第六章　弯曲变形（一）

第15讲

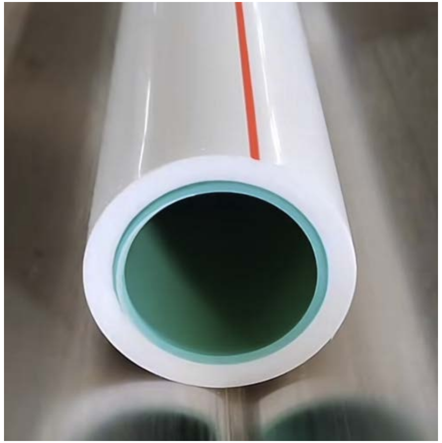
组合梁问题

（内容见第II册 § 12.4）

在加固工程中：

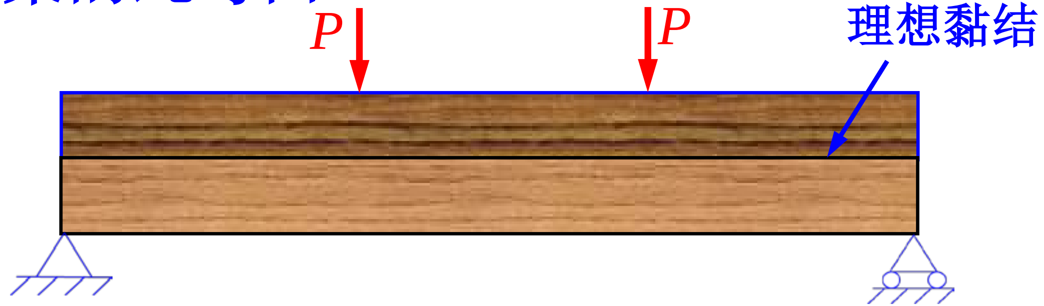
粘贴了钢板的梁

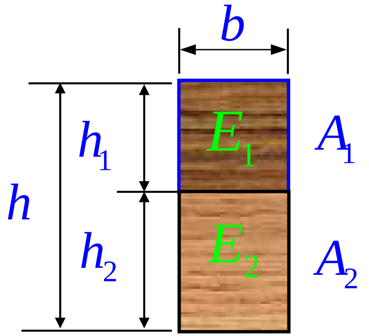
粘贴了碳纤维层的梁



双层管的弯曲

两种材料组合梁的纯弯曲





实验表明：纯弯曲情形的平面假设和单轴应力状态假设仍可用！

几何关系	物理关系	静力关系
$\varepsilon=\dfrac{y}{\rho}$ （√）	$\sigma_1=E_1\dfrac{y}{\rho}$ $\sigma_2=E_2\dfrac{y}{\rho}$	$F_N=\int_A\sigma\mathrm{d}A=\int_{A_1}\sigma_1\mathrm{d}A+\int_{A_2}\sigma_2\mathrm{d}A=0$ $M_y=\int_A z\cdot\sigma\mathrm{d}A=\int_{A_1}z\cdot\sigma_1\mathrm{d}A+\int_{A_2}z\cdot\sigma_2\mathrm{d}A\equiv 0$ $M_z=\int_A y\cdot\sigma\mathrm{d}A=\int_{A_1}y\cdot\sigma_1\mathrm{d}A+\int_{A_2}y\cdot\sigma_2\mathrm{d}A=M$

y – 距离中性轴的距离

ρ – 中性层的曲率半径

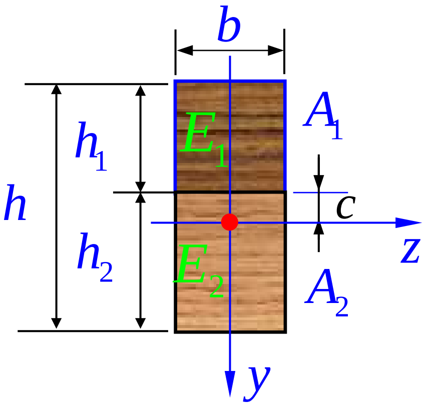
首先要确定中性层（中性轴）的位置

$$F_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = \int_{A_1} \sigma_1 \mathrm{d}A + \int_{A_2} \sigma_2 \mathrm{d}A = 0$$

$$\int_{A_1} E_1 \frac{y}{\rho} \mathrm{d}A + \int_{A_2} E_2 \frac{y}{\rho} \mathrm{d}A = 0$$

$$E_1 \int_{A_1} y \mathrm{d}A + E_2 \int_{A_2} y \mathrm{d}A = 0$$

假设中性轴在下层材料的截面内，离交界面（interface）的距离为c。



上层材料截面的形心位置：$y_{c1} = -(c + \frac{h_1}{2})$

下层材料截面的形心位置：$y_{c2} = \frac{h_2}{2} - c$

$$E_1 b h_1 [-(\frac{h_1}{2} + c)] + E_2 b h_2 (\frac{h_2}{2} - c) = 0$$

$E_2 > E_1$：有$c > 0$

$$c = \frac{E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \xrightarrow{h_1 = h_2 = \frac{h}{2}} c = \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2} \times \frac{h}{4}$$

当两种材料的截面宽度和高度相同时，中性轴在弹性模量较大的一侧。

关于正应力在横截面上合成的轴力等于零条件的再考察：

$$F_{\mathrm{N}}=\int_A \sigma \mathrm{d}A=\int_{A_1}\sigma_1 \mathrm{d}A+\int_{A_2}\sigma_2 \mathrm{d}A=0$$

$$\Rightarrow \int_{A_1}E_1\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A+\int_{A_2}E_2\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A=0$$

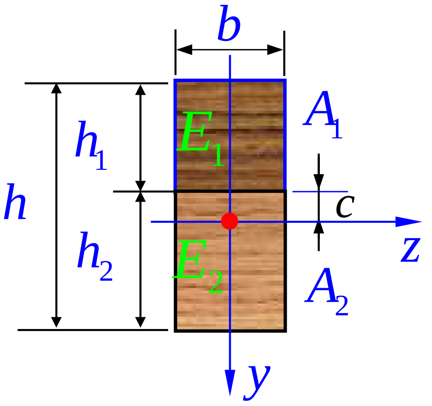
$$\Rightarrow E_1\int_{A_1}y\mathrm{d}A+E_2\int_{A_2}y\mathrm{d}A=0$$

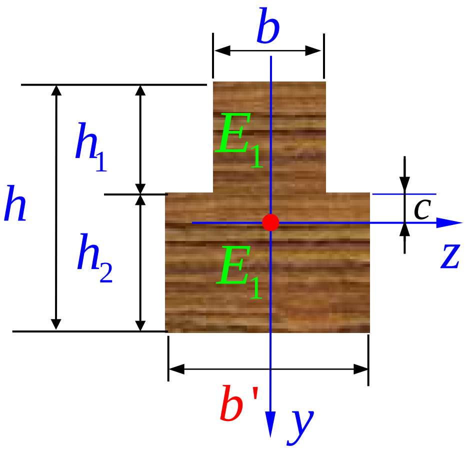
$$\Rightarrow E_1\int_{A_1}yb\mathrm{d}y+E_2\int_{A_2}yb\mathrm{d}y=0$$

$$\Rightarrow E_1\int_{A_1}yb\mathrm{d}y+E_1\int_{A_2}y\overbrace{\frac{E_2}{E_1}b}^{b'}\mathrm{d}y=0$$

等效宽度

$$\Rightarrow E_1\int_{A_1}yb\mathrm{d}y+E_1\int_{A_2}yb'\mathrm{d}y=0 \quad \left(b'=\frac{E_2}{E_1}b\right)$$



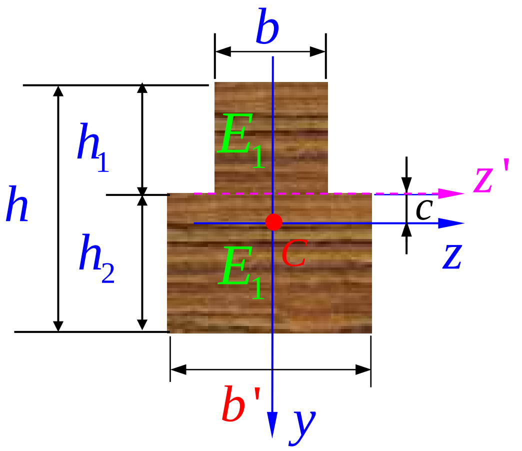


原问题可等效为材料的弹性模量为E_1的T形截面均匀材料梁的弯曲。

求等效成T形截面的形心：

$$c=\frac{bh_1(-\frac{h_1}{2})+b'h_2(\frac{h_2}{2})}{bh_1+b'h_2}=\frac{bh_1(-\frac{h_1}{2})+\frac{E_2}{E_1}bh_2(\frac{h_2}{2})}{bh_1+\frac{E_2}{E_1}bh_2}$$

$$c=\frac{h_1(-\frac{h_1}{2})+\frac{E_2}{E_1}h_2(\frac{h_2}{2})}{h_1+\frac{E_2}{E_1}h_2}=\frac{E_1h_1(-\frac{h_1}{2})+E_2h_2(\frac{h_2}{2})}{E_1h_1+E_2h_2}$$



$$b'=\frac{E_2}{E_1}b$$

$$c=\frac{E_2h_2^2-E_1h_1^2}{2(E_1h_1+E_2h_2)}$$ 与前面导出的结果一致！

确定了两种材料组合梁弯曲问题的中性轴位置！（√）

由正应力在横截面上合成的弯矩等于M，得

$$M_z = \int_A y\cdot\sigma \mathrm{d}A = \int_{A_1} y\cdot\sigma_1\mathrm{d}A + \int_{A_2} y\cdot\sigma_2\mathrm{d}A = M$$

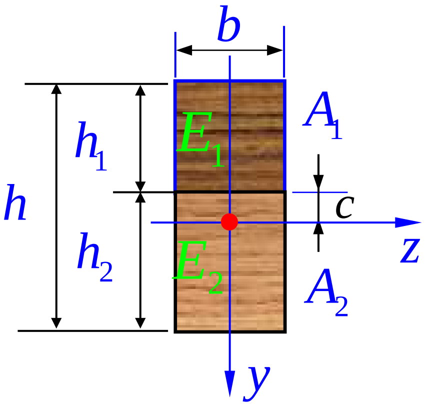
$$\int_{A_1} y\cdot E_1\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A + \int_{A_2} y\cdot E_2\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = M \Longrightarrow \frac{1}{\rho}(E_1\int_{A_1} y^2\mathrm{d}A + E_2\int_{A_2} y^2\mathrm{d}A) = M$$

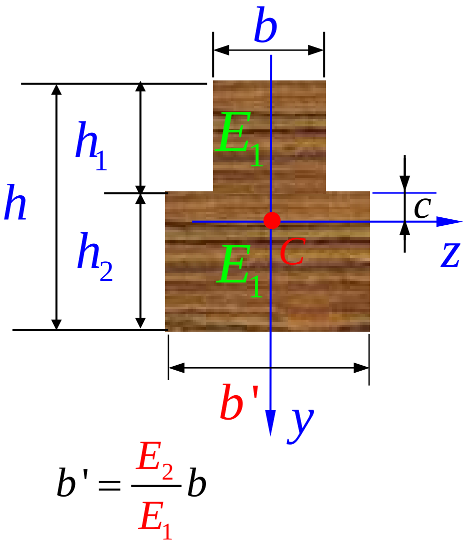
$$\frac{1}{\rho}(E_1\int_{A_1} y^2 b\mathrm{d}y + E_1\int_{A_2} y^2\frac{E_2}{E_1}b\mathrm{d}y) = M$$

$$\frac{E_1}{\rho}(\int_{A_1} y^2 b\mathrm{d}y + \int_{A_2} y^2 b'\mathrm{d}y) = M \quad (b' = \frac{E_2}{E_1}b)$$

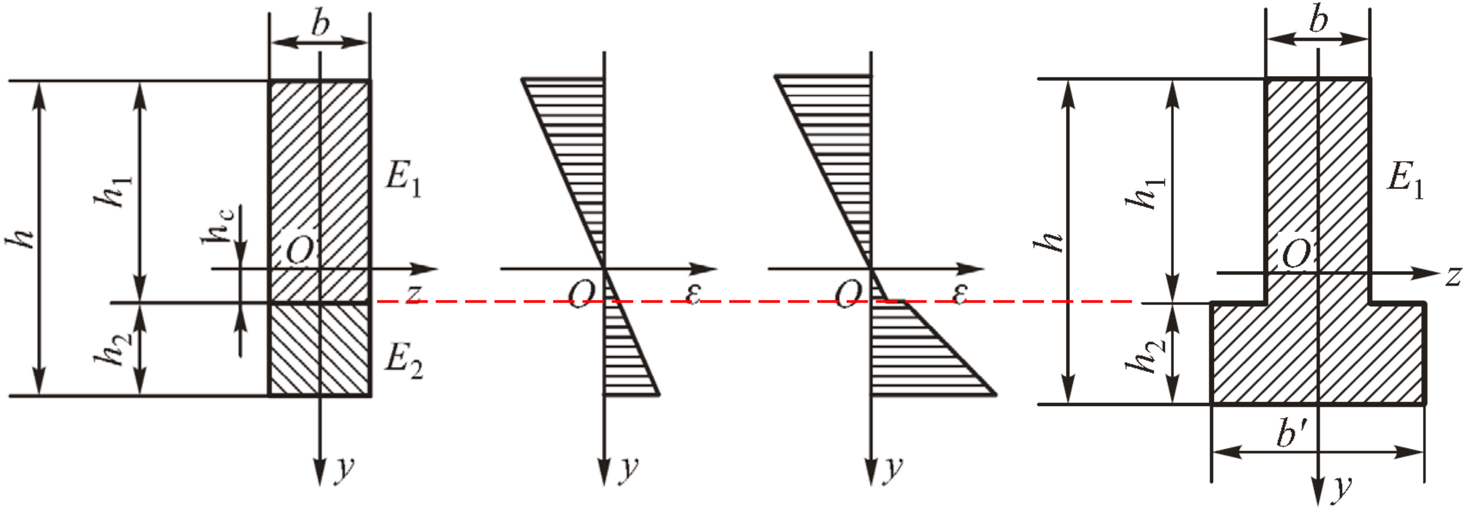
$$\frac{E_1}{\rho}I_{z组合} = M$$ （$I_{z组合}$：T形截面对中性轴z的惯性矩）

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_{z组合}} \qquad \varepsilon = \frac{y}{\rho},\ \sigma_1 = E_1\frac{y}{\rho},\ \sigma_2 = E_2\frac{y}{\rho}$$





应变和应力沿截面高度方向的分布



$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad \sigma_1 = E_1 \frac{y}{\rho} \qquad b' = \frac{E_2}{E_1} b$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_{z组合}} \qquad \sigma_2 = E_2 \frac{y}{\rho}$$

第六章 弯曲变形

前面我们处理了梁弯曲的强度问题

$$\sigma = \frac{My}{I_z}, \quad \tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$$

刚度问题

§6.1 工程中的弯曲变形问题

§ 6.2 挠曲线的近似微分方程

一、梁的位移 挠度和转角

梁的变形程度该如何描述？

回顾：

1. 杆件在受轴向拉伸或压缩情形的变形程度描述

$$\frac{\mathrm{d}(\delta x)}{\mathrm{d}x}=\varepsilon(x)=\frac{F_{\mathrm{N}}}{EA}\qquad EA\text{——抗拉刚度}$$

2. 轴在受扭转情形的变形程度描述

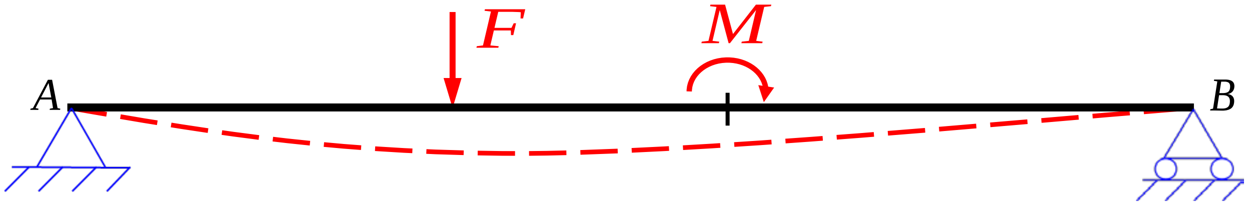
$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)=\frac{T}{GI_{p}}\qquad GI_{p}\text{——抗扭刚度}$$

3. 梁在受弯曲情形的变形程度描述

$$|k|=\frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\frac{M}{EI_{z}}\qquad EI_{z}\text{——抗弯刚度}$$

曲率

思考：用曲率来描述梁的变形程度肯定是可以的，但在工程实际中是否合适？



梁变形以后：对于对称弯曲情形，变形后的轴线是平面曲线；对于非对称弯曲情形，变形后的轴线将会是空间曲线。

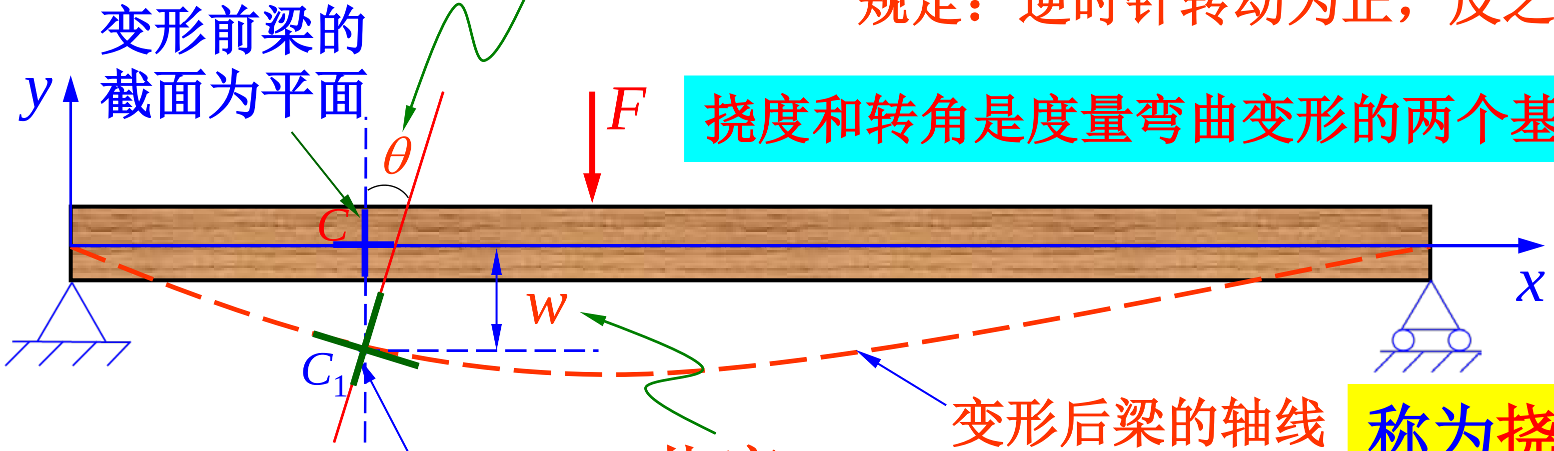
平面曲线的曲率很难测量，空间曲线的曲率更难测量！

用什么量来度量比较合适？

二、梁变形的描述（几个重要的概念）

梁截面转角θ 横截面绕其中性轴转动的角度

规定：逆时针转动为正，反之为负



挠度和转角是度量弯曲变形的两个基本量！

变形后梁的轴线
连续光滑的曲线

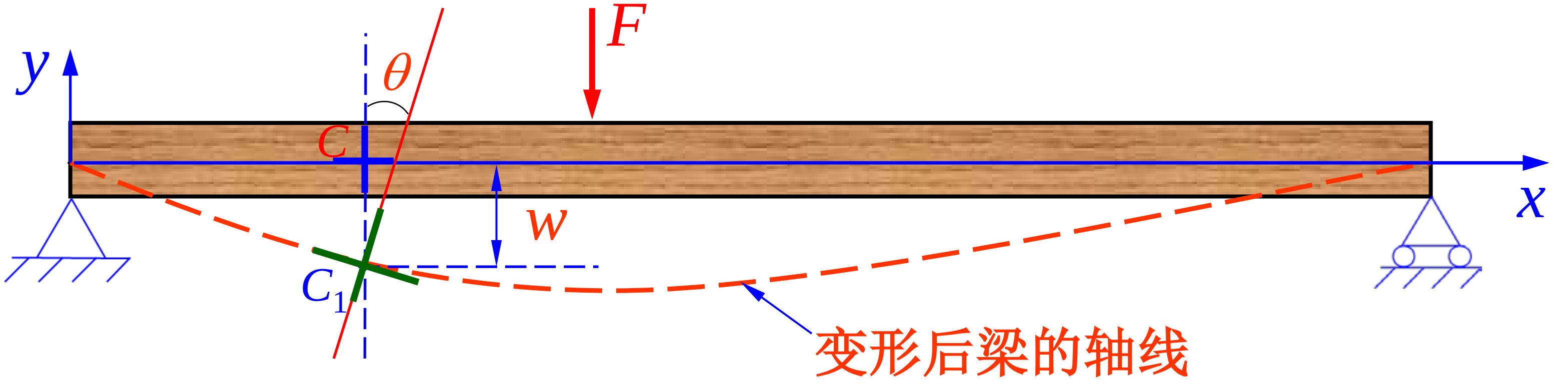
称为挠曲线

挠度w

横截面形心沿y轴方向的线位移

规定：与坐标轴y同向为正，反之为负

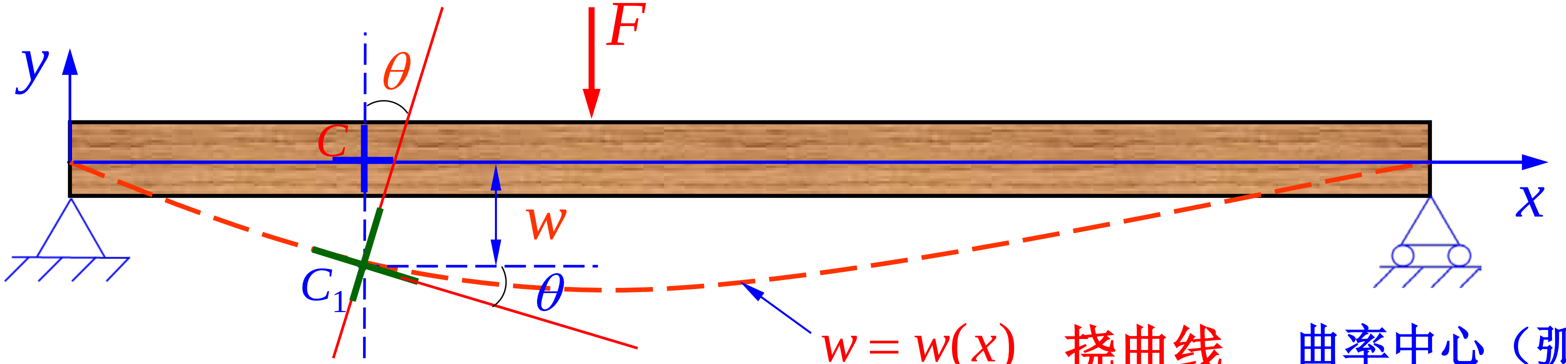
对于细长梁，剪力对变形的影响一般可以忽略不计



特别指出，梁的轴线弯曲成曲线后，各横截面形心沿x轴方向是有位移的。

但在小变形情况下，梁的挠度远小于跨长，变形后的轴线是一条平坦的光滑曲线，横截面形心沿x轴方向的线位移与挠度相比属于高阶小量，可略去不计。

挠度可表示为 $w = w(x)$



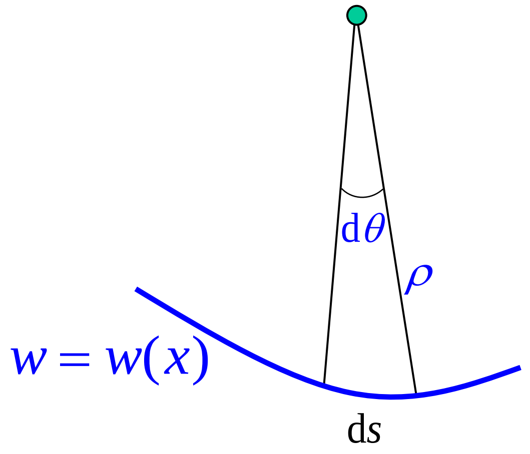
转角与挠曲线的关系：

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w' \xrightarrow[\tan\theta \approx \theta]{\text{小变形}} \theta = w'$$

曲线 $w = w(x)$ 的曲率：

$$|k| = \frac{1}{\rho} \qquad \mathrm{d}s = \rho\,\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \frac{1}{\rho} = \left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|$$

曲率中心（弧长ds两端法线的交点）



曲率公式的推导 $|k|=\dfrac{1}{\rho}=\left|\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}w)^2}=\mathrm{d}x\sqrt{1+(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x})^2}=\mathrm{d}x\sqrt{1+(w')^2}$$

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\theta)=w''$$

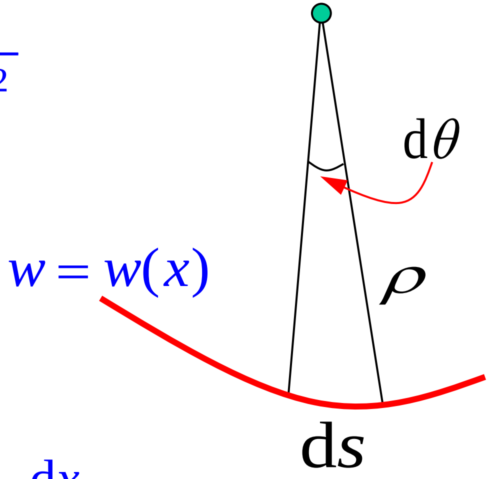
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\theta)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\tan\theta)\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

$$=\sec^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

$$=(1+\tan^2\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=(1+w'^2)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

$$w''=(1+w'^2)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{w''}{1+w'^2}\mathrm{d}x$$



$$\left|\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}\right|=\left|\frac{\dfrac{w''}{1+w'^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1+w'^2}\,\mathrm{d}x}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{1}{\rho}$$

$$|k| = \frac{1}{\rho} \qquad \frac{1}{\rho} = \left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}\right|$$

$$|k| = \frac{1}{\rho} = \frac{|w''|}{(1+w'^2)^{3/2}}$$

去绝对值

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \pm\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}}$$

三、梁的挠曲线近似微分方程

工程中常用的梁，其跨长l往往大于横截面高度h的10倍，剪力对梁的位移影响很小，可略去不计。

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z} \qquad\qquad \frac{1}{\rho}=\pm\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}}\approx\pm w''$$

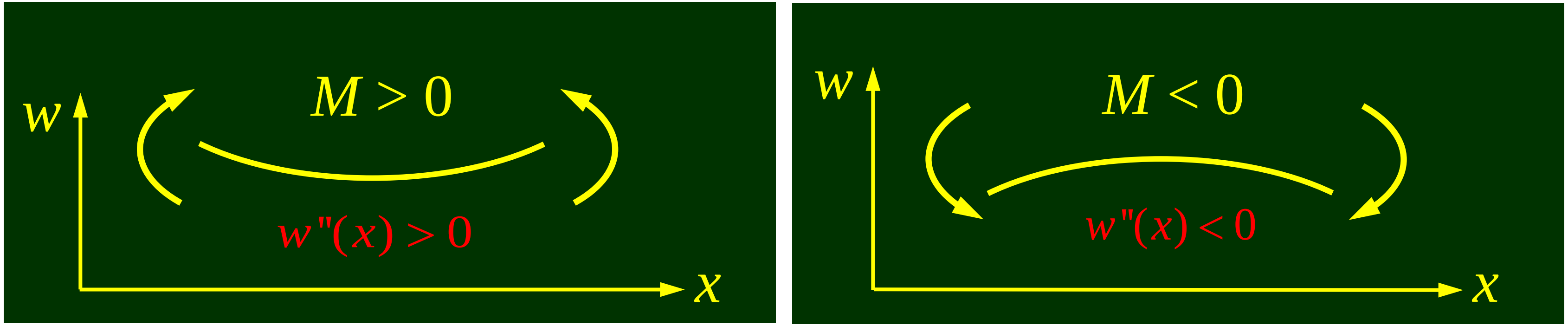
小变形

与1相比很小

$$\frac{M}{EI_z}=\pm w''$$

或 $EIw''=\pm M$

考察弯矩M与二阶导数w''间的关系



弯矩与二阶导数的符号总是相同

故$EIw'' = \pm M$式中应取正号

$$EIw'' = M(x) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI}$$ 梁的挠曲线近似微分方程

梁的挠曲线近似微分方程的另一种形式

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}=M(x) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 M(x)}{\mathrm{d}x^2}=q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)=q(x)$$ （q 向上为正）

理解近似的含义：$EIw''=M(x)$

1. 略去了剪力的影响；

（利用了纯弯曲变形公式）

2. 略去了曲率公式中 w' 的影响；

（利用了挠曲线的平坦特性）

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4}=q(x)$$

欧拉—伯努利（Euler-Bernoulli）梁理论，也称经典梁理论

欧拉–伯努利梁方程约形成于1750年。瑞士学者莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler, 1707 –1783）与丹尼尔·伯努利（ Daniel Bernoulli, 1700–1782 ）。

Leonhard Euler

Jacob Bernoulli

§ 6.3 用积分法求弯曲变形

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI} \qquad EIw'' = M(x)$$

积分

$$\theta(x) = \frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x} = \int \frac{M(x)}{EI}\mathrm{d}x + C_1$$

积分

$$w(x) = \int \left[\int \frac{M(x)}{EI}\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

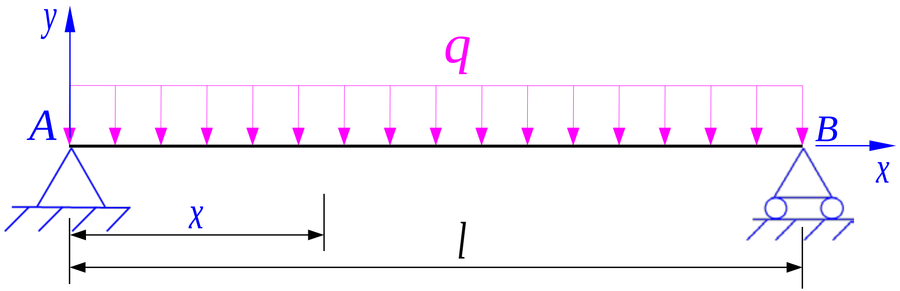
式中积分常数C_1、C_2由边界条件确定

$$w(x) = w_0, \quad w'(x) = \theta_0$$

在分段处理时，还需利用连续条件。

例1 已知梁的抗弯刚度为EI。试求图示简支梁在均布载荷q 作用下的转角方程、挠曲线方程，并确定$\theta_{\max}$和$w_{\max}$。

解：建立如图坐标系



$$M(x)=\frac{ql}{2}x-\frac{q}{2}x^2$$

$$EIw''=\frac{ql}{2}x-\frac{q}{2}x^2$$

$$EIw'=\frac{ql}{4}x^2-\frac{q}{6}x^3+C$$

转角方程 $$\theta=w'=\frac{1}{EI}\left(\frac{ql}{4}x^2-\frac{q}{6}x^3-\frac{ql^3}{24}\right)$$

$$EIw=\frac{ql}{12}x^3-\frac{q}{24}x^4+Cx+D$$

挠曲线方程 $$w=\frac{1}{EI}\left(\frac{ql}{12}x^3-\frac{q}{24}x^4-\frac{ql^3}{24}x\right)$$

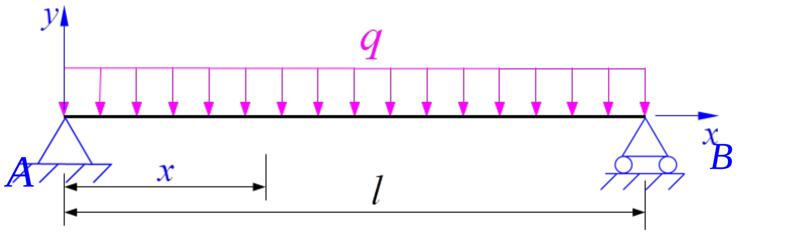
由边界条件：

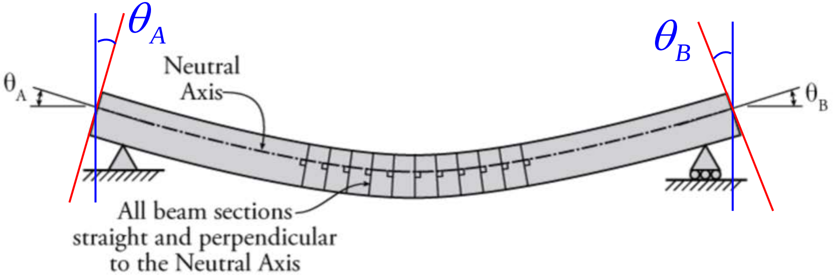
$x=0:\quad w=0 \Longrightarrow D=0$

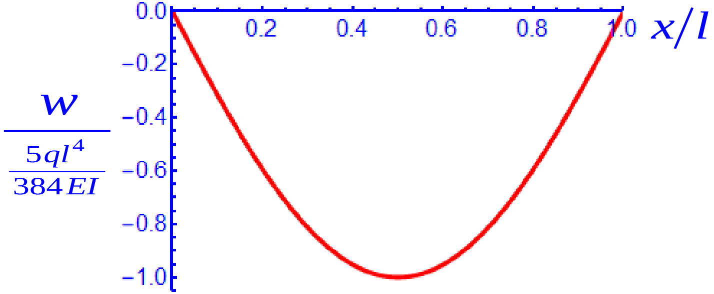
$x=l:\quad w=0 \Longrightarrow \frac{ql^4}{12}-\frac{ql^4}{24}+Cl=0 \Longrightarrow C=-\frac{ql^3}{24}$

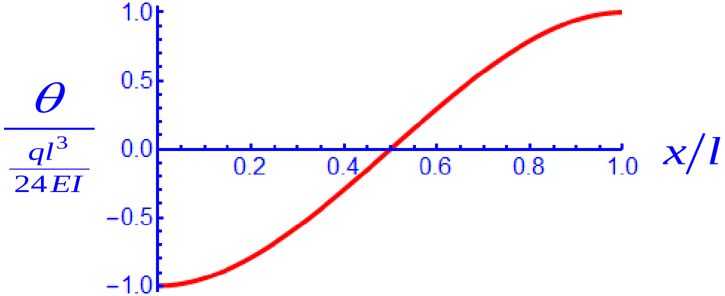
梁的挠曲线方程和转角方程分别为：

$$w=\frac{qx}{24EI}(2lx^2-x^3-l^3) \qquad \theta=\frac{q}{24EI}(6lx^2-4x^3-l^3)$$









最大挠度为： $w_{\max}=w\Big|_{x=\frac{l}{2}}=-\frac{5ql^4}{384EI}$

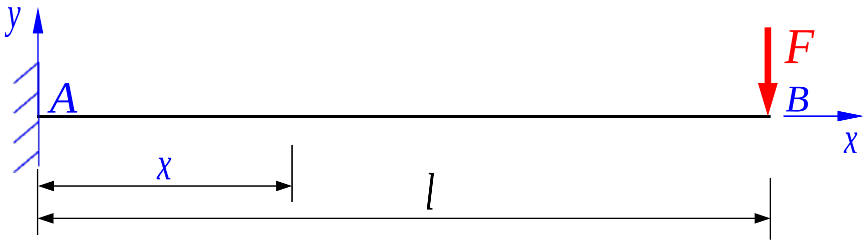
$w_{\max}$为负：梁的中点向下移动

最大转角为： $\theta_{\max}=\theta_B=-\theta_A=\frac{ql^3}{24EI}$

转角θ_A为负：表明A端的横截面顺时针方向转动

例2　已知梁的抗弯刚度为EI。试求图示悬臂梁在集中力F 作用下的转角方程、挠曲线方程，并确定$\theta_{\max}$和$w_{\max}$。

解：建立如图坐标系



$$M(x) = -F(l-x)$$

$$EIw'' = -F(l-x)$$

$$EIw' = -Flx + \frac{F}{2}x^2 + C$$

$$EIw = -\frac{Fl}{2}x^2 + \frac{F}{6}x^3 + Cx + D$$

由边界条件：

$x=0$：$w=0$ ⟹ $D=0$

$x=0$：$w'=0$ ⟹ $C=0$

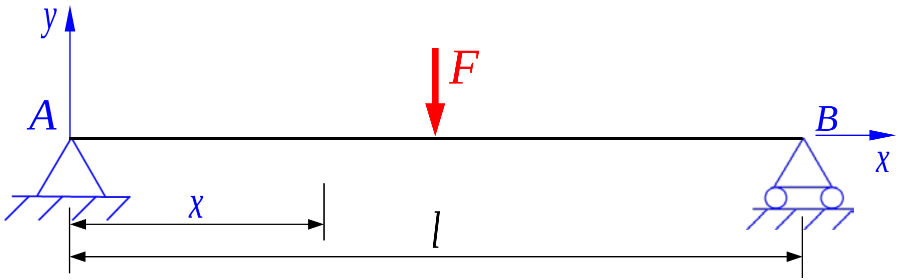
转角方程　$$w' = \frac{F}{EI}\left(-lx + \frac{x^2}{2}\right)$$

挠曲线方程　$$w = \frac{F}{EI}\left(-\frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)$$

最大挠度：　$$w_{\max} = w_B = -\frac{Fl^3}{3EI}$$

最大转角：　$$\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}$$

例3　试求图示简支梁在集中力F作用下的转角方程、挠曲线方程，并确定$\theta_{\max}$和 $w_{\max}$。已知梁的抗弯刚度为EI。



解：建立如图坐标系

$$AC\text{段：}\ M(x)=\frac{F}{2}x$$

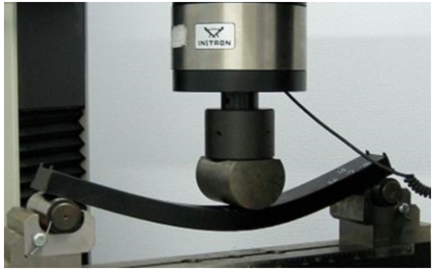
$$EIw''=\frac{F}{2}x$$

$$EIw'=\frac{F}{4}x^2+C$$

$$EIw=\frac{F}{12}x^3+Cx+D$$

转角方程　$$\theta=\frac{F}{EI}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{l^2}{16}\right)$$

挠曲线方程　$$w=\frac{F}{EI}\left(\frac{x^3}{12}-\frac{Fl^2}{16}x\right)$$



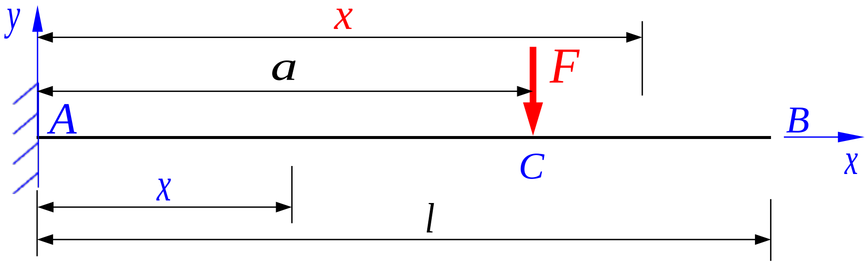
由边界条件：$x=0$：　$w=0$　得：$D=0$

由对称条件：$x=\frac{l}{2}$：　$w'=0$　得：$C=-\frac{Fl^2}{16}$

最大挠度：$w_{\max}=w\big|_{x=\frac{l}{2}}=-\frac{Fl^3}{48EI}$

最大转角：$\theta_{\max}=\theta_B=-\theta_A=\frac{Fl^2}{16EI}$

例4 试求悬臂梁在图示集中力F作用下的转角方程、挠曲线方程，并确定θ_{max}和w_{max}。已知梁的抗弯刚度为EI。



解：建立如图坐标系

AC段： $M_1(x) = -F(a-x) \quad (0 \le x \le a)$

CB段： $M_2(x) = 0 \quad (a \le x \le l)$

$$\begin{cases} EIw_1'' = -F(a-x) & (0 \le x \le a) \\ EIw_2'' = 0 & (a \le x \le l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} EIw_1' = -Fax + \frac{1}{2}Fx^2 + C_1 & (0 \le x \le a) \\ EIw_2' = D_1 & (a \le x \le l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} EIw_1 = -\frac{1}{2}Fax^2 + \frac{1}{6}Fx^3 + C_1x + C_2 & (0 \le x \le a) \\ EIw_2 = D_1x + D_2 & (a \le x \le l) \end{cases}$$

待定常数**4**个

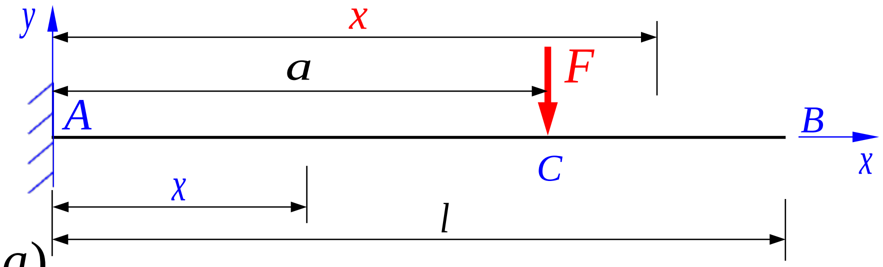
边界条件**2**个
连续条件**2**个

$$w_1\big|_{x=a_-} = w_2\big|_{x=a_+}$$

$$w_1'\big|_{x=a_-} = w_2'\big|_{x=a_+}$$

在两段的连接处：挠度和转角相等

$$\begin{cases} EIw_1' = -Fax + \frac{1}{2}Fx^2 + C_1 & (0 \le x \le a) \\ EIw_2' = D_1 & (a \le x \le l) \end{cases}$$



$$\begin{cases} EIw_1 = -\frac{1}{2}Fax^2 + \frac{1}{6}Fx^3 + C_1x + C_2 & (0 \le x \le a) \\ EIw_2 = D_1x + D_2 & (a \le x \le l) \end{cases}$$

$$w_{\max} = w|_{x=l} = -\frac{Fa^2}{6EI}(3l - a)$$

$$\theta_{\max} = -\frac{Fa^2}{2EI}$$ CB段均相同

边界条件:

$x = 0:\ w_1' = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$

$x = 0:\ w_1 = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$

转角方程 $$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{F}{EI}\left(-ax + \dfrac{x^2}{2}\right) & (0 \le x \le a) \\ \theta_2 = -\dfrac{Fa^2}{2EI} & (a \le x \le l) \end{cases}$$

常数

挠曲线方程 $$\begin{cases} w_1 = \dfrac{F}{EI}\left(-\dfrac{ax^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right) & (0 \le x \le a) \\ w_2 = \dfrac{F}{EI}\left(-\dfrac{a^2x}{2} + \dfrac{a^3}{6}\right) & (a \le x \le l) \end{cases}$$

直线方程

连续条件:

$x = a:\ w_1'|_{x=a_+} = w_2'|_{x=a_-} \Longrightarrow D_1 = -Fa \cdot a + \frac{1}{2}Fa^2 = -\frac{1}{2}Fa^2$

$x = a:\ w_1|_{x=a_+} = w_2|_{x=a_-} \Longrightarrow D_1a + D_2 = -\frac{1}{2}Fa \cdot a^2 + \frac{1}{6}Fa^3 \Longrightarrow D_2 = \frac{1}{6}Fa^3$

Thank you！

作业

Page 212-213：6.3 (d)；6.4(f)

Page 214：6.8(a)

对应第6版的题号 Page 206：6.3 (d)、 6.4(f)；Page 208：6.8(a)

下次课讲按叠加原理计算梁的变形