

3.5 媒质中的磁场

- 媒质的磁化
- 磁场强度 \mathbf{H} • 一般形式的安培环路定律
- 不同媒质分界面上的边界条件
- 基于场量 \mathbf{H} 的分析：边值问题；镜像法

位函数

■ 电偶极子的远区场

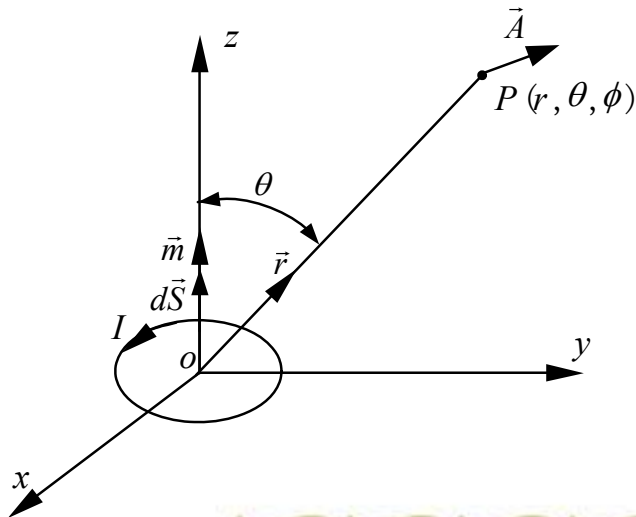
$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

■ 磁偶极子的远区场

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 (\vec{m} \times \vec{e}_r)}{4\pi r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$



3.5.1 媒质的磁化

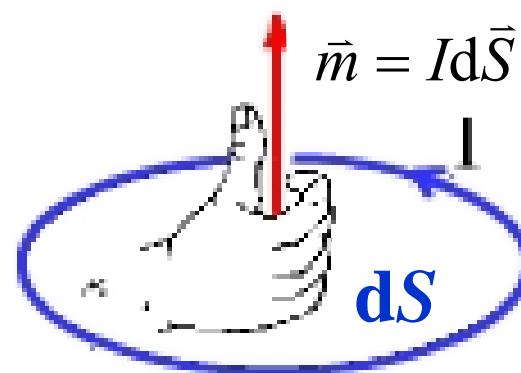
■ 磁性材料的分子、原子结构：

- 原子核的自旋
- 电子的自旋
- 电子绕原子核环行

微观
电流
环

等效为安培电流（磁偶极子束）

磁偶极矩 $\vec{m} = I d\vec{S}$



磁偶极子

磁性材料即可看成为这些微观电流环（磁偶极矩）的组合。

■ 介质的磁化

➤ 无外磁场作用

安培电流的方向是随机的，磁偶极矩互相抵消，宏观作用效果是对外不显现磁性。

$$\sum_i \vec{m}_i = 0$$

➤ 存在外磁场

安培电流作为一个磁偶极子，要受到力矩的作用，形成一个与原磁场同向或反向的**磁化磁场**，此即为物质的**磁化状态**



引起磁偶极子重新排列

$$\sum_i \vec{m}_i \neq 0$$

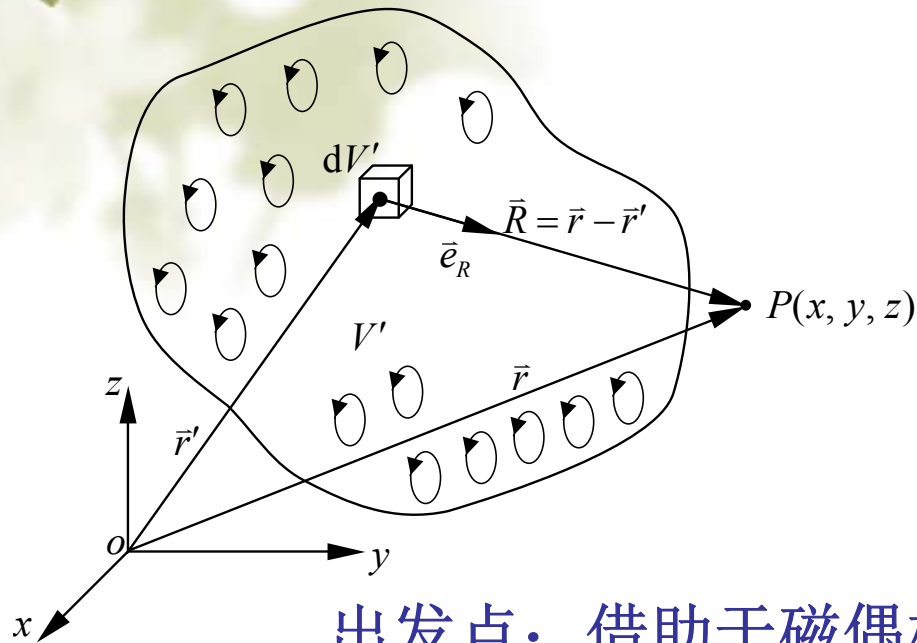
■ 磁化强度矢量

为刻画磁化的强弱，引入磁化强度矢量

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V} \quad \text{A/m}$$


单位体积中微观磁偶极矩的矢量和。

■ 磁化电流密度与磁化强度的关系




出发点：借助于磁偶极子产生的矢量磁位的计算式

磁化后，媒质中形成新的电流，这种电流称为**磁化电流**。形成磁化电流的电子仍然被束缚在原子或分子周围，所以磁化电流又称为**束缚电流**。

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 (\vec{m} \times \vec{e}_r)}{4\pi r^2}$$


元体积包含的磁偶极子 $d\vec{m} = \vec{M}dV'$ 产生的矢量磁位


$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 d\vec{m} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2} dV'$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \vec{e}_R}{4\pi R^2} dV'$$



P167推导略

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{e}_n}{R} dS'$$

对照体电流、面电流产生的矢量磁位的计算式

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}_c(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

可知

$\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \sim \vec{J}$ 分布 $\longrightarrow \vec{J}_m = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$ 磁化体电流密度。

$\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{e}_n \sim \vec{K}$ 分布 $\longrightarrow \vec{K}_m = \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{e}_n$ 磁化面电流密度。

\vec{e}_n 的方向为交界面的外法线方向。

- 均匀磁化时, \vec{M} 为一常矢量 $\vec{J}_m = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') = 0$

不均匀磁化时 $\vec{J}_m \neq 0$

- 由S. T. 可知

$$\oint_l \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{M}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_m \cdot d\vec{S} = I_m \quad \text{磁化电流}$$

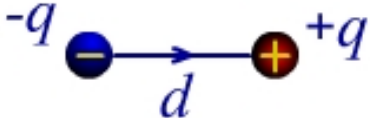
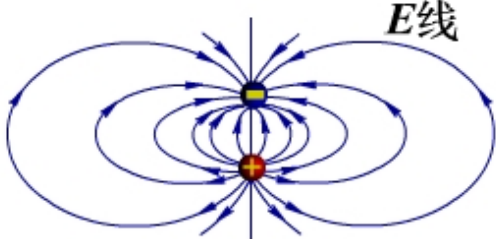
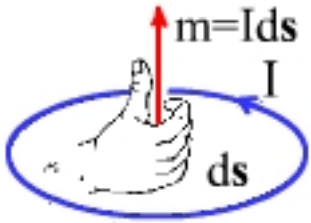
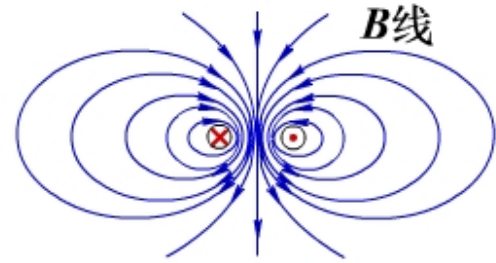
表明: 磁化媒质中, 磁化强度沿任意闭合回路的线积分等于该闭合回路中包围的磁化电流——与磁场强度类似

总结以上分析可得：

① 媒质磁化后对原磁场的影响，按体磁化电流密度 J_m 和面磁化电流密度 K_m 分布的磁化电流所产生的磁场等效地描述；

② 在有媒质存在的区域，任意一点处的磁感应强度，应是由自由电流和磁化电流在真空中产生的磁场的合成。

磁偶极子与电偶极子对比

	模 型	极化与磁化	电场与磁场
电偶极子		$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$	
磁偶极子		$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$ $\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{e}_n$	

3.5.2 磁场强度 \vec{H} • 一般形式的安培环路定律

1. 一般形式的安培环路定律A.C.L

磁化媒质中的磁场，是外施激励磁场和磁化场的合成。故可看成激磁电流 I 和磁化电流 I_m 共同作用产生的磁场。任取一闭合回路 l ，应用安培环路定律：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum I + \sum I_m \right) = \mu_0 \left(\sum I + \oint_l \vec{M} \cdot d\vec{l} \right)$$

$$\oint_l \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = \sum I$$

定义 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ A/m 为磁场强度

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{A/m}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

■ 说明:

- 磁场强度的闭合线积分，与磁化电流（磁化媒质的分布）无关，只与回路交链的自由电流有关。
- 磁场强度的分布，与磁化媒质的分布有关
- 对于具有对称性的场的分析计算，应用一般形式的安培环路定律，将变得非常简便。

2. 媒质的磁导率 μ

对于大多数的磁性媒质 $\vec{M} \propto \vec{H} \longrightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H}$

χ_m ----- 媒质的磁化率

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{A/m}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

μ ----- 媒质的磁导率 H/m

μ_r ----- 媒质的相对磁导率

若媒质的磁导率不随空间变化，则称为磁性能**均匀媒质**。若磁导率与外加磁场强度的大小及方向均无关，磁感应强度与磁场强度成正比，则称为磁性能**各向同性的线性媒质**。

抗磁性媒质磁化后使磁场减弱，因此 $\chi_m < 0, \mu < \mu_0, \mu_r < 1$

顺磁性媒质磁化后使磁场增强，因此 $\chi_m > 0, \mu > \mu_0, \mu_r > 1$

但是，无论抗磁性或者顺磁性媒质，其磁化现象均很微弱，因此，
可以认为它们的相对磁导率基本上等于1。铁磁性媒质的磁化现象非常
显著，其磁导率可以达到很高的数值。

媒质	μ_r	媒质	μ_r	媒 质	μ_r
金	0.9996	铝	1.000021	镍	250
银	0.9998	镁	1.000012	铁	4000
铜	0.9999	钛	1.000180	磁性合金	10^5

对于磁性能**均匀、线性、各向同性**的媒质，由于磁导率与空间坐标无关，因此得

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

同理，也满足以下这个微分方程式

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

上述结果表明，对于**均匀、线性、各向同性媒质**，只要真空磁导率 μ_0 换为媒质磁导率 μ ，各个方程即可适用。

3.5.3 不同媒质分界面上的边界条件

- 不同媒质分界面上的边界条件
 - 两种不同媒质分界面上的**B. C.**
 - 铁磁媒质与空气分界面上的**B. C.**
 - 边界条件的位函数表示
- 磁性媒质中场分布的计算
 - 安培环路定律
 - 基于边值问题计算

3.5.3 不同媒质分界面上的边界条件

1. 两种不同磁媒质分界面上的**B**、**C**。

(1) **B**的衔接条件：

静电场 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \longrightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma$

恒定磁场 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \longrightarrow B_{1n} = B_{2n}$

B 的法向分量连续

(2) H 的衔接条件

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

$$\Delta l_2 \rightarrow 0$$

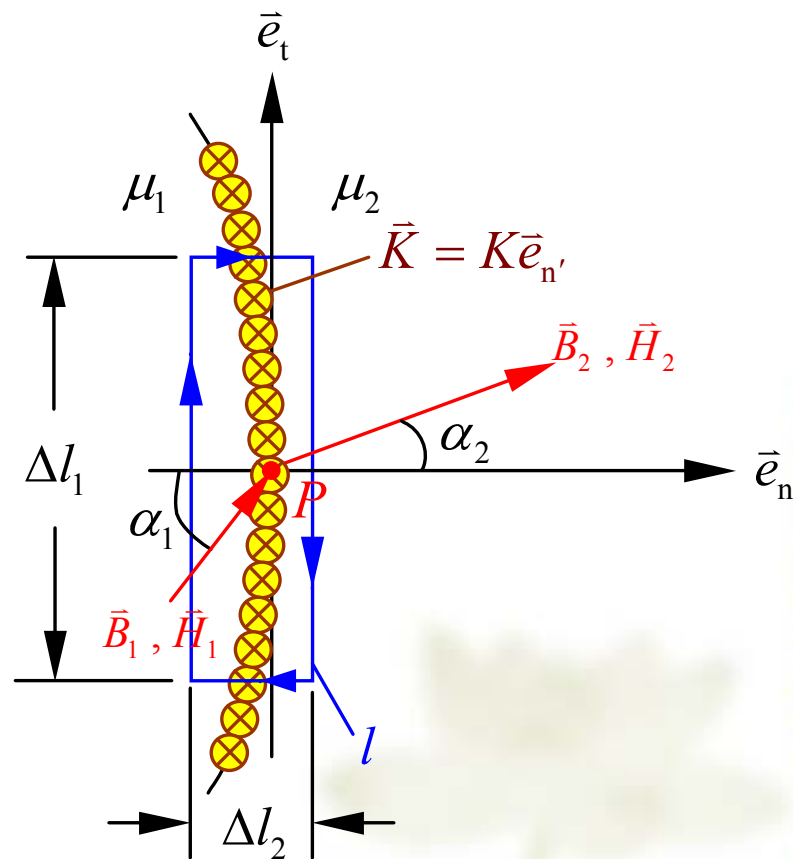
$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1t} \Delta l_1 - H_{2t} \Delta l_1 = K \Delta l_1$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$

电流片电流密度的参考方向

$$\vec{K} = K \vec{e}_n, \quad \vec{e}_n = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$$

\vec{e}_n 从1媒质到2媒质的法向方向。



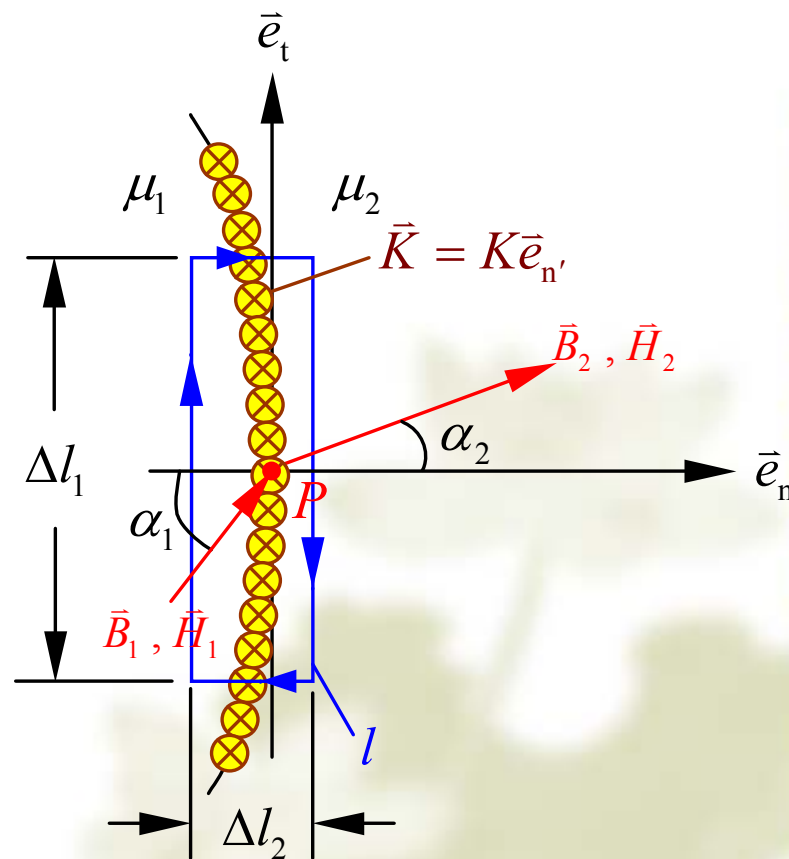
(3) 折射定律

通常，分界面上， $K=0$ ，此时

$$H_{1t} - H_{2t} = K \Rightarrow H_{1t} = H_{2t}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$



■ 说明:

1. 理论上, 在理想导体($\gamma \rightarrow \infty$), 超导体表面才可能有 \vec{K}
2. 工程上, 电流趋肤效应十分显著的导体表面, 基于工程观点, 可看作 \vec{K} 形态的分布;
3. 人为假设——如分析电机气隙磁场时, 常将电枢绕组电流理想化为一置于气隙周界上无限薄层的面电流分布形态;

2. 铁磁媒质(μ_1)与空气($\mu_2 \approx \mu_0$)分界面上的B、C.

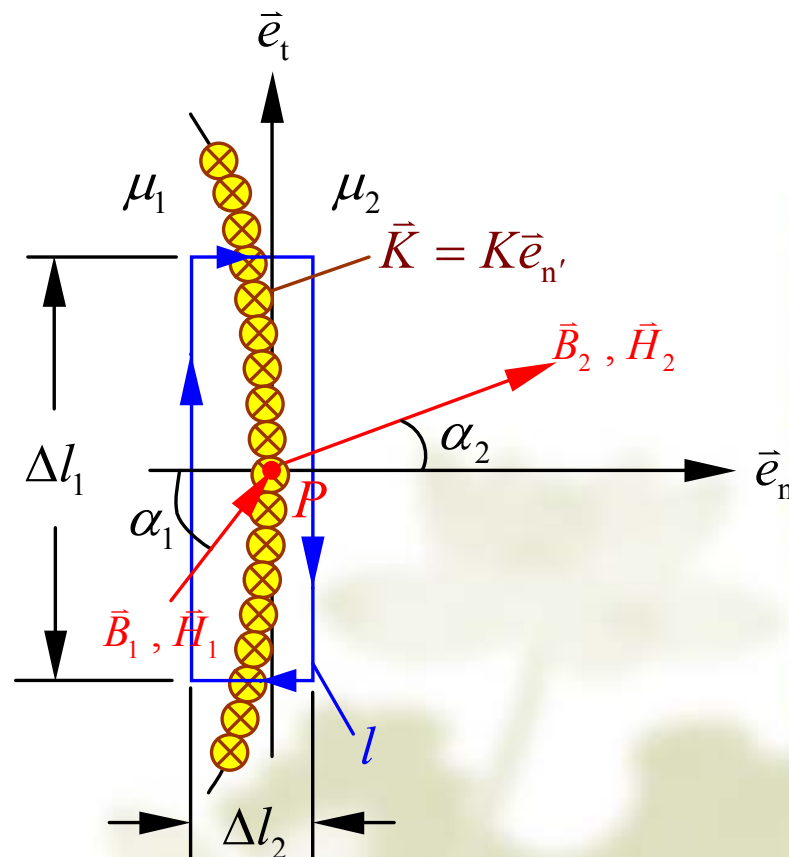
$$\mu_1 \gg \mu_2 \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \rightarrow \infty$$

与恒定电场类似,

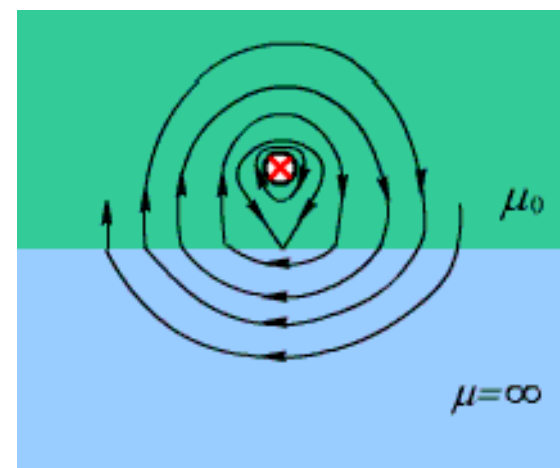
$$\alpha_1 \neq 90^\circ \quad \alpha_2 \approx 0^\circ$$

$$H_{1t} = H_{2t} \approx 0$$

铁磁媒质与空气分界面的空气侧, B 、 H 线均近似垂直于分界面. 铁磁媒质表面近似为等磁面。



在紧接铁磁媒质与空气分界面的空气侧， B 、 H 线均近似垂直于分界面。铁磁媒质表面近似为等磁面。



导线位于铁板上方

3. 边界条件的位函数表示

■ 一般条件——用矢量磁位**A**表示

$$\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1t} - H_{2t} = K \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = A_2 \\ \frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \vec{A}_1)_t - \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \vec{A}_2)_t = K \end{cases} \quad \text{矢量磁位连续}$$

分界面上 A 的衔接条件 证明

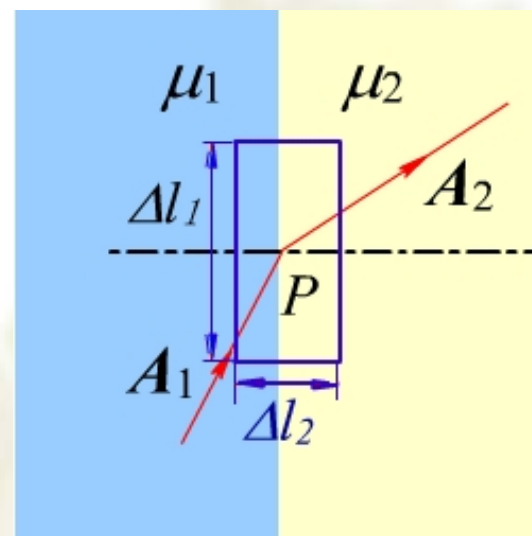
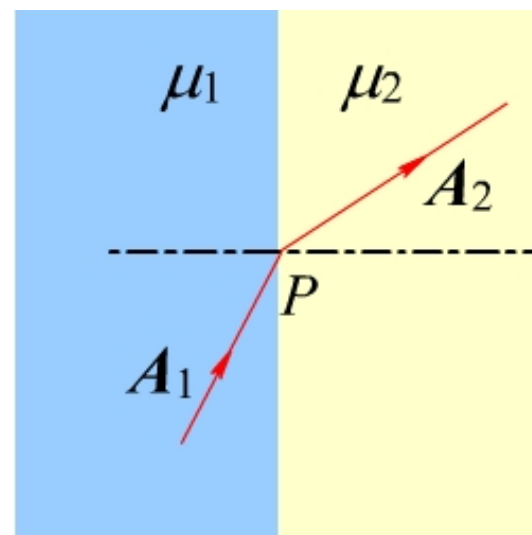
a) 围绕 P 点作一矩形回路，则

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

当 $\Delta L_2 \rightarrow 0$ 时, $S \rightarrow 0, \Phi \rightarrow 0, \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0,$

$$A_{1t} \Delta l_1 + 0 - A_{2t} \Delta l_1 + 0 = 0$$

$$\text{有 } A_{1t} = A_{2t} \quad (1)$$



磁矢位 A 的衔接条件²⁵

$$A_{1t} = A_{2t} \quad (1)$$

b) 围绕 P 点作一扁圆柱，则

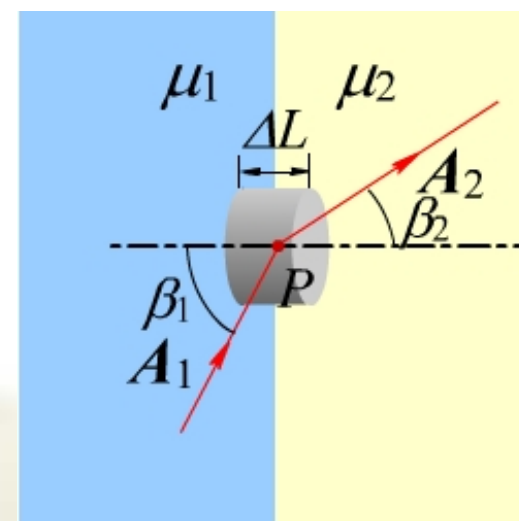
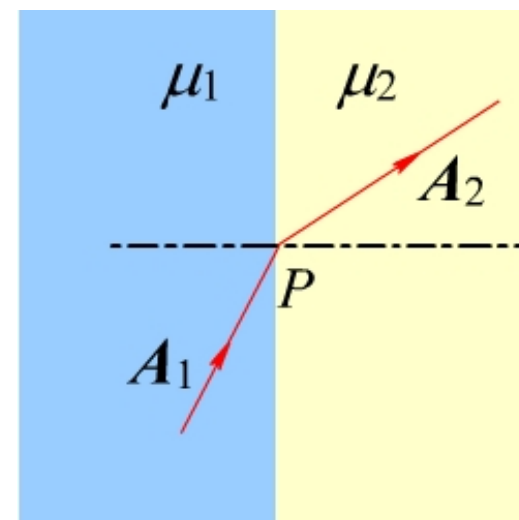
$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = 0$$

当 $\Delta L \rightarrow 0$ 时， $-A_{1n}\Delta S + A_{2n}\Delta S = 0$,

$$A_{1n} = A_{2n} \quad (2)$$

从式(1)、(2) 得 $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$

表明 在媒质分界面上磁矢位 A 是连续的。



磁矢位 A 的衔接条件

对于平行平面场，

$$\vec{J} = J_z \vec{e}_z \quad \vec{A} = A_z \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} A_{z1} = A_{z2} \\ \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} = K_z \end{cases}$$

如长直电流、无限大平板电流产生的磁场等。

2) 两种不同磁媒质分界面上的**B. C.**——用标量磁位 φ_m 表示

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{1t} = H_{2t} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{array} \right. \xrightarrow[\bar{B} = -\mu_0 \nabla \varphi_m]{\varphi_m = \int_l \vec{H} \cdot d\vec{l}} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \\ \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \end{array} \right.$$

3) 铁磁媒质(μ_1)与空气($\mu_2 \approx \mu_0$)分界面上的B. C.

用磁场量表示

$$\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1t} = H_{2t} \approx 0 \end{cases}$$

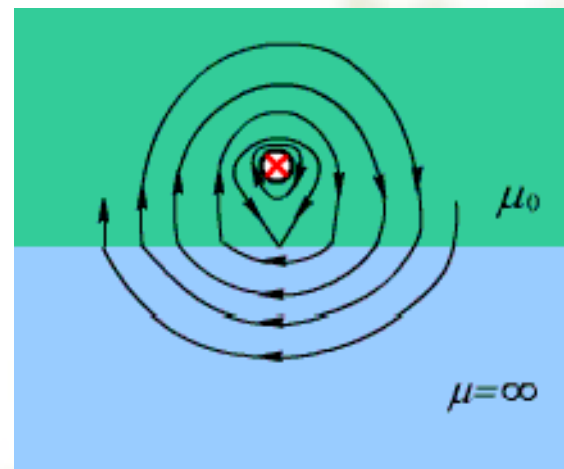
$\xrightarrow{2D}$

用矢量磁位 \mathbf{A} 表示

$$\begin{cases} A_{z1} = A_{z2} \\ \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} = \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} \approx 0 \end{cases}$$

用标量磁位 φ_m 表示

$$\rightarrow \begin{cases} \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \\ \varphi_{m1} = \varphi_{m2} = C \end{cases}$$

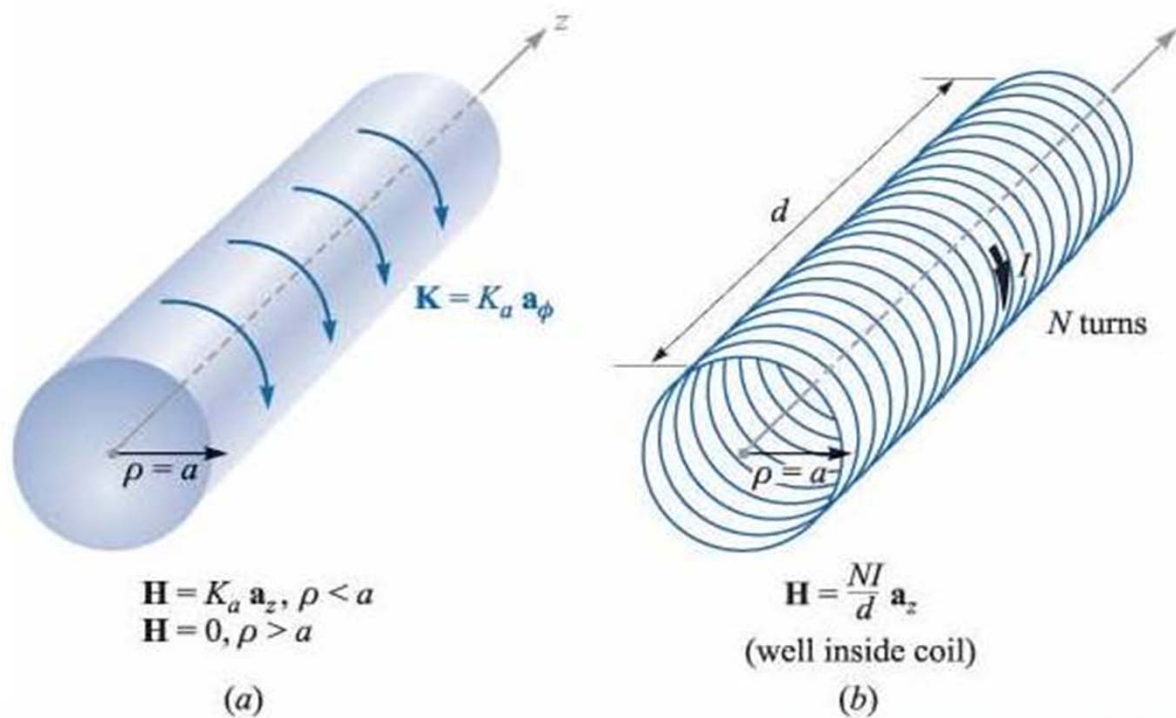


导线位于铁板上方

3.5.4 磁性媒质中场分布的计算

■ 安培环路定律的应用

例1： 计算面电流密度分布为 Ka 的长直螺线管内外的磁场。



分析:

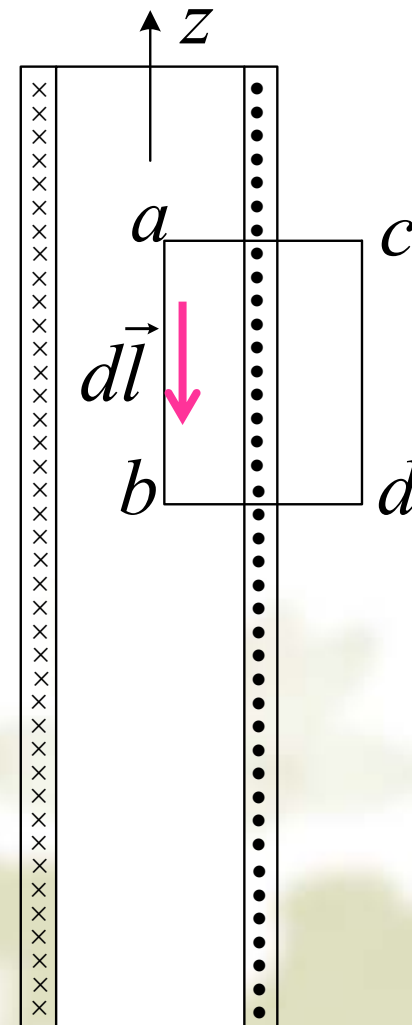
磁场仅有Z分量, **ab**、**cd**上磁场强度
分别为常值

计算:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = l_{ab} K_a$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_{ab}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{l_{bd}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{l_{dc}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{l_{ca}} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_{ab}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = l_{ab} H$$

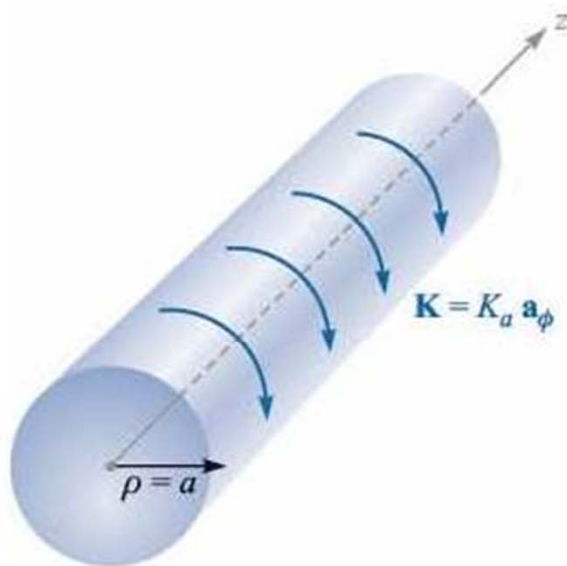


$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_{ba}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = l_{ab} H = l_{ab} K_a$$

$$H = K_a$$

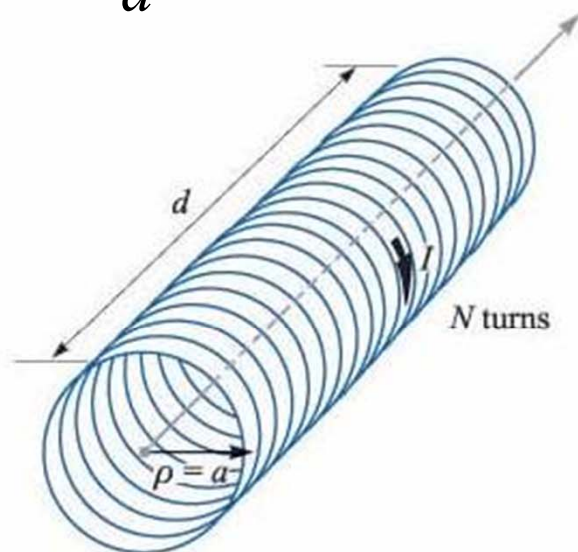
如果螺线管长 d 、匝数为 N 、每匝电流 I

$$H = K_a = \frac{NI}{d}$$



$$\begin{aligned} \vec{H} &= K_a \vec{a}_z, \rho < a \\ \vec{H} &= 0, \rho > a \end{aligned}$$

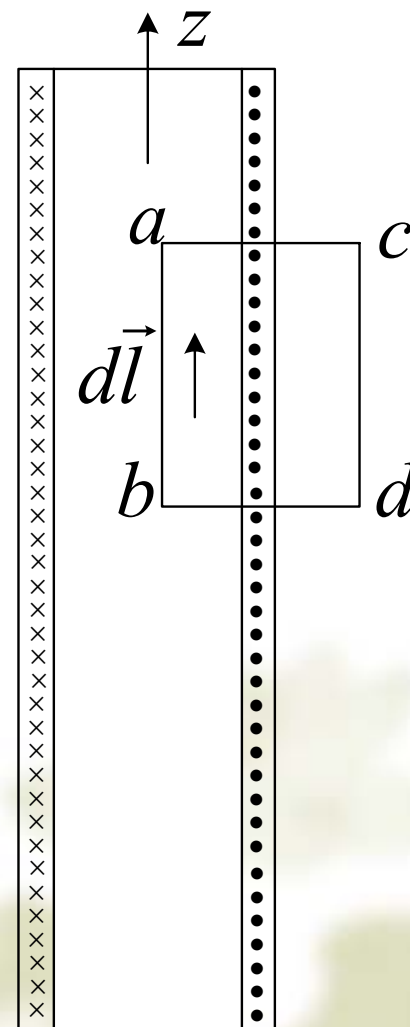
(a)

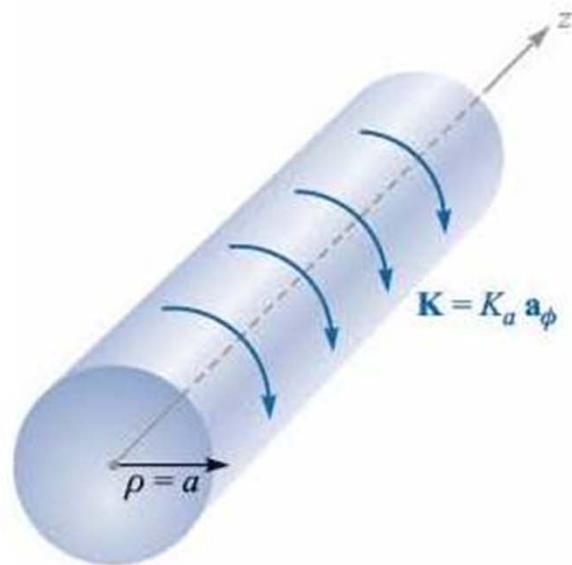


$$\vec{H} = \frac{NI}{d} \vec{a}_z$$

(well inside coil)

(b)

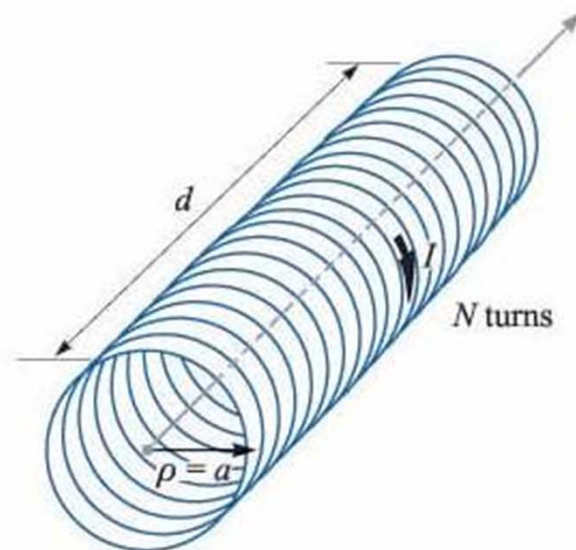




$$\mathbf{H} = K_a \mathbf{a}_z, \rho < a$$

$$\mathbf{H} = 0, \rho > a$$

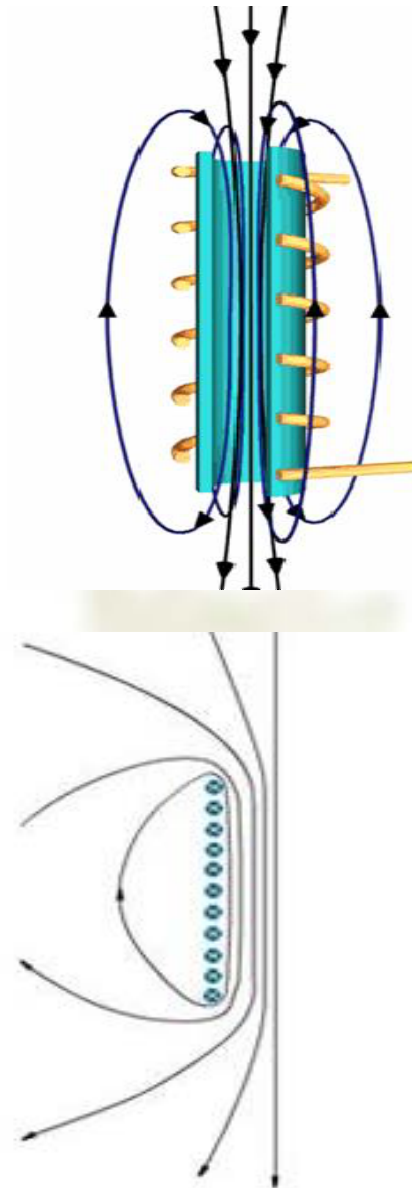
(a)



$$\mathbf{H} = \frac{NI}{d} \mathbf{a}_z$$

(well inside coil)

(b)



例2（书P173页例3-15） 在一含有气隙的环形铁心上紧密绕制 **N** 匝线圈，如图所示。环形铁心的磁导率为 μ （ $\mu \geq \mu_0$ ），半径 **R** ，截面半径 **$a \leq R$** ，气隙宽度 **$d \leq R$** 。当线圈载流为 **I** 时，若忽略漏磁通，试求铁心及气隙中的磁感应强度和磁场强度。

分析：

忽略漏磁，且 **$a \leq R$** ， **$d \leq R$**
铁心及气隙中的磁场均匀。

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

解: $B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu H_1 = \mu_0 H_\delta$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

$$H_1(2\pi R - d) + H_\delta d = NI$$

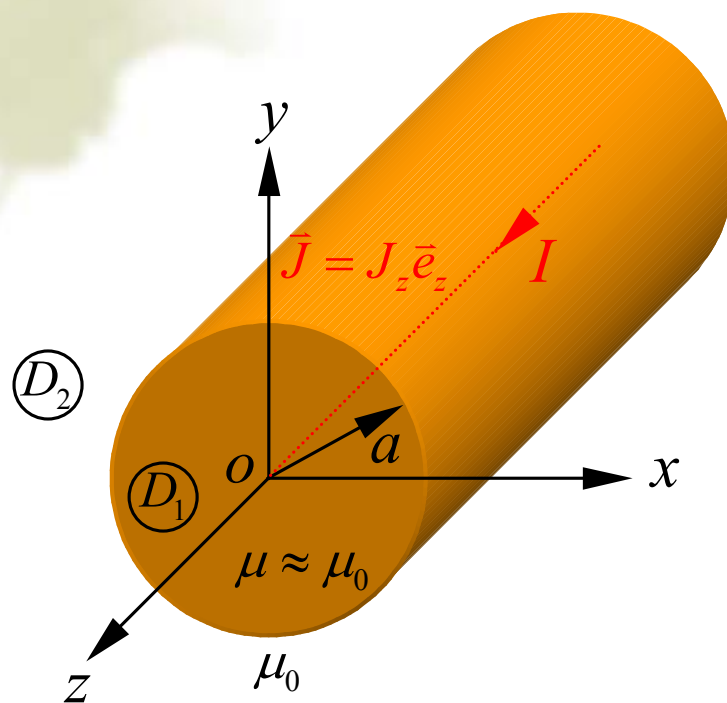
$$\vec{H}_1 = \frac{NI}{\mu_r d + (2\pi R - d)} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{H}_\delta = \frac{\mu_r NI}{\mu_r d + (2\pi R - d)} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{B} = \vec{B}_\delta = \frac{\mu NI}{\mu_r d + (2\pi R - d)} \vec{e}_\phi$$

铁心中, $\mu \geq \mu_0$ ($\mu_r \geq 1$), $H_1 = -\nabla \varphi_m \approx 0$
 在工程分析中将铁磁媒质看成一等磁位体, 看作磁压
 降体现在铁心的气隙处。

例3：无限长直圆形载流导线的磁场

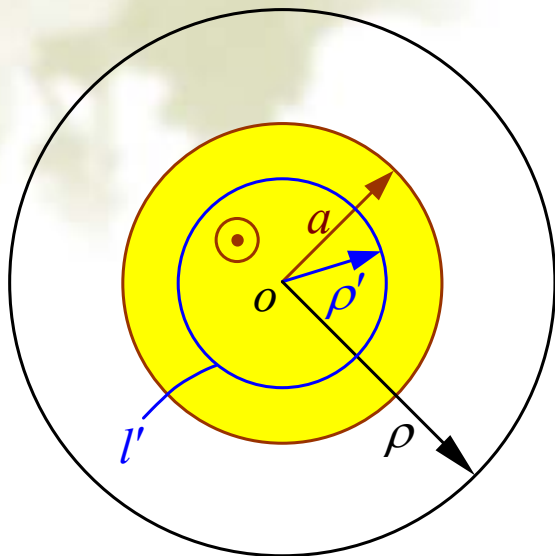


■ 分析

平行平面磁场

轴对称

法一：安培环路定律的应用



$$\rho' \leq a$$

$$\oint_{l'} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = H_1 \oint_{l'} dl = H_1 2\pi\rho' = \frac{\pi\rho'^2}{\pi a^2} I$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I\rho'}{2\pi a^2} \vec{e}_\phi \quad (\rho' \leq a)$$

$$\rho > a$$

$$\oint_l \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = H_2 2\pi\rho = I$$

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi \quad (\rho \geq a)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

法二：基于边值问题求解

■ 泛定方程

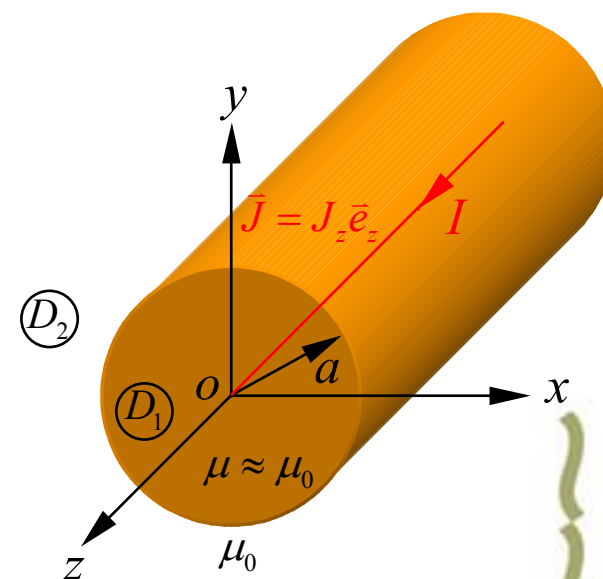
$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \vec{e}_z$$

$$\vec{A}(\rho, \phi) = \vec{A}(\rho) = A_z(\rho) \vec{e}_z$$

载流导体内 D_1

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_{z1} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_{z1}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_{z1}}{\partial z^2} && \text{(附录二)} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \right) = -\mu_0 J_z && P(\rho, \phi) \in D_1 \quad (1) \end{aligned}$$

(矢量泊松方程)

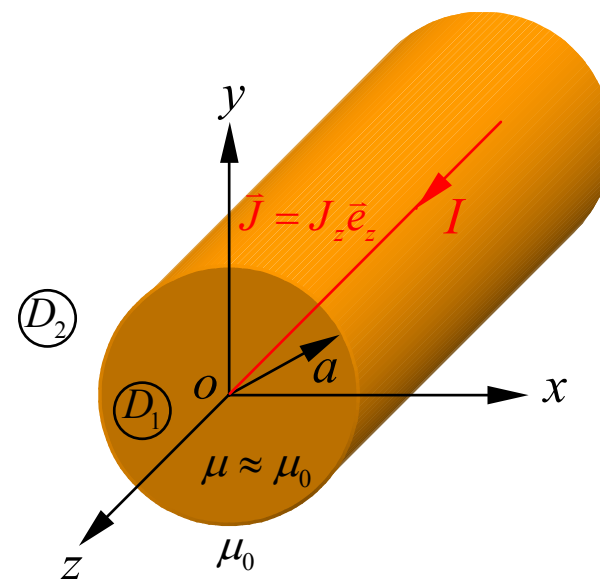


■ 泛定方程

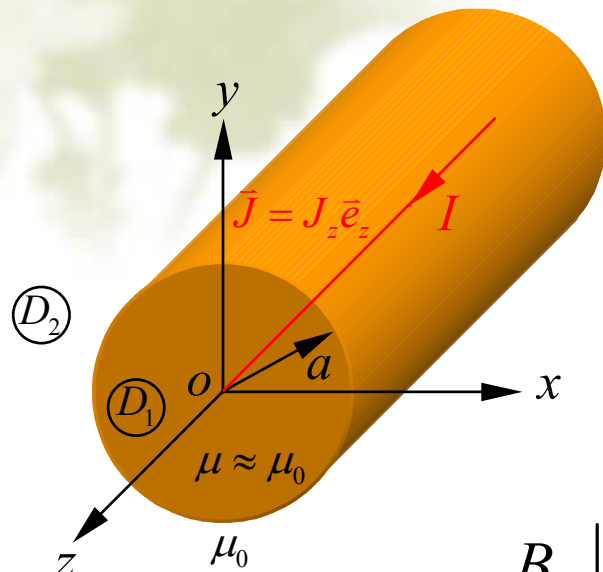
其他区域 D_2

$$\nabla^2 A_{z2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \right) = 0$$

$$P(\rho, \phi) \in D_2 \quad (2)$$



■ 定解条件



交界条件:

$$A_{z1}|_{\rho=a} = A_{z2}|_{\rho=a} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \bigg|_{\rho=a} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \bigg|_{\rho=a} \quad (4)$$

参考点: $A_{z1}|_{\rho=0} = 0 \quad (5)$

$$B_{\phi 1}|_{\rho=0} = (\nabla \times \vec{A})|_{\rho=0} = -\frac{dA_{z1}}{d\rho} \bigg|_{\rho=0} \text{ 为有限值} \quad (6)$$

■ 通解

$$\nabla^2 A_{z1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \right) = -\mu_0 J_z \quad (1)$$

直接积分式(1), 得

$$\rho \frac{dA_{z1}}{d\rho} = -\int \mu_0 J_z \rho d\rho + C_1 = -\mu_0 J_z \frac{\rho^2}{2} + C_1$$

$$A_{z1} = -\frac{1}{4} \mu_0 J_z \rho^2 + C_1 \ln \rho + C_2$$

$$\nabla^2 A_{z2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (2)$$

直接积分式(2), 得

$$A_{z2} = C_3 \ln \rho + C_4$$

■ 确定未知常数

$$\bar{B}\Big|_{\rho=0} = -\frac{dA_{z1}}{d\rho}\bar{e}_\phi\Big|_{\rho=0} = B_{\phi1}\Big|_{\rho=0}\bar{e}_\phi \quad \text{为有限值}$$

$$A_{z1} = -\frac{1}{4}\mu_0 J_z \rho^2 + C_1 \ln \rho + C_2$$
$$C_1 = 0$$

参考点： $A_{z1}\Big|_{\rho=0} = 0$

$$A_{z1} = -\frac{1}{4}\mu_0 J_z \rho^2 + \cancel{C_1 \ln \rho} + C_2$$
$$C_2 = 0$$

$$A_{z1} = -\frac{1}{4}\mu_0 J_z \rho^2 = -\frac{\mu_0 I \rho^2}{4\pi a^2} \quad (\rho \leq a)$$

$$\bar{B}_{\phi1} = -\frac{dA_{z1}}{d\rho}\bar{e}_\phi = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}\bar{e}_\phi \quad (\rho \leq a)$$

$$A_{z2} = C_3 \ln \rho + C_4$$

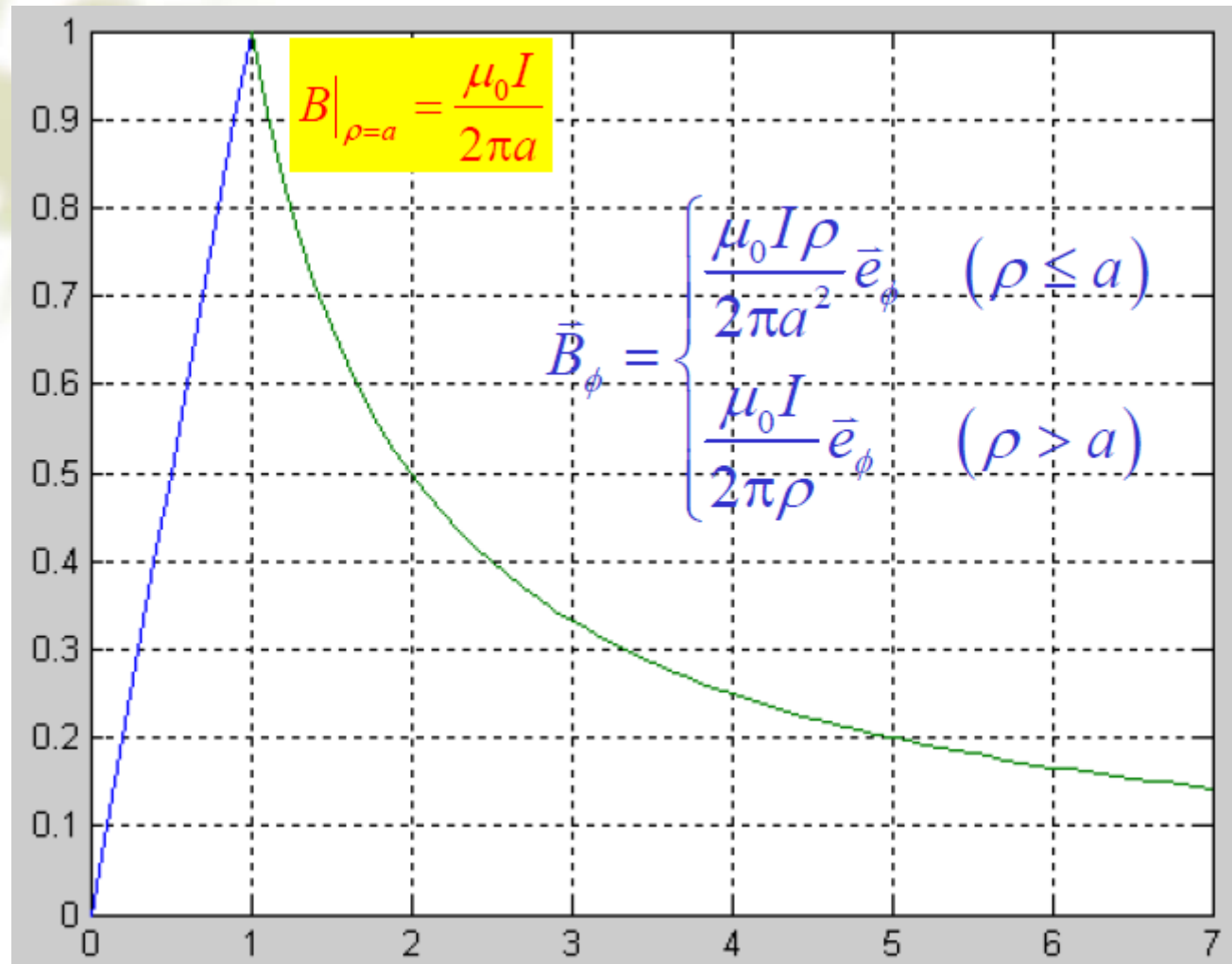
由式(3)和式(4)联立求解，可得

$$C_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \quad C_4 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a$$



$$A_{z2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{a} \quad (\rho > a)$$

$$\vec{B}_{\phi 2} = -\frac{dA_{z2}}{d\rho} \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi \quad (\rho > a)$$



P174: 例3-16与P85页例2-14类比（了解）。

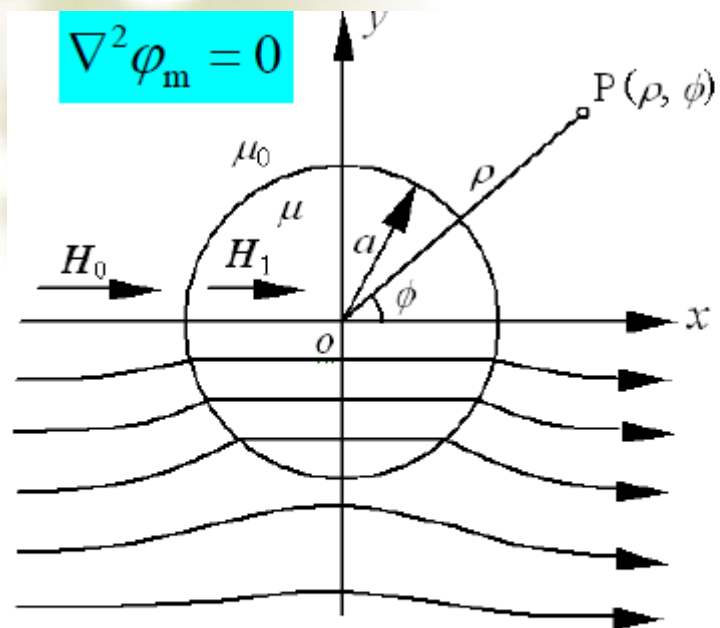
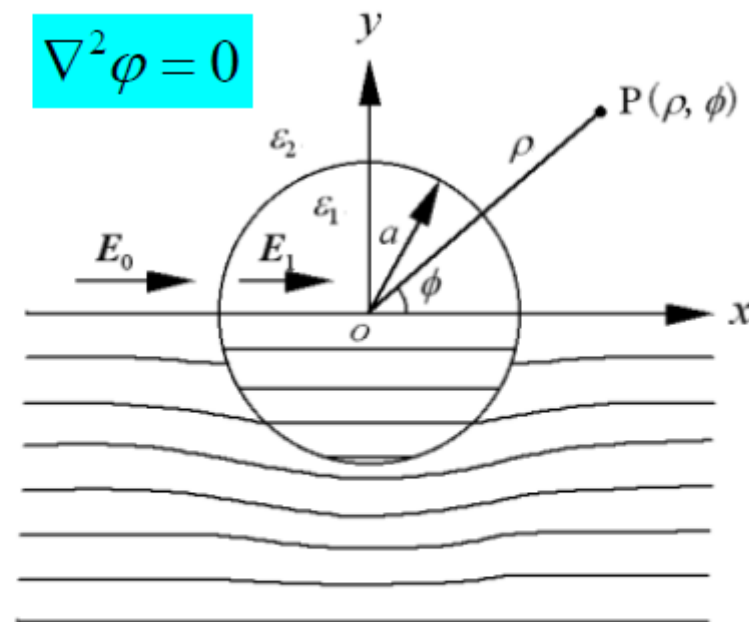


图 3-32 均匀外磁场中的
长直圆柱磁体



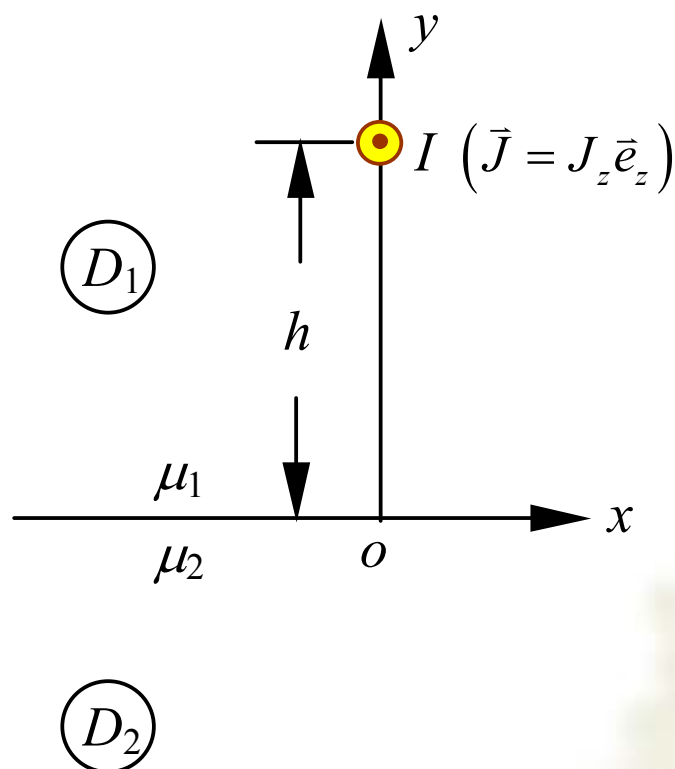
2-20 均匀外电场中的介质圆柱体

总结：恒定磁场的分析和计算方法

1. 应用毕奥—萨伐尔定律求解B
 2. 应用安培环路定律求解B
 3. 通过矢量磁位A求解B
 4. 通过标量磁位 φ_m 求解B
 5. 通过叠加原理求解B
 6. 静像法
- (1) 直接积分法
(2) 利用边值问题求解

磁性媒质中场分布的计算—镜像法

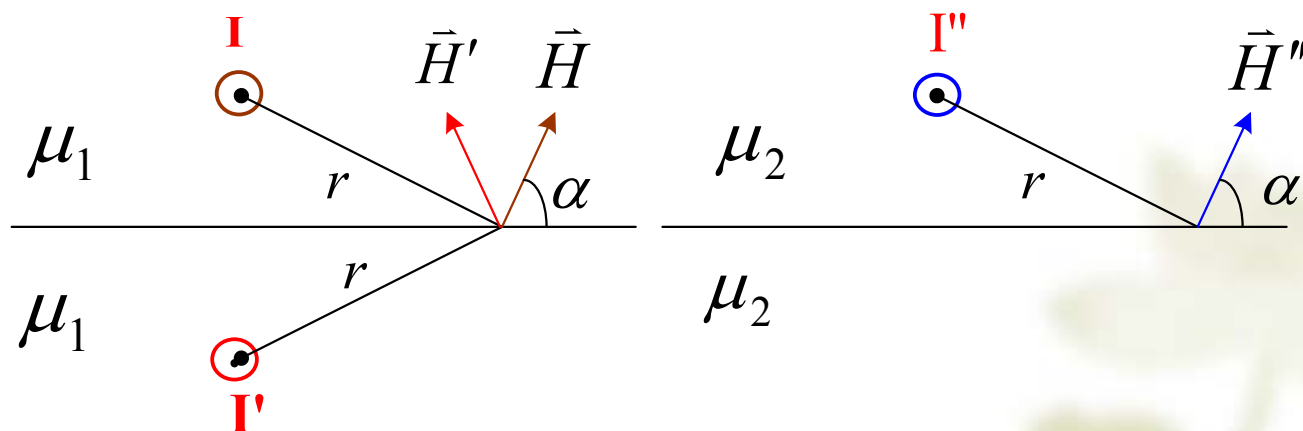
例：一根载流为 I 的无限长直导线，平行放置由两种媒质形成的无限大平面的界面附近的磁场，求解两种媒质中的磁场。



1. 直接应用镜像法求解

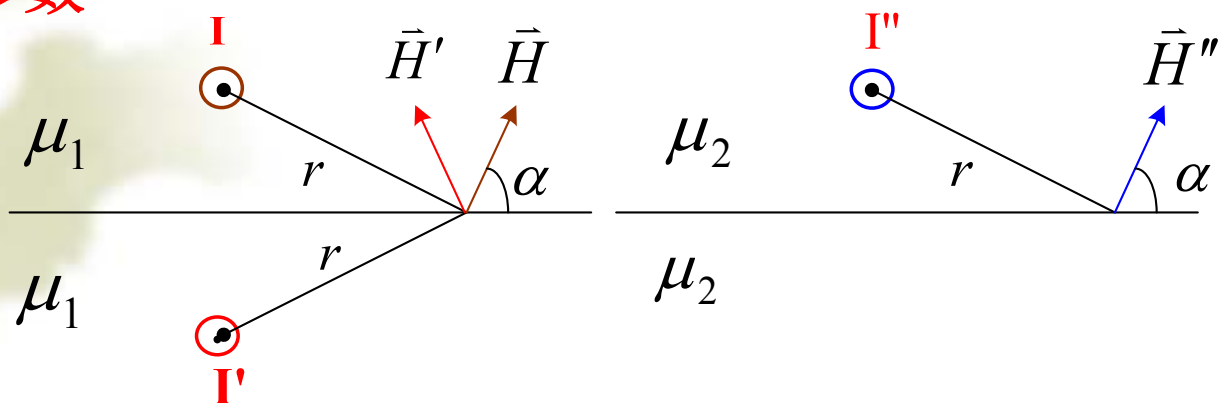
■ 镜像模型

类比于静电场，原问题上、下半空间的磁场的计算，可用如下的两个无限长载流导线分别模拟分界面上磁化电流的影响



注意镜像电流的参考方向与原电流的一致

■ 模型参数



应用分界面的边界条件(分界面上, $\mathbf{K}=0$)

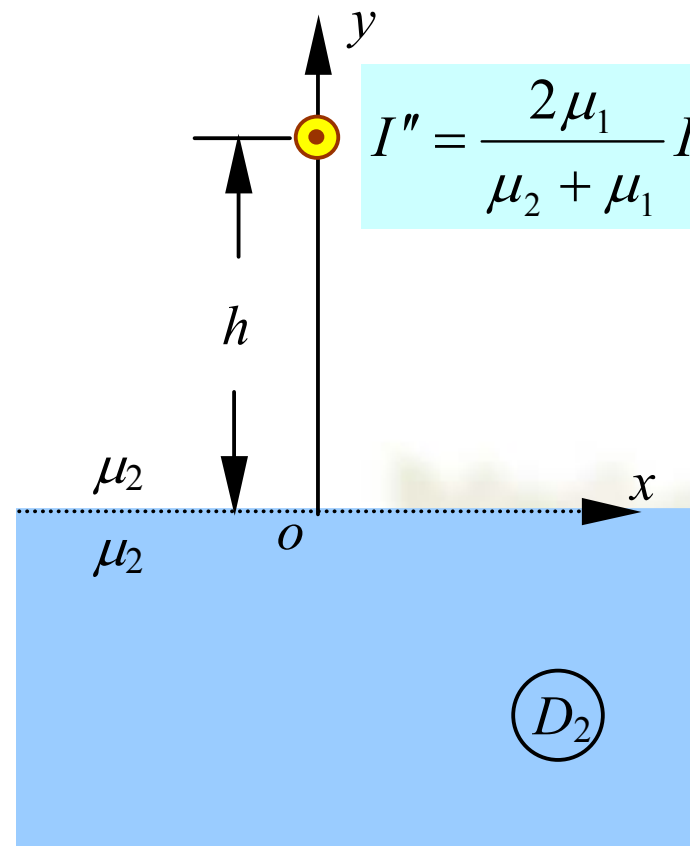
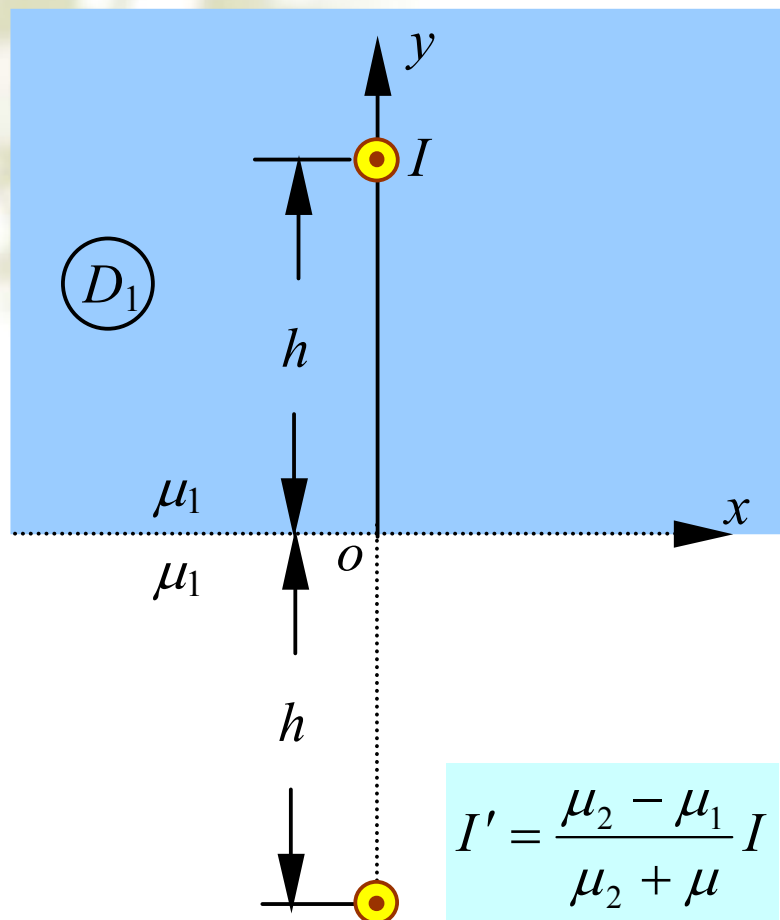
$$H_{1t} - H_{2t} = 0 \longrightarrow H \cos \alpha - H' \cos \alpha = H'' \cos \alpha$$

$$B_{1n} = B_{2n} \longrightarrow \mu_1 H \sin \alpha + \mu_1 H' \sin \alpha = \mu_2 H'' \sin \alpha$$

$$2\pi r H = I, \quad 2\pi r H' = I', \quad 2\pi r H'' = I''$$

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \quad I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

■ 直接应用镜像法求解



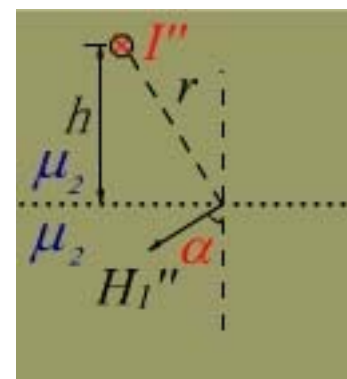
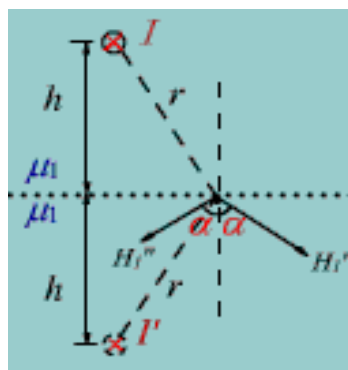
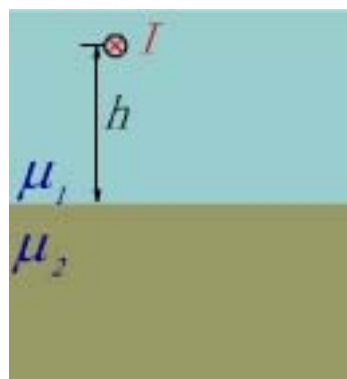
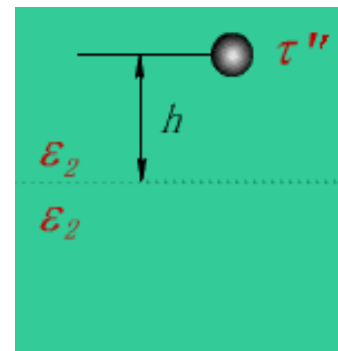
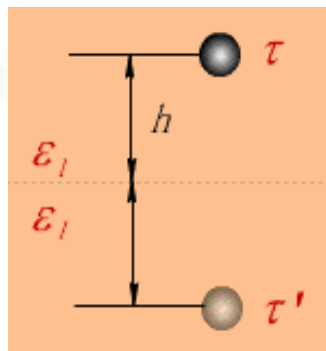
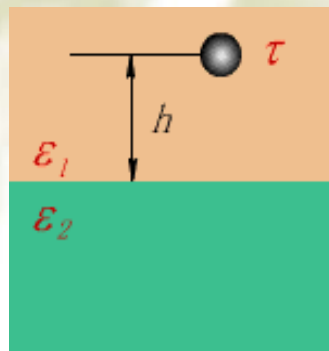
2. 根据对偶关系，应用静电场的结论

■ 两种场场量的对偶性

平行平面磁场	平行平面静电场
$\nabla^2 A_z = -\mu J_z$	$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$
$A_{z1} = A_{z2}$	$\varphi_1 = \varphi_2$
$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{z2}}{\partial n}$	$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$
A_z	φ
J_z	ρ
$1/\mu$	ε
$I = \int_S J_z dS$	$\tau = \int_S \rho dS, \quad q = \tau l$

■ 根据对偶关系，应用静电场的结论

$$(\tau' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tau, \tau'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tau)$$



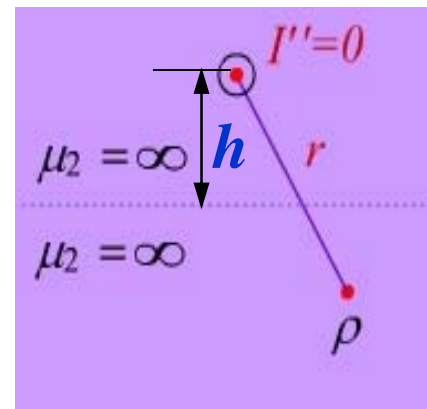
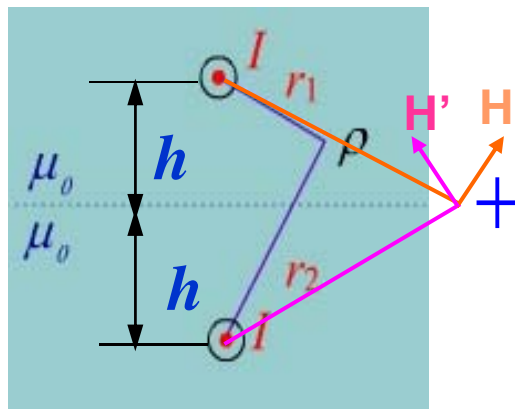
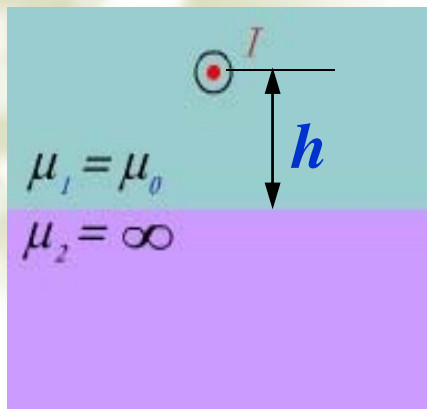
$$\tau \Leftrightarrow I$$

$$\epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\mu}$$

两种不同磁介质的镜像

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I, I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

例 无限大铁板上方 h 处载流导线 I 的磁场, $\mu_1 = \mu_0, \mu_2 \rightarrow \infty$



线电流 I 位于无限大铁板上方的镜像

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I,$$

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

空气中的磁场

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = I$$

分界面上 $H_{1t}=0$

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi r_1} \vec{e}_{\phi_1} + \frac{I}{2\pi r_2} \vec{e}_{\phi_2}$$

铁板中的场分布

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \approx 0$$

$$\vec{H}_2 \approx 0$$

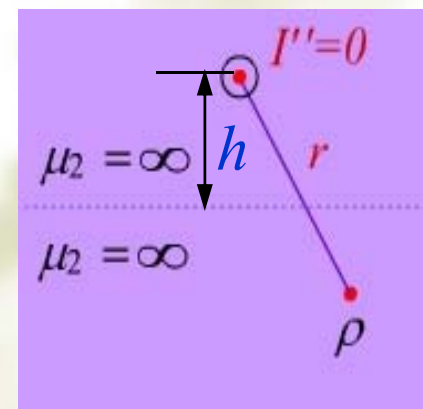
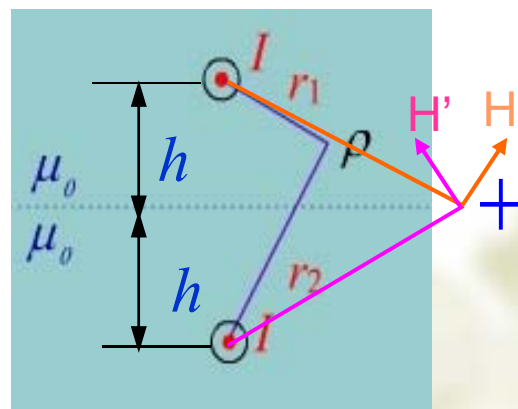
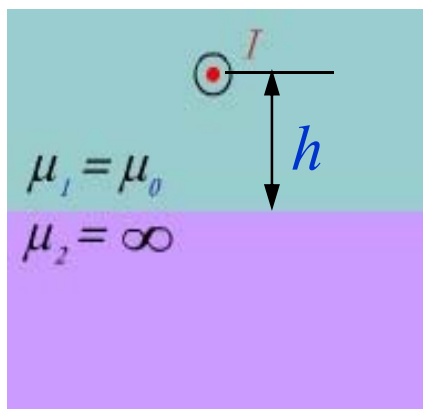
空气中 $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{I}{r_1} \vec{e}_{\phi_1} + \frac{I'}{r_2} \vec{e}_{\phi_2} \right)$

铁板中，磁通连续，**B**不可忽略

$$\vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2 = \mu_2 \frac{I''}{2\pi r} \vec{e}_{\phi''} = \mu_2 \frac{2\mu_0}{\mu_2 + \mu_0} \cdot \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_{\phi''} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi r} \vec{e}_{\phi''}$$

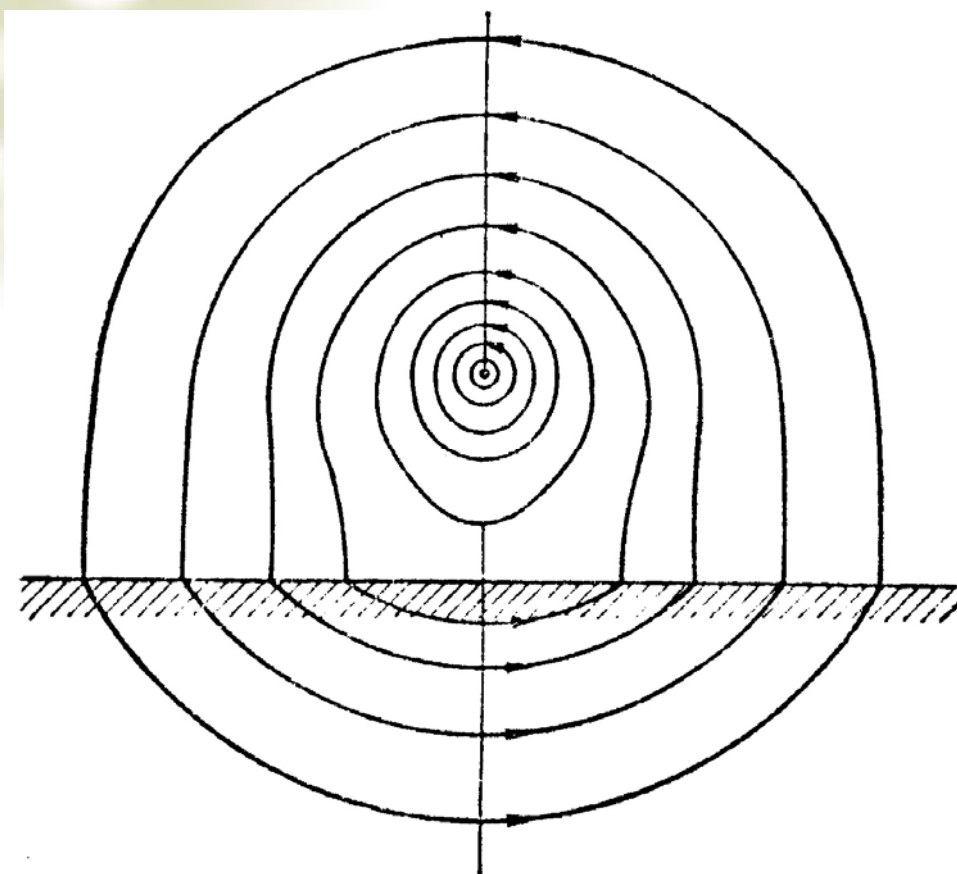
分界面上

$$H_{1t} = H_{2t} \approx 0 \quad \vec{H}_2 = -\nabla \varphi_{m2} \approx 0 \quad \varphi_{m2} = \text{Const}$$

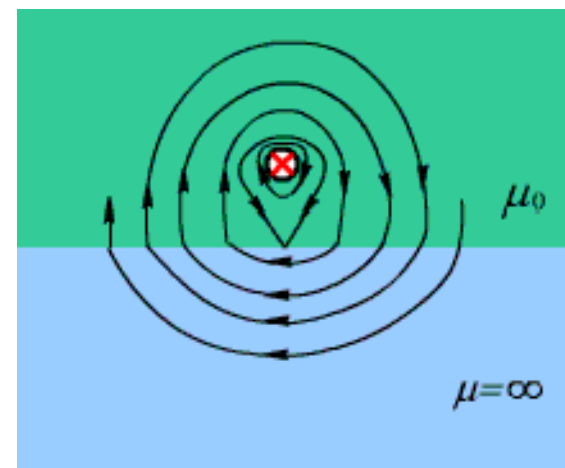


线电流 I 位于无限大铁板上方的镜像

■ 场分布

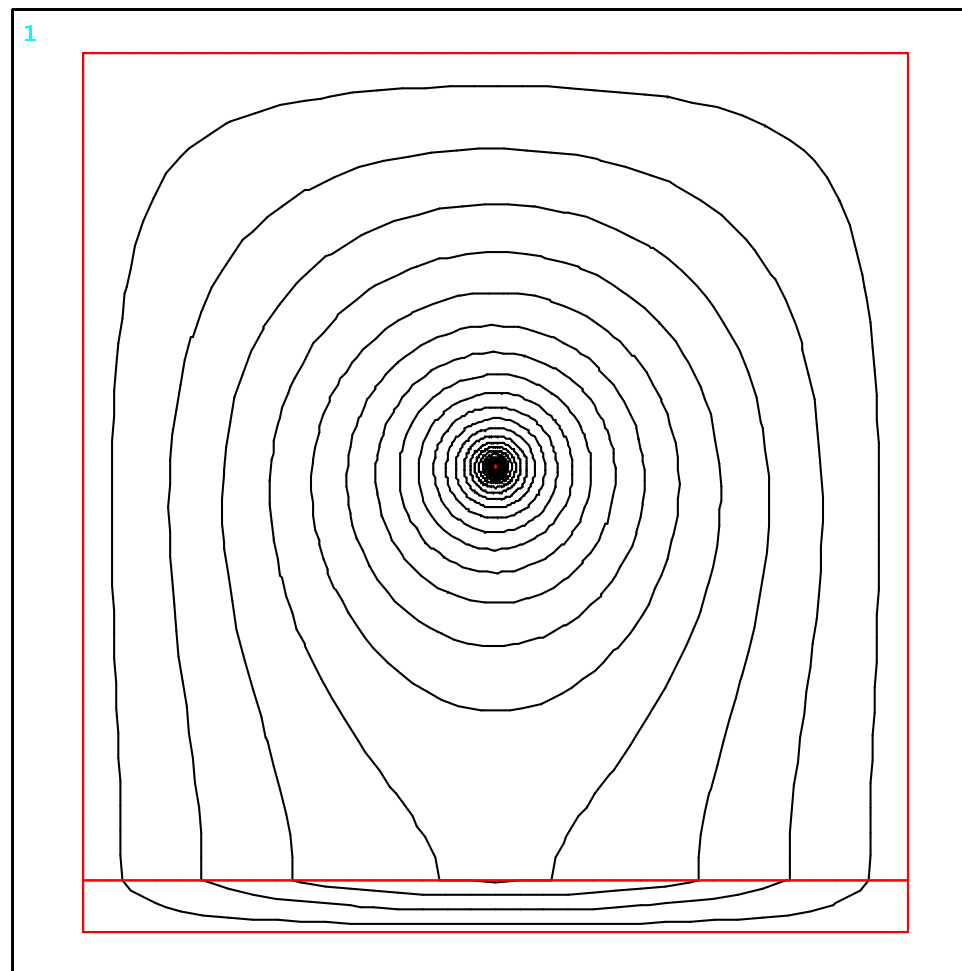


导线位于铁板上方



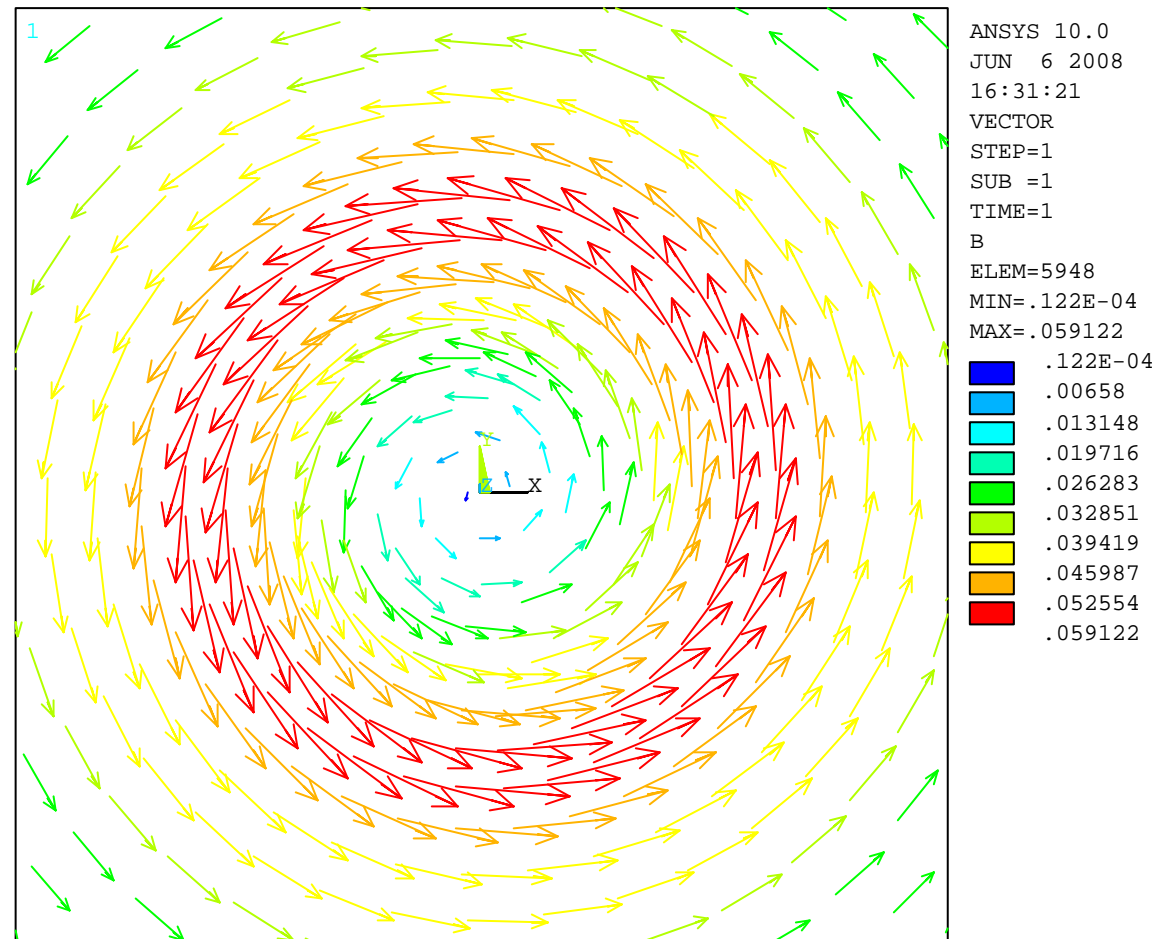
导线位于铁板上方

■ 场分布



```
ANSYS 10.0  
JUN  6 2008  
16:28:20  
NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB  =1  
TIME=1  
AZ  
RSYS=0  
SMX  =.004225  
      .704E-04  
      .211E-03  
      .352E-03  
      .634E-03  
      .775E-03  
      .001056  
      .001197  
      .001479  
      .00162  
      .001901  
      .002042  
      .002183  
      .002465  
      .002606  
      .002887  
      .003028  
      .00331  
      .003451  
      .003732  
      .003873  
      .004155
```

■ 场分布





作业：3-16

超导技术的发现

众所周知，金属等导电材料在传导电流时，都会表现出对电流的阻碍作用，造成电能的损耗。

1911年荷兰物理学家昂内斯（Onnes）意外发现了一个奇特的现象：汞的电阻在4.2K(-296° C)时会减小至零。后来他又发现许多金属和合金都具有与汞类似的低温下失去电阻的特性，科学家将这种现象称之为“超导”，将这种冷却到一定温度以下表现出的超导电性的材料叫做超导体。

由于这一发现，昂内斯获得了1913年诺贝尔奖。

超导材料的特性

超导： 指金属、合金或其它材料的电阻在 4—20K 温度下变为零的性质。

高温超导： 指温度在 77K 以上，材料的电阻变为零的性质。

超导体内部没有电场。

载流能力强（约 $6000\text{A}/\text{cm}^2$ ），
损耗小。

超导技术应用

超导电机、超导变压器、超导限流器、超导输电、超导储能、高能加速器、核聚变装置、磁流体发电、超导磁悬浮列车、超导磁分离、核磁共振谱仪。



江泽民总书记乘坐高温超导磁悬浮实验车



世界首辆载人高温超导磁悬浮实验车



高温超导磁悬浮模拟实验车