机械工程测试技术

傅里叶变换

傅里叶三角级数（单边谱）

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

或者

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos\left(n\omega_0 t-\arctan\frac{b_n}{a_n}\right)\right)$$

其中

$$\begin{cases}\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}\\ a_0=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}}x(t)dt\\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}}x(t)\cos n\omega_0 tdt\\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}}x(t)\sin n\omega_0 tdt\end{cases}$$

显然当$x(t)$为奇函数时$a_0=a_n=0$，当$x(t)$为偶函数时$b_n=0$。

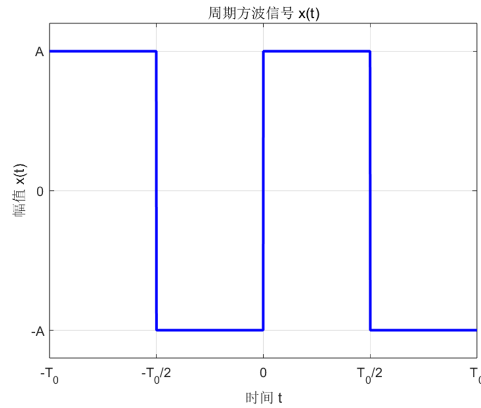
例题（幅频谱和相角谱）

求图所示周期方波信号的傅里叶级数的三角函数展开式，并画出其幅频谱和相角谱。

傅里叶级数系数在一个周期内：

$$x(t)=\begin{cases}-A & -T_0/2\le t<0\\ A & 0\le t\le T_0/2\end{cases}$$

因为 $x(t)$ 是奇函数，所以：



$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0 \quad (\text{for } n \geq 1)$$

计算 b_n（令 $\omega_0 = 2\pi/T_0$）：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt \\ &= \frac{2}{T_0}\cdot 2\int_0^{T_0/2} A\sin(n\omega_0 t)dt \\ &= \frac{4A}{T_0}\left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{T_0/2} \\ &= -\frac{4A}{n\omega_0 T_0}\left[\cos\left(n\omega_0\frac{T_0}{2}\right) - \cos(0)\right] \end{aligned}$$

因为 $\omega_0 T_0 = 2\pi$，所以 $\omega_0\frac{T_0}{2} = \pi$：

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{4A}{n(2\pi)}[\cos(n\pi) - 1] \\ &= -\frac{2A}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) \end{aligned}$$

分析 b_n 的值：当 n 为偶数时 (n = 2, 4, ...): $\cos(n\pi) = 1$，所以 $b_n = 0$。当 n 为奇数时 (n = 1, 3, ...): $\cos(n\pi) = -1$，所以 $b_n = -\frac{2A}{n\pi}(-1-1) = \frac{4A}{n\pi}$。总结 b_n：

$$b_n = \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} & n \text{ 为奇数} \\ 0 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

三角函数展开式将 a_n 和 b_n 代入傅里叶级数：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t))$$

$$x(t) = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{4A}{n\pi}\sin(n\omega_0 t)$$

展开为：

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \ldots\right)$$

幅频谱表示信号各频率分量下的幅值，相频谱表示信号各频率下的相角，从而可以画出幅频谱和相频谱如下