浙江大學

ZHEJIANG UNIVERSITY

随机信号

主讲人：金浩然 研究员

电话：13645717238

办公室：开物苑3-232





随机信号

概述

- 随机信号是非确定性信号，无法用数学关系式或图表描述其关系；
- 随机信号具有不重复性（在相同条件下，每次观测的结果都不一样）、不确定性、不可预估性；
- 随机信号可以采用概率和统计的方法进行描述。

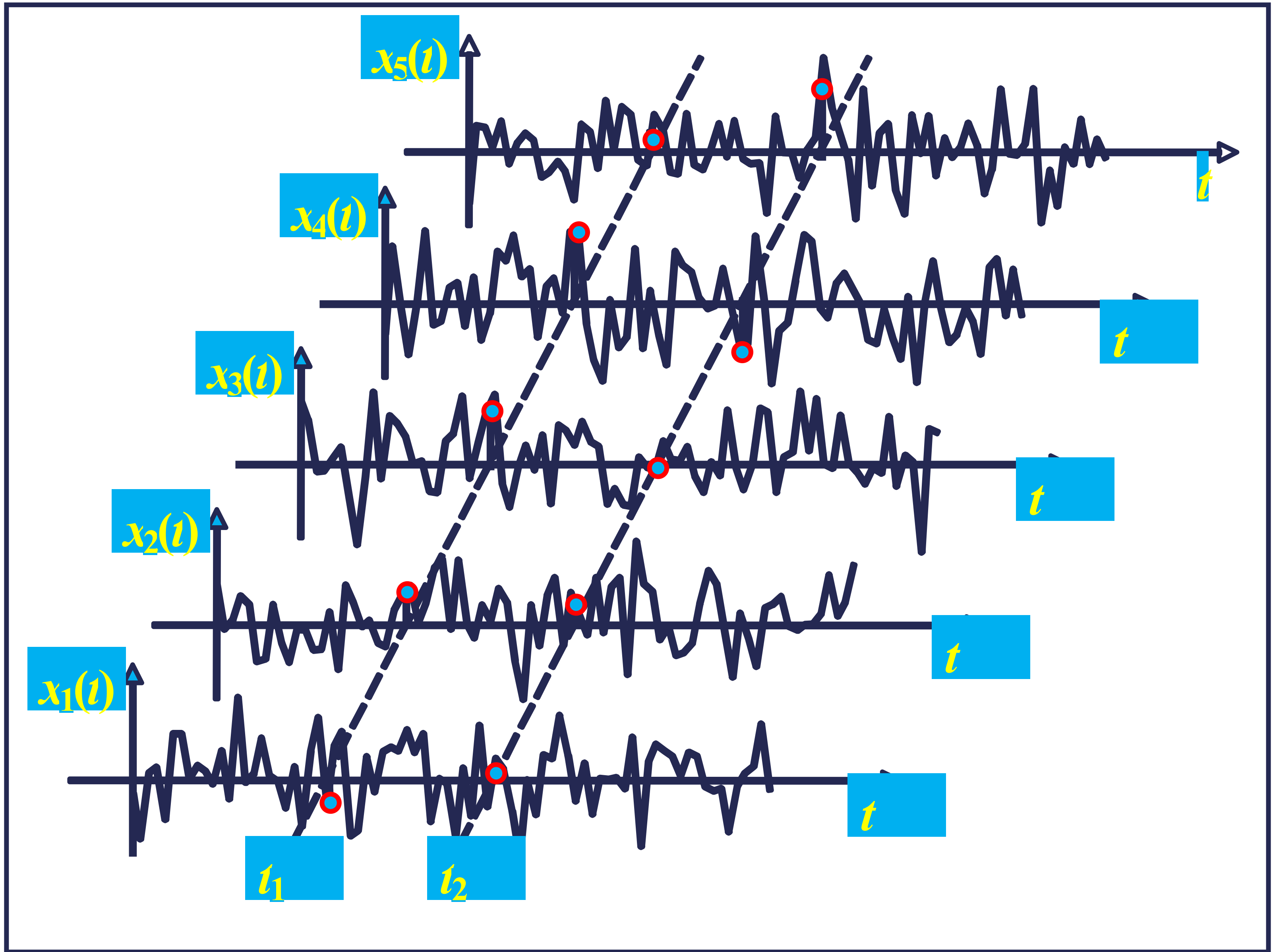
随机信号

1.相关概念

- 随机现象：产生随机信号的物理现象
- 样本函数：随机现象的单个时间历程，即对随机信号按时间历程所作的各次长时间观测记录。记作$x_i(t)$，表示第*i*次观测。
- 样本记录：在有限时间区间上观测得到的样本函数
- 随机过程：在相同试验条件下，随机现象可能产生的全体样本函数的集合（总体）。记作{x(t)}，即：

$$\{ x(t) \}=\{ x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots\ldots,\ x_i(t),\ \ldots\ldots\}$$

随机信号



随机信号

- 随机变量：随机过程在某一时刻t_1取值$x(t_1)$是一个随机变量，随机变量一般定义在样本空间上。
- 集合平均：集合平均的计算不是沿单个样本的时间轴进行，而是将集合中所有样本函数对同一时刻t_i的观测值取平均。
- 时间平均：按单个样本函数的时间历程进行平均计算。
- 平稳与非平稳随机过程：平稳随机过程指其统计特性不随时间而变化，或者说，不随时间坐标原点的选取而变化。否则，则为非平稳随机过程。

随机信号

◆ 定义和分类

平稳信号：概率密度函数不随时间而变化的随机信号为严平稳信号，两阶及以下阶次矩不随时间而变化的随机信号为宽平稳信号。

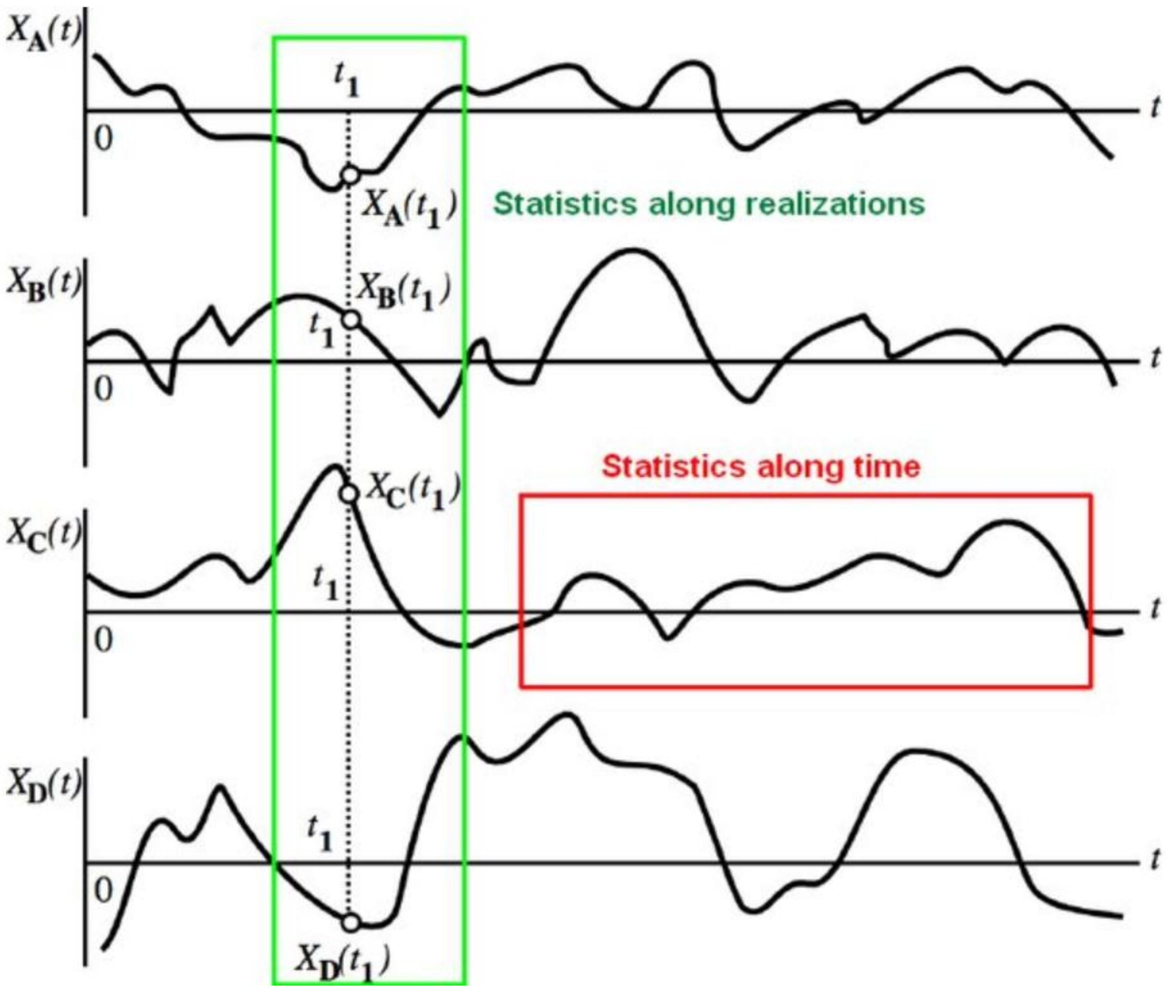
各态历经信号：任一单个样本函数的时间平均统计特征等于该过程集合平均统计特征。

非各态历经信号：某一单个样本函数的时间平均统计特征不等于该过程集合平均统计特征。

非平稳信号：统计特征参数随时间而变化的随机信号。

原点矩（如均值、均方值等）　中心矩（如均方差等）　联合矩（如互相关函数、协方差函数等）

随机信号



平稳信号

$$\mu_{x[k]} \equiv \mu_X$$

严平稳信号

$$PDF(\mu_{x[k]}) \equiv P$$

宽平稳信号

两阶及以下阶次矩不随时间变化

$$\mu_n = \sum (x_i[k] - c)^n, \quad n \leq 2$$

平稳：沿时间方向观测是否具有统计相似性

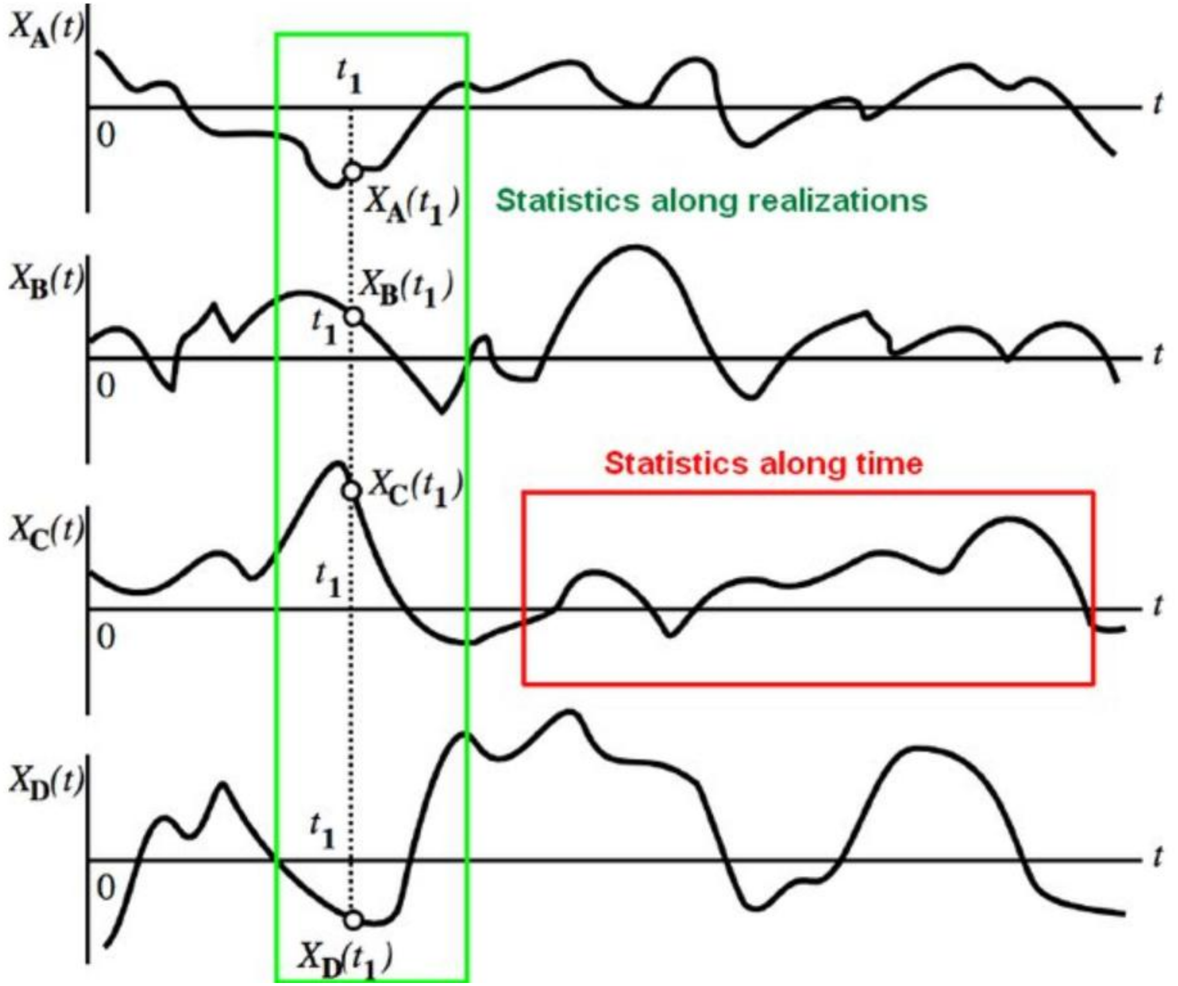
随机信号

各态历经过程

※ ※ ※ 这是一个最为重要的概念

- 各态历经过程的物理含义：任一样本函数在足够长的时间区间内，包含了各个样本函数所有可能出现的状态。
- 对于各态历经过程，其时间平均等于集合平均，因此，各态历经过程的所有特性都可以用单个样本函数上的时间平均来描述。工程中绝大多数随机过程可以近似为各态历经过程进行处理。
- 随机过程需足够多（理论上为无限个）的样本函数才能描述，即使是各态历经过程，理论上也需要无限长的时间记录。

随机信号



各态历经：观测某个样本本身是否具有统计代表性

Case1 ： 一直投掷6面骰子，投掷100次；

Case2：以50%概率随机选择6面或者4面骰子，而后投掷100次

随机信号

◆ 随机信号的描述方法

- 时域描述方法
  - 矩
    - 原点矩（如均值、均方值等）
    - 中心矩（如均方差等）
    - 联合矩（如互相关函数、协方差函数等）
  - 概率密度函数
- 频域描述方法：功率谱、能量谱

随机信号

2. 随机信号的主要特征参数

描述各态历经随机信号的主要特征参数有：

- 幅值域：均值、方差、均方值、概率密度函数等
- 时间域：自相关函数、互相关函数
- 频率域：自功率谱密度函数、互功率谱密度函数、相干函数等

(1)均值μ_x、方差 σ_x^2、均方值 ψ_x^2

对于各态历经随机过程：

均值

$$\mu_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = E[x]$$

$\boxed{x(t)}$ —— 样本函数　　表示信号的常值分量

$\boxed{T}$ —— 观测时间

随机信号

方差 $\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-\mu_x]^2 dt = E[x(t)-\mu_x]^2$ 表示信号的波动分量

方差的正平方根称为标准差。

均方值 $\psi_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt = E[x(t)^2]$

描述随机信号的强度，均方值的正平方根称为均方根值。

可以推导出均值、方差与均方值间的关系为：

$$\psi_x^2 = \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

当 $\mu_x = 0$ 时 $\psi_x^2 = \sigma_x^2$

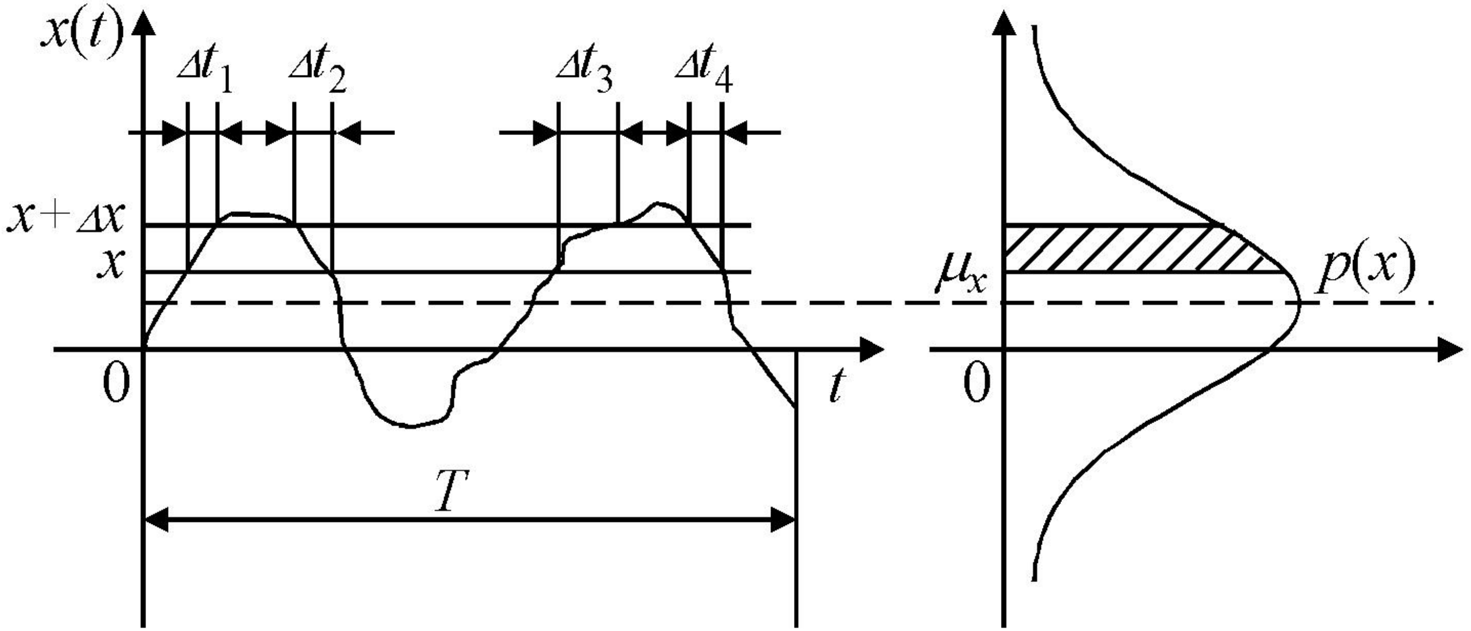
实际测量时，信号的取样时间T是有限的，上述值

μ_x σ_x ψ_x^2 均是估计值。

随机信号

(2) 概率密度函数　PDF

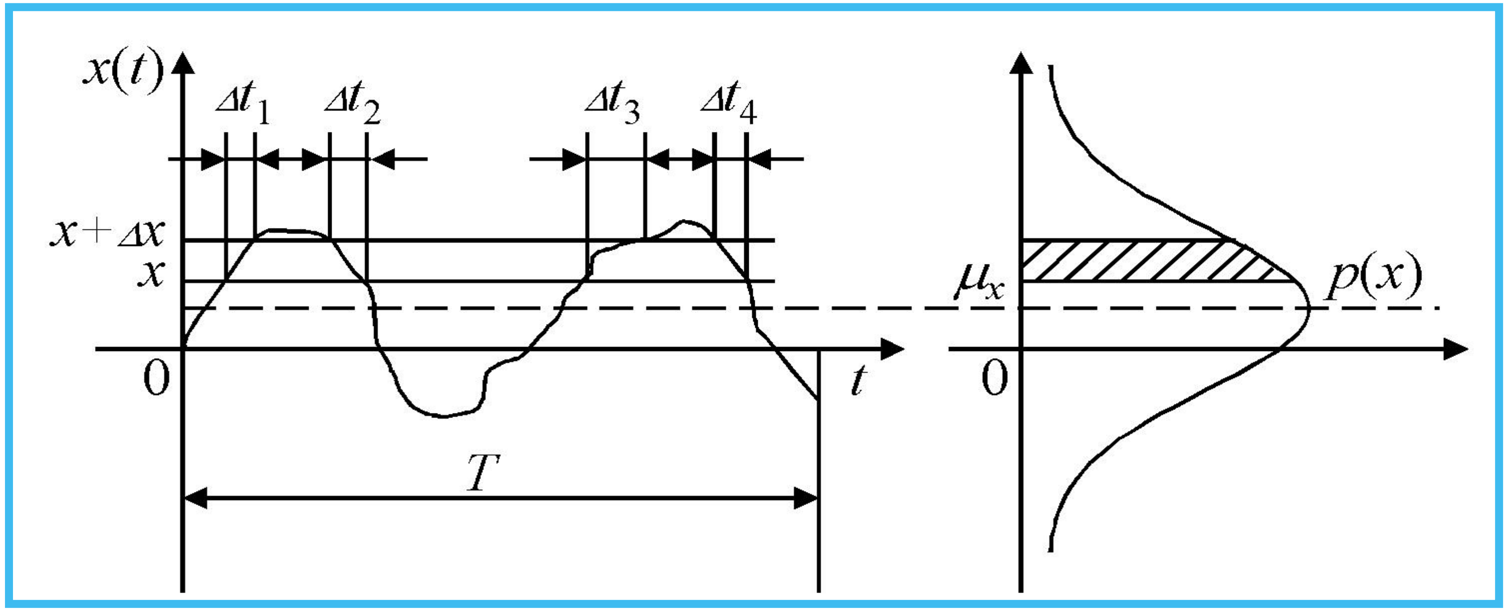
定义：概率密度函数表示信号幅值落在指定区间内的概率。



对长度为T的随机信号样本记录，$x(t)$瞬时幅值落在$(x, x+\Delta x)$区间内的总时间为：

$$T_x = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i$$

随机信号



当样本记录长度T趋于无穷时，T_x/T 将趋于$x(t)$的幅值落在区间$(x, x+\Delta x)$的概率。即：

$$P_r\left[x < x(t) \le x + \Delta x\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{T_x}{T} = \lim_{T\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i}{T}$$

当$\Delta x \to 0$时，可定义概率密度函数为：

$$p(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P_r[x < x(t) \le x + \Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i}{T\cdot\Delta x}$$

随机信号

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P_r[x < x(t) \le x + \Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i}{T \cdot \Delta x}$$

对于确定性信号

$$\boxed{p(x) = \frac{\sum dt / dx}{T}}$$

随机信号

概率密度函数提供了随机信号的幅值分布信息，是随机信号的主要特征参数之一。不同的随机信号有不同的概率密度函数图形，可以借此来识别信号的性质。在实际应用中，当不知道所处理的随机数据服从何种分布时，可以用统计概率分布图和直方图来估计p(x)。

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, p(x)\, dx$$

$$\psi_x^2 = E[x(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2\, p(x)\, dx$$

随机信号

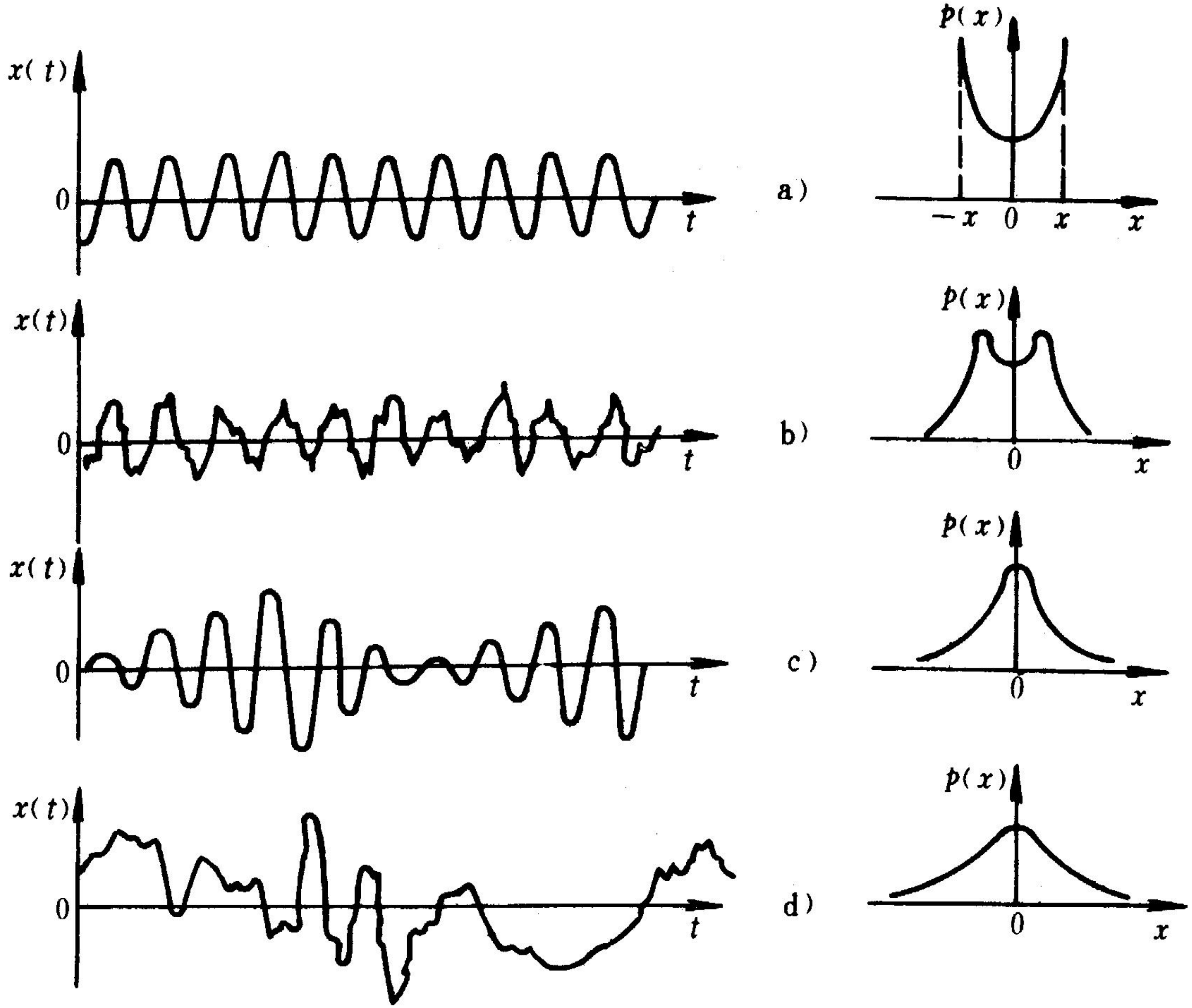
概率密度函数的作用：

概率密度函数提供了信号幅值分布信息，是随机信号的主要特征参数之一。

不同的随机信号有不同的概率密度函数图形，可以借此来识别信号的性质。

随机信号

常见典型信号的概率密度函数图形



正弦信号

正弦信号加随机噪声（马鞍型）

窄带随机信号(正态分布)

宽带随机信号(正态分布)

随机信号

例：求正弦信号的概率密度函数。

$$x = A\sin\omega t$$

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P_r[x < x(t) \le x + \Delta x]}{\Delta x}$$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

$$p(x) = \frac{\sum dt/dx}{T}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{A\omega\cos\omega t} = \frac{1}{A\omega\sqrt{1-[x/A]^2}}$$

$$p(x) = \frac{2dt}{Tdx} = \frac{2}{A\omega T\sqrt{1-[x/A]^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$$

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}}$$

随机信号

$$p(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}}$$