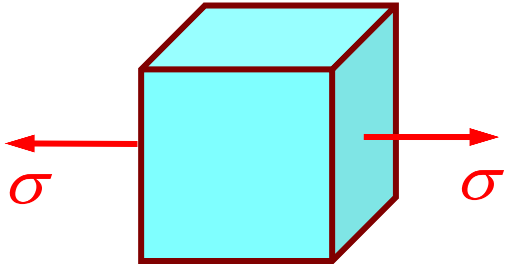
第七章　应力和应变分析
强度理论（四）

第20讲

§ 7.9 复杂应力状态下的应变能密度

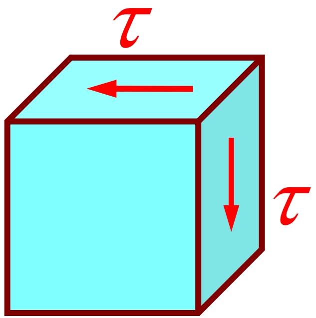
一、应变能密度的计算（各向同性材料）

1. 单轴拉伸情形的应变能密度



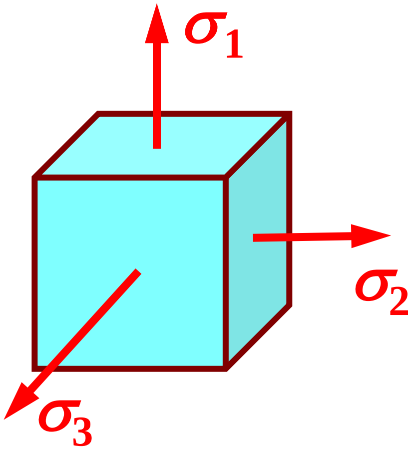
$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2E}\sigma^2 = \frac{1}{2}E\varepsilon^2$$

2. 纯剪切应力状态情形的应变能密度



$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2G}\tau^2 = \frac{1}{2}G\gamma^2$$

3. 主单元体的应变能密度



弹性体的应变能，与施加力的次序无关。在线弹性范围内，每一主应力与相应的主应变之间保持线性关系

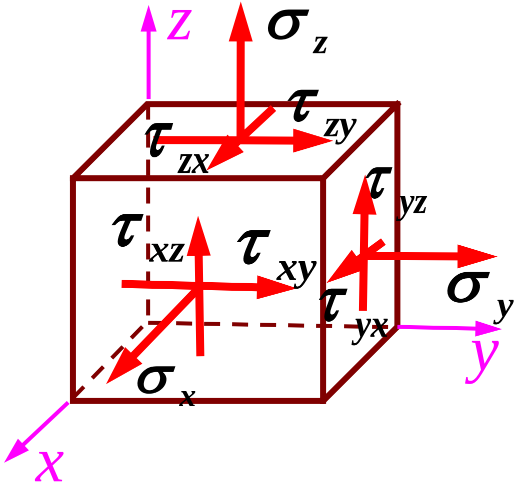
$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3$$

$$= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\right)\right]$$

4. 一般单元体的应变能密度

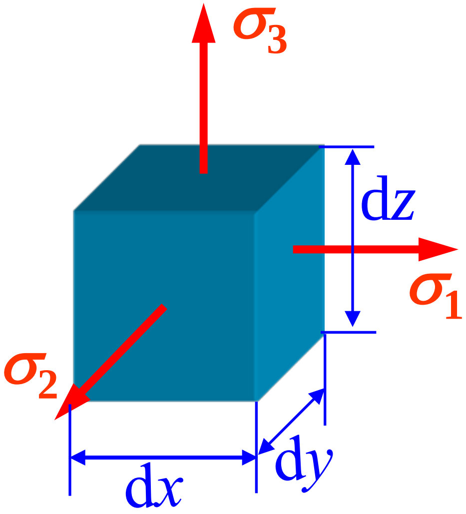
$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z)$$

$$+\frac{1}{2}(\tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$



二、体积改变能密度和形状改变能密度

体应变的定义



$$V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$V_1 = (1+\varepsilon_1)\mathrm{d}x(1+\varepsilon_2)\mathrm{d}y(1+\varepsilon_3)\mathrm{d}z$$

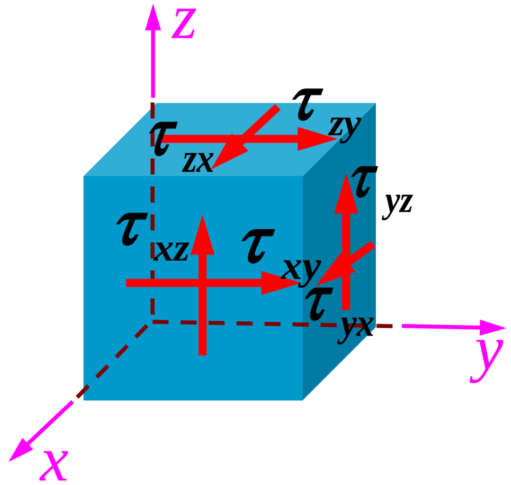
$$\approx (1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

体应变（volume strain）：

$$\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

只有切应力作用情形，是否会产生体应变？

此时不产生体积改变，但会发生形状改变！



体应变：

$$\theta=\frac{V_1-V}{V}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

$$\begin{cases}\varepsilon_1=\frac{1}{E}\left[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)\right]\\ \varepsilon_2=\frac{1}{E}\left[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)\right]\\ \varepsilon_3=\frac{1}{E}\left[\sigma_3-\mu(\sigma_2+\sigma_1)\right]\end{cases}$$

利用广义胡克定律，

各向同性材料体应变与应力分量间的关系：

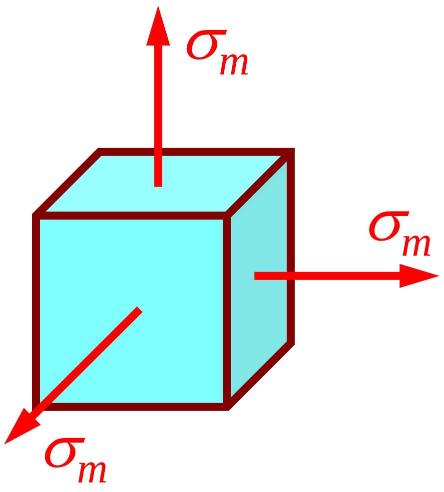
$$\theta=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

特别地：$\mu=0.5$： $\theta=0$ 称为不可压缩材料

各向同性材料，体应变与切应力无关！

为了剖析应变能同体积改变和形状改变的关系，引入平均应力（三个主应力的平均值）

$$\sigma_m = \tfrac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$



在平均应力作用下，单元体的形状不变，仅发生体积改变

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 3(1-2\mu)\frac{\sigma_m}{E}$$

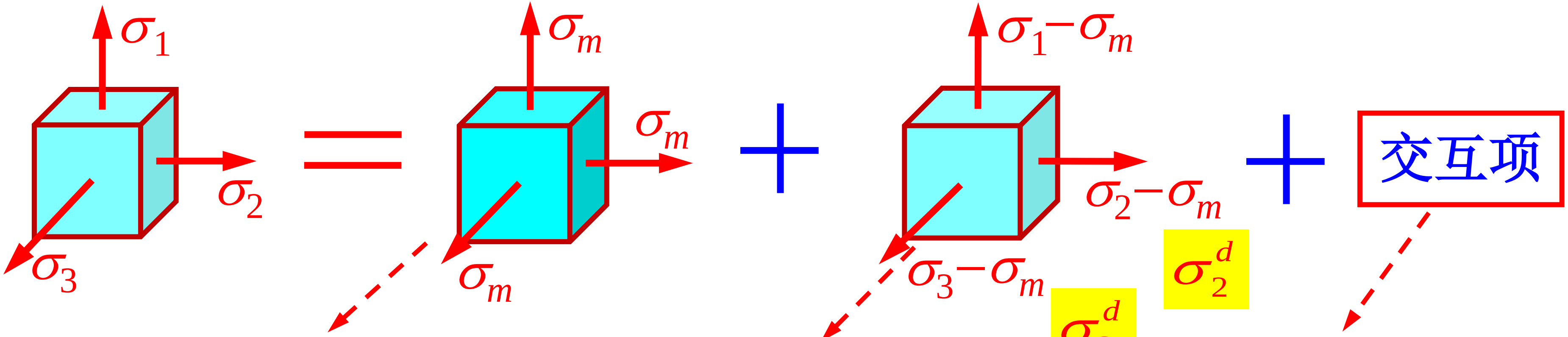
$$\theta \propto \sigma_m \qquad K = \frac{\sigma_m}{\theta} = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

体积模量

bulk modulus

当$\mu \to 0.5$，$K \to \infty$

按迭加原理（应力）



体积改变能密度

$$v_v=\frac{1}{2}(\sigma_m\varepsilon_m+\sigma_m\varepsilon_m+\sigma_m\varepsilon_m)$$

$$=\frac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m$$

形状改变能密度

（畸变能密度）

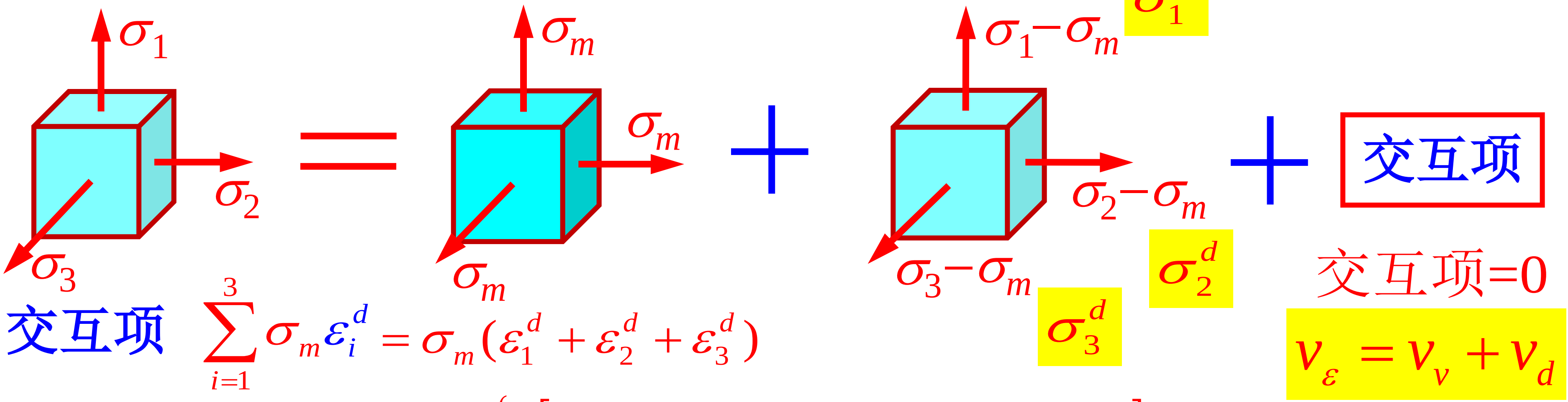
$$v_d=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^d\varepsilon_i^d$$

$=\sum_{i=1}^{3}\sigma_m\varepsilon_i^d$ 先施加 σ_m

$=\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^d\varepsilon_m$ 先施加 σ_i^d

注意:应力迭加没有交互项，应变能计算应有交互项

考察交互项：



交互项 $$\sum_{i=1}^{3}\sigma_m\varepsilon_i^d = \sigma_m(\varepsilon_1^d+\varepsilon_2^d+\varepsilon_3^d)$$

$$=\sigma_m\times\Big\{\tfrac{1}{E}[(\sigma_1-\sigma_m)-\mu[(\sigma_2-\sigma_m)+(\sigma_3-\sigma_m)]]$$

$$+\tfrac{1}{E}[(\sigma_2-\sigma_m)-\mu[(\sigma_3-\sigma_m)+(\sigma_1-\sigma_m)]]$$

$$+\tfrac{1}{E}[(\sigma_3-\sigma_m)-\mu[(\sigma_1-\sigma_m)+(\sigma_2-\sigma_m)]]\Big\}$$

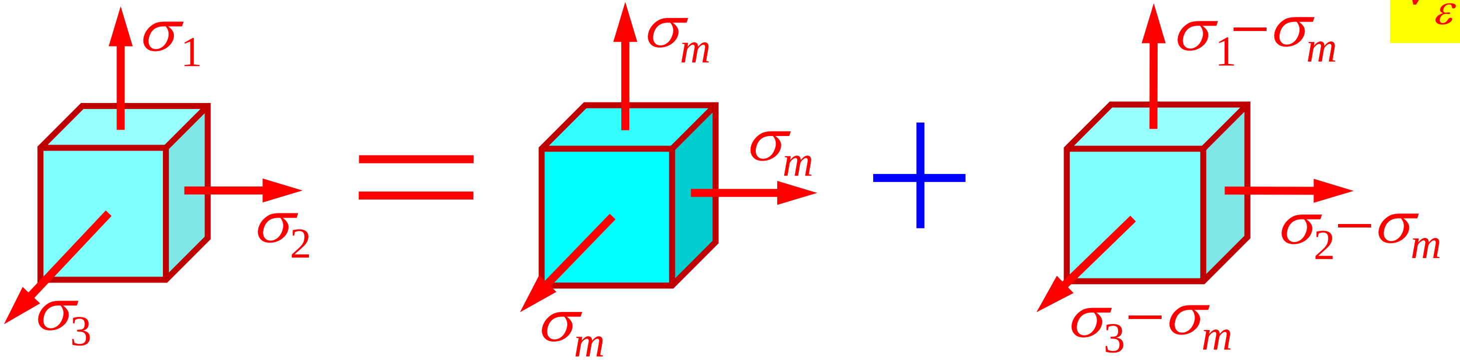
$$=\sigma_m\times\tfrac{1}{E}\{[(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)-3\sigma_m]-2\mu[(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)-3\sigma_m]\}=0$$

另一种方式计算交互项 $$=\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^d\varepsilon_m = \varepsilon_m\times[(\sigma_1-\sigma_m)+(\sigma_2-\sigma_m)+(\sigma_3-\sigma_m)]$$

$$=\varepsilon_m\times[(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)-3\sigma_m]=0$$

体积改变能密度和畸变能密度的具体表达式

$$v_\varepsilon = v_v + v_d$$



$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

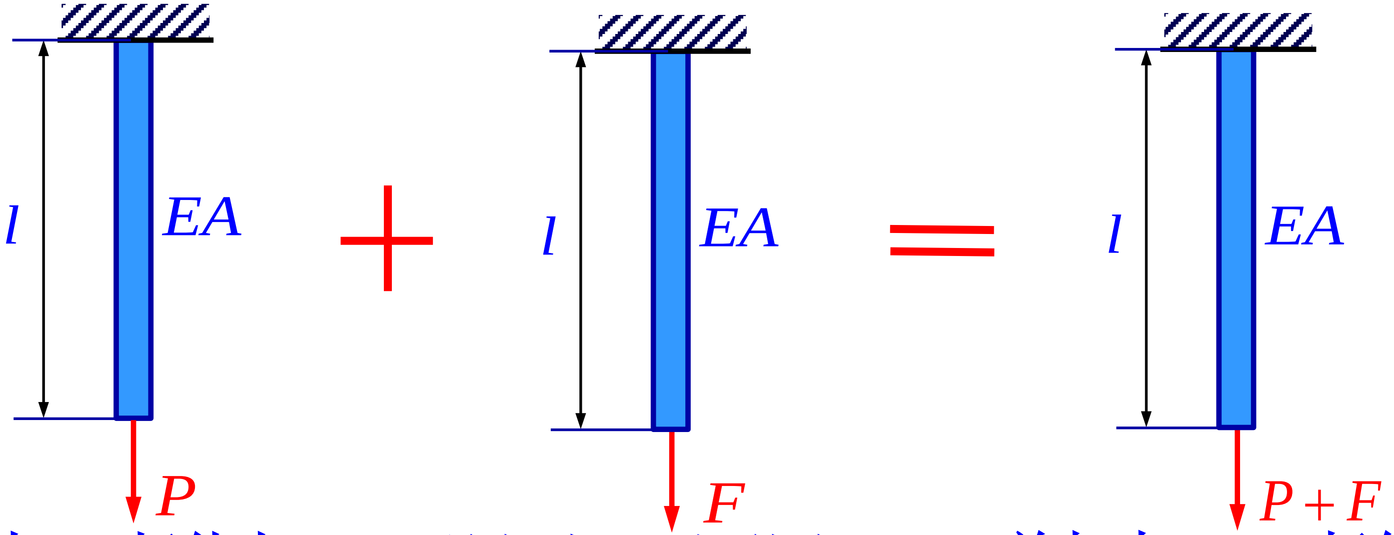
$$v_v = \frac{1}{2}\sigma_m\varepsilon_m \times 3 = \frac{3}{2}\times\frac{1-2\mu}{E}\sigma_m^2 = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3), \quad \varepsilon_m = \frac{1}{E}[\sigma_m - \mu(\sigma_m+\sigma_m)] = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_m}$$

$$v_d = v_\varepsilon - v_v = \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3\right)$$

$$= \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

关于应变能交互项的理解



施加力P，杆件内积蓄的应变能为

$$V_{\varepsilon,P}=\tfrac{1}{2}P\cdot\Delta l_P$$

$$=\frac{1}{2}P\cdot\frac{Pl}{EA}=\frac{P^2l}{2EA}$$

施加力F，杆件内积蓄的应变能为

$$V_{\varepsilon,F}=\tfrac{1}{2}F\cdot\Delta l_F$$

$$=\frac{1}{2}F\cdot\frac{Fl}{EA}=\frac{F^2l}{2EA}$$

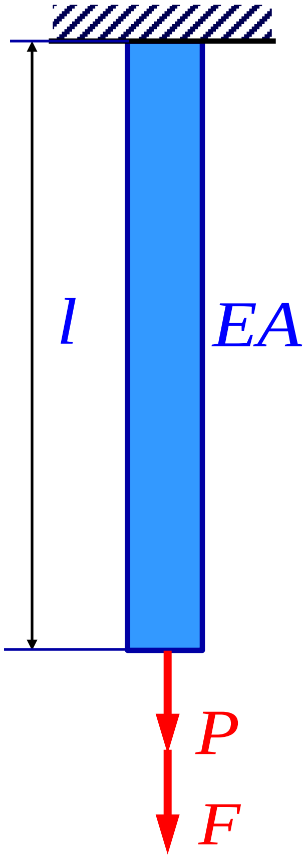
施加力$P+F$，杆件内积蓄的应变能为

$$V_{\varepsilon,P+F}=\tfrac{1}{2}(P+F)\cdot(\Delta l)_{P+F}$$

$$=\frac{1}{2}(P+F)\cdot\frac{(P+F)l}{EA}=\frac{(P+F)^2l}{2EA}$$

显然 $V_{\varepsilon,P}+V_{\varepsilon,F}\neq V_{\varepsilon,P+F}$ 。 可见，通常交互项不为零！

关于应变能交互项的理解（续）



$$V_{\varepsilon,P+F}=\frac{(P+F)^2 l}{2EA}=\boxed{\frac{P^2 l}{2EA}}+\boxed{\frac{F^2 l}{2EA}}+\boxed{\frac{PFl}{EA}}$$

$$V_{\varepsilon,P}=\frac{P^2 l}{2EA}$$

$$V_{\varepsilon,F}=\frac{F^2 l}{2EA}$$

交互项

交互项

先施加力P，杆件伸长了 $\Delta l_P=\dfrac{Pl}{EA}$

再施加力F，杆件又进一步伸长了 $\Delta l_F=\dfrac{Fl}{EA}$

此时由于力P已预先作用在杆件上，因此由于杆件的进一步伸长，力P 将继续做功

$$W_P=P\cdot\Delta l_F=\frac{PFl}{EA}$$

小 结

应变能密度 $v_{\varepsilon} = v_{v} + v_{d}$

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\right)\right]$$

体积改变能密度

$$v_{v} = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

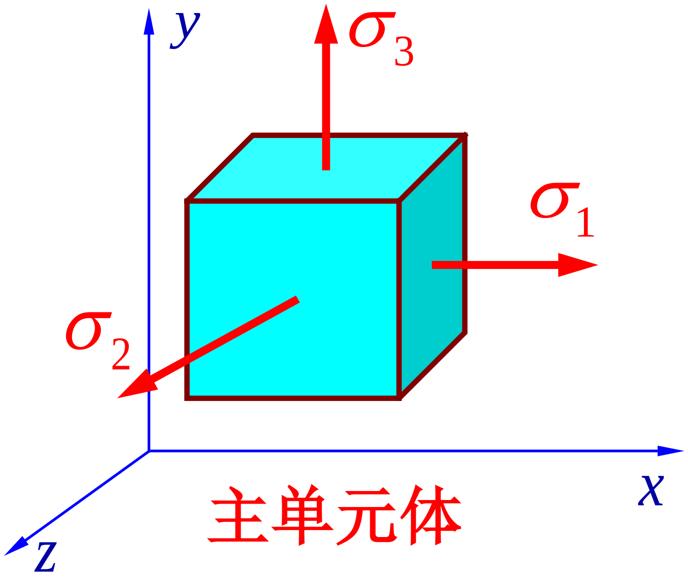
畸变能密度

$$v_{d} = \frac{1+\mu}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]$$

§ 7.10 强度理论概述

为何要建立强度条件？ ⟶ 强度理论

逐一由试验建立失效判据的不可能性（试验的工作量太大）



主单元体

$\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$ 有无穷多个比例值

不可能一一做出实验

最好希望：依据单向拉压的强度标准提出一个准则

强度理论：基于“构件发生失效的现象”，**假设**是由于某一因素引起的，且引起失效的原因与应力状态无关。

建立强度理论的思路

1. 简单实验定标准值—拉伸实验得许用应力
2. 从某个**失效形态**引出失效准则
3. 从**失效准则**导出强度理论的具体公式

一、失效形态（ Failure form pattern ）

脆性材料（铸铁、石料、陶瓷）—**脆性断裂**

塑性材料（钢、铜、铝、聚合材料）—**塑性屈服**

二、失效准则 （ Failure criteria ）

材料发生脆性断裂或塑性屈服的具体原因

四种强度理论

早在十七世纪，当时的生产水平很低，工程上主要使用铸铁和砖石等脆性材料，人们根据这些材料的破坏规律提出了关于脆性断裂的强度理论，主要是最大拉应力理论和最大拉应变理论。

进入十九世纪中期，随着生产的发展，铁路和桥梁的不断修建，大量使用钢材等塑性材料，从而根据这些材料的破坏规律提出了塑性屈服的强度理论，进而有莫尔强度理论和双剪应力强度理论等。

这里按历史发展顺序介绍几个工程上常用的强度理论。

§ 7.11 四种常用强度理论

1. 最大拉应力理论（第一强度理论）

Galileo 1638年提出

考虑的是砖石(铸铁)强度的问题。

《失效准则》

最大拉应力 σ_1 是引起材料断裂的原因。

具体说：无论处于什么应力状态，只要构件内一点处的最大拉应力达到了材料的极限应力（单向拉伸的强度极限），就会发生断裂破坏。

脆性断裂的判据（或极限条件） $\sigma_1 = \sigma_u$

强度条件 $\sigma_1 \le [\sigma]$

《应用评价》

二向：当 $\sigma_1 \ge \sigma_2 > 0$ 该理论与实验基本一致

三向：当 $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3 > 0$ 同上

当主应力中有压应力时，若 $|\sigma_3| < \sigma_1$ 同上

当主应力中有压应力时，若 $|\sigma_3| > \sigma_1$ 误差较大

三向压应力不适用。

2. 最大伸长线应变理论（第二强度理论）

1682年，E. Mariotte 提出

《失效准则》

最大伸长线应变 ε_1 是引起材料断裂的原因

具体说： 无论处于什么应力状态，只要构件内一点处的最大线应变达到了极限值（单向拉伸的应变极限）， 就发生断裂破坏 。

脆性断裂的判据（或极限条件） $\varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_u}{E}$

即 $\dfrac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} = \dfrac{\sigma_u}{E}$ 或 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_u$

强度条件 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]$

《应用评价》

主应力有压应力时，当 $|\sigma_3| > \sigma_1$，理论接近实验但不完全符合。

其它情况下，不如第一强度理论。

《讨论》

除了 σ_1，还有 σ_1, σ_2 的参与，似乎更有理，但与实验结果不是非常吻合。理论的正确与否应经实验验证。

3. 最大切应力理论（第三强度理论）—Tresca准则

1868年，Henri Tresca 给出

《失效准则》

最大切应力是引起材料塑性屈服的原因。

具体说：不管在什么应力状态下，只要构件内一点处的最大切应力达到了材料屈服时的极限值（单向拉伸情形屈服时的切应力），就发生屈服。

屈服判据（或极限条件） $\tau_{\max} = \tau_u = \dfrac{\sigma_s}{2}$

即 $\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \dfrac{\sigma_s}{2}$ 或 $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$

强度条件 $\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$

《应用评价》

实验表明：理论偏于安全，差异有时达15%

原因：未考虑 σ_2 的影响。

4. 畸变能密度理论(第四强度理论)－Mises准则

1913年 R. von Mises 提出该理论

《失效准则》

形状改变能密度是引起材料塑性屈服的原因

具体说：不管在什么应力状态下，只要构件内一点处的形状改变能密度达到材料的极限值（单向拉伸情形屈服时的形状改变能密度），就发生屈服。

屈服判据（或极限条件） $v_{\mathrm{d}}=v_{\mathrm{du}}$

屈服判据（或极限条件） $v_{\mathrm{d}} = v_{\mathrm{du}}$

单向拉伸

$\sigma_1 = \sigma_s$

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

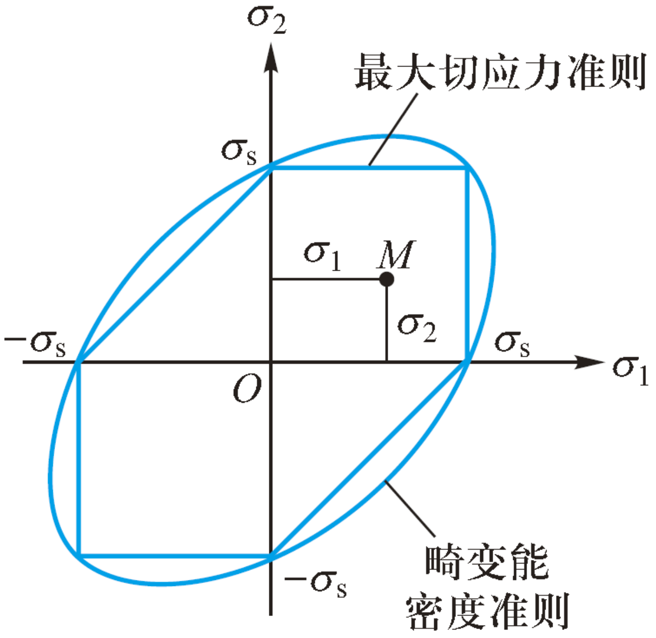
$$v_{\mathrm{d}} = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

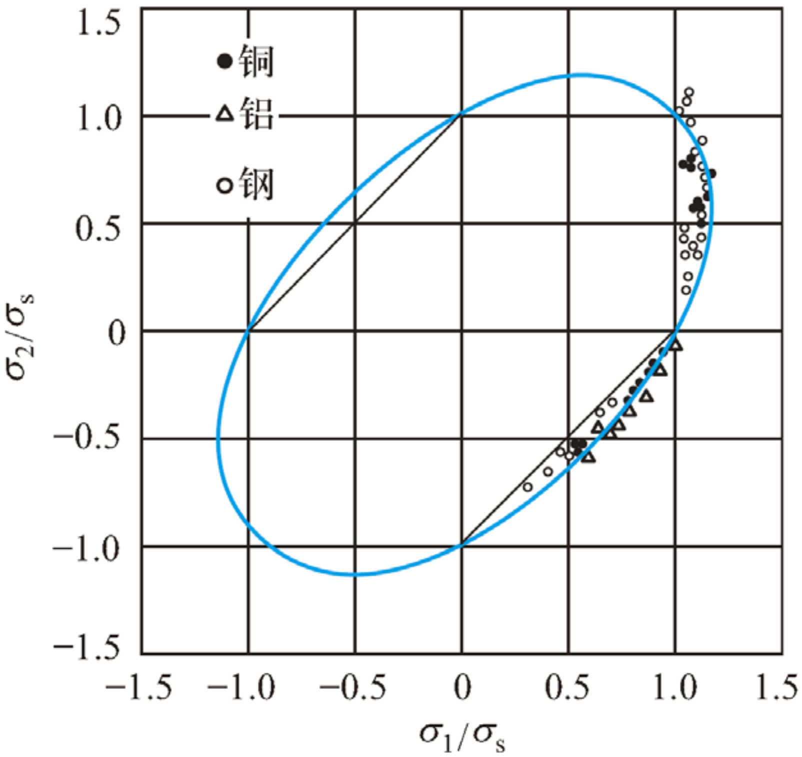
$$v_{\mathrm{du}} = \frac{1+\mu}{6E}(\sigma_s{}^2+0^2+\sigma_s{}^2) = \frac{1+\mu}{6E}\cdot 2\sigma_s{}^2$$

则有 $\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} = \sigma_s$

强度条件 $\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} \le [\sigma]$

《评价》





几种塑性材料钢、铜、铝的薄管试验资料表明， 最大畸变能密度屈服准则与试验资料相当吻合，比第三强度理论更为符合试验结果。

5. 莫尔强度理论

是以各种应力状态下材料的破坏试验结果为依据，建立起来的带有一定经验性的强度理论。

主要用于材料在单轴拉伸和单轴压缩时强度明显不等的材料，例如铸铁、土。

6. 双剪强度理论

俞茂宏（中国）

“双剪统一强度理论及其应用” 2011年国家自然科学奖二等奖

三个主切应力 $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$. 只有两个是独立的 $\tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23}$

最大切应力理论（第三强度理论）—单剪应力强度理论

Mao-hong Yu, Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century, Appl. Mech. Rev., 2002, 55(3): 169-218.

俞茂宏, 强度理论百年总结, 力学进展, 2004, 34(4): 529-560（32页）【译自AMR】

二、相当应力（强度准则的统一形式）

$\sigma_r \le [\sigma]$　　σ_r —相当应力(equivalent stress)

在材料破坏或失效方面，与复杂应力状态应力相等效的单向应力！

$$
\begin{cases}
\sigma_{r1} = \sigma_1 \\
\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \\
\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \\
\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}
\end{cases}
$$

$$[\sigma] = \frac{1}{n}\{\sigma_b, \sigma_{0.2}, \sigma_s\}$$

强度理论应用于确定许用切应力

在纯剪应力状态下，有强度条件：

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

通常较难查到该数据！

可运用强度理论计算获得。

若采用第四强度理论：

$$\sigma_1 = \tau_{\max}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau_{\max}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$= \sqrt{3}\tau_{\max} \leq [\sigma] \Rightarrow \tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \Rightarrow [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

若采用第三强度理论：

$$\sigma_1 = \tau_{\max}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau_{\max}$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\max} \le [\sigma]$$

$$\tau_{\max} \le \frac{[\sigma]}{2} \qquad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

保守

$$\boxed{[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0.577[\sigma]} \qquad \boxed{[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = 0.5[\sigma]}$$

按第四强度理论　　　　按第三强度理论

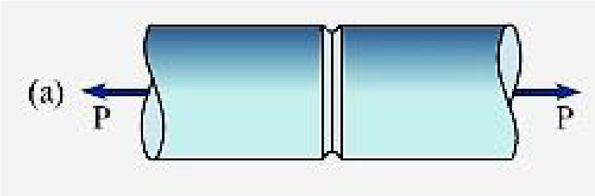
现行钢结构设计规范中，基本上是按照 $[\tau] = \dfrac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$ 来规定许用切应力的。

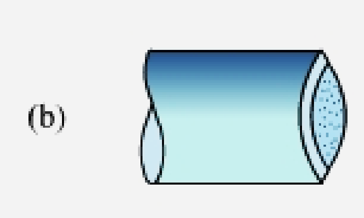
各种强度理论的应用

实验表明：材料的破坏（或失效）不仅取决于材料是塑性材料或脆性材料，而且与其所处的应力状态（是否含有裂纹）、温度（高温）和加载速度（冲击荷载）等因素有关。

强度理论的选用原则：依破坏形式而定

低碳钢圆截面试件，在单向拉伸时会发生显著的屈服现象。





若在圆试件中部切出一个尖锐环形深切槽（图a所示）。

试验表明：直到拉断都看不到显著的屈服现象和塑性变形，而是在最弱部位发生脆断。其断口平齐，与铸铁拉伸断口相似（图b）。

像大理石这类脆性材料，对圆柱形试件施加轴向压力的同时，在圆柱形试件的表面施加径向压力，且保持径向压力小于轴向压力。试验表明，大理石试样也会发生显著的塑性变形，从原来的圆柱形变为腰鼓形，像低碳钢试件压缩一样。

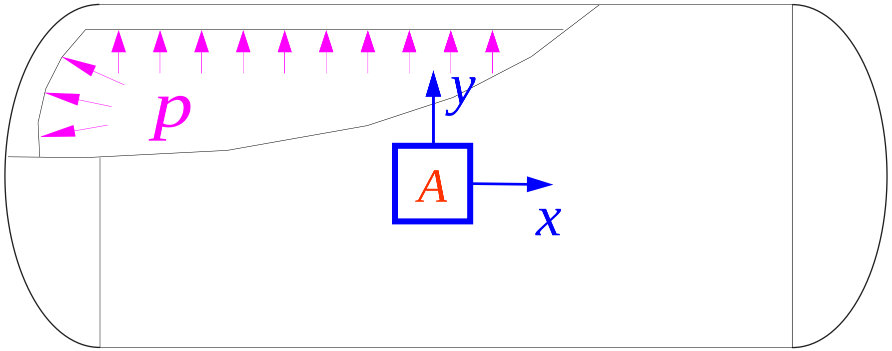
各种强度理论的适用范围简要归纳如下：

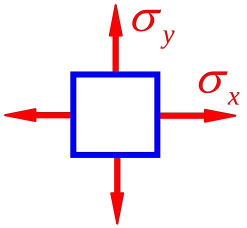
1. 不论是脆性还是塑性材料，在三向拉应力相近的情况下，都将以断裂的形式失效，宜采用最大拉应力理论。
2. 不论是脆性还是塑性材料，在三向压应力相近的情况下，通常都会引起塑性变形，宜采用第三或第四强度理论。
3. 通常来讲，对于脆性材料，宜采用第一或第二强度理论；对于塑性材料，宜采用第三或第四强度理论。

强度校核的基本步骤

1. 外力分析：载荷分析（化简），静定还是超静问题。
2. 内力分析：计算内力，确定危险截面；
3. 应力分析：确定危险点，画出单元体并确定各应力分量，求主应力；
4. 强度分析：选择适当的强度理论，计算相当应力，进行强度校核。

例1　两端封闭的薄壁钢圆筒受最大内压时，测得A点轴向应变$\varepsilon_x=188\times10^{-6}$，环向应变$\varepsilon_y=737\times10^{-6}$，用第三强度理论校核其强度。（ $E=210\text{GPa}$, $[\sigma]=200\text{MPa}$, $\mu=0.3$ ）





解：画A点单元体及各面上的应力

由广义虎克定律得，

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)$$

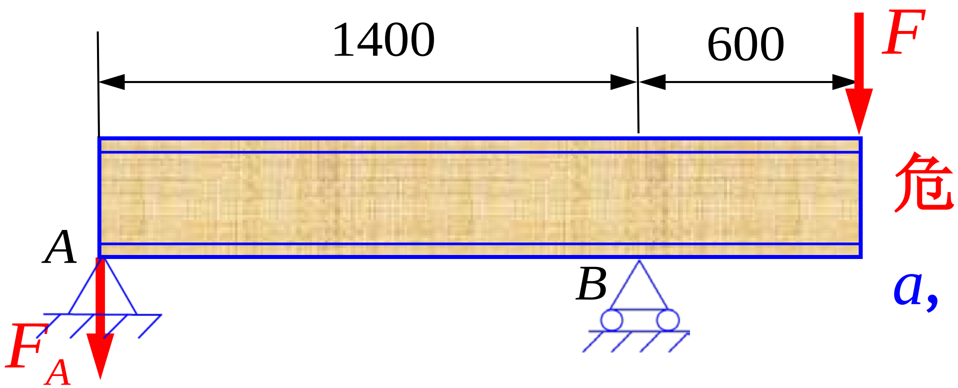
$$\sigma_x=\frac{210\times10^9}{1-0.3^2}\times(188+0.3\times737)\times10^{-6}=94.4\text{MPa}$$

$$\sigma_y=\frac{210\times10^9}{1-0.3^2}\times(737+0.3\times188)\times10^{-6}=183.1\text{MPa}$$

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=183.1\text{MPa}<[\sigma]=200\text{MPa}$$

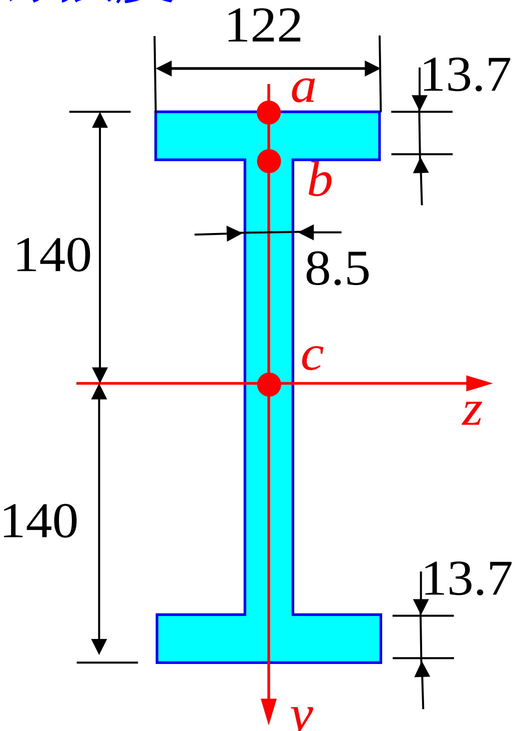
此容器满足第三强度理论的强度条件。

例2 图示焊接外伸钢梁，右端受竖直向下的载荷F=130kN。已知许用应力[σ]=170MPa，截面尺寸如图所示，惯性矩$I_z=7.07\times10^{-5}\mathrm{m}^4$，试用第四强度理论校核该梁的强度。



危险点：

a, b, c 三点



单位：mm

解：求支座约束力

$$F_A=\frac{600}{1400}F=55.71\,\mathrm{kN}$$

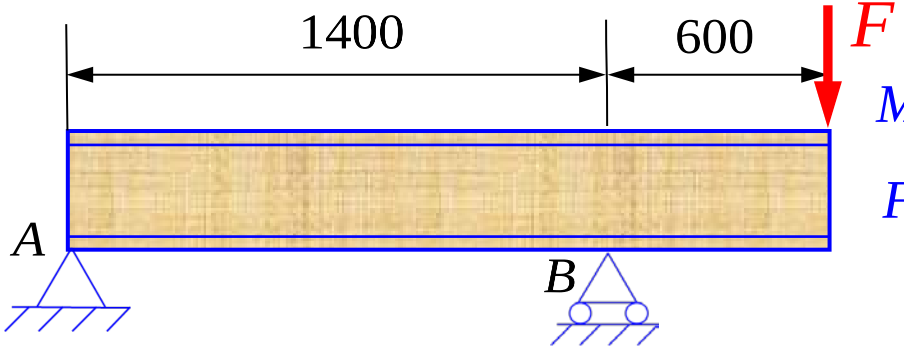
危险截面：B支座处的右截面

$$M_B=78.0\,\mathrm{kN\cdot m}$$

（上部受拉）

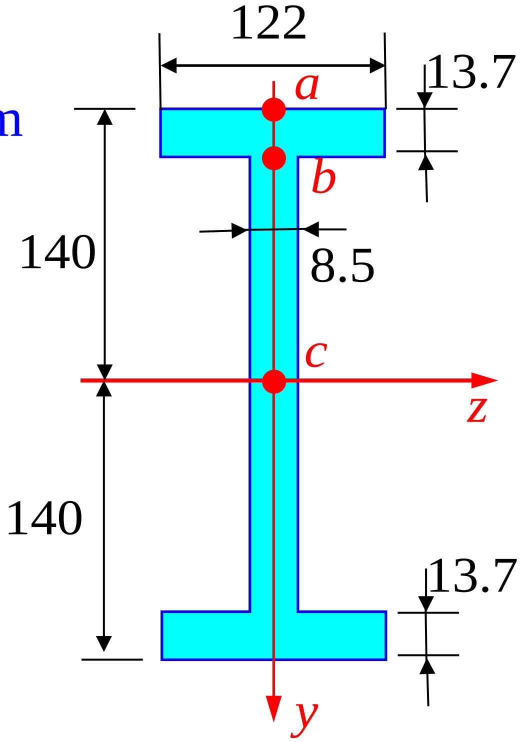
$$F_{sB}=130.0\,\mathrm{kN}$$

（方向向下）

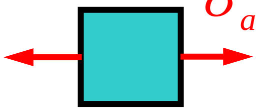


$M_B = 78.0\ \mathrm{kN \cdot m}$

$F_{sB} = 130.0\ \mathrm{kN}$



1. a点(单轴拉伸应力状态)：

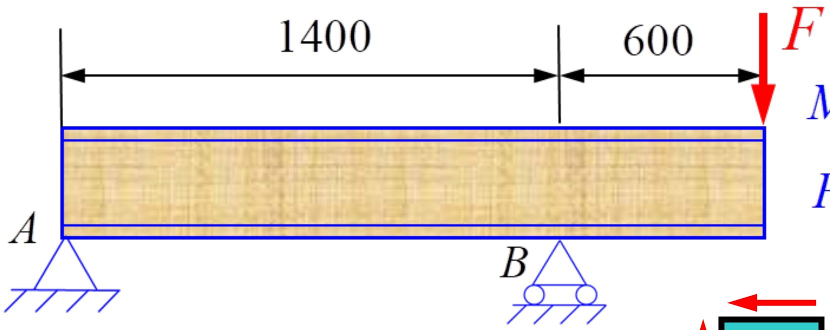


$$\sigma_a = \frac{M_B y_a}{I_z} = \frac{78\times10^3 \times 140\times10^{-3}}{7.07\times10^{-5}} = 154.4\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_1 = 154.4\ \mathrm{MPa},\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = 0$$

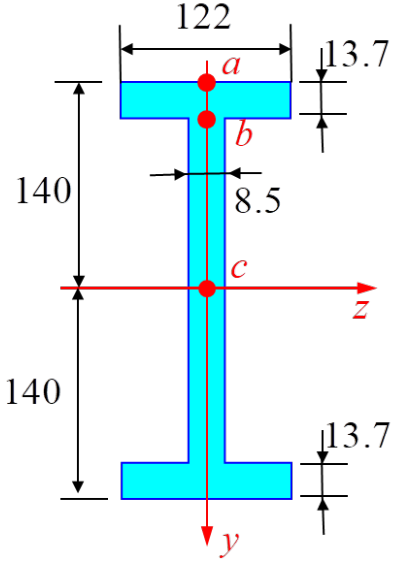
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}$$

$$= \sigma_1 = 154.4\ \mathrm{MPa} < [\sigma] = 170\ \mathrm{MPa}$$ a点安全！

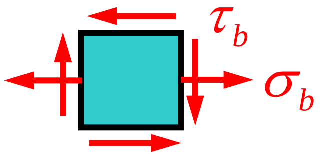


$M_B = 78.0\ \text{kN}\cdot\text{m}$

$F_{sB} = 130.0\ \text{kN}$



2. b点（二向应力状态）：



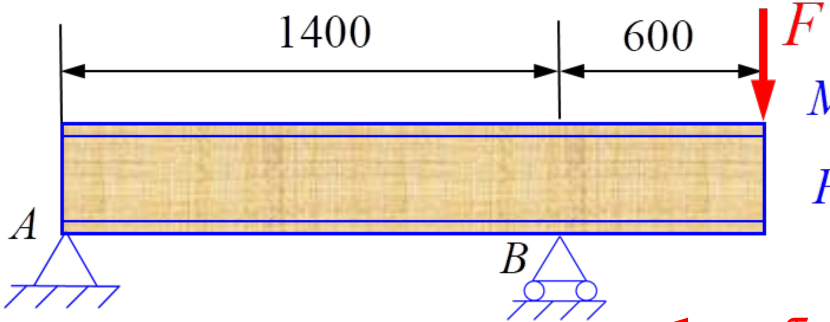
$$\sigma_b = \frac{M_B y_b}{I_z} = \frac{78\times10^3\times126.3\times10^{-3}}{7.07\times10^{-5}} = 139.3\ \text{MPa}$$

$$\tau_b = \frac{F_{sB} S_{zb}}{I_z t_{\text{腹板}}} = \frac{130\times10^3\times2.225\times10^{-4}}{7.07\times10^{-5}\times8.5\times10^{-3}} = 48.1\ \text{MPa}$$

$$\sigma_1 = \tfrac{\sigma_b}{2} + \sqrt{(\tfrac{\sigma_b}{2})^2 + \tau_b^2} = 154.3\ \text{MPa},\ \ \sigma_2 = 0,\ \ \sigma_3 = \tfrac{\sigma_b}{2} - \sqrt{(\tfrac{\sigma_b}{2})^2 + \tau_b^2} = -15.0\ \text{MPa}$$

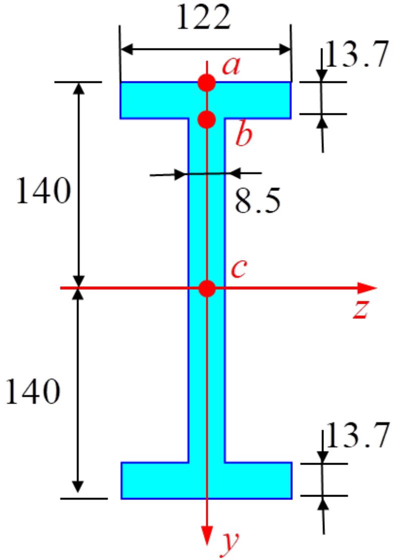
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2]} = 162.3\ \text{MPa} < [\sigma] = 170\ \text{MPa}$$

b点安全！

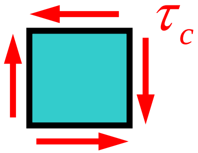


$M_B = 78.0\ \mathrm{kN \cdot m}$

$F_{sB} = 130.0\ \mathrm{kN}$



3. c点(纯剪切应力状态)：



$$\tau_c = \frac{F_{sB} S_{z,\max}}{I_z t_{腹板}} = \frac{130\times10^3 \times 2.90\times10^{-4}}{7.07\times10^{-5}\times8.5\times10^{-3}} = 62.8\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_1 = \tau_c = 62.8\ \mathrm{MPa},\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = -\tau_c = -62.8\ \mathrm{MPa}$$

c点安全！

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]} = \sqrt{3}\tau_c = 108.7\ \mathrm{MPa} < [\sigma] = 170\ \mathrm{MPa}$$

综上，该梁的强度满足第四强度理论的强度条件！

谢谢各位！

作业　P280-281：7.37、7.40、7.41

对应第6版的题号 P273：7.36、7.39、7.40

下次课　第八章 组合变形