电工电子学复习提纲

第二章 电路分析基础

正弦交流电路

相量表示法

设有个正弦电压为$u=\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$，那么相量法表示该电压即为$\dot{U}=U\angle\varphi$，这里$U$表示正弦电压的有效值。
只有在各个正弦量均为同一频率时，各正弦量变换成相量进行运算才有意义。

电阻

$$\dot{U}=R\dot{I}$$

电感

$$\dot{U}=jX_L\dot{I}$$

其中$X_L=\omega L=2\pi fL$，称为感抗。X_L是电压有效值与电流有效值之比，而不是它们的瞬时值之比。当电流的频率为零即直流时，感抗为零，故电感在直流稳态时相当于短路。

电容

$$\dot{U}=-jX_C\dot{I}$$

其中$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi fC}$，称为容抗。对于一定的$C$来说，频率越高 ，则容抗越小，对正弦电流的“阻止”能力越弱，即意味着高频电流容易通过电容。直流时频率为零，容抗为无穷大，故电容在直流电路处于稳定状态时不能通过电流,相当于开路。

阻抗

欧姆定律的相量形式

$$\dot{U}=Z\dot{I}$$

Z称为阻抗

$$Z=R+j(X_L-X_C)$$

阻抗的模$|Z|=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$称为阻抗模

辐角$\varphi=\arctan\left(\frac{X_L-X_C}{R}\right)$称为阻抗角

基尔霍夫的相量形式

KCL的相量形式为

$$\sum\dot{I}=0$$

在电路任一节点上的电流相量代数和为零。

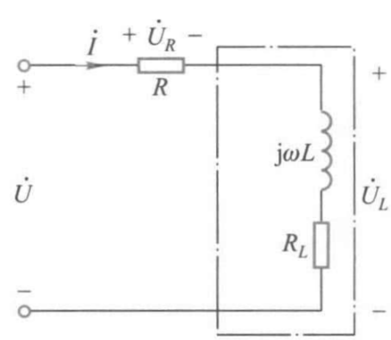
KVL的相量形式为

$$\sum\dot{U}=0$$

沿任一回路，各支路电压相量的代数和为零。

例题2.1

有时为了测量电感线圈的电感和电阻,将它和一个电阻R串联后接在工频交流电源上,如右图所示。现测得$U=220V,U_R=79V,U_L=193V,I=0.4A$。试求线圈的电阻$R_L$和电感$L$。

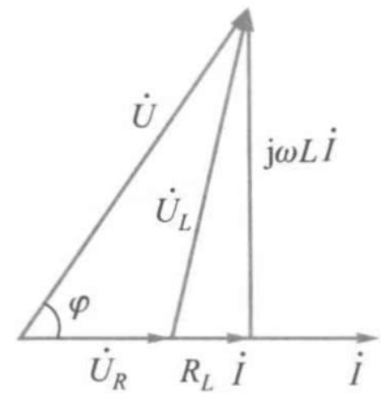


以电流为参考相量作出电路的相量图。

$$\cos\varphi=\frac{U^2+U_R^2-U_L^2}{2UU_R}=0.5,\varphi=60^\circ$$

由$U\sin\varphi=\omega LI$，可知

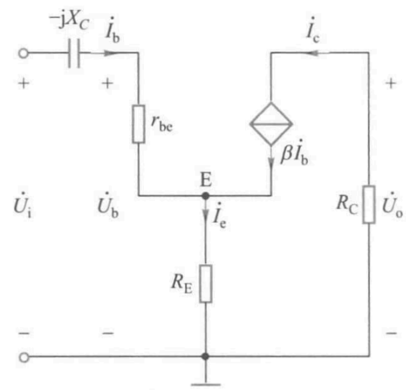
$$L = \frac{U\sin\varphi}{\omega I} = 1.517H$$



又由$U_R + R_L I = U\cos\varphi$，可知

$$R_L = \frac{U\cos\varphi - U_R}{I} = 77.5\Omega$$

例题2.2



如右图所示电路中含有一个晶体管的小信号模型。已知$r_{be} = 700\Omega, \beta = 30, R_E = 30\Omega, R_C = 2.4k\Omega, C = 5\mu F, \dot{U}_i = 20\angle 0^\circ mV$，求外加信号$u_i$的频率为$1000Hz$时的$\dot{U}_b$和$\dot{U}_o$

$f = 1000Hz$时

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = 31.8\Omega$$

$$\dot{I}_e = \dot{I}_b + \beta\dot{I}_b = (1+\beta)\dot{I}_b$$

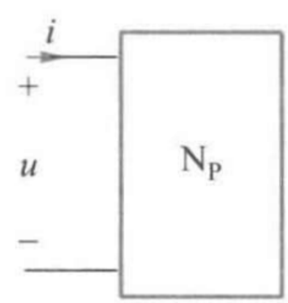
$$\dot{U}_i = (r_{be} - jX_C)\dot{I}_b + R_E\dot{I}_e = 1630.3\angle -1.1^\circ\dot{I}_b$$

$$\dot{I}_b = 12.27\times 10^{-6}\angle 1.1^\circ$$

$$\dot{U}_b = [r_{be} + (1+\beta)R_E]\dot{I}_b = 0.02\angle 1.1^\circ$$

$$\dot{U}_o = -R_C\dot{I}_c = -\beta R_C\dot{I}_b = 0.88\angle -178.9^\circ$$

瞬时功率



设如右图所示的无源二端网络的电流和电压分别为$i = \sqrt{2}I\sin\omega t$和$u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi)$

$$p = ui = UI\cos\varphi(1 - \cos 2\omega t) + UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

有功功率

电路中的电感和电容并不消耗功率,只是起能量吞吐作用。电路中的平均功率等于电阻所消耗的功率，因此平均功率又称为有功功率。
对于正弦电路，其平均功率

$$P = UI\cos\varphi$$

$\cos\varphi$称为功率因数(用λ表示)，φ称为功率因数角

无功功率

无功功率为正弦交流电路中储能元件与电源进行能量交换的瞬时功率最大值，单位为乏（var）

$$Q = UI\sin\varphi$$

感性无功功率与容性无功功率可以相互补偿，故有

$$Q = Q_L - Q_C$$

视在功率

电路的电压有效值与电流有效值的乘积，称为电路的视在功率，用S表示：

$$S = UI$$

单位为伏·安$(V \cdot A)$。视在功率通常用来表示电源设备的容量。
由上可知，交流电路中的有功功率、无功功率和视在功率三者的关系为

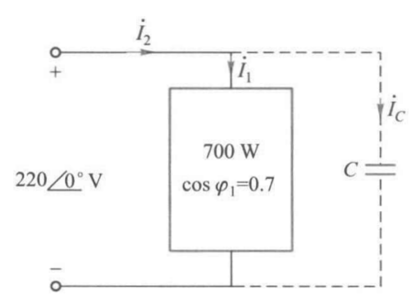
$$P = S\cos\varphi, Q = S\sin\varphi, S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

功率因数的提高

由于工业上大量的设备均为感性负载，因此常采用并联电容器的方法来提高功率因数。

例题2.3

一台单相异步电动机接到$50Hz, 220V$的供电线路上，如右图所示。电动机吸收有功功率$700W$,功率因数$\lambda_1 = \cos\varphi_1 = 0.7$（电感性）。今并联一电容器使电路的功率因数提高至$\lambda_2 = \cos\varphi_2 = 0.9$,求所需电容量。

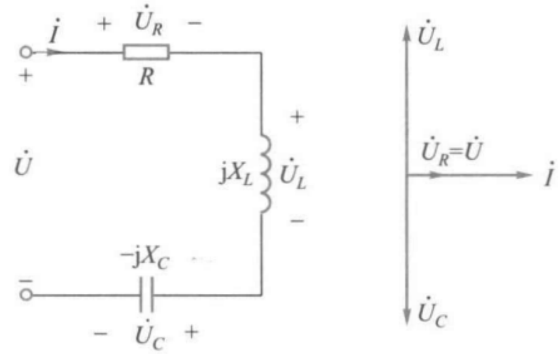


由$\cos\varphi_1 = 0.7, \cos\varphi_2 = 0.9$知$\tan\varphi_1 = 1.02, \tan\varphi_2 = 0.484$
未接入电容时P, Q之间的关系是
$Q_L = UI\sin\varphi_1 = UI\cos\varphi_1\tan\varphi_1 = P\tan\varphi_1$
接入电容之后有功功率不变，无功功率$Q = Q_L - Q_C$
$Q = P\tan\varphi_2$
则$Q_C = Q_L - Q = P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) = 375.2var$

又$Q_C = \frac{U^2}{X_C} = U^2 \cdot 2\pi f C$
解得$C = 24.7\mu F$

串联谐振

在右图的RLC串联电路中，当$X_L = X_C$时$\dot{U}$和$\dot{I}$同相，整个电路呈电阻性，电路的这种工作状态称为串联谐振。



1. 串联谐振时阻抗$Z = R + j(X_L - X_C) = R$最小，在电压一定时，电流有效值最大，即

$$I_0 = \frac{U}{R}$$

   I_0称为串联谐振电流。
2. 设串联谐振时的频率为f_0，则$\frac{1}{2\pi f_0 C} = 2\pi f_0 L$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

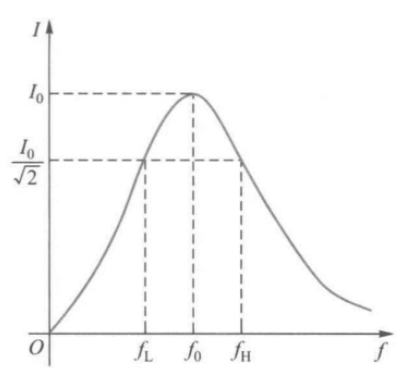
3. 串联谐振时的感抗或容抗称为谐振电路的特性阻抗，用ρ表示，即

$$\rho = 2\pi f_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

4. 通常把串联谐振时U_L或U_C与U之比称为串联谐振电路的品质因数，也称为Q值，即

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

5. 将电源电压有效值不变时电流随频率变化的曲线称为电流谐振曲线。当$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$时在谐振曲线上两个对应点的频率f_L和f_H之间的范围，称为电路的通频带f_{BW}，通频带与品质因数的关系为

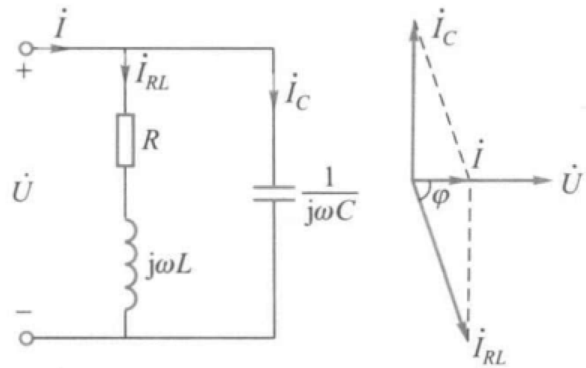


$$f_{BW} = f_H - f_L = \frac{f_0}{Q}$$

   因此通频带的大小与品质因数Q有关。Q越大，通频带宽度越小，谐振曲线越尖锐，电路对频率的选择性越好。

并联谐振

线圈和电容器并联的电路如右图，图中L是线圈的电感，R是线圈的电阻。当电路中的总电流$\dot{I}$和总电压$\dot{U}$同相时，称为并联谐振。



电路的总电流$\dot{I}$为

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \dot{I}_{RL} + \dot{I}_C \\ &= \frac{\dot{U}}{R + j2\pi fL} + \frac{\dot{U}}{-j\frac{1}{2\pi fC}} \\ &= \left[\frac{R}{R^2 + (2\pi fL)^2} - j\left(\frac{2\pi fL}{R^2 + (2\pi fL)^2} - 2\pi fC\right)\right]\end{aligned}$$

1. 设并联谐振时的频率为f_0，谐振时括号内的虚部为零，即

$$\frac{2\pi f_0 L}{R^2 + (2\pi f_0 L)^2} - 2\pi f_0 C = 0$$

   得

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{C}{L}R^2} \quad (1)$$

   当$R \ll 2\pi f_0 L$时可近似表达为

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

2. 并联谐振电路的等效阻抗较大且具有纯电阻性质，由式(1)可知其等效阻抗

$$Z_0 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{R^2 + (2\pi f_0 L)^2}{R} \overset{(1)}{=} \frac{L}{RC}$$

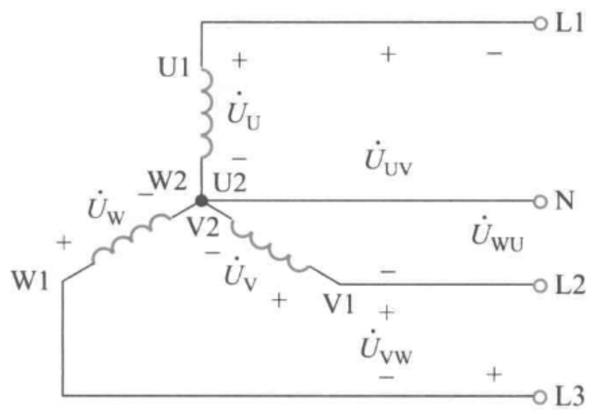
3. 电路中的总电流很小。

三相交流电路

由三个幅值相等、频率相同、相位互差120°的单相交流电源所构成的电源,称为三相电源。由三相电源构成的电路，称为三相电路。

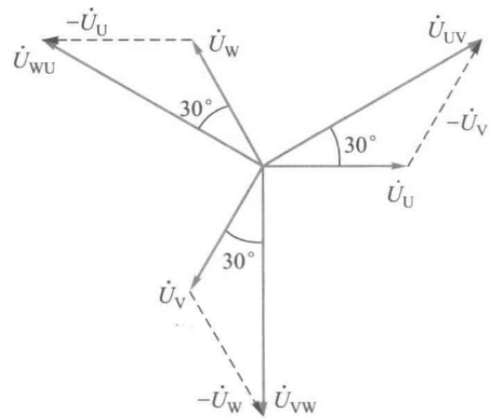
三相交流电源

三个绕组的连接点称为中性点或零点。从中性点引出的导线，称为中性线或零线，有时中性线接地。中性线用字母N表示。三相绕组的三个始端引出的线称为相线或端线，又称为火线。引出中性线的电源称为三相四线制电源，其供电方式称为三相四线制。不引出中性线的供电方式，称为三相三线制。



三相电源相电压的相量表达式

$$\begin{cases}\dot{U}_U = U_P\angle 0^\circ \\ \dot{U}_V = U_P\angle -120^\circ \\ \dot{U}_W = U_P\angle -240^\circ\end{cases}$$



U_P为相电压有效值。
相线之间的电压$\dot{U}_{UV}$、$\dot{U}_{VW}$、$\dot{U}_{WU}$称为线电压，他们的有效值用U_L表示。

$$\begin{cases}\dot{U}_{UV} = \sqrt{3}U_P\angle 30^\circ \\ \dot{U}_{VW} = \sqrt{3}U_P\angle -90^\circ \\ \dot{U}_{WU} = \sqrt{3}U_P\angle -210^\circ\end{cases}$$

三个线电压有效值相等，都等于$\sqrt{3}$倍的相电压，即$U_L = \sqrt{3}U_P$，在相位上分别超前于相应相电压30°

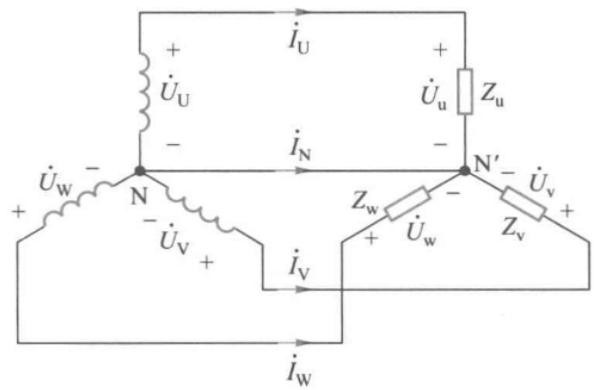
负载星形联结

当各相负载阻抗的模与阻抗角完全相等，即$Z_u = Z_v = Z_w$时，称为对称负载，此时中性线电流为0，三相绕组对称。

若三相负载中至少有一相负载阻抗的模或阻抗角与其他相不相等，称为不对称负载。

在有中性线时，每相的负载电压等于电源的相电压。

若中性线断开，负载中性点N'与电源中性点N的电位不相等，由基尔霍夫定律



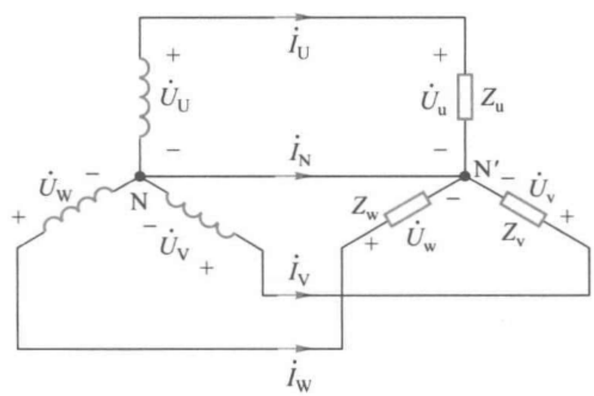
$$\begin{cases} \dot{I}_U + \dot{I}_V + \dot{I}_W = 0 \\ \dot{U}_U = Z_u \dot{I}_U + \dot{U}_{N'N} \\ \dot{U}_V = Z_v \dot{I}_V + \dot{U}_{N'N} \\ \dot{U}_W = Z_w \dot{I}_W + \dot{U}_{N'N} \end{cases}$$

可得

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\frac{\dot{U}_U}{Z_u} + \frac{\dot{U}_V}{Z_v} + \frac{\dot{U}_W}{Z_w}}{\frac{1}{Z_u} + \frac{1}{Z_v} + \frac{1}{Z_w}}$$

例题2.4

如图所示的三相电路中，已知电源$\dot{U}_U = 220\angle 0^\circ V, \dot{U}_V = 220\angle -120^\circ, \dot{U}_W = 220\angle{-240^\circ}$，各负载的额定电压为$220V$求：
(1) 当$Z_u = Z_v = Z_w = 22\Omega$时，各相及中性线电流。
(2) $Z_u = 22\Omega, Z_v = 44\Omega, Z_w = 88\Omega$时各相及中性线电流。
(3) 负载阻抗与(2)相同，中性线$N'N$断开，各相负载实际承受的电压。



(1) 根据对称关系，可得

$$\dot{I}_u = \frac{\dot{U}_u}{Z_u} = 10\angle 0^\circ A, \dot{I}_v = 10\angle -120^\circ A, \dot{I}_w = 10\angle -240^\circ A, \dot{I}_N = 0$$

(2)

$$\dot{I}_u = \frac{\dot{U}_u}{Z_u} = 10\angle 0^\circ A, \dot{I}_v = \frac{\dot{U}_v}{Z_v} = 5\angle -120^\circ A, \dot{I}_w = \frac{\dot{U}_w}{Z_w} = 2.5\angle -240^\circ A$$

$$\dot{I}_N = -(\dot{I}_u + \dot{I}_v + \dot{I}_w) = 6.61\angle 160.9^\circ A$$

(3)

$$\dot{U}_{N'N}=\frac{\frac{\dot{U}_U}{Z_u}+\frac{\dot{U}_V}{Z_v}+\frac{\dot{U}_W}{Z_w}}{\frac{1}{Z_u}+\frac{1}{Z_v}+\frac{1}{Z_w}}=83.15\angle-19.1^{\circ}V$$

$$\dot{U}_u=\dot{U}_U-\dot{U}_{N'N}=144.0\angle10.9^{\circ}V$$

$$\dot{U}_v=\dot{U}_V-\dot{U}_{N'N}=249.4\angle-139.1^{\circ}V$$

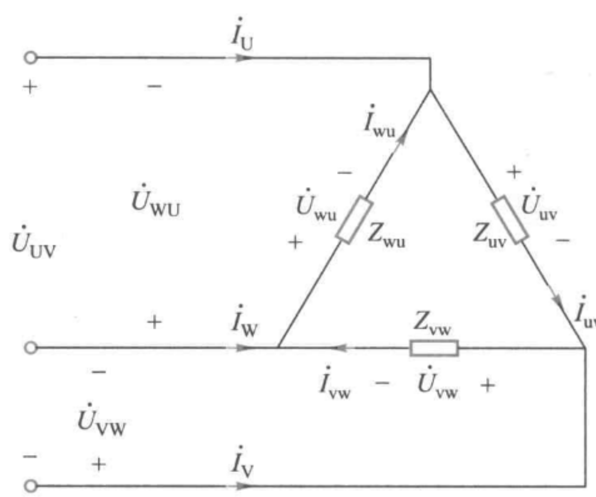
$$\dot{U}_w=\dot{U}_W-\dot{U}_{N'N}=288.0\angle130.9^{\circ}V$$

由计算结果可见,各相负载电压中,U_u远低于额定电压,而U_v、U_w远高于额定电压,这使得各相负载不能正常工作,甚至损坏,这是不允许的。因此在三相电路中,星型不对称负载必须要有中性线,且中性线上不允许装熔断器。

负载三角形联结

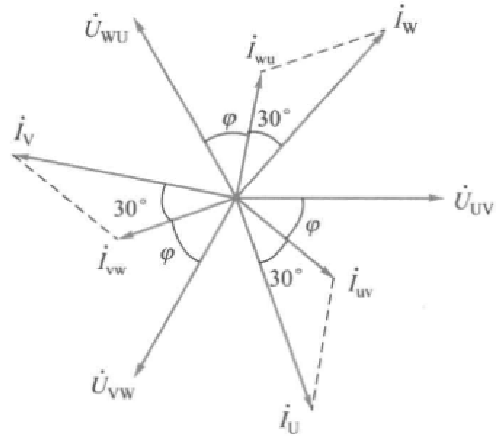
右图是负载作三角形联结时的三相电路,此时负载的相电压等于电源的线电压,即$U_p=U_L$。从图中可得

$$\begin{cases}\dot{I}_{uv}=\frac{\dot{U}_{UV}}{Z_{uv}}\\ \dot{I}_{vw}=\frac{\dot{U}_{VW}}{Z_{vw}}\\ \dot{I}_{wu}=\frac{\dot{U}_{WU}}{Z_{wu}}\end{cases},\begin{cases}\dot{I}_U=\dot{I}_{uv}-\dot{I}_{wu}\\ \dot{I}_V=\dot{I}_{vw}-\dot{I}_{uv}\\ \dot{I}_W=\dot{I}_{wu}-\dot{I}_{vw}\end{cases}$$



其中$\dot{I}_{uv},\dot{I}_{vw},\dot{I}_{wu}$称为相电流,$\dot{I}_U,\dot{I}_V,\dot{I}_W$称为线电流。

如果负载是对称的，即$Z_{uv} = Z_{vw} = Z_{wu} = Z$，则各相电流的大小相等，相位差依次互为$120°$。设$\dot{U}_{UV} = U_{UV}\angle 0°$，并设负载是感性的，即$Z = |Z|\angle\varphi$，画出相量图如右图所示。
在数值上，线电流等于相电流的$\sqrt{3}$倍，即$I_L = \sqrt{3}I_P$.相位上线电流落后对应相电流$30°$



三相电路的功率

三相电路的有功功率等于各相有功功率之和。因为三相电路中测量线电压和线电流比较方便，所以三相功率通常不用相电压和相电流表示。通常所说的三相电压和三相电流都是指线电压和线电流值。

当三相负载对称时，各相有功功率相同，设每相相电压为U_p，相电流为I_p，线电压为U_L，线电流为I_L，相电压和相电流的相位差为φ。当负载为星形联结时，$U_p = \dfrac{U_L}{\sqrt{3}}, I_p = I_L$，三角形联结时，$U_p = U_L, I_p = \dfrac{I_L}{\sqrt{3}}$，因而在两种情况下

$$P = 3U_P I_P \cos\varphi = \sqrt{3}U_L I_L \cos\varphi$$

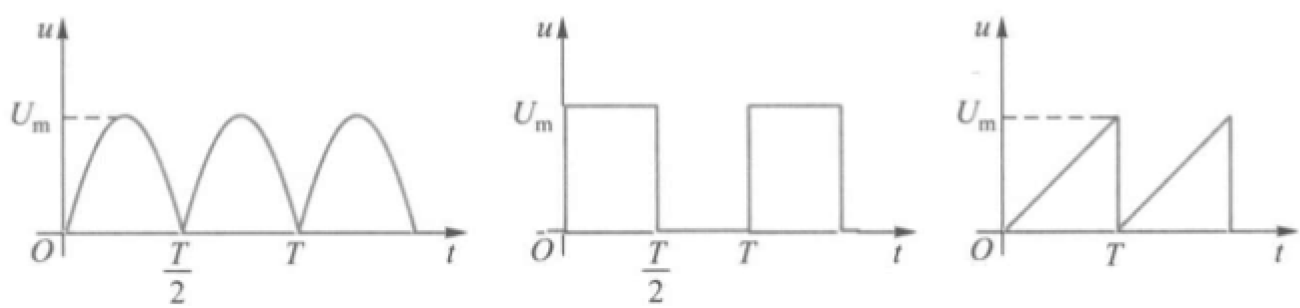
同样，对称三相负载的无功功率也等于各相无功功率之和，

$$Q = 3U_P I_P \sin\varphi = \sqrt{3}U_L I_L \sin\varphi$$

对称三相负载的视在功率为

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}U_L I_L$$

非正弦交流电路



对于非正弦线性电路，通常是将非正弦周期信号进行分解，然后利用叠加定理进行分析计算。
a_0称为直流分量，$A_{1m}\sin(k\omega t + \varphi_1)$称为一次谐波或基波，$k = 2, 3, 4, ...$的项分别称为二、三、

四...次谐波，除直流分量和一次谐波外，其余的统称为高次谐波。
将非正弦周期信号傅里叶展开

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{km}\sin(k\omega t+\varphi_k)$$

对全波整流电压：

$$u\left(t\right)=\frac{4U_m}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos 2\omega t-\frac{1}{15}\text{cos}4\omega t-\frac{1}{35}\text{cos}6\omega t-\cdots\right)$$

对方波电压：

$$u\left(t\right)=\frac{U_m}{2}+\frac{2U_m}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right)$$

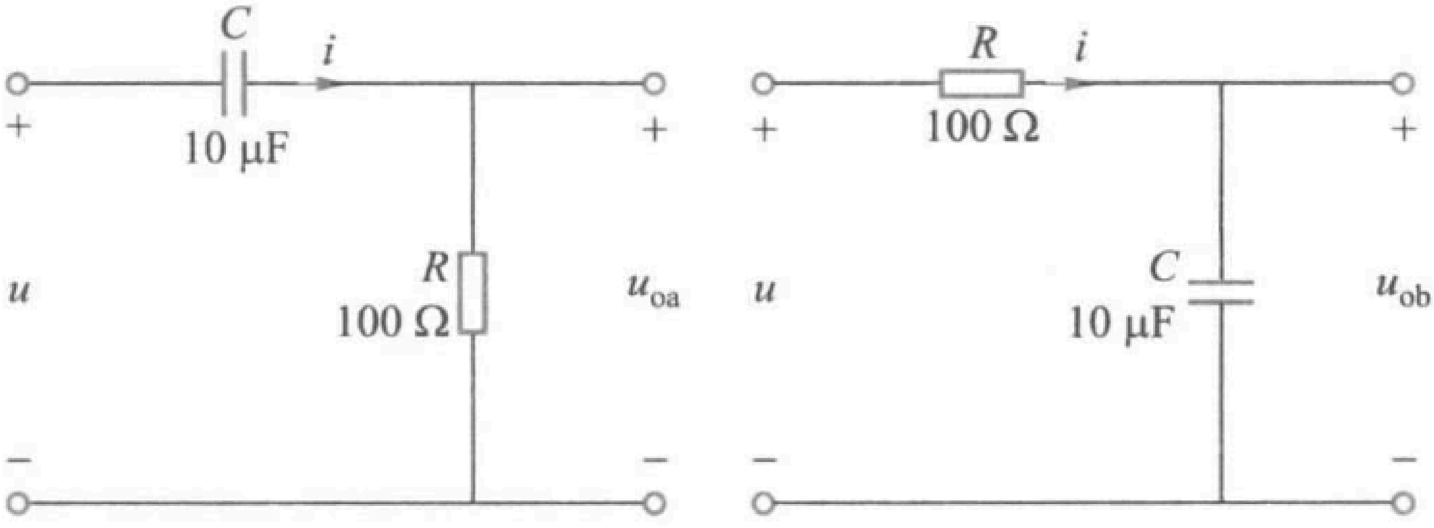
对锯齿波电压：

$$u\left(t\right)=\frac{U_m}{2}-\frac{U_m}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\cdots\right)$$

周期信号的有效值等于其直流分量及各次谐波有效值平方和的平方根，而与
各次谐波的初相位无关。

$$U=\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}U_k^2}$$

例题2.5



(a) (b)