浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

数字信号处理

主讲人：金浩然 研究员

电话：13645717238

办公室：开物苑3-232





数字信号处理

一、数字信号处理的基本步骤

二、信号数字化出现的问题

三、离散傅里叶变换

数字信号处理的基本步骤

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

数字信号处理的基本步骤

研究信号的构成和特征值称为信号分析；

把信号经过必要的加工变换，以获得有用信息的过程称为信号处理。

由以上定义可知，信号分析并不影响信号本身的结构，而信号处理则有可能改变信号本身的结构。

信号分析和处理的方法主要有模拟分析方法和数字处理分析方法。

数字信号处理可以在专用计算机上进行，也可以在通用计算机上实现 。

数字信号处理的基本步骤

模拟信号与数字信号处理系统

模拟信号处理系统由一系列能实现模拟运算的电路，诸如模拟滤波器、乘法器、微分放大器等环节组成。模拟信号处理也作为任何数字信号处理的前奏，例如滤波、限幅、隔直、解调等预处理。数字处理之后也常需作模拟显示、记录。

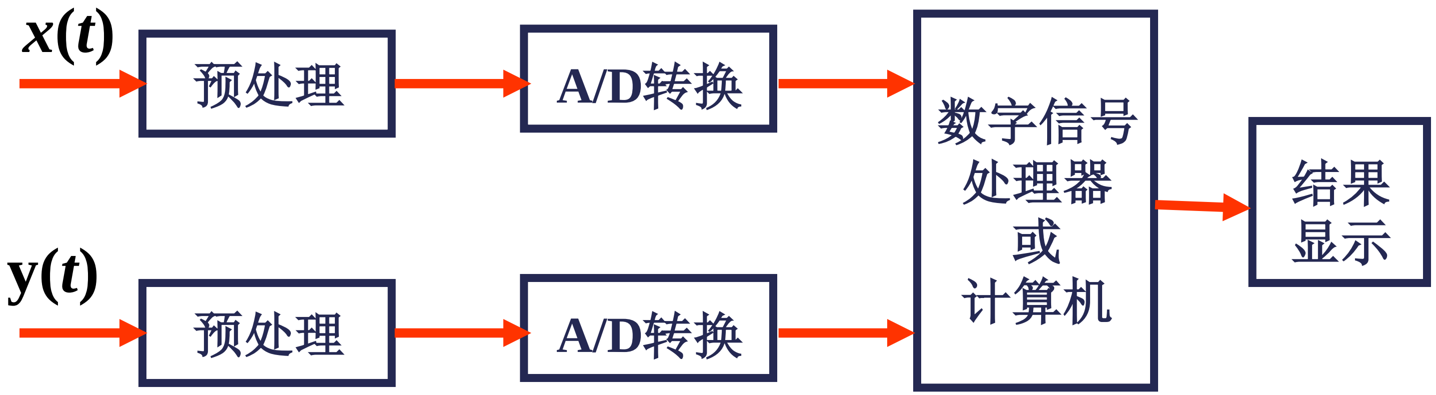
数字信号处理是用数字方法处理信号, 它既可在通用计算机上借助程序来实现, 也可以用专用信号处理机来完成。数字信号处理具有稳定、灵活、快速、高效、应用范围广、设备体积小重量轻等优点, 在各行业中得到广泛的应用。

数字信号处理的基本步骤

数字信号处理基本步骤

用数字序列表示信号，并用数字计算方法对这些序列进行处理，称为数字信号处理。

数字信号处理的基本步骤



数字信号处理系统

数字信号处理的基本步骤

1）预处理

信号的预处理把信号变成适于数字处理的形式，以减轻数字处理的困难。预处理包括：

(1) 电压幅值调理，以便适宜于采样。

(2) 必要的滤波，以提高信噪比，并滤去信号中的高频噪声。

(3) 隔离信号中的直流分量。

(4) 如原信号经过调制，则应先行解调。

数字信号处理的基本步骤

2） A/D 转换

模-数 (A/D) 转换是模拟信号经采样、量化并转化为二进制数的过程。

3）信号处理

数字信号处理器对离散的时间序列进行运算处理。计算机只能处理有限长度的数据,所以首先要把长时间的序列截断, 对截取的数字序列有时还要进行加权(乘以窗函数)以成为新的有限长的序列。对数据中的奇异点(由于强干扰或信号丢失所引起的数据突变)应予以剔除。对温漂、时漂等系统性干扰所引起的趋势项(周期大于记录长度的频率成分)也应予以分离。如有必要,还可以设计专门的程序来进行数字滤波。然后把数据按给定的程序进行运算,完成各种分析。

数字信号处理的基本步骤

4）结果显示

运算结果可以直接显示或打印。如果后接 D/A 和记录仪则可以绘图等。如有需要可将 数字信号处理结果送入后接计算机或通过专门程序再做后续处理。

信号数字化过程中存在的问题

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

信号数字化过程中存在的问题

1. 时域采样→混叠

2.量化→量化误差

3.时域截断→泄漏

4.频域采样→栅栏效应

信号数字化过程中存在的问题

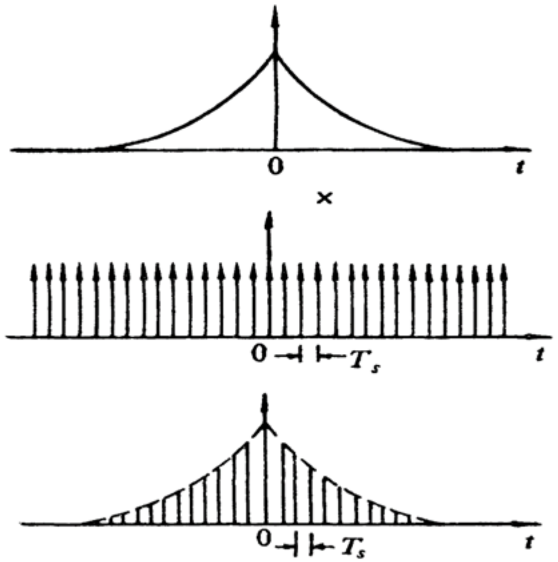
1.时域采样、混叠和采样定理

采样：连续时间信号离散化的过程 。

设采样时间间隔为 T_s，则$x(t)$经采样后的离散序列$x_s(t)$为：

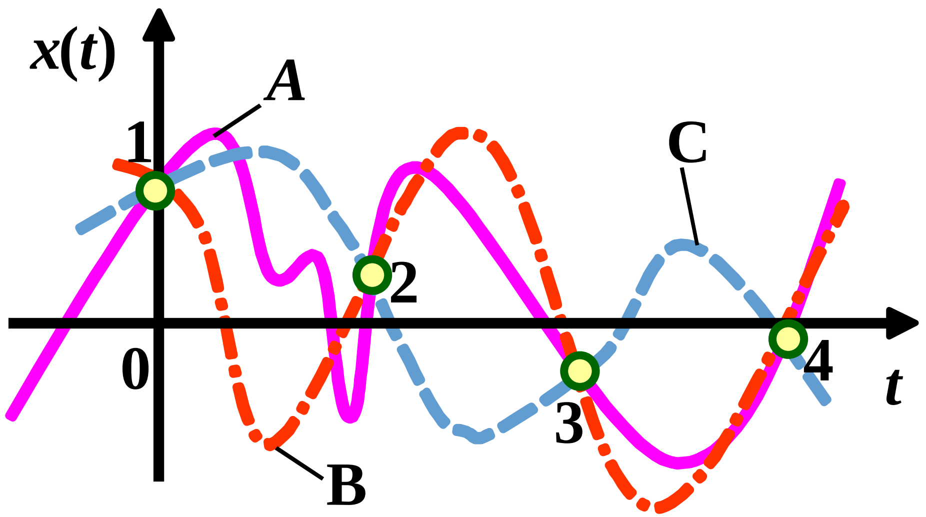
$$x_s(t) = x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\cdot\delta(t-nT_s)$$

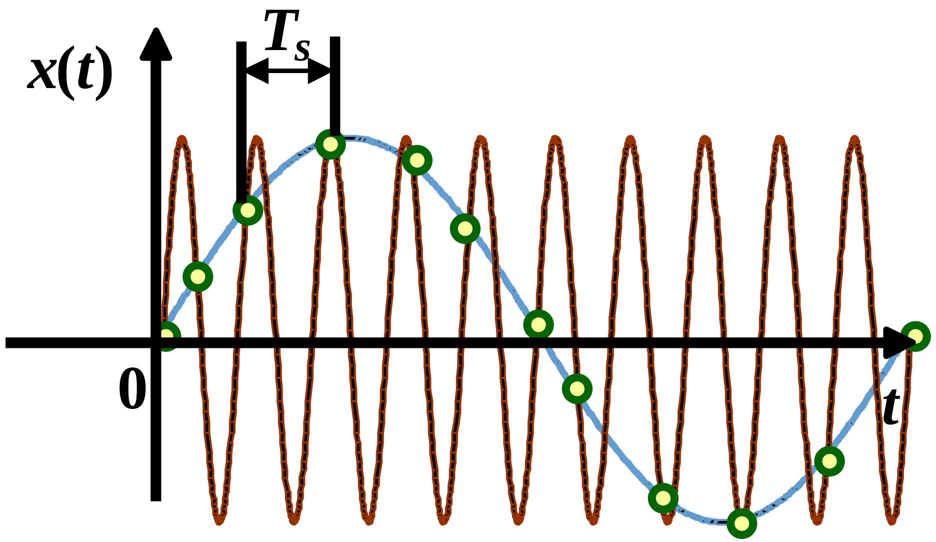
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\cdot\delta(t-nT_s)$$



$x_s(t)$与$x(t)$是局部与整体的关系。显然，能否由$x_s(t)$唯一确定或恢复出$x(t)$，或能否通过对$x_s(t)$的分析获得$x(t)$的全部信息是采样最关心的问题。

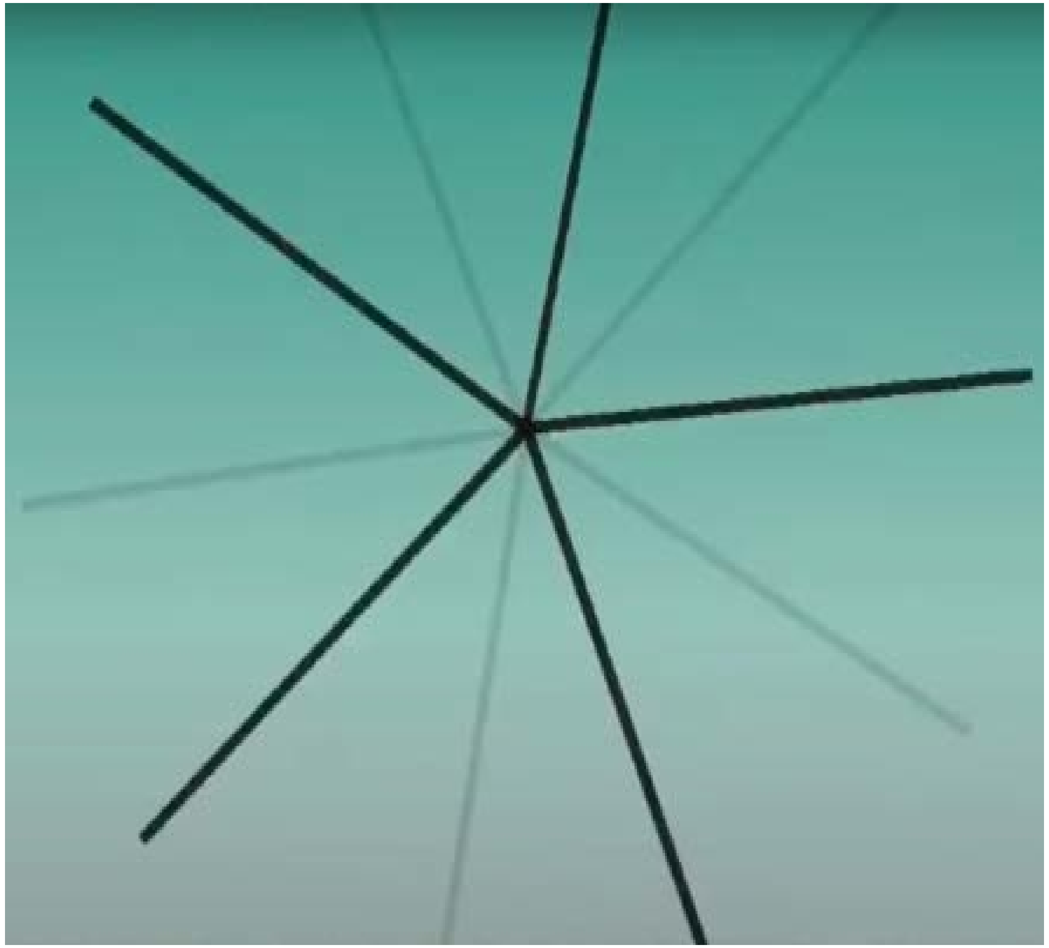
信号数字化过程中存在的问题





混叠现象举例

信号数字化过程中存在的问题



视觉混叠

音频混叠

信号数字化过程中存在的问题

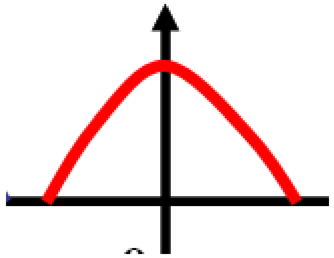
$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\Leftrightarrow P(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{r}{T_s}\right)$$

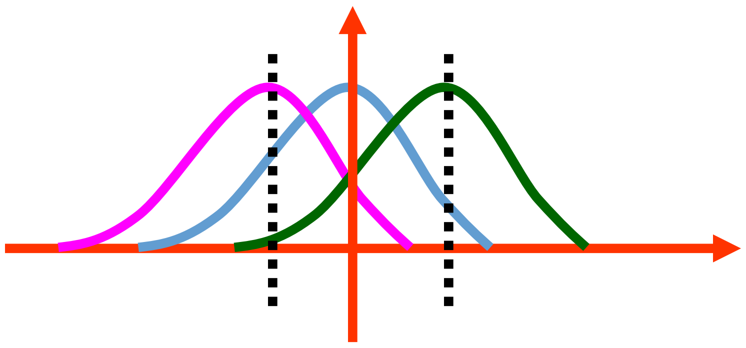
$$x(t)\mathrm{p}(t)\Leftrightarrow X(f)*P(f)$$

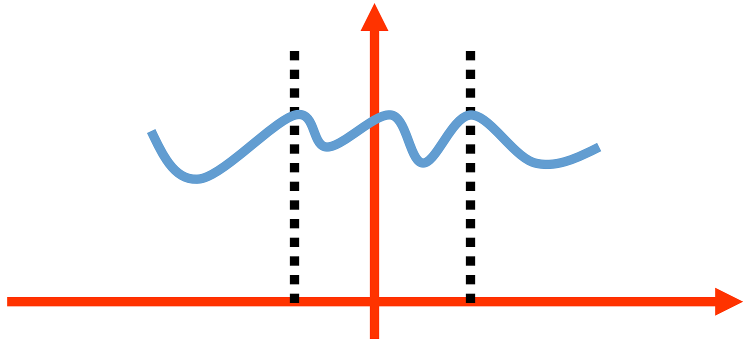
所以 $$F[x_s(t)]=X(f)*P(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X\left(f-\frac{r}{T_s}\right)$$

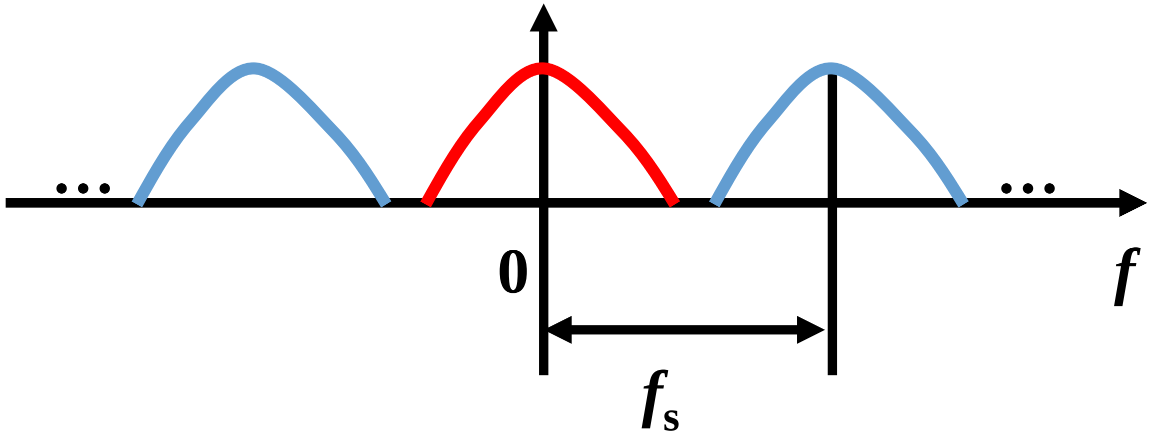
即采样信号$x_s(t)$的频谱是无穷多个原始信号频谱放大$1/T_s$倍后，以采样频率f_s为周期重复叠加而成。若频谱叠加出现局部重叠，则合成的总频谱将失去原信号x(t)单独频谱的波形形状，虽经滤波也不能获得x(t)的正确频谱，在时域也无法恢复原波形造成失真。

信号数字化过程中存在的问题









信号数字化过程中存在的问题

由图可见，混叠总是出现在$f = f_s/2$左右两侧的频率处，混叠的后果是原来的高频信号将被误认为是某种相应的低频信号。

如果$f_m \le 1/2\,T_s$，即 $\boxed{f_s \ge 2f_m}$ 就不会出现混叠现象。

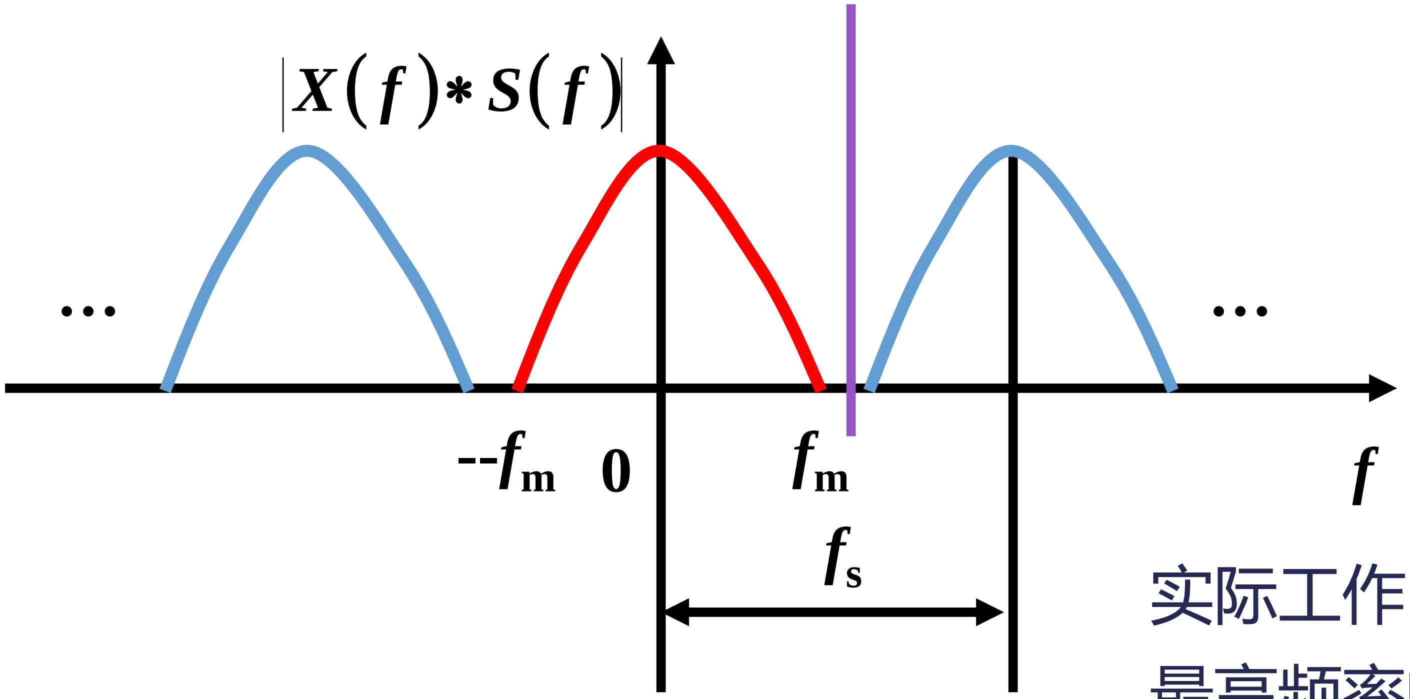
这就是采样定理。

最低采样频率值 $\boxed{f_{s\min} = 2f_m}$ 称为Nyquist采样频率，也称为折叠频率。

采样定理 $\Longrightarrow$ $\boxed{f_s \ge 2f_m}$

信号数字化过程中存在的问题

显然，若原始信号是带限信号，则采样后信号频谱不发生重叠的条件为：$f_s \geq 2f_m$（如下图）。



不产生混叠的条件

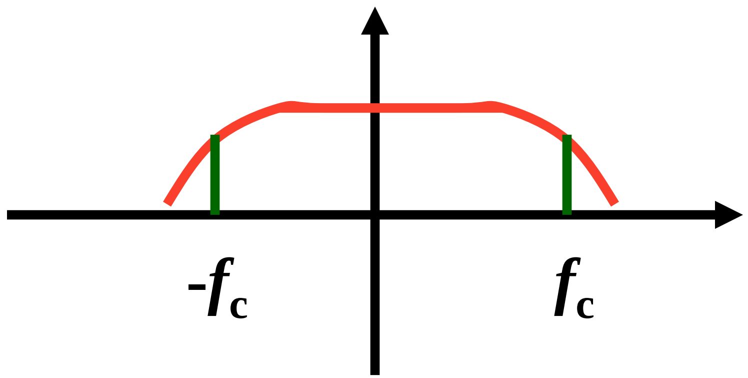
实际工作中，f_s常取为信号最高频率的3~4倍。

信号数字化过程中存在的问题

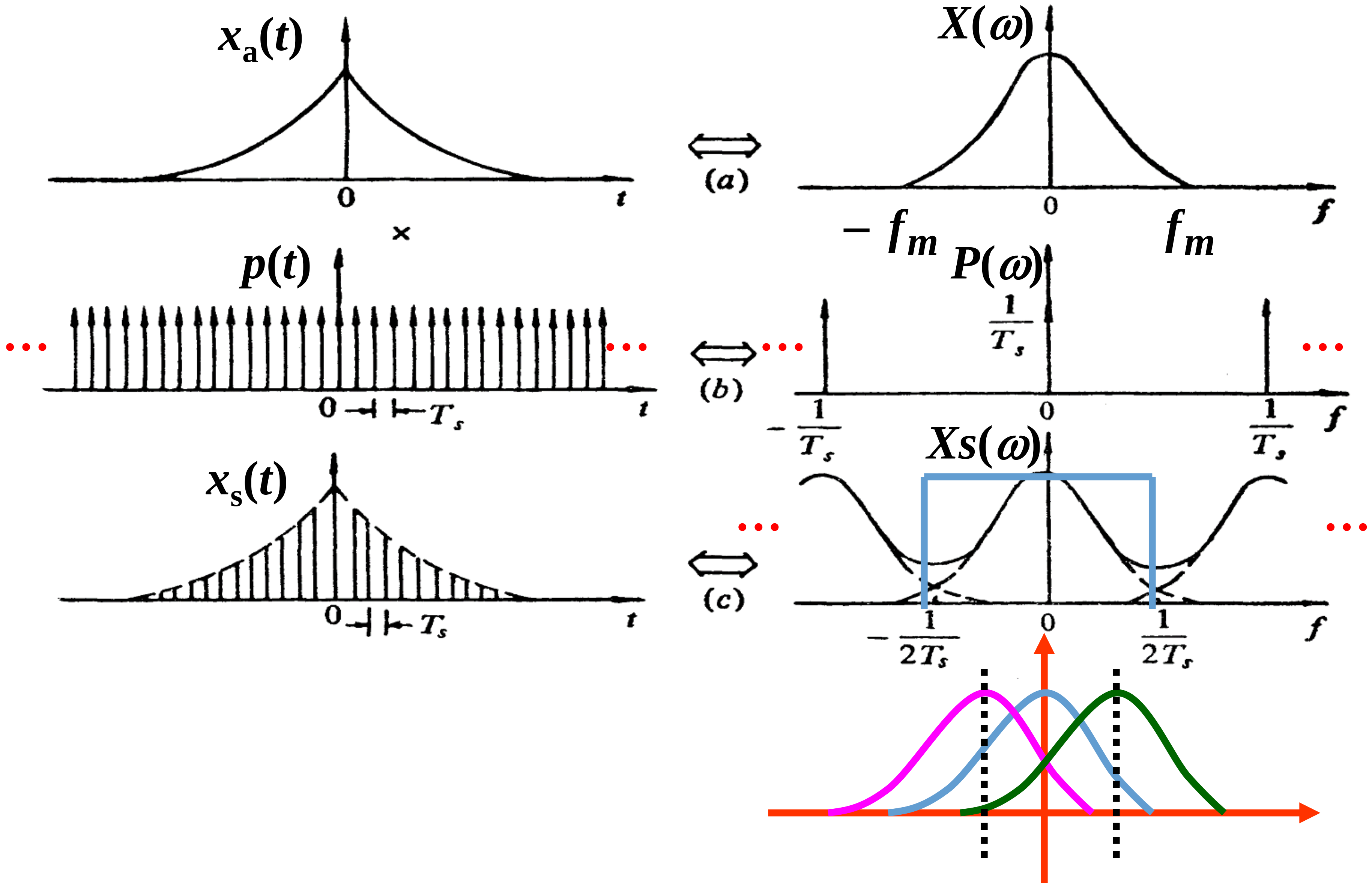
消除混叠的措施

① 提高采样频率f_s。但提高采样频率将导致在同样信号长度下，采样点数M随之提高，增加计算负担。

② 应用抗混滤波器降低信号中的最高频率f_m。从理论上讲，由于抗混滤波器的非理想特性，信号中高频分量不可能完全衰减，因此不可能彻底消除混叠。



信号数字化过程中存在的问题



信号数字化过程中存在的问题

2. 量化与量化误差

模拟信号经采样后得到的离散信号转变为数字信号（幅值离散化）的过程称为**量化**。由此引起的误差称为**量化误差**。

量化由A/D转换器实现，量化误差取决于其分辨力。若A/D转换器的位数（字长）为b（二进制输出，最高位为符号位，实际字长为b-1），允许的动态工作范围为D（如±5V，±10V或0~5V，0~10V等），则A/D幅值离散化的间隔为：

$$q = D/2^{b-1}$$ 看是否设置符号位

最大量化误差的绝对值为：$e = D/2^{b}$

信号数字化过程中存在的问题

一般，量化误差可以忽略，如12位A/D在动态范围为±10V时的量化误差为：±2.44mV，满量程（10V）时的相对误差为0.0244%，若将量化误差视为噪声，则此时信噪比为：

$$20\log\frac{10}{2.44\times10^{-3}}=72dB$$

出现的问题	相应的对策
量化噪声	提高A/D的位数

信号数字化过程中存在的问题

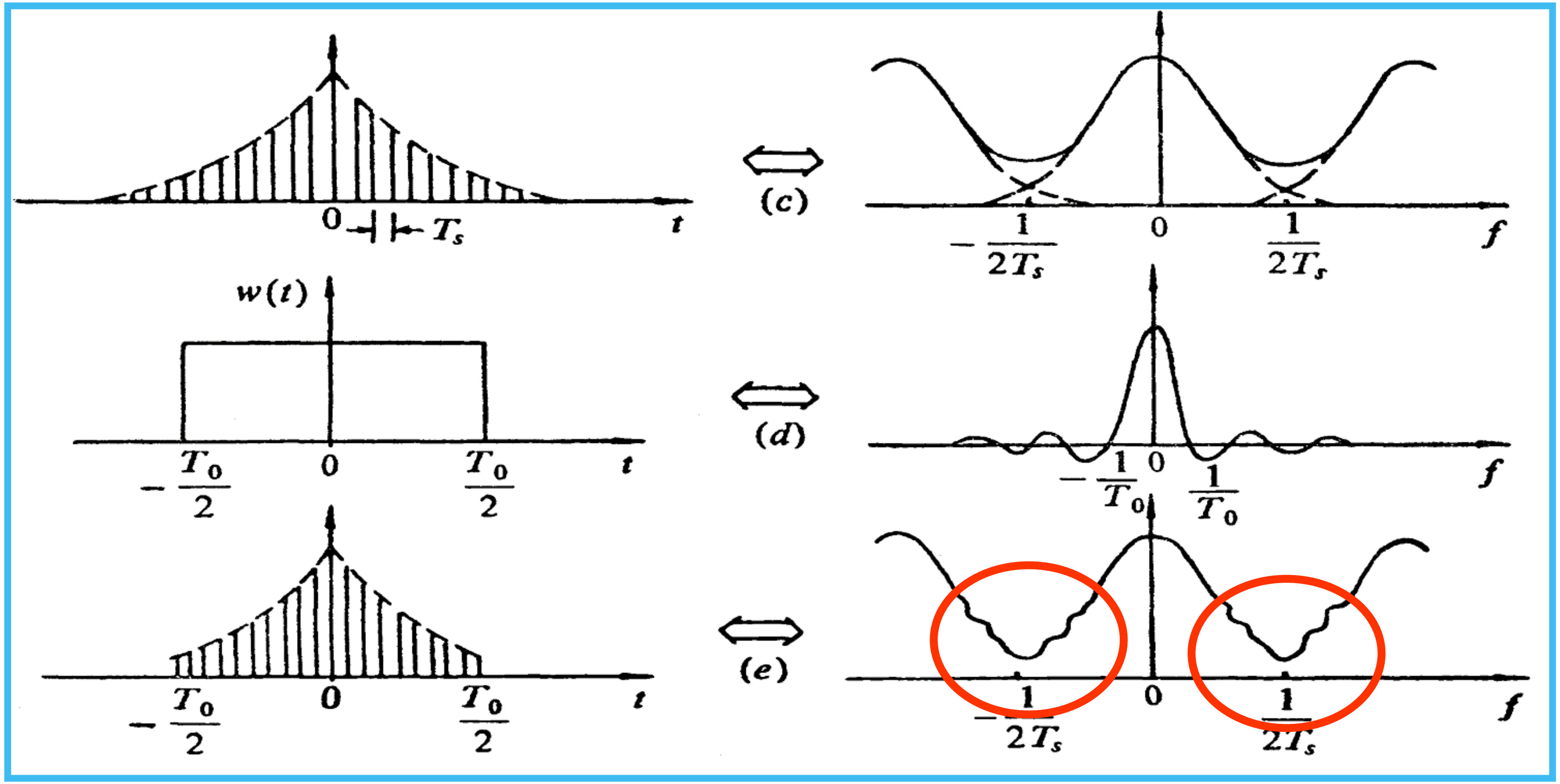
3.截断、泄漏和窗函数

计算机处理的数据长度是有限的，进行数字信号处理必须对过长时间历程的信号进行截断处理。截断相当于对信号进行加窗处理，如无特殊要求，通常截断即是将信号乘以时域的有限宽矩形窗函数：

$$\boldsymbol{w(t)}=\begin{cases}\mathbf{1} & |\boldsymbol{t}|<\boldsymbol{T}/\mathbf{2}\\ \mathbf{0} & |\boldsymbol{t}|>\boldsymbol{T}/\mathbf{2}\end{cases}$$

即：采样后信号$x(t)p(t)$经截断成为$x(t)p(t)w(t)$。

信号数字化过程中存在的问题



信号数字化过程中存在的问题

由于矩形窗函数的频谱为无限带宽的sinc函数，所以即使$x(t)$为带限信号，经截断后必然成为无限带宽信号，这种信号的能量在频率轴分布扩展的现象(Gibbis现象)称为泄漏。显然，此时无论采样频率多高，信号总是不可避免地出现混叠，引起失真。

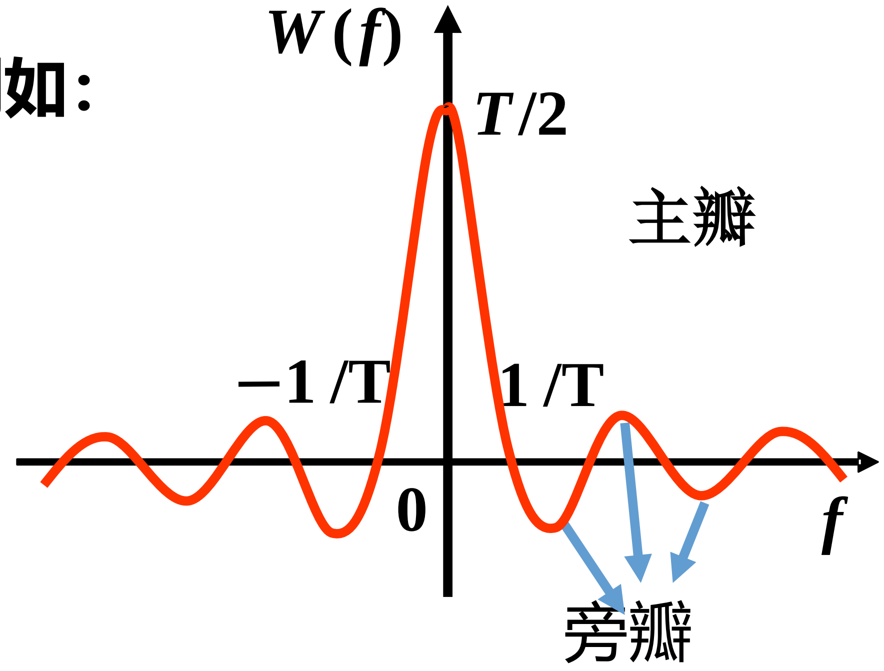
减小泄漏的措施

① 提高截断信号长度，即提高矩形窗宽度，此时sinc函数主瓣变窄，旁瓣向主瓣密集，由于旁瓣衰减较快，故可减小泄漏，但显然采样点数随之提高，增加计算负担。

信号数字化过程中存在的问题

② 采用其它窗函数。一个好的窗函数应当：主瓣尽可能窄（提高频率分辨力）、旁瓣相对于主瓣尽可能小，且衰减快（减小泄漏）。但实际上的窗函数总是二者不可兼得，应视使用目的而决定采用什么样的窗函数。

例如：



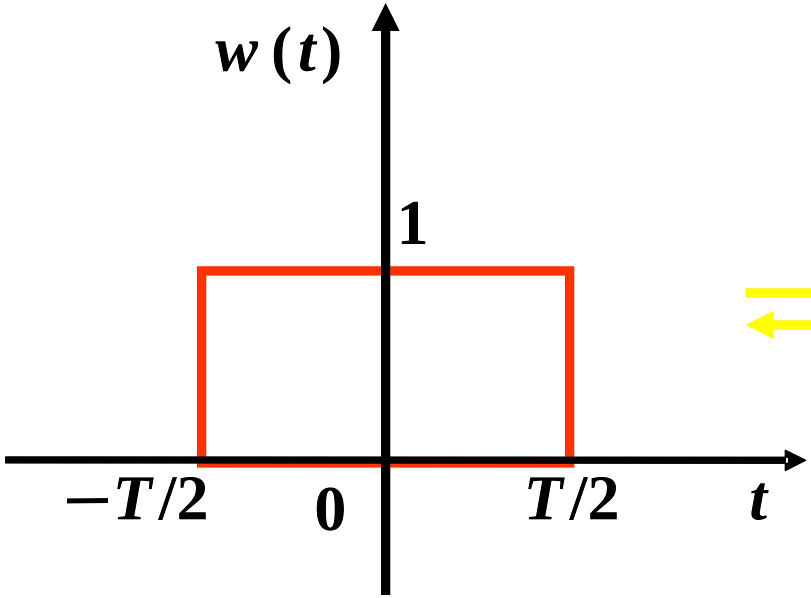
评价窗质量

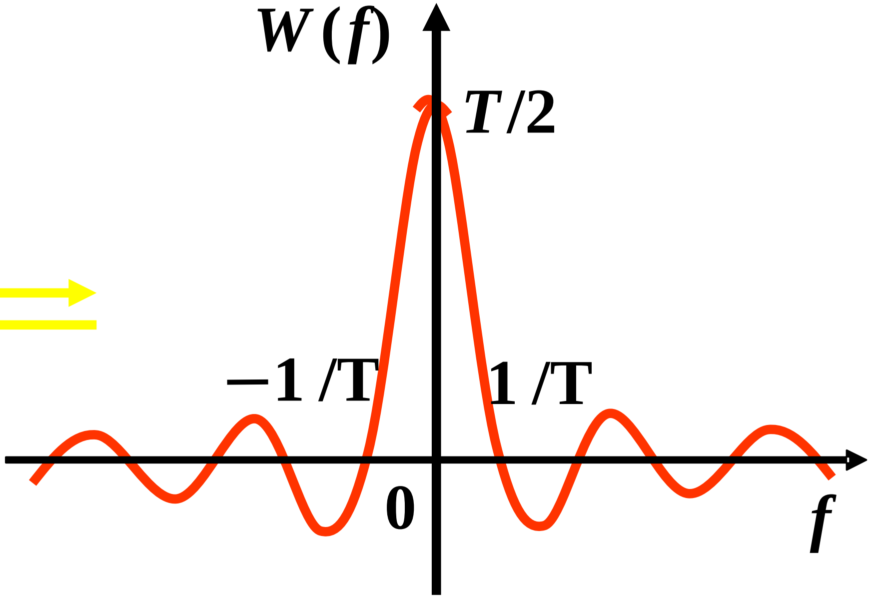
信号数字化过程中存在的问题

常用窗函数

1、矩形窗

$$w(t)=\begin{cases}1 & |t|<T/2 \\ 0 & |t|>T/2\end{cases} \Longleftrightarrow W(f)=T\,sinc(\pi fT)$$



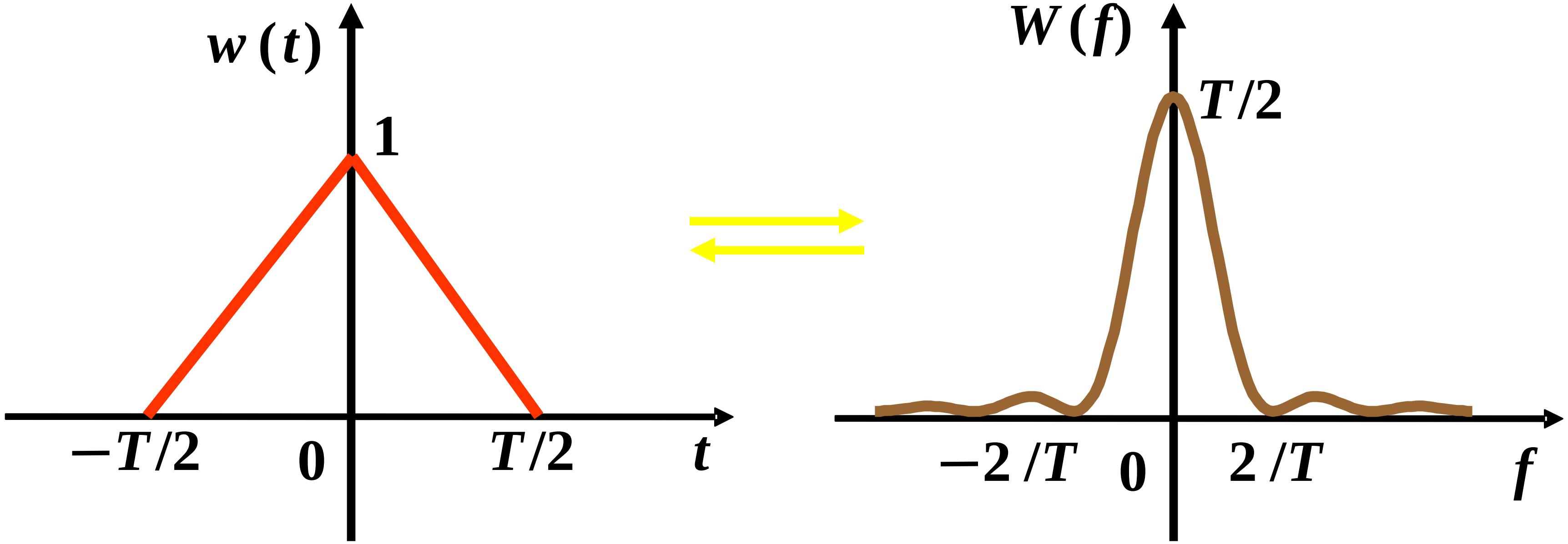


特点：主瓣最窄，频率分辨力高；旁瓣高，泄漏大。

信号数字化过程中存在的问题

2、三角窗

$$w_T(t)=\begin{cases}1-\dfrac{2}{T}|t| & |t|\le T/2\\ 0 & |t|>T/2\end{cases} \Longleftrightarrow W_T(f)=\frac{T}{2}sinc^2(\frac{\pi fT}{2})$$



特点：主瓣宽，频率分辨力低；旁瓣低且无负值，泄漏小。

信号数字化过程中存在的问题

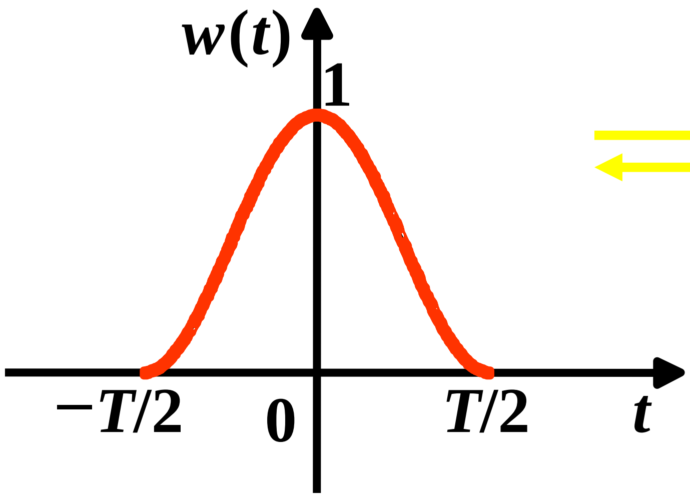
◆ 3、汉宁窗（余弦窗）

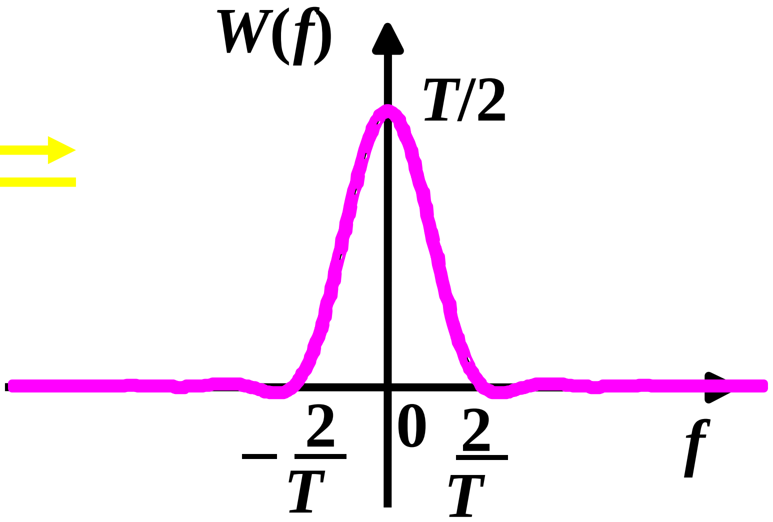
$$w(t)=\begin{cases}0.5+0.5\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) & |t|<T/2\\ 0 & |t|\geq T/2\end{cases}$$

特点：主瓣宽，频率分辨力低；旁瓣非常低，大大抑制泄漏。

$$W(f)=\frac{1}{2}W_R(f)+\frac{1}{4}[W_R(f+1/T)+W_R(f-1/T)]$$

其中 $W_R(f)=T\mathrm{sinc}(\pi fT)$





信号数字化过程中存在的问题

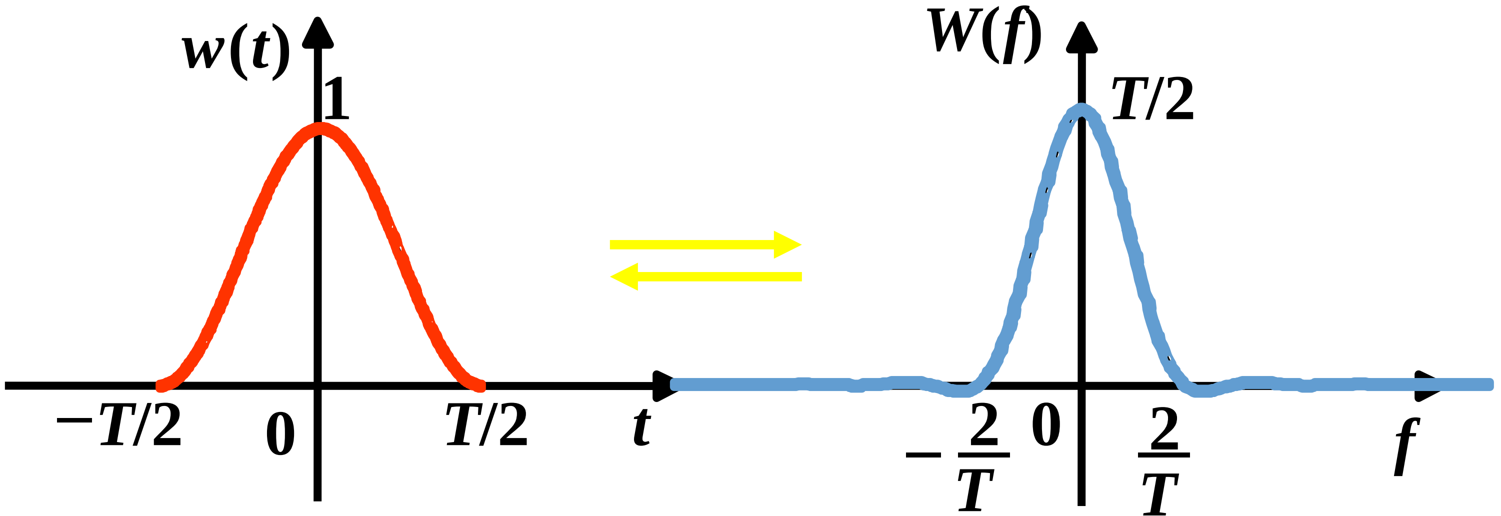
4、哈明窗（余弦窗) Hamming

$$w(t)=\begin{cases}0.54+0.46\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) & |t|<T/2\\ 0 & |t|\geq T/2\end{cases}$$

特点：同Hanning但旁辨比汉宁窗衰减得快，应用也很广。

$$W(f)=0.5W_R(f)+0.23[W_R(f+1/T)+W_R(f-1/T)]$$

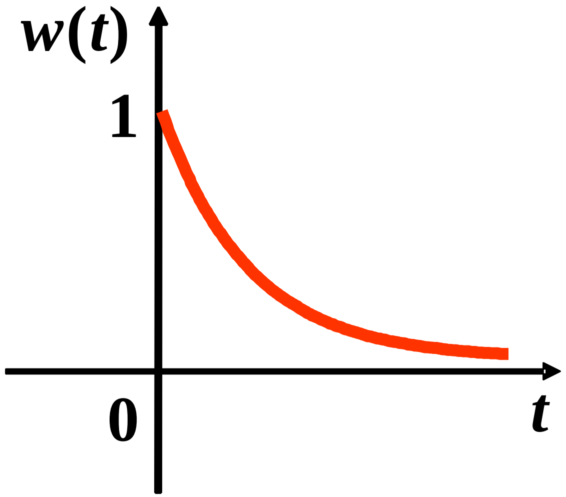
其中 $W_R(f)=T\text{sinc}(\pi fT)$

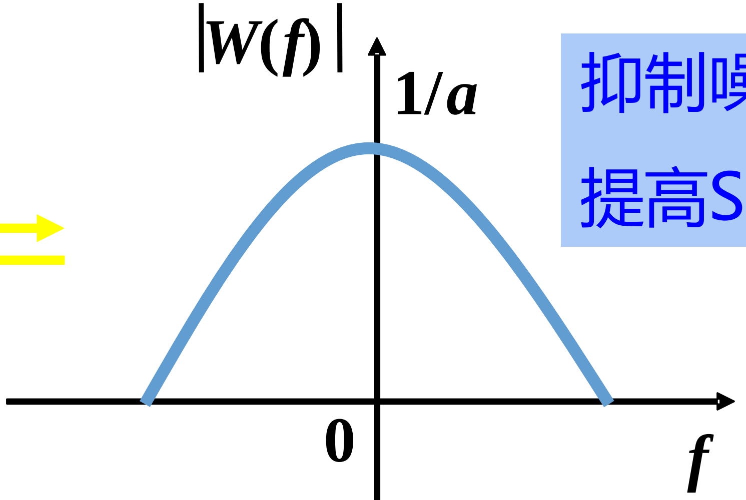


信号数字化过程中存在的问题

5、指数窗

$$w(t)=\begin{cases} e^{-at} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \quad a>0 \quad \Longleftrightarrow \quad |W(f)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+(2\pi f)^2}}$$





抑制噪声

提高SNR

特点：主瓣很宽，频率分辨极低；无旁瓣，大大抑制泄漏。

适于测量脉冲等随时间变化迅速衰减的信号。

信号数字化过程中存在的问题

我们讲了多种窗函数，在选择时应依据被 分析信号的性质与处理要求。

■要求精确读出主瓣频率，而不考虑幅值精度，则可选用主瓣宽度比较窄而便于分辨的矩形窗；

■分析窄带信号，且有较强的干扰噪声，则应选用旁瓣幅度小的窗函数，如三角窗、Hanning窗、 Hamming窗;

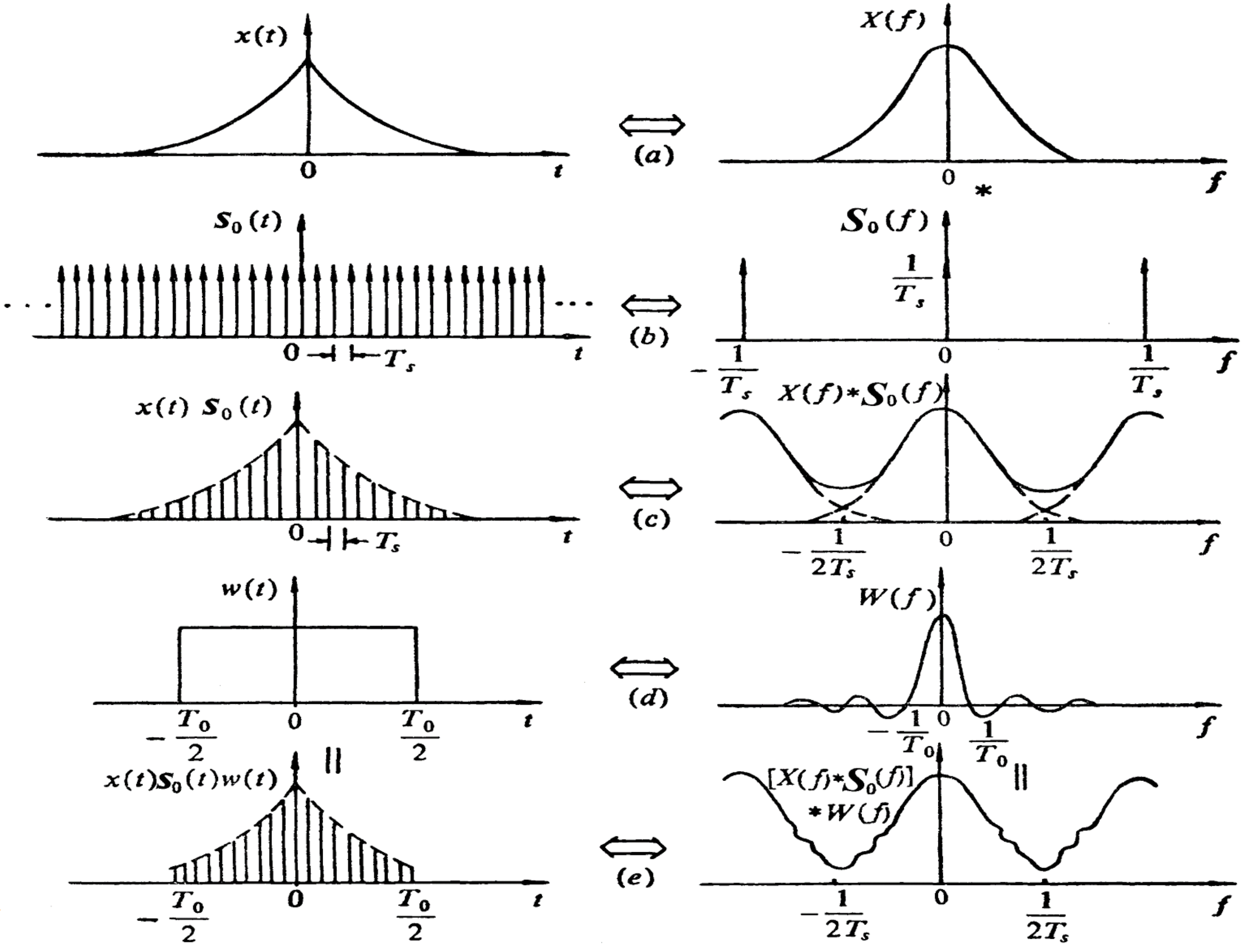
■对于随时间按指数衰减的函数，可采用指数窗来提高*SNR*。

信号数字化过程中存在的问题

4．频域采样与栅栏效应

时域采样

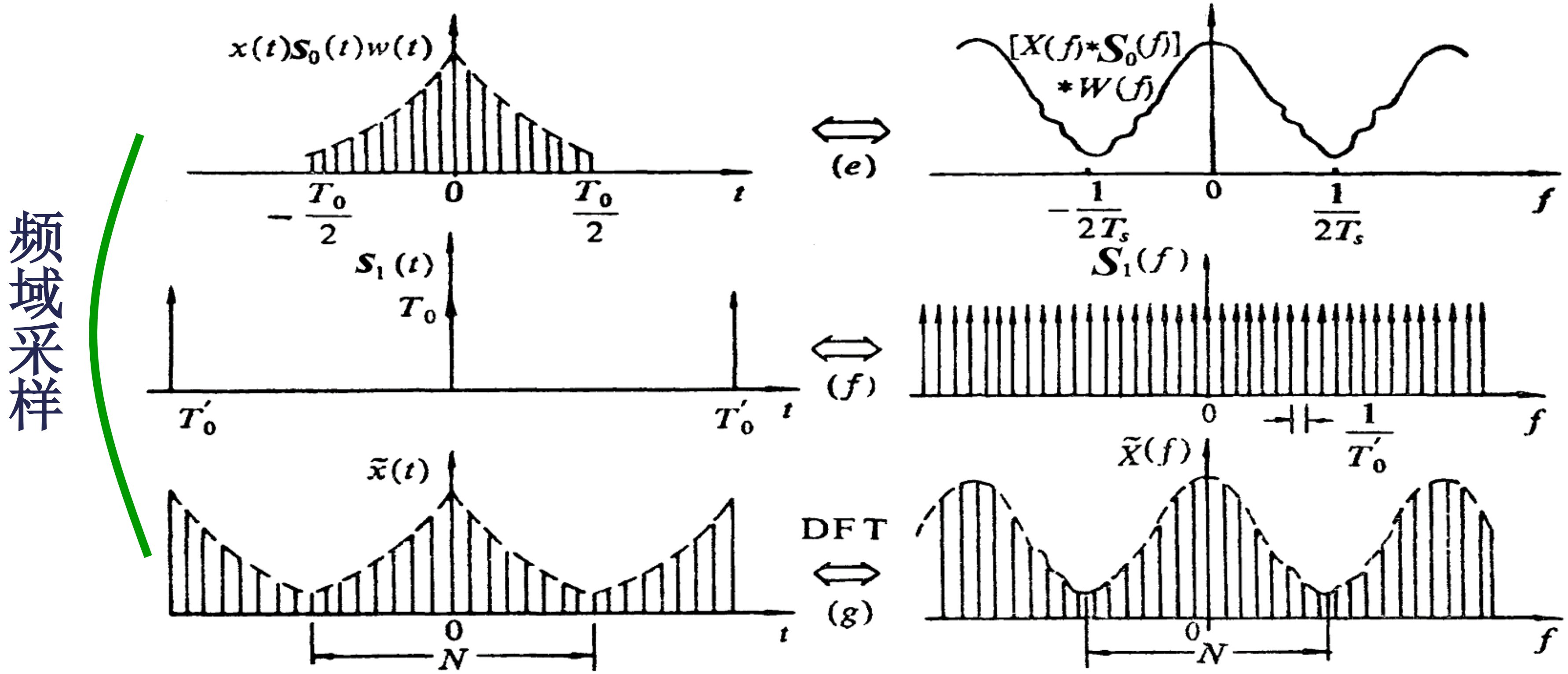
时域截断



信号数字化过程中存在的问题

由上图可见，经过时域采样与时域截断后，在频域内信号的频谱仍是连续的。如果使之数字化，则必须使频率离散化，进行频域采样。这一步与时域中的采样是相类似的。频域采样导致对时域截断信号进行周期延拓，将时域截断信号“改造”为周期信号。

信号数字化过程中存在的问题



经频域采样后的频谱仅在各采样点上存在，而非采样点的频谱则被“挡住”无法显示，这种现象称为栅栏效应。显然，频域采样必然带来栅栏效应。

在时域，只要满足采样定理，栅栏效应不会丢失信号信息，但在频域，则有可能丢失的重要的或具有特征的频率成分，导致谱分析结果失去意义。

信号数字化过程中存在的问题

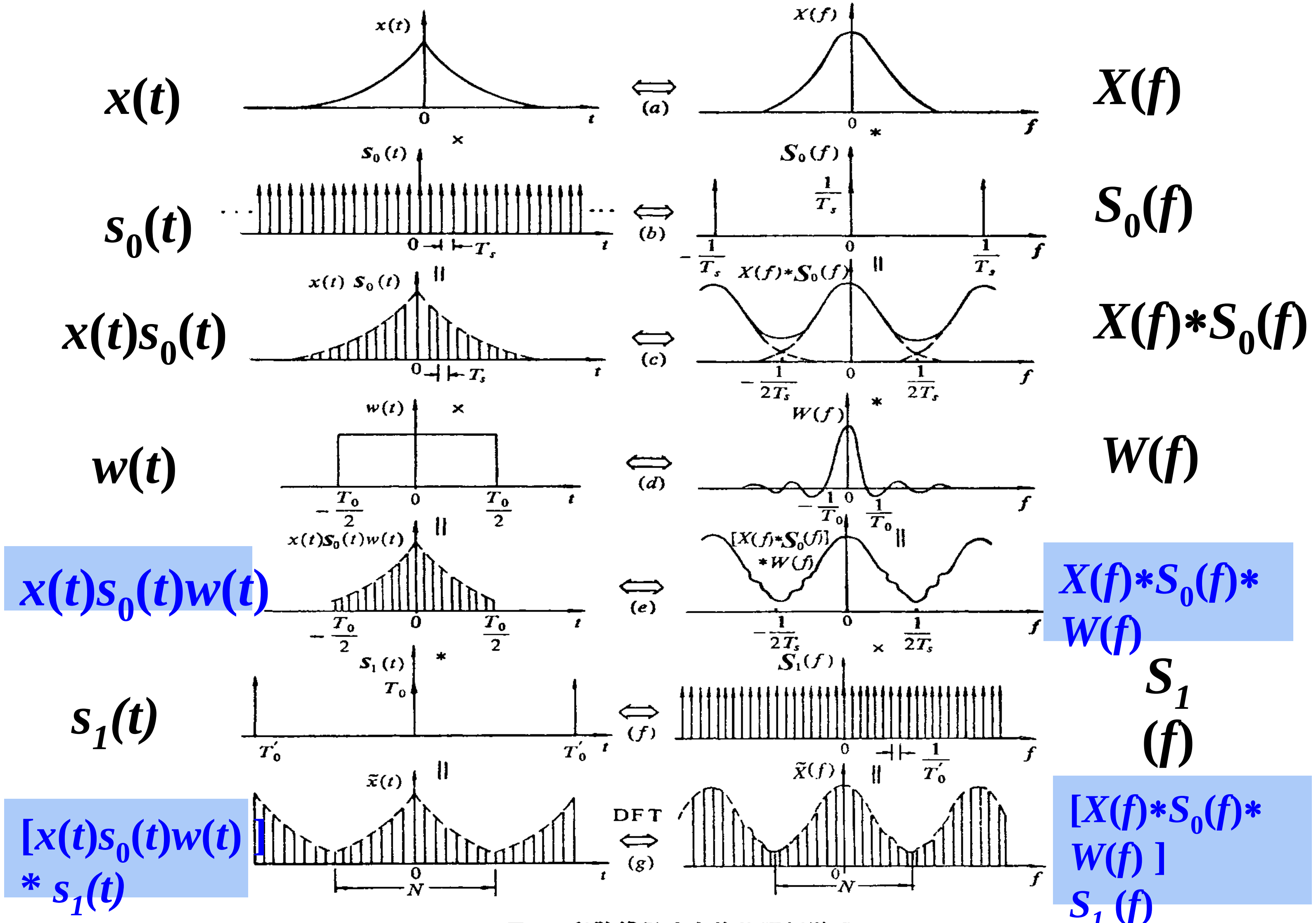


图5-2 离散傅里叶变换的图解说明

第三次作业：

见PDF

ZHEJIANG UNIVERSITY

离散傅里叶变换

ZHEJIANG UNIVERSITY

离散傅里叶变换

FT的定义式为

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$ ← 正变换

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df$$ ← 反变换

由于其连续的形式，不可能在数字系统中得到应用，必须离散化。因此，有DFT（Discrete Fourier Transform）。

离散傅里叶变换

设时域采样周期为 Ts，进行时域离散化，得信号序列 $x(nT_S)$ $(0 \le n \le N-1)$

同时，以 Δf 为频率间隔进行频域离散化，得离散频谱 $X(k\Delta f)$ $(0 \le k \le N-1)$

存在以下关系 $\Delta f = \dfrac{1}{NT_s}$ $(why?!)$

因此，有 $T_S \to dt$ $\Delta f \to df$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \text{或} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1} \to \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$nT_s \to t$ $k\Delta f = \dfrac{k}{NT_s} \to f$

离散傅里叶变换

代入FT与IFT的定义式， $X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$ 和 $x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df$ 得

$$X(k\Delta f)=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_s)e^{-j2\pi\times\frac{k}{NT_s}\times nT_s}T_s$$

$$=T_s\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_s)e^{-j\frac{2\pi}{N}\times kn}\qquad(0\le k\le N-1)$$

$$x(nT_s)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Delta f)e^{j2\pi\times\frac{k}{NT_s}\times nT_s}\frac{1}{NT_s}$$

$$=\frac{1}{NT_s}\sum_{n=0}^{N-1}X(k\Delta f)e^{j\frac{2\pi}{N}\times kn}\qquad(0\le n\le N-1)$$

将Ts和$\triangle f$ 归一化，得

离散傅里叶变换

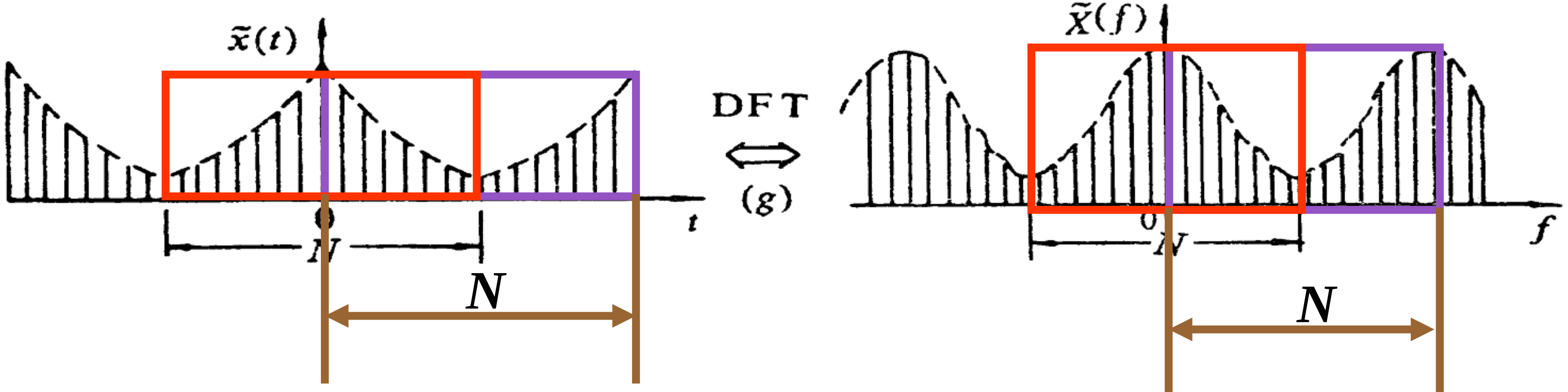
离散傅里叶变换：　　N个主值序列　　$W_N = e^{-j2\pi/N}$

DFT

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

IDFT

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



离散傅里叶变换

频率分辨力、整周期截断

频率采样间隔Δf决定了频率分辨力。Δf越小，分辨力越高，被挡住的频率成分越少。

由于DFT在频域的一个周期内（周期为：$1/T_s$）输出N个有效谱值，故频率间隔为：

$$\Delta f = \frac{1/T_s}{N} = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{T}$$

显然，可以通过降低f_s或提高N以提高Δf。①但前者受采样定理的限制，不可能随意降低，②后者必然增加计算量。

为了解决上述矛盾，可以采用ZOOM-FFT或Chip-Z变换，或采用基于模型的现代谱分析技术。

离散傅里叶变换

由于谱线是离散的，因此频谱谱线对应的频率值都是Δf整数倍。对于简谐信号，为了得到特定频率f_0的谱线，必须满足：

$$\frac{f_0}{\Delta f}=\text{整数} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T_0}}=\textbf{整数}$$

T：信号分析时长。T_0：频率为f_0信号的周期。

上式表明：只有信号的截断长度T为待分析信号周期的整数倍时，才可能使谱线落在f_0，获得准确的频谱

整周期截断

离散傅里叶变换

DFT是离散信号分析的有力工具，但是，这种方法的特点是计算工作量很大，实际应用起来很是困难。

在1965年，美国人J.W Cooley-W.Tukey（图利 - 库基）首先提出了DFT的一种快速算法——FFT（Fast Fourier Transform），这种快速算法使得计算工作量大大减少，从而使时域问题转换到频域的高效处理成为可能，一度被认为是信号分析技术划时代的进步。

离散傅里叶变换

- 长度为N的有限长序列x(n)的DFT为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, k=0,1,\cdots,N-1$$

- 考虑x(n)为复数序列的一般情况，对某一个k值，直接按此公式计算X(k)值需要N次复数乘法、(N-1)次复数加法。

N点DFT则需:

N^2次复数乘法

$N(N-1)$次复数加法。

离散傅里叶变换

- N点DFT的复乘次数等于N^2。***显然，把N点DFT分解为几个较短的DFT，可使乘法次数大大减少***

- 旋转因子W^m_N具有明显的周期性和对称性。其周期性表现为

$$W_N^{m+lN}=e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+lN)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}m}=W_N^m$$

其对称性表现为

$$W_N^{-m}=W_N^{N-m}\text{或者}\quad [W_N^{N-m}]^*=W_N^m$$

$$W_N^{m+\frac{N}{2}}=-W_N^m$$

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

离散傅里叶变换

$$W_N^{in} = W_{N/i}^{n} \qquad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$W_N^{n} = (W_N^{-n})^*$$

离散傅里叶变换

- 设序列x(n)的长度为N，且满足

$$N = 2^M, \quad M \quad \text{为自然数}$$

按<u>n的奇偶性</u>将x(n)分解为两个N/2点的子序列

$$x_1(r) = x(2r), \qquad r = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

$$x_2(r) = x(2r+1), \quad r = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

离散傅里叶变换

- 则x(n)的DFT为

$$X(k)=\sum_{n=} x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=} x(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_N^{2kr}+\sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_N^{k(2r+1)}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)\ W_N^{2kr}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_N^{2kr}$$

由于 $W_N^{2kr}=e^{-j\frac{2\pi}{N}2kr}=e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}kr}=W_{N/2}^{kr}$

所以 $X(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{kr}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{kr}=X_1(k)+W_N^kX_2(k)$

离散傅里叶变换

- 其中$X_1(k)$和$X_2(k)$分别为$x_1(r)$和$x_2(r)$的**N/2点DFT**，即

$$X_1(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_1(r)W_{N/2}^{kr}=DFT[x_1(r)]$$

$$X_2(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_2(r)W_{N/2}^{kr}=DFT[x_2(r)]$$

由于$X_1(k)$和$X_2(k)$均以N/2为周期，且 $W_N^{k+\frac{N}{2}}=-W_N^k$ 所以X(k)又可表示为

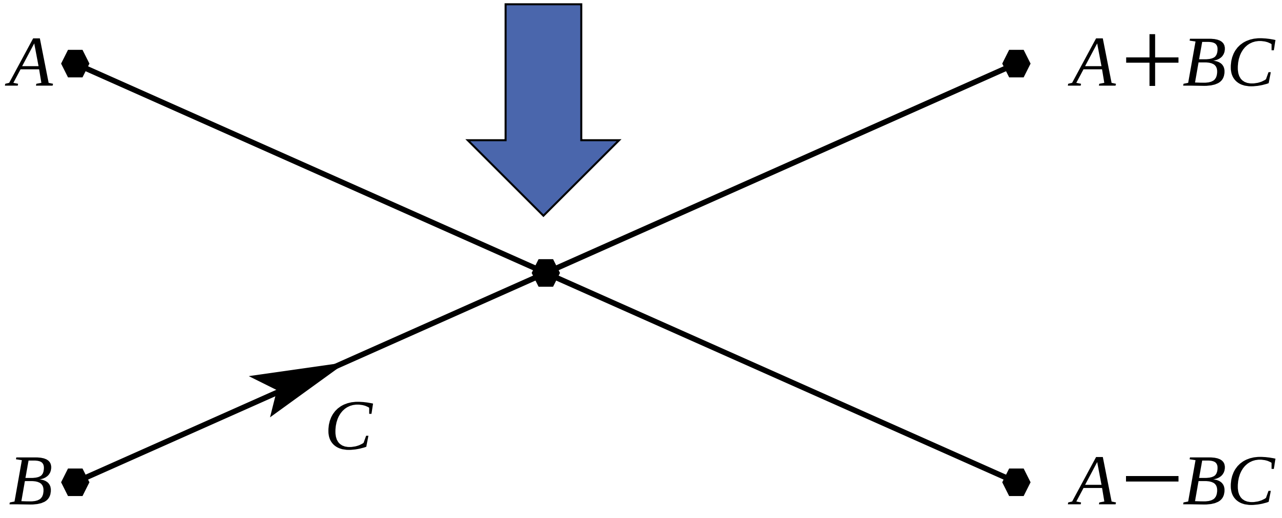
$$X(k)=X_1(k)+W_N^kX_2(k)\quad k=0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

$$X(k+\frac{N}{2})=X_1(k)-W_N^kX_2(k)\quad k=0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

离散傅里叶变换

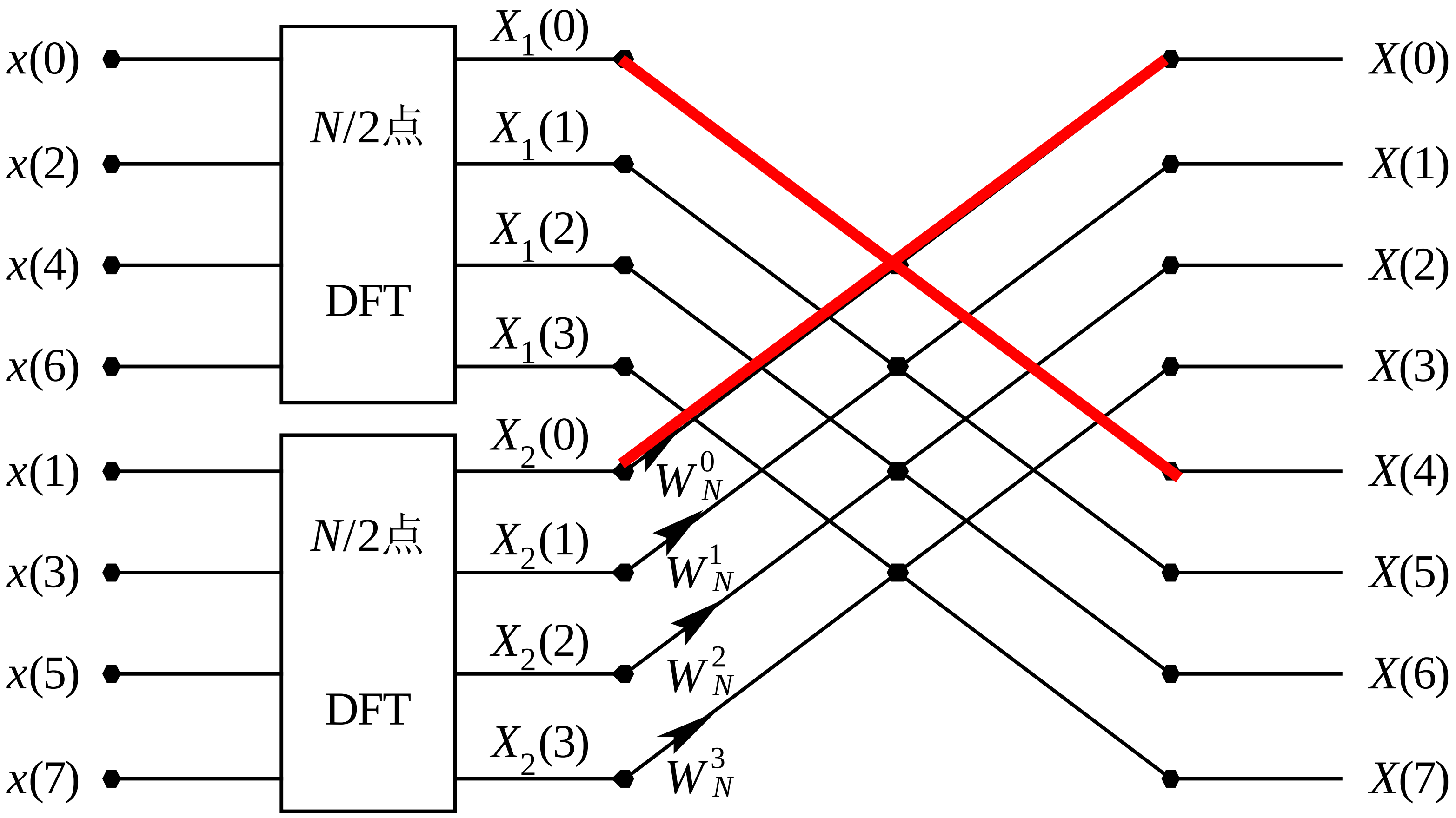
$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

$$X(k+\frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad k = 0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$



蝶形运算符号

离散傅里叶变换



N点DFT的一次时域抽取分解图(N=8)

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

$$X(k+\frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad k = 0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

离散傅里叶变换

与第一次分解相同，将$x_1(r)$按奇偶分解成两个N/4长的子序列$x_3(l)$和$x_4(l)$，即

$$\left.\begin{aligned} x_3(l) &= x_1(2l) \\ x_4(l) &= x_1(2l+1) \end{aligned}\right\}, l = 0,1,\cdots,\frac{N}{4}-1$$

那么，$X_1(k)$又可表示为

$$X_1(k) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x_1(2l)W_{N/2}^{2kl} + \sum_{i=0}^{N/4-1} x_1(2l+1)W_{N/2}^{k(2l+1)}$$

$$= \sum_{i=0}^{N/4-1} x_3(l)W_{N/4}^{kl} + W_{N/2}^{k}\sum_{i=0}^{N/4-1} x_4(l)W_{N/4}^{kl}$$

$$= X_3(k) + W_{N/2}^{k} X_4(k), k = 0,1,\cdots N/2-1$$

离散傅里叶变换

式中 $$X_3(k)=\sum_{i=0}^{N/4-1}x_3(l)W_{N/4}^{kl}=DFT[x_3(l)]$$

$$X_4(k)=\sum_{i=0}^{N/4-1}x_4(l)W_{N/4}^{kl}=DFT[x_4(l)]$$

同理，由$X_3(k)$和$X_4(k)$的周期性和$W^m{}_{N/2}$的对称性 $W^{k+N/4}{}_{N/2}=-W^k{}_{N/2}$ 最后得到：

$$\left.\begin{aligned}X_1(k)&=X_3(k)+W_{N/2}^kX_4(k)\\X_1(k+N/4)&=X_3(k)-W_{N/2}^kX_4(k)\end{aligned}\right\},k=0,1,\cdots,N/4-1$$

离散傅里叶变换

用同样的方法可计算出

$$\left.\begin{aligned} X_2(k) &= X_5(k) + W_{N/2}^{k} X_6(k) \\ X_2(k+N/4) &= X_5 k - W_{N/2}^{k} X_6(k) \end{aligned}\right\}, k = 0,1,\cdots N/4-1$$

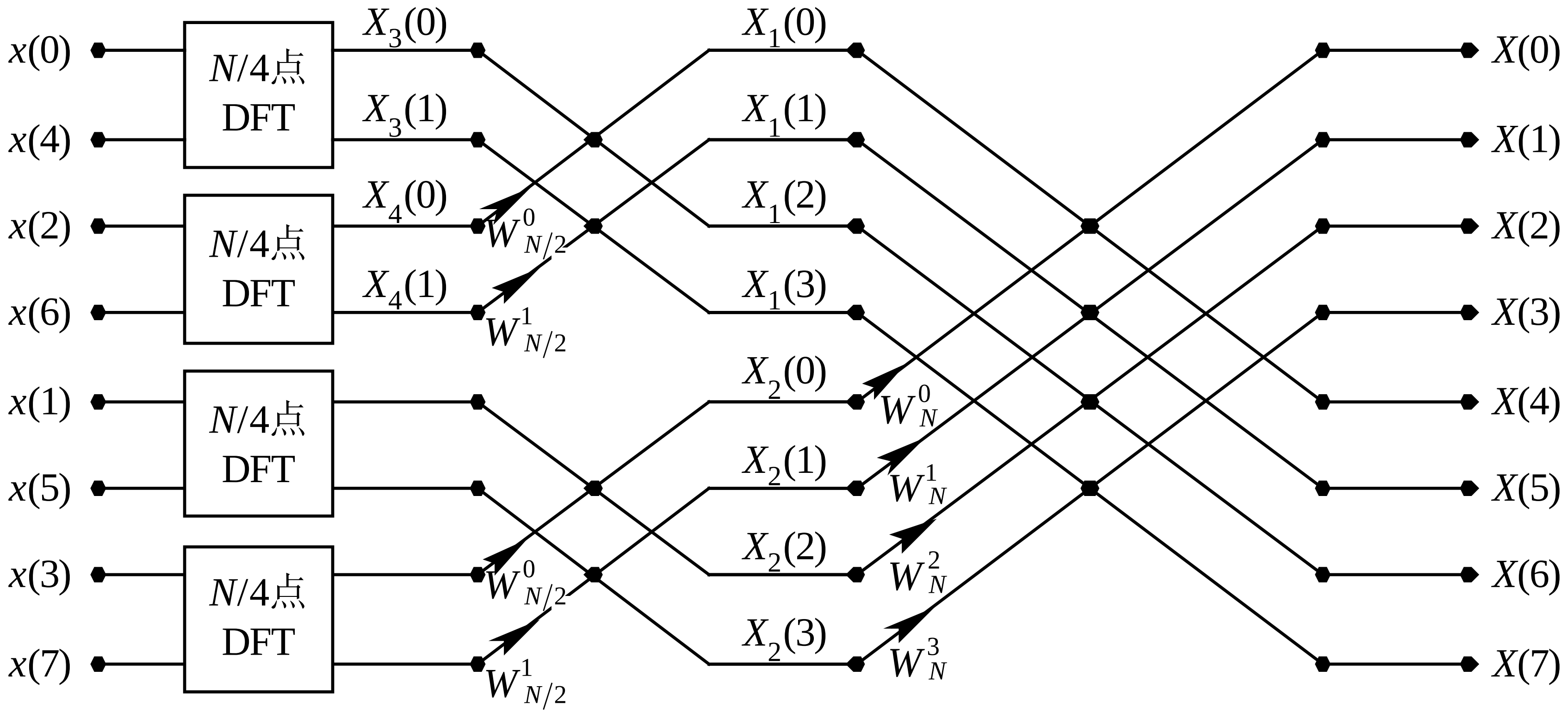
其中

$$X_5(k) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x_5(l) W_{N/4}^{kl} = DFT[x_5(l)]$$

$$X_6(k) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x_6(l) W_{N/4}^{kl} = DFT[x_6(l)]$$

$$\left.\begin{aligned} x_5(l) &= x_2(2l) \\ x_6(l) &= x_2(2l+1) \end{aligned}\right\}, l = 0,1,\cdots N/4-1$$

离散傅里叶变换

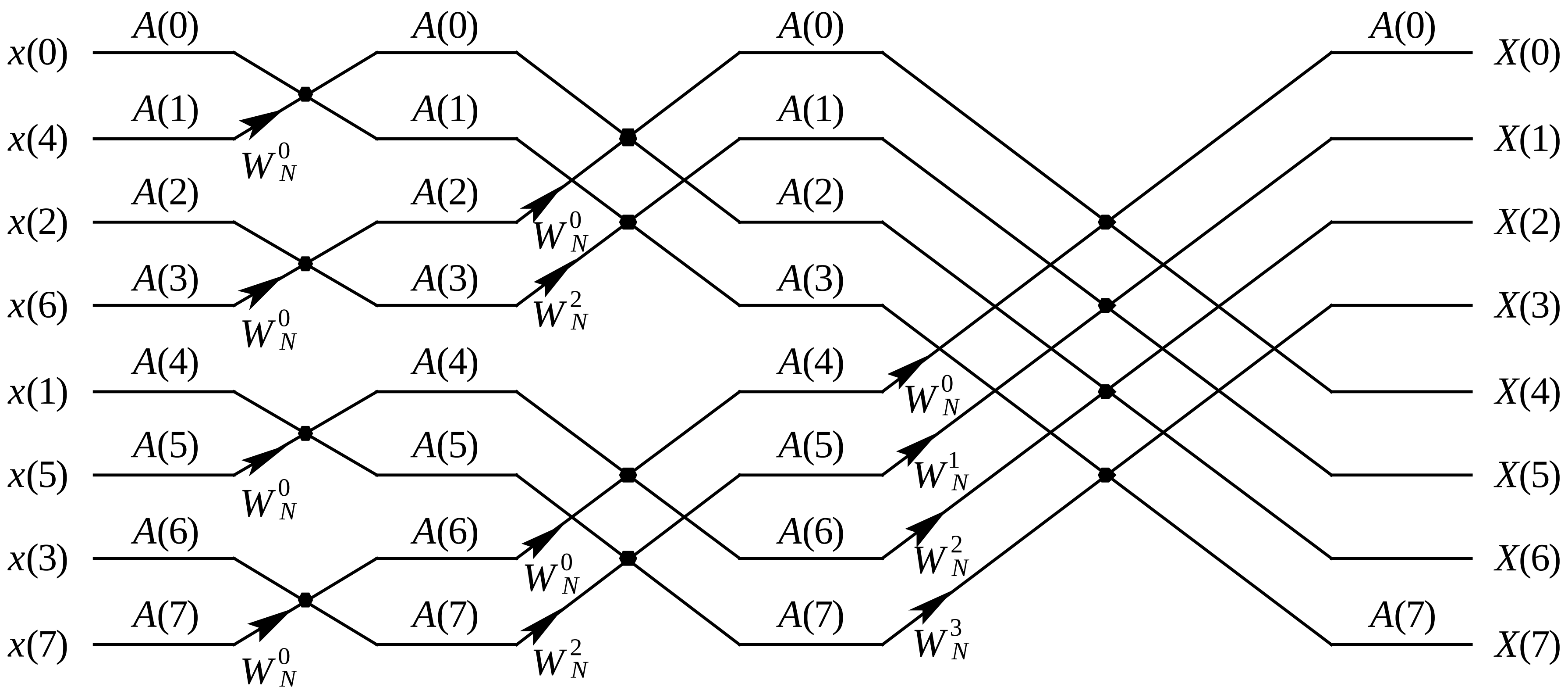


N点DFT的第二次时域抽取分解图(N=8)

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0,1,\cdots \frac{N}{2}-1$$

$$X(k+\frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad k = 0,1,\cdots \frac{N}{2}-1$$

离散傅里叶变换



N点DIT-FFT运算流图(N=8)

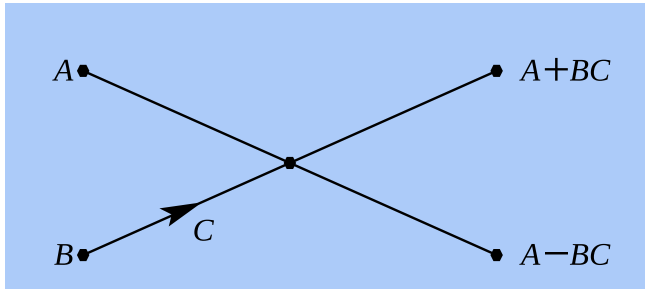
$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

$$X(k+\frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad k = 0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

离散傅里叶变换

DIT-FFT每一级运算都需要N/2次复数乘和N次复数加(每个蝶形需要两次复数加法)。所以，M级运算总共需要的复数乘次数为

$$C_M(2) = \frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2} \log_2 N$$



复数加次数为

$$C_A(2) = N \cdot M = N \log_2 N$$

例如，N=2[10]=1024时(m=10),复数乘法计算比较

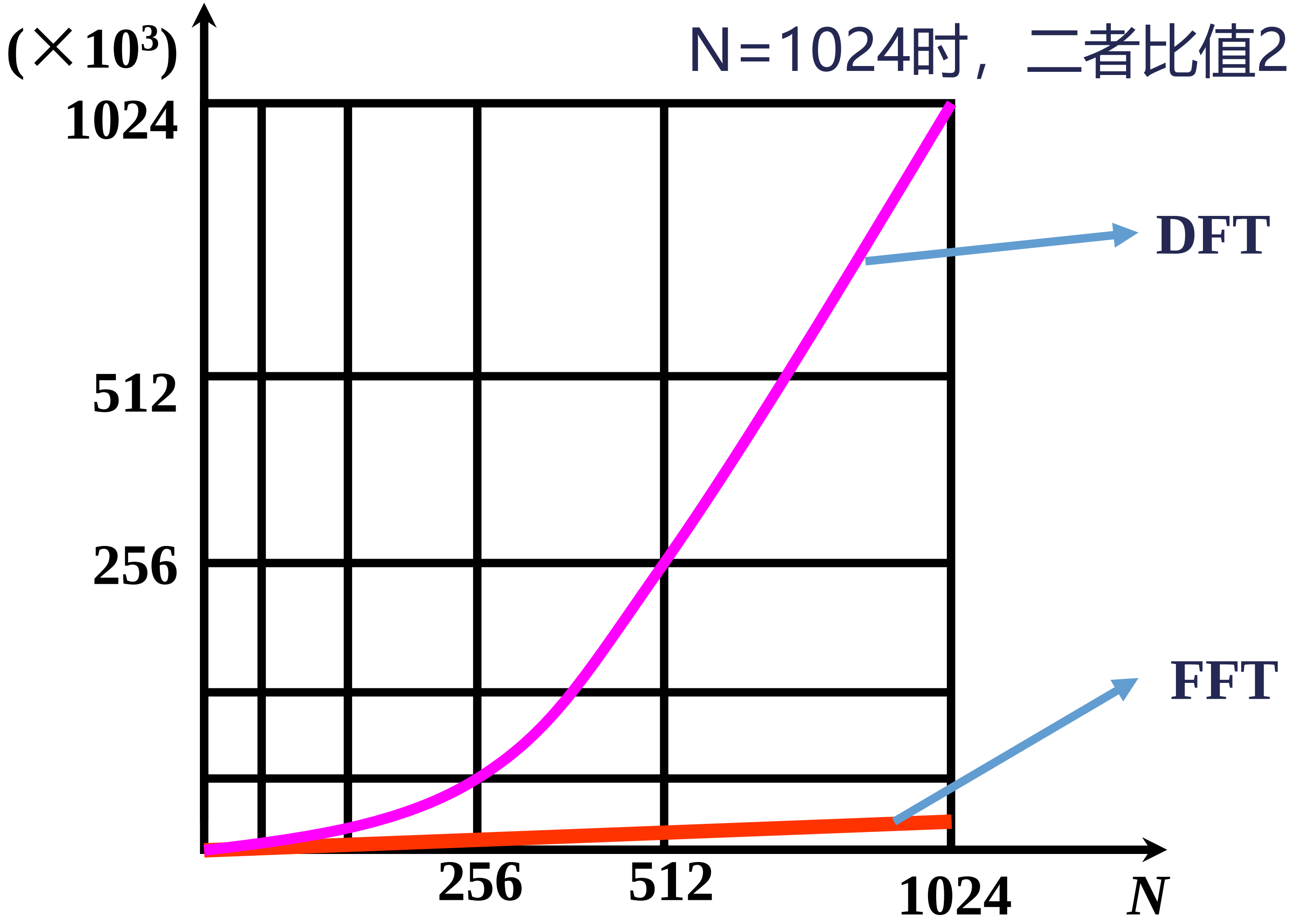
$$\frac{N^2}{(N/2)\log_2 N} = \frac{1048576}{5120} = 204.8$$

离散傅里叶变换

DFT与FFT的计算工作量比较：

N=256时，二者比值64

N=1024时，二者比值204.8



谢　谢

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY