材料力学

基于 MATLAB 的简支梁受集中荷载作用下的材料力学分析程序

姓名：徐屹寒

Table of Contents

I. 引言

1.1) I.1 选题说明

梁是工程结构中最基本的受力构件之一，其在荷载作用下的强度、刚度和稳定性分析是材料力学课程的核心内容。简支梁在单个集中荷载作用下的受力分析是理解梁弯曲变形、内力分布的基础模型。
传统的分析方法依赖于手算推导和查阅图表，过程相对繁琐，且难以直观展示参数变化对梁力学行为的影响。MATLAB 以其强大的数值计算能力、便捷的编程环境和出色的可视化功能，为解决此类工程计算问题提供了高效的工具。
本专题旨在利用 MATLAB 编写一个针对简支梁在集中荷载作用下进行材料力学分析的计算程序。通过该程序，用户可以方便地输入梁的几何参数、材料属性及荷载信息，快速获得支座反力、剪力分布、弯矩分布、转角分布和挠度分布等关键结果，并以图形化的方式直观展示。这不仅能提高计算效率和准确性，更有助于学习者深入理解梁的受力特性、内力与变形规律，以及各参数之间的相互影响关系。

1.2) I.2 程序功能说明

本 MATLAB 程序 `beam_analysis_simply_supported_point_load.m` 旨在分析简支梁在单个集中荷载作用下的力学响应。其主要功能包括：

1. 用户输入：
   - 梁的长度 L (单位: m)
   - 集中荷载的大小 P (单位: N)，假定竖直向下为正。
   - 荷载距离梁左端的距离 a (单位: m)。
   - 梁材料的弹性模量 E (单位: Pa)。
   - 梁截面的惯性矩 I (单位: m^4)。

2. 计算核心：
   - 根据静力平衡条件，计算梁的左右支座反力 R_A 和 R_B。
   - 沿梁长度方向离散多个点，计算每个截面上的剪力 $V(x)$。
   - 计算每个截面上的弯矩 $M(x)$。
   - 通过积分弯矩方程并应用边界条件（挠度和转角），计算梁的转角 $\theta(x)$ 和挠度 $y(x)$。程序采用基于积分常数的方法，并确保挠度以向下为正值输出。

3. 结果输出：
   - 数值结果： 在 MATLAB 命令窗口中清晰显示：
     - 左支座反力 R_A 和右支座反力 R_B。

- ‣ 理论最大正弯矩 $M_{\max}$ 及其发生位置 $x_{M_{\max}}$。
- ‣ 最大挠度 $y_{\max}$ (向下为正) 及其发生位置 $x_{y_{\max}}$。
- ‣ 梁两端的转角 θ_A 和 θ_B (以度为单位)。

- 图形结果：弹出一个绘图窗口，包含四个子图，分别显示：
  - ‣ 剪力图 **(SFD):** V 随 x 的变化曲线。
  - ‣ 弯矩图 **(BMD):** M 随 x 的变化曲线。
  - ‣ 转角图 **($\boldsymbol{\theta}$):** θ (以度为单位) 随 x 的变化曲线。
  - ‣ 挠度图 **(Deflection):** y (向下为正) 随 x 的变化曲线，并调整坐标轴使向下挠曲在图中向下显示。
  - ‣ 图形窗口的总标题会显示用户输入的关键参数。

4. 特点:
   - 用户友好：通过命令行提示引导用户输入参数。
   - 结果清晰：数值结果和图形结果结合，全面展示分析信息。
   - 可视化强：利用 MATLAB 的绘图功能，直观显示内力和变形的分布规律。
   - 参数化分析：用户可以方便地修改输入参数，观察不同条件下梁的力学响应，加深理解。
   - 代码注释：M 文件包含详细的中文注释，便于理解和学习。

II. 算例分析

A. 输入参数:

假设有一根简支梁，参数如下:

- 梁的长度 $L = 5$ m
- 集中荷载 $P = 10000$ N (10 kN)，方向竖直向下
- 荷载作用位置 $a = 2$ m (从梁左端算起)
- 材料的弹性模量 $E = 200 \times 10^9$ Pa (200 GPa，典型钢材)
- 截面惯性矩 $I = 8 \times 10^{-5}\ m^4$ (例如 8000 cm^4)

B. 手动验算（理论值）:

1. 支座反力:
   $b = L - a = 5 - 2 = 3$ m
   $R_A = P \cdot \frac{b}{L} = 10000 \cdot \frac{3}{5} = 6000$ N
   $R_B = P \cdot \frac{a}{L} = 10000 \cdot \frac{2}{5} = 4000$ N
   (检验: $R_A + R_B = 6000 + 4000 = 10000 = P$)

2. 最大弯矩：
   发生在荷载作用点 $x = a = 2$ m 处。
   $M_{\max} = R_A \cdot a = 6000 \cdot 2 = 12000\ \mathrm{N \cdot m}$
   (或 $M_{\max} = P \cdot a \cdot \frac{b}{L} = 10000 \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} = 12000\ \mathrm{N \cdot m}$)
3. 梁端转角和挠度相关常数：
   $EI = (200 \times 10^9) \cdot (8 \times 10^{-5}) = 1.6 \times 10^7\ \mathrm{N \cdot m^2}$
   积分常数 $C_1 = EI \cdot \theta_A = -P \cdot a \cdot (L-a) \cdot \frac{2L-a}{6L}$
   $C_1 = -10000 \cdot 2 \cdot (5-2) \cdot \frac{2 \cdot 5 - 2}{6 \cdot 5}$
   $C_1 = -10000 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{8}{30} = -16000\ \mathrm{N \cdot m^2}$
   左端转角 $\theta_A = \frac{C_1}{EI} = -\frac{16000}{1.6 \times 10^7} = -0.001\ \mathrm{rad} \approx -0.0573\ \mathrm{deg}$。
   对于右端转角 θ_B，其与 EI 的乘积可以通过以下公式计算：
   $EI \cdot \theta_B = R_A \cdot \frac{L^2}{2} - P \cdot \frac{(L-a)^2}{2} + C_1$
   代入数值：
   $EI \cdot \theta_B = 6000 \cdot \frac{(5)^2}{2} - 10000 \cdot \frac{(5-2)^2}{2} + (-16000)$
   $EI \cdot \theta_B = 6000 \cdot \frac{25}{2} - 10000 \cdot \frac{(3)^2}{2} - 16000$
   $EI \cdot \theta_B = 75000 - 10000 \cdot \frac{9}{2} - 16000$
   $EI \cdot \theta_B = 75000 - 45000 - 16000 = 14000\ \mathrm{N \cdot m^2}$
   右端转角 $\theta_B = \frac{EI \cdot \theta_B}{EI} = \frac{14000}{1.6 \times 10^7} = 0.000875\ \mathrm{rad}$
   $\theta_B \approx 0.000875 \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) \approx 0.0501\ \mathrm{deg}$ (逆时针为正)。
4. 最大挠度位置及大小（近似估算或查表/公式）：
   由于 $a = 2\mathrm{m} < \frac{L}{2} = 2.5\mathrm{m}$，最大挠度发生在 $a < x < L$ 区段。
   使转角为零的点 $x_{y_{\max}}$ 满足 $x^2 - 10x + 18 = 0$ (推导略)，解得 $x = 5 - \sqrt{7} \approx 2.354$ m。
   在该点挠度 $y_{\max} = -\frac{1000x^3 - \left(\frac{10000}{6}\right)(x-2)^3 - 16000x}{EI}$ (符号调整为向下为正)。
   $EIy_{\max} \approx -(-24691.083)\ \mathrm{N{\cdot}m^3} = 24691.083\ \mathrm{N{\cdot}m^3}$。
   $y_{\max} \approx \frac{24691.083}{1.6 \times 10^7} \approx 0.001543\ \mathrm{m} = 1.543\ \mathrm{mm}$ (向下)。

C. 程序运行与输出：

在 MATLAB 命令窗口运行 `beam_analysis_simply_supported_point_load` 函数，并按提示输入上述参数。

程序输出的数值结果（预计）：

```
--- 计算结果 ---
左支座反力 R_A: 6000.00 N (向上为正)
右支座反力 R_B: 4000.00 N (向上为正)
最大正弯矩 M_max: 12000.00 N·m, 发生在 x = 2.00 m
最大挠度 y_max: 1.5434e-03 m (向下为正), 发生在 x = 2.35 m
左端转角 theta_A: -0.0573 度 (顺时针为负)
右端转角 theta_B: 0.0501 度 (逆时针为正)
```

程序输出的图形结果：

程序会生成一个包含四个子图的窗口：

1. 剪力图： 从 $x = 0$ 到 $x = 2\text{m}$，剪力为 +6000 N；在 $x = 2\text{m}$ 处，剪力从 +6000 N 突变为 −4000 N；从 $x = 2\text{m}$ 到 $x = 5\text{m}$，剪力为 −4000 N。在 $x = 0$ 和 $x = 5\text{m}$ 处剪力绝对值等于相应支座反力。
2. 弯矩图： 从 $x = 0$ 处 $M = 0$ 开始，线性增加到 $x = 2\text{m}$ 处的最大值 $M_{\max} = 12000$ N · m，然后线性减小到 $x = 5\text{m}$ 处的 $M = 0$。全梁弯矩为正（下部受拉）。
3. 转角图： 左端 $x = 0$ 处转角为负（顺时针），约为 −0.0573 度。曲线变化，在最大挠度点 $x \approx 2.35$ m 处转角为零。右端 $x = 5\text{m}$ 处转角为正（逆时针）。
4. 挠度图：梁在荷载作用下向下弯曲。两端支座处挠度为零。最大挠度发生在 $x \approx 2.35$ m 处，大小约为 1.543 mm。挠度曲线平滑连续。

III. 结果讨论

1. 符合性：程序的计算结果（包括支座反力、最大弯矩、最大挠度及其位置、端点转角）与手动验算的理论值高度吻合。剪力图、弯矩图、转角图和挠度图的形状特征（如剪力突变、弯矩极值点、挠度曲线的平滑性及边界条件满足情况）均符合材料力学的基本理论。

2. 剪力图与弯矩图关系： 剪力图在荷载作用点 $x = a$ 处发生突变，突变大小等于荷载 P。弯矩图的斜率等于剪力值 ($d\frac{M}{d}x = V$)，在剪力为零的截面（若存在）弯矩有极值（本例中无此类点，最大弯矩在荷载作用点，是尖点）。

3. 参数影响（定性）：
   - 荷载位置 $\boldsymbol{a}$ 的影响：
     - 当 a 从 0 变化到 L，最大弯矩 $M_{\max} = Pa\frac{L-a}{L}$ 会先增大后减小，在 $a = \frac{L}{2}$ 时达到峰值 $P\frac{L}{4}$。
     - 最大挠度 $y_{\max}$ 及其位置也会随 a 变化。当 $a = \frac{L}{2}$ 时，最大挠度发生在跨中，为 $P\frac{L^3}{48EI}$。当 a 偏离跨中时，最大挠度值通常会减小，其位置也会偏向跨中但位于荷载与跨中之间较长的一段。

   - 荷载大小 $\boldsymbol{P}$、弹性模量 $\boldsymbol{E}$、惯性矩 $\boldsymbol{I}$ 的影响：
     - R, V, M 与 P 成正比，与 E, I 无关。
     - θ, y 与 P 成正比，与 EI (抗弯刚度) 成反比。增加 EI 可以显著减小梁的变形。

4. 数值精度： 程序采用 `linspace` 生成足够多的计算点（默认 500 个），可以保证图形的平滑度和计算结果的精度。最大挠度位置是通过在这些离散点中搜索得到的，与解析解可能存在微小差异，但对于工程应用而言足够精确。

IV. 体会

通过本次专题设计，我深刻体会到：

1. **MATLAB** 在材料力学计算中的强大优势：MATLAB 简洁的语法、丰富的数学函数库以及便捷的绘图功能，使得复杂力学问题的编程求解变得相对容易。它能够快速准确地完成重复性计算，并将结果可视化，极大地提高了分析效率和直观性。

2. 编程加深理论理解：将材料力学的公式和理论转化为计算机程序的过程，使我更深入地思考每一个步骤的物理意义和数学逻辑，例如积分常数的确定、边界条件的应用、内力符号的约定等。这比单纯的理论学习和习题演算更能巩固和深化对知识点的理解。

3. 程序的启发与扩展性：本程序虽然只针对简支梁和单点集中荷载，但其基本框架和分析思路可以扩展到更复杂的情况，例如：
   - 处理均布荷载、力矩荷载或组合荷载。
   - 分析悬臂梁、伸臂梁等不同约束条件的梁。
   - 引入截面设计和强度校核功能。
   - 使用更高级的数值方法（如有限元法）进行分析。

V 源代码

```
function beam_analysis_simply_supported_point_load()
% --- 功能说明 ---
% 本程序用于计算和分析简支梁在单个集中荷载作用下的力学行为。
% 需要输入梁的长度、荷载大小及位置、材料弹性模量和截面惯性矩。
% 程序会计算并输出：
% 1. 支座反力
% 2. 最大弯矩及其位置
% 3. 最大挠度及其位置
% 同时，程序会绘制剪力图 (SFD)、弯矩图 (BMD)、转角图和挠度图。

% --- 输入参数 ---
disp('------------------------------------------------------');
disp('     简支梁在集中荷载作用下的材料力学分析程序');
disp('------------------------------------------------------');
disp('请输入梁和荷载的参数：');
L = input('梁的长度 L (m) (例如: 5): ');
```

```
P = input('集中荷载 P (N) (向下为正, 例如: 10000): ');
a = input('荷载作用位置 a (m) (从左端算起, 例如: 2): ');
E = input('材料的弹性模量 E (Pa) (例如: 200e9 代表钢材): ');
I = input('截面惯性矩 I (m^4) (例如: 8e-5): ');

% 输入参数校验
if L <= 0
    error('错误: 梁的长度 L 必须大于 0。');
end
if P < 0
    warning('提示: 输入的荷载 P 为负值, 表示荷载向上。计算将按此进行。');
    % 如果希望严格向下为正, 可以取消注释下一行
    % error('错误: 荷载 P 通常假定向下为正。若要表示向上荷载, 请调整后续解释或修改程序。');
end
if a < 0 || a > L
    error('错误: 荷载位置 a 必须在 0 和 L 之间 (0 <= a <= L)。');
end
if E <= 0
    error('错误: 弹性模量 E 必须大于 0。');
end
if I <= 0
    error('错误: 截面惯性矩 I 必须大于 0。');
end

b = L - a; % 荷载到右支座的距离

% --- 计算过程 ---

% 1. 支座反力 (向上为正)
R_A = P * b / L; % 左支座反力
R_B = P * a / L; % 右支座反力

% 2. 定义计算点
num_points = 500; % 用于绘图的计算点数量
x_coords = linspace(0, L, num_points);

% 初始化存储数组
V = zeros(size(x_coords));          % 剪力 V(x)
M = zeros(size(x_coords));          % 弯矩 M(x)
slope_EI = zeros(size(x_coords));   % EI * theta(x)
deflection_EI = zeros(size(x_coords)); % EI * y(x) (原始计算值, 可能向上为正或向下为正, 取决于C1)

% 转角和挠度的积分常数 C1 (对应 EI * theta_A)
% theta_A 是梁左端的转角。对于向下荷载P, theta_A 通常是负值 (顺时针)。
% C1 = EI * theta_A = -P*a*b*(L+b)/(6*L) 如果使用 Roark's Formulas (b是到右端的距离, L+b = L+L-a = 2L-a)
% C1 = -P*a*(L-a)*(2*L-a)/(6*L)
```

```
C1_val = -P * a * (L - a) * (2 * L - a) / (6 * L); %  积分常数 EI * theta_A

% 3. 计算剪力、弯矩、转角和挠度（沿梁长）
for i = 1:length(x_coords)
    x = x_coords(i);

    % 剪力 V(x) (标准约定：左段向上为正)
    % (在a点有突变，此处计算的是 x 点的值)
    if x < a
        V(i) = R_A;
    elseif x == a && a ~= 0 % 在荷载作用点a处，剪力从 R_A 突变为 R_A - P
         if i > 1 && x_coords(i-1) < a % 如果前一个点在a左侧
            V(i) = R_A; % 可视化时，这点取 R_A，下一个点取 R_A-P，或用特殊绘图处理
         else
            V(i) = R_A - P; % 默认取右侧值
         end
    else % x > a
        V(i) = R_A - P;
    end

    % 弯矩 M(x) (标准约定：使梁下部受拉为正)
    if x <= a
        M(i) = R_A * x;
    else % x > a
        M(i) = R_A * x - P * (x - a);
    end

    % 转角 (EI * theta(x))
    % EI * d^2y/dx^2 = M(x)
    % EI * dy/dx = integral(M(x))dx + C1_val
    % (C1_val 是积分常数，等于 EI * theta(x=0))
    if x <= a
        slope_EI(i) = R_A * x^2 / 2 + C1_val;
    else % x > a
        slope_EI(i) = R_A * x^2 / 2 - P * (x - a)^2 / 2 + C1_val;
    end

    % 挠度 (EI * y(x)) (原始计算，基于积分，y(0)=0, y'(0)=C1_val/EI)
    % EI * y = integral(integral(M(x))dx)dx + C1_val*x + C3_val
    % 因为 y(0)=0, 所以 C3_val = 0.
    % 此处的 deflection_EI 计算出的挠度，若P向下，通常为负值（表示向下挠曲）
    if x <= a
        deflection_EI(i) = R_A * x^3 / 6 + C1_val * x;
    else % x > a
        deflection_EI(i) = R_A * x^3 / 6 - P * (x - a)^3 / 6 + C1_val * x;
    end
end

% 实际转角 theta(x) (弧度)
theta_rad = slope_EI / (E * I);
```

```
theta_deg = theta_rad * 180 / pi; % 转换为角度

% 实际挠度 y(x) (m)
% 使 y 向下为正
y = -deflection_EI / (E * I); % 乘以 -1 使向下挠度为正值

% --- 结果输出 ---
fprintf('\n--- 计算结果 ---\n');
fprintf('左支座反力 R_A: %.2f N (向上为正)\n', R_A);
fprintf('右支座反力 R_B: %.2f N (向上为正)\n', R_B);

% 最大弯矩 (对于简支梁单点集中荷载，最大弯矩在荷载作用点)
M_max_val = P * a * b / L;
if a == 0 || a == L % 如果荷载在支座上
    M_max_val = 0;
    x_M_max = a;
else
    x_M_max = a;
end
fprintf('最大正弯矩 M_max: %.2f N·m, 发生在 x = %.2f m\n', M_max_val, x_M_max);

% 最大挠度及其位置 (从计算的挠度曲线中找到最大值)
[y_max_val, idx_y_max] = max(y); % y 已被处理为向下为正
x_y_max = x_coords(idx_y_max);
fprintf('最大挠度 y_max: %.4e m (向下为正), 发生在 x = %.2f m\n', y_max_val,
x_y_max);

% 左右两端转角
theta_A_deg = C1_val / (E * I) * 180 / pi;
% 计算右端转角 theta_B
% EI * theta_B = R_A * L^2 / 2 - P * (L - a)^2 / 2 + C1_val
EI_theta_B = R_A * L^2 / 2 - P * (L - a)^2 / 2 + C1_val;
theta_B_deg = EI_theta_B / (E * I) * 180 / pi;
fprintf('左端转角 theta_A: %.4f 度 (顺时针为负)\n', theta_A_deg);
fprintf('右端转角 theta_B: %.4f 度 (逆时针为正)\n', theta_B_deg);


% --- 图形绘制 ---
figure('Name', '材料力学分析: 简支梁 (集中荷载) ', 'NumberTitle', 'off',
'WindowState', 'maximized');

% 剪力图 (SFD)
subplot(2,2,1);
% 为了精确绘制剪力图的阶跃，特别处理a点
x_sfd = [0, a, a, L];
% 确保如果a=0或a=L时图形正确
if a == 0
    V_sfd = [R_A-P, R_A-P, R_A-P, R_A-P]; % 实际上是0，然后突降
    if P ~=0 % 荷载在左支点，左支点处剪力从P突降到0
```

```
        x_sfd = [0, 0, L];
        V_sfd = [P, 0, 0]; % 假设支座反力向上为P, V(0+)=0
        % 或者更精确地理解为V(0-)到V(0+)的跳变由R_A体现
        % 按标准定义, V(x) = Sum F_y (left segment)
        % V(0+) = R_A-P = 0 if a=0
        % 考虑实际剪力图形状
        plot(x_coords, V, 'r-', 'LineWidth', 1.5);
        hold on;
        plot([0,0],[R_A,R_A-P],'r-','LineWidth',1.5); % 表示在0点的跳变
    else
        plot(x_coords, V, 'r-', 'LineWidth', 1.5); % P=0, V=0
    end
elseif a == L
    V_sfd = [R_A, R_A, R_A, R_A]; % 实际上是R_A, 然后在L处突降
    plot(x_coords, V, 'r-', 'LineWidth', 1.5);
    hold on;
    plot([L,L],[R_A,R_A-P],'r-','LineWidth',1.5); % 表示在L点的跳变
else
    V_sfd = [R_A, R_A, R_A-P, R_A-P];
    plot(x_sfd, V_sfd, 'r-', 'LineWidth', 1.5);
end
hold on;
plot([0, L], [0, 0], 'k--'); % 零轴线
title('剪力图 (SFD)');
xlabel('梁的长度 x (m)');
ylabel('剪力 V (N)');
grid on;
ylim([min(V)-abs(0.1*P), max(V)+abs(0.1*P)+eps]); % 调整y轴范围
hold off;

% 弯矩图 (BMD)
subplot(2,2,2);
plot(x_coords, M, 'b-', 'LineWidth', 1.5);
hold on;
plot([0, L], [0, 0], 'k--'); % 零轴线
title('弯矩图 (BMD)');
xlabel('梁的长度 x (m)');
ylabel('弯矩 M (N·m)');
grid on;
hold off;

% 转角图 (theta)
subplot(2,2,3);
plot(x_coords, theta_deg, 'g-', 'LineWidth', 1.5);
hold on;
plot([0, L], [0, 0], 'k--'); % 零轴线
title('转角图 (\theta)');
xlabel('梁的长度 x (m)');
ylabel('转角 \theta (度)');
grid on;
```

```
hold off;

% 挠度图 (Deflection)
subplot(2,2,4);
plot(x_coords, y, 'm-', 'LineWidth', 1.5); % y 已经处理为向下为正
hold on;
plot([0, L], [0, 0], 'k--'); % 零轴线
ax = gca;
ax.YDir = 'reverse'; % 使Y轴正方向（代表正的向下挠度）在图中向下显示
title('挠度图 (Deflection)');
xlabel('梁的长度 x (m)');
ylabel('挠度 y (m) (向下为正)');
grid on;
hold off;

sgtitle(sprintf('简支梁分析: L=%.2fm, P=%.1fN  a=%.2fm, E=%.2ePa, I=%.2em^4', L, P,
a, E, I), 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');

disp('------------------------------------------------------');
end
```