



浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

相关分析与功率谱

主讲人：金浩然 研究员

电话：13645717238

办公室：开物苑3-232



相关分析与功率谱

- 1、相关分析及其应用
- 2、功率谱分析及其应用



相关分析及其应用



浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

相关分析及其应用

1. 相关系数

2. 信号的自相关函数

3. 信号的互相关函数

相关分析及其应用

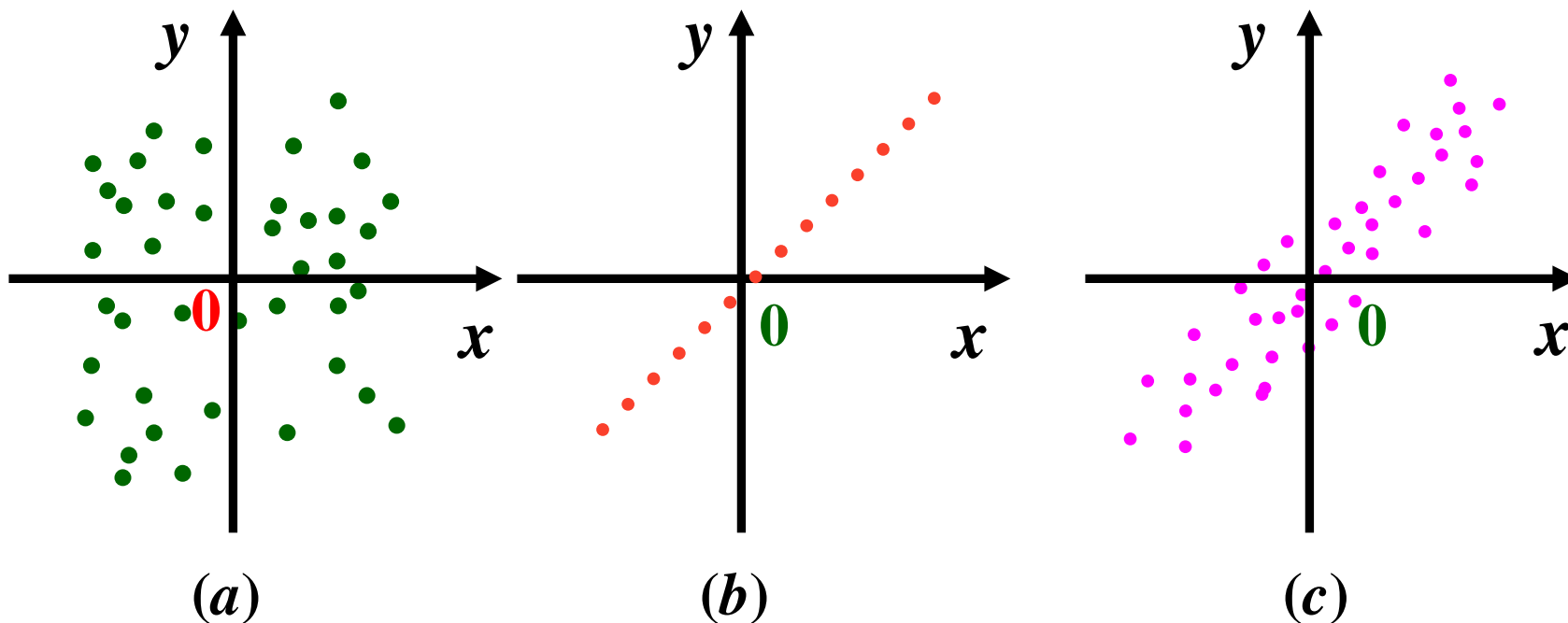
1. 相关系数

对于确定性信号来说，两变量间的关系可以用数学关系式来描述。但是对于随机信号，却无法用数学函数关系来描述，只能采用概率统计的方法。

两个变量之间若存在一一对应的确定关系，则称两者存在着函数关系。

当两个随机变量之间具有某关系时，随着某个变量数量的确定，另一变量却可能取许多不同值，但取值有一定的概率统计规律，这时称两个随机变量存在着相关关系。

相关分析及其应用



两随机变量 x 与 y 的相关性

(a) x 与 y 完全线性无关

(b) x 与 y 完全线性相关

(c) x 与 y 存在某种程度的线性关系

相关分析及其应用

由概率论可知，相关是表示两个随机变量 x 和 y 的线性关联程度的量，常用相关系数表示：

相关系数 $\rho_{xy} = \frac{E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y}$

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2]$$

$$\sigma_y^2 = E[(y - \mu_y)^2]$$

E —— 数学期望

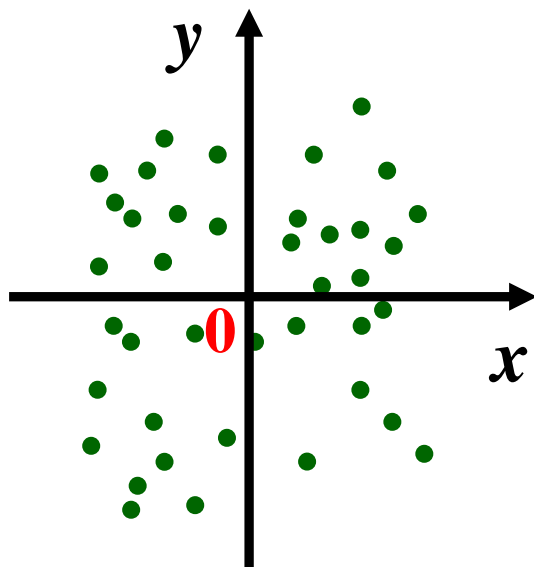
μ_x, μ_y —— 随机变量 x, y 的均值

σ_x, σ_y —— 随机变量 x, y 的标准差

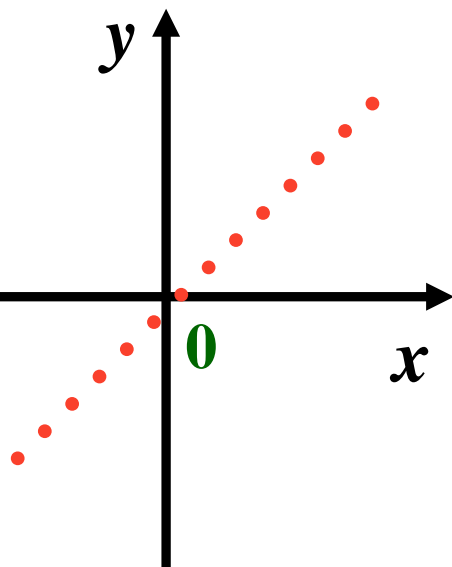
由柯西-许瓦兹不等式

$$E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]^2 \leq \sigma_x^2 \sigma_y^2 \implies |\rho_{xy}| \leq 1$$

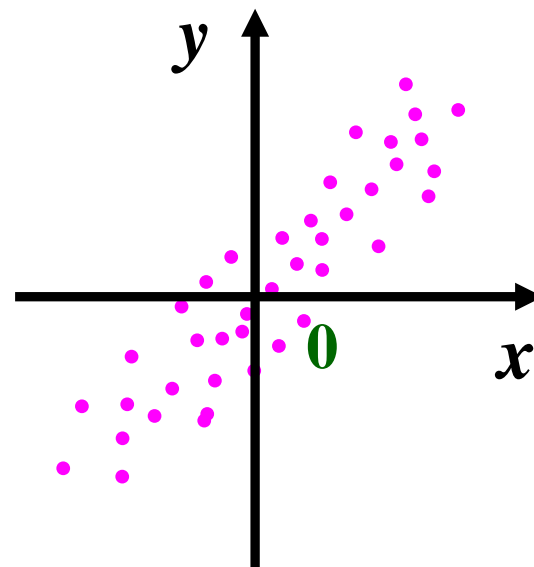
相关分析及其应用



(a)



(b)



(c)

(a) x 与 y 完全线性无关; $|\rho_{xy}| = 0$

(b) x 与 y 完全线性相关; $|\rho_{xy}| = 1$

(c) x 与 y 存在某种程度的线性关系; $|\rho_{xy}| < 1$

(注意此时 x 与 y 却可能还有其它的函数关系)

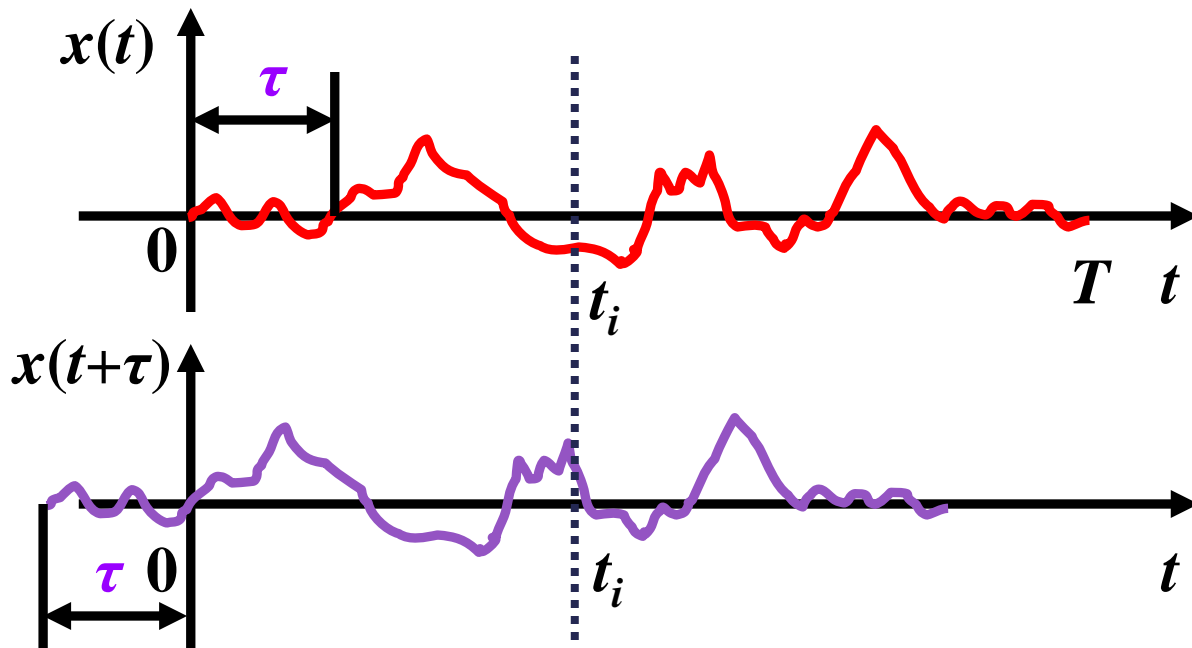
相关分析及其应用

2. 信号的自相关函数

- (1) 定义
- (2) 性质
- (3) 应用

$x(t)$ 是各态历经随机过程的一个样本函数，观测时间为 T .

$x(t+\tau)$ 是时移之后的样本函数。这两个样本函数具有相同的均值 m_x 和标准差 s_x 。



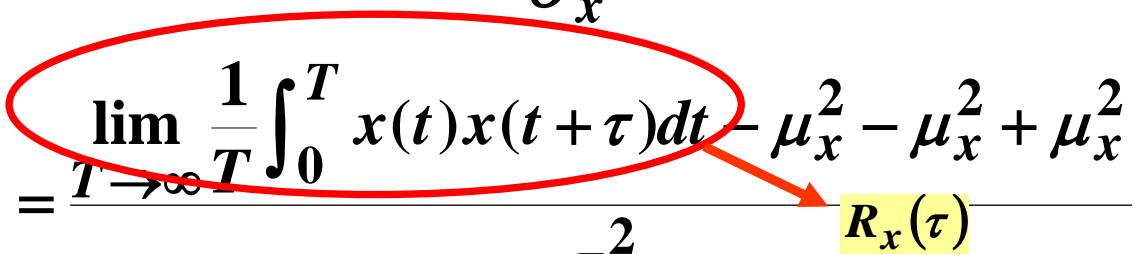
相关分析及其应用

下面求相关系数，应用前述公式：

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\rho_{x(t)x(t+\tau)} = \frac{E([x(t) - \mu_x][x(t + \tau) - \mu_x])}{\sigma_x^2} = \rho_x(\tau)$$

则有：

$$\begin{aligned} \rho_x(\tau) &= \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x][x(t + \tau) - \mu_x] dt}{\sigma_x^2} \\ &= \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt - \mu_x^2 - \mu_x^2 + \mu_x^2}{\sigma_x^2} \end{aligned}$$


$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \mu_x$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t + \tau) dt = \mu_x$$

相关分析及其应用

(1) 自相关函数定义
$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

则有:
$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau) - \mu_x^2}{\sigma_x^2}$$

注意: 各态历经随机信号。

推广:

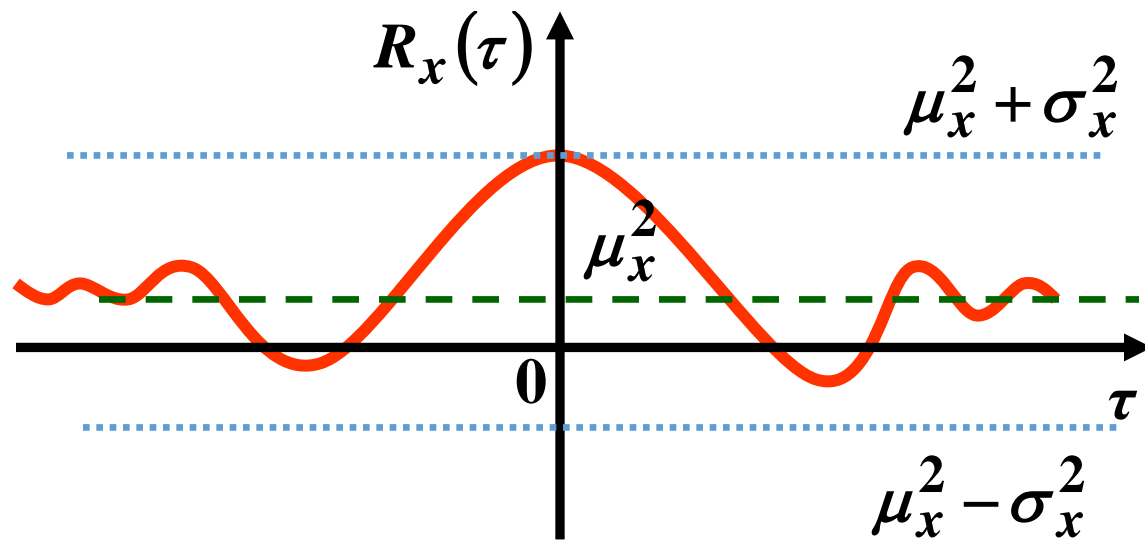
周期信号
$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$
 T ——周期

能量有限信号:
$$R_x(\tau) = \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

相关分析及其应用

(2) 自相关函数的性质(5条)

性质1 $\mu_x^2 - \sigma_x^2 \leq R_x(\tau) \leq \mu_x^2 + \sigma_x^2$



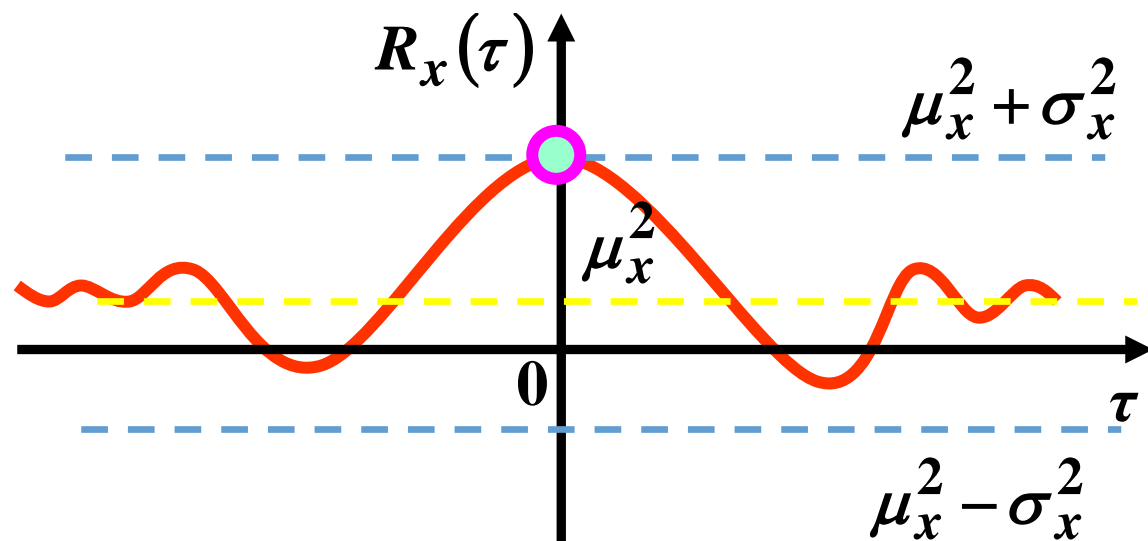
原因: $\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau) - \mu_x^2}{\sigma_x^2}$

$$|\rho_{xy}| \leq 1$$

相关分析及其应用

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

性质2 $R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)dt = \psi_x^2$ 均方值



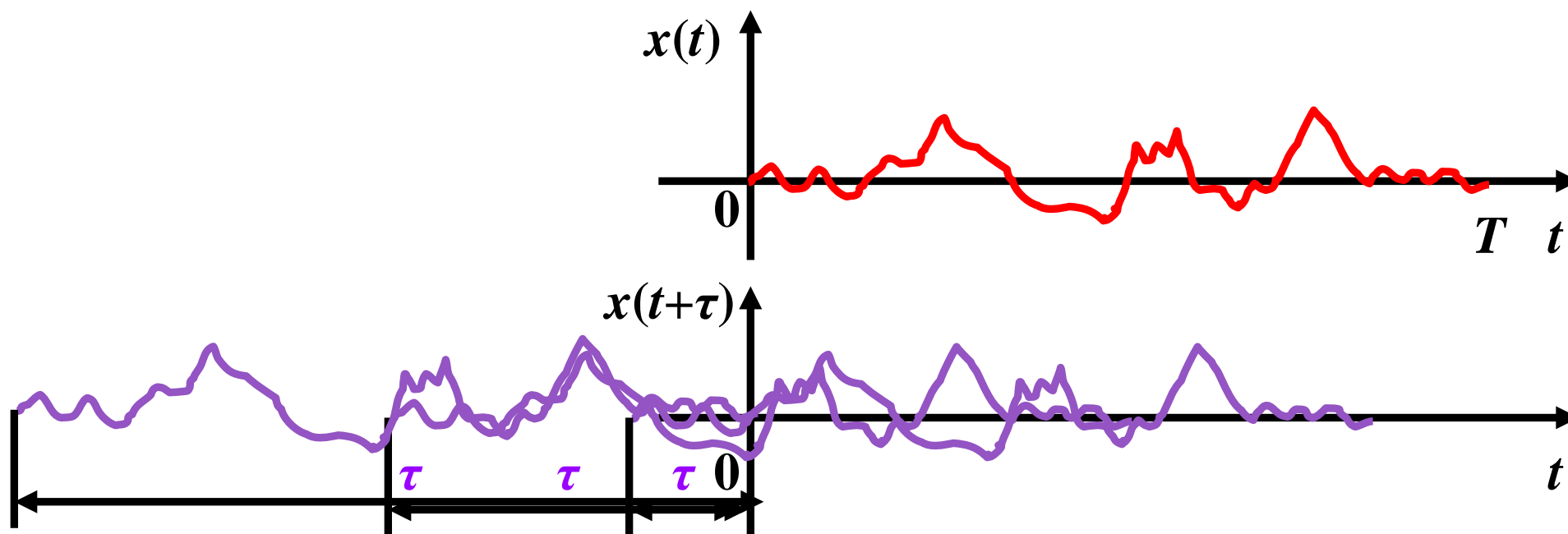
$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau) - \mu_x^2}{\sigma_x^2} \rightarrow \tau = 0 \text{ 时 } \rho_x(0) = 1 \Rightarrow \text{上式}$$

相关分析及其应用

性质3 τ 足够大或 $\tau \rightarrow \infty$ 时, 随机变量 $x(t)$ 与 $x(t+\tau)$ 就不存在内在的联系了, 彼此无关。

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho_x(\tau) = 0 \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \mu_x^2$$

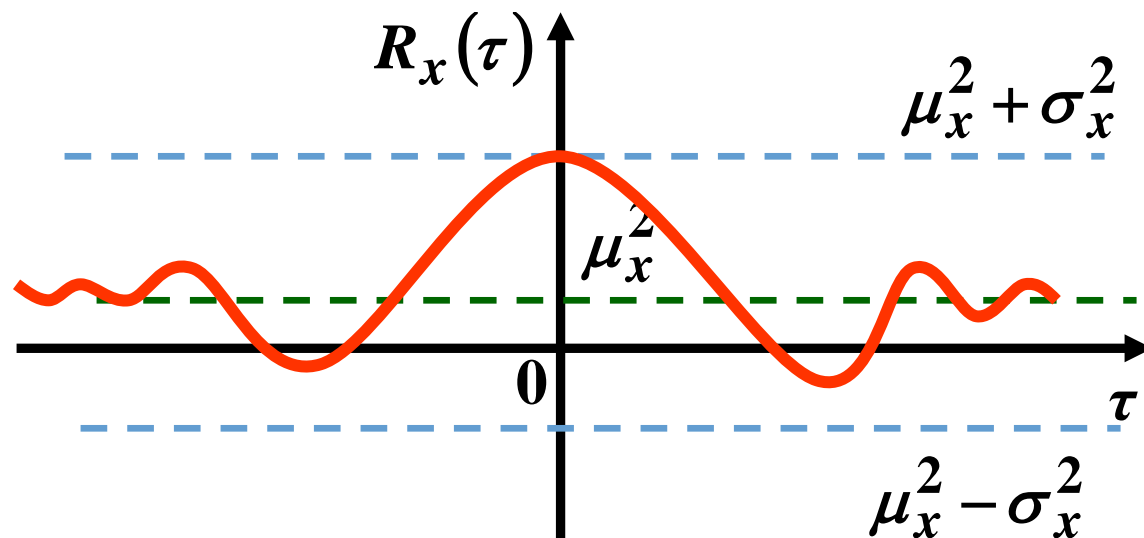
$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau) - \mu_x^2}{\sigma_x^2}$$



相关分析及其应用

性质4 自相关函数为实偶函数 $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$

$$\begin{aligned} R_x(-\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t+\tau)x(t+\tau-\tau)d(t+\tau) \\ &= R_x(\tau) \end{aligned}$$



相关分析及其应用

性质5 周期函数的自相关函数仍为同频率的周期函数，其幅值与原周期信号的幅值有关，但丢失了原信号的相位信息。

$$x(t) = x(t + nT) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} R_x(\tau + nT) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t + nT) x(t + nT + \tau) d(t + nT) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) d(t) \\ &= R_x(\tau) \end{aligned}$$

相关分析及其应用

例 求正弦函数 $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned}\text{解: } R_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x_0^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin[\omega(t+\tau) + \varphi] dt \\ &= \frac{x_0^2}{2} \cos \omega \tau\end{aligned}$$

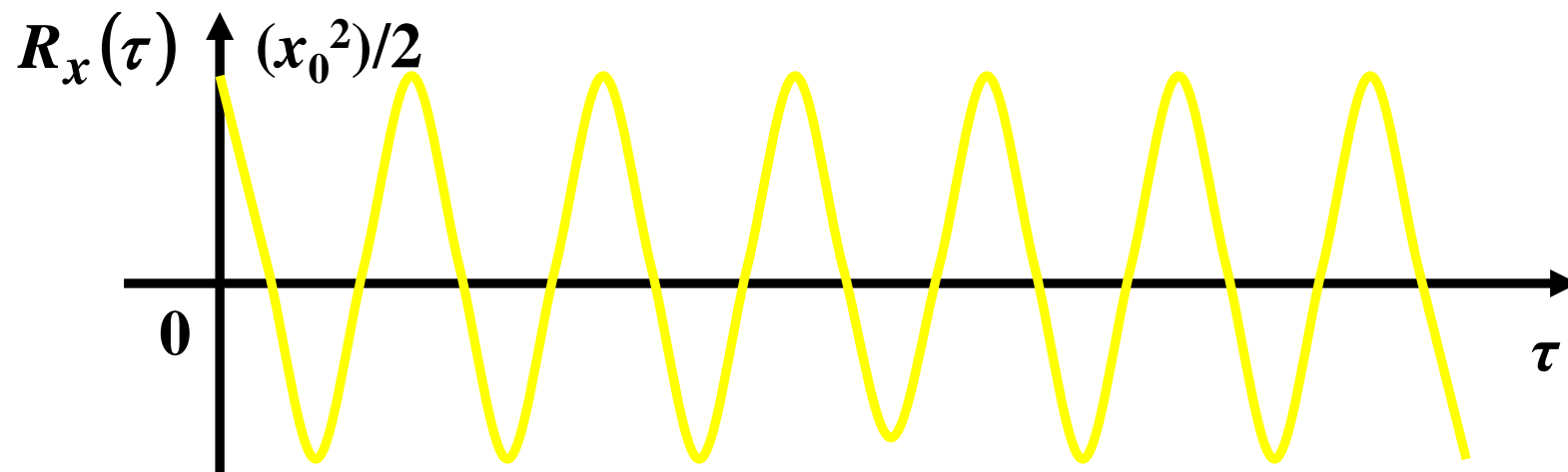
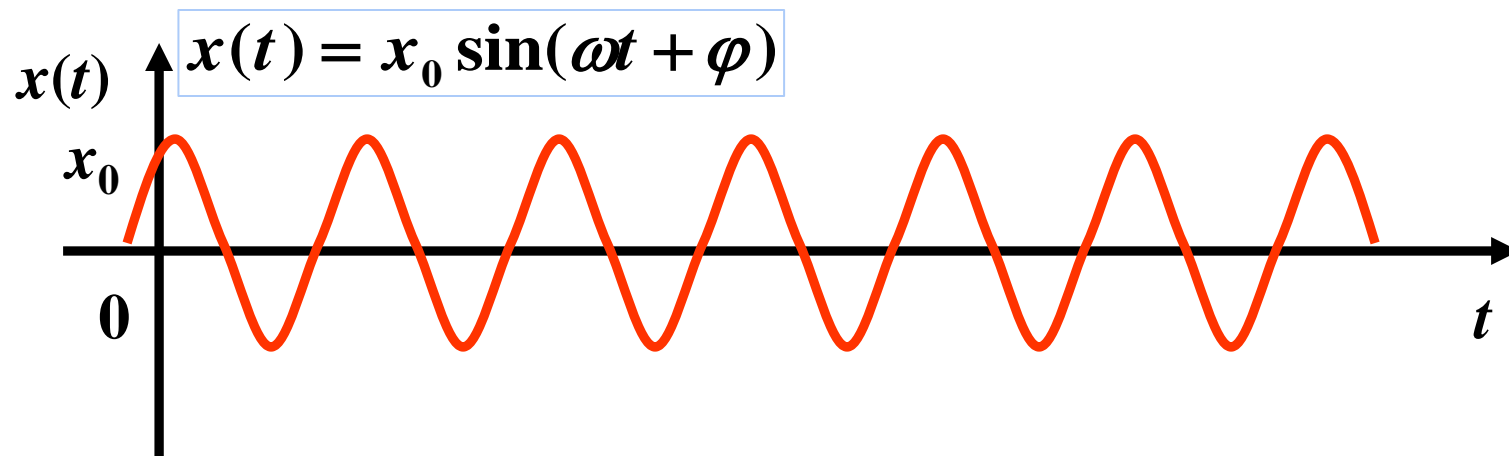
周期函数的自相关函数仍为同频率的周期函数；

在自相关函数中包含的原信号的幅值信息与频率信息，但是却丢失了其初始相位信息。

相关分析及其应用

正弦函数及自相关函数

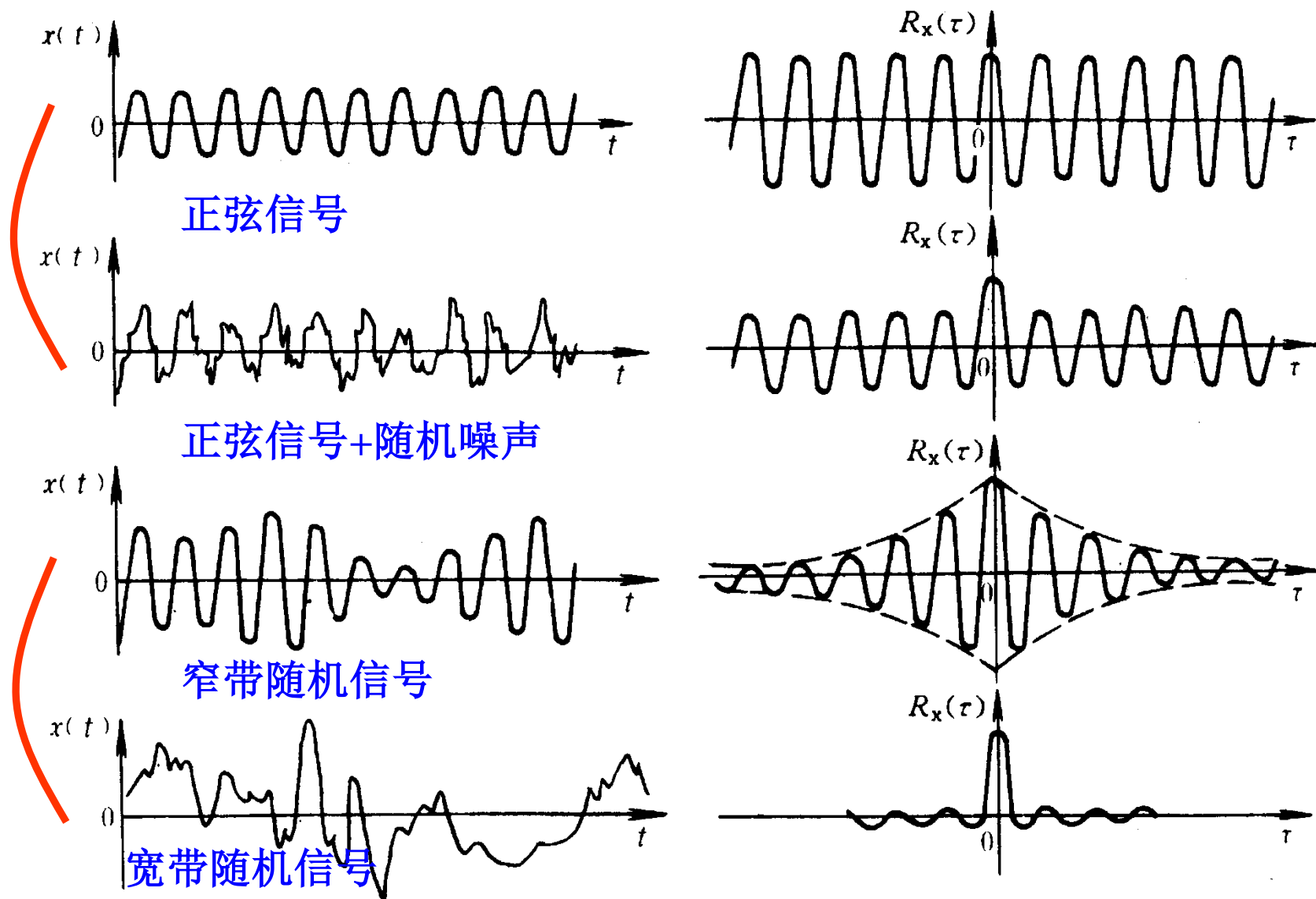
初始相位 φ 的信息丢失了



$$R_x(\tau) = \frac{x_0^2}{2} \cos \omega \tau$$

相关分析及其应用

典型信号的自相关函数



相关分析及其应用

(3)自相关函数的作用

主要是用来区别信号的类型。

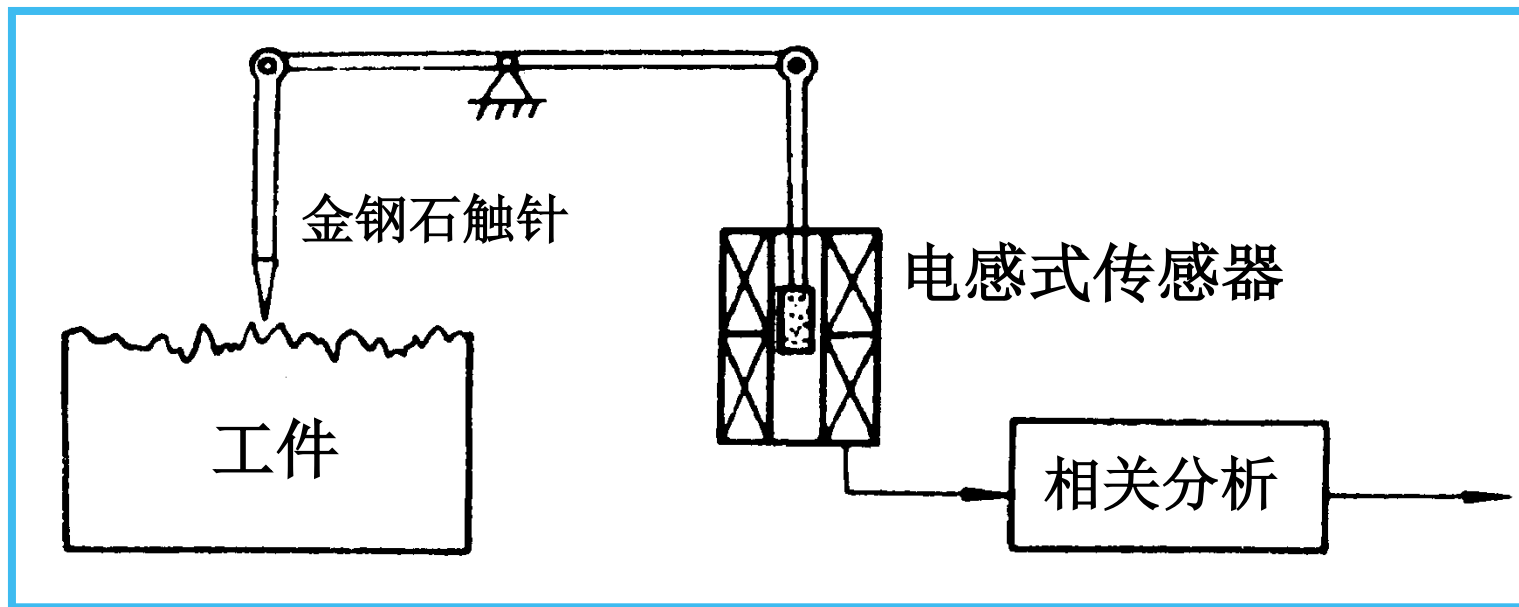
- 只要信号中含有周期成分，其自相关函数在 τ 很大时都不衰减，并具有明显的周期性
- 信号中不包含周期成分则在 τ 稍大时自相关函数就衰减为零
- 宽带随机信号的自相关函数相对于窄带随机信号的自相关函数衰减快

相关分析及其应用

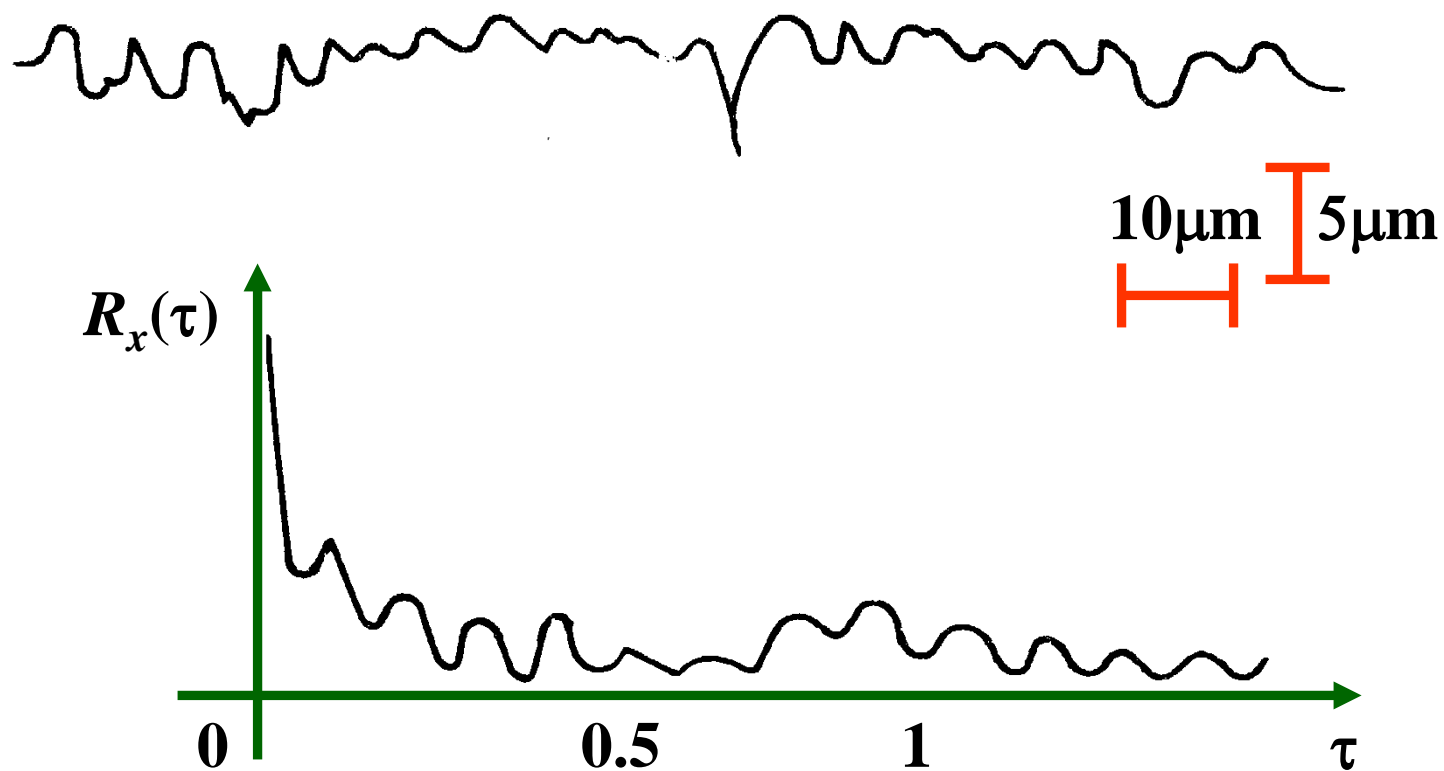
自相关函数的应用举例：

例：① 机加工表面粗糙度成因分析。

系统构成：



相关分析及其应用



可能成因：①沿工件轴向走刀运动的周期性；

②工件切向，则可能是由于主轴回转振动的周期性。

相关分析及其应用

例：② 在水域中探索有无潜艇通过。

潜艇的发动机在工作时发出周期性信号，而海浪是随机的，如果经过相关分析发现有周期性存在，就可以知道，可能有潜艇通过。

自相关函数在电子、机械等工程中有一定的使用价值，但是利用它的傅里叶变换（自功率谱，下面的内容）来分析噪声中的周期信号更加实用一些。另外，从前面的分析中我们知道，自相关函数中丢失了相位信息，使其应用受到一定的限制。

相关分析及其应用

3. 信号的互相关函数 $\begin{cases} (1) & \text{定义} \\ (2) & \text{性质} \\ (3) & \text{应用} \end{cases}$

(1) 互相关函数定义

研究两个随机信号间的相关性。

各态历经随机信号

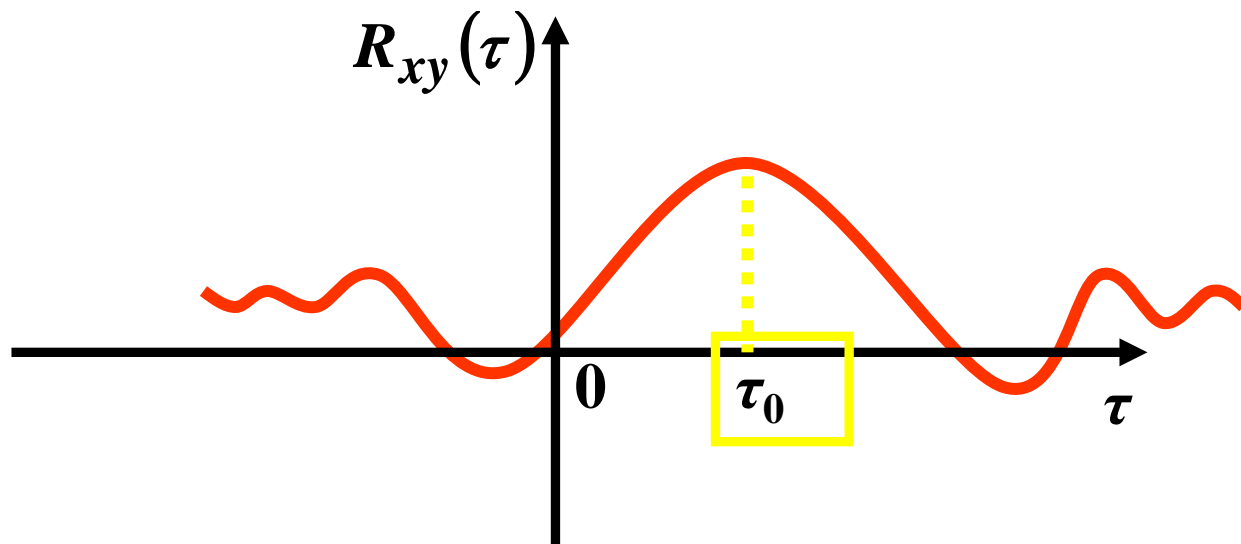
定义：

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

相关分析及其应用

定义:
$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

互相关函数图形:



互相关函数

相关分析及其应用

注意： 各态历经随机信号(推广):

周期信号

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

能量有限信号:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

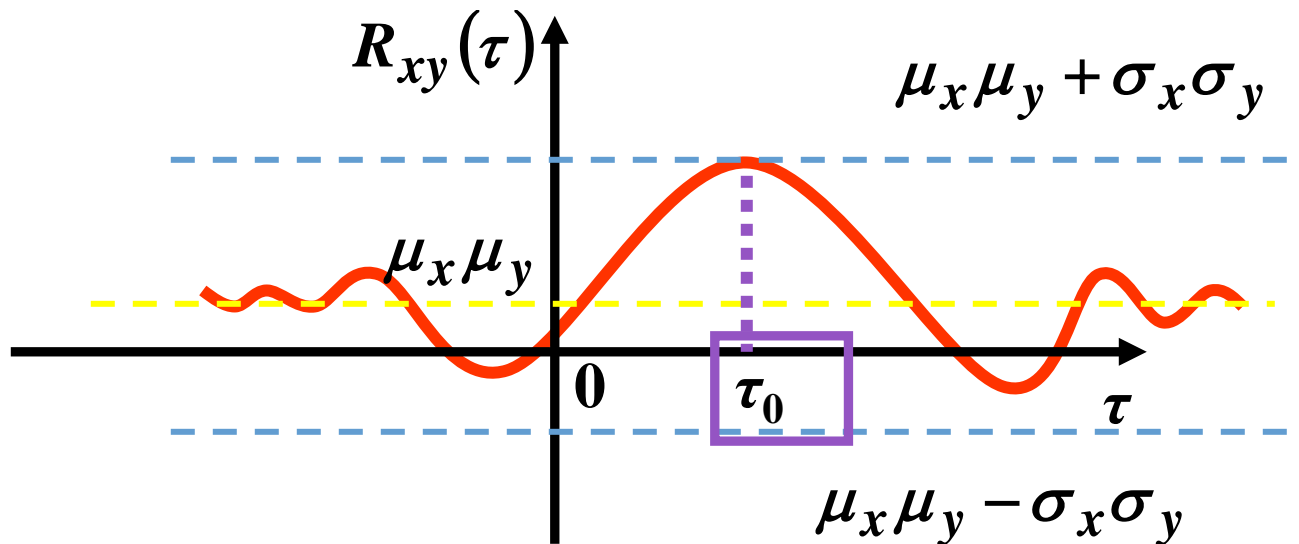
相关分析及其应用

(2)互相关函数的性质(主要4条)

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y}{\sigma_x \sigma_y}$$

性质1 互相关函数的限制范围为：

$$\mu_x \mu_y - \sigma_x \sigma_y \leq R_{xy}(\tau) \leq \mu_x \mu_y + \sigma_x \sigma_y$$



相关分析及其应用

性质2 同频相关不同频不相关

例 求下列两正弦信号 的互相关函数。

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_1 t + \theta)$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega_2 t + \theta - \varphi)$$

讨论如下两种情形：

① $\omega_1 \neq \omega_2$

② $\omega_1 = \omega_2$

相关分析及其应用

解： 因为信号是周期信号，可以用一个共同周期内的平均值代替其整个历程的平均值，故

① $\omega_1 \neq \omega_2$

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_1 t + \theta)$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega_2 t + \theta - \phi)$$

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt \quad (\text{应用三角函数的正交性}) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x_0 \sin(\omega_1 t + \theta) y_0 \sin[\omega_2(t + \tau) + \theta - \phi] dt = 0 \end{aligned}$$

结论：同频相关不同频不相关

② $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x_0 \sin(\omega t + \theta) y_0 \sin[\omega(t + \tau) + \theta - \phi] dt \\ &= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\omega \tau - \phi) \end{aligned}$$

保留了①幅值

②频率

③相位信息

相关分析及其应用

性质3 互相关函数非偶函数、亦非奇函数，具有关系

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

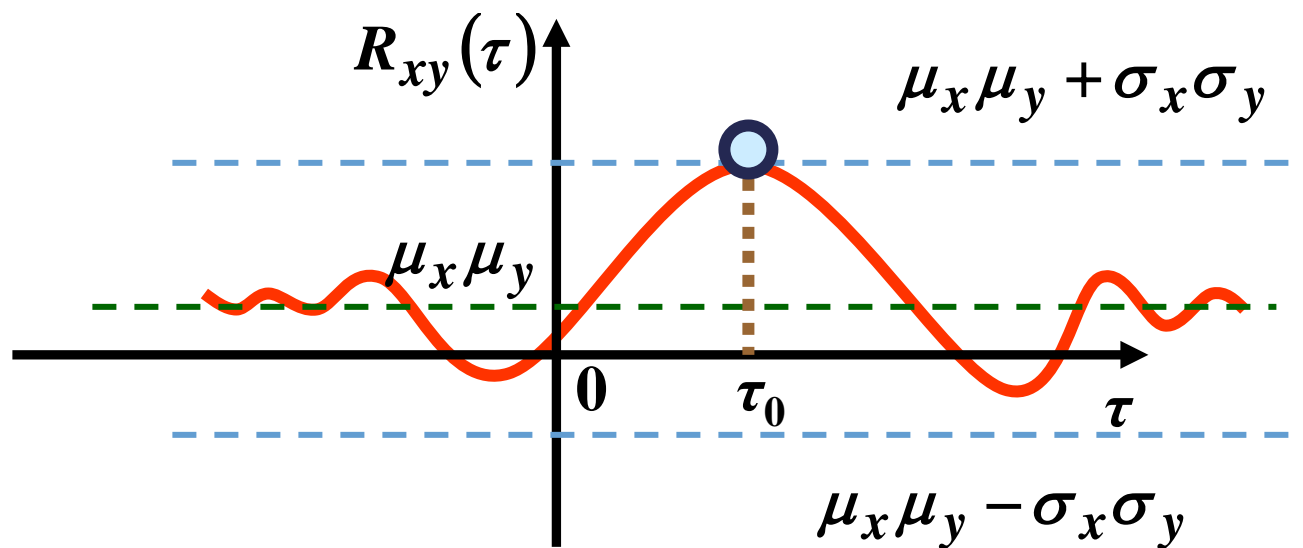
因为：

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) y(t) dt \quad \text{令 } t = t - \tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) x(t - \tau) dt \\ &= R_{yx}(-\tau) \end{aligned}$$

$$R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau)$$

相关分析及其应用

性质4 $R_{xy}(\tau)$ 的峰值不在 $\tau_0 = 0$ 处，其峰值偏离原点的位置反映了两信号时移的大小，相关程度最高。



互相关函数的性质

相关分析及其应用

(3)互相关的应用

机器上主轴失衡（动不平衡），引起机器的振动。但是测量的振动信号中，除了不平衡振动信号外，还会有齿轮啮合振动，滚动轴承振动，地基振动等信号。**如何求解动不平衡信息？**

各振动信号的频率是不相同的。不平衡振动信号的频率与转动频率相同，齿轮啮合频率是齿数与旋转频率的乘积，滚动轴承振动频率一般较高，地基振动频率一般较低。根据**同频相关不同频不相关的原理**，因此和旋转频率不一致的频率的振动与失衡无关，分析振动信号与旋转频率相关的成分，可以获得失衡状态的信息。

相关分析及其应用

(3)互相关的应用

在噪声背景下提取有用信息。

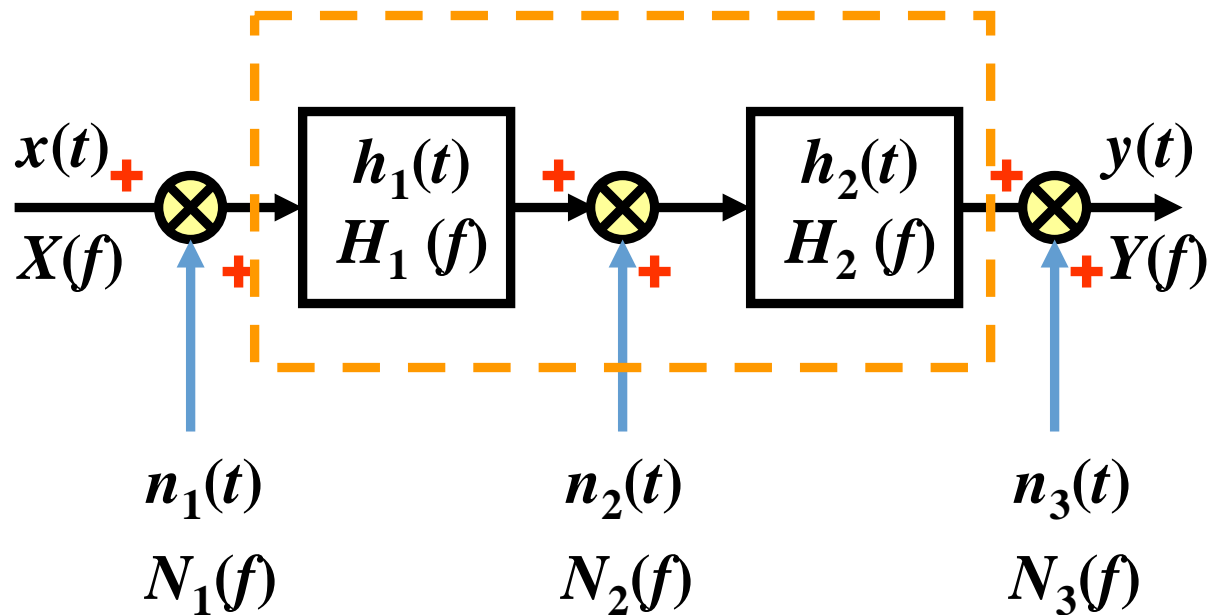
例：线性定常系统对之施加振动激励 $\rightarrow x(t)$

检测振动信号 $\rightarrow y(t)$ ，(含有大量的干扰噪声)

对 $x(t)$ 和 $y(t)$ 进行相关分析，根据同频相关不同频不相关的理论，只有和激振频率相同的成分才可能是由激振而引起的响应，其它成分均是干扰噪声，这样便可得知激励引起的响应的幅值及相位差的大小，完全消除了干扰噪声的影响。

这种处理方法称为相关滤波。

相关分析及其应用



$$y(t) = x'(t) + n'_1(t) + n'_2(t) + n_3(t)$$

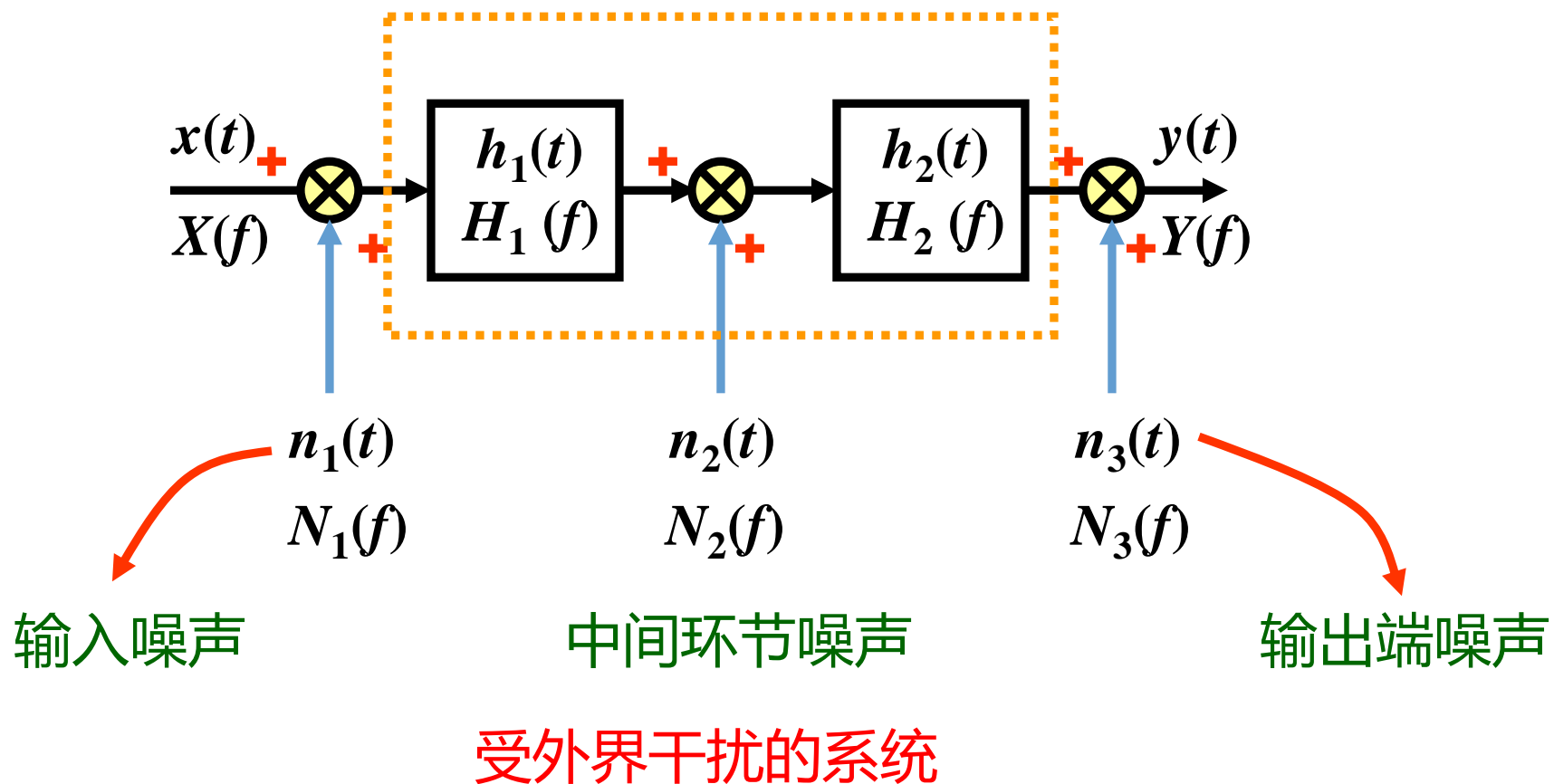
$$\Rightarrow R_{xy}(\tau) = R_{xx'}(\tau) + R_{xn'_1}(\tau) + R_{xn'_2}(\tau) + R_{xn_3}(\tau)$$

由于输入和噪声是独立无关的

$$\Rightarrow R_{xy}(\tau) = R_{xx'}(\tau)$$

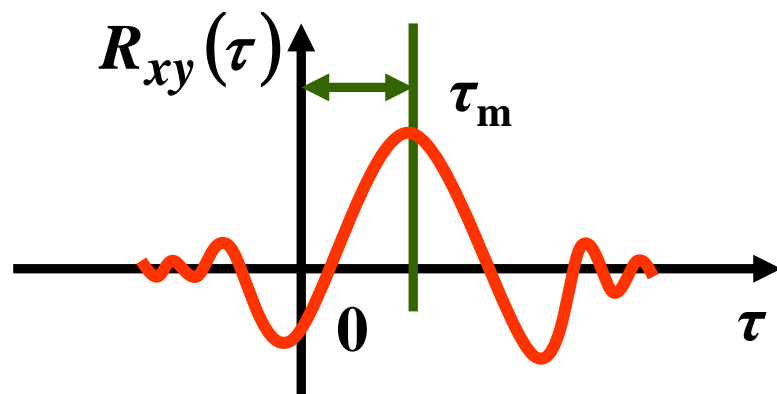
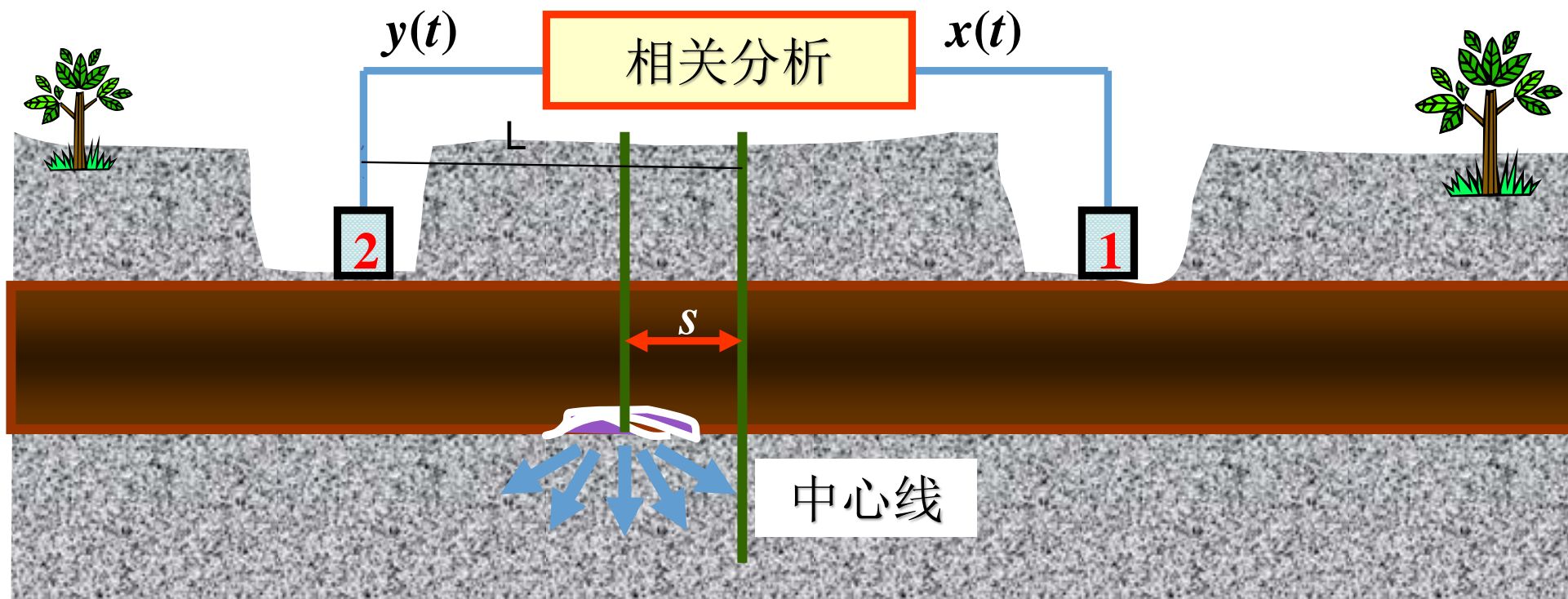
相关分析及其应用

相关函数排除噪声影响



相关分析及其应用

例：相关分析在输油管测漏中的应用

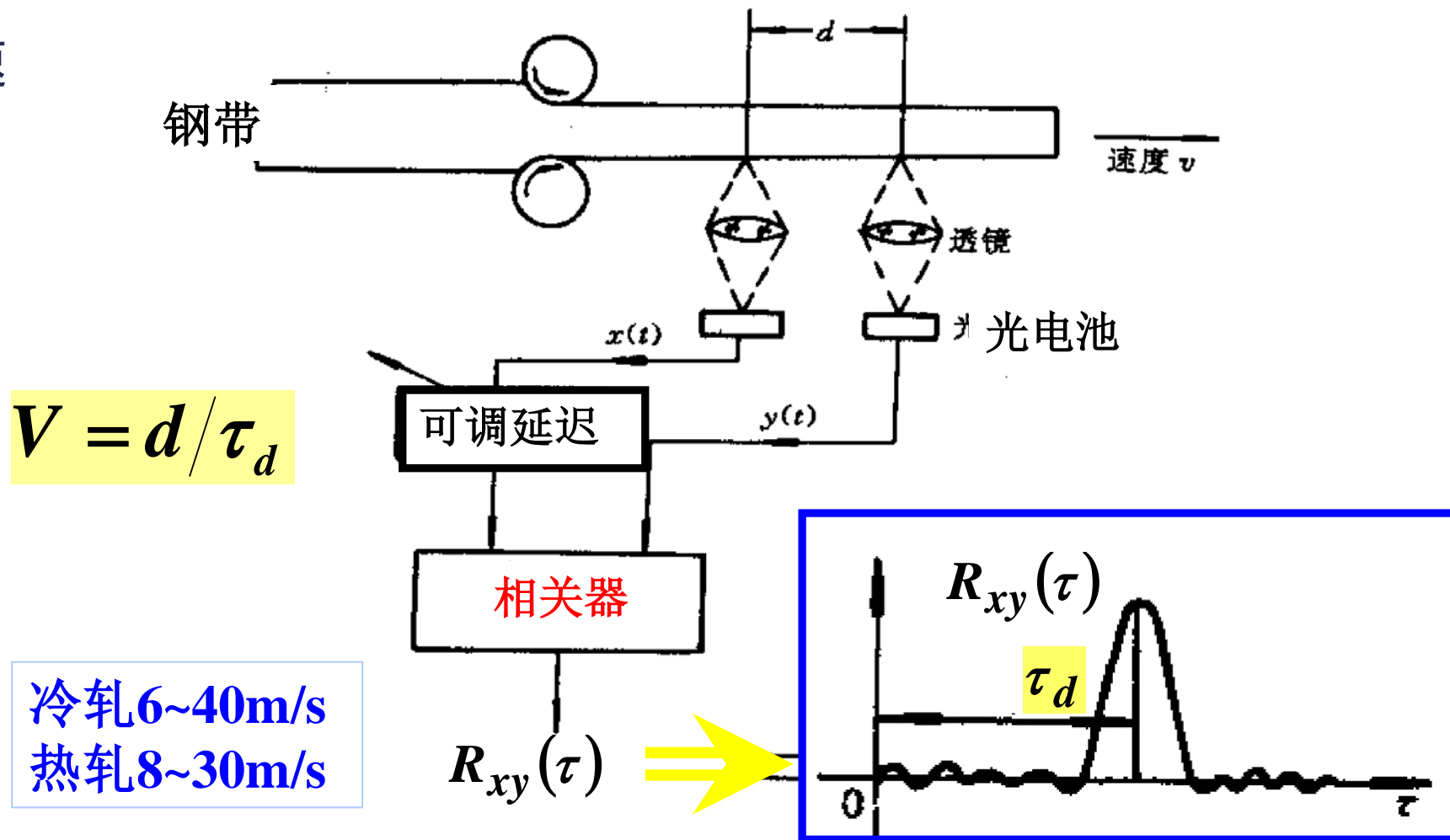


$$\begin{cases} L + S = Vt_1 \\ L - S = Vt_2 \\ t_1 - t_2 = \tau_m \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2}V\tau_m$$

相关分析及其应用

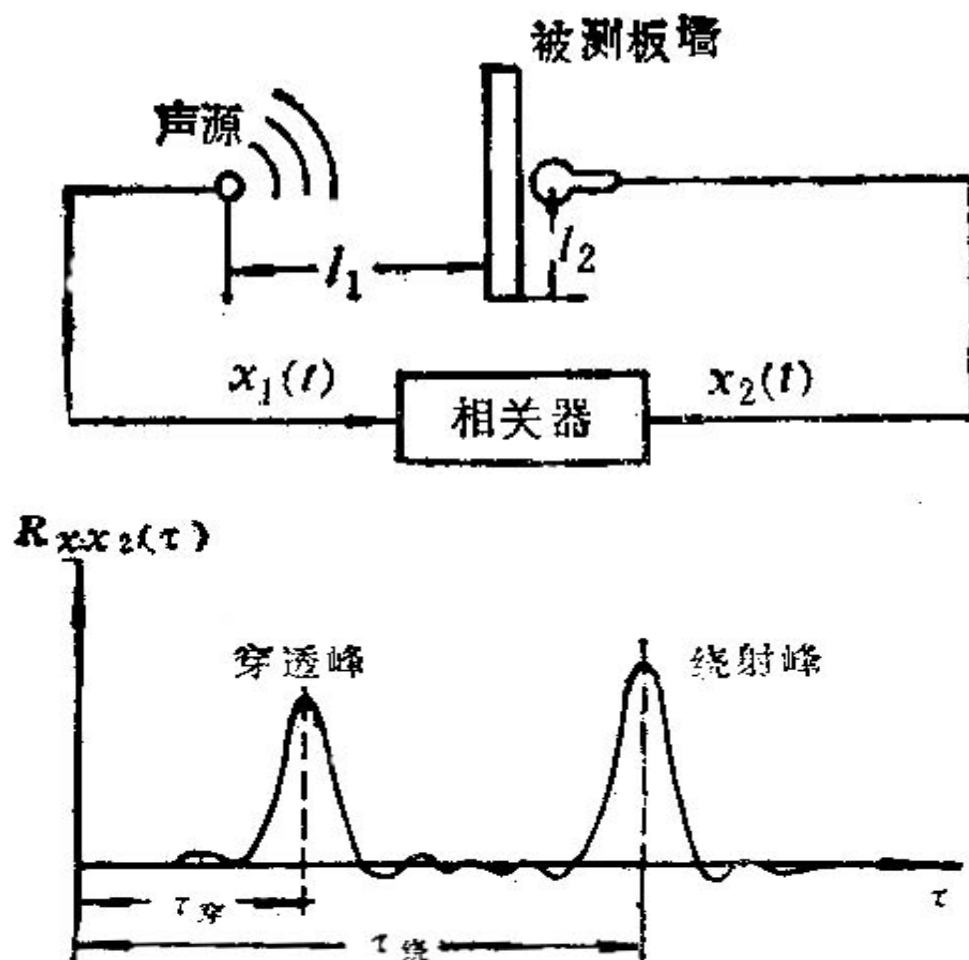
例：相关测速



钢带运动速度的非接触测量

相关分析及其应用

例：相关分析的声学应用



相关分析在声学测量中应用很多。它可以区分不同时间到达的声音，测定物体的吸声系数和衰减系数，从多个独立声源或振动源中测出某一声源到一定地点的声功率等。

功率谱分析及其应用



浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

功率谱分析及其应用

功率谱分析及其应用

{ 自功率谱密度函数
互功率谱密度函数

- ❖ 信号的时域描述反映了信号幅值随时间变化的特征;
- ❖ 相关分析从时域为在噪声背景下提取有用信息提供了手段
- ❖ 信号的频域的描述反映了信号的频率结构和各频率成分的幅值大小;
- ❖ 功率谱密度函数、相干函数、倒谱分析则从频域为研究平稳随机过程提供了重要方法。

功率谱分析及其应用

1. 自功率谱密度函数

- ❑ 定义及其物理意义
- ❑ 巴塞伐尔 (Parseval) 定理
- ❑ 功率谱的估计
- ❑ 自功率谱的应用

功率谱  PSD Power Spectrum Density

功率谱分析及其应用

□ 定义及其物理意义

随机信号的自功率谱密度函数（自谱）为：

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

其逆变换为

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

记作：

$$R_x(\tau) \rightleftharpoons S_x(f)$$

$S_x(f)$ 为 $x(t)$ 的自功率谱密度函数，简称为自谱或自功率谱。

功率谱分析及其应用

为什么称为自功率谱呢？

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

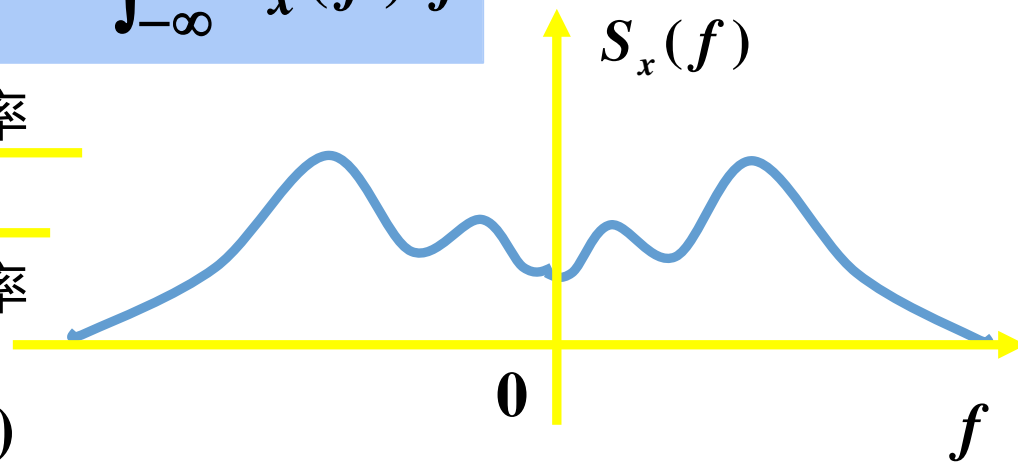
$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{x^2(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df$$

瞬时功率

总能量

平均功率



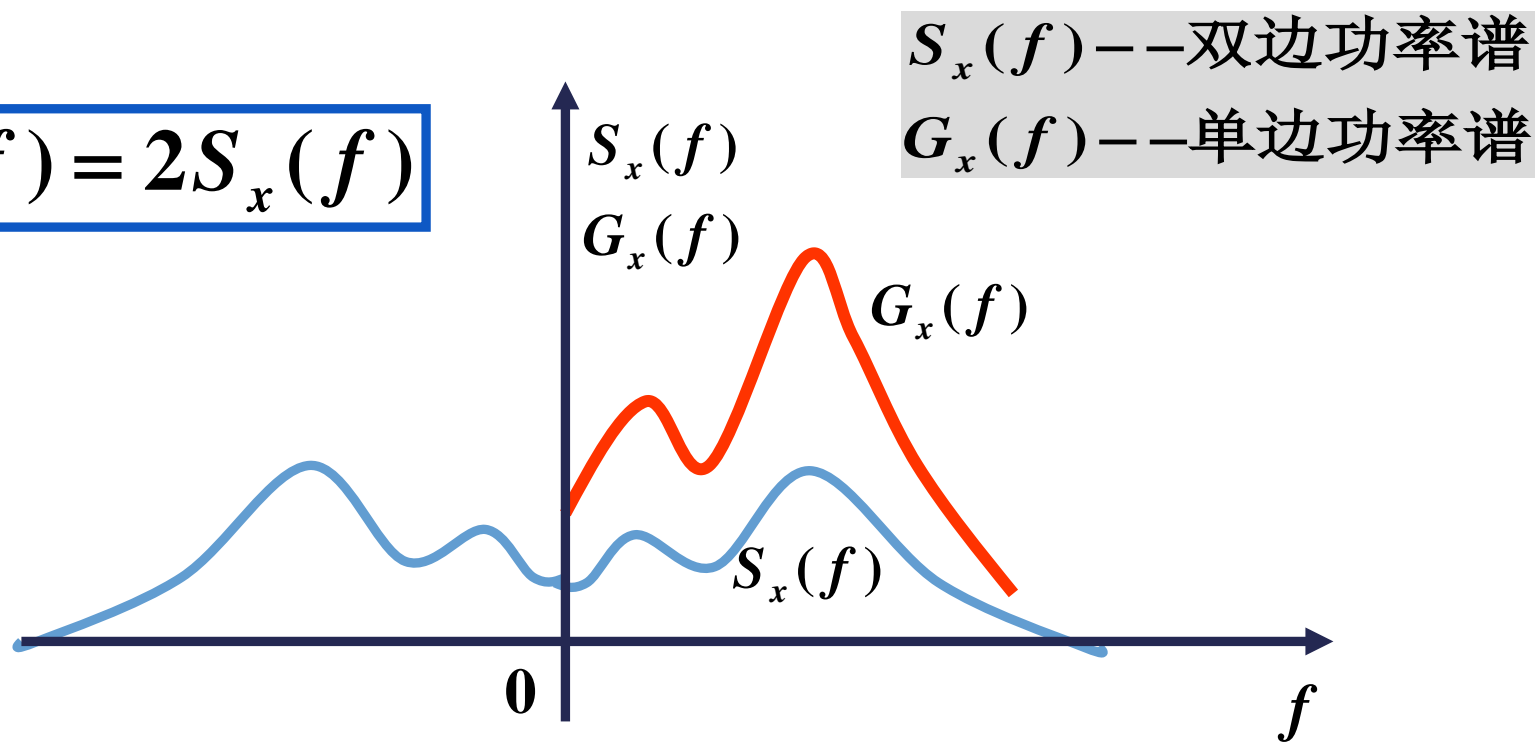
由于： $R_x(\tau) \Leftrightarrow S_x(f)$

则二者所蕴含的信息是等价的，自功率谱密度函数必然是偶函数，如上图所示。

功率谱分析及其应用

因为经常应用的频率段为 $f \in (0, \infty)$ ，所以功率谱也常用单边的形式来表示之。

$$G_x(f) = 2S_x(f)$$



单边谱与双边谱

功率谱分析及其应用

□ 巴塞伐尔 (Parseval) 定理 (能量等式)

定义：信号在时域中的总能量等于其在频域中的总能量。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$|X(f)|^2$ 称为能谱

功率谱分析及其应用

证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

由卷积定理 $x_1(t)x_2(t) \Rightarrow X_1(f) * X_2(f)$

即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-j2\pi f_0 t} dt &= X_1(f) * X_2(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2(f_0 - f)df \end{aligned}$$

令 $f_0 = 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2(-f)df$

令 $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$

$|X(f)|^2$ 称为能谱

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot X^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

功率谱分析及其应用

下面根据Parseval定理推导一下自功率谱密度函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$S_x(f)$ 和幅值谱 $|X(f)|$ 或能谱 $|X(f)|^2$ 之间的关系。

由Parseval定理:

$$P_{av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2 df$$

由功率谱定义:

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

因此有:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2$$

重要公式

可以直接对时域信号 $x(t)$ 进行傅里叶变换, 再利用上述公式求信号的功率谱 (但这只是理论上)。

功率谱分析及其应用

□ 功率谱的估计

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2$$

上面得到的功率谱与信号的幅值谱间的关系仅是一个理论计算公式，实际上我们不可能对一个无限长的时域信号进行分析，只能分析有限长度的信号。

模拟信号

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{T} |X(f)|^2$$

$$\hat{G}_x(f) = \frac{2}{T} |X(f)|^2$$

数字信号

$$\hat{S}_x(k) = \frac{1}{N} |X(k)|^2$$

$$\hat{G}_x(k) = \frac{2}{N} |X(k)|^2$$

功率谱分析及其应用

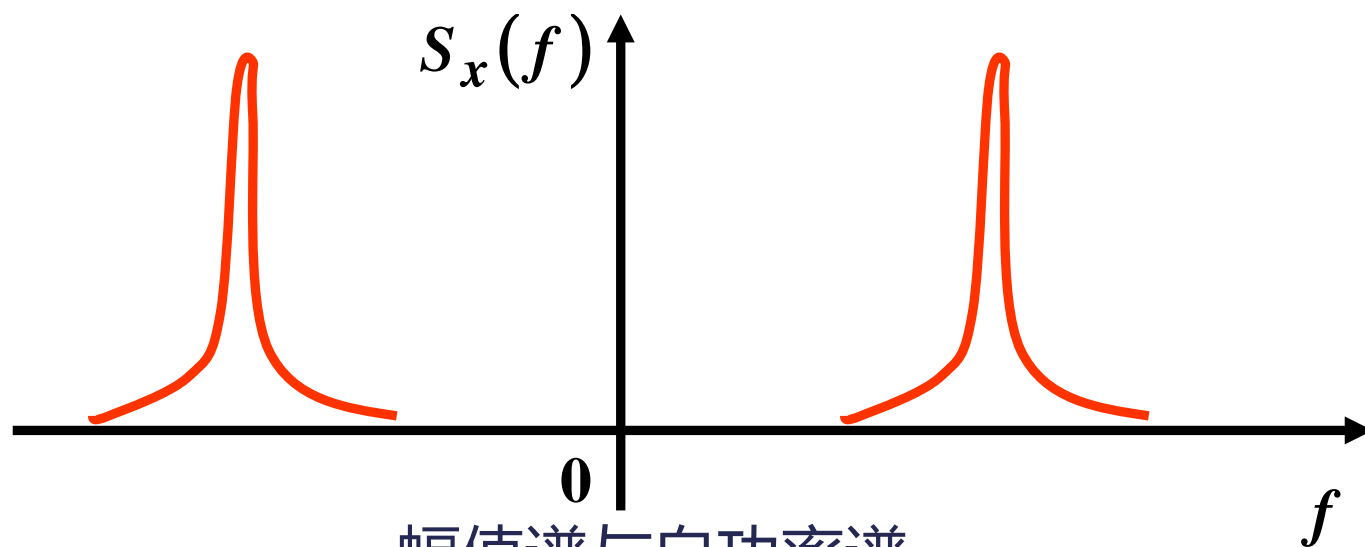
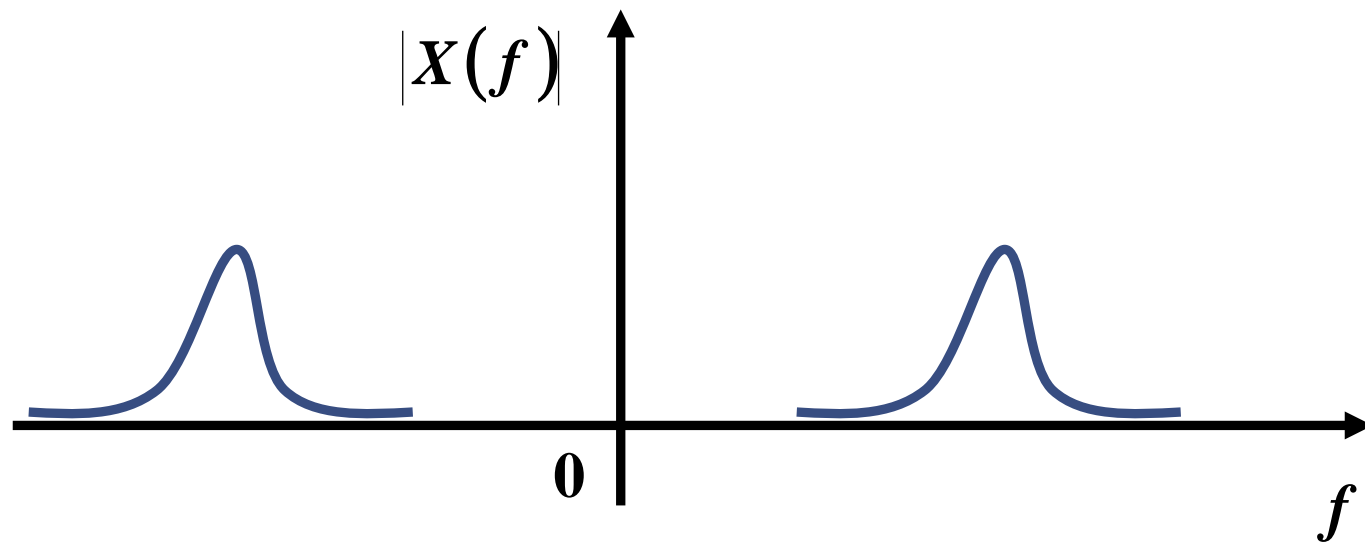
□ 自功率谱的应用（三个方面）

(1) 反映信号的频率结构；

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2$$

$|X(f)|$ 反映信号的频率结构，所以 $S_x(f)$ 也反映信号的频率结构，但 $S_x(f)$ 与 $|X(f)|$ 之间是平方的关系，因此频率结构更加明显。

功率谱分析及其应用



幅值谱与自功率谱

功率谱分析及其应用

(2)反映系统的幅频特性(但丢失了相位信息)

若为线性定常系统有:

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$
$$y(t) \rightleftharpoons Y(f)$$

则有: $Y(f) = H(f) \cdot X(f) \longrightarrow |Y(f)| = |H(f)| \cdot |X(f)|$

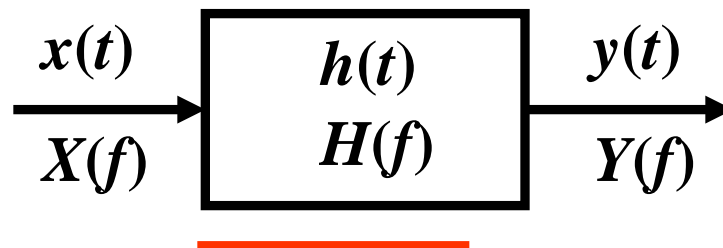
两边平方: $|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2$$

亦即: $S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$

由此得到: $|H(f)|^2 = \frac{S_y(f)}{S_x(f)}$

通过对输入输出自谱的分析便可以得到系统的幅频特性。



功率谱分析及其应用

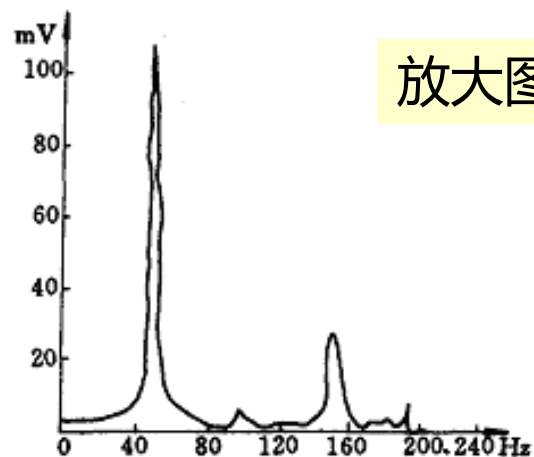
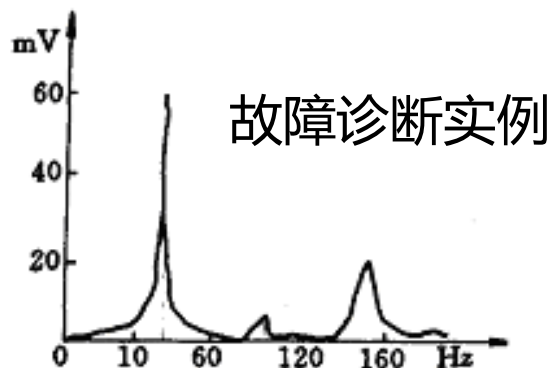
(3)检测信号中有无周期成分

理想的周期信号的频谱是脉冲函数，但实际信号我们只能对其取有限长度进行分析（截断），截断后的周期信号频谱特点为：

谱线高度有限；

谱线宽度无限小。

周期成分以陡峭的有限峰值的形态出现。

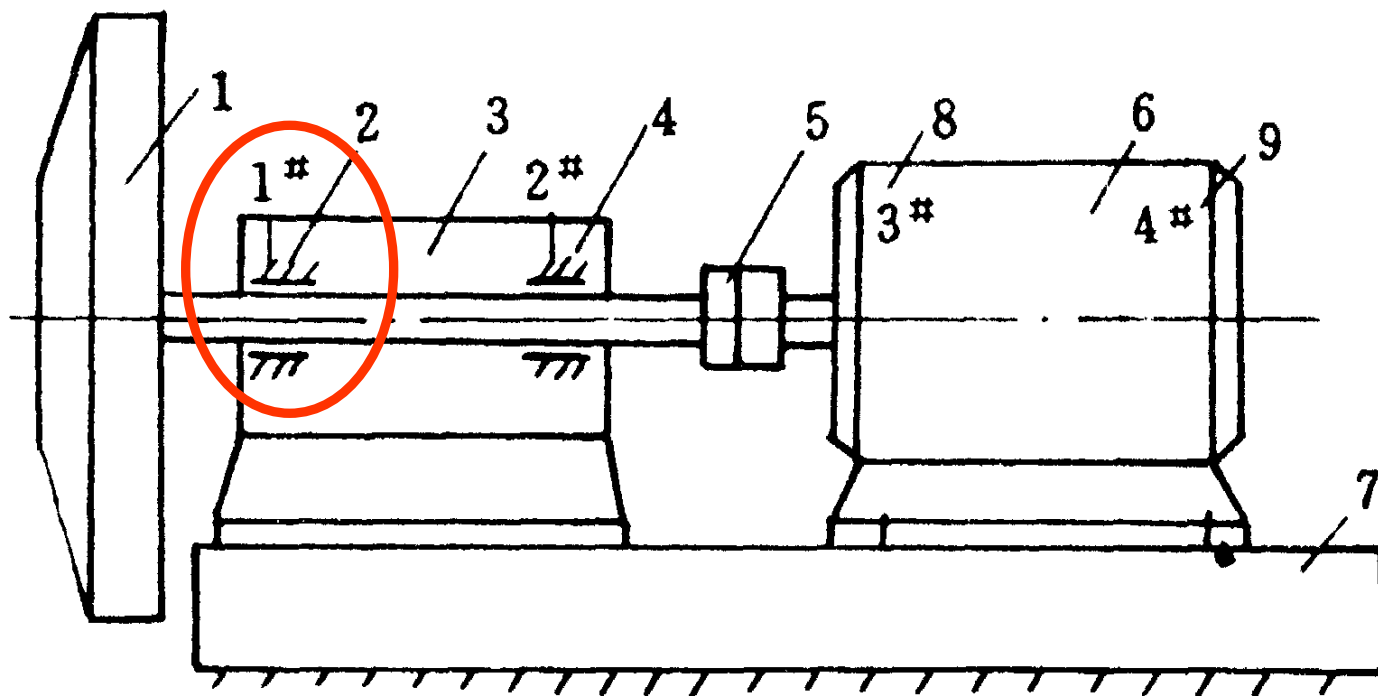


例：在水域中探索有无潜艇通过

功率谱分析及其应用

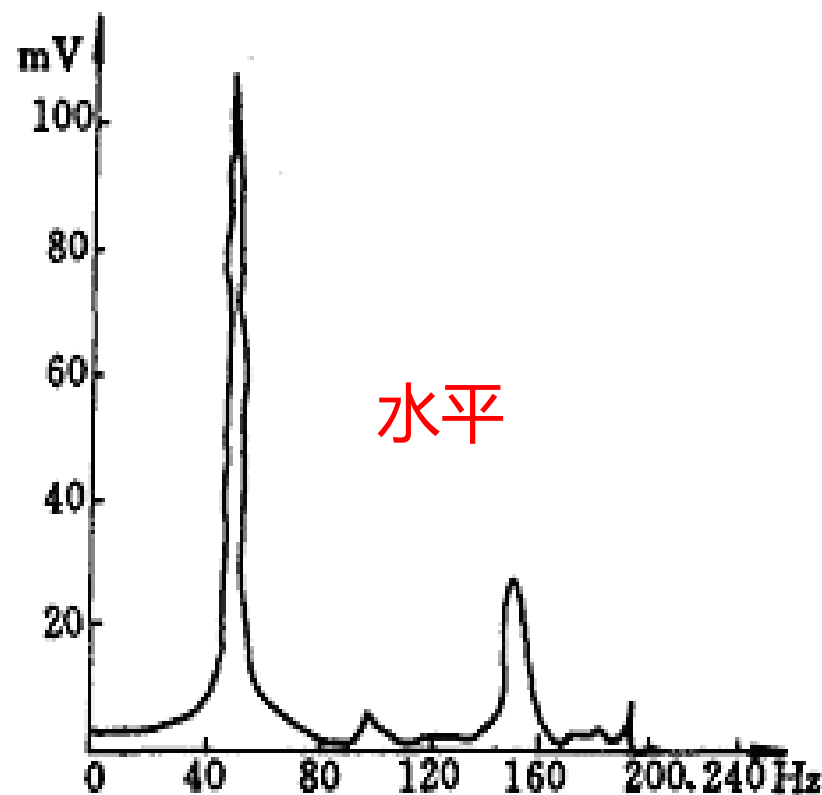
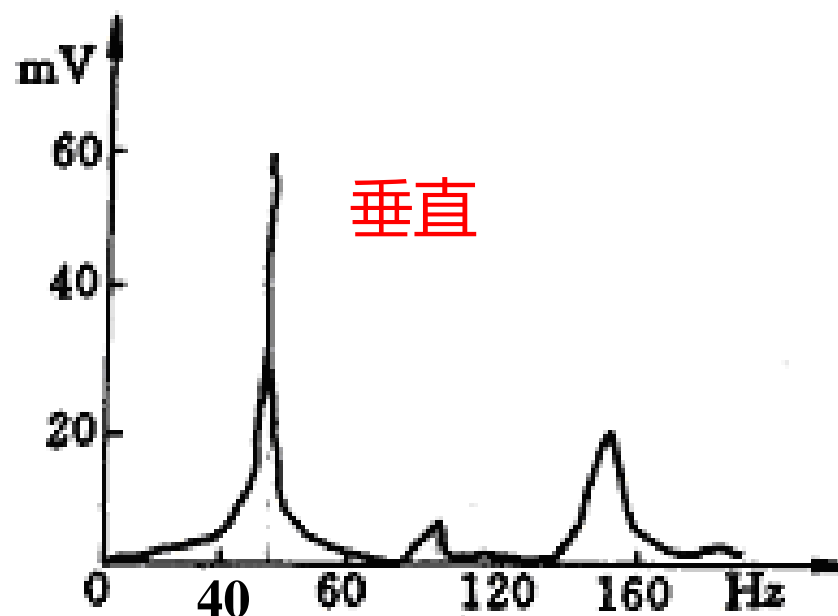
故障诊断实例

132KW鼓风机，转速为2950r/min，强烈振动而不能正常运行。



功率谱分析及其应用

此图为最靠近叶轮的轴承（1#测点）
的加速度谱。



轴承振动加速度谱

2950r/min \longrightarrow $f=49.1\text{Hz}$

功率谱分析及其应用

2. 互功率谱密度函数

- 定义
- 互功率谱的估计
- 互功率谱的应用

□ 定义

两随机信号的互功率谱密度函数（互谱）为：

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

其逆变换为： $R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df$

$$R_{xy}(\tau) \rightleftharpoons S_{xy}(f)$$

功率谱分析及其应用

功率谱的估计

模拟信号

$$\hat{S}_{xy}(f) = \frac{1}{T} X^*(f)Y(f)$$

$$\hat{S}_{yx}(f) = \frac{1}{T} X(f)Y^*(f)$$

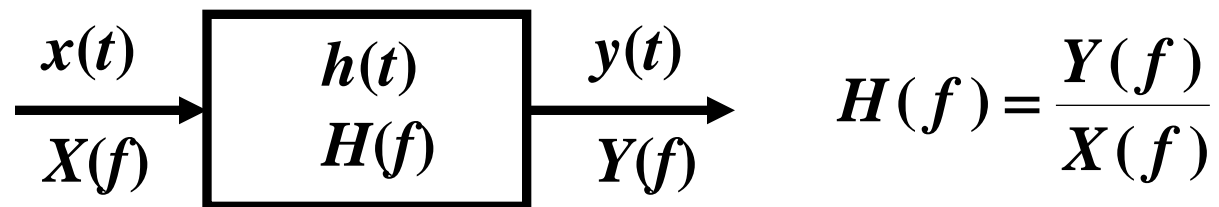
数字信号

$$\hat{S}_{xy}(k) = \frac{1}{N} X^*(k)Y(k)$$

$$\hat{S}_{yx}(k) = \frac{1}{N} X(k)Y^*(k)$$

互功率谱的应用

① 求取系统的频率响应函数



功率谱分析及其应用

单输入、单输出的理想线性系统

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{Y(f) \cdot X^*(f)}{X(f) \cdot X^*(f)} = \frac{S_{xy}(f)}{S_x(f)}$$

$$S_{xy}(f) = H(f)S_x(f)$$

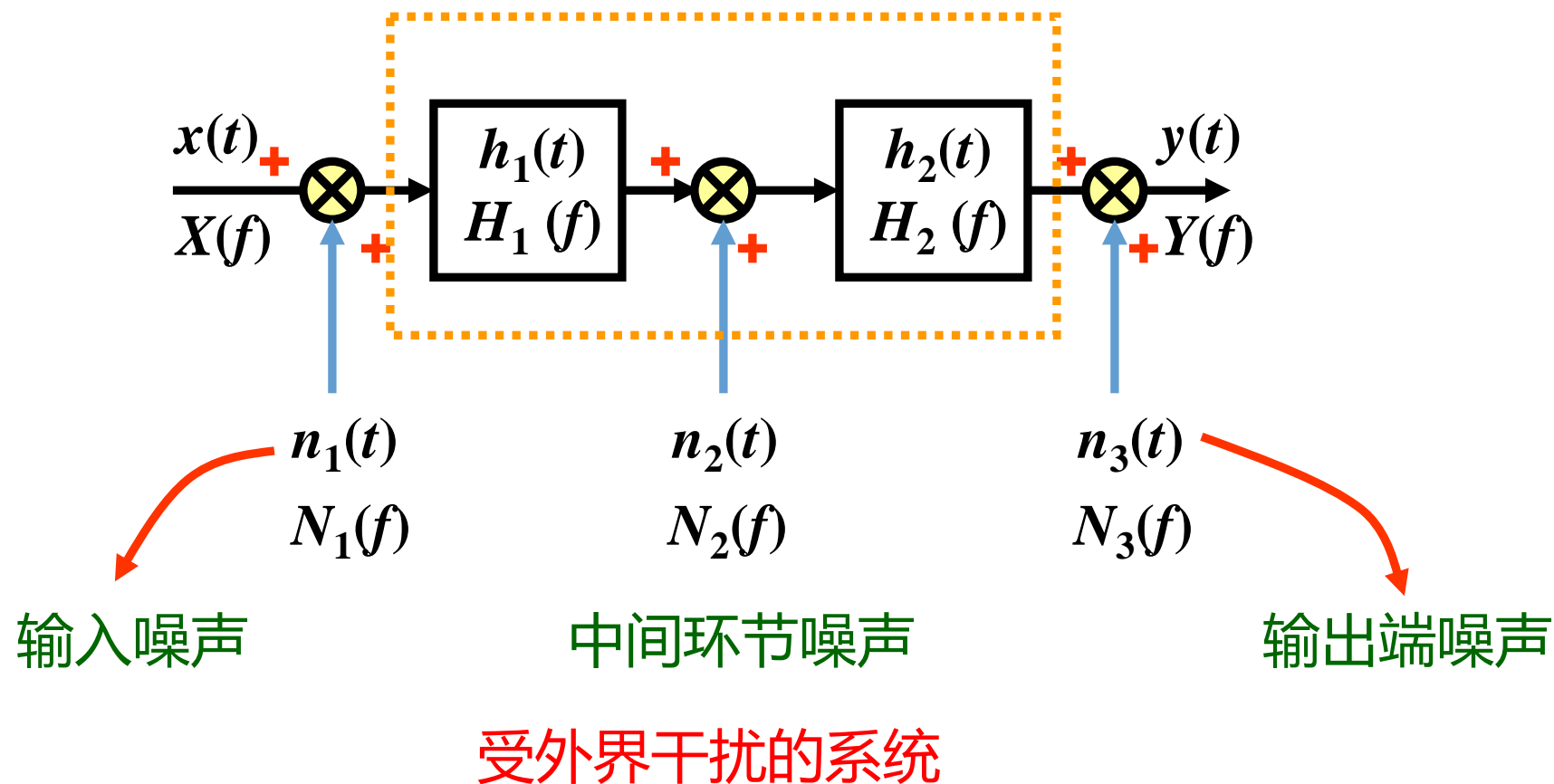
或

$$H(f) = \frac{S_{xy}(f)}{S_x(f)}$$

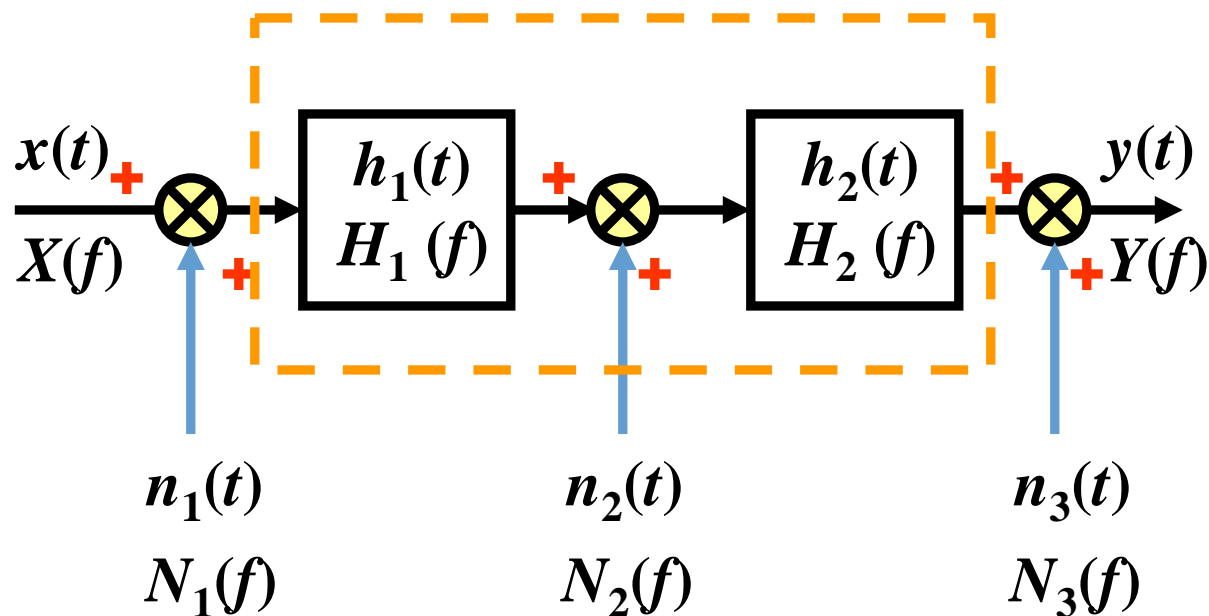
通过输入的自谱、输入输出的互谱分析，就能得出系统的频率响应特性。
保留了幅值频率及相位信息。

功率谱分析及其应用

互谱排除噪声影响



功率谱分析及其应用



$$y(t) = x'(t) + n'_1(t) + n'_2(t) + n_3(t)$$

$$\Rightarrow R_{xy}(\tau) = R_{xx'}(\tau) + R_{xn'_1}(\tau) + R_{xn'_2}(\tau) + R_{xn_3}(\tau)$$

由于输入和噪声是独立无关的

$$\Rightarrow R_{xy}(\tau) = R_{xx'}(\tau)$$

$$S_{xy}(f) = S_{xx'}(f) = H(f)S_x(f)$$

功率谱分析及其应用

相干函数

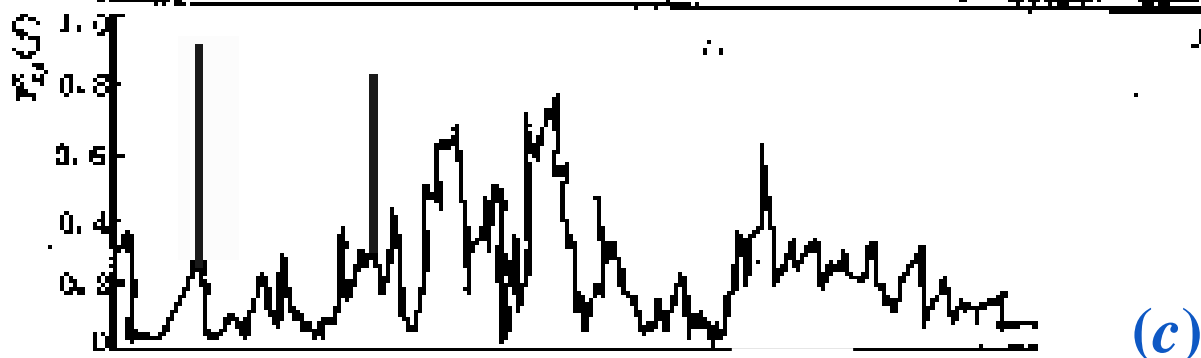
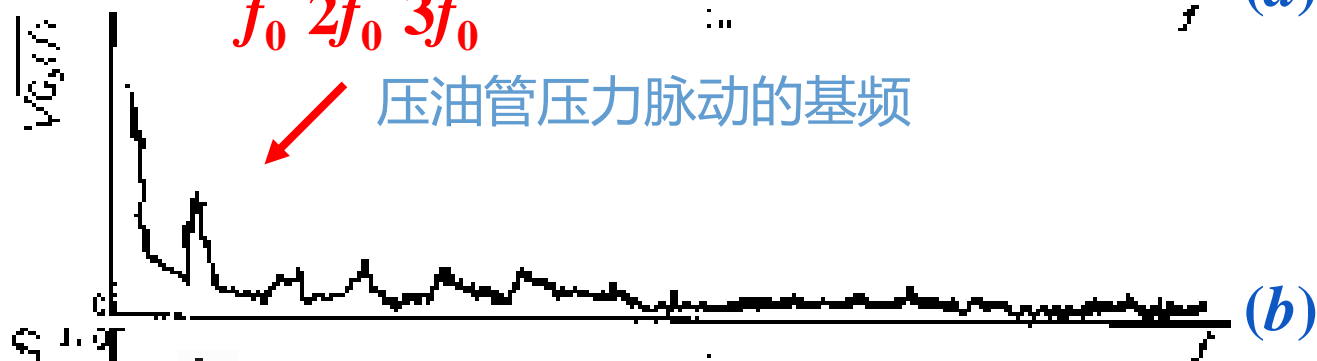
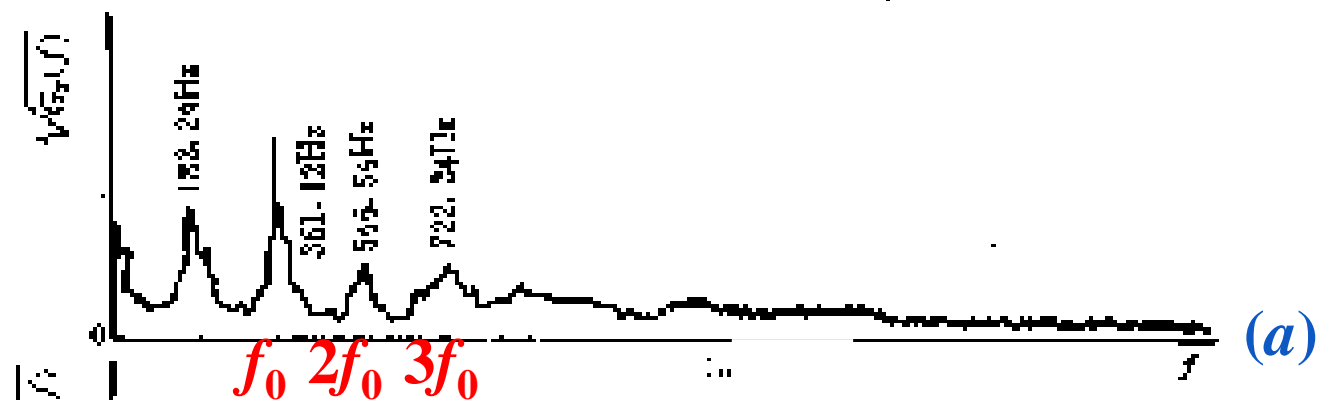
$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_x(f)S_y(f)} \quad (0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1)$$

如果相干函数为零，表示输出信号与输入信号不相干；当相干函数为1时，表示输出与输入信号完全相干。若相干函数在0~1之间，则表明有如下三种可能：(1) 测试中有外界噪声干扰；(2) 输出是输入和其它输入的综合输出；(3) 系统是非线性的。

$$\text{对于线性系统 } \gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_x(f)S_y(f)} = \frac{|H(f)S_x(f)|^2}{S_x(f)S_y(f)} = \frac{S_y(f)S_x(f)}{S_x(f)S_y(f)} = 1$$

功率谱分析及其应用

润滑油泵转速为 $n=781\text{rpm}$,
油泵齿轮的齿数为 $z=14$

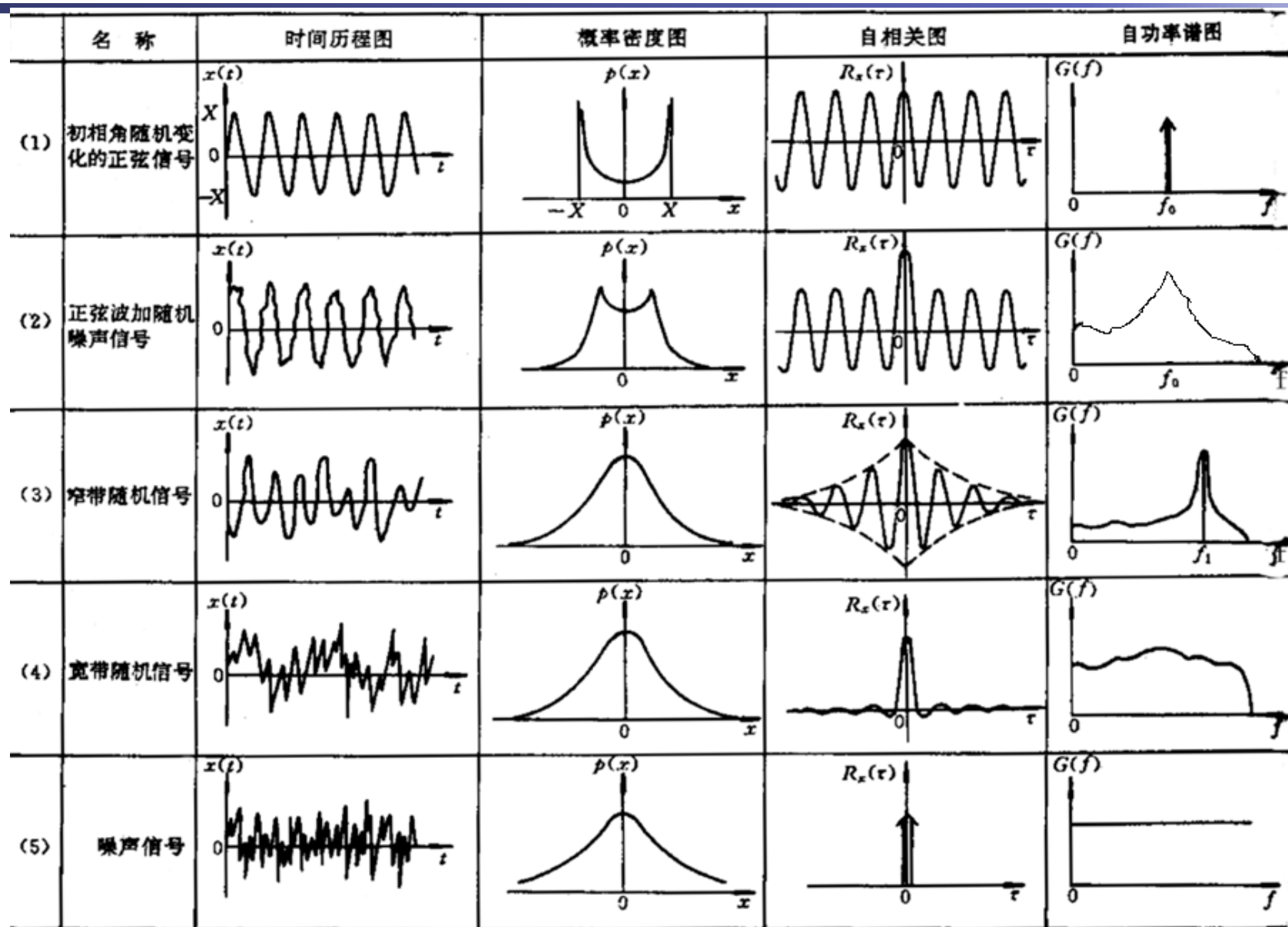


油压脉动与油管振动的相干分析

a)信号 $x(t)$ 的自谱 b)信号 $y(t)$ 的自谱 c)相干函数

功率谱分析及其应用

几种典型信号的
概率密度、自相关
和功率谱图



谢 谢



浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY