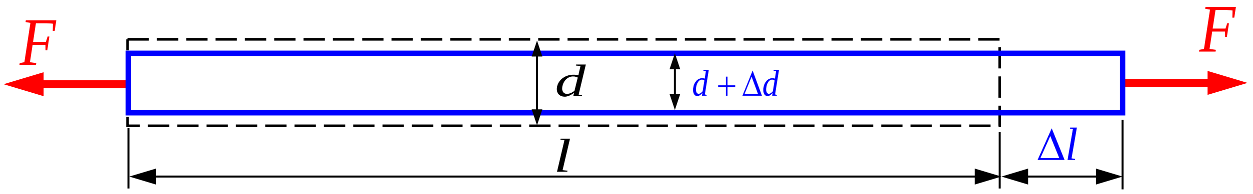
第二章　轴向拉伸与压缩

剪切与挤压（四）

第 5 讲

§ 2.8 轴向拉（压）杆的变形

1. 拉（压）杆的横向变形计算



纵向线应变	横向线应变	泊松比 (Poisson’s Ratio)
$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$	$\varepsilon' = \dfrac{\Delta d}{d}$	$\mu = -\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}$

★ ε 和 ε' 都是量纲为一的量。

工程实际中，ε 是一个很小的量 $10^{-6} \sim 10^{-3}$

泊松比的学术之争（1833-1879）*

1821年：纳维首次用分子理论来研究各向同性材料弹性体的平衡问题，所导出的方程中只有一个弹性常数C，因此被称为“单常数理论”。

1825年：柯西把纳维的理论推广到各向异性弹性体，其基本方程中有36个常数，简化到各向同性弹性体时仍有两个常数。但柯西认为纳维的单常数理论是正确的。

1829年：泊松在《弹性体平衡和运动研究报告》一文中指出，各向同性弹性杆件受到单向拉伸时，产生纵向应变ε_x，同时会连带产生横向收缩，此横向应变为$-\mu\varepsilon_x$。他用分子理论证明$\mu=1/4$，也做了实验验证。

* 老亮主编，材料力学史漫话-从胡克定律的优先权讲起，高等教育出版社，1993

1833年：格林（G. Green）在研究电磁波在弹性介质表面的上的反射与折射时，首次用能量法证明：各向同性材料的应变能函数中应当包括两个弹性常数，而不是单常数，从而引起了历史上的“泊松比之争”。

纳维、柯西、泊松、拉梅（都是法国科学院院士）都支持单常数理论（也有大量的实验验证$\mu = 1/4$，如碳钢 $\mu \in [0.24, 0.28]$，花岗岩、大理石$\mu \in [0.2, 0.3]$）。

Navier
1785-1836

Cauchy
1789-1857

Poisson
1781-1840

Lame
1795-1870

1848年：维尔泰姆（G. Wertheim, 1815～1861, 奥地利出生的法籍实验固体力学家）向法国科学院提交了“关于匀质固体平衡的研究报告”。他用不同的办法测定弹性常数，发现大部分试验点落在1/3附近，建议把 1/4 改为1/3，但还是认为单常数理论是正确的。

维尔泰姆是银行家的后裔，他把继承的所有巨额财富和毕生的经历都投入到科学实验中，因他的测试结果与主流派的理论结果不符，使他在学术上长期受到非难，心情抑郁，1861年在法国图尔旅游时，从教堂塔顶跳下，自杀身亡。

1859年：基尔霍夫（G.R. Kirchhoff）设计了一种巧妙的弯扭实验装置，测出三种钢杆的μ 值分别为0.293，0.294，0.295；两种黄铜的μ 值分别0.385，0.387，又一次验证了$\mu \neq 1/4$。

但他仍然相信主流派的单常数理论，怀疑所有试样有各向异性，对自己正确的测试结果持保留态度。

1869年：科尔纽（M.A. Cornu）首次用光学干涉法独立地测定泊松比的值，对7种玻璃片测试值的平均为0.237，并不是1/4 ，但还是认为单常数理论是正确的。

1879年：马洛克（A. Mallock）设计了一个装置，测出一些材料的泊松比值：钢0.253，黄铜0.325，铜0.348，铅0.375，锌板0.18，铸锌0.230，胶木0.389，象牙0.5，印度橡胶0.5，石蜡0.5，硬纸板0.2，巴黎石膏0.181。

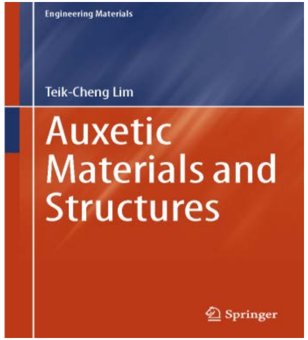
马洛克从自己的实验数据出发，正确地指出μ =1/4的常数理论不适用于弹性固体，泊松比是独立的材料常数，建议把单常数理论送进历史博物馆，从而终止了长达46年的“泊松比之争”。

“泊松比之争”并没有就此告终，关于泊松比的又一个学术争论至今尚未了结—“泊松比的取值范围”。

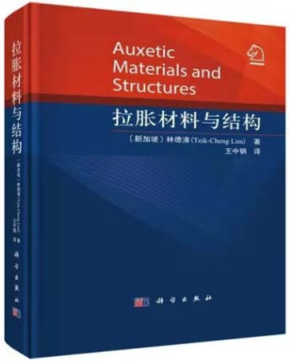
泊松比的取值范围

经典的弹性固体力学已经严格证明：等温条件下各向同性线弹性材料泊松比的取值范围为 $-1 \le \mu \le 0.5$

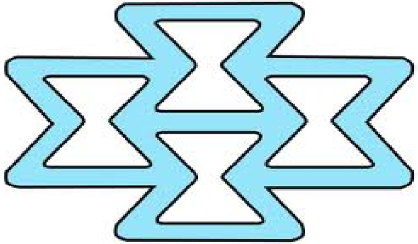
负泊松比（negative poisson’s ratio）材料？



2015



2021



内凹结构

本视频来源于网络

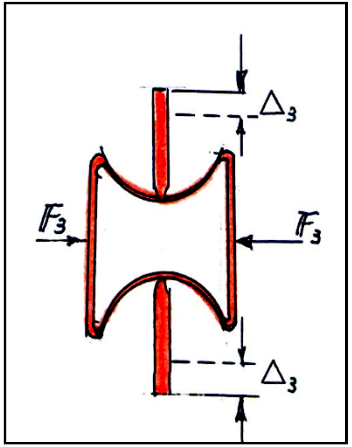
也称 **拉胀材料** 或 **超材料**

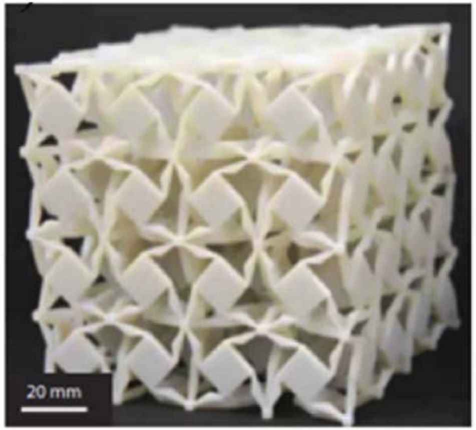
天然硅酸盐α-方英石在特定方向上受力后会出现负泊松比效应。

负泊松比效应的应用

刀头易拆装件

庄表中教授
（1934- ）



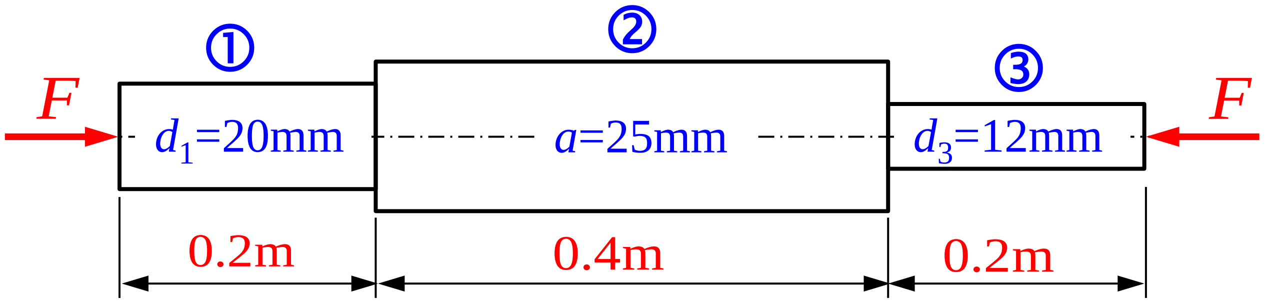


三维负泊松比材料（结构）

负泊松比材料具有优异的特性，在汽车轻量化设计、消音器、防弹衣、缓冲和保护装备等领域有重要应用前景

例1 图示阶梯杆，已知①段为直径 d_1=20mm的圆杆，②段为边长a=25mm的方杆，③段为直径d_3=12mm的圆杆。若②段杆内的应力σ_2= –30MPa，E=210GPa，泊松比μ ＝0.25 。

求：③段杆外径的变化量。

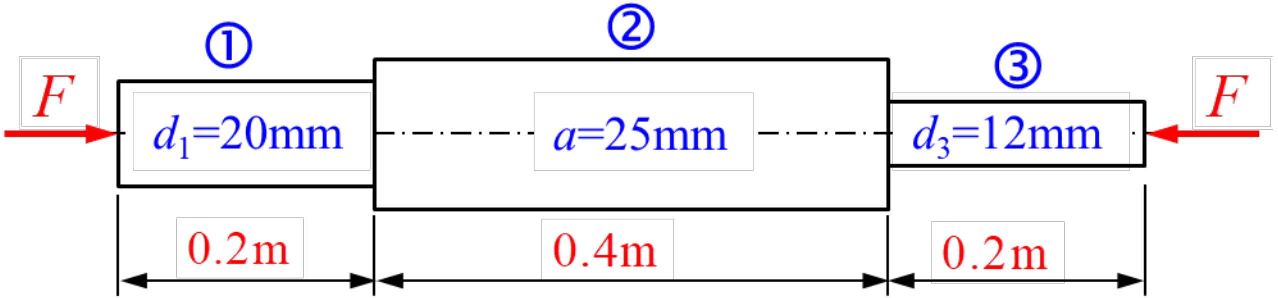


解: 1）求轴向力F

$$F=\sigma_2 A_2=-30\times 25^2\,\text{N}=-18.75\text{kN}$$

$$\sigma_{\text{杆}3}=\frac{F_{N3}}{\dfrac{\pi\times d_3^2}{4}}=\frac{-18.75\times 10^3}{\dfrac{\pi\times 0.012^2}{4}}=-165.79\text{MPa}$$

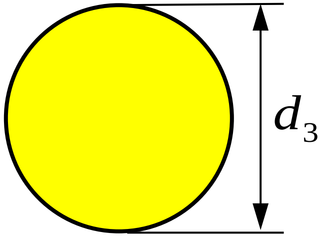
2）求③段杆外径的变化量



d_3=12mm

E=210GPa

μ =0.25



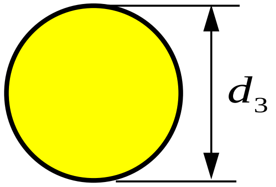
$$F = -18.75\text{kN}，\quad \sigma_{杆3} = -165.79\text{MPa}$$

$$\varepsilon_{杆3} = \frac{\sigma_{杆3}}{E} = \frac{-165.79\times10^{6}}{210\times10^{9}} = -7.895\times10^{-4} = -789.5\times10^{-6}$$

$$\varepsilon'_{杆3} = -\mu\varepsilon_{杆3} = -0.25\times(-789.5\times10^{-6}) = 197.365\times10^{-6}$$

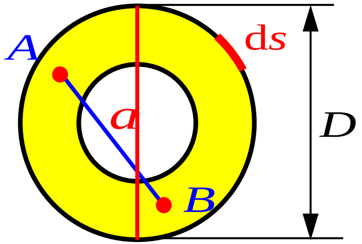
$$\Delta d = \varepsilon'_{杆3}\, d_3 = 197.365\times10^{-6}\times12\times10^{-3} = 2.37\times10^{-6}\,\text{m} = 2.37\times10^{-3}\,\text{mm}$$（增大）

思考和讨论：

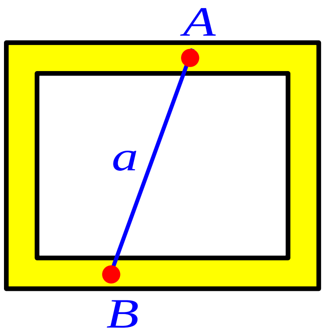


$\Delta d = \varepsilon'_{杆3} d_3$

空心杆



AB两点间距离的变化量



空心截面上任意两点间距离的变化量

$\Delta_{AB} = \varepsilon' \times AB = -\mu\varepsilon a$

外直径的变化量?

考虑外圆周长的变化

弧长ds的变化量　$ds' = \varepsilon' \times ds$

外圆周长c变化量

$$\Delta c = \int_c ds' = \int_c \varepsilon' ds$$

$$= \varepsilon' \int_c ds = \varepsilon' \times c$$

变形后外圆的周长

$$c + \Delta c = c + \varepsilon' \times c$$

$$= (1+\varepsilon')c$$

$$= (1+\varepsilon')\pi D$$

变形后外圆的直径

$$(1+\varepsilon')\pi D = \pi D'$$

$$D' = (1+\varepsilon')D$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

外直径的变化量

$$\Delta D = D' - D = (1+\varepsilon')D - D = \varepsilon' D = -\mu\varepsilon D$$

2. 拉（压）杆纵向伸长的计算（非均匀变形情形）

吊起的桩在自重下的变形

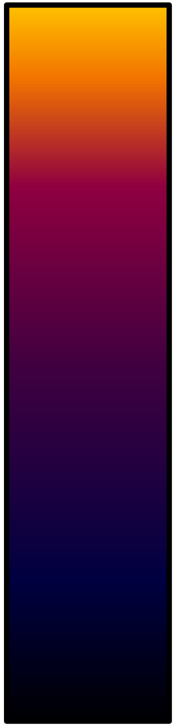
变轴力情形

$F_N = F_N(x)$

变截面杆

$A = A(x)$

高温



常温

陶瓷

在极端条件下
工作的构件

$$E = E(x)$$

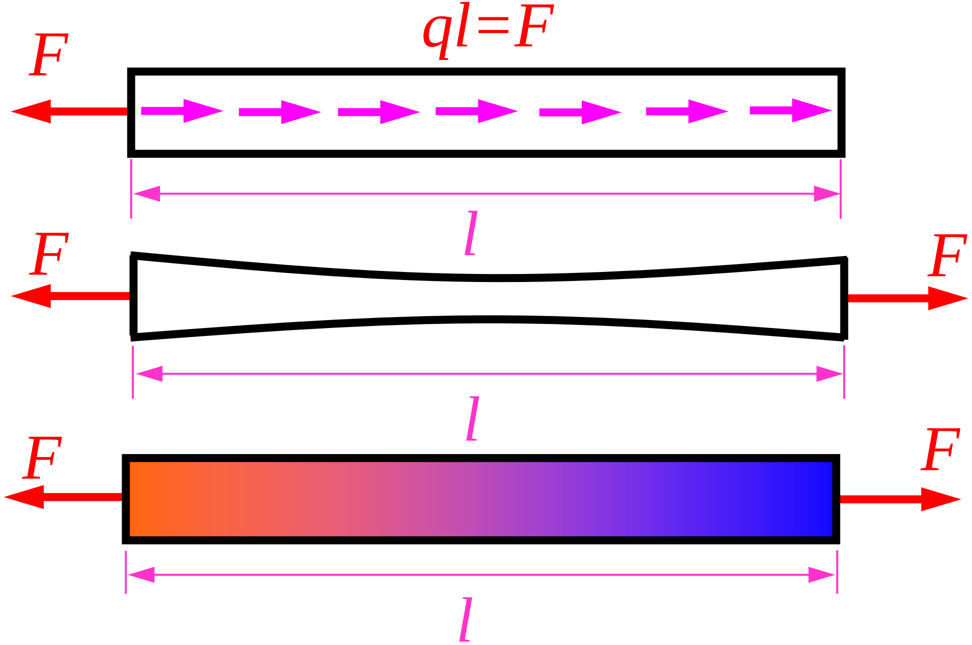
功能梯度材料

functionally graded material

钢

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

非均匀变形情形杆伸长量的计算



$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{N}}(x)$$

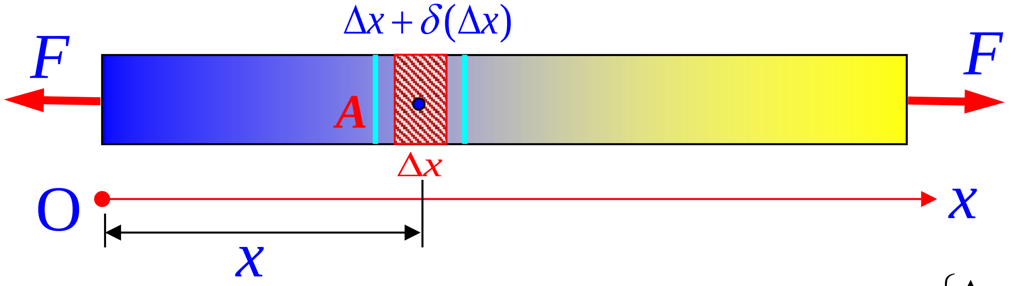
$$A = A(x)$$

$$E = E(x)$$

$$\Delta l = ?$$

关于纵向线应变的定义：

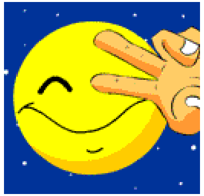
对于各段伸长不均匀的杆



A点沿x方向的线应变

$$\varepsilon(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\delta(\Delta x)=\varepsilon(x)\cdot\Delta x$$



$$\Delta x\to 0:\begin{cases}\Delta x\to \mathrm{d}x\\ \Sigma\to\int\end{cases}$$

$$\boxed{\Delta l=\Sigma\delta(\Delta x)=\Sigma\varepsilon(x)\cdot\Delta x}$$

$$\Delta l=\int\varepsilon(x)\mathrm{d}x$$

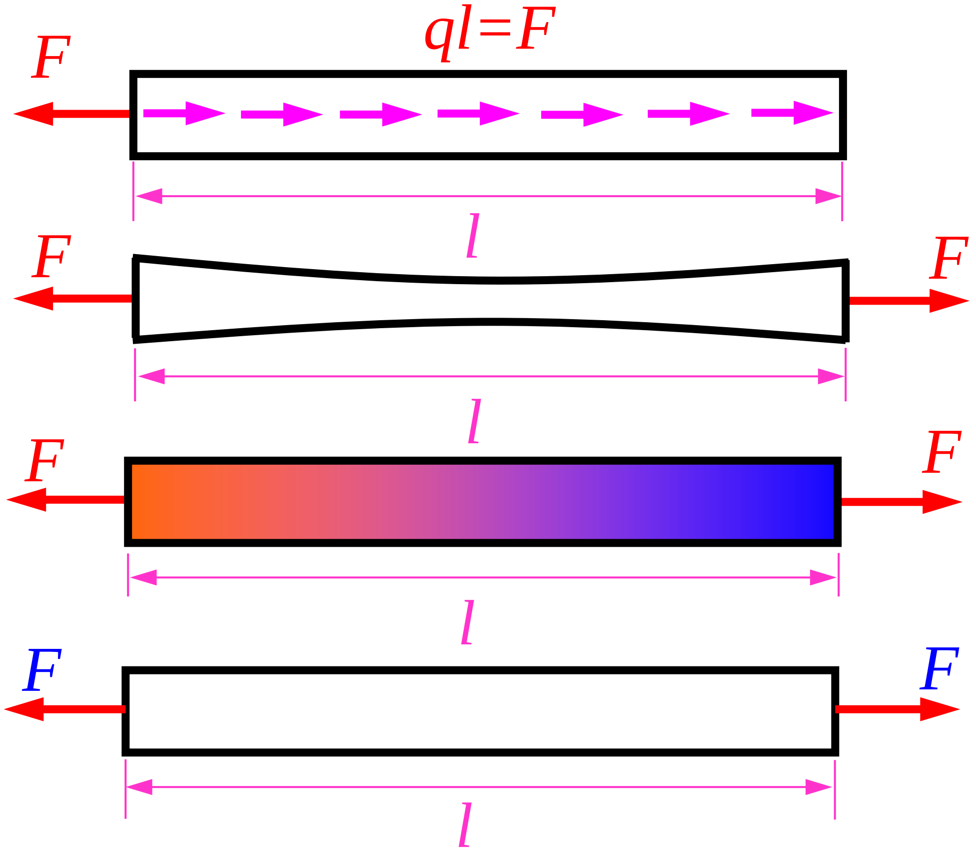
$$\varepsilon(x)=\frac{\sigma(x)}{E(x)}=\frac{1}{E(x)}\frac{F_{\mathrm{N}}(x)}{A(x)}$$

任何单轴情形都适用

$$\Delta l=\int\frac{F_{\mathrm{N}}(x).\mathrm{d}x}{E(x).A(x)}$$

改写 $\Delta l=\int\frac{F_{\mathrm{N}}(x)}{E(x).A(x)}\mathrm{d}x$

对于各段伸长不均匀的杆：$\Delta l = \int \varepsilon(x)\mathrm{d}x = \int \frac{F_{\mathrm{N}}(x)}{E(x).A(x)}\mathrm{d}x$



$$\Delta l = \int_0^l \frac{F_{\mathrm{N}}(x)}{EA}\mathrm{d}x$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F}{EA(x)}\mathrm{d}x$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F}{E(x)A}\mathrm{d}x$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

例2　已知：　悬挂的杆ρ, E, A及 l。

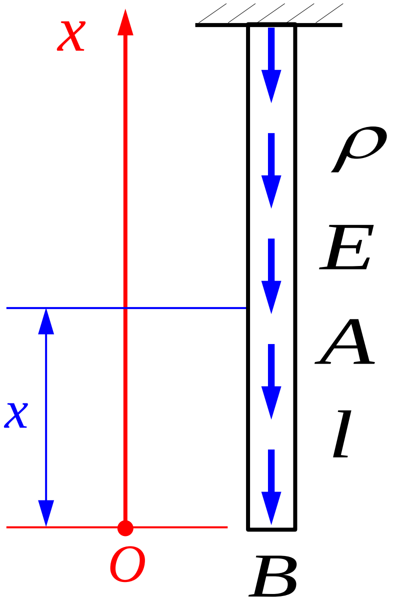
试求：　下端点B的位移。

$$\Delta l=\int_0^l \frac{F_{\mathrm{N}}(x)}{EA}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^l \frac{\rho\cdot Ax\cdot g}{EA}\mathrm{d}x$$

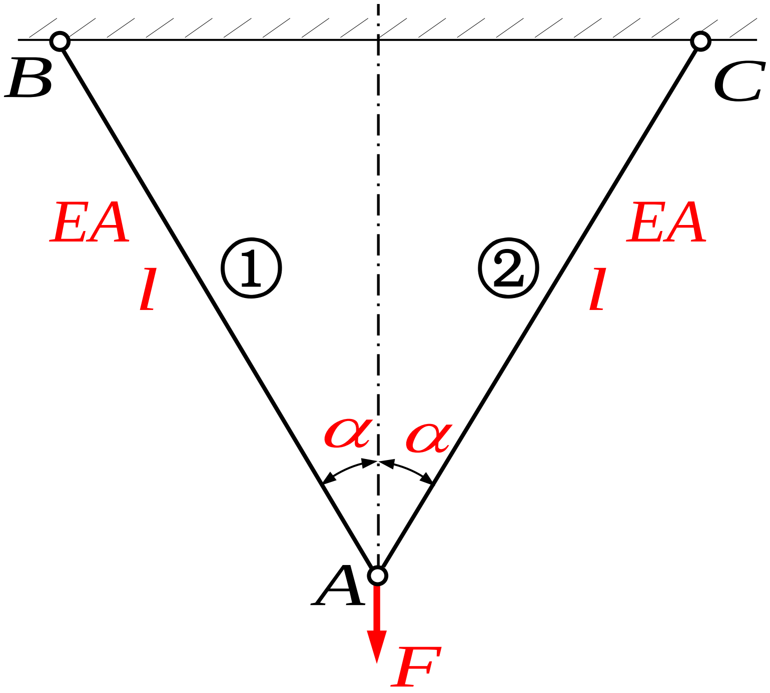
$$=\frac{\rho g}{E}\int_0^l x\mathrm{d}x$$

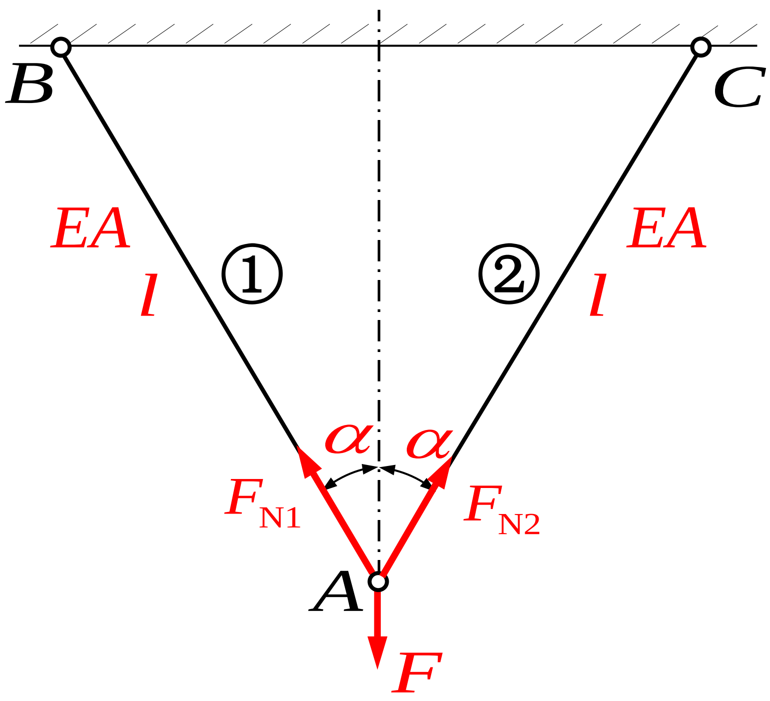
$$=\frac{\rho g l^2}{2E}(\downarrow)$$



3. 拉（压）杆结构的节点位移计算

例3 求图示结构结点A的垂直位移。





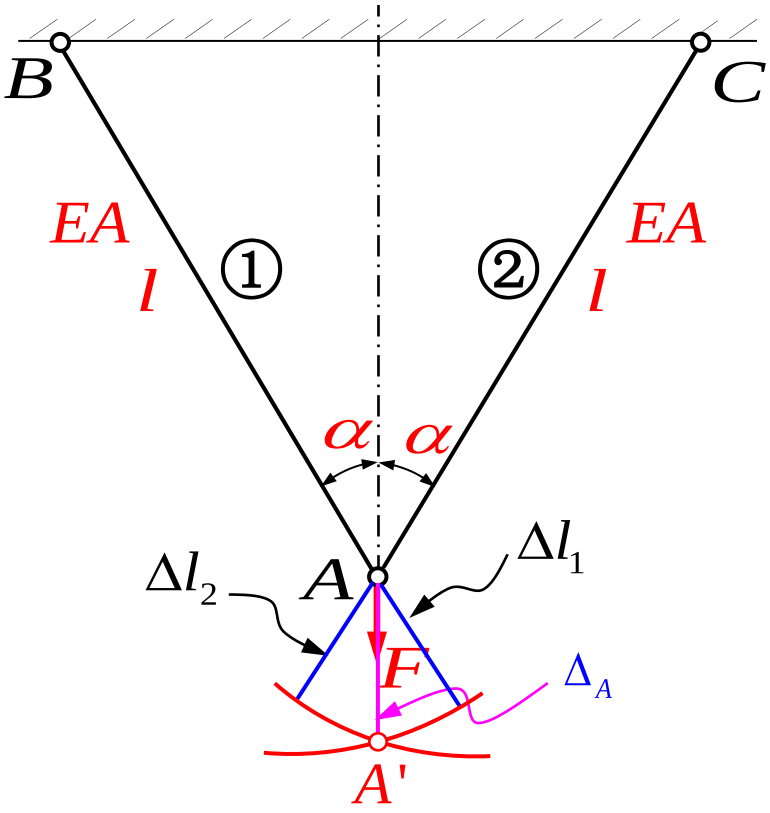
解： 先求各杆的内力

受力分析如图（对A节点）

$$F_{N1}\sin\alpha - F_{N2}\sin\alpha = 0$$

$$F_{N1}\cos\alpha + F_{N2}\cos\alpha - F = 0$$

解得 $F_{N1} = F_{N2} = F_N = \dfrac{F}{2\cos\alpha}$



两杆的伸长分别为：

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{F_{\mathrm{N}} l}{EA}$$

$$= \frac{Fl}{2EA\cos\alpha}$$

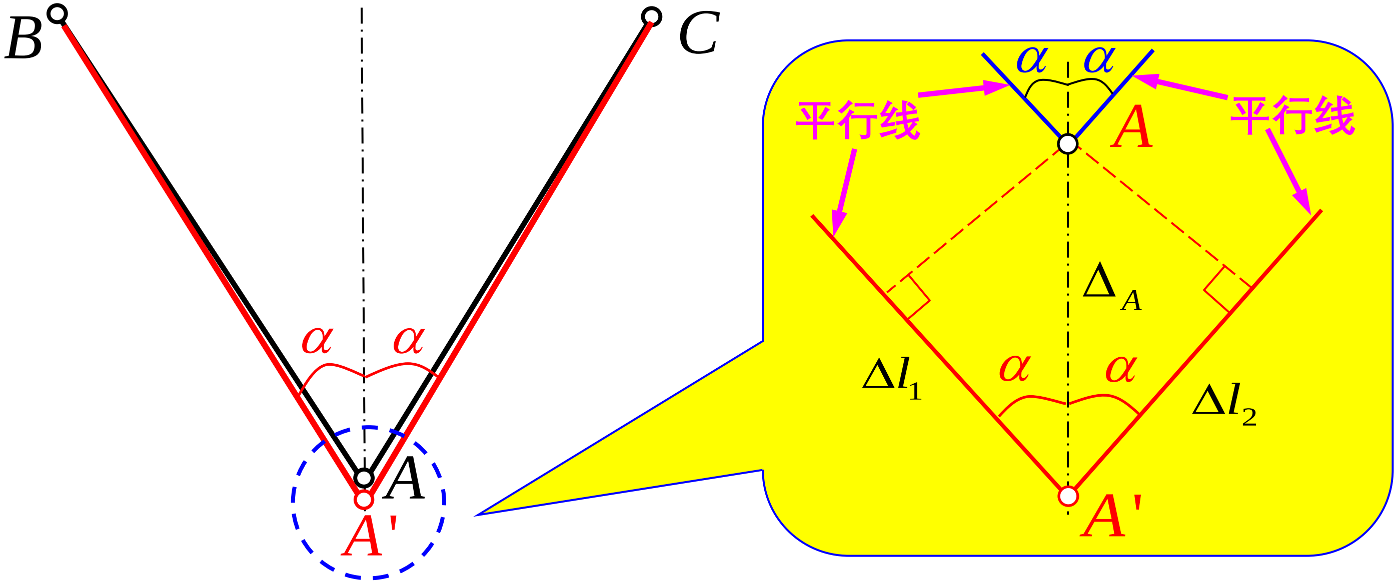
A点的最终位置可这样看：

将铰拆开后并两杆分别先拉长Δl，然后再组装于一起。

$$\Delta_A = ?$$

关于微小变形问题的处理

关于微小变形问题的处理



$$\Delta l_1 = \frac{Fl}{2EA\cos\alpha}$$

变形前后α角度视为不变

$$\boxed{\Delta_A \cos\alpha = \Delta l_1}$$

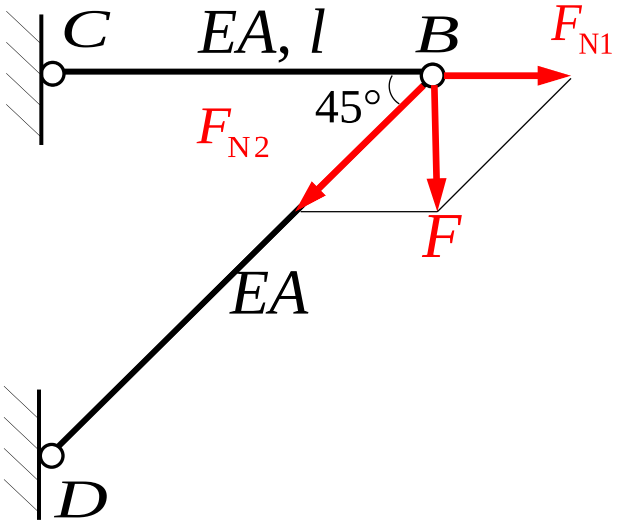
$$\Delta_A = \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha}$$

$$\Delta_A = \frac{Fl}{2EA\cos^2\alpha}$$

例3　求图示结构结点B的垂直位移和水平位移。

解: 受力分析如图

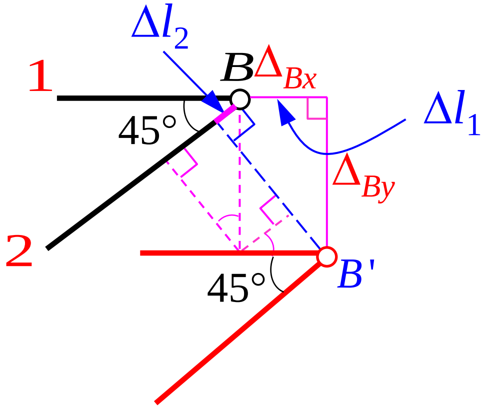
将力直接分解



$$F_{\mathrm{N1}} = F\ (\text{拉}) \qquad F_{N2} = \sqrt{2}F\ (\text{压})$$

$$\Delta l_1 = \frac{Fl}{EA}(+)$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sqrt{2}F\sqrt{2}l}{EA} = \frac{2Fl}{EA}(-)$$



$$\Delta l_1 = \frac{Fl}{EA}(+)$$

$$\Delta l_2 = \frac{2Fl}{EA}(-)$$

变形几何关系

$$\Delta l_1 = \Delta_{Bx} = \frac{Fl}{EA}(\rightarrow)$$

$$\Delta l_2 = \Delta_{By}\sin 45° - \Delta_{Bx}\cos 45°$$

$$\Delta_{By} = (\Delta l_2 + \Delta_{Bx}\cos 45°)/\sin 45°$$

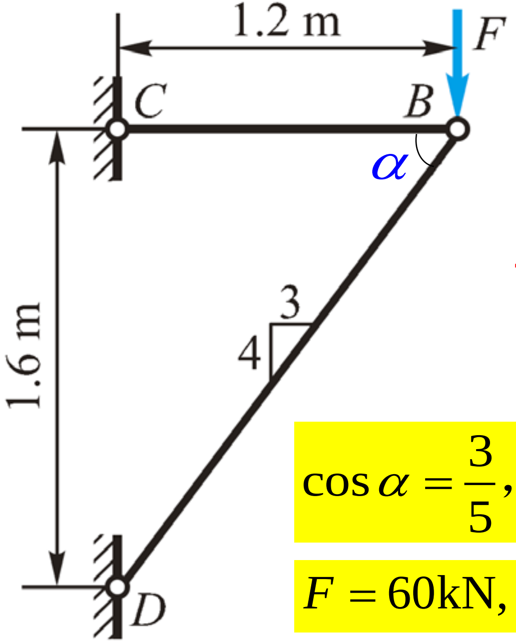
$$= \sqrt{2}\Delta l_2 + \Delta l_1$$

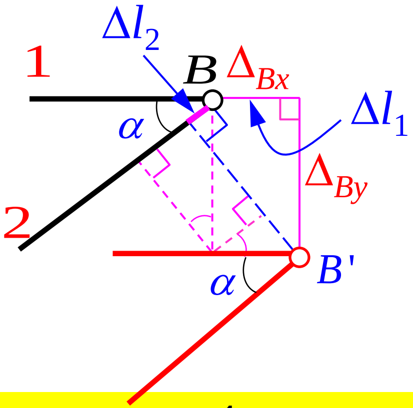
$$\boxed{\Delta_{By} = \frac{2\sqrt{2}+1}{EA}Fl}$$

$BC:CD:BD=3:4:5$

【教材例2.7】

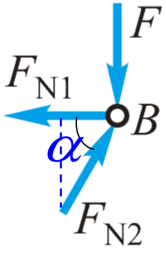
变形几何关系





$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \sin\alpha=\frac{4}{5},\quad \tan\alpha=\frac{4}{3}$$

$$F=60\text{kN},\ E=200\text{GPa},\ l_{BC}=1.2\text{m},\ d=20\text{mm}$$



$$F_{\rm N1}=\frac{F}{\tan\alpha}(\text{拉})\qquad \Delta l_1=\frac{F_{\rm N1}l}{EA}(+)=0.859\text{mm}$$

$$F_{\rm N2}=\frac{F}{\sin\alpha}(\text{压})\qquad \Delta l_2=\frac{F_{\rm N2}l}{EA}(-)=0.732\text{mm}$$

$$\Delta l_1=\Delta_{Bx}=\frac{F_{\rm N1}l}{EA}(\rightarrow)$$

$$\Delta l_2=\Delta_{By}\sin\alpha-\Delta_{Bx}\cos\alpha$$

$$\Delta_{By}=(\Delta l_2+\Delta_{Bx}\cos\alpha)/\sin\alpha$$

$$=(\Delta l_2+\Delta l_1\cos\alpha)/\sin\alpha$$

$$\Delta_{Bx}=\Delta l_1=0.859\text{mm}$$

$$\Delta_{By}=\frac{5}{4}\Delta l_2+\frac{3}{4}\Delta l_1$$

$$=1.559\text{mm}$$

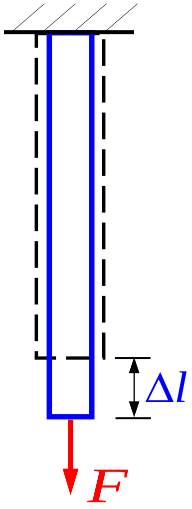
§ 2.9 轴向拉（压）杆的应变能

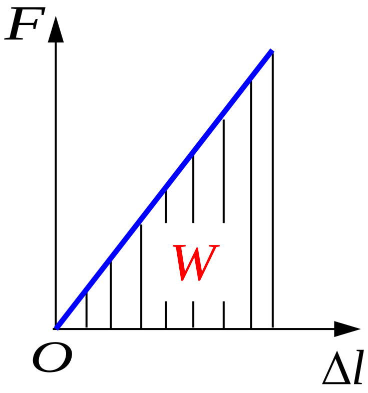
Strain energy in axially loaded bar

弹性体受外力作用变形。外力对弹性体做的功储存在弹性体内，称为变形能或应变能（strain energy）。

当外力逐渐减小时，弹性体变形逐渐恢复，所储存的变形能被释放而做功。

外力对弹性体做的功





$$W = ?$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} F \Delta l} \qquad \boxed{\Delta l = \frac{Fl}{EA}}$$

$$\boxed{W = \frac{F^2 l}{2EA}}$$

拉（压）杆的应变能

$$\boxed{W=\frac{F^2 l}{2EA}}$$

功能原理

$$W=V_{\varepsilon}$$

$$\boxed{V_{\varepsilon}=\frac{F^2 l}{2EA}}$$

$$\Delta l=\frac{Fl}{EA}$$

$$\boxed{V_{\varepsilon}=\frac{EA}{2l}\Delta l^2}$$

应变能的单位：焦耳，J（1J=1N·m）

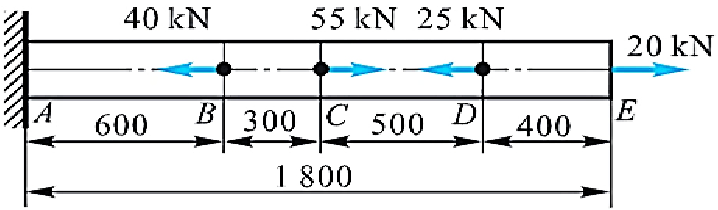
应变能密度：单位体积内的应变能

$$\boxed{v_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V} = \frac{\frac{1}{2}F\Delta l}{Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

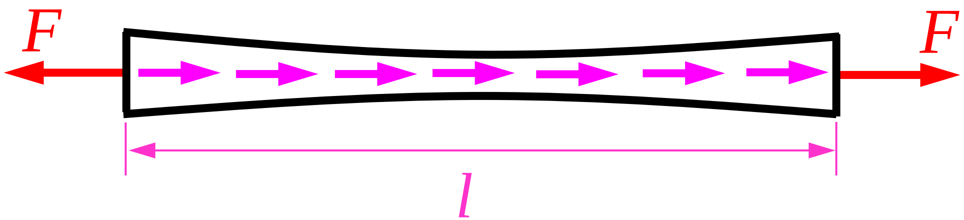
$$\boxed{v_\varepsilon = \frac{1}{2E}\sigma^2} \longleftrightarrow \boxed{v_\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2}$$

应变能计算的一般情况



分段直杆（轴力不变）

$$V_\varepsilon = \sum_i \frac{F_{Ni}^2 l_i}{2E_i A_i}$$



$$F_N = F_N(x)$$

$$A = A(x)$$

$$E = E(x)$$

变截面且变轴力直杆

$$V_\varepsilon = \int_0^l \frac{F_N(x)^2}{2E(x)A(x)} \mathrm{d}x$$

变截面且变外力直杆情形的推导 $F_N = F_N(x),\quad A = A(x),\quad E = E(x)$

由应变能密度定义（单位体积变形能）：

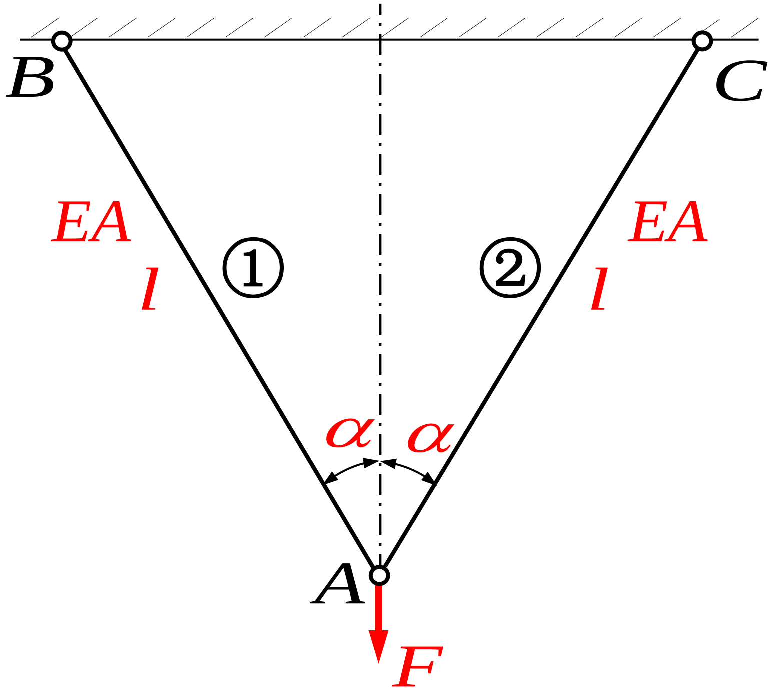
$$v_\varepsilon = \frac{\mathrm{d}V_\varepsilon}{\mathrm{d}V} \rightarrow \mathrm{d}V_\varepsilon = v_\varepsilon \mathrm{d}V \rightarrow V_\varepsilon = \int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V$$

$$\rightarrow V_\varepsilon = \int_V \tfrac{1}{2}\sigma(x)\varepsilon(x)\mathrm{d}V \rightarrow V_\varepsilon = \int_V \frac{\sigma(x)^2}{2E(x)}\mathrm{d}V \rightarrow V_\varepsilon = \int_V \frac{[F_N(x)/A(x)]^2}{2E(x)}\mathrm{d}V$$

$$\rightarrow V_\varepsilon = \int_l \left[\int_A \frac{[F_N(x)]^2}{2E(x)A(x)^2}\mathrm{d}A\right]\mathrm{d}x \rightarrow V_\varepsilon = \int_l \frac{F_N^2(x)}{2E(x)A(x)}\mathrm{d}x$$

应变能在计算位移中的应用

例4 求图示结构结点A 的垂直位移。



解： $F_{N1}=F_{N2}=\dfrac{F}{2\cos\alpha}$

系统应变能

$$V_\varepsilon=\sum_{i=1}^{2}\frac{F_{Ni}^{2}l_i}{2E_iA_i}=\frac{l}{2EA}\left(\frac{F}{2\cos\alpha}\right)^2\times 2$$

$\|$ $\Rightarrow$ $\Delta_{Ay}=\dfrac{Fl}{2EA\cos^2\alpha}$

$$W=\frac{1}{2}F\Delta_{Ay}$$

谢谢各位！

作业

P67： 2.32

P68： 2.34(c)、2.37

下次课讲 拉压超静定问题 温度应力和装配应力