一. 选择题（每题 4 分，共 28 分。答案请写于空白答题纸上）

1. 将低碳钢杆件拉伸至断裂时，下面说法正确的是（　　）。

   A. 杆件沿着横截面发生脆性断裂

   B. 强化阶段之后会出现明显的颈缩现象

   C. 断裂面上没有明显的塑性变形

   D. 断裂时的应力大于材料的强度极限

2. 材料不同的两根圆轴 1 和 2，其直径和长度都相同，在其截面上扭矩相同的情况下，它们的最大切应力和扭转角之间满足（　　）。

   A. $\tau_1=\tau_2$， $\varphi_1=\varphi_2$　　　　B. $\tau_1=\tau_2$， $\varphi_1\neq\varphi_2$

   C. $\tau_1\neq\tau_2$， $\varphi_1=\varphi_2$　　　　D. $\tau_1\neq\tau_2$， $\varphi_1\neq\varphi_2$

3. 已知等截面直梁在某一段上的挠曲线方程为 $w(x)=x^4-4Lx^3+6L^2x^2$，其中 L 是梁的跨度，则在该段梁上

B. 强化阶段之后会出现明显的颈缩现象

C. 断裂面上没有明显的塑性变形

D. 断裂时的应力大于材料的强度极限

2. 材料不同的两根圆轴 1 和 2，其直径和长度都相同，在其截面上扭矩相同的情况下，它们的最大切应力和扭转角之间满足（　　）。

A. $\tau_1 = \tau_2$， $\varphi_1 = \varphi_2$　　B. $\tau_1 = \tau_2$， $\varphi_1 \neq \varphi_2$

C. $\tau_1 \neq \tau_2$， $\varphi_1 = \varphi_2$　　D. $\tau_1 \neq \tau_2$， $\varphi_1 \neq \varphi_2$

3. 已知等截面直梁在某一段上的挠曲线方程为 $w(x) = x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2$，其中 L 是梁的跨度，则在该段梁上

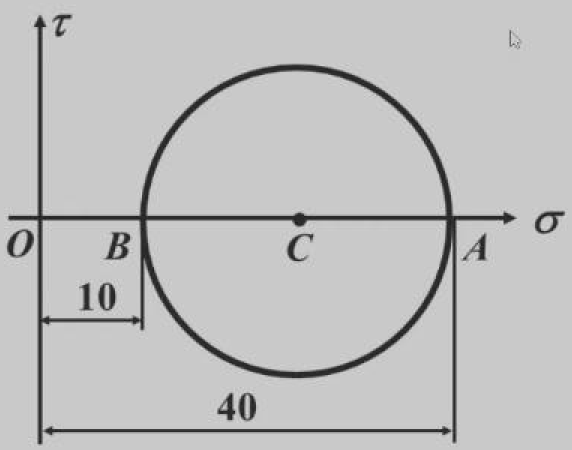
A. 分布载荷是 x 的一次函数　　B. 分布载荷是 x 的二次函数

C. 有均匀分布载荷作用　　D. 无分布载荷作用

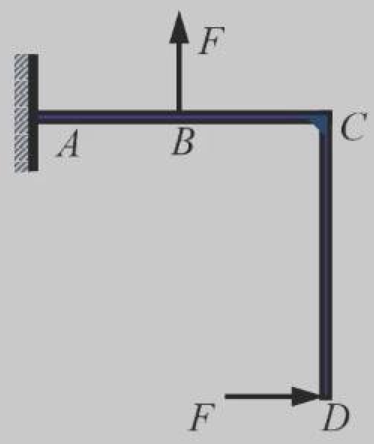
4. 图示平面应力状态单元体的应力圆，其中最大切应力为（　　）。（应力单位是 MPa）

A. 10　　B. 15

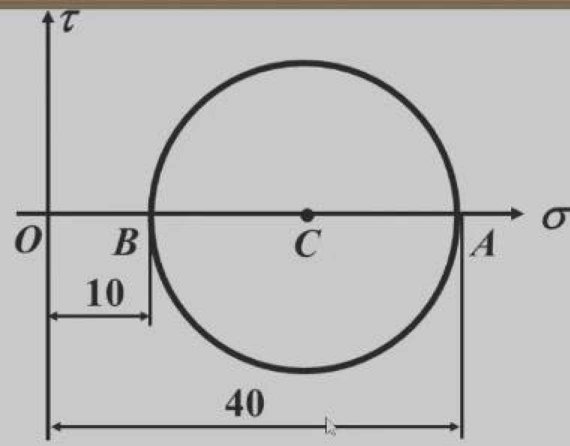
C. 30　　D. 40



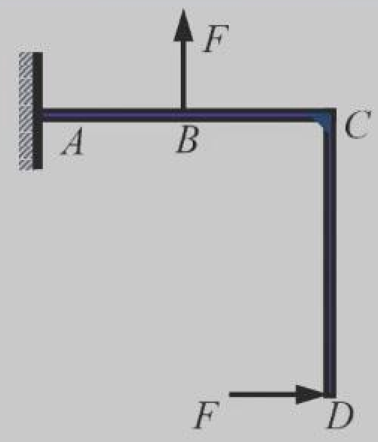
第 4 题图



第 5 题图



第 4 题图



第 5 题图

5. 平面刚架，若U表示刚架的应变能，则$\partial U/\partial F$表示（　）

A. B点竖向向上位移

B. D点水平向右位移

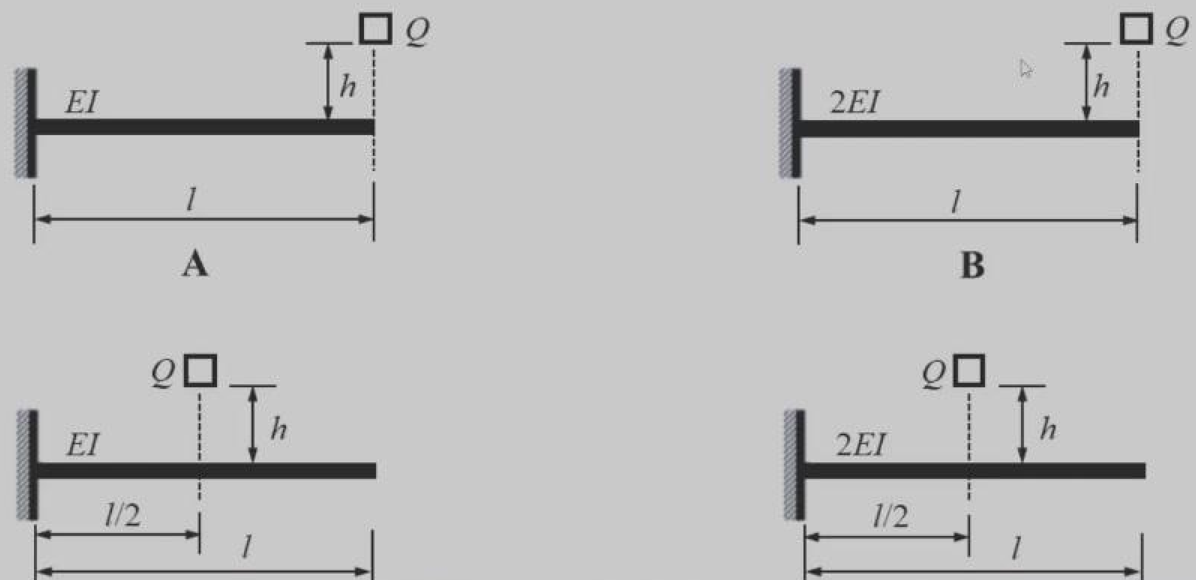
C. B点竖向向上位移和D点水平向右位移之和

D. 以上都不对

6. 图示 4 根悬臂梁均受到重量为 Q 的重物由高度 h 的自由落体冲击，其中（　　）的动荷因数 K_d 最大。

A. A 梁　　　　B. B 梁

C. C 梁　　　　D. D 梁



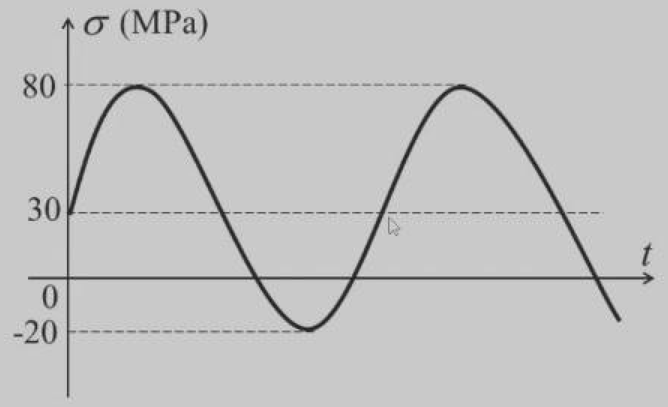
7. 已知某构件内一点处的交变应力随时间变化的图线如图所示，则该点的应力循环特征 r 和应力幅σ_a分别为（　　）。

A. 3/5 和 30 MPa

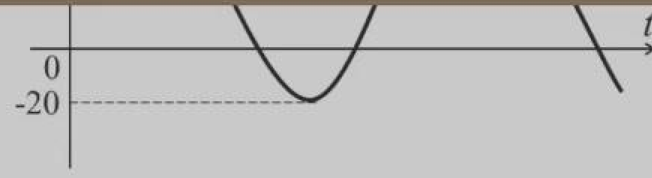
B. −1/4 和 30 MPa

C. 3/5 和 50 MPa

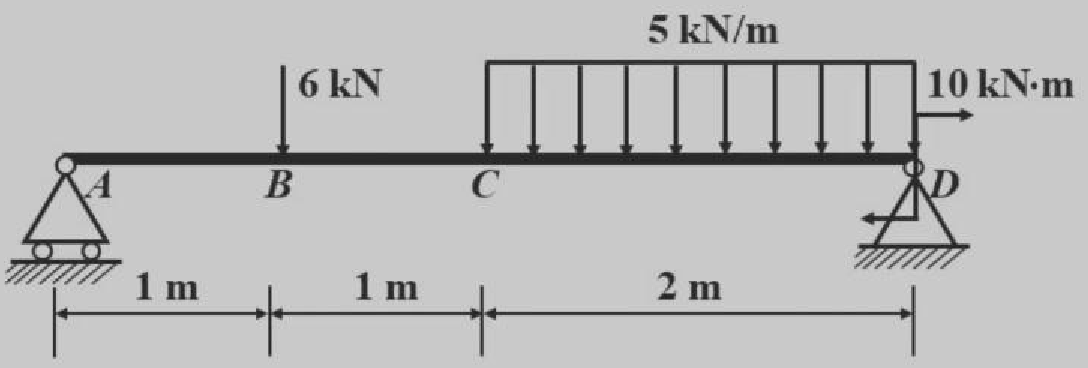
D. −1/4 和 50 MPa



D.　−1/4 和 50 MPa

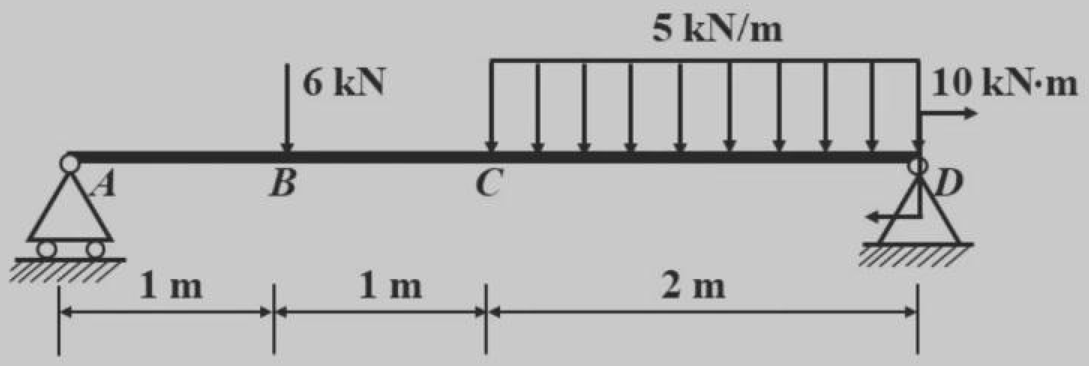


二.（本题 16 分）两端简支的梁，载荷如图所示，试画出梁的剪力图和弯矩图。



解答:

二.（本题 16 分）两端简支的梁，载荷如图所示，试画出梁的剪力图和弯矩图。



解答：

A 点的支座反力：$R_A = 4.5\text{kN}$（↑）

D 点的支座反力：$R_D = 11.5\text{kN}$（↓）

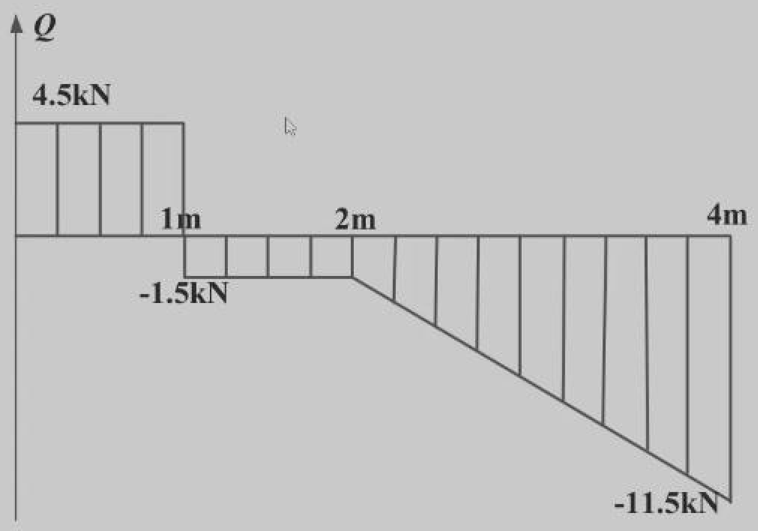
剪力图和弯矩图分别为：

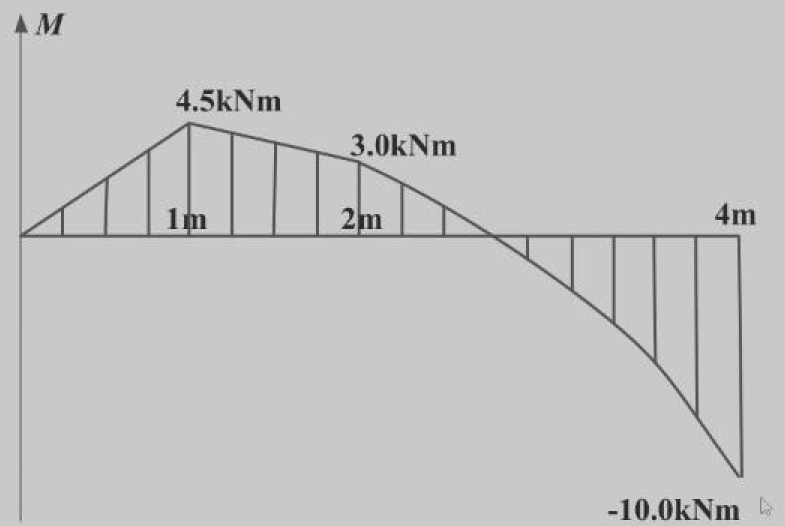
解答：

A 点的支座反力：$R_A = 4.5\text{kN}$（↑）

D 点的支座反力：$R_D = 11.5\text{kN}$（↓）

剪力图和弯矩图分别为：

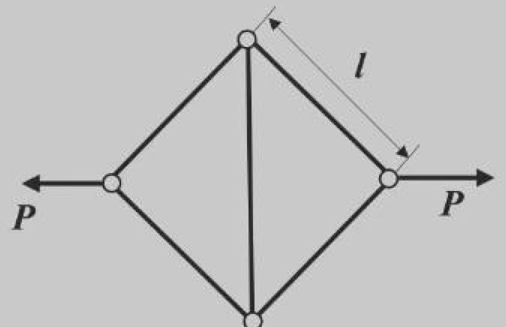


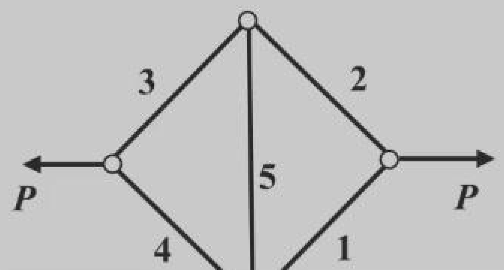

M
4.5kNm
3.0kNm
1m
2m
4m
-10.0kNm

三.（本题 18 分）图示由五根圆杆组成的正方形结构，连接处均为铰接。材料为 A3 钢，比例极限$\sigma_p = 200$ MPa，屈服极限$\sigma_s = 240$ MPa，弹性模量 $E = 200$ GPa。直线公式$\sigma_{cr} = a - b\lambda$，其中 $a = 304$ MPa，$b = 1.12$ MPa。已知 $l = 1.0$ m，各杆的直径均为 50 mm。受一对大小相等、方向相反的集中力 P 的作用。若强度安全因数 $n = 2$，压杆的稳定安全因数为 $n_{st} = 3$。试求：

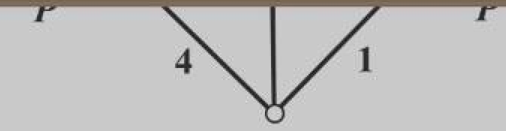
(1) 结构的许用载荷[P];

(2) 若外载荷 P 反向，试问许用载荷有无变化？若有改变，应为多少？





解答:



解答：

(1) $F_{N1}=F_{N2}=F_{N3}=F_{N4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}P$

$F_{N5}=-P$

杆 1，2，3，4 为拉杆，需满足强度条件；杆 5 为压杆，需满足稳定性条件

各杆截面积 $A=\dfrac{\pi d^2}{4}=1963.5\ \text{mm}^2$，惯性半径 $i=\dfrac{d}{4}=12.5\ \text{mm}$，

两端铰接 $\mu=1$

杆 1~4: $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}[P]}{A}\le\dfrac{\sigma_s}{n}$

两端铰接 $\mu=1$

杆 1~4:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}[P]}{A} \le \frac{\sigma_s}{n}$$

$$[P] \le \frac{\sigma_s}{n} \cdot A \cdot \sqrt{2} \approx 333.2\ \text{kN}$$

杆 5:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 113.1$$

$$[P] \le \frac{\sigma_s}{n} \cdot A \cdot \sqrt{2} \approx 333.2\ \text{kN}$$

杆 5: $$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 113.1$$

材料 $\lambda_p = \pi \sqrt{\dfrac{E}{\sigma_p}} = 99.3$，$\lambda_s = \dfrac{a - \sigma_s}{b} = 57.1$

$\lambda > \lambda_p$，欧拉公式适用

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 154.3\ \ \text{MPa}$$

$$\frac{[P]}{A} \le \frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}$$

$$[P] \le \frac{\sigma_{cr}}{n_{st}} \cdot A \approx 101.0\ \text{kN}$$

$$\text{材料}\ \lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=99.3,\quad \lambda_s=\frac{a-\sigma_s}{b}=57.1$$

$\lambda>\lambda_p$，欧拉公式适用

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}=154.3\ \text{MPa}$$

$$\frac{[P]}{A}\le\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}$$

$$[P]\le\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}\cdot A\approx101.0\,\text{kN}$$

所以，许可载荷为 $[P]\approx101.0\,\text{kN}$

(2) 若 P 反向，许可载荷将有变化。

杆 1~4 为受压，轴力为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}P$，需满足稳定性要求；杆 5 受拉，轴力为 P。

所以，许可载荷为 $[P]=101.0\ \text{kN}$

(2) 若 P 反向，许可载荷将有变化。

杆 1~4 为受压，轴力为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}P$，需满足稳定性要求；杆 5 受拉，轴力为 P，需满足强度要求。

杆 1~4: $\lambda=\frac{\mu l}{i}=80.0$

$\lambda_{\mathrm{s}}<\lambda<\lambda_{\mathrm{p}}$，直线公式适用

$$\sigma_{\mathrm{cr}}=a-b\lambda=214.4\ \text{MPa}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}[P]}{A}\le\frac{\sigma_{\mathrm{cr}}}{n_{\mathrm{st}}}$$

$$[P]\le\frac{\sigma_{\mathrm{cr}}}{}\cdot A\cdot\sqrt{2}\approx198.4\ \text{kN}$$

所以，许可载荷为 $[P]=101.0\text{ kN}$

(2) 若 P 反向，许可载荷将有变化。

杆 1~4 为受压，轴力为$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}P$，需满足稳定性要求；杆 5 受拉，轴力为P，需满足强度要求。

杆 1~4: $\lambda=\dfrac{\mu l}{i}=80.0$

$\lambda_s<\lambda<\lambda_p$，直线公式适用

$\sigma_{cr}=a-b\lambda=214.4\ \text{MPa}$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}[P]}{A}\le\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}$$

$$[P]\le\frac{\sigma_{cr}}{\ }\cdot A\cdot\sqrt{2}\approx198.4\text{ kN}$$

$$\sigma_{cr}=a-b\lambda=214.4\ \text{MPa}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}[P]}{A}\le\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}$$

$$[P]\le\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}\cdot A\cdot\sqrt{2}\approx 198.4\ \text{kN}$$

杆 5:

$$\frac{[P]}{A}\le\frac{\sigma_s}{n}$$

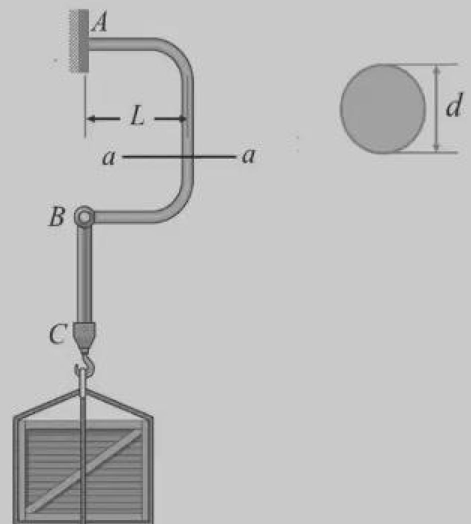
$$[P]\le\frac{\sigma_s}{n}\cdot A\approx 235.6\ \text{kN}$$

所以许可载荷为$[P]=198.4\ \text{kN}$

四.（本题 18 分）如图所示，实心曲杆 AB 和直杆 BC，横截面均为圆形截面，直径为 d。杆 AB 和 BC 在 B 处铰接，底端 C 处悬挂重力为 G 的木箱。试求：

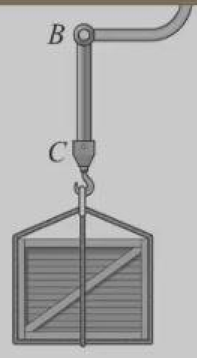
(1) a-a 截面上的最大拉应力；

(2) 如果在 a-a 截面上施加力偶矩 T，试确定最危险点的位置，并用单元体表示出该危险点的应力状态，同时按第三强度理论确定相当应力。



解答：

（1） 对 a-a 截面，存在轴力 F_N 和弯矩 M



解答：

（1） 对 a-a 截面，存在轴力 F_N 和弯矩 M

$$F_N = G，M = GL$$

a–a 截面上的最大拉应力：

$$\sigma_{\max} = \frac{4G}{\pi d^2} + \frac{GL}{W_z} = \frac{4G}{\pi d^2} + \frac{32GL}{\pi d^3}$$

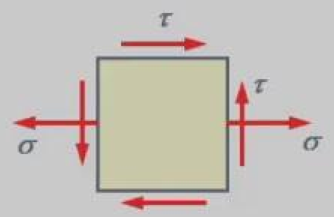
（说明：只要答案正确，即可得分）

（2） 在 a–a 截面上施加力偶矩 T，则在圆周上切应力最大：

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

最大拉应力位于 a-a 截面最左侧边缘点，改点即为 a-a 截面最危险点位置，对应

应力状态单元体如下图所示



按第三强度理论确定相当应力：

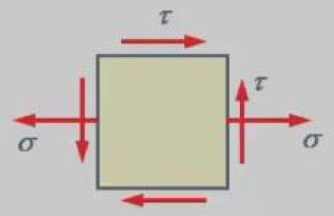
$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{\sigma+0}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2}$$

$$\sigma_2=0$$

$$\sigma_3=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{\sigma+0}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2}$$

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\sqrt{\left(\frac{4G}{\pi d^2}+\frac{32GL}{\pi d^3}\right)^2+4\left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}$$

应力状态单元体如下图所示



按第三强度理论确定相当应力：

$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{\sigma+0}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2}$$

$$\sigma_2=0$$

$$\sigma_3=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{\sigma+0}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2}$$

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\sqrt{\left(\frac{4G}{\pi d^2}+\frac{32GL}{\pi d^3}\right)^2+4\left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}$$

五.（本题 20 分）如图所示刚架结构 $ABCD$，杆 AB 和杆 CD 竖直，杆 BC 水平，长度均为 a。在杆 BC 的中点 E 处承受集中力偶 m 作用。若各杆的材料相同，抗弯刚度均为 EI。不计轴力和剪力对变形的影响，试确定：

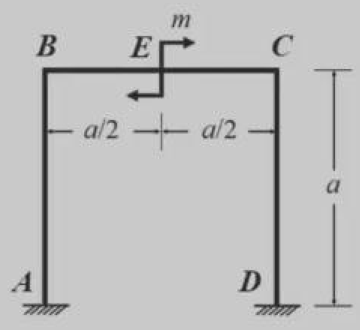
五.（本题 20 分）如图所示刚架结构 $ABCD$，杆 AB 和杆 CD 竖直，杆 BC 水平，长度均为 a。在杆 BC 的中点 E 处承受集中力偶 m 作用。若各杆的材料相同，抗弯刚度均为 EI。不计轴力和剪力对变形的影响，试确定：

(1) 刚架支座 A 处的约束反力；

(2) 刚架结构的弯矩图；

(3) B 截面处的转角。

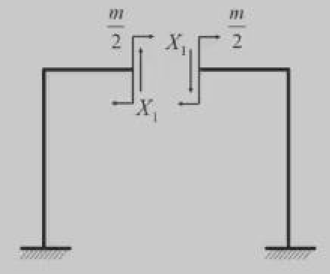
（提示：可以利用对称结构上载荷的对称或反对称性质进行分析）



解答:

(1) 对称结构上的反对称载荷，对称轴上的对称内力为 0，即只有剪力，是一次超静定问题

做出相当系统受力分析示意图



正则方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0$$

如图示剪力方向，

$$\Delta_{1F}=\frac{2}{EI}[\int_0^a(\frac{m}{2})\cdot(-\frac{a}{2})\cdot \mathrm{d}x_1+\int_0^{\frac{a}{2}}(\frac{m}{2})\cdot(-x_2)\cdot \mathrm{d}x_2]=-\frac{5ma^2}{8EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{2}{EI}[\int_0^a(\frac{a}{2})^2\cdot \mathrm{d}x_1+\int_0^{\frac{a}{2}}x_2^2\cdot \mathrm{d}x_2]=\frac{7a^3}{12EI}$$

代入得

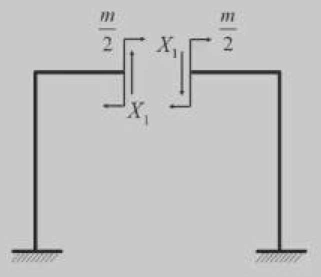
$$\frac{7a^3}{12EI}X_1-\frac{5ma^2}{8EI}=0$$

$$X_1=\frac{15m}{14a}$$

（用任何方法算出此值，即可得分）

(1) 对称结构上的反对称载荷，对称轴上的对称内力为 0，即只有剪力，是一次超静定问题

做出相当系统受力分析示意图



正则方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0$$

如图示剪力方向，

$$\Delta_{1F}=\frac{2}{EI}\left[\int_0^a\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)\cdot \mathrm{d}x_1+\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{m}{2}\right)\cdot(-x_2)\cdot \mathrm{d}x_2\right]=-\frac{5ma^2}{8EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{2}{EI}\left[\int_0^a\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot \mathrm{d}x_1+\int_0^{\frac{a}{2}}x_2^2\cdot \mathrm{d}x_2\right]=\frac{7a^3}{12EI}$$

代入得

$$\frac{7a^3}{12EI}X_1-\frac{5ma^2}{8EI}=0$$

$$X_1=\frac{15m}{14a}$$

（用任何方法算出此值，即可得分）

代入相当系统，可求得支座 A 处的支座反力为

$$F_{RAx}=0,\ F_{RAy}=\frac{15m}{14a},\ M_A=\frac{m}{28}$$

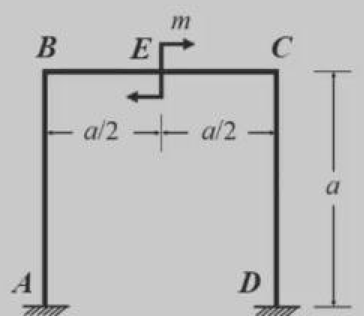
五.（本题 20 分）如图所示刚架结构 $ABCD$，杆 AB 和杆 CD 竖直，杆 BC 水平，长度均为 a。在杆 BC 的中点 E 处承受集中力偶 m 作用。若各杆的材料相同，抗弯刚度均为 EI。不计轴力和剪力对变形的影响，试确定：

(1) 刚架支座 A 处的约束反力；

(2) 刚架结构的弯矩图；

(3) B 截面处的转角。

（提示：可以利用对称结构上载荷的对称或反对称性质进行分析）



解答:

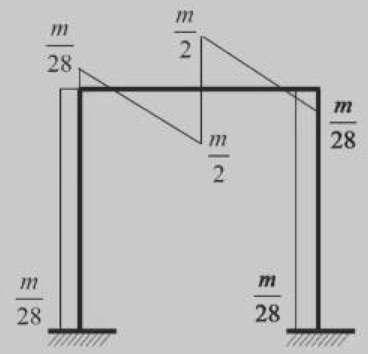
$14a$

（用任何方法算出此值，即可得分）

代入相当系统，可求得支座 A 处的支座反力为

$$F_{RAx}=0,\ F_{RAy}=\frac{15m}{14a},\ M_A=\frac{m}{28}$$

(2) 弯矩图如图所示



(3) 利用叠加法或单位载荷法可求得

$$\theta_B=\frac{ma}{28EI}（逆时针）$$