材料力学（II）

第十三章 能量方法（1）

Energy method（1）

第 25 讲

材料力学专题研究—材料力学+Matlab（10%）

专题内容：用Matlab编写一个材料力学知识相关的计算程序，解决材料力学课程中涉及的问题，使讨论和理解更深入

提交时间：2025年6月3日（周二）23:59之前提交到学在浙大

具体要求：（1）提供一份计算说明书，包括：

I. 题目、选题说明、程序的功能说明等

II. 提供算例分析、结果讨论以及体会

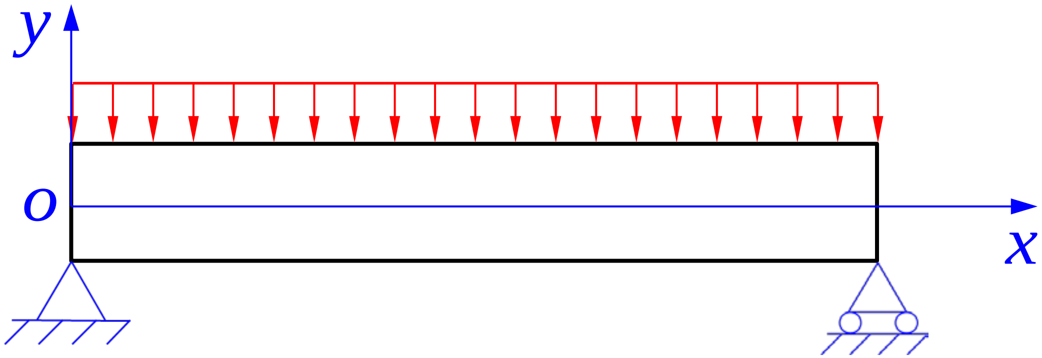
（2）提供Matlab计算源程序（.m文件）

实施方案：每人独立完成，题目自定！

若Matlab编程有困难，可以用体现材料力学课程学习成果方面的材料来代替！（如：利用材料力学知识设计制作具有某种功能的巧妙结构；或针对某个问题开展研究并撰写专题小论文；材料力学课程重要知识点梳理）

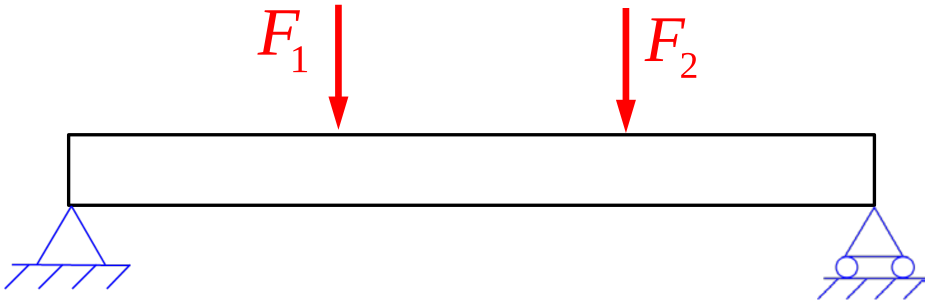
研究题目（供参考），例如：

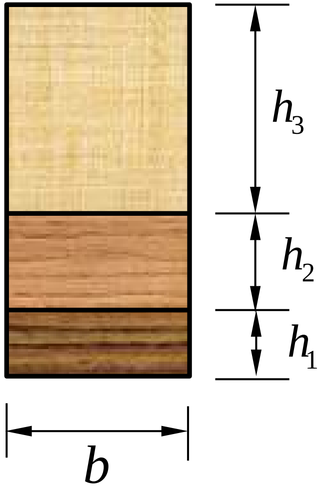
1. 确定和绘制简支梁受均布载荷作用下的主应力迹线（在xy平面内可以绘制两组正交的曲线，曲线上每点的切线方向即是该点处的主应力方向）（换成悬臂梁或外伸梁、其他形式的载荷）



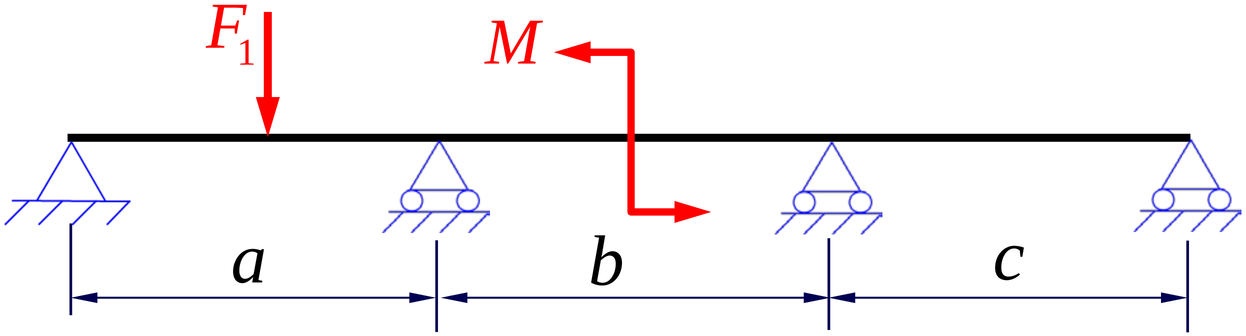
2. 平面或空间应力状态应力分析（进行主应力大小及方向的研究和讨论）【发挥编程特长，可加入动画演示，使结果更直观，加深理解】

3. 两种或三种材料组合截面梁的弯曲正应力或弯曲切应力的分析和讨论【理论结果并绘制出曲线】。





4. 确定三跨或多跨连续梁的各支座约束反力，绘制剪力图和弯矩图及挠曲线，讨论约束反力随支座间距的变化！（可以换成其他形式的载荷，如移动载荷等）



5. 组合变形问题的强度分析或设计，如对稍微复杂结构形式或复杂截面形状的结构进行参数分析（如讨论结构尺寸变化、载荷作用点的变化对结果的影响）。

6. 从实际工程结构得到启发，某些地方需要加强或特殊处理，理论依据是什么？作进一步研究和探讨（结构形式或截面形状的合理性、改进的方案或措施等）。

分析支撑杆用直杆和曲杆的区别?

连接处用铰接和焊接的区别?

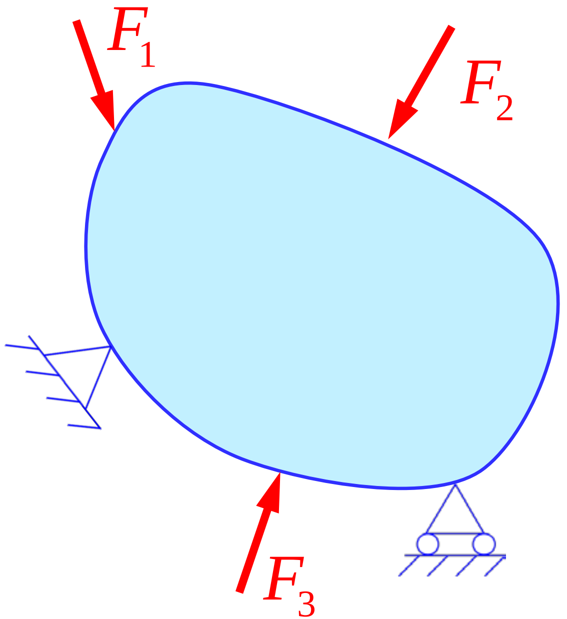
第十三章 能量方法

§13.1 概 述

第I册：强度问题、 刚度问题、 稳定性问题

弹性固体在外力作用下变形，引起力作用点沿力作用方向位移，外力因此而做功。由功能原理可知， 弹性固体的应变能V_ε在数值上等于外力所做的功W，即$V_\varepsilon = W$。

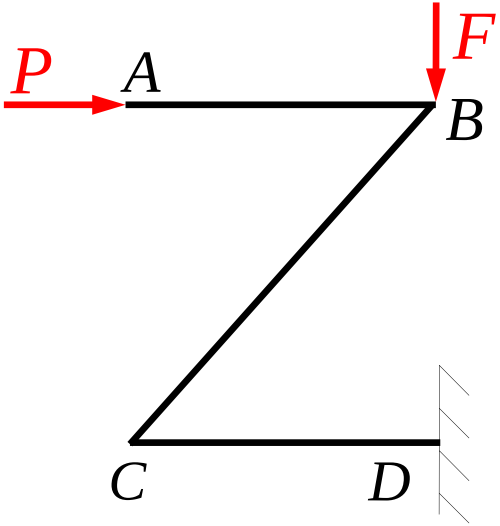
弹性固体的应变能是可逆的，当外力逐渐解除时，它又可在恢复变形过程中，释放出全部应变能而做功。



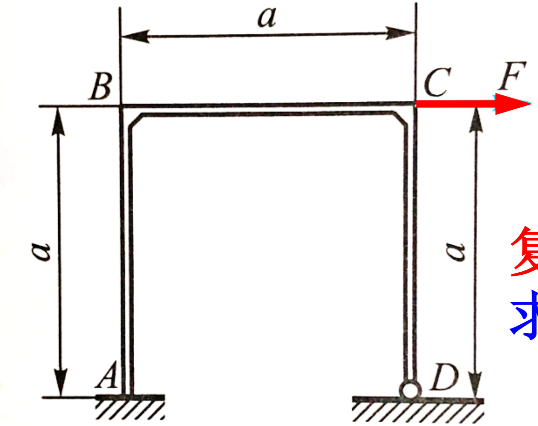
利用功和能的概念求解可变形固体的位移、变形及内力等的方法，统称为能量方法。能量原理在构件的变形计算及超静定结构的求解中都有重要应用。

能量方法用途很广：

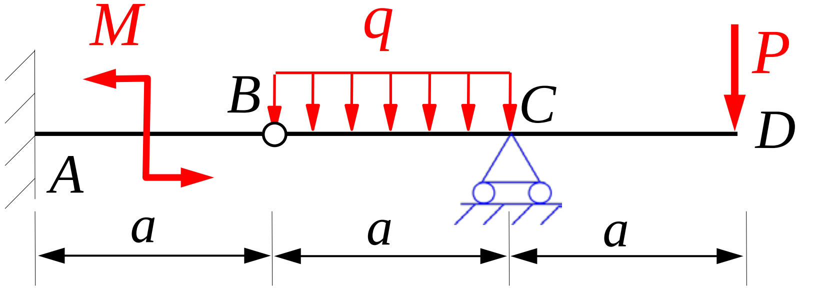
1. 适用于线弹性问题



复杂结构，求*A*截面处的水平、铅垂位移和转角

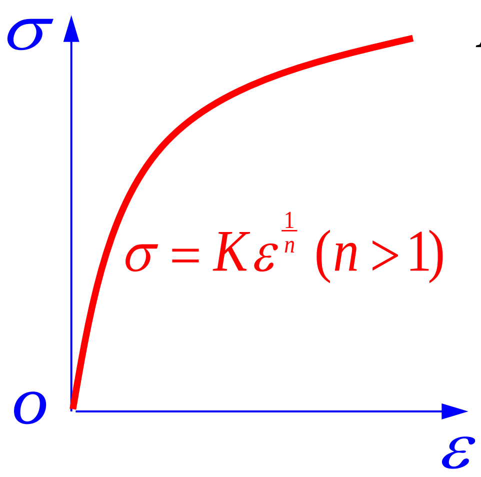


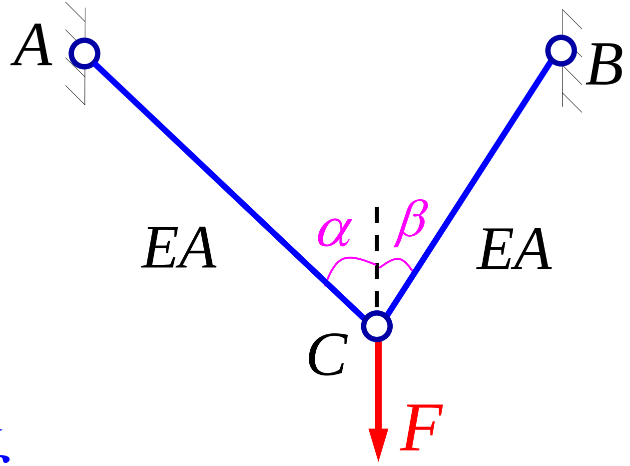
复杂结构
求支座约束力

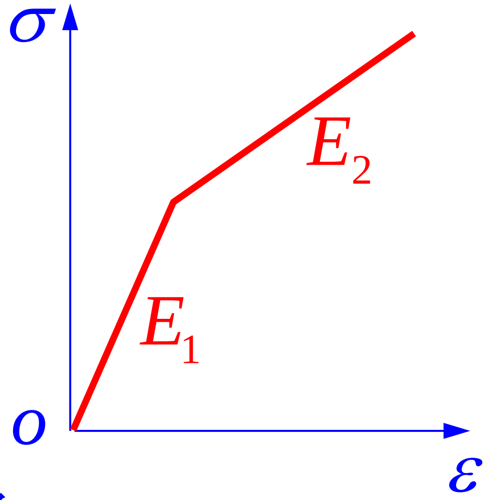


复杂载荷，求*D*截面处的挠度和转角

2. 也可用于非线性弹性问题







求C点的水平和铅垂位移

3. 还可求解曲杆的变形

§ 13.2　杆件应变能的计算

一、　线弹性问题

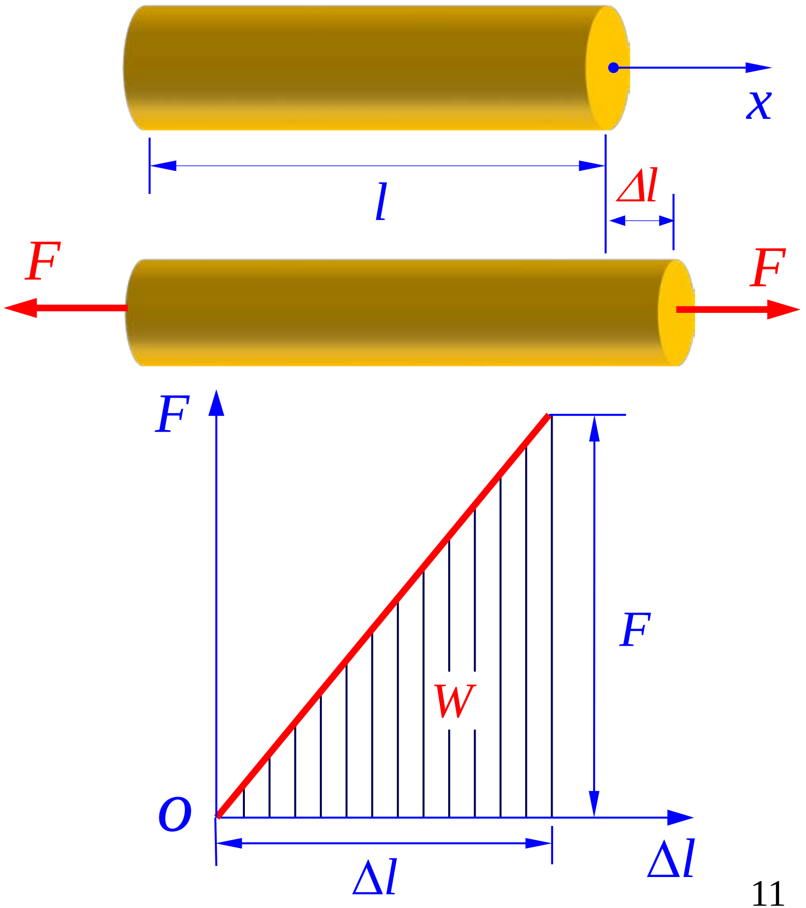
1. 轴向拉压杆件应变能的计算

$$\left.\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2} F\Delta l \\ \Delta l &= \frac{Fl}{EA} \end{aligned}\right\} W = \frac{F^2 l}{2EA}$$

$V_\varepsilon = W$

功能原理

$$V_\varepsilon = \frac{F^2 l}{2EA}$$



分段直杆 $V_\varepsilon = \sum_i \frac{F_{\mathrm{N}i}{}^2 l_i}{2E_i A_i}$

变外力等截面直杆 $V_\varepsilon = \int_0^l \frac{F_\mathrm{N}^2(x)}{2EA}\mathrm{d}x$

变外力且变截面直杆 $V_\varepsilon = \int_0^l \frac{F_\mathrm{N}^2(x)}{2EA(x)}\mathrm{d}x$

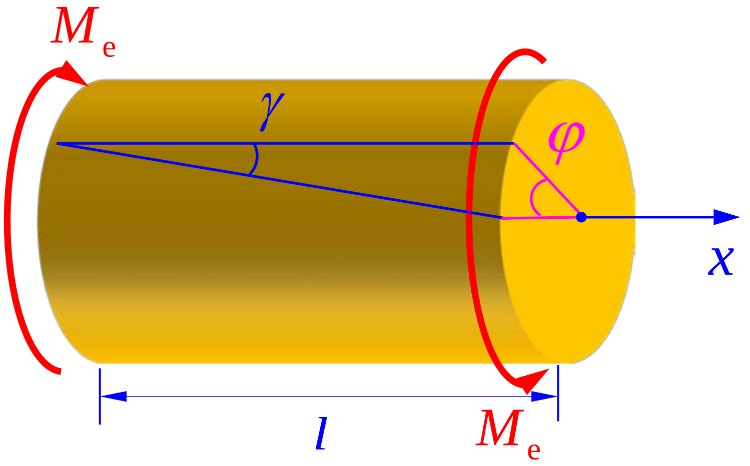
2. 扭转变形杆件应变能的计算

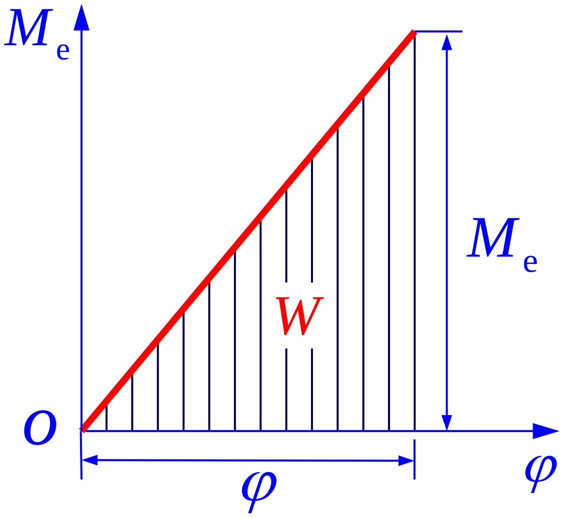
$$\left.\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2} M_{\mathrm{e}} \varphi \\ \varphi &= \frac{M_{\mathrm{e}} l}{G I_{\mathrm{p}}} \end{aligned}\right\} \quad W = \frac{M_{\mathrm{e}}^2 l}{2 G I_{\mathrm{p}}}$$

$V_\varepsilon = W$

功能原理

$$V_\varepsilon = \frac{M_{\mathrm{e}}^2 l}{2 G I_{\mathrm{p}}}$$





分段直杆 $V_\varepsilon = \sum_i \frac{T_i^2 l_i}{2 G_i I_{\mathrm{p}i}}$

变扭矩等截面直杆 $V_\varepsilon = \int_0^l \frac{T^2(x)}{2 G I_{\mathrm{p}}} \mathrm{d}x$

变扭矩且变截面直杆 $V_\varepsilon = \int_0^l \frac{T^2(x)}{2 G I_{\mathrm{p}}(x)} \mathrm{d}x$

3. 弯曲变形杆件应变能的计算

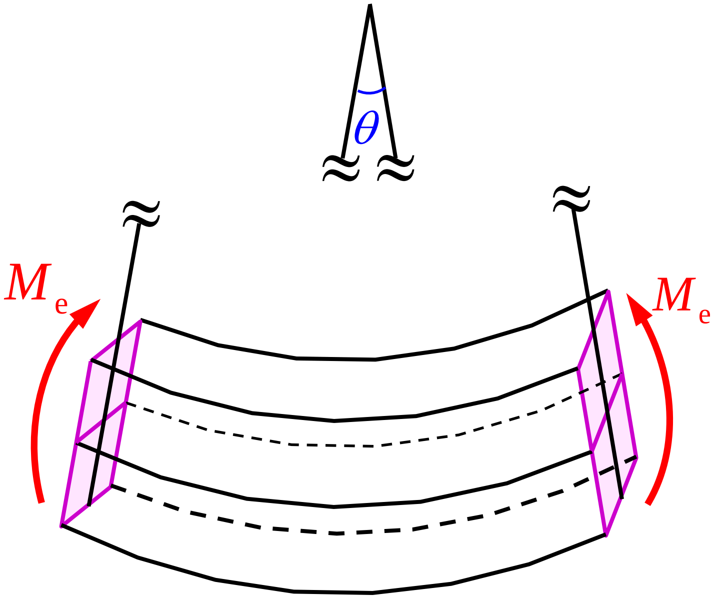
3.1 弯矩引起的杆件应变能的计算

$$\left.\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}M_{\mathrm{e}}\theta \\ \theta &= \frac{l}{\rho} = \frac{M_{\mathrm{e}}l}{EI} \end{aligned}\right\} W = \frac{M_{\mathrm{e}}^{2}l}{2EI}$$

$V_{\varepsilon} = W$

功能原理

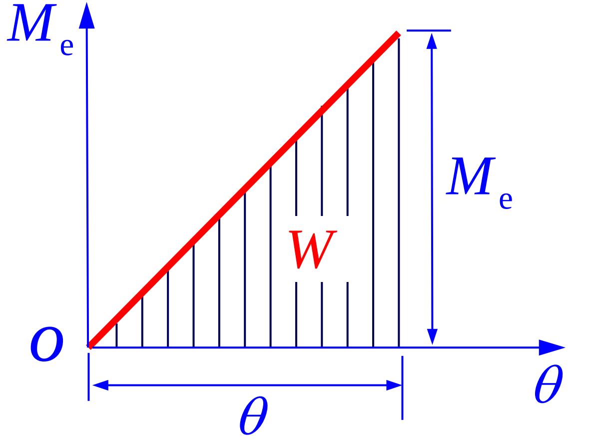
$$V_{\varepsilon} = \frac{M_{\mathrm{e}}^{2}l}{2EI}$$



分段直杆 $V_{\varepsilon} = \sum_{i} \frac{M_{i}^{2}l_{i}}{2E_{i}I_{i}}$

变弯矩等截面直杆 $V_{\varepsilon} = \int_{0}^{l} \frac{M^{2}(x)}{2EI}\mathrm{d}x$

变弯矩且变截面直杆 $V_{\varepsilon} = \int_{0}^{l} \frac{M^{2}(x)}{2EI(x)}\mathrm{d}x$



3.2 剪切变形对应的应变能

$$V_{\varepsilon}=\int_{0}^{l}k\frac{F_{S}^{2}(x)}{2GA(x)}\,\mathrm{d}x$$

k—为修正因数，与截面形状有关（见 P. 94）

矩形截面：$k=6/5$ 　　　实心圆形截面：$k=10/9$

薄壁圆管截面：$k=2.0$

计算梁的应变能时，由于工程中常用梁的跨长往往大于横截面高度的10倍，因而梁的剪切应变能与弯曲应变能相比可以略去不计。

§ 13.3 应变能的普遍表达式

$$V_\varepsilon = \int_L \frac{F_N^2(x)}{2EA}\mathrm{d}x + \int_L \frac{T^2(x)}{2GI_p}\mathrm{d}x + \int_L \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x + \int_0^l k\frac{F_S^2(x)}{2GA(x)}\mathrm{d}x$$

① 轴力、扭矩和弯矩各自的变形垂直, 相互不做功;

② 应变能与加载次序无关;

③ 略去了剪力的影响。

应变能的计算（积分的形式）：$V_\varepsilon = \int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V$

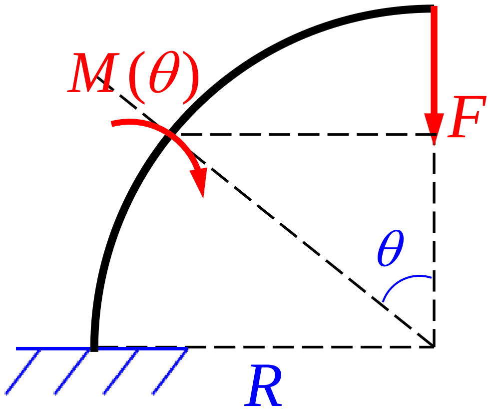
① 单轴（单向）应力状态 $v_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$

② 纯剪切应力状态 $v_\varepsilon = \frac{1}{2}\tau\gamma$

③ 主单元体的应变能密度 $v_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3$

④ 一般单元体的应变能密度 $v_\varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z) + \frac{1}{2}(\tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$

例1 试求图示四分之一圆曲杆的应变能，并利用功能原理求B截面的铅垂位移。已知EI为常量。



解：不考虑拉压和剪切应变能

$$M(\theta) = FR\sin\theta$$

$$V_\varepsilon = \int_l \frac{M^2(\theta)}{2EI}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(FR\sin\theta)^2}{2EI} R\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{F^2R^3}{2EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{F^2R^3}{2EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi F^2R^3}{8EI}$$

$$W = \frac{1}{2}F\cdot\delta_y \xrightarrow{W = V_\varepsilon} \delta_y = \frac{\pi FR^3}{4EI}$$

例2 图示在水平平面内的半圆曲杆，在A端受竖直向下的集中力F作用，试求力作用点的铅垂位移。已知EI为常量。

解：不考虑剪切应变能

在$m\text{–}m$截面上的内力

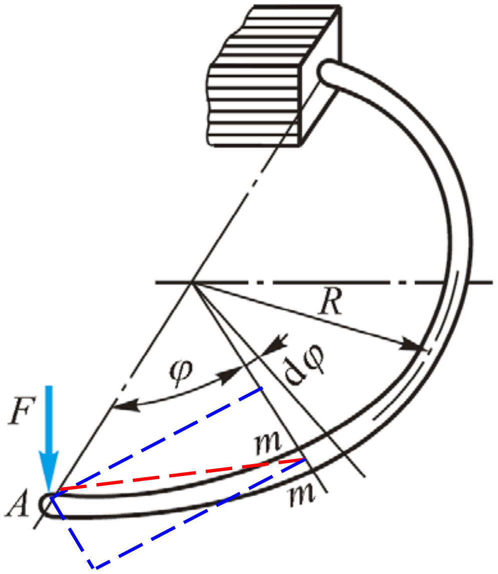
$$M(\varphi)=FR\sin\varphi$$

$$T(\varphi)=F(R-R\cos\varphi)$$

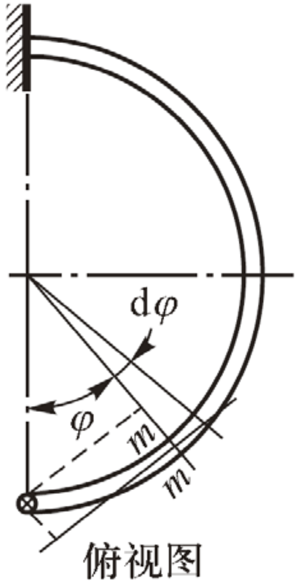
$$V_\varepsilon=\int_l \frac{M^2(\varphi)}{2EI}R\mathrm{d}\varphi+\int_l \frac{T^2(\varphi)}{2GI_p}R\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi F^2R^3}{4EI}+\frac{3\pi F^2R^3}{4GI_p}$$

$$W=\frac{1}{2}F\cdot\delta_A \xrightarrow{W=V_\varepsilon} \delta_A=\frac{\pi FR^3}{2EI}+\frac{3\pi FR^3}{2GI_p}$$

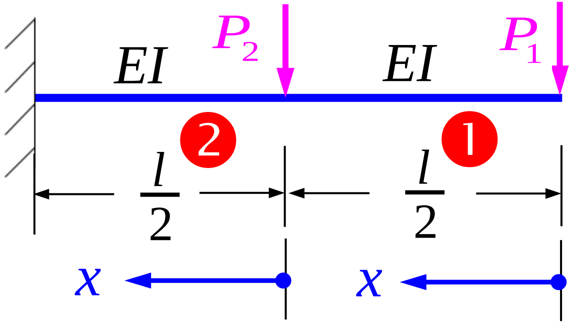


(a)



(b)

例3 求图示悬臂梁的应变能



解法一： $V_\varepsilon = \int_L \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$

积分要遍布整根梁

$$V_\varepsilon = \int_0^{l/2} \frac{M_1^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x + \int_0^{l/2} \frac{M_2^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{2EI}\int_0^{l/2}(P_1 x)^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2EI}\int_0^{l/2}[P_1(x+\tfrac{l}{2}) + P_2 x]^2\mathrm{d}x$$

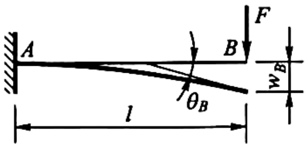
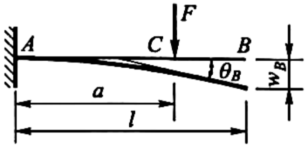
$$[(P_1+P_2)x + P_1\tfrac{l}{2}]^2$$

$$= \frac{1}{2EI}\int_0^{l/2} P_1^2 x^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2EI}\int_0^{l/2}[(P_1+P_2)^2x^2 + P_1 l(P_1+P_2)x + P_1^2\frac{l^2}{4}]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2EI}\times\left[P_1^2\times\frac{l^3}{24} + (P_1+P_2)^2\times\frac{l^3}{24} + P_1 l\times(P_1+P_2)\times\frac{l^2}{8} + P_1^2\times\frac{l^2}{4}\times\frac{l}{2}\right]$$

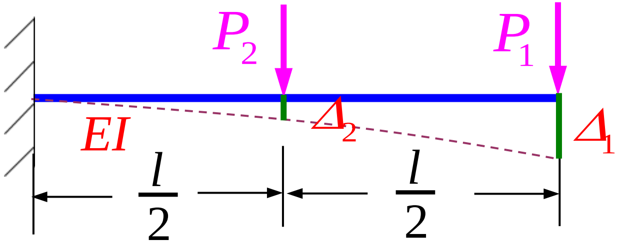
$$= \frac{1}{2EI}\times\left[P_1^2\times\left(\frac{l^3}{24}+\frac{l^3}{24}+\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{8}\right) + P_2^2\times\frac{l^3}{24} + P_1P_2\times\left(\frac{l^3}{12}+\frac{l^3}{8}\right)\right] = \frac{P_1^2 l^3}{6EI} + \frac{P_2^2 l^3}{48EI} + \frac{5P_1P_2 l^3}{48EI}$$

$$V_{\varepsilon}=\frac{P_1^2 l^3}{6EI}+\frac{P_2^2 l^3}{48EI}+\frac{5P_1P_2 l^3}{48EI}$$

	$w=-\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$	$\theta_B=-\frac{Fl^2}{2EI}$	$w_B=-\frac{Fl^3}{3EI}$
	$w=-\frac{Fx^2}{6EI}(3a-x)\ (0\leqslant x\leqslant a)$ $w=-\frac{Fa^2}{6EI}(3x-a)\ (a\leqslant x\leqslant l)$	$\theta_B=-\frac{Fa^2}{2EI}$	$w_B=-\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$

解法二：

$\varDelta_i$ —力方向上的位移

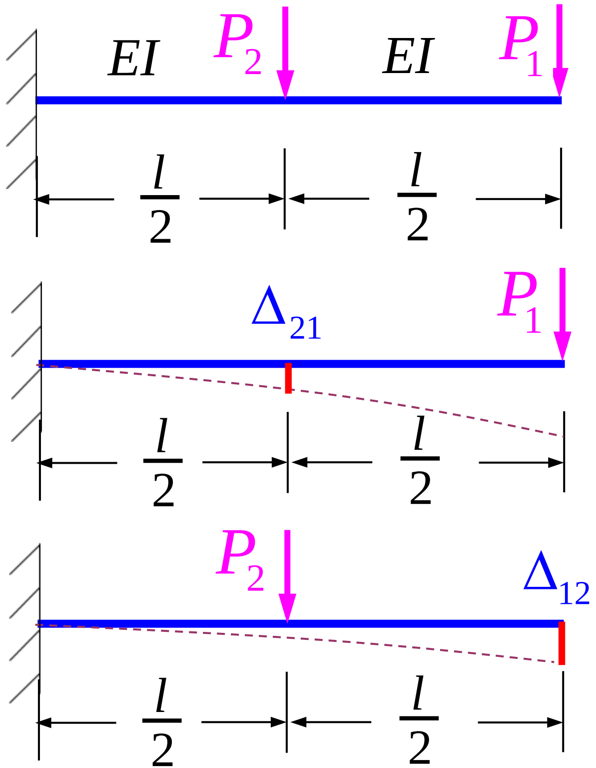


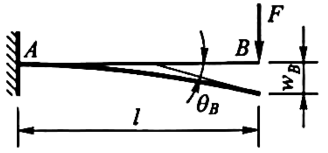
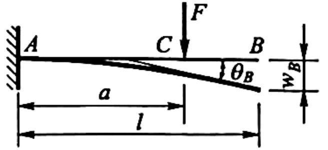
$$\varDelta_1=\frac{P_1 l^3}{3EI}+\frac{P_2(\frac{1}{2}l)^2}{6EI}(3l-\tfrac{1}{2}l)=\frac{P_1 l^3}{3EI}+\frac{5P_2 l^3}{48EI}$$

$$\varDelta_2=\frac{P_2(\frac{1}{2}l)^3}{3EI}+\frac{P_1(\frac{1}{2}l)^2}{6EI}(3l-\tfrac{1}{2}l)=\frac{P_2 l^3}{24EI}+\frac{5P_1 l^3}{48EI}$$

$$V_{\varepsilon}=W=\tfrac{1}{2}P_1\varDelta_1+\tfrac{1}{2}P_2\varDelta_2=\frac{P_1^2 l^3}{6EI}+\frac{P_2^2 l^3}{48EI}+\frac{5P_1P_2 l^3}{48EI}$$

§ 13.4　互等定理



	$w=-\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$
	$w=-\frac{Fx^2}{6EI}(3a-x)\ (0\leqslant x\leqslant a)$ $w=-\frac{Fa^2}{6EI}(3x-a)\ (a\leqslant x\leqslant l)$

$$\Delta_{21}=\frac{P_1(\frac{l}{2})l^2}{6EI}(3l-\tfrac{l}{2})=\frac{5P_1l^3}{48EI}$$

$$\Delta_{12}=\frac{P_2(\frac{l}{2})l^2}{6EI}(3l-\tfrac{l}{2})=\frac{5P_2l^3}{48EI}$$

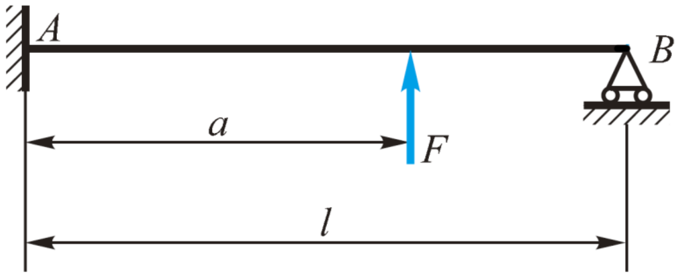
$$P_1\Delta_{12}=P_2\Delta_{21}$$

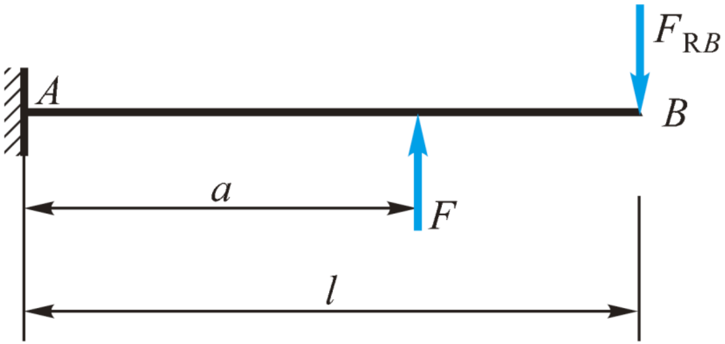
功的互等定理

力和位移是广义的！

第一组力在第二组力引起的位移上所做的功等于第二组力在第一组力引起的位移上所做的功。

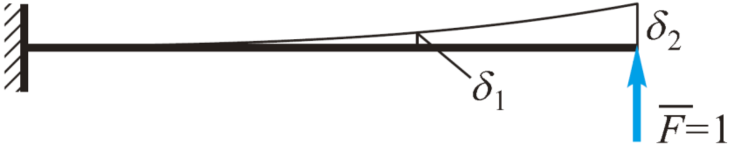
例4 装有尾顶针的车削工件可简化成超静定梁。试利用互等定理求解支座B的约束力。



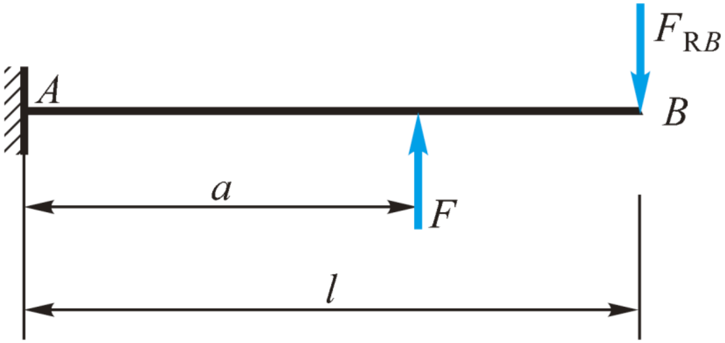


解：解除支座B，把工件看作悬臂梁

把工件上作用的切削力F和尾顶针约束力F_{RB}作为第一组力。



设想在同一悬臂梁的右端作用 $\overline{F}=1$ 的单位力，并作为第二组力。



$$\delta_1 = \frac{a^2}{6EI}(3l-a)$$

$$\delta_2 = \frac{l^3}{3EI}$$

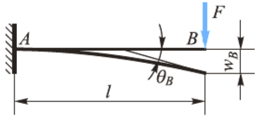
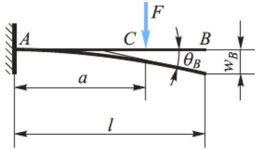
由功的互等定理：

$$F\delta_1 - F_{RB}\delta_2 = \bar{F}\cdot 0$$

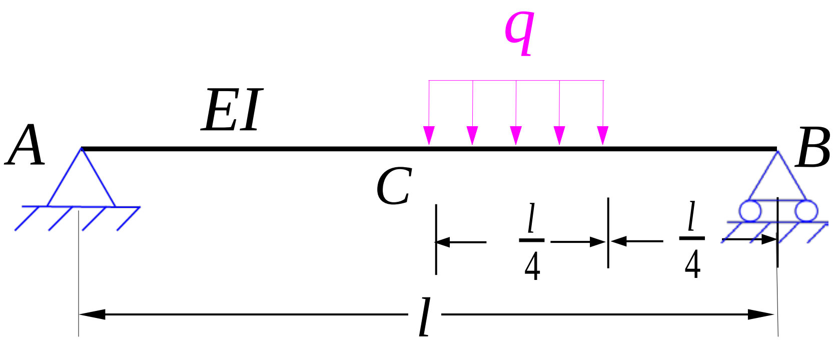
$$F\frac{a^2}{6EI}(3l-a) - F_{RB}\frac{l^3}{3EI} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_{RB} = \frac{a^2}{2l^3}(3l-a)F$$

叠加原理

$$F\frac{a^2}{6EI}(3l-a) - F_{RB}\frac{l^3}{3EI} = 0$$

	$w=-\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$	$\theta_B=-\frac{Fl^2}{2EI}$	$w_B=-\frac{Fl^3}{3EI}$
	$w=-\frac{Fx^2}{6EI}(3a-x)\quad(0\leqslant x\leqslant a)$ $w=-\frac{Fa^2}{6EI}(3x-a)\quad(a\leqslant x\leqslant l)$	$\theta_B=-\frac{Fa^2}{2EI}$	$w_B=-\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$

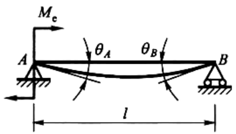
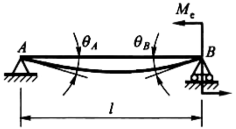
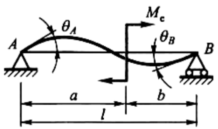
例5　求图示梁中点C的挠度

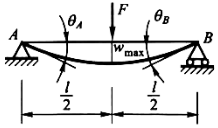
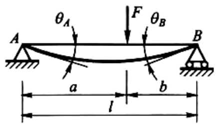
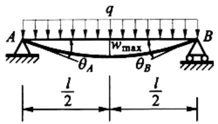


叠加原理?

表6.1　梁在简单载荷作用下的变形

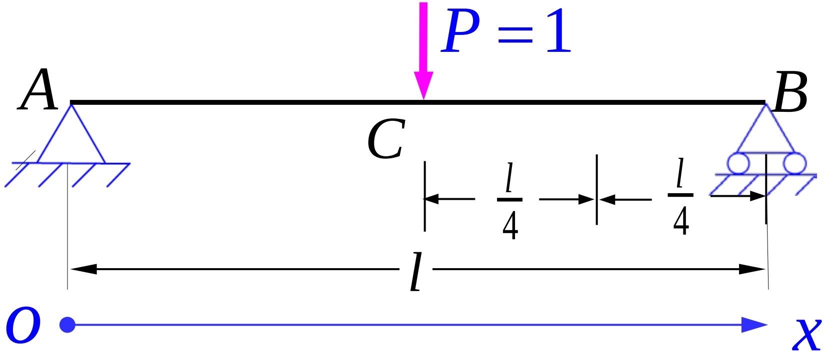
找不到合适的情形！

序号	梁的简图
5	
6	
7	

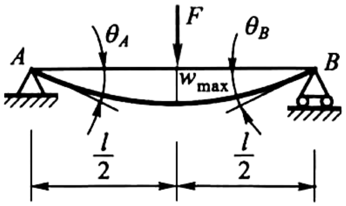
序号	梁的简图
8	
9	
10	

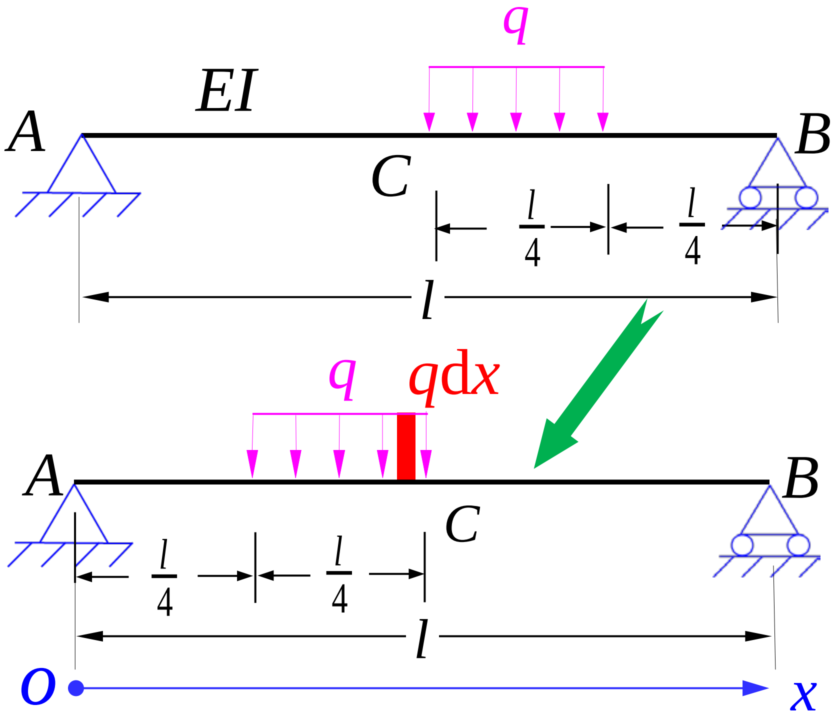
利用功的互等定理

在C点假想作用一向下的单位力



$$w(x)=\frac{1\cdot x}{48EI}(3l^2-4x^2)\quad (0\le x\le \frac{l}{2})$$

梁的简图	挠曲线方程
	$w=-\frac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\right)$

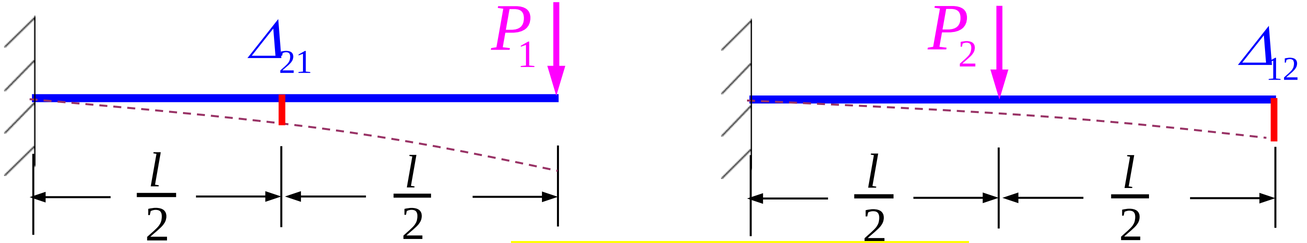


$$1\times\Delta_c=\int_{l/4}^{l/2}q\mathrm{d}x\cdot\frac{1\cdot x}{48EI}(3l^2-4x^2)$$

$$\Delta_c=\frac{57ql^4}{12288EI}$$

位移互等定理

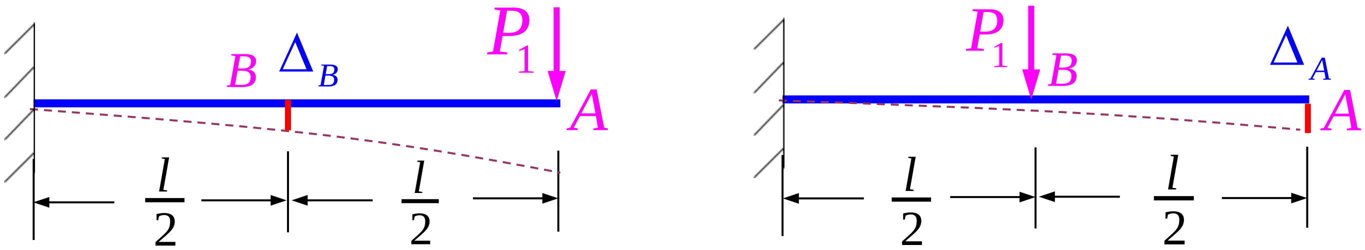
功的互等定理



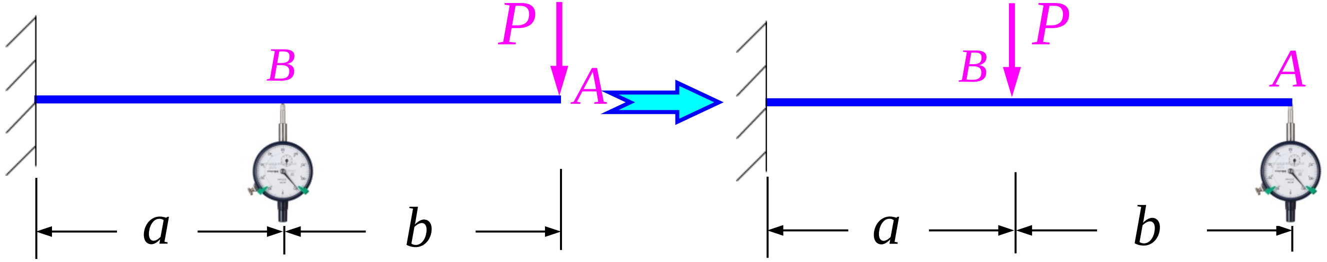
$$P_1\Delta_{12} = P_2\Delta_{21}$$

若进一步有 $P_1 = P_2$； 则有 $\Delta_{12} = \Delta_{21}$

位移互等定理



$$\Delta_A = \Delta_B$$



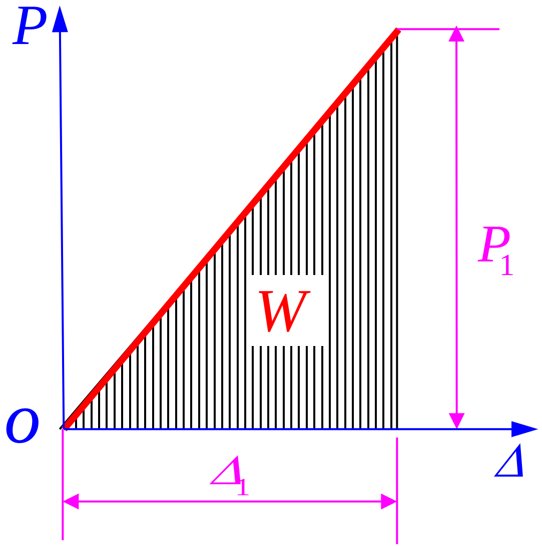
应用：工程测试中考虑加载和仪表安装的方便程度，改变测试方案！

* 非线性弹性问题

一、应变能的计算（利用计算功的形式）$V_{\varepsilon}=W=\int_{0}^{\Delta_1}P\mathrm{d}\Delta$

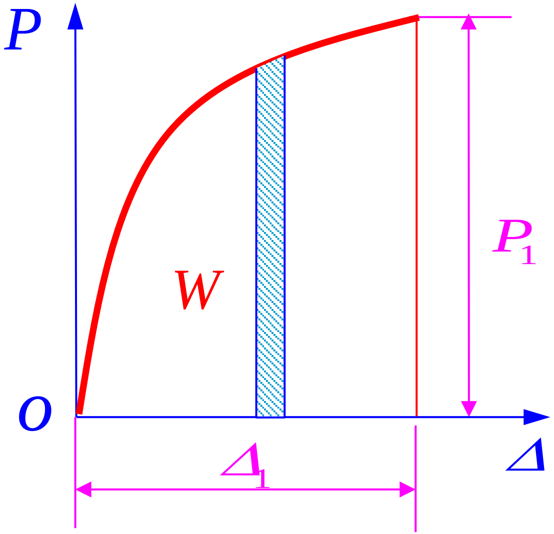
P—广义力（力，力偶）；　Δ—广义位移（线位移，角位移）

1. 几何非线性弹性问题



线弹性

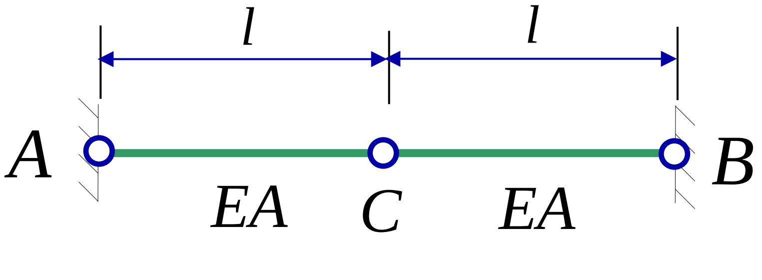
$V_{\varepsilon}=\frac{1}{2}P_1\Delta_1$



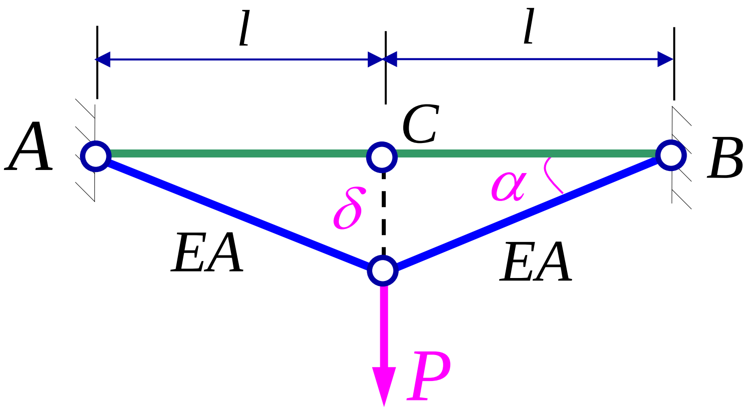
几何非线性

$V_{\varepsilon}=\int_{0}^{\Delta_1}P\mathrm{d}\Delta$

例6 原为水平位置的杆系如下图（a）所示，两杆的长度均为l，截面积均为A，材料的弹性模量为E（线弹性材料），C点受P集中力作用后位移为δ（图b），试给出$P-\delta$的关系式并计算杆的应变能。



(a)

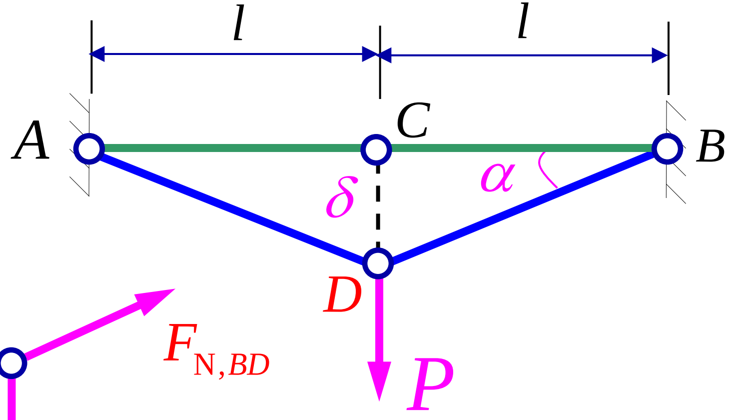


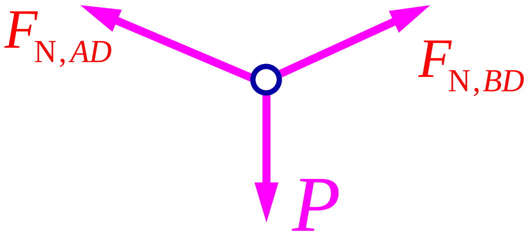
(b)

解：本题为几何非线性问题

$$2F_{\mathrm{N},BD}\sin\alpha = P$$

$$F_{\mathrm{N},BD} = \frac{P}{2\sin\alpha}$$



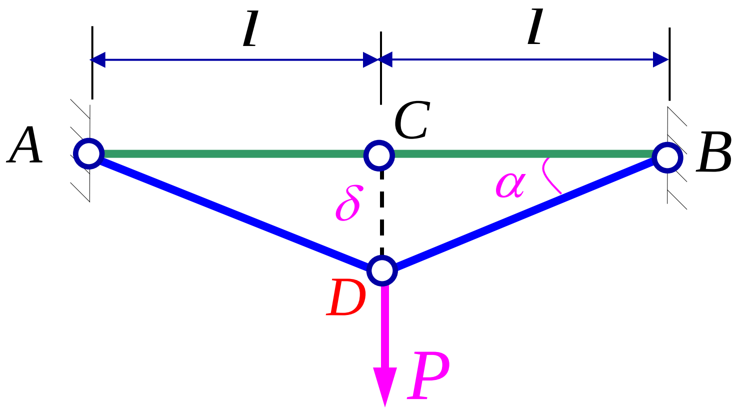


由于α很小，则

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \delta/l$$

$$F_{\mathrm{N},BD} = \frac{P}{2\sin\alpha} = \frac{Pl}{2\delta} \qquad \Delta l_{BD} = \frac{F_{\mathrm{N},BD}\,l}{EA} = \frac{Pl^2}{2EA\delta}$$

在直角三角形ACD中，有



$$l^2+\delta^2=l_{BD}^2=(l+\Delta l_{BD})^2$$

$$=l^2+2l\cdot\Delta l_{BD}+\Delta l_{BD}^2$$

$$\delta^2=2l\cdot\Delta l_{BD}+\Delta l_{BD}^2$$

考虑到 Δl_{BD}^2 与 $2l\cdot\Delta l_{BD}$ 相比属高阶小量，则

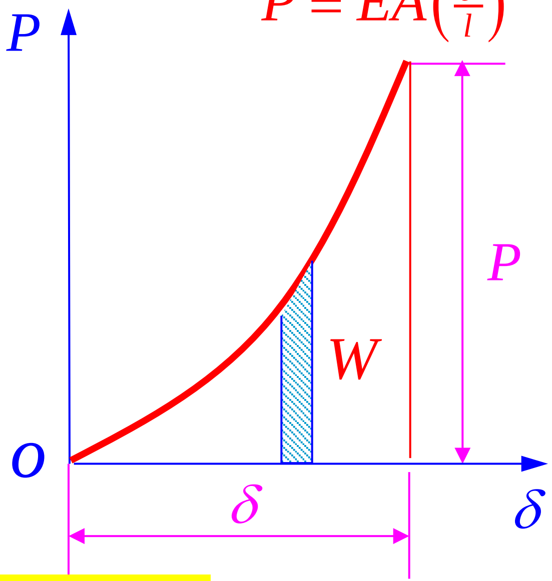
$$\delta^2=2l\cdot\Delta l_{BD} \Rightarrow \delta^2=\frac{Pl^3}{EA\delta} \Rightarrow \delta^3=\frac{l^3}{EA}P$$

$$\boxed{\Delta l_{BD}=\frac{Pl^2}{2EA\delta}}$$

$$\delta=l\cdot\sqrt[3]{\frac{P}{EA}}$$ 几何非线性

$$\delta = l \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{EA}}, \qquad P = EA\left(\frac{\delta}{l}\right)^3$$

$$V_\varepsilon = W = \int_0^\delta P\mathrm{d}\delta = \int_0^\delta EA\left(\tfrac{\delta}{l}\right)^3 \mathrm{d}\delta = \frac{EA\delta^4}{4l^3} = \frac{1}{4}P\delta$$



$$\boxed{F_{\mathrm{N},BD} = \frac{Pl}{2\delta}} \qquad \boxed{\delta = l \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{EA}}}$$

$$V_\varepsilon = \frac{F_{\mathrm{N}}^2 l}{2EA}$$

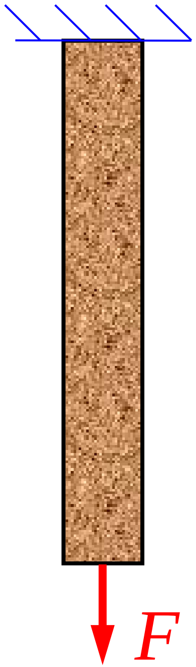
???

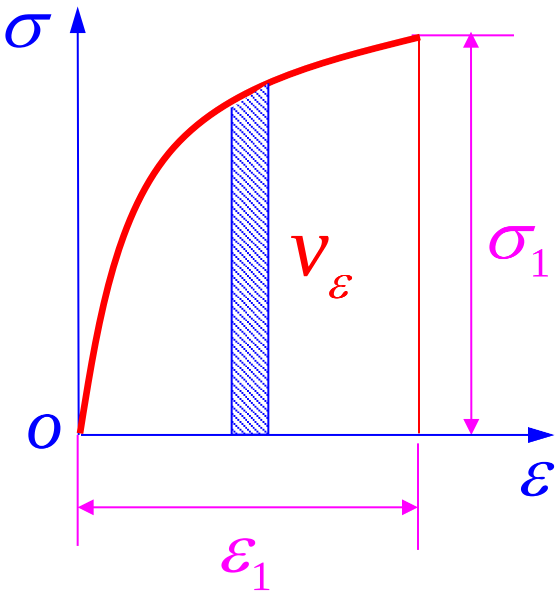
材料是线性的

$$V_\varepsilon = 2 \times \frac{\left(\frac{Pl}{2\delta}\right)^2 l}{2EA} = \frac{P^2 l^3}{4EA\delta^2} = \frac{EA\delta^4}{4l^3} = \frac{1}{4}P\delta$$

$$P = EA\left(\tfrac{\delta}{l}\right)^3$$

2. 物理（材料）非线性弹性问题



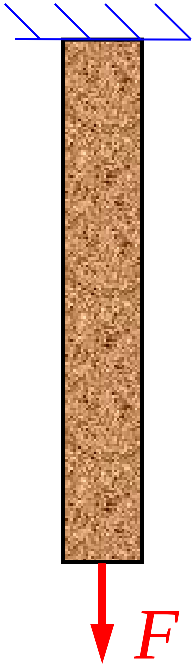


物理非线性

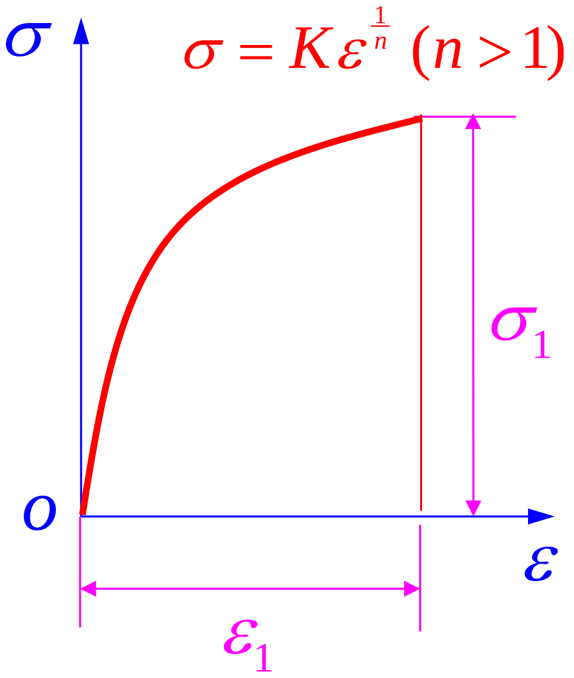
$$V_\varepsilon = \int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V$$

$$v_\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma \mathrm{d}\varepsilon$$

例7 计算图（a）杆在F_1轴力作用下的应变能和杆件的伸长量。杆的长度为l，横截面积为A，应力－应变曲线如图（b）。



(a)



(b)

解：（1）应变能

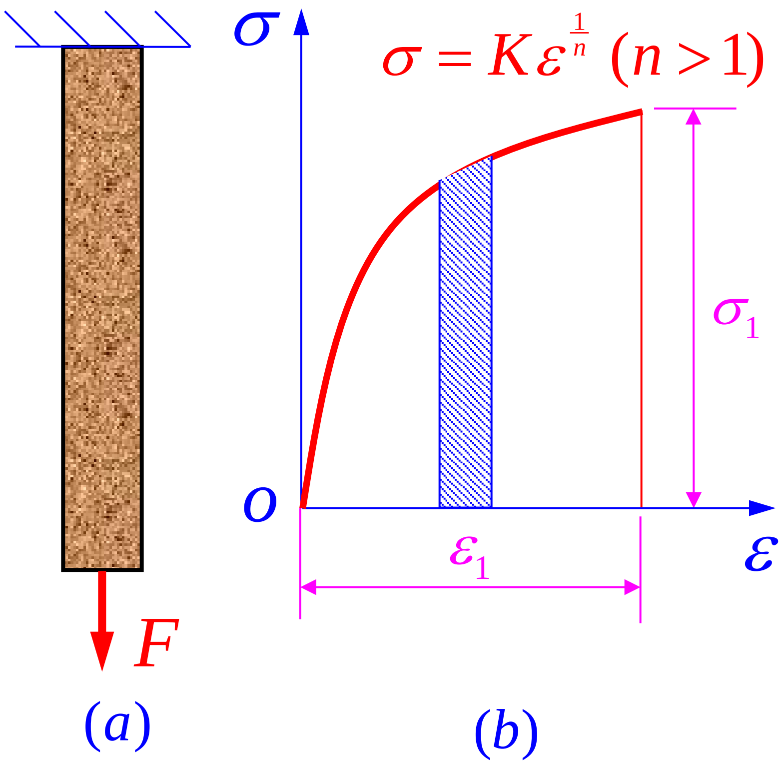
本题为材料非线性问题

$$V_\varepsilon = \int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V, \qquad v_\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma \mathrm{d}\varepsilon$$

$$v_\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_1} K\varepsilon^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}\varepsilon = \frac{n}{n+1} K\varepsilon_1^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\sigma_1 = K\varepsilon_1^{\frac{1}{n}} \qquad \sigma_1 = \frac{F_1}{A}$$

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\sigma_1}{K}\right)^n = \left(\frac{F_1}{KA}\right)^n$$



$$v_\varepsilon=\frac{n}{n+1}K\varepsilon_1^{\frac{n+1}{n}}\qquad \varepsilon_1=\left(\frac{F_1}{KA}\right)^n$$

$$v_\varepsilon=\frac{n}{n+1}K\left(\frac{F_1}{KA}\right)^{n+1}$$

均匀变形情形

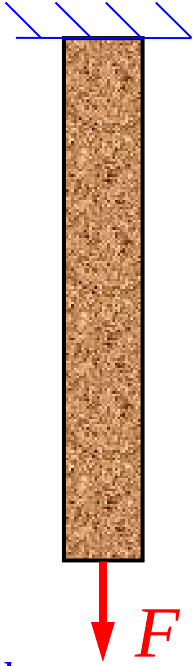
$$V_\varepsilon=\int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V \qquad V_\varepsilon=v_\varepsilon\cdot A\cdot l$$

$$=\frac{n}{n+1}K\left(\frac{F_1}{KA}\right)^{n+1}Al=\frac{nl}{n+1}\frac{F_1^{n+1}}{(AK)^n}$$

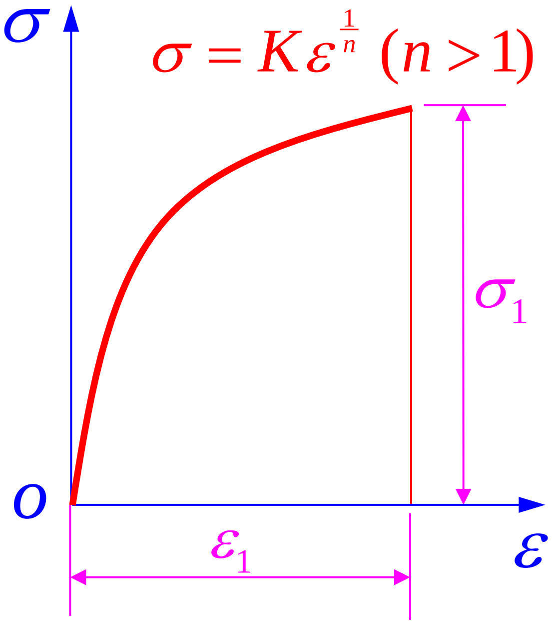
（2）**伸长量：** $\varepsilon_1=\left(\frac{F_1}{KA}\right)^n \Longrightarrow \Delta l=\varepsilon_1 l=\left(\frac{F_1}{KA}\right)^n l$

$$V_\varepsilon=\frac{nl}{n+1}\frac{F_1^{n+1}}{(AK)^n}=\frac{n}{n+1}F_1\underbrace{\boxed{\left(\frac{F_1}{AK}\right)^n l}}_{\Delta l}=\frac{n}{n+1}F_1\cdot\Delta l$$

非线性



(a)



(b)

$$\boxed{n=1\text{(线性)}: V_\varepsilon=\frac{1}{2}F_1\cdot\Delta l}$$

小 结

（1）线弹性问题

$$V_{\varepsilon}=\int_{l}\frac{F_{\mathrm{N}}^{2}(x)}{2EA}\mathrm{d}x+\int_{l}\frac{T^{2}(x)}{2GI_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}x+\int_{l}\frac{M^{2}(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

（2）几何非线性问题

$$V_{\varepsilon}=W=\int_{0}^{\delta}P\mathrm{d}\delta$$

（3）材料非线性问题

$$V_{\varepsilon}=\int_{V}v_{\varepsilon}\mathrm{d}V，\quad v_{\varepsilon}=\int_{0}^{\varepsilon_{1}}\sigma\mathrm{d}\varepsilon$$

谢 谢！

作业

材料力学专题研究+程序设计

截止日期：2025年6月3日

下次课讲　卡氏定理