

第四章 弯曲内力（一）

第 11 讲

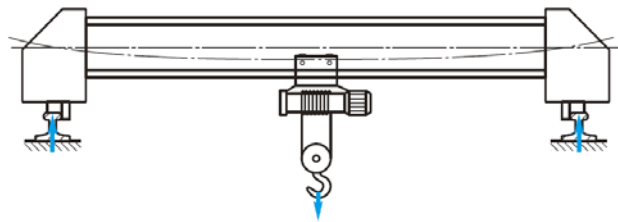
§ 4.1 弯曲的概念和实例

当杆件承受**垂直于杆件轴线的横向外力或外力偶作用时**，杆件的轴线变形后由直线变成了曲线，这种变形称为**弯曲（变形）**。

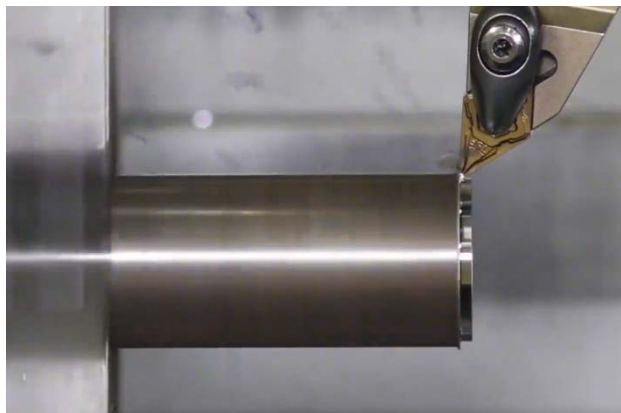
工程中以弯曲变形为主的杆件称为 **梁（beam）**



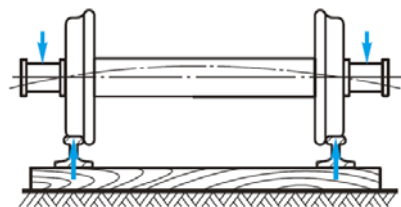
单杆



起重机的大梁



被车削的杆件



火车轮轴

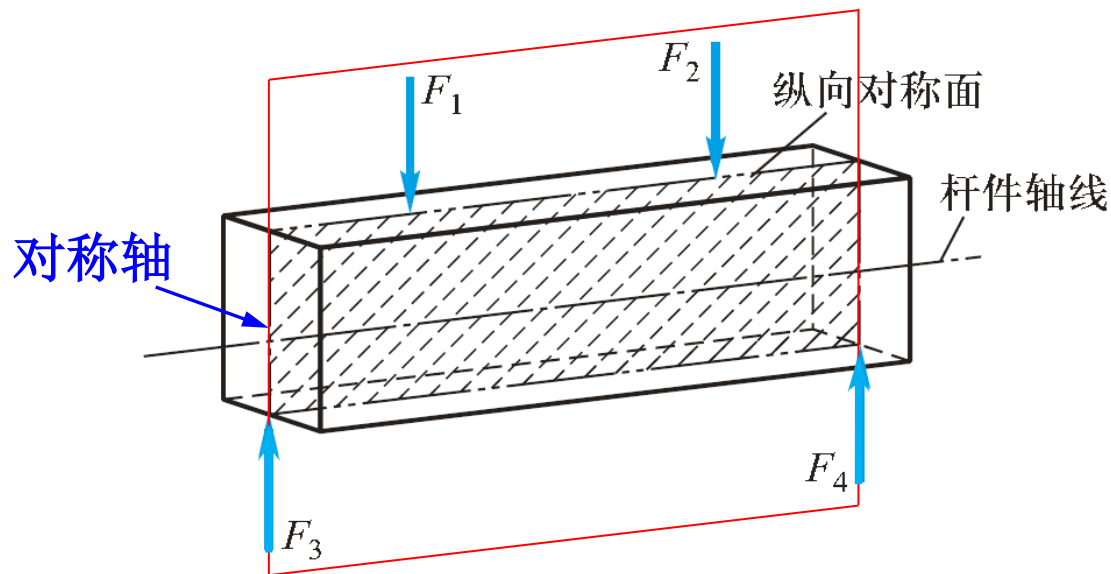


叉车挪动重物

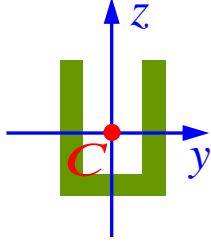
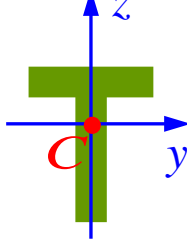
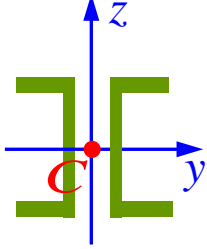
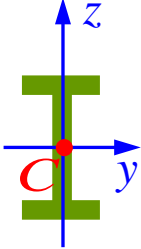
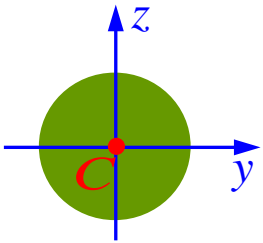


对称弯曲的概念

纵向对称面：梁的轴线与横截面的对称轴所构成的平面

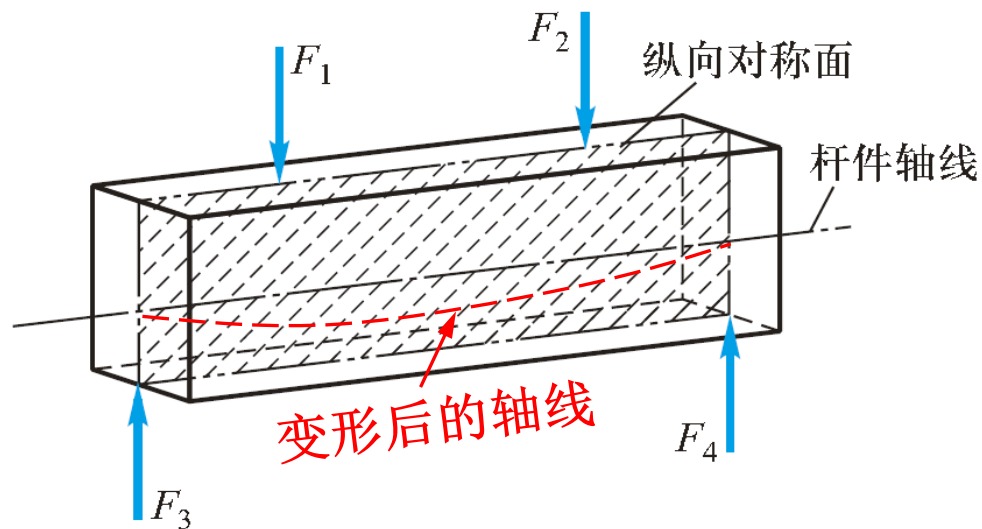


常见弯曲构件截面



对称弯曲：

当作用在梁上的载荷（横向力或力偶）均作用在纵向对称面内时，梁的轴线由直线变成一条**位于纵向对称面内**的平面曲线，这种弯曲称为**对称弯曲**。



满足对称弯曲的两个条件：

否则为非对称弯曲

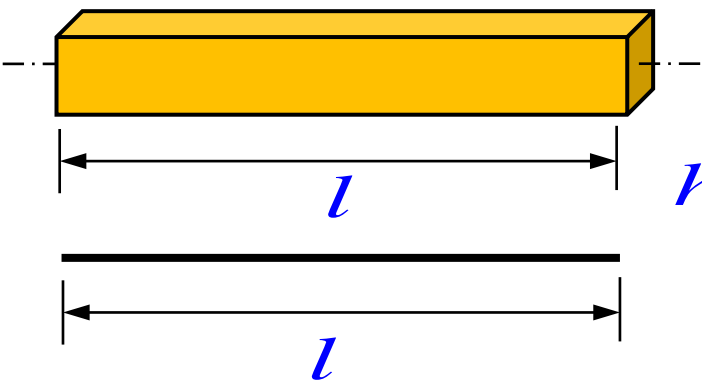
1. 梁要有对称面

2. 外载荷要作用在纵向对称面内

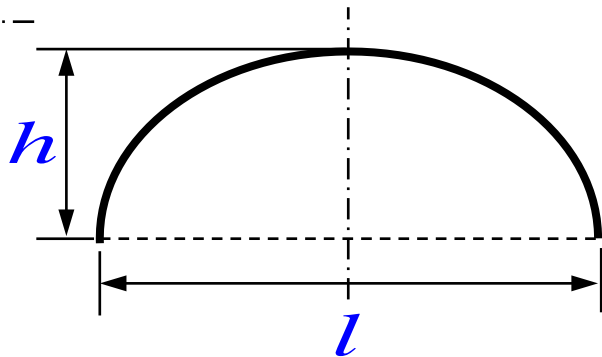
§ 4.2 受弯杆件的简化

一、杆件的简化

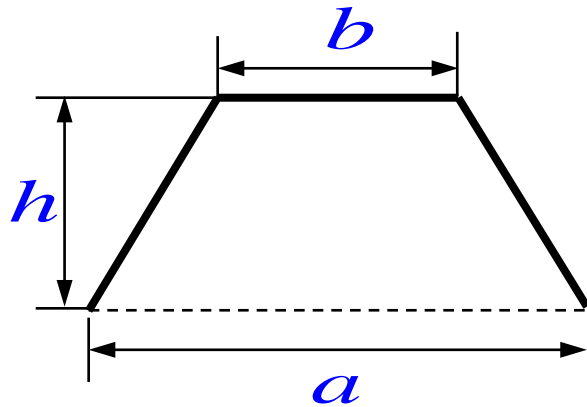
用梁的**轴线**来代替实际的梁，折杆或曲杆用**中心线**代替



直梁



曲梁（杆）

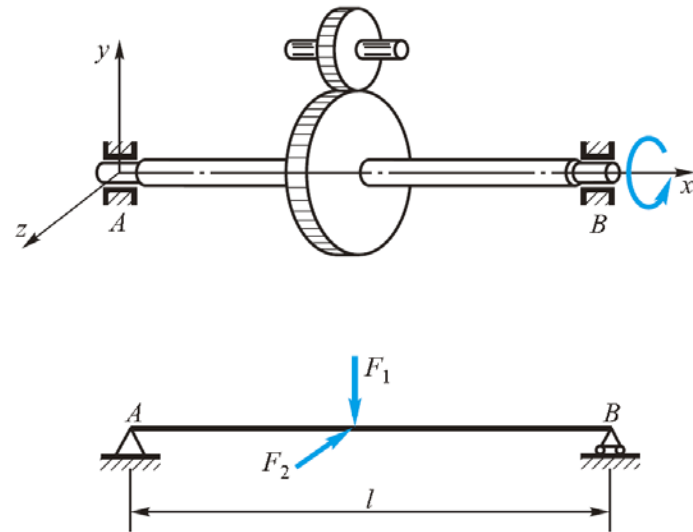


折杆

二、支座的几种基本形式

1. 固定铰支座和可动铰支座

传动轴的两端为短滑动轴承。在传动力作用下将引起轴的弯曲变形，这将使两端横截面发生角度很小的偏转。由于支承处的间隙等原因，短滑动轴承并不能约束轴端部横截面绕 z 轴或 y 轴的微小偏转。这样就可把短滑动轴承简化成铰支座。又因轴肩与轴承的接触限制了轴线方向的位移，故可将两轴承中的一个简化成固定铰支座，另一个简化成可动铰支座。





支座处约束的特征：

固定铰支座：水平和竖直方向不能动，但可以自由转动

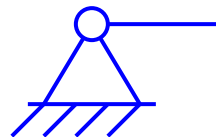
可动铰支座：竖直方向不能动，水平方向和自由伸缩，还可以自由转动

固定铰支座 (pin support)

支座示意图



刘鸿文主编教材的画法

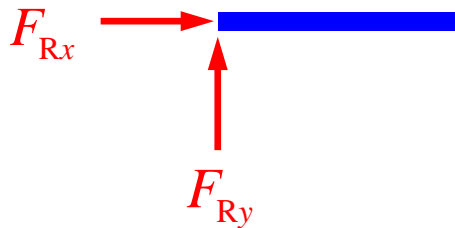


其它画法

对支座处约束
的位移描述

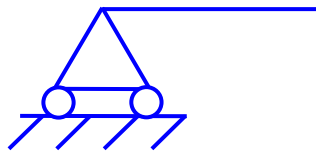
$$u_x = 0, \quad u_y = 0$$

支座约束力
Reactions

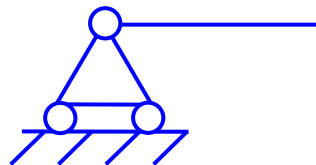


可动铰支座 (roller support)

支座示意图



刘鸿文主编教材的画法

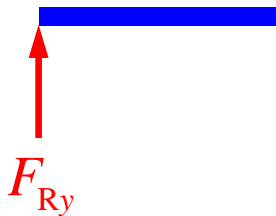


其它画法

对支座处约束
的位移描述

$$u_y = 0$$

支座约束力



2. 固定端支座（简称固定端）

支座处约束的特征：

水平和竖直方向不能动，也不能转动。

支座示意图



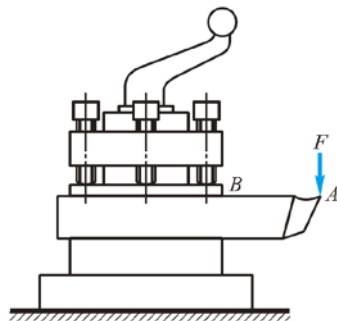
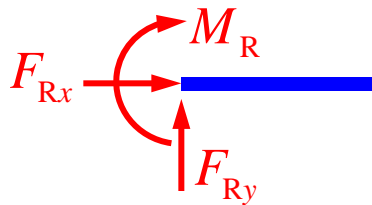
对支座处约束
的位移描述

$$u_x = 0$$

$$u_y = 0$$

$$\theta = 0$$

支座约束力



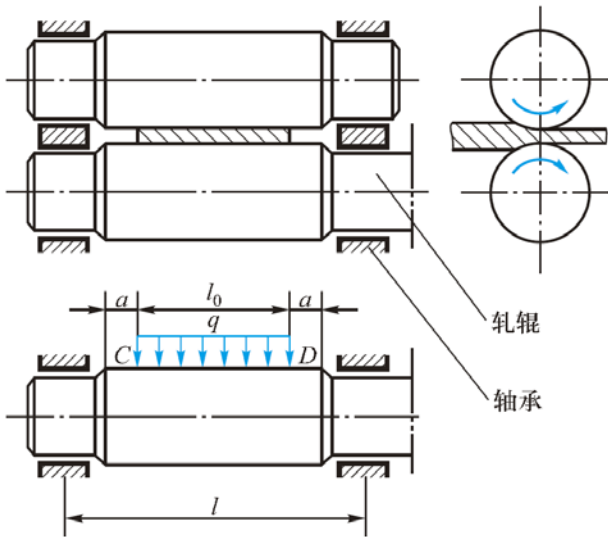
车床上固定
于刀架上的
割刀



三、载荷的简化

作用在传动轴上的传动力、车床主轴上的切削力、割刀上的切削力等，其分布的范围都远小于传动轴、车床主轴和割刀的长度，所以都可以简化成**集中力**。吊车梁上的吊重、火车车厢对轮轴的压力等，也都可以简化成集中力。

薄板轧机，在轧辊与板材的接触长度长度 l_0 内，可以认为轧辊与板材间相互作用的轧制力是均匀分布的，称为**均布载荷**。若轧制力为 F ，沿轧辊轴线单位长度内的载荷应为 $q = F/l_0$ ， q 称为载荷集度。

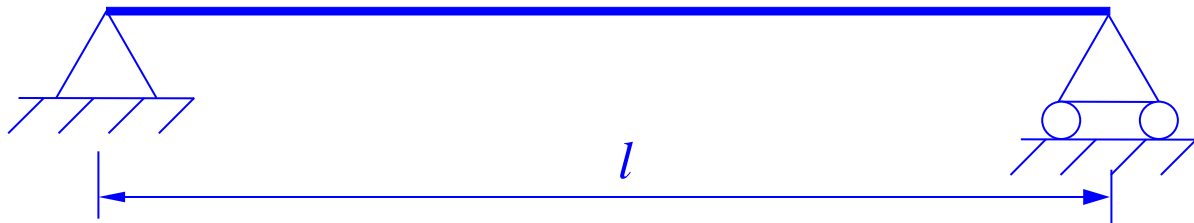


四、静定梁的基本形式

静定梁：所有支座约束反力均可由平衡方程求出的梁。

跨度

1. 简支梁



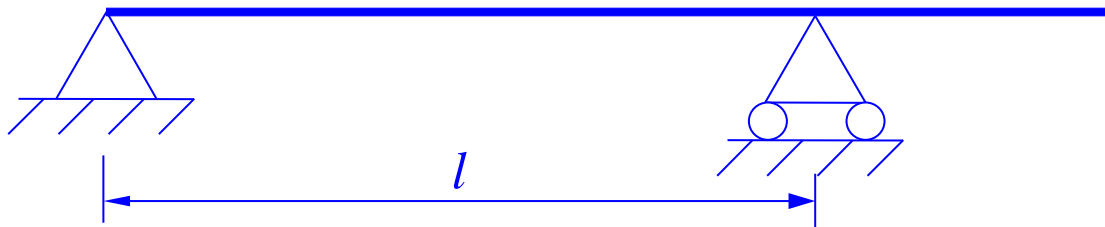
平衡方程：3个； 约束力：2+1=3个

2. 悬臂梁



跨度

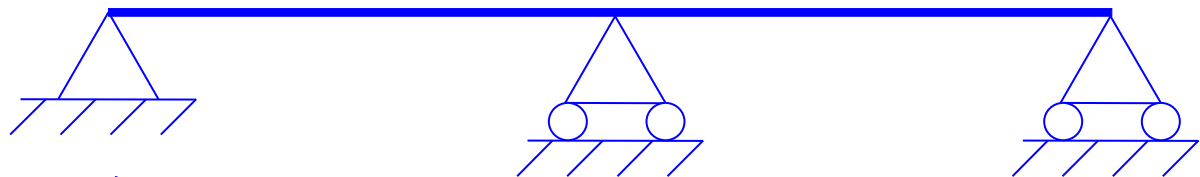
3. 外伸梁



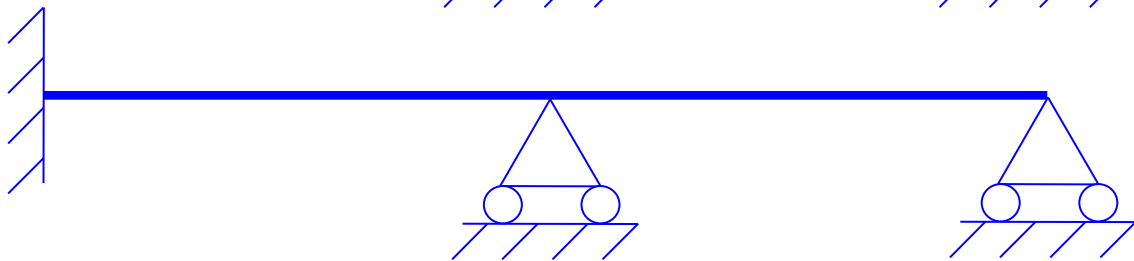
五、几种超静定梁的形式

超静定梁： 梁上所有支座约束力的数目多于平衡方程数，此时无法仅用衡方程确定出所有的约束力。

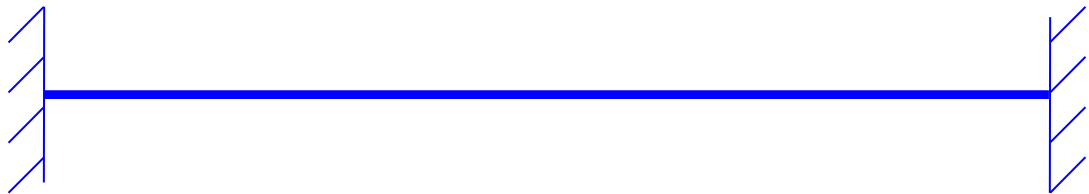
1次超静定梁



2次超静定梁



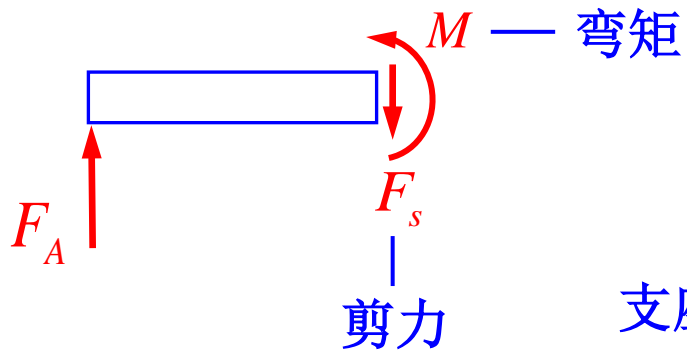
3次超静定梁



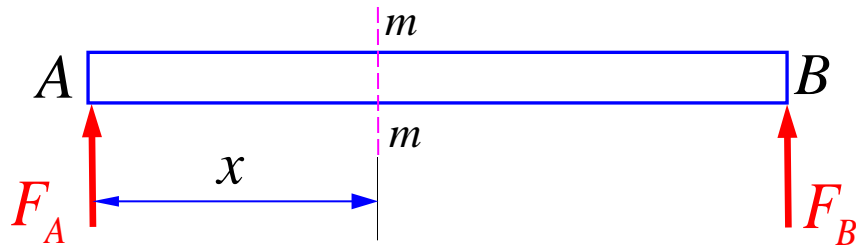
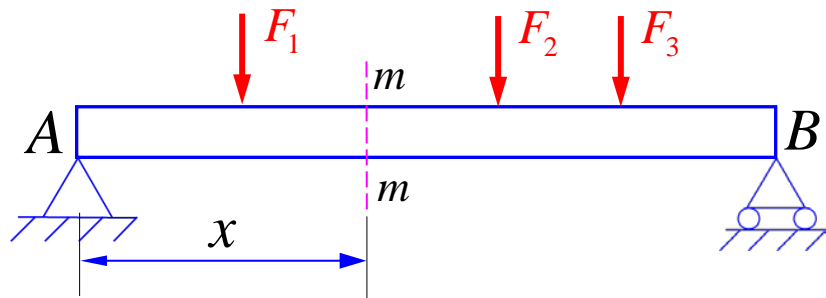
§ 4.3 剪力和弯矩

一、梁横截面上的内力

截面法

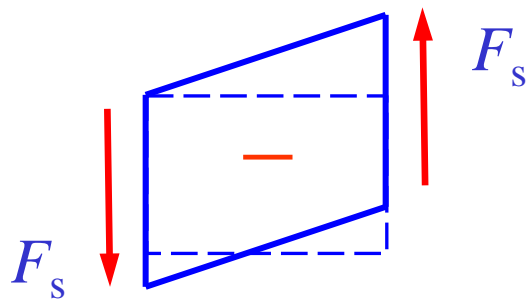
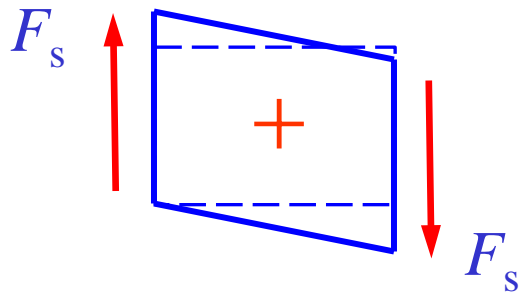


支座约束力

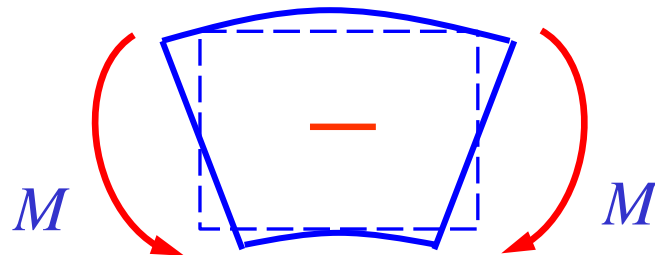
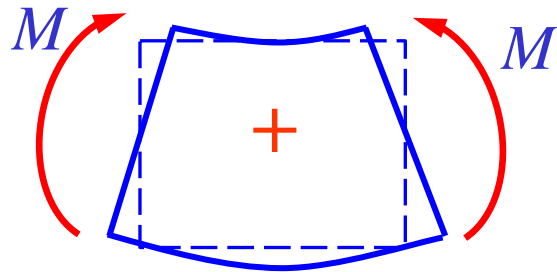


二、剪力和弯矩的正负号规定

F_s : 左上右下为正



M : 上压下拉 (上凹下凸) 为正



例1 求图示结构 x 截面处的剪力和弯矩。

解： 支座约束力

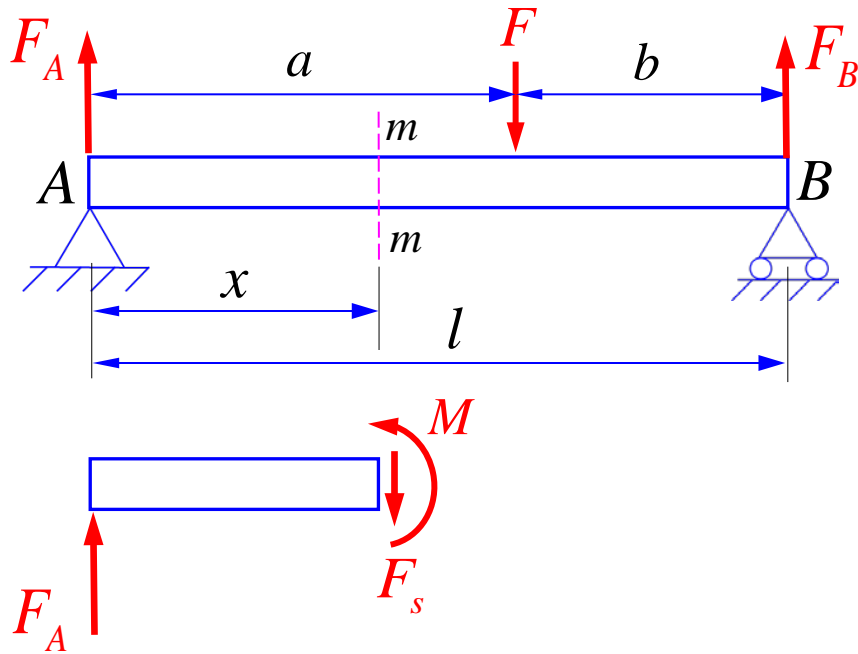
$$F_A = \frac{b}{l}F, \quad F_B = \frac{a}{l}F$$

求内力：截面法（截和代）

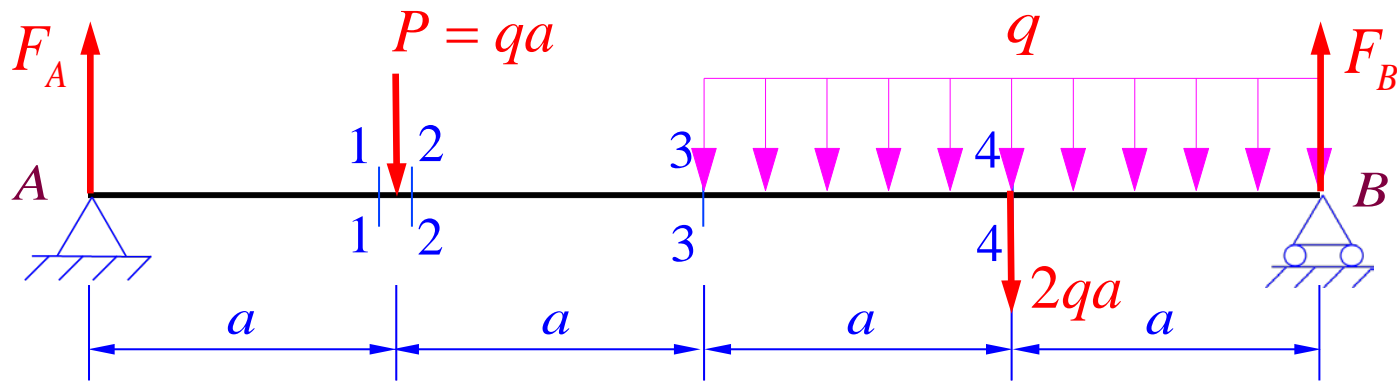
静力平衡条件

$$F_s = F_A = \frac{b}{l}F \quad (+)$$

$$M = F_A x = \frac{b}{l}Fx \quad (+)$$



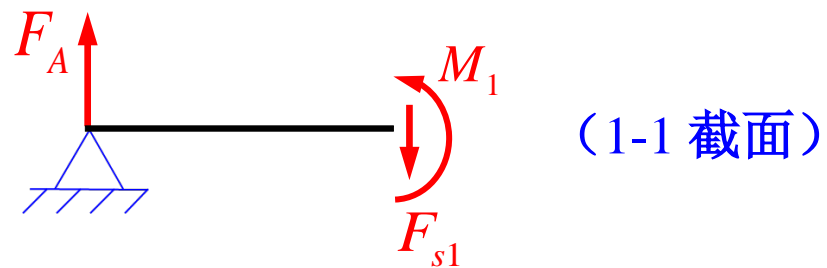
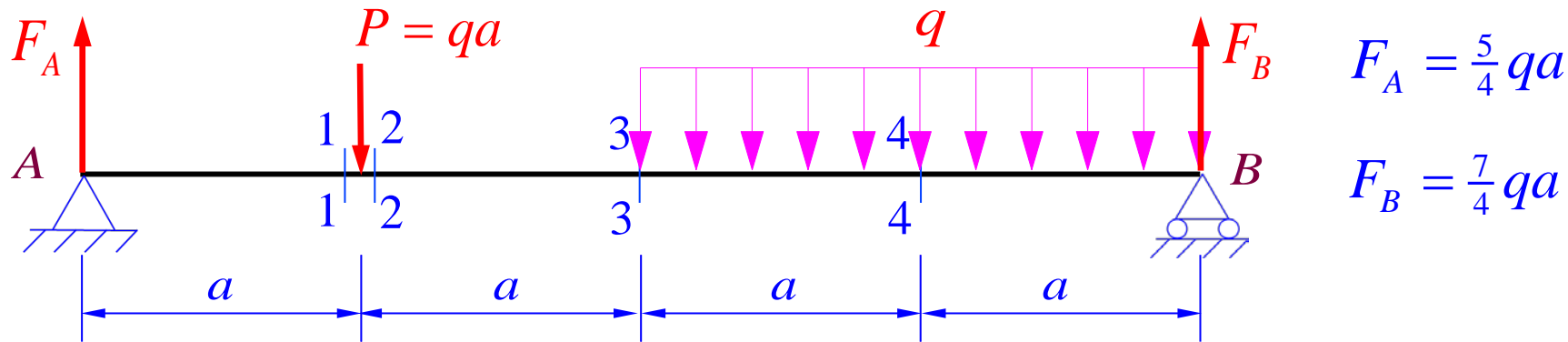
例2 求图示梁1-1、2-2、3-3、4-4 截面上的剪力和弯矩。



解：求支座约束力

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_A \times 4a = qa \times 3a + 2qa \times a \Rightarrow F_A = \frac{5}{4} qa$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_B = qa + q \cdot 2a \Rightarrow F_B = \frac{7}{4} qa$$



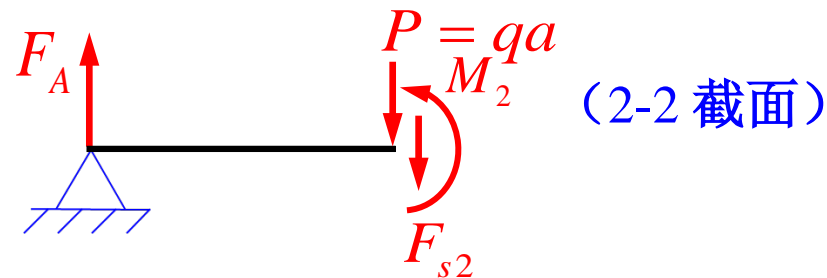
$$F_{s1} = F_A = \frac{5}{4} qa$$

$$M_1 = F_A \cdot a = \frac{5}{4} qa^2$$

1-1和2-2截面上

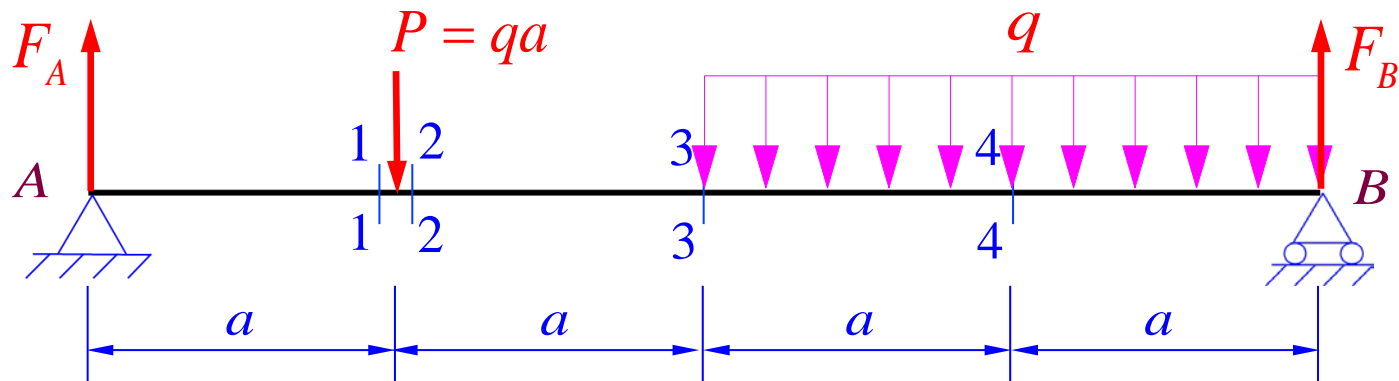
弯矩相等

剪力不相等



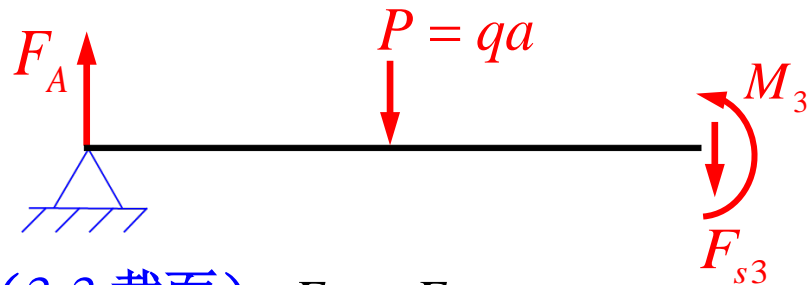
$$F_{s2} = F_A - qa = \frac{5}{4} qa - qa = \frac{1}{4} qa$$

$$M_2 = F_A \cdot a - qa \times 0 = \frac{5}{4} qa^2$$



$$F_A = \frac{5}{4} qa$$

$$F_B = \frac{7}{4} qa$$



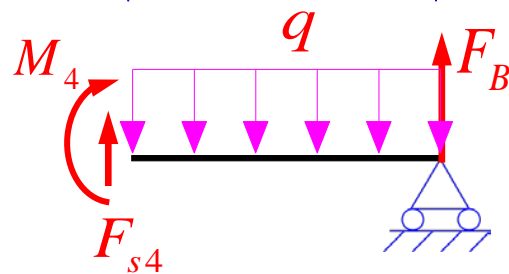
(3-3 截面)

$$F_{s3} = F_A - qa$$

$$= \frac{5}{4} qa - qa = \frac{1}{4} qa$$

$$M_3 = F_A \cdot 2a - qa \cdot a$$

$$= \frac{5}{2} qa^2 - qa^2 = \frac{3}{2} qa^2$$



(4-4 截面)

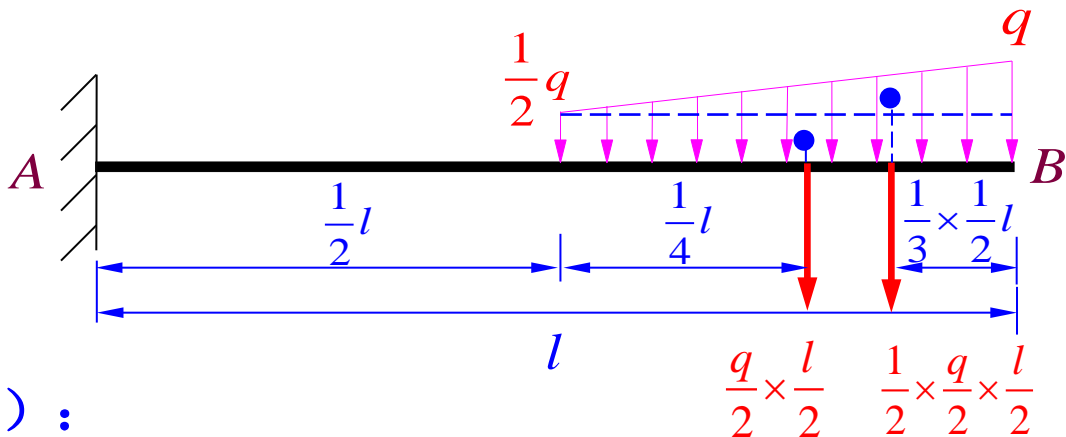
$$F_{s4} = qa - F_B$$

$$= qa - \frac{7}{4} qa = -\frac{3}{4} qa$$

$$M_4 = F_B \cdot a - qa \cdot \frac{a}{2}$$

$$= \frac{7}{4} qa^2 - \frac{1}{2} qa^2 = \frac{5}{4} qa^2$$

例3 求图示悬臂梁端部截面上的剪力和弯矩。

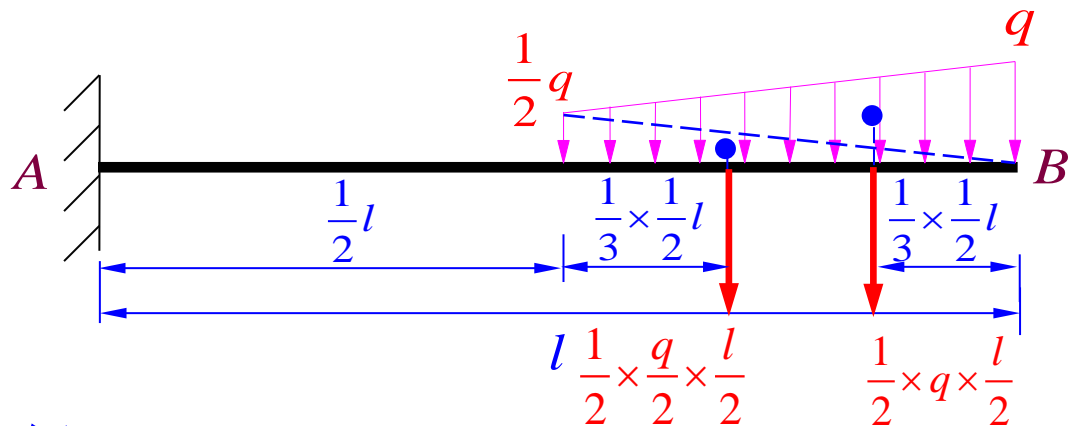


均布载荷 $q/2$
+
三角形分布载荷

解（一）：

$$F_s = \frac{1}{4}ql + \frac{1}{8}ql = \frac{3}{8}ql$$

$$M = -\frac{1}{4}ql \times \left(\frac{1}{2}l + \frac{1}{4}l\right) - \frac{1}{8}ql \times \left(\frac{1}{2}l + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}l\right) = -\frac{7}{24}ql^2$$



三角形分布载荷 (1)

+

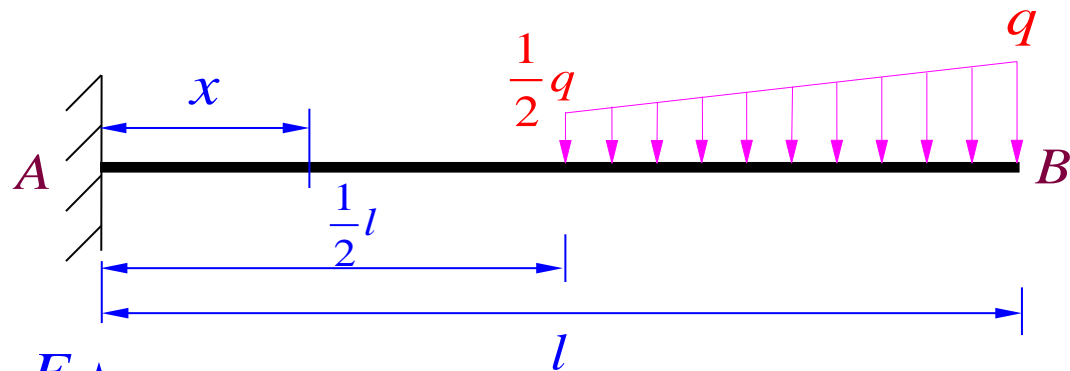
三角形分布载荷 (2)

解 (二) :

$$F_s = \frac{1}{4}ql + \frac{1}{8}ql = \frac{3}{8}ql$$

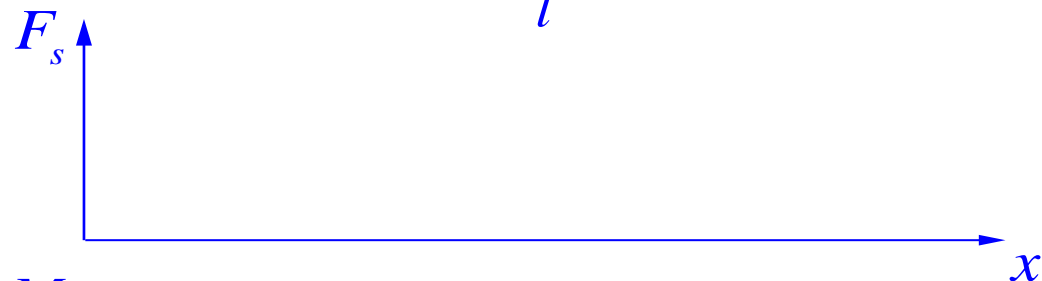
$$M = -\frac{1}{8}ql \times \left(\frac{1}{2}l + \frac{1}{6}l\right) - \frac{1}{4}ql \times \left(\frac{1}{2}l + \frac{1}{3}l\right) = -\frac{7}{24}ql^2$$

§ 4.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图



$F_s = F_s(x)$ 剪力方程

$M = M(x)$ 弯矩方程

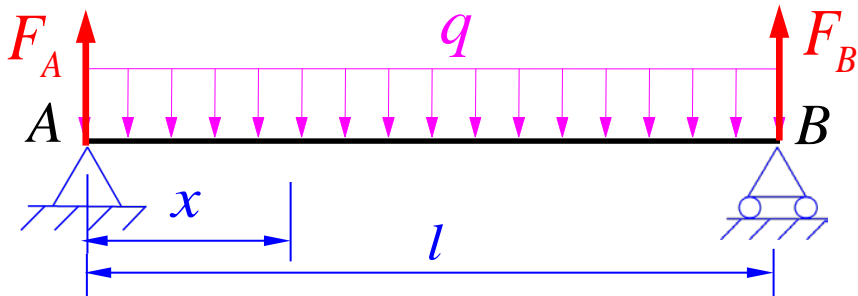


剪力图



弯矩图

例4 作简支梁在全梁受均布荷载 q 作用情形的剪力图和弯矩图。



解：求支座约束力 $F_A = F_B = \frac{1}{2}ql$

剪力方程

$$F_s(x) = F_A - qx = \frac{1}{2}ql - qx$$

(0 < x < l)

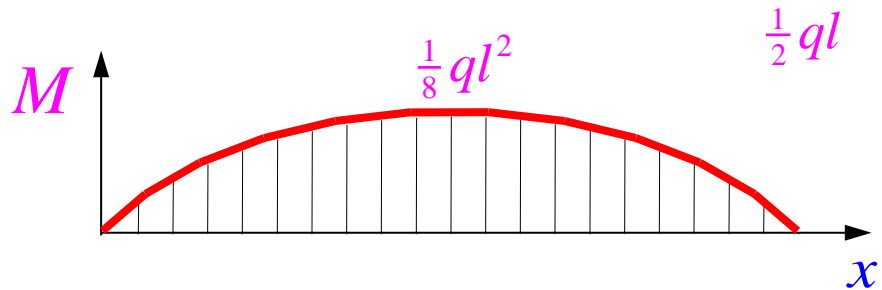
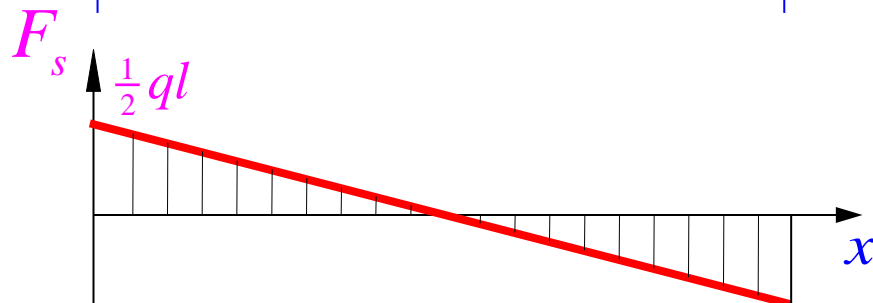
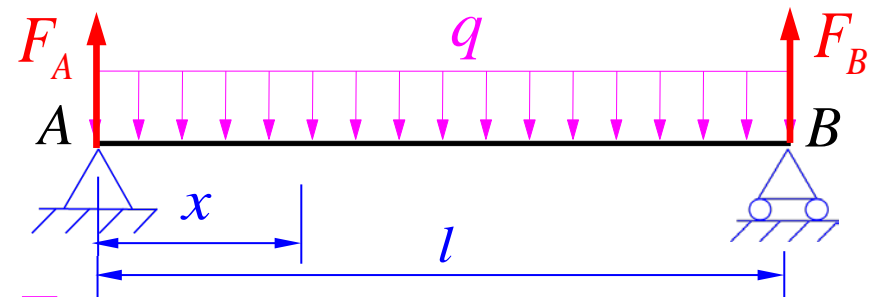
↑
左段上外力的合力
(向上为正)

弯矩方程

$$M(x) = \frac{1}{2}qlx - qx\frac{x}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}q\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}ql^2$$

↑
左段上外力的合力矩
(下边受拉为正)

(0 ≤ x ≤ l)



$$F_A = F_B = \frac{1}{2}ql$$

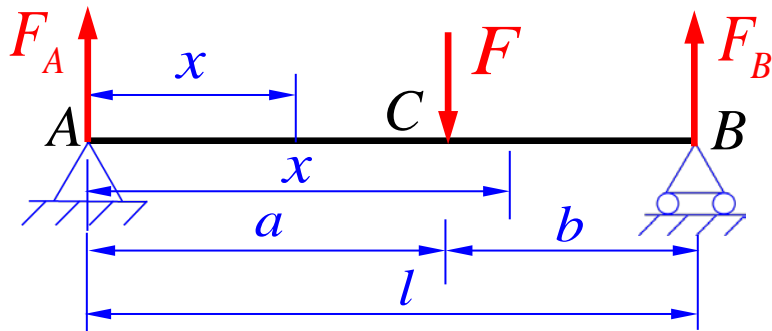
剪力方程

$$F_s(x) = \frac{1}{2}ql - qx \quad (0 < x < l)$$

弯矩方程

$$M(x) = -\frac{1}{2}q\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}ql^2 \quad (0 \leq x \leq l)$$

例5 作简支梁受集中荷载 F 作用情形的剪力图和弯矩图。



解：求支座约束力 $F_A = \frac{b}{l} F$, $F_B = \frac{a}{l} F$

剪力方程和弯矩方程

AC段：

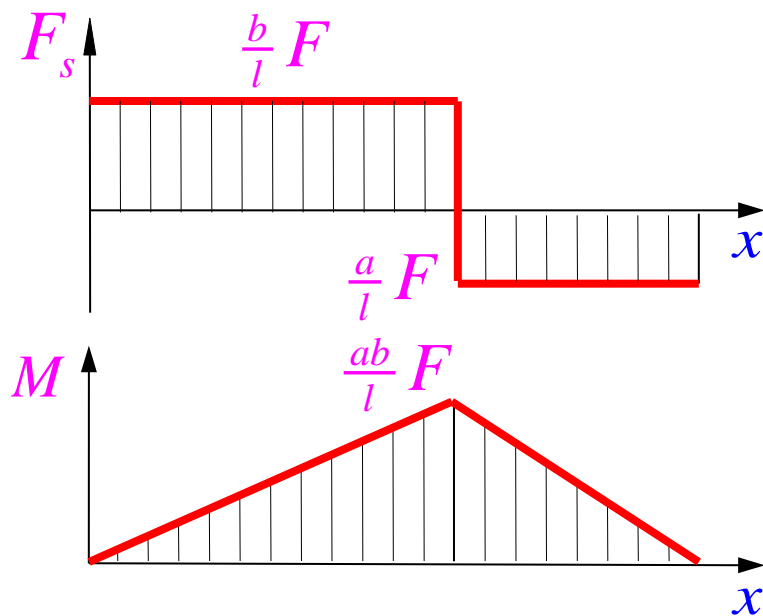
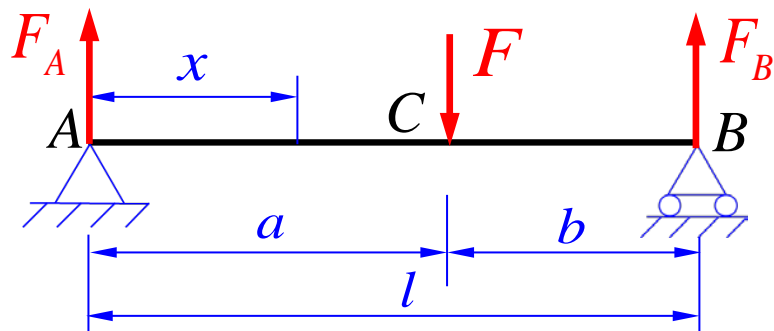
$$F_s(x) = F_A = \frac{b}{l} F \quad (0 < x < a)$$

$$M(x) = F_A \cdot x = \frac{b}{l} Fx \quad (0 \leq x \leq a)$$

CB段：

$$F_s(x) = F_A - F = -F_B = -\frac{a}{l} F \quad (a < x < l)$$

$$M(x) = F_B \cdot (l - x) = F \frac{a}{l} (l - x) \quad (a < x \leq l)$$



$$F_A = \frac{b}{l} F, \quad F_B = \frac{a}{l} F$$

剪力方程和弯矩方程

AC段:

$$F_s(x) = F_A = \frac{b}{l} F \quad (0 < x < a)$$

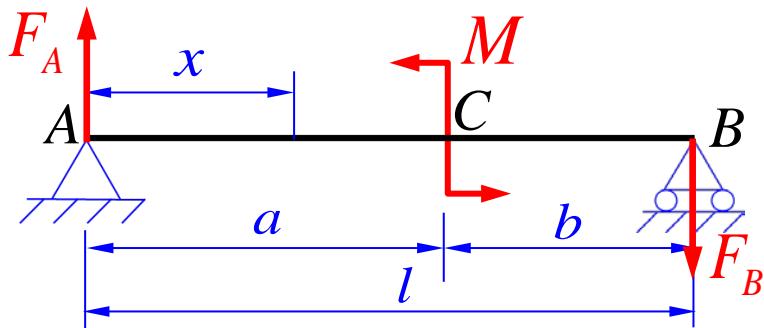
$$M(x) = F_A \cdot x = \frac{b}{l} Fx \quad (0 \leq x \leq a)$$

CB段:

$$F_s(x) = F_A - F = -F_B = -\frac{a}{l} F \quad (a < x < l)$$

$$M(x) = F_B \cdot (l - x) = F \frac{a}{l} (l - x) \quad (a < x \leq l)$$

例6 作简支梁受集中弯矩 M 作用情形的剪力弯矩图。



解：求支座约束力 $F_A = \frac{M}{l}$, $F_B = \frac{M}{l}$

剪力方程和弯矩方程

AC段：

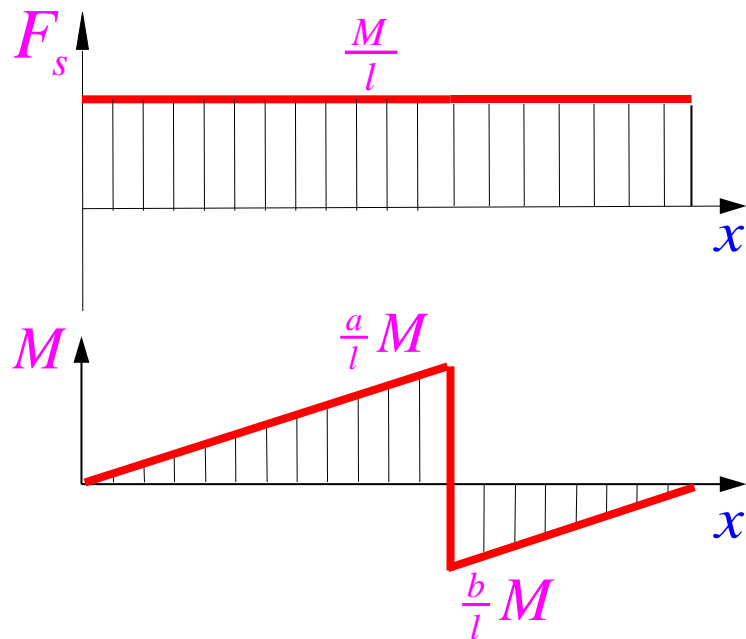
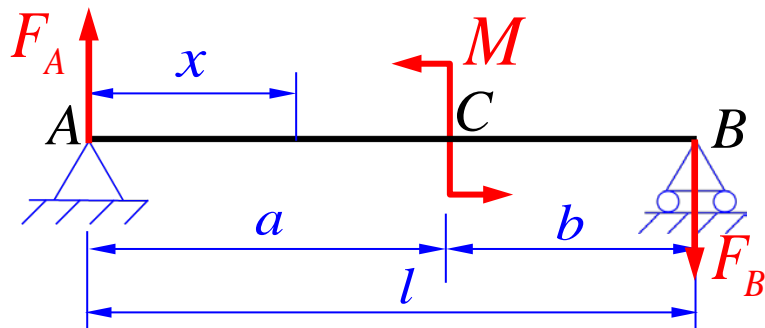
$$F_s(x) = \frac{M}{l} \quad (0 < x < a)$$

$$M(x) = \frac{M}{l} x \quad (0 \leq x \leq a)$$

CB段：

$$F_s(x) = F_A = \frac{M}{l} \quad (a < x < l)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= F_A x - M = \frac{M}{l} x - M = -\frac{M}{l} (l - x) \\ &= -F_B (l - x) \quad (a < x \leq l) \end{aligned}$$



$$F_A = \frac{M}{l}, \quad F_B = \frac{M}{l}$$

剪力方程和弯矩方程

AC段:

$$F_s(x) = \frac{M}{l} \quad (0 < x < a)$$

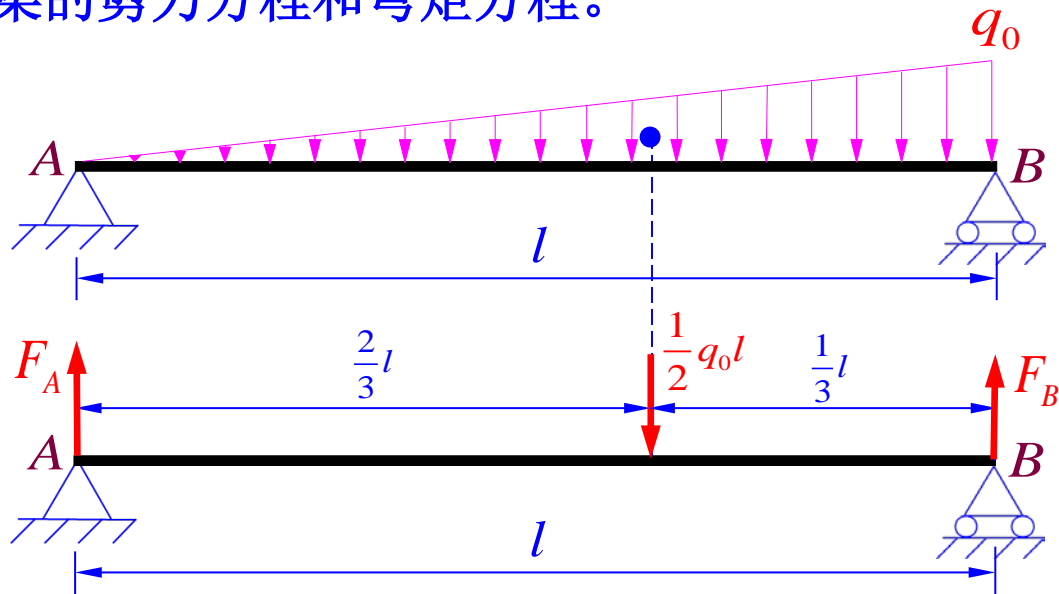
$$M(x) = \frac{M}{l} x \quad (0 \leq x \leq a)$$

CB段:

$$F_s(x) = \frac{M}{l} \quad (a < x < l)$$

$$M(x) = -\frac{M}{l} (l - x) \quad (a < x \leq l)$$

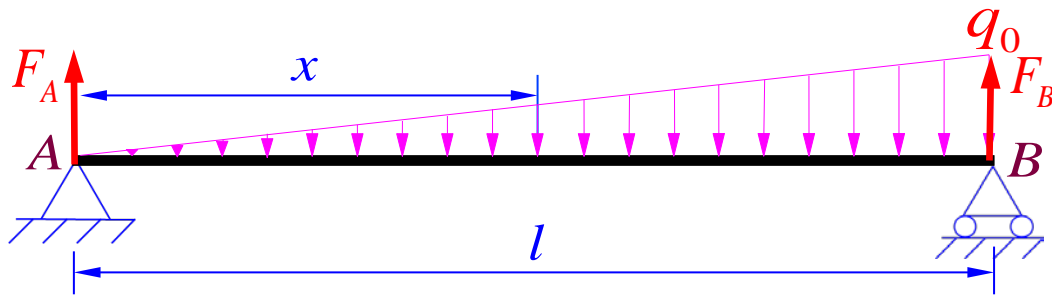
例7 写出图示梁的剪力方程和弯矩方程。



解：求约束力

$$\sum M_B = 0 \quad F_A l = \frac{1}{2} q_0 l \times \frac{1}{3} l \Rightarrow F_A = \frac{1}{6} q_0 l$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_B l = \frac{1}{2} q_0 l \times \frac{2}{3} l \Rightarrow F_B = \frac{1}{3} q_0 l$$



$$F_A = \frac{1}{6} q_0 l$$

$$F_B = \frac{1}{3} q_0 l$$

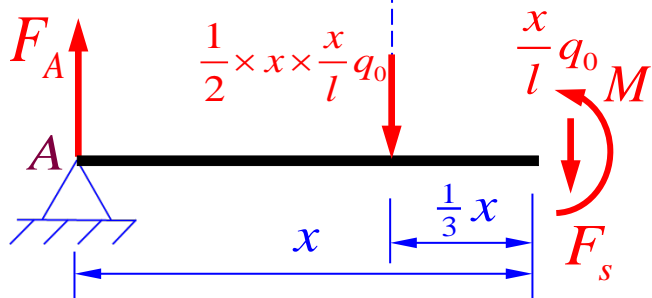
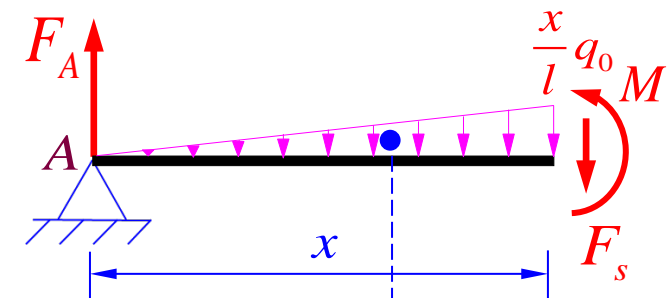
剪力方程和弯矩方程

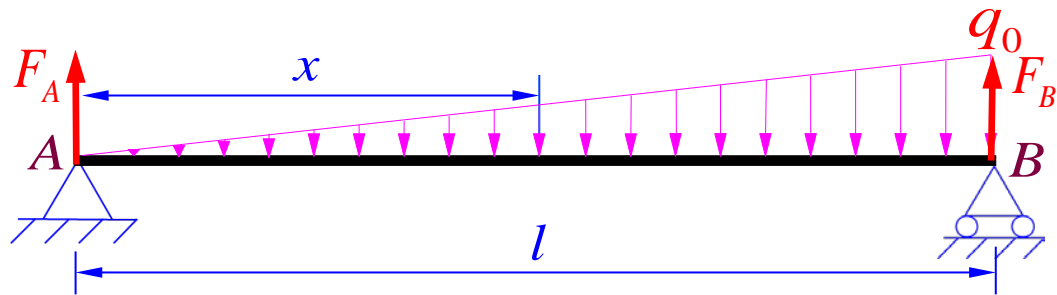
$$F_s(x) = F_A - \frac{1}{2} \times x \times \frac{x}{l} q_0$$

$$= \frac{1}{6} q_0 l - \frac{x^2}{2l} q_0 = \frac{l^2 - 3x^2}{6l} q_0$$

$$M(x) = F_A \times x - \frac{x^2}{2l} q_0 \times \frac{1}{3} x$$

$$= \frac{1}{6} q_0 l x - \frac{x^3}{6l} q_0 = \frac{1}{6l} q_0 x (l^2 - x^2)$$



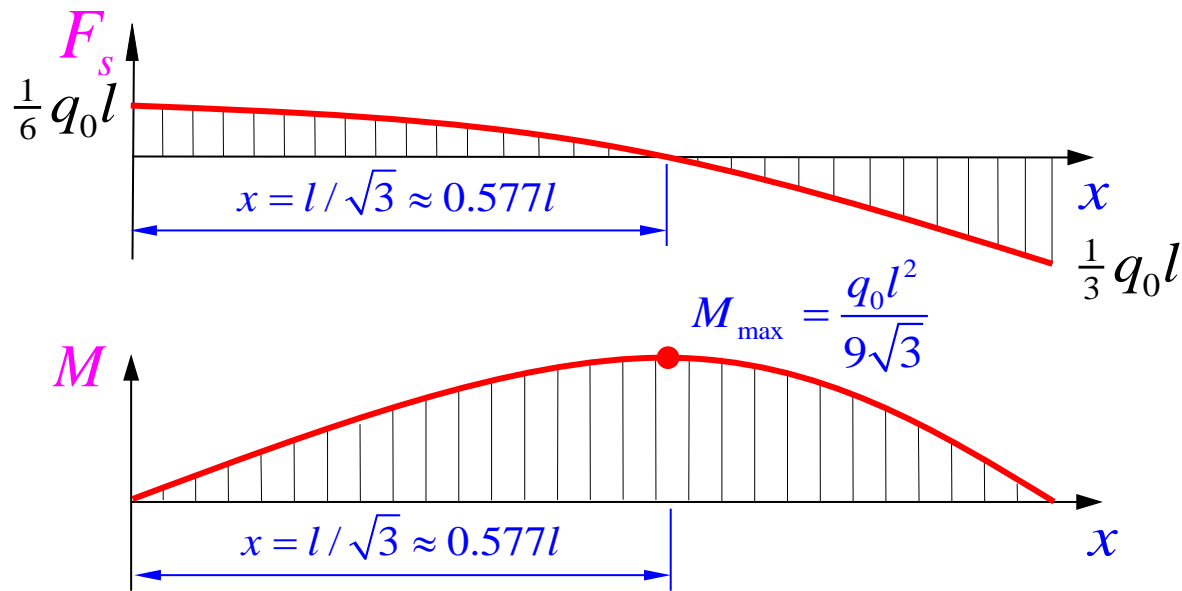


$$F_A = \frac{1}{6} q_0 l, \quad F_B = \frac{1}{3} q_0 l$$

剪力方程和弯矩方程

$$F_s(x) = \frac{l^2 - 3x^2}{6l} q_0$$

$$M(x) = \frac{1}{6l} q_0 x(l^2 - x^2)$$

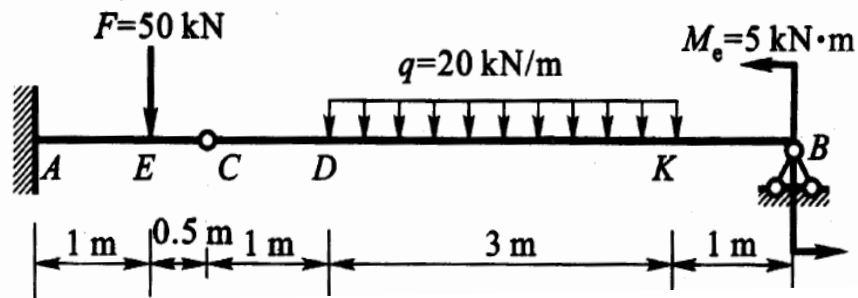
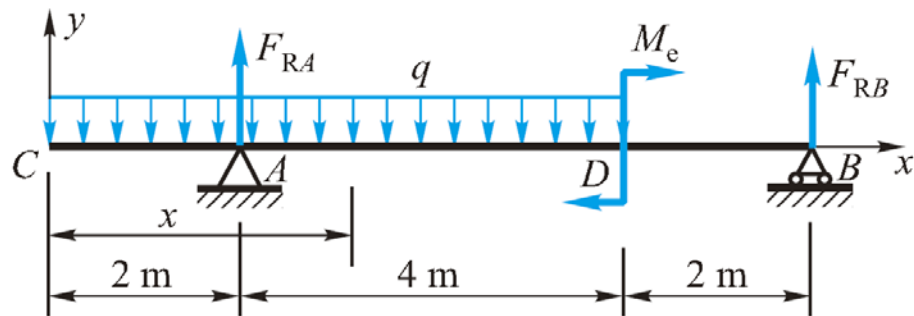


最大弯矩: $\frac{dM(x)}{dx} = 0$

$$l^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$M_{\max} = M \Big|_{x=\frac{l}{\sqrt{3}}} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}$$

剪力图和弯矩图？



谢谢大家

作业 P140-141: 4.1(f)、(j)
 P142-143: 4-4(i), (l)

对应第6版的题号: P133: 4.1(f)、(j); P134: 4-4(i), (l)

下次课讲弯矩、剪力与分布集度间的微分关系及其应用