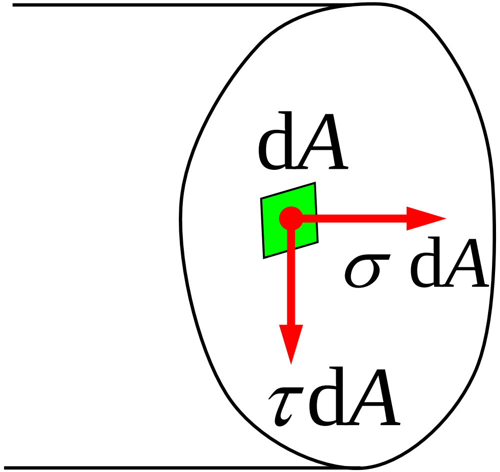
第五章　弯曲应力（二）

第14讲

§ 5.4 弯曲切应力



一、矩形截面梁的切应力 ★

二、工字形截面梁的切应力 ★

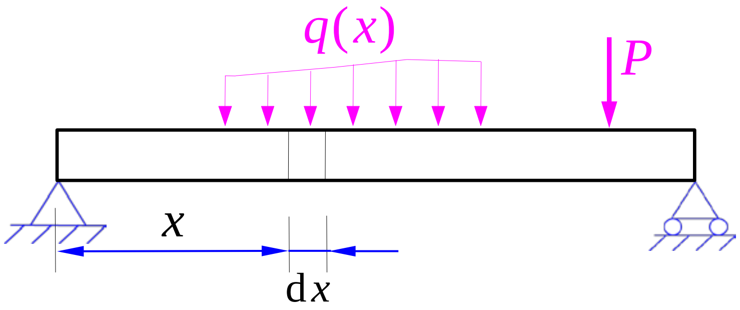
三、圆截面梁的切应力

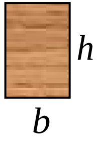
弯曲内力	弯曲应力	计算公式
M	σ	$\sigma = \dfrac{M\,y}{I_z}$
F_s	τ	

在横截面上：

$\sigma\,$dA才能合成弯矩M

$\tau\,$dA才能合成剪力F_s





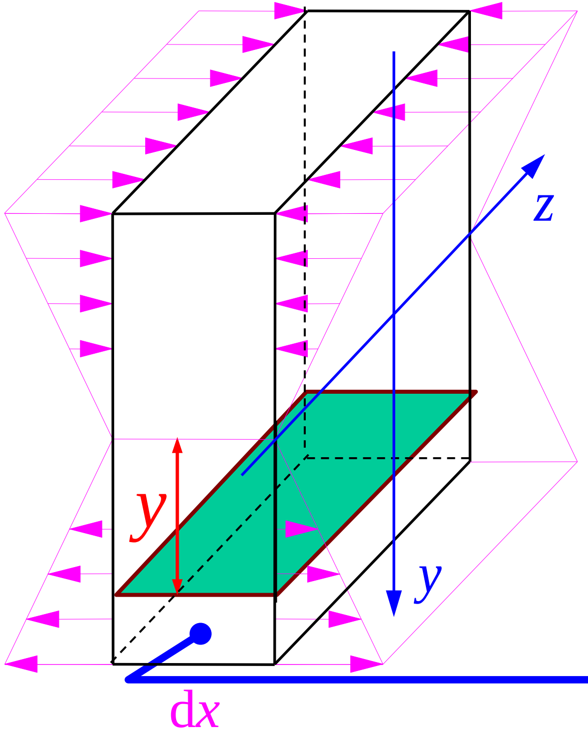
一、矩形截面梁的切应力

两个假设：

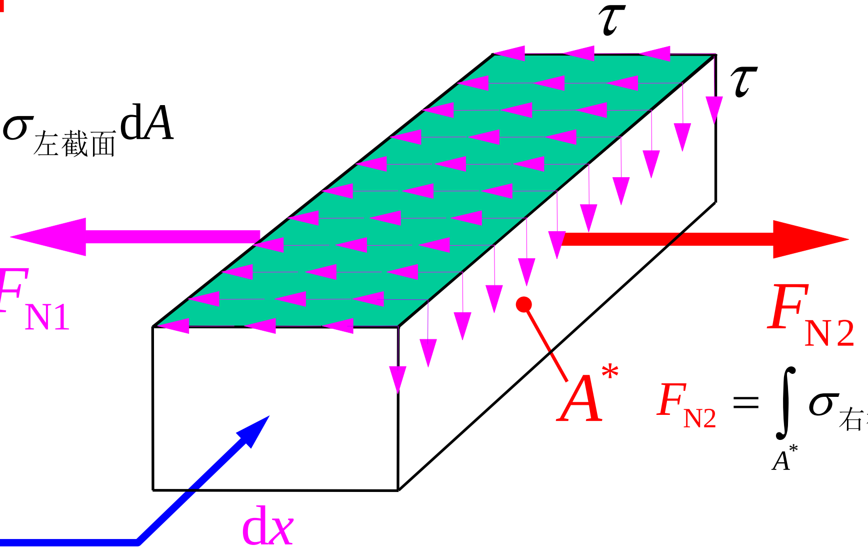
1) τ的方向都与F_s平行

2) τ沿宽度均匀分布

$$\boxed{\sigma = \frac{M\,y}{I_z}}$$



$$F_{N1} = \int_{A^*} \sigma_{\text{左截面}} \mathrm{d}A$$



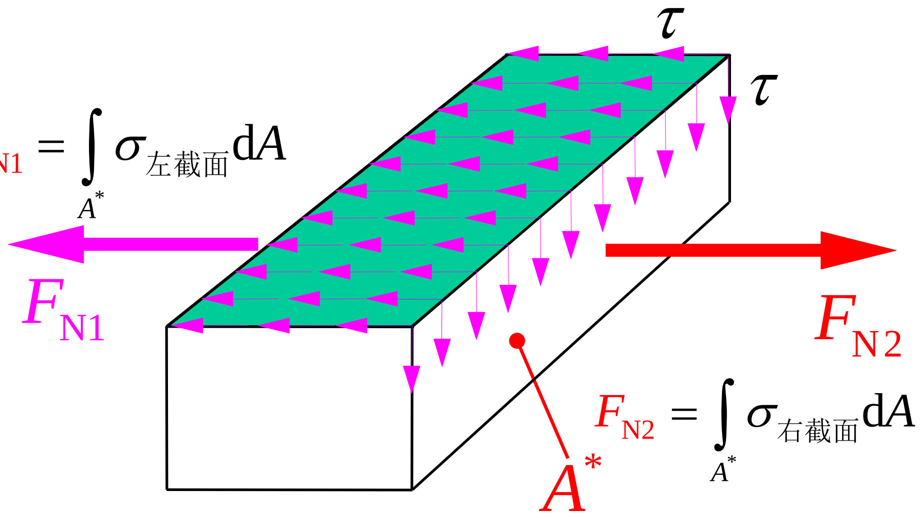
$$F_{N2} = \int_{A^*} \sigma_{\text{右截面}} \mathrm{d}A$$

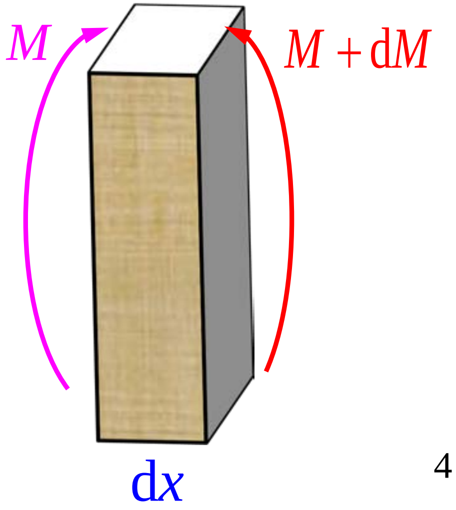
$$F_{N1}=\int_{A^*}\sigma_{左截面}\mathrm{d}A=\int_{A^*}\frac{My}{I_z}\mathrm{d}A$$

$$=\frac{M}{I_z}\underbrace{\int_{A^*}y\mathrm{d}A}_{S_z^*}=\frac{M}{I_z}S_z^*$$

$$F_{N2}=\int_{A^*}\sigma_{右截面}\mathrm{d}A=\int_{A^*}\frac{(M+\mathrm{d}M)y}{I_z}\mathrm{d}A$$

$$=\frac{M+\mathrm{d}M}{I_z}\int_{A^*}y\mathrm{d}A=\frac{M+\mathrm{d}M}{I_z}S_z^*$$





考虑 x 方向平衡

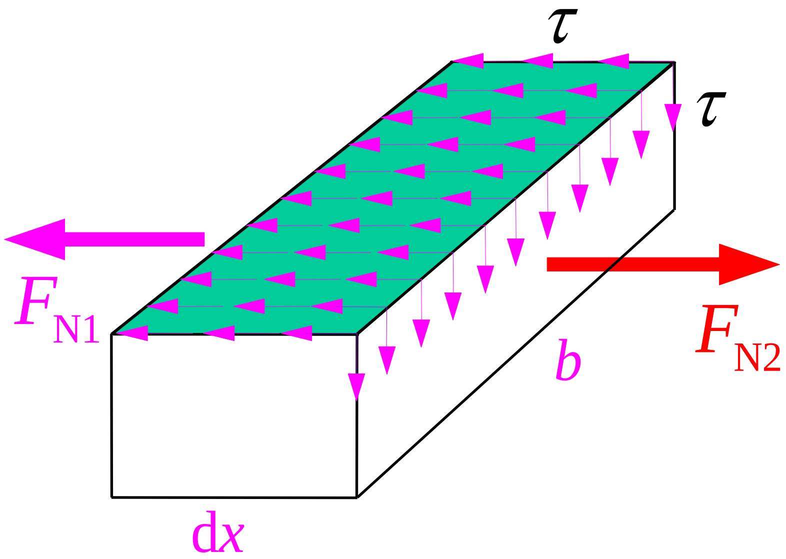
$$F_{N1} = \frac{M}{I_z} S_z^* \qquad F_{N2} = \frac{M + \mathrm{d}M}{I_z} S_z^*$$

$$F_{N2} = F_{N1} + \tau \cdot b\mathrm{d}x$$

$$F_{N2} - F_{N1} = \tau \cdot b\mathrm{d}x$$

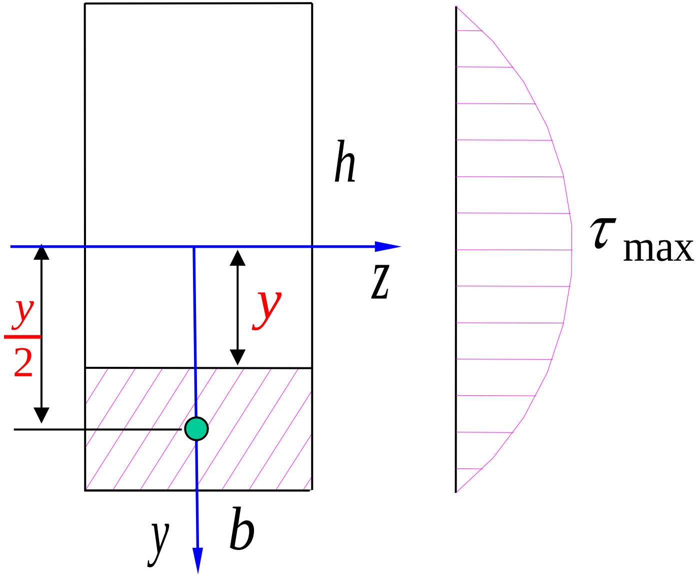
$$\frac{M + \mathrm{d}M}{I_z} S_z^* - \frac{M}{I_z} S_z^* = \tau \cdot b\,\mathrm{d}x$$

$$\tau = \frac{S_z^*}{I_z b} \underbrace{\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}}_{F_s} = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$$



弯曲切应力公式 $\tau = \dfrac{F_s S_z^*}{I_z b}$

矩形截面 $I_z = \dfrac{bh^3}{12}$



$$y + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{h}{2} - y\right) = \frac{h}{4} + \frac{y}{2}$$

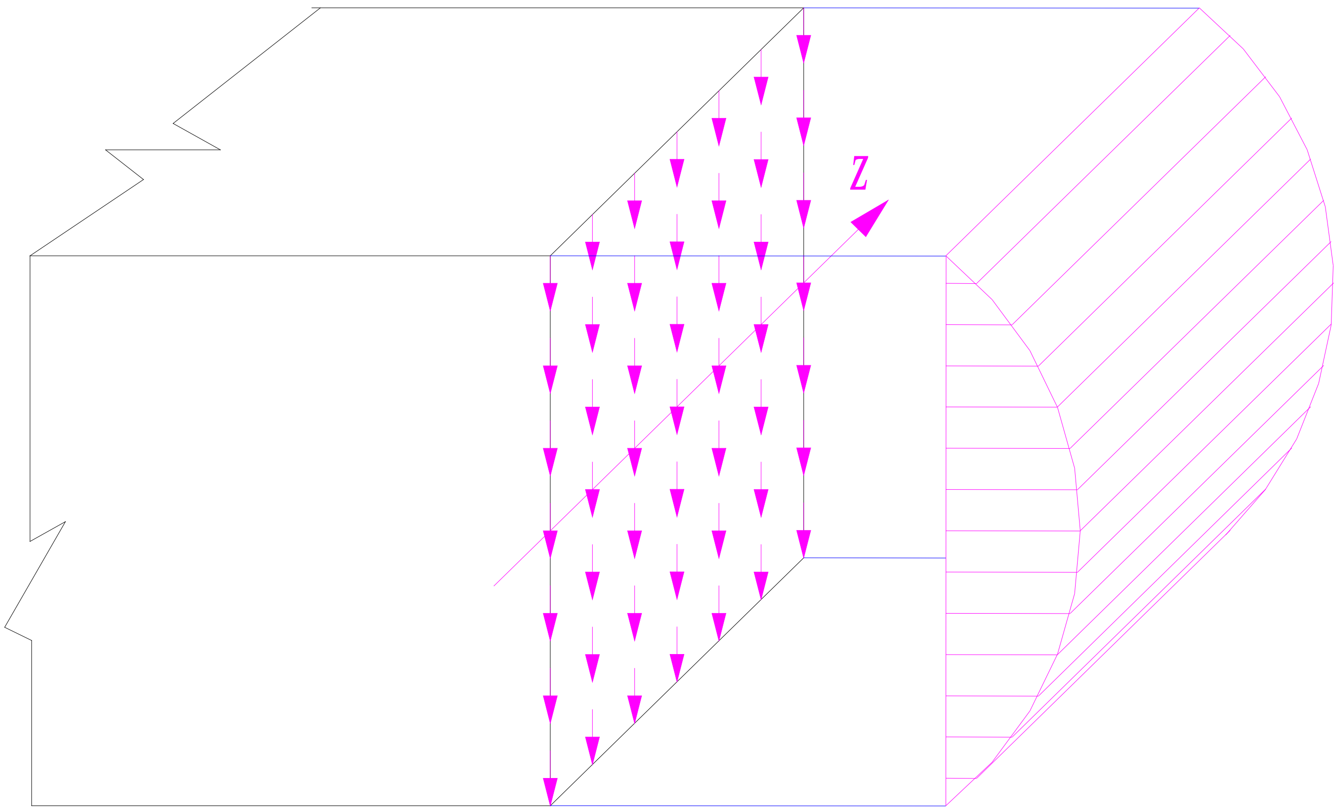
$$S_z^* = b \times \left(\tfrac{h}{2} - y\right) \times \left(\tfrac{h}{4} + \tfrac{y}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} b \left(\tfrac{1}{4} h^2 - y^2\right)$$

$$\tau = \frac{6F_s}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \qquad y = 0:\ \tau_{\max} = \frac{6F_s}{bh^3}\frac{h^2}{4} = \frac{3}{2}\frac{F_s}{bh} = \frac{3}{2}\frac{F_s}{A}$$

矩形截面的弯曲切应力沿截面高度按二次抛物线规律分布！

弯曲切应力分布（F_s向下）



二、工字形截面梁的切应力

在腹板上：$\tau = \dfrac{F_s S_z^*}{I_z b}$

$$S_{z,\min} = B \times \frac{H-h}{2} \times \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{2}\frac{H-h}{2}\right) = \frac{BH^2}{8} - \frac{Bh^2}{8}$$

$$\tau_{\min} = \frac{F_s}{I_z b}\left(\frac{BH^2}{8} - \frac{Bh^2}{8}\right)$$

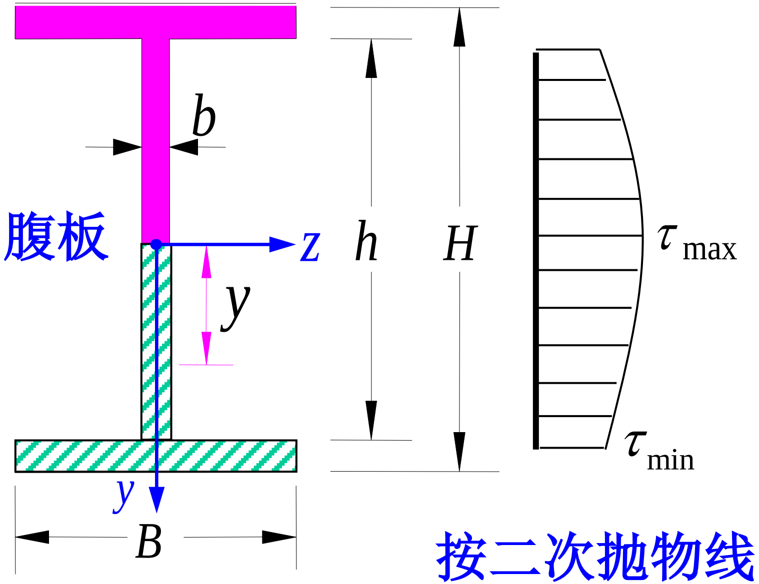
$$S_{z,\max} = \frac{BH^2}{8} - \frac{Bh^2}{8} + b \times \frac{h}{2} \times \frac{h}{4}$$

$$= \frac{BH^2}{8} - \frac{Bh^2}{8} + \frac{bh^2}{8} = \frac{BH^2}{8} - \frac{(B-b)h^2}{8}$$

$$\tau_{\max} = \frac{F_s}{I_z b}\left[\frac{BH^2}{8} - \frac{(B-b)h^2}{8}\right]$$

因为B比b大很多

$$\tau_{\max} \approx \tau_{\min}$$



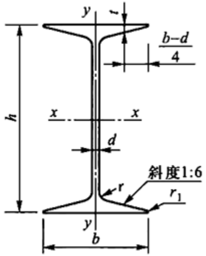
按二次抛物线规律分布

$$\tau \approx \frac{F_s}{bh}$$

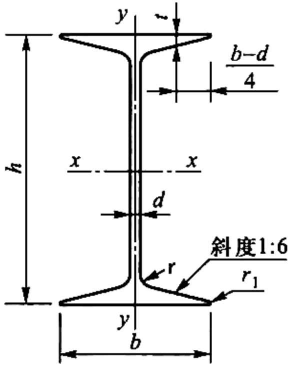
$$F_{s1} \approx (0.95 \sim 0.97)F_s$$

实际热轧工字钢截面是有圆弧过渡的！

工字型截面梁的τ_{max}： $\tau_{max}=\dfrac{F_s S^*_{z,max}}{I_z b}=\dfrac{F_s S_x}{I_x b}=\dfrac{F_s}{\dfrac{I_x}{S_x}b}$



GB 706–88中有出了I_x:S_x值①。



符号意义：

h——高度；
b——腿宽度；
d——腰厚度；
t——平均腿厚度；
r——内圆弧半径；
r_1——腿端圆弧半径；
I——惯性矩；
W——截面系数；
i——惯性半径；
S——半截面的静力距。

① GB 706–88中给出了此数值， GB/T 706 –2008和GB/T 706 –2016均未给出该值。

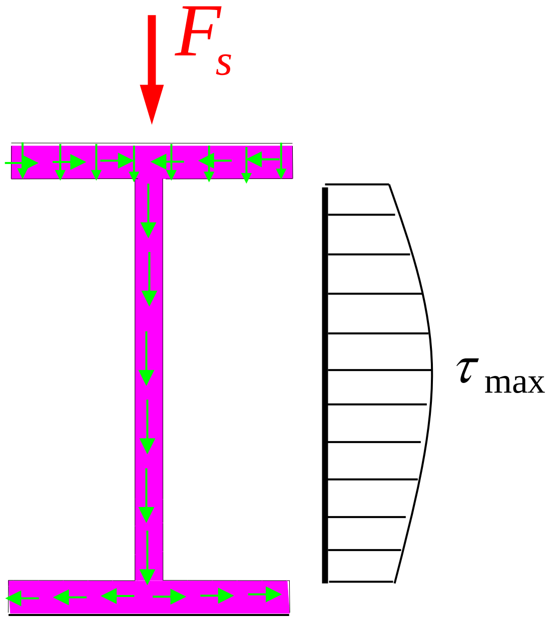
型号	尺寸/mm						截面面积 /cm²	理论重量 /(kg/m)	参考数值						
									x−x				y−y		
	h	b	d	t	r	r_1			I_x /cm⁴	W_x /cm³	i_x /cm	$I_x:S_x$ /cm	I_y /cm⁴	W_y /cm³	i_y /cm
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.345	11.261	245	49.0	4.14	8.59	33.0	9.72	1.52

工字型截面梁的切应力分布情况总结

在翼缘上，还有平行于F_s的切应力分量，分布情况较复杂，但数值很小，可忽略不计。

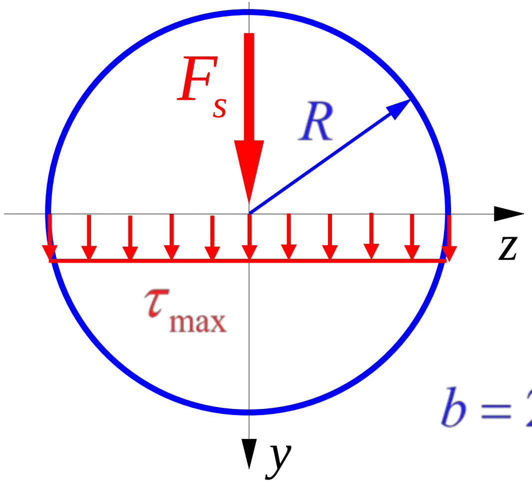
在翼缘上，垂直于F_s方向的切应力分量，它与腹板上的切应力比较，一般来说也是次要的。

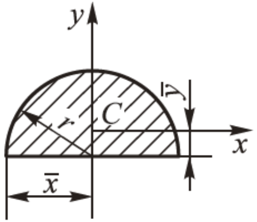
腹板负担了截面上的绝大部分剪力，翼缘负担了截面上的大部分弯矩。



三、实心圆截面梁的切应力

查表：附录II（P. 367）





	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$
	$\frac{\pi r^2}{2}$	r	$\frac{4r}{3\pi}$

$$b = 2R, \quad S_z^* = ?$$

$$A^* = \frac{\pi R^2}{2} \qquad y_c = \frac{4R}{3\pi}$$

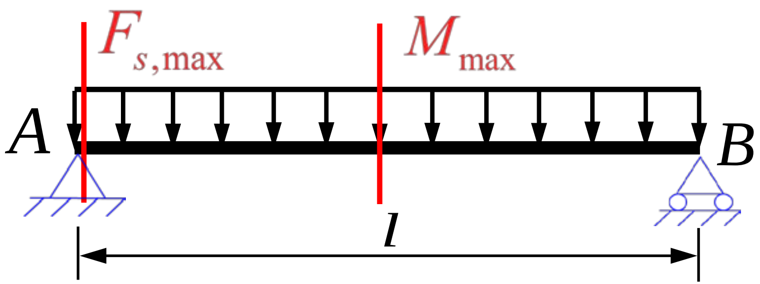
最大切应力在中性轴上 $\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$

半圆：$S_z^* = A^* \cdot y_c = \frac{\pi R^2}{2} \times \frac{4R}{3\pi} = \frac{2R^3}{3}$

$$\tau_{max} = \frac{F_s \cdot \frac{2R^3}{3}}{\frac{\pi (2R)^4}{64} \cdot 2R} = \frac{4}{3}\frac{F_s}{\pi R^2} = \frac{4}{3}\frac{F_s}{A}$$

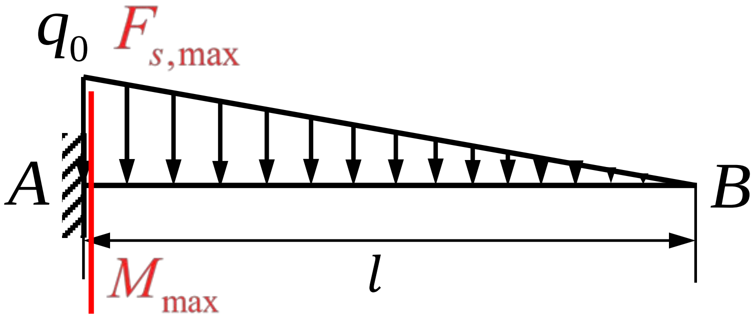
弯曲切应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{F_{s,\max} S_{z,\max}^{*}}{I_z b} \le [\tau]$$

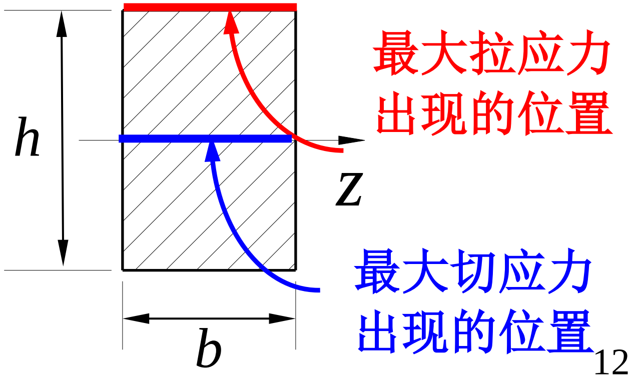


对于弯曲问题，注意到：

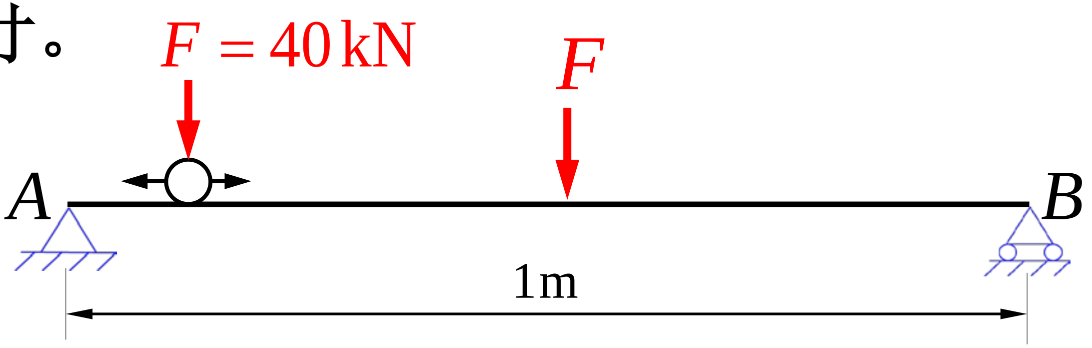
1. 通常同一梁上最大剪力和最大弯矩出现的位置不同；

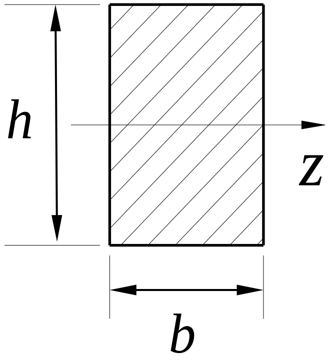


2. 即使同一梁上最大剪力和最大弯矩出现的位置相同，同一横截面上的最大拉应力和最大切应力出现的位置不同；



例1 一长为1m的简支木梁，受一可在全梁上移动的载荷F=40kN作用。已知材料的许用弯曲正应力[σ]=10MPa，许用切应力[τ]=3MPa。木梁的横截面为矩形，其高宽比h:b=3:2，试确定梁的截面尺寸。





解：（1）按弯曲正应力强度条件

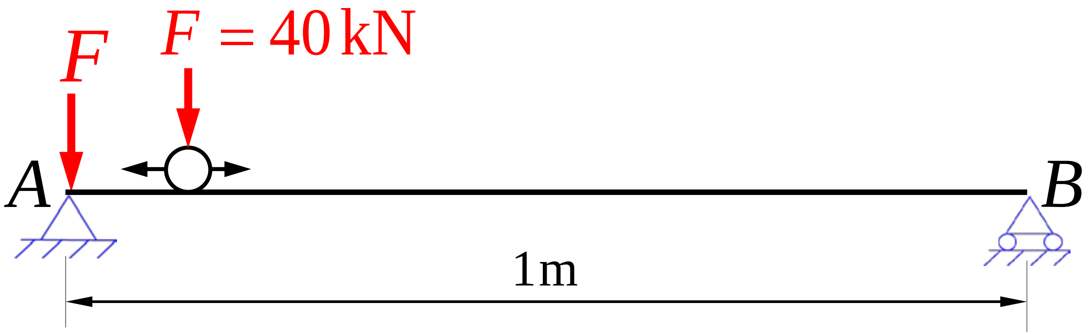
$$M_{\max}=\frac{1}{4}Fl=\frac{1}{4}\times 40\times 1=10\,\mathrm{kN\cdot m}$$ （载荷在跨中）

$$b^3\geq\frac{8}{3}\frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{M_{\max}}{\frac{1}{6}bh^2}\leq[\sigma]\qquad \frac{M_{\max}}{\frac{1}{6}b(\frac{3}{2}b)^2}\leq[\sigma]\Rightarrow\frac{8}{3}\frac{M_{\max}}{b^3}\leq[\sigma]$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{8}{3} \times \frac{10\times 10^3}{10\times 10^6}} = 0.1387\,\text{m}$$

$$= 138.7\,\text{mm}$$



（2）按弯曲切应力强度条件

$F_{s,\max} = F_A = 40\,\text{kN}$ （载荷在A端附近）

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{F_{s,\max}}{A} = \frac{3}{2}\frac{F_{s,\max}}{bh} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{3}{2}\frac{F_{s,\max}}{b(\frac{3}{2}b)} \leq [\tau]$$

$$b \geq \sqrt{\frac{F_{s,\max}}{[\tau]}} = \sqrt{\frac{40\times 10^3}{3\times 10^6}} = 0.1155\,\text{m} = 115.5\,\text{mm}$$

在设计梁的截面时：

通常用弯曲正应力强度条件选择截面，用弯曲切应力强度条件校核一下即可！

§ 5.5 提高弯曲强度的措施

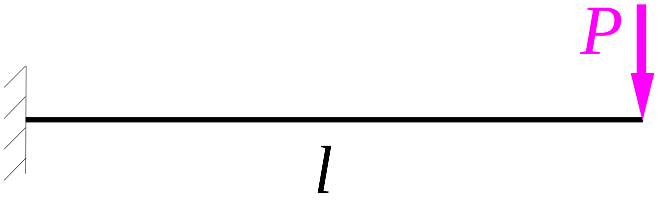
控制梁弯曲强度的主要因素是弯曲正应力，即以

$\sigma_{\max} = \dfrac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$ 作为梁设计的主要依据。

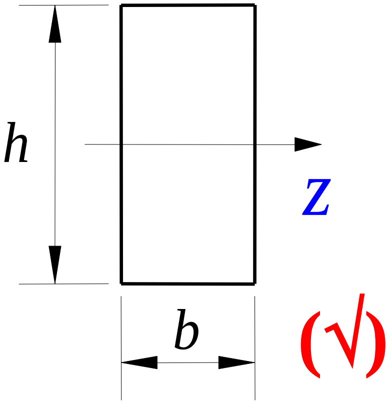
因此应使 $M_{\max}$尽可能地小，使W_z尽可能地大。

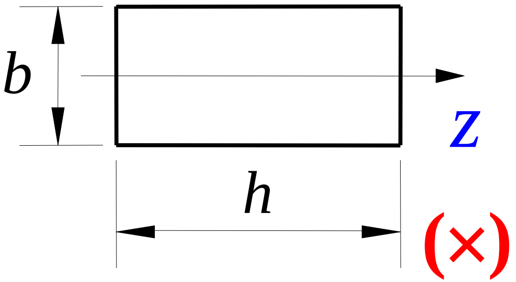
一、梁的合理截面

合理的截面形状，应使截面积较小而抗弯截面系数较大。

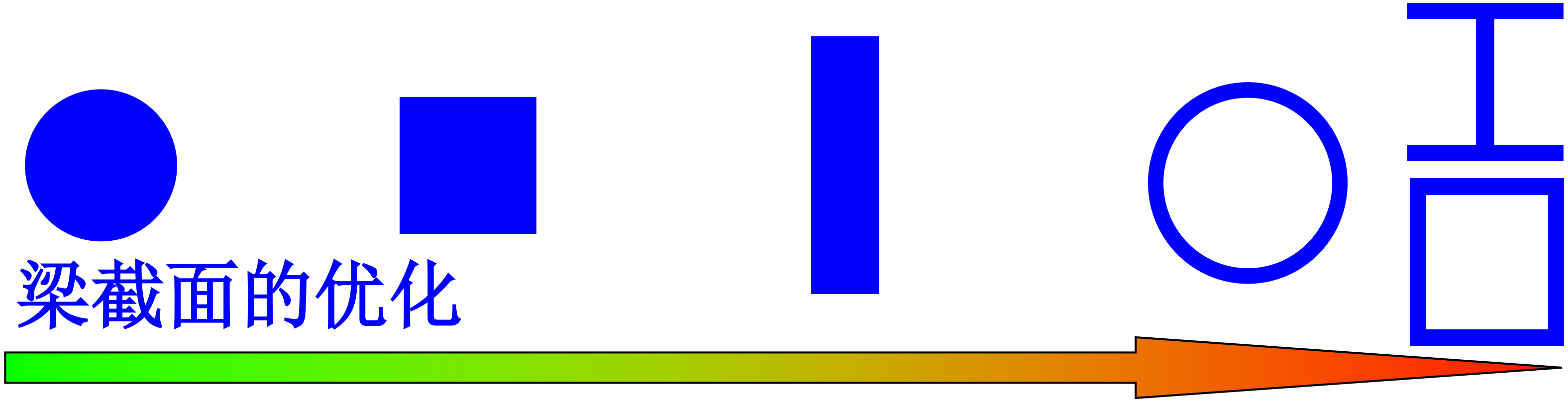


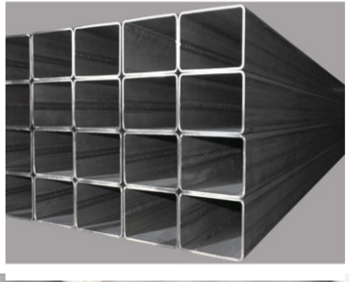
工程实际中的梁截面的
高度方向的尺寸都比较大



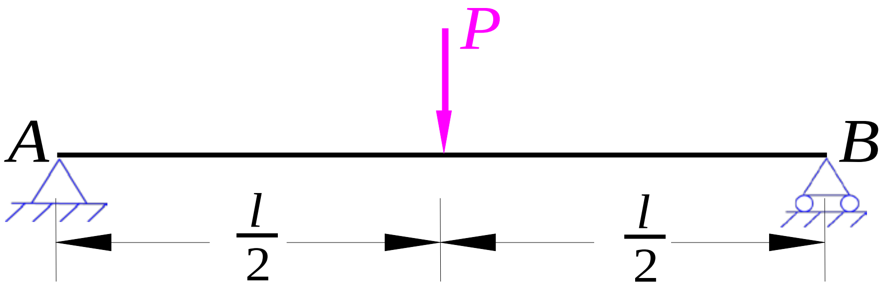


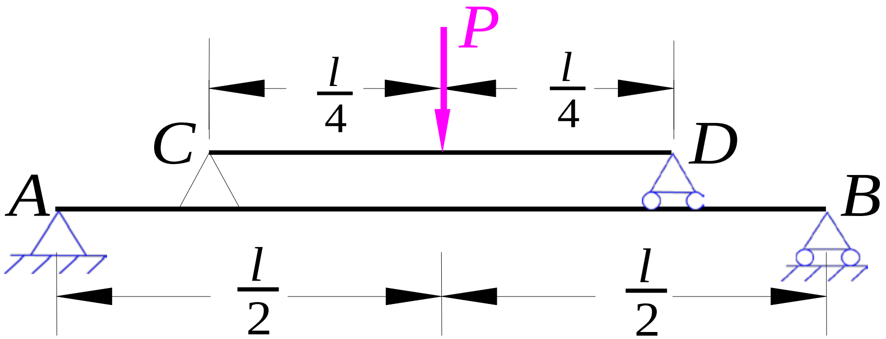
梁截面的优化





二、合理配置载荷和支座





$$M_{\max} = \frac{1}{4}Pl$$

$$M_{\max} = \frac{1}{8}Pl$$

三、采用变截面形式

若使梁的各横截面上的最大正应力都等，可均达到材料的许用应力$[\sigma]$时，称为**等强度梁**。

$$M(x)=\frac{P}{2}x \quad \left(0\le x\le \frac{l}{2}\right)$$

$$\sigma_{\max}(x)=\frac{M(x)}{W_z(x)}$$

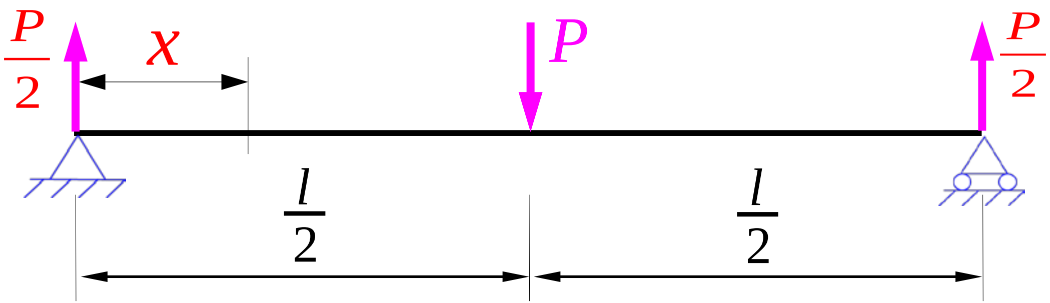
采用矩形截面

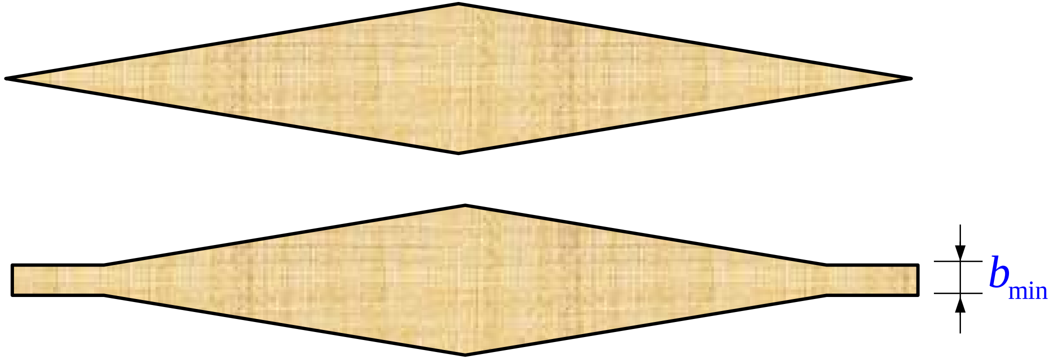
$$\sigma_{\max}(x)=\frac{M(x)}{\frac{1}{6}b(x)h^2(x)}$$

（1）控制截面高度h不变

$$\sigma_{\max}(x)=\frac{\frac{1}{2}Px}{\frac{1}{6}b(x)h^2}=[\sigma]$$

$$b(x)=\frac{3Px}{h^2[\sigma]}$$ 线性变化





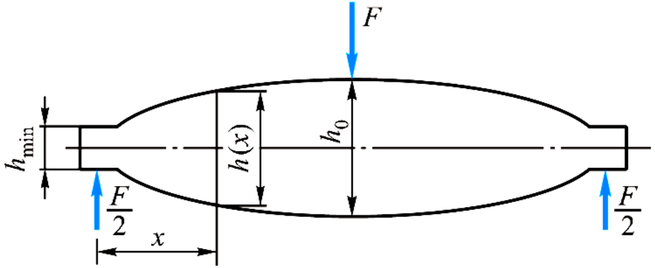
在支座附近：

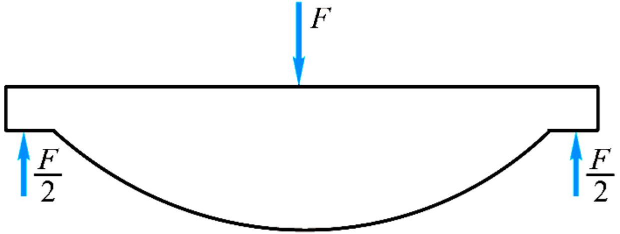
$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{P/2}{b(x)h}\le[\tau]$$

$$b_{\min}=\frac{3}{4}\frac{P}{h[\tau]}$$

$$b(x)\ge\frac{3}{4}\frac{P}{h[\tau]}$$

（2）控制截面宽度b不变 $\sigma_{\max}(x)=\dfrac{\frac{1}{2}Px}{\frac{1}{6}b[h(x)]^2}=[\sigma] \Longrightarrow h(x)=\sqrt{\dfrac{3Px}{b[\sigma]}}$



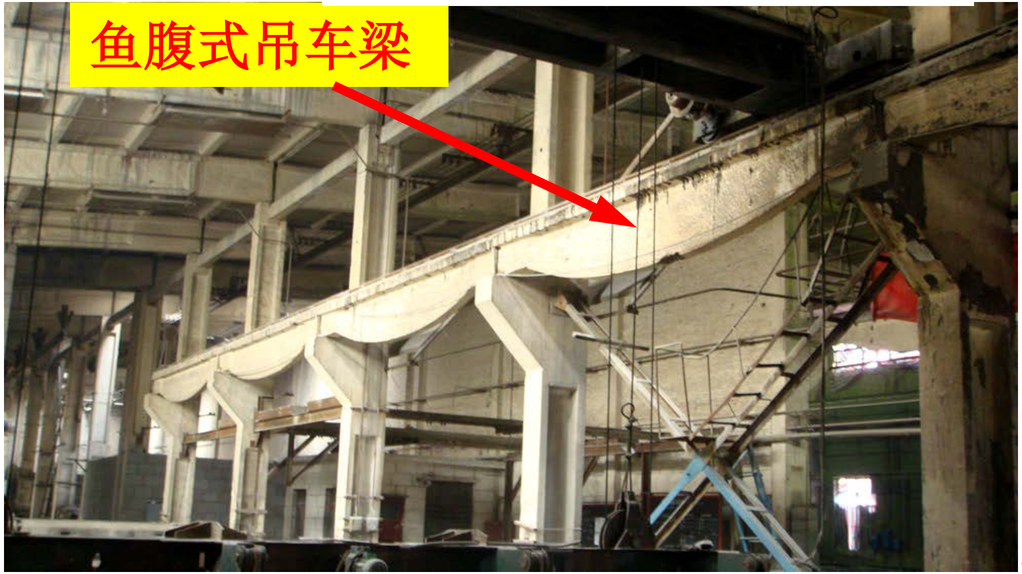


在支座附近：

$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{P/2}{bh(x)}\leq[\tau]$$

$$h(x)\geq\frac{3}{4}\frac{P}{b[\tau]}$$

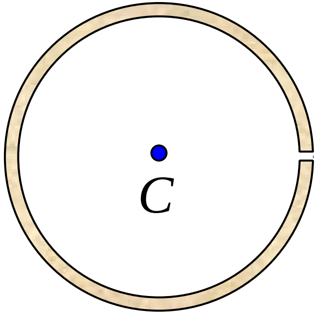
$$h_{\min}=\frac{3}{4}\frac{P}{b[\tau]}$$



弯曲中心 （Bending center）

（内容见第II册 § 12.2）

点击播放视频

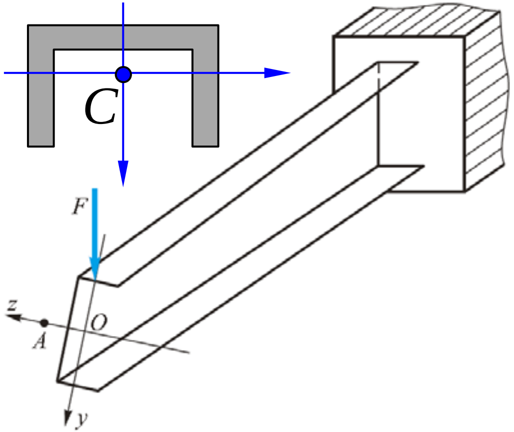


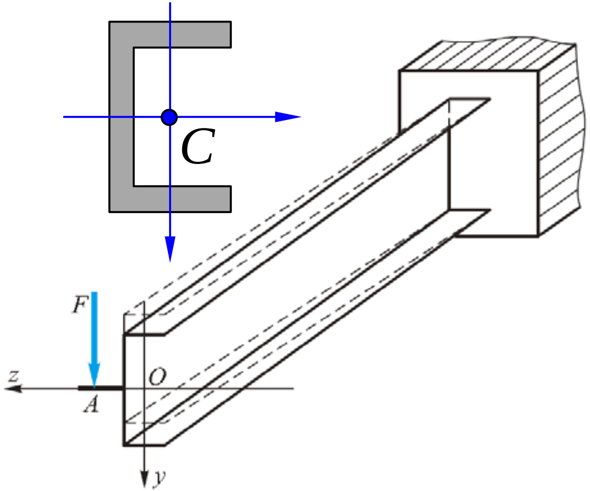
开口圆形截面

理论和实验表明，若杆件有纵向对称面，且横向力作用于该对称面内，则杆件只可能在纵向对称面内发生弯曲，不会有扭转变形。

若横向力作用平面不是纵向对称面， 即使是形心主惯性平面，杆件除发生弯曲变形外， 还将发生扭转变形。横向力必须通过某一特定点，才能保证梁只发生弯曲变形而无扭转变形。这一特定点称为弯曲中心或剪切中心。

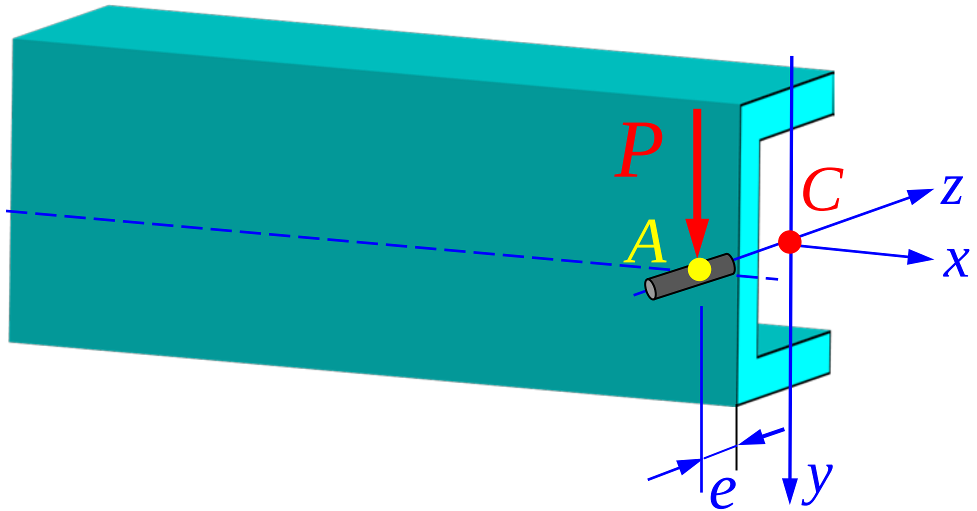
槽钢



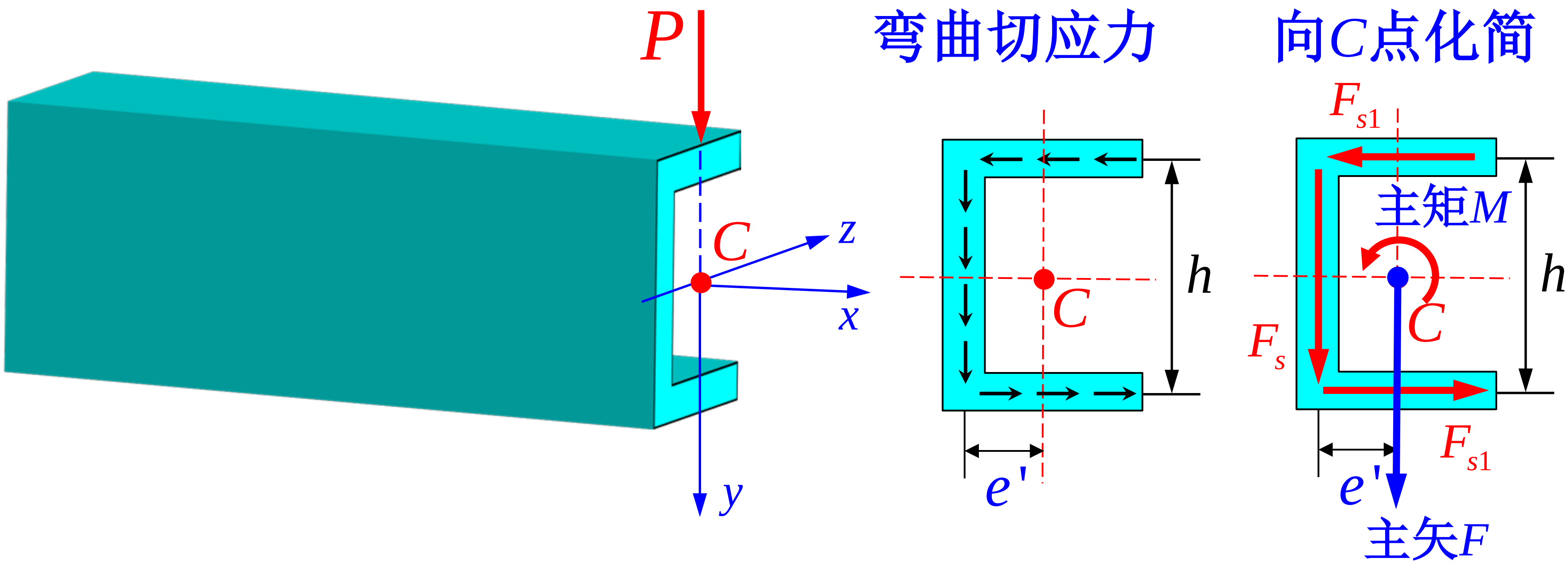


弯曲中心

对于在横向力作用下的**开口截面梁**，理论分析和实验表明，横向力必须作用在平行于形心主惯性平面的某一特定平面内，才能保证梁只发生平面弯曲而不扭转。



非对称弯曲产生扭转的原因



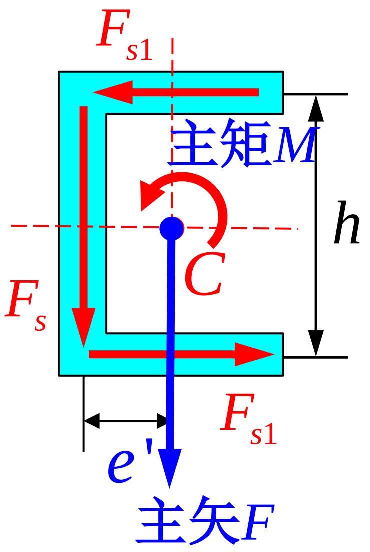
主矢 $F = F_s$

主矩 $M = F_{s1}h + F_s e'$

向C点化简

主矢 $F = F_s$

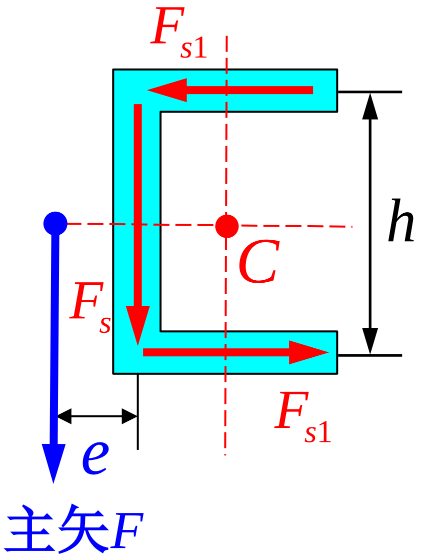
主矩 $M = F_{s1}h + F_s e'$



向A点化简

主矢 $F = F_s$

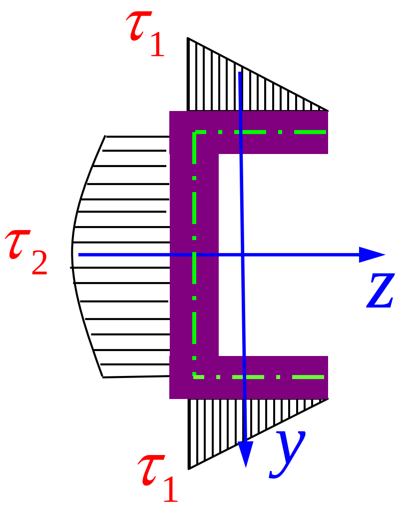
主矩 $M = F_{s1}h - F_s e = 0$

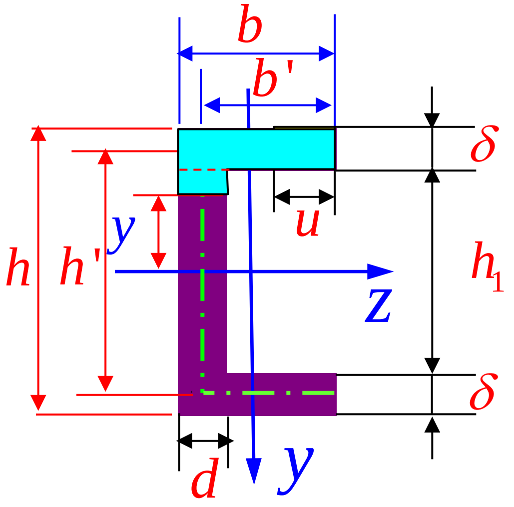


A点即为弯曲中心

弯曲中心位置的确定

以槽形截面为例：





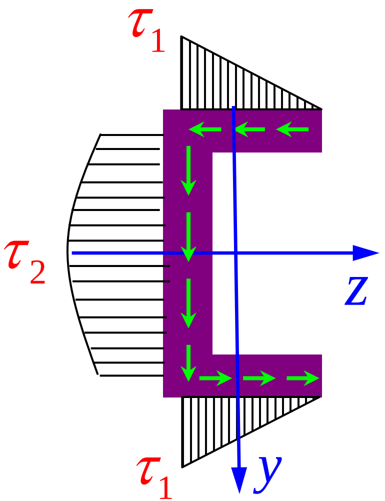
翼板上的切应力 $S_z^* = (u\delta)\frac{h'}{2}$

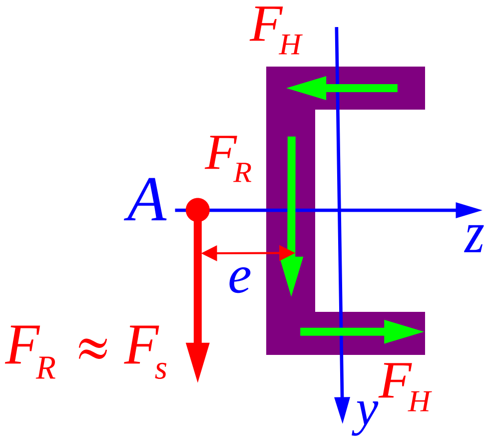
$$\tau_1 = \frac{F_s (u\delta)\frac{h'}{2}}{I_z \delta} = \frac{F_s h' u}{2I_z}$$

腹板上的切应力

$$S_z^* = b\delta\frac{h'}{2} + d\times\left(\frac{h_1}{2} - y\right)\left[y + \frac{1}{2}\times\left(\frac{h_1}{2} - y\right)\right] = \frac{b\delta h'}{2} + \frac{d}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau_2 = \frac{F_s}{I_z d}\left[b\delta\frac{h'}{2} + \frac{d}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right)\right]$$





$$F_R = \int_{A'} \tau_2 \mathrm{d}A \approx F_s$$

$$F_H = \int_{A''} \tau_1 \mathrm{d}A = \frac{1}{2} \cdot \tau_{1,\max} \cdot b'\delta$$

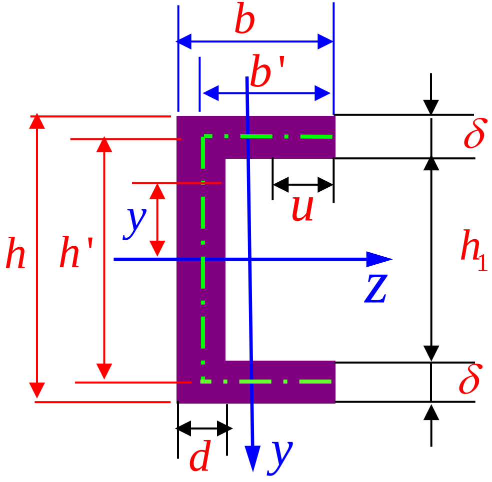
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{F_s h' b'}{2I_z} \times b'\delta = \frac{F_s b'^2 h'\delta}{4I_z}$$

$$F_R \cdot e = F_H \cdot h'$$

$$e = \frac{F_H h'}{F_R} = \frac{b'^2 h'^2 \delta}{4I_z}$$

$$\tau_1 = \frac{F_s h' u}{2I_z}$$

$$\tau_2 = \frac{F_s}{I_z d}\left[\frac{b\delta h'}{2} + \frac{d}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right)\right]$$



弯曲中心位置与外力大小和材料的性质无关，是截面图形的几何性质之一！

几种截面弯曲中心的位置

1. **具有一根对称轴的截面：**如T形、开口薄壁环形

   弯曲中心在对称轴上。

2. **具有两根对称轴的截面：** 如矩形、工字形

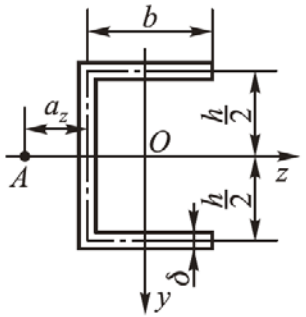
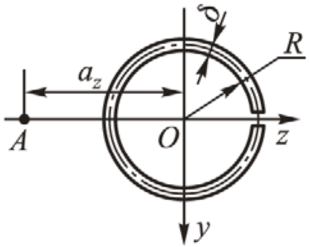
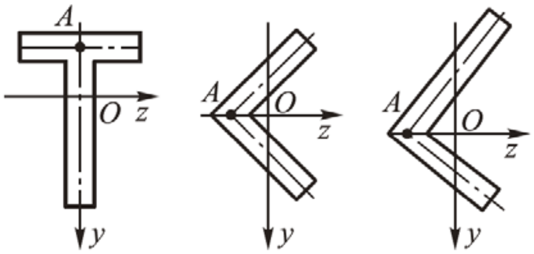
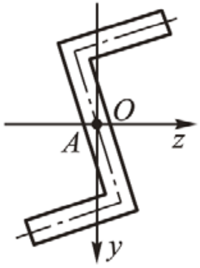
   两对称轴的交点即是弯曲中心。 弯曲中心与截面形心重合

3. **Z字型反对称截面：** 弯曲中心与截面形心重合。

4. **由两个狭长矩形组成的截面：** 如T形、等边或不等边角钢

   弯曲中心在两狭长矩形中线的交点。

第II册 表12.1　p.68　　几种常用截面的弯曲中心位置

截面形状		 $\delta<<R$		
弯曲中心位置	$a_z=\dfrac{b^2h^2\delta}{4I_z}$	$a_z=2R$	两狭长矩形中线的交点	与形心重合

开口薄壁杆件的抗扭刚度较小，如横向力不通过弯曲中心，将引起比较严重的扭转变形，不仅要产生扭转切应力，有时还将因约束扭转而引起附加的正应力和切应力。实体杆件或闭口薄壁杆件的抗扭刚度较大，且弯曲中心通常在截面形心附近，因而当横向力通过截面形心时，如也向弯曲中心简化，其扭矩不大，所以扭转变形可以忽略。

Thank you for your attention!

作业

P182-183: 5.19、5.21

P186: 5.32

对应第6版题号 P177: 5.19、5.21； P180: 5.32

下次课内容 第五章 梁弯曲时的位移

两种材料组合梁（内容见第II册 § 12.4）