第二章 控制系统的动态数学模型

线性微分方程

1. 未知函数的各阶导数都是一次；
2. 各阶导数的系数可以是常数或是自变量的已知函数；

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+2\frac{d\theta(t)}{dt}=1$$
$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+2\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}=1$$
$$t\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+2e^{3t}\frac{d\theta(t)}{dt}=\cos(4t)+1$$
$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+2\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2=\cos(4t)+1$$

从上至下为
线性、非线性、线性、非线性

拉普拉斯变换

对于指数级函数$x(t)$，有$\int_0^\infty x(t)e^{-\sigma t}dt<\infty$，则可定义$x(t)$的拉氏变换$X(s)$：

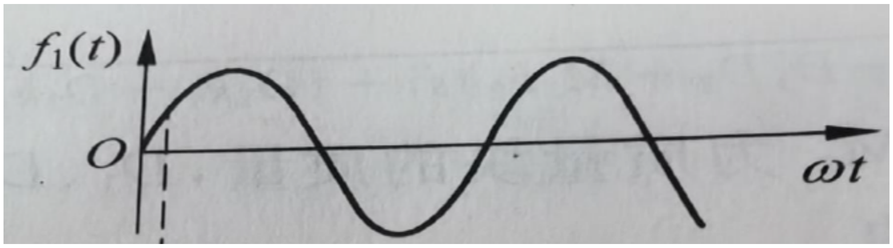
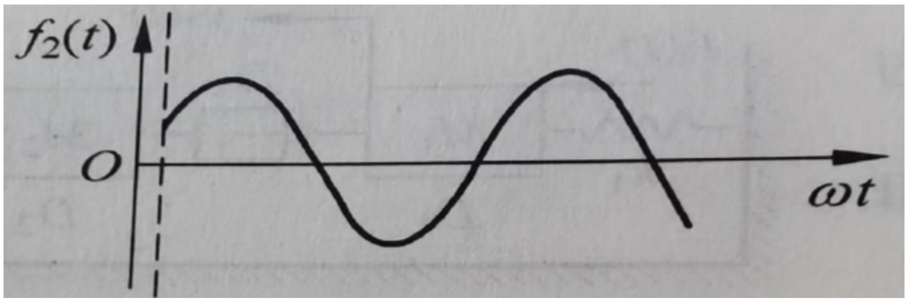
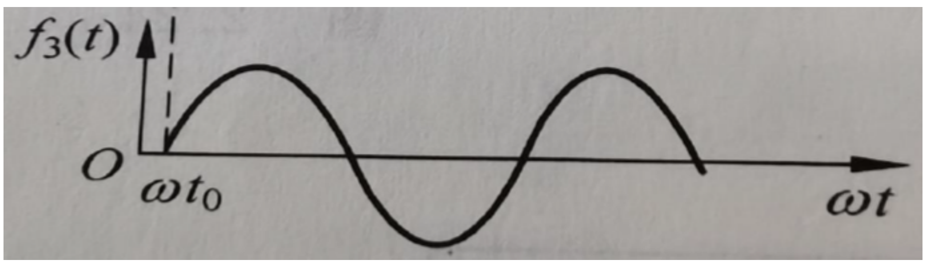
$$X(s)=L[x(t)]\triangleq\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

式中，称$X(s)$为象函数，$x(t)$为原函数。s为复变数，其量纲为时间的倒数，即频率。象函数$X(s)$的量纲为$x(t)$的量纲与时间量纲的乘积。

常用的拉氏变换和反变换

时间函数	象函数 (Laplace)
单位脉冲函数$\delta(t)=\begin{cases}\lim\limits_{t_0\to0}\dfrac{1}{t_0}, & 0<t<t_0\\ 0, & t\geq t_0\end{cases}$	1
单位阶跃函数$1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$	$\frac{1}{s}$
$t^n\ (n\geq0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}（t<0时函数值为0）	$\frac{1}{s-a}$
常数倍 $a\,x(t)$	$a\,X(s)$
叠加定理 $a\,x_1(t)+b\,x_2(t)$	$a\,X_1(s)+b\,X_2(s)$
微分 $\frac{d}{dt}x(t)$	$s\,X(s)-x(0^+)$
积分 $\int_0^t x(\tau)\,d\tau$	$\frac{X(s)}{s}+\frac{x^{-1}(0^+)}{s}$
衰减定理 $e^{-at}x(t)$	$X(s+a)$
延时定理 $x(t-a)\cdot u(t-a)$	$e^{-as}X(s)$

信号的截取与时移

图像	表达式
	$f_1(t)=\sin(\omega t)\cdot 1(t)$
	$f_2(t)=\sin(\omega t)\cdot 1(t-t_0)$
	$f_3(t)=\sin\left(\omega(t-t_0)\right)\cdot 1(t-t_0)$

拉氏变换的常用基本性质

叠加原理

若$L[f_1(t)]=F_1(s)$，$L[f_2(t)]=F_2(s)$，则有

$$L[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(s)+bF_2(s)$$

微分定理

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$$

根据数学归纳法不难推出

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\dot{f}(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

若$f(0)=\dot{f}(0)=\cdots=f^{(n-2)}(0)=f^{(n-1)}(0)=0$，则有

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)$$

积分定理

这里$f^{-1}(t)\triangleq\int f(t)dt$

$$L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0)}{s}$$

同理有

$$L\left[\underbrace{\int\cdots\int}_{n} f(t)(dt)^n\right]=\frac{F(s)}{s^n}+\frac{f^{-1}(0)}{s^n}+\frac{f^{-2}(0)}{s^{n-1}}+\cdots+\frac{f^{-n}(0)}{s}$$

若 $f^{-1}(0)=f^{-2}(0)=\cdots=f^{-n}(0)=0$，则有

$$L\left[\underbrace{\int\cdots\int}_{n} f(t)(dt)^n\right]=\frac{F(s)}{s^n}$$

衰减定理

$$L[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$$

延时定理

$$L\left[f(t-a)\cdot 1(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$$

初值定理

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

终值定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

拉氏反变换

直接积分求拉氏反变换通常较繁，对于一般的问题，都可以避免积分，而通过将象函数转化为拉氏变换表中包含的形式（一般是分式）。

例题

求$F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$的反拉氏变换

易知$F(s)=\dfrac{2}{s+3}-\dfrac{1}{s+2}$
查表可得

$$f(t)=2e^{-3t}-e^{-2t}$$

传递函数

传递函数为在零起始条件下，线性定常系统输出象函数$X_o(s)$与输入象函数$X_i(s)$之比

$$G(s)\triangleq\frac{X_o(s)}{X_i(s)}$$

具体地说，设线性定常系统的微分方程为：

$$a_0x_o^{(n)}(t)+a_1x_o^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}\dot{x}_o(t)+a_nx_o(t)=b_0x_i^{(m)}(t)+b_1x_i^{(m-1)}(t)+\cdots+b_{m-1}\dot{x}_i(t)+b_mx_i(t)\quad(n\geq m)$$

设系统的输入输出函数及其各阶导数**初始值均为零**，将上式拉氏变换，由微分定理推论：

$$\left(a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n\right)X_o(s)=\left(b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m\right)X_i(s)$$

传递函数为

$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

传递函数的特性

1. 传递函数是系统的固有特性，与输入情况无关。
2. 零点：传递函数分子为零时的s值

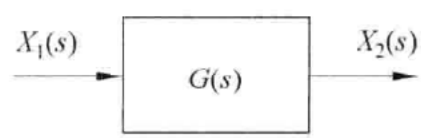
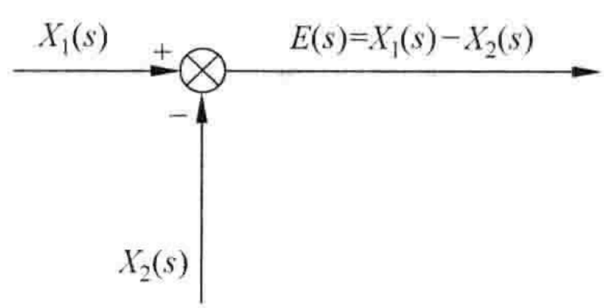
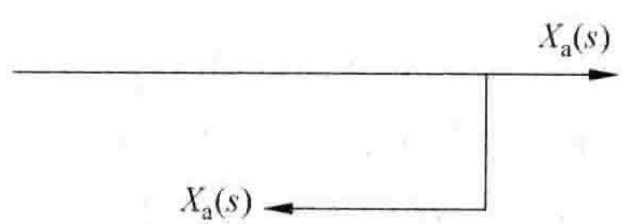
3. 极点：传递函数分母为零时的s值

典型环节的传递函数

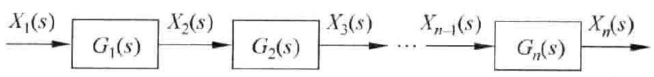
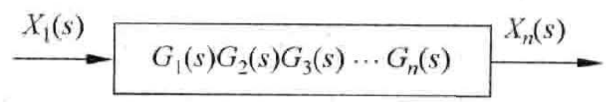
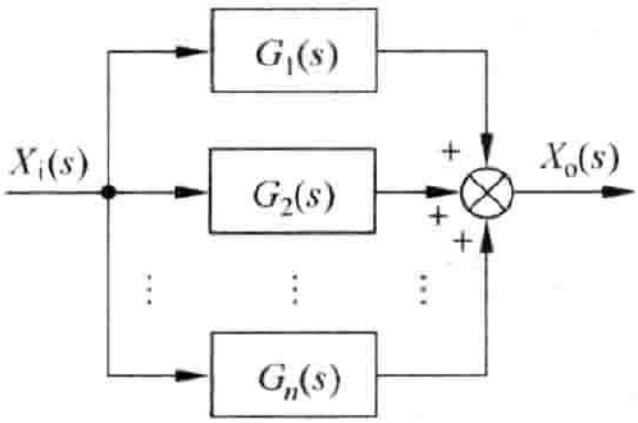
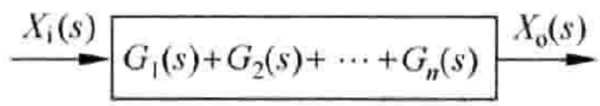
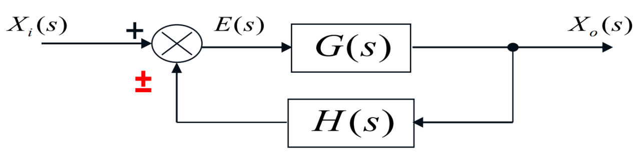
环节	时间函数	相函数	传递函数	例子
比例环节	$x_o(t) = kx_i(t)$	$X_o(s) = kX_i(s)$	$G(s) = k$	运算放大器、齿轮传动副
积分环节	$x_o(t) = \int_0^t x_i(t)\,dt$	$X_o(s) = \frac{1}{s}X_i(s)$	$G(s) = \frac{1}{s}$	RC 有源积分网络
微分环节	$x_o(t) = \frac{d}{dt}x_i(t)$	$X_o(s) = sX_i(s)$	$G(s) = s$	永磁式直流测速机、阻尼器
一阶惯性环节（机械系统）	$T\frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = x_i(t)$	$X_o(s) = \frac{1}{Ts+1}X_i(s)$	$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$	弹簧-阻尼系统
一阶惯性环节（滤波电路）	$\begin{cases} u_i(t) = i(t)R + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \\ u_o(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \end{cases}$	$\begin{cases} U_i(s) = \left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = \frac{RCs+1}{Cs}I(s) \\ U_o(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \\ \Rightarrow U_o(s) = \frac{1}{RCs+1}U_i(s) \end{cases}$	$G(s) = \frac{1}{RCs+1}$	RC 低通滤波电路（无源）
二阶振荡环节	$T^2\frac{d^2x_o(t)}{dt^2} + 2\zeta T\frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = x_i(t)$	$X_o(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}X_i(s)$	$G(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}$	满足 $0 < \zeta < 1$ 时为振荡系统（弹簧-质量-阻尼、二阶滤波器）
近似微分环节	$T\frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}$	$X_o(s) = \frac{s}{Ts+1}X_i(s)$	$G(s) = \frac{s}{Ts+1}$	无源微分网络

方块图

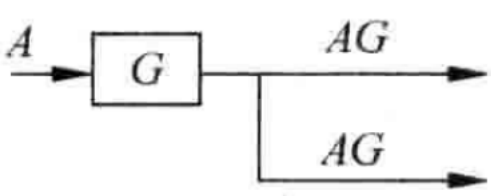
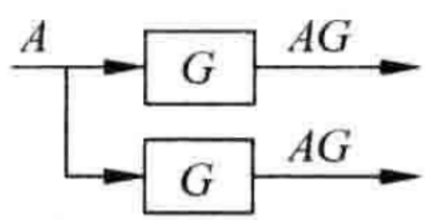
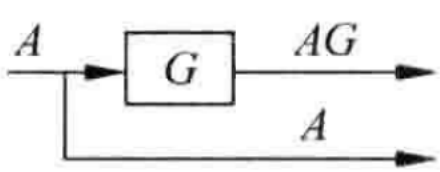
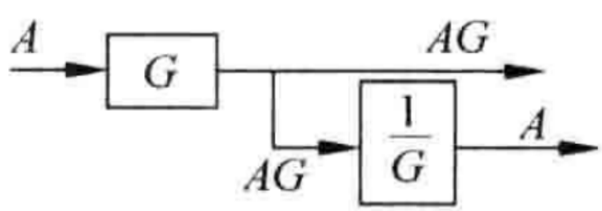
组成部分

组成部分	描述	图示
基本单元	图中指向方块的箭头表示输入，从方块出来的箭头表示输出，$G(s)$ 表示其传递函数。	
比较点	代表两个或两个以上的输入信号进行相加或相减的元件	
引出点	它表示信号引出和测量的位置，同一位置引出的几个信号，其大小和性质完全一样。	

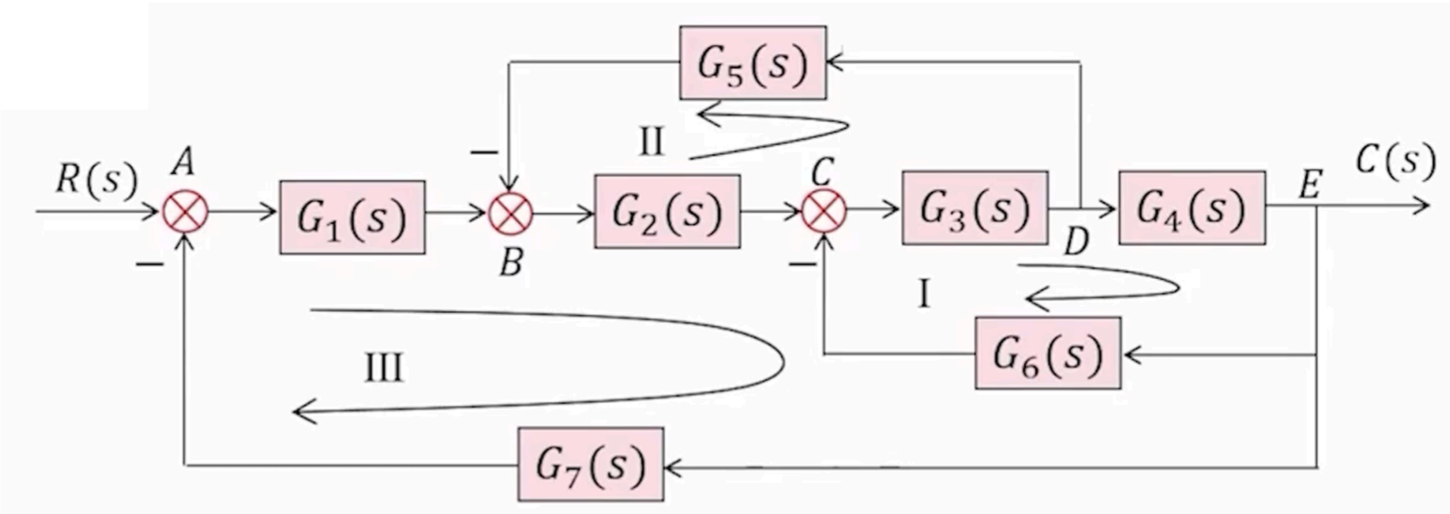
环节连接方式

连接方式	原框图	等效
串联		
并联		
反馈		

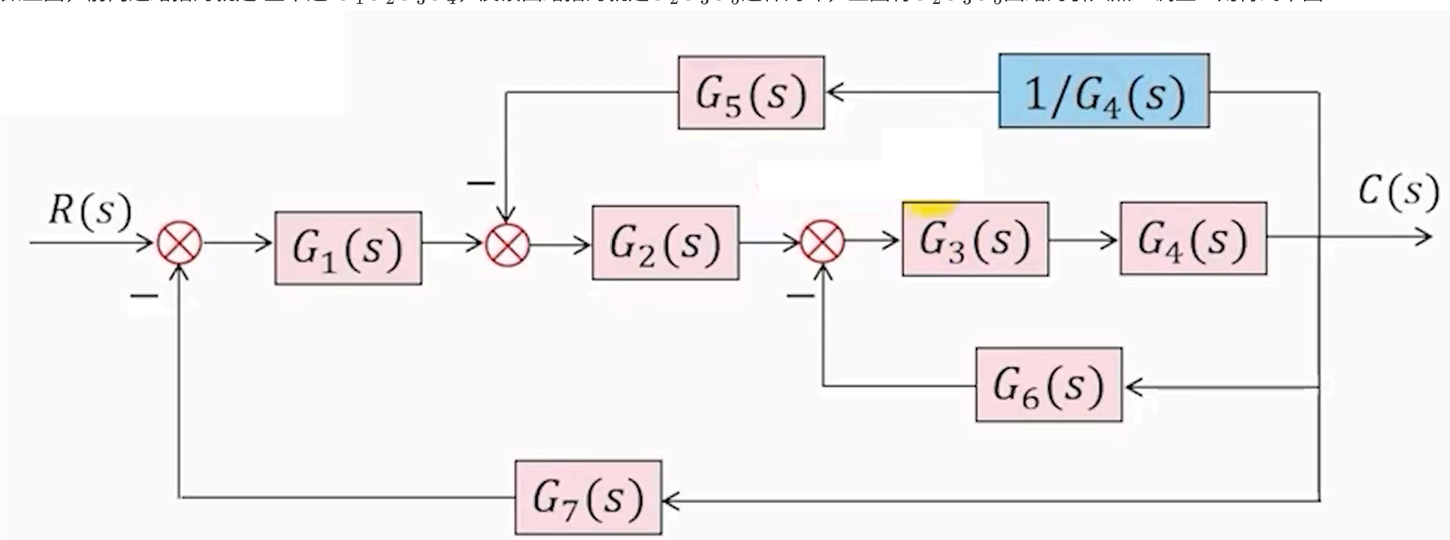
变换法则

变换方式	原框图	等效
引出点前移		
引出点后移		

1. 各**前向通路传递函数的乘积保持不变**；
2. 各**反馈回路传递函数的乘积保持不变**



如上图，前向通路指的就是“主干道”$G_1G_2G_3G_4$，反馈回路指的就是$G_2G_3G_5$这样的环，上图将$G_2G_3G_5$回路的引入点D调至E则得到下图

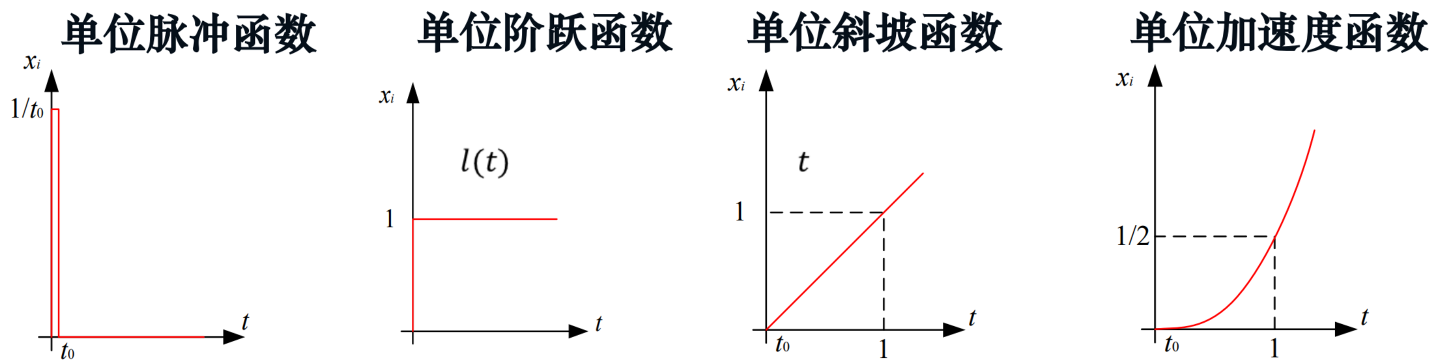


为了使前向通路传递函数和反馈回路传递函数的乘积保持不变，在反馈回路中加入$\dfrac{1}{G_4}$的环节即可。

方块图简化简单来说就是从小圈到大圈依次用上面“反馈”环节的公式进行化简知道最后得到传递函数。

第三章 时域瞬态响应分析

机电控制系统里的典型输入信号函数



$x_i(t) = \delta(t)$　　$x_i(t) = 1(t)$　　$x_i(t) = t$　　$x_i(t) = \frac{1}{2}t^2$

$X_i(s) = 1$　　$X_i(s) = \frac{1}{s}$　　$X_i(s) = \frac{1}{s^2}$　　$X_i(s) = \frac{1}{s^3}$

一阶系统的瞬态响应

能够用一阶微分方程（只含有未知函数的一阶导数的微分方程）描述的系统。它的典型形式是**一阶惯性环节**。

$$X_i(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{Ts+1}} \rightarrow X_o(s)$$

单位脉冲响应

$$x_i(t) = \delta(t) \Rightarrow X_i(s) = 1$$

$$X_o(s) = \frac{1}{Ts+1} = \frac{\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}} \Rightarrow x_o(t) = (\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}) \cdot 1(t)$$

$t = T$时$e^{-\frac{1}{T}t} = 0.368$，衰减了0.632

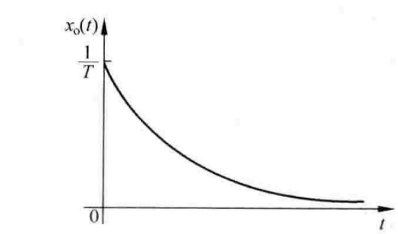


图 3-10　一阶惯性环节的单位脉冲响应曲线

单位阶跃响应

$$x_i(t) = 1(t) \Rightarrow X_i(s) = \frac{1}{s}$$

$$X_o(s) = \frac{1}{Ts+1}X_i(s) = \frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}} \Rightarrow x_o(t) = (1 - e^{-\frac{1}{T}t}) \cdot 1(t)$$

1. 一阶惯性系统总是稳定的，无振荡;
2. 经过时间T曲线上升到0.632的高度，据此用实验的方法测出响应曲线达到稳态值的63.2%高度点所用的时间，即是惯性环节的时间常数T;
3. 经过时间$(3 \sim 4)T$，响应曲线已达稳态值的95%~98%，可以认为其调整过程已经基本完成·故一般取调整时间为$(3 \sim 4)T$;
4. 在t=0处，响应曲线的切线斜率为$\frac{1}{T}$;

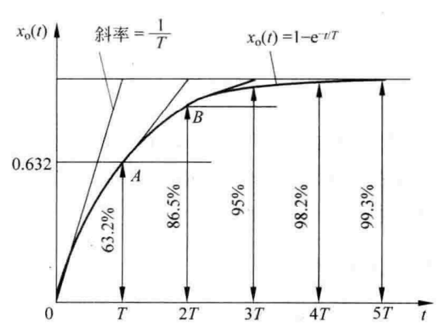


图 3-7　一阶惯性环节的单位阶跃响应曲线

单位斜坡响应

$$X_o(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)}X_i(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+\frac{1}{T}}$$

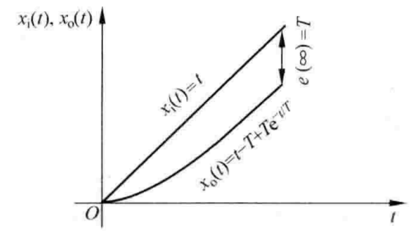


图 3-9　一阶惯性环节的单位斜坡响应曲线