微积分II期中复习

级数

级数敛散性

p级数的敛散性

p级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$在$p>1$时收敛，$p\leq 1$的时候发散
可以通过积分证明。此处不证

数项级数的基本性质

1. 线性运算法则（比较显然）
2. 改变一个级数的有限项不影响级数的敛散性
3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则在级数中任意添加括号得到的新级数也收敛且其和不变
4. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$

比较判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为**正项**级数，且$u_n\leq v_n(n=1,2,3,...)$
（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛
（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散

比较判别法的极限形式

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为**正项**级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$$

（1）当$0<l<+\infty$时，两个级数的敛散性相同
（2）当$l=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛
（3）当$l=+\infty$时，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

比值判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是**正项**级数，并且

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \gamma$$

（1）当$\gamma < 1$时，级数收敛
（2）当$\gamma > 1$时，级数发散
（3）当$\gamma = 1$时，本判别法失效

根值判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是**正项**级数，且

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \gamma$$

（1）当$\gamma < 1$时，级数收敛
（2）当$\gamma > 1$时，级数发散
（3）当$\gamma = 1$时，本判别法失效

积分判别法

设$f(x)$在$[1, +\infty]$上是非负且递减的连续函数，记$u_n = f(n), n = 1, 2, 3...$则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与反常积分$\int_1^{+\infty} f(x) dx$的敛散性相同

绝对收敛与条件收敛

如果$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛
（1）如果$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$**绝对收敛**（2）如果$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散，但$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$**条件收敛**

绝对值的比值判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是一般级数，并且

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \gamma$$

（1）当$\gamma < 1$时，级数绝对收敛
（2）当$\gamma > 1$时，级数发散
（3）当$\gamma = 1$时，本判别法失效

绝对值的根值判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是一般级数，且

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \gamma$$

（1）当$\gamma < 1$时，级数绝对收敛
（2）当$\gamma > 1$时，级数发散
（3）当$\gamma = 1$时，本判别法失效

莱布尼兹定理

若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$满足下列条件：
（1）$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots$
（2）$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$
则$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$收敛且它的和$S \leq u_1$

幂级数

阿贝尔定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0(x_0 \neq 0)$时收敛，那么适合不等式$|x| < |x_0|$的一切$x$使该幂级数绝对收敛.
反之，如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0(x_0 \neq 0)$时发散，那么适合不等式$|x| > |x_0|$的一切$x$使该幂级数发散.
证明： 设x_0使幂级数收敛，则根据级数收敛的必要条件，有

$$\lim_{n \to \infty} a_n x_0^n = 0$$

于是存在一个常数M，使得

$$|a_n x_0^n| \leq M(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

则$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$
当$|x| < |x_0|$时级数$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$收敛，所以级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛。
定理的后半部分用反证法即可。设级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0$时发散且存在$x_1$使得$|x_1| > |x_0|$且使级数收敛，则由定理前半部分可知$|x| < |x_1|$的一切$x$使该幂级数绝对收敛.即$x_0$使幂级数绝对收敛，矛盾。

收敛半径，收敛区间和收敛域

1. 收敛半径：使幂级数收敛的所有收敛点的上确界
2. 收敛区间：设收敛半径为R，则收敛区间为$(-R,R)$
3. 收敛域：收敛区间与收敛端点的并集

柯西-阿达马公式

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R$$

（1）当$0<R<+\infty$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-R,R)$内绝对收敛，当$|x|>R$时发散

（2）当$R=0$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$仅在$x=0$处收敛，在$x\neq 0$时发散

（3）当$R=+\infty$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$R$上绝对收敛

根值公式

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=R$$

（1）当$0<R<+\infty$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-R,R)$内绝对收敛，当$|x|>R$时发散

（2）当$R=0$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$仅在$x=0$处收敛，在$x\neq 0$时发散

（3）当$R=+\infty$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$R$上绝对收敛

常见的麦克劳林展开

1.$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,|x|<1$

性质

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R(>0)$，则

（1）级数在收敛域上的和函数$S(x)$是连续函数 （2）幂级数在$(-R,R)$上逐项可微，微分后得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径 （3）幂级数在$(-R,R)$上逐项可积，积分后得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径

傅里叶级数

周期函数的傅里叶展开

（狄利克雷定理）如果$f(x)$是以$T=2l$为周期的周期函数，且$f(x)$在$[-l,l]$上逐段光滑，那么$f(x)$的傅里叶级数在任意点x处都收敛，并且收敛于$f(x)$在该点左右极限的平均值。

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\in R$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,n=0,1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,...$$

$[-l,l]$上的傅里叶展开

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\in(-l,l)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,n=0,1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,...$$

$[0,l]$上的傅里叶展开

1. 奇延拓（正弦展开）
   令

$$F(x)=\begin{cases}f(x),0<x\leq l\\0,x=0\\-f(-x),-l\leq x<0\end{cases}$$

对其进行傅里叶展开
$f(x)$在$[0,l]$上的正弦展开为

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\in(0,l)$$

其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,...$$

1. 偶延拓（余弦展开）
   令

$$F(x)=\begin{cases}f(x),0\le x\le l\\ f(-x),-l\le x\le 0\end{cases}$$

对其进行傅里叶展开
$f(x)$在$[0,l]$上的余弦展开为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\in(0,l)$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,n=0,1,2,...$$

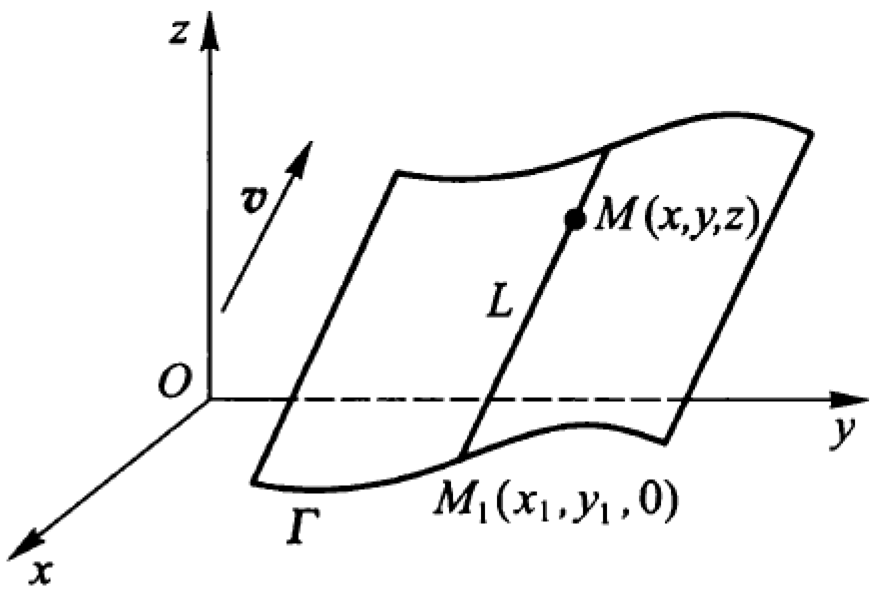
空间解析几何

球面方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

柱面方程

由一条动直线L沿一定曲线Γ平行移动形成的曲面，称为**柱面**.并称动直线L为该柱面的**母线**，称定曲面Γ为该柱面的准线



以Oxy平面的曲线$\Gamma:F(x,y)=0$为准线，母线L的方向矢量为$\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}(c\neq 0)$的柱面方程为

$$F(x-\frac{a}{c}z,y-\frac{b}{c}z)=0$$

证明:
设$M(x,y,z)$是柱面上一点，过M的母线与准线交于点M_1（如上图），$\overrightarrow{M_1M}//\mathbf{v}$，记$\overrightarrow{M_1M}=m\mathbf{v}$。而

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-0)\mathbf{k}$$

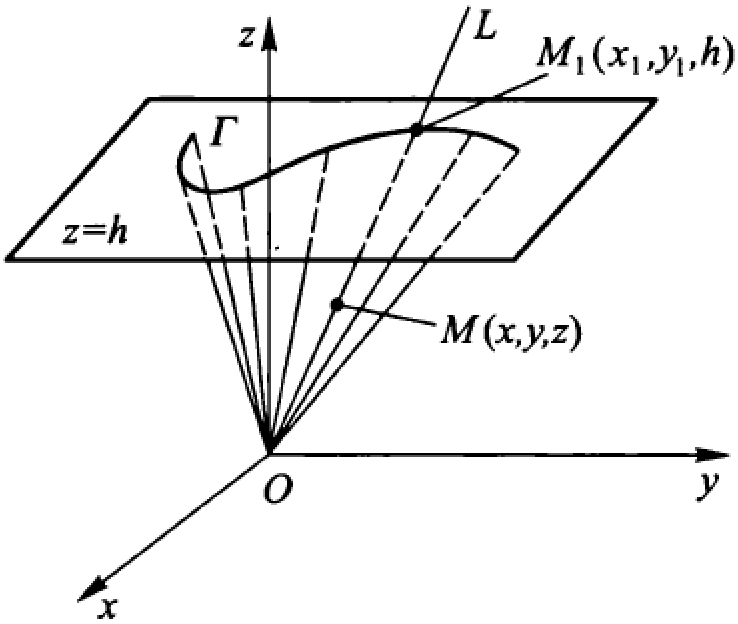
可知$x-x_1=ma,y-y_1=mb,z-0=mc$，消去m

$$x_1=x-\frac{a}{c}z,y_1=y-\frac{b}{c}z$$

由$F(x_1,y_1)=0$ 知柱面方程为$F(x-\frac{a}{c}z,y-\frac{b}{c}z)=0$

锥面方程

过空间一定点O的动直线L，沿空间曲线Γ（不过定点O）移动所生成的曲线称为**锥面**，其中动直线L称为该锥面的**母线**，曲线Γ称为该锥面的**准线**，定点O称为该锥面的**顶点**。



以$z=h(h\neq 0)$平面上的曲线$\Gamma:F(x,y)=0$为准线，以原点为顶点的锥面方程为

$$F(\frac{h}{z}x,\frac{h}{z}y)=0$$

证明:
显然$\overrightarrow{OM}$与$\overrightarrow{OM_1}$共线，即$\overrightarrow{OM_1}=m\overrightarrow{OM}$

$$x_1=mx,y_1=my,h=mz$$

消去m,得到$x_1=\frac{h}{z}x,y_1=\frac{h}{z}y$
而$F(x_1,y_1)=0$
即曲面方程为$F(\frac{h}{z}x,\frac{h}{z}y)=0$

旋转曲面方程

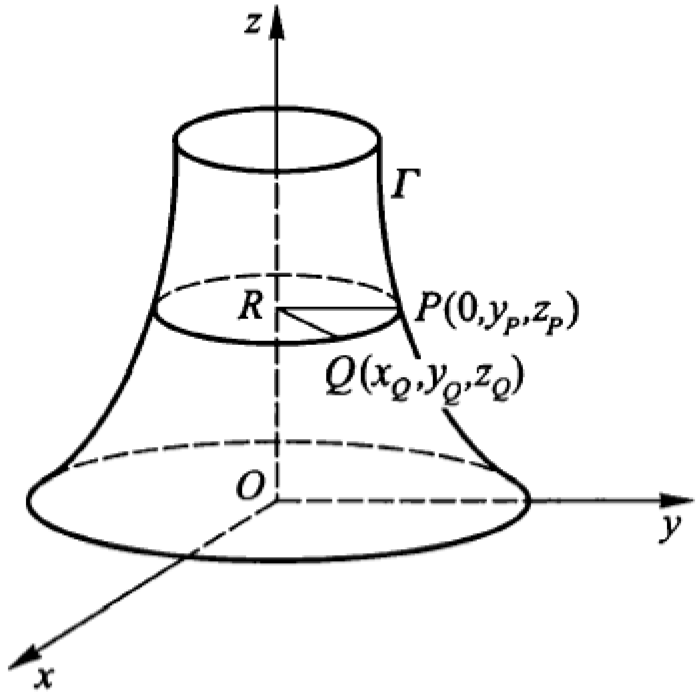
一曲线Γ 绕一定直线L旋转生成的曲面叫做**旋转曲面**，其中定直线**L**称为该旋转曲面的轴

平面上的曲线Γ绕坐标轴旋转所得的曲面方程

Oyz平面上的曲线$\Gamma: F(y,z)=0$绕Oz轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

先写出平面上的曲线方程，然后根据轴决定替换其中哪个未知量，如本例中通过Oyz平面确定了曲线的方程应为$F(y,z)=0$，然后根据Oz轴确定y应被替换成$\sqrt{x^2+y^2}$



证明：

设$P(0,y_P,z_P)$是曲线Γ上任意一点，当曲线Γ绕Oz轴旋转一周时，点P的轨迹是一个圆，记圆心为R.设$Q(x_Q,y_Q,z_Q)$是这个圆上任意一点，则$z_P=z_Q$.

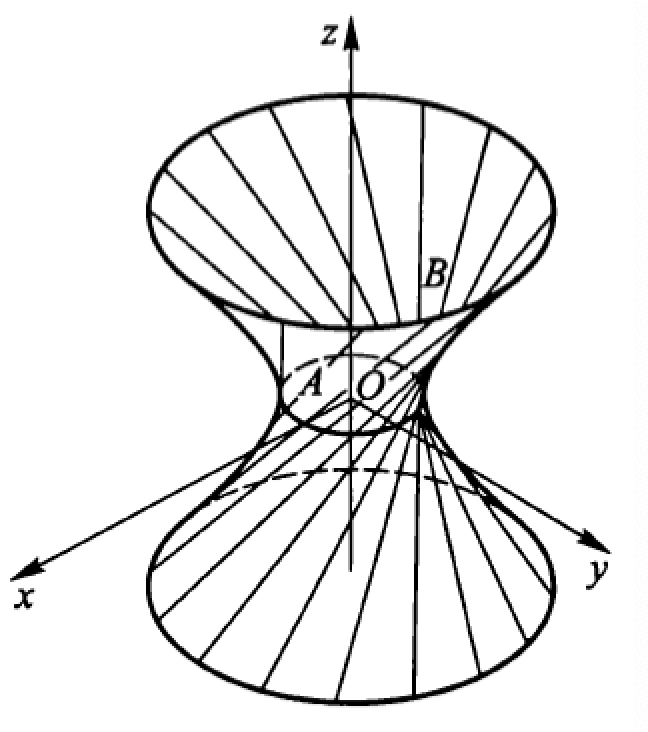
$$|\,y_P\,| = PR = QR = \sqrt{x_Q^2+y_Q^2}$$

将$y_P=\pm\sqrt{x_Q^2+y_Q^2}, z_P=z_Q$代入$F(y_P,z_P)=0$ 得到曲面方程$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

空间中任意直线绕坐标轴旋转所得的曲面方程

直线$\Gamma\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$绕$Oz$轴旋转生成的曲面方程为

$$x^2+y^2=[x(z^{-1}(z))]^2+[y(z^{-1}(z))]^2$$



证明：
设$M(x,y,z)$为所求曲面上的任一点，则M必是直线Γ上某个点$M_1(x_1,y_1,z_1)$绕Oz轴旋转某个角度得到的，即

$$\begin{cases} x_1 = x(t_1) \\ y_1 = y(t_1) \\ z_1 = z(t_1) \end{cases}$$

且$z = z_1, x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2$
由$z = z(t_1)$，知$t_1 = z^{-1}(z)$,则

$$x_1 = x[z^{-1}(z)], y_1 = y[z^{-1}(z)]$$

所以旋转曲面方程为

$$x^2 + y^2 = [x(z^{-1}(z))]^2 + [y(z^{-1}(z))]^2$$