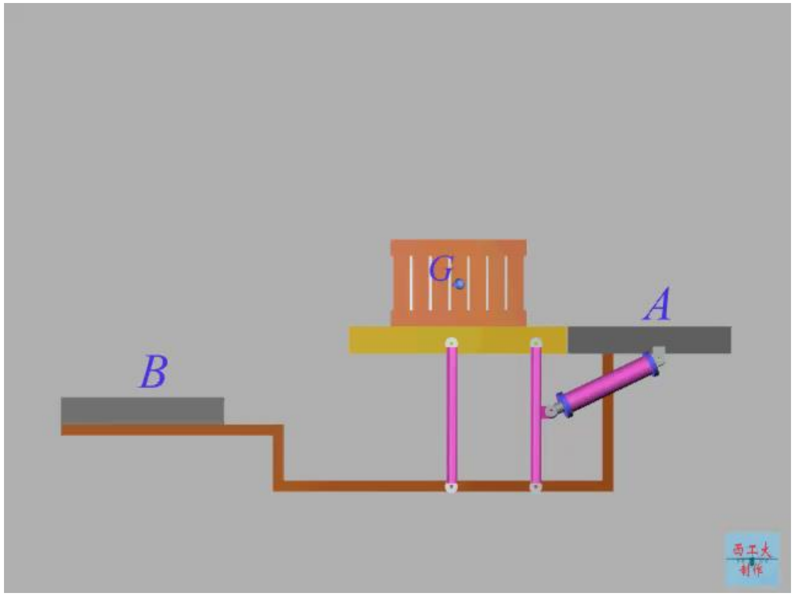
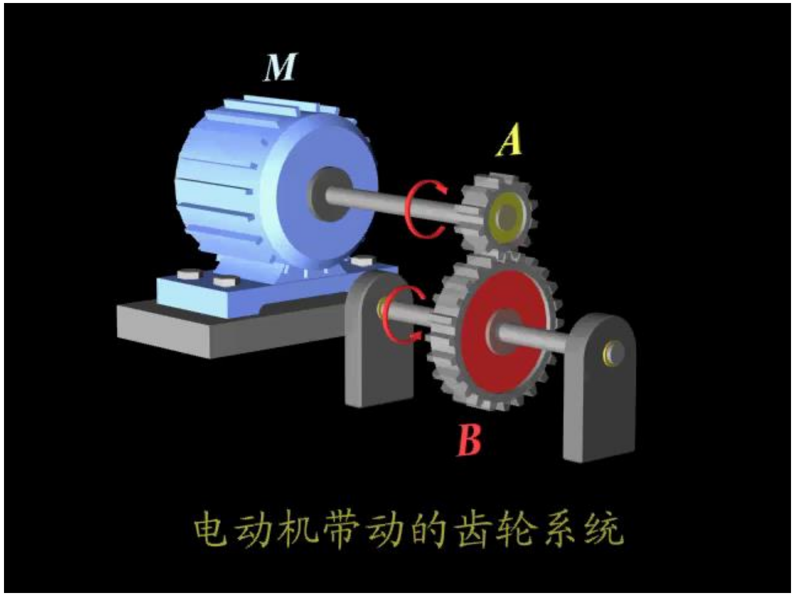
刚体的基本运动

- 刚体是由无数点组成的集合体
- 刚体运动是构成刚体的所有点的运动的集合
- 刚体的运动如何来描述?
- 刚体的运动与刚体上各点的运动之间有什么关系?

刚体的基本运动



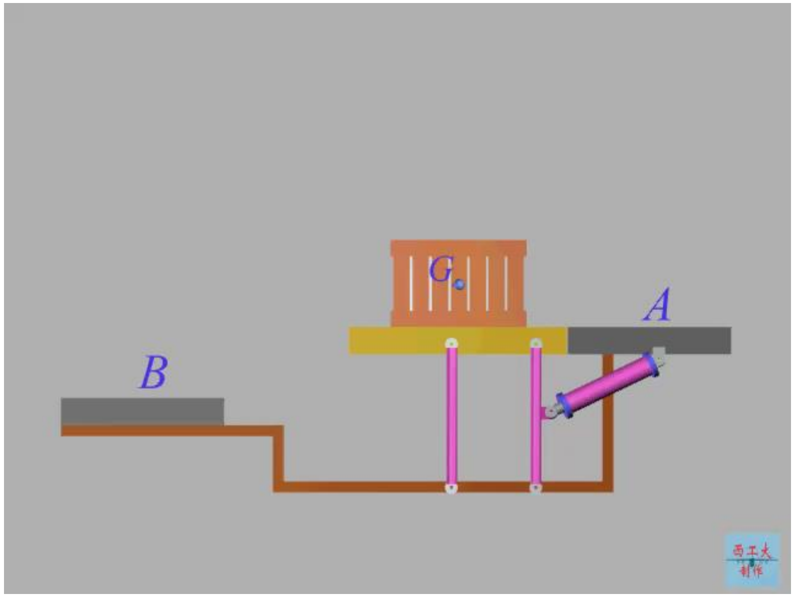
刚体的平移（平动）

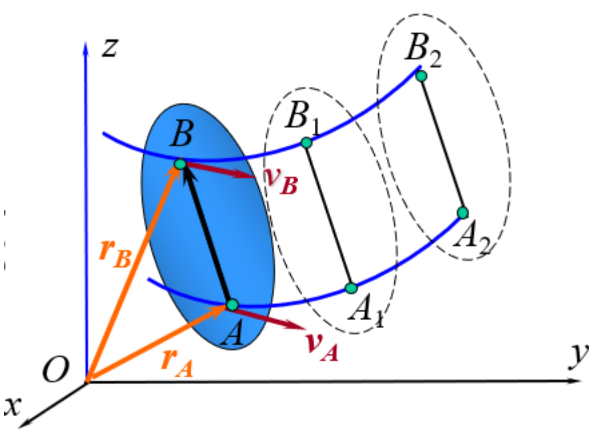


刚体的定轴转动

- **刚体更复杂的运动可以看成由这两种运动的合成。**

刚体的平移特点





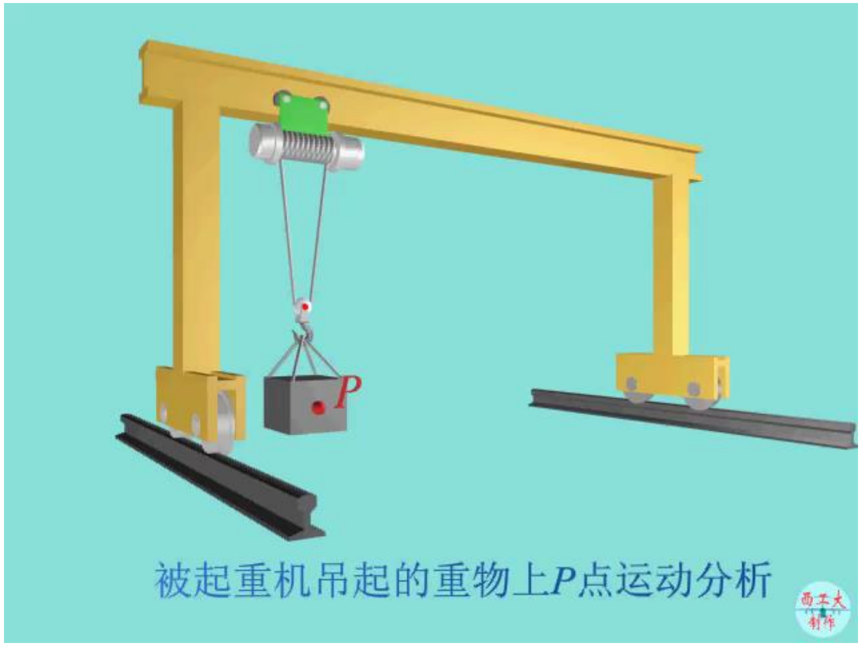
- **在平移运动过程中，刚体上任意一条直线的方向都保持不变**
- **刚体内所有各点的轨迹形状和大小完全相同**
- **在每一瞬时，刚体各点的速度相等，各点的加速度也相等**

$$\boldsymbol{v}_B=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_B}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\mathbf{r_A}+\overrightarrow{AB})}{dt}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_A}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_A}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_A$$

$$\boldsymbol{a}_B=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_A}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_A$$

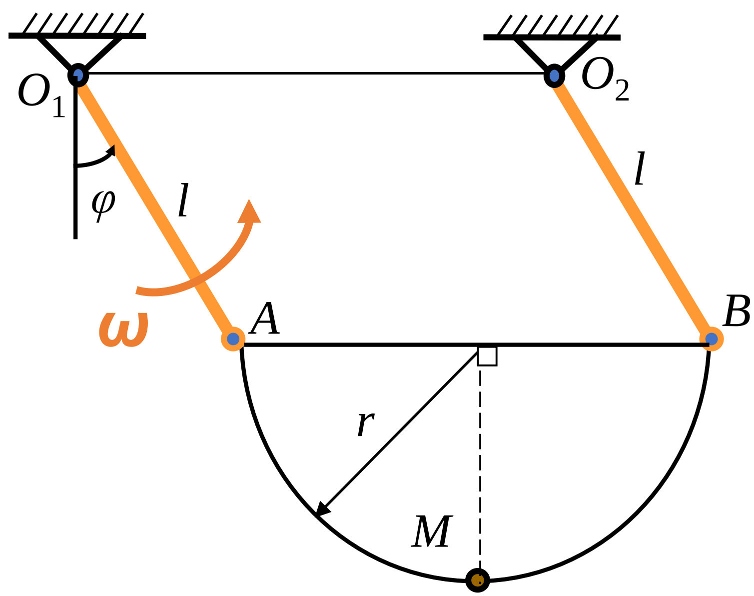
刚体的平移

- **平移刚体内的点，一定保持在平面内运动？**



错！它的轨迹可以是任意的空间曲线。

例题7-1 **已知：**$O_1A=O_2B=l=4\ \text{m}$, $O_1O_2=AB$, **曲柄的转动规律** $\varphi=4\sin\frac{\pi}{4}t$，**其中**$t$ **为时间，以秒** s **计。试求当** t=0 **和** t=2 s **时，半圆上**M**点的速度和加速度。**



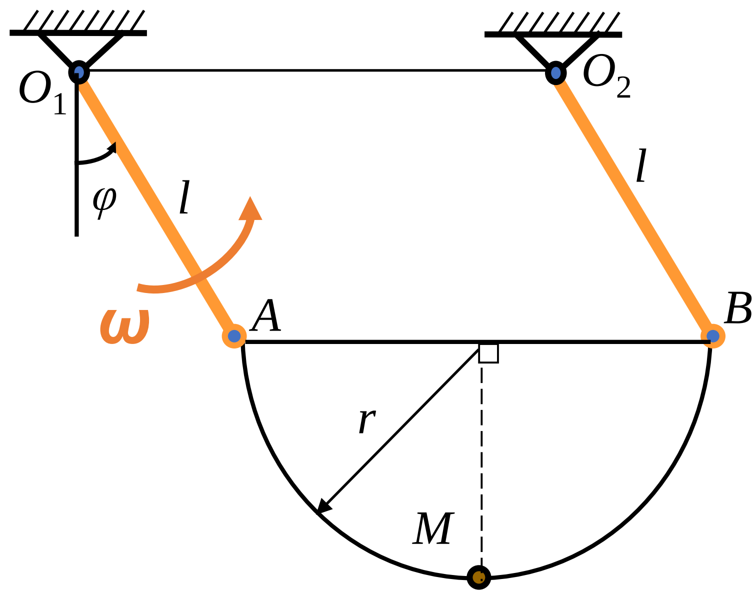
解：半圆作平移，各点有相同的速度和加速度。

杆O_1A的角速度

$$\omega = \dot{\varphi} = \pi \cos\frac{\pi}{4}t$$

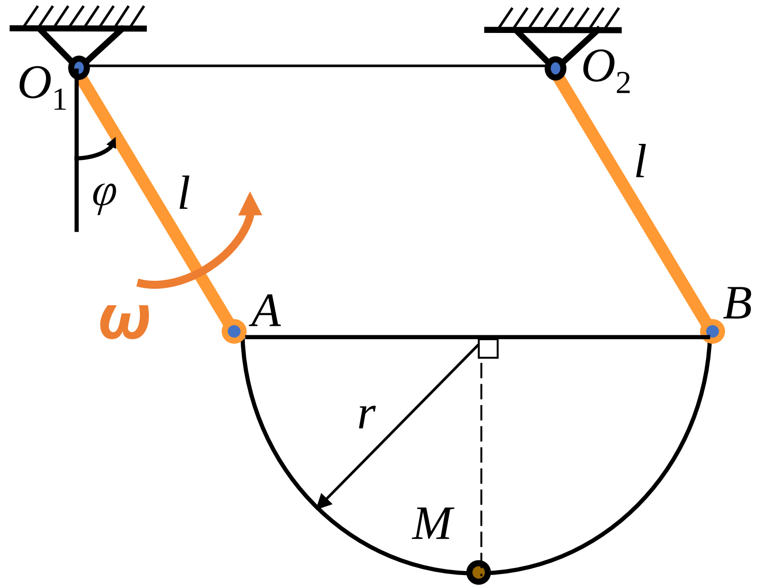
杆O_1A的角加速度

$$\alpha = \ddot{\varphi} = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{4}t$$



$$\omega = \pi\cos\frac{\pi}{4}t, \quad \alpha = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{4}t$$

M点与A点有相同的速度和加速度



$$v_M = v_A = l\omega = 4\pi\cos\frac{\pi}{4}t$$

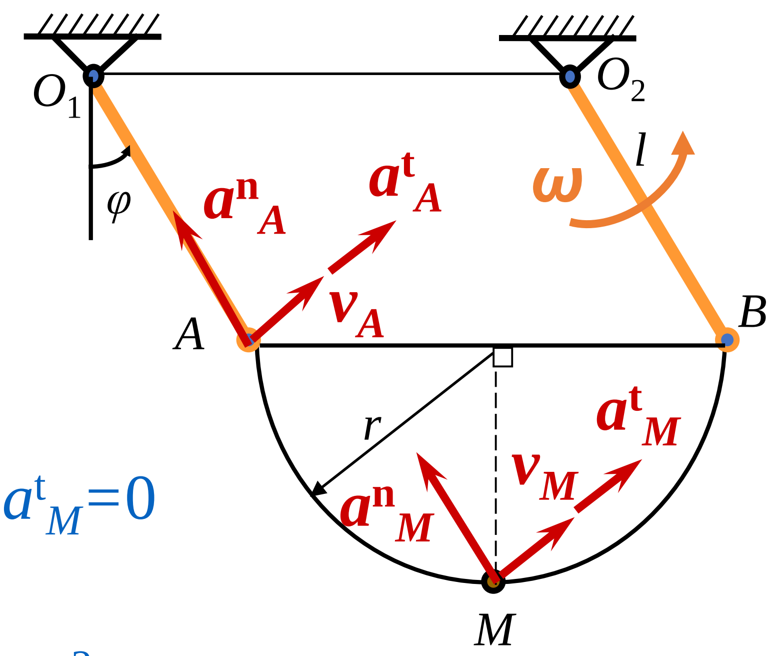
$$a^t_M = a^t_A = l\alpha = -\pi^2\sin\frac{\pi}{4}t$$

$$a^n_M = a^n_A = l\omega^2 = 4\pi^2\cos^2\frac{\pi}{4}t$$

$$v_M = v_A = l\omega = 4\pi\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$a^n_M = a^n_A = l\omega^2 = 4\pi^2\cos^2\frac{\pi}{4}t$$

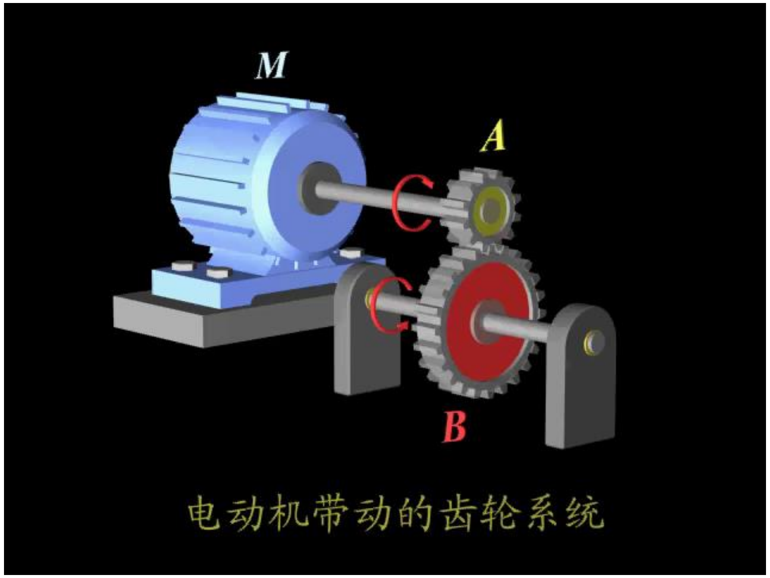
$$a^t_M = a^t_A = l\alpha = -\pi^2\sin\frac{\pi}{4}t$$



$t = 0$ s**时,** $v_M = 4\pi$, $a^n_M = 4\pi^2$, $a^t_M = 0$

$t = 2$ s**时,** $v_M = 0$, $a^n_M = 0$, $a^t_M = -\pi^2$

刚体的定轴转动



- 当刚体运动时，如其上有一条直线始终保持不动，这种运动称为刚体的定轴转动
- 该固定不动的直线称为转轴

- 转动轴以外的各点都分别在垂直于转轴的平面内作圆周运动
- 圆心在该平面与转轴之交点上

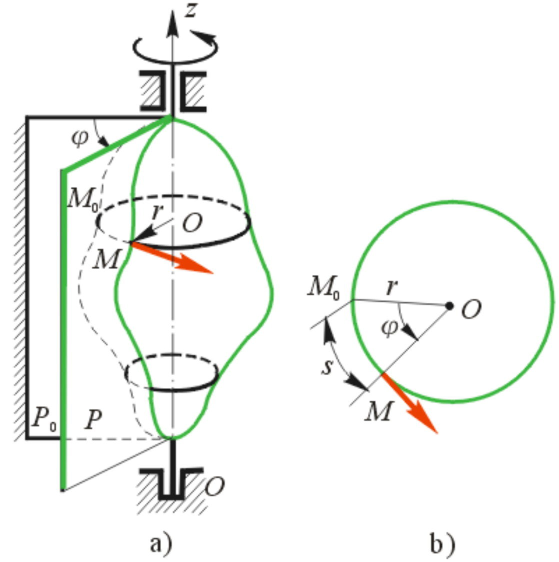
刚体的定轴转动

（1）角坐标

刚体的位置可由角φ完全确定。角φ也称为角坐标，当刚体转动时，角坐标φ随时间t而变化，因而可表示为时间t的单值连续函数

$$\varphi = f(t)$$

这就是刚体的定轴转动运动方程。



（2）角速度

角φ对时间的导数，称为刚体的角速度，以ω表示:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = f'(t) = \dot{\varphi}$$

刚体的定轴转动

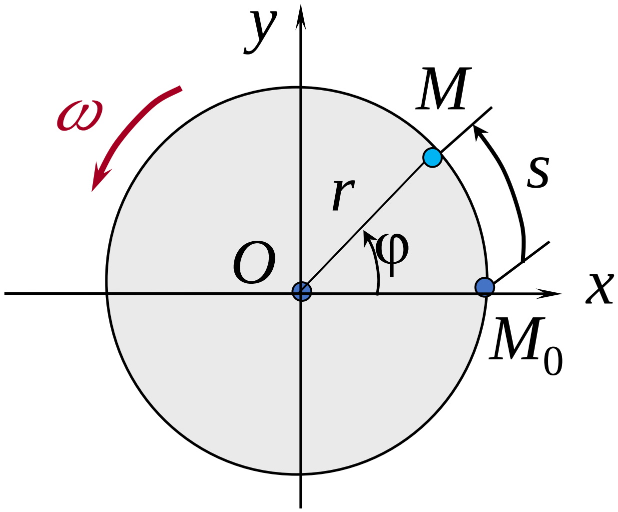
(3) 角加速度

角速度ω对时间的导数，称为角加速度, 以α代表:

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = f''(t) = \ddot{\varphi}$$

定轴转动刚体内各点的速度和加速度

- **刚体上一点 M 在垂直于转轴的平面Oxy内作圆周运动**
- **圆心O是该平面与转轴的交点**
- **点M 的弧坐标 $s=r\varphi$**



定轴转动刚体内各点的速度和加速度

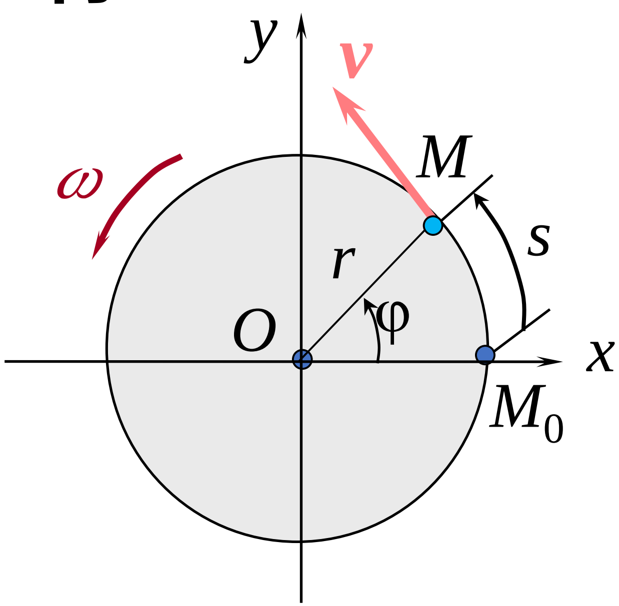
(1) 点 M 的速度

弧坐标 $s=r\varphi$ **对时间求导数，得**

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

考虑到 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega$

故有 $v=\omega r$

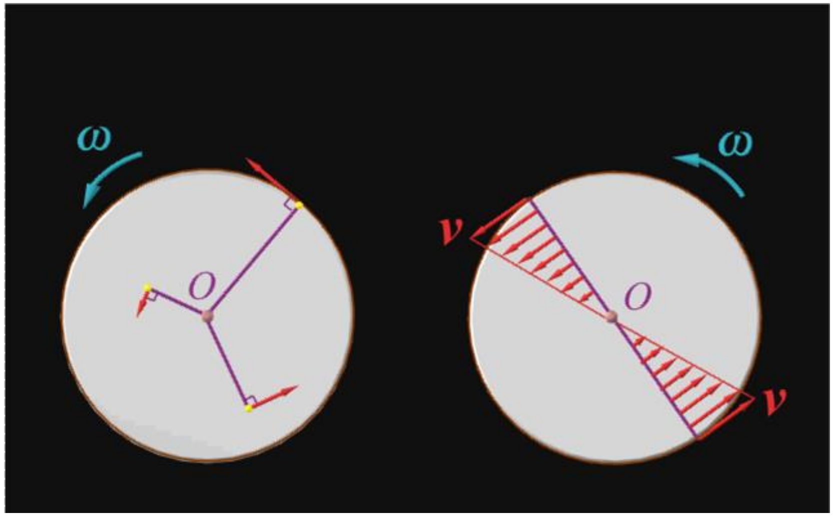


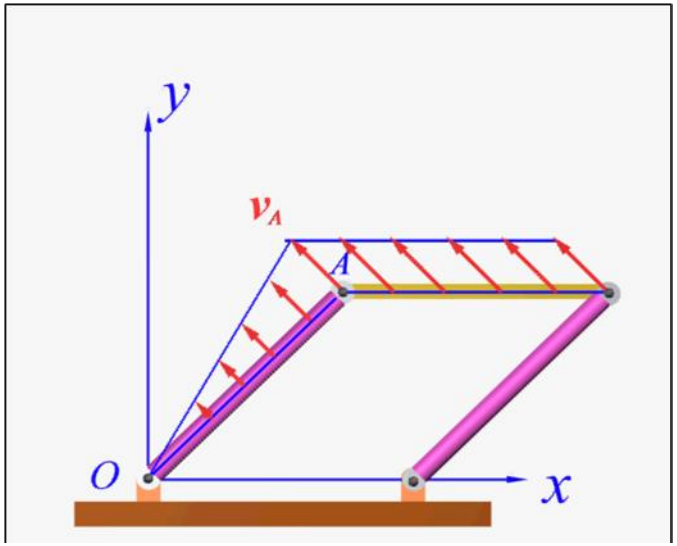
- **定轴转动刚体内任一点的速度,等于刚体角速度与该点的转动半径的乘积**
- **速度方向是沿着圆周的切线，指向转动前进的一方。**

定轴转动刚体内各点的速度和加速度

$$\boxed{v = \omega r}$$

- **在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的速度与各点的转动半径成正比**



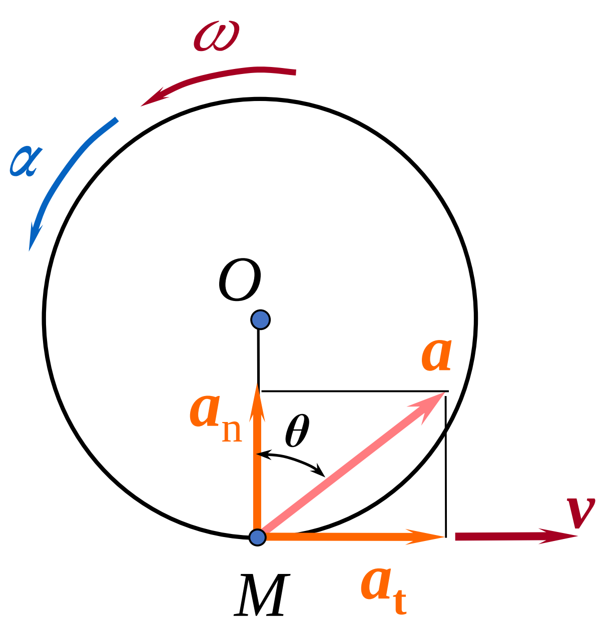


定轴转动刚体内各点的速度和加速度

(2) 各点的加速度

点M的加速度包含两部分：切向分量和法向分量。

切向加速度



$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r) = \frac{d\omega}{dt} r$$

或

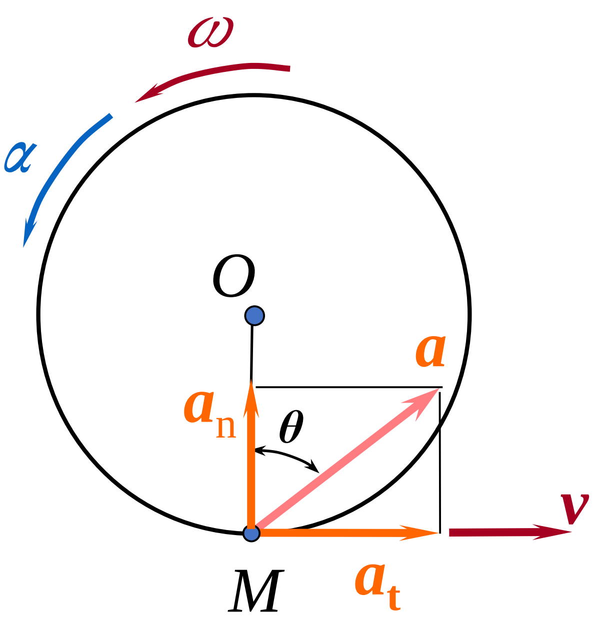
$$a_t = \alpha r$$

- **定轴转动刚体内任一点的切向加速度，等于刚体角加速度与该点的转动半径的乘积**
- **切向加速度方向沿着圆周在点 M 的切线方向**

定轴转动刚体内各点的速度和加速度

法向加速度

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\omega r)^2}{r}$$

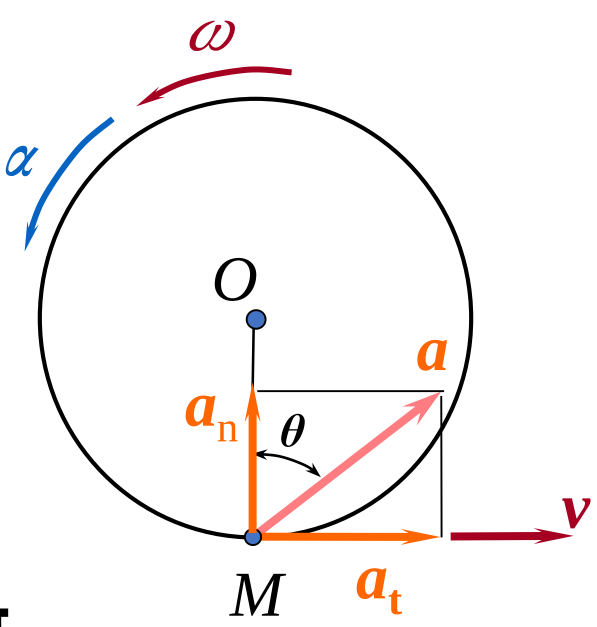


或 $$a_{\mathrm{n}} = \omega^2 r$$

- **定轴转动刚体内任一点的法向加速度，等于刚体角速度平方与该点转动半径的乘积**
- **法向加速度的方向恒指向圆心O，因此也称为向心加速度。**

定轴转动刚体内各点的速度和加速度

总加速度



$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4}$$

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

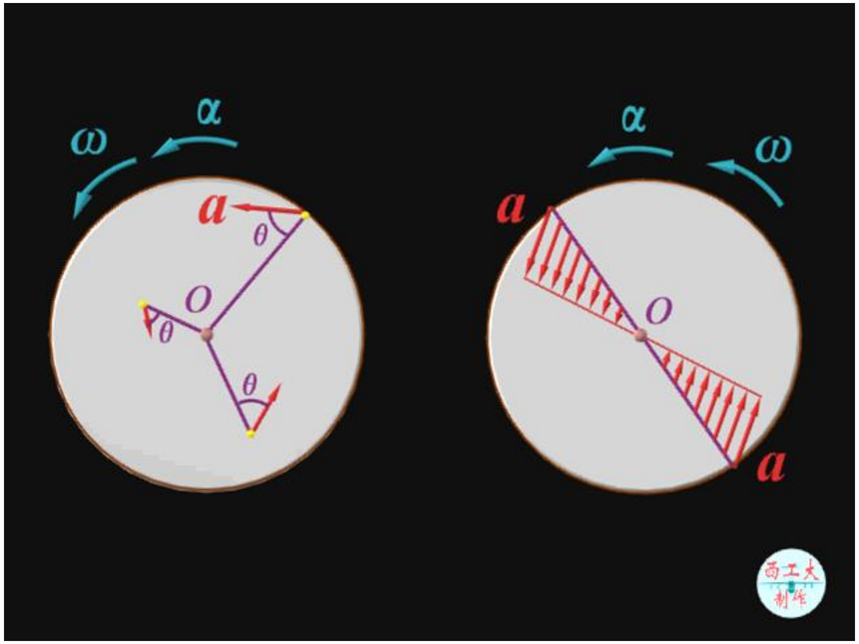
总加速度与半径*MO*的夹角*θ*的大小可按下式求出

$$\tan\theta = \frac{|a_t|}{|a_n|} = \frac{r|\alpha|}{r\omega^2} = \frac{|\alpha|}{\omega^2}$$

定轴转动刚体内各点的速度和加速度

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}, \qquad \tan\theta = \frac{|\alpha|}{\omega^2}$$

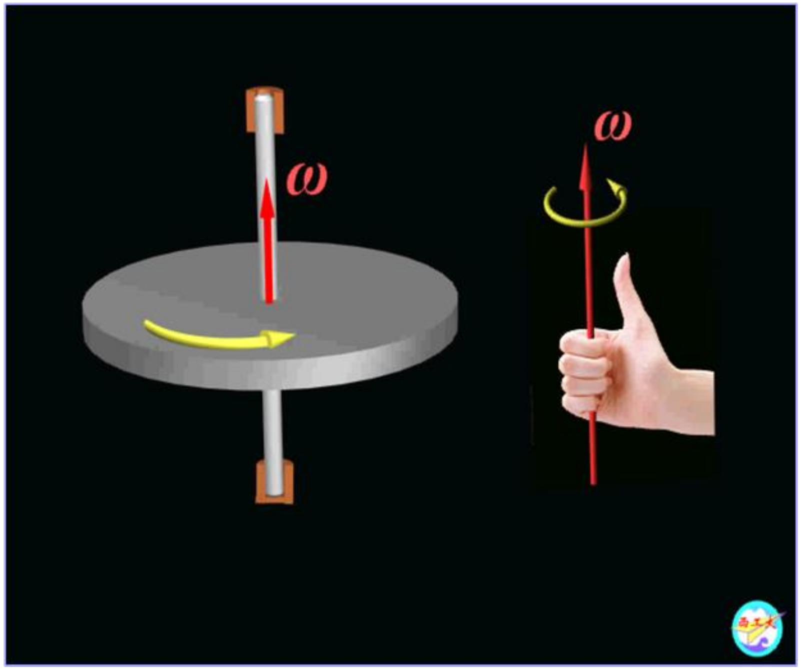
- 由上式可见，在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的切向加速度、法向加速度和总加速的大小都与各点的转动半径成正比。
- 总加速度a与转动半径所成的偏角θ，却与转动半径无关：**在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的加速度对其转动半径的偏角θ都相同**
- 平面上各点加速度的分布如图所示



刚体角速度与角加速度矢量表示

（1）角速度矢

- **沿刚体的转轴z画出一个矢量$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$（其中$\omega$为角速度代数值，$\boldsymbol{k}$为轴$z$的正向单位矢），$\boldsymbol{\omega}$称为刚体的角速度矢。**



- **当代数值ω为正，角速度矢量指向转轴正向，反之，指向负向。**
- **$\boldsymbol{\omega}$的指向由右手规则决定。**
- **定轴转动刚体的角速度矢$\boldsymbol{\omega}$被认为是滑动矢量，可以从转轴上的任一点画出。**

刚体角速度与角加速度矢量表示

（2） 角加速度矢

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathbf{k} = \alpha\mathbf{k}$$

角加速度的代数值乘以转轴正向单位矢。

刚体内各点的速度与加速度矢积表示

（1）速度矢积表示法

定轴转动刚体内任一点的速度，可以由刚体的角速度矢与该点的矢径的矢积来表示：

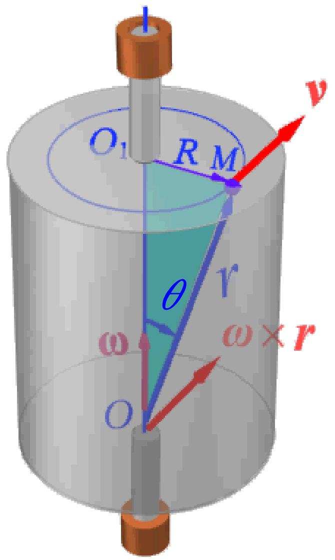
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

- **根据上面矢积的定义的速度的大小与M点速度一致**：

$$|v| = |\omega| r \sin\theta = |\omega| R$$

- **上面矢积的方向垂直于转动半径矢量O_1M,并且平行于动点M做圆周运动所在的平面**

- **因此矢积$\omega \times r$能够表示动点的速度矢量v**



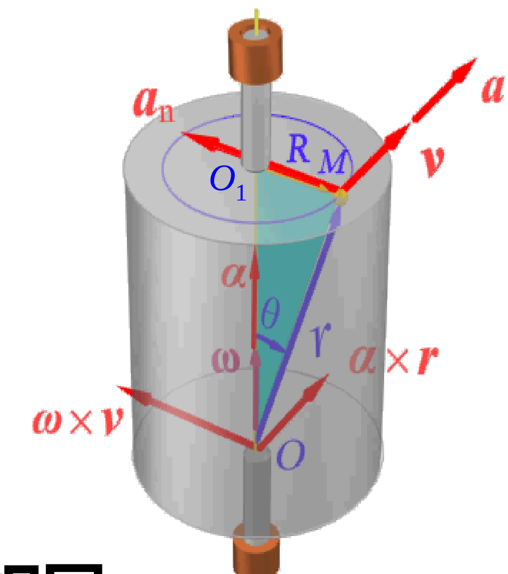
刚体内各点的速度与加速度矢积表示

(2) 加速度矢积表示法

速度的矢积表达式 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

将上式左右两边对时间求导数。左端的导数为点M的加速度，而右端的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$



式中第一个矢积 $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$ **的模为**

$$|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}| = |\alpha| r \sin\theta = R|\alpha| = |a_t|$$

矢积 $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$ **方向与点M的切向加速度a_t相同。**

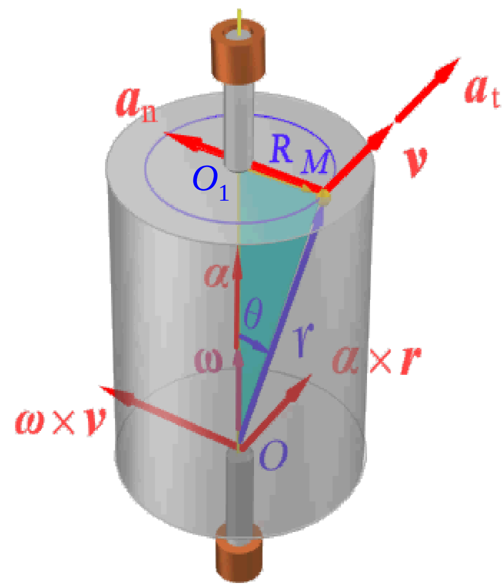
故有切向加速度的矢积表达式： $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$

刚体内各点的速度与加速度矢积表示

第二个矢积$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 模为 $|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}| = |\omega v|\sin(90^0) = R\omega^2 = a_\mathrm{n}$

此矢积同时垂直于刚体的转轴和点M的速度v，即沿点M的转动半径R，并且按照右手规则它是由点M指向轴心O_1。可见，矢积$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$表示了点$M$的法向加速度$a_\mathrm{n}$，即有矢积表达式

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$



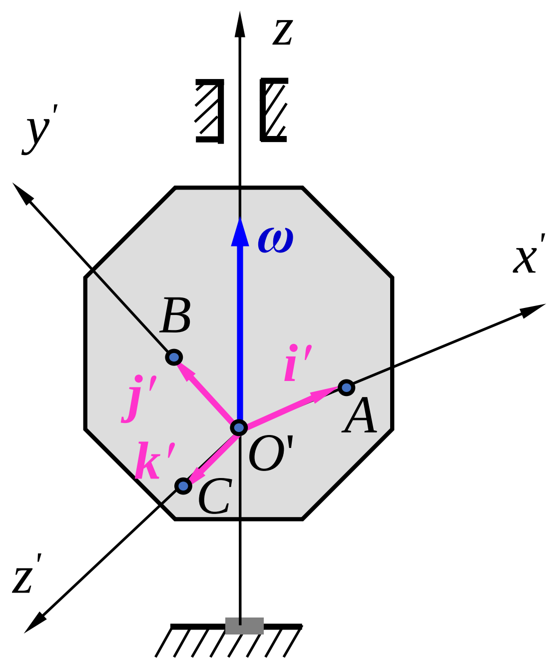
刚体内各点的速度与加速度矢积表示

于是，得点M的总加速度的矢积表达式

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}}$$

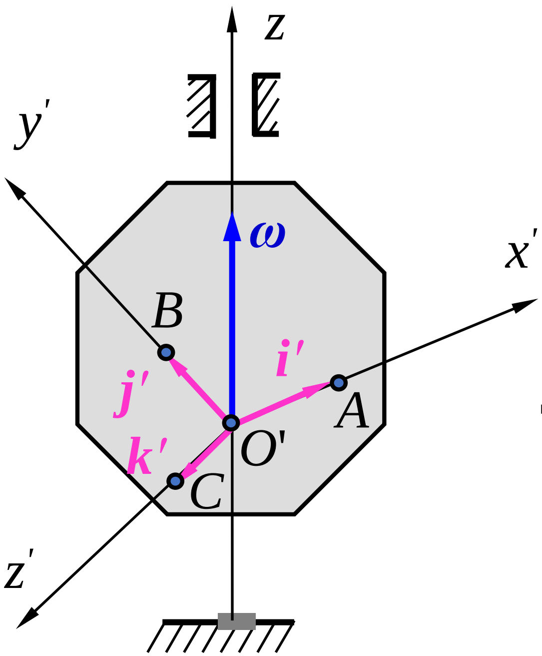
定轴转动刚体内任一点的切向加速度，可由刚体的角加速度矢与该点矢径的矢积表示，而法向（向心）加速度，则由刚体的角速度矢与该点速度的矢积表示。

设刚体以角速度ω绕定轴Oz转动，其上固连有坐标系$O'x'y'z'$ （如图）随刚体一起转动，各动轴的单位矢量为i'、j'、k'，各单位矢量的端点分别是A、B、C，求刚体上A、B、C三点的速度。



先分析点 A 的速度。设 A 点的矢径为$\boldsymbol{r}_A$，则A点的速度为

$$\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$$



A点是定轴转动刚体内的一点，有

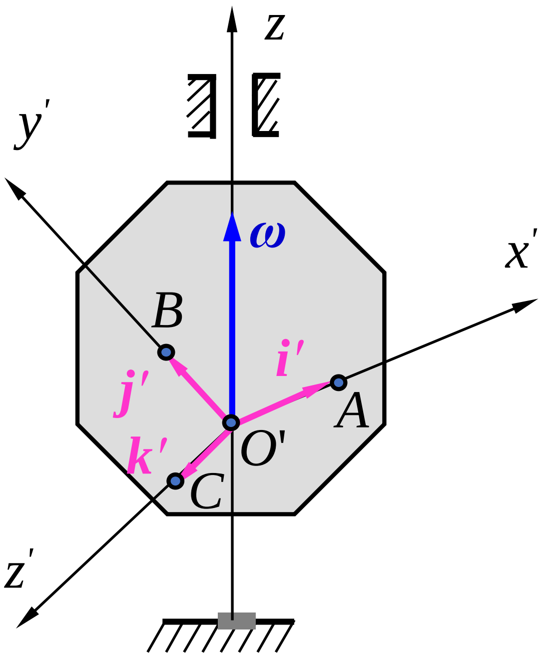
$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A$$

可见 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A$，但这里有 $\boldsymbol{r}_A=\boldsymbol{i}',$

故 $$\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}'$$

同理可得 v_B 和 v_C 的矢量表达式。

于是得到一组公式



$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}'}$$

这就是泊松公式。

作业

- 6-5, 6-9, 6-12