课程总复习和习题课

第31讲

考试基本信息

考试形式： 闭卷，不允许带计算器进入考场

考试题型： 选择题：每道4分，共7道，计28分
计算题：4道，计72分

考试时间： **2025年6月11日 (10:30-12:30)**

考试地点： **紫金港东1A–207**

材料力学（乙）总复习

静载荷 ⇒ 动载荷

应力、应变
单轴胡克定律
剪切胡克定律
材料力学性能

基本变形 ⇒ 组合变形

强度、刚度、稳定性

应力状态分析
解析法、应力圆
广义胡克定律
强度理论

静定问题， 超静定问题

剪切和挤压的实用计算

平面图形的几何性质

温度应力
装配应力

应力集中

能量方法

重要公式：

基本变形

- 拉压：$\sigma = \frac{F_N}{A}$　$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$　$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F_N}{EA}$
- 扭转：$\tau = \frac{T\rho}{I_p}$　$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$　$\varphi' = \frac{T}{GI_p}$　$\gamma = \frac{\tau}{G}$
- 弯曲：$\sigma = \frac{My}{I_z}$　$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$　$\tau_{\max，矩} = \frac{3}{2}\frac{F_s}{A}$　$\tau_{\max，圆} = \frac{4}{3}\frac{F_s}{A}$

$I_{z矩形} = \frac{bh^3}{12}$

$EI_z w'' = M(x)$　$\theta = w'$　$EI_z w''' = F_s(x)$

$I_{z圆} = \frac{\pi d^4}{64}$　$I_{p圆} = \frac{\pi d^4}{32}$　$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$　$\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$　$EI_z w'''' = q(x)$

反问题，确定载荷

应力状态分析

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

强度理论

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$
$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

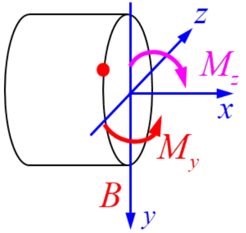
组合变形

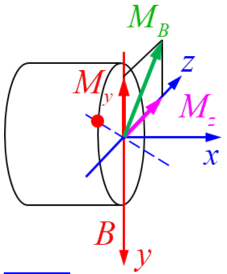
$$y_F = -\frac{i_z^2}{a_y} \qquad \sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W}$$

$$z_F = -\frac{i_y^2}{a_z} \qquad \sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W}$$

危险点应力：

$$\sigma = \frac{M_{合}}{W}$$





压杆稳定：

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

4种情形的长度系数μ

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \lambda = \frac{\mu l}{i} \qquad \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

能量方法：

$$V_\varepsilon = \int_l \frac{F_N^2(x)}{2EA}dx + \int_l \frac{T^2(x)}{2GI_p}dx + \int_l \frac{M^2(x)}{2EI}dx$$

卡氏第二定理

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon(F_1, F_2 \cdots F_n)}{\partial F_i}$$

单位载荷法

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{\bar{F}_N(x)F_N(x)}{EA}dx + \int \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI}dx + \int \frac{\bar{T}(x)T(x)}{GI_p}dx$$

动载荷： 动静法、杆件受竖向冲击和水平冲击

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \qquad K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$

交变应力：

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

试卷分析

2021–2022

第一部分 选择题（每题4分，共28分）

1. 将低碳钢杆件拉伸至断裂时，下面说法正确的是（ B ）。

   A. 杆件沿着横截面发生脆性断裂

   B. 强化阶段之后会出现明显的颈缩现象

   C. 断裂面上没有明显的塑性变形

   D. 断裂时的应力大于材料的强度极限

2. 材料不同的两根圆轴 1 和 2，其直径和长度都相同，在其截面上扭矩相同的情况下，它们的最大切应力和扭转角之间满足（ B ）。

   A. $\tau_1 = \tau_2$， $\varphi_1 = \varphi_2$ B. $\tau_1 = \tau_2$， $\varphi_1 \neq \varphi_2$

   C. $\tau_1 \neq \tau_2$， $\varphi_1 = \varphi_2$ D. $\tau_1 \neq \tau_2$， $\varphi_1 \neq \varphi_2$

3. 已知等截面直梁在某一段上的挠曲线方程为 $w(x) = x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2$，其中 L 是梁的跨度，则在该段梁上（C）。

A. 分布载荷是 x 的一次函数

B. 分布载荷是 x 的二次函数

C. 有均匀分布载荷作用

D. 无分布载荷作用

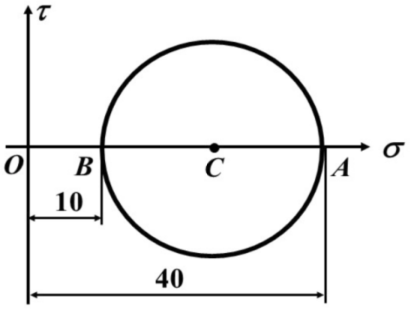
4. 图示平面应力状态单元体的应力圆，其中最大切应力为（B）。（应力单位是 MPa）

A．10

B．15

C．30

D．40



第 4 题图

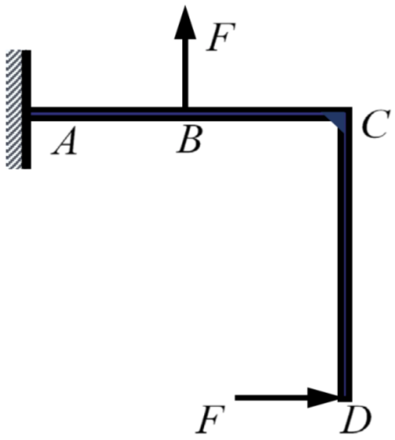
5.　平面刚架，若 U 表示刚架的应变能，则 $\partial U/\partial F$ 表示（ C ）

A.　B 点竖向向上位移

B.　D 点水平向右位移

C.　B 点竖向向上位移和 D 点水平向右位移之和

D.　以上都不对



第 5 题图

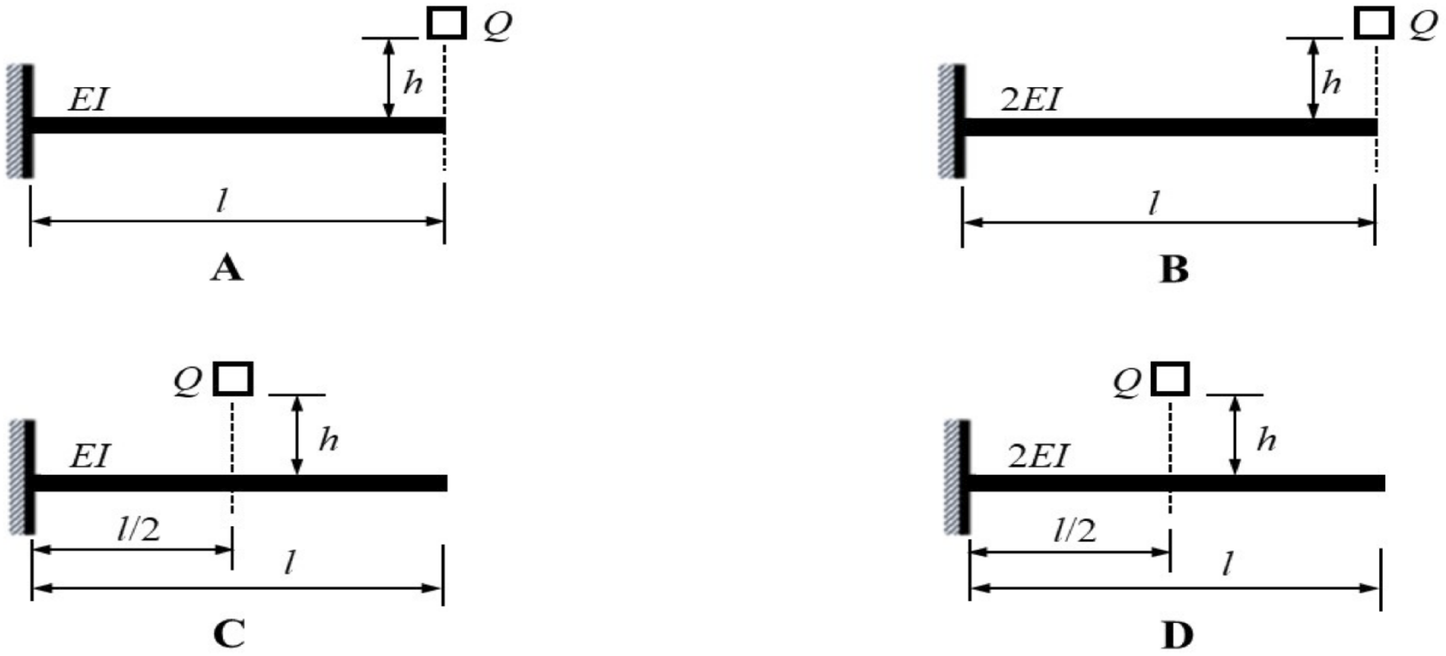
6. 图示 4 根悬臂梁均受到重量为 Q 的重物由高度 h 的自由落体冲击，其中（D）的动荷因数 K_d 最大。

A. A 梁

B. B 梁

C. C 梁

D. D 梁



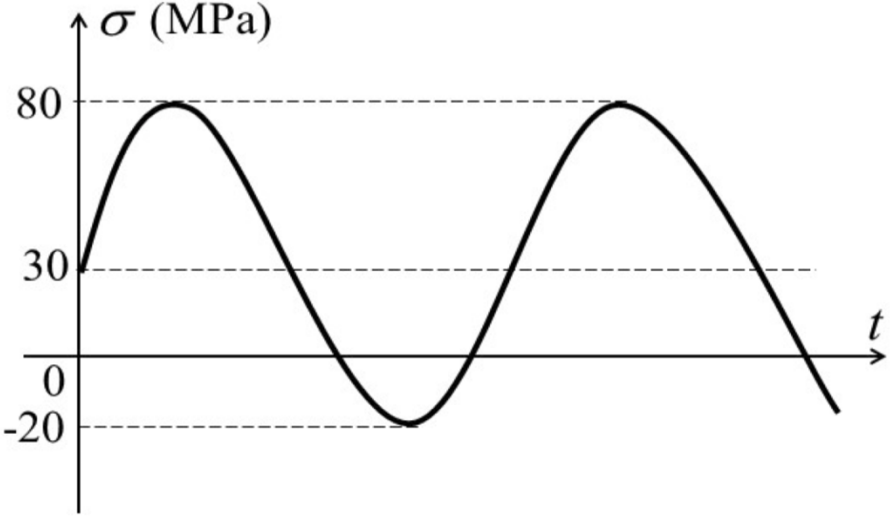
7. 已知某构件内一点处的交变应力随时间变化的图线如图所示，则该点的应力循环特征 r 和应力幅 σ_a 分别为（ D ）。

A. 3/5 和 30 MPa

B. −1/4 和 30 MPa

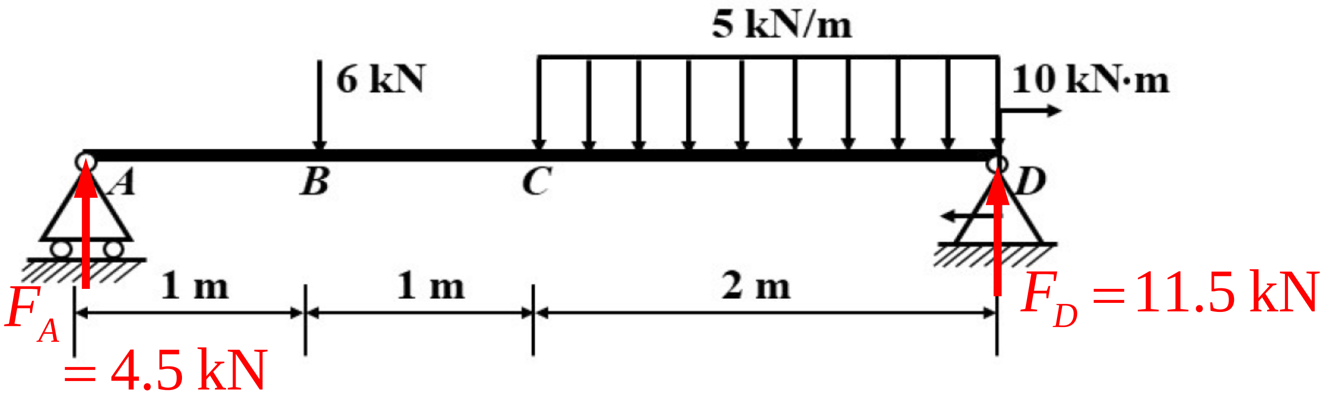
C. 3/5 和 50 MPa

D. −1/4 和 50 MPa



第二部分 计算题（共4小题，共计72分）

二.（本题 16 分）两端简支的梁，载荷如图所示，试画出梁的剪力图和弯矩图。

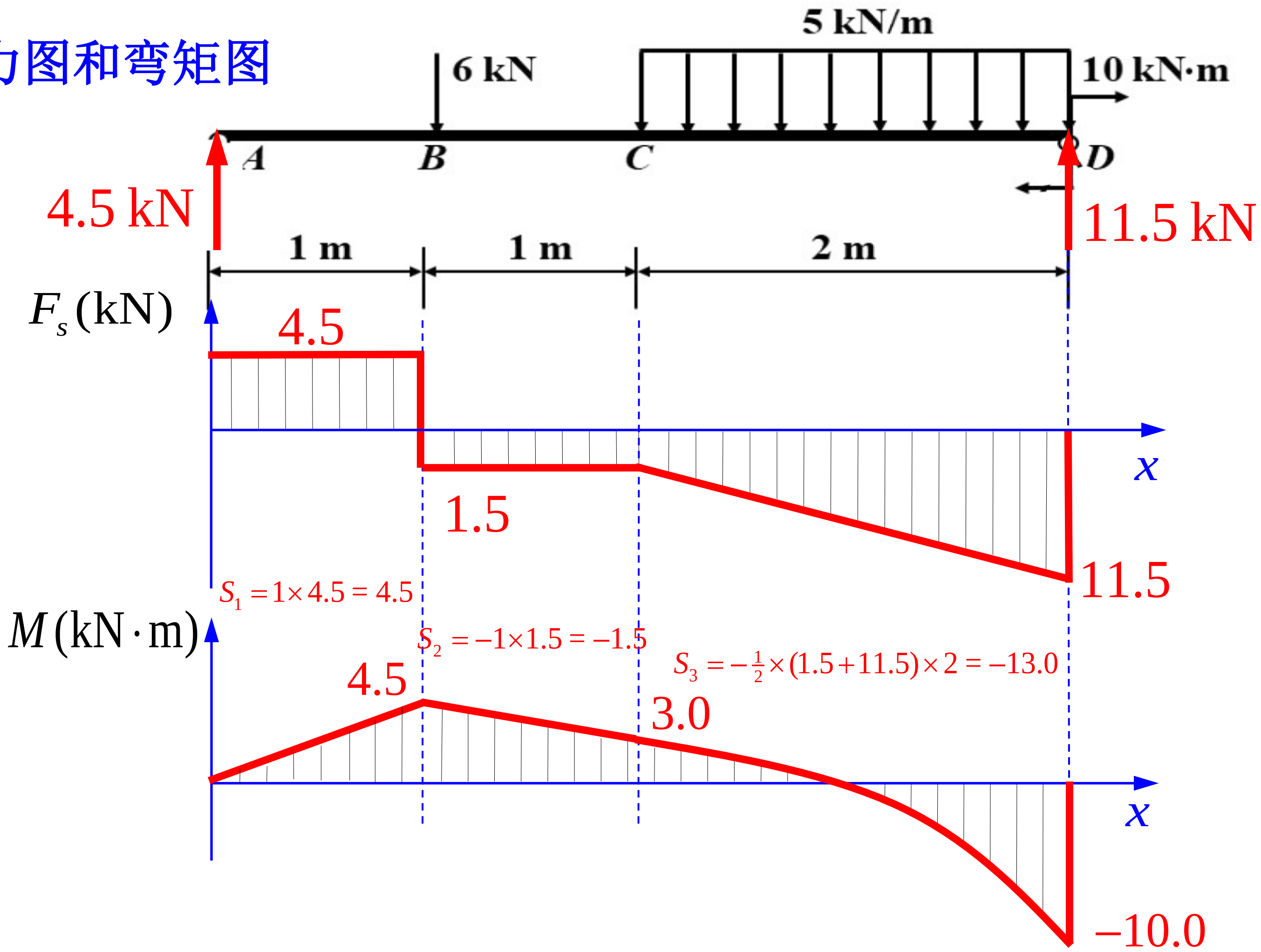


解：1. 先求支座约束力

$$\sum M_A = 0：\quad F_D \times 4 = 6\times1+5\times2\times3+10 \quad \Rightarrow F_D = 11.5\ \text{kN}$$

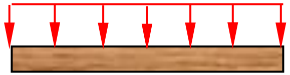
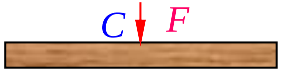
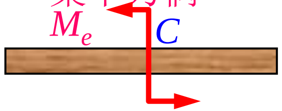
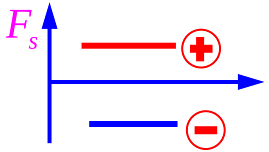
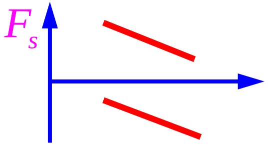
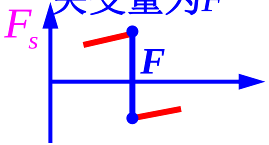
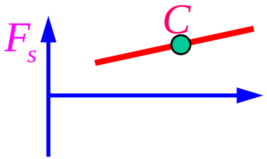
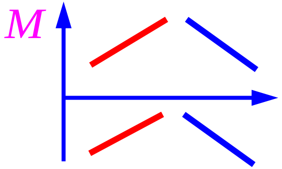
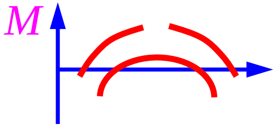
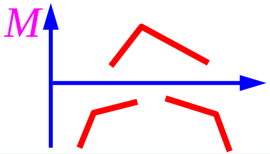
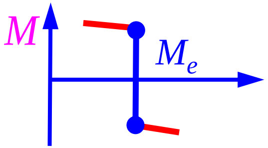
$$\sum M_D = 0：\quad F_A \times 4 = 6\times3+5\times2\times1-10 \quad \Rightarrow F_A = 4.5\ \text{kN}$$

2. 作剪力图和弯矩图



5 kN/m
6 kN
10 kN·m
A
B
C
D
4.5 kN
11.5 kN
1 m
1 m
2 m
F_s(kN)
4.5
1.5
11.5
x
$S_1 = 1\times4.5 = 4.5$
M(kN·m)
$S_2 = -1\times1.5 = -1.5$
$S_3 = -\frac{1}{2}\times(1.5+11.5)\times2 = -13.0$
4.5
3.0
x
−10.0

几种常见荷载下剪力图和弯矩图的特征

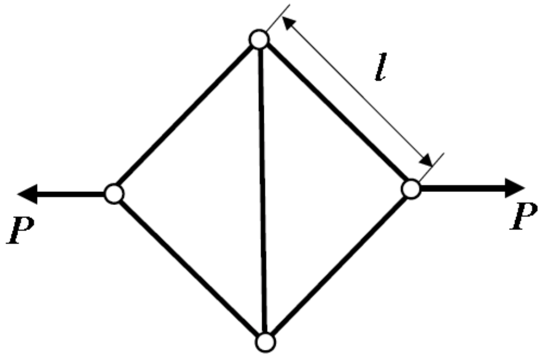
外力情况	无荷载 	向下的均布荷载 	集中力 	集中力偶 
F_s图特征	水平直线 	向下方倾斜的直线 	在C处有突变 突变量为F 	在C处无变化 
M图特征	斜直线 	上凸的二次抛物线 	F_s有突变，M不可导 M 图有尖角，但连续 	在C处有突变 突变量为M_e 

逆时针的力偶矩向下跳跃
（从左往右作弯矩图）

三. （本题 18 分）图示由五根圆杆组成的正方形结构，连接处均为铰接。材料为 $A3$ 钢，比例极限 $\sigma_p = 200$ MPa，屈服极限 $\sigma_s = 240$ MPa，弹性模量 $E = 200$ GPa。直线公式 $\sigma_{cr} = a - b\lambda$，其中 $a = 304$ MPa，$b = 1.12$ MPa。已知 $l = 1.0$ m，各杆的直径均为 50 mm。受一对大小相等、方向相反的集中力 P 的作用。若强度安全因数 $n = 2$，压杆的稳定安全因数为 $n_{st} = 3$。试求：

(1) 结构的许用载荷[P];

(2) 若外载荷 P 反向，试问许用载荷有无变化？若有改变，应为多少？



知识点：

（1）压杆稳定的计算

（2）强度条件

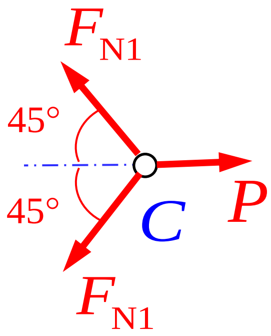
解：（一）结构的许可载荷

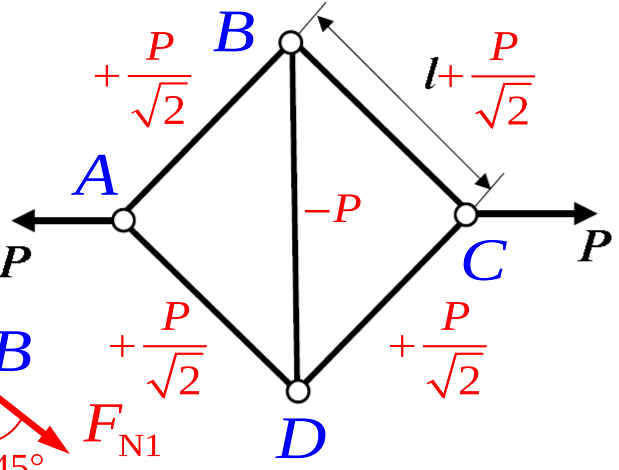
1. 先求各杆的轴力

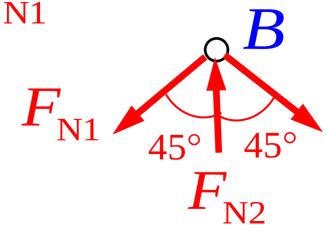
$$2F_{N1}\cos 45^\circ = P$$

$$F_{N1} = \frac{1}{\sqrt{2}}P$$（拉）

$$F_{N2} = 2F_{N1}\cos 45^\circ = P$$（压）







2. 按强度条件确定许用载荷

应校核哪根杆？ AB杆还是BD杆？

$$\sigma_1 = -\sigma,\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = 0$$（轴向受压）

第四强度理论 $$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]} = \sigma$$

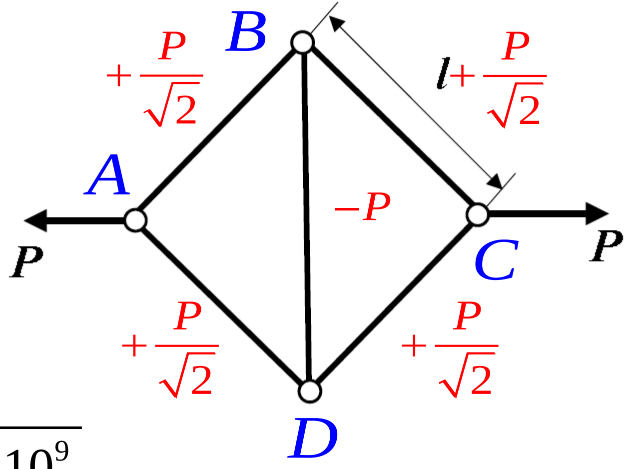
BD杆： $$\frac{P}{A} \le \frac{\sigma_s}{n_s} \qquad P \le \frac{\sigma_s}{n_s}A = \frac{\sigma_s}{n_s}\frac{\pi d^2}{4} = \frac{240\times10^6}{2}\,\frac{\pi\times(50\times10^{-3})^2}{4}$$

$$[P]_1 = 235.62\ \text{kN}$$

3. 按BD杆稳定性确定许用载荷

（1）判断BD杆是哪类压杆

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$$



BD杆两端铰支　　$\mu = 1$

截面为圆形　　$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{64}\pi d^4}{\frac{1}{4}\pi d^2}} = \frac{d}{4}$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{50}{4}\times 10^{-3}} = 113.14 \qquad \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = \pi\sqrt{\frac{200\times 10^9}{200\times 10^6}} = 99.35$$

$\lambda > \lambda_p$ 可以用欧拉公式计算临界压力。

若$\lambda < \lambda_p$，需进一步计算λ_s

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \Longrightarrow \sigma_s = a - b\lambda_s \Longrightarrow \lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

$\lambda_s < \lambda < \lambda_p$　用直线公式计算临界应力

（2）用欧拉公式计算临界应力

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}=\frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{113.14^2}=154.2\ \text{MPa}$$

（3）按*BD*杆的稳定性条件确定许用载荷

$$\frac{P}{A}\le\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}\qquad P\le\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}A=\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}\frac{\pi d^2}{4}=\frac{154.2\times 10^6}{3}\frac{\pi\times(50\times 10^{-3})^2}{4}$$

$$[P]_2=100.93\ \text{kN}$$

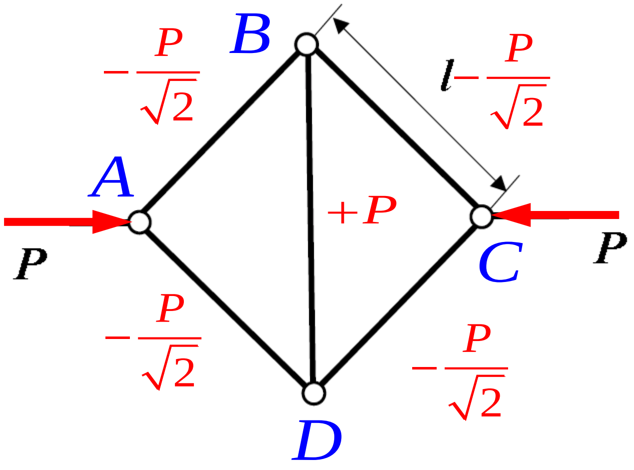
综上，许可载荷 $[P]=100.93\ \text{kN}$

（二） 若P反向：

1. 先求各杆的轴力

BD杆受拉， AB杆受压。

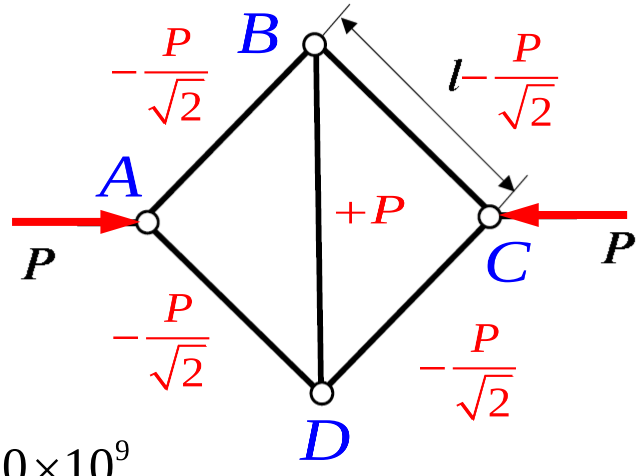
由于情形（一）的许用载荷由受压杆的稳定性条件决定，故许用载荷将发生变化。



2. 按强度条件确定许用载荷

BD杆： $[P]_1 = 235.62\ \text{kN}$

3. 按BD杆稳定性确定许用载荷



（1）判断AB杆是哪类压杆

AB杆两端铰支 $\quad \mu = 1$

截面为圆形 $\quad i = \sqrt{\dfrac{I}{A}} = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{64}\pi d^4}{\frac{1}{4}\pi d^2}} = \dfrac{d}{4}$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{1.0}{\frac{50}{4}\times 10^{-3}} = 80 \qquad \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = \pi\sqrt{\frac{200\times 10^9}{200\times 10^6}} = 99.35$$

$\lambda < \lambda_p$ 不可以用欧拉公式计算临界压力。

进一步计算λ_s

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \Longrightarrow \sigma_s = a - b\lambda_s \Longrightarrow \lambda_s = \frac{a-\sigma_s}{b} = \frac{304-240}{1.12} = 57.14$$

$\lambda_s < \lambda < \lambda_p$ 用直线公式计算临界应力

（2）用直线公式计算临界应力

$$\sigma_{\mathrm{cr}} = a - b\lambda = 304\times10^{6} - 1.12\times10^{6}\times80 = 214.4\ \mathrm{MPa}$$

（3）按AB杆的稳定性条件确定许用载荷

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}P}{A} \le \frac{\sigma_{\mathrm{cr}}}{n_{\mathrm{st}}} \qquad P \le \sqrt{2}\frac{\sigma_{\mathrm{cr}}}{n_{\mathrm{st}}}A = \sqrt{2}\frac{\sigma_{\mathrm{cr}}}{n_{\mathrm{st}}}\frac{\pi d^{2}}{4}$$

$$[P]_{2} = \sqrt{2}\times\frac{214.4\times10^{6}}{3}\frac{\pi\times(50\times10^{-3})^{2}}{4} = 198.4\ \mathrm{kN}$$

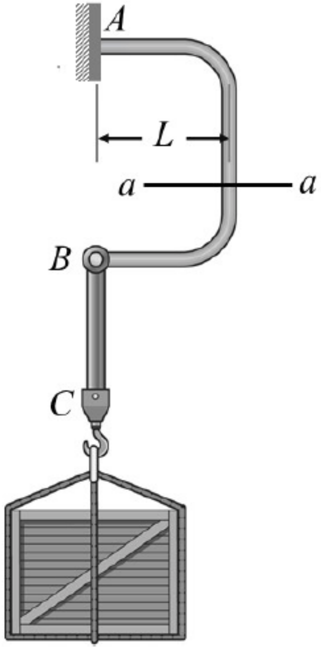
综上，P反向时，许可载荷 $[P] = 198.4\ \mathrm{kN}$

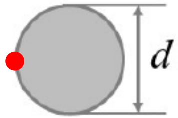
注意：（1）书写要规范；（2）步骤清晰，尽量反映出求解的思路；
（3）必要的公式一定要列出

四.（本题 18 分）如图所示，实心曲杆 AB 和直杆 BC，横截面均为圆形截面，直径为 d。杆 AB 和 BC 在 B 处铰接，底端 C 处悬挂重力为 G 的木箱。试求：

(1) a-a 截面上的最大拉应力；

(2) 如果在 a-a 截面上施加力偶矩 T，试确定最危险点的位置，并用单元体表示出该危险点的应力状态，同时按第三强度理论确定相当应力。





知识点：

（1）组合变形

（2）强度理论

分析：拉伸与弯曲的组合

解：（1）a–a 截面上的最大应力

a–a 截面上的内力

$$F_N = G, \quad M = GL$$

最大应力的点

$$\sigma' = \frac{F_N}{A} = \frac{4G}{\pi d^2}$$

$$\sigma'' = \frac{M}{W} = \frac{32GL}{\pi d^3}$$

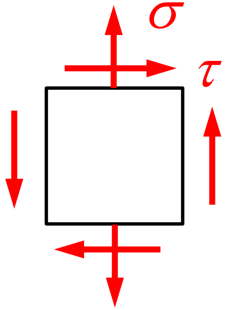
$$\sigma_{max} = \sigma' + \sigma'' = \frac{4G}{\pi d^2} + \frac{32GL}{\pi d^3}$$

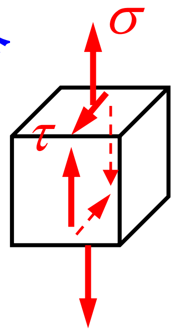
解：（2）第三强度理论的相当应力

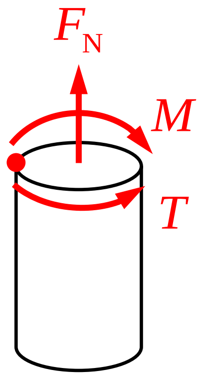
内力和应力分析　　扭转+弯曲+拉伸的组合

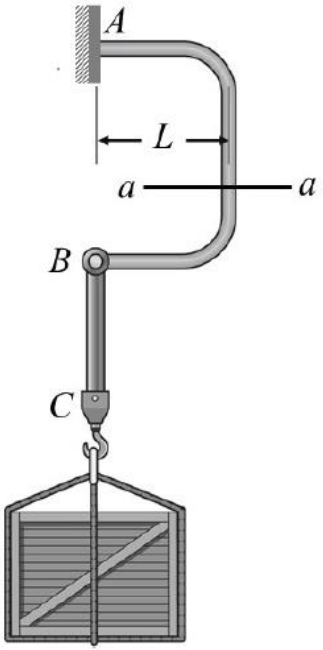
四个强度理论的相当应力

$$
\begin{cases}
\sigma_{r1} = \sigma_1 \\
\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \\
\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \\
\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}
\end{cases}
$$





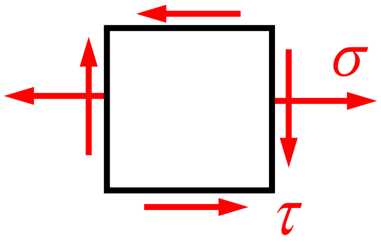




圆轴受扭转与弯曲的组合作用：

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W}$$



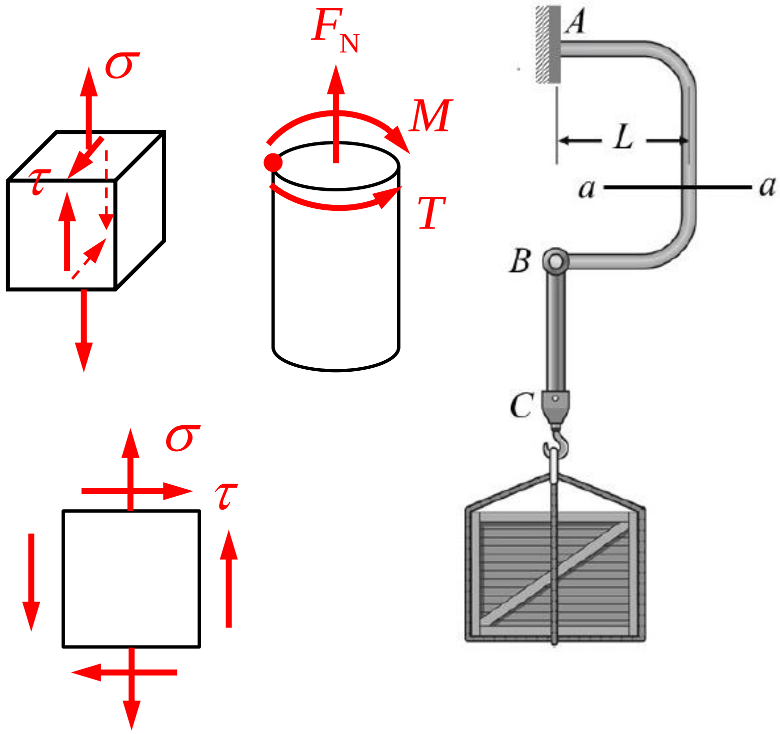
第三强度理论的相当应力

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma = \frac{4G}{\pi d^2} + \frac{32GL}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{T}{W_\mathrm{p}} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\left(\frac{4G}{\pi d^2} + \frac{32GL}{\pi d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}$$



五. （本题 20 分）如图所示刚架结构 $ABCD$，杆 AB 和杆 CD 竖直，杆 BC 水平，长度均为 a。在杆 BC 的中点 E 处承受集中力偶 m 作用。若各杆的材料相同，抗弯刚度均为 EI。不计轴力和剪力对变形的影响，试确定：

(1) 刚架支座 A 处的约束反力；

(2) 刚架结构的弯矩图；

(3) B 截面处的转角。

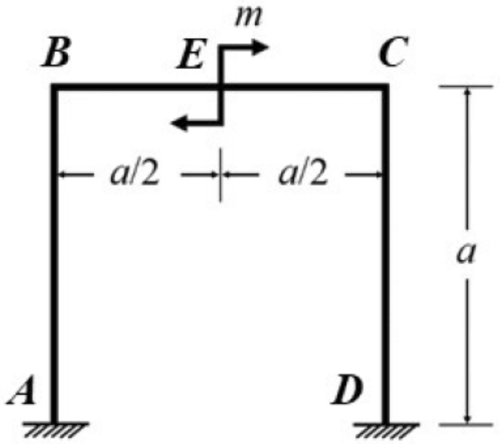
（提示：可以利用对称结构上载荷的对称或反对称性质进行分析）

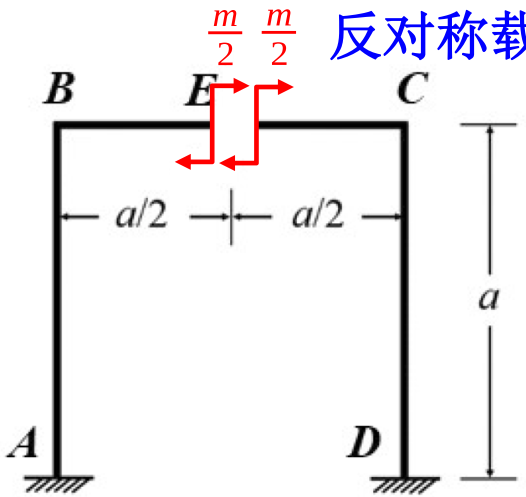
知识点：

（1）超静定问题

（2）能量方法

（3）对称和反对称性质的利用





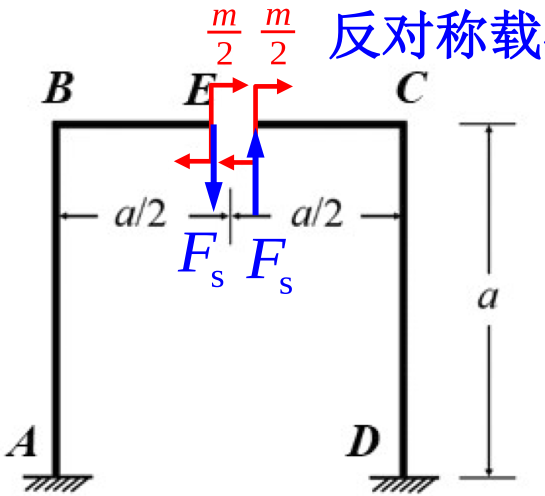
反对称载荷

解：（1）支座A处的约束力

反对称载荷作用，对称面上只有反对称内力F_s。一次超静定问题。

超静定问题的求解，首选能量方法。

卡氏第二定理或单位力法（加图乘法）



变形协调方程 $$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_s}=0$$

$$V_\varepsilon=\int_0^{a/2}\frac{M_{BE}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^{a}\frac{M_{AB}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^{a/2}\frac{M_{EC}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^{a}\frac{M_{CD}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$M_{BE}(x)=\frac{m}{2}+F_s x \qquad M_{EC}(x)=\frac{m}{2}+F_s x$$

$$M_{AB}(x)=\frac{m}{2}+\frac{F_s a}{2} \qquad M_{CD}(x)=\frac{m}{2}+\frac{F_s a}{2}$$

$$V_\varepsilon = \int_0^{a/2} \frac{M_{BE}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x + \int_0^{a} \frac{M_{AB}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^{a/2} \frac{M_{EC}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x + \int_0^{a} \frac{M_{CD}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$M_{BE}(x) = \frac{m}{2} + F_s x$$

$$M_{AB}(x) = \frac{m}{2} + \frac{F_s a}{2}$$

$$M_{EC}(x) = \frac{m}{2} + F_s x$$

$$M_{CD}(x) = \frac{m}{2} + \frac{F_s a}{2}$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_s} = 2\times\left[\int_0^{a/2} \frac{M_{BE}(x)}{EI}\cdot\frac{\partial M_{BE}(x)}{\partial F_s}\mathrm{d}x + \int_0^{a} \frac{M_{AB}(x)}{EI}\cdot\frac{\partial M_{AB}(x)}{\partial F_s}\mathrm{d}x\right] = 0$$

$$\int_0^{a/2}\left(\frac{m}{2} + F_s x\right)\cdot x\,\mathrm{d}x + \int_0^{a}\left(\frac{m}{2} + \frac{F_s a}{2}\right)\cdot\frac{a}{2}\mathrm{d}x = 0$$

$$\frac{m}{2}\times\frac{a^2}{8} + F_s\times\frac{a^3}{24} + \frac{m}{2}\times\frac{a^2}{2} + F_s\times\frac{a^3}{4} = 0$$

$$\frac{5m}{4}\times a^2 + F_s\times\frac{7a^3}{6} = 0 \Longrightarrow F_s = -\frac{15}{14}\frac{m}{a}$$

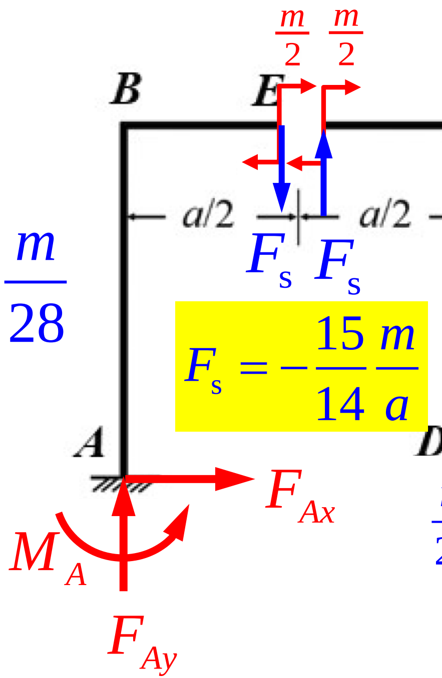
支座A处的约束力:

利用平衡方程

$$M_A=\frac{m}{2}+F_s\cdot\frac{a}{2}=\frac{m}{2}-\frac{15}{14}\frac{m}{a}\cdot\frac{a}{2}=-\frac{m}{28}$$

$$F_{Ay}=-F_s=\frac{15}{14}\frac{m}{a}$$

$$F_{Ax}=0$$

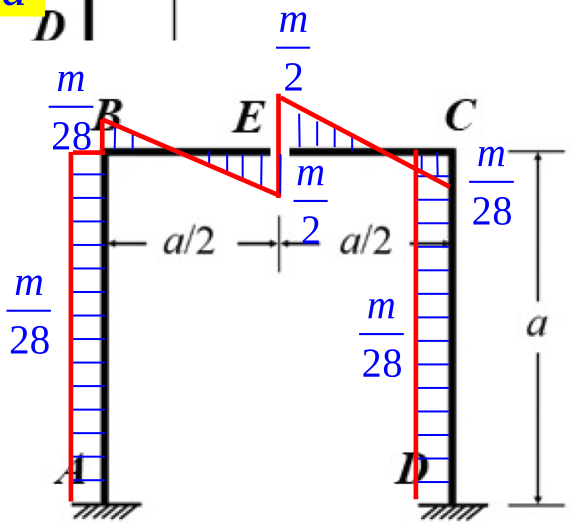


$$F_s=-\frac{15}{14}\frac{m}{a}$$

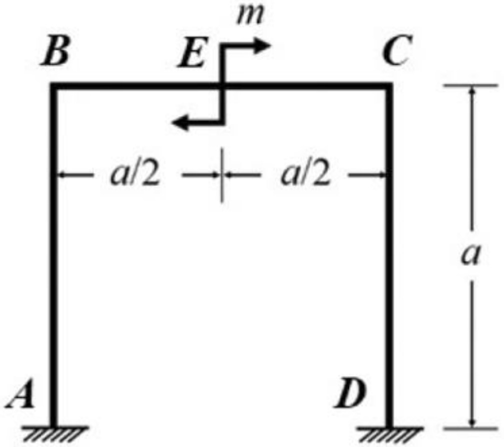
（2） 刚架结构的弯矩图

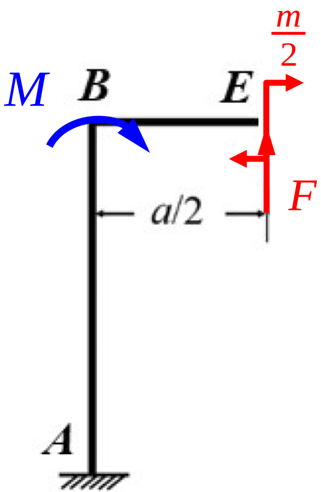
刚架和曲杆的弯矩图，画在受压侧

（水平的杆件与梁的画法一致）



（3）B 截面处的转角





$F=\frac{15}{14}\frac{m}{a}$

用卡氏第二定理

在B截面处施加一力矩M，则

$$\theta_B=\left.\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial M}\right|_{M=0}$$

$$M_{BE}(x)=\frac{m}{2}-\frac{15}{14}\frac{m}{a}x$$

$$M_{AB}(x)=M+\frac{m}{2}-\frac{15}{14}\frac{m}{a}\frac{a}{2}$$

$$=M-\frac{m}{28}$$

$$V_\varepsilon=\int_0^{a/2}\frac{M_{BE}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{M_{AB}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$\left.\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial M}\right|_{M=0}=0+\left.\int_0^a\frac{M-\frac{m}{28}}{EI}\cdot 1\,\mathrm{d}x\right|_{M=0}=-\frac{ma}{28EI}$$

（方向与力矩M相反）

本课程结束！

衷心感谢大家的支持！

祝大家学业有成，一切顺利！