有关期末考试

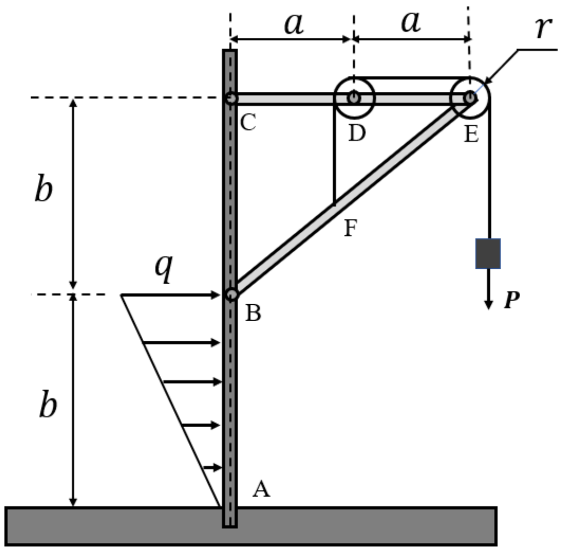
- 时间：2019年1月22日，星期二，10:30-12:30
- 地点：紫金港西1-219
- 开卷考试，但是只准带教科书
- 可以携带计算器

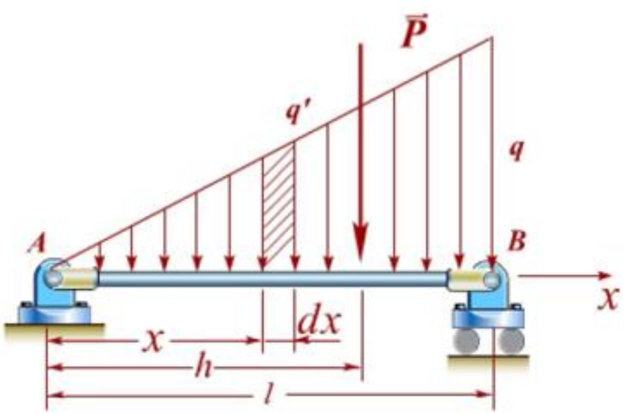
期末考试题型及分值分配

- 1. 平面任意力系平衡问题：15分
- 2. 桁架：15分
- 3. 运动学（一般两小题，点的合成运动和刚体平面运动各一道）：20分
- 4. 动力学：20分
- 5. 达朗贝尔原理（惯性力系简化）和虚位移原理：15分
- 6. 分析力学（求系统的拉格朗日方程和哈密顿方程）：15分

静力学

分清约束的性质：固定铰链支座，移动铰链支座，固定端约束

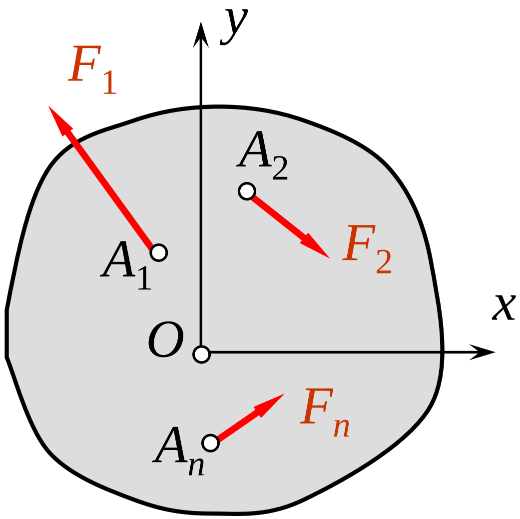




静力学

平面任意力系的平衡方程有三个

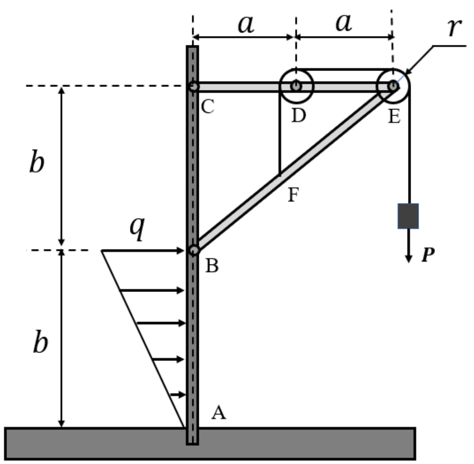
$$\boxed{\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0}$$



静力学

平面任意力系的平衡方程有三个

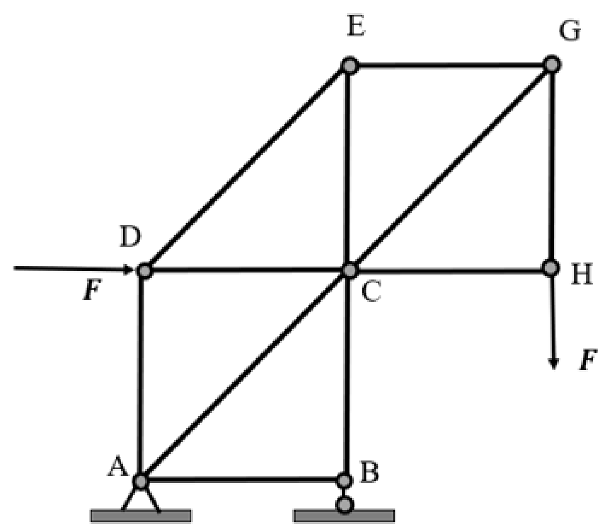
$$\boxed{\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0}$$



求A处约束力。

- 求平面桁架各杆内力的方法
  - **节点法**：分别考虑各节点的平衡
    - 每个节点都受一平面汇交力系的作用，只能列写两个平衡方程，解两个未知数。
    - 注意选择节点顺序，适合于求解全部杆件内力

三、如图所示桁架结构。A 处固定铰支座约束，B 处滑动铰支座约束。ABCD 和 CHGE 均为边长为 a 的正方形。AB 水平方向，DC 垂直于 EC。水平力 F 作用于 D 处，竖直力 F 作用于 H 处，各杆的重力不计。求 BC、DE 和 CG 杆的内力。

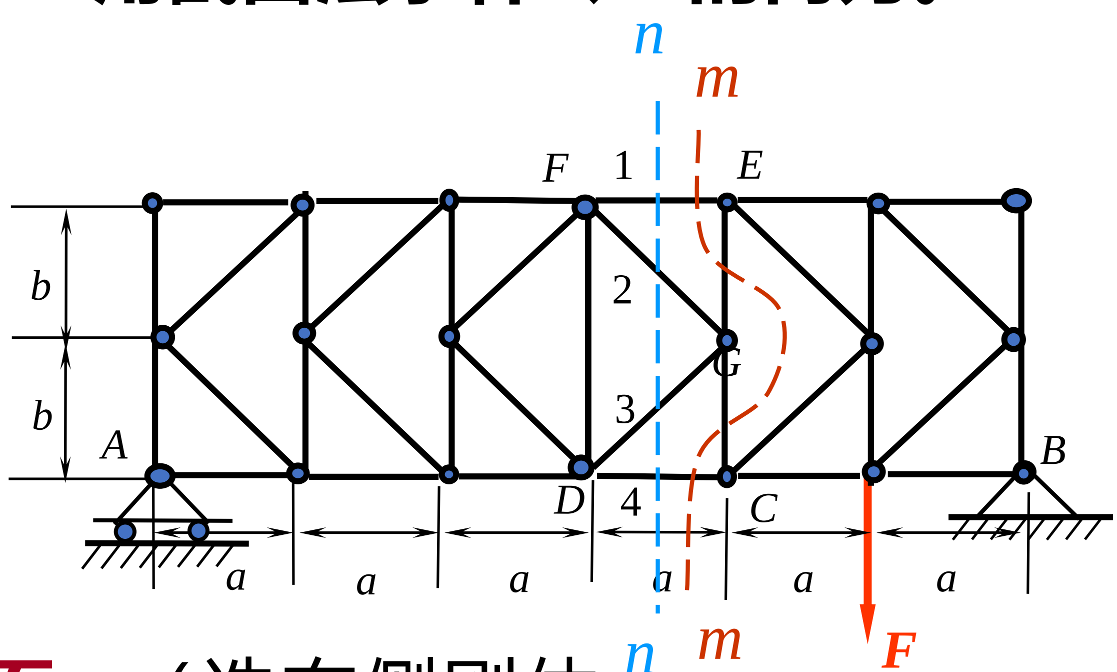


- 求平面桁架各杆内力的方法
  - **节点法**：分别考虑各节点的平衡
    - 每个节点都受一平面汇交力系的作用，只能列写两个平衡方程，解两个未知数。
    - 注意选择节点顺序，适合于求解全部杆件内力
  - **截面法**：假想地把桁架截开，再考虑其中任一部分的平衡，求出被截杆件的内力。
    - 平面任意力系的求解方法。因平面任意力系只有3个独立的平衡方程，所以不宜截断三杆以上。
    - 适当地选取一截面以及力矩方程，常可较快地求得某些指定杆件的内力。

简单平面桁架的内力计算

思考题

用截面法求杆1、2的内力。

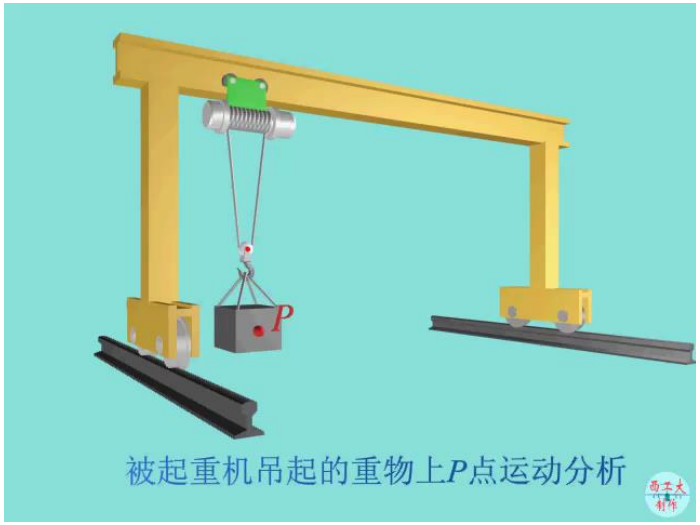


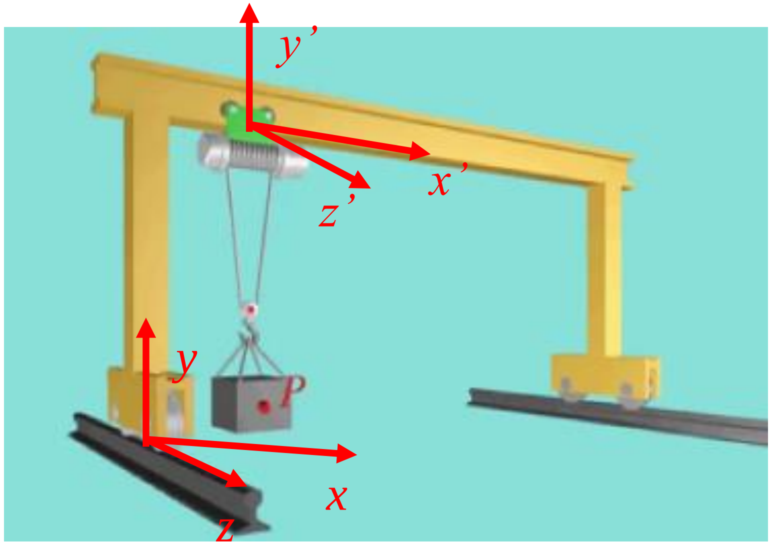
先用截面m（选右侧刚体为研究对象） $\sum M_C = 0$，**求出杆1的内力**F_1。

再用截面n。 $\sum M_D = 0$，**求出杆2的内力**F_2。

合成运动基本概念

三种运动





绝对运动：动点对于定参考系的运动。

相对运动：动点对于动参考系的运动。

牵连运动：动参考系对于定参考系的运动。

点的速度合成定理

● 速度合成定理

动点M在时间Δt 内的绝对位移

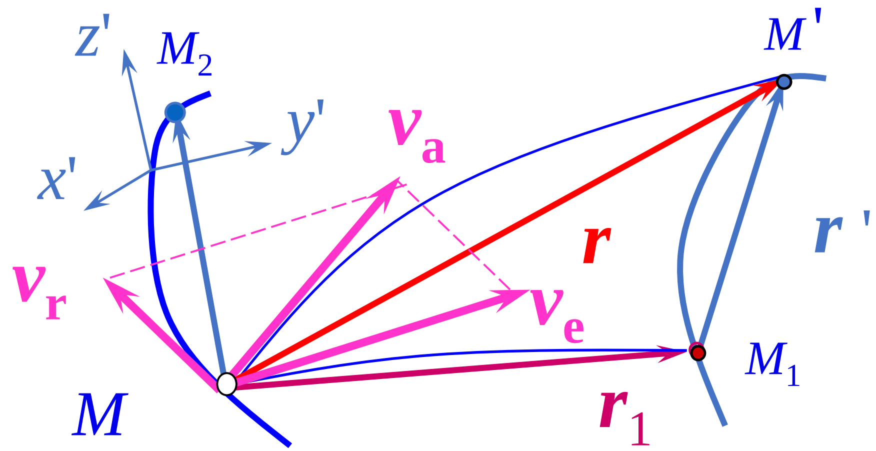
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}}_{= \boldsymbol{v}_a} = \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}}_{= \boldsymbol{v}_e} + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t}}_{= \boldsymbol{v}_r} \qquad (1)$$

因此，

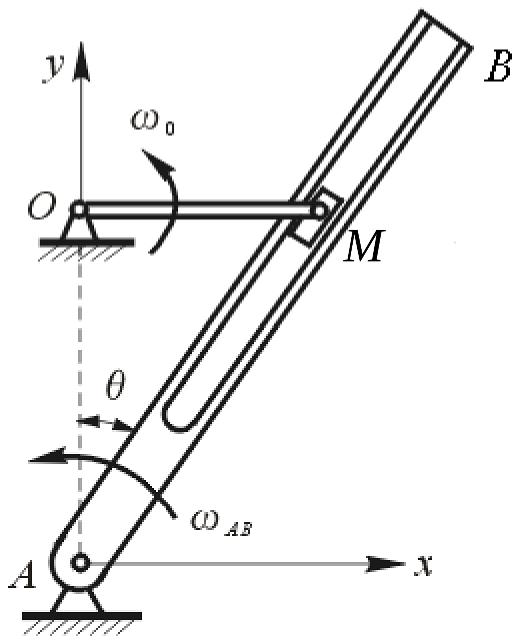
$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

绝对速度矢量等于牵连速度与相对速度的矢量和

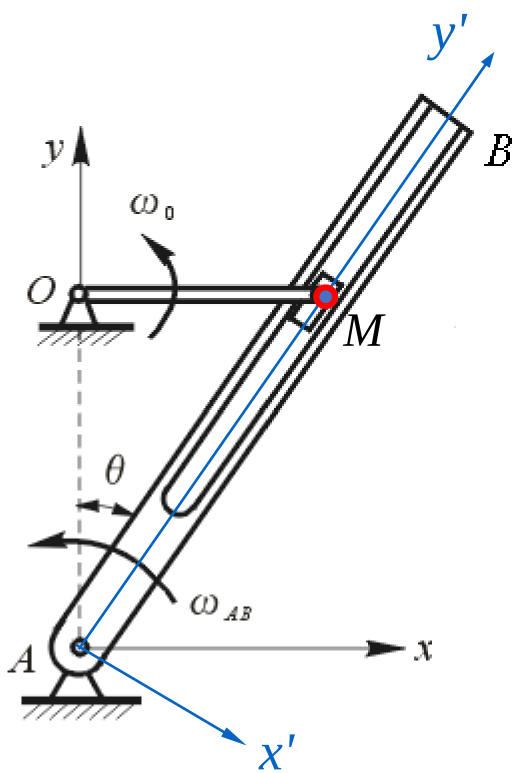


点的速度合成定理

例题8-2 **刨床的摆动导杆机构如图所示。曲柄**OM**长**20 cm，**以转速**n=30 r/min**绕**O**点逆时针向转动，曲柄转轴与导杆转轴之间距离**OA = 20 cm。**试求当曲柄在水平位置时导杆**AB**的角速度**ω_{AB}**。**



点的速度合成定理



解：

（1） 运动分析

动点 - **滑块** M 。

动系 - $Ax'y'$**固连于摇杆** AB。

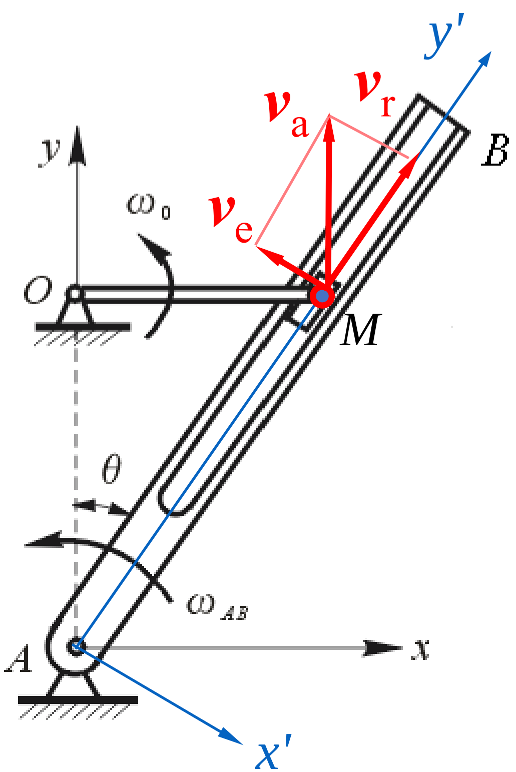
定系 - **固连于机座。**

绝对运动 - **以**O**为圆心的圆周运动。**

相对运动 - **沿**AB**的直线运动。**

牵连运动 - **摇杆绕**A**轴的摆动。**

点的速度合成定理



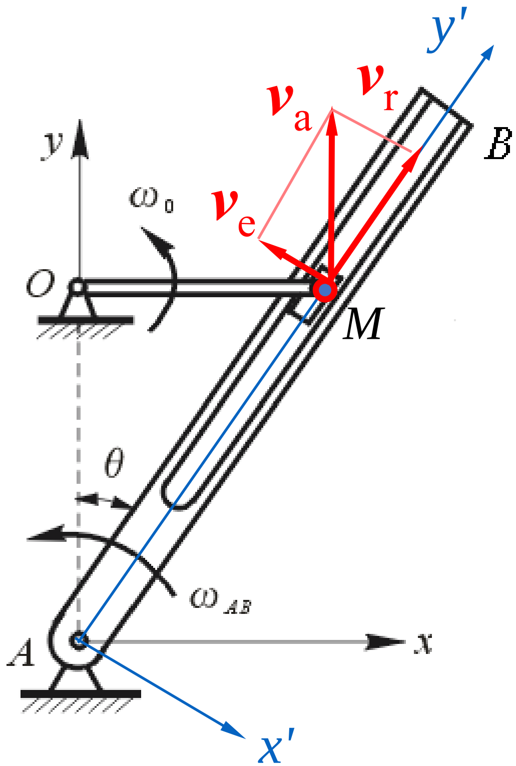
(2) 速度分析

根据点的速度合成定理，动点的绝对速度

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

速度	v_a	v_e	v_r
大小	$r\omega_0$	$AM\omega_{AB}$（未知）	未知
方向	⊥OM向上	⊥AB	沿AB

点的速度合成定理



(3) 求角速度ω_{AB}

$$v_\mathrm{e} = v_\mathrm{a} \sin \theta = \omega_0 \frac{OM^2}{AM}$$

设摇杆在此瞬时的角速度为ω_{AB}，则

$$v_\mathrm{e} = AM\ \omega_{AB}$$

解得

$$\omega_{AB} = \frac{v_\mathrm{e}}{AM} = \omega_0 \frac{OM^2}{AM^2}$$

点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

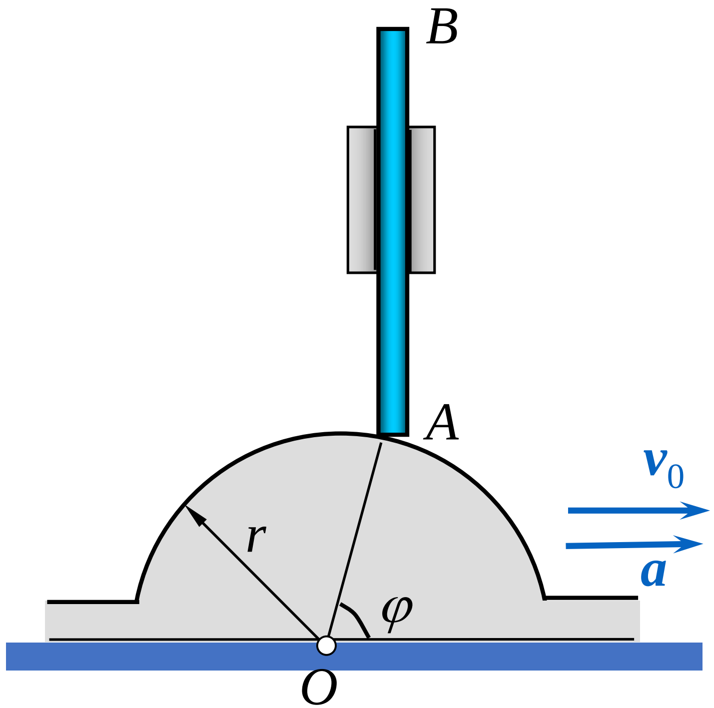
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

牵连运动是平移时点的加速度合成定理

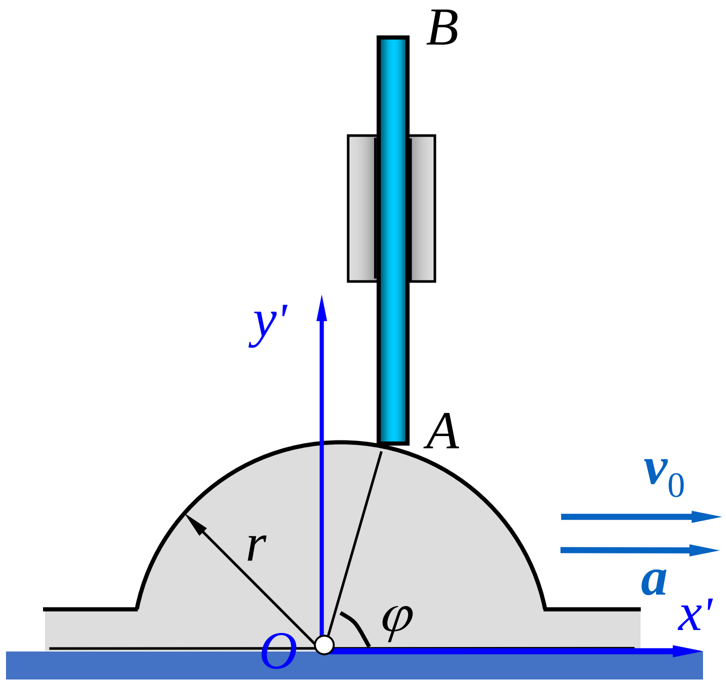
当ω=0时， a_C= 0，此时有

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}$$

即，牵连运动为平移时，点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度的矢量和。



例题8-4 **半径为r的半圆凸轮在水平面上向右作移动，从而推动顶杆AB沿铅垂导轨上下滑动，如图所示。在图示位置时，$\varphi=60°$，凸轮具有向右的速度v_0和加速度a。试求该瞬时顶杆AB的速度和加速度的大小。**



解：

（1） 运动分析

动点— AB的端点A 。

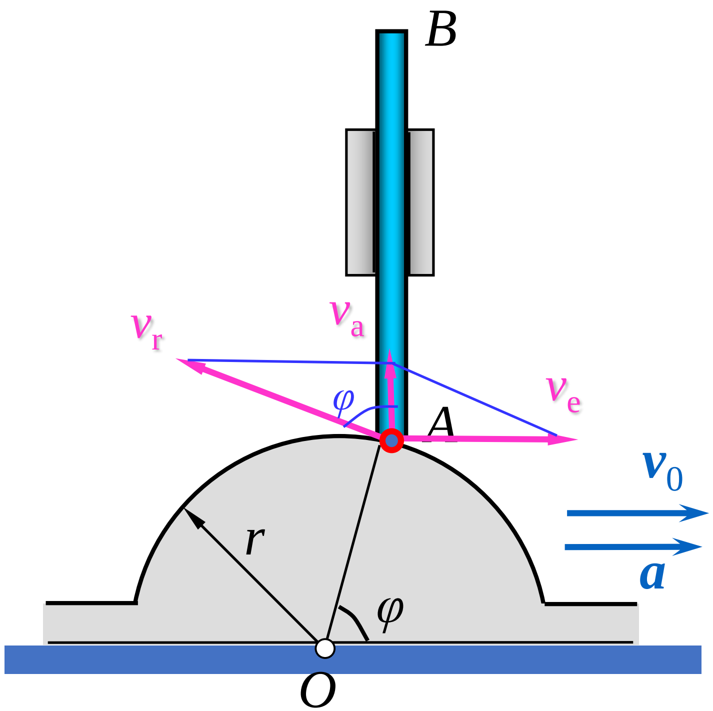
动系— $Ox'y'$，固连于凸轮。

定系—固连于机座。

绝对运动—沿铅垂导轨直线运动。

相对运动—沿凸轮轮廓曲线运动。

牵连运动—凸轮水平直线平动。



（2）速度分析

根据速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

求得

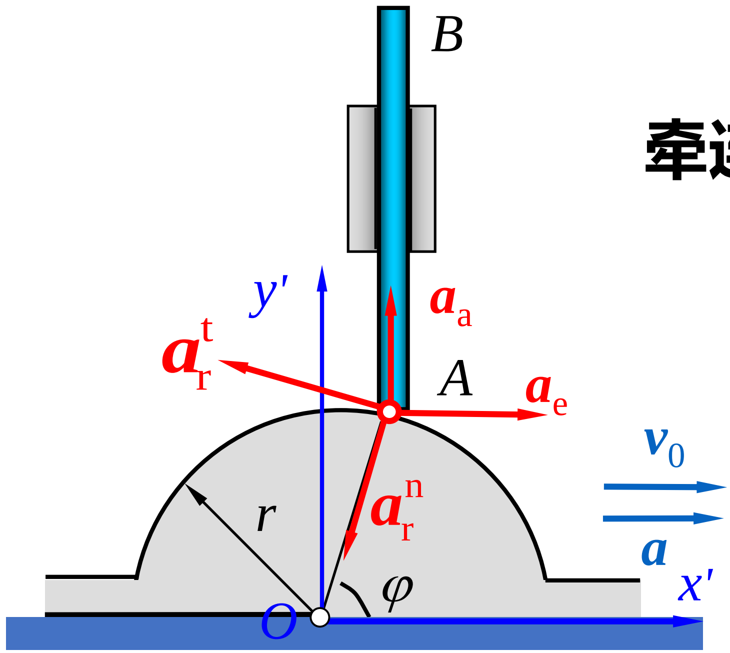
$$v_a = v_e \cot\varphi = v\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}v$$

此瞬时杆*AB*的速度方向向上。

速度	v_a	v_e	v_r
大小	未知	v	未知
方向	沿铅垂线	水平向右	$\perp AO$

并可求得相对速度

$$v_r = \frac{v_e}{\sin\varphi} = \frac{v}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}v$$



（3） 加速度分析

牵连运动是平移，应用加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_r^n$$

上式投影到 OA 上，得

$$a_a \sin\varphi = a_e \cos\varphi - a_r^n$$

解得杆AB加速度为

$$a_a = a\cot\varphi - \frac{v_r^2}{r\sin\varphi}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(a - \frac{8v^2}{3r}\right)$$

加速度	$\boldsymbol{a}_a$	$\boldsymbol{a}_e$	$\boldsymbol{a}_r^t$	$\boldsymbol{a}_r^n$
大小	未知	a	未知	v_r^2/r
方向	铅直	水平向右	$\perp AO$	由A指向O

点的加速度合成定理

科氏加速度： $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

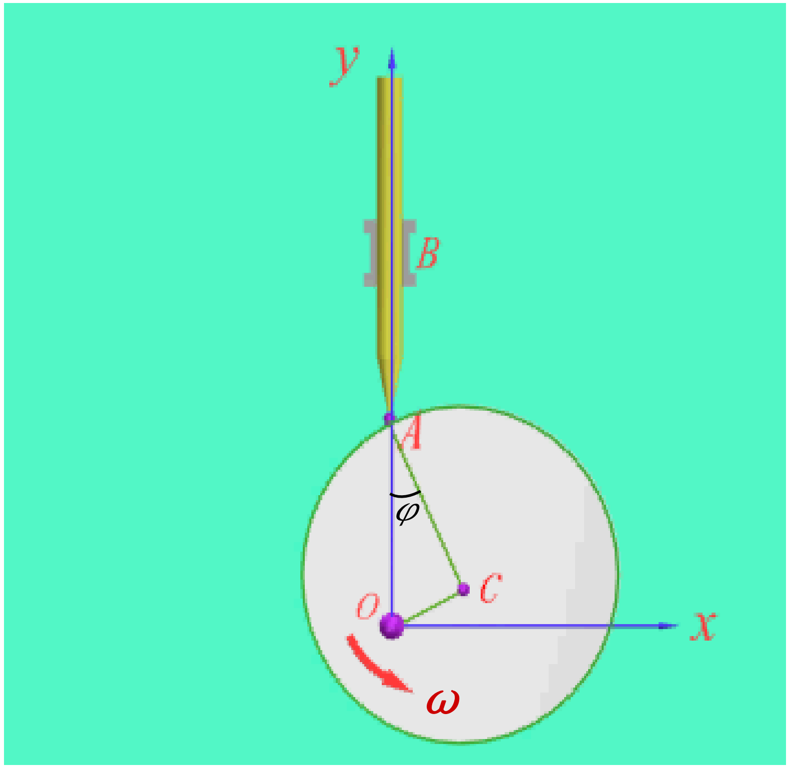
- 牵连运动是<u>**平移**</u>时，点的加速度合成定理

当ω=0**时，** $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$= **0，此时有** $\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}$

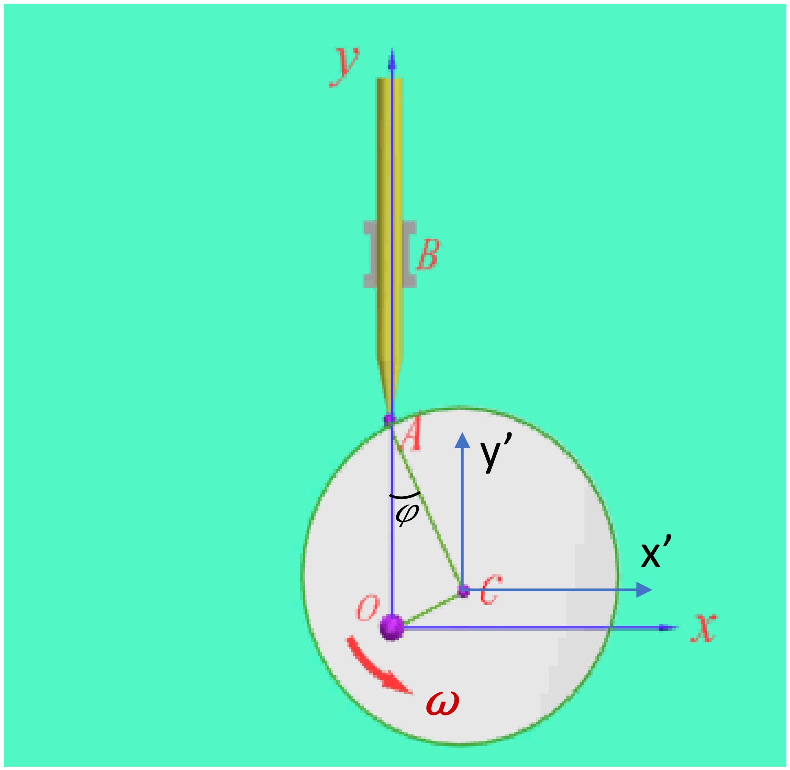
- 牵连运动是<u>**定轴转动**</u>时，点的加速度合成定理

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}}$$

例题 **已知凸轮的偏心距**$OC=e$，**凸轮半径** $r=\sqrt{3}e$ **,并且以等角速度**ω**绕**O**轴转动。 图示瞬时，**AC**垂直于**OC，φ **=** 30°**。试求顶杆的速度与加速度。**



解：（1）运动分析



动点—顶杆上*A*点。

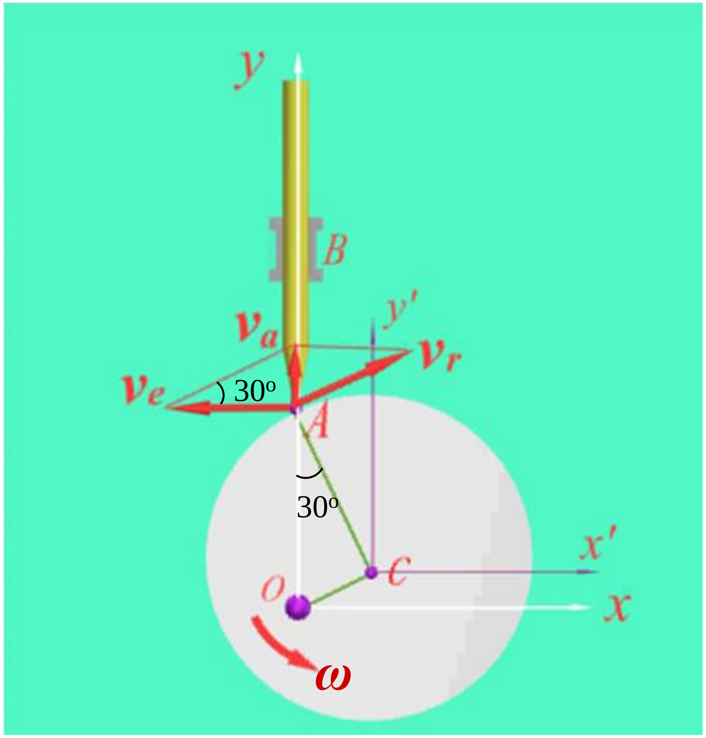
动系—固连于凸轮Cx’y’。

定系—固连于机座Oxy。

绝对运动—铅垂直线运动。

相对运动—圆周运动。

牵连运动—绕*O*轴的定轴转动。



速度	v_a	v_e	v_r
大小	未知	$OA\cdot\omega$	未知
方向	沿铅垂线	水平向左	$\perp AC$

（2）速度分析。

应用速度合成定理

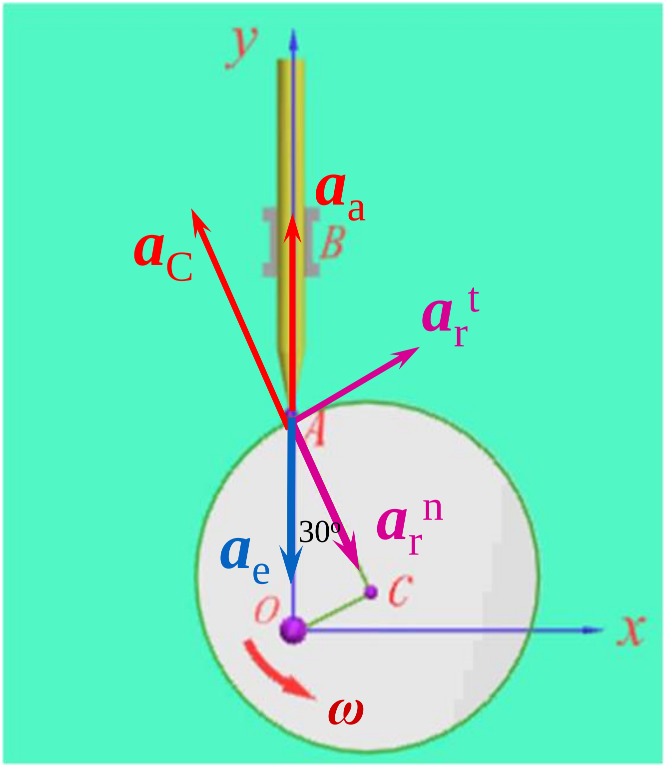
$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

由速度平行四边形得

$$v_a = v_e \tan 30^o = \frac{2\sqrt{3}}{3} e\omega$$

同时求得相对速度

$$v_r = 2v_a = \frac{4\sqrt{3}}{3} e\omega$$



（3）加速度分析

应用牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_r^n + \boldsymbol{a}_C$$

将上式沿a_C方向投影得

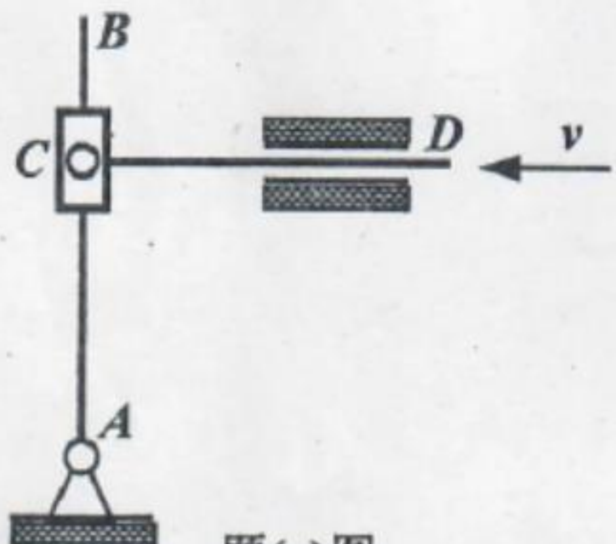
$$a_a \cos 30^\circ = a_C - a_r^n - a_e^n \cos 30^\circ$$

加速度	$\boldsymbol{a}_a$	$\boldsymbol{a}_e$	$\boldsymbol{a}_r^t$	$\boldsymbol{a}_r^n$	$\boldsymbol{a}_C$
大小	未知	$OA\omega^2$	未知	v_r^2/r	$2\omega v_r$
方向	铅直	$A\to O$	$\perp AC$	$A\to C$	沿CA

解得

$$a_a = -\frac{2}{9} e\omega^2$$

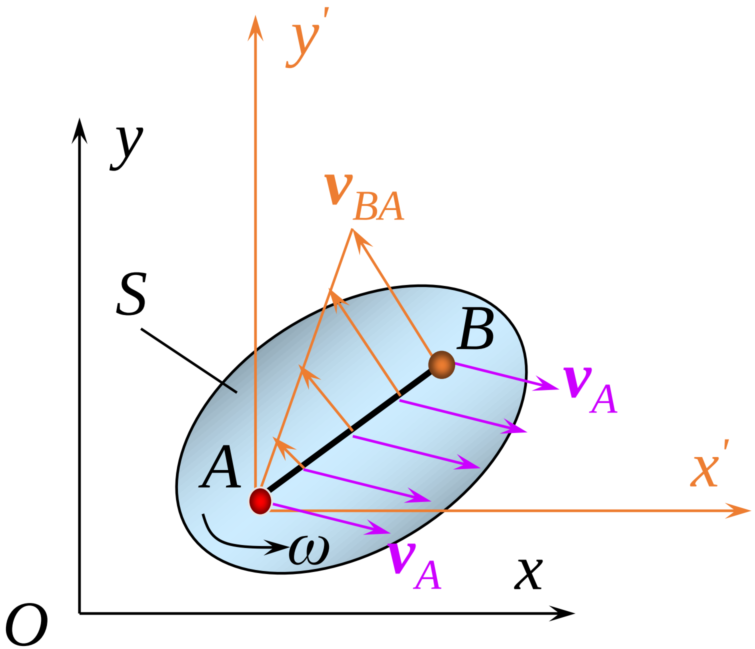
三、（a）图示机构，杆 AB 绕 A 轴转动，杆 CD 在水平滑道内滑动，C 处为套筒联接。图示瞬时，杆 AB 垂直，$AC=b$，杆 CD 的速度为 v，加速度为零。求：此时杆 AB 的角速度与角加速度。



题(a)图

平面图形上各点的速度

确定平面图形上某点的速度：



平面图形－S

定系－Oxy

基点－A

平移系－$Ax'y'$

平面图形的角速度－ ω

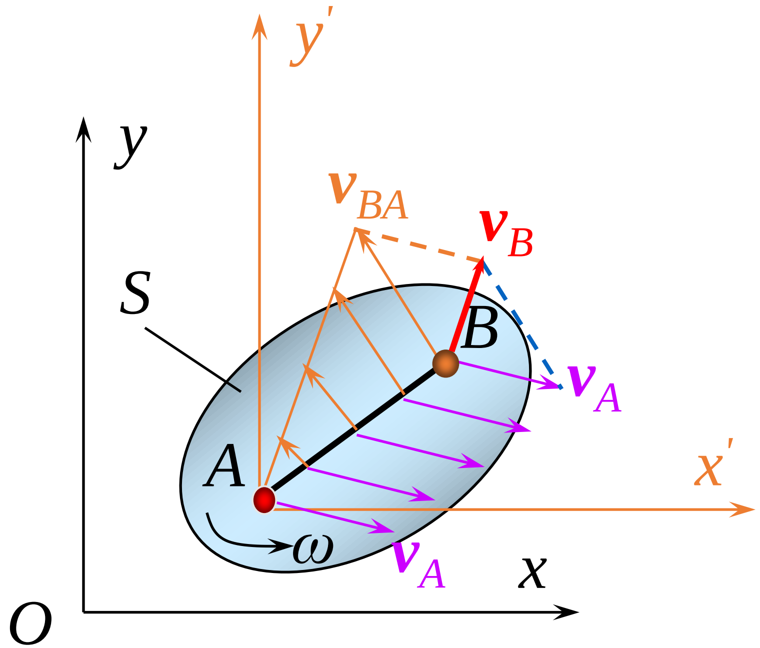
基点速度－ $\boldsymbol{v}_A$

点B绕点A转动的速度－ $\boldsymbol{v}_{BA}$

速度合成定理，点B的绝对速度为

$$\boldsymbol{v}_a^B = \boldsymbol{v}_e^B + \boldsymbol{v}_r^B$$

平面图形上各点的速度



速度合成定理：

$$\boldsymbol{v}_a^B = \boldsymbol{v}_e^B + \boldsymbol{v}_r^B$$

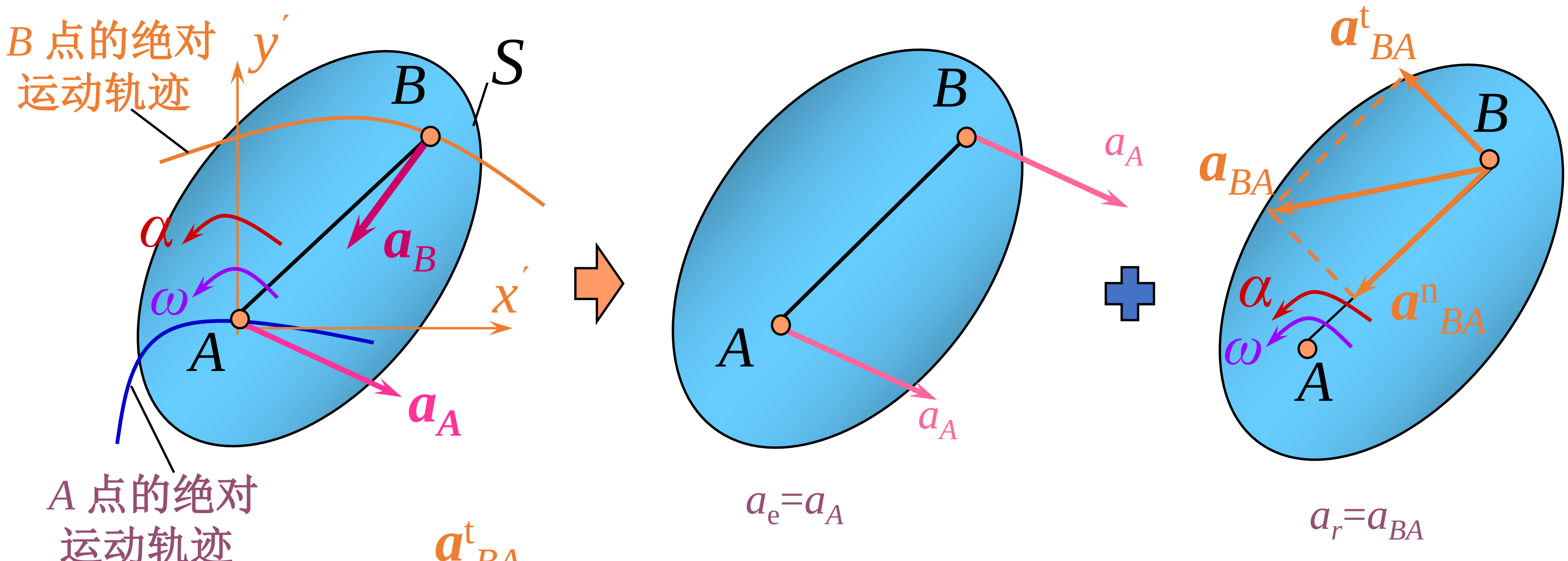
$$\boldsymbol{v}_e^B = \boldsymbol{v}_A$$

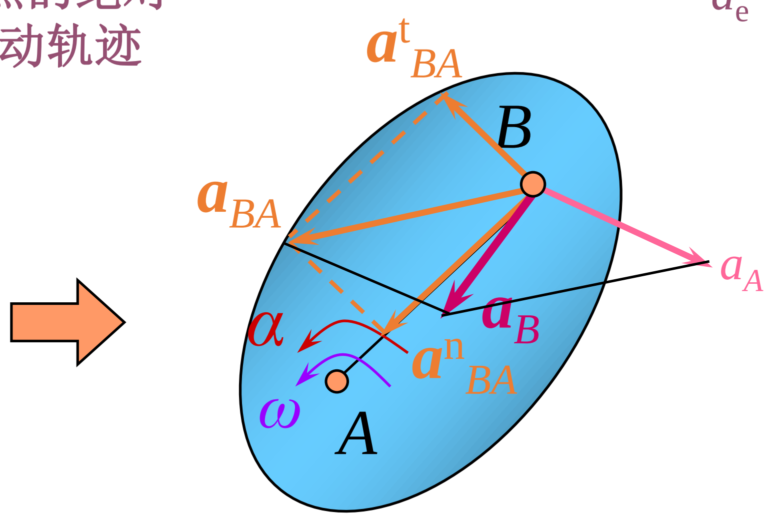
$$\boldsymbol{v}_r^B = \boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\boldsymbol{v}_a^B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

基点法确定平面图形上任一点速度：**平面图形上任意一点的速度等于基点的速度和该点相对基点的转动速度的矢量和。**

平面图形上各点的加速度





$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r$$

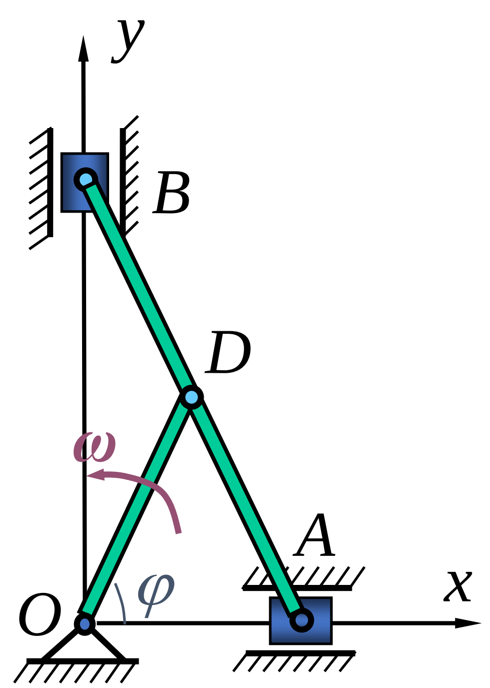
$$= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^t_{BA} + \boldsymbol{a}^n_{BA}$$

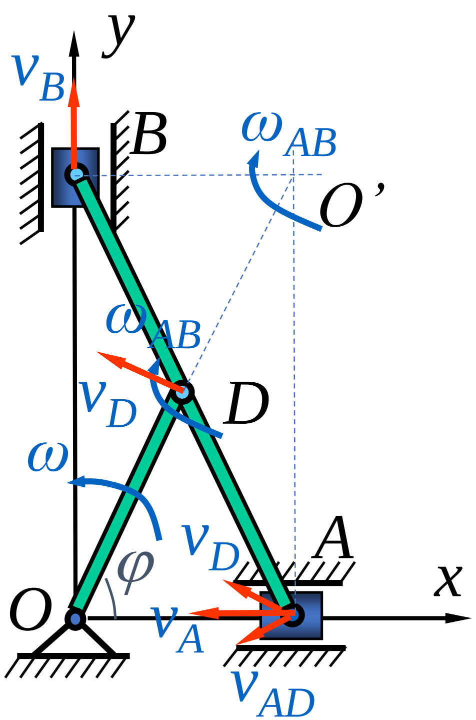
平面图形上各点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$

平面图形上任意一点的加速度等于基点的加速度与该点相对切向加速度和法向加速度的矢量和。

例题： 如图所示，在椭圆规的机构中，曲柄OD以匀角速度ω绕O轴转动，$OD=AD=BD=l$，试求当$\varphi=60°$时，规尺AB的角速度、角加速度和A点的速度、加速度。





解：**求AB角速度：**

瞬心法：

已知AB上的 A，B，D点的速度方向，可以确定**瞬心的位置**O'。

杆AB绕瞬心O'，在当前瞬时做定轴转动，转动的角速度为杆AB的转动角速度ω_{AB}。

D点的速度可表示为：

$$v_D = \omega|OD| = \omega_{AB}|O'D|$$

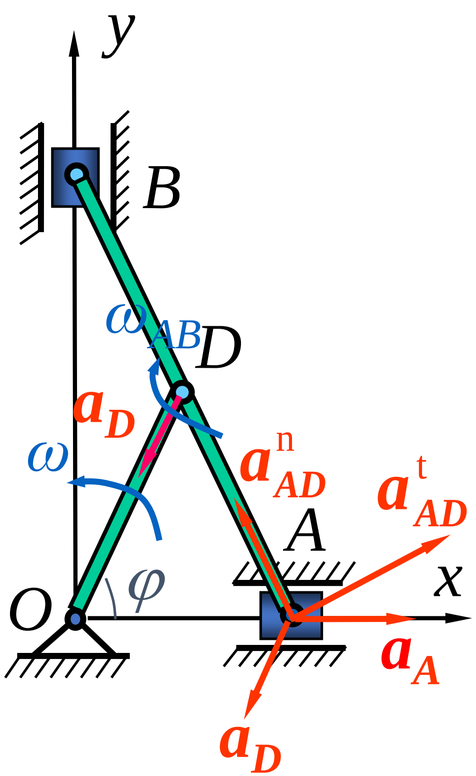
$$\omega_{AB} = \omega$$

求A点速度：

基点法：以D为基点 $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{AD}$

x方向分解： $v_A = v_D cos30^o + v_{AD} cos30^0$

$$= \omega l\frac{\sqrt{3}}{2} + \omega l\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\omega l$$



取AB上的D点为基点，A点的加速度为

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}_{AD}^t + \boldsymbol{a}_{AD}^n$$

A点加速度大小末知，方向沿着x轴。

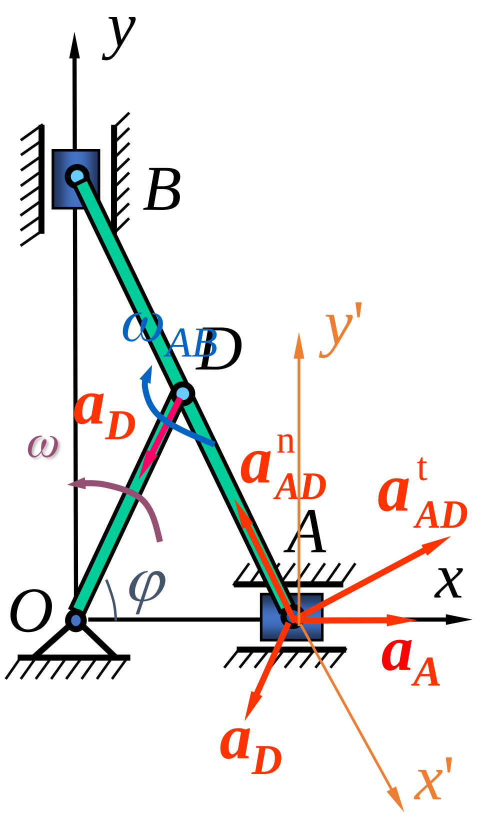
D点加速度：

$$a_D = l\omega^2$$

$\boldsymbol{a}^t_{AD}$ 大小末知，垂直于AD

$\boldsymbol{a}^n_{AD}$ 的大小：

$$a_{AD}^n = \omega_{AB}^2\, AD = l\omega^2$$



取*AB*上的*D*点为基点，*A*点的加速度为

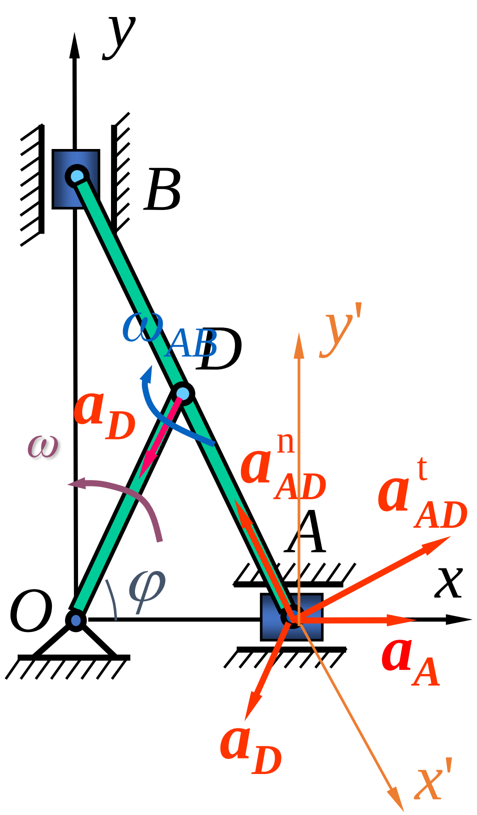
$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{AD} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{n}}_{AD}$$

将上式在y'轴上投影，得

$$0 = -a_D \sin\varphi + a^{\mathrm{t}}_{AD}\cos\varphi + a^{\mathrm{n}}_{AD}\sin\varphi$$

$$a^{\mathrm{t}}_{AD} = \frac{a_D \sin\varphi - a^{\mathrm{n}}_{AD}\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(\omega^2 l - \omega^2 l)\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0$$

所以 *AB*角加速度 $\alpha_{AB} = \dfrac{a^{\mathrm{t}}_{AD}}{AD} = 0$



取AB上的D点为基点，A点的加速度为

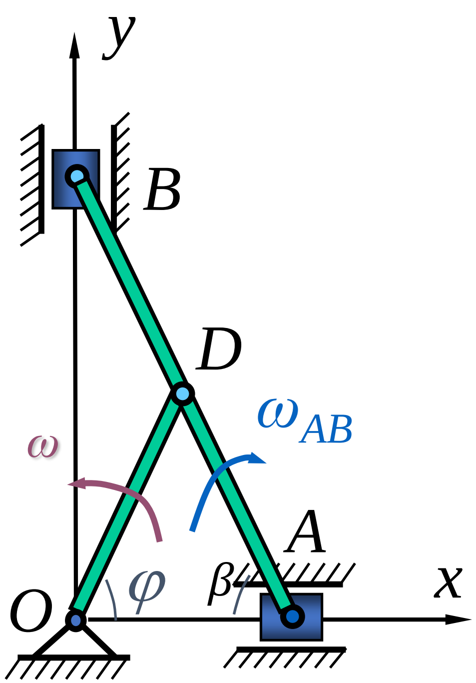
$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}_{AD}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{AD}^{\mathrm{n}}$$

将上式在x'轴上投影，得

$$a_A \cos\varphi = a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{\mathrm{n}}$$

$$a_A = \frac{a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{\mathrm{n}}}{\cos\varphi} = \frac{\omega^2 l \cos 60^\circ - \omega^2 l}{\cos 60^\circ} = -\omega^2 l$$

另一种解法----运动方程求导法



AB**的转动方程：** $\beta(t) = \varphi(t)$

AB**的角速度：** $\omega_{AB} = \dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$

AB**的角加速度：** $\alpha_{AB} = \dfrac{d\omega_{AB}}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt} = 0$

A**点的x坐标：** $x_A = 2l\cos\varphi$

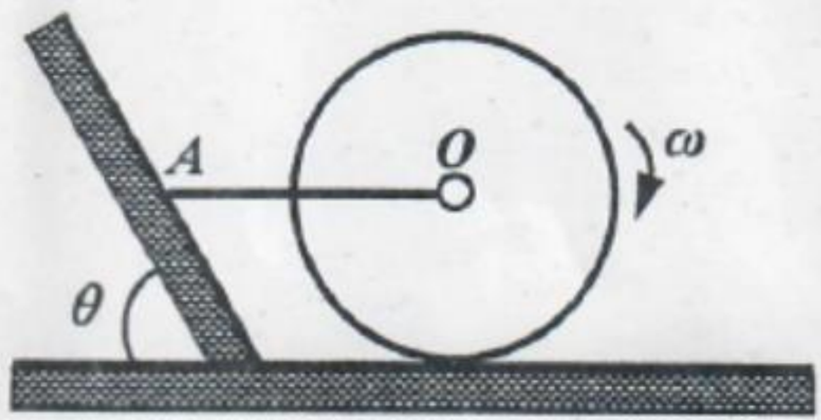
A**点的速度：**

$$v_A = \frac{dx_A}{dt} = -2l\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -2\omega l\sin\varphi = -\sqrt{3}\omega l$$

A**点的加速度：**

$$a_A = \frac{dv_A}{dt} = -2\omega l\cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -2\omega^2 l\cos\varphi = -\omega^2 l$$

（b）图示圆轮，半径为 R，轮心 O 处铰接杆 OA，杆长为 $\sqrt{3}R$。轮 O 在水平地面上纯滚动，带动杆运动，杆 A 端置于光滑斜面上，斜角 θ=60°。图示瞬时，轮的角速度为 ω。求：此时杆 OA 的角速度与 A 端的速度。



题(b)图

动量定理和质心运动定理

1.质心运动定理

质点系动量可以表达为 $\boldsymbol{p} = \sum m_i \boldsymbol{v}_i = M\,\boldsymbol{v}_C$

把上式带入动量定理 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

得到 $$M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} = M\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

其中， a_C质心的加速度。

质点系的总质量与其质心加速度的乘积,等于所有外力的矢量和, 这就是**质心运动定理**。

质心运动定理

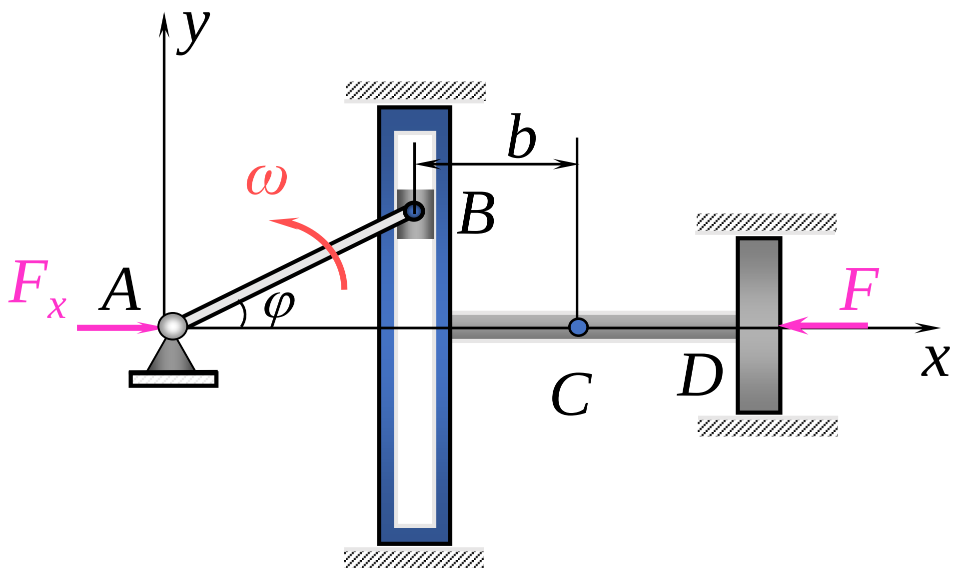
刚体系统质心运动定理表达式

如果刚体系统由 N 个部分构成，则各个部分的质量与其质心的加速度的乘积的矢量和，等于该刚体系统所受外力的矢量和

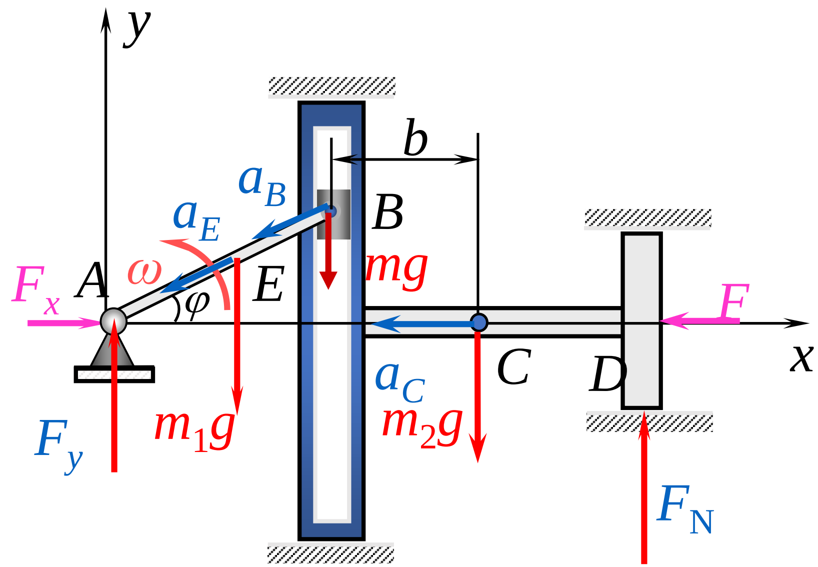
$$\sum_{j=1}^{N} M_j \boldsymbol{a}_{Cj} = \sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

质心运动定理

例题 均质曲柄AB长r，质量为m_1，假设受力偶作用以不变的角速度ω转动，并带动滑槽连杆以及与它固连的活塞D，如图所示。滑槽、连杆、活塞总质量为m_2，质心在点C。在活塞上作用一恒力F。滑块B质量为m，不计摩擦，试求作用在曲柄轴A处的水平反力F_x。



解： 选取整个系统为研究对象。



刚体系统质心运动定理

$$\sum_{j=1}^{N} M_j \boldsymbol{a}_{Cj} = \sum \boldsymbol{F}^{(e)}$$

在x轴上的投影为

$$-m_1 a_E \cos\varphi - m a_B \cos\varphi - m_2 a_C = F_x - F$$

带入加速度： $-m_1 \dfrac{r}{2}\omega^2 \cos\varphi - m r\omega^2 \cos\varphi - m_2 r\omega^2 \cos\varphi = F_x - F$

求得作用在曲柄轴A处的水平反力

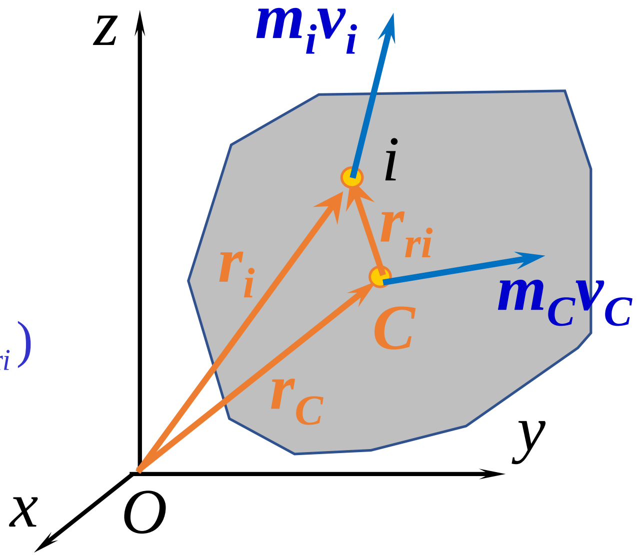
$$F_x = F - \left(\frac{1}{2}m_1 + m + m_2\right) r\omega^2 \cos\varphi$$

质点系对一点动量矩

质点系对点 O 的动量矩

$$\boldsymbol{L}_O=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum[(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_{ri})\times m_i(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{ri})]$$

$$=\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_C)+\underbrace{\cancel{\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})}}_{0}+\underbrace{\cancel{\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_C)}}_{0}+\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})$$



质点系对点 O 的动量矩的质心表达形式

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{L}_C$$

其中 $m=\sum m_i$ $\quad$ $\boldsymbol{L}_C=\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})$

$\boldsymbol{L}_C$——质点系相对质心C的动量矩

动量矩定理

(1) 对定点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

质点系对某固定点的**动量矩对时间的导数**, 等于对同一点的**合外力矩**。

(2) 对定轴的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(F^{(\mathrm{e})})$$

质点系对某固定轴的**动量矩对时间的导数**,等于对同一轴的**合外力矩。**

刚体的定轴转动微分方程

刚体对转轴 z 的动量矩: $L_z = J_z\omega = J_z\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$

于是根据动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_z(F^{(e)})}$$

可得

$$\boxed{J_z\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

定轴转动刚体，**转动惯量与角加速度的乘积等于外力对转轴的主矩，**这就是刚体**定轴转动微分方程**

相对于质心的动量矩定理

相对于质心的动量矩定理:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i}\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\boldsymbol{M}_C}$$

即，质点系**相对于质心的动量矩对时间的导数**，等于作用于质点系的**外力对质心的主矩**。

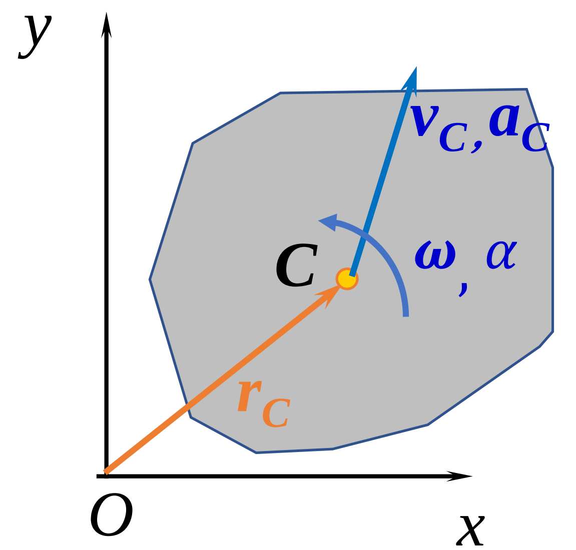
刚体的平面运动微分方程

- **随质心的牵连平移可由质心的动量定理来确定**

$$m_R \boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}$$

- **相对于质心的转动可由相对质心的动量矩定理来确定**

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F})$$



- **将质心动量定理投影到轴 x、y 上，相对质心的动量矩定理投影到垂直于xy平面且过质心的轴 Cz' 上，可得**

$$\left.\begin{aligned} m_R a_{Cx} &= \sum F_x \\ m_R a_{Cy} &= \sum F_y \end{aligned}\right\} \text{平移方程}$$

$$\frac{\mathrm{d}L_{Cz'}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = M_{Cz'}(F) \quad \text{转动方程}$$

刚体的平面运动微分方程

$$m_{\mathrm{R}} a_{Cx} = \sum F_x \ , \quad m_{\mathrm{R}} a_{Cy} = \sum F_y \ , \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{Cz'}}{\mathrm{d}t} = M_{Cz'}(\boldsymbol{F})$$

注意到 $a_{Cx} = \ddot{x}_C \ , \quad a_{Cy} = \ddot{y}_C \ , \quad L_{Cz'} = J_{Cz'}\omega = J_{Cz'}\dot{\varphi}$

式中 $J_{Cz'}$表示刚体对轴 Cz'的转动惯量。

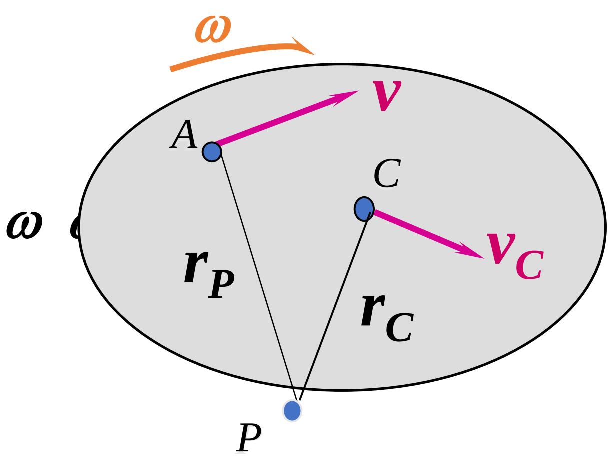
则有

$$\boxed{m_{\mathrm{R}} \ddot{x}_C = \sum F_x \ , \quad m_{\mathrm{R}} \ddot{y}_C = \sum F_y \ , \quad J_{Cz'}\ddot{\varphi} = M_{Cz'}(\boldsymbol{F})}$$

- 这就是刚体的平面运动微分方程。
- 可以应用它求解刚体作平面运动时的动力学问题。

动　能

$$T=\frac{1}{2}Mv_C{}^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$$



平面运动刚体的动能,等于它以质心速度作平移时的动能加上相对于质心轴转动的动能。

动 能 定 理

$$T_2 - T_1 = \sum W$$

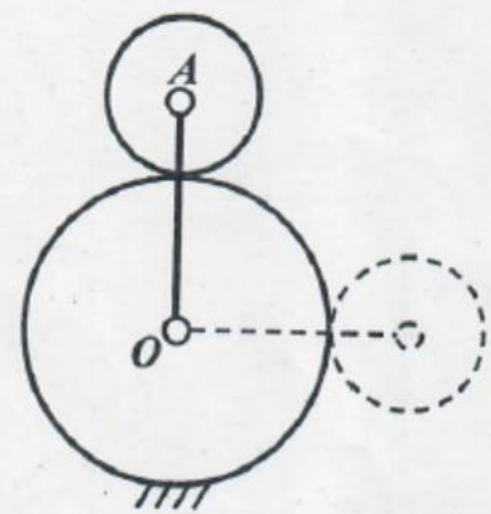
式中 T_1、 T_2 分别代表某一运动过程中开始和终了时质点系的动能。

质点系的动能的改变量，等于质点系的各力作功的代数和。这就是质点系动能定理。

四、图示大圆 O 固定，半径为 $2R$，圆心 O 处铰接杆 OA，杆 A 端铰接圆轮 A，轮半径为 R。均质轮质量为 $2m$，均质杆质量为 m。轮在大圆上作纯滚动，同时杆绕 O 轴转动。初始时，轮与杆静止，杆垂直。然后，轮滚下，杆顺时针倒下，杆到达水平状态。

求：此时，（1）杆 OA 与轮 A 的角速度；（2）轮 A 处的约束力。

（20 分）



质点系达朗贝尔原理

作用在质点系上的所有外力与所有质点的惯性力系在形式上组成平衡力系：

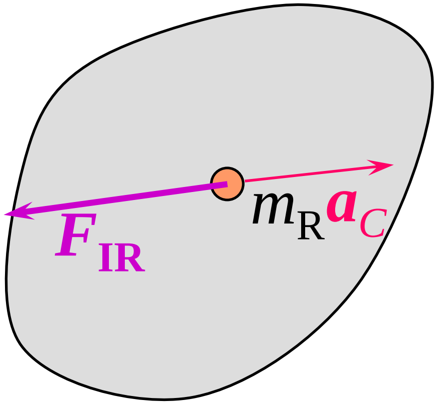
$$\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\mathbf{F}_{\mathrm{I}i}) = 0$$

惯性力系的简化

刚体在各种常见运动情况下惯性力主矢和主矩的表达式

（1）刚体作平移　　**刚体平移时，惯性力系向质心简化**



- 主矢

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}} = -m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_C$$

- 主矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}C} = -\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$$

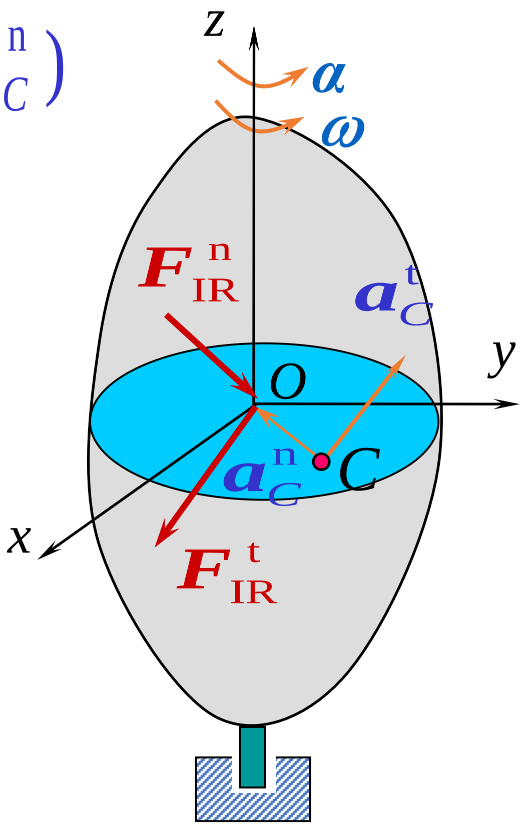
刚体平移时，惯性力系简化为通过刚体质心的合力。

惯性力系的简化

（2）刚体做定轴转动

● **主矢** $F_{\mathrm{IR}} = -m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_C = -m_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{a}_C^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_C^{\mathrm{n}})$

刚体定轴转动时，惯性力系向固定轴简化，得到的惯性力系主矢的大小等于刚体质量与质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度方向相反。

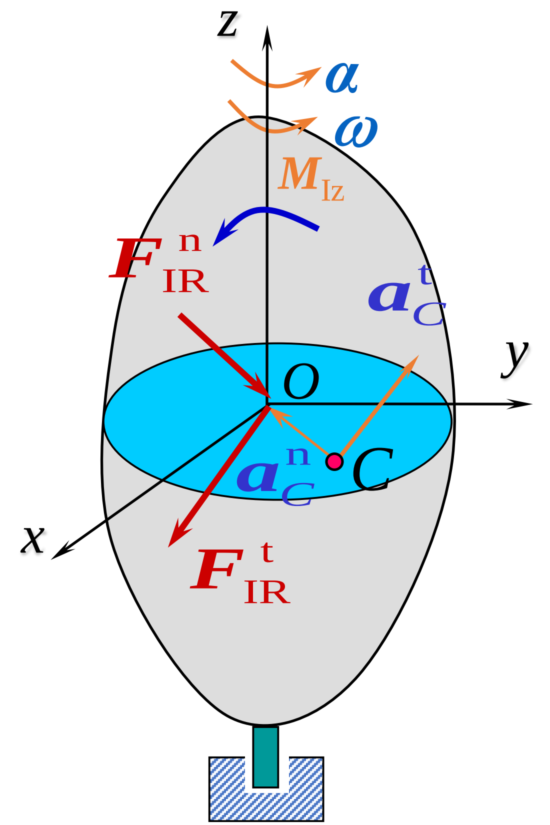


惯性力系的简化

（2）刚体做定轴转动

- **对转轴的主矩** $M_{\mathrm{Iz}}=-J_z\alpha$

刚体定轴转动时，惯性力系向固定轴简化的结果的主矩，其大小等于刚体对转动轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向与角加速度方向相反。



惯性力系的简化

（3）刚体作平面运动

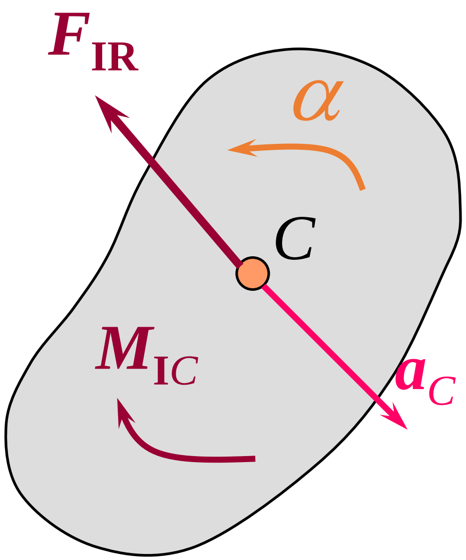
- **主矢**

惯性力系的主矢，其大小等于刚体质量与质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度方向相反

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}} = -m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_C$$

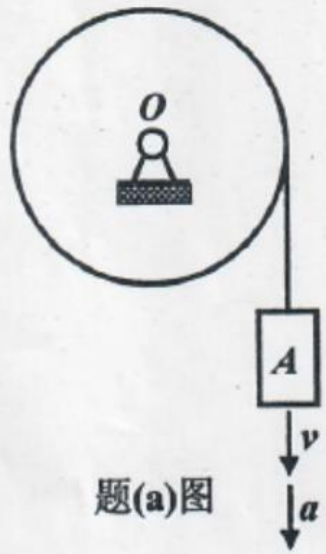
- **主矩**

惯性力系的主矩，其大小等于刚体对通过质心的转动轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向与角加速度方向相反



$$M_{\mathrm{IC}} = -J_{Cz'}\alpha$$

五、（a）图示均质圆轮，半径为 R，质量为 m_1，绕 O 轴转动。轮上缠绕细绳，绳另一端悬挂重物 A，物 A 的质量为 m_2。图示瞬时，物 A 的速度为 v，加速度为 a。求：此时轮与重物的惯性力系向点 O 简化的结果。



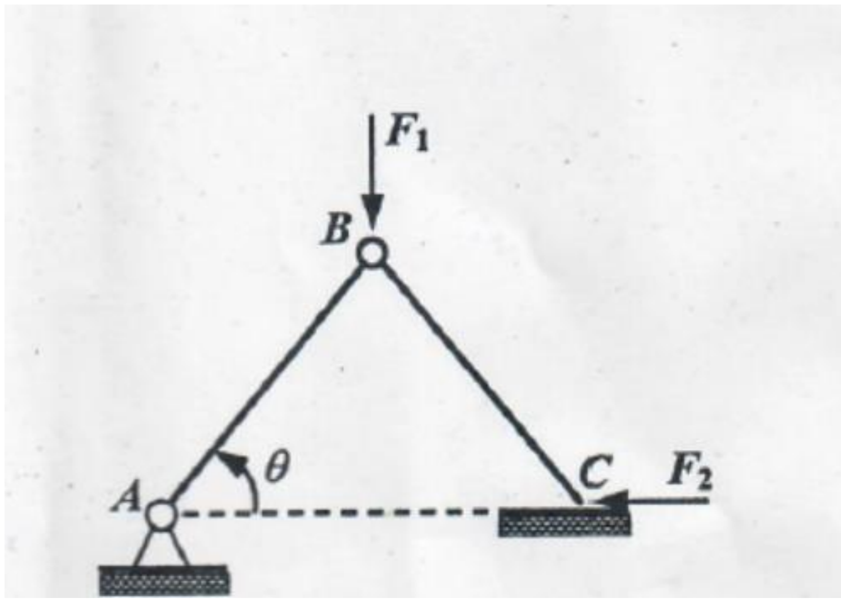
题(a)图

虚 位 移 原 理

$$\sum_{i=1}^{n} \delta W(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

具有双面、定常、理想约束的静止质点系，其平衡的充要条件是：所有主动力在任何虚位移上的虚功之和等于零。这就是**虚位移原理**，又称**虚功原理**。上面的方程称为**虚功方程。**

（b）图示平面内，杆 AB 与 BC 的长度均为 L，A 端为固定铰支座，B 处光滑铰连接，C 端在光滑平面上，AC 连线水平。铰 B 受垂直力 F_1 作用，C 端受水平力 F_2 作用，各杆重不计。平衡时，杆 AB 的斜角为θ。求：用虚角位移原理计算力 F_1 与 F_2 的关系。



应用虚位移原理解题的步骤

（1）确定研究对象：常选择整体为研究对象。

（2） 约束分析：是否理想约束?

（3） 受力分析：

- **求主动力之间的关系或平衡位置时：只分析主动力**
- **求约束力时：解除约束，视约束力为主动力。**

（4） 给出系统一组虚位移，列出虚功方程。

（5）找出虚位移之间的关系，代入虚功方程并求解。

- 根据速度或者几何关系
- 约束方程求变分

拉格朗日方程

- 拉格朗日函数（又称动势） $L = T - V$

- 保守系统的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- 对于非保守系统，主动力可以分为有势力和非有势力两类，系统的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mathrm{j}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\mathrm{j}} = \widetilde{Q}_\mathrm{j} \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

其中 $\widetilde{Q}_\mathrm{j}$ 为非有势力相应的广义力。

六、设某单自由度系统的广义坐标为θ，动能 T、势能 V、非保守广义力 $\tilde{Q}$ 分别为（其中 $m, b, \mathrm{c}, g, F, e$ 为常数，t 为时间变量）

$$T=\frac{1}{2}m(b+c\sin t)\dot{\theta}^{2}，\ V=mg(b-\cos\theta)，\ \tilde{Q}=Ft-e\dot{\theta}$$

求：（1）系统的拉格朗日方程；

拉格朗日方程的应用步骤

- 应用拉格朗日方程建立质点系的动力学关系的一般过程

(1)明确研究的系统对象及其约束的性质

(2)分析确定系统的自由度，选取适当的广义坐标

(3)计算系统的动能，并通过广义速度及广义坐标表示

如果存在有势力，也需计算势能。

(4)计算广义力，可以按照定义公式，也可利用虚功通过下式算得

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \frac{[\sum \delta W]_j}{\delta q_j} \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

❖ 对于保守系统，可以先计算势能，再求导得到

如果存在有势力，也可代入拉格朗日函数L

(5)将动能与广义力代入拉格朗日方程，求导并整理得系统的运动微分方程组。

哈密顿方程

- 拉格朗日函数是广义速度和广义坐标的函数

$$L = L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k; q_1, q_2, \dots, q_k)$$

- 哈密顿(Hamilton)引入**广义动量**

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- 将广义速度$\dot{q}_j$变换成广义动量p_j，把拉格朗日函数L通过勒让德变换成**哈密顿函数H**：

$$H = H(p_1, p_2, \dots, p_k; q_1, q_2, \dots, q_k) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i - L \right)_{\dot{q}_i \to p_i}$$

广义坐标　　　　　　　　　　广义动量

关于系统状态变量q_1、q_2、…、q_k和p_1、p_2、…、p_k的$2k$个一阶微分方程组

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$i = 1, 2, \cdots, k$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \widetilde{Q_i}$$

其中 $\widetilde{Q_i}$ 为非有势力相应的广义力。

哈密顿方程

六、设某单自由度系统的广义坐标为θ，动能 T、势能 V、非保守广义力$\tilde{Q}$分别为（其中 m, b, c, g, F, e 为常数，t 为时间变量）

$$T=\frac{1}{2}m(b+c\sin t)\dot{\theta}^2，\ V=mg(b-\cos\theta)，\ \tilde{Q}=Ft-e\dot{\theta}$$

（2）系统的哈密顿方程。

建立动力学系统哈密顿方程的一般过程

- 明确研究对象及约束性质
- 分析系统自由度，确定广义坐标
- 计算系统的动能和势能，确定拉格朗日函数（广义坐标和广义速度的函数）

$$L = T - V$$

- 求拉格朗日函数对广义速度的偏导数，从而确定广义动量

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

建立动力学系统哈密顿方程的一般过程

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mathrm{j}} \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- 从广义动量表达式中，反解出广义速度

$$\dot{q}_\mathrm{j} = \dot{q}_\mathrm{j}(p_1, p_2, \ldots, p_k) \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- 通过如下勒让德变换，计算哈密顿函数。将上面广义速度的表达代入哈密顿函数，使得哈密顿函数通过广义动量p_i和广义坐标q_i来表示

$$H = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i - L \right)_{\dot{q}_i \to p_i}$$

建立动力学系统哈密顿方程的一般过程

- 对于非保守系统，计算非有势力相应的广义力$\tilde{Q}$

- 将哈密顿函数及广义力$\tilde{Q}$代入到哈密顿方程，求导并整理得到系统的运动微分方程组。

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$i = 1, 2, \cdots, k$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \widetilde{Q_i}$$