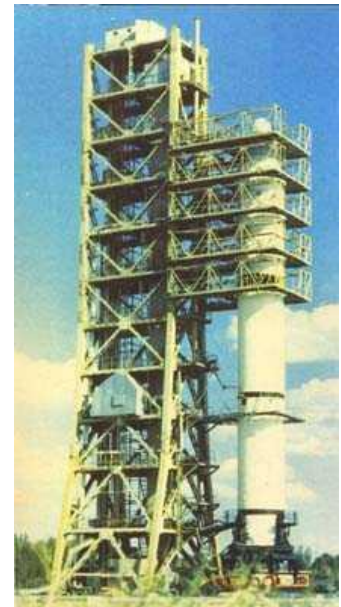


简单平面桁架(héng)架的内力计算

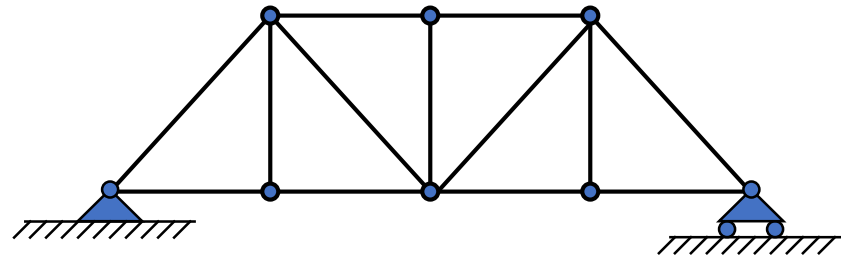
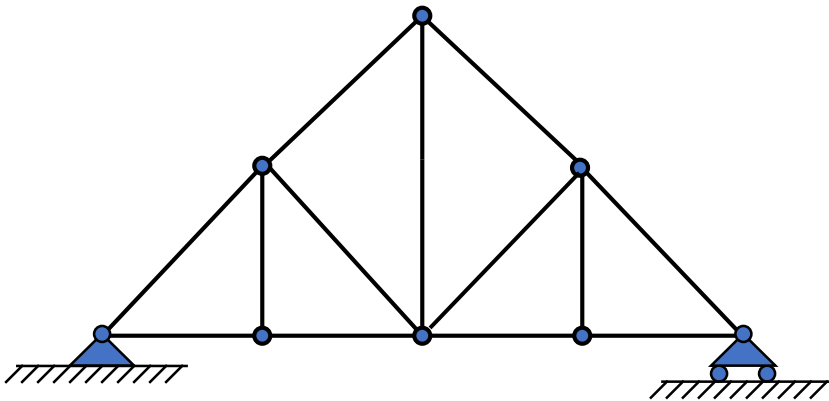


桁架优点：自重小、承载力强、跨度大、节省材料

简单平面桁架的内力计算

桁架—— 一种由若干杆件彼此在两端用铰链连接而成，受力后几何形状不变的结构。

如图分别是普通屋顶桁架和桥梁桁架。

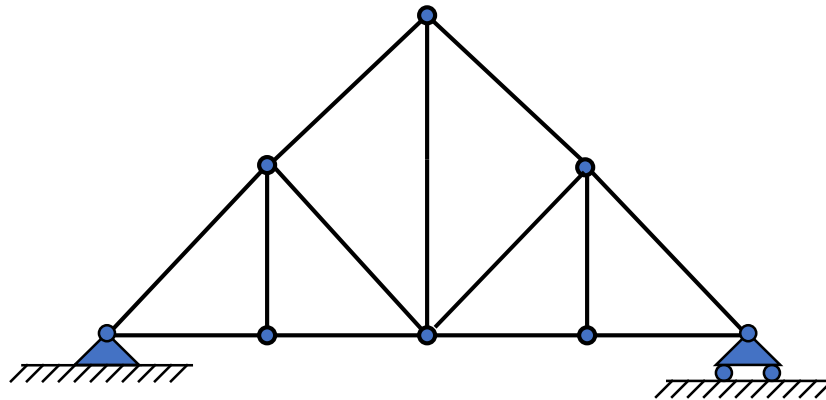


简单平面桁架的内力计算

平面桁架—— 所有杆件都在同一平面内的桁架。

节点—— 桁架中杆件的铰链接头。

杆件内力—— 各杆件所承受的力。



桁架的基本假设（理想桁架）

- 各杆件都是直线，且都通过铰的中心
- 各杆端点用光滑铰链相连接，连接点称为节点，节点处只存在约束力，不存在约束力矩
- 杆的自重相对载荷可以忽略不计
- 载荷及支座反力均作用在连接点上
- 根据以上假设，各杆均可被视为**二力杆**

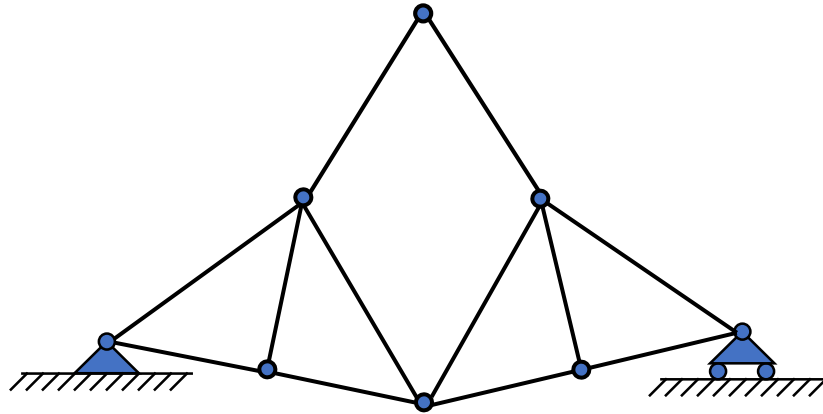
桁架的基本假设 (理想桁架)

桁架简化计算假设

- 各杆件都是直线，且都通过铰的中心
- 各杆端点用光滑铰链相连接，连接点称为节点，节点处只存在约束力，不存在约束力矩
- 杆的自重相对载荷可以忽略不计
- 载荷及支座反力均作用在连接点上
- 根据以上假设，各杆均可被视为**二力杆**

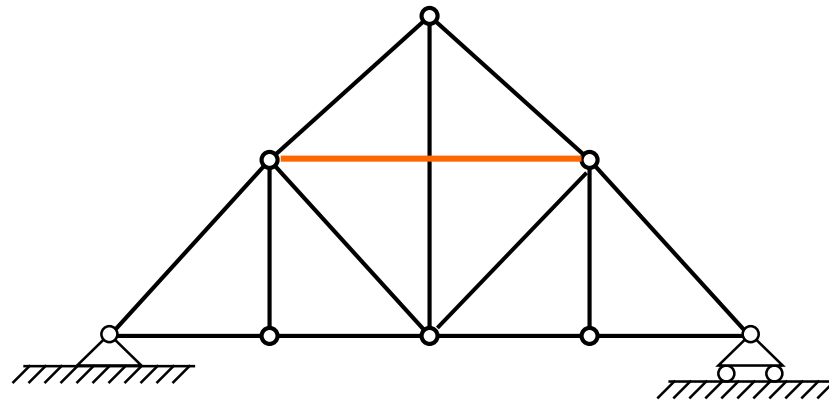
桁架类型

无余杆桁架——如果从桁架中任意抽去一根杆件，则桁架就会活动变形，即失去形状的固定性。



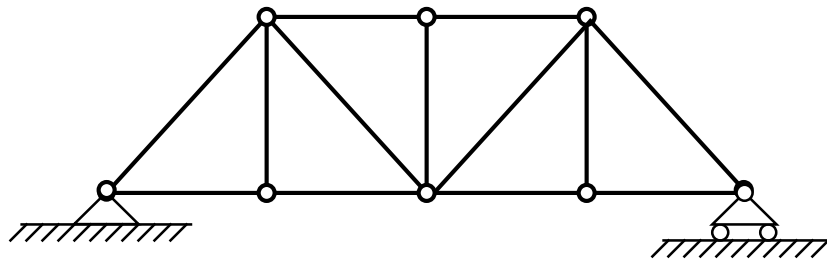
桁架类型

有余杆桁架—— 如果从桁架中抽去某几根杆件，桁架不会活动变形，即不会失去形状的固定性。



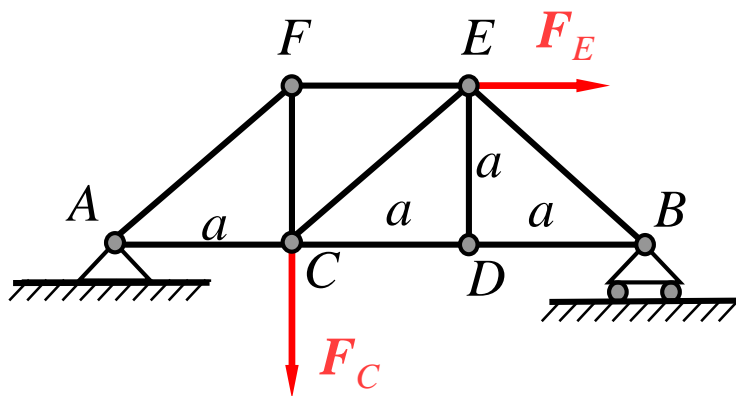
简单平面桁架的内力计算

简单平面桁架—— 以一个铰链三角形框架为基础，
每增加一个节点需增加两根杆件，可
以构成无余杆的平面桁架。



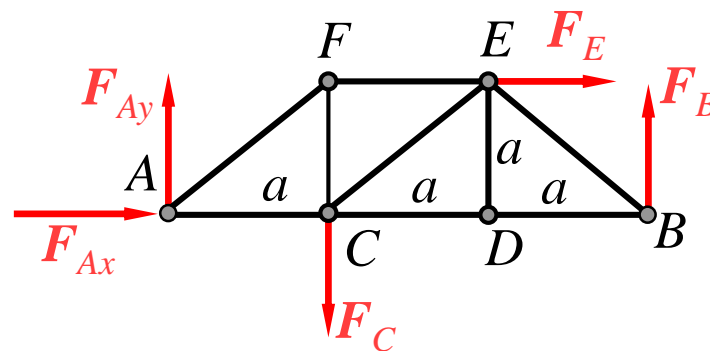
简单桁架杆数 m 和节点数 n 满足 $m = 2n - 3$ 【加一个节点，就加两根杆。故： $m - 3 = 2(n - 3)$ 】

例题： 如图平面桁架，试求各杆内力。已知铅垂力 $F_C=4\text{ kN}$ ，水平力 $F_E=2\text{ kN}$ 。



解：

1) 取整体为研究对象，
受力分析如图。



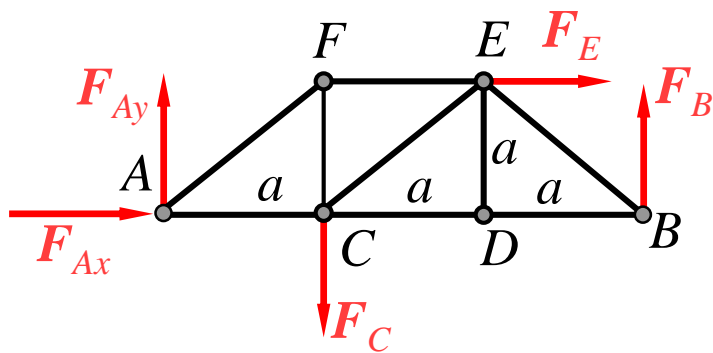
节点法计算杆件内力

2) 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_E = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_B + F_{Ay} - F_C = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad -F_C \times a - F_E \times a + F_B \times 3a = 0$$



3) 联立求解。

$$F_{Ax} = -2 \text{ kN}$$

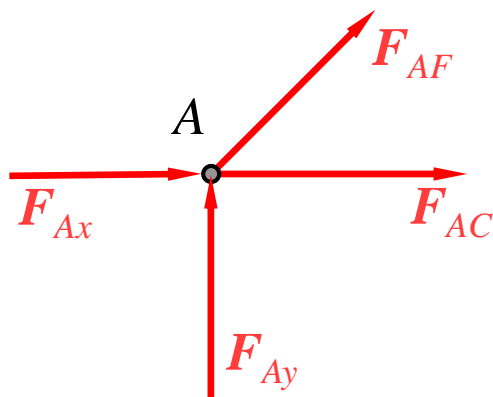
$$F_{Ay} = 2 \text{ kN}$$

$$F_B = 2 \text{ kN}$$

节点法计算杆件内力

4) 取节点A, 受力分析如图所示。

列平衡方程



$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{Ax} + F_{AC} + F_{AF} \cos 45^\circ = 0$$

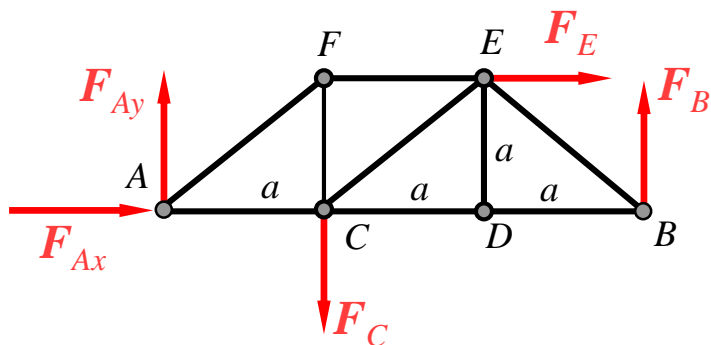
$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{Ay} + F_{AF} \cos 45^\circ = 0$$

解得

$$F_{AF} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$F_{AC} = 4 \text{ kN}$$



节点法计算杆件内力

5) 取节点 F , 受力分析如图所示。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{FE} - F_{FA} \cos 45^\circ = 0$$

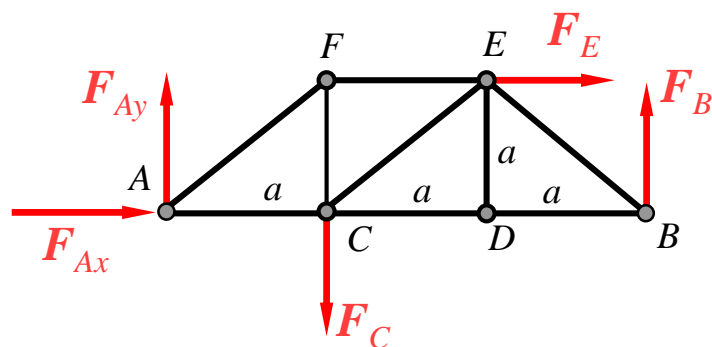
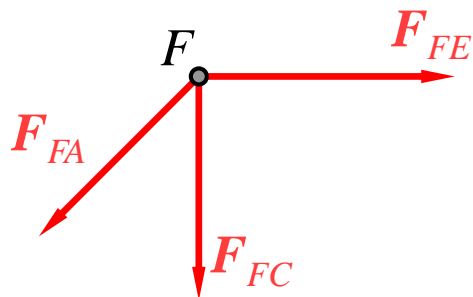
$$\sum F_y = 0,$$

$$-F_{FC} - F_{FA} \cos 45^\circ = 0$$

解得

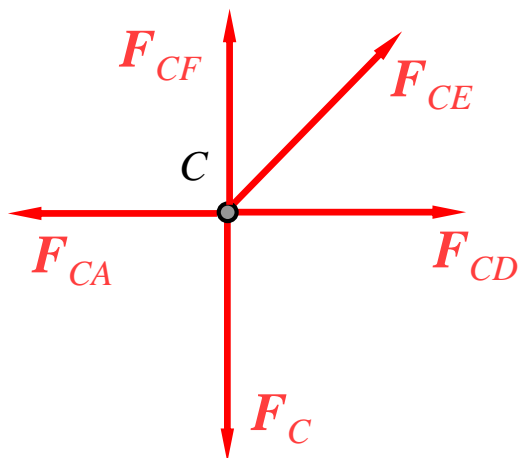
$$F_{FE} = -2 \text{ kN}$$

$$F_{FC} = 2 \text{ kN}$$



节点法计算杆件内力

6) 取节点C, 受力分析如图所示。
列平衡方程



$$\sum F_x = 0,$$

$$-F_{CA} + F_{CD} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

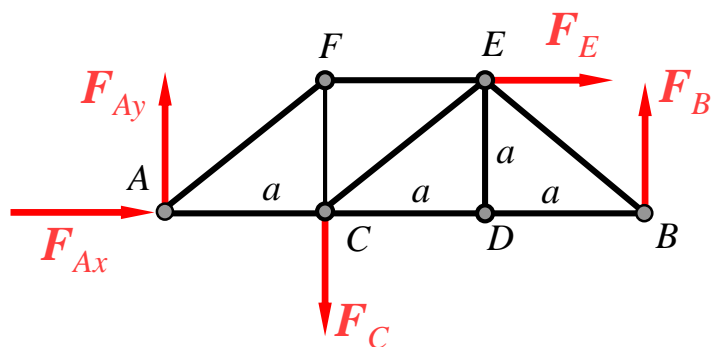
$$\sum F_y = 0,$$

$$-F_C + F_{CF} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

解得

$$F_{CE} = 2\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$F_{CD} = 2 \text{ kN}$$



节点法计算杆件内力

7) 取节点 D , 受力分析如图所示。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{DB} - F_{DC} = 0$$

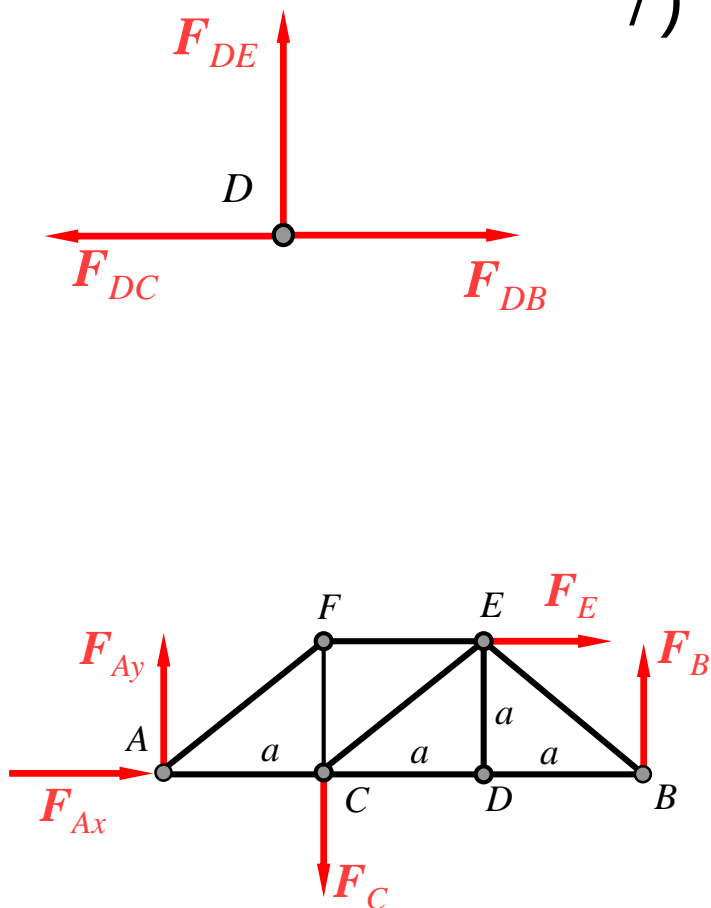
$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{DE} = 0$$

解得

$$F_{DB} = 2 \text{ kN}$$

$$F_{DE} = 0$$



节点法计算杆件内力

8) 取节点 B , 受力分析如图所示。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

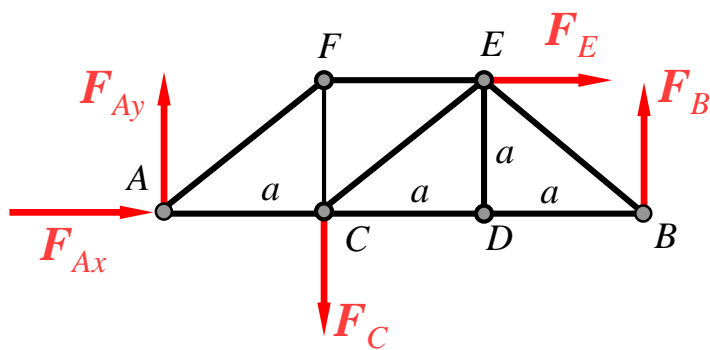
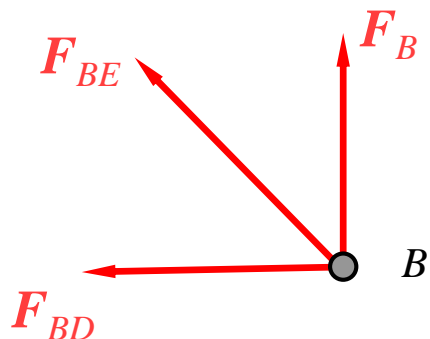
$$-F_{BD} - F_{BE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_B + F_{BE} \cos 45^\circ = 0$$

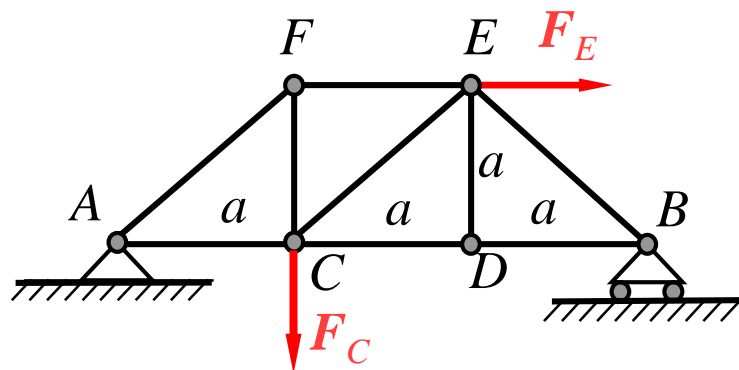
解得

$$F_{BE} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$$

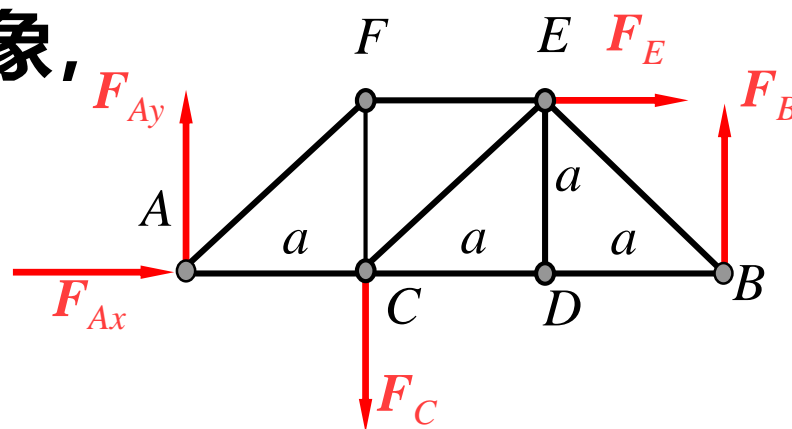


截面法计算杆件内力

解：



1) 取整体为研究对象，
受力分析如图所示。



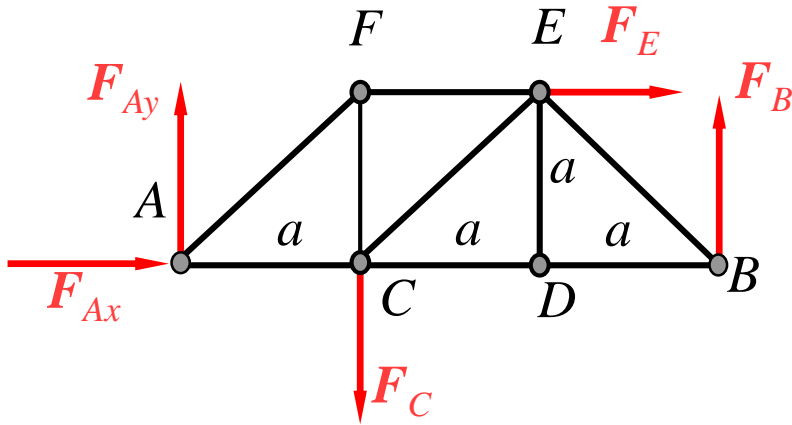
截面法计算杆件内力

2) 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_E = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_B + F_{Ay} - F_C = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad -F_C a - F_E a + F_B \times 3a = 0$$



3) 联立求解。

$$F_{Ax} = -2 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 2 \text{ kN}$$

$$F_B = 2 \text{ kN}$$

截面法计算杆件内力

4) 作一截面 $m-m$ 将三杆截断，取左部分为分离体，受力分析如图所示。

5) 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0,$$

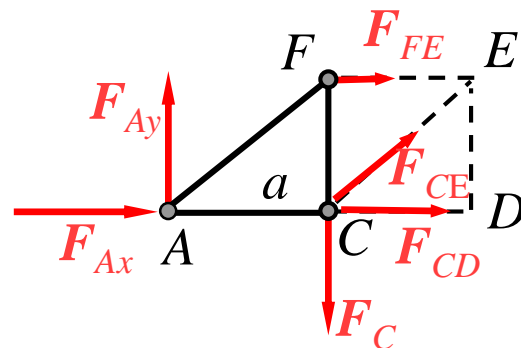
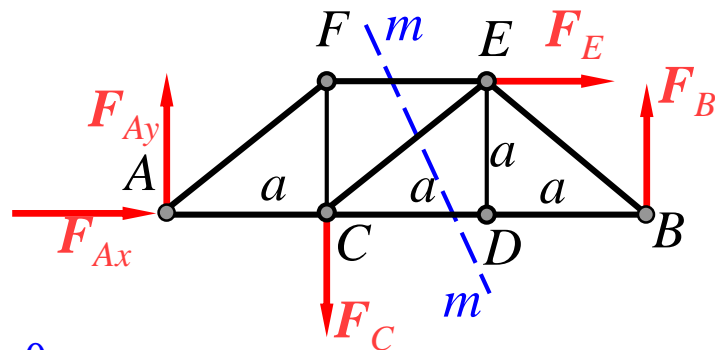
$$F_{CD} + F_{Ax} + F_{FE} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{Ay} - F_C + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum M_C(F) = 0,$$

$$- F_{FE}a - F_{Ay}a = 0$$



截面法计算杆件内力

$$F_{CD} + F_{Ax} + F_{FE} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{Ay} - F_C + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

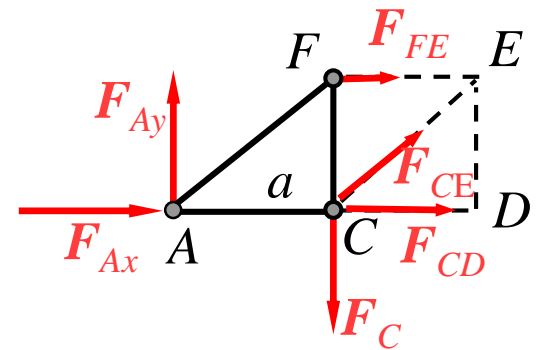
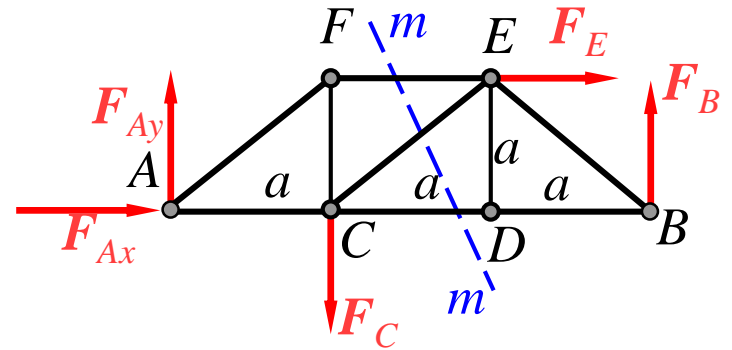
$$-F_{FE}a - F_{Ay}a = 0$$

联立求解得

$$F_{CE} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$F_{CD} = 2 \text{ kN}$$

$$F_{FE} = -2 \text{ kN}$$

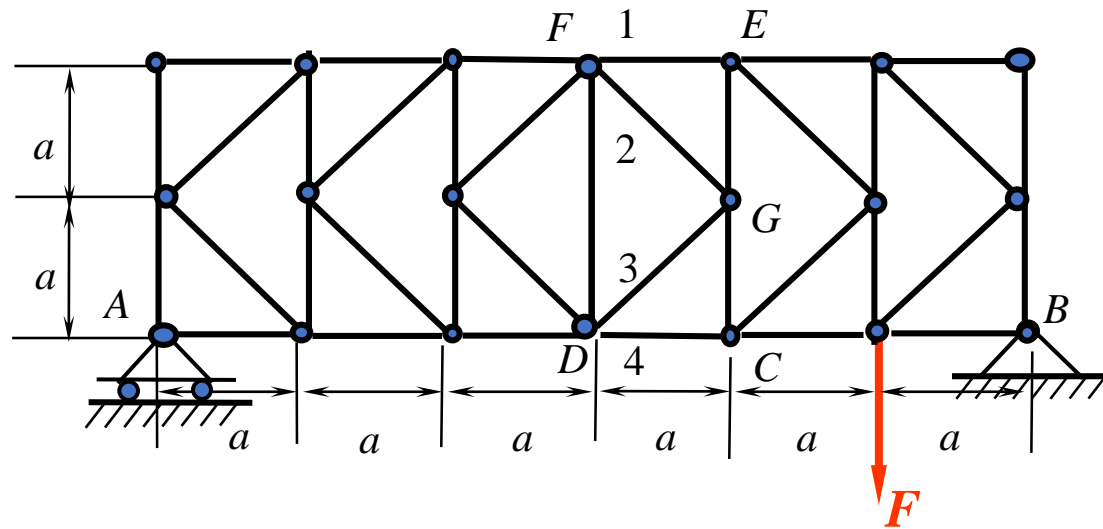


求平面桁架各杆内力的方法

- **节点法**：分别考虑各节点的平衡
 - 先把桁架看成一个整体，求约束力。
 - 每个节点都受一平面共点力系的作用，可以列写两个平衡方程（沿着x和y轴的力的平衡方程），解两个未知数。
 - 注意选择节点顺序：针对所选的节点列平衡方程，最多有两个未知数。
 - 节点法适合于求解全部杆件内力的问题。
- **截面法**：假想地把桁架截开，再考虑其中任一部分的平衡，求出被截杆件的内力。
 - 先把桁架看成一个整体，求约束力。
 - 针对被截开部分，采用平面任意力系静力平衡的求解方法。
 - 因平面任意力系只有3个独立的平衡方程，所以不宜截断三根杆以上。
 - 适当地选取一截面以及力矩方程，常可较快地求得某些指定杆件的内力。

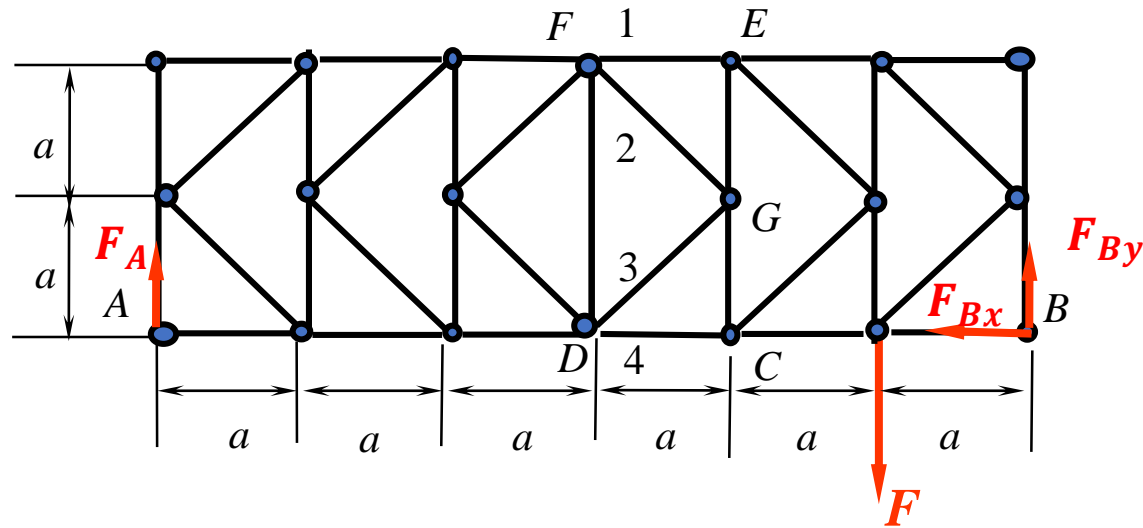
简单平面桁架的内力计算

用截面法求杆1、2的内力。



简单平面桁架的内力计算

(1)将桁架结构看成整体，求解A和B处约束力：



$$\sum F_x = 0, \quad F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A + F_{By} - F = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad F_{By} \cdot 6a - F \cdot 5a = 0$$

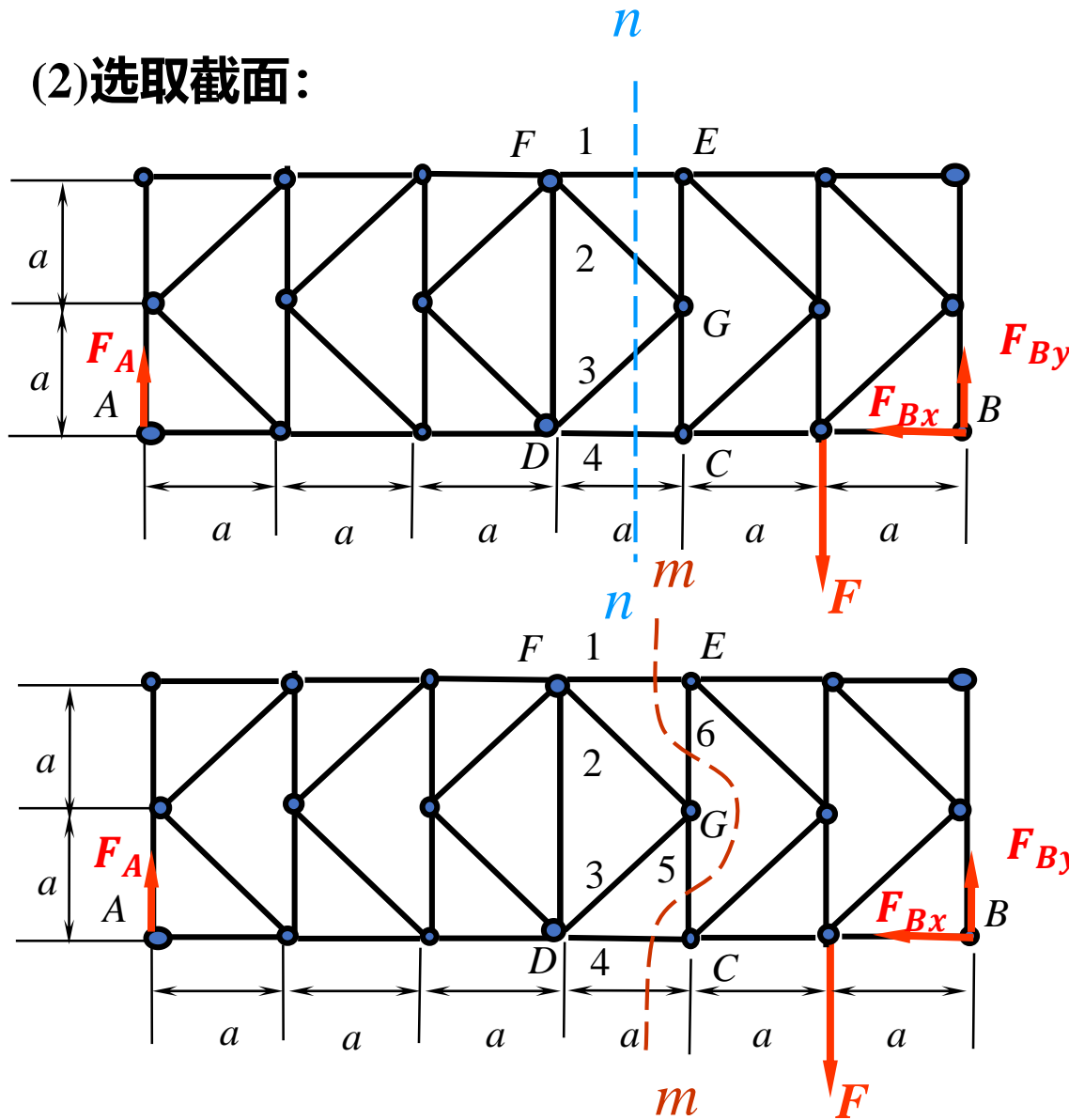
$$F_A = \frac{F}{6}$$

$$F_{Bx} = 0$$

$$F_{By} = \frac{5}{6}F$$

简单平面桁架的内力计算

(2)选取截面:

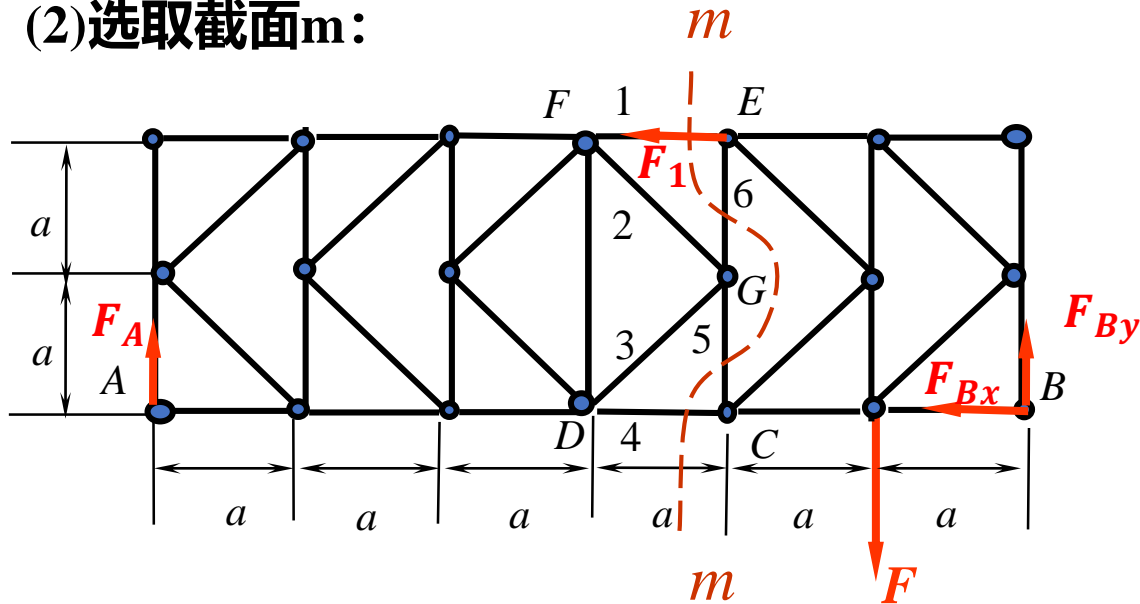


- 取 n 截面, 4个未知杆力, 最多列3个平衡方程, 无法求解

- 取 m 截面, 4个未知杆力, 最多列3个平衡方程。
- 但是杆4,5和6的力都经过 C 点, 对其取矩都是0。

简单平面桁架的内力计算

(2)选取截面m:



- 取m截面，4个未知杆力，最多列3个平衡方程。
- 但是杆4,5和6的力都经过C点，对其取矩都是0。

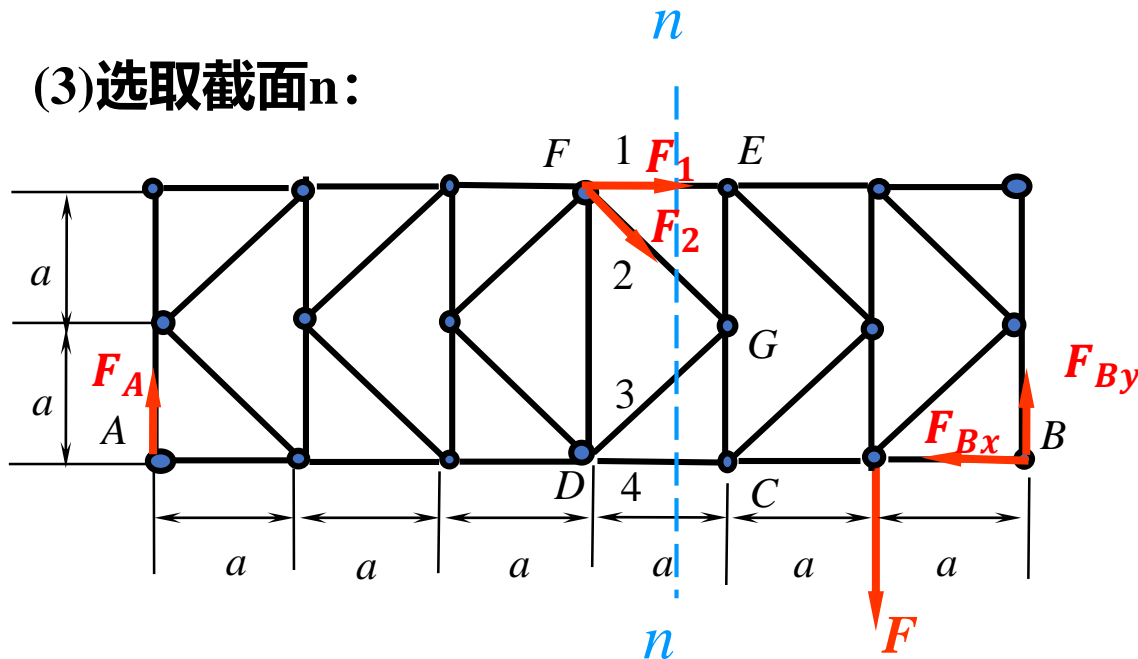
- 取右半部结构为研究对象，对点C取矩，列力矩平衡方程：

$$\sum M_C(F) = 0, \quad F_1 \cdot 2a - F \cdot a + F_{By} \cdot 2a = 0$$

$$F_1 = -\frac{1}{3}F$$

简单平面桁架的内力计算

(3)选取截面n:



- 取n截面，杆3和4的力都经过D点，对其取矩都是0。

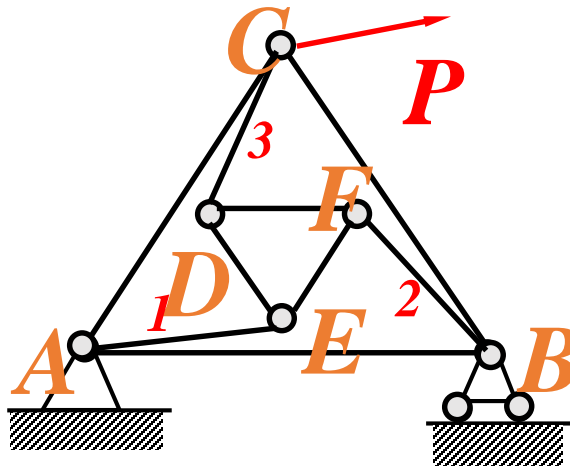
- 取左半部结构为研究对象，对点D取矩，列力矩平衡方程：

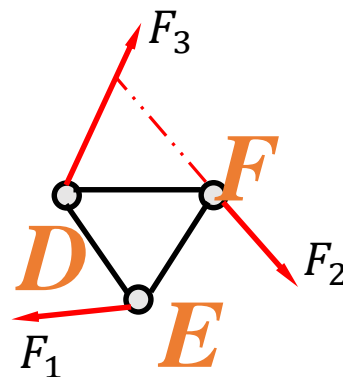
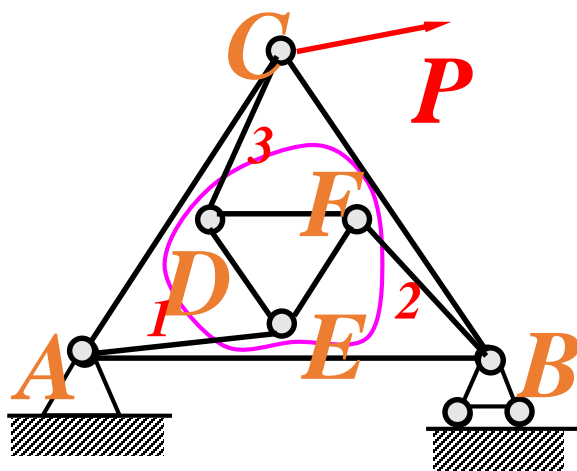
$$\sum M_D(F) = 0, \quad -F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot \sqrt{2}a - F_A \cdot 3a = 0$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{12} F$$

思考题：

求1杆的内力？

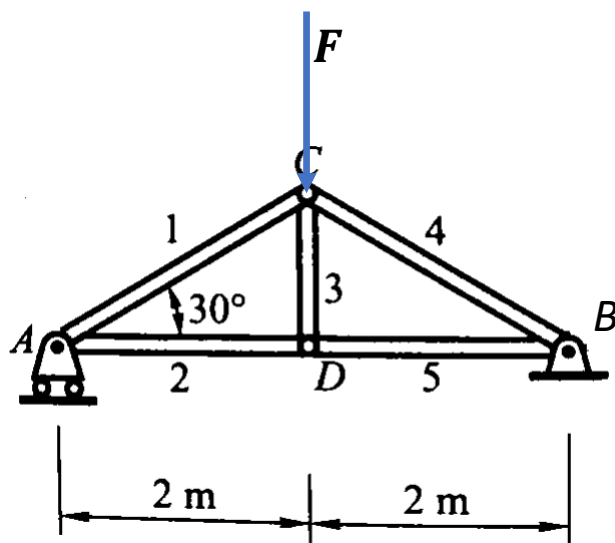




- 三角形DEF在力 F_1 , F_2 和 F_3 的作用下实现平衡
- **三力汇交定理**: 当刚体在三个力作用下平衡时, 设其中两力的作用线相交于某点, 则第三力的作用线必定也通过这个点
- 显然 F_1 , F_2 和 F_3 的作用线不能汇交于一点
- 只有 F_1 , F_2 和 F_3 都等于0时, 才能实现受力平衡!

测验：

平面简单理想桁架，在节点C处作用一个铅锤集中力 $F=10\text{ kN}$ 。
求各杆内力。



作业：

Page 72-76:

2-44, 2-49, 2-50, 2-57~60

