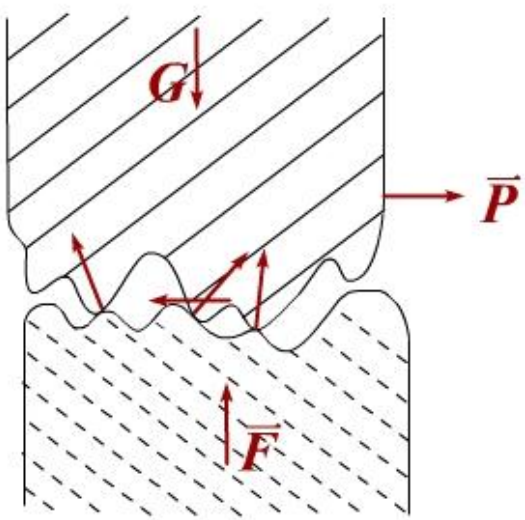
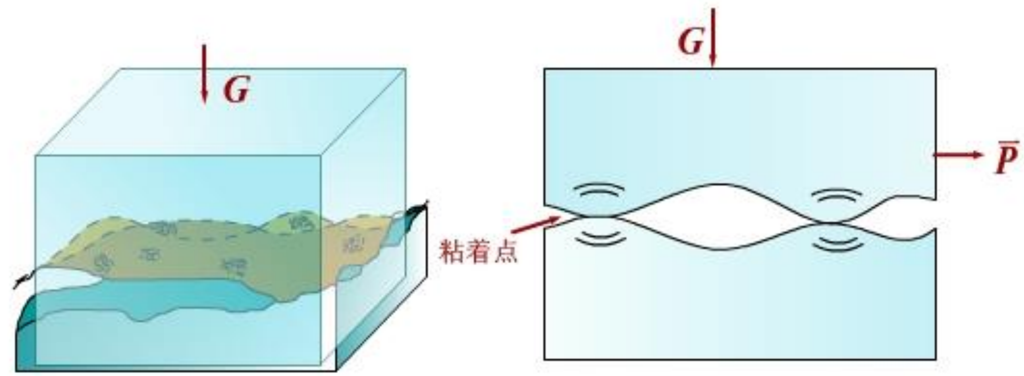
摩 擦

摩擦是对两个相互接触的物体的相对切向运动的阻碍





宏观原因

- 物体接触面之间由于粗糙不平引起

微观原因

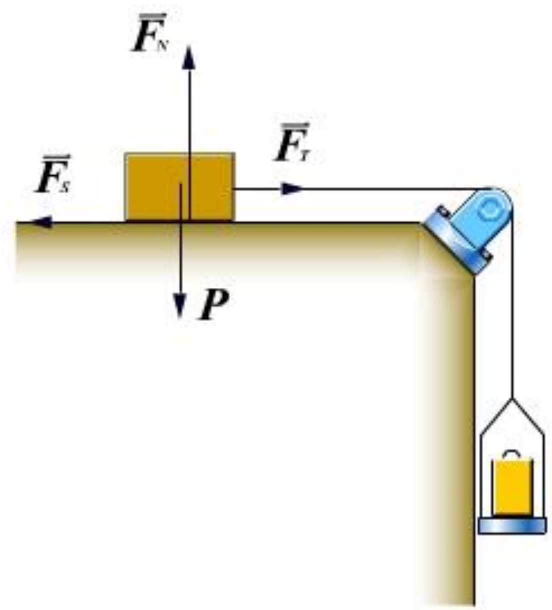
- 由于表面之间的分子吸引力产生

滑动摩擦

静滑动摩擦力

在主动力和摩擦力作用下达到静力平衡

$\sum F_x = 0$：　$F_T - F_s = 0$　即　$F_s = F_T$



1 方向：沿接触处的公切线
与相对滑动趋势反向

2 大小：等于切向上的主动力

3 最大静摩擦力$F_{\max}$：　$0 \le F_s \le F_{\max}$

$F_T \le F_{\max}$　：静止　$F_s = F_T$

$F_T > F_{\max}$　：运动

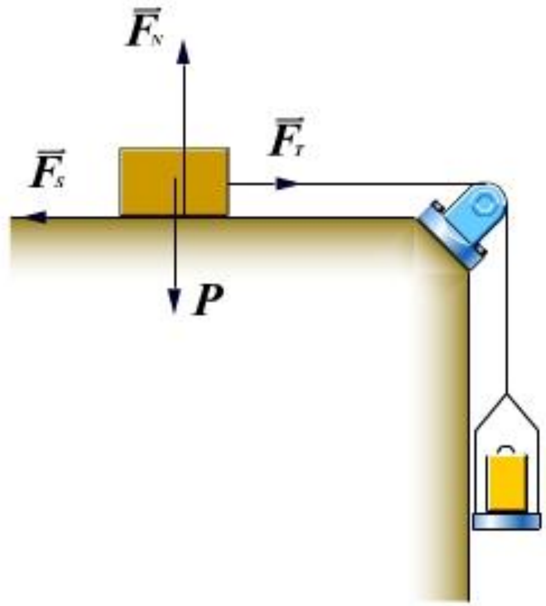
库仑摩擦定律:

$$F_{\max} = f_s \cdot F_N$$

滑动摩擦

动滑动摩擦力

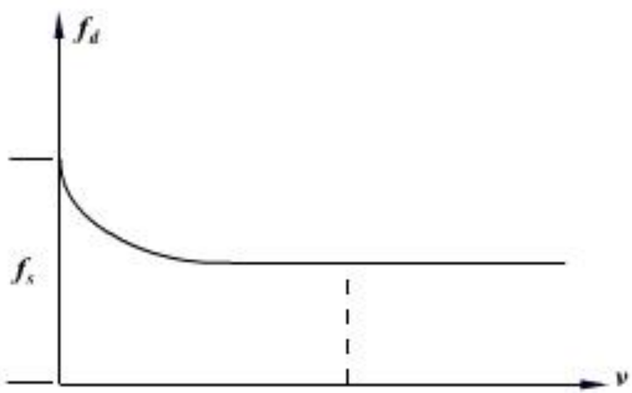
主动力超过最大静摩擦力，物体滑动

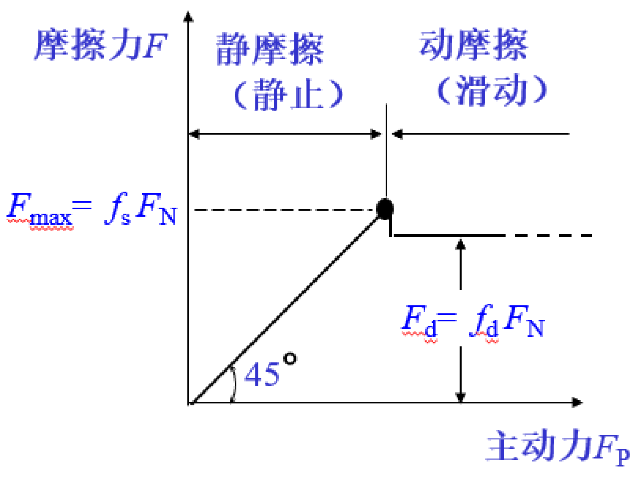


1 方向：沿接触处的公切线

与相对滑动速度反向

2 大小： $F_d = f_d F_{\mathrm{N}}$

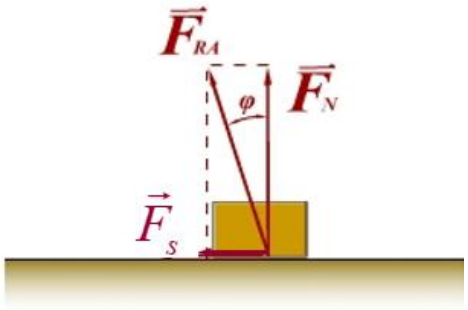




$f_d < f_s$（对多数材料，通常情况下）

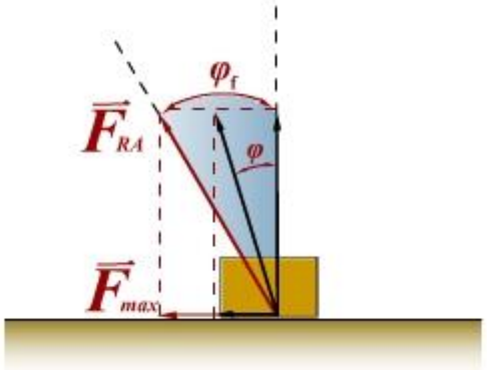
摩擦角和自锁现象

$\boldsymbol{F}_{RA}$ 全约束力：静摩擦时，法向约束力F_N和静摩擦力F_s的合力，即$\boldsymbol{F}_{RA} = \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{F}_s$



全约束力和法线间的夹角: $\tan\varphi = \frac{F_s}{F_N}$

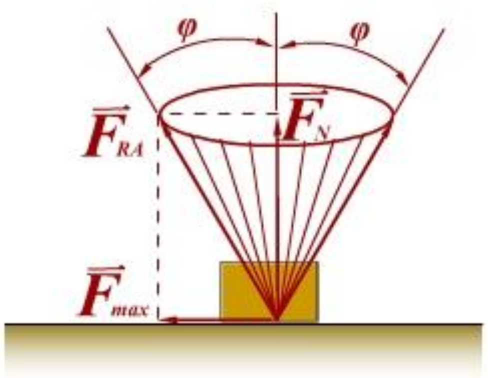
摩擦角$\boldsymbol{\varphi_f}$: 当静摩擦力达到最大值$F_{\max}$时，全约束力和法线间的夹角



$$\tan\varphi_f = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s$$

静摩擦系数

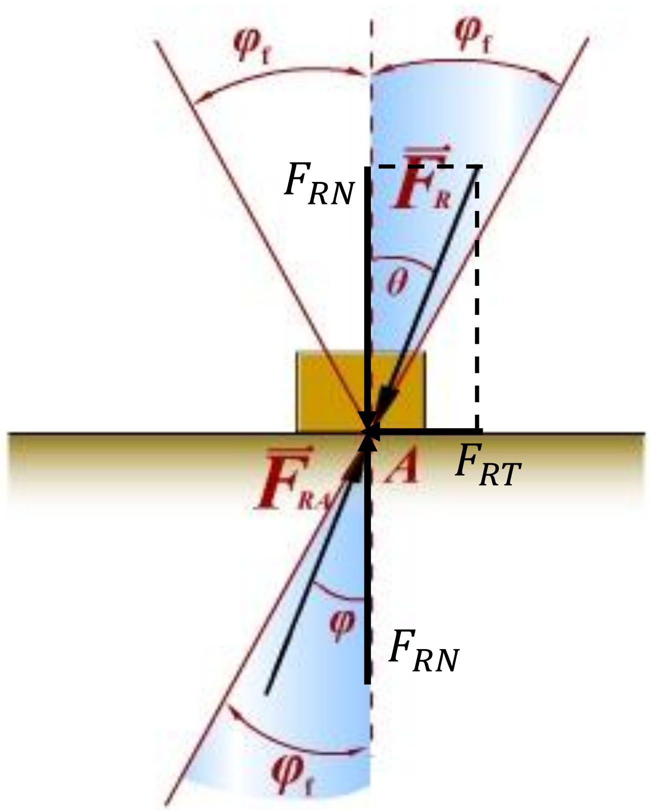
摩擦锥：将摩擦角对应的全约束力$\boldsymbol{F}_{RA}$的作用线绕着法向旋转得到的以接触点为顶点的椎体



全约束力的作用线必然落在摩擦锥体之内，即

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_f$$

摩擦角和自锁现象



自锁现象：作用于物体上主动力的合力作用线在摩擦角内($\theta < \varphi_f$)，则该力无论多大，物体必保持静止

$$F_{RT} = F_R \sin\theta$$

$$F_{RN} = F_R \cos\theta$$

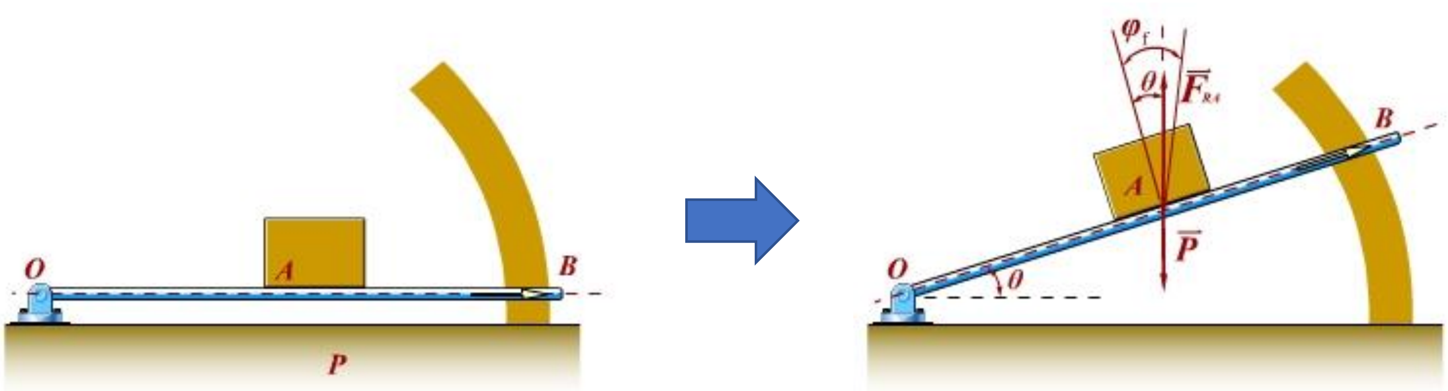
法向力F_{RN}下的最大静摩擦力

$$F_{max} = F_{RN} \tan\varphi_f = F_R \cos\theta \tan\varphi_f$$
$$> F_R \cos\theta \tan\theta = F_R \sin\theta = F_{RT}$$

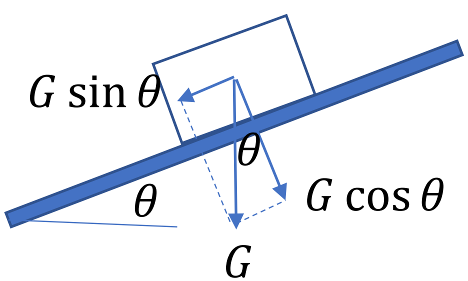
主动力的切向分量小于最大静摩擦力，物体保持静止。

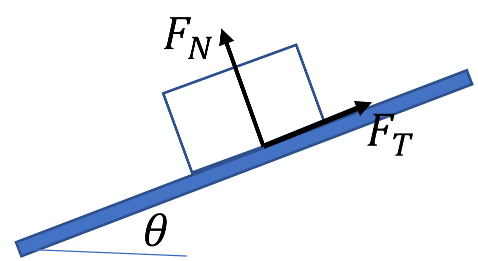
斜面自锁

问题：当杆的倾斜角θ为多大时，杆上的物体开始滑动？
已知：物体在杆上的摩擦角是φ_f。

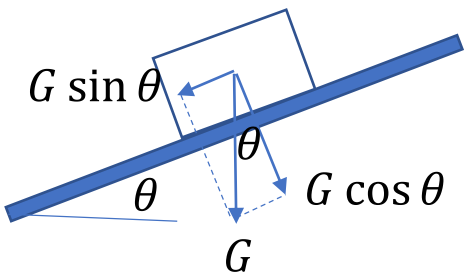


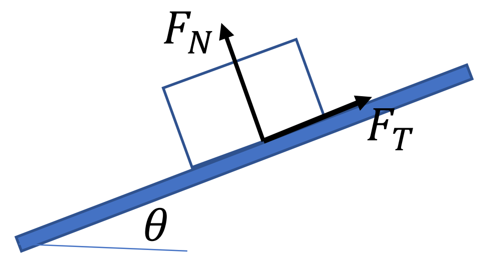
受力分析：





斜面自锁





物体在斜面上保持静止的静力平衡方程：

$$F_N = G\cos\theta$$
$$F_T = G\sin\theta$$

物体在斜面上由静止到产生滑动的条件：

$$G\sin\theta > F_{max}$$

最大静摩擦力：

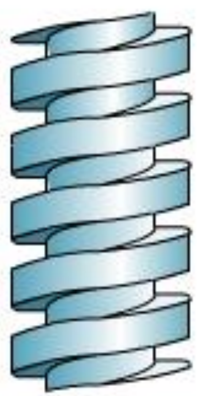
$$F_{max} = f_s F_N = \tan\varphi_f\, F_N = \tan\varphi_f\; G\cos\theta$$

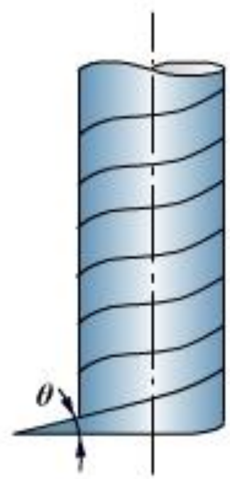
因此：

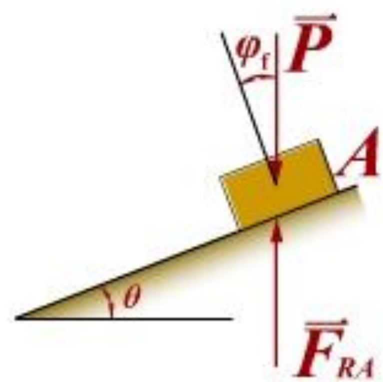
$$G\sin\theta > \tan\varphi_f\; G\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta > \tan\varphi_f \text{ 即 } \theta > \varphi_f$$

斜面自锁条件： $\theta \leq \varphi_f$

斜面自锁的应用：自锁螺纹



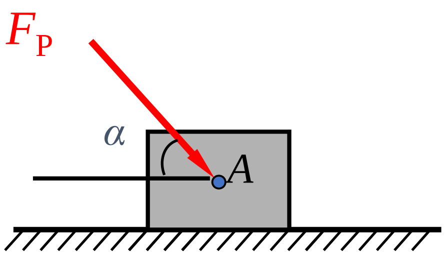




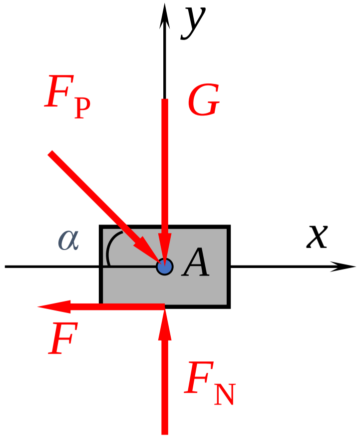
$$\theta \leq \varphi_f$$

考虑滑动摩擦时的平衡问题

例题1. 小物体A重G =10 N，放在粗糙的水平固定面上，它与固定面之间的静摩擦因数f_s= 0.3。今在小物体A上施加F_P =4 N的力,α =30°，试求作用在物体上的摩擦力。



解：(1) 取物块A为研究对象，受力分析如图所示。



(2) 假设能达到静力平衡，列平衡方程。

$$\sum F_x = 0,\ F_P\cos\alpha - F = 0$$

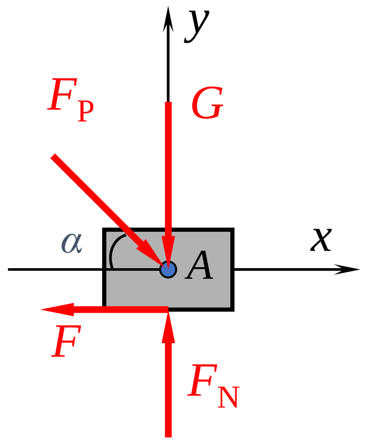
$$\sum F_y = 0,\ F_N - G - F_P\sin\alpha = 0$$

考虑滑动摩擦时的平衡问题

（3） 联立求解，得到：

$$F = 4\ \mathrm{N} \times \cos 30^\circ = 3.46\ \mathrm{N}$$

$$F_N = G + F_P \sin \alpha = 12\ \mathrm{N}$$



最大静摩擦力

$$F_{max} = f_s F_N = f_s\left(G + F_P \sin \alpha\right) = 3.6\ \mathrm{N}$$

因为 $F < F_{max}$

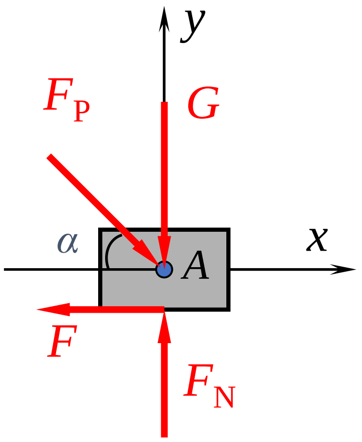
所以是静摩擦，作用在物体上的摩擦力为

$$F = 3.46\ \mathrm{N}$$

考虑滑动摩擦时的平衡问题

思考

若 静摩擦系数 $f_s = 0.2$ ，动摩擦系数 $f_d = 0.19$。试求作用在物体上的摩擦力。



$F_N = G + F_P \sin\alpha = 12\ \text{N}$

最大静摩擦力

$$F_{max} = f_s F_N = f_s\left(G + F_P \sin\alpha\right) = 2.4\ \text{N}$$

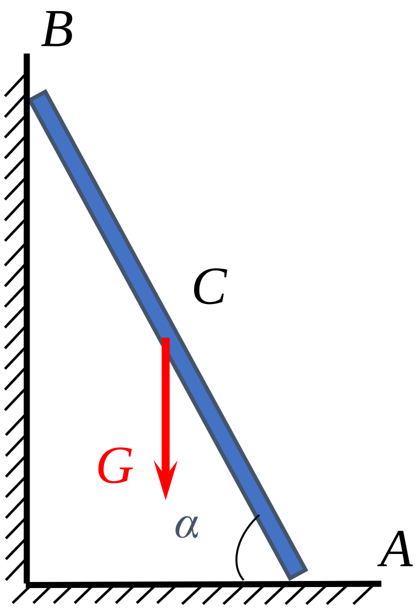
比较得 $F > F_{max}$

物体不再处于平衡状态，将水平向右滑动。

动摩擦发生，作用在物体上的动摩擦力为

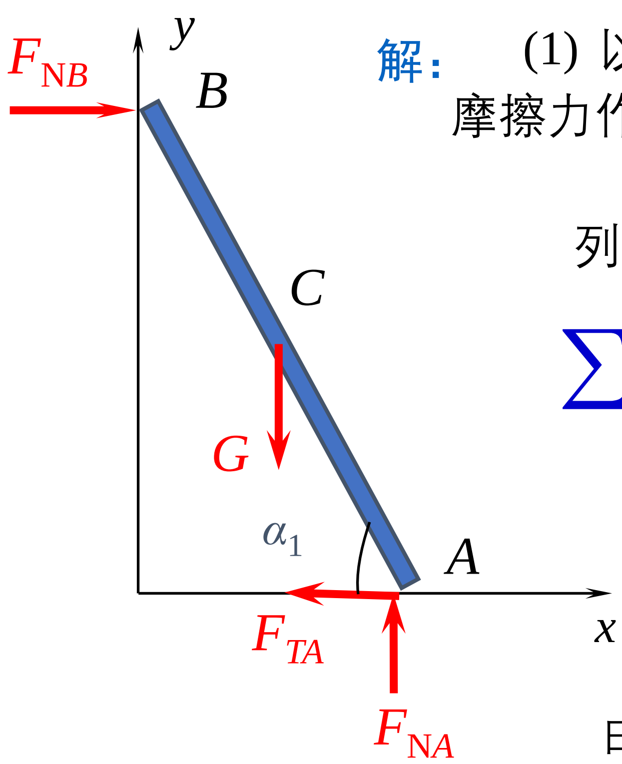
$$F_d = f_d F_N = 0.19 \times 12\ \text{N} = 2.28\ \text{N}$$

考虑滑动摩擦时的平衡问题



例题2. 如图所示梯子AB，长为l，一端靠在竖直的墙壁上，另一端搁置在水平地面上。假设梯子与竖直墙壁间为光滑，而与地面之间存在摩擦。已知静摩擦因数为f_s，梯子重为G。（1）若梯子在倾角α_1的位置保持平衡，试求点A、B约束力；（2）若梯子不致滑倒，试求其倾角α的范围。

考虑滑动摩擦时的平衡问题



解：　(1) 以梯子AB为研究对象，梯子的受力如图所示。其中将摩擦力作为一般的约束力，设其方向如图所示。

列平衡方程

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad G\times\frac{l}{2}\cos\alpha_1 - F_{NB}l\sin\alpha_1 = 0$$

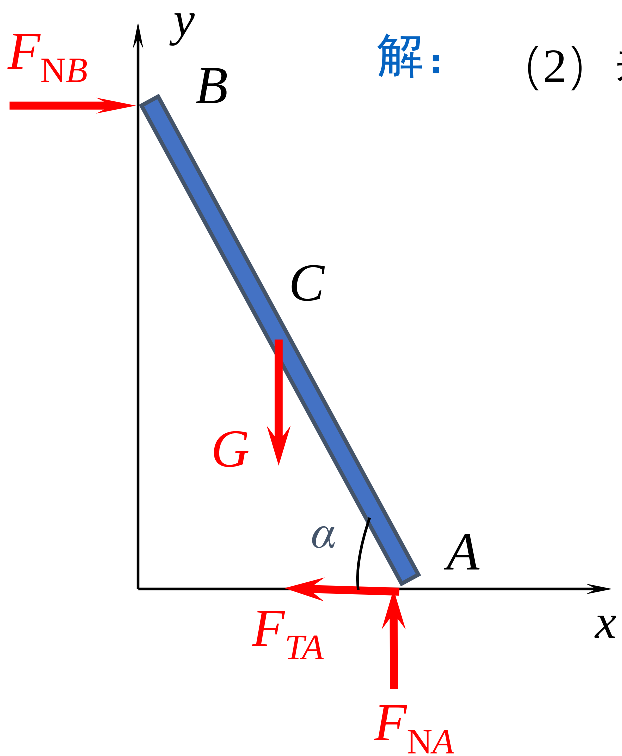
$$\sum F_y = 0, \qquad F_{NA} - G = 0$$

$$\sum F_x = 0, \qquad -F_{TA} + F_{NB} = 0$$

由上式解得

$$F_{NB} = \frac{G}{2}\cot\alpha_1, \qquad F_{NA} = G, \qquad F_{TA} = \frac{G}{2}\cot\alpha_1$$

考虑滑动摩擦时的平衡问题



解： （2）若梯子不致滑倒，试求其倾角α的范围。

梯子滑到的原因？

A点处的最大静摩擦力F_{max}小于使得梯子平衡所需要的切向力F_{TA}, 即

$$F_{max} < F_{TA}$$

因此，梯子不致滑到的条件是

$$F_{max} \geq F_{TA}$$

由于，

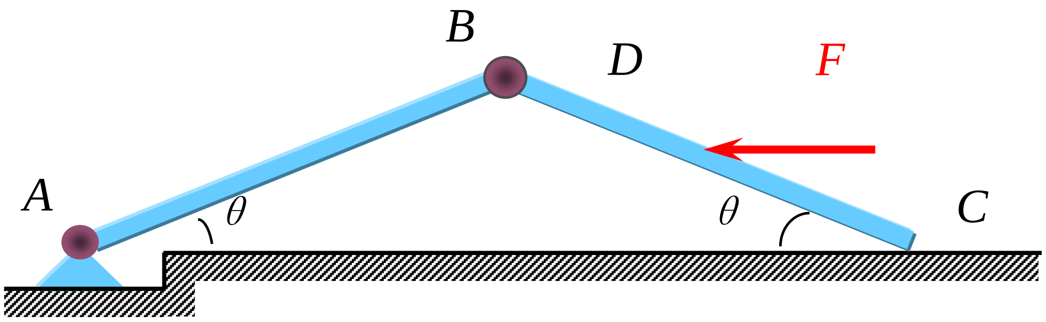
$$F_{max} = f_s F_{NA} = f_s G$$

$$F_{TA} = \frac{G}{2}\cot\alpha$$

代入到不等式，得到

$\cot\alpha \leq 2f_s$ 即 $\alpha \geq \operatorname{arc\,cot}(2f_s)$

例题3. 如图所示，均质杆AB和BC各长3 m，质量均为100 kg，通过光滑铰链A、B连接成如图所示结构。在BC杆中点D处作用的主动力F使两杆与地面的夹角均为θ=30° 而保持平衡，若地面与杆的静摩擦因数为f_s=0.5，试求不破坏系统平衡的力F的最大值与最小值。(重力加速度10 m/s^2)

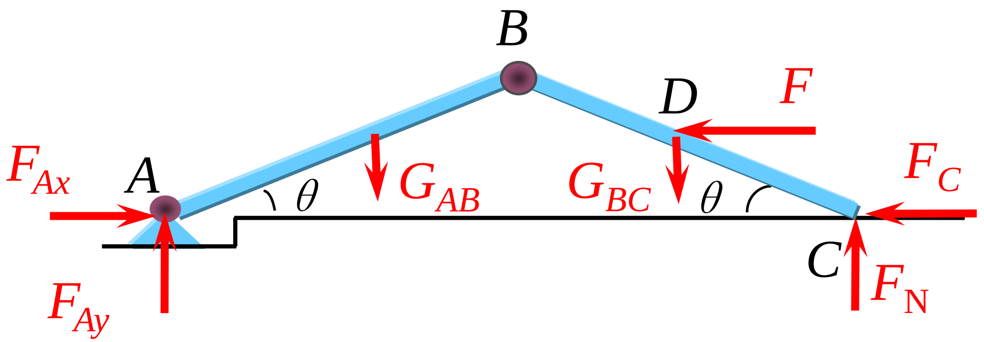


解：

(1) 设F值等于维持平衡的最小值$F_{\min}$。

先取系统为研究对象，受力分析如图所示。

列平衡方程



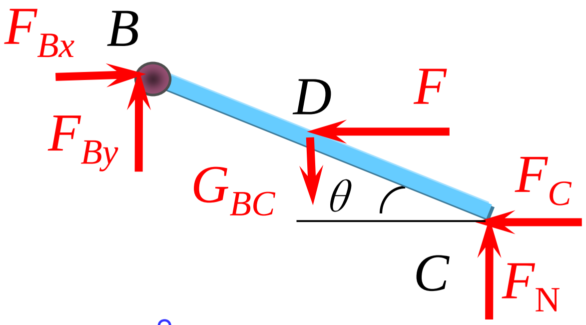
,

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,$$

$$F_{\mathrm{N}}(6\,\mathrm{m}\times\cos 30^\circ)+F(1.5\,\mathrm{m}\times\sin 30^\circ)-$$
$$G_{AB}(1.5\,\mathrm{m}\times\cos 30^\circ)-G_{BC}(4.5\,\mathrm{m}\times\cos 30^\circ)=0$$

§5-3 考虑滑动摩擦时的平衡问题

再取杆BC为研究对象



$$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$F_N(3\ \text{m} \times \cos\ 30°) - G_{BC}(1.5\ \text{m} \times \cos 30°) - F(1.5\ \text{m} \times \sin\ 30°) - F_C(3\ \text{m} \times \sin\ 30°) = 0$$

在临界平衡状态，摩擦力取得最大值，有

$$F_C = f_s F_N$$

联立求解得

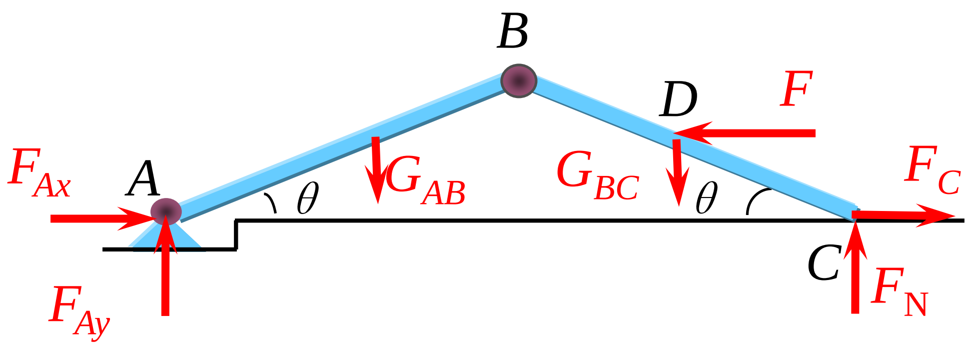
$$F_{\min} = 540\ \text{N}$$

§5-3 考虑滑动摩擦时的平衡问题

(2) 设F 值等于维持平衡的最大值$F_{\max}$。

先取系统为研究对象，受力分析如图所示。

列平衡方程



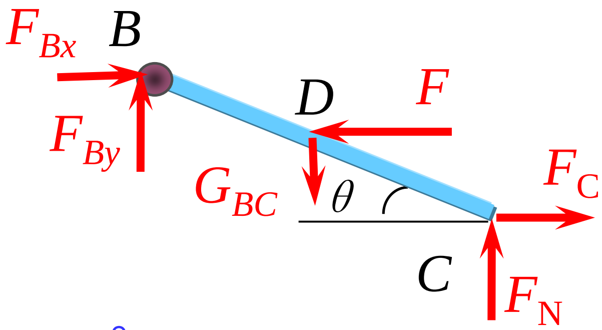
$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,$$

$$F_N(6\,\text{m}\times\cos 30^\circ)+F(1.5\,\text{m}\times\sin 30^\circ)-$$

$$G_{AB}(1.5\,\text{m}\times\cos 30^\circ)-G_{BC}(4.5\,\text{m}\times\cos 30^\circ)=0$$

§5-3 考虑滑动摩擦时的平衡问题

再取杆BC为研究对象



$$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$F_N(3\ \text{m} \times \cos\ 30°) - G_{BC}(1.5\ \text{m} \times \cos 30°) - F(1.5\ \text{m} \times \sin\ 30°) + F_C(3\ \text{m} \times \sin\ 30°) = 0$$

在临界平衡状态，摩擦力取得最大值，有

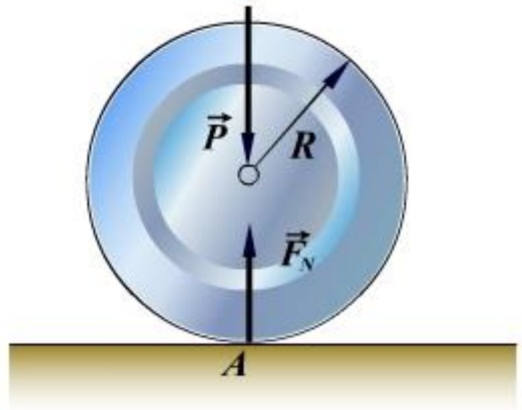
$$F_C = f_s F_N$$

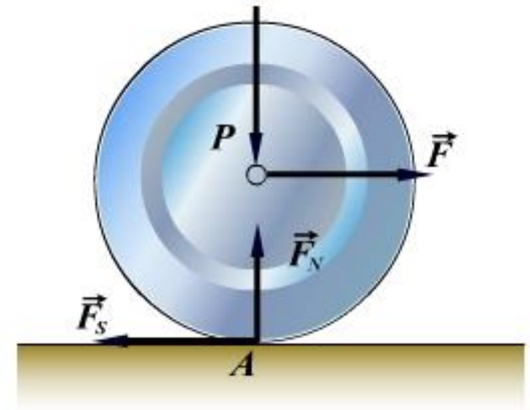
联立求解得

$$F_{\min} = 1661.5\ \text{N}$$

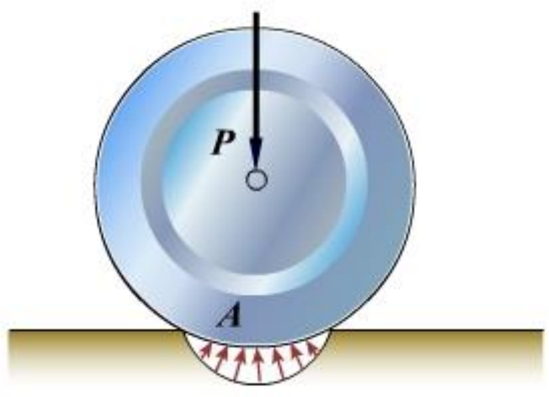
滚动摩阻

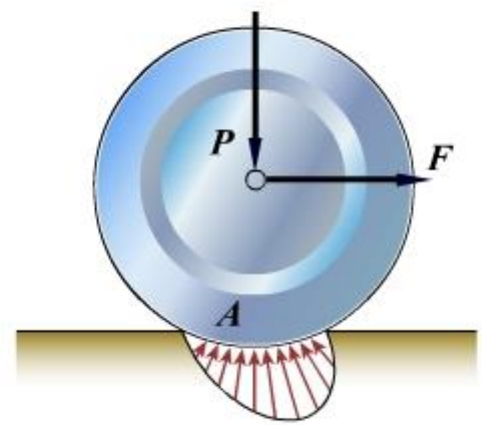
- 理想刚性圆盘和平面接触于一点
- 接触点处有一个法向力和摩擦力的作用

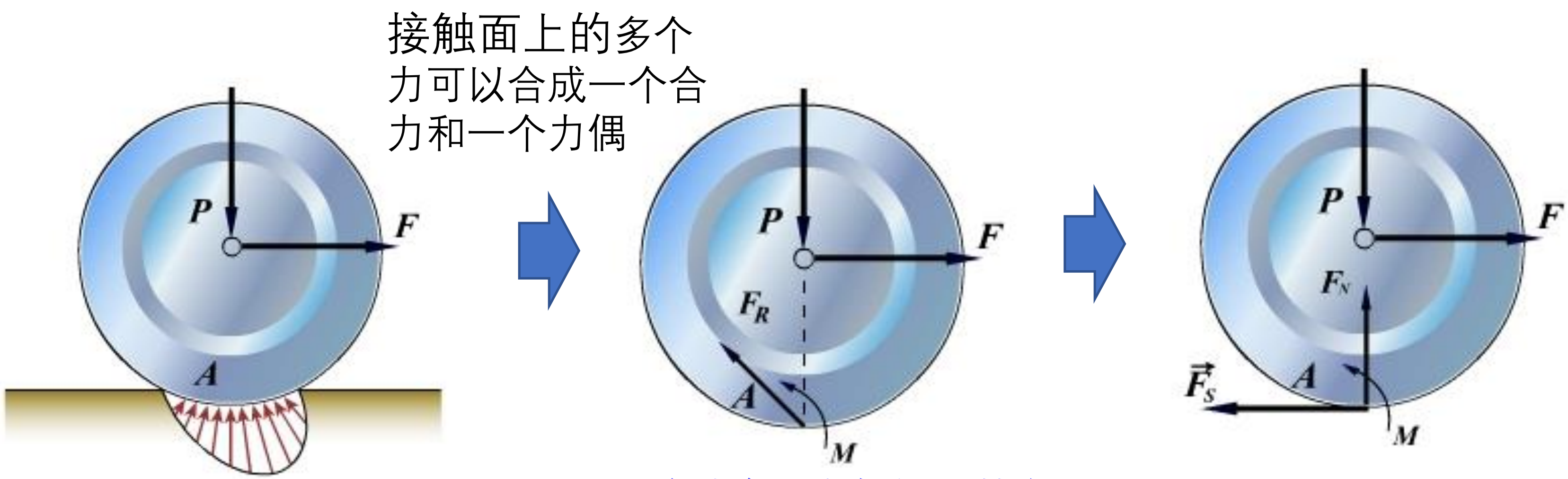




- 实际情况，圆盘和平面接触，产生局部变形，使得接触发生在一个面
- 接触面上力的分布不均匀







M是**滚动摩阻力偶矩**，其方向与滚子转动趋势或方向相反

假设圆盘在外力F的作用下平衡，根据静力平衡方程：

$$\sum F_x = 0: \quad F - F_s = 0 \Rightarrow F_s = F$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_N - P = 0 \Rightarrow F_N = P$$

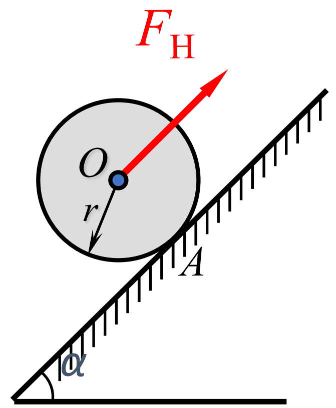
$$\sum M_A = 0: \quad M - FR = 0 \Rightarrow M = FR$$

最大滚动摩阻力偶 $\quad 0 \le M \le M_{\max}$

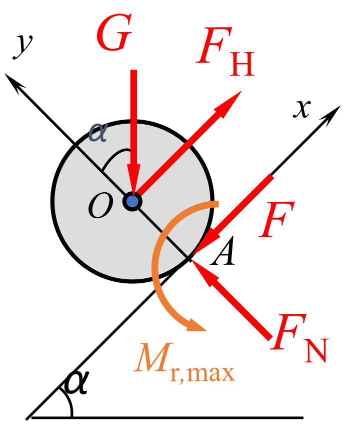
滚动摩阻定律： $\quad M_{max} = \delta F_N \Rightarrow$ δ 是滚阻系数（长度单位）

考虑滚动摩阻时的平衡问题

例题 均质轮子的重量G = 3 kN，半径 r = 0.3 m；今在轮中心施加平行于斜面的拉力F_H，使轮子沿与水平面成α=30°的斜面匀速向上作纯滚动。已知轮子与斜面的滚阻系数δ= 0.05 cm，滚动时最大滚动摩阻力偶作用在轮子上。试求力F_H的大小。

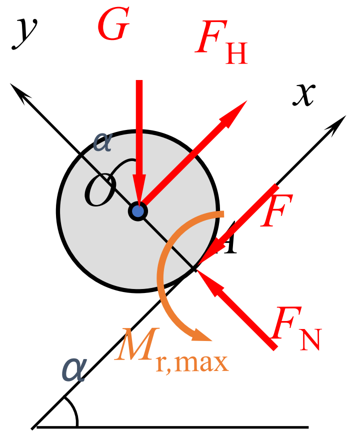


解: (1) 取轮子为研究对象，受力分析如图所示。



考虑滚动摩阻时的平衡问题

（2） 列平衡方程。



$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G\cos\alpha = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_{r,max} + G\sin\alpha \times r - F_H r = 0$$

补充方程 $M_{r,max} = \delta F_N$

（3） 联立求解。

$$F_H = G\left(\sin\alpha + \frac{\delta}{r}\cos\alpha\right)$$

$$F_H = 1504\,\mathrm{kN}$$

课后作业

Page 134-137:

4-16， 4-27， 4-30