

第九章 真空中的静电场

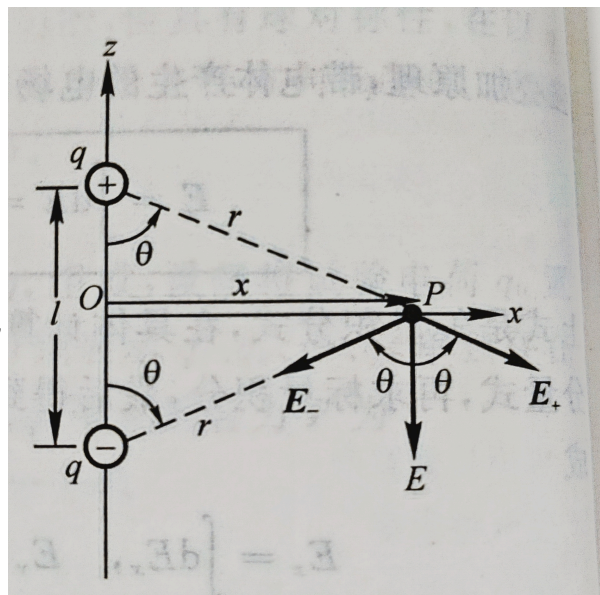
库仑定律

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}$$

电偶极子

一对等量异号点电荷 $+q$ 和 $-q$ ，相距为 l 。当从观察点到两电荷连线的距离 $x \gg l$ 时，则这一对点电荷称为电偶极子
定义电偶极矩 $\mathbf{p}_e = ql$ ， l 的方向由负电荷指向正电荷
电偶极子中垂线上距两电荷中点 O 距离为 x 处的场强为

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e}{x^3}$$



常见场强公式

均匀带电直线外任意一点的场强 (2021 T12)

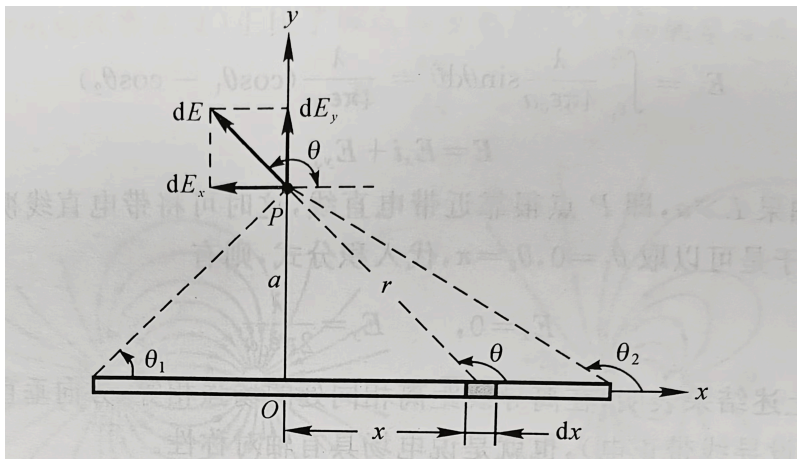
一均匀带电直线，长为 L ，带电量为 q ，线外一点 P 到直线的垂直距离为 a ， P 与直线两端的连线与直线间的夹角分别为 θ_1, θ_2 ，如图所示。求 P 点的场强

解：

选取如图所示的坐标系，有 $dq = \frac{q}{L} dx$

该电荷元在 P 点产生的场强的大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dx}{L r^2}$$



有 $dE_x = dE \cos \theta, dE_y = dE \sin \theta$

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cos \theta = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cos \theta}{L r^2} dx$$
$$E_y = \int dE_y = \int dE \sin \theta = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \sin \theta}{L r^2} dx$$

$$r = \frac{a}{\sin \theta}, x = -a \cot \theta, dx = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{q}{4\pi L \epsilon_0 a} \cos \theta d\theta = \frac{q}{4\pi L \epsilon_0 a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{q}{4\pi L \epsilon_0 a} \sin \theta d\theta = \frac{q}{4\pi L \epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

常见带电体的电场强度公式

均匀带电球面

总电量为 Q ，半径为 R 的均匀带电球面：

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & \text{球面外} \\ 0, & \text{球面内} \end{cases}$$

均匀带电球体

总电量为 Q ，半径为 R 的均匀带电球体：

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & r < R \end{cases}$$

无限长均匀带电圆柱面

线电荷密度为 λ ，半径为 R 的无限长均匀带电圆柱面：

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, & \text{柱面外} \\ 0, & \text{柱面内} \end{cases}$$

无限长均匀带电圆柱体

线电荷密度为 λ ，半径为 R 的无限长均匀带电圆柱体：

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, & \text{柱体外} \\ \frac{r\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2}, & \text{柱体内} \end{cases}$$

无限大均匀带电平面

面电荷密度为 σ 的无限大均匀带电平面：

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

电通量

$$\Phi_e = \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

高斯定理

通过任意闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的所有电量的代数和除以 ϵ_0

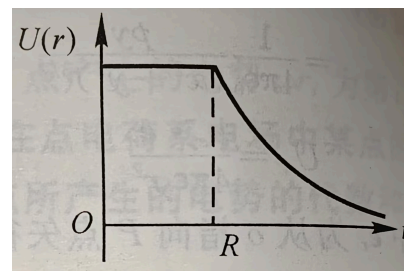
$$\Phi_e = \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

常见电势公式

球壳

半径为 R ，总电量为 q 的均匀带电球面形成电场中电势的分布情况为

$$U(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r \leq R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \end{cases}$$



均匀带电球体

半径为 R ，总电量为 q 的均匀带电球体形成电场中电势的分布情况为

$$U(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \\ \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & r \leq R \end{cases}$$

电偶极子

两点电荷为 $\pm q$ ，相距为 l 的电偶极子电场中任一点 P 的电势

$$U_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{x^2 + y^2}$$

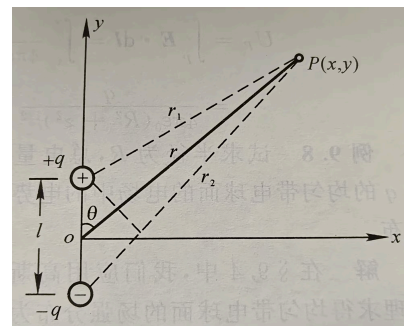
证明

$$U_P = U_1 + U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

因为 $r \gg l$, 则有 $r_2 - r_1 \approx l \cos \theta$, $r_1 r_2 \approx r^2$

因而

$$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{x^2 + y^2}$$



无限长均匀带电直线

电荷线密度为 λ 的无限长均匀带电直线，距带电直线 r 的 p 点的电势为

$$U_p = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

证明

无限长均匀带电直线周围的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

如果选无穷远处作为电势零点，经过积分可知各点电势都是无穷大。

我们可以选取距带电直线 r_0 处的 p_0 点的电势为零参考点。

$$U_p = \int_p^{p_0} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_p^{p_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0$$

可以表示为

$$U_p = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

电场强度和电势的关系

$$\mathbf{E} = -\nabla U$$

第十章 静电场中的导体和电介质

静电平衡

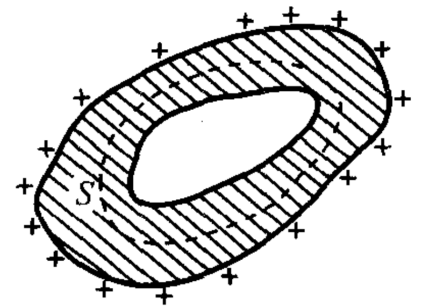
基本性质

1. 导体内部场强处处为0
2. 导体表面外侧，紧靠表面处的场强处处与表面垂直
3. 导体是个等势体，导体表面是个等势面

带空腔的导体

若导体内有空腔,而腔内无其他带电体（如右图），则不难证明

1. 导体空腔内表面无电荷存在
2. 导体空腔内场强处处为0



电容器的电容

两导体带有等量异号的电荷 Q ，导体间的电势差为 $U_A - U_B$

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B}$$

平行板电容器

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

圆柱形电容器

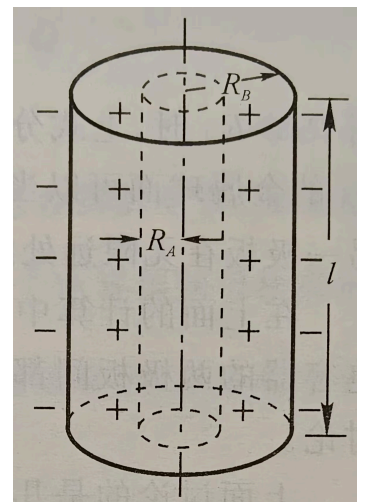
两半径分别为 R_A 和 R_B ，长为 l 的圆柱面的电容

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_B}{R_A}}$$

证明

令内外圆柱面单位长度的带电量分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$

由高斯定理，取半径为 r 的圆柱面($R_A < r < R_B$)



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{\lambda l}{U_A - U_B} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_B}{R_A}}$$

球形电容器

半径分别为 R_A 和 R_B 的同心金属球壳组成的球形电容器的电容

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$$

证明

设内外球壳带电荷 $+Q$ 和 $-Q$

由高斯定理，取半径为 r 的球面($R_A < r < R_B$)

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$$

电介质

电介质对电场的影响

$$U = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

$$C = \epsilon_r C_0$$

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

ϵ_r 为仅与电介质有关的常数，称为电介质的**相对介电常数**

电极化强度

对大多数各项同性电介质来说，**P**和**E**有如下关系

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

极化面密度

均匀电介质极化时，极化电荷面密度 σ' 等于极化强度在该点表面处的法向分量。即

$$\sigma' = |\mathbf{P}| \cos \theta = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$$

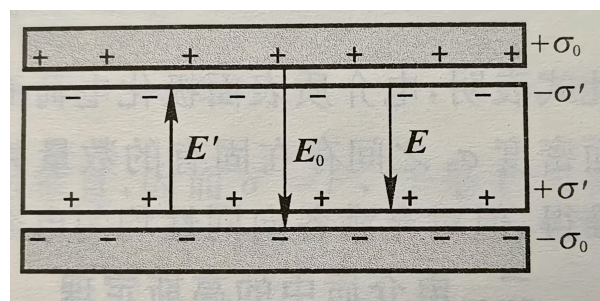
其中**P**为极化强度， \mathbf{e}_n 为该点法线方向单位矢量

电介质中的场强

χ_e 为电极化率

$$1 + \chi_e = \epsilon_r$$

$$\sigma' = \sigma_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$$



从而

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$$

电介质中的高斯定理

通过电场中任意闭合曲面的电位移通量，等于该闭合面所包围的自由电荷的代数和

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum q_0$$

其中 \mathbf{D} 为电位移

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

其中 ϵ 称为电介质的介电常数或电容率

电场的能量

能量密度积分法

单位体积电场贮存的能量 w_e 为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

从而整个电场贮存的能量为

$$W = \int_V w_e dv$$

等效电容能量公式法

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$$

带电体的静电能公式

$$W = \frac{1}{2} \int_q U dq$$

例

均匀带电球面，半径为 R ，总电量为 Q ，求这一带电系统的能量。

解一：

带电球面在球外产生电场，电场和能量密度分别为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$W = \int_R^\infty w dV = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

解二：

$$C = 4\pi\epsilon_0 R, W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

解三：

$$W = \frac{1}{2} \int U dq = \frac{1}{2} \int_0^Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

第十一章 稳恒电流

电流和电流密度

电流强度 I 和电流密度矢量 \mathbf{j} 的定义

$$I = \frac{dq}{dt}, j = \frac{dI}{dS}$$

也即

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

电流与漂移速度

$$I = en v_d \Delta S, \mathbf{j} = en \mathbf{v}_d$$

电流连续性方程及稳恒的条件

电流连续性方程

$$\oint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}$$

稳恒条件

$$\oint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

欧姆定律的微分形式

导体元两端的电势差

$$\Delta U = E\Delta l = j\Delta S\Delta R$$

即

$$j = \frac{\Delta l}{\Delta R \Delta S} E = \frac{1}{\rho} E = \gamma E$$

矢量形式为

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

γ 为导体的电导率

第十二章 稳恒磁场

洛伦兹力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

标量式为

$$F = qvB \sin \theta$$

其中 θ 为速度矢量 \mathbf{v} 与磁感应强度矢量 \mathbf{B} 之间的夹角

毕奥-萨伐尔定律

在导线中沿电流方向取一长为 dl 的矢量线元 $d\mathbf{l}$ ，此线元取得足够小，方向与线元内电流密度的方向相同，称 $I d\mathbf{l}$ 为电流元。

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

计算某点场强时积分即可。

常见的稳恒磁场

长导线

设真空中一长直导线 MN 中通有电流 I 。计算距导线为 a 的场点 P 的磁感应强度。

取 P 点至导线的垂足 O 为坐标原点。在载流导线上任取一电流元，它在 P 点产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2}$$

则有 P 点的磁感应强度为

$$B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2}$$

