机械原理

平面机构结构分析

自由度计算

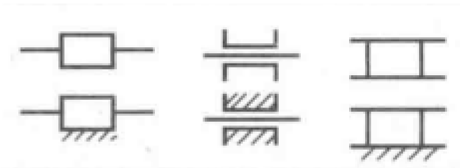
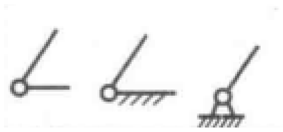
计算公式

$$F = 3n - 2P_L - 2P_H$$

其中 F 为自由度，P_L 为低副个数，P_H 为高副个数，n 为活动构件个数

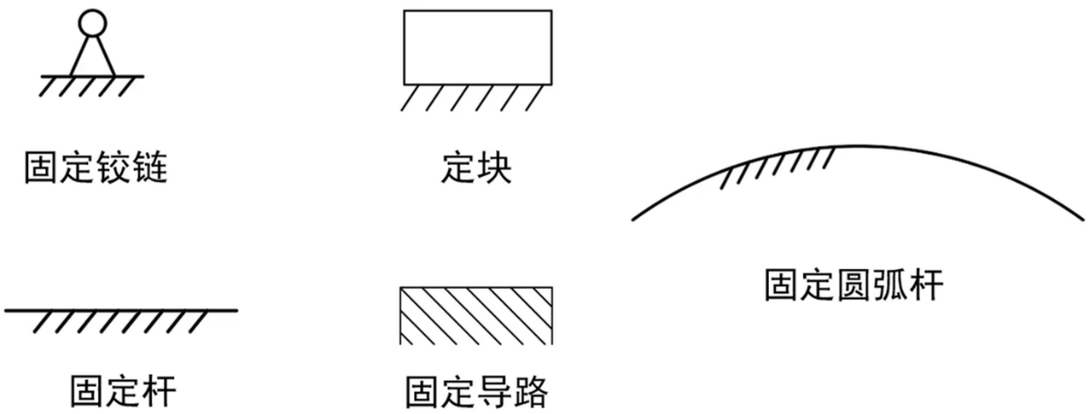
低副

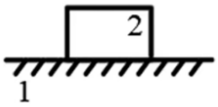
常见的低副为移动副与转动副

移动副	
转动副	

固定构件

构件分为活动构件和固定构件（机架）。常见的机架：

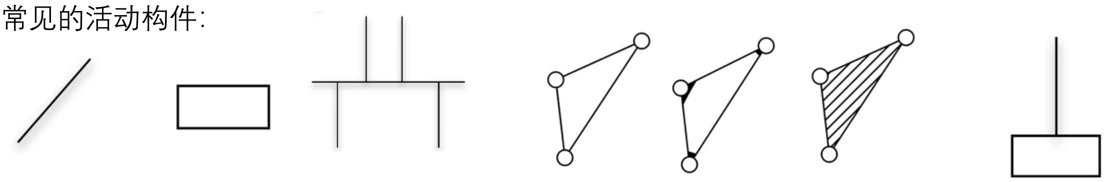


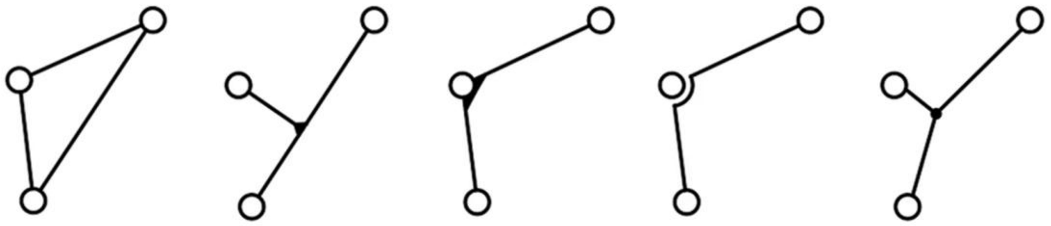


*该图与上图定块十分类似，但是下面的图滑块是可以运动的，而上面图的定块是固定构建不可运动。

活动构件

常见的活动构件:



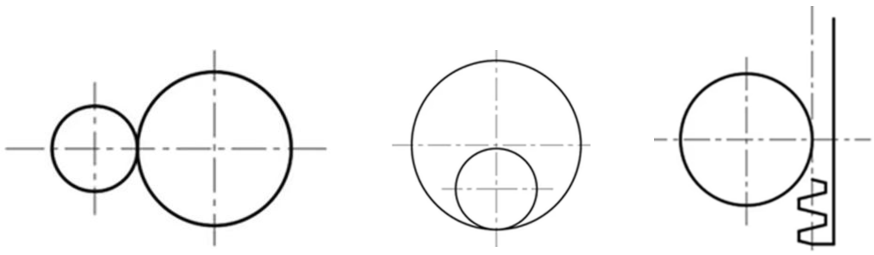


线条连续即为同一构件。
上图所有三角形等价。其中拐角的阴影代表焊接，实心的阴影代表桁架。

高副

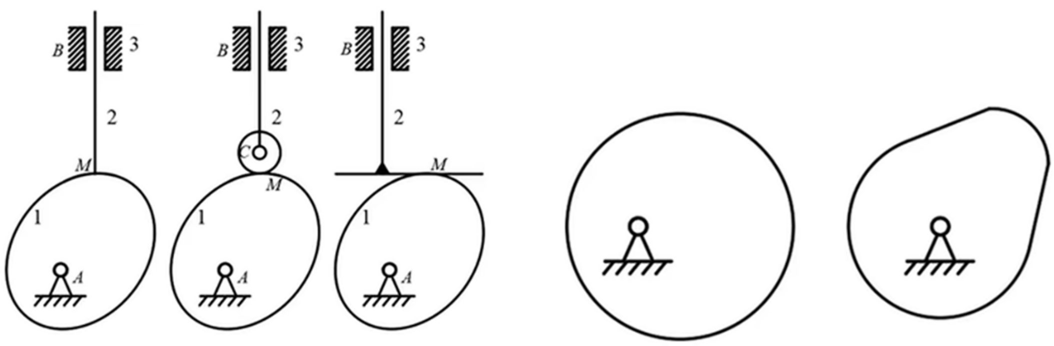
常见的高副为齿轮副，凸轮副，圆弧高副和滚子高副

齿轮



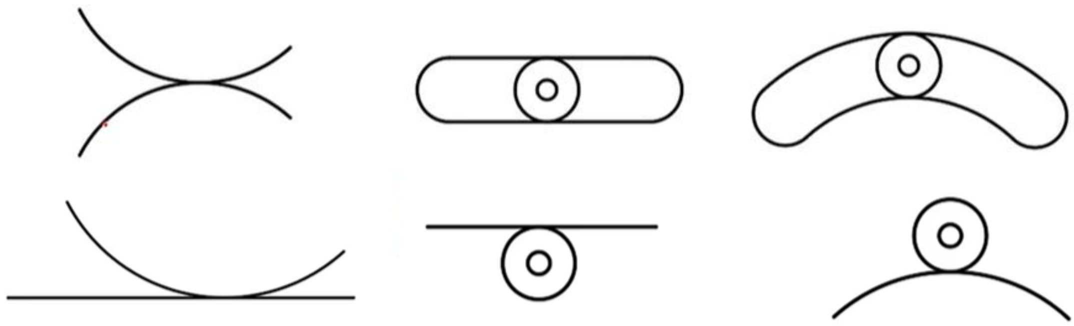
两齿轮接触点为高副。

凸轮

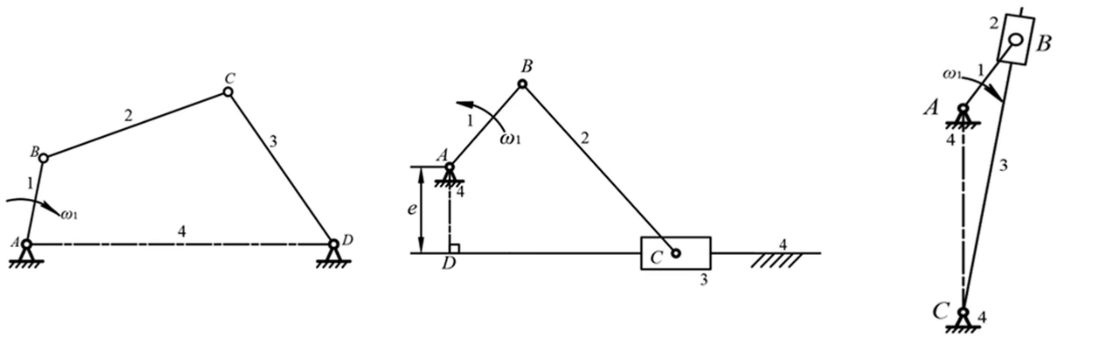


左图 1 虽然线条连续但是明显是分开的（否则转起来断掉了）所以不能认为是一个构件。

圆弧和滚子



基础机构

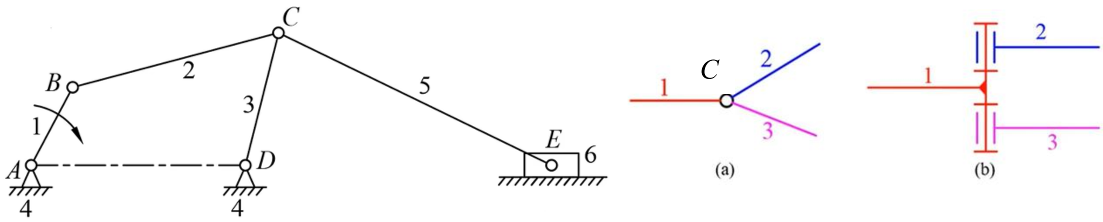


(a)曲柄摇杆机构　　(b)曲柄滑块机构　　(c)摆动导杆机构

机构的运动

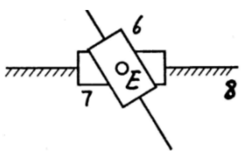
机构原动件数目等于机构的自由度数目且自由度大于 0 时具有确定运动。
如果机构的原动件数小于机构的自由度，机构的运动将不确定；如果原动件数大于机构的自由度，将导致机构中最薄弱环节的损坏。
因此题目中**自由度大部分为 1 或 2**。

复合铰链



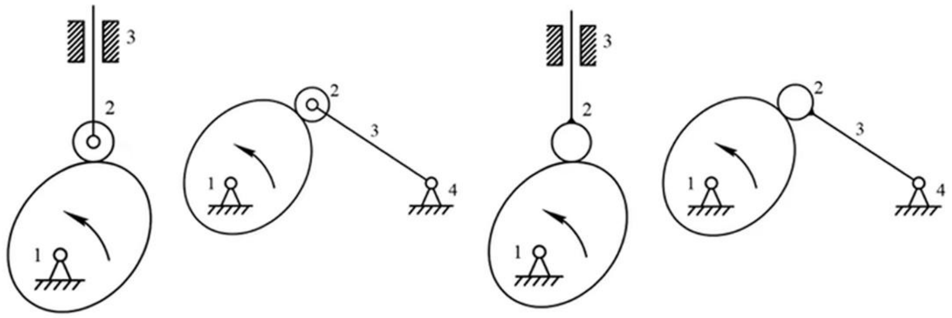
图中的 C 点看似是一个转动副，实际上画成俯视图为两个转动副。
当 n 构件在同一点形成转动副时，转动副的数目应为 $n-1$。注意，这里的 n 是包括机架（固定构件）的

注意：右图不是复合铰链，因为转动副只连接了两个构件



局部自由度

不影响其他构件运动，仅与其自身的局部运动有关的自由度称为局部自由度。



(a) (b) (c) (d)

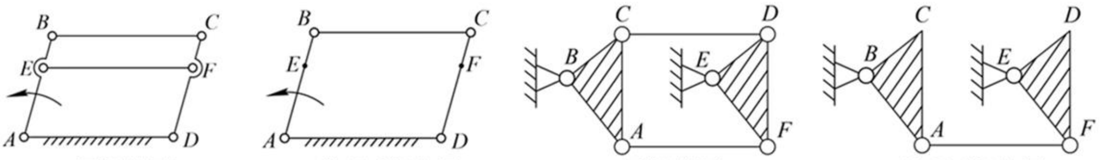
原机构　　局部自由度处理后机构

局部自由度的表现形式一般为滚子构件。在计算机构自由度时应将局部自由度去除，即将滚子和与其通过转动副连接的一个构件焊在一起再进行计算。

虚约束

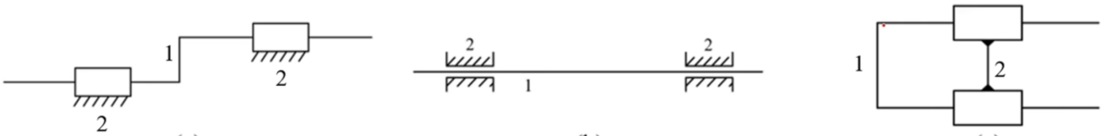
在机构中不起独立限制作用的重复约束称为虚约束。

距离不变虚约束



(a)原机构图　(b)处理后机构图　(c)原机构图　(d)处理后机构图

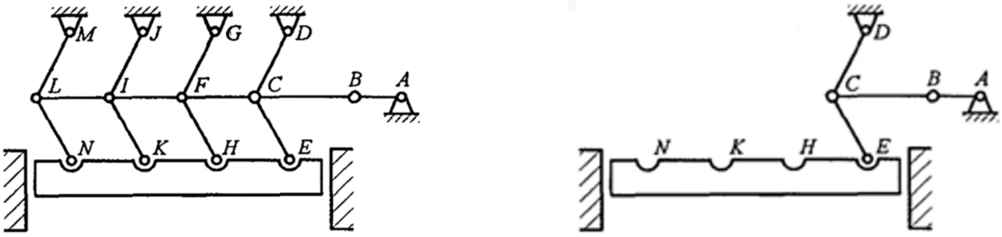
移动副导路平行虚约束



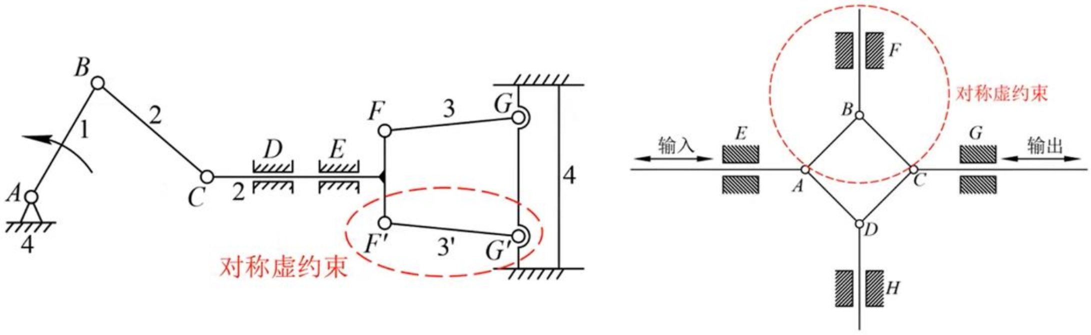
(a) (b) (c)

此类虚约束计算自由度时需要去掉一个移动副。

构件重复虚约束



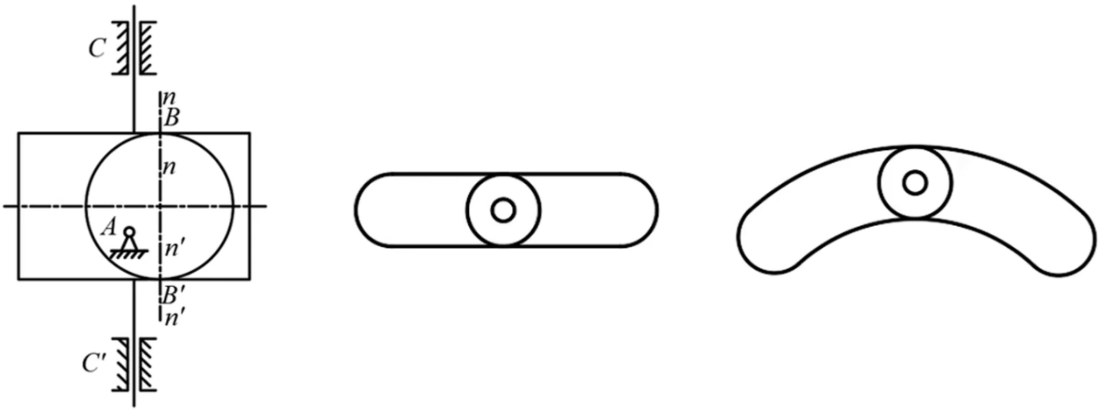
对称虚约束



(a) (b)

图中红色部分可以去除，效果不变。

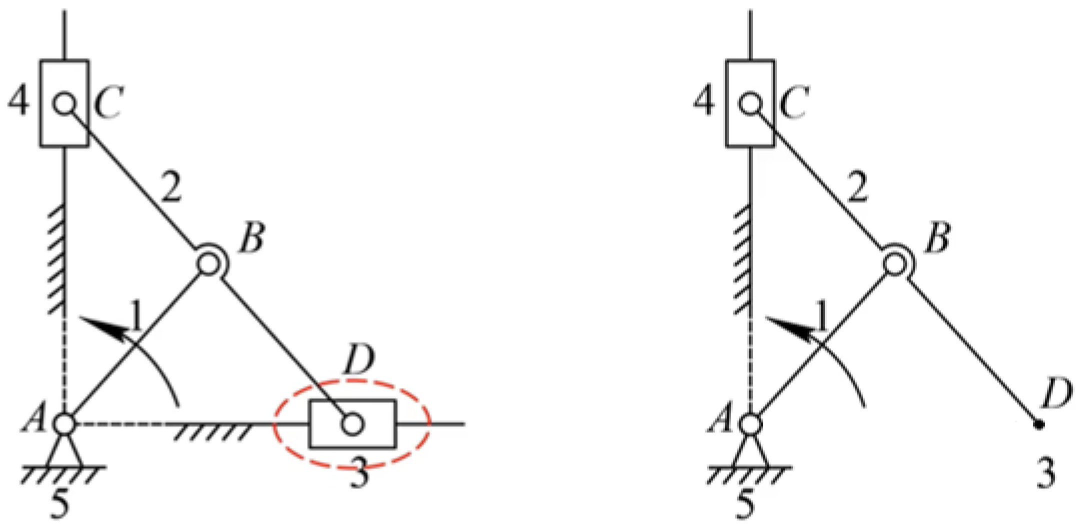
高副公法线重合虚约束



高副公法线重合

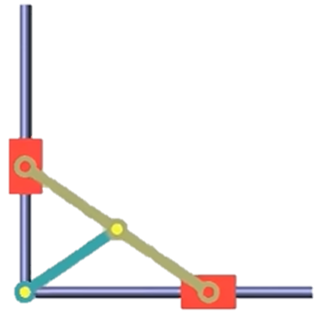
若高副公法线重合，保留两处高副中的一处即可。

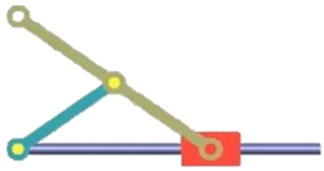
轨迹重合虚约束



(a)去掉虚约束前的机构　　(b)去掉虚约束后的机构

去掉移动副之后仍与先前轨迹重合，故为轨迹重合虚约束。



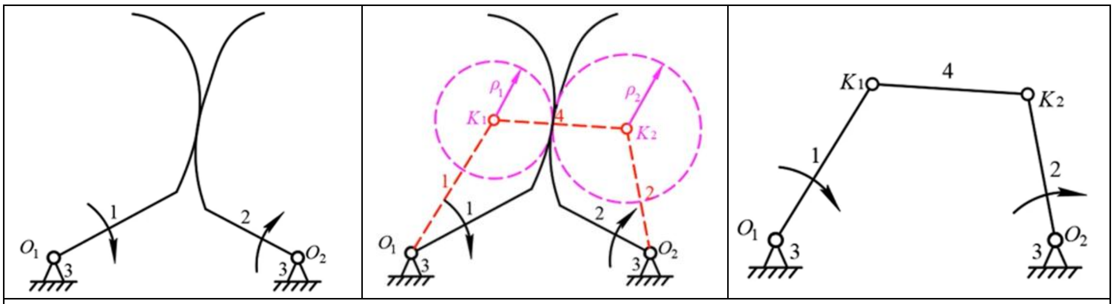


如上二图所示。

高副低代

在含有高副的机构中，将高副虚拟地用低副替代称为高副低代。机构中常见的几类高副低代方法分述如下。

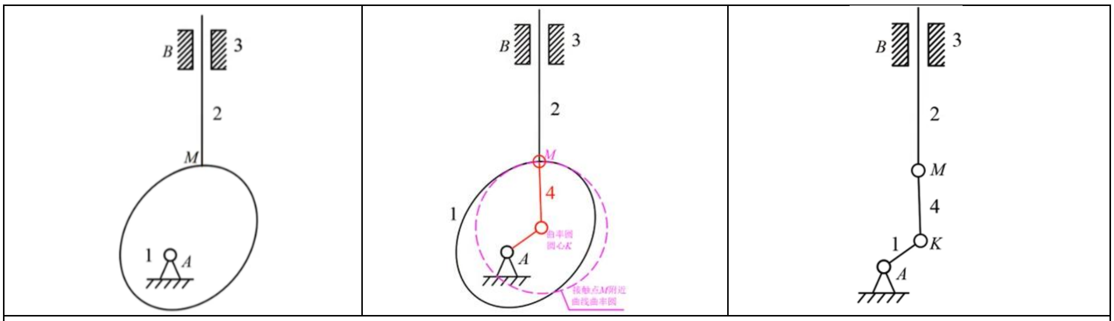
曲面高副接触



代换后杆 1、杆 2 分别为原来的构件 1 与构件 2，增加一个杆 4 替换原来的高副

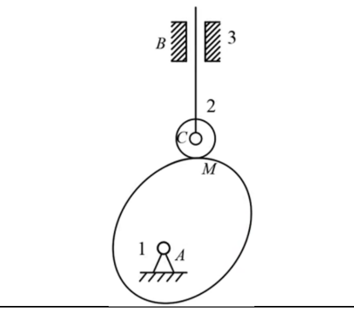
凸轮

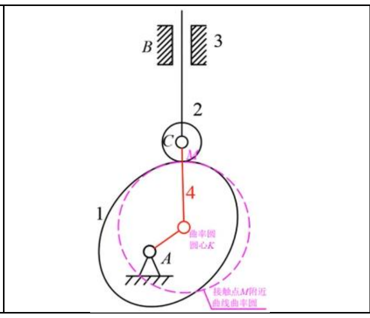
尖底凸轮

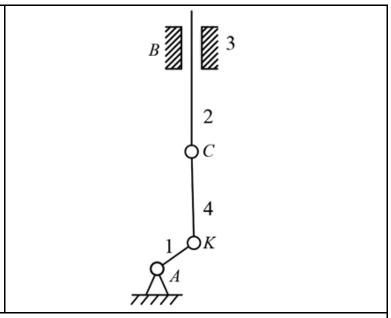


代换后杆 1 为原来的凸轮 1，增加一个杆 4 替换原来的高副

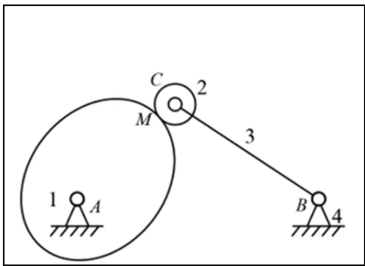
滚子凸轮

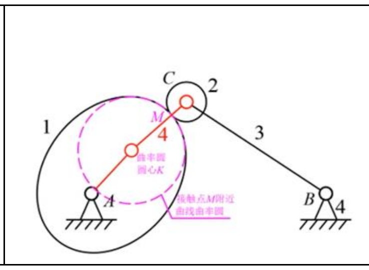


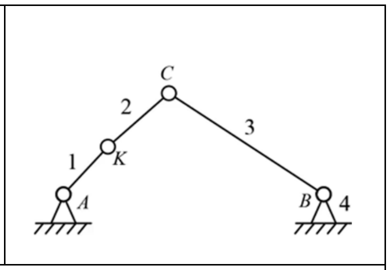




代换后杆 1 为原来的凸轮 1，杆 4 为原来的滚子

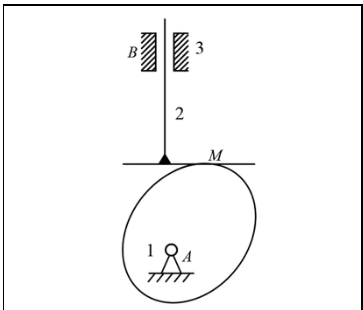


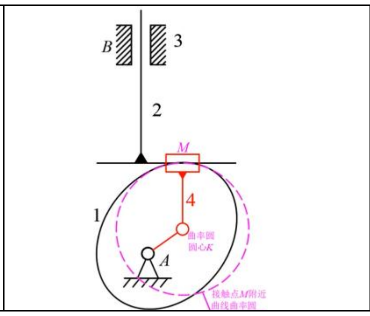


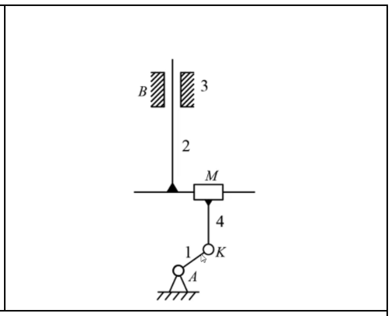


代换后杆 1 为原来的凸轮 1，杆 2 为原来的滚子

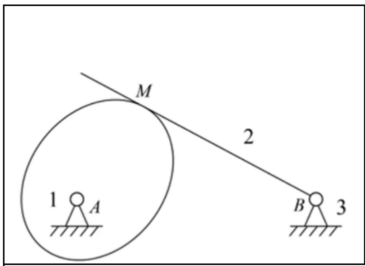
平底凸轮

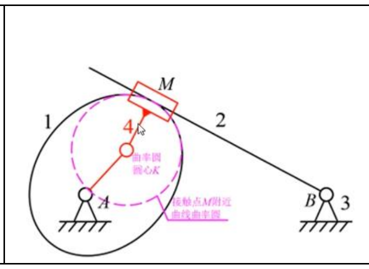


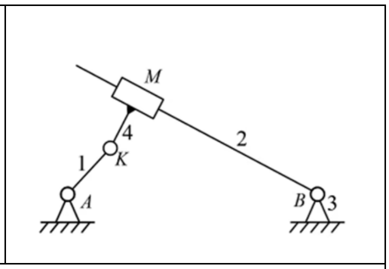




代换后杆 1 为原来的凸轮 1，杆 4 为原来的滚子

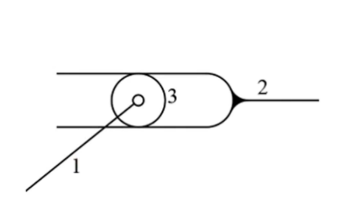
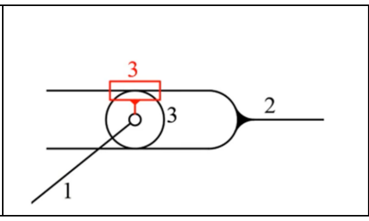
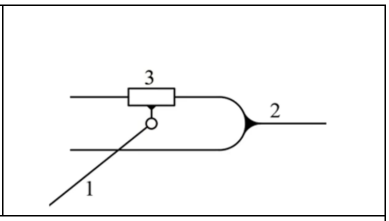


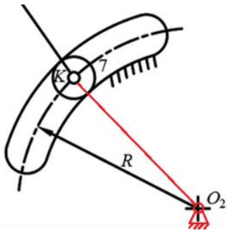




代换后杆 1 为原来的凸轮 1，杆 2 为原来的滚子

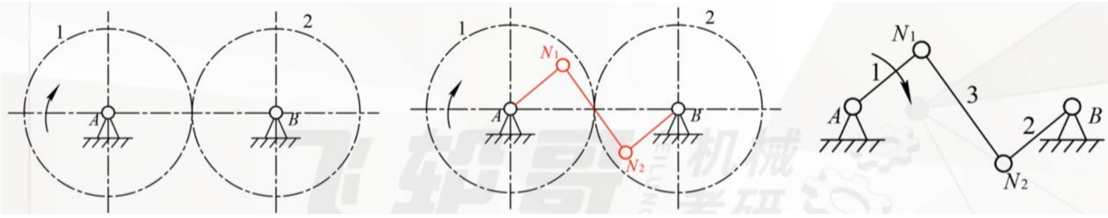
滚子

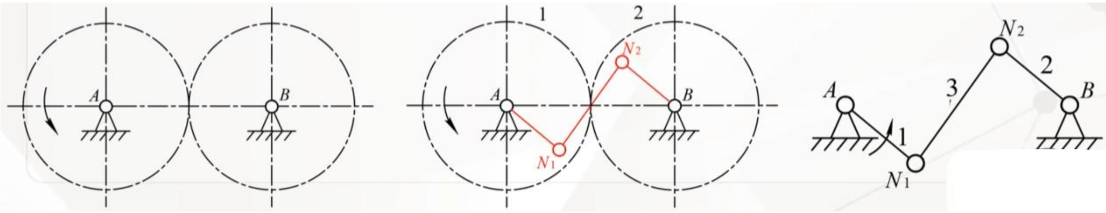
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">代换后构件 3 为原来的滚子 3</td></tr>
</table>



滚子在曲面上运动时类似曲面高副接触的情况。

齿轮



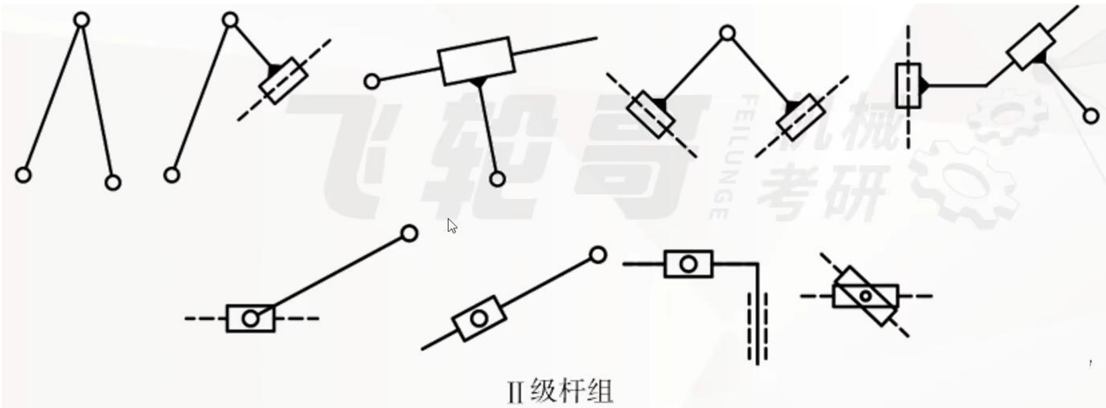


此处两个红色角都为直角

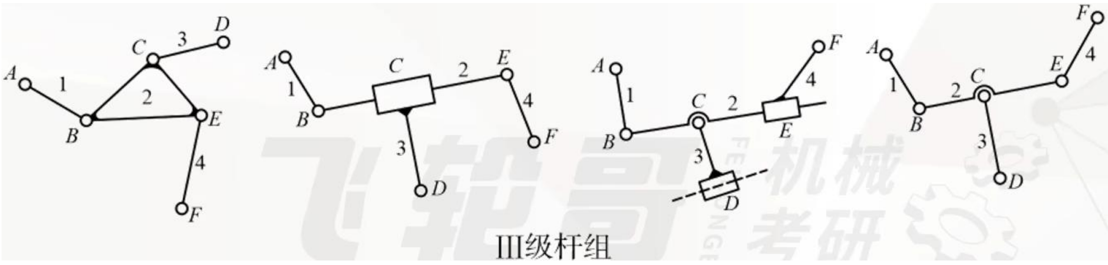
杆组拆分

基本杆组

自由度为零且不能再拆分的构件系统称为基本杆组。最简单的基本杆组由两个构件和三个运动副组成，称为 II 级杆组。


II级杆组

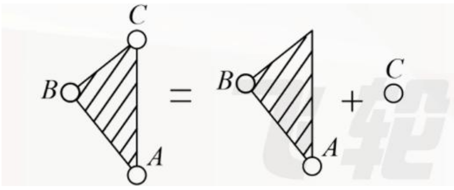
四个构件和六个运动副构成的基本杆组为 III 级组



III级杆组

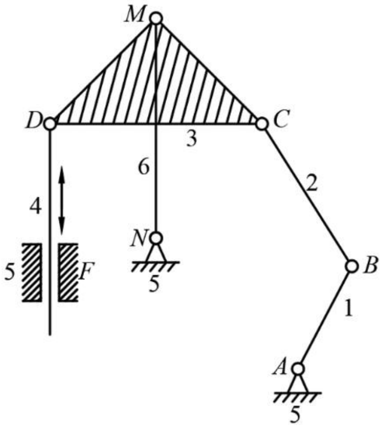
机构的级别即为机构中基本杆组的最高级别。

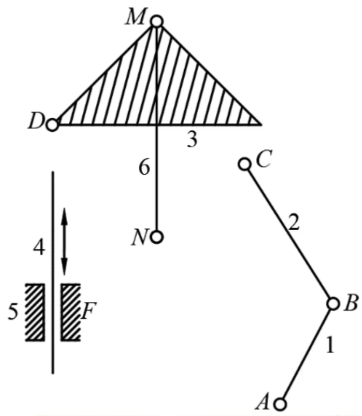
三角架拆分

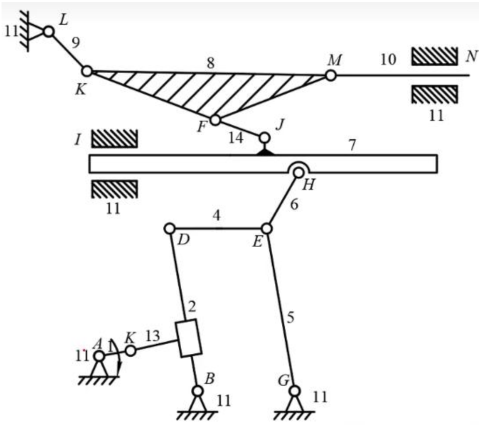


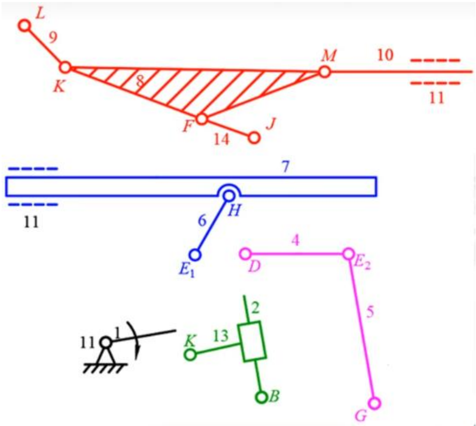
基本步骤

(1) 首先去除机构中的虚约束并对局部自由度进行处理
(2) 计算机构的自由度并确定原动件;
(3) 然后对机构进行高副低代;
(4) 拆分时先将原动件拆下，之后从原动件部分开始试拆杆组，首先考虑 II 级组，拆下的杆组是自由度为零的基本杆组。
注：机构中仅原动件的机架需要保留。









注意：该题中 E 点为复合铰链，拆分时要记为两个转动副

机构运动简图绘制

基本步骤

1. 找出图中的机架
2. 找到与机架直接相连的构件 1、2，判定其与机架通过转动副还是移动副连接
3. 抽象、简化构建 1、2，画出相应的运动副
4. 找到跟构件 1、2 直接相连的构件 3、4，并重复上述步骤 2。

例题：唧筒机构

如图 1，先找到机架为 4，其与 1 通过转动副连接，与 3 通过移动副连接且始终与 3 的方向位于同一直线，可抽象为图 2。最后再来看与 1、3 相连的构件 2. 可知 2 与 1、3 都通过转动副连接，最终抽象为图 3。

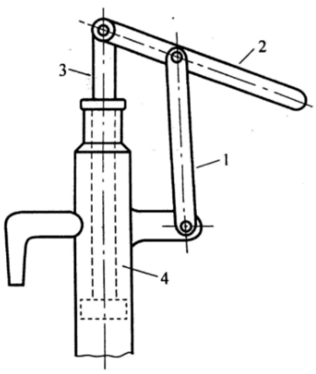


图 1

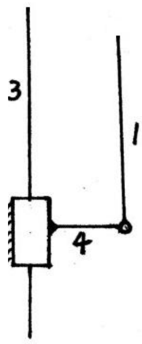


图 2

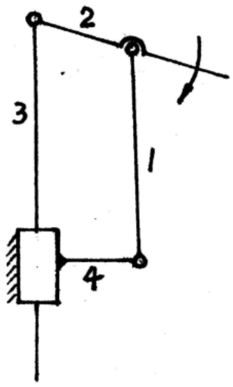
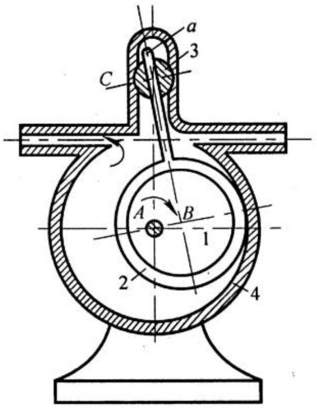


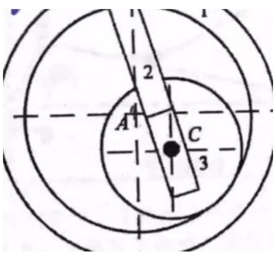
图 3

例题：偏心油泵



右图偏心油泵中间部分的运动形式与下图机构相同

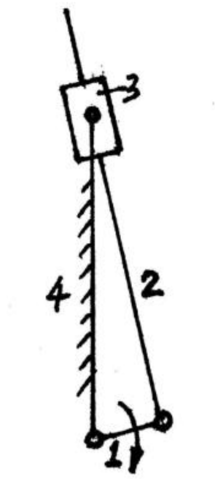
（当 A 点是机架而 C 点不是）



1. 圆球球心绕 A 运动
2. 直杆所在直线上固定一点为球心

A 点为机架，圆 AC（原图的 AB）可以简化为杆，通过转动副与直杆相连，直杆通过移动副与构件 3 相连，3 通过转动副与机架相连。

得到最终答案（右图）。



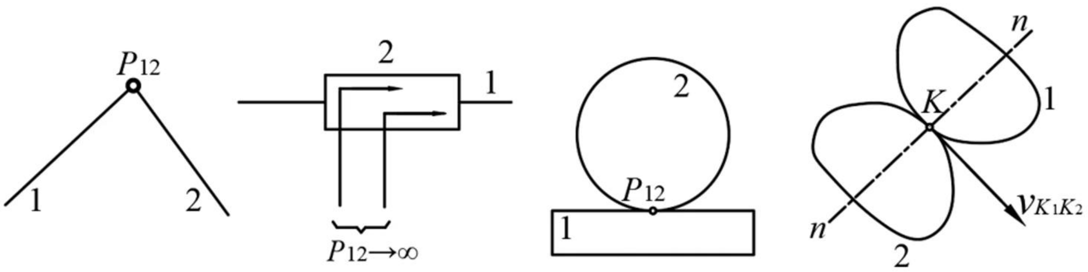
平面机构运动分析

速度瞬心法

速度瞬心

相对速度瞬心是两构件上相对速度为 0 的重合点，或者说是瞬时绝对速度相同的重合点。绝对速度瞬心就是构件上绝对速度为 0 的点。

构件 i 和构件 j 的相对速度瞬心一般用符号 P_{ij} 表示

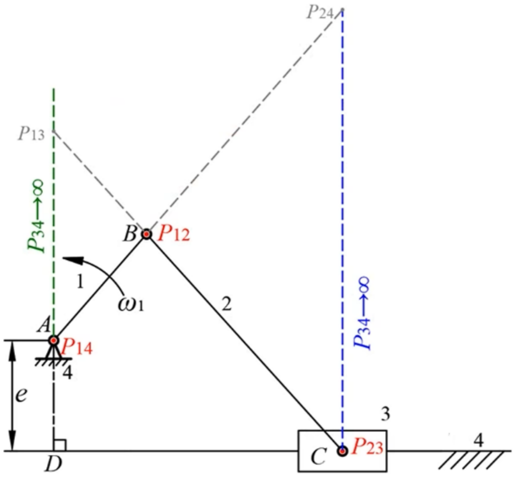


(a)转动副 (b)移动副 (c)纯滚动 (d)滚动兼滑动

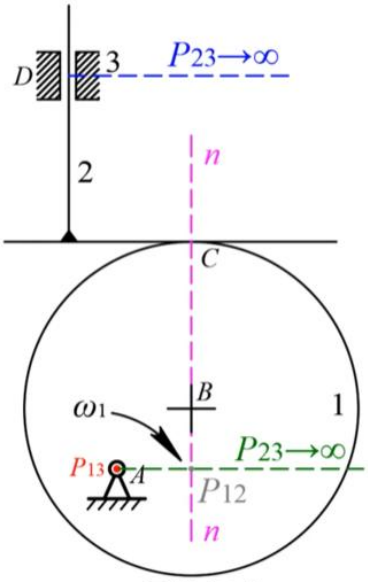
对于直接接触的形成转动副的二构件，由定义可知其速度瞬心为转动副。如图(a)。
对于移动副，其速度瞬心在垂直于移动副导路的无穷远处。移动副的瞬心可以进行平移，效果相同。
对于纯滚动的高副，两构件的接触点即为两构件的瞬心。
对于滚动兼滑动的高副，瞬心在两构件接触点的公法线上，但不能确定其具体位置。
一般默认高副为滚动兼滑动的。齿轮一般为纯滚动，凸轮一般为滚动兼滑动。

三心定理

作平面平行运动的三个构件共有三个瞬心，它们位于同直线上。



(b)曲柄滑块机构



(d)凸轮机构

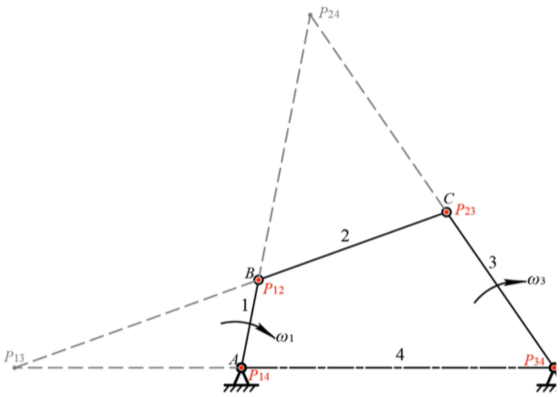
瞬心法求解速度和角速度

已知ω_1，求ω_3

瞬心的定义是两构件上速度相同的点。

$$v_{P_{13}}=\omega_1\left|P_{13}P_{14}\right|=\omega_3\left|P_{13}P_{34}\right|$$

即可求出。
从而我们可以得到一个普遍性的公式



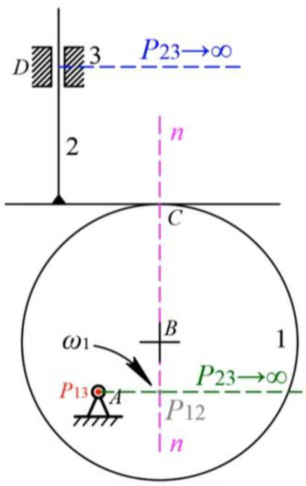
(a)曲柄摇杆机构

对于任意两活动构件 1,2,以及机架 3
有

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\left|P_{12}P_{23}\right|}{\left|P_{12}P_{13}\right|}$$

已知ω_1，求图示凸轮机构中构件 2 的运动速度

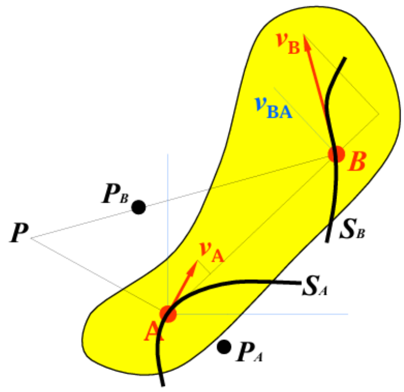
显然$v_2=v_{P_{12}}=\omega_1\cdot\left|AP_{12}\right|$



(d)凸轮机构

相对运动图解法（矢量图解法）

同一构件



在理论力学中我们学过，对于同一刚体（构件）上两点 A, B，其速度的关系为

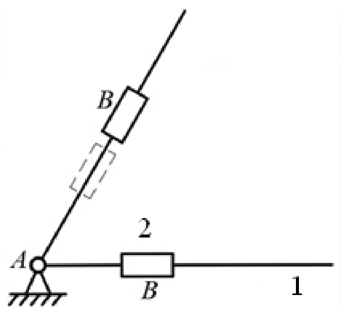
$$\mathbf{v}_{\mathbf{B}} = \mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \mathbf{v}_{\mathbf{BA}}$$

加速度的关系为

$$\mathbf{a}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}} + \mathbf{a}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{t}} + \mathbf{a}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{n}} + \mathbf{a}_{\mathbf{BA}}^{\mathbf{t}} + \mathbf{a}_{\mathbf{BA}}^{\mathbf{n}}$$

移动副两构件上瞬时重合点

在理论力学中我们学过，绝对运动是相对运动和牵连运动的矢量和，体现在移动副两构件上瞬时重合点间的运动关系即为



$$\mathbf{v}_{\mathbf{B2}} = \mathbf{v}_{\mathbf{B1}} + \mathbf{v}_{\mathbf{21}}^{\mathbf{r}}$$

加速度的关系为

$$\mathbf{a}_{\mathbf{B2}}^{\mathbf{t}} + \mathbf{a}_{\mathbf{B2}}^{\mathbf{n}} = \mathbf{a}_{\mathbf{B1}}^{\mathbf{t}} + \mathbf{a}_{\mathbf{B1}}^{\mathbf{n}} + \mathbf{a}_{\mathbf{21}}^{\mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{21}}^{\mathbf{k}}$$

其中 $\mathbf{a}_{\mathbf{21}}^{\mathbf{k}}$ 为科氏加速度

$$\mathbf{a}^{\mathbf{k}} = \mathbf{2\omega} \times \mathbf{v}^{\mathbf{r}}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为动系绕定轴转动的角速度矢量（这里就是杆的角速度矢量）。

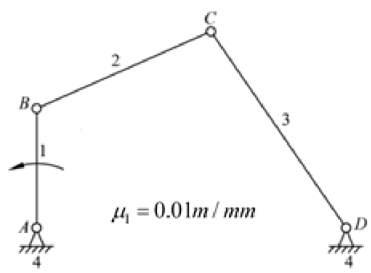
也可以这么说：$\mathbf{a}^{\mathbf{k}}$ 的大小是 $2\omega v^r$，方向为 v^r 沿着 ω（顺/逆时针）的方向旋转 90°。

当两构件通过移动副连接时，则这两个构件的角速度和角加速度大小和方向均相同。

例题 1（展示一般求解过程）

已知一机构如图所示，已知原动件等角速度转动且转动角速度为 $\omega_1 = 10rad/s$，试求

$\omega_2, \omega_3, \alpha_2, \alpha_3$ 的大小与方向。



经过测量可以得出

$$\overline{AB} = 25mm, \overline{BC} = 40mm, \overline{AD} = 65mm, \overline{CD} = 50mm$$

（假设是这样）

也即

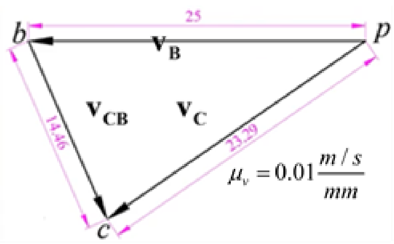
$$l_{AB} = 0.025m, l_{BC} = 0.04m, l_{AD} = 0.065m, l_{CD} = 0.05m$$

$v_B = \omega_1 l_{AB} = 0.25 m/s$

$\mathbf{v_C} = \mathbf{v_B} + \mathbf{v_{CB}}$

	$\mathbf{v_C}$	$\mathbf{v_B}$	$\mathbf{v_{CB}}$
方向	$\perp CD$	$\perp AB$	$\perp BC$
大小	$\omega_3 l_{CD}$	$0.25 m/s$	$\omega_2 l_{BC}$

据此可以画出速度矢量图（右图）



点 p 为画图的起点，也称为**极点，**由 p 出发的指向 b 的有向线段即为 B 点的速度，以此类推。

由图可知

$v_C = \mu_v \overline{pc} = 0.2329 m/s$

$v_{CB} = \mu_v \overline{bc} = 0.1446 m/s$

可以求得

$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}} = 3.615 rad/s$，方向为顺时针

$\omega_3 = \frac{v_C}{l_{CD}} = 4.658 rad/s$，方向为逆时针

$\mathbf{a_C^n} + \mathbf{a_C^t} = \mathbf{a_B} + \mathbf{a_{CB}^n} + \mathbf{a_{CB}^t}$

	$\mathbf{a_C^n}$	$\mathbf{a_C^t}$	$\mathbf{a_B}$	$\mathbf{a_{CB}^n}$	$\mathbf{a_{CB}^t}$
方向	CD	$\perp CD$	AB	BC	$\perp BC$
大小	$\omega_3^2 l_{CD}$	$\alpha_3 l_{CD}$	$\omega_1^2 l_{AB}$	$\omega_2^2 l_{BC}$	$\alpha_2 l_{BC}$

可以求得

$a_C^n = \omega_3^2 l_{CD} = 1.08 m/s^2$

$a_B = \omega_1^2 l_{AB} = 2.5 m/s^2$

$a_{CB}^n = \omega_2^2 l_{BC} = 0.52 m/s^2$

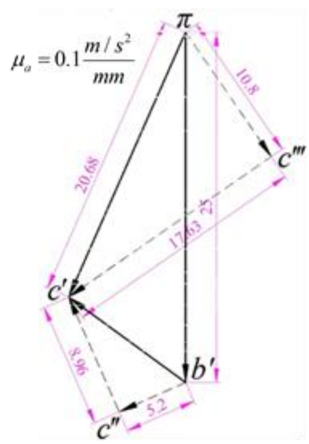
据此可以画出加速度矢量图（右图）

（这里认为 c''，c''' 两点都是求 c' 的过程量因此这样标）

量出

$a_{CB}^t = \mu_a \overline{c'c''} = 0.896 m/s^2$

$a_C^t = \mu_a \overline{c'c'''} = 1.763 m/s^2$

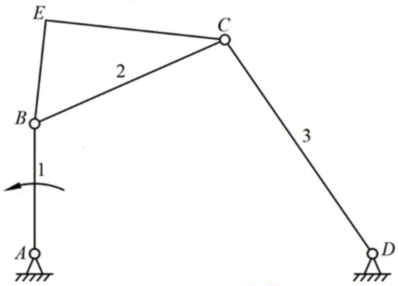


$$\alpha_2=\frac{a_{CB}^t}{l_{BC}}=22.4rad/s^2$$

方向都为逆时针

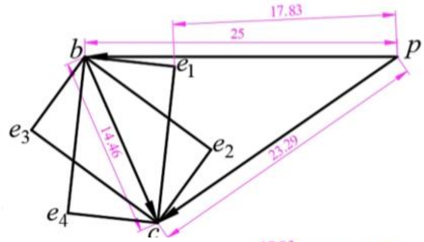
$$\alpha_3=\frac{a_C^t}{l_{CD}}=35.26rad/s^2$$

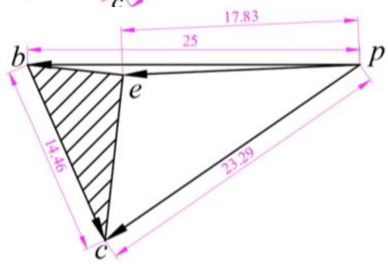
速度影像法



机构中某个构件上的点形成的图形，与速度和加速度矢量图中的图形应该是对应相似的。

如果上题中构件 2 不是杆而是如右图所示的三角形 BCE，那么会有速度三角形中 $\triangle BCE\sim\triangle bce$





不妨看看右图，对于相似三角形，e 点有 e_1,e_2,e_3,e_4

四种可能。其中从 BE 对应 be 就可以排除掉 e_2,e_4，速度影像法还要求顺时针读顶点的顺序一样，原图中顺时针读为 BEC，速度矢量图中 e 点若在 e_3 则顺序为 bce_3，与上述不符。而 e_1 则满足题意。从而得到了正确的速度矢量图。

对线段上的点也适用。某个构件 AB 上某个点 C 在速度矢量图中有 $\frac{AC}{BC}=\frac{ac}{bc}$，可以认为是三角形的极限情况。

重合点的选取

取C为重合点

$$\boldsymbol{v}_{C3}=\boldsymbol{v}_{C4}+\boldsymbol{v}_{34}$$

大小	?	?	?
方向	?	√	√

取构件3为研究对象

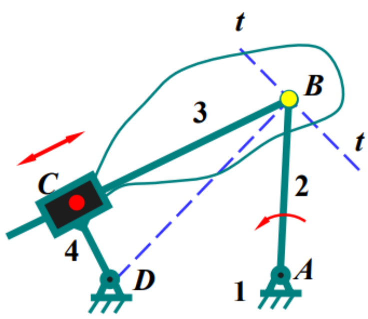
$$\boldsymbol{v}_{C3}=\boldsymbol{v}_{B3}+\boldsymbol{v}_{CB}$$

大小	?	√	?
方向	?	√	√

将构件4扩大至包含B点，取B点为重合点

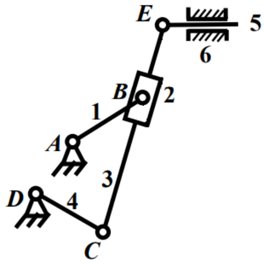
$$\boldsymbol{v}_{B4}=\boldsymbol{v}_{B3}+\boldsymbol{v}_{43}$$

大小	?	√	?
方向	√	√	√



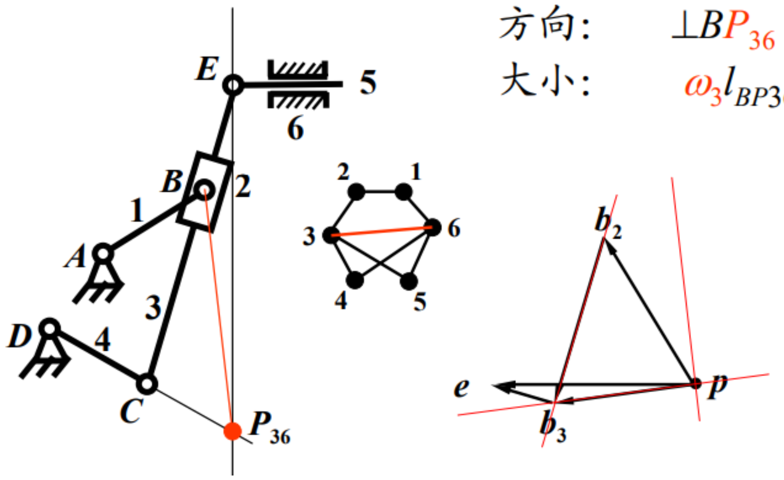
例题 2

已知各杆长，构件 1 逆时针匀速转动，其角速度已知。求此时构件 5 的速度。



思路：求构件 5 的速度就是求 E 的速度，找到构件 3 的绝对瞬心（P_{36}），从而问题转化为求解构件 3 的角速度。

矢量方程：	$\boldsymbol{v}_{B3}$ =	$\boldsymbol{v}_{B2}$ +	$\boldsymbol{v}_{32}{}^{r}$
方向：	$\perp BP_{36}$	$\perp AB$	沿 BC
大小：	$\omega_3 l_{BP36}$	$\omega_1 l_{AB}$	v_r



平面机构力分析

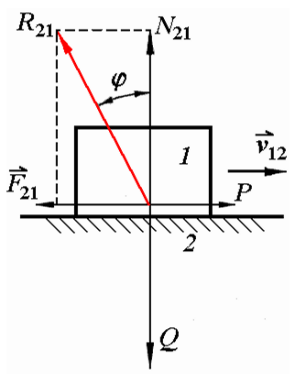
运动副中的反力

移动副

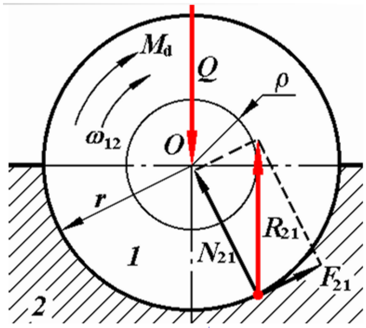
构件 2 对构件 1 的力与速度方向成 $90^{\circ}+\varphi$ 角

即 $\mathbf{v}_{12}$ 与 $\mathbf{R}_{21}$ 成 $90^{\circ}+\varphi$ 角

其中 $\varphi=\arctan\mu$ 为摩擦角



转动副



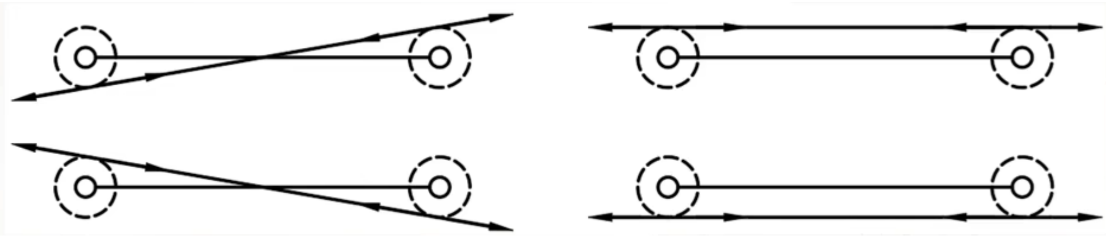
构件 2 对构件 1 的力切于摩擦圆

其中摩擦圆半径 $\rho = f_v r$

f_v 为当量摩擦系数

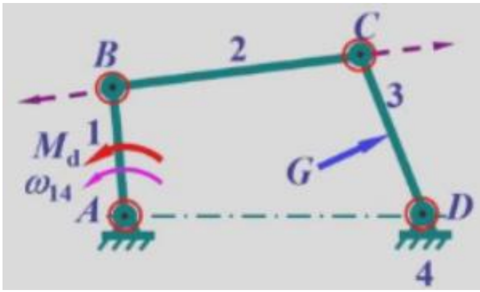
R_{21} 是发生转动时阻碍转动副转动的力，也就是说，其产生力矩与 ω_{12} 的方向应该相反。也可以说 $\mathbf{R_{12}}$ 产生的力矩与 $\boldsymbol{\omega_{12}}$ 方向相同（下标相同，方向相同）

二力杆



例题 1

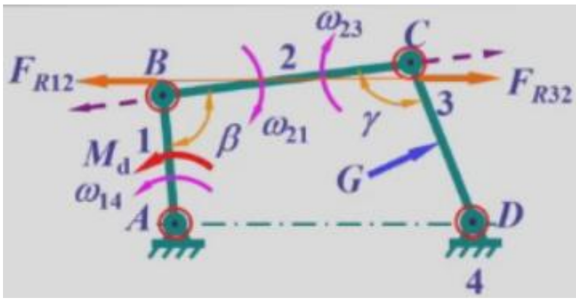
已知各构件的尺寸、各转动副的半径 r 和当量摩擦系数 f_v、作用在构件 3 上的工作阻力 G 及其作用位置，求作用在曲柄 1 上的驱动力矩 M_d （不计重力和惯性力)。



解：

1. 根据已知条件画摩擦圆。
2. 作二力杆反力的作用线

   由二力杆的性质，可以知道 F_{R12}, F_{R32} 等大反向，只能是在与两摩擦圆同时相切的一条直线上。由 ω_{14} 的方向可以写出 ω_{21} 的方向，由 F_{R12} 产生力矩的方向与 ω_{21} 相反就可以找到 F_{R12} 的确切方向，如图。

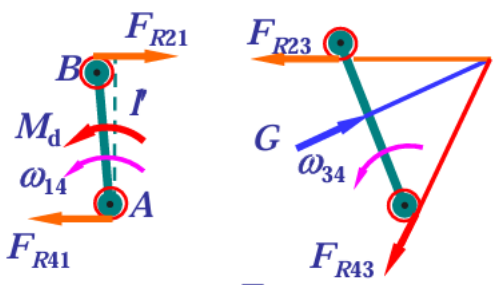


3. 分析其它构件的受力状况

4. 由 G 求出 F_{R23}（绘图）

$$F_{R23}=F_{R32}=F_{R12}=F_{R21}=F_{R41}$$

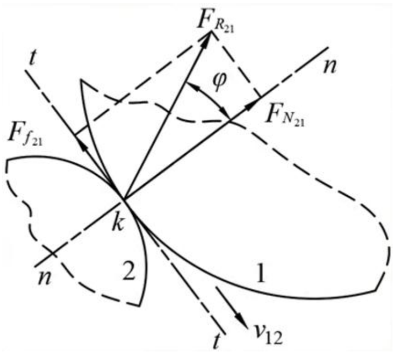
$M_d=F_{R21}l'$ 即可求出。



高副

高副的情况与移动副相同。

一般研究顺序如下：二力杆、三力构件、带有力矩的构件。



机械效率

在机械运转时,设作用在机械上的驱动功(输入功)为 W_d ,有效功(输出功)为 W_r ,损失功为 W_f 则在机械稳定运转时,有

$$W_d=W_r+W_f$$

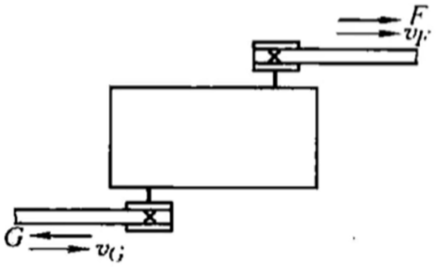
机械的输出功与输入功之比称为机械效率 η

$$\eta=\frac{W_r}{W_d}=1-\frac{W_f}{W_d}$$

按机械匀速运转考虑，也可以用功率表示

$$\eta=\frac{P_r}{P_d}=\frac{F_r v_r}{F_d v_D}$$

简化机械装置如右图：$\mathbf{F}$ 为驱动力，$\mathbf{G}$ 为生产阻力，$\mathbf{v}_F$ 和 $\mathbf{v}_G$ 分别为 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{G}$ 的作用点沿该力作用线方向的分速度。



生产阻力一定

对于没有摩擦的理想机械，生产阻力一定时，有

$$\eta_0=\frac{P_r}{P_d}=\frac{G v_G}{F_0 v_F}=1$$

这里F_0被称为理想驱动力。

实际的机械效率：

$$\eta = \frac{P_r}{P_d} = \frac{Gv_G}{Fv_F} = \frac{F_0 v_F}{Fv_F} = \frac{F_0}{F}$$

即机械效率等于不计摩擦时克服生产阻力所需的理想驱动力F_0与克服同样生产阻力(连同克服摩擦力)时该机械实际所需的驱动力F之比。

驱动力一定

对于没有摩擦的理想机械，驱动力一定时，有

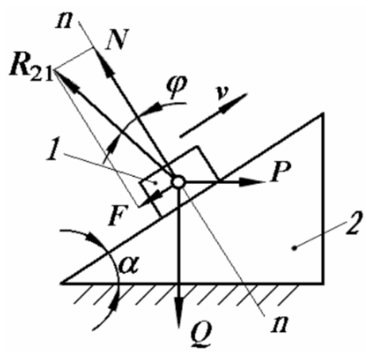
$$\eta_0 = \frac{P_r}{P_d} = \frac{G_0 v_G}{Fv_F} = 1$$

这里G_0被称为理想生产阻力。

实际的机械效率：

$$\eta = \frac{P_r}{P_d} = \frac{Gv_G}{Fv_F} = \frac{Gv_G}{G_0 v_G} = \frac{G}{G_0}$$

斜面的机械效率

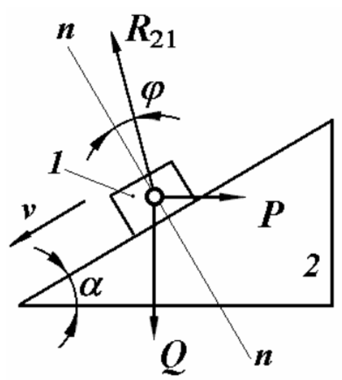


滑块向上匀速滑动时

重力Q在斜面上的分力为生产阻力且不变，施加的力P在斜面上的分力为驱动力。

根据以上理论，

$$\eta = \frac{P_0 \cos\alpha}{P\cos\alpha} = \frac{P_0}{P} = \frac{Q\tan\alpha}{Q\tan(\alpha+\varphi)} = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\varphi)}$$



滑块向下匀速滑动时

重力Q在斜面上的分力变为**驱动力**且不变，施加的力P在斜面上的分力为生产阻力。

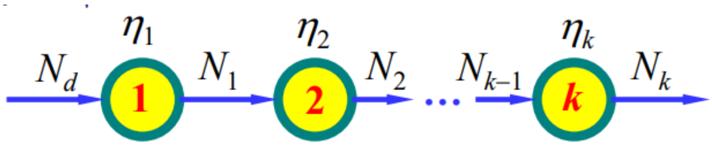
根据以上理论，

$$\eta = \frac{P\cos\alpha}{P_0\cos\alpha} = \frac{P}{P_0} = \frac{Q\tan(\alpha-\varphi)}{Q\tan\alpha} = \frac{\tan(\alpha-\varphi)}{\tan\alpha}$$

机械效率的串联与并联

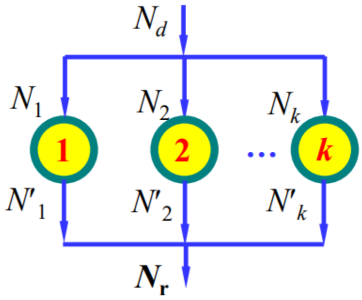
- 串联时

$$\eta = \eta_1\eta_2\cdots\eta_k$$



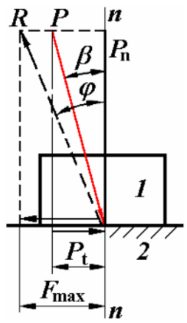
- 并联时

$$\eta = \frac{P_r}{P_d} = \frac{P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + \cdots + P_k\eta_k}{P_1 + P_2 + \cdots + P_k}$$



机械的自锁

由于摩擦的存在,会出现无论驱动力如何增大,也无法使机械运动的现象,这种现象称为机械的自锁。

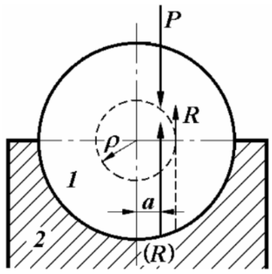


移动副

在移动副中滑块上的驱动力作用在其摩擦角之内(即 $\beta \le \varphi$)则发生自锁。

转动副

转动副发生自锁的条件为:作用在轴颈上的驱动力为单力 F ,且作用于摩擦圆之内,即 $a \le \rho$ 。



任意机械

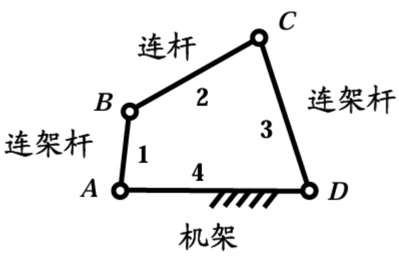
任意机械发生自锁的条件机械效率 $\eta \le 0$ 。

平面连杆机构

铰链四杆机构基本概念

连架杆

直接与机架相连的杆件



连杆

除机架外的非连架杆

曲柄

机构中可以360°转动的杆件

摇杆

机构中不能360°转动的杆件

周转副/整转副

曲柄两端的转动副称为周转副

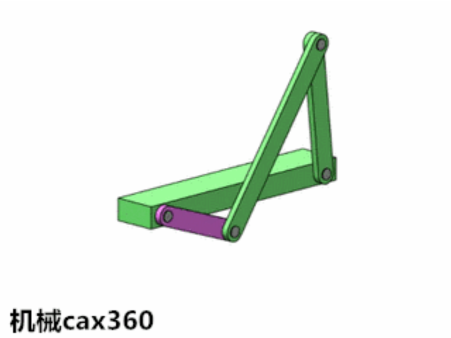
摆转副

摇杆两端的转动副称为摆转副

铰链四杆机构的形式

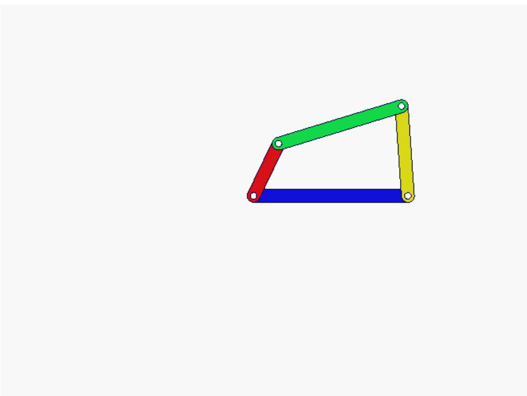
曲柄摇杆机构

两根连架杆一根是曲柄，一根是摇杆



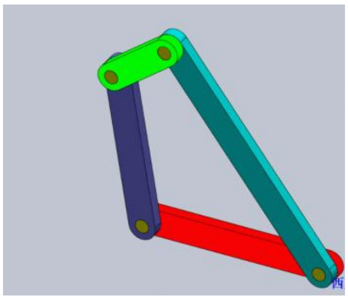
双曲柄机构

两根连架杆都是曲柄



双摇杆机构

两根连架杆都是摇杆



铰链四杆机构运动特性

杆长条件

铰链四杆机构中

最短杆长度+最长杆长度≤其余两杆长度之和

周转副的充要条件

铰链四杆机构中某回转副成为整转副的充要条件是:

1）各杆长度满足杆长条件。

2）构成此回转副的两构件中有一个为最短构件。

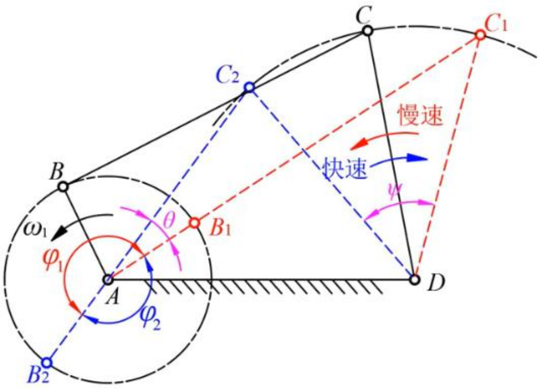
判断铰链四杆机构类型

1. 判断是否满足杆长条件。如果不满足杆长条件则没有周转副，必为双摇杆机构
2. 若满足杆长条件，由周转副的充要条件易知，当最短边为机架时机架相连的两转动副都是周转副，为双曲柄机构。
3. 当满足杆长条件，且最短边为连架杆时，机构为曲柄摇杆机构
4. 当满足杆长条件，且最短边为连杆时，机构为双摇杆机构
5. 当有两杆最短时以同样的方法判断周转副即可。
6. 四杆最短时显然必为双曲柄。

曲柄摇杆机构的运动特性

极位

摇杆运动到两极限位置时机构的运动状态。对于右图所示曲柄摇杆机构而言，记 $l_{AB}=a,l_{BC}=b$，则有 $b-a\le l_{AC}\le a+b$，等号在 A,B,C 三点共线的两个位置取。



摆角

摇杆的极位之间的夹角 ψ 即为摆角

极位夹角

曲柄在两极位的夹角θ即为极位夹角

快慢行程与行程数比系数

当曲柄从AB_1运动到AB_2时，转过的角度为$180^\circ+\theta$，从AB_2运动到AB_1时，转过的角度为$180^\circ-\theta$。曲柄通常是原动件，匀速转动，因此从AB_1运动到AB_2的行程为慢行程，从AB_2运动到AB_1的行程为快行程。

行程数比系数K为快行程与慢行程平均速度的比值。

$$K=\frac{180^\circ+\theta}{180^\circ-\theta}$$

从而有

$$\theta=180^\circ\times\frac{K-1}{K+1}$$

如何计算极位夹角与摆角

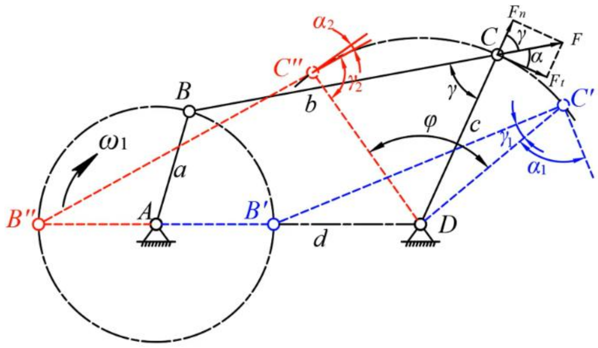
$\theta=\angle C_2AD-\angle C_1AD$，两角都可以通过余弦定理解出。

同理，$\psi=\angle C_1DA-\angle C_2DA$。

压力角与传动角

假设曲柄AB为原动件，由于BC为二力杆，可知BC对CD的力的方向在BC直线上。将这个力分解为CD方向及其法向，那么其中的使CD运动起来的压力F_t与合力F的夹角即为压力角，它的余角为传动角γ。即

$\gamma+\alpha=90^\circ$



最大压力角

由定义易知

$$\gamma=\begin{cases}\angle BCD & \angle BCD\le 90^\circ\\ 180^\circ-\angle BCD & \angle BCD>90^\circ\end{cases}$$

由余弦定理

$$\cos\angle BCD=\frac{b^2+c^2-l_{BD}^2}{2bc}$$

其中只有 l_{BD} 在变化。由三角形两边之和大于第三边

$$d-a\le l_{BD}\le d+a$$

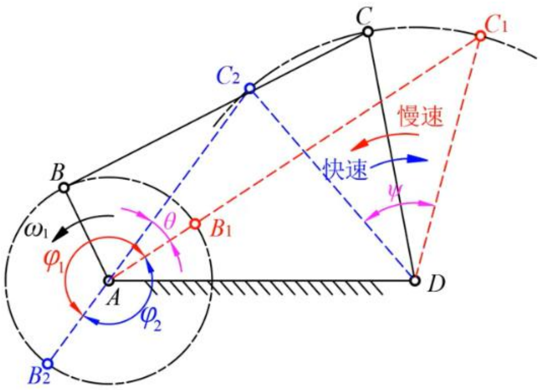
如上图中红色和蓝色两个位置。
由余弦函数性质，$\angle BCD$ 在红色位置最大，在蓝色位置最小。

可知 $\gamma_{max}=90^\circ,\gamma_{min}=\min\{\gamma_1,\gamma_2\}$，其中 γ_1,γ_2 为两个极限位置（不是极位，注意区分）

也就有 $\alpha_{max}=\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$。

死点

压力角为 90° 的位置即为死点。此时主动件给从动件的压力与从动杆的方向完全相同，从动杆无法转动。曲柄摇杆机构的死点在摇杆为主动件时为**原来当曲柄为主动件时的极位**，同时当曲柄为主动件时机构不存在死点。



曲柄滑块机构的运动特性

极位

滑块运动到两极限位置时机构的状态即为极位。