第二章　轴向拉伸与压缩

剪切与挤压（二）

第 3 讲

本次课内容

§ 2.2 轴向拉伸与压缩时横截面上的应力

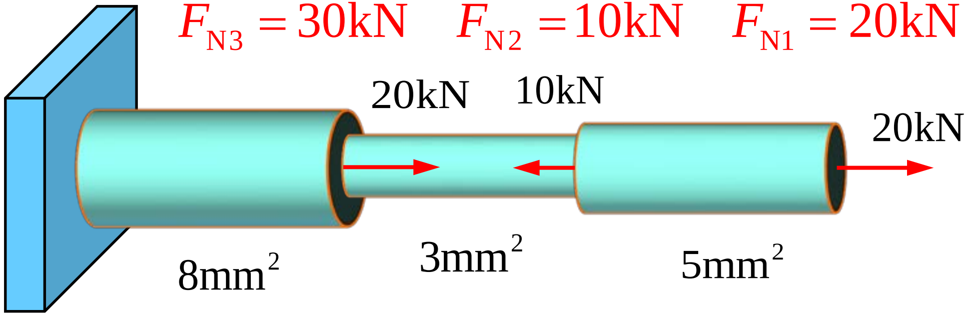
§ 2.3 直杆轴向拉伸与压缩时斜截面上的应力

§ 2.4 轴向拉伸与压缩时的变形   胡克定律

§ 2.2 轴向拉伸与压缩时横截面上的应力

一、应力的概念

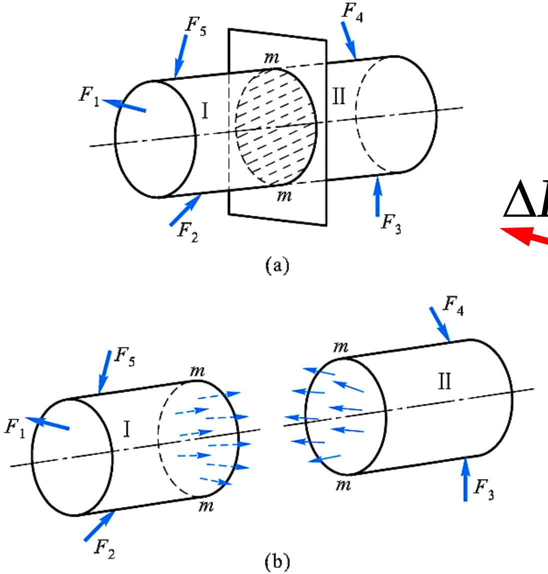
$F_{N3}=30kN$ $F_{N2}=10kN$ $F_{N1}=20kN$

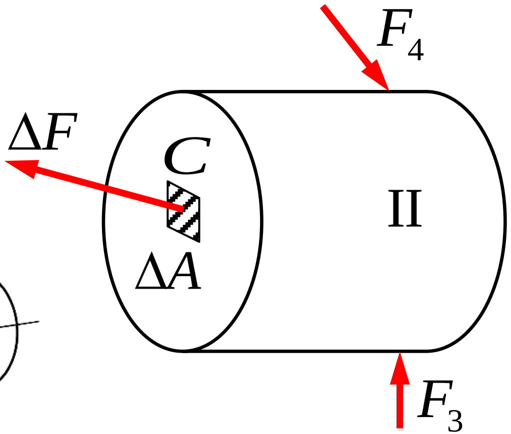


最大轴力所在的横截面称为危险截面！

仅用轴力无法判断出杆件是否会因强度不足而破坏！

内力集度的概念 应力 stress





围绕C点取面积微元ΔA，其上分布内力的合力为ΔF

$$\boxed{p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A}}$$

p_m 为平均集度，称为平均应力

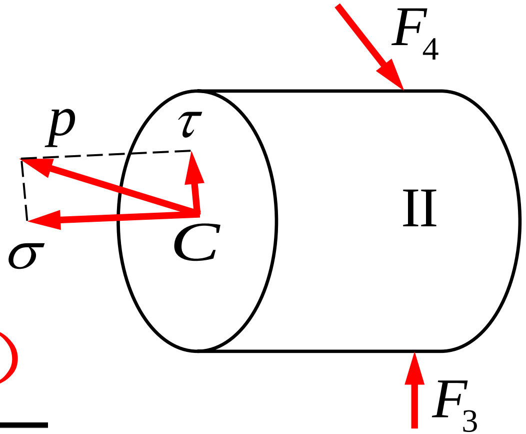
当 $\Delta A \to 0$ 时，p_m 的大小和方向都将趋于一定极限

其极限值 $p = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta A} = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A}$ p称为C点的应力。

应力的定义：

分布内力系在某点的集度称为应力。

注意：应力为矢量，通常既不与截面垂直，
也不与截面相切。



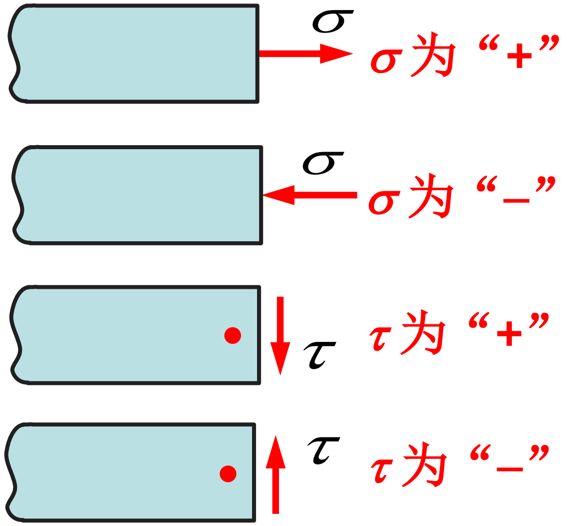
与截面垂直的分量称为正应力（normal stress）
记为 σ， 读作：sigma（西格马）

与截面相切的分量称为切应力（ shear stress ）
记为 τ， 读作：tau（陶）

应力的特征：

1. 应力定义在受力物体的某一截面上的某一点处，
   因此，讨论应力必须明确是在哪一截面上的哪一点处；
2. 应力是矢量。
   通常规定离开截面的正应力为正，指向截面的正应力为负（拉为正压为负）；

   对截面内部（靠近截面）的点产生顺时针转向力矩的切应力为正，反之为负；



应力的特征（续）：

3. 应力的单位（国际单位制）：N/m^2 （ Pa ）；

1kPa （千帕） =10^3 Pa;

1MPa（兆帕）=10^6 Pa = 1 N/mm^2;

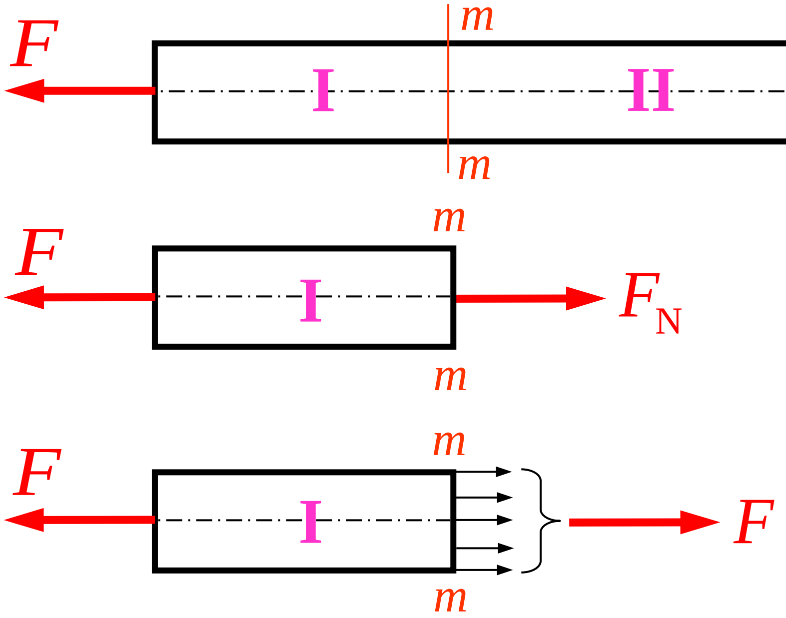
1GPa（吉帕）=10^9 Pa =10^3 MPa

4. 整个截面上各点的应力与微元面积乘积的合成即为该截面上的内力：

$$\boxed{F = \int_A p \mathrm{d}A}$$

二、横截面上的应力

截面法



$$F_N = F$$

$$F = \int_A p\,\mathrm{d}A$$

横截面上的应力？

横截面上的应力

应力的计算

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A}$$

需知道应力的分布形式

已知 $F=\int_A p\mathrm{d}A$

Saint-Venant

(1797-1886)

圣维南(Saint Venant)原理：如用与外力系静力等效的合力来代替原力系，则除在原力系作用区域内有明显差别外，在离外力作用区域略远处（例如， 距离约等于横截面尺寸处），上述代替的影响就非常微小， 可以不计。

考虑两个问题

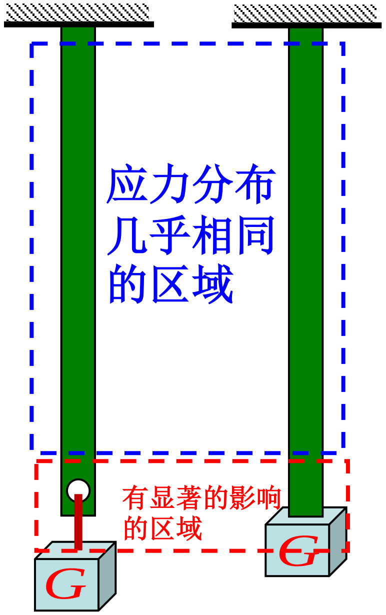
① 两种情形杆内的应力分布相同吗？

答：不相同

② 两种情形需要分开考虑吗？

答：影响大—分开考虑

影响小—不分开考虑



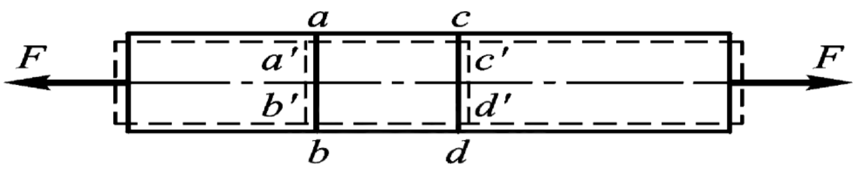
$$F_N=G$$

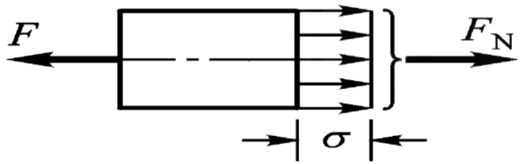
1868年当选为法国科学院院士。在材料力学和弹性力学方面作出很大贡献，提出和发展了求解弹性力学的半逆解法。他重视理论研究成果应用于工程实际，他认为只有理论与实际相结合，才能促进理论研究和工程进步。

轴向拉压杆件横截面上的应力分布形式？

实验观察

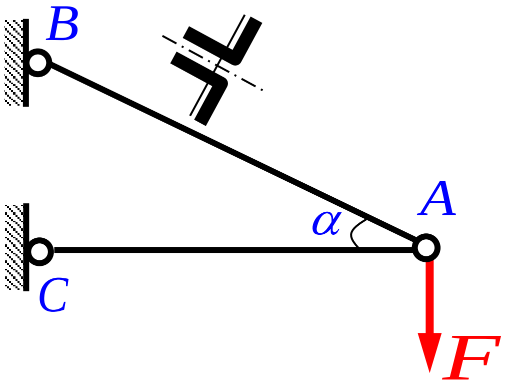
变形前为平面的横截面变形后仍为平面且仍垂直于轴线（平面假设）。即拉压杆在其任意两个横截面之间纵向线段的变形是均匀的，则

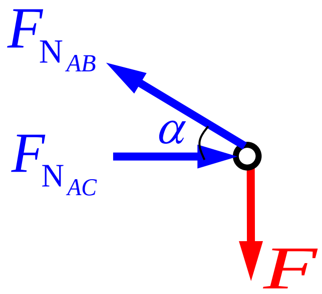




$$\boxed{\sigma = \frac{F_N}{A}}$$

例1 图示起吊三角架，AB 杆由**2根**横截面积为10.86 cm² 的等边角钢组成，F=130 kN，α=30°，求AB杆横截面上的应力。





解：（1）考虑节点A平衡

$$\sum F_y = 0$$

得 $F_{NAB}\sin 30^\circ = F$

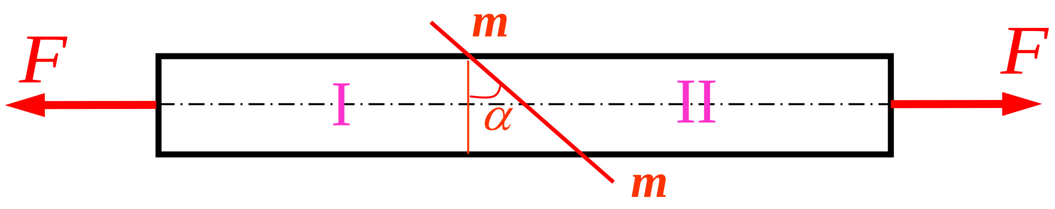
则 $F_{NAB} = 2F = 260\ \text{kN}$(拉)

（2）计算 σ_{AB}

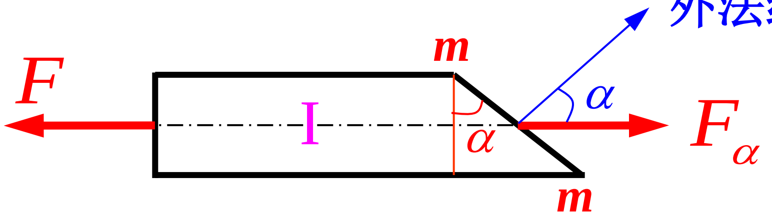
$$\sigma_{AB} = \frac{F_{NAB}}{A} = \frac{260\times10^3}{2\times10.86\times10^{-4}} = 119.7\times10^6\,\text{Pa} = 119.7\ \text{MPa}$$

§ 2.3 直杆轴向拉伸与压缩时斜截面上的应力

一、斜截面上的应力



求斜截面上的内力：截面法

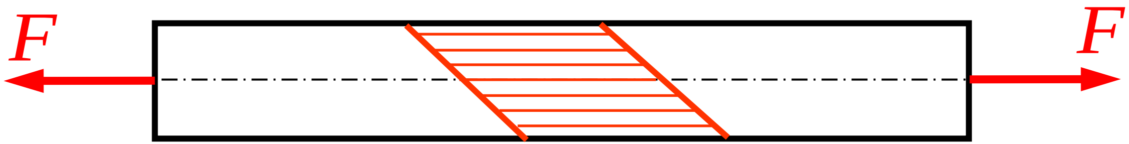


内力大小与截面方位无关！

$$\boxed{F_\alpha = F}$$

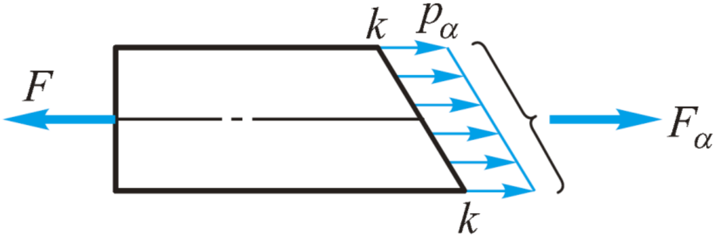
截面方位角：规定α从横截面位置逆时针转动为正！

实验观察（平面假设）



$$p_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F_\alpha}{A/\cos\alpha}$$

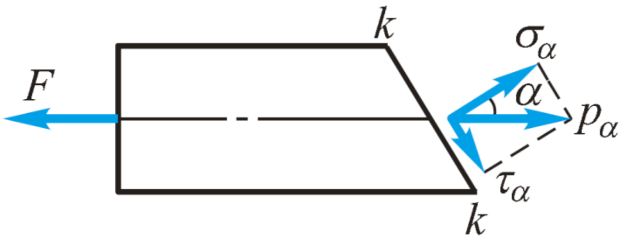
$$= \frac{F}{A}\cos\alpha = \sigma\cos\alpha$$



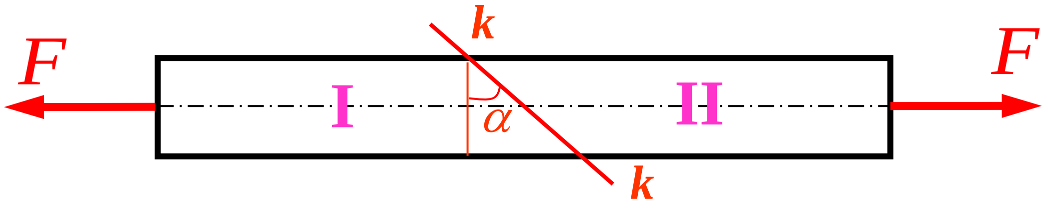
$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \sigma\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha$$



斜截面上的应力



$$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha$$

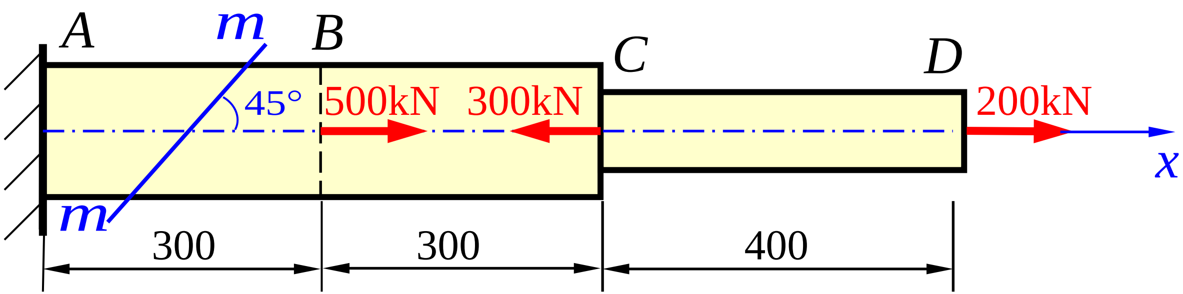
给出了通过杆内任一点处不同方位斜截面上的正应力和切应力随α角而改变的规律。

几个特殊角度的结果：

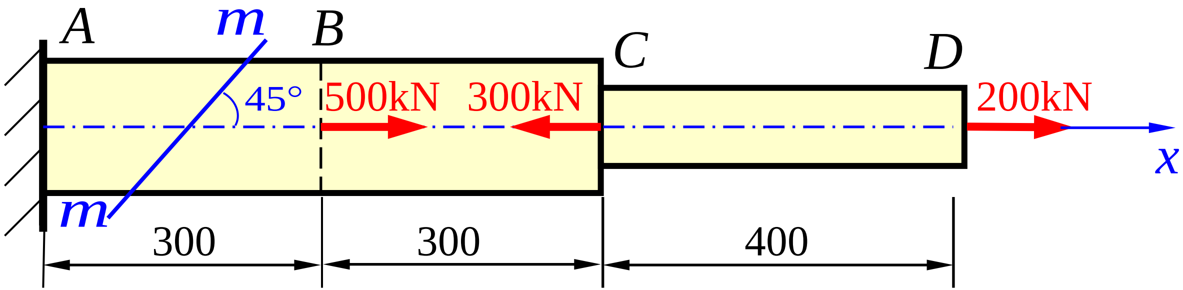
$$\begin{cases}
\alpha = 0: & \sigma_\alpha = \sigma_{\alpha\max} = \sigma; \quad \tau_\alpha = 0. \\
\alpha = 45^\circ: & \sigma_\alpha = \dfrac{\sigma}{2}; \quad \tau_{\alpha\max} = \dfrac{\sigma}{2}. \\
\alpha = 90^\circ: & \sigma_\alpha = 0; \quad \tau_\alpha = 0. \\
\alpha = -45^\circ: & \sigma_\alpha = \dfrac{\sigma}{2}; \quad \tau_{\alpha\min} = -\dfrac{\sigma}{2}.
\end{cases}$$

在研究拉压杆问题中，一点处的应力状态可由其横截面上的正应力完全确定，这样的应力状态称为单轴应力状态。

例题2 已知阶梯形直杆受力如图示，杆AB段的横截面面积为 $A_1 = 2500\text{mm}^2$。



试求：杆AB段上与杆轴线成图示45^{o}角的斜截面上的正应力和切应力。

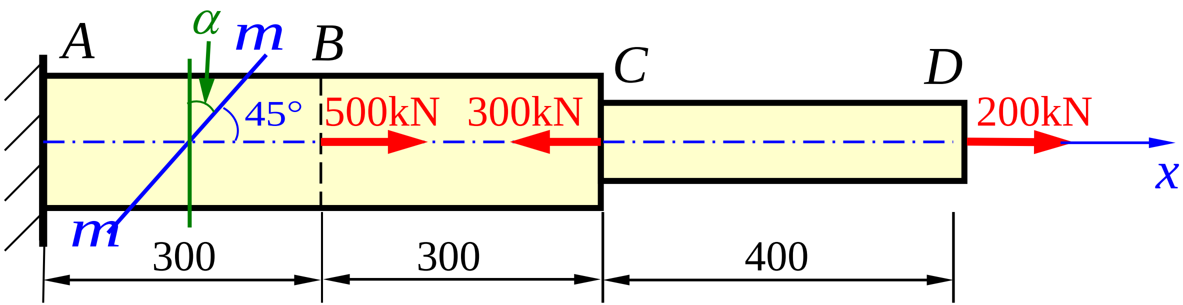


$A_1 = 2500\text{mm}^2$

解：1．计算*AB*段杆横截面上的正应力

$F_{NAB} = 400\text{kN}$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{NAB}}{A_1} = \frac{400\times10^3}{2500\times10^{-6}} = 160\times10^6\,\text{Pa} = 160\text{MPa}$$



解：2．计算AB段杆斜截面上的正应力和切应力

$$\sigma_\alpha = \sigma_{AB}\cos^2\alpha;\quad \tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma_{AB}\sin(2\alpha)$$

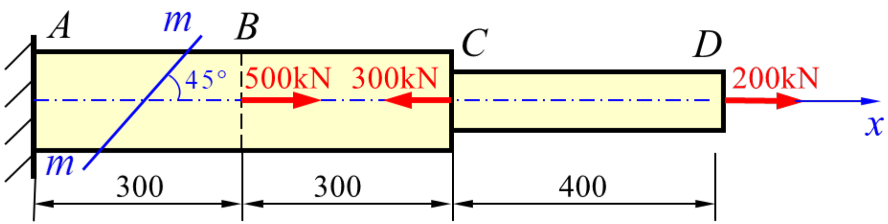
AB段杆横截面上的正应力为：$\sigma_{AB} = 160\text{MPa}$

图示与杆轴线成45°角的斜截面，$\alpha = -45°$（顺时针）

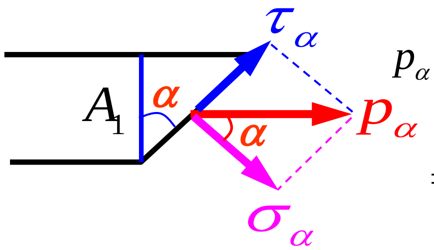
$$\sigma_{-45^\circ} = \sigma_{AB}\cos^2\alpha = 160\times\cos^2(-45^\circ)\text{MPa} = 80\text{MPa}$$

$$\tau_{-45^\circ} = \frac{1}{2}\sigma_{AB}\sin(2\alpha) = \frac{1}{2}\times 160\times\sin\left(-2\times 45^\circ\right)\text{MPa} = -80\text{MPa}$$

讨论：斜截面上应力的另一种求法和截面选取的问题：



（1）取左段研究



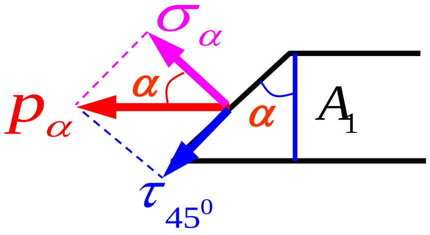
$$p_\alpha = \frac{F_{\mathrm{NAB}}}{A_{mm}} = \frac{F_{\mathrm{NAB}}}{A_1/\cos\alpha}$$

$$= \frac{400\times10^3}{2500\times10^{-6}}\times\cos 45^0 = 80\sqrt{2}\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_\alpha = p_\alpha\cdot\cos\alpha = 80\mathrm{MPa} \qquad (+)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha\cdot\sin\alpha = 80\mathrm{MPa} \qquad (-)$$

（2）取右段研究



$$p_\alpha = \frac{F_{\mathrm{NAB}}}{A_{mm}} = \frac{F_{\mathrm{NAB}}}{A_1/\cos\alpha} = 80\sqrt{2}\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_\alpha = p_\alpha\cdot\cos\alpha = 80\mathrm{MPa} \qquad (+)$$

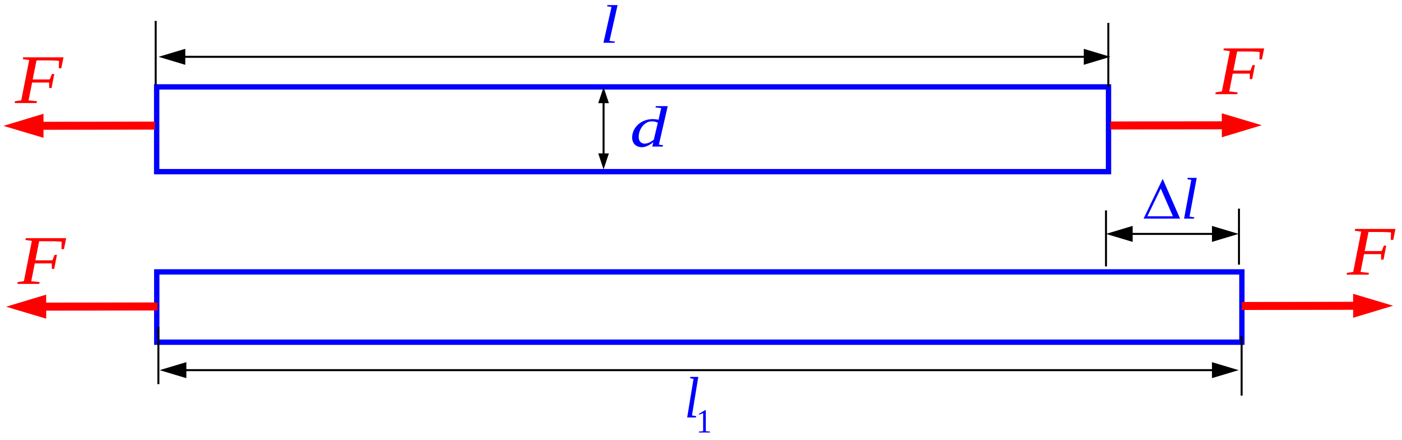
$$\tau_\alpha = p_\alpha\cdot\sin\alpha = 80\mathrm{MPa} \qquad (-)$$

取右段所得的结果与取左段所得的结果完全相同！

§ 2.4 轴向拉伸或压缩时的变形 胡克定律

Deformation of axially loading bar Hooke's Law

一、线应变（也称正应变）



纵向伸长Δl只能反映杆的总变形量，与原长有关，不能说明杆的变形程度。把单位长度的伸长或缩短称为线应变（正应变），符号ε，读作：epsilon（厄普西隆）

应变

strain

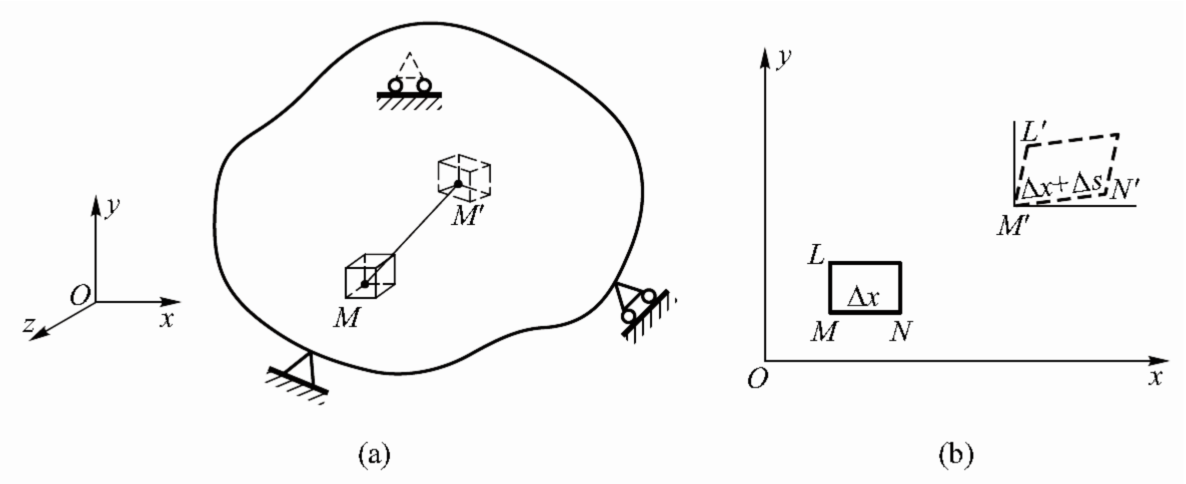
对于伸长均匀的杆，轴向线应变

$$\varepsilon=\frac{l_1-l}{l}=\frac{\Delta l}{l}$$

ε是量纲为一的量

应变的定义（一般形式）

固体的M点因变形移动到M'点， MM' 即为M点的位移



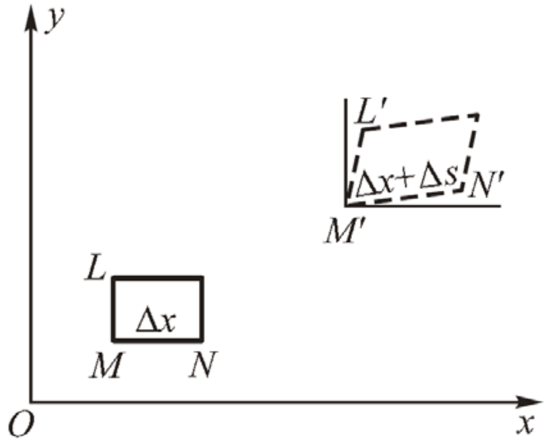
变形前平行于x轴的线段MN，原长为Δx。变形后M和N分别移动到M'和N'， $M'N'$的长度为$\Delta x+\Delta s$。代表线段MN的长度变化量。

平均线应变：$\varepsilon_{\mathrm{m}}=\dfrac{M'N'-MN}{MN}=\dfrac{\Delta s}{\Delta x}$

逐渐缩小N点和M点的距离，使MN趋近于零，则ε_m的极限

$$\varepsilon = \lim_{MN \to 0} \frac{M'N' - MN}{MN} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$$

称为M点沿x方向的线应变（正应变）



变形前MN和ML正交，变形后$M'N'$和$M'L'$的夹角变为$\angle L'M'N'$。变形前、后角度的变化量是 $\frac{\pi}{2} - \angle L'M'N'$，当$N$和$L$都趋近于$M$时，上述角度变化量的极限值 $\gamma = \lim\limits_{\substack{MN \to 0 \\ ML \to 0}} (\frac{\pi}{2} - \angle L'M'N')$

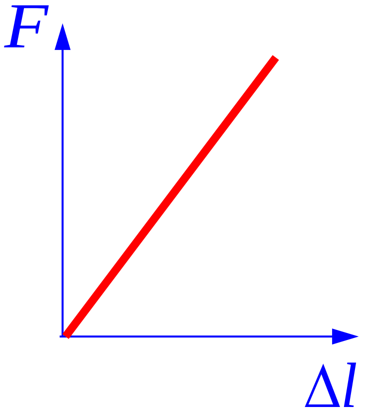
称为M点在x–y平面内的切应变。

正应变和切应变是度量一点处变形程度的两个基本量，量纲为一

二、胡克定律

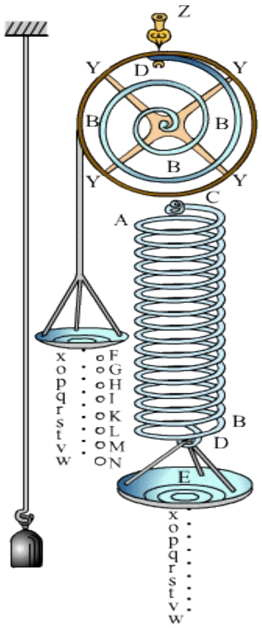
实验表明：

当杆内应力不超过材料的某一极限值（比例极限）时，有



$$\Delta l \propto \frac{F\,l}{A}$$

胡克定律
Hooke's law
(1678年)



胡克实验用装置

Robert Hooke
(胡克1635-1703)
英国科学家，发明家

引入比例常数E，有

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

比例常数 E 称为弹性模量（modulus of elasticity）

物理意义：描述固体材料抵抗变形能力的物理量。

E也称为杨氏模量（Young's Modulus）

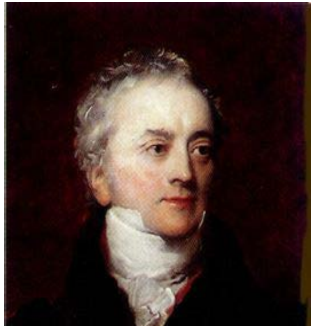
EA 称为杆件的抗拉（抗压）刚度

单位(国际单位制)：N/m^2(Pa);

常用单位：GPa（或MPa）

常用材料的弹性模量

- 橡胶：8 MPa
- 木材：11GPa
- 钢 ：206 GPa
- 钻石：1100 GPa



Thomas Young
(1773 –1829)

1807年英国物理学家托马斯·杨首先引入了弹性模量的概念。

将式 $\Delta l=\dfrac{F_{\mathrm{N}}\,l}{EA}$ 改写为

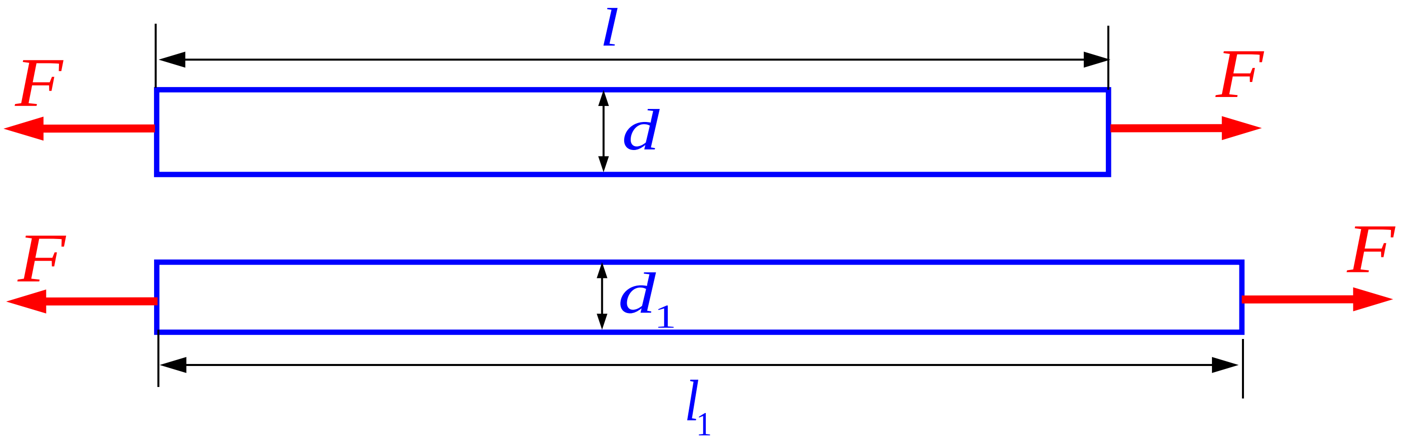
$$\underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{\varepsilon}=\frac{1}{E}\underbrace{\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}}_{\sigma}$$

单轴应力状态下的胡克定律

Hooke’s law

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E} \quad \text{或} \quad \sigma=E\varepsilon$$

三、横向线应变和泊松比



横向线应变（ lateral strain ）： $\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} = \frac{d_1 - d}{d}$

ε'也是量纲为一的量

对于传统材料：

杆件受拉，轴向线应变为正，而横向线应变为负；
杆件受压，轴向线应变为负，而横向线应变为正；
轴向线应变和横向线应变的正负号通常恰好相反。

实验表明，纵向线应变和横向线应变成比例关系。

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, \quad \varepsilon' = -\mu\varepsilon$$

μ 称为横向变形因数或泊松比(Poisson’s Ratio)。

读作：
mu（谬）

Siméon Denis Poisson
(1781–1840)

由法国科学家泊松最先发现并提出的！

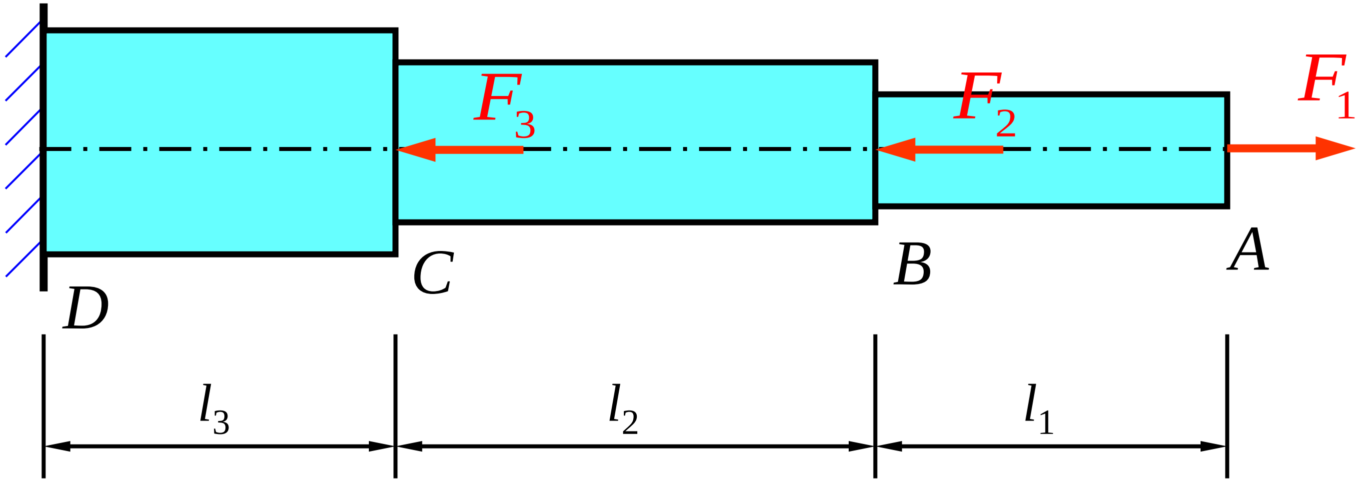
几种常用材料的E和μ值

材料名称	E/GPa	μ
碳钢	196~216	0.24~0.28
合金钢	186~206	0.25~0.30
灰铸铁	78.5~157	0.23~0.27
铜及其合金	72.6~128	0.31~0.42
铝合金	70	0.33

对于常规、传统材料： $0<\mu<1/2$

经典的弹性固体力学已经严格证明：等温条件下各向同性线弹性材料泊松比的取值范围为 $-1\le\mu\le0.5$

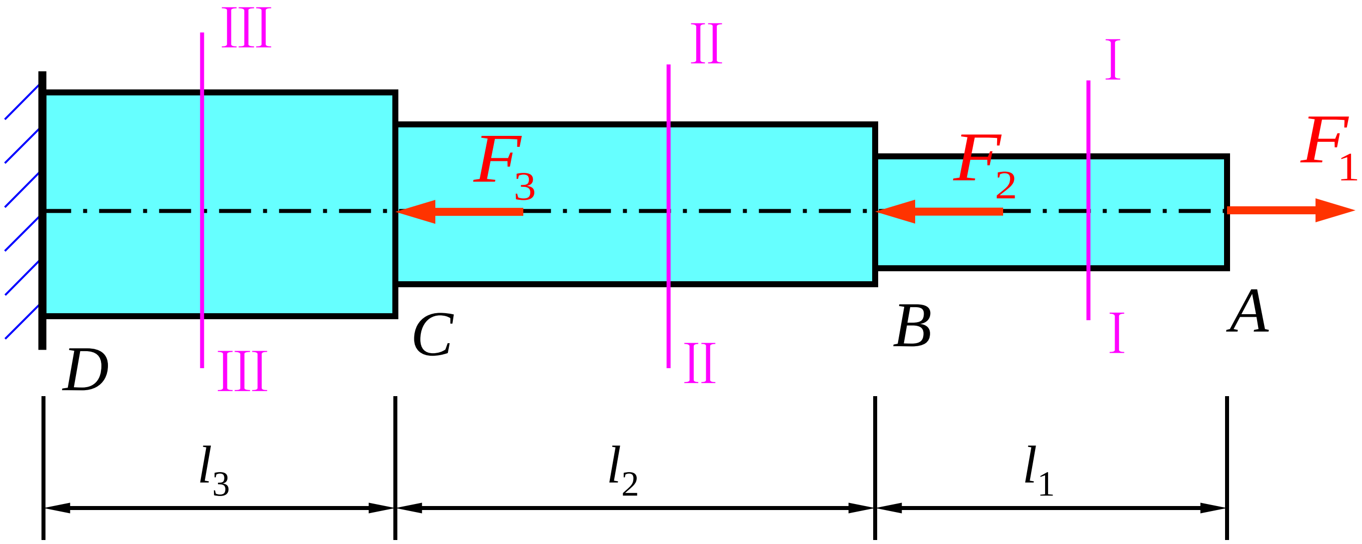
例3 图示阶梯形圆截面杆$ABCD$。已知F_1=20kN，F_2=35kN，F_3=35kN，l_1=l_3=300mm，l_2=400mm，d_1=12mm，d_2=16mm，d_3=24mm。E=210GPa。**试求：**B**截面的位移及**AD**杆的变形。**



解：（1）确定截面 I-I、II-II、III-III的轴力

$$F_{N1}=F_1=20\text{kN}\ (\text{拉})\qquad F_{N2}=F_1-F_2=20-35=-15\,\text{kN}\ (\text{压})$$

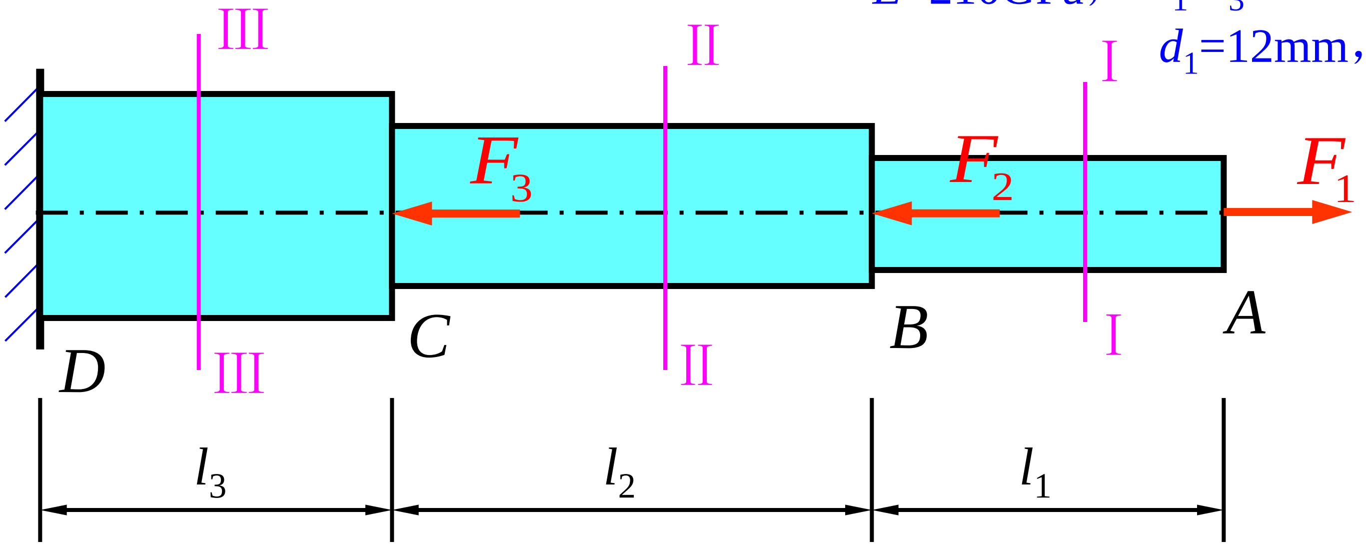
$$F_{N3}=F_1-F_2-F_3=20-35-35=-50\,\text{kN}\ (\text{压})$$



F_1=20kN

F_2=35kN

F_3=35kN



$E=210\text{GPa}$， $l_1=l_3=300\text{mm}$，$l_2=400\text{mm}$

$d_1=12\text{mm}$，$d_2=16\text{mm}$，$d_3=24\text{mm}$

$F_{N1}=20\text{kN}$ (拉)

$F_{N2}=-15\text{kN}$ (压)

$F_{N3}=-50\text{kN}$ (压)

$$\boxed{\Delta l=\frac{F_N l}{EA}}$$

（2） B截面的位移

$$u_B=\Delta l_{CD}+\Delta l_{BC}$$

$$\Delta l_{CD}=\frac{F_{N3}l_3}{EA_3}=\frac{-50\times10^3\times300\times10^3}{210\times10^9\times\frac{1}{4}\times\pi\times(24\times10^{-3})}=-1.58\times10^{-4}\text{m}$$

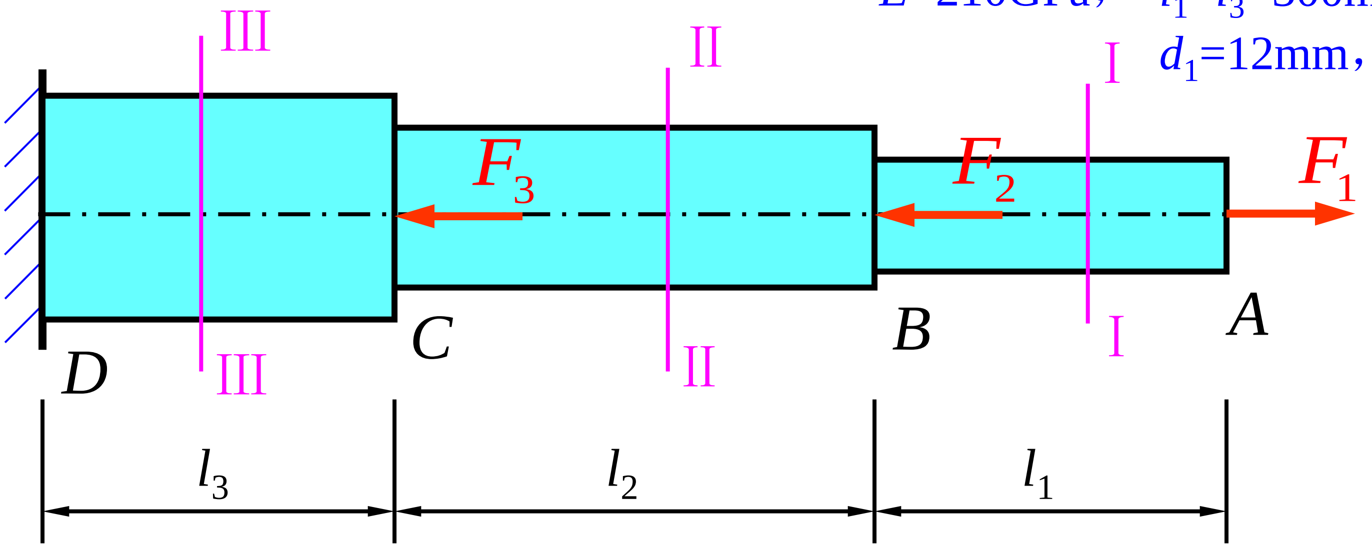
$$\Delta l_{BC}=\frac{F_{N2}l_2}{EA_2}=\frac{-15\times10^3\times400\times10^3}{210\times10^9\times\frac{1}{4}\times\pi\times(16\times10^{-3})}=-1.42\times10^{-4}\text{m}$$

$$u_B=-3.0\times10^{-4}\text{m}$$

$$=-0.3\text{mm}$$

E=210GPa， $l_1=l_3$=300mm， l_2=400mm

d_1=12mm， d_2=16mm， d_3=24mm



$$F_{N1} = 20\text{kN}\ (拉)$$
$$F_{N2} = -15\,\text{kN}\ (压)$$
$$F_{N3} = -50\,\text{kN}\ (压)$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{F_N\, l}{EA}}$$

（3） *AD*杆的变形

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} \qquad \Delta l_{CD} = -1.58\times 10^{-4}\text{m} \qquad \Delta l_{BC} = -1.42\times 10^{-4}\text{m}$$

$$\Delta l_{AD} = -4.7\times 10^{-5}\text{m}$$
$$= -0.047\,\text{mm}$$

$$\Delta l_{AB} = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} = \frac{20\times 10^3 \times 300\times 10^3}{210\times 10^9 \times \frac{1}{4}\times \pi \times (12\times 10^{-3})} = 2.53\times 10^{-4}\text{m}$$

Thank you!

作业　P59-60：2-4，2-5，2-6

下次课的内容：

材料拉伸和压缩时的力学性能及强度计算