第一题

1.1 现规则

枚举

先罚进球	后罚进球	概率
0	0	$(1-p)^2(1-q)^2$
0	1	$2(1-p)^2q(1-q)$
0	1	$(1-p)^2q^2$
0	2	$(1-p)^2q^2$
1	0	$2p(1-p)(1-q)^2$
1	1	$4p(1-p)q(1-q)$
1	2	$2p(1-p)q^2$
2	0	$p^2(1-q)^2$
2	1	$2p^2q(1-q)$
2	2	p^2q^2

表 1: 两轮顺序相同

所以

1.先罚获胜的概率为：

$$P_{\text{现-先罚胜}} = 2p(1-p)(1-q)^2 + p^2(1-q)^2 + 2p^2q(1-q)$$

2.后罚获胜的概率为：

$$P_{\text{现-后罚胜}} = 2(1-p)^2q(1-q) + (1-p)^2q^2 + 2p(1-p)q^2$$

3.双方进球数相同的概率为：

$$P_{\text{现-平局}} = (1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + p^2q^2$$

1.2 新规则

如果先罚队伍在第二轮仍然先罚进球，那么新规则和现规则的结果是一样的。所以我们只考虑先罚队伍先罚不进球的情况。

先罚进球	后罚进球	概率
0	0	$(1-p)^2(1-q)^2$
0	1	$(1-p)^2q(1-q)+p(1-p)(1-q)^2$
0	2	$p(1-p)q(1-q)$
1	0	$(1-p)^2q(1-q)+p(1-p)(1-q)^2$
1	1	$p^2(1-q)^2+2p(1-p)q(1-q)+(1-p)^2q^2$
1	2	$p(1-p)q^2+p^2q(1-q)$
2	0	$p(1-p)q(1-q)$
2	1	$p(1-p)q^2+p^2q(1-q)$
2	2	p^2q^2

表 2: 两轮顺序不相同

所以，顺序不相同时1.先罚获胜的概率为：

2.后罚获胜的概率为：

$$P_{\text{不同-先罚胜}} = (1-p)^2q(1-q)+p(1-p)(1-q)^2+p(1-p)q(1-q)+p(1-p)q^2+p^2q(1-q)$$

$$P_{\text{不同-后罚胜}} = (1-p)^2q(1-q)+p(1-p)(1-q)^2+p(1-p)q(1-q)+p(1-p)q^2+p^2q(1-q)$$

3.双方进球数相同的概率为：

$$P_{\text{不同，平局}} = (1-p)^2(1-q)^2+p^2(1-q)^2+2p(1-p)q(1-q)+(1-p)^2q^2+p^2q^2$$

所以，新规则下

1.先罚获胜的概率为：

$$\begin{aligned}P_{\text{解}-\text{先罚胜}} &= \frac{1}{2}(P_{\text{现-先罚胜}}+P_{\text{不同-先罚胜}})\\ &= \frac{1}{2}[2p(1-p)(1-q)^2+p^2(1-q)^2+2p^2q(1-q)\\ &+(1-p)^2q(1-q)+p(1-p)(1-q)^2+p(1-p)q(1-q)+p(1-p)q^2+p^2q(1-q)]\\ &= \frac{1}{2}[p^2(1-q)^2+3p^2q(1-q)+p(1-p)q^2+(1-p)^2q(1-q)+3p(1-p)(1-q)^2\\ &+p(1-p)q(1-q)]\end{aligned}$$

2.后罚获胜的概率为：

$$\begin{aligned}P_{\text{斯}-\text{后罚性}} &= \frac{1}{2}(P_{\text{现}-\text{后罚胜}}+P_{\text{不同}-\text{后罚胜}})\\ &= \frac{1}{2}[2(1-p)^2q(1-q)+(1-p)^2q^2+2p(1-p)q^2\\ &+(1-p)^2q(1-q)+p(1-p)(1-q)^2+p(1-p)q(1-q)+p(1-p)q^2+p^2q(1-q)]\\ &= \frac{1}{2}[(1-p)^2q^2+3p(1-p)q^2+p^2q(1-q)+p(1-p)(1-q)^2+p(1-p)q(1-q)+3(1-p)^2q(1-q)]\end{aligned}$$

3.双方进球数相同的概率为：

$$
\begin{aligned}
P_{期-平同} &= \frac{1}{2}(P_{现-平局} + P_{不同-平局}) \\
&= \frac{1}{2}[(1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + p^2q^2 \\
&+ (1-p)^2(1-q)^2 + p^2(1-q)^2 + 2p(1-p)q(1-q) + (1-p)^2q^2 + p^2q^2] \\
&= \frac{1}{2}[2(1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + 2p^2q^2 + p^2(1-q)^2 + 2p(1-p)q(1-q) + (1-p)^2q^2]
\end{aligned}
$$

1.3 综上

1. 现规则:

(a) 先罚获胜的概率为:

$$P_{现\text{-}先罚胜} = 2p(1-p)(1-q)^2 + p^2(1-q)^2 + 2p^2q(1-q)$$

(b) 后罚获胜的概率为:

$$P_{现\text{-}后罚胜} = 2(1-p)^2q(1-q) + (1-p)^2q^2 + 2p(1-p)q^2$$

(c) 双方进球数相同的概率为:

$$P_{现\text{-}平局} = (1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + p^2q^2$$

2. 新规则:

(a) 先罚获胜的概率为:

$$
\begin{aligned}
P_{新\text{-}先罚胜} = \frac{1}{2}[&p^2(1-q)^2 + 3p^2q(1-q) + p(1-p)q^2 + (1-p)^2q(1-q) \\
&+ 3p(1-p)(1-q)^2 + p(1-p)q(1-q)]
\end{aligned}
$$

(b) 后罚获胜的概率为:

$$
\begin{aligned}
P_{新\text{-}后罚胜} = \frac{1}{2}[&(1-p)^2q^2 + 3p(1-p)q^2 + p^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2 \\
&+ p(1-p)q(1-q) + 3(1-p)^2q(1-q)]
\end{aligned}
$$

(c) 双方进球数相同的概率为:

$$
\begin{aligned}
P_{新\text{-}平局} = \frac{1}{2}[&2(1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + 2p^2q^2 \\
&+ p^2(1-q)^2 + 2p(1-p)q(1-q) + (1-p)^2q^2]
\end{aligned}
$$

1.4 具体结果

当$p = \frac{3}{4}, q = \frac{2}{3}$时，我们可以得到如下的结果:
1.现规则:

(a) 先罚获胜的概率为:

$$
\begin{aligned}
P_{\text{现-先罚胜}} &= 2p(1-p)(1-q)^2 + p^2(1-q)^2 + 2p^2q(1-q) \\
&= \frac{2\times3\times1\times1^2+3^2\times1^2+2\times3^2\times2\times1}{4^2\times3^2} \\
&= \frac{51}{144}
\end{aligned}
$$

(b) 后罚获胜的概率为:

$$
\begin{aligned}
P_{\text{现一后罚胜}} &= 2(1-p)^2q(1-q) + (1-p)^2q^2 + 2p(1-p)q^2 \\
&= \frac{2\times1^2\times2\times1+1^2\times2^2+2\times3\times1\times2^2}{4^2\times3^2} \\
&= \frac{32}{144}
\end{aligned}
$$

(c)双方进球数相同的概率为:

$$
\begin{aligned}
P_{\text{现一平局}} &= (1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + p^2q^2 \\
&= \frac{1^2\times1^2+4\times3\times1\times2\times1+3^2\times2^2}{4^2\times3^2} \\
&= \frac{61}{144}
\end{aligned}
$$

2. 新规则:

(a) 先罚获胜的概率为:

$$
\begin{aligned}
P_{\text{斯}-\text{先罚胜}} &= \frac{1}{2}[p^2(1-q)^2 + 3p^2q(1-q) + p(1-p)q^2 + (1-p)^2q(1-q) \\
&+ 3p(1-p)(1-q)^2 + p(1-p)q(1-q)] \\
&= \frac{3^2\times1^2+3\times3^2\times2\times1+3\times1\times2^2+1^2\times2\times1+3\times3\times1\times1^2+3\times2\times1}{2\times4^2\times3^2} \\
&= \frac{92}{288}
\end{aligned}
$$

(b) 后罚获胜的概率为:

$$
\begin{aligned}
P_{\text{新}-\text{后罚胜}} &= \frac{1}{2}[(1-p)^2q^2 + 3p(1-p)q^2 + p^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2 \\
&+ p(1-p)q(1-q) + 3(1-p)^2q(1-q)] \\
&= \frac{1^2\times2^2+3\times3\times1\times2^2+3^2\times2\times1+3\times1\times1^2+3\times1\times2\times1+3\times1^2\times2\times1}{2\times4^2\times3^2} \\
&= \frac{73}{288}
\end{aligned}
$$

(c) 双方进球数相同的概率为:

$$
\begin{aligned}
P_{\text{新一平局}} &= \frac{1}{2}[2(1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + 2p^2q^2 \\
&+ p^2(1-q)^2 + 2p(1-p)q(1-q) + (1-p)^2q^2] \\
&= \frac{2\times1^2\times1^2+4\times3\times1\times2\times1+2\times3^2\times2^2+3^2\times1^2+2\times3\times2\times1+1^2\times2^2}{2\times4^2\times3^2} \\
&= \frac{123}{288}
\end{aligned}
$$

2.1 现规则

第一轮的可能性有：
第一轮

胜 败 下一轮

对加赛第一轮先罚球队，第一轮胜的概率为$p(1-q)$,第一轮败的概率为$(1-p)q$,第一轮平局的概率为$(1-p)(1-q)+pq=1-p-q+2pq$。所以加赛第一轮先罚球队获胜的概率为：

$$P_{\text{现-加赛先罚胜}}=p(1-q)+(1-p-q+2pq)P_{\text{现-加赛先罚胜}}$$

解得

$$P_{\text{现-加赛先罚胜}}=\frac{p(1-q)}{p+q-2pq}$$

同理，加赛第一轮后罚球队获胜的概率为：

$$P_{\text{现-加赛后罚胜}}=\frac{q(1-p)}{p+q-2pq}$$

2.2 新规则

加赛第一轮先罚的可能性有：

第一轮
胜 败 下一轮后罚

所以对加赛第一轮先罚球队：

$P_{\text{新-加赛先罚胜}}=p(1-q)+(1-p-q+2pq)\cdot P_{\text{新-加赛后罚胜}}$
加赛第一轮后罚的可能性有：

第一轮
胜 败 下一轮先罚
所以对加赛第一轮先罚球队：

$P_{\text{新-加赛后罚胜}}=q(1-p)+(1-p-q+2pq)\cdot P_{\text{新-加赛先罚胜}}$

解得，

$$\begin{cases}P_{\text{新-加赛先罚胜}} &= \frac{1-q+pq}{2-p-q+2pq}\\ P_{\text{新-加赛后罚胜}} &= \frac{1-p+pq}{2-p-q+2pq}\end{cases}$$

第二题

1

A 在进攻局得分的概率为$\alpha+\beta$,要到下一次 A 进攻，需要 A 和 B 都不得分，所以 A 获胜的概率为

$$P(A)=\alpha+\beta+\gamma^2P(A)$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{\alpha+\beta}{1-\gamma^2}=\frac{1-\gamma}{1-\gamma^2}=\frac{1}{1+\gamma}$$

2

A 获得比赛胜利的概率的表达式为：

$$P_{修}(A)=\alpha+\beta a+\gamma b$$

率为：$a=\beta P(A)+\gamma=\beta\frac{1}{1+\gamma}+\gamma$

3

1. A 达阵的情况下，A 获胜的概率为 1。
2. A 射门的情况下，B 达阵的概率为α,B 射门的概率为β,B 不得分的概率为γ,所以 A 获胜的概3. A 不得分的情况下，由于此时是 B 在突然死亡法中首发，所以 B 获胜的概率为$P(B)=\frac{1}{1+\gamma}$,所以 A 获胜的概率为：$b=1-P(B)=\frac{\gamma}{1+\gamma}$
   所以 A 获得比赛胜利的概率为：

$$\begin{aligned}P_{修}(A)&=\alpha+\beta a+\gamma b\\&=1-\beta-\gamma+\beta(\beta\frac{1}{1+\gamma}+\gamma)+\gamma(\frac{\gamma}{1+\gamma})\\&=1-\beta-\gamma+\beta\gamma+\frac{\beta^2+\gamma^2}{1+\gamma}\\&=\beta\gamma-\beta+\frac{1+\beta^2}{1+\gamma}\end{aligned}$$

   所以两个赛制的概率为：

$$P_{原}(A)=\frac{1}{1+\gamma}$$
$$P_{修}(A)=\beta\gamma-\beta+\frac{1+\beta^2}{1+\gamma}$$

考虑公平性，就是要考虑哪种概率可以更接近$\frac{1}{2}$。

根据实际情况，有$0<\alpha,\beta,\gamma<1$,所以显然有

$$P_{原}(A)>\frac{1}{2}$$

构造函数$f(\beta)=P_{修}(A)-\frac{1}{2}=\beta\gamma-\beta+\frac{1+\beta^2}{1+\gamma}-\frac{1}{2}$,所以：

$$f(\beta)=\frac{\beta^2+(\gamma^2-1)\beta-\frac{\gamma-1}{2}}{1+\gamma}$$

记$g(x)=\beta^2+(\gamma^2-1)\beta-\frac{\gamma-1}{2}$,由二次函数的判别式：

$$\Delta=(\gamma^2-1)^2+2(\gamma-1)=(\gamma-1)(\gamma^3+\gamma^2-\gamma+7)<0$$

所以$g(x)$恒大于 0,所以$f(\beta)$恒大于 0,所以

$$P_{修}(A)>\frac{1}{2}$$

又:

$$P_{原}-P_{修}=\beta\frac{1-\gamma^2-\beta}{1+\gamma}>\beta\frac{1-\gamma-\beta}{1+\gamma}=\beta\frac{\alpha}{1+\gamma}>0$$

所以:

$$1>P_{原}(A)>P_{修}(A)>\frac{1}{2}$$

所以新赛制更合理。