第3章 静态电磁场II：恒定电流的电场和磁场

- 概述
- 恒定电场的基本方程与场特性
- 恒定电场与静电场的比拟
- 恒定磁场的基本方程与场的特性
- 自由空间中的磁场
- 媒质中的磁场
- 电感
- 磁场能量
- 磁场力

Part11 第3章 静态电磁场II：恒定电场

- 概述
- 基本方程
- 电功率•电动势
- 不同媒质分界面上的边界条件
- 静电比拟

静止电荷 → 静电场
- 不随时间变化，只是空间坐标的函数
- 没有伴随的磁效应和磁场

恒定电流 →
- 恒定电场 →
- 恒定磁场 →

不随时间变化，只是空间坐标的函数 → 没有耦合、可分别研究

3.1 恒定电场的基本方程和场的特性

■ 概述

1) 三种电流：

- 传导电流——电荷在导电媒质中的定向运动。
- 运流电流——带电粒子在真空中的定向运动。
- 位移电流——随时间变化的电场产生的电流。

定义：单位时间内通过某一横截面的电量。

$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad \mathbf{A}$$

电流是通量, 不能反映电流在每一点的流动情况。

2）电流的分布形式:

当按体电荷ρ 分布的电荷以速度*v* 匀速运动形成的电流:

体电流密度: $\vec{J} = \rho\vec{v}$ $\quad (\mathrm{A/m^2})$

当按面电荷σ分布的电荷以速度*v* 匀速运动形成的电流:

面电流密度: $\vec{K} = \sigma\vec{v}$ $\quad (\mathrm{A/m^2})$

线电荷τ 分布的电荷以速度*v* 匀速运动形成的电流:

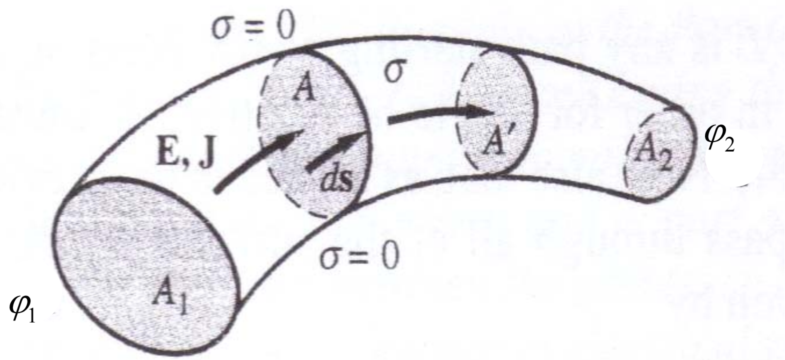
线电流: $I = \tau v$ $\quad (\mathrm{A})$

元电流: $dq\vec{v} = \vec{J}dV = \vec{K}dS = Id\vec{l}$ $\quad (\mathrm{A\cdot m})$

3) 维持恒定电流的条件

■ 沿电流流动方向的任一段导体存在电位差

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \longrightarrow \vec{E} \neq 0 \longrightarrow U = \varphi_1 - \varphi_2 \neq 0$$



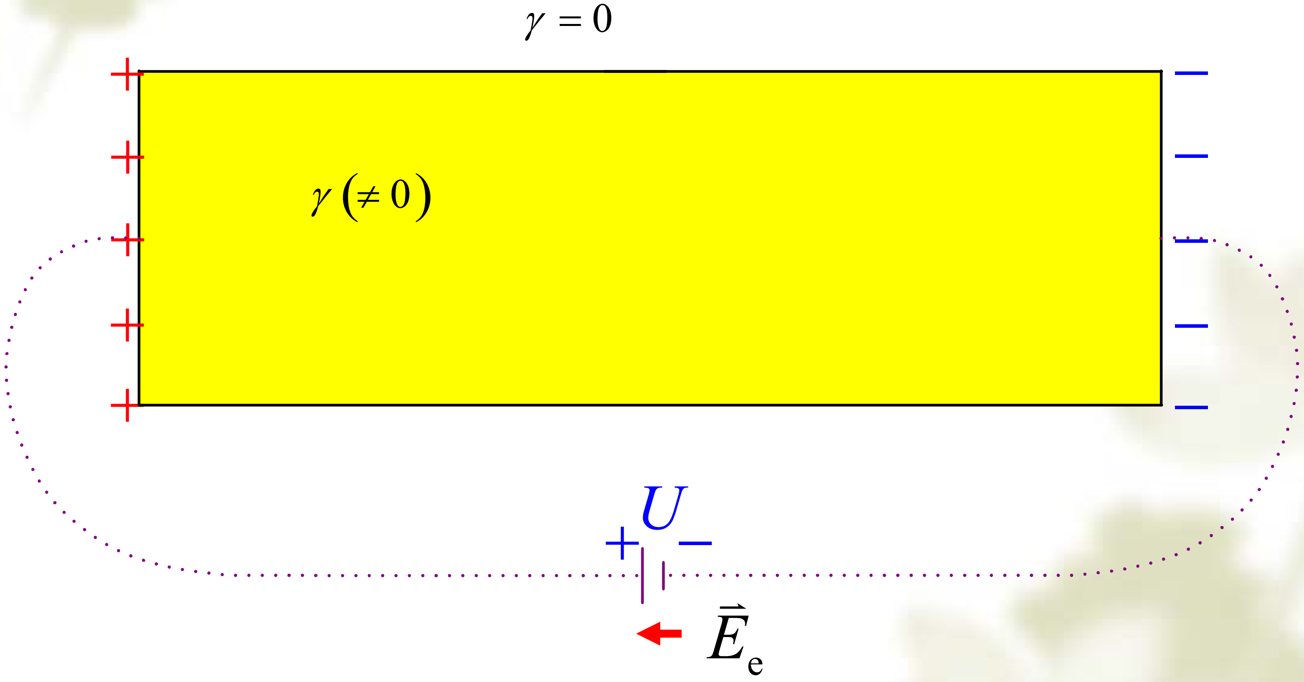
■ 导体内表面的电场强度平行于切线方向

否则导体表面将聚集电荷

$$\vec{E}_n = 0$$

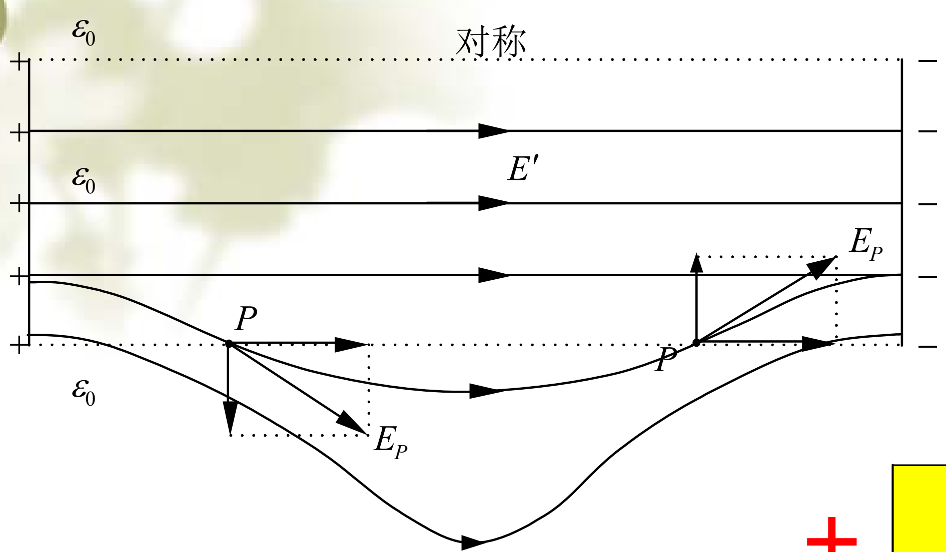
- 场源
  - 导体两端电位差 ← 电源外部力维持

$\vec{E}_e$ ——局外场强(非电场强 $\vec{E}_e = \dfrac{d\vec{F}_e}{dq}$)



电源极板上存在处于动态平衡的自由电荷

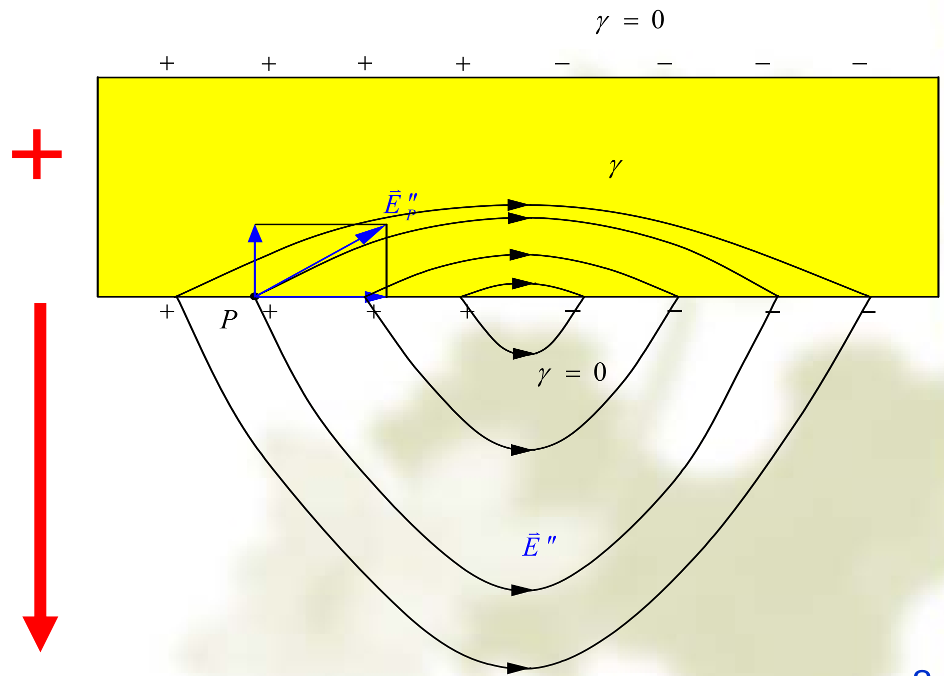
极板上自由电荷产生的电场（定性）



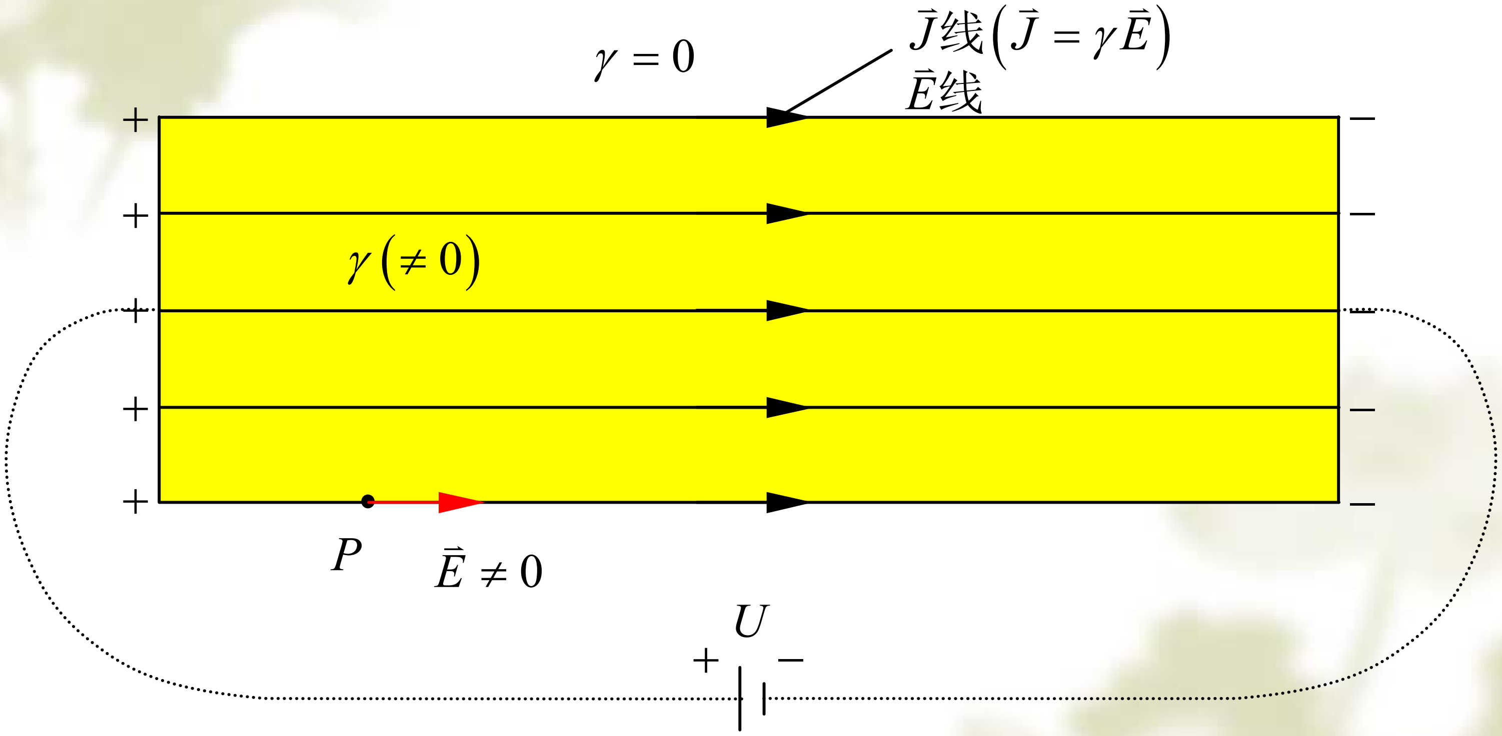
- 沿着导线表面存在感应驻定电荷—处于不断交替与更换的运动态中，保持其分布特性不变

仅仅极板上电荷产生的场，并不能保证导体内表面

$$\vec{E}_n = 0$$



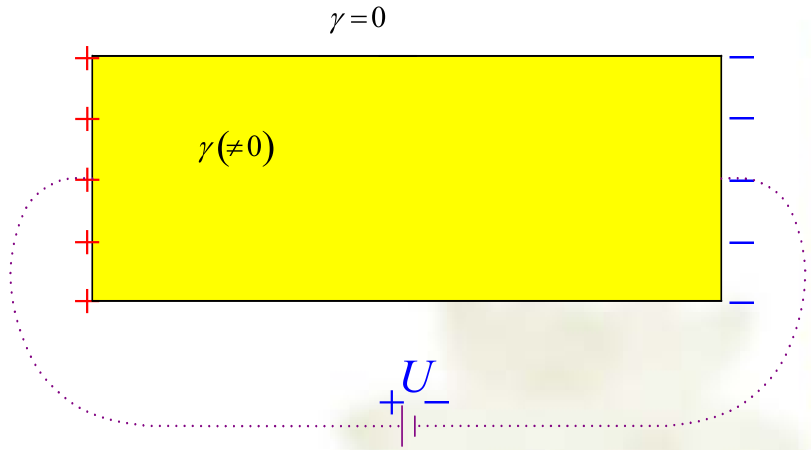
- 导体内合成电场——极板上自由电荷产生的电场
  ＋导线表面感应驻定电荷电场



导体内表面 $\vec{E}_n=0$

4）导体中的电场

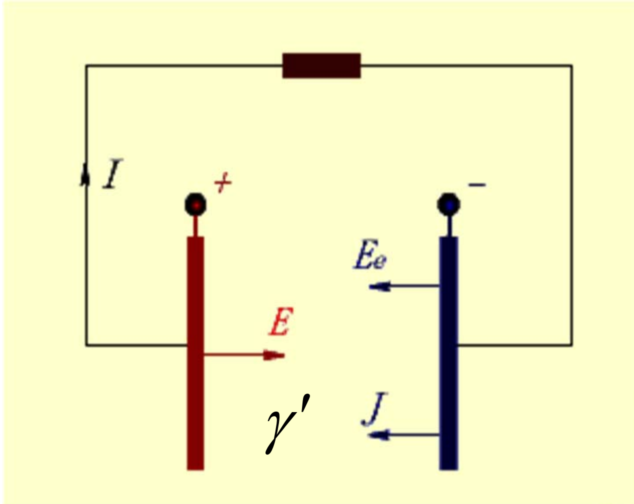
- 库仑电场—— $\vec{E}_q$ 由自由电荷和驻定电荷产生的电场，为保守场。
- 无源部分 $\vec{J}=\gamma\vec{E}$



本章只研究导电媒质无源部分的电场——恒定电流场

5）电源电动势与局外场强

提供非静电力将其它形式的能转为电能的装置称为电源。



电源电动势与局外场强

局外场强 $$\vec{E}_{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}q}$$

$\vec{F}_{\mathrm{e}}$ —局外力

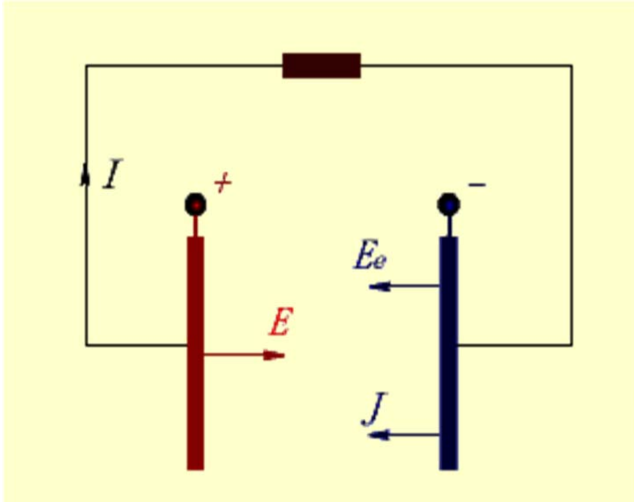
总场强 $$\vec{E}=\vec{E}_q+\vec{E}_e \qquad \vec{J}=\gamma'\left(\vec{E}_q+\vec{E}_{\mathrm{e}}\right)$$

γ'----含源部分导电媒质的电导率 (S/m)

电源电动势是电源本身的特征量，

与外电路无关。

局外场强沿极板的负极到极板正极的线积分



电源电动势与局外场强

电源电动势 $$e = \int_{-\,(\text{电源内})}^{+} \vec{E}_{e} \bullet d\vec{l}$$

把单位正电荷从电源负极通过电源内部移动到电源正极时，局外场强所作的功。

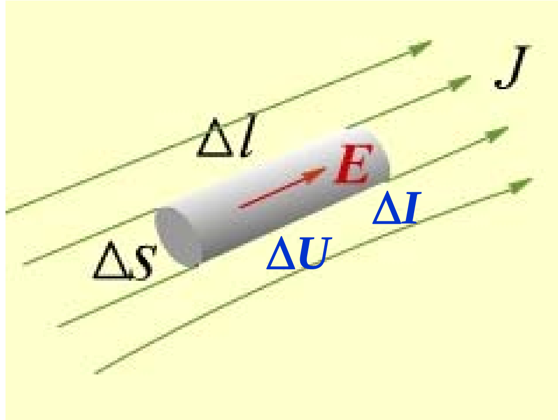
6）欧姆定律的微分形式

在线性媒质中

$U = RI$ 欧姆定律 积分形式。

$\vec{J} = \gamma \vec{E}$ 欧姆定律 微分形式。

J 与 E 共存，且方向一致。



***J* 与 *E* 之关系**

简单证明：在导体中取一很小圆柱，J 均匀分布

$$\Delta U = E\Delta l = \Delta I \cdot \Delta R = J\Delta S\Delta R$$

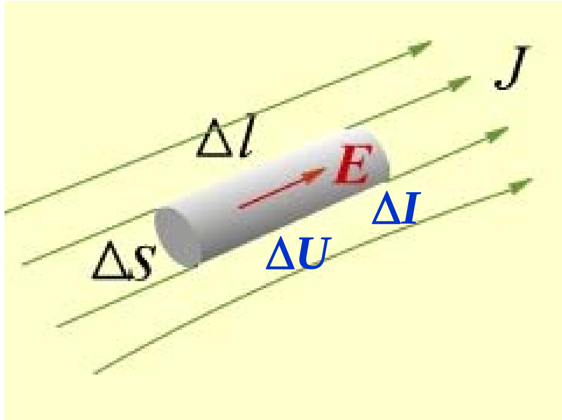
$$J = \frac{E\Delta l}{\Delta S\Delta R} = \frac{1}{\rho}E = \gamma E \qquad \left(\Delta R = \rho\frac{\Delta l}{\Delta S}\right)$$

7）电功率—焦尔定律的微分形式

导体有电流时，必伴随功率损耗，其功率为

$$P = UI = I^2 R \qquad \mathbf{W}$$

—焦耳楞次定律积分形式



损耗功率计算

在导体中取一很小圆柱，J 均匀分布

$$\Delta P = \Delta U \Delta I = (E\Delta l)(J\Delta S) = EJ\Delta V$$

故，功率体密度为：

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta V} = EJ = \gamma E^2 = \frac{J^2}{\gamma} \qquad \mathbf{W/m^3}$$

—焦耳—楞次定律微分形式

3.1.1 基本方程：无源(散)、无旋场

1. 积分形式

- 恒定电场中电荷守恒定律

导电媒质中的恒定电场，任一闭合面**S**内（净）流出的电流应为**0**，即

$$\oint_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

电流连续性方程

Kirchhoff's current law

- 在不含源的导体内：

$$\oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

库仑场为保守场

2. 微分形式

- 由电荷守恒定律

$$\oint_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{G. T.}} \int_V \nabla \bullet \vec{J} = 0 \qquad \boxed{\nabla \bullet \vec{J} = 0}$$

恒定电场是一个无源场，电流线是连续的。

- 在不含源的导体内

$$\oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0 \xrightarrow{\text{S. T.}} \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

恒定电场是无旋场。

结论： 恒定电场是无源无旋场。

3. 构成关系

构成方程 $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

4. 位函数

$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0 \longrightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi$ 位函数

$\gamma =$ 常数

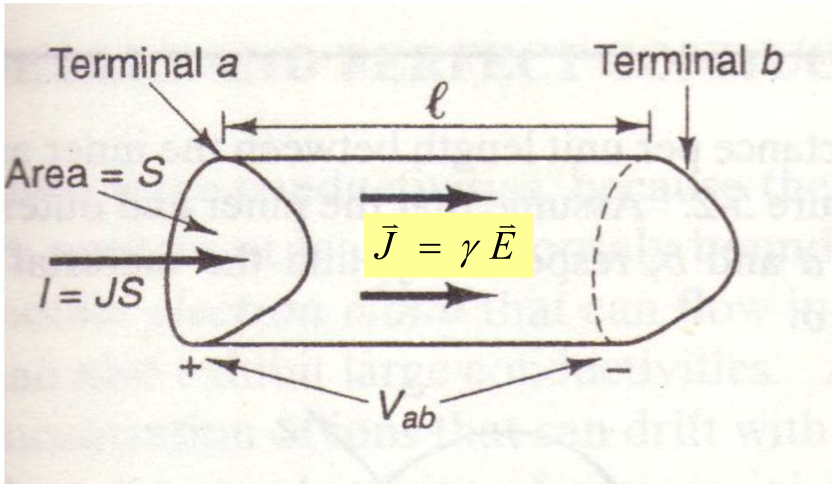
$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{J}} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot (\gamma \vec{\boldsymbol{E}}) = -\gamma \nabla \cdot \nabla \varphi + \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \nabla \gamma = -\gamma \nabla \cdot \nabla \varphi = 0$

$\nabla^2 \varphi = 0$ 拉氏方程

5. 电阻、电导

$$R \equiv \frac{V}{I} = \frac{\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \gamma \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

$$G \equiv \frac{I}{V} = \frac{\int_S \gamma \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{1}{R}$$



$$R \equiv \frac{V}{I} = \frac{E\ell}{\gamma E S} = \rho \frac{\ell}{S}$$

3.1.3 不同媒质分界面上的边界条件 （B. C.）

1. 两种不同导电媒质分界面上的B. C.

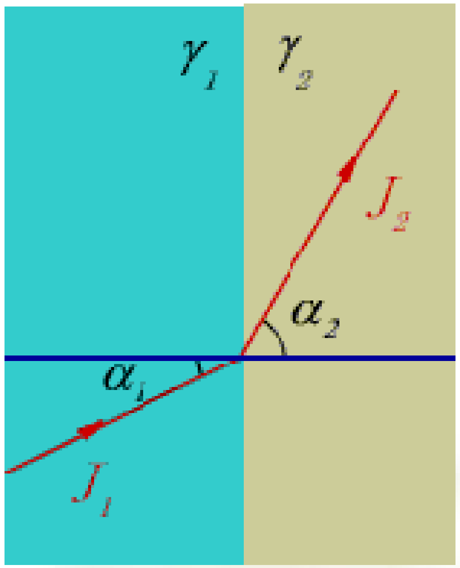
静电场 $\oint_l \vec{\mathbf{E}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = 0 \longrightarrow E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint_S \vec{\mathbf{D}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} = \int_S \sigma \mathrm{d}S \longrightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

恒定电场

$$\oint_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = 0 \rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

$$\oint_S \vec{J} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = 0 \rightarrow J_{1n} = J_{2n}$$



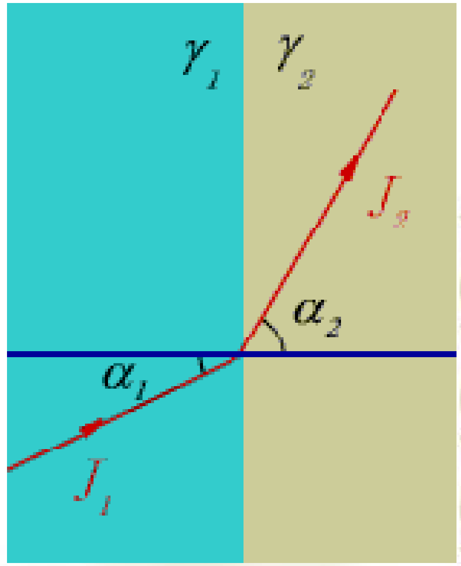
电流线的折射

媒质分界面上，电场强度的切线分量连续，电流密度的法向分量连续。

若媒质是线性、各向同性的，上两条件可写为：

$$\begin{cases} E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \\ \gamma_1 E_1 \cos\alpha_1 = \gamma_2 E_2 \cos\alpha_2 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$ 恒定电场中的折射定律



电流线的折射

用电位表示的分界面条件为：

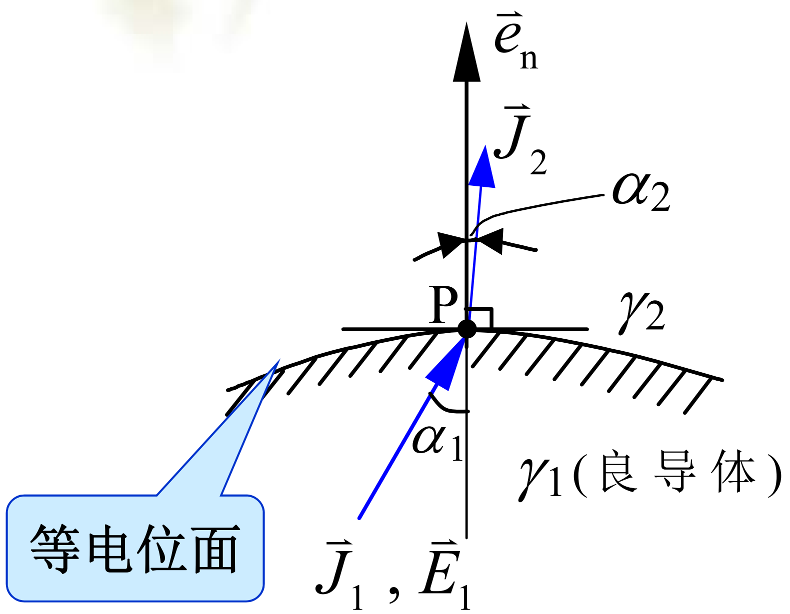
$$\varphi_1 = \varphi_2 \qquad \leftarrow E_{1t} = E_{2t}$$

$$\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \qquad \leftarrow J_{1n} = J_{2n}$$

2. 良导体与不良导体分界面上的B. C.

如：电流从金属体流向周围不良导电媒质的情况。电气设备接地系统，同轴电缆中绝缘不良引发的泄漏电流。

设良导体为第一种媒质 → $\gamma_1 >> \gamma_2$

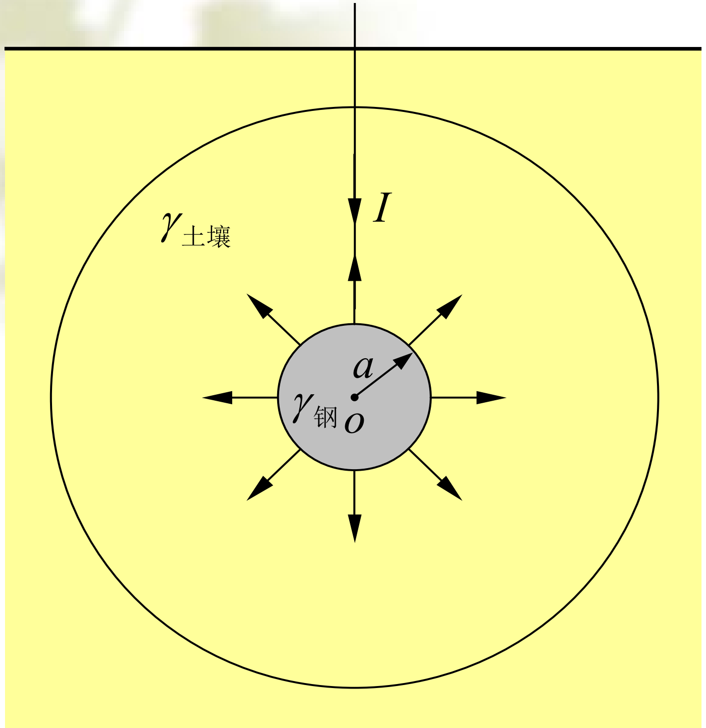


$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

只要 $\alpha_1 \neq 90^\circ$ 总有 $\alpha_2 \approx 0^\circ$

表明：电流从良导体流向不良导体时，电流总是垂直于界面流向不良导体，电场强度和电流密度J垂直分界面，可把良导体看作为等位面。

例：钢球接地系统



$$\gamma_{钢} \approx 5\times 10^6\ \mathrm{S/m}$$

$$\gamma_{土} \approx 10^{-2}\ \mathrm{S/m}$$

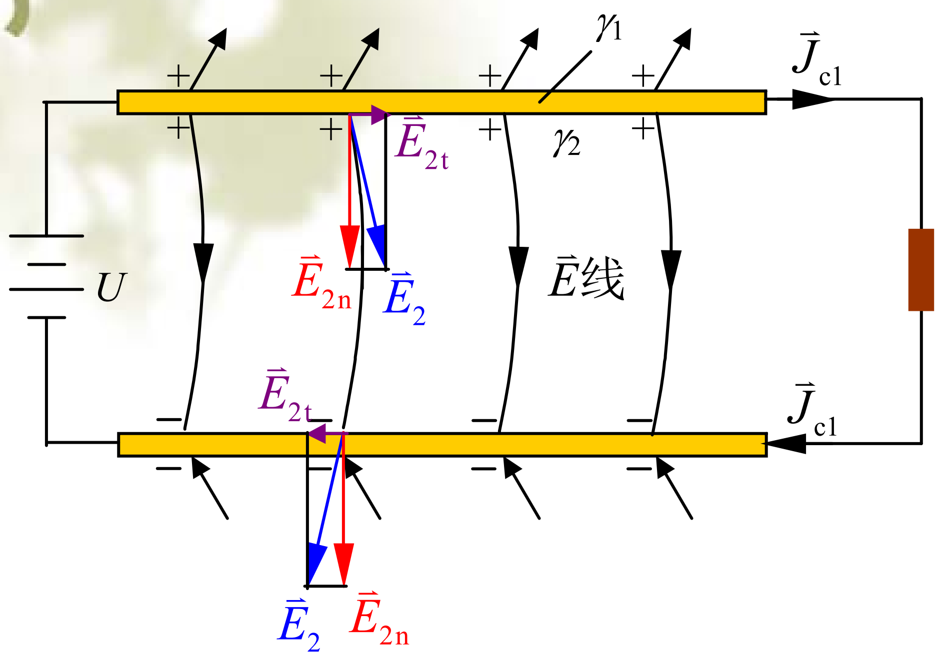
$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

令$\alpha_1 = 89^\circ 59' 50''$　则$\alpha_2 = 8'' \approx 0^\circ$

接地器表面可看作为等位面，表面电流线指向与面垂直。

表明：电流从良导体流向不良导体时，电流总是垂直于界面流向不良导体，电场强度和电流密度J垂直分界面，可把良导体看作为等位面。

3. 导体与理想介质(γ_2=0)分界面



(a)

$$\gamma_2 = 0 \Rightarrow J_2 = 0$$

$$J_{1n} = J_{2n} = 0$$

表明1：分界面导体侧的电流一定与导体表面平行。

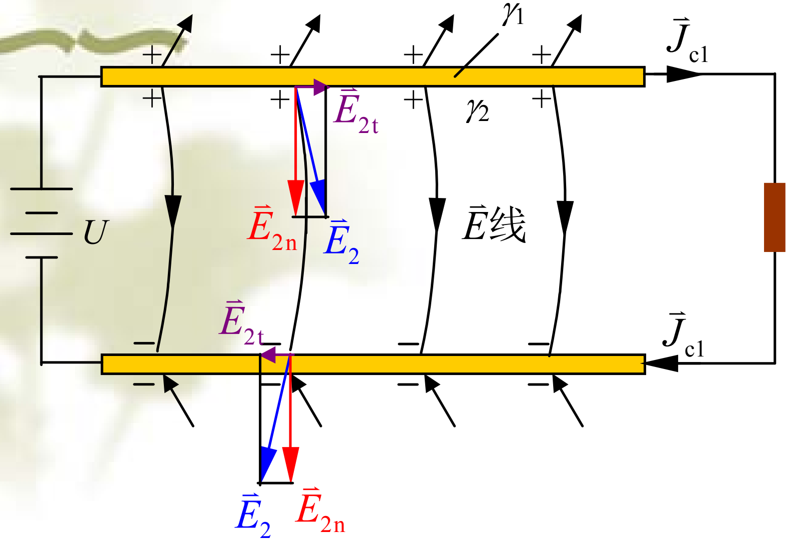
$$E_{1n} = \frac{J_{1n}}{\gamma_1} = 0$$

$$E_{2n} = \frac{J_{2n}}{\gamma_2} \neq 0$$

导体表面感应电荷 $D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma$

表明2：导体与理想介质分界面上必有面电荷。

思考 $J_{2t} = 0$ ？ $E_{2t} = 0$ ？



（b） $\vec{J}_1 = J_{1t}\vec{e}_t$

边界条件

$$E_{1t} = E_{2t} = \frac{J_{1t}}{\gamma_1} \neq 0$$

通常，输电线附近的电场

$$\boldsymbol{E_{2t} << E_{2n}}$$

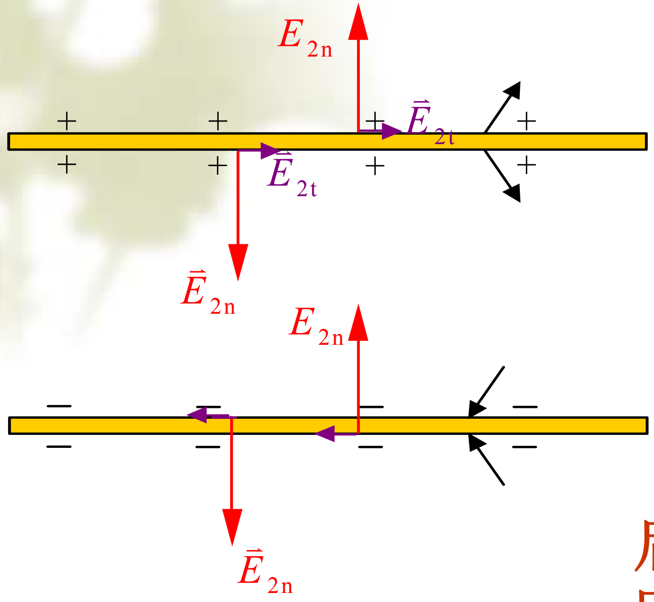
如铜线： $\vec{J}_1 = 5\mathrm{A/mm}^2$

$$\gamma_{铜} \approx 58\times10^6\ \mathrm{S/m}$$

$$E_{1t} = E_{2t} = 0.086\mathrm{V}/m$$

$$E_{2t} \ll E_{2n} = 3\times10^6\ \mathrm{V/m}$$

导体表面电场强度分布示意图



分析时，可忽略切向分量的影响，以静电场分析的方法处理导体—等位体

启示：对于载有恒定电流导体周围电介质中的电场分析，可应用静电场的方法。

4. 两种有损电介质分界面上的B. C.

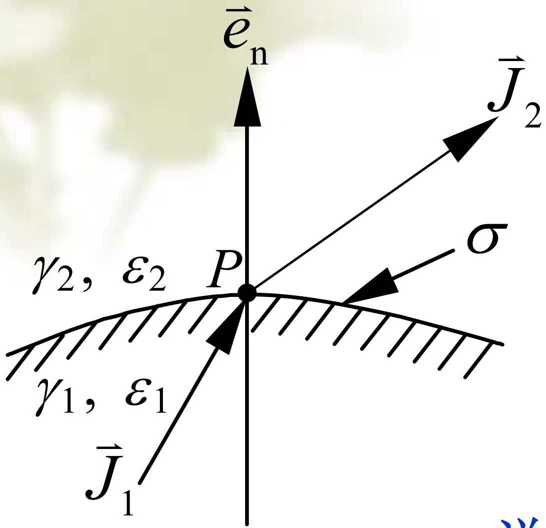
在静电场中，忽略介质的微弱导电性。在恒定电场中，需要考虑这种导电性，这种介质为损耗介质（非理想介质）。这反映了物质的两重性：介电性和导电性。

损耗介质中，恒定电场的基本场量： $\boldsymbol{J}$ $\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{D}$

自由电子 $\Longrightarrow$ 传导电流 $\Longrightarrow$ $J=\gamma E$ $\Longrightarrow$ 产生热损耗

介质的束缚电荷 $\Longrightarrow$ 介质的极化 $\Longrightarrow$ $D=\varepsilon E$ $\Longrightarrow$ 介质损耗

4. 两种有损电介质分界面上的B. C.



- $J_{1n} = J_{2n}$ 即 $\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}$ **(1)**
- $D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma$ (2)

$$J_{2n} = \gamma_2 E_{2n}$$

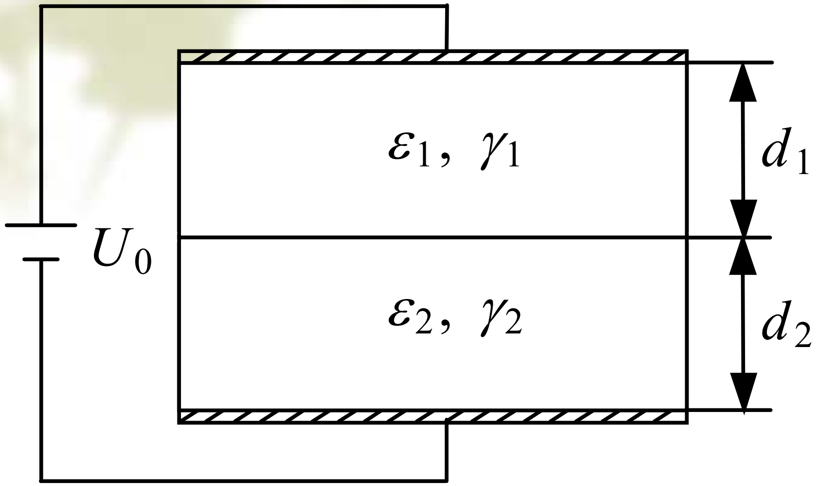
$$\sigma = \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right) J_{2n}$$

说明导电媒质分界面上一般积累有自由面电荷。

只有满足

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \longrightarrow \sigma = 0$$

例3-2 有损耗的平板电容器



求：**(1)** 有损电介质中的 $\vec{E}$

(2) 介质交界面上的自由电荷面密度

■ 分析

（**1**）平行平面场

（**2**）电流密度、电场强度、电位移仅有法向分量

（**3**）不同媒质中的电流密度相同：$\mathbf{J_{1n}=J_{2n}}$

$$\mathbf{D_{1n}=D_{2n}}$$

电流从良导体流向不良导体时，电流总是垂直于界面流向不良导体，电场强度和电流密度**J**垂直分界面，可把良导体看作为等位面。

解：（1）电场强度

$$\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$$ ← $\mathbf{J_{1n}=J_{2n}}$

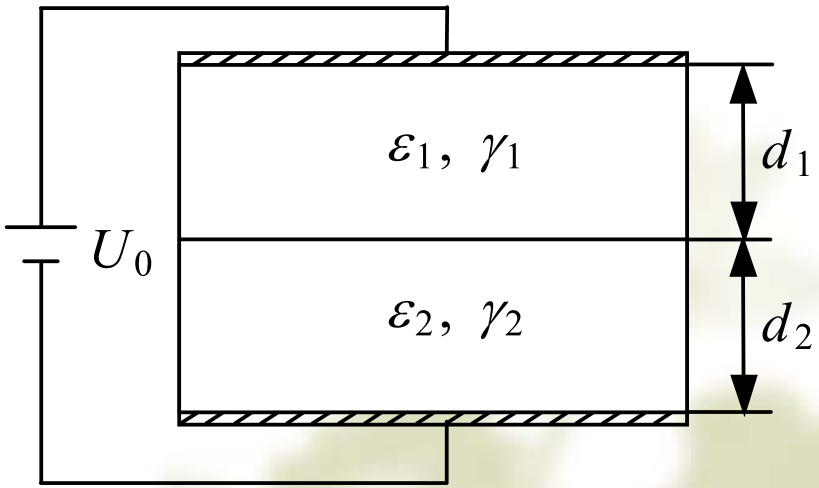
$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0$$ ← 两极板间电压已知

电流密度、电场强度、电位移仅有法向分量

$$\vec{E}_2 = E_{2n}\vec{e}_n \quad \vec{E}_1 = E_{1n}\vec{e}_n$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\gamma_2 U_0}{\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2},$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{\gamma_1 U_0}{\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2}$$

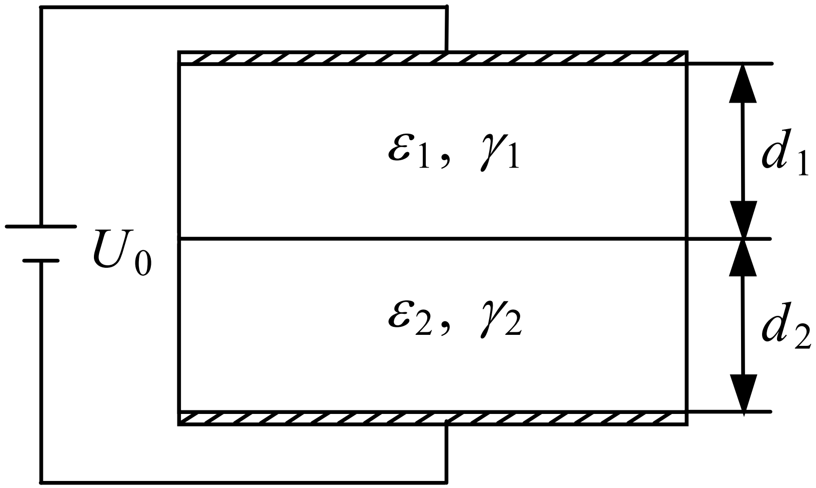


（2）电荷密度

$$D_{2n}-D_{1n}=\varepsilon_2E_2-\varepsilon_1E_1=\sigma$$

$$\gamma_1E_1=\gamma_2E_2$$

$$J_{2n}=\gamma_2E_{2n}$$



$$\sigma=\frac{\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}J_{2n}\overset{J_2=\gamma_2E_{2n}}{=\!=\!=\!=\!=}\frac{\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1d_2+\gamma_2d_1}U_0$$

3.2 恒定电场与静电场的比拟 接地系统

1. 静电比拟的定义

数学上

两种不同的物理场，只要描述他们的微分方程相同，则只要边界条件（不同的场量）类似，二者的解答形式是完全相同

物理上

将恒定电场与无源区中的静电场相比较，得出二者场量之间的对应关系

2. 比拟量

静电场（$\rho = 0$）	恒定电场（电源外）	静电场	恒定电场
$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=0$	$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=0$	$\vec{E}$	$\vec{E}$
$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=0$	$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{J}}=0$	$\vec{D}$	$\vec{J}$
$\vec{\boldsymbol{D}}=\varepsilon\vec{\boldsymbol{E}}$	$\vec{\boldsymbol{J}}=\gamma\vec{\boldsymbol{E}}$	ε	γ
$\nabla^2\varphi=0$	$\nabla^2\varphi=0$	φ	φ
$q=\int_S\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$	$I=\int_S\vec{\boldsymbol{J}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$	q	I
$C=\dfrac{q}{U}=\dfrac{\varepsilon\int_S\vec{E}\bullet\mathrm{d}\vec{S}}{\int_l\vec{E}\bullet\mathrm{d}\vec{l}}$	$G=\dfrac{I}{U}=\dfrac{\gamma\int_S\vec{E}\bullet\mathrm{d}\vec{S}}{\int_l\vec{E}\bullet\mathrm{d}\vec{l}}$	C	G

3. 两种场可以比拟的条件

- 微分方程相同； $\nabla^2\varphi = 0$
- 场域几何形状及边界条件相似；

B. C. 的相似

(1) 几何相似：即两种场的电极（导体）几何形状、尺寸和相对位置相似

计算区域（包括不同媒质所在的区域）成比例放大或缩小

(2) 电极处的**B. C.** 相似——电极表面均为等位面

(3) 物理参数相似： $\dfrac{\gamma_i}{\gamma_j} = \dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}$

(4) 媒质的分布满足几何相似

保证分界面上***D***线与***J***线折射相似

利用静电比拟，由相似的场的分布可进一步求得相似的电参数的关系为

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\gamma \int_S \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{S}}{\int_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}} \quad + \quad C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon \int_S \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{S}}{\int_l \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

从场的唯一性定理出发，二种场：微分方程相似——$\nabla^2\varphi = 0$，**B. C.** 相似

↓

它们的解答也必相似

↓

静电比拟方法

4. 静电比拟优点：

(1) 两种场在计算、分析上“合二为一”

a. 求解结果　直接抄用

b. 求解方法　直接引用

(2) 在实验研究中，由于电流场中的电流、电位分布易于测定，故可用相应的电流场模型来研究待求的静电场问题(静电场造型)，此种方法亦称电流场模拟

固体模拟——铁板、导电纸模拟

液体模拟——电解槽方法

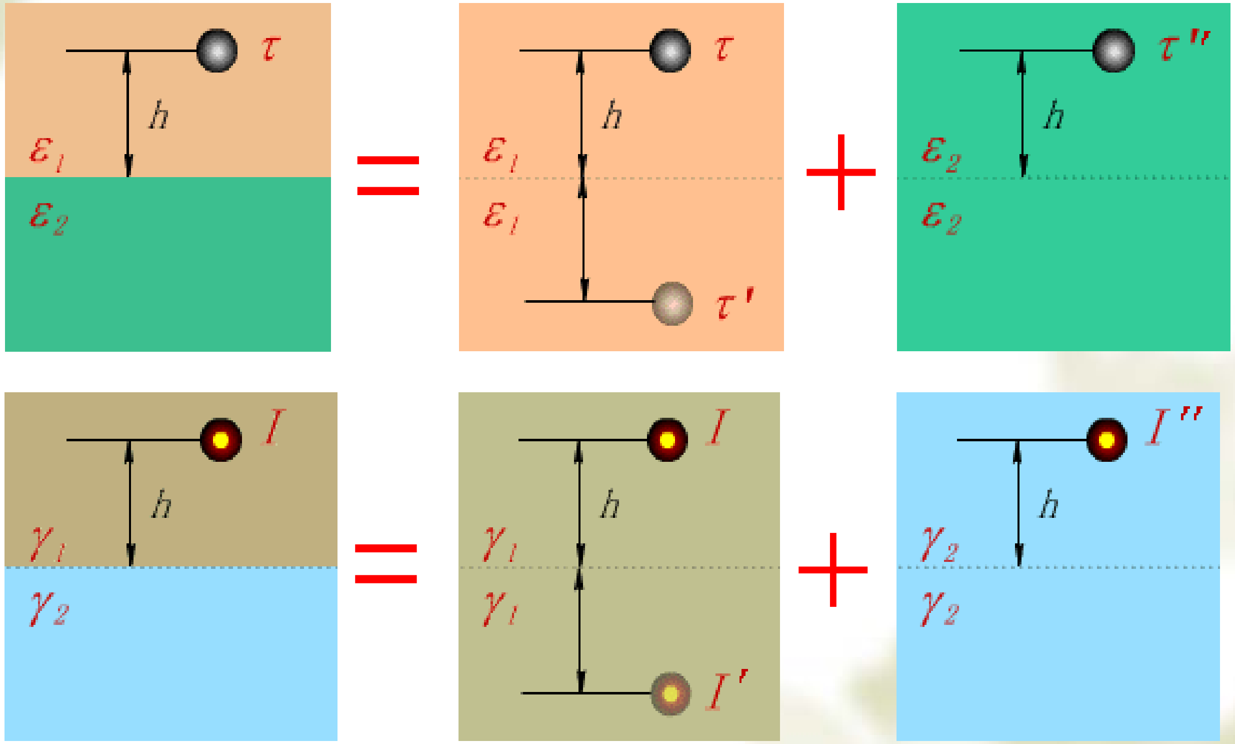
5. 比拟方法的应用

1). 镜像法的比拟

$$\left(\tau' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau \quad , \quad \tau'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau\right)$$

静电场

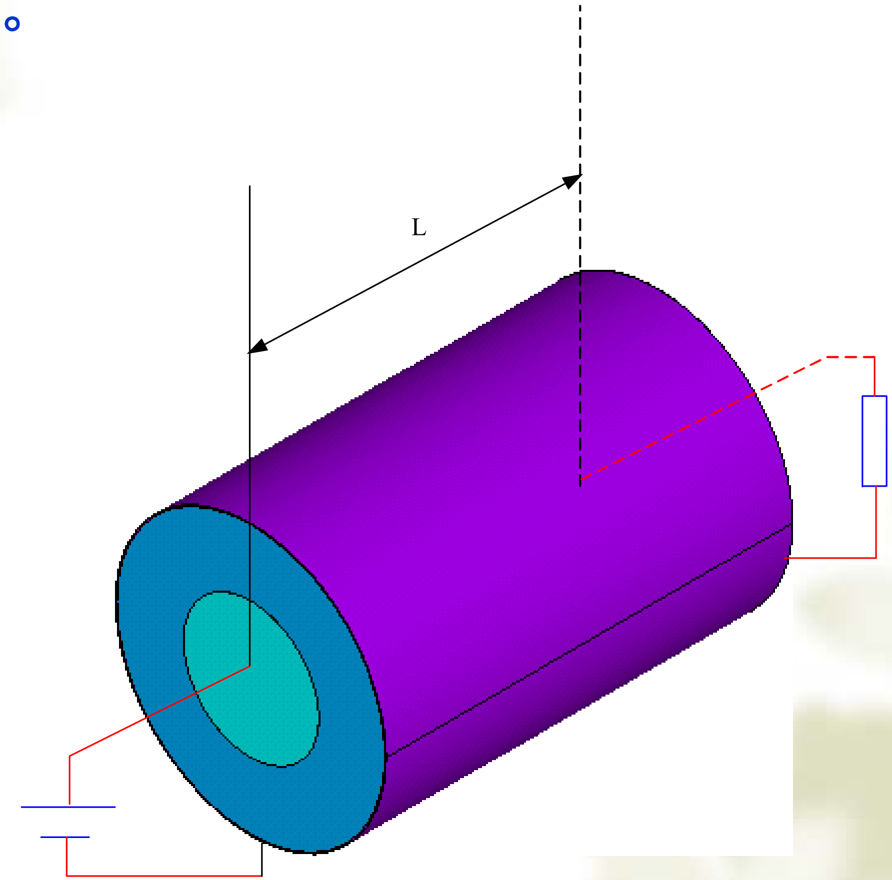
恒定电场



$$\left(I' = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} I \quad , \quad I'' = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} I\right)$$

静电场与恒定电流场的镜像法比拟

- 例1 求因其绝缘介质不完善而引起的电缆内的泄漏电流密度及其绝缘电阻。



■ 简化模型

分析

1) 漏电流的路径

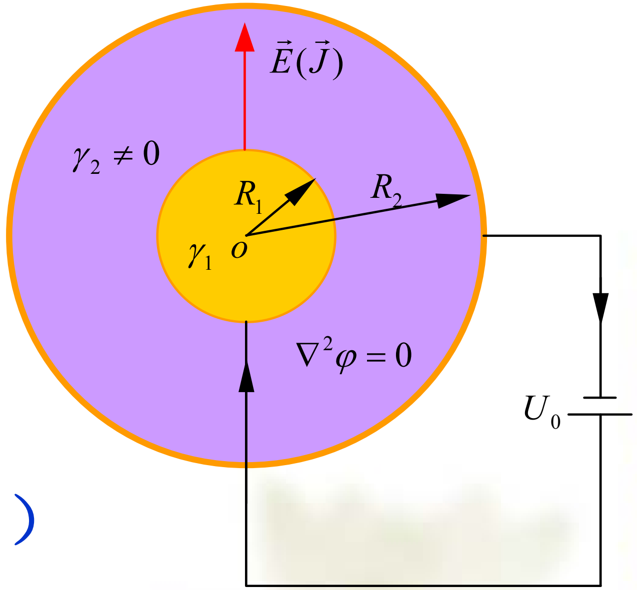
由内导体—绝缘介质—外导体

2) 漏电流的方向

由结构的对称性可知为径向（ρ方向）

3) 场的对称性

轴对称



解1：直接计算，根据 G=I/U 求得

恒定电场，设电缆的轴向长度为L、漏电流为I，则

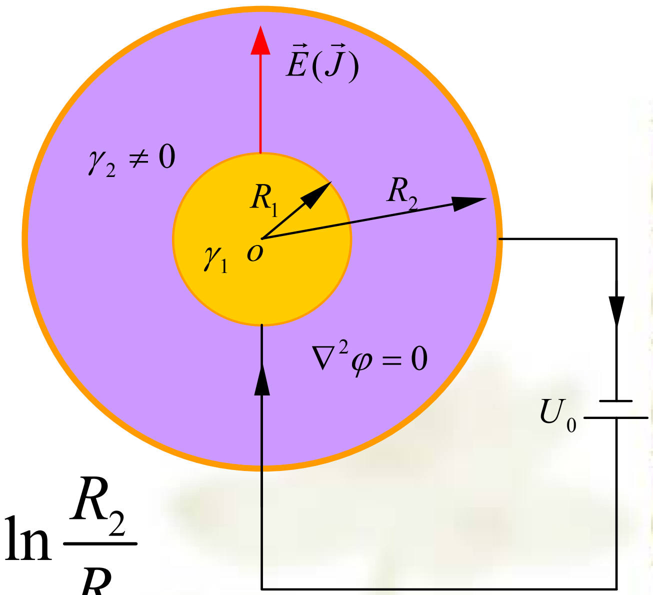
$$\int_S \vec{J}\bullet \mathrm{d}\vec{S}=I \quad \text{(S为圆柱表面)}$$

$$2\pi\rho LJ=I \Longrightarrow J=\frac{I}{2\pi\rho L}$$

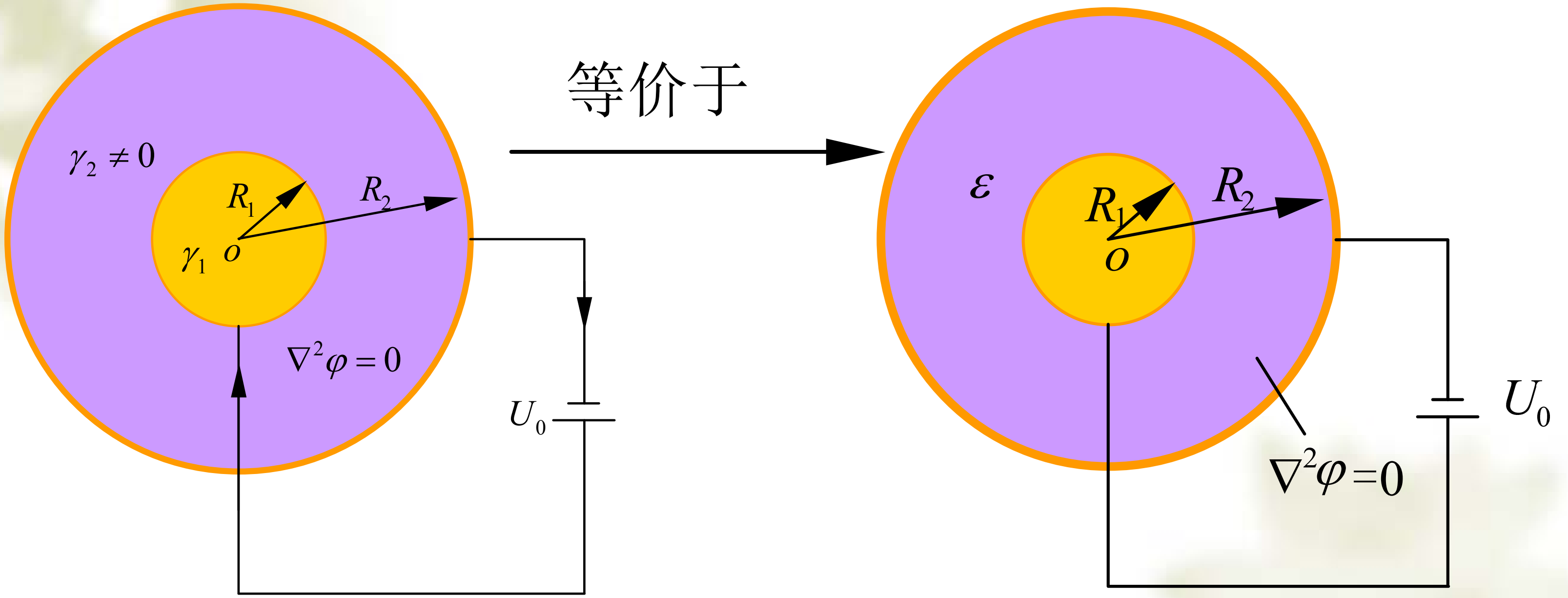
$$\vec{E}=\frac{I}{2\pi\gamma\rho L}\vec{e}_\rho$$

$$U_0=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{I}{2\pi\gamma\rho L}\vec{e}_\rho\cdot d\vec{\rho}=\frac{I}{2\pi\gamma L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$R=\frac{U_0}{I}=\frac{1}{2\pi\gamma L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



解2：应用静电比拟方法



$\gamma_2 \neq 0$
R_1
R_2
γ_1
o
$\nabla^2\varphi = 0$
U_0
等价于
ε
R_1
R_2
o
U_0
$\nabla^2\varphi = 0$

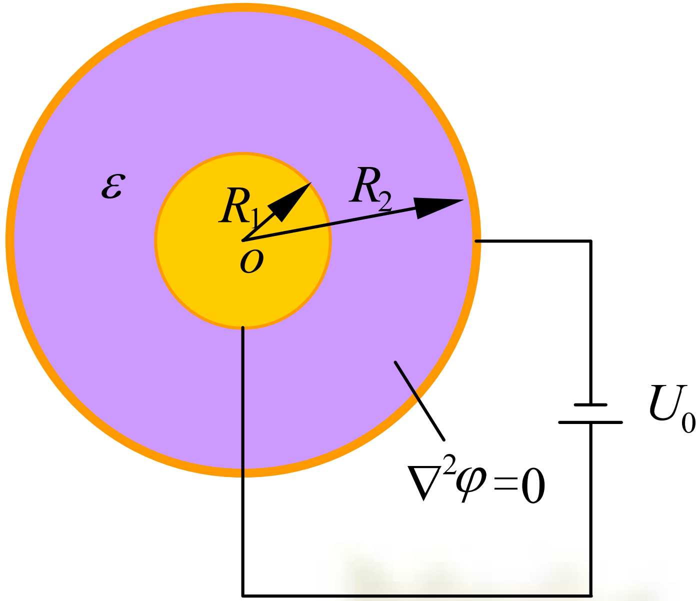
静电场的解答

$$\oint_S \vec{D} \bullet \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V = q$$

$$2\pi\rho l D = q = \tau l$$

$$D = \frac{\tau}{2\pi\rho} \qquad \vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\rho}\vec{e}_\rho$$

$$U_0 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



$$Q = \tau l$$

$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{\tau l}{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

静电比拟

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}, \quad R = \frac{1}{G}$$

■ 3.2.2 接地电阻

- ■ 接地

  将电气设备的某一部分与大地在电气上相联结。

- ■ 接地工程意义

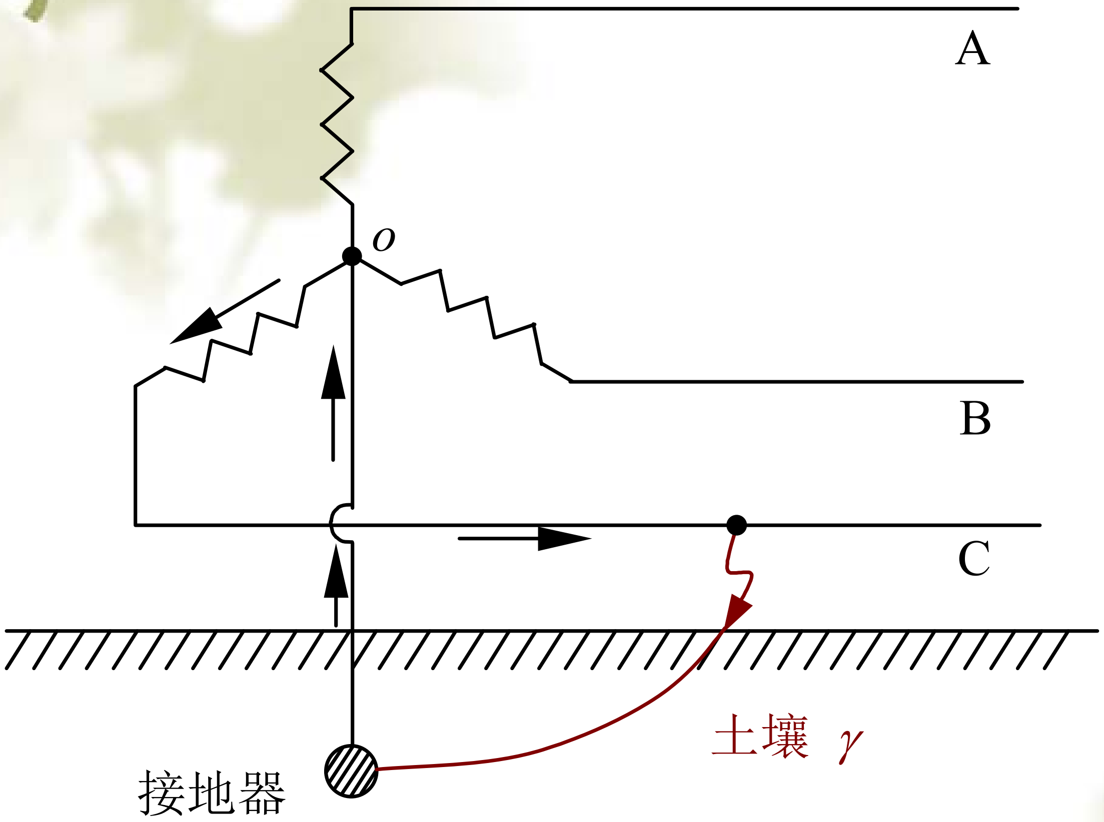
  a) 保护性接地 –人身安全

  b) 工作接地—设备运行的需要

  i 电子电路中

  ii 电力工程中

■ 接地工程实例

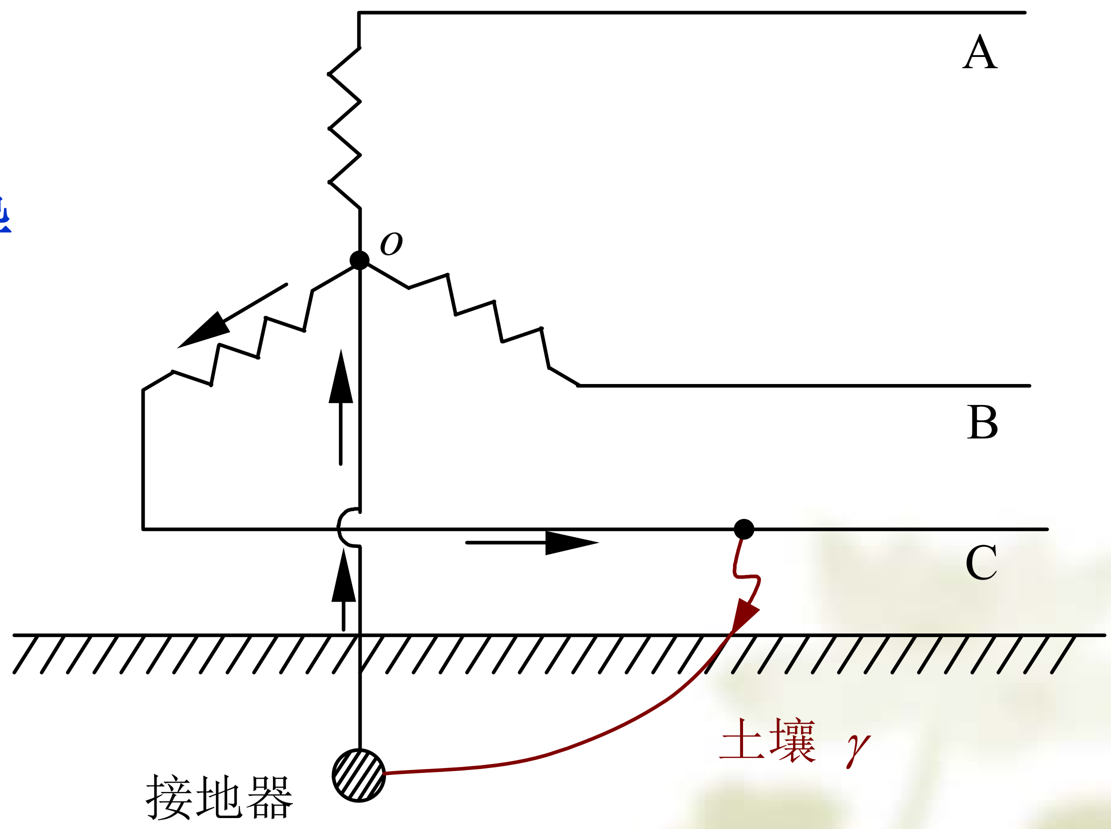


三相变压器星形馈电时，其中性点总是通过接地器接地

使输电线的对地电压，在运行时始终不会超过正常电压值。在发生对地短路时，正常相的相电压保持不变。

■ 接地器

埋于地中的金属导体系统(球、棒、网，及其组合)

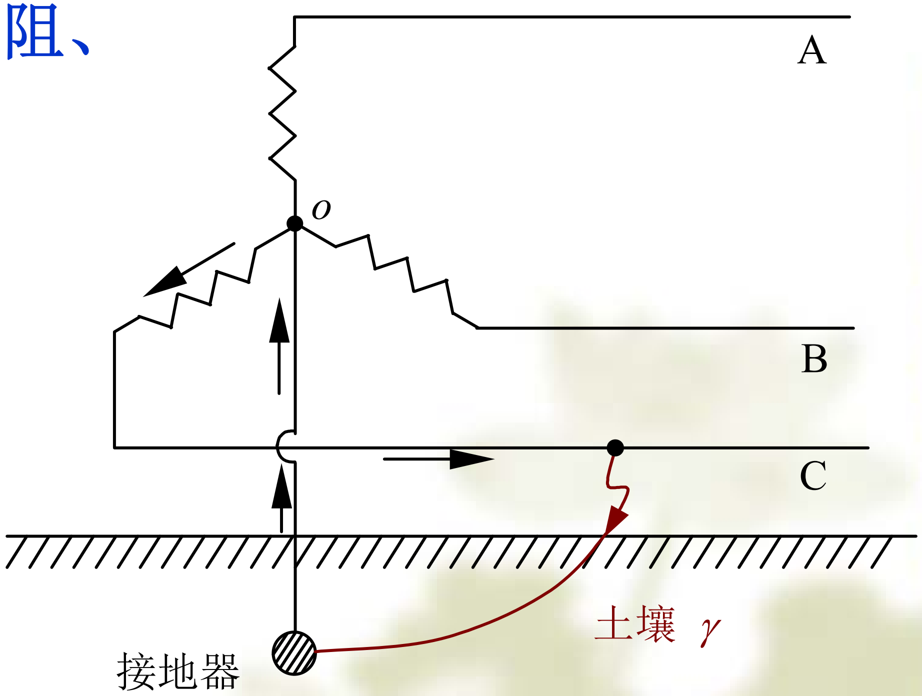


接地电阻定义：接地电流遇到的电阻的总和。

由接地器电阻、接地导线电阻、接地器与土壤之间的接触电阻、土壤（大地）电阻构成。

$$R = \frac{\varphi\big|_{\text{接地器}} - \varphi\big|_{\infty}}{I}$$

$$= \frac{\varphi\big|_{\text{接地器}}}{I}$$



接地电阻的计算方法：

1. 通过电流场直接计算电阻

思路:

设

$$I \longrightarrow \vec{J} \longrightarrow \vec{E} = \vec{J}/\gamma \longrightarrow U = \int_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \longrightarrow R = U/I$$

或设

$$U \longrightarrow \vec{E} \longrightarrow \vec{J} = \gamma \vec{E} \longrightarrow I = \int_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \longrightarrow R = U/I$$

2. 比拟法

当满足比拟条件时，用比拟法由电容计算电导。

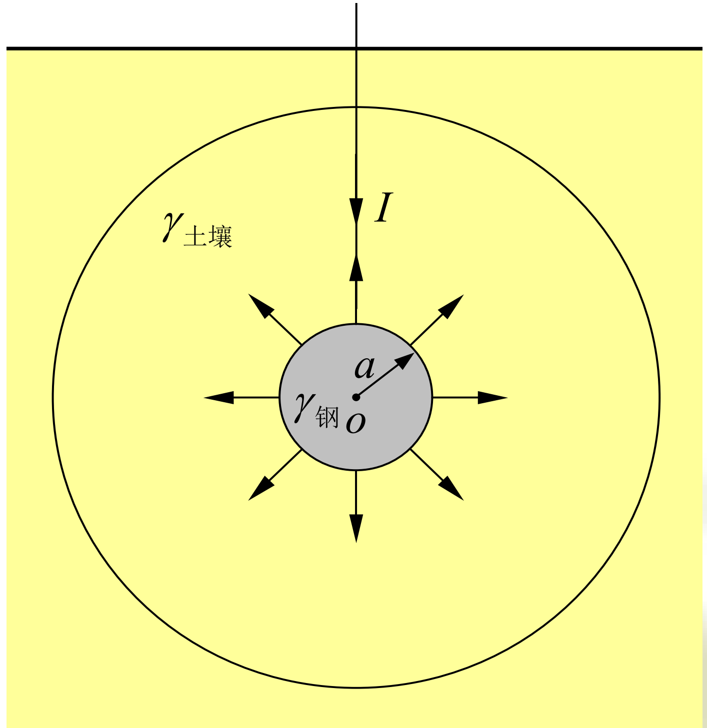
$$\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

接地电阻的计算实例：

1. 深埋于地中的球形接地器的接地电阻.

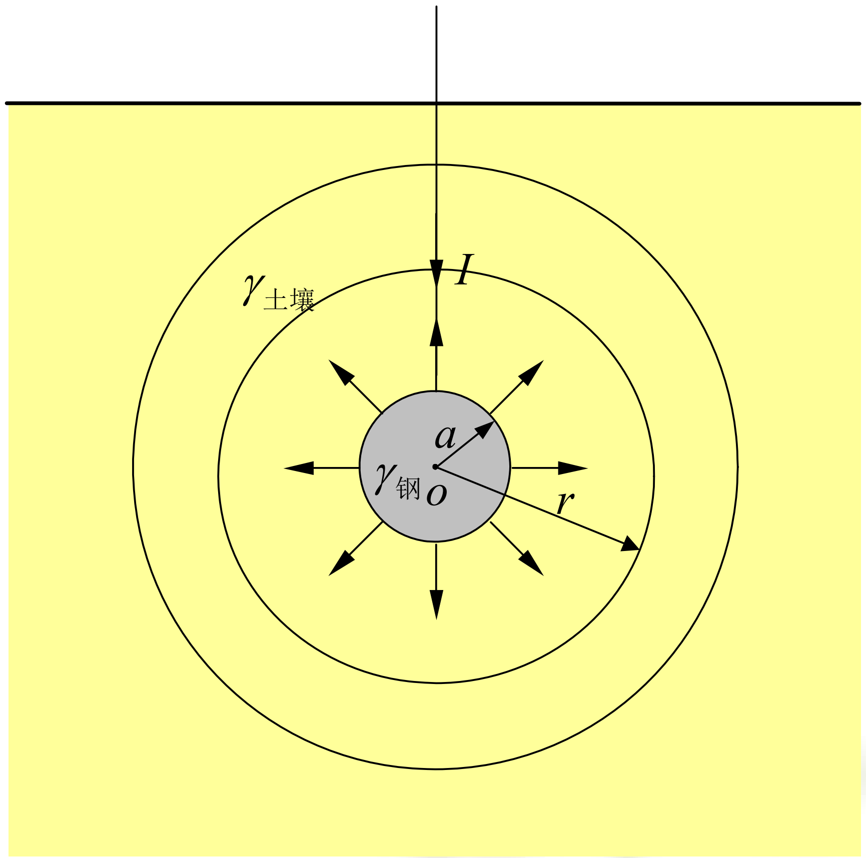
分析

设孤立导体球埋入地下足够深—可不计地面的影响—大地充满整个空间



方法1 —直接计算

作与球同心的球面，在该面上，电流密度J大小不变，方向与任意点的法向一致—高斯面



$$\oint_S \vec{J} \bullet d\vec{s} = 4\pi r^2 J = I$$

$$\boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{I}}{4\pi \boldsymbol{r}^2} \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\gamma} = \frac{\boldsymbol{I}}{4\pi\gamma \boldsymbol{r}^2}$$

$$\varphi = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^\infty \frac{I}{4\pi\gamma r^2} dr = \frac{I}{4\pi\gamma a} \longrightarrow \boldsymbol{R} = \frac{\varphi}{\boldsymbol{I}} = \frac{1}{4\pi\gamma \boldsymbol{a}}$$

方法2—静电比拟

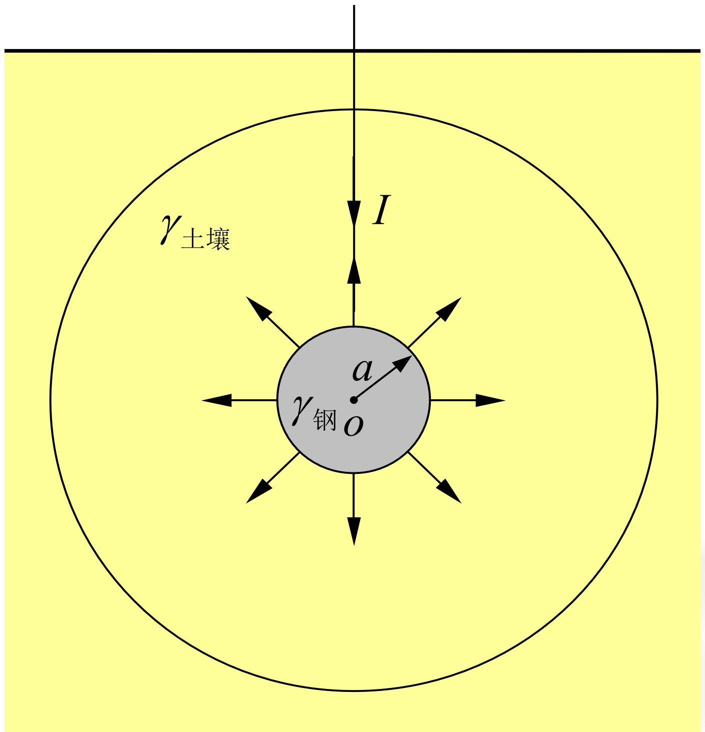
孤立导体球的电容

$$C=\frac{q}{\varphi}=\frac{q}{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon a}}=4\pi\varepsilon a$$

$$G=\frac{\gamma}{\varepsilon}C$$

$$G=4\pi\gamma a$$

$$R=\frac{1}{G}=\frac{1}{4\pi\gamma a}$$



2. 半埋于地中的半球形接地器$R_{接地}$

(1) 直接求解法　$I \to \vec{J} \to \vec{E} \to \varphi$

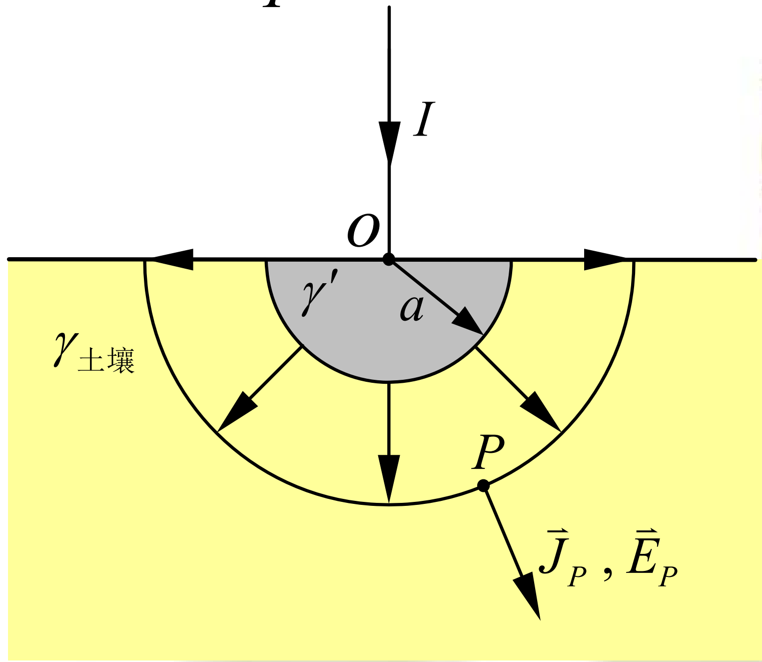
$$R = \frac{\varphi}{I}$$

$$\oint_S \vec{J} \bullet d\vec{s} = (\frac{1}{2} \times 4\pi r^2)J = I$$

$$J = \frac{I}{2\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}\vec{e}_r$$

$$\varphi\Big|_{接地器} = \int_a^{\infty} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \frac{I}{2\pi\gamma a}$$

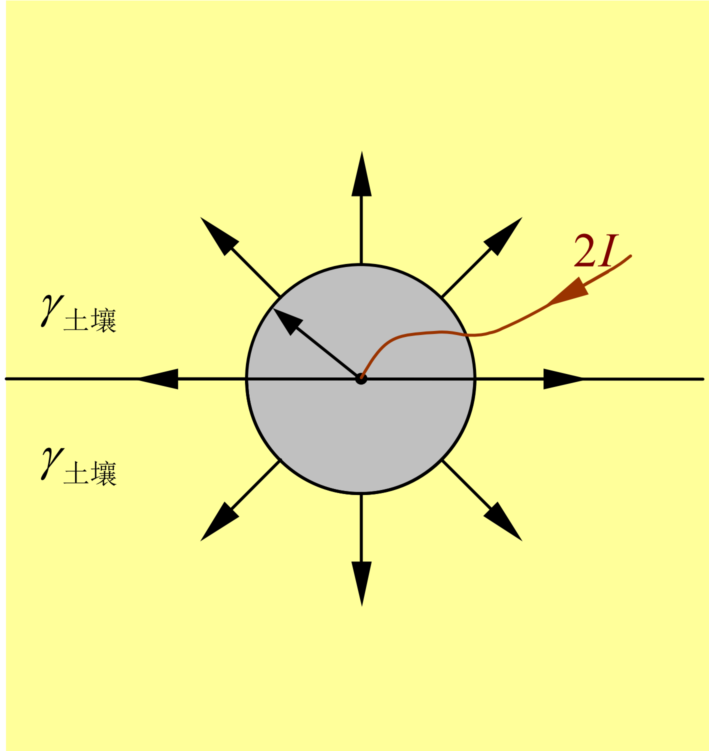
$$R_{半球} = \frac{\varphi\Big|_{接地器}}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma a}$$



（2）镜像法

$$R_{全球} = \frac{1}{4\pi\gamma a} = \frac{\varphi|_{接地器}}{2I}$$

$$R_{半球} = \frac{\varphi|_{接地器}}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma a}$$



镜像前后，范定方程不变。
边界条件不变。

$$\nabla^2\varphi = 0 \text{ (电源外)}$$

$$\varphi|_{接地器} = \int_a^{\infty} \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \frac{I}{2\pi\gamma a}$$

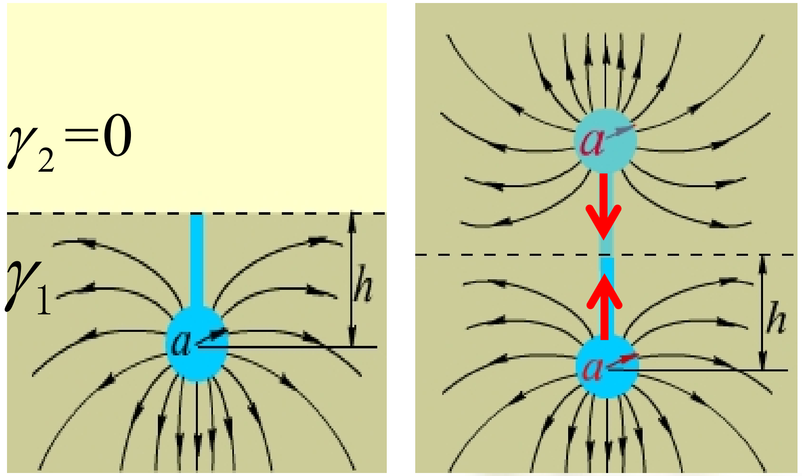
$$\varphi|_{\infty} = 0$$

3. 非深埋的球形接地器

解：用镜像法(类比两个点电荷的电场)

$$\varphi = \frac{I}{4\pi a\gamma} + \frac{I}{4\pi\gamma(2h)}$$

$$R = \frac{\varphi}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2h}\right)$$



非深埋的球形接地器

镜像前：$\gamma_2 = 0 \Rightarrow J_2 = 0$

分界面 $J_{1n} = J_{2n} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$

镜像后：$J = I/S \Rightarrow J_1 = J_2$

分界面 $\vec{J} = \vec{J}_{1n} + \vec{J}_{2n} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$

$\varphi\big|_{\infty} = 0$

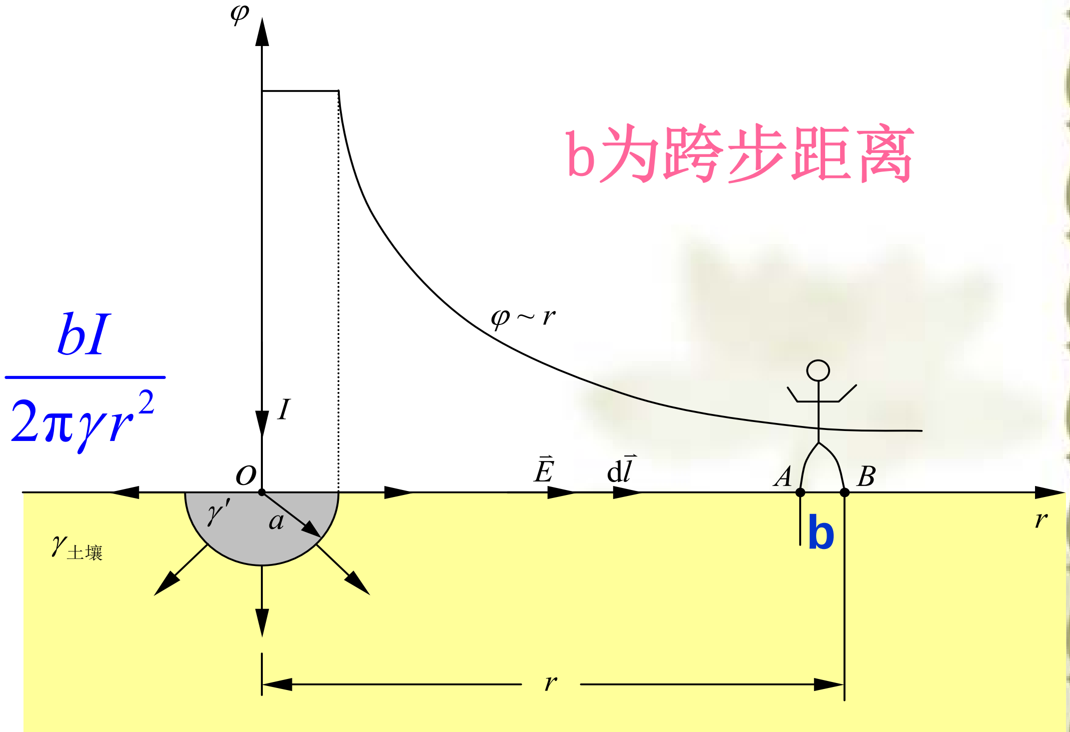
3.2.3 跨步电压

- 定义：当电流经接地体接地，在接地体周围存在电流。该电流在地面会产生电压——人的一步所跨越两点间的电位差—跨步电压

以浅埋半球接地器为例

$$E=\frac{J}{\gamma}=\frac{I}{2\pi r^2\gamma}$$

$$U_{AB}=\int_{r-b}^{r}\frac{I}{2\pi\gamma r^2}\mathrm{d}r \overset{r>>b}{==} \frac{bI}{2\pi\gamma r^2}$$



- 跨步电压

$$U_{AB} = \int_{r-b}^{r} \frac{I}{2\pi\gamma r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{bI}{2\pi\gamma r^2}$$

$$U_{AB} < U_0 = 50\sim70\ \mathrm{V}$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{bI}{2\pi\gamma U_0}} = \sqrt{\frac{abIR_{半球}}{U_0}}$$

为危险区半径

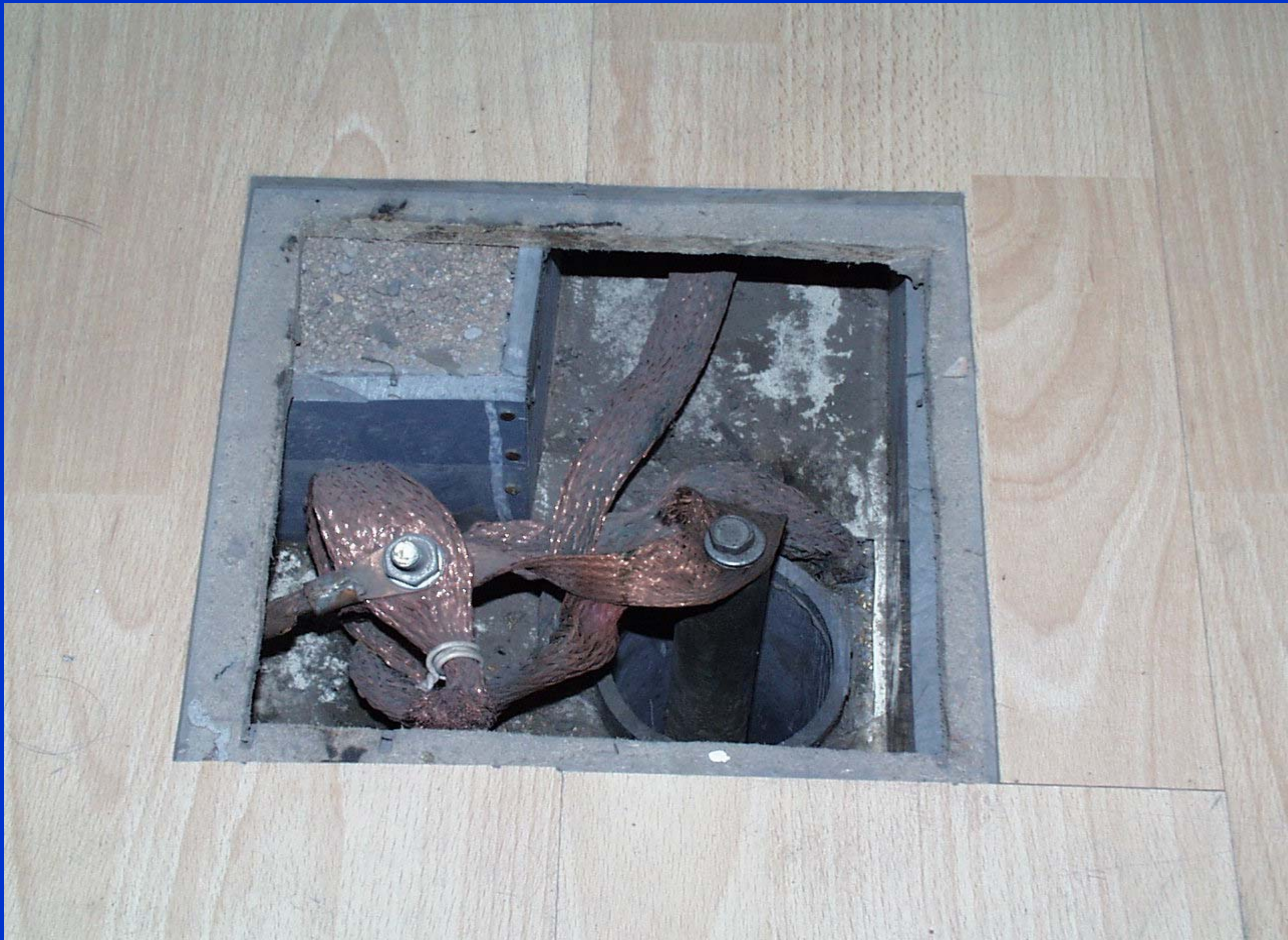
- 高压线周围均有危险区标志
- 为力求减小r_0，工程措施为

① 改变接地器结构，减小接地电阻，工程上接地电阻 〈10Ω

② 减小短路电流I

- 若已面临危险区，则唯一可行的处置——单脚跳离

作业：**3-3，3-4**



屏蔽室接地电阻（深度 20 m）

高压大厅网状接地电阻（深度1米）