材料力学 （II）

第十四章 超静定结构

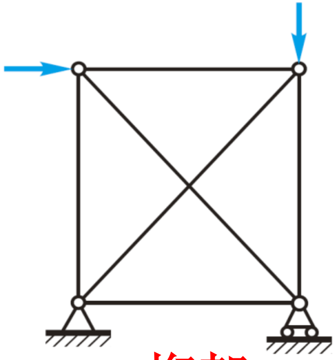
Indeterminate structures

第 28 讲

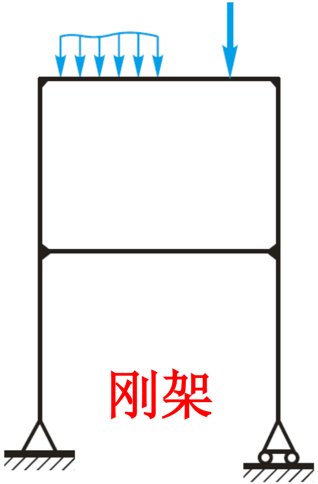
§ 14.1 超静定结构概述

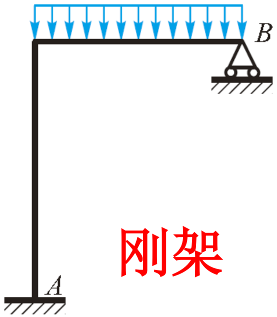
由直杆以铰节点相连接组成杆系， 若载荷只作用于节点上，则每一杆件只承受拉伸或压缩， 这种杆系称为桁架。

直杆以刚节点相连接组成杆系，在载荷作用下，各杆件可以承受拉、压、弯曲和扭转，这样的杆系称为刚架。



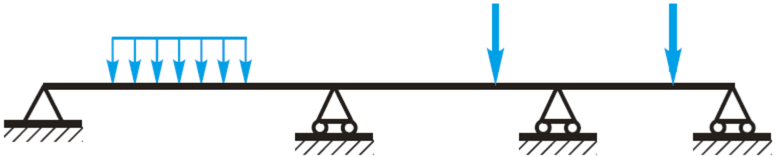
桁架





刚架

具有三个或三个以上支座的梁，通常称为连续梁。



杆系各杆件的轴线在同一平面内，且它就是各杆件的形心主惯性平面，同时，外力也都作用于这一平面内，这种杆系称为平面杆系。

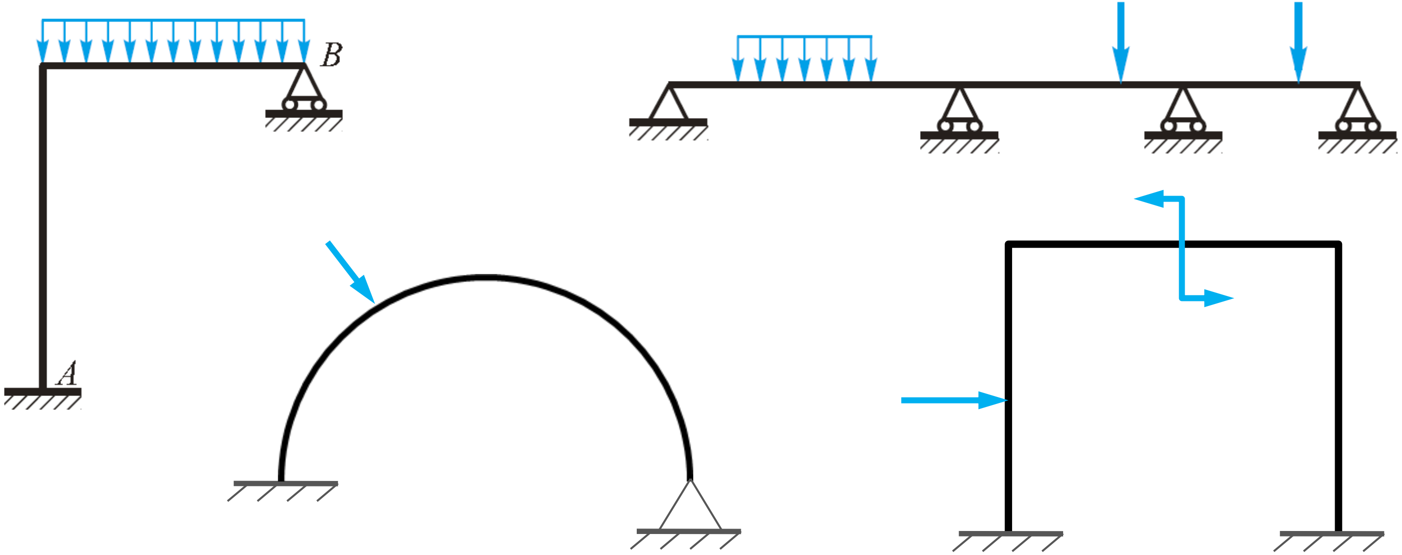
超静定结构：存在一些不是维持几何不变所必需的支座（约束）的结构

把这类约束称为**多余约束**，与多余约束对应的约束力称为**多余约束力**

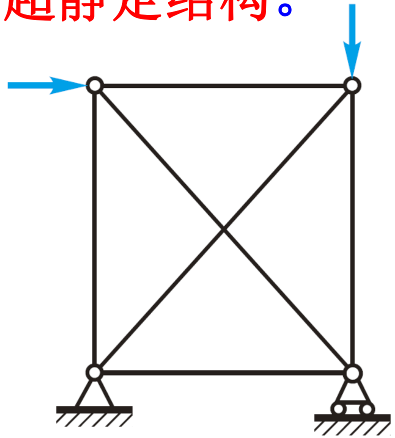
超静定问题：平衡方程数$m <$ 未知数目n

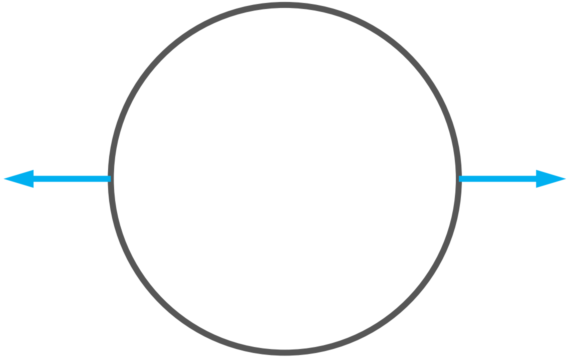
超静定结构的形式：

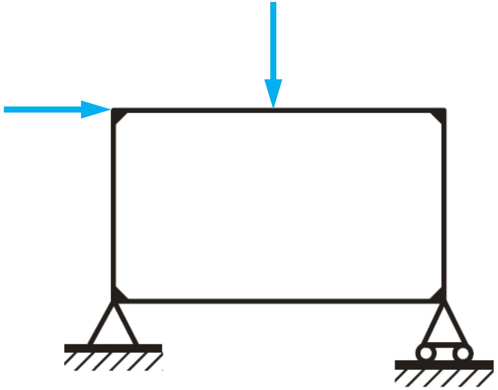
1. 超静定结构的支座约束力不能全由平衡方程求出，这种超静定结构，称为**外力超静定结构**。



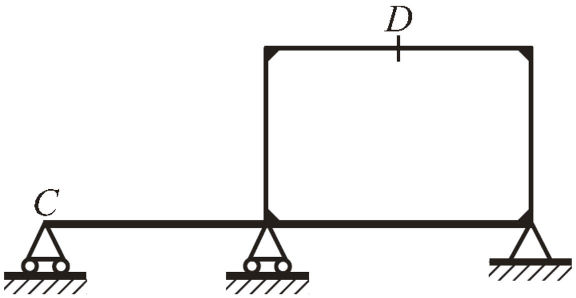
2. 超静定结构的内力不能全由平衡方程求出，这种超静定结构， 称为内力超静定结构。



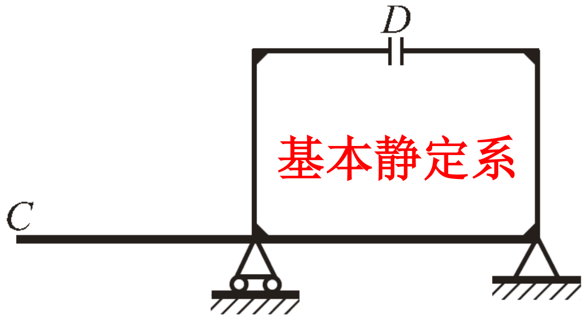




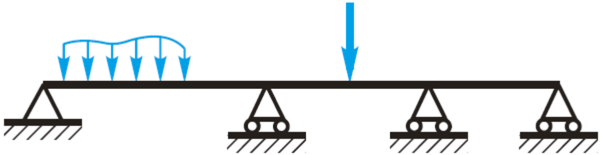
3. 既有外力超静定，又有内力超静定的结构。



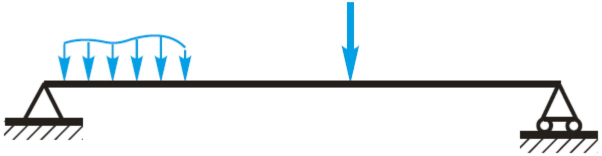
四次超静定结构

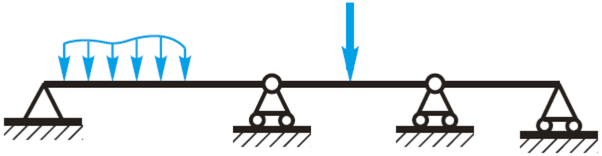


原超静定结构

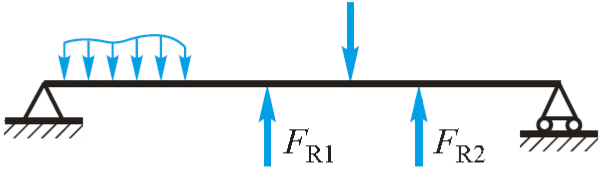


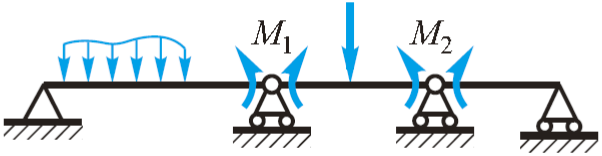
解除超静定结构的某些约束后得到的静定结构，称为原超静定结构的**基本静定系**（基本静定系可以有不同的选择，不是唯一的）。





在基本静定系上，除原有载荷外，还有用相应的多余约束力代替被解除的多余约束。把载荷和多余约束力作用下的基本静定系称为**相当系统**。





求解静定结构位移的能量方法：

卡氏第一定理 $$F_i = \frac{\partial V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2 \cdots \Delta_n)}{\partial \Delta_i}$$

卡氏第二定理 $$\Delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon(F_1, F_2 \cdots F_n)}{\partial F_i}$$

余能定理 $$\Delta_i = \frac{\partial V_c(F_1, F_2 \cdots F_n)}{\partial F_i}$$

单位载荷法 $$1 \cdot \Delta = \int_l (\bar{M} \mathrm{d}\theta^* + \bar{F}_\mathrm{S} \mathrm{d}\lambda^* + \bar{F}_\mathrm{N} \mathrm{d}(\Delta l)^* + \bar{T} \mathrm{d}\varphi^*)$$

$$1 \cdot \Delta = \int_l (\bar{M} \frac{M}{EI} \mathrm{d}x + \bar{F}_S \cdot \frac{\alpha_s F_S}{GA} \mathrm{d}x + \bar{F}_N \frac{F_N}{EA} \mathrm{d}x + \bar{T} \frac{T}{GI_P} \mathrm{d}x)$$

§ 14.2 用能量法解超静定系统

求解超静定问题的基本方法 （平衡方程数m<未知数目n ）

（1）选取基本静定系

（2）变形几何相容方程

（compatibility equations）

（3）本构方程

（constitutive equations）

用能量法来建立！

（不同之处）

建立p个补充方程

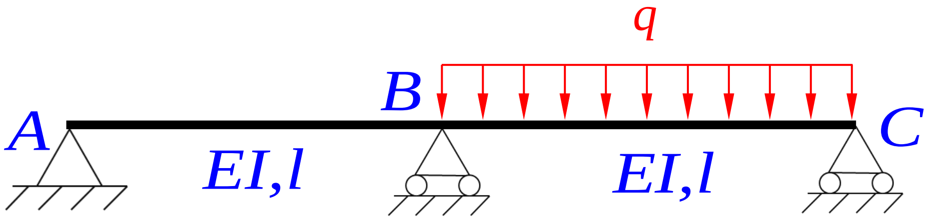
平衡方程(m个)

$$m + p = n$$

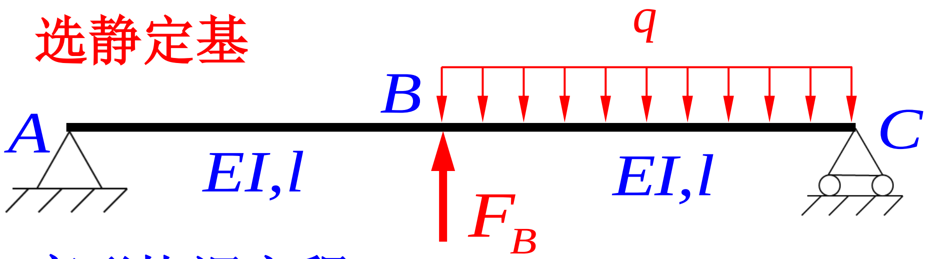
（4）原问题变成静定问题，求解出所有的约束反力，进而完成内力、应力、位移的计算。

例1 图示超静定梁的各支座反力。

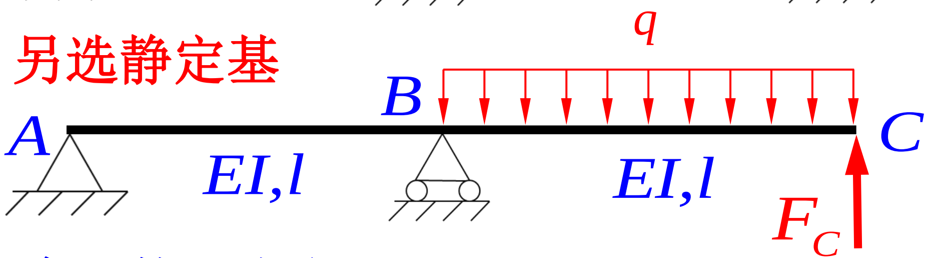
解：用以前的方法



选静定基

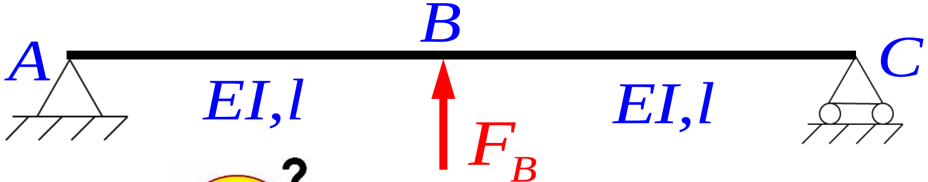


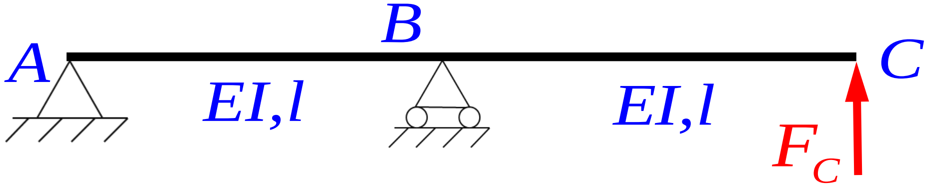
另选静定基

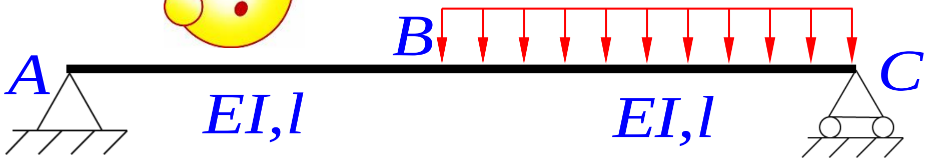


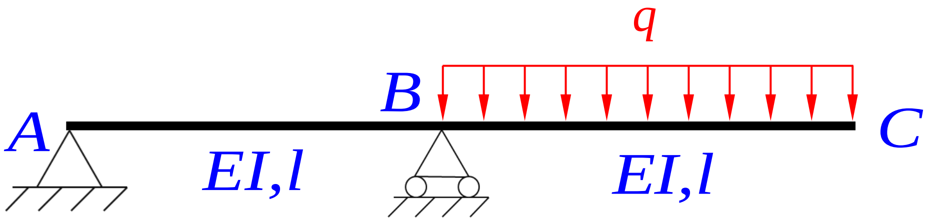
变形协调方程 $w_B=0$

变形协调方程 $w_C=0$







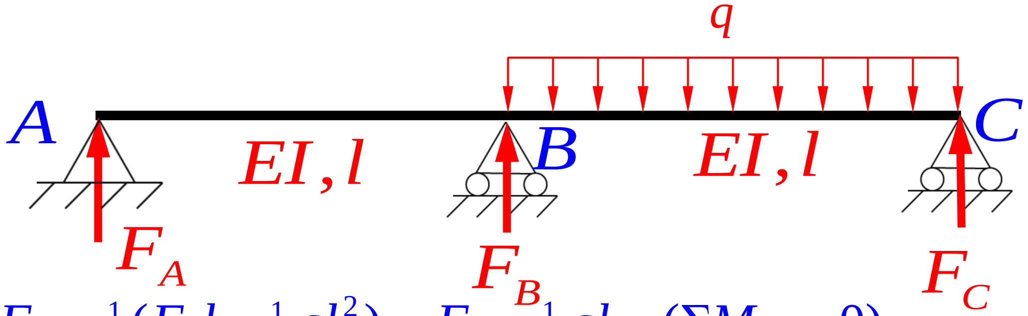


解：用能量方法

选静定基

建立补充方程

卡氏第二定理



$$F_A = \frac{1}{l}(F_C l - \frac{1}{2}ql^2) = F_C - \frac{1}{2}ql \quad (\Sigma M_B = 0)$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_C} = 0$$

$$M_{AB}(x) = F_A x = (F_c - \frac{1}{2}ql)x \quad M_{BC}(x) = F_c x - \frac{1}{2}qx^2$$

$$V_\varepsilon = \int_0^l \frac{M_{BC}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{M_{AB}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_C} = \int_0^l \frac{M_{BC}(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial F_C}\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{M_{AB}(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M_{AB}(x)}{\partial F_C}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^l \frac{(F_C x - \frac{1}{2}qx^2)}{EI} \cdot x\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{(F_C - \frac{1}{2}ql)x}{EI} \cdot x\mathrm{d}x$$

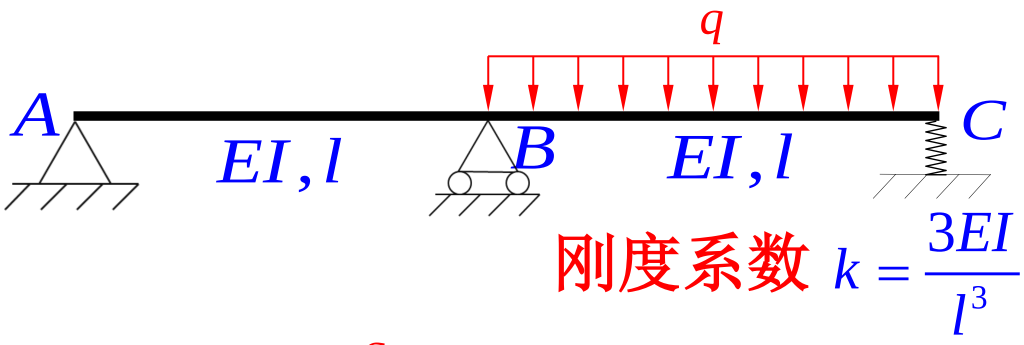
$$= \frac{1}{EI}(\frac{1}{3}F_C l^3 - \frac{1}{8}ql^4 + \frac{1}{3}F_C l^3 - \frac{1}{6}ql^4) = 0$$

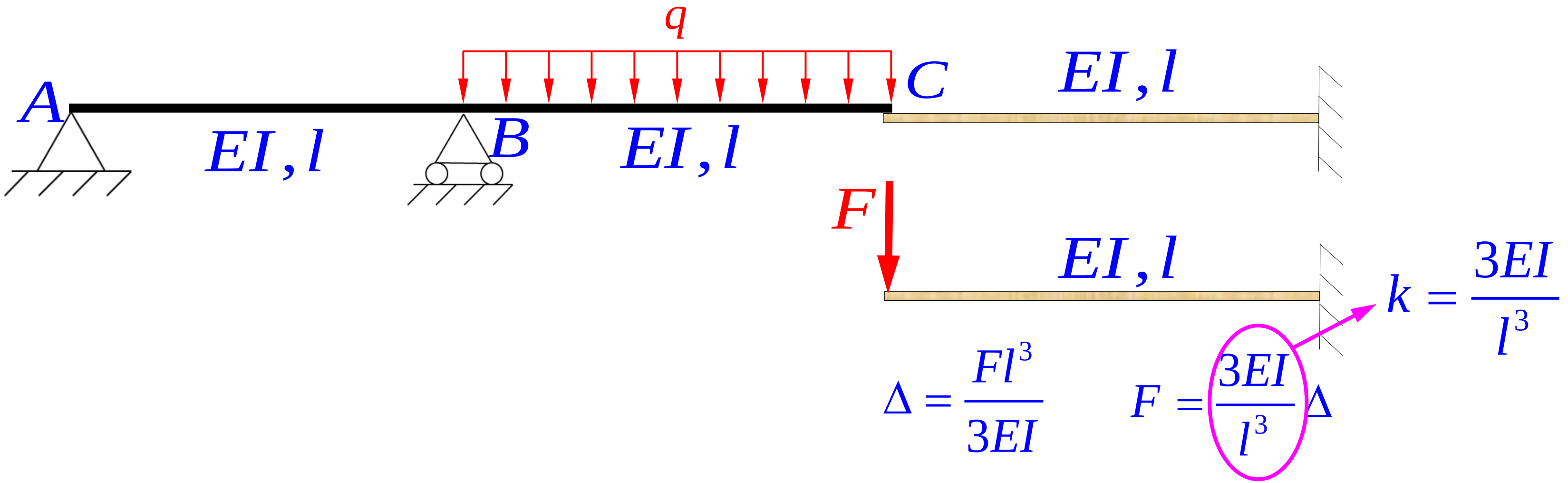
去除B支座或A支座均可！

$$F_B = \frac{5}{8}ql$$

$$F_c = \frac{7}{16}ql \quad F_A = -\frac{1}{16}ql$$

若将超静定梁的C支座改为刚度系数 $k=\dfrac{3EI}{l^3}$ 的弹簧，试求各支座的反力。

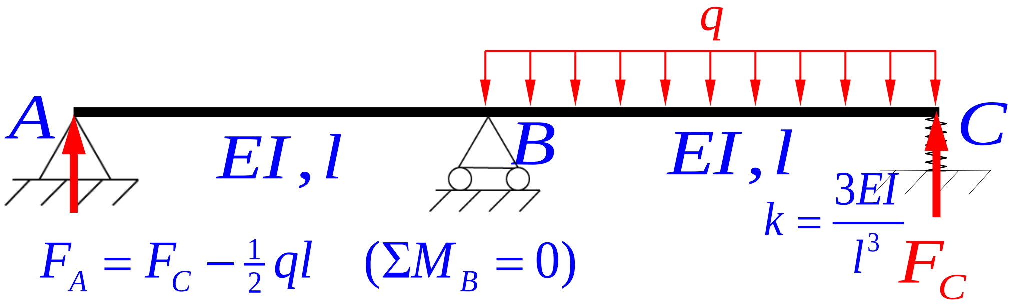




解：选静定基同前

利用能量法建立补充方程

卡氏第二定理



$F_A = F_C - \frac{1}{2}ql \quad (\Sigma M_B = 0)$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_C} = -\Delta = -\frac{F_C}{k}$$

$$M_{AB}(x) = F_A x = (F_c - \tfrac{1}{2}ql)x$$

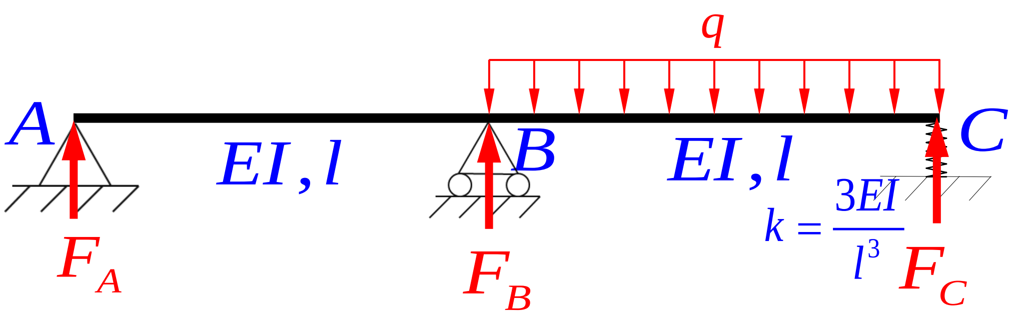
$$M_{BC}(x) = F_c x - \tfrac{1}{2}qx^2$$

$$V_\varepsilon = \int_0^l \frac{M_{BC}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{M_{AB}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^l \frac{(F_c x - \frac{1}{2}qx^2)^2}{2EI}\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{[(F_c - \frac{1}{2}ql)x]^2}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_C} = \int_0^l \frac{(F_C x - \frac{1}{2}qx^2)}{EI}\cdot x\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{(F_C - \frac{1}{2}ql)x}{EI}\cdot x\mathrm{d}x = -\frac{F_C}{k}$$

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$



$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}F_C l^3-\frac{1}{8}ql^4+\frac{1}{3}F_C l^3-\frac{1}{6}ql^4\right)=-\frac{F_C\cdot l^3}{3EI}$$

$$F_c=\frac{7}{24}ql,\quad F_A=-\frac{5}{24}ql,\quad F_B=\frac{11}{12}ql$$

铰支情形 $F_c=\frac{7}{16}ql,\ F_A=-\frac{1}{16}ql,\quad F_B=\frac{5}{8}ql$

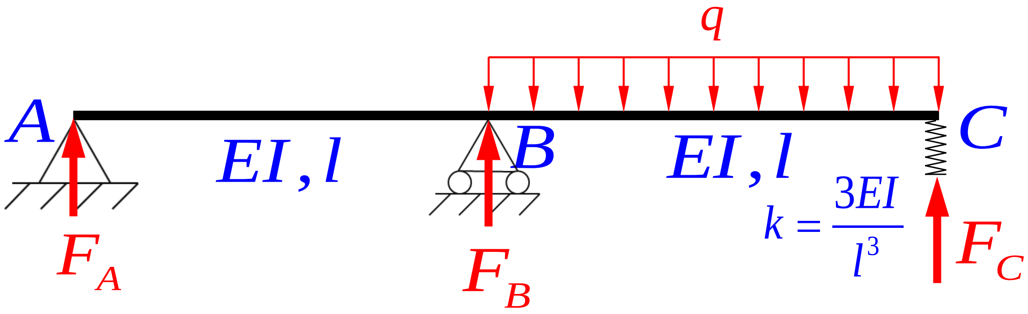
改用弹簧支撑，F_c 减小了，F_B 增大了，合理！

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_C}=\underset{\Delta}{-}\frac{F_C}{k}$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_C}+\frac{F_C}{k}=0$$

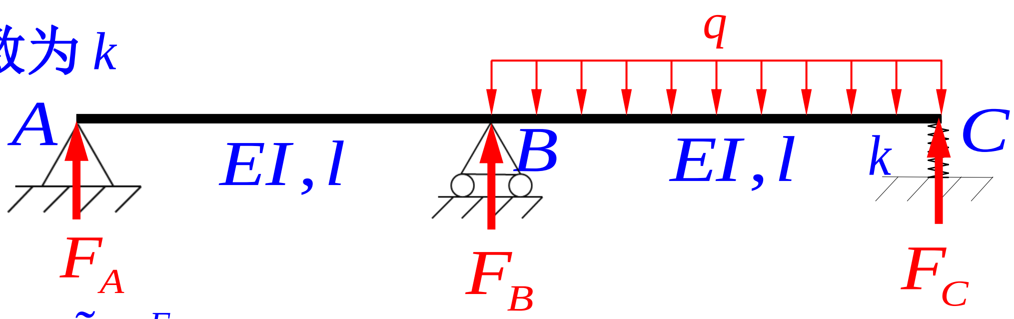
$$\frac{\partial\left[V_\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{F_C^2}{k}\right]}{\partial F_C}=0$$

$$\frac{\partial\left[V_\varepsilon+\frac{1}{2}k\left(\frac{F_C}{k}\right)^2\right]}{\partial F_C}=0$$



另选静定基如图

更一般化讨论： 设弹簧的刚度系数为 k



$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}F_C l^3-\frac{1}{8}ql^4+\frac{1}{3}F_C l^3-\frac{1}{6}ql^4\right)=-\frac{F_C}{k}$$

$$\frac{l^3}{EI}\left(\frac{2}{3}F_C-\frac{7}{24}ql\right)=-\frac{F_C}{k}$$

$$\left(1+\frac{2}{3}\frac{kl^3}{EI}\right)F_C=\frac{7}{24}\frac{kl^3}{EI}ql$$

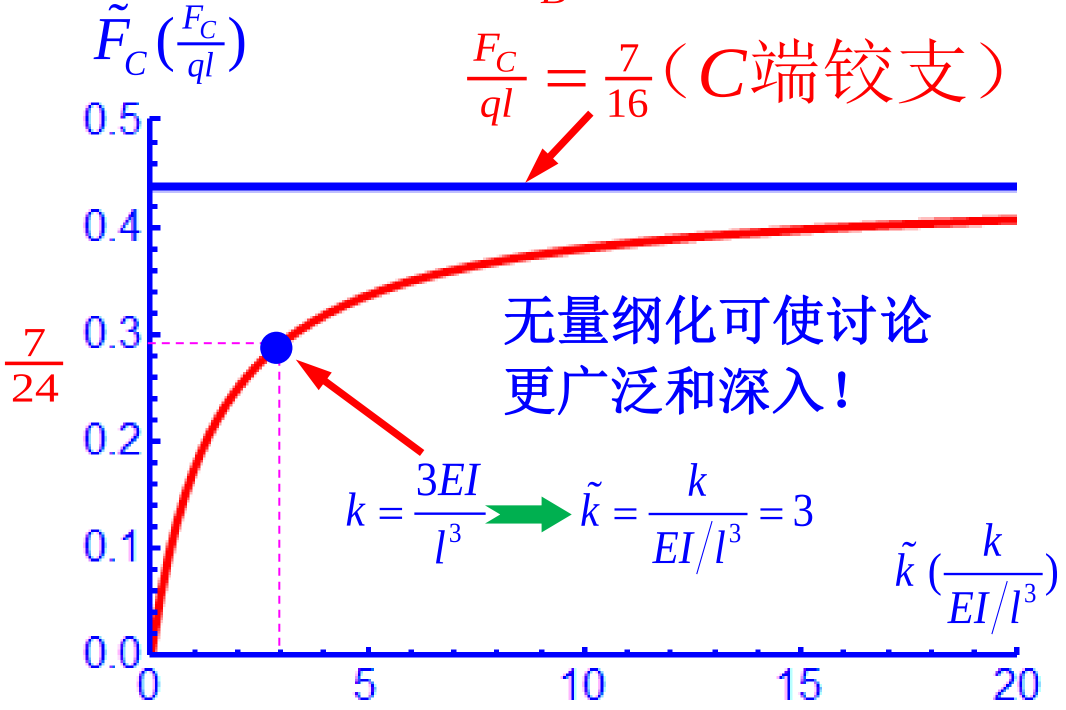
$$F_C=\frac{\frac{7}{24}\frac{kl^3}{EI}}{1+\frac{2}{3}\frac{kl^3}{EI}}ql$$

$k=0$ 时，$F=0$ 静定问题

$k\to\infty$ 时，$F\to\frac{7}{16}ql$

给出变化曲线？ $\tilde{F}_C=\dfrac{\frac{7}{24}\tilde{k}}{1+\frac{2}{3}\tilde{k}}$

$\tilde{F}_C=\dfrac{F_C}{ql}$ $\tilde{k}=\dfrac{k}{EI/l^3}$ 无量纲化！



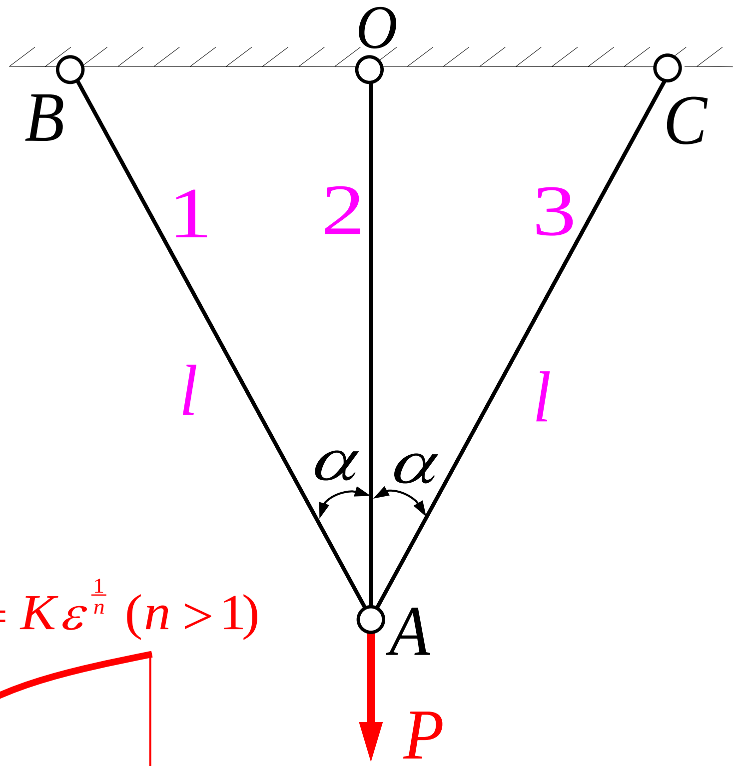
例2 求图示结构各杆的内力。

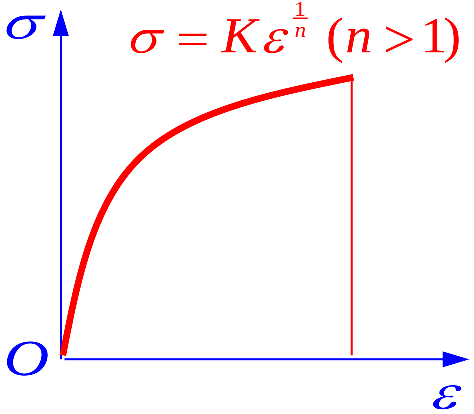
各杆的横截面面积为A。

考虑以下两种情形：

1. 三杆均为线弹性材料，
   弹性模量为E；

2. 三杆均为非线性弹性材料，
   有 $\sigma = K\varepsilon^{\frac{1}{n}}\ (n>1)$ ；





解:（1）线弹性问题

选静定基如图

$$2F_1\cos\alpha+F_2=P \qquad F_1=(P-F_2)/(2\cos\alpha)$$

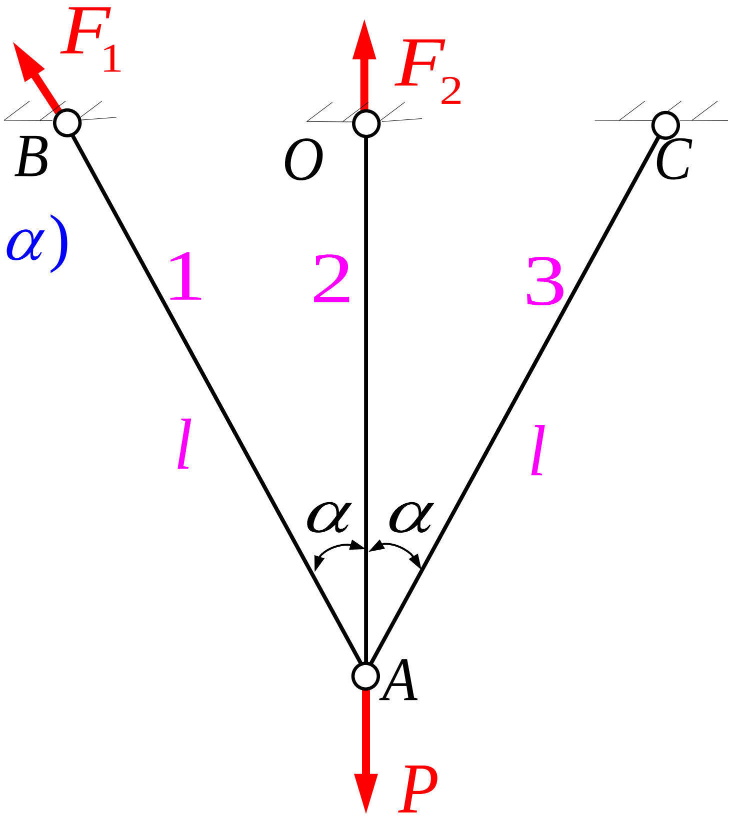
利用能量法建立补充方程

卡氏第二定理 $$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_2}=0$$

$$V_\varepsilon=\frac{F_2^{\,2}l_2}{2EA}+\frac{F_1^{\,2}l_1}{2EA}\times 2 \qquad l_2=l\cos\alpha$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_2}=\frac{F_2l_2}{EA}+\frac{F_1l_1}{EA}\times 2\times\left(-\frac{1}{2\cos\alpha}\right)=0$$

$$\frac{F_2l\cos\alpha}{EA}-\frac{(P-F_2)l}{2EA\cos^2\alpha}=0 \qquad F_2=\frac{P}{1+2\cos^3\alpha}$$



解：（2）非线性弹性问题

选静定基同前

$2F_1\cos\alpha + F_2 = P \qquad F_1 = (P - F_2)/(2\cos\alpha)$

利用能量法建立补充方程

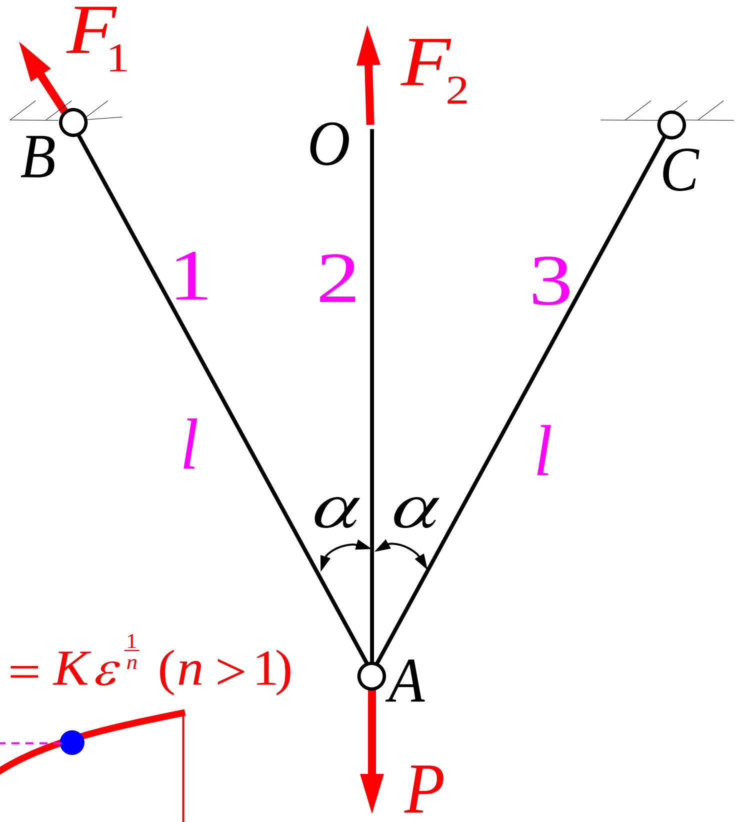
余能定理 $\dfrac{\partial V_C}{\partial F_2} = 0$

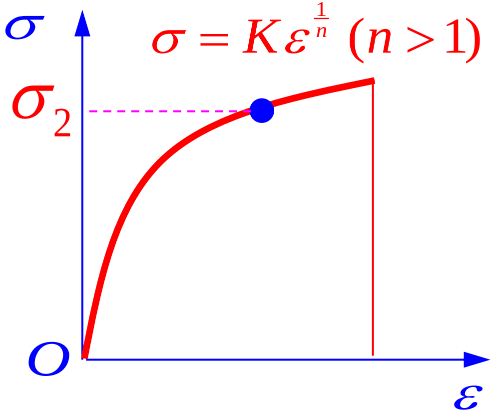
$$V_C = \int_V v_C \mathrm{d}V = v_{C2}\cdot Al_2 + v_{C1}\cdot Al_1 \times 2$$

$$v_C = \int \varepsilon \mathrm{d}\sigma \qquad \sigma_2 = F_2/A$$

$$v_{c2} = \int_0^{\sigma_2} \left(\frac{\sigma}{K}\right)^n \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(\sigma_2)^{n+1}}{K^n}$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(F_2)^{n+1}}{K^n A^{n+1}}$$



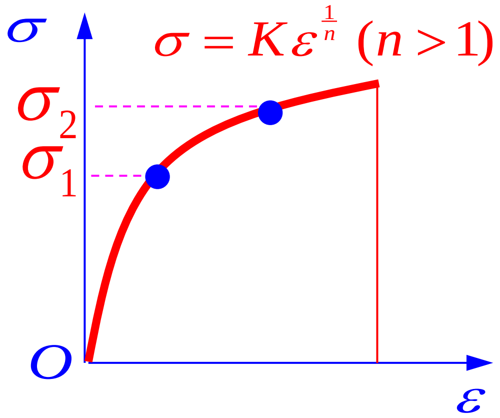


$$v_{c2} = \int_0^{\sigma_2} \left(\frac{\sigma}{K}\right)^n \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(\sigma_2)^{n+1}}{K^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(F_2)^{n+1}}{K^n A^{n+1}}$$

$$v_{c1} = \int_0^{\sigma_1} \left(\frac{\sigma}{K}\right)^n \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(\sigma_1)^{n+1}}{K^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(F_1)^{n+1}}{K^n A^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(P-F_2)^{n+1}}{K^n A^{n+1} (2\cos\alpha)^{n+1}}$$

$$F_1 = (P - F_2)/(2\cos\alpha)$$



$$V_C = \int_V v_C \mathrm{d}V = v_{C2} \cdot Al_2 + v_{C1} \cdot Al_1 \times 2$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(F_2)^{n+1}}{K^n A^{n+1}} \cdot Al_2 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(P-F_2)^{n+1}}{K^n A^{n+1} (2\cos\alpha)^{n+1}} \cdot Al_1 \times 2$$

$$l_2 = l\cos\alpha$$

$$\frac{\partial V_C}{\partial F_2} = \frac{(F_2)^n}{K^n A^{n+1}} \cdot Al\cos\alpha + \frac{(P-F_2)^n}{K^n A^{n+1} (2\cos\alpha)^{n+1}} \times (-1) \cdot Al \times 2 = 0$$

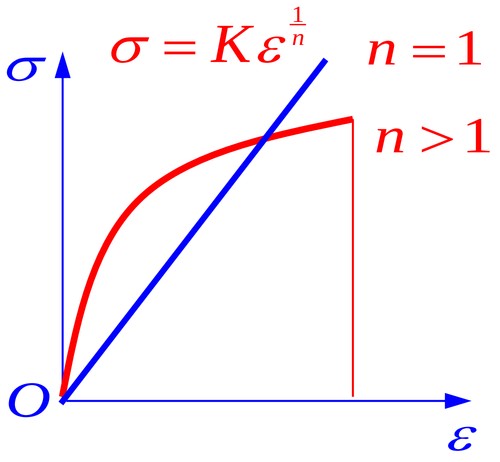
$$\frac{\partial V_C}{\partial F_2} = \frac{(F_2)^n}{K^n A^{n+1}} \cdot Al\cos\alpha + \frac{(P-F_2)^n}{K^n A^{n+1}(2\cos\alpha)^{n+1}} \times (-1) \cdot Al \times 2 = 0$$

$$(F_2)^n \cos\alpha = \frac{(P-F_2)^n}{2^n \cos^{n+1}\alpha}$$

$$(F_2)^n 2^n \cos^{n+2}\alpha = (P-F_2)^n$$

$$F_2 \cdot 2(\cos\alpha)^{\frac{n+2}{n}} = P - F_2$$

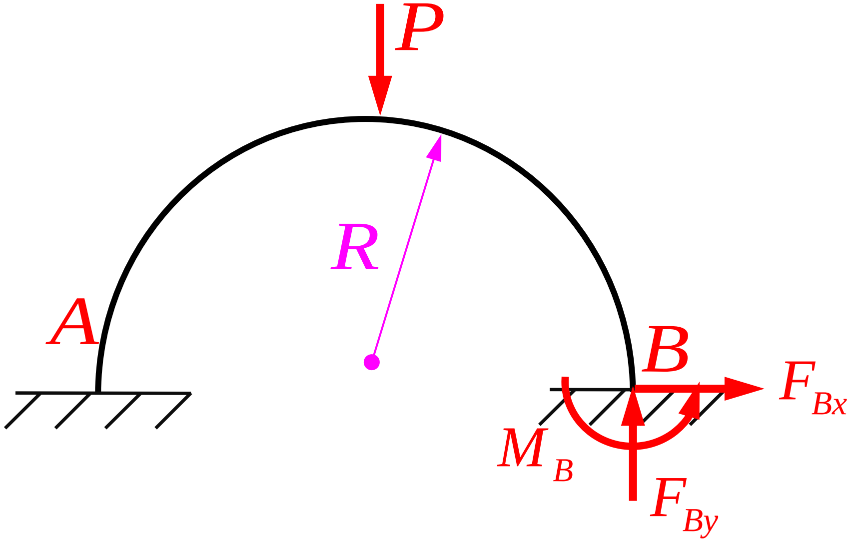
$$F_2 = \frac{P}{1+2(\cos\alpha)^{\frac{n+2}{n}}}$$



当 n=1（线弹性情形）：　结果可退化到情形（1）

$$F_2 = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}$$

例3　两端固定的半圆环在对称截面处受一集中力P作用，圆环轴线半径为R，弯曲刚度为EI。不计剪力和轴力对圆环变形的影响。试求对称截面上的内力。

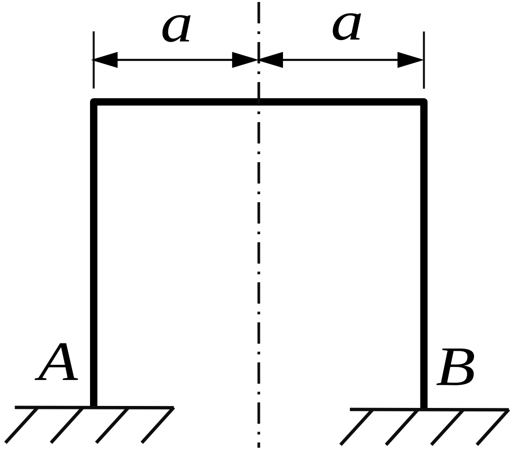


分析：　三次超静定问题

$$\begin{cases} \Delta_{Bx} = \dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_{Bx}} = 0 \\ \Delta_{By} = \dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_{By}} = 0 \\ \theta_B = \dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial M_B} = 0 \end{cases}$$

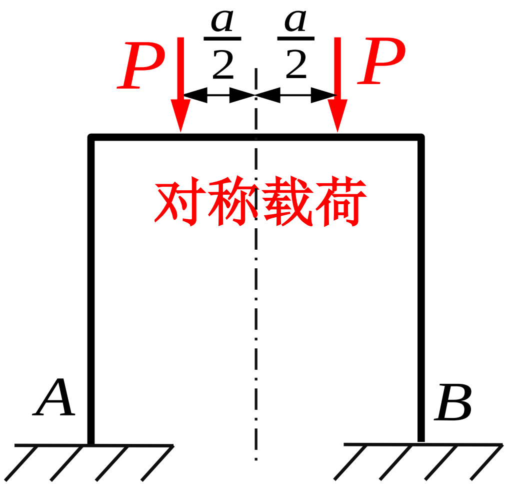
三元一次方程组

§ 14.3 对称和反对称性质的利用



抗弯刚度均为EI

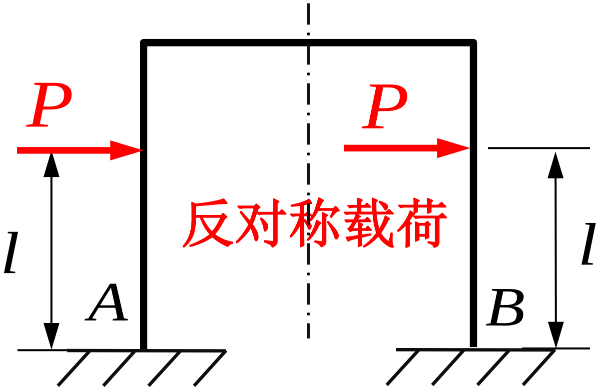
结构的几何形状、支承条件和杆件的刚度都对称于某一对称轴，称为**对称结构**！



抗弯刚度均为EI

1. 若载荷的作用位置、大小和方向都对称于结构的对称轴，称为对称载荷！（即绕对称轴对折后，左右 两部分的载荷重合（作用点重合，大小相等，方向相同）

2. 若载荷的作用位置、大小对称于结构的对称轴，但方向是反对称的，称为反对称载荷！（即绕对称轴对折后，左右两部分的载荷作用点重合，大小相等，方向相反）

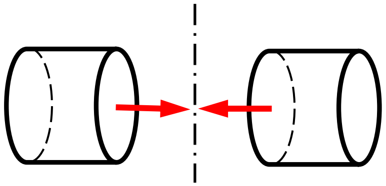


抗弯刚度均为EI

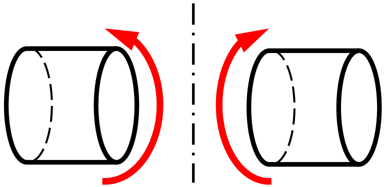
对称截面上的内力分类

对称内力：　　轴力F_{N}，　　弯矩M

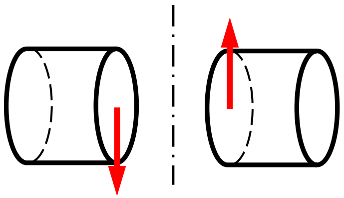
反对称内力：　剪力F_{S}，　　扭矩T



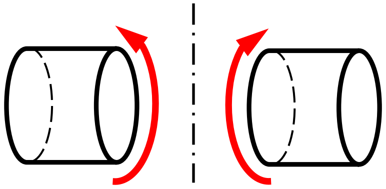
轴力F_{N}　对称



弯矩M　对称



剪力F_{S}　反对称



扭矩T　反对称

对称性的应用

前提条件： 结构是对称的

在对称性面上内力的特征：

1. 受对称载荷作用

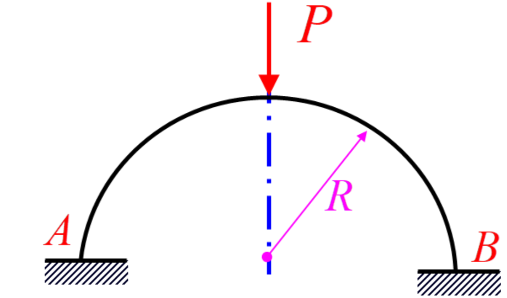
反对称性内力为零

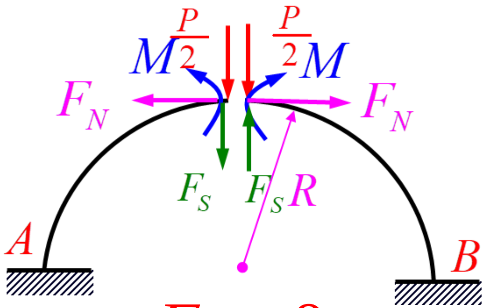
对称性内力不为零

2. 受反对称载荷作用

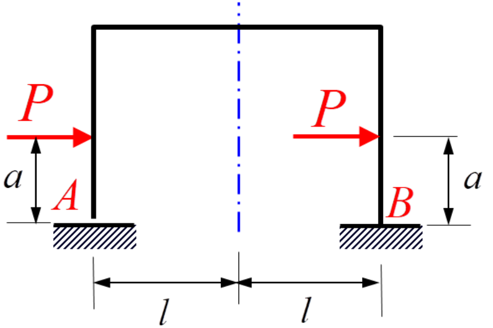
对称性内力为零

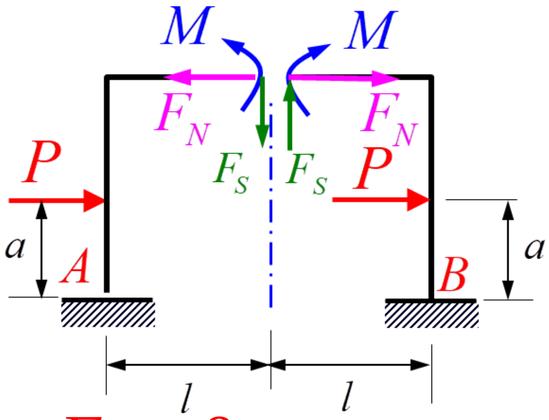
反对称性内力不为零





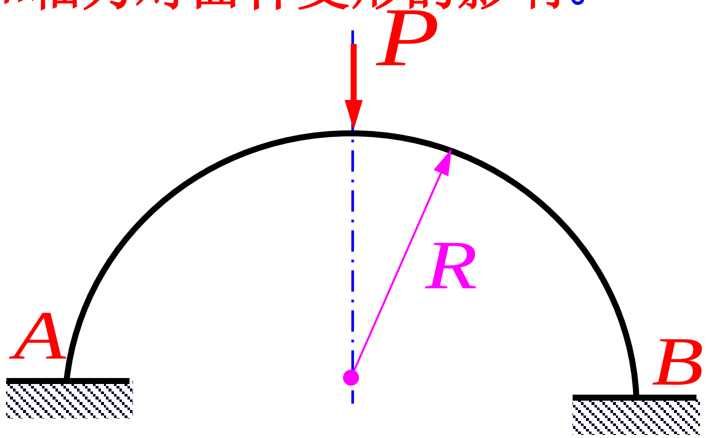
$F_S \equiv 0$





$F_N \equiv 0$ $M \equiv 0$

例3 抗弯刚度为EI的曲杆如图所示，不计剪力和轴力对曲杆变形的影响。试求曲杆的内力。



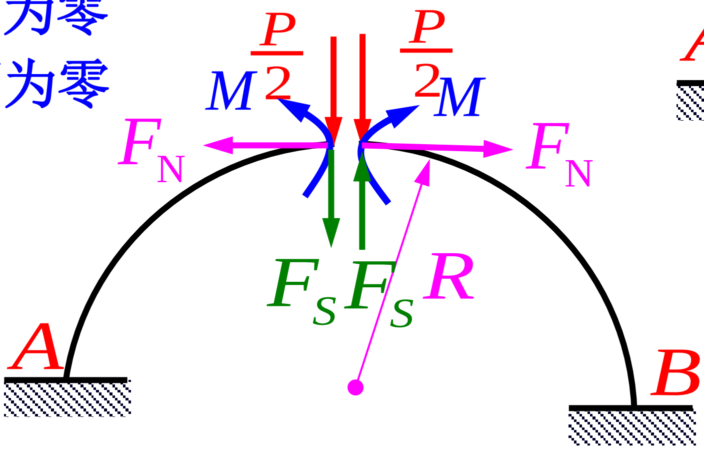
解： 利用对称性： 对称结构，对称载荷

在对称性面上：

反对称性内力为零

对称性内力不为零

取静定基为

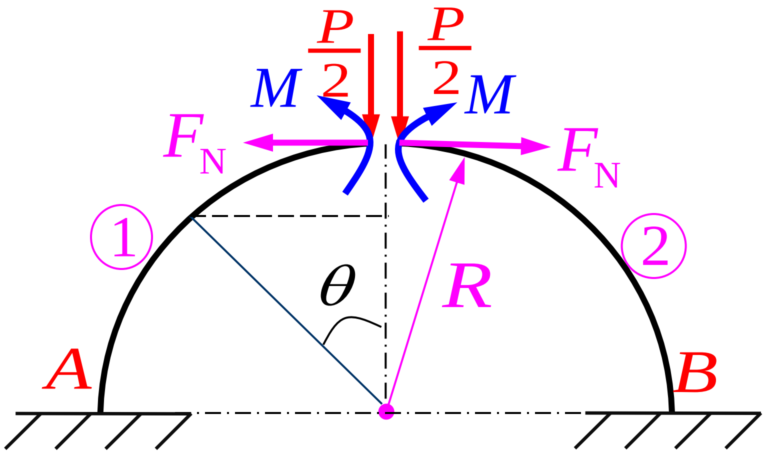


$F_S \equiv 0$

两次超静定问题

利用卡氏第二定理可写出

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial M}=0 \qquad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_N}=0$$



上面两式的物理意义：在对称面处，轴向相对位移为零；两侧截面的相对转角为零。

不计剪力和轴力对圆环变形的影响

$$V_\varepsilon=\int\frac{M^2(\theta)}{2EI}R\mathrm{d}\theta=V_{\varepsilon 1}+V_{\varepsilon 2}$$

$$M_1(\theta)=M+F_N(R-R\cos\theta)-\frac{P}{2}R\sin\theta$$

$$V_{\varepsilon 1}=V_{\varepsilon 2} \qquad V_\varepsilon(\theta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[M_1(\theta)]^2}{2EI}R\mathrm{d}\theta\times 2 \qquad V_{\varepsilon 1}(\theta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[M_1(\theta)]^2}{2EI}R\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{\frac{\partial V_\varepsilon(\theta)}{\partial M}=2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M_1(\theta)}{EI}\cdot\frac{\partial M_1(\theta)}{\partial M}R\mathrm{d}\theta=0}$$

$$\boxed{\frac{\partial V_\varepsilon(\theta)}{\partial F_N}=2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M_1(\theta)}{EI}\cdot\frac{\partial M_1(\theta)}{\partial F_N}R\mathrm{d}\theta=0}$$

$$M_1(\theta) = M + F_{\mathrm{N}}(R - R\cos\theta) - \tfrac{P}{2} R\sin\theta$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon(\theta)}{\partial M} = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_1(\theta)}{EI} \cdot \frac{\partial M_1(\theta)}{\partial M} \mathrm{R d}\theta = 0$$

$$\tfrac{2}{EI} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} [M + F_{\mathrm{N}}(R - R\cos\theta) - \tfrac{P}{2} R\sin\theta] \cdot 1 \cdot R\mathrm{d}\theta = 0$$

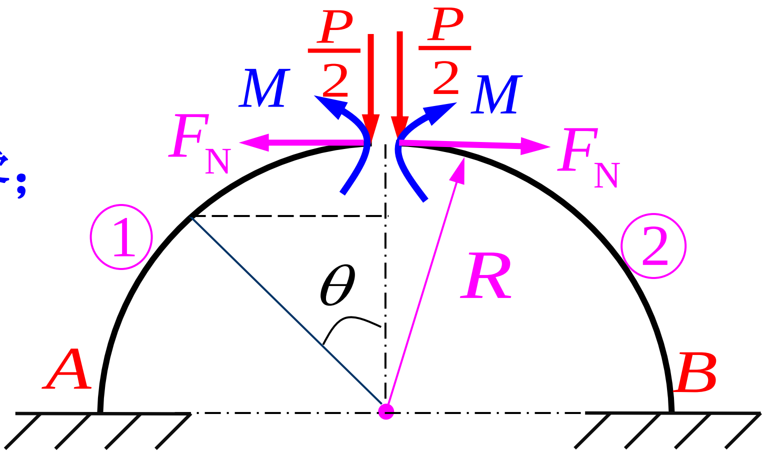
$$\left.\begin{aligned} &(\tfrac{1}{2}\pi - 1)R \cdot F_{\mathrm{N}} + \tfrac{1}{2}\pi \cdot M - \tfrac{P}{2} R = 0 \\ &(\tfrac{3}{4}\pi - 2)R \cdot F_{\mathrm{N}} + (\tfrac{1}{2}\pi - 1) \cdot M - \tfrac{P}{4} R = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} F_{\mathrm{N}} &= \tfrac{4-\pi}{\pi^2 - 8} P \\ M &= \tfrac{2(\pi-3)}{\pi^2 - 8} PR \end{aligned}$$

$$\tfrac{2}{EI} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} [M + F_{\mathrm{N}}(R - R\cos\theta) - \tfrac{P}{2} R\sin\theta] \cdot R(1 - \cos\theta) \cdot R\mathrm{d}\theta = 0$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon(\theta)}{\partial F_N} = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_1(\theta)}{EI} \cdot \frac{\partial M_1(\theta)}{\partial F_N} \mathrm{R d}\theta = 0$$

变形协调方程： $\dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial M}=0 \quad \dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_N}=0$

物理意义：在对称面处，轴向相对位移为零；两侧截面的相对转角为零。



$$V_{\varepsilon 1}=V_{\varepsilon 2} \quad V_{\varepsilon 1}(\theta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[M_1(\theta)]^2}{2EI}R\mathrm{d}\theta$$

$$V_\varepsilon(\theta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[M_1(\theta)]^2}{2EI}R\mathrm{d}\theta\times 2$$

注意物理意义与取整体计算的区别：

在对称面处，轴向位移为零；截面的转角为零。

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial V_\varepsilon(\theta)}{\partial M}&=2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M_1(\theta)}{EI}\cdot\frac{\partial M_1(\theta)}{\partial M}R\mathrm{d}\theta=0\\ \frac{\partial V_\varepsilon(\theta)}{\partial F_N}&=2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M_1(\theta)}{EI}\cdot\frac{\partial M_1(\theta)}{\partial F_N}R\mathrm{d}\theta=0\end{aligned}}$$

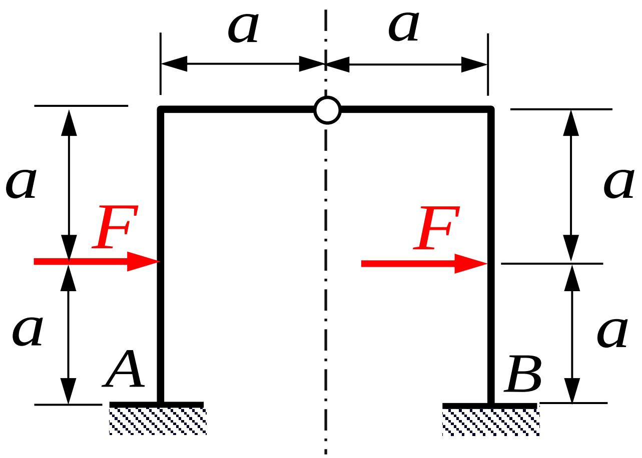
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial V_\varepsilon(\theta)}{\partial M}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M_1(\theta)}{EI}\cdot\frac{\partial M_1(\theta)}{\partial M}R\mathrm{d}\theta=0\\ \frac{\partial V_\varepsilon(\theta)}{\partial F_N}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M_1(\theta)}{EI}\cdot\frac{\partial M_1(\theta)}{\partial F_N}R\mathrm{d}\theta=0\end{aligned}}$$

可以取结构的一半来计算！

例4　材料为线弹性，抗弯刚度为EI的刚架如图所示，不计剪力和轴力对刚架变形的影响。试求刚架的支座约束反力。

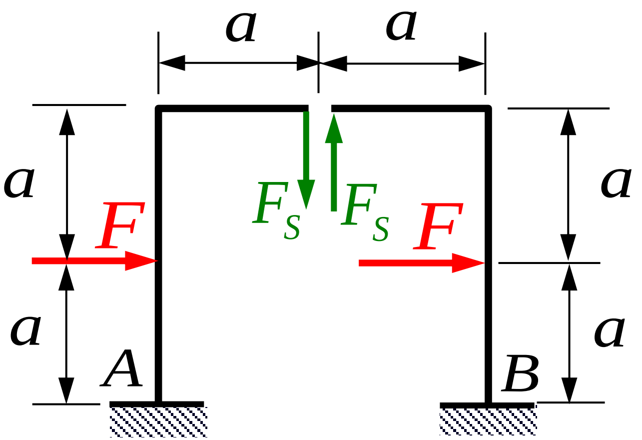
解：利用对称性：

对称结构，反对称载荷



在对称性面上：对称性内力为零
反对称性内力不为零

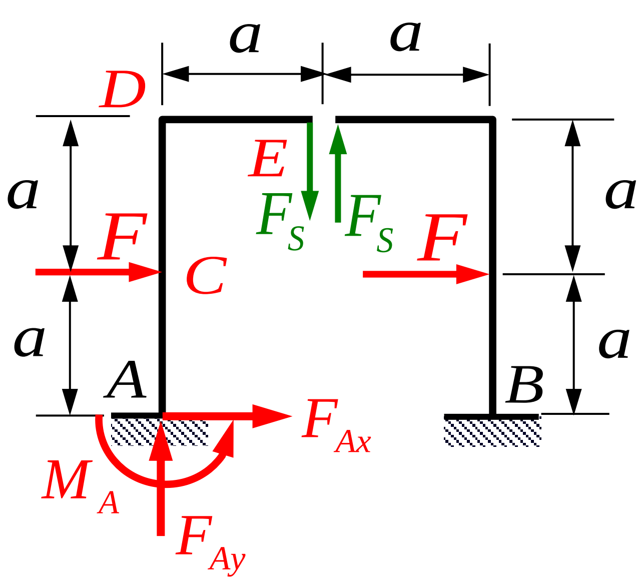
取静定基为



仅$F_S \neq 0$

一次超静定问题

利用卡氏第二定理，有 $\dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_S}=0$



$$V_\varepsilon=2\times\left[\int_0^a\frac{M_{DE}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{M_{CD}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{M_{AC}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\times\left[\int_0^a\frac{(F_S x)^2}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(F_S a)^2}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(F_S a+Fx)^2}{2EI}\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\times\left[\int_0^a\frac{(F_S x)\cdot x}{EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(F_S a)\cdot a}{EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(F_S a+Fx)\cdot a}{EI}\mathrm{d}x\right]$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_S}=\frac{2}{EI}\times\left(F_S\frac{a^3}{3}+F_S a^3+F_S a^3+Fa\frac{a^2}{2}\right)=0$$

$$F_S=-\frac{3}{14}F \quad F_{Ax}+F=0 \Longrightarrow F_{Ax}=-F\ (\leftarrow)$$

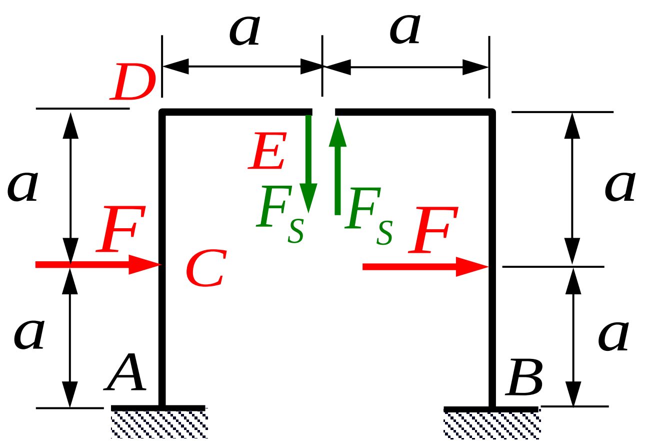
$$F_{Ay}-F_s=0 \Longrightarrow F_{Ay}=F_s=-\frac{3}{14}F\,(\downarrow)$$

$$M_A-Fa-F_s a=0 \Longrightarrow M_A=Fa+F_s a=Fa-\frac{3}{14}Fa=\frac{11}{14}Fa$$

同样，B支座的约束反力也可求出！

若要求C点的水平位移？

$$w_{Cx}=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}\bigg|_{F_S=-\frac{3}{14}F}$$ V_ε取结构的一半来计算！



计算V_ε时，把前述已计算出的剪力代入

$$V_\varepsilon=\int_0^a\frac{(F_Sx)^2}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(F_Sa)^2}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(F_Sa+Fx)^2}{2EI}\mathrm{d}x$$

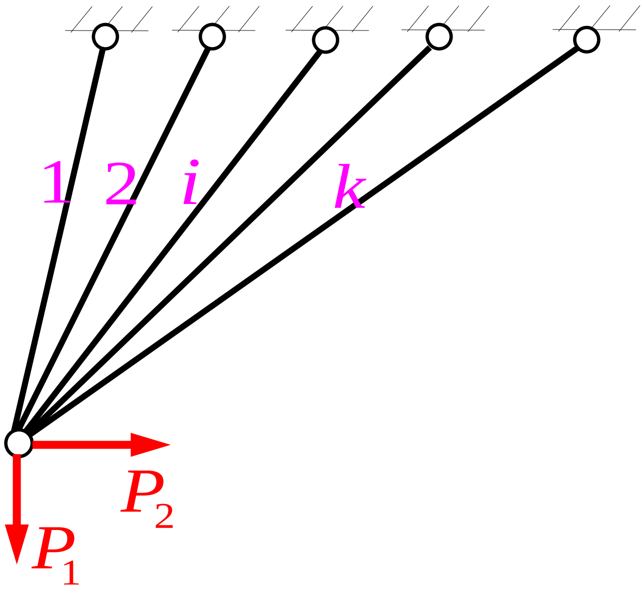
$$F_S=-\frac{3}{14}F$$

$$V_\varepsilon=\int_0^a\frac{(-\frac{3}{14}Fx)^2}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(-\frac{3}{14}Fa)^2}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(-\frac{3}{14}Fa+Fx)^2}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$w_{Cx}=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}=\int_0^a\frac{(-\frac{3}{14}Fx)\cdot(-\frac{3}{14}x)}{EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(-\frac{3}{14}Fa)\cdot(-\frac{3}{14}a)}{EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(-\frac{3}{14}Fa+Fx)\cdot(-\frac{3}{14}a+x)}{EI}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{F}{EI}[(\frac{3}{14})^2\times\frac{a^3}{3}+(\frac{3}{14})^2\times a^3+(\frac{3}{14})^2\times a^3-2\times\frac{3}{14}a\times\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}]=\frac{19Fa^3}{84EI}$$

例5 由k（$k \geq 3$）根直杆组成的杆系，在节点A处用铰连接在一起，并受到水平荷载P_1和铅垂荷载P_2作用，如图所示。已知各杆的材料相同，拉压弹性模量均为E，横截面面积分别为A_1、$A_2 \ldots A_k$，试求杆系中各杆的内力。



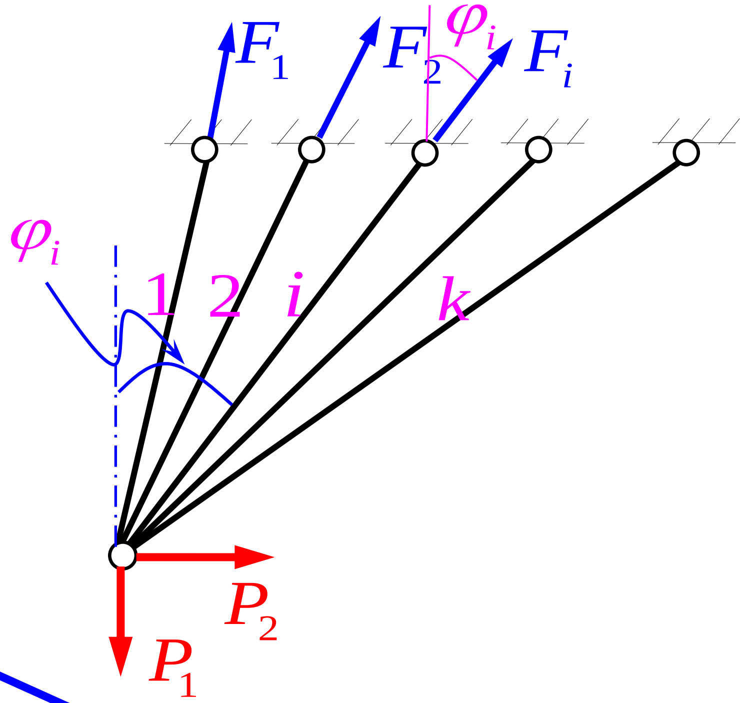
解（1）：　（k–2）次超静定问题

利用卡氏第二定理可写出

$$\frac{\partial V_\varepsilon(F_1,F_2\cdots F_i)}{\partial F_i}=0 \quad (i=1,2\cdots k-2)$$

得到k-2个方程，
共k-2个未知数，
可解！

$$V_\varepsilon(F_1,F_2\cdots F_i)=\sum_{i=1}^{k-2}\frac{(F_i)^2 l_i}{2EA_i}+\frac{(F_{k-1})^2 l_{k-1}}{2EA_k}+\frac{(F_k)^2 l_k}{2EA_k}$$



$$\boxed{\begin{aligned}F_{k-1}&=F_{k-1}(F_1,F_2\cdots F_{k-2})\\ F_k&=F_k(F_1,F_2\cdots F_{k-2})\end{aligned}}$$

静力平衡方程

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}F_i\cos\varphi_i-P_1=0\\ &\sum_{i=1}^{k}F_i\sin\varphi_i+P_2=0\end{aligned}}$$

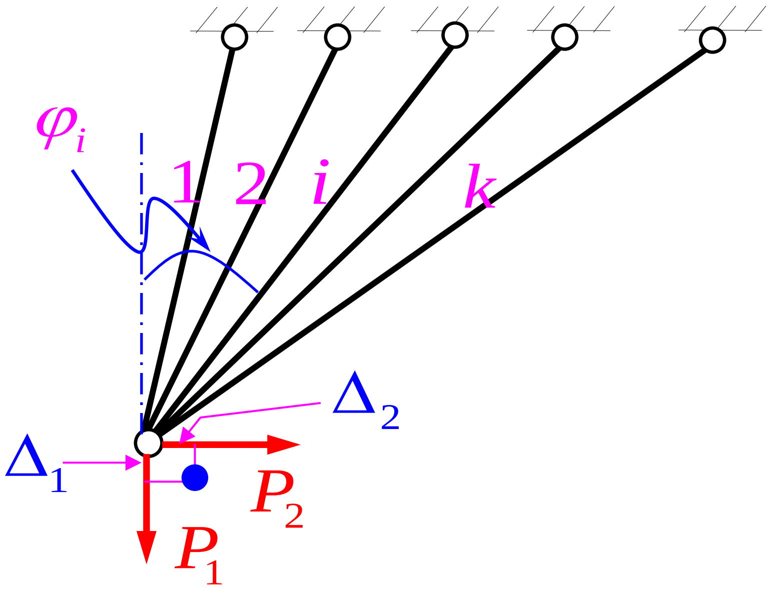
解（2）：利用卡氏第一定理

$$V_\varepsilon = V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2)$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2)}{\partial \Delta_1} = P_1$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2)}{\partial \Delta_2} = P_2$$

$$V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2) = ?$$



$$V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2) = ?$$

$$\Delta l_i = \Delta_1 \cos\varphi_i - \Delta_2 \sin\varphi_i$$

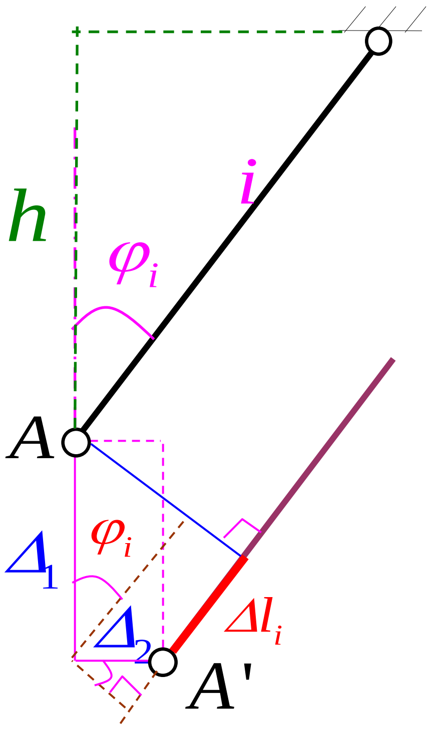
$$V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2) = \sum_{i=1}^{k} \frac{EA_i}{2l_i}(\Delta l_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{EA_i}{2l_i}(\Delta_1 \cos\varphi_i - \Delta_2 \sin\varphi_i)^2$$

$$V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2) = \sum_{i=1}^{k} \frac{EA_i}{2} \cdot \frac{\cos\varphi_i}{h} \cdot (\Delta_1 \cos\varphi_i - \Delta_2 \sin\varphi_i)^2$$

$$\frac{\partial V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2)}{\partial \Delta_1} = P_1 \qquad \frac{\partial V_\varepsilon(\Delta_1, \Delta_2)}{\partial \Delta_2} = P_2$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{EA_i}{h} \cos\varphi_i \cdot (\Delta_1 \cos\varphi_i - \Delta_2 \sin\varphi_i) \cdot \cos\varphi_i = P_1$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{EA_i}{h} \cos\varphi_i \cdot (\Delta_1 \cos\varphi_i - \Delta_2 \sin\varphi_i) \cdot (-\sin\varphi_i) = P_2$$



$$\sum_{i=1}^{k}\frac{EA_i}{h}\cos\varphi_i\cdot(\Delta_1\cos\varphi_i-\Delta_2\sin\varphi_i)\cdot\cos\varphi_i=P_1$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{EA_i}{h}\cos\varphi_i\cdot(\Delta_1\cos\varphi_i-\Delta_2\sin\varphi_i)\cdot(-\sin\varphi_i)=P_2$$

$$\Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\frac{EA_i}{h}\cos^3\varphi_i}_{C_1}\Bigg)\Delta_1-\Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\frac{EA_i}{h}\cos^2\varphi_i\sin\varphi_i}_{C_2}\Bigg)\Delta_2=P_1$$

$$-\Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\frac{EA_i}{h}\cos^2\varphi_i\sin\varphi_i}_{C_2}\Bigg)\Delta_1+\Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\frac{EA_i}{h}\cos\varphi_i\sin^2\varphi_i}_{C_3}\Bigg)\Delta_2=P_2$$

采用编程计算，计算效率提高很多！

$$C_1\Delta_1-C_2\Delta_2=P_1$$

$$-C_2\Delta_1+C_3\Delta_2=P_2$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \\ -C_2 & C_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_1\\ P_2\end{Bmatrix}$$

对称、正定方阵

$$\Delta_1=\frac{P_1C_3+P_2C_2}{C_1C_3-C_2^2}\qquad \Delta_2=\frac{P_1C_2+P_2C_1}{C_1C_3-C_2^2}$$

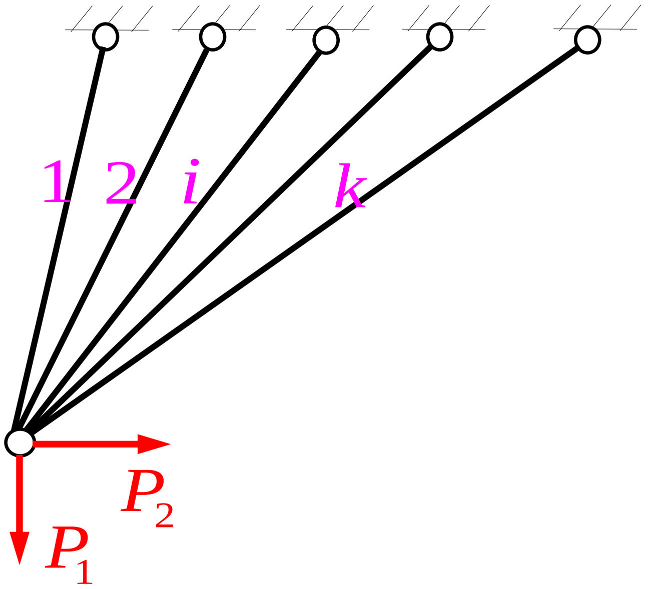
$$F_{Ni}=EA\frac{\Delta l_i}{l_i}=EA\frac{\cos\varphi_i}{h}\Delta l_i=EA\frac{\cos\varphi_i}{h}(\Delta_1\cos\varphi_i-\Delta_2\sin\varphi_i)$$

小 结

方法（1）中，以多余未知力作为基本未知量，这种以力为基本未知量求解超静定问题的方法，统称为力法。

方法（2）中，以未知的节点位移作为基本未知量，这种以位移为基本未知量求解超静定问题的方法，统称为位移法。

力法和位移法是求解超静定系统的两种基本方法。通常力法应用较为广泛。



工程实际的结构，超静定次数都是比较高的，对于超静定次数比较高的结构，教材中介绍了以下几种方法：

力法解超静定结构：

正则方程（§14.2 ）

三弯矩方程（§14.4 多跨连续梁）

矩阵位移法：教材第十七章

适用于采用编程计算！

关于力法和位移法的进一步讨论将在结构力学课程中详细介绍。

谢谢大家！

作业

P159：14.4(c)

P161：14.12

P162: 14.15

对应第6版题号 P152：14.4(c)；P154-155：14.12, 14.15

下次课介绍 动载荷和交变应力