~~自动控制原理~~ 控制工程基础 补天笔记 part2

第五章 控制系统稳定性分析

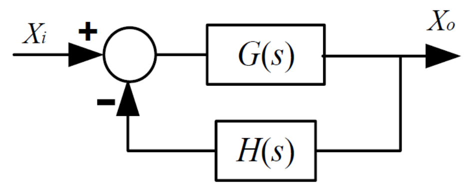
稳定的充要条件

系统稳定与以下条件等价

1. 系统的所有闭环极点，均具有负的实部
2. 所有闭环极点，均严格位于左半S平面
3. 闭环特征方程的根均具有负的实部

劳斯判据

对于右图所示系统，**闭环传递函数**$G(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$。闭环传递函数的分母$1+G(s)H(s)=0$为系统的特征方程。



设特征方程为

$$a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

判断系统是否稳定前先检查其必要条件：**所有系数**$a_0,a_1,\ldots,a_n>0$**（或均<0）**，如果不满足系统就不稳定。

劳斯阵列的构造方法

列出如右图所示劳斯阵列，步骤如下：

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots$
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
s^2	u_1	u_2			
s^1	v_1				
s^0	w_1				

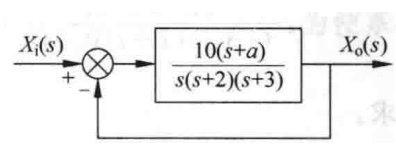
1. 根据特征方程的系数，按图示方法填写阵列的第一、二行；
2. 从第三行起，每个元素的分母为其**上一行的第一个元素**，分子为**其前两行的第一列两个元素和其前两行的下一列两个元素合成的2x2矩阵行列式值的相反数**（见下公式）
   具体地说，有
   $$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1},b_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$$
3. 依此类推，直到阵列的第n+1行；即s_0行

劳斯稳定判据判断系统的稳定性

1. 劳斯阵列第一列所有项> 0 $\Rightarrow$ 系统稳定
2. 劳斯阵列第一列存在<0的项 $\Rightarrow$ 系统不稳定
3. 劳斯阵列第一列存在=0的项 $\Rightarrow$ 系统处于临界稳定状态
4. 对于二阶系统，有一个很好的结论：系数均大于0即稳定。
5. 对于三阶系统，若其特征根方程为$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$，则劳斯判据等价为$A>0,B>0,D>0,BC-AD>0$

例题

对于右图系统，确定使系统特征值均落在s平面中$Re=-1$这条线左边的a值。



$$\frac{X_o}{X_i}=\frac{\frac{10(s+a)}{s(s+2)(s+3)}}{1+\frac{10(s+a)}{s(s+2)(s+3)}}=\frac{\cdots}{s^3+5s^2+16s+10a}$$

令$s=z-1$，那么如果对于z来说所有的特征根实部均小于0，那么对于s来说所有的特征根实部都小于-1

代入特征方程，化简得

$$z^3+2z^2+9z+10a-12=0$$

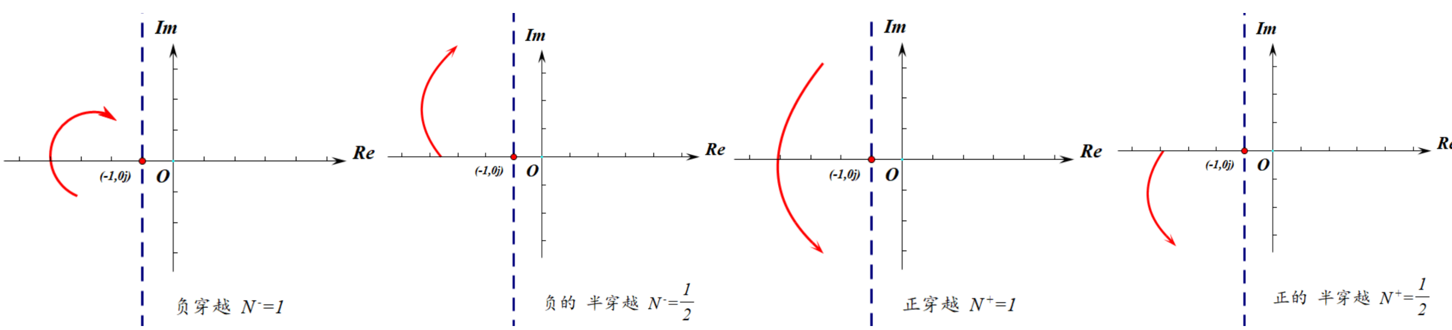
s^3	1	9
s^2	2	$10a-12$
s^1	$15-5a$	
s^0	$10a-12$	

列出劳斯阵列，第一列所有项都大于0
解得$1.2<a<3$

奈奎斯特判据

$$Z=P-2(N^+-N^-)=0$$

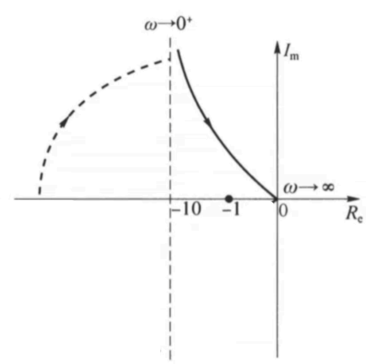
这里Z为右半s平面中闭环特征根的个数
P为右半s平面中开环极点的个数
在s平面上，我们只看$Re=-1$线的左边，在这个区域内，如果奈氏图（包括虚线）顺时针穿越实轴，记为一次负穿越，即N^-，如果逆时针穿越实轴，记为一次正穿越，即N^+，如果奈氏图是从实轴出发的，那么叫做半穿越，同样是逆正顺负，但是一次半穿越只记$\frac{1}{2}$



如果奈氏图穿过$(-1,0)$点，那么系统临界稳定
系统稳定与闭环特征方程的根均具有负的实部等价，也就是说$Z=0$时系统稳定。

例题

系统开环传递函数$G(s)=\frac{10(s+0.5)}{s(s+1)(s-1)}$，用奈奎斯特判据判断闭环系统稳定性。



容易得到$P=1$
画出右图所示奈奎斯特图，发现只有一个负的半穿越

$$Z=P-2(N^+-N^-)=2\neq0$$

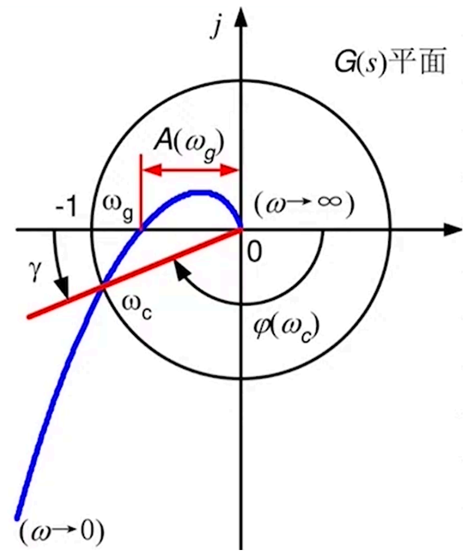
系统不稳定。

稳定裕量

稳定裕量的概念适用于“开环是最小相位系统”的闭环系统。

剪切频率/截止频率

剪切频率ω_c是使得$|G(j\omega_c)|=1$的频率，在乃氏图上表示为乃氏图与单位圆的交点处的频率。在伯德图上表现为伯德图与横轴的交点。



穿越频率

穿越频率ω_g是使得$\angle G(j\omega_g)=-180°$的频率，在乃氏图上表示为乃氏图与负实轴的交点处的频率。

相角裕度

$$\gamma = 180° + \angle G(j\omega_c)$$

幅值裕度/增益裕度

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)|}$$

K_g大小	γ大小	系统稳定性
$K_g > 1$	$\gamma > 0$	系统稳定
$K_g = 1$	$\gamma = 0$	系统临界稳定
$K_g < 1$	$\gamma < 0$	系统不稳定

第六章 控制系统的误差分析和计算

偏差（按输入定义的误差）定义为

$$\epsilon(t) = x_i(t) - y(t)$$

其中$x_i(t)$为输入信号，$y(t)$为反馈信号
误差（按输出定义的误差）定义为

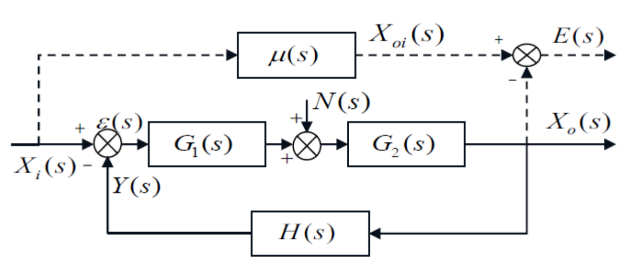
$$e(t) = x_{oi}(t) - x_o(t)$$

其中$x_{oi}(t)$为期望输出的信号，$x_o(t)$是实际输出的信号。误差信号的稳态分量即为稳态误差，记为e_{ss}
根据终值定理，有

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

负反馈系统的稳态误差

求稳态误差之前**一定要先判稳**。稳定的系统才有稳态误差。
如右图，根据定义，偏差为



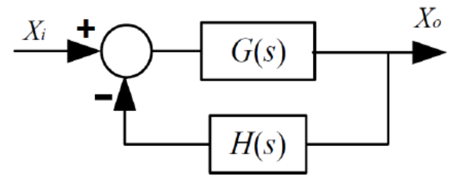
$$\epsilon(s) = X_i(s) - Y(s) = X_i(s) - X_o(s)H(s)$$

$X_i(s)$通过负反馈系统得到$X_o(s)$,等价于经过一个理想传函$\mu(s)$,得到一个

理想的输出$X_{oi}(s)$，根据误差的定义，误差$E(s)=X_{oi}(s)-X_o(s)=\mu(s)X_i(s)-X_o(s)$。在实际负反馈控制系统中，偏差$\epsilon(s)$趋近于零，从而有$\mu(s)X_i(s)=X_o(s)=\dfrac{Y(s)}{H(s)}=\dfrac{X_i(s)}{H(s)}$，从而得到$\mu(s)=\dfrac{1}{H(s)}$

$$E(s)=\mu(s)X_i(s)-X_o(s)=\frac{1}{H(s)}X_i(s)-X_o(s)=\frac{\epsilon(s)}{H(s)}$$

考虑右图这种最简单的负反馈系统，根据终值定理，有稳态误差



$$\boxed{e_{ss}(t)=\lim_{s\to 0}s\frac{E(s)}{X_i(s)}X_i(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{H(s)(1+G(s)H(s))}X_i(s)}$$

稳态偏差

$$\epsilon_{ss}(t)=\lim_{s\to 0}s\frac{\epsilon(s)}{X_i(s)}X_i(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+G(s)H(s)}X_i(s)$$

特别的，当系统为单位负反馈系统，即$H(s)=1$时，偏差与误差相等，有稳态误差

$$\boxed{e_{ss}(t)=\epsilon_{ss}(t)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+G(s)}X_i(s)}$$

注：简单来说，偏差ϵ就是比较点后的那个值，而误差就是$\dfrac{\epsilon}{H(s)}$

静态误差系数法

值得一提的是，静态误差系数法求得的是**稳态偏差（即按输入定义的误差）**，而我们一般所说的稳态误差只有在单位反馈系统才与稳态偏差相等。

使用该方法首先要将开环传递函数$G(s)H(s)$化为尾1型，即$G(s)H(s)=\dfrac{K(T_1s+1)\cdots}{s^v(T_2s+1)\cdots}$，设$G(s)H(s)=\dfrac{K}{s^v}G(0)$，则易知$\lim\limits_{s\to 0}G_0=1$
由终值定理

$$\epsilon_{ss}=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+G(s)H(s)}X_i(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+\dfrac{K}{s^v}G_0}X_i(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+\dfrac{K}{s^v}}X_i(s)$$

以输入为单位阶跃响应为例，此时$X_i(s)=\dfrac{1}{s}$

$$\epsilon_{ss}==\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{K}{s^v}}$$

我们仅对$v=0,1,2$进行讨论，可知$v=0$时，$\epsilon_{ss}=\dfrac{1}{1+K}$
$v=1,2$时，$\epsilon_{ss}=0$

可以列出以下表格

系统类别	单位阶跃$1(t)$	等速输入t	加速度输入$\frac{1}{2}t^2$
0型	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I型	0	$\frac{1}{K}$	∞
II型	0	0	$\frac{1}{K}$

由于

$$\epsilon_{ss}=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+\frac{K}{s^v}}X_i(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{\frac{1}{sX_i(s)}+\frac{K}{s^{v+1}X_i(s)}}$$

该式的值完全由$\lim\limits_{s\to 0}\frac{K}{s^{v+1}X_i(s)}$决定，将该式定义为静态误差系数，得到表格如下

系统类别	静态位置误差系数K_p	静态速度误差系数K_v	静态加速度误差系数K_a
0型	K	0	0
I型	∞	K	0
II型	∞	∞	K

综上，对于典型输入信号组合$x_i(t)=A\cdot 1(t)+Bt+\frac{1}{2}Ct^2$

稳态偏差为

$$\boxed{\epsilon_{ss}=\frac{A}{1+K_p}+\frac{B}{K_v}+\frac{C}{K_a}}$$

干扰引起的稳态误差

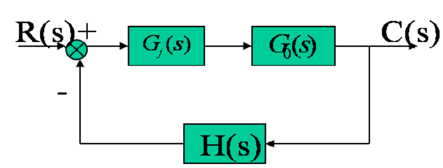
干扰其实就是另一个输入。当系统存在多个输入时，将各个输入的稳态误差相加即可得到系统的稳态误差。即

$$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}$$

需要注意的是，我们的误差是由题目中的输入$R(s)$决定，而不是干扰$N(s)$，这一点上他们不能等同看待。

第七章 控制系统的综合与校正

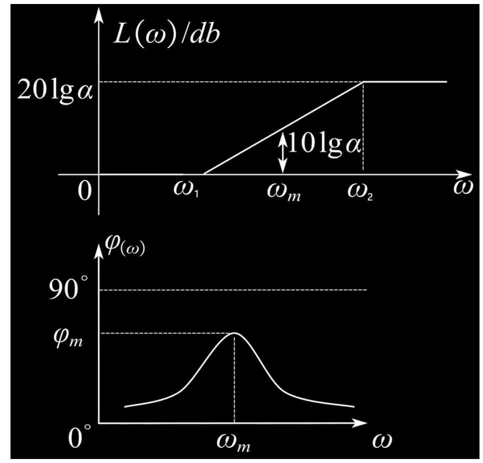
在此章中学到的校正均为串联校正，即在需要校正的系统中，将校正器$G_c(s)$与被校正系统$G_0(s)$串联，从而达到改善系统性能的目的。



超前校正

相位超前校正，顾名思义，是为了提高相位角。因此，超前校正环节的伯德图中，相位角是大于0的，从而增加系统的相位裕度。超前校正环节的传递函数为

$$G_j(s)=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1},\alpha>1$$



伯德图如右图，其中$\omega_1=\dfrac{1}{\alpha T},\omega_m=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}T},\omega_2=\dfrac{1}{T}$，$\omega_m$为最大超前角频率
相频图中最大相角φ_m与α的关系是

$$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$$

记ω_{c0}为未校正截止频率，γ_0为未校正相角裕度，ω_c^*为题目要求截止频率，γ^*为题目要求相角裕度
那么使用超前校正有以下两点要求

1. $\omega_{c0}<\omega_c^*,\gamma_0<\gamma^*$时优先考虑超前校正
2. 校正系统所需要的最大超前角φ_m需要小于60°

超前校正的具体步骤

下面通过一个例题来说明超前校正的具体步骤。
设单位反馈系统的开环传递函数

$$G_0(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

试设计校正装置$G_j(s)$，使得校正后系统满足下列指标：

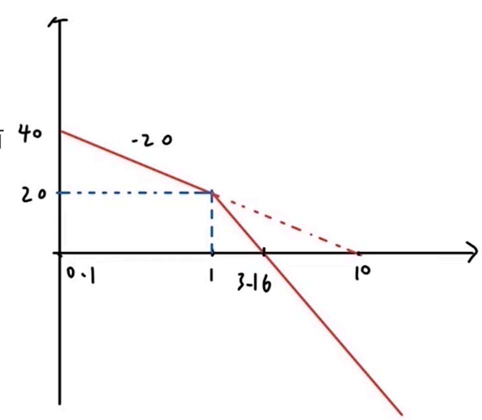
1. 当输入$r=t$时，稳态误差$e_{ss}^*\le 0.1$
2. 开环系统截止频率$\omega_c^*\ge 6rad/s$
3. 相角裕度$\gamma^*\ge 60^\circ$
4. 幅值裕度$h^*\ge 10dB$

第一步：根据稳态误差校正低频段，即求得开环增益K

注意到是I型系统，输入为单位斜坡（等速输入），根据静态误差系数，$e_{ss}=\dfrac{1}{K}$，从而有$\dfrac{1}{K}\le 0.1$，得到$K\ge 10$。取$K=10$，从而开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)}$$

第二步：画出未校正系统的伯德图，求出截止频率ω_{c0}和相角裕度γ_0



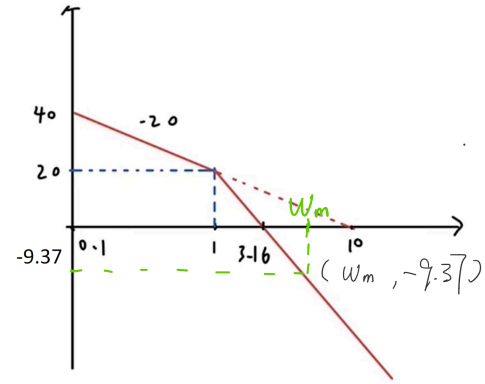
画图可以得到$\omega_{c0}=3.16rad/s<\omega_c^*$，$\gamma_0=180^\circ+\angle G(j\omega_c)=17.56^\circ<\gamma^*=60^\circ$，因此需要进行超前校正。
最大超前角应该比目标相角裕度和未校正相角裕度的差大$5^\circ-12^\circ$，因为校正过程中会有一些损失。我们一般就取10°*(注意，如果你最后校正失败了，把这个角度提一提，再试几次)*

$$\varphi_m=\gamma^*-\gamma_0+10^\circ=52.44^\circ<60^\circ$$

可以使用超前校正。

第三步：根据最大超前角φ_m求出α，从而得到$\omega=\omega_m$得到校正环节给予的幅频增益$10\lg\alpha$，从而求出按理想情况下校正的截止频率ω_m

相角裕度$\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)$完全由$\omega_c$时的相角决定，因此在理想状态下，最大超前角要加在$\omega=\omega_c$处，因此要让$\omega_m=\omega_c$，此处$\omega_c$为校正后的截止频率



$$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=8.65, 10\lg\alpha=9.37dB$$

要让$\omega_m=\omega_c$，需要让$L(\omega_c)+L(\omega_m)=0$，因此有

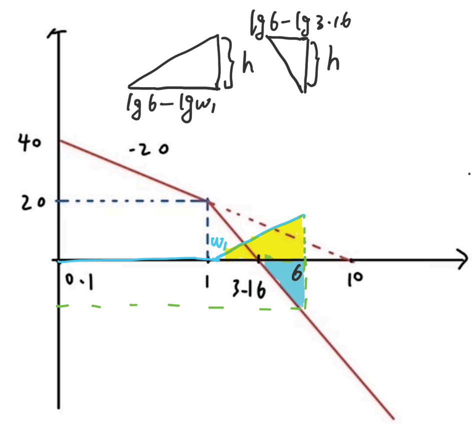
$$L(\omega_c)=-10\lg\alpha=-9.37dB$$

由图像可以列出

$$\frac{-9.37-0}{\lg\omega_m-\lg 3.16}=-40\Rightarrow\omega_m=5.42rad/s$$

第四步：对比ω_m与ω_c^*的大小，若$\omega_m<\omega_c^*$则取$\omega_c=\omega_m$，若$\omega_m<\omega_c^*$则取$\omega_c=\omega_c^*$，否则不符合题意。也即取$\omega_c=\max\{\omega_m,\omega_c^*\}$

此题中$\omega_c=\max\{\omega_m,\omega_c^*\}=6rad/s$
取校正环节的$\omega_m'=\omega_c=6rad/s$
如右图，蓝色曲线为校正环节的伯德图，那么在$\omega=6$时，$L_1(6)+L_2(6)=0$。把图中两个阴影三角形提出来，数据如伯德图上方的两个三角形所示，有



$$h=20(\lg 6-\lg\omega_1)=40(\lg 6-\lg 3.16)$$

解得$\omega_1=1.67rad/s$，从而很容易求出$\omega_2=21.6rad/s$
得到校正环节传递函数

$$G_j(s)=\frac{\frac{1}{1.67}s+1}{\frac{1}{21.6}s+1}$$

注：如果最后取$\omega_c=\omega_m$，那么$\omega_1=\omega_m\cdot\frac{1}{\sqrt{a}},\omega_2=\omega_m\cdot\sqrt{a}$

第五步：验算
校正后的开环传递函数

$$G(s)=G_0(s)G_j(s)=\frac{10}{s(s+1)}\cdot\frac{\frac{1}{1.67}s+1}{\frac{1}{21.6}s+1}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{10\sqrt{(\frac{\omega}{1.67})^2+1}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{(\frac{\omega}{21.6})^2+1}}$$

$$|G(j\omega_c)|=1$$

解得$\omega_c = 6rad/s$
相角裕度

$$\gamma = 180 + \angle G(j\omega_c) = 68.38^\circ > 60^\circ$$

$$\angle G(j\omega_g) = -\pi$$

你会发现这个方程是没有实根的，原因是

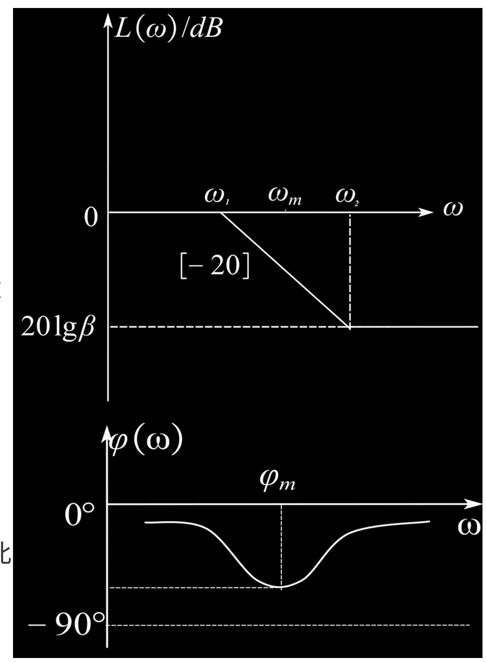
$$G(j\omega_g) = -90^\circ - \arctan(\omega) + \arctan\left(\frac{\omega}{1.67}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{21.6}\right) > -180^\circ$$
$$\Leftrightarrow \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{1.67}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{21.6}\right) < 90^\circ$$

显然是成立的
$\omega \to +\infty$时$G(j\omega_g) \to -180^\circ$，不妨认为$\omega_g = +\infty$，此时$|G(j\omega_g)| = 0^+$，也就是说，幅值裕度$K_g = +\infty$，显然满足要求。

滞后校正

滞后环节的传递函数为

$$G_j(s) = \frac{\beta Ts + 1}{Ts + 1}, \beta < 1$$



伯德图如右图，其中$\omega_1 = \dfrac{1}{T}, \omega_m = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}T}, \omega_2 = \dfrac{1}{\beta T}$，$\omega_m$为最大滞后角频率
记ω_{c0}为未校正截止频率，γ_0为未校正相角裕度，ω_c^*为题目要求截止频率，γ^*为题目要求相角裕度，G_0为未校正前开环传函
那么使用超前校正有以下两点要求

1. $\omega_{c0} > \omega_c^*, \gamma_0 < \gamma^*$时优先考虑滞后校正
2. $\gamma_0(\omega_c^*) = 180^\circ + \angle G_0(j\omega_c) > \gamma^* + 6^\circ$
   原理解释是，相信你已经知道了串联校正就是简单的伯德图叠加，那么由相频曲线可以看到始终小于0，我们即使用相角比较大的部分去校正，也会损失一部分相角，因此需要留出一些裕量，一般取6°即可。

滞后校正的具体步骤

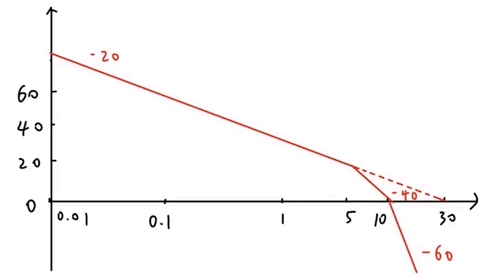
下面通过一个例题来说明滞后校正的具体步骤。
设单位反馈系统的开环传递函数

$$G_0(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)}$$

试设计校正装置$G_j(s)$，使得校正后系统满足下列指标：
(1) 速度误差系数$K_v^* = 30$
(2) 开环系统截止频率$\omega_c^* \geq 2.3rad/s$
(3) 相角裕度$\gamma^* \geq 40^\circ$
(4) 幅值裕度$h^* \geq 10dB$

第一步：校正低频段，即求得开环增益K
显然有$K = K_v^* = 30$
第二步：画出未校正系统的伯德图，求出截止频率ω_{c0}和相角裕度γ_0

$$|G_0(j\omega_{c0})| = 1 \Rightarrow \omega_{c0} = 11.45 > \omega_c^*$$
$$\gamma_0 = 180^\circ + \angle G_0(j\omega_{c0}) = -25.28^\circ < \gamma^*$$

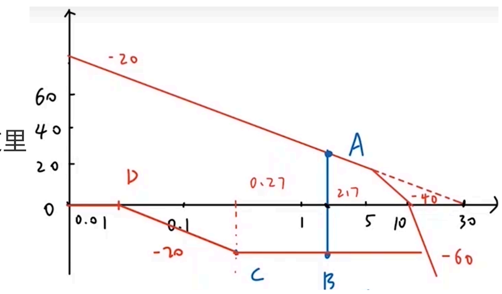


因此我们可以考虑滞后校正。此时我们判断一下前提条件

$$\gamma_0(\omega_c^*) = 180^\circ + \angle G_0(j\omega_c^*) = 52.345^\circ > \gamma^* + 6^\circ$$

可以使用滞后校正
第三步：由$\gamma_0(\omega_c) = \gamma^* + 6^\circ$求出$\omega_c$，作为最终的截止频率，从而求出$\omega_2$，进而求得$\beta$

$$\gamma_0(\omega_c) = \gamma^* + 6^\circ \Rightarrow \omega_c = 2.7rad/s$$



将其作为最终的截止频率，为了让相角落在比较大的位置，我们一般取$\omega_2 = \dfrac{1}{10}\omega_c$，这里$\omega_2 = 0.27rad/s$
将滞后校正的伯德图画在原伯德图上，如右图所示.
设$A(2.7, y)$,由第一段曲线过$(1, 20\lg 30)$可以列出

$$\frac{y - 20\lg 30}{\lg 2.7 - \lg 1} = -20$$

解得$y = 20.915dB$，又有$20\lg\beta = -y = -20.915$
解得$\beta = 0.09$
从而有$\omega_1 = \omega_2\beta = 0.0243rad/s$
解得校正环节传递函数

$$G_j(s) = \frac{\frac{1}{0.27}s + 1}{\frac{1}{0.0243}s + 1}$$

第四步：验算
此处不再赘述。

经验公式

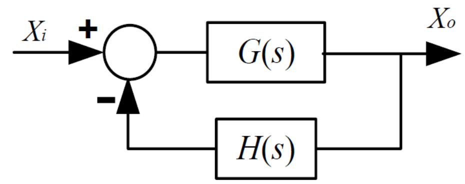
其实滞后校正时有一个经验公式，适用于需要校正的I型系统

$$K_v = \frac{1}{\beta}w_c$$

这里ω_c任取符合题目条件的截止频率
然后$\omega_2 = \dfrac{1}{10}\omega_c$
可以尝试用它快速求出滞后校正环节的传递函数并验算。

第八章 根轨迹法

根轨迹的定义



图示系统中开环传递函数为$G(s)H(s)$，将其写为标准的零极点形式（又称为首1标准型）:

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

其中K^*称为根轨迹增益。

该系统的闭环传递函数为$G(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$，特征方程为$1+G(s)H(s)=0$

根轨迹是指**随着根轨迹增益K^*的变化，闭环系统特征方程的根在复平面上所描绘的轨迹**。

根轨迹的绘制法则

1. 根轨迹的起点和终点:根轨迹起始于**开环极点**,终止于**开环零点**;如果开环零点个数m少于开环极点个数n,则有n-m条根轨迹终止于无穷远处。注意：这句话的意思是，一个开环极点只能指向一个开环零点（或者指向无穷远），一个开环零点也只能被一个开环极点指向。**在根轨迹图上极点用x表示，零点用o表示。**
2. 根轨迹的分支数、对称性和连续性：根轨迹的分支数与**开环零点数m、开环极点数n中的大者**相等，根轨迹连续并且**对称于实轴**。（因为复数闭环特征根是共轭的）
3. 实轴上的根轨迹：**实轴**上的某一区域，若其右边开环**实数**零、极点个数之和为奇数，则该区域必是根轨迹。
4. 根轨迹的渐近线:当系统开环极点个数n大于开环零点个数m时,有$n-m$条根轨迹分支沿着与实轴夹角为φ_a、交点为σ_a的一组渐近线趋向于无穷远处,且有

$$\begin{cases}\varphi_\mathrm{a}=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}\\[2ex]\sigma_\mathrm{a}=\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}p_j-\sum\limits_{i=1}^{m}z_i}{n-m}\end{cases}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,n-m-1)$$

   其中$\sum\limits_{j=1}^{n}p_j$为开环极点的和，$\sum\limits_{i=1}^{m}z_i$为开环零点的和。
   渐近线也是对称于实轴的，将平面平均分为$n-m$份。

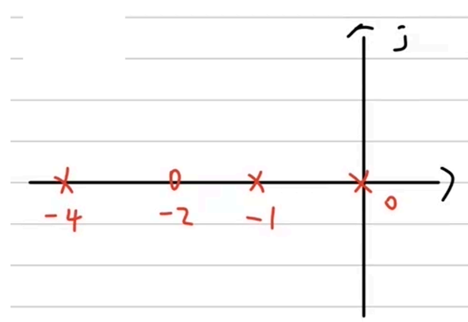
例题

系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$

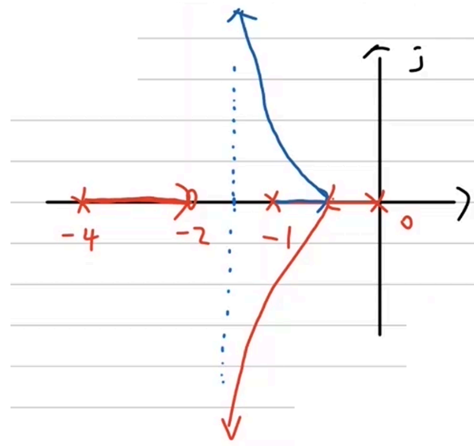
绘制根轨迹图。

列出开环极点与开环零点，并标注在图中。



$$p_1=0,p_2=-1,p_3=-4;z_1=-2$$

确定分支数，根轨迹的分支数与开环零点数m、开环极点数n中的大者相等，这里是3
确定实轴上的根轨迹，对于区间$(-\infty,-4)$来说，其右边有4个开环极点与零点，因此不是根轨迹。其他区间同理，从而得到实轴上根轨迹的区间为$(-4,-2)$与$(-1,0)$
确定是哪个极点指向-2.如果是0或-1指向-2.由以上推测出来的实轴上的根轨迹，根轨迹不能在实轴上。会导致根轨迹关于实轴不对称，因此不成立。
所以是-4指向-2，其余两个极点出发的根轨迹分支指向无穷远处。
确定渐近线，有$n-m=2$条渐近线，其夹角为$\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$，与实轴的交点为$\sigma_a=\frac{0-1-4-(-2)}{3-1}=-\frac{3}{2}$.据此绘图即可。
右图即为该根轨迹图。



根轨迹的分离点

两条或两条以上根轨迹分支在s平面上相遇又立即分开的点（例如上图中红蓝交界的点），称为根轨迹的分离点，分离点的坐标d是下列方程的解:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}$$

式中，z_j为各开环零点的数值;p_i为各开环极点的数值;分离角为$\frac{(2k+1)\pi}{l}$。

这个求分离点的方法等价于，将开环特征方程写成$\frac{K^*A(s)}{B(s)}$的形式，然后解方程$A'(s)B(s)-A(s)B'(s)=0$，如果开环传递函数分母中含有二阶及以上的因式时，可以使用这种方法求解分离点。

根轨迹与虚轴的交点

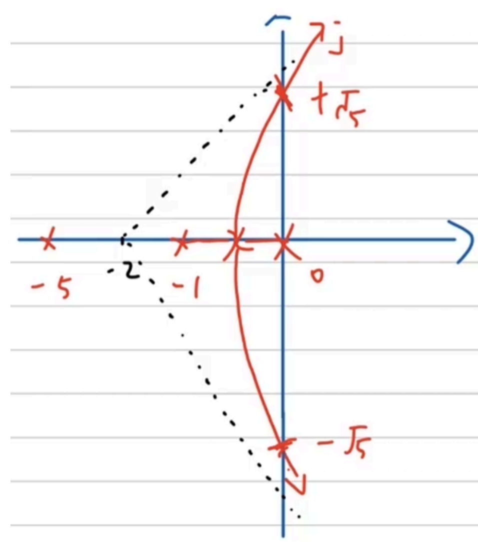
将$s=j\omega$代入开环特征方程，求得的ω即为根轨迹与虚轴的交点处的虚部。

例题

某单位反馈系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+5)}$$

绘制系统根轨迹。



记得求出分离点并标注于图上。
这里只介绍根轨迹与虚轴交点的求解方法。将$s=j\omega$代入特征方程，得到

$$j\omega(j\omega+1)(j\omega+5)=0$$

化简得到

$$-6\omega^2+K^*+(-\omega^3+5\omega)j=0$$

由此可知

$$-6\omega^2+K^*=0,-\omega^3+5\omega=0$$

解得$\omega = \pm\sqrt{5}, K^* = 30$

根轨迹的起始角与终止角

根轨迹离开开环复数极点处的切线与正实轴的夹角，称为起始角，以θ_{p_i}标志;根轨迹进入开环复数零点处的切线与正实轴的夹角，称为终止角，以φ_{z_i}表示。这些角度可按如下关系式求出

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} \theta_{p_j p_i}\right); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\varphi_{z_i} = (2k+1)\pi - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{m} \varphi_{z_j z_i} - \sum_{j=1}^{n} \theta_{p_j z_i}\right); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

这看起来很恐怖，但是有简单的记忆方法
我们都知道对于一个传递函数来说，它的相角是根据分子各复数的相角减去分母各复数的相角。分子对应的是零点，分母对应的是极点。
那么以上两个公式我们可以简单记忆为

$$\text{零点角} - \text{极点角} = (2k+1)\pi$$

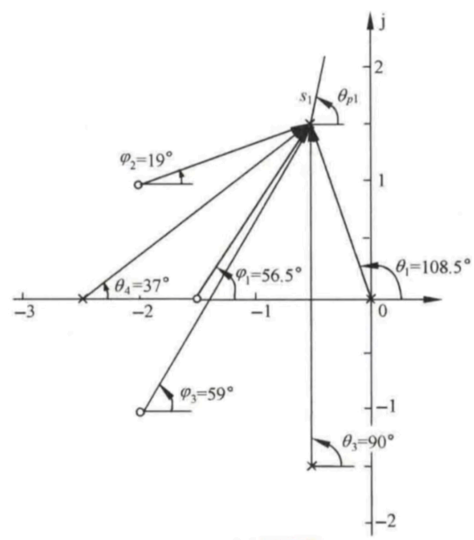
，这里$(2k+1)\pi$通常取$-\pi$比较合适。下面我们通过例题来说明。

起始角（入射角）

开环传函的各零点和极点都标注于图上。求出θ_{p1}
求起始角的步骤：
各零点与极点与求起始角的极点连线，**从零点向该极点连线与实轴正半轴的夹角是“零点角”，从极点向该极点连线与实轴正半轴的夹角是“极点角”，同时，由于所求起始角从极点发出，我们将起始角也认为是“极点角”**

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_{p1} = -180^\circ$$

即可求出起始角。

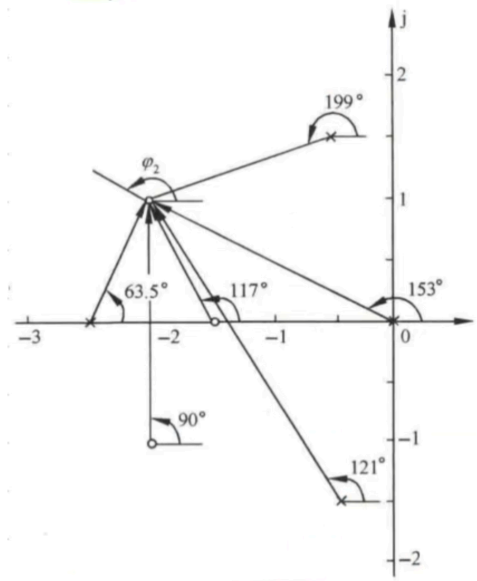


(a) 起始角

终止角（出射角）

各零点与极点与求终止角的零点连线，**从零点向该零连线与实轴正半轴的夹角是“零点角”，从极点向该零点连线与实轴正半轴的夹角是“极点角”，同时，由于所求终止角从零点结束，我们将终止角也认为是“零点角”**

$$\varphi_2 + 90^\circ + 117^\circ - 63.5^\circ - 121^\circ - 199^\circ - 153^\circ = -180^\circ$$



(b) 终止角