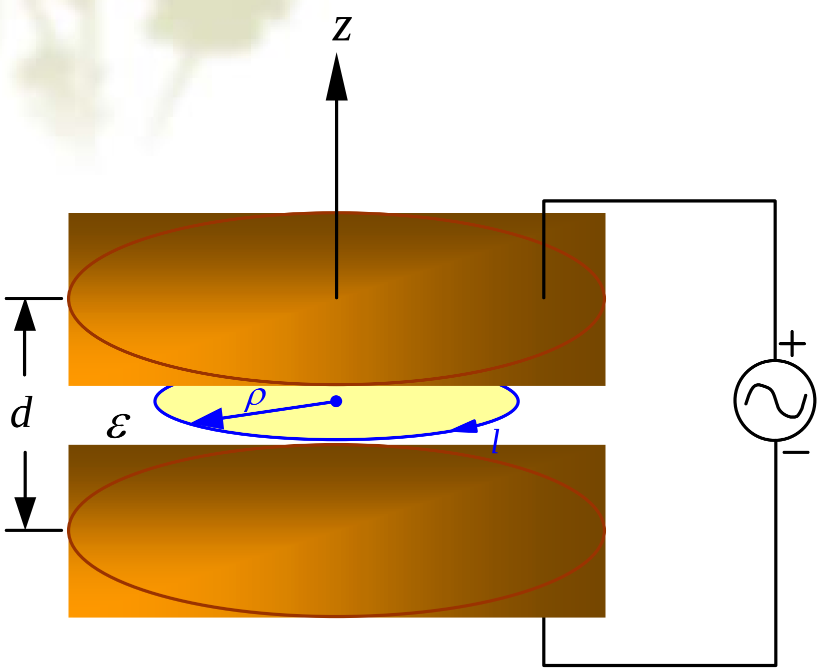
判断MQS，EQS一般原则

存在传导电流，则优先考虑**MQS**

存在电荷（电压），优先考虑**EQS**

例 (书183，例4-1)：工频激励下的平板电容器中的电磁场

d = 0.5cm，ε_r=5.4



$$u(t) = U_m \cos \omega t$$
$$= 110\sqrt{2}\cos(314t)$$

分析： EQS 还是 MQS

已知电压 **+** 无传导电流

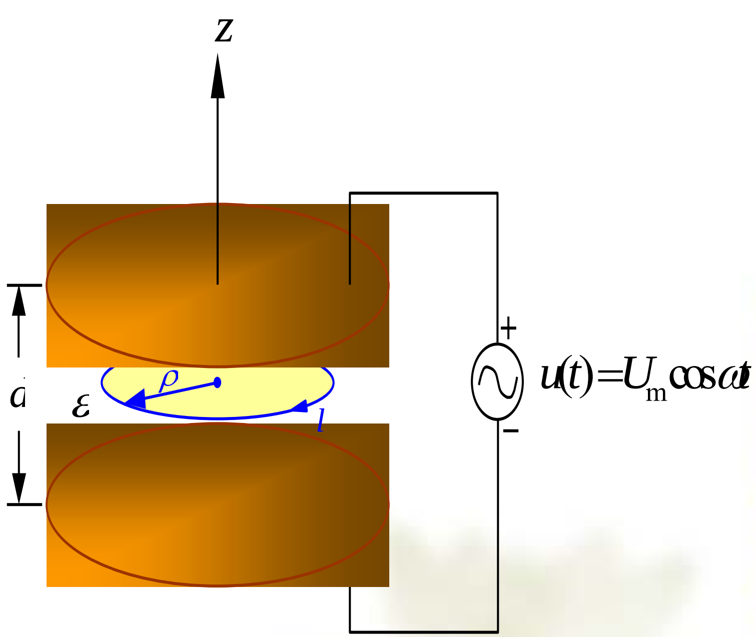
EQS

解：首先计算电场

$$\vec{E}(t)=\frac{u(t)}{d}\left(-\vec{e}_z\right)=\frac{U_\mathrm{m}}{d}\cos\omega t\left(-\vec{e}_z\right)$$

$$=E_\mathrm{m}\cos\omega t\left(-\vec{e}_z\right)$$

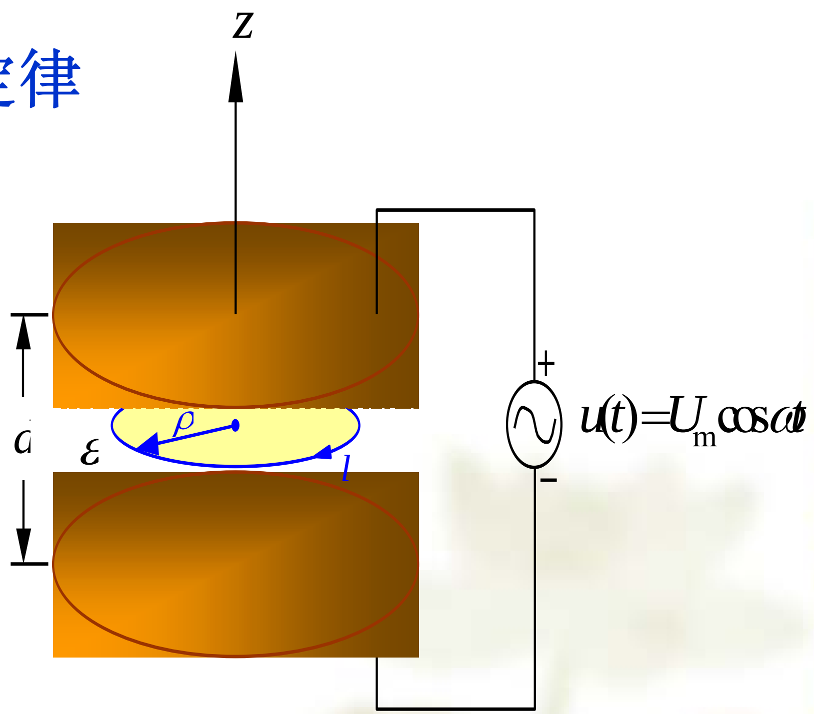
（E_q）



$$u(t)=U_\mathrm{m}\cos\omega t$$

$$\vec{E}(t) = E_{\mathrm{m}} \cos \omega t \left(-\vec{e}_z\right)$$

然后计算磁场---应用安培环路定律



$$\oint_l \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi\rho H_\phi = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \varepsilon\omega E_{\mathrm{m}} \sin \omega t \cdot \pi\rho^2$$

$$\vec{H} = H_\phi \vec{e}_\phi = \frac{\varepsilon\omega\rho}{2} E_{\mathrm{m}} \sin \omega t \, \vec{e}_\phi$$

验证： $E_{\mathrm{i}} << E_q$

$$\vec{E}(t) = E_{\mathrm{m}} \cos \omega t \left(-\vec{e}_z\right) \qquad \vec{H} = H_\phi \vec{e}_\phi = \frac{\varepsilon\omega\rho}{2} E_{\mathrm{m}} \sin \omega t \; \vec{e}_\phi$$

考虑因变化的磁场产生的电场

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial t} \vec{e}_\phi$$

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{e}_\rho \left(\frac{\partial E_z}{\rho \partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\phi \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \vec{e}_z \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial \rho} \vec{e}_\phi = -\mu_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial t} \vec{e}_\phi$$

圆柱坐标系下旋度的表达式

将 H_ϕ 代入对 t 求导，再对 ρ 积分

$$E_z = -\frac{\mu_0 \varepsilon \omega^2 \rho^2}{4} E_{\mathrm{m}} \cos \omega t$$

$$= 4.537 \times 10^{-8} \rho^2 \cos(314t)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ \mathrm{H}/m$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \ \mathrm{F}/m$$

$$E_{\mathrm{i}}(E_z) << E_q(E) = E_{\mathrm{m}} \cos \omega t = 3.11 \times 10^4 \cos(314t)$$

4.5.2 典型的EQS场问题—均匀导电媒质中的电荷弛豫

1. 电荷弛豫过程定义:

导体中自由电荷体密度 ρ 随时间衰减的过程。

2. 导体中电荷满足的物理定律

（1）导体中电流密度与电场强度关系式 $\vec{J}_c = \gamma \vec{E} = \dfrac{\gamma}{\varepsilon}\vec{D}$

（2）麦克斯韦方程 $\nabla \bullet \vec{D} = \rho$

（3）电荷守恒定律 $\nabla \bullet \vec{J}_c = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

3. 导体中电荷满足的微分方程及其解

设导电媒质 γ , ε 均匀，且各向同性，在EQS场中

$$\vec{J}_c = \gamma\vec{E} = \frac{\gamma}{\varepsilon}\vec{D} \qquad \nabla\bullet\vec{D} = \rho$$

$$\downarrow$$

$$\nabla\bullet\vec{J}_c = \frac{\gamma}{\varepsilon}\rho$$

$$\downarrow \quad \nabla\bullet\vec{J}_c = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon}\rho = 0 \longrightarrow \rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau_e}} \xrightarrow[\text{成衰减电流}]{\text{电荷驰豫形}} i \propto e^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

ρ_0为t=0时的电荷分布，$\tau_e=\varepsilon/\gamma$ (秒) 称为弛豫时间。

$$\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_e}} \xrightarrow[\text{成衰减电流}]{\text{电荷驰豫形}} i \propto \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

说明：

➢ $\tau_e=\varepsilon/\gamma$： 一般来说，导体的的介电常数$\varepsilon \approx \varepsilon_0$(8.85×$10^{-12}$)，电导率γ 在10^7 S/m的数量级上，所以 τ_e 非常小(10^{-19})。

➢ 在导体内部，体电荷随时间迅速衰减为0，此衰减过程就是自由电荷的弛豫过程。

➢ 在导体内部，体电荷(电流)很快衰减至零。故由此引起的感应电场可以忽略不计。

↓

EQS

4.5.2 典型的EQS场问题—分块均匀导体中的驰豫过程

分界面上

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q, \longrightarrow D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma$$

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\partial q/\partial t, \longrightarrow J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$J_{1n} = \gamma_1 E_{1n}, \quad J_{2n} = \gamma_2 E_{2n},$$

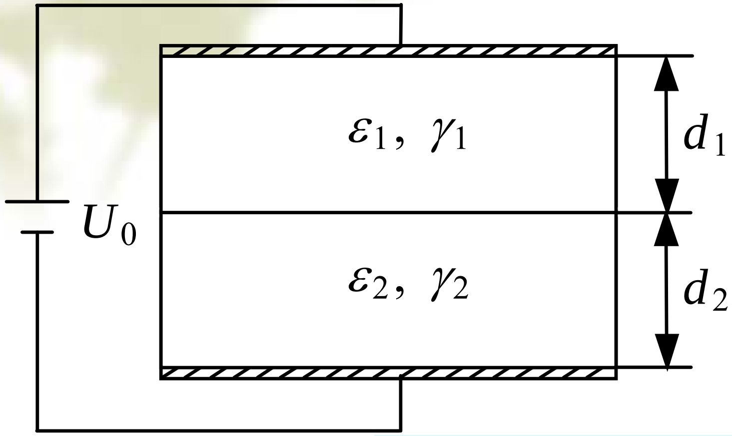
得：

$$(\gamma_2 E_{2n} - \gamma_1 E_{1n}) + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n}) = 0$$

$$\gamma_2 E_{2n} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_2 E_{2n}) = \gamma_1 E_{1n} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_1 E_{1n})$$

在时变电磁场中，位于导电媒质分界面上的全电流密度法向分量连续

例 研究双层有损介质平板电容器接至直流电压源的过渡过程，写出分界面上面电荷密度 σ 的表达式。



解： 分界面衔接条件

$$(\gamma_2 E_2-\gamma_1 E_1)+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_2 E_2-\varepsilon_1 E_1)=0$$

$$d_1 E_1+d_2 E_2=U_0$$

$$\varepsilon_2 E_2-\varepsilon_1 E_1=\sigma$$

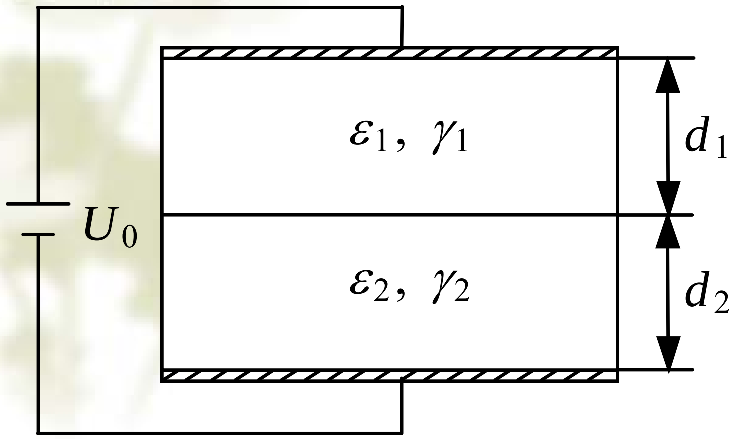
解方程，得

$$E_1(t)=\frac{\gamma_2}{d_1\gamma_2+d_2\gamma_1}U_0(1-e^{-\frac{t}{\tau_e}})+\frac{\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}U_0 e^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

$$E_2(t)=\frac{\gamma_1}{d_1\gamma_2+d_2\gamma_1}U_0(1-e^{-\frac{t}{\tau_e}})+\frac{\varepsilon_1}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}U_0 e^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

$$\sigma=\frac{\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2}{d_1\gamma_2+d_2\gamma_1}U_0(1-e^{-\frac{t}{\tau_e}})$$

$$\tau_e=\frac{\varepsilon_2 d_1+\varepsilon_1 d_2}{d_1\gamma_2+d_2\gamma_1}$$



$$\sigma = \frac{\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2}{d_1\gamma_2 + d_2\gamma_1} U_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}})$$

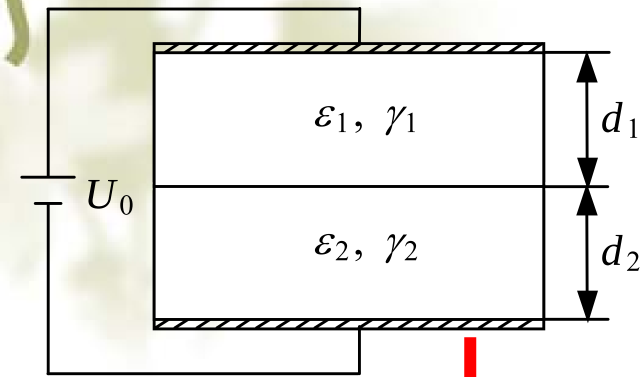
t=0，σ=0；t↑，σ↑；t→∞，σ=const。书P137,例3-2，是σ稳态解。

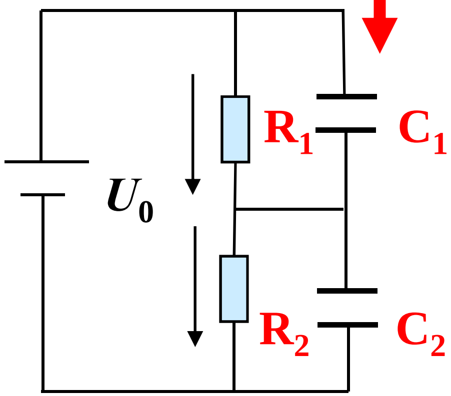
$$\sigma = \frac{\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2}{d_1\gamma_2 + d_2\gamma_1} U_0$$

结论：当导电媒质通电时，电荷的驰豫过程导致分界面有积累的面电荷。

当分界面媒质满足：$\varepsilon_2\gamma_1 = \varepsilon_1\gamma_2$，**σ=0**。

讨论：如何从电路的角度分析？





$$R=\frac{l}{\gamma S},C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

$$\tau_e=\frac{\varepsilon_2 d_1+\varepsilon_1 d_2}{d_1\gamma_2+d_2\gamma_1}$$

$$u_{C1}(0^-)=u_{C2}(0^-)=0$$

$$U_0=u_{C1}(0^+)+u_{C2}(0^+)$$

$$C_2u_{C2}(0^+)-C_1u_{C1}(0^+)=0$$

$$u_{C1}(0^+)=\frac{C_2U_0}{C_1+C_2},\quad u_{C2}(0^+)=\frac{C_1U_0}{C_1+C_2}$$

$$u_{C1}(\infty)=\frac{R_1U_0}{R_1+R_2},\quad u_{C2}(\infty)=\frac{R_2U_0}{R_1+R_2}$$

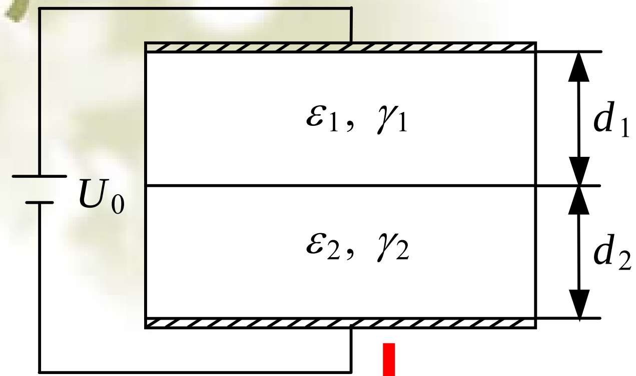
$$\tau=(R_1//R_2)\times(C_1+C_2)$$

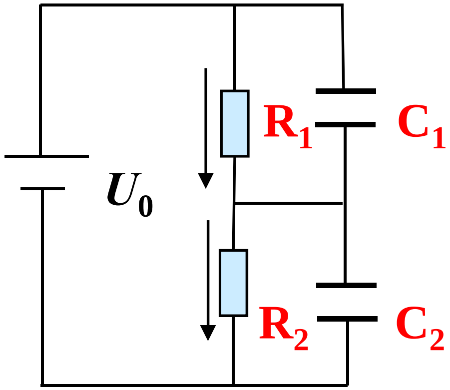
$$u_{C1}(t)=u_{C1}(\infty)+[u_{C1}(0^+)-u_{C1}(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$E_1(t)=u_{C1}(t)/d_1,\quad E_2(t)=u_{C2}(t)/d_2,$$

$$\sigma(t)=\varepsilon_2E_2(t)\text{-}\varepsilon_1E_1(t)$$

讨论：场、路方法的一致性？





$$E_1(t)=\frac{\gamma_2}{d_1\gamma_2+d_2\gamma_1}U_0(1-e^{-\frac{t}{\tau_e}})+\frac{\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}U_0e^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

$$E_2(t)=\frac{\gamma_1}{d_1\gamma_2+d_2\gamma_1}U_0(1-e^{-\frac{t}{\tau_e}})+\frac{\varepsilon_1}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}U_0e^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

$$t=0^+ \qquad E_1(0^+)=\frac{\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}U_0$$

$$u_1(0^+)=E_1(0^+)d_1=\frac{\varepsilon_2 d_1}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}U_0$$

$$=\frac{\varepsilon_2/d_2}{\varepsilon_1/d_1+\varepsilon_2/d_2}U_0=\frac{C_2}{C_1+C_2}U_0$$

同理， $u_2(0^+)=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}U_0$

$$u_1(\infty)=\frac{R_1}{R_1+R_2}U_0 \qquad u_2(\infty)=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_0$$

4.5.4 典型MQS的场问题—集肤效应与透入深度

1. 极低频交变电流的工况

观察瞬间可看作直流电流的恒定场效应——准静态电流场

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\mathrm{c}} \qquad \nabla \times \vec{E} \approx 0$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \qquad \nabla \bullet \vec{D} = 0$$

可采用恒定电流场的计算方法求解准静态电流场的问题。

2. 低频或高频交变电流（时变场）的工况

当 $J_c = \gamma E >> J_D = \omega D = \omega\varepsilon E$

$\gamma >> \omega\varepsilon$ ——良导体条件

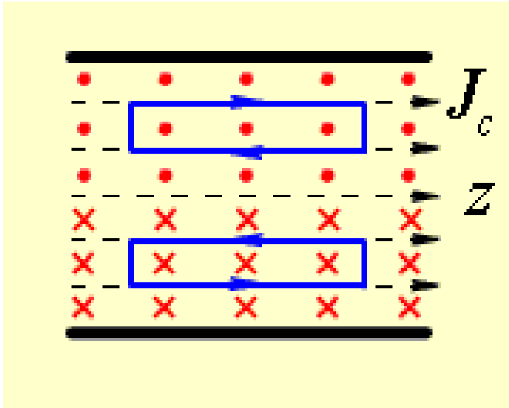
此时可以忽略位移电流的作用– **MQS场**

➢一般，介电常数 $\varepsilon=8.85\times10^{-12}$，电导率γ 在$10^7$ **S/m**，所以，交流电流频率**f<10^{10}Hz**以下时，$J_c >> J_D$ 恒成立。

3. 低频或高频交变电流工况的方程

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_c \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\bullet\vec{B}=0 \qquad \nabla\bullet\vec{D}=0$$



集肤效应的产生

这类MQS问题的特点：

导体内因传导电流的磁场所激励的感应电场与传导电流的电场相比，已不能忽略。从而导致场量主要分布于导体表面的现象—趋（集）肤效应 **(Skin Effect)**。

4. 导电媒质中MQS场的基本方程

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_c=\gamma\vec{E}\\ \nabla\bullet\vec{B}=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\bullet\vec{D}=0\end{cases}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad\rightarrow\quad \nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)$$

$$\downarrow\ \nabla\times\vec{H}=\gamma\vec{E}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

附录二方程 $\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\overset{0}{\nabla(\nabla\bullet\vec{E})}-\nabla^2\vec{E}\ \downarrow\ \nabla\bullet\vec{D}=\nabla(\varepsilon\nabla\bullet\vec{E})=0$

得电磁场的扩散方程

$$\nabla^2\vec{E}=\mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\vec{H}=\mu\gamma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

5. 基本方程的相量形式

正弦稳态下，电磁场扩散方程的相量形式(复数形式)为：

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma\dot{\vec{E}} = p^2\dot{\vec{E}}$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma\dot{\vec{H}} = p^2\dot{\vec{H}}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

定义

$$p = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\gamma}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}(1+\mathrm{j}) = \frac{1}{d}(1+\mathrm{j})$$

$$\sqrt{\mathrm{j}} = e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j})$$

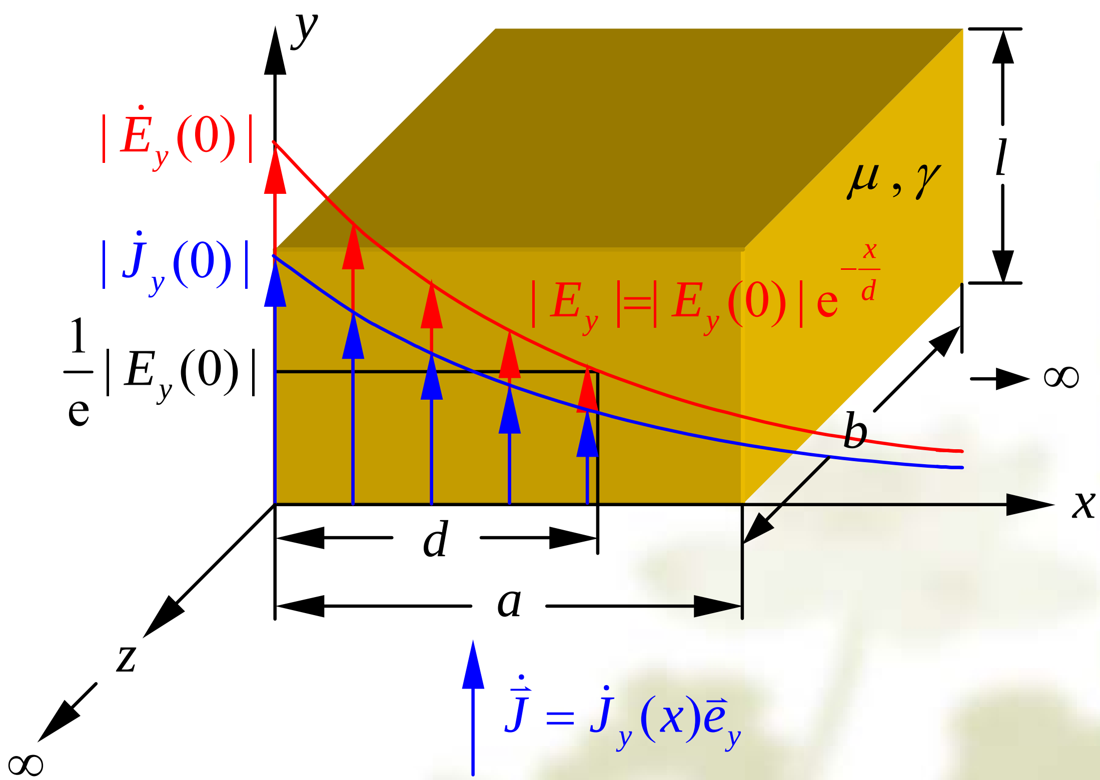
$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

$$\mathrm{j} = e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

6. 半无限大平表面导体中电的趋肤效应、透入深度

设：半无限大导体位于**x>0**的平面上，高频正弦电流沿**y**方向流动。

$$\vec{J}=\vec{J}_y(x)\vec{e}_y$$



可得：

$$\vec{E}=\vec{E}_y(x)\vec{e}_y$$

$$\nabla\times\vec{H}=\gamma\vec{E}\Longrightarrow\vec{H}=\vec{H}_z(x)\vec{e}_z$$

$$\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

表征为一维场 $\dot{E}_y$ $\dot{H}_z$ $\dot{J}_y$ 仅为坐标 ***x*** 的函数

基本方程归结为：

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma \dot{\vec{E}} = p^2 \dot{\vec{E}}$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma \dot{\vec{H}} = p^2 \dot{\vec{H}}$$

$$\nabla^2 \dot{E}_y = p^2 \dot{E}_y \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 \dot{E}_y}{\mathrm{d}x^2} = p^2 \dot{E}_y$$

通解为： $$\dot{E}_y = C_1 \mathrm{e}^{-px} + C_2 \mathrm{e}^{px}$$

$x \to \infty$ ***E***为有限值 $\longrightarrow C_2 = 0$

$$\dot{E}_y\Big|_{x=0} = \dot{E}_y(0) \longrightarrow C_1 = \dot{E}_y(0)$$

$$\dot{E}_y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-px} = \dot{E}_y(0) \mathrm{e}^{-px}$$

$$\dot{E}_y(x)=C_1\mathrm{e}^{-px}=\dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-px}$$

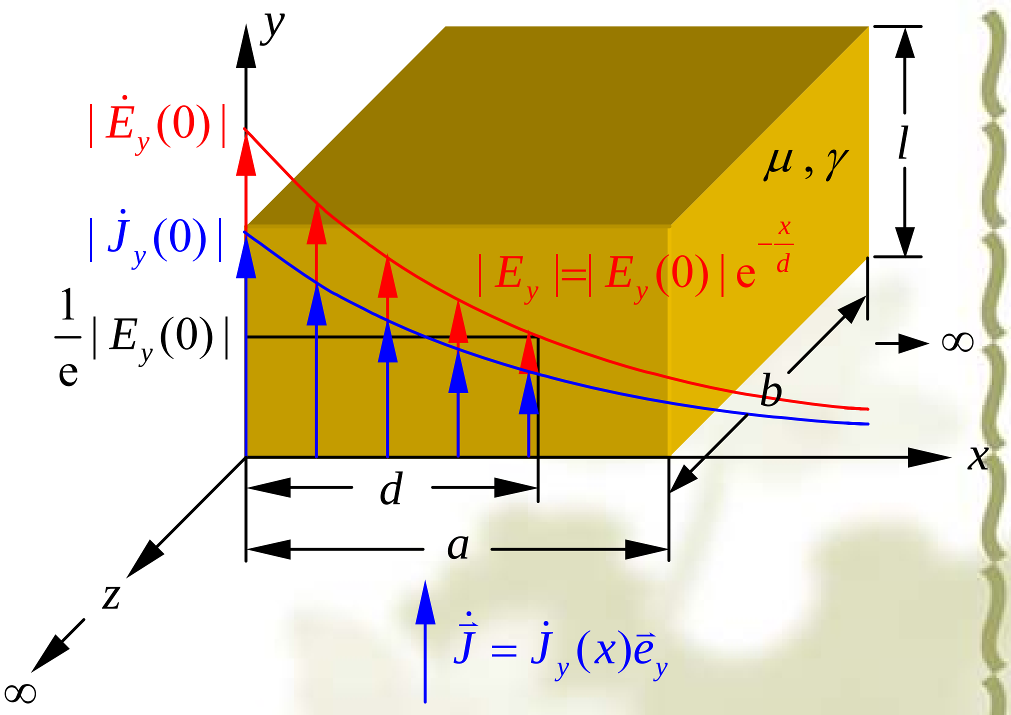
$$p=\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}(1+\mathrm{j})=\frac{1}{d}(1+\mathrm{j})$$

$$d=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

$$\dot{E}_y(x)=\dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{d}(1+\mathrm{j})x}=\dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{x}{d}}$$

$\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$ 表示衰减因子，当 $x=d$时，有：

$$\left|\dot{E}_y\right|=\frac{\left|\dot{E}_y(0)\right|}{e}$$

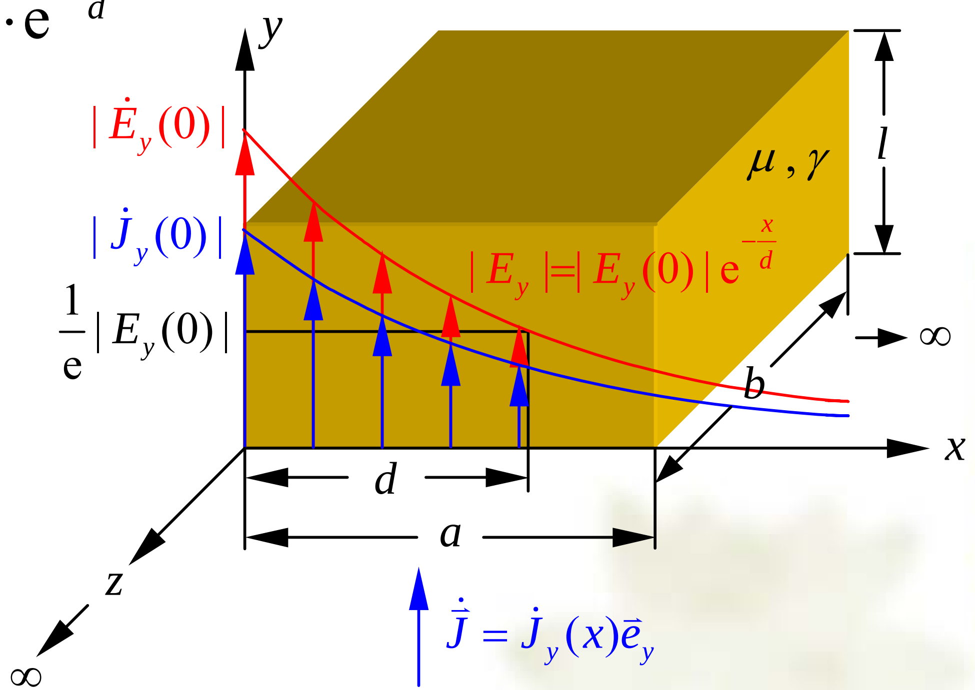


d 表征了场量衰减到表面值 $\frac{1}{e}$(36.8%)时所对应的距离.

$$\dot{E}_y = \dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{d}(1+\mathrm{j})x} = \dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{x}{d}}$$

工程上，为表征电的趋肤效应，即沿导体纵深方向场量衰减的特征，定义

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}}$$ 透入深度



其大小反映电磁场衰减的快慢。***d*** 越小，场量衰减越快，工程上认为：x**=(3~5)**d**,** 场量近似衰减为**0**。

$\mathrm{e}^{-j\frac{x}{d}}$ 表示电磁场场量在扩散过程中的相位变化。

$$\dot{E}_y = \dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{d}(1+\mathrm{j})x} = \dot{E}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{x}{d}}$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma\dot{\vec{E}} = p^2\dot{\vec{E}}$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma\dot{\vec{H}} = p^2\dot{\vec{H}}$$

同理

$$\dot{J}_y(x) = \gamma\dot{E}_y = \dot{J}_y(0)\mathrm{e}^{-px} = \dot{J}_y(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{x}{d}}$$

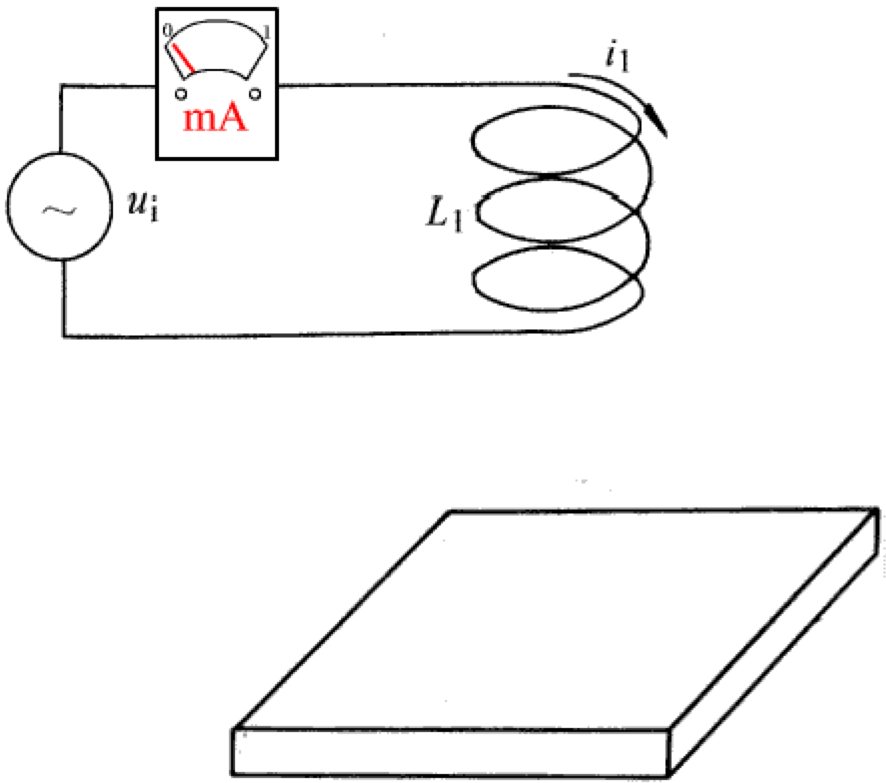
$$\nabla \times \vec{H} = \gamma\vec{E} \Longrightarrow \vec{H} = \vec{H}_z(x)\vec{e}_z$$

$$\dot{H}_z(x) = \dot{H}_z(0)\mathrm{e}^{-px} = \dot{H}_z(0)\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{x}{d}}$$

涡流及其损耗

1. 涡流

金属导体置于交变的磁场中时，导体的表面就会有感应电流产生。电流的流线在金属体内自行闭合，这种由电磁感应原理产生的漩涡状感应电流称为涡流(eddy current)。



涡流及其损耗

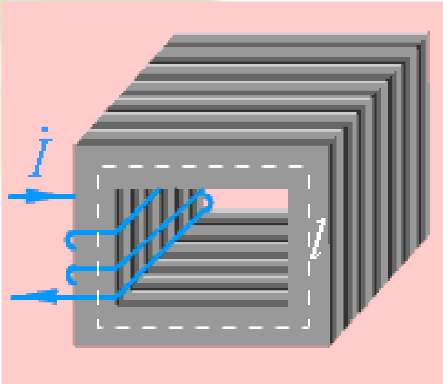
2. 涡流特点：

- 热效应　涡流是自由电子的定向运动，有与传导电流相同的热效应。
- 去磁效应，涡流产生的磁场反对原磁场的变化。

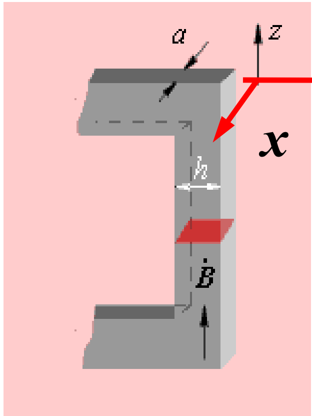
工程应用：叠片铁芯（电机、变压器、电抗器等）、电磁屏蔽、电磁炉等。

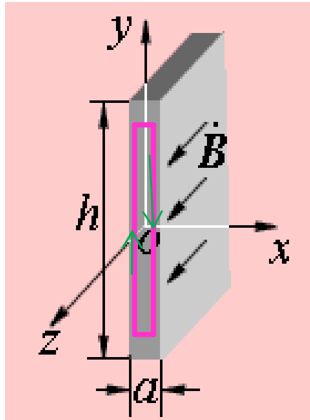
3. 涡流场分布

以变压器铁芯叠片为例，研究涡流场分布。



变压器铁芯叠片



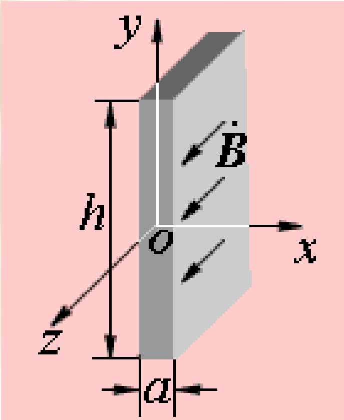


薄导电平板

假设：1） $l, h >> a$ ，场量仅是 x 的函数；

2） $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$，故 $\vec{E}, \vec{J}$ 分布在xoy平面，且仅有y 分量；

3）磁场呈 y 轴对称，且 x=0 时，B_z=B_0 。



薄导电平板的磁场

在MQS场中，磁场满足涡流场方程（扩散方程）

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = p^2 \dot{\vec{H}} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} = j\omega\mu\gamma \dot{H}_z = p^2 \dot{H}_z$$

解方程，代入假设条件，可以得到

$$\dot{H}_Z = \dot{B}_0 \,\mathbf{cosh}(px) / \mu$$

$$\dot{B}_z = \dot{B}_0 \,\mathbf{cosh}(px)$$

$$\dot{J}_y = \dot{J}_0 \,\mathbf{sinh}(px)$$

$\dot{B}_z$ 和 $\dot{J}_y$ 的幅值分别为

$$B_z = |\dot{B}_0| \left[\frac{1}{2}(\cos h(2Kx) + \cos(2Kx))\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$J_y = |\dot{J}_0| \left[\frac{1}{2}(\cos h(2Kx) - \cos(2Kx))\right]^{\frac{1}{2}}$$

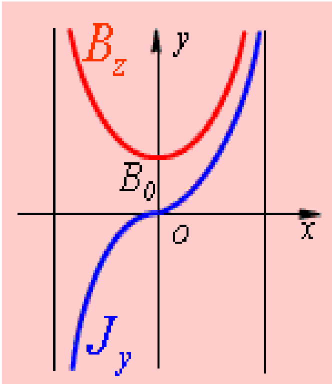
式中 $K=\sqrt{\omega\mu\gamma/2}$

可见

- 去磁效应，薄板中心处磁场最小；
- 集肤效应，电流密度奇对称于y 轴，

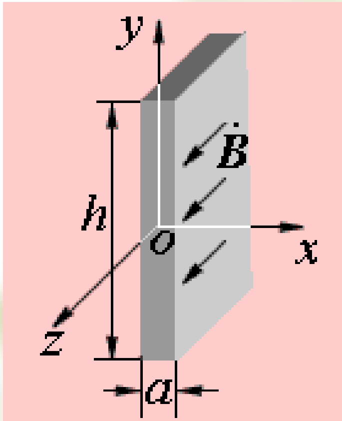
表面密度大，中心处 $J_y = 0$ 。

电磁能量由外到里逐渐衰减，呈现集肤效应



B_z, J_y

模值分布曲线



薄导电平板的磁场

4. 涡流损耗

体积V中导体损耗的平均功率为

$$P_e = \int_V \frac{|\dot{j}_y|^2}{\gamma} dV = B_{zav}^2 \cdot lh \cdot \frac{\omega K a^2}{2\mu} \frac{shKa - \sin Ka}{chKa - \cos Ka}$$

当频率较低时，消耗在铁心薄钢片中的涡流损耗为：

$$P_e = \frac{1}{12}\gamma\omega^2 a^2 V B_{zav}^2$$

$P_e \propto a, \gamma, \omega$。 若要减少 $\boldsymbol{P_e}$ ，必须减小 γ（采用硅钢），减小 $\boldsymbol{a}$（采用叠片），

研究涡流问题具有实际意义（高频淬火、涡流的热效应电磁屏蔽等）。

5. 导体的交流内阻抗

直流或低频交流 → 电流均匀分布 → $R = \dfrac{l}{\gamma S}$

高频交流 → 集肤、去磁效应 → 电流不均匀分布

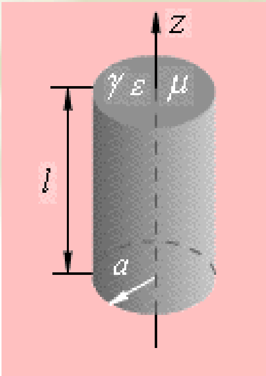
$$\rightarrow Z = -\frac{1}{I^2}\oint_S (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = R + \mathrm{j}X$$

$$R = -\frac{1}{I^2}\oint_S \left[\mathbf{Re}(\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*)\right] \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$X = -\frac{1}{I^2}\oint_S \left[\mathbf{Im}(\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*)\right] \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

例 计算圆柱导体的交流阻抗参数（设透入深度 $d \ll a$ ）

解：在 MQS 场中，



圆柱导体

$$\oint_L \dot{\vec{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \dot{I} \rightarrow \nabla \times \dot{\vec{H}} = \vec{J}_c = \gamma \dot{\vec{E}}$$

$$\rightarrow \tilde{\vec{S}} = \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \rightarrow Z$$

$d \ll a$ ，无反射，电流不均匀分布，设

$$\dot{J}_y(x) = \dot{J}_y(0)\mathrm{e}^{-px}$$

$$p = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}(1+\mathrm{j})$$

$$\dot{I} = I_0 \mathrm{e}^{-p(a-\rho)}$$

安培环路定律

$$\dot{\vec{H}} = \frac{\dot{I}}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi = \frac{I_0}{2\pi\rho}\mathrm{e}^{-p(a-\rho)}\vec{e}_\phi$$

$$\dot{\vec{H}} = \frac{\dot{I}}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi = \frac{I_0}{2\pi\,\rho}\mathrm{e}^{-p(a-\rho)}\vec{e}_\phi$$

根据 $\nabla\times\dot{\vec{\mathbf{H}}}=\gamma\dot{E}_z\vec{\mathbf{e}}_z$ 有

$$\dot{E}_z = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\,\dot{H}_\phi)\right] = \frac{p}{\gamma}\dot{H}_\phi = \frac{I_0 p}{2\pi\gamma\rho}\mathrm{e}^{-p(a-\rho)} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}(1+\mathrm{j})\dot{H}_\phi$$

$$Z = -\frac{1}{I^2}\oint_S(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{I_0^{\,2}}\oint_S\left[(\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}(1+\mathrm{j})\dot{H}_\phi\dot{H}_\phi^{\,*}\right]\mathrm{d}S$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\frac{l}{2\pi a}(1+\mathrm{j})$$

$$R = X = \frac{l}{2\pi a}\sqrt{\frac{\omega\,\mu}{2\gamma}}\ ,\quad L = \frac{l}{2\pi a}\sqrt{\frac{\mu}{2\omega\,\gamma}}$$

讨论：

$$R = X = \frac{l}{2\pi a}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}$$

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

1. 交流电阻*R* 随 ω的增加而增大

$$R = \frac{l}{\pi a}\frac{a\gamma}{a\gamma}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} = \frac{l}{\pi a^2\gamma}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = R_{直}\cdot\frac{a}{2d}$$

由于 $d \ll a$ ，故 $R > R_{直}$ ，且随 ω 的增加而增大，这是集肤效应的结果。

$$L = \frac{l}{2\pi a}\sqrt{\frac{\mu}{2\gamma\omega}}$$

2. 自感 L 随 ω 的增加而减小

$$L = \frac{l}{\pi}\cdot\frac{8\mu}{8\mu}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}a}\sqrt{\frac{\mu}{\omega\gamma}} = \frac{\mu l}{8\pi}\cdot\frac{2}{a}\cdot\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = L_{直}\cdot\frac{2d}{a}$$

由于$d << a$ ，故 $L< L_{直}$，且随 ω 的增加而减小，这是去磁效应的结果。

作业：**4-7**

写出maxwell基本方程的积分形式和微分形式，并阐述其名称和物理意义。

1. 积分形式

$$\oint_l \vec{H} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_c + \vec{J}_v + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \sum q$$

2. 微分形式

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \left.\begin{matrix} \vec{J}_c \\ \vec{J}_v \end{matrix}\right\} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ 全电流定律

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ 电磁感应定律

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$ 磁通连续性原理

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$ 电场中的高斯定理

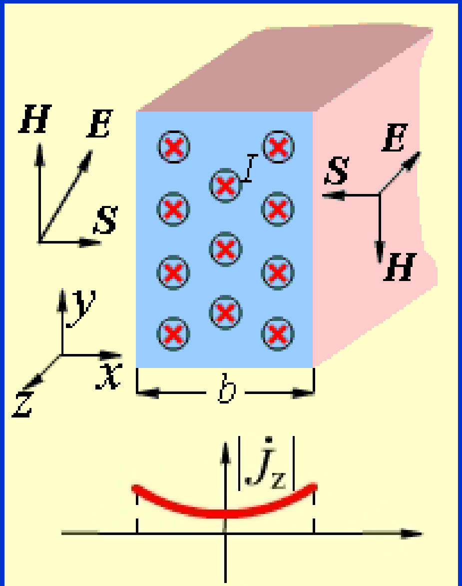
四个方程所反映的物理意义：

- 全电流定律：麦克斯韦第一方程, 表明传导电流和变化的电场都能产生磁场；
- 电磁感应定律：麦克斯韦第二方程, 表明电荷和变化的磁场都能产生电场；磁
- 通连续性原理：表明磁场是无源场, 磁力线总是闭合曲线；
- 高斯定律：表明电荷以发散的方式产生电场(变化的磁场以涡旋的形式产生电场)。

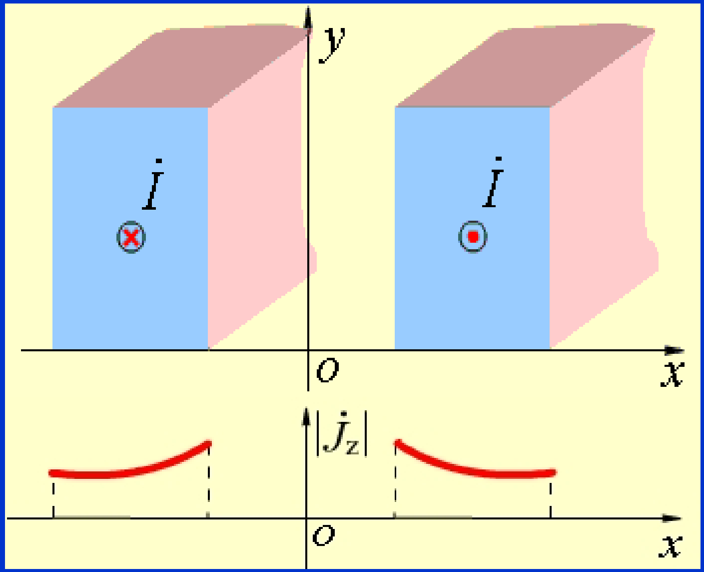
邻近效应（Proximate Effect）

靠近的导体通交变电流时，所产生的相互影响，称为邻近效应。

频率越高，导体靠得越近，邻近效应愈显著。邻近效应与集肤效应共存，它会使导体的电流分布更不均匀。



单根交流汇流排的集肤效应



两根交流汇流排的邻近效应

电磁兼容简介

电磁兼容是在有限空间、时间、频谱资源条件下，各种用电设备（生物）可以共存，不会引起降级的一门科学。即电磁干扰与抗电磁干扰问题。

电磁干扰源

人为干扰源

- 电力传输系统
- 电牵引系统
- 气体放电灯
- 静电放电
- 通信系统
- 核电脉冲

自然干扰源

雷电、太阳黑子、磁暴、沙暴、地球磁场等。

高压传输线绝缘子的电晕放电；高压传输线中电流与电压的谐波分量；高压传输线之间的邻近效应……

电力电子器件整流后的电流谐波分量（*0.1~150* kHz）；

测……

抗电磁干扰的两个主要措施：接地、<u>电磁屏蔽</u>。

接 地

- **保护接地**

在金属体与大地之间建立低阻抗电路。 如设备外壳接地，建筑体安装避雷针等，使雷电、过电流、漏电流等直接引入大地。

- **工作接地**

系统内部带电体接参考点（不一定与大地相连）。如每一楼层的参考点，仪器的“机壳接地”、高压带电操作等。以保证设备、系统内部的电磁兼容。

电磁屏蔽　在高频下，利用电磁波在良导体中很快衰减的原理，选择 d 小且具有一定厚度 $(h \doteq 2\pi d)$ 的金属（非铁磁）材料。

电屏蔽　在任何频率下，利用电力线总是走电阻小的路径的原理，采用金属屏蔽材料，且接地。

磁屏蔽　在低频或恒定磁场中，利用磁通总是走磁阻小的路径的原理，采用有一定厚度的铁磁材料。

应当避免屏蔽的谐振现象　当电磁波频率与屏蔽体固有频率相等时，发生谐振，使屏蔽效能急剧下降，甚至加强原电磁场。