《 信息理论 》模拟试卷

考生姓名：_______________学号：_________________所属院系：_____________

题序	**一**	**二**	**三**	**四**	**五**	**六**	**七**	**八**	**总 分**
得分									
评卷人									

一、判断题（正确的打“√”，不正确的打“×”，**将结果填在下面的方框内**，共 10×2=20 分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
判断结果	√	√	×	×	√
题号	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
判断结果	√	×	×	√	√

（1） 事件发生的概率越小，自信息越大。

（2） 两个相互独立的随机变量的联合自信息等于两个变量的自信息之和。

（3） 连续信源和离散信源的熵都具有非负性。

（4） 当随机变量 X 和 Y 相互独立时，条件熵 H(X|Y)等于信源熵 H(Y)。

（5） 各码字的长度符合克拉夫特不等式，是唯一可译码存在的充分和必要条件。

（6） 不存在码长为{1,2,2,3}的唯一可译码。

（7） 对于任何二元贝努利信源，全零序列都不是一个典型列。

（8） 当随机变量 X 和 Y 相互独立时，I（X；Y）=H（X）。

（9） 对一个离散信源进行 2 元 Huffman 编码，则发生概率最低的两个符号其码长必然相等。

（10） 一般情况下，哈夫曼编码的效率大于香农编码。

二、(10 分) 设离散随机变量 X ， Y ， Z 满足 $Z = X + Y$, 其中 X ， Y 相互独立。试证：

（1）$I(X;Z) = H(Z) - H(Y)$；

（2）$H(X,Y) \geq H(Z)$。

答案：(1) $I(X:Z) = H(Z) - H(Z|X) = H(Z) - H(Y)$

(2) $H(X,Y,Z) = H(Z) + H(X,Y|Z) = H(X,Y) + H(Z|X,Y)$

因为 $H(Z|X,Y) = 0$ 而 $H(X,Y|Z) \geq 0$，故 $H(X,Y) \geq H(Z)$

三、(10 分) 令 X 是一个离散随机变量。

（1）假设 $Y = f(X)$ 是 X 上的一对一函数，试比较 $H(Y \mid X)$， $H(X \mid Y)$， $H(X,Y)$，$I(X;Y)$ 与 $H(X)$ 之间的大小关系。

（2）假设 $Z = g(X)$，试证明 $H(Z) \leq H(X)$，并指出等号成立的条件。

答案：（1）$H(Y|X) = 0$，故 $H(Y \mid X) \leq H(X)$

$H(X|Y) \leq H(X)$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(X)$

$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X)$

(2) $H(X,Z) = H(X) + H(Z|X) = H(X)$

$H(X,Z) = H(Z) + H(X|Z)$

因为 $H(X|Z) \geq 0$, 所以 $H(Z) \leq H(X)$。等号成立的条件是 $H(X|Z)=0$，即 g 是一对一函数。

四、（10 分）设离散随机变量 X ， Y ， Z 。试证：

（1）$H(X|Y)+H(Y|Z)\geq H(X|Z)$；

（2）$\frac{H(X|Y)}{H(X,Y)}+\frac{H(Y|Z)}{H(Y,Z)}\geq\frac{H(X|Y)+H(Y|Z)}{H(X|Y)+H(Y|Z)+H(Z)}$

答案：

(a) $H(X/Y)+H(Y/Z)\geq H(X/Y,Z)+H(Y/Z)=H(X,Y/Z)$,

而 $H(X,Y/Z)=H(X/Z)+H(Y/X,Z)$

$H(Y/X,Z)\geq 0$

$\therefore\quad H(X/Y)+H(Y/Z)\geq H(X/Z)$

(b) $H(X,Y)\geq H(X/Y)+H(Y)+H(Z/Y)=H(X/Y)+H(Y/Z)+H(Z)$

$H(Y,Z)\geq H(Y/Z)+H(Z)+H(X/Y)$

又 $f(x)=\dfrac{x}{x+H(Z)}$， $f'(x)=\dfrac{H(Z)}{(x+H(Z))^2}\geq 0$， $f(x)$ 单调递增

$$\therefore\quad \frac{H(X/Y)}{H(X,Y)}+\frac{H(Y/Z)}{H(Y,Z)}\geq\frac{H(X/Y)+H(Y/Z)}{H(X/Y)+H(Y/Z)+H(Z)}$$

$$\geq\frac{H(X/Z)}{H(X/Z)+H(Z)}\geq\frac{H(X/Z)}{H(Z)}$$

五、（10 分）假设 X 是[-1,1]上的均分分布随机变量，试计算 h(X), h(X^2)。h 代表微分熵。

答案：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x\in[-1,1]\\ 0 & x\notin[-1,1]\end{cases}$$

$$H_c(X)=-\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\log p(x)dx$$

$$=[-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}]\cdot 2=\log^{2}=1(bit)$$

令 Y=X^2，则

$$p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}} & y\in[0,1]\\ 0 & y\notin[0,1]\end{cases}$$

所以

$$H_C(Y)=-\int_{-\infty}^{\infty}p(y)\log p(y)dy$$

$$=-\int_{0}^{1}\frac{1}{2\sqrt{y}}\ln(\frac{1}{2\sqrt{y}})dy=\ln 2-1\ \text{nat}$$

六、(10 分) 令X_1，X_2为分布定义在字符表{1，2，…，m}和{m + 1，…，n}上的 2 个离散随机变量，它们的分布函数为p_1和p_2。现构造随机变量

$$X = \begin{cases} X_1, & \text{以概率}\alpha \\ X_2, & \text{以概率}1-\alpha \end{cases}$$

（1） 试用$H(X_1)$, $H(X_2)$和α来表示H(X)。

（2） 在α上求H(X)的极大值，并证明$2^{H(X)} \le 2^{H(X_1)} + 2^{H(X_2)}$。

答案：

(a) 由熵的可加性可得：

$$H(X) = aH(X_1) + (1-a)H(X_2) + H(a)$$

$$= aH(X_1) + (1-a)H(X_2) - a\log a - (1-a)\log(1-a)$$

(b) $$\frac{dH(X)}{da} = H(X_1) - H(X_2) - \log a + \log(1-a) = 0$$

解得：$$a = \frac{2^{H(X_1)-H(X_2)}}{1+2^{H(X_1)-H(X_2)}} = \frac{2^{H(X_1)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}} \qquad a \in (0,1)$$

而 $$\frac{d^2H(X)}{da^2} = \frac{-1}{(1-a)\ln 2} - \frac{1}{a\ln 2} < 0$$

∴ $H(X)$在a处有极大值（或者由$H(X)$的凸函数性质直接得出）

$$H(X)\Big|_{\max} = \frac{2^{H(X_1)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}\left[H(X_1) - \log\frac{2^{H(X_1)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}\right] + \frac{2^{H(X_2)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}\left[H(X_2) - \log\frac{2^{H(X_2)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}\right]$$

$$=\log[2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}]$$

∴ $$2^{H(X)} \le 2^{H(X_1)} + 2^{H(X_2)}$$

七、（15 分）设信源$U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0.3 & 0.25 & 0.15 & 0.15 & 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$

（1）码$C = \{1, 01, 110, 1001, 01101, 10111\}$是不是上述信源的一个可行的编码？说明理由。

（2）给出上述信源的最佳**二元**编码，并计算其编码效率。

（3）给出上述信源的最佳**三元**编码，并计算其编码效率。

（4）给出上述信源的 Shannon 编码，并计算其编码效率。

答案：

(1)，不是，后缀分解集中包含码字

(2)，画出编码的树行图，编码效率=97.55%

(3)，画出编码的树行图，编码效率=94.25%

(4)，写出 Shannon 编码过程，编码效率=90.19%

八、（15 分）Z 是一个取值空间在{0，1}上的随机变量，且 $p(Z=0)=1-p$，X 是独立于 Z 的随机变量，$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n\end{pmatrix}$，令 $Y=XZ$。

(1) 用 $H(X)$ 和 $H(Z)$ 来表示 $H(Y)$。

(2) 求使得 $H(Y)$ 最大的 p 和 **q**。

答案：(1) $H(Y)=H(Z)+pH(X)$，根据熵的可加性。

(2)当 **q** 等概时，H(X)取到最大，最大值为 $H(X)=\log n$，所以

$H(Y)=H(p)+p\log n$，$\dfrac{dH(Y)}{dp}=\log(1-p)-\log p-\log n=0$，得到

$p=n/(n+1)$，$H(Y)=\log(n+1)$。