控制工程基础

第六章

控制系统的误差分析和计算

前五章课的简单回顾

（3）研究系统的哪些东西?

快速性

- 瞬态响应
  - 系统需要花多长时间才能达到稳定?
  - 系统重新达到稳定的过程中是否会振荡?
- 频率响应
  - 系统的幅值比和相位差与输入频率的关系（幅频特性和相频特性）；
  - 幅频特性和相频特性的描述：乃氏图、伯德图；
  - 频率特性↔传递函数
  - 控制系统的开闭环关系

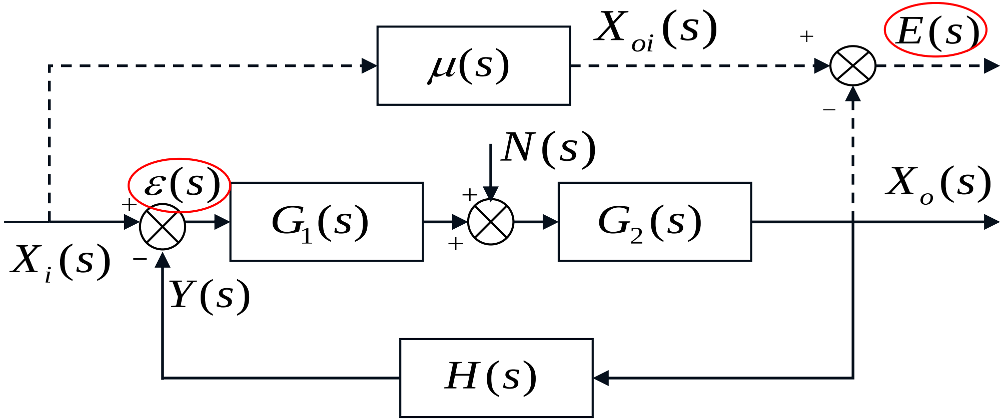
稳定性

- 负反馈闭环系统的稳定性
  - 代数稳定性判据：劳斯判据；
  - 乃氏判据（基于开环系统的幅频和相频特性的稳定性判据）
  - 伯德判据（由乃氏判据延伸出的稳定性判据）

准确性

- 控制系统的准确性
  - 输入信号和干扰信号引起的稳态误差；
  - 稳态误差的补偿

6.1 稳态误差的基本概念



$$\varepsilon(t) = x_i(t) - y(t) \quad \Rightarrow \quad e(t) = x_{oi}(t) - x_0(t)$$

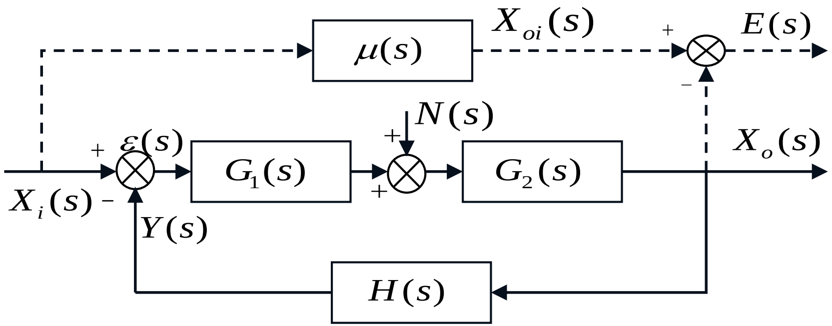
偏差信号　输入信号　反馈信号　　误差信号　希望输出信号　实际输出信号

定义：误差信号的稳态分量即为稳态误差，计为 $e_{ss} = \lim\limits_{t\to\infty} e(t)$

$$\boxed{e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s)}$$

误差信号与偏差信号之间的关系

误差信号： $E(s)=\mu(s)X_i(s)-X_o(s)$



考虑实际负反馈控制系统，偏差趋近于零，故

$X_i(s)=Y(s)$

$Y(s)=H(s)X_o(s)$ ⇒ $\mu(s)=\dfrac{1}{H(s)}$

⇒ $\boxed{E(s)=\dfrac{1}{H(s)}X_i(s)-X_o(S)=\dfrac{1}{H(s)}\varepsilon(s)}$

对于实际控制系统来说，$H(s)$是一个常数，所以 $E(s)=\dfrac{1}{H}X_i(s)-X_o(s)$

$$\boxed{\varepsilon(s)=H(s)E(s)}$$

对于单位反馈系统来说，$H(s)=1$，误差信号与偏差信号相同。这样，求得稳态偏差就求得了稳态误差。

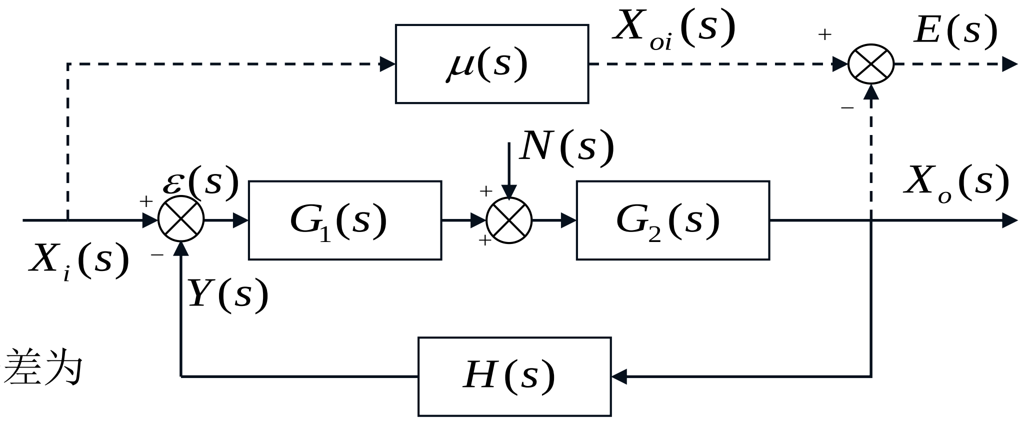
$$E(s)=\frac{1}{H}\varepsilon(s)$$

输入信号和干扰信号引起的偏差

输入信号$X_i(s)$与干扰信号$N(s)$的系统输出分别为

$$X_0(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}X_i(s)$$

$$X_{oN}(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$



因此，系统由输入信号和干扰信号引起的总偏差为

$$\varepsilon(s)=X_i(s)-H(s)\left[X_o(s)+X_{oN}(s)\right]$$

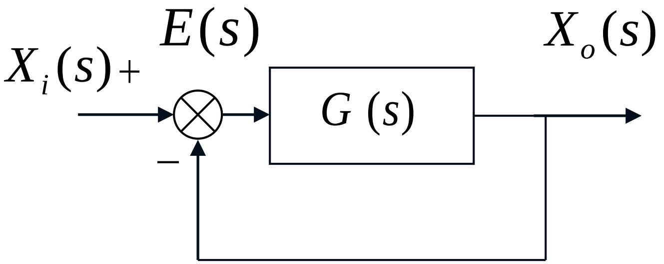
$$=X_i(s)-H(s)\left[\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}X_i(s)+\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)\right]$$

$$=\underbrace{\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}X_i(s)}_{\text{输入信号引起的偏差}}+\underbrace{\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)}_{\text{干扰信号引起的偏差}}$$

6.2 输入引起的稳态误差

一、误差传递函数与稳态误差

单位反馈的控制系统，如图



系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$

稳态误差

误差函数：

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)}X_i(s)$$

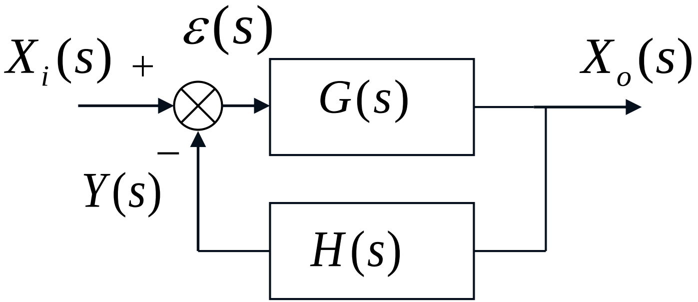
根据终值定理

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{1+G(s)}X_i(s)$$

这就是求取单位反馈闭环控制系统稳态误差的方法。前提是系统稳定！

误差与偏差的区别

对于非单位反馈控制系统，要注意误差与偏差的区别



此时

$$\varepsilon(s) = X_i(s) - H(s)X_o(s) = X_i(s) - H(s)G(s)\varepsilon(s)$$

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H(s)G(s)}X_i(s)$$

误差与偏差的区别

由终值定理得稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\varepsilon(s)$$

即 $$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}X_i(s)$$

而 $$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{H(s)}\cdot\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot X_i(s)$$

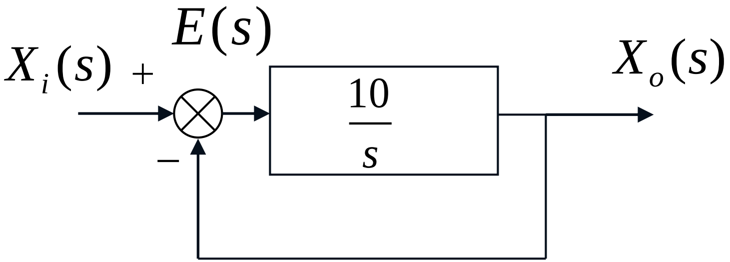
一般情况下，H为常值故时

$$e_{ss}=\frac{\varepsilon_{ss}}{H}$$

显然，稳态误差取决于系统结构参数和输入信号$X_i(s)$的性质

稳态误差参考题

例1 某反馈系统如下图，当 $x_i(t)=1(t)$ 时，求稳态误差。



解： 该系统为一阶惯性系统，系统稳定。

$$\Phi_e(s)=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{1}{1+\frac{10}{s}}=\frac{s}{s+10}$$

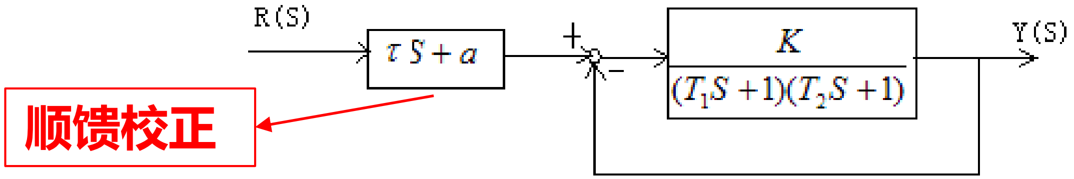
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s}{s+10}\cdot X_i(s)$$

$$X_i(s)=\frac{1}{s}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s}{s+10}\cdot\frac{1}{s}=0$$

稳态误差参考题

例2.系统下图所示，误差为$e(t)=r(t)-y(t)$，$r(t)=t\cdot 1(t)$，试选择α和τ的值，使稳态误差$e_{ss}\to 0$



解：该系统为典型二阶振荡系统，系统稳定。

$$Y(S)=\frac{K(\tau S+\alpha)}{(T_1S+1)(T_2S+1)+K}\cdot R(S),\qquad E(S)=R(S)-Y(S)=[1-\frac{K(\tau S+\alpha)}{(T_1S+1)(T_2S+1)+K}]R(S)$$

由终值定理：

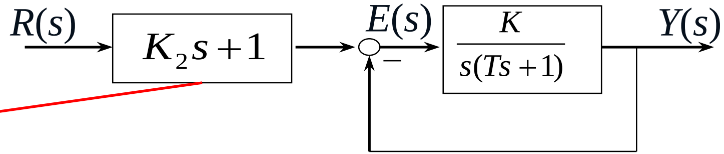
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}S\cdot[1-\frac{K(\tau S+\alpha)}{(T_1S+1)(T_2S+1)+K}]\cdot\frac{1}{S^2}=\lim_{S\to 0}\frac{T_1T_2S^2+(T_1+T_2-K\tau)S+(1+K-K\alpha)}{S\left[(T_1S+1)(T_2S+1)+K\right]}$$

$$\because e_{ss}\to 0$$

$$\therefore\begin{cases}1+K-K\alpha=0\\ T_1+T_2-K\tau=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1+K}{K}\\ \tau=\dfrac{T_1+T_2}{K}\end{cases}$$

稳态误差参考题

例3. 控制系统见下图，试证：调节K_2，系统对斜坡输入响应的稳态误差为零。（$R(t)=at$, a为任意常数）；



顺馈校正：对输入信号进行整形或滤波，又称前置滤波器

解：因为系统的闭环传递函数：

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(K_2s+1)}{s(Ts+1)+K} \qquad Y(s)=\frac{K(K_2s+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot R(s)$$

显然，不论K_2如何取值，闭环系统都是稳定的。根据已知条件

$$E(s)=R(s)-Y(s)=(1-\frac{K(K_2s+1)}{s(Ts+1)+K})\cdot R(s)=s\cdot(\frac{Ts+1-KK_2}{Ts^2+s+K})R(s)$$

代入$r(t)=at$，$R(s)=\frac{a}{s^2}$ ；由终值定理得稳态误差的表达式：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot s\cdot(\frac{Ts+1-KK_2}{Ts^2+s+K})\cdot\frac{a}{s^2}=\frac{a(1-KK_2)}{K}=0$$

即可求得,只要：$1-KK_2=0, K_2=\frac{1}{K}$ 时满足要求。

比例-微分（PD）控制器的作用

线性系统的时间响应

$$X_o(s)=X_i(s).\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}$$

因式分解

$$X_o(s)=X_i(s).\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^r(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s^2+c_1s+d_1)(s^2+c_2s+d_2)\ldots}$$

分式展开

一阶 一阶 二阶 二阶

$$\frac{\bigcirc}{\bigcirc}+\frac{a_{11}}{s+p_1}+\frac{a_{21}+\ldots}{s+p_2}+\ldots+\frac{a_{k1}s+b_{k1}}{s^2+2\zeta_1\omega_1s+\omega_1^2}+\frac{a_{k2}s+b_{k2}}{s^2+2\zeta_2\omega_2s+\omega_2^2}+\ldots$$

传递函数的分母（特征多项式）决定了系统的稳定性。

无衰减

$$+e^{-p_1t}.\Delta\Delta$$

$$+e^{-p_2t}.\Delta\Delta$$

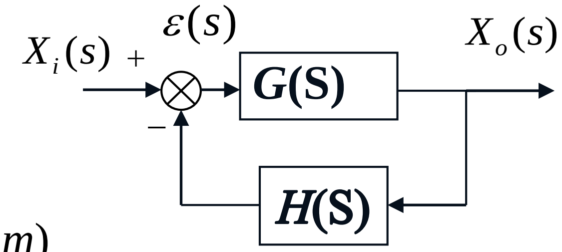
$$\Delta\Delta.e^{-\zeta_1\omega_1t}.\sin(\sqrt{1-\zeta_1^{\,2}}\,\omega_1t+\ldots)$$

$$\Delta\Delta.e^{-\zeta_2\omega_2t}.\sin(\sqrt{1-\zeta_2^{\,2}}\,\omega_2t+\ldots)$$

开环传函 → 闭环误差

二、静态误差系数

负反馈控制系统的开环传递函数为



$$G(s)H(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\qquad(n\geq m)$$

因式分解

$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ms+1)}{s^\gamma(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)}$$

式中：K为系统的开环增益，γ为系统的开环型次。

单位阶跃输入的稳态偏差

1. 系统对单位阶跃输入的稳态偏差

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{1+G(0)H(0)}$$

定义静态位置误差系数 K_{p}

$$K_p=\lim_{s\to 0} G(s)H(s)=G(0)H(0)$$

单位阶跃输入时的稳态偏差

$$\varepsilon_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$$

a.对0型系统，设G(s)H(s)为

$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^0(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}=K$$

b.对于Ⅰ型或高于Ⅰ型的系统

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^{\gamma}(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}=\infty$$

对单位阶跃输入的稳态偏差可以概括如下：

$$\begin{cases}\varepsilon_{ss}=\dfrac{1}{1+K} & \text{（对0型系统）}\\[2ex] \varepsilon_{ss}=0 & \text{（对Ⅰ型或高于Ⅰ型的系统）}\end{cases}$$

单位斜坡输入的稳态偏差

2. 在单位斜坡输入时，系统稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to0}\frac{1}{s\cdot\left[1+G(s)H(s)\right]}$$

$$=\lim_{s\to0}\frac{1}{sG(s)H(s)}=\frac{1}{K_v}$$

定义静态速度误差系数K_v

$$K_v=\lim_{s\to0}sG(s)H(s)$$

对单位斜坡输入的稳态偏差可以概括如下：

$$\begin{cases}\varepsilon_{ss}=\dfrac{1}{0}=\infty & \text{（0型系统）}\\ \varepsilon_{ss}=\dfrac{1}{K} & \text{（Ⅰ型系统）}\\ \varepsilon_{ss}=\dfrac{1}{\infty}=0 & \text{（Ⅱ型或更高的系统）}\end{cases}$$

a.对0型系统

$$K_v=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ms+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)}=0$$

b.对I型系统

$$K_v=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ms+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)}=K$$

c.II型或高于II型的系统

$$K_v=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ms+1)}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)}=\infty$$

单位加速度输入的稳态偏差

3.在单位加速度输入时，系统的稳态偏差为：

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s^3}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2\cdot\left[1+G(s)H(s)\right]}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2G(s)H(s)}=\frac{1}{K_a}$$

定义静态加速度误差系数K_a

$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot G(s)H(s)$$

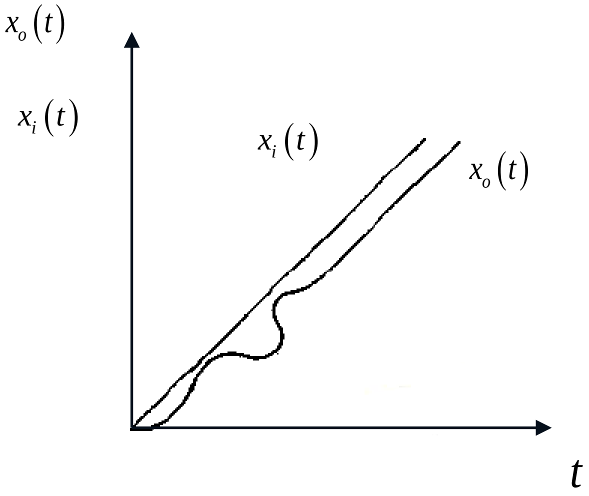
对0型系统 $$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}=0 \Rightarrow \varepsilon_{ss}=\infty$$

对Ⅰ型系统 $$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}=0 \Rightarrow \varepsilon_{ss}=\infty$$

对Ⅱ型系统 $$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}=K \Rightarrow \varepsilon_{ss}=\frac{1}{K}$$

系统类型和输入信号与稳态误差的关系

- 0型和I型系统在稳定状态下都不能跟踪加速度输入信号
- 具有单位反馈的II型系统在稳定状态下是能够跟踪加速度输入信号的，但带有一定的位置误差
- 高于II型以上的系统，稳定性差，故不实用



输入引起的稳态误差小结

1.工程中所指的位置误差，速度误差，加速度误差分别指输入是阶跃、斜坡、匀加速度输入时所引起的输出位置上的误差。

2.在单位输入信号时，稳态误差的结果有三种：下表概括了0型、Ⅰ型和Ⅱ型系统在各种输入量作用下的稳态误差。

系统类别	单位阶跃输入	等速输入	等加速输入
0型系统	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I型系统	0	$\frac{1}{K}$	∞
II型系统	0	0	$\frac{1}{K}$

3. 静态误差系数K_p、K_v、K_a分别是0型、I型、II型系统的开环静态放大倍数。其对应的v=0,1,2,分别表示系统中积分环节的数目。有差跟踪时，其稳态偏差与系统开环增益成反比。

$$K=\lim_{s\to 0} s^{\upsilon}\cdot G(s)H(s)$$

输入引起的稳态误差小结

4.对于单位反馈系统，稳态误差等于稳态偏差。对于非单位反馈系统，$e_{ss}=\dfrac{\varepsilon_{ss}}{H(0)}$。

5.上述结论是以阶跃、斜坡等典型输入信号作用下得到的，但它具有普遍的意义。这是因为控制系统输入信号的变化往往是比较缓慢，可把输入信号$x_i(t)$在t=0点附近展开成泰勒级数

$$x_i(t)=x_i(0)+x_i^{(1)}(0)t+\frac{1}{2!}x_i^{(2)}(0)t^2+\cdots\cdots$$

$$=x_i(0)+a_1t+a_2\mathrm{t}^2+\cdots\cdots$$

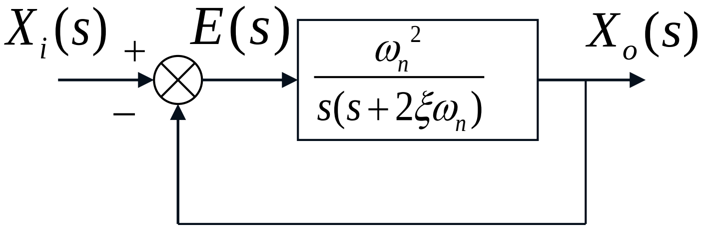
$$a_1=x_i^{(1)}(0)=\left.\frac{dx_i(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$a_2=x_i^{(2)}(0)=\left.\frac{d^2x_i(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

这样，可把控制信号看成几个典型信号之和，系统的稳态误差可看成是上述典型信号分别作用下的误差总和。

稳态误差例题

例4：设有二阶振荡系统，其方块图如下



试求系统在单位阶跃、单位恒速、单位恒加速输入时的静态误差

稳态误差例题

解 由于是单位反馈系统

$$\varepsilon_{ss} = e_{ss} \qquad G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}=\frac{\frac{\omega_n}{2\xi}}{s(\frac{s}{2\xi\omega_n}+1)}$$

可见，这个系统是I型系统，其增益 $K=\dfrac{\omega_n}{2\xi}$

输入x_i为单位阶跃时，$\varepsilon_{ss}=e_{ss}=0$

x_i为单位恒速时， $\varepsilon_{ss}=e_{ss}=\dfrac{1}{K_v}=\dfrac{1}{K}=\dfrac{2\xi}{\omega_n}$，

x_i为单位恒加速输入时，$\varepsilon_{ss}=e_{ss}=\infty$

所以系统不能承受恒加速输入。

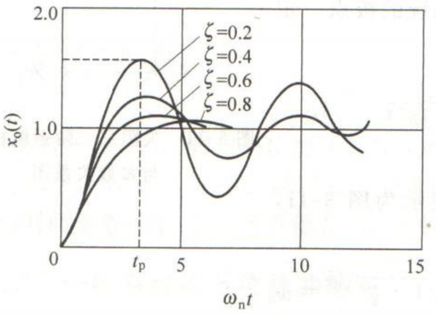


图 3-12 欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应

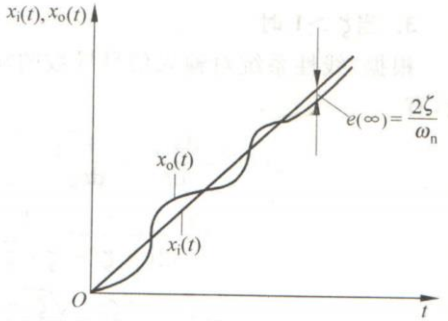


图 3-20 欠阻尼二阶系统单位斜坡响应曲线

稳态误差习题

习题6-1(205页)

系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(s^2+4s+200)}$ ，试求单位反馈系统的静态位置、速度、加速度误差系数，并求其在单位阶跃、单位斜坡和单位加速度下的稳态误差。

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s(s^2+4s+200)}=\infty$$

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)H(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{K}{s(s^2+4s+200)}=\frac{K}{200}$$

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}s^2\frac{K}{s(s^2+4s+200)}=0$$

当$x_i(t)=1(t)$时，$e_{s1}=\dfrac{1}{1+K_p}=0$

当$x_i(t)=t.1(t)$时，$e_{s2}=\dfrac{1}{K_v}=\dfrac{200}{K}$

当$x_i(t)=\dfrac{t^2}{2}.1(t)$时，$e_{s3}=\dfrac{1}{K_a}=\infty$

开环传递函数如下?

$$G(s)=\frac{50}{(0.1s+1)(2s+1)}$$

$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

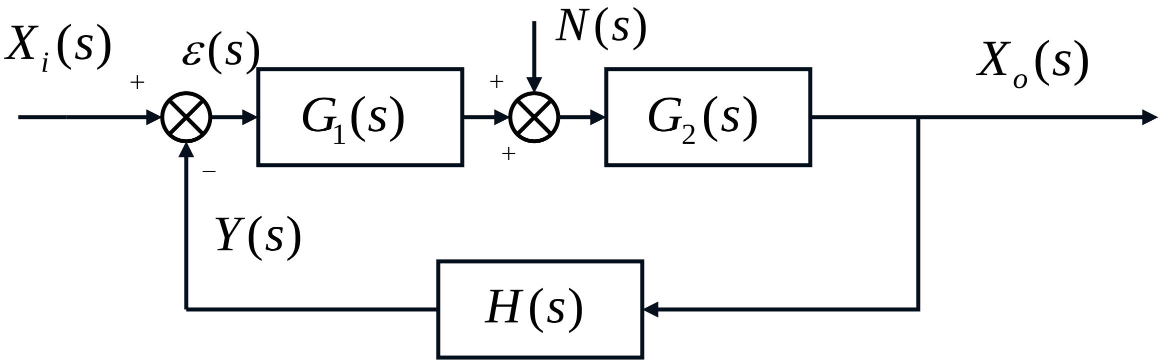
$$G(s)=\frac{K(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

6.3 干扰引起的稳态误差

实际控制系统中，不但存在给定的输入信号$x_i(t)$，还存在干扰作用$N(t)$。要求出稳态偏差，可以利用迭加原理，分别求出$x_i(t)$及$N(t)$单独作用时的偏差，然后求其代数和，就是总偏差。

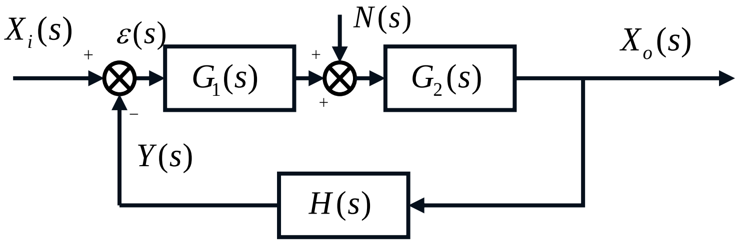
显然由$x_i(t)$ 作用得到的稳态偏差为：

$$\varepsilon_{ss1} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot X_i(s)$$



干扰引起的稳态误差

由于干扰作用$N(t)$引起的稳态偏差为



$$\varepsilon_{ss2} = \lim_{s\to 0} s \cdot \left(-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \right) \cdot N(s)$$

$$E_{ss2} = \lim_{s\to 0} s \cdot \left(-\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \right) \cdot N(s)$$

总的稳态偏差为

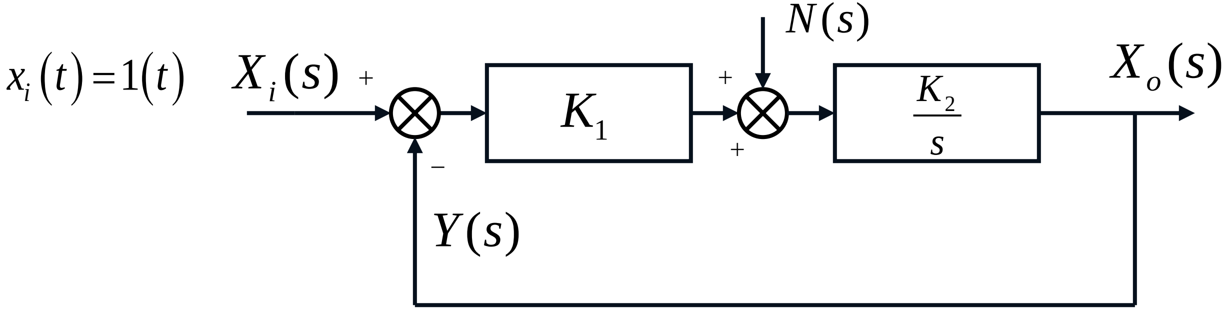
$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_{ss1} + \varepsilon_{ss2}$$

总的稳态误差为

$$e_{ss} = \varepsilon_{ss} / H(0)$$

干扰引起的稳态误差例题

例5 系统结构图如图，当输入信号$X_i(t)=1(t)$，干扰$N(t)=1(t)$时，求系统总的稳态误差



干扰引起的稳态误差例题

第一步要判别稳定性，由于是一阶系统，所以只要参数K_1，K_2大于零，系统就稳定。

第二步，求E(s)。因为是单位反馈 $\varepsilon(s)=E(s)$, $\varepsilon_{ss}=e_{ss}$ 。

先求输入引起稳态误差

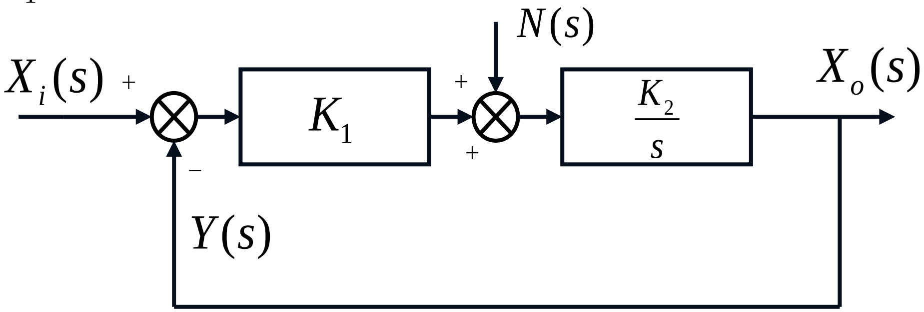
$$e_{ss1}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+\frac{K_1K_2}{s}}\cdot\frac{1}{s}=0$$

再求干扰引起的稳态误差

$$e_{ss2}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-\frac{K_2}{s}}{1+\frac{K_1K_2}{s}}\cdot\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{-K_2}{s+K_1K_2}=-\frac{1}{K_1}$$

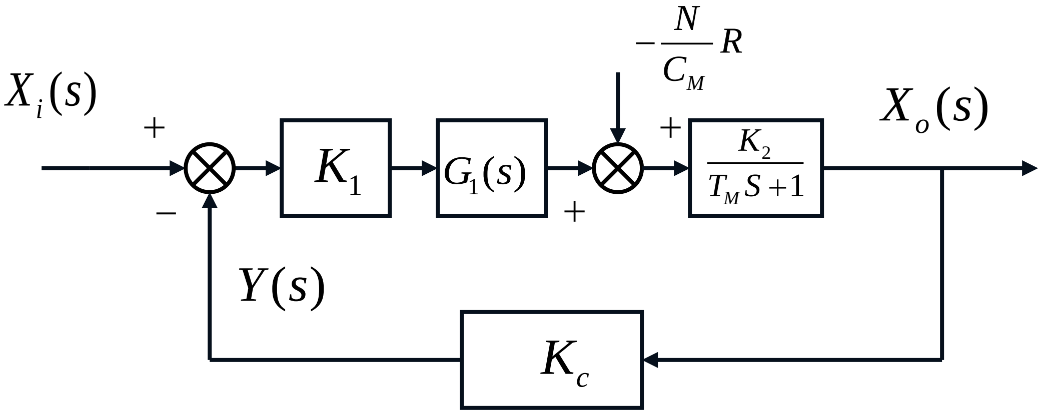
总的误差为：

$$e_{SS}=e_{ss1}+e_{ss2}=-\frac{1}{K_1}$$



干扰引起的稳态误差例题

例6 某直流伺服电动机调速系统如图所示，试求干扰力矩N(s)引起的稳态误差。



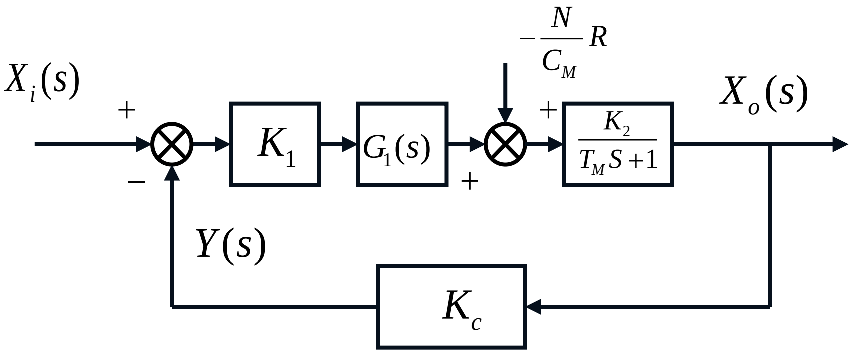
图中，R是电机电枢电阻，C_M是力矩系数，N是扰动力矩

干扰引起的稳态误差例题

解：此为一非单位反馈控制系统，先求干扰作用下的稳态偏差，再求稳态误差。

设$G_1(s)=1$, 系统是一阶的，因此稳定。干扰作用为一个常值阶跃干扰，故稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-\dfrac{K_2K_c}{T_M s+1}}{1+\dfrac{K_1K_2K_c}{T_M S+1}}\cdot\left(\frac{-NR}{C_M s}\right)=\frac{K_2K_c}{1+K_1K_2K_c}\cdot\frac{R}{C_M}\cdot N$$



而稳态误差为

$$E_{ss}=\varepsilon_{ss}/K_c=\frac{K_2}{1+K_1K_2K_c}\cdot\frac{R}{C_M}\cdot N$$

当 $K_1K_2K_c\gg 1$（称环路增益）时

$$E_{ss}\approx\frac{1}{K_1K_c}\cdot\frac{R}{C_M}\cdot N$$

干扰作用点与偏差信号间的放大倍数K_1越大，则误差越小 。

干扰引起的稳态误差例题

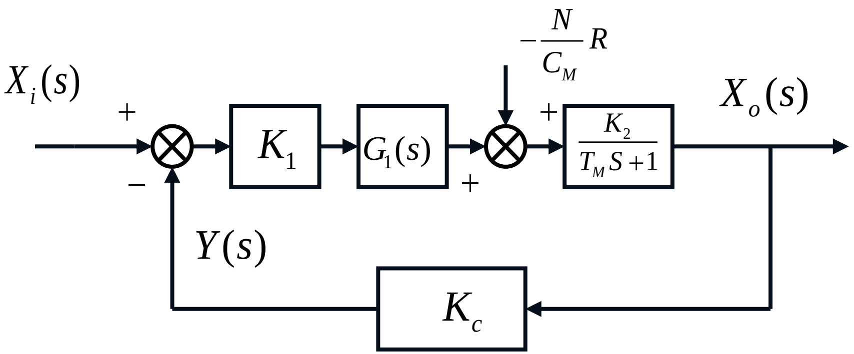
为进一步减小误差，可让 $G_1(s)=1+\dfrac{K_3}{s}$，称为**比例加积分控制**。选择K_3使系统具有一定的稳定裕量，干扰引起的稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-\dfrac{K_2K_c}{T_Ms+1}}{1+\dfrac{K_1K_2K_c}{T_MS+1}\left(1+\dfrac{K_3}{s}\right)}\cdot\left(\frac{-NR}{C_Ms}\right)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{-K_2K_c}{1+K_1K_2K_c(1+\infty)}\cdot\left(\frac{-NR}{C_Ms}\right)$$

$$=0$$

因而 $e_{ss}=0$



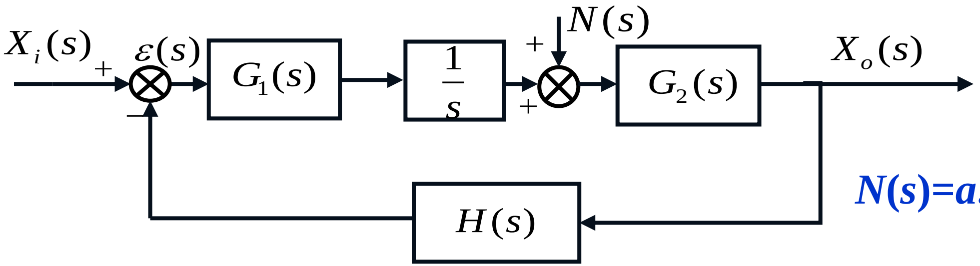
从物理意义上看，在干扰点与偏差信号之间加上积分环节就等于加入静态放大倍数为∞的环节，因此静误差为零。

思考：积分环节放在干扰扰动点之后呢？

积分环节消除前向通道的干扰作用

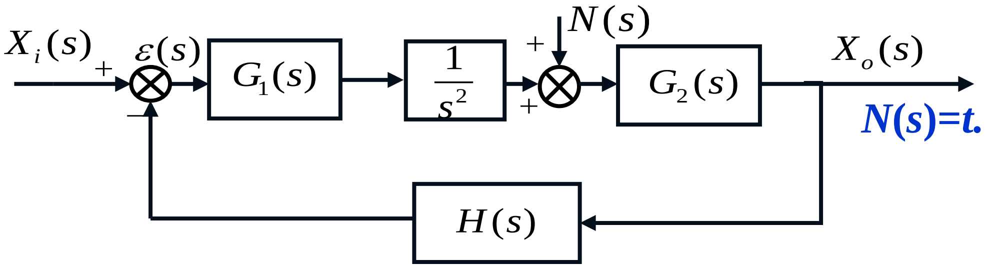
$G_1(s)$,$H(s)$中不包含纯微分环节，$G_2(s)$是被控对象

$$\frac{X_o(s)}{N(s)}=\frac{G_2(s)}{1+\frac{1}{s}G_1(s)G_2(s)H(s)} \qquad \frac{\varepsilon(s)}{N(s)}=-\frac{G_2(s)}{1+\frac{1}{s}G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



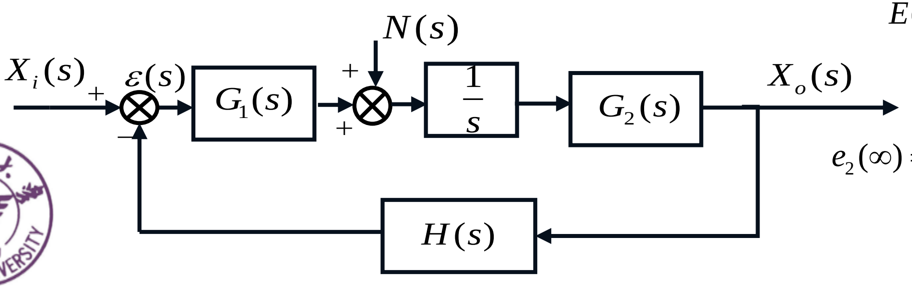
$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-sG_2(s)}{s+G_1(s)G_2(s)H(s)}\frac{a}{s}=0$$

$N(s)=a.1(t) \rightarrow e_{ss}=0$



$N(s)=t.1(t) \rightarrow e_{ss}=0$

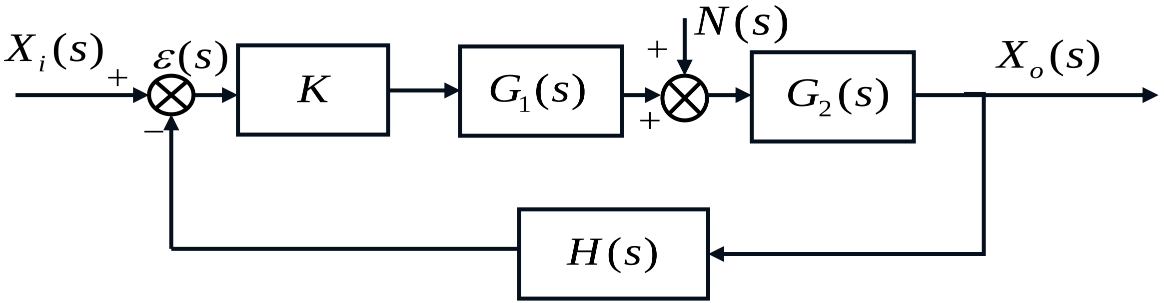
积分环节放在扰动点之后,对消除阶跃干扰引起的稳态误差没有什么改善！



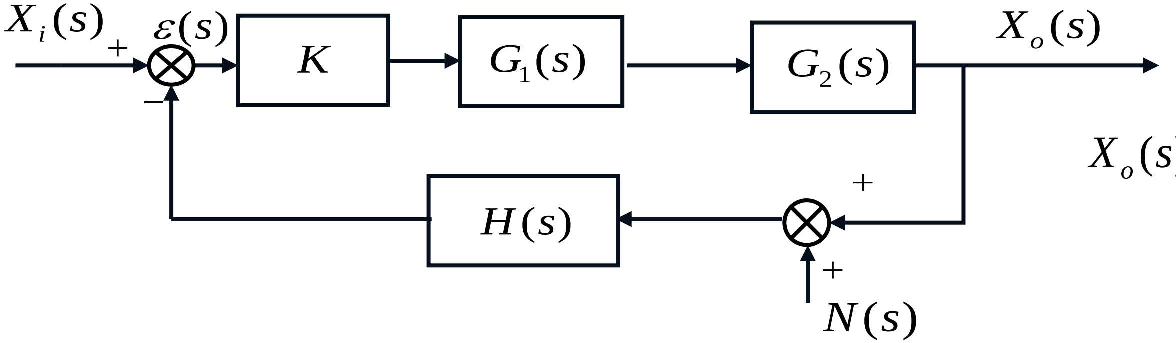
$$E(s)=\frac{-\frac{1}{s}G_2(s)}{1+\frac{1}{s}G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

$$e_2(\infty)=\lim_{s\to 0} s\frac{-1}{\frac{s}{G_2(s)}+G_1(s)H(s)}\frac{a}{s}=\boxed{\frac{-a}{G_1(0)H(0)}}$$

在反馈通道引入干扰的问题



$$X_o(s)=\frac{G_2(s)}{1+KG_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$



$$X_o(s)=\frac{-KG_1(s)G_2(s)H(s)}{1+KG_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

加大放大器增益K
并不能使扰动影响
减小！

6.4 减小系统误差的途径

减小系统误差的途径：

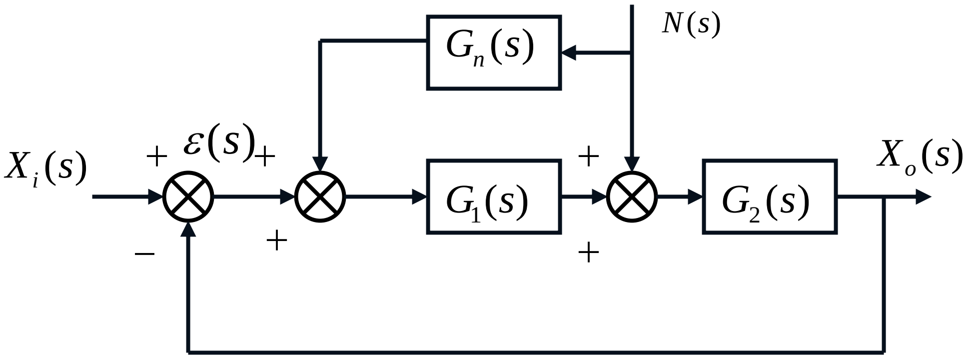
（1）反馈元件的精度要高，尽量避免在反馈通道引入干扰。

（2）在保证系统稳定的前提下，对于输入引起的误差，可通过增大系统开环放大倍数和提高系统型次将其减小；对于干扰引起的误差，可通过在系统前向通道干扰点前加积分器和增大放大倍数（包括反馈系数）将其减小。

（3）有的系统要求的性能很高，既要求稳态误差小，又要求良好的动态性能。这时，单靠加大开环放大倍数或串入积分环节往往不能同时满足上述要求，这时可采用复合控制的方法，或称顺馈的办法来对误差进行补偿。补偿的方式分两种：按干扰补偿和按输入补偿。

按干扰补偿

当干扰直接可测量时，那么就可利用这个信息进行补偿。



$$\frac{X_o}{N(s)}=\frac{G_2(s)+G_n(s)G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{G_2(s)[1+G_n(s)G_2(s)]}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

为消除干扰对输出的影响，令 $G_2(s)\left[1+G_n(s)G_1(s)\right]=0$

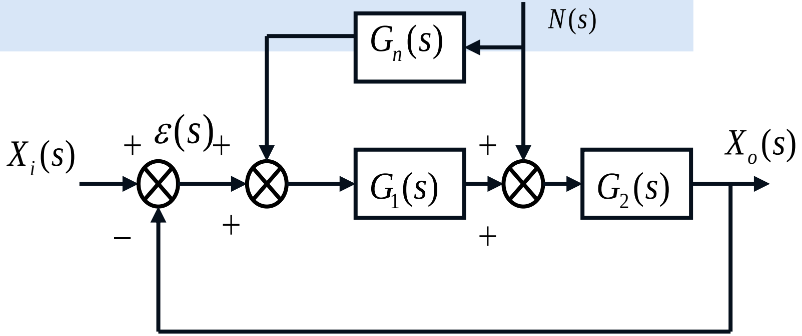
干扰全补偿条件 $G_n(s)=-\dfrac{1}{G_1(s)}$

按干扰补偿

从结构上看，就是利用双通道原理，两通道信号大小相等、方向相反，相加为零，实现全干扰补偿：

- 一条是由干扰信号经过$G_n(s)$、$G_1(s)$到达结构图上第二个相加点；
- 另一条是由干扰信号直接到达此相加点；

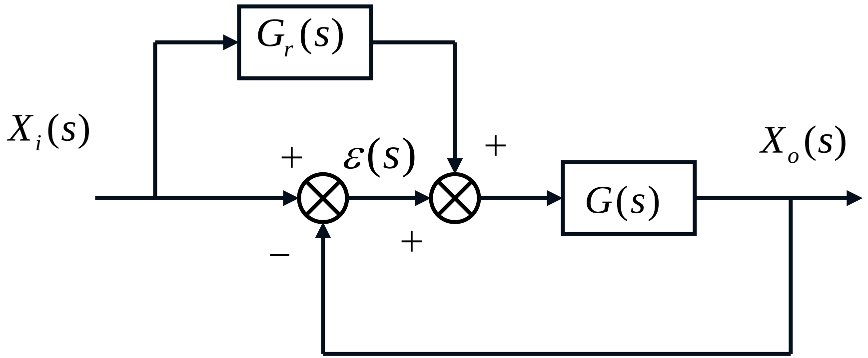
假设$G_1(s)=\frac{1}{T_1 s+1}$，那么$G_n(s)=-(T_1 s+1)$。
要实现$G_n(s)$有困难，因其分子多项式阶数高于分母多项式阶数；
可令$G_n(s)=-\frac{T_1 s+1}{T_2 s+1}$ ($T_1 \gg T_2$，超前校正环节)做到近似补偿，这样的传递函数在物理上将易于实现。



注意使用条件：
1）要求**干扰是可测量的**；
2）**补偿装置在物理上是可实现的**。

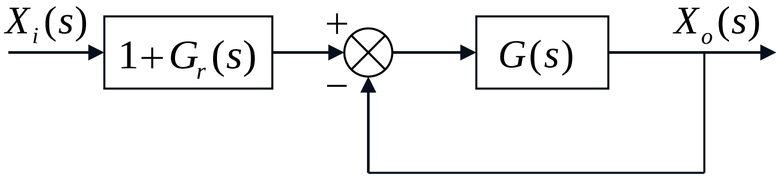
按输入补偿

系统结构如图



补偿器放在系统回路之外。因此设计系统回路时，可先保证其有良好的**动态性能**，然后再设置补偿器$G_r(s)$，以便提高系统的**稳态精度**。

按输入补偿



误差定义为

$$E(s)=X_i(s)-X_o(s)$$

$$X_o(s)=\left[1+G_r(s)\right]\cdot\frac{G(s)}{1+G(s)}\cdot X_i(s)$$

$$E(s)=X_i(s)-\left[1+G_r(s)\right]\cdot\frac{G(s)}{1+G(s)}\cdot X_i(s)$$

$$=\frac{1-G_r(s)G(s)}{1+G(s)}\cdot X_i(s)$$

为使$E(s)=0$,应保证

$$1-G_r(s)G(s)=0$$

即 $$G_r(s)=\frac{1}{G(s)}$$

干扰补偿和输入补偿的实施分析

上述分析可以看到：

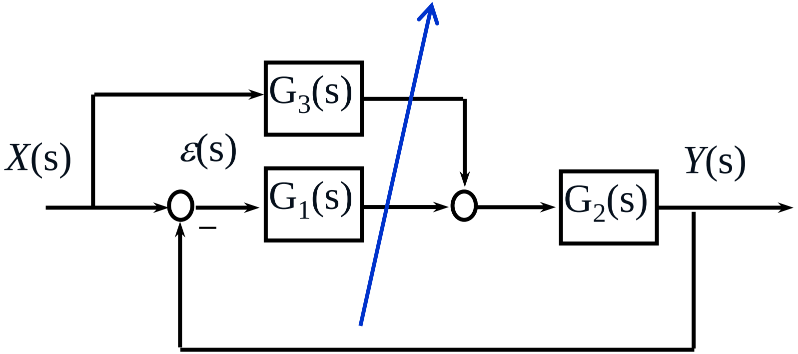
- 补偿通道并不影响特征方程，即不影响系统的稳定性
- 可以在不加补偿通道前，调好系统的动态性能，以保证足够的稳定裕量
- 再加入补偿通道，主要补偿掉稳态误差，减小动态误差。

实质：在反馈控制的基础上，引进控制信号的微分作为系统输入信号之一来减小误差。引进控制信号的微分（一般为一阶、二阶微分）和偏差信号一起控制被控对象，可大大提高随动系统的跟踪精度（具体表现为速度误差和加速度误差的减小）。将引进的控制信号微分称为顺馈控制信号，而将引进顺馈控制信号的控制通道称为顺馈控制通道。在反馈控制系统中，这种既通过偏差信号，又通过顺馈控制信号对被控制信号所进行的控制，称为复合控制。

控制系统误差分析例题

例7.系统方框图如附图所示，当输入为单位加速度时，试确定$G_3(s)$环节中的参数，使系统的静态误差为零。其中：

$$G_1(s)=K_1 \qquad G_2(s)=\frac{K_2}{s(T_1s+1)} \qquad G_3(s)=\frac{as^2+bs}{T_2s+1}$$

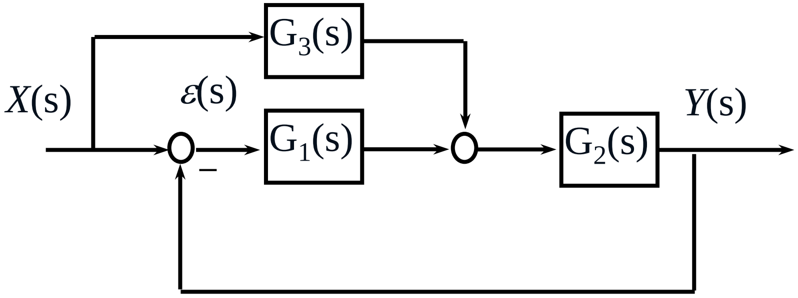


复合控制系统的一般形式

控制系统误差分析例题

解：系统闭环传递函数为：

$$Y(s)=\frac{G_2(G_1+G_3)}{1+G_1G_2}X(s)$$



$$E(s)=\varepsilon(s)=X(s)-Y(s)=\frac{1-G_2G_3}{1+G_1G_2}\cdot X(s)$$

已知： $X(s)=\frac{1}{s^3}$ $\quad G_1(s)=K_1$ $\quad G_2(s)=\frac{K_2}{s(T_1s+1)}$ $\quad G_3(s)=\frac{as^2+bs}{T_2s+1}$

因此： $$\frac{Y(s)}{X(S)}=\frac{G_2(G_1+G_3)}{1+G_1G_2}=\frac{K_2(as^2+(b+K_1T_2)s+K_1)}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+(1+K_1K_2T_2)s+K_1K_2}$$

控制系统误差分析例题

闭环特征方程： $T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+(1+K_1K_2T_2)s+K_1K_2=0$

因为n=3, 当特征方程的各项系数为正时，只需要检验$D_2=a_1a_2-a_0a_3$是否＞0，就可判断系统是否稳定。因

$$D_2=a_1a_2-a_0a_3=(T_1+T_2)(1+K_1K_2T_2)-K_1K_2T_1T_2=T_1+T_2+K_1K_2T_2^2>0$$

故可知闭环系统稳定，且与待求的$G_3(s)$环节中的参数无关。

而

$$E(s)=\frac{1-G_2G_3}{1+G_1G_2}\cdot X(s)=\frac{T_1T_2s^3+(T_1+T_2-K_2a)s^2+(1-K_2b)s}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+(1+K_1K_2T_2)s+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s^3}$$

欲使系统的静态误差为零，根据终值定理 $e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=0$

因此须使 $T_1+T_2-K_2a=0$ 以及 $1-K_2b=0$

即 $a=\dfrac{T_1+T_2}{K_2}$ $b=\dfrac{1}{K_2}$

6.5 动态误差系数

系统在过渡过程中，误差随时间的变化。

1. 单位反馈系统中，输入引起的误差传递函数在$s=0$的邻域展开成泰勒级数，并近似取前n阶导数项：

$$\Phi_e=\frac{E(s)}{X_i(s)}=\frac{1}{1+G(s)}=\Phi_e(0)+\Phi_e^{'}(0)s+\frac{1}{2!}\Phi_e^{''}(0)s^2+\ldots+\frac{1}{n!}\Phi_e^{(n)}(0)s^n$$

得到系统的误差函数：

$$E(s)=\Phi_e(s)X_i(s)$$

$$=\Phi_e(0)X_i(s)+\Phi_e^{'}(0)sX_i(s)+\frac{1}{2!}\Phi_e^{''}(0)s^2X_i(s)+\ldots+\frac{1}{n!}\Phi_e^{(n)}(0)s^nX_i(s)$$

若系统还有干扰：

$$E(s)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\Phi_e^{(n)}(0)s^nX_i(s)+\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{m!}\Phi_{eN}^{(m)}(0)s^mN(s)$$

动态误差系数

拉氏反变换，得到系统的时域误差函数：

$$e(t)=\Phi_e(0)x_i(t)+\Phi_e^{'}(0)x_i^{'}(t)+\frac{1}{2!}\Phi_e^{''}(0)x_i^{''}(t)+\ldots+\frac{1}{n!}\Phi_e^{(n)}(0)x_i^{(n)}(t)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\Phi_e^{(i)}(0)x_i^{(i)}(t)$$

$$=\frac{1}{\kappa_0}x_i(t)+\frac{1}{\kappa_1}x_i{'}(t)+\frac{1}{\kappa_2}x_i{''}(t)+\ldots+\frac{1}{\kappa_n}x_i^{(n)}(t)$$

$$e(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\Phi_e^{(i)}(0)x_i^{(i)}(t)+\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{m!}\Phi_{eN}^{(i)}(0)N^{(i)}(t)$$

动态误差系数例题

例8. 设有一单位反馈控制系统，其开环传递函数$G(s)=5/s(s+1)$

其输入信号$r(t)=r_0+r_1t+0.5r_2t^2$，求系统误差及稳态误差。

解：
$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{X_i(s)}=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{s^2+s}{s^2+s+5}$$

$$e(t)=(0+\frac{1}{5}s+\frac{4}{25}s^2+\ldots)r(t)$$
$$=\frac{1}{5}r'(t)+\frac{4}{25}r''(t)$$
$$=\frac{1}{5}(r_1+r_2t)+\frac{4}{25}r_2$$
$$=(0.2r_1+0.16r_2)+0.2r_2t$$

$$0.2s+0.16s^2+\ldots$$
$$5+s+s^2\sqrt{s+s^2}$$
$$-)\ s+0.2s^2+0.2s^3$$
$$0.8s^2-0.2s^3$$
$$-)\ 0.8^2+0.16s^3+0.16s^4$$
$$-0.36s^3-0.16s^4$$
$$\ldots\ldots$$

第六章作业

❖课后习题

11（MatLab）必做

2，8，9，10，13，14，16（任选4题）