# 3.3 恒定磁场

❖ 导体中通有直流电流时，在导体内部和它周围的媒质中，不仅有电场还有不随时间变化的磁场，称为恒定磁场。

❖ 恒定磁场和静电场是性质完全不同的两种场，但在分析方法上却有许多共同之处。学习本章时，注意类比法的应用。

## 3.3 恒定磁场的基本方程与场的特性

- 安培环路定律

$$\oint_l \vec{H}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = \sum I \xrightarrow{\text{S. T.}} \nabla\times\vec{H} = \vec{J} = \vec{J}_{\mathrm{c}}$$ 有旋场

当电流与安培环路呈右手螺旋关系时，电流取正值，否则取负；

环路上的 **H**（***B***）仅与环路交链的电流有关。

- 磁场中的高斯定理（磁通连续性原理）

$$\oint_S \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{G. T.}} \nabla\bullet\vec{B} = 0$$ 无源(无散)场

磁感应线***B***是连续的，是无头无尾的闭合线。

- 媒质构成方程 $\vec{B} = \mu\vec{H}$

# 毕奥—萨伐尔定律 ( Biot – Savart Law )

基于亥姆霍兹定理，有

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) + \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

$$\nabla\bullet\vec{B} = 0$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\bullet\vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' = 0$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_{\mathrm{c}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_{\mathrm{c}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r})}$$

**A**—矢量磁位， 单位：韦伯/米 或 $\mathbf{W_b/m}$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_{\mathrm{c}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

表明：磁场分布B可由磁感应强度H给出，也可通过先求矢量磁位A，然后求B得到。

矢量磁位没有具体的物理意义，仅作为计算辅助量—简化计算

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_{\mathrm{c}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' \qquad \vec{B}(\vec{r})=\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_{\mathrm{c}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\times\left(\frac{\vec{J}_{\mathrm{c}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\mathrm{d}V'$$

**P147经过推导，可得：**

# 毕奥—萨伐尔定律

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_c(\vec{r}')\times\vec{e}_R}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\vec{K}(\vec{r}')\times\vec{e}_R}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\mathrm{d}S'$$

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\vec{e}_R}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

元电荷**dq**以速度**v**定向运动时，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}q\vec{v} &= \rho\mathrm{d}V\,\vec{v}=\vec{J}_c\mathrm{d}V\\ &=\sigma\mathrm{d}S\,\vec{v}=\vec{K}\mathrm{d}S\\ &=\tau\mathrm{d}l\,\vec{v}=I\mathrm{d}\vec{l}\end{aligned}$$

（**A·m**）

$\vec{e}_R$ 的方向从源点到场点

# 3.4 自由空间中的磁场

已知源量——求场量B的分析方法：

1. 应用毕奥—萨伐尔定律求解B
2. 应用安培环路定律求解B
3. 通过矢量磁位A求解B
4. 通过标量磁位$\varphi_m$求解B

## 3.4.1 基于场量B的分析

### 1. 应用毕奥—萨伐尔定律求解B

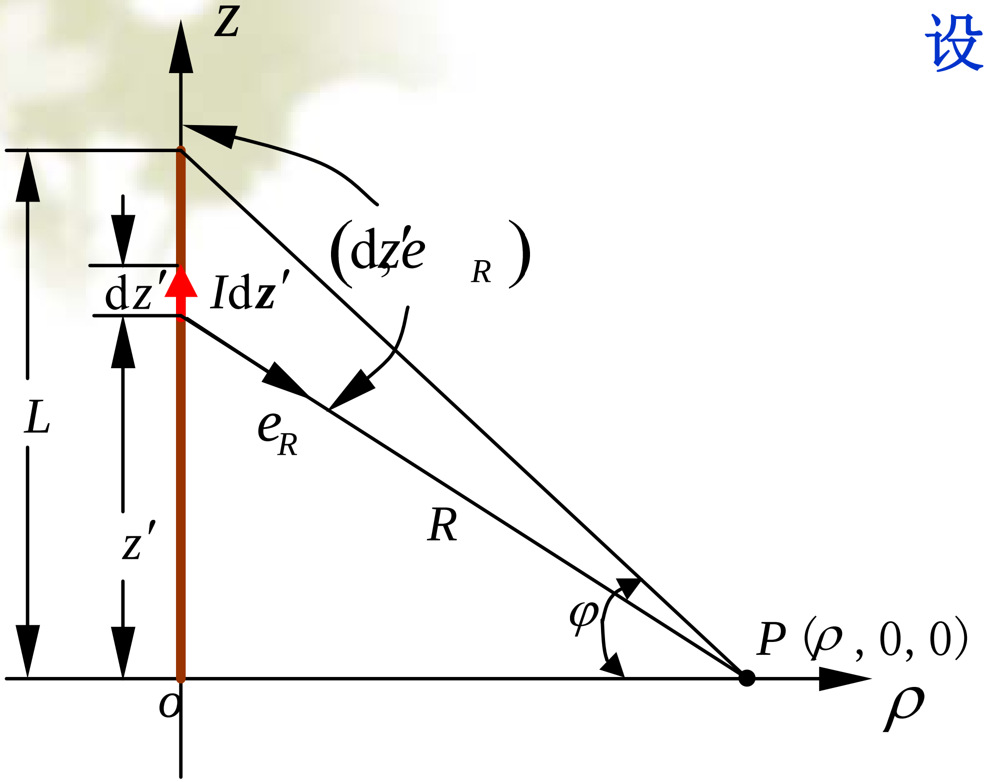
分析思路同静电场—先“分”后“合”，即：应用毕奥—萨伐尔定律先计算元电流产生的元磁感应强度，然后再对整个源积分，得到源产生的合成场.

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_c(\vec{r}')\times\vec{e}_R}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\mathrm{d}V'$$

体电荷分布静电场

$$\vec{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho\mathrm{d}\boldsymbol{V}'}{\boldsymbol{R}^2}\vec{\boldsymbol{e}}_R$$

## 例1　真空中载流 *I* 的有限长直导线的磁场.



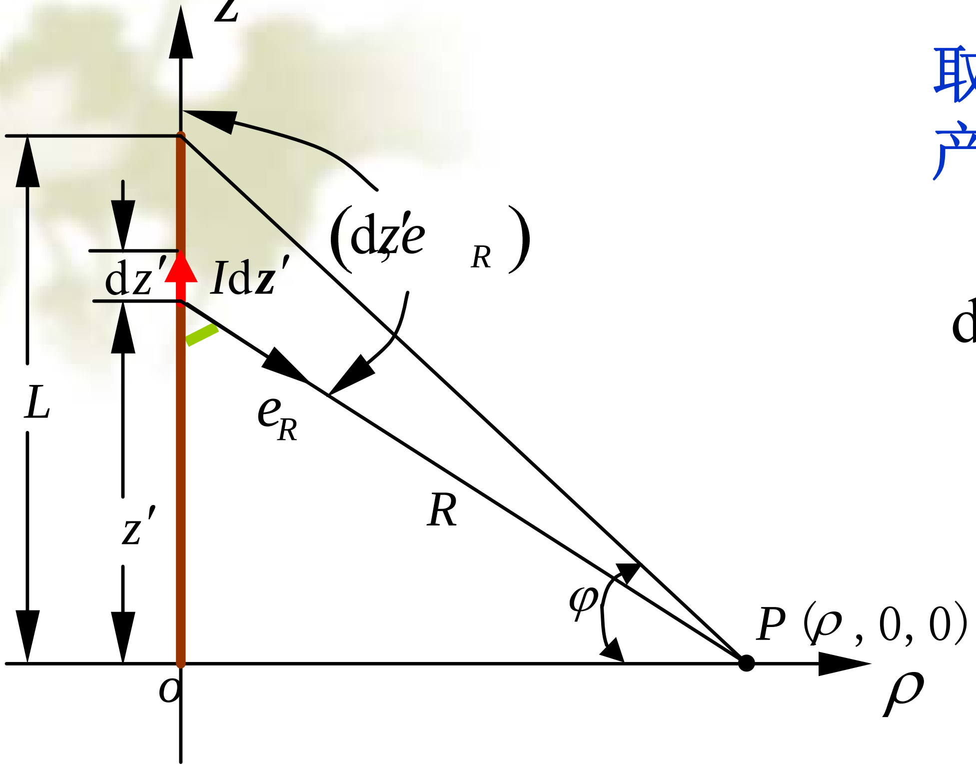

设典型的**P(ρ,0,0)**点如图所示

（1）场的特征：

轴对称

（2）分析方法

先分后合，即先计算元电流产生的元磁场，然后积分得出总电流产生的磁场




**解：**

取元电流段***Idz'***，它在***P***点产生的元磁场

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{z}' \times \vec{e}_R}{R^2}$$

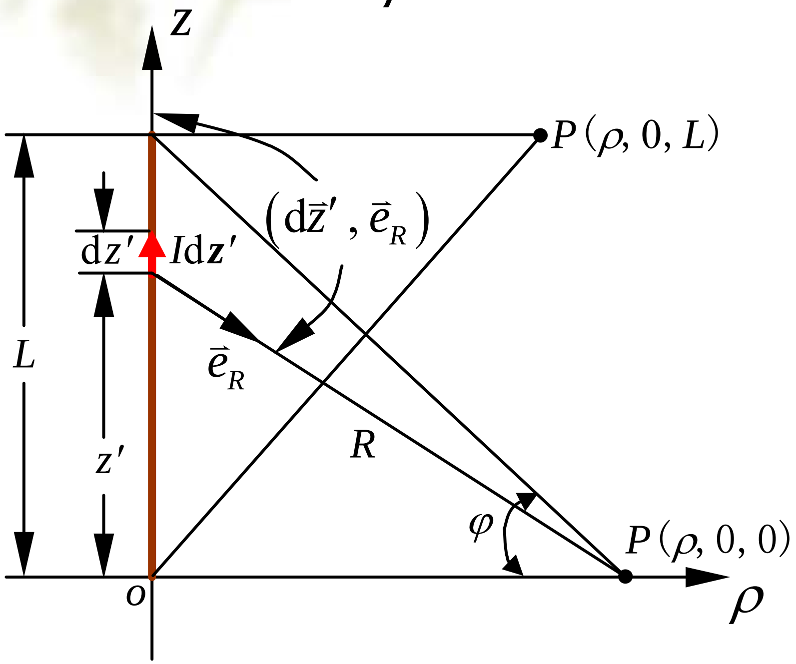
***ρ/R***

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}z' \sin\left(\mathrm{d}\vec{z}',\vec{e}_R\right)}{\rho^2 + z'^2}\vec{e}_\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\rho\,\mathrm{d}z'}{\left(\rho^2 + z'^2\right)^{3/2}}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{B}=\int_L \mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^L \frac{\rho\mathrm{d}z'}{\left(\rho^2+z'^2\right)^{3/2}}\vec{e}_\phi=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{z'}{\rho\sqrt{\rho^2+z'^2}}\bigg|_0^L\vec{e}_\phi=\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\sin\varphi\,\vec{e}_\phi$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\sin\varphi\,\vec{e}_\phi$$



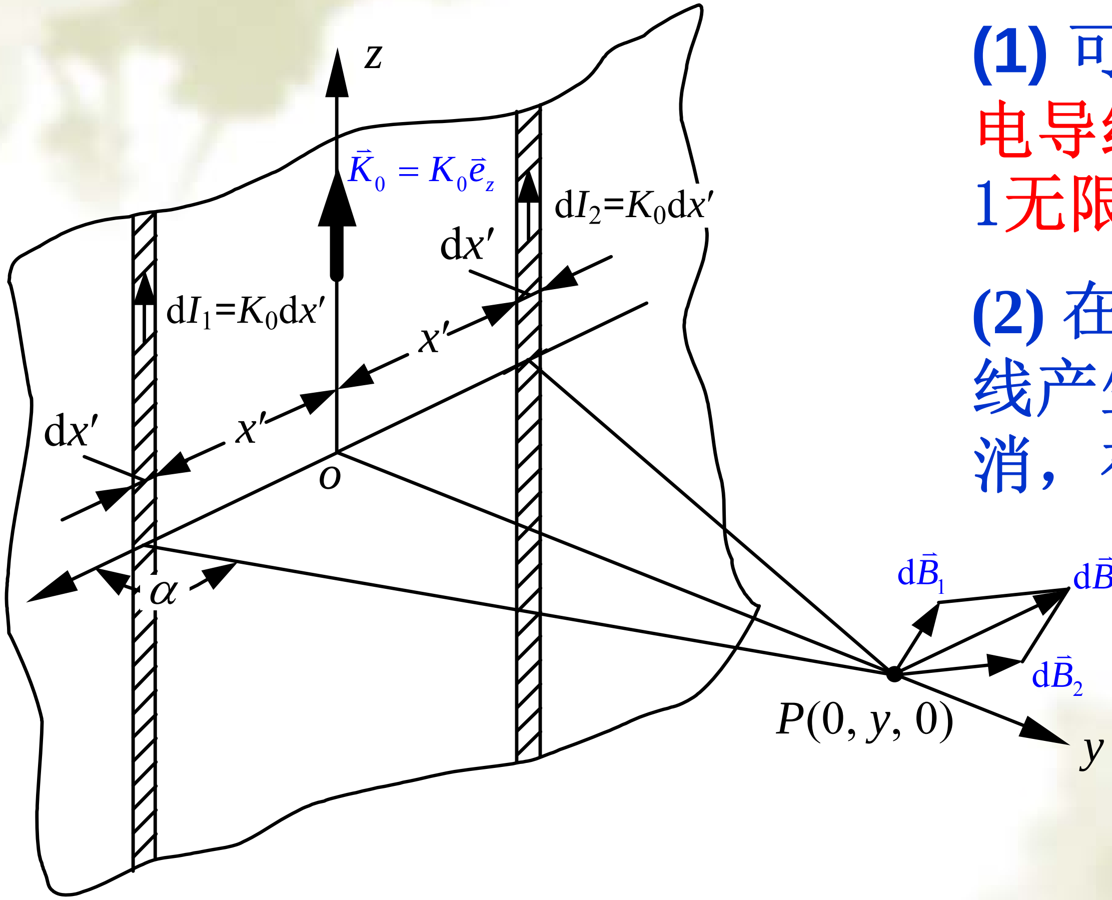

讨论：

**1. 若取场点为*P*(*ρ*, 0, *L*)——由于对称性，与上述点的B一样**

2. 若$L\rightarrow\infty$，即为无限长直载流导线时(2半无限长载流导线产生的磁场的迭加 )

$$\vec{B}=2\times\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\sin\frac{\pi}{2}\vec{e}_\phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi$$

## 例2  一无限大导电片载有恒定面电流密度的磁场。

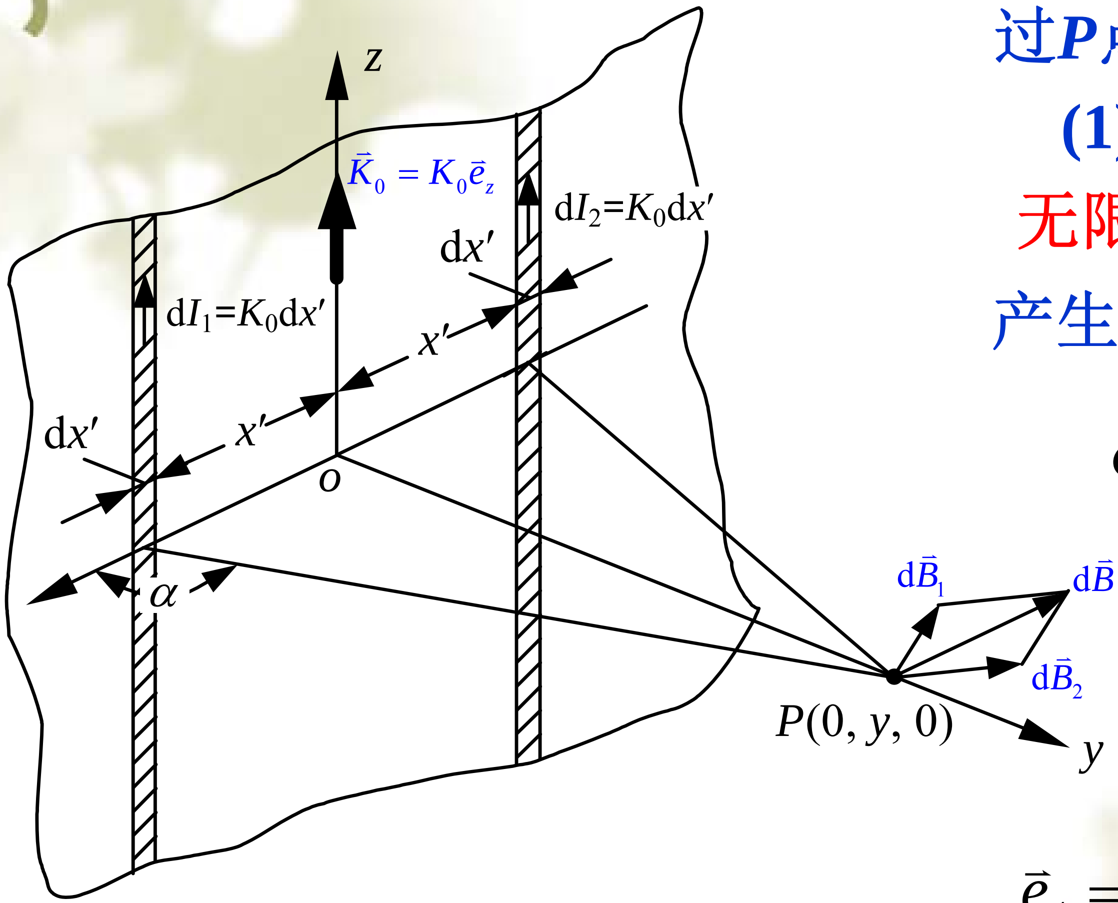



分析：选取坐标及元量如图。

(1) 可看成无限多无限长带电导线组成，可直接利用例1无限长导线结论。

(2) 在$P$点左右两条对称的导线产生的场在$y$方向相互抵消，在$x$方向相互加强。

无限长带电导线 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi$




[解] 选取合适的坐标系$y$轴：过$P$点垂直于导电板

(1) 先分

无限长带电导线元电流$K_0\mathrm{d}x'$产生的元磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}_1=\frac{\mu_0\left(K_0\mathrm{d}x'\right)}{2\pi\left(x'^2+y^2\right)^{1/2}}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_\phi=-\sin\alpha\vec{e}_x+\cos\alpha\vec{e}_y$$ 附录一

$$\mathrm{d}\vec{B}_1=\frac{\mu_0K_0\mathrm{d}x'}{2\pi\left(x'^2+y^2\right)^{1/2}}\left(-\sin\alpha\vec{e}_x+\cos\alpha\vec{e}_y\right)$$

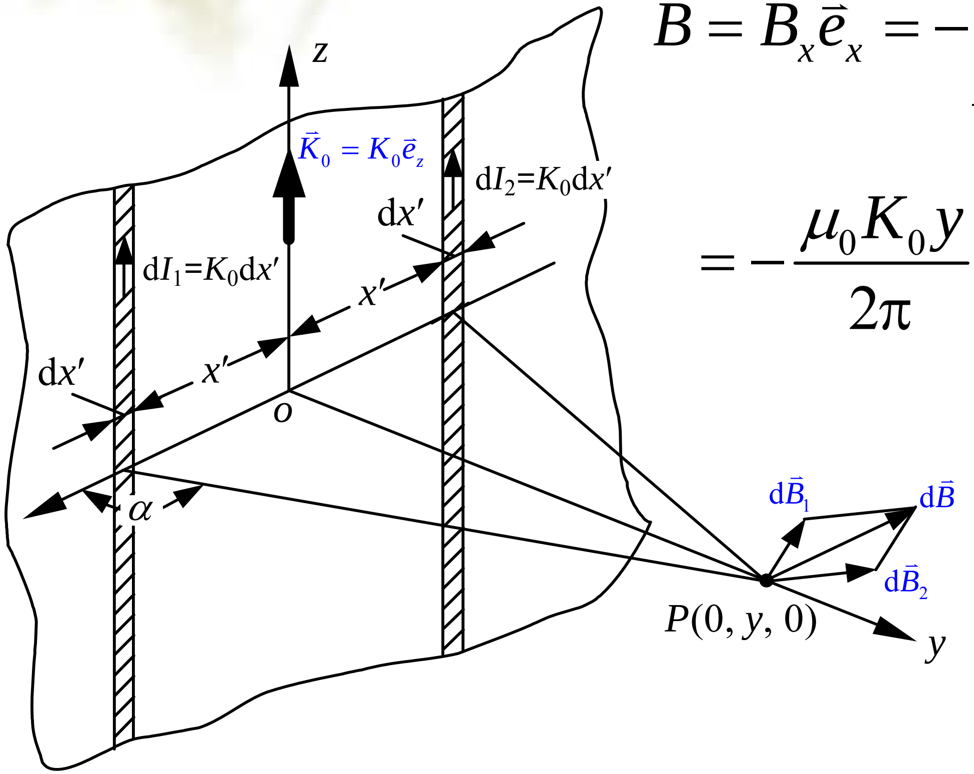
仅有$x$分量

$$\sin\alpha=\frac{y}{\left(x'^2+y^2\right)^{1/2}}$$

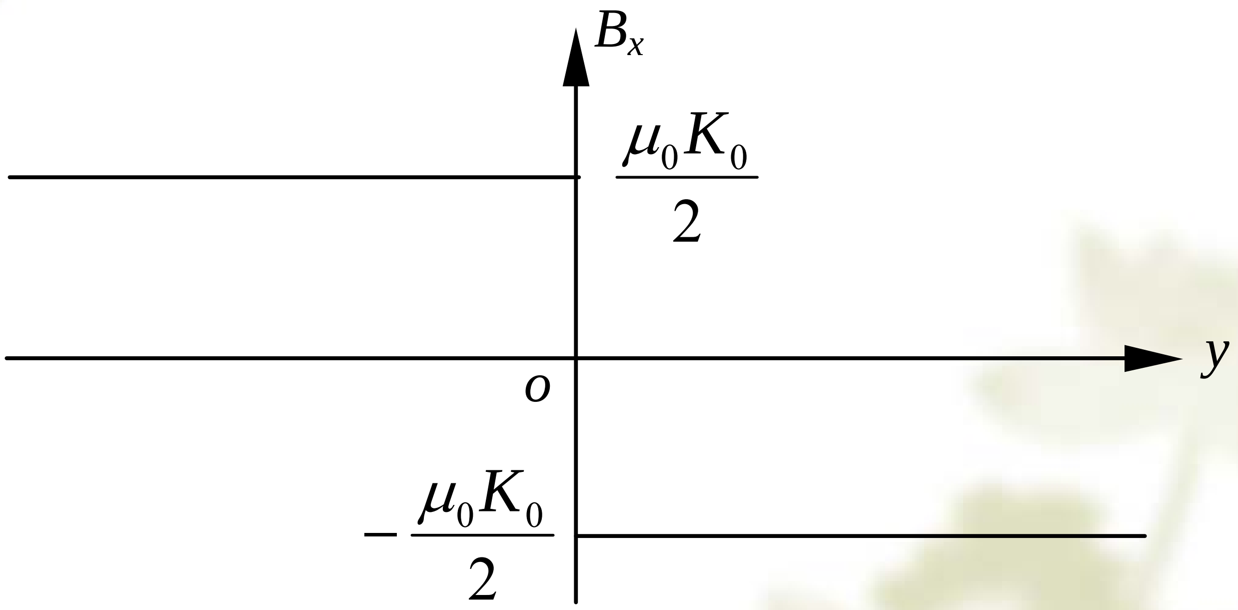
**(2)后合**

$$\vec{B}=B_x\vec{e}_x=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\mu_0K_0\sin\alpha}{2\pi\left(x'^2+y^2\right)^{1/2}}\mathrm{d}x'\right]\vec{e}_x$$

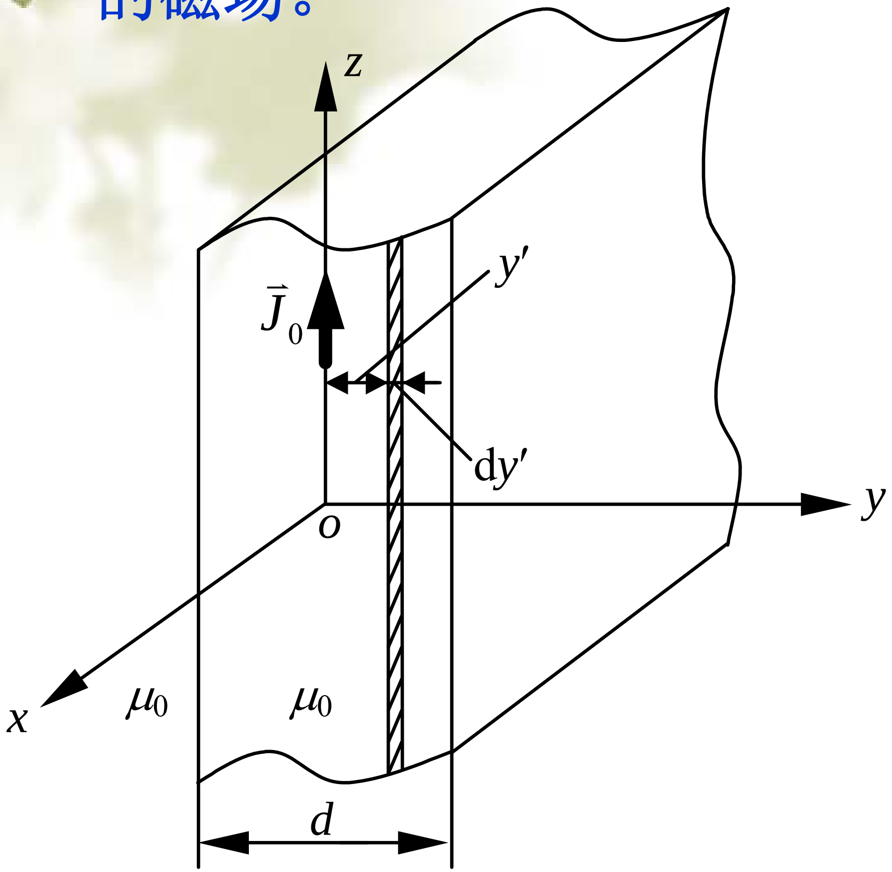
$$=-\frac{\mu_0K_0y}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x'}{x'^2+y^2}\vec{e}_x=-\frac{\mu_0K_0}{2\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{x'}{y}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}\vec{e}_x$$



$$\vec{B} = B_x\vec{e}_x = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K_0}{2}\vec{e}_x & (y>0) \\ \dfrac{\mu_0 K_0}{2}\vec{e}_x & (y<0) \end{cases}$$



例3 真空中载有恒定体电流密度 $\vec{J}_0$ 的无限大导板( 厚度为 $d$ )的磁场。




解： 将导板对称于 $xoz$ 平面放置

$$\vec{J}_0 = J_0 \vec{e}_z$$

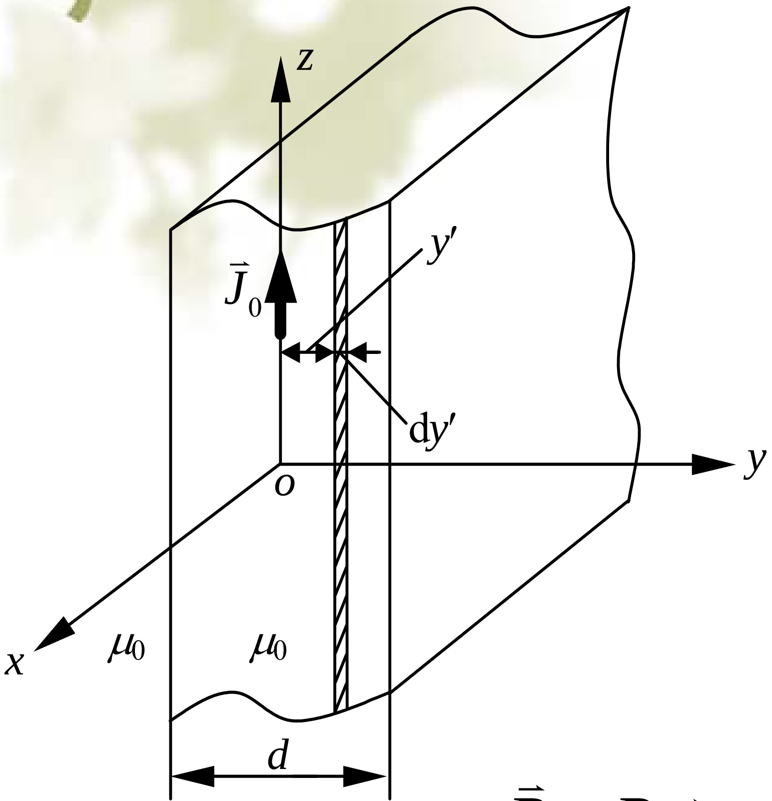
**(1)** 看成一系列无限大薄板，厚度'**dy**' 的元电流片的集合

**(2)** 先分：厚度'**dy**' 的元电流片 $\mathrm{d}K = \vec{J}_0 \mathrm{d}y'$ 产生的元磁场

$$\left|\mathrm{d}\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 \mathrm{d}K}{2}$$

## (3) 后合：应用迭加原理即可分区解得

$$\left|\mathrm{d}\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 \mathrm{d}K}{2}$$




$$y > \frac{d}{2} \qquad \vec{B} = B_x\vec{e}_x = -\int \frac{\mu_0 \mathrm{d}K}{2}\vec{e}_x$$

$$= -\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\mu_0 J_0 \mathrm{d}y'}{2}\vec{e}_x = -\frac{\mu_0 J_0 d}{2}\vec{e}_x$$

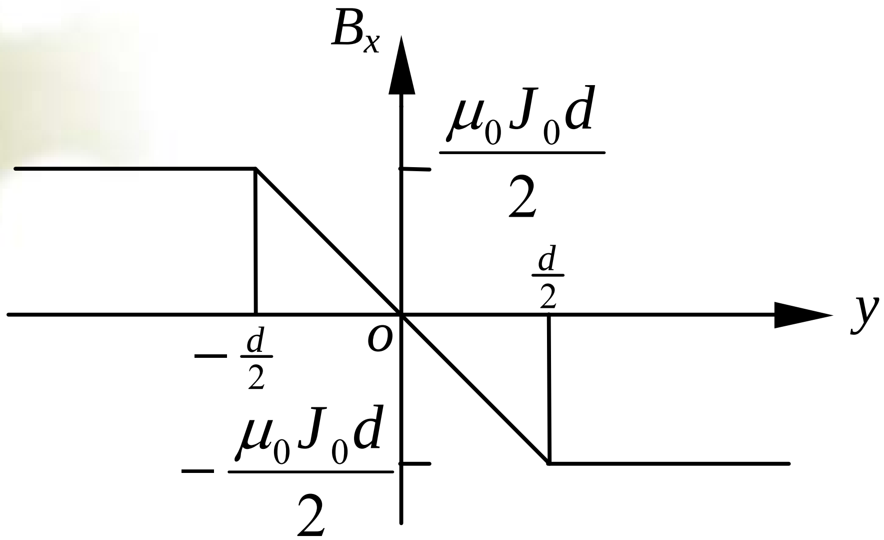
$$y < -\frac{d}{2}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{e}_x = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\mu_0 J_0 \mathrm{d}y'}{2}\vec{e}_x = \frac{\mu_0 J_0 d}{2}\vec{e}_x$$

$$-\frac{d}{2} \le y \le \frac{d}{2}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{e}_x = \int_{-\frac{d}{2}}^{y} -\frac{\mu_0 J_0 \mathrm{d}y'}{2}\vec{e}_x + \int_{y}^{\frac{d}{2}} \frac{\mu_0 J_0 \mathrm{d}y'}{2}\vec{e}_x = -\mu_0 J_0 y\,\vec{e}_x$$

$$\vec{B} = B_x\vec{e}_x = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K_0}{2}\vec{e}_x & (y > 0) \\ \dfrac{\mu_0 K_0}{2}\vec{e}_x & (y < 0) \end{cases}$$




$$\vec{B} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 J_0 d}{2}\vec{e}_x & \left(y > \frac{d}{2}\right) \\ -\mu_0 J_0 y \vec{e}_x & \left(-\frac{d}{2} < y < \frac{d}{2}\right) \\ \frac{\mu_0 J_0 d}{2}\vec{e}_x & \left(y < -\frac{d}{2}\right) \end{cases}$$

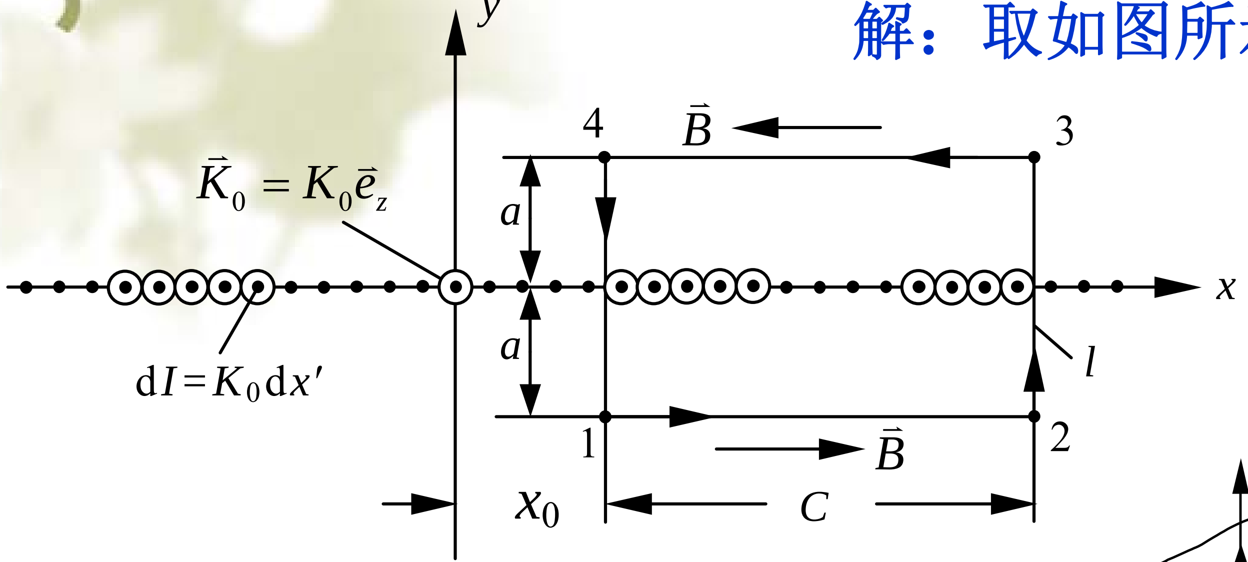
## 2. 利用安培环路定律求磁场B

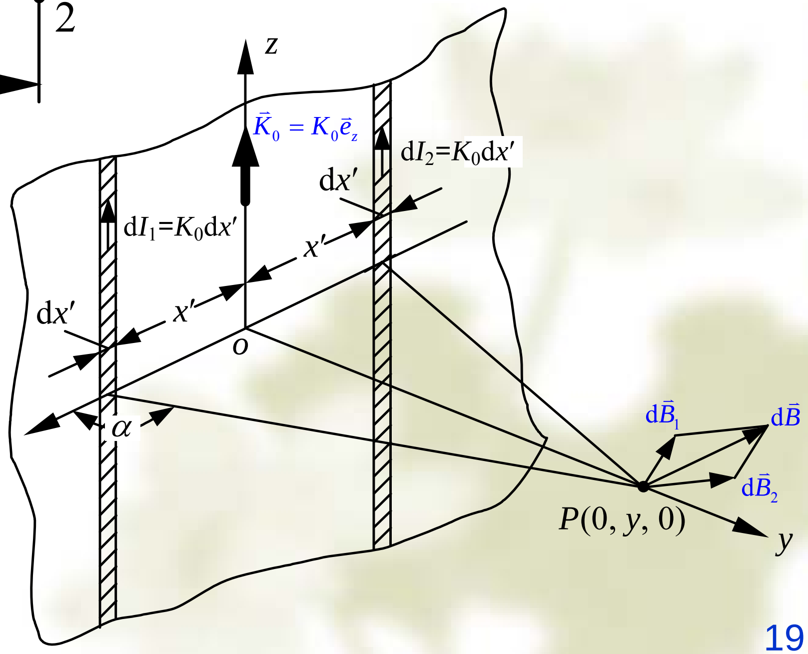
$$\oint_l \vec{B} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \sum I$$

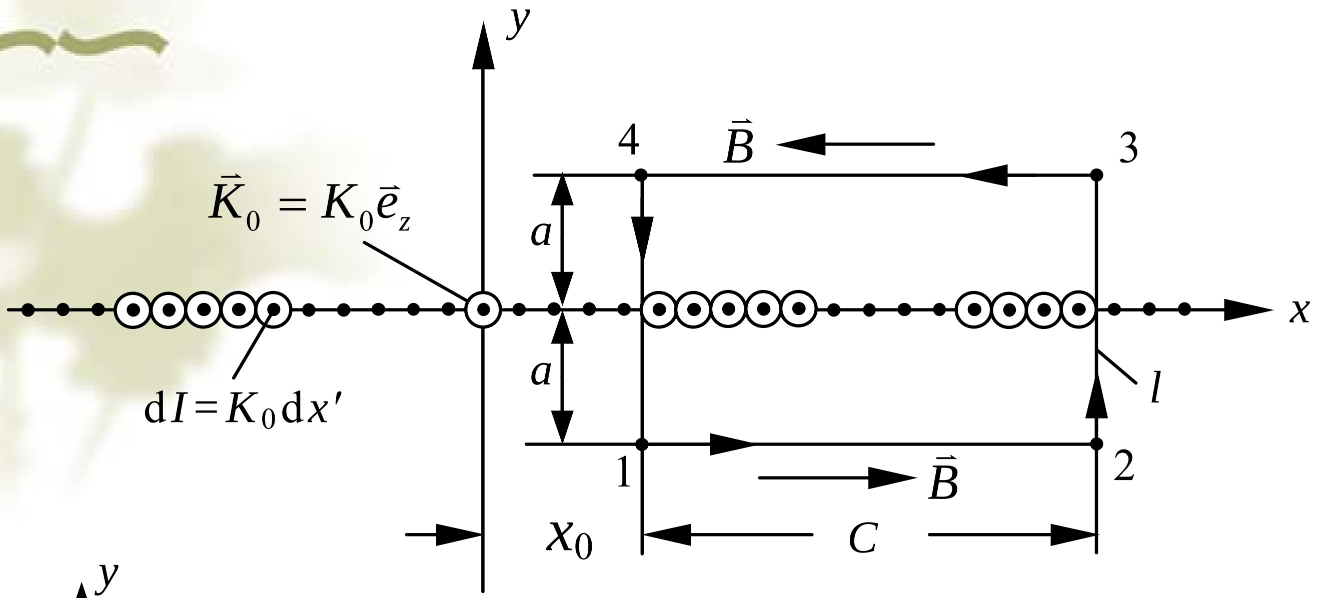
- 当电流与安培环路呈右手螺旋关系时，电流取正值，否则取负；
- 环路上的***B*** 仅与环路交链的电流有关。
- 当场分布有对称性，使 $\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 中的***B*** 可作为常数提出积分号外, 可用安培环路定律计算。

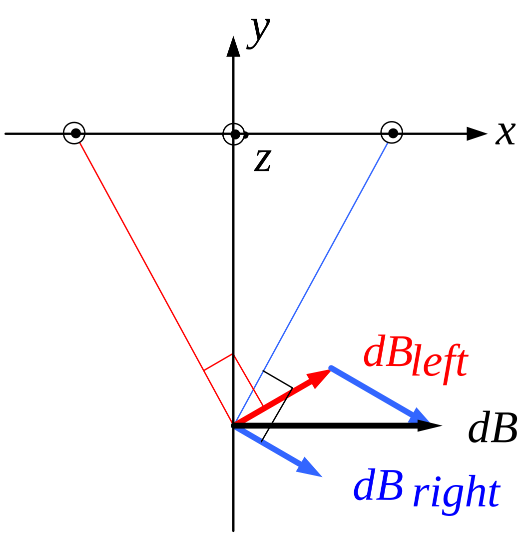
例4：(同例2) 一无限大导电片载有恒定面电流密度的磁场。

解：取如图所示的积分路径和方向





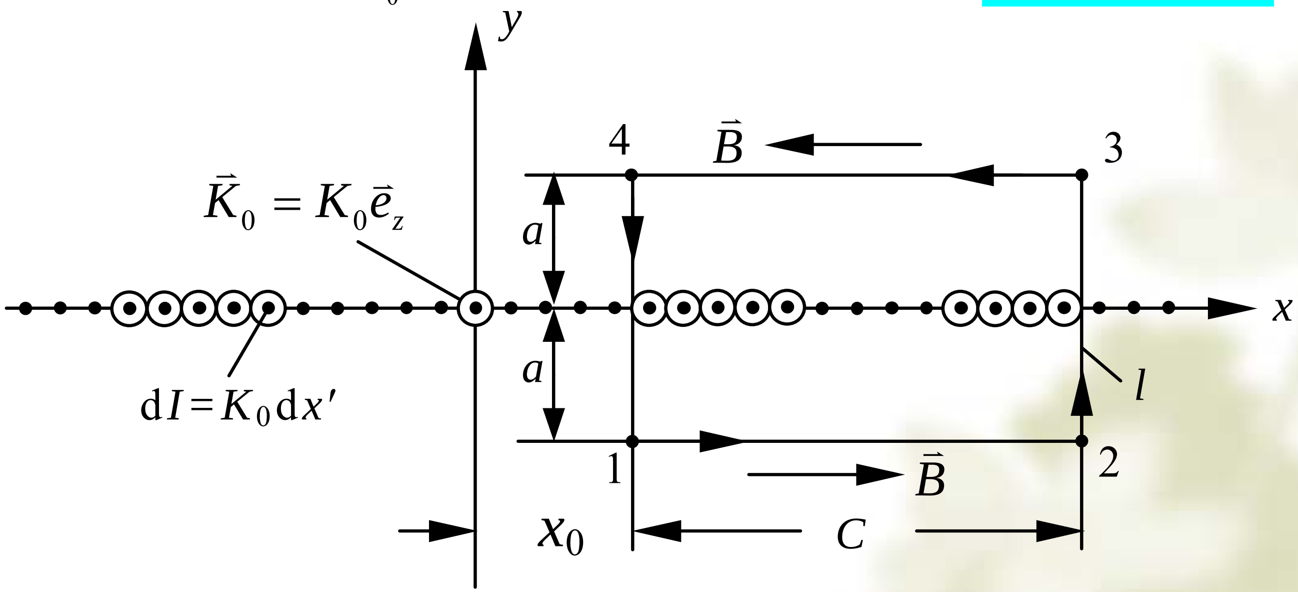

$$\oint_l \vec{B}\bullet d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B}\bullet d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B}\bullet d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B}\bullet d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B}\bullet d\vec{l}$$

$$= \int_1^2 \vec{B}\bullet d\vec{l} + 0 + \int_3^4 \vec{B}\bullet d\vec{l} + 0$$

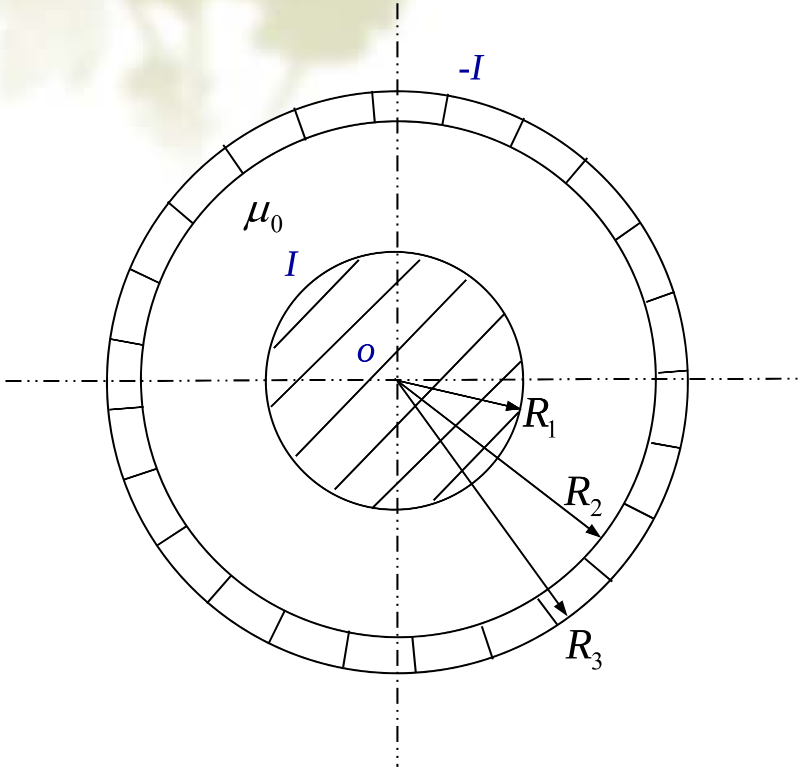
$$\oint_l \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_1^2 B_x\vec{e}_x \bullet \mathrm{d}x\vec{e}_x + 0 + \int_3^4 B_x(-\vec{e}_x)\bullet(-\mathrm{d}x)(-\vec{e}_x) + 0$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+C} B_x \mathrm{d}x - \int_{x_0+C}^{x_0} B_x \mathrm{d}x = 2B_x C$$

$$= \mu_0 \int_{x_0}^{x_0+C} \mathrm{d}I = \mu_0 K_0 C \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B_x = \frac{\mu_0 K_0}{2}}$$



例5　长直同轴电缆，其横截面尺寸如图所示。已知内、外导体以及它们之间的媒质的磁导率为 $\mu_0$，内、外导体中流过电流分别为$I$、$-I$，试求磁感应强度的分布。



长直同轴电缆的磁场图

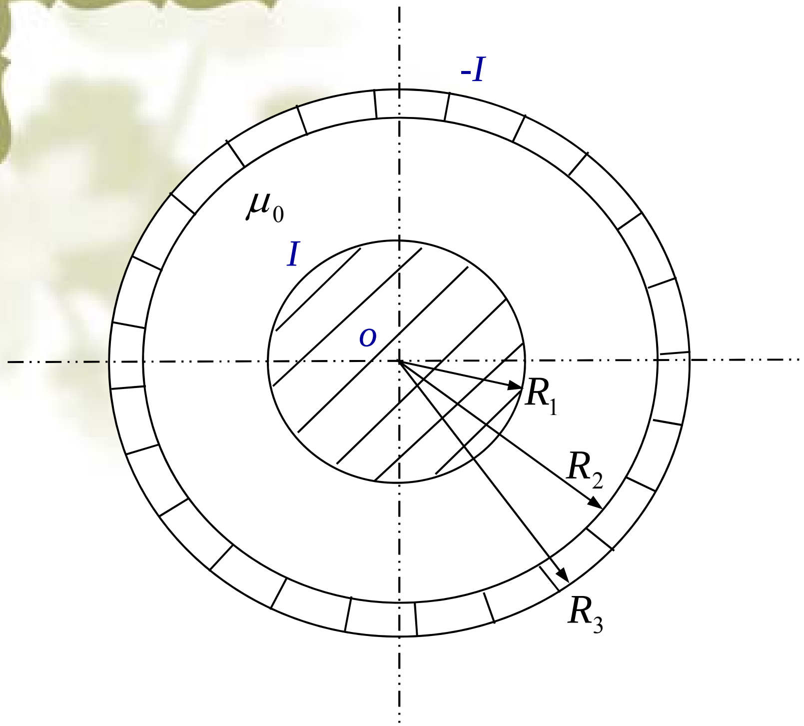
解：磁场呈平行平面场和轴对称场分布。采用圆柱坐标系。

$$\vec{B} = B(\rho)\vec{e}_\phi$$

$0 < \rho < R_1$

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi\rho B = \frac{\mu_0 I}{\pi R_1^2}\pi\rho^2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi R_1^2}\vec{e}_\phi$$




长直同轴电缆的磁场图

$R_1 < \rho < R_2$ $\quad \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi\rho B = \mu_0 I$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi$$

$R_2 < \rho < R_3$

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi\rho B = \mu_0\left[I + \frac{-I\pi\left(\rho^2 - R_2^2\right)}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}\right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I\left(R_3^2 - \rho^2\right)}{2\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)\rho}\vec{e}_\phi$$

$\rho > R_3$

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I - I\right) = 0 \qquad \vec{B} = 0$$

作业：**3-5(a),(b), 3-6，3-8**