动能定理

§1 力的功

§2 动能

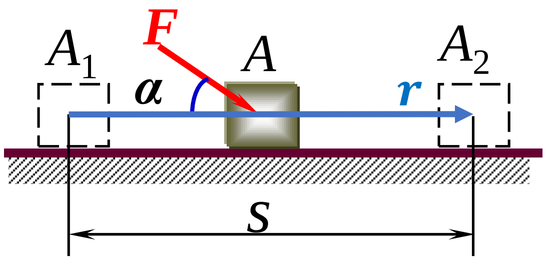
§3 动能定理

§4 势力场·势能·机械能守恒定理

§力 的 功

力的功是力在一段路程中对物体作用所累积的效果，其结果引起能量的转变和转化。

1. 常力在直线路程中的功



设一物体，在常力F作用下沿直线由 A_1 平动到 A_2，所经历的路程是 s 。则该常力F 在此路程中的功为

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} = F\cos\alpha\, s$$

功的基本单位在国际单位制中采用 J：

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

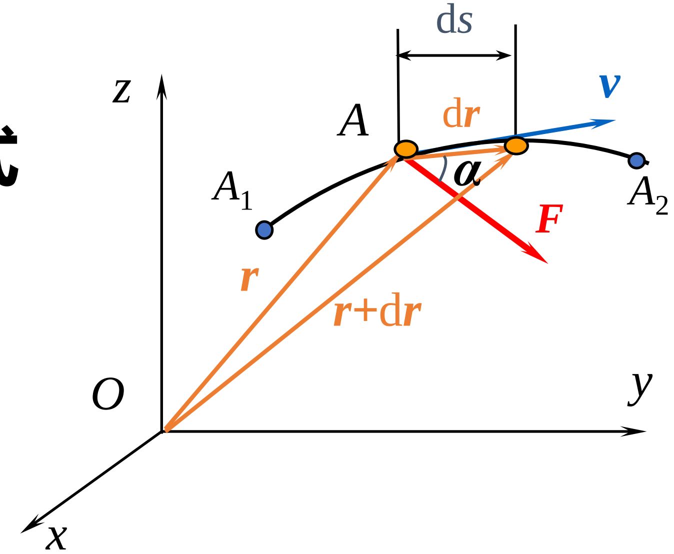
§ 力 的 功

2. 变力在曲线路程中的功

（1）元功的定义

质点 A 在变力 F 作用下沿曲线 A_1A_2运动，力 F 在无限小位移d$\boldsymbol{r}$中可视为常力，经过的一小段弧长ds可视为直线。则力$\boldsymbol{F}$在无限小位移d$\boldsymbol{r}$中作的功称为元功，即

$$\delta W = \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s$$



由于无限小位移d$\boldsymbol{r}$ = $\boldsymbol{v}$dt，故上式可以改写成

$$\delta W = \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

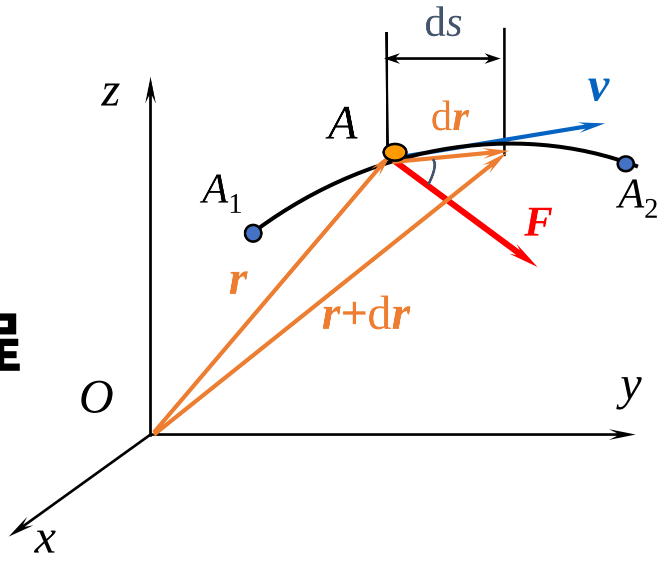
§力 的 功

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

(2) 元功的解析表达式

直角坐标系中： $\boldsymbol{F} = F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j} + F_z\,\boldsymbol{k}$， $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{k}$，
则有，

$$\delta W = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$



(3)变力在曲线路程中的总功

元功积分可以得到力 F 在有限路程 A_1A_2 中的总功W：

$$W = \int_{A_1}^{A_2} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z)$$

3. 合力之功定理

如在质点上同时作用着几个力，合力在某一路程上的功，等于各分力分别在该路程中的功的代数和。这个结论称为合力之功定理。

$$\boldsymbol{F}=\sum_i \boldsymbol{F}_i$$

$$W=\int_{A_1}^{A_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{A_1}^{A_2}\left(\sum_i \boldsymbol{F}_i\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\sum_{\boldsymbol{i}}\int_{A_1}^{A_2}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

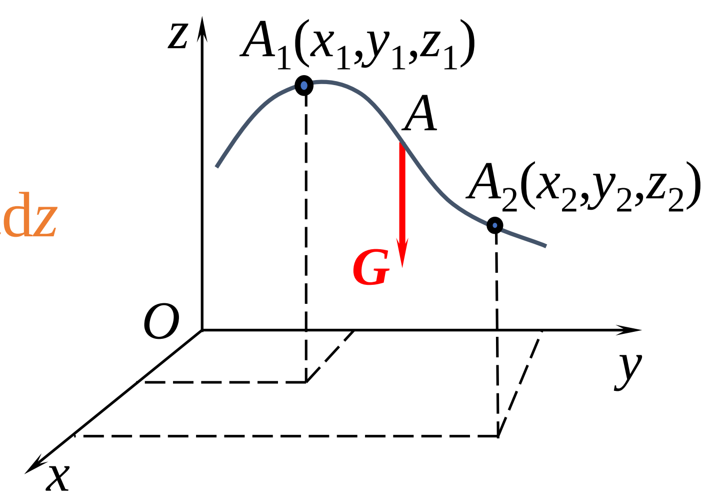
§ 力 的 功

4. 几种特殊力的功

（1） 重力的功

设物体的重心 A **沿某一曲线由** A_1 **运动到** A_2 **。物体的重力** G**在坐标轴系上的投影为**

$$F_x = F_y = 0\,, \quad F_z = -G$$



由元功表达式 $\delta W = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$

得重力的元功

$$\delta W = -G\mathrm{d}z$$

故重力在曲线路程 A_1A_2 **上的功为**

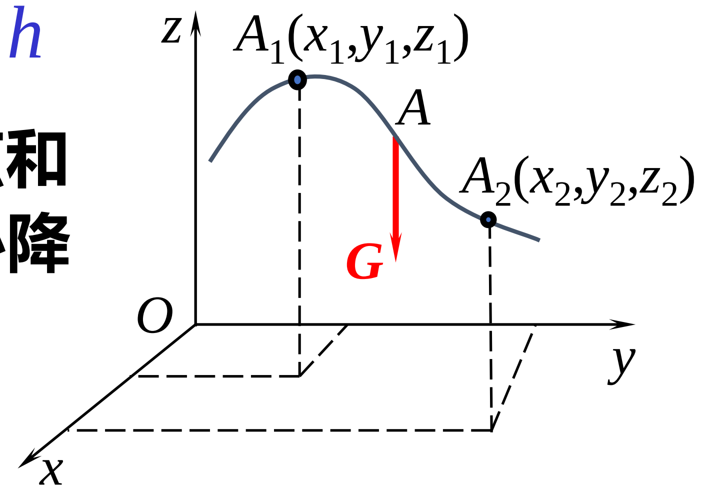
$$W = -\int_{z_1}^{z_2} G\mathrm{d}z = G(z_1 - z_2) = Gh$$

其中$h = z_1 - z_2$**是物体重心降落的高度。**

§ 力 的 功

重力在曲线路程 A_1A_2 上的功为

$$W = -\int_{z_1}^{z_2} G\mathrm{d}z = G(z_1 - z_2) = Gh$$



式中 z_1 和 z_2 分别是重心的路程起点和终点的纵坐标；$h = z_1 - z_2$ 是物体重心降落的高度。

结 论

- **重力的功等于重力与重心降落高度的乘积。**
- **重力的功与运动路径无关。**
- **重心下降，重力作正功；否则，重力作负功。**

§ 力 的 功

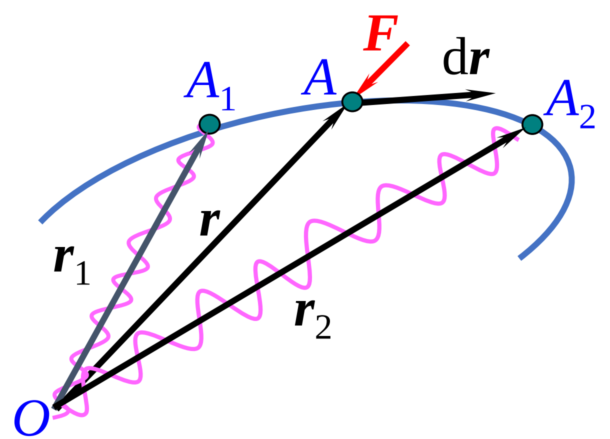
(2) 弹性力的功

弹簧的一端 O 固定，而另一端 A 作任意曲线运动，且弹簧始终处于直线状态。现求在点 A 由位置 A_1 沿某一路线运动到位置 A_2 的路程中弹性力所作的功。设弹簧未变形时长度是 l_0，刚度系数是k。

在任意位置A，弹簧的变形为 $\lambda = | r - l_0 |$，矢径方向的单位矢量为$\boldsymbol{r}/r$。

① 弹性力的矢量表示

- **当$r - l_0 \geq 0$ 时，$\lambda = r - l_0$，弹簧拉长，弹性力F指向点O，其矢量表示式为**



$$\boldsymbol{F} = k\lambda(-\boldsymbol{r}/r) = k(r - l_0)(-\boldsymbol{r}/r)$$

§ 力 的 功

● **当**$r-l_0 \geq 0$ **时，** $\lambda = r - l_0$ **，弹簧拉长，弹性力**F**指向点**O**，其矢量表示式为**

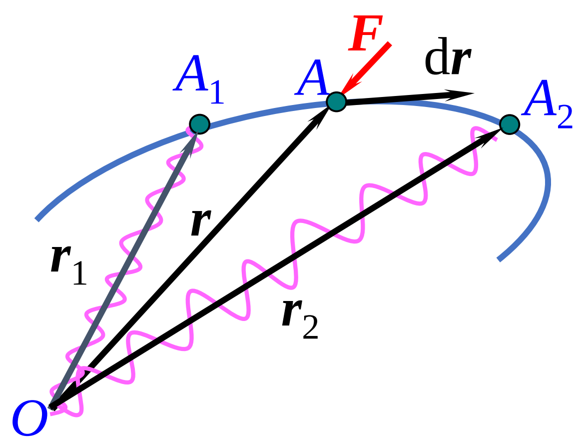
$$\boldsymbol{F} = k\,\lambda\,(-\,\boldsymbol{r}\,/\,r\,) = k\,(r - l_0)\,(-\,\boldsymbol{r}\,/\,r\,)$$

● **当**$r-l_0 < 0$ **时，** $\lambda = -\,(\,r - l_0\,)$ **，弹簧压缩，弹性力**F**指向点**A**，其矢量表示式为**

$$\boldsymbol{F} = k\,\lambda\,\boldsymbol{r}\,/\,r = -\,k(r - l_0)\,\boldsymbol{r}\,/\,r$$

综上，弹性力的矢量表示

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -\,k(r - l_0)\,\boldsymbol{r}/r}$$

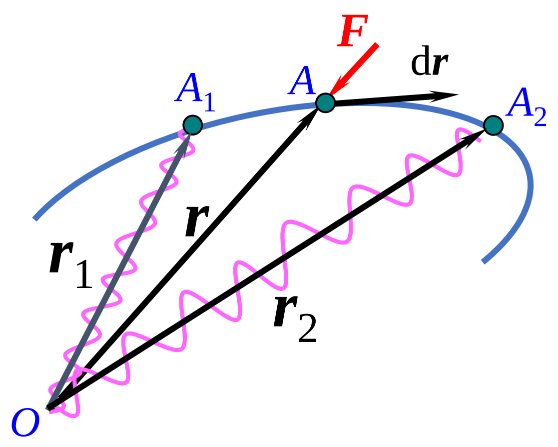


§ 力 的 功

②弹性力的元功

由元功表达式 $\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t$

得 弹性力 F **的元功**



$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -k\,(r - l_0)\,(\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} / r)$$

考虑到 $\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})/2 = \mathrm{d}(r^2)/2$

$= r\,\mathrm{d}r = r\,\mathrm{d}(r - l_0)$，**即得**

$$\delta W = -k\,(r - l_0)\,\mathrm{d}(r - l_0)$$

③弹性力的功

弹性力 F **在曲线路程** A_1A_2 **中的功**

$$W = \int_{A_1}^{A_2} \mathrm{d}W = -k\int_{r_1}^{r_2} (r - l_0)\mathrm{d}(r - l_0) = \frac{k}{2}[(r_1 - l_0)^2 - (r_2 - l_0)^2]$$

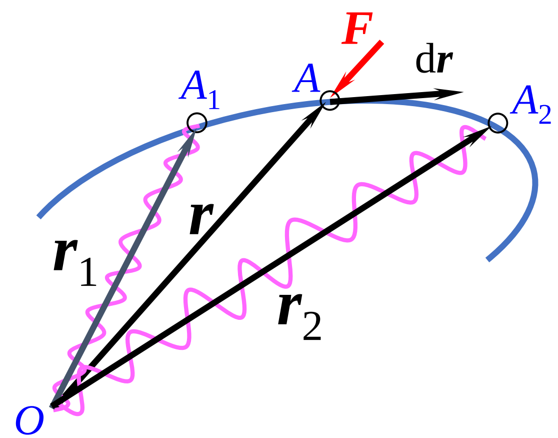
§力 的 功

弹性力 F 在曲线路程 A_1A_2 中的功

$$W=\int_{A_1}^{A_2}\mathrm{d}W=-k\int_{r_1}^{r_2}(r-l_0)\mathrm{d}(r-l_0)=\frac{k}{2}[(r_1-l_0)^2-(r_2-l_0)^2]$$

以 $\lambda_1=r_1-l_0$ 和 $\lambda_2=r_2-l_0$ 分别表示路程始末端 A_1 和 A_2 处弹簧的变形量，则上式写成

$$W=\frac{k}{2}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)$$



结　论

- **弹性力的功，等于弹簧初变形的平方和末变形的平方之差与弹簧刚度系数乘积的一半。**
- **弹性力的功与运动路径无关。**
- **弹簧的变形量减小，弹性力作正功；否则，作负功。**

§ 力 的 功

5. 作用于质点系上的力系的功

(1) 平移刚体上力的功

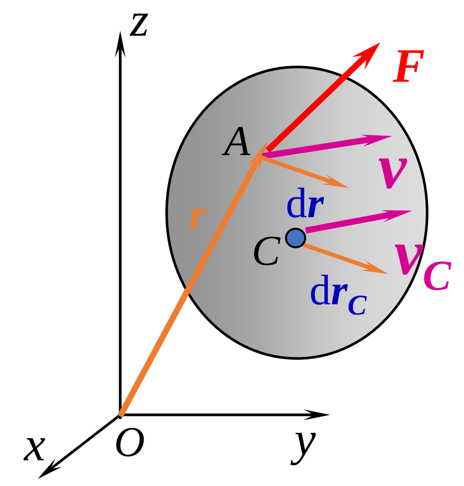
① 元 功

设一刚体在力 F 作用下作平移，其质心在 C 点，刚体上点 A 的矢径是 r，速度是 $\boldsymbol{v}$，则力 F 的元功

$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C$$

或

$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}_C\, \mathrm{d}t$$



② 总 功

$$W = \int_{A_1}^{A_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{A_1}^{A_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C$$

或

$$W = \int_{A_1}^{A_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t = \int_{A_1}^{A_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}_C\, \mathrm{d}t$$

§ 力 的 功

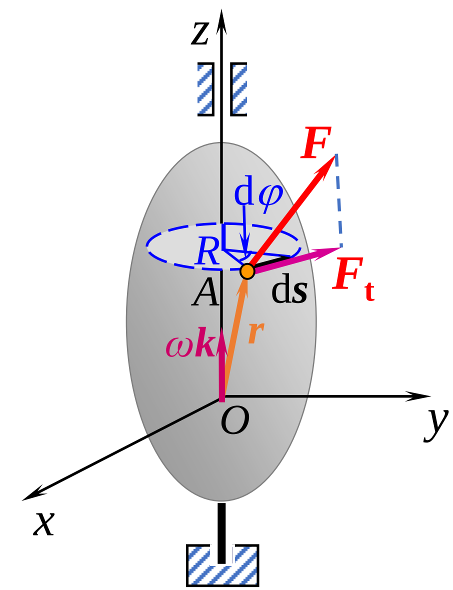
(2) 定轴转动刚体上外力的功

① 元功

设刚体绕定轴z 转动，角速度 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$，刚体上点 A 的矢径是 $\boldsymbol{r}$. 作用着力 F，当刚体有一微小转角 $\mathrm{d}\varphi$ 时，力 F 的元功

$$\delta W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=F_t\,\mathrm{d}s=F_t R\mathrm{d}\varphi$$

$$\delta W=M_z(\boldsymbol{F})\mathrm{d}\varphi$$



② 总 功

在刚体由角 φ_1 转到角 φ_2 的过程中，力 F 的总功为

$$W=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_z(\boldsymbol{F})\mathrm{d}\varphi$$

§ 力 的 功

(3) 平面运动刚体上力的功

① 元 功

力 F 作用在刚体A点，质心在 C 点，速度是 v_C ，刚体上点 A 的速度是 v_A，则力 F 的元功

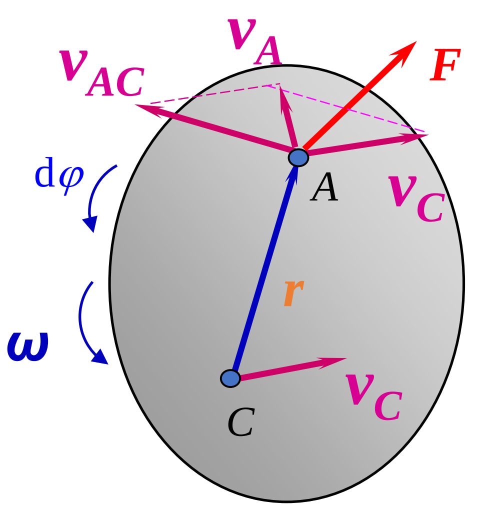
$$\delta W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_A \mathrm{d}t = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{AC})\,\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_C \mathrm{d}t + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_{AC}\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C + (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C + M_\mathrm{C}(\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}\varphi$$



②总 功

$$W=\int_{C_1}^{C_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_C\,\mathrm{d}\varphi$$

作用于平面运动刚体上的力的功，等于与该力等效的、作用在质心的力和力偶作功之和。

动　　能

1. 质点的动能

设质点的质量为 m，速度为 v，则该质点的动能

$$T=\frac{1}{2}mv^2$$

即，**质点的质量与其速度平方乘积的一半称为质点的动能。**

动能是物体机械运动的一种度量，恒为正值。

2. 质点系的动能

质点系的动能等于系统内所有质点动能的总和，用符号 T 表示，则有

$$T=\sum\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\sum mv^2$$

国际单位制中，动能的常用单位是 $\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$，即 J。

动　　能

3. 几种刚体运动的动能

（1）　平移刚体的动能

平移刚体各点的速度和质心速度 v_C相同，M 表示刚体质量，则其动能

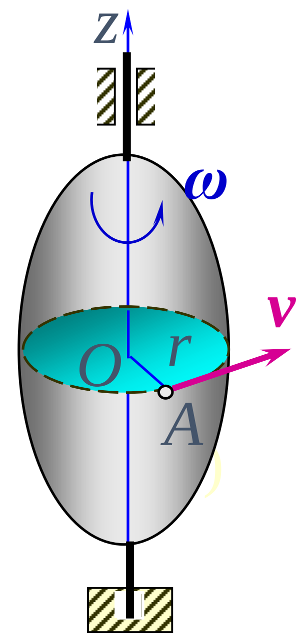
$$T=\frac{1}{2}\sum m v_C^2=\frac{v_C^2}{2}\sum m=\frac{1}{2}M v_C^2$$

即，平移刚体的动能,等于刚体的质量与质心速度平方乘积的一半。

动　　能

（2）定轴转动刚体的动能

设刚体以角速度 ω 绕定轴 z 转动，以 m 表示刚体内任一点 A 的质量，以 r 表示 A 的转动半径，则该刚体的动能为



$$T=\frac{1}{2}\sum mv^2=\frac{1}{2}\sum m(r\omega)^2=\frac{\omega^2}{2}\sum mr^2$$

其中$\sum mr^2=J_z$ **是刚体对转轴 z 的转动惯量，故上式可写成**

$$T=\frac{1}{2}J_z\omega^2$$

可见，定轴转动刚体的动能，等于刚体对转轴的转动惯量与其角速度平方乘积的一半。

动　能

（3）平面运动刚体的动能

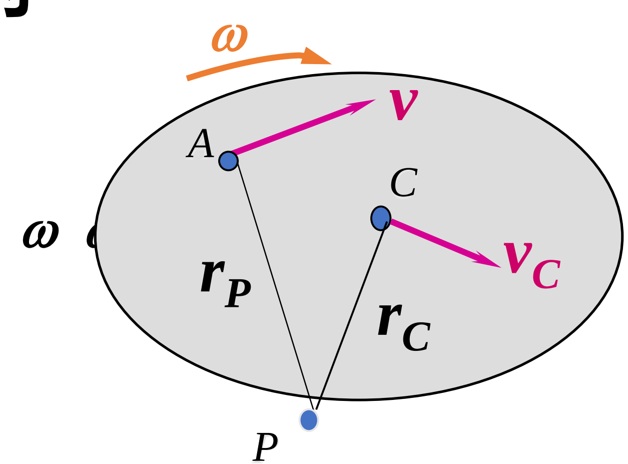
刚体做平面运动时，其上任一点的速度为 v ，平面运动刚体的角速度是 ω ，速度瞬心在P 点，刚体对瞬轴的转动惯量是 J_P。对平行于瞬轴的质心轴的转动惯量是 J_C ，则该刚体的动能为

$$T=\sum\frac{1}{2}mv^2=\sum\frac{1}{2}m(r_P\omega)^2=\frac{1}{2}\omega^2\sum mr_P^2=\frac{1}{2}\omega^2 J_P$$

设刚体的质心 C 到速度瞬心 P 的距离是r_C，刚体的质量是M。

根据转动惯量的平行轴定理

$$J_P=J_C+Mr_C^2$$



有

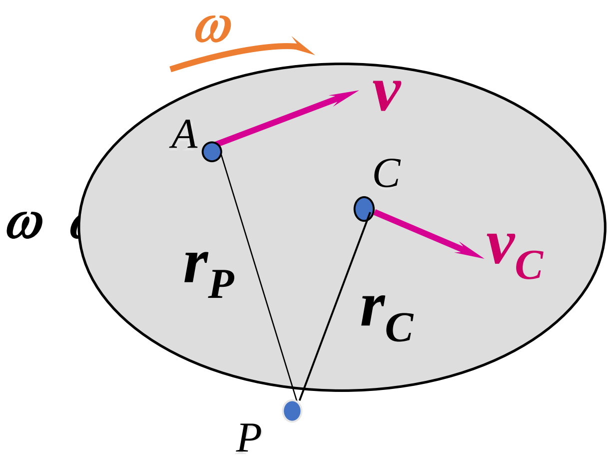
$$T=\frac{1}{2}(J_C+Mr_C^2)\omega^2$$

动　　能

$$T=\frac{1}{2}(J_C+Mr_C{}^2)\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}J_C\omega^2+\frac{1}{2}M(\omega r_C)^2$$

$$=\frac{1}{2}J_C\omega^2+\frac{1}{2}Mv_C^2$$

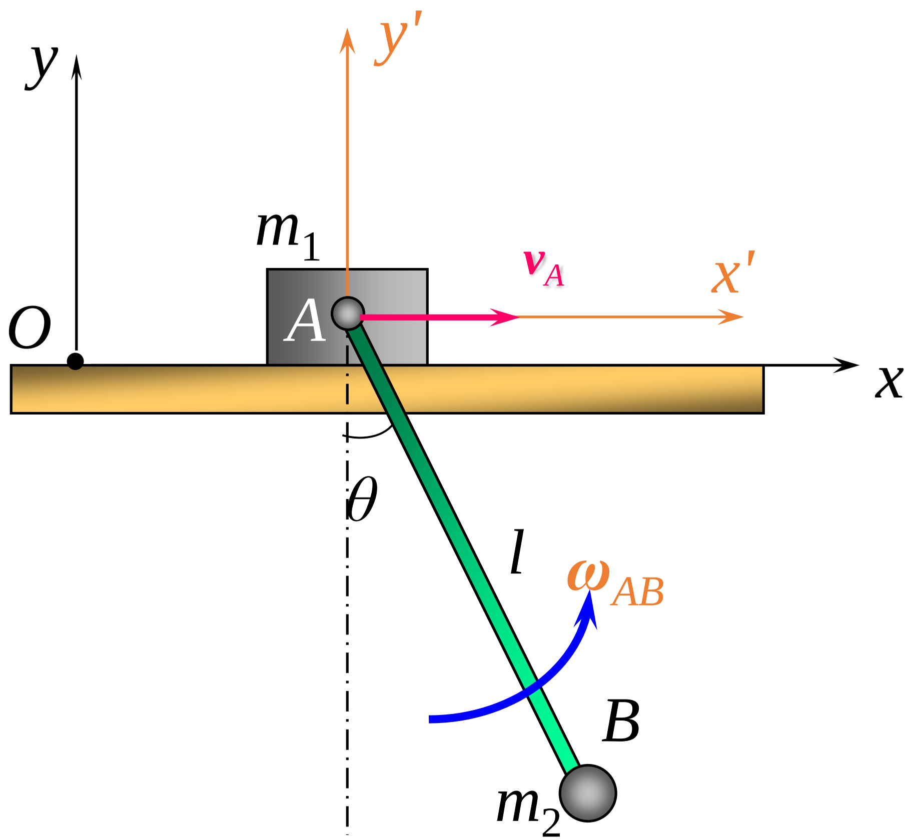


质心形式的动能表达式：

$$T=\frac{1}{2}Mv_C{}^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$$

平面运动刚体的动能,等于它以质心速度作平移时的动能加上相对于质心轴转动的动能。

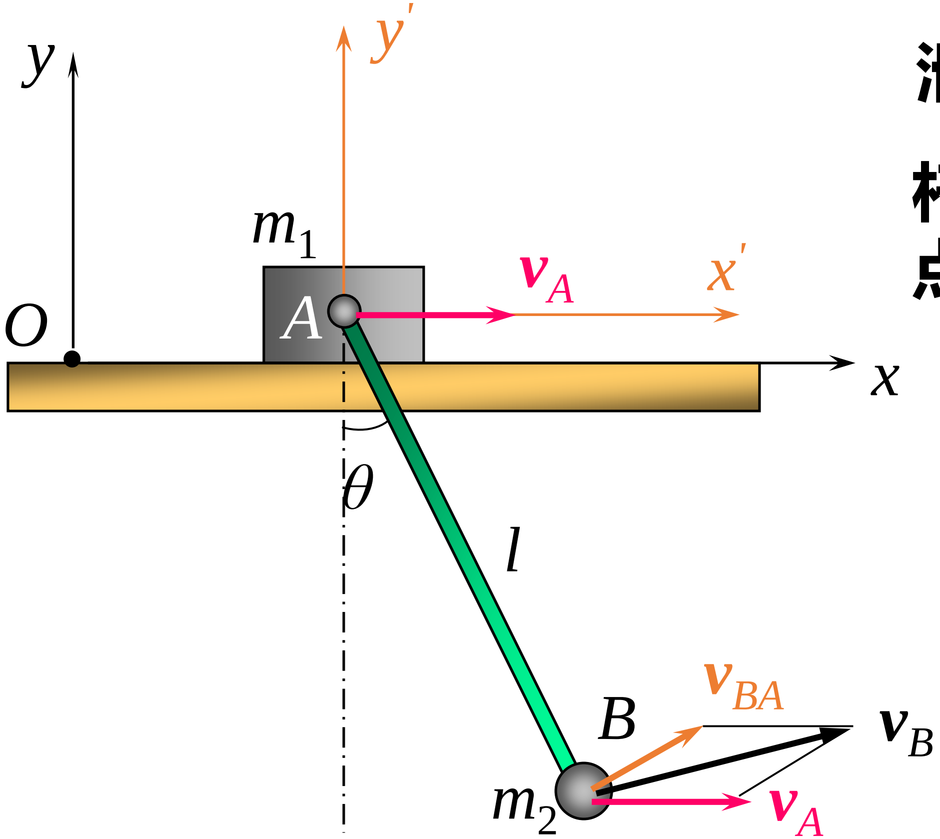
动　　能



例题　**已知滑块A的质量为 m_1，质点B的质量为m_2，AB杆的长度为l，不计质量，以角速度ω_{AB}绕 A点转动，滑块的速度为v_A。试求系统的动能。**

动　能

解：　（1）运动分析与速度分析



滑块作直线运动，速度为v_A；

杆AB作平面运动。以A为基点，质点B的速度为

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

$$v_{BA} = l\omega_{AB}$$

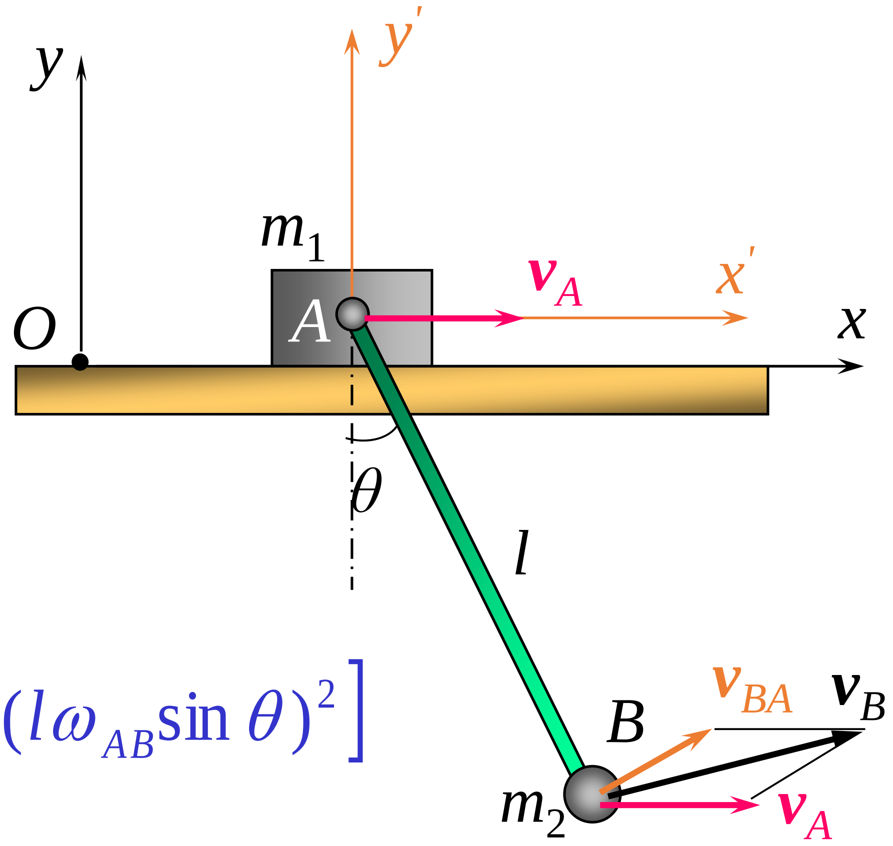
$$v_{Bx} = v_A + l\omega_{AB}\cos\theta$$

$$v_{By} = l\omega_{AB}\sin\theta$$

动 能

（2）计算系统动能

滑块的动能 $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_A^2$



质点B的动能

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_B^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \left[(v_A + l\omega_{AB}\cos\theta)^2 + (l\omega_{AB}\sin\theta)^2 \right]$$

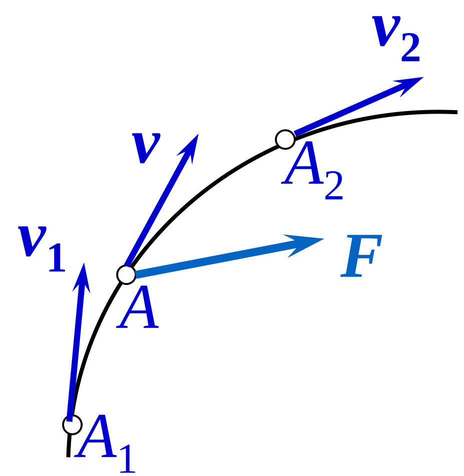
系统的总动能

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_A^2 + m_2 l v_A \omega_{AB}\cos\theta + m_2 l^2 \omega_{AB}^2$$

动 能 定 理

1. 质点动能定理

设质量为 m **的质点** A **，在力作用下** F **沿曲线由** A_1 **运动到** A_2 **，它的速度由** $\boldsymbol{v}_1$ **变为** $\boldsymbol{v}_2$ **。**



(1) 微分形式

由牛顿第二定理

$$m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

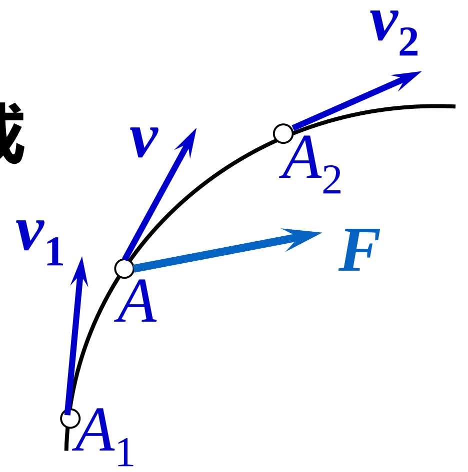
$$m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$$

两边点乘速度 $\boldsymbol{v}$ **,得**

$$m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

动 能 定 理

$$m\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$



上式右端就是作用力的元功δW**，左端可改写成**

$$m\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}=m\mathrm{d}(\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{v})/2=\mathrm{d}(mv^2/2),$$

从而得

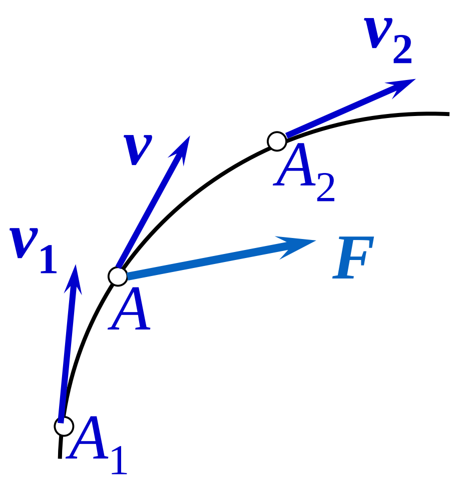
$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)=\delta W$$

即，质点动能的增量等于作用于质点上的力的元功，这就是质点动能定理的微分形式。

动 能 定 理

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \delta W$$

（2）积分形式



将微分形式沿路程 A_1A_2 积分，得

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W$$

式中 W 表示力 F 在路程 A_1A_2 中的功。

可见，质点动能的改变量，等于作用于质点的合力所作的功。这就是质点动能定理的积分形式。

动 能 定 理

2. 质点系动能定理

(1) 微分形式

将质点系中的所有质点的动能定理的微分方程相加得

$$\sum \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \delta W$$

因 $$\sum \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathrm{d}\sum\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathrm{d}T$$ **其中T是质点系动能。**

故上式可写成

$$\mathrm{d}T = \sum \delta W$$

即，质点系动能的增量等于作用于质点系各力的元功的代数和，这就是质点系动能定理的微分形式。

动 能 定 理

(2) 积分形式

微分形式 $$\mathrm{d}T=\sum \delta W$$

将微分形式积分，得

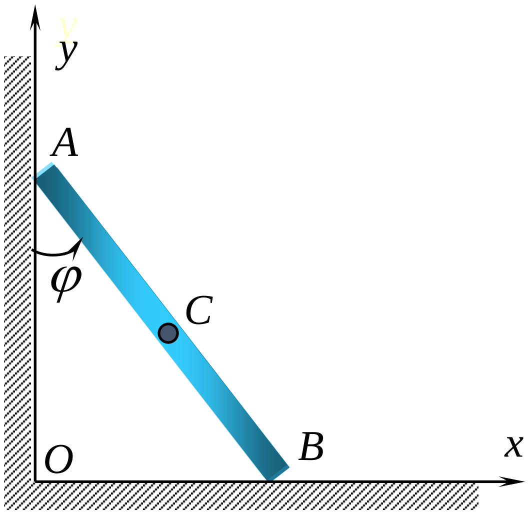
$$T_2-T_1=\sum W$$

式中 T_1、 T_2 分别代表某一运动过程中开始和终了时质点系的动能。

质点系的动能的改变量，等于质点系的各力作功的代数和。这就是质点系动能定理的积分形式。

动 能 定 理

例题：**均质细杆 AB 的质量是 m，长度是 $2l$，放在铅直面内，两端分别沿光滑的铅直墙壁和光滑的水平地面滑动。假设杆的初位置与墙成交角 φ_0，初角速度等于零。试求杆沿铅直墙壁下滑时的角速度和角加速度。**



动 能 定 理

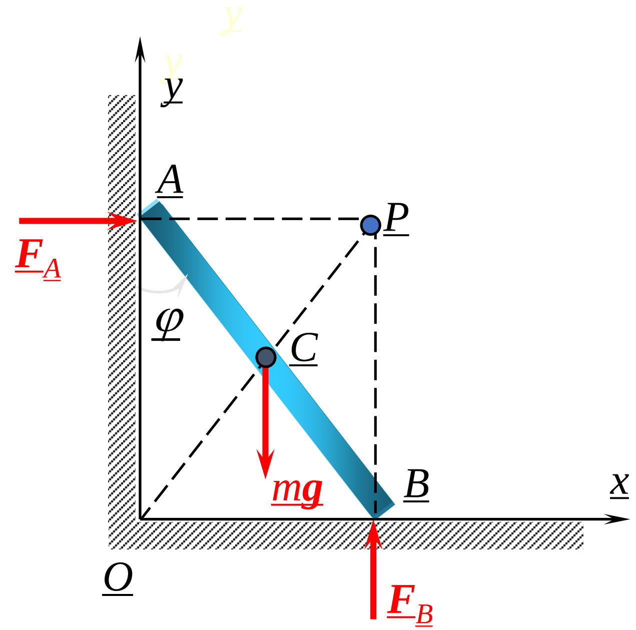
- **方法一：刚体平面运动微分方程**
- **方法二：动能定理微分形式**

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}(\frac{1}{2}mv_C{}^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2) = \frac{4}{3}ml^2\omega d\omega$$

$$\sum \delta W = -mg\,\mathrm{d}\,y_C = mgl\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$$

代入 $\mathrm{d}T = \sum \delta W$ 得 $\frac{4}{3}l\omega\,\mathrm{d}\omega = g\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$

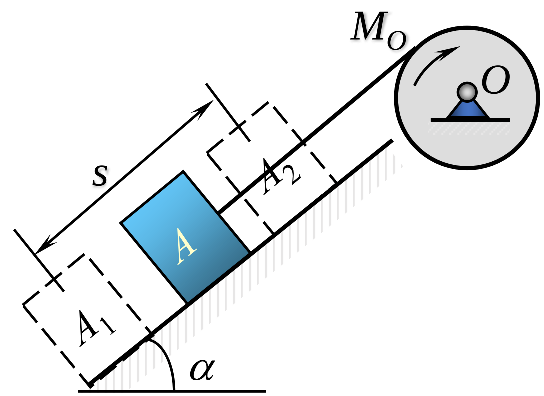
即 $\frac{4}{3}l\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\dot{\varphi} = g\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$



解得 $\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi$，**积分得杆** AB **的角速度。**

动 能 定 理

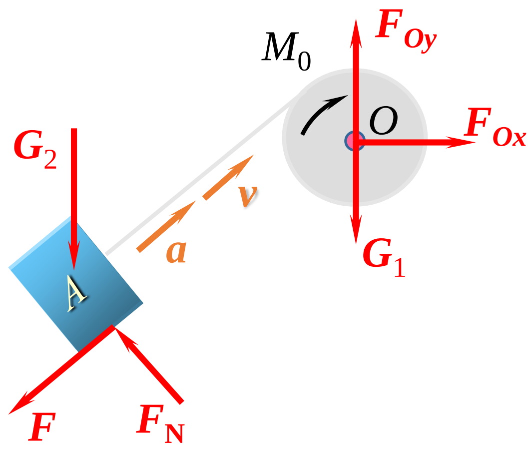
例题 **运送重物用的卷扬机如图 (a) 所示。已知鼓轮重 G_1，半径是 r，对转轴 O 的回转半径是 ρ。在鼓轮上作用着恒定转矩 M_O，使重 G_2 的物体 A 沿倾角为 α 的直线轨道向上运动。已知物体 A 与斜面间的动摩擦系数是 f。假设系统从静止开始运动，绳的倾斜段与斜面平行，绳的质量和轴承 O 的摩擦都忽略不计。试求物体 A 沿斜面上升距离 s 时物体 A 的速度和加速度。**



动 能 定 理

解：

取鼓轮、绳索和物体 A 组成的系统为研究对象。



(b)

系统从静止开始运动的，初动能 $T_1 = 0$。。

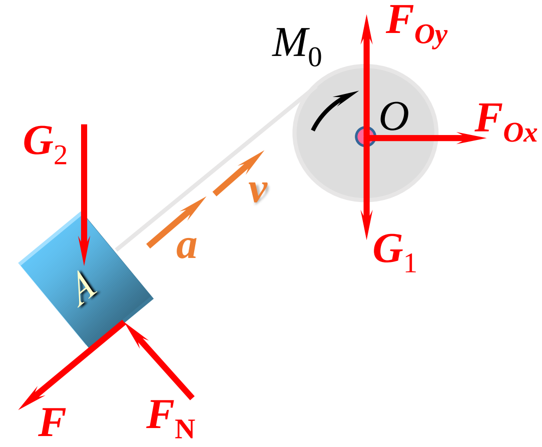
在重物上升的单向路程$\sigma = s$ 时，用v 表示这时物体的速度大小，则鼓轮的角速度大小$\omega=v/r$，从而计算系统的动能 T_2如下

$$T_2 = \frac{1}{2}J_O\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}v^2 = \frac{1}{2}(\frac{G_1}{g}\rho^2)(\frac{v}{r})^2 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}v^2$$

$$= \frac{v^2}{2g}(\frac{\rho^2}{r^2}G_1 + G_2)$$

动 能 定 理

$$T_1 = 0\,,\quad T_2 = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\rho^2}{r^2}G_1 + G_2\right)$$



在物体 A 上升 s 路程中，作用在系统上的力的总功为

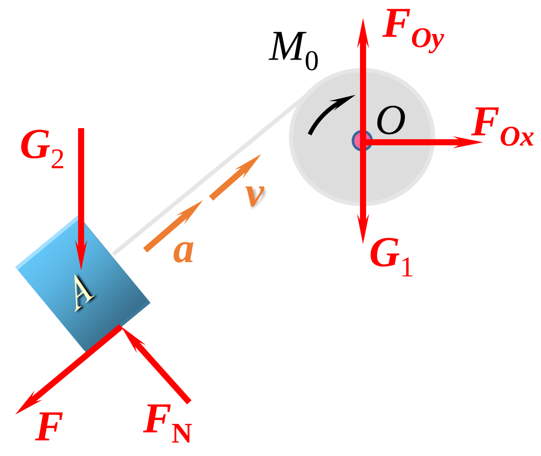
$$\sum W = M_O\varphi - G_2 \sin\alpha\, s - Fs$$

$$= M_O \frac{s}{r} - G_2 \sin\alpha\, s - G_2 f \cos\alpha\, s$$

根据$T_2 - T_1 = \sum W$**，有**

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\rho^2}{r^2}G_1 + G_2\right) - 0 = \left(\frac{M_O}{r} - G_2 \sin\alpha - fG_2\cos\alpha\right)s$$

动 能 定 理



(b)

根据$T_2 - T_1 = \sum W$，**有**

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\rho^2}{r^2}G_1 + G_2\right) - 0 = \left(\frac{M_O}{r} - G_2\sin\alpha - fG_2\cos\alpha\right)s$$

由此求出物体 *A* 的速度

$$v = \sqrt{\frac{2[M_O - G_2 r(\sin\ \alpha + f\cos\ \alpha)]rgs}{G_1\rho^2 + G_2 r^2}}$$

动 能 定 理

求物体 A 的加速度

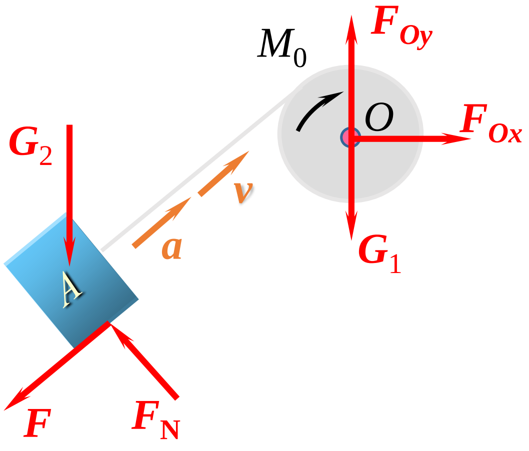
$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\rho^2}{r^2}G_1+G_2\right)-0=\left(\frac{M_O}{r}-G_2\sin\alpha-fG_2\cos\alpha\right)s$$

把 s 看作变值，两端对时间 t 求导，有

$$\frac{2v}{2g}\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho^2}{r^2}G_1+G_2\right)=\left(\frac{M_O}{r}-G_2\sin\alpha-fG_2\cos\alpha\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

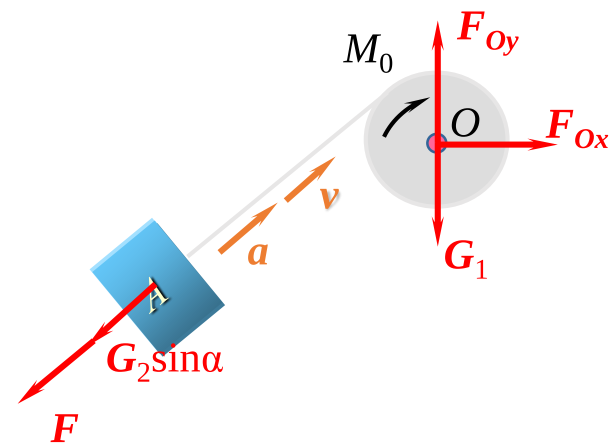
考虑到在直线运动中 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=a$，$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=v$，**故物体 A 的加速度**

$$a=\frac{M_O-G_2r(\sin\ \alpha+f\cos\ \alpha)}{G_1\rho^2+G_2r^2}rg$$



解法二：动量矩定理

取鼓轮、绳索和物体 A 组成的系统为研究对象，写出总的动量矩：



$$L_O = J_O\omega + r\frac{G_2}{g}v = \left(\frac{G_1}{gr}\rho^2 + r\frac{G_2}{g}\right)v$$

根据动量矩定理：

$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{G_1}{gr}\rho^2 + r\frac{G_2}{g}\right)v\right]}{\mathrm{d}t} = M_O - G_2\, r\, sin\alpha\ - fG_2\, r\, cos\alpha$$

得到A的加速度： $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{M_O - G_2 r(\sin\ \alpha + f\cos\ \alpha)}{G_1\rho^2 + G_2 r^2}rg$

上式整理得到： $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{ds} = \dfrac{M_O - G_2 r(\sin\ \alpha + f\cos\ \alpha)}{G_1\rho^2 + G_2 r^2}rg$

分离变量，积分可求得速度： $v = \sqrt{\dfrac{2[M_O - G_2 r(\sin\ \alpha + f\cos\ \alpha)]rgs}{G_1\rho^2 + G_2 r^2}}$

势力场·势能·机械能守恒定理

力场—— 一物体在某空间内都受到一个大小和方向完全由所在位置确定的力作用，这部分空间称为**力场**。

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_A)$$

有势力——力的功只决定于作用点的始末位置，而与运动路径无关的力统称为**有势力(或保守力)**。

$$W = W(\boldsymbol{r}_A^0, \boldsymbol{r}_A)$$

势力场(或保守力场)—— 有势力形成的力场称为**势力场**。

势力场·势能·机械能守恒定理

- **势能 V**

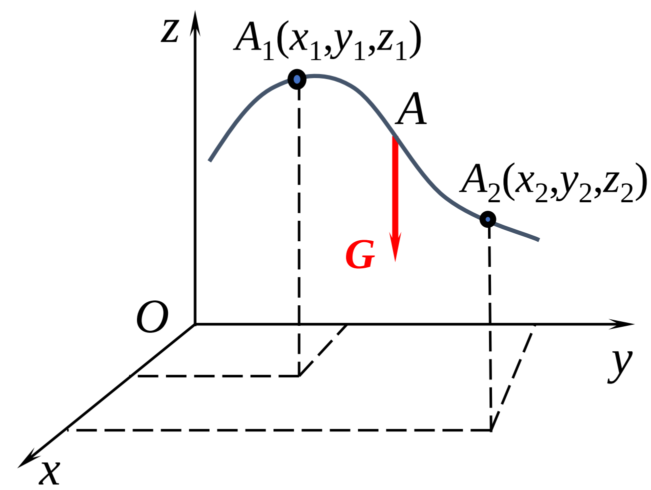
在势力场中任选一点A_0，作为势能零点，则在场中另一点A处的势能就等于由点A运动到势能零点A_0的过程中，有势力所作的功 $W_{(A\to A_0)}$。即有

$$V = W_{(A\to A_0)}$$

势力场·势能·机械能守恒定理

2. 几种常见势力场的势能

(1) 重力场中的势能

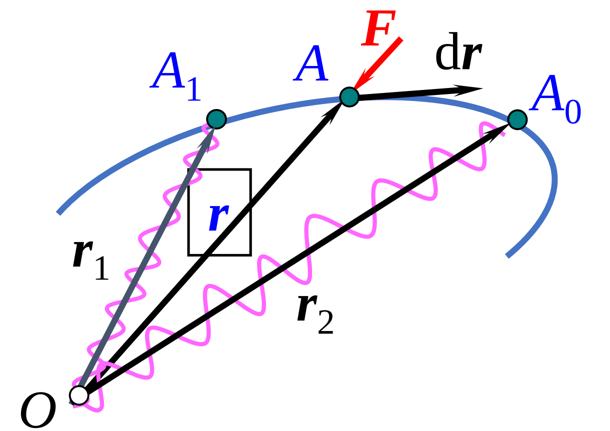


取 A_2点为势能零点，则在重力场 A 处的势能为

$$V = W_{(A \to A_2)} = G(z - z_2) = Gh$$

势力场·势能·机械能守恒定理

(2) 弹性力场中的势能



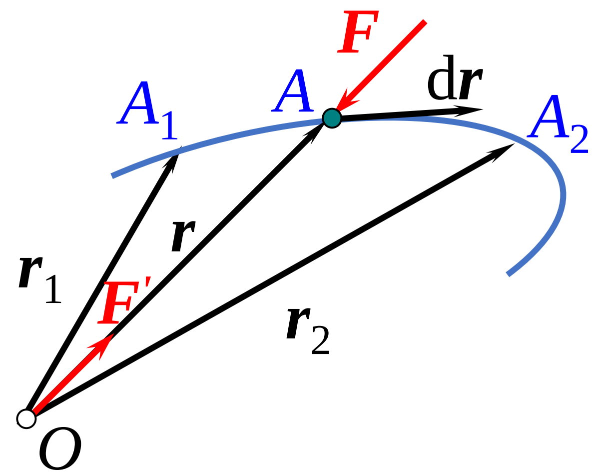
设弹簧在 A 和A_0 位置的变形分别为λ 和 λ_2，取 A_0点为势能零点**，则在弹力场 A 处的势能为**

$$V = W_{(A \to A_0)} = \frac{k}{2}(\lambda^2 - \lambda_0^2)$$

势力场·势能·机械能守恒定理

(3) 牛顿引力场

通常取无穷远处($r_{\infty}=\infty$)作为势能零点 A_0，利用牛顿引力的功的表达式



$$W=-\int_{r_1}^{r_\infty} f\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r=fMm\left(\frac{1}{r_\infty}-\frac{1}{r_1}\right)=-fMm\frac{1}{r_1}$$

即得在牛顿引力场中，矢径为r_1的 A 处的势能为

$$V=-\frac{fMm}{r_1}$$

势力场·势能·机械能守恒定理

3. 势能函数

在一般情况下，质点的势能可以表示成质点位置坐标x、y、z**的单值连续函数，即**

$$V = V(x, y, z)$$

它称为**势能函数**。

- 等势面与零势面

势力场中，

$$V(x, y, z) = \text{常数}$$

所确定的曲面称为等势面；

$$V(x, y, z) = \mathbf{0}$$

所确定的曲面称为零势面。

势力场·势能·机械能守恒定理

机械能：**动能T与势能V之和，即$T+V$**

	动能	势能	机械能
1	T_1	V_1	T_1+V_1
2	T_2	V_2	T_2+V_2

动能定理:

$$T_2 - T_1 = W_{12} \longrightarrow \text{有势力作功}$$

有势力作功:

$$W_{12} = V_1 - V_2$$

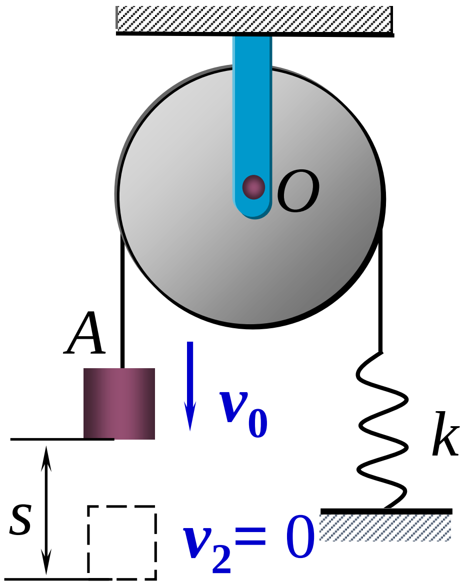
因此: $T_2 - T_1 = V_1 - V_2$

即: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

当作功的力都是有势力时，质点系的机械能保持不变。这一结论称为**机械能守恒定理。**

势力场·势能·机械能守恒定理

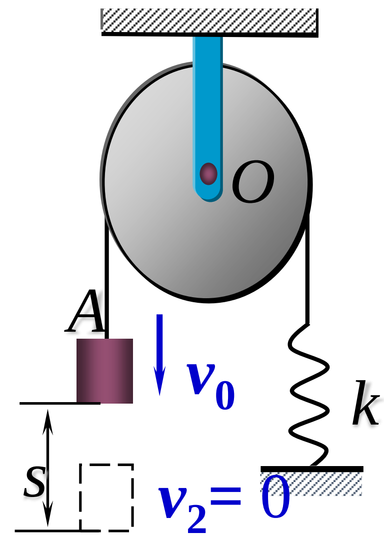
例题 **如图所示质量为 m 的物块 A 悬挂于不可伸长的绳子上，绳子跨过滑轮与铅直弹簧相连，弹簧刚度系数为 k。设滑轮的质量为 M，并可看成半径是 r 的均质圆盘。现在从平衡位置给物块 A 以向下的初速度 v_0，试求物块 A由此位置下降的最大距离s。弹簧和绳子的质量不计。**



势力场·势能·机械能守恒定理

解：**取整个系统作为研究对象。系统运动过程中作功的力为有势力(重力和弹性力)，故可用机械能守恒定理求解。**

取物块 A 的平衡位置作为初位置，弹簧的初变形 $\lambda_1 = \lambda_s = mg/k$，**物块 A 有初速度** $v_1 = v_0$，**故系统初动能**



$$T_1 = \frac{1}{2} m v_0^{\ 2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M r^2\right)\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = \frac{1}{4}(2m + M) v_0^{\ 2}$$

取初始平衡位置为势能零点，于是，系统的初势能：

$$V_1 = 0$$

势力场·势能·机械能守恒定理

以物块 A 的最大下降点作为末位置，则弹簧的末变形$\lambda_2=\lambda_s+s$。末位置势能为：

$$V_2=\frac{k}{2}[(s+\lambda_s)^2-\lambda_s^2]-mgs$$

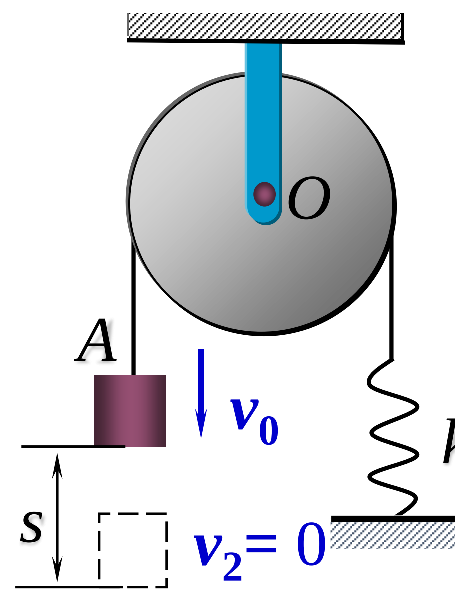
在初始平衡位置有 $mg=k\lambda_s$

所以 $V_2=\frac{k}{2}s^2$

系统的末动能 $T_2=0$

应用机械能守恒定理的式 $T_1+V_1=T_2+V_2$ 有

$$\frac{1}{4}(2m+M)v_0^2=\frac{k}{2}s^2$$



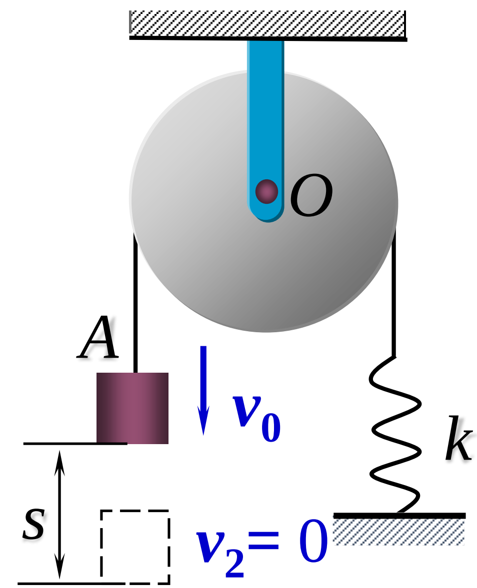
势力场·势能·机械能守恒定理

应用机械能守恒定理的式 $T_1+V_1=T_2+V_2$ **有**

$$\frac{1}{4}(2m+M)v_0^{\ 2}=\frac{k}{2}s^2$$

从而求得物块 A**的最大下降距离**

$$s=\sqrt{\frac{2m+M}{2k}}v_0$$



动力学综合问题分析

基于牛顿定律推导出的动力学普遍定理

动量定理 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$

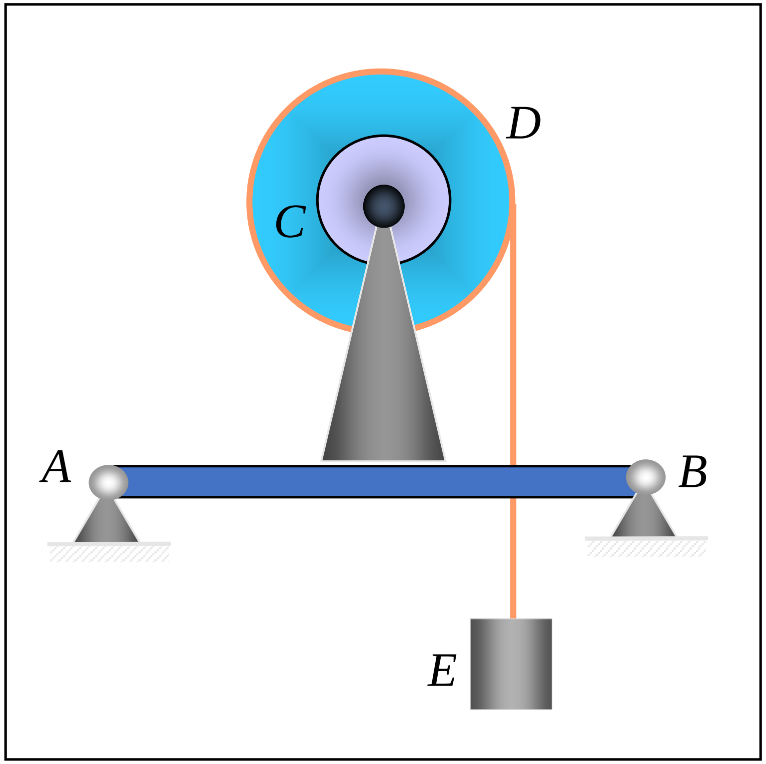
动量矩定理 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})}$

动能定理 $\mathrm{d}T=\sum \delta W$

- 三大定理都是基于牛顿定律，数学上存在等价性。因此，同一动力学问题，可以用不同的方法来分析和求解。
- 求速度：优先考虑采用**积分**形式的定理；
- 求加速度：优先考虑采用**微分**形式的定理；
- 注意运用**守恒**条件（动量守恒、动量矩守恒、机械能守恒）；
- 补充**运动学关系**，使动力学方程组闭合。

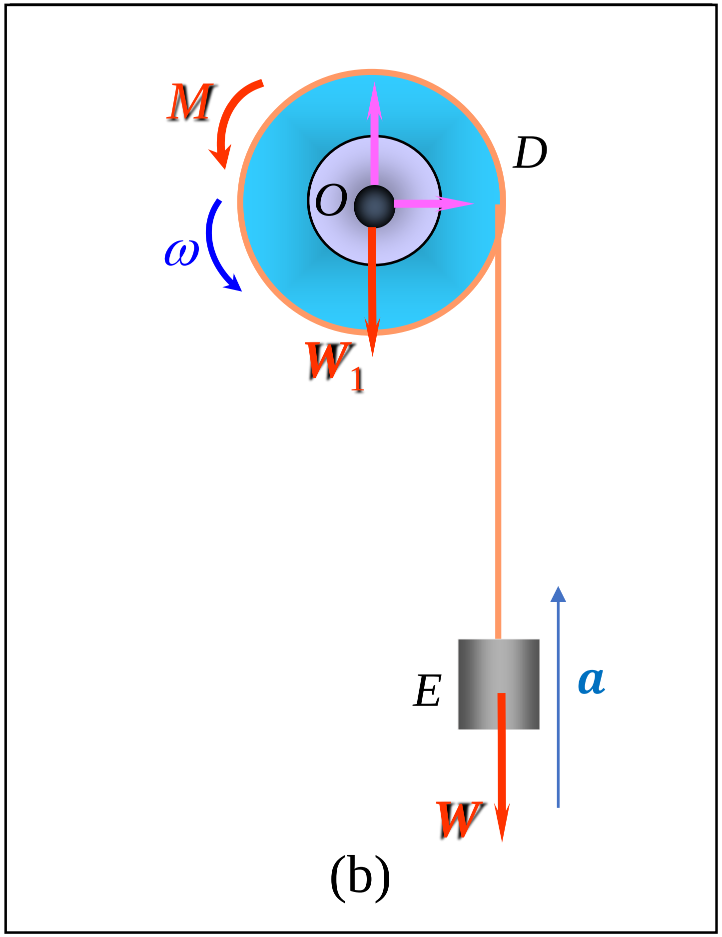
动力学综合问题分析

例题　起重装置由均质鼓轮 D **（半径为** R**，重为** W_1**）及均质梁** AB **（长** $l=4R$**，重** $W_2=W_1$**）组成，鼓轮通过电机** C **（质量不计）安装在梁的中点，被提升的重物** E **重** $W=\frac{1}{4}W_1$ **。电机通电后的驱动力矩为** M**，求重物** E **上升的加速度** a **及支座** A**，** B **的约束力** F_{NA} **及** F_{NB}**。**



动力学综合问题分析

解：（1）求加速度a



对系统整体应用动能定理

$$T=\frac{1}{2}J_D\omega^2+\frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2$$

其中 $$J_D=\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}R^2,\quad W=\frac{W_1}{4}$$

$$\omega=\frac{v}{R}$$

则有 $$T=\frac{3}{8}\frac{W_1}{g}v^2$$

元功为

$$\delta W=M\mathrm{d}\varphi-W\mathrm{d}s=(\frac{M}{R}-W)\mathrm{d}s$$

代入动能定理微分形式 $\mathrm{d}T = \delta W$

$$\mathrm{d}\left(\frac{3}{8}\frac{W_1}{g}v^2\right) = \left(\frac{M}{R} - W\right)\mathrm{d}s$$

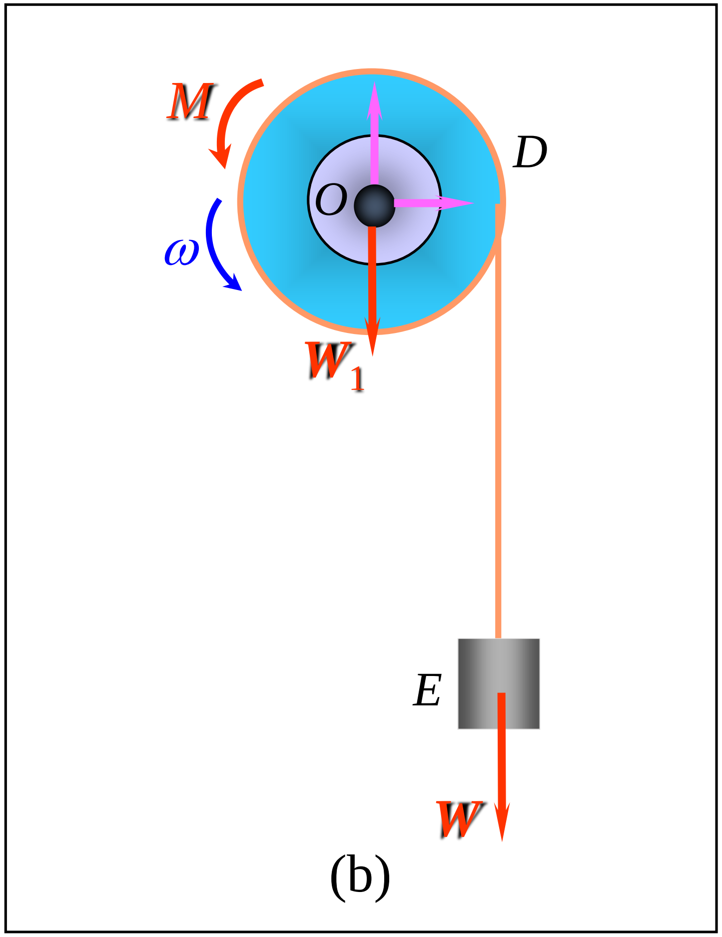
$$\frac{3}{4}\frac{W_1}{g}v\mathrm{d}v = \left(\frac{M}{R} - W\right)\mathrm{d}s$$

两边同除以$\mathrm{d}t$**，并且有**

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

则 $$\frac{3}{4}\frac{W_1}{g}a = \left(\frac{M}{R} - W\right)$$

$$a = \frac{4M/R - W_1}{3W_1}g$$



方法二：**动量矩定理**求重物上升加速度a。

将鼓轮D，重物E及与鼓轮固结的电机转子看成一个整体

对固定点O的动量矩可以表示为

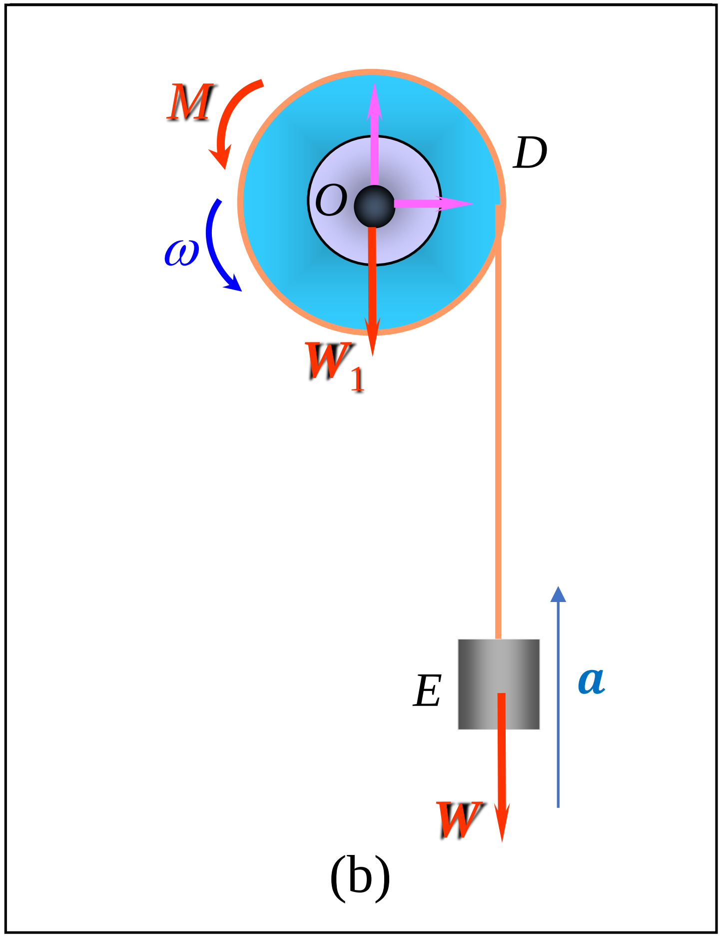
$$L_O = J_D\omega + R\frac{W}{g}(\omega R)$$

根据动量矩定理 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(J_D + \frac{W}{g}R^2)\omega\right] = M - WR$$

其中 $$J_D = \frac{1}{2}\frac{W_1}{g}R^2$$

解得 $$\dot{\omega} = \frac{4M/R - W_1}{3W_1}\cdot\frac{g}{R}$$

$$a = \frac{4M/R - W_1}{3W_1}g$$



(b)

2. 求支座A的约束力F_{NA}

考虑整个系统（图c），受力分析，注意驱动力矩为M 系统内力。

对点B应用动量矩为

$$L_O = BC \cdot \frac{W_1}{g} \cdot 0 + J_D\omega - \left(\frac{l}{2} - R\right)\frac{W}{g}(\omega R)$$

对点B应用动量矩定理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_D\omega - \frac{W}{g}R\omega\left(\frac{l}{2} - R\right)\right] =$$

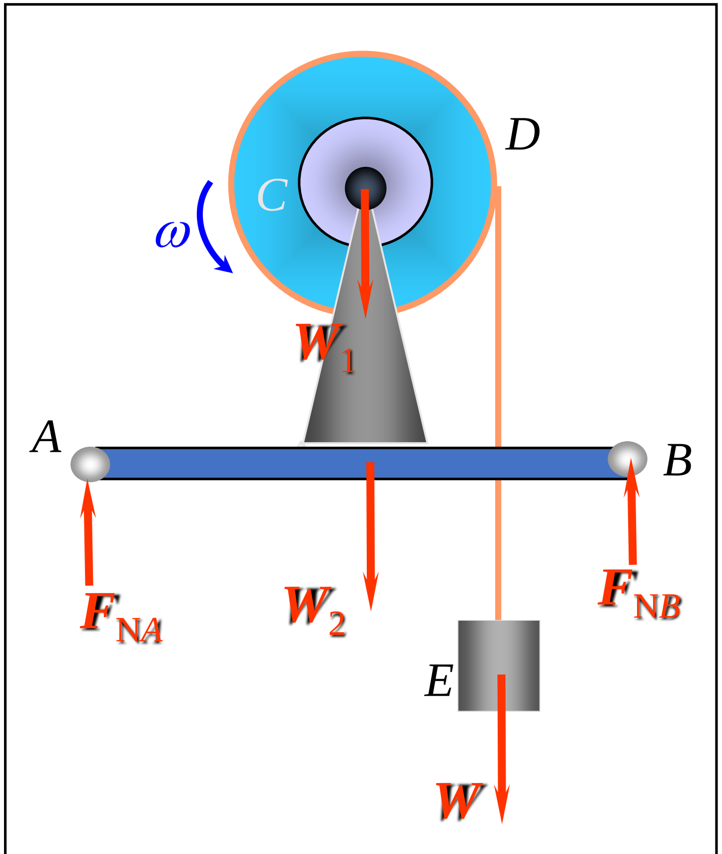
$$(W_1 + W_2)\frac{l}{2} + W\left(\frac{l}{2} - R\right) - F_{NA}l$$

解得

$$F_{NA} = \frac{1}{2}(W_1 + W_2) + W\left(\frac{1}{2} - \frac{R}{l}\right) - \left[J_D - \frac{W}{g}R\left(\frac{l}{2} - R\right)\right]\frac{\dot{\omega}}{l}$$

其中

$$\dot{\omega} = \frac{4M/R - W_1}{3W_1} \cdot \frac{g}{R}$$



(c)

3. 求支座B的约束力F_{NB}

方法一：考虑整个系统，对点A应用动量矩定理得

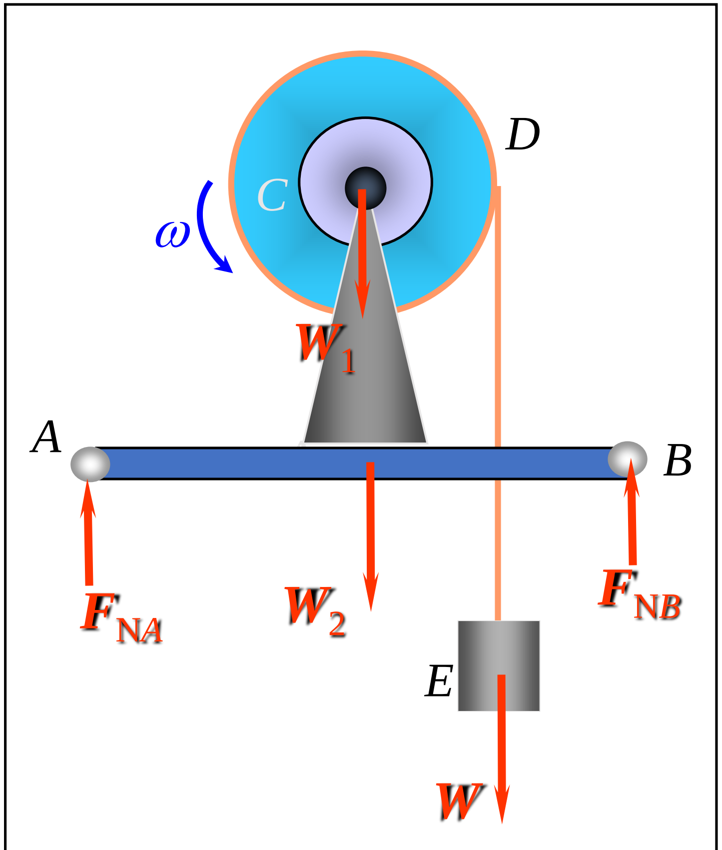
方法二：在铅直方向，对整个系统应用动量定理

$$\frac{W}{g}R\alpha = F_{NA} + F_{NB} - W_1 - W_2 - W$$

解得

$$F_{NB} = W_1 + W_2 + W - F_{NA} + \frac{W}{g}R\dot{\omega}$$

其中 $$\dot{\omega} = \frac{4M/R - W_1}{3W_1} \cdot \frac{g}{R}$$



(c)

作　业

习题 12-9, 12-11,12-12, 12-15,12-16, 12-18