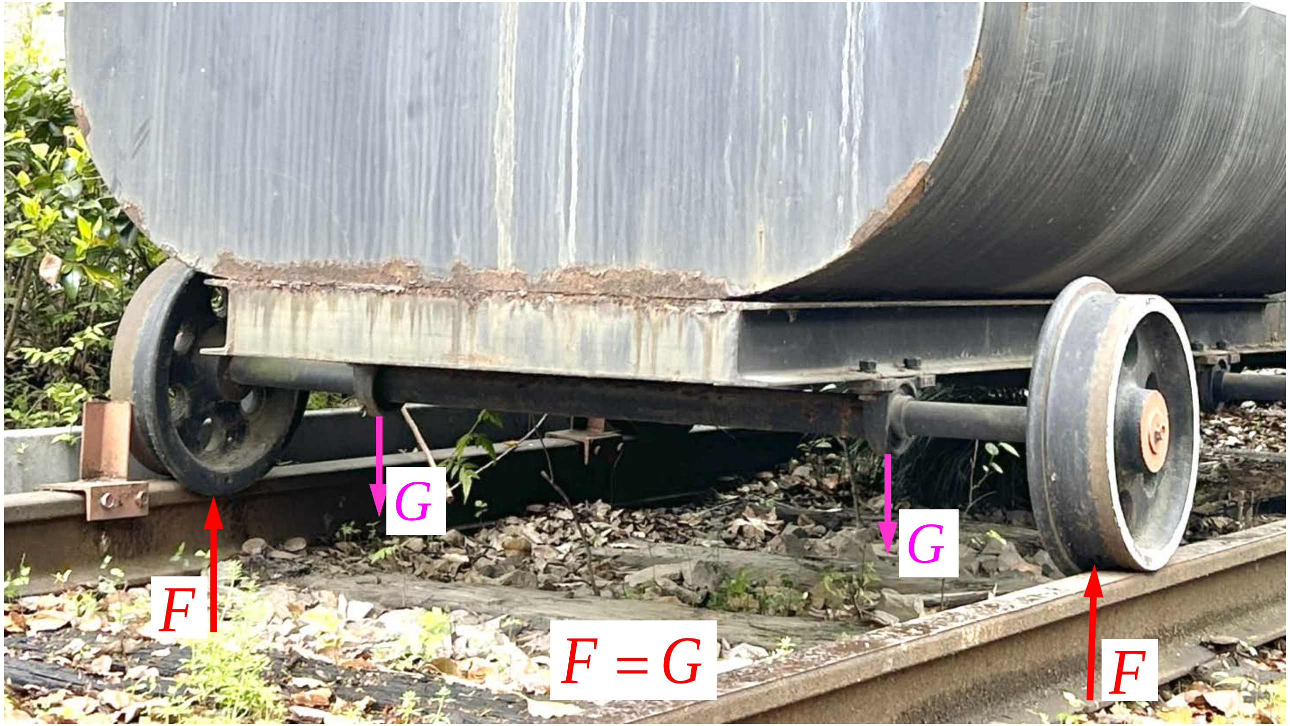
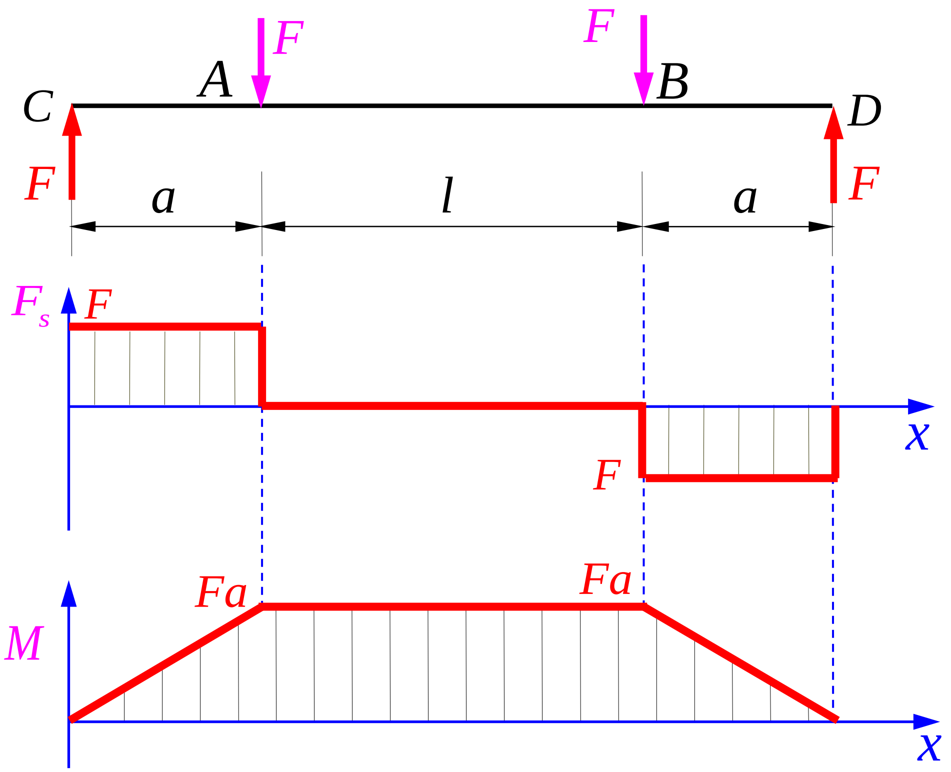
第五章　弯曲应力（一）

第13讲

§5.1 概 述

纯弯曲和横力弯曲的概念





作内力图

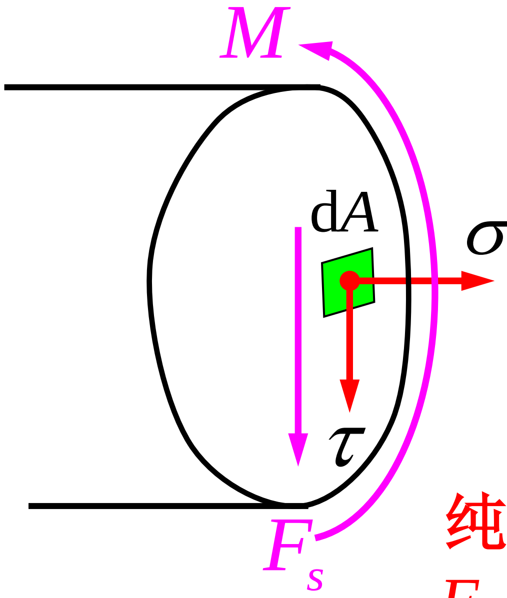
AB段： $F_s = 0, M = \text{const}$

梁在对称面仅受一对外力偶的作用，称为**纯弯曲**（pure bending）

AC和BD段：

$F_s \neq 0, \ M \neq 0$

称为横力弯曲（nonuniform bending）



在横截面上：

弯曲内力：M, F_s　　$\tau \mathrm{d}A \Rightarrow F_s$　　$\tau \Leftrightarrow F_s$

弯曲应力：σ, τ　　$\sigma \mathrm{d}A \Rightarrow M$　　$\sigma \Leftrightarrow M$

只有切向内力元素$\tau \mathrm{d}A$才能合成剪力F_s！

只有法向内力元素$\sigma \mathrm{d}A$才能合成弯矩M！

纯弯曲情形：

$F_s = 0 \Rightarrow \tau = 0$

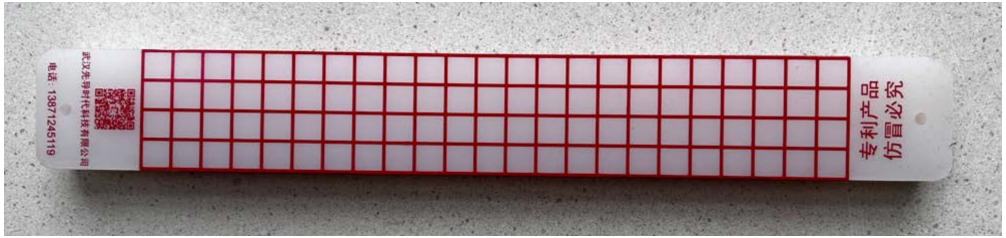
$M \neq 0 \Rightarrow \sigma = ?$

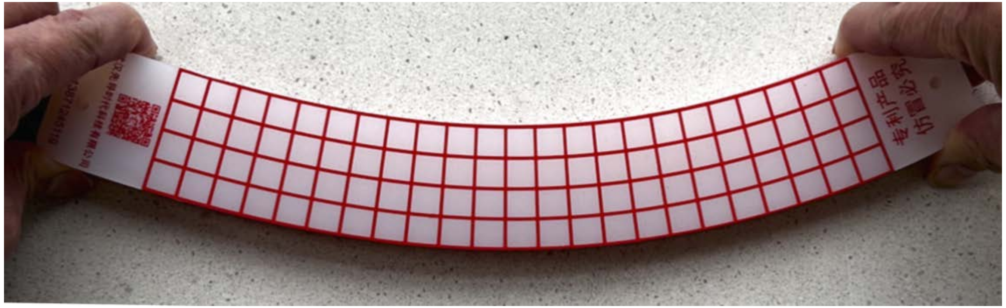
从三方面考虑：$\begin{cases} \text{几何关系} \\ \text{物理关系} \\ \text{静力学关系} \end{cases}$

§5.2 纯弯曲时的正应力

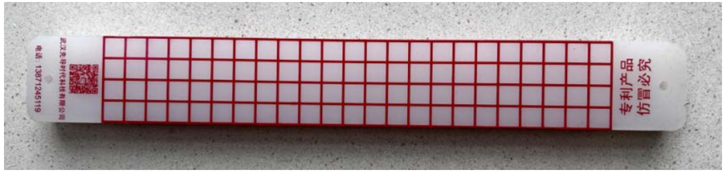
一、几何关系

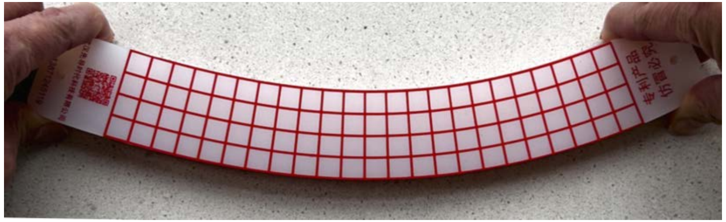
用较易变形的材料制成的矩形截面等直梁作纯弯曲试验





变形观察





纵向线

各纵向线段弯成弧线；

靠近顶端的纵向线缩短；

靠近底端的纵向线段伸长.

横向线

各横向线仍保持为直线；

相对转过了一个角度；

仍与变形后的纵向弧线垂直.

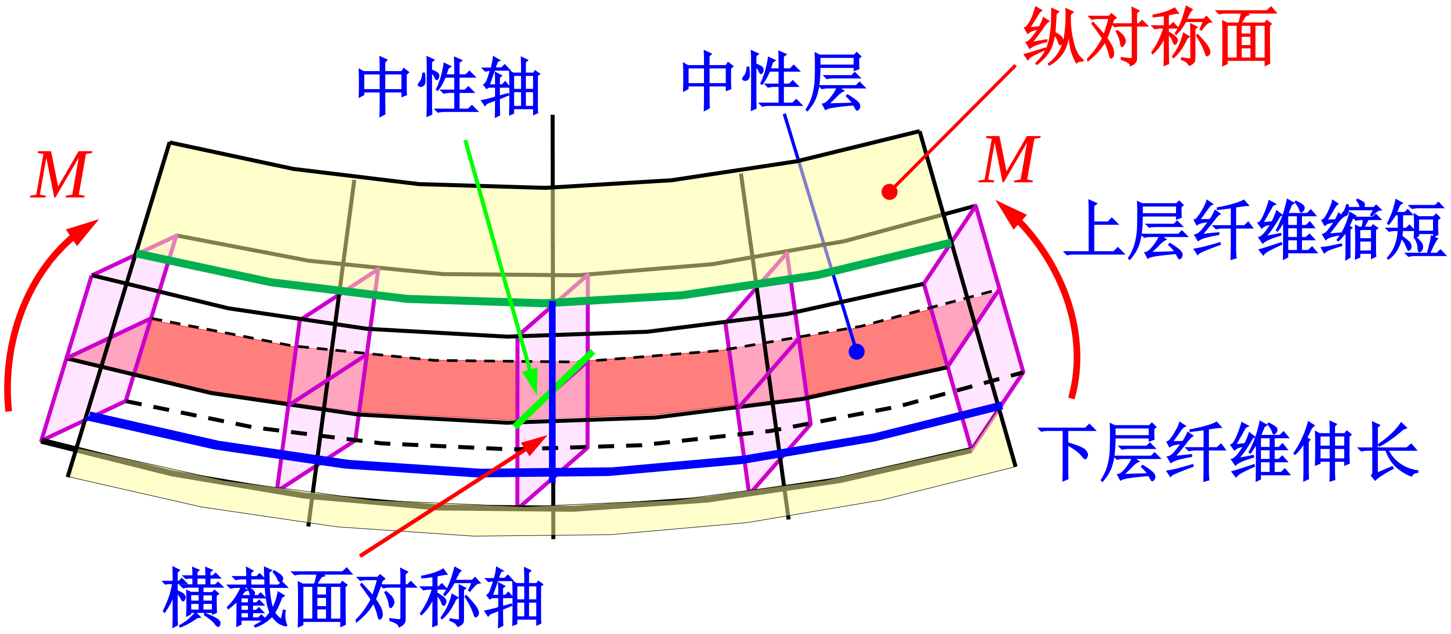
梁在纯弯曲时的平面假设:

梁的各个横截面在变形后仍保持为平面，并仍垂直于变形后的轴线，只是横截面绕某一轴旋转了一个角度。

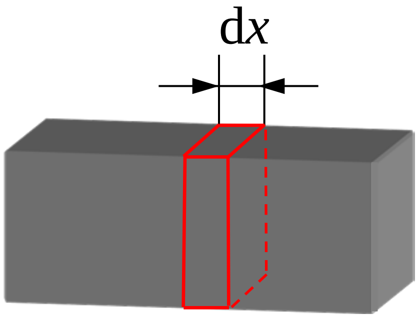
中性层和中性轴

推论：必有一层变形前后长度不变的纤维—中性层

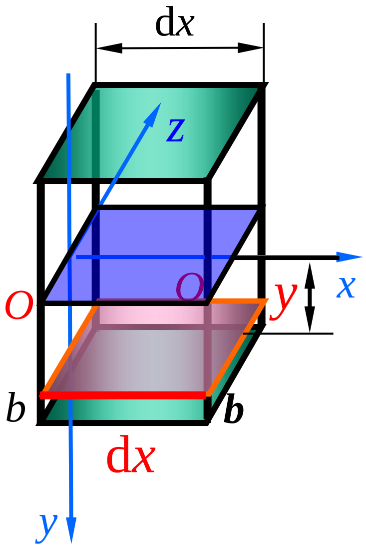
中性层与横截面的交线称为中性轴



几何关系的三维图示

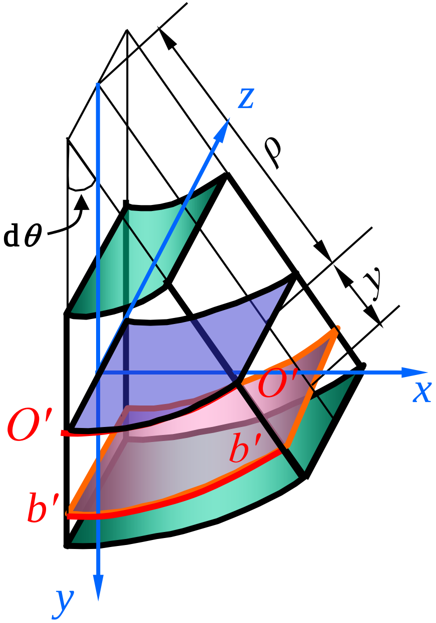


图（a）



图（b）

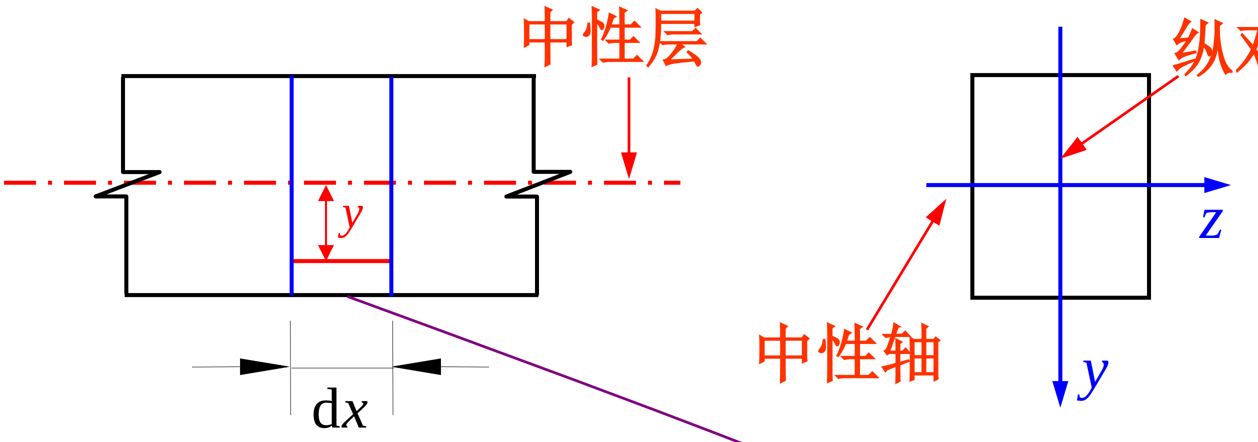
变形前

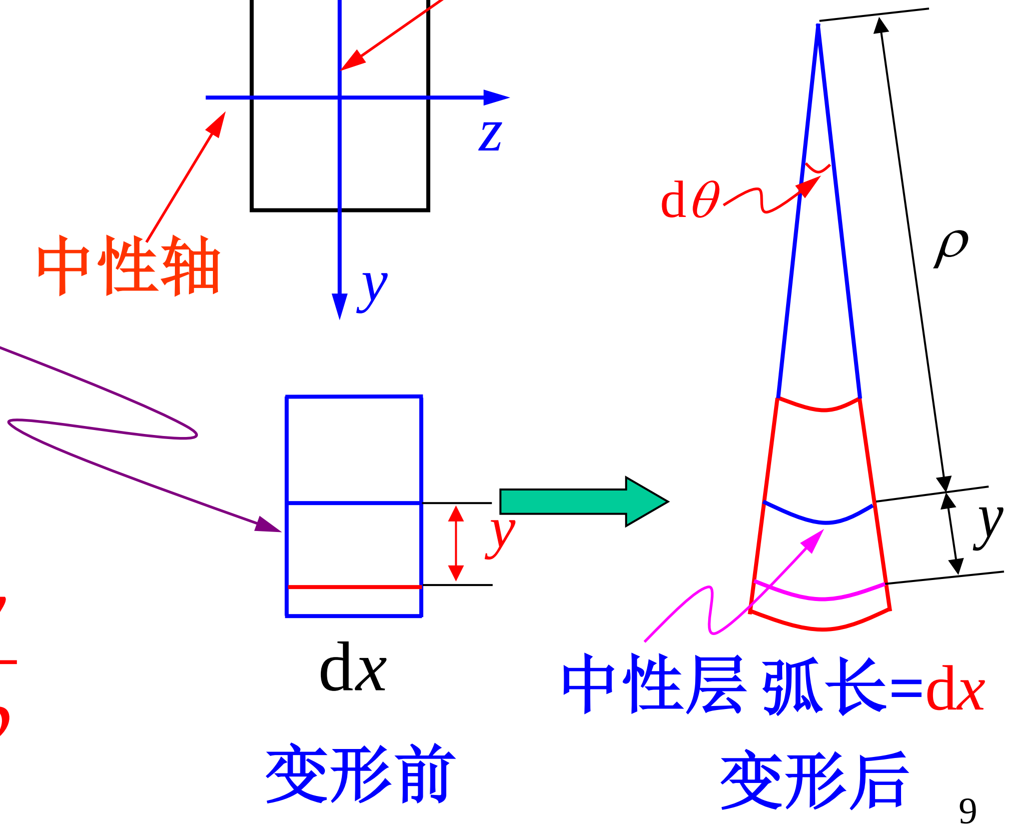


图（c）

变形后

几何关系的二维图示





横截面上距中性轴y处

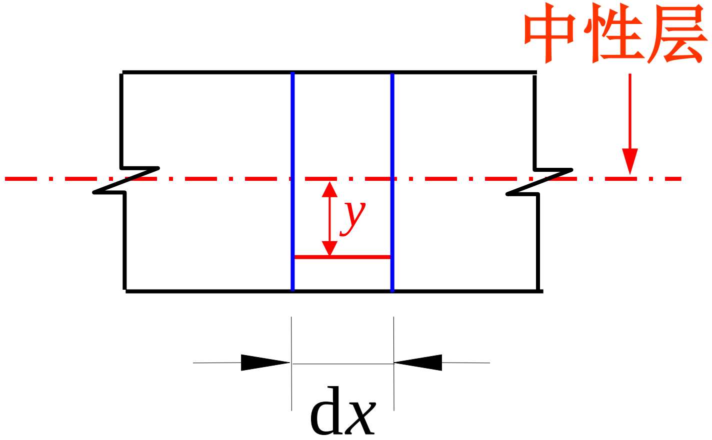
其纵向线应变为

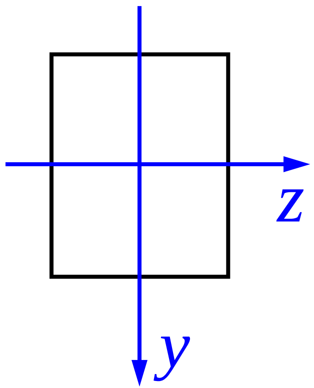
$$\varepsilon=\frac{(\rho+y)\mathrm{d}\theta-\rho\mathrm{d}\theta}{\rho\mathrm{d}\theta}=\frac{y}{\rho}$$

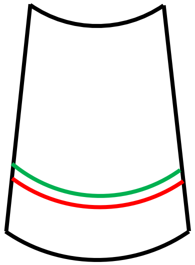
二、物理关系

作**单向受力假设**：假设各纵向纤维之间互不挤压。

$$\sigma = E\,\varepsilon = E\,\frac{y}{\rho}$$







三、静力关系

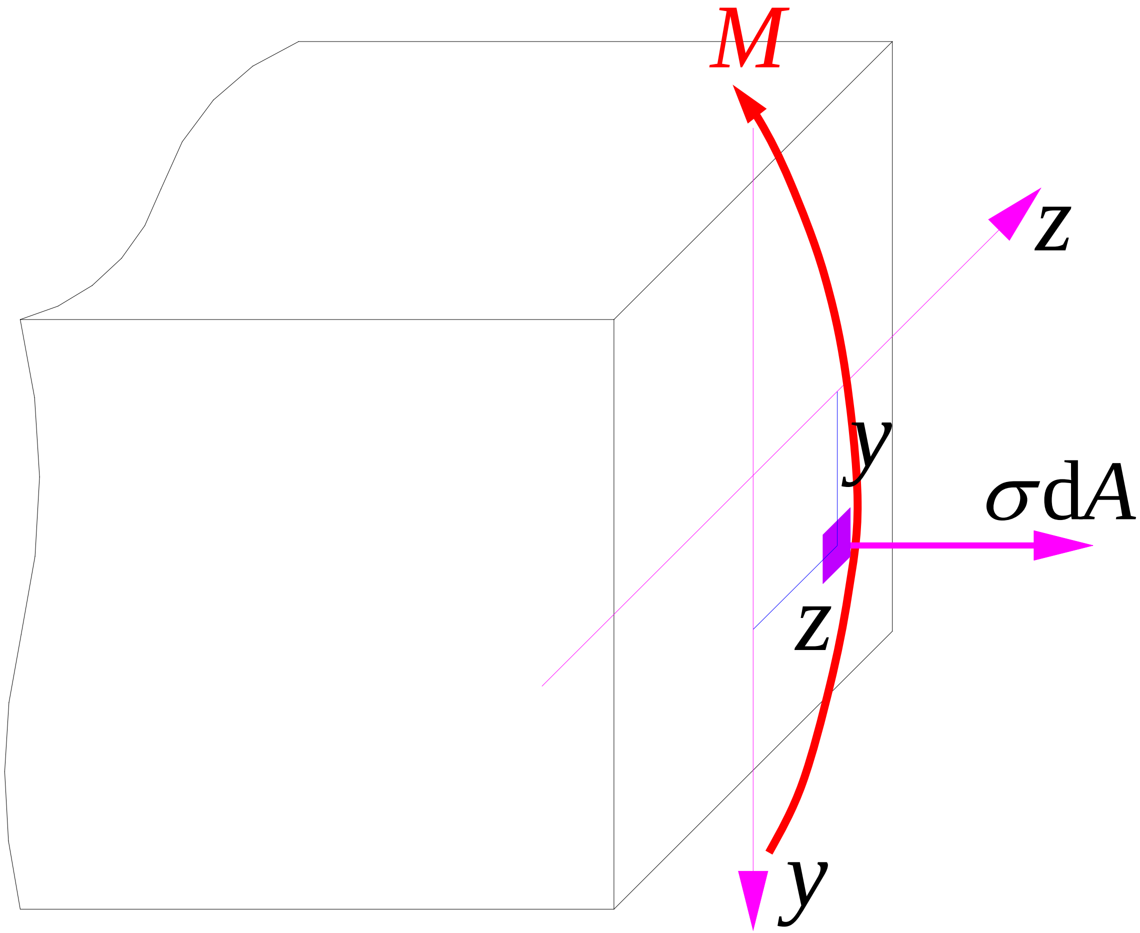
内力元素$\sigma \mathrm{d}A$构成

空间平行力系

$$F_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0$$

$$M_y = \int_A z \cdot \sigma \mathrm{d}A = 0$$

$$M = \int_A y \cdot \sigma \mathrm{d}A$$



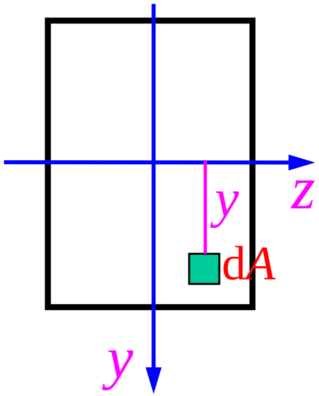
考察 $F_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0$

$$\Big\downarrow \ \sigma = E\frac{y}{\rho}$$

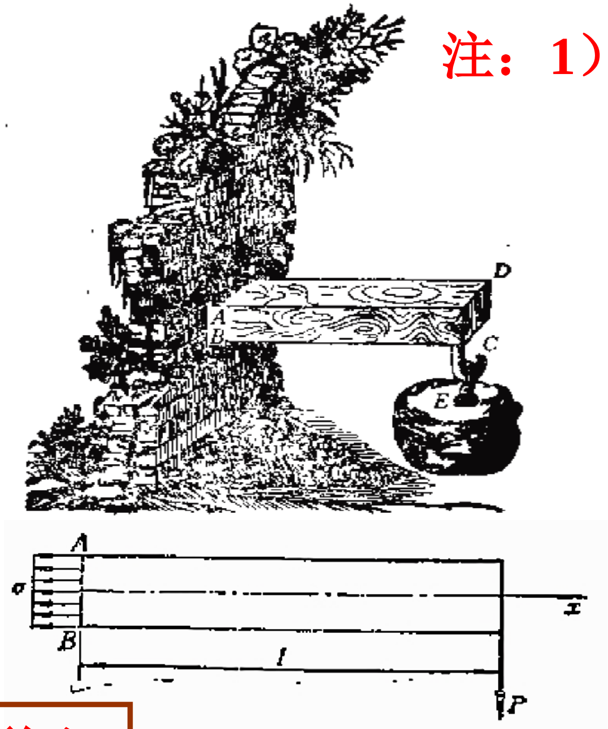
$$\Rightarrow \int_A E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = 0$$

$$\Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A y\mathrm{d}A = 0 \Rightarrow \int_A y\mathrm{d}A = 0$$

$$\Rightarrow S_z = 0$$



注：1）

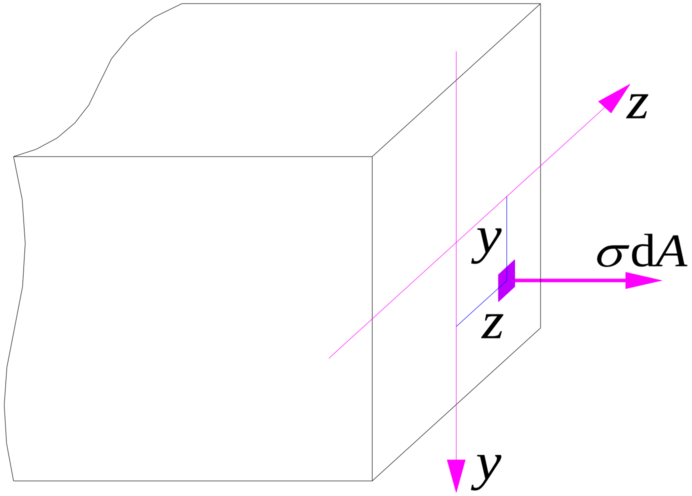


中性轴经过截面的形心

1） 老亮等，材料力学史漫话，高等教育出版社，1993.

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}$$

考察 $M_y = \int_A z \cdot \sigma \mathrm{d}A = 0 \Rightarrow \int_A z \cdot E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = 0$



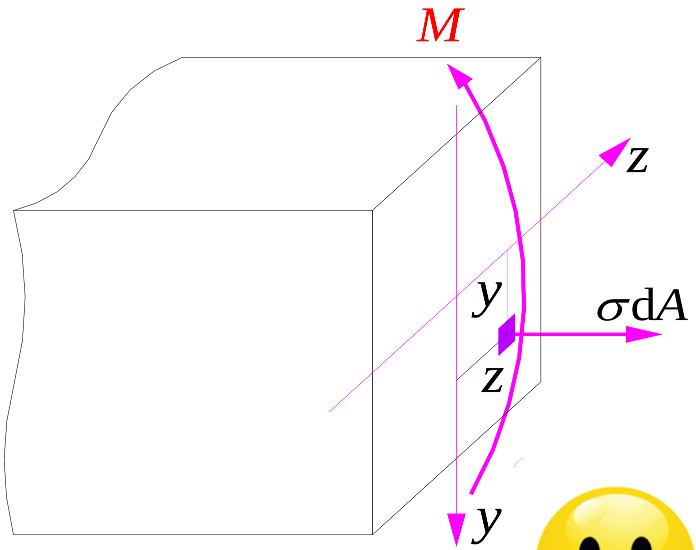
$$\Rightarrow \int_A yz\mathrm{d}A = 0$$

$$\Rightarrow I_{yz} = 0$$ 自动满足

因y轴为对称轴

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}$$

考察 $\int_A y\cdot\sigma \mathrm{d}A = M \Rightarrow \int_A y\cdot E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = M \Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A y^2 \mathrm{d}A = M$



$$\Rightarrow \frac{EI_z}{\rho} = M \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

代入

$$\sigma = E\frac{y}{\rho} \Rightarrow \sigma = \cancel{E}\frac{M\cdot y}{\cancel{E}I_z}$$

纯弯曲时正应力的计算公式

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

小结：几个重要的结果

中性轴经过截面形心 ← 由横截面上正应力合成的轴力等于零来确定

中性层的曲率公式 $|k| = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI_z}$

抗弯刚度

$\varphi' = \dfrac{T}{GI_p}$

抗扭刚度

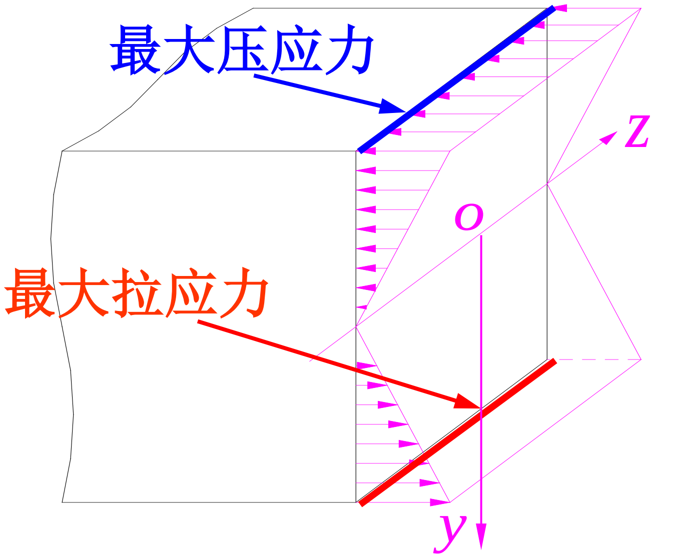
纯弯曲时正应力计算公式 $\sigma = \dfrac{My}{I_z}$

$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{F}{EA}$

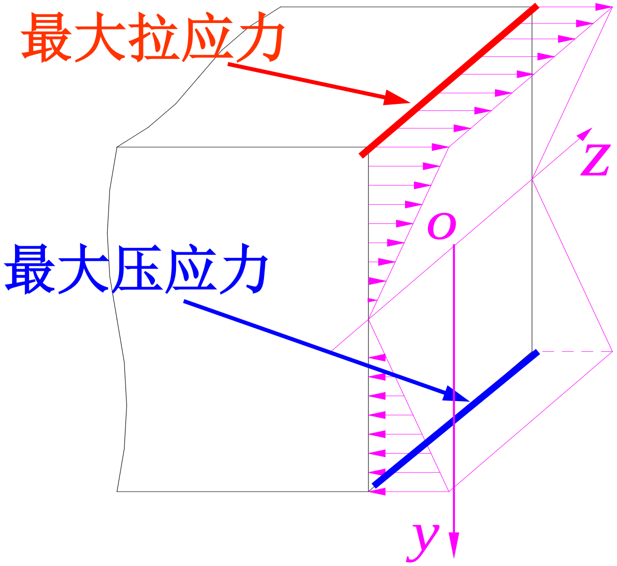
抗拉刚度

横截面上的应力分布图：$\sigma = \dfrac{My}{I_z}$

$M > 0$



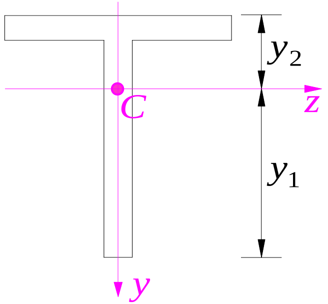
$M < 0$



$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z} \qquad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

抗弯截面系数

T型截面上的最大正应力（假设弯矩$M>0$）：

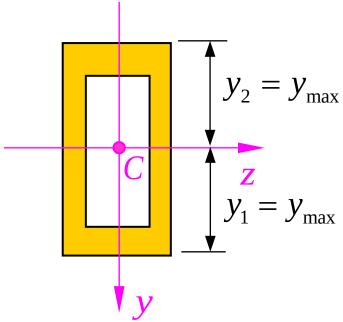


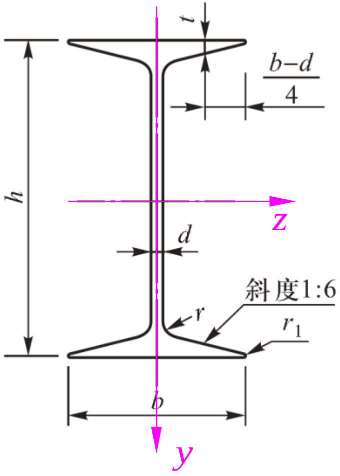
$$\sigma_{t\max}=\frac{My_1}{I_z},\qquad \sigma_{c\max}=\frac{My_2}{I_z}$$

特征：

最大拉应力和最大压应力在数值上不相等！

当中性轴是横截面的对称轴时：

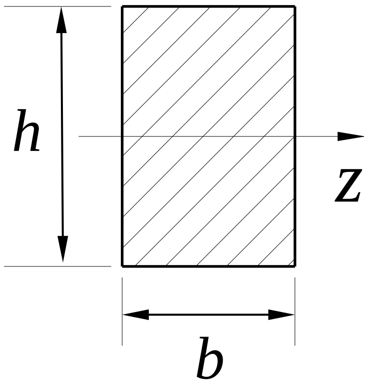




$$y_1=y_2=y_{\max}$$

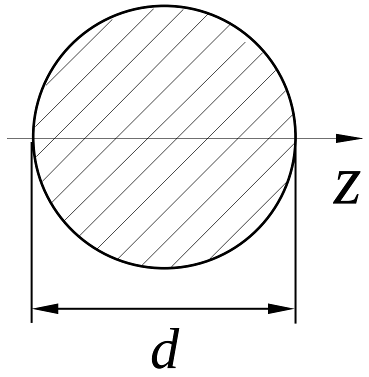
$$\sigma_{t\max}=\sigma_{c\max}$$

几种常见截面的I_z和W_z



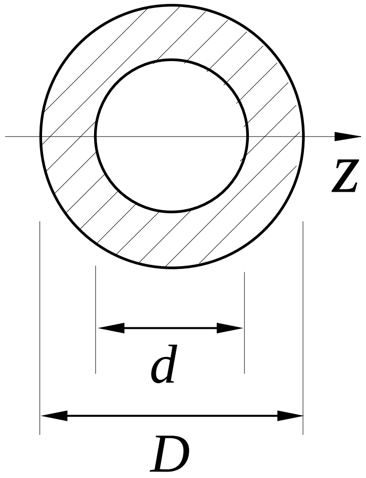
$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$



$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

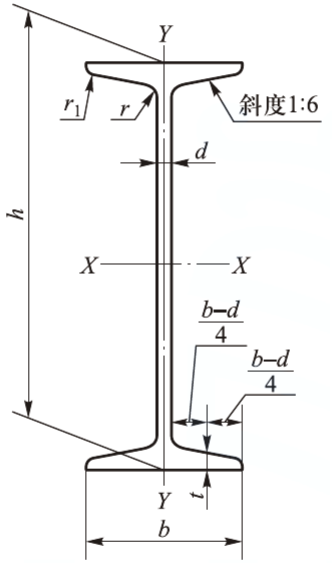
$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}$$



$$I_z = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$$

附录III 型钢表（GB/T 706-2016） pp. 368-385（工字钢、槽钢、等边角钢、不等边角钢的截面尺寸、截面面积、截面特性）



说明：
h——高度；
b——腿宽度；
d——腰厚度；
t——腿中间厚度；
r——内圆弧半径；
r_1——腿端圆弧半径。

型号	截面尺寸/mm						截面面积/cm²	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m²/m)	惯性矩/cm⁴		惯性半径/cm		截面模数①/cm³	
	h	b	d	t	r	r_1				I_x	I_y	i_x	i_y	W_x	W_y
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.33	11.3	0.432	245	33.0	4.14	1.52	49.0	9.72
12	120	74	5.0	8.4	7.0	3.5	17.80	14.0	0.493	436	46.9	4.95	1.62	72.7	12.7
12.6	126	74	5.0	8.4	7.0	3.5	18.10	14.2	0.505	488	46.9	5.20	1.61	77.5	12.7
14	140	80	5.5	9.1	7.5	3.8	21.50	16.9	0.553	712	64.4	5.76	1.73	102	16.1
16	160	88	6.0	9.9	8.0	4.0	26.11	20.5	0.621	1 130	93.1	6.58	1.89	141	21.2
18	180	94	6.5	10.7	8.5	4.3	30.74	24.1	0.681	1 660	122	7.36	2.00	185	26.0
20a	200	100	7.0	11.4	9.0	4.5	35.55	27.9	0.742	2 370	158	8.15	2.12	237	31.5
20b		102	9.0				39.55	31.1	0.746	2 500	169	7.96	2.06	250	33.1
22a	220	110	7.5	12.3	9.5	4.8	42.10	33.1	0.817	3 400	225	8.99	2.31	309	40.9
22b		112	9.5				46.50	36.5	0.821	3 570	239	8.78	2.27	325	42.7

① 本书正文中称为截面系数。

§5.3 横力弯曲时的正应力

纯弯曲正应力公式 $\sigma = \dfrac{My}{I_z}$

上式是在平面假设和单向受力假设的基础上推导的，实验证明在纯弯曲情况下是正确的。

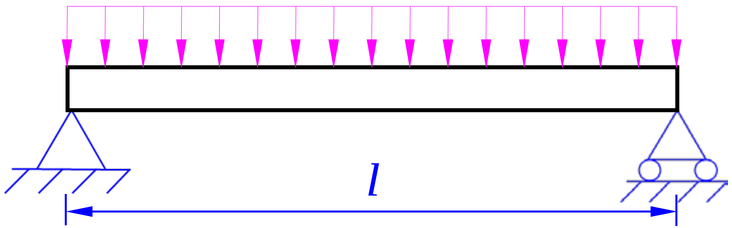
对于横力弯曲:

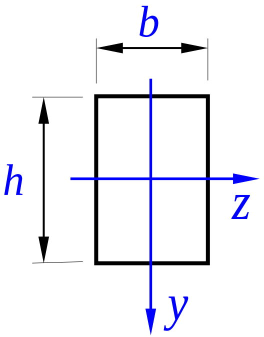
① 由于存在剪力，横截面将产生剪切变形，使横截面发生翘曲。

② 此外，在与中性层平行的纵截面上，有时还有由横向力引起的挤压应力（如表面作用均布载荷情形）。

因此，梁在纯弯曲时所作的平面假设和单向受力假设都不成立。

矩形截面简支梁受均布荷载作用

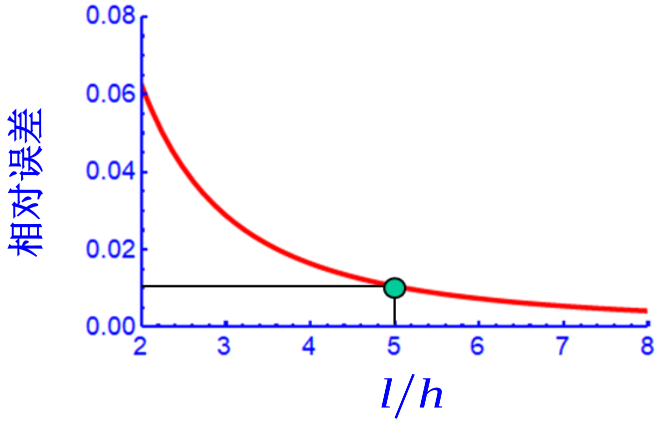




弹性力学解 [1)]

$$\sigma_x = \underbrace{\boxed{\frac{My}{I_z}}}_{\text{纯弯曲正应力公式}} + \underbrace{\boxed{q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5}\right)}}_{\text{修正项}}$$

$$\sigma_y = -\frac{q}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right)^2$$



当 $\dfrac{l}{h} > 5$时，跨中截面处的最大弯曲正应力用 $\sigma = \dfrac{My}{I_z}$ 公式计算的相对误差不超过1%。

有非常好的计算精度！

---

1) 徐芝纶, 弹性力学（第4版）, 高等教育出版社, 2006.

梁的弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

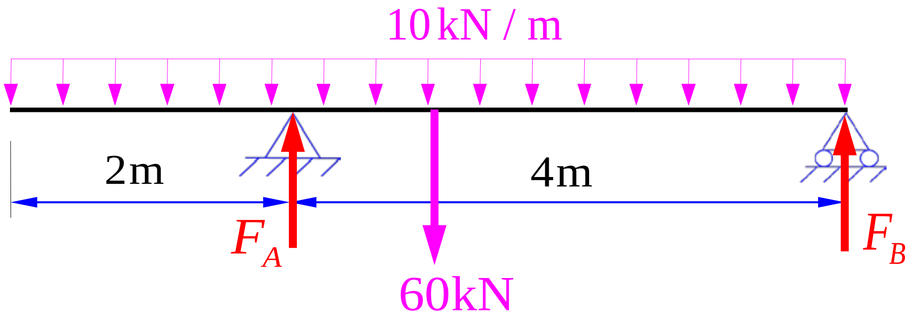
利用上式可以进行三方面的强度计算：

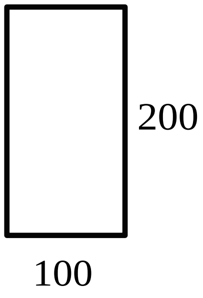
[1] 已知外力、截面形状尺寸、许用应力，校核梁的强度

[2] 已知外力、截面形状、许用应力，设计梁的截面尺寸

[3] 已知截面形状尺寸、许用应力， 求许可载荷

例1 图示受均布载荷作用的外伸梁，材料的许用应力[σ]=160MPa，按弯曲正应力校核该梁的强度。





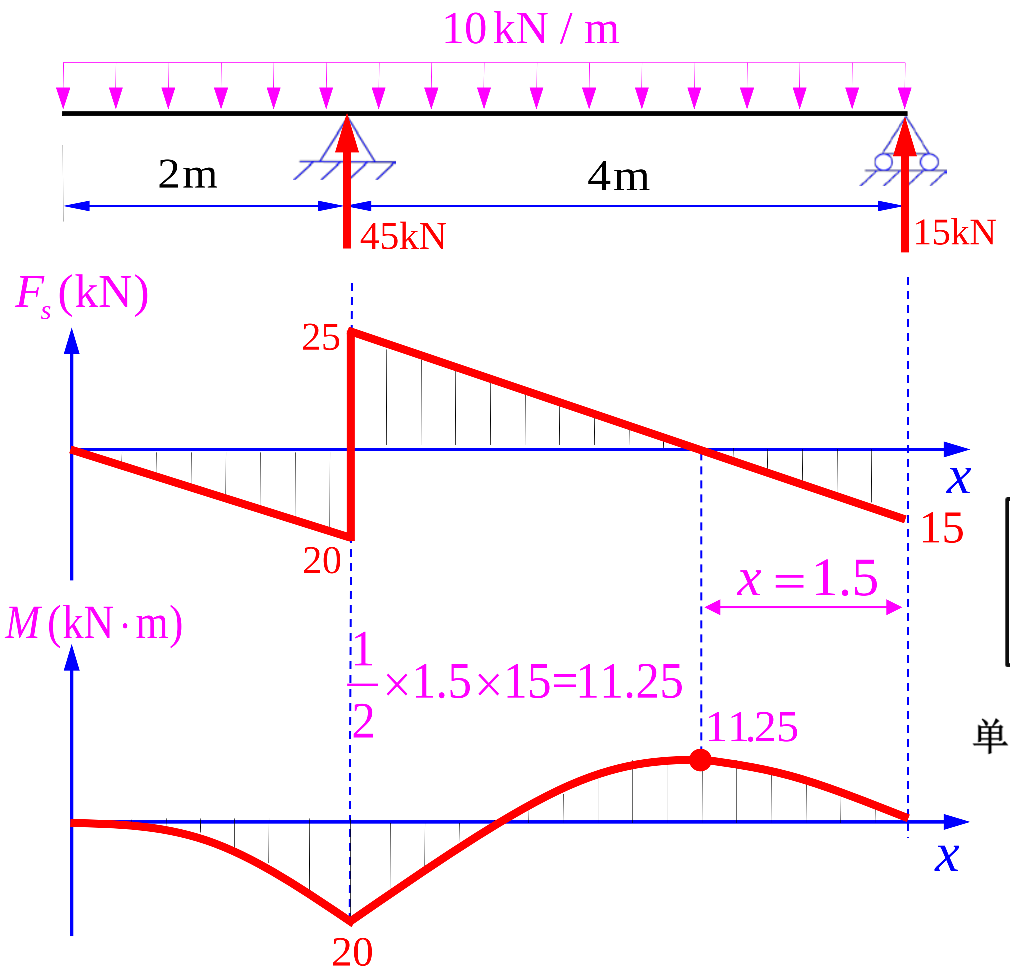
单位：mm

解： 先确定危险截面及最大弯矩 M_{max}

作剪力图和弯矩图

求支座约束力 $F_A \times 4 = 60 \times 3 \Longrightarrow F_A = 45\text{kN}$

$$F_B = 60\text{kN} - 45\text{kN} = 15\text{kN}$$

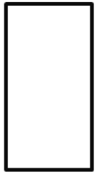


解： 确定危险截面及最大弯矩 M_{max}

作剪力图和弯矩图

由弯矩图可知

$$M_{max} = 20\,\mathrm{kN\cdot m}$$

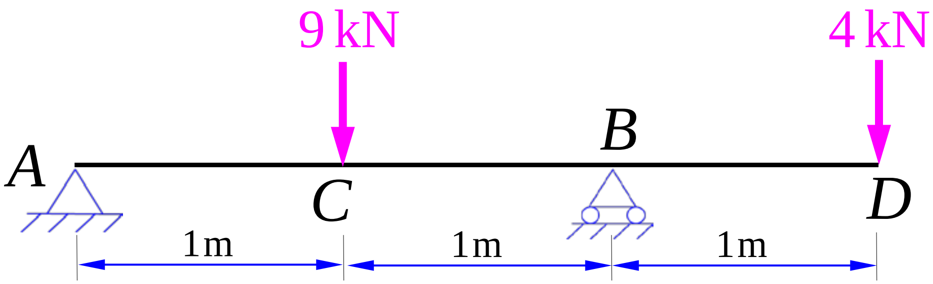


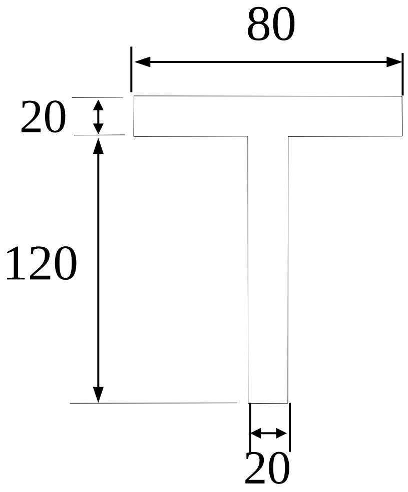
$$\sigma_{t\max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{20\times10^3}{\frac{0.1\times0.2^2}{6}}$$

$$= 30\mathrm{MPa} < [\sigma] = 160\mathrm{MPa}$$

该梁满足强度条件，安全

例2 图示放置的铸铁梁，许用拉应力$[\sigma_t]$=30MPa，许用压应力$[\sigma_c]$=60MPa，试校核此梁的强度。

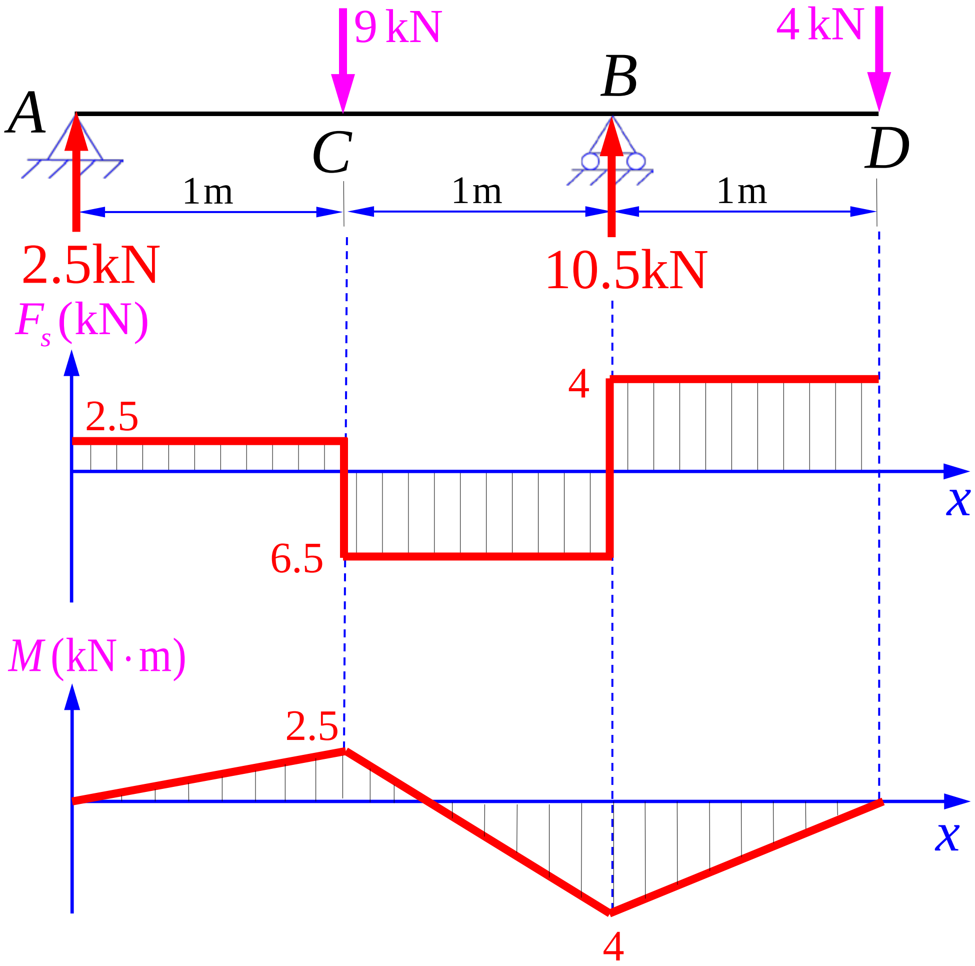




分析：

1）对于铸铁梁，拉伸和压缩力学性能不同，在危险截面处，拉伸强度和压缩强度都应校核。

2）对于T型截面梁，形心到上下表面的距离是不相等的。



解：1）确定危险截面

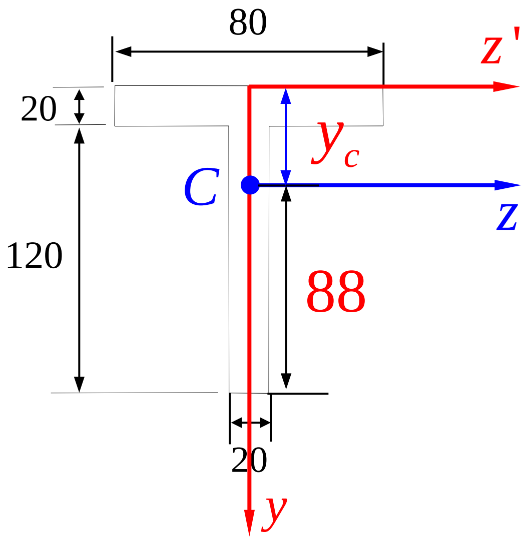
及最大弯矩 M_{max}

对于只有集中力作用情形，弯矩图各段均为直线，且在各集中力作用处，弯矩图有尖角 。

此时，危险截面（弯矩最大的截面）肯定出现在集中力作用处或支座处。

$$M_{max} = 4\,\text{kN}$$

2）强度校核 $\sigma = \dfrac{My}{I_z}$



求截面形心

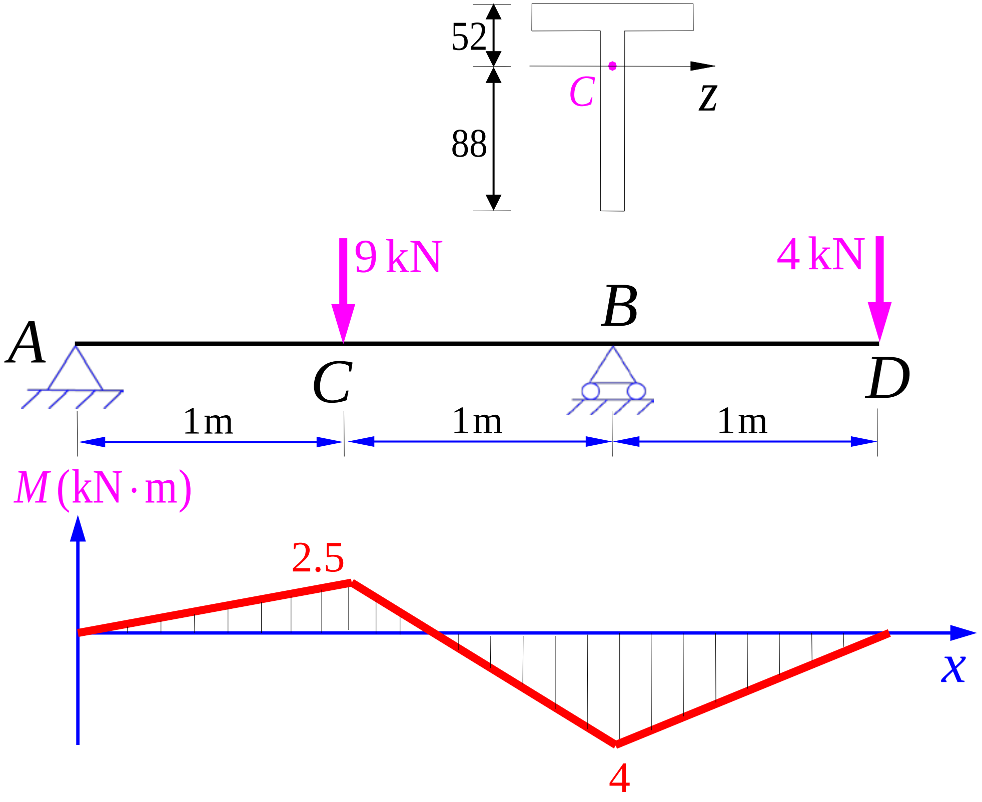
$$y_c = \frac{80\times 20\times 10 + 120\times 20\times (20+60)}{80\times 20 + 120\times 20}$$

$$= 52\text{mm}$$

求截面对中性轴z的惯性矩

$$I_z = \frac{80\times 20^3}{12} + 80\times 20\times (52-10)^2 + \frac{20\times 120^3}{12} + 20\times 120\times (88-60)^2$$

$$= 7.63\times 10^{-6}\,\text{m}^4$$



危险截面及作用弯矩

（1）截面B（上部受拉）

$$M_B = 4.0\ \text{kN.m}$$

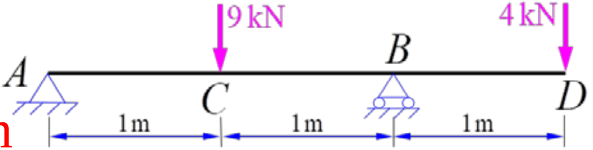
（2）截面C （下部受拉）

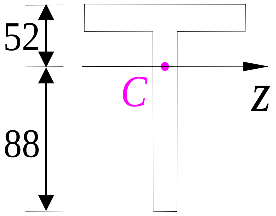
$$M_C = 2.5\ \text{kN.m}$$

哪个截面上的应力最大，需具体计算后才能确定！

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

强度校核





B截面（上拉下压）：$M_B = 4.0\ \text{kN.m}$

$$\sigma_{tB} = \frac{M_B \cdot y_{t\max}}{I_z} = \frac{4.0\times10^3\times52\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}} = 27.3\text{MPa} < [\sigma_t] = 30\text{MPa}$$

$$\sigma_{cB} = \frac{M_B \cdot y_{c\max}}{I_z} = \frac{4.0\times10^3\times88\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}} = 46.1\text{MPa} < [\sigma_c] = 60\text{MPa}$$

$I_z = 7.63\times10^{-6}\text{m}^4$

B截面安全！

C截面（上压下拉）：$M_C = 2.5\ \text{kN.m}$

$$\sigma_{tC} = \frac{M_C \cdot y_{t\max}}{I_z} = \frac{2.5\times10^3\times88\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}} = 28.8\text{MPa} < [\sigma_t] = 30\text{MPa}$$

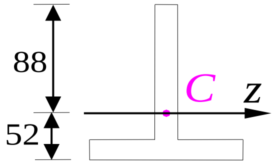
$$\sigma_{cC} = \frac{M_C \cdot y_{c\max}}{I_z} = \frac{2.5\times10^3\times52\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}} = 17.0\text{MPa} < [\sigma_c] = 60\text{MPa}$$

C截面安全！

综上，此梁安全!

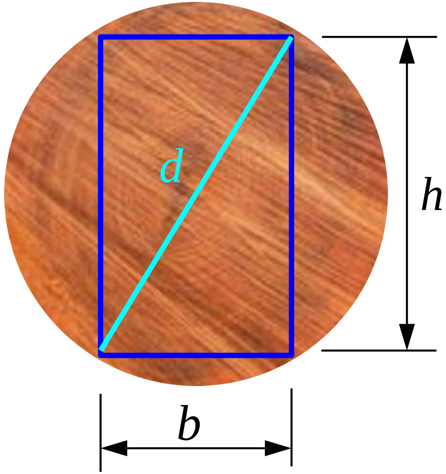
若梁上下倒置，是否合适?

不合适！



$$\sigma_{tB} = \frac{M_B \cdot y_{t\max}}{I_z} = \frac{4.0\times10^3\times88\times10^{-3}}{7.63\times10^{-6}} = 46.1\text{MPa} > [\sigma_t] = 30\text{MPa}$$

例3 从圆木中锯出矩形截面梁，请确定矩形截面梁的最佳尺寸比例，高度h:b是多少？



我国的《营造法式》中给出的尺寸比例是h:b=3:2=1.5。

《营造法式》的作者是宋代李诫，出版于1103年。是北宋官方颁布的一部建筑设计、施工的规范书。这是我国古代最完整的建筑技术书籍，标志着中国古代建筑已经发展到了较高阶段。

解：由 $\sigma = \dfrac{M}{W_z}$ 知，原问题要求所锯出矩形截面梁的 W_z 最大！

矩形截面：$W_z = \frac{1}{6}bh^2$

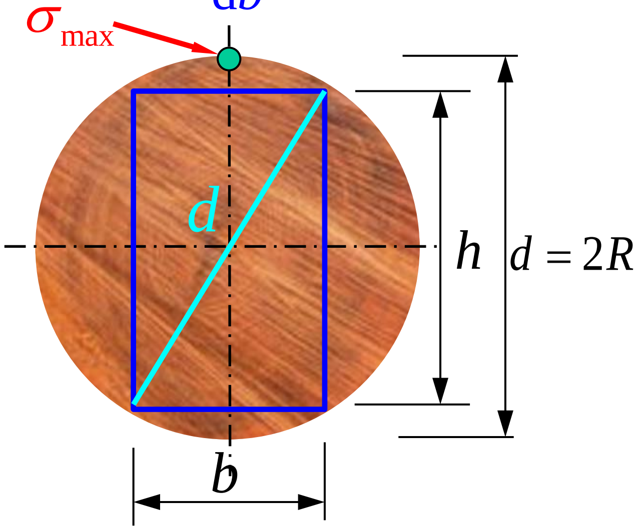
设圆木的直径为d，则有 $b^2 + h^2 = d^2$，则 $W_z = \frac{1}{6}b(d^2 - b^2)$

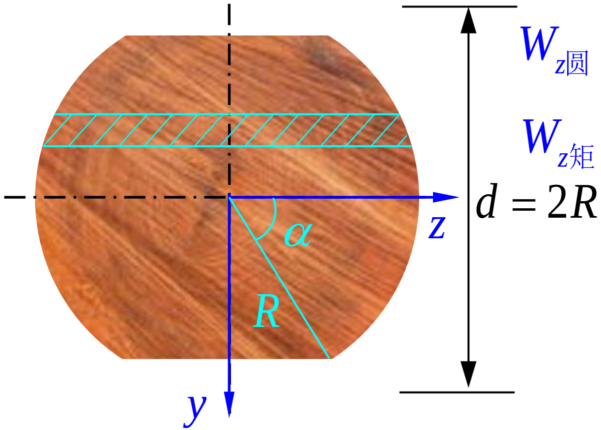
$= \frac{1}{6}(bd^2 - b^3)$

$$W_z = \frac{1}{6}(bd^2 - b^3)$$

与《营造法式》中给出的$h:b=1.5$接近！

$$\frac{\mathrm{d}W_z}{\mathrm{d}b} = 0 \Rightarrow d^2 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{d^2}{3} \quad h^2 = d^2 - b^2 = \frac{2d^2}{3} \Rightarrow \frac{h}{b} = \sqrt{2} \approx 1.41$$





$$W_{z圆} = \frac{\frac{1}{64}\pi(2R)^2}{R} = \frac{1}{4}\pi R^3 = 0.7854R^3$$

$$W_{z矩} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{3}b^3 = \frac{8}{9\sqrt{3}}R^3 = 0.5132R^3$$

$$W_{z矩} < W_{z圆}$$

其他更好的加工方案?

$$\sigma = \frac{M}{W_z} \qquad W_z = \frac{I_z \downarrow}{y_{\max} \downarrow}$$

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A = 2\times\int_0^{R\sin\alpha} y^2 \times 2\sqrt{R^2 - y^2}\,\mathrm{d}y \qquad y = R\sin\theta \quad (0 \le \theta \le \alpha)$$

$$= 4\times\int_0^{\alpha} R^2\sin^2\theta \times R\cos\theta \times R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 4R^4\int_0^{\alpha}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= R^4\int_0^{\alpha}(\sin 2\theta)^2\mathrm{d}\theta = R^4\int_0^{\alpha}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{8}(4\alpha - \sin 4\alpha)$$

$$\boxed{W_z = \frac{R^3}{8}\frac{(4\alpha - \sin 4\alpha)}{\sin\alpha}}$$

$$y_{\max} = R\sin\alpha$$

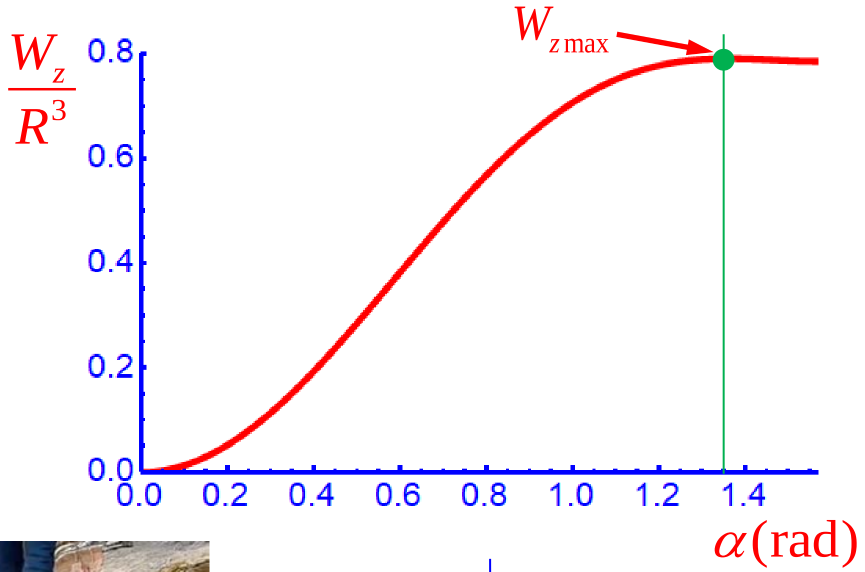
$$\boxed{W_z=\frac{R^3}{8}\frac{(4\alpha-\sin 4\alpha)}{\sin\alpha}}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_z}{\mathrm{d}\alpha}=0$$

$$4\sin\alpha(1-\cos 4\alpha)-(4\alpha-\sin 4\alpha)=0$$

解得： $\alpha_0=1.36\,\mathrm{rad}=78.08^\circ$

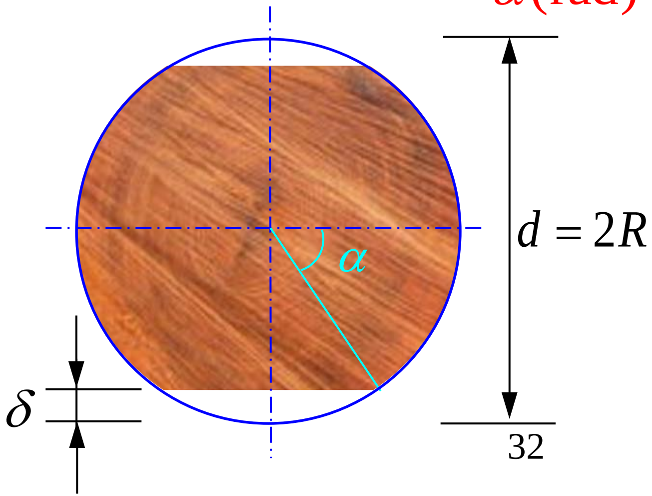
$$\delta=R-R\sin\alpha_0=0.02156R$$



$W_{z\max}=0.7908R^3$ W_z比原来的圆形截面还要大！

$$W_{z圆}=\frac{\frac{1}{64}\pi(2R)^2}{R}=\frac{1}{4}\pi R^3=0.7854R^3$$

$$W_{z矩}=\frac{1}{6}bh^2=\frac{1}{3}b^3=\frac{8}{9\sqrt{3}}R^3=0.5132R^3$$



Thank you for your attention!

作业

P177: 5.5

P181-182: 5.15、5.16

对应第6版的题号 P173: 5.5； P176: 5.15、5.16

下次课讲 弯曲切应力和弯曲中心的概念（第II册 第十二章 §12.2）