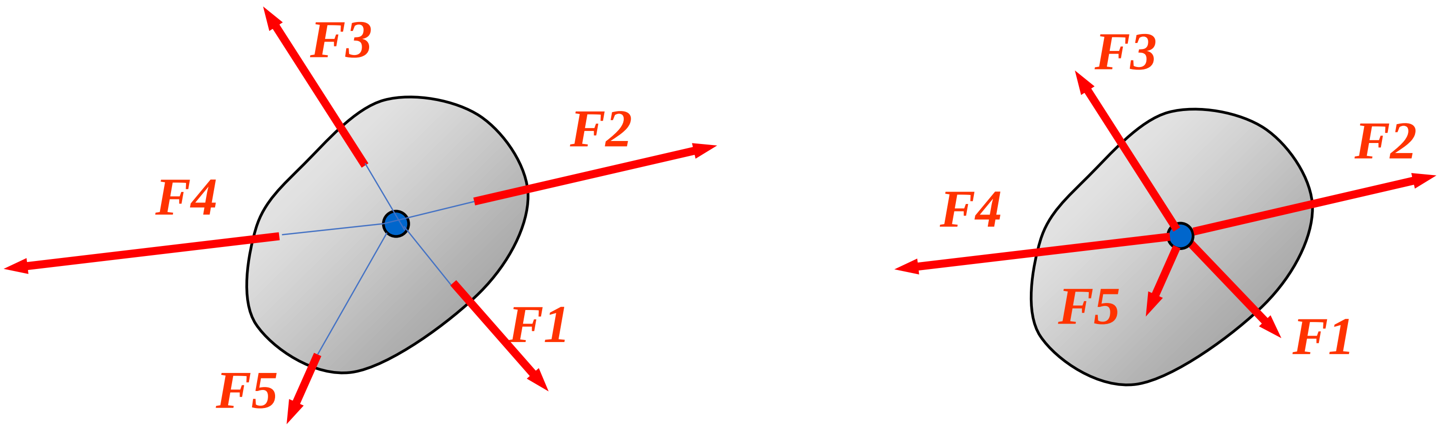
第2章 共点力系和力偶系

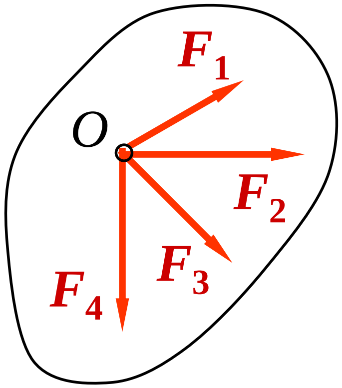
汇交力系与共点力系

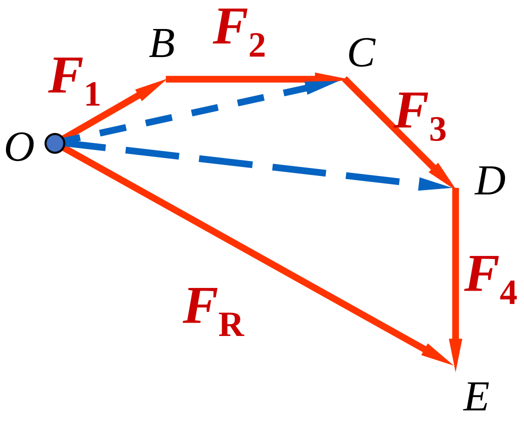


- **汇交力系：**作用在物体上各力的作用线汇交于一点
- **共点力系：**如果物体是刚体，汇交力系中的各力都可在刚体内移到作用线的汇交点，这样就得到共点力系

§2-1-1 共点力系合成的几何法

（1）力三角形法则

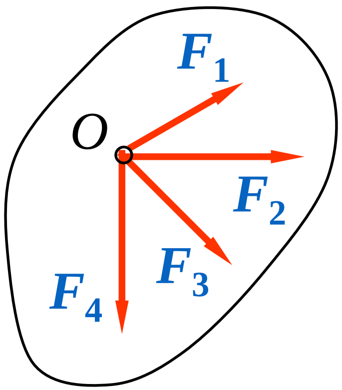


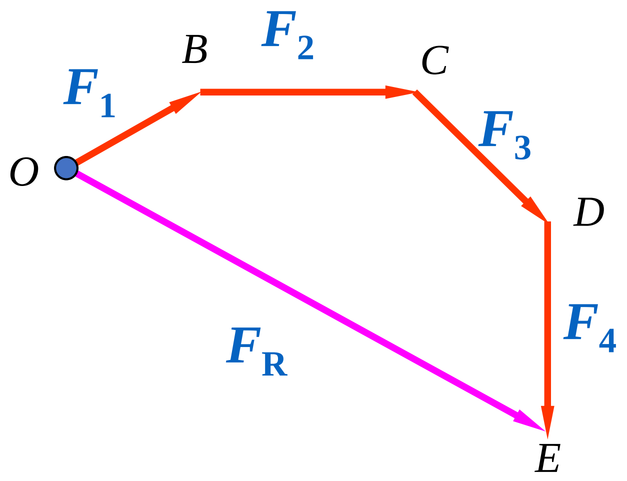


表达式：$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

§2-1-1 共点力系合成的几何法

（2）力多边形法则

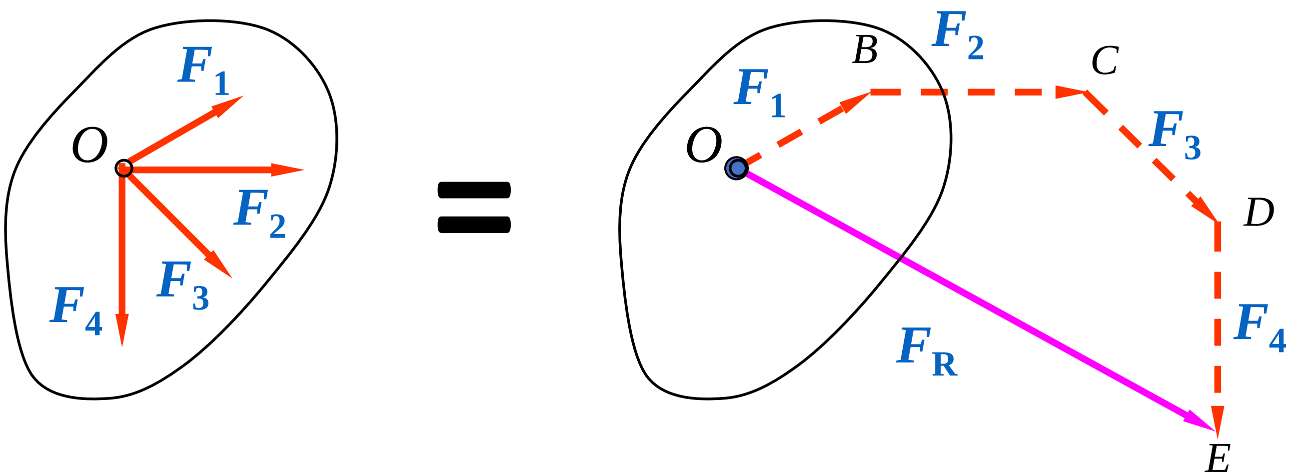




- 把各力矢首尾相接，形成一条折线
- 把该折线的首尾相接，得到一个闭合的多边形
- 最后添加的矢量F_R就是该共点力系的合力

§2-1-1 共点力系合成的几何法

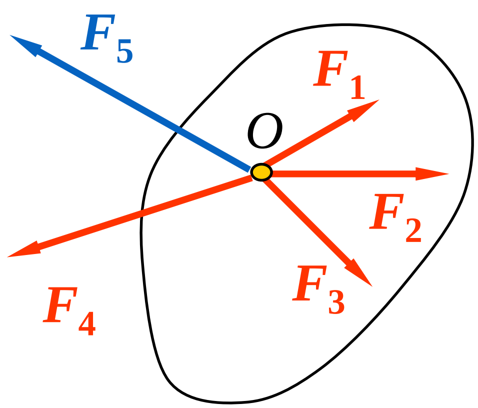
（2）力多边形法则

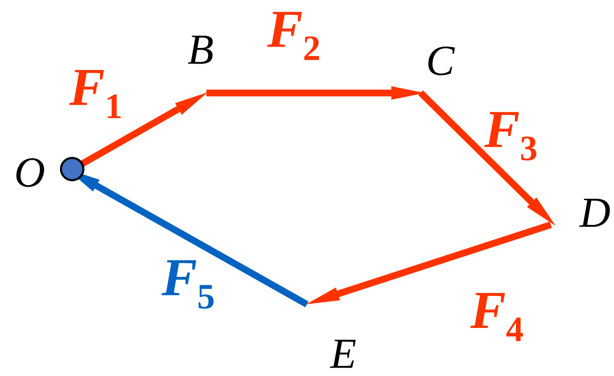


矢量的表达式：

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

§2-1-2 共点力系平衡的几何条件

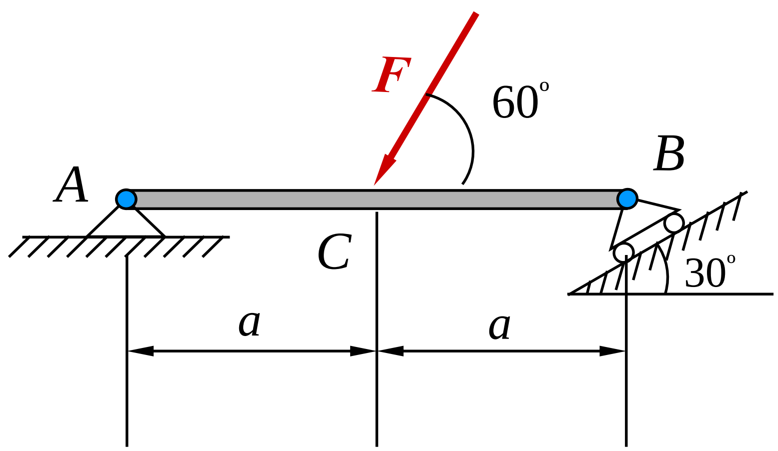




力系的力多边形自行闭合，即力系中各力的矢量和(即合力)于零：

$$\boldsymbol{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$$

例题 2–1 **水平梁**AB**中点**C**作用着力**F**，其大小等于**20 kN**，方向与梁的轴线成**60° **角，支承情况如图所示，试求固定铰链支座**A**和活动铰链支座**B**的约束力，梁的自重不计。**



解：（1）取梁AB作为研究对象。

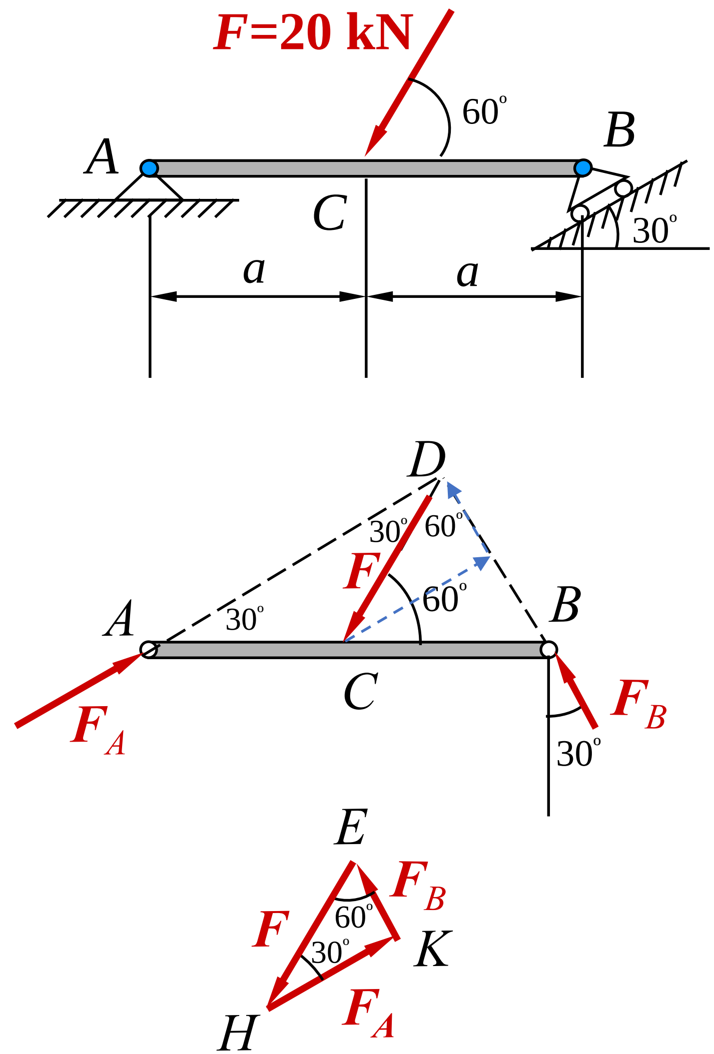
（2）画出受力图。

（3）根据共点力系平衡几何条件，F、F_A和F_B构成闭合三角形。

（4）解得

$$F_A=F\cos 30^\circ=17.3\ \text{kN}$$

$$F_B=F\sin 30^\circ=10\ \text{kN}$$

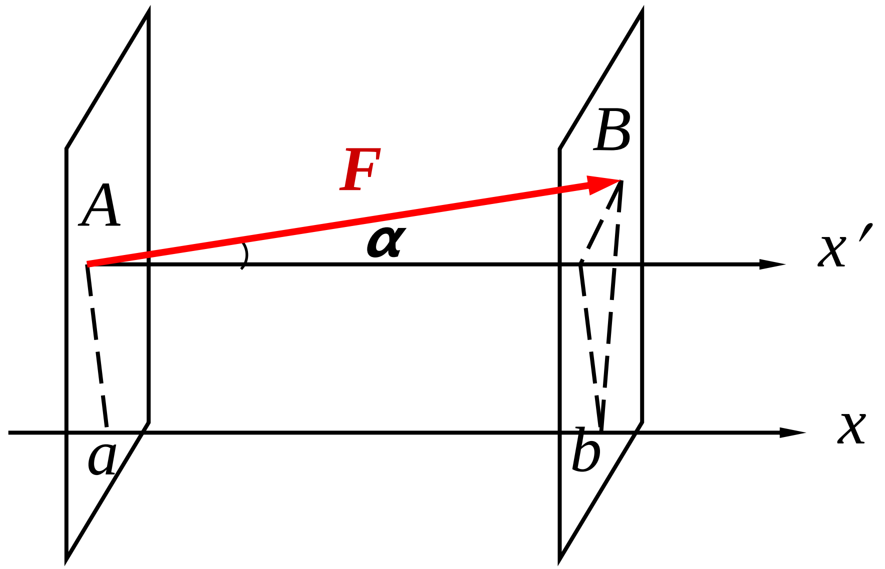


求解共点力系平衡问题的两种方法：

- 几何法 → 力的多边形闭合
- 解析法

§2-2 力的投影

1. 力在轴上的投影



力在某轴上投影，等于力的模乘以与该轴正向间夹角的余弦： $F_x = F\cos\alpha$

- F_x为正，力的投影的方向沿着轴的正向
- F_x为负，力的投影的方向沿着轴的负向

§2-2 力的投影

2. 力在直角坐标系坐标轴上的投影

$$F_x = F\cos\alpha\ ,\qquad F_y = F\cos\beta\ ,\qquad F_z = F\cos\gamma$$

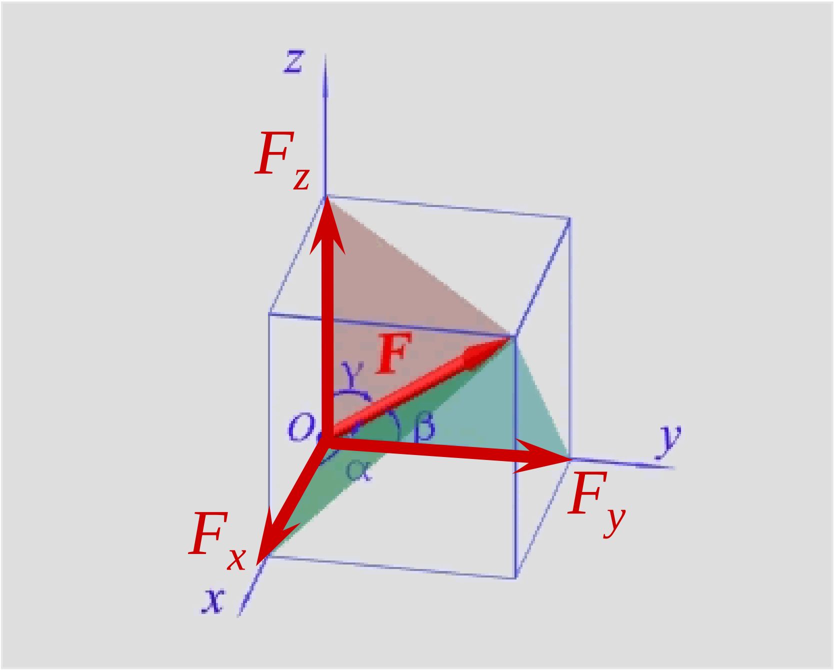
已知力F 的三个投影，力F 的大小和方向可分别表示为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos\ \beta = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos\ \gamma = \frac{F_z}{F}$$



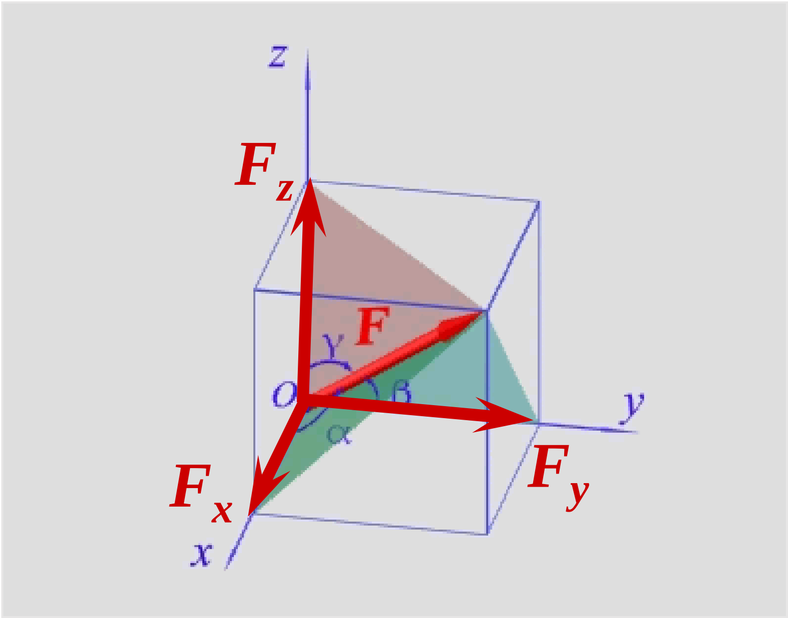
§2-2 力的投影

3. 力沿坐标轴的分解

力$\boldsymbol{F}$沿坐标轴x、y、z方向的投影$\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$可以视为$\boldsymbol{F}$沿各坐标轴的轴向分量。

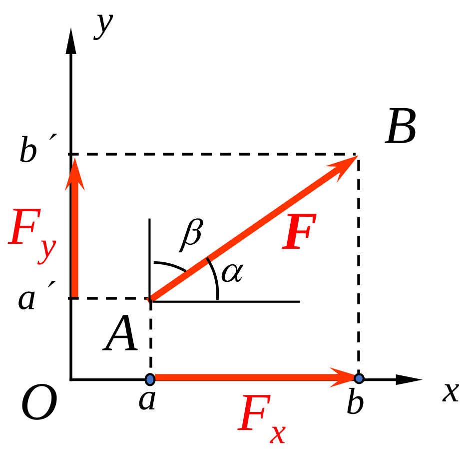
引入x、y、z轴单位矢$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则力矢 $\boldsymbol{F}$ 可写为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_y\boldsymbol{k}$$



§2-2 力的投影

平面情况下力在坐标轴上的投影减少为两个：



$$F_x = F\cos\alpha$$

$$F_y = F\cos\beta$$

当投影F_x、F_y已知时，则可求出力 F 的大小和方向：

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{F_x}{F}\ ,\quad \cos\ \beta = \frac{F_y}{F}$$

力矢量$\boldsymbol{F}$可以表示为：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{F}_y\boldsymbol{j}$$

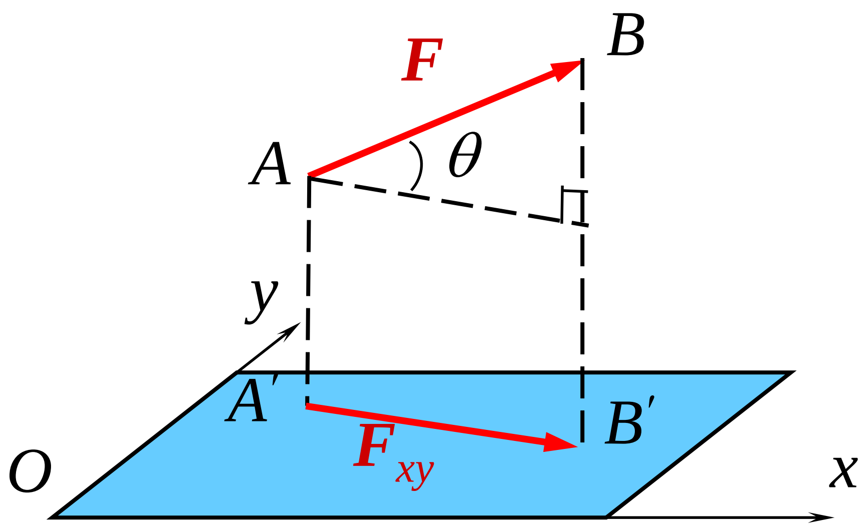
§2-2 力的投影

4. 力在平面上的投影

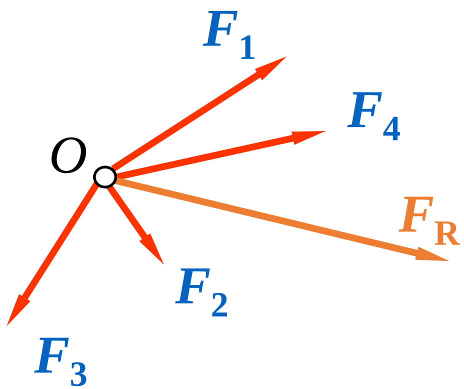
由力矢F的始端A和末端B向投影平面Oxy引垂线，由垂足A'到B'所构成的矢量$\overrightarrow{A'B'}$，就是力F在平面Oxy上的投影，记为$\boldsymbol{F}_{xy}$。

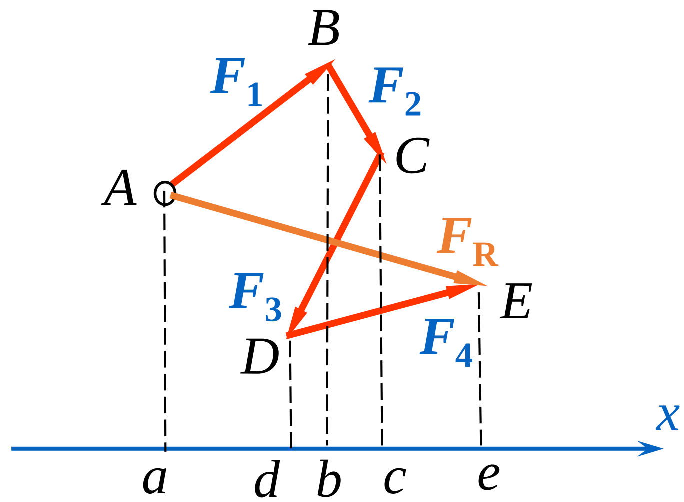
力$\boldsymbol{F}_{xy}$的大小：

$$F_{xy} = | F\cos\theta |$$



§ 2-3-1 共点力系合成的解析法





$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4$$

合力$\boldsymbol{F}_R$在x轴上的投影为:

$$F_x = ae$$

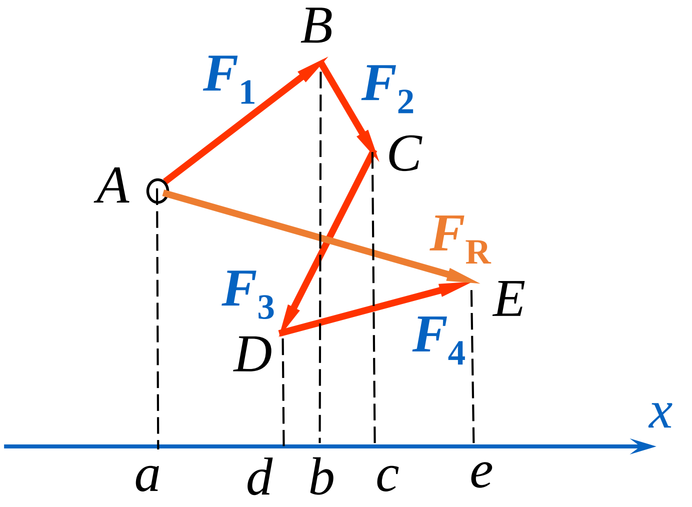
分力在x轴上的投影分别为:

$$F_{1x} = ab, \quad F_{2x} = bc, \quad F_{3x} = -dc, \quad F_{4x} = de$$

§2-3-1 共点力系合成的解析法

$F_{1x}=ab,\quad F_{2x}=bc,\quad F_{3x}=-dc,\quad F_{4x}=de$

$F_x=ae$



几何关系可知:

$$ae=ab+bc-dc+de$$

所以,

$$F_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}+F_{4x}$$

共点力系的合力在某一轴上的投影，等于力系中所有各力在同一轴上投影的代数和，这就是合力投影定理。

§2-3-1 共点力系合成的解析法

解析法求合力：

任意多个力F_1、F_2、…、F_n组成的平面共点力系，其力系的合力在坐标轴上的投影等于各力在轴上的投影之和：

x轴：$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx}$

y轴：$F_y = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny}$

z轴：$F_z = F_{1z} + F_{2z} + \cdots + F_{nz}$

合力的大小

$$F_R = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}$$

方向余弦

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F_\mathrm{R}}$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{F_\mathrm{R}}$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F_\mathrm{R}}$$

§2-3-2 共点力系平衡的解析条件

力系中各力在坐标轴中每一轴上的投影之和分别等于零。

空间共点力系的平衡方程

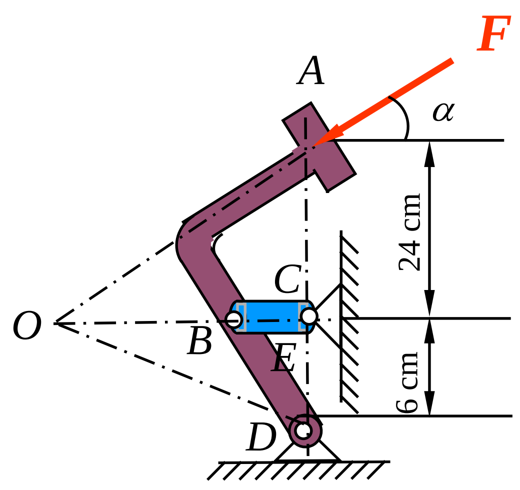
$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

对于平面共点力系

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

§2-3-2 共点力系平衡的解析条件

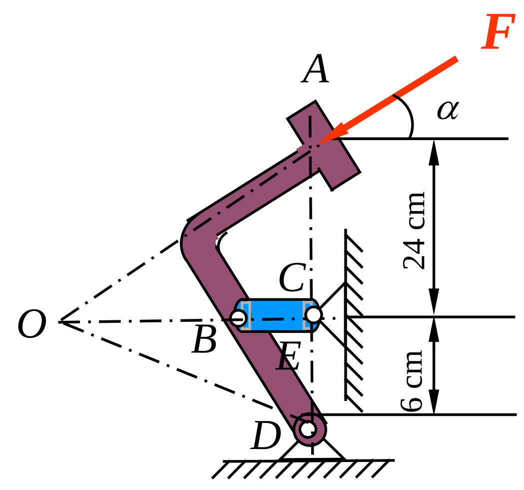
例题2–2 **如图所示是汽车制动机构的一部分。司机踩到制动蹬上的力**F=212 N，**方向与水平面成**α=45°。**当平衡时，**BC**水平，**AD**铅直，试求拉杆所受的力。已知**EA=24 cm，DE=6 cm(**点**E**在铅直线**DA**上**)，**又**B、C、D**都是光滑铰链，机构的自重不计。**



§2-3 共点力系平衡的解析条件

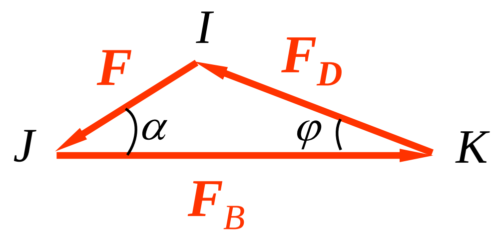
解： （1）几何法

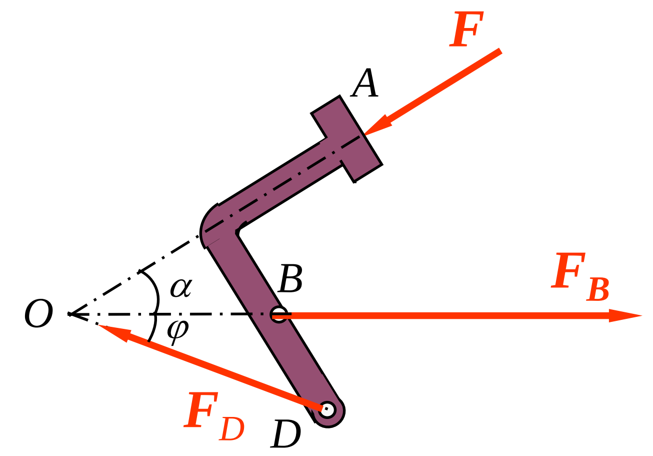
1） **取制动蹬*ABD*作为研究对象。**



2） **画出受力图。**

3） **应用平衡条件画出F、F_B和F_D的闭合力三角形。**





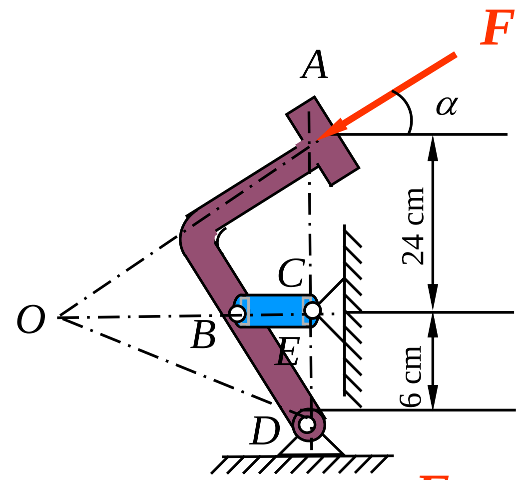
§2-3 共点力系合成的解析法及平衡的解析条件

4）由几何关系得

$$OE = EA = 24\ \text{cm}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{DE}{OE} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

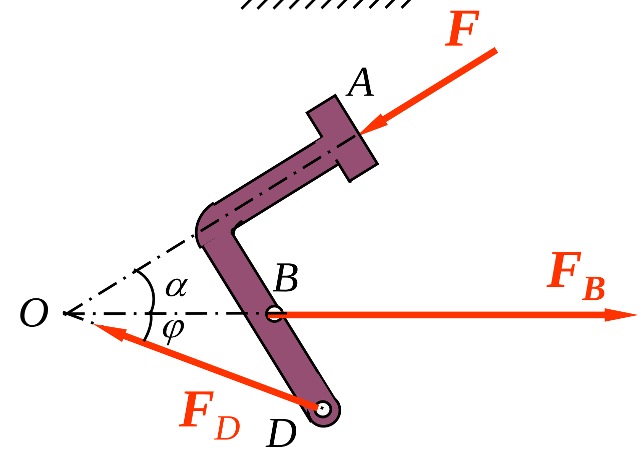
$$\Rightarrow \varphi = \arctan\frac{1}{4} = 14°2'$$



由力三角形可得

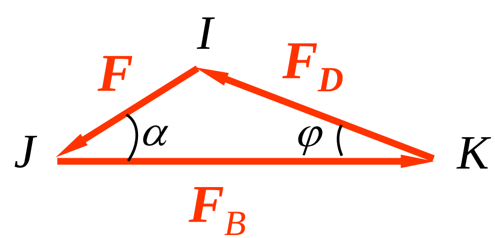
$$\frac{F_B}{\sin(180° - \alpha - \phi)} = \frac{F}{\sin\ \phi}$$

即：
$$F_B = \frac{\sin(180° - \alpha - \phi)}{\sin\ \phi}F$$



5）代入数据求得

$$F_B = 750\ \text{N}$$



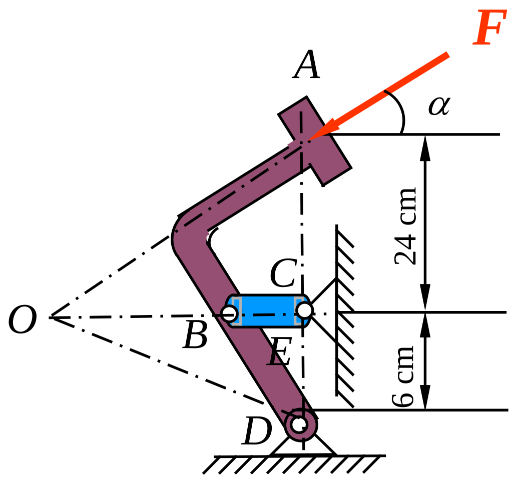
§2-3 共点力系合成的解析法及平衡的解析条件

（2）解析法

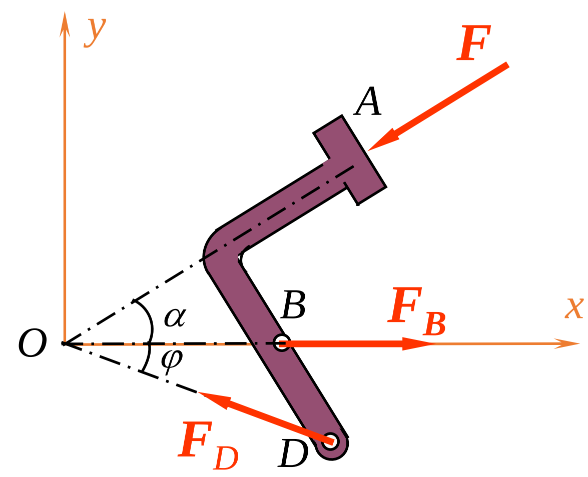
1）**取制动蹬*ABD*作为研究对象。**

2）**画出受力图。**

3）**建立直角坐标系，列平衡方程。**



$$\sum F_x = 0, \quad F_B - F\cos 45° - F_D \cos\varphi = 0$$



$$\sum F_y = 0, \quad F_D \sin\varphi - F\sin 45° = 0$$

已知 $\varphi = 14°2'$

$\sin\varphi = 0.243$, $\cos\varphi = 0.969$

联立求解，得 $F_B = 750\,\mathrm{N}$

§2-4 力偶和力偶矩•力偶的等效条件

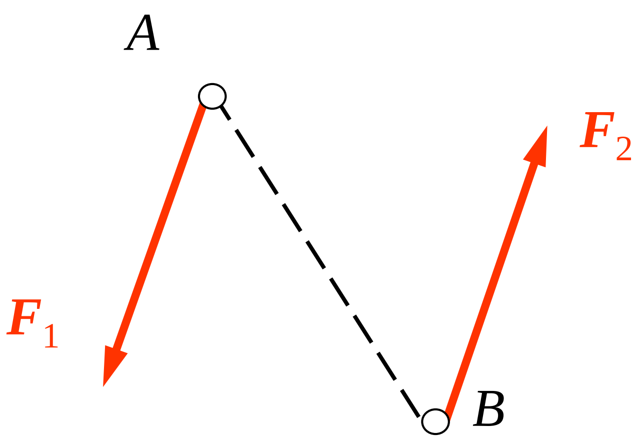
- 力偶和力偶矩
- 力偶等效条件

§2-4　力偶和力偶矩•力偶的等效条件

1. 力偶（couple）和力偶矩

力偶 ——**大小相等、方向相反，作用线不在同一条直线上的一对平行力。**

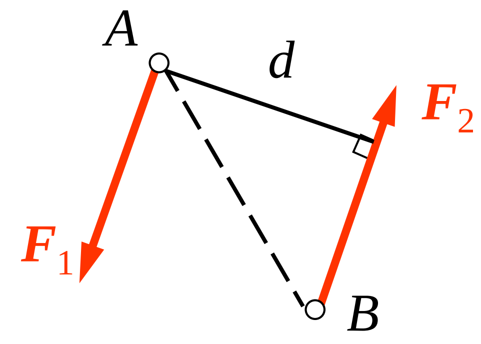
作用效果：引起物体的转动。



$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$$

§2-4　力偶和力偶矩•力偶的等效条件

力偶臂——力偶中两个力的作用线之间的距离。



力偶矩——用来度量力偶对物体的转动效应。力偶中任何一个力的大小与力偶臂d的乘积。

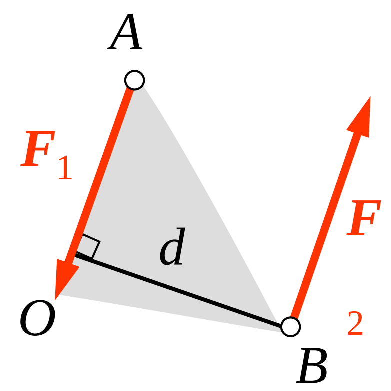
$$M = \pm F_1 d$$

平面力系力偶矩正负规定：

若力偶有使物体逆时针旋转的趋势，力偶矩取正号；反之，取负号。

§ 2-4　力偶和力偶矩•力偶的等效条件

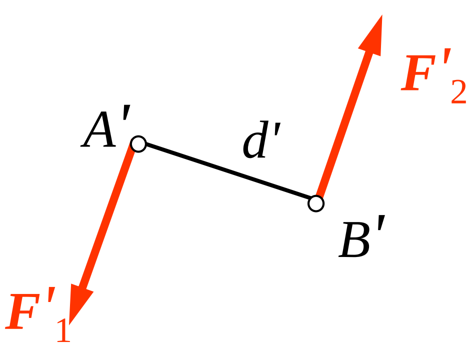
$$M = \pm F_1 d$$



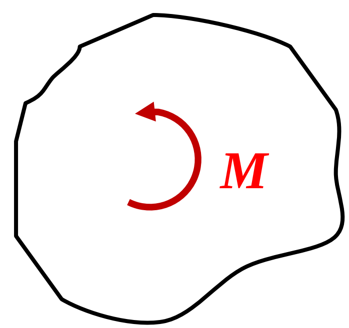
力偶矩的值也可由三角形*OAB*面积的2倍表示

$$M = 2A_{\Delta OAB}$$

一般力偶表示为：



或



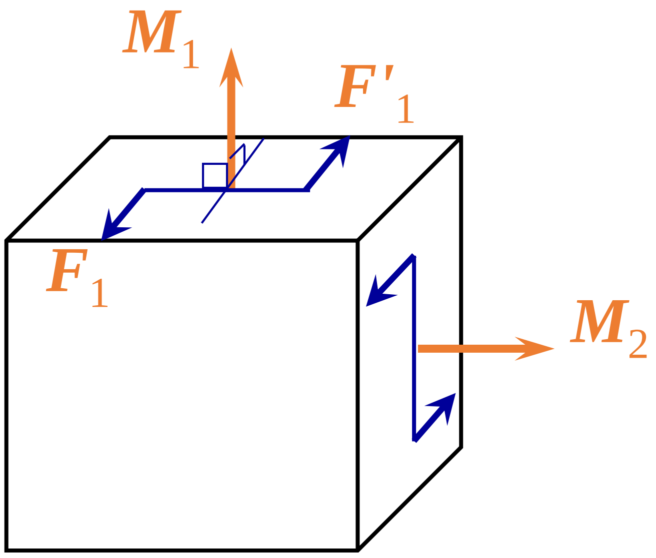
§2-4　力偶和力偶矩•力偶的等效条件

空间力偶矩矢 $\boldsymbol{M}$：

- **大小：力偶矩的绝对值**

$$\boxed{|M| = |F_1 d|}$$

- **方向：垂直于两个力所在的平面，满足右手螺旋法则**



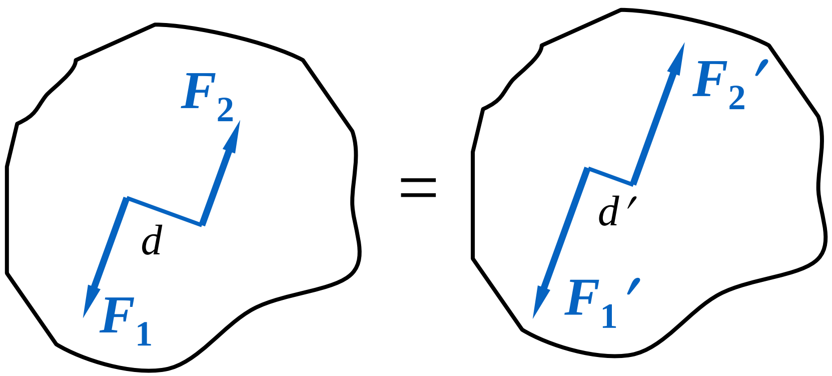
- **力偶矩矢是自由矢量，可以在刚体上自由移动，不影响作用效果**
- **一般从力偶矩中点画出。**

2. 力偶的等效条件

- 同平面内或平行平面内力偶的等效条件

作用在刚体内同一平面内或平行平面内的两个力偶相互等效的充要条件是二者的力偶矩相等。

$$M = F_1\, d = F'_1\, d'$$



- 空间力偶的等效条件

这两个力偶的力偶矩矢相等： $M_1 = M_2$

§2-5 力偶系的合成与平衡条件

- **力偶系的合成方法**
- **力偶系的平衡条件**

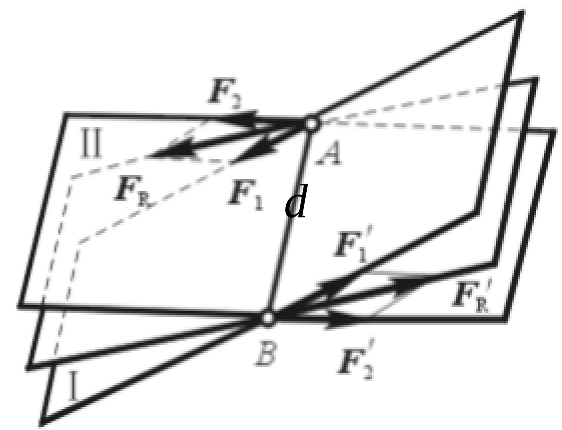
§2-5 力偶系的合成与平衡条件

1. 力偶系的合成方法

空间力偶系可合成为一力偶。合力偶的矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和，即

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\cdots+\boldsymbol{M}_n=\sum \boldsymbol{M}_i$$

证明：



（F_1，F'_1）和（F_2，F'_2）分别为作用平面I和II内的力偶。

A**点：** $F_{\mathrm{R}}=F_1+F_2$

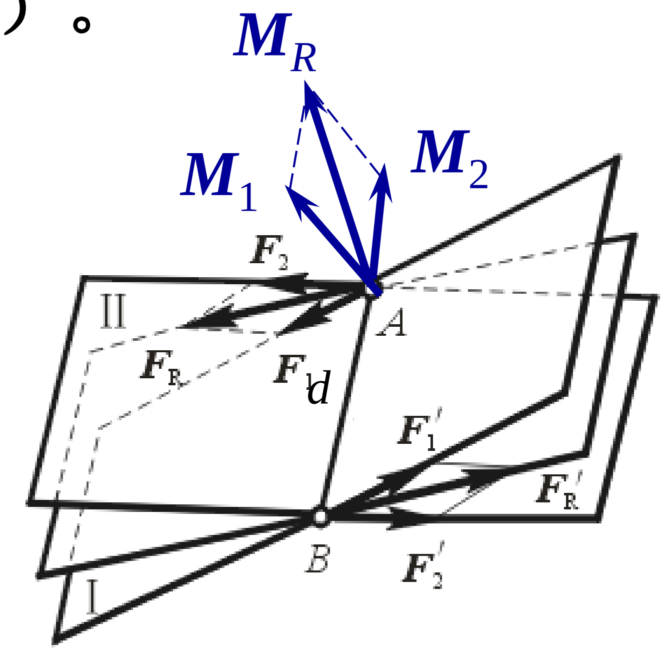
B**点：** $F'_{\mathrm{R}}=F'_1+F'_2$

由于$F_1=F'_1$，$F_2=F'_2$，**故** $F_{\mathrm{R}}=F'_{\mathrm{R}}$。

§ 2-5 力偶系的合成与平衡条件

合成结果为一个合力偶（F_R，F'_R）。

求合力偶矩矢M。



$$F_R=F_1+F_2, \quad F_R d=F_1 d+F_2 d$$

$$M_R=F_R d, \quad M_1=F_1 d, \quad M_2=F_2 d$$

$$M_R=M_1+M_2$$

即力偶矩矢是按平行四边形定则相加。

设力偶系由任意个力偶组成，则有

$$M_R=M_1+M_2+\cdots+M_n=\sum M_i$$

§2-5 力偶系的合成与平衡条件

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\cdots+\boldsymbol{M}_n=\sum \boldsymbol{M}_i$$

上式投影到直角坐标轴上，得

$$M_{\mathrm{R}x}=\sum M_{ix}\,,\quad M_{\mathrm{R}y}=\sum M_{iy}\,,\quad M_{\mathrm{R}z}=\sum M_{iz}$$

即合力偶矩矢在某一轴上的投影，等于它的各分力偶矩矢在同一轴上投影的代数和。

如果已知合力偶矩矢的三个投影，可由下式确定合力偶矩矢的大小和方向

$$M_{\mathrm{R}}=\sqrt{(\sum M_{\mathrm{R}x})^2+(\sum M_{\mathrm{R}y})^2+(\sum M_{\mathrm{R}z})^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}},\boldsymbol{i})=\frac{M_{Rx}}{M_{\mathrm{R}}},\qquad \cos(\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}},\boldsymbol{j})=\frac{M_{Ry}}{M_{\mathrm{R}}},\qquad \cos(\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}},\boldsymbol{k})=\frac{M_{Rz}}{M_{\mathrm{R}}}$$

2. 力偶系的平衡条件

力偶矩矢多边形自行闭合，即力偶系中各力偶矩矢的矢量和等于零，即

$$\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\cdots+\boldsymbol{M}_n=\sum \boldsymbol{M}_i=\mathbf{0}$$

力偶系的平衡方程

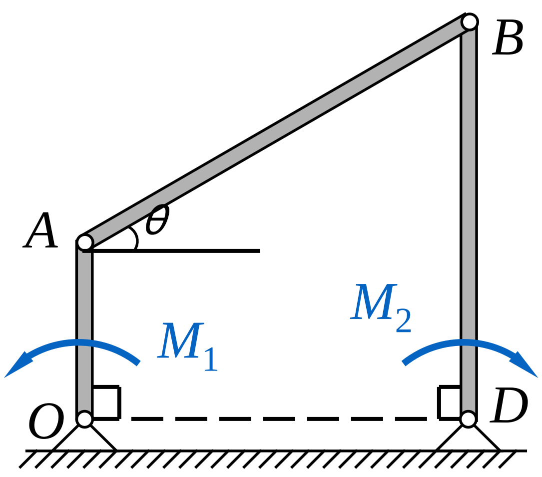
$$\sum M_{ix}=0$$

$$\sum M_{iy}=0$$

$$\sum M_{iz}=0$$

§2-5 力偶系的合成与平衡条件

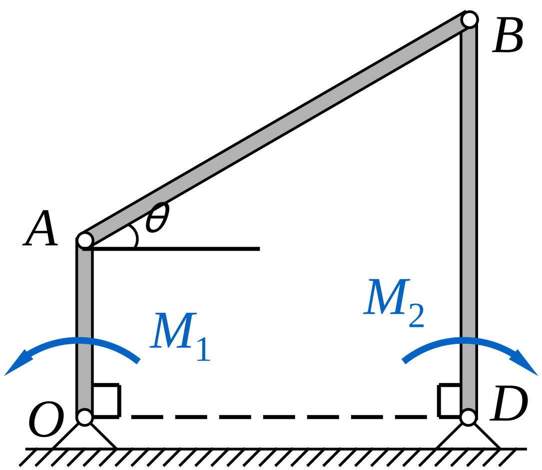
例题2-3 **如图所示的铰接四连杆机构**$OABD$**，在杆**OA**和**BD**上分别作用着矩为** M_1 **和** M_2 **的力偶，而使机构在图示位置处于平衡。已知力偶矩**M_2，$OA = r$，$DB = 2r$，$\theta = 30°$，**不计杆重，试求力偶矩**M_1 **的值。**

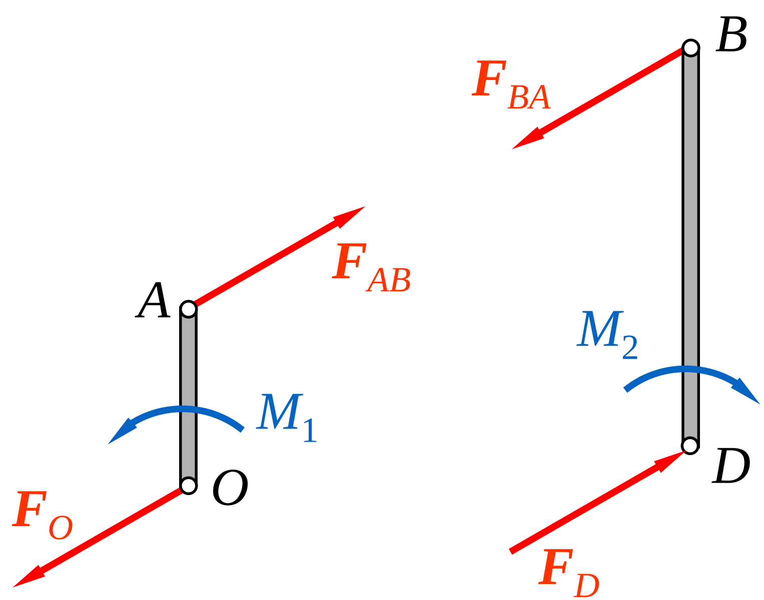


§2-5 力偶系的合成与平衡条件

解：杆*AB*为二力杆。

由于力偶只能与力偶平衡， 则*AO*杆与*BD*杆的受力如图所示。





§ 2-5 力偶系的合成与平衡条件

分别写出杆*AO*和*BD*的平衡方程。

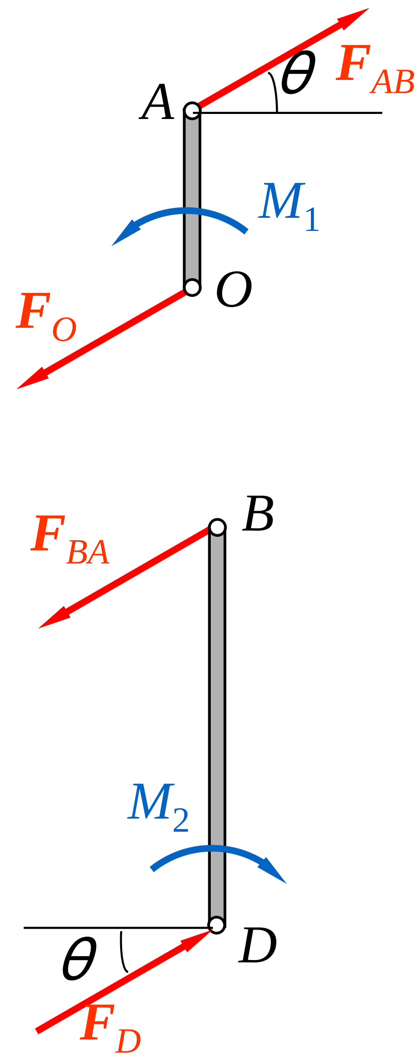
由 $$\sum M_i = 0$$

得 $$M_1 - r F_{AB} \cos\theta = 0$$

$$- M_2 + 2r F_{BA} \cos\theta = 0$$

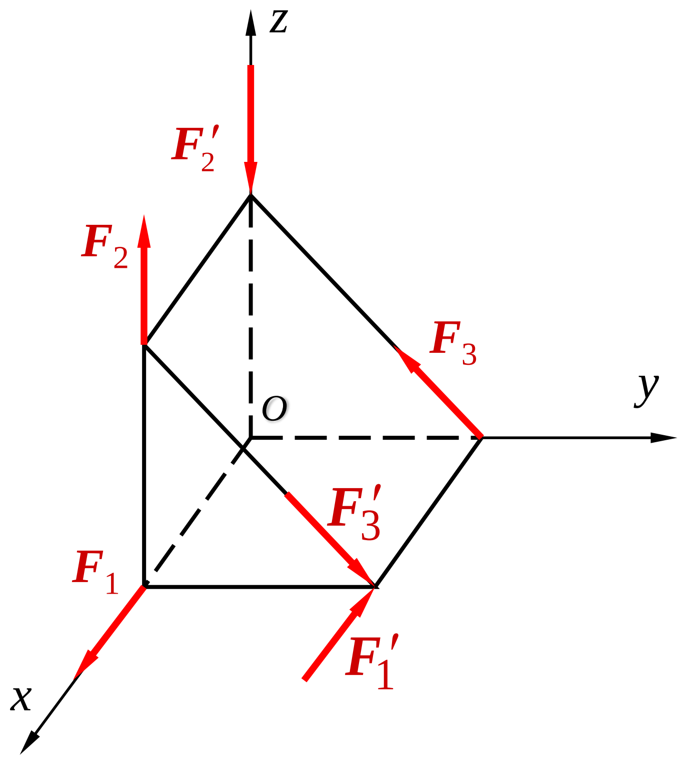
因为 $$F_{AB} = F_{BA}$$

则得 $$M_1 = M_2 / 2$$

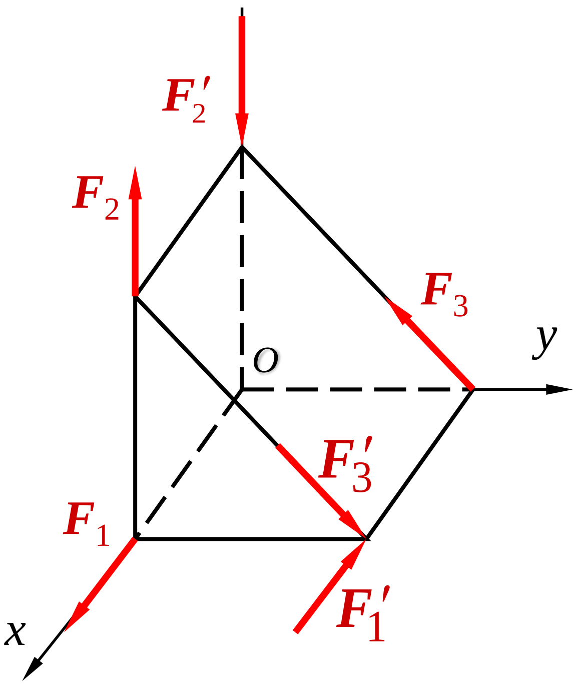


§2-5 力偶系的合成与平衡条件

例题2-4 **图示是正方体刚体的一半。在其中三个侧面分别作用着一个力偶。已知力偶（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}'_1$）的矩**M_1=20 N·m**；力偶（$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}'_2$）的矩**M_2=10 N·m**；力偶（$\boldsymbol{F}_3$，$\boldsymbol{F}'_3$）的矩**M_3=30 N·m**。试求合力偶矩矢$\boldsymbol{M}_R$。为了使这个刚体平衡，还需要施加怎样一个力偶?**



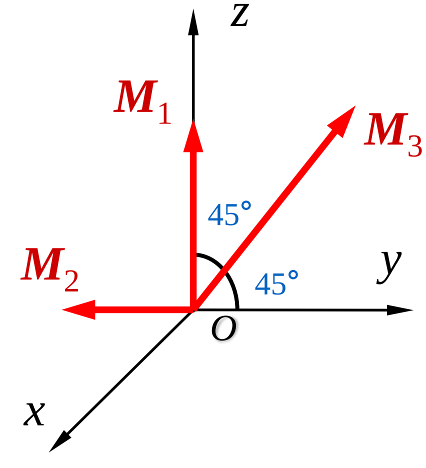
§ 2–5 力偶系的合成与平衡条件



解：

（1）画出各力偶矩矢。

（2）合力偶矩矢M 的投影为



$$M_{Rx} = 0$$

$$M_{Ry} = -M_2 + M_3 \cos 45° = 11.2\ \mathrm{N \cdot m}$$

$$M_{Rz} = M_1 + M_3 \sin 45° = 41.2\ \mathrm{N \cdot m}$$

§2-5 力偶系的合成与平衡条件

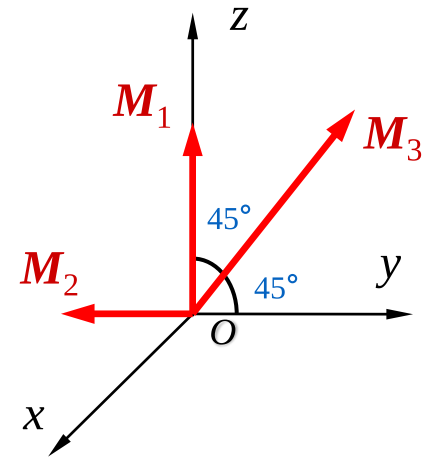
(3) 合力偶矩矢M_R的大小和方向余弦

$$M_R = \sqrt{M_{Rx}^2 + M_{Ry}^2 + M_{Rz}^2} = 42.7\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_R, \boldsymbol{i}) = \frac{M_{Rx}}{M_R} = 0$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_R, \boldsymbol{j}) = \frac{M_{Ry}}{M_R} = 0.262$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_R, \boldsymbol{k}) = \frac{M_{Rz}}{M_R} = 0.965$$



(4) 为使这个刚体平衡，需加一力偶，其力偶矩矢为 $M_4 = -M_R$。