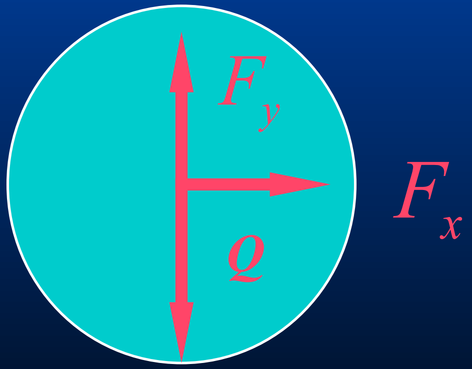
浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY

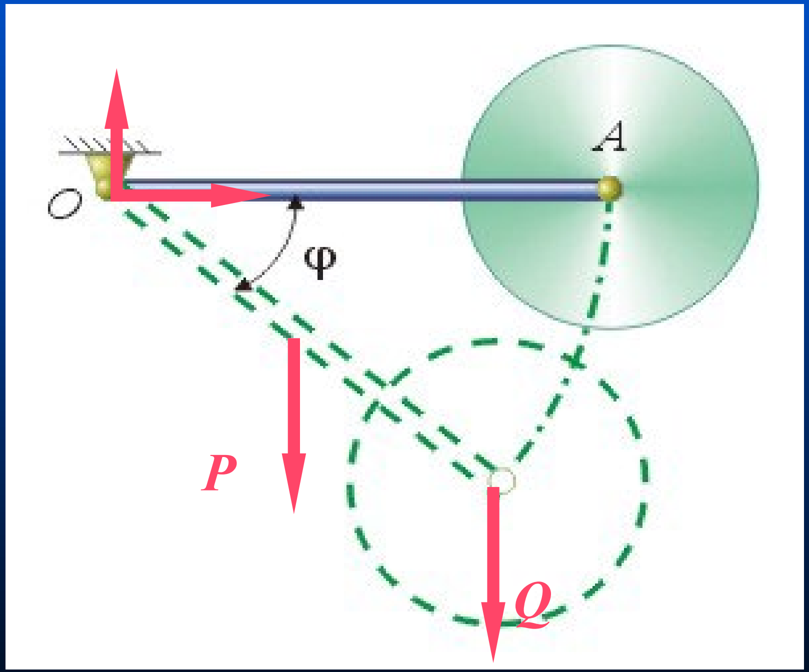
第十一章

动量矩定理之二

例11-3 **已知**：杆OA长为l，重为P。可绕过O点的水平轴在铅直面内转动，杆的A端用铰链铰接一半径为R、重为Q的均质圆盘，若初瞬时OA杆处于水平位置，系统静止，略去各处摩擦。**求**：OA杆转到任意位置（用φ角表示）时的角速度ω及角加速度α。

解： ✔ 受力分析

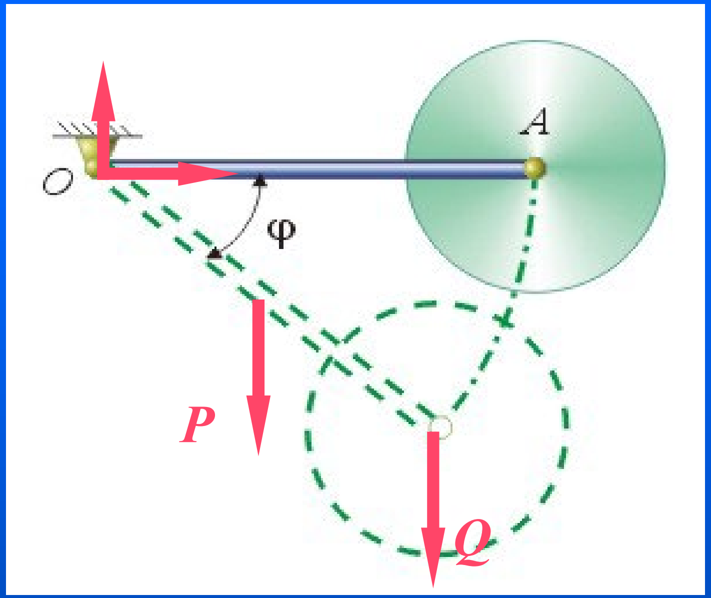




- 运动分析

取圆轮为研究对象，受力如图，$J_A\alpha=0$

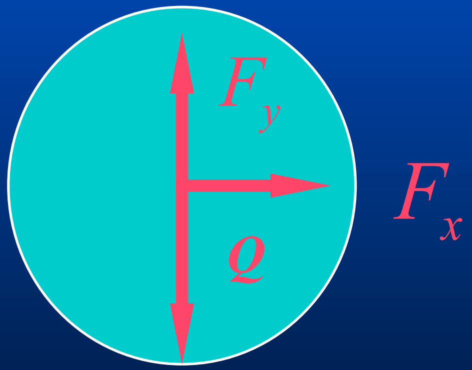
因此，$\omega=\omega_0=0$，在杆下摆过程中，圆盘作平移



- 求*OA*杆的角加速度α

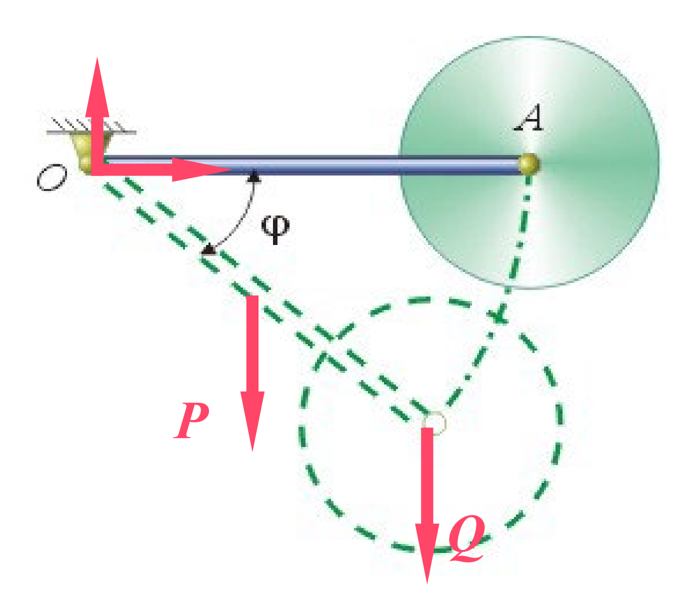
研究整体, 对*O*点应用动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(F_i^{(e)})$$



写出系统对O点的动量矩

$$L_0=\frac{P}{3g}l^2\omega+\frac{Q}{g}l^2\omega=\frac{P+3Q}{3g}l^2\omega$$



应用动量矩定理

$$\frac{P+3Q}{3g}l^2\alpha=P\frac{l}{2}\cos\varphi+Ql\cos\varphi$$

$$=\frac{P+2Q}{2}l\cos\varphi$$

由上式解出 $\alpha=\dfrac{P+2Q}{P+3Q}\dfrac{3g}{2l}\cos\varphi$

- 求OA杆的角速度ω $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{P+2Q}{P+3Q}\dfrac{3g}{2l}\cos\varphi$

$$\boxed{\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\phi}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\phi}=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\phi$$

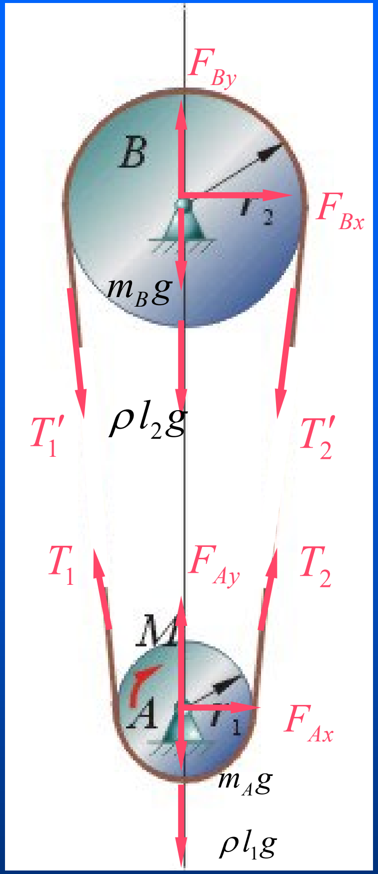
分离变量 $$\omega\mathrm{d}\omega=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

积分 $$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=\int_0^{\varphi}\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

得 $$\omega=\sqrt{\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{g}{l}3\sin\varphi}$$

例11-4

已知：主动轮A的半径为r_1，转动惯量为J_1，转动力矩为M，从动轮B的半径为r_2，转动惯量为J_2，均质胶带长为l，质量为m。
求：主动轮的角加速度



解：

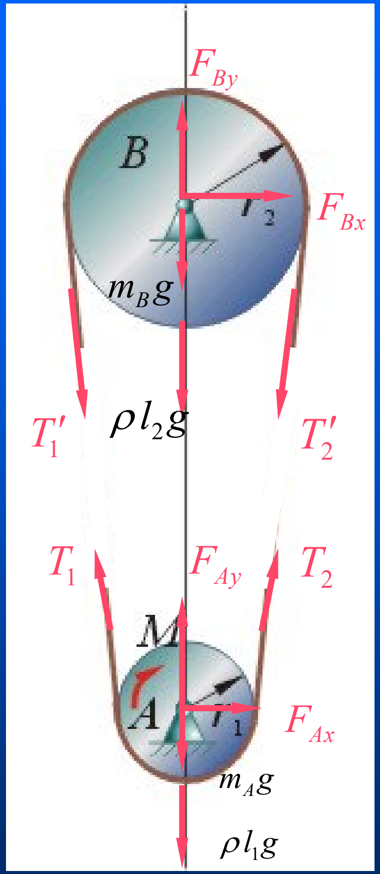
1．受力分析，设A轮和B轮的皮带长分别为l_1、l_2，单位长度胶带的质量为ρ，

2．运动分析：设轮A和轮B的角速度和角加速度分别为ω_1、ω_2、a_1、a_2 。

有 $$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{r_2}{r_1}$$

分别对A轮和B轮用动量矩定理

$$\sum \rho \Delta l_1 \omega r_1^2 = \rho l_1 \omega r_1^2$$



对A：

$$L_A = J_1\omega_1 + \rho l_1 \omega_1 r_1^2$$

$$\frac{\mathrm{d}L_A}{\mathrm{d}t} = M - (T_2 - T_1)r_1$$

对B：

$$L_B = J_2\omega_2 + \rho l_2 \omega_2 r_2^2$$

$$\frac{\mathrm{d}L_B}{\mathrm{d}t} = (T_2' - T_1')r_2$$

联立

$$\begin{cases} (J_1 + \rho l_1 r_1^2)\alpha_1 = M - (T_2 - T_1)r_1 & (1) \\ (J_2 + \rho l_2 r_2^2)\alpha_2 = (T_2' - T_1')r_2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases}(J_1+\rho l_1 r_1^2)\alpha_1 = M-(T_2-T_1)r_1 & (1)\\ (J_2+\rho l_2 r_2^2)\alpha_2 = (T_2'-T_1')r_2 & (2)\end{cases}$$

未知量 $\alpha_1\quad \alpha_2\quad T_2\quad T_1\quad T_2'\quad T_1'$

由于 $T_2 = T_2' \qquad T_1 = T_1'$ (3-4)

$$\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2 \qquad (5)$$

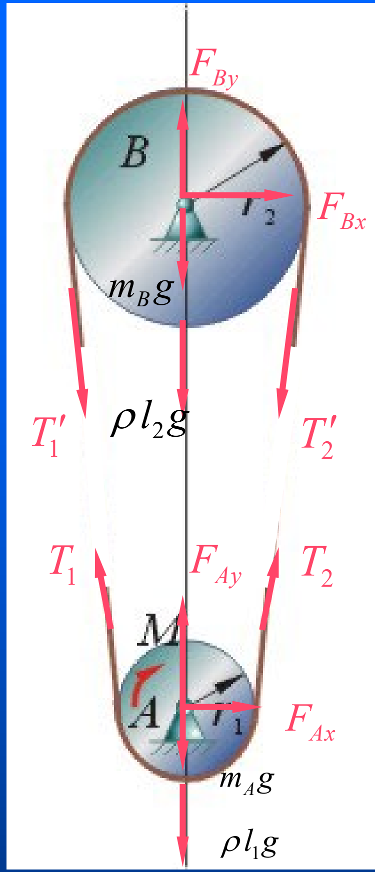
将(3) (4)代入(2)

$$(J_2+\rho l_2 r_2^2)\frac{r_1}{r_2}\alpha_1 = (T_2-T_1)r_2 \qquad (5)$$

由 $\dfrac{1}{r_1}\times(1)+\dfrac{1}{r_2}\times(5) \longrightarrow \left[J_1+\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 J_2+\rho(l_1+l_2)r_1^2\right]\alpha_1 = M$

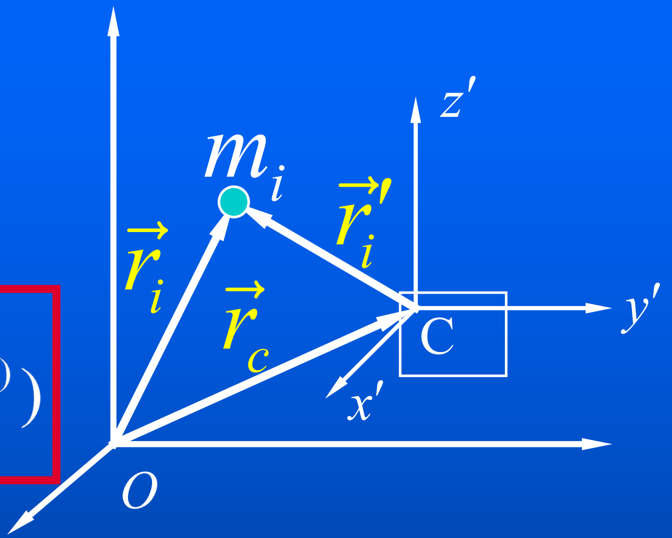
$$\alpha_1 = \frac{M}{J_1+(r_1/r_2)^2 J_2+mr_1^2}$$

其中 $\rho(l_1+l_2)=m$



§ 11-5 质点系相对质心的动量矩定理

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \vec{L}_C}$$



由动量矩定理 $\boxed{\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)})}$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \vec{L}_C) = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum (\vec{r}_C + \vec{r}_i') \times \vec{F}_i^{(e)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} \times m\vec{v}_C + \vec{r}_C \times \frac{d}{dt} m\vec{v}_C + \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum \vec{r}_C \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(e)}$$

由动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}_C\times m\vec{v}_C+\vec{L}_C)=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(e)}=\sum(\vec{r}_C+\vec{r}_i')\times\vec{F}_i^{(e)}$$

$$\underline{\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}\times m\vec{v}_C}\quad \underline{\vec{r}_C\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\vec{v}_C}\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C}{\mathrm{d}t}}\quad \underline{\sum\vec{r}_C\times\vec{F}_i^{(e)}}\quad \boxed{\sum\vec{r}_i'\times\vec{F}_i^{(e)}}$$

$$\vec{v}_C\times m\vec{v}_C=0\qquad \underline{\vec{r}_C\times\sum\vec{F}_i^{(e)}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{r}_i'\times\vec{F}_i^{(e)}}$$

——质点系相对质心的动量矩定理

因 $\vec{L}_C=\vec{L}_C'=\sum\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_{ir}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_C'}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{r}_i'\times\vec{F}_i^{(e)}}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum(\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) = \sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) = \boldsymbol{M}_C}$$

质点系相对于质心的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对质心的主矩。

§11-6 刚体平面运动微分方程

对于作平面运动的刚体，应用质心运动定理和相对质心的动量矩定理，得：

$$\begin{cases} m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i^{(e)} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_C\omega) = J_C\alpha = \sum M_C(\vec{F}_i^{(e)}) \end{cases}$$

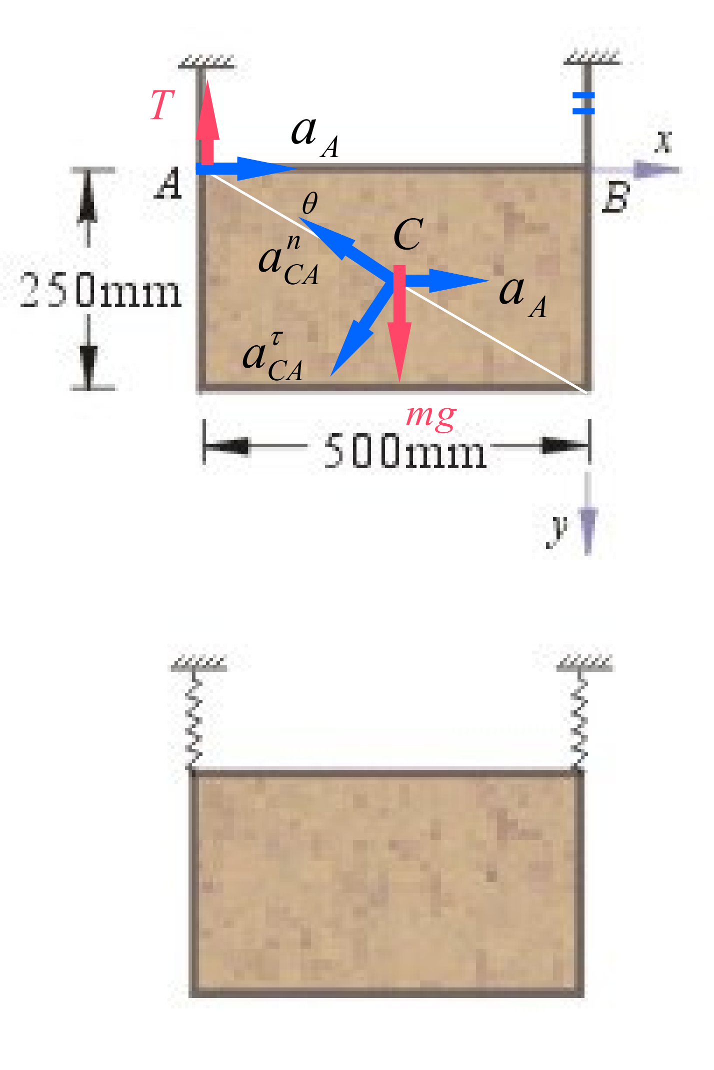
或

$$\boxed{\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2} = \sum \vec{F}_i^{(e)} \\ J_C\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_C(\vec{F}_i^{(e)}) \end{cases}}$$

——刚体平面运动微分方程

例11-4

4kg的均质板静止悬挂。求：*B*点的绳或弹簧被剪断的瞬时，质心加速度各为多少。



解： 1.考虑第一种情况，作受力分析和运动分析，如图所示。

应用刚体平面运动微分方程

$$\begin{cases} ma_{cx} = 0 & (1) \\ ma_{cy} = mg - T & (2) \\ J_c\alpha = T \times 0.25 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ma_{cx} = 0 & (1) \\ ma_{cy} = mg - T & (2) \\ J_c\alpha = T\times 0.25 & (3) \end{cases}$$

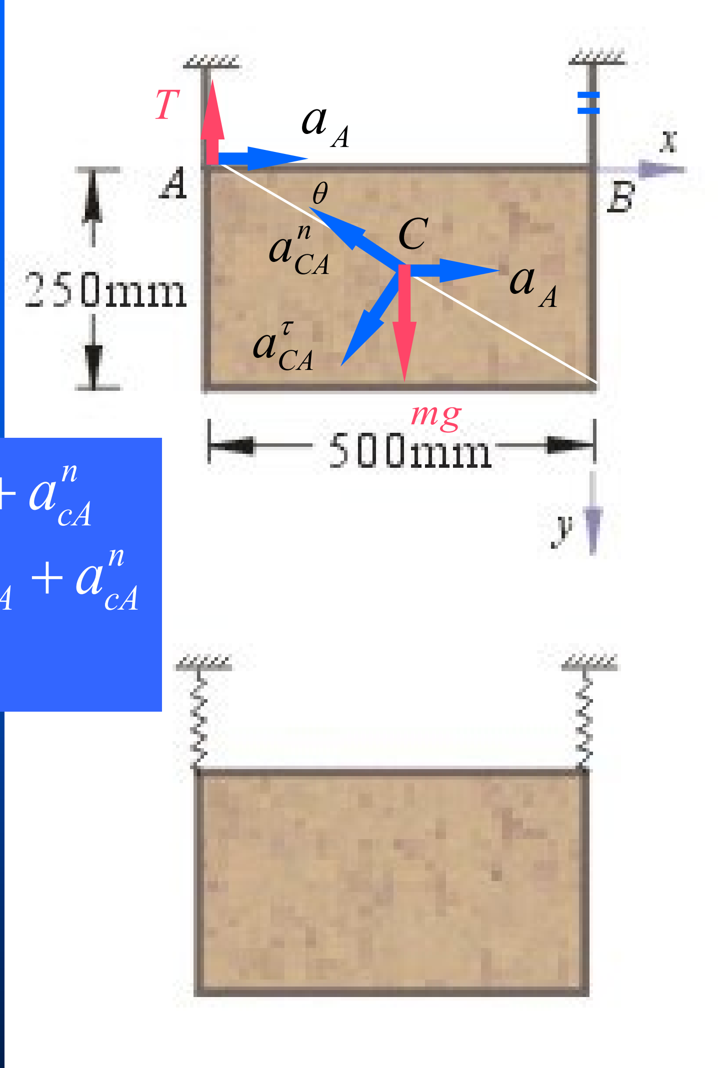
初瞬时ω=0　则有 $a_{cA}^{n} = 0$

又由(1)知$a_{cx} = 0$

$$a_c = a_A + a_{cA}^{\tau} + a_{cA}^{n}$$
$$= a_A^{\tau} + a_A^{n} + a_{cA}^{\tau} + a_{cA}^{n}$$
$$= a_A^{\tau} + a_{cA}^{\tau}$$

所以 $a_c = a_{cy} = a_{cA}^{\tau}\cos\theta$

$$= AC\cdot\alpha\cos\theta$$
$$= 0.25\alpha \qquad (4)$$



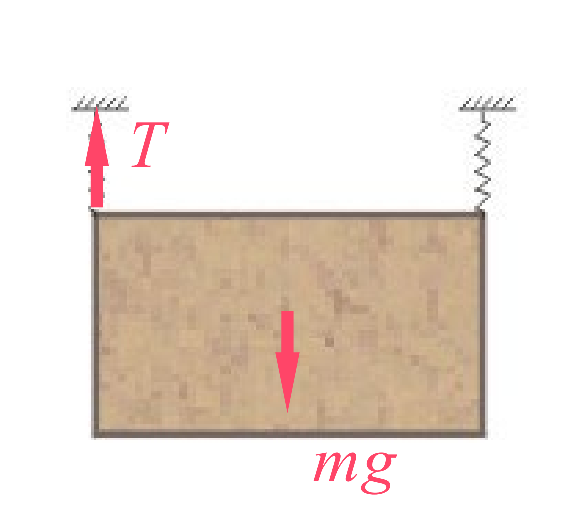
联立解(2)(3)(4)式

$$\alpha = \frac{12}{17}\cdot\frac{g}{0.25}, \qquad a_c = \frac{12}{17}g = 6.92\ \ \mathrm{m/s^2}$$

2.考虑第二种情况，受力分析如下，

初瞬时弹簧还未变形，弹簧力为

$$T=\frac{1}{2}mg$$



根据平面运动微分方程

$$\begin{cases} ma_{cx}=0 & (1) \\ ma_{cy}=mg-T & (2) \\ J_c\alpha=T\times 0.25 & (3) \end{cases}$$

由(2)式得

$$a_c=a_{cy}=\frac{g}{2}=4.9\ \ \mathrm{m/s^2}$$

谢谢各位学！