第九章 压杆稳定（2）

Chapter 9 Stability of Column (Part 2)

第 24 讲

§ 9.4 欧拉公式的适用范围 经验公式

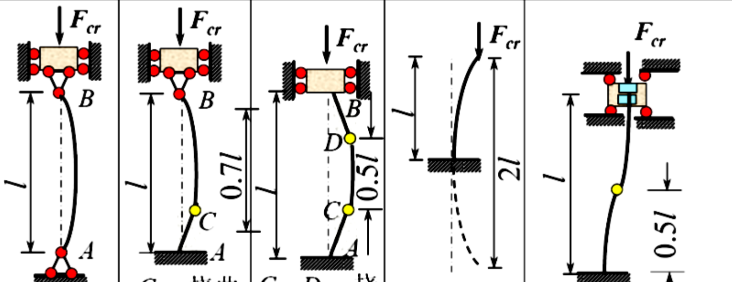
理想中心受压直杆不同杆端约束下

细长压杆的临界力欧拉公式

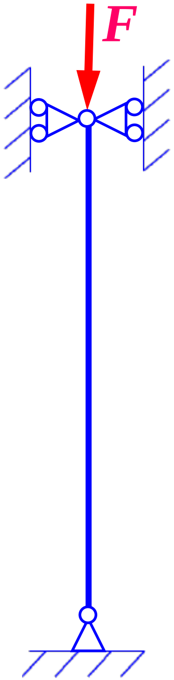
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

其中μl称为相当长度，μ为长度因数。

压杆的约束条件	长度因数
两端铰支	$\mu=1$
一端固定，另一端自由	$\mu=2$
两端固定	$\mu=0.5$
一端固定，另一端铰支	$\mu\approx0.7$
两端固定，但可沿横向相对移动	$\mu=1$

支承情况	两端铰支	一端固定另端铰支	两端固定	一端固定另端自由	两端固定但可沿横向相对移动
失稳时挠曲线形状		C— 挠曲线拐点	C、D— 挠曲线拐点		C— 挠曲线拐点
临界力F_{cr}欧拉公式	$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$F_{cr}\approx\frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$	$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$	$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$	$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$
长度系数 μ	$\mu=1$	$\mu\approx0.7$	$\mu=0.5$	$\mu=2$	$\mu=1$

欧拉公式应用范围问题的提出



截面为25mm×1mm的钢板尺，两端铰支，作用一与轴线重合的压力。

许用应力$[\sigma]=200\text{MPa}$，弹性模量$E=210\text{GPa}$。

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

(1) $l=30.0\text{cm}$： $F_{cr1}=47.98\text{N}$

(2) $l=1.0\text{cm}$： $F_{cr2}=43.18\text{kN}$

按强度条件计算：

$$[F]=[\sigma]A=5.0\text{kN}<F_{cr2}$$

按强度条件计算的结果比情形 (2) 小很多！

受压的杆件：有强度问题，也有失稳问题

欧拉公式只有在线弹性范围内才适用，这就要求在临界载荷作用下，压杆在直线平衡构形时，其横截面上的正应力小于或等于材料的比例极限

$$\sigma_{cr}=\frac{F_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\le\sigma_p \Longrightarrow \lambda\ge\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=\lambda_p$$

其中σ_{cr}称为临界应力(critical stress)；σ_p为材料的比例极限。

λ_p为能够应用欧拉公式的压杆柔度的极限值。

$\lambda=\frac{\mu l}{i}$ 柔度（或长细比）。

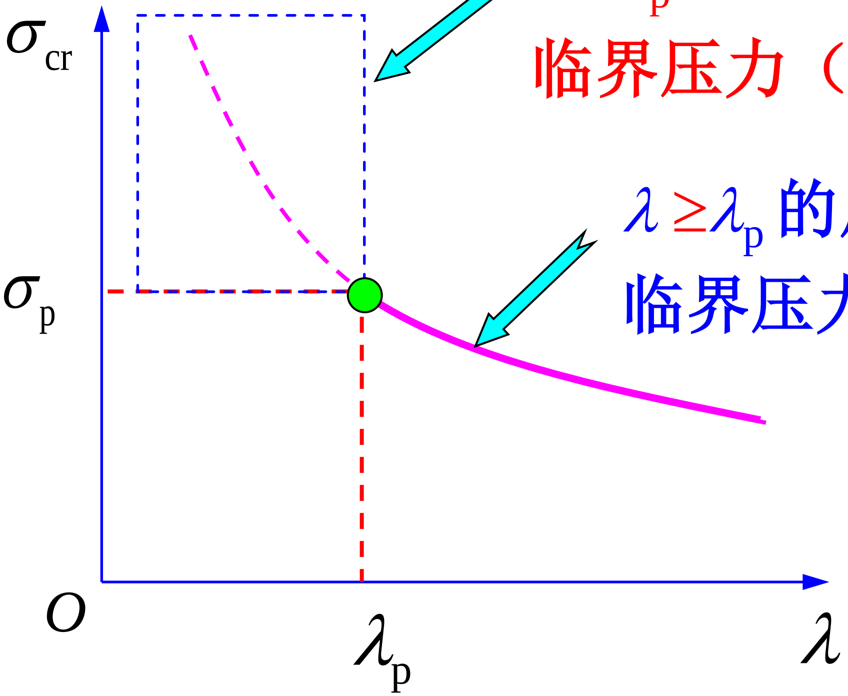
$\lambda>\lambda_p$: 大柔度压杆，或细长压杆；$\boxed{\lambda<\lambda_p\text{: 如何处理？}}$

工程中所采用的杆绝大多数不是大柔度压杆。

对这类压杆的临界压力理论分析和实验研究是工程应用中最为关心的。

$\lambda < \lambda_p$ 的压杆

临界压力（应力）该如何计算？



$\lambda \geq \lambda_p$ 的压杆为大柔度压杆，或细长压杆

临界压力用欧拉公式计算！

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

不是大柔度压杆临界压力的计算，常见的有两种方法：

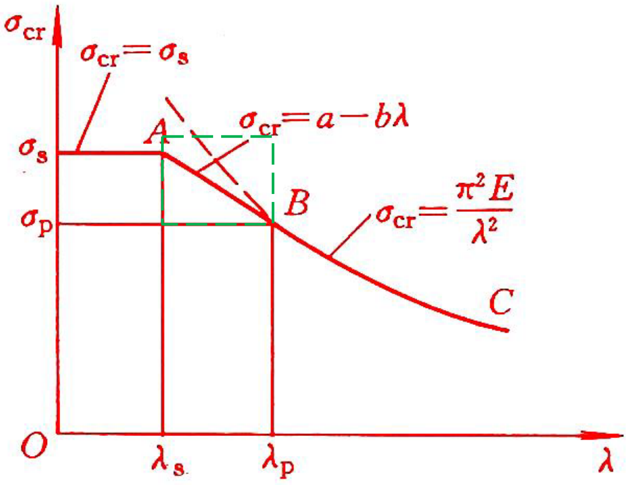
1. **折减弹性模量理论**（孙训方，第6版）

2. **经验公式—直线公式**（刘鸿文，第7版）

$\sigma_{cr}=a-b\lambda$（a, b是与材料性质有关的常数）

表 9.2　直线公式的系数 a 和 b 的值

材料	a/MPa	b/MPa
Q235 钢（$\sigma_b\geq372$ MPa，$\sigma_s=235$ MPa）	304	1.12
优质碳钢（$\sigma_b\geq471$ MPa，$\sigma_s=306$ MPa）	461	2.568
硅钢（$\sigma_b\geq510$ MPa，$\sigma_s=353$ MPa）	578	3.744
铬钼钢	980.7	5.296
铸铁	332.2	1.454
强铝	373	2.15
松木	28.7	0.19



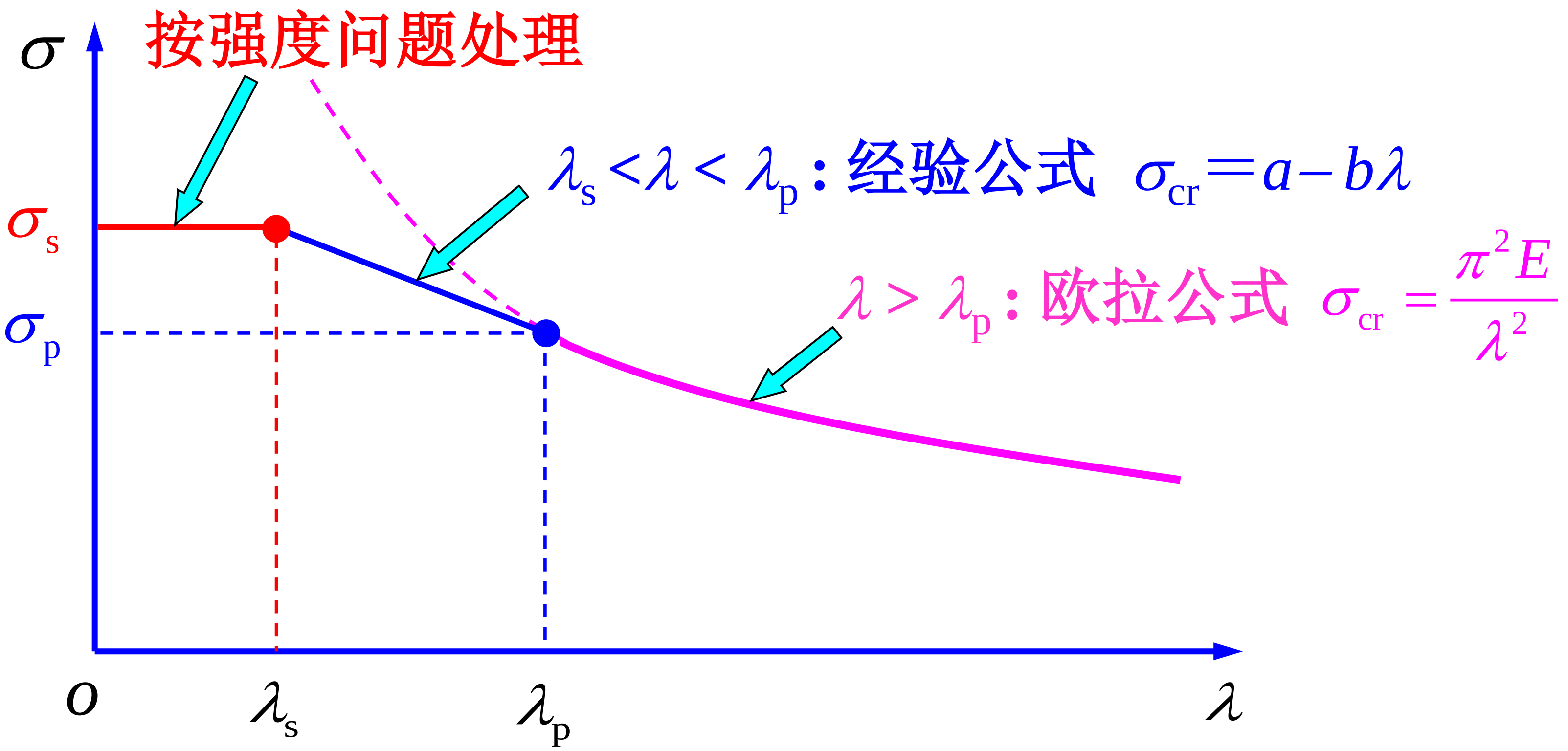
λ_s：由$\sigma_s=a-b\lambda_s$来确定

$$\lambda_s=\frac{a-\sigma_s}{b}$$

$\lambda_s\leq\lambda\leq\lambda_p$：中等柔度压杆

$\lambda<\lambda_s$：小柔度压杆

临界应力总图



按强度问题处理
σ
σ_s
σ_p
$\lambda_s < \lambda < \lambda_p$: 经验公式 $\sigma_{cr} = a - b\lambda$
$\lambda > \lambda_p$: 欧拉公式 $\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$
O
λ_s
λ_p
λ

实际压杆的稳定性计算

理想压杆	实际压杆
（1）压杆的轴线是直线	（1）有初始弯曲
（2）载荷作用在轴线上	（2）存在压力偏心
（3）无初始应力	（3）有残余应力

这些因素的存在都会使实际压杆的临界压力降低。

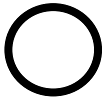
理想压杆的稳定性条件：$F_{\mathrm{N}} \le \dfrac{F_{\mathrm{cr}}}{n_{\mathrm{st}}}$ 或 $\sigma_c \le \dfrac{\sigma_{\mathrm{cr}}}{n_{\mathrm{st}}}$ （n_{st} – 稳定安全因数 ）

我国钢结构规范中，规定轴心受压杆件（实际压杆）的稳定性计算公式为：$\dfrac{F_{\mathrm{N}}}{\varphi A} \le f$ （φ – 稳定因数，与压杆的材料、截面形状和柔度有关；f –相应材料的强度设计值 ）

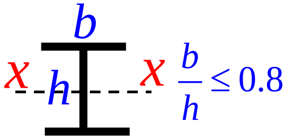
或 $\sigma = \dfrac{F_{\mathrm{N}}}{A} \le \varphi f$ f 和 φ 都可从规范中查到。Q235钢，f =215MPa

我国钢结构设计规范（GB 50017–2017 钢结构设计标准）根据国内常用构件的截面形式、尺寸和加工条件，规定了相应的残余应力变化规律，并考虑了l/1000的初弯曲（标准的第5.5.9条）、等因素，把截面归并为a、b、c和d四类（标准的表7.2.1-1）。

其中a类残余应力影响较小，稳定性较好

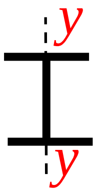


轧制

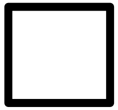


轧制，对x轴

c类残余应力影响较大

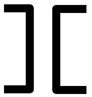


焊接, 对y轴

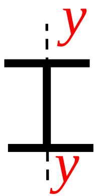


焊接箱形截面
板件宽厚比≤ 20

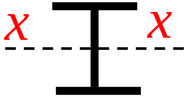
大多数情况可取作b类



轧制



轧制, 对y轴



焊接, 对x轴

GB 50017-2017 钢结构设计标准

中华人民共和国国家标准

GB 50017−2017

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \le \varphi f$$

（实际压杆）

钢材牌号		钢材厚度或直径(mm)	强度设计值			屈服强度 f_y	抗拉强度 f_u
			抗拉、抗压、抗弯 f	抗剪 f_v	端面承压(刨平顶紧) f_{ce}		
碳素结构钢	Q235	≤16	215	125	320	235	370
		>16，≤40	205	120		225	
		>40，≤100	200	115		215	
	Q345	≤16	305	175	400	345	470
		>16，≤40	295	170		335	
		>40，≤63	290	165		325	
		>63，≤80	280	160		315	
		>80，≤100	270	155		305	

D. 0. 2　b 类截面轴心受压构件的稳定系数应按表 D. 0. 2 取值。

表 D. 0. 2　b 类截面轴心受压构件的稳定系数 φ

λ/ε_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.994
10	0.992	0.991	0.989	0.987	0.985	0.983	0.981	0.978	0.976	0.973
20	0.970	0.967	0.963	0.960	0.957	0.953	0.950	0.946	0.943	0.939
30	0.936	0.932	0.929	0.925	0.921	0.918	0.914	0.910	0.906	0.903
40	0.899	0.895	0.891	0.886	0.882	0.878	0.874	0.870	0.865	0.861
50	0.856	0.852	0.847	0.842	0.837	0.833	0.828	0.823	0.818	0.812
60	0.807	0.802	0.796	0.791	0.785	0.780	0.774	0.768	0.762	0.757
70	0.751	0.745	0.738	0.732	0.726	0.720	0.713	0.707	0.701	0.694
80	0.687	0.681	0.674	0.668	0.661	0.654	0.648	0.641	0.634	0.628
90	0.621	0.614	0.607	0.601	0.594	0.587	0.581	0.574	0.568	0.561
100	0.555	0.548	0.542	0.535	0.529	0.523	0.517	0.511	0.504	0.498

ε_k为钢号修正系数，其值为235 与钢材牌号中屈服点数值的比值的平方根。

§ 9.5 压杆的稳定性校核

理想压杆的稳定性条件：

$$F \le \frac{F_{cr}}{n_{st}} \quad 或 \quad n = \frac{F_{cr}}{F} \ge n_{st}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \frac{F_{cr}/A}{n_{st}} = \frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$ —— 临界压力

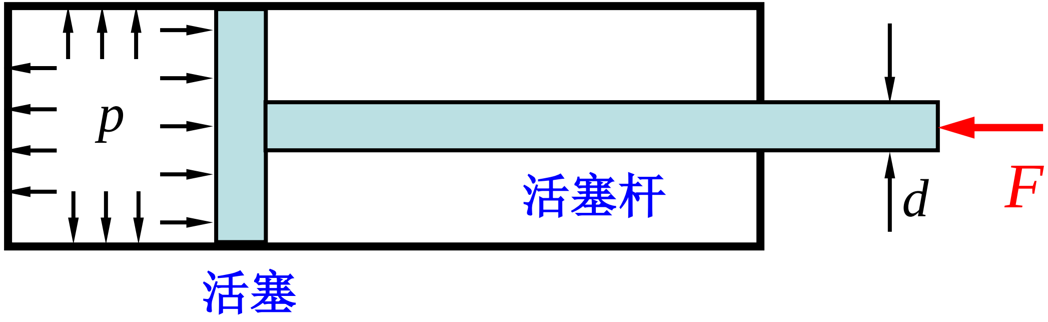
n_{st} —— 稳定安全因数

注意：由于压杆的临界力是根据整杆的失稳来确定的，当压杆由于钉孔等原因而使截面有削弱时，在稳定计算中不必考虑这种截面局部削弱的影响，而仍以毛截面积进行计算。

但在强度计算中，应考虑这种截面局部削弱的影响，并按净面积进行计算。

例题1　空气压缩机活塞杆由45钢制成，长度 l =703mm，直径 d=45mm。$\sigma_s = 350$MPa，$\sigma_p = 280$MPa，E=210GPa。最大压力 $F_{max} = 41.6$kN。规定稳定安全因数为 $n_{st} = 8–10$。试校核其稳定性。

解：活塞杆简化成两端铰支杆 $\mu = 1$



截面为圆形 $i = \sqrt{\dfrac{I}{A}} = \dfrac{d}{4}$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{d/4} = \frac{4\times 0.703}{45\times 10^{-3}} = 62.5 \qquad \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = 86$$

$\lambda < \lambda_p$ 不能用欧拉公式计算临界压力。

用直线公式，查表得：

a= 461MPa， b= 2.568 MPa

$$\lambda_s = \frac{a-\sigma_s}{b} = \frac{461-350}{2.568} = 43.2 < \lambda$$

$\lambda_s < \lambda < \lambda_p$ 中等柔度压杆

用直线公式计算临界应力

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 300\,\text{MPa}$$

临界压力 $F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 477\ \text{kN}$

活塞杆的工作安全因数 $n = \dfrac{F_{cr}}{F} = \dfrac{477}{41.6} = 11.5 > n_{st} = 8-10$

满足稳定性要求。

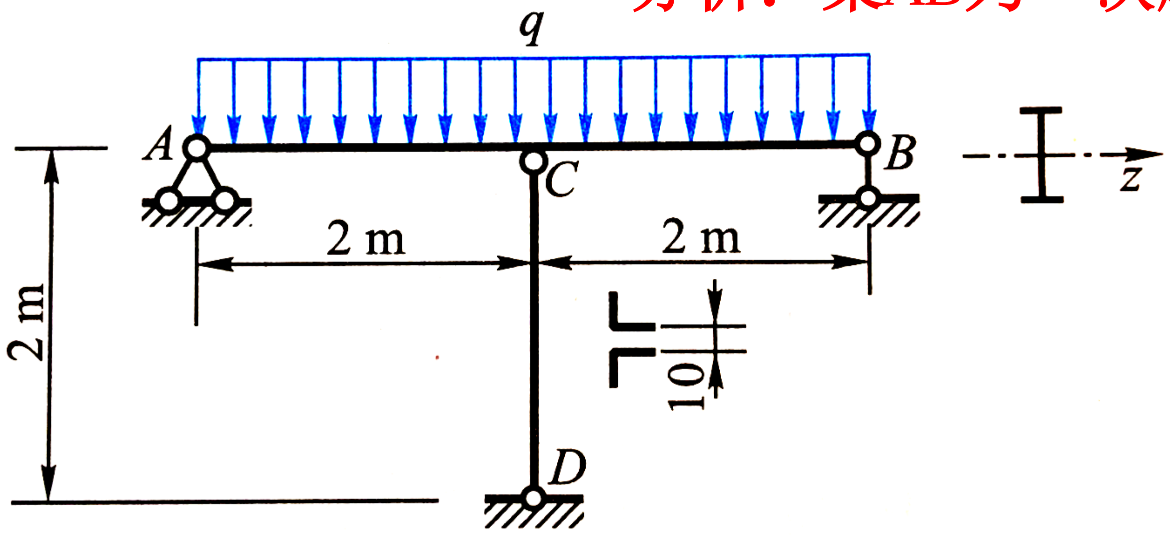
Q195、 Q215、 Q235、 Q275 是碳素结构钢

45钢是优质碳素结构钢（σ_s=355MPa）

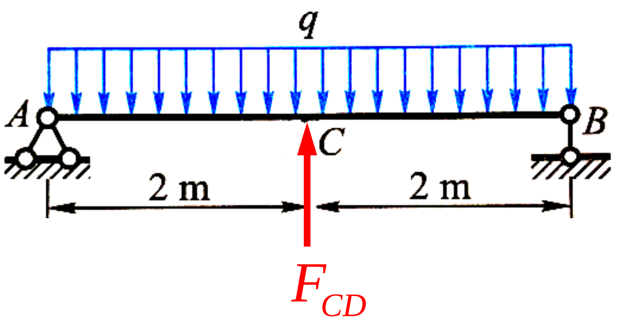
材料	a/MPa	b/MPa
Q235 钢($\sigma_b \geqslant 372$ MPa, $\sigma_s = 235$ MPa)	304	1.12
优质碳钢($\sigma_b \geqslant 471$ MPa, $\sigma_s = 306$ MPa)	461	2.568

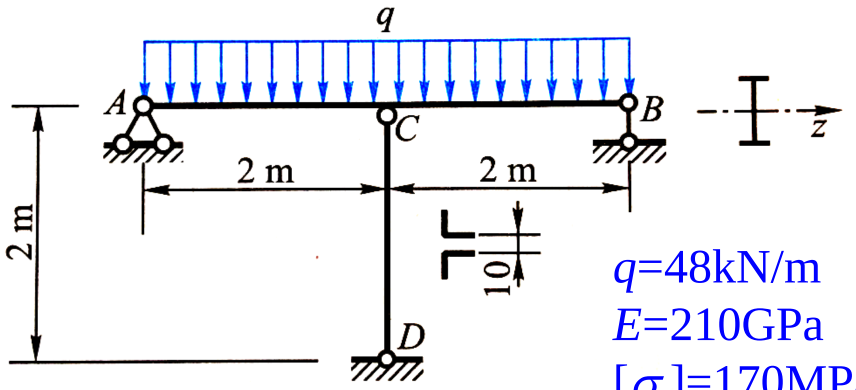
例2 图示结构中钢梁AB及立柱CD分别由 I 16工字钢和连成一体的两根∠63mm×5mm的等边角钢制成。梁及柱的材料均为Q235钢，均布荷载集度q=48kN/m。E=210GPa，[σ]=170MPa，稳定安全因数为n_{st}=2.5。试校核梁和立柱是否安全。

分析：梁AB为一次超静定梁



解:





q=48kN/m
E=210GPa
$[\sigma]$=170MPa

解除CD杆，取基本静定系如图

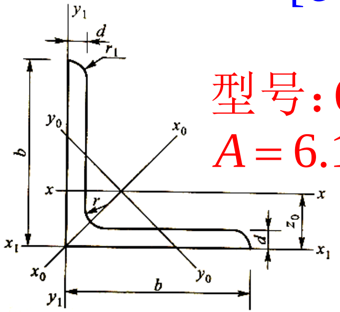
变形协调方程

$$w_C = \Delta l_{CD} \Longrightarrow -\frac{5ql_{AB}^4}{384EI_{AB}} + \frac{F_{CD}l_{AB}^3}{48EI_{AB}} = -\frac{F_{CD}l_{CD}}{EA_{CD}}$$

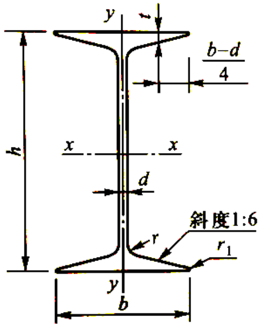
$$F_{CD} = \frac{5ql_{AB}^4}{384I_{AB}} \Bigg/ \left(\frac{l_{AB}^3}{48I_{AB}} + \frac{l_{CD}}{A_{CD}}\right) \Longrightarrow F_{CD} = 118.4\text{kN}$$

$$q = 48\text{kN}/\text{m}, \quad l_{AB} = 4\text{m}, \quad l_{CD} = 2\text{m}$$

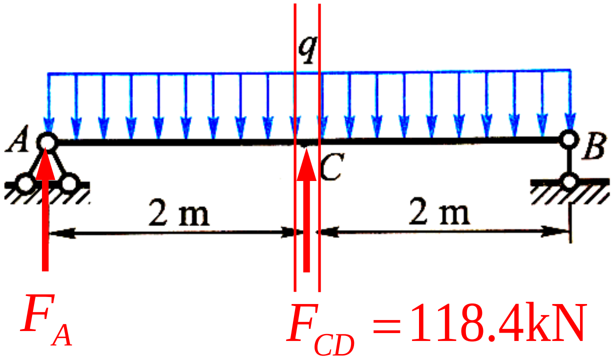
$$I_{AB} = 1130\text{cm}^4, \quad A_{CD} = 2\times 6.143\text{cm}^2$$



型号:6.3(5mm)
$A = 6.143\text{cm}^2$



型号： 16
$I_x = 1130\text{cm}^4$



I. 梁AB的强度校核 $F_{CD}=118.4\text{kN}$

危险截面：C的左截面（或右截面）

$$F_A=(q\times l_{AB}-F_{CD})/2=36.8\text{kN}$$

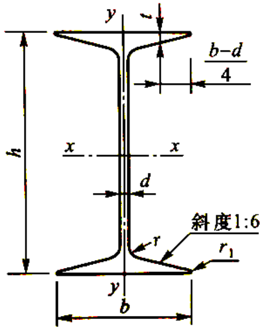
$$M_{\max}=22.4\text{kN}\cdot\text{m}$$（上部受拉）

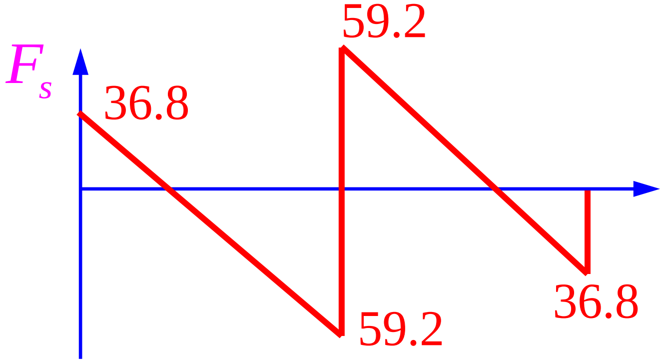
$$F_s=59.2\text{kN}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{22.4\times10^3}{141\times10^{-6}}=158.9\text{MPa}<[\sigma]=170\text{MPa}$$

型号:16

$W_x=141\text{cm}^3$





梁AB的强度满足要求

$$x=\frac{F_A}{q}=\frac{36.8}{48}=0.767\text{m}$$处： $$M_1=\tfrac{1}{2}\times0.767\times36.8=14.1\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C=F_A\times l_{AC}-\tfrac{1}{2}ql_{AC}^2=-22.4\text{kN}\cdot\text{m}$$（上部受拉）

II. 立柱CD的稳定性校核

$\because \quad I_y < I_z$ 　则y轴为弱轴

$$I_y = 2 \times 23.2 = 46.4\ \text{cm}^4$$

$$I_z = 2 \times [23.2 + (1.74 + 0.5)^2 \times 6.143]$$

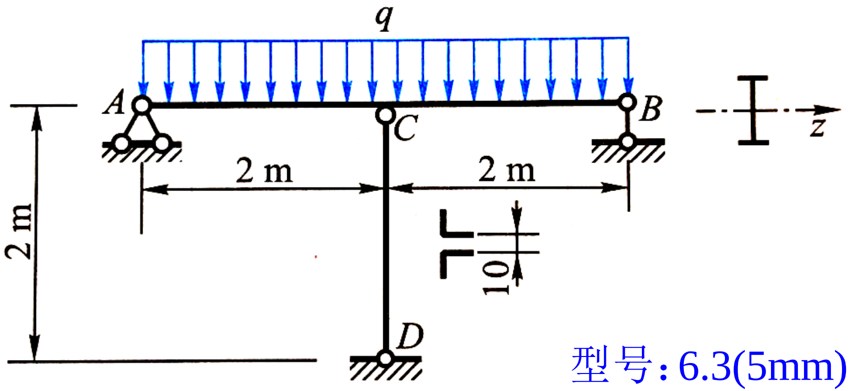
$$= 108.0\text{cm}^4$$

$$i_y = \sqrt{\frac{2I_{x-x}}{2A}} = 1.94\text{cm}$$

$$\lambda = \frac{\mu l_{CD}}{i_y} = \frac{1 \times 2}{1.94 \times 10^{-2}} = 103.0$$

$$> \lambda_p = 100$$ （Q235钢）

可用欧拉公式计算临界应力



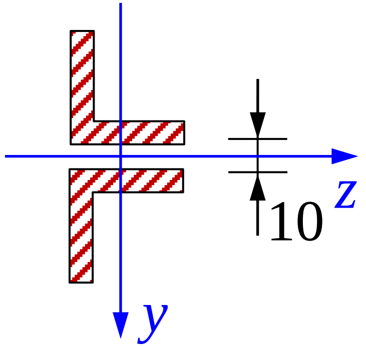
型号：6.3(5mm)

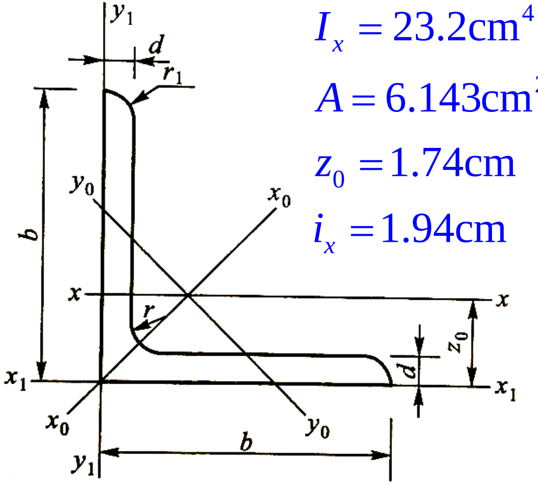
$I_x = 23.2\text{cm}^4$

$A = 6.143\text{cm}^2$

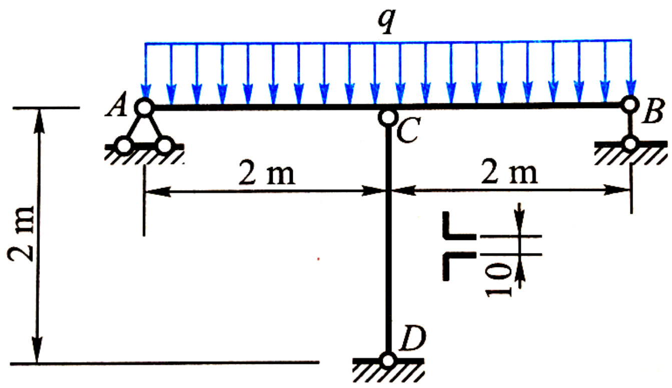
$z_0 = 1.74\text{cm}$

$i_x = 1.94\text{cm}$





$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{103.0^2} = 195.4\ \text{MPa}$$



$F_{CD} = 118.4\text{kN}$

立柱CD的应力

$$\sigma = \frac{F_{CD}}{A_{CD}} = \frac{118.4 \times 10^3}{2 \times 6.143 \times 10^{-4}} = 96.4\text{MPa}$$

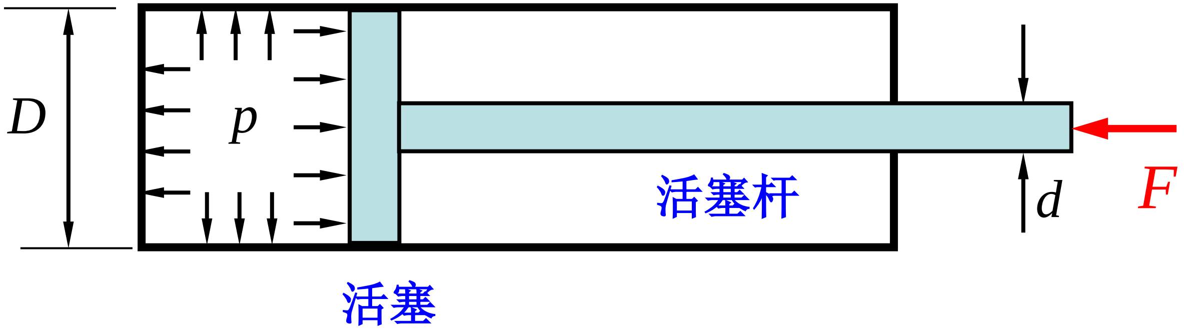
$$\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}} = \frac{195.4}{2.5} = 78.17\ \text{MPa}$$

$$\because \sigma > \frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}$$

立柱CD不满足稳定性要求。

压杆的截面设计

例题3 油缸活塞直经 $D = 65$mm，油压 p =1.2MPa。活塞杆长度 l=1250mm，材料为35钢，σ_p =220MPa，E = 210GPa，$n_{st} = 6$。试确定活塞杆的直径。

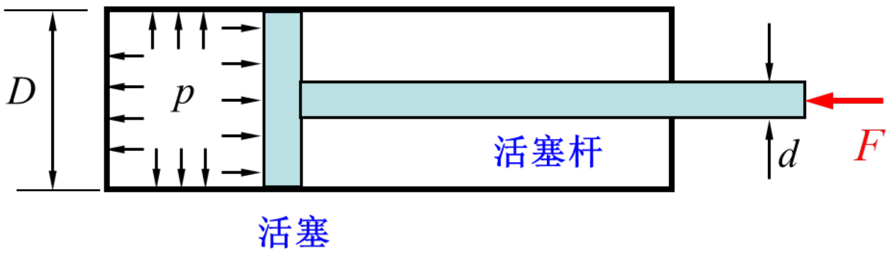


解：活塞杆承受的轴向压力为 $F = \dfrac{\pi D^2}{4} \cdot p = 3.98\ \text{kN}$

活塞杆应承受的临界压力为 $F_{cr} = n_{st} \cdot F = 6 \times 3.98 = 23.89\ \text{kN}$

$F_{cr} = 23.89\ \mathrm{kN}$

把活塞的两端简化为铰支座 $\mu=1$



l=1250mm

σ_p =220MPa

E = 210GPa

（1）先用欧拉公式确定直径

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E \frac{\pi d^4}{64}}{(\mu l)^2}$$

求得 $d = 24.6\mathrm{mm}$

（2）需验算欧拉公式的适用条件

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\frac{d}{4}} = 203.15 \qquad \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{210\times10^9}{220\times10^6}} = 97.0$$

$\lambda > \lambda_p$ 可用欧拉公式计算临界压力

即所得结果即为最终的正确结果！

若不满足欧拉公式的适用条件，需改变直径，重新计算直径并验算！

也可转换成正问题来计算！

$$d \longrightarrow \lambda \longrightarrow F_{cr} = \sigma_{cr} A \geq n_{st} F$$

$\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ （大柔度压杆）

$\sigma_{cr} = a - b\lambda$ （中等柔度压杆）

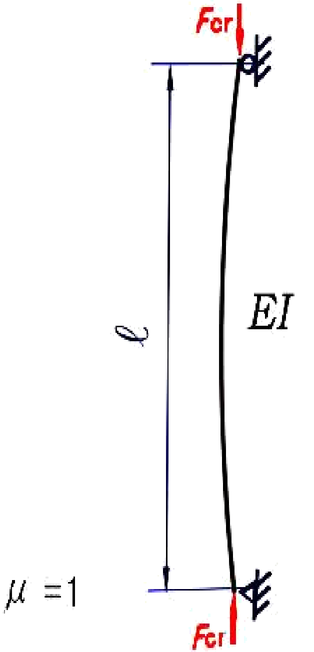
§ 9.6 提高压杆稳定性的措施

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$ 欧拉公式

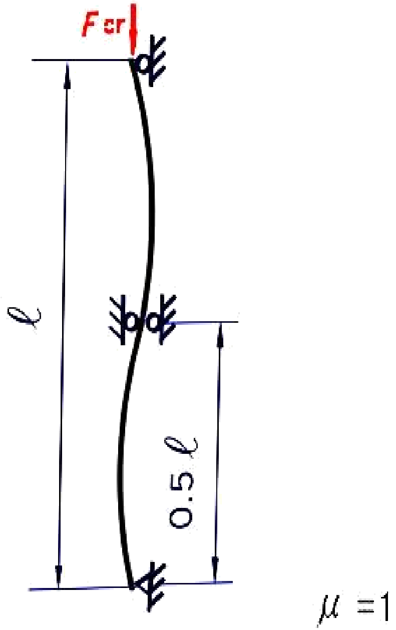
F_{cr} 越大，稳定性越好

- 减小压杆长度 l
- 减小长度系数 μ（增强约束）
- 增大截面惯性矩 I（合理选择截面形状）
- 增大弹性模量 E（合理选择材料）

1. 减小压杆长度 l

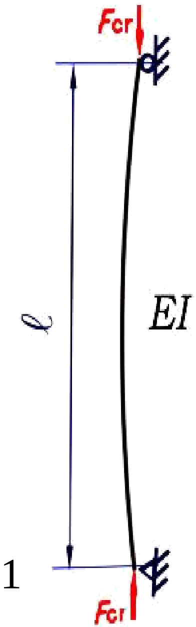


$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



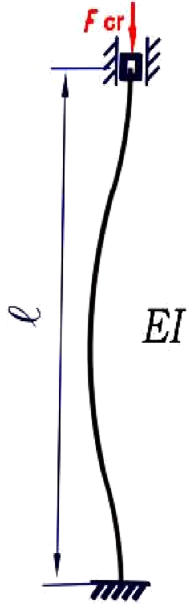
$$F_{cr}=4\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

2. 增强约束（减小长度系数 μ）



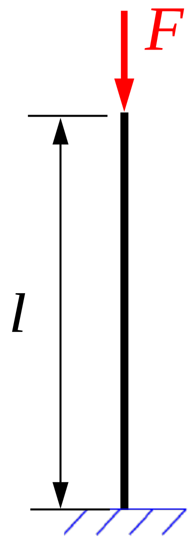
$\mu=1$

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



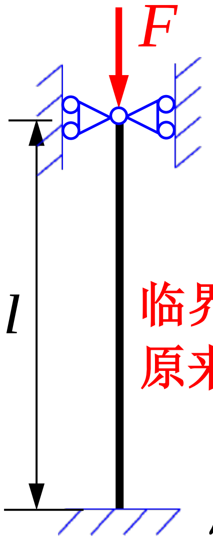
$\mu=0.5$

$$F_{cr}=4\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



$\mu=2$

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

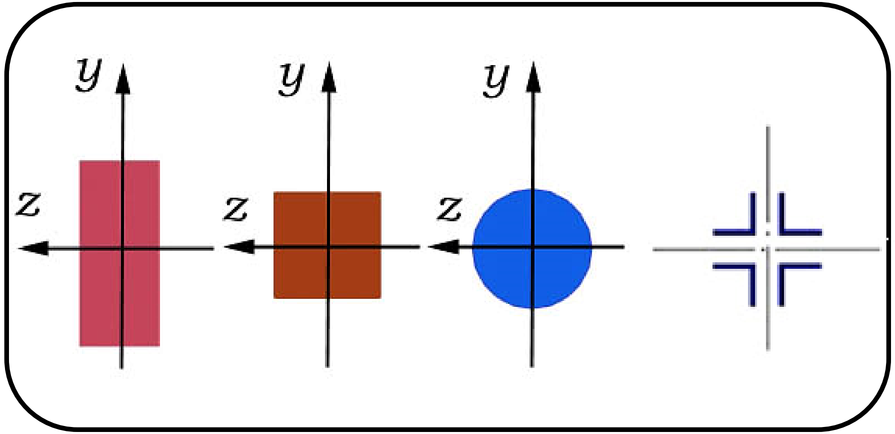


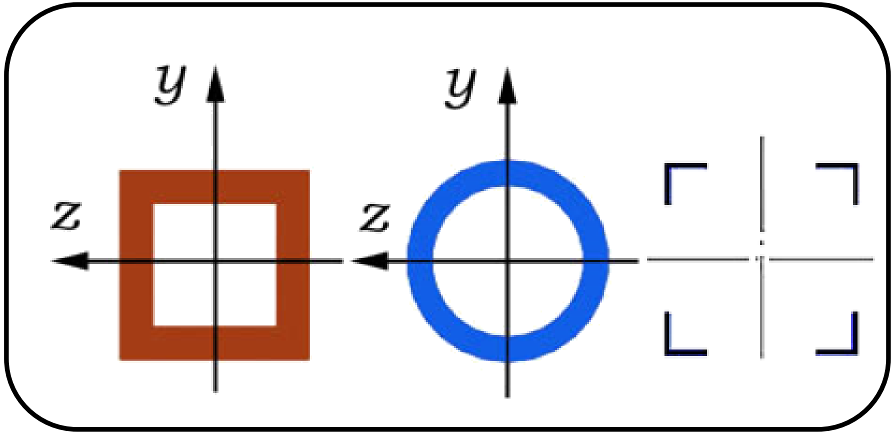
临界压力是原来的8倍多

$\mu=0.7$

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

3. 增大截面惯性矩 *I*（合理选择截面形状）





4. 增大弹性模量 *E*（合理选择材料）

由于各种钢材的*E*差别不大，对于大柔度压杆，根据临界压力欧拉公式可知，由优质钢材和Q235钢并无明显差别；对于中等柔度压杆，根据经验公式可知，临界应力与强度有关，因此，选用优质钢材在一定程度上可以提高临界应力。

谢 谢！

作业

P337：9.5

P340：9.15，9.16

对应第6版的题号 P326：9.5；P328：9.15，9.16

下次课开始讲第II册 第十三章 能量方法