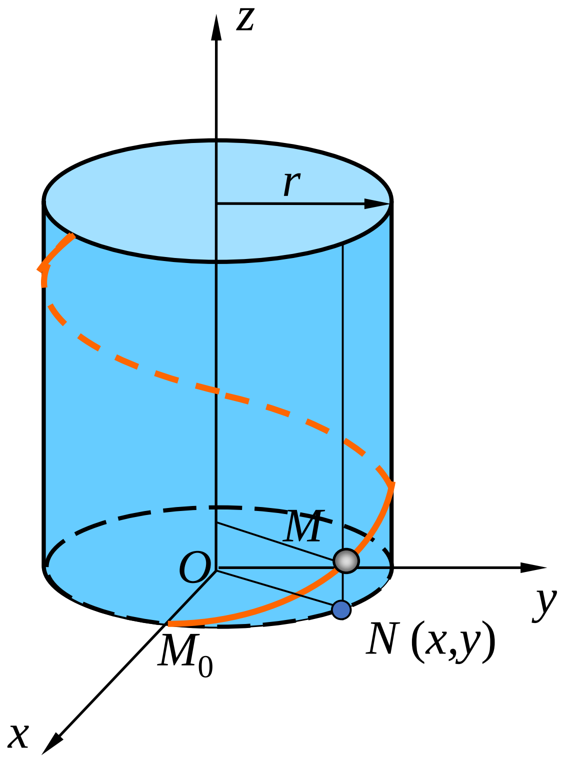
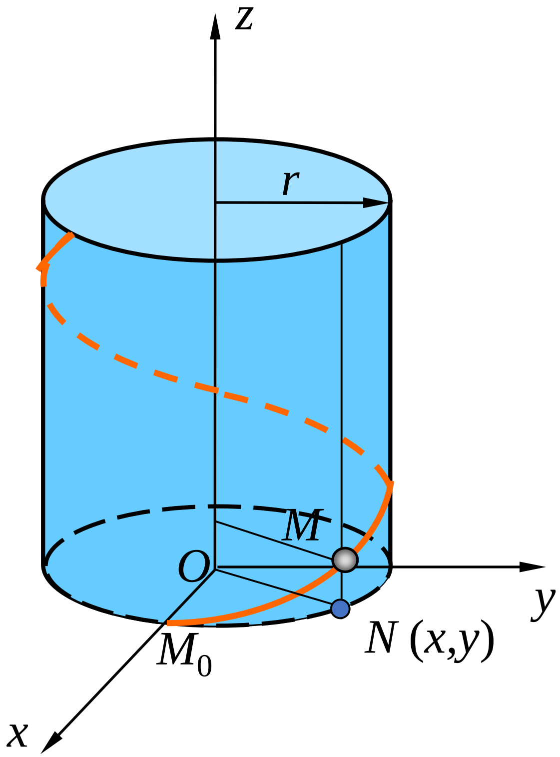


测验： 圆柱的半径为r，绕铅直固定轴 z 作匀速运动，周期为 T 。动点M以匀速 u 沿圆柱的一条母线NM运动（如图）。试求M点的轨迹、速度和加速度。

解：　　（1） M点的运动方程和轨迹。

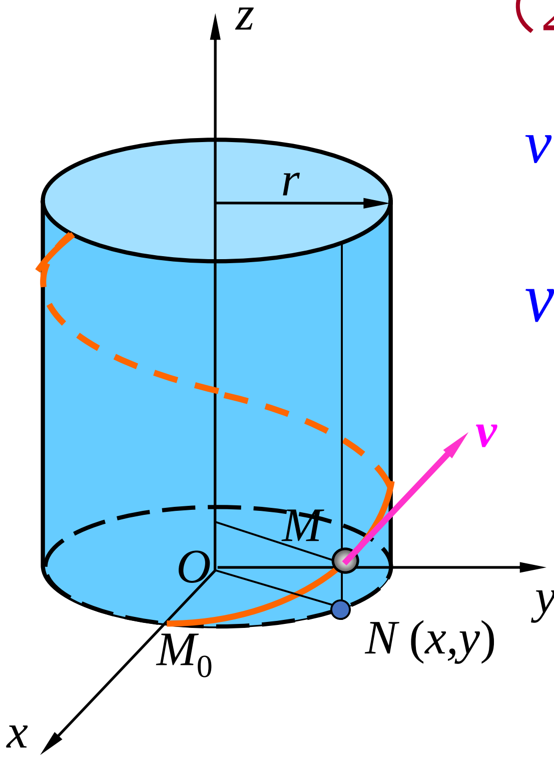


- 取固定直角坐标系$Oxyz$如图所示
- 开始时M点在M_0位置，当圆柱转动时，角$\angle M_0ON$随时间成正比地增加，在瞬时t，它等于$\frac{2\pi}{T}t$
- M点的坐标：

$$x = r\cos(\frac{2\pi}{T}t), \quad y = r\sin(\frac{2\pi}{T}t), \quad z = ut$$

这就是M点的运动方程。

M点的轨迹方程：$$x = r\cos(\frac{\omega z}{u}), \quad y = r\sin(\frac{\omega z}{u}),$$



（2） M点的速度。 **运动方程求时间求导：**

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r\omega\sin\omega t, \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\omega\cos\omega t,$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = u$$

速度的大小等于

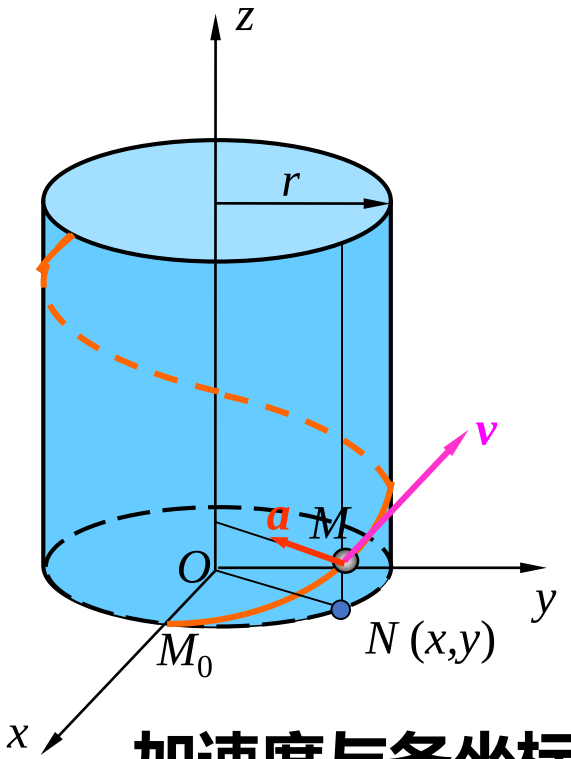
$$|v| = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}} = \sqrt{r^2\omega^2 + u^2} = \text{常数}$$

速度与各坐标轴的夹角余弦（即速度方向的单位矢量）：

$$\cos(\boldsymbol{v}, x) = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{-r\omega\sin\omega t}{\sqrt{r^2\omega^2 + u^2}}$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, y) = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{r\omega\cos\omega t}{\sqrt{r^2\omega^2 + u^2}}$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, z) = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{u}{\sqrt{r^2\omega^2 + u^2}}$$



（3）点M的加速度。

对速度方程求导得

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2 \cos\omega t$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2 \sin\omega t \qquad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

加速度 a 的大小： $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = r\omega^2$

加速度与各坐标轴的夹角余弦：

$$\cos\ (\boldsymbol{a}, x) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = -\cos(\omega t)$$

$$\cos\ (\boldsymbol{a}, y) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = -\sin(\omega t) \qquad \cos\ (\boldsymbol{a}, z) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = 0$$

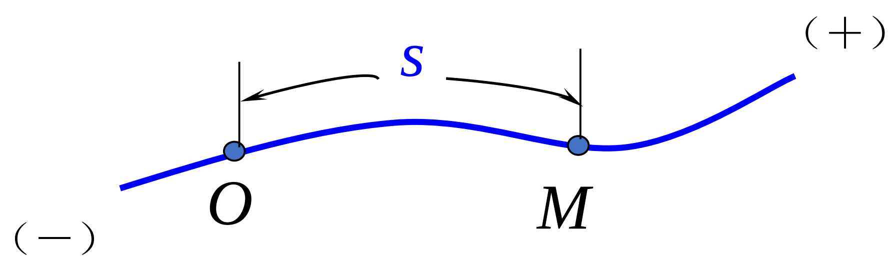
加速度 a 的方向指向 z 轴。

描述点的运动的自然法

1. 自然轴系•曲率与曲率半径

（1） 弧坐标

- **假定动点*M*的运动轨迹是已知的。**



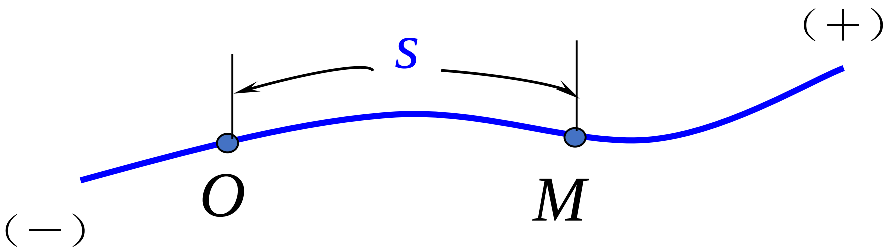
- **在轨迹上选定一点*O*作为量取弧长的起点，并规定由原点*O*向一方量得的弧长取正值，向另一方取负值。**

- **这种带有正负值的弧长$\overset{\frown}{OM}$称为动点的弧坐标，用*s*表示。点在轨迹上的位置可由弧坐标*s*完全确定。**

描述点的运动的自然法

- **当点 M 沿已知轨迹运动时，弧坐标 s 随时间的变化而变化，并可表示为时间 t 的单值连续函数，即**

$$s = f(t)$$

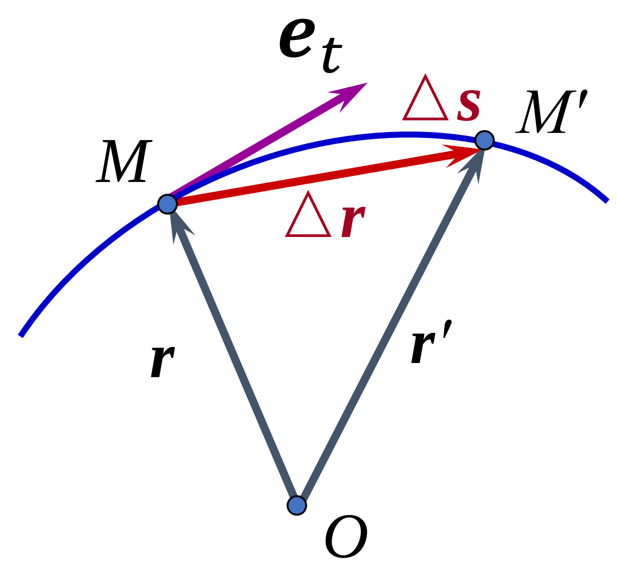


这个方程表示了点 M 沿给定轨迹的运动方程。

描述点的运动的自然法

- **取接近的两个点 M 和M'，其间的弧长是Δs，矢径差是 $\Delta \boldsymbol{r}$。当$\Delta s \to 0$时, $|\Delta \boldsymbol{r}| = |\Delta s|$, 得到沿着轨迹切线方向的单位矢量，指向与弧坐标正向一致。**

$$\boldsymbol{e}_t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{ds}$$



描述点的运动的自然法

(2) 曲率与曲率半径

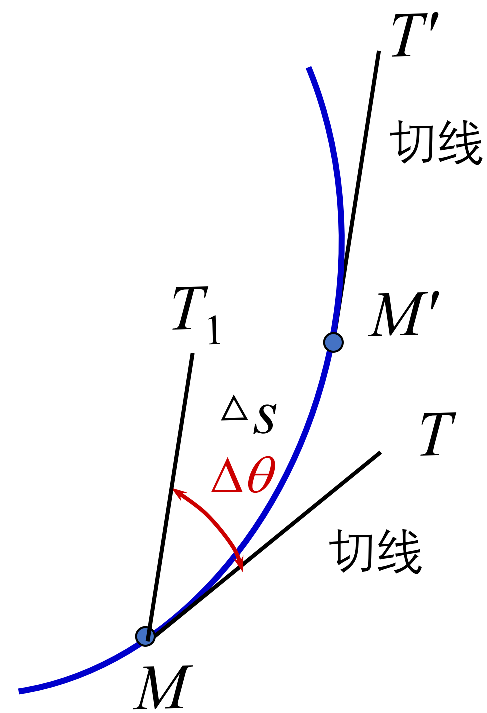
- **在点的轨迹上取两个邻近的点 M 和 M'，沿着运动方向画切线MT和$M'T'$。**

- $\Delta\theta$ **（取绝对值）称为曲线对应于弧$\overset{\frown}{MM'}$的邻角，可用来说明该曲线的弯曲。**

- **比值** $\dfrac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$ **可用来表示弧$\overset{\frown}{MM'}$的平均弯曲程度，称为平均曲率。**

- **极限值称为曲线在点M处的曲率，用 k 表示，有**

$$k=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$



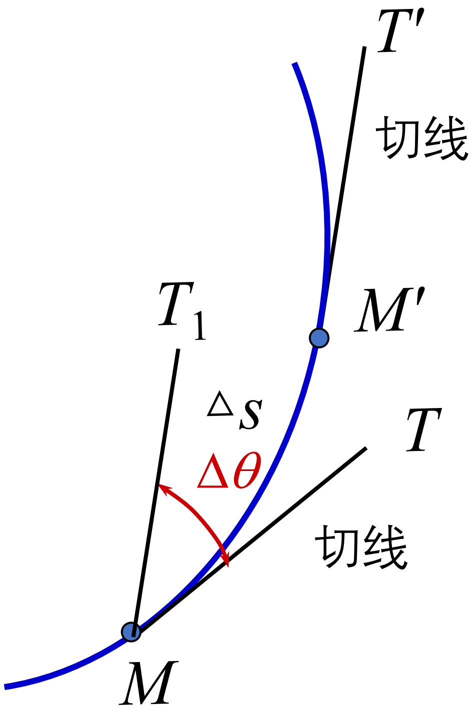
$MT_1 \parallel M'T'$

描述点的运动的自然法

(2) 曲率与曲率半径

- **曲线在点 M 曲率的倒数，称为曲线在点M的曲率半径，用 ρ 表示，有**

$$\rho = \frac{1}{k}$$

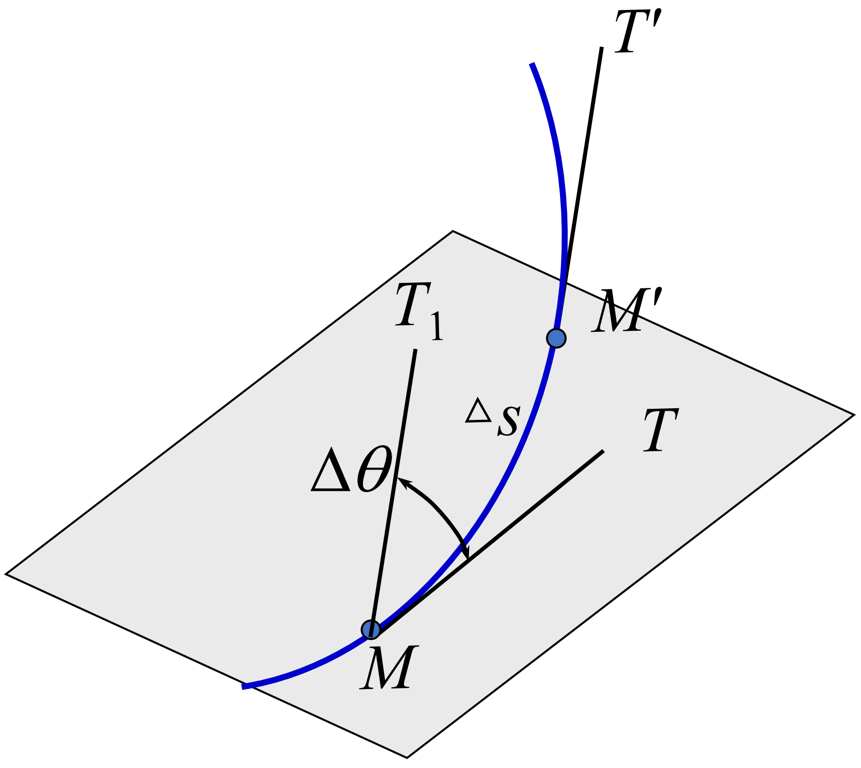


$MT_1 \parallel M'T'$

描述点的运动的自然法

（3）密切面

- **在图中点 M' 趋近于M，即 Δs 趋近于零的过程中，由 MT 和 MT_1确定的平面，将绕 MT 转动而趋近于某一极限位置；**
- **此极限位置所在的平面称为曲线在点M的密切面。**

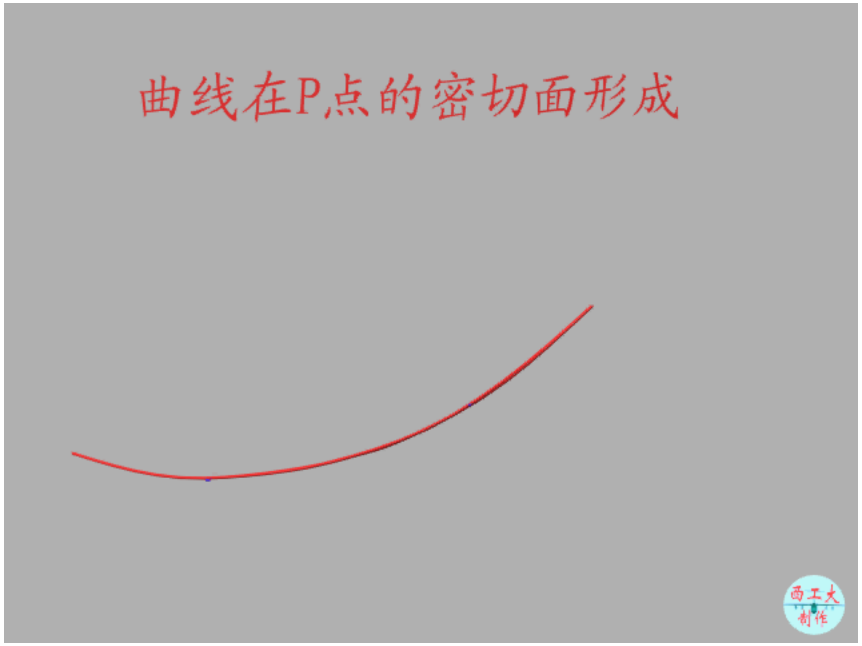


$MT_1 \parallel M'T'$

描述点的运动的自然法

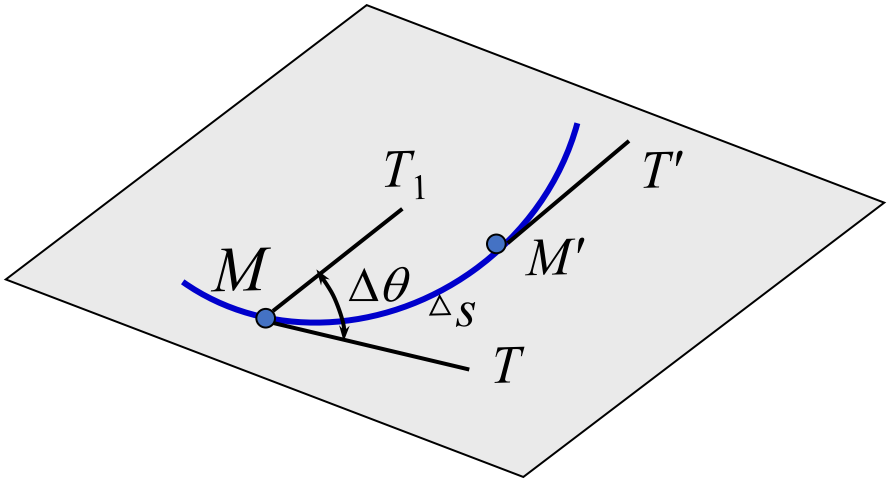
（3）密切面

- **在图中点 M' 趋近于M，即 Δs 趋近于零的过程中，由 MT 和 MT_1确定的平面，将绕 MT 转动而趋近于某一极限位置；**
- **此极限位置所在的平面称为曲线在点M 的密切面。**



描述点的运动的自然法

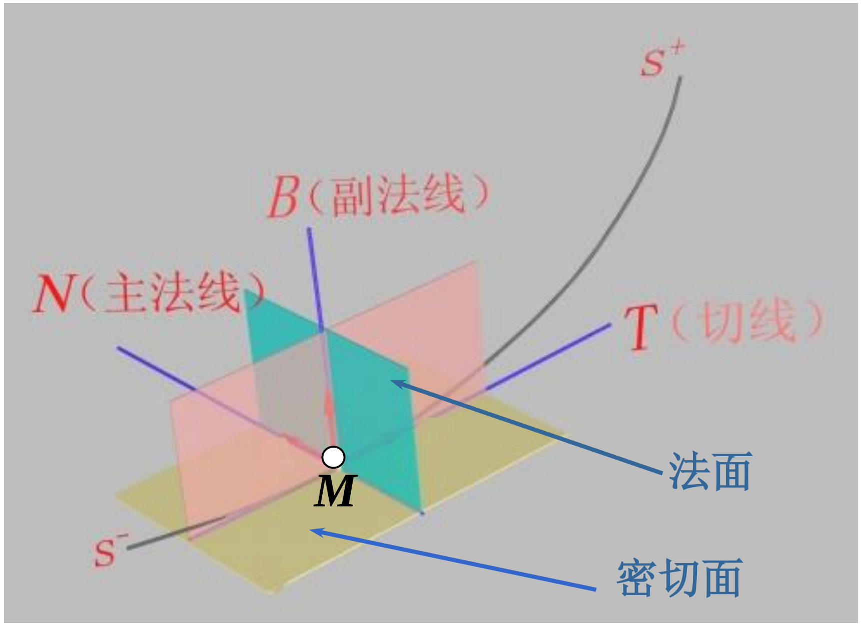
平面曲线的密切面，就是这条曲线所在的平面。



描述点的运动的自然法

(4) 法面 •主法线 •副法线

- **通过点 M 而与切线垂直的平面，称为曲线在点M 的法面。**



- **法面与密切面的交线MN称为主法线。**

- **法面内与主法线垂直的直线MB称为副法线。**

描述点的运动的自然法

（5）自然轴系

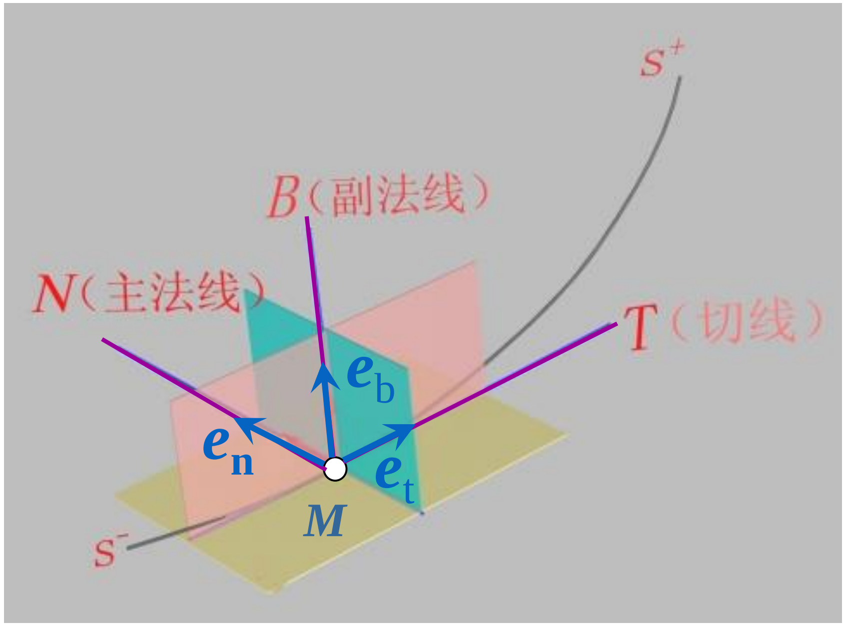
- **在点M处曲线的切线、主法线和副法线组成一个空间坐标系，称为点M的自然轴系。**

- **各轴的正向规定如下：**

  $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$指向弧坐标增加的一方；

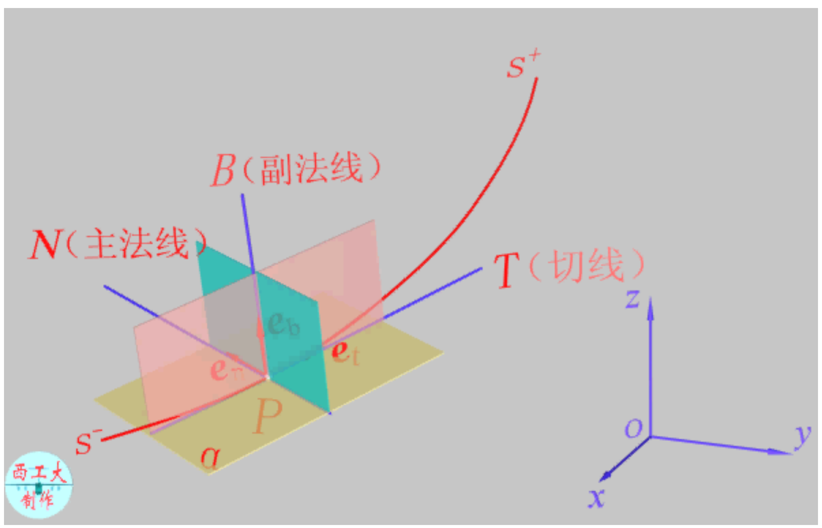
  $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$指向曲线的凹边；

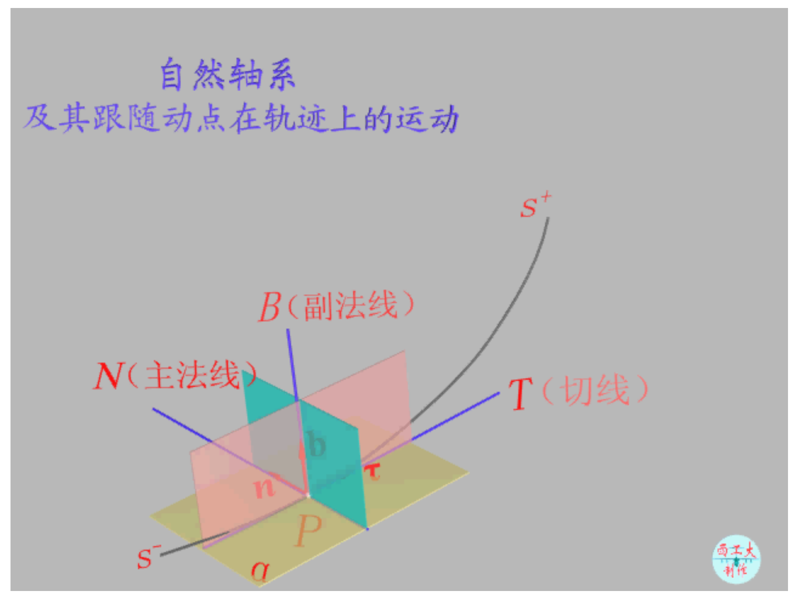
  而$\boldsymbol{e}_\mathrm{b} = \boldsymbol{e}_\mathrm{t} \times \boldsymbol{e}_\mathrm{n}$。



描述点的运动的自然法

- **曲线上的点都具有自己的自然轴系，故e_t、e_n、e_b都是方向随点M的位置而改变的单位矢。**
- **自然轴系是随点M的位置改变的直角空间坐标系。**





描述点的运动的自然法

2. 点的速度

设已知点M的运动轨迹和运动方程

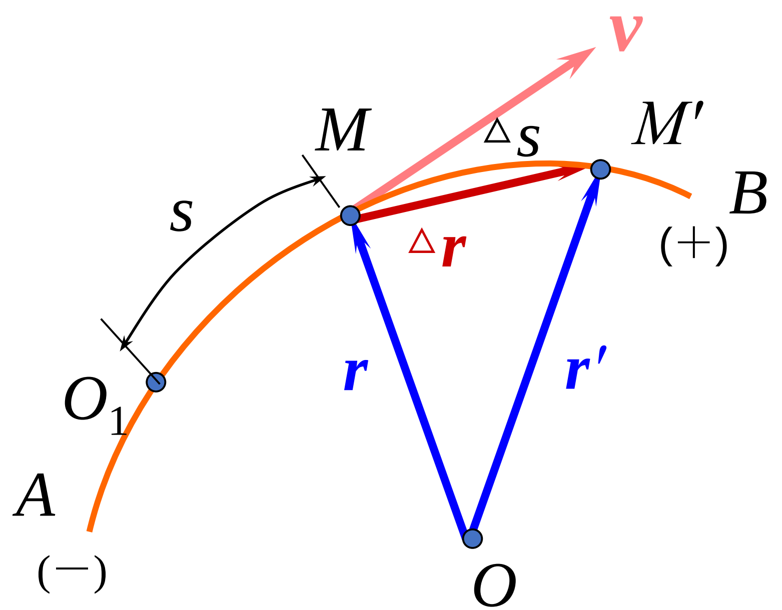
$$s = f(t)$$

M点的速度矢量为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$ （**矢量法定义的速度**）

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$$ （**自然法定义的速度**）



描述点的运动的自然法

3. 点的加速度

根据加速度的定义以及弧坐标中速度的表达式

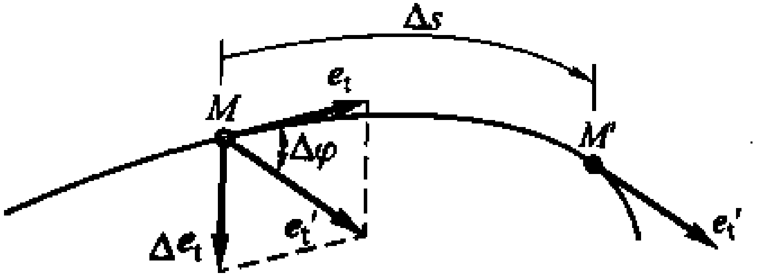
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \quad \boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} = ?$$

描述点的运动的自然法

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t},$$

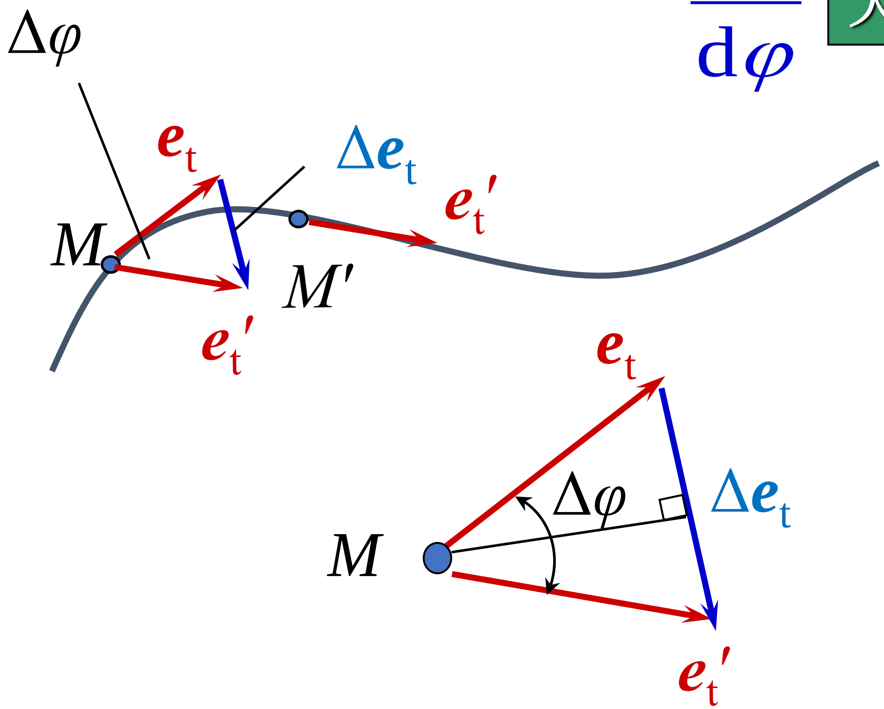


$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi}\times\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\times\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

? $\qquad \dfrac{1}{\rho} \qquad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$

描述点的运动的自然法

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi}$$ 大小

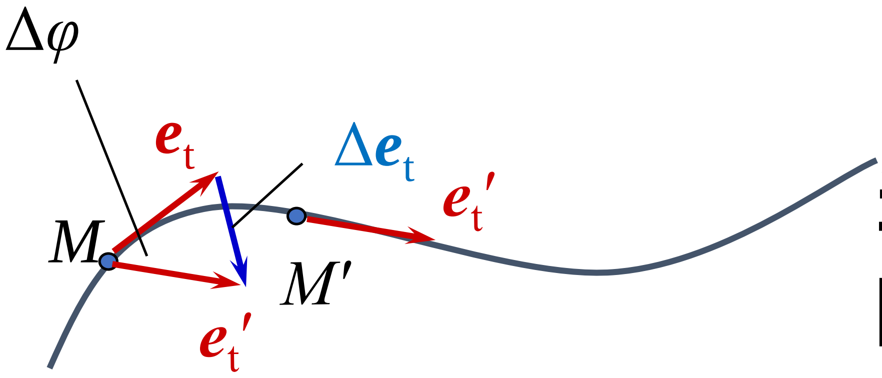


$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\Delta\varphi}\right|$$

$$= \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{2|\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}|\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}$$

$$= \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\dfrac{\Delta\varphi}{2}} = 1$$

描述点的运动的自然法



$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi}$$ 方向

当$\Delta\varphi \to 0$时，$\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$和$\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}'$以及$\Delta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$同处于$M$点的密切面内，这时，$\Delta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$的极限方向垂直于$\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$，即 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 方向。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

描述点的运动的自然法

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\times\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi}\times\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\times\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \qquad \frac{1}{\rho} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$$

$$\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

描述点的运动的自然法

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}}$$

- 加速度表示为自然轴系投影形式

$$\boldsymbol{a} = a_\mathrm{t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t} + a_\mathrm{n}\boldsymbol{e}_\mathrm{n} + a_\mathrm{b}\boldsymbol{e}_\mathrm{b}$$

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$ 切向加速度

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{\rho}$$ 法向加速度

$$a_\mathrm{b} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_\mathrm{n}$$

描述点的运动的自然法

讨论

- 切向加速度 $a_t = \dfrac{dv_t}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ **表示速度矢量大小的变化率；**

- 法向加速度 $a_n = \dfrac{v_t^2}{\rho}$ **表示速度矢量方向的变化率；**

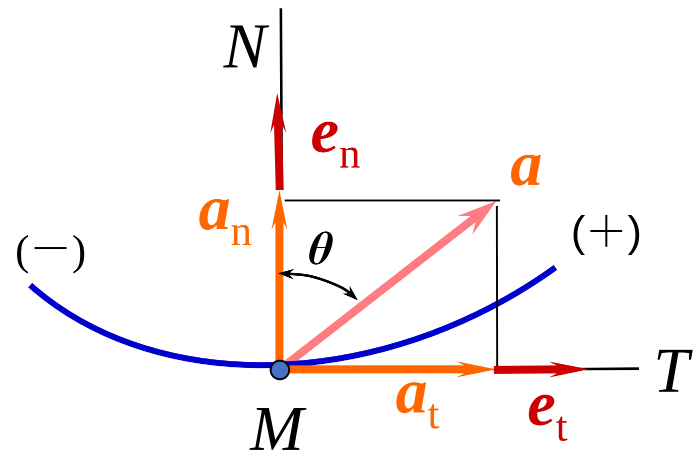
- $\boldsymbol{a}_b = \mathbf{0}$ **即** $a_b \boldsymbol{e}_b = \mathbf{0}$**,表明加速度** $\boldsymbol{a}$**在副法线方向没有分量；还表明速度矢量**$\boldsymbol{v}$**和加速度矢量**$\boldsymbol{a}$**都位于密切面内。**

描述点的运动的自然法

- 加速度大小和方向

因为加速度的两个分量a_n与a_t是相互垂直的，故得全加速度a的大小为

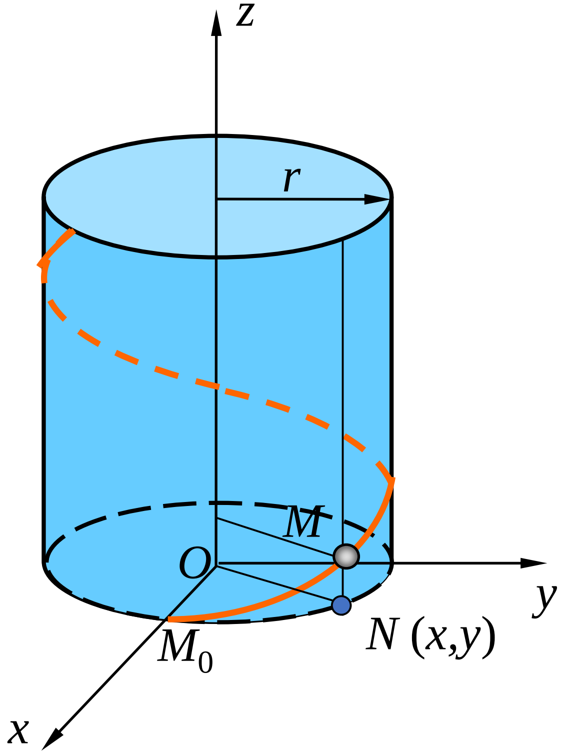
$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

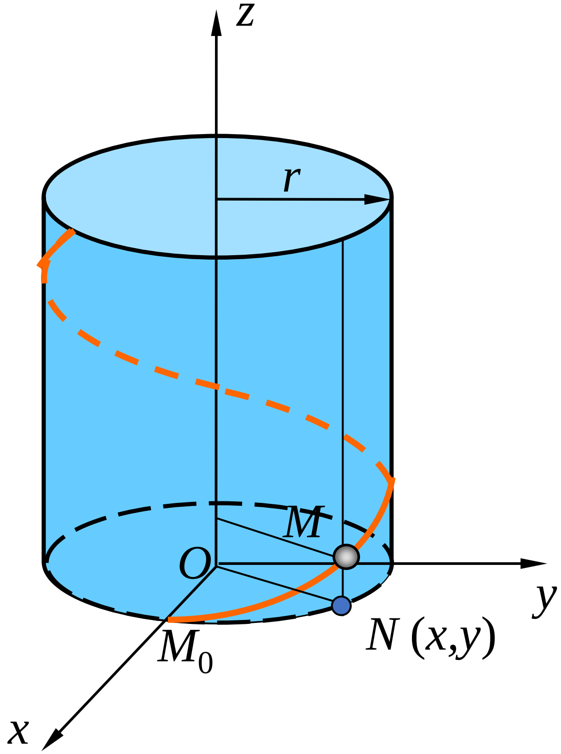


加速度a与主法线所成的角度θ由下式确定

$$\tan\theta=\frac{|a_t|}{a_n}$$

例题： 圆柱的半径为r，绕铅直固定轴 z 作匀速运动，周期为 T 。动点M以匀速 u 沿圆柱的一条母线NM运动（如图）。试求M点的切向加速度、法向加速度，和曲率半径。





已知：

速度方向（轨迹切线方向）的单位矢量：

$$e_{tx} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{-r\omega \sin \omega t}{\sqrt{r^2\omega^2 + u^2}}$$

$$e_{ty} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{r\omega \cos \omega t}{\sqrt{r^2\omega^2 + u^2}}$$

$$e_{tz} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{u}{\sqrt{r^2\omega^2 + u^2}}$$

加速度分量：

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2 \sin \omega t$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

解：

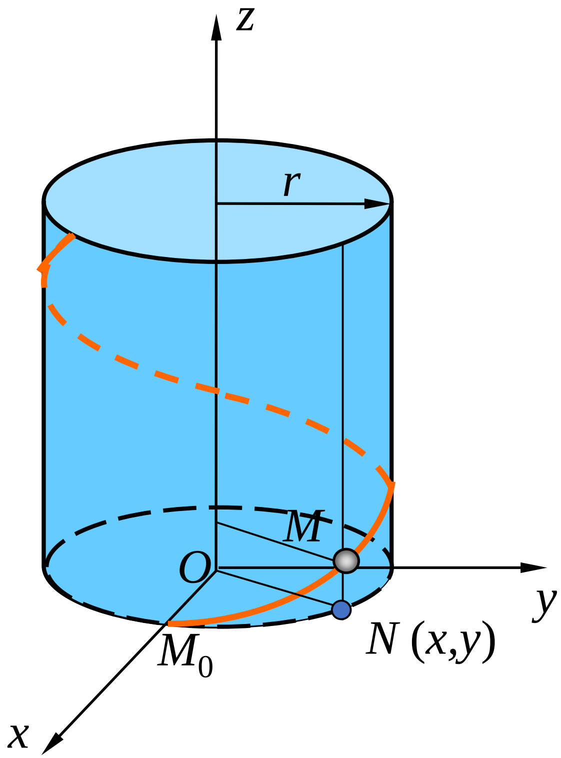
切向加速度：

$$|\boldsymbol{a}_t| = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_t = a_x e_{tx} + a_y e_{ty} + a_z e_{tz}$$
$$= 0$$

法向加速度：

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a}$$

$$|\boldsymbol{a}_n| = |\boldsymbol{a}|$$



加速度分量：

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2\sin\omega t$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

轨迹切线方向矢量：

$$\mathrm{e}_{tx} = \frac{-r\omega\sin\omega t}{\sqrt{r^2\omega^2+u^2}} \qquad \mathrm{e}_{ty} = \frac{r\omega\cos\omega t}{\sqrt{r^2\omega^2+u^2}}$$

$$\mathrm{e}_{tz} = \frac{u}{\sqrt{r^2\omega^2+u^2}}$$

解：

切向加速度：

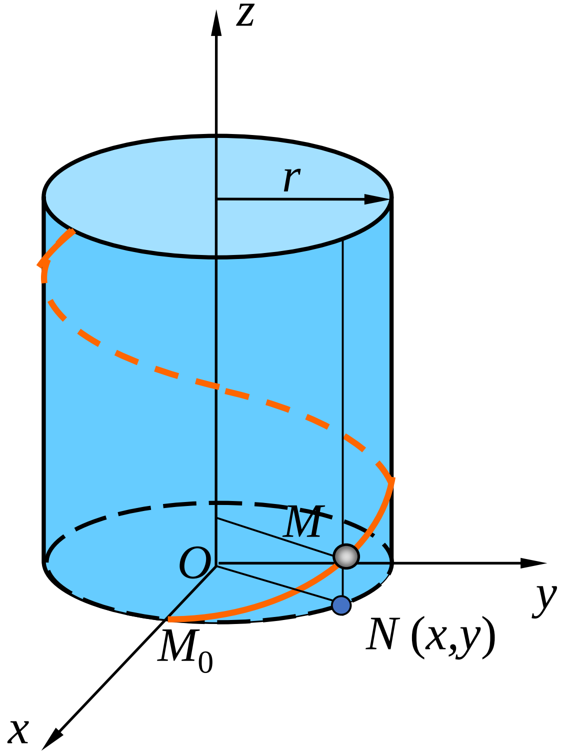
$$|\boldsymbol{a}_t| = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_t = a_x e_{tx} + a_y e_{ty} + a_z e_{tz}$$
$$= 0$$

法向加速度：

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a}$$

$$|\boldsymbol{a}_n| = |\boldsymbol{a}|$$

曲率半径 $$\rho = \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{|\boldsymbol{a}_n|} = \frac{r^2\omega^2 + u^2}{r\omega^2} = r + \frac{u^2}{r\omega^2}$$



M点速度大小：

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v^2{}_y + v^2{}_z} = \sqrt{r^2\omega^2 + u^2}$$

加速度分量：

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2\sin\omega t$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

课后作业

Page 160:
5-10