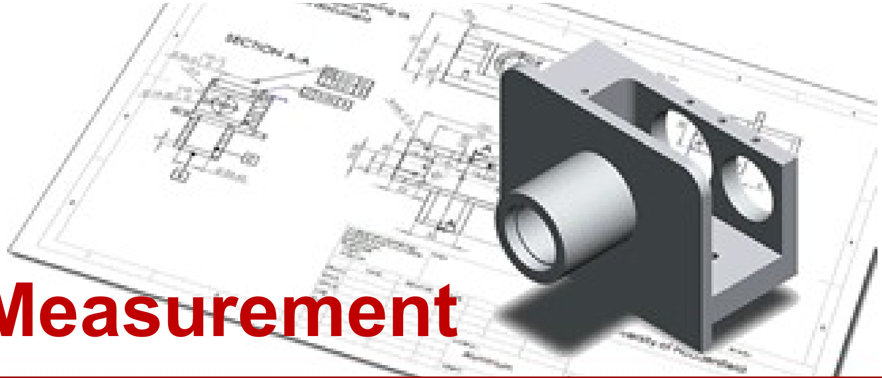
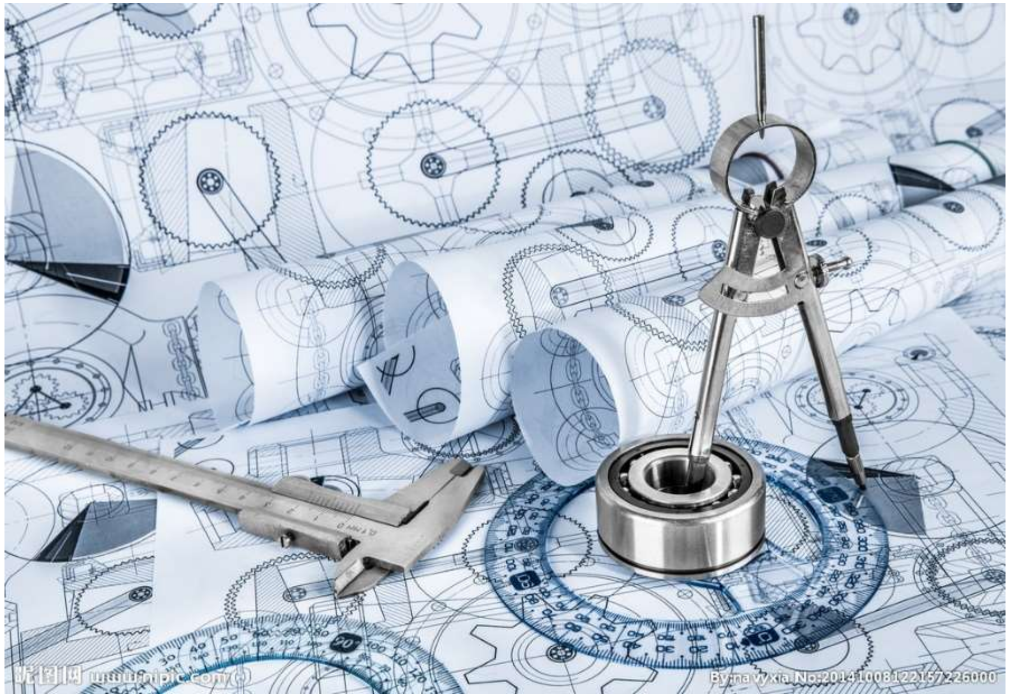
互换性与技术测量

Interchangeability and Technical Measurement





测量技术及长度

测量误差处理

第二章 测量技术及测量误差处理

1. **测量技术的基本知识**
   计量单位与量值传递系统、计量学指标，测量方法与器具分类，基本原则等

2. **数字化测量技术**
   采样原理，滤波技术，重构拟合等

3. **现代精密测量技术**
   国内外最新精密测量技术概述

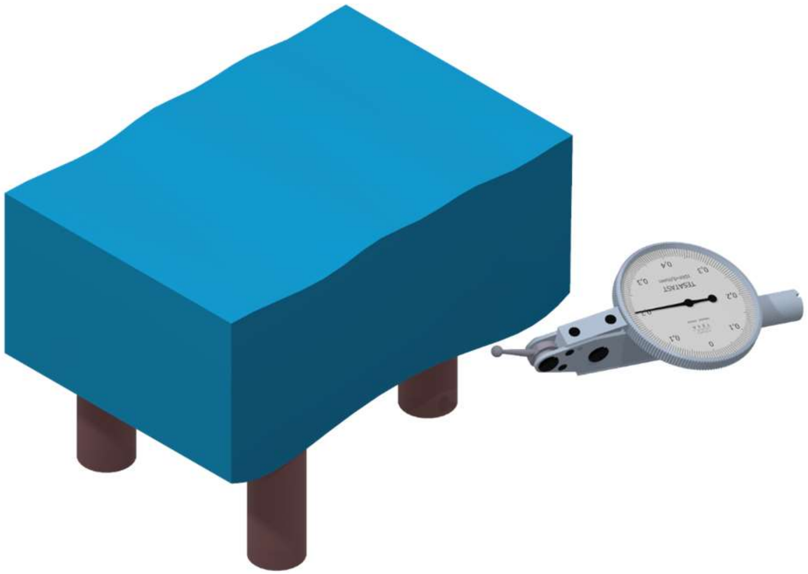
4. **尺寸公差、几何公差相关的测量技术案例**
   面向尺寸公差和几何公差的测量技术案例分析

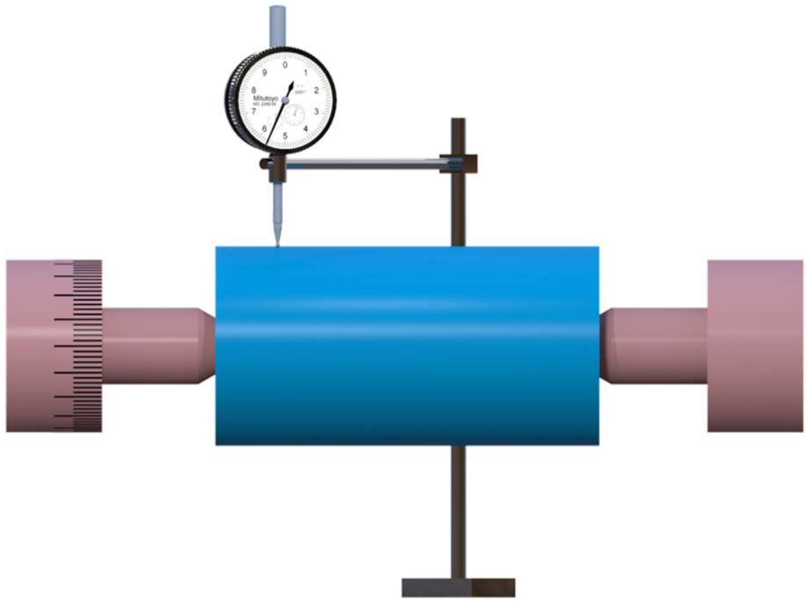
5. **测量误差和误差处理技术**
   测量误差及其产生原因，测量数据处理

5. 长度测量的误差处理技术

测量误差

不论测量仪器精度有多高，**在测量过程中，由于有各种误差因素的存在，使得测量结果与被测量的真值存在差异， 这个差异我们称之为测量误差。**





一、测量误差的基本概念

1.绝对误差 被测几何量的量值与其真值之差，即

$$\delta = x - x_0$$

其中：δ——绝对误差； x——测得量值； x_0——真值。

被测几何量的真值可以用下式来表示：

$$x_0 = x \pm |\delta|$$

测量误差的绝对值越小，则测量结果就越接近真值，因此测量精度就越高。

绝对误差适用于**评定或比较大小相同的被测几何量的测量精度**。

2.相对误差

相对误差是指**绝对误差（取绝对值）与真值之比**。因真值无法得到，故实际中常以测得值代替真值进行计算，即

$$f = \frac{|\delta|}{x_{\circ}} \approx \frac{|\delta|}{x}$$

相对误差是一个无量纲的数值，通常用百分比表示。

测量误差

二、测量误差的来源

1. **计量器具的误差** 计量器具本身所具有的误差，包括计量器具的设计、制造和使用过程中的各项误差，这些误差的总和反映在**示值误差**和**测量的重复性**上。
2. **方法误差** 测量方法不**完善**（包括计算公式不准确，测量方法选择不当等）引起的误差。
3. **环境误差** 测量时环境条件不符合标准的测量条件所引起的测量误差。如**环境温度、湿度**等不符合标准引起的测量误差。
4. **人员误差** 测量人员人为引起的测量误差。如，测量人员使用计量器具不正确、测量瞄准不准确等。

三、测量误差的分类

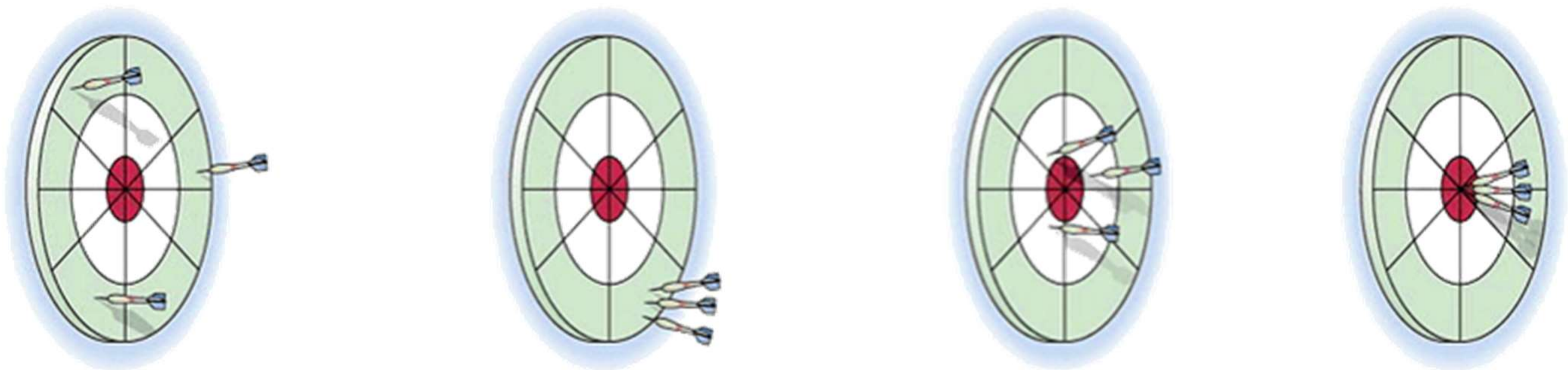
1. 系统误差 在相同测量条件下，多次测取同一量值时，绝对值和符号均保持不变的测量误差，或在测量条件改变时，按某一规律变化的测量误差。前者称为**定值系统误差**，后者称为**变值系统误差**。

2. 随机误差 在相同测量条件下，多次测取同一量值时，绝对值和符号以不可预定的方式变化着的测量误差。随机误差主要由测量过程中一些偶然性因素或不确定因素引起的。对于连续多次重复测量来说，**随机误差符合一定的概率统计规律**，故可使用概率论和数理统计的方法来对它进行处理。

3. 粗大误差 超出在规定条件下预计的测量误差。含有粗大误差的测得值称为**异常值**，其数值比较大。粗大误差的产生有主观和客观两方面的原因。由于粗大误差明显歪曲测量结果，故应**根据判别粗大误差的准则**设法将其**剔除**。

四、测量精度的分类

- **正确度** 反映测量结果中系统误差的影响程度。若系统误差小，则正确度高。
- **精密度** 反映测量结果中随机误差的影响程度。它是指连续多次测量所得值之间相互接近的程度。若随机误差小，则精密度高。
- **准确度** 反映测量结果中系统误差和随机误差的综合影响程度。若系统误差和随机误差都小，则准确度高。



测量误差的处理

一、随机误差的处理

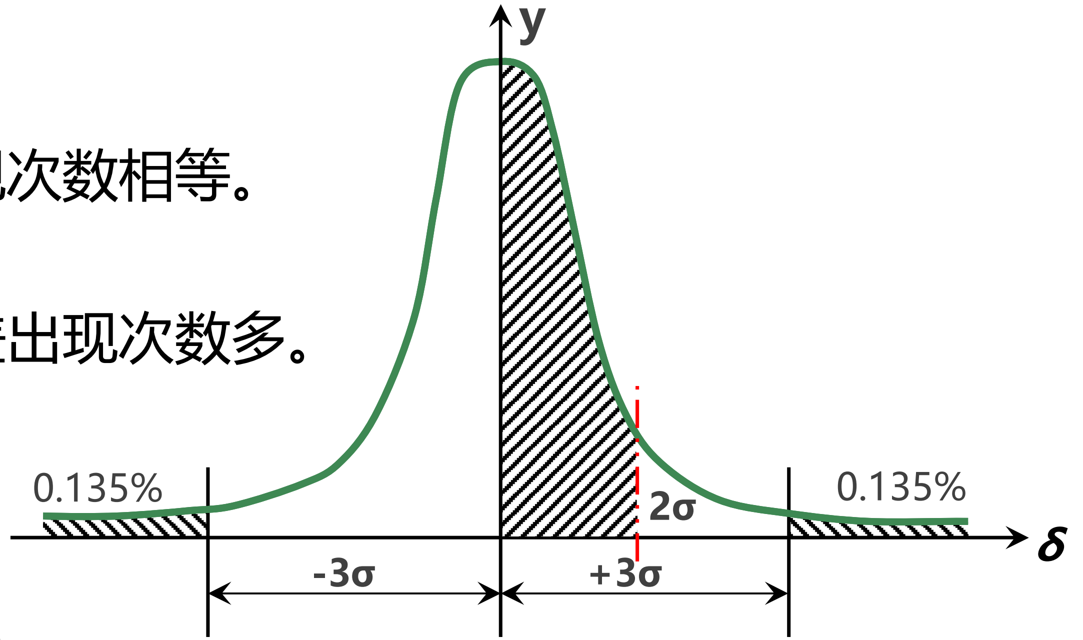
1.随机误差的特性及分布规律

- 重复测量N次，得到测量序列的测得值为x_1、x_2、…、x_N。设不包含系统误差和粗大误差，被测几何量的真值为x_0。则可得出相应各次测得值的随机误差分别为右式。
- 通过对大量的测试实验数据进行统计后发现，多数随机误差服从正态分布规律。

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= x_1 - x_0 \\
\delta_2 &= x_2 - x_0 \\
&\vdots \\
\delta_N &= x_N - x_0
\end{aligned}
$$

测量误差的处理

正态分布曲线如图所示（横坐标 δ 表示随机误差，纵坐标 y 表示随机误差的概率密度）



- **对称性：**绝对值相等的正误差和负误差出现次数相等。
- **单峰性：**绝对值小的误差比绝对值大的误差出现次数多。
- **有界性：**绝对值不会超过一定的限度。
- **抵偿性：**增大测量次数，算术平均值趋于零。

测量误差的处理

正态分布曲线的数学表达式为

$$y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)$$

式中，y——概率密度； σ —标准偏差； δ——随机误差。

随机误差的**标准偏差**：

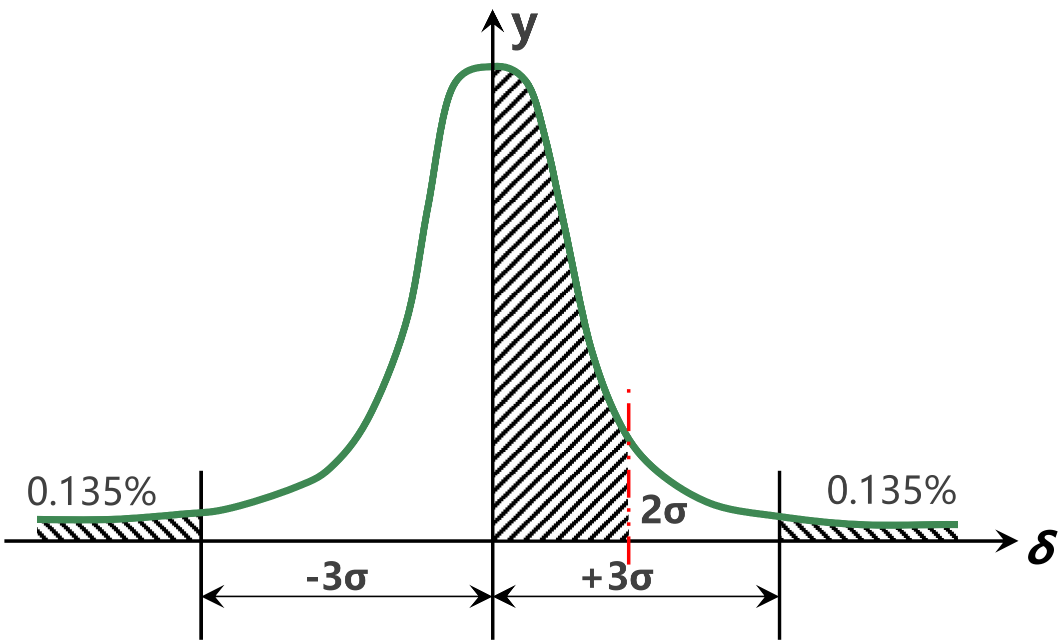
$$\sigma=\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_N^2}{N}}$$

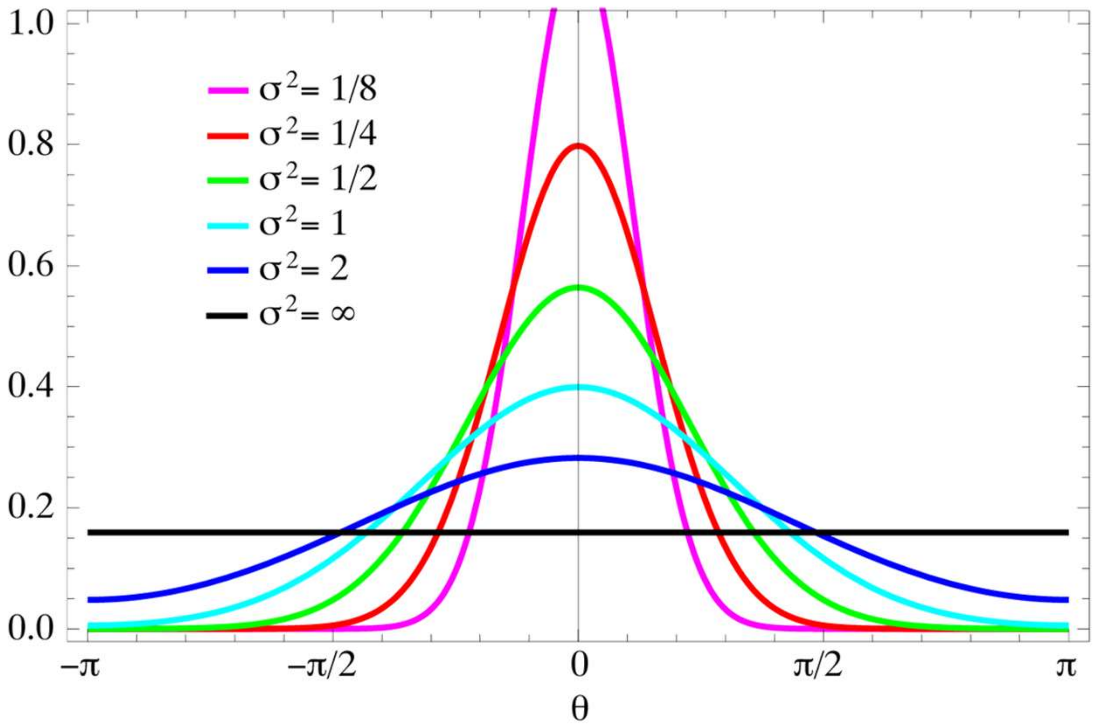
式中，N——测量次数；

δ_1、δ_2、…、δ_N——各测得值的随机误差。

测量误差的处理

标准偏差σ是反映测量列数值分散程度的一项指标，是测量列中单次测量值（任一测得值）的标准偏差。





标准偏差对随机误差分布特性的影响

测量误差的处理

随机误差区间落在（-δ~ +δ）之间的概率为

$$P=\int_{-\delta}^{+\delta} y\mathrm{d}\delta=\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}\delta$$

4个特殊k 值对应的概率			
k	$\delta=\pm k\sigma$	不超出 $\lvert\delta\rvert$ 的概率 $P=2\varphi(\mathrm{k})$	超出 $\lvert\delta\rvert$ 的概率 $P=1-2\varphi(\mathrm{k})$
1	1σ	0.6826	0.3174
2	2σ	0.9544	0.0456
3	3σ	0.9973	0.0027
4	4σ	0.99936	0.00064

测量误差的处理

- ✓ 选择不同的 k 值，就对应不同的概率，测量极限误差的可信程度也就不一样。随机误差在 $\pm k$ 范围内出现的概率称为**置信概率**，***k*** 称为置信因子或置信系数。在几何量测量中，通常取 $k=3$，即置信概率为99.73%。
- ✓ 测量次数一般不超过几十次，随机误差超出 $\pm 3\sigma$ 的情况实际上很难出现。因此，可取 $\delta = \pm 3\sigma$ 作为**随机误差的极限值**，记

$$\delta_{\lim} = \pm 3\sigma$$

显然，它也是测量列中单次测量值的测量极限误差。

测量误差的处理

2. 测量列中随机误差的处理步骤

① 计算测量列中各个测得值的算术平均值

设测量列测得值为x_1、x_2、…、x_N，则算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

② 计算残差

用算术平均值代替真值后，计算残余误差（简称残差），记为v_i，即

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

残差具有两个特性：

- 残差的代数和等于零。可用来校核 $\bar{x}$ 及其残差计算的正确性。
- 残差的平方和为最小。用 $\bar{x}$ 作为测量结果最可靠且最合理。

测量误差的处理

③ 估算测量列中单次测量值的标准偏差

计算出*单次测量值*的标准偏差的估计值。

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}v_i^{2}}$$

这时，*单次测量值*的测量结果x_e可表示为

$$x_e=x_i\pm 3\sigma$$

④ 计算测量列算术平均值的标准偏差

若相同测量条件对同一被测量进行多组测量（每组皆测量N次），则每组测量的算术平均值可能不相同，但其分散程度要比单次测量值的分散程度小得多。

测量误差的处理

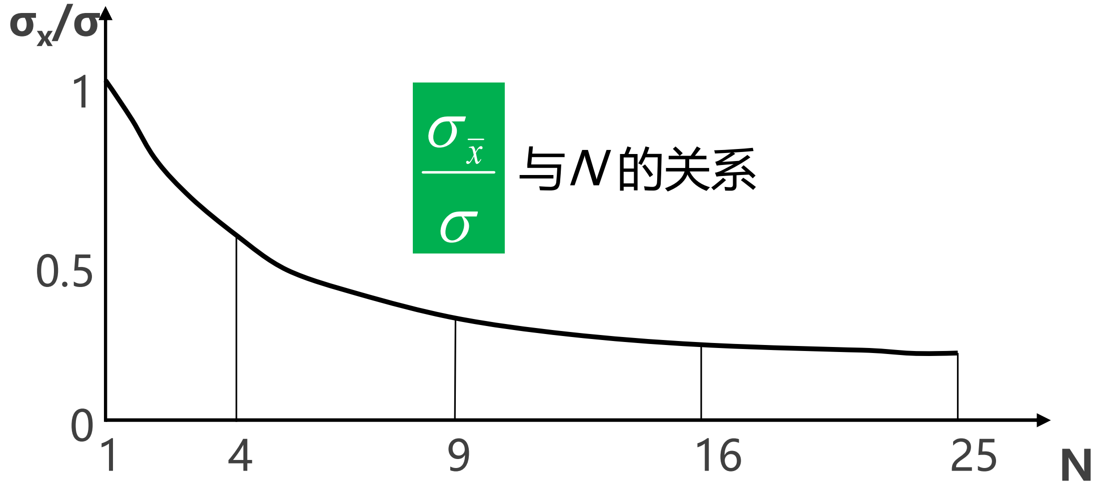
根据误差理论，测量列算术平均值的标准偏差与**测量列单次测量值的标准偏差**存在如下关系：

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

说明测量次数越多，$\sigma_{\bar{x}}$ 就越小，测量精密度就越高。但当 σ 一定时，N>10以后，$\sigma_{\bar{x}}$ 减小已很缓慢，故一般取N=10～15次为宜。

多次测量的测量结果可表示为

$$x_e = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}}$$

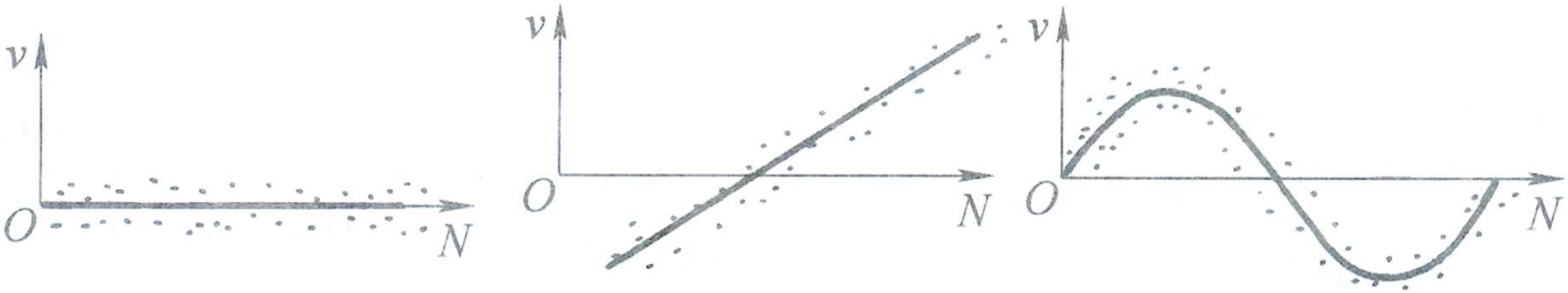


二、系统误差的处理

1. 发现系统误差的方法

➢ **实验对比法** 改变测量条件进行测量，以发现系统误差，**适用于发现定值系统误差**

➢ **残差观察法** 根据残差大小和符号变化规律，由残差数据或残差曲线来判断有无系统误差，**适用于发现大小和符号按一定规律变化的变值系统误差。**



(a)不存在变值系统误差 (b)存在线性系统误差 (c)存在周期性系统误差

变值系统误差的发现

测量误差的处理

2. 消除系统误差的方法

- **从产生误差根源上消除系统误差** 要求测量人员对测量过程中可能产生系统误差的各个环节作仔细的分析，并在测量前就将系统误差从产生根源上加以消除。
- **用修正法消除系统误差** 预先将计量器具的系统误差检定或计算出来，然后将测得值加上相应的修正值，即可得到不包含系统误差的测量结果。
- **用抵消法消除定值系统误差** 在对称位置上分别测量一次，使这两次测量中读数出现的系统误差大小相等，符号相反，取两次平均值作为测量结果，即可消除定值系统误差。
- **用半周期法消除周期性系统误差** 周期性系统误差可每相隔半个周期测量一次，以两次测量的平均值作为一个测得值，即可有效消除周期性系统误差。

三、粗大误差的处理

- ✓ 粗大误差的数值相当大，在测量中应尽可能避免。如果粗大误差已经产生，则应根据判断粗大误差的准则将其从测量列中剔除，通常用拉依达准则来判断。
- ✓ 3σ 准则:当测量列服从正态分布时，残差落在±3σ 外的概率仅有0.27%，即在连续370次测量中只有一次测量超出，而实际上连续测量的次数一般不超过370次，测量列中就不应该有超出±3σ 的残差。因此，当

$$|v_i| > 3\sigma$$

则认为该残差对应的测得值含有粗大误差，应予以剔除。

注：测量次数小于或等于10时，不能使用该准则。

等精度测量列的数据处理

一、直接测量列的数据处理

等精度测量是指在测量条件不变的情况下，对某一被测几何量进行的连续多次测量。直接测量列的数据处理步骤：

（1）消除测量列中存在的系统误差；

（2）计算算术平均值、残差和单次测量值的标准偏差；

（3）剔除粗大误差，并重复直到剔除完全；

（4）计算消除系统误差和剔除粗大误差后的测量列的算术平均值、标准偏差和测量极限误差；

（5）最后，在此基础上确定测量结果。

二、间接测量列的数据处理

间接测量的被测几何量是测量所得到的各个实测几何量的函数，而间接测量的测量误差则是各个实测几何量测量误差的函数，故称这种误差为**函数误差**。

1. 函数误差的基本计算公式

间接测量中，被测几何量通常是实测几何量的多元函数，它表示为

$$y = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\right)$$

该函数的增量可用函数的全微分来表示，即

$$dy = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} d_{x_i}$$

函数误差的基本计算公式

$\partial F / \partial x_i$： 各实测几何量的误差传递函数。

等精度测量列的数据处理

2. 函数系统误差的计算

若各实测几何量x_i的测得值中存在系统误差Δx_i，则被测几何量 y 也存在着系统误差Δy。

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i$$

间接测量中系统误差的计算公式

3. 函数随机误差的计算

函数的标准偏差与各个实测几何量的标准偏差的关系为

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2}$$

函数的测量极限误差的计算公式：

$$\delta_{\lim(y)} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \delta_{\lim(x_i)}^2}$$

等精度测量列的数据处理

4. 间接测量列的数据处理步骤

- 确定被测几何量与各个拟实测几何量的函数关系及其表达式；

$$y = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\right)$$

- 然后把各个实测几何量的测得值代入该表达式，求出被测几何量量值；
- 分别计算被测几何量的系统误差 Δy 和测量极限误差 $\delta_{\lim(y)}$；
- 在此基础上确定测量结果：

$$y_e = \left(y - \Delta y\right) \pm \delta_{\lim(y)}$$

综合例题1：

- 对某一轴径d等精度测量15次，按测量顺序将各测得值依次列于表中

测量序列	测得值
1	24.959
2	24.955
3	24.958
4	24.957
5	24.958
6	24.956
7	24.957
8	24.958
9	24.955
10	24.957
11	24.959
12	24.955
13	24.956
14	24.957
15	24.958

等精度测量列的数据处理

解：

（1）判断定值系统误差

经判断，测量列中不存在定值系统误差。

（2）求出算术平均值

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = 24.957$$

测量序列	测得值
1	24.959
2	24.955
3	24.958
4	24.957
5	24.958
6	24.956
7	24.957
8	24.958
9	24.955
10	24.957
11	24.959
12	24.955
13	24.956
14	24.957
15	24.958

等精度测量列的数据处理

（3）计算残差

各残差的的数值列于上表中。按残差观察法，这些残差的符号大体上正、负相间，但不是周期变化，因此可以判断测量列中不存在变值系统误差。

（4）计算测量列单次测量值的标准偏差

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}v_i^2}{N-1}}=\sqrt{\frac{26}{15-1}}\approx 1.3um$$

测量序列	测得值	残差
1	24.959	+2
2	24.955	-2
3	24.958	+1
4	24.957	0
5	24.958	+1
6	24.956	-1
7	24.957	0
8	24.958	+1
9	24.955	-2
10	24.957	0
11	24.959	+2
12	24.955	-2
13	24.956	-1
14	24.957	0
15	24.958	+1

等精度测量列的数据处理

（5）判断粗大误差

按照3σ 准则，测量列中没有出现绝对值大于 3*1.3=3.9 的残差，因此可以判断测量列中不存在粗大误差。

（6）计算测量算术平均值的标准偏差

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}=\frac{1.3}{\sqrt{15}}\approx 0.35um$$

测量序列	测得值	残差
1	24.959	+2
2	24.955	-2
3	24.958	+1
4	24.957	0
5	24.958	+1
6	24.956	-1
7	24.957	0
8	24.958	+1
9	24.955	-2
10	24.957	0
11	24.959	+2
12	24.955	-2
13	24.956	-1
14	24.957	0
15	24.958	+1

等精度测量列的数据处理

（7）计算测量算术平均值的测量极限误差：

$$\delta_{\lim} = 3\sigma_{\bar{x}} = 3 * 0.35 = 1.05um$$

（8）确定测量结果

$$d_e = \bar{x} \pm \delta_{\lim} = 24.957 \pm 0.001\text{mm}$$

等精度测量列的数据处理

综合例题3：

例 1-5 用立式光学计对轴进行 10 次等精度测量，所得数据列如表 1-12 所示，求测量结果。

表 1-12 10 次测量数据整理

序号	测得值 x_i /mm	残余误差 ν_i/μm $\nu_i = x_i - \bar{x}$	残余误差的平方 ν_i^2 /μm^2
1	40.051	+3	9
2	40.047	−1	1
3	40.049	+1	1
4	40.043	−5	25
5	40.049	+1	1
6	40.046	−2	4
7	40.045	−3	9
8	40.048	0	0
9	40.052	+4	16
10	40.050	+2	4
	算术平均值 $\bar{x} = 40.048$	$\sum_{i=1}^{n} \nu_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 = 70$

解：(1) 判断是否存在系统误差。

根据系统误差的定义判断，测量列中无系统误差。

(2) 求算术平均值 $\bar{x}$。

根据式(1-23)得

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10} \times 400.48 = 40.048\ (\mathrm{mm})$$

(3) 计算残余误差 ν_i。

根据 $\nu_i = x_i - \bar{x}$ 计算出各测量值的残余误差，并列入表 1-12 中。

(4) 计算单次测量的标准偏差的估计值 σ'。

等精度测量列的数据处理

综合例题3：

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{70}{10-1}} = 2.8(\mu\text{m})$$

(5) 判断是否存在粗大误差。

因表 1－12 中第二列残余误差 ν_i 中最大绝对值

$$|\nu_4| = 5\ \mu\text{m} < 3\sigma' = 3\times 2.8 = 8.49(\mu\text{m}),$$

因此测量列中不存在粗大误差。

(6) 计算测量列平均值的标准偏差的估计值 $\sigma'_{\bar{x}}$。

根据式(1－29)得 $\sigma'_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}} = \dfrac{2.8}{\sqrt{10}} = 0.89(\mu\text{m})$

(7) 计算测量列极限误差。

根据式(1－28)得单次测量的极限偏差：

$$\delta_{\lim} = \pm 3\sigma = \pm 3\sigma' = \pm 3\times 2.8 = \pm 8.4(\mu\text{m}) = \pm 0.0084\ (\text{mm})$$

根据式(1－30)得算术平均值的极限偏差：

$$\delta_{\lim(\bar{x})} = \pm 3\sigma_{\bar{x}} = \pm 3\sigma'_{\bar{x}} = \pm 3\times 0.89 = \pm 2.67(\mu\text{m}) \approx \pm 0.0027(\text{mm})$$

(8) 确定测量结果。

用平均值表示：　$x = \bar{x} \pm 3\sigma'_{\bar{x}} = (40.048 \pm 0.0027)\text{mm}$

用单次测量值表示：$x'_4 = x_4 \pm 3\sigma' = (40.043 \pm 0.0084)\text{mm}$

比较两式可见，单次测量结果的误差大，测量的可靠性差。因此精密测量中常用重复测量的算术平均值作为测量结果，用算术平均值的标准偏差或算术平均值的极限误差评定算术平均值的精密度。

等精度测量列的数据处理

综合例题3：

例：对某一轴进行10次测量，其测得值列表如下，求测量结果。

x_i (mm)
50.454
50.459
50.459
50.454
50.458
50.459
50.456
50.458
50.458
50.455
$\bar{x}=50.457$

10次测量的极限误差

解：1）求算术平均值 $\bar{x}$；

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i \quad =50.457\text{mm}$$

2）求残余误差；

$$\sum v_i=0,\quad \sum v_i^2=38\mu\text{m}$$

3）求单次测量的标准偏差 σ；

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2}=2.05\mu\text{m}$$

单次测量极限误差

$$x_e=x_i\pm 3\sigma$$

4）求算术平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$；

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2.05}{\sqrt{10}}=0.65\mu\text{m}$$

$$\pm 3\sigma_{\bar{x}}=\pm 1.95\mu\text{m}$$

5）得测量结果

$$l=\bar{x}\pm 3\sigma_{\bar{x}}=50.457\pm \mathbf{0.002mm}$$

1. 随机误差

指在同一条件下，对同一被测几何量进行多次重复测量时，绝对值和符号以不可预定的方式变化着的误差称为随机误差。

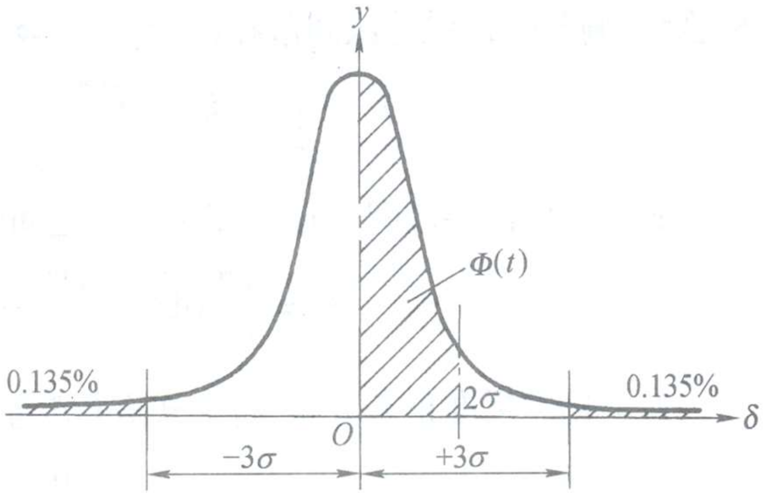
从表面看，随机误差没有任何规律，表现为纯粹的偶然性，因此也讲其称为偶然误差。

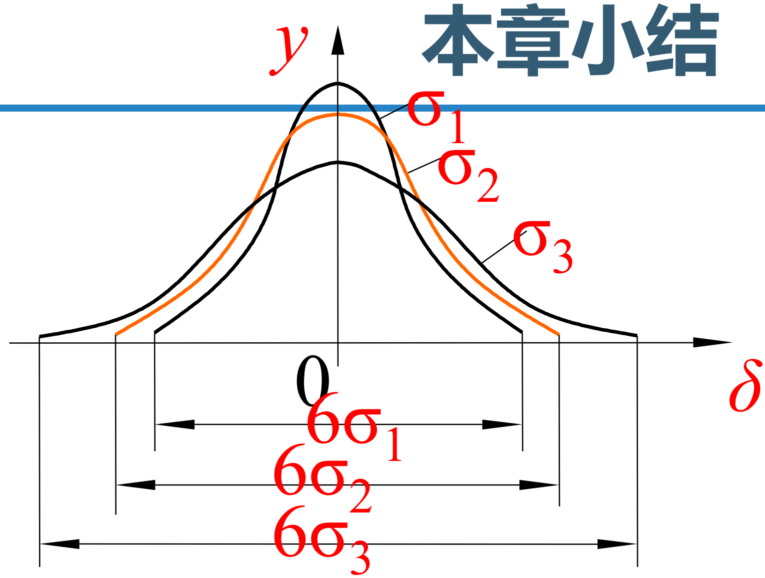
2. 随机误差的特点

在一定测量条件下对同一值进行大量重复测量时，总体随机误差的产生满足统计规律，即具有有界性、对称性、抵偿性、单峰性。因此，可以分析和估算误差值的变动范围，并通过取平均值的办法来减小其对测量结果的影响。

正态分布曲线的两个基本参数是平均值 $\bar{x}$ 和标准偏差 σ。$\bar{x}$ 决定曲线的位置，σ 决定曲线的形状，它并不是一个具体的偏差，而只表明随机误差的分散程度，σ 越小，曲线越陡，随机误差分布越集中，测量越精密。

- 标准偏差σ ，它反映了测量值的离散程度，是测量值*x* *的正态分布函数的一个重要参数。*
- σ 越小，曲线峰值越高，图形越尖锐，表明测量值数据集中，重复性好。





总体标准偏差对随机误差分布特性的影响

不同的σ对应不同形状的正态分布曲线，σ越小，y_{max}值越大，曲线越陡，随机误差越集中，即测得值分布越集中，测量精密度越高；σ越大，y_{max}值越小，曲线越平坦，随机误差越分散，即测得值分布越分散，测量精密度越低。图所示为$\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$时三种正态分布曲线，因此，σ可作为表征各测得值的精度指标。

3. 单次测量的标准偏差σ

4. 单次测量的极限误差值

- 由于超出$\delta=\pm3\sigma$的概率已很小，故在实践中常认为$\delta=\pm3\sigma$的概率$P\approx1$。从而将$\pm3\sigma$看作是单次测量的随机误差的极限值，将此值称为极限误差，记作

$$\delta_{\lim}=\pm3\sigma=\pm3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}}$$

即单次测量的测量结果为:

$$X=X_i\pm\delta_{\lim}=X_i\pm3\sigma$$

式中 x_i 为某次测得值。

极限误差Δ $\Delta=3\sigma$

$$\int_{-3\sigma}^{+3\sigma}f(\delta)d\delta=p(-3\sigma<\delta<+3\sigma)=99.7\%$$

从上式可见，随机误差绝对值大于3σ的概率很小，只有0.3%，出现的可能性很小。因此定义：

$$\Delta=3\sigma$$

5. 随机误差的处理过程

1）采用多次（一般为5-15次）重复测量，减少随机误差的影响。

2）取多次测量的算术平均值作为测量结果，以提高测量精度。

若在相同条件下，重复测量n次，

单次测量的标准偏差为σ

则n次测量的算术平均值标准偏差 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

测量结果为 $x = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}}$

6. 测量列算术平均值的标准偏差

- 相同条件下，对同一被测量，将测量列分为若干组，每组进行*n*次的测量称为多次测量。
- 标准偏差σ代表一组测得值中任一测得值的精密程度，但在多次重复测量中是以算术平均值作为测量结果的。因此，更重要的是要知道算术平均值的精密程度，可用算术平均值的标准偏差表示。
- 根据误差理论，测量列算术平均值的标准偏差用下式计算

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

7. 多次测量的测量结果

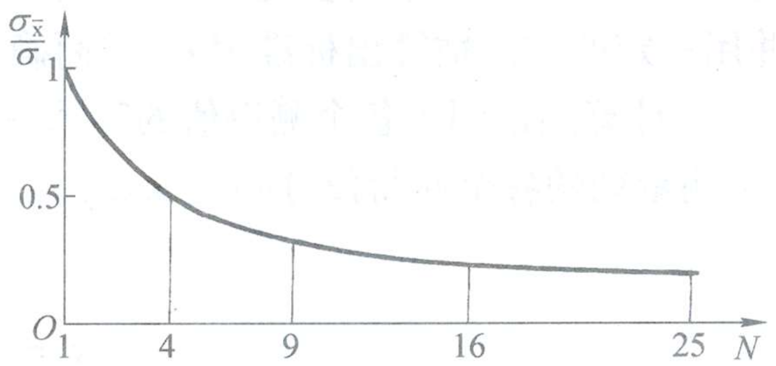
根据误差理论，测量列算术平均值的标准偏差与测量列单次测量值的标准偏差存在如下关系：

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

说明测量次数越多，$\sigma_{\bar{x}}$越小，测量精密度就越高。但当σ一定时，*N*>10以后，$\sigma_{\bar{x}}$减小已很缓慢，故一般取*N*=10～15次为宜。

多次测量的测量结果可表示为

$$x_e = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}}$$



$\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sigma}$的关系