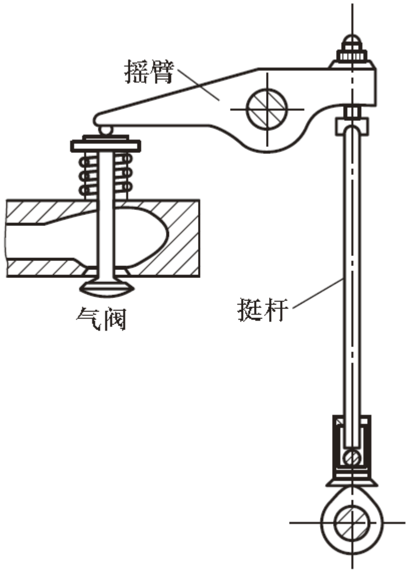
第九章 压杆稳定（1）

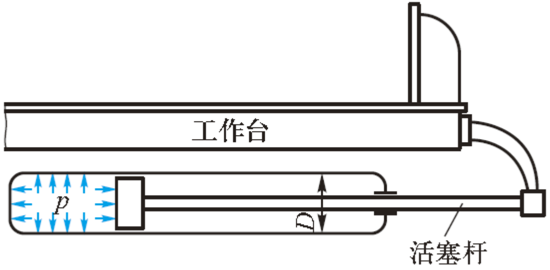
Chapter 9 Stability of Column (Part 1)

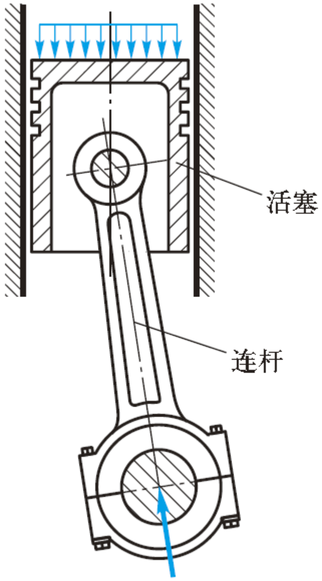
第 23 讲

§9.1 压杆稳定的概念

工程结构中也有很多受压的细长杆件，如内燃机配气机构中的挺杆、磨床液压装置的活塞杆、内燃机的连杆等。








XIAMENAIR厦门航空
压杆


SANY
压杆


压杆


压杆

在轴向拉伸（压缩）杆件的强度计算中，只需控制其横截面上的正应力不超过材料的许用应力，就能保证杆件能够正常工作。

但在工程实际结构中，注意到，对于受压的杆件：

（1）横截面尺寸一般都比强度条件算出的要大很多；

（2）横截面形状与梁的横截面形状相仿。

问题的提出

长30cm的钢板尺，截面为25mm×1mm

许用应力[σ]＝200MPa。

受轴向压力作用，按强度条件计算：

$$[F]=[\sigma]A=200\times10^{6}\times25\times1\times10^{-6}$$

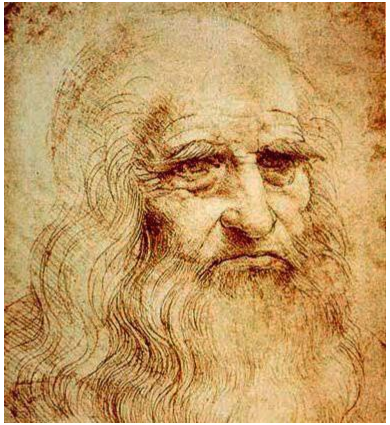
$$=5000\text{N}\approx500\text{kgf}$$

实际上将钢板尺竖直在桌上，用手压其上端，不用很大的力，钢板尺就明显变弯。

钢板尺越长，越容易被压弯。 原因？

早期考虑压杆的人： **达·芬奇** （1452－1519 ）

意大利文艺复兴时期的一位卓越的艺术家（画坛泰斗 ）和科学大师



达·芬奇一生刻苦勤勉、惜时如金

经典名言

我们因未曾虚度光阴而感到欣慰，尽管不受到赞扬，不出类拔萃，只要不虚度一生，就该感到愉快。

劳动一日，可得一夜安眠；

勤劳一生，可得幸福长眠。

达·芬奇对力学非常感兴趣：

“力学是数学的乐园，因为我们在这里获得了数学的果实”。

达·芬奇对压杆做了一些开拓性的工作。他认识到，由一些杆子紧密构成的组合柱，其承载能力要比这些杆子各自所能承受载荷的总和大许多倍，并且做了一些实验，研究过高度一定的柱子的承载力与其直径的关系。

欧拉（瑞士科学家一数学大师）：

给出细长压杆失稳后弹性曲线的精确描述，并定出它的屈曲载荷一欧拉临界压力。

欧拉是18世纪数学界最杰出的人物之一。大器早成，13岁入大学，16岁获硕士学位，23岁成为俄国圣比得宝科学院成员。1741年赴德国，任柏林科学院院士（34岁）。

一生勤于耕耘，28岁右眼失明，一生写的书和论文有886件。彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了四十七年。

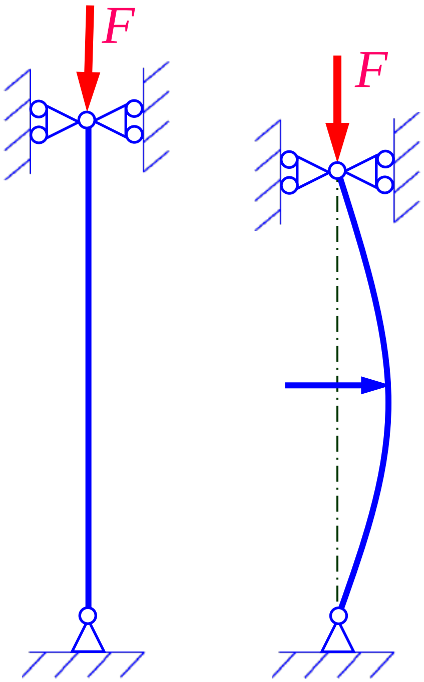
Leonhard Euler

（1707–1783）

$$e^{i\pi}+1=0$$

对压杆问题的理论研究

将实际压杆抽象为由均质材料制成，轴线是直线，且压力作用线与轴线重合的理想力学模型 —理想“中心受压直杆”



当 $F<F_{cr}$：

在扰动作用下，直线平衡构形转变为弯曲平衡构形，扰动除去后，能够恢复到直线平衡构形，则称原来的直线平衡构形是稳定的。

当 $F>F_{cr}$：

在扰动作用下，直线平衡构形转变为弯曲平衡构形，扰动除去后，不能恢复到直线平衡构形，则称原来的直线平衡构形是不稳定的。

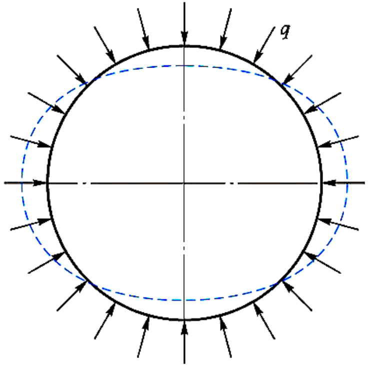
临界力和失稳的概念

由稳定平衡转化为不稳定平衡时所受轴向压力的临界值称为临界压力，或简称**临界力**（Critical Force），用F_{cr}表示。

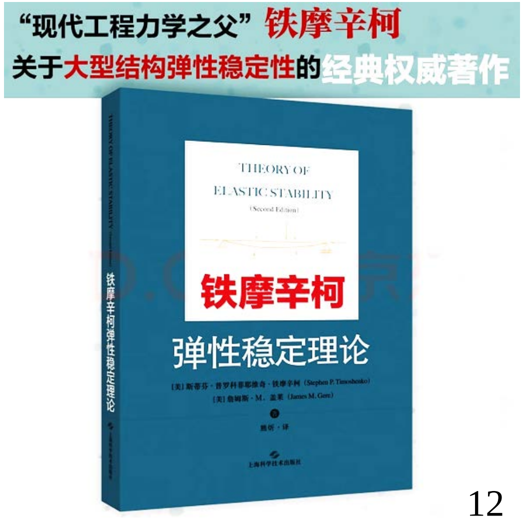
中心受压直杆在临界力F_{cr}作用下，其直线形态的平衡开始丧失稳定性，简称**失稳**（Lost Stability，Instability），也称为屈曲（Buckling）

其他构件的失稳：

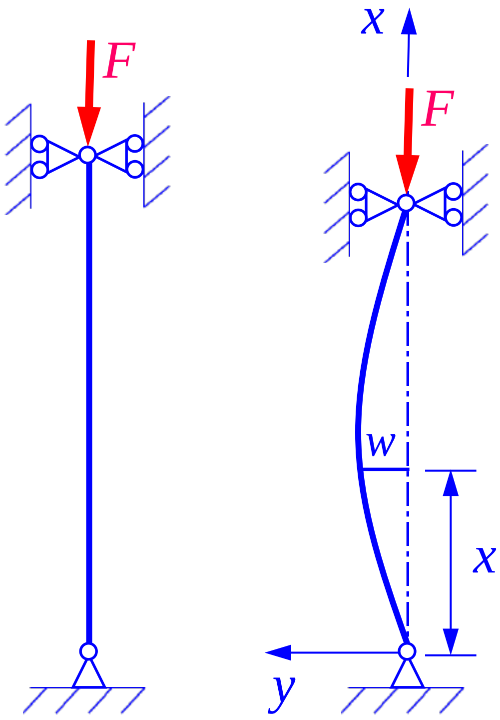
https://www.ixigua.com/6310923747025715457



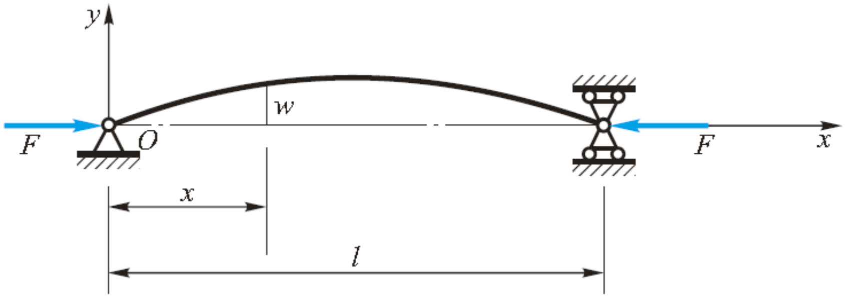
圆柱形薄壳受外压

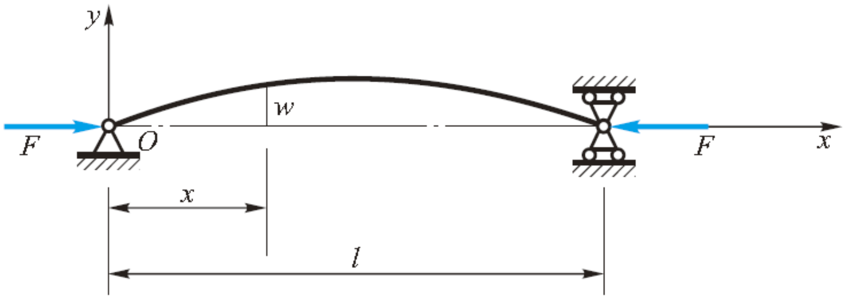


§ 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力



研究方法：利用挠曲线的近似微分方程





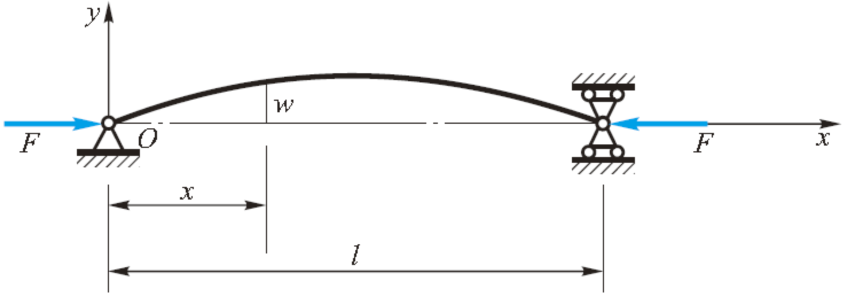
弯矩 $M=-Fw$

挠曲线的近似微分方程 $EIw''=M \Rightarrow EIw''=-Fw$

$$w''+\frac{F}{EI}w=0 \qquad 令：k^2=\frac{F}{EI} \qquad \frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}+k^2w=0$$

微分方程的通解 $w=A\sin kx+B\cos kx$

微分方程的通解 $w = A\sin kx + B\cos kx$



确定待定系数 $w(0) = w(l) = 0$

即: $\begin{cases} A\times 0 + B = 0 \\ A\sin(kl) + B\cos(kl) = 0 \end{cases}$

$\sin(kl) = 0 \Rightarrow kl = n\pi \Rightarrow k^2 = (\frac{n\pi}{l})^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow F = (\frac{n\pi}{l})^2 EI$

临界力 F_{cr} 是微弯下的最小压力，故取n=1。

且杆将绕惯性矩最小的轴弯曲。

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$$

这是两端球铰（简称两端铰支）等截面细长中心受压直杆的临界力F_{cr}计算公式，最早是由欧拉（L. Eular）导出的，所以通常称为欧拉公式。

$$w = A\sin kx + B\cos kx \qquad k = \frac{n\pi}{l}$$

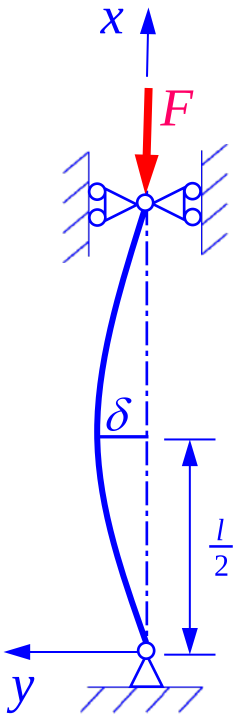
因$B=0$，则$n=1$时屈曲位移函数为 $w(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$

设压杆中点的挠度为$\delta(x=l/2)$, 代入上式有

$$A = \delta \Longrightarrow w(x) = \delta\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

挠曲线为半波正弦曲线。

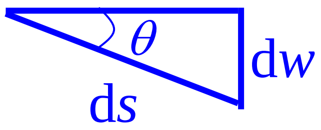
其中δ为未定常数，表明屈曲位移是不确定的量。即不论 δ是何值，压杆都能平衡（随遇平衡—中性平衡）



但事实上这种随遇平衡状态是不成立的，这种假象是因为在推导过程中使用了挠曲线近似微分方程的缘故。

若用挠曲线的精确微分方程

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=-\frac{M}{EI}=-\frac{Fw}{EI} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}=\sin\theta$$



$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2}=-\frac{F}{EI}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2}=-\frac{F}{EI}\sin\theta$$

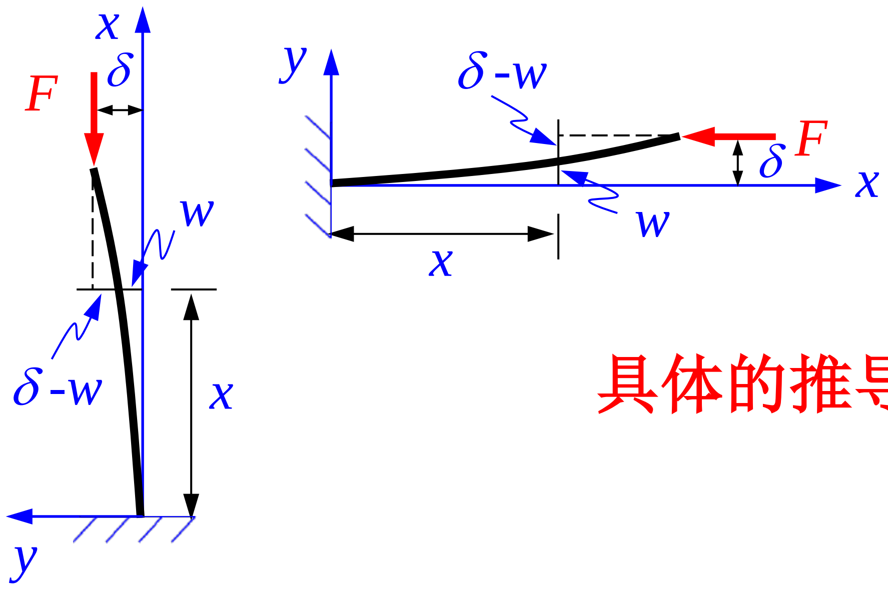
可解得
$$\delta=\frac{2\sqrt{2}L}{\pi}\sqrt{\frac{F}{F_{cr}}-1}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{F}{F_{cr}}-1\right)\right]$$

即当$F>F_{cr}$时，F与δ之间存在一一对应关系。

具体推导过程可参见Timoshenko S., Theory of elastic stability, pp.70-74. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1936.

§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

1. 一端固定一端自由压杆的临界压力



弯矩 $M = F(\delta - w)$

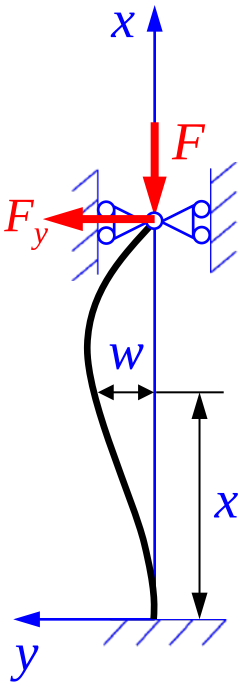
挠曲线的近似微分方程

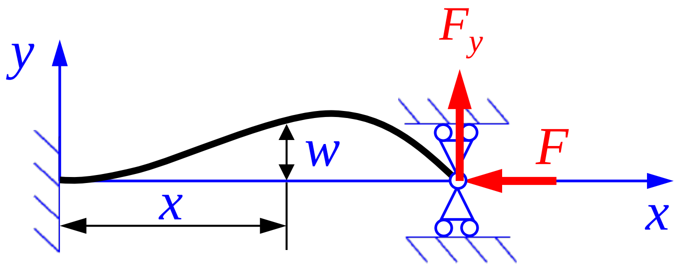
$$EIw'' = M = F(\delta - w)$$

具体的推导请大家自行完成！

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

2. 一端固定一端铰支压杆的临界压力





弯矩 $M=-Fw+F_y(l-x)$

挠曲线的近似微分方程

$$EIw''=M=-Fw+F_y(l-x)$$

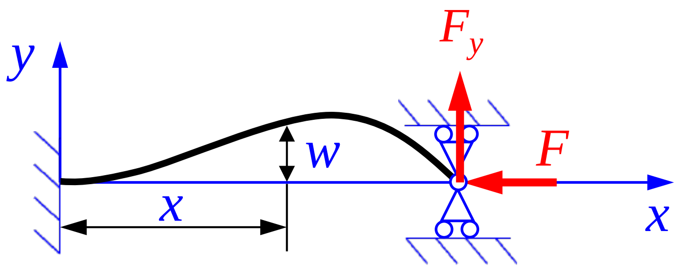
令 $k^2=\dfrac{F}{EI}$ 则上式可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}+k^2w=k^2\frac{F_y}{F}(l-x)$$

上式的全解为 $w=A\sin kx+B\cos kx+\dfrac{F_y}{F}(l-x)$

$$w = A\sin kx + B\cos kx + \frac{F_y}{F}(l - x)$$

$$w' = Ak\cos kx - Bk\sin kx - \frac{F_y}{F}$$



边界条件（固定端） $x = 0$： $w = 0$ ⇒ $B = -\dfrac{F_y l}{F}$

$x = 0$： $w' = 0$ ⇒ $A = \dfrac{F_y}{kF}$

$$w = \frac{F_y}{F}\left[\frac{1}{k}\sin kx - l\cos kx + (l - x)\right]$$

再利用边界条件（铰支端） $x = l$： $w = 0$

得 $\dfrac{F_y}{F}\left(\dfrac{1}{k}\sin kl - l\cos kl\right) = 0$

$$\frac{F_y}{F}\left(\frac{1}{k}\sin kl - l\cos kl\right) = 0$$

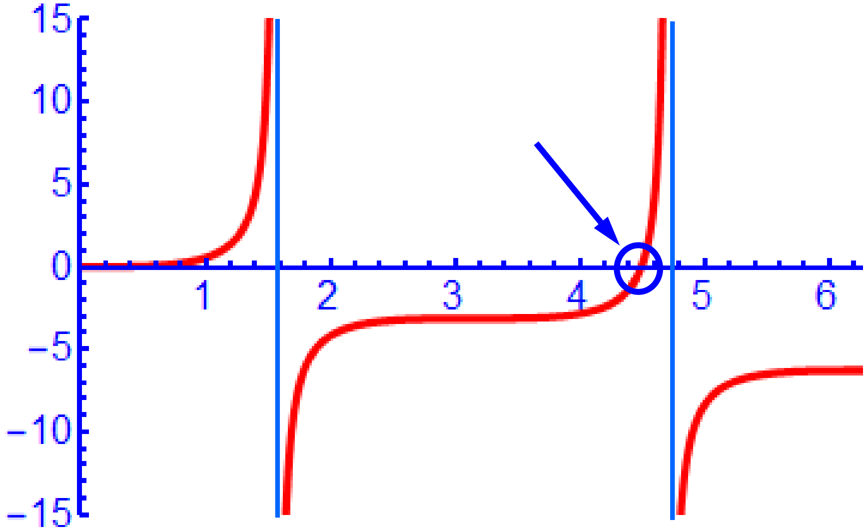
超越方程

即 $$\frac{1}{k}\sin kl - l\cos kl = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tan(kl) = kl$$

最小解 $kl = 4.49$

$$\Rightarrow \quad k^2 = \frac{F}{EI}$$

$$F_{cr} = \frac{4.49^2 EI}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

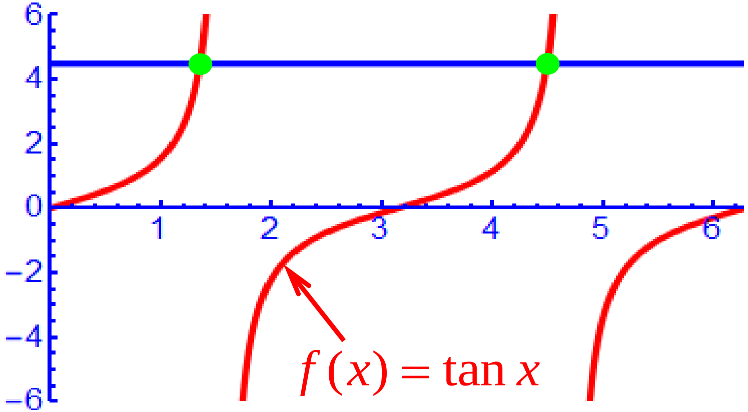


$y(x) = \tan(x) - x$

挠曲线方程为 $w=\frac{F_y l}{F}\left[\frac{\sin kx}{4.49}-\cos kx+(1-\frac{x}{l})\right]$

$$w''=\frac{F_y l}{F}\left[-k^2\frac{\sin kx}{4.49}+k^2\cos kx\right]=0 \qquad kl=4.49$$

$$\tan kx=4.49\begin{cases} kx_1=1.35 \rightarrow x_1=\frac{1.35}{k} \rightarrow x_1=\frac{1.35l}{4.49}=0.3l \\ kx_2=4.49 \rightarrow x_2=\frac{4.49}{k} \rightarrow x_2=\frac{4.49l}{4.49}=l \end{cases}$$



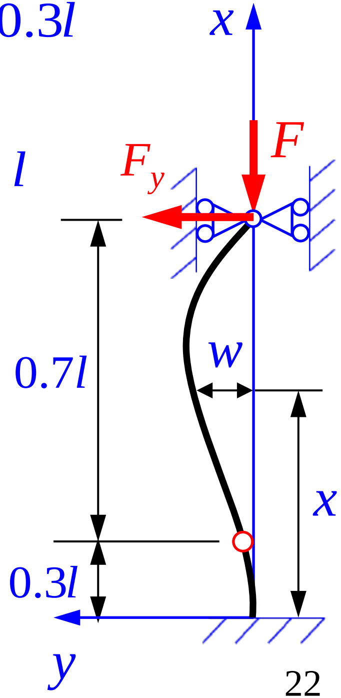
即 $x_1=0.3l$ 和 $x_2=l$,

$w''=0$

由 $EIw''=M(x)$, 得

$M(x_1)=0$

$M(x_2)=0$



小 结

不同支承条件下的压杆，由静力学平衡方法得到的平衡微分方程和边界条件可能各不相同，确定临界压力的表达式亦因此而异，但基本分析方法和分析过程却是相同的。

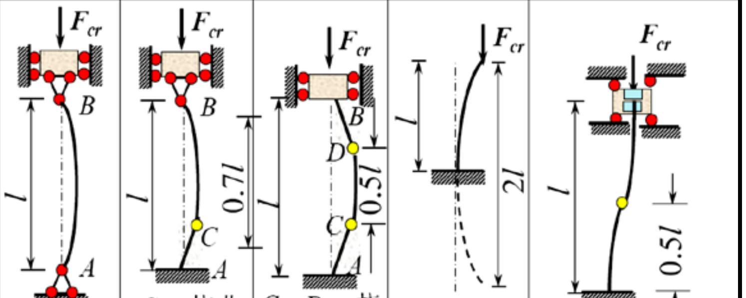
对于细长杆，这些公式可以写成统一形式：

$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

上式称为欧拉公式。其中μl为把压杆折算成两段铰支杆的长度，称为相当长度(effective length)；μ为反映不同支承影响的系数，称为长度因数（coefficient of length）。

压杆的长度因数 P320页 表9.1

压杆的约束条件	长度因数
两端铰支	$\mu=1$
一端固定，另一端自由	$\mu=2$
两端固定	$\mu=0.5$
一端固定，另一端铰支	$\mu\approx0.7$



支承情况	两端铰支	一端固定另端铰支	两端固定	一端固定另端自由	两端固定但可沿横向相对移动
失稳时挠曲线形状		C— 挠曲线拐点	C、D— 挠曲线拐点		C— 挠曲线拐点
临界力F_{cr}欧拉公式	$F_{cr}=\frac{\pi^2EI}{l^2}$	$F_{cr}\approx\frac{\pi^2EI}{(0.7l)^2}$	$F_{cr}\approx\frac{\pi^2EI}{(0.5l)^2}$	$F_{cr}\approx\frac{\pi^2EI}{(2l)^2}$	$F_{cr}=\frac{\pi^2EI}{l^2}$
长度系数 μ	$\mu=1$	$\mu\approx0.7$	$\mu=0.5$	$\mu=2$	$\mu=1$

考察临界压力欧拉公式：$F_{\mathrm{cr}}=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

当长度很小 $l\to 0$，$F_{\mathrm{cr}}\to\infty$ 。可见，临界力欧拉公式有适用范围。

欧拉公式只有在线弹性范围内才是适用的，因为挠曲线近似微分方程的基础是材料服从胡克定律），即

$$\sigma_{\mathrm{cr}}=\frac{F_{\mathrm{cr}}}{A}\le\sigma_{\mathrm{p}}$$

其中σ_{cr}称为临界应力（ critical stress ）；σ_{p}为材料的比例极限。

$$\sigma_{\mathrm{cr}}=\frac{F_{\mathrm{cr}}}{A}=\frac{\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}}{A}=\frac{\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}}{\dfrac{I}{i^2}}=\frac{\pi^2 E}{\underbrace{\left(\frac{\mu l}{i}\right)}_{\lambda}{}^2}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\le\sigma_{\mathrm{p}}\Longrightarrow\boxed{\lambda\ge\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{\mathrm{p}}}}=\lambda_{\mathrm{p}}}$$

$$\lambda \geq \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{\mathrm{p}}}} = \lambda_{\mathrm{p}} \qquad (\lambda = \frac{\mu l}{i})$$

λ定义为柔度（或长细比），是综合反映压杆长度、约束条件、截面尺寸和截面形状对压杆临界载荷影响的量纲一的量。

λ_{p}为能够应用欧拉公式的压杆柔度的极限值。

细长压杆的判定条件：$\lambda \geq \lambda_{\mathrm{p}}$，此时欧拉公式能够使用！

通常称 $\lambda > \lambda_{\mathrm{p}}$的压杆为大柔度压杆，或细长压杆

$\lambda < \lambda_{\mathrm{p}}$的压杆，下次课讨论。

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{\mathrm{p}}}}$$

λ_{p} 取决于压杆材料的力学性能E和σ_{p}

Q235钢： E＝206GPa，σ_p＝200MPa，则

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{206\times10^9}{200\times10^6}} \cong 100$$

对于Q235钢制成的压杆，只有$\lambda \geq 100$时才能应用欧拉公式计算其临界压力。

铝合金： E＝70GPa，σ_p＝175MPa，则

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{70\times10^9}{175\times10^6}} \cong 62.8$$

对于铝合金制成的压杆，只有$\lambda \geq 62.8$时才能应用欧拉公式计算其临界压力。

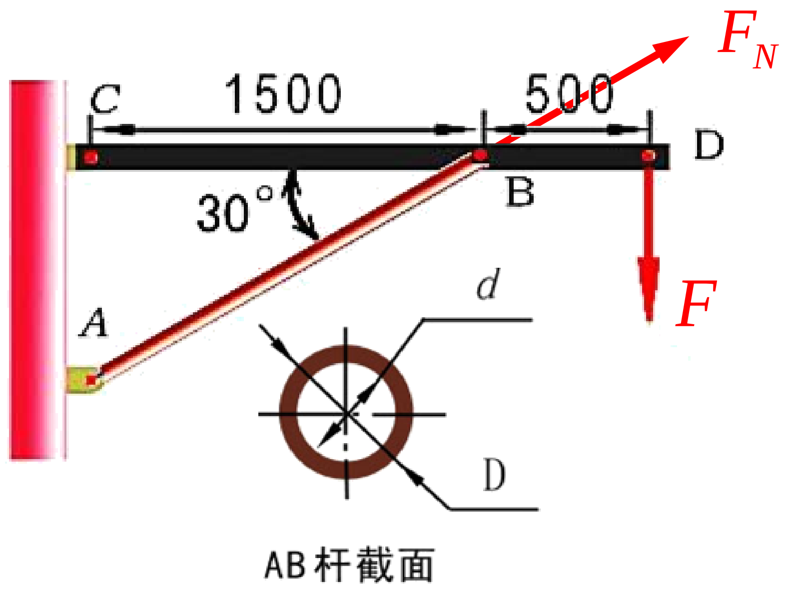
大柔度压杆（细长压杆）的稳定性条件：

$$F \leq \frac{F_{cr}}{n_{st}} \quad 或 \quad n = \frac{F_{cr}}{F} \leq n_{st}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$ — 临界压力

n_{st} — 稳定安全因数

例1 已知托架D处承受集中载荷F=10kN。AB杆外径D=50mm，内径d=40mm，材料为Q235钢，E=200GPa, λ_p=100，n_{st}=3。校核AB杆的稳定性。

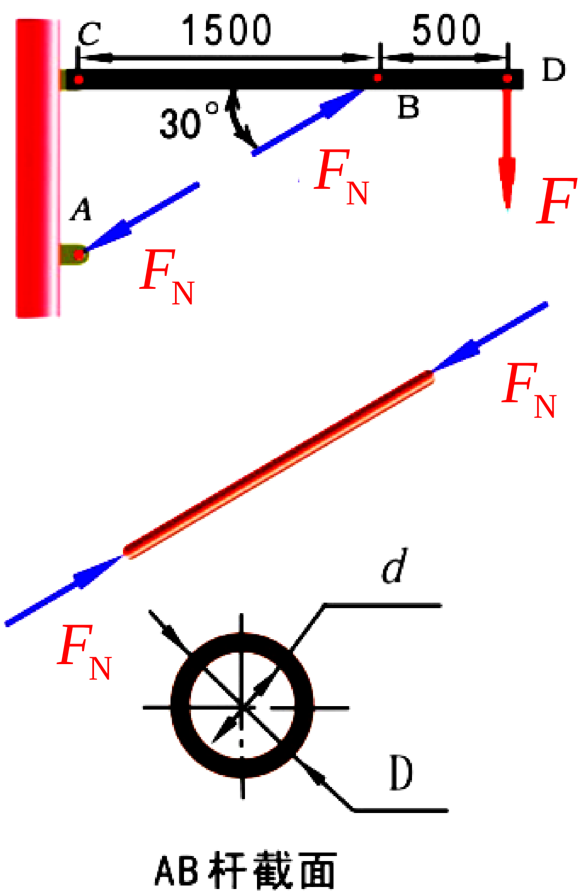


解：求AB杆的轴力F_N

对CD梁 $\sum M_C = 0$

$$F \cdot 2000 = F_N \cdot \sin 30^\circ \cdot 1500$$

得 $F_N = 26.6\text{kN}$



AB杆长 $l=\dfrac{1.5}{\cos 30^{\circ}}=\sqrt{3}\doteq 1.732\mathrm{m}$

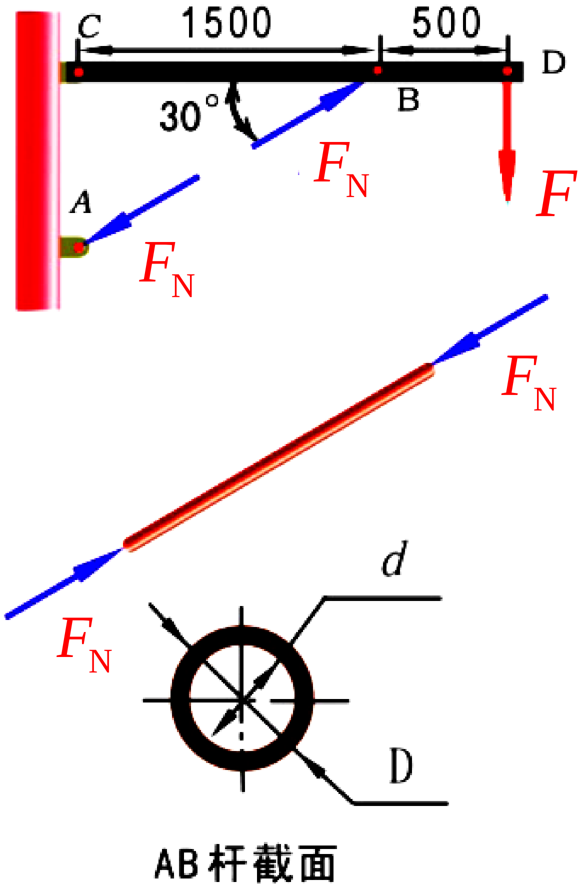
$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\pi\left(D^{4}-d^{4}\right)/64}{\pi\left(D^{2}-d^{2}\right)/4}}$$

$$=\frac{\sqrt{D^{2}+d^{2}}}{4}=16\mathrm{mm}$$

D=50mm
d=40mm

取$\mu=1$ （AB杆两端铰支）

由$\lambda=\dfrac{\mu l}{i}$得 $\lambda=\dfrac{1\times 1.732}{16\times 10^{-3}}=108$



$$\lambda=\frac{1\times1.732}{16\times10^{-3}}=108>\lambda_p=100$$

$\lambda_p=100$
$n_{st}=3$

可知*AB*杆为细长压杆，可用欧拉公式计算临界压力

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=118\text{kN} \qquad F_N=26.6\text{kN}$$

$$\frac{F_{cr}}{n_{st}}=\frac{118}{3}=39.3\text{kN}>F_N$$

*AB*杆满足稳定性要求。

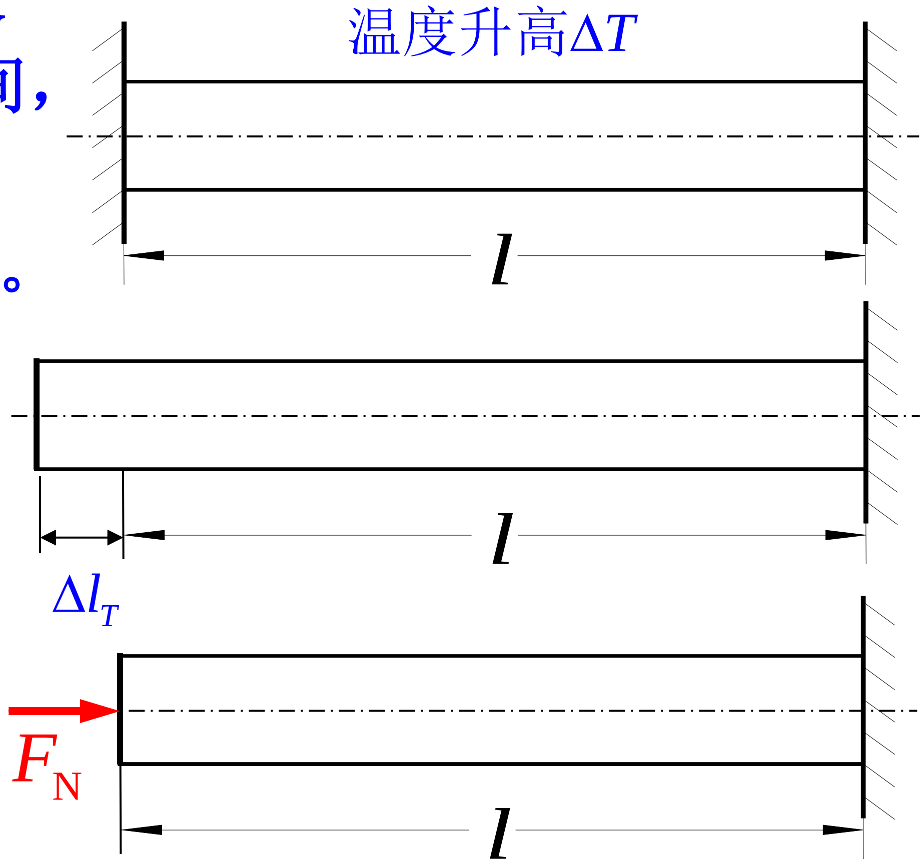
例2 长5m的10号工字钢，在温度为0°C时安装在两个固定支座之间，这时杆不受力。已知钢的线胀系数$\alpha_l = 12.5 \times 10^{-6}$/°C，$E$=210GPa。试问当温度升高至多少度时，杆将丧失稳定？

解：温度应力，一次超静定

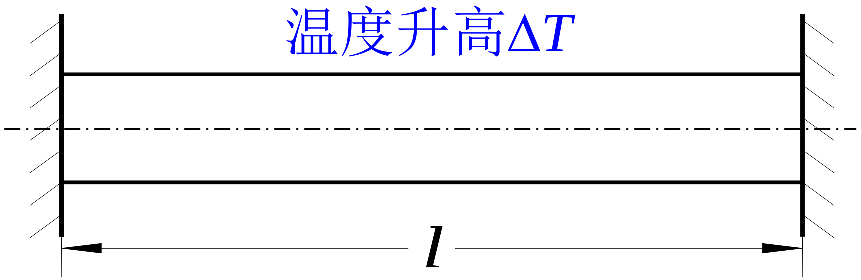
$$\Delta l_T = \Delta l_F$$

$$\alpha_l \cdot \Delta T \cdot l = \frac{F_\mathrm{N} l}{EA}$$

$$F_\mathrm{N} = E\alpha_l \cdot \Delta T \cdot A$$



$$F_{\mathrm{N}} = E\alpha_l \cdot \Delta T \cdot A$$



10号工字钢的参数：

$$I_x = 245\mathrm{cm}^4, \quad i_x = 4.14\mathrm{cm}$$

$$I_y = 33.0\mathrm{cm}^4, \quad i_y = 1.52\mathrm{cm}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.5\times 5}{1.52\times 10^{-2}} = 164.5 > \lambda_{\mathrm{p}} = 100$$

此时杆为细长压杆，可用欧拉公式计算临界压力。

$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 E I_y}{(\mu l)^2} = F_{\mathrm{N}} = E\alpha_l \cdot \Delta T \cdot A \Longrightarrow \Delta T = \frac{\pi^2 I_y}{\alpha_l (\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 (i_y)^2}{\alpha_l (\mu l)^2} = \frac{\pi^2}{\alpha_l \lambda^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{12.5\times 10^{-6}\times 164.5^2} = 29.2^\circ\mathrm{C}$$

要使得升高到40 °C，杆不发生失稳，有何途径？

提高杆在两端固定时的温度，如改为10.8 °C （40 °C –29.2 °C ）以上。

谢 谢！

作业

P337：9.3，9.4

P338-339：9.10

对应第6版的题号 P325-327：9.3，9.4，9.10

下次课讲 欧拉公式的适用范围