



浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

傅里叶变换

主讲人：金浩然 研究员

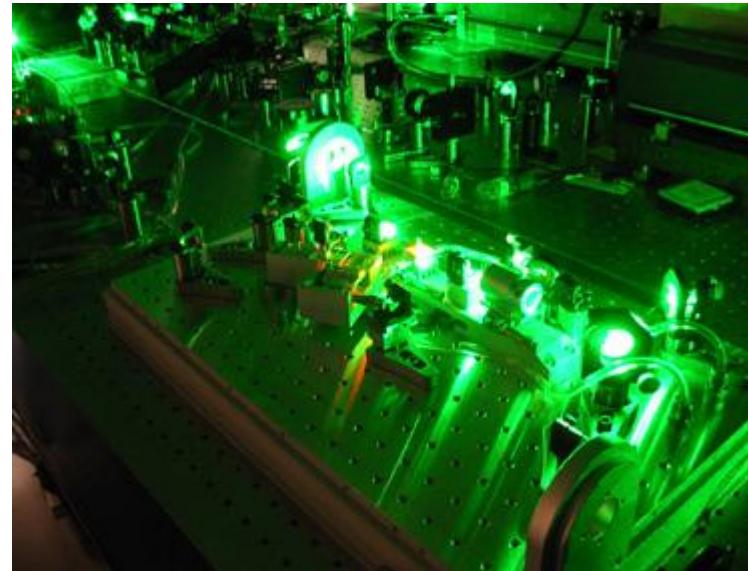
电话：13645717238

办公室：开物苑3-232



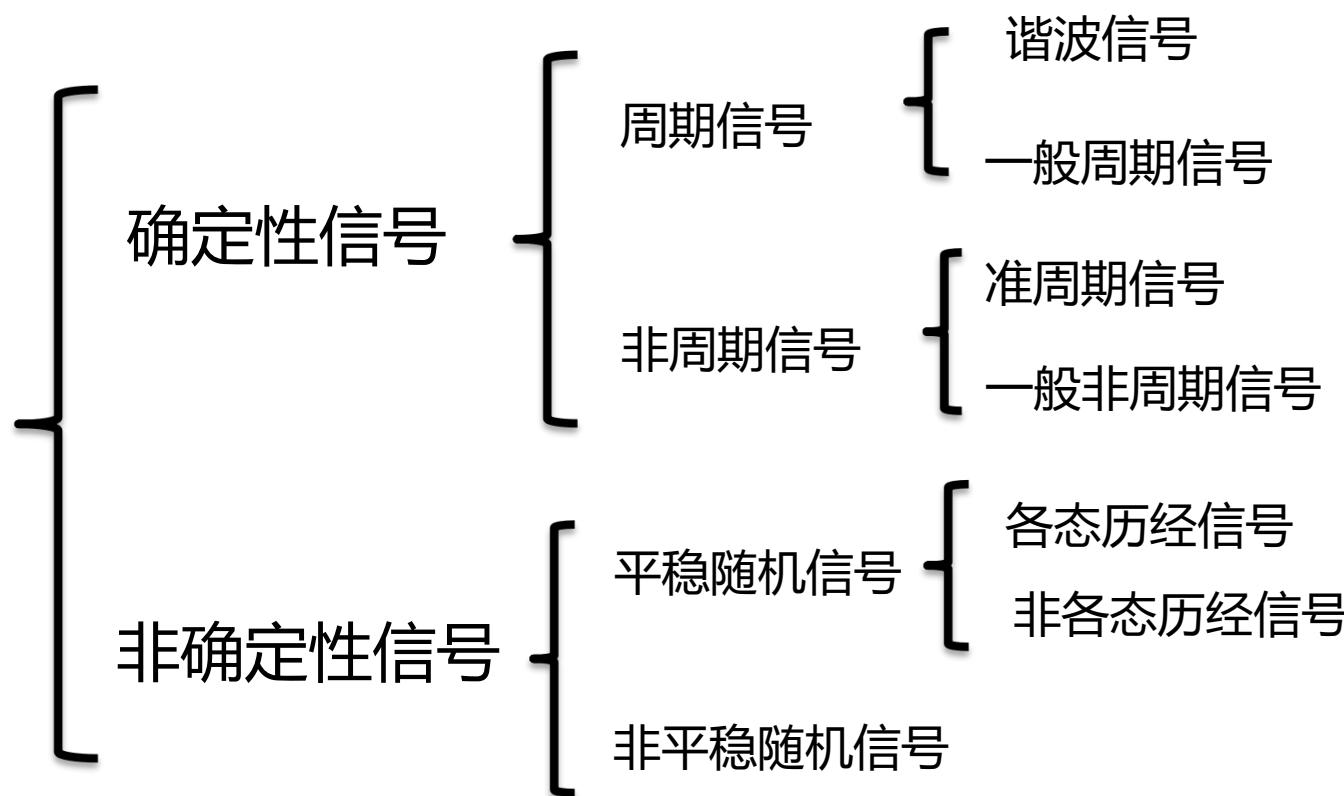
傅里叶变换

- ◆ 瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换
- ◆ 傅里叶变换性质
- ◆ 典型信号的傅里叶变换



傅里叶变换

确定性信号和非确定性信号

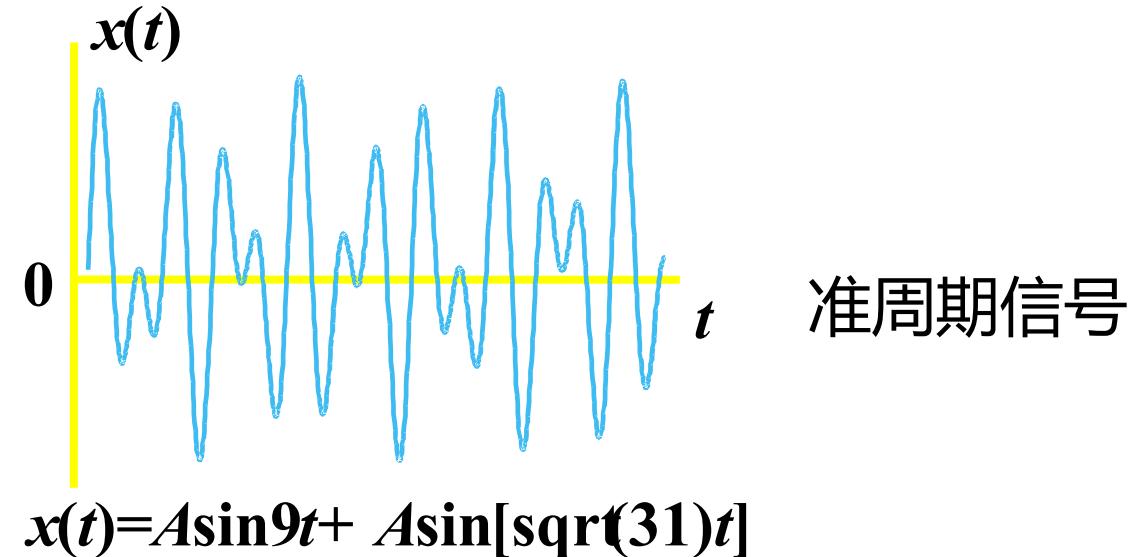


傅里叶变换

非周期信号

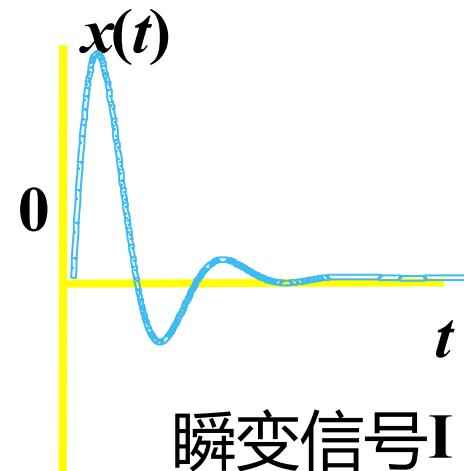
准周期信号

信号中各简谐成分的频率比为无理数具有(离散)频谱

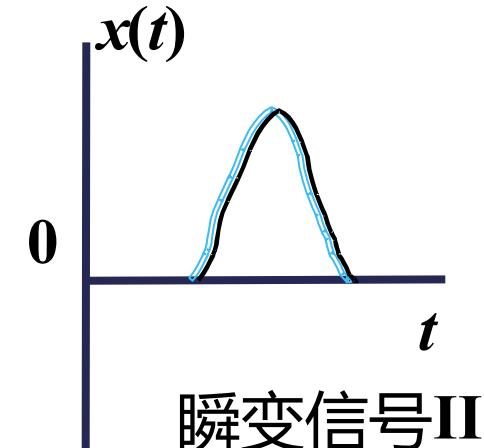


瞬变信号

在一定时间区间内存
在或随时间的增加衰
减至零



$$x(t)=\exp(-t)*\sin \omega t$$



瞬变非周期信号的谱密度 与傅里叶变换



瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

对于周期为 T 的信号 $x(t)$, 其频谱是离散的。其相邻两条谱线间隔为 $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ 。

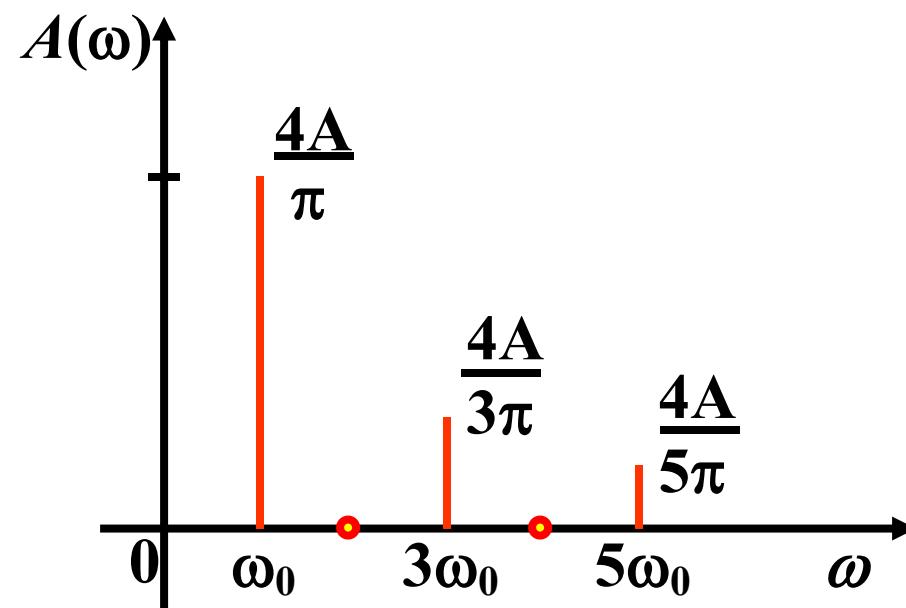
当周期信号的周期 $T_0 \rightarrow \infty$ 时, 周期信号就变成了非周期信号了, $T_0 \rightarrow \infty$ 则频率间隔

$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow \text{无穷小}$$

谱线无限靠近, 最后成为一条连续曲线。

所以非周期信号的频谱是连续的。

以前述的方波为例。



瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

若把非周期信号可以看成是周期 T_0 趋于无穷大的周期信号

$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \xrightarrow{T_0 \rightarrow \infty} d\omega \quad \text{red arrow} \quad \frac{1}{T_0} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

三个变化

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\omega \rightarrow d\omega \\ n\omega_0 \rightarrow \omega \\ \sum \rightarrow \int \end{array} \right.$$

$$= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega$$

瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega$$

这就是傅里叶积分表达式。

傅里叶变换(FT)

$$\ddot{\times} \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶反(逆)变换(IFT)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

称为二者互为傅里叶变换对，记作：

$$x(t) \xrightarrow[\text{IFT}]{\text{FT}} X(\omega)$$

瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

以 $\omega = 2\pi f$ 代入得

$$\text{※※ } X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

记为：

$$x(t) \xrightarrow[IFT]{FT} X(\omega)$$

$$X(f) = 2\pi X(\omega)$$

这两组式子分别以 ω 和 f 为变量，后一组式子由于消除了 2π 这个因子，应用起来更为方便，建议大家多使用后一组。

瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

傅里叶变换
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

通过傅里叶变换得到的 $X(f)$ ，一般来说是实变量 f 的复函数，可以写成实、虚部的形式，也可写成幅值与相角的形式。

$$X(f) = \operatorname{Re} X(f) + j \operatorname{Im} X(f) = |X(f)| e^{j\phi(f)}$$

$$|X(f)| = \sqrt{[\operatorname{Re} X(f)]^2 + [\operatorname{Im} X(f)]^2}$$

$$\phi(f) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} X(f)}{\operatorname{Re} X(f)}$$

$|X(f)|$ ——信号 $x(t)$ 的连续幅值谱

$\phi(f)$ ——信号 $x(t)$ 的连续相位谱

瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

用周期信号时来推导非周期信号的傅里叶变换对，这种推导并不严格。因为傅里叶变换的存在条件除了满足狄里赫利条件外，还应满足在无限区间上绝对可积的条件，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

因此并不是所有的瞬变非周期信号都能够进行傅里叶变换，有关这一点将在后面以例题的形式说明。

瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

频谱反映信号的频率构成成分。对于周期信号，傅里叶级数的系数组成了离散频谱，其幅值是各次谐波的振幅。而对于非周期信号，其幅值频谱是连续的，幅值谱实际上是幅值谱密度（振幅/频率），所以非周期信号的频谱应该称为谱密度函数；相应的非周期信号的频谱图实际上应该称为谱密度图。但一般文献把离散频谱和连续频谱统统称为频谱，而无严格区分，工程测试中为方便，也仍称为频谱。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\sin \varphi_n \cos n \omega_0 t + \cos \varphi_n \sin n \omega_0 t)$$

瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

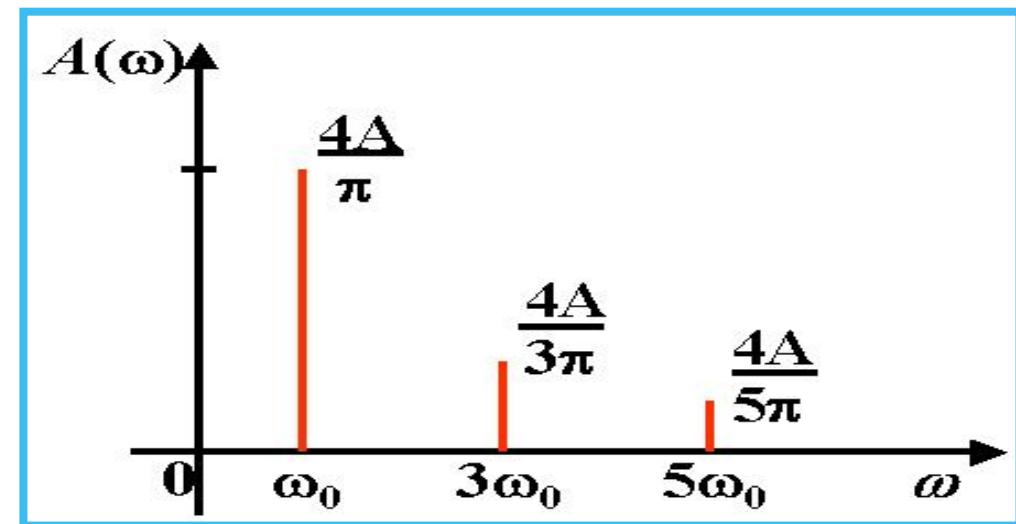
再次强调，非周期信号的幅值谱和周期信号的幅值很相似，但是两者是有差别的，其别突出表现在周期信号的幅值的量纲为幅值量纲，而非周期信号的幅值谱的量纲不是幅值量纲，而是振幅/频率，即单位频带上的幅值。

周期信号——幅值量纲

非周期信号——幅值/频率

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

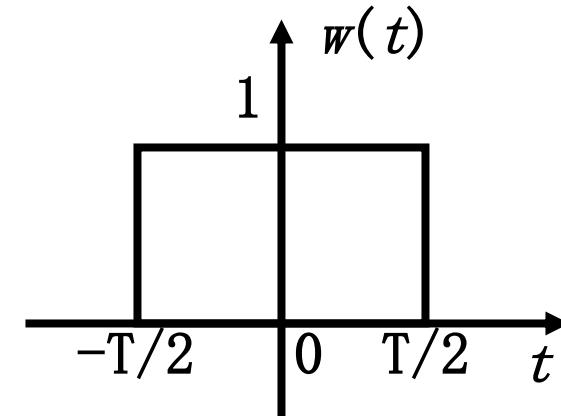
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\sin \varphi_n \cos n\omega_0 t + \cos \varphi_n \sin n\omega_0 t)$$



瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

例 求矩形窗函数的频谱

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$



解
$$\begin{aligned} W(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{j}{2\pi f} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}) = \boxed{T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}} \longrightarrow \text{应用欧拉公式} \\ &= T \operatorname{sinc}(\pi f T) \end{aligned}$$

$$\sin \omega t = \frac{j}{2} (e^{-j\omega t} - e^{j\omega t})$$

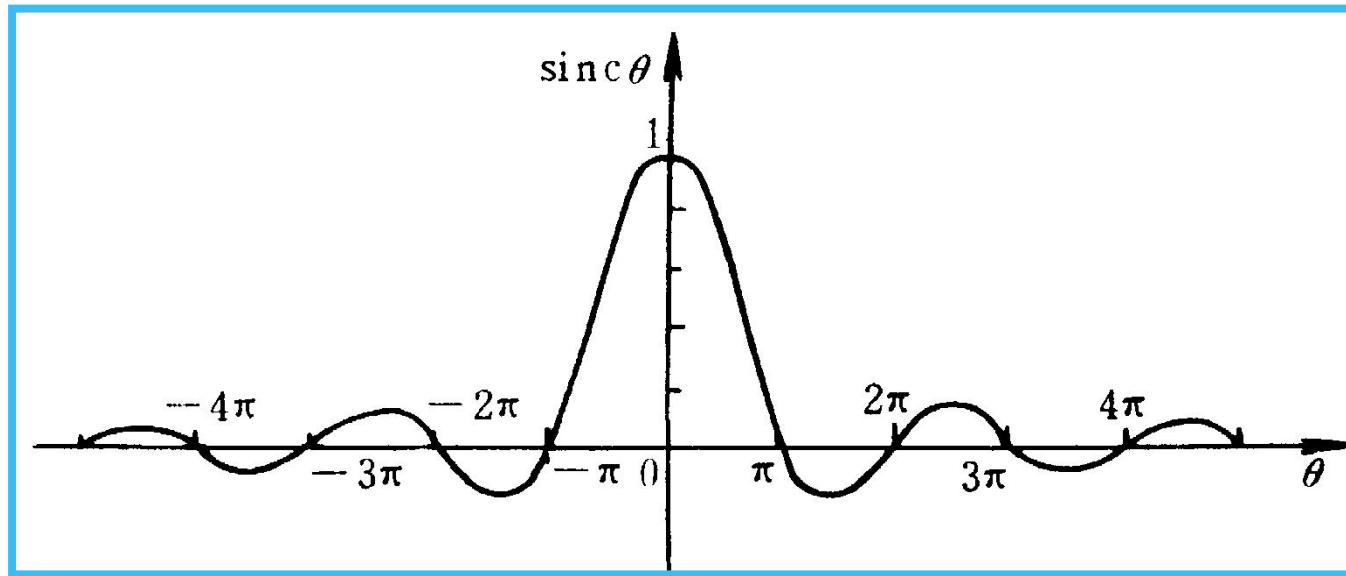
$W(f)$ 中 T 称为窗宽

定义 $\operatorname{sinc} \theta \equiv \frac{\sin \theta}{\theta}$

瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

$$\text{sinc } \theta \equiv \frac{\sin \theta}{\theta}$$

这个函数在信号分析中有很大的作用，将之称为抽样信号，它以 2π 为周期并随 θ 的增加作衰减振荡。

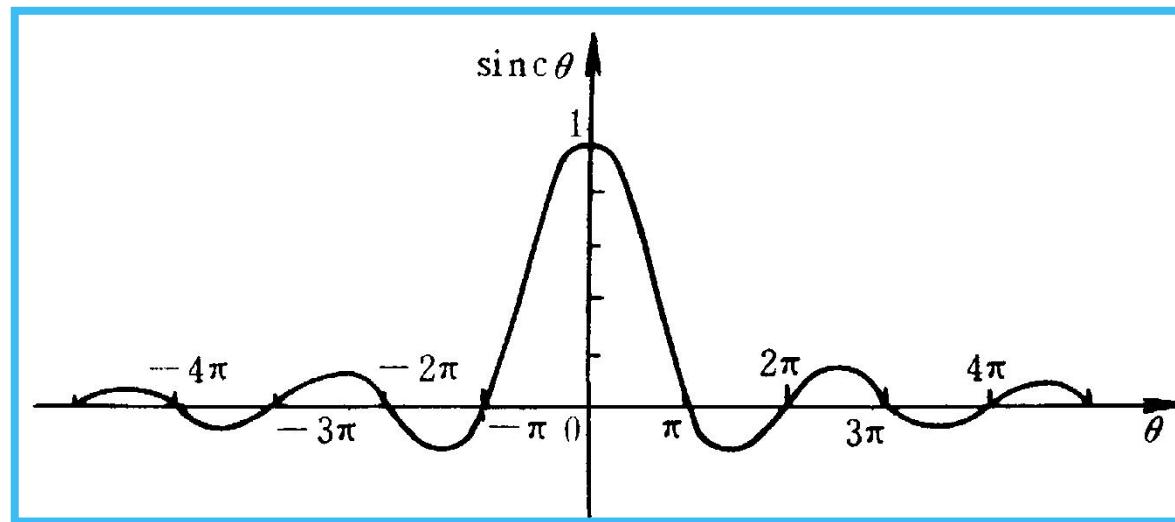


$\text{sinc } \theta$ 的图象

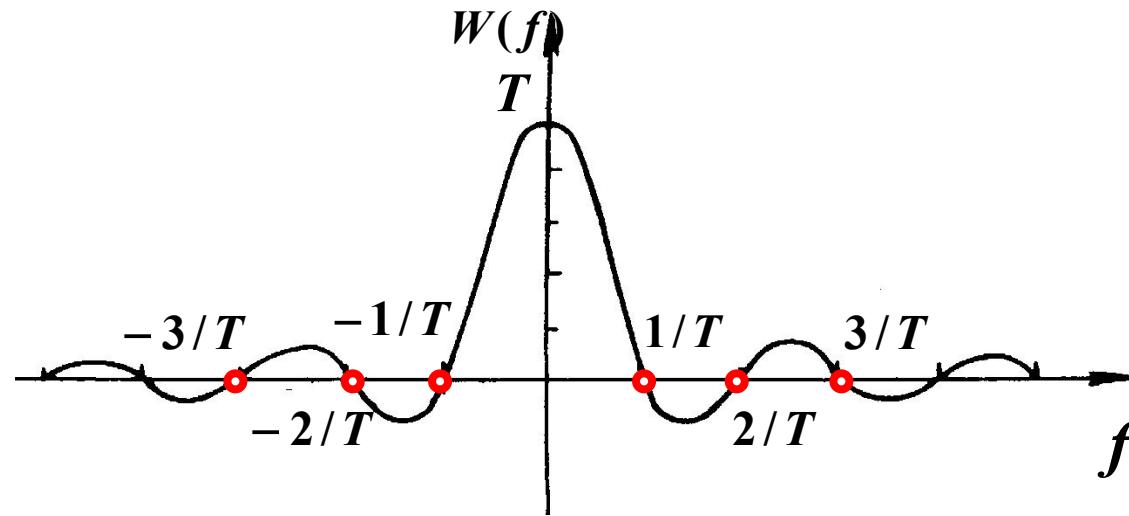
- ❖ $\text{sinc } \theta$ 以 2π 为周期，随 θ 的增加做衰减振荡；
- ❖ $\text{sinc } \theta$ 函数是偶函数，在 $\theta = n\pi$ 处的值是零 $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

$$\text{sinc} \theta \equiv \frac{\sin \theta}{\theta}$$



$$W(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$$



瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

$$W(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$$

$W(f)$ 函数只有实部，没有虚部。

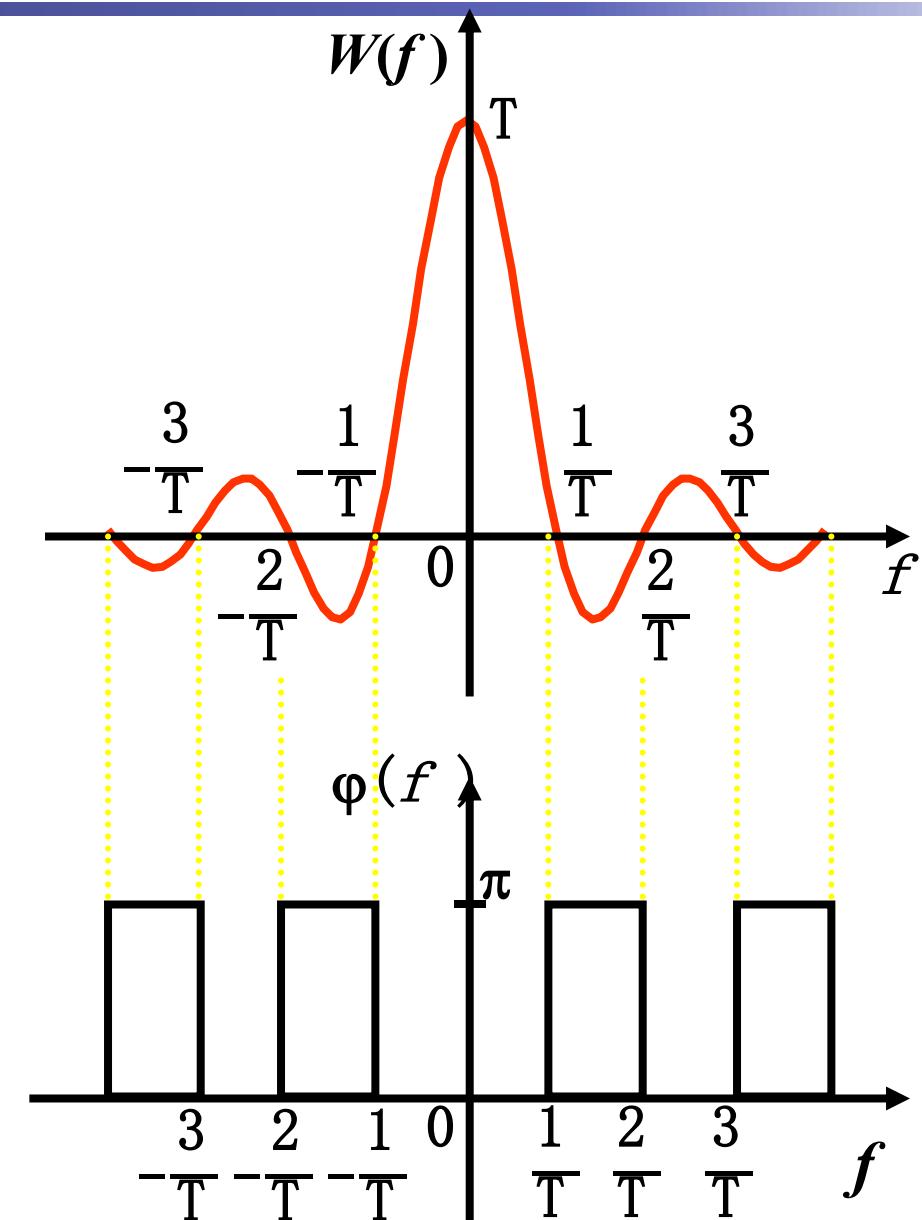
$W(f)$ 中 T 称为窗宽。

抽样信号：

$W(f)$ 以 $2/T$ 为周期并随 f 的增加作衰减振荡。

$W(f)$ 是偶函数，在 $f=n/T$ ($n=\pm 1, \pm 2, \dots$) 处其值为0。

其幅频谱与相位谱如图示。



瞬变非周期信号的谱密度与傅里叶变换

非周期信号频谱的特点

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega_0 t} \quad c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- 频谱连续。
- $|X(\omega)|$ 与 $|c_n|$ 量纲不同。 $|c_n|$ 具有与原信号幅值相同的量纲， $|X(\omega)|$ 是单位频宽上的幅值
- 非周期信号频域描述的基础（数学工具）是傅里叶变换。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶变换的主要性质



傅里叶变换的主要性质

傅里叶变换的主要性质

一个信号可以有时域描述和频域描述两种描述方法。

时域描述：以时间 t 做为独立变量的信号的描述方法。

频域描述：以频率 f (或 ω) 做为独立变量的信号的描述方法。

频域描述能够揭示信号的频率结构和各频率成分的幅值与相位的大小。

这两种描述方法彼此建立一一对应关系就是通过傅里叶变换来实现的，即傅里叶变换起到了桥梁的作用。

信号在某个域中的变化和运算会对另一个域有何影响

傅里叶变换的主要性质

1. 奇偶虚实性

$$e^{-j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \operatorname{Re} X(f) - j \operatorname{Im} X(f)$$

$$\operatorname{Re} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt \quad \text{余弦函数是偶函数}$$

$$\operatorname{Im} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi f t dt \quad \text{正弦函数是奇函数}$$

若 $x(t)$ 为实函数，则： $\operatorname{Re} X(f) = \operatorname{Re} X(-f)$

$$\operatorname{Im} X(f) = -\operatorname{Im} X(-f)$$

若 $x(t)$ 为实偶函数，则 $\operatorname{Im} X(f) = 0$, $X(f)$ 为实偶函数

若 $x(t)$ 为实奇函数，则 $\operatorname{Re} X(f) = 0$, $X(f)$ 为虚奇函数

若 $x(t)$ 为虚偶函数，则 $\operatorname{Re} X(f) = 0$, $X(f)$ 为虚偶函数

若 $x(t)$ 为虚奇函数，则 $\operatorname{Im} X(f) = 0$, $X(f)$ 为实奇函数

傅里叶变换的主要性质

2、线性叠加性

如果

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$

$$y(t) \rightleftharpoons Y(f)$$

那么

$$ax(t) + by(t) \rightleftharpoons aX(f) + bY(f)$$

其中

a, b 均为常数

傅里叶变换的主要性质

3、对称性

如果 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$

则有 $X(t) \rightleftharpoons x(-f)$

证明：IFT定义 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$

用-t代t $x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-j2\pi ft} df$

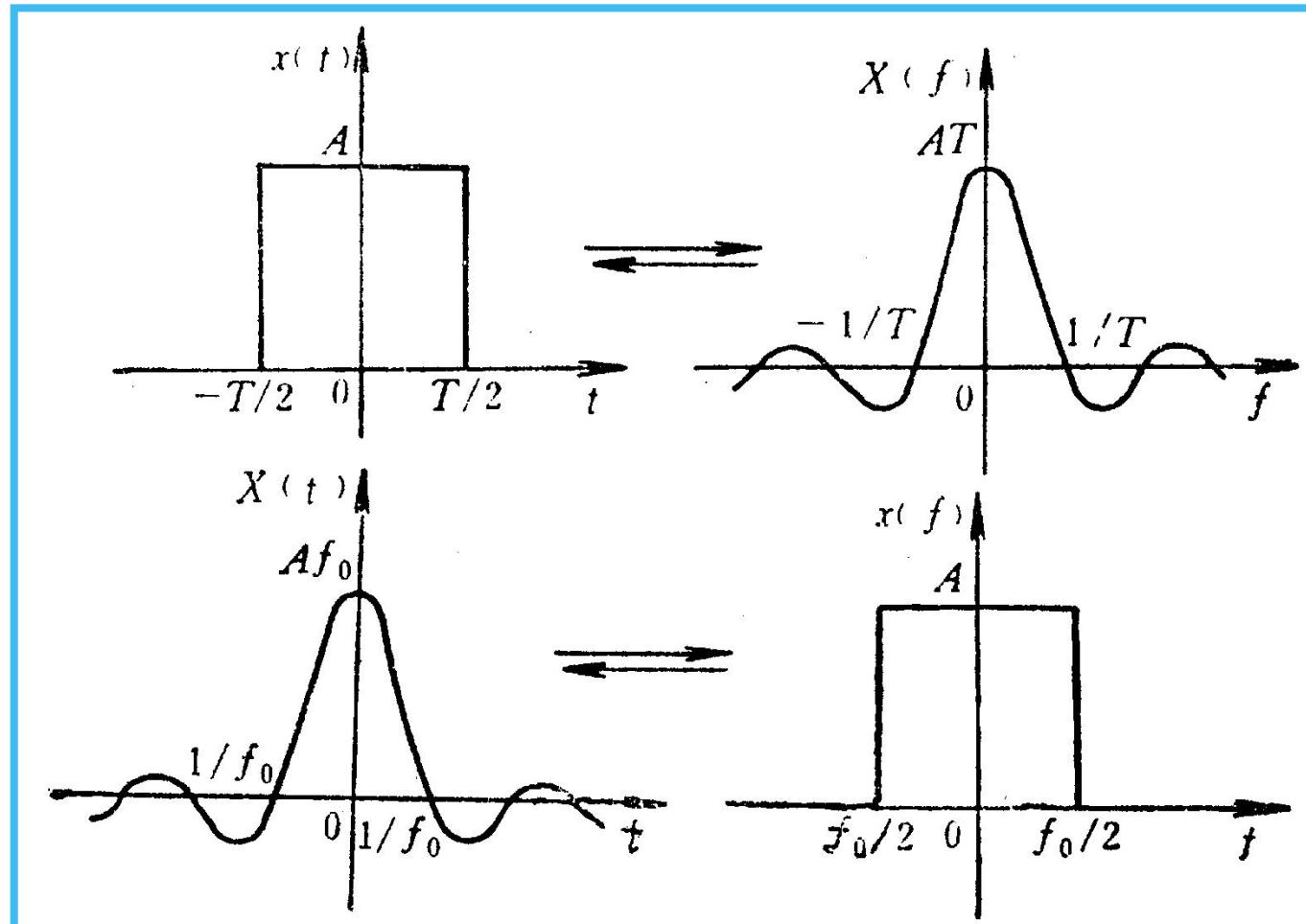
互换t和f $x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt$

这是傅里叶变换的定义，因此上述结论得到验证

即 $X(t) \rightleftharpoons x(-f)$ 思考：当频谱采用自变量 ω 时，结果会如何？

傅里叶变换的主要性质

对称性举例



作用根据已知的傅里叶变换对推出未知的傅里叶变换对。

傅里叶变换的主要性质

4、时间尺度改变特性

如果 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$

则有 $x(kt) \rightleftharpoons \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right)$

证明 $F[x(kt)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(kt) e^{-j2\pi ft} dt$

$$F[x(kt)] = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{2\pi f}{k}\tau} d\tau = \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right) \text{ 若 } k \text{ 为正}$$

$$F[x(kt)] = \frac{1}{k} \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\frac{2\pi f}{k}\tau} d\tau = \frac{-1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right) \text{ 若 } k \text{ 为负}$$

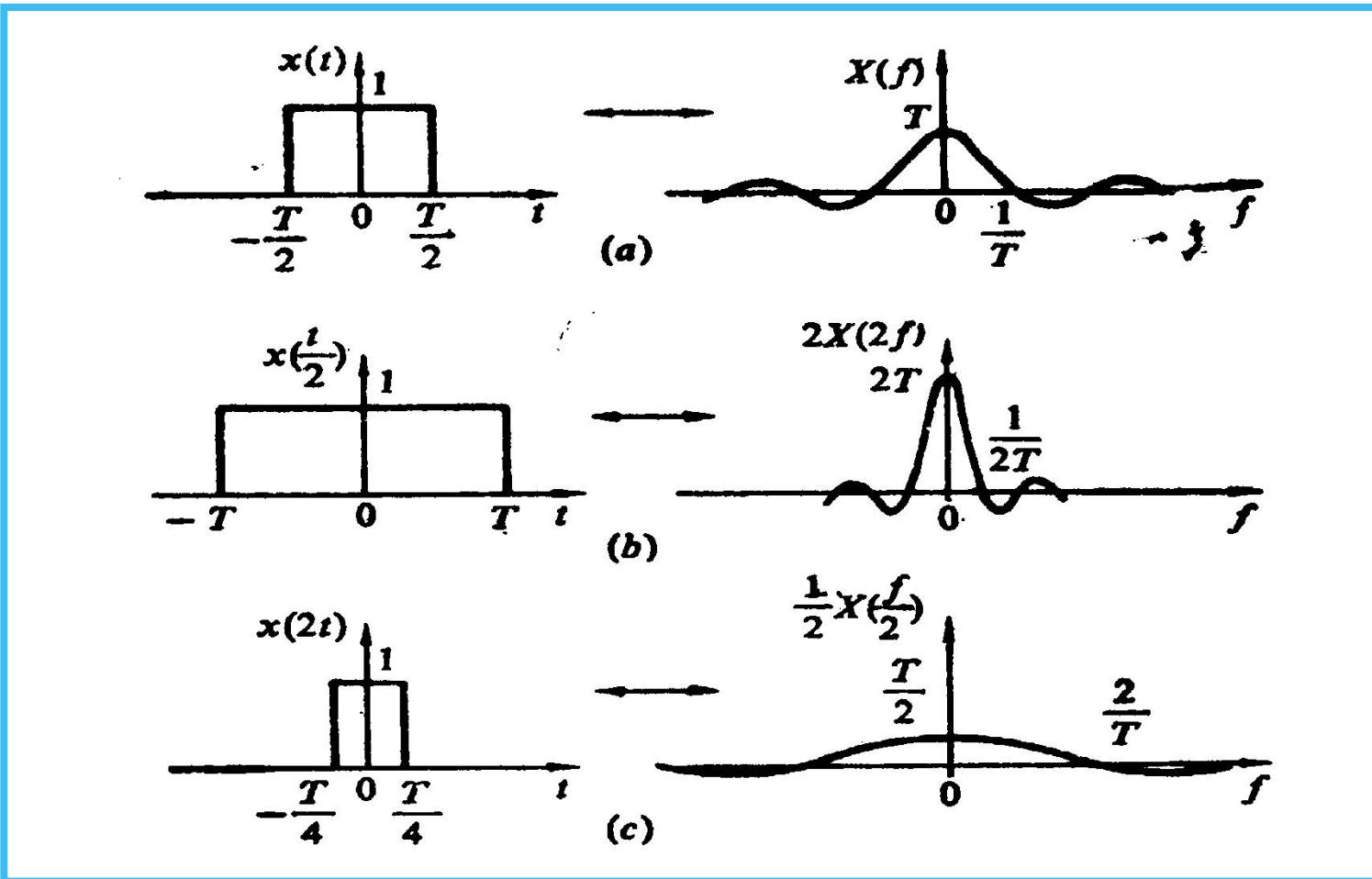
$$F[x(kt)] = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{2\pi f}{k}\tau} d\tau = \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right) \quad \text{得证}$$

傅里叶变换的主要性质

时间尺度改变特性举例

又称为时间展缩原理

尺度改变性质举例



a) $k=1$

b) $k=0.5$
幅值增大
频带变窄

c) $k=2$
幅值减小
频带变宽

磁带慢录快放，时间尺度压缩，处理效率提高，频带加宽

傅里叶变换的主要性质

5、时移和频移性质

如果 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$

则有时移性质 $x(t \pm t_0) \rightleftharpoons X(f)e^{\pm j2\pi f t_0}$ t_0 为常数

证明 $F[x(t \pm t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t \pm t_0) e^{-j2\pi f t} dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t \pm t_0) e^{-j2\pi f(t \pm t_0)} \cdot e^{\pm j2\pi f t_0} d(t \pm t_0)$$

与t无关

$$= X(f) e^{\pm j2\pi f t_0}$$

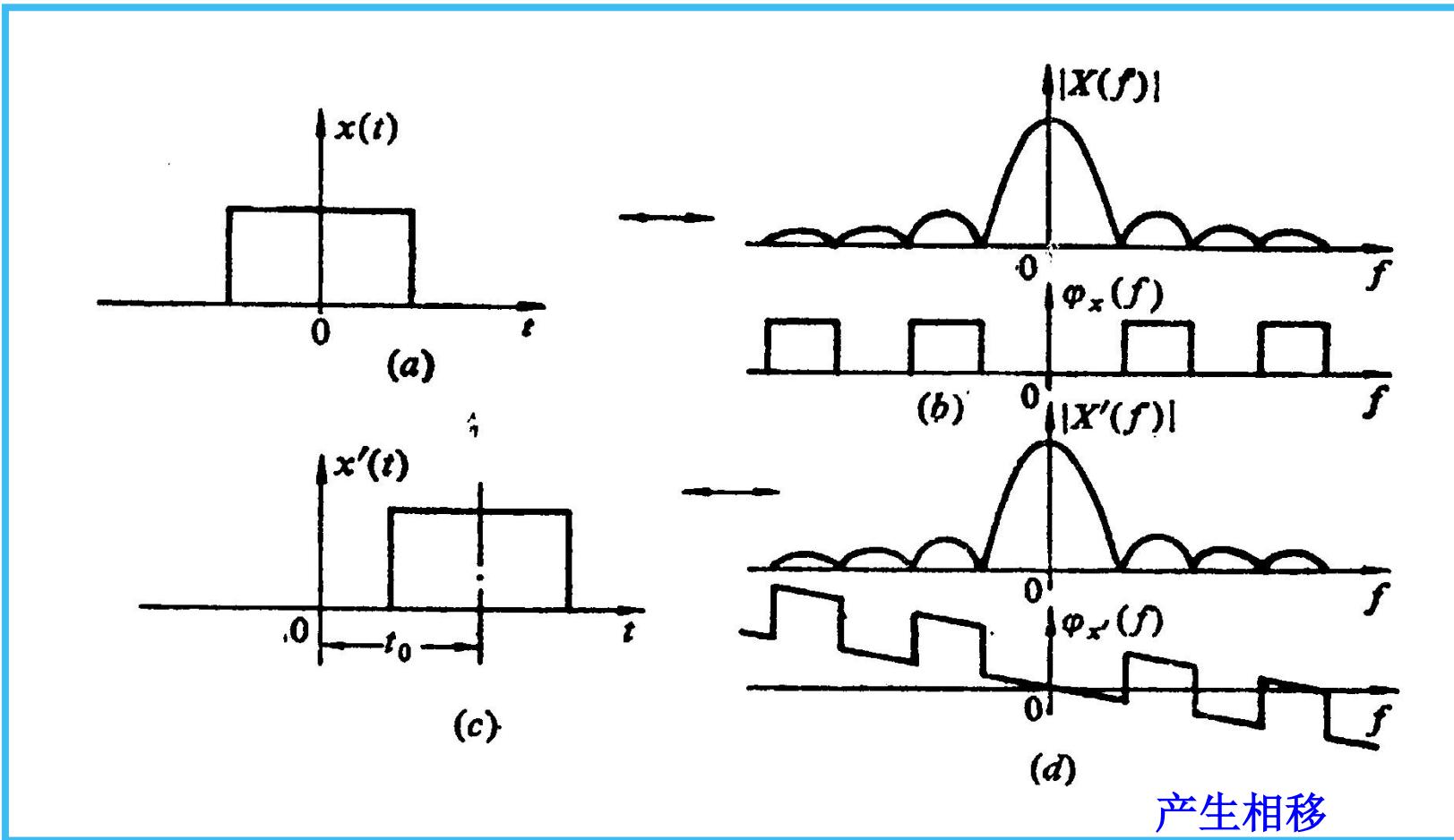
此性质表明，在时域中信号沿时间轴平移一个常值时，频谱函数将乘因子，即只改变相频谱，不会改变幅频谱。

频移性质 $x(t)e^{\mp j2\pi f t_0} \rightleftharpoons X(f \pm f_0)$ f_0 为常数

傅里叶变换的主要性质

时移性质举例

相控阵技术



- a) 时域矩形窗 b) 图a) 对应的幅频和相频特性曲线
- c) 时移的时域矩形窗 d) 图c) 对应的幅频和相频特性曲线

傅里叶变换的主要性质

6、卷积性质（又称为褶积）

卷积



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

拉氏变换

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

傅里叶变换变换

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

$$y(t) = F^{-1}[Y(f)]$$

傅里叶变换的主要性质

6. 卷积性质 (又称为褶积)

两个信号卷积定义为：

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)x_1(t - \tau)d\tau$$

$$F[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau]e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt]d\tau \\ &= X_1(f)X_2(f) \end{aligned}$$

卷积性质可表述为： (这个性质很重要)

$$x(t) \rightleftharpoons X(f) \quad \rightarrow \quad x_1(t) * x_2(t) \rightleftharpoons X_1(f)X_2(f)$$

$$x_1(t)x_2(t) \rightleftharpoons X_1(f) * X_2(f)$$

卷积一般难于计算，
应用傅里叶变换的性质，
可以将之化为乘积，然后
再做反变换。

应用案例：维纳滤波

傅里叶变换的主要性质

7. 微分与积分性质

若

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$

则

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \rightleftharpoons (j2\pi f)^n X(f)$$

微分性质

证明 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$ $\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (j2\pi f) X(f) e^{j2\pi ft} df$

即 $F[\frac{dx(t)}{dt}] = (j2\pi f) X(f)$ 同理 $F[\frac{d^n x(t)}{dt^n}] = (j2\pi f)^n X(f)$

积分性质

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \rightleftharpoons \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f)$$

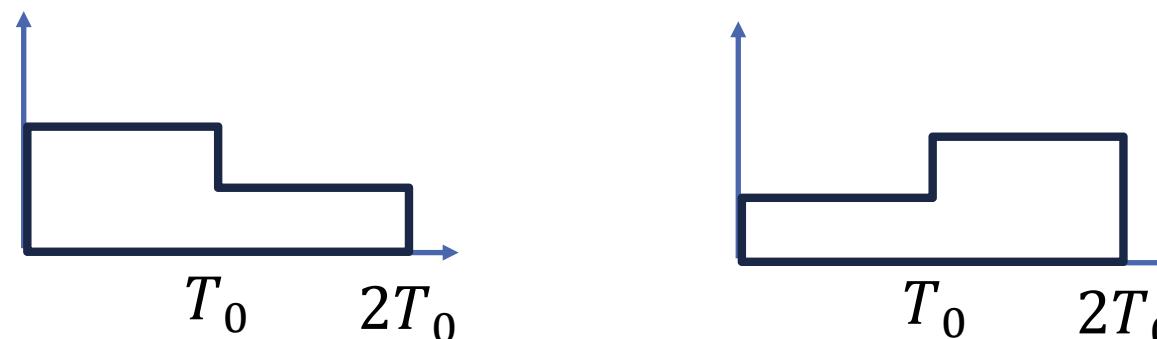
傅里叶变换的主要性质

傅里叶变换的主要性质

性质	时域	频域	性质	时域	频域
函数的奇偶虚实性	实偶函数	实偶函数	频 移	$x(t)e^{\mp j2\pi f_0 t}$	$X(f \pm f_0)$
	实奇函数	虚奇函数	翻 转	$x(-t)$	$X(-f)$
	虚偶函数	虚偶函数	共 轢	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
	虚奇函数	实奇函数	时域卷积	$\cdot x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(f)X_2(f)$
线性叠加	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bX(f)$	频域卷积	$\cdot x_1(t) x_2(t)$	$X_1(f)^* X_2(f)$
对称性	$X(t)$	$x(-f)$	时域微分	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
尺度变换	$x(kt)$	$\frac{1}{ k } X\left(\frac{f}{k}\right)$	频域微分	$(-j2\pi i)^n x(t)$	$\frac{d^n X(f)}{df^n}$
时 移	$x(t \pm t_0)$	$X(f)e^{\pm j2\pi f t_0}$	积 分	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f)$

傅里叶变换的主要性质

如图所示信号 $x(t)$ 的Fourier变换为 $X(f)$, 而 $x(t)$ 翻转后再右移 $2T_0$ 得 $y(t)$, 求 $y(t)$ 的Fourier变换 $Y(f)$



$$\begin{aligned} \text{方法1} \quad y(t) &= x(2T_0 - t) \quad Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(2T_0 - t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f(2T_0 - \tau)} d(2T_0 - \tau) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \right) e^{-j2\pi f(2T_0)} \\ &= X(-f) e^{-j4\pi fT_0} \end{aligned}$$

傅里叶变换的主要性质

方法2，先左移 $2T_0$ ，再翻转

$$y_1(t) = x(t + 2T_0) \quad Y_1(f) = X(f)e^{j4\pi fT_0}$$

$$y(t) = y_1(-t) \quad Y(f) = Y_1(-f) = X(-f)e^{-j4\pi fT_0}$$

方法3，先翻转，再右移 $2T_0$ ，

$$y_1(t) = x(-t) \quad Y_1(f) = X(-f)$$

$$y(t) = y_1(t - 2T_0) \quad Y(f) = Y_1(f)e^{-j4\pi fT_0} = X(-f)e^{-j4\pi fT_0}$$

傅里叶变换的主要性质

已知 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$

求 $x(t_0 - at)$ 的频谱

傅里叶变换的主要性质

$$y(t) = x(t_0 - at)$$

直接推导

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0 - at) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0 - at) e^{-j2\pi \left(-\frac{f}{a}\right)(t_0 - at)} e^{-j2\pi \frac{f}{a} t_0} d(t_0 - at) \\ &= \frac{1}{a} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-j2\pi f_1 \tau} d\tau \right] e^{-j2\pi \frac{f}{a} t_0} \\ &= \frac{1}{a} X(f_1) e^{-j2\pi \frac{f}{a} t_0} = \frac{1}{a} X\left(-\frac{f}{a}\right) e^{-j2\pi \frac{f}{a} t_0} \end{aligned}$$

注意：上下限反置

$$x(t_0 - at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(-\frac{f}{a}\right) e^{-j2\pi \frac{f}{a} t_0}$$

傅里叶变换的主要性质

$$y(t) = x(t_0 - at)$$

傅里叶变换性质

令 $z(t) = x(-at)$

$$y(t) = x(t_0 - at) = z\left(t - \frac{t_0}{a}\right)$$

$$Y(f) = Z(f) e^{-j2\pi \frac{f}{a} t_0} \quad Z(f) = \frac{1}{|a|} X\left(-\frac{f}{a}\right)$$

$$Y(f) = \frac{1}{a} X\left(-\frac{f}{a}\right) e^{-j2\pi \frac{f}{a} t_0} \quad x(t_0 - at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(-\frac{f}{a}\right) e^{-j2\pi \frac{f}{a} t_0}$$

傅里叶变换的主要性质

已知 $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ 求 $t^4 x(t)$ 的频谱

$$(j2\pi t)^n x(t) \rightleftharpoons \frac{d^n X(f)}{df^n}$$

$$t^4 x(t) = \frac{1}{16\pi^4} (j2\pi t)^4 x(t)$$

$$t^4 x(t) \rightleftharpoons \frac{1}{16\pi^4} \frac{d^4 X(f)}{df^4}$$

典型信号的傅里叶变换



几种典型信号的频谱

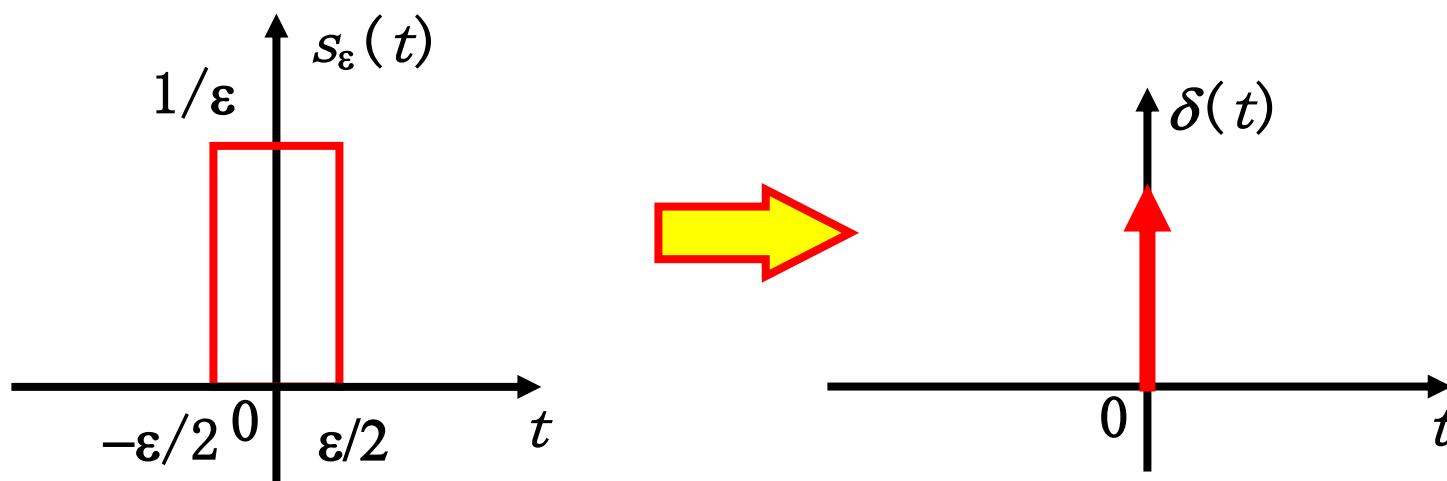
单位脉冲函数($\delta(t)$ 函数) 的频谱

① δ 函数定义

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

其面积 (强度) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$$

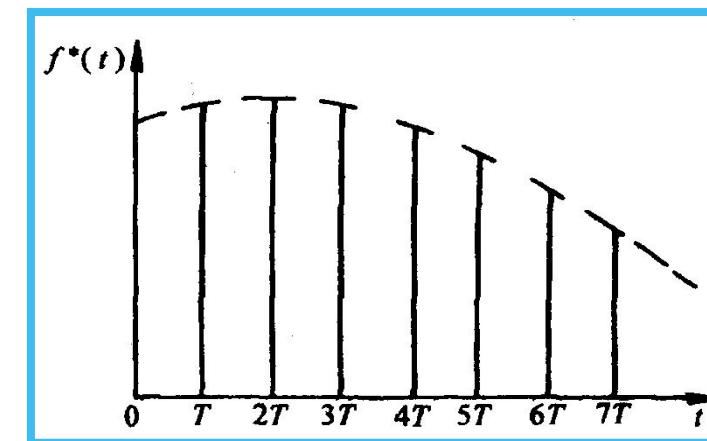
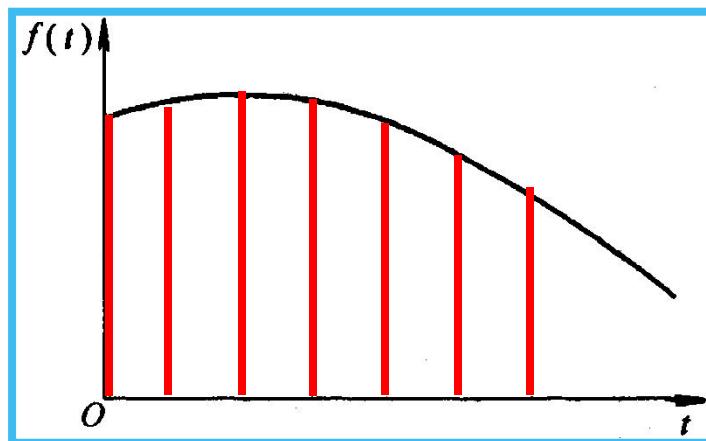


几种典型信号的频谱

② δ 函数的采样性质 $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

$$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\pm t_0)\delta(t \pm t_0)$$

δ 函数的采样性质与任一连续信号相乘，其乘积仅在脉冲发生的位置有值。



δ 函数的采样性质是连续信号离散化的依据。采样后将连续信号离散化，才能够进一步处理成为数字信号。

几种典型信号的频谱

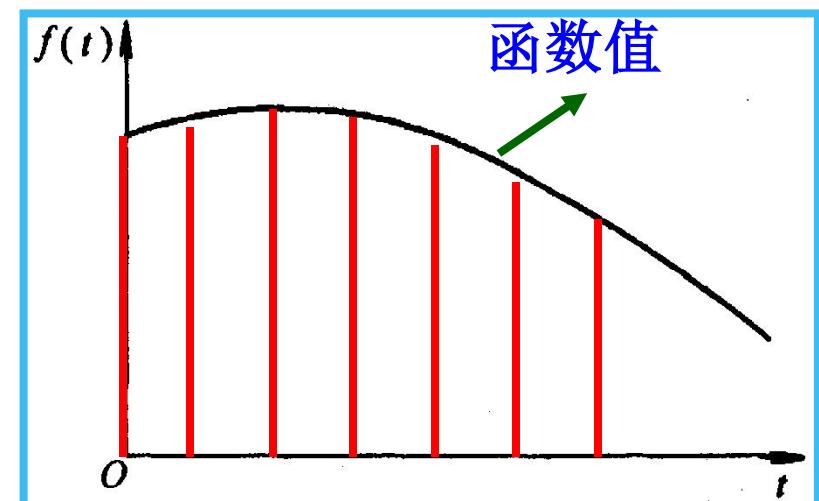
上述采样信号的幅值为无穷大，但其强度是有限值（积分）。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t \pm t_0)dt = x(t \pm t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t \pm t_0)dt = x(t \pm t_0)$$

筛选结果为 $x(t)$ 在发生 δ 函数位置的函数值(又称为采样值)

采样性又称为筛选性。



几种典型信号的频谱

③卷积性

δ 函数与其它信号的卷积是卷积中最为简单的一类形式。把 δ 函数的卷积性质描述为：

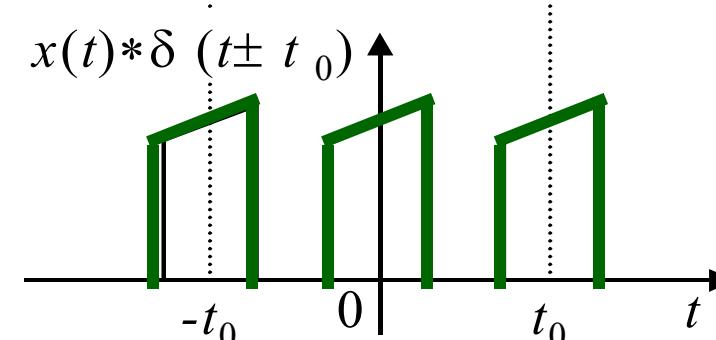
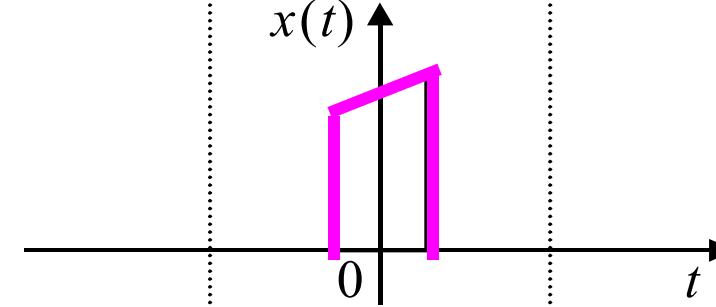
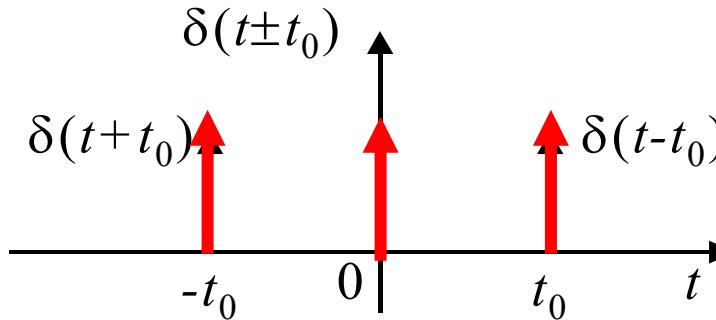
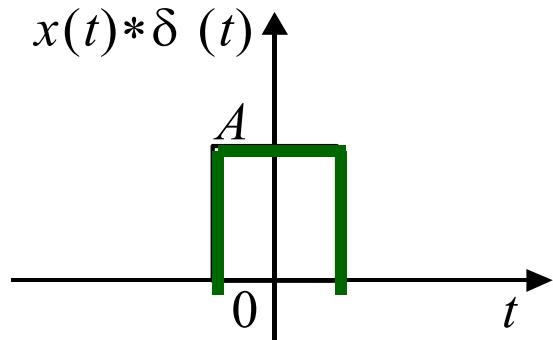
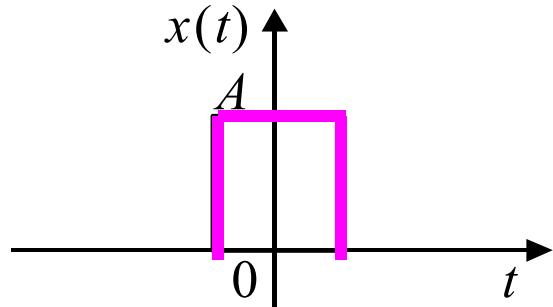
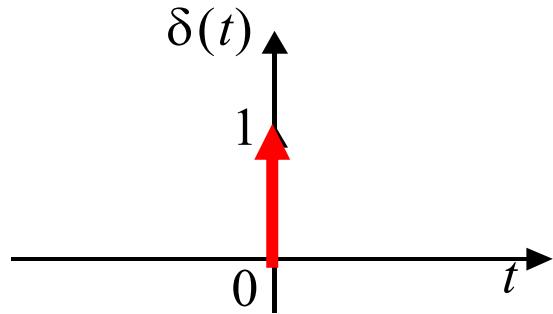
$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau - t)d\tau = x(t)$$

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t \pm t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta[\tau - (t \pm t_0)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta((t \pm t_0) - \tau)d\tau \\ &= x(t \pm t_0) \end{aligned}$$

卷积性质可用下图示意。

几种典型信号的频谱

δ 函数与其它函数的卷积示例



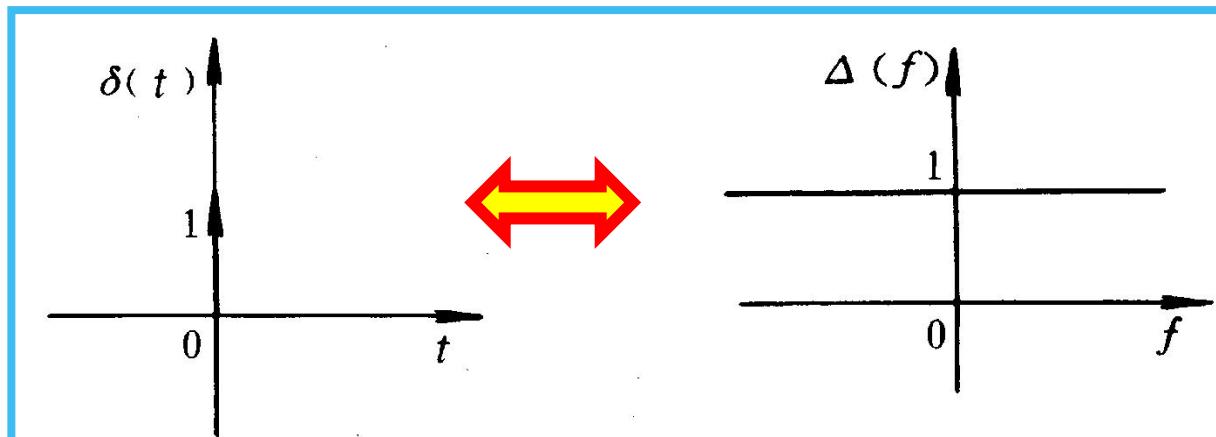
几种典型信号的频谱

④ δ 函数的频谱

对 $\delta(t)$ 取傅里叶变换

$$FT \quad \Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1$$

$$IFT \quad \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j2\pi ft} df$$



均匀谱白噪声

频谱特点：

- 有无限宽广的频谱；
- 在所有的频段上都是等强度的。

几种典型信号的频谱

δ 函数是偶函数 $\delta(-t) = \delta(t)$ 、 $\delta(-f) = \delta(f)$

利用对称、时移、频移性质，还可以得到以下傅里叶变换对

记住更好，
记不住用的
时候现推导。

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t) \rightleftharpoons 1 \\ 1 \rightleftharpoons \delta(f) \quad \longrightarrow \text{对称性} \\ \delta(t \pm t_0) \rightleftharpoons e^{\pm j2\pi f t_0} \quad \longrightarrow \text{时移性质} \\ e^{\mp j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons \delta(f \pm f_0) \quad \longrightarrow \text{频移性质} \end{array} \right.$$

傅里叶变换的主要性质

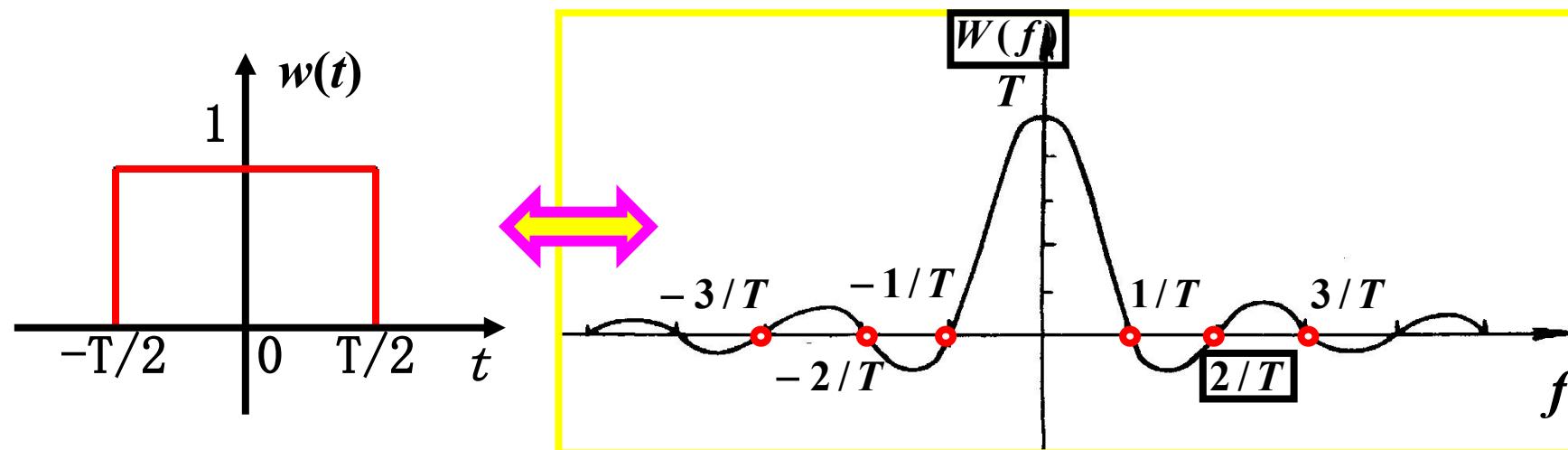
常用的
 $\delta(t)$
函
数
的
性
质

	时 域	频 域
$\delta(t)$	$\delta(t)$ (单位瞬时脉冲)	1 (均匀频谱密度函数)
$\delta(t)$	1 (幅值为1的直流量)	$\delta(f)$ (单位脉冲谱线)
	$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j 2\pi f t_0}$ (各频率成分分别移相 $2\pi f t_0$)
	$e^{\pm j 2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$

矩形窗函数的频谱

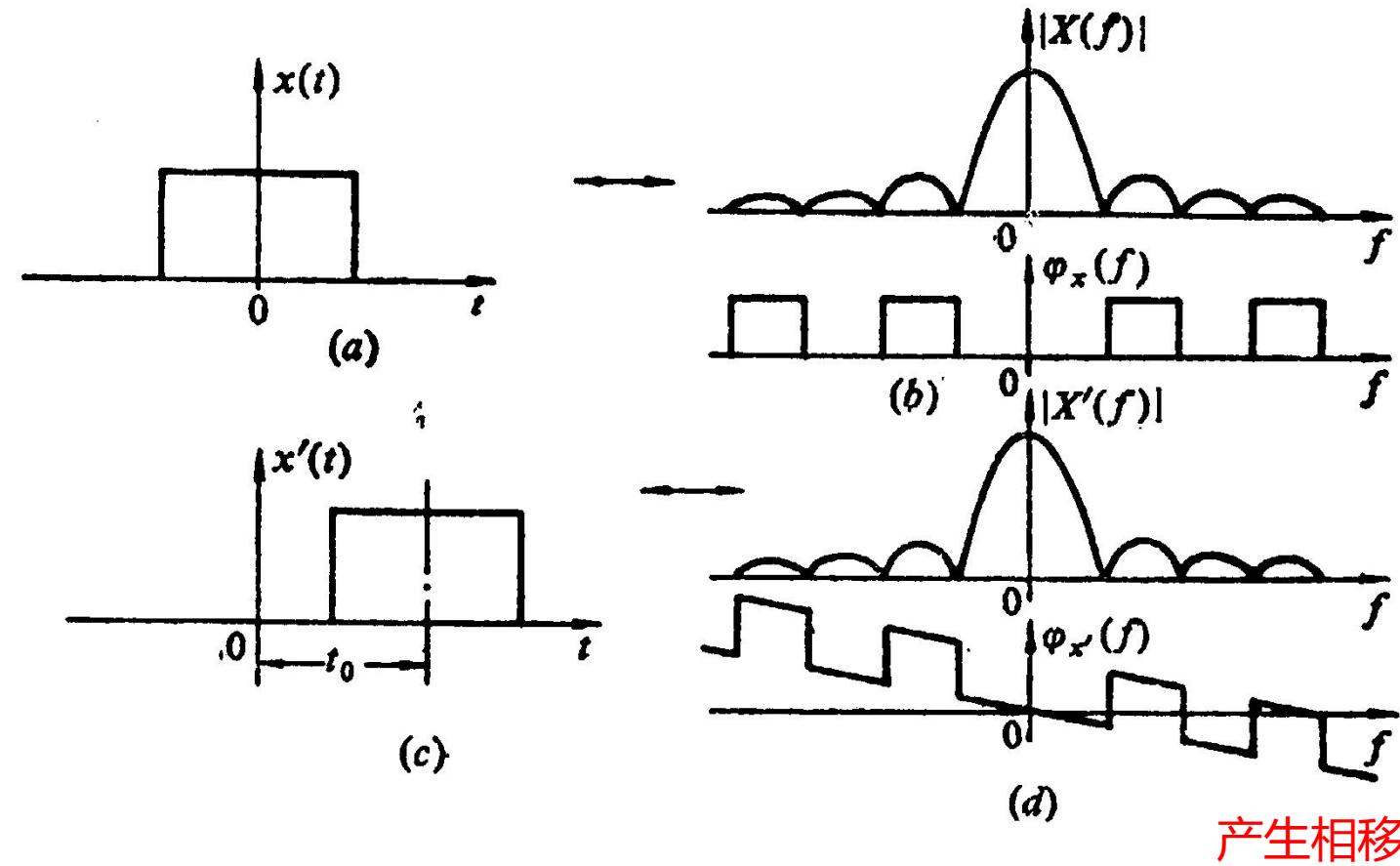
矩形窗函数的频谱

$$W(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$$



矩形窗函数的频谱

时移性质举例



a) 时域矩形窗

b) 图a) 对应的幅频和相频特性曲线

c) 时移的时域矩形窗

d) 图c) 对应的幅频和相频特性曲线

矩形窗函数的频谱

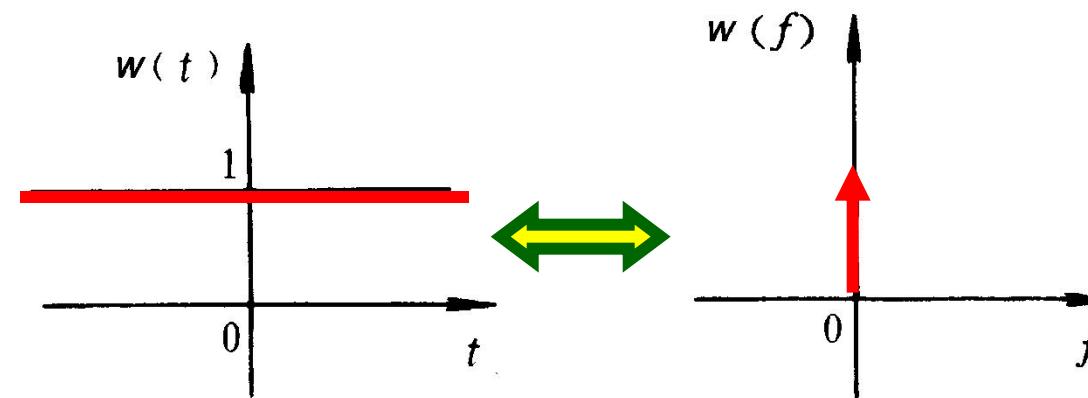
我们将矩形窗函数进行拓展——常值函数的频谱

持续时间 $T \rightarrow \infty$ 的矩形窗 \longrightarrow 直流量

$$\delta(t) \doteq 1$$

$1 \doteq \delta(f)$ \longrightarrow 对称性

直流量与单位
阶跃信号不同

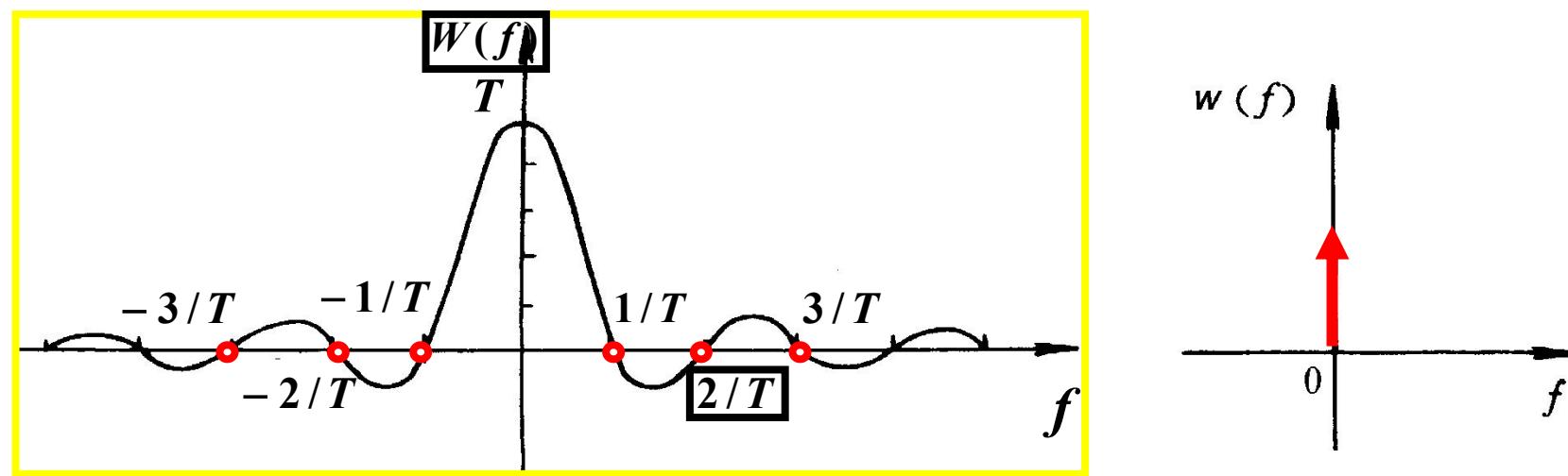


幅值为1的常值函数的频谱为 $f = 0$ 处的 δ 函数

矩形窗函数的频谱

实际上，利用傅里叶变换时间尺度改变性质，也可以得出同样的结论：

当矩形窗函数的窗宽 $\rightarrow \infty$ 时，矩形窗函数就成为常值函数，其对应的频域 δ 函数。



指数函数的频谱

双边指数衰减函数

其傅里叶变换为：

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -e^{at} & (t < 0) \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 -e^{at} \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{-e^{at} \cdot e^{-j2\pi ft}}{(a - j2\pi f)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-at} \cdot e^{-j2\pi ft}}{-(a + j2\pi f)} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{-1}{(a - j2\pi f)} + \frac{1}{(a + j2\pi f)} \\ &= \frac{-j4\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2} \end{aligned}$$

指数函数的频谱

较为常用的是单边指数衰减函数

$$x(t) = \begin{cases} 0 & a > 0, \quad t < 0 \\ e^{-at} & a > 0, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

其傅里叶变换为： $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f t}}{-(a + j2\pi f)} \Big|_0^\infty$$

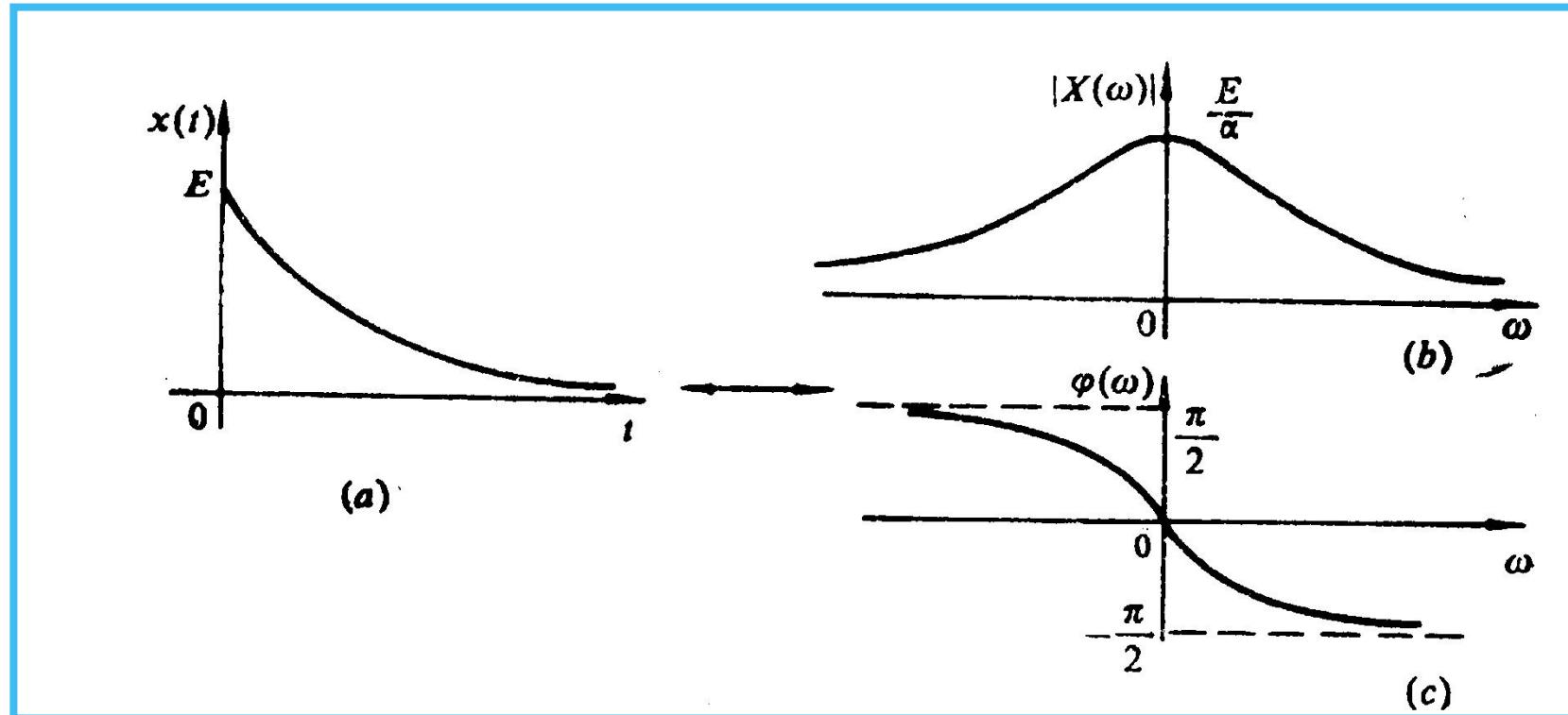
$$= \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}} \quad \varphi(f) = -\arctan \frac{2\pi f}{a}$$

指数函数的频谱

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}$$

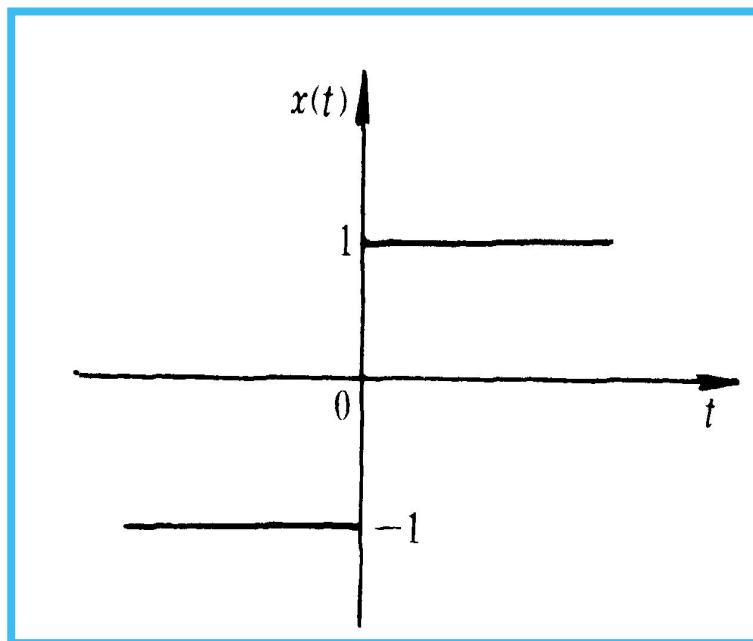
$$\varphi(f) = -\arctan \frac{2\pi f}{a}$$



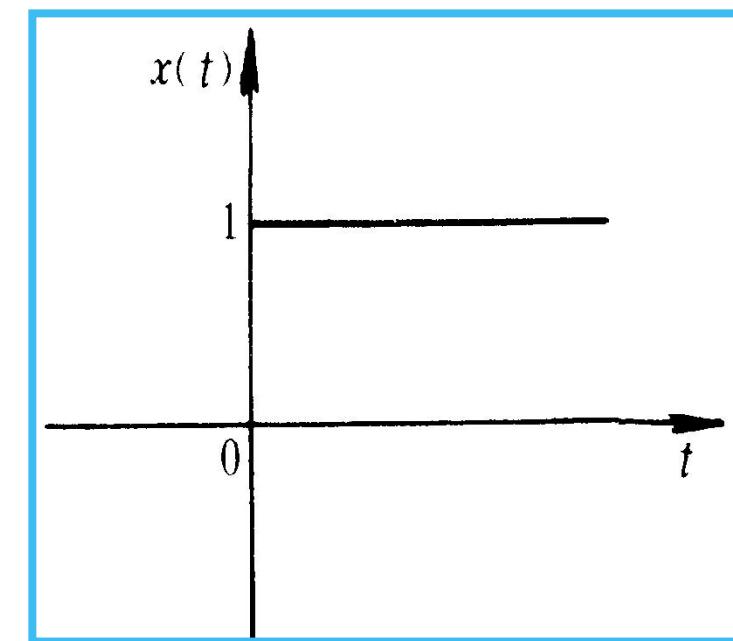
单边指数衰减函数及其频谱

符号函数和单位阶跃函数的频谱

符号函数和单位阶跃函数的频谱



符号函数



单位阶跃信号

符号函数和单位阶跃函数的频谱

➤ 符号函数的频谱

$$x(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$$

符号函数可以看作是双边指数衰减函数当 $a \rightarrow 0$ 时的极限形式

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^0 \lim_{a \rightarrow 0} (-e^{at}) \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{\infty} \lim_{a \rightarrow 0} (e^{-at}) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-1}{(a - j2\pi f)} + \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{(a + j2\pi f)} \\ &= \frac{-j}{\pi f} \end{aligned}$$

如何傅里叶变换性质求解?

符号函数和单位阶跃函数的频谱

符号函数的微分

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

微分特性

$$\frac{d}{dt} x(t) \rightleftharpoons j 2 \pi f X(f)$$

$$j 2 \pi f X(f) = F[2\delta(t)] = 2$$

$$X(f) = \frac{1}{j \pi f}$$

符号函数和单位阶跃函数的频谱

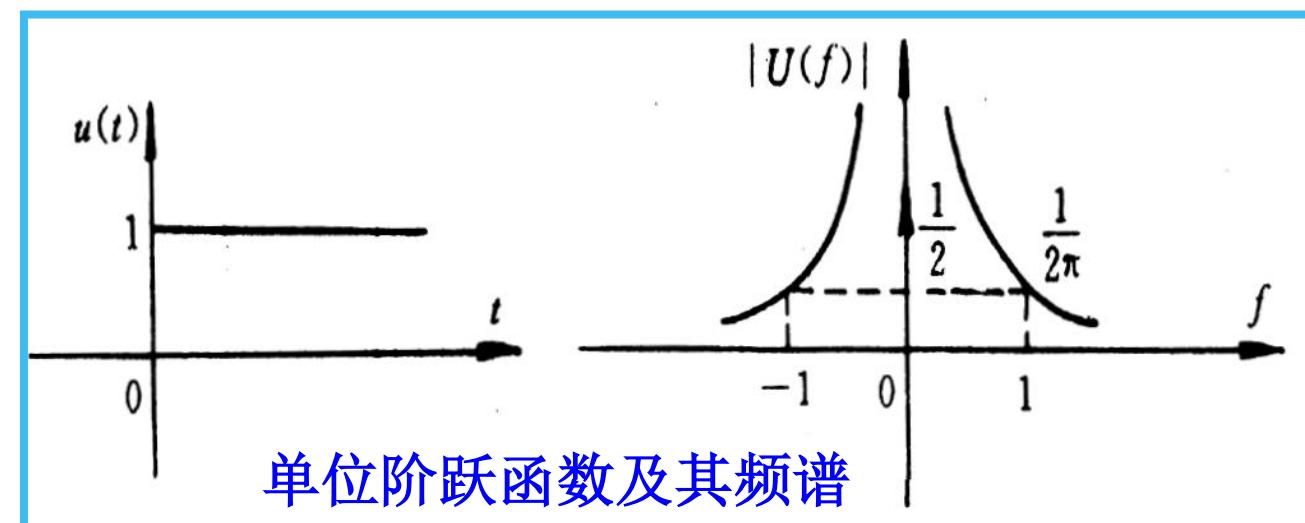
➤ 单位阶跃函数的频谱

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 = \lim_{a \rightarrow 0} (e^{-at}) & a > 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

单位阶跃函数可以由
符号函数表示

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{-j}{2\pi f}$$



正余弦函数的频谱密度函数

正余弦函数的频谱密度函数

正余弦函数不满足绝对可积条件，不能直接对之进行傅氏变换。

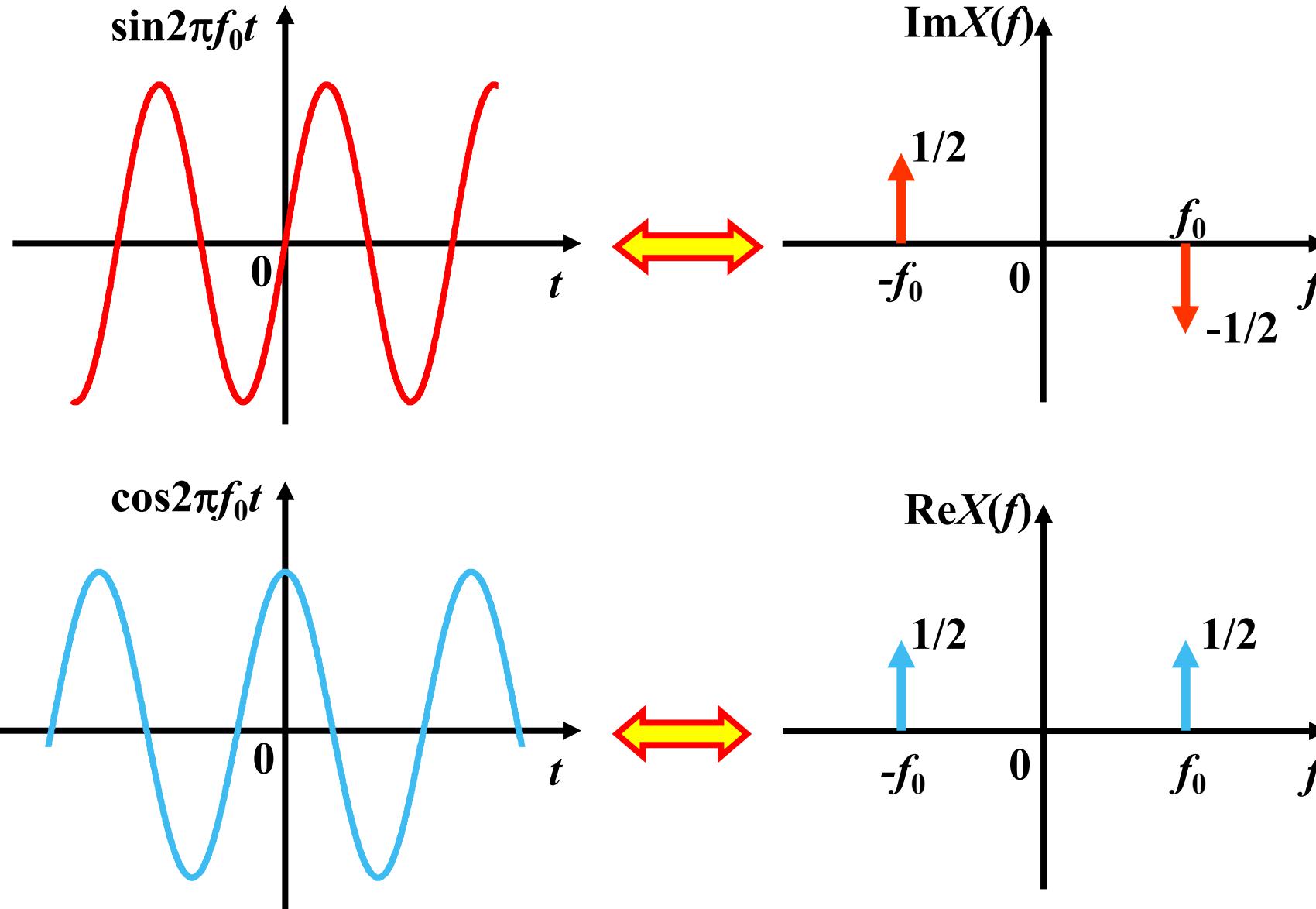
由欧拉公式知： $\sin 2\pi f_0 t = \frac{j}{2} (e^{-j2\pi f_0 t} - e^{j2\pi f_0 t})$

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2} (e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t})$$

$$\sin 2\pi f_0 t \rightleftharpoons \frac{j}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

$$\cos 2\pi f_0 t \rightleftharpoons \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

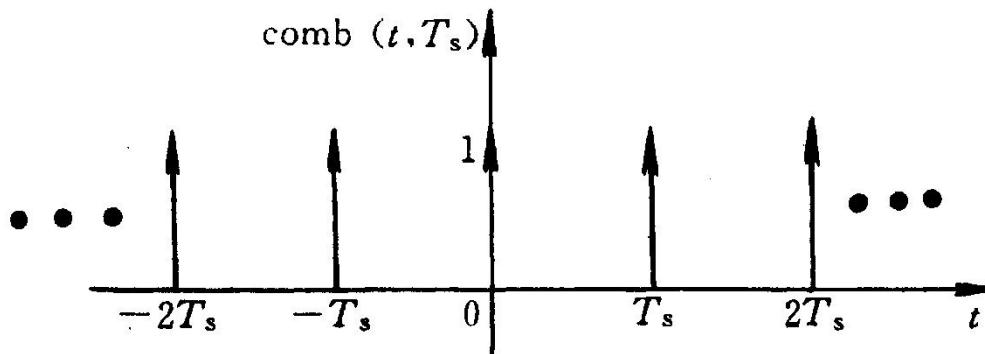
正余弦函数的频谱



等间隔周期单位脉冲序列（梳状函数）的频谱

$$comb(t, T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

其中 T_s 为周期； n 为整数。



周期单位脉冲序列（梳状函数）为周期函数。因此可以表示成傅氏级数

$$comb(t, T_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_s t}$$

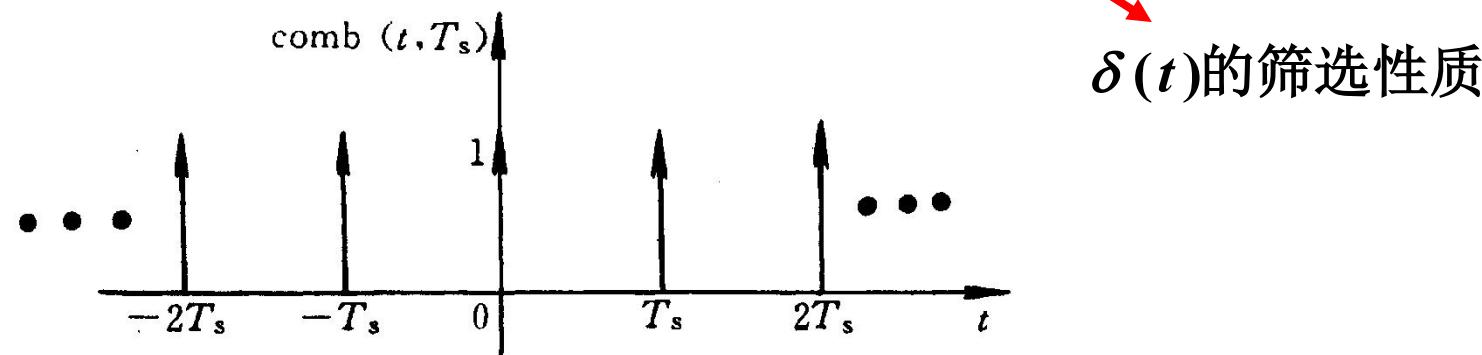
等间隔周期单位脉冲序列（梳状函数）的频谱

$$comb(t, T_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_s t} \quad (f_s = 1 / T_s)$$

上述展开式中 $c_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} comb(t, T_s) e^{-j2\pi k f_s t} dt$

因为在 $(-T_s/2, T_s/2)$ 区间内只有一个 δ 函数 $\delta(t)$, 故

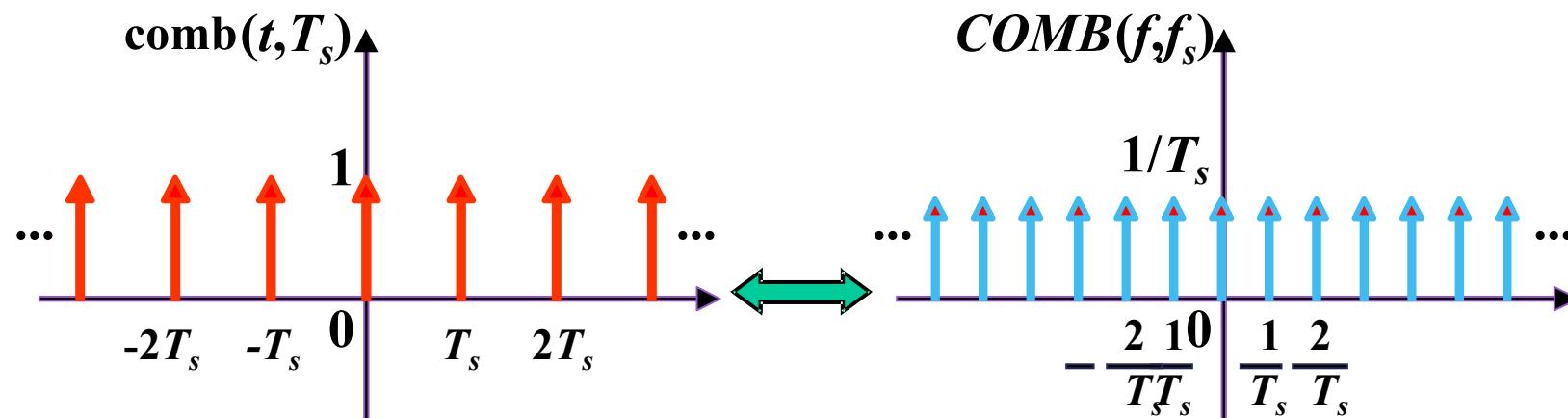
$$c_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-j2\pi k f_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$



等间隔周期单位脉冲序列（梳状函数）的频谱

从而
$$comb(t, T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kf_s t}$$

所以
$$COMB(f, f_s) = F[comb(t, T_s)] = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T_s})$$



- ① 时域周期单位脉冲序列的频谱也是周期脉冲序列；
- ② 时域周期为 T_s ，则频域周期为 $1/T_s$ ；
- ③ 时域脉冲强度为1，频域中的脉冲强度为 $1/T_s$ 。

谢 谢



浙江大学

ZHEJIANG UNIVERSITY