材料力学 （II）

第十三章 能量方法（3）

Energy method（3）

第 27 讲

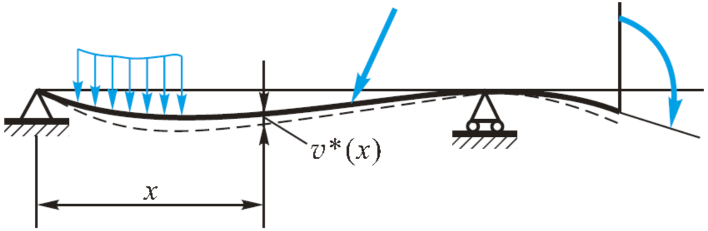
§13.6 虚功原理

虚功以及虚位移等概念最早由J. L拉格朗日于1788年在《分析力学》中给出。

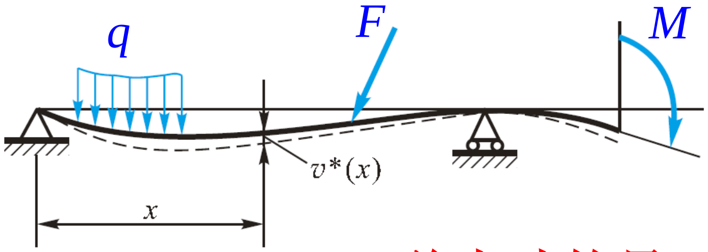
在弹性力学理论以及计算力学理论中，研究的对象一般为弹性体，将虚位移原理（principle of virtual displacements）以及虚内力（应力）原理合称为虚功原理。（中国大百科全书 第三版的虚位移原理词条）

虚位移：在约束允许条件下，可能实现的微小位移。

虚位移可以是线位移，也可以是角位移。



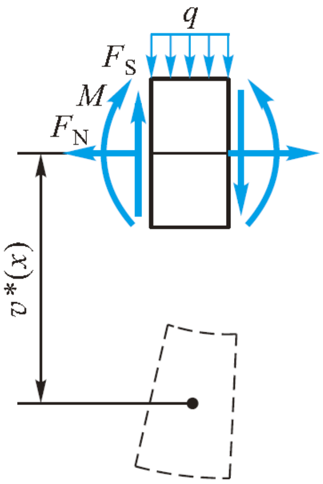
虚功：杆件上的力在虚位移上所做的功。



外力总虚功（*F*为广义力，*v**为虚位移）：

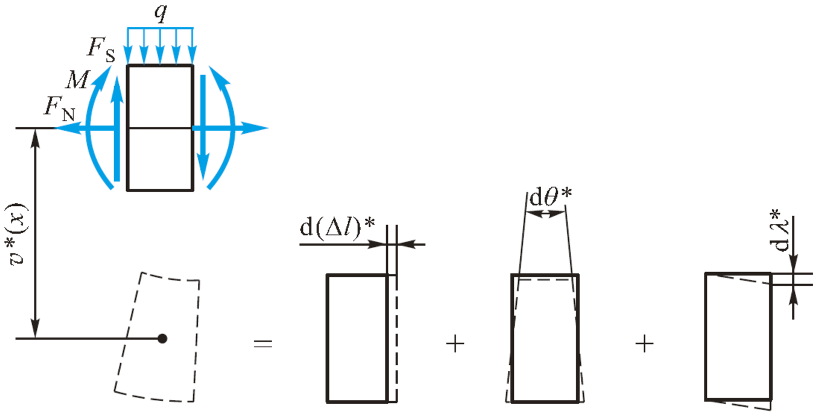
$$W_e = F_1 v_1^* + F_2 v_2^* + F_3 v_3^* + \cdots + \int_l q(x) v^*(x) \mathrm{d}x + \cdots$$

总虚功的另一种计算方法：



在杆件中取一微段，微段以外的其余部分的变形，使所研究的微段得到刚性虚位移，所研究的微段本身在虚位移中发生变形引起的虚位移，称为变形虚位移。

作用于微段上的力系（包括外力和内力）是一个平衡力系，根据质点系的虚位移原理，这一平衡力系在刚性虚位移上做功的总和等于零，因而只剩下在变形虚位移中所做的功。



微段的变形虚位移可以分解成：两端截面的轴向相对位移$d(\Delta l)^*$、相对转角$d\theta^*$、相对错动$d\lambda^*$。在上述微段的变形虚位移中，只有两端截面上的内力做功，其数值为 $dW = F_N d(\Delta l)^* + M d\theta^* + F_S d\lambda^* + T d\varphi^*$

总虚功为 $W = \int F_N d(\Delta l)^* + \int M d\theta^* + \int F_S d\lambda^* + \int T d\varphi^*$

虚功原理 弹性杆件处于平衡状态的充分必要条件是：外力所做的虚功等于内力在相应虚变形所做的虚功【外力虚功等于杆件的虚应变能】。

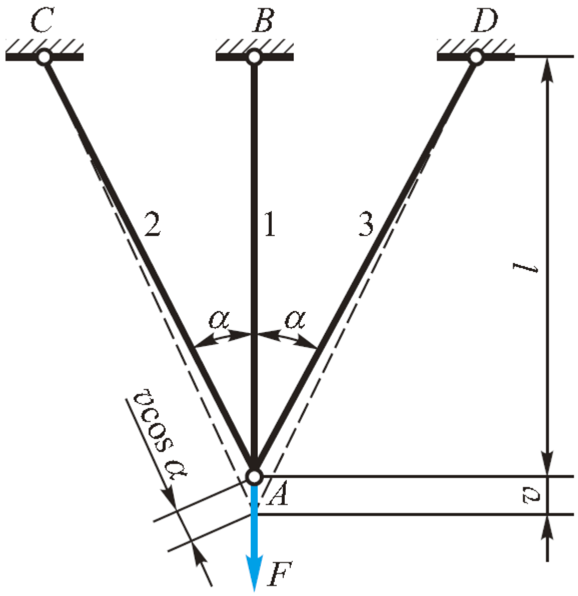
$$F_1 v_1^* + F_2 v_2^* + F_3 v_3^* + \cdots + \int_l q(x) v^*(x) dx + \cdots + M_{e1}\varphi_1^* + M_{e2}\varphi_2^* + \cdots$$

$$= \int F_N d(\Delta l)^* + \int M d\theta^* + \int F_S d\lambda^* + \int T d\varphi^*$$

M_{e1}，M_{e2}，… 为扭转力偶矩

在导出虚功原理时，并未使用应力–应变关系，故虚功原理与材料的性能无关，它可用于线弹性材料，也可用于非线性弹性材料！

例1　求图示桁架各杆件的内力。设三杆的横截面面积相等，材料相同，且是线弹性的。



解： 由于对称，A点只可能有垂直位移为v。

由此引起杆1 和杆2 的伸长量分别为

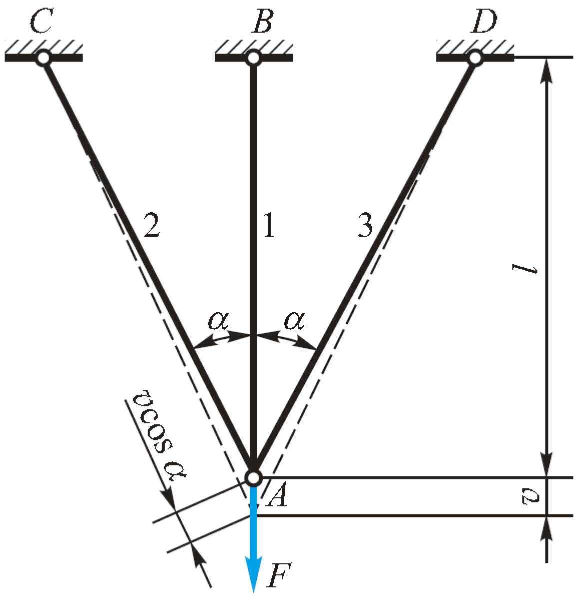
$$\Delta l_1 = v, \quad \Delta l_2 = v\cos\alpha$$

由胡克定律求出三杆的内力分别为

$$F_{N1} = \frac{EA}{l}v$$

$$F_{N2} = F_{N3} = \frac{EA}{l_2}v\cos\alpha = \frac{EA}{l}v\cos^2\alpha$$

设节点A有一铅垂的虚位移δv，则外力虚功为$F\,\delta v$。



$$F_{N1}=\frac{EA}{l}v=\frac{F}{1+2\cos^3\alpha}$$

$$F_{N2}=F_{N3}=\frac{EA}{l}v\cos^2\alpha$$

$$=\frac{F\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$$

杆1 的内力虚功

$$W_1=\int_l F_{N1}\mathrm{d}(\Delta l_1)^*=F_{N1}(\Delta l_1)^*=\frac{EA}{l}v\delta v$$

杆2和3 的内力虚功

$$W_2=W_3=\int_l F_{N2}\mathrm{d}(\Delta l_2)^*=F_{N2}(\Delta l_2)^*$$

$$=\frac{EA}{l}v\cos^2\alpha\cdot\delta v\cos\alpha=\frac{EA}{l}v\cos^3\alpha\cdot\delta v$$

整个桁架的内力虚功为

$$W=W_1+2W_2=\frac{EAv}{l}(1+2\cos^3\alpha)\delta v$$

由虚功原理，内力虚功应等于外力虚功

$$v=\frac{Fl}{EA(1+2\cos^3\alpha)} \Longleftarrow \frac{EAv}{l}(1+2\cos^3\alpha)\delta v=F\delta v$$

§ 13.7 单位载荷法 莫尔积分

考察杆件在实际荷载作用下产生的位移：

（1）满足支座约束条件外；

（2）满足单元体变形的几何相容条件；

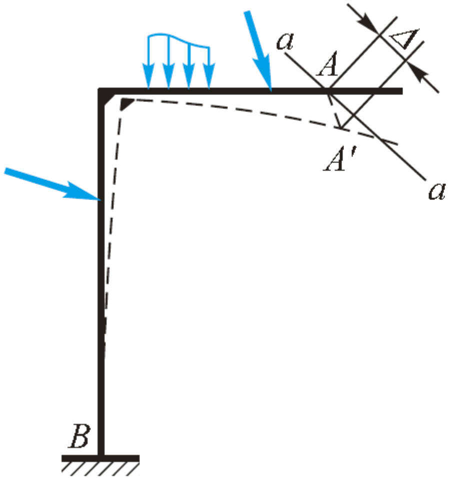
（3）是微小位移；

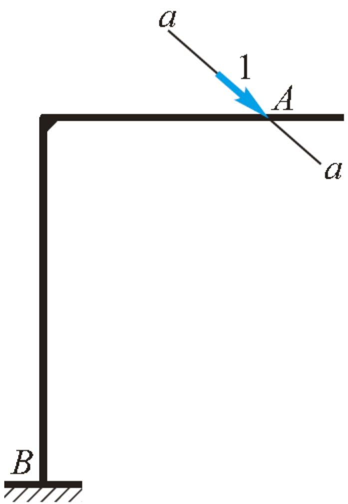
满足虚位移条件

可以用杆件在实际荷载作用下产生的位移作为虚位移

在外力作用下，计算刚架A点沿某一任意方向aa的位移为Δ。

把刚架在原有外力作用下的位移作为虚位移（注：刚架在实际载荷作用下的位移满足虚位移的条件），加于单位力作用下的刚架上。





运用虚功原理

$$1 \cdot \Delta = \int \bar{F}_{\mathrm{N}}(x)\mathrm{d}(\Delta l) + \int \bar{M}(x)\mathrm{d}\theta + \int \bar{F}_{\mathrm{S}}(x)\mathrm{d}\lambda$$

以弯曲变形为主的杆件（不计剪力的影响）

$$\Delta = \int \bar{M}(x)\mathrm{d}\theta$$

只有轴力的拉伸或压缩杆件

$$\Delta = \int \bar{F}_{\mathrm{N}}(x)\mathrm{d}(\Delta l)$$

若材料是线弹性的，则有

$$\mathrm{d}(\Delta l)=\frac{F_{\mathrm{N}}\mathrm{d}x}{EA},\quad \mathrm{d}\theta=\frac{M\mathrm{d}x}{EI},\quad \mathrm{d}\lambda=\frac{kF_s\mathrm{d}x}{GA},\quad \mathrm{d}\varphi=\frac{T\mathrm{d}x}{GI_P}$$

代入单位载荷法的公式，得

$$1\cdot\Delta=\int\frac{\bar{F}_{\mathrm{N}}(x)F_{\mathrm{N}}(x)}{EA}\mathrm{d}x+\int\frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI}\mathrm{d}x+\int\frac{k\bar{F}_S(x)F_S(x)}{GA}\mathrm{d}x+\int\frac{\bar{T}(x)T(x)}{GI_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}x$$

以弯曲变形为主的杆件（不计剪力的影响） $\Delta=\int\frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI}\mathrm{d}x$

只有轴力的拉伸或压缩杆件 $\Delta=\int\frac{\bar{F}_{\mathrm{N}}(x)F_{\mathrm{N}}(x)}{EA}\mathrm{d}x$ $\quad\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i}{EA_i}$ （桁架）

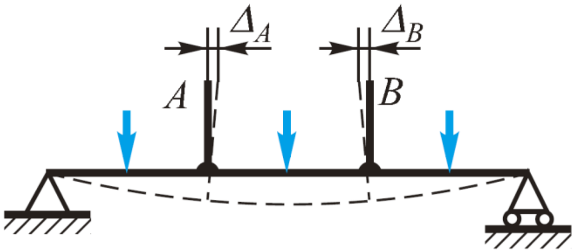
只有扭转变形的杆件 $\Delta=\int\frac{\bar{T}(x)T(x)}{GI_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}x$

对非圆形截面杆件的扭转，上式中将I_{p}改为I_{t}

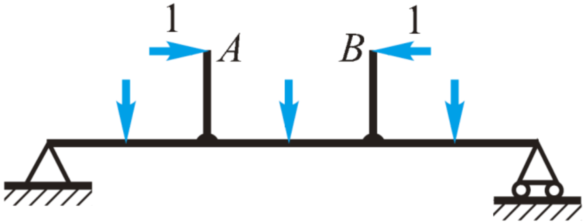
上列诸式统称为莫尔定理，式中积分称为莫尔积分。

若要求结构上两点的相对位移，如图。

只要在A、B两点沿A、B的连线作用方向相反的一对单位力，然后用单位载荷法（莫尔定理）计算，即可求得相对位移。



$$\Delta = \Delta_A + \Delta_B$$



同理，如需求两个截面的相对转角，就在这两个截面上作用方向相反的一对单位力偶矩。

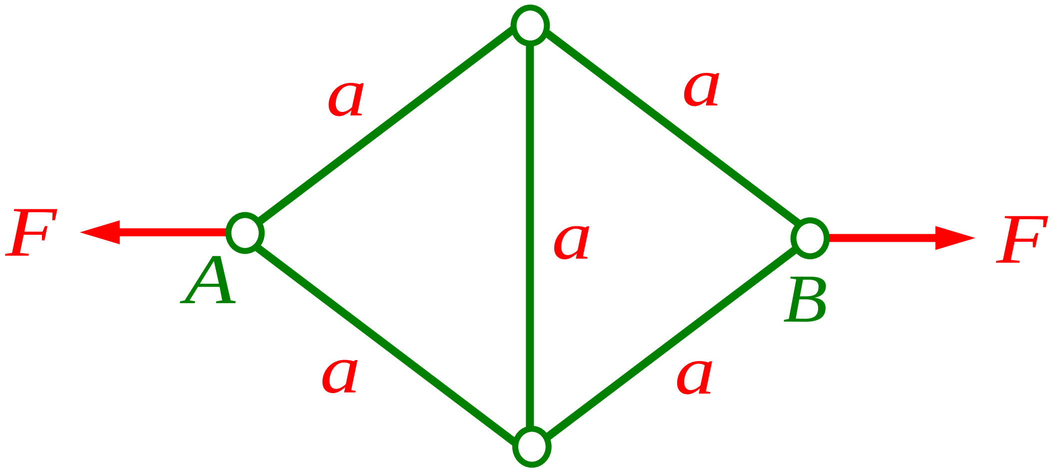
单位载荷法（莫尔定理）

$$1\cdot\Delta=\int_l\left(\bar{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x+\bar{F}_S\cdot\frac{kF_S}{GA}\mathrm{d}x+\bar{F}_\mathrm{N}\frac{F_\mathrm{N}}{EA}\mathrm{d}x+\bar{T}\frac{T}{GI_P}\mathrm{d}x\right)$$

说明：应用上式计算位移时需注意

1. 右端的项目根据具体情况来定，不一定每项都有
   对于桁架问题，公式右端只剩轴力这一项
2. 单位力是广义力，视需确定的位移而定
3. 计算结果为正，说明所求位移与单位力指向一致
   计算结果为负，说明所求位移与单位力指向相反
4. 积分遍布整个结构

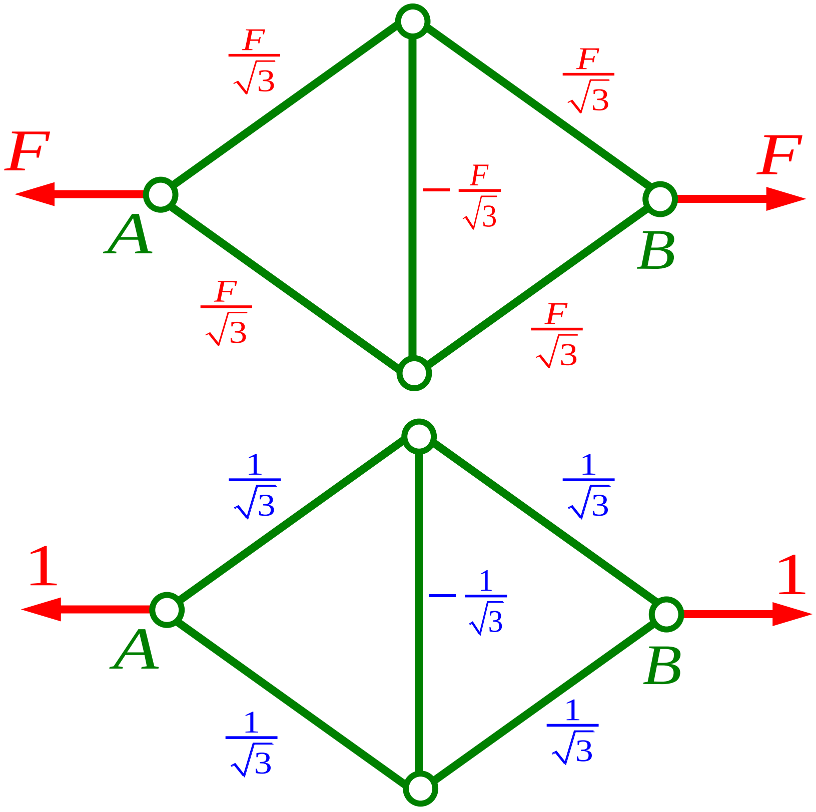
例2 用单位载荷法求AB间的相对位移（各杆的拉压刚度为EA，长度均为a）



解：用单位载荷法

1. 在AB点施加一对单位力(如图)

2. 分别计算在实际载荷和单位载荷作用下杆系各杆的内力



3. 利用单位载荷法公式计算位移

桁架结构：$1\cdot\Delta=\int_l \bar{F}_{\mathrm{N}}\frac{F_{\mathrm{N}}}{EA}\mathrm{d}x$

$$\Delta=\sum_{i=1}^{5}\bar{F}_{\mathrm{N}i}\frac{F_{\mathrm{N}i}l_i}{EA}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{F}{\sqrt{3}}\cdot a}{EA}\times 4+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{\left(-\frac{F}{\sqrt{3}}\right)\cdot a}{EA}$$

$$\Delta=\frac{5}{3}\frac{Fa}{EA}$$

本题也可用卡氏第二定理

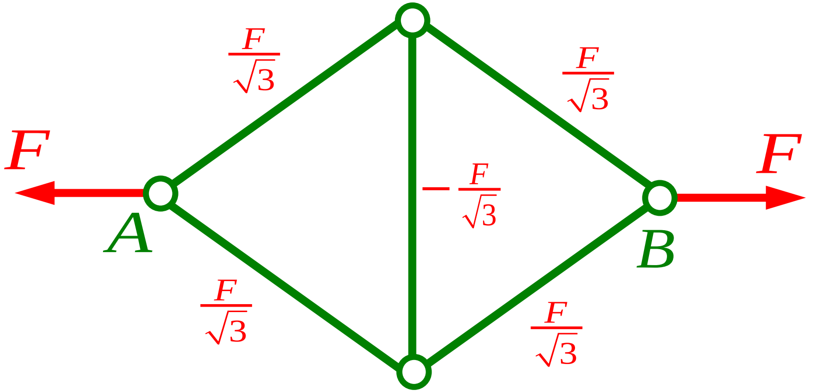
$$\Delta = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}$$

$$V_\varepsilon = \sum_{i=1}^{5} \frac{F_{\mathrm{N}i}^2 \cdot l_i}{2EA}$$

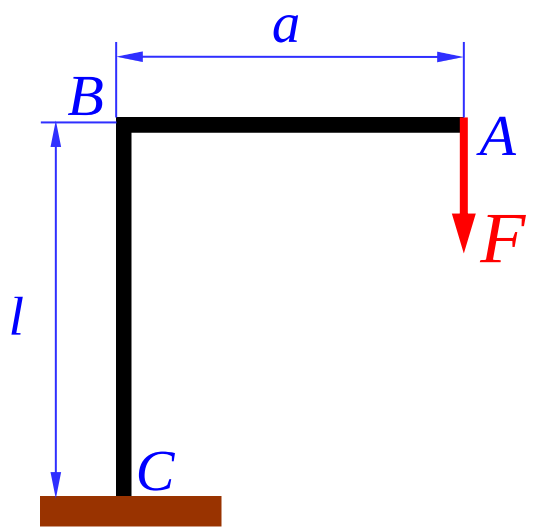
$$= \sum_{i=1}^{5} \frac{\left(\frac{F}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot a}{2EA} = \frac{5F^2 a}{6EA}$$

$$\Delta = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F} = \frac{5Fa}{3EA}$$

结果与单位载荷法相同！



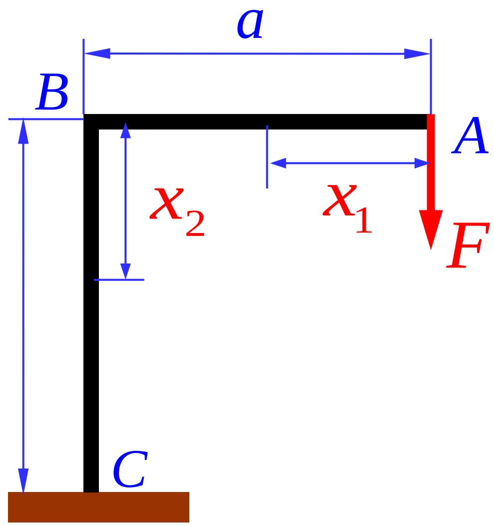
例3　图示刚架的自由端A作用集中载荷F。刚架各段的抗弯刚度为EI。若不计轴力和剪力对位移的影响，试用单位载荷法计算A点的铅垂位移w_A及截面B的转角θ_B。

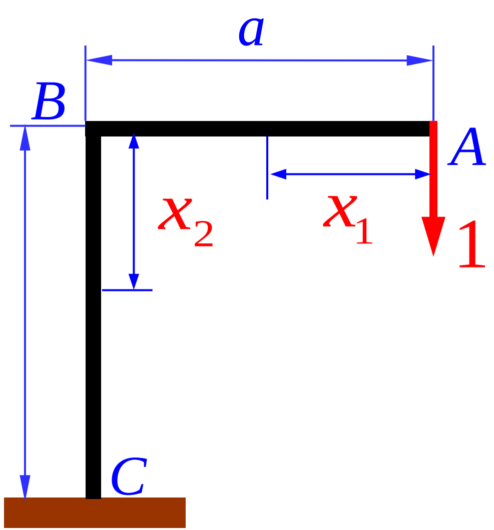


解(一)：求w_A

刚架弯矩的正负：

从外载荷作用和单位力作用中，任意规定其中一个弯矩的方向是正的，则另外一个的弯矩：同向为正，反向为负。





$$w_A=\int_0^a\frac{\bar{M}(x_1)M(x_1)}{EI}\mathrm{d}x_1+\int_0^l\frac{\bar{M}(x_2)M(x_2)}{EI}\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{1}{EI}\left[\int_0^a(-x_1)(-Fx_1)\mathrm{d}x_1+\int_0^l(-a)(-Fa)\mathrm{d}x_2\right]$$

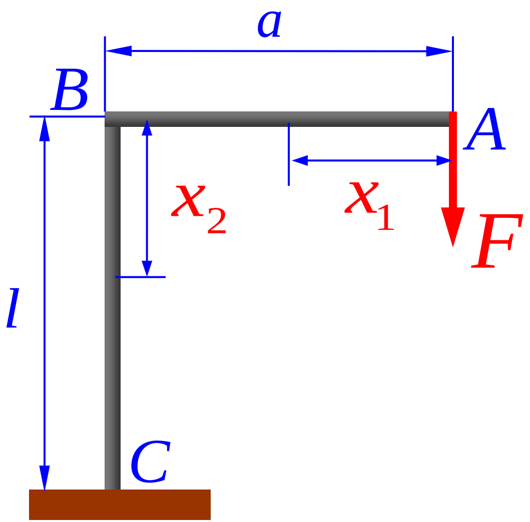
$$=\frac{F}{EI}\times\frac{a^3}{3}+\frac{F}{EI}\times a^2l=\frac{Fa^2}{3EI}(a+3l)$$

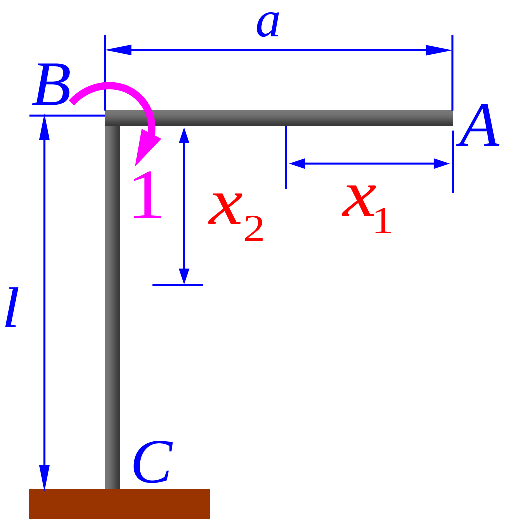
AB段：$M(x_1)=-Fx_1\quad \bar{M}(x_1)=-x_1$

BC段：$M(x_2)=-Fa\quad \bar{M}(x_2)=-a$

A点位移为正，即方向与单位力相同（垂直向下）

解(二)：求θ_B





AB段

$$M(x_1) = -Fx_1 \qquad \bar{M}(x_1) = 0$$

BC段

$$M(x_2) = -Fa \qquad \bar{M}(x_2) = -1$$

$$\theta_B = \int_0^a \frac{\bar{M}(x_1)M(x_1)}{EI}\mathrm{d}x_1 + \int_0^l \frac{\bar{M}(x_2)M(x_2)}{EI}\mathrm{d}x_2 = 0 + \frac{1}{EI}\int_0^l (-1)(-Fa)\mathrm{d}x_2 = \frac{Fal}{EI}$$

B 截面转角与单位力偶的方向相同，即为顺时针方向。

§ 13.8 计算莫尔积分的图乘法

单位载荷法的求解中，经常需要计算下列积分

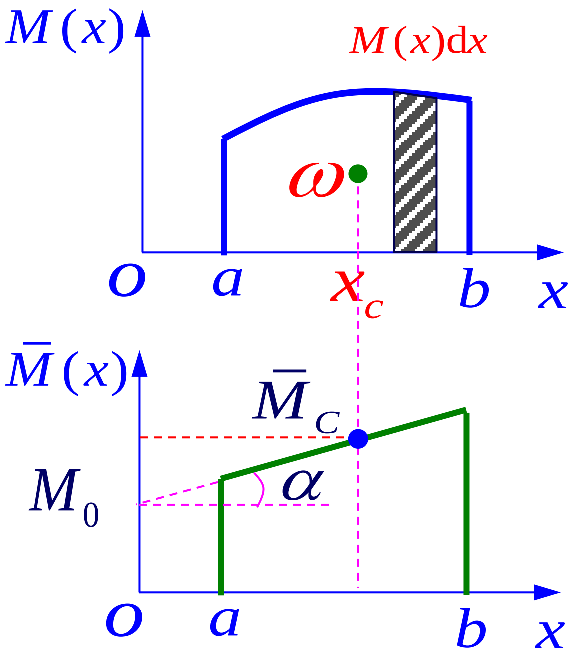
$$\Delta = \int_l \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x$$

在等截面直杆的情形下，*EI*为常量，这样就只需计算积分

$$\int_l M(x)\bar{M}(x)\mathrm{d}x$$

直杆在单位力或单位力偶作用下，其内力图必是直线或折线。

直杆在单位力或单位力偶作用下，其内力图必是直线或折线。



$$\bar{M}(x) = M_0 + x\tan\alpha$$

$$\int_l M(x)\bar{M}(x)\mathrm{d}x = \int_l M(x)(M_0 + x\tan\alpha)\mathrm{d}x$$

$$= M_0 \boxed{\int_l M(x)\mathrm{d}x} + \tan\alpha \boxed{\int_l M(x)\cdot x\mathrm{d}x} \quad ?$$

ω

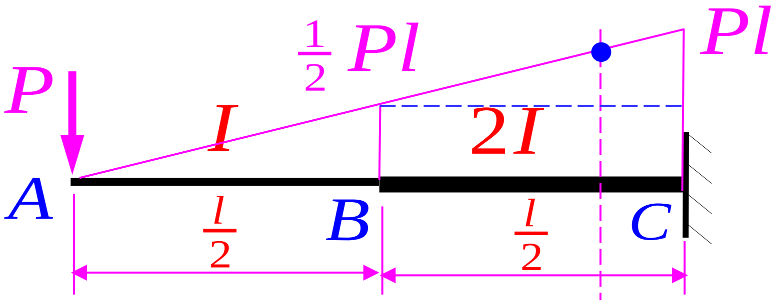
$$= M_0\omega + \tan\alpha \boxed{\int_l x\cdot M(x)\mathrm{d}x} \quad \omega\cdot x_c$$

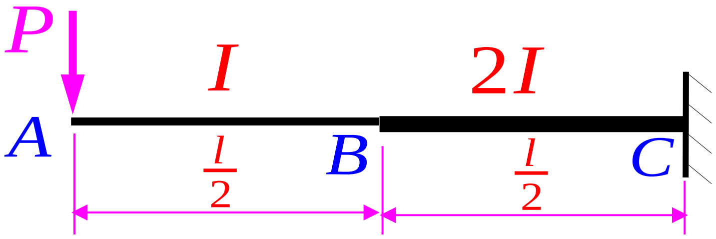
$$= \omega(M_0 + x_c\tan\alpha) = \omega\bar{M}_C$$

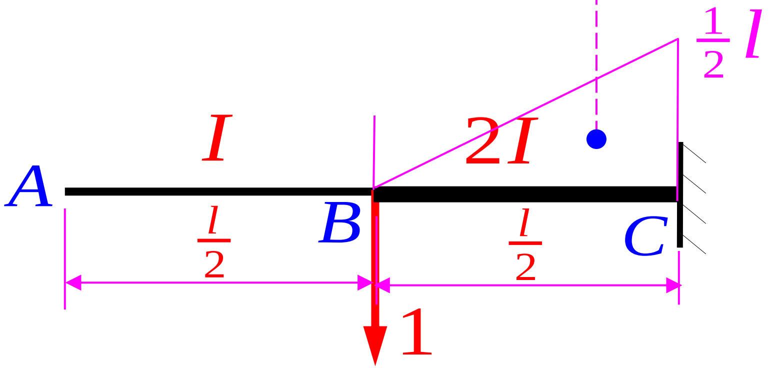
ω ——外力作用下弯矩图的面积

$\bar{M}_C$ ——弯矩图M 的形心对应的 $\bar{M}$ 图的高度

例4 用单位载荷法（图乘法）求图示梁B点的挠度和A点的转角，不计剪切变形的影响，梁材料的弹性模量为E。







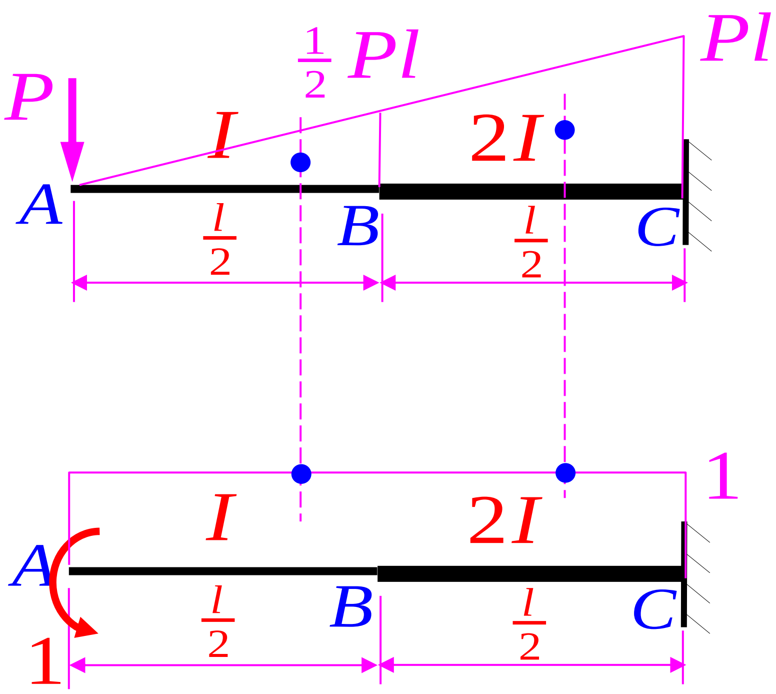
解（一）：求B点的挠度

（1）作外载荷作用下的弯矩图

（2）在B点施加单位力，并作弯矩图

用图乘法

$$w_B = \frac{1}{E\times 2I}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}Pl+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}Pl\right)=\frac{5Pl^3}{96EI}$$



解（二）： 求A截面的转角

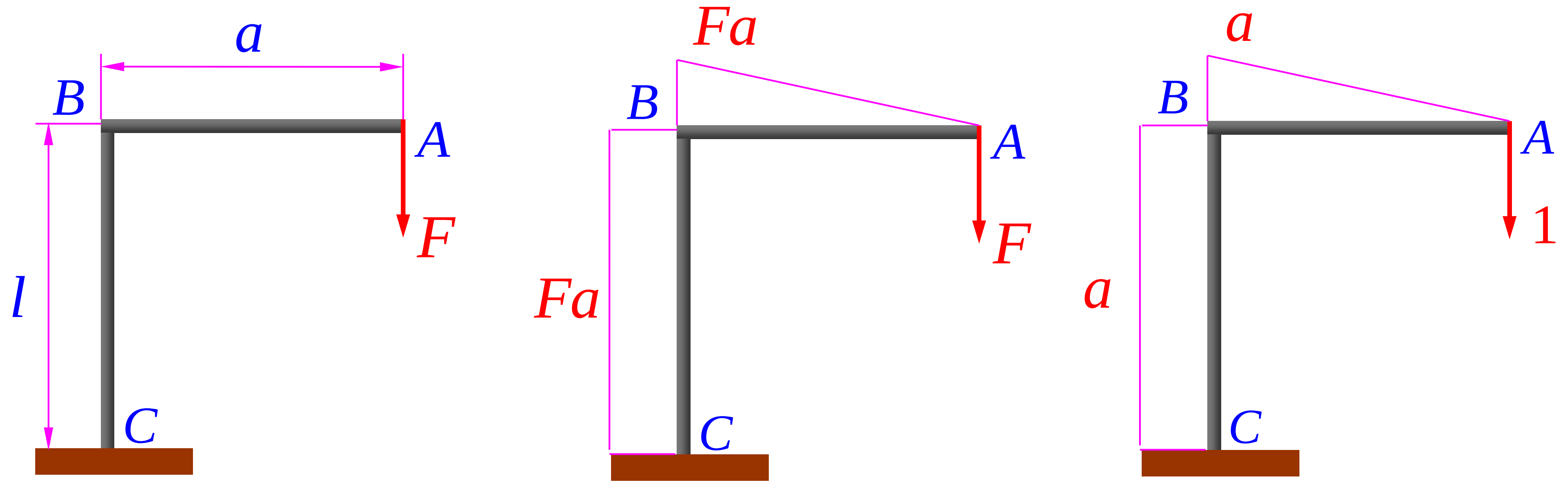
（1）作外载荷作用下的弯矩图

（2）在A端施加单位力矩，并作弯矩图

利用图乘法（因弯曲刚度不同，分两段计算）

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{1}{2}Pl\right)\times 1 + \frac{1}{2EI}\times\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}Pl+Pl\right)\times\frac{l}{2}\right]\times 1 = \frac{5Pl^2}{16EI}$$

例5 用图乘法求图示结构中A截面的铅垂位移。

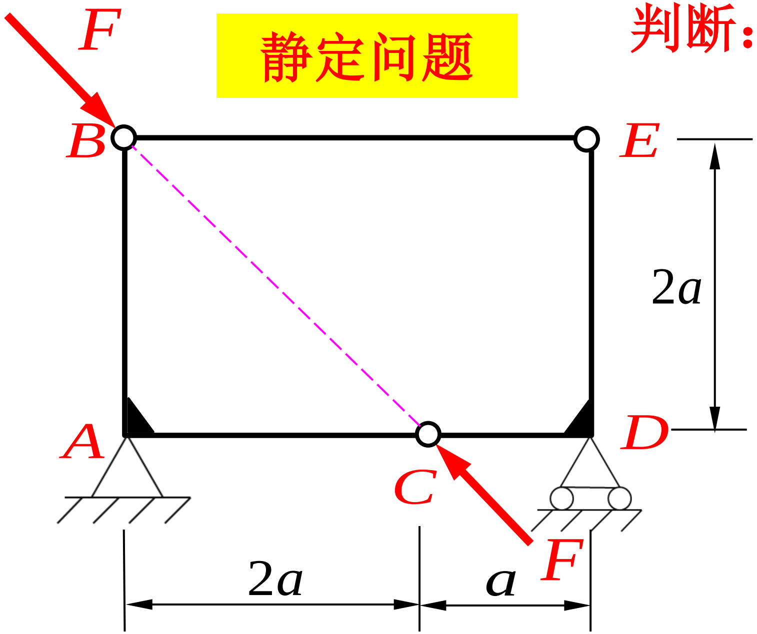


解：作弯矩图

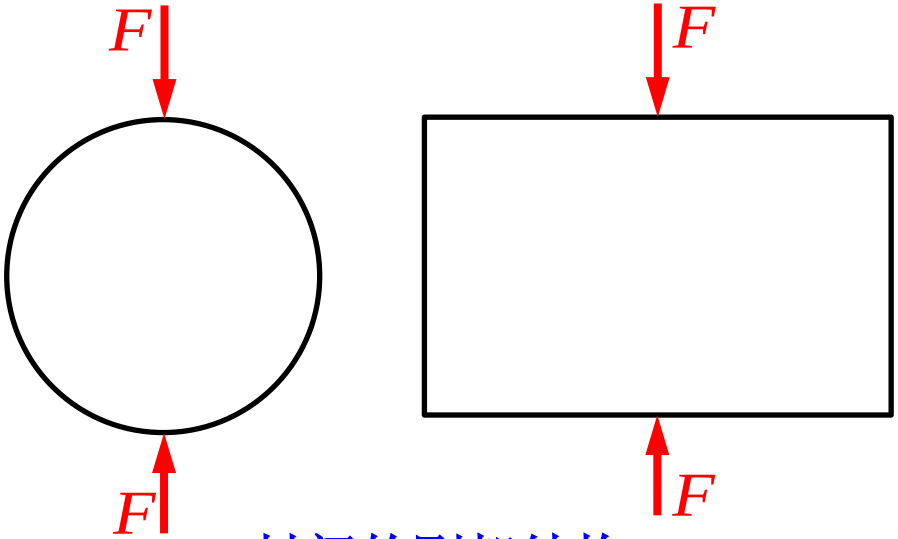
$$w_{Ay}=\frac{1}{EI}\times\left[\left(\frac{1}{2}Fa\times a\right)\times\left(\frac{2}{3}a\right)+\left(Fa\times l\right)\times a\right]=\frac{F}{EI}\times\left(\frac{a^3}{3}+a^2l\right)=\frac{Fa^2}{3EI}(a+3l)$$

例6　图示结构，各杆的弯曲刚度为EI，不计轴力和剪力对位移的影响。用单位载荷法计算铰B、C间的相对位移和C点的铅垂位移。

静定问题



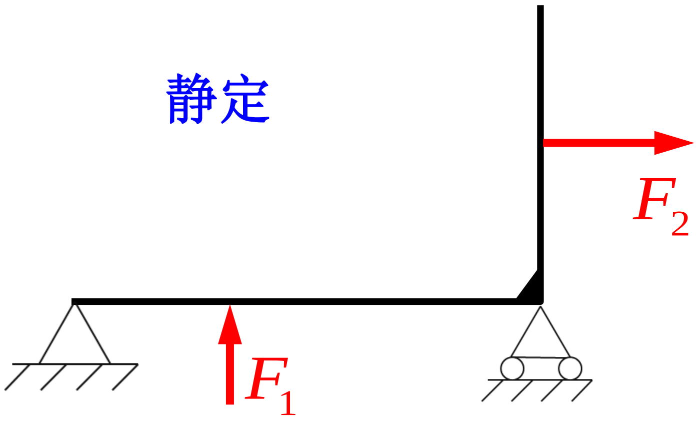
判断：静定还是超静定问题？

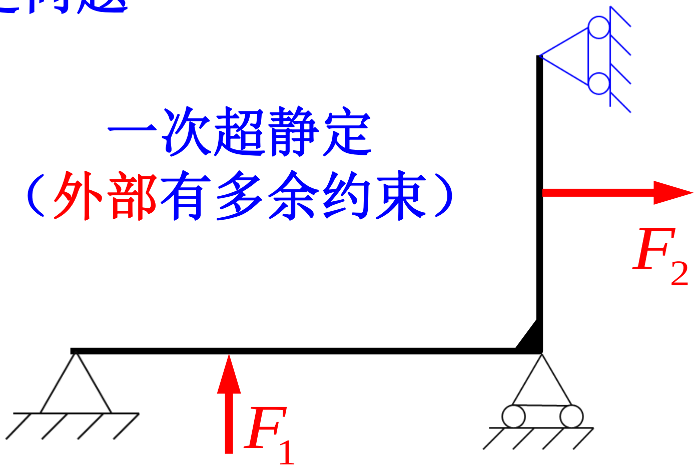


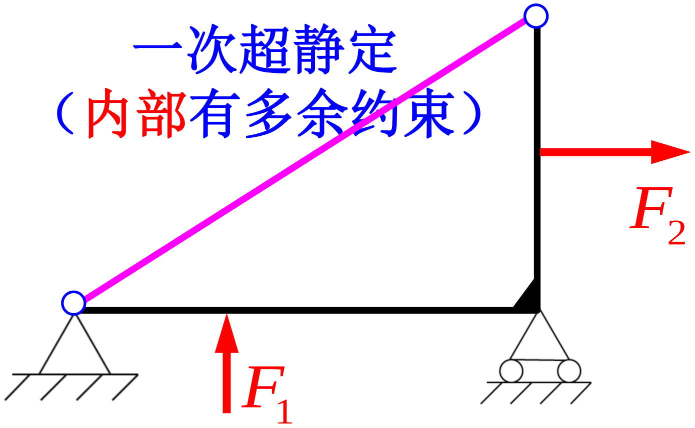
封闭的刚架结构

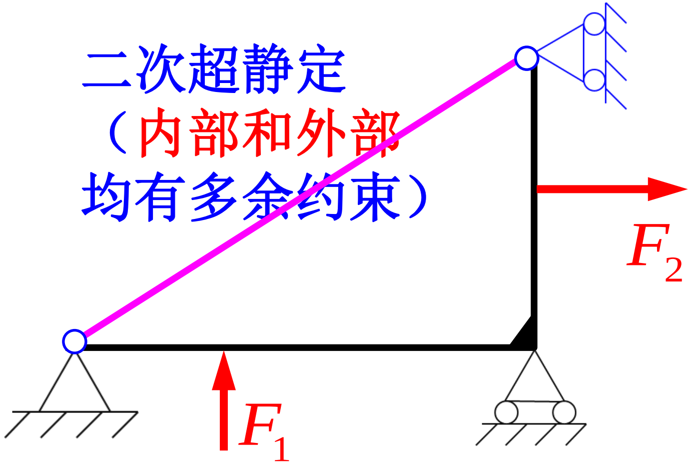
三次超静定（平面）

关于静定和超静定问题


静定
F_2
F_1


一次超静定
（外部有多余约束）
F_2
F_1

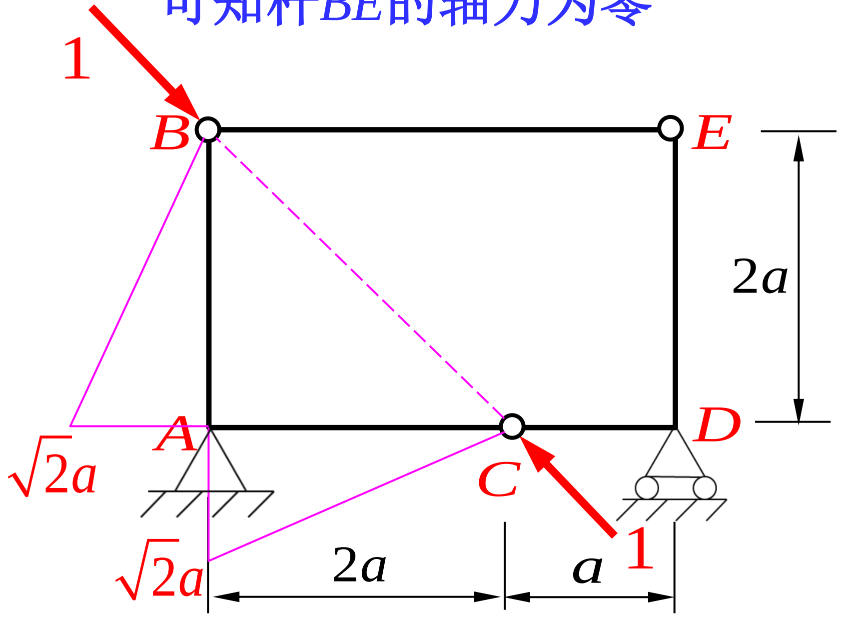

一次超静定
（内部有多余约束）
F_2
F_1

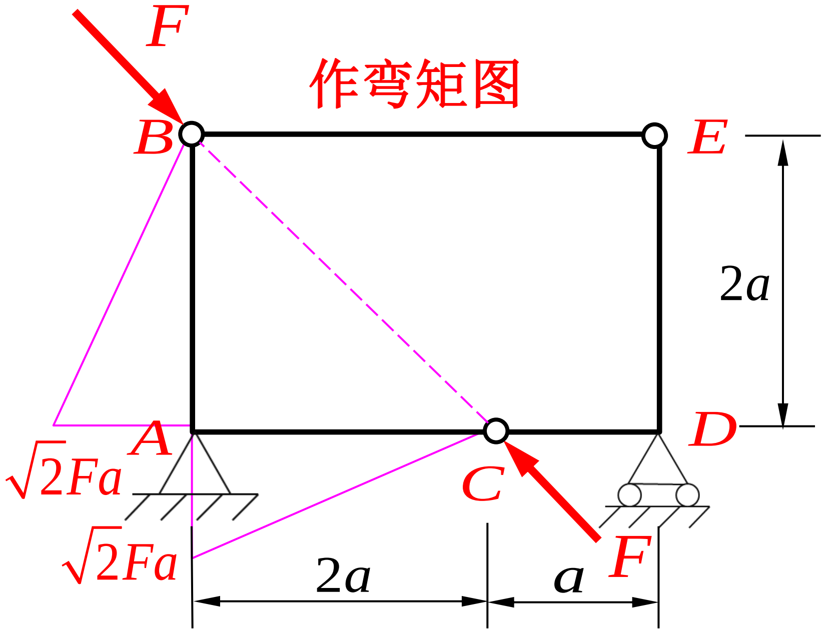

二次超静定
（内部和外部
均有多余约束）
F_2
F_1

解：取整体分析，可知支座A和D处的约束力均为零

杆BE是二力杆

取CDE部分研究，对C点取矩平衡，可知杆BE的轴力为零

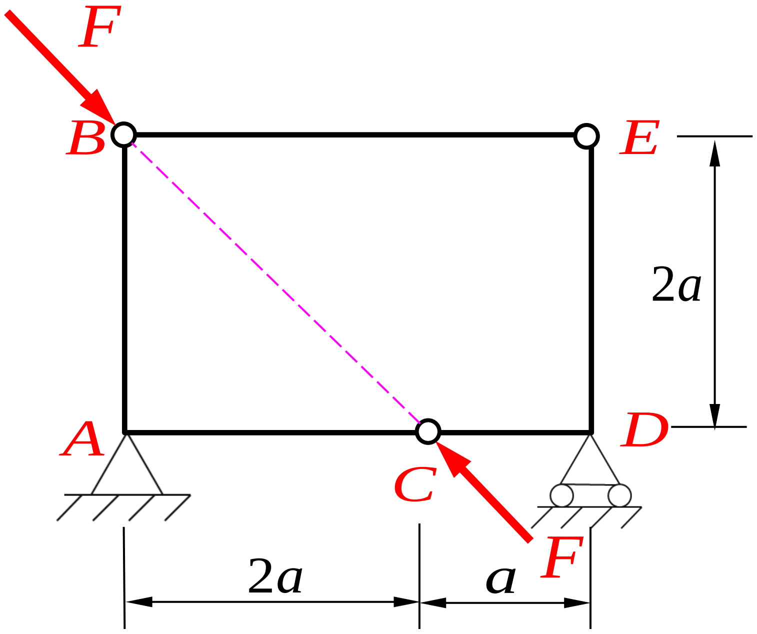


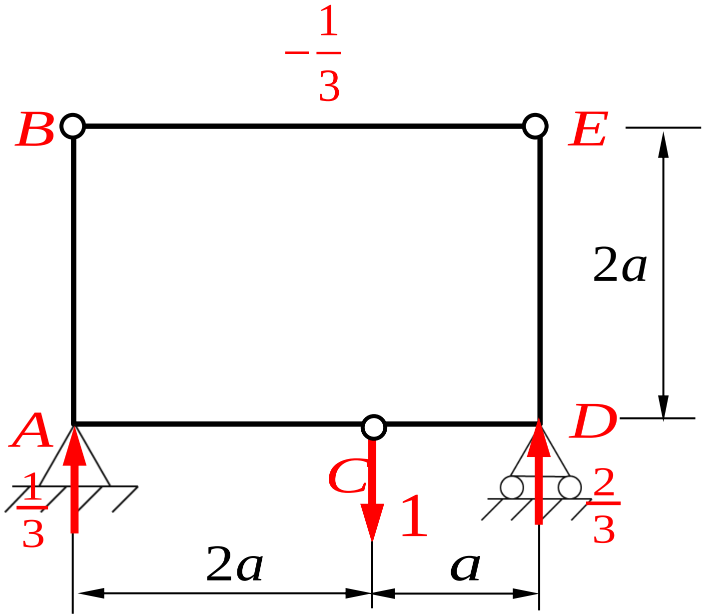


1. 铰B、C间的相对位移

$$w_{BC}=\frac{1}{EI}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}Fa\times 2a\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\sqrt{2}a\right)\times 2$$

$$=\frac{8Fa^{3}}{3EI}$$





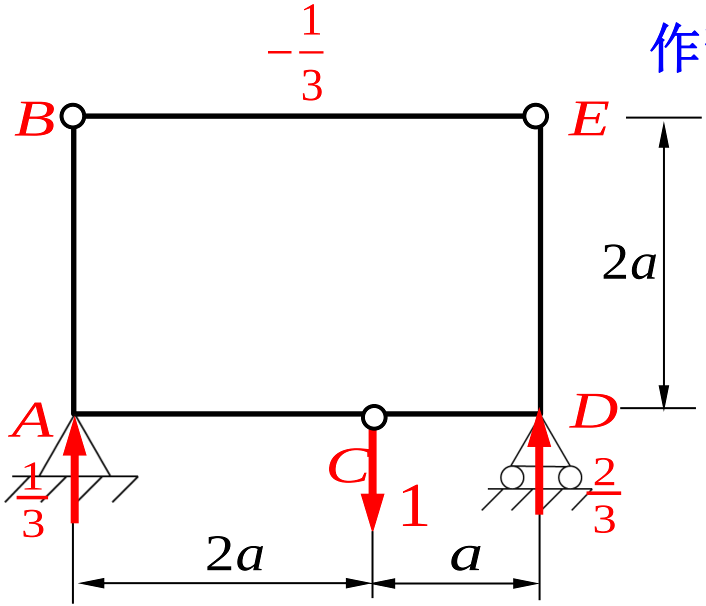
2. C点的铅垂位移

（1）在C处施加单位力

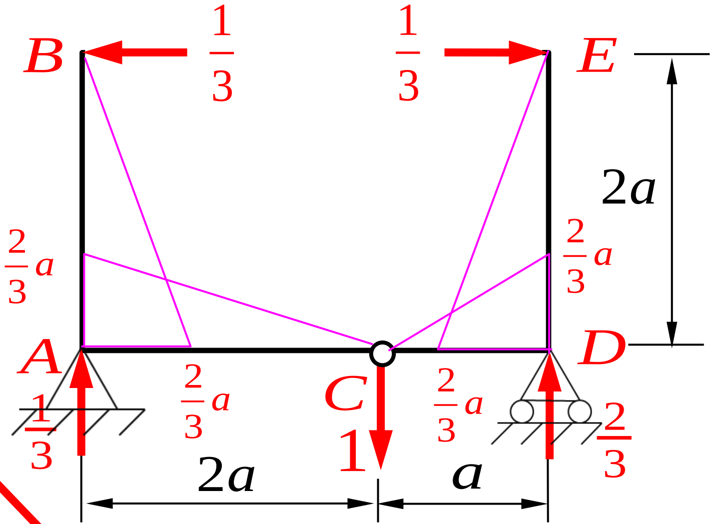
（2）确定支座A和D处的约束力

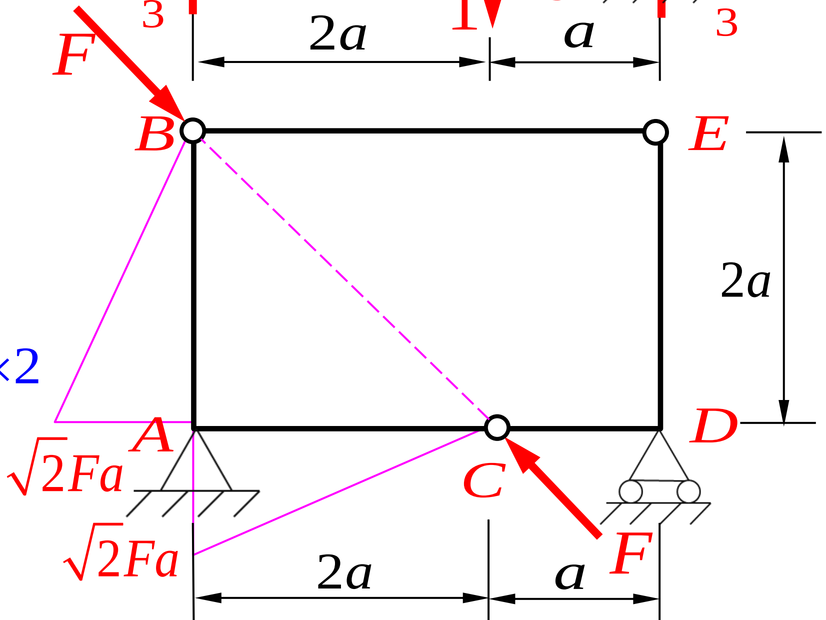
（3）取CDE部分研究，对C点取矩平衡，可知杆BE的轴力 $F_{BE}=-\dfrac{1}{3}$(压)

（4）作弯矩图



作弯矩图





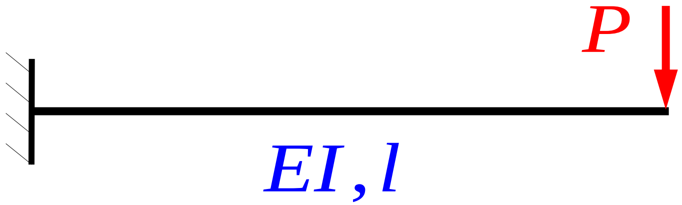
C点的铅垂位移（图乘法）

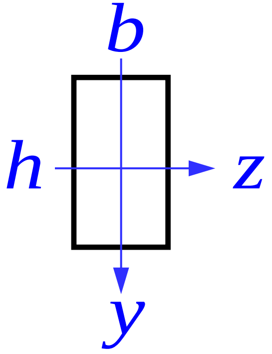
$$w_C=\frac{1}{EI}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}Fa\times 2a\right)\times\left[\frac{2}{3}\times\left(-\frac{2}{3}a\right)\right]\times 2$$

$$=-\frac{8\sqrt{2}Fa^3}{9EI}\ (\text{向上})$$

§ 13.9 剪力对梁弯曲位移的影响

例7 求图示矩形截面悬臂梁自由端的挠度，梁的弯曲刚度为EI，切变模量为G，长度为l。试分别讨论考虑和不考虑剪切变形对计算结果的影响。





解：用单位载荷法求端点的位移

1. 在自由端施加一单位力(如图)

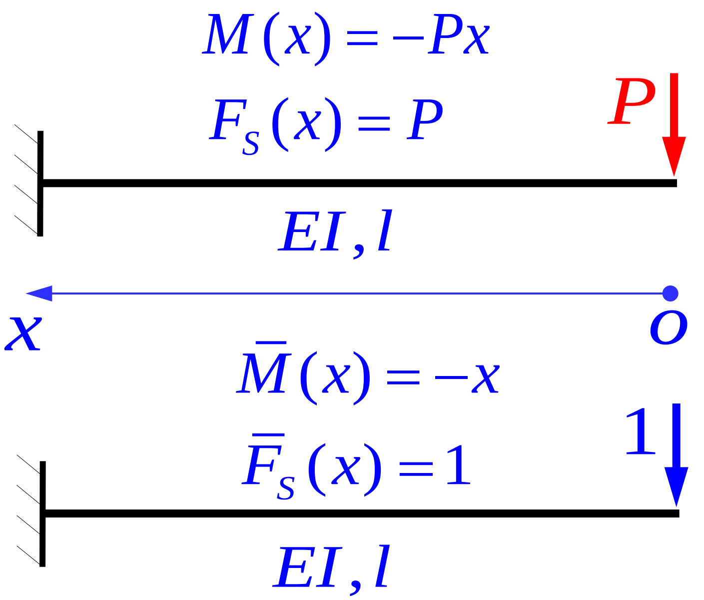
2. 分别计算在实际载荷和单位载荷作用下杆系各杆的内力

3. 利用单位力法公式计算位移

$$1\cdot\Delta=\int_l\left(\bar{M}\,\frac{M}{EI}\,\mathrm{d}x+\bar{F}_s\cdot\frac{kF_s}{GA}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\Delta=\int_0^l\left[(-x)\cdot\frac{(-Px)}{EI}\,\mathrm{d}x+1\cdot\frac{kP}{GA}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$\Delta=\frac{Pl^3}{3EI}+\frac{kPl}{GA}$$



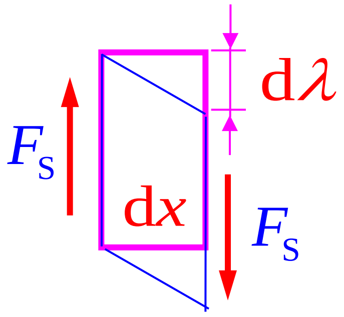
矩形截面：$k=\dfrac{6}{5}$

实心圆形截面：$k=\dfrac{10}{9}$

薄壁圆环截面：$k=2$

关于截面修正因数k的确定：

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{kF_S\mathrm{d}x}{GA}$$



用能量方法（只考虑剪力作用情形）：

$$\mathrm{d}W = \frac{1}{2}F_S \cdot \mathrm{d}\lambda = \frac{k(F_S)^2\mathrm{d}x}{2GA}$$

$$S^* = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

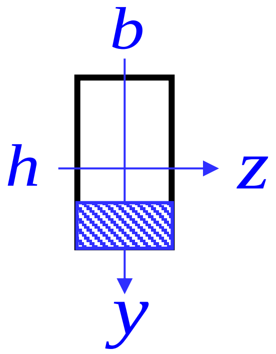
矩形

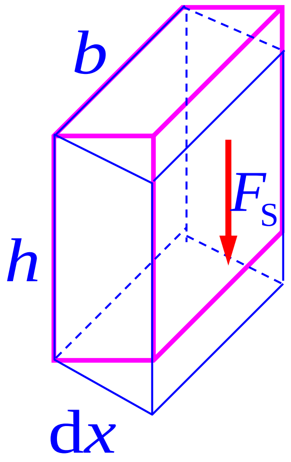
$$\mathrm{d}V_\varepsilon = \int_{\Delta V} v_\varepsilon \cdot \mathrm{d}V = \int_{\Delta V} \frac{\tau^2}{2G} \cdot \mathrm{d}V = \int_l \int_A \frac{\left(\frac{F_S \cdot S^*}{I_z b}\right)^2}{2G} \cdot \mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}x$$

$$= \frac{(F_S)^2\mathrm{d}x}{2G(I_z b)^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\right]^2 \cdot b\mathrm{d}y$$

$$= \frac{6}{5} \frac{(F_S)^2\mathrm{d}x}{2GA}$$

$$k = \frac{6}{5}$$





讨论：$\Delta = \dfrac{Pl^3}{3EI} + \dfrac{kPl}{GA}$　　矩形截面：$k = \frac{6}{5}, I = \frac{1}{12}bh^3$

$$\Delta = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{kPl}{GA} = \frac{Pl^3}{3E(\frac{1}{12}bh^3)} + \frac{\frac{6}{5}Pl}{GA} = \frac{Pl}{EA}\left[4\left(\frac{l}{h}\right)^2 + \frac{6}{5}\frac{E}{G}\right]$$

长钢梁：$\frac{E}{G} = 2(1+\mu) \approx 2.5,\quad \frac{l}{h} > 5$　(工程中的梁一般有 $l > 10h$)

（1）令l=10h:

考虑剪切变形：$\Delta = 403\dfrac{Pl}{EA}$，　不考虑剪切变形：$\Delta_1 = 400\dfrac{Pl}{EA}$

相对误差 $\dfrac{\Delta_1 - \Delta}{\Delta} = \dfrac{400-403}{403} = -0.74\%$

（2）令l=5h:

考虑剪切变形：$\Delta = 103\dfrac{Pl}{EA}$，　不考虑剪切变形：$\Delta_1 = 100\dfrac{Pl}{EA}$

相对误差 $\dfrac{\Delta_1 - \Delta}{\Delta} = \dfrac{100-103}{103} = -2.91\%$

谢谢各位！

作业
（第十三章 ）

P128：13.15、13.18(b)

P133-134：13.39

对应第6版题号 P120：13.15；P121：13.18(b)；P126：13.39

下节课讲 第十四章 超静定结构