

控制工程基础

第五章

控制系统的稳定性分析





前四章课的简单回顾

(3) 研究系统的哪些东西?

● 瞬态响应

- 系统需要花多长时间才能达到稳定?
- 系统重新达到稳定的过程中是否会振荡?

● 频率响应

- 系统的幅值比和相位差与输入频率的关系（幅频特性和相频特性）；
- 幅频特性和相频特性的描述：乃氏图、伯德图；
- 频率特性 \leftrightarrow 传递函数
- 控制系统的开闭环关系

● 负反馈闭环系统的稳定性

- 代数稳定性判据：劳斯判据；
- 乃氏判据（基于开环系统的幅频和相频特性的稳定性判据）
- 伯德判据（由乃氏判据延伸出的稳定性判据）



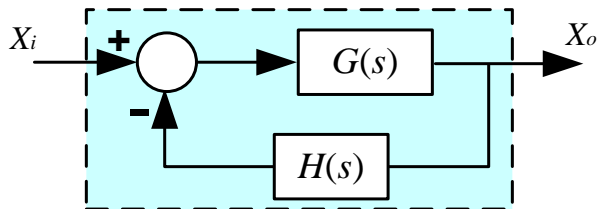
5.1 系统稳定性的基本概念

$$X_i(s) \rightarrow \boxed{\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}} \rightarrow X_o(s)$$

控 制 系 统



负反馈闭环
控制系统



线性系统的时间响应

$$X_o(s) = X_i(s) \cdot \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

因式
分解

$$X_o(s) = X_i(s) \cdot \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^r (s + p_1)(s + p_2) \dots (s^2 + c_1 s + d_1)(s^2 + c_2 s + d_2) \dots}$$

分式
展开

$$\frac{\text{○}}{\text{○}} + \overset{\text{一阶}}{\frac{a_{11}}{s + p_1}} + \overset{\text{一阶}}{\frac{a_{21} + \dots}{s + p_2}} + \dots + \overset{\text{二阶}}{\frac{a_{k1}s + b_{k1}}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2}} + \overset{\text{二阶}}{\frac{a_{k2}s + b_{k2}}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2}} + \dots$$

无衰减

$$+ e^{-p_1 t} \cdot \Delta\Delta$$

$$+ e^{-p_2 t} \cdot \Delta\Delta$$

$$\Delta\Delta \cdot e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \cdot \sin(\sqrt{1 - \zeta_1^2} \omega_1 t + \dots)$$

$$\Delta\Delta \cdot e^{-\zeta_2 \omega_2 t} \cdot \sin(\sqrt{1 - \zeta_2^2} \omega_2 t + \dots)$$

传递函数的分母（特征多项式）决定了系统的稳定性。

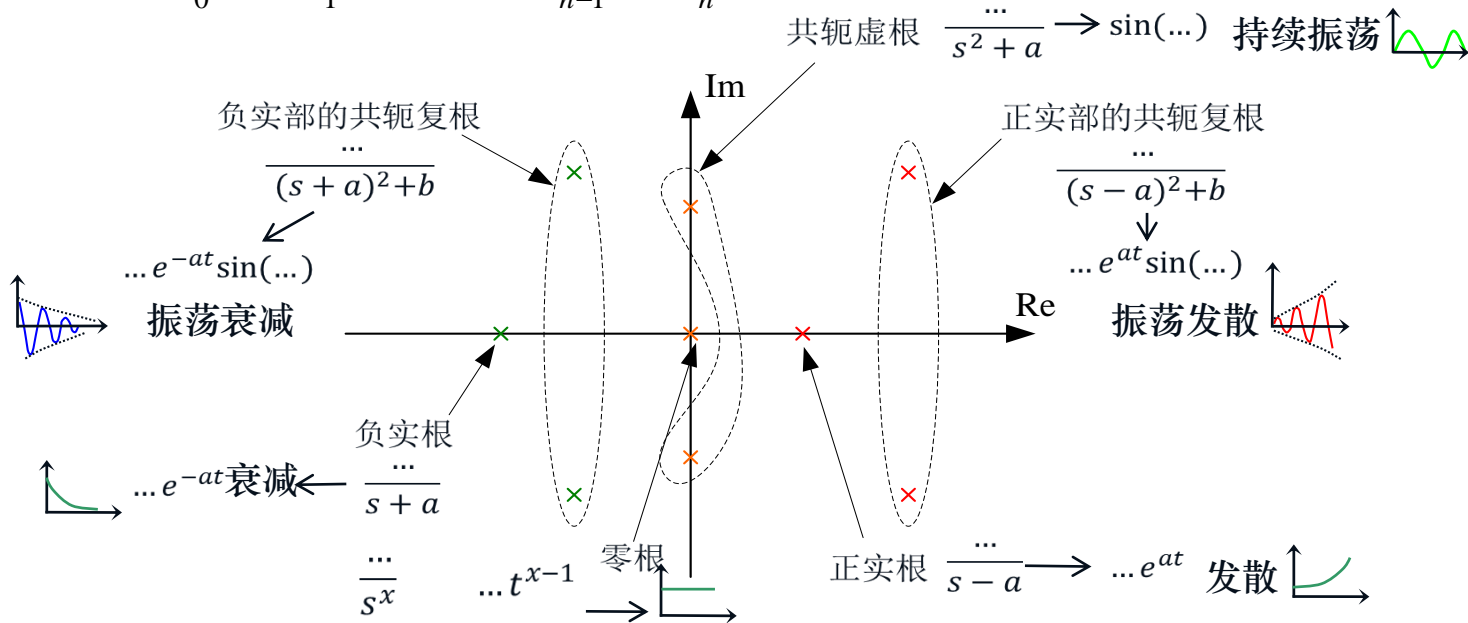


5.2 系统稳定的充要条件

$$X_i(s) \rightarrow \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \rightarrow X_o(s)$$

系统稳定的充要条件:

特征方程 $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$ 的所有根具有负实部。



关于稳定性的说明

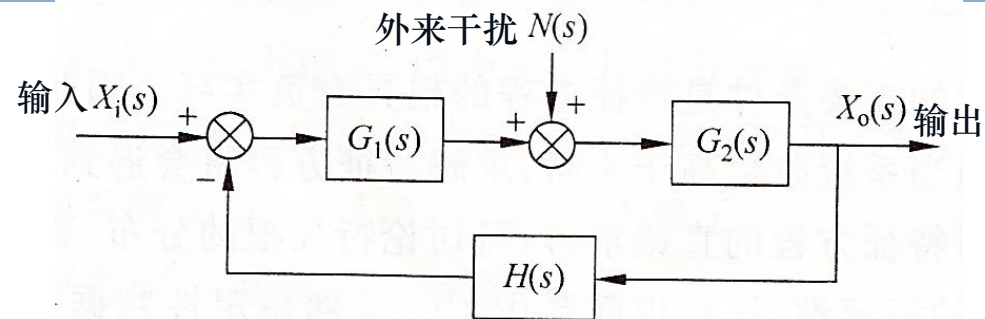
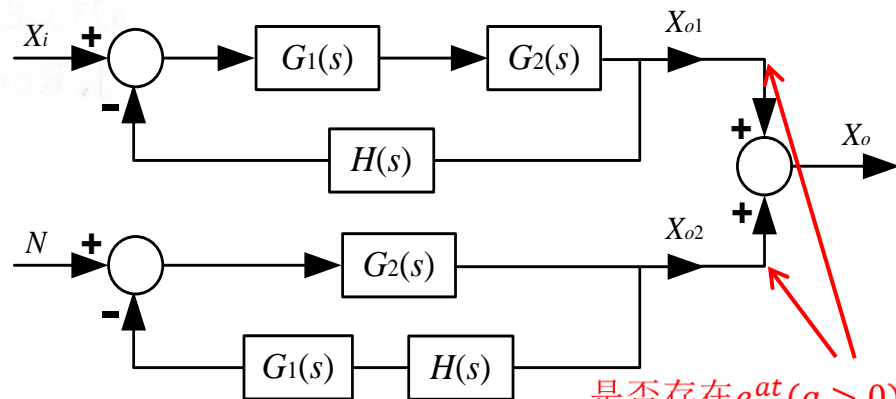


图 5-3 控制系统方块图

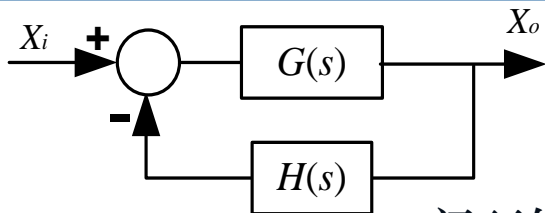


是否存在 e^{at} ($a > 0$)的发散项

$$X_o = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} X_i + \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} N$$



5.3 代数稳定性判据



闭环传递函数: $\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

$$= \frac{\frac{N_G(s)}{D_G(s)}}{1 + \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \cdot \frac{N_H(s)}{D_H(s)}}$$

$$= \frac{N_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)}$$

← 闭环传递函数的特征多项式

判定依据: $D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s) = 0$ 的根在复平面上的分布。

特征方程



代数判据 (劳斯判据)

闭环系统的特征方程是 $a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$, 那么

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

$$= a_0 \left(s^n + \frac{a_1}{a_0} s^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} s + \frac{a_n}{a_0} \right)$$

$$= a_0 (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$$

$$= 0$$

$$a_0 > 0$$

s_1, s_2, \dots, s_n 为系统的特征根

\Rightarrow

$$\frac{a_1}{a_0} = -(s_1 + s_2 + \dots + s_n)$$

$$\frac{a_2}{a_0} = +(s_1s_2 + s_1s_3 + \dots + s_{n-1}s_n)$$

$$\frac{a_3}{a_0} = -(s_1s_2s_3 + s_1s_2s_4 + \dots + s_{n-2}s_{n-1}s_n)$$

\dots

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n (s_1s_2s_3 \dots s_{n-2}s_{n-1}s_n)$$

系统特征根均具有负实部的必要条件:

- (1) 特征方程的各项系数 $a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 都不等于零;
- (2) 特征方程的各项系数 a_i 的符号都相同;




代数判据（劳斯判据）

闭环系统的特征方程是 $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$ ，那么
系统稳定的充要条件：除满足两个必要条件外，还满足

劳斯阵列第一列所有项 > 0 ； 全部特征根具有负实部，即系统稳定。

劳斯阵列第一列存在 < 0 的项； 存在正实部的特征根，即系统不稳定。

实部为正的实特征根数，等于劳斯阵列中第一列的系数符号改变的次数。

劳斯阵列第一列存在 $= 0$ 的项； 存在实部为零的特征根，即系统临界稳定。

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
s^2	u_1	u_2			
s^1	v_1				
s^0	w_1				

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$
$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$
$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

适用场合：已知闭环系统传递函数的特征多项式（所有系数），这在实际工程中很难做到。



代数稳定性判据应用举例

例5-2（159页）：设控制系统的特征方程式为 $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 3 = 0$ ，试应用劳斯稳定判据判断系统的稳定性。

方程系数均为正，满足稳定的必要条件；排劳斯阵列

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 3 & 3 \\ s^3 & 2 & 4 & \\ s^2 & 1 & 3 & \\ s^1 & -2 & & \\ s^0 & 3 & & \end{array}$$

劳斯阵列的第一列中系数符号不全为正值；符号改变了两次，说明闭环系统有两个正实部的根；所以控制系统不稳定。



5.4 乃奎斯特稳定性判据 (乃氏判据)

预备知识：特征多项式的相位增量

如果特征方程所有的根都具有负实部的话，每一个实根对应 90° 的相位增量，每一对共轭虚根对应 180° 的相位增量。

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

因式
分解

$$(j\omega + p_1)(j\omega + p_2) \dots ((j\omega)^2 + c_1 j\omega + d_1)((j\omega)^2 + c_2 j\omega + d_2) \dots$$

	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow
$\omega \rightarrow 0$	0°	0°	0°	0°
$\omega \rightarrow \infty$	90°	90°	$2 \times 90^\circ$	$2 \times 90^\circ$
<u>相位增量:</u>	90°	90°	$2 \times 90^\circ$	$2 \times 90^\circ$



$$\Delta \angle G(j\omega) = \angle G(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} - \angle G(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0}$$

重要推论：系统传递函数的特征方程有 n 个根。当频率 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ ，系统传递函数的特征多项式的相位增量为 $\frac{\pi}{2}n$ （即， $n \cdot 90^\circ$ ），则该系统稳定。



补充知识：根的分布与相位增量

一 米哈依洛夫定理

定理：设 n 次多项式 $D(s)$ 有 p 个根在复平面的右半面，有 q 个根在原点上，其余 $n-p-q$ 个根位于左半面，则当 $s=j\omega$ 代入 $D(s)$ 并令 ω 从0连续增大到 ∞ 时，复数 $D(j\omega)$ 的相位增量应等于

$$\Delta\theta = (n - 2p - q) \frac{\pi}{2}$$

证明：

方程为一次的情况下 $D_1(s) = s - s_1$



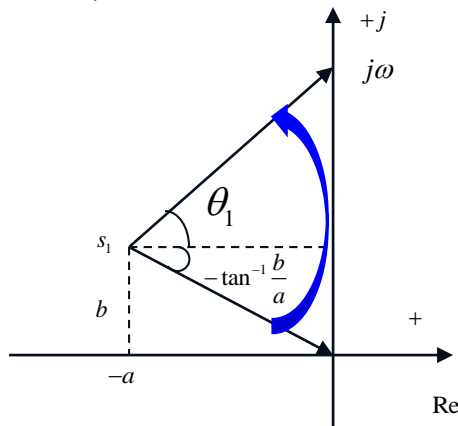
补充知识：根的分布与相位增量

若根在左半平面的第二象限，则 $s_1 = -a + jb$ $a, b > 0$

命 $s=j\omega$ ，可得 $D_1(j\omega) = j\omega - (-a + jb) = a + j(\omega - b)$

令 ω 由 0 增大到 ∞ ，从图可以看出相位增量为

$$\Delta\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \left(\arctan \frac{-b}{a} \right) = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{b}{a}$$

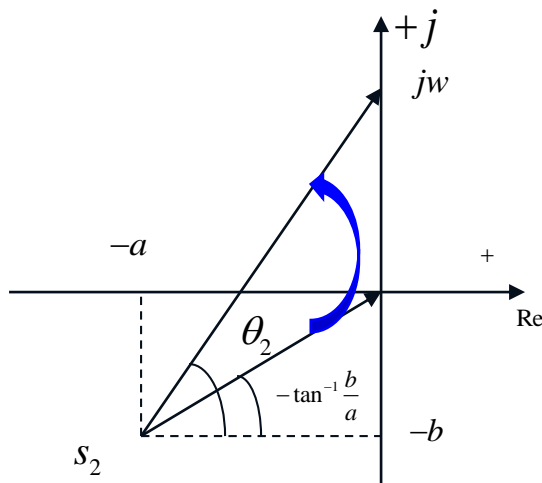


补充知识：根的分布与相位增量

若根在左半平面的第三象限，则相位增量为

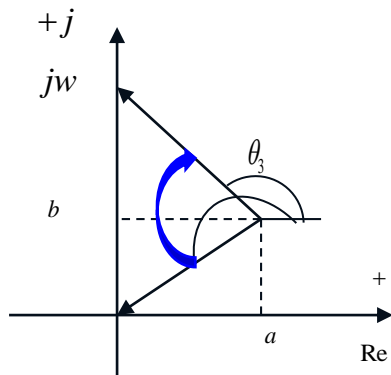
$$\Delta\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{b}{a}$$

如图：



补充知识：根的分布与相位增量

若根在右半平面，其相位增量如图所示，



为

$$\Delta\theta_3 = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{b}{a}$$



补充知识：根的分布与相位增量

(1) 在左半平面中：

对于每一个负实根而言，相位增量 $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$

对于每一对具有负实部的共轭复根而言，其相位增量

$$\Delta\theta = \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{b}{a} \right) = \pi$$

即相当于左半平面中的每个根的相位增量为 $\pi/2$

(2) 同理，右半平面中的每个根的相位增量为 $-\pi/2$

(3) 当根在原点时，其相位增量为 0

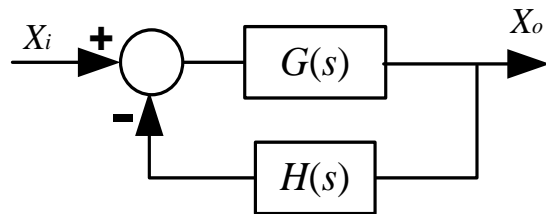
$$\text{总的相位增量} \Delta\theta = (n - p - q) \frac{\pi}{2} + p \left(-\frac{\pi}{2} \right) + q \cdot 0 = (n - 2p - q) \frac{\pi}{2}$$

式中， p 为 $D(s)$ 在右半平面上的根的个数， q 为原点上的根的个数。



乃奎斯特判据

闭环传递函数: $\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$



$$= \frac{\frac{N_G(s)}{D_G(s)}}{1 + \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \cdot \frac{N_H(s)}{D_H(s)}}$$

$$= \frac{N_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)}$$

← 闭环传递函数的特征多项式

开环传递函数: $G(s)H(s) = \frac{N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)}$

← 开环传递函数的特征多项式

(知识点: 闭环传递函数的特征方程的阶次与开环传递函数的特征方程的阶次相同。)



乃奎斯特判据

$$\frac{\text{闭环传递函数的特征多项式 } D_b(s)}{\text{开环传递函数的特征多项式 } D_k(s)} = \frac{D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)} = 1 + G(s)H(s)$$

傅里叶变换后，

$$\frac{D_b(j\omega)}{D_k(j\omega)} = 1 + G(j\omega)H(j\omega)$$

那么，相位关系为

$$\angle D_b(j\omega) = \angle D_k(j\omega) + \angle(1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

相位增量的关系为

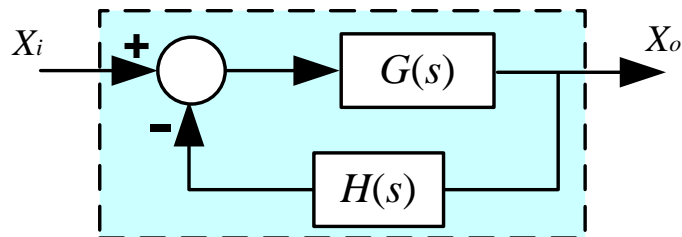
$$\underline{\Delta \angle D_b(j\omega)} = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle(1 + G(j\omega)H(j\omega))$$



我们关心的是闭环传递函数的特征多项式的相位增量。它可以利用开环传递函数 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的频率特性（乃氏图或伯德图）来求取。



乃奎斯特判据



$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

负反馈闭环控制系统

相位增量的关系:

$$\Delta\angle D_b(j\omega) = \Delta\angle D_k(j\omega) + \Delta\angle(1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

$1 + G(s)H(s)$ 的相位增量

开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量

闭环传递函数 $\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$ 的特征多项式的相位增量



乃奎斯特判据例题

例题5-8 (第166页): 开环传递函数为 $\frac{15}{(s+1)(s+2)(s+3)}$, 判断单位负反馈系统闭环稳定性;

$$\Delta \angle D_b(j\omega) = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle (1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

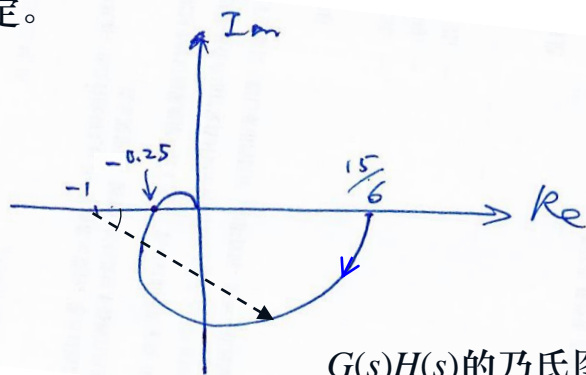
$1+G(s)H(s)$ 的相位增量: 相对于 $(-1, 0j)$,
 $G(s)H(s)$ 的乃氏图的相位增量为零;

开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量: $G(s)H(s)$ 的特征多项式最高次为3次, 且在右平面和虚轴上不存在根, 可知相位增量为270度;

闭环传递函数 $\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ 的特征多项式的相位增量: 闭环特征多项式最高次同为3次, 相位增量为270度的话闭环系统稳定。结果: 稳定。

开环特征多项式: $(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)$

	↓	↓	↓
$\omega \rightarrow 0$	0°	0°	0°
$\omega \rightarrow \infty$	90°	90°	90°
相位增量:	90°	90°	90°



$G(s)H(s)$ 的乃氏图



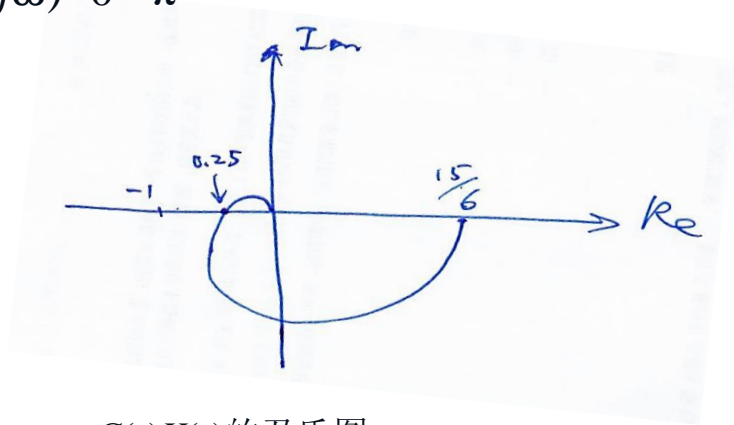
追加内容：如何计算曲线与实轴的交点

展开分母多项式，可得
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{15}{(11\omega - \omega^3)j + (6 - 6\omega^2)}$$

当 $11\omega - \omega^3 = 0$ ，曲线与实轴有交点。

当 $\omega = \sqrt{11}$ 时， $|G(j\omega)H(j\omega)| = 0.25$ ， $\angle G(j\omega)H(j\omega) = 0 - \pi$

因此，交点在左半实轴上，坐标为 $(-0.25, 0j)$



$G(s)H(s)$ 的乃氏图



乃奎斯特判据例题

例题5-9 (第166页): 开环传递函数为 $\frac{15}{(s-1)(s+2)(s+3)}$, 判断闭环稳定性;

$$\Delta\angle D_b(j\omega) = \Delta\angle D_k(j\omega) + \Delta\angle(1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

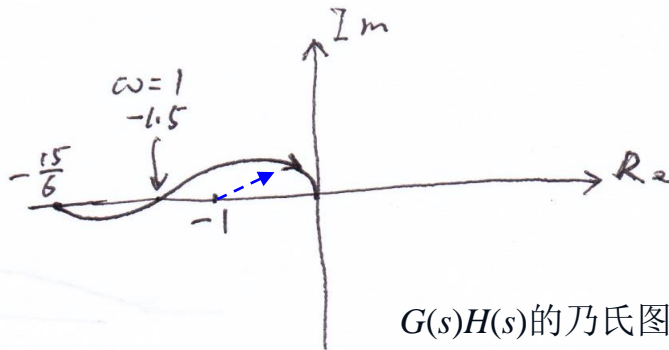
$1+G(s)H(s)$ 的相位增量: 相对于 $(-1, 0j)$, $G(s)H(s)$ 的乃氏图相位增量为 -180° ;

开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量: $G(s)H(s)$ 的特征多项式最高次为3次, 在右平面存在一个根, 可知相位增量为 90° ;

闭环传递函数 $\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ 的特征多项式的相位增量: 闭环特征多项式最高次同为3次, 相位增量为 270° 的话闭环系统稳定。结果: 相位增量为 -90° , 因此, 闭环系统不稳定。

开环特征多项式: $(j\omega - 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)$

	↓	↓	↓
$\omega \rightarrow 0$	180°	0°	0°
$\omega \rightarrow \infty$	90°	90°	90°
相位增量:	-90°	90°	90°



$G(s)H(s)$ 的乃氏图



追加内容：画乃氏图详解

例题5-9（第166页）：开环传递函数为 $\frac{15}{(s-1)(s+2)(s+3)}$ ，判断闭环稳定性；

$$\omega = 0 \text{ 时: 幅频特性} = \left| \frac{15}{(j0-1)(j0+2)(j0+3)} \right| = \left| -\frac{15}{6} \right|$$

$$\text{相频特性} = \angle 0 - \arctan \frac{0}{-1} - \arctan \frac{0}{2} - \arctan \frac{0}{3} = 0 - \pi - 0 - 0 = -\pi$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ 时: 幅频特性} = \left| \frac{15}{(j\infty-1)(j\infty+2)(j\infty+3)} \right| = 0$$

$$\text{相频特性} = \angle 0 - \arctan \frac{\infty}{-1} - \arctan \frac{\infty}{2} - \arctan \frac{\infty}{3} = 0 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$$

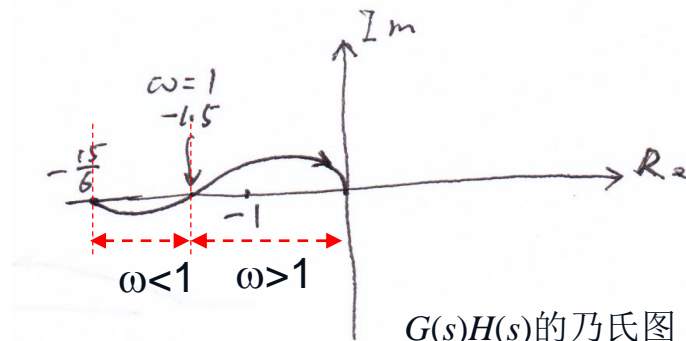
开环传递函数的频率特性为

$$\begin{aligned} \frac{15}{(j\omega-1)(j\omega+2)(j\omega+3)} &= \frac{15}{(-6-4\omega^2) + j\omega(1-\omega^2)} \\ &= \frac{15 \left[\frac{-6-4\omega^2}{(-6-4\omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2-1)^2} + j \frac{\omega(\omega^2-1)}{(-6-4\omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2-1)^2} \right]} \end{aligned}$$

负实部

虚部有正有负

乃氏曲线与实轴的交点 $(-1.5, j0)$, $\omega_x=1$



$G(s)H(s)$ 的乃氏图



乃奎斯特判据例题

例题5-10 (第167页): 开环传递函数为 $\frac{K}{Ts-1}$, 判断闭环稳定性;

$$\Delta \angle D_b(j\omega) = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle (1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

$1+G(s)H(s)$ 的相位增量: $K > 1$, 相位增量为180; $K < 1$, 相位增量为0;

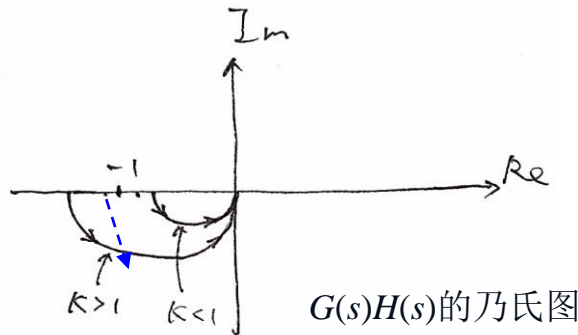
开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量: $G(s)H(s)$ 的特征多项式最高次为1次, 且根在右平面上, 可知相位增量为-90度;

闭环传递函数 $\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ 的特征多项式的相位增量: 闭环特征多项式最高次同为1次, 相位增量为90度的话闭环系统稳定。所以 $K > 1$, 闭环稳定; $K < 1$, 闭环不稳定。

开环特征多项式: $Ts - 1$

\downarrow
 $\omega \rightarrow 0$ 180°
 $\omega \rightarrow \infty$ 90°

相位增量: -90°



乃奎斯特判据例题

例题5-11 (第167页): 开环传递函数为 $\frac{10}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$, 判断系统闭环稳定性;

$$\Delta\angle D_b(j\omega) = \Delta\angle D_k(j\omega) + \Delta\angle(1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

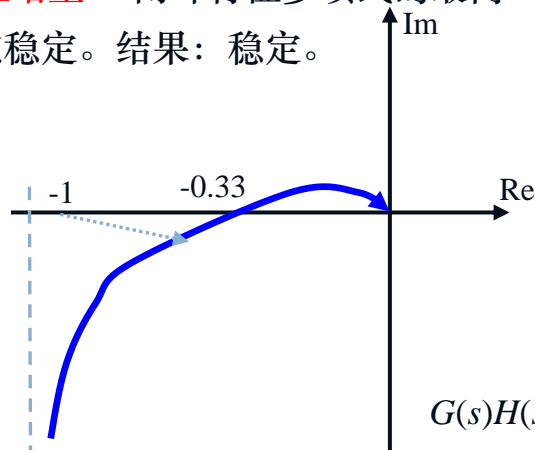
$1+G(s)H(s)$ 的相位增量: 相对于 $(-1, 0j)$, $G(s)H(s)$ 的乃氏图的相位增量为90度;

开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量: $G(s)H(s)$ 的特征多项式最高次为3次, 存在一个零根, 可知相位增量为180度;

闭环传递函数 $\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ 的特征多项式的相位增量: 闭环特征多项式的最高次同为3次, 相位增量为270度的话闭环系统稳定。结果: 稳定。

开环特征多项式: $s(0.1s+1)(0.05s+1)$

	↓	↓	↓
$\omega \rightarrow 0$	90°	0°	0°
$\omega \rightarrow \infty$	90°	90°	90°
相位增量:	0°	90°	90°



$G(s)H(s)$ 的乃氏图



乃奎斯特判据例题

开环传递函数为 $\frac{1.5(0.05s+1)}{s(0.22s+1)(0.06s^2+0.21s+1)}$, 判断系统闭环稳定性;

$$\Delta \angle D_b(j\omega) = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle (1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

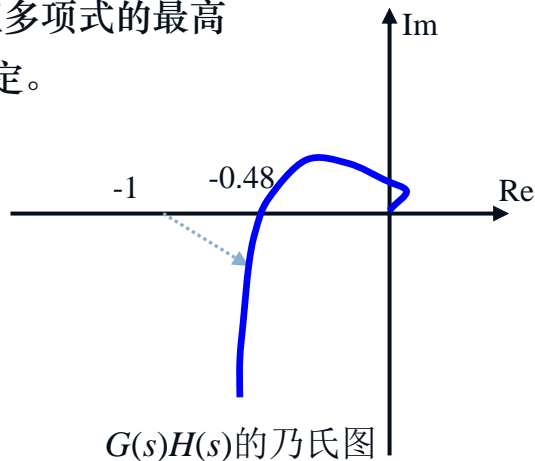
$1+G(s)H(s)$ 的相位增量: 相对于 $(-1, 0j)$, $G(s)H(s)$ 的乃氏图的相位增量为90度;

开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量: $G(s)H(s)$ 的特征多项式最高次为4次, 存在一个零根, 可知相位增量为270度;

闭环传递函数 $\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ 的特征多项式的相位增量: 闭环特征多项式的最高次同为4次, 相位增量为360度的话闭环系统稳定。结果: 稳定。

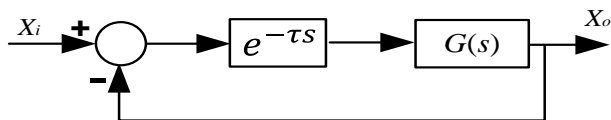
开环特征多项式: $s(0.22s + 1)(0.06s^2 + 0.21s + 1)$

	↓	↓	↓
$\omega \rightarrow 0$	90°	0°	0°
$\omega \rightarrow \infty$	90°	90°	180°
相位增量:	0°	90°	180°



延时环节对闭环系统稳定性的影响

例题:



$$G_k(s) = G(s)e^{-\tau s} = \frac{\sqrt{2}}{s(s+1)}e^{-\tau s}$$

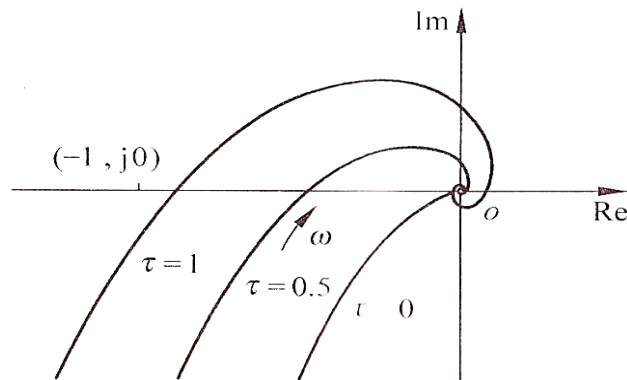


图 5-18 不同延时时间的乃氏图

$$\Delta \angle D_b(j\omega) = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle (1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

$1 + G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量: 相对于 $(-1, 0j)$, $G(s)H(s)$ 的乃氏图的相位增量取决于 τ , $\tau < \frac{\pi}{4}$, 闭环稳定, $\tau > \frac{\pi}{4}$, 闭环不稳定;

开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量: $G(s)H(s)$ 的特征多项式最高次为 2 次, 存在一个零根, 可知相位增量为 90 度;

闭环传递函数 $\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$ 的特征多项式的相位增量: 闭环特征多项式的最高次同为 2 次, 相位增量为 180 度的话闭环系统稳定。



追加内容：如何判断 τ 的临界值

开环频率特性为

幅频特性 $|G_k(j\omega)| = |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$

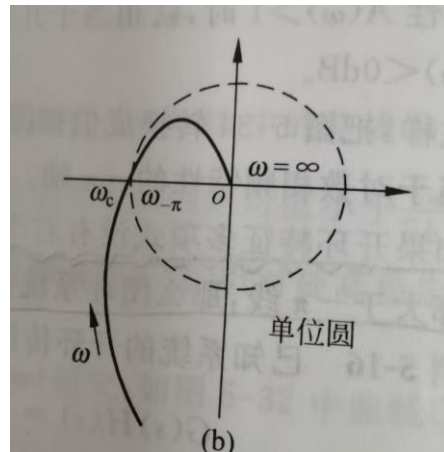
相频特性 $\angle G_k(j\omega) = \angle G(j\omega) - \tau\omega = -\frac{\pi}{2} - \arctan \omega - \tau\omega$

由 $|G_k(j\omega_c)| = 1$, 求得 $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$

闭环临界稳定时, 要求 $\omega_c = \omega_{-\pi}$

所以 $\angle G_k(j\omega_c) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \omega_c - \tau\omega_c = -\pi$

即 $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \tau = -\pi$, 求得 $\tau = \frac{\pi}{4}$



乃奎斯特判据补充知识

闭环系统稳定的充要条件是： $Z=N+P=0$

N: 开环传递函数 $G(s)H(s)$ 绕 $(-1, 0j)$ 的圈数, 顺时针为正, 逆时针为负;

P: 开环传递函数 $G(s)H(s)$ 不稳定的极点个数

Z: 闭环不稳定的极点个数

推论：若开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的全部极点均位于[S]平面左半部，当 ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 变化时，开环乃氏图不包围点 $(-1, j0)$ 时，系统稳定，否则闭环不稳定。

应用乃氏稳定判据分析线性控制系统的稳定性时，可能遇到下列**三种情况**：

① $G(j\omega)H(j\omega)$ 不包围点 $(-1, j0)$ 。如果 $G(s)H(s)$ 的极点全部位于[S]平面左半部，则闭环稳定；

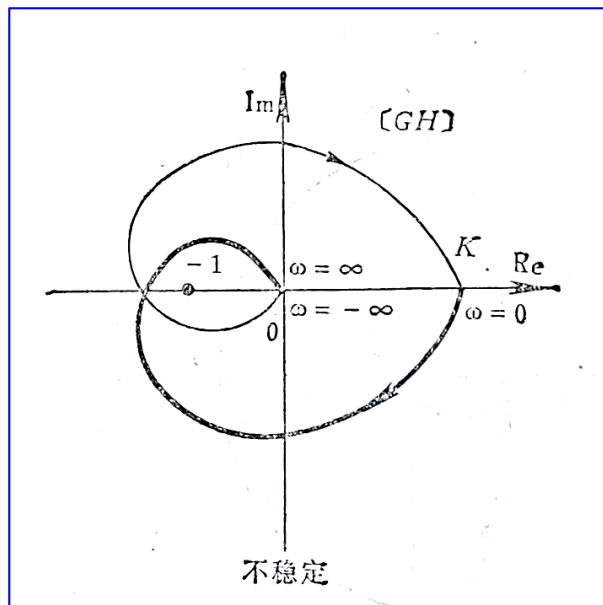
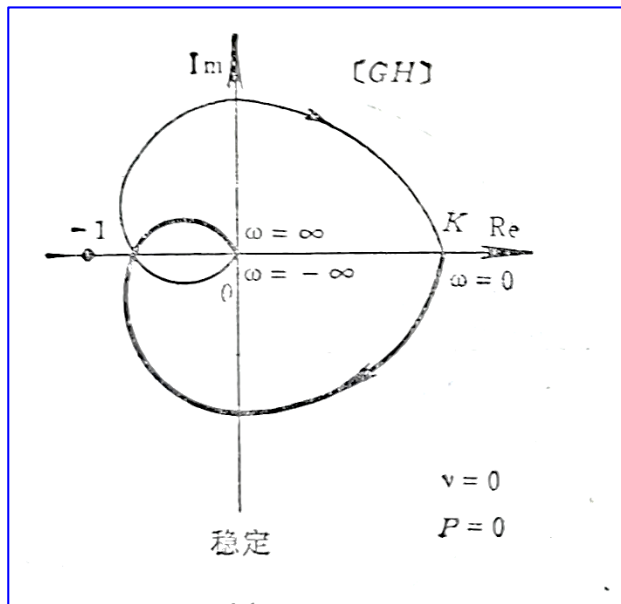
② $G(j\omega)H(j\omega)$ 逆时针包围点 $(-1, j0)$ 。如果逆时针包围的次数(圈数)等于开环传递函数的极点中处于[S]平面右半部的极点数目时，则闭环稳定；

③ $G(j\omega)H(j\omega)$ 顺时针包围点 $(-1, j0)$ 。 $N=Z-P>0$ 。也就是说，不论P等于何值，Z总是不等于0。说明系统的闭环传递函数在[S]平面右半部有极点，因此闭环不稳定。



乃奎斯特判据补充知识

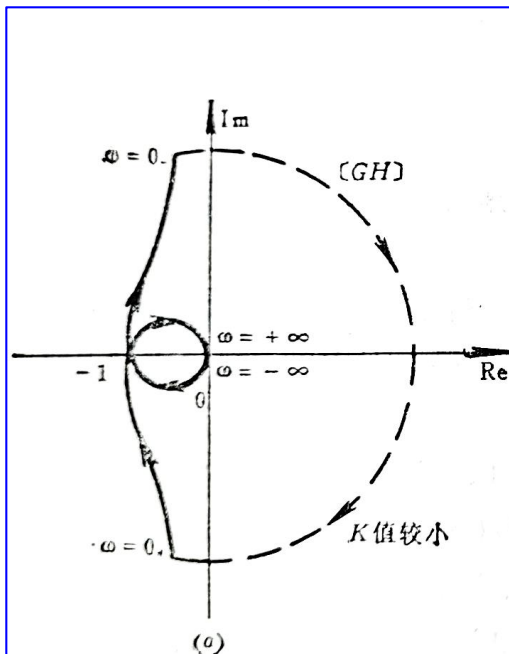
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)\dots}{(j\omega)^v(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)\dots\left(T_{n-k}^2(j\omega)^2 + 2T_{n-k}\zeta_{n-k}j\omega + 1\right)\dots}$$



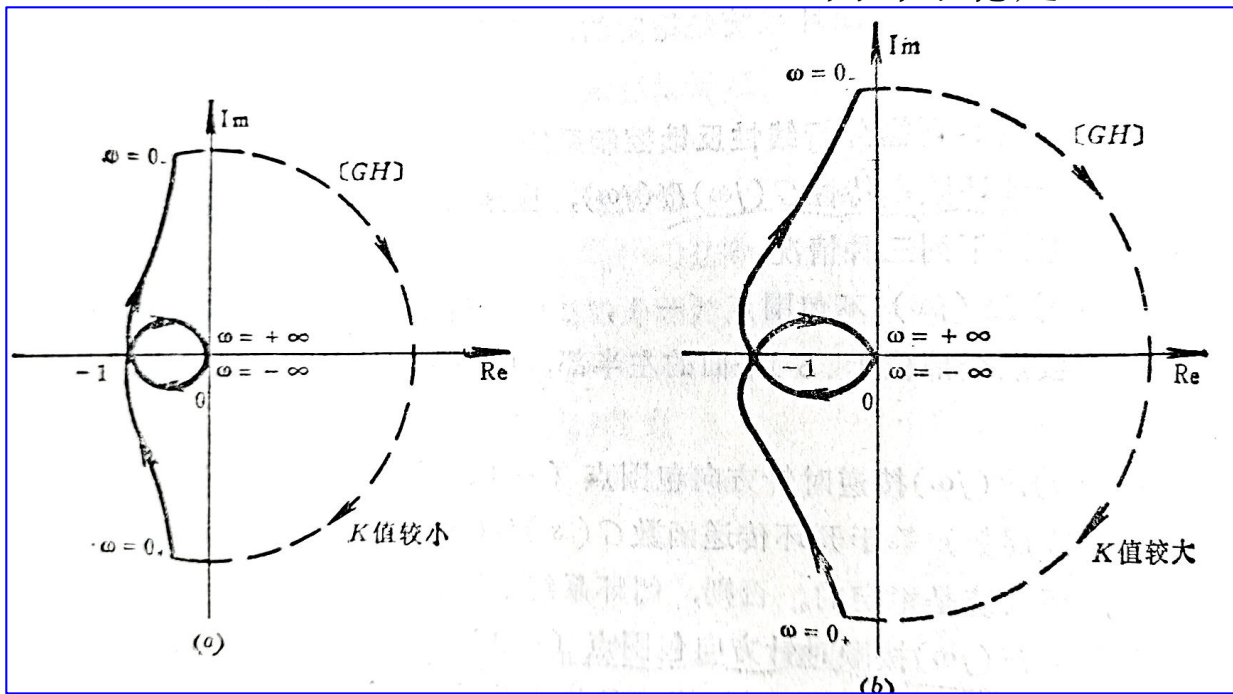
乃奎斯特判据补充知识

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

闭环稳定



闭环不稳定



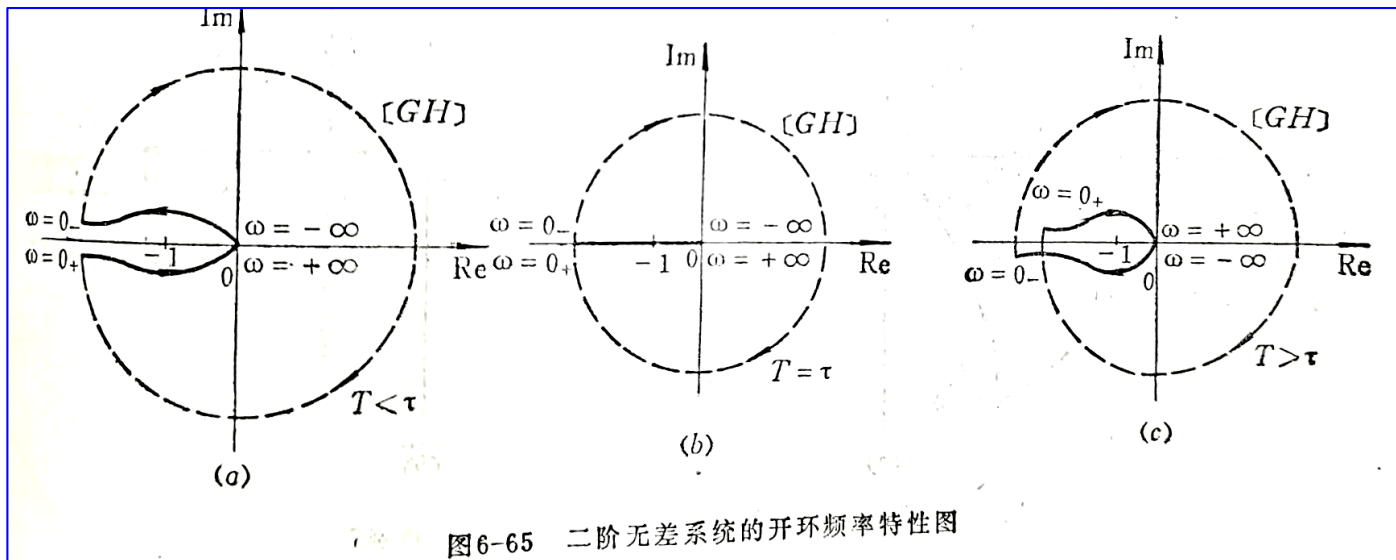
乃奎斯特判据补充知识

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

闭环稳定

闭环临界稳定

闭环不稳定



乃奎斯特判据补充知识

$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(Ts - 1)}$, 如下图所示的闭环系统稳定

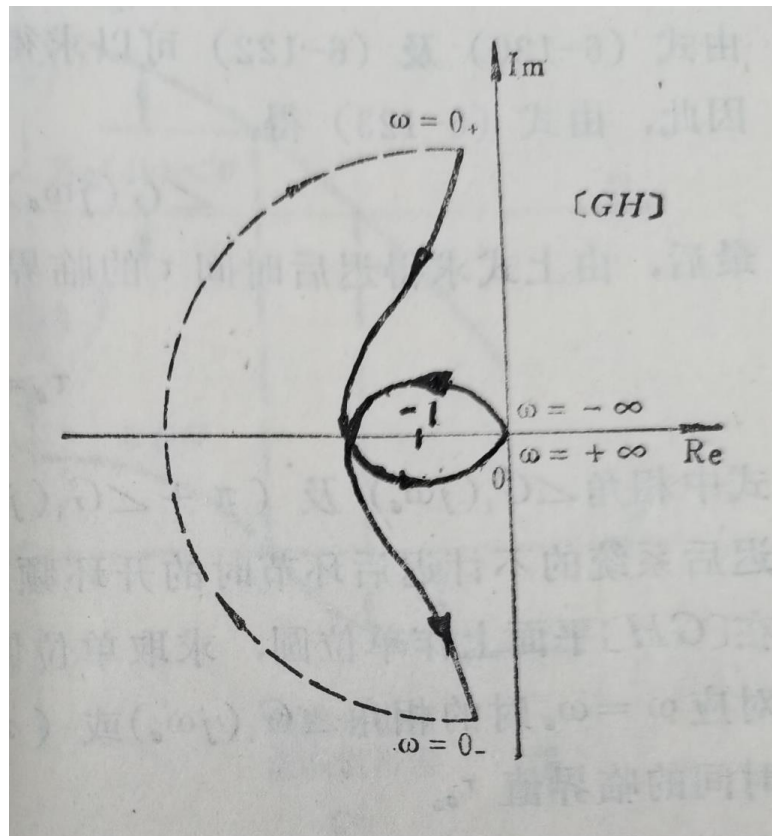
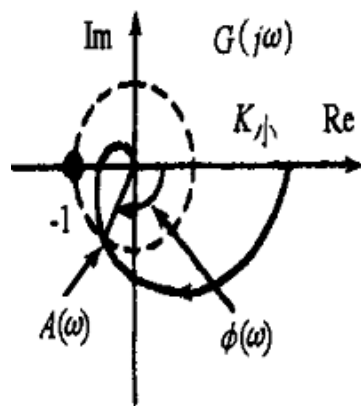


图6-68 非最小相位系统的开环频率特性图



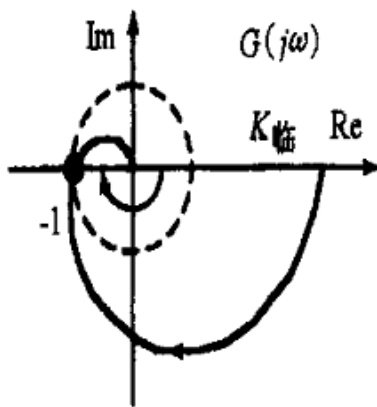
乃奎斯特稳定性判据用于最小相位系统

若开环系统 $G(j\omega)$ 是**最小相位系统**，则可通过观察 $G(j\omega)$ 的乃氏图**是否包围点 $(-1, j0)$** ，来判断闭环系统是否稳定。



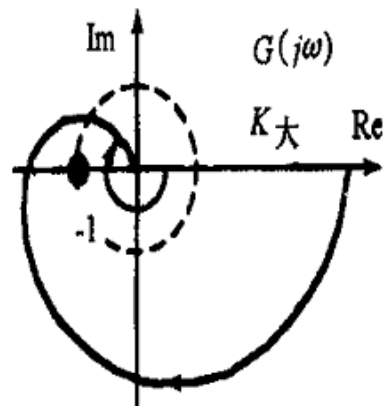
$$\begin{cases} A(\omega)=1 \text{ 时} \\ \phi(\omega) > -\pi \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \phi(\omega) = -\pi \text{ 时} \\ A(\omega) < 1 \end{cases}$$

系统稳定



$$\begin{cases} A(\omega)=1 \text{ 时} \\ \phi(\omega) = -\pi \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \phi(\omega) = -\pi \text{ 时} \\ A(\omega) = 1 \end{cases}$$

临界稳定

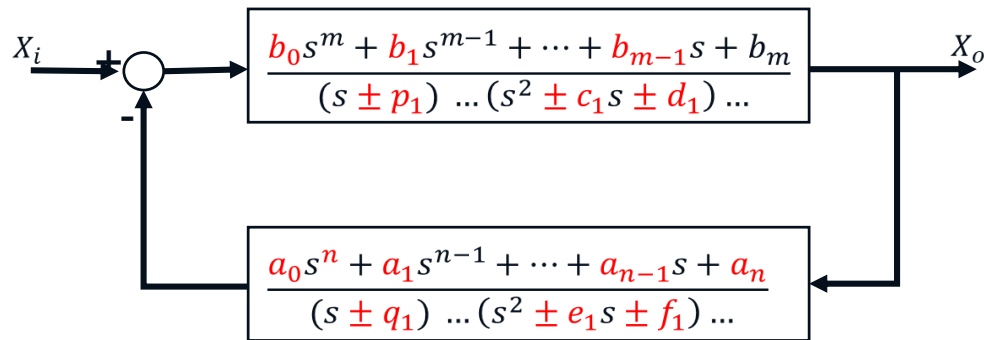


$$\begin{cases} A(\omega)=1 \text{ 时} \\ \phi(\omega) < -\pi \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \phi(\omega) = -\pi \text{ 时} \\ A(\omega) > 1 \end{cases}$$

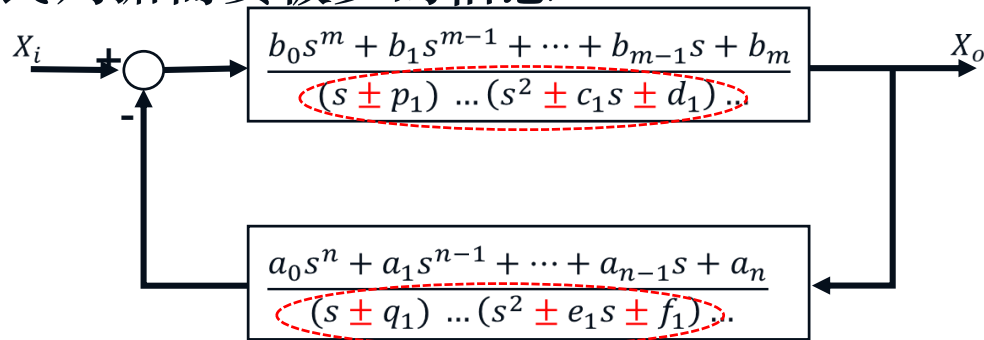
不稳定

劳斯判据与乃氏判据的比较

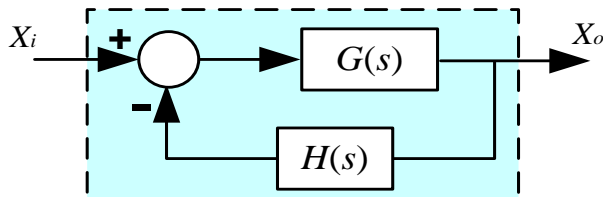
劳斯判据需要全部信息



乃氏判据需要极少的信息



劳斯判据与乃氏判据的比较



$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

负反馈闭环控制系统

劳斯判据

利用代数的方式

$$\begin{aligned} \frac{X_o(s)}{X_i(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ &= \frac{N_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)} \end{aligned}$$

为了判断闭环系统的稳定性，我们需要知道：

(1) 闭环系统特征多项式 $D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)$ 的次数和具体系数，这在实际工程问题中很难获知。

乃氏判据

利用相位增量的关系

$$\Delta \angle D_b(j\omega) = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle (1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

\uparrow 开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量
 \uparrow $1 + G(s)H(s)$ 的相位增量
 \uparrow 闭环传递函数 $\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$ 的特征多项式的相位增量

为了判断系统的稳定性，我们需要知道：

(1) 开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的乃氏图/伯德图，可通过对每个组成环节进行频率响应实验来获取。
 (2) 在实际工程问题中 $G(s)H(s)$ 的阶次通常是已知的，且多为最小相位系统。

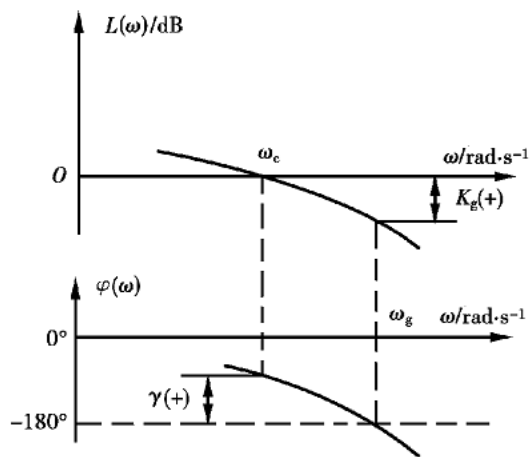


5.5 伯德稳定性判据

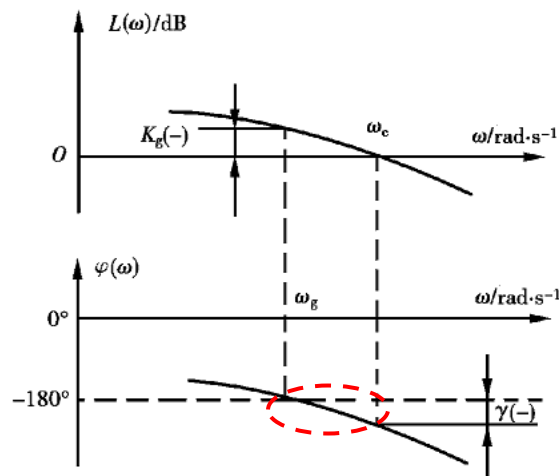
对数幅相频率特性的稳定判据

(1) 如果开环是稳定的，且在 $L(\omega) \geq 0$ 的所有角频率 ω 值下，相角范围大于 $-\pi$ 线，那么闭环系统是稳定的。

例：



稳定系统的伯德图

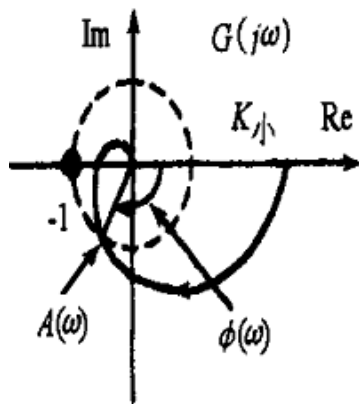


不稳定系统的伯德图



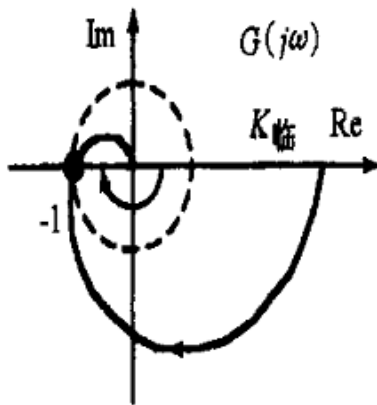
用乃氏图解释

若开环系统 $G(j\omega)$ 是**最小相位系统**，则可通过观察 $G(j\omega)$ 的乃氏图**是否包围点 $(-1, j0)$** ，来判断闭环系统是否稳定。



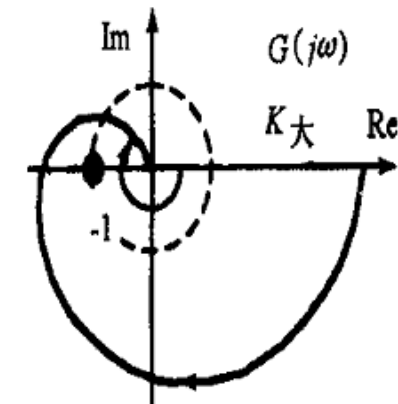
$$\boxed{\begin{cases} A(\omega)=1 \text{ 时} \\ \phi(\omega) > -\pi \end{cases}} \text{ 或 } \begin{cases} \phi(\omega) = -\pi \text{ 时} \\ A(\omega) < 1 \end{cases}$$

系统稳定



$$\begin{cases} A(\omega)=1 \text{ 时} \\ \phi(\omega) = -\pi \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \phi(\omega) = -\pi \text{ 时} \\ A(\omega)=1 \end{cases}$$

临界稳定



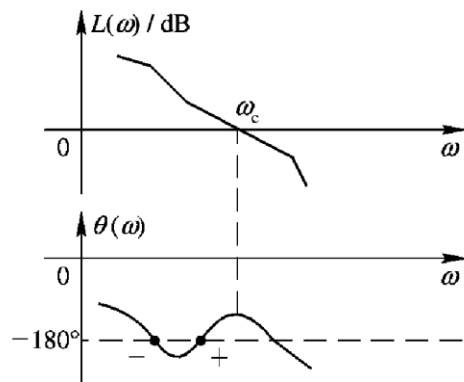
$$\boxed{\begin{cases} A(\omega)=1 \text{ 时} \\ \phi(\omega) < -\pi \end{cases}} \text{ 或 } \begin{cases} \phi(\omega) = -\pi \text{ 时} \\ A(\omega) > 1 \end{cases}$$

不稳定

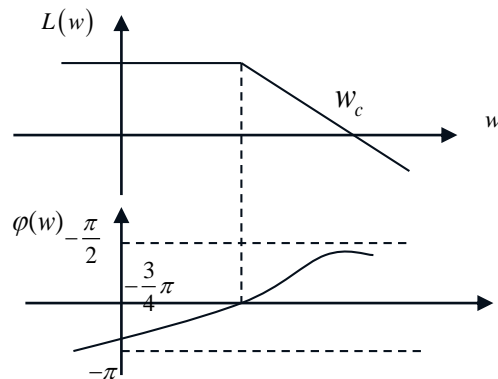
伯德稳定性判据

(2) 普适的伯德稳定性判据:

如果系统在开环状态下的特征方程有 p 个根在右半平面内，它在闭环状态下稳定的充分必要条件是：在所有 $L(\omega) \geq 0$ 的频率范围内，相频特性曲线 $\varphi(\omega)$ 在 $(-\pi)$ 线上的正负穿越之差为 $p/2$ 次。



正,负穿越

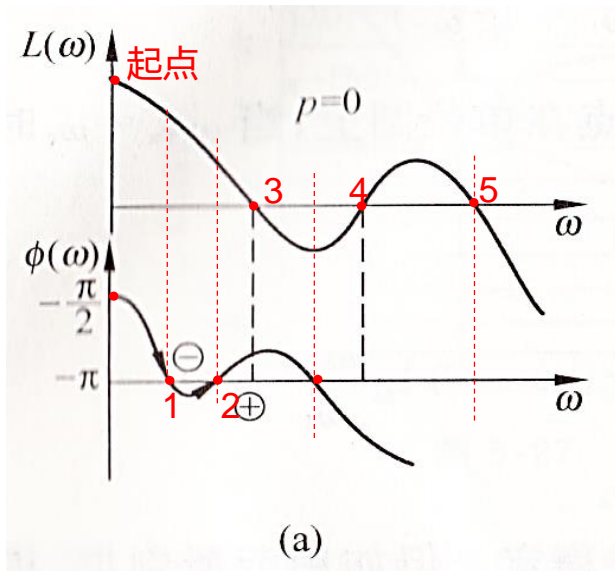


半次正穿越

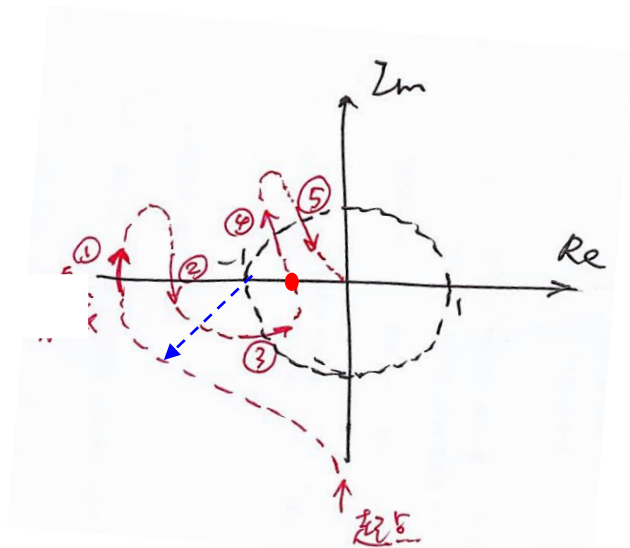


伯德稳定性判据例题

例题5-16 (第176页) :



- (1) $\omega \rightarrow 0$, 因为 -90° 度和幅值比具有斜率, 所以开环为 I 型;
(2) $p=0$, 右半平面无极点, 即开环传递函数的特征多项式分解的因子均为正号。



$$\Delta \angle D_b(j\omega) = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle (1 + G(j\omega)H(j\omega))$$



相位增量: $(n-1)90^\circ$



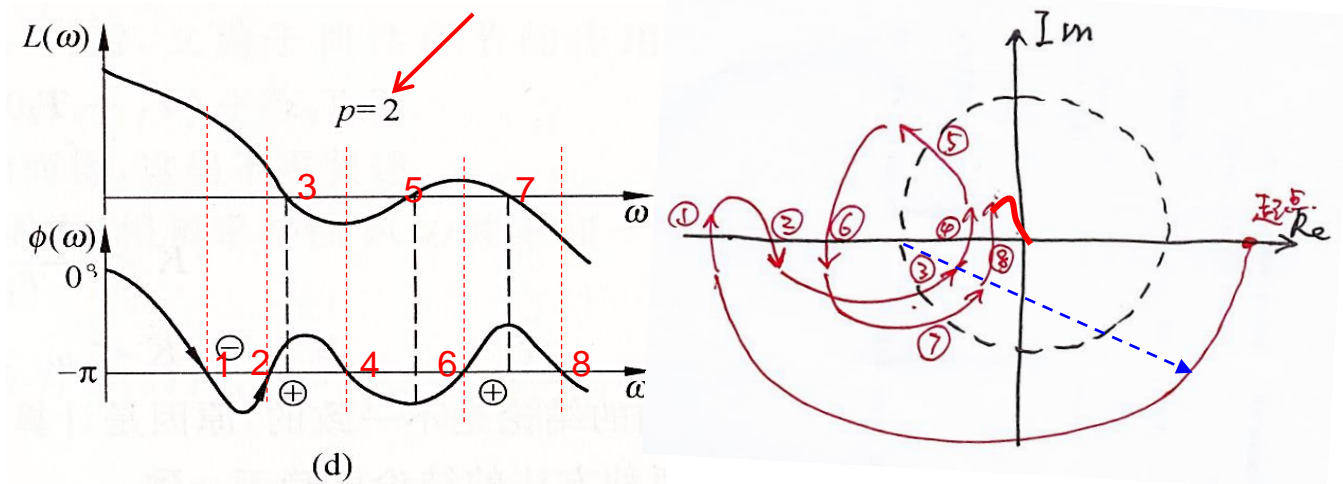
90°

结论: 闭环稳定



伯德稳定性判据例题

例题5-16 (第176页) : 已知条件: 右半平面有2个极点, 也就是说, 开环系统的特征方程存在2个正实部的根。



(1) $\omega \rightarrow 0$, 相位差为0度, 开环为0型;
(2) $p=2$, 右半平面有2个极点, 即开环传递函数的特征多项式分解的因子中有 $(s-a)(s-b)$ 或是 (s^2-as-b) 。

$$\Delta \angle D_b(j\omega) = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle (1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

相位增量: $(n-2)90 - 180$

360°

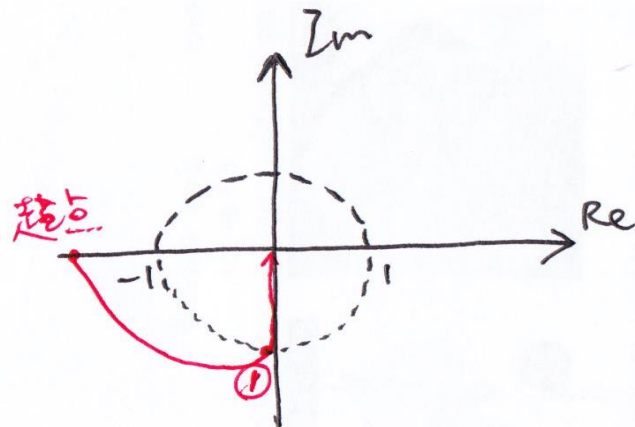
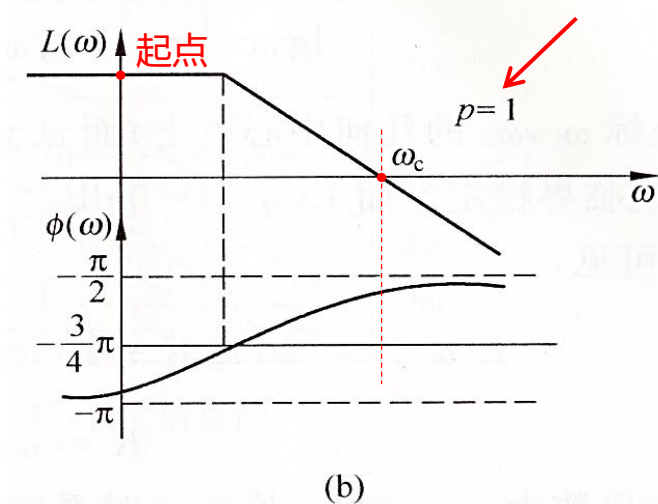
结论: 闭环稳定



伯德稳定性判据例题

例题5-16 (第176页) :

已知条件：右半平面有1个极点，也就是说，开环系统的特征方程存在1个正实部的根。



(1) 开环为0型；

(2) $p=1$, 右半平面有1个极点，即开环传递函数的特征多项式分解的因子中有一项符号为负。

$$\Delta \angle D_b(j\omega) = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle (1 + G(j\omega)H(j\omega))$$



相位增量: $(n-1)90 - 90$

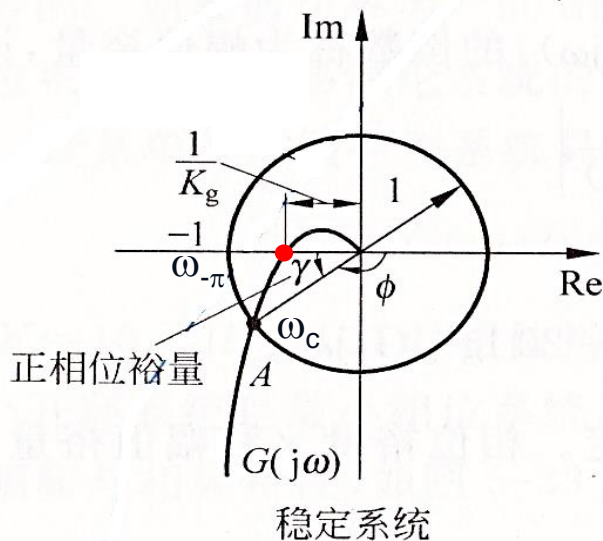
180°

结论：闭环稳定



5.6 控制系统的相对稳定性

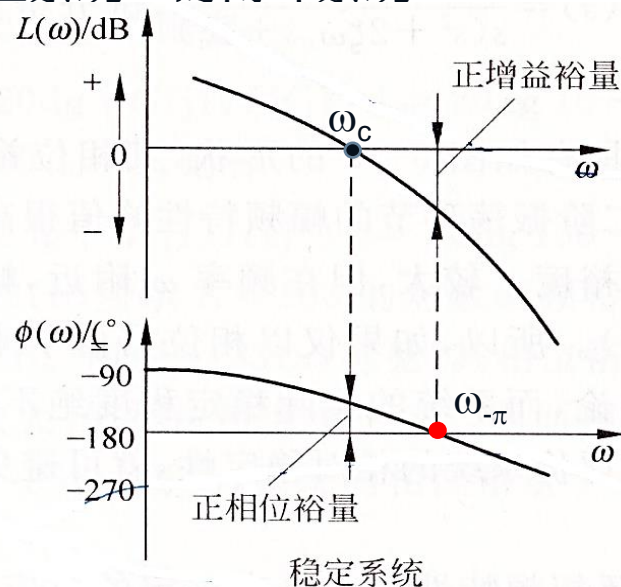
稳定裕量的概念适用于“开环是最小相位系统”的闭环系统。



$$\text{相位裕量} = \Phi(\omega_c) - (-180) > 0$$

$$\text{幅值裕量 } K_g = \frac{1}{|G(j\omega_{-\pi})|} > 1$$

乃氏图



$$\text{相位裕量} = \Phi(\omega_c) - (-180) > 0$$

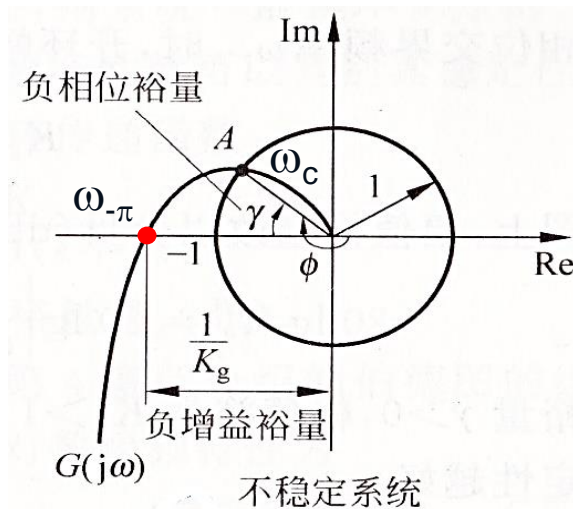
$$\text{幅值裕量} = 0 - 20\lg|G(j\omega_{-\pi})| > 0$$

伯德图



稳定裕量

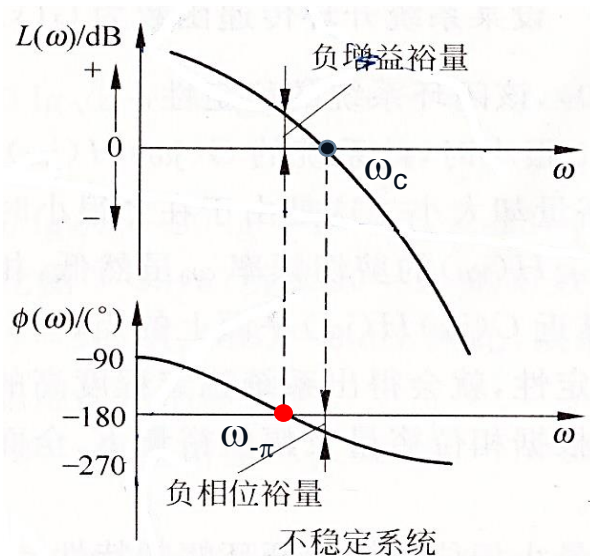
稳定裕量的概念适用于“开环是最小相位系统”的闭环系统。



$$\text{相位裕量} = \Phi(\omega_c) - (-180) < 0$$

$$\text{幅值裕量 } K_g = \frac{1}{|G(j\omega_{- \pi})|} < 1$$

乃氏图



$$\text{相位裕量} = \Phi(\omega_c) - (-180) < 0$$

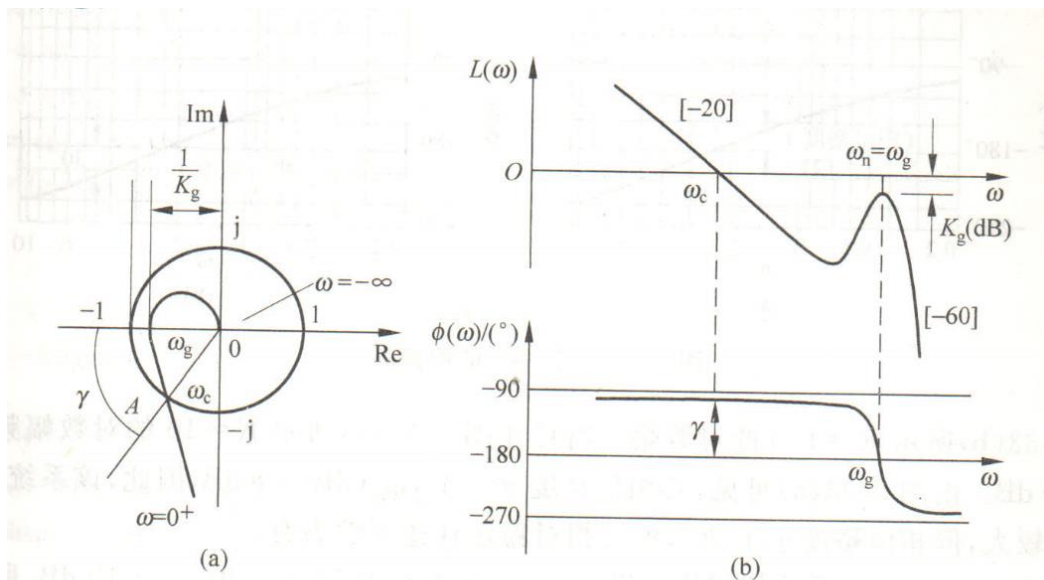
$$\text{幅值裕量} = 0 - 20\lg|G(j\omega_{- \pi})| < 0$$

伯德图



稳定裕量例题

例题5-18（第179页）：设某系统开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{\omega_n}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$ ，试分析当阻尼比很小时（ $\zeta \approx 0$ ），该闭环系统的稳定性。



结论：相位裕度较大，而幅值裕度因阻尼比较小而太小！

图 5-32 例 5-18 的乃氏图和伯德图



希望的稳定裕量

在工程实践中，为使上述系统有满意的稳定储备，一般希望：

$$K_g \geq 2 \quad (\text{即 } 20\lg K_g \geq 6\text{dB})$$

$$\gamma = 30^\circ \sim 60^\circ$$



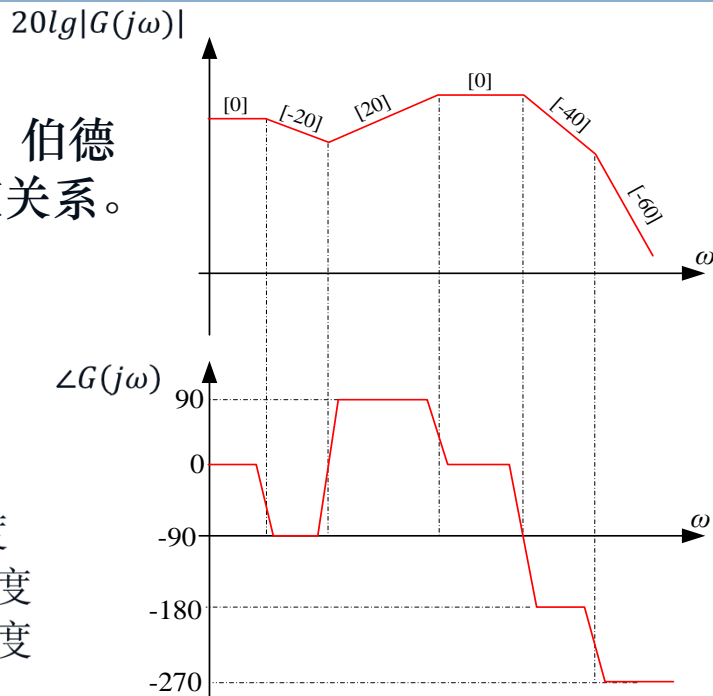
经过 ω_c 线段的斜率 $= -20\text{dB/dec}$



稳定裕量

知识点： 传递函数为最小相位系统的话，伯德图的幅频特性曲线的斜率与相位存在对应关系。

幅频曲线斜率	:	相位
20dB/dec	\rightarrow	90度
0dB/dec	\rightarrow	0度
-20dB/dec	\rightarrow	-90度
-40dB/dec	\rightarrow	-180度
-60dB/dec	\rightarrow	-270度
:		:

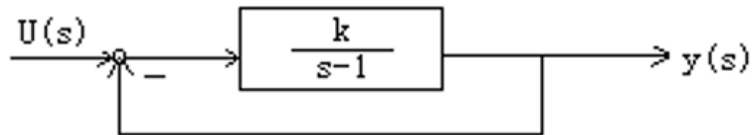


一个重要推论： 开环传递函数是最小相位系统的情况，开环传递函数的伯德图的幅频特性曲线通过0轴线时的斜率大于 -40dB/dec 的话，闭环系统稳定。否则，闭环系统不稳定。（用于理解例题5-18里的说明。）



稳定性分析参考题

1. 考虑下图所示闭环系统及相应Nyquist轨线图，试确定系统稳定性与 k 值关系。



解: $P=1$

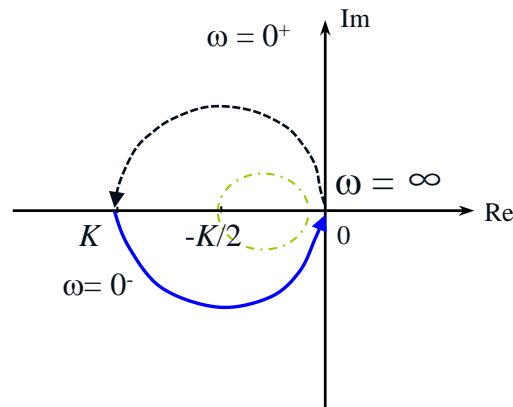
$$N=Z-P$$

所以: $Z=0$ 的充要条件 $N=-1$ (反时针包围 $-1+j0$ 一圈)

$k>1$ -----系统稳定

$k=1$ -----系统处于临界

$k<1$ -----系统不稳定



或
$$\Delta \angle D_b(j\omega) = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle (1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

$1+G(s)H(s)$ 的相位增量: $K>1$ 时 180 度, $K<1$ 时 0 度;

开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量: -90 度;

闭环传递函数 $\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ 的特征多项式的相位增量: 闭环特征多项式为 1 次, 若相位增量为 90 度, 则闭环稳定。



稳定性分析参考题

2. 已知系统开环频率特性为： $G(j\omega) = \frac{K(j\omega+3)}{j\omega(j\omega-1)}$ ，其乃奎斯特图如图所示，试分析 K 值与系统稳定性的关系。

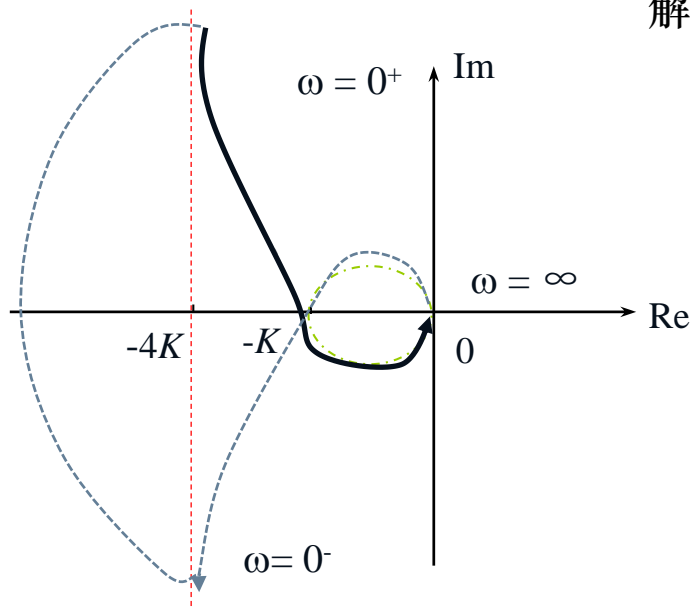
解：（1）整理后系统的开环频率特性：

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+3)}{j\omega(j\omega-1)} = \frac{-4K}{\omega^2+1} + j \frac{K(3-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}$$

幅频特性：

$$|G(j\omega)| = \frac{K\sqrt{\omega^2+9}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{相频特性：} \angle G(j\omega) &= -90^\circ + \arctg \frac{\omega}{3} - (180^\circ - \arctg \omega) \\ &= -270^\circ + \arctg \frac{\omega}{3} + \arctg \omega \end{aligned}$$



稳定性分析参考题

(2) 当 $\omega=0^+$ 时,

$$\left|G(j0^+)\right|=\infty \quad \angle G(j0^+)=-270^\circ \quad \operatorname{Re} G(j0^+)=-4K$$

$$G(j\omega)=\frac{K(j\omega+3)}{j\omega(j\omega-1)}$$

与虚轴交点: 令 $\operatorname{Re} G(j\omega)=0$, 求出 $\omega=\infty$, 即曲线不穿越虚轴

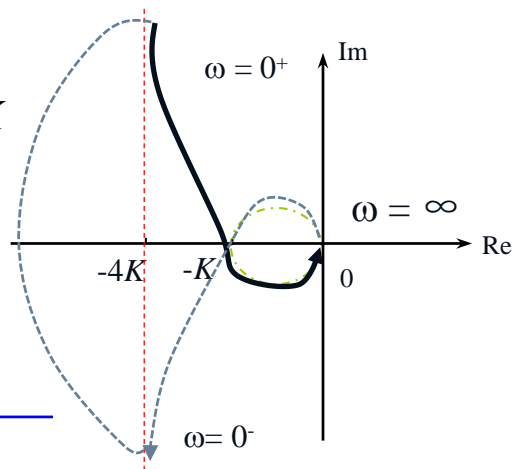
与实轴交点: 令 $\operatorname{Im} G(j\omega)=0$, 求出 $\omega_x=\sqrt{3}$, 曲线穿越实轴, 且 $\operatorname{Re} G(j\omega_x)=K$

(3) 根据乃奎斯特稳定判据, 可对 K 值与系统稳定性的关系作如下讨论:

当 $K>1$ 时, $P=1$, $N=-1$, $Z=N+P=0$, 系统稳定

$K=1$ 时, $G(j\omega)$ 过 $(-1, j0)$ 点, 系统处于临界稳定

$K<1$ 时, $P=1$, $N=+1$, $Z=N+P=2$, 系统不稳定



或
$$\Delta \angle D_b(j\omega) = \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle (1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

$1+G(s)H(s)$ 的相位增量: $K>1$ 时 270 度, $K<1$ 时 -90 度;

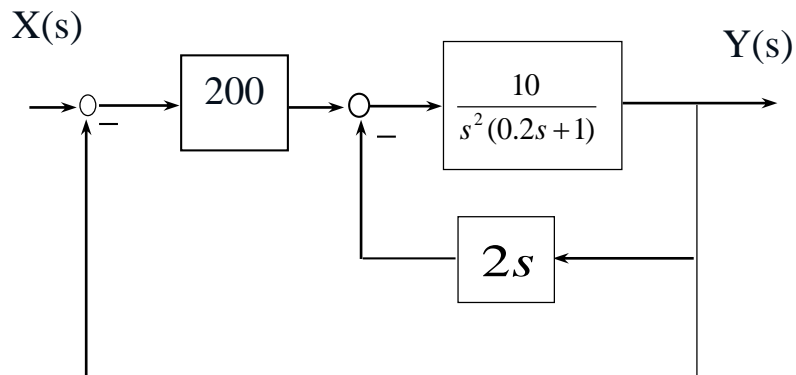
开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的特征多项式的相位增量: -90 度;

闭环传递函数 $\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ 的特征多项式的相位增量: 闭环特征多项式为 2 次, 若相位增量为 180 度, 则闭环稳定。



稳定性分析参考题

3. 系统结构图如下图所示，试用乃氏判据判别其稳定性。



稳定性分析参考题

系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10000}{s(s^2 + 5s + 100)} = \frac{10000}{\omega[-5\omega + j(100 - \omega^2)]} \Big|_{s=j\omega}$$

开环特征多项式 $D_k(j\omega) = s(s^2 + 5s + 100)$

当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时: $\Delta \angle D_k(j\omega) = 0 + \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$

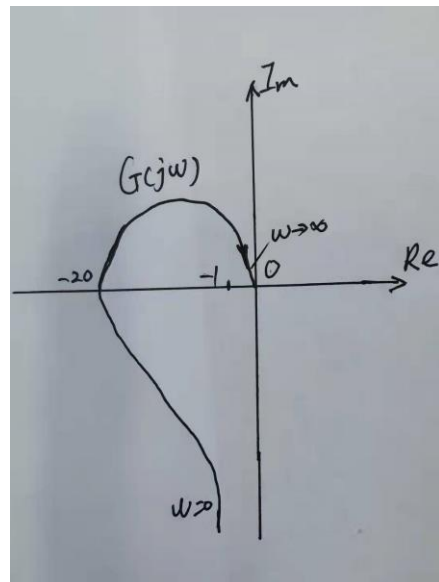
开环传递函数 $G(j\omega)$ 的乃氏图如右图所示,
其与负实轴交点为 $(-20, j0)$, 此时 $\omega_x = 10$

$$\therefore \Delta \angle(1 + G(j\omega)) = (-2\pi) - (-\pi/2) = -\frac{3}{2}\pi$$

而闭环特征多项式为3次, $\therefore \Delta \angle D_b(j\omega) = 3 \times \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$

显然 $\Delta \angle D_b(j\omega) \neq \Delta \angle D_k(j\omega) + \Delta \angle(1 + G(j\omega))$

所以系统闭环不稳定



稳定性分析参考题

$$G(s) = \frac{10000}{s(s^2 + 5s + 100)} = \frac{10000}{\omega \left[-5\omega + j(100 - \omega^2) \right]} \Big|_{s=j\omega}$$

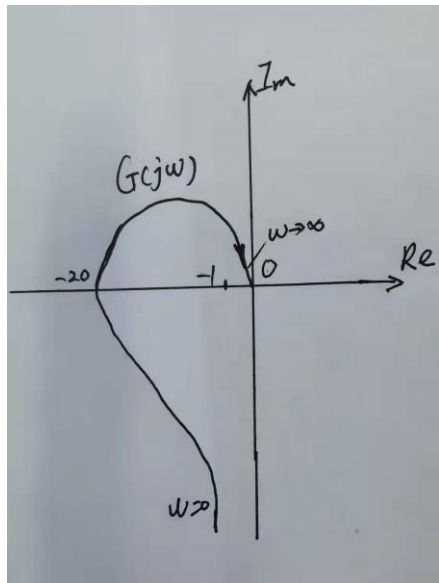
或者：

开环传递函数 $G(j\omega)$ 的乃氏图如右图所示，

其与负实轴交点为 $(-20, j0)$ ，此时 $\omega_x = 10$

由于开环 $G(j\omega)$ 为最小相位系统，其乃氏图包围点 $(-1, j0)$

所以系统闭环不稳定



第五章作业

❖ 课后习题

9 (MatLab) 、 10(MatLab)、

5、 6、 11、 14、 16、 19、 21、 22

