一

(1)

为了使$L_1(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma_j})=\sum_{i=1}^{k}|\mu_j-\sigma_j^i|$最小，取$\boldsymbol{\sigma_j}$向量中各分量的中位数即可，记为$a_j$.

则使$\sum_{j=1}^{k}L_1(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma_j})=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}|\mu_j-\sigma_j^i|$最小，只需取$\boldsymbol{\mu}=(a_1,a_2,...,a_k)$即可。

此时$\boldsymbol{\mu}$各分量不一定为整数，可以自然地想到对其各分量进行排序，并将位次作为新的分量值，我们记这种排列为$\boldsymbol{\sigma}'$，接下来只需证明对于任意$\boldsymbol{x}$向量，有$L_1(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}')\leq L_1(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{x})$

若$\boldsymbol{x}$不是$\boldsymbol{\sigma}'$，则 $\boldsymbol{x}$ 不是对 $\boldsymbol{\mu}$ 进行排序得到的向量，所以肯定至少有一组索引 i,j，满足 $x_i>x_j$，而$\sigma_i'<\sigma_j'$ 且 $\mu_i<\mu_j$。

我们记 $\boldsymbol{x}'$ 为将 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量与第 j 个分量交换后得到的向量，接下来证明 $L_1(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{x'})\leq L_1(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{x})$
。

$$\begin{aligned}L_1(\mu,x')-L_1(\mu,x)&=\sum_{k=1}^{n}|x_k'-\mu_k|-\sum_{k=1}^{n}|x_k-\mu_k|\\&=|x_j'-\mu_j|+|x_i'-\mu_i|-|x_j-\mu_j|-|x_i-\mu_i|\\&=|x_j-\mu_j|+|x_i-\mu_i|-|x_j-\mu_j|-|x_i-\mu_i|\\&=|x_i-\mu_i|-|x_i-\mu_i|-(|x_j-\mu_j|-|x_j-\mu_j|)\leq 0\end{aligned}$$

记$f(x)=|x-\mu_j|-|x-\mu_i|$，有$\mu_i<\mu_j$，则

$$f(x)=\begin{cases}\mu_j-\mu_i, & x\leq\mu_i\\ -2x+\mu_i+\mu_j, & \mu_i<x<\mu_j\\ \mu_i-\mu_j, & x\geq\mu_j\end{cases}$$

显然$f(x)$不增。可知$\boldsymbol{\sigma}'$可以由$\boldsymbol{\mu}$得到

$\boldsymbol{\sigma}^*$ 不能从 $\boldsymbol{\mu}$ 得到，因为能取到最值的$\boldsymbol{\mu}$不唯一，不能保证最优。

(2)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} |\beta_j - \sigma_j^i| &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \sigma_j^m - \sigma_j^i \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} |\sigma_j^m - \sigma_j^i| \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} |\sigma_j^m - \mu_j + \mu_j - \sigma_j^i| \\
&\leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} (|\sigma_j^m - \mu_j| + |\mu_j - \sigma_j^i|) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} |\sigma_j^m - \mu_j| + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} |\mu_j - \sigma_j^i| \\
&= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} |\sigma_j^m - \mu_j| + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} |\mu_j - \sigma_j^i| \\
&= \sum_{m=1}^{k} |\sigma_j^m - \mu_j| + \sum_{i=1}^{k} |\mu_j - \sigma_j^i| \\
&= 2 \sum_{i=1}^{k} |\mu_j - \sigma_j^i|
\end{aligned}
$$

(3)

$d(\sigma', \Sigma) \leq 3d(\sigma^*, \Sigma)$

$$
\begin{aligned}
d(\sigma', \Sigma) &= \sum_{i=1}^{k} L_1(\sigma', \sigma_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} (L_1(\sigma', \mu) + L_1(\mu, \sigma_i)) \quad (\text{三角不等式易知}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} (L_1(\sigma^*, \mu) + L_1(\mu, \sigma_i)) \quad (\forall x, L_1(\sigma', \mu) \leq L_1(x, \mu)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} (L_1(\sigma^*, \sigma_i) + L_1(\mu, \sigma_i) + L_1(\sigma', \mu)) \quad (\text{三角不等式易知}) \\
&\leq 3 \sum_{i=1}^{k} L_1(\sigma^*, \sigma_i)
\end{aligned}
$$

$d(\sigma'', \Sigma) \leq 5d(\sigma^*, \Sigma)$

对于 σ''，由三角不等式有：

$$
L_1(\sigma'', \sigma_i) \leq L_1(\sigma'', \beta) + L_1(\beta, \sigma_i)
$$

由于 σ'' 是将 β_j 从小到大排序得到的排列，同理可得，

$$
L_1(\sigma'', \beta) = \min_{\sigma} L_1(\sigma, \beta)
$$

因此，

$$
L_1(\sigma'', \beta) \leq L_1(\sigma^*, \beta)
$$

故由三角不等式

$$
L_1(\sigma'', \sigma_i) \leq L_1(\sigma^*, \beta) + L_1(\beta, \sigma_i) \leq L_1(\sigma^*, \sigma_i) + 2L_1(\beta, \sigma_i)
$$

从而

$$
d(\sigma'', \Sigma) = \sum_{i=1}^{k} L_1(\sigma'', \sigma_i) \leq \sum_{i=1}^{k} L_1(\sigma^*, \sigma_i) + 2 \sum_{i=1}^{k} L_1(\beta, \sigma_i)
$$

由第 (2) 问，我们有对于任意 j，

$$\sum_{i=1}^{k} |\beta_j - \sigma_j^i| \leq 2 \sum_{i=1}^{k} |\mu_j - \sigma_j^i|$$

将上述不等式对 j 求和：

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} |\beta_j - \sigma_j^i| \leq 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} |\mu_j - \sigma_j^i|$$

即，

$$\sum_{i=1}^{k} L_1(\beta, \sigma_i) \leq 2d(\mu, \Sigma) \leq 2d(\sigma^*, \Sigma)$$

综上

$$d(\sigma'', \Sigma) \leq d(\sigma, \Sigma) + 4d(\sigma, \Sigma) = 5d(\sigma, \Sigma)$$

二

(1)

$q_{AB} = 5 - 10 = -5$
$q_{AD} = 57 - 45 = 12$
$q_{BC} = 10 - 7 = 3$
$q_{CD} = 3 - 10 = -7$

$q_{ji} = -q_{ij}$

$q_{BA} = -q_{AB} = 5$
$q_{DA} = -q_{AD} = -12$
$q_{CB} = -q_{BC} = -3$
$q_{DC} = -q_{CD} = 7$

$s_A = q_{AA} + q_{AB} + q_{AD} = 0 + (-5) + 12 = 7$
$s_B = q_{BB} + q_{BA} + q_{BC} = 0 + 5 + 3 = 8$
$s_C = q_{CC} + q_{CB} + q_{CD} = 0 + (-3) + (-7) = -10$
$s_D = q_{DD} + q_{DA} + q_{DC} = 0 + (-12) + 7 = -5$

$S = (7, 8, -10, -5)$。

(2)

计算每个球队的二级分差 $s_i^{(2)}$。根据定义：

$$s_i^{(2)} = \sum_{j \in T_i} \sum_{k \in T_j} (q_{ij} + q_{jk})$$

即

$$s_i^{(2)} = \sum_{j \in T_i} q_{ij} \cdot |T_j| + \sum_{j \in T_i} s_j$$

$|T_j| = l = 3$，有：

$$s_A^{(2)} = 3 \cdot s_A + \sum_{j \in T_A} s_j = 3 \cdot 7 + (7 + 8 - 5) = 21 + 10 = 31$$

$$s_B^{(2)} = 3 \cdot s_B + \sum_{j \in T_B} s_j = 3 \cdot 8 + (8 + 7 - 10) = 24 + 5 = 29$$

$$s_C^{(2)} = 3 \cdot s_C + \sum_{j \in T_C} s_j = 3 \cdot (-10) + (-10 + 8 - 5) = -30 - 7 = -37$$

$$s_D^{(2)} = 3 \cdot s_D + \sum_{j \in T_D} s_j = 3 \cdot (-5) + (-5 + 7 - 10) = -15 - 8 = -23$$

$S^{(2)} = (31, 29, -37, -23)$。

(3)

定义矩阵 M：

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

其中，$m_{ij} = 1$ 当且仅当 $j \in T_i$。

根据之前的计算，我们有：

$$s_i^{(2)} = l s_i + \sum_{j=1}^{n} m_{ij} s_j$$

可以用矩阵形式表示为：

$$S^{(2)} = (lE + M)S$$

其中，E 是单位矩阵，S 是分差向量。

关于 M^2 的元素含义：

矩阵 M^2 的元素 $(M^2)_{ik}$ 表示从球队 i 经过两步可以到达球队 k 的路径数。
这对应于球队 i 与球队 k 之间的二级比赛次数。

(4)

实际上，T_i 就是 M 的第 i 行的非零元素的索引集合。所以，类似于 $\sum_{a\in T_i} x_a$ 的形式，其实就等于 $M_i^T x$。如果再套一层，例如 $\sum_{a\in T_i} M_a^T x$，其实就等于 $M_i^T M x$。

我们取 $r=k+1$，可以得到:

$$
\begin{aligned}
s_i^{(k+1)} &= \sum_{i_1\in T_i}\cdots\sum_{i_k\in T_{i_{k-1}}}\sum_{i_{k+1}\in T_{i_k}}(q_{ii_1}+q_{i_1i_2}+\cdots+q_{i_ki_{k+1}}) \\
&= \sum_{i_1\in T_i}\cdots\sum_{i_k\in T_{i_{k-1}}}\sum_{i_{k+1}\in T_{i_k}} q_{ii_1}+\sum_{i_1\in T_i}\cdots\sum_{i_k\in T_{i_{k-1}}}\sum_{i_{k+1}\in T_{i_k}} q_{i_1i_2}+\cdots+\sum_{i_1\in T_i}\cdots\sum_{i_k\in T_{i_{k-1}}}\sum_{i_{k+1}\in T_{i_k}} q_{i_ki_{k+1}} \\
&= \sum_{i_1\in T_i} l^k q_{ii_1}+\sum_{i_1\in T_i}\sum_{i_2\in T_{i_1}} l^{k-1}q_{i_1i_2}+\cdots+\sum_{i_1\in T_i}\sum_{i_2\in T_{i_1}}\cdots\sum_{i_k\in T_{i_{k-1}}} s_{i_k} \\
&= l^k s_i + l^{k-1}\mathbf{M}_i^T\mathbf{S}+\cdots+\mathbf{M}_i^T\mathbf{M}^{k-1}\mathbf{S}
\end{aligned}
$$

所以有:

$$
S^{(k+1)}=\sum_{i=0}^{k} l^{k-i}M^iS
$$

由 M 和 S 计算 $S^{(r)}$ 的公式为:

$$
S^{(r)}=\sum_{i=0}^{r-1} l^{r-1-i}M^iS
$$