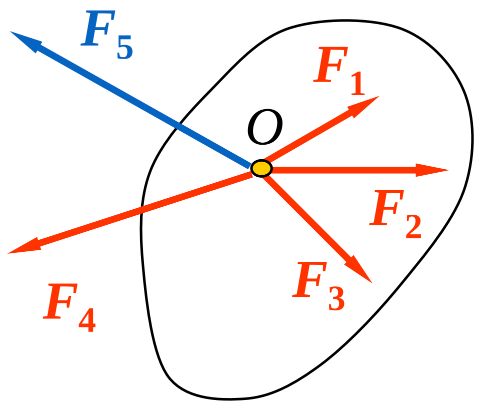
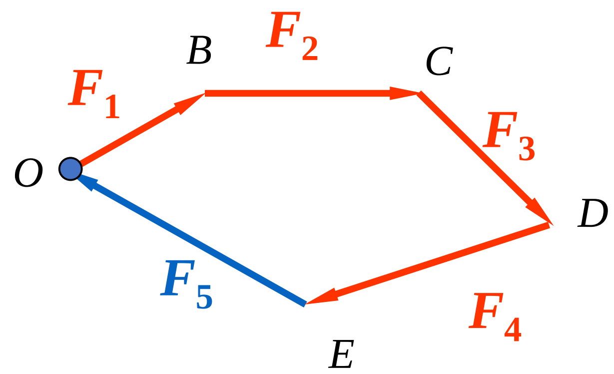
作业考核方法

- 每次作业按满分10分制计分，交了作业即得3分，另外7分按做题的正确率给分，助教会将分数记录在案。
- 判过的作业发下去后，会在1-2天内将参考答案上传在QQ群内。
- 每人只允许1次延期上交作业，不扣分。第2次或超过2次迟交作业，当次作业扣掉5分。
- 判过的作业如果有任何问题，请电子邮件告知我yguo@zju.edu.cn

汇交力系平衡的几何条件





力系的力多边形自行闭合，即力系中各力的矢量和(即合力)于零：

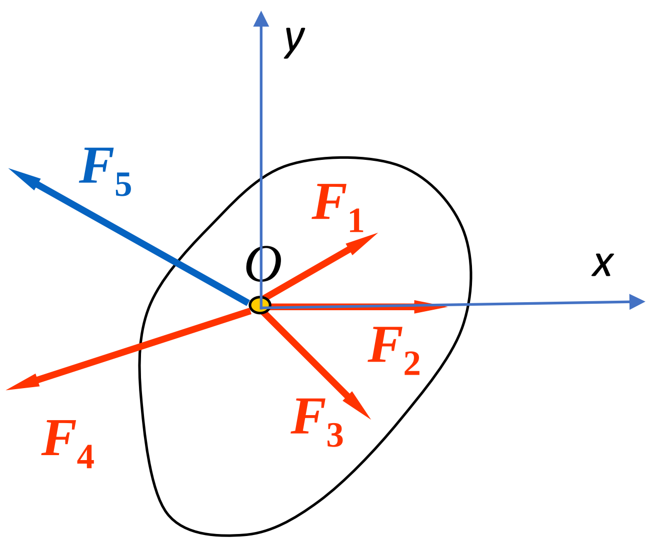
$$\boldsymbol{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$$

汇交力系平衡的解析条件

力系中各力在坐标轴中每一轴上的投影之和分别等于零。

空间汇交力系的平衡方程：

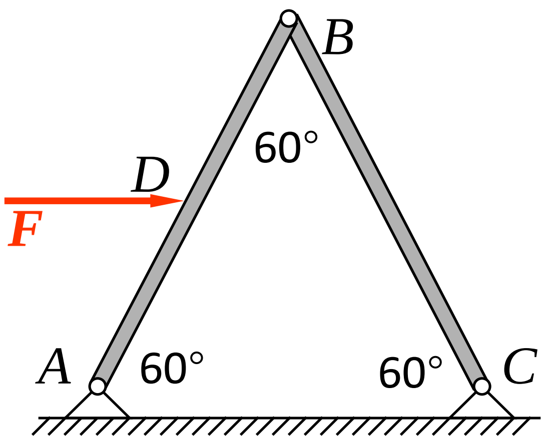
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$



几何平衡条件：

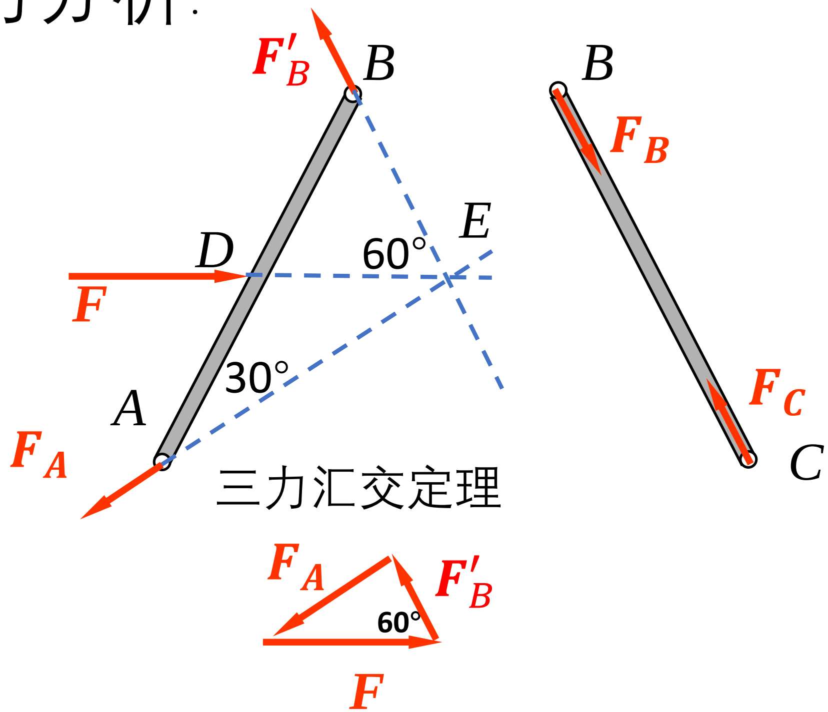
$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$$

例题： **等边三角形构架ABC的顶点A、B、C都用铰链连接，底边AC固定，而AB边的中点D作用有平行于固定边AC的力F=10 N，如图所示。不计各杆自重，试求出A点所受约束力。**



利用几何平衡条件求解:

(1) 受力分析:



- 将结构拆成构件，对各个构件进行受力分析
- 先分析受力少的构件，比如二力杆，可以较容易的确定作用力的方向

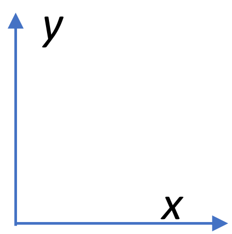
(2) 构件AB在三个汇交力的作用下平衡，根据几何平衡条件，**三个力矢量构成一个闭合的三角形,** 根据几何关系，可得

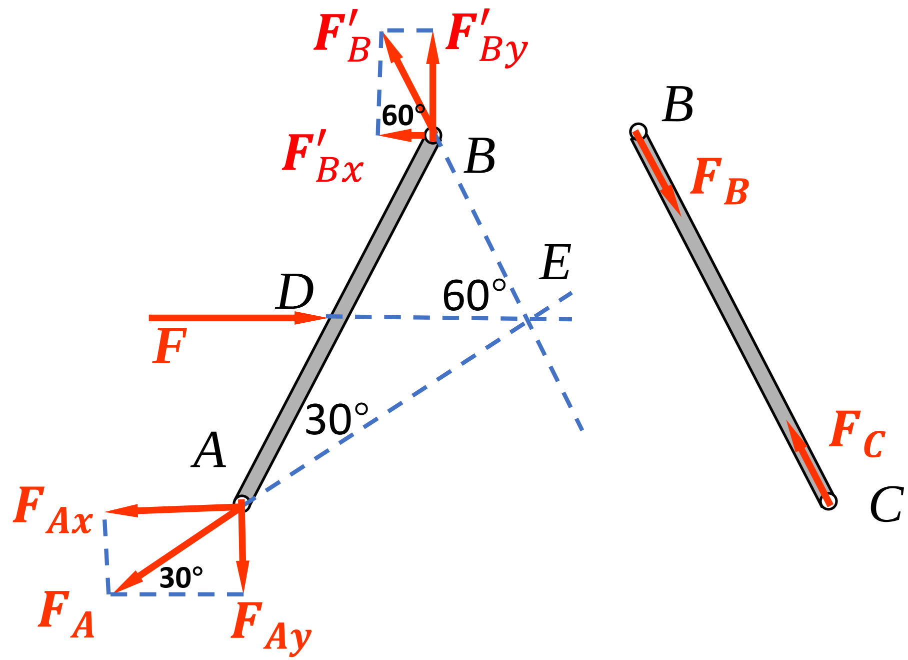
$$|F_A| = |F|\sin(60^0) = 5\sqrt{3}\ N$$

利用解析平衡条件求解:

(1) 受力分析:

- 建立直角坐标系
- 将各力沿着各个坐标轴分解（或者投影）





(2)各力沿着各个坐标轴的投影之和都为0:

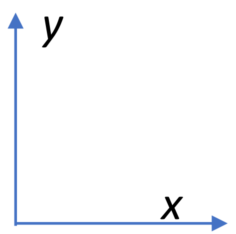
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \Rightarrow -F'_{Bx} + F - F_{Ax} = 0$$

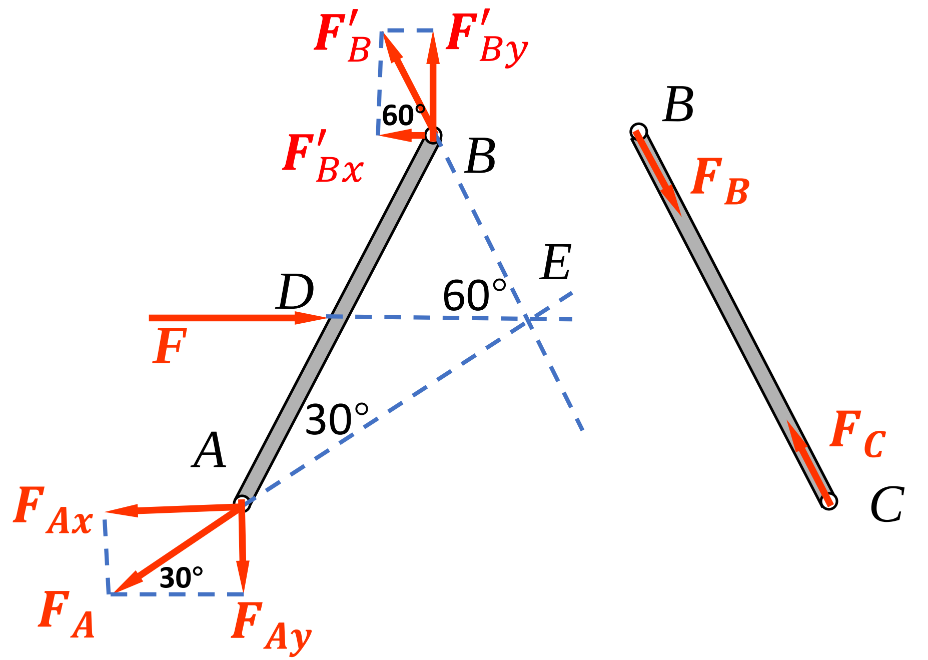
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \Rightarrow F'_{By} - F_{Ay} = 0$$

利用解析平衡条件求解:

(1) 受力分析:

- 建立直角坐标系
- 将各力沿着各个坐标轴分解（或者投影）





(2)各力沿着各个坐标轴的投影之和都为0:

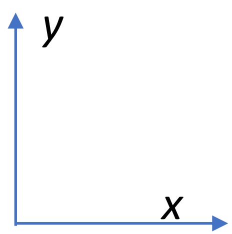
$$-F'_{Bx} + F - F_{Ax} = 0 \qquad -|F'_B|\cos(60^0) + |F| - |F_A|\cos(30^0) = 0$$

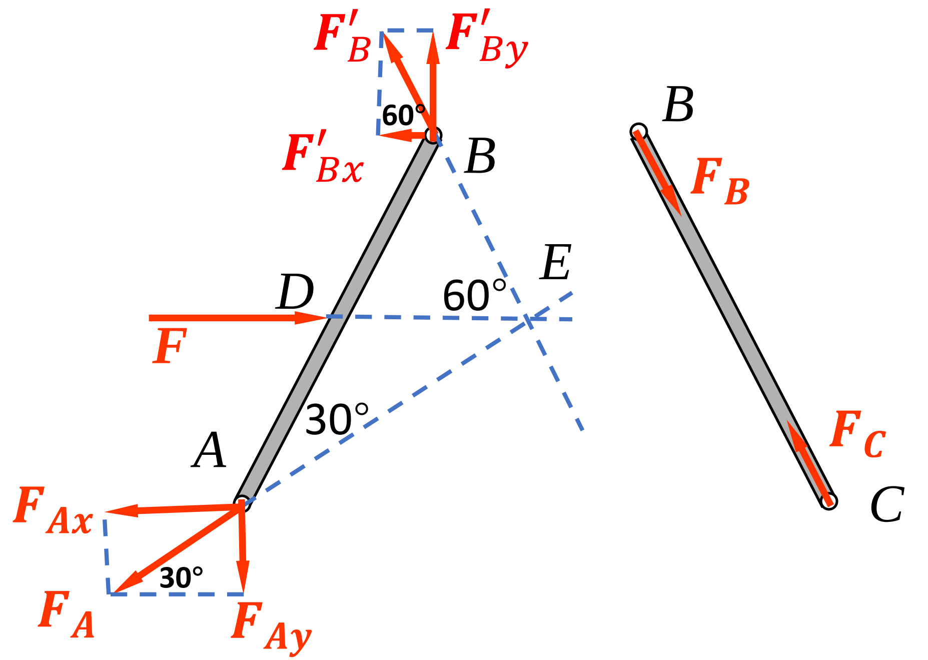
$$F'_{By} - F_{Ay} = 0 \qquad |F'_B|\,sin(60^0) - |F_A|\,sin(30^0) = 0$$

利用解析平衡条件求解:

(1) 受力分析:

- 建立直角坐标系
- 将各力沿着各个坐标轴分解（或者投影）





(2)各力沿着各个坐标轴的投影之和都为0:

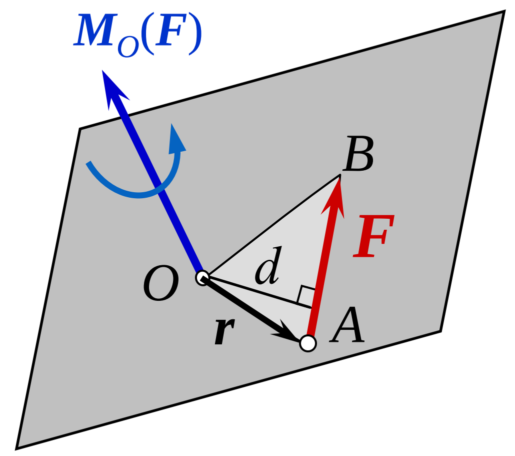
$$\left.\begin{aligned} -|F_B'|\cos(60^0) + |F| - |F_A|\cos(30^0) = 0 \\ |F_B'|\,sin(60^0) - |F_A|\,sin(30^0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad |F_A| = \frac{\sqrt{3}}{2}|F| = 5\sqrt{3}\,N$$

力对点的矩——使刚体绕点转动

力对点之矩的矢积表达式

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

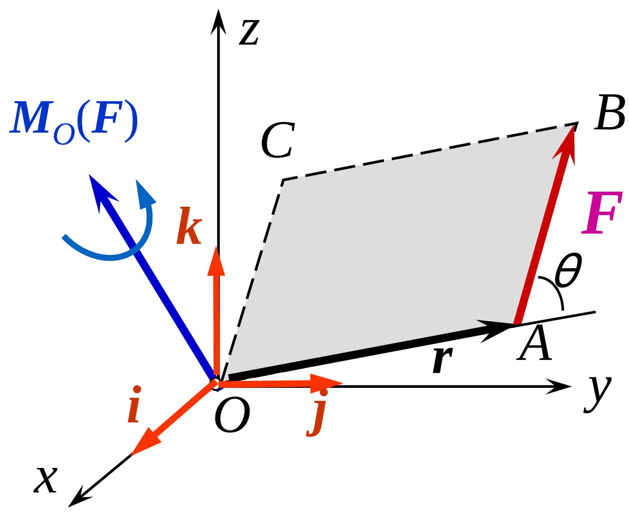
即力对点的矩矢等于矩心到该力作用线上任意点的矢径与该力的矢量叉积。



大小：$\left|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})\right| = \left|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\right|$

$$= rF\sin\theta = Fd$$

力F 乘以点到力的距离d



方向： **由矢量代数得知$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$垂直于$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{F}$所构成的平面，它的指向用右手定则判定。**

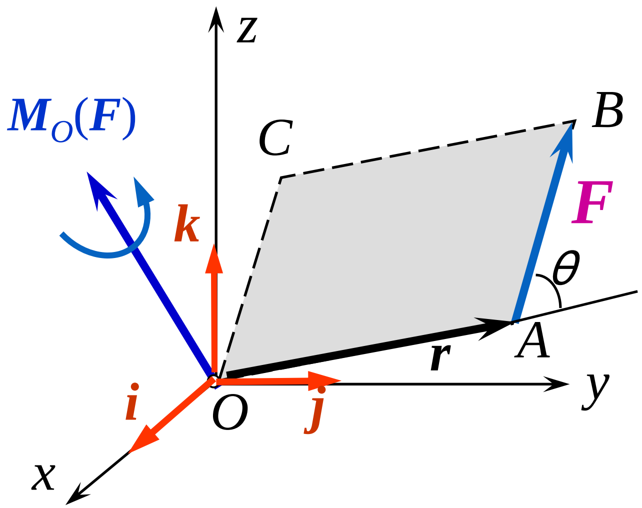
力对点的矩——使刚体绕点转动

力对点之矩解析表达式

矢径: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

力: $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$

把上两式代入 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$



得到力矩在直角坐标系下的解析表达:

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \times (F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k})$$

$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

力对点的矩——使刚体绕点转动

力对点之矩解析表达式

空间力对点取矩:

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \times \left(F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}\right)$$

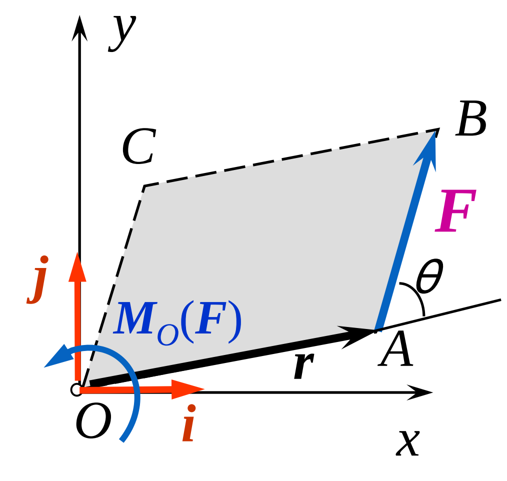
$$= \left(yF_z - zF_y\right)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\boldsymbol{k}$$

平面力对点取矩:

$$z = 0 \qquad F_z = 0$$

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \left(xF_y - yF_x\right)\mathbf{k}$$

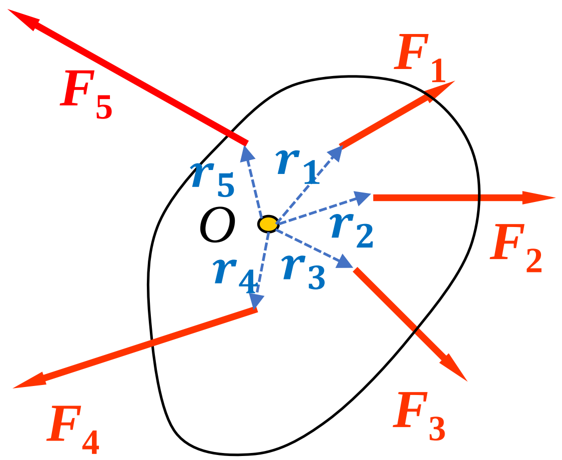
力矩只剩一个分量，该分量垂直于平面



空间任意力系的平衡条件

必须同时满足以下两个条件:

- **力系中所有各力的矢量和等于0**
- **各力对某一点的矩的矢量和等于0**



矢量平衡方程:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{0}$$

空间任意力系的平衡条件

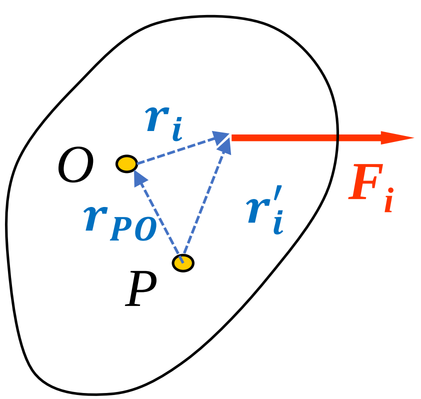
如果下面两个条件同时成立：

- **力系中所有各力的矢量和等于0，即** $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$
- **各力对某一点*O*的矩的矢量和等于0，即**

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}) = \boldsymbol{0}$$

那么，**各力对任意一点*P*的矩的矢量和也都等于0，即**

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}) = \boldsymbol{0}$$



证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i)$$

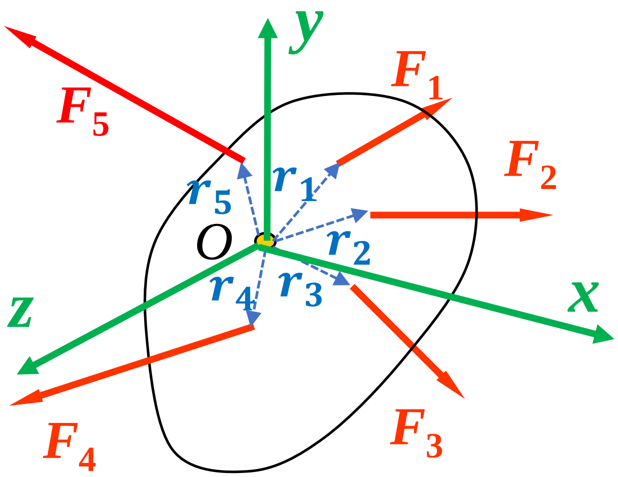
$$= \sum_{i=1}^{n} ((\boldsymbol{r}_{PO} + \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{F}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_{PO} \times \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}})$$

$$= \boldsymbol{r}_{PO} \times \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} + \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}})$$

$$= \boldsymbol{0}$$

空间任意力系的平衡条件



矢量平衡方程:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{0}$$

矢量方程在直角坐标系下沿着各坐标轴分解，得到解析形式的平衡方程：

$$\sum F_{ix} = 0\,, \quad \sum F_{iy} = 0\,, \quad \sum F_{iz} = 0$$

$$\sum M_x(\mathbf{F}_i) = 0\,, \quad \sum M_y(\mathbf{F}_i) = 0\,, \quad \sum M_z(\mathbf{F}_i) = 0$$

空间任意力系的平衡条件

空间任意力系有6个解析形式的平衡方程：

$$\sum F_{ix} = 0\,,\quad \sum F_{iy} = 0\,,\quad \sum F_{iz} = 0$$

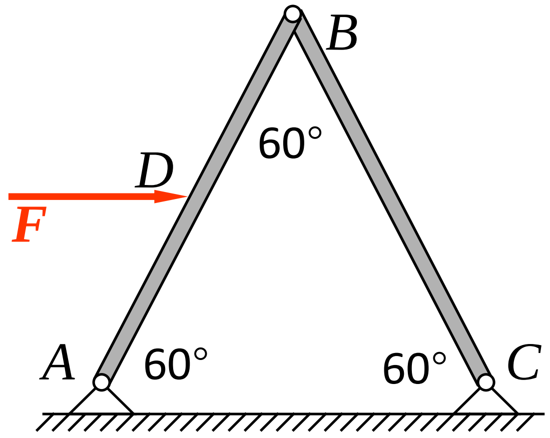
$$\sum M_x(\mathbf{F}_i) = 0\,,\quad \sum M_y(\mathbf{F}_i) = 0\,,\quad \sum M_z(\mathbf{F}_i) = 0$$

平面任意力系有3个解析形式的平衡方程：

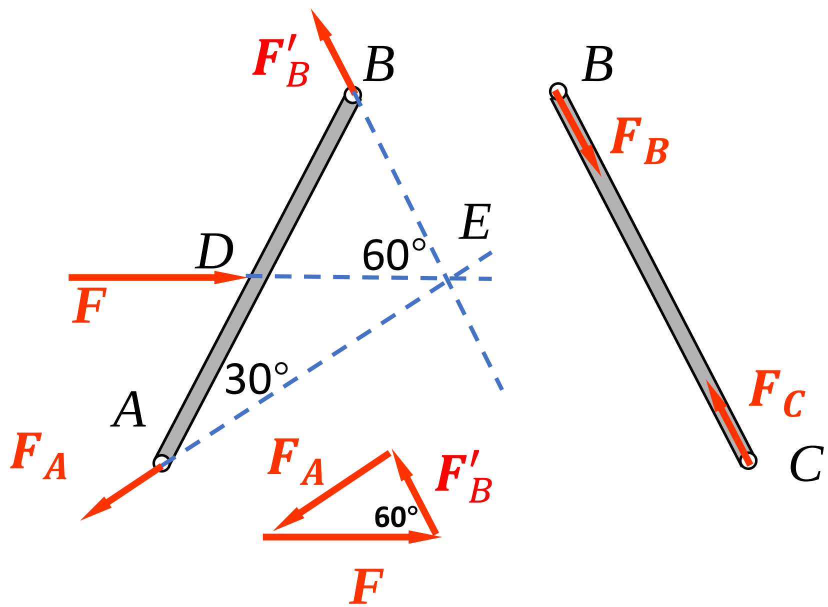
$$\sum F_{ix} = 0\,,\quad \sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_z(\mathbf{F}_i) = 0$$

例题： 等边三角形构架ABC的顶点A、B、C都用铰链连接，底边AC固定，而AB边的中点D作用有平行于固定边AC的力F=10 N，如图所示。不计各杆自重，试求出A点所受约束力。

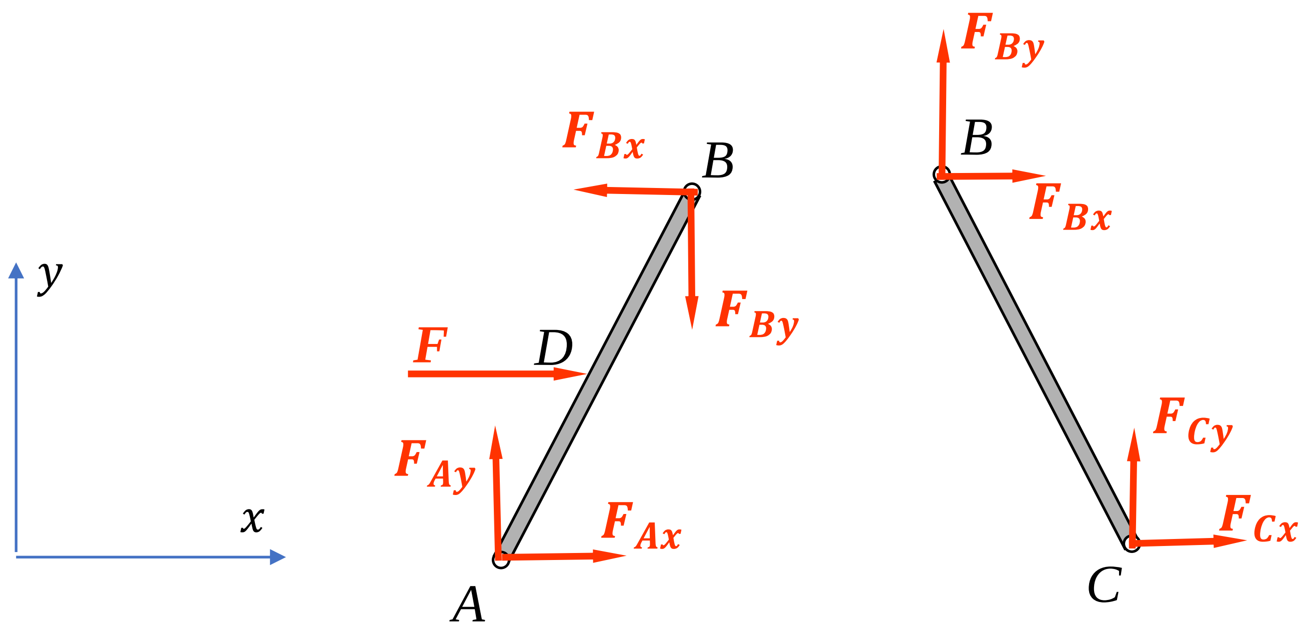


前面介绍的解法-汇交力系平衡条件



- 根据静力学二力平衡公理，确定出了B和C点处的约束力的方向
- 根据三力汇交定理，确定出了A点处的约束力的方向
- 能够确定每一个力的方向
- 力矢量构成的三角形闭合

利用平面任意力系平衡方程求解



- 建立直角坐标系
- 每个圆柱铰连接处，假定我们无法判断约束力的方向，所以认为约束力可以沿着坐标轴分解成两个独立的分量
- 3个约束，总共6个未知约束力
- 针对每个构件列力的平衡方程和力矩的平衡方程：每个构件3个方程，总共6个方程

平面任意力系有3个解析形式的平衡方程：

$$\sum F_{ix} = 0\,,\quad \sum F_{iy} = 0\,,\quad \sum M_z(\mathbf{F}_i) = 0$$

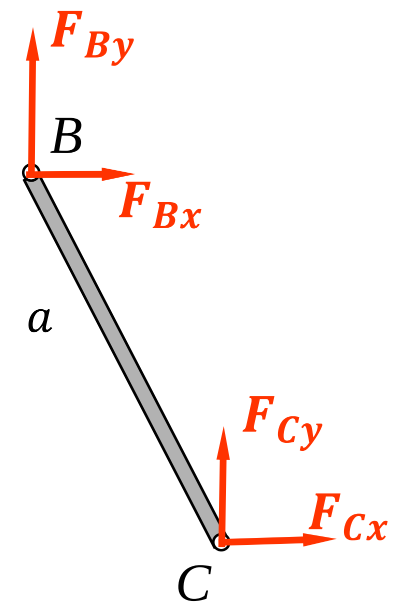
利用平面任意力系平衡方程求解

针对BC列平衡方程:

$\sum F_{ix}=0$: $\quad F_{Bx}+F_{Cx}=0$

$\sum F_{iy}=0$: $\quad F_{By}+F_{Cy}=0$

$\sum M_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{F_i})=0$: $\quad F_{Cx}\cdot a\cdot\cos(30^o)+F_{Cy}\cdot a\cdot\sin(30^o)=0$

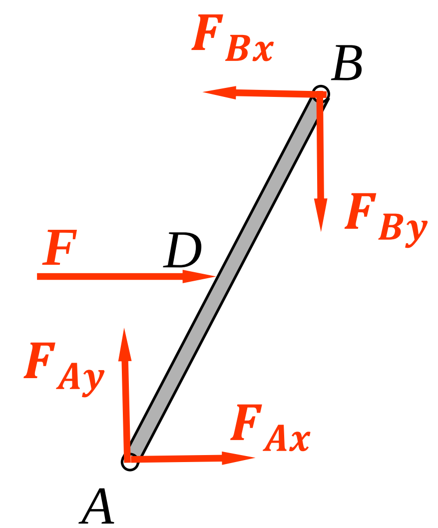


针对AB列平衡方程:

$\sum F_{ix}=0$: $\quad F_{Ax}-F_{Bx}+F=0$

$\sum F_{iy}=0$: $\quad F_{Ay}-F_{By}=0$

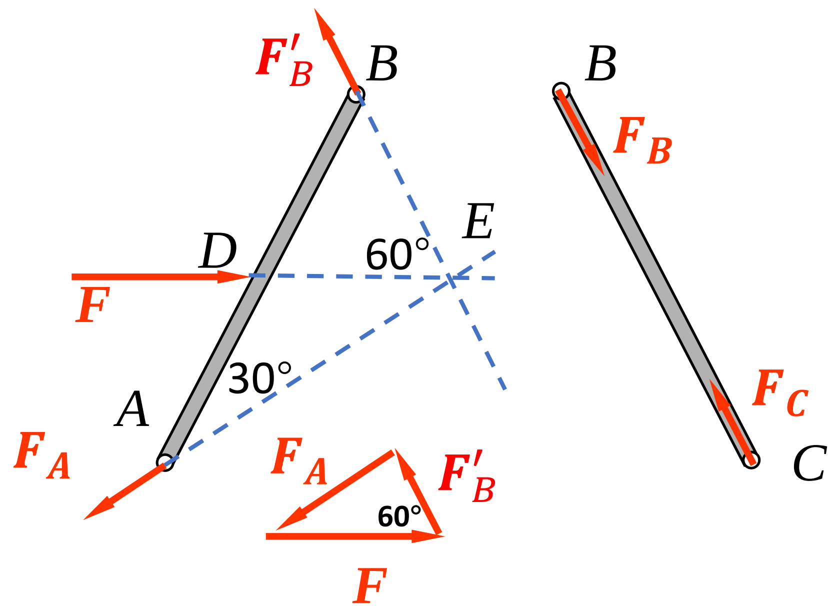
$\sum M_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{F_i})=0$: $\quad F_{Ax}\cdot a\cdot\cos(30^o)-F_{Ay}\cdot a\cdot\sin(30^o)+F\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos(30^o)=0$



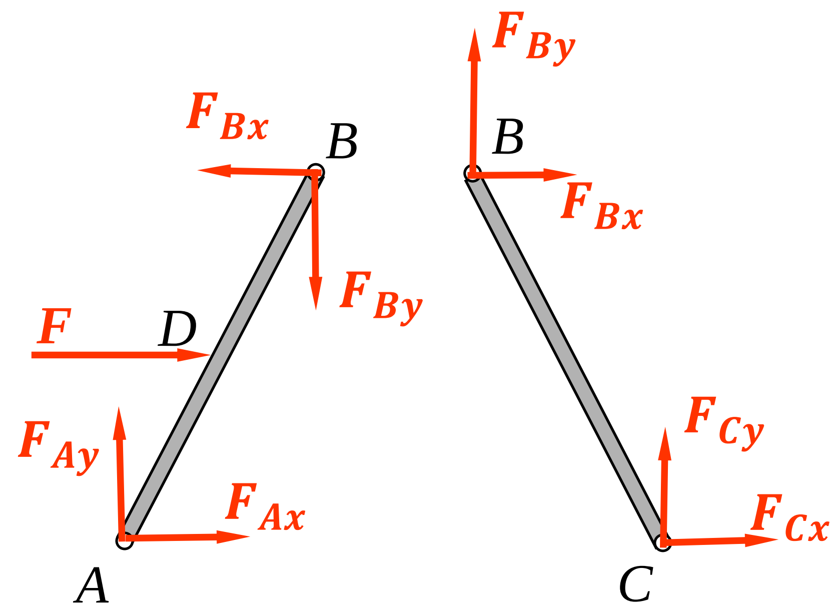
6个未知量，6个方程，可以求解出每一个未知量

小结

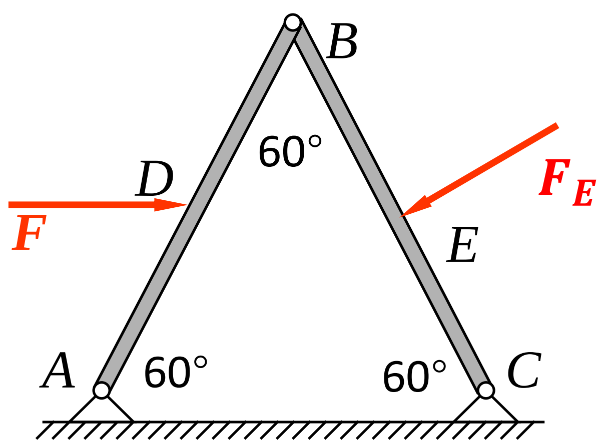
- 根据静力学“二力平衡公理”和“三力汇交定理”，**确定约束力的方向**，能够减少未知量和方程数目，简化计算过程。



- 如果事先**不能确定约束力的方向**，可以建立坐标系，将各力分解。针对每个构件列力的平衡方程和力矩平衡方程，采用任意力系平衡条件求解未知力。这种方法更具一般性，但是未知量和方程较多，求解过程繁琐。



例题： **等边三角形构架ABC的顶点A、B、C都用铰链连接，底边AC固定，而AB边的中点D作用有平行于固定边AC的力F=10 N，BC边的中点E作用有垂直于BC杆的力F_E=10 N, 如图所示。不计各杆自重，试求出A点所受约束力。**



能否直接确定A、B、C处的约束力的方向？

利用平面任意力系平衡方程求解

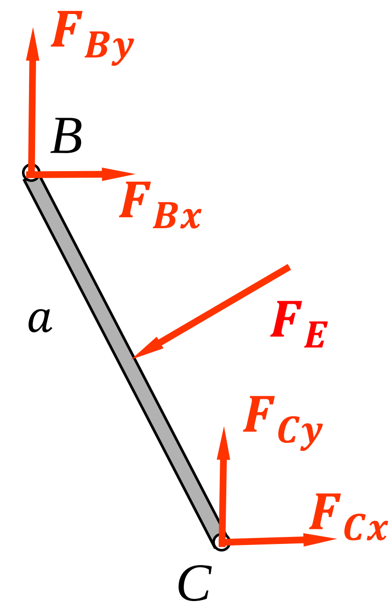
针对BC列平衡方程:

$\sum F_{ix}=0$:　　$F_{Bx}+F_{Cx}-F_{\mathrm{E}}\cdot\cos(30^{o})=0$

$\sum F_{iy}=0$:　　$F_{By}+F_{Cy}-F_{\mathrm{E}}\cdot sin(30^{o})=0$

$\sum M_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{F_i})=0$:

$$F_{Cx}\cdot a\cdot\cos(30^{o})+F_{Cy}\cdot a\cdot\sin(30^{o})-F_{E}\frac{a}{2}=0$$



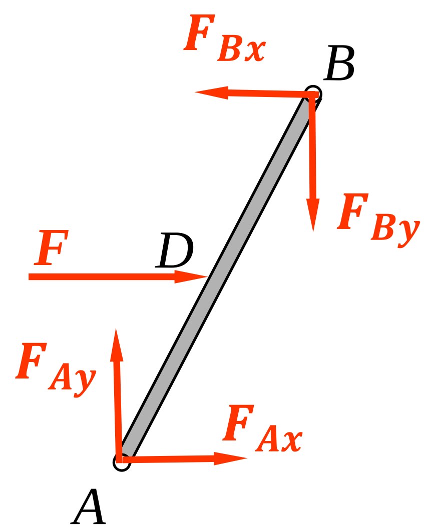
针对AB列平衡方程:

$\sum F_{ix}=0$:　　$F_{Ax}-F_{Bx}+F=0$

$\sum F_{iy}=0$:　　$F_{Ay}-F_{By}=0$

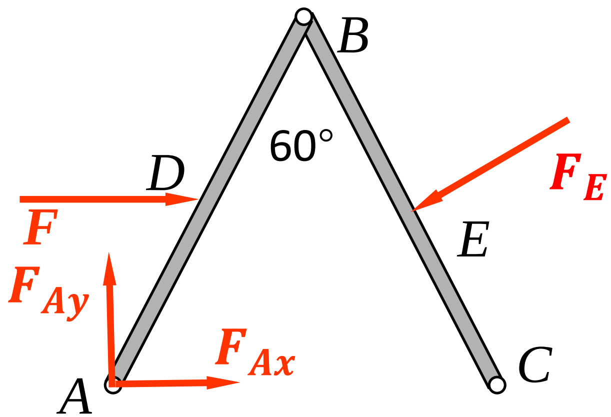
$\sum M_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{F_i})=0$:

$$F_{Ax}\cdot a\cdot\cos(30^{o})-F_{Ay}\cdot a\cdot\sin(30^{o})+F\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos(30^{o})=0$$



6个未知量，6个方程，可以求解出每一个未知量

整体法“巧”解静力平衡问题



将AB和BC构件看成一个整体，针对C点取矩，则各力矩的代数和为0：

$$\sum M_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{F_i})=0: \qquad -F_{\mathrm{Ay}}\cdot a-F\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos(30^o)+F_E\frac{a}{2}=0$$

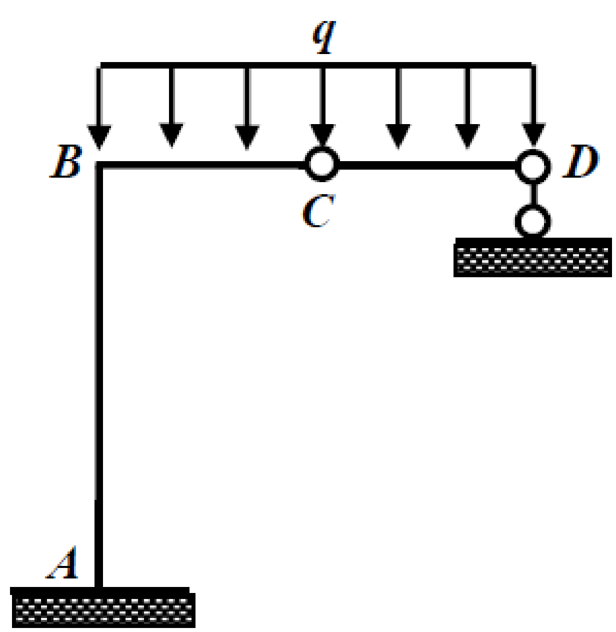
对于AB构件，针对B点取矩，则各力矩的代数和为0：

$$\sum M_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{F_i})=0: \qquad F_{Ax}\cdot a\cdot\cos(30^o)-F_{Ay}\cdot a\cdot\sin(30^o)+F\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos(30^o)=0$$

F_{Ax}和F_{Ay}可以通过以上两个方程求解出来。

一、图示平面构架，A 端固定，C 处光滑铰连接，D 端滑动铰支座约束，杆 CD 与 BC 水平，AB 垂直，长度 $AB=2b$，$BC=CD=b$。杆 BC 与 CD 受垂直均匀分布力作用，集度为 q，各杆重不计。

求：（1）固定端 A 的约束力及力偶；（2）铰 C 的约束力。



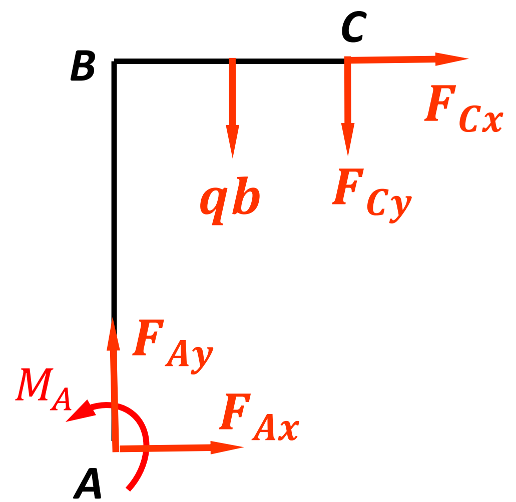
针对各个构件列平衡方程求解

针对ABC列平衡方程:

$\sum F_{ix}=0$:　　$F_{Ax}+F_{Cx}=0$

$\sum F_{iy}=0$:　　$F_{Ay}-F_{Cy}-qb=0$

$\sum M_A(\boldsymbol{F_i})=0$:　　$M_A-F_{Cx}\cdot 2b-F_{Cy}\cdot b-qb\dfrac{b}{2}=0$

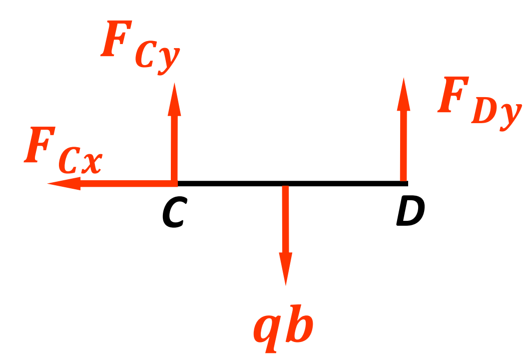


针对CD列平衡方程:

$\sum F_{ix}=0$:　　$-F_{Cx}=0$

$\sum F_{iy}=0$:　　$-F_{Cy}+F_{Dy}-qb=0$

$\sum M_C(\boldsymbol{F_i})=0$:　　$F_{Dy}\cdot b-qb\dfrac{b}{2}=0$



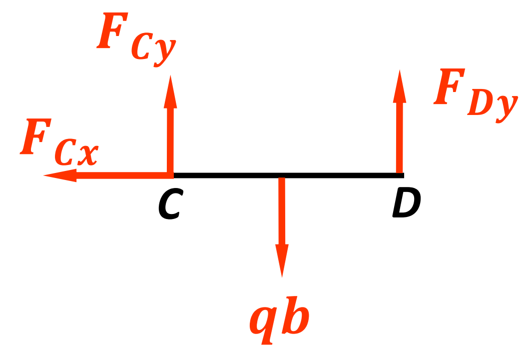
6个未知量，6个方程，可以求解出每一个未知量

整体法求解

针对CD，对C点取矩，列力矩平衡方程：

$$\sum M_C(\boldsymbol{F_i}) = 0: \qquad F_{Dy} \cdot b - qb\frac{b}{2} = 0$$

$$F_{Dy} = \frac{qb}{2}$$



将ABCD看成整体，列平衡方程：

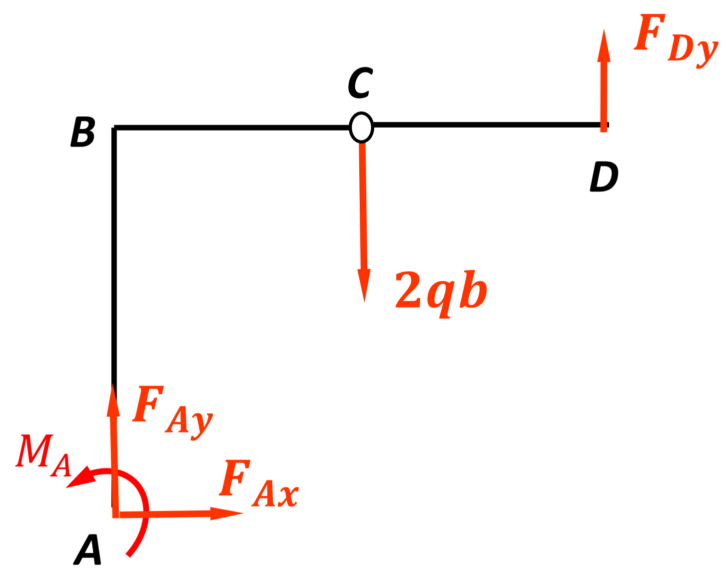
$$\sum F_{ix} = 0: \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad F_{Ay} + F_{Dy} - 2qb = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{3qb}{2}$$

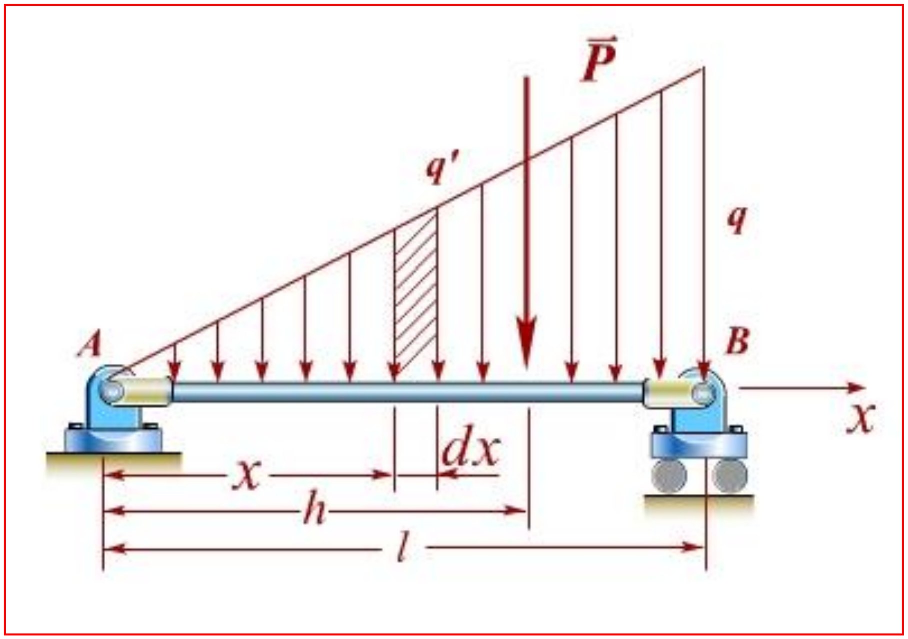
$$\sum M_A(\boldsymbol{F_i}) = 0: \qquad M_A - 2qb \cdot b + F_{Dy} \cdot 2b = 0$$

$$M_A = qb^2$$



已知：沿杆轴向的线性分布载荷集度$q'(x)=\frac{x}{l}q$

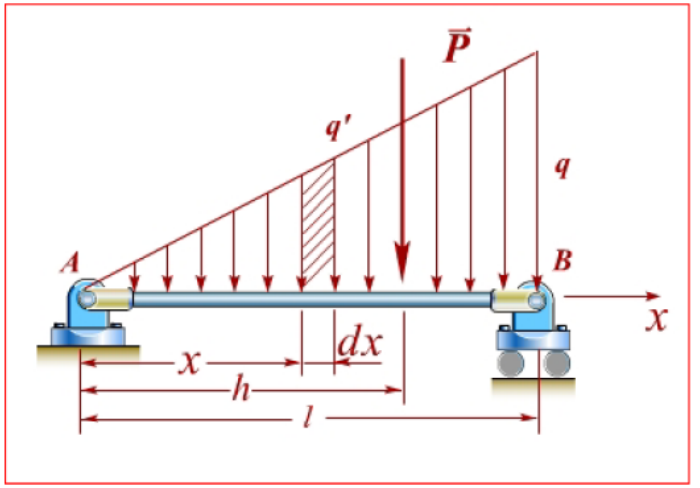
求：合力 $\vec{P}$ 大小、方向及合力作用线位置h.



例　　已知：q, l;

求：合力及合力作用线位置.

解：取微元如图



$$q' = \frac{x}{l} \cdot q$$

$$\boxed{P = \int_0^l \frac{x}{l} \cdot q \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} q l}$$

由合力矩定理　$P \cdot h = \int_0^l q' \, \mathrm{d}x \cdot x = \int_0^l \frac{x^2}{l} q \, \mathrm{d}x$

得　$\boxed{h = \frac{2}{3} l}$

思路：

1. 将杆离散成微元；
2. 合力P的大小等于作用在所有微元上的力的代数和；
3. 合力P的方向与作用在所有微元上的力的合力方向一致；
4. 作用线的位置使得P对A点取矩等于所有微元上的力对A点取矩的代数和。

课后作业：

一、图示平面构架，A 端固定，C 处光滑铰连接，D 端滑动铰支座约束，杆 CD 与 BC 水平，AB 垂直，长度 $AB=2b$，$BC=CD=b$。杆 BC 与 CD 受垂直线性分布力作用，集度为 q，各杆重不计。

求：（1）固定端 A 的约束力及力偶；（2）铰 C 的约束力。