

第二章 控制系统的动态数学模型

线性微分方程

1. 未知函数的各阶导数都是一次；
2. 各阶导数的系数可以是常数或是自变量的已知函数；

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\frac{d\theta(t)}{dt} = 1$$
$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt} = 1$$
$$t\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2e^{3t}\frac{d\theta(t)}{dt} = \cos(4t) + 1$$
$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 = \cos(4t) + 1$$

从上至下为
线性、非线性、线性、非线性

拉普拉斯变换

对于指数级函数 $x(t)$ ，有 $\int_0^\infty x(t)e^{-\sigma t}dt < \infty$ ，则可定义 $x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ ：

$$X(s) = L[x(t)] \triangleq \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

式中，称 $X(s)$ 为象函数， $x(t)$ 为原函数。 s 为复变数，其量纲为时间的倒数，即频率。象函数 $X(s)$ 的量纲为 $x(t)$ 的量纲与时间量纲的乘积。

常用的拉氏变换和反变换

时间函数	象函数 (Laplace)
单位脉冲函数 $\delta(t) = \begin{cases} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0}, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t \geq t_0 \end{cases}$	1
单位阶跃函数 $l(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
$t^n \ (n \geq 0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
常数倍 $a\,x(t)$	$a\,X(s)$
叠加定理 $a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$	$a\,X_1(s) + b\,X_2(s)$
微分 $\frac{d}{dt}x(t)$	$s\,X(s) - x(0^+)$
积分 $\int_0^t x(\tau)\,d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0^+)}{s}$
衰减定理 $e^{-at}x(t)$	$X(s + a)$
延时定理 $x(t - a) \cdot u(t - a)$	$e^{-as}X(s)$

信号的截取与时移

图像	表达式
	$f_1(t) = \sin(\omega t) \cdot l(t)$
	$f_2(t) = \sin(\omega t) \cdot l(t - t_0)$
	$f_3(t) = \sin(\omega(t - t_0)) \cdot l(t - t_0)$

拉氏变换的常用基本性质

叠加原理

若 $L[f_1(t)] = F_1(s)$, $L[f_2(t)] = F_2(s)$, 则有

$$L[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s)$$

微分定理

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

根据数学归纳法不难推出

$$L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

若 $f(0) = \dot{f}(0) = \cdots = f^{(n-2)}(0) = f^{(n-1)}(0) = 0$, 则有

$$L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s)$$

积分定理

这里 $f^{-1}(t) \triangleq \int f(t)dt$

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

同理有

$$L\left[\underbrace{\int \cdots \int_n f(t)(dt)^n}\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \frac{f^{-1}(0)}{s^n} + \frac{f^{-2}(0)}{s^{n-1}} + \cdots + \frac{f^{-n}(0)}{s}$$

若 $f^{-1}(0) = f^{-2}(0) = \cdots = f^{-n}(0) = 0$ ，则有

$$L\left[\underbrace{\int \cdots \int_n f(t)(dt)^n}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

衰减定理

$$L[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

延时定理

$$L[f(t-a) \cdot 1(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

初值定理

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

终值定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

拉氏反变换

直接积分求拉氏反变换通常较繁，对于一般的问题，都可以避免积分，而通过将象函数转化为拉氏变换表中包含的形式（一般是分式）。

例题

求 $F(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$ 的反拉氏变换

易知 $F(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+2}$

查表可得

$$f(t) = 2e^{-3t} - e^{-2t}$$

传递函数

传递函数为在零起始条件下，线性定常系统输出象函数 $X_o(s)$ 与输入象函数 $X_i(s)$ 之比

$$G(s) \triangleq \frac{X_o(s)}{X_i(s)}$$

具体地说，设线性定常系统的微分方程为：

$$a_0x_o^{(n)}(t) + a_1x_o^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{x}_o(t) + a_nx_o(t) = b_0x_i^{(m)}(t) + b_1x_i^{(m-1)}(t) + \cdots + b_{m-1}\dot{x}_i(t) + b_mx_i(t) \quad (n \geq m)$$

设系统的输入输出函数及其各阶导数**初始值均为零**，将上式拉氏变换，由微分定理推论：

$$(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n) X_o(s) = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m) X_i(s)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

传递函数的特性

- 传递函数是系统的固有特性，与输入情况无关。
- 零点：传递函数分子为零时的s值

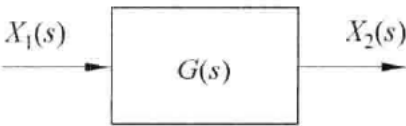
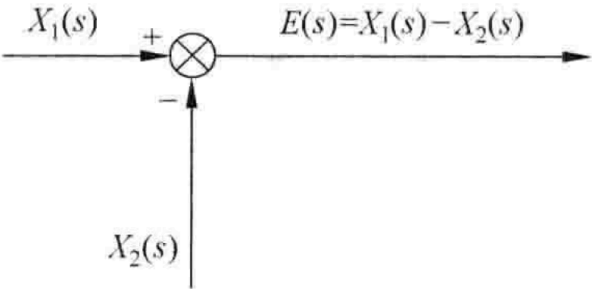
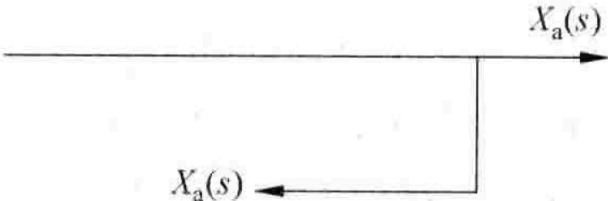
3. 极点：传递函数分母为零时的s值

典型环节的传递函数

环节	时间函数	相函数	传递函数	例子
比例环节	$x_o(t) = kx_i(t)$	$X_o(s) = kX_i(s)$	$G(s) = k$	运算放大器、 齿轮传动副
积分环节	$x_o(t) = \int_0^t x_i(t) dt$	$X_o(s) = \frac{1}{s}X_i(s)$	$G(s) = \frac{1}{s}$	RC 有源积分网络
微分环节	$x_o(t) = \frac{d}{dt}x_i(t)$	$X_o(s) = sX_i(s)$	$G(s) = s$	永磁式直流测速机、 阻尼器
一阶惯性环节 (机械系统)	$T\frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = x_i(t)$	$X_o(s) = \frac{1}{Ts + 1}X_i(s)$	$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$	弹簧-阻尼系统
一阶惯性环节 (滤波电路)	$\begin{cases} u_i(t) = i(t)R + \frac{1}{C} \int i(t) dt \\ u_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{cases}$	$\begin{cases} U_i(s) = \left(R + \frac{1}{Cs}\right) I(s) = \frac{RCs + 1}{Cs} I(s) \\ U_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \\ \Rightarrow U_o(s) = \frac{1}{RCs + 1} U_i(s) \end{cases}$	$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$	RC 低通滤波电路 (无源)
二阶振荡环节	$T^2 \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = x_i(t)$	$X_o(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} X_i(s)$	$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$	满足 $0 < \zeta < 1$ 时为振荡系统 (弹簧-质量-阻尼、 二阶滤波器)
近似微分环节	$T\frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}$	$X_o(s) = \frac{s}{Ts + 1} X_i(s)$	$G(s) = \frac{s}{Ts + 1}$	无源微分网络

方块图

组成部分

组成部分	描述	图示
基本单元	图中指向方块的箭头表示输入，从方块出来的箭头表示输出， $G(s)$ 表示其传递函数。	
比较点	代表两个或两个以上的输入信号进行相加或相减的元件	
引出点	它表示信号引出和测量的位置，同一位置引出的几个信号，其大小和性质完全一样。	

环节连接方式

连接方式	原框图	等效
串联		
并联		