浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

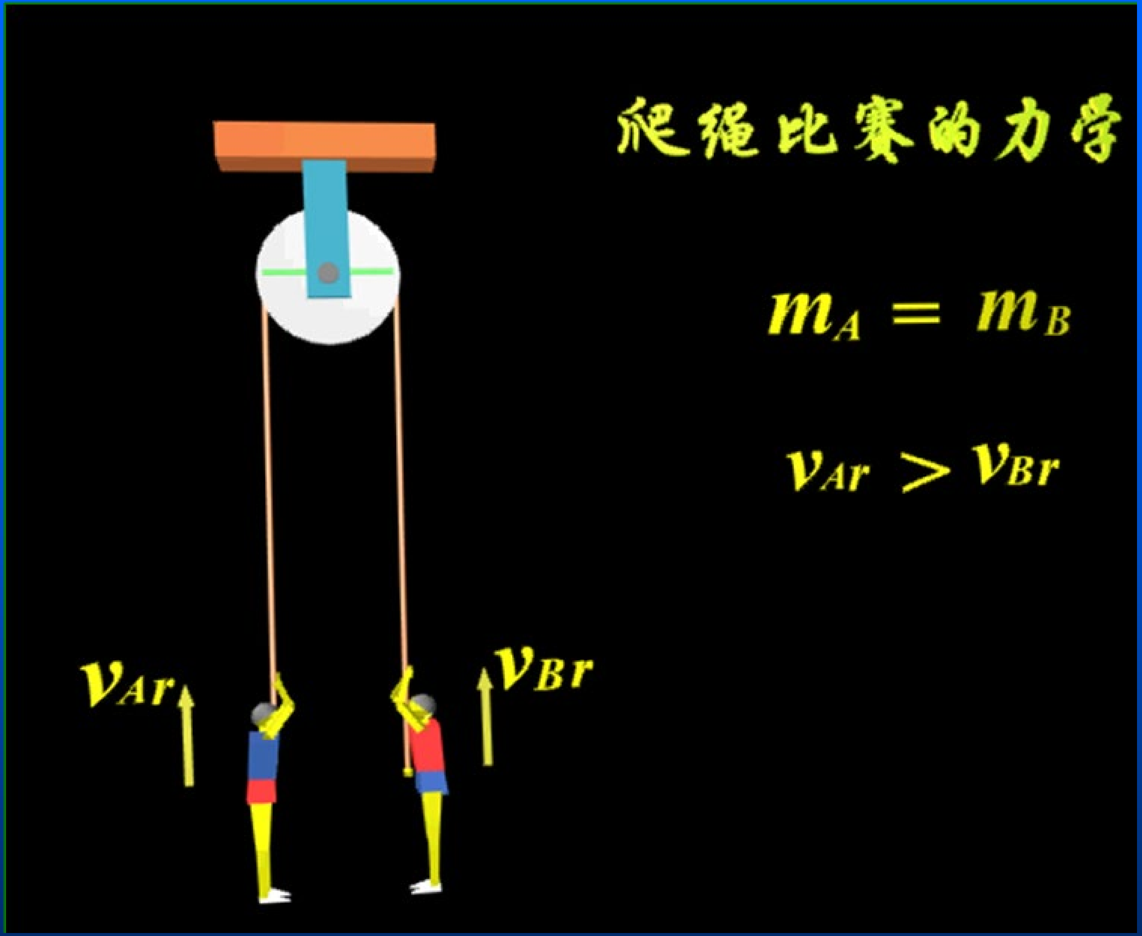
第十一章 动量矩定理

动量定理建立了作用力与动量变化之间的关系，揭示了质点系机械运动规律的一个侧面。动量矩定理则是从另一个侧面，揭示出质点系相对于某一点的运动规律，本章将推导动量矩定理并阐明其应用。

直升机如果没有尾翼将发生什么现象？

课前思考1


动量矩守恒定理实例
直升飞机尾桨的平衡作用
西工大
制作



谁最先到达顶点？

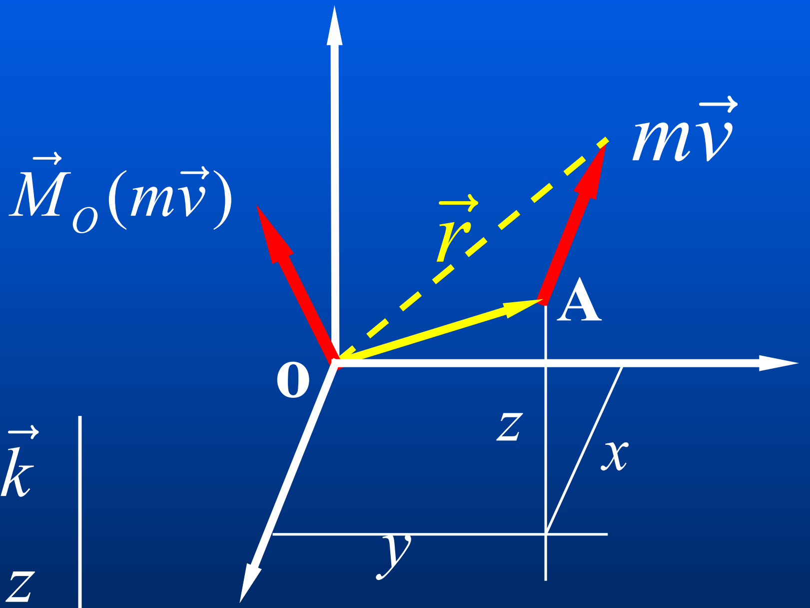
课前思考2

§11-1 质点和质点系的动量矩

一、质点的动量矩

定义： $\vec{M}_O(m\vec{v})=\vec{r}\times m\vec{v}$

质点A的动量 mv 对点 O 的矩，
定义为质点A对点 O 的动量矩



解析表达式

$$\vec{M}_O(m\vec{v})=\vec{r}\times m\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ mv_x & mv_y & mv_z\end{vmatrix}$$

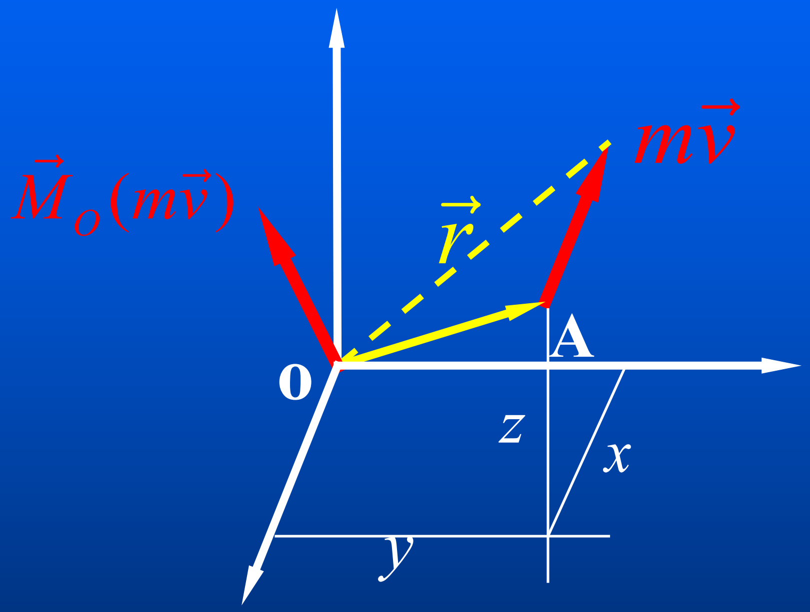
$$=(y\cdot mv_z-z\cdot mv_y)\vec{i}+(z\cdot mv_x-x\cdot mv_z)\vec{j}+(x\cdot mv_y-y\cdot mv_x)\vec{k}$$

动量对点之矩与对轴之矩的关系

$$\left[\vec{M}_O(m\vec{v})\right]_x = M_x(m\vec{v})$$

$$\left[\vec{M}_O(m\vec{v})\right]_y = M_y(m\vec{v})$$

$$\left[\vec{M}_O(m\vec{v})\right]_z = M_z(m\vec{v})$$



二、质点系的动量矩

1、对点O

定义：$$\vec{L}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)$$

$$\boxed{\vec{L}_O=\sum\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i}\Longrightarrow\boxed{\begin{aligned}\left[\vec{L}_O\right]_x&=L_x\\\left[\vec{L}_O\right]_y&=L_y\\\left[\vec{L}_O\right]_z&=L_z\end{aligned}}$$

2、对质心 C

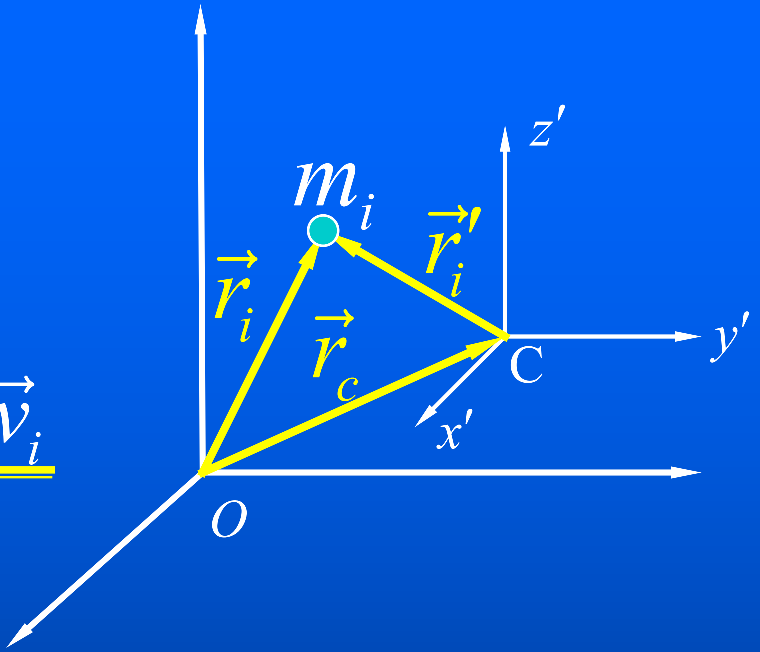
平移动系　$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ri}$

$$\vec{L}_C = \sum \vec{M}_C(m_i\vec{v}_i) = \sum \vec{r}_i' \times \underline{m_i\vec{v}_i}$$

$$= \sum \vec{r}_i' \times m_i(\vec{v}_c + \vec{v}_{ri})$$

$$= \sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_c + \sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_{ri}$$

$$= \boxed{\left(\sum m_i\vec{r}_i'\right) \times \vec{v}_c} + \sum \vec{r}_i' \times \underline{m_i\vec{v}_{ri}}$$



由于

$$\sum m_i\vec{r}_i' = M\vec{r}_c' = 0$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}$$

$\Rightarrow$ $\vec{L}_C = \vec{L}_C'$

3、对任意点O与对质心C动量矩之间的关系

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i'$$

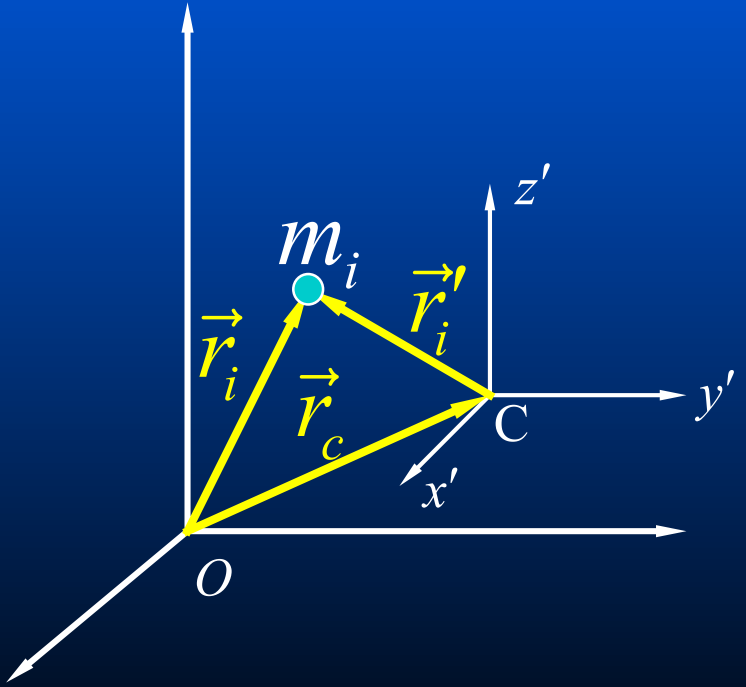
$$\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum (\vec{r}_c + \vec{r}_i') \times m_i \vec{v}_i$$

$$= \vec{r}_c \times \sum m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i$$

3、 $$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{L}_C}$$

2、 $$\boxed{\vec{L}_C = \vec{L}_C' = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{ri}}$$

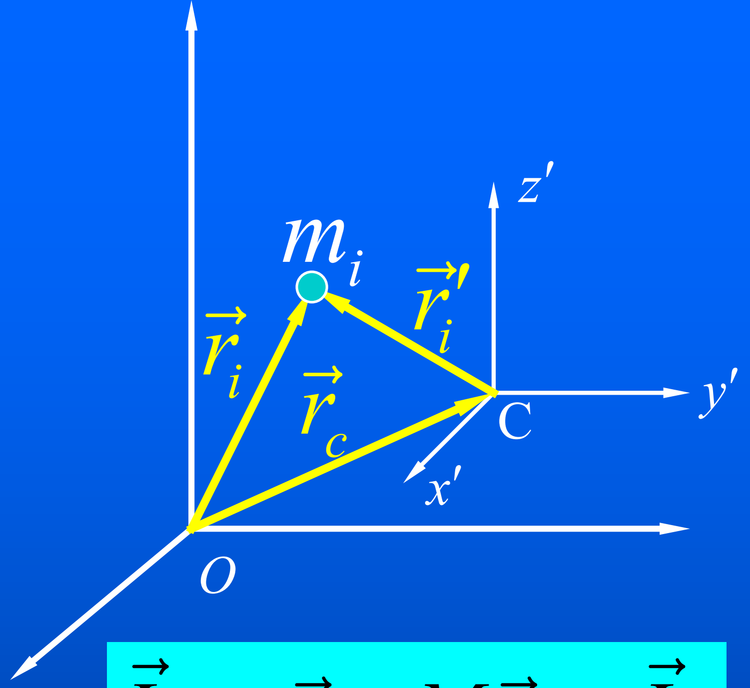
1、 $$\boxed{\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}$$



三、刚体的动量矩

1、刚体平移（对任意点）

$$\vec{L}'_C = 0 \qquad \boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c}$$

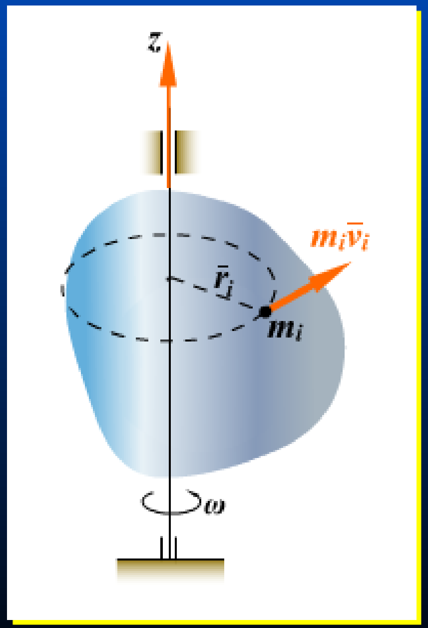


$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c + \vec{L}_C}$$

2、刚体定轴转动（对转轴）

$$L_z = \sum m_i v_i r_i = \omega \sum m_i r_i^2$$

$$\boxed{L_z = J_z \omega} \qquad J_z - \text{转动惯量}$$



3、刚体平面运动（对质心）

平面运动——随质心的平动+绕质心的转动。

$$\vec{L}_O = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c + \vec{L}_C$$

$L_C = L'_C = J_c\omega$ ——刚体平面运动

$L_z = J_z\omega$ ——刚体定轴转动

$\vec{L}_O = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c$ ——刚体平动

在引入动量这一矢量来描述刚体或者质点系的运动以后，为何还要引入动量矩矢量来进一步描述刚体或者质点系的运动，二者可以相互代替吗?

动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{F}_i^{(e)}$$

质点系的动量定理

质点系动量对时间的变化率等于质点系所受的外力系的矢量和。

常用矢量求导法则

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}$,
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\mathbf{A})=f\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}$, f 是标量函数
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}$,
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}$.

§ 11-2 动量矩定理

一、质点的动量矩定理

设O为定点 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m\vec{v})=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times m\vec{v})=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$

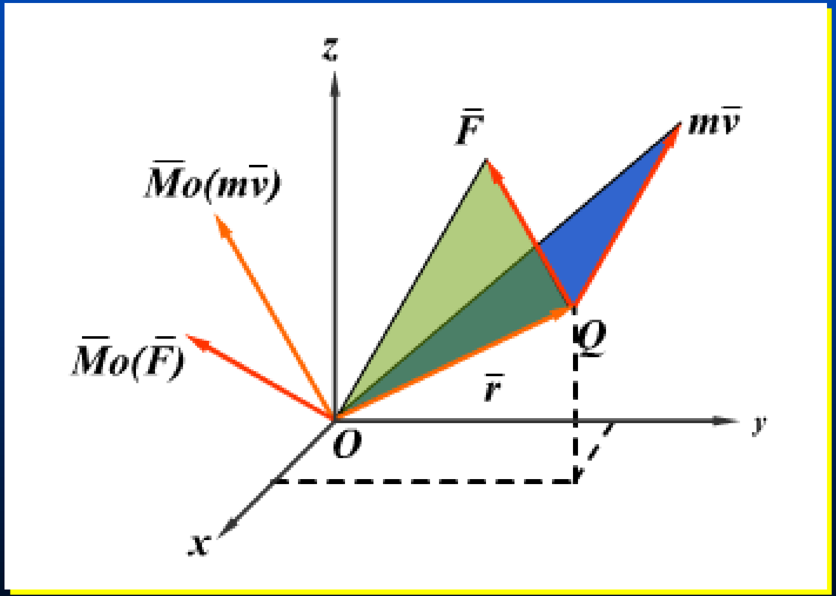
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m\vec{v})=\vec{M}_O(\vec{F})}$$

其中:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})=\vec{F}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}$$ （O为定点）

$$\vec{v}\times m\vec{v}=0$$



二、质点系的动量矩定理

设有n个质点，每个质点满足质点动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(i)})+\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)})\qquad i=1,\cdots,n$$

对n个方程求和

质点系的内力系的主矢和对任一点的主矩都等于零

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

得

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)})}$$

内力不能改变质点系的动量矩.

质点系的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)})}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}&=\sum M_x(\vec{F}_i^{(e)})\\ \frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}&=\sum M_y(\vec{F}_i^{(e)})\\ \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}&=\sum M_z(\vec{F}_i^{(e)})\end{aligned}\right.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z\omega)=\sum M_z(\vec{F}_i)$$

应用于转动刚体

$$\boxed{J_z\alpha=\sum M_z(\vec{F})}$$

——转动微分方程

质点系的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)})$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}=\sum M_x(\vec{F}_i^{(e)})\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}=\sum M_y(\vec{F}_i^{(e)})\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\vec{F}_i^{(e)})\end{cases}$$

应用于平动刚体

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z\omega)=\sum M_z(\vec{F}_i)$$

应用于转动刚体

应用于平面运动刚体

三、动量矩守恒定理

若 $\sum \vec{M}_O(\vec{F}^{(e)}) \equiv 0$，则 $\vec{L}_O =$ 常矢量；

若 $\sum M_z(\vec{F}^{(e)}) = 0$，则 $L_z =$ 常量。

质点系的动量矩

1、$\boxed{\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}$

2、$\boxed{\vec{L}_C = \vec{L}'_C = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{ri}}$

3、$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{L}_C}$

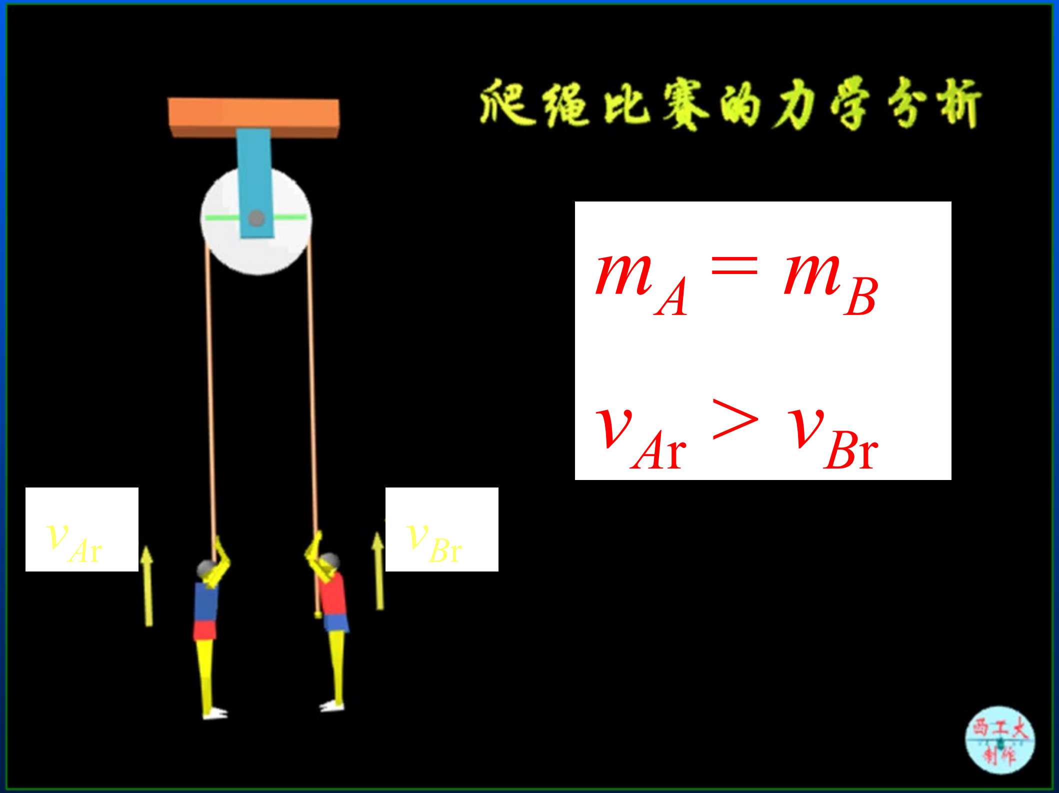
刚体的动量矩

1、$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_c \times M \vec{v}_c}$

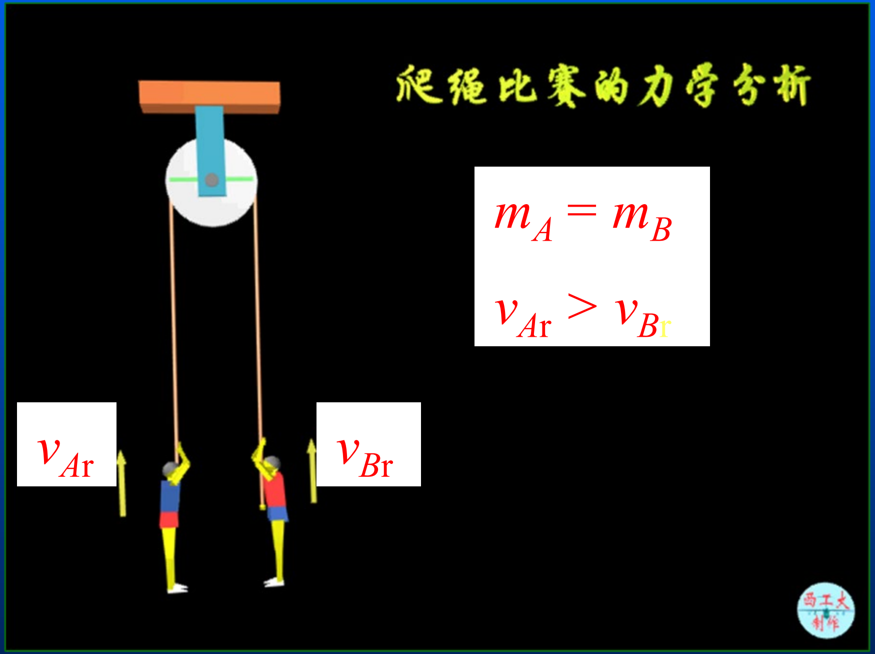
2、$\boxed{L_z = J_z \omega}$

3、$\boxed{L'_C = J_c \omega}$

实例之一： 爬绳比赛的力学分析



实例之一：　爬绳比赛的力学分析



$$L_z = m_B v_B R - m_A v_A R$$

$$M_z = m_A g R - m_B g R$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_B v_B R - m_A v_A R)$$

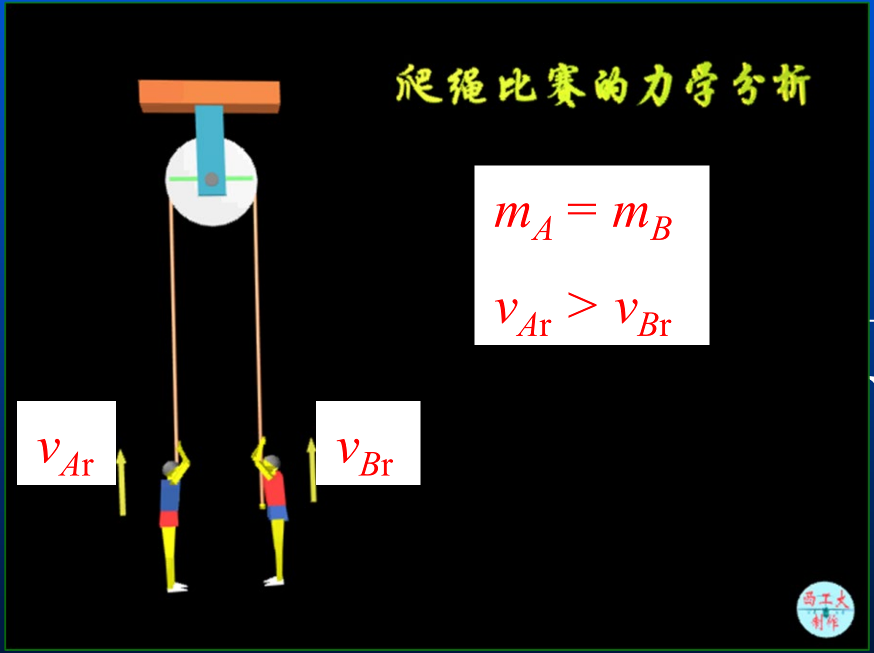
$$= m_A g R - m_B g R$$

实例之一： 爬绳比赛的力学分析

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_B v_B R - m_A v_A R) = m_A g R - m_B g R$$

$$m_A = m_B$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_B v_B R - m_A v_A R) = 0$$



始静止 $L_{z0}=0$

$$m_B v_B R - m_A v_A R = 0$$

$$v_B - v_A = 0, \quad v_A = v_B$$


动量矩守恒定理实例
直升飞机尾桨的平衡作用

直升机事业的发展

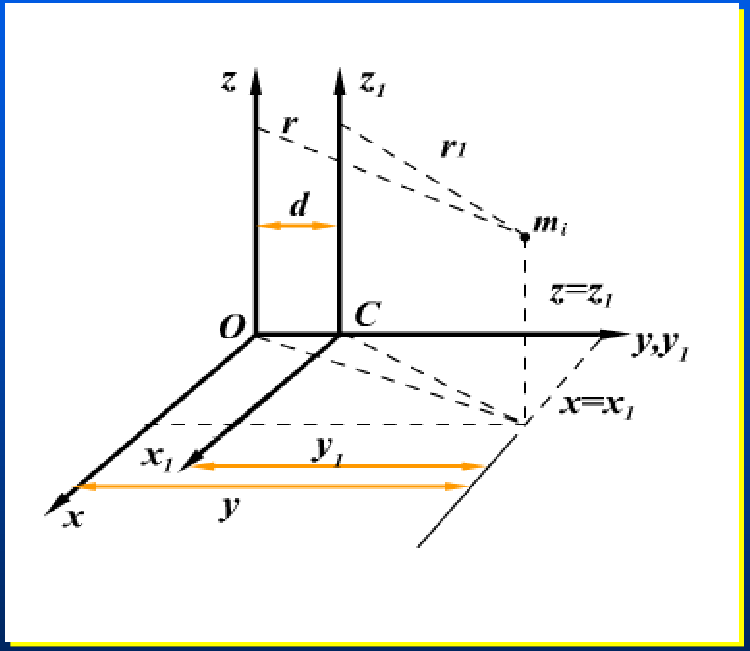
§11-4 刚体对轴的转动惯量

1. $J_z = \sum_{i-1}^{n} m_i r_i^2$

2. 回转半径（惯性半径）

$\rho_z = \sqrt{\dfrac{J_z}{m}}$ 或 $J_z = m\rho_z^2$

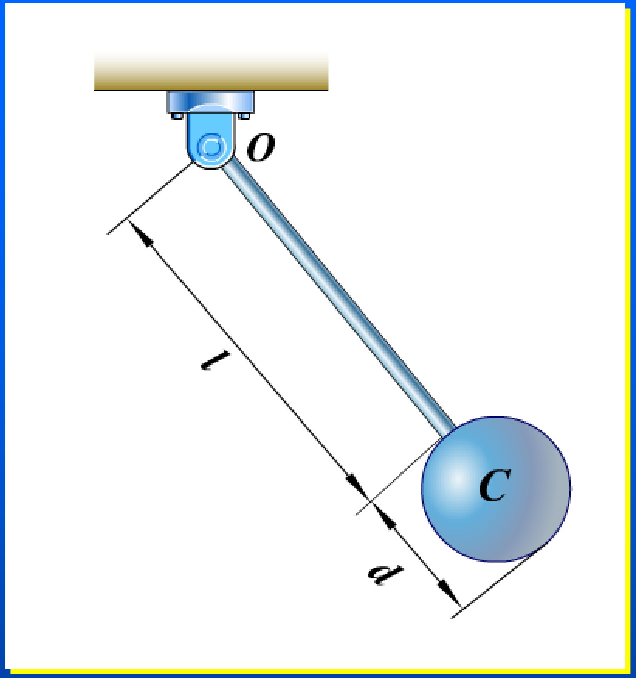
3. 平行轴定理 $J_z = J_{zC} + md^2$



4. 组合法

已知杆长为 l，质量为 m_1，圆盘直径为 d 质量为 m_2 .

求：J_O



$$\boxed{J_O = J_{O杆} + J_{O盘}}$$

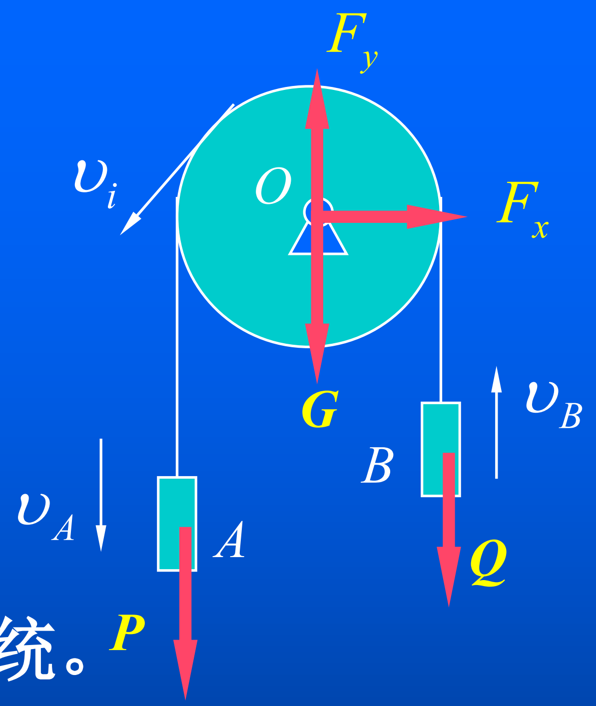
$$J_{O杆} = \frac{1}{3}ml^2 \;; \qquad J_{O盘} = \frac{1}{2}m_2(\frac{d}{2})^2 + m_2(l+\frac{d}{2})^2$$

$$= m_2(\frac{3}{8}d^2 + l^2 + ld)$$

$$J_O = \frac{1}{3}m_1 l^2 + m_2(\frac{3}{8}d^2 + l^2 + ld)$$

例11-1

已知：半径为r，滑轮重为G，将其视为圆环。A物重为P，B物重为Q，且$P > Q$。
求：两重物的加速度及轮的角加速度。



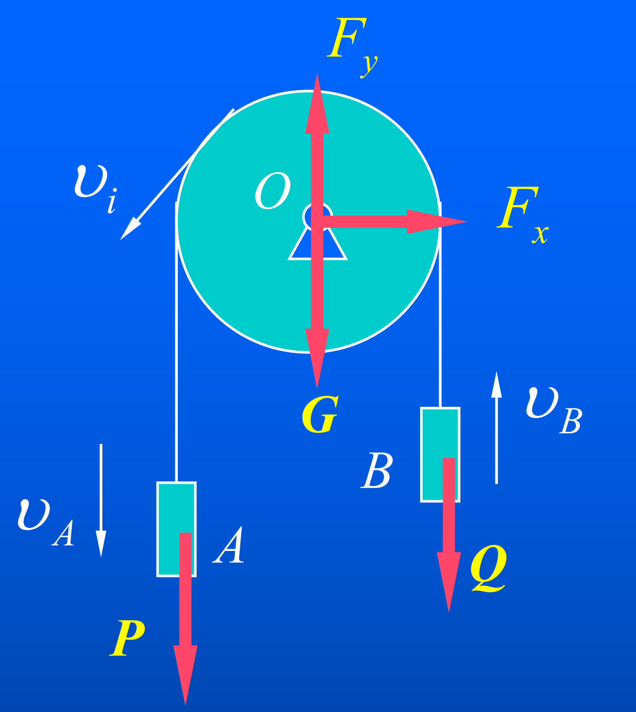
解： ✓ 研究对象为轮、物体A和B组成的系统。

✓ 受力分析，运动分析

✓ 对O点应用质点系的动量矩定理

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)})$$

$$L_z = \frac{P}{g}\upsilon_A r + \frac{Q}{g}\upsilon_B r + J_O\omega$$



则有 $$L_z = \frac{\upsilon r}{g}(P+Q+G)$$

由 $$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_z(F_i^{(e)})}$$

$$\begin{cases} J_O = mr^2 = \dfrac{G}{g}r^2 \\ \omega = \dfrac{\upsilon}{r} \end{cases}$$

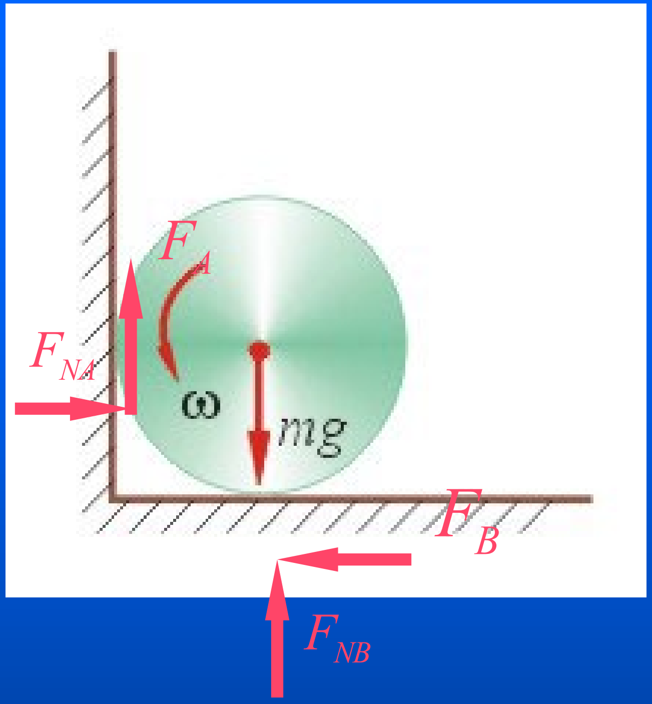
得 $$\frac{r}{g}(P+Q+G)\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = Pr - Qr$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{(P-Q)g}{P+Q+G}, \qquad \alpha = \frac{a}{r} = \frac{(P-Q)g}{(P+Q+G)r}$$

例11-2

均质圆柱半径为r，质量为m，置该圆柱于墙角，初时角速度ω_0，由于摩擦阻力，使转动减速，摩擦因数f。

求：使圆柱停止所需的时间。

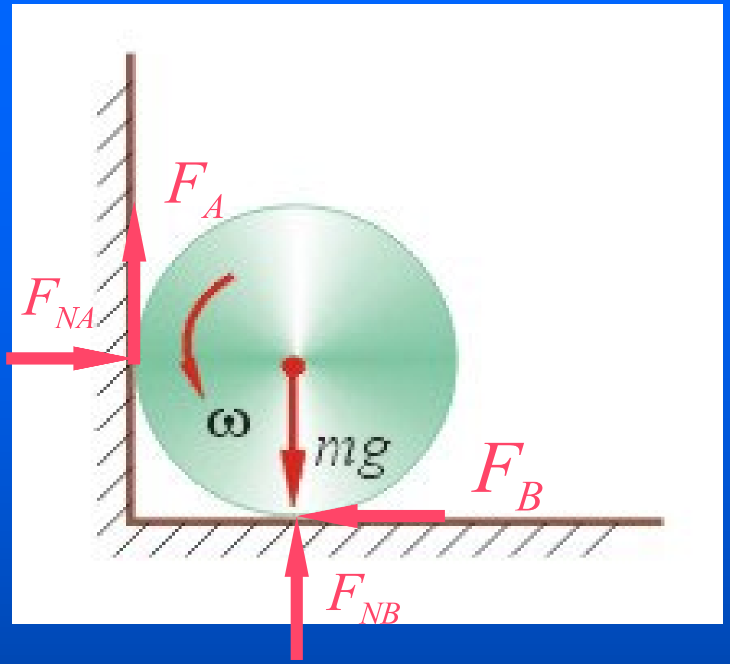


解：

- 受力分析
- 运动分析：绕质心转动，质心不动。
- 应用刚体定轴转动的微分方程

$$J_z\alpha = \sum M_z(F_i^{(e)})$$

$$\frac{1}{2}mr^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-F_Ar-F_Br \qquad (1)$$



- 补充方程，应用质心运动定理

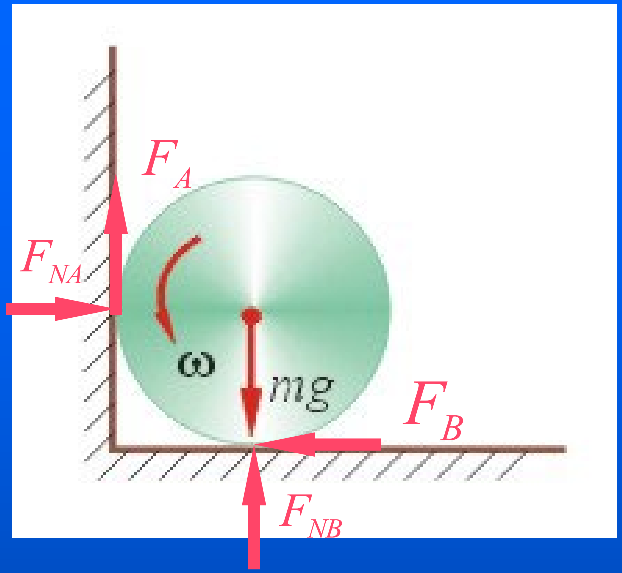
$$m\vec{a}_c=\Sigma\vec{F} \qquad \begin{cases} m\ddot{x}_c=\Sigma F_x \\ m\ddot{y}_c=\Sigma F_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=F_{NA}-F_B & (2) \\ 0=F_{NB}+F_A-mg & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_A=F_{NA}f & (4) \\ F_B=F_{NB}f & (5) \end{cases}$$

未知量 $\omega \quad F_A \quad F_B \quad F_{NA} \quad F_{NB}$

未知量 $\omega \quad F_A \quad F_B \quad F_{NA} \quad F_{NB}$



解得 $F_A = \dfrac{mgf^2}{1+f^2}$， $F_B = \dfrac{mg\,f}{1+f^2}$

代入（1）式，得

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{2gf(1+f)}{r(1+f^2)}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mr^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -F_A r - F_B r}$$

积分

$$\int_{\omega_0}^{0}\mathrm{d}\omega = -\frac{2gf'(1+f)}{r(1+f^2)}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$t = \frac{(1+f^2)r\omega_0}{2gf(1+f)}$$

本章小结

基本概念

动量矩

质点动量矩

质点系动量矩

刚体动量矩

质点动量矩定理

质点系动量矩定理

动量矩守恒定理

$$\vec{L}_O = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c + \vec{L}_C$$

刚体平动

$$\vec{L}_O = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c$$

刚体做三种不同运动的时候，动量矩的计算。

定轴转动

$$L_z = J_z\omega$$

平面运动

$$L_C = L'_C = J_c\omega$$

拓展作业：工程及实践案例背后的力学分析（学在浙大）

1）多旋翼机的运动、平衡、以及力矩、动量矩等动力学分析

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

作业　习题：11-2；11-11；11-15

谢谢各位学！