第3章 任意力系

§3－1 力对点的矩和力对轴的矩

§3－2 任意力系的简化和合成

§3－3 任意力系的平衡条件和平衡方程

§3-1 力对点的矩和力对轴的矩

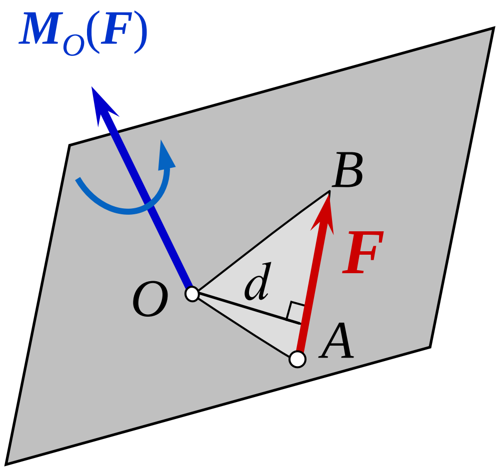
1. 力对点的矩

力使刚体绕某一点转动的效应由力对点的矩度量。

力可以对空间任意一点取矩，力矩应该表示成矢量。

符号：$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$

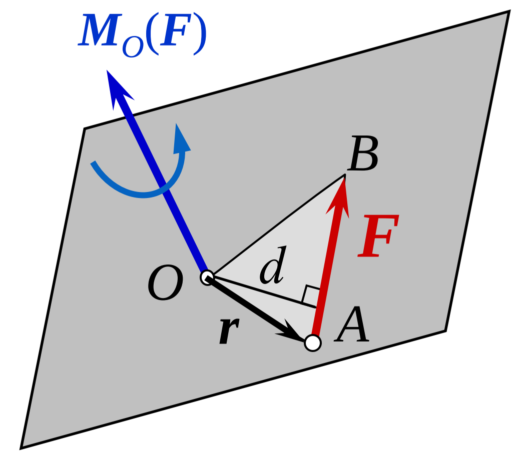
力矩矢$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$**是一个定位矢量，它的大小和方向都与取矩点**$O$**的位置有关。**



§3–1 力对点的矩和力对轴的矩

(1) 力对点之矩的矢积表达式

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$



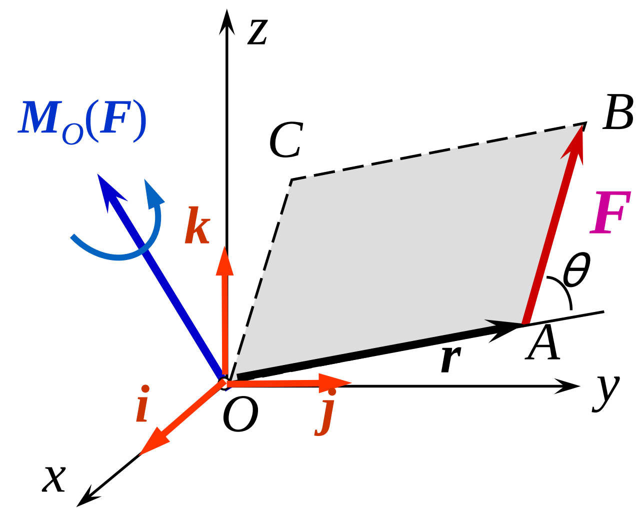
即力对点的矩矢等于矩心到该力作用线上任意点的矢径与该力的矢量差积。

大小: $|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})| = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}|$

$$= rF\sin\theta = Fd$$

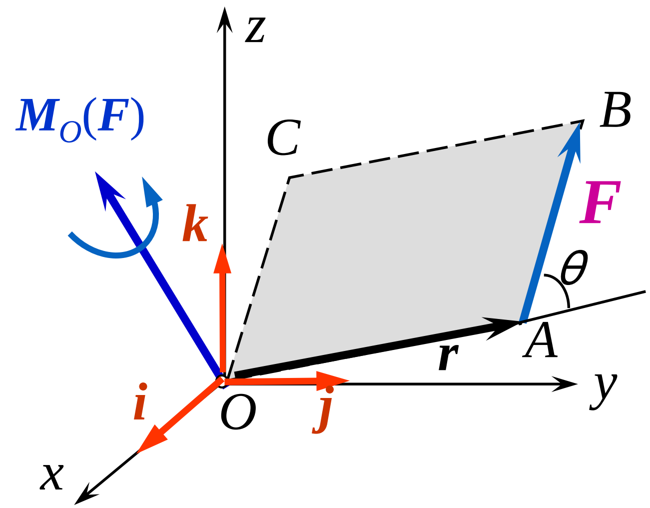
$$|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})| = 2A_{\Delta OAB}$$

方向: **由矢量代数得知$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$垂直于$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{F}$所构成的平面，它的指向用右手定则判定。**



§3–1 力对点的矩和力对轴的矩

(2) 力对点之矩解析表达式



矢径: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

力: $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$

把上两式代入 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

得到力矩在直角坐标系下的解析表达:

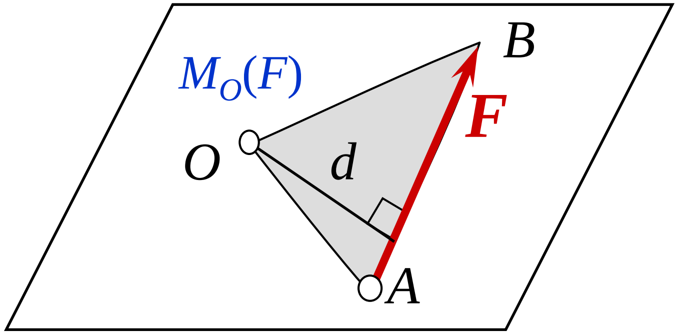
$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \times (F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k})$$

$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

§3-1 力对点的矩和力对轴的矩

(3) 平面内力对点之矩表示为代数量

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm F\,d = 2\,A_{\Delta OAB}$$



O —**矩心**， d —**力臂**。

正负号用以表示力矩转向。

$A_{\Delta OAB}$ **表示力矢量与矩心形成的三角形的面积。**

一般规定：当有逆时针方向转动的趋势时，力矩取正值；反之，当有顺时针方向转动的趋势时，力矩取负值。

§3-1 力对点的矩和力对轴的矩

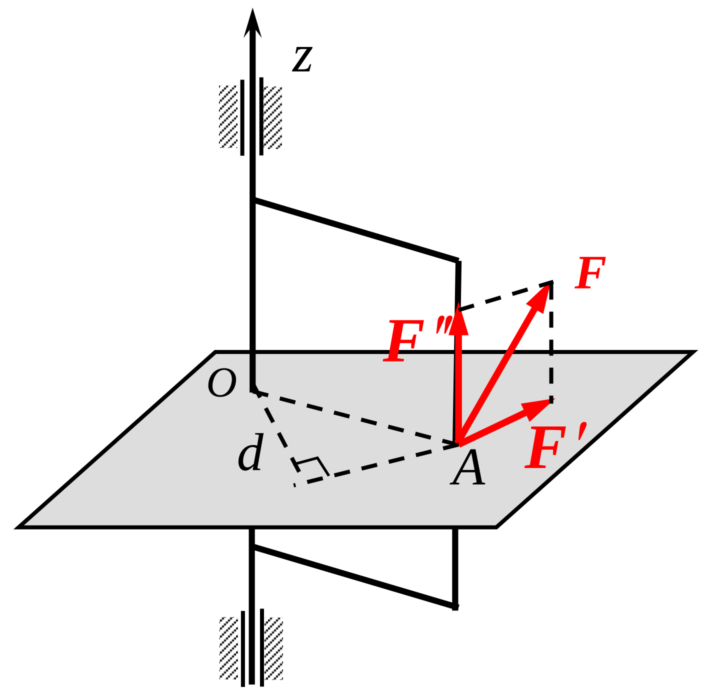
2. 力对轴的矩

力对轴的矩用来量度力使所作用刚体绕轴转动的效应。

- 把力F分解成沿着轴向的分量F''和在该轴垂直面上的投影F': **只有F'对转动有贡献**

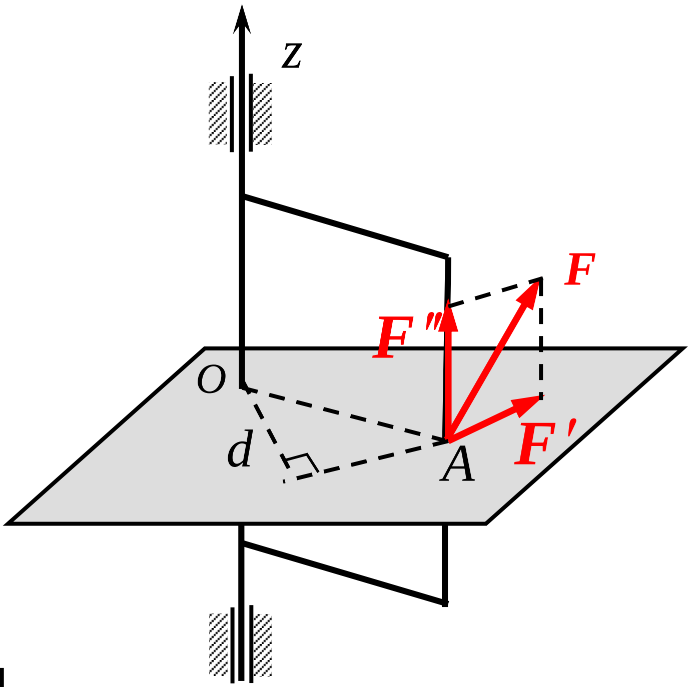
- **力F对任一轴的矩等于此力在该轴的垂直面上的投影F'对投影面和该轴交点O的矩。**

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_z(\boldsymbol{F}') = M_O(\boldsymbol{F}') = \pm F'd$$



§ 3–1 力对点的矩和力对轴的矩

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_z(\boldsymbol{F}') = M_O(\boldsymbol{F}') = \pm F'd$$



即力*F*对任一轴的矩等于此力在该轴的垂直面上的投影对投影面和该轴交点的矩。

正负号规定：

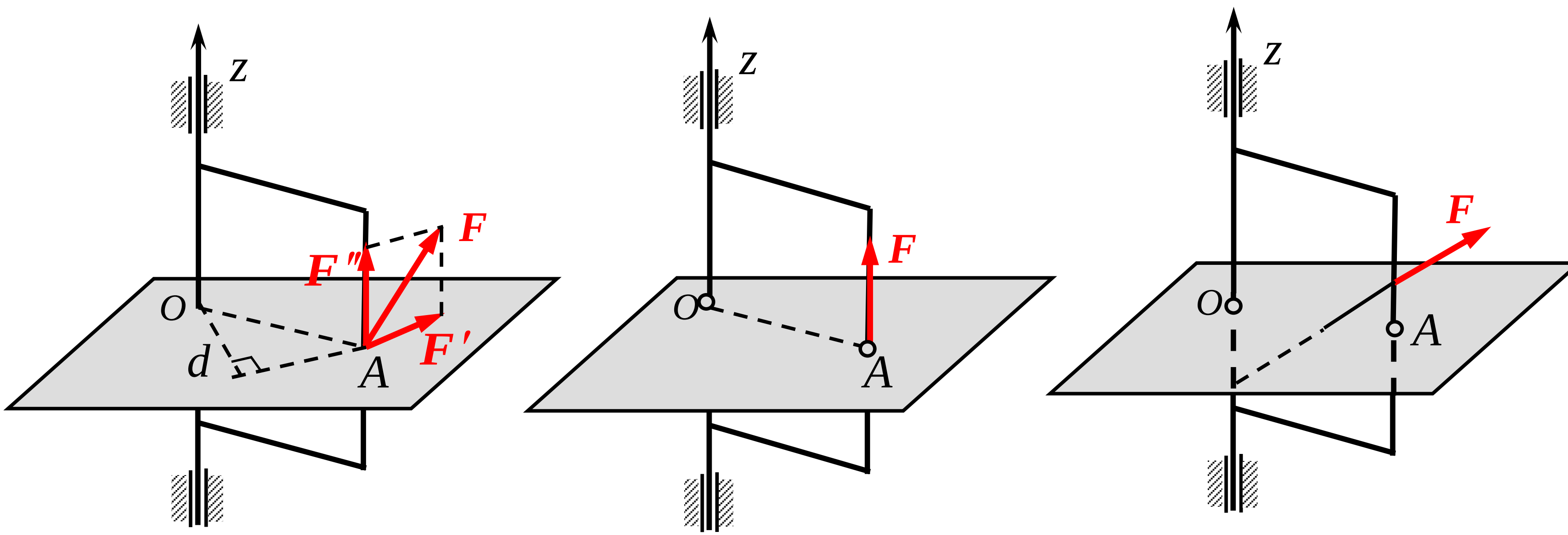
按右手定则：右手握*z*轴，四指指向$\boldsymbol{F}'$方向，如果大拇指指向*z*轴正方向，则取正号；反之，取负号。

§ 3–1 力对点的矩和力对轴的矩

（1）特殊情况

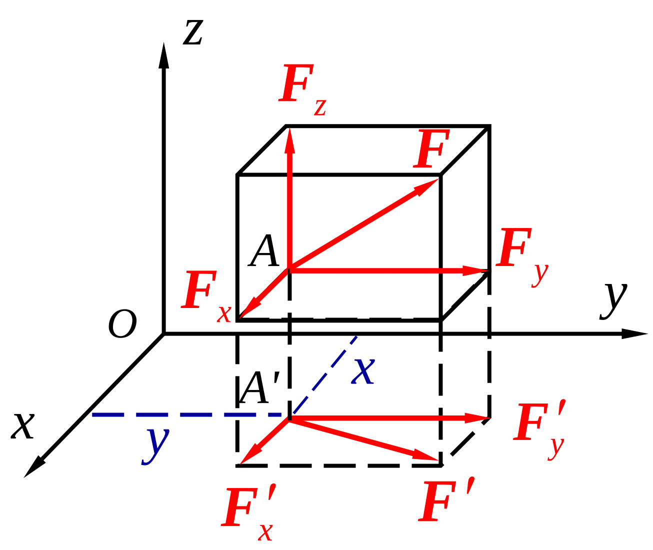
1）力和轴平行，即$F'=0$，力对轴的矩等于零。

2）力的作用线通过该轴，即$d=0$，力对轴的矩等于零。



§3-1 力对轴的矩和力对轴的矩

(2) 力对轴的矩的解析表达式



以(x, y, z)表示力F作用点A的坐标，F_x、F_y、F_z表示力F在各坐标轴上的投影，力F对轴z的矩为

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_z(\boldsymbol{F}_x') + M_z(\boldsymbol{F}_y') = xF_y - yF_x$$

则可得

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z$$

§3-1 力对点的矩和力对轴的矩

3. 力矩关系定理

力对坐标轴的矩的解析表达式为

$$M_x(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y,\quad M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z,\quad M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$

力对原点的矩的解析表达式为

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \left(yF_z - zF_y\right)\mathbf{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\mathbf{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\mathbf{k}$$

比较可得

$$\left[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})\right]_x = M_x(\boldsymbol{F})$$

$$\left[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})\right]_y = M_y(\boldsymbol{F})$$

$$\left[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})\right]_z = M_z(\boldsymbol{F})$$

力对坐标原点的矩在各坐标轴上的投影，等于该力对相应坐标轴的矩。

§3-1 力对点的矩和力对轴的矩

● 力对空间一点矩的计算

若已知力对坐标轴的矩，则反过来可以求得对原点的矩的大小

$$M_O=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}$$

$$=\sqrt{(yF_z-zF_y)^2+(zF_x-xF_z)^2+(xF_y-yF_x)^2}$$

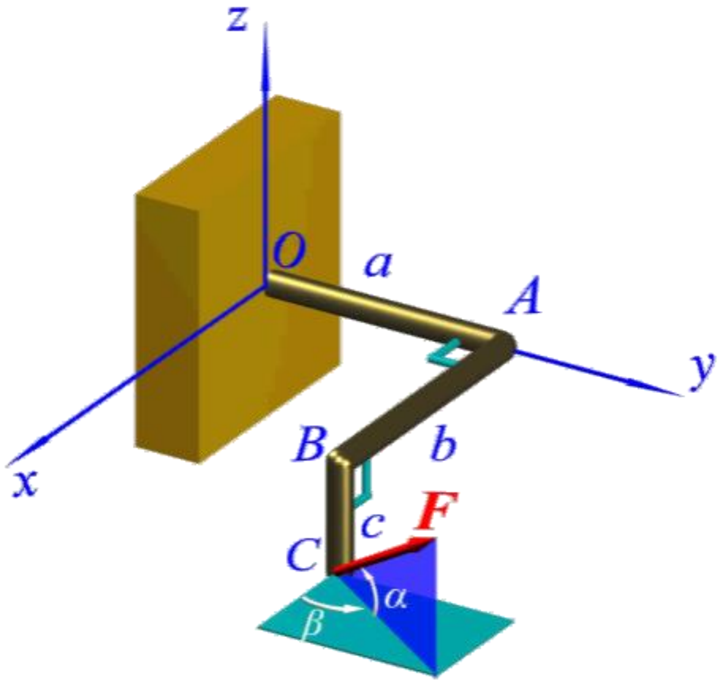
$$\boxed{\begin{aligned}[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x&=M_x(\boldsymbol{F})\\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y&=M_y(\boldsymbol{F})\\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z&=M_z(\boldsymbol{F})\end{aligned}}$$

和方向余弦

$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{i})=\frac{yF_z-zF_y}{M_O},\quad \cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{j})=\frac{zF_x-xF_z}{M_O},\quad \cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{k})=\frac{xF_y-yF_x}{M_O}$$

§ 3–1 力对点的矩和力对轴的矩

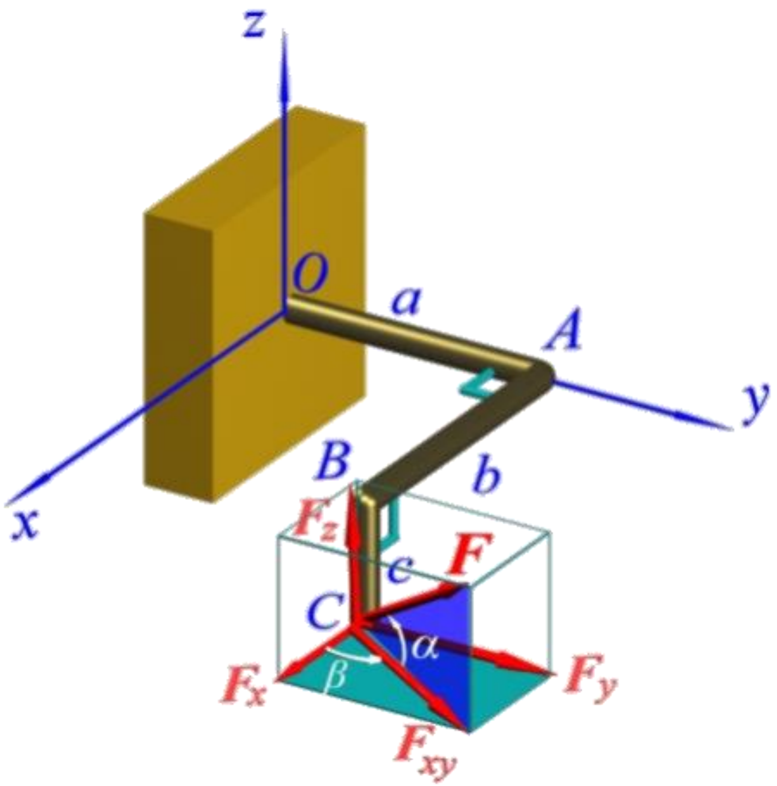
例题3–1 **在直角弯杆的**C**端作用着力**F**，其大小为**F=20 N **试求此力对坐标轴以及坐标原点**O**的矩。已知**$OA=a=6$ m，$AB=b=4$ m，$BC=c=3$ m，$\alpha=30°$, $\beta=60°$。



§3–1 力对点的矩和力对轴的矩

解：

由图示可以求出力F 在各坐标轴上的投影和力F 作用点C 的坐标分别为



$$F_x = F\cos\alpha\cos\beta$$

$$F_y = F\cos\alpha\sin\beta$$

$$F_z = F\sin\alpha$$

$x= b = 4$ m

$y= a = 6$ m

$z= -c = -3$ m

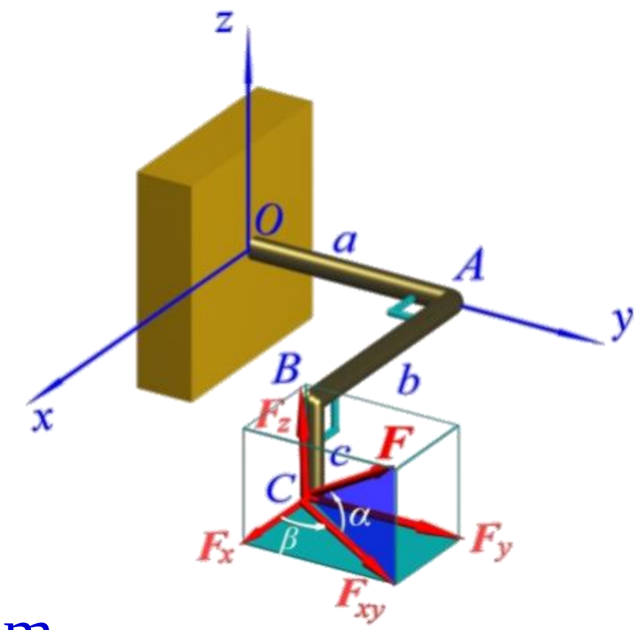
§ 3–1 力对点的矩和力对轴的矩

由

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z$$

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$



可求得力F 对坐标轴之矩为

$$M_x = aF\sin\alpha - cF\cos\alpha\sin\beta = 105\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_y = cF\cos\alpha\cos\beta - bF\sin\alpha$$
$$= -66\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_z = bF\cos\alpha\sin\beta - aF\cos\alpha\cos\beta = 8\ \mathrm{N\cdot m}$$

§3–1 力对点的矩和力对轴的矩

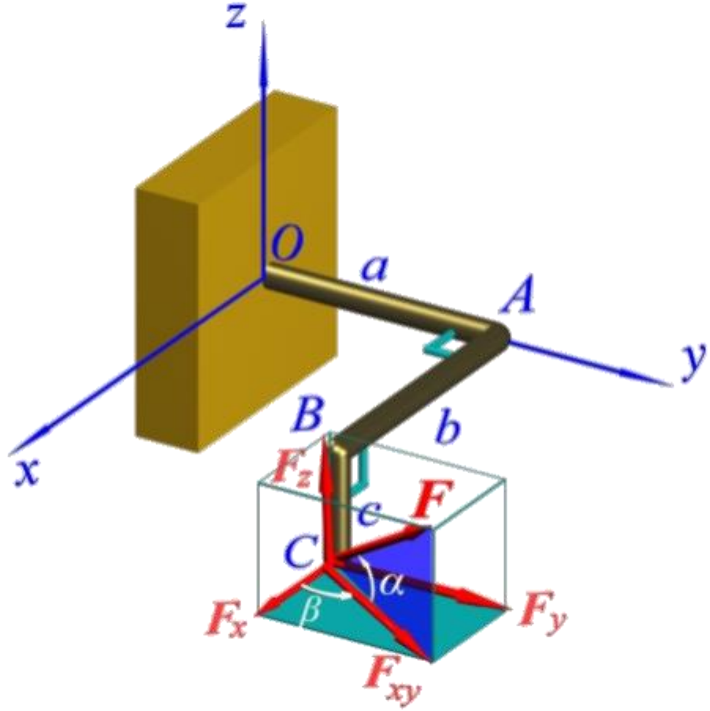
力F 对原点O之矩为 $M_O=\sqrt{M_x{}^2+M_y{}^2+M_z{}^2}=124.3\,\mathrm{N\cdot m}$

力F 对原点O之矩的方向余弦

$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{i})=\frac{M_x}{M_O}=0.845$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{j})=\frac{M_y}{M_O}=-0.531$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{k})=\frac{M_z}{M_O}=0.064$$



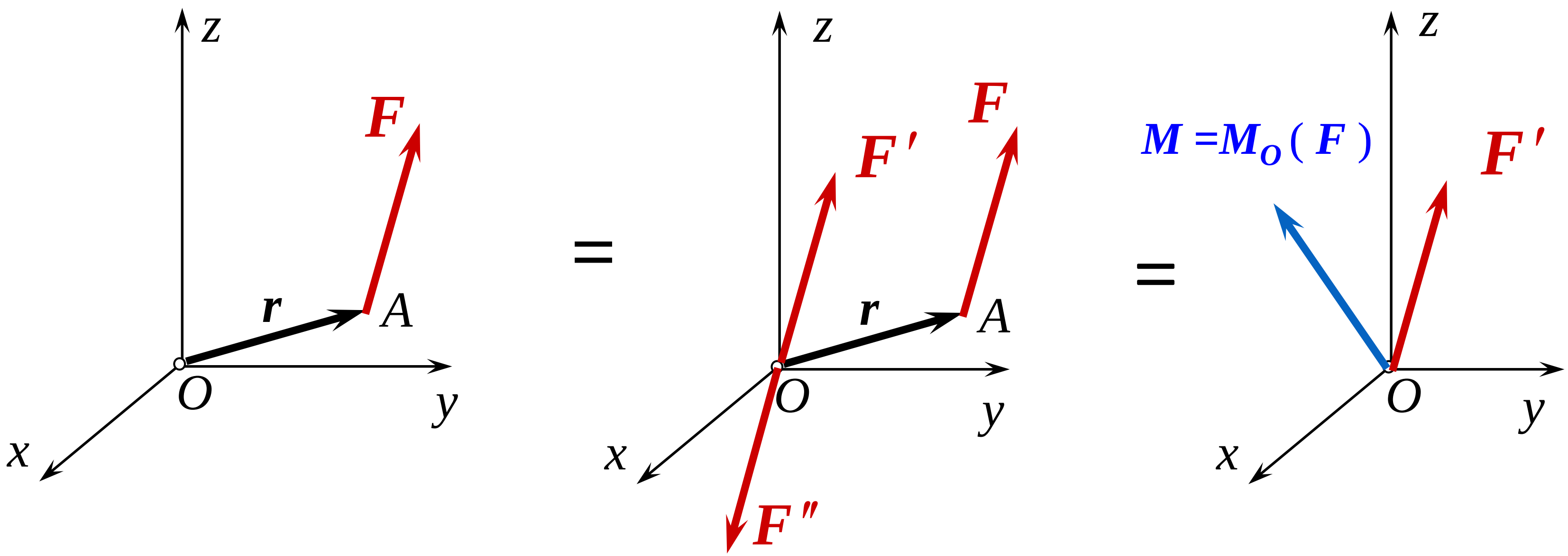
§3-2 任意力系的简化和合成

- 力线平移定理
- 任意力系的简化·主矢和主矩
- 任意力系的合成结果
- 合力矩定理

§3-2 任意力系简化和合成

1. 力线平移定理

把力F 作用线向某点O平移时，必须附加一个力偶，此附加力偶矩矢等于原力F 对点O的矩矢。



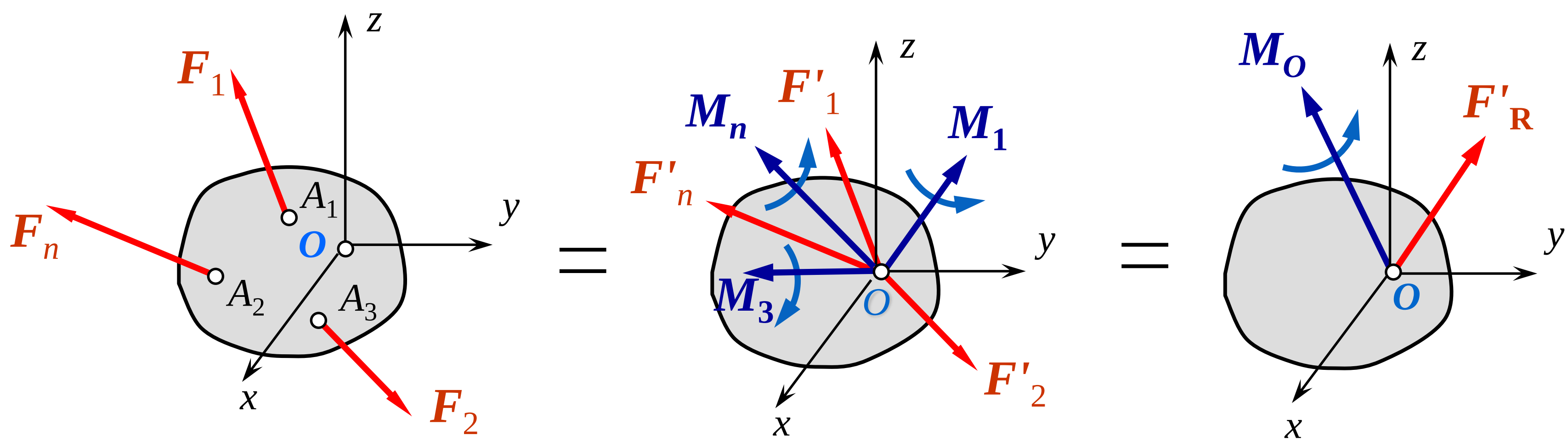
$$\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}'' = \boldsymbol{F}\ ,\qquad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$$

§3-2 任意力系简化和合成

2. 任意力系的简化•主矢和主矩

(1) 空间任意力系的简化•主矢和主矩

空间任意力系向任一点简化后，一般得到一个力和一个力偶。这个力称为原力系的主矢，它等于力系中所有各力的矢量和；这个力偶称为该力系简化中心的主矩，它等于力系中所有各力对该简化中心的矩之矢量和。



§3-2 任意力系简化和合成

空间任意力系对简化中心*O*的

主矢 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}=\sum \boldsymbol{F}_i$

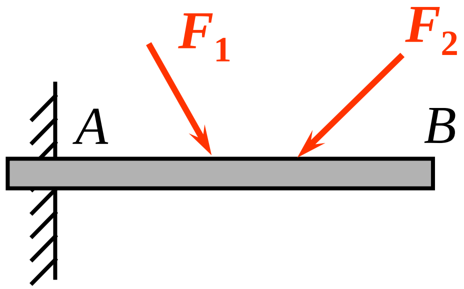
主矩 $\boldsymbol{M}_O=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$

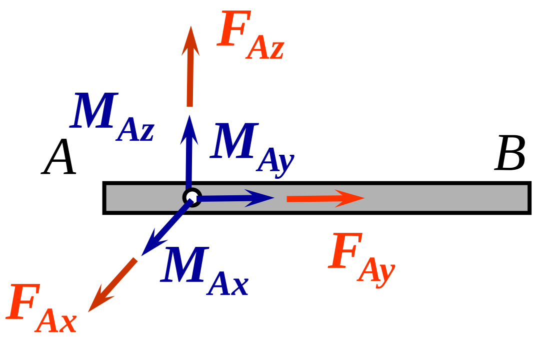
结论

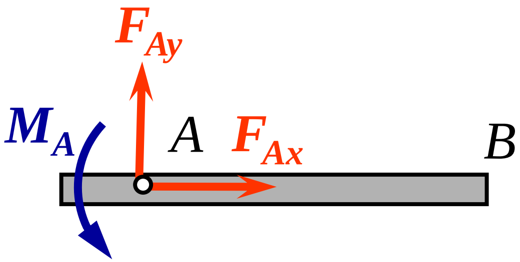
- 主矢，它等于力系中所有各力的矢量和，作用在简化中心*O*，它与简化中心的位置无关。
- 主矩，它等于力系中所有各力对该简化中心的矩之矢量和，主矩则一般与简化中心的位置有关。

§ 3-2 任意力系简化和合成

（4）固定端（插入端）约束：既限制平动，又限制转动







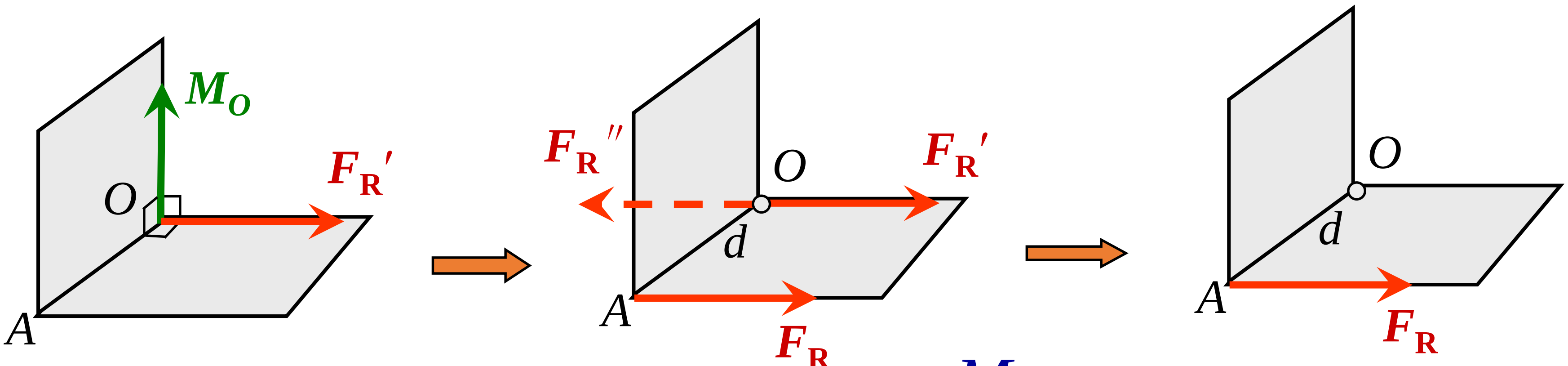
空间：3个约束力和3个约束力矩

平面： 2个约束力和1个约束力矩

§3-2 任意力系简化和合成

力系合成为合力

● $F_R'\neq 0$，$M_O\neq 0$，且$F_R'\perp M_O$。则该力系可以合成为一个合力F_R。

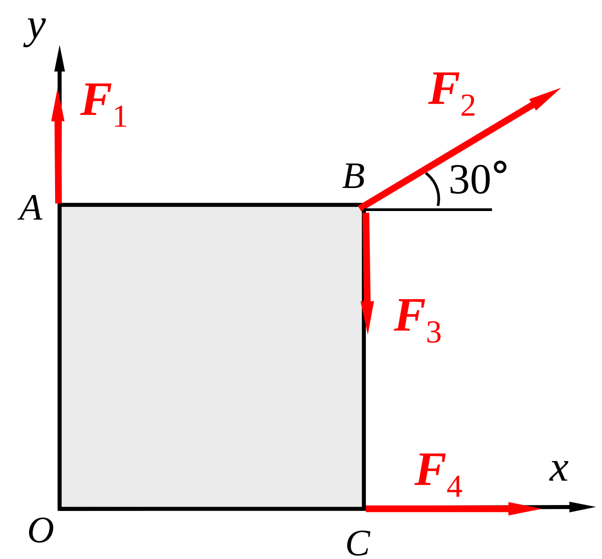


$$F_R = -F_R'' = F_R'$$

$$d = \frac{M_O}{F_R'}$$

§3-2 任意力系简化和合成

例题3-2 **正方形平板**$OABC$**的边长**b=4m，**分别作用有四个力**F_1=2 kN、F_2=4 kN、 F_3=2 kN 、F_4=3 kN（**如图所示**），**试求以上四个力构成的力系对点**O**的简化结果，以及该力系的最后的合力。**



解：取坐标系Oxy。

（1）求向O点简化的结果。

- 求主矢F'_R。

$$F'_{Rx}=\sum F_x$$
$$=F_2\cos 30^\circ+F_4=6.64\ \text{kN}$$

$$F'_{Ry}=\sum F_y$$
$$=F_1+F_2\sin 30^\circ-F_3=2\ \text{kN}$$

§3-2 任意力系简化和合成

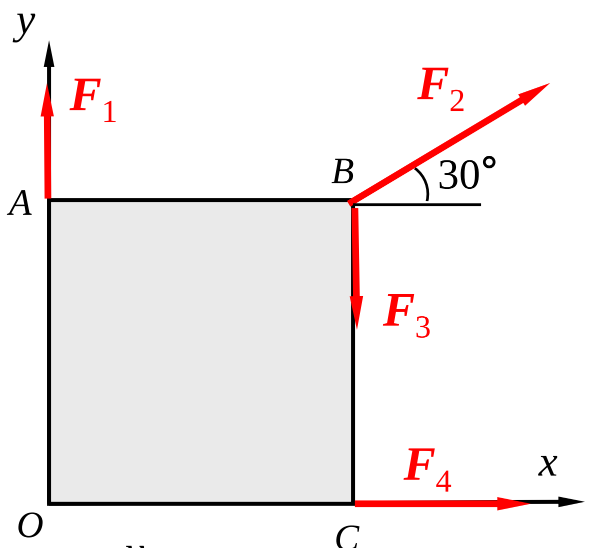
$$F'_{\mathrm{R}} = \sqrt{F'^2_{\mathrm{R}x} + F'^2_{\mathrm{R}y}} = 6.67\ \mathrm{kN}$$

$$\cos\left(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{i}\right) = \frac{F'_{\mathrm{R}x}}{F'_{\mathrm{R}}} = 0.9553$$

$$\Rightarrow \angle\left(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{i}\right) = 17°12'$$

$$\cos\left(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{j}\right) = \frac{F'_{\mathrm{R}y}}{F'_{\mathrm{R}}} = 0.2957$$

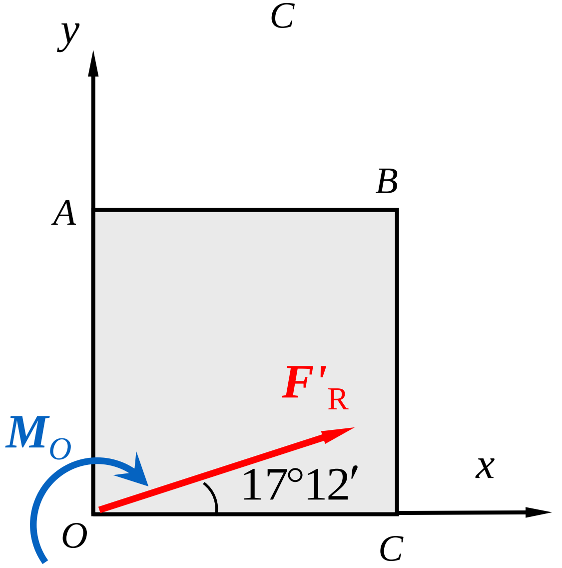
$$\Rightarrow \angle\left(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{j}\right) = 72°48'$$



- 求主矩。

$$M_O = \sum M_O\left(\boldsymbol{F}_i\right)$$

$$= b(F_2 \sin 30° - F_2 \cos 30° - F_3) = -13.9\ \mathrm{kN \cdot m}$$

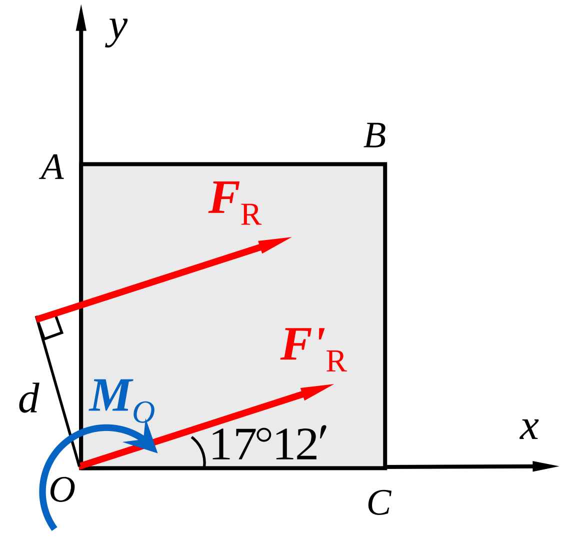


§3-2 任意力系简化和合成

（2）求合力。

合成为一个合力F_R，F_R的大小、方向与F'_R相同。其作用线与O点的垂直距离为

$$d=\frac{|M_O|}{F'_R}=2.08\ \text{m}$$



§3-3 任意力系的平衡条件和平衡方程

- 任意力系的平衡条件
- 任意力系的平衡方程

§3-3 任意力系的平衡条件和平衡方程

1. 空间任意力系平衡的充要条件

力系中所有各力的矢量和等于零，以及这些力对任何一点的矩的矢量和也等于零。

矢量方程 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}' = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$ ， $\boldsymbol{M}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{0}$

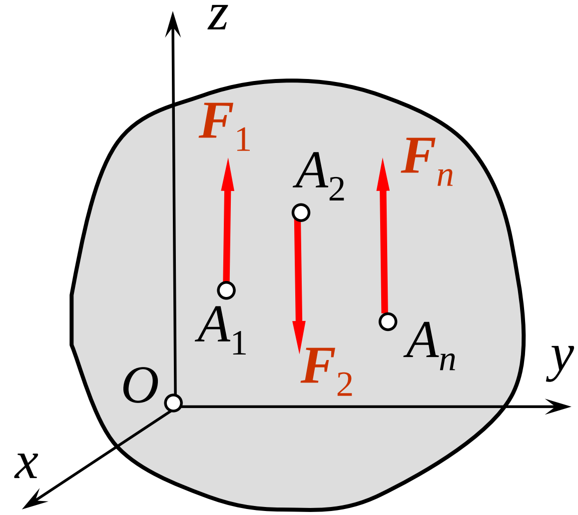
直角坐标系下的平衡方程

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0 \end{array}}$$

§3-3 任意力系的平衡条件和平衡方程

对于空间平行力系，在上式中有

$$\sum F_x \equiv 0, \quad \sum F_y \equiv 0, \quad \sum M_z \equiv 0$$

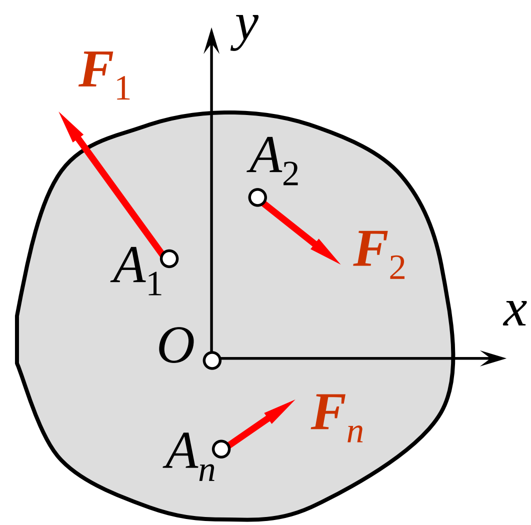


可见，空间平行力系的平衡方程只有三个

$$\sum F_z = 0, \quad \sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0$$

§ 3-3 任意力系的平衡条件和平衡方程

2. 平面任意力系的平衡方程



空间任意力系的平衡方程为

$$\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum F_z = 0$$

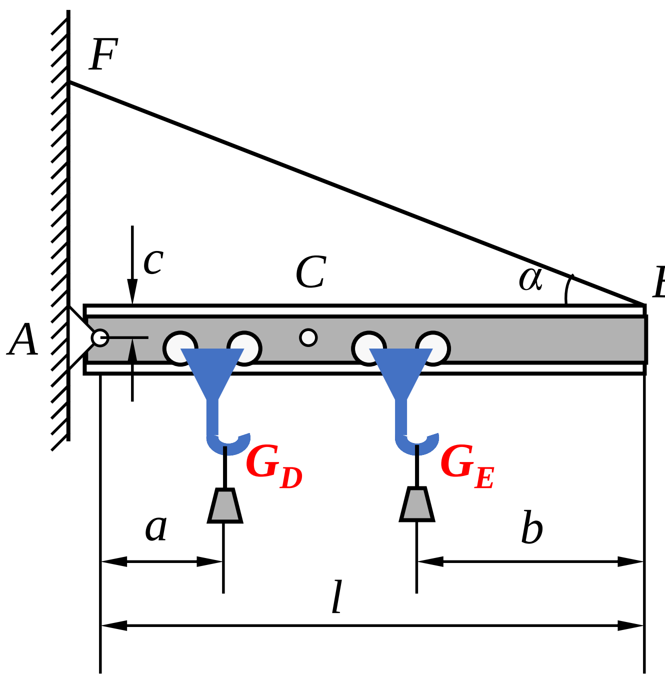
$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0,\quad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0,\quad \sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0$$

平面任意力系的平衡方程只有三个

$$\boxed{\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0}$$

§ 3-3 任意力系的平衡条件和平衡方程

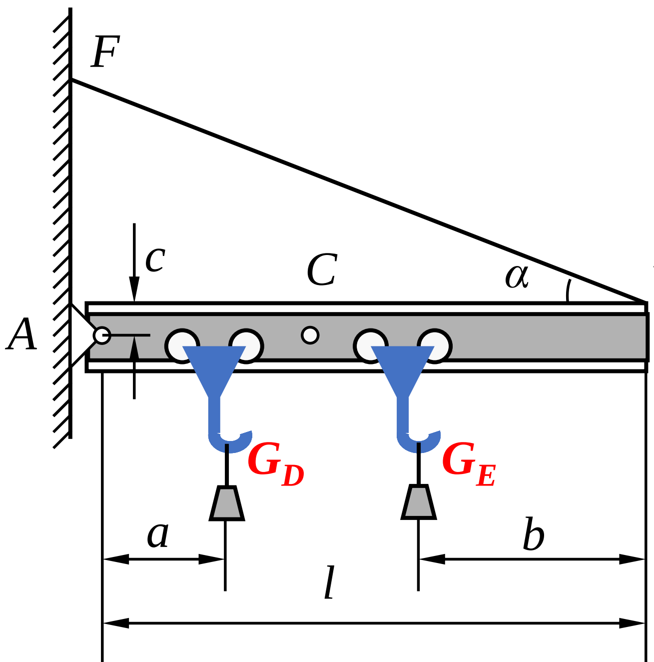
例题3-3 **伸臂式起重机如图所示，均质伸臂**AB**重**$G=2\ 200$ N，**吊车**D、E**连同吊起重物各重**$G_D=G_E=4\ 000$ N。**有关尺寸为** $l=4.3$ m，$a=1.5$ m，$b=0.9$ m，$c=0.15$ m, α=25°。**试求铰链**A**对臂**AB**的水平和垂直约束力，以及拉索**BF**的拉力。**

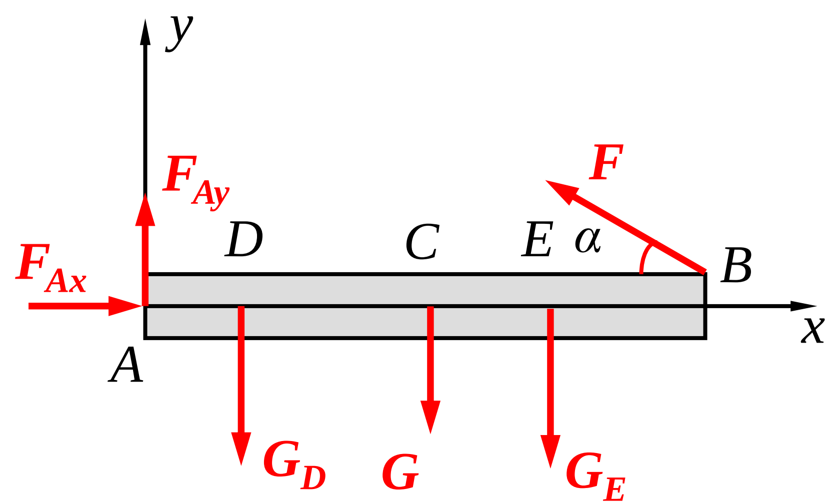


解：

(1) **取伸臂**AB**为研究对象。**

(2) **受力分析如图所示。**





平面任意力系的平衡方程：

$$\boxed{\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0}$$

(3) 选如图坐标系，列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ax} - F\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad F_{Ay} - G_D - G - G_E + F\sin\alpha = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0,$$

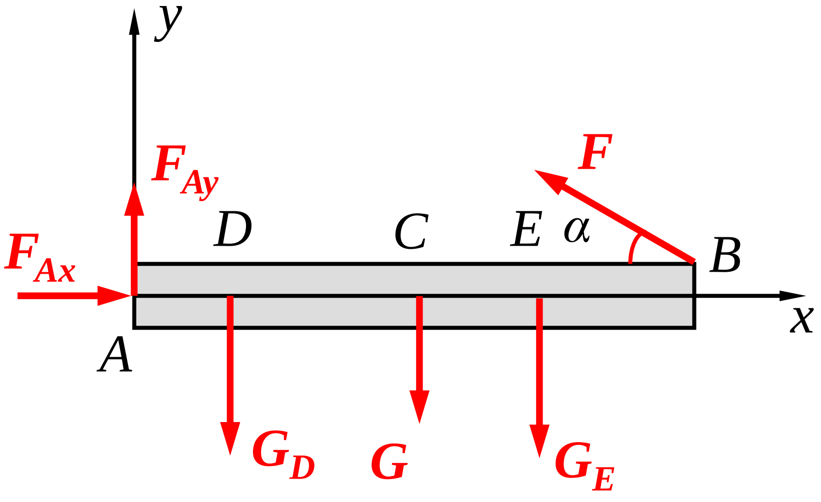
$$-G_D \times a - G \times \frac{l}{2} - G_E \times (l - b) + F\cos\alpha \times c + F\sin\alpha \times l = 0$$

(4) 联立求解。

$F = 12\ 456$ N

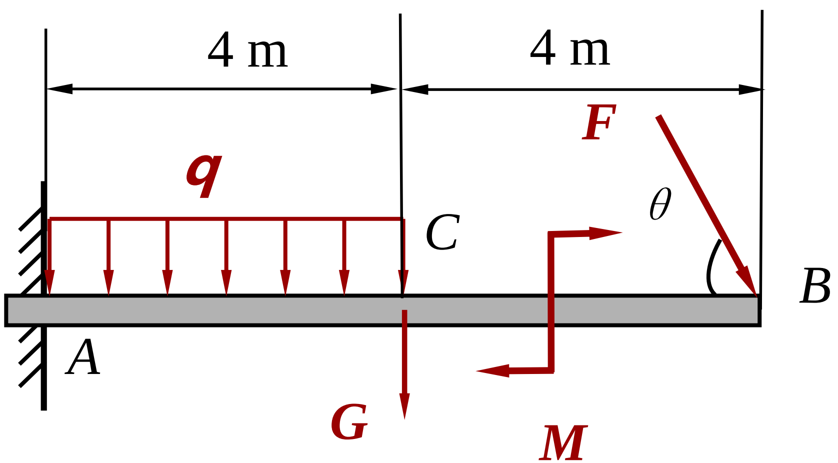
$F_{Ax} = 11\ 290$ N

$F_{Ay} = 4\ 936$ N

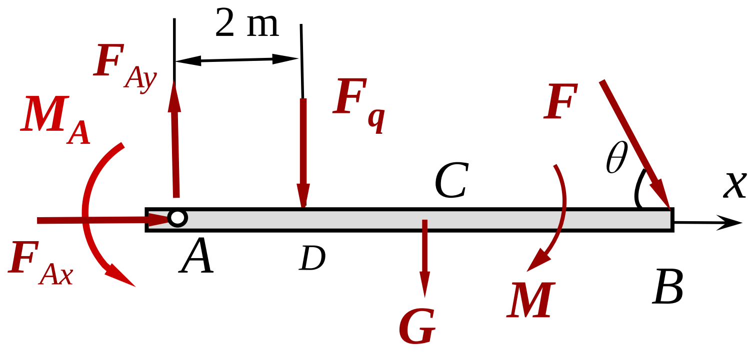


§3-3 任意力系的平衡条件和平衡方程

例题3-4 **均质悬臂梁**AB**的**A**端为固定端，所受外载荷和尺寸受力如图所示。梁重**G=1 kN,**集中力**F=4 kN，**均布载荷集度**q=0.5 kN/m，**力偶矩的大小**M=4 kN·m，**试求固端**A**对梁的的约束力和约束力偶（θ已知）。**



解：取AB段为研究对象，受力分析如图所示。



$$F_q = 4q = 2\ \text{kN}$$

列平衡方程

$$\sum F_x = 0\ ,\qquad F_{Ax} + F\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0,\qquad F_{Ay} - F\sin\theta - F_q - G = 0$$

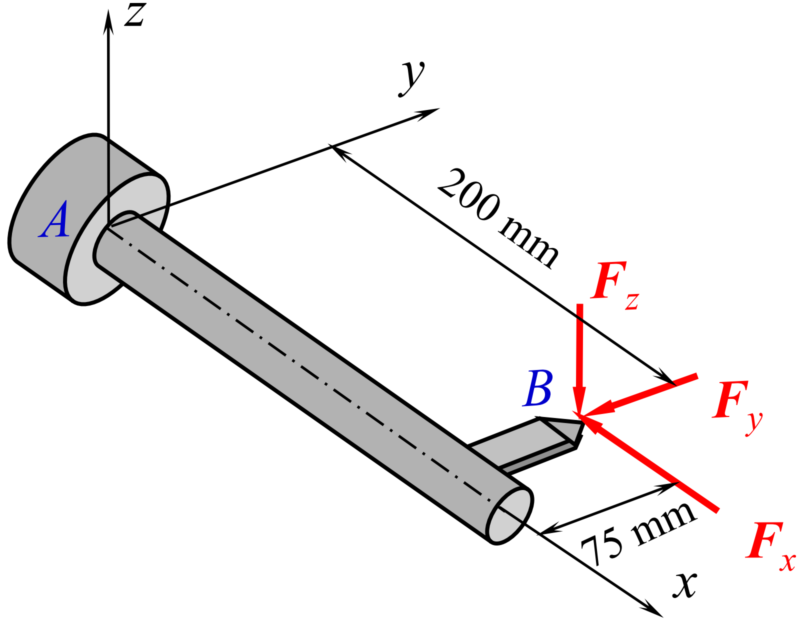
$$\sum M_A(F) = 0\ ,\qquad M_A - 2F_q - 4G - M - 8F\sin\theta = 0$$

联立求解,可得

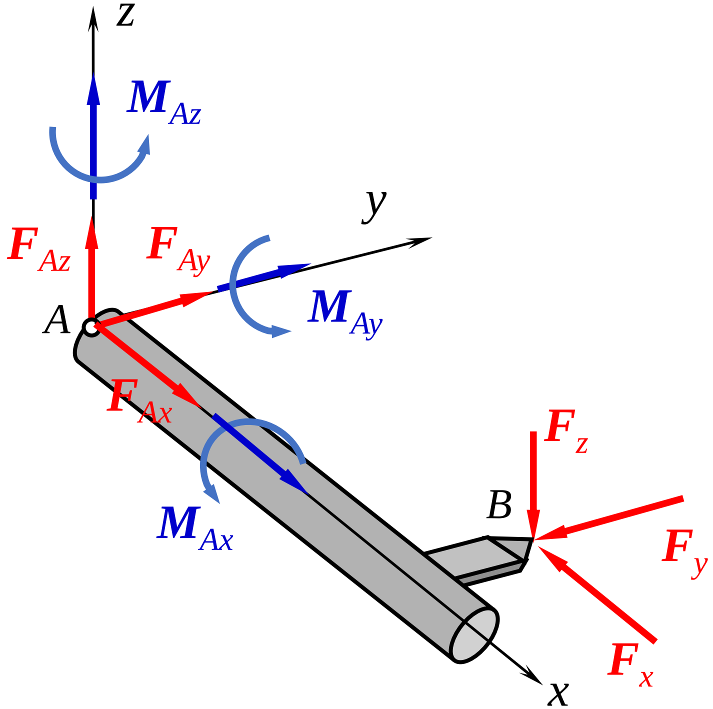
F_{Ax}, F_{Ay}, M_A

§ 3-3 任意力系的平衡条件和平衡方程

例题3-6 **镗刀杆的刀头在镗削工件时受到切向力F_z、径向力F_y、轴向力 F_x的作用。各力的大小**F_z=5 000 N， F_y=1 500 N， F_x=750 N，**而刀尖**B**的坐标** x = 200 mm，y = 75 mm，z = 0。**如果不计刀杆的重量，试求刀杆根部**A**的约束力的各个分量。**



§3-3 任意力系的平衡条件和平衡方程



解：

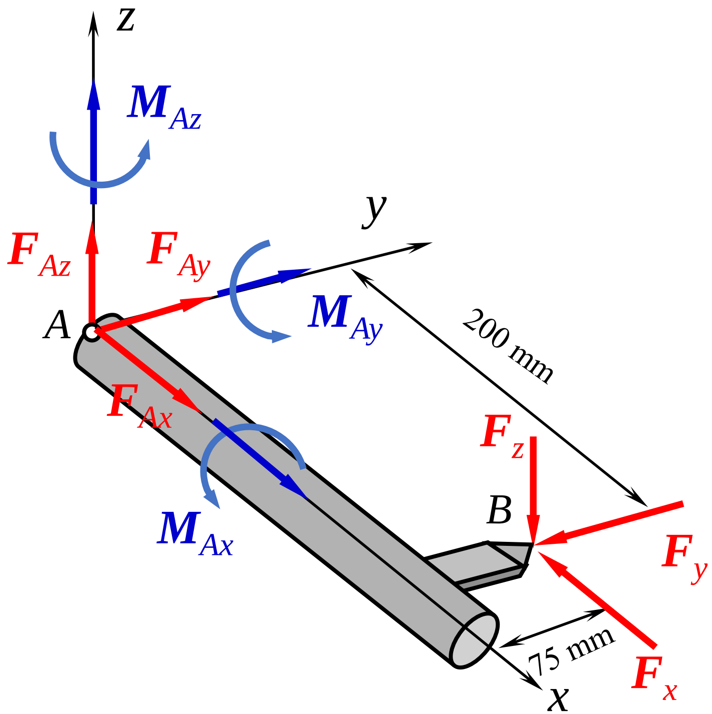
（1）取镗刀杆为研究对象，受力分析如图所示。

（2）空间力系平衡方程

$$\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0,\quad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0,\quad \sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0$$

§ 3-3 任意力系的平衡条件和平衡方程



(2) 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_{Az} - F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \quad M_{Ax} - F_z \times 0.075\ \mathrm{m} = 0$$

$$\sum M_y = 0, \quad M_{Ay} + F_z \times 0.2\ \mathrm{m} = 0$$

$$\sum M_z = 0,$$

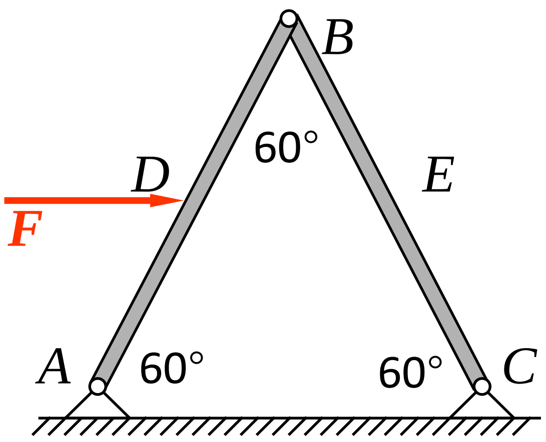
$$M_{Az} + F_x \times 0.075\ \mathrm{m} - F_y \times 0.2\ \mathrm{m} = 0$$

(3) 联立求解。

$$F_{Ax} = 750\ \mathrm{N}, \quad F_{Ay} = 1\,500\ \mathrm{N}, \quad F_{Az} = 5\,000\ \mathrm{N}$$

$$M_{Ax} = 375\ \mathrm{N \cdot m}, \quad M_{Ay} = -1\,000\ \mathrm{N \cdot m}, \quad M_{Az} = 243.8\ \mathrm{N \cdot m}$$

测验： **等边三角形构架ABC的顶点A、B、C都用铰链连接，底边AC固定，而AB边的中点D作用有平行于固定边AC的力F=10 N，如图所示。不计各杆自重，试求出A点所受约束力。**



作业：P.64～66

2-4， 2-11， 2-15

一、图示平面构架，A 端固定，C 处光滑铰连接，D 端滑动铰支座约束，杆 CD 与 BC 水平，AB 垂直，长度 $AB=2b$，$BC=CD=b$。杆 BC 与 CD 受垂直均匀分布力作用，集度为 q，各杆重不计。

求：（1）固定端 A 的约束力及力偶；（2）铰 C 的约束力。