哈密顿方程

拉格朗日方程和哈密顿方程

- 非保守系统的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mathrm{j}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_{\mathrm{j}}}=\tilde{Q}_{\mathrm{j}} \qquad j=1,2,\cdots,k$$

其中 $\tilde{Q}_{\mathrm{j}}$ 为非有势力相应的广义力。

- 拉格朗日函数是广义速度和广义坐标的函数 $L=L(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_k;q_1,q_2,\ldots,q_k)$
- 哈密顿(Hamilton)引入广义动量（1834）: $p_j=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mathrm{j}}} \qquad j=1,2,\cdots,k$
- 通过**勒让德变换**，将广义速度$\dot{q}_{\mathrm{j}}$变换成**广义动量**p_j，相应的拉格朗日函数L变换成**哈密顿函数*H***:

$$H=H(p_1,p_2,\ldots,p_k;q_1,q_2,\ldots,q_k)=\left(\sum_{i=1}^{k}p_i\dot{q}_i-L\right)_{\dot{q}_i\to p_i}$$

- 从而得到**哈密顿方程**:

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \text{和} \qquad \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}+\tilde{Q}_{\mathrm{j}} \qquad j=1,2,\cdots,k$$

- 从拉格朗日方程变换到哈密顿方程，**方程数由k增加到2k**，但是**微分方程由二阶降为一阶**

勒让德变换

函数$X=X(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$是变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的函数，且包含参数$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$。

将变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$变换为另一组变量$y_1, y_2, \ldots, y_n$，相应地函数X成为$Y=Y(y_1, y_2, \ldots, y_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$。

其中

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

y_i为X关于x_i的导数

由上面方程组可以解得x_i，通过y_i来表示，即

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

如果函数X变换成Y，满足：

$$Y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X \right)_{x_i \to y_i}$$

称该变换为

勒让德变换

勒让德变换

$$Y=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - X\right)_{x_i\to y_i}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}y_j + x_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

$$\boxed{y_i=\frac{\partial X}{\partial x_i}}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}y_j + x_i - \sum_{j=1}^{n}y_j\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

$$=x_i$$

勒让德变换的逆变换也是勒让德变换，变量x_i由函数Y关于y_i的导数生成

$$X=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - Y\right)_{y_i\to x_i}$$

变换的函数X与Y之间可以相差一个与参数α_1，α_2，…，α_m相关的常数。

$$Y=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - X\right)_{x_i\to y_i}$$

$$y_i=\frac{\partial X}{\partial x_i}$$

函数关于参数α_j的偏导数

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}y_i-\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}y_i-\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}-\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}$$

$$=-\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}$$

哈密顿方程

- 拉格朗日函数是广义速度和广义坐标的函数

$$L = L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k; q_1, q_2, \dots, q_k)$$

- 哈密顿(Hamilton)引入**广义动量**

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- 将广义速度$\dot{q}_j$变换成广义动量p_j，把拉格朗日函数L通过勒让德变换成**哈密顿函数*H***：

$$H = H(p_1, p_2, \dots, p_k; q_1, q_2, \dots, q_k) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i - L\right)_{\dot{q}_i \to p_i}$$

哈密顿方程

$$L = L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k; q_1, q_2, \dots, q_k)$$

$$H = H(p_1, p_2, \dots, p_k; q_1, q_2, \dots, q_k) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i - L\right)_{\dot{q}_i \to p_i}$$

- 勒让德变换引出的等式： $y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}$ $x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}$

则有： $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

哈密顿方程

- 勒让德变换引出的等式: $$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}$$

则有: $$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- 非保守系统的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mathrm{j}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\mathrm{j}} = \widetilde{Q}_\mathrm{j} \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- 则对于非保守系统有:

$$\dot{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mathrm{j}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_\mathrm{j}} + \widetilde{Q}_\mathrm{j} = -\frac{\partial H}{\partial q_\mathrm{j}} + \widetilde{Q}_\mathrm{j}$$

其中 $\widetilde{Q}_\mathrm{j}$ 为非有势力相应的广义力。

关于系统状态变量q_1、q_2、…、q_k和p_1、p_2、…、p_k的$2k$个一阶微分方程组

广义坐标　广义动量

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$i = 1, 2, \cdots, k$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \widetilde{Q_i}$$

⇓

哈密顿方程

建立动力学系统哈密顿方程的一般过程

- 明确研究对象及约束性质
- 分析系统自由度，确定广义坐标
- 计算系统的动能和势能，确定拉格朗日函数（广义坐标和广义速度的函数）

$$L = T - V$$

- 求拉格朗日函数对广义速度的偏导数，从而确定广义动量

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad j = 1, 2, \cdots, k$$

建立动力学系统哈密顿方程的一般过程

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mathrm{j}} \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- 从广义动量表达式中，反解出广义速度

$$\dot{q}_\mathrm{j} = \dot{q}_\mathrm{j}(p_1, p_2, \dots, p_k) \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

- 通过如下勒让德变换，计算哈密顿函数。将上面广义速度的表达代入哈密顿函数，使得哈密顿函数通过广义动量p_i和广义坐标q_i来表示

$$H = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i - L \right)_{\dot{q}_i \to p_i}$$

建立动力学系统哈密顿方程的一般过程

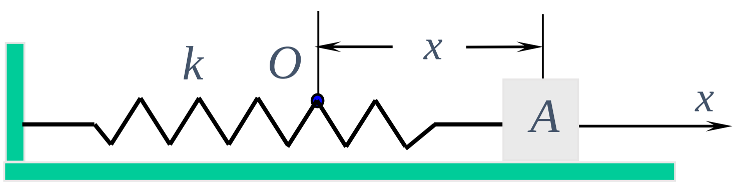
- 对于非保守系统，计算非有势力相应的广义力$\tilde{Q}$
- 将哈密顿函数及广义力$\tilde{Q}$代入到哈密顿方程，求导并整理得到系统的运动微分方程组。

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

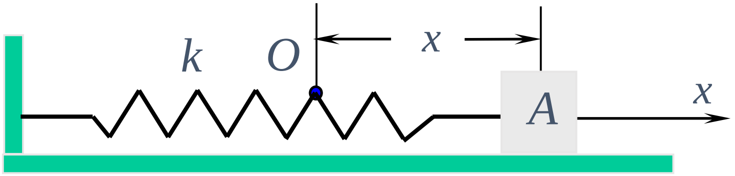
$$i = 1, 2, \cdots, k$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \widetilde{Q_i}$$

例题： 如图所示，质量弹簧系统由质量为m的物块A和刚度系数为k的水平弹簧构成。试用哈密顿方程求出系统的运动微分方程。



解：该系统为单自由度的完整保守系统。以弹簧原长处为坐标原点，建立如图坐标系，取位移x为广义坐标



系统的动能：

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

若以弹簧原长处为势能零点，则系统的势能：

$$V = \frac{1}{2} kx^2$$

因此，系统的拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

求得广义动量p为：

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

则广义速度可以表示为：

$$\dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \qquad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$H = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i - L\right)_{\dot{q}_i \to p_i}$$

求得系统的哈密顿函数为

$$H = p\dot{x} - L = p(\frac{p}{m}) - [\frac{1}{2}m(\frac{p}{m})^2 - \frac{1}{2}kx^2] = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \widetilde{Q_i}$$

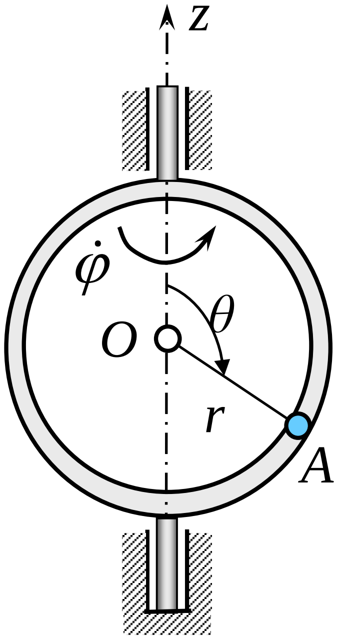
系统的哈密顿方程为

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

由以上两式消去p，即得系统的运动微分方程

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

例题： 一半径为r的光滑圆环形细管，可绕其过直径的铅直轴z转动，该圆环对转轴z的转动惯量为J_z。 质量为m的小球A可在圆环内滑动。试写出系统的哈密顿方程。

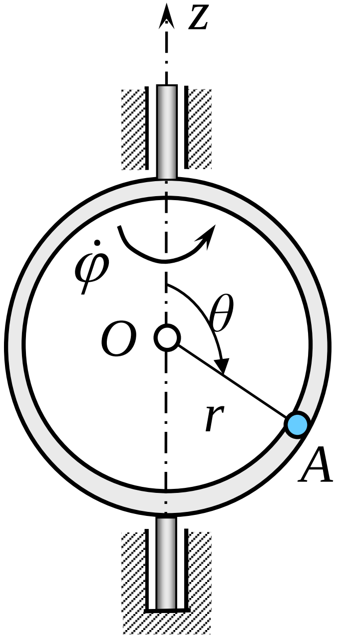


解: 此系统为二自由度完整保守系统，取圆环的转角φ和半径OA的转角θ为广义坐标。

取固定在圆环上，与圆环转动的坐标系为动坐标系，小球为动点。

小球A的相对速度 $v_{\mathrm{r}} = r\dot{\theta}$，方向沿圆环在$A$点的切线；

又小球A的牵连速度 $v_{\mathrm{e}} = r\sin\theta\dot{\varphi}$，垂直于圆环平面，



故系统的动能

$$T = \frac{1}{2}J_z\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m[(r\dot{\varphi}\sin\theta)^2 + r^2\dot{\theta}^2] \qquad (1)$$

取过点O的水平面为零势面，则系统的势能

$$V = -mgr\cos(\pi-\theta) = mgr\cos\theta \qquad (2)$$

所以系统的拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}J_z\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m[(r\dot{\varphi}\sin\theta)^2 + r^2\dot{\theta}^2] - mgr\cos\theta \tag{3}$$

求得广义动量

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = (J_z + mr^2\sin^2\theta)\dot{\varphi} \tag{4}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{5}$$

系统的哈密顿函数为

$$\boxed{H = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\dot{q}_i - L\right)_{\dot{q}_i \to p_i}}$$

$$H = p_\varphi\dot{\varphi} + p_\theta\dot{\theta} - L =$$

$$\frac{1}{2}(J_z + mr^2\sin^2\theta)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\cos\theta$$

利用式(4)和（5)中的p_φ和p_θ代换上式中的$\dot{\varphi}$与$\dot{\theta}$，可得求得系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{p_\varphi^2}{2(J_z+mr^2\sin^2\theta)}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+mg\cos\theta$$

系统的哈密顿方程为

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad i=1,2,\cdots,k$$

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}+\widetilde{Q}_i$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{p_\varphi}{J_z+mr^2\sin^2\theta}$$

$$\dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=\frac{mp_\varphi^2r^2\sin\theta\cos\theta}{(J_z+mr^2\sin^2\theta)^2}+mgr\sin\theta$$

由以上四式消去p_φ和p_θ，即得系统的运动微分方程。

例3.4 图2.3所示的摆(例2.3)。求：摆的哈密顿方程。

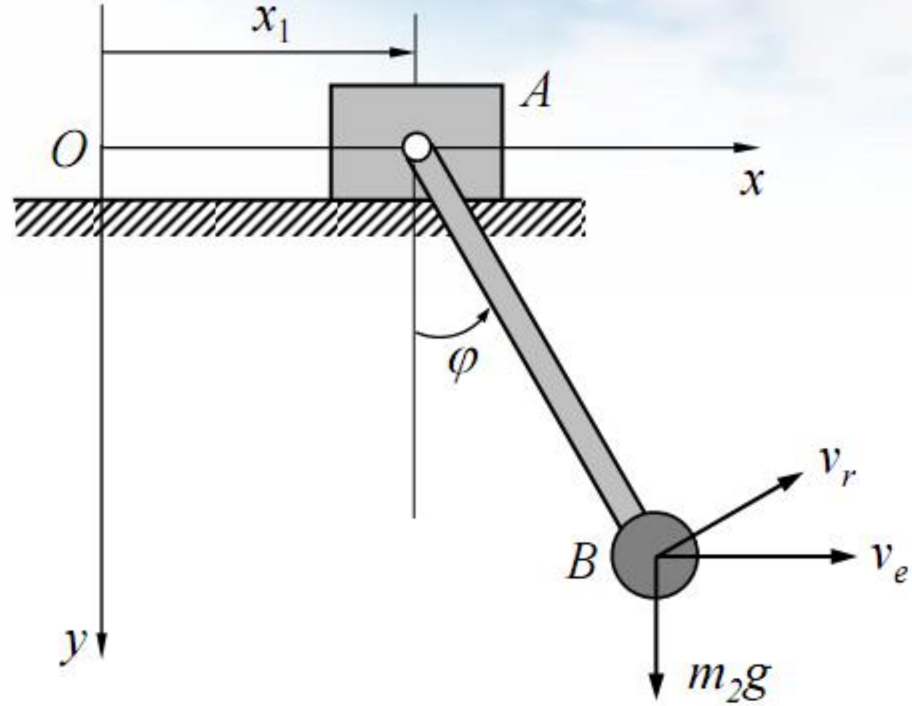


图 2.3

解：摆受定常、理想、完整约束，系统自由度为2，选取物块的x_1与杆的φ为广义坐标。

该摆为保守系统，由例2.3的分析，系统的动能与势能

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$V=m_2gl(1-\cos\varphi)$$

拉格朗日方程

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi-m_2gl(1-\cos\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}=(m_1+m_2)\dot{x}_1+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=m_2l^2\dot{\varphi}+m_2l\dot{x}_1\cos\varphi$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi$$

上面两式联立解出用广义动量表示的广义速度:

$$\dot{x}_1 = \frac{lp_x - p_\varphi\cos\varphi}{(m_1 + m_2\sin^2\varphi)l}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(m_1 + m_2)p_\varphi - m_2 lp_x\cos\varphi}{(m_1 + m_2\sin^2\varphi)m_2 l^2}$$

$$H = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\dot{q}_i - L\right)_{\dot{q}_i\to p_i}$$

哈密顿函数为:

$$\begin{aligned} H &= \left(p_x\dot{x}_1 + p_\varphi\dot{\varphi} - L\right)_{\dot{x}_1\to p_x,\dot{\varphi}\to p_\varphi} \\ &= \frac{1}{2(m_1 + m_2\sin^2\varphi)m_2 l^2}\left[m_2 l^2 p_x^2 + (m_1 + m_2)p_\varphi^2 - 2m_2 lp_x p_\varphi\cos\varphi\right] \\ &\quad + m_2 gl(1 - \cos\varphi) \end{aligned}$$

将哈密顿函数代入，得到哈密顿方程：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \widetilde{Q_i}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{lp_x - p_\varphi \cos\varphi}{\left(m_1 + m_2 \sin^2\varphi\right) l}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\left(m_1 + m_2\right) p_\varphi - m_2 l p_x \cos\varphi}{\left(m_1 + m_2 \sin^2\varphi\right) m_2 l^2}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\left[m_2 l^2 p_x^2 + \left(m_1 + m_2\right) p_\varphi^2\right] \sin\varphi \cos\varphi}{\left(m_1 + m_2 \sin^2\varphi\right)^2 l^2} - \frac{\left(m_1 + m_2 + m_2 \cos^2\varphi\right) l p_x p_\varphi \sin\varphi}{\left(m_1 + m_2 \sin^2\varphi\right)^2 l^2} + m_2 g l \sin\varphi$$

由以上四式消去p_x 和p_φ，即得系统的运动微分方程：

$$\left(m_1 + m_2\right) \ddot{x}_1 + m_2 l \ddot{\varphi} \cos\varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = 0$$

$$\ddot{x}_1 \cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0$$

作业

作业1： 设某单自由度系统的广义坐标为θ，动能 T、势能 V、及非保守广义力分别为

$$T=\frac{1}{2}mb\dot{\theta}^2,\quad V=mg(b+\theta-\cos\theta),\quad \tilde{Q}=Fb \qquad (m,b,g,F\text{ 为常数})$$

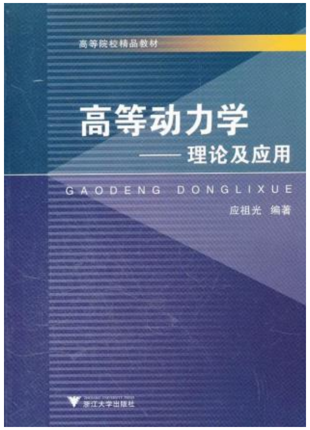
求系统的**哈密顿方程**。

作业2： 设某单自由度系统的广义坐标为 x，动能 T、势能 V、及非保守广义力分别为

$$T=\frac{1}{2}m(b+x)^2\dot{x}^2,\quad V=\frac{1}{2}mgx^2,\quad \tilde{Q}=-c\dot{x} \qquad (m,b,g,c\text{ 为常数})$$

求系统的**哈密顿方程**。

- 教材习题， Page 65： 3.2, 3.3



有关期末考试

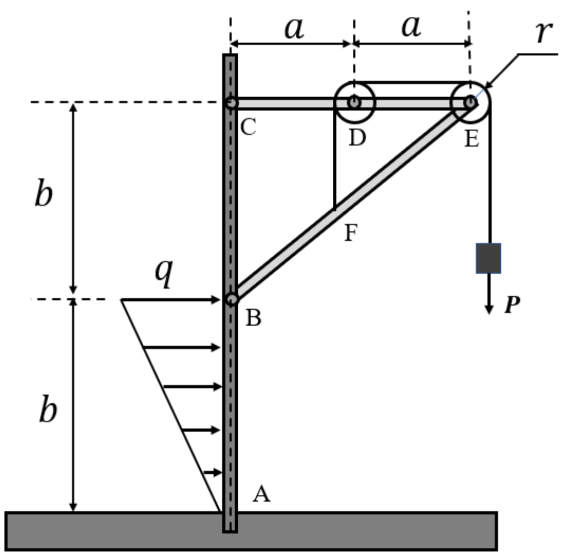
- 时间：2019年1月22日，星期二，10:30-12:30
- 地点：紫金港西1-219
- 开卷考试，但是只准带教科书
- 可以携带计算器

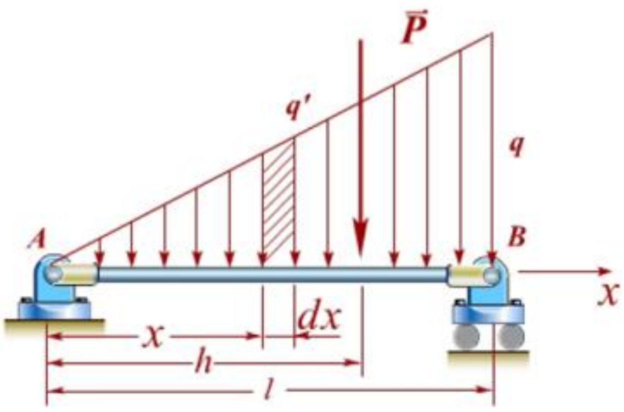
期末考试题型及分值分配

- 1. 平面任意力系平衡问题：15分
- 2. 桁架：15分
- 3. 运动学（一般两小题，点的合成运动和刚体平面运动各一道）：20分
- 4. 动力学：20分
- 5. 达朗贝尔原理（惯性力系简化）和虚位移原理：15分
- 6. 分析力学（求系统的拉格朗日方程和哈密顿方程）：15分

静力学

分清约束的性质：固定铰链支座，移动铰链支座，固定端约束

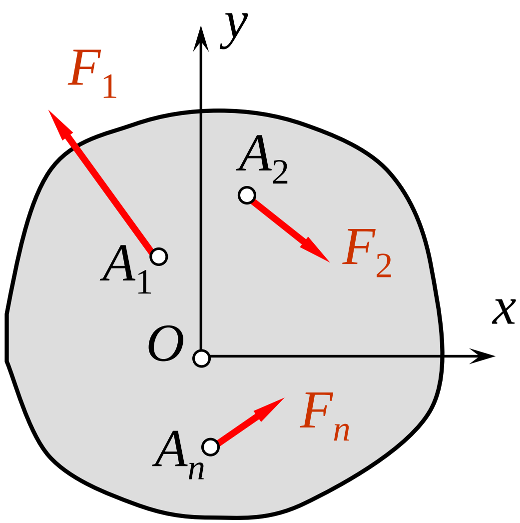




静力学

平面任意力系的平衡方程有三个

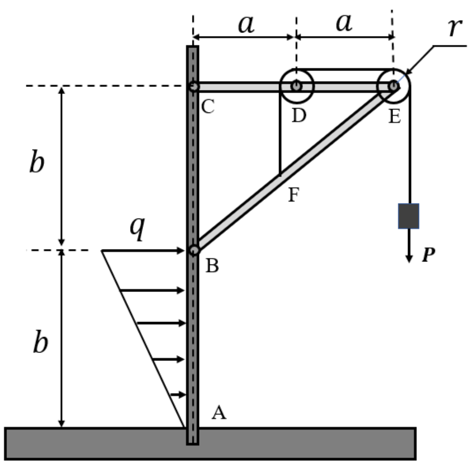
$$\boxed{\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0}$$



静力学

平面任意力系的平衡方程有三个

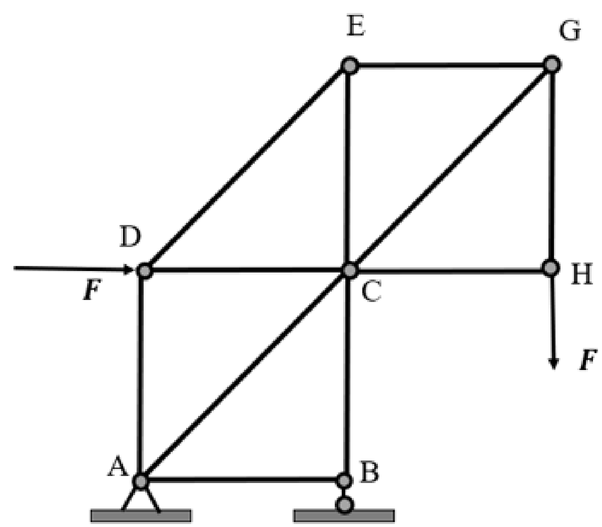
$$\boxed{\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0}$$



求A处约束力。

- 求平面桁架各杆内力的方法
  - **节点法**：分别考虑各节点的平衡
    - 每个节点都受一平面汇交力系的作用，只能列写两个平衡方程，解两个未知数。
    - 注意选择节点顺序，适合于求解全部杆件内力

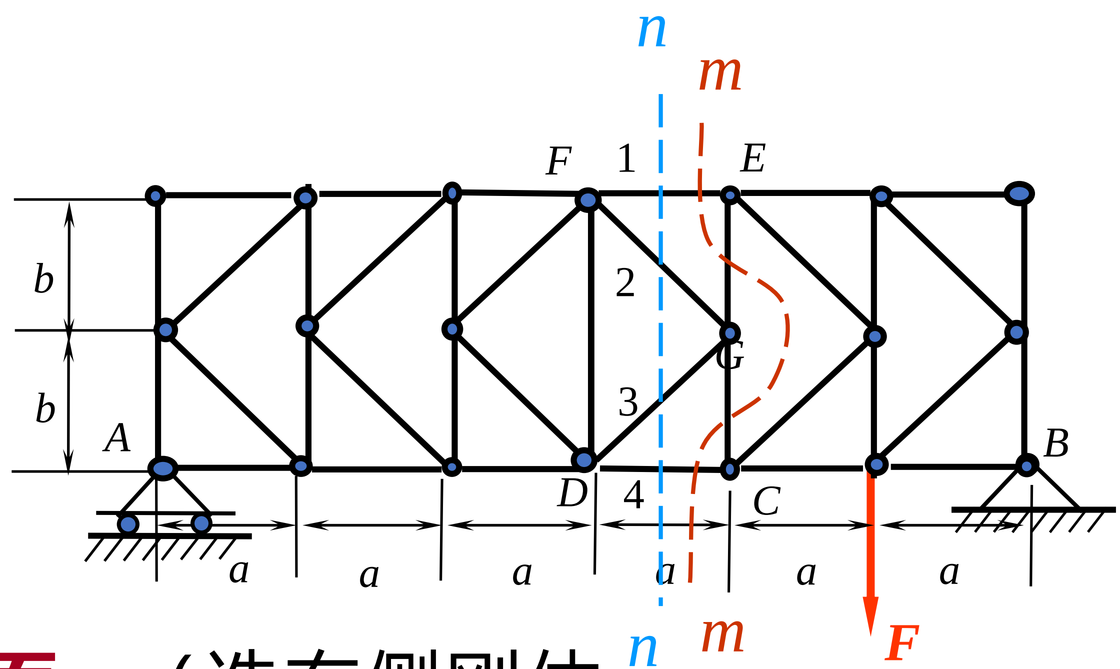
三、如图所示桁架结构。A 处固定铰支座约束，B 处滑动铰支座约束。ABCD 和 CHGE 均为边长为 a 的正方形。AB 水平方向，DC 垂直于 EC。水平力 F 作用于 D 处，竖直力 F 作用于 H 处，各杆的重力不计。求 BC、DE 和 CG 杆的内力。



- 求平面桁架各杆内力的方法
  - **节点法**：分别考虑各节点的平衡
    - 每个节点都受一平面汇交力系的作用，只能列写两个平衡方程，解两个未知数。
    - 注意选择节点顺序，适合于求解全部杆件内力
  - **截面法**：假想地把桁架截开，再考虑其中任一部分的平衡，求出被截杆件的内力。
    - 平面任意力系的求解方法。因平面任意力系只有3个独立的平衡方程，所以不宜截断三杆以上。
    - 适当地选取一截面以及力矩方程，常可较快地求得某些指定杆件的内力。

简单平面桁架的内力计算

思考题　**用截面法求杆1、2的内力。**

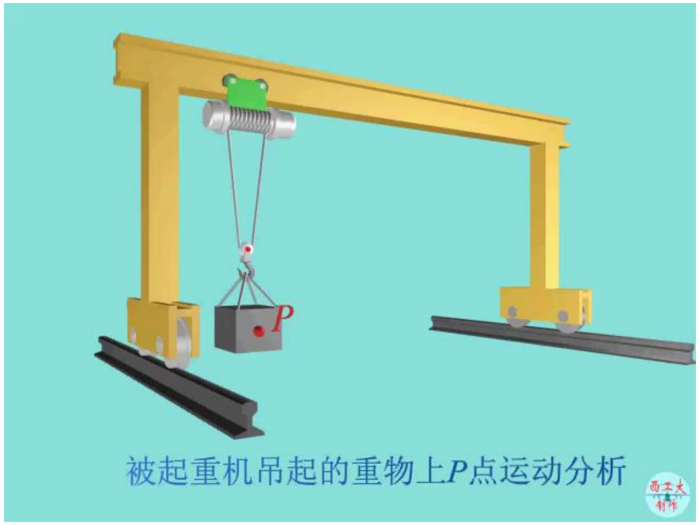


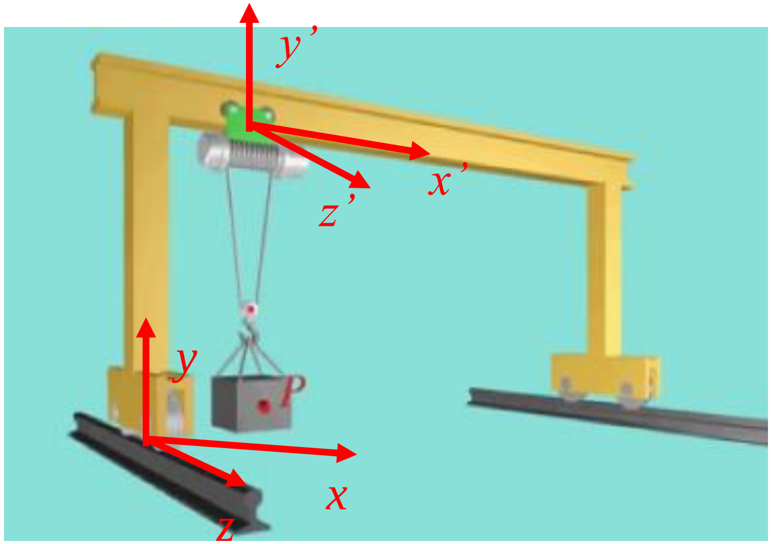
先用截面m（选右侧刚体为研究对象） $\sum M_C = 0$，**求出杆1的内力**F_1。

再用截面n。 $\sum M_D = 0$，**求出杆2的内力**F_2。

合成运动基本概念

三种运动





绝对运动：动点对于定参考系的运动。

相对运动：动点对于动参考系的运动。

牵连运动：动参考系对于定参考系的运动。

点的速度合成定理

● 速度合成定理

动点M在时间Δt 内的绝对位移

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$$

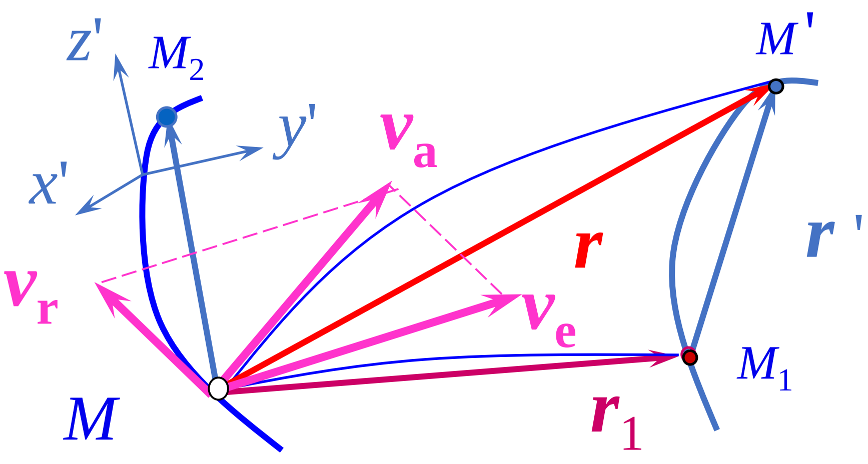
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t} \qquad (1)$$

$$\underset{\boldsymbol{v}_a}{\shortparallel} \qquad \underset{\boldsymbol{v}_e}{\shortparallel} \qquad \underset{\boldsymbol{v}_r}{\shortparallel}$$

因此，

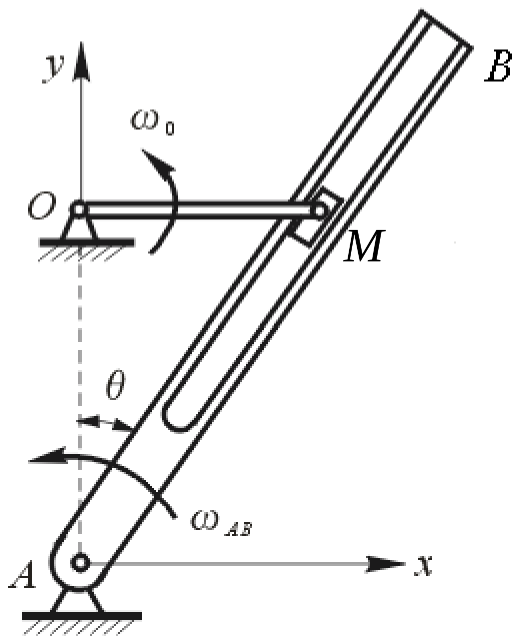
$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

绝对速度矢量等于牵连速度与相对速度的矢量和

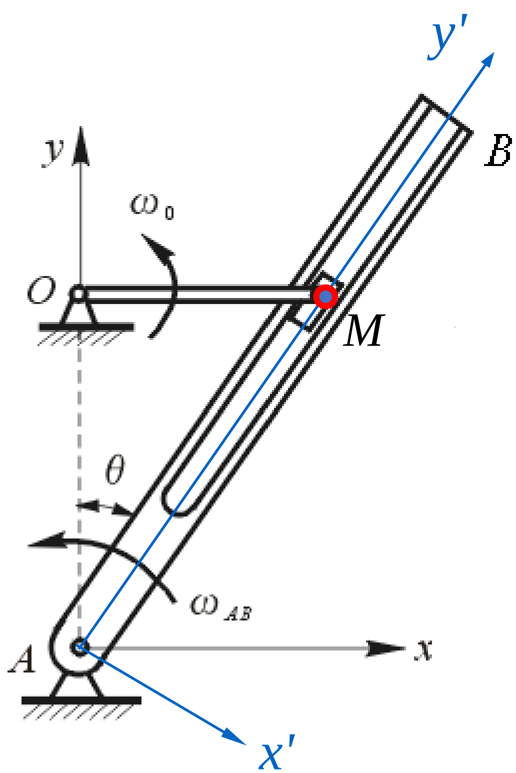


点的速度合成定理

例题8-2 **刨床的摆动导杆机构如图所示。曲柄**OM**长**20 cm，**以转速**n=30 r/min**绕**O**点逆时针向转动，曲柄转轴与导杆转轴之间距离**OA = 20 cm 。**试求当曲柄在水平位置时导杆**AB**的角速度**ω_{AB}。



点的速度合成定理



解：

（1） 运动分析

动点 - **滑块** M 。

动系 - $Ax'y'$**固连于摇杆** AB。

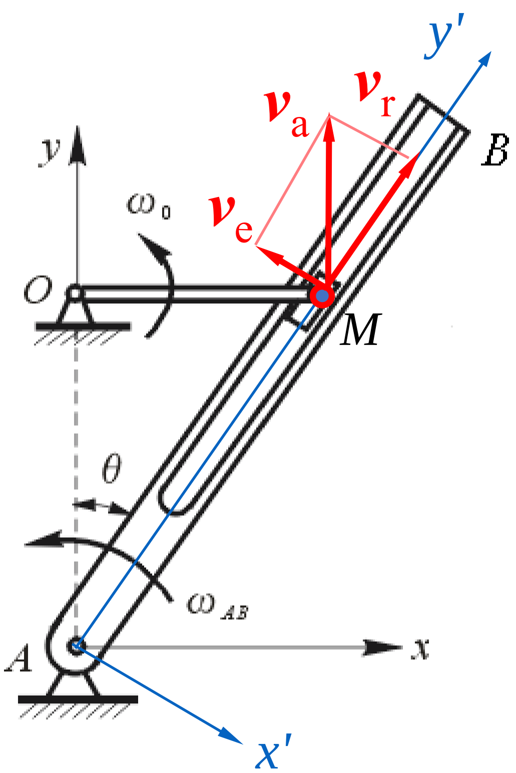
定系 - **固连于机座。**

绝对运动 - **以**O**为圆心的圆周运动。**

相对运动 - **沿**AB**的直线运动。**

牵连运动 - **摇杆绕**A**轴的摆动。**

点的速度合成定理



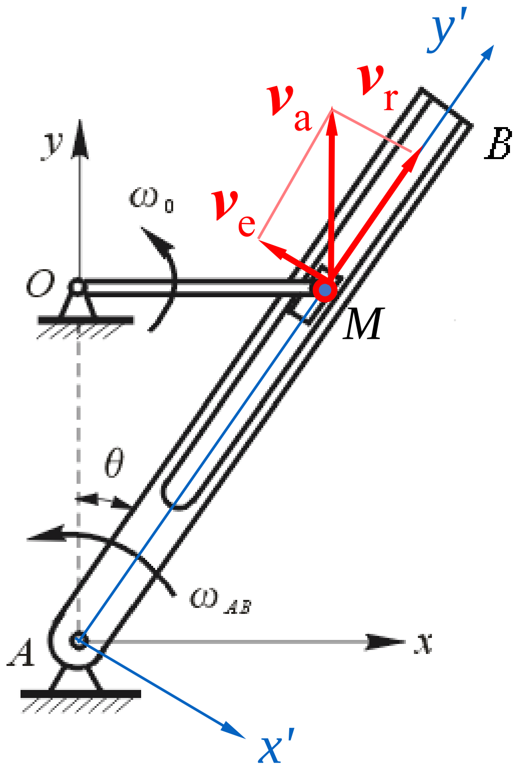
(2) 速度分析

根据点的速度合成定理，动点的绝对速度

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

速度	v_a	v_e	v_r
大小	$r\omega_0$	$AM\omega_{AB}$（未知）	未知
方向	⊥OM向上	⊥AB	沿AB

点的速度合成定理



(3) 求角速度ω_{AB}

$$v_{\mathrm{e}} = v_{\mathrm{a}} \sin \theta = \omega_0 \frac{OM^2}{AM}$$

设摇杆在此瞬时的角速度为ω_{AB}，则

$$v_{\mathrm{e}} = AM\ \omega_{AB}$$

解得

$$\omega_{AB} = \frac{v_{\mathrm{e}}}{AM} = \omega_0 \frac{OM^2}{AM^2}$$

点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

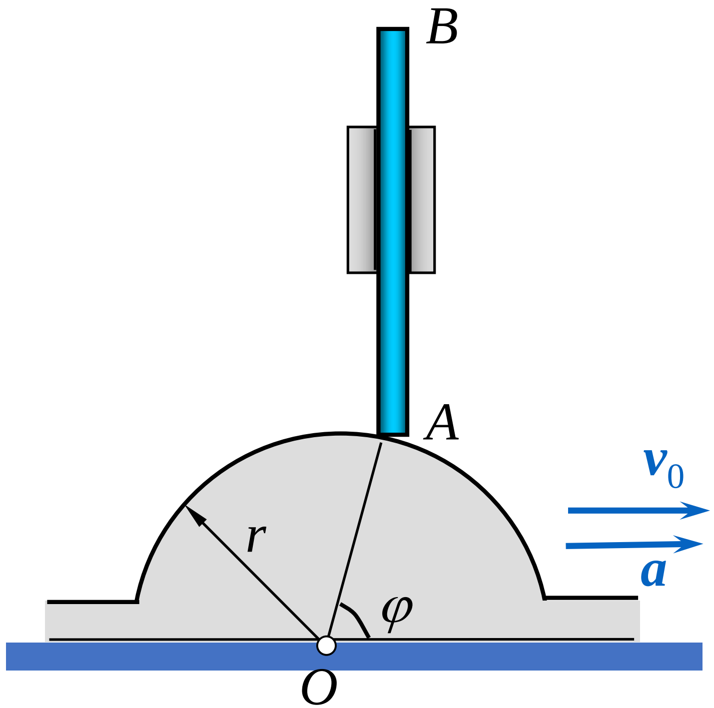
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

牵连运动是平移时点的加速度合成定理

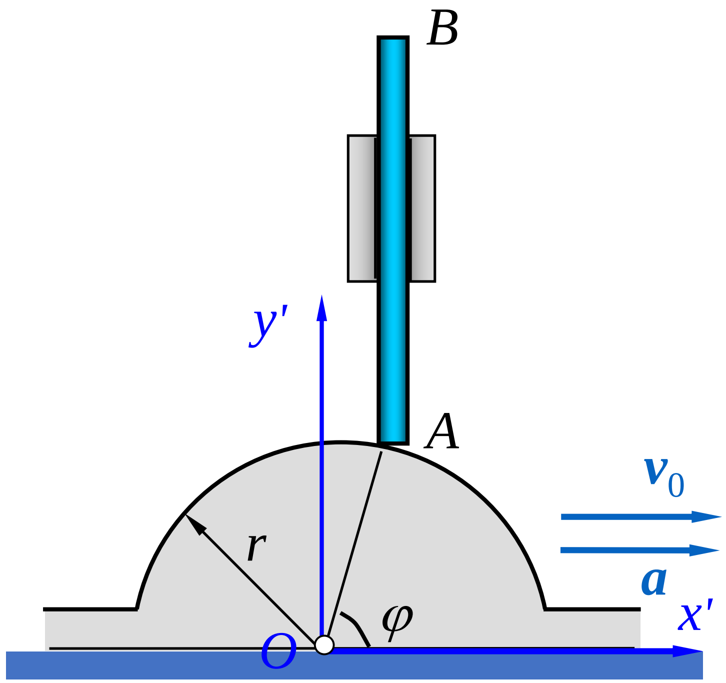
当ω=0时， a_C= 0，此时有

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}$$

即，牵连运动为平移时，点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度的矢量和。



例题8-4 **半径为r的半圆凸轮在水平面上向右作移动，从而推动顶杆AB沿铅垂导轨上下滑动，如图所示。在图示位置时，φ =60°，凸轮具有向右的速度v_0和加速度a。试求该瞬时顶杆AB的速度和加速度的大小。**



解：（1） 运动分析

动点— AB的端点A 。

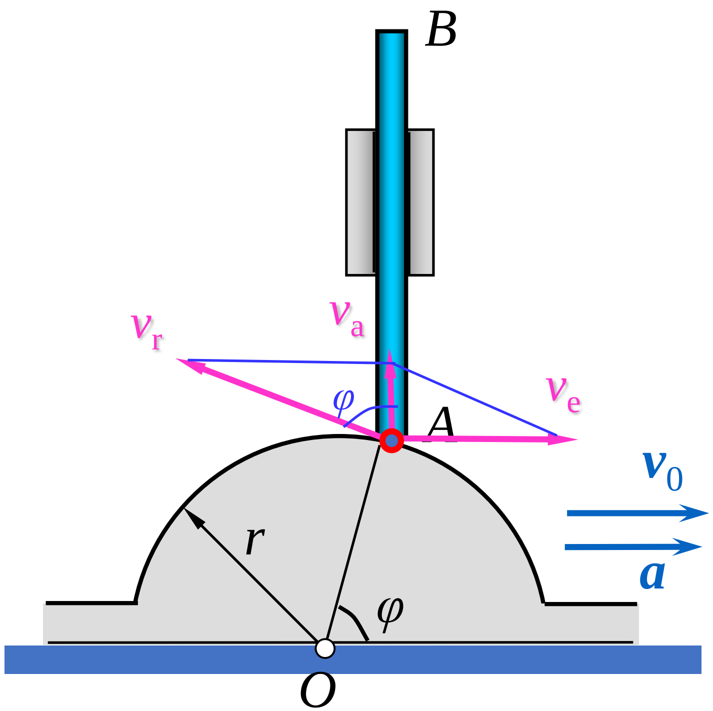
动系— $Ox'y'$，固连于凸轮。

定系—固连于机座。

绝对运动—沿铅垂导轨直线运动。

相对运动—沿凸轮轮廓曲线运动。

牵连运动—凸轮水平直线平动。



速度	v_a	v_e	v_r
大小	未知	v	未知
方向	沿铅垂线	水平向右	$\perp AO$

（2）速度分析

根据速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

求得

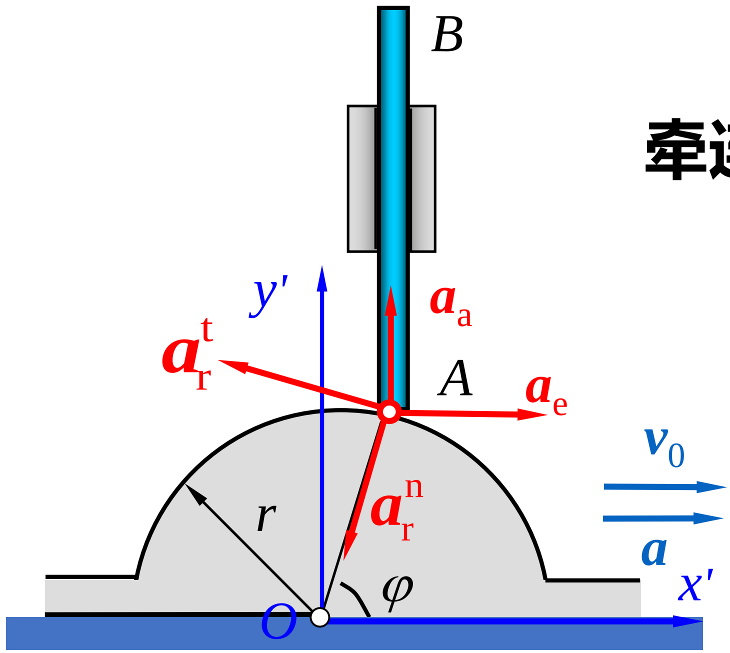
$$v_a = v_e \cot\varphi = v\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}v$$

此瞬时杆*AB*的速度方向向上。

并可求得相对速度

$$v_r = \frac{v_e}{\sin\varphi} = \frac{v}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}v$$

（3） 加速度分析



牵连运动是平移，应用加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_r^n$$

上式投影到 *OA* 上，得

$$a_a \sin\varphi = a_e \cos\varphi - a_r^n$$

解得杆*AB*加速度为

$$a_a = a\cot\varphi - \frac{v_r^2}{r\sin\varphi}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(a - \frac{8v^2}{3r}\right)$$

加速度	$\boldsymbol{a}_a$	$\boldsymbol{a}_e$	$\boldsymbol{a}_r^t$	$\boldsymbol{a}_r^n$
大小	未知	a	未知	v_r^2/r
方向	铅直	水平向右	$\perp AO$	由*A*指向*O*