

第八章 组合变形 (1)

第 21 讲

§ 8.1 组合变形和叠加原理

一、组合变形及工程实例

工程实际中，构件在荷载作用下往往发生两种或两种以上的
基本变形。

(1) 若其中一种是主要的，其余变形引起的应力或变形很小，
则构件可按主要的**基本变形**进行计算。

(2) 当几种变形所对应的应力或变形属同一量级时，则构件的
变形可以看成简单变形的组合，称为**组合变形**。

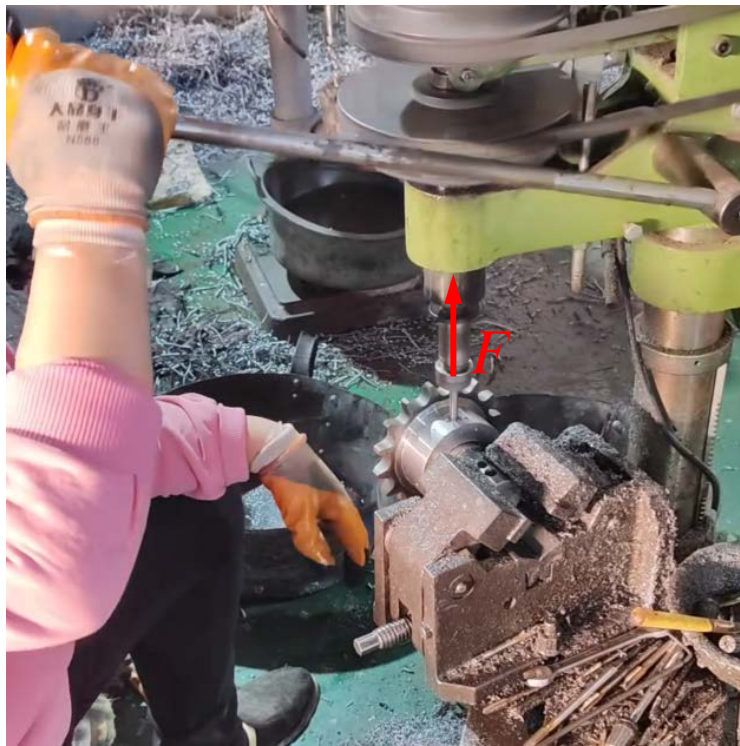
组合变形工程实例



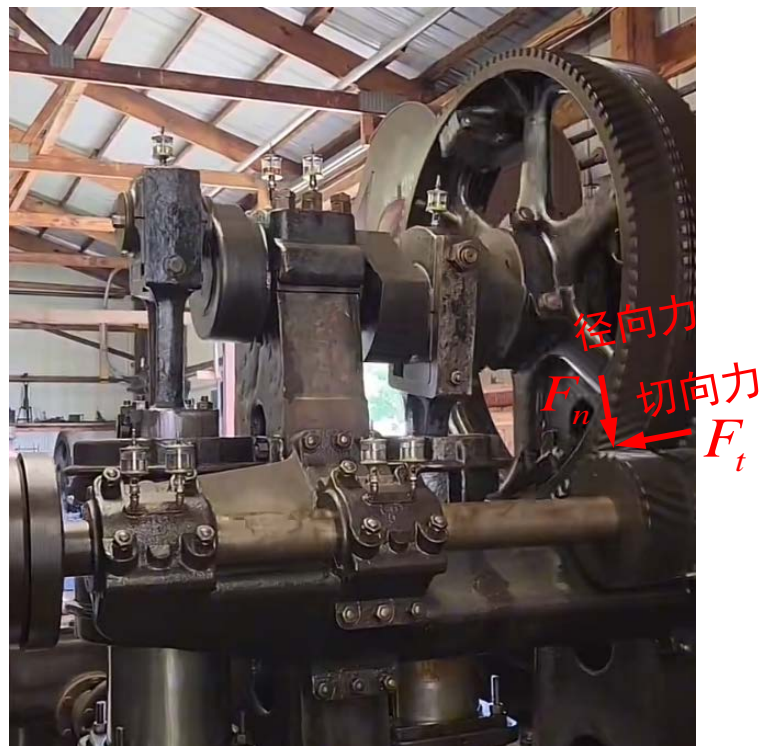
悬臂吊立柱：压缩+弯曲



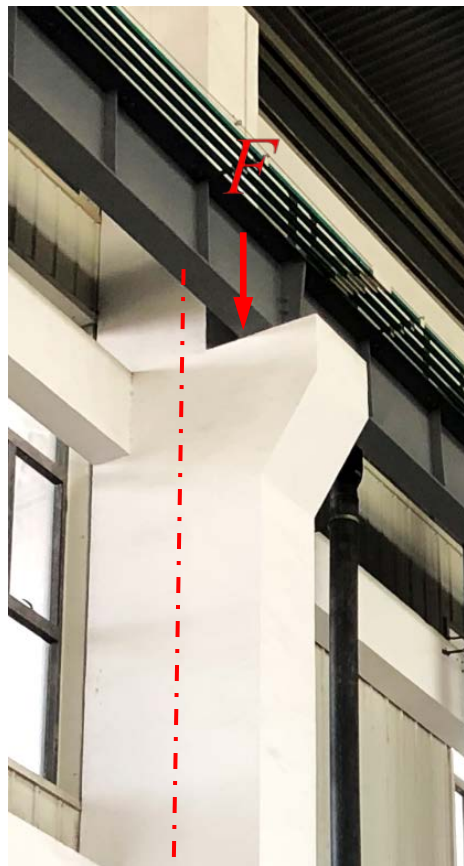
缆车吊杆：拉伸+弯曲



钻床立柱：拉伸+弯曲



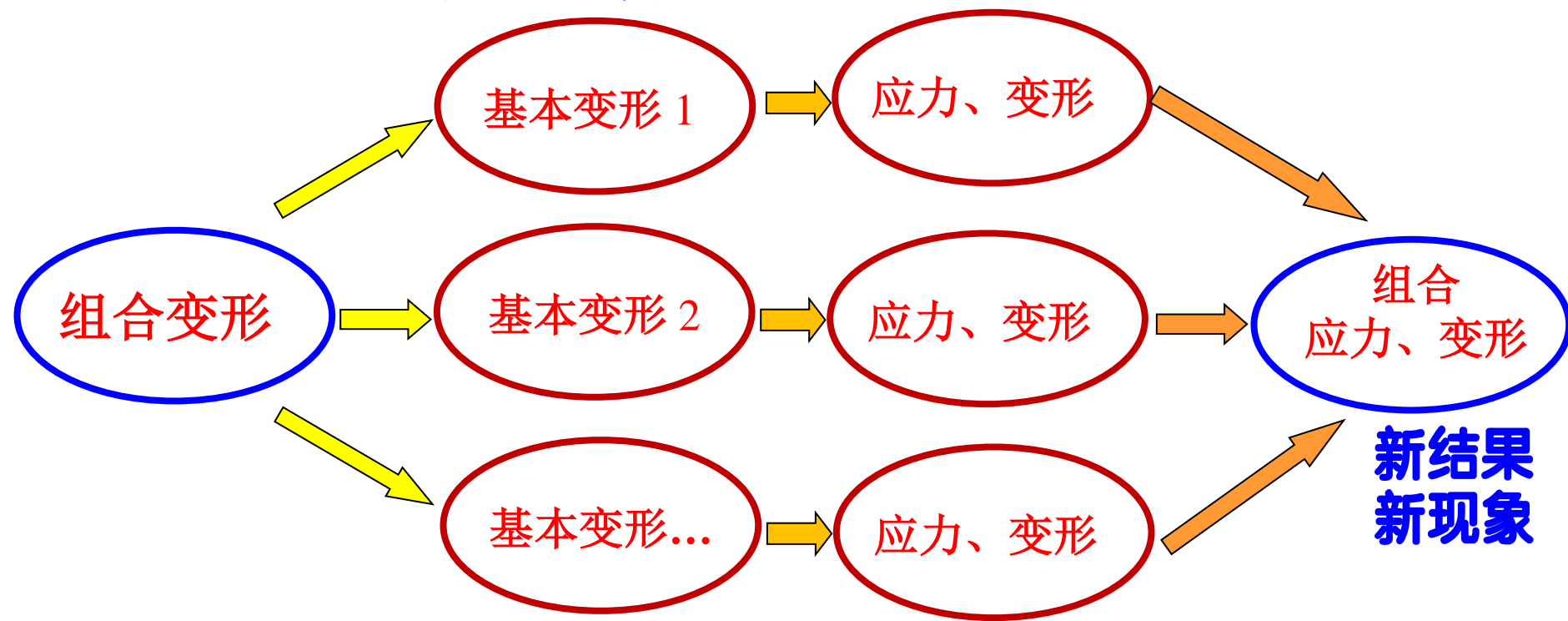
传动轴：扭转+弯曲



牛腿柱：偏心压缩

二、组合变形的研究方法

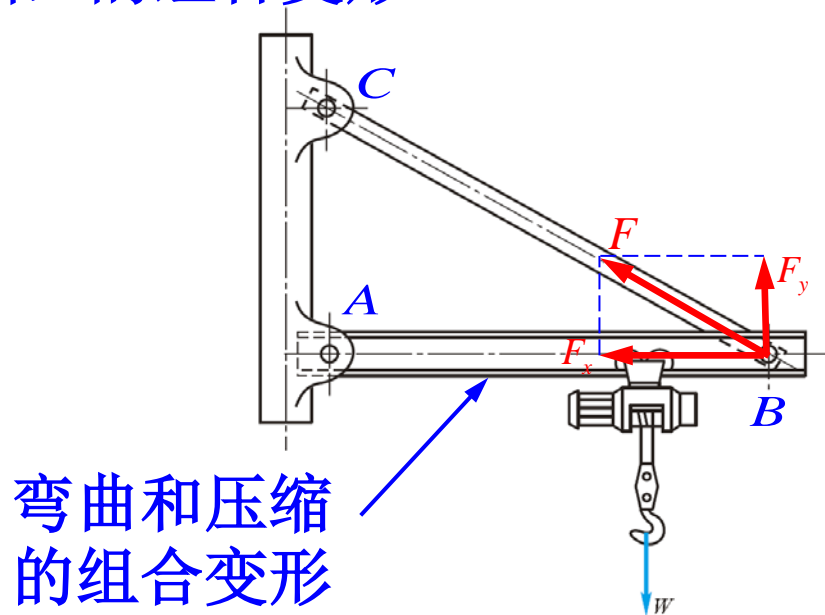
叠加原理：前提：线弹性，小变形

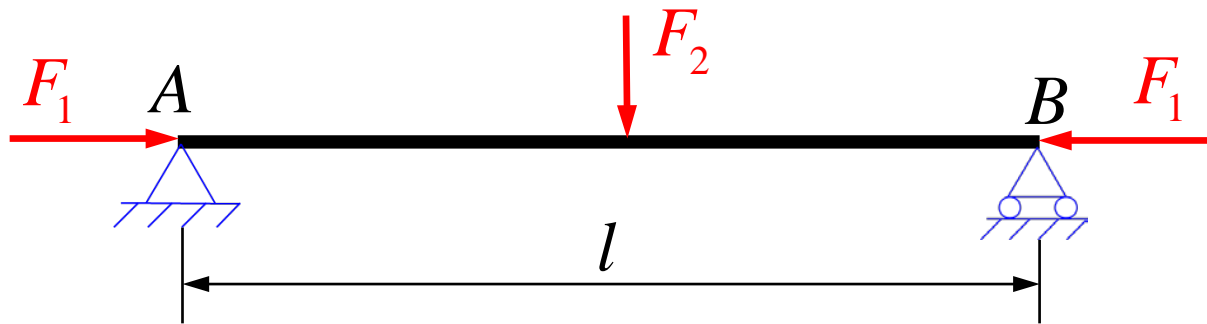


§ 8.2 拉伸或压缩与弯曲的组合

一、横向力和轴向力共同作用

等直杆件同时受横向力和轴向力作用时，杆件将发生弯曲和拉伸（压缩）的组合变形。

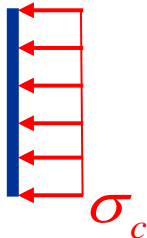


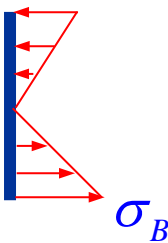


★ 对于弯曲刚度 EI 较大的杆，由于横向力引起的挠度与横截面的尺寸相比很小，因此，由轴向力引起的弯矩可以略去不计，原始尺寸原理仍可以使用。这样，轴向力就只引起压缩变形，外力与杆件内力和应力的关系仍然是线性的，叠加原理就可应用。

分别计算由横向力和轴向力引起的杆件横截面上的应力，然后按叠加原理进行叠加。

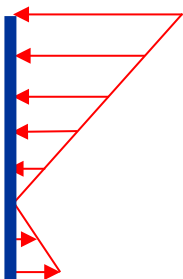
横截面上的应力计算

$$\sigma_c = \frac{F_N}{A}$$


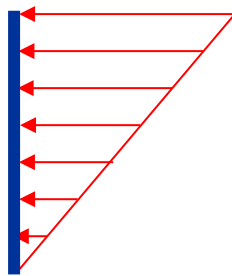
$$\sigma_B = \frac{M_{\max}}{W}$$


$$\sigma_{c,\max} = \left| \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}}{W} \right|$$

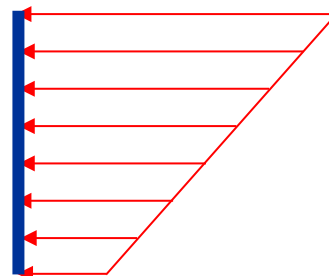
叠加后，横截面上应力的三种分布形式（中性轴下移）



① $|\sigma_c| < \sigma_B$



② $|\sigma_c| = \sigma_B$



③ $|\sigma_c| > \sigma_B$

注意：当材料的许用拉应力和许用压应力不相等时（如上面第①种情况），应分别校核杆件的拉和压强度条件。

☆☆☆ 特别指出 ☆☆☆

对于弯曲刚度 EI 较小的杆，在压缩与弯曲组合变形下，轴向压力引起的附加弯矩较大，且附加弯矩的转向与横向力引起的弯矩同向，此时叠加原理将不再适用。

例1 最大吊重为 $W=8\text{kN}$ 的起重机如图所示。若AB梁为工字钢，材料为Q235， $[\sigma]=100\text{MPa}$ ，试选择工字钢的型号。

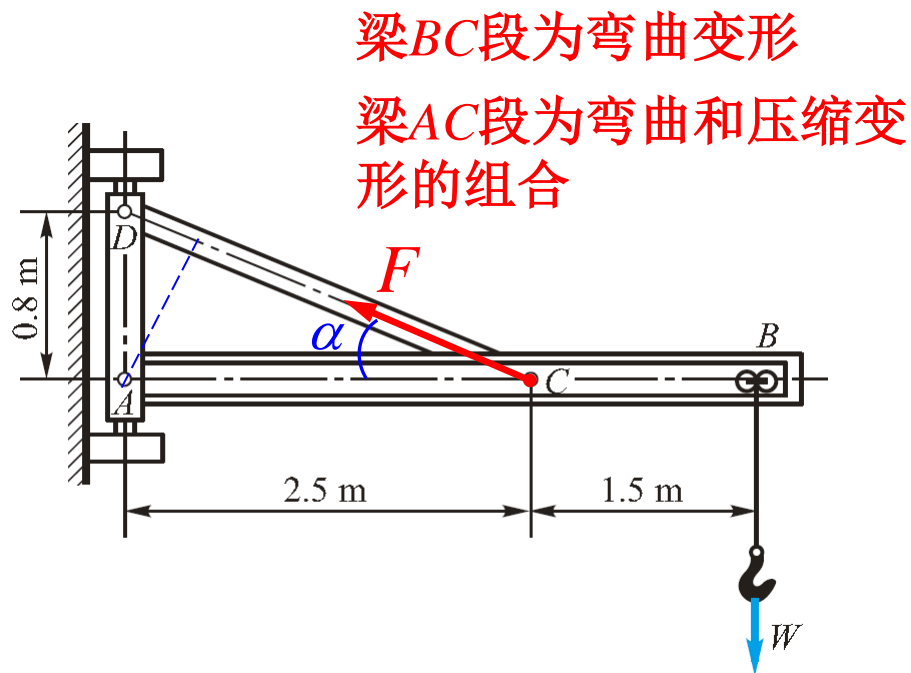
解：受力分析

$$\sum M_A = 0$$

$$W \times (2.5 + 1.5) - F \sin \alpha \times 2.5 = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{0.8}{\sqrt{0.8^2 + 2.5^2}} = \frac{0.8}{2.625} = 0.305$$

$$F = \frac{W \times 4.0}{\sin \alpha \times 2.5} = \frac{8 \times 4.0}{0.305 \times 2.5} = 42.0 \text{ kN}$$



将 F 分解为 F_x 和 F_y

$$F_x = F \cos \alpha = 40.0 \text{ kN}$$

$$F_y = F \sin \alpha = 12.8 \text{ kN}$$

在C点右侧的截面，
受弯矩和剪力的作用

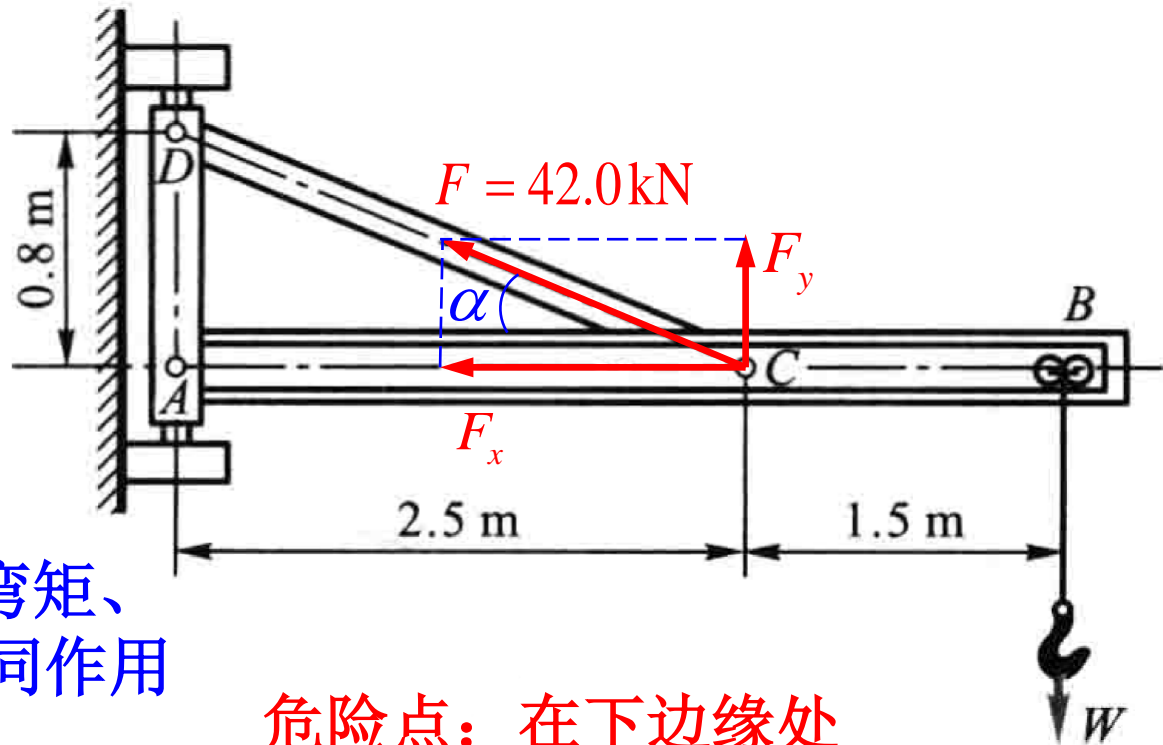
$$M_{C\text{右}} = W \times 1.5 = 12.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

在C点左侧的截面，受弯矩、
轴向压力以及剪力的共同作用

$$M_{C\text{左}} = W \times 1.5 = 12.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_N = F_x = 40.0 \text{ kN} \text{ (压)}$$

C点左侧的截面为危险截面。



危险点：在下边缘处
(处于单轴应力状态) $W = 8.0 \text{ kN}$

对于型钢，截面上的
危险点在上下表面！

强度条件为:

$$F_N=40.0\text{kN}, \quad M_{C\text{左}}=12.0\text{kN}\cdot\text{m}, \quad [\sigma]=100\text{MPa}$$

$$\sigma_{c,\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{C\text{左}}}{W} \leq [\sigma] \quad (\text{此处压应力仅取其数值})$$

如何解释?



解释: 此处实际是用了第四强度理论! $\sigma_{r4} \leq [\sigma]$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\text{单轴拉伸: } \sigma_1 = \sigma_t > 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0. \quad \sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_t^2} = \sigma_t$$

$$\text{单轴压缩: } \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_c < 0. \quad \sigma_{r4} = \sqrt{(\sigma_c)^2} = |\sigma_c|$$

上式中有两个未知数 A 和 W , 无法一次性确定!

通常轴力的影响是次要的, 因此可先不考虑轴力的影响, 只根据弯曲强度条件选取工字钢。

$$\frac{M_{C\text{左}}}{W} \leq [\sigma]$$

$$\frac{M_{C左}}{W} \leq [\sigma] \quad \Rightarrow \quad W \geq \frac{M_{C左}}{[\sigma]} = \frac{12.0 \times 10^3}{100 \times 10^6} = 1.2 \times 10^{-4} \text{ m}^3 = 120 \text{ cm}^3$$

查型钢表： 工字钢 I 16 ($W_x = 141 \text{ cm}^3$, $A = 26.11 \text{ cm}^2$)

$$\sigma_{c,max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{C左}}{W} = \frac{40.0 \times 10^3}{26.11 \times 10^{-4}} + \frac{12.0 \times 10^3}{141 \times 10^{-6}}$$

$$= 15.32 \times 10^6 \text{ Pa} + 85.11 \times 10^6 \text{ Pa} = 100.4 \text{ MPa} > [\sigma] = 100 \text{ MPa}$$

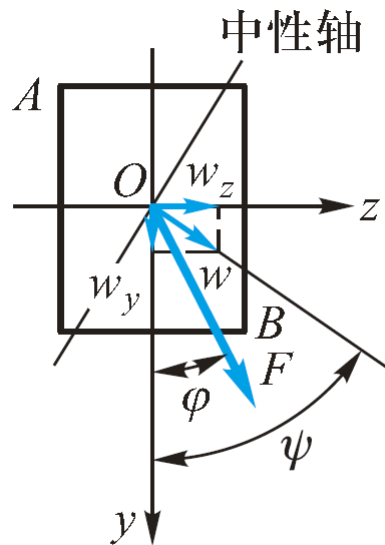
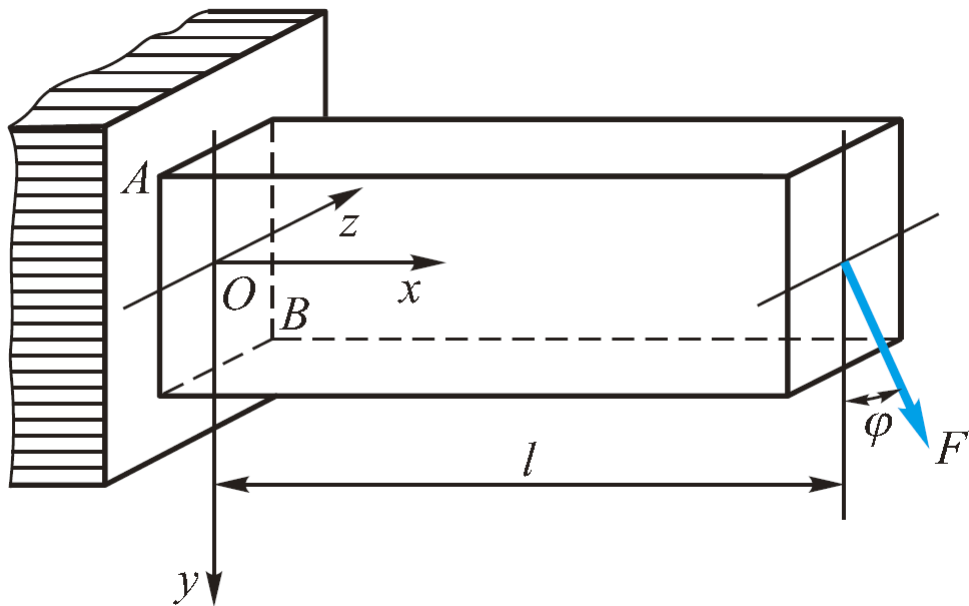
最大工作应力略高于许用应力（超出少许，不到5%），无需重新选择截面。

说明◀： 在工程问题中工作应力略高于许用应力，但不超过5%，一般还是允许的。

（见教材第7版的第31页 例2.3的最后一句）

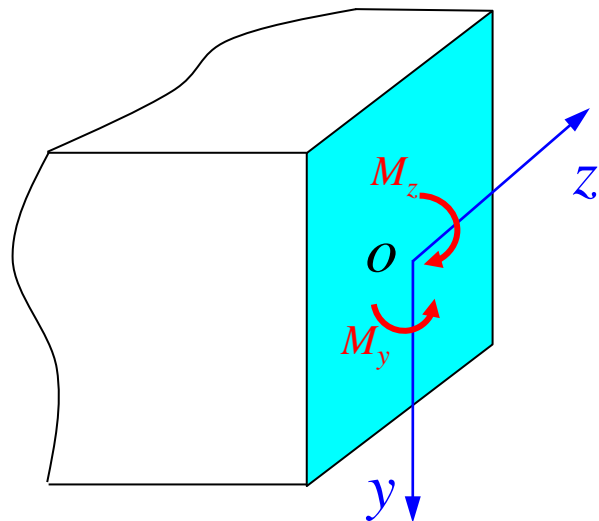
二、斜弯曲 【第II册 P.64-65 例12.2】

横截面为矩形的悬臂梁。若作用于自由端的集中力 F 与 y 轴的夹角为 φ ，试讨论梁的应力与变形。



研究方法:

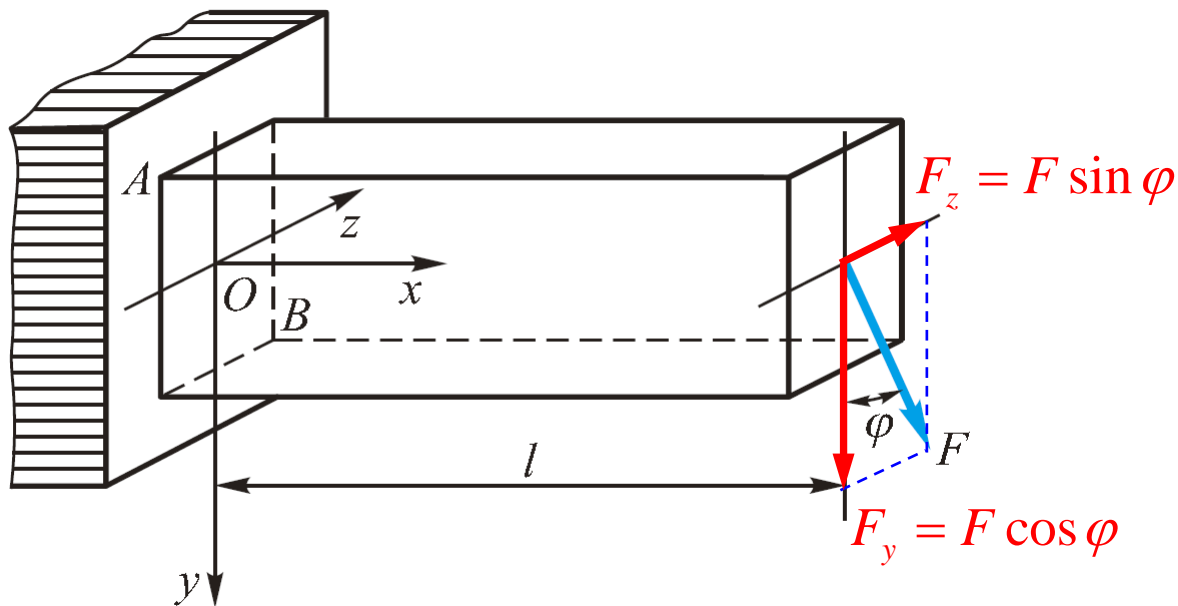
将力分解，转化为在 x - y 和 x - z 两个形心主惯性平面内弯曲的叠加



在固定端:

$$M_z = -Fl \cos \varphi$$

$$M_y = -Fl \sin \varphi \quad \text{规定 } M_y \text{ 凸向内时为正!}$$



1. 弯曲正应力（叠加原理）

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y$$

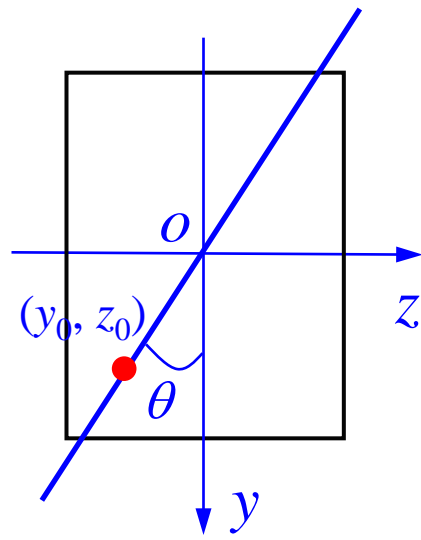
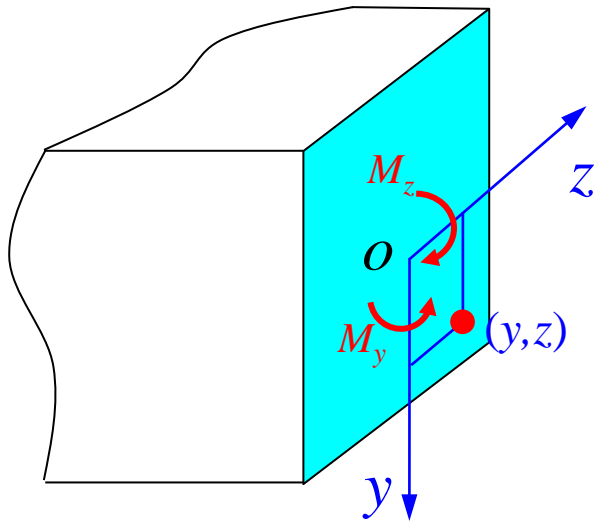
中性轴 (y_0, z_0) 方程

$$\frac{M_y}{I_y}z_0 + \frac{M_z}{I_z}y_0 = 0$$

中性轴是一条通过截面形心的直线。

中性轴与y轴的夹角为

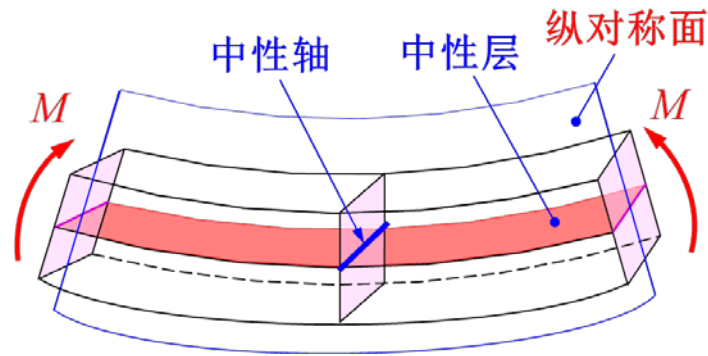
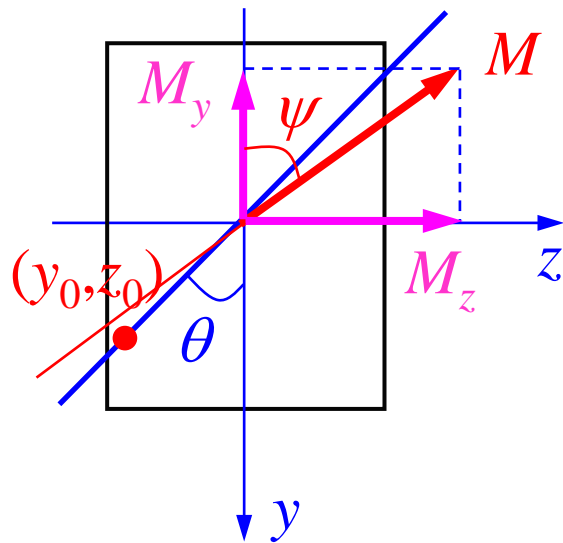
$$\tan \theta = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{M_z}{M_y} \times \frac{I_y}{I_z}$$



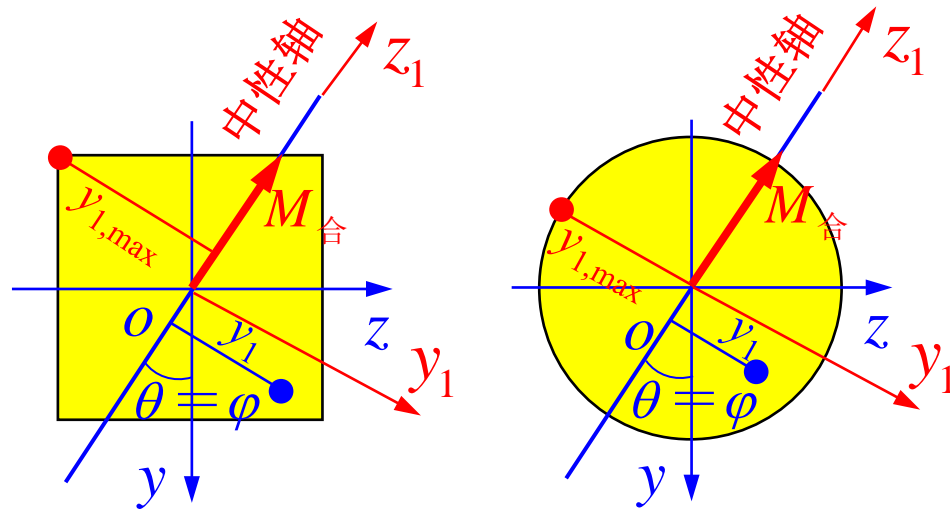
$$\tan \theta = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{M_z}{M_y} \times \frac{I_y}{I_z} = -\frac{I_y}{I_z} \tan \psi$$

ψ 是横截面上合成弯矩 M 的矢量与 y 轴的夹角。

通常情况，由于 $I_y \neq I_z$ ，故 $\theta \neq \psi$ ，即中性轴与合成弯矩 M 所在的平面并不相互垂直。因此计算应力和挠度需分别按两相互垂直平面内的弯曲来计算，不能直接按合成弯矩进行计算。



对于圆形、正方形截面，有 $I_y = I_z$ ，则 $\theta = \varphi$ ，此时合成弯矩的矢量方向与 y 轴的夹角跟中性轴与 y 轴的夹角相等）



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{合}}}{I_{z_1}} y_{1,\max}$$

此时弯曲正应力可用合弯矩的弯曲正应力公式计算（可使计算简便！）

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_y = I_z, \quad I_{yz} = 0$$

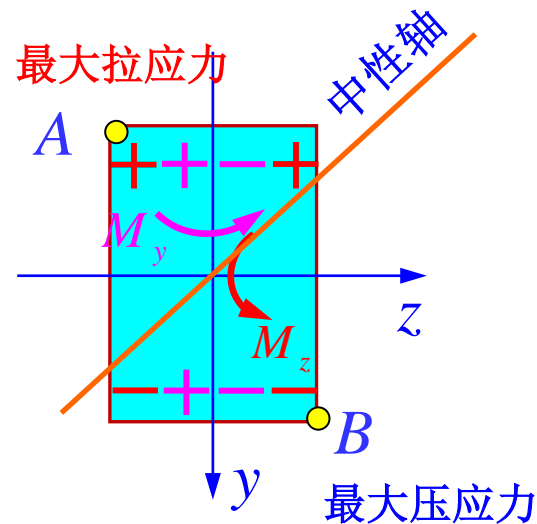
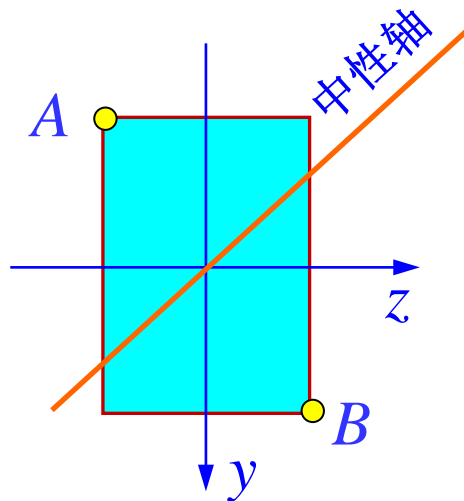
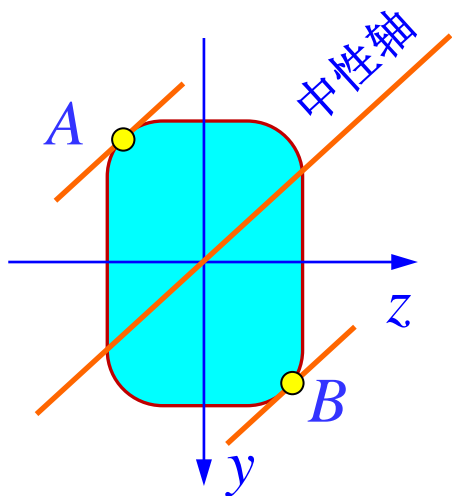
$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

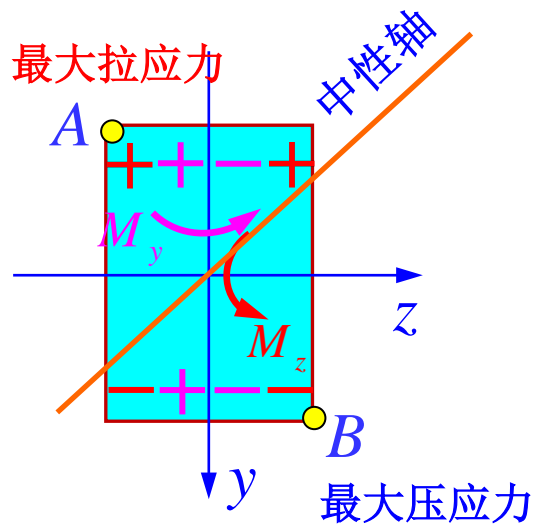
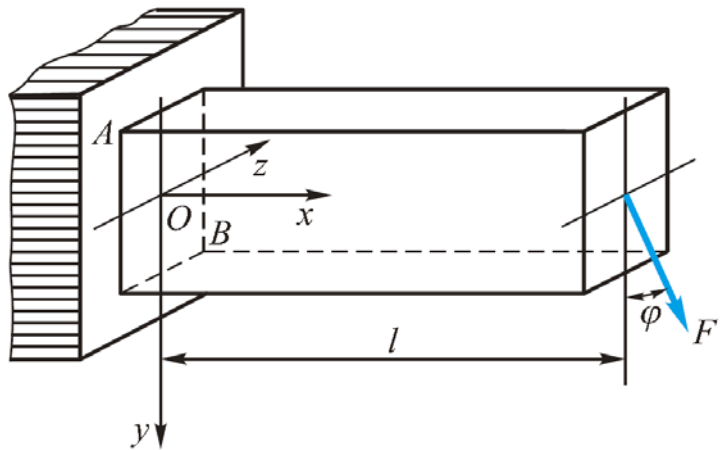
$$I_{y_1} = I_{z_1} = I_y = I_z$$

$$\sigma = \frac{M_{\text{合}}}{I_{z_1}} y_1$$

最大正应力

在确定中性轴位置后，作平行于中性轴的两直线，分别与横截面周边相切于A和B两点，该两点即分别对应于横截面上拉应力和压应力的最大值。

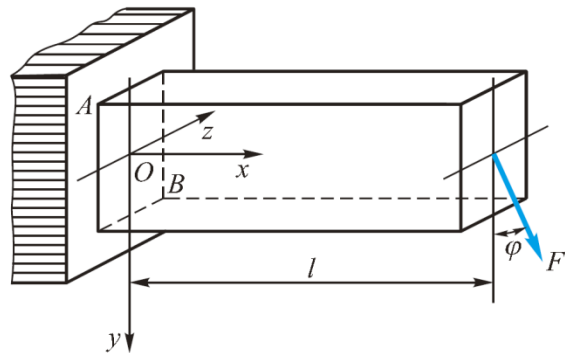
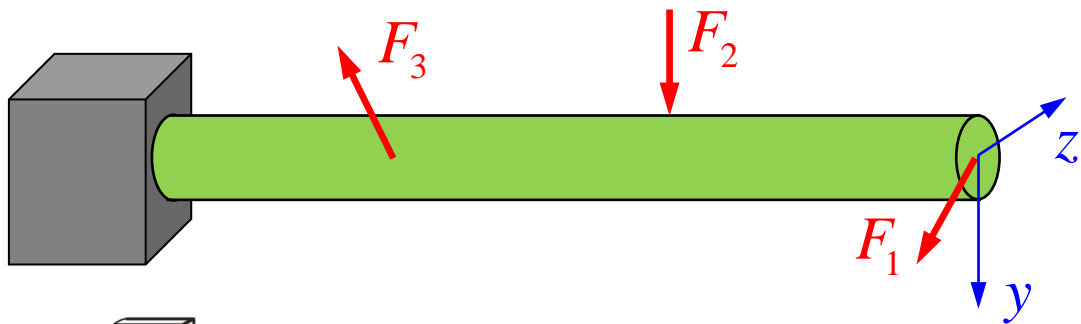




$$\begin{aligned}\sigma_A = -\sigma_B &= \frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A \\ &= -Fl \left(\frac{y_A \cos \varphi}{I_z} + \frac{z_A \sin \varphi}{I_y} \right) = Fl \left(\frac{y_B \cos \varphi}{I_z} + \frac{z_B \sin \varphi}{I_y} \right) \quad \begin{matrix} y_B = -y_A \\ z_B = -z_A \end{matrix}\end{aligned}$$

2. 梁的挠度

由于梁各横截面上的合成弯矩 M 所在平面的方位一般并不相同，梁的挠曲线一般是一条空间曲线。

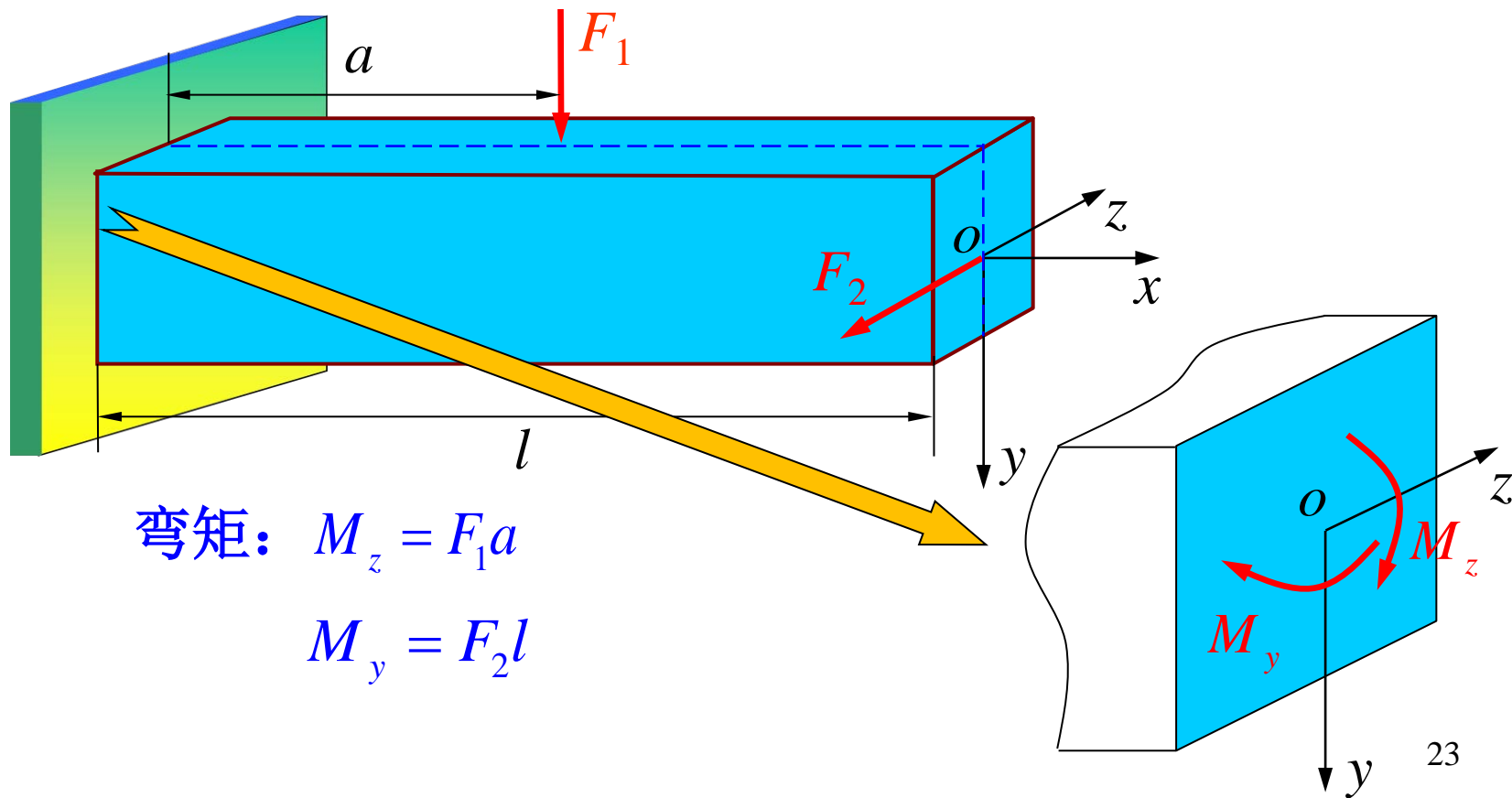


$$w_y = \frac{Fl^3 \cos \theta}{3EI_z}, \quad w_z = \frac{Fl^3 \sin \theta}{3EI_y}$$

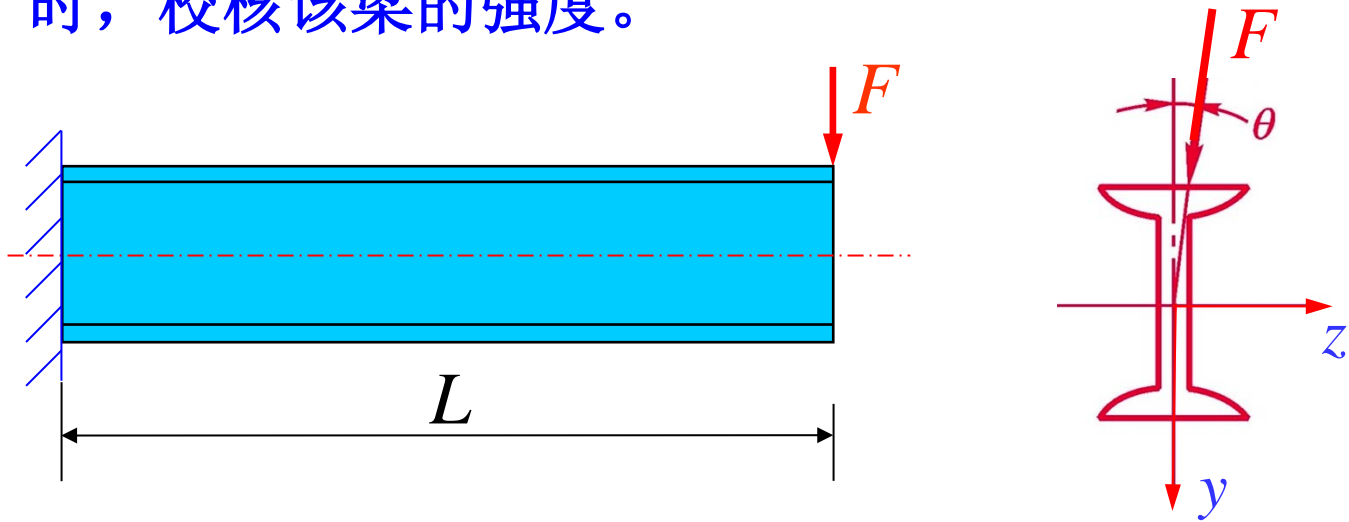
$$w_{\text{总}} = \sqrt{w_y^2 + w_z^2}$$
$$= \frac{Fl^3}{3E} \sqrt{\left(\frac{\cos \theta}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{I_y}\right)^2}$$



对于双对称截面梁，水平和垂直两纵向对称面同时承受横向外力作用时，这种弯曲称为**两相互垂直平面内的弯曲**。



例2 14号工字钢悬臂梁端部受一与 y 轴成 θ 的集中力 F 的作用。
已知 $L=1.0\text{m}$, $F=10.0\text{kN}$, $[\sigma]=170\text{MPa}$ 。当 θ 分别为 0°
和 10° 时, 校核该梁的强度。



$L=1.0\text{m}$, $F=10.0\text{kN}$, $[\sigma]=170\text{MPa}$

解：查表，14号工字钢的截面

几何性质为：

高度 $h=140\text{mm}$ ，宽度 $b=80\text{mm}$ ，

$I_z=712\text{cm}^4$ ， $I_y=64.4\text{cm}^4$ 。

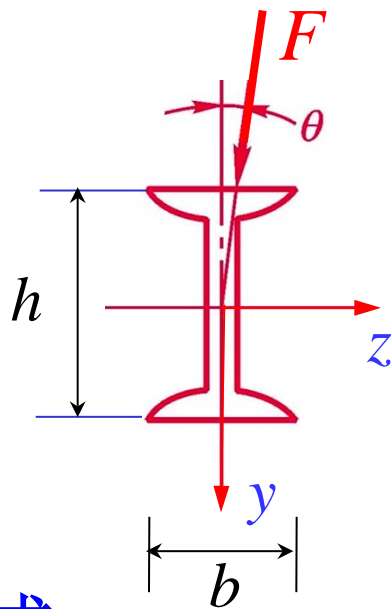
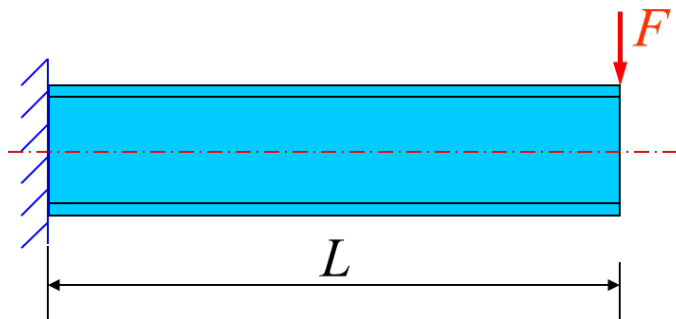
(1) 当 $\theta=0^\circ$ 时

$$F_y = F \cos 0^\circ = 10.0\text{kN}$$

$$F_z = F \sin 0^\circ = 0\text{kN}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F_y L}{I_z} y_m = \frac{10.0 \times 10^3 \times 1.0}{712 \times 10^{-8}} \times 70 \times 10^{-3}$$

$$= 98.3\text{MPa} \leq [\sigma] = 170\text{MPa} \quad \text{满足强度要求。}$$



$$L=1.0\text{m}, F=10.0\text{kN}, [\sigma]=170\text{MPa}$$

(2) 当 $\theta=10^\circ$ 时,

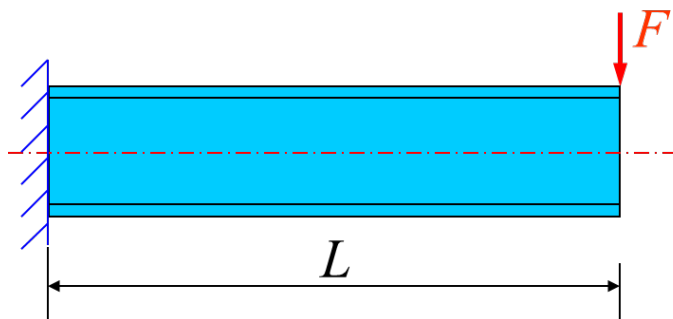
$$F_y = F \cos 10^\circ = 9.848\text{kN}$$

$$F_z = F \sin 10^\circ = 1.736\text{kN}$$

$$\sigma' = \frac{F_y L}{I_z} y_{\max} = \frac{9.848 \times 10^3 \times 1.0}{712 \times 10^{-8}} \times 70 \times 10^{-3} = 96.8\text{MPa}$$

$$\sigma'' = \frac{F_z L}{I_y} z_{\max} = \frac{1.736 \times 10^3 \times 1.0}{64.4 \times 10^{-8}} \times 40 \times 10^{-3} = 107.8\text{MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma' + \sigma'' = 96.8 + 107.8 = 204.6\text{MPa} \geq [\sigma] = 170\text{MPa}$$

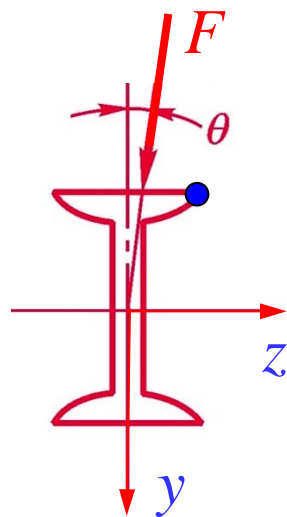


$$h=140\text{mm}$$

$$b=80\text{mm}$$

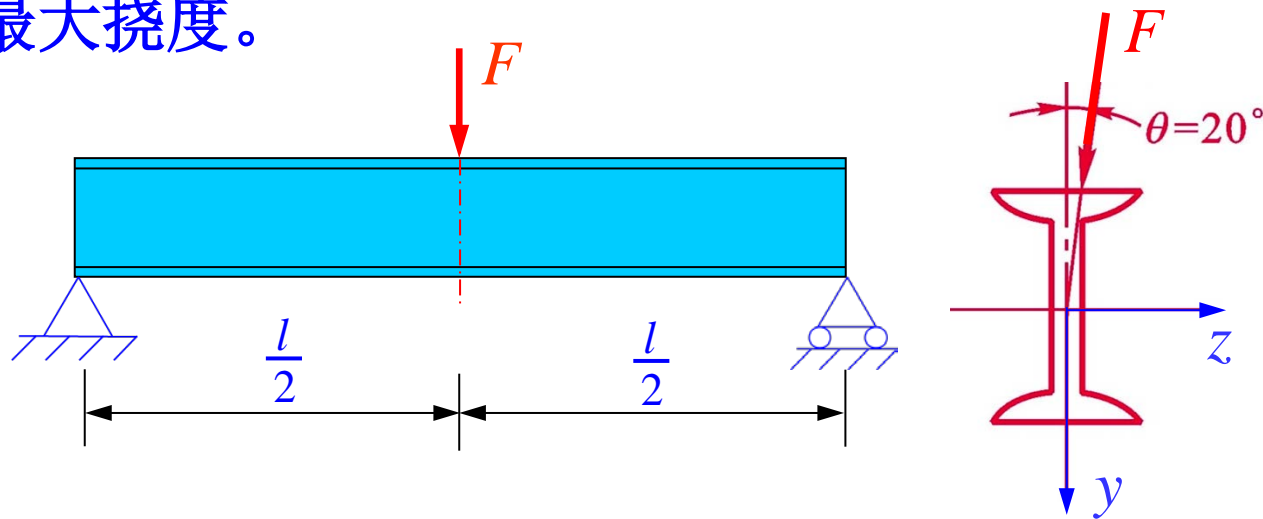
$$I_z=712\text{cm}^4$$

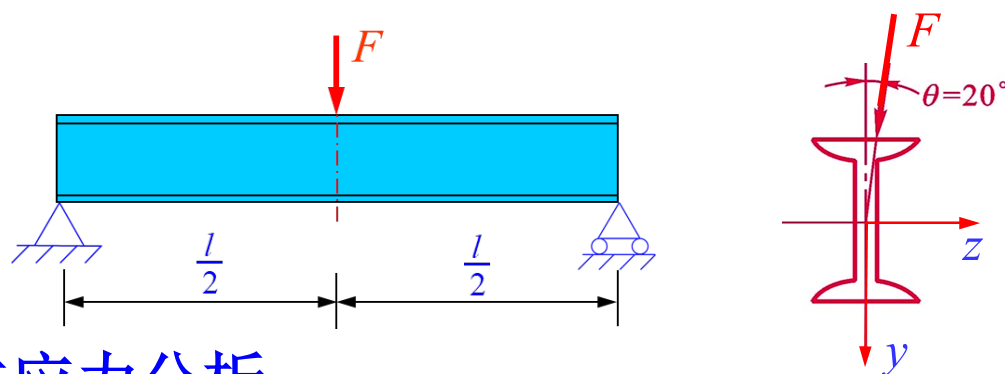
$$I_y=64.4\text{cm}^4$$



不满足强度要求!

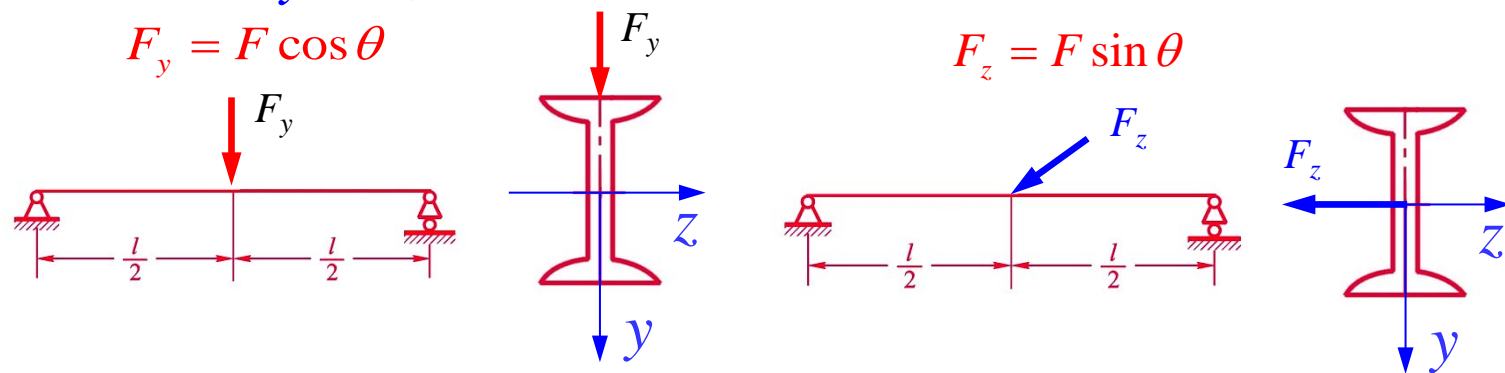
例3 已知简支梁，由普通热轧工字钢制成。在梁跨度中点作用一集中载荷 F ，其作用线通过截面形心并与铅垂对称轴夹角为 20° 。已知 $l=4\text{ m}$ ， $F=7\text{ kN}$ ，材料的许用应力 $[\sigma]=160\text{ MPa}$ ，弹性模量 $E=210\text{ GPa}$ 。试确定工字型钢的型号, 并计算在选定工字型钢下的最大挠度。





解：（1）内力与应力分析

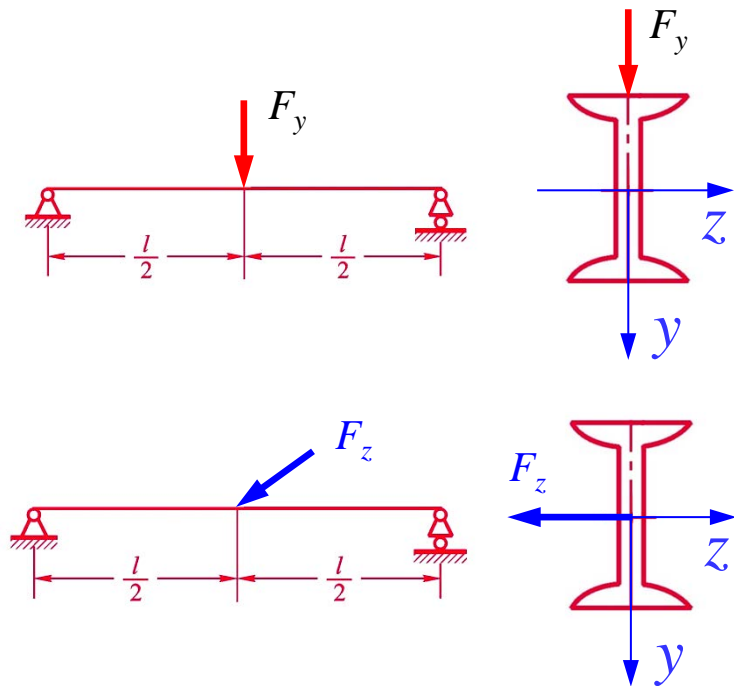
先将 F 沿 y 、 z 轴分解，将产生两相互垂直平面内的弯曲。



两种情形下的最大弯矩分别为

$$M_{z,\max} = \frac{1}{4} F_y l = \frac{1}{4} F l \cos \theta, \quad M_{y,\max} = \frac{1}{4} F_z l = \frac{1}{4} F l \sin \theta$$

发生 xz 平面和 xy 平面内的弯曲时，最大弯矩都出现在跨中截面。
于是梁内最大正应力

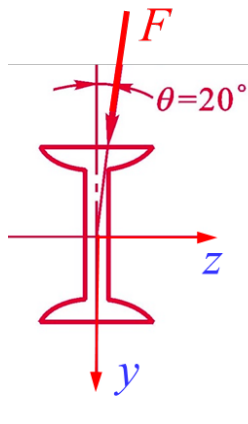
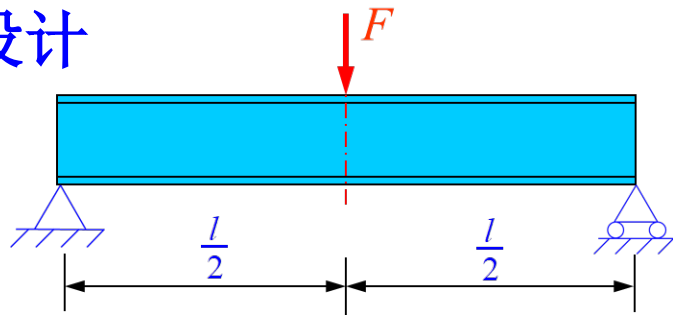


$$M_{z,\max} = \frac{1}{4} F_y l = \frac{1}{4} Fl \cos \theta$$

$$M_{y,\max} = \frac{1}{4} F_z l = \frac{1}{4} Fl \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{z,\max}}{W_z} + \frac{M_{y,\max}}{W_y} \\ &= \frac{Fl}{4} \left(\frac{\cos \theta}{W_z} + \frac{\sin \theta}{W_y} \right) \quad \theta = 20^\circ \end{aligned}$$

(2) 截面设计



因为危险点是单轴应力状态，应用强度条件 $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ 进行截面设计，

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{4} \left(\frac{\cos 20^\circ}{W_z} + \frac{\sin 20^\circ}{W_y} \right) \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{4W_z} \left(\frac{W_z}{W_y} \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \right) \leq [\sigma]$$

$$W_z \geq \frac{Fl}{4[\sigma]} \left(\frac{W_z}{W_y} \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \right)$$

W_z 和 W_y 均未知
如何处理？



$$W_z \geq \frac{Fl}{4[\sigma]} \left(\frac{W_z}{W_y} \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \right)$$

上式表明，必须先已知比值 W_z/W_y 才能确定 W_z 。

具体实现：先设定一 W_z/W_y 值，代入上式求得 W_z ，由型钢表查得对应的工字钢号，进而查得该号工字钢的 W_y ，将其代入

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{4W_z} \left(\frac{W_z}{W_y} \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \right) \leq [\sigma]$$

校核强度是否满足和查验工作应力与许用应力间的差异。

否则，再加大（或减小）工字钢号，查得新的 W_z 与 W_y ，代入上式再一次进行强度校核。依此过程执行，直到满足要求为止。

$$W_z \geq \frac{Fl}{4[\sigma]} \left(\frac{W_z}{W_y} \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \right) \quad \begin{array}{l} l=4 \text{ m}, \quad F=7 \text{ kN} \\ [\sigma]=160 \text{ MPa} \end{array}$$

考察:

$$\text{I20a: } \frac{W_z}{W_y} = \frac{237.0}{31.5} = 7.52; \quad \text{I30a: } \frac{W_z}{W_y} = \frac{597.0}{63.5} = 9.40$$

$$\text{I40a: } \frac{W_z}{W_y} = \frac{1090.0}{93.2} = 11.69; \quad \text{I50a: } \frac{W_z}{W_y} = \frac{1860.0}{142} = 13.10$$

第一次设定 $\frac{W_z}{W_y} = 10$, 算得 $W_z = 191 \text{ cm}^3$

据此, 选择工字钢号为 I18。

由型钢表查得 $W_z = 185 \text{ cm}^3$, $W_y = 26 \text{ cm}^3$

最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{4W_z} \left(\frac{W_z}{W_y} \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \right) = 127.6 \text{MPa} < [\sigma] = 160 \text{MPa}$$

$$\frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} = \frac{160 - 127.6}{160} = 20.3\% \quad \text{不经济!}$$

进行第二次计算。

接下来不需要按前面的方法来重复计算。直接选择小一号的工字型钢，即 I16，然后校核强度是否满足。由型钢表查得 $W_z=141\text{cm}^3$ ， $W_y=21.2\text{cm}^3$ 。

最大应力

I16工字型钢: $W_z=141\text{cm}^3$, $W_y=21.2\text{cm}^3$

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{4W_z} \left(\frac{W_z}{W_y} \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \right) = 159.6\text{MPa} < [\sigma] = 160\text{MPa}$$

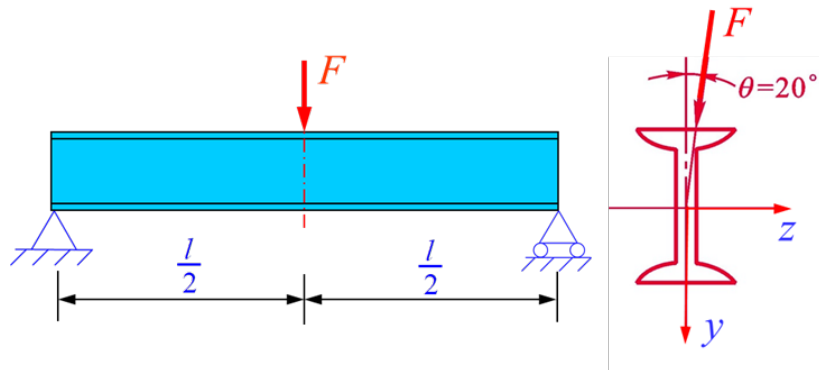
该结果满足强度设计要求, 且最大应力已非常接近许用应力。
最终选择 I16工字型钢。

(3) 计算最大挠度

因与 F_y 和 F_z 相应的最大挠度均在跨度中点, 故梁的最大挠度发生在跨度中点! 查表, I16工字型钢

$E=210\text{ GPa}$, $l=4\text{ m}$, $F=7\text{ kN}$, $\theta=20^\circ$

$$w_y = \frac{F_y l^3}{48EI_z} = 3.696\text{ mm}, \quad w_z = \frac{F_z l^3}{48EI_y} = 16.328\text{ mm}$$



$$I_z = 1130\text{ cm}^4, \quad I_y = 93.1\text{ cm}^4$$

$$w_{\max} = \sqrt{w_y^2 + w_z^2} = 16.74\text{ mm}$$

祝大家“五一”节快乐！

作业

P302-303: 8.3

P304-305: 8.6、8.7

对应第6版题号 P295-296: 8.3、8.6、8.7

下次课讲 偏心拉伸（压缩）及扭转与弯曲的组合