第二章　轴向拉伸与压缩

剪切与挤压（五）

第 6 讲

§ 2.10 拉伸（压缩）超静定问题

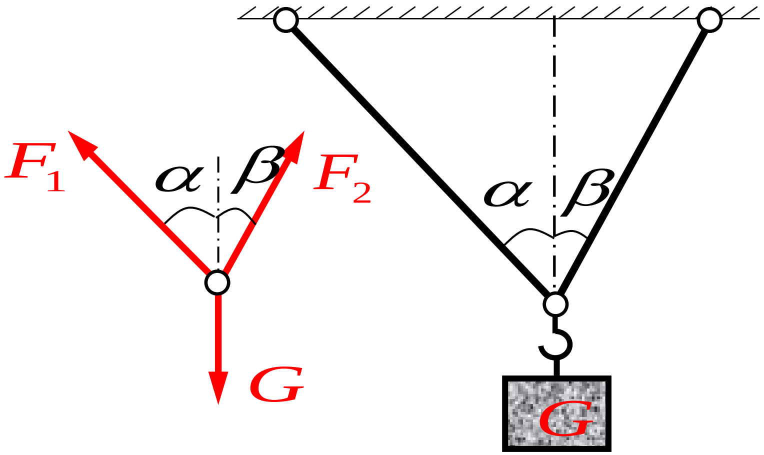
一、静定和超静定问题

静力平衡方程（2个）：

$$F_2 \sin\beta - F_1 \sin\alpha = 0$$

$$F_2 \cos\beta + F_1 \cos\alpha - G = 0$$

未知数（2个）： F_1 和 F_2 可解！



静定问题与静定结构 — 未知力（内力和外力）个数等于独立的平衡方程数

对于静定问题，可根据静力平衡方程即可求出全部的约束力和构件内力。

静力平衡方程（2个）：

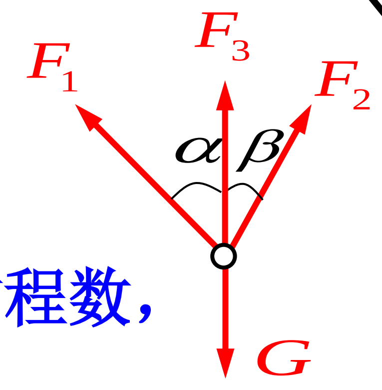
$$F_2 \sin\beta - F_1 \sin\alpha = 0$$

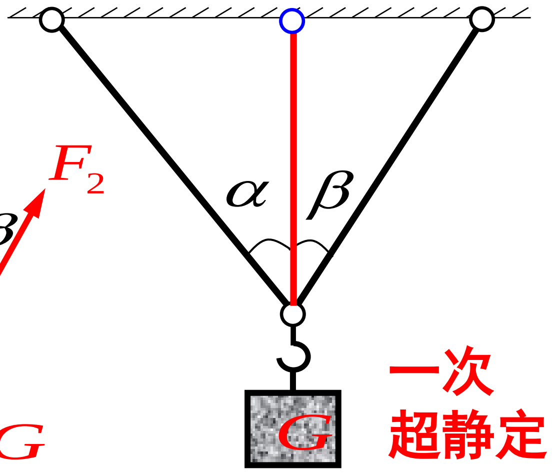
$$F_2 \cos\beta + F_1 \cos\alpha + F_3 = G$$

未知数（3个）：F_1、F_2 和 F_3

此时未知力个数多于独立的平衡方程数，无法解出3个未知数！

称为超静定问题与超静定结构





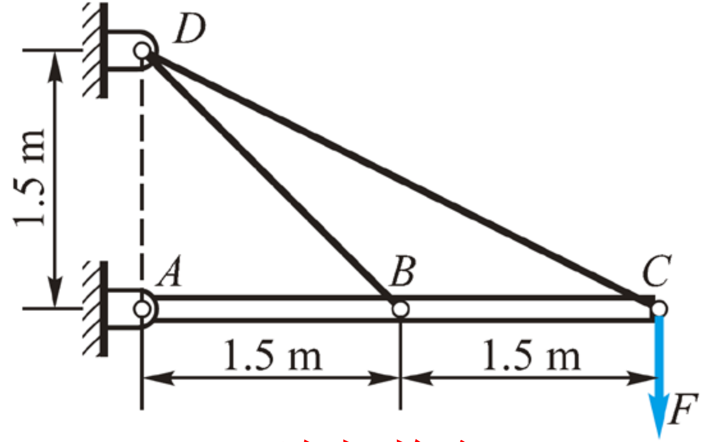
增加一根杆

对于超静定问题：**仅**通过静力平衡方程**无法**求出**全部**的约束力和构件内力。

超静定次数— 未知力个数与独立平衡方程数之差

多余约束 — 多余维持平衡所必需的支座或杆件

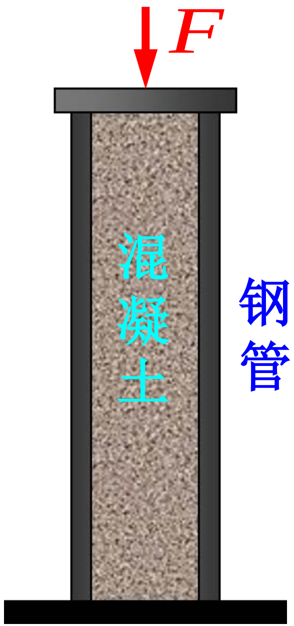
超静定问题实例

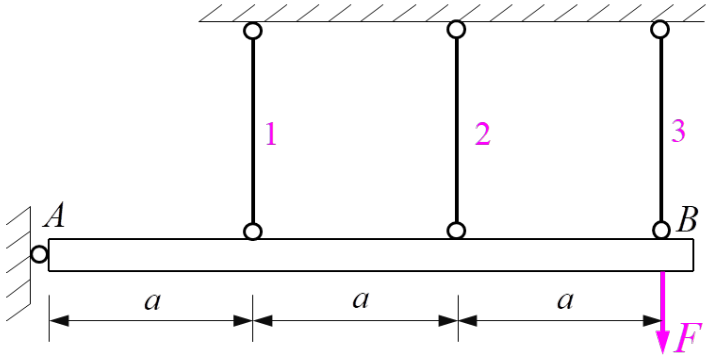


一次超静定

钢管混凝土柱

一次超静定





二次超静定

二、求解超静定问题的基本方法

求解超静定问题，除平衡方程外，还需要建立补充方程。

将平衡方程和补充方程联立求解，即解出全部未知力。

补充方程的建立：

（1）根据多余约束对位移或变形的附加限制，建立各部分位移或变形之间的几何关系，即建立变形协调方程；

（2）将力与位移或变形之间的物理关系，代入变形协调方程，即得求解超静定问题所需的补充方程。

解超静定问题，需综合运用静力方程、变形协调方程和物理方程三方面的关系。

例1 求图示杆受到的约束力。

解：解除约束，静力平衡条件：

$$F_{\mathrm{RA}} + F_{\mathrm{RB}} = F$$

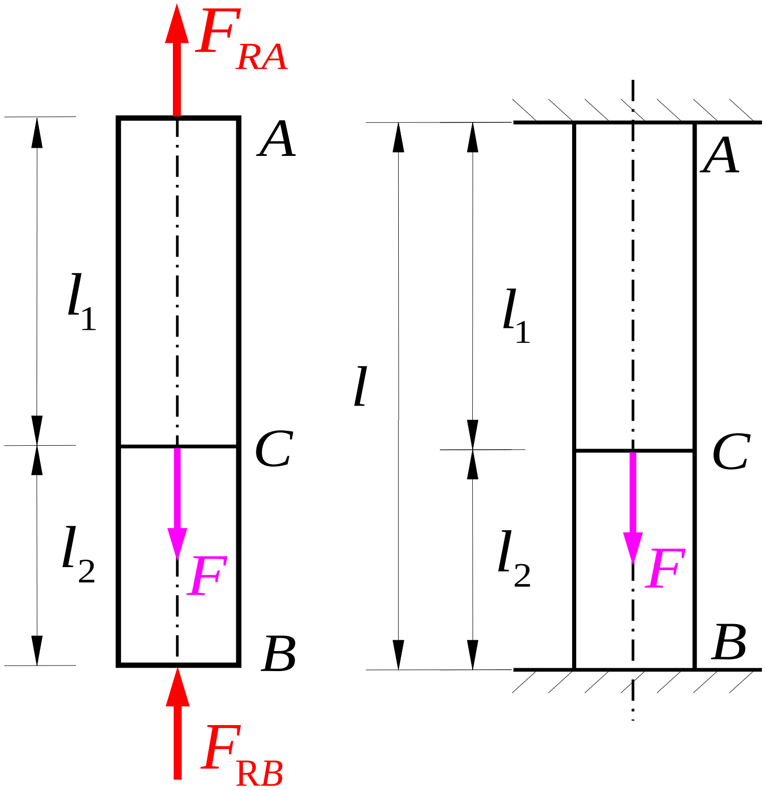
变形协调方程：（杆的长度不变）

$$\Delta l = \Delta l_{AC} + \Delta l_{BC} = 0$$

物理方程（应用胡克定律）：

$$\Delta l_{AC} = \frac{F_{\mathrm{RA}} l_1}{EA}, \quad \Delta l_{BC} = -\frac{F_{\mathrm{RB}} l_2}{EA}$$

$$\frac{F_{\mathrm{RA}} l_1}{EA} - \frac{F_{\mathrm{RB}} l_2}{EA} = 0$$



联立平衡方程和补充方程求解，得：

$$\frac{F_{\mathrm{RA}} l_1}{EA} - \frac{(F - F_{\mathrm{RA}}) l_2}{EA} = 0 \qquad F_{\mathrm{RA}} = \frac{l_2}{l} F, \quad F_{\mathrm{RB}} = \frac{l_1}{l} F$$

另解：仅解除上端的约束

变形协调方程： 杆的长度不变，或A端保持不动

$$\Delta l = \Delta l_{AC} + \Delta l_{BC} = 0$$

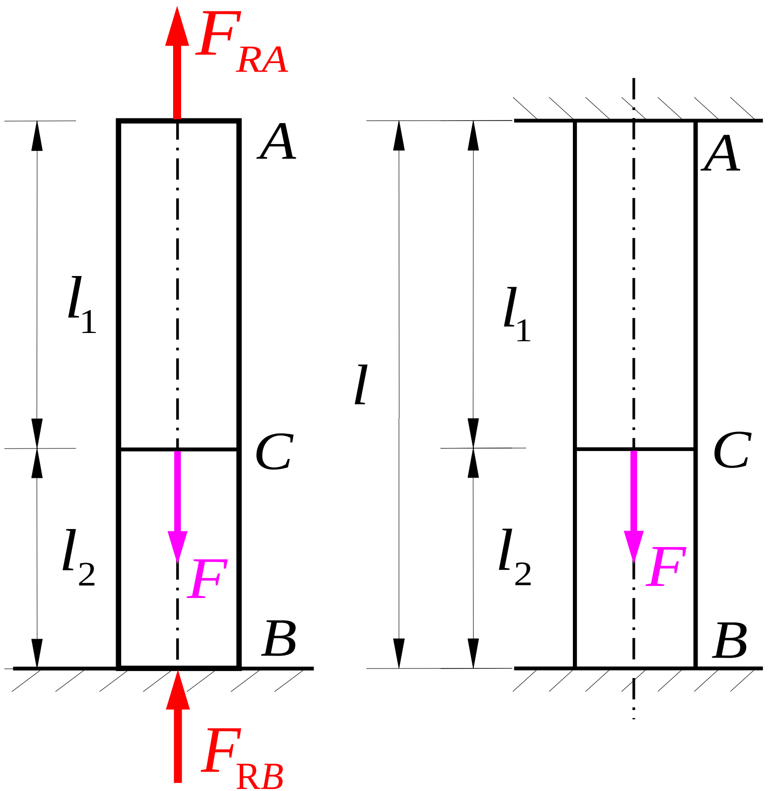
物理方程（应用胡克定律）：

$$\Delta l_{AC} = \frac{F_{\mathrm{RA}} l_1}{EA}, \quad \Delta l_{BC} = \frac{(F_{\mathrm{RA}} - F) l_2}{EA}$$

轴力: 拉为正

$$\frac{F_{\mathrm{RA}} l_1}{EA} + \frac{(F_{\mathrm{RA}} - F) l_2}{EA} = 0$$

$$F_{\mathrm{RA}} = \frac{l_2}{l_1 + l_2} F = \frac{l_2}{l} F$$



求支座B的约束力

静力平衡条件：$F_{\mathrm{RA}} + F_{\mathrm{RB}} = F$ $\quad F_{\mathrm{RB}} = F - F_{\mathrm{RA}} = \frac{l_1}{l} F$

例2 求图示结构各杆的内力。已知各杆的 拉压刚度均为EA。

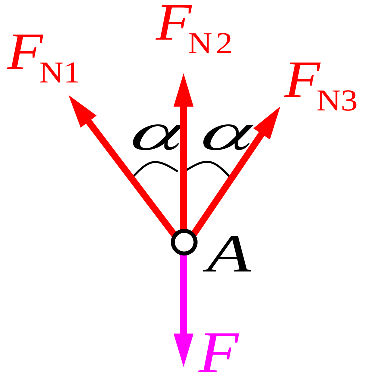
解： 超静定次数？

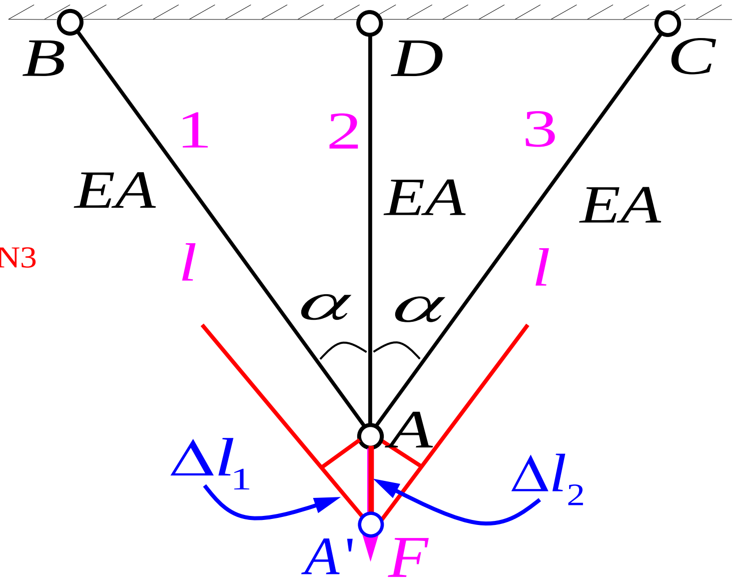
一次超静定

静力平衡条件：

$$F_{N1}\cos\alpha = F_{N3}\cos\alpha$$

$$F_{N1}\cos\alpha + F_{N3}\cos\alpha + F_{N2} = F$$





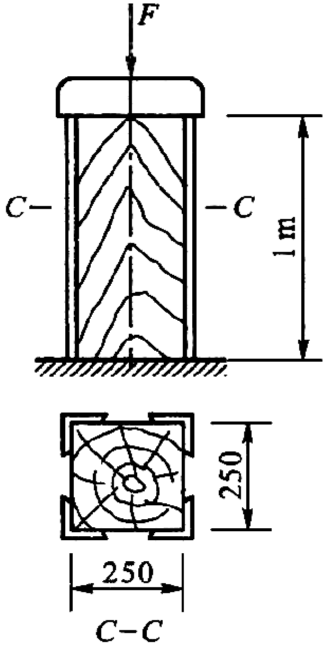
变形协调方程？

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \Delta l_2 \cos\alpha$$

$$\frac{F_{N1}l}{EA} = \frac{F_{N3}l}{EA} = \frac{F_{N2}(l\cos\alpha)}{EA}\cos\alpha \Rightarrow F_{N1} = F_{N3} = F_{N2}\cos^2\alpha$$

将上式代入平衡方程，求得：$F_{N2} = \dfrac{F}{1+2\cos^3\alpha}$， $F_{N1} = F_{N3} = \dfrac{F\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$

例3 如图所示，横截面为250mm×250mm的短木柱，用四根∠40×5的等边角钢加固，承受轴向压力F。已知角钢的许用应力$[\sigma]_s$ =160MPa，弹性模量E_s=200GPa，木材的许用应力$[\sigma]_w$=12MPa，弹性模量E_w=10GPa。试求该结构的许可载荷$[F]$ 。



解：设中间木柱承担的力为 F_w

四根等边角钢承担的力为 F_s

$$F_w + F_s = F$$ 一次超静定

变形协调方程：

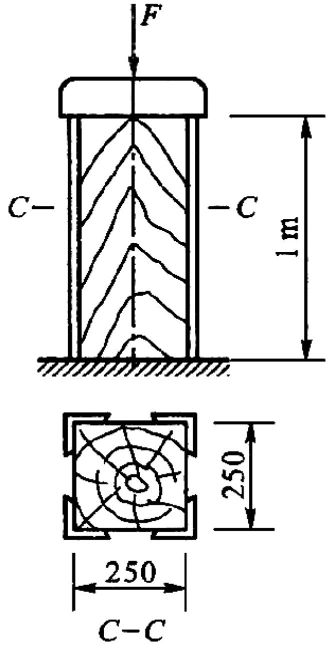
$$\Delta l_w = \Delta l_s \quad \Rightarrow \quad \frac{F_w l}{E_w A_w} = \frac{F_s l}{E_s A_s}$$

$$\frac{F_w}{F_s} = \frac{E_w A_w}{E_s A_s}$$ 承担的力与刚度成正比！

$$A_w = 250\text{mm}\times 250\text{mm},\quad E_w = 10\text{GPa},\quad [\sigma]_w = 12\text{MPa}$$

$$A_s = 4\times 3.792\text{cm}^2,\quad E_s = 200\text{GPa},\quad [\sigma]_s = 160\text{MPa}$$

$\angle 40\times 5$等边角钢的横截面面积为3.792cm^2(查表)



$$F_w + F_s = F \qquad F_w = \frac{E_w A_w}{E_s A_s} F_s$$

按木柱的强度条件

$$F_w = \frac{E_w A_w}{E_w A_w + E_s A_s} F \qquad \frac{F_w}{A_w} = \frac{E_w}{E_w A_w + E_s A_s} F$$

$$[\sigma]_w = \frac{E_w}{E_w A_w + E_s A_s}[F]_w \qquad [F]_w = \frac{E_w A_w + E_s A_s}{E_w}[\sigma]_w = 1113.9\,\text{kN}$$

按角钢的强度条件

$$F_s = \frac{E_s A_s}{E_w A_w + E_s A_s} F \qquad \frac{F_s}{A_s} = \frac{E_s}{E_w A_w + E_s A_s} F$$

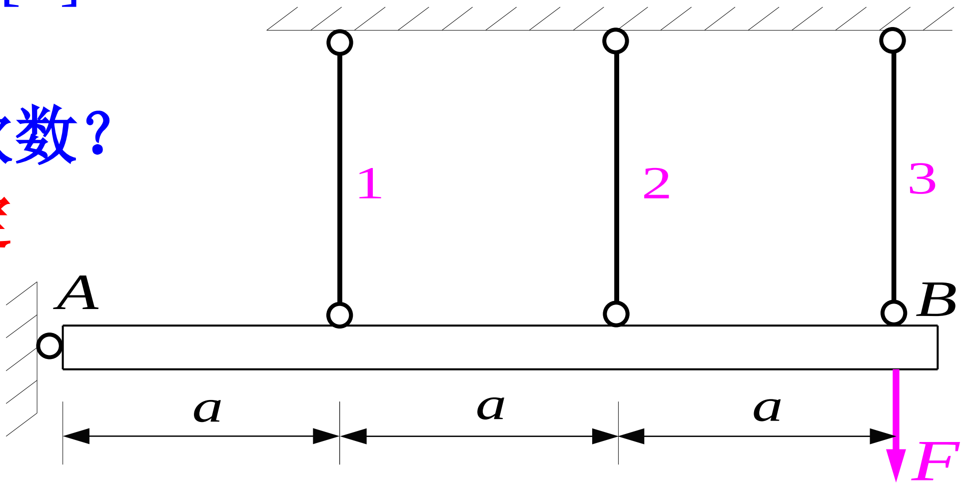
$$[\sigma]_s = \frac{E_s}{E_w A_w + E_s A_s}[F]_s \qquad [F]_s = \frac{E_w A_w + E_s A_s}{E_s}[\sigma]_s = 742.6\,\text{kN}$$

角钢首先达到许用应力！  $[F] = 742.6\,\text{kN}$

例4　刚性梁AB由1、2、3杆悬挂，已知三杆材料相同，许用应力为$[\sigma]$，材料的弹性模量为 E，杆长均为l，横截面面积均为A，试求结构的许可载荷$[F]$

超静定的次数？

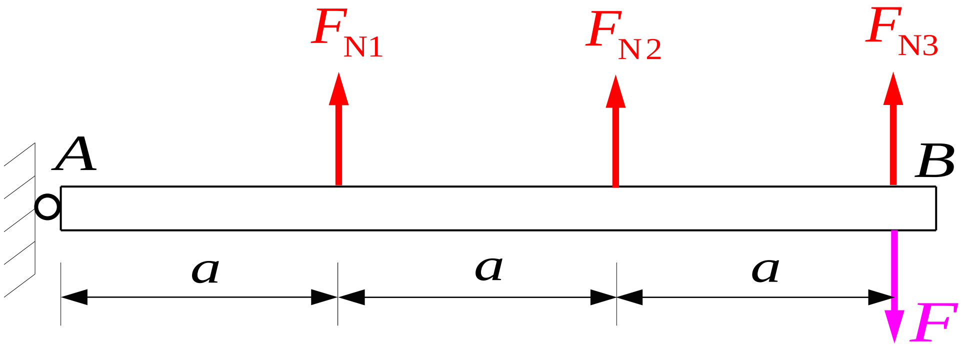
二次超静定



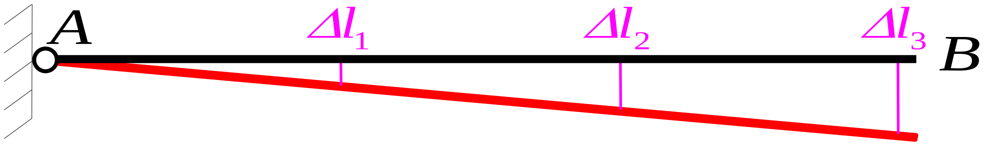
解：静力平衡条件（对A点取矩），有

$$F_{N1}\cdot a+F_{N2}\cdot 2a+F_{N3}\cdot 3a=F\cdot 3a$$

$$F_{N1}+2F_{N2}+3F_{N3}=3F \qquad (1)$$



变形协调方程：



$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}=\frac{a}{2a}, \qquad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_3}=\frac{a}{3a},$$

$$\Delta l_2=2\Delta l_1, \qquad \Delta l_3=3\Delta l_1,$$

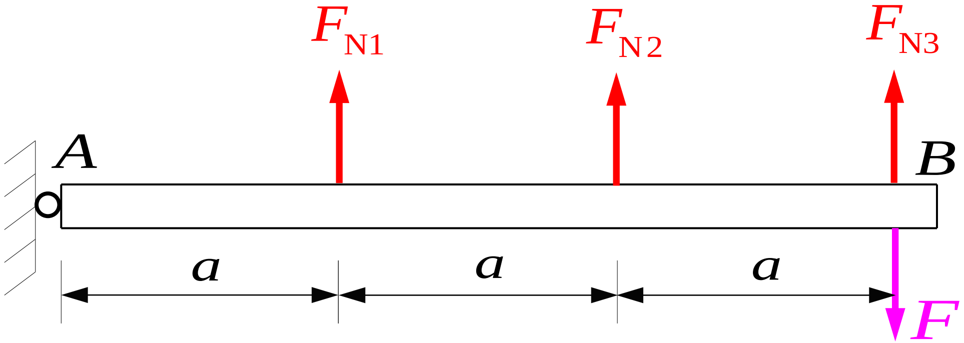
$$\frac{F_{N2}\,l}{EA}=2\frac{F_{N1}\,l}{EA}, \qquad \frac{F_{N3}\,l}{EA}=3\frac{F_{N1}\,l}{EA}$$

$$F_{N2}=2F_{N1} \qquad (2) \qquad\qquad F_{N3}=3F_{N1} \qquad (3)$$

联立 (1)、(2)和(3)求解，得：

$$F_{N1}=\frac{3}{14}F, \quad F_{N2}=\frac{6}{14}F, \quad F_{N3}=\frac{9}{14}F$$

$$F_{N1}=\frac{3}{14}F,\quad F_{N2}=\frac{6}{14}F,\quad F_{N3}=\frac{9}{14}F$$



注意 本例题的求解中没有解除 A 端的约束！

如需要计算A端的约束力，再解除相应的约束！

结果表明，3杆的轴力最大！

因三根杆的材料和横截面面积均相同，则该结构的强度条件为:

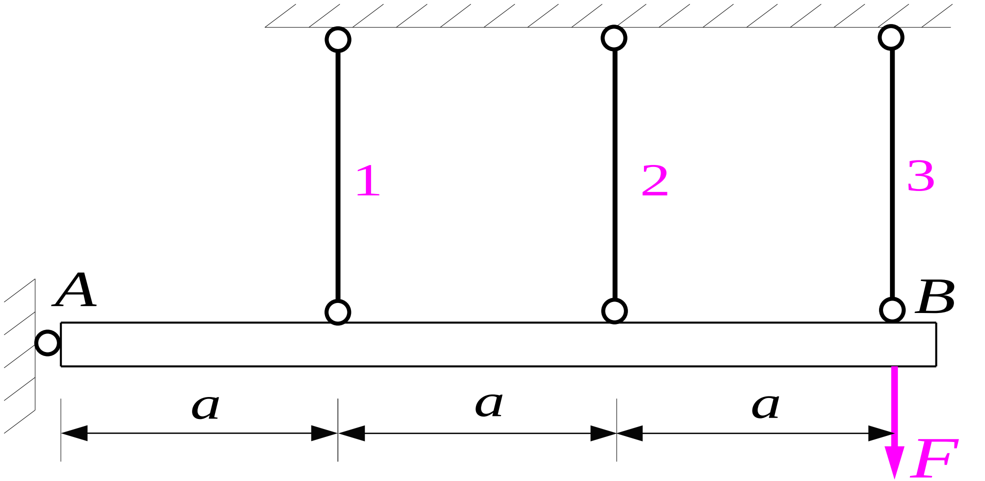
$$\sigma_{\max}=\sigma_3=\frac{F_{N3}}{A}=\frac{9F}{14A}\le[\sigma]\qquad \therefore F\le\frac{14}{9}[\sigma]A\qquad [F]=\frac{14}{9}[\sigma]A$$

思考：在不改变横截面面积的情况下，有什么途径可以提高许可载荷[F]？

使三根杆同时达到许用应力！

目标：$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=[\sigma]$

$$F_{N1}=F_{N2}=F_{N3}=[\sigma]A$$

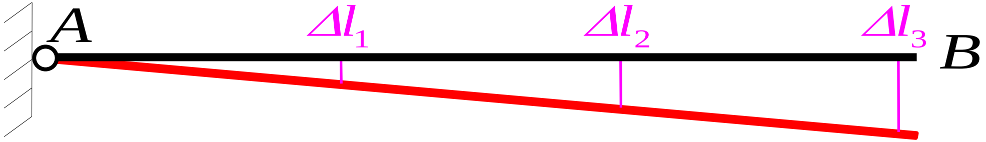


变形协调方程：

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}=\frac{a}{2a},\qquad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_3}=\frac{a}{3a},$$

$$\Delta l_2=2\Delta l_1,\qquad \Delta l_2=3\Delta l_1,$$

$$\frac{F_{N2}\,l_2}{EA}=2\frac{F_{N1}\,l_1}{EA},\quad \frac{F_{N3}\,l_3}{EA}=3\frac{F_{N1}\,l_1}{EA}$$

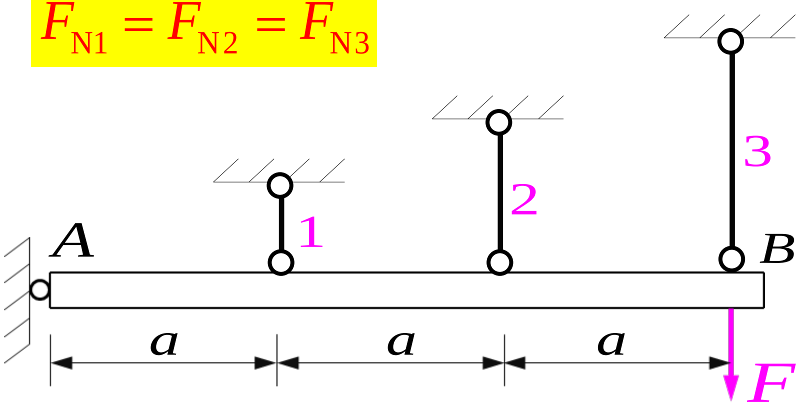


要实现 $F_{N1}=F_{N2}=F_{N3}$

改变各杆的原长 $l_2=2l_1,\ l_3=3l_1 \Rightarrow l_1:l_2:l_3=1:2:3$

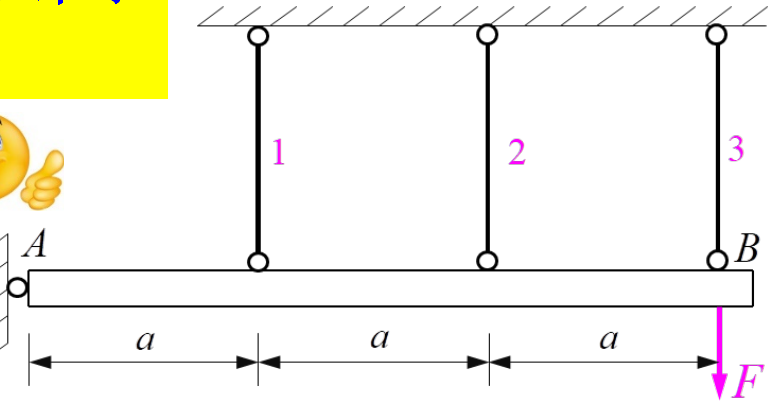
$l_1 : l_2 : l_3 = 1:2:3$

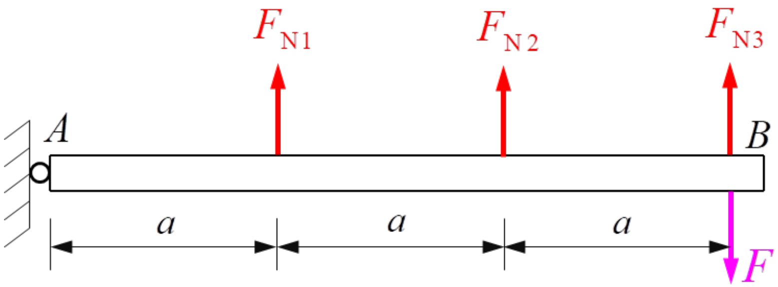
$F_{N1} = F_{N2} = F_{N3}$



既节省材料，
又提高了许可
载荷！

$[F] = \dfrac{14}{9}[\sigma]A$





$$F_{N1} + 2F_{N2} + 3F_{N3} = 3F$$

$$F_{N1} = F_{N2} = F_{N3} = \frac{F}{2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{F}{2A} \le [\sigma]$$

许可载荷提高了

$$\frac{2 - \dfrac{14}{9}}{\dfrac{14}{9}} = \frac{2}{7} = 28.6\%$$

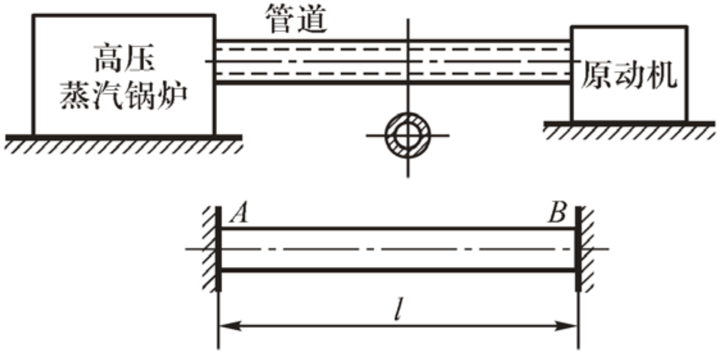
$[F] = 2[\sigma]A$

§ 2.11 温度应力和装配应力

一、温度应力

温度变化将引起物体的膨胀或收缩。静定结构由于可以自由变形，当温度均匀变化时，并不会引起构件的内力。但在超静定结构中，因变形受到部分或全部约束，温度变化时，往往会引起内力。如：

固定于枕木或基础上的钢轨

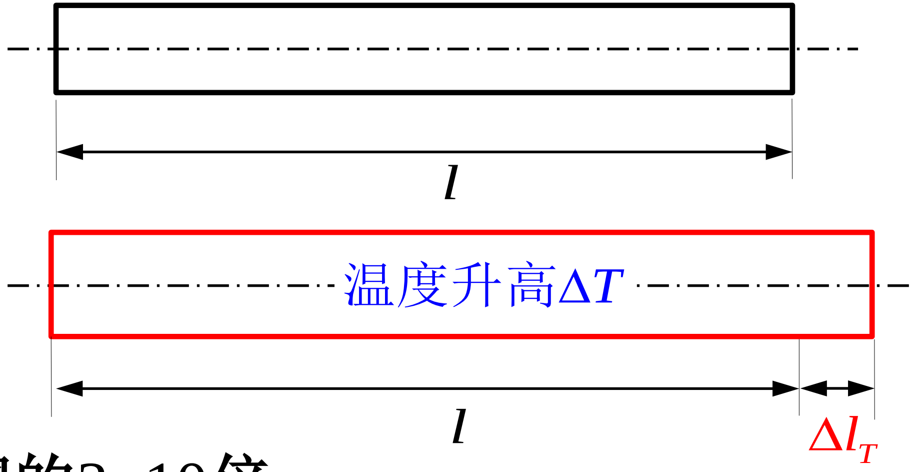


蒸汽锅炉与原动机间的管道

2016年7月26日 江苏宿迁袁庄村高温“烤爆”水泥路，村民躲让不及，当场撞上拱起的水泥块，晕倒在地，浑身多处受伤。

搜狐新闻 http://news.sohu.com/20160726/n461022928.shtml

线胀系数α_l： 单位长度的杆温度升高1°C时杆的伸长量



α_l的单位：°C^{-1}（或 / °C）

钢 $\alpha_l = 12.5 \times 10^{-6}$ °C^{-1}

混凝土 $\alpha_l = 10.0 \times 10^{-6}$ °C^{-1}

塑料的线胀系数比较大，是碳钢的3–10倍

$\alpha_l \cdot \Delta T$ 的量纲为 1，ε_T

注意：对于两端自由的杆件，温度升高或降低时，杆件内会产生应变，但不产生应力。

例5 求图示两端固定杆温度升高ΔT时的杆内的温度应力。

已知：E、l和α_l

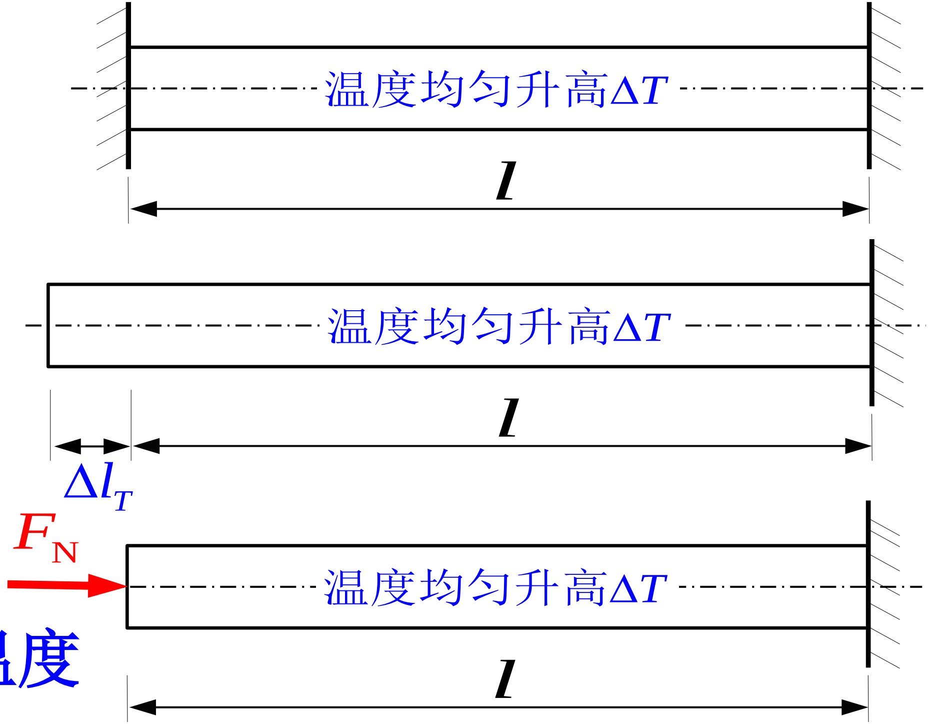
解：解除左边的约束

变形协调方程：$\Delta l_T = \Delta l_F$

$$\alpha_l \cdot \Delta T \cdot l = \frac{F_N l}{EA}$$

$$F_N = E\alpha_l \cdot \Delta T \cdot A$$

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = E\alpha_l \Delta T \text{（压）}$$



注意：对于两端固定的杆件，温度升高或降低时，杆件内应变为零，但应力不为零。

中国高铁：250km/h以上，截至2022年是4.2万公里；截至2024年是4.8万公里【中国政府网】，全世界第一，创造了举世瞩目的巨大成就。

高铁采用的是无缝钢轨，用高强螺栓和扣件将钢轨锁定在轨枕上，不能自由伸缩。温度改变时钢轨将发生热胀冷缩，在其内部将产生很大的温度应力。【在材料和技术方面都有很大的挑战】

工程中温度应力预防与控制：

工程中常采用预留空隙来减轻温度应力的影响。

如：两跨简支桥板间、混凝土路面中间

输油管道、蒸汽管道

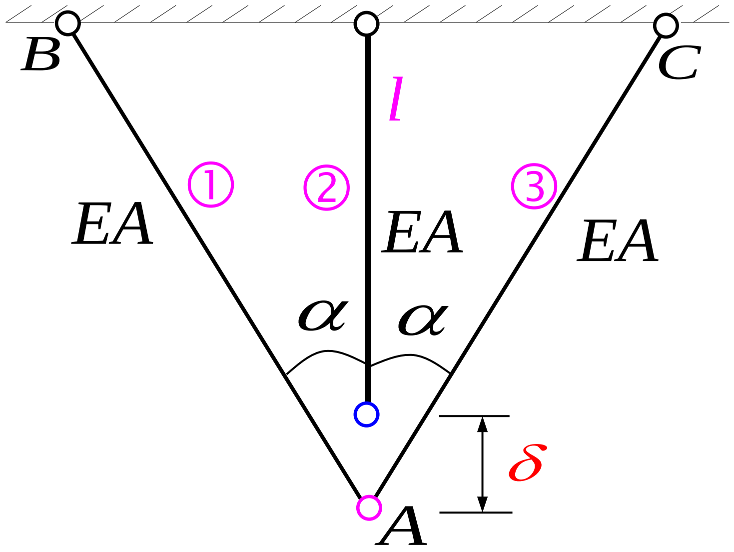
隔一段距离要设一个弯道－膨胀弯（Π型）

这是为考虑温度的影响，调节因温度变化而产生的伸缩。

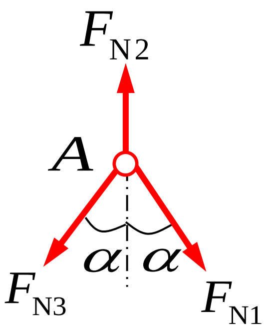
二、装配应力

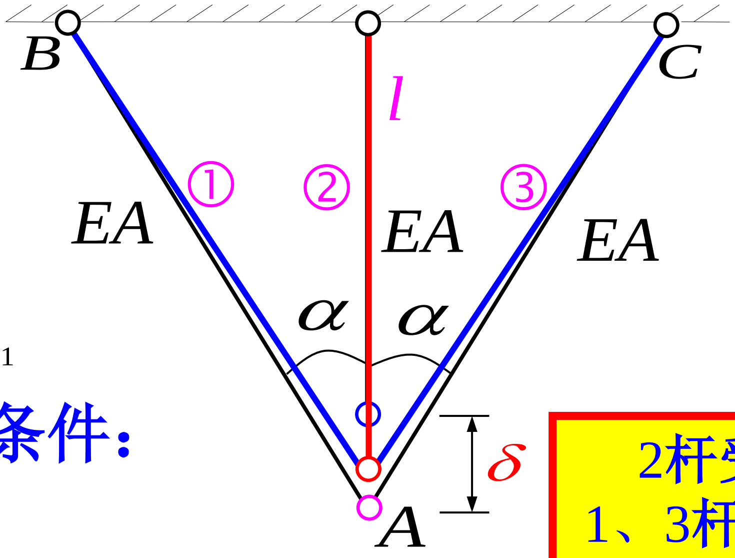
加工构件时，尺寸上产生一些微小误差是难以避免的。对静定结构，加工误差只不过是造成结构几何形状的轻微变化，不会引起内力。但对超静定结构，加工误差往往会引起内力。

例6 求图示结构的装配应力。EA, l, α 和 δ 为已知。

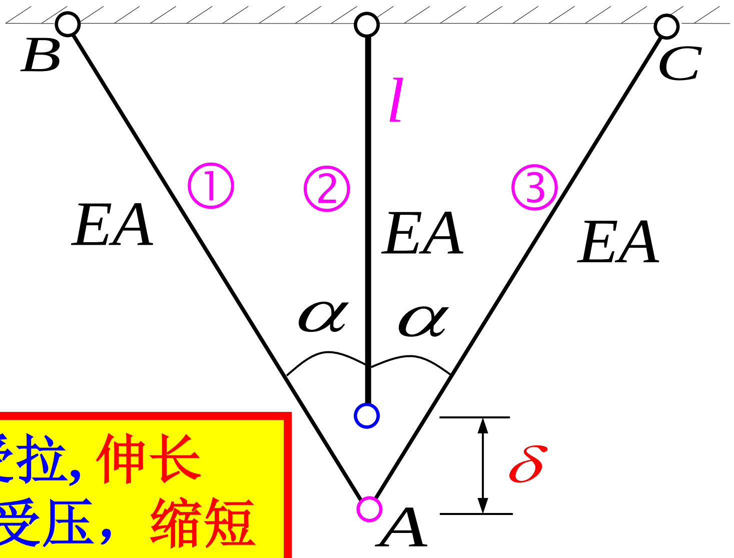


解：装配后的结构如图





2杆受拉, 伸长
1、3杆受压，缩短



静力平衡条件:

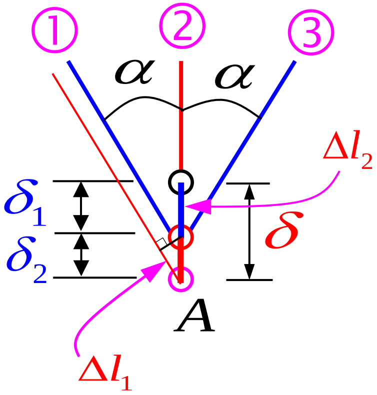
$$F_{N1} = F_{N3}$$

$$F_{N2} = 2F_{N1}\cos\alpha$$

静力平衡条件：

$$F_{N1} = F_{N3}$$

$$F_{N2} = 2F_{N1}\cos\alpha$$



变形协调方程：

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta$$

$$\delta_1 = \Delta l_2\,,\quad \delta_2\cos\alpha = \Delta l_1$$

$$\Delta l_2 + \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha} = \delta$$

应用胡克定律：

$$\frac{F_{N2}l}{EA} + \frac{\dfrac{F_{N1}(l/\cos\alpha)}{EA}}{\cos\alpha} = \delta$$

$$F_{N2}\cos^2\alpha + F_{N1} = EA\cdot\frac{\delta}{l}\cos^2\alpha$$

联立求解，得：

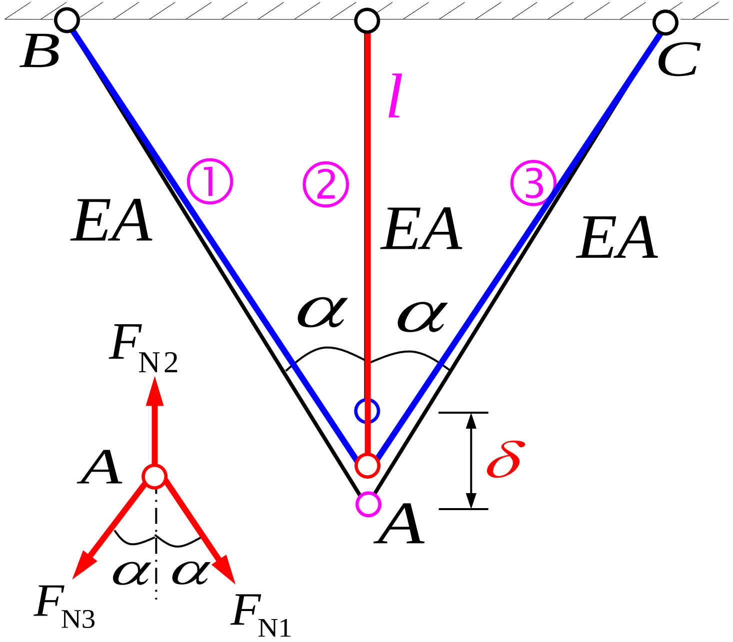
$$F_{N1} = F_{N3} = \frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}\cdot\frac{\delta}{l}\cdot EA \quad (\text{压})$$

$$F_{N2} = \frac{2\cos^3\alpha}{1+2\cos^3\alpha}\cdot\frac{\delta}{l}\cdot EA \quad (\text{拉})$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A} = \frac{2\cos^3\alpha}{1+2\cos^3\alpha}\cdot\frac{\delta}{l}\cdot E \quad (\text{拉})$$

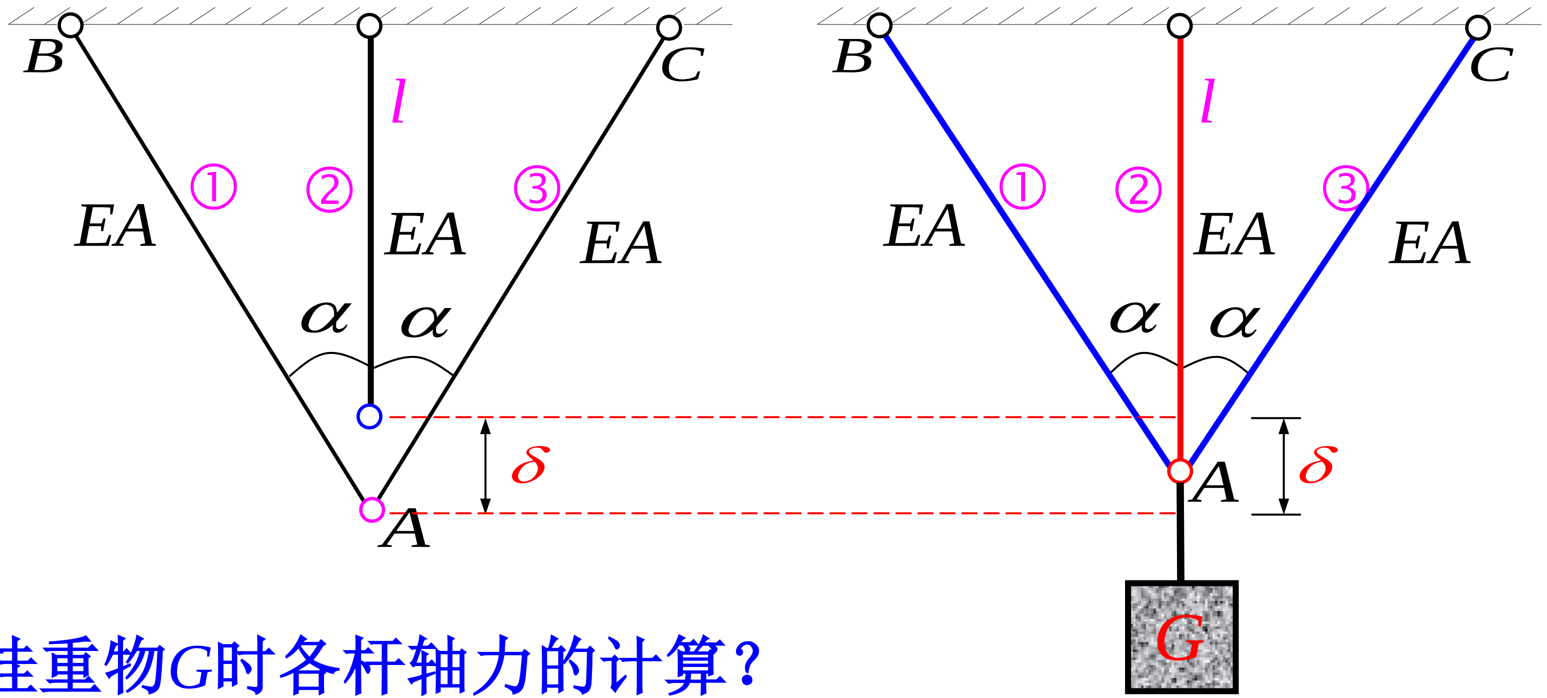
$$E = 210\text{GPa},\quad \delta = l/1000,\quad \alpha = 30^\circ$$

$$\sigma_2 = 118.66\text{MPa}\ (\text{拉})$$



2杆受拉，1、3杆受压

注意实际使用的差别，应考虑初始应力的影响！



挂重物G时各杆轴力的计算？

谢谢大家！

作业

P71: 2.46

P71-72: 2.50

P73: 2.54

下次课内容：应力集中、剪切和挤压的实用计算