第2章 静电场—电容和部分电容

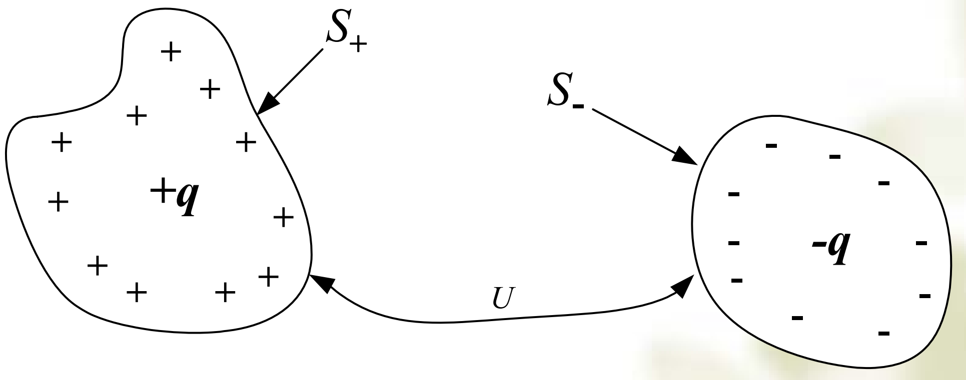
- 两导体系统的电容
- 多导体系统的电荷和电位 部分电容

2.8.1 两导体系统的电容 (Capacitance)

1. 定义

两导体带有等量异号电荷±q，它们之间的电压为U，则定义q与U之比为两导体之间的电容

$$C = \frac{q}{U} \qquad \text{法拉, F}$$

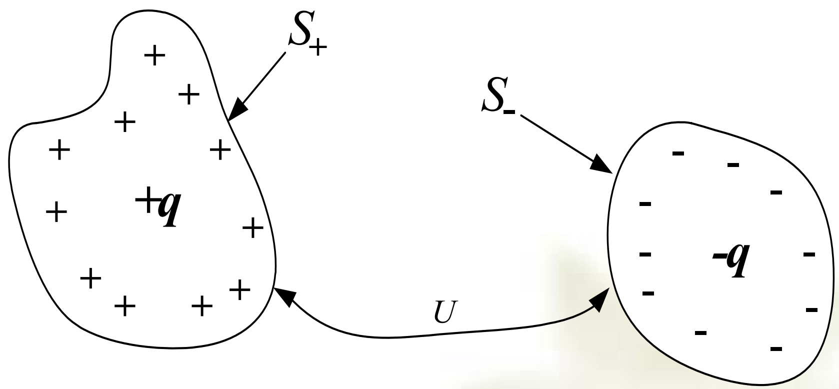


2. 计算式

$$C=\frac{q}{U} \qquad \text{法拉, F}$$

$$q=\oint_{S_+}\sigma ds=\oint_{S_+}\varepsilon\vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad U=\int_{S_+}^{S_-}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$C=\frac{\oint_{S_+}\varepsilon\vec{E}\cdot d\vec{s}}{\int_{S_+}^{S_-}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$



- 电容计算方法
  - ➢给定电荷 ***q*** $q\rightarrow\vec{E}\rightarrow U\rightarrow C$
  - ➢给定电压**U** $U\rightarrow\vec{E}\rightarrow q\rightarrow C$

3. 说明：

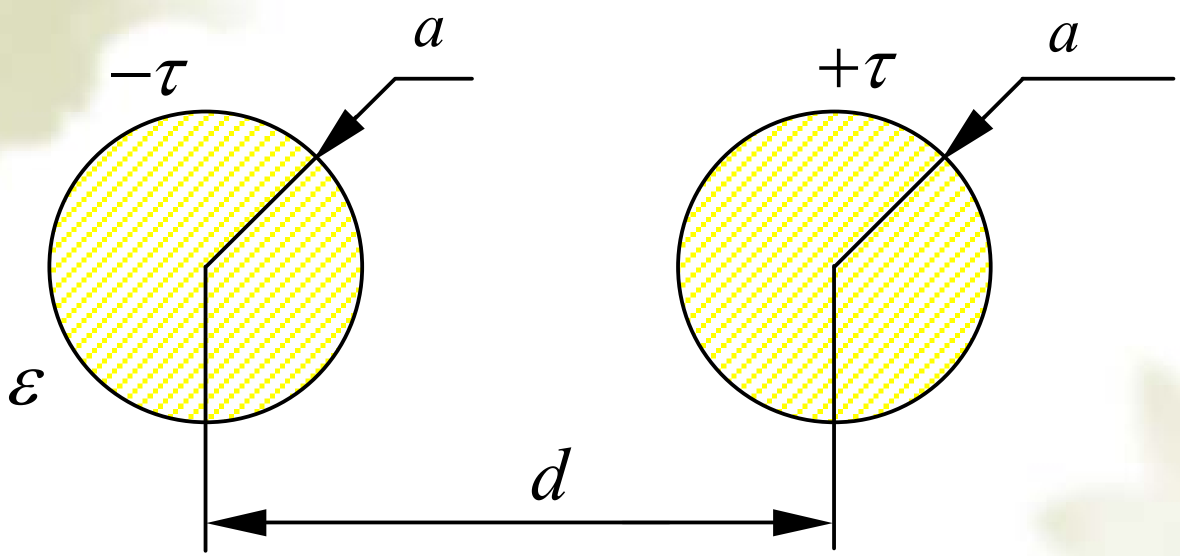
$$C = \oint_{S_+} \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{s} \Big/ \int_{S_+}^{S_-} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

① 电容与导体的形状、尺寸、相互位置，以及导体间的电介质有关；

② 线性介质中，与q、U无关；

工程上的电容器：电力电容器，电子线路用的各种小电容器。

例1 已知两线传输线间距离d=4a，求线间电容

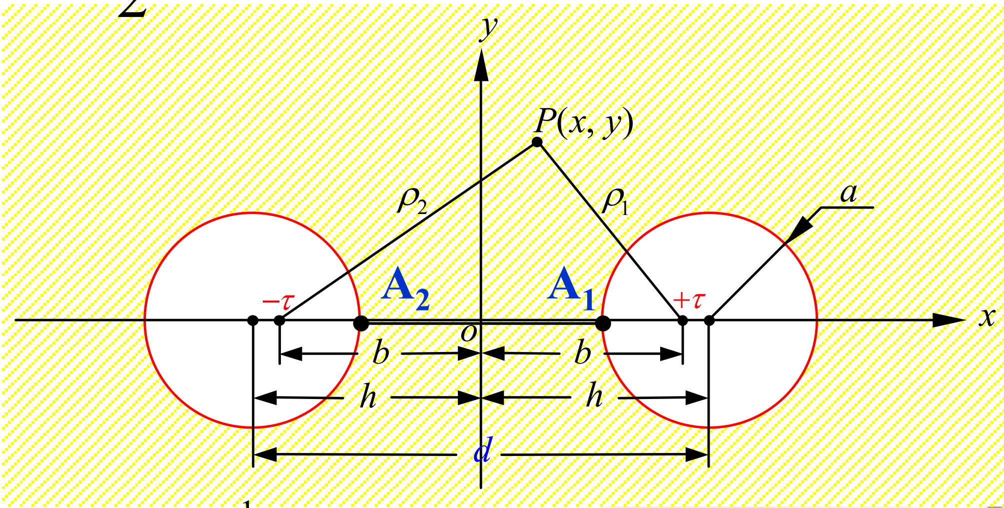


$$C_l = \frac{q}{U} = \frac{\tau l}{U}$$

解：应用电轴法，根据 a， $h=\dfrac{d}{2}$

可确定$\pm\tau$电轴的位置参数，

$$b=\sqrt{h^2-a^2}=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-a^2}$$



任意点电位

$$\varphi_P=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

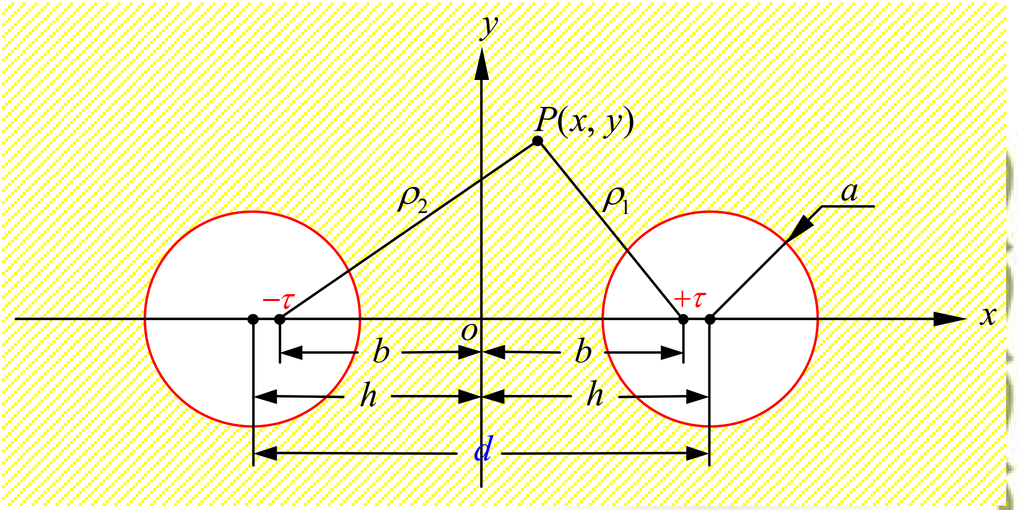
[A_1((h-a),0) ,A_2(-(h-a),0)]

$$\varphi_{A1}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b+(h-a)}{b-(h-a)}\qquad\varphi_{A2}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-(h-a)}{b+(h-a)}$$

两线间电压： $U = \varphi_{A1} - \varphi_{A2} = \dfrac{\tau}{\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{b + (h-a)}{b - (h-a)}$

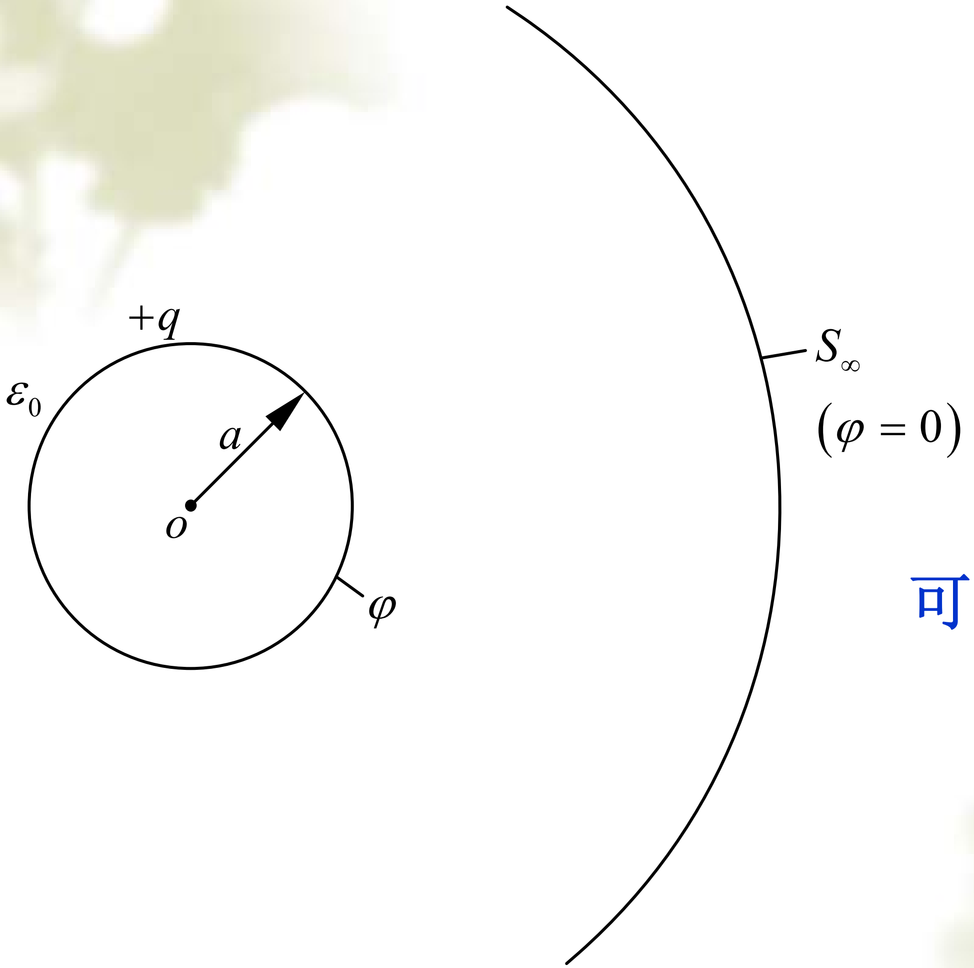
$$C_l = \frac{q}{U} = \frac{\tau l}{U}$$

单位长度电容 $C = \dfrac{\tau}{U}$



$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{b+h-a}{b-h+a}} \overset{\substack{a<<h \\ b\approx h}}{\approx} \frac{\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{2h}{a}}$$

例2—“孤立”导体球的电容

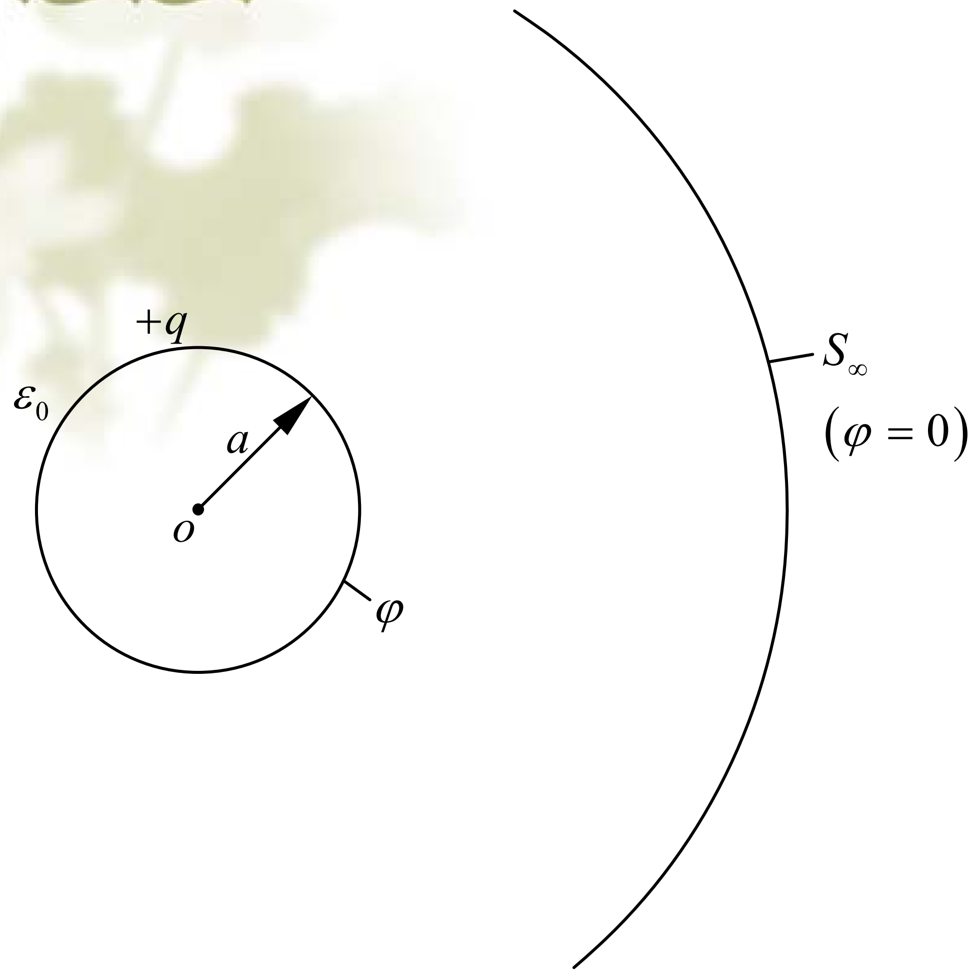


分析：

电容

两导体

可设无限远处为另一极板



解： $U = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$

$$= \int_a^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \cdot d\vec{l}$$

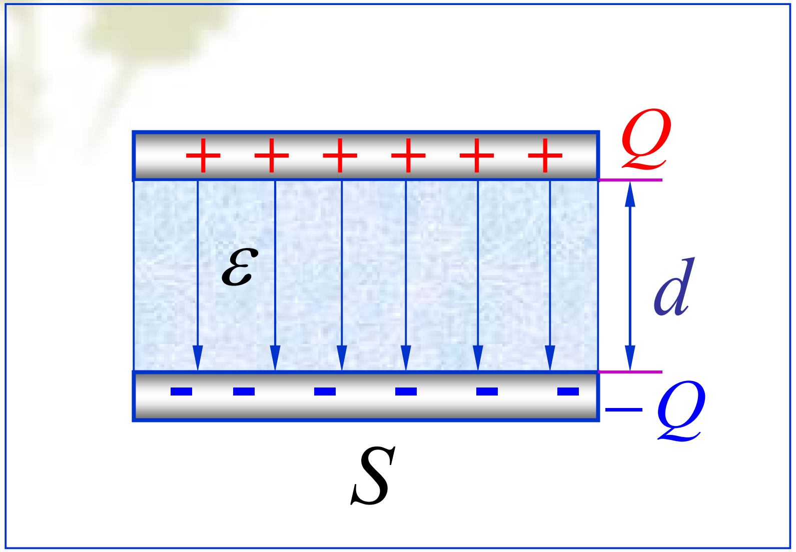
$$= \int_a^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big|_a^\infty = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 a$$

4. 几种典型电容器的电容——回顾

(1) 平行板电容器的电容



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon S}$$

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon S}{d}}$$

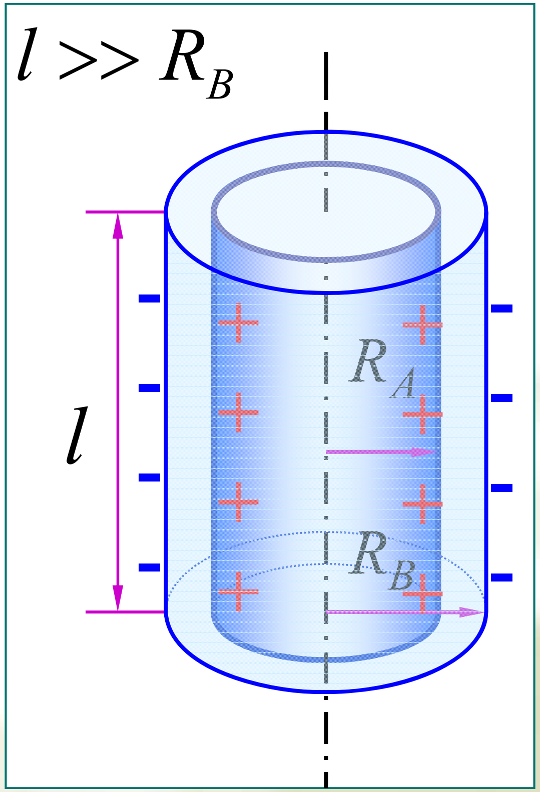
(2) 圆柱形电容器的电容

设两圆柱面单位长度上分别带电$\pm\tau$

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\quad (R_A<r<R_B)$$

$$U=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\tau\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_B}{R_A}}}$$



(3) 同心球形电容器的电容

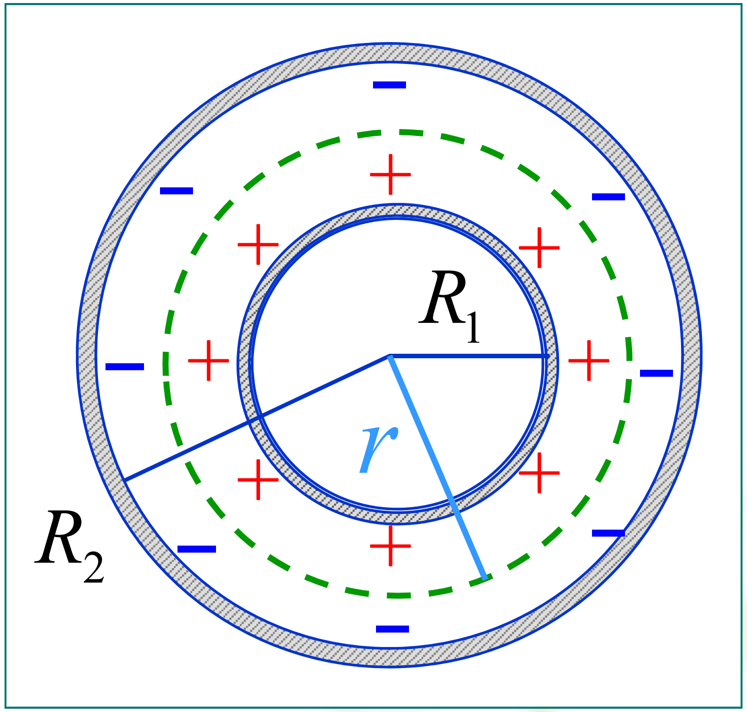
设内外球带分别带电$\pm Q$

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\qquad (R_1<r<R_2)$$

$$U=\int_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

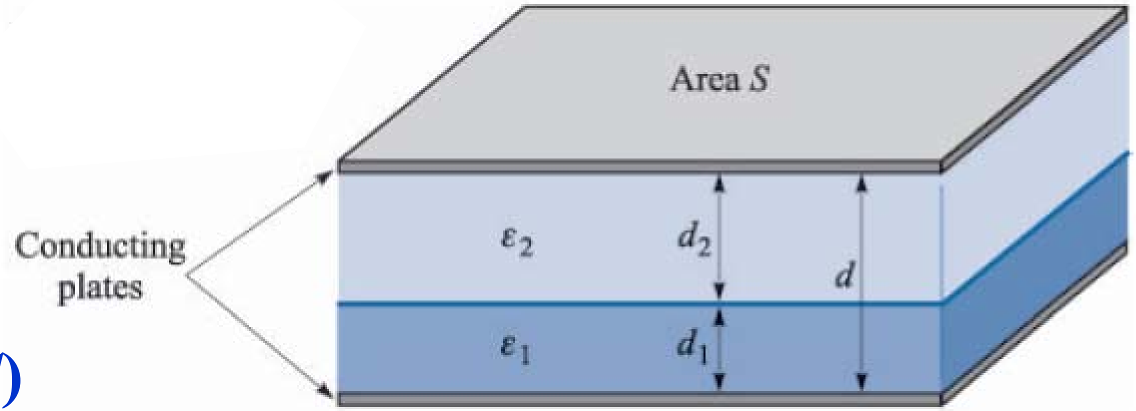
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$



$$C=\frac{Q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

(4) 电容器的串联



- $\sigma = Q/S = D_n$
- $D_{1n} = D_{2n} = D_n$
- $E_1 = D_{1n}/\varepsilon_1 = Q/(\varepsilon_1 S)$

  $E_2 = D_{2n}/\varepsilon_2 = Q/(\varepsilon_2 S)$
- $V_1 = E_1 d_1$

  $V_2 = E_2 d_2$

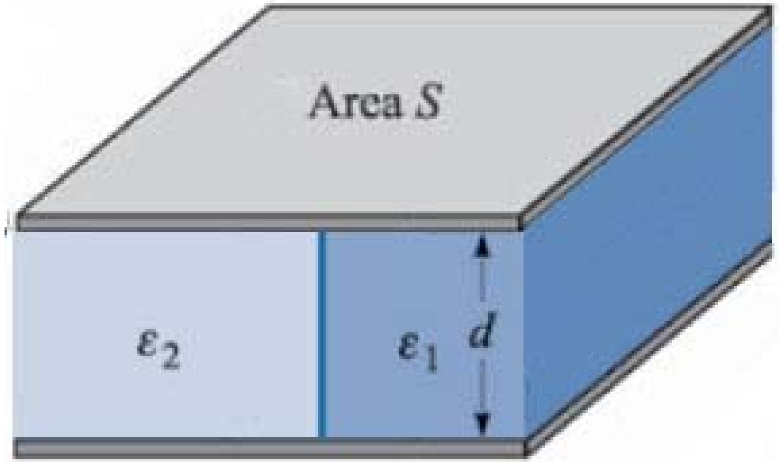
$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

(5) 电容器的并联

- $Q = \sigma_{S1} S_1 + \sigma_{S2} S_2.$
- $\sigma_{S1} = D_1 = \varepsilon_1 E_1,$

  $\sigma_{S2} = D_2 = \varepsilon_2 E_2.$
- $V_0 = E_1 d = E_2 d.$



$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2$$

2.8.2 多导体系统的电荷与电位 部分电容

电气设备由两个以上导体形成带电系统时，如三相输电线等，对于电容的计算，需引入部分电容的概念。

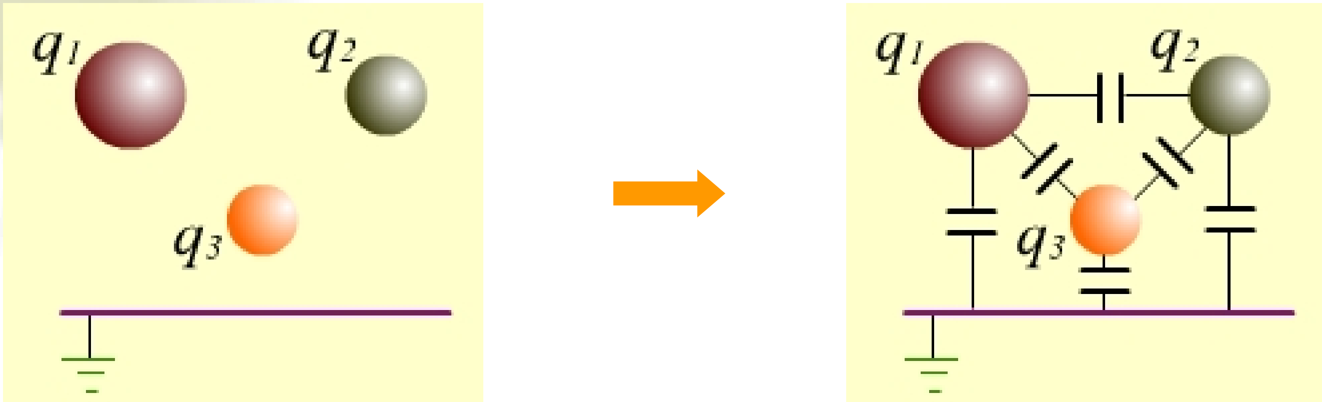
1. 静电独立系统定义

① 系统中电场的分布仅与系统内各带电体的形状、尺寸，相互位置以及电介质的分布有关，而与系统外的带电体无关

② 所有电位移通量全部从系统内的带电体出发而终止于系统内的带电体上

$$\sum q = 0$$

2. 静电独立多导体系统的电荷与电位，部分电容



四导体静电独立系统

(1). 已知导体的电荷，求电位和电位系数

$$\sum q = 0 \qquad q_0 = -(q_1 + q_2 + q_3)$$

设 $\varphi_0 = 0$

线性介质空间中，导体的电位与电荷的关系为

$$\varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + a_{13} q_3$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + a_{23} q_3 \longrightarrow [\varphi] = [\boldsymbol{\alpha}][\boldsymbol{q}]$$

$$\varphi_3 = a_{31} q_1 + a_{32} q_2 + a_{33} q_3$$

α — 电位系数，表明各导体电荷对各导体电位的贡献；

$\varphi_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + a_{13}q_3$

矩阵形式 $[\boldsymbol{\varphi}] = [\boldsymbol{\alpha}][\boldsymbol{q}]$

α_{ii}— 自有电位系数，表明导体 i 上电荷对导体 i 电位的贡献；

$$\alpha_{ii} = \left.\frac{\varphi_i}{q_i}\right|_{q_i \neq 0\ 其余(n-1)个导体(除0号导体)q均为零}$$

α_{ij}— 互有电位系数，表明导体 j 上的电荷对导体 i 电位的贡献 ；

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \left.\frac{\varphi_i}{q_j}\right|_{q_j \neq 0,\ 其余导体q_i = 0} = \left.\frac{\varphi_j}{q_i}\right|_{q_i \neq 0,\ 其余导体q_j = 0}$$

通常，α_{ii}，$\alpha_{ij} > 0$，且 $\alpha_{ii} > \alpha_{ij}$

(2). 已知带电导体的电位，求电荷和感应系数

矩阵形式：
$$[\varphi]=[\alpha][q] \Longrightarrow [q]=[\alpha]^{-1}[\varphi]=[\beta][\varphi]$$

$$q_1=\beta_{11}\varphi_1+\beta_{12}\varphi_2+\beta_{13}\varphi_3$$
$$q_2=\beta_{21}\varphi_1+\beta_{22}\varphi_2+\beta_{23}\varphi_3$$
$$q_3=\beta_{31}\varphi_1+\beta_{32}\varphi_2+\beta_{33}\varphi_3$$

$$\beta_{ij}=\frac{A_{ji}}{\Delta}$$ ——静电感应系数

β_{ii}——自有静电感应系数

$\beta_{ij}=\beta_{ji}$——互有静电感应系数

通常，$\beta_{ii}>0$，$\beta_{ij}<0$

(3). 已知带电导体间的电压，求电荷和部分电容

- 工程上一般给定的是两导体间的电压
- 互有静电感应系数是负值

$$[q]=[\alpha]^{-1}[\varphi]=[\beta][\varphi]$$

将$\boldsymbol{q\sim\varphi}$关系转换成$\boldsymbol{q\sim U}$间的关系

$$[q]=[C][u]$$

引入部分电容的概念

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 \\
&= (\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13})(\varphi_1 - \varphi_0) - \beta_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - \beta_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) \\
&= C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13}
\end{aligned}
$$

$$q_2 = C_{21}U_{21} + C_{20}U_{20} + C_{23}U_{23} \qquad q_3 = C_{31}U_{31} + C_{32}U_{32} + C_{30}U_{30}$$

矩阵形式 $[q]=[C][U]$

自有部分电容 $C_{i0} = \beta_{i1} + \beta_{i2} + \cdots + \beta_{in}$

表示各导体与0号导体（电位参考点导体）之间的部分电容。

互有部分电容 $C_{ij} = -\beta_{ij} = C_{ji}$，表示相应的两个导体间的部分电容。

说明：

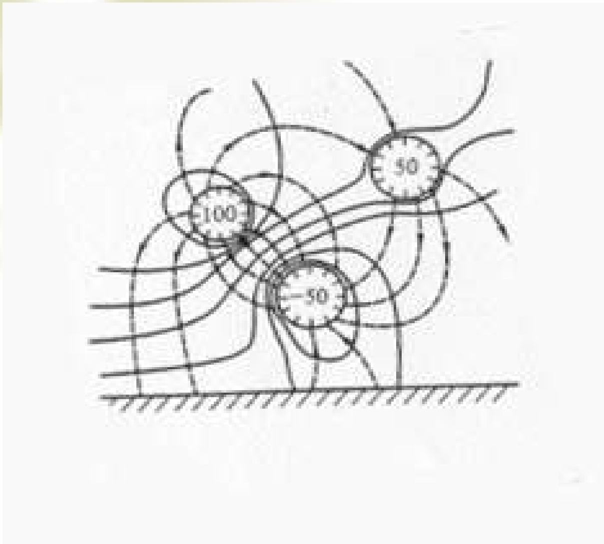
1) C_{i0}, C_{ij} 永远大于零，它们分别与导体的几何形状，相对位置及所处介质相关，而与各导体带电状况无关；

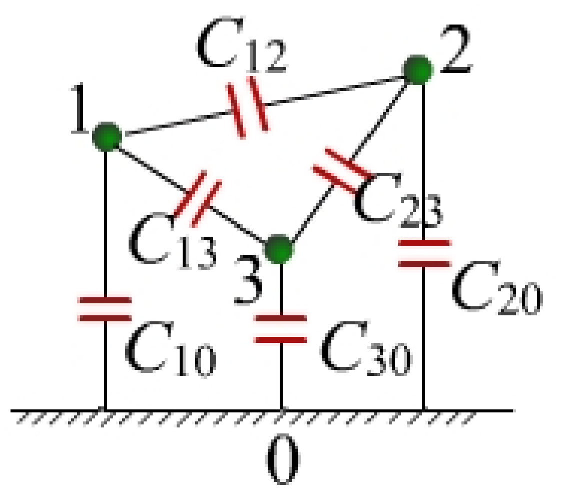
2) 任一部分电容值是和整个系统中所有导体的几何尺寸，相对位置相关联的。

3) 静电独立系统中$n+1$个导体有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个部分电容

4) 部分电容是否为零，取决于两导体之间是否有电场耦合；

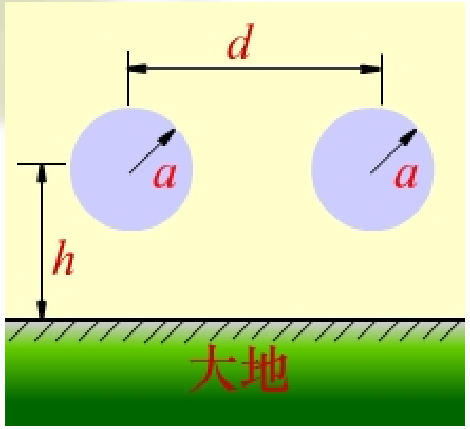
部分电容可将场的概念与电路结合起来。

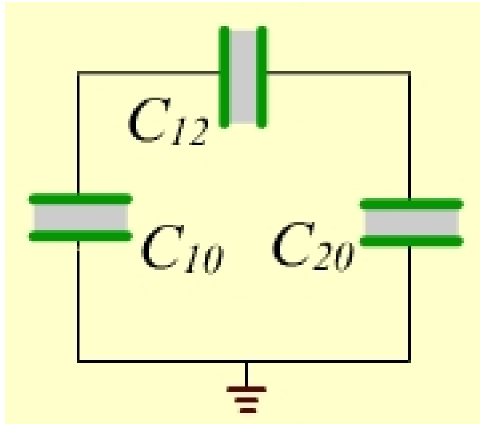




部分电容与电容网络

例：试计算考虑大地影响时，两线传输线的部分电容及两线之间的等效电容(工作电容)。已知$d>>a$, 且$a<<h$。



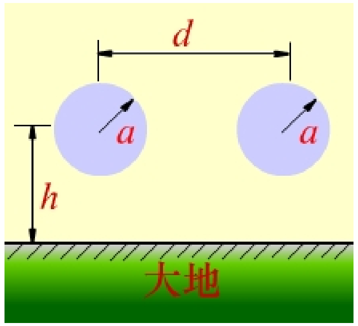


两线输电线及其电容网络

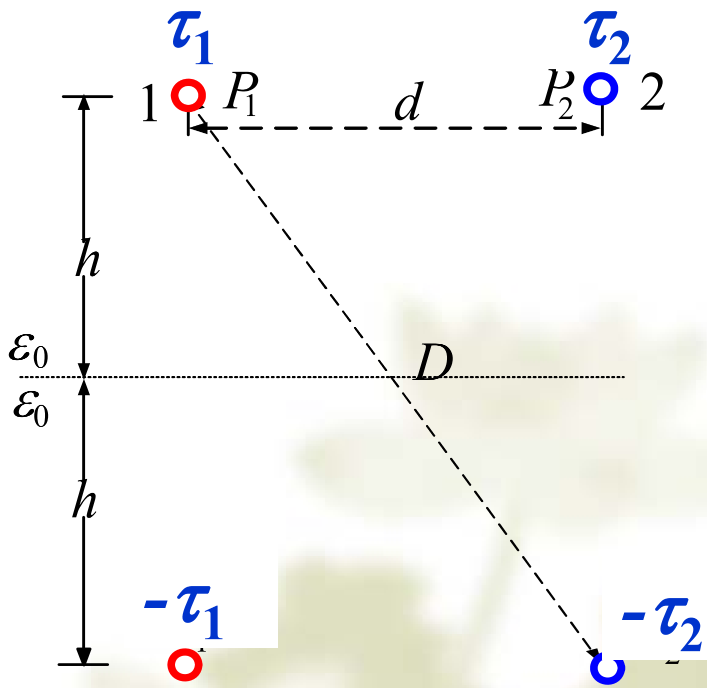
解：　部分电容个数 $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{2(2+1)}{2}=3$

$$C_{12}=C_{21}$$

$$\begin{cases} q_1 = \tau_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ q_2 = \tau_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{20}\varphi_2 \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$



两线传输线的镜像法模型：



由一对电轴产生的电位：

$$\varphi_P = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

得导线电位：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2h}{a} + \dfrac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{D}{d} \\ \varphi_2 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{D}{d} + \dfrac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2h}{a} \end{cases}$$

$$D = \sqrt{(2h)^2 + d^2}, \quad \ln\frac{D}{d} = \ln\left[\left(\frac{2h}{d}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

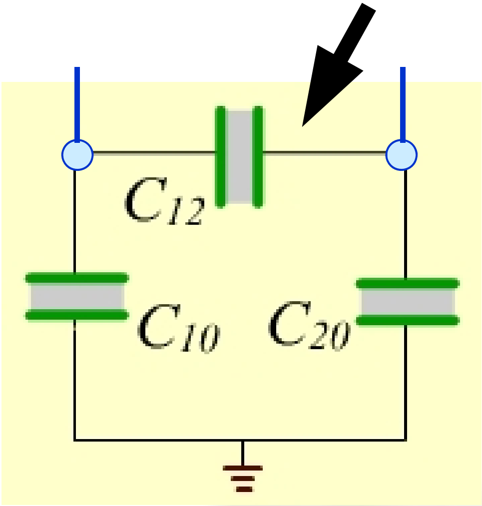
代入式(1)，对应系数相等，可得：

联立解得 $$C_{10}=C_{20}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left[\frac{2h}{a}\sqrt{\left(\frac{2h}{d}\right)^2+1}\right]}$$

$$C_{12}=C_{21}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l\ln\left(\sqrt{\left(\frac{2h}{d}\right)^2+1}\right)}{\ln\left[\frac{2h}{a}\sqrt{\left(\frac{2h}{d}\right)^2+1}\right]\cdot\ln\left[\frac{2h}{a}\left(\sqrt{\left(\frac{2h}{d}\right)^2+1}\right)^{-1}\right]}$$

两线间的等效电容（工作电容）：

Viewed from this direction

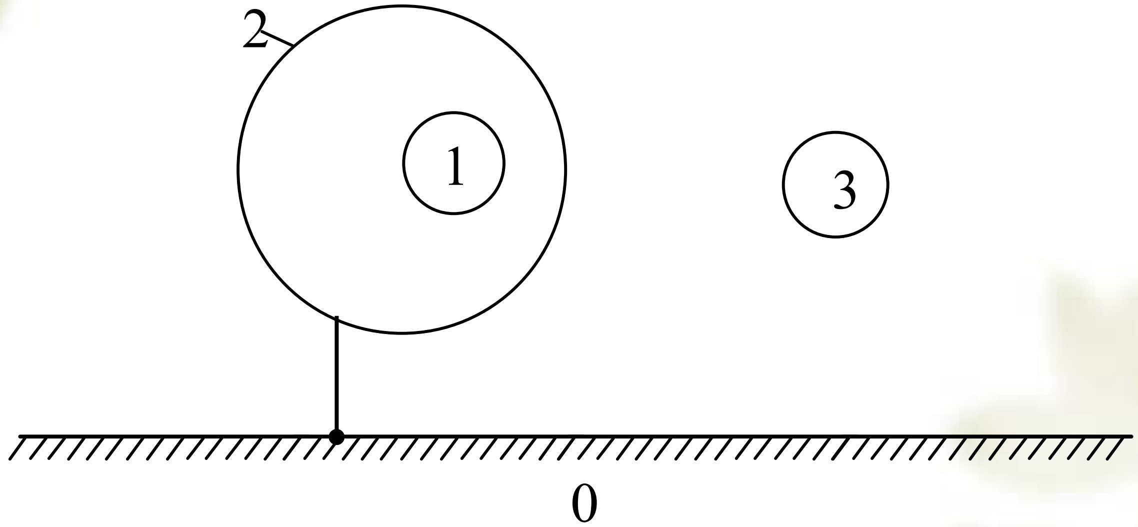


$$C_{eq}=\frac{\tau}{U_{12}}=C_{12}+\frac{C_{10}C_{20}}{C_{10}+C_{20}}$$

等效（值）电容（工作电容）定义：是指在多导体静电独立系统中，把两导体作为电容器的极板，设在此两个电极间加上已知电压U，极板上所带电荷分别为±q，则把比值U/q叫做这两导体间的等效电容。

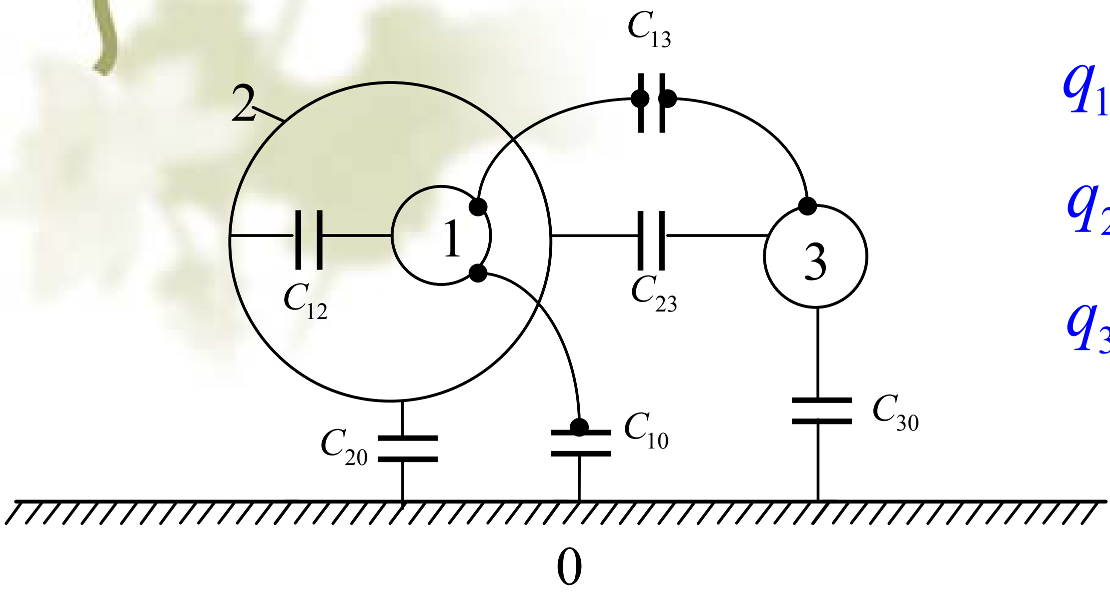
2.8.3 静电屏蔽

考察四导体系统如图示，导体2接地，导体1为导体2所包围。试求C_{13}=?



$$\varphi_2 = \varphi_0 = 0,$$

等效电路



$$q_1 = C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13}$$

$$q_2 = C_{21}U_{21} + C_{20}U_{20} + C_{23}U_{23}$$

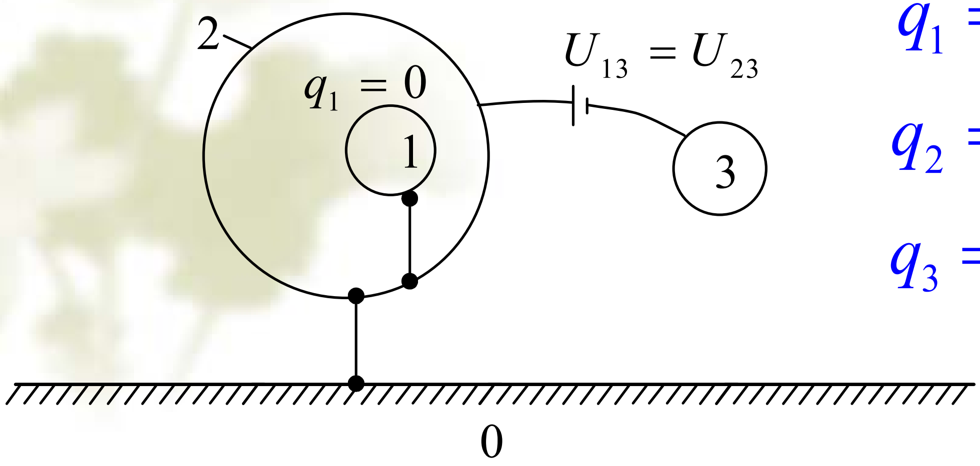
$$q_3 = C_{31}U_{31} + C_{32}U_{32} + C_{30}U_{30}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 = 0,$$

$$q_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}\varphi_1 + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3)$$

$$q_2 = C_{21}(-\varphi_1) + C_{20} \times 0 + C_{23}(-\varphi_3)$$

$$q_3 = C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}\varphi_3 + C_{30}\varphi_3$$



$$q_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}\varphi_1 + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3)$$

$$q_2 = C_{21}(-\varphi_1) + C_{20}\times 0 + C_{23}(-\varphi_3)$$

$$q_3 = C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}\varphi_3 + C_{30}\varphi_3$$

$q_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}\varphi_1 + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3)$ 此式在任何情况下均成立

则对q_1=0也成立，

若q_1=0，则：$\varphi_1=\varphi_2=0$（导体**2**内部为等电位区）

$$C_{13}=0$$

结论：导体**1**与导体**3**被互相隔离，
不存在静电耦合作用。

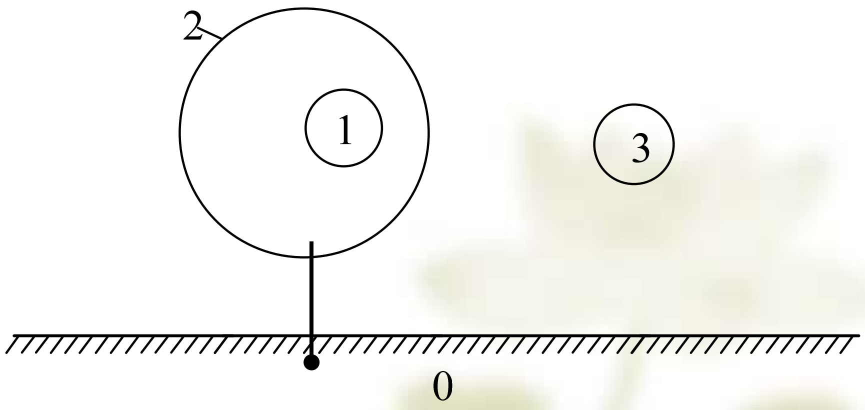
结论：

部分电容C表示导体之间通过电场的电耦合性能。

导体之间部分电容是否为零，取决于两导体之间是否有电场的耦合；

无论包围导体1的2号导体接地与否，$C_{13} \equiv 0$

$$C_{10} \equiv 0$$



若导体1、3带电，则

$$q_1 = C_{12}\varphi_1$$

$$q_2 = C_{21}(-\varphi_1) + C_{23}(-\varphi_3)$$

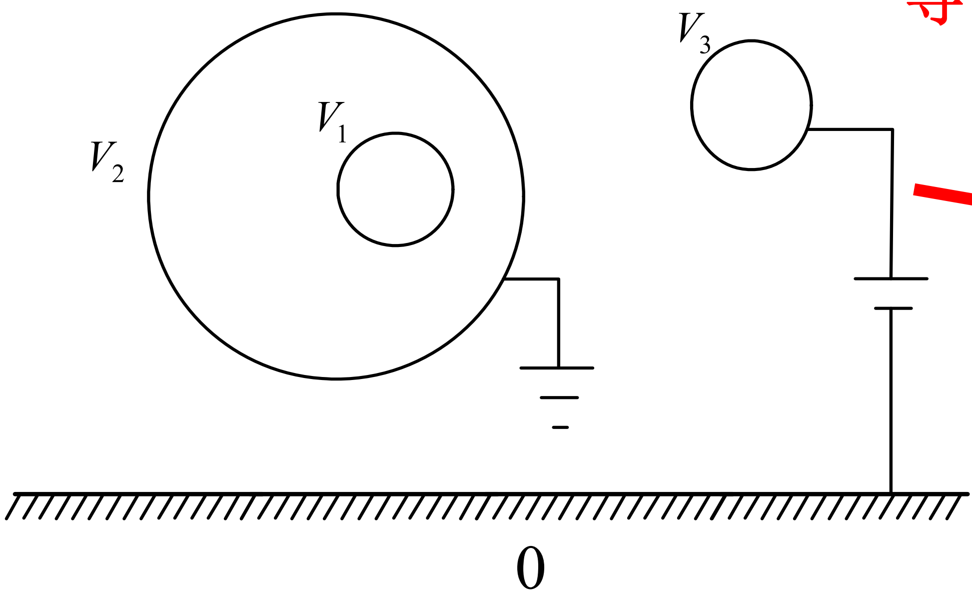
$$q_3 = (C_{32} + C_{30})\ \varphi_3$$

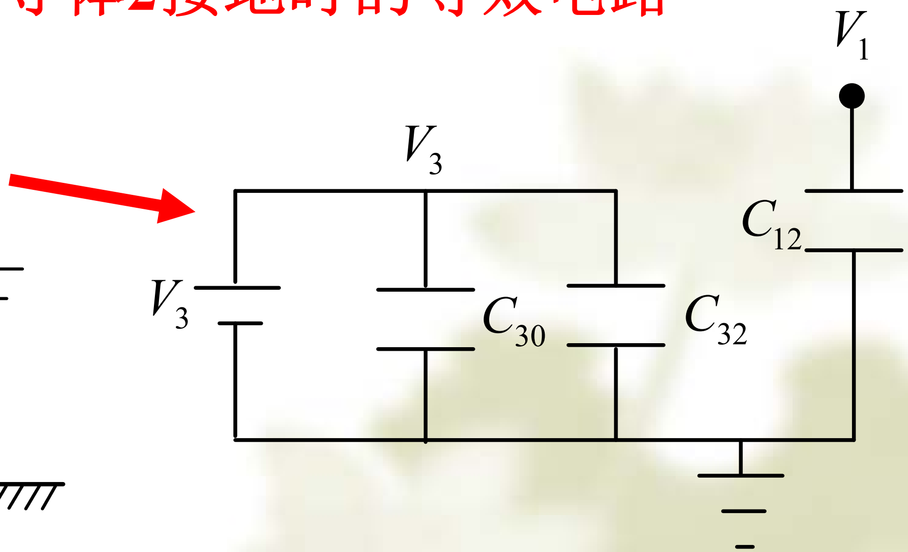
$$q_1 = \cancel{C_{10}}\varphi_1 + C_{12}\varphi_1 + \cancel{C_{13}}(\varphi_1 - \varphi_3)$$

$$q_2 = C_{21}(-\varphi_1) + C_{20} \times 0 + C_{23}(-\varphi_3)$$

$$q_3 = \cancel{C_{31}}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}\varphi_3 + C_{30}\varphi_3$$

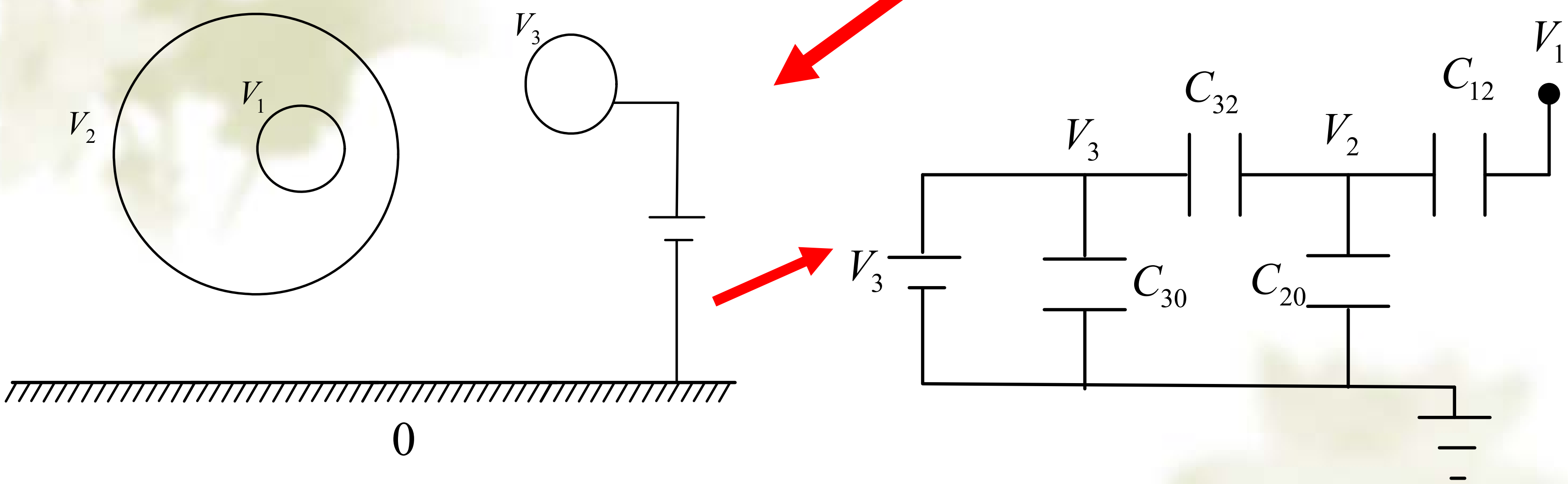
导体2接地时的等效电路





导体3对导体1没有影响

导体2不接地（floating)



结论：只有屏蔽体（导体2）接地，才能完全屏蔽外导体（导体3对导体1）的影响

Electric shielding –Faraday shielding

静电屏蔽的应用：

高压带电作业操作员的防护服就是用金属丝制成，接触高压线时形成等电位，人体不通过电流，起到保护作用。

有线电视信号线，外面有一层金属丝，就为了静电屏蔽，使信号不受干扰。

在汽车中的人是不会被雷击中的。

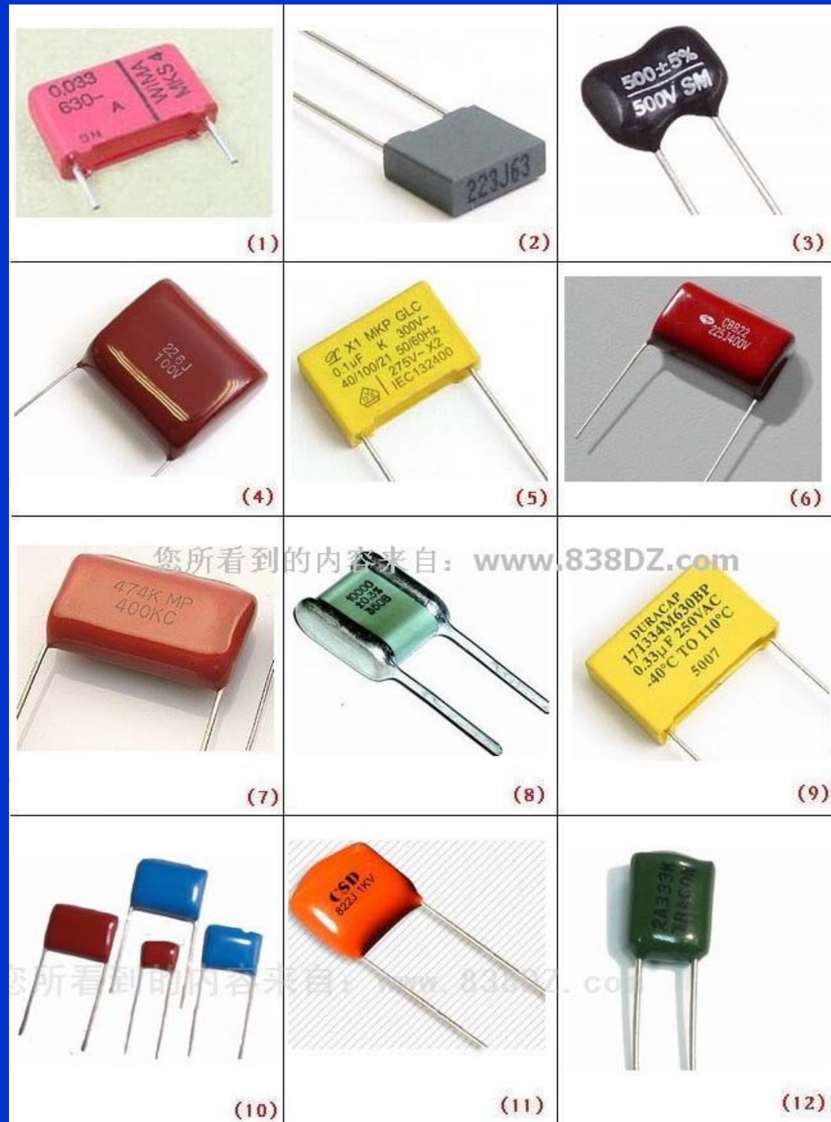
如果电梯内没有中继器的话。那么当电梯关上的时候，里面任何电子讯号也收不到。

怕被人打手机，又不能关机，怎么办?

找个金属盒子把手机装进去，就变成了“ 您拨打的电话暂时无法接通”。

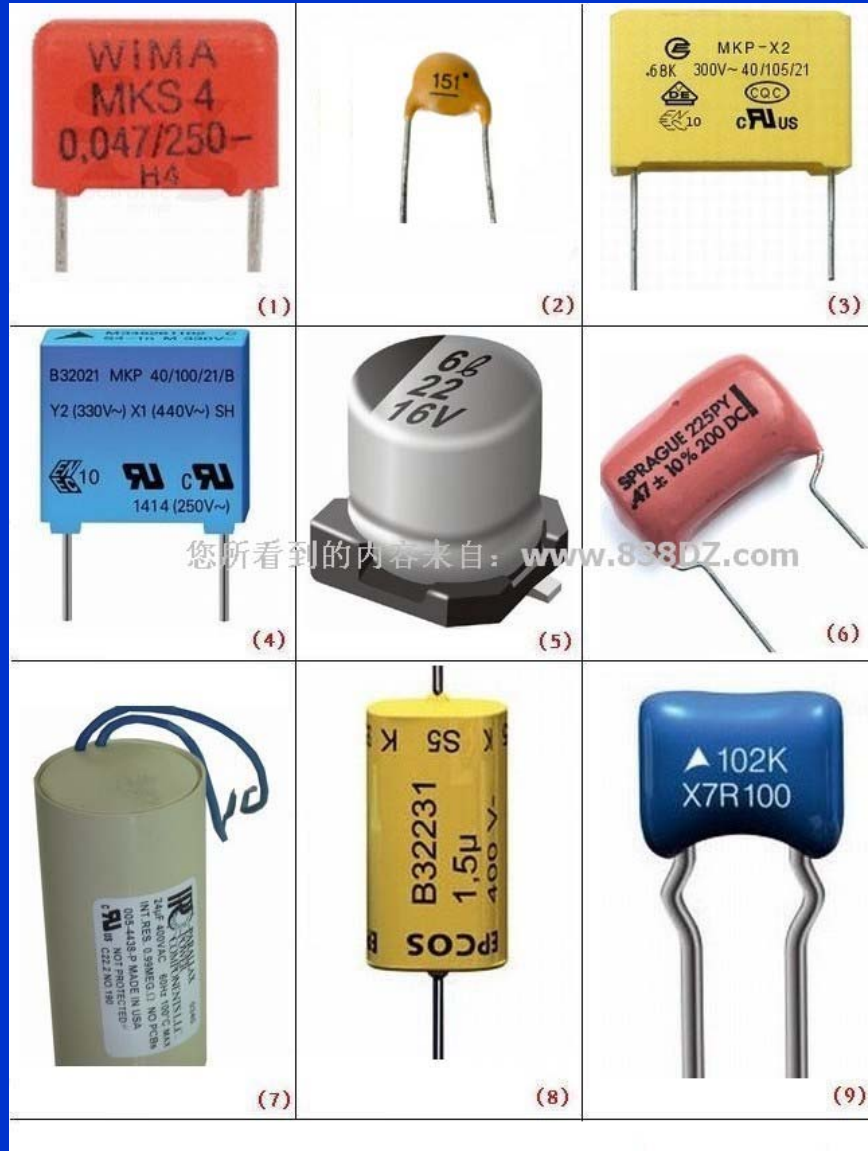
各类电容


(1)
(2)
(3)
305K250V
(4)
2A104K
(5)
107 6V
107 16V
(6)
(7)
(8)
(9)
2A334J
(10)
(11)
CBB21 103J 630V
(12)


(1)
223J63
(2)
500±5% 500V SM
(3)
(4)
(5)
(6)
474K MP 400KC
(7)
(8)
(9)
(10)
(11)
(12)

各类电容


E
202M
12KV
EG
(1)
EG
DCF103M
X1Y1 250V~
Y2 250V~
(3)
(2)
474
(3)
(4)
(5)
(6)
CBB65
(10)
(11)
ES
225uF475V
POSITIVE +
充放電用
(12)


WIMA
MKS 4
0,047/250-
H4
(1)
151
(2)
MKP-X2
.68K 300V~ 40/105/21
(3)
B32021 MKP 40/100/21/B
Y2 (330V~) X1 (440V~) SH
1414 (250V~)
(4)
22
16V
(5)
SPRAGUE 225PY
.47 ± 10% 200 DC
(6)
(7)
B32231
1,5µ
400 V-
EPCOS
(8)
102K
X7R100
(9)

电力电容

电力电容

电力电容

屏蔽室门

屏蔽室门（双层铜皮）

作业：**2-34**

临时小测验

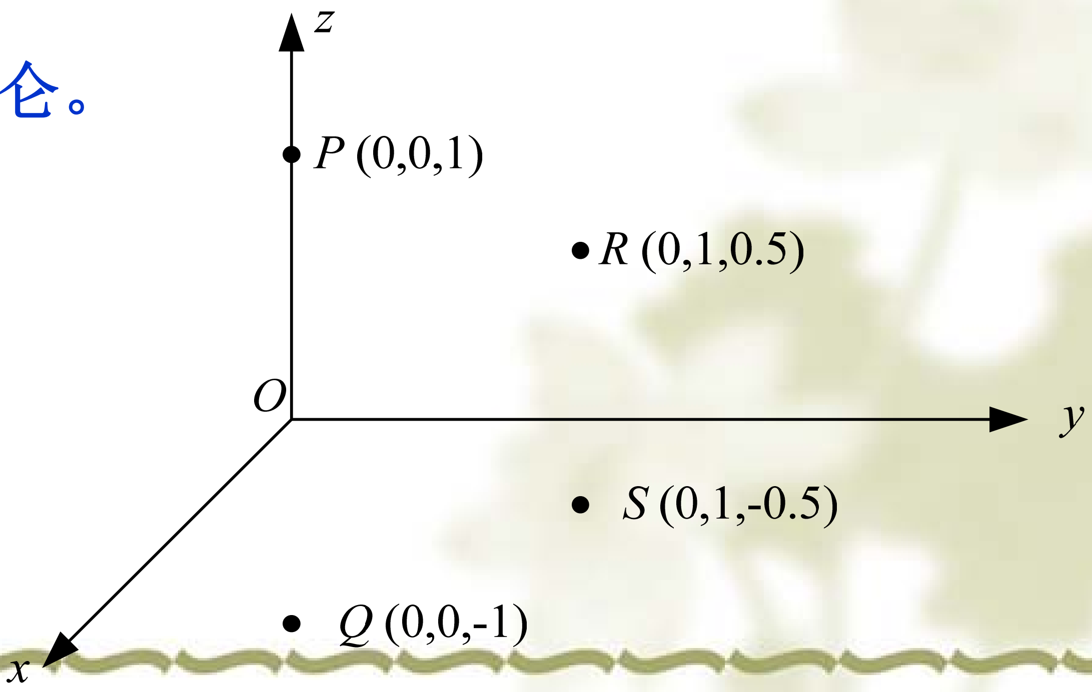
已知真空中四点P、Q、R、S，其在选定的直角坐标系下的坐标如图所示。现在P、Q、R、S四点分别放置不同的点电荷，确定其经*xoy*坐标面进入下半空间的电位移通量 ：

$$\Psi_D = \int_{xoy} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

（1）P、Q、R、S四点点电荷的带电量分别为1.5、-1.5、2.5、-2.5 库仑，则 $\Psi_D =$ ______________库仑。

（2）P、Q、R、S四点点电荷的电量分别为10、10、20、20库仑， 则

$\Psi_D =$ ________ 库仑。



已知真空中四点*P*、*Q*、*R*、*S*，其在选定的直角坐标系下的坐标如图所示。现在P、Q、R、S四点分别放置不同的点电荷，确定其经*xoy*坐标面进入下半空间的电位移通量 $\Psi_D = \int_{xoy} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ ：

（1）*P*、*Q*、*R*、*S*四点点电荷的带电量分别为1.5、-1.5、2.5、-2.5 库仑，则

$\Psi_D =$ **4** 库仑。

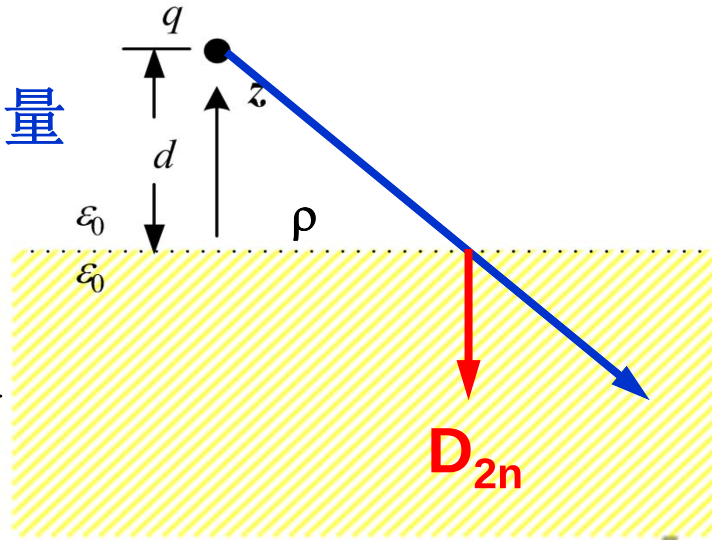
（2）*P*、*Q*、*R*、*S*四点点电荷的电量分别为10、10、20、20 库仑，则

$\Psi_D =$ **0** 库仑。

通过某面（从上到下）的总电位移通量

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{\text{平面上方}} q - \sum_{\text{平面下方}} q\right)$$

解：计算经*xoy*坐标面进入下半空间的*D*通量



计算 D 的法向分量

$$D_{2n}=\frac{q}{4\pi(\rho^2+d^2)}\cdot\frac{d}{\sqrt{\rho^2+d^2}}=\frac{dq}{4\pi(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\int_s \boldsymbol{D}_2\bullet d\boldsymbol{S}=\int_s D_{2n}dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{dq}{4\pi(\rho^2+d^2)^{3/2}}\rho d\rho d\phi=\frac{q}{2}$$

或另一种方法：

$$\int_s \boldsymbol{D}_2\bullet d\boldsymbol{S}=\int_s D_{2n}dS$$

$$=\int_0^{\infty} D_{2n}\,2\pi\rho d\rho=\frac{q}{2}$$