理论力学实验安排

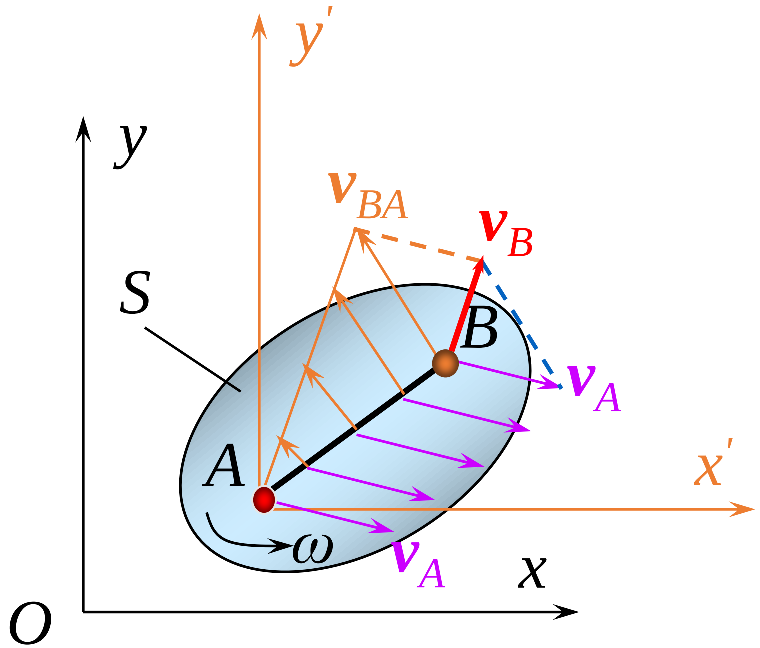
- **两个实验:**

  1. **摩擦因数测定** （西4A-339室）
     选课：11月23日~11月29日
     上课：11月30日~12月12日

  2. **组合实验（三线摆）** （西4A-245室）
     选课：12月6日~12月12日
     上课：12月13日~12月26日

- **签到、签出等均使用校园卡进行刷卡，请务必带卡**
- **如迟到超过15分钟将无法进行签到，务请同学们按时签到**
- **如有疑问，请联系李华锋老师：15958139989（最好短消息），me_lhf@zju.edu.cn**

平面图形上各点的速度



速度合成定理：

$$\boldsymbol{v}_a^B = \boldsymbol{v}_e^B + \boldsymbol{v}_r^B$$

$$\boldsymbol{v}_e^B = \boldsymbol{v}_A$$

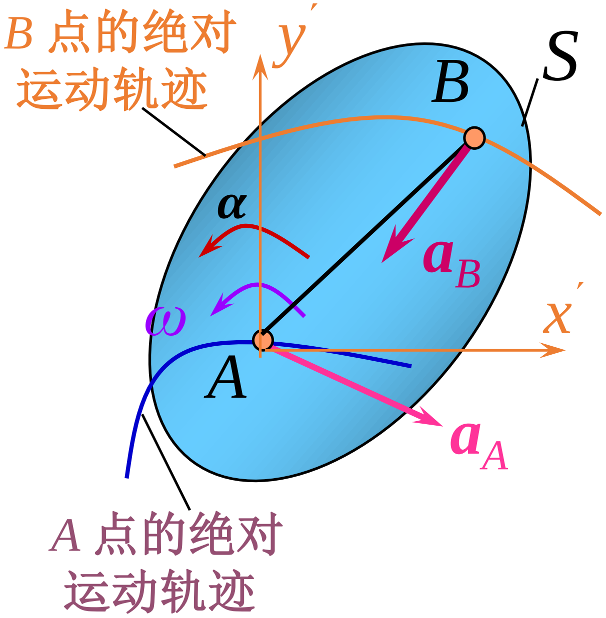
$$\boldsymbol{v}_r^B = \boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\boldsymbol{v}_a^B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

基点法确定平面图形上任一点速度：**平面图形上任意一点的速度等于基点的速度和该点相对基点的转动速度的矢量和。**

平面图形上各点的加速度

如果已知平面图形上一点*A*的加速度$\boldsymbol{a}_A$、图形的角速度ω与角加速度α，如何确定平面图形上任意点*B*的加速度?

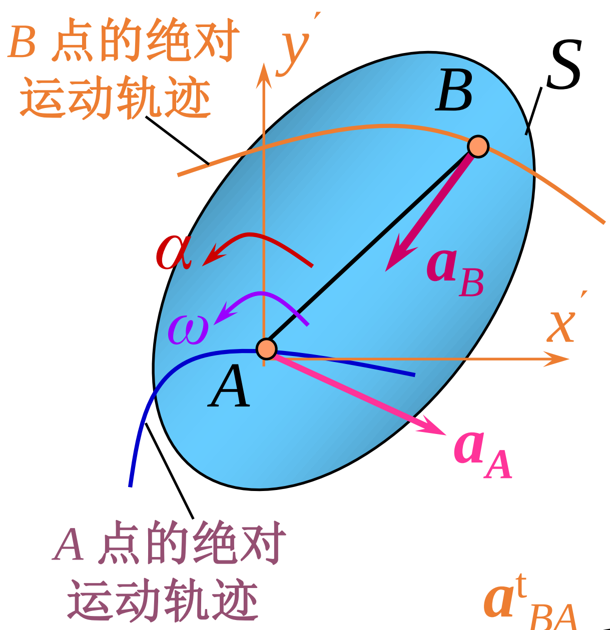


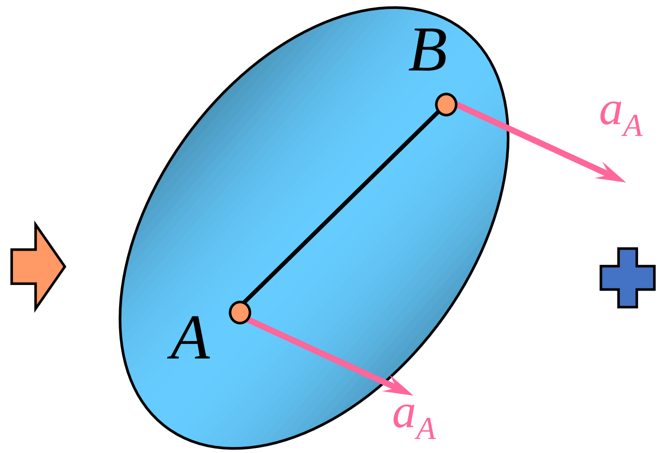
(1) 选择加速度已知的点*A*为基点;

(2) 建立平移系*Ax'y'*;

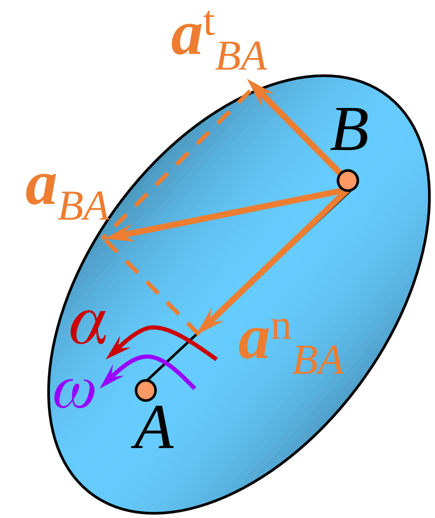
(3) 应用牵连运动为平移的加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_\mathrm{a}=\boldsymbol{a}_\mathrm{e}+\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$

平面图形上各点的加速度

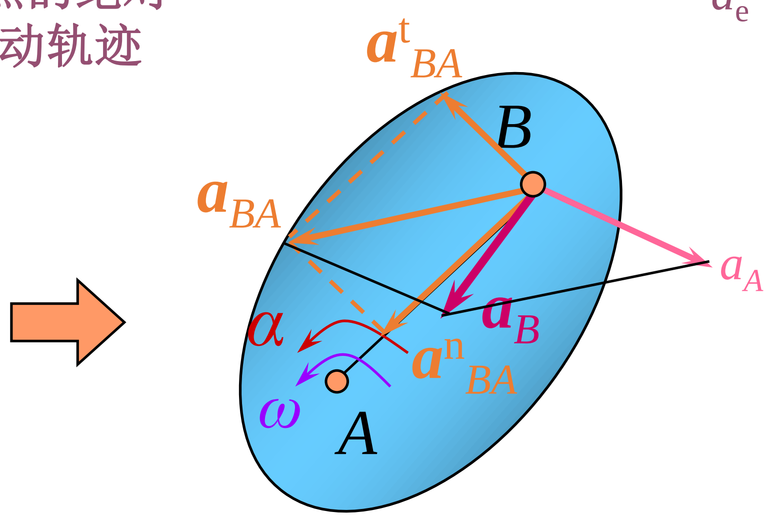




$a_e = a_A$



$a_r = a_{BA}$



$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r$$

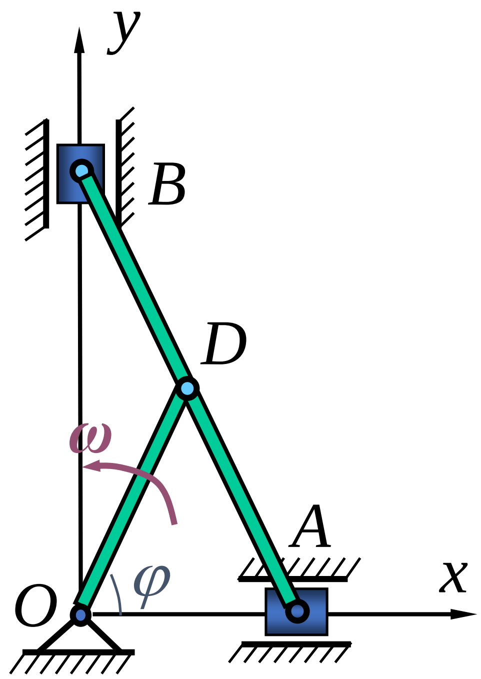
$$= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{t}_{BA} + \boldsymbol{a}^{n}_{BA}$$

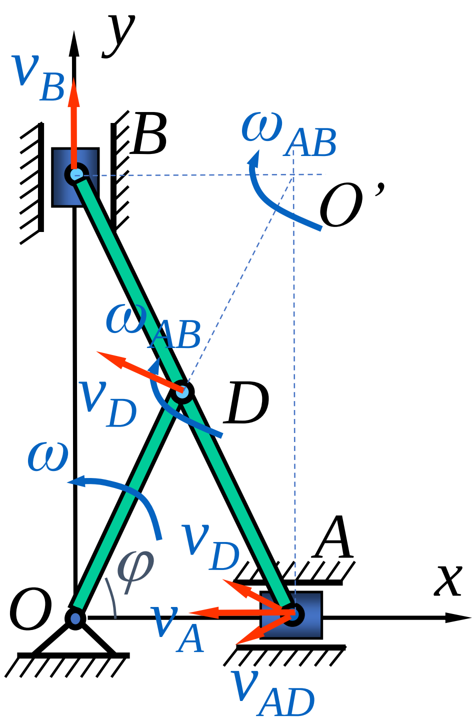
平面图形上各点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

平面图形上任意一点的加速度等于基点的加速度与该点相对切向加速度和法向加速度的矢量和。

例题： 如图所示，在椭圆规的机构中，曲柄OD以匀角速度ω绕O轴转动，$OD=AD=BD=l$，试求当$\varphi=60°$时，规尺AB的角速度、角加速度和A点的速度、加速度。





解： **求*AB*角速度：**

瞬心法：

已知*AB*上的 *A*，*B*，*D*点的速度方向，可以确定**瞬心的位置***O'*。

杆*AB*绕瞬心*O'*，在当前瞬时做定轴转动，转动的角速度为杆AB的转动角速度ω_{AB}。

D点的速度可表示为：

$$v_D = \omega|OD| = \omega_{AB}|O'D|$$

$$\omega_{AB} = \omega$$

求*A*点速度：

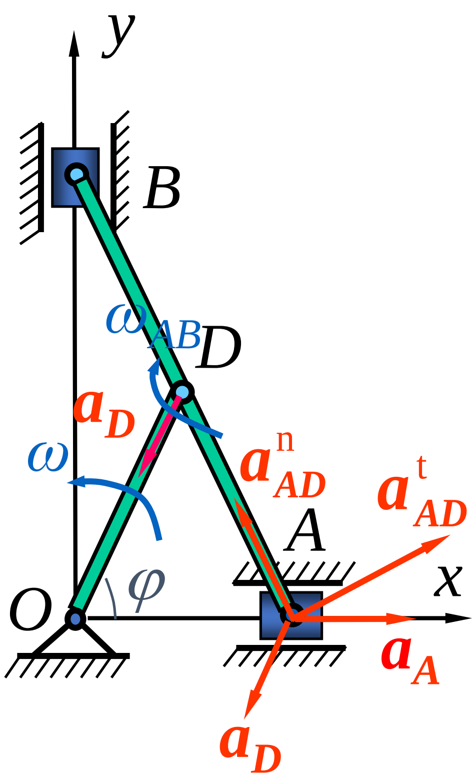
基点法：以D为基点 $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{AD}$

x方向分解： $v_A = v_D cos30^o + v_{AD} cos30^0$

$$= \omega l \frac{\sqrt{3}}{2} + \omega l \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\omega l$$

取AB上的D点为基点，A点的加速度为

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}_{AD}^{t} + \boldsymbol{a}_{AD}^{n}$$



A点加速度大小未知，方向沿着x轴。

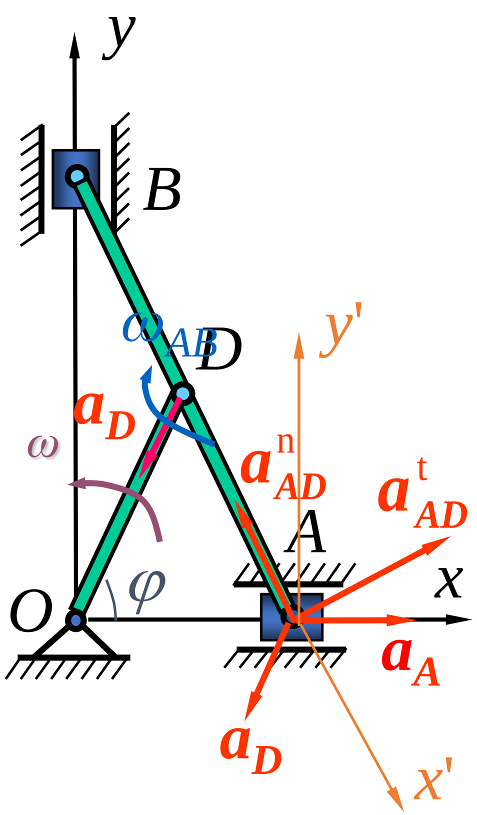
D点加速度：

$$a_D = l\omega^2$$

$\boldsymbol{a}^{t}_{AD}$ 大小未知，垂直于AD

$\boldsymbol{a}^{n}_{AD}$ 的大小：

$$a_{AD}^{n} = \omega_{AB}^2\, AD = l\omega^2$$



取AB上的D点为基点，A点的加速度为

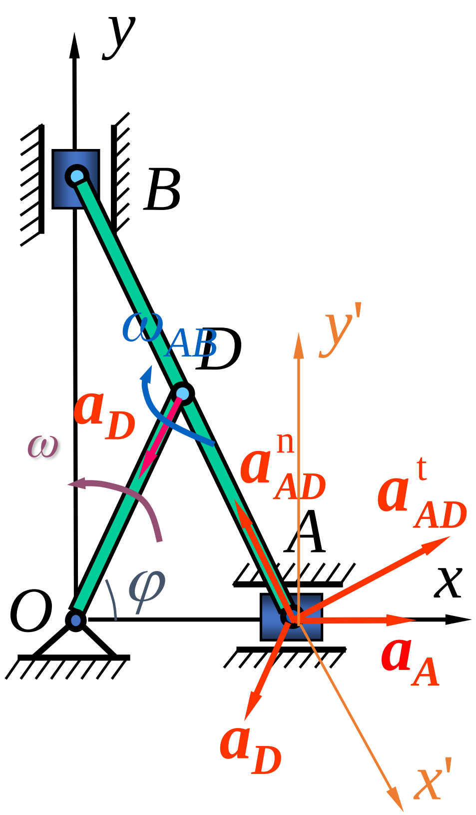
$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{AD} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{n}}_{AD}$$

将上式在y'轴上投影，得

$$0 = -a_D \sin\varphi + a^{\mathrm{t}}_{AD}\cos\varphi + a^{\mathrm{n}}_{AD}\sin\varphi$$

$$a^{\mathrm{t}}_{AD} = \frac{a_D\sin\varphi - a^{\mathrm{n}}_{AD}\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(\omega^2 l - \omega^2 l)\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0$$

所以 AB角加速度 $\alpha_{AB} = \dfrac{a^{\mathrm{t}}_{AD}}{AD} = 0$



取AB上的D点为基点，A点的加速度为

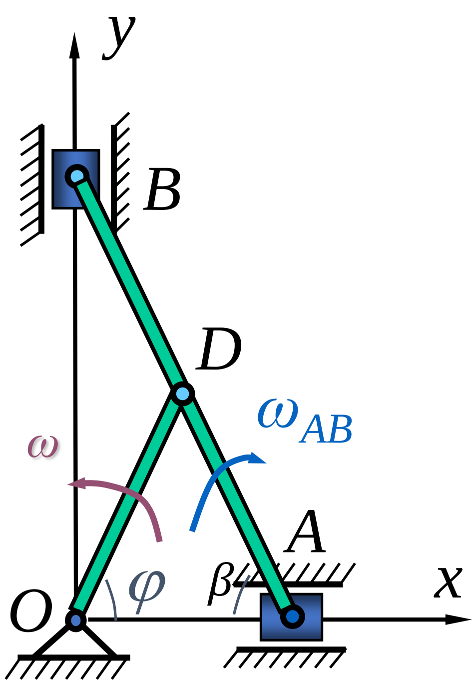
$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}_{AD}^{t} + \boldsymbol{a}_{AD}^{n}$$

将上式在x'轴上投影，得

$$a_A \cos\varphi = a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{n}$$

$$a_A = \frac{a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{n}}{\cos\varphi} = \frac{\omega^2 l \cos 60^\circ - \omega^2 l}{\cos 60^\circ} = -\omega^2 l$$

另一种解法----运动方程求导法



AB的转动方程： $\beta(t) = \varphi(t)$

AB的角速度： $\omega_{AB} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$

AB的角加速度： $\alpha_{AB} = \frac{d\omega_{AB}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = 0$

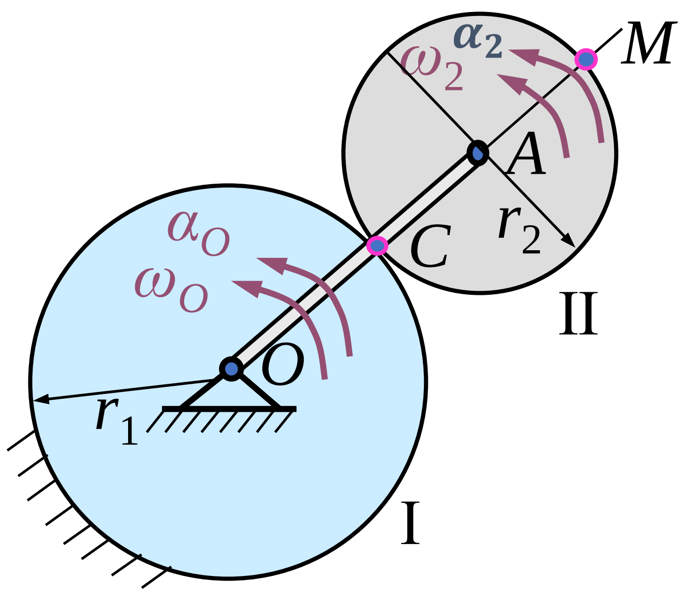
A点的x坐标： $x_A = 2l\cos\varphi$

A点的速度：

$$v_A = \frac{dx_A}{dt} = -2l\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -2\omega l\sin\varphi = -\sqrt{3}\omega l$$

A点的加速度：

$$a_A = \frac{dv_A}{dt} = -2\omega l\cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -2\omega^2 l\cos\varphi = -\omega^2 l$$



例题： **外啮合行星齿轮机构如图所示。曲柄OA绕轴O作定轴转动，带动齿轮II沿固定齿轮I的齿面滚动。已知定齿轮和动齿轮的节圆半径分别是r_1和r_2，曲柄OA在某瞬时的角速度是ω_0，角加速度是α_O，试求该瞬时，齿轮II的角速度ω_2和角加速度α_2，以及节圆上M点的速度和加速度。**

解： 两个齿轮啮合的条件是**在接触点处相对速度为零和相对切向加速度都为零**，则在齿轮II上：

$$\boldsymbol{v}_C = 0 \quad 和 \quad \boldsymbol{a}_C^t = 0$$

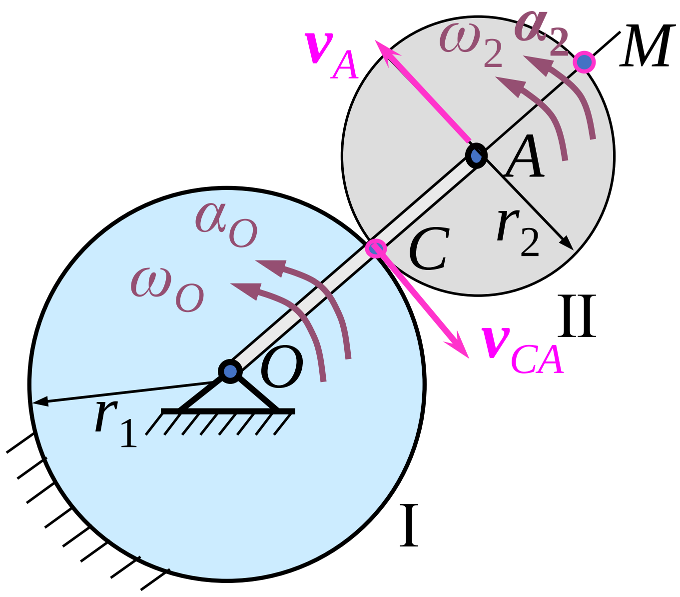
基点法求C点速度:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA}$$

有:

$$0 = \omega_O(r_1 + r_2) - \omega_2 r_2$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_O(r_1 + r_2)}{r_2}$$



解： 两个齿轮啮合的条件是**在接触点处相对速度为零和相对切向加速度都为零**，则在齿轮II上：

$$\boldsymbol{v}_C = 0 \quad 和 \quad \boldsymbol{a}_C^t = 0$$

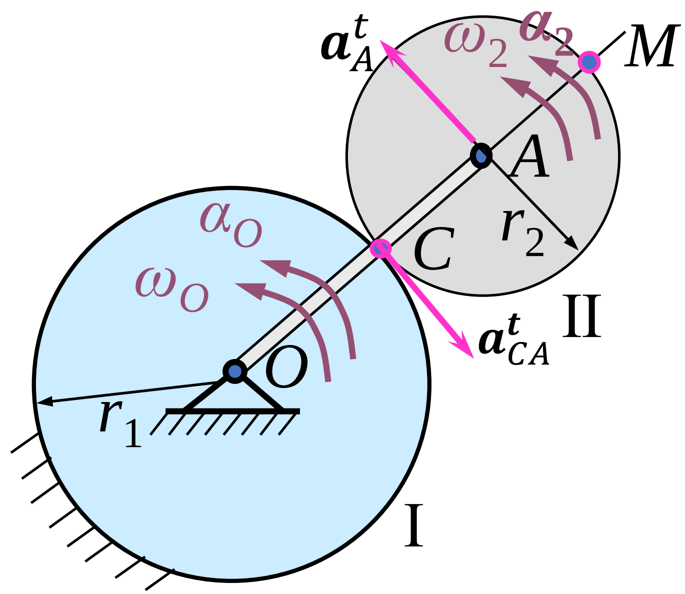
基点法求C点切向加速度:

$$\boldsymbol{a}_C^t = \boldsymbol{a}_A^t + \boldsymbol{a}_{CA}^t$$

有:

$$0 = \alpha_O(r_1 + r_2) - \alpha_2 r_2$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_O(r_1 + r_2)}{r_2}$$

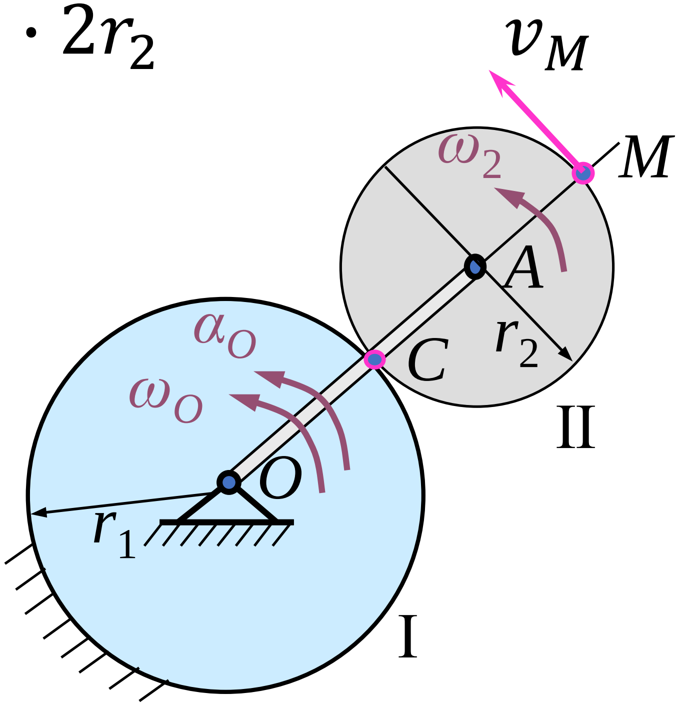


求M点的速度

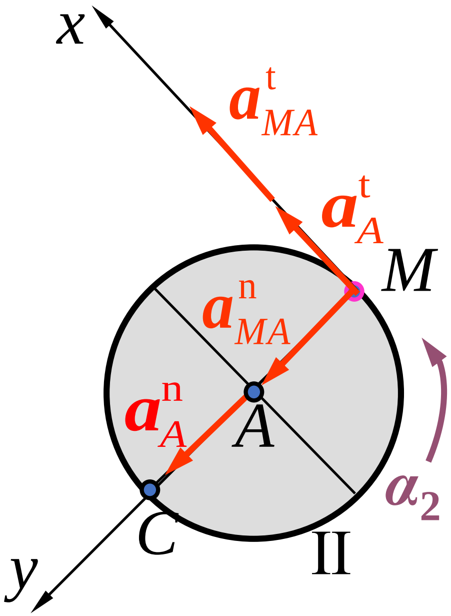
C点是齿轮II的瞬心，故M点速度为:

$$\boldsymbol{v}_M = \omega_2 \cdot CM = \omega_2 \cdot 2r_2$$

$$= 2\omega_O(r_1 + r_2)$$



求M点的加速度



选轮心A为基点，则M点的加速度为

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_A^{t} + \boldsymbol{a}_A^{n} + \boldsymbol{a}_{MA}^{t} + \boldsymbol{a}_{MA}^{n}$$

其中各加速度的大小和方向为

$a_A^{t} = (r_1 + r_2)\alpha_o$， $\perp OA$**偏左上**

$a_A^{n} = (r_1 + r_2)\omega_o^2$，**沿**$AO$

$a_{MA}^{t} = r_2\alpha_2$， $\perp MA$ **偏左上**

$a_{MA}^{n} = r_2\omega_2^2$ ，**沿**MA

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_A^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_A^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{MA}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{MA}^{\mathrm{n}}$$

把上面矢量式分别投影到 x 和 y 轴上，得

$$a_{Mx} = a_A^{\mathrm{t}} + a_{MA}^{\mathrm{t}}$$

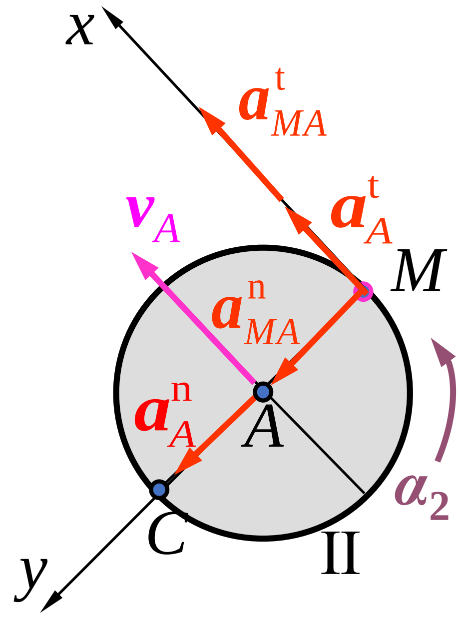
$$= (r_1 + r_2)\alpha_O + r_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2}\alpha_O$$

$$= 2(r_1 + r_2)\alpha_O$$

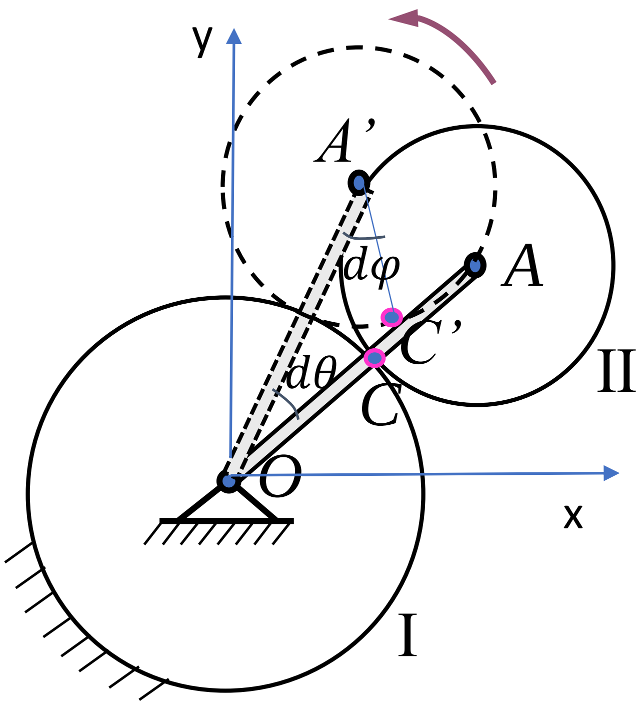
$$a_{My} = a_A^{\mathrm{n}} + a_{MA}^{\mathrm{n}}$$

$$= (r_1 + r_2)\omega_O^2 + r_2\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_O\right)^2$$

$$= (r_1 + r_2)\frac{r_1 + 2r_2}{r_2}\omega_O^2$$



另一种解法----运动方程求导法



因纯滚动，有

$$r_1 d\theta = r_2 d\varphi$$

齿轮II上，半径AC转动的角度(相对固定坐标Oxy)为

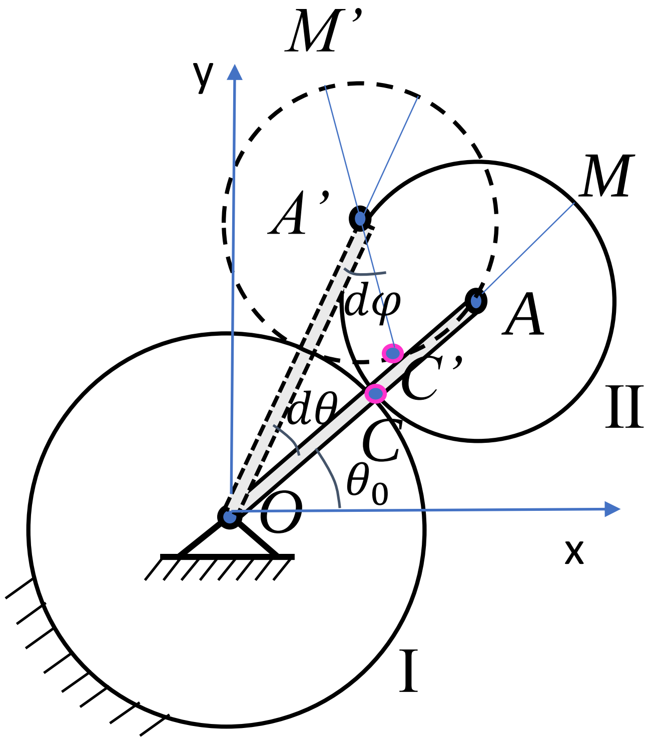
$$d\beta = d\theta + d\varphi = \frac{r_1 + r_2}{r_2} d\theta$$

齿轮II的角速度为

$$\omega_2 = \frac{d\beta}{dt} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \omega_o$$

齿轮II的角加速度为

$$\alpha_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{d\omega_o}{dt} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \alpha_o$$



齿轮II上，M点的坐标(相对固定坐标Oxy)可以表示为

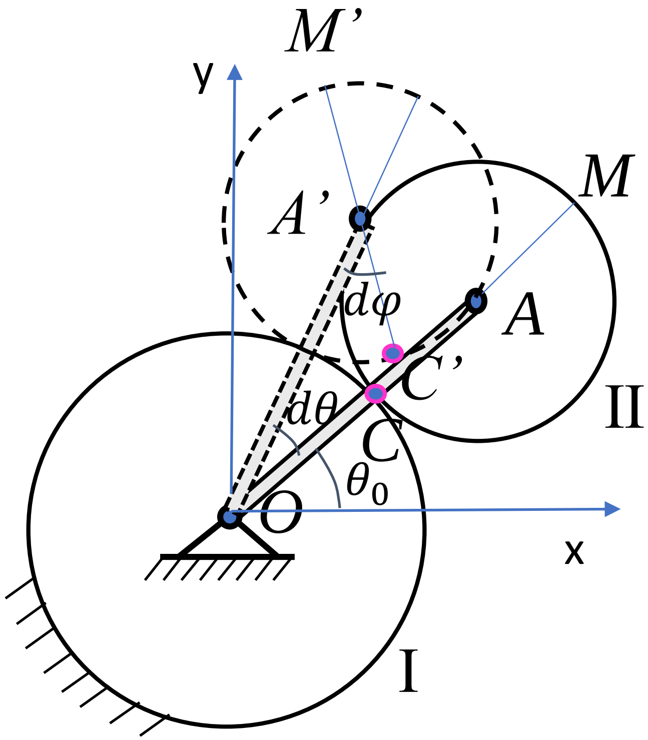
$$x_M = (r_1 + r_2)\cos(\theta_0 + d\theta) + r_2 \cos\left(\theta_0 + \frac{r_1 + r_2}{r_2} d\theta\right)$$

$$y_M = (r_1 + r_2)\sin(\theta_0 + d\theta) + r_2 \sin\left(\theta_0 + \frac{r_1 + r_2}{r_2} d\theta\right)$$

在OA转角为θ_0 (即$d\theta$=0)时，M点的速度(相对固定坐标Oxy)：

$$v_{Mx} = \frac{dx_M}{dt} = -(r_1 + r_2)\sin(\theta_0 + d\theta)\cdot\frac{d\theta}{dt} - r_2\cdot\frac{r_1 + r_2}{r_2}\cdot\sin\left(\theta_0 + \frac{r_1 + r_2}{r_2} d\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt} = -2(r_1 + r_2)\omega_o \sin\theta_0$$

$$v_{My} = \frac{dy_M}{dt} = (r_1 + r_2)\cos(\theta_0 + d\theta)\cdot\frac{d\theta}{dt} + r_2\cdot\frac{r_1 + r_2}{r_2}\cdot\cos\left(\theta_0 + \frac{r_1 + r_2}{r_2} d\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt} = 2(r_1 + r_2)\omega_o \cos\theta_0$$



齿轮II上，M点的坐标(相对固定坐标Oxy)可以表示为

$$x_M = (r_1 + r_2)\cos(\theta_0 + d\theta) + r_2\cos\left(\theta_0 + \frac{r_1 + r_2}{r_2}d\theta\right)$$

$$y_M = (r_1 + r_2)\sin(\theta_0 + d\theta) + r_2\sin\left(\theta_0 + \frac{r_1 + r_2}{r_2}d\theta\right)$$

在OA转角为θ_0时，M点的加速度(相对固定坐标Oxy)：

$$a_{Mx} = \frac{d^2x_M}{dt^2} = ?$$

$$a_{My} = \frac{d^2y_M}{dt^2} = ?$$

作业

8-15： 求此时顶点C的**加速度**

8-16： 求图示瞬时点B和点C的**加速度**

8-24： 求摇杆在该瞬时的**角加速度**

8-25： 求此时套筒D相对杆BC的**加速度**