浙江大学 20_23_ –20_24_学年_春夏_学期

《 信息理论 》课程期末考试试卷

课程号：___851Z0010___，开课学院：_信息与电子工程学院_

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：√闭、开卷（请在选定项上打√），允许带计算器入场

考试日期：_2024_年__6__月__22__日，考试时间：_120_分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：______________学号：________________所属院系：____________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、判断题（正确的打“√”，不正确的打“×”，**将结果填在下面的方框内**，共 10×2=20 分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
判断结果					
题号	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
判断结果					

（1） 随机事件的互信息可小于 0，随机变量的互信息也可小于 0。

（2） 对于连续随机变量，其微分熵越大，说明不确定性越大。

（3） 如果变量 X、Y、Z 构成马尔可夫链，即 $X \to Y \to Z$，则必有 $I(X;Y) \ge I(X;Z)$。

（4） 对于任何二元贝努利信源，全零序列都不是一个典型列。

（5） 对一个离散无记忆信源进行 Shannon 编码，则其平均码长必然大于该信源 Huffman 编码的平均码长。

（6） 不存在码长为{1,2,3,3}的唯一可译码。

（7） 平稳信源的平均每符号熵 $H_N(X)$ 随着 N 的增大单调递减。

（8） 对一个信源进行 D 元 Huffman 编码，则出现概率最小的两个符号所对应的码长相等。

（9） 对于方差一定的连续随机变量，高斯变量的微分熵最大。

（10） 典型列集合中元素的个数必然大于非典型集合中元素的个数。

二、(10 分) 设离散随机变量 X ，Y ，Z 满足 $Z = X + Y$ 。试证：

（1） $H(X \mid Z) = H(Y \mid Z)$；

（2）如果 X ，Y 相互独立，则 $H(Z) \geq H(X)$ 。

三、（10 分）设信源 $U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0.3 & 0.25 & 0.15 & 0.15 & 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$,

给出上述信源的最佳**二元**编码（Huffman 编码），并计算其编码效率 η 。

四、（10 分）设离散随机变量 X ，Y ，Z 满足 $Y=g(X)$，$Z=h(Y)$，其中 $g(\cdot)$，$h(\cdot)$ 都为确定性函数。试证：

（1）$H(X)\geq H(Y)$；

（2）$H(X)\geq H(Y|Z)$。

五、（10 分）假设 X 是一个具有如下概率密度函数的连续随机变量

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

（1）计算 $h(X)$。

（2）令 $y=ax$（$a\neq 0$），试问当 a 取何值时，$h(Y)$=0。

六、(10 分) 令 X 是一个离散随机变量，$H(X)$=4bits。

（1）假设$Y=f(X)$是 X 上的一对一函数，试写出$H(Y)$，$H(Y|X)$，$H(X|Y)$，$H(X,Y)$，$I(X;Y)$的结果。

（2）假设$Z=g(X)$，试证明$H(Z)\leq$4bits。

七、（15 分）NBA 总决赛采用 7 场 4 胜赛制，即 A 队和 B 队参与总决赛，其中的任何一支球队先赢得 4 场比赛，则系列赛终止，并宣布该队获得总冠军。假设 A 队和 B 队实力一样强大，即任何一只球队赢任何一场球的概率都一样，且任意一场球赛的结果不影响其它场次比赛的结果。

(1) 总决赛需要进行比赛的场次是一个随机变量，令 **X** 代表该随机变量，试写出 **X** 的取值空间，并计算 $H(X)$ 。

(2) 令随机变量 Y 代表赢下第一场比赛的球队，Z 代表获得总冠军的球队，计算 $I(Y;Z)$ 。

八、（15 分）Z 是一个取值空间在$\{0,1,-1\}$上的随机变量，且$p(Z=1)=p(Z=-1)=p/2$，$p(Z=0)=1-p$，X 是独立于 Z 的随机变量，$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}$，令$Y=XZ$。

(1) 写出$H(Y)$与$H(X)$、$H(Z)$之间的关系。

(2) 求$H(Y)$的最大值及使得$H(Y)$最大的 p 和 **q**。

附录：参考公式

$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$

$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$

$I(X; Y) = I(Y; X)$

If $X \to Y \to Z$, Then $I(X; Y) \geq I(X; Z)$，$I(X; Y) \geq I(X; Y|Z)$