第5章 动态电磁场II：
电磁辐射与电磁波 （PartII)

- 有损媒质中的均匀平面波（了解）
- 均匀平面波对于平表面媒质的正入射

5.5 有损媒质中的均匀平面波

有损媒质(导电媒质)：实际的导体和电介质（实际的电介质中存在极化损耗，导体中存在能量损耗）。

1. 基本方程 ——与无损媒质形式一样（时谐电磁场）

$$\nabla \times \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon \dot{\vec{E}} = \mathrm{j}\omega(\varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega}) = \mathrm{j}\omega\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{e}}\dot{\vec{E}}$$

考虑极化损耗和欧姆损耗

$$\nabla \times \dot{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu\dot{\vec{H}}$$

忽略磁化损耗

$$\nabla \bullet \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\nabla \bullet \dot{\vec{D}} = 0$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{e}} = \varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega}$$

理想介质

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}$$
$$\nabla\times\dot{\vec{E}}=-\mathrm{j}\omega\mu\dot{\vec{H}}$$
$$\nabla\bullet\dot{\vec{B}}=0$$
$$\nabla\bullet\dot{\vec{D}}=0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\nabla^2\dot{\vec{E}}+k^2\dot{\vec{E}}=0$$
$$\nabla^2\dot{\vec{H}}+k^2\dot{\vec{H}}=0$$
$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

波动方程

有损媒质

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}=\gamma\dot{\vec{E}}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}=\mathrm{j}\omega\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{e}}\dot{\vec{E}}$$
$$\nabla\times\dot{\vec{E}}=-\mathrm{j}\omega\mu\dot{\vec{H}}$$
$$\nabla\bullet\dot{\vec{B}}=0$$
$$\nabla\bullet\dot{\vec{D}}=0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\nabla^2\dot{\vec{E}}+k_{\mathrm{e}}^2\dot{\vec{E}}=0$$
$$\nabla^2\dot{\vec{H}}+k_{\mathrm{e}}^2\dot{\vec{H}}=0$$
$$k_{\mathrm{e}}^2=\omega^2\mu\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{e}}$$

得，有损媒质的波动方程：

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k_e^2 \dot{\vec{E}} = 0$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + k_e^2 \dot{\vec{H}} = 0$$

有衰减的波动方程(电报方程)

$$k_e^2 = \omega^2 \mu \tilde{\varepsilon}_e$$

$\boldsymbol{k_e}$——有损媒质的传播系数，为一复数。

$$k_e = \omega\sqrt{\mu\tilde{\varepsilon}_e} = \omega\sqrt{\mu(\varepsilon - \mathrm{j}\frac{\gamma}{\omega})} = k'(\omega) - jk''(\omega)$$

$$k' = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)} \qquad k'' = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right)}$$

同样，类比理想介质，可解得

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k_{\mathrm{e}}^2 \dot{\vec{E}} = 0$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + k_{\mathrm{e}}^2 \dot{\vec{H}} = 0$$

$$\vec{E} = E_x(z\,, t)\vec{e}_x$$

$$\dot{E}_x(z) = \dot{E}_{x0}^{+} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{e}}z}$$

$$\dot{H}_y(z) = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{\eta_{\mathrm{e}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{e}}z}$$

$$\eta_{\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{e}}}}$$

η_{e}——有损媒质的波阻抗, 也是复数。

$$k_e = k'(\omega) - jk''(\omega)$$

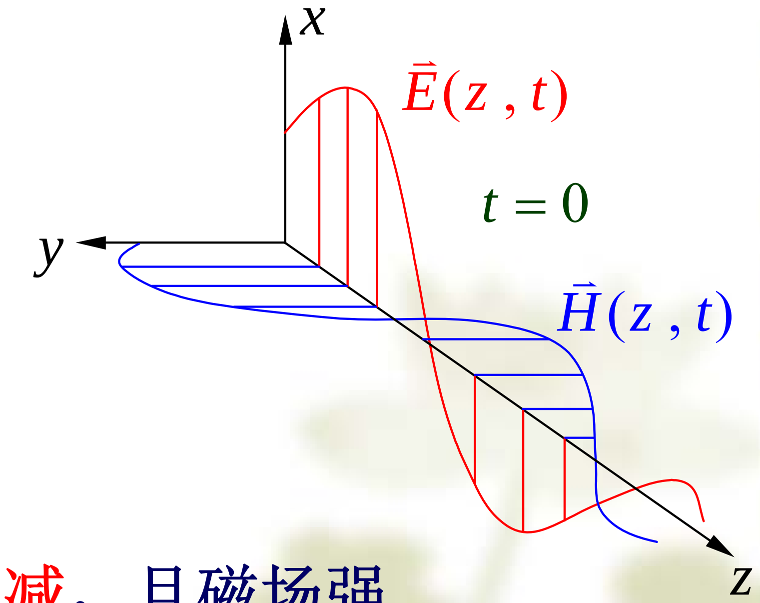
$$\eta_e = |\eta_e| e^{j\theta}$$

$$\dot{E}_x(z) = \dot{E}_{x0}^{+} e^{-jk_e z}$$

$$\dot{H}_y(z) = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{\eta_e} e^{-jk_e z}$$

$$\dot{E}_x = \dot{E}_x^{+} = \dot{E}_{x0}^{+} e^{-k''(\omega)z} e^{-jk'(\omega)z}$$

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{|\eta_e|} e^{-k''(\omega)z} e^{-j[k'(\omega)z+\theta]}$$



可见，电场、磁场的振幅不断衰减，且磁场强度与电场强度的相位不同。

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0}^{+} e^{-k''(\omega)z} e^{-jk'(\omega)z}$$

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{|\eta_e|} e^{-k''(\omega)z} e^{-j[k'(\omega)z+\theta]}$$

k' 称为相位常数，单位为rad/m；

k'' 称为衰减常数，单位为Np/m，

$\boldsymbol{k_e}$ 称为传播常数。

因为电场强度与磁场强度的相位不同，复能流密度的实部及虚部均不会为零，这就意味着平面波在导电媒质中传播时，既有单向流动的传播能量，又有来回流动的交换能量。

导电媒质中的波速（相速）为

$$v=\frac{\omega}{k'}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}}\qquad \lambda=\frac{2\pi}{k'}$$

表明，相速不仅与媒质参数有关，而且还与频率有关。

波长不仅与媒质特性有关，而且与频率的关系是非线性的。

各个频率分量的电磁波以不同的相速传播，经过一段距离后，各个频率分量之间的相位关系将发生变化，导致信号失真，这种现象称为色散。所以导电媒质又称为色散媒质。

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0}^{+} e^{-k''(\omega)z} e^{-jk'(\omega)z}$$

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{|\eta_e|} e^{-k''(\omega)z} e^{-j[k'(\omega)z+\theta]}$$

2. 特性描述：

类比于无界空间中理想介质中的均匀平面波，其异同点为

(1) 相同点：

i $\vec{E} \perp \vec{H}$ **TEM波**

ii $z = c$ 等相位面与等幅面一致的特征；

iii 线极化波

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0}^{+} e^{-k''(\omega)z} e^{-jk'(\omega)z}$$

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{|\eta_e|} e^{-k''(\omega)z} e^{-j[k'(\omega)z+\theta]}$$

(2) 相异点：

i $\vec{E}$、$\vec{H}$时间上不同相（ $\dot{\vec{H}}_y$滞后 $\dot{\vec{E}}_x$为 $\boldsymbol{\theta}$ 角度）；

ii 入射波振幅随波行进按指数规律衰减（减幅波）；

k'' 称为衰减系数

iii **$k'(\omega)$**不再是频率的线性函数。有损媒质亦称为色散媒质

iv 相应的参数关系，如波长、波速等的计算，用 **$k'(\omega)$**代替原来的***k***

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0}^{+} \mathrm{e}^{-k''(\omega)z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'(\omega)z}$$

$$k_{\mathrm{e}} = \omega\sqrt{\mu\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{e}}} = \omega\sqrt{\mu(\varepsilon - \mathrm{j}\frac{\gamma}{\omega})} = k'(\omega) - jk''(\omega) \quad \dot{H}_y = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{|\eta_{\mathrm{e}}|} \mathrm{e}^{-k''(\omega)z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}[k'(\omega)z+\theta]}$$

$$k' = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1\right)} \qquad k'' = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right)}$$

3. 低损耗介质($\gamma << \omega\varepsilon$ $\tan\delta << 1$)

近似认为 $\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2$

则 $k' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ $\quad k'' = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ $\quad \eta_e = |\eta_{\mathrm{e}}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \rightarrow \theta = 0$

表明，电场强度与磁场强度同相，但两者振幅仍不断衰减。电导率愈大，则振幅衰减愈大。

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0}^{+} \mathrm{e}^{-k''(\omega)z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'(\omega)z}$$

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_{x0}^{+}}{|\eta_\mathrm{e}|} \mathrm{e}^{-k''(\omega)z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}[k'(\omega)z+\theta]}$$

4. 良导体（$\gamma >> \omega\varepsilon$ tan $\delta >> 1$ ）

$$\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2} \approx \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \qquad k' = k'' = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$$

忽略极化损耗

$$\upsilon = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k'} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \qquad \eta_\mathrm{e} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} = |\eta_\mathrm{e}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

表明，电场强度与磁场强度不同相，且因γ 较大，两者振幅发生急剧衰减，以致于电磁波无法进入良导体深处，仅可存在其表面附近，这种现象称为集肤效应。

- 良导体（$\gamma >> \omega\varepsilon \quad \tan\delta >> 1$ ）

$$k' = k'' = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$$

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0}^{+} \mathrm{e}^{-k''(\omega)z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'(\omega)z} = \dot{E}_{x0}^{+}\ \mathrm{e}^{-\frac{z}{d}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{z}{d}}$$

透入深度 $$d = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

与准静态电磁场的分析结论一致

可见，透入深度与频率 f 及电导率 γ 成反比。

三种频率时铜的透入深度

f/Hz	50	1M	100M
d	9.35mm	66.7μm	6.67 μm

可见，随着频率升高，透入深度急剧地减小。因此，具有一定厚度的金属板即可屏蔽高频时变电磁场。

低损耗介质（$\gamma << \omega\varepsilon$ $\tan\delta << 1$）

良导体（$\gamma >> \omega\varepsilon$ $\tan\delta >> 1$）

媒　质	界限频率　（MHz）
干　土	2.6　（短波）
湿　土	6.0　（短波）
淡　水	0.22　（中波）
海　水	890　（超短波）
硅	15×10^{3}（微波）
锗	11×10^{4}（微波）
铂	16.9×10^{16}（光波）
铜	104.4×10^{16}（光波）

当平面波在导电媒质中传播时，其传播特性与比值 $\gamma/(\omega\varepsilon)$ 有关，即传播特性与媒质特性有关，与频率f也有关。

对应于比值 $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=1$ 的频率称为界限频率，它是划分媒质属于低耗介质或导体的界限。

比值的大小实际上反映了传导电流与位移电流的幅度之比。可见，非理想介质中以位移电流为主，良导体中以传导电流为主。

5.3 均匀平面波对于平表面媒质的正入射

- **现象：**

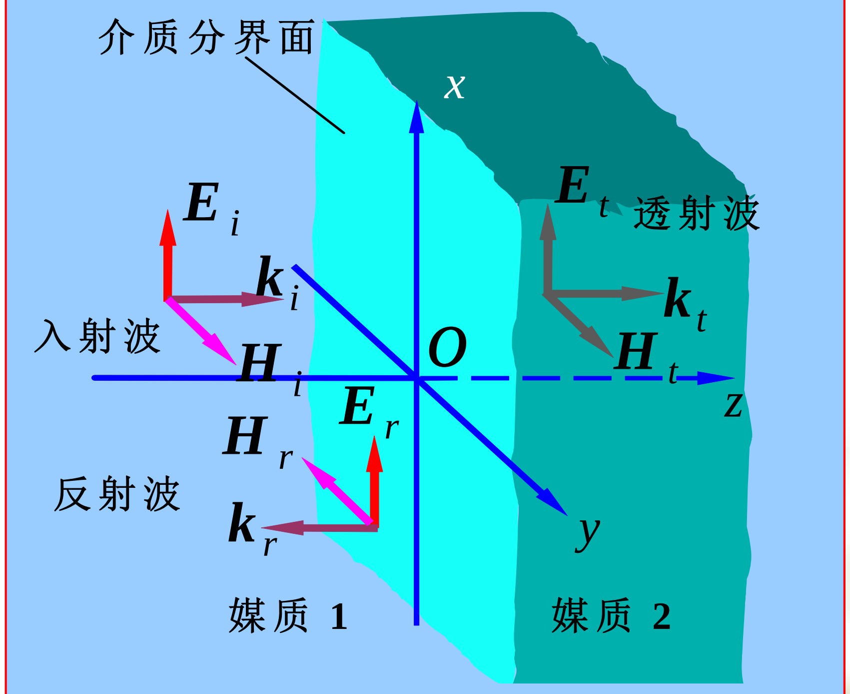
  电磁波入射到不同媒质分界面上时，一部分波被分界面反射，一部分波透过分界 面。

- **入射方式：**

  垂直入射、斜入射；

- **媒质类型：**

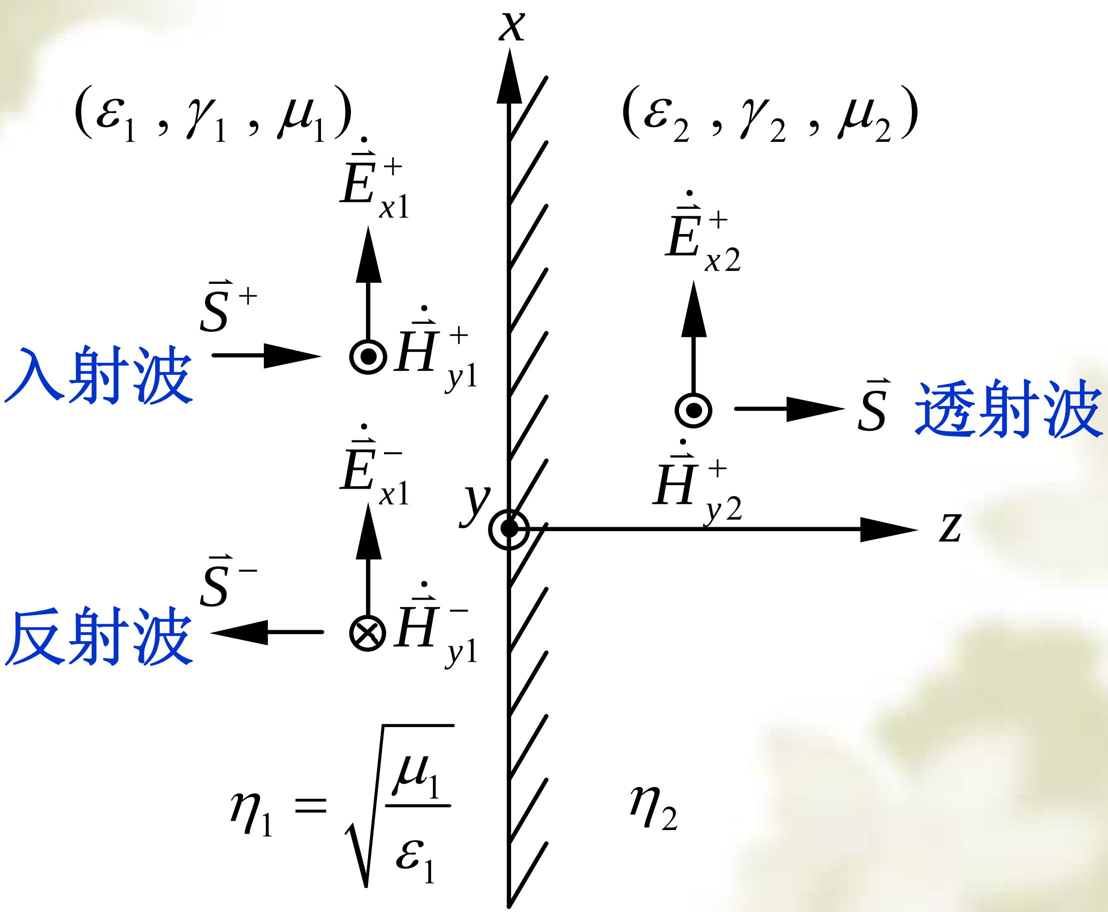
  理想导体、理想介质、导电媒质



均匀平面波垂直入射到两种不同媒质的分界平面

5.3 均匀平面波对于平表面媒质的正入射

1. 均匀平面波从媒质1 垂直入射到导电媒质2 的分界面上



◆ 分析方法：

已知：入射波，　计算：反射波、透射波

已知的关系式（在关联的参考方向条件下）

每种波的电场强度与磁场强度的比值为波阻抗—特性阻抗

$$\frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \eta$$

在分界面上，电场强度、磁场强度满足不同媒质的边界条件

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$

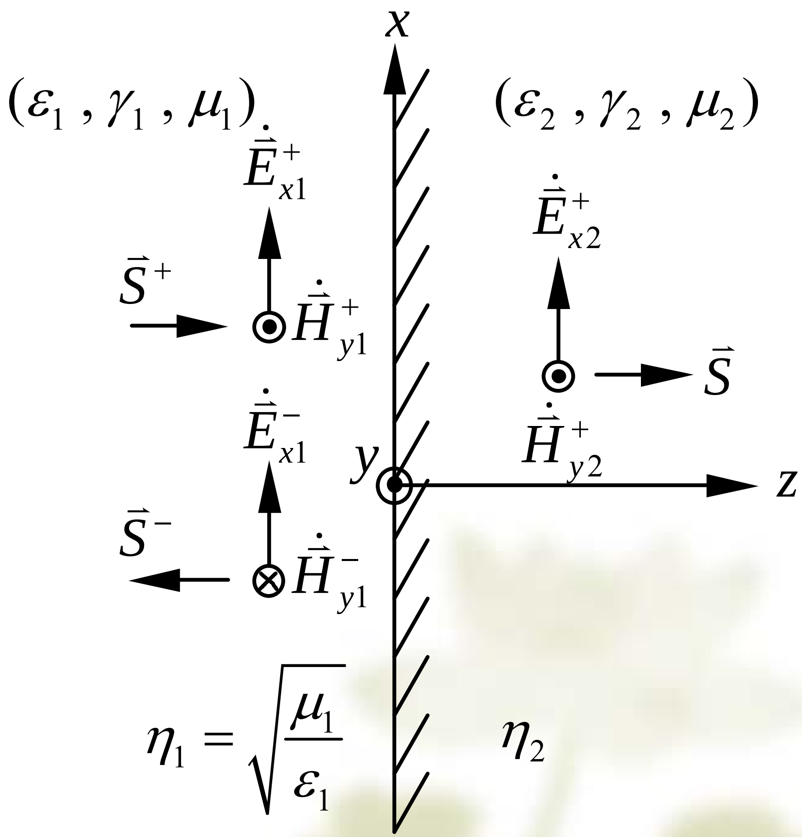
◆ 计算：

设：$\dot{\vec{E}}_1^+(z) = \dot{E}_{x1}^+ \vec{e}_x = \dot{E}_{10}^+ e^{-jkz}$

$\dot{E}_{1t} = \dot{E}_{2t}$ ➡ $\dot{E}_{10}^+ + \dot{E}_{10}^- = \dot{E}_{20}$ (1)

$\dot{H}_{1t} = \dot{H}_{2t}$ ➡ $\dot{H}_{10}^+ - \dot{H}_{10}^- = \dot{H}_{20}$

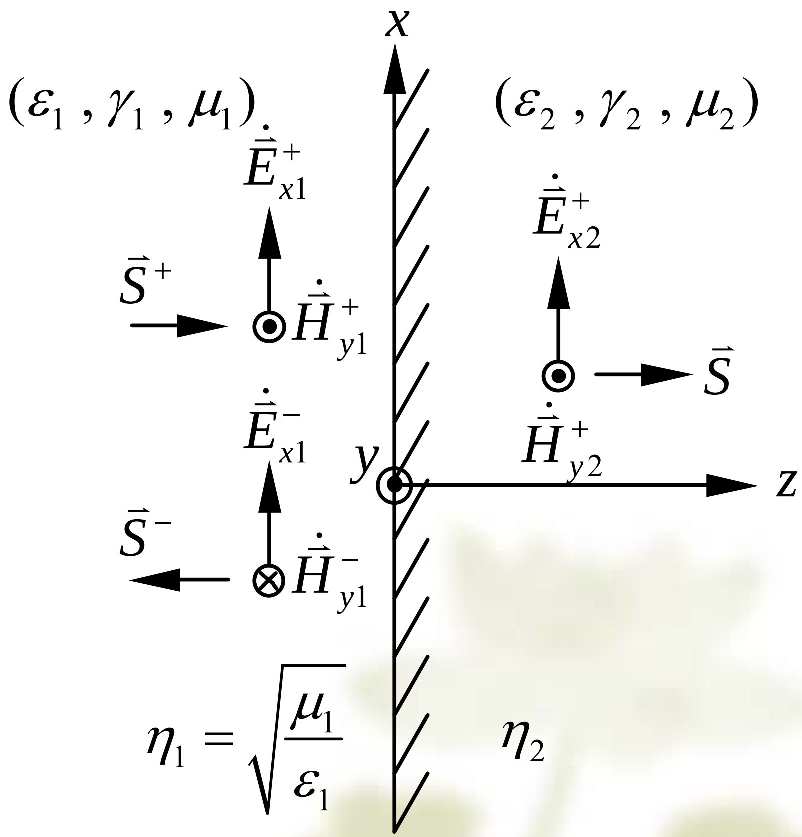
$\dfrac{\dot{E}}{\dot{H}} = \eta$ ➡ $\dfrac{\dot{E}_{10}^+}{\eta_1} - \dfrac{\dot{E}_{10}^-}{\eta_1} = \dfrac{\dot{E}_{20}}{\eta_2}$ (2)



由(1)、(2)

$$\dot{E}_{10}^{-} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\dot{E}_{10}^{+} = R\dot{E}_{10}^{+}$$

$$\dot{E}_{20} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\dot{E}_{10}^{+} = T\dot{E}_{10}^{+}$$



$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \qquad T = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

反射系数　　　　透射系数

透射系数 $\boldsymbol{T = R + 1}$

本书由场量***E***定义反射系数，也有用场量***H***定义反射系数的。

$$\dot{E}_{10}^{-} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\dot{E}_{10}^{+} = R\dot{E}_{10}^{+}$$

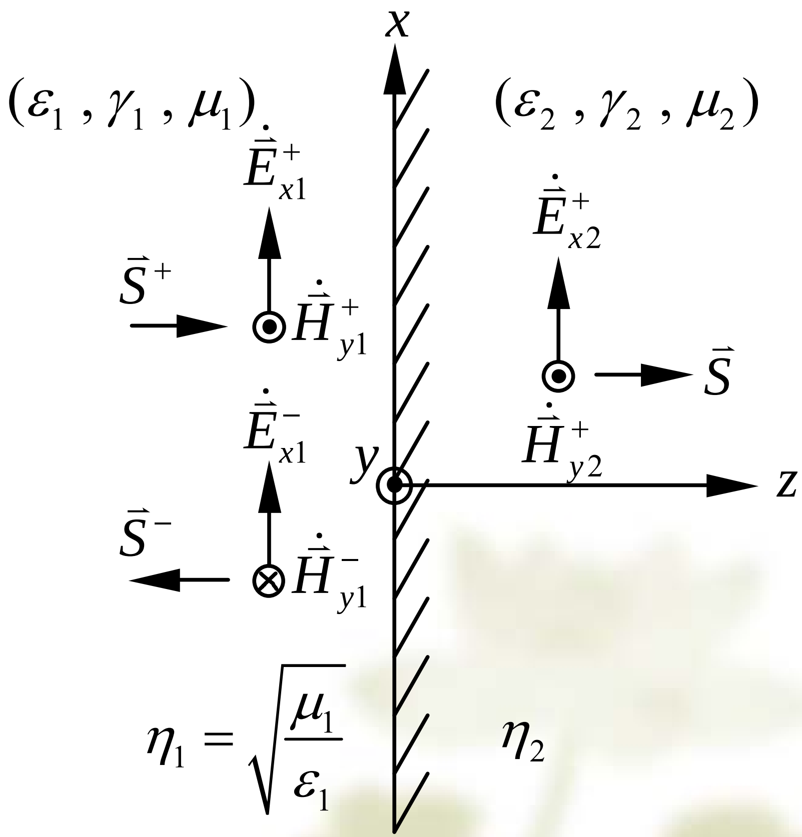
$$\dot{E}_{20} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\dot{E}_{10}^{+} = T\dot{E}_{10}^{+}$$

$$\dot{H}_{10}^{+} = \frac{\dot{E}_{10}^{+}}{\eta_1}$$

$$\dot{H}_{10}^{-} = \frac{\dot{E}_{10}^{-}}{\eta_1}$$

$$\dot{H}_{20} = \frac{\dot{E}_{20}}{\eta_2}$$

可求出***H*** 各分量



2. 波由理想介质(γ_1 =∞)正入射到理想导体($\gamma_2 \to \infty$)平面的情况

已知：$\dot{E}_{x1}^{+} = \dot{E}_0 e^{-jkz}$

$$\vec{E}_2 = 0$$

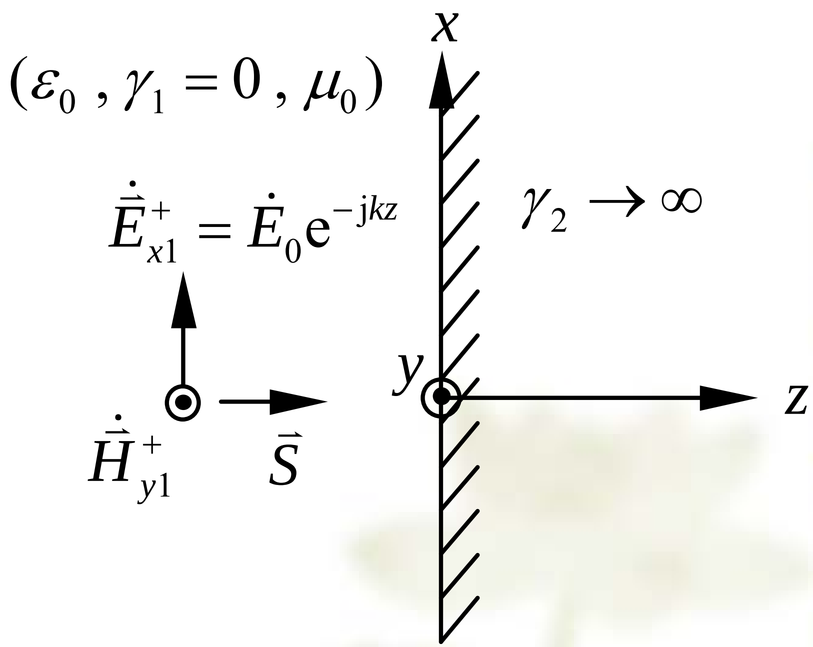
$$\dot{E}_{10}^{-} = -\dot{E}_{10}^{+} = -\dot{E}_0$$

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x1}^{+} + \dot{E}_{x1}^{-} = \dot{E}_0 (\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz})$$

$$= -\mathrm{j}2\dot{E}_0 \sin kz$$

$$\dot{H}_y = \dot{H}_{y1}^{+} - \dot{H}_{y1}^{-} = \frac{\dot{\vec{E}}_{x1}^{+}}{\eta} - \frac{\dot{\vec{E}}_{x1}^{-}}{\eta}$$

$$= \frac{\dot{E}_0}{\eta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}) = \frac{2\dot{E}_0}{\eta}\cos kz$$



$$\sin\varphi = \frac{1}{2j}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi})$$

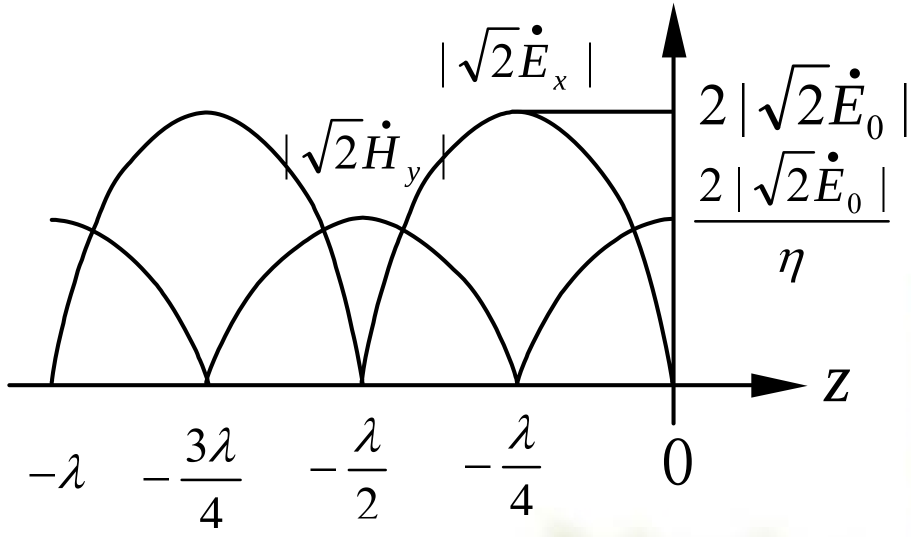
$$\dot{E}_x = -\mathrm{j}2\dot{E}_0 \sin kz$$

$$\dot{H}_y = \frac{2\dot{E}_0}{\eta} \cos kz$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

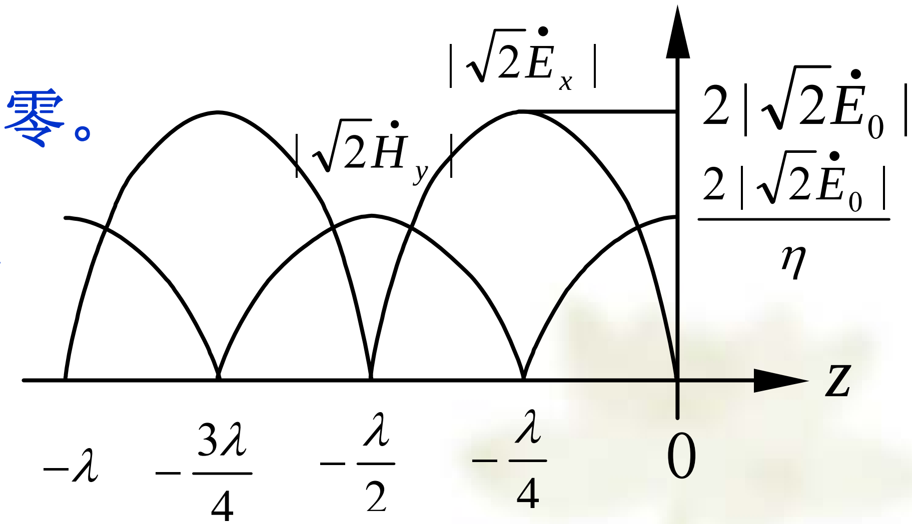
$$\dot{E}_x = -\mathrm{j}2\dot{E}_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} z$$

$$\dot{H}_y = \frac{2\dot{E}_0}{\eta} \cos \frac{2\pi}{\lambda} z$$



- 全反射现象。此时理想介质中的合成电场呈驻波形态；合成磁场亦为驻波，两者错开 $\frac{\lambda}{4}$（空间上），相位差**90°**（时间上）。

- 理想导体中，$\vec{E}$ 、$\vec{H}$ 均为零。



- 理想导体表面的电流密度

$$\vec{K} = \vec{e}_n \times \vec{H}$$

$\vec{e}_n$ 为导体的外法线方向

- 理想导体透入深度为0

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

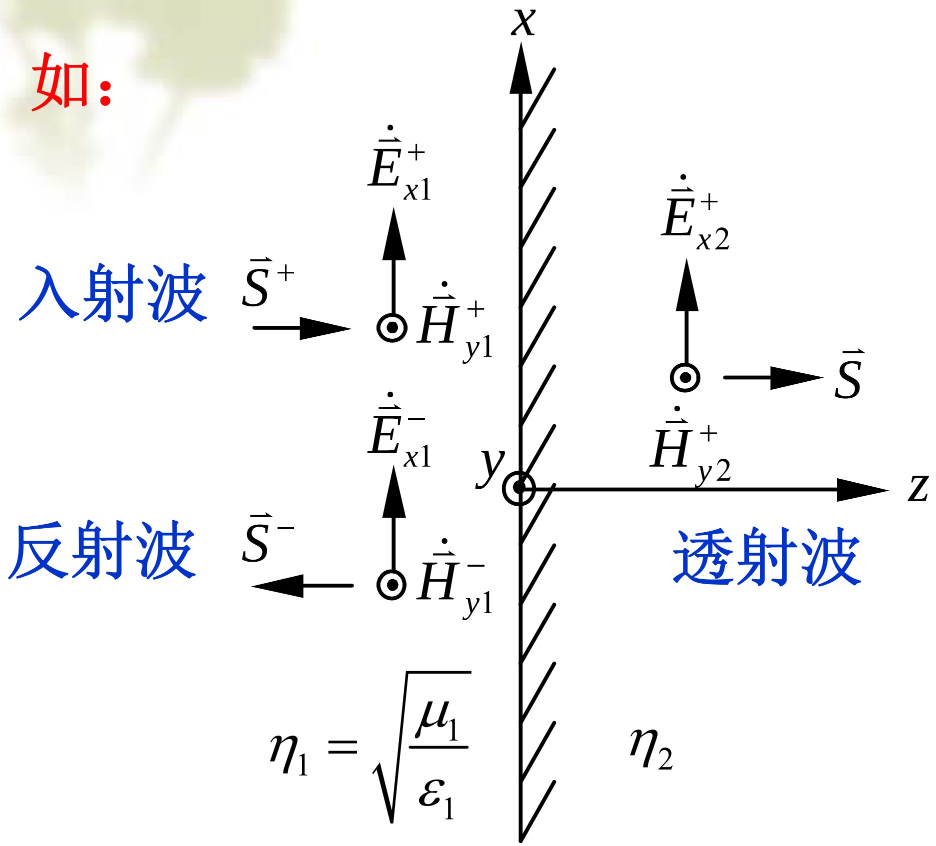
$$\dot{E}_x = -\mathrm{j}2\dot{E}_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}z$$

$$\dot{H}_y = \frac{2\dot{E}_0}{\eta}\cos\frac{2\pi}{\lambda}z$$

- 补充说明：

  如果电场强度、磁场强度与波的传播方向不满足右手规则，则电场强度与磁场强度之比为负的波阻抗。

如：



$$\frac{\dot{E}_1^+}{\dot{H}_1^+} = \eta$$

$$\frac{\dot{E}_1^-}{\dot{H}_1^-} = -\eta$$

$$\dot{H}_{1t} = \dot{H}_1^+ + \dot{H}_1^-$$

$$\dot{E}_{1t} = \dot{E}_{2t} \rightarrow \dot{E}_1^+ + \dot{E}_1^- = \dot{E}_2$$

$$\dot{H}_{1t} = \dot{H}_{2t} \rightarrow \frac{\dot{E}_1^+}{\eta_1} - \frac{\dot{E}_1^-}{\eta_1} = \frac{\dot{E}_2}{\eta_2}$$

作业：**5-12**

5-6 自由空间中某一均匀平面波的电场强度 $\dot{\vec{E}} = (100\vec{e}_x + j100\vec{e}_y)e^{-j2\pi z/3}$ 试决定该波的**k**，υ ，ω ，λ ，φ_x ，φ_y ，$\dot{\vec{H}}$ 的表达式及$\vec{E}$ 和$\vec{H}$的瞬时表达式。

分析：$\dot{\vec{E}} = (100\vec{e}_x + j100\vec{e}_y)e^{-j2\pi z/3} = (100\vec{e}_x + j100\vec{e}_y)e^{-jkz}$

波的传播方向：+z方向

波速 $\upsilon = c = 3\times10^8\,(\mathrm{m/s})$ （自由空间）

可知相位常数(波数) $k = \dfrac{2\pi}{3}\,(\mathrm{rad/m})$

电场强度包括***x***、***y*** 分量 $\phi_x = 0^\circ$ $\phi_y = 90^\circ$

解：$\omega = k\upsilon = 2\pi\times10^8\,(\mathrm{rad/s})$ $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 3\,\mathrm{m}$

5-6

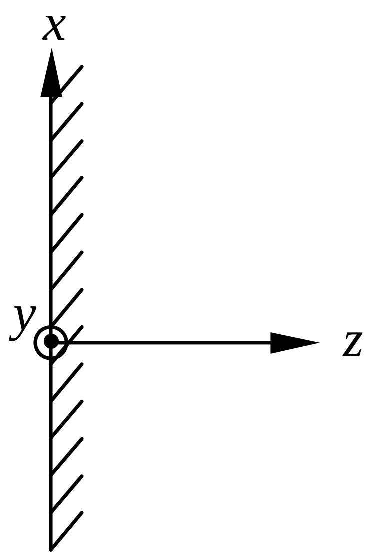
$$\dot{\vec{E}} = (100\vec{e}_x + j100\vec{e}_y)e^{-j2\pi z/3} = (100\vec{e}_x + j100\vec{e}_y)e^{-jkz}$$

计算：电场强度包括***x***、***y*** 分量 ⟶ 磁场强度也包括***x***、***y*** 分量

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_x}{\eta} = \frac{100}{377}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi z/3} = 0.27\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi z/3}$$

（真空 $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\ \Omega$）

$$\dot{H}_x = -\frac{\dot{E}_y}{\eta} = -\mathrm{j}\,0.27\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi z/3}$$



电场强度、磁场强度与波的传播方向不满足右手规则，则电场强度与磁场强度之比为负的波阻抗

$$\vec{S} = -\dot{\vec{E}}_y \times \dot{\vec{H}}_x$$

5-6

$$\dot{\vec{E}} = (100\vec{e}_x + j100\vec{e}_y)e^{-j2\pi z/3}$$

$$\dot{\vec{H}} = (-j0.27\vec{e}_x + 0.27\vec{e}_y)e^{-j2\pi z/3}$$

$$\vec{E}(z,t) = 100\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}z)\vec{e}_x - 100\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}z)\vec{e}_y$$

$$\vec{H}(z,t) = 0.27\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}z)\vec{e}_x + 0.27\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}z)\vec{e}_y$$

写瞬时值时注意：复数给出的是有效值

5-7 有一频率为30MHz的均匀平面波在无损耗的介质中沿*x*方向传播。已知介质的 ε = 20微微法/米和 μ = 5 微亨/米。*E*只有 *z* 分量且初相为零。当*t* = 6毫微秒，*x* = 0.4米时，电场强度值为800伏/米，求 *E* 和 *H* 的瞬时表达式。

分析： 波的传播方向为：*x*方向

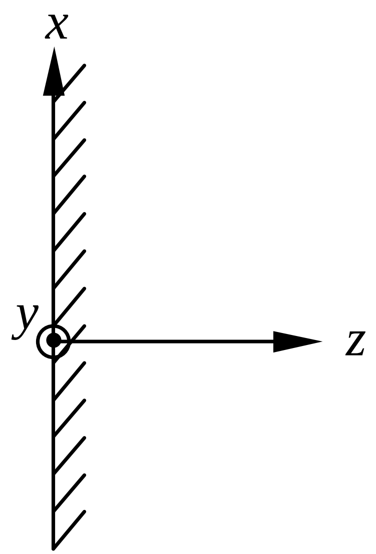
*E*只有 *z* 分量且初相为零 $\vec{E}(x,t)=\sqrt{2}E\cos(\omega t-kx)\vec{e}_z$

↓

k， ω， E

↓

$$\dot{H}=\frac{\dot{E}}{\eta}$$



5-7 **解：**

已知介质的 $\varepsilon = 20$微微法/米和 $\mu = 5$ 微亨/米

波速（相速） $\upsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 10^8 \ (\mathrm{m/s})$

角频率 $\omega = 2\pi f = 6\pi \times 10^7 \ (\mathrm{rad/s})$

波数 $k = \dfrac{\omega}{\upsilon} = 0.6\pi \ (\mathrm{rad/m})$

特性阻抗 $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = 500\ \Omega$

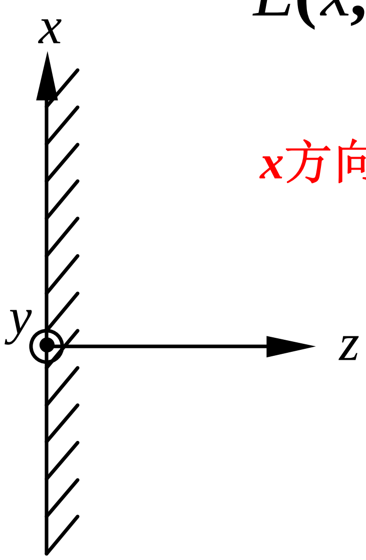
$$\vec{E}(x,t) = \sqrt{2}E\cos(6\pi \times 10^7 t - 0.6\pi x)\vec{e}_z$$

$$\vec{E}(x,t)=\sqrt{2}E\cos(6\pi\times10^{7}t-0.6\pi x)\vec{e}_z$$

当t = 6毫微秒，x = 0.4米时，电场强度值为800伏/米

$$\sqrt{2}E=\frac{800}{\cos 0.12\pi}=0.8\left(\mathrm{kV/m}\right)$$

$$\vec{E}(x,t)=0.8\cos(6\pi\times10^{7}t-0.6\pi x)\vec{e}_z$$



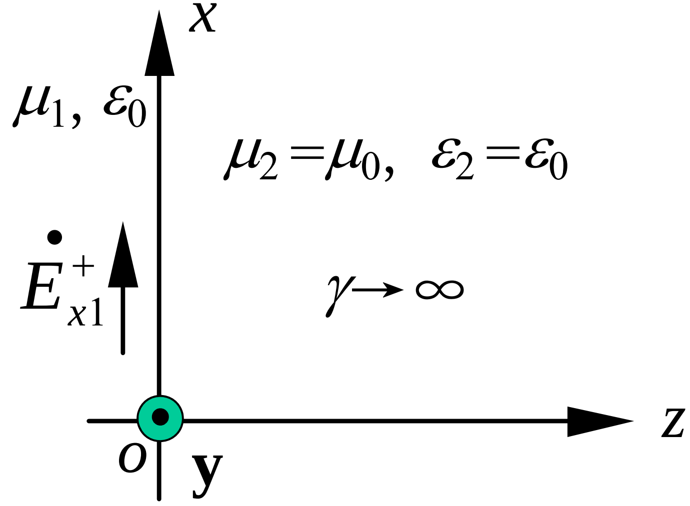
x方向传播

电场强度、磁场强度与波的传播方向不满足右手规则，则电场强度与磁场强度之比为负的波阻抗

$$\vec{H}(x,t)=-\frac{\sqrt{2}E}{\eta}\cos(\omega t-kx)\vec{e}_y$$

$$=-1.6\cos(6\pi\times10^{7}t-0.6\pi x)\vec{e}_y\left(A/m\right)$$

5-12设空间有一沿*x*轴取向的线性极化波，正入射于一完纯导体的表面，如题**5-12**图所示。已知 $\dot{E}_{x1}^{+}=200e^{j10^{\circ}}e^{-jkz}$



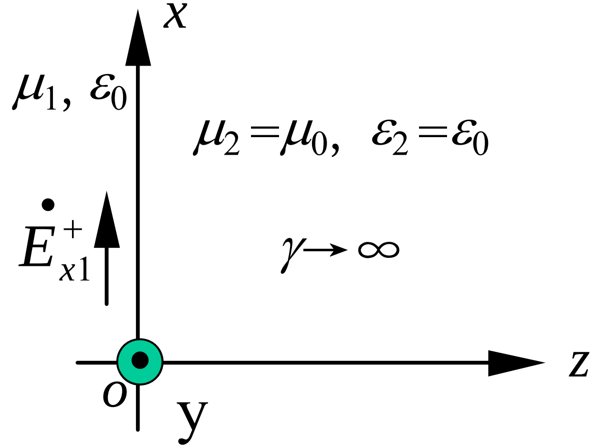
1) 求电场强度及磁场强度的反射分量和透射分量的向量形式；

2) 导体表面的面电流密度；

3) 写出电场强度和磁场强度的瞬时表达式。

分析：典型均匀平面波正入射到完纯（理想）导体—全反射

5-12 计算：(1) 电场强度及磁场强度的反射分量和透射分量向量形式；



透射分量 为零

$$\dot{E}_{x1}^{+}=200e^{j10^\circ}e^{-jkz}$$

$$\dot{E}_{x_1}^{-}(z)=-200\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^\circ}\mathrm{e}^{jkz}$$

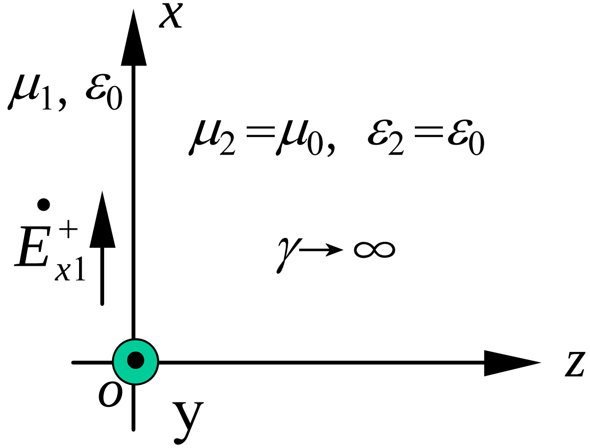
$$\dot{H}_{y_1}^{+}(z)=\frac{\dot{E}_{x1}^{+}}{\eta}=\frac{200}{377}\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^\circ}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\frac{200}{377}\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^\circ}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\dot{H}_{y_1}^{-}(z)=\frac{\dot{E}_{x1}^{-}}{\eta}=\frac{-200}{377}\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^\circ}\mathrm{e}^{jkz}=\frac{-200}{377}\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^\circ}\mathrm{e}^{jkz}$$

5-12 计算：(2) 导体表面的面电流密度

$$\vec{K} = \vec{e}_n \times \vec{H}$$

$\vec{e}_n$ 为导体的外法线方向



$$\vec{K} = -\vec{e}_z \times \left[\dot{H}^+_{y_1}(0) - \dot{H}^-_{y_1}(0) \right] \vec{e}_y$$

$$= \frac{1}{\eta}\left(\dot{E}^+_{x_1} - \dot{E}^-_{x_1} \right) \vec{e}_x \Big|_{z=0} = 1.061\, e^{j10^\circ} \vec{e}_x$$

$$\vec{K} = 1.06\sqrt{2}\,\mathbf{cos}(\omega t + 10^\circ)\vec{e}_x \ (A/m)$$

5-12 计算：(3) 写出电场强度和磁场强度的瞬时表达式。

在媒质1内 $$\dot{E}_{x_1}(z)=\dot{E}_{x_1}^{+}(z)+\dot{E}_{x_1}^{-}(z)=\dot{E}_{x_1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz})$$

$$=-2\mathrm{j}\cdot 200\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^\circ}\sin kz=400\mathrm{e}^{-\mathrm{j}80^\circ}\sin kz$$

$$\dot{H}_y(z)=\dot{H}_{y_1}^{+}(z)-\dot{H}_{y_1}^{-}(z)=\frac{1}{\eta}(\dot{E}_{x_1}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\dot{E}_{x_1}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz})$$

$$=\frac{2\dot{E}_{x_1}}{\eta}\cos kz=1.061\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^\circ}\cos kz$$

$$E_{x_1}(z,t)=\sqrt{2}\cdot 400\sin kz\cos(\omega t-80^\circ)\ (\mathrm{V/m})$$

$$H_{y_1}(z,t)=\sqrt{2}\cdot 1.061\cos kz\cos(\omega t+10^\circ)\ (\mathrm{A/m})$$

4-1

已知在某一理想电介质(参数为$\gamma = 0$，$\varepsilon = 4\varepsilon_0$，$\mu = 5\mu_0$)中的位移电流密度为 $2\cos(\omega t\text{-}5z)\,\vec{e}_x$ 微安/米^2。求：

（1）该媒质中的$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{E}$；

（2）该媒质中的$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$。

分析：对于正弦、稳态、时变电磁场问题，既可应用时域解法；也可应用频域（相量）解法，解得相量解后，再反变换为时域解。

在频域求解，能将积分（微分）转化成代数运算。用频域解法常比较简单。

4-1　解1：相量表示计算

$$\vec{J}_D = 2\cos(\omega t - 5z)\vec{e}_x$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}_D = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\boldsymbol{e}_x \left(\mu\mathrm{A}/\mathrm{m}^2\right)$$

注意：采用有效值

$$\dot{\boldsymbol{J}}_D = \mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}$$

$$\dot{\mathrm{D}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\dot{\mathrm{J}}_D = -\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\mathrm{e}_x = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(5z+\frac{\pi}{2})}\mathrm{e}_x \qquad -\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{\mathrm{E}} = \frac{\dot{\mathrm{D}}}{\varepsilon} = -\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{4\varepsilon_0\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\mathrm{e}_x = \frac{\sqrt{2}}{4\varepsilon_0\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(5z+\frac{\pi}{2})}\mathrm{e}_x$$

注意：采用余弦函数表示

$$\mathrm{D}(z,t) = \frac{2}{\omega}\cos(\omega t - 5z - \frac{\pi}{2})\mathrm{e}_x = \frac{2}{\omega}\sin(\omega t - 5z)\mathrm{e}_x \left(\mu\mathrm{C}/\mathrm{m}^2\right)$$

注意：转换成最大值

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \frac{1}{2\varepsilon_0\omega}\sin(\omega t - 5z)\boldsymbol{e}_x \left(\mu\mathrm{V}/\mathrm{m}\right)$$

4-1 计算

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{\dot{\boldsymbol{D}}}{\varepsilon} = -\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{4\varepsilon_0\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\boldsymbol{e}_x \quad + \quad \nabla\times\dot{\boldsymbol{E}} = -\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{B}}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \mathrm{j}\frac{1}{\omega}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{E}}}{\partial z}\boldsymbol{e}_y = -\mathrm{j}\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 5}{\varepsilon_0\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\boldsymbol{e}_y \Rightarrow \boldsymbol{B}(z,t) = \frac{2.5}{\varepsilon_0\omega^2}\sin(\omega t - 5z)\boldsymbol{e}_y\ (\mu\mathrm{T})$$

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\dot{\boldsymbol{B}}}{\mu} = -\mathrm{j}\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\mu_0\varepsilon_0\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\boldsymbol{e}_y \Rightarrow \boldsymbol{H}(z,t) = \frac{1}{2\mu_0\varepsilon_0\omega^2}\sin(\omega t - 5z)\boldsymbol{e}_y\left(\mu\mathrm{A}/\mathrm{m}\right)$$

4-1 解2：用瞬时值计算

$$\vec{J}_D = 2\cos(\omega t - 5z)\vec{e}_x$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_D \Longrightarrow D = \int_0^t J_D dt = \frac{2}{\omega}\sin(\omega t - 5z)\Big|_0^t = \frac{2}{\omega}\sin(\omega t - 5z) + \frac{2}{\omega}\sin(-5z)$$

选 $\omega t = 5z$ 为时间起点，则

$$\vec{D} = \int_{\frac{5z}{\omega}}^{t} \vec{J}_D dt = \frac{2}{\omega}\sin(\omega t - 5z)\vec{e}_x \qquad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon_0\omega}\sin(\omega t - 5z)\vec{e}_x$$

$$\vec{E}_y = \vec{E}_z = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y & \vec{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$\frac{dE_x}{dz}\vec{e}_y = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{-5}{2\varepsilon_0\omega}\cos(\omega t - 5z)\vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \int_{\frac{5z}{\omega}}^{t} \frac{5}{2\varepsilon_0\omega}\cos(\omega t - 5z)dt\,\vec{e}_y = \frac{2.5}{\varepsilon_0\omega^2}\sin(\omega t - 5z)\vec{e}_y$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{2\mu_0\varepsilon_0\omega^2}\sin(\omega t - 5z)\vec{e}_y$$