四天速成，有错误请多多包涵

微积分II期末复习 by zjuatri

级数

级数敛散性

p级数的敛散性

p级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$在$p>1$时收敛，$p\leq 1$的时候发散
可以通过积分证明。此处不证

数项级数的基本性质

1. 线性运算法则（比较显然）
2. 改变一个级数的有限项不影响级数的敛散性
3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则在级数中任意添加括号得到的新级数也收敛且其和不变
4. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$

比较判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为**正项**级数，且$u_n\leq v_n(n=1,2,3,...)$

（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散

比较判别法的极限形式

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为**正项**级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$$

（1）当$0<l<+\infty$时，两个级数的敛散性相同

（2）当$l=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

（3）当$l=+\infty$时，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

比值判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是**正项**级数，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\gamma$$

（1）当$\gamma < 1$时，级数收敛
（2）当$\gamma > 1$时，级数发散
（3）当$\gamma = 1$时，本判别法失效

根值判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是**正项**级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \gamma$$

（1）当$\gamma < 1$时，级数收敛
（2）当$\gamma > 1$时，级数发散
（3）当$\gamma = 1$时，本判别法失效

积分判别法

设$f(x)$在$[1, +\infty]$上是非负且递减的连续函数，记$u_n = f(n), n = 1, 2, 3...$则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与反常积分$\int_1^{+\infty} f(x)dx$的敛散性相同

绝对收敛与条件收敛

如果$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛
（1）如果$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$**绝对收敛**
（2）如果$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散，但$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$**条件收敛**

绝对值的比值判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是一般级数，并且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \gamma$$

（1）当$\gamma < 1$时，级数绝对收敛
（2）当$\gamma > 1$时，级数发散
（3）当$\gamma = 1$时，本判别法失效

绝对值的根值判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是一般级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \gamma$$

（1）当$\gamma < 1$时，级数绝对收敛
（2）当$\gamma > 1$时，级数发散
（3）当$\gamma = 1$时，本判别法失效

莱布尼兹定理

若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足下列条件:

（1）$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq ...$
（2）$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛且它的和$S \leq u_1$

幂级数

阿贝尔定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0(x_0 \neq 0)$时收敛，那么适合不等式$|x| < |x_0|$的一切$x$使该幂级数绝对收敛.

反之，如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0(x_0 \neq 0)$时发散，那么适合不等式$|x| > |x_0|$的一切$x$使该幂级数发散.

证明:

设x_0使幂级数收敛，则根据级数收敛的必要条件，有

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

于是存在一个常数M，使得

$$|a_n x_0^n| \leq M(n = 0, 1, 2, ...)$$

则$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$

当$|x| < |x_0|$时级数$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$收敛，所以级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛。

定理的后半部分用反证法即可。设级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0$时发散且存在$x_1$使得$|x_1| > |x_0|$且使级数收敛，则由定理前半部分可知$|x| < |x_1|$的一切$x$使该幂级数绝对收敛.即$x_0$使幂级数绝对收敛，矛盾。

收敛半径，收敛区间和收敛域

1. 收敛半径：使幂级数收敛的所有收敛点的上确界
2. 收敛区间：设收敛半径为R，则收敛区间为$(-R, R)$
3. 收敛域：收敛区间与收敛端点的并集

柯西-阿达马公式

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$$

（1）当$0 < R < +\infty$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R, R)$内绝对收敛，当$|x| > R$时发散

（2）当$R = 0$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$仅在$x = 0$处收敛，在$x \neq 0$时发散

（3）当$R = +\infty$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$R$上绝对收敛

根值公式

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

（1）当$0 < R < +\infty$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R, R)$内绝对收敛，当$|x| > R$时发散

（2）当$R = 0$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$仅在$x = 0$处收敛，在$x \neq 0$时发散

（3）当$R = +\infty$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$R$上绝对收敛

常见的麦克劳林展开

1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$

性质

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R(> 0)$，则

（1）级数在收敛域上的和函数$S(x)$是连续函数

（2）幂级数在$(-R, R)$上逐项可微，微分后得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径

（3）幂级数在$(-R, R)$上逐项可积，积分后得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径

傅里叶级数

周期函数的傅里叶展开

（狄利克雷定理）如果$f(x)$是以$T = 2l$为周期的周期函数，且$f(x)$在$[-l, l]$上逐段光滑，那么$f(x)$的傅里叶级数在任意点x处都收敛，并且收敛于$f(x)$在该点左右极限的平均值。

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, x \in R$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$[-l,l]$上的傅里叶展开

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\in(-l,l)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,n=0,1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,...$$

$[0,l]$上的傅里叶展开

1. 奇延拓（正弦展开）
   令

$$F(x)=\begin{cases}f(x),0<x\le l\\0,x=0\\-f(-x),-l\le x<0\end{cases}$$

   对其进行傅里叶展开
   $f(x)$在$[0,l]$上的正弦展开为

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\in(0,l)$$

   其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,n=1,2,3,...$$

2. 偶延拓（余弦展开）
   令

$$F(x)=\begin{cases}f(x),0\le x\le l\\f(-x),-l\le x\le 0\end{cases}$$

   对其进行傅里叶展开
   $f(x)$在$[0,l]$上的余弦展开为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},x\in(0,l)$$

   其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,n=0,1,2,...$$

重要结论

1. $cosn\pi = (-1)^n$
2. 点火公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n xdx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, n\text{为大于1的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, n\text{为正偶数} \end{cases}$$

矢量代数

矢量积

结合律

$$m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b})$$

分配率

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

混合积

平行六面体的体积

起点相同的矢量$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$所确定的平行六面体体积为

$$|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

三矢量共面

三矢量$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$共面的充要条件是他们的混合积

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$$

其实可以视作上面的特例。

改变顺序的结果

1. 顺次轮换，混合积不变，即

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

2. 任意对调两矢量顺序，符号相反，即

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

二重矢积

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$$

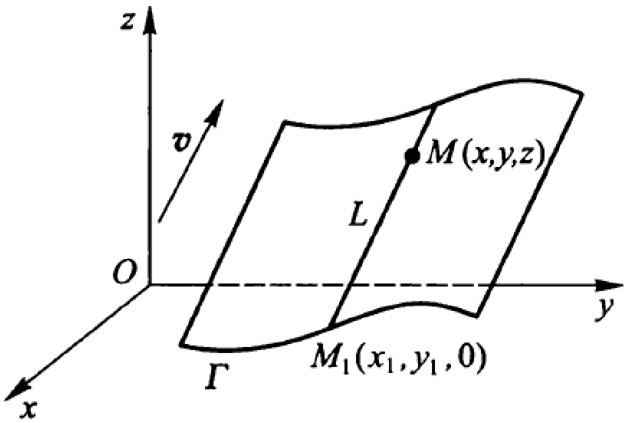
空间解析几何

球面方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

柱面方程

由一条动直线L沿一定曲线Γ平行移动形成的曲面，称为**柱面**.并称动直线L为该柱面的**母线**，称定曲面Γ为该柱面的准线



以Oxy平面的曲线$\Gamma: F(x,y)=0$为准线，母线L的方向矢量为$\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}(c\neq 0)$的柱面方程为

$$F(x-\frac{a}{c}z,y-\frac{b}{c}z)=0$$

证明:
设$M(x,y,z)$是柱面上一点，过M的母线与准线交于点M_1（如上图），$\overrightarrow{M_1M}//\mathbf{v}$，记$\overrightarrow{M_1M}=m\mathbf{v}$。而

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-0)\mathbf{k}$$

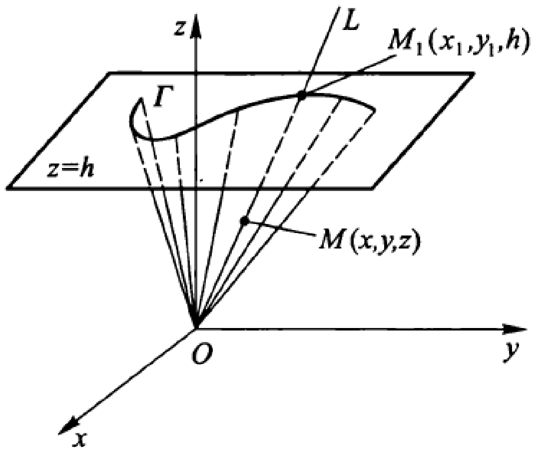
可知$x-x_1=ma,y-y_1=mb,z-0=mc$，消去m

$$x_1=x-\frac{a}{c}z,y_1=y-\frac{b}{c}z$$

由$F(x_1,y_1)=0$
知柱面方程为$F(x-\frac{a}{c}z,y-\frac{b}{c}z)=0$

锥面方程

过空间一定点O的动直线L，沿空间曲线Γ（不过定点O）移动所生成的曲线称为**锥面**，其中动直线L称为该锥面的**母线**，曲线Γ称为该锥面的**准线**，定点O称为该锥面的**顶点**。



以$z=h(h\neq 0)$平面上的曲线$\Gamma : F(x,y)=0$为准线，以原点为顶点的锥面方程为

$$F(\frac{h}{z}x,\frac{h}{z}y)=0$$

证明：
显然$\overrightarrow{OM}$与$\overrightarrow{OM_1}$共线，即$\overrightarrow{OM_1}=m\overrightarrow{OM}$

$$x_1=mx,y_1=my,h=mz$$

消去m,得到$x_1=\frac{h}{z}x,y_1=\frac{h}{z}y$
而$F(x_1,y_1)=0$
即曲面方程为$F(\frac{h}{z}x,\frac{h}{z}y)=0$

旋转曲面方程

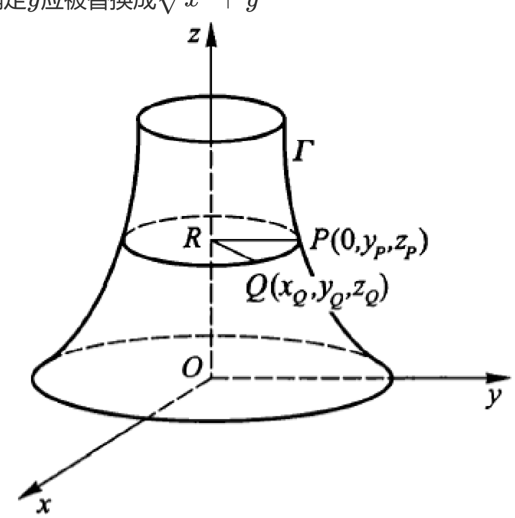
一曲线Γ 绕一定直线L旋转生成的曲面叫做**旋转曲面**，其中定直线**L**称为该旋转曲面的轴

平面上的曲线Γ绕坐标轴旋转所得的曲面方程

Oyz平面上的曲线$\Gamma : F(y,z)=0$绕Oz轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

先写出平面上的曲线方程，然后根据轴决定替换其中哪个未知量，如本例中通过Oyz平面确定了曲线的方程应为$F(y,z)=0$，然后根据Oz轴确定y应被替换成$\sqrt{x^2+y^2}$



证明:
设$P(0,y_P,z_P)$是曲线Γ上任意一点，当曲线Γ绕Oz轴旋转一周时，点P的轨迹是一个圆，记圆心为R.设$Q(x_Q,y_Q,z_Q)$是这个圆上任意一点，则$z_P=z_Q$.

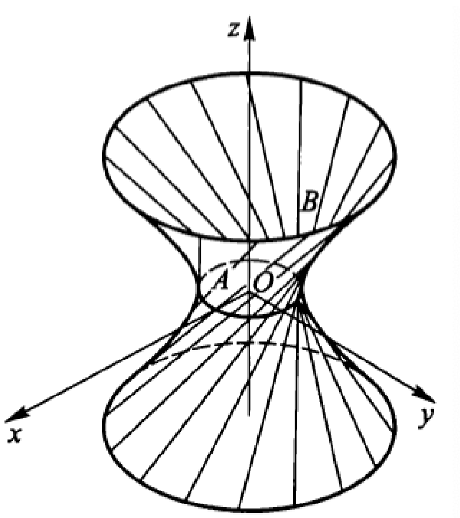
$$|\ y_P\ | = PR = QR = \sqrt{x_Q^2+y_Q^2}$$

将$y_P=\pm\sqrt{x_Q^2+y_Q^2}, z_P=z_Q$代入$F(y_P,z_P)=0$
得到曲面方程$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

空间中任意直线绕坐标轴旋转所得的曲面方程

直线$\Gamma\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$绕$Oz$轴旋转生成的曲面方程为

$$x^2+y^2=[x(z^{-1}(z))]^2+[y(z^{-1}(z))]^2$$



证明:
设$M(x,y,z)$为所求曲面上的任一点，则M必是直线Γ上某个点$M_1(x_1,y_1,z_1)$绕Oz轴旋转某个角度得到的，即

$$\begin{cases}x_1=x(t_1)\\y_1=y(t_1)\\z_1=z(t_1)\end{cases}$$

且$z=z_1, x^2+y^2=x_1^2+y_1^2$
由$z=z(t_1)$，知$t_1=z^{-1}(z)$,则

$$x_1=x[z^{-1}(z)], y_1=y[z^{-1}(z)]$$

所以旋转曲面方程为

$$x^2+y^2=[x(z^{-1}(z))]^2+[y(z^{-1}(z))]^2$$

矢值函数的导数

矢值函数$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$
其导数$\mathbf{r}'(t)=x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}+z'(t)\mathbf{k}$，显然是平行于该点切线的矢量，也称为切矢量。

曲线的切线和法平面

由上知切线的方向矢量为$(x'(t),y'(t),z'(t))$
所以$P_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$处曲线的切线为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

与该直线垂直的平面称为曲线在P_0处的法平面

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

曲面的切平面和法线

若曲面方程为$F(x,y,z)=0$
曲面在(x_0,y_0,z_0)点的切平面

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

切平面的法矢量即曲面在该点的法线

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$$

（2022 T9)
已知函数$g(u,v)$存在连续的一阶偏导数$\dfrac{\partial g}{\partial u},\dfrac{\partial g}{\partial v}$，且$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,g_1'(u,v)+2g_2'(u,v)\neq0$，函数$z=z(x,y),x,y\in\mathscr{O}$由方程$g(x-z,y-2z)=0$决定
(1)证明：$\forall(x,y)\in\mathscr{O},\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}+2\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}=1$
(2)证明：曲面$g(x-z,y-2z)=0$上的每一点处的切平面的法向量都垂直于向量$l=i+2j+k$
解：
(1)$g(x-z,y-2z)=0$式子两端分别对x,y求导
可得$\begin{cases}g_1'\cdot(1-\frac{\partial z}{\partial x})+g_2'\cdot(-2\frac{\partial z}{\partial x})=0\\ g_1'\cdot(\frac{\partial z}{\partial y})+g_2'(1-\frac{2\partial z}{\partial y})=0\end{cases}$
可解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{g_1'}{g_1'+2g_2'},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{g_2'}{g_1'+2g_2'}$代入即证。
(2)由(1)可知曲面$g(x-z,y-2z)=0$在任意点处的法向量为$\mathbf{n}=\left(\dfrac{g_1'}{g_1'+2g_2'},\dfrac{g_2'}{g_1'+2g_2'},-1\right)$,$\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}=0$可知垂直

多元函数微分学

多元函数的极限与连续性

若累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y),\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$与二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$都存在，则三者相等。

(2023 T5)求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2y\ln(x^2+y^2)$
解：

实际上，取$y=0$，我们会发现这个极限与$\lim\limits_{x\to0}x^2\ln x^2=0$相等，但是我们无法确定该极限存在，所以不能直接给出答案。
这种题目的通用做法是夹逼定理，为了去除正负的影响我们先取绝对值，也就是说我们需要证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x^2y\ln(x^2+y^2)|=0$$

我们想着化成$\lim\limits_{x\to0}x\ln x$的类似形式，因此有

$$0\le|x^2y\ln(x^2+y^2)|\le|x|\left|\frac{x^2+y^2}{2}\ln(x^2+y^2)\right|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0.0)}|x|\left|\frac{x^2+y^2}{2}\ln(x^2+y^2)\right|=0\cdot0=0$$

由夹逼定理，知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x^2y\ln(x^2+y^2)|=0$$

也即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2y\ln(x^2+y^2)=0$$

偏导数

若函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数$f''_{xy}(x,y),f''_{yx}(x,y)$都在点$P_0$处连续，则$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$
很多时候会写作

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2z}{\partial y\partial x}$$

全微分

若二元函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的**全增量**$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to0)$$

其中A,B与变量x,y的增量$\Delta x,\Delta y$无关，而仅与x,y有关，则称函数$f(x,y)$在点(x,y)处可微。其中

$$dz=A\Delta x+B\Delta y$$

称为函数$f(x,y)$在点(x,y)处的**全微分**，其中

$$A=f'_x(x,y),B=f'_y(x,y)$$

(2023 T7)设函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|xy|}\sin\ln(x^2+y^2),(x,y)\ne(0,0)\\0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，求$f'_x(0,0),f'_y(0,0)$，讨论$f$在点$(0,0)$处的可微性
解：

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{0-0}{x}=0$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\frac{0-0}{y}=0$$

要验证函数在此点是否可微，**只需看极限$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\rho}$是否为0.**

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta)x^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}\sin\ln((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

若该极限存在，取$y=x$的方向趋于$(0,0)$点

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}\sin\ln((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to \Delta x}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}\sin\ln((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\ln 2(\Delta x)^2}{\sqrt{2}}$$

极限不存在，因此不可微。

复合函数的偏导数

若函数$u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$在点$(x,y)$处的偏导数都存在，$z=f(u,v)$在点$(u,v)=(\varphi(x,y),\psi(x,y))$处可微，则复合函数$z=f[\phi(x,y),\psi(x,y)]$在点$(x,y)$处的偏导数存在

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

为简便起见，约定f_1'表示对第一个中间变量求偏导，f_2'表示对第二个中间变量求偏导，而f_{12}''表示先对第一个中间变量求偏导，再对第二个中间变量求偏导。

$$f_{12}''=f_{21}''$$

(2023 T8)
设$u=f(x,y)$有连续的二阶偏导数，引用新的自变量$s=x+y,t=x-y$化简方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

解：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial x})\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial x})\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial x})=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial y})\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial y})\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

全部代入原方程得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+\frac{\partial u}{\partial s}=0$$

复合函数的全微分

多元函数具有一阶微分形式不变性。
若以x,y为自变量的函数$z=f(x,y)$可微，则有

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

若以s,t为自变量的函数$z=f(x,y)$和$x=x(s,t),y=y(s,t)$都有连续的偏导数，则z可微，且

$$dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

方向导数

若函数u在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处可微，则u在店P_0处的沿l方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}\Big|_{P_0}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0}\right)\cdot\mathbf{e}_l$$

其中$\mathbf{e}_l$是方向l上的单位矢量
(2022 T8)设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，求$f$在$(0,0)$的方向导数
解：
由方向导数的定义，$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\Big|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\frac{\rho\cos\alpha\cdot\rho\sin\alpha}{\sqrt{\rho^2}}}{\rho}=\cos\alpha\sin\alpha$

多元函数极值

极值的必要条件

$$f_x'(x_0,y_0)=0,f_y'(x_0,y_0)=0$$

若满足上式则称(x_0,y_0)为f的稳定点或驻点

极值的充分条件

如果$f_x'(x_0,y_0)=0,f_y'(x_0,y_0)=0$，记$A=f_{xx}''(x_0,y_0),B=f_{xy}''(x_0,y_0),C=f_{yy}''(x_0,y_0)$

1. 当$B^2-AC<0$时，$f(x_0,y_0)$一定为极值，且A(或者C)>0时为极小值，反之为极大值
2. 当$B^2-AC>0$时不是极值
3. 当$B^2-AC=0$不能确定是不是极值

多元函数积分学

三重积分

直角坐标系

先一后二（穿针法）
即先计算定积分，再计算二重积分
以平行于z轴穿针为例

step1：画出积分区域Ω在xOy上的投影Dxy，从Dxy内任一点沿z轴正方向穿过Ω，先穿过的面是下限，后穿过的面是上限

step2：在Dxy区域进行二重积分
先二后一(截面法)
即先进行二重积分，再计算定积分

以平行于xOy面(垂直于z轴)截面为例

step1：确定z的取值范围

step2：固定z，确定每一个截面的表达式

适用范围：①被积函数是单变量函数(这个变量是什么，就垂直于此坐标轴截面)

②对应截面的面积应该好表示

柱坐标系

柱坐标可以看作是极坐标+z分量

直角坐标系(x,y,z)→柱坐标(r,θ,z)

x=rcosθ；y=rsinθ；z=z

$r^2=x^2+y^2$；dV=dxdydz=rdrdθdz

柱坐标系下三重积分的计算
相当于先一后二，先穿针，后利用极坐标系在投影面上进行二重积分

适用范围：投影区域是圆的一部分或者被积函数中有$f(x^2+y^2)$形式

球坐标系

由两个曲面和一个平面来确定空间中一点位置

r：以原点为球心，半径为r的球面

θ：以z轴为边缘的半平面，范围[0,2π]

φ：以原点为顶点，z轴为中心轴，半顶角为φ的锥面，范围[0,π]

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \to dV = dxdydz = r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

球坐标系下三重积分的计算
先定θ，再定φ，最后定r的范围

θ：积分区域Ω投到xOy面，与x轴正方向夹角α→β

φ：固定θ值，与z轴夹角

r：从原点发出射线，穿过Ω区域，穿入为下限，穿出为上限

适用范围：积分区域为锥面/球面，或被积函数有f(x²+y²+z²)形式
(2021 T6)
设$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\le z\}$，计算$I=\iiint\limits_K(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$
解：
$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}\}$
球面坐标换元$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\y=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}$
$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}(r\cos\varphi+r)r^2\sin\varphi dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi(1+\cos\varphi)d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi(1+\cos\varphi)\cdot\frac{1}{4}\cos^4\varphi d\varphi=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\varphi)\cos^4\varphi d\cos\varphi=-\frac{\pi}{2}\int_1^0(1+c)c^4dc=\frac{\pi}{2}(\frac{1}{5}c^5+\frac{1}{6}c^6)\Big|_0^1=\frac{11}{60}\pi$

例题

求$I=\iiint\limits_\Omega zdV$，其中$\Omega:\{(x,y,z)|z\le\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{3}z,0\le z\le 4\}$

分析可得Ω是一个大锥中间挖去一个小锥得到的
解法一 直角坐标系截面法
大锥面$D_{z1}:x^2+y^2\le 3z^2$
小锥面$D_{z2}:x^2+y^2\le z^2$
$I=\int_0^4dz\iint\limits_{D_{z1}}zdxdy-\int_0^4dz\iint\limits_{D_{z2}}zdxdy=\int_0^4z(\iint\limits_{D_{z1}}dxdy)dz-\int_0^4z(\iint\limits_{D_{z2}}dxdy)dz=\int_0^4z(\pi(\sqrt{3}z)^2)dz-\int_0^4z(\pi z^2)dz=128\pi$
解法二 柱坐标系法
$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{4\sqrt{3}}rdr\int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^4zdz-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4rdr\int_r^4zdz=128\pi$
解法三 球坐标系法
$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^{\frac{4}{\cos\varphi}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{4}{\cos\varphi}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^{\frac{4}{\cos\varphi}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$

第一类曲线积分

设Γ为空间光滑曲线，其方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases},\alpha\le t\le\beta$$

则

$$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

第一类曲面积分

物理意义

f是曲面Γ的面密度，$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$即曲面的质量

直接计算

设σ_{xy}是曲面S在Oxy平面上的投影，则有

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\sigma_{xy}} f(z,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}d\sigma$$

特别的，若$f(x,y,z)\equiv 1$，则$\iint\limits_S dS = S$

（2022 T2）设有一金属薄片，其形如曲面$z=xy$与圆柱体$x^2+y^2=1$相交的部分，其面密度为e，求薄片的质量m

解：

$m=\iint\limits_{D_{xy}} e\sqrt{x^2+y^2+1}dxdy = e\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{r^2+1}rdr = \pi e\int_0^1\sqrt{r^2+1}d(r^2+1) = \pi e\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\pi e(2\sqrt{2}-1)$

物理意义

设有一个力场，场的力为$\mathbf{F}(M)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}, M(x,y,z)\in\Gamma$。设$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Gamma$上连续，试求此力场所做的功。

直接计算

设Γ为空间光滑曲线，其方程为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}, \alpha\le t\le\beta$$

设点A对应的参数为t_A，点B对应的参数为t_B，$\mathbf{F}(M)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}, M(x,y,z)\in\Gamma$则

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}}\mathbf{F}d\mathbf{s} = \int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx+Qdy+Rdz$$
$$= \int_{t_A}^{t_B}[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]$$

格林公式

若函数P,Q在有界闭区域$D\subset R^2$上连续且具有一阶连续偏导数，则

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_\Gamma Pdx+Qdy$$

这里Γ为区域D的边界曲线，并取正向。

第二类曲面积分

靠坐标轴正向的一面为正，靠坐标轴负向的一面为负

直接计算

一投二代三符号化为二重积分
遇到dxdy，就投影到xOy面，被积函数中z=z(x,y)

$$\iint_{R_{xy}} Pdxdy = \pm \iint_{R_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

显然，若在某个面上的投影是一条直线，则二重积分的值为0.
(2021 T4)
设S为上半球面的一部分，$S:\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1, z\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$，取外（上）侧为正侧，计算第二类曲面积分$J=\iint_S |x|dydz+|y|dzdx+\dfrac{dxdy}{z}$
解：
对所求积分而言x,y轮换对称
有$\iint_S |x|dydz=\iint_S |y|dzdx$
先求$\iint_S |x|dydz$
所谓“外侧”，x轴负半轴取的是左侧，y轴负半轴取的是右侧
也即符号相反，又因为积分函数为偶函数，所以积分值为0
$\iint_S \dfrac{dxdy}{z}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}rdr=-2\pi\cdot\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}d(1-r^2)=-2\pi\sqrt{x}|_1^{\frac{3}{4}}=(2-\sqrt{3}\pi)$

高斯公式

设空间区域V由分片光滑的双侧封闭曲面S围成，若函数P,Q,R在V上连续且有一阶连续偏导数，则

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

外侧正号，内侧负号

斯托克斯公式

设光滑曲面S的边界L是按段光滑的连续曲线，若函数P,Q,R在S和L上连续，且有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

其中S的侧面与L的方向按右手法则确定

梯度，散度和旋度

梯度grad

梯度算子$\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$
对于标量函数f，有$grad(f)=\nabla f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

散度div

记$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$
有$div\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

旋度rot

$$rot\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$