动力学的研究方法

牛顿力学——在牛顿定律基础上建立的动力学，通过速度、加速度和力这样的矢量来描述运动。

创建标志：1687年，牛顿的《原理》发表

分析力学——以虚位移原理和达朗贝尔原理为基础，以功和能这样的标量描述运动，建立受约束系统普遍方程，从而推出拉格朗日方程。

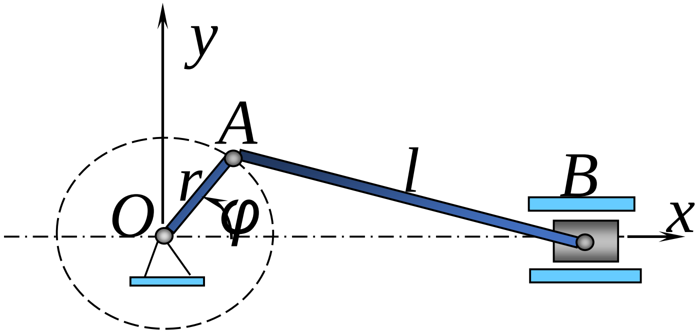
创建标志：1788年，拉格朗日的《分析力学》发表

拉格朗日方程

广义坐标

定 义　　**用以确定质点系位形的一组独立参变量称为广义坐标。**

例 子　　**例如在图中，选为 φ 广义坐标，则点A和B的直角坐标可以用它来表示：**



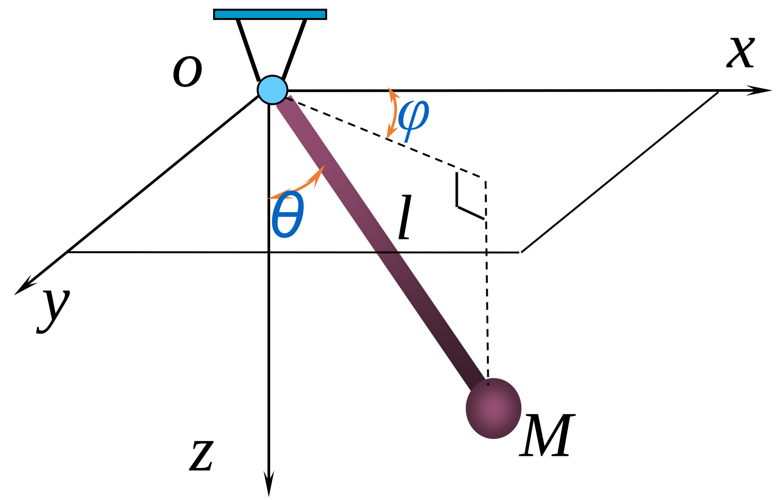
$$x_A = r\cos\varphi \qquad y_A = r\sin\varphi$$

$$x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$$

$$y_B = 0$$

广义坐标

例如图中的球面摆。



- **选 x、 y 为广义坐标，则有**

$$x = x \qquad y = y$$

$$z = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2}$$

- **选θ、 φ为广义坐标，则有**

$$x = l\sin\theta\cos\varphi \qquad y = l\sin\theta\,\mathrm{con}\,\varphi$$

$$z = l\cos\varphi$$

- **广义坐标是代数量，可以为了便于描述系统位形，任意选取。**

- **完整系统的广义坐标数目与自由度数目相同**

动力学普遍方程

质点系由n个质点组成，受到s个完整约束，系统自由度为$k=3n-s$。

取广义坐标q_1、q_2、…、q_k，任一质点的矢量坐标通过广义坐标表示为$\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(q_1,q_2,\ldots,q_k;t)$。

质点的质量为m_i，受到主动力$\boldsymbol{F}_i$与约束力$\boldsymbol{F}_{ci}$作用，再加上惯性力 $\boldsymbol{F}_{gi}=-m_i\boldsymbol{a}_i$。

根据达朗贝尔原理，质点系的所有主动力、约束力和惯性力在形式上组成平衡力系，满足平衡条件。

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{ci}+\boldsymbol{F}_{gi}\right)=\mathbf{0}$$

动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{ci}+\boldsymbol{F}_{gi}\right)=\mathbf{0}$$

设系统受到的约束都是双面、定常、理想的，由虚位移原理得平衡条件为，质点系的所有主动力和惯性力在虚位移上所作虚功的总和等于零

$$\sum \delta W=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{gi})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

这就是**动力学普遍方程**，又称**达朗贝尔-拉格朗日方程**

动力学普遍方程的解析表达式可写为：

$$\sum \delta W=\sum_{i=1}^{n}[(F_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(F_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(F_{iz}-m_iz_i)\delta z_i]=0$$

广义力表示的普遍方程

广义虚位移δq_1、δq_2、…、δq_k相互独立，将质点系各个质点的虚位移通过广义虚位移表示。主动力的虚功总和

$$\sum \delta W_a = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j$$

$\Rightarrow$ Q_j相对于广义坐标q_j的广义力

惯性力的虚功总和

$$\sum \delta W_g = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{gi} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{gi} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{gi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} Q_{gj} \delta q_j$$

- Q_{gj}: 质点系相应于广义坐标q_j的广义惯性力，是一个代数量

$$Q_{gj} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{gi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

广义力表示的普遍方程

这样就可以得到广义力表示的动力学普遍方程:

$$\sum \delta W = \sum\left(\delta W_a + \delta W_g\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(Q_j + Q_{gj}\right)\delta q_j = 0$$

广义虚位移δq_1、δq_2、…、δq_k独立且任意

$$Q_j + Q_{gj} = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, k$$

上式表明质点系的动力学普遍方程也可表示为广义力与广义惯性力之和等于零。它是代数方程，其数目等于系统的自由度数。

拉格朗日方程

一般地，质点系各个质点的矢量坐标可表示为广义坐标的函数，$\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(q_1,q_2,\ldots,q_k;t)$。质点速度相应地通过广义速度表示为

$$\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

两边关于广义速度 $\dot{q}_j$ 求偏导数，得到一个恒等关系式

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

拉格朗日方程

质点速度关于广义坐标的导数为

$$\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_l \partial q_j}\dot{q}_l+\frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial q_j}$$

质点矢量坐标关于广义坐标的导数仍为广义坐标的函数，$\partial r_i/\partial q_j=\partial r_i/\partial q_j(q_1,q_2,\cdots,q_k;t)$。再将它关于时间求全导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_l+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

比较两等式，即得另一个恒等关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$$

拉格朗日方程

广义惯性力可以表示成

$$Q_{gj}=-\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\quad=-\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\right)$$

把右侧两个等式代入上式

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\qquad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$$

得到：

$$Q_{gj}=-\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\right)$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\right)$$

拉格朗日方程

$$Q_{gj} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \right)$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] + \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \right)$$

由于:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right)$$

代入得到:

$$Q_{gi} = -\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) \right] + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right)$$

$$= -\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

$$= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

拉格朗日方程

把以质点系动能表达的广义惯性力

$$Q_{gi} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

代入到动力学普遍方程

$$Q_j + Q_{gj} = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

第二类拉格朗日(Lagrange)方程/拉格朗日方程

拉格朗日方程形式简洁、便于应用，可用于建立质点系的一般动力学关系，特别是质点与约束均较多的复杂系统。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad j=1,2,\cdots,k$$

- 它是常微分形式的方程，其数目等于系统的自由度数。
- 该方程由系统动能与广义力确定，它们都是代数量、计算方便。
- 对于受理想约束的系统，该动力学方程不包含未知的约束力，故没有“多余”的动力学关系。
- 如果需求约束力，可解除相应的约束，将约束力转化为主动力，从而通过广义力进入拉格朗日方程，同时系统的自由度或方程数也随之增加。

尼尔森方程

质点系动能关于时间的全导数：

$$\dot{T}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i\cdot\dot{r}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{r}_i\cdot\ddot{r}_i$$

质点速度：

$$\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t}$$

质点加速度：

$$\ddot{r}_i=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial r_i}{\partial q_l}\ddot{q}_l+\sum_{m=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_l\partial q_m}\dot{q}_l\dot{q}_m+2\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_l\partial t}\dot{q}_l+\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}$$

对广义速度求偏导：

$$\frac{\partial\ddot{r}_i}{\partial\dot{q}_j}=2\frac{\partial\dot{r}_i}{\partial q_j}$$

其中

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_l\partial q_j}\dot{q}_l+\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial t\partial q_j}$$

尼尔森方程

拉格朗日方程左边第一项：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad j=1,2,\cdots,k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}+\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \ddot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}=2\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{r}_i \cdot \dot{r}_i\right)-\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \ddot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}\cdot \dot{r}_i+\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}}$$

$$=\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j}-2\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}+\sum m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$=\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)$$

$$=\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}$$

尼尔森方程

将式子 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}$$

代入拉格朗日方程 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad j=1,2,\cdots,k$$

得到 $$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j}-2\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad j=1,2,\cdots,k$$

上式就是尼尔森方程。本质与拉格朗日方程一致，形式上不同。

广义速度表示的动能

利用速度表达式，可将质点系的动能表示为

$$T=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}m_l v_l^2=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}m_l\dot{\boldsymbol{r}}_l\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_l$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t}}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}m_l\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{k}b_i\dot{q}_i+c$$

$$=T_2+T_1+T_0$$

广义速度表示的动能

利用速度表达式，可将质点系的动能表示为

$$T=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}m_l v_l^2=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}m_l\dot{\boldsymbol{r}}_l\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_l$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t}}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}m_l\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\boldsymbol{r}_l}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{k}b_i\dot{q}_i+c$$

$$=T_2+T_1+T_0$$

广义速度表示的动能

动能关于广义速度的二次项、一次项和零次项部分分别为：

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$\boxed{a_{ij} = \sum_{l=1}^{n} m_l \frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial q_j}}$$

具有对称性： $a_{ij} = a_{ji}$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{k} b_i\dot{q}_i$$

$$\boxed{b_i = \sum_{l=1}^{n} m_l \frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial t}}$$

$$T_0 = c = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} m_l \frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial t}$$

动能的广义速度二次项部分为广义速度的二次型

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} m_l\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \boldsymbol{r}_l}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)^2 \geq 0$$

故动能T_2正定，即其系数矩阵$[a_{ij}]$对称正定

保守系统的拉格朗日方程

保守系统受到的主动力都是有势力，其相应的广义力可表示为负的势能的偏导数

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

代入拉格朗日方程，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1,2,\cdots,k}$$

得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

保守系统的拉格朗日方程。

保守系统的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial q_j}=0 \qquad j=1,2,\cdots,k$$

由于势能函数只是广义坐标和时间的函数，与广义速度无关，因此

$$\partial V/\partial \dot{q}_j=0 \qquad V=V(q_1,q_2,\cdots,q_k;t)$$

引入拉格朗日函数（又称动势）：

$$L=T-V$$

保守系统的拉格朗日方程可以表示成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad j=1,2,\cdots,k$$

- 上式称为标准形式的拉格朗日方程。
- 此时，只需计算系统的动能与势能，而无需计算广义力。
- 括号内的项称为广义动量，后面一项称作拉格朗日力。

非保守系统的拉格朗日方程

- 保守系统的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad j=1,2,\cdots,k$$

- 对于非保守系统，主动力可以分为有势力和非有势力两类，系统的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mathrm{j}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_{\mathrm{j}}}=\tilde{Q}_{\mathrm{j}} \qquad j=1,2,\cdots,k$$

其中 $\tilde{Q}_{\mathrm{j}}$ 为非有势力相应的广义力。

例题: 设某单自由度系统的广义坐标为 q，动能 T、势能 V、及非保守广义力分别为

$$T=\frac{1}{2}m(a+q)\dot{q}^2,\quad V=-mga\cos q,\quad \widetilde{Q}=-d\dot{q}^2 \qquad (m, a, g, d \text{ 为常数})$$

求系统的拉格朗日方程。

解: 拉格朗日函数表示的非保守系统的拉格朗日方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mathrm{j}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\mathrm{j}}=\widetilde{Q}_\mathrm{j} \qquad j=1,2,\cdots,k$$

该系统的拉格朗日函数: $L=T-V=\frac{1}{2}m(a+q)\dot{q}^2+mga\cos q$

拉格朗日函数的偏导数: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m(a+q)\,\dot{q}$

$$\frac{\partial L}{\partial q}=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-mga\sin q$$

拉格朗日方程可以写为:

$$m(a+q)\ddot{q}+\left(\frac{1}{2}m+d\right)\dot{q}^2+mga\sin q=0$$

例2.1 水平面内的行星轮机构如图2.1所示，均质杆OA的质量为m_1，可绕铅直轴O转动，A端通过光滑铰与轮心A联接，均质小圆轮A的质量为m_2，半径为r，大圆轮固定，轮心位于O处，半径为R。当杆在力偶矩M作用下转动时，带动小轮运动，设小轮与大轮在接触点处无相对滑动。求：杆的角加速度。(不计重力)

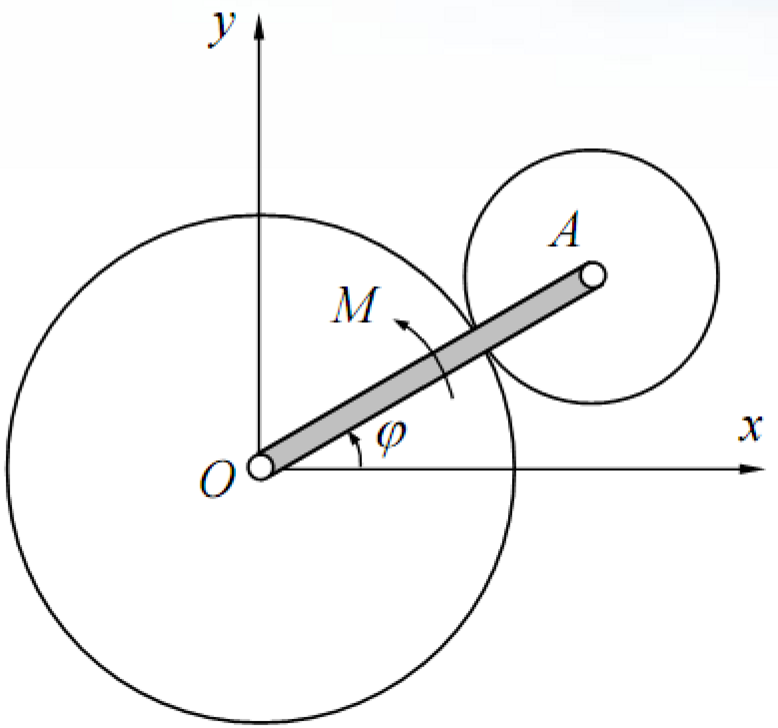
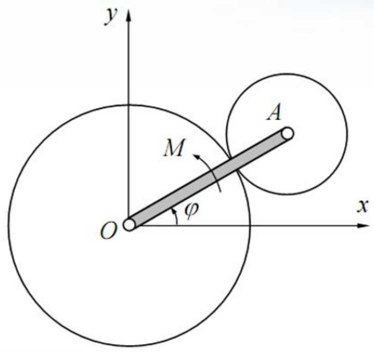


图2.1

解：以杆OA与小轮A组成的系统为研究对象，其自由度为1，选取杆的角坐标φ为广义坐标。

杆OA的定轴转动动能：



$$T_1 = \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m_1 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2$$

小轮平面运动，轮心速度 $v_A = (R+r)\dot{\varphi}$ ，角速度 $\omega_2 = v_A / r$，动能

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m_2 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2$$

系统的动能及其导数为

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{12}(2m_1 + 9m_2)(R+r)^2\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{6}(2m_1 + 9m_2)(R+r)^2\dot{\varphi}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

广义坐标φ对应的广义力为 $Q_j = M$

将系统动能及其导数和广义力代入到拉格朗日方程得到

$$\boxed{\frac{1}{6}(2m_1 + 9m_2)(R+r)^2\ddot{\varphi} = M}$$

得到角加速度

$$\ddot{\varphi} = \frac{6M}{(2m_1 + 9m_2)(R+r)^2}$$

例2.2 铅直平面内的摆如图2.2所示，小球质量为m，通过细绳悬挂，绳另一端绕在固定的圆柱上，圆柱半径为R。摆在铅直位置时，绳的直线部分长度为L，绳重不计。求：摆动微分方程。

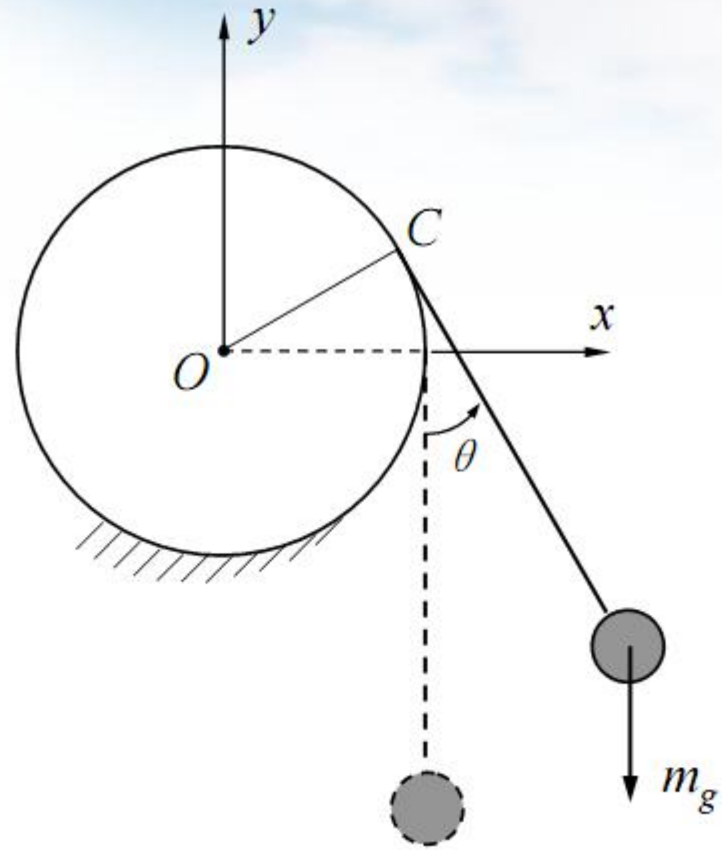


图2.2

解：以摆为研究对象，自由度为1，选取摆角θ为广义坐标。

绳与柱的切点C为速度瞬心，球的速度 $v=(L+R\theta)\dot{\theta}$，

小球动能：

$$T=\frac{1}{2}m(L+R\theta)^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$$

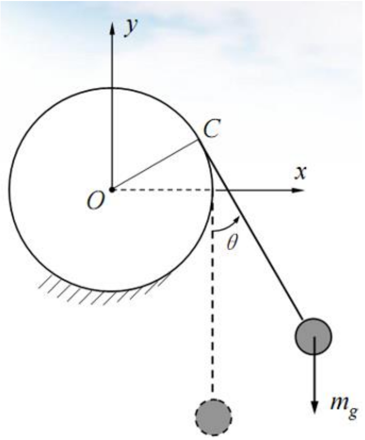
小球动能对广义速度的导数：

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=m(L+R\theta)^2\dot{\theta}$$

小球动能对广义坐标的导数：

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=mR(L+R\theta)\dot{\theta}^2$$

系统的约束是理想的，只有主动的重力做功，而重力是有势力，故广义力可通过势能的导数算得。设摆于平衡状态为零势位，势能



$$V=mg[(L+R\sin\theta)-(L+R\theta)\cos\theta]$$

广义力：

$$Q_\theta=-\frac{\partial V}{\partial \theta}=-mg(L+R\theta)\sin\theta$$

小球动能对广义速度的导数：
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m(L+R\theta)^2\dot{\theta}$$

小球动能对广义坐标的导数：
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = mR(L+R\theta)\dot{\theta}^2$$

广义力：
$$Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mg(L+R\theta)\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

将广义力与动能及其导数的表达式代入拉格朗日方程，得到摆动微分方程

$$(L+R\theta)\ddot{\theta} + R\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$$

例2.3 铅直平面内的椭圆摆如图2.3所示，滑块A的质量为m_1，可在光滑水平面上滑动，摆球B的质量为m_2，滑块与摆球通过无重直杆联接，杆AB长为L，A处为光滑铰。求：系统的运动微分方程。

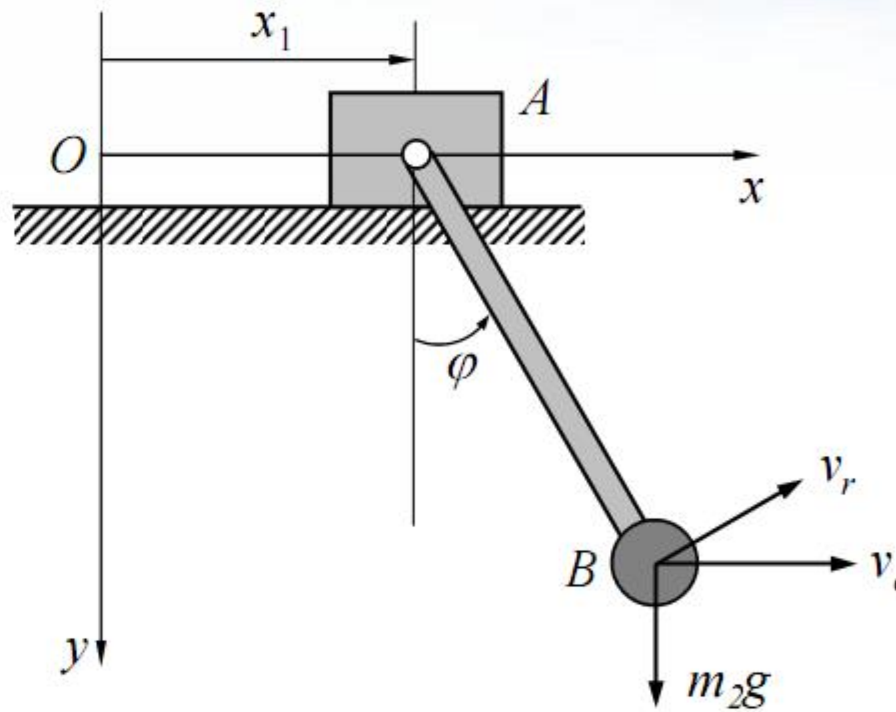
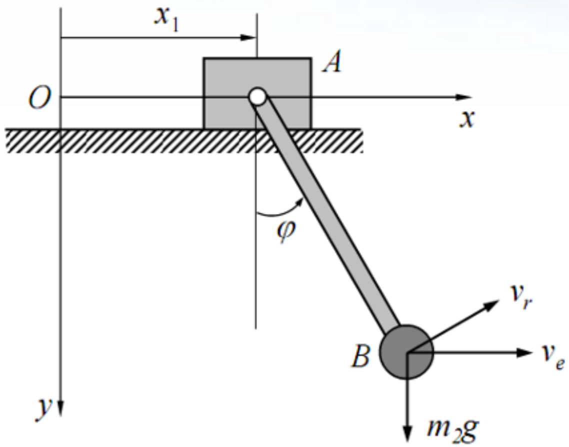


图 2.3

解：以物块A与球B组成的系统为研究对象，其自由度为2，选取物块的水平坐标x_1与杆的角坐标φ为广义坐标。



物块的动能 $T_1=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2$

小球运动的牵连速度$v_e=\dot{x}_1$，相对速度 $v_r=L\dot{\varphi}$

小球动能

$$T_2=\frac{1}{2}m_2[(v_e+v_r\cos\varphi)^2+(v_r\sin\varphi)^2]$$

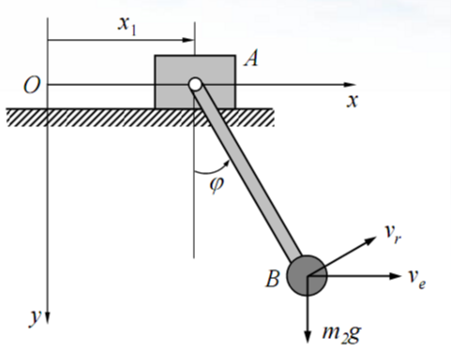
$$=\frac{1}{2}m_2\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2L^2\dot{\varphi}^2+m_2L\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi$$

系统动能和对广义速度的导数:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 L^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 L \dot{x}_1 \dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 L \dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 L^2 \dot{\varphi} + m_2 L \dot{x}_1 \cos\varphi$$



系统的约束是理想的，只有主动的重力m_2g作功，而该重力为有势力，故广义力可由势能的导数算得。设系统的平衡状态为零势位，势能

广义坐标φ的函数

$$V = m_2 g L(1 - \cos\varphi)$$

广义力

$$Q_x = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \qquad Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -m_2 g L \sin\varphi$$

将广义力与动能及其导数的表达式代入拉格朗日方程，得到系统的两个运动微分方程

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 L\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 L\dot{\varphi}^2 \sin\varphi = 0$$

$$\ddot{x}_1 \cos\varphi + L\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

例2.4 水平直线运动的质量弹簧系统如图2.4所示，物块通过弹簧串联，物块的质量均为m，弹簧刚度均为k，物块分别受到水平外力$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$和$\boldsymbol{F}_3$作用。设平衡状态时弹簧无伸缩，弹簧质量不计。求：系统的运动微分方程。

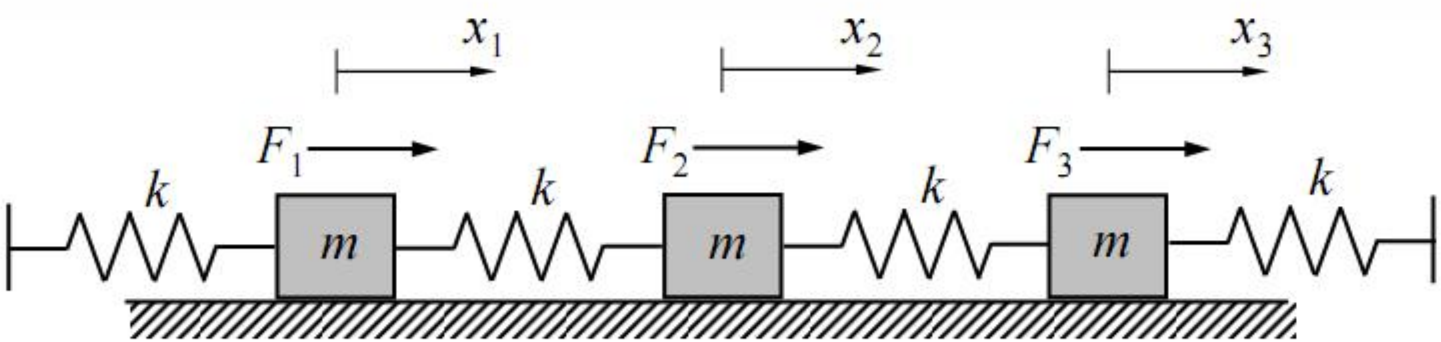
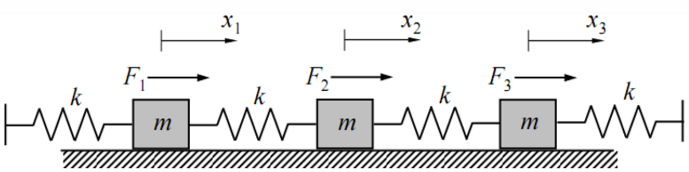


图2.4

解：以质量弹簧系统为研究对象，其自由度为3，选取物块的三个水平绝对坐标x_1、x_2、x_3为广义坐标。

系统动能



$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)$$

系统的约束是理想的，作功的主动力有弹簧力与外作用力两类，弹簧力为有势力，相应的广义力可由势能的导数算得

设系统的平衡状态为零势位，势能

$$V=\frac{1}{2}k[x_1^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+x_3^2]$$

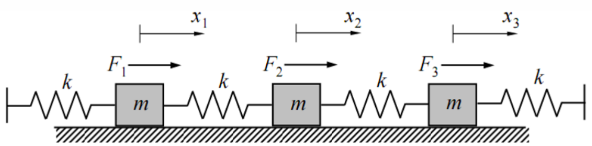
广义力:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$$

$$Q_1=-\frac{\partial V}{\partial x_1}+F_1=-2kx_1+kx_2+F_1$$

$$Q_2=-\frac{\partial V}{\partial x_2}+F_2=kx_1-2kx_2+kx_3+F_2$$

$$Q_3=-\frac{\partial V}{\partial x_3}+F_3=kx_2-2kx_3+F_3$$



将广义力与动能的表达式代入拉格朗日方程，得到系统的运动微分方程

$$m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2=F_1$$

$$m\ddot{x}_2-kx_1+2kx_2-kx_3=F_2$$

$$m\ddot{x}_3-kx_2+2kx_3=F_3$$

拉格朗日方程的应用步骤

- 应用拉格朗日方程建立质点系的动力学关系的一般过程

(1)明确研究的系统对象及其约束的性质

(2)分析确定系统的自由度，选取适当的广义坐标

(3)计算系统的动能，并通过广义速度及广义坐标表示

(4)计算广义力，可以按照定义公式，也可利用虚功通过下式算得

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \frac{[\sum \delta W]_j}{\delta q_j} \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- 对于保守系统，可以先计算势能，再求导得到

(5)将动能与广义力代入拉格朗日方程，求导并整理得系统的运动微分方程组。

作业

作业1： 设某单自由度系统的广义坐标为θ，动能 T、势能 V、及非保守广义力分别为

$$T=\frac{1}{2}mb\dot{\theta}^2\text{，}\quad V=mg(b+\theta-\cos\theta)\text{，}\quad \tilde{Q}=Fb \qquad （m, b, g, F \text{ 为常数}）$$

求系统的拉格朗日方程。

作业2： 设某单自由度系统的广义坐标为 x，动能 T、势能 V、及非保守广义力分别为

$$T=\frac{1}{2}m(b+x)^2\dot{x}^2\text{，}\quad V=\frac{1}{2}mgx^2\text{，}\quad \tilde{Q}=-c\dot{x} \qquad （m, b, g, c \text{ 为常数}）$$

求系统的拉格朗日方程。

- 教材P34: 2.1, 2.2（只做第一问）