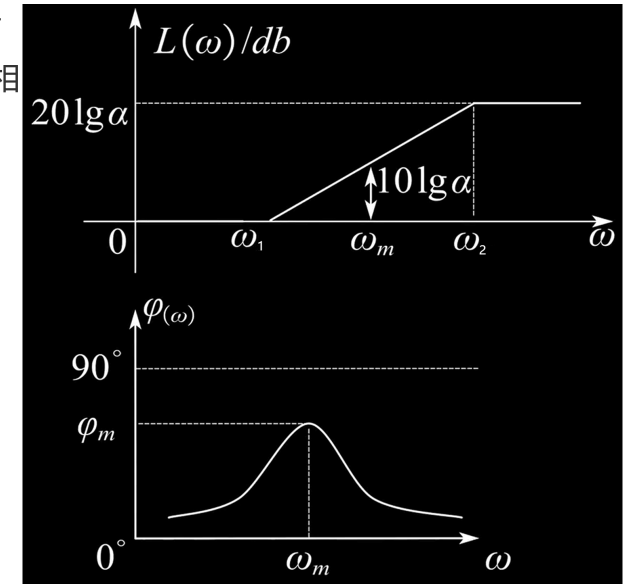
超前校正

相位超前校正，顾名思义，是为了提高相位角。因此，超前校正环节的伯德图中，相位角是大于0的，从而增加系统的相位裕度。
超前校正环节的传递函数为

$$G_j(s)=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1},\alpha>1$$



伯德图如右图，其中$\omega_1=\dfrac{1}{\alpha T},\omega_m=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}T},\omega_2=\dfrac{1}{T}$，
ω_m为最大超前角频率
相频图中最大相角φ_m与α的关系是

$$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$$

记ω_{c0}为未校正截止频率，γ_0为未校正相角裕度，ω_c^*为题目要求截止频率，γ^*为题目要求相角裕度
那么使用超前校正有以下两点要求

1. $\omega_{c0}<\omega_c^*,\gamma_0<\gamma^*$时优先考虑超前校正
2. 校正系统所需要的最大超前角φ_m需要小于60°

超前校正的具体步骤

下面通过一个例题来说明超前校正的具体步骤。
设单位反馈系统的开环传递函数

$$G_0(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

试设计校正装置$G_j(s)$，使得校正后系统满足下列指标：

1. 当输入$r=t$时，稳态误差$e_{ss}^*\leq 0.1$
2. 开环系统截止频率$\omega_c^*\geq 6rad/s$
3. 相角裕度$\gamma^*\geq 60^\circ$
4. 幅值裕度$h^*\geq 10dB$

第一步：根据稳态误差校正低频段，即求得开环增益K

注意到是I型系统，输入为单位斜坡（等速输入），根据静态误差系数，$e_{ss}=\dfrac{1}{K}$，从而有$\dfrac{1}{K}\le 0.1$，得到$K\ge 10$。取$K=10$，从而开环传递函数为

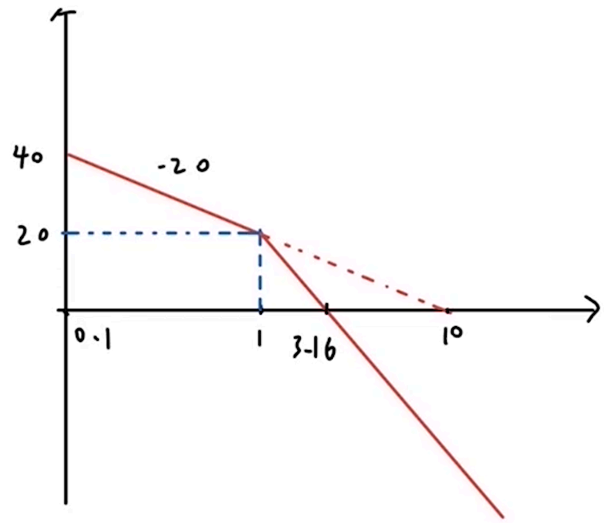
$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)}$$

第二步：画出未校正系统的伯德图，求出截止频率ω_{c0}和相角裕度γ_0

画图可以得到$\omega_{c0}=3.16rad/s<\omega_c^*$，$\gamma_0=180^\circ+\angle G(j\omega_c)=17.56^\circ<\gamma^*=60^\circ$，因此需要进行超前校正。

最大超前角应该比目标相角裕度和未校正相角裕度的差大$5^\circ-12^\circ$，因为校正过程中会有一些损失。我们一般就取10°

$$\varphi_m=\gamma^*-\gamma_0+10^\circ=52.44^\circ<60^\circ$$



可以使用超前校正。

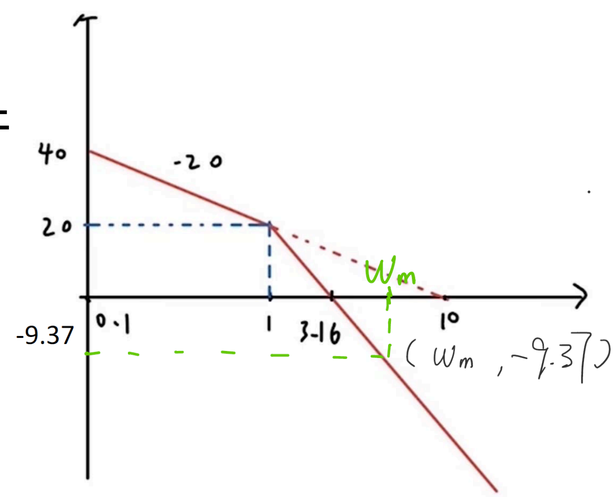
第三步：根据最大超前角φ_m求出α，从而得到$\omega=\omega_m$得到校正环节给予的幅频增益$10\lg\alpha$，从而求出按理想情况下校正的截止频率ω_m

相角裕度$\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)$完全由$\omega_c$时的相角决定，因此在理想状态下，最大超前角要加在$\omega=\omega_c$处，因此要让$\omega_m=\omega_c$，此处$\omega_c$为校正后的截止频率

$$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=8.65^\circ,10\lg\alpha=9.37dB$$

要让$\omega_m=\omega_c$，需要让$L(\omega_c)+L(\omega_m)=0$，因此有

$$L(\omega_c)=-10\lg\alpha=-9.37dB$$

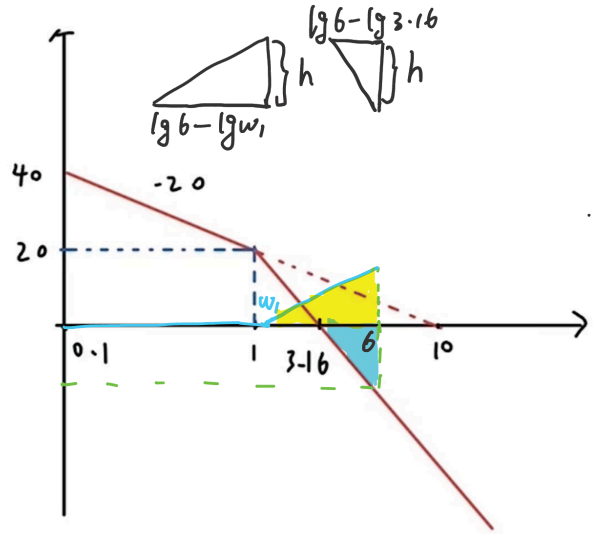


由图像可以列出

$$\frac{-9.37-0}{\lg\omega_m-\lg 3.16}=-40\Rightarrow\omega_m=5.42rad/s$$

第四步：对比ω_m与ω_c^*的大小，若$\omega_m < \omega_c^*$则取$\omega_c = \omega_m$，若$\omega_m < \omega_c^*$则取$\omega_c = \omega_c^*$，否则不符合题意。也即取$\omega_c = \max\{\omega_m, \omega_c^*\}$

此题中$\omega_c = \max\{\omega_m, \omega_c^*\} = 6rad/s$
取校正环节的$\omega_m' = \omega_c = 6rad/s$
如右图，蓝色曲线为校正环节的伯德图，那么在$\omega = 6$时，$L_1(6) + L_2(6) = 0$。把图中两个阴影三角形提出来，数据如伯德图上方的两个三角形所示，有



$$h = 20(\lg 6 - \lg \omega_1) = 40(\lg 6 - \lg 3.16)$$

解得$\omega_1 = 1.67rad/s$，从而很容易求出$\omega_2 = 21.6rad/s$
得到校正环节传递函数

$$G_j(s) = \frac{\frac{1}{1.67}s + 1}{\frac{1}{21.6}s + 1}$$

注：如果最后取$\omega_c = \omega_m$，那么$\omega_1 = \omega_m \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}, \omega_2 = \omega_m \cdot \sqrt{a}$

第五步：验算
校正后的开环传递函数

$$G(s) = G_0(s)G_j(s) = \frac{10}{s(s+1)} \cdot \frac{\frac{1}{1.67}s + 1}{\frac{1}{21.6}s + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10\sqrt{(\frac{\omega}{1.67})^2 + 1}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{(\frac{\omega}{21.6})^2 + 1}}$$

$$|G(j\omega_c)| = 1$$

解得$\omega_c = 6rad/s$
相角裕度

$$\gamma = 180 + \angle G(j\omega_c) = 68.38^\circ > 60^\circ$$

$$\angle G(j\omega_g) = -\pi$$

你会发现这个方程是没有实根的，原因是

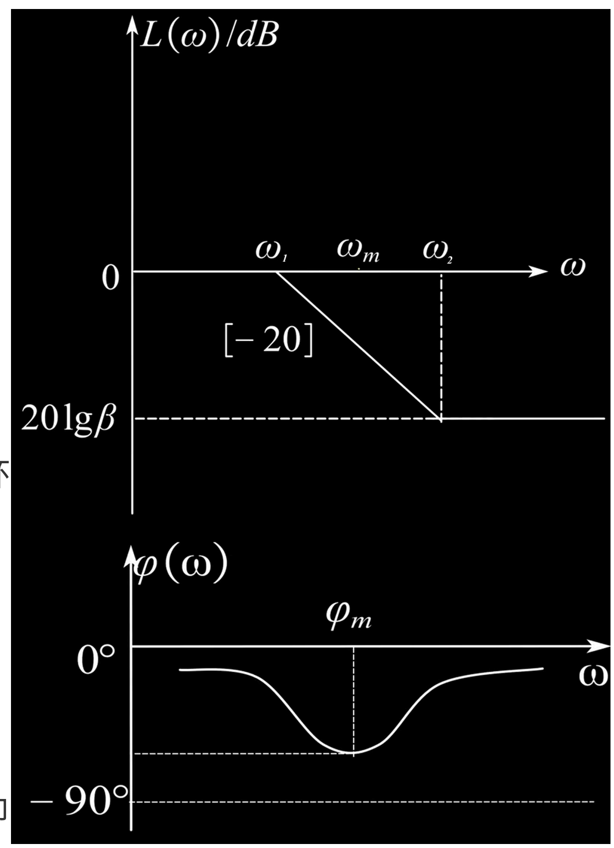
$$G(j\omega_g) = -90^\circ - \arctan(\omega) + \arctan\left(\frac{\omega}{1.67}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{21.6}\right) > -180^\circ$$
$$\Leftrightarrow \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{1.67}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{21.6}\right) < 90^\circ$$

显然是成立的
$\omega \to +\infty$时$G(j\omega_g) \to -180^\circ$，不妨认为$\omega_g = +\infty$，此时$|G(j\omega_g)| = 0^+$，也就是说，幅值裕度$K_g = +\infty$，显然满足要求。

滞后校正

滞后环节的传递函数为

$$G_j(s) = \frac{\beta Ts + 1}{Ts + 1}, \beta < 1$$



伯德图如右图，其中$\omega_1 = \dfrac{1}{T}, \omega_m = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}T}, \omega_2 = \dfrac{1}{\beta T}$，
ω_m为最大滞后角频率
记ω_{c0}为未校正截止频率，γ_0为未校正相角裕度，ω_c^*为题目要求截止频率，γ^*为题目要求相角裕度，G_0为未校正前开环传函
那么使用超前校正有以下两点要求

1. $\omega_{c0} > \omega_c^*, \gamma_0 < \gamma^*$时优先考虑滞后校正
2. $\gamma_0(\omega_c^*) = 180^\circ + \angle G_0(j\omega_c) > \gamma^* + 6^\circ$
   原理解释是，相信你已经知道了串联校正就是简单的伯德图叠加，那么由相频曲线可以看到始终小于0，我们即便使用相角比较大的部分去校正，也会损失一部分相角，因此需要留出一些裕量，一般取6°即可。

滞后校正的具体步骤

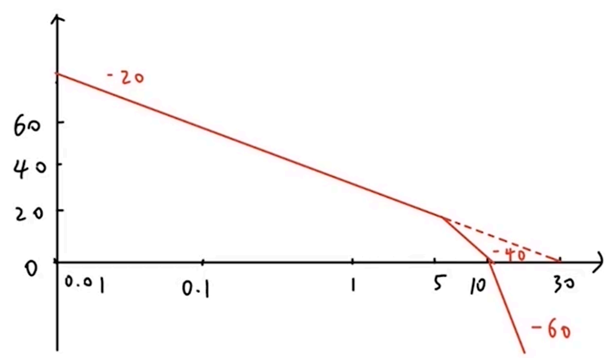
下面通过一个例题来说明滞后校正的具体步骤。
设单位反馈系统的开环传递函数

$$G_0(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

试设计校正装置$G_j(s)$，使得校正后系统满足下列指标：
(1) 速度误差系数$K_v^*=30$
(2) 开环系统截止频率$\omega_c^*\geq 2.3rad/s$
(3) 相角裕度$\gamma^*\geq 40^\circ$
(4) 幅值裕度$h^*\geq 10dB$

第一步：校正低频段，即求得开环增益K
显然有$K=K_v^*=30$
第二步：画出未校正系统的伯德图，求出截止频率ω_{c0}和相角裕度γ_0

$$|G_0(j\omega_{c0})|=1\Rightarrow \omega_{c0}=11.45>\omega_c^*$$
$$\gamma_0=180^\circ+\angle G_0(j\omega_{c0})=-25.28^\circ<\gamma^*$$

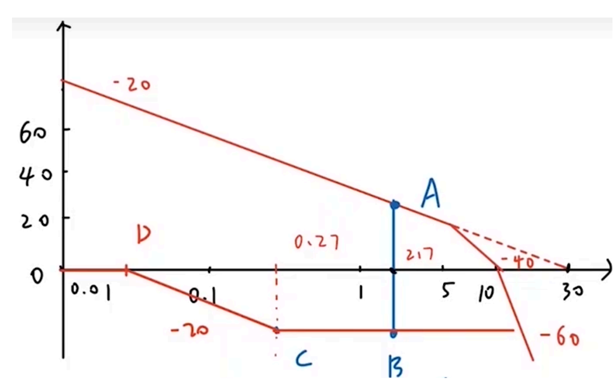


因此我们可以考虑滞后校正。此时我们判断一下前提条件

$$\gamma_0(\omega_c^*)=180^\circ+\angle G_0(j\omega_c^*)=52.345^\circ>\gamma^*+6^\circ$$

可以使用滞后校正
第三步：由$\gamma_0(\omega_c)=\gamma^*+6^\circ$求出$\omega_c$，作为最终的截止频率，从而求出$\omega_2$，进而求得$\beta$

$$\gamma_0(\omega_c)=\gamma^*+6^\circ\Rightarrow \omega_c=2.7rad/s$$



将其作为最终的截止频率，为了让相角落在比较大的位置，我们一般取$\omega_2=\dfrac{1}{10}\omega_c$，这里$\omega_2=0.27rad/s$
将滞后校正的伯德图画在原伯德图上，如右图所示.
设$A(2.7,y)$,由第一段曲线过$(1,20\lg 30)$可以列出

$$\frac{y-20\lg 30}{\lg 2.7-\lg 1}=-20$$

解得$y=20.915dB$，又有$20\lg\beta=-y=-20.915$

解得$\beta = 0.09$
从而有$\omega_1 = \omega_2\beta = 0.0243rad/s$
解得校正环节传递函数

$$G_j(s) = \frac{\frac{1}{0.27}s + 1}{\frac{1}{0.0243}s + 1}$$

第四步：验算
此处不再赘述。