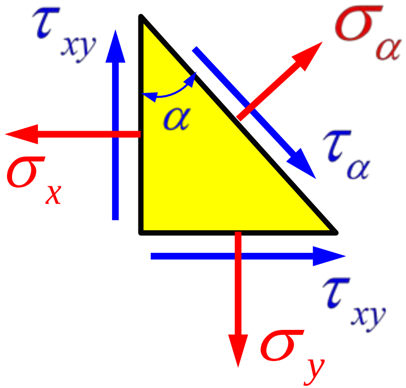
第七章　应力和应变分析
强度理论（二）

第18讲

二向应力状态的应力分析—解析法

任意α斜截面上的两个应力分量：



$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha$$

主应力的大小和方位

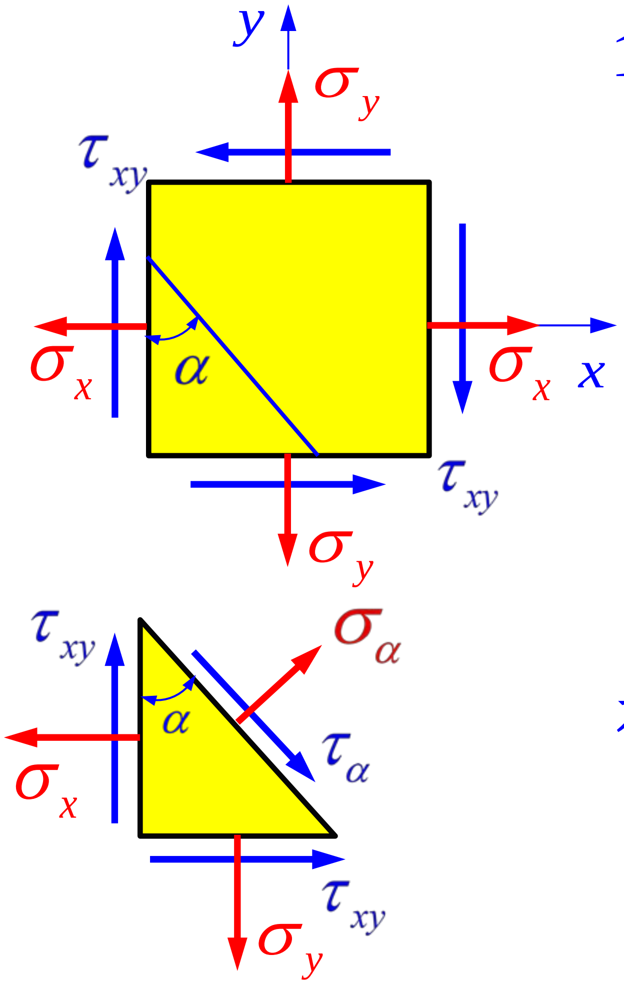
$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

最大切应力及其方位

$$\tau_{\max}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\alpha_1=\alpha_0+\frac{\pi}{4}$$



1. 斜截面应力

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

往下是关键—平方和相加，得

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad \text{圆方程}$$

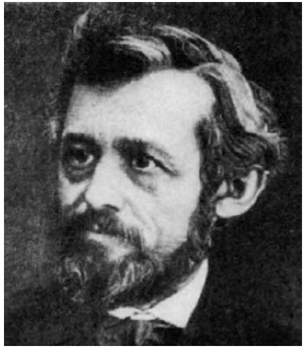
在σ_α–τ_α 坐标系中，σ_α与τ_α 落在一个圆上

（应力圆— Stress circle ）

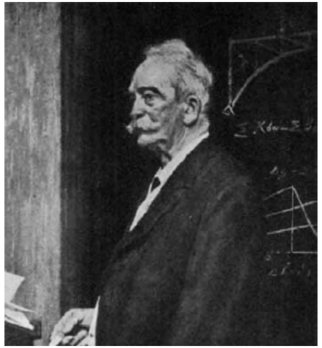
应力圆

1866年德国的Karl Culmann（K. 库尔曼） 首先证明，物体中一点的二向应力状态可用平面上的一个圆表示。

1882年德国土木工程师Christian Otto Mohr作了进一步的研究，提出借助应力圆确定一点的应力状态的几何方法，后人就称应力圆为莫尔应力圆，简称莫尔圆（Mohr's Circle）。



Karl Culmann
（1821-1881）



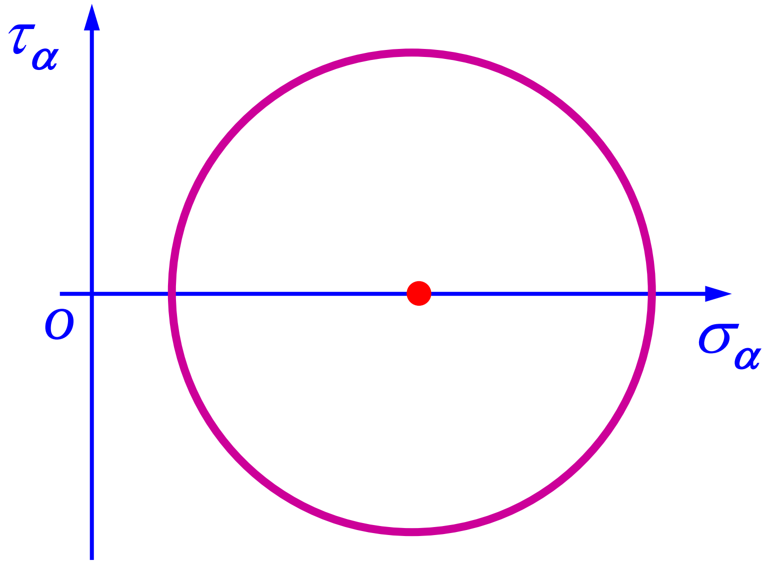
C. Otto Mohr
（1835-1918）

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

圆的两个重要参数：

圆心？— $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$

半径？— $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$



2. 应力圆的画法

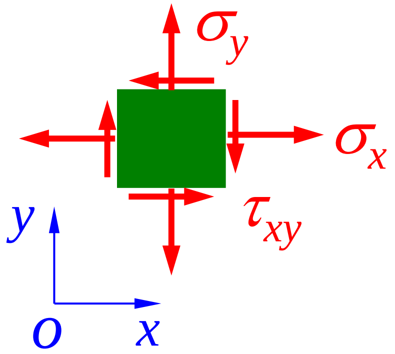
（1）坐标系内画出点

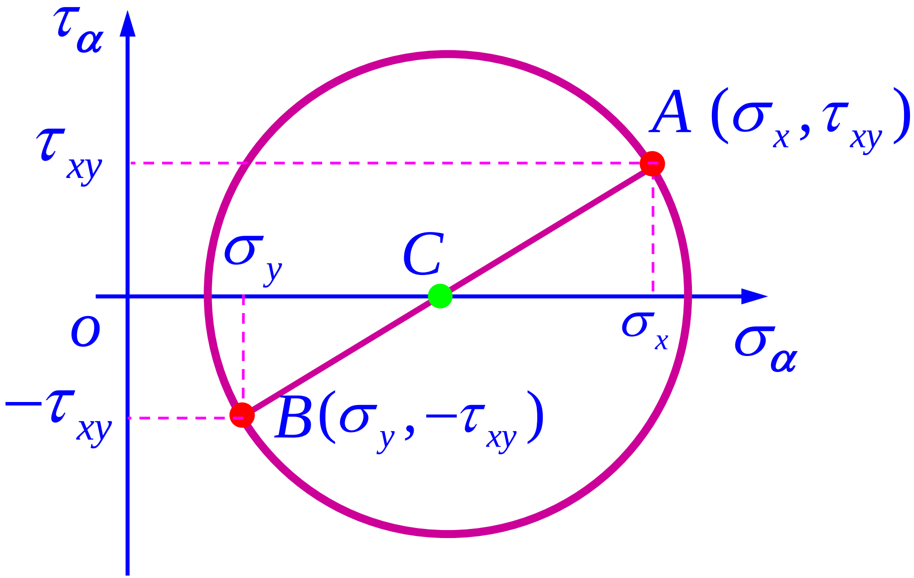
$A(\sigma_x, \tau_{xy})$，$B(\sigma_y, -\tau_{xy})$

（2）AB与σ_α轴的交点C是圆心

（3）以C为圆心，AC为半径画圆

——应力圆或莫尔圆





3. 单元体斜截面上的应力公式与应力圆的关系

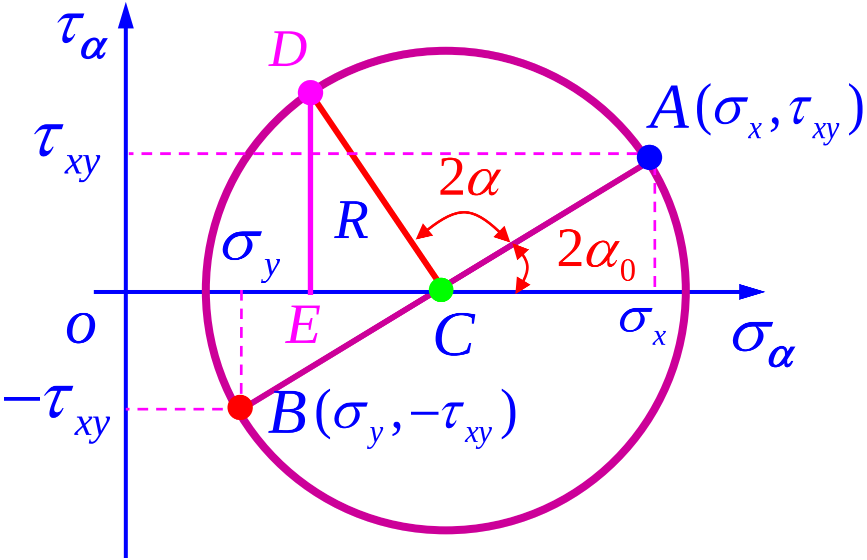
斜截面上的应力公式 $\Longrightarrow$ 应力圆 ✓

斜截面上的应力公式 $\Longleftarrow$ 应力圆

应力圆才能与公式等价！

考察应力圆上任意点D

$$DE = R\sin[180^o - (2\alpha + 2\alpha_0)]$$
$$= R\sin(2\alpha + 2\alpha_0)$$
$$= R(\sin 2\alpha\cos 2\alpha_0 + \cos 2\alpha\sin 2\alpha_0)$$
$$= (R\cos 2\alpha_0)\sin 2\alpha + (R\sin 2\alpha_0)\cos 2\alpha$$
$$= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = \tau_\alpha$$



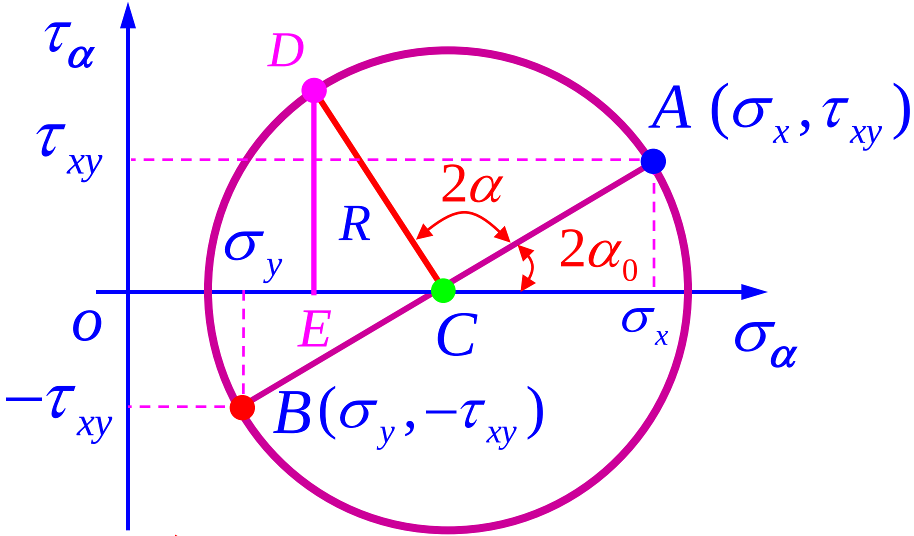
$$OE = OC - EC$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R\cos[180^o - (2\alpha + 2\alpha_0)]$$

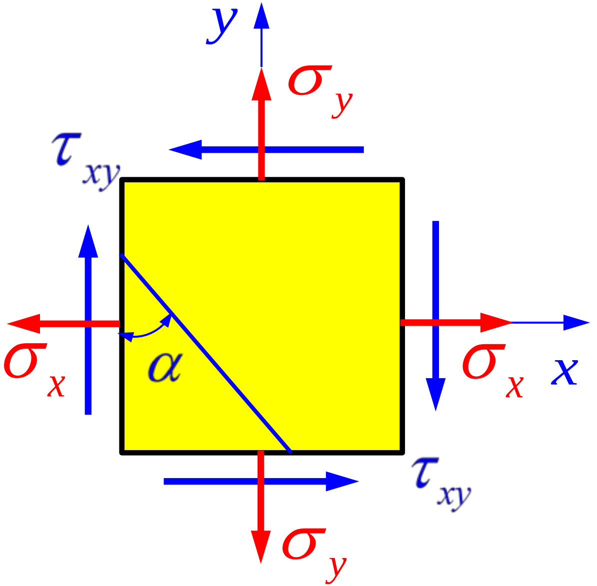
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R\cos(2\alpha + 2\alpha_0)$$

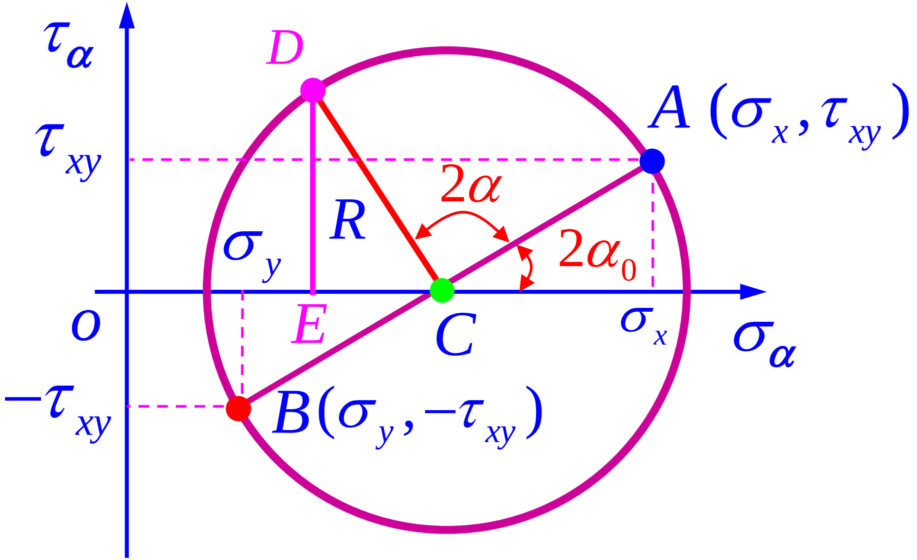
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R(\cos 2\alpha \cos 2\alpha_0 - \sin 2\alpha \sin 2\alpha_0)$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha = \sigma_\alpha$$



单元体的应力与应力圆的对应关系



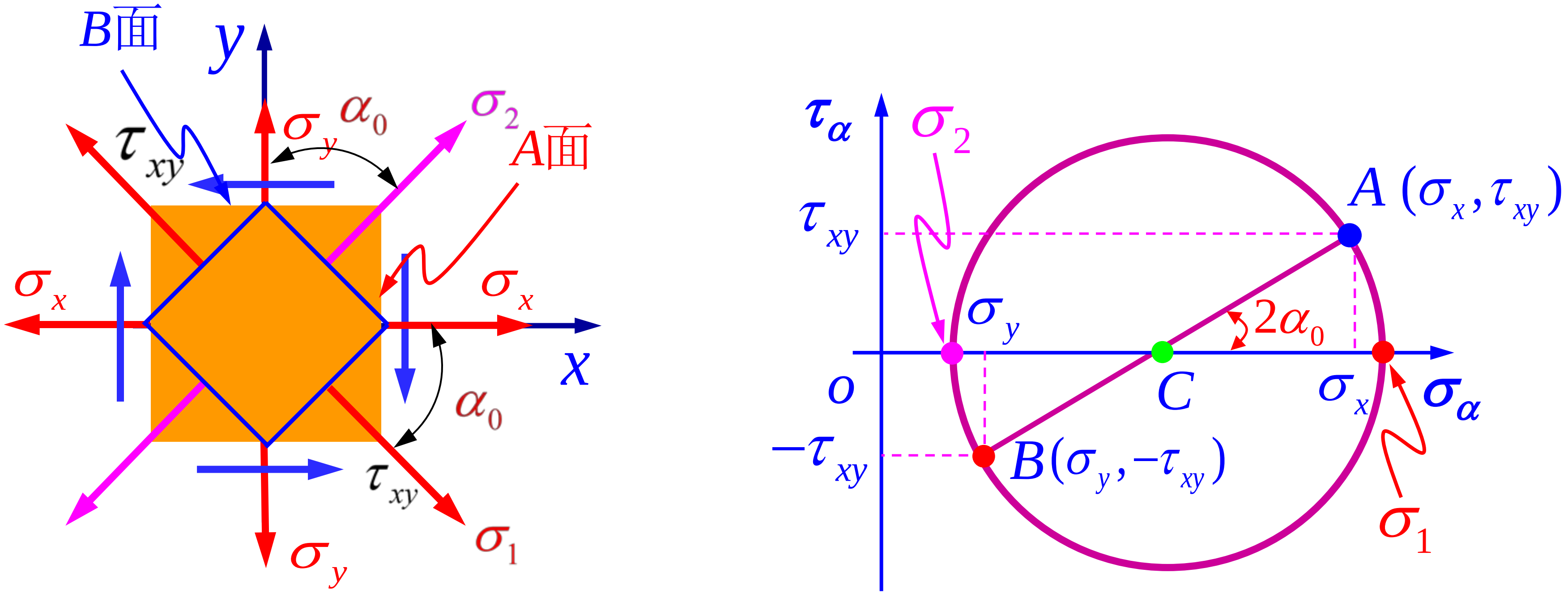


（1）单元体的右侧立面(σ_x, τ_{xy}) ⟷ 应力圆的A点

（2）斜截面的应力$(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ ⟷ 应力圆D点坐标$(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$

（3）单元体上角度α ⟷ 应力圆上 CA 与 CD 夹角2α 且转向一致

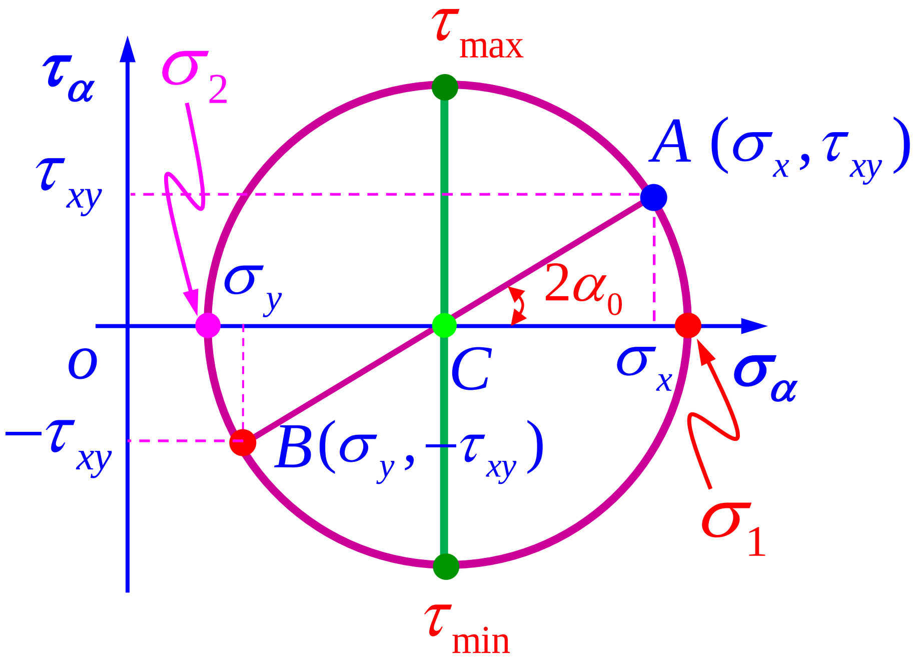
4. 主应力与主平面



A面顺时针转α_0角到第一主应力所在平面

B面顺时针转α_0角到第二主应力所在平面

5. 应力极值大小



$$\left\{\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right. = OC \pm R_{\text{半径}}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\left\{\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}\right. = \pm R_{\text{半径}}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

平面应力状态的分析方法小结

（1）解析法

一般公式2个（正、切应力）

极值应力4个（极大与极小正应力，极大与极小切应力）

主单元体方位角1个

缺点：公式不好记 — 7个

（2）图算法

前半部 — 画莫尔圆

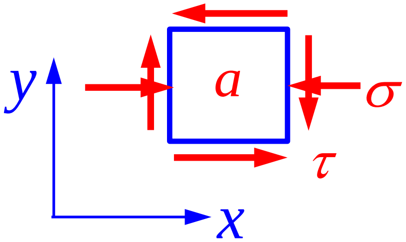
后半部 — 看图精确计算

优点：不必记公式

例1　从图示构件的顶部a点取出单元体，并确定该单元体各面上的应力，然后计算出主应力的大小，并画出主单元体。

解：① 画单元体（建立坐标系）

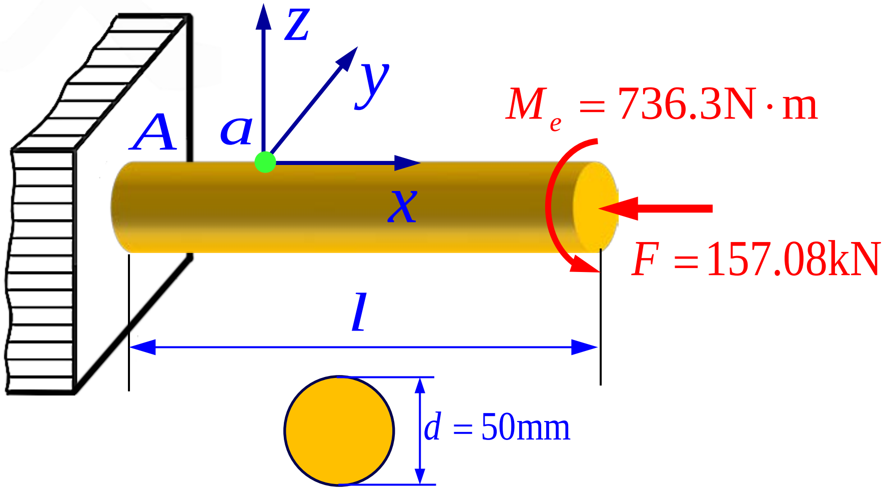
（取z方向为a点切平面的外法线方向，xy平面为切平面）



$\sigma_x = \sigma = -80.0\ \text{MPa}$

$\sigma_y = 0\ \text{MPa}$

$\tau_{xy} = \tau = 30.0\ \text{MPa}$



② 横截面上的正应力

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{-157.08\times 10^3}{\frac{1}{4}\times\pi\times(50\times 10^{-3})^2}$$

$$= -80.0\times 10^6\ \text{Pa} = -80.0\text{MPa}$$

③ 横截面上的切应力

$$\tau = \frac{M}{W_P} = \frac{M}{\frac{1}{16}\pi d^3} = \frac{736.3}{\frac{1}{16}\times\pi\times(50\times 10^{-3})^3}$$

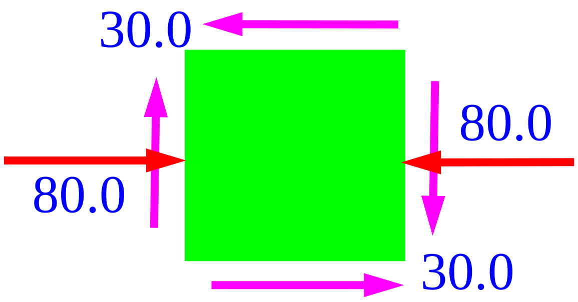
$$= 30.0\times 10^6\ \text{Pa} = 30.0\text{MPa}$$

画莫尔圆

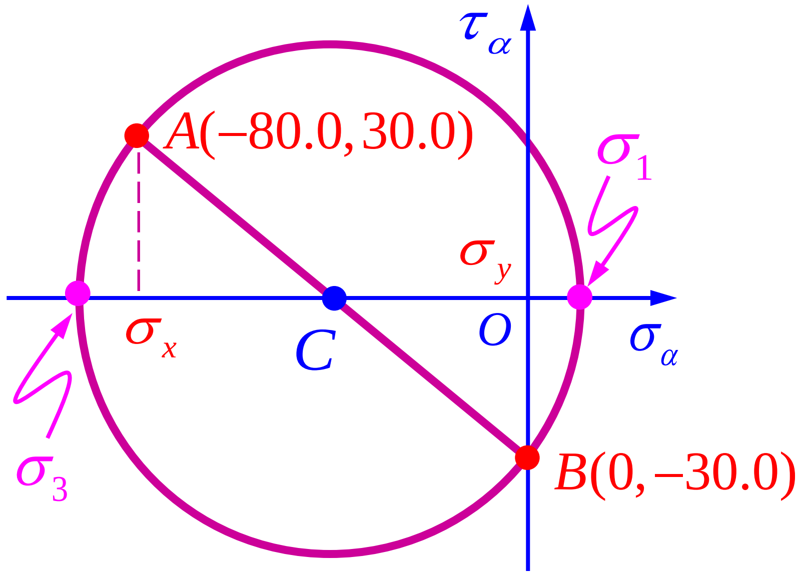
$\sigma_x = -80.0$

$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = 30.0$



单位：MPa

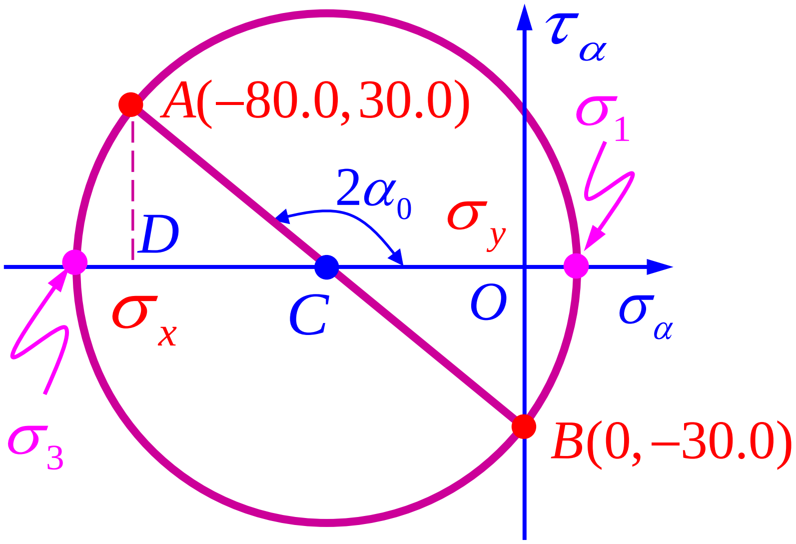


算出圆心坐标 $OC = -40.0$

半径 $R = AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 50.0$

$$\left.\begin{cases}\sigma_1 \\ \sigma_3\end{cases}\right. = OC \pm R = \begin{cases}10.0\text{MPa} \\ -90.0\text{MPa}\end{cases}$$

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = R = 50.0\text{MPa}$$



算方位角

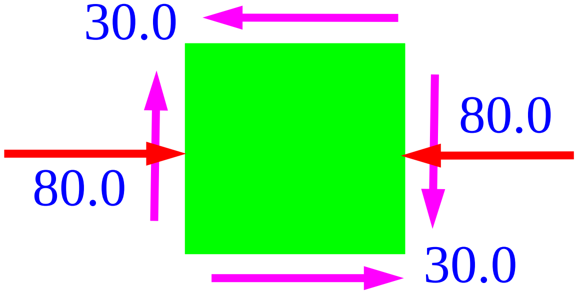
$$\angle ACD = \arctan\left(\frac{AD}{DC}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 36.86°$$

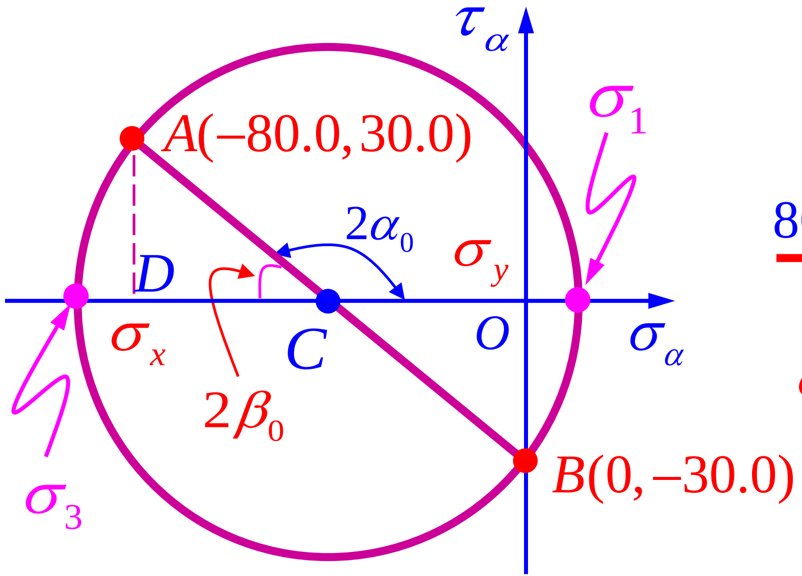
$$2\alpha_0 = 180° - \angle ACD$$

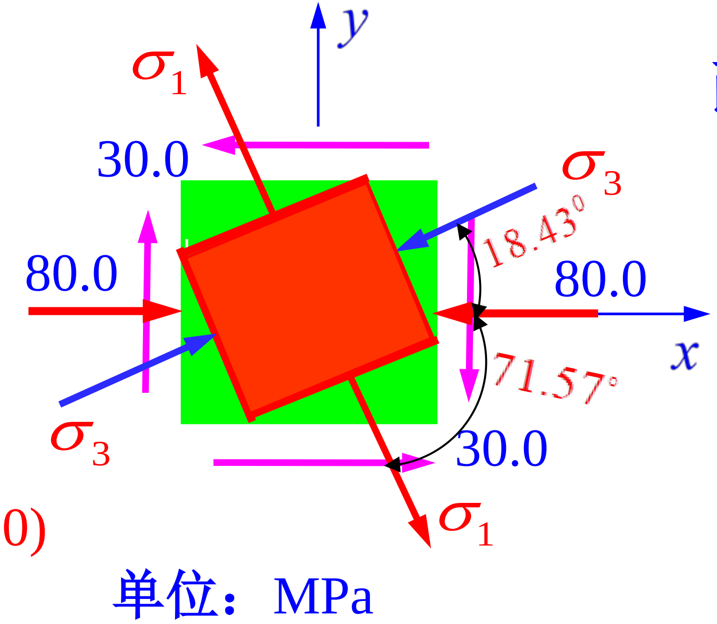
$$= 180° - 36.86° = 143.14°$$

$$\alpha_0 = 71.57°$$



单位：MPa





画出主单元体

$$\alpha_0 = 71.57^\circ$$

$$2\beta_0 = \angle ACD$$

$$= 36.86^\circ$$

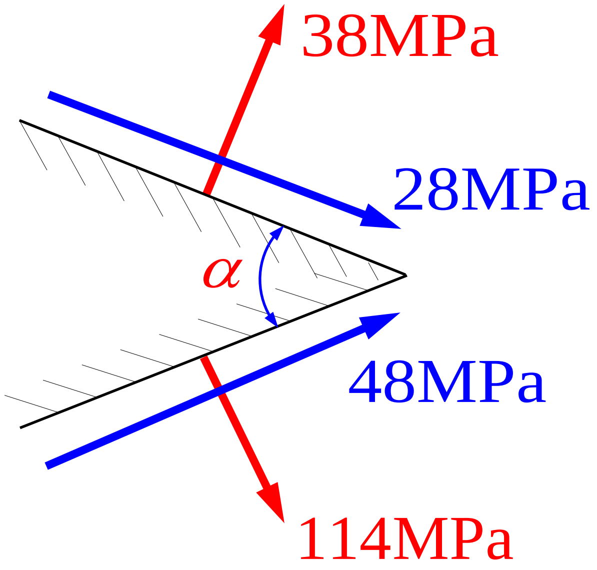
$$\beta_0 = \frac{36.86^\circ}{2}$$

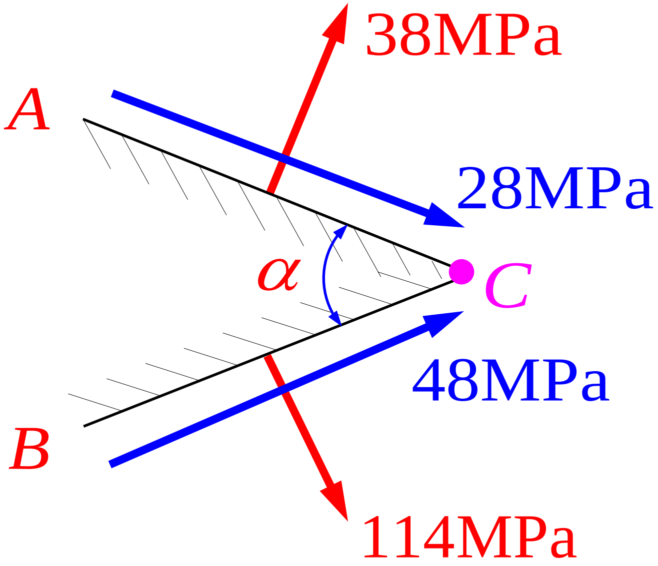
$$= 18.43^\circ$$

右垂面顺时针转71.57°到主单元体的第一主应力σ_1所在的面

右垂面逆时针转18.43°到主单元体的第三主应力σ_3所在的面

例2　已知平面应力状态下某点处的两个截面上的应力如图所示。试求该点处的主应力值及主平面方位，并求出两截面间的夹角α。





解：*A*、*B* 两截面上的应力是*C*点在两个不同平面上的应力

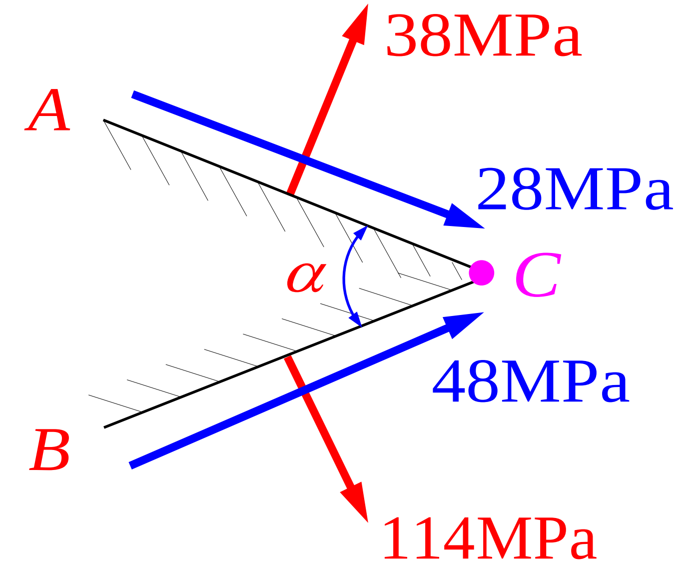
利用应力圆知，*A*、*B* 两截面上的应力都在某一应力圆上。

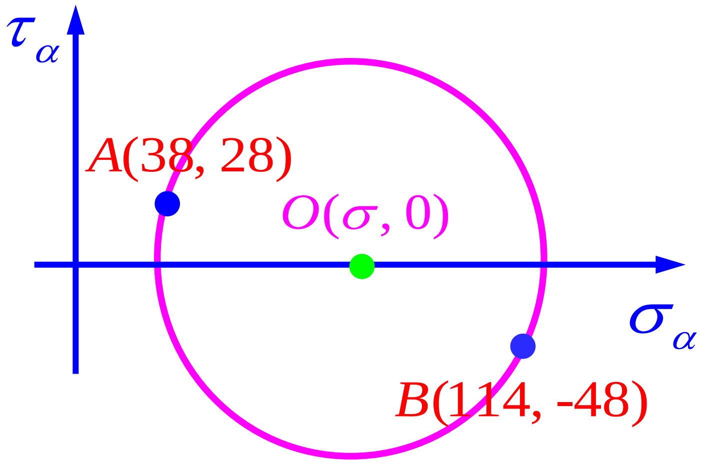
— *C*点的应力状态

*A*截面 ⟷ 应力圆上点的坐标 (38, 28)

*B*截面 ⟷ 应力圆上点的坐标 (114, – 48)

找到了应力圆上的两点





$$(\sigma-38)^2+28^2=(114-\sigma)^2+48^2$$

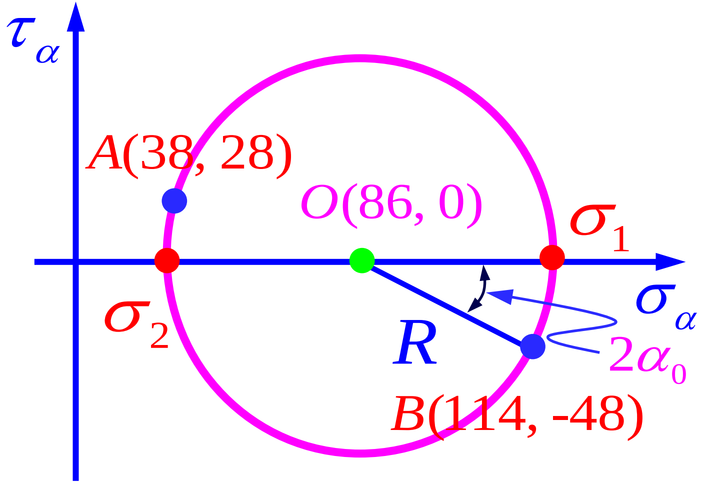
$$\sigma=86$$

作应力圆

（1）找到A（38, 28）、B（114, − 48）两点；

（2）圆心一定在水平轴上；

（3）A、B两点到圆心的距离相等，等于R；



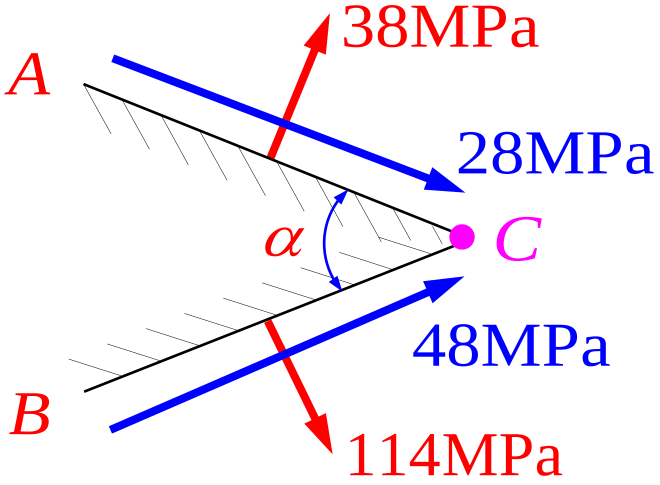
求主应力大小 $R=\sqrt{(114-86)^2+48^2}=55.6$

$$\sigma_1=\sigma+R=86+55.6=141.6\text{MPa}$$

$$\sigma_2=\sigma-R=86-55.6=30.4\text{MPa}$$

求主平面方位 $\tan 2\alpha_0=\dfrac{48}{114-86}=1.713$

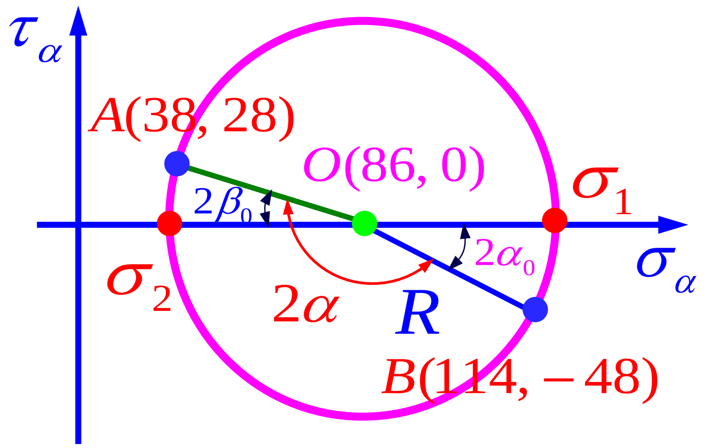
$$\alpha_0=\tfrac{1}{2}\arctan 1.713=\tfrac{59.74^\circ}{2}=29.87^\circ$$

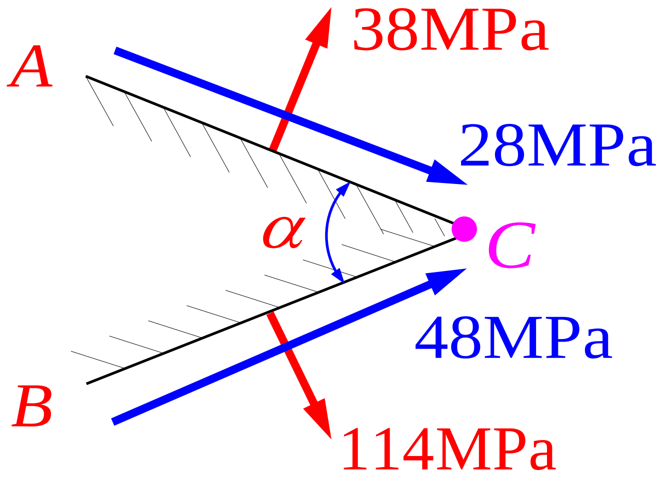


由*B*面逆时针转29.87°到第一主应力所在平面

由*B*面顺时针转（90°–29.87°＝60.13°）到第二主应力所在平面

求A、B两截面间的夹角α





$$2\alpha = 2\beta_0 + (180° - 2\alpha_0)$$

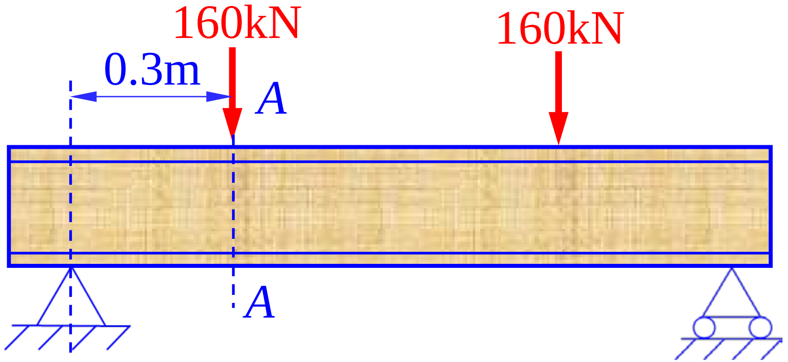
$$\tan 2\beta_0 = \frac{28}{86-38} = 0.583$$

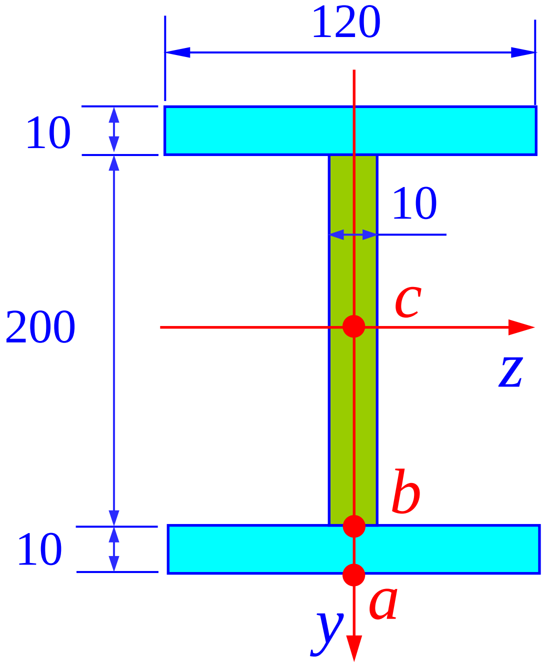
$$2\beta_0 = \arctan 0.583 = 30.24°$$

$$2\alpha = 30.24° + (180° - 59.74°) = 150.5°$$

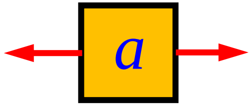
$$\alpha = 75.25°$$

例3 一焊接钢板梁尺寸如图所示，梁的自重略去不计。试求*AA*左截面上*a*、*b*、*c*三点的主应力。

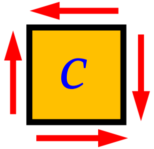




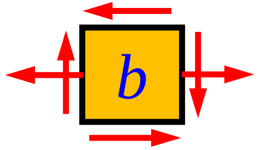
分析：



只有正应力分量—单轴应力状态



只有切应力分量—纯剪切应力状态



既有正应力分量，又有切应力分量—平面一般应力状态

解：求危险截面上的内力

（A-A的左截面）

$$F_s = 160\text{kN}$$

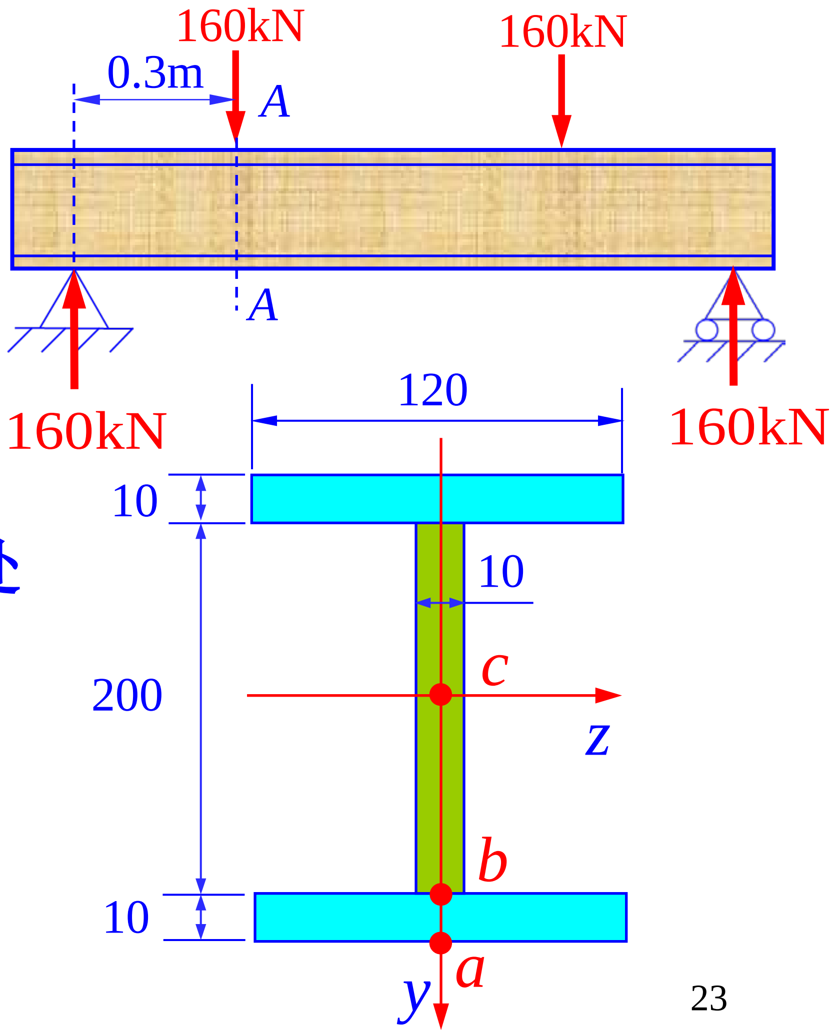
$$M = 48\text{kN}\cdot\text{m}$$

求各点应力分量

先确定形心位置： 在高度中点处

计算I_z

$$I_z = 3.315\times10^7\,\text{mm}^4$$



$(F_s = 160\text{kN}, \ M = 48\text{kN}\cdot\text{m})$

求各点正应力分量 $\sigma = \dfrac{M}{I_z} y$

$$\sigma_a = \frac{48\times10^3\times110\times10^{-3}}{3.315\times10^7\times10^{-12}} = 159.3\text{MPa}$$

$$\sigma_b = \frac{48\times10^3\times100\times10^{-3}}{3.315\times10^7\times10^{-12}} = 144.8\text{MPa}$$

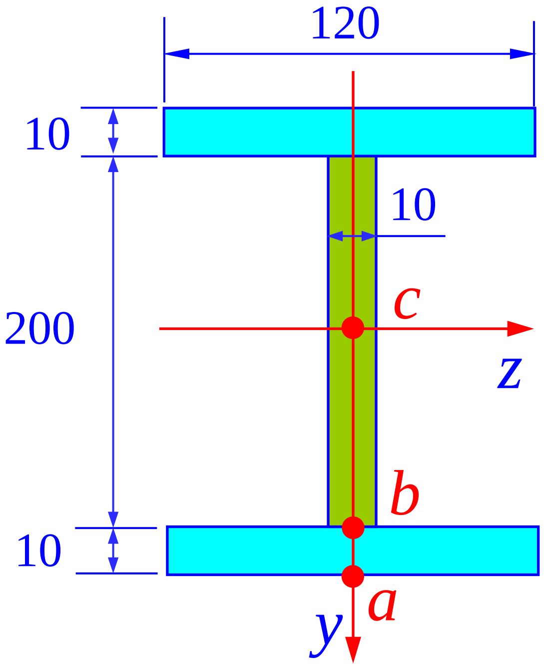
$$\sigma_c = 0.0\text{MPa}$$

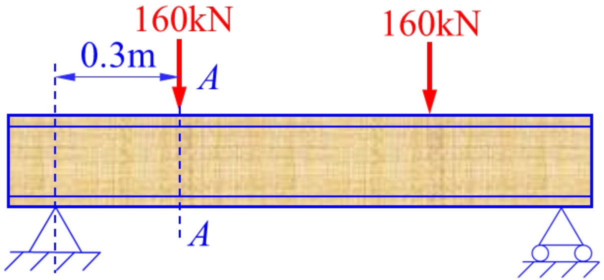
求各点切应力分量 $\tau = \dfrac{F_s S_z^*}{I_z b}$

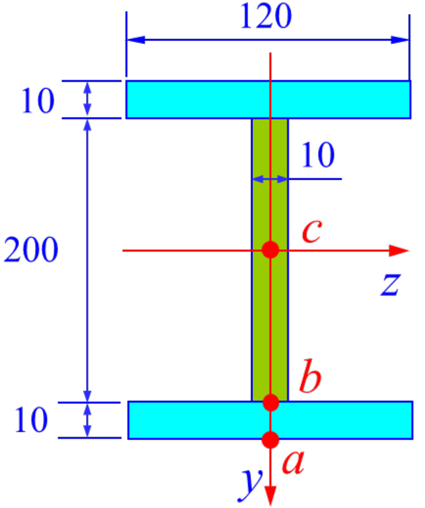
$$\tau_a = 0.0\text{MPa}$$

$$\tau_b = \frac{160\times10^3\times1.26\times10^5\times10^{-9}}{3.315\times10^7\times10^{-12}\times10\times10^{-3}} = 60.8\text{MPa}$$

$$\tau_c = \frac{160\times10^3\times1.76\times10^5\times10^{-9}}{3.315\times10^7\times10^{-12}\times10\times10^{-3}} = 84.9\text{MPa}$$

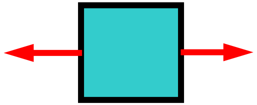
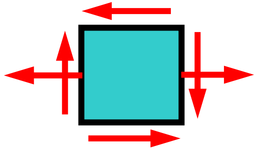
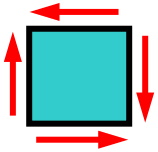






各点应力汇总

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}$$

	单元体应力	应力分量	主应力
a点		$\sigma_a=159.3\text{MPa}$ $\tau_a=0.0\text{MPa}$	$\sigma_1=159.3\text{MPa}$ $\sigma_2=0\text{MPa}$ $\sigma_3=0\text{MPa}$
b点		$\sigma_b=144.8\text{MPa}$ $\tau_b=60.8\text{MPa}$	$\sigma_1=166.9\text{MPa}$ $\sigma_2=0\text{MPa}$ $\sigma_3=-22.2\text{MPa}$
c点		$\sigma_c=0.0\text{MPa}$ $\tau_c=84.9\text{MPa}$	$\sigma_1=84.9\text{MPa}$ $\sigma_2=0\text{MPa}$ $\sigma_3=-84.9\text{MPa}$

Thank you for your attention!

作业 P. 275-276: 7.11、7.14、7.15

对应第6版的题号 P. 268-269: 7.11、7.14、 7.15

下次课讲广义胡克定律