习题课（1、3、4、5章作业题）

3-1，3-2，3-3，3-4，3-5(a)，(b)， 3-6，3-8，3-10，3-16，3-17，3-25，3-24，4-1，1-7, 4-5，5-1，5-3 ， 5-6，5-7，5-12，1-1+补充一题，1-5，1-6

3－1　电导率为 γ 的均匀、各向同性的导体球，其表面上的电位为 $\varphi_0\cos\theta$，其中 θ 是球坐标 (r,θ,ϕ) 的一个变量。试决定表面上各点的电流密度 $\boldsymbol{J}$。

3-1 解题思路

$$\varphi(\theta)$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{\varphi_0}{r}\sin\theta\ \ \vec{\boldsymbol{e}}_\theta$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}\Big|_{r=r_0} = \frac{\varphi_0}{r_0}\sin\theta\ \ \vec{\boldsymbol{e}}_\theta$$

$$\downarrow$$

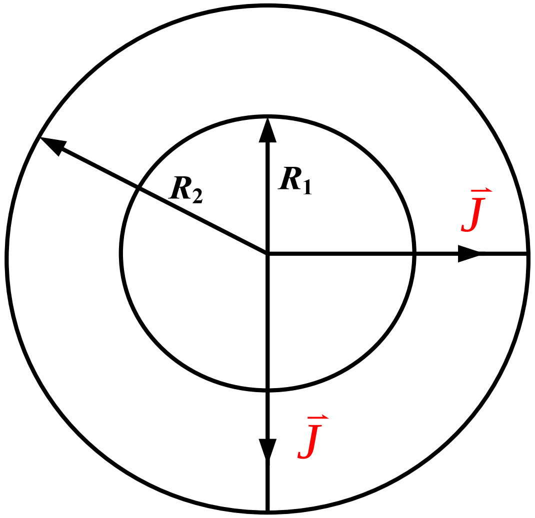
$$\vec{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}) = \gamma\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\gamma\varphi_0}{r_0}\sin\theta\,\vec{\boldsymbol{e}}_\theta$$

3-2 一长度为1m，内外导体的半径分别为 R_1 =5 cm，R_2 = 10 cm的圆柱形电容器，中间的非理想介质具有电导率 γ = 10^{-9} s/m。若在两电极间加电压U_0 = 1000 V，求：

（1）各点的电位、电场强度；

（2）漏电导。

分析



(1) 平行平面场（轴对称）

(2) 电流方向：径向

(3) 解题方法

$$I \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow \varphi \rightarrow U \rightarrow G = I/U$$

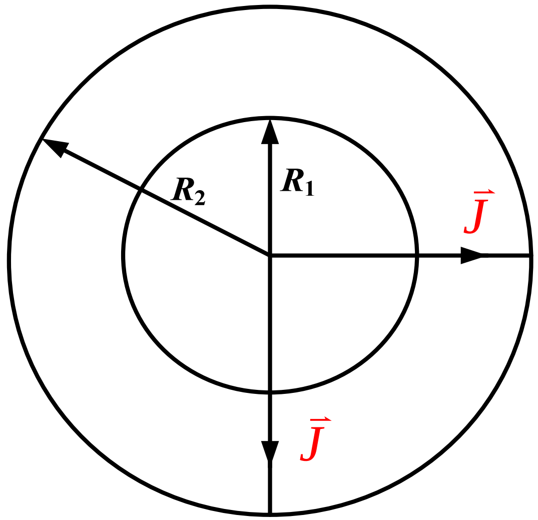
3-2

解：设漏电流为I。对于任意与电容器同心、以 $r(R_1<r<R_2)$ 为半径，轴向长度为1m的圆柱面上，电流密度大小相等，方向与该点的面元方向一致，且穿过该截面的总电流为I。

$$I=\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\vec{J}=\frac{I}{2\pi L\rho}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{E}=\vec{J}/\gamma=\frac{I}{2\pi\gamma L\rho}\vec{e}_\rho$$

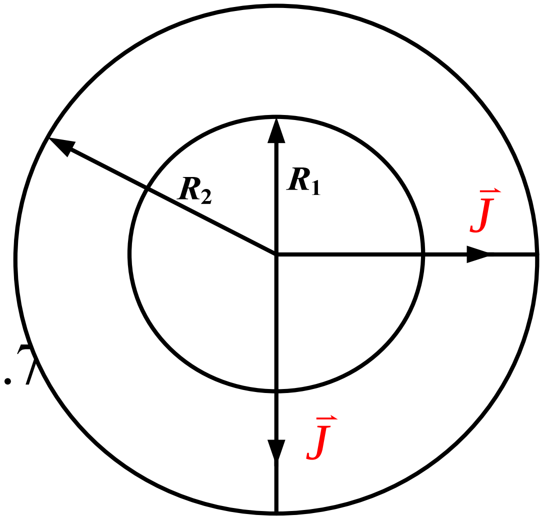


$\Downarrow$ 以外导体为电压的参考点

$$\varphi(\rho)=\int_\rho^{R_2}\vec{E}\bullet \mathrm{d}\vec{\rho}=\int_\rho^{R_2}\frac{I}{2\pi\gamma L\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{I}{2\pi\gamma L}\ln\frac{R_2}{\rho}$$

3-2

将待求量用已知量表示（$\boldsymbol{U_0 = 1000\ \mathrm{V}}$ ）



$$U_0 = \varphi(R_1) = \frac{I}{2\pi\gamma L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{I}{2\pi\gamma L} = \frac{U_0}{\ln\left(R_2/R_1\right)} = \frac{1000}{\ln\left(10/5\right)} = 1442.7$$

$$\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi\gamma L}\ln\frac{R_2}{\rho} = \frac{U_0}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\ln\frac{R_2}{\rho} = 1442.7\ln\frac{0.1}{\rho} \quad (\mathrm{V})$$

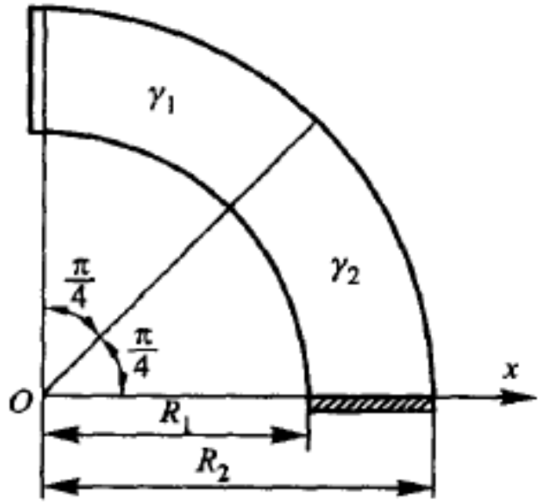
$$\boldsymbol{E}(\rho) = \frac{U_0}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\cdot\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho = 1442.7\cdot\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho \quad \left(\mathrm{V}/\mathrm{m}\right)$$

$$G = \frac{I}{U_0} = \frac{2\pi\gamma L}{\ln\left(R_2/R_1\right)} = \frac{2\pi\times10^{-9}\times1}{\ln\left(10/5\right)} = 9.06\times10^{-9} \quad (\mathrm{s})$$

3 - 3　一导电弧片由两块不同电导率的薄片构成，如题3 - 3图所示。若 $\gamma_1 = 6.5\times10^7$ S/m，$\gamma_2 = 1.2\times10^7$ S/m，$R_2 = 45$ cm，$R_1 = 30$ cm，钢片厚度为 2 mm，电极间电压 $U = 30$ V，且 $\gamma_{电极} \gg \gamma_1$ 求：

(1) 弧片内的电位分布(设 x 轴上的电极为零电位)；

(2) 总电流 I 和弧片电阻 R。



解：

采用圆柱坐标系，可知导电片中的电位 $\varphi(\rho,\phi,z)$ 仅为坐标 ϕ 的函数，即 $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$，

根据题意，可列出边值问题为：

$$\begin{cases} \text{泛定方程}: \nabla^2\varphi_1(\phi) = \dfrac{1}{\rho^2}\cdot\dfrac{d^2\varphi_1}{d\phi^2} = 0 \quad \left(R_1 < \rho < R_2, \dfrac{\pi}{4} < \phi < \dfrac{\pi}{2}\right) & (1) \\ \qquad\qquad \nabla^2\varphi_2(\phi) = \dfrac{1}{\rho^2}\cdot\dfrac{d^2\varphi_2}{d\phi^2} = 0 \quad \left(R_1 < \rho < R_2, 0 < \phi < \dfrac{\pi}{4}\right) & (2) \\ \text{BC}: \qquad \varphi_2\Big|_{\phi=0} = 0 & \\ \qquad\qquad \varphi_1\Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = U_0 = 30\ \text{V} & \\ \text{衔接条件}: \varphi_1\Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}} = \varphi_2\Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}},\ \gamma_1\dfrac{d\varphi_1}{d\phi}\Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}} = \gamma_2\dfrac{d\varphi_2}{d\phi}\Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}} & \end{cases}$$

$$\varphi_1 = C_1\phi + C_2; \qquad \varphi_2 = C_3\phi + C_4$$

利用 BC 以及位于两导电媒质(γ_1、γ_2)分界面上的 BC(即其衔接条件),可确定积分常数,得:

$$C_4 = 0, \qquad C_1 = \frac{U}{\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)} = \frac{30}{\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{6.5}{1.2}\right)} = 5.953$$

$$C_2 = U - \frac{\pi}{2}C_1 = 20.65, \qquad C_3 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}C_1 = 32.25$$

故 $\varphi(\phi)=\begin{cases}\varphi_1(\phi)=\dfrac{U}{\dfrac{\pi}{4}\left(1+\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)}\phi+\dfrac{U(\gamma_1-\gamma_2)}{\gamma_1+\gamma_2}=5.95\phi+20.65\ \text{V} & \left(\dfrac{\pi}{4}\leqslant\phi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \varphi_2(\phi)=\dfrac{4U\gamma_1}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)}\phi=32.25\phi\ \text{V} & \left(0\leqslant\phi\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)\end{cases}$

（2） $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi$

在分界面上，有 $\boldsymbol{J}=\gamma_1\boldsymbol{E}_1=\gamma_2\boldsymbol{E}_2$（$\boldsymbol{J}$ 呈现为分界面上的法向分量）

$$\boldsymbol{J}_1=-\gamma_1\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi=\frac{4U\gamma_1\gamma_2}{\rho\pi(\gamma_1+\gamma_2)}\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{J}_2$$

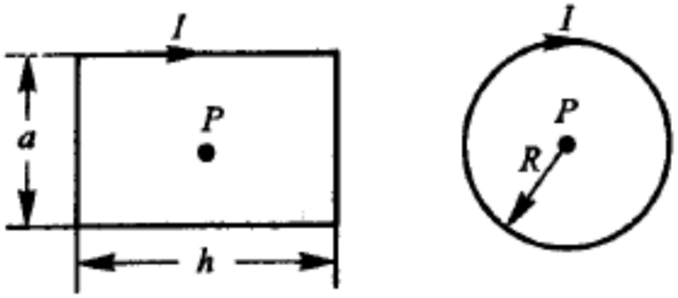
$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{R_1}^{R_2} C_1 \gamma_1 \frac{d}{\rho} \mathrm{d}\rho = C_1 \gamma_1 d \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$= \frac{4U\gamma_1\gamma_2 d}{\pi(\gamma_1 + \gamma_2)} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 3.137 \times 10^5 \text{ A}$$

弧片的电阻为

$$R = \frac{U}{I} = 9.56 \times 10^{-5}\ \Omega$$

3－5　分别求题3－5图(1)所示各种形状的线电流在真空中的 P 点所产生的磁感应强度。

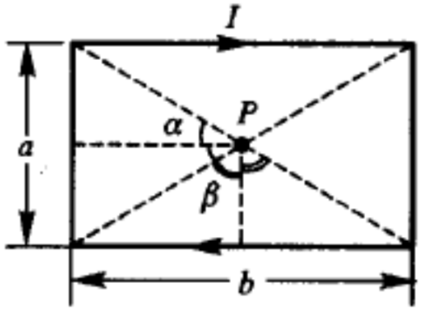


(a)　　(b)

分析：　直接计算或利用已知结论

对于结构形态比较复杂的载流系统，解题的基本思路是，首先离散化整体电流分布为最大的典型的元电流分布的组合，求出相应于元电流的场中元磁感应强度的解答；然后，应用叠加原理，合成所有元电流的贡献，即得待求的***B***场分布

(a) 本题载流系统的构造可分解为四段有限长直载流导线的组合。



根据教材例3-4（有限长直载流导线的磁场），有

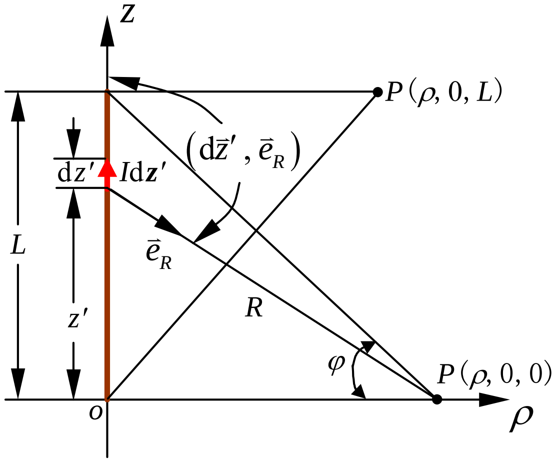
$$B_P = 2\cdot\frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\frac{b}{2}\right)}(\sin\alpha+\sin\alpha)+2\cdot\frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\frac{a}{2}\right)}(\sin\beta+\sin\beta)$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\cdot 2\cdot\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}}+\frac{\mu_0 I}{\pi a}\cdot 2\cdot\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{2\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

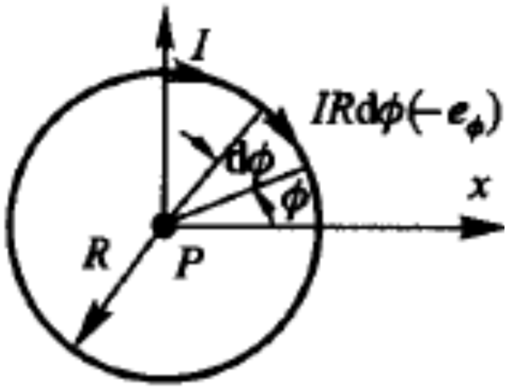
$\boldsymbol{B}_P$ 方向垂直于该载流线圈平面(可取为 $\boldsymbol{e}_z$ 方向)。

例3-4



$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\sin\varphi\,\vec{e}_\phi$$

(b) 本题载流系统的构造可离散化为无限多个元电流 $I\mathrm{d}l = IR\mathrm{d}\phi$ 的组合。



如图示设定的坐标系，可见电流元为 $IR\mathrm{d}\phi(-\boldsymbol{e}_\phi)$，由毕奥—萨伐尔定律可得：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_\mathrm{P} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{IR\mathrm{d}\phi(-\boldsymbol{e}_\phi)\times(-\boldsymbol{e}_\rho)}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\mathrm{d}\phi(-\boldsymbol{e}_z)$$

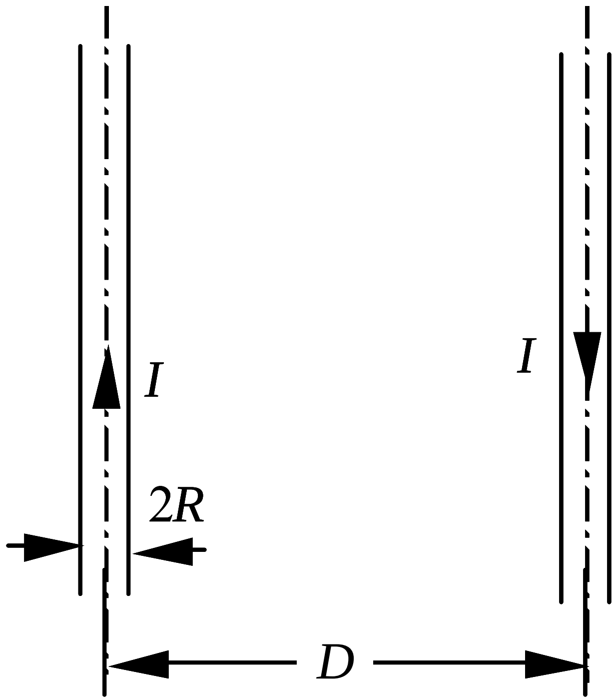
$$\boldsymbol{B}_\mathrm{P} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{B}_\mathrm{P} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi(-\boldsymbol{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{2R}(-\boldsymbol{e}_z)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\vec{e}_R}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

3-6 真空中两根平行长直导线的截面半径都为R，轴线距离为D，导线中电流为I，如题3-6图所示

（1）试求在两导线的轴线平面上各处B的表达式；

（2）若两导线的电流同方向，求B的表达式。



题3-6图

3-6 分析

（1）单根无限长直载流导线的磁场问题（安培环路定律）；

导线外 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \qquad (\rho \geq R)$

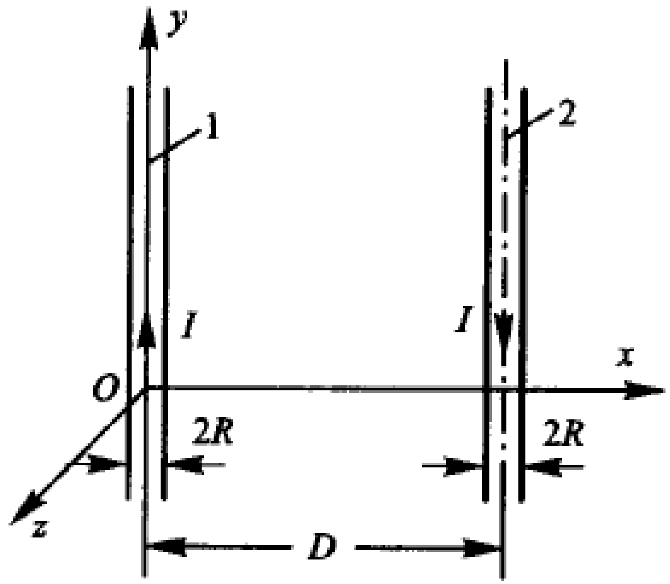
导线内 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2}\vec{e}_\phi \qquad (\rho \leq R)$

（2）2根导线--应用叠加原理

3-6 计算（1）试求在两导线的轴线平面上各处**B**的表达式；

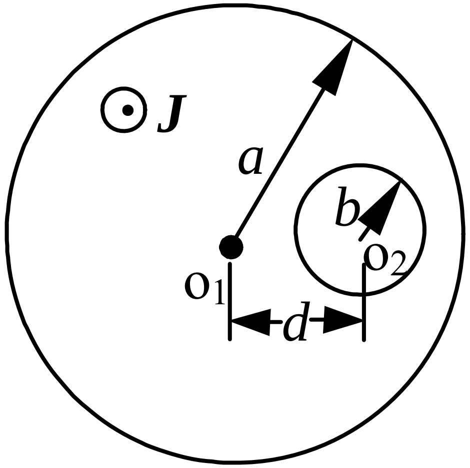
设 $\vec{B}$ 的正方向为z方向：

$$\vec{B}=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(D-x)}=-\dfrac{\mu_0 ID}{2\pi x(D-x)} & \text{导线外}\\ \left(x\le -R;\ R\le x\le (D-R)\text{和}x\ge (D+R)\right) & \\ -\dfrac{\mu_0 Ix}{2\pi R^2}-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(D-x)}=-\dfrac{\mu_0 I(R^2-x^2+xD)}{2\pi R^2(D-x)} & \\ \left(-R\le x\le R\right) & \text{导线1内部}\\ -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}-\dfrac{\mu_0 I(D-x)}{2\pi R^2}=\dfrac{\mu_0 I(x^2-R^2-xD)}{2\pi xR^2} & \\ \left((D-R)\le x\le (D+R)\right) & \text{导线2内部}\end{cases}$$



题 3－6 图(3)

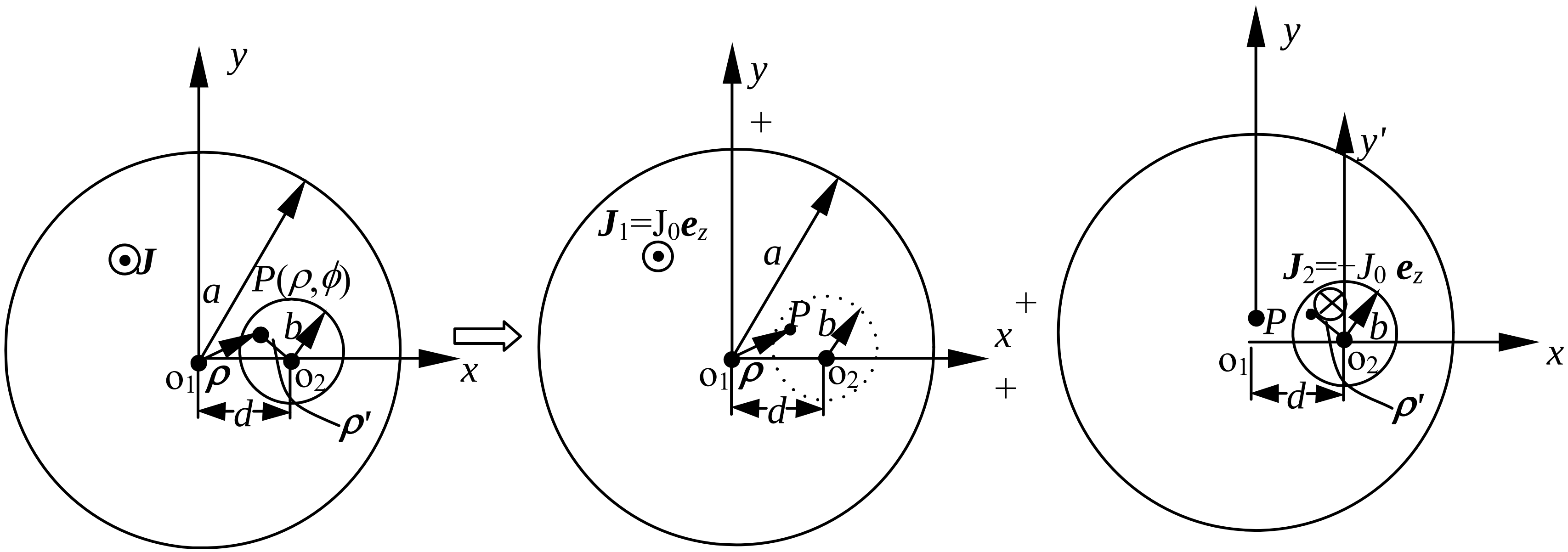
3-8 真空中，一通有电流(电流密度为$\boldsymbol{J}=J_0\boldsymbol{k}$)，半径为$a$的无限长圆柱内，有一半径为$b$不同轴的圆柱形空洞。两轴线间相距$d$，如题3-8图所示。试证：小圆柱内的 $\boldsymbol{B}$ 均匀，且其值为 $\mu_0 J_0 d/2$。



题 3-8 图

3-8 分析

应用安培环路定理分别求图(1)和图(2)的磁场，再叠加。



(1)　　(2)

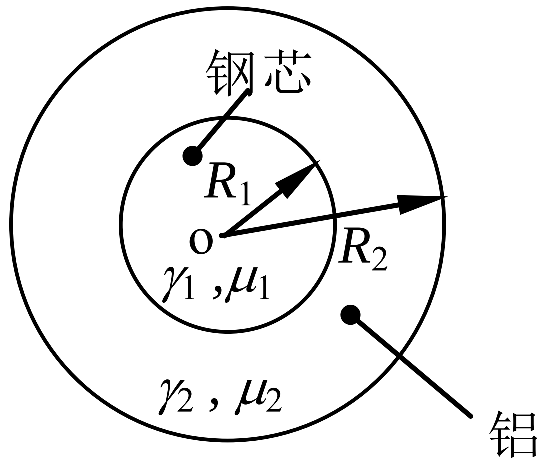
$$2\pi\rho B_{1\phi}=\mu_0\pi\rho^2 J_0$$

$$\boldsymbol{B}_1=B_{1\phi}\boldsymbol{e}_\phi=\frac{\mu_0 J_0}{2}\rho\,\boldsymbol{e}_\phi\quad(0<\rho<a)$$

3-10 设载流为I的钢芯电缆，其内导体(钢芯)电导率为 γ_1，磁导率 $\mu_1 = 500\mu_0$；外层导体(铝)电导率为 γ_2，磁导率 $\mu_2 \approx \mu_0$。求：

(1) 电缆内电流的分布.

(2) 电缆内外各处(即$\rho<R_1$，$R_1<\rho<R_2$和$\rho>R_2$三区域中)磁感应强度B的分布；



题 3-10 图

分析

(1) 平行平面场、轴对称场

(2) 内、外导体中的电流密度分别为恒定值

(3) 两导体中电流的代数和等于总电流

(4) 内外导体中的电场强度相等

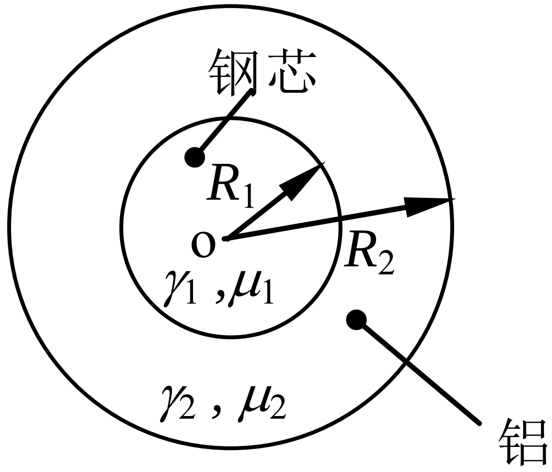
3-10 **解：** 设钢芯与外层铝导体中的电流密度分别为

$$\vec{J}_1 = J_1\vec{\mathbf{e}}_z \qquad \vec{J}_2 = J_2\vec{\mathbf{e}}_z$$

$$\begin{cases} J_1\pi R_1^{\ 2} + J_2\pi(R_2^{\ 2} - R_1^{\ 2}) = I \\ \dfrac{J_1}{\gamma_1} = \dfrac{J_2}{\gamma_2} \qquad (\boldsymbol{E}_{1z} = \boldsymbol{E}_{2z}) \end{cases}$$

$$J_1 = \frac{r_1}{r_2}\frac{I}{\pi[R_2^{\ 2} + (\frac{r_1}{r_2} - 1)R_1^{\ 2}]}$$

$$J_2 = \frac{I}{\pi[R_2^{\ 2} + (\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1)R_1^{\ 2}]}$$



题 3-10 图

应用安培环路定律

$\rho < R_1$

$$B_1 2\pi\rho = \mu_1 J_1 \pi\rho^2$$

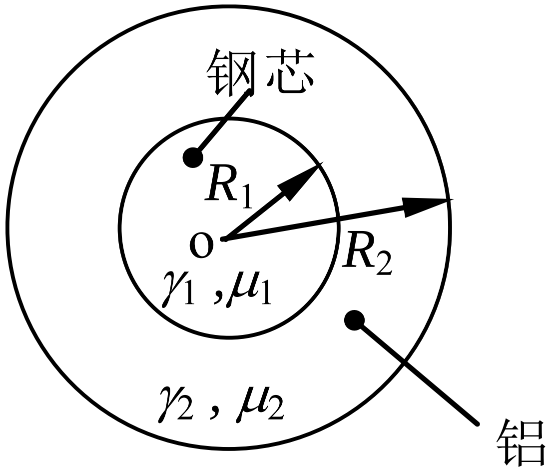
$$\vec{\boldsymbol{B}}_1 = \frac{\mu_1 J_1}{2}\rho\vec{\boldsymbol{e}}_\phi = 250\mu_0 J_1 \rho\vec{\boldsymbol{e}}_\phi \quad (\rho < R_1)$$

$R_1 < \rho < R_2$

$$B_2 2\pi\rho = \mu_2[J_1\pi R_1^{\ 2} + J_2\pi(\rho^2 - R_1^{\ 2})]$$

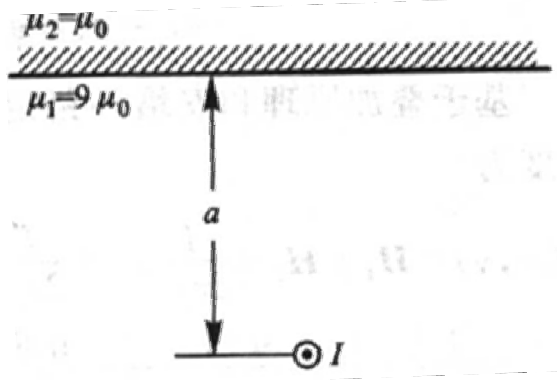
$$\vec{\boldsymbol{B}}_2 = \frac{\mu_0 J_2}{2}\rho \ \ \vec{\boldsymbol{e}}_\phi + \frac{\mu_0 R_1^{\ 2}(J_1 - J_2)}{2\rho}\vec{\boldsymbol{e}}_\phi \qquad (R_1 < \rho < R_2)$$

$\rho > R_2$ $\quad B_3 2\pi\rho = \mu_0 I \qquad \vec{\boldsymbol{B}}_3 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{\boldsymbol{e}}_\phi \qquad \rho > R_2$



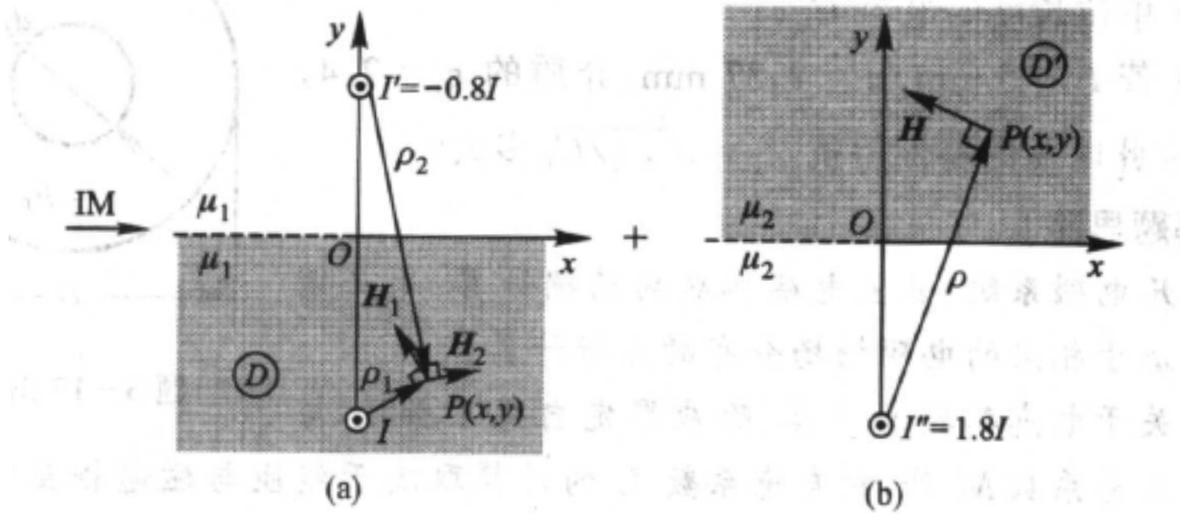
题 3-10 图

3－16 图，求两种媒质中的磁场强度和载流导线每单位长度所受之力。



解：采用镜像法

镜像电流 $I'=\dfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}I=-0.8I$，$I''=\dfrac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}I=1.8I$。



(1) 媒质 μ_1 的 D 域中的磁场强度：

分析可知：

$$\boldsymbol{\rho}_1 = x\boldsymbol{e}_x + (y+a)\boldsymbol{e}_y, \qquad \boldsymbol{\rho}_2 = x\boldsymbol{e}_x + (y-a)\boldsymbol{e}_y$$

对应于 $\boldsymbol{H}_1$ 的单位矢量

$$\boldsymbol{e}_{\phi_1} = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_{\rho_1} = [x\boldsymbol{e}_y - (y+a)\boldsymbol{e}_x]/\rho_1$$

对应于 $\boldsymbol{H}_2$ 的单位矢量

$$\boldsymbol{e}_{\phi_2} = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_{\rho_2} = [x\boldsymbol{e}_y - (y-a)\boldsymbol{e}_x]/\rho_2$$

基于叠加原理和安培环路定律的应用，可得媒质 μ_1 中任意场点处的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}(x,y) = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho_1}\boldsymbol{e}_{\phi_1} + \frac{I'}{2\pi\rho_2}\boldsymbol{e}_{\phi_2} = \frac{I}{2\pi}\left[\frac{x\boldsymbol{e}_y - (y+a)\boldsymbol{e}_x}{x^2+(y+a)^2} - 0.8\cdot\frac{x\boldsymbol{e}_y - (y-a)\boldsymbol{e}_x}{x^2+(y-a)^2}\right]$$

$$= \frac{I}{2\pi}\left\{-\left[\frac{y+a}{x^2+(y+a)^2} - \frac{0.8\cdot(y-a)}{x^2+(y-a)^2}\right]\boldsymbol{e}_x + \left[\frac{x}{x^2+(y+a)^2} - \frac{0.8x}{x^2+(y-a)^2}\right]\boldsymbol{e}_y\right\}$$

（2）媒质 μ_2 的 D' 域中的磁场强度：

$$\boldsymbol{H}(x,y)=\frac{I''}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi=\frac{0.9I}{\pi}\frac{x\boldsymbol{e}_y-(y+a)\boldsymbol{e}_x}{x^2+(y+a)^2}$$

（3）镜像电流 I' 在导线处产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_1 I'}{2\pi(2a)}\boldsymbol{e}_x=-\frac{9\mu_0\cdot 0.8I}{4\pi a}\boldsymbol{e}_x=-\frac{1.8\mu_0 I}{\pi a}\boldsymbol{e}_x$$

故基于安培力公式，载流导线上每单位长度所受之力为

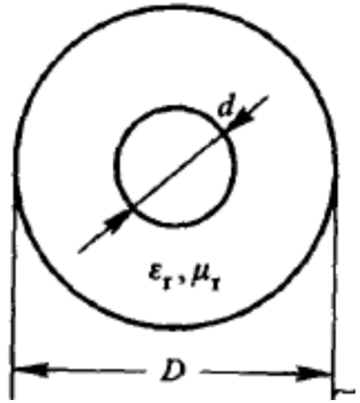
$$\boldsymbol{F}_l=I\cdot 1\cdot\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{B}=-\frac{1.8\mu_0 I^2}{\pi a}\boldsymbol{e}_y$$

3-17 一无损耗同轴电缆尺寸如题 3-17 图所示。求：

(1) 单位长度的外电感 L_0；

(2) 单位长度的电容 C_0；

(3) 若 $D = 5$ mm, $d = 1.37$ mm，介质的 $\varepsilon_r = 2.4$, $\mu_r = 1$，求此电缆的特性阻抗 $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$ 多大？



分析

计算电感参数

$$I \to B \to \Phi \to \Psi \to L = \frac{\Psi_L}{I}, M = \frac{\Psi_M}{I}$$

计算电容参数

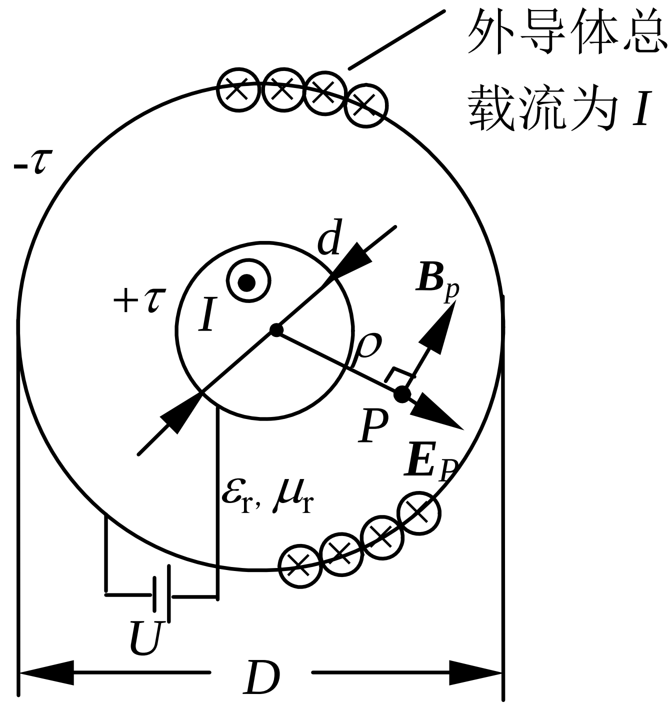
$$q \to E \to U \to C = \frac{q}{U}$$

3-17 计算外自感参数（同书例3-19）

如图设该同轴电缆载流为I。理想化绝缘媒质（$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{r}$，$\boldsymbol{\mu}_\mathrm{r}$）中的磁场具有圆柱对称的平行平面场特征，故可直接引用安培环路定律解得

$$\vec{\boldsymbol{B}}_p = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi\rho}\vec{\boldsymbol{e}}_\phi \quad \left(\frac{d}{2} < \rho < \frac{D}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$



3-17

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \quad \left(\frac{d}{2} < \rho < \frac{D}{2}\right)$$

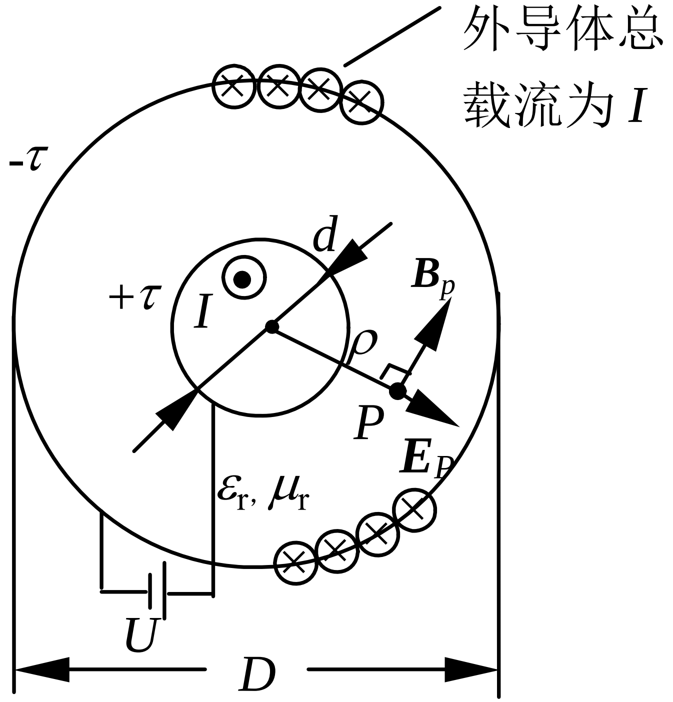
$$\psi_0 = \int \mathrm{d}\psi_0 = \int 1 \bullet \mathrm{d}\Phi_0 = \int_S \vec{B}_0 \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi\rho} l \mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 \mu_r I l}{2\pi} \ln\frac{D}{d}$$

$$\Downarrow$$

$$L_0 = \frac{\psi_0}{Il} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln\frac{D}{d}$$

单位长度的外自感



3-17

单位长度的电容

设该同轴电缆内外导体带电为$+\tau$和 $-\tau$，理想化绝缘介质（ε_r）中的电场具有圆柱对称的平行平面场特征，可直接引用高斯定理，解得

$$\vec{E}_p = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\rho}\vec{e}_\rho$$

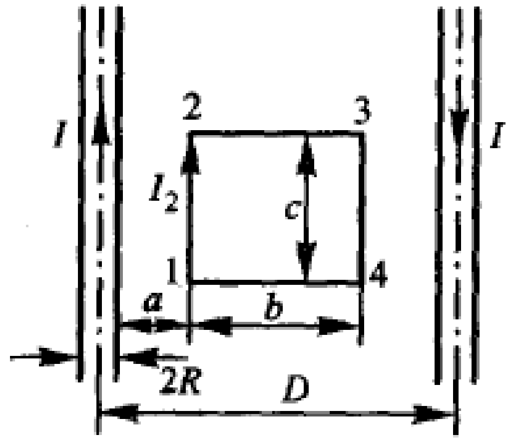
$$U = \int \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{\rho} = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\mathrm{d}\rho = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{D}{d}$$

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{D}{d}}$$ 单位长度的电容

3-24 参阅题 3-24 图，当线框通有电流 I_2 时，试用以下方法求长直导线（通有电流 I）对它的作用力。

（1）用计算式 $\boldsymbol{F}=\int I(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})$；

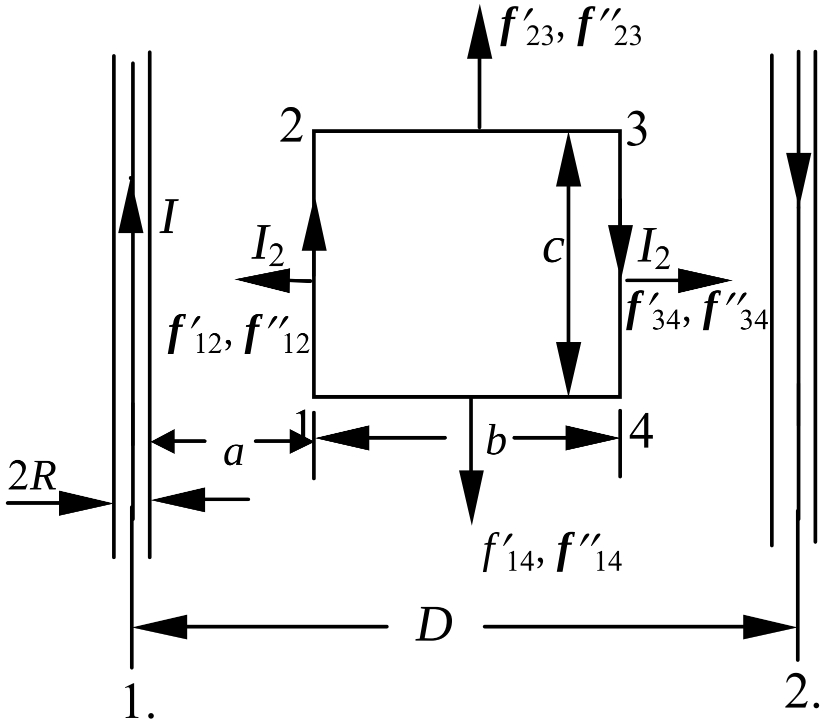
（2）应用虚功原理。



3-24 （1）

当应用安培力公式计算磁场力时，必须遵循由元电流***Idl***叉积其所在处的***B***来定义元电流所受元磁场力***dF***的参考方向

应用叠加原理



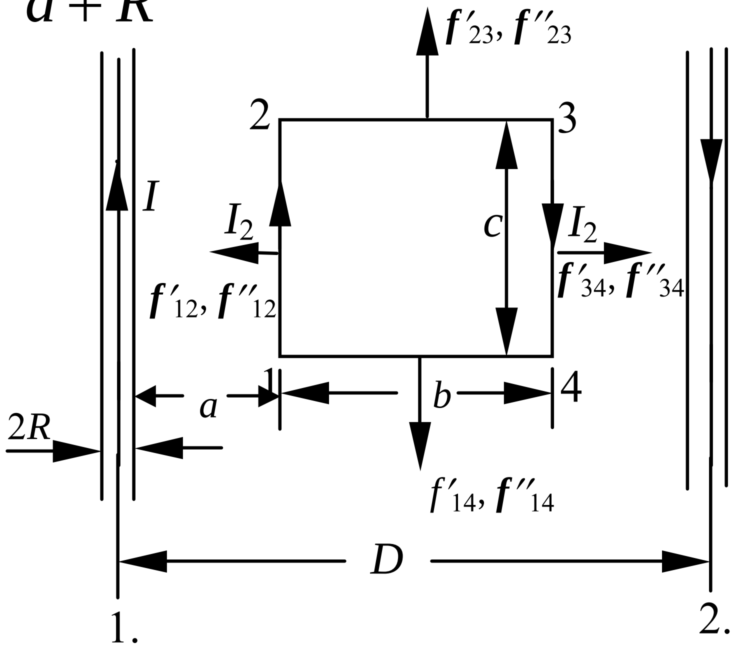
3-24 （1）

载流导线1产生的磁场对载流线框的作用力。按图示线框各边受力的参考正方向，可得

$$f'_{12}=\left|\int I\left(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}\right)\right|=\frac{II_2\mu_0 c}{2\pi(a+R)}$$

$$f'_{23}=f'_{14}=\frac{II_2\mu_0}{2\pi}\int_{(a+R)}^{(a+b+R)}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{II_2\mu_0}{2\pi}\ln\frac{a+b+R}{a+R}$$

$$f'_{34}=\frac{II_2\mu_0 c}{2\pi(a+b+R)}$$



3-24 （1）

同理，可得载流导线2产生于载流线框上的作用力$\boldsymbol{f}''_{12}$，$\boldsymbol{f}''_{23}$，$\boldsymbol{f}''_{34}$和$\boldsymbol{f}''_{14}$。于是，最终作用于载流线框各边的合力分别为

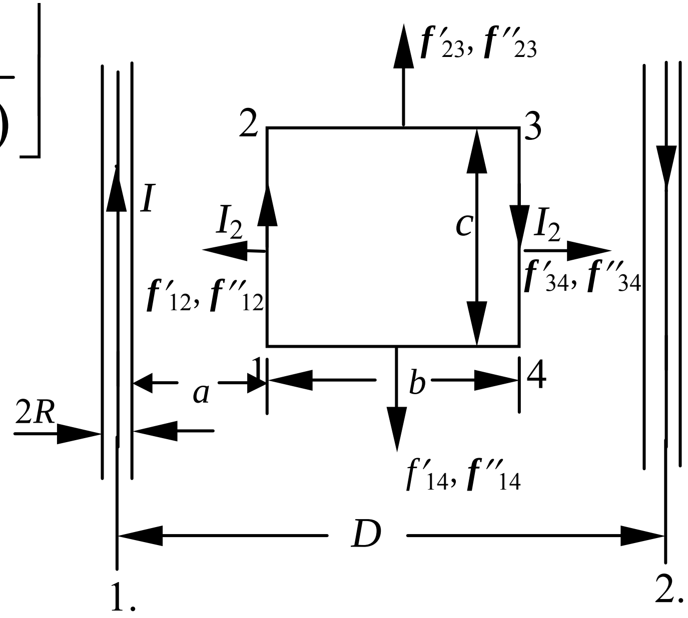
$$f_{12} = f'_{12} + f''_{12} = \frac{II_2\mu_0 c}{2\pi}\left[\frac{1}{a+R} + \frac{1}{D-(a+R)}\right]$$

$$f_{23} = f_{14} = f'_{23} + f''_{23}$$

$$= \frac{II_2\mu_0}{2\pi}\ln\frac{(a+b+R)(D-a-R)}{(D-a-b-R)(a+R)}$$

$$f_{34} = f'_{34} + f''_{34}$$

$$= \frac{II_2\mu_0 c}{2\pi}\left[\frac{1}{a+b+R} + \frac{1}{D-(a+b+R)}\right]$$



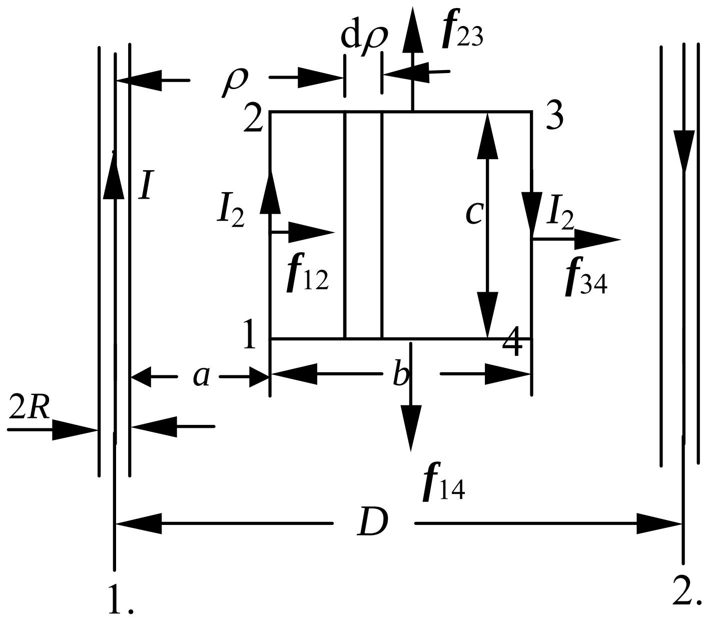
3-24 （2）

为应用虚功原理，应首先解出两载流系统的互感系数***M***。

由**载流导线1产生的与线框交链的互感磁通链为:**

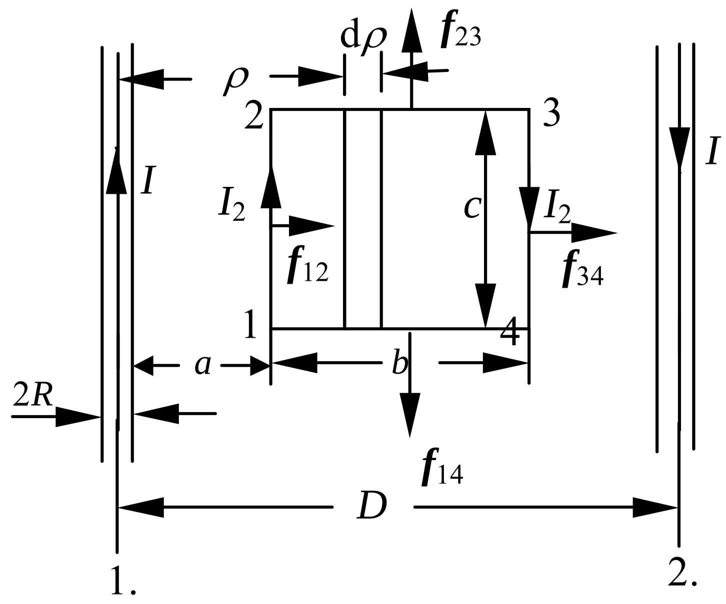
$$\psi_1 = \phi_1 = \int_s \boldsymbol{B}_1 \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \int_{a+R}^{a+b+R} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} c\mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 c I}{2\pi} \ln \frac{a+b+R}{a+R}$$



3-24 （2）

载流导线2产生的与线框交链的互感磁通链为:



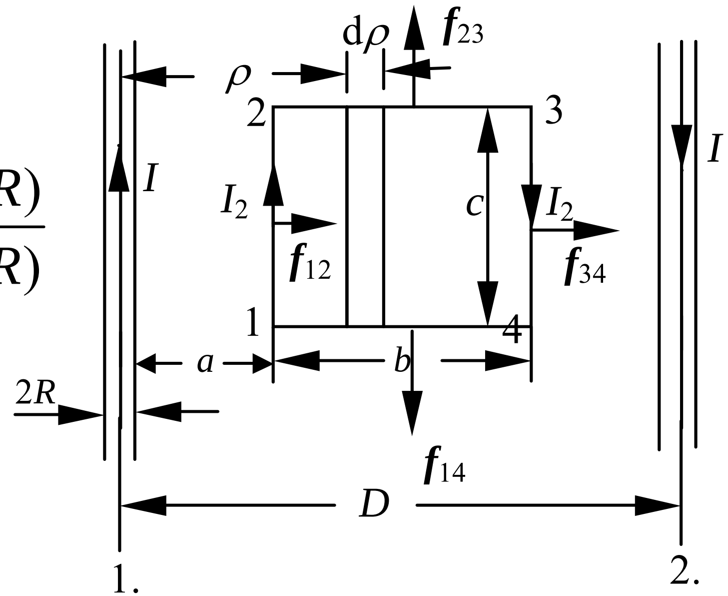
$$\psi_2 = \phi_2 = \int_{D-a-b-R}^{D-a-R} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} c\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\mu_0 c I}{2\pi} \ln \frac{D-a-R}{D-a-b-R}$$

$$\Downarrow$$

$$M = \frac{\psi_M}{I} = \frac{\psi_1+\psi_2}{I} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{(a+b+R)(D-a-R)}{(D-a-b-R)(a+R)}$$

3-24 （2）



$$M = \frac{\psi_M}{I} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{I} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{(a+b+R)(D-a-R)}{(D-a-b-R)(a+R)}$$

线框边受力

$$f_{12} = \left.\frac{\partial w_m}{\partial g}\right|_{I_k=c} = \left.\frac{\partial (MII_2)}{\partial (a+R)}\right|_{I_k=c} = \frac{-II_2\mu_0 c}{2\pi}\left(\frac{1}{D-(a+R)} + \frac{1}{a+R}\right)$$

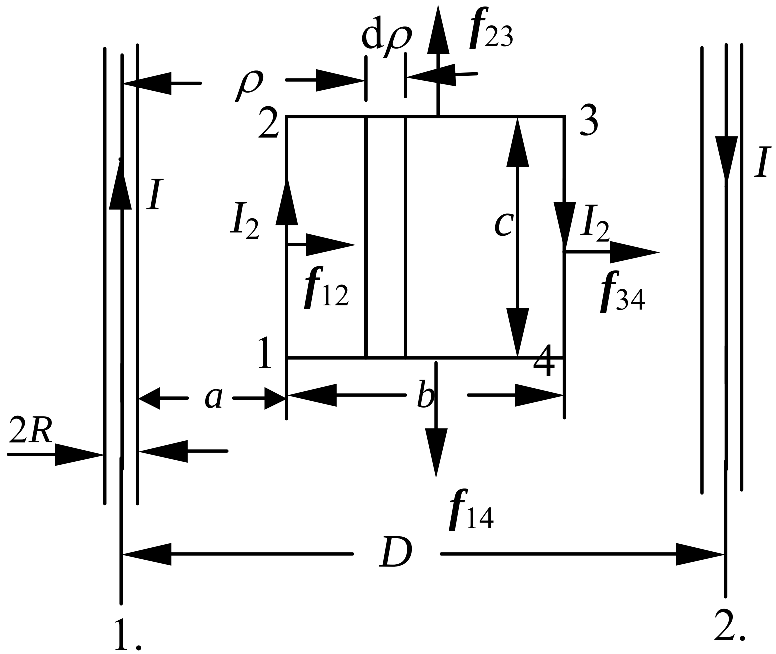
$$f_{34} = \left.\frac{\partial (MII_2)}{\partial (a+b+R)}\right|_{I_k=c} = \frac{II_2\mu_0 c}{2\pi}\left(\frac{1}{a+b+R} + \frac{1}{D-(a+b+R)}\right)$$

$$f_{14} = f_{23} = \left.\frac{\partial (MII_2)}{\partial c}\right|_{I_k=c} = \frac{II_2\mu_0}{2\pi} \ln \frac{(a+b+R)(D-a-R)}{(D-a-b-R)(a+R)}$$

3-24 （2）

问题：计算力时，可否以其他量为广义坐标？不同广义坐标计算结果是否一样？

如计算$\boldsymbol{f}_{12}$时，可否以**D-(a+R)**为广义坐标？



3-24 （2）

$$f_{12}=\frac{\partial W_M}{\partial(D-(a+R))}\bigg|_{I=C}=\frac{\partial W_M}{\partial(a+R)}\frac{\partial(a+R)}{\partial(D-(a+R))}$$

$$=-\frac{\partial W_M}{\partial(a+R)}$$

$$x=a+R, y=D-(a+R)$$

$$y=D-x$$

$$dy=-dx$$

$$M=\frac{\psi_M}{I}=\frac{\psi_1+\psi_2}{I}=\frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\frac{(a+b+R)(D-a-R)}{(D-a-b-R)(a+R)}$$

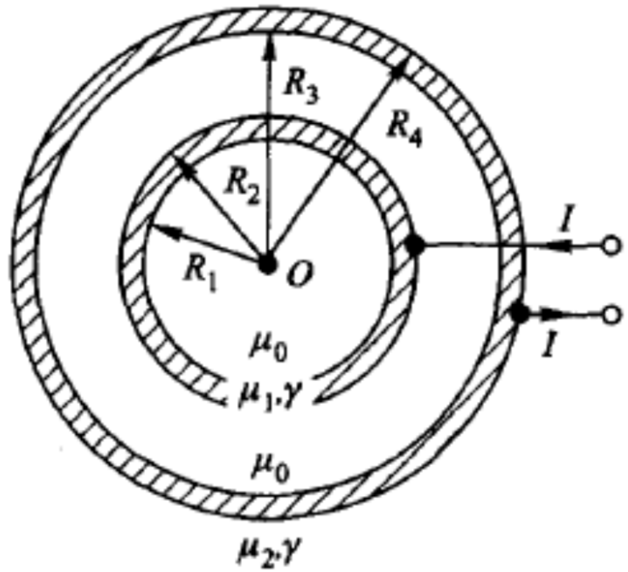
3-25 求题3-25图所示两同轴导体壳系统中储存的磁场能量及自感。

分析

（1）轴对称、平行平面磁场

（2）安培环路定律计算磁场强度

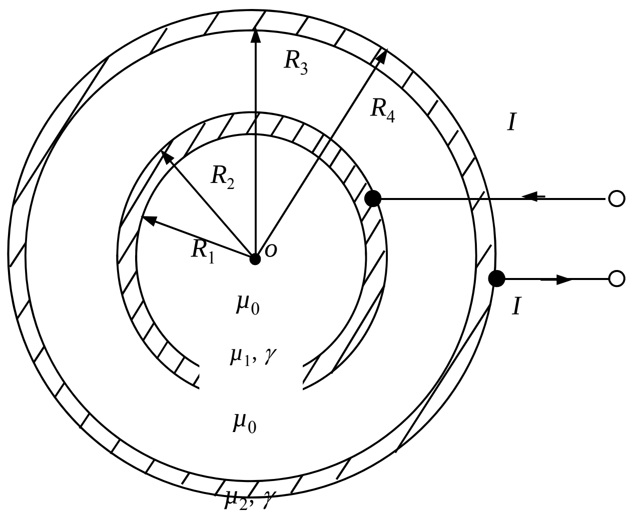
（3）能量法计算电感



解：

（1）磁场强度—安培环路定律

$$H_\phi(\rho)=\begin{cases}0 & (\rho<R_1\text{或}\rho>R_4)\\ \dfrac{I(\rho^2-R_1^2)}{2\pi\rho(R_2^2-R_1^2)} & (R_1<\rho<R_2)\\ \dfrac{I}{2\pi\rho} & (R_2<\rho<R_3)\\ \dfrac{I(R_4^2-\rho^2)}{2\pi\rho(R_4^2-R_3^2)} & (R_3<\rho<R_4)\end{cases}$$



题3-25图

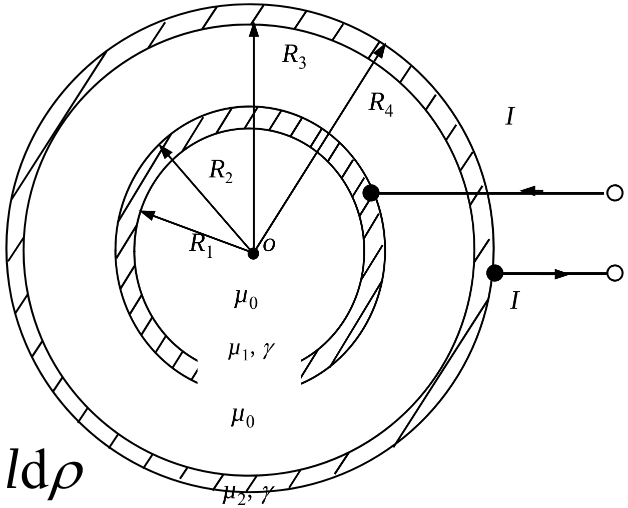
（2）磁场能量

$$W_m=\int_V\frac{1}{2}\mu H^2dv=\frac{\mu_1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\left[\frac{I(\rho^2-R_1^2)}{2\pi(R_2^2-R_1^2)\rho}\right]^2 2\pi\rho\cdot l\mathrm{d}\rho$$

$$+\frac{\mu_0}{2}\int_{R_2}^{R_3}\frac{I}{2\pi\rho}2\pi\rho\cdot l\mathrm{d}\rho+\frac{\mu_2}{2}\int_{R_3}^{R_4}\left[\frac{I(R_4^2-\rho^2)}{2\pi\rho(R_4^2-R_3^2)}\right]^2 2\pi\rho\cdot l\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{I^2l}{4\pi}\left\{\frac{\mu_1}{(R_2^2-R_1^2)^2}\left[\frac{R_2^4-R_1^4}{4}+R_1^4\ln\frac{R_2}{R_1}-R_1^2(R_2^2-R_1^2)\right]\right.$$

$$\left.+\mu_0\ln\frac{R_3}{R_2}+\frac{\mu_2}{(R_4^2-R_3^2)^2}\left[\frac{R_4^4-R_3^4}{4}+R_4^4\ln\frac{R_4}{R_3}-R_4^2(R_4^2-R_3^2)\right]\right\}$$

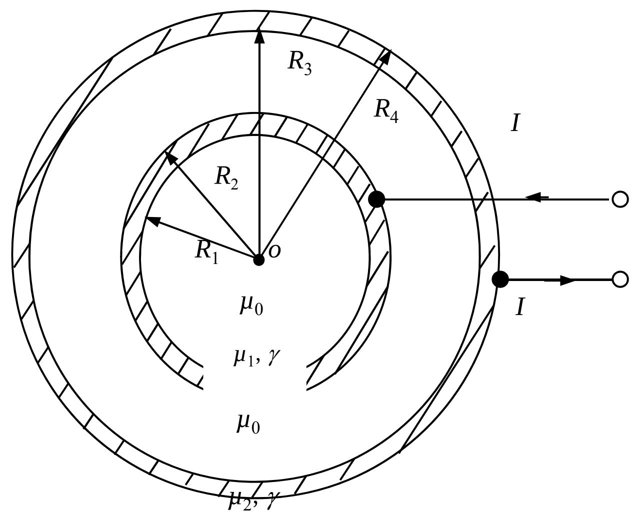


题3-25图

（3）自感

$$L=\frac{2w_m}{I^2}=\frac{l}{2\pi}\left\{\frac{\mu_1}{(R_2^2-R_1^2)^2}\left[\frac{R_2^4-R_1^4}{4}+R_1^4\ln\frac{R_2}{R_1}-R_1^2(R_2^2-R_1^2)\right]\right.$$

$$\left.+\mu_0\ln\frac{R_3}{R_2}+\frac{\mu_2}{(R_4^2-R_3^2)^2}\left[\frac{R_4^4-R_3^4}{4}+R_4^4\ln\frac{R_4}{R_3}-R_4^2(R_4^2-R_3^2)\right]\right\}$$



题3-25图

4-1

已知在某一理想电介质(参数为$\gamma = 0$，$\varepsilon = 4\varepsilon_0$，$\mu = 5\mu_0$)中的位移电流密度为 $2\cos(\omega t\text{-}5z)\,\vec{e}_x$ 微安/米^2。求：

（1）该媒质中的$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{E}$；

（2）该媒质中的$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$。

分析：对于正弦、稳态、时变电磁场问题，既可应用时域解法；也可应用频域（相量）解法，解得相量解后，再反变换为时域解。

在频域求解，能将积分（微分）转化成代数运算。用频域解法常比较简单。

4-1　解1：相量表示计算

$$\vec{J}_D = 2\cos(\omega t - 5z)\vec{e}_x$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}_D = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\boldsymbol{e}_x \left(\mu\mathrm{A}/\mathrm{m}^2\right)$$

注意：采用有效值

$$\dot{\boldsymbol{J}}_D = \mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}$$

$$\dot{\mathrm{D}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\dot{\mathrm{J}}_D = -\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\mathrm{e}_x = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(5z+\frac{\pi}{2})}\mathrm{e}_x \qquad -\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{\mathrm{E}} = \frac{\dot{\mathrm{D}}}{\varepsilon} = -\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{4\varepsilon_0\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\mathrm{e}_x = \frac{\sqrt{2}}{4\varepsilon_0\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(5z+\frac{\pi}{2})}\mathrm{e}_x$$

注意：采用余弦函数表示

$$\mathrm{D}(z,t) = \frac{2}{\omega}\cos(\omega t - 5z - \frac{\pi}{2})\mathrm{e}_x = \frac{2}{\omega}\sin(\omega t - 5z)\mathrm{e}_x \left(\mu\mathrm{C}/\mathrm{m}^2\right)$$

注意：转换成最大值

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \frac{1}{2\varepsilon_0\omega}\sin(\omega t - 5z)\boldsymbol{e}_x \left(\mu\mathrm{V}/\mathrm{m}\right)$$

4-1 计算

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{\dot{\boldsymbol{D}}}{\varepsilon} = -\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{4\varepsilon_0\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\boldsymbol{e}_x \quad + \quad \nabla\times\dot{\boldsymbol{E}} = -\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{B}}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \mathrm{j}\frac{1}{\omega}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{E}}}{\partial z}\boldsymbol{e}_y = -\mathrm{j}\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 5}{\varepsilon_0\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\boldsymbol{e}_y \Longrightarrow \boldsymbol{B}(z,t) = \frac{2.5}{\varepsilon_0\omega^2}\sin(\omega t - 5z)\boldsymbol{e}_y \ (\mu\mathrm{T})$$

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\dot{\boldsymbol{B}}}{\mu} = -\mathrm{j}\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\mu_0\varepsilon_0\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z}\boldsymbol{e}_y \Longrightarrow \boldsymbol{H}(z,t) = \frac{1}{2\mu_0\varepsilon_0\omega^2}\sin(\omega t - 5z)\boldsymbol{e}_y \left(\mu\mathrm{A}/\mathrm{m}\right)$$

4-1 解2：用瞬时值计算

$$\vec{J}_D = 2\cos(\omega t - 5z)\vec{e}_x$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_D \Longrightarrow D = \int_0^t J_D dt = \frac{2}{\omega}\sin(\omega t - 5z)\Big|_0^t = \frac{2}{\omega}\sin(\omega t - 5z) + \frac{2}{\omega}\sin(-5z)$$

选 $\omega t = 5z$ 为时间起点，则

$$\vec{D} = \int_{\frac{5z}{\omega}}^{t} \vec{J}_D dt = \frac{2}{\omega}\sin(\omega t - 5z)\vec{e}_x \qquad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon_0\omega}\sin(\omega t - 5z)\vec{e}_x$$

$$\vec{E}_y = \vec{E}_z = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

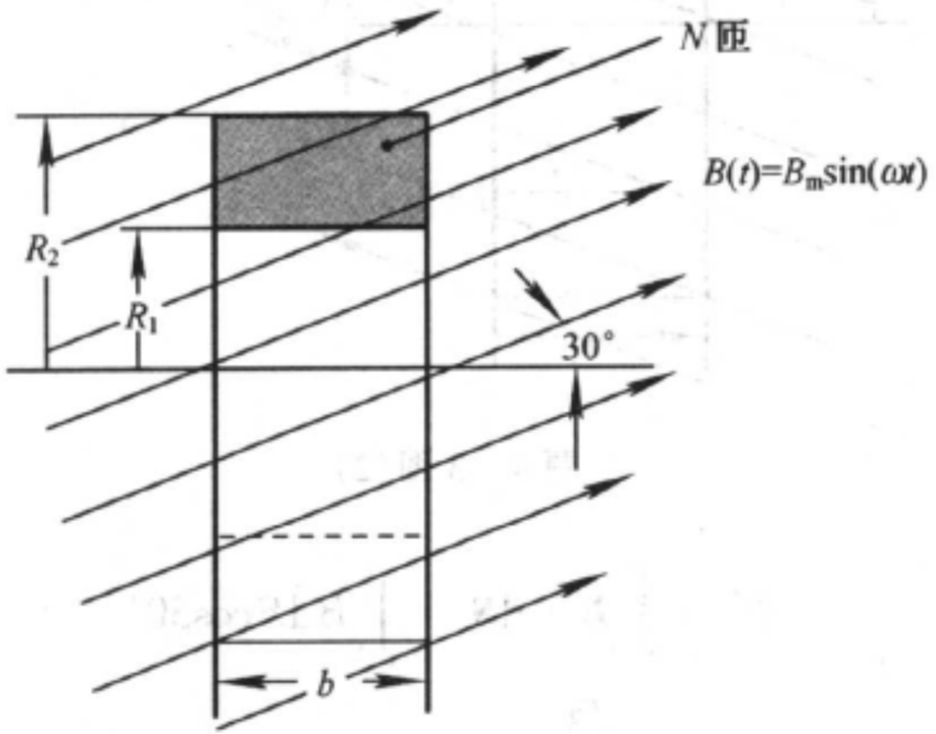
$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y & \vec{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$\frac{dE_x}{dz}\vec{e}_y = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{-5}{2\varepsilon_0\omega}\cos(\omega t - 5z)\vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \int_{\frac{5z}{\omega}}^{t} \frac{5}{2\varepsilon_0\omega}\cos(\omega t - 5z)dt\,\vec{e}_y = \frac{2.5}{\varepsilon_0\omega^2}\sin(\omega t - 5z)\vec{e}_y$$

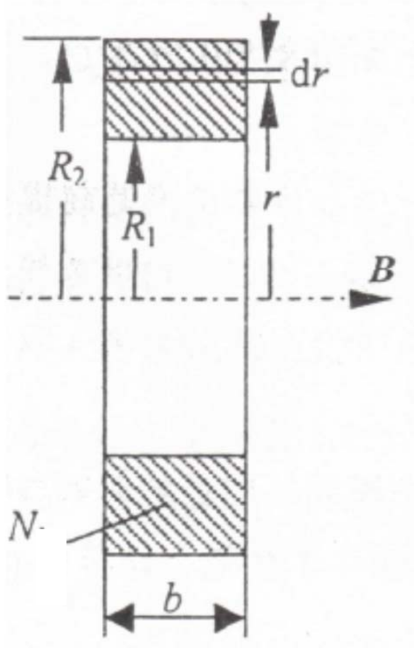
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{2\mu_0\varepsilon_0\omega^2}\sin(\omega t - 5z)\vec{e}_y$$

1-7 应用感应电动势法测试磁场的探测线圈（圆柱形的小线圈），以图所示方位放置于均匀的工频磁场 $B(t)=B_m\sin(\omega t)$ 中，探测线圈匝数为 N，几何尺寸如题 4－3 图所示。求探测线圈中的感应电势值（有效值）。



1-7 计算

选取半径为**r**，厚度为**dr**的圆柱形薄壳做元线匝



对应于该元线匝的匝数为：

$$dN = \frac{bdr}{b(R_2 - R_1)}N$$

交链该元线匝的磁通为

$$\varPhi = \int_S \boldsymbol{B} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S B\mathrm{d}S\cos 30^\circ = B\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^2$$

$$\psi = \int \mathrm{d}\psi = \int_{R1}^{R2} \frac{b\mathrm{d}r}{b(R_2 - R_1)} NB\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi NB_{\mathrm{m}}}{6}\sin\omega t \cdot (R_2{}^2 + R_1R_2 + R_1{}^2)$$

1-7 计算

感应电势为

$$e = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sqrt{3}\pi N\omega B_{\mathrm{m}}}{6}\cos\omega t \cdot (R_2{}^2 + R_1 R_2 + R_1{}^2)$$

$$E = \frac{e_m}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}\pi N\omega B_{\mathrm{m}}}{12}\boldsymbol{(}R_2{}^2 + R_1 R_2 + R_1{}^2\boldsymbol{)}$$

4-5 设在半径分别为 a 和 b 的两个同心球之间充满着理想电介质，其介电常数为 $\varepsilon=\varepsilon_0$，两球间接有交变电压 $u=U_m\sin(\omega t)$。

(1) 应用位移电流密度的定义，求通过介质中任意点的位移电流密度；

(2) 应用交流电路的方法计算两球间任意点间的位移电流密度。

解 （1） 设内外球表面为分别带有+$q(t)$和−$q(t)$，于是，球内电场为

$$\vec{E}(r,t)=\frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$$u(t)=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^b \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{u(t)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{ab}{b-a}U_m\sin\omega t$$

4-5　（1）　$$\vec{E}(r,t)=\frac{abU_m}{(b-a)r^2}\sin\omega t\,\vec{e}_r$$

$$\vec{J}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}==\frac{\varepsilon_0 ab\omega U_m}{(b-a)r^2}\cos\omega t\,\vec{e}_r$$

解（2）　两球间电容 $C=\dfrac{q}{U}=\dfrac{q}{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$

$$i_C=C\frac{du_C}{dt}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}\omega U_m\cos\omega t=i_D$$

$$\vec{J}_D=\frac{i_D}{4\pi r^2}\vec{e}_r=\frac{\varepsilon_0 ab\omega U_m}{(b-a)r^2}\cos\omega t\vec{e}_r$$

5-1 设一电偶极子作为辐射天线，已知 $q_m=3\times10^{-7}$ C，f = 5MHz，Δl = 0.5m，分别求与地面成40° 角度，离电偶极子中心为（1）5m及（2）5km 处的E和H的表达式。

分析：典型电偶极子产生的场 $\lambda=\dfrac{c}{f}=\dfrac{3\times10^{8}}{5\times10^{6}}=60\text{m}$

(1) $r=5\text{m},\ r<<\lambda,$ 可近似看作近区处理

(2) $r=5\text{km},\ r>>\lambda,$ 可看作远区处理

解：套用公式即可　　注意给定量与教材上标准量的关系

$$\dot{q}=\frac{q_{\text{m}}\angle0^{\circ}}{\sqrt{2}}\quad \dot{I}=\text{j}\omega\dot{q}=\frac{\text{j}\omega q_{\text{m}}\angle0^{\circ}}{\sqrt{2}}\quad \theta=90^{\circ}-40^{\circ}=50^{\circ}$$

注意给定量与教材上标准量的关系

近场： $\dot{H}_r = \dot{H}_\theta = \dot{E}_\phi = 0$

$$\dot{\vec{H}} \approx \frac{\dot{I}\Delta l \sin\theta}{4\pi r^2}\vec{e}_\phi \qquad k = \frac{\omega}{v}$$

$$\dot{\vec{E}} \approx -\mathrm{j}\frac{\dot{I}\Delta l \cos\theta}{2\pi\omega\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_r - \mathrm{j}\frac{\dot{I}\Delta l \sin\theta}{4\pi\omega\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta$$

远场： $\dot{H}_r = \dot{H}_\theta = \dot{E}_\phi = 0 \qquad \dot{E}_r \approx 0$

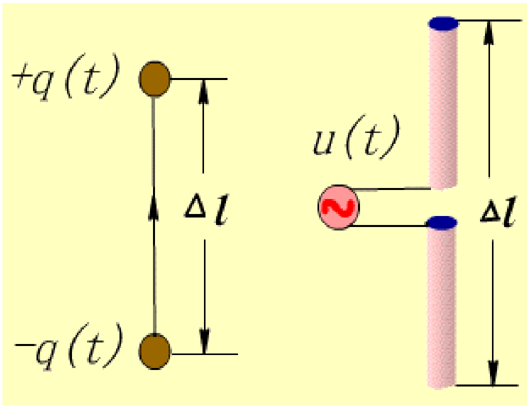
$$\dot{H}_\phi = \mathrm{j}\frac{\dot{I}\Delta l k}{4\pi r}\sin\theta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

$$\dot{E}_\theta = \mathrm{j}\frac{\dot{I}\Delta l k^2}{4\pi\omega\varepsilon_0 r}\sin\theta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

5-2设有一内阻为零的高频电源向某一单元辐射子天线供电，该天线的长度为$\Delta l = 5$ 米，天线中的电流$I = 35$ 安，电源的频率$f = 10^6$ 赫，求电源的电压及其输出的功率。

分析：

当按端口参数分析单元辐射子天线的端电压、电流、辐射功率等积分量之间的关系时，可由原天线的辐射电阻出发，进行计算。



电偶极子天线

已知：$\Delta l = 5$ 米，天线中的电流$I = 35$ 安，电源的频率$f = 10^6$ 赫

计算：

单元辐射子天线的辐射电阻为

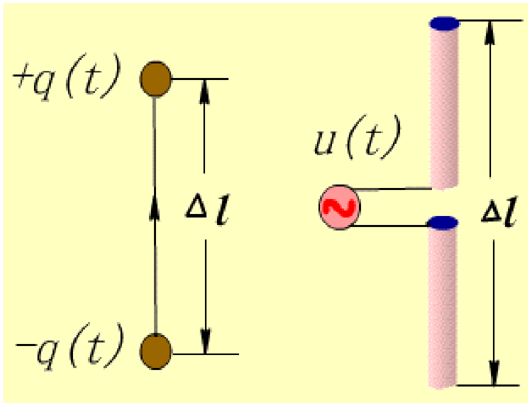
$$R_r = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 \eta = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l \cdot f}{c}\right)^2 = 0.219\,\Omega$$

电源内阻为零，故电源电压全部降落在辐射电阻上

$$U = R_r I = 7.665\text{V}$$

输出功率

$$P = I^2 R_r = 0.219 \times 35^2 = 268.275\,\text{W}$$



电偶极子天线

5-6 自由空间中某一均匀平面波的电场强度 $\dot{E}=(100\vec{e}_x+j100\vec{e}_y)e^{-j2\pi z/3}$ 试决定该波的**k**，$\boldsymbol{\upsilon}$，$\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\varphi_x}$，$\boldsymbol{\varphi_y}$，$\dot{\vec{H}}$ 的表达式及$\vec{E}$和$\vec{H}$的瞬时表达式。

分析：$$\dot{E}=(100\vec{e}_x+j100\vec{e}_y)e^{-j2\pi z/3}=(100\vec{e}_x+j100\vec{e}_y)e^{-jkz}$$

波的传播方向：+z方向

波速 $\boldsymbol{\upsilon=c=3\times10^8\,(m/s)}$ （自由空间）

可知相位常数(波数) $k=\dfrac{2\pi}{3}\,(\mathrm{rad/m})$

电场强度包括***x***、***y*** 分量 $\phi_x=0^\circ$ $\phi_y=90^\circ$

解：$$\omega=k\upsilon=2\pi\times10^8\,(\mathrm{rad/s})\qquad \lambda=\frac{2\pi}{k}=3\ \mathrm{m}$$

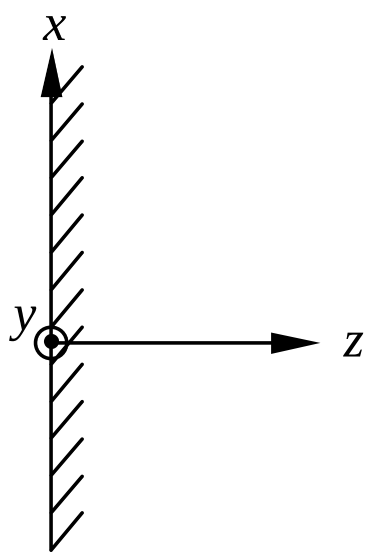
5-6

$$\dot{\vec{E}} = (100\vec{e}_x + j100\vec{e}_y)e^{-j2\pi z/3} = (100\vec{e}_x + j100\vec{e}_y)e^{-jkz}$$

计算：电场强度包括***x***、***y*** 分量 ⟶ 磁场强度也包括***x***、***y*** 分量

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_x}{\eta} = \frac{100}{377}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi z/3} = 0.27\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi z/3} \qquad （真空\ \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\ \Omega）$$

$$\dot{H}_x = -\frac{\dot{E}_y}{\eta} = -\mathrm{j}\,0.27\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi z/3}$$



电场强度、磁场强度与波的传播方向不满足右手规则，则电场强度与磁场强度之比为负的波阻抗

$$\vec{S} = -\dot{\vec{E}}_y \times \dot{\vec{H}}_x$$

5-6

$$\dot{\vec{E}} = (100\vec{e}_x + j100\vec{e}_y)e^{-j2\pi z/3}$$

$$\dot{\vec{H}} = (0.27\vec{e}_y - j0.27\vec{e}_x)e^{-j2\pi z/3}$$

$$\vec{E}(z,t) = 100\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}z)\vec{e}_x - 100\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}z)\vec{e}_y$$

$$\vec{H}(z,t) = 0.27\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}z)\vec{e}_x + 0.27\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}z)\vec{e}_y$$

写瞬时值时注意：复数给出的是有效值

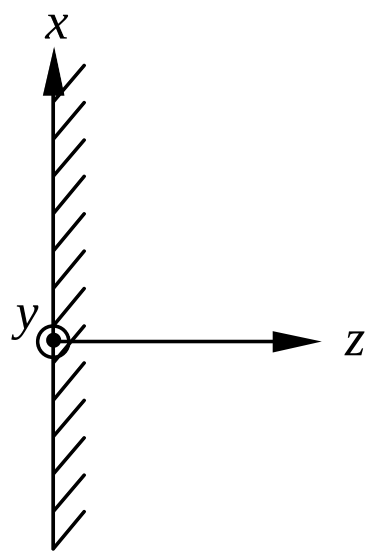
5-7 有一频率为**30MHz**的均匀平面波在无损耗的介质中沿***x*方向传播**。已知介质的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ **= 20**微微法/米和 $\boldsymbol{\mu}$ **= 5** 微亨/米。***E*只有 *z* 分量且初相为零**。当 $\boldsymbol{t}$ **= 6**毫微秒，$\boldsymbol{x}$ **= 0.4**米时，电场强度值为**800**伏/米，求 ***E*** 和 ***H*** 的瞬时表达式。

分析： 波的传播方向为：***x***方向

E只有 ***z*** 分量且初相为零 $\vec{E}(x,t)=\sqrt{2}E\,\mathbf{cos}(\omega t-kx)\vec{e}_z$

$\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{E}$

$$\dot{H}=\frac{\dot{E}}{\eta}$$



5-7 **解：**

已知介质的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ = **20**微微法/米和 $\boldsymbol{\mu}$ = **5** 微亨/米

波速（相速） $\upsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 10^8\ (\mathrm{m/s})$

角频率 $\omega = 2\pi f = 6\pi \times 10^7\ (\mathrm{rad/s})$

波数 $k = \dfrac{\omega}{\upsilon} = 0.6\pi\ (\mathrm{rad/m})$

特性阻抗 $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = 500\ \Omega$

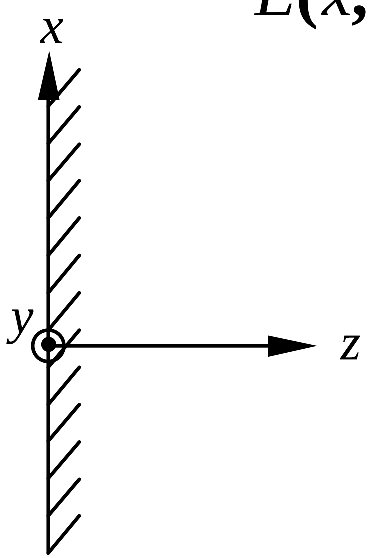
$$\vec{E}\boldsymbol{(}x,t\boldsymbol{)} = \sqrt{2}E\,\mathbf{cos(}6\pi \times 10^7 t - 0\mathbf{.}6\pi\, x\mathbf{)}\vec{e}_z$$

$$\vec{E}(x,t)=\sqrt{2}E\cos(6\pi\times10^{7}t-0.6\pi x)\vec{e}_z$$

当t = 6毫微秒，x = 0.4米时，电场强度值为800伏/米

$$\sqrt{2}E=\frac{800}{\cos 0.12\pi}=0.8\ (\mathrm{kV/m})$$

$$\vec{E}(x,t)=0.8\cos(6\pi\times10^{7}t-0.6\pi x)\vec{e}_z$$

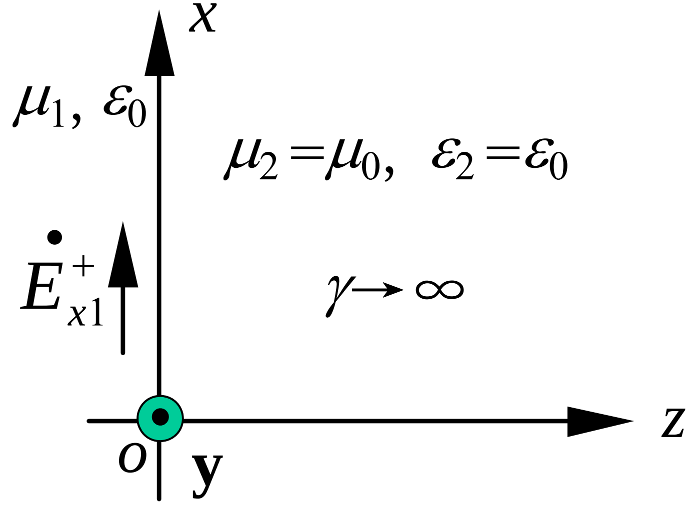


电场强度、磁场强度与波的传播方向不满足右手规则，则电场强度与磁场强度之比为负的波阻抗

$$\vec{H}(x,t)=-\frac{\sqrt{2}E}{\eta}\cos(\omega t-kx)\vec{e}_y$$

$$=-1.6\cos(6\pi\times10^{7}t-0.6\pi x)\vec{e}_y\ (A/m)$$

5-12设空间有一沿***x***轴取向的线性极化波，正入射于一完纯导体的表面，如题**5-12**图所示。已知 $\dot{E}_{x1}^{+}=200e^{j10^\circ}e^{-jkz}$



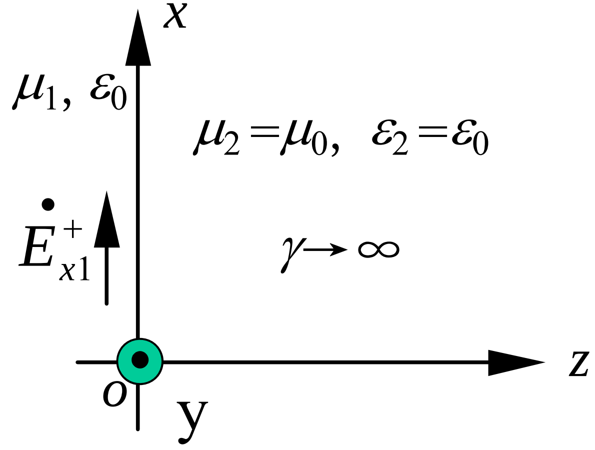
1) 求电场强度及磁场强度的反射分量和透射分量的向量形式；

2) 导体表面的面电流密度；

3) 写出电场强度和磁场强度的瞬时表达式。

分析：典型均匀平面波正入射到完纯（理想）导体—全反射

5-12 计算：(1) 电场强度及磁场强度的反射分量和透射分量向量形式；



透射分量 为零

$$\dot{E}_{x1}^{+}=200e^{j10^\circ}e^{-jkz}$$

$$\dot{E}_{x_1}^{-}(z)=-200\mathrm{e}^{j10^\circ}\mathrm{e}^{jkz}$$

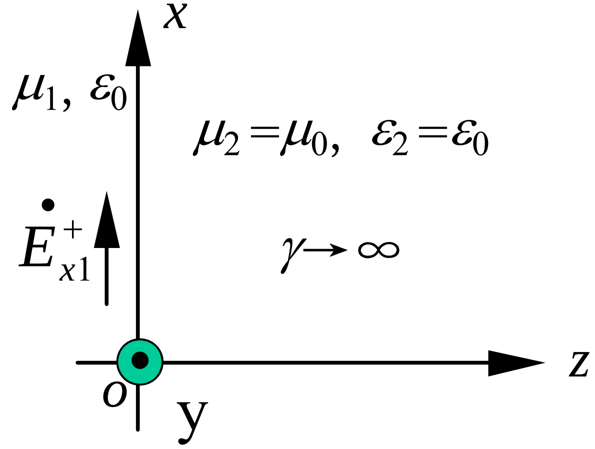
$$\dot{H}_{y_1}^{+}(z)=\frac{\dot{E}_{x1}^{+}}{\eta}=\frac{200}{377}\mathrm{e}^{j10^\circ}\mathrm{e}^{-jkz}=\frac{200}{377}\mathrm{e}^{j10^\circ}\mathrm{e}^{-jkz}$$

$$\dot{H}_{y_1}^{-}(z)=\frac{\dot{E}_{x1}^{-}}{\eta}=\frac{-200}{377}\mathrm{e}^{j10^\circ}\mathrm{e}^{jkz}=\frac{-200}{377}\mathrm{e}^{j10^\circ}\mathrm{e}^{jkz}$$

5-12 计算：(2) 导体表面的面电流密度

$$\vec{K} = \vec{e}_n \times \vec{H}$$

$\vec{e}_n$ 为导体的外法线方向



$$\vec{K} = -\vec{e}_z \times \left[\dot{H}_{y_1}^{+}(0) - \dot{H}_{y_1}^{-}(0) \right] \vec{e}_y$$

$$= \frac{1}{\eta} \left(\dot{E}_{x_1}^{+} - \dot{E}_{x_1}^{-} \right) \vec{e}_x \Big|_{z=0} = 1.061\, e^{j10^\circ} \vec{e}_x$$

$$\vec{K} = 1.06\sqrt{2}\,\mathbf{cos}(\omega t + 10^\circ)\vec{e}_x \ \left(A/m \right)$$

5-12 **计算：(3)** 在完纯导体内无电场、磁场瞬时表达式

在媒质1内 $\dot{E}_{x_1}(z)=\dot{E}_{x_1}^{+}(z)+\dot{E}_{x_1}^{-}(z)=\dot{E}_{x_1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz})$

$$=-2\mathrm{j}\cdot 200\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^\circ}\sin kz=400\mathrm{e}^{-\mathrm{j}80^\circ}\sin kz$$

$$\dot{H}_y(z)=\dot{H}_{y_1}^{+}(z)-\dot{H}_{y_1}^{-}(z)=\frac{1}{\eta}(\dot{E}_{x_1}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\dot{E}_{x_1}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz})$$

$$=\frac{2\dot{E}_{x_1}}{\eta}\cos kz=1.061\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^\circ}\cos kz$$

$$E_{x_1}(z,t)=\sqrt{2}\cdot 400\sin kz\cos(\omega t-80^\circ)\ (\mathrm{V/m})$$

$$H_{y_1}(z,t)=\sqrt{2}\cdot 1.061\cos kz\cos(\omega t+10^\circ)\ (\mathrm{A/m})$$