一

参与者是 n 个市民，每个市民有两个策略：参与修理（P）或忽略（I）。

1

可能的情况：

1. 所有人都忽略（$I, I, ..., I$）：
   设施没有修复。
   每个人的收益：0。
2. 恰好有一个人参与（$P, I, ..., I$）：
   设施被修复。
   参与者的收益：$v - c$
   其他人的收益：v
3. 多于一个人参与（$P, P, ..., I$）：
   设施被修复。
   每个参与者的收益：$v - c$
   每个非参与人的收益：v

情况1：所有人都忽略

- 如果一个人从I改为P，他的收益变为$v - c$，由于$v > c$，$v - c > 0$
- 所以，所有人都忽略**不是**纳什均衡，因为至少有一个人可以通过改变策略来提高收益。

情况2：恰好有一个人参与

- 如果参与者改为I，他的收益变为0，不会提高自己的收益
- 如果非参与者改为P，他的收益变为$v - c < v$，不会提高自己的收益
- 这**是**一种纯策略意义下的 Nash 均衡

情况3：多于一个人参与

- 如果一个参与者改为I，他的收益变为v，会提高自己的收益
- 所以，多于一个人参与**不是**纳什均衡，因为至少有一个人可以通过改变策略来提高收益。

2

如果第 n个市民参与：

设施被修复，他的（期望）收益为$v-c$

如果第 n个市民忽略：

至少有一个市民参与维修的概率为$1-q^n$，这种情况下，该市民的收益为v
没有市民参与维修的概率为q^n，这种情况下，该市民的收益为0
此时的期望收益即为$v(1-q^n)$

3

由第二小问，

$$E(P)=v-c \quad E(I)=v(1-(1-p)^n)$$

化简得

$$p=1-\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

所以，对称混合策略纳什均衡是每个市民以概率$p=1-\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}}$参与
表明在均衡状态下，每个市民以一定的概率参与，这个概率取决于成本c和收益v，以及市民的数量n。随着n的增加，每个市民参与的概率p减少，反映了“免费搭车”问题：每个人依赖其他人承担成本，希望获得不支付成本的收益。然而，由于每个人都有一定的参与概率，集体行动确保了设施以一定的概率被修复，这个概率取决于p。

二

1

企业可以排放污水（E）或不排放污水（N）。
环保机构可以检查（I）或不检查（U）。

1. 企业排放污水，环保机构检查 (E, I)
2. 企业排放污水，环保机构不检查 (E, U)
3. 企业不排放污水，环保机构检查 (N, I)
4. 企业不排放污水，环保机构不检查 (N, U)

	I	U
E	1	-1
N	$V(m-1,n-1)$	$V(m,n-1)$

2

设第一天机构排查的概率为p，第一天企业排放的概率为q。

$$V(m,n)=pq-(1-p)q+p(1-q)V(m-1,n-1)+(1-p)(1-q)V(m,n-1)\triangleq f(p,q)$$

p,q不可能为0或1，比如若企业第一天排放概率为1，那么机构第一天排查概率也为1，对于企业来说不可能到达最优解。故p,q是$f(p,q)$的极值点。

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial p}=2q-(1-q)V(m-1,n-1)-(1-q)V(m,n-1)=0\\\frac{\partial f}{\partial q}=2p-1-pV(m-1,n-1)-(1-p)V(m,n-1)=0\end{cases}$$

$$p=\frac{1+V(m,n-1)}{2+V(m,n-1)-V(m-1,n-1)}\quad q=\frac{2}{2+V(m,n-1)+V(m-1,n-1)}$$

初始条件为

$$V(0,n)=-1,V(n,n)=1$$

3

$$
\begin{aligned}
&V(1,n)=\frac{V(1,n-1)-1}{3+V(1,n-1)}\\
&\Rightarrow V(1,n)+1=\frac{2(1+V(1,n-1))}{3+V(1,n-1)}\\
&\Rightarrow \frac{1}{V(1,n)+1}=\frac{1}{V(1,n-1)+1}+\frac{1}{2}\\
&\Rightarrow V(1,n)=\frac{2}{n}-1
\end{aligned}
$$