材料力学（II）

第十章 动载荷（ Dynamic load ）

第 29 讲

第十章 动载荷

§10.1 概述

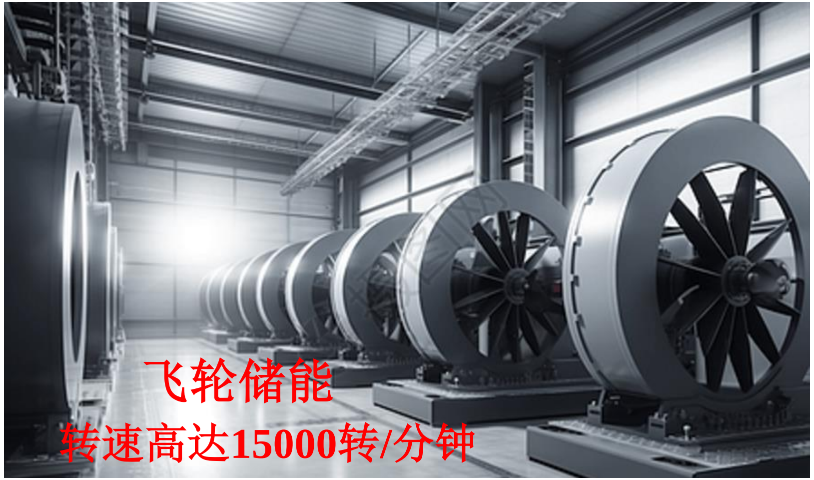
以前讨论的杆件变形问题，认为载荷从零开始平缓地增加，在加载过程中，杆件内各点的加速度很小，可以不计。即在加载过程中，认为杆件在任一时刻都处在平衡状态。

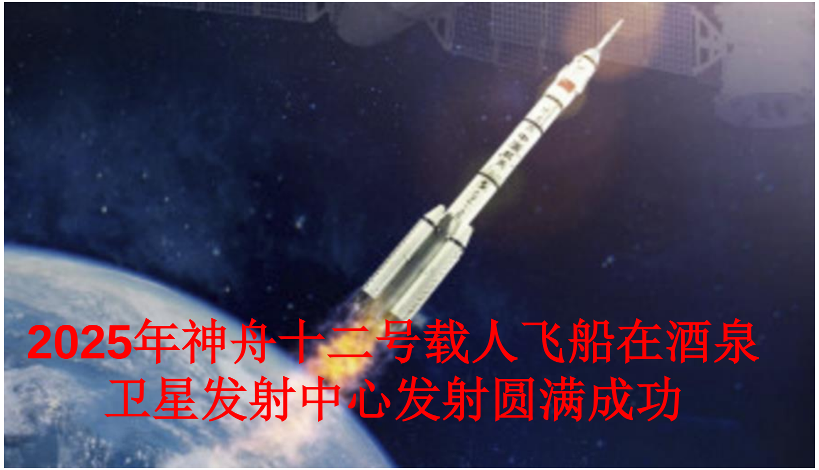
静力问题
- 强度
- 刚度
- 稳定

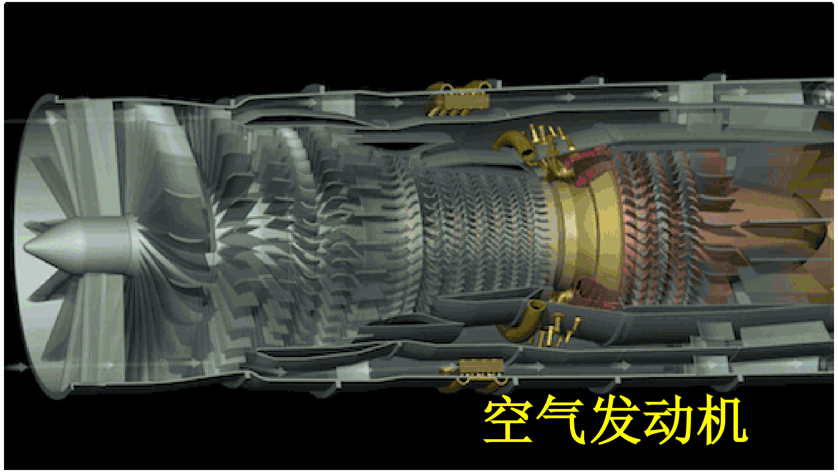
强度、刚度：拉（压）、弯、剪、扭及其组合

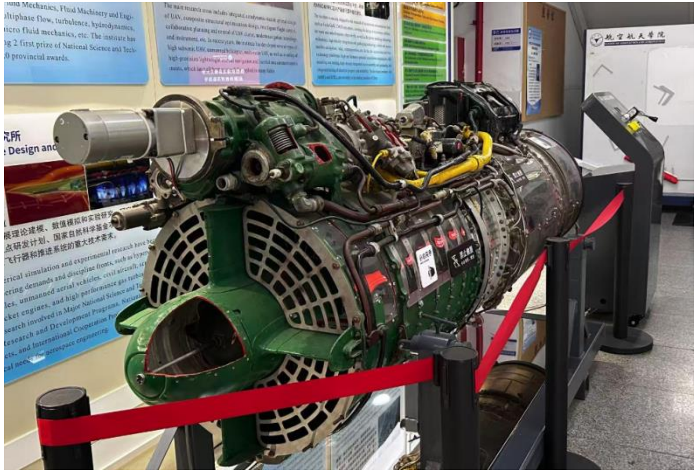
有些高速旋转的部件或加速提升的构件等，其质点的加速度是明显的。又如锻压空气锤的锤杆、紧急制动的转轴等，在非常短暂的时间内速度发生急剧的变化。也有些构件因工作条件而引起振动。此外，大量的机械零件又长期在周期性变化的载荷下工作。这些情况都属于动载荷。构件受动载荷作用是非常普遍的。

只要应力不超过比例极限，胡克定律仍适用于动载荷下应力和应变的计算，弹性模量与静载下的数值相同。


飞轮储能
转速高达15000转/分钟

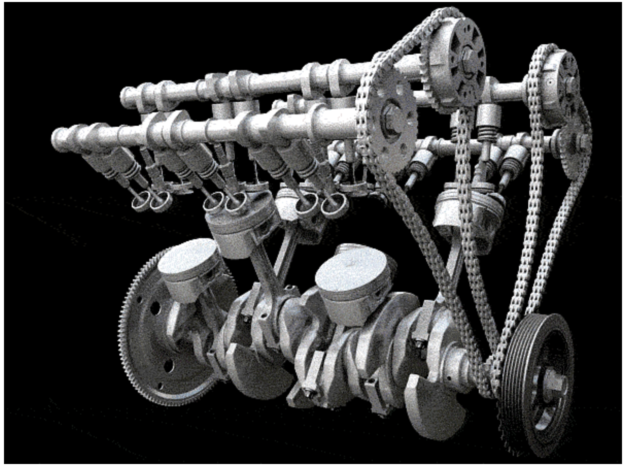

2025年神舟十二号载人飞船在酒泉
卫星发射中心发射圆满成功



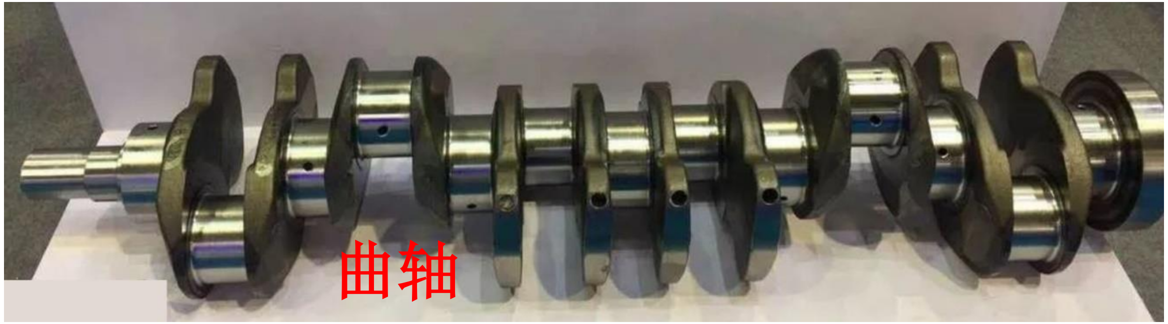


中国四大动力厂以600MW和1000MW（100万kW）机组为主导产品

也有大量的构件和机械零件长期在周期性变化的载荷下工作



汽车发动机
及其部件



有些构件因工作条件而引起振动


虎门大桥


虎门大桥发生异常抖动
目前已封闭进行交通管制
2020年5月5日下午，广东虎门大桥悬索桥发生明显弯曲振动

点击播放

又如打桩机、锻压汽锤的锤杆、紧急制动的转轴等，在非常短暂的时间内速度发生急剧变化。

这些情况都属于动载荷!

点击播放

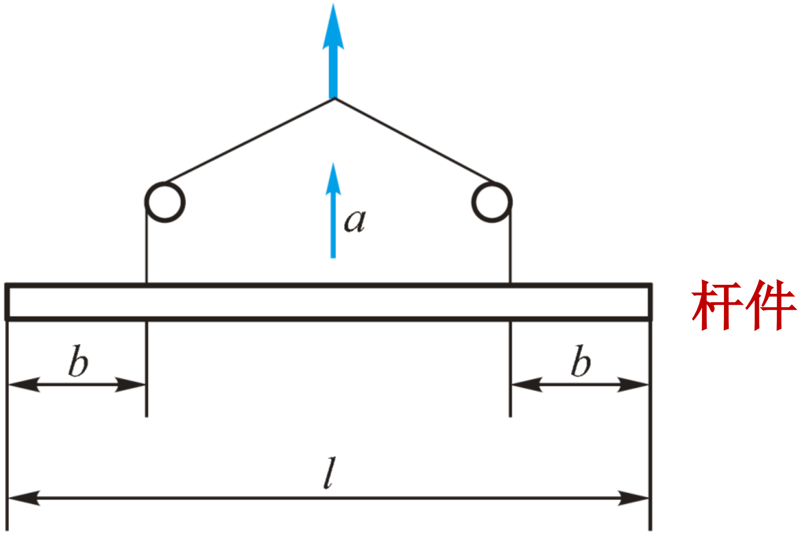
§ 10.2　动静法的应用

达朗贝尔原理指出，对作加速运动的质点系，如假想地在每一质点上加上惯性力，则质点系上的原力系与惯性力系组成“平衡力系”。这样，就可把动力学问题在形式上作为静力学问题来处理，这就是动静法。于是，以前关于应力和变形的计算方法， 也可直接用于增加了惯性力的杆件。

对加速度为a的质点，惯性力等于质点的质量m与a的乘积，方向则与a的方向相反。

一、构件做匀加速直线运动

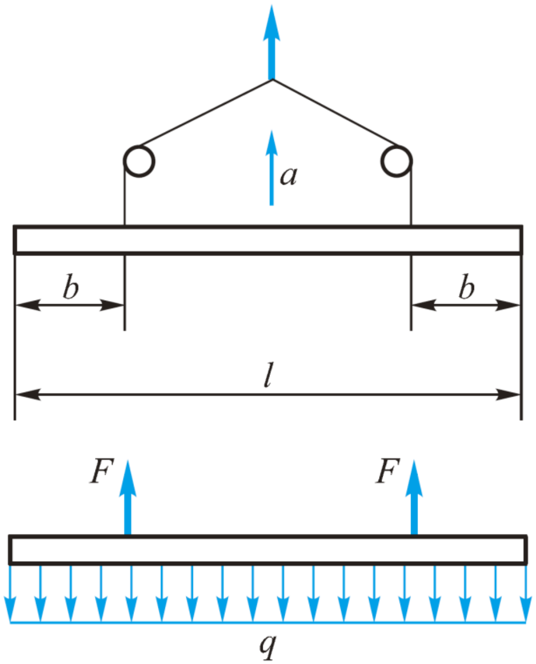
例1　以匀加速度a向上提升的杆件。若杆件长为l，横截面面积为A，抗弯截面系数为W，单位体积的质量（密度）为ρ，考虑杆件的自重时，求杆件中央横截面上的最大动应力。



解：杆件单位长度的质量为$\rho A\cdot 1$，相应的惯性力为ρAa，且方向向下。

作用于杆件上的重力为ρAg，方向向下。

将惯性力加于杆件上，于是作用于杆件上的重力、惯性力和吊升力升组成平衡力系。杆件成为在横向力作用下的弯曲问题。



均布载荷的集度q为

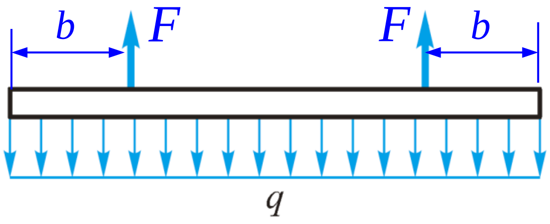
$$q = \rho Ag + \rho Aa = \rho Ag\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

吊升力F为 $F = \dfrac{1}{2}ql$

杆件中央横截面上的弯矩为 $M = F\left(\dfrac{l}{2} - b\right) - q\dfrac{l}{2}\times\dfrac{l}{4} = \dfrac{1}{2}ql\left(\dfrac{l}{4} - b\right)$

$$= \frac{1}{2}\rho Ag\left(1 + \frac{a}{g}\right)\left(\frac{l}{4} - b\right)l$$

杆件中央横截面上的最大应力（一般称为动应力，σ_{d}）为



$$\sigma_{\mathrm{d}}=\frac{M}{W}=\frac{\rho Ag}{2W}\left(1+\frac{a}{g}\right)\left(\frac{l}{4}-b\right)l$$

加速度a等于零时， 由上式求得杆件在静载下的应力为$\sigma_{\mathrm{st}}=\dfrac{\rho Ag}{2W}\left(\dfrac{l}{4}-b\right)l$

则动应力σ_{d}可以表示为 $\sigma_{\mathrm{d}}=\sigma_{\mathrm{st}}\left(1+\dfrac{a}{g}\right)$

记 $K_{\mathrm{d}}=1+\dfrac{a}{g}$ 称为动荷因数

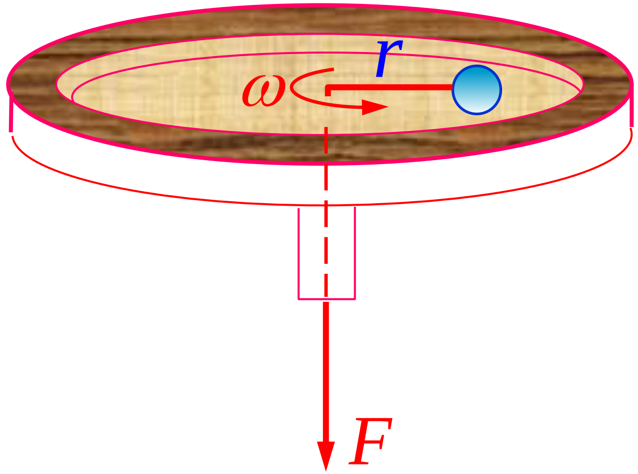
则 $\sigma_{\mathrm{d}}=K_{\mathrm{d}}\sigma_{\mathrm{st}}$ 表明动应力等于静应力乘以动荷因数

此时强度条件可以写成 $\sigma_{\mathrm{d}}=K_{\mathrm{d}}\sigma_{\mathrm{st}}\leq[\sigma]$

二、构件作圆周运动

匀速直线运动，没有动载荷（加速度为零）；但是匀速转动则不一样，存在向心加速度。

惯性力大小 $F = ma_{n} = m\omega^{2}r$



例2 在竖直平面内匀速转动杆件的应力计算

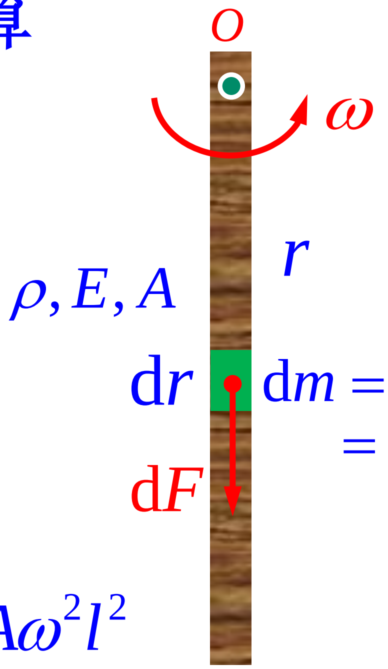
若不计重力

应力与密度有关

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{\max}}{A}=\frac{1}{2}\rho\omega^2 l^2\le[\sigma]$$

$$F_{\max}=\int_0^l \mathrm{d}m\cdot\omega^2 r$$

$$=\int_0^l \rho A\mathrm{d}r\cdot\omega^2 r=\rho A\omega^2\int_0^l r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\rho A\omega^2 l^2$$



$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$
$\quad=\rho A\mathrm{d}r$

匀速转动杆件，选材时要求所用的材料密度要小，强度要高！

比强度和比刚度的概念：

$$\tfrac{1}{2}\rho\omega^2 l^2 \le [\sigma]$$

比强度：材料的强度除以重度 $[\sigma]/\gamma = [\sigma]/(\rho g)$

比刚度：材料的模量除以重度 $E/\gamma = E/(\rho g)$

$$\omega^2 \le \frac{2}{l^2}\cdot\frac{[\sigma]}{\rho}$$

大

也称比模量

使满足高速转动，应如何选材？

高强钢：

密度7.8×10^3kg/m^3；抗拉强度1010MPa；弹性模量206GPa；

比强度1.3×10^4m；比模量2.6×10^6m

碳纤维：

密度1.6×10^3kg/m^3；抗拉强度1050MPa；弹性模量235GPa；

比强度6.6×10^4m；比模量14.7×10^6m

比强度的物理意义

比强度：$\dfrac{[\sigma]}{\gamma}$

单位：$\dfrac{\mathrm{N/m^2}}{\mathrm{N/m^3}} = \mathrm{m}$

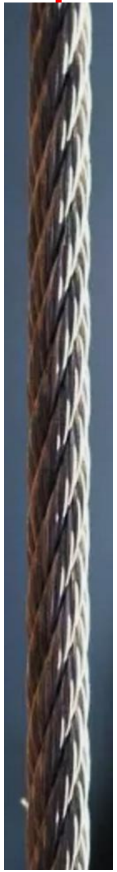
$$G = mg = \rho \cdot Al \cdot g$$

$$\sigma_{\max} = \frac{G}{A} = \rho \cdot l \cdot g$$

$$\frac{\sigma_{\max}}{\gamma} = \frac{\sigma_{\max}}{\rho g} = l$$

即$l < \dfrac{[\sigma]}{\gamma}$时不会断

F



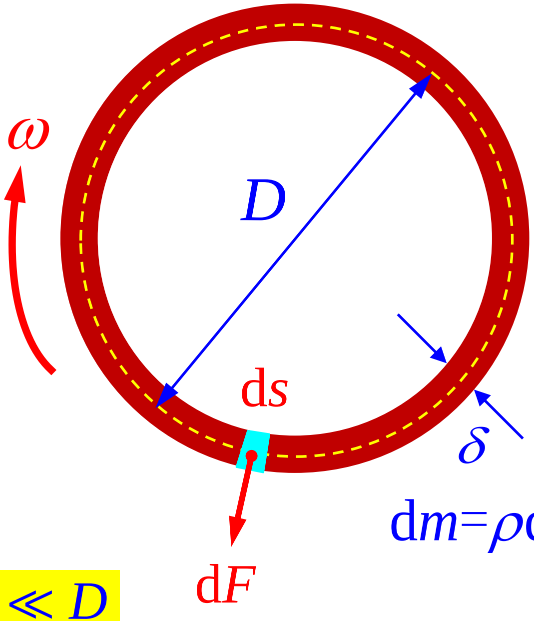
ρ, A, l

碳纤维的比强度6.6×10^4m，可拉起66km不会断！

材料的力学性能比较

材　料	密度 $10^3kg/m^3$	抗拉强度 MPa	弹性模量 GPa	比强度 10^4m	比模量 10^6m
钢	7.8	1010	206	1.3	2.6
铝	2.8	460	74	1.7	2.6
钛	4.5	940	112	2.1	2.5
玻璃钢	2.0	1040	39	5.2	2.0
CFII/Epoxy	1.45	1470	137	10.2	9.5
CFI /Epoxy	1.6	1050	235	6.6	14.7
Kevlar/Epoxy	1.4	1370	78	9.8	5.6
硼纤维/Epoxy	2.1	1340	206	6.4	9.8
硼纤维/铝	2.65	980	196	3.7	7.4

例3 求匀速旋转薄壁圆环周向的应力



匀角速度为ω

横截面面积为A

材料的密度为ρ

平均直径为D

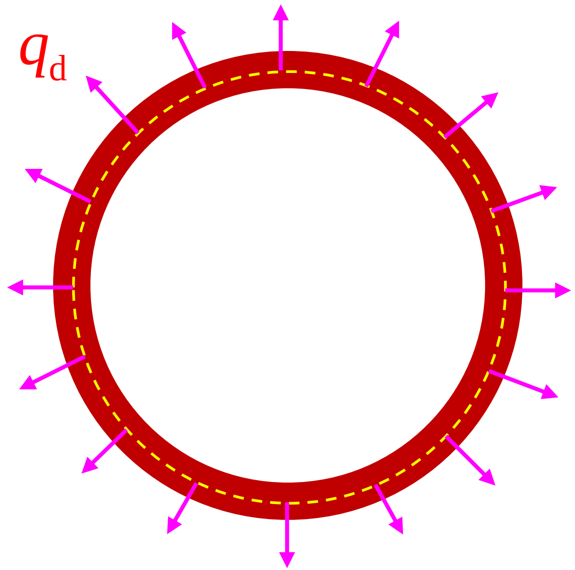
厚度为δ

$\delta \ll D$

可近似认为环内各点的向心加速度大小相等

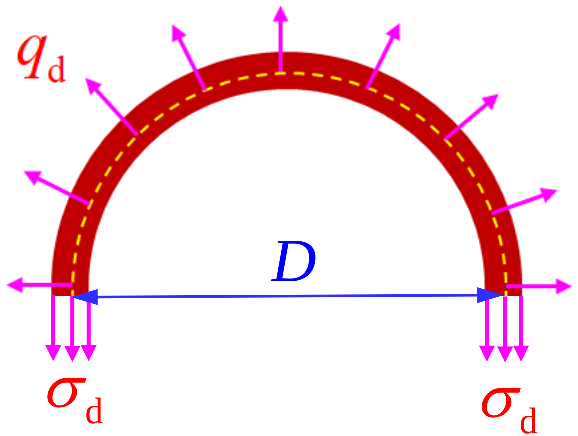
$dm = \rho dV = \rho A ds \qquad a_n = \omega^2 \frac{D}{2}$

等效成静载荷问题



$$q_d = \frac{dF}{ds} = \frac{dm \cdot a_n}{ds} = \frac{\rho A ds}{ds} a_n = \rho A a_n = \rho A \omega^2 \frac{D}{2}$$

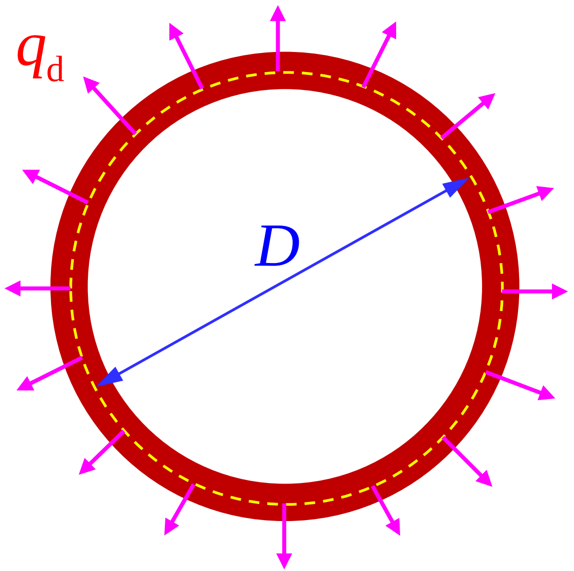
圆环横截面上的应力



等效成静载荷问题

$$q_d = \rho A\omega^2 \frac{D}{2}$$

横截面积A



仿照算薄壁圆筒周向应力的求解方法

$$\sigma_d = \frac{q_d \cdot D}{2A} = \rho A\omega^2 \frac{D}{2} \cdot \frac{D}{2A} = \frac{\rho\omega^2 D^2}{4}$$

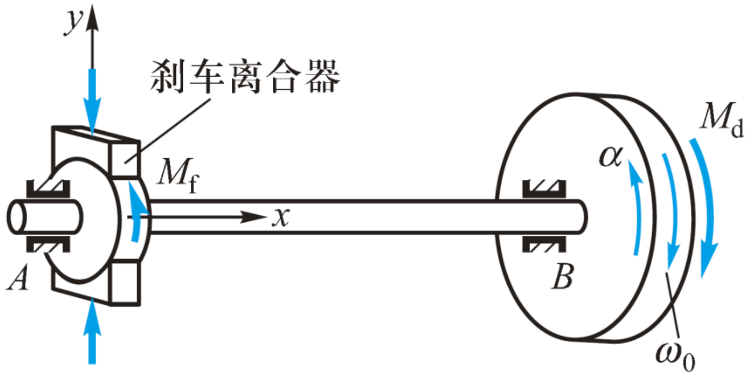
旋转薄壁圆环的周向拉应力与横截面的面积A无关！

要保证强度，应限制圆环的转速，增加横截面面积无济于事。

例4　在AB轴的B端有一个质量很大的飞轮。与飞轮相比，轴的质量可以忽略不计。轴的另一端A装有刹车离合器。飞轮的转速为$n=1000$转/分，转动惯量$J_x=0.5\ \mathrm{kN\cdot m\cdot s^2}$。轴的直径$d=100\mathrm{mm}$。刹车时使轴在10s内均匀减速至停止转动。求轴内的最大动切应力。

解：飞轮与轴的转动角速度为

$$\omega_0=\frac{2\pi\cdot n}{60}=\frac{2\pi\cdot 100}{60}=\frac{10\pi}{3}\mathrm{rad/s}$$

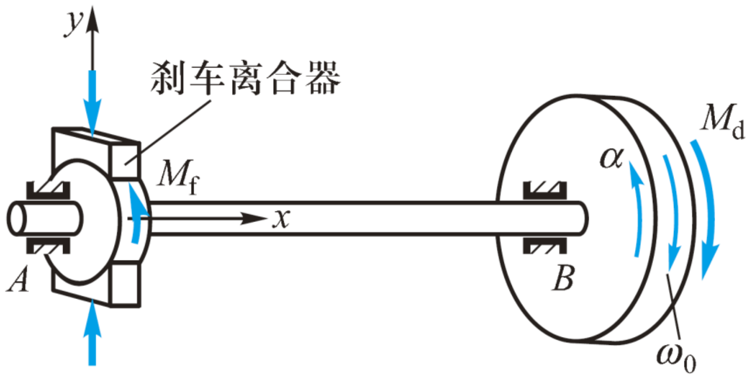


当飞轮与轴同时作匀减速转动时，其角加速度为

$$\alpha=\frac{\omega_1-\omega_0}{t}=\frac{0-\frac{10\pi}{3}}{10}=-\frac{\pi}{3}\mathrm{rad/s^2}$$

利用动静法

$$M_d = -J_x \cdot \alpha = -0.5\times\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{kN\cdot m}$$



*AB*轴上横截面上的扭矩为

$$T = M_d = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{kN\cdot m}$$

横截面上的最大扭转切应力为

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} = \frac{\frac{\pi}{6}\times 10^3}{\frac{\pi}{16}\times(100\times10^{-3})^3} = 2.67\times10^6\ \mathrm{Pa} = 2.67\ \mathrm{MPa}$$

例5 为简单起见，将汽轮机叶片近似地简化为变截面直杆，且横截面面积沿轴线按线性规律变化。叶根的横截面面积A_0为叶顶的横截面面积A_1的2倍（$A_0=2A_1$）。叶根和叶顶的半径分别为R_0和R_1，转速为ω，材料的密度为ρ。试求叶片根部的应力和叶片的总伸长量。

解： 1. 求叶片根部的应力

设距叶根为x的横截面m-m的面积为$A(x)$

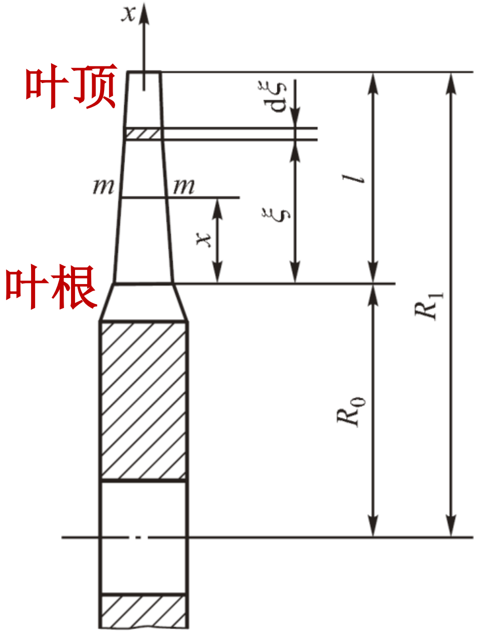
$$A(x)=A_0\left(1-\frac{x}{2l}\right)$$ 按线性规律变化

在距叶根为ξ处取长度为$\mathrm{d}\xi$的微段，其质量为

$$\mathrm{d}m=\rho A(\xi)\mathrm{d}\xi$$

距叶根为ξ的点处向心加速度为

$$a_{\mathrm{n}}=\omega^2(R_0+\xi)$$



dm的惯性力为

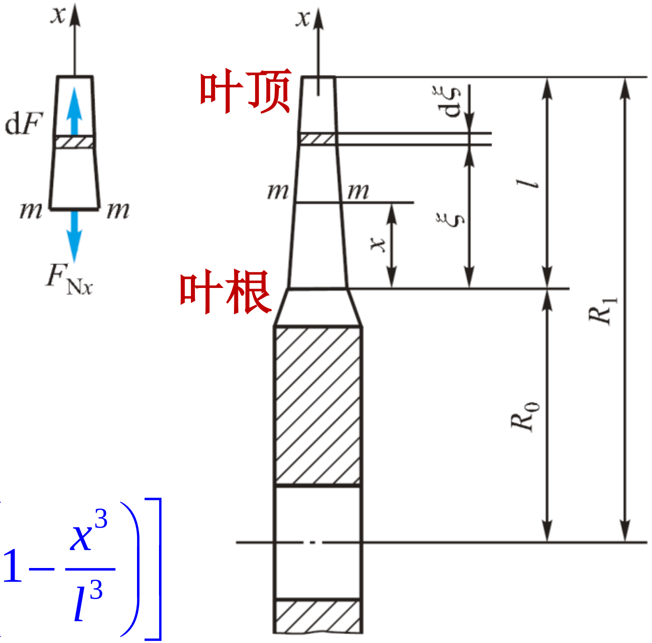
$$\mathrm{d}F=\mathrm{d}m\cdot a_{\mathrm{n}}=\rho A(\xi)\mathrm{d}\xi\cdot\omega^2(R_0+\xi)$$

截面m-m上的轴力为

$$F_{\mathrm{N}x}=\int_x^l \mathrm{d}F=\int_x^l \rho\omega^2(R_0+\xi)A(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad l=R_1-R_0$$

$$=\rho\omega^2A_0\int_x^l(R_0+\xi)\left(1-\frac{\xi}{2l}\right)\mathrm{d}\xi$$

$$=\rho\omega^2A_0\left[R_0l\left(1-\frac{x}{l}\right)+\frac{l^2}{2}\left(1-\frac{R_0}{2l}\right)\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)-\frac{l^2}{6}\left(1-\frac{x^3}{l^3}\right)\right]$$



最大轴力发生在叶根横截面上(x=0)

$$F_{\mathrm{Nmax}}=\rho\omega^2A_0\left(\frac{l^2}{3}+\frac{3}{4}R_0l\right)$$

在叶根横截面上的拉应力为

$$\sigma=\frac{F_{\mathrm{Nmax}}}{A_0}=\rho\omega^2\left(\frac{l^2}{3}+\frac{3}{4}R_0l\right)$$

2. 求叶片的总伸长量

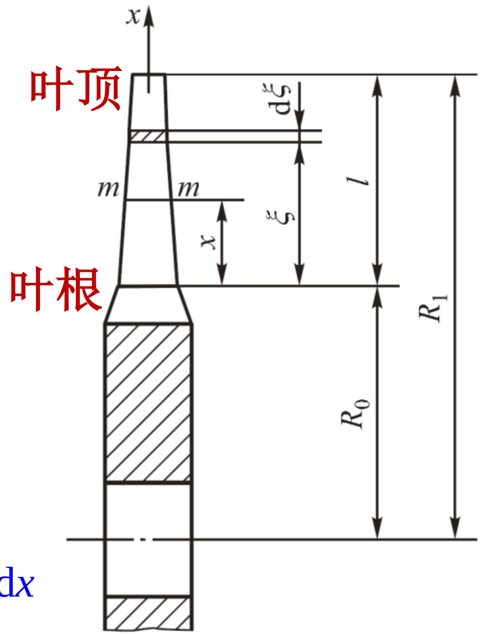
根据胡克定律，在距叶根为x处取出长度为dx一段的伸长量为

$$\mathrm{d}(\Delta l)=\frac{F_{\mathrm{N}x}\mathrm{d}x}{EA(x)}$$

积分求出叶片的总伸长量为

$$\Delta l=\int_0^l\frac{F_{\mathrm{N}x}\mathrm{d}x}{EA(x)}=\frac{\rho\omega^2 l}{E}\int_0^l\frac{R_0\left(1-\frac{x}{l}\right)+\frac{l}{2}\left(1-\frac{R_0}{2l}\right)\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)-\frac{l}{6}\left(1-\frac{x^3}{l^3}\right)}{\left(1-\frac{x}{2l}\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\rho\omega^2 l}{E}\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)R_0 l+\left(\frac{13}{18}-\frac{2}{3}\ln 2\right)l^2\right]$$



3. 结果分析

$$\sigma = \rho\omega^2\left(\frac{l^2}{3}+\frac{3}{4}R_0 l\right) \qquad \Delta l = \frac{\rho\omega^2 l}{E}\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)R_0 l + \left(\frac{13}{18}-\frac{2}{3}\ln 2\right)l^2\right]$$

I. 汽轮机叶片旋转过程中，叶根横截面上的拉应力σ与材料的密度ρ成正比

II. 叶片的总伸长量Δl与材料的密度ρ成正比，与弹性模量E成反比

叶片旋转时要满足强度和刚度的要求，除了材料应有较高的强度极限和较高的弹性模量外，还应有较低的密度。

小 结

直线运动情形和匀速转动情形，此时物体虽然发生了运动，但是作用在物体上的力是恒定的，在处理此问题时，没有必要处理成是时间t的函数，实质上相当于静态问题。

▲ ▲

§ 10.4　杆件受冲击时的应力和变形

锻造时，锻锤在与锻件接触的非常短暂的时间内，速度发生很大变化，这种现象称为冲击或撞击。以重锤打桩，用铆钉枪进行铆接，高速转动的飞轮或砂轮突然刹车等， 都是冲击问题。在上述的一些例子中，重锤、飞轮等为冲击物，而被打的桩和固接飞轮的轴等则是承受冲击的构件。在冲击物与受冲构件的接触区域内，应力状态非常复杂，且冲击持续时间非常短，接触力随时间的变化难以准确分析。这些都使冲击问题的精确计算十分困难。

下面介绍的用能量方法求解冲击问题，大致上可以估算出冲击时的位移和应力，是一种有效的近似方法。

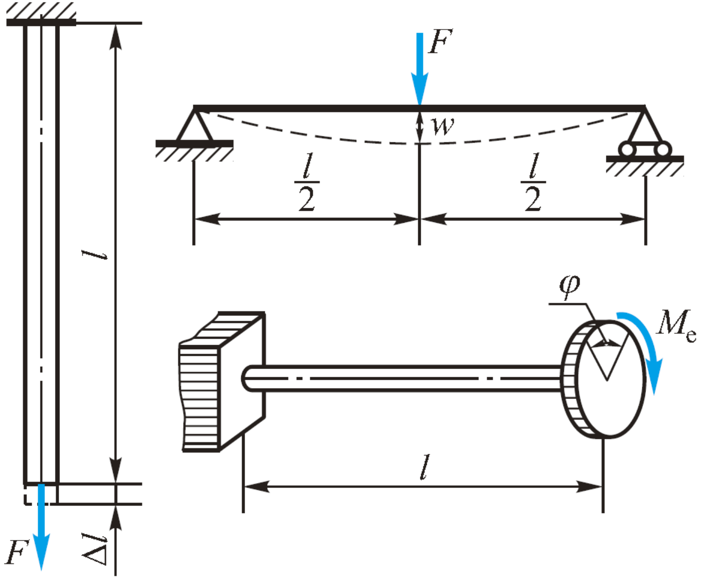
在线弹性范围内，忽略了其他种类能量的损失，冲击物所减少的动能和势能全部转变为受冲构件的应变能。

承受各种变形的弹性杆件都可看作一个弹簧

$$\Delta l=\frac{Fl}{EA}=\frac{F}{EA/l}$$

$$w=\frac{Fl^3}{48EI}=\frac{F}{48EI/l^3}$$

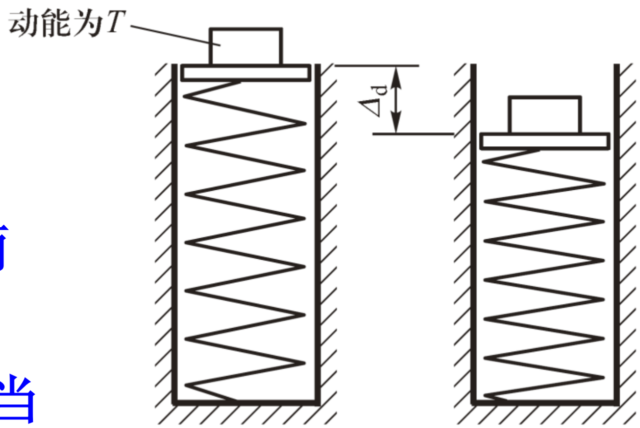
$$\varphi=\frac{M_e l}{GI_p}=\frac{M_e}{GI_p/l}$$



把这些杆件看作弹簧时，其弹簧刚度系数分别是

$$\frac{EA}{l}、\frac{48EI}{l^3}、\frac{GI_p}{l}$$

一、弹性杆件受竖向冲击



设重量为P 的冲击物一经与受冲弹簧接触，就相互附着作共同运动。

忽略弹簧的质量，只考虑其弹性，系统便简化成一个自由度的运动系统。

设冲击物与弹簧开始接触的瞬时动能为T，当弹簧变形到达最大位置时，系统的速度变为零，弹簧的变形为Δ_d。

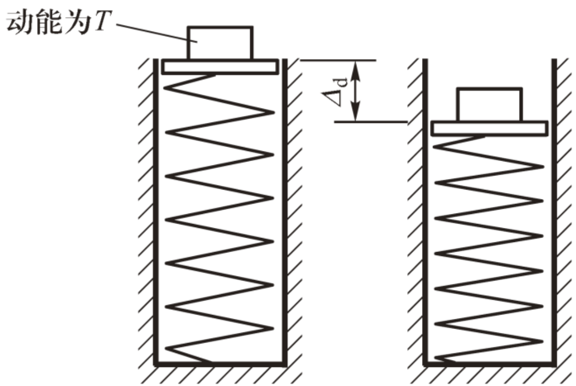
从冲击物与弹簧开始接触到变形发展到最大位置，动能的变化为 $\Delta T = T$

重物P向下移动的距离为Δ_d，势能的变化为 $\Delta V = P\Delta_d$

由能量守恒定律，冲击系统的动能和势能的变化应等于弹簧的应变能$V_{\varepsilon d}$

$$\Delta T + \Delta V = V_{\varepsilon d}$$

设系统的速度为零时作用于弹簧上的动载荷为F_d。



材料服从胡克定律，冲击过程中动载荷完成的功为

$$W=\frac{1}{2}F_d\Delta_d$$

即等于弹簧的应变能 $V_{\varepsilon d}=W=\frac{1}{2}F_d\Delta_d$

设重物P 以静载的方式作用于构件上，其静变形和静应力分别为Δ_{st}和σ_{st}。

在动载荷为F_d作用下，相应的变形和应力分别为Δ_d和σ_d。

在线弹性范围内，载荷、变形和应力均成正比，故有

$$\frac{F_d}{P}=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}=\frac{\sigma_d}{\sigma_{st}} \Longrightarrow \boxed{F_d=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}P,\quad \sigma_d=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}\sigma_{st}}$$

$$V_{\varepsilon d}=\frac{1}{2}F_d\Delta_d$$

$$F_d=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}P$$

$$\Longrightarrow V_{\varepsilon d}=\frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}P$$

$$\Delta T+\Delta V=V_{\varepsilon d}$$

$$\Delta V=P\Delta_d$$

$$\Delta T=T$$

$$\Longrightarrow V_{\varepsilon d}=P\Delta_d+T$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}P=P\Delta_d+T$$

$$\Delta_d^2-2\Delta_d\Delta_{st}-\frac{2T\Delta_{st}}{P}=0$$

$$\Delta_d=\Delta_{st}\left(1+\sqrt{1+\frac{2T}{P\Delta_{st}}}\right)$$

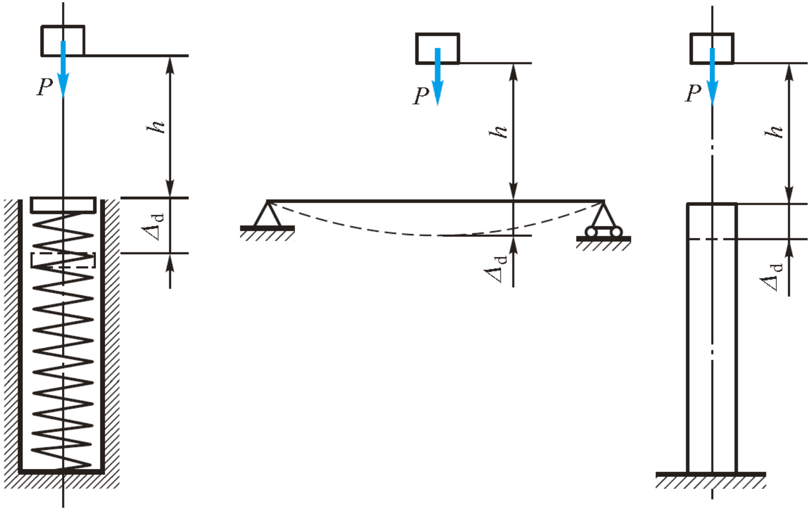
$$\Delta_d=\Delta_{st}\left(1-\sqrt{1+\frac{2T}{P\Delta_{st}}}\right)$$ 舍去！

$$K_d=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}=1+\sqrt{1+\frac{2T}{P\Delta_{st}}}$$

冲击动荷因数

$$F_d=K_dP,\quad \Delta_d=K_d\Delta_{st},\quad \sigma_d=K_d\sigma_{st}$$

若冲击是因重量为P的物体从高度为h 处自由下落造成的，则物体与弹簧接触时，由机械能守恒定律，知



$$T = Ph$$

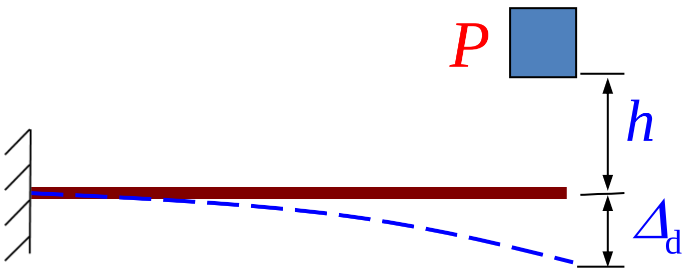
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T}{P\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

得物体从高度h自由下落时的动荷因数。

物体自由下落时h =0的情况，有K_d =2。

称为突然加于构件上的载荷，此时构件的瞬时最大应力和变形皆为静载时的2倍。

例6　弯曲刚度为 EI 的悬臂梁，重量为 P 的重物从距梁顶面h 处自由落下，冲击到悬臂梁自由端的顶面。

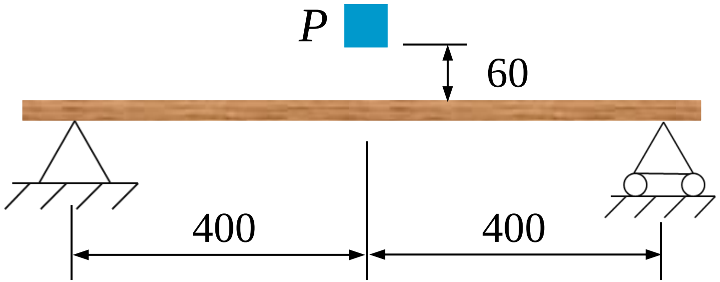


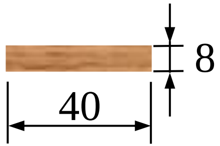
试求：自由端的最大挠度。

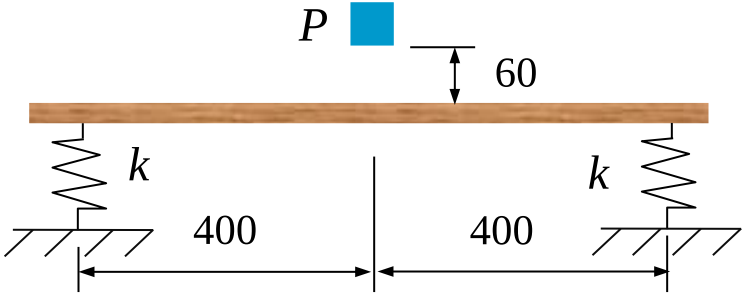
解：$K_d = \dfrac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2h}{\Delta_{st}}}$　　$P_d = K_d P$　　$\sigma_d = K_d \sigma_{st}$

$$\Delta_{st} = \frac{Pl^3}{3EI},\qquad \Delta_d = K_d \Delta_{st} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}\right)\frac{Pl^3}{3EI}$$

例7 已知$E=210\text{GPa}$，$P=40\text{N}$，$k=25.32\text{N/mm}$。求下列两种情形梁内的最大动应力。







单位：mm

解：$$\Delta_{st1}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

$$=\frac{40\times 0.8^3}{48\times 210\times 10^9\times \frac{1}{12}\times 40\times 10^{-3}\times (8\times 10^{-3})^3}$$

$$=1.19\text{mm}$$

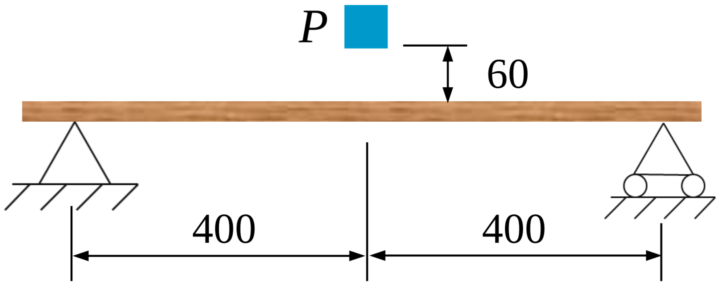
$$K_{d1}=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st1}}}=11.09$$

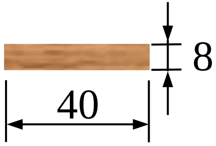
$$\Delta_{st2}=\frac{Pl^3}{48EI}+\frac{P/2}{k}$$

$$=\Delta_{st1}+\frac{40/2}{25.32}$$

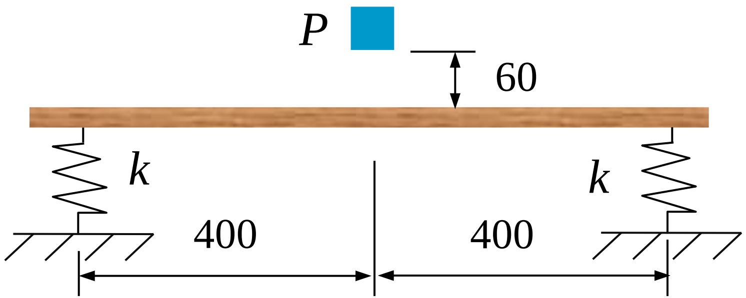
$$=1.19+0.79=1.98\text{mm}$$

$$K_{d2}=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st2}}}=8.85$$





单位：mm



$K_{d1}=11.09$

$K_{d2}=8.85$

梁内的最大静应力

$$\sigma_{st1}=\sigma_{st2}=\frac{M}{W}=\frac{\frac{1}{4}Pl}{\frac{1}{6}bh^2}=18.75\text{MPa}$$

梁内的最大动应力

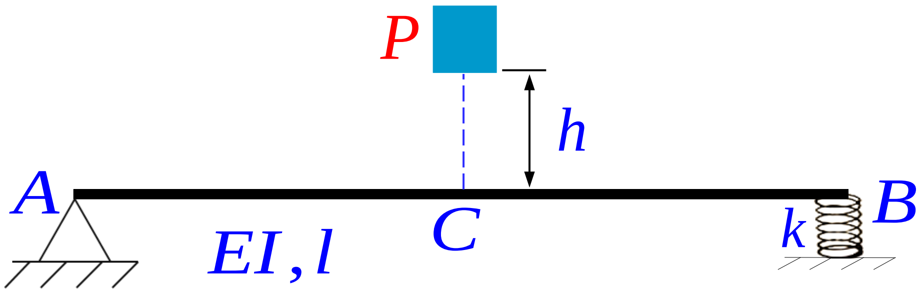
$$\sigma_{d1}=K_{d1}\sigma_{st1}=11.09\times18.75=207.9\text{MPa}$$

$$\sigma_{d2}=K_{d2}\sigma_{st2}=8.85\times18.75=165.9\text{MPa}$$

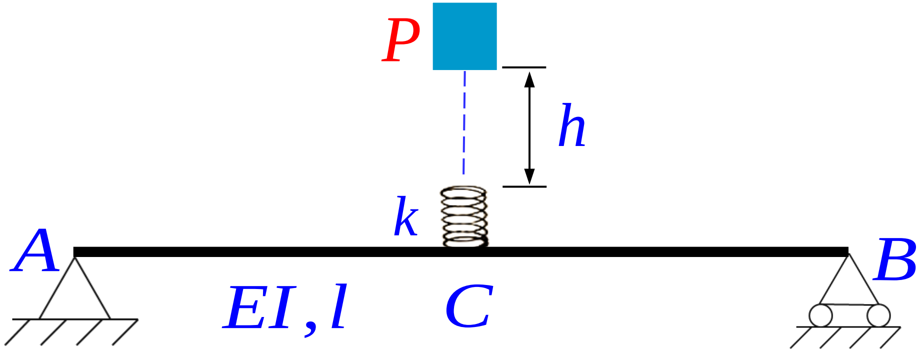
例8 图示两梁抗弯刚度相同，弹簧的刚度系数也相同，两梁最大动应力的关系为：

（A） $(\sigma_{\mathrm{dmax}})_{\mathrm{a}}=(\sigma_{\mathrm{dmax}})_{\mathrm{b}}$ （B） $(\sigma_{\mathrm{dmax}})_{\mathrm{a}}>(\sigma_{\mathrm{dmax}})_{\mathrm{b}}$

（C） $(\sigma_{\mathrm{dmax}})_{\mathrm{a}}<(\sigma_{\mathrm{dmax}})_{\mathrm{b}}$ （D） 不能确定，与h有关



（a）

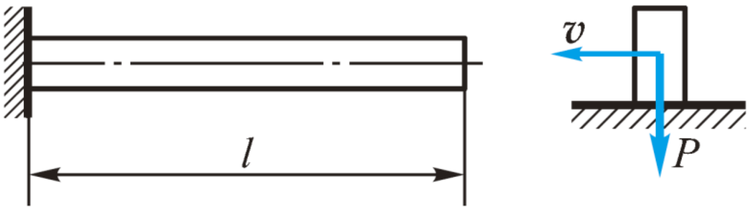


（b）

$$K_{\mathrm{d}}=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{\mathrm{st}}}}\qquad(\Delta_{\mathrm{st}})_{\mathrm{a}}<(\Delta_{\mathrm{st}})_{\mathrm{b}}\qquad(K_{\mathrm{d}})_{\mathrm{a}}>(K_{\mathrm{d}})_{\mathrm{b}}$$

二、弹性杆件受水平冲击

冲击过程中系统的势能不变 $\Delta V=0$



若重量为P的冲击物与杆件接触时的速度为v，则动能 $T=\dfrac{1}{2}\dfrac{P}{g}v^2$

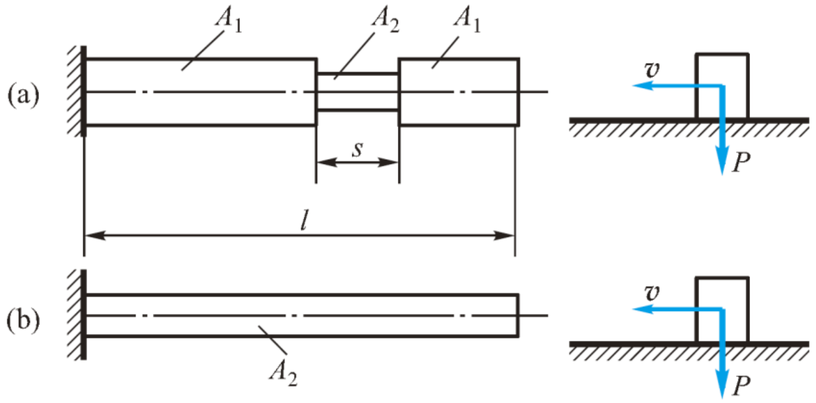
$$\left.\begin{aligned} V_{\varepsilon d}&=\frac{1}{2}F_d\Delta_d \\ F_d&=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}P \end{aligned}\right\}\Rightarrow V_{\varepsilon d}=\frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}P$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta T+\Delta V=V_{\varepsilon d} \\ &\boxed{\Delta V=0} \\ &\boxed{\Delta T=T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2} \end{aligned}\right\}\Rightarrow V_{\varepsilon d}=\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}P=\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2\Rightarrow \Delta_d=\sqrt{\frac{v^2\Delta_{st}}{g}}$$

$$\boxed{K_d=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}=\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}}$$

例9 变截面杆a的最小截面与等截面杆b的截面相等。在相同的冲击载荷下，试比较两杆的强度。



解： P以静载的方式作用于杆端时，杆a和杆b的最大静应力相同

$$\sigma_{st}^{a} = \sigma_{st}^{b} = \frac{P}{A_2}$$

变截面杆a： $$\Delta_{st}^{a} = \frac{Ps}{EA_2} + \frac{P(l\text{-}s)}{EA_1}$$

等截面杆b： $$\Delta_{st}^{b} = \frac{Pl}{EA_2} = \frac{Ps}{EA_2} + \frac{P(l\text{-}s)}{EA_2}$$

s越小，则杆a静变形越小，就更加增大了杆a动应力的数值！

$$\because \quad A_1 > A_2 \quad \therefore \quad \Delta_{st}^{a} < \Delta_{st}^{b}$$

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} \Rightarrow K_d^{a} > K_d^{b} \Rightarrow \sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{st}^{a} = \sigma_{st}^{b} = \dfrac{P}{A_2} \\ \sigma_d = K_d \sigma_{st} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_d^{a} > \sigma_d^{b}$$

总结：冲击问题的求解步骤

冲击问题的求解的关键：重物冲击过程结束后将其看成一个动载荷作用问题来求解。

1. 先求静位移Δ_{st}；

2. 求出冲击动荷因数

竖向冲击：$K_d = \dfrac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \left[1 + \sqrt{1 + \dfrac{2h}{\Delta_{st}}}\right]$；　水平冲击：$K_d = \sqrt{\dfrac{v^2}{g\Delta_{st}}}$；

3. 求出动载荷、动位移、动应力等

$$P_d = K_d P,\quad \Delta_d = K_d \Delta_{st},\quad \sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

谢谢大家

作业（第II册）

Page 21: 10.3

Page 24: 10.12

Page 28: 10.24

对应第6版的题号　Page 21: 10.3；Page 23: 10.12；Page 26: 10.24

下次课将交变应力