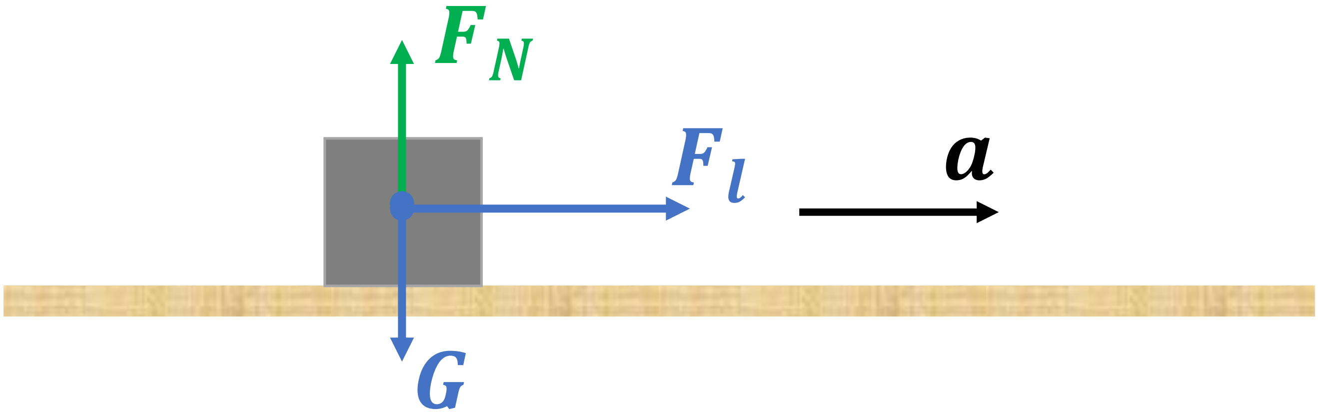


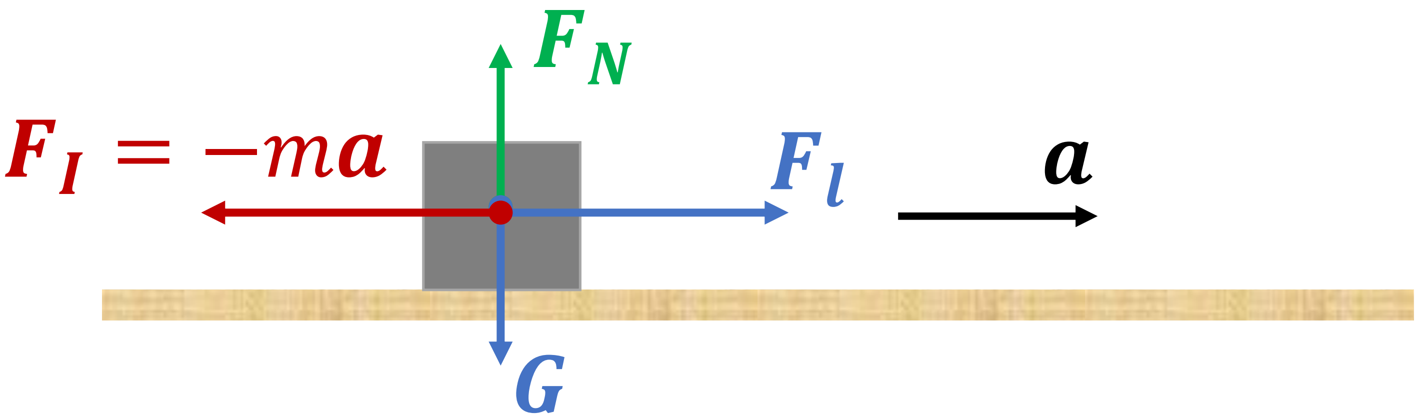
- 主动力： $F = F_l + G$
- 约束力： F_N

牛顿第二定律: $ma = F + F_N$

即 $F + F_N - ma = 0$

- 惯性力： $F_I = -ma$

牛顿第二定律可以改写成: $F + F_N + F_I = 0$

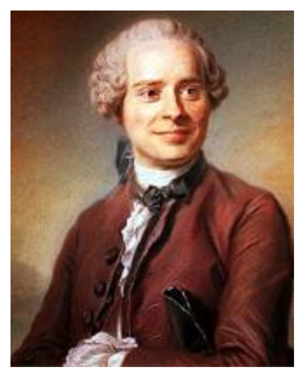


$$F + F_N + F_I = 0$$

主动力　约束力　惯性力

从静力学的角度来看，**作用在滑块上的主动力、约束力和惯性力在形式上组成平衡力系。**

这就是**达朗贝尔原理**。



d'Alembert,1717-1783, FR

达朗贝尔原理

达朗贝尔原理提供了研究**动力学**问题的一个新的普遍方法，即用**静力学中研究平衡问题的方法**来研究动力学问题，因此又称为**动静法**。

质点系达朗贝尔原理

质点系有n个质点，将达朗贝尔原理应用于每个质点，得到n个矢量平衡方程： $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i}=\boldsymbol{0}$

即，在质点系运动的任一瞬时，作用于每一质点上的主动力、约束力和该质点的惯性力在形式上构成一平衡力系。

对于质点系而言，作用在所有质点上的所有主动力、约束力和惯性力构成平衡力系。

根据静力学中空间任意力系的平衡条件，力系的主矢和对于任意一点O的主矩都等于零，即

$$\sum \boldsymbol{F}_i+\sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}+\sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i}=\boldsymbol{0}$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)+\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i})+\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i})=\boldsymbol{0}$$

质点系达朗贝尔原理

根据静力学中空间任意力系的平衡条件，力系的**主矢**和对于任意一点O的**主矩**都等于零，即

$$\sum \boldsymbol{F}_i + \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} + \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\mathbf{F}_i) + \sum \boldsymbol{M}_O(\mathbf{F}_{\mathrm{N}i}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\mathbf{F}_{\mathrm{I}i}) = 0$$

作用在质点上的主动力和约束力可以分成外力的合力和内力的合力，则上面两个式子可以改写成

$$\sum \boldsymbol{F}_i^{(\boldsymbol{e})} + \sum \boldsymbol{F}_i^{(i)} + \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\boldsymbol{e})}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\boldsymbol{i})}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\mathbf{F}_{\mathrm{I}i}) = 0$$

质点系达朗贝尔原理

$$\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum \boldsymbol{F}_i^{(i)} + \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\mathbf{F}_{\mathrm{I}i}) = 0$$

由于质点系的内力是成对存在，且等值、反向、共线，则有

$$\sum \boldsymbol{F}_i^{(i)} = 0 \qquad \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)}) = 0$$

因此有

$$\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\mathbf{F}_{\mathrm{I}i}) = 0$$

作用在质点系上的所有外力与所有质点的惯性力系在形式上组成平衡力系。

惯性力系的简化

对于作任意运动的质点系，把实际所受的外力和虚加惯性力各自向任意点O简化后所得的主矢、主矩分别记作$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$、$\boldsymbol{M}_{O}$和$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}$、$\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}O}$。于是，由力系平衡条件，可得

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{M}_{O}+\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}O}=\mathbf{0}$$

（1）惯性力系的主矢

由质心运动定理有 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$ **,得惯性力系主矢**

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=-m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_{C}$$

即,质点系惯性力的主矢等于质点系总质量与质心加速度的乘积，方向与质心加速度方向相反。

惯性力系的简化

（2）惯性力系的主矩

- **对任意固定点**

对任意固定点O的动量矩定理 $\boldsymbol{M}_O=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}$

力矩平衡条件 $\boldsymbol{M}_O+\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}O}=\boldsymbol{0}$ **得** $\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}O}=-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}$

- **对固定轴**

对固定轴z的动量矩定理 $\boldsymbol{M}_z=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_z}{\mathrm{d}t}$

力矩平衡条件 $\boldsymbol{M}_z+\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}z}=0$ **得** $M_{\mathrm{I}z}=-\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$

上式表明：质点系的惯性力对于任一固定点（或固定轴）的主矩，等于质点系对于该点（或该轴）的动量矩对时间的导数，并冠以负号。

惯性力系的简化

- **对质心点**

利用相对于质心的动量矩定理，可以得到质点系的惯性力对质心C的主矩表达式

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}C} = -\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_C}{\mathrm{d}t}$$

- **对质心轴**

上式对通过质心C的某一平移轴Cz'上的投影表达式为

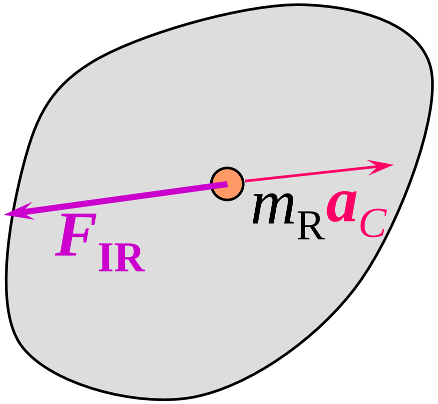
$$M_{\mathrm{I}z'} = -\frac{\mathrm{d}\,\vec{L}_{z'}}{\mathrm{d}\,t}$$

上式表明：质点系的惯性力对质心（或通过质心的平移轴）的主矩，等于质点系对质心（或该轴）的动量矩对时间的导数，并冠以负号。

惯性力系的简化

刚体在各种常见运动情况下惯性力主矢和主矩的表达式

（1）刚体作平移　　**刚体平移时，惯性力系向质心简化**



- 主矢

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}} = -m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_C$$

- 主矩

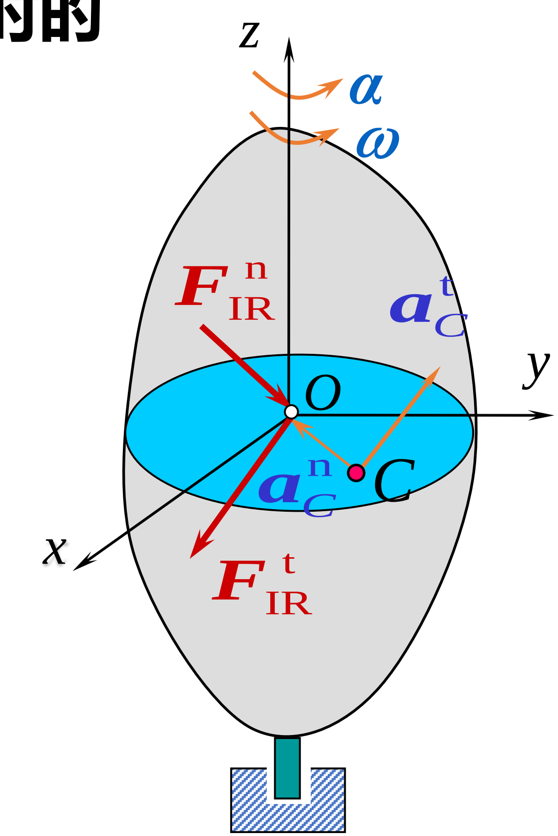
$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}C} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$$

刚体平移时，惯性力系简化为通过刚体质心的合力。

惯性力系的简化

（2）刚体做定轴转动

设刚体绕固定轴Oz转动，在任意瞬时的角速度为ω，角加速度为α。



- **主矢** $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}} = -m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_{C}$

质心C的转动半径为r_C，质心加速度$\boldsymbol{a}_C$可以分解成切向和法向两部分，所以惯性力主矢也可以分解成两部分：

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}^{\mathrm{n}}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}^{\mathrm{t}} = -m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_{C}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}^{\mathrm{n}} = -m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_{C}^{\mathrm{n}}$

$$m_{\mathrm{R}}a_{C}^{\mathrm{t}} = m_{\mathrm{R}}r_{C}\alpha, \quad m_{\mathrm{R}}a_{C}^{\mathrm{n}} = m_{\mathrm{R}}r_{C}\omega^{2}$$

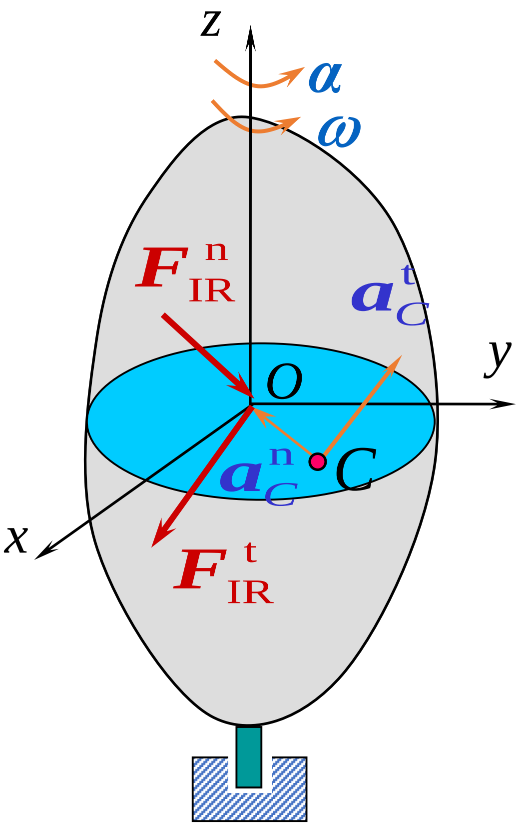
显然，当质心C在转轴上时，质心加速度是零，刚体的惯性力主矢必为零。

惯性力系的简化

- **主矢**

$$F_{IR} = -m_R a_C = -m_R(a_C^t + a_C^n)$$

刚体定轴转动时，惯性力系向固定轴简化，得到的惯性力系主矢的大小等于刚体质量与质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度方向相反。

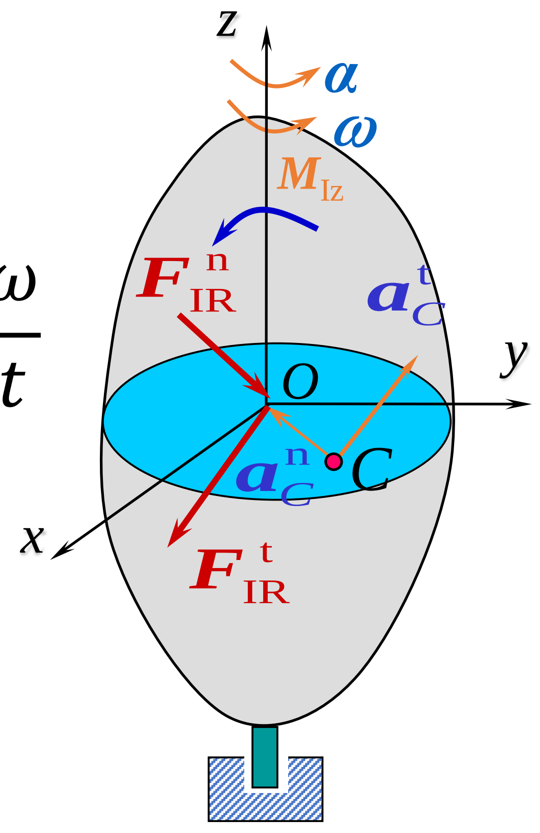


惯性力系的简化

- **主矩**

刚体惯性力系对轴*Oz*的主矩

$$M_{\mathrm{I}z} = -\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z\omega) = -J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$



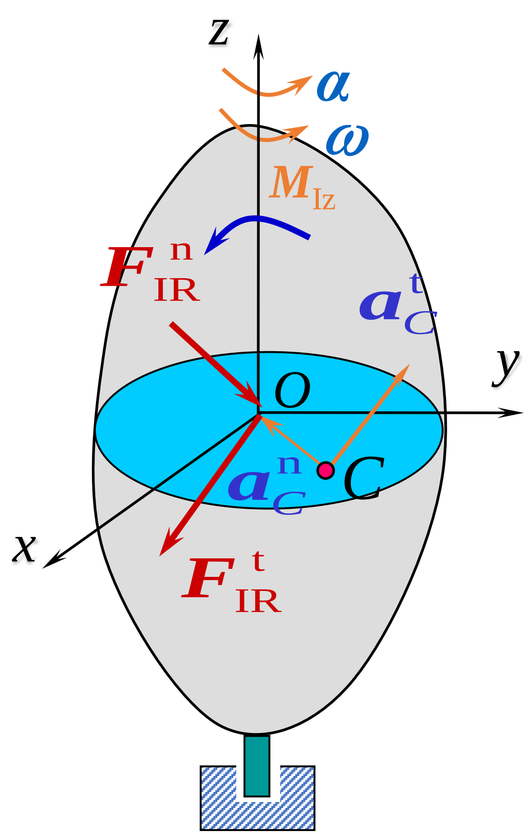
即 $$M_{\mathrm{I}z} = -J_z\alpha$$

惯性力系的简化

对转轴的主矩

$$M_{\mathrm{Iz}} = -J_z \alpha$$

刚体定轴转动时，惯性力系向固定轴简化的结果的主矩，其大小等于刚体对转动轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向与角加速度方向相反。

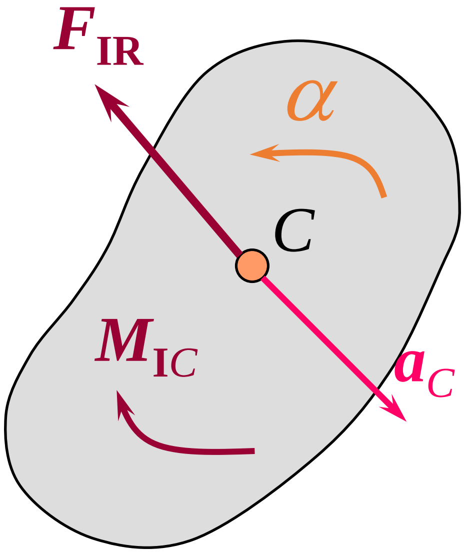


惯性力系的简化

（3）刚体作平面运动

若取质心C为基点，则刚体的平面运动可以分解为随质心C的平移和绕质心（通过质心且垂直于运动平面的轴）的转动。

因此，作用在刚体上的虚拟惯性力系，可以简化成作用于质心的主矢和主矩



惯性力系的简化

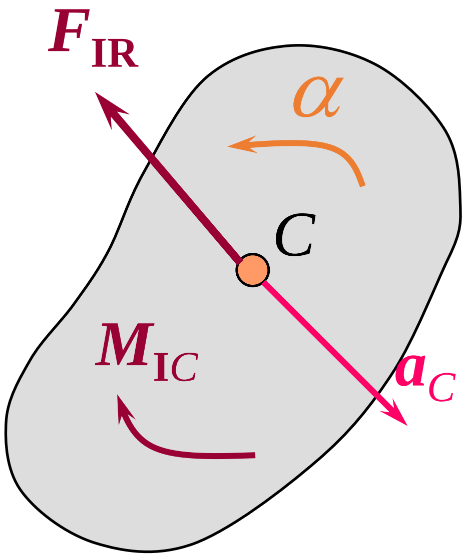
- **主矢**

　　惯性力系的主矢，其大小等于刚体质量与质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度方向相反

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}} = -m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_C$$

- **主矩**

　　惯性力系的主矩，其大小等于刚体对通过质心的转动轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向与角加速度方向相反



$$M_{\mathrm{IC}} = -J_{Cz'}\alpha$$

惯性力系的简化

(1) 刚体作平移

向质心简化

- 主矢 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=\sum(-m_i\boldsymbol{a}_i)=-m_R\boldsymbol{a}_C$
- 主矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{IC}}=\mathbf{0}$

(2) 刚体做定轴转动（有质量对称平面）

向固定轴与质量对称平面的交点O简化

- 主矢 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=-m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_C=-m_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{a}_C^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_C^{\mathrm{n}})$
- 对交点O的主矩 $M_{\mathrm{IO}}=M_{\mathrm{Iz}}=-J_z\alpha$

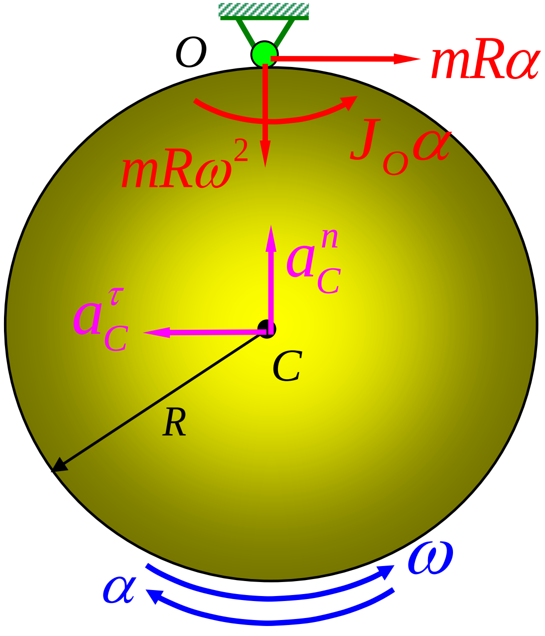
(3) 刚体作平面运动（平行于质量对称面）

向质心简化

- 主矢 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=-m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_C$
- 主矩 $M_{\mathrm{IC}}=-J_{Cz'}\alpha$

图示瞬时均质圆轮（图为其质量对称面）质量是m，半径是R。绕 O 轴转动的角速度是ω，角加速度是α，求：圆轮惯性力系向 O 简化的结果。

向轴O简化：



- 主矢

$$F_{IR} = -m_R a_C = -m_R (a_C^t + a_C^n)$$

- 对转轴O的主矩

$$M_{IO} = -J_O\alpha$$

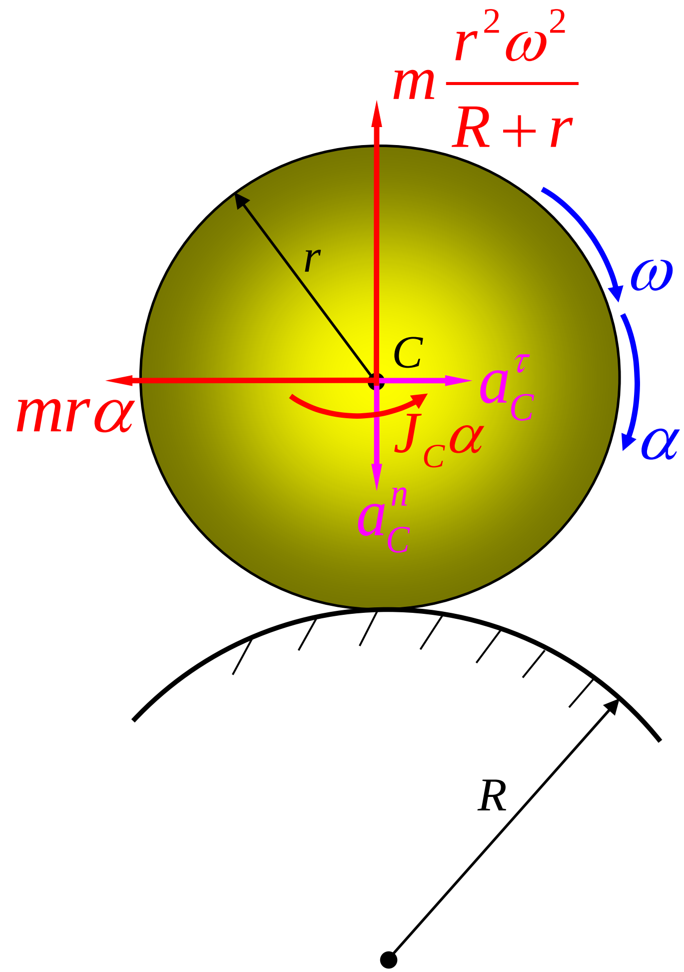
圆轮在圆弧面上纯滚动，转动的角速度是ω，角加速度是α。求：圆轮惯性力系向质心 *C* 简化的结果。

- 主矢

$$F_{\mathrm{IR}} = -m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_C$$

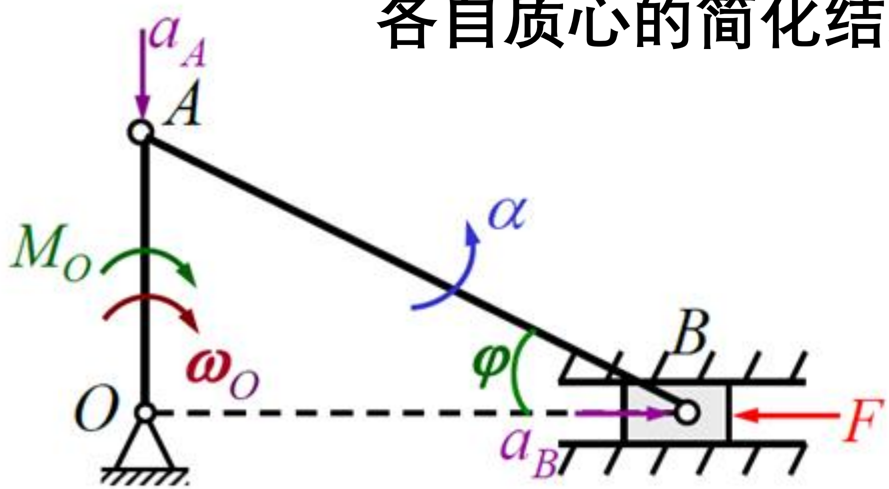
- 主矩

$$M_{\mathrm{IC}} = -J_{Cz'}\alpha$$

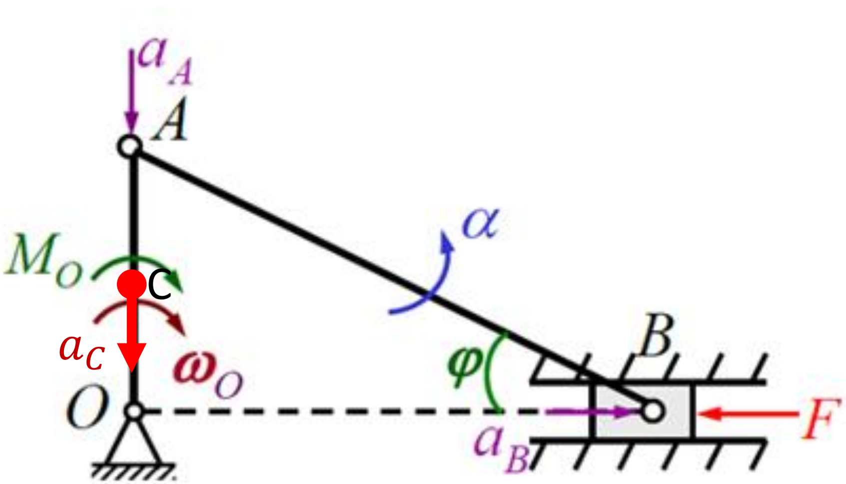


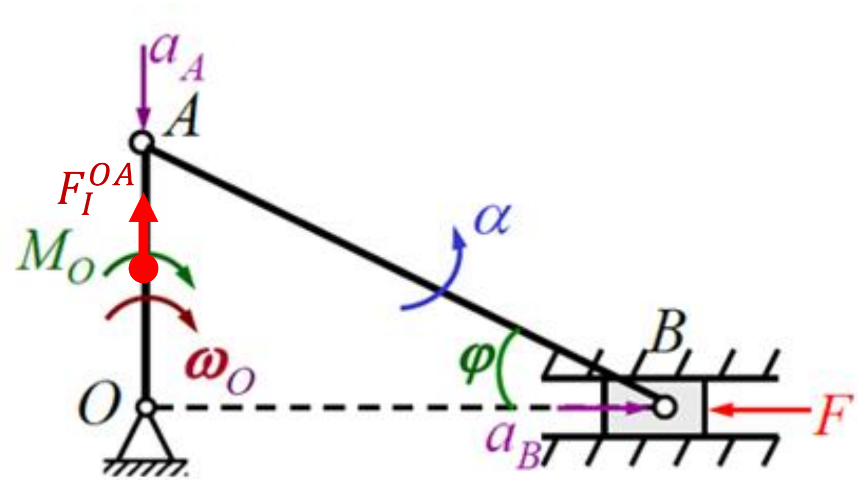
达朗贝尔原理的应用

铅直面内曲柄连杆滑块机构，均质杆$OA=r$，m，$AB=2r$，$2m$，滑块m，OA匀速转动ω_O，$\varphi=30°$，阻力F。求 ：构件OA，AB和滑块B的惯性力系向各自质心的简化结果



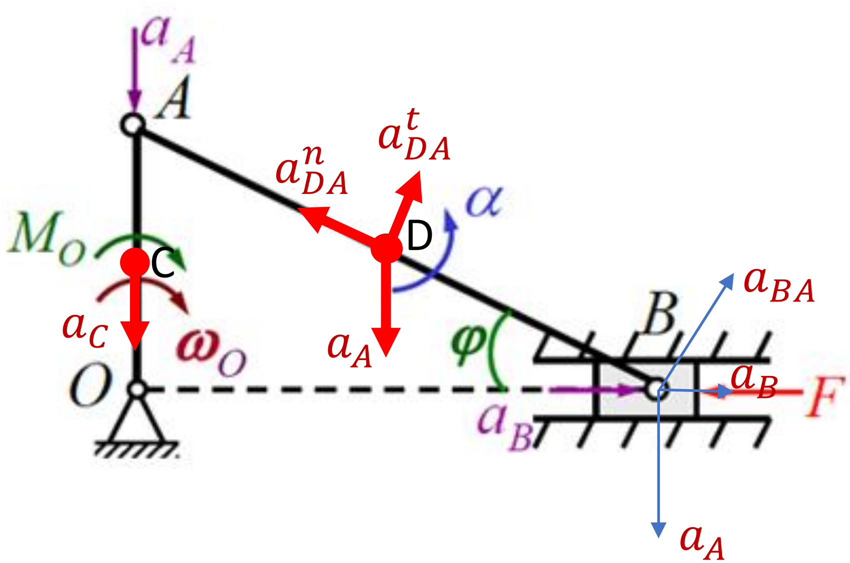
构件OA的惯性力系向质心的简化结果

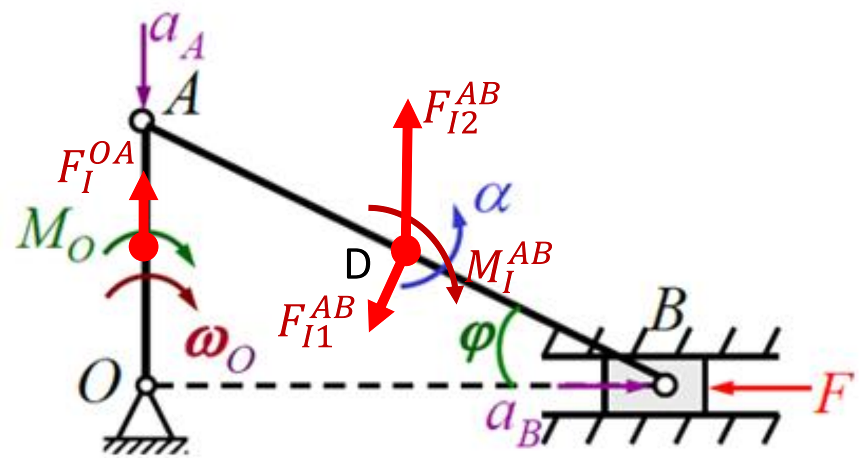




$$F_I^{OA} = ma_C = m\omega_O^2 \frac{r}{2}$$

构件AB的惯性力系向质心的简化结果





$$a_{DA}^n = 0$$

$$\alpha = \frac{\omega_0^2}{2\cos\varphi}$$

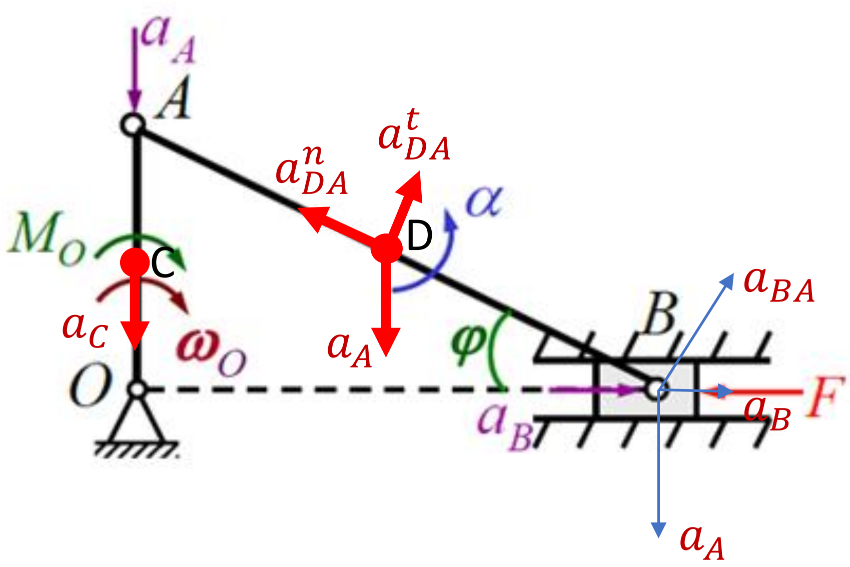
$$a_{DA}^t = \alpha r = \frac{r\omega_0^2}{2\cos\varphi}$$

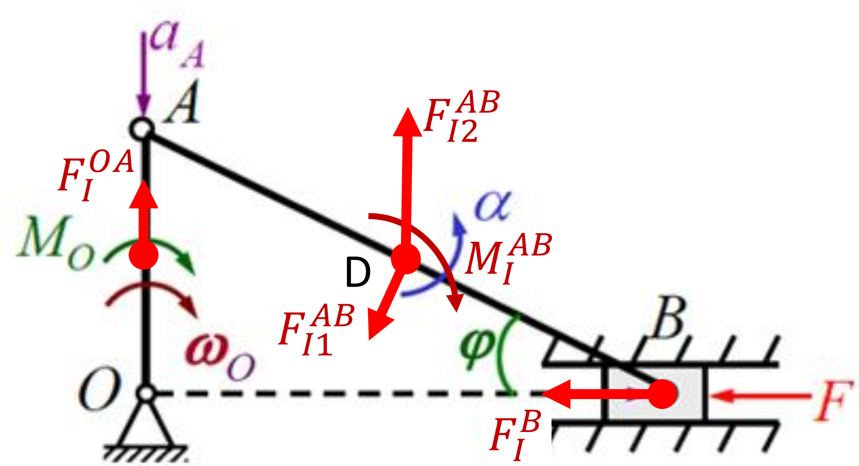
$$F_{I1}^{AB} = 2ma_{DA}^t = \frac{mr\omega_0^2}{\cos\varphi}$$

$$F_{I2}^{AB} = 2ma_A = 2m\omega_O^2 r$$

$$M_I^{AB} = J_D\alpha = \frac{mr^2\omega_0^2}{3\cos\varphi}$$

滑块B的惯性力系向质心的简化结果

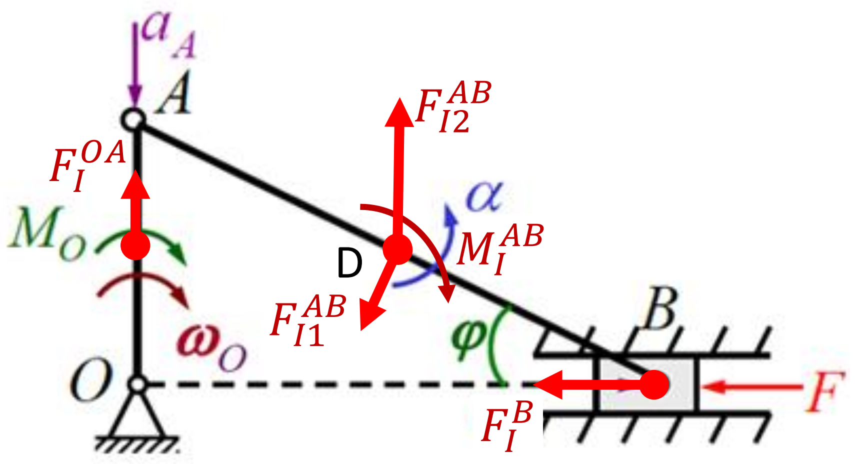




$a_B = a_A \tan\varphi = \omega_0^2 r \tan\varphi$

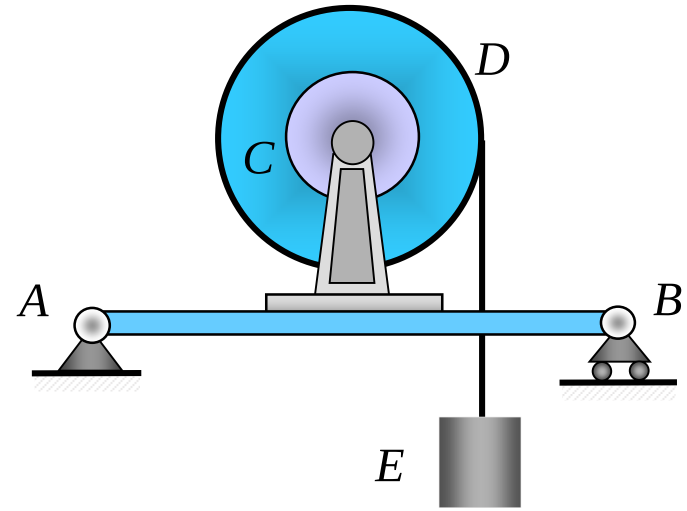
$F_I^B = m a_B = m\omega_0^2 r \tan\varphi$

该系统在各构件的重力、主动力矩Mo、阻力F、约束力和惯性力的作用下，达到平衡。可用平面力系平衡方程求解未知力。



达朗贝尔原理的应用

例题 **起重装置由半径为r=0.2 m，质量为m_1=40 kg的均质鼓轮D及长l=0.8 m，质量为m_2=m_1=40 kg的均质梁AB组成。鼓轮通过电机C（质量不计）安装在梁的中点，被提升的重物E质量m_2=m_1/4 。电机通电后的驱动力矩为M=22 N·m，试求重物E上升的加速度a及支座A、B的约束力F_{NA}及F_{NB}。**



达朗贝尔原理的应用

解：（1）求加速度*a*。

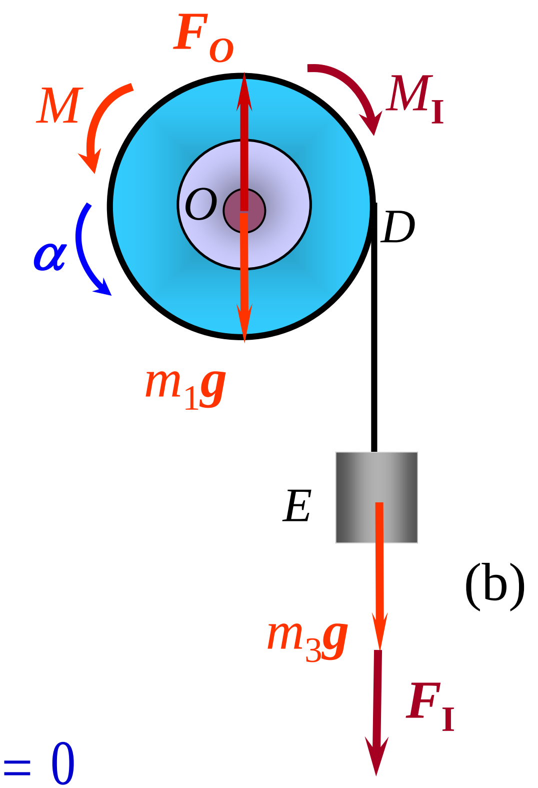
考虑鼓轮*D*、重物*E*及与鼓轮固结的电机转子所组成的系统，*M*为电机定子作用在转子的驱动力矩。加惯性力后受力分析如图b所示。其中

$$F_{\mathrm{I}} = m_3 a\,,\quad M_{\mathrm{I}} = m_1 r^2 \alpha / 2$$

写出动态平衡方程有

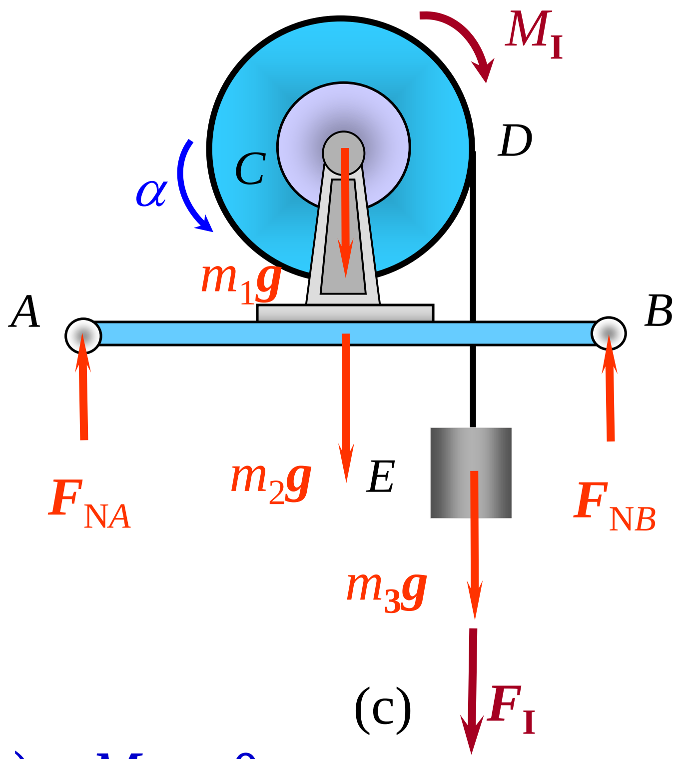
$$\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M - M_{\mathrm{I}} - (m_3 g + F_{\mathrm{I}})r = 0$$

解得 $$a = \frac{4M/r - m_1 g}{3m_1} = 0.4\ \mathrm{m/s^2}$$



达朗贝尔原理的应用

（2）求约束力。



(c)

考虑整个系统，注意驱动力矩为M（系统内力）。加惯性力后受力分析如图c所示。

写出动态平衡方程有

$$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0,$$

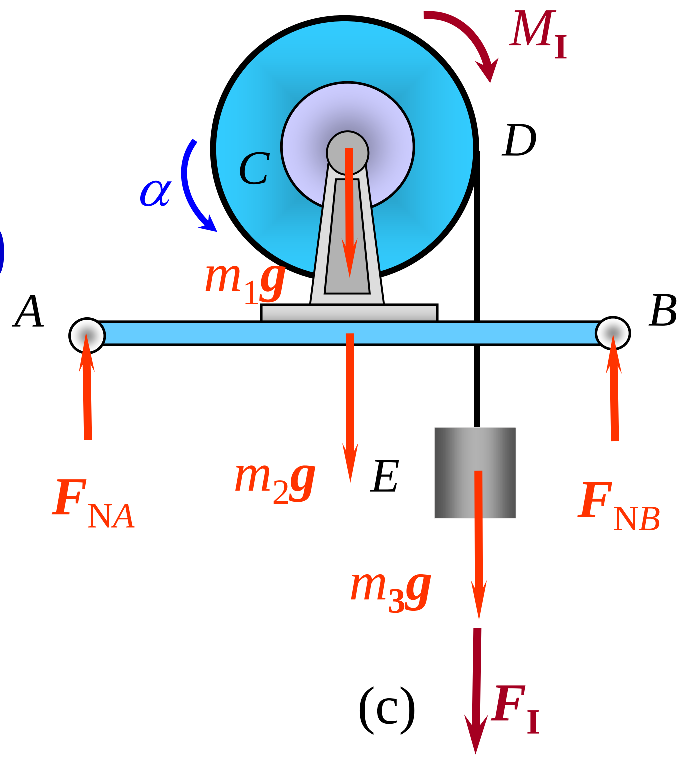
$$F_{NA}l - (m_1 g + m_2 g)\times\frac{l}{2} - (m_3 g + F_{\mathrm{I}})(\frac{l}{2} - r) + M_{\mathrm{I}} = 0$$

解得 $F_{NA} = \frac{17}{16}m_1 g - \frac{1}{16}m_1 a = 415.5\ \mathrm{N}$

达朗贝尔原理的应用

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{NA} + F_{NB} - m_1 g - m_2 g - m_2 g - F_I = 0$$

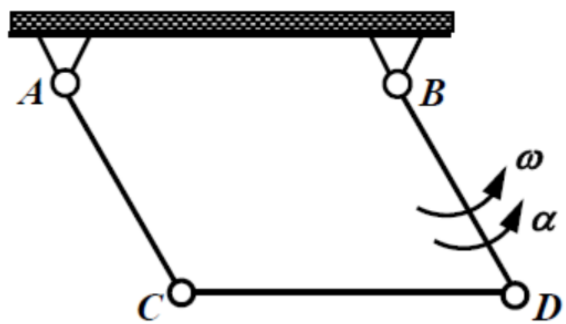


解得

$$F_{NB} = \frac{19}{16} m_1 g + \frac{5}{16} m_1 a = 470.5\ \text{N}$$

作业---达朗贝尔原理

作业1：图示平面机构，$ABCD$ 为平行四边形，均质杆 AC 与 BD 的质量均为 m_1，长度为 r，均质杆 CD 的质量为 m_2，长度为 L。图示瞬时，杆 BD 的角速度为 ω，角加速度为 α。求：此时，杆 AC 与 CD 的惯性力系简化结果。



- 教科书习题：13-15, 13-16

虚位移原理

§1　约束方程与约束分类

§2　虚位移与虚功

§3　虚位移原理

约束方程与约束分类

(1) 约束

对非自由质点系的位置和速度预先指定的限制条件，称为约束。

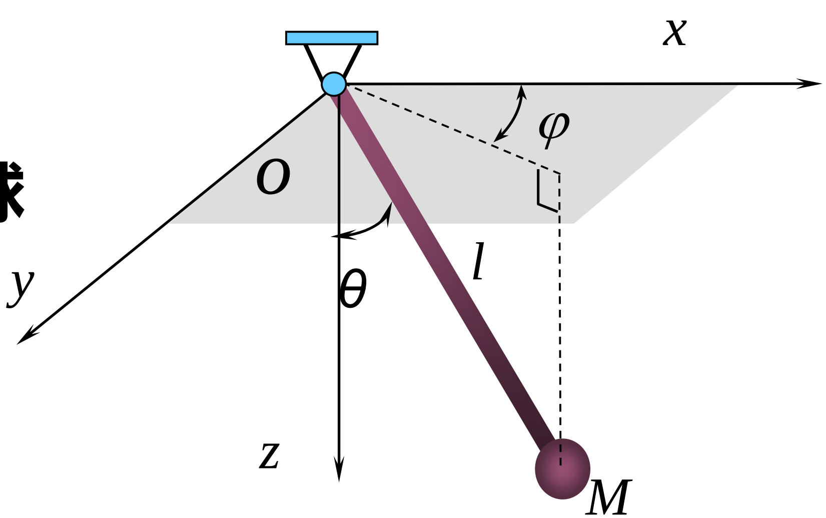
(2) 约束方程

约束对质点系运动的限制可以通过质点系中各质点的坐标和速度以及时间的数学方程来表示。这种方程称为约束方程。

$$f\left(x_1, y_1, z_1, v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, \ldots, t\right) = 0$$

约束方程与约束分类

● 球面摆



点M被限制在以固定点O为球心、l为半径的球面上运动。

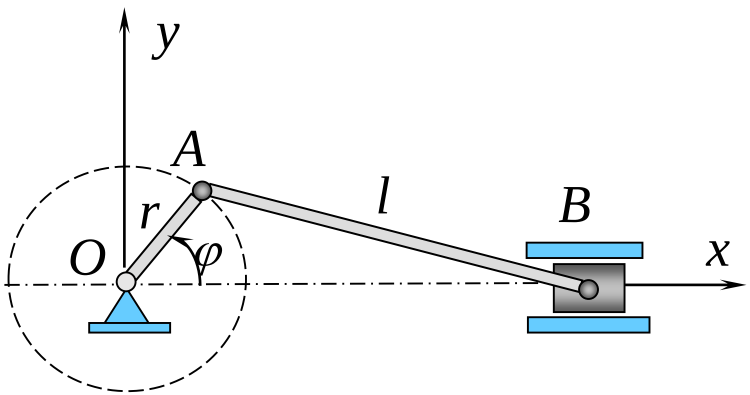
如取固定参考系$Oxyz$，则点M的坐标x、y、z满足方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

这就是加于球面摆的约束方程。

约束方程与约束分类

● 曲柄连杆机构



这个质点系的约束方程可表示成

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$

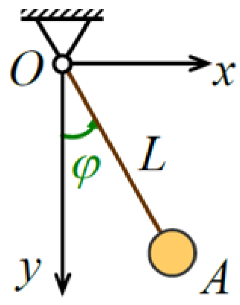
- **式中**x_A、y_A**和**x_B、y_B**分别为**A、B**两点的直角坐标。**

- **四个坐标满足三个约束方程，从而只剩下一个独立坐标：x_A, y_A，或x_B。这一坐标完全确定了此质点系的位置。**

约束方程与约束分类

- **几何约束**：限制位移的约束，约束方程中仅包含位置坐标，例如摆球

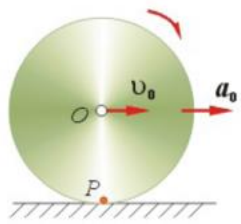
$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots) = 0$$



摆球 $x^2+y^2=L^2$

- **运动约束**：限制运动的约束，约束方程中包含速度，例如纯滚动的轮

$$f(x_1, y_1, z_1, v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, \dots) = 0$$



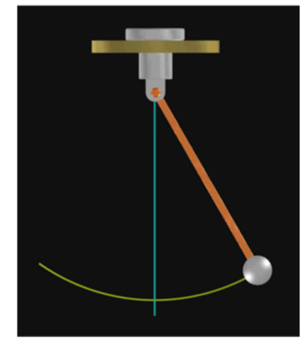
滚轮 $v=r\omega$

约束方程与约束分类

- **定常约束**：不随时间改变的约束，约束方程**不含时间变量t**

$$f(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\dots)=0$$
$$f\left(x_1,y_1,z_1,v_{x1},v_{y1},v_{z1},\dots\right)=0$$

$$x^2+y^2=l_0^{\,2}$$

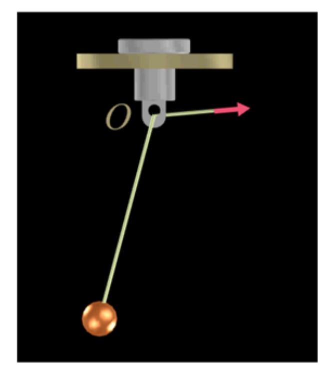


定常约束

- **非定常约束**：随时间变化的约束，约束方程**显含时间变量t**

$$f(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\dots,t)=0$$
$$f\left(x_1,y_1,z_1,v_{x1},v_{y1},v_{z1},\dots,t\right)=0$$

$$x^2+y^2=(l_0-v_0t)^2$$

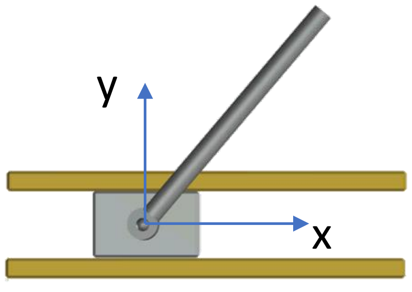


非定常约束

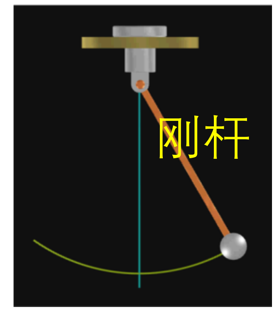
绳长以速度v_0缩短的摆

约束方程与约束分类

- **双侧约束**：限制两个相对方向运动的约束，约束方程为等式

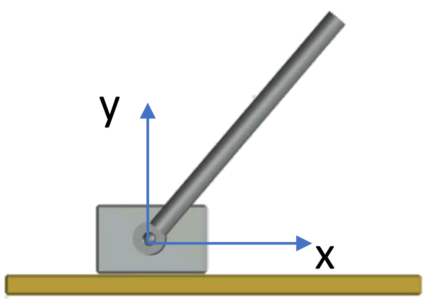


$$y = 0$$

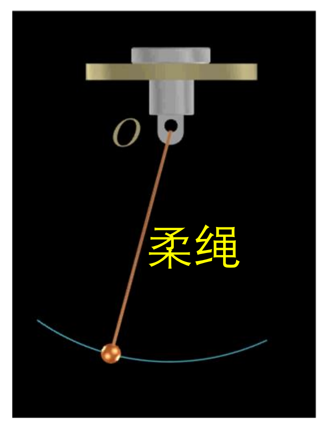


$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

- **单侧约束**：限制单方向运动的约束，约束方程为不等式



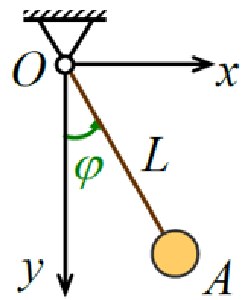
$$y \geq 0$$



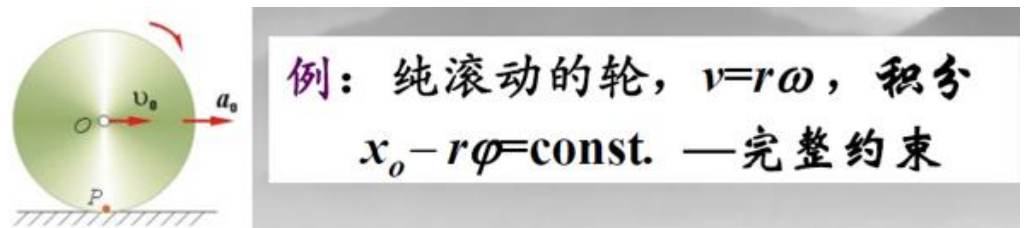
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$$

约束方程与约束分类

- **完整约束**：仅限制位移或者可以转化成限制位移的约束，约束方程仅包含位置坐标或者可以转化成位置坐标的参数，也可以包含时间：$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, t) = 0$



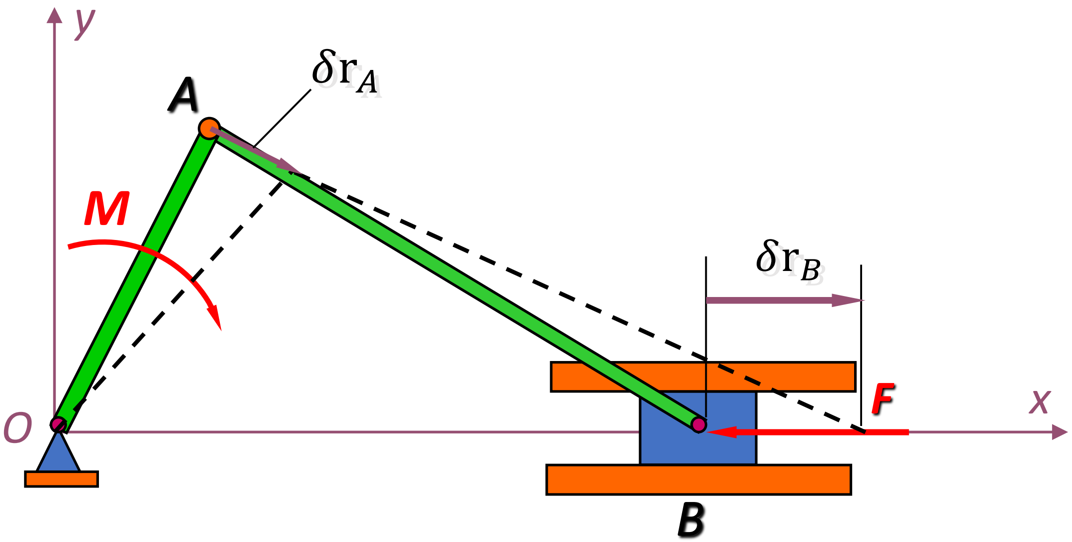
摆球 $x^2+y^2=L^2$



- **非完整约束**：约束方程包含其他运动量，且不可以转化成位置坐标。

虚位移

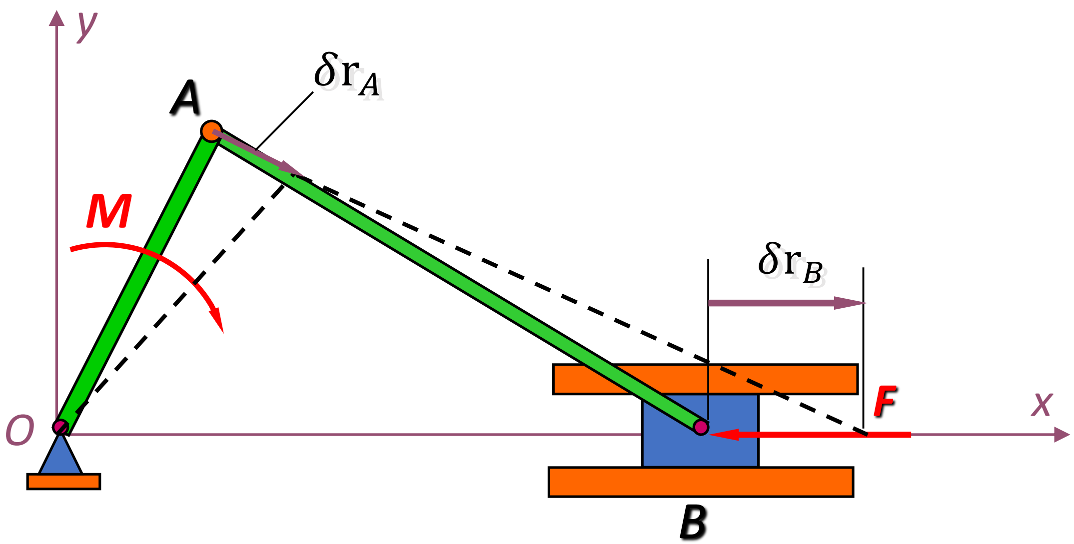
质点或质点系在**给定瞬时不破坏约束而为约束所许可的任何微小位移**，称为质点或质点系的虚位移。



- 虚位移是一个假想的位移，它与实位移不同
- 虚位移不是任何随便的位移，它必须为约束所允许
- 在完整定常约束下，虚位移方向沿其速度方向

虚位移

- **虚位移必须为约束所允许，所以系统各虚位移间由于约束存在一定的关系**



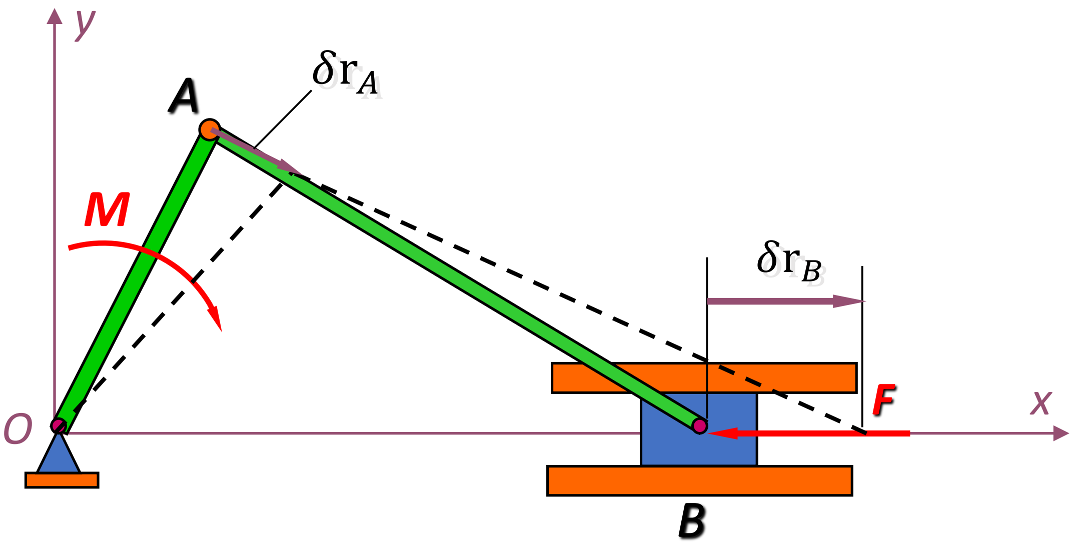
约束方程：

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$

虚位移



对约束方程求变分:

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

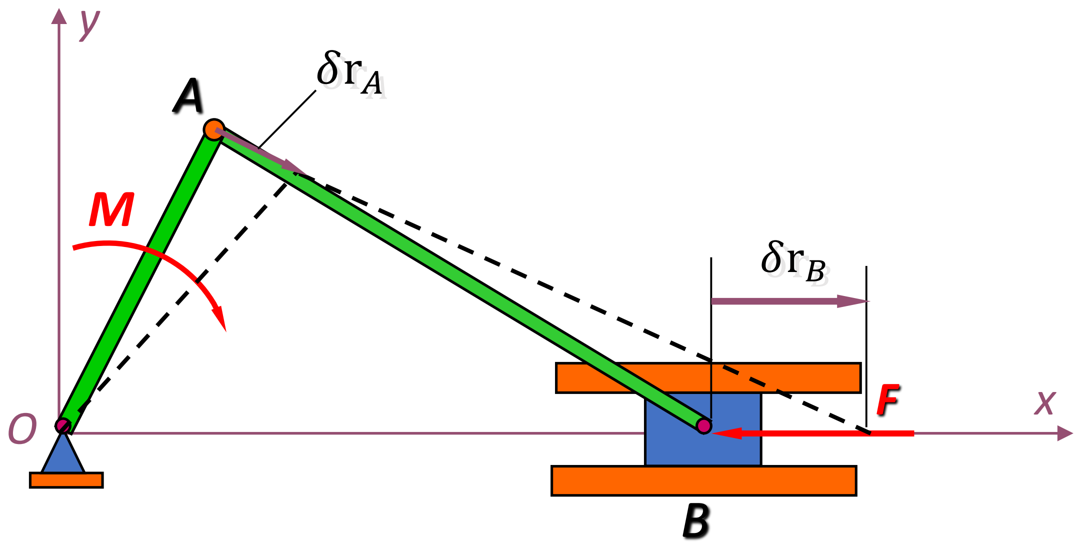
$$y_B = 0$$

$$2x_A\delta x_A + 2y_A\delta y_A = 0$$

$$2(x_B - x_A)(\delta x_B - \delta x_A) + 2(y_B - y_A)(\delta y_B - \delta y_A) = 0$$

$$\delta y_B = 0$$

虚位移



对约束方程求变分:

$$2x_A\delta x_A + 2y_A\delta y_A = 0$$

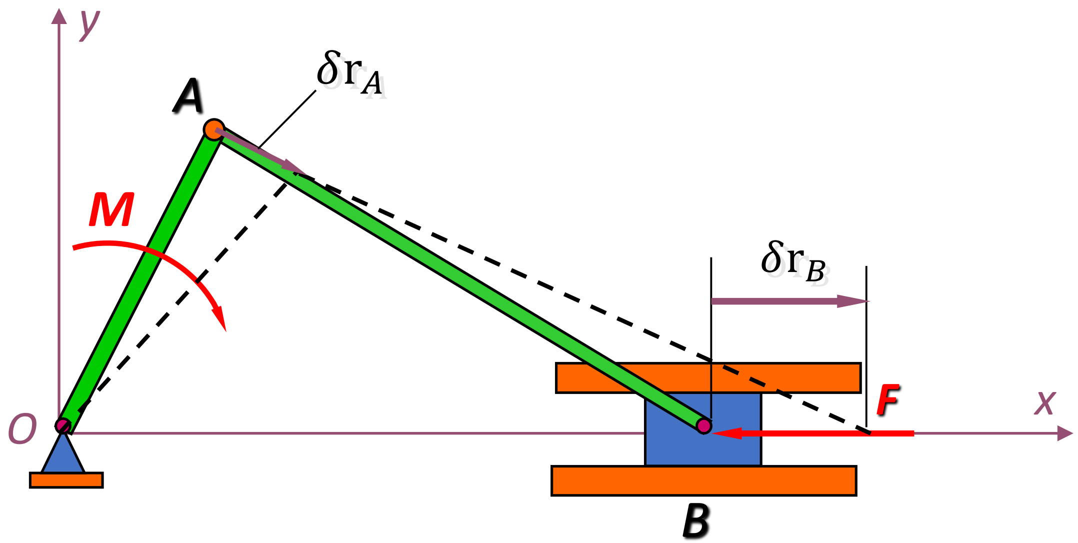
$$2(x_B - x_A)(\delta x_B - \delta x_A)$$
$$+ 2(y_B - y_A)(\delta y_B - \delta y_A) = 0$$

$$\delta y_B = 0$$

$$\delta y_A = -\frac{x_A}{y_A}\delta x_A$$

$$\delta x_B = \frac{x_B}{x_B - x_A}\delta x_A$$

虚位移



对约束方程求变分:

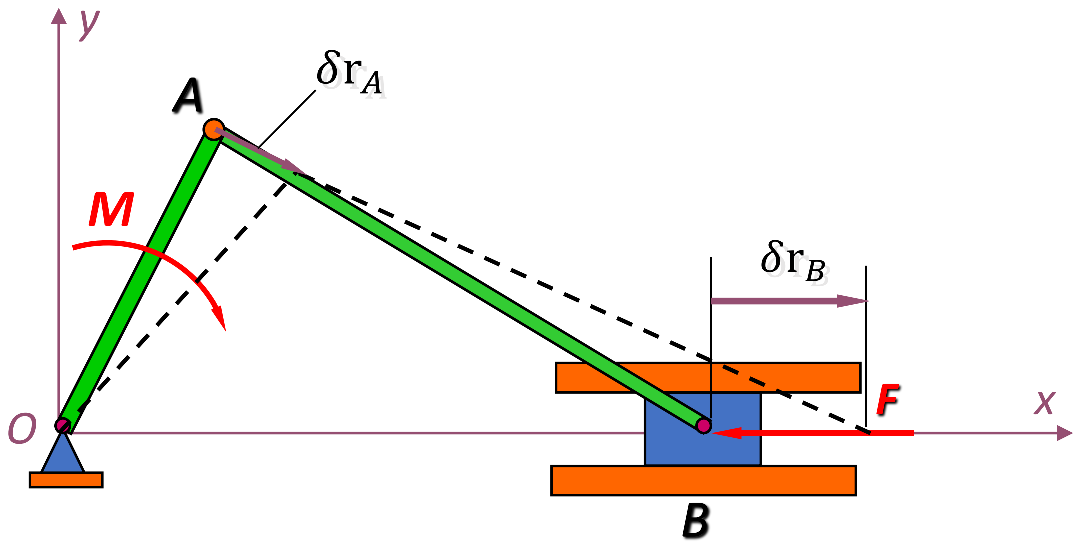
$$\delta y_A = -\frac{x_A}{y_A}\delta x_A$$

$$\delta x_B = \frac{x_B}{x_B - x_A}\delta x_A$$

$$\delta r_A = \sqrt{(\delta x_A)^2 + (\delta y_A)^2} = \frac{l_{OA}}{y_A}\delta x_A$$

$$\delta r_B = \delta x_B = \frac{x_B}{x_B - x_A}\delta x_A$$

虚位移



对约束方程求变分：

$$\delta r_A=\sqrt{(\delta x_A)^2+(\delta y_A)^2}=\frac{l_{OA}}{y_A}\delta x_A$$

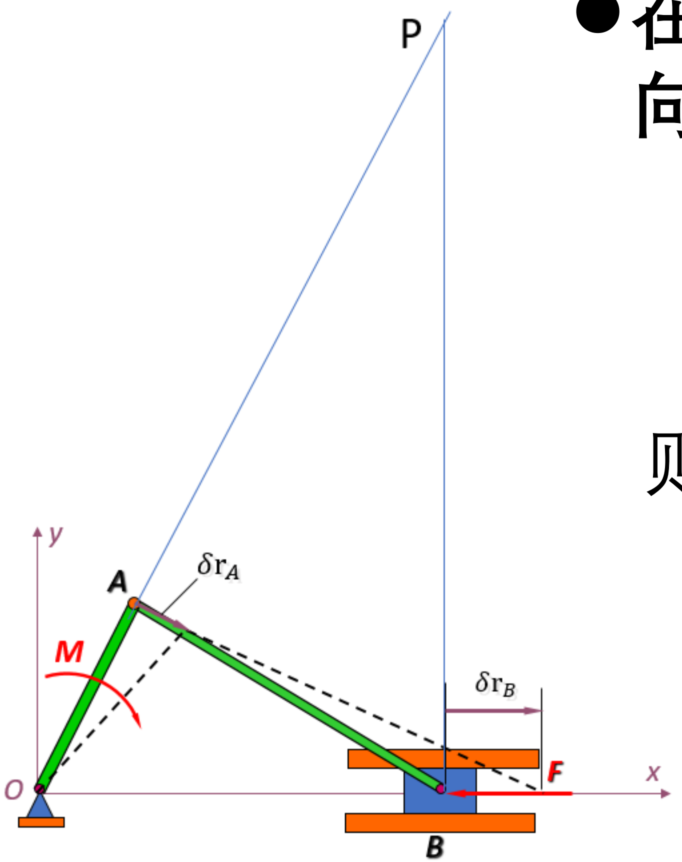
$$\delta r_B=\delta x_B=\frac{x_B}{x_B-x_A}\delta x_A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta r_A}{\delta r_B}=\frac{l_{OA}(x_B-x_A)}{x_B y_A}$$

利用约束方程求变分，建立虚位移之间的关系

虚位移

利用速度或者几何关系，建立虚位移之间的关系



- 在完整定常约束下，虚位移方向沿其速度方向，并且有：

$$\delta r_A = v_A \delta t$$

$$\delta r_B = v_B \delta t$$

则有

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_B} = \frac{v_A}{v_B} = \frac{PA}{PB}$$

虚　功

力在虚位移上所作的功称为虚功，记为δW。因为虚位移是假想位移，所以虚功也是假想的概念。

力F（力矩M）在虚位移$\delta \mathbf{r}$（$\delta\varphi$）上所作的虚功为

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$$

$$\delta W = M \cdot \delta \varphi$$

注：主动力和约束力都可以作虚功。

理　想　约　束

如果质点系所受的约束力在任意虚位移上所作虚功之和恒等于零，则这样的约束称为理想约束。

理想约束条件可表示成

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

式中$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$是作用在第$i$个质点上的约束力。

常 见 理 想 约 束

- 固定的或运动着的光滑支承面
- 光滑铰链接
- 始终拉紧而不可伸长的软绳
- 作纯滚动刚体所在的支承面

虚 位 移 原 理

质点系处于静力平衡，作用在系统内任一质点上的主动力F_i和约束力F_{Ni}之矢量和必等于零，即满足条件

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} = \boldsymbol{0}$$

对每个质点选取虚位移$\delta\boldsymbol{r}_i$，则合力的虚功等于零，即

$$(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

对全体质点求和，得

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i}_{\text{主动力虚功和}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} \cdot \delta\boldsymbol{r}_i}_{\text{约束力虚功和}} = 0$$

虚 位 移 原 理

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

假设理想约束 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$ **，则有**

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

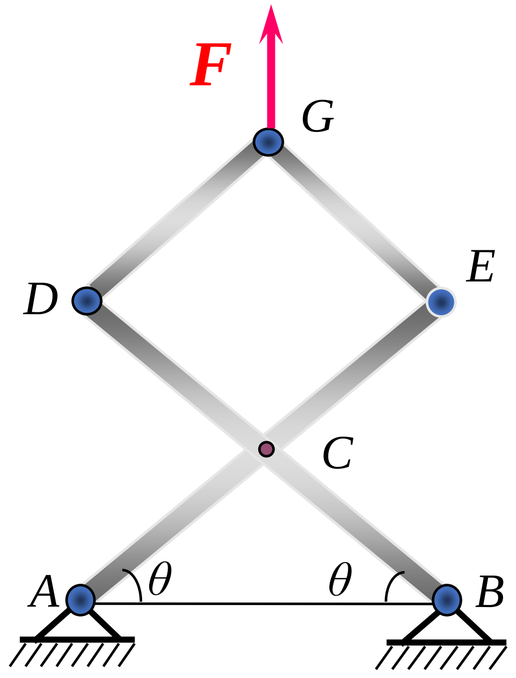
上式可以写成解析式，

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i+F_{iz}\delta z_i)=0$$

具有双面、定常、理想约束的静止质点系，其平衡的充要条件是：所有主动力在任何虚位移上的虚功之和等于零。这就是**虚位移原理**，又称**虚功原理**。上面的方程称为**虚功方程**。

虚位移原理

例题 **已知如图所示结构，各杆都以光滑铰链连接，且有$AC=CE=BC=CD=DG=GE=l$。在点G作用一铅直方向的力F，试求支座B的水平约束力F_{Bx}。**



虚位移原理

解：

此题可用虚位移原理来求解。用约束力F_{Bx}代替水平约束，并将F_{Bx}当作主动力。

设B，G二点沿x、y的虚位移为δx_B和δy_G，根据虚位移原理，有

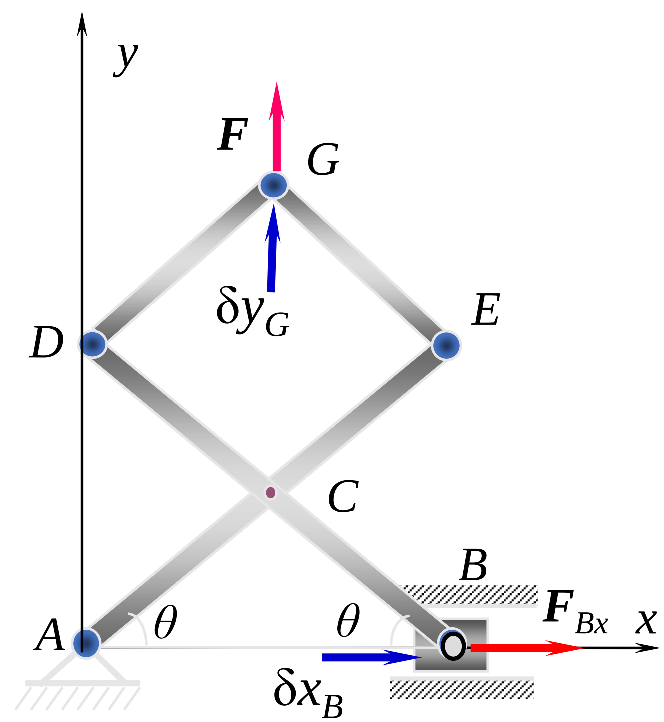
$$F_{Gy}\delta y_G + F_{Bx}\delta x_B = 0 \qquad \text{(a)}$$

G、B**点坐标** $y_G = 3l\sin\theta$, $x_B = 2l\cos\theta$

其变分为

$$\delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta$$



(b)

虚位移原理

$$F_{Gy}\delta y_G + F_{Bx}\delta x_B = 0 \qquad \text{(a)}$$

其变分为

$$\delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$$

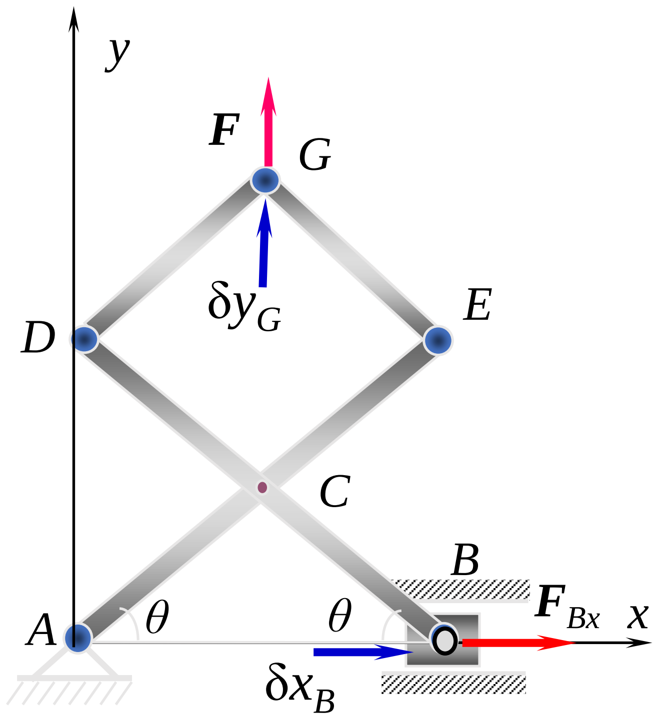
$$\delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta \qquad \text{(b)}$$

代入式（a），**得**

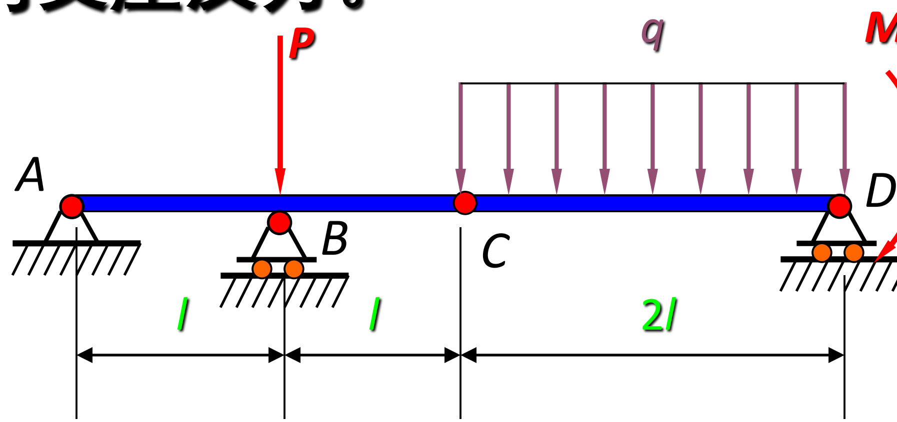
$$F\times 3l\cos\theta\,\delta\theta - F_{Bx}\times 2l\sin\theta\,\delta\theta = 0$$

$$(F\times 3l\cos\theta - F_{Bx}\times 2l\sin\theta)\,\delta\theta = 0$$

因$\delta\theta\neq 0$，**解得** $$F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta$$



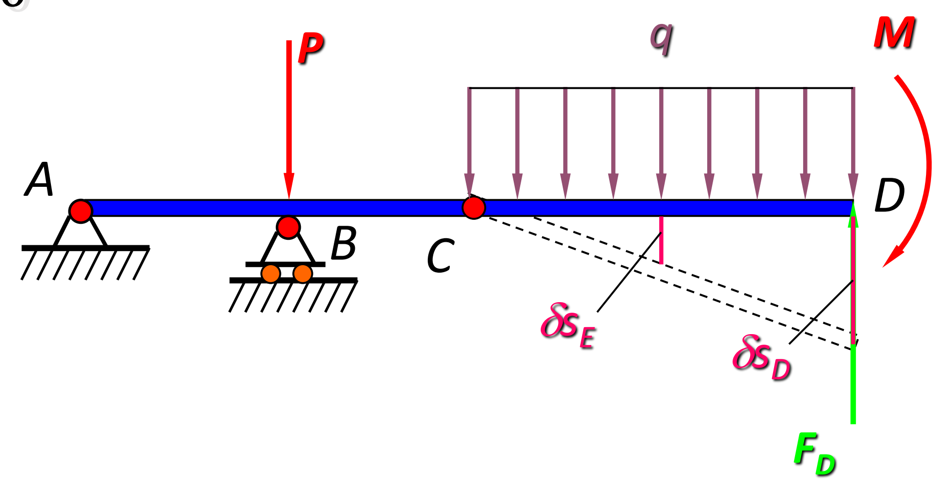
求图示连续梁A、B和D处的支座反力。



解： (1) 解除D处约束，代之以反力F_D，并将其视为主动力。

假设CD杆绕C转动一个微小角度，得到一组虚位移，可以列出虚功方程

$$q \cdot 2l \cdot \delta s_E - F_D \cdot \delta s_D + M\frac{\delta s_D}{2l} = 0$$



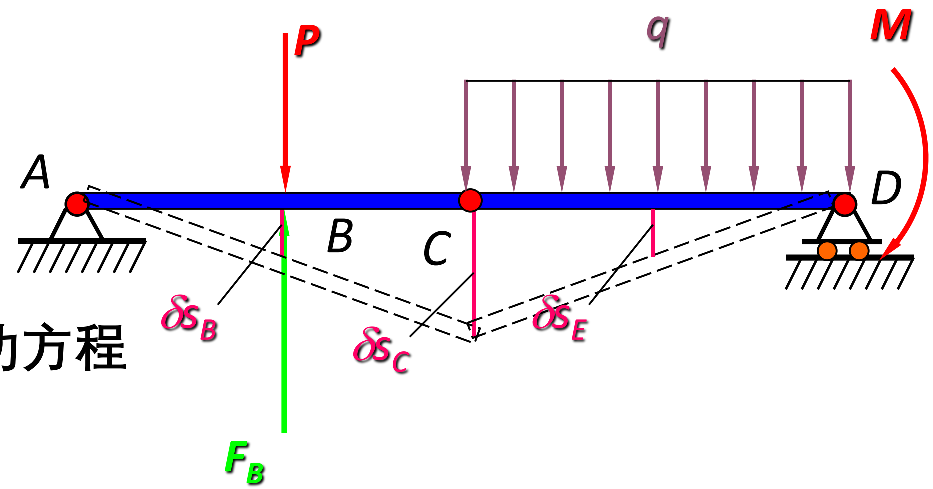
其中

$$\frac{\delta s_E}{\delta s_D} = \frac{1}{2}$$

解得

$$F_D = \frac{M}{2l} + ql$$

(2) 解除B处约束，代之以反力F_B，并将其视为主动力。



假设AC杆转动一个微小角度，可列出虚功方程

$$P\delta s_B - F_B\delta s_B + 2ql\delta s_E - M\frac{\delta s_E}{l} = 0$$

其中

$$\delta s_B = \delta s_E$$

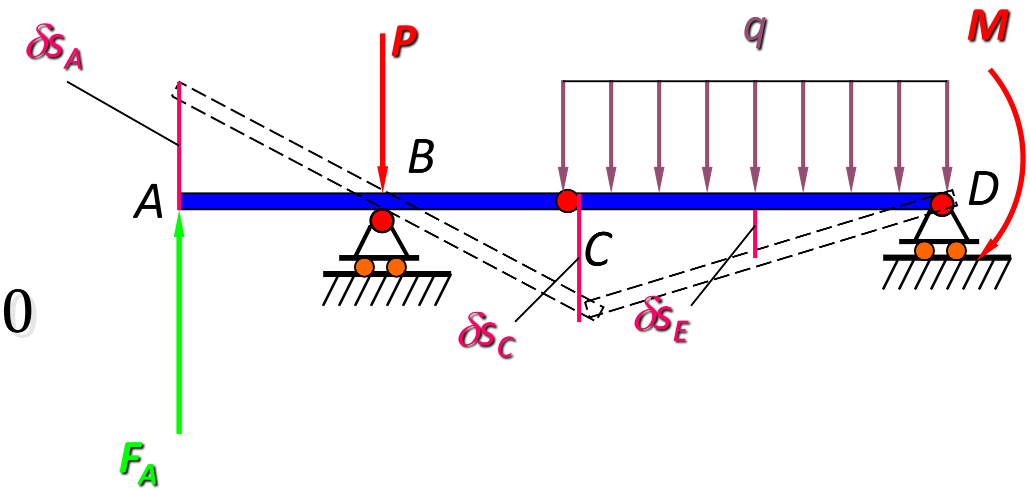
代入虚功方程，得

$$(P - F_B + 2ql - \frac{M}{l})\delta s_B = 0$$

解得

$$F_B = P + 2ql - \frac{M}{l}$$

(3) 解除A处约束，代之以反力F_A，并将其视为主动力。



假设AC绕B转动微小角度，可列出虚功方程

$$F_A\delta s_A + 2ql\delta s_E - M\frac{\delta s_E}{l} = 0$$

其中

$$\delta s_A = \delta s_C = 2\delta s_E$$

代入虚功方程，得

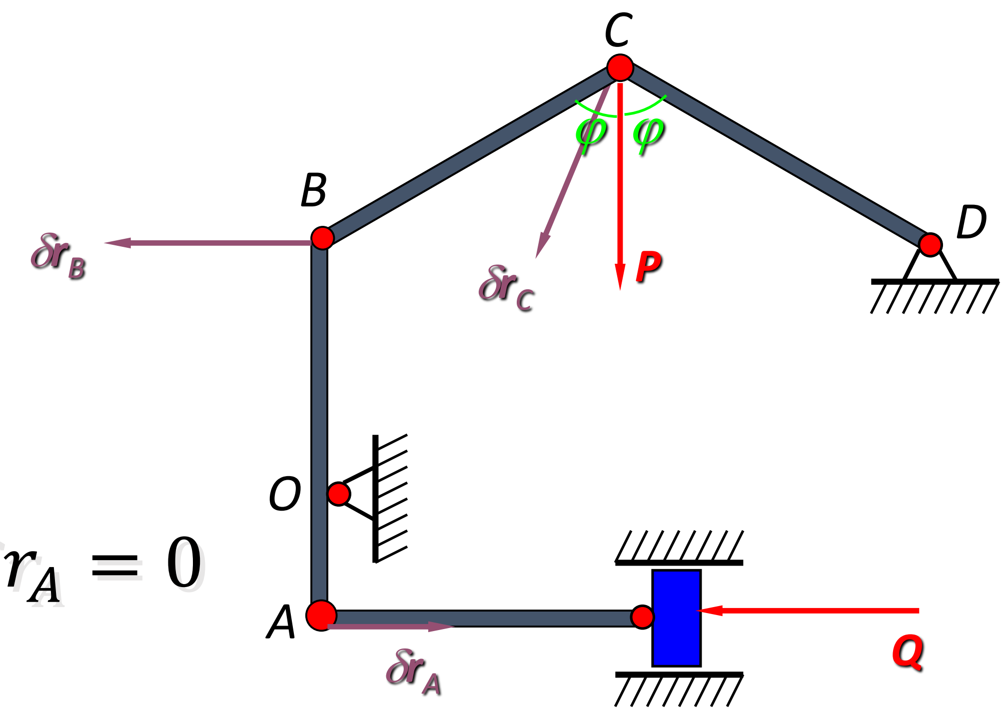
$$(F_A + ql - \frac{M}{2l})\delta s_A = 0$$

解得

$$F_A = \frac{M}{2l} - ql$$

图示操纵汽门的杠杆系统，

已知$OA/OB = 1/3$，求此系统平衡时主动力P 和Q 间的关系。



解：(1) 取系统为研究对象

虚功方程：

$$\sum \delta W_F = P\delta r_C \sin\varphi - Q\delta r_A = 0$$

由运动学关系可知：

$$\delta r_C \cos(2\varphi - 90°) = \delta r_B \sin\varphi$$

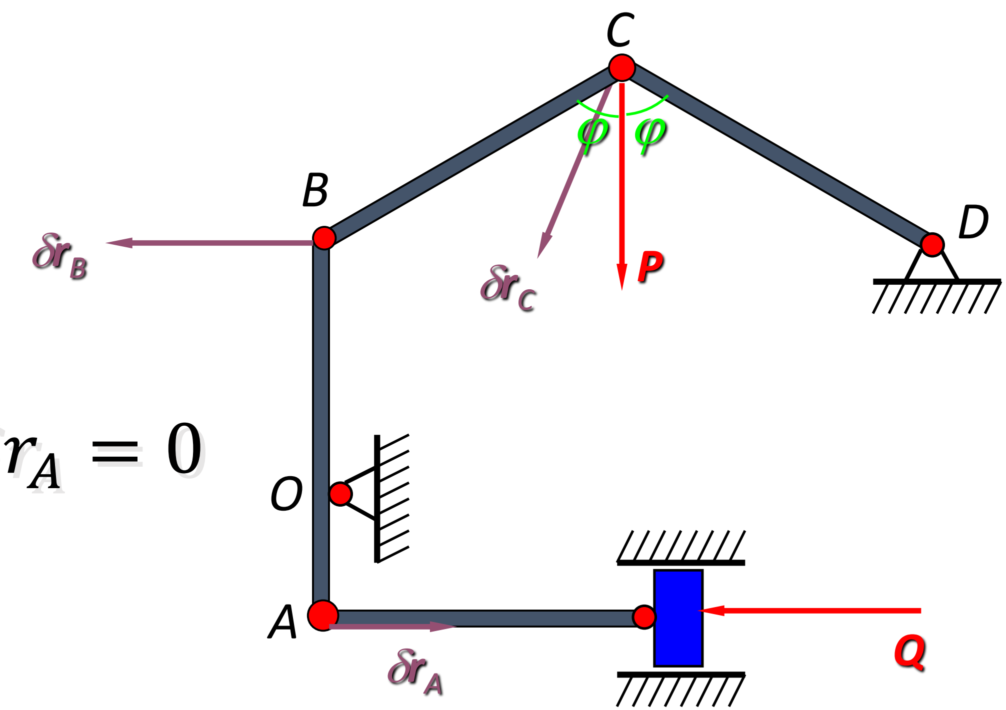
$$\frac{\delta r_A}{\delta r_B} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{3}$$

因此：

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_C} = \frac{2}{3}\cos\varphi$$

图示操纵汽门的杠杆系统，

已知 $OA/OB = 1/3$，求此系统平衡时主动力 P 和 Q 间的关系。



$$\sum \delta W_F = P\delta r_C \sin\varphi - Q\delta r_A = 0$$

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_C} = \frac{2}{3}\cos\varphi$$

从上面两个方程，得到：

$$\boxed{\frac{P}{Q} = \frac{2}{3}\cot\varphi}$$

应用虚位移原理解题的步骤

（1）确定研究对象：常选择整体为研究对象。

（2） 约束分析：是否理想约束?

（3） 受力分析：

- **求主动力之间的关系或平衡位置时：只分析主动力**
- **求约束力时：解除约束，视约束力为主动力。**

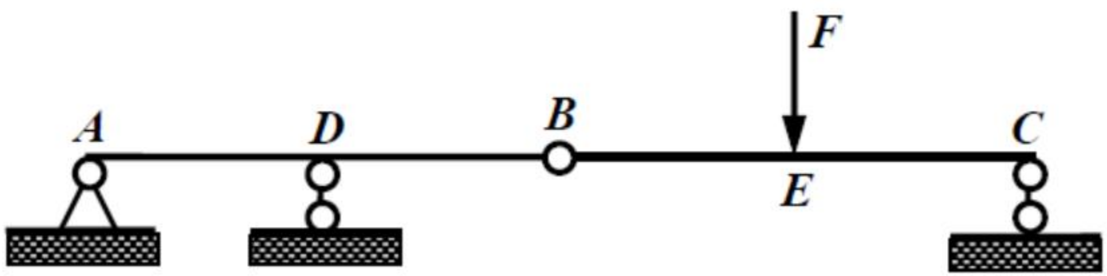
（4） 给出系统一组虚位移，列出虚功方程。

（5）找出虚位移之间的关系，代入虚功方程并求解。

- 根据速度或者几何关系
- 约束方程求变分

作业---虚位移原理

作业1： 图示组合梁，A 处为固定铰支座约束，C、D 处为滑动铰支座约束，B 处光滑铰连接，AC 水平，长度 $AD=BD=BE=CE=b$。E 处受垂直力 F 作用，梁重不计。求：用虚位移原理计算支座 D 的约束力。



教科书习题：14-6, 14-10