机械工程测试技术

傅里叶级数

傅里叶三角级数（单边谱）

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t\right)$$

或者

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin\left(n\omega_0 t+\operatorname{atan2}(a_n,b_n)\right)\right)$$

其中

$$\begin{cases}\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}\\[2ex] a_0=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)dt\\[2ex] a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\cos n\omega_0 tdt\\[2ex] b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\sin n\omega_0 tdt\end{cases}$$

显然当$x(t)$为奇函数时$a_0=a_n=0$，当$x(t)$为偶函数时$b_n=0$。

atan2与arctan

arctan接受一个参数，其值域为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，也就是说，它没法识别$-135^\circ$这样的角度，而一个信号完全可能落后另一个信号$135^\circ$（因为sin的周期是$2\pi$）。
因此需要一个能够识别角度象限的atan2函数，它接受两个参数，即a_n和b_n。它能根据 a_n 和 b_n 的正负号，准确地判断出相位角所在的四个象限。
$a_n=-1,b_n=-1$时，
$\arctan(1)=\pi/4$；$\operatorname{atan2}(a_n,b_n)=\operatorname{atan2}(-1,-1)=-3\pi/4$。

例题（幅频谱和相角谱）

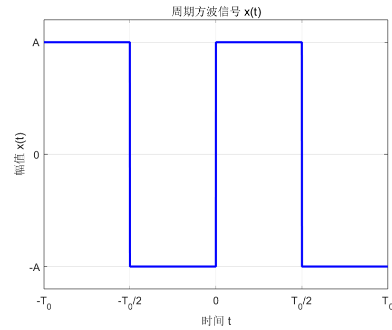
求图所示周期方波信号的傅里叶级数的三角函数展开式，并画出其幅频谱和相角谱。

$$x(t)=\begin{cases}-A & -T_0/2\le t<0\\ A & 0\le t\le T_0/2\end{cases}$$

因为 $x(t)$ 是奇函数，所以：

$$a_0=0$$

$$a_n = 0 \quad (\text{for } n \geq 1)$$



计算 b_n（令 $\omega_0 = 2\pi/T_0$）：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt \\ &= \frac{2}{T_0}\cdot 2\int_0^{T_0/2} A\sin(n\omega_0 t)dt \\ &= \frac{4A}{T_0}\left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{T_0/2} \\ &= -\frac{4A}{n\omega_0 T_0}\left[\cos\left(n\omega_0\frac{T_0}{2}\right) - \cos(0)\right] \end{aligned}$$

因为 $\omega_0 T_0 = 2\pi$，所以 $\omega_0\dfrac{T_0}{2} = \pi$：

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{4A}{n(2\pi)}[\cos(n\pi) - 1] \\ &= -\frac{2A}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) \end{aligned}$$

分析 b_n 的值：当 n 为偶数时 (n = 2, 4, ...): $\cos(n\pi) = 1$，所以 $b_n = 0$。当 n 为奇数时 (n = 1, 3, ...): $\cos(n\pi) = -1$，所以 $b_n = -\dfrac{2A}{n\pi}(-1-1) = \dfrac{4A}{n\pi}$。总结 b_n：

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4A}{n\pi} & n \text{ 为奇数} \\ 0 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

三角函数展开式将 a_n 和 b_n 代入傅里叶级数：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t))$$

$$x(t) = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{4A}{n\pi}\sin(n\omega_0 t)$$

展开为：

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \ldots\right)$$

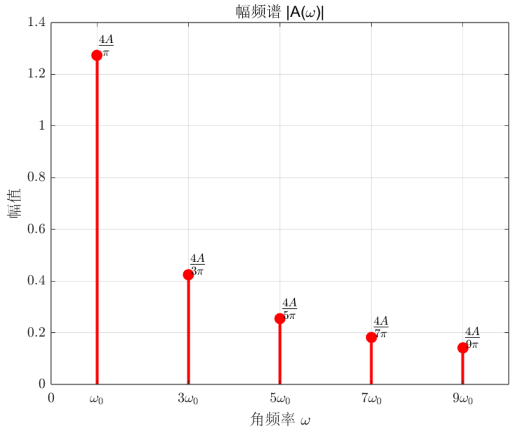
幅频谱 A_n 是信号在第 n 次谐波频率 $n\omega_0$ 上的幅值。

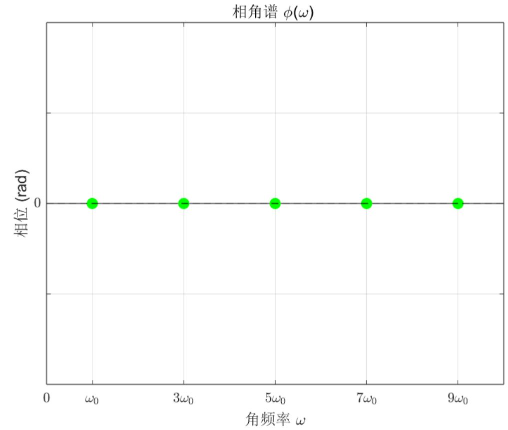
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n \geq 1)$$

幅频谱是 A_n 关于 $n\omega_0$的离散函数图。
相频谱 ϕ_n 是信号在第 n 次谐波频率 $n\omega_0$ 上的相位。

$$\phi_n = \text{atan2}(a_n, b_n) \quad (n \geq 1)$$

相频谱是 ϕ_n 关于 $n\omega_0$的离散函数图。





应用傅里叶级数的三角函数展开式得到的是周期信号的单边频谱。

傅里叶复指数级数（双边谱）

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} \quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$$

其中

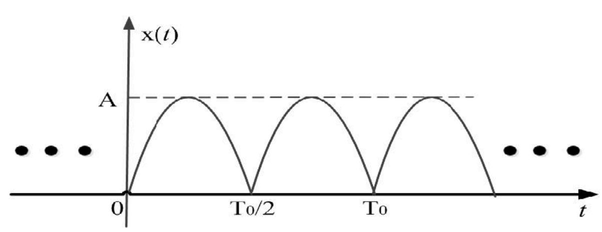
$$\begin{cases} C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \\ |C_n|=\sqrt{\mathrm{Re}(C_n)^2+\mathrm{Im}(C_n)^2} \\ \varphi_n=\mathrm{atan2}(\mathrm{Im}(C_n),\mathrm{Re}(Cn)) \end{cases}$$

欧拉公式

$$\cos\varphi=\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}$$
$$\sin\varphi=\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}$$

例题

正弦整流信号如下图所示，请对其进行复指数基展开，并绘出双边谱。



周期$T=\frac{T_0}{2}$

$$C_n=\frac{1}{\frac{T_0}{2}}\int_0^{\frac{T_0}{2}} A\sin(\omega_0 t)\cdot e^{-jn(2\omega_0)t}dt=\frac{2A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}}\sin(\omega_0 t)e^{-j2n\omega_0 t}dt$$

用欧拉公式代换

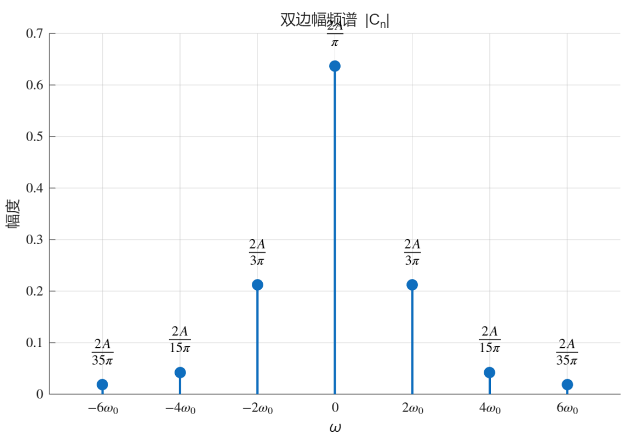
$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{2A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}}\left(\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right)e^{-j2n\omega_0 t}dt \\
&= \frac{A}{jT_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}}\left(e^{j\omega_0(1-2n)t}-e^{-j\omega_0(1+2n)t}\right)dt \\
&= \frac{A}{jT_0}\left[\frac{e^{j\omega_0(1-2n)t}}{j\omega_0(1-2n)}-\frac{e^{-j\omega_0(1+2n)t}}{-j\omega_0(1+2n)}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{A}{jT_0\cdot j\omega_0}\left[\frac{e^{j\omega_0(1-2n)t}}{1-2n}+\frac{e^{-j\omega_0(1+2n)t}}{1+2n}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&\overset{\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}}{=} \frac{A}{-2\pi}\left[\frac{e^{j\omega_0(1-2n)t}}{1-2n}+\frac{e^{-j\omega_0(1+2n)t}}{1+2n}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{2A}{\pi(1-4n^2)}
\end{aligned}
$$

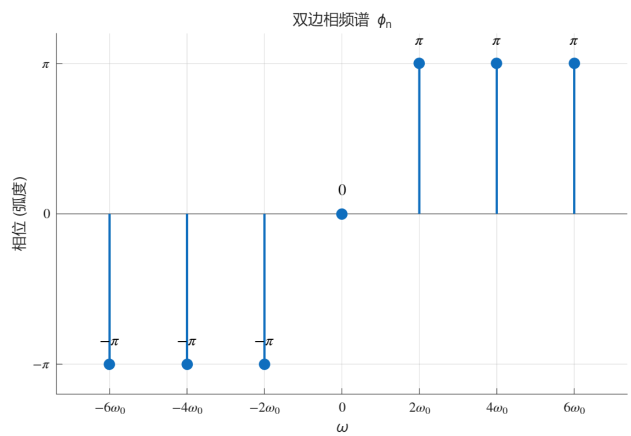
（最后一步通常求出来是一个$e^{j\varphi}$形式，用欧拉公式代换即可。）
C_n在$n\neq 0$时是负数，$n=0$时为正数。因此其相角在$n=0$时为0，$n\neq 0$时是$\pm\pi$。

由双边幅频谱为偶函数，而双边相频谱为奇函数的原则作图。

$$
|C_n| = \frac{2A}{\pi(1-4n^2)}
$$

$$
\varphi_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \pi & n>0 \\ -\pi & n<0 \end{cases}
$$





傅里叶变换

描述周期信号使用傅里叶级数，描述非周期信号使用傅里叶变换。

傅里叶变换与傅里叶逆变换

傅里叶变换为

$$
X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t
$$

由$\omega=2\pi f$，上式也可以写作

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2j\pi ft}\mathrm{d}t$$

傅里叶逆变换为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

对应的，也可以写作

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{2j\pi ft}\mathrm{d}f$$

则称二者互为傅里叶变换对，记作$x(t)\rightleftharpoons X(\omega)$或$x(t)\rightleftharpoons X(f)$

傅里叶变换的性质

对称性质

若$x(t)\rightleftharpoons X(f)$，则$x(-f)\rightleftharpoons X(t)$

时间尺度改变性质

若$x(t)\rightleftharpoons X(f)$，则$x(kt)\rightleftharpoons \frac{1}{k}X(\frac{1}{k}f)$

时移性质

若$x(t)\rightleftharpoons X(f)$，则$x(t\pm t_0)\rightleftharpoons e^{\pm 2j\pi ft_0}X(f)$

频移性质

若$x(t)\rightleftharpoons X(f)$，则$e^{\pm 2j\pi f_0 t}x(t)\rightleftharpoons X(f\mp f_0)$

微分性质

若 $x(t)\rightleftharpoons X(f)$

$$F\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]=(j2\pi f)X(f)$$

即

$$F\left[x(t)\right]^{(n)}=(j2\pi f)^n X(f)$$

积分性质

若 $x(t)\rightleftharpoons X(f)$

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{j2\pi f}X(f)$$

同理，左边积几次分，右边分母上的$j2\pi f$就是几次。

卷积定理

卷积定义为

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

时域卷积定理

如果$x_1(t) \rightleftharpoons X_1(f), x_2(t) \rightleftharpoons X_2(f)$

$$F[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(f) \cdot X_2(f)$$

或者写成

$$F[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

频域卷积定理

如果$x_1(t) \rightleftharpoons X_1(f), x_2(t) \rightleftharpoons X_2(f)$

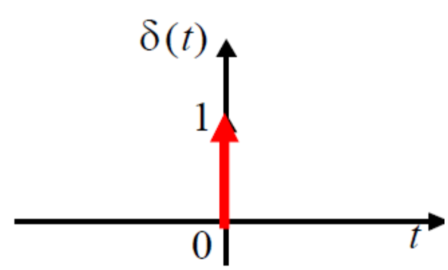
$$F[x_1(t) \cdot x_2(t)] = X_1(f) * X_2(f)$$

或者写成

$$F[x_1(t) \cdot x_2(t)] = \frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)]$$

单位脉冲函数$\delta(t)$

单位脉冲函数的定义



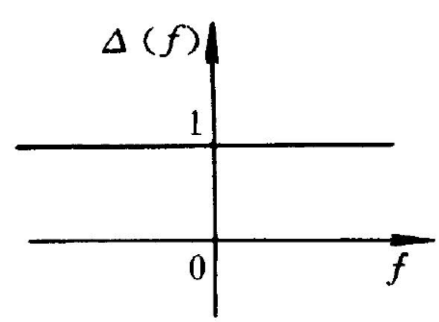
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

频谱

$\delta(t)$函数的频谱（即傅里叶变换）为



$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = e^0 = 1$$

因此$\delta(t)$ 的频谱是均匀谱，等强度，无线宽