浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

第十一章

动量矩定理之三

§ 11-6 刚体平面运动微分方程

对于作平面运动的刚体，应用质心运动定理和相对质心的动量矩定理，得：

$$\begin{cases} m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i^{(e)} \\ \dfrac{d}{dt}(J_C\omega) = J_C\alpha = \sum M_C(\vec{F}_i^{(e)}) \end{cases}$$

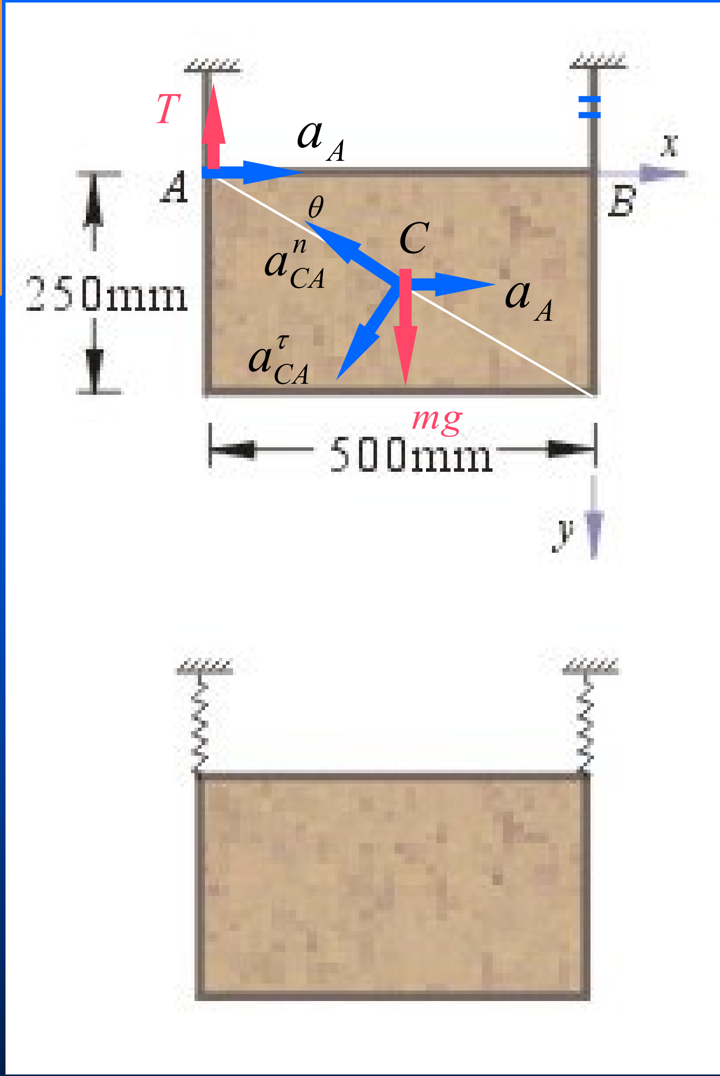
或

$$\boxed{\begin{cases} m\dfrac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \sum \vec{F}_i^{(e)} \\ J_C\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_C(\vec{F}_i^{(e)}) \end{cases}}$$

——刚体平面运动微分方程

例11-4

4kg的均质板静止悬挂。求：*B*点的绳或弹簧被剪断的瞬时，质心加速度各为多少。



解： 1.考虑第一种情况，作受力分析和运动分析，如图所示。

应用刚体平面运动微分方程

$$\begin{cases} ma_{cx} = 0 & (1) \\ ma_{cy} = mg - T & (2) \\ J_c\alpha = T \times 0.25 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ma_{cx} = 0 & (1) \\ ma_{cy} = mg - T & (2) \\ J_c\alpha = T \times 0.25 & (3) \end{cases}$$

初瞬时$\omega=0$　则有 $a_{cA}^n = 0$

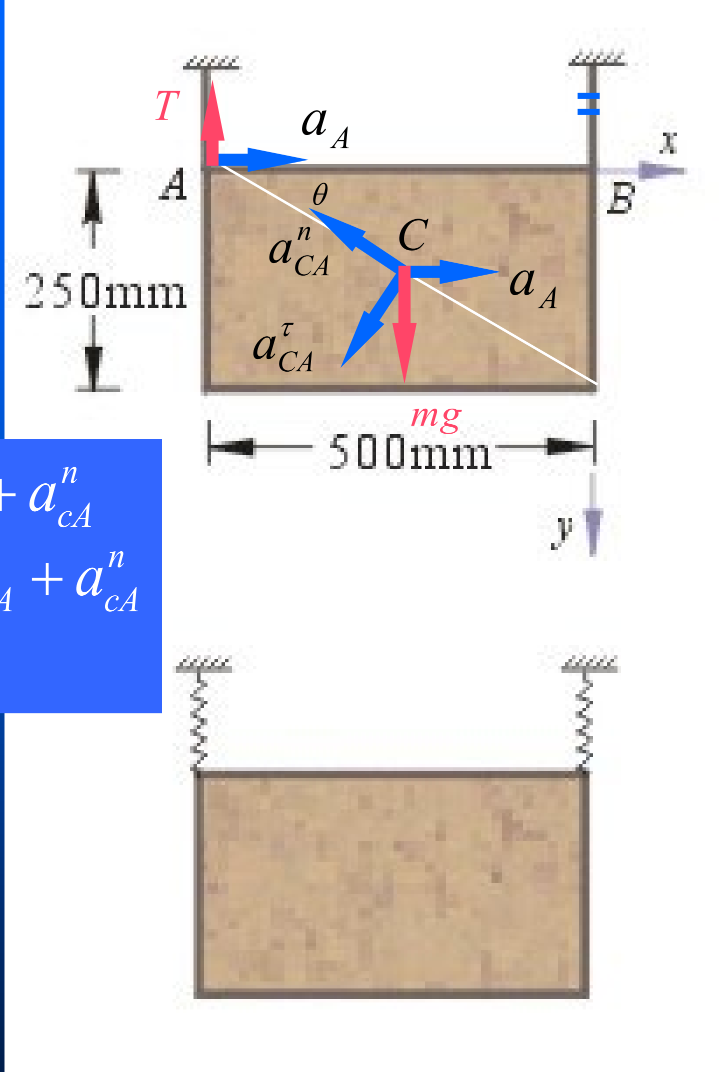
又由(1)知$a_{cx}=0$

$$a_c = a_A + a_{cA}^\tau + a_{cA}^n$$
$$= a_A^\tau + a_A^n + a_{cA}^\tau + a_{cA}^n$$
$$= a_A^\tau + a_{cA}^\tau$$

所以 $a_c = a_{cy} = a_{cA}^\tau \cos\theta$

$$= AC \cdot \alpha \cos\theta$$

$$= 0.25\alpha \qquad (4)$$



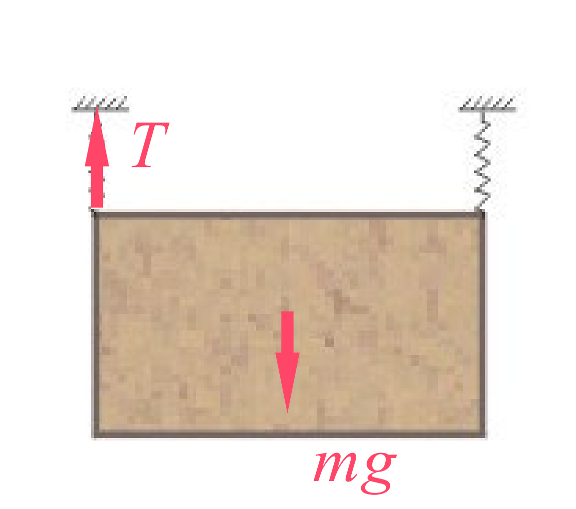
联立解(2)(3)(4)式

$$\alpha = \frac{12}{17} \cdot \frac{g}{0.25}, \qquad a_c = \frac{12}{17} g = 6.92 \ \text{m/s}^2$$

2.考虑第二种情况，受力分析如下，

初瞬时弹簧还未变形，弹簧力为

$$T = \frac{1}{2} mg$$



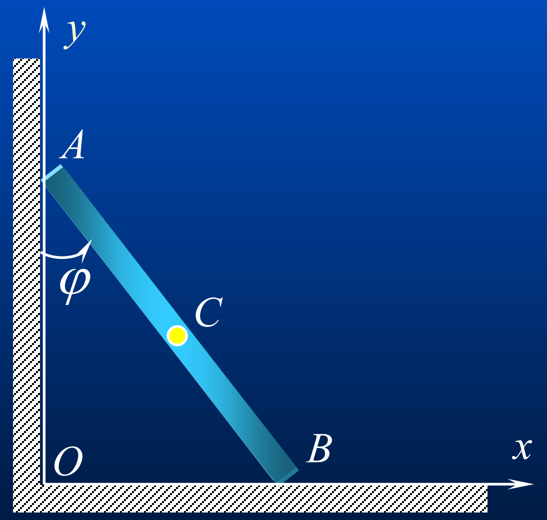
根据平面运动微分方程

$$\begin{cases} ma_{cx} = 0 & (1) \\ ma_{cy} = mg - T & (2) \\ J_c \alpha = T \times 0.25 & (3) \end{cases}$$

由(2)式得

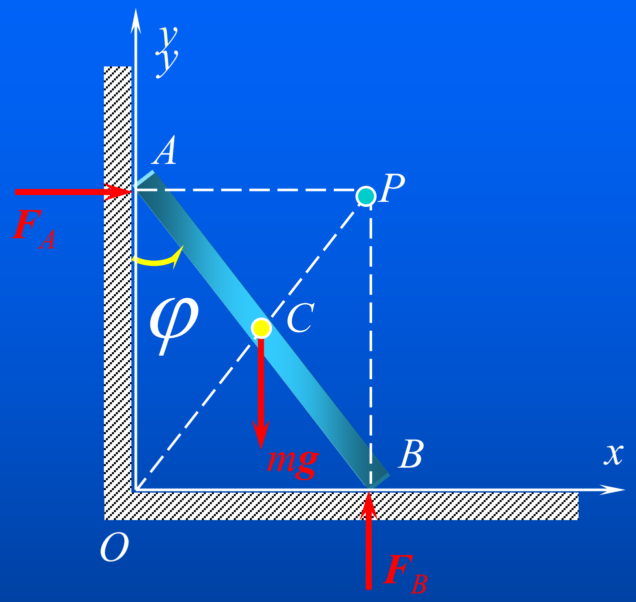
$$a_c = a_{cy} = \frac{g}{2} = 4.9 \ \ \mathrm{m/s^2}$$

例题11-7 均质细杆 AB 的质量是 m，长度是 $2l$，放在铅直面内，两端分别沿光滑的铅直墙壁和光滑的水平地面滑动。假设杆的初位置与墙成交角 φ_0，初角速度等于零。试求杆沿铅直墙壁下滑时的角速度和角加速度，以及杆开始脱离墙壁时它与墙壁所成的角度 φ_1。



刚体的平面运动微分方程

解：在 A 端脱离墙壁以前，受力如图所示。杆作平面运动，取坐标系 Oxy，则杆的运动微分方程可写成



$$m\ddot{x}_C = F_A \tag{a}$$

$$m\ddot{y}_C = F_B - mg \tag{b}$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F_B l\sin\varphi - F_A l\cos\varphi \tag{c}$$

由几何关系知

$$x_C = l\sin\varphi \tag{d}$$

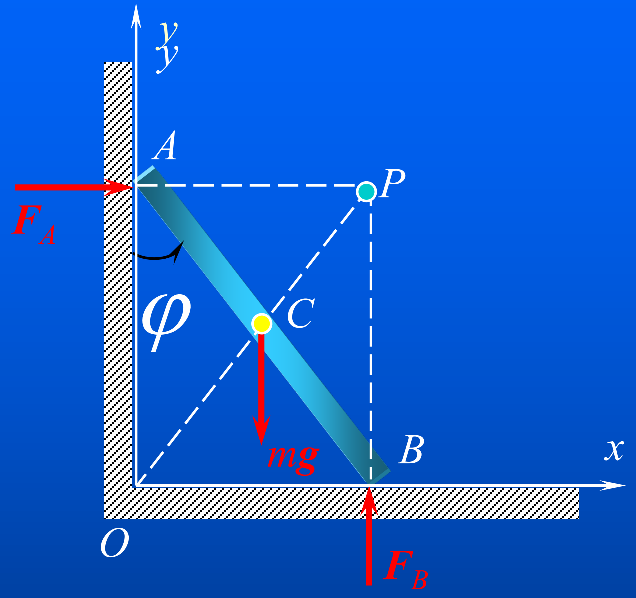
$$y_C = l\cos\varphi \tag{e}$$

刚体的平面运动微分方程

$$m\ddot{x}_C = F_A \qquad \text{(a)}$$

$$m\ddot{y}_C = F_B - mg \qquad \text{(b)}$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F_B l\sin\varphi - F_A l\cos\varphi \qquad \text{(c)}$$



将式(d)和(e)对时间求导，得

$$\dot{x}_C = l\dot{\varphi}\cos\varphi \ , \quad \dot{y}_C = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\ddot{x}_C = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \qquad \text{(f)}$$

$$\ddot{y}_C = -l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi \qquad \text{(g)}$$

把 (f)和(g)分别代入 (a)和(b)，再把 F_A 和 F_B 代入 (c)

最后得杆 AB 的角加速度

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi \qquad \text{(h)}$$

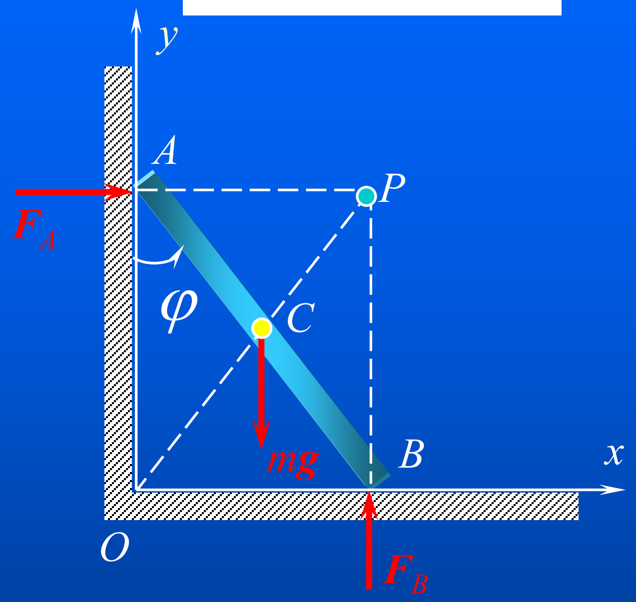
试求杆沿铅直墙壁下滑时的角速度和角加速度

刚体的平面运动微分方程

$$\ddot{\phi}=\frac{3g}{4l}\sin\ \phi$$

利用关系

$$\ddot{\varphi}=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}$$



把上式化成积分

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}=\frac{3g}{4l}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin\ \varphi\mathrm{d}\varphi$$

求得杆*AB*的角速度

$$\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0-\cos\varphi)} \qquad \text{(i)}$$

刚体的平面运动微分方程

?杆开始脱离墙壁时它与墙壁所成的角度 φ_1

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi \qquad \text{(h)}$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)} \qquad \text{(i)}$$

当杆即将脱离墙时，$F_A \to 0$。以$F_A = 0$代入(a)，再根据(f)得

$$l\ddot{\varphi}\cos\varphi_1 = l\dot{\varphi}^2\sin\varphi_1$$

$$\ddot{x}_C = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$m\ddot{x}_C = F_A$$

把(h) 和(i)的表达式在 $\varphi = \varphi_1$ 时的值代入上式，得关系

$$l\frac{3g}{4l}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = l\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)\sin\varphi_1$$

整理后，求得杆开始脱离墙时与墙所成的夹角

$$\varphi_1 = \arccos(\frac{2}{3}\cos\varphi_0)$$

刚体的平面运动微分方程-应用

讨论 1

2、用刚体平面运动加速度分析求补充方程。

C为基点，B点的加速度为

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{Cx} + \boldsymbol{a}_{Cy} + \boldsymbol{a}_{BC}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BC}^{\mathrm{n}}$$

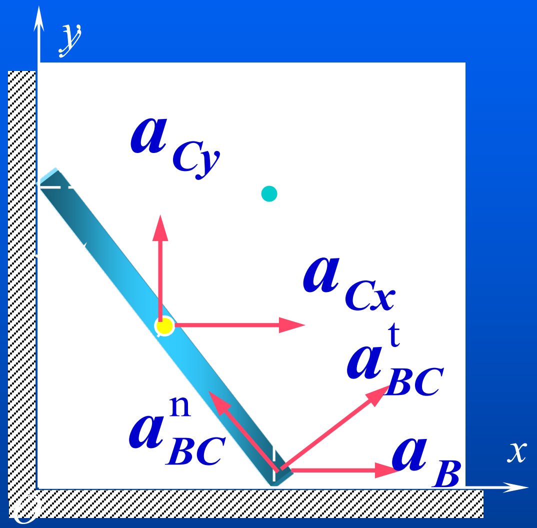
将上式在y轴上投影，得

$$0 = a_{Cy} + a_{BC}^{t} \sin\varphi + a_{BC}^{n} \cos\varphi$$

$$a_{Cy} = -l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos\varphi$$

即

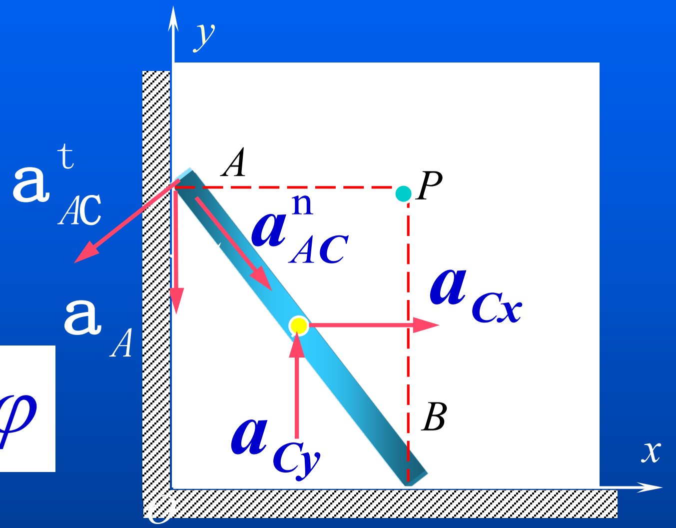
$$\ddot{y}_C = -l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos\varphi$$



刚体的平面运动微分方程-应用

C为基点，A点的加速度

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{Cx} + \boldsymbol{a}_{Cy} + \boldsymbol{a}_{AC}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{AC}^{\mathrm{n}}$$



将上式在x轴上投影，得

$$0 = a_{Cx} - a_{AC}^{\mathrm{t}} \cos\varphi + a_{AC}^{\mathrm{n}} \sin\varphi$$

$$a_{Cx} = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin\varphi$$

即

$$\ddot{x}_C = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin\varphi$$

刚体的平面运动微分方程-应用

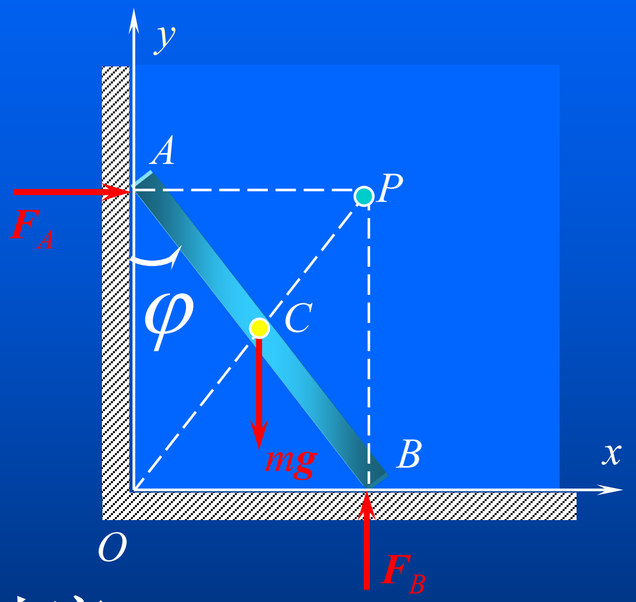
也可用动能定理来求角速度和角加速度。

$$y_C = l\cos\phi$$

3、动能定理微分形式

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{2}{3}ml^2\omega^2$$

$$\sum \mathrm{d}'W = -mg\,\mathrm{d}y_C = mgl\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$$



代入 $\mathrm{d}T = \sum \mathrm{d}'W$，得 $\frac{4}{3}l\omega\,\mathrm{d}\omega = g\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

解得 $\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi$，积分得杆 AB 的角速度。

4、动点的动量矩定理

$$J_P\ddot{\varphi} = M_P,$$

其中 $M_P = mgl\sin\varphi$

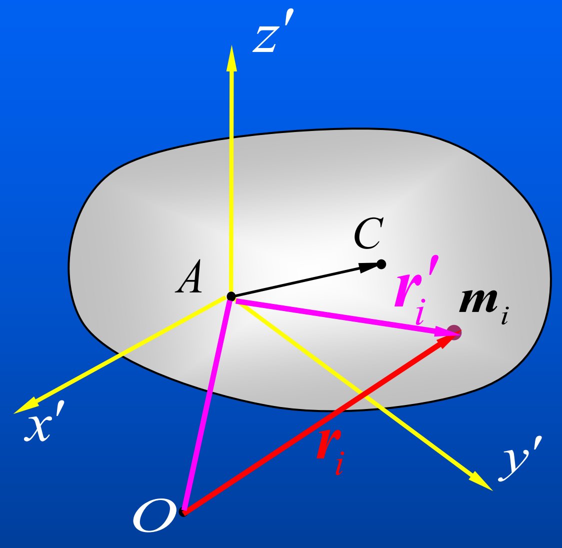
$$J_P = \frac{4}{3}ml^2$$

解得 $\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi$

质点系相对运动点的动量矩定理（选学）

对运动质心C，有 $$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_C}{\mathrm{d}t}=\sum M_C}$$

对一般运动点A $$\frac{\mathrm{d}L_A'}{\mathrm{d}t}=?$$



1 .定理的一般形式

A为运动点(已知v_A, a_A)，C 为质心。

在A点固连平移系 $Ax'y'z'$，m_i为任一质点。

（复合运动）

$$L_O=\Sigma r_i\times m_i v_i=L_A'+\overline{OA}\times m v_C+m\overline{AC}\times v_A$$

$$L_O = \Sigma r_i \times m_i v_i$$

$$= \Sigma r_i \times m_i v_i$$

$$= \Sigma(\overline{OA} + r_i') \times m_i v_i$$

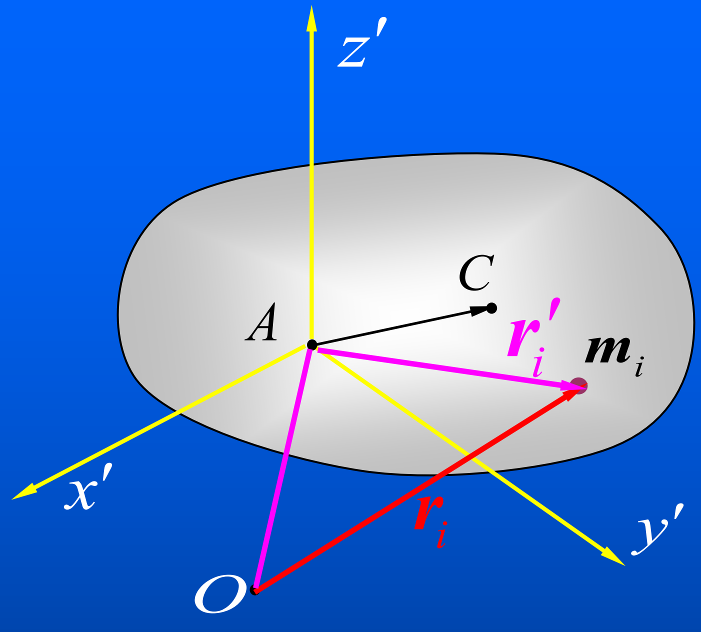
$$= \Sigma \overline{OA} \times m_i v_i + \Sigma r_i' \times m_i v_i$$

$$= \Sigma \overline{OA} \times m_i v_i + \Sigma r_i' \times m_i (v_{iA} + v_A)$$

$$= \Sigma \overline{OA} \times m_i v_i + \Sigma r_i' \times m_i v_{iA} + \Sigma r_i' \times m_i v_A$$

$$= \overline{OA} \times \Sigma m_i v_i + L_A' + \Sigma m_i r_i' \times v_A$$

$$= L_A' + \overline{OA} \times m v_C + m \overline{AC} \times v_A$$



$$\boxed{L_O = \Sigma r_i \times m_i v_i = L_A' + \overline{OA} \times m v_C + m \overline{AC} \times v_A}$$

$$\boxed{L_O=\Sigma r_i\times m_i v_i=L_A'+\overline{OA}\times m v_C+m\overline{AC}\times v_A}$$

代入定点的动量矩定理 $\quad \dfrac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t}=\sum M_O$

$$\frac{\mathrm{d}L_A'}{\mathrm{d}t}+\cancel{v_A\times m v_C}+\overline{OA}\times m a_C+m v_{CA}\cancel{\times v_A}+m\overline{AC}\times a_A$$

(v_c-v_A)

$$=\sum r_i\times F^{e}=\sum\left(\overline{OA}+r'\right)\times F^{e}$$

$$\boxed{\therefore\quad \frac{\mathrm{d}L_A'}{\mathrm{d}t}=\sum M_A(F^{e})+\overline{AC}\times(-m a_A)}\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{\mathrm{d}L_A'}{\mathrm{d}t}\neq\sum M_A}$$

①对一般动点A

②由于修正项，工程中一般不用；某些情况下，用于非惯性系中（平移非惯性系中的动量矩定理）。

③ 平移系中，$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}L_A'}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\tilde{\mathrm{d}}L_A'}{\mathrm{d}t}}$ (绝对导数＝相对导数)

(动系单位矢方向不变)

质点系相对运动点的动量矩定理

2. 定理的特殊形式

使修正项 $\overline{AC}\times(-ma_A)=0$ 的情形

A 固定，
匀速直线，
A 加速度瞬心

$$\frac{\mathrm{d}L'_A}{\mathrm{d}t}=\sum M_A$$

（2）即，A为质心C，$\overline{AC}=0$

$$\frac{\mathrm{d}L_c}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}L'_c}{\mathrm{d}t}=\sum M_c$$

（3）$\boldsymbol{a}_A$与$\overline{AC}$共线，$\overline{\boldsymbol{AC}}\times\boldsymbol{a}_A=0$

$$\frac{\mathrm{d}L'_A}{\mathrm{d}t}=\sum M_A$$

思考题：

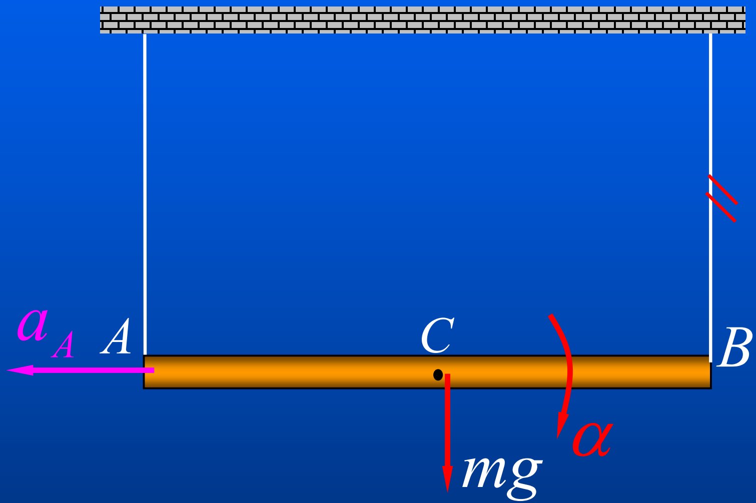
证明：刚体平面运动时，若速度瞬心到质心C的距离保持不变，即J_P为常数时，a_P指向质心。

质点系相对运动点的动量矩定理

应用范例1

如何用最简方法求 α?

均质杆长l，绳段瞬时



$a_A \times \overline{AC} = 0$ 有

$\dfrac{\mathrm{d}L'_A}{\mathrm{d}t} = \sum M_A$,

即 $\dfrac{1}{3}ml^2\alpha = mg\dfrac{l}{2}$ ⇒ 故 $\alpha = \dfrac{3g}{2l}$

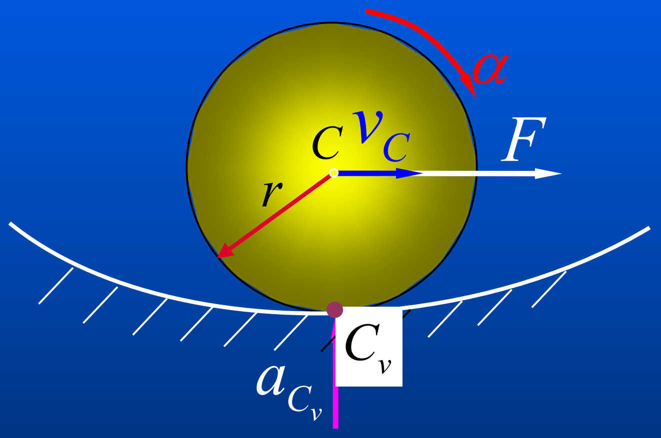
质点系相对运动点的动量矩定理

应用范例2

2. 均质轮滚动，已知 m, r, F

。

$$a_{C_v} \times \overline{C_v C} = 0, \quad 有$$



$$\frac{\mathrm{d} L_{C_v}}{\mathrm{d} t} = \sum M_{C_v} \quad 即$$

$$\frac{3}{2} m r^2 \cdot \alpha = F r$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{2F}{3mr}$$

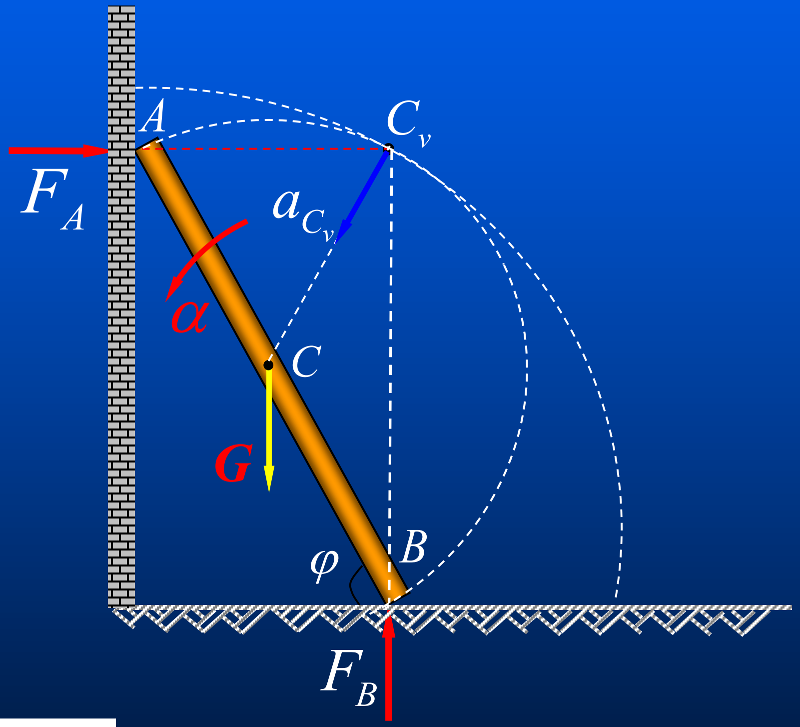
质点系相对运动点的动量矩定理

应用范例3

均质杆长l,沿墙滑落

刚体平面运动时，若速度瞬心到质心C的距离保持不变，即J_P为常数时，a_P指向质心。

C_vC=常数时，$\boldsymbol{a}_{C_v}$指向C



有 $J_{C_v}\cdot\alpha = G\dfrac{l}{2}\cdot\cos\varphi$

$$\alpha = \frac{Gl\cos\varphi}{2J_{C_v}}$$

$$\alpha = \frac{3g}{2l}\cos\ \phi$$

质点系相对运动点的动量矩定理

应用范例4

半圆柱，一般位置时

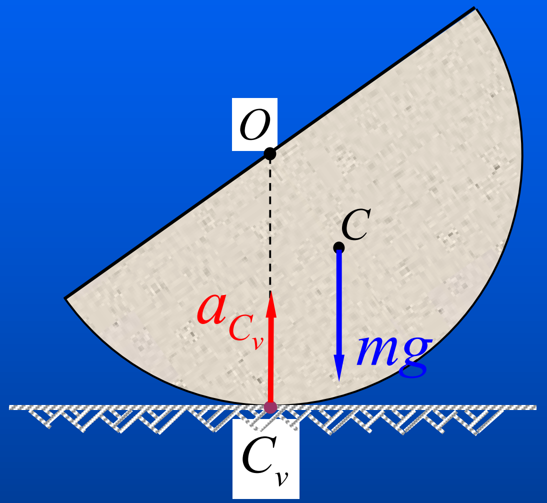
$\boldsymbol{a}_{C_v}$ 不指向C,

$$\overline{\boldsymbol{C}_v\boldsymbol{C}} \times \boldsymbol{a}_{C_v} \neq 0$$

$$\frac{\mathrm{d}L_{C_v}}{\mathrm{d}t} \neq \sum M_{C_v}$$

当直径面水平时，$\boldsymbol{a}_{C_v}$ 指向C，有

$$\frac{\mathrm{d}L_{C_v}}{\mathrm{d}t} = \sum M_{C_v}$$



质点系相对动点的动量矩定理

另一类形式

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_A}{\mathrm{d}t}=\sum M_A(F^e)+mv_c\times v_A}$$

课堂推导的形式

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L'_A}{\mathrm{d}t}=\sum M_A(F^e)+\overline{AC}\times(-ma_A)}$$

关于力性质的几个概念辨析

牛顿力学中，通常将力分为内力和外力、主动力与约束力、做功的力和不做功的力。

内力和外力的概念比较清楚，主动力与约束力的概念则不是很清楚。

在静力学部分，先定义约束和约束力，再定义主动力

有关主动力的提法可归纳为如下三种：

1、作用在一个物体上的力，如果它的大小和方向与约束无关，则称之为主动力；

2、作用在非自由体上的约束力以外的力统称之为主动力；

3、凡是使物体运动或者有运动趋向的力，归为主动力；

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

谢谢各位学！