材料力学（II）

第十一章 交变应力

第 30 讲

第十章 动载荷

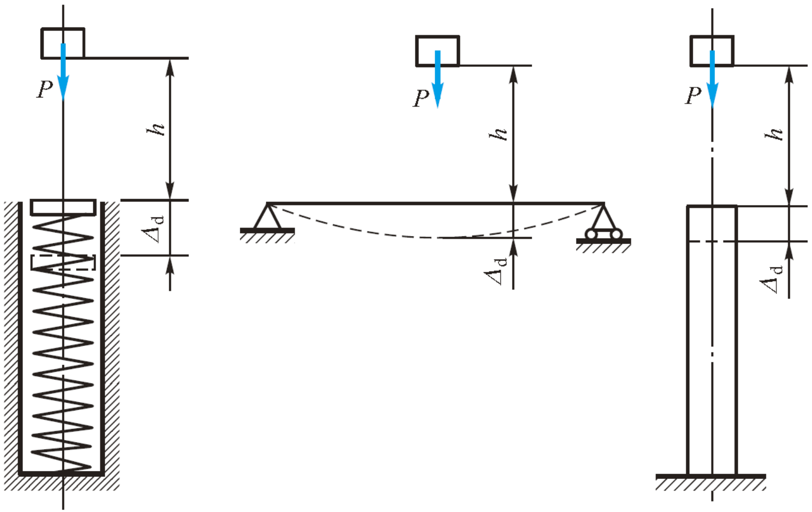
§10.4 杆件受冲击时的应力和变形

一、弹性杆件受竖向冲击

若冲击是因重量为P的物体从高度为h处自由下落造成的，则物体与弹簧接触时，由机械能守恒定律，知

$$T = Ph$$

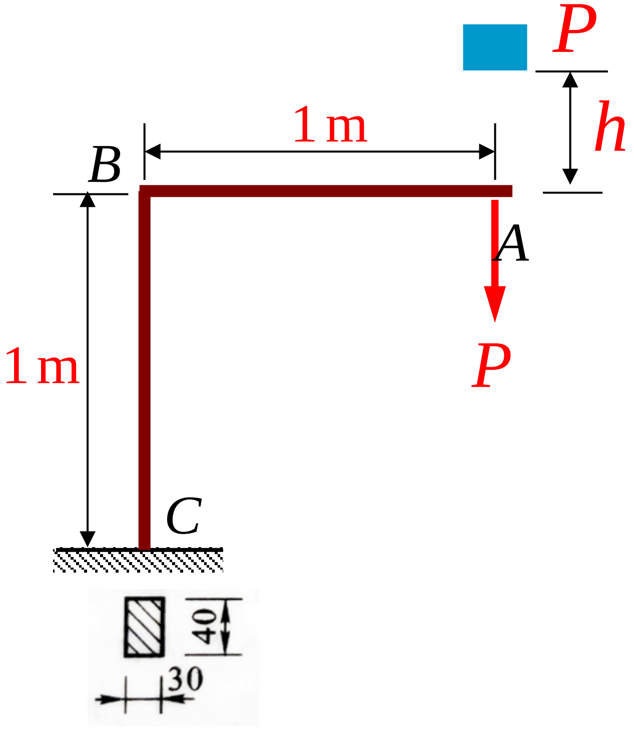
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T}{P\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$



得物体从高度h自由下落时的动荷因数。 h=0的情况，有K_d=2。

例1 图示等截面刚架，重量为 P 的重物自高度h 处自由下落到A点处。已知P=300N，h=50mm，E=200GPa。不计刚架的质量以及轴力和剪力对刚架变形的影响。

试求：截面A的最大铅直位移和刚架内的数值最大的冲击动应力。



解： 先求A点在P力作用下的静位移

利用卡氏第二定理 $\Delta_{st}=\dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial P}$

$$V_\varepsilon=\int_0^l \frac{M_{AB}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^l \frac{M_{BC}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$\Delta_{st}=\int_0^l \frac{M_{AB}(x)}{EI}\frac{\partial M_{AB}(x)}{\partial P}\mathrm{d}x+\int_0^l \frac{M_{BC}(x)}{EI}\frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial P}\mathrm{d}x$$

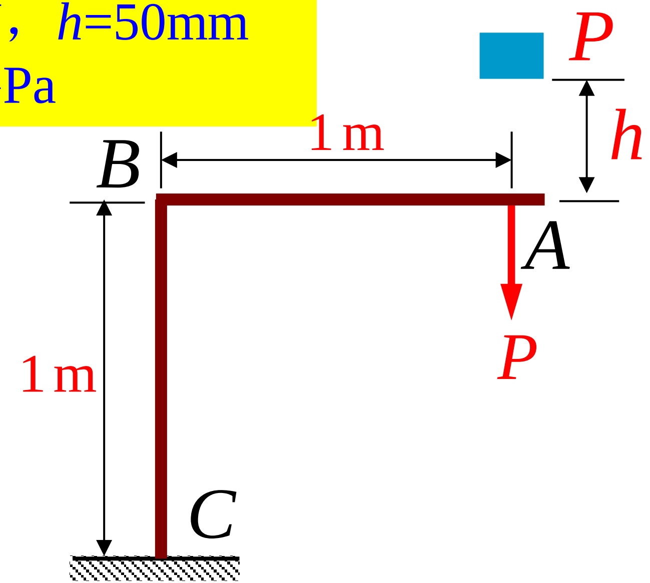
$$M_{AB}(x)=Px$$

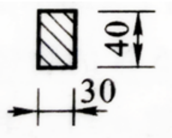
$$M_{BC}(x)=Pl$$

$$\Delta_{st}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^l Px\cdot x\mathrm{d}x+\int_0^l Pl\cdot l\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{P}{EI}\left(\frac{l^3}{3}+l^3\right)=\frac{4Pl^3}{3EI}$$

P=300N， h=50mm
E=200GPa





$$I=\frac{1}{12}bh^3=\frac{1}{12}\times 40\times 30^3\times 10^{-12}=9\times 10^{-8}\,\mathrm{m}^4$$

$$\Delta_{st}=\frac{4Pl^3}{3EI}=\frac{4\times 300\times 1.0^3}{3\times 200\times 10^9\times 9\times 10^{-8}}=2.22\times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}=1+\sqrt{1+\frac{2\times 0.05}{2.22\times 10^{-2}}}=3.345$$

$$\Delta_d=K_d\Delta_{st}=3.345\times 2.22\times 10^{-2}=7.43\times 10^{-2}\,\mathrm{m}=74.3\mathrm{mm}$$

$$\sigma_{max,st}=\left|\frac{M_{max}}{W}+\frac{P}{A}\right|=\left|\frac{Pl}{\frac{1}{6}bh^2}+\frac{P}{bh}\right|=\frac{300\times 1}{\frac{1}{6}\times 40\times 10^{-3}\times(30\times 10^{-3})^2}+\frac{300}{40\times 10^{-3}\times 30\times 10^{-3}}=50.25\mathrm{MPa}$$

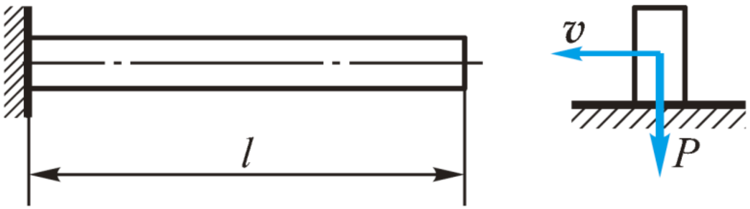
$$\sigma_{max,d}=K_d\sigma_{max,st}$$
$$=3.345\times 50.25$$
$$=168.1\mathrm{MPa}$$

（压）

二、弹性杆件受水平冲击

冲击过程中系统的势能不变 $\Delta V = 0$

若重量为P的冲击物与杆件接触时的速度为v，则动能 $T = \dfrac{1}{2}\dfrac{P}{g}v^2$



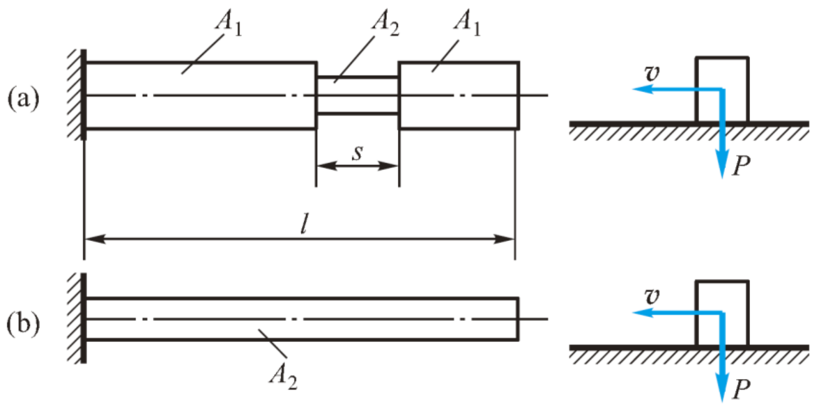
$$\left.\begin{array}{l} V_{\varepsilon d} = \dfrac{1}{2}F_d\Delta_d \\ F_d = \dfrac{\Delta_d}{\Delta_{st}}P \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\varepsilon d} = \frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}P$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta T + \Delta V = V_{\varepsilon d} \\ \boxed{\Delta V = 0} \\ \boxed{\Delta T = T = \dfrac{1}{2}\dfrac{P}{g}v^2} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\varepsilon d} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}P = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 \Rightarrow \Delta_d = \sqrt{\frac{v^2\Delta_{st}}{g}}$$

$$\boxed{K_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}}$$

例2　变截面杆a的最小截面与等截面杆b的截面相等。在相同的冲击载荷下，试比较两杆的强度。



解： P以静载的方式作用于杆端时，杆a和杆b的最大静应力相同

$$\sigma_{st}^{a} = \sigma_{st}^{b} = \frac{P}{A_2}$$

变截面杆a：$\Delta_{st}^{a} = \frac{Ps}{EA_2} + \frac{P(l-s)}{EA_1}$

等截面杆b：$\Delta_{st}^{b} = \frac{Pl}{EA_2} = \frac{Ps}{EA_2} + \frac{P(l-s)}{EA_2}$

s越小，则杆a静变形越小，就更加增大了杆a动应力的数值！

$\because \quad A_1 > A_2 \quad \therefore \quad \Delta_{st}^{a} < \Delta_{st}^{b}$

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} \Rightarrow K_d^a > K_d^b \Rightarrow \sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{st}^{a} = \sigma_{st}^{b} = \dfrac{P}{A_2} \\ \sigma_d = K_d \sigma_{st} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_d^a > \sigma_d^b$$

总结：冲击问题的求解步骤

冲击问题的求解的关键： 重物冲击过程结束后将其看成一个动载荷作用问题来求解。

1. 先求静位移Δ_{st}；

2. 求出动荷因数

竖向冲击：$K_d = \dfrac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \left[1 + \sqrt{1 + \dfrac{2h}{\Delta_{st}}}\right]$； 水平冲击：$K_d = \sqrt{\dfrac{v^2}{g\Delta_{st}}}$；

3. 求出动载荷、动位移、动应力等

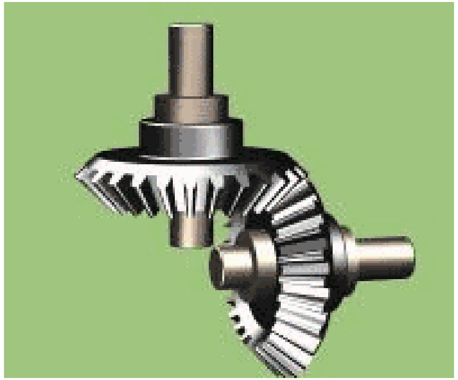
$$P_d = K_d P, \quad \Delta_d = K_d \Delta_{st}, \quad \sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

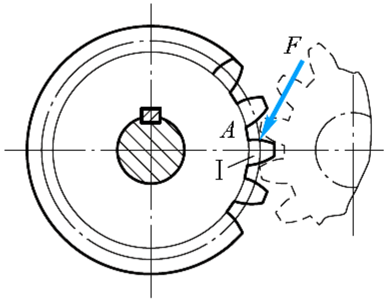
第十一章 交变应力

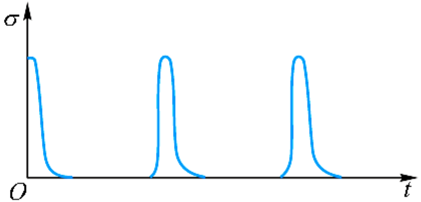
§11.1 交变应力与疲劳失效

一、金属材料的疲劳失效

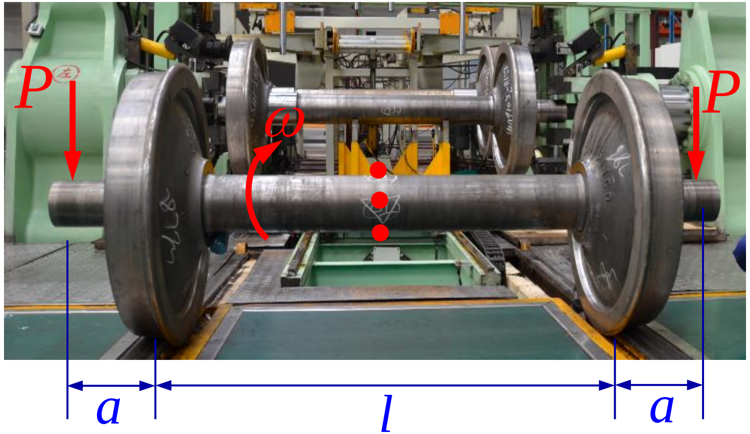
构件内一点处的应力随时间作交替变化，称为交变应力。

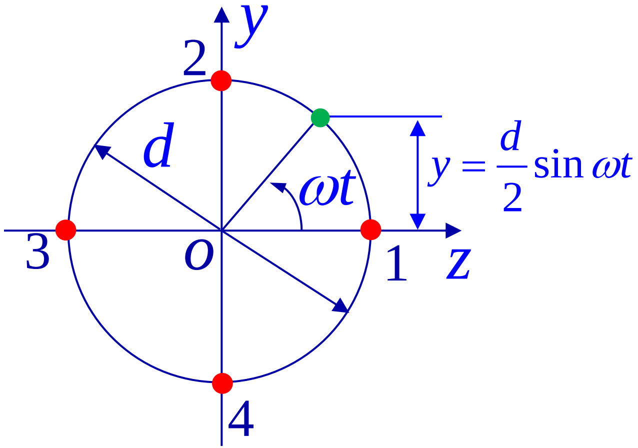


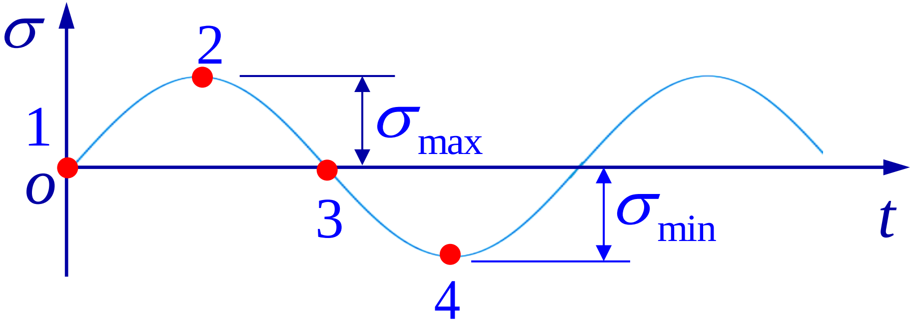




交变应力的例子：观察车轴上一个点







应力随时间变化曲线

$$\sigma(t)=\frac{My}{I_z}=\frac{Pa}{I_z}\cdot\frac{d}{2}\sin\omega t$$

$$0\to\sigma_{max}\to 0\to\sigma_{min}\to 0$$

实践表明：金属材料若长期处于交变应力作用下，在最大工作应力低于材料材料的屈服强度，即使是塑性较好的材料，断裂前也无明显的塑性变形，构件也会发生突然断裂，这种破坏称为疲劳失效。

二、疲劳破坏的过程

1. 在足够大的交变应力下，金属中位置最不利或较弱的晶体，沿最大切应力作用面形成滑移带，滑移带开裂成为微观裂纹—裂纹源
2. 裂纹源尖端的应力集中，使裂纹扩展，分散的微观裂纹经过集结贯通—宏裂纹
3. 随着裂纹的扩展，构件截面逐步削弱，当削弱到一定极限时，构件发生突然断裂。

疲劳破坏的发展过程（续）

4. 断口分成两个区域，即光滑区和粗糙区

裂纹的两侧面在交变载荷作用下，时而压紧，时而分开，多次反复，这就形成断口的光滑区

随着裂纹扩展，截面不断削弱，应力增大到一定程度，因强度不足产生突然断裂，断口的颗粒状粗糙区即是最后突然断裂形成的。

三、疲劳破坏的特点：

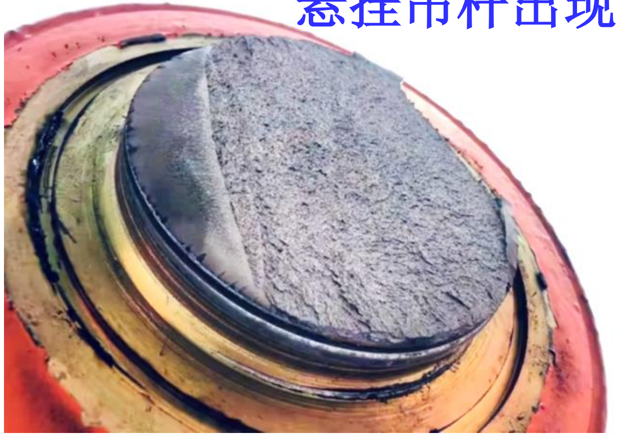
1. $\sigma_{工作} << \sigma_{极限}$

2. 断裂发生要经过一定的循环次数

3. 破坏均呈脆断

4. “断口”分区明显光滑区和粗糙区

2022年1月18日，重庆鹅公岩跨江轨道桥梁悬挂吊杆出现断裂

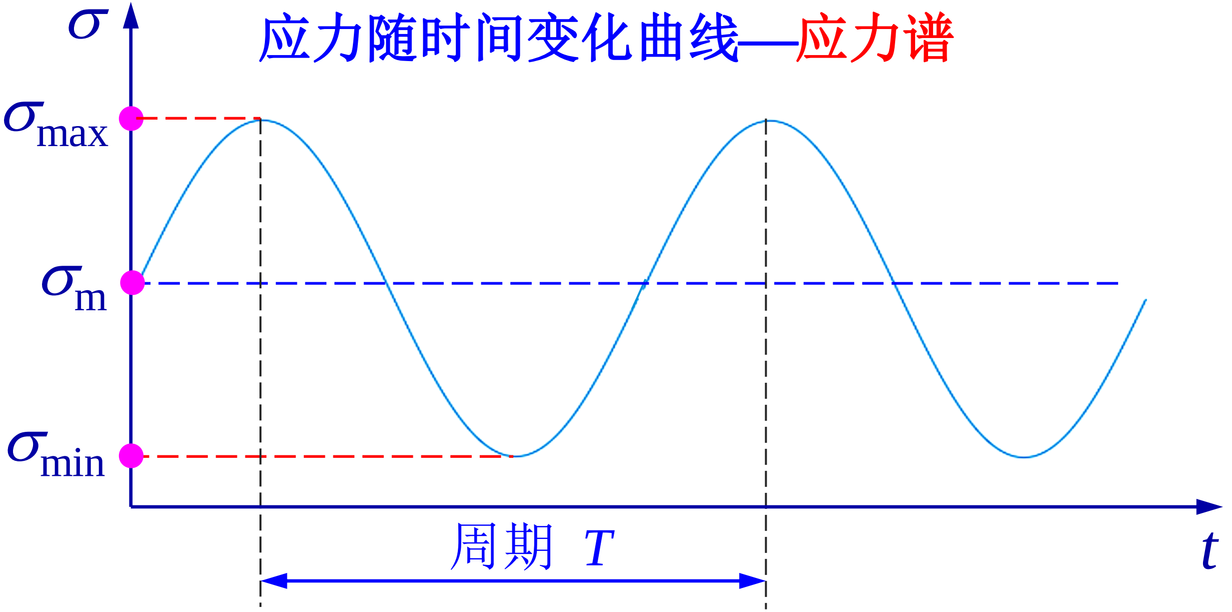


§ 11.2 交变应力的循环特征、应力幅和平均应力

1. 循环特征、平均应力和应力幅

（1）循环特征（应力比）Cycle property

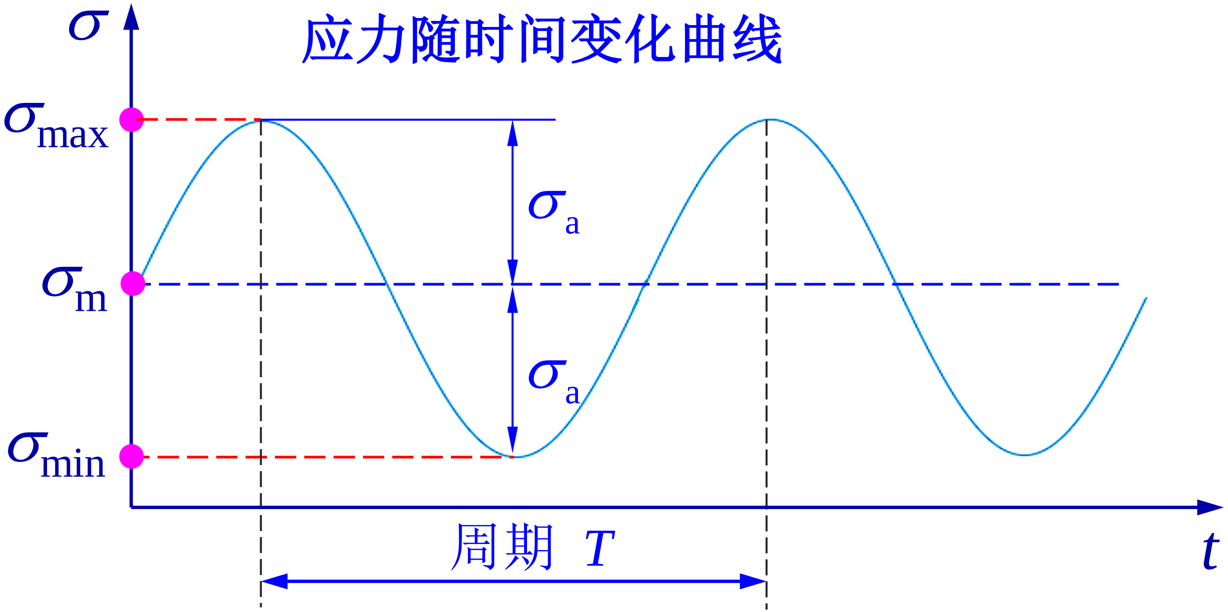
$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$



完成一个应力循环所需要的时间

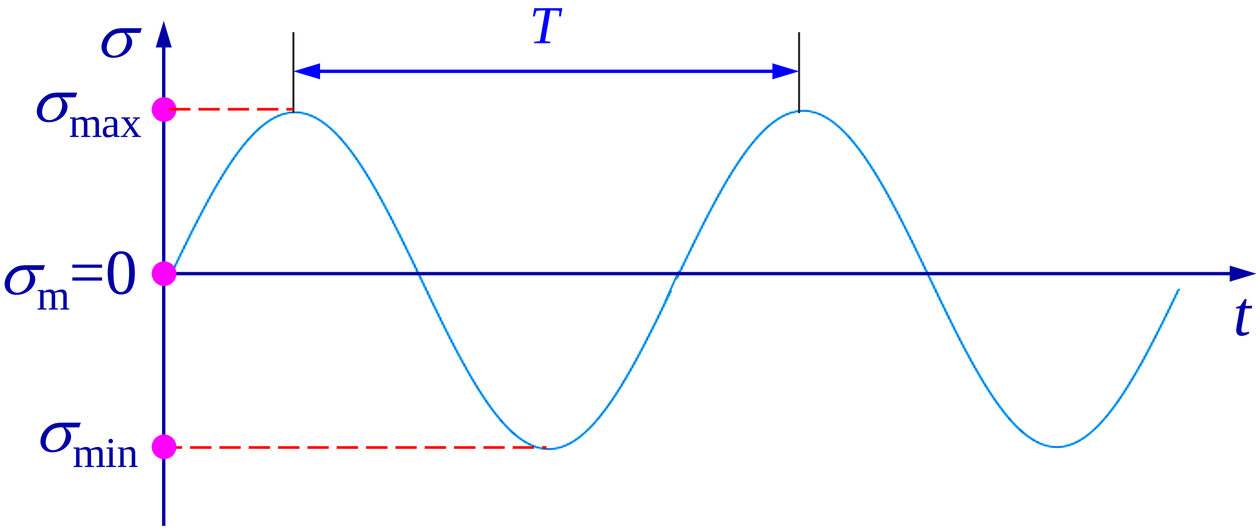
（2）平均应力 Average stress $\sigma_m = \dfrac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$

（3）应力幅 Amplitude of stress $\sigma_a = \dfrac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$



2. 几种特殊的交变应力

（1）对称循环



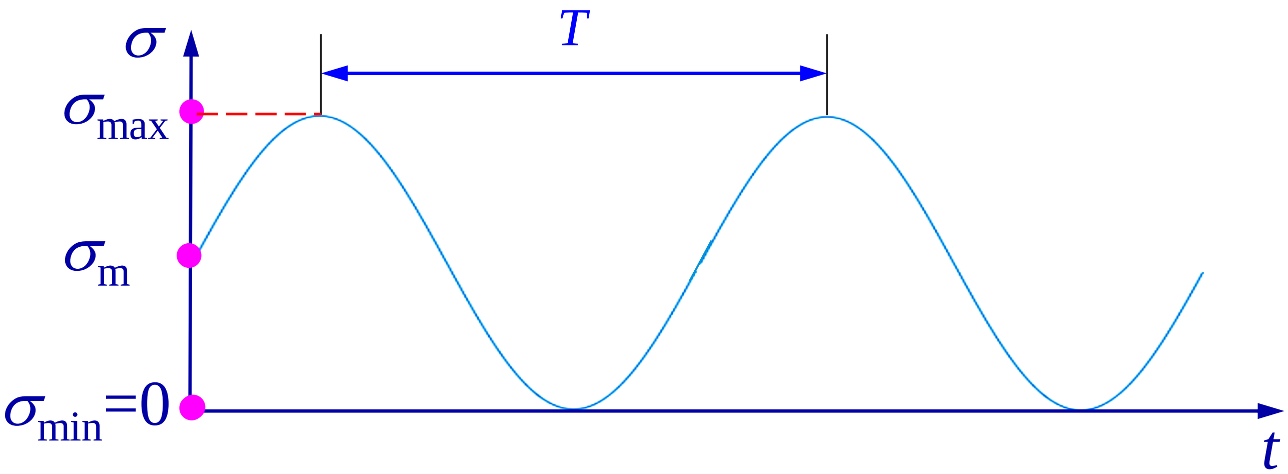
$$r=\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}=-1$$

$$\sigma_m=0$$

$$\sigma_a=\sigma_{max}$$

$r\neq-1$ 统称为非对称循环

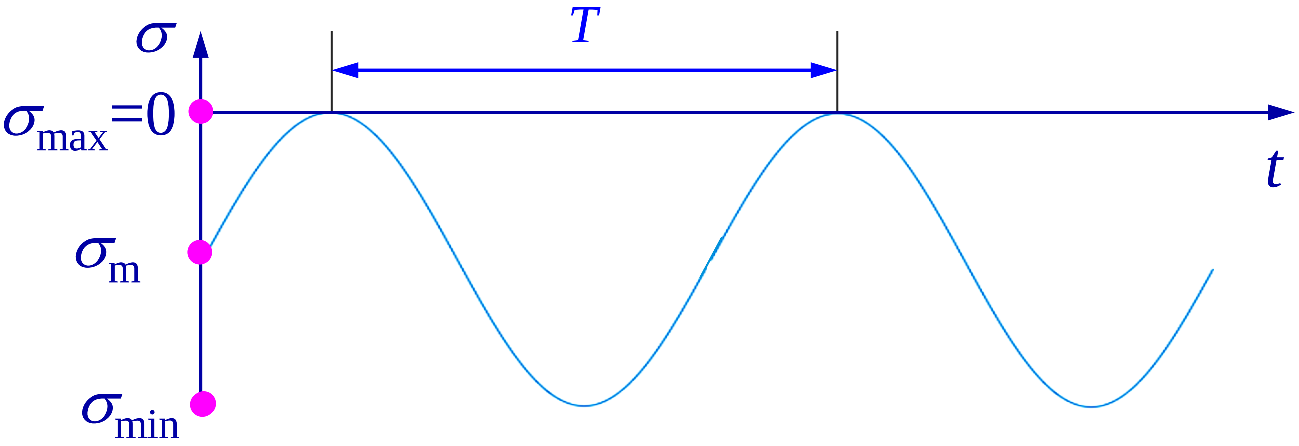
（2）脉动循环



$$r=\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}=0$$

$$\sigma_{\mathrm{a}}=\sigma_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sigma_{\max}$$

$$\sigma_{\min}=0$$

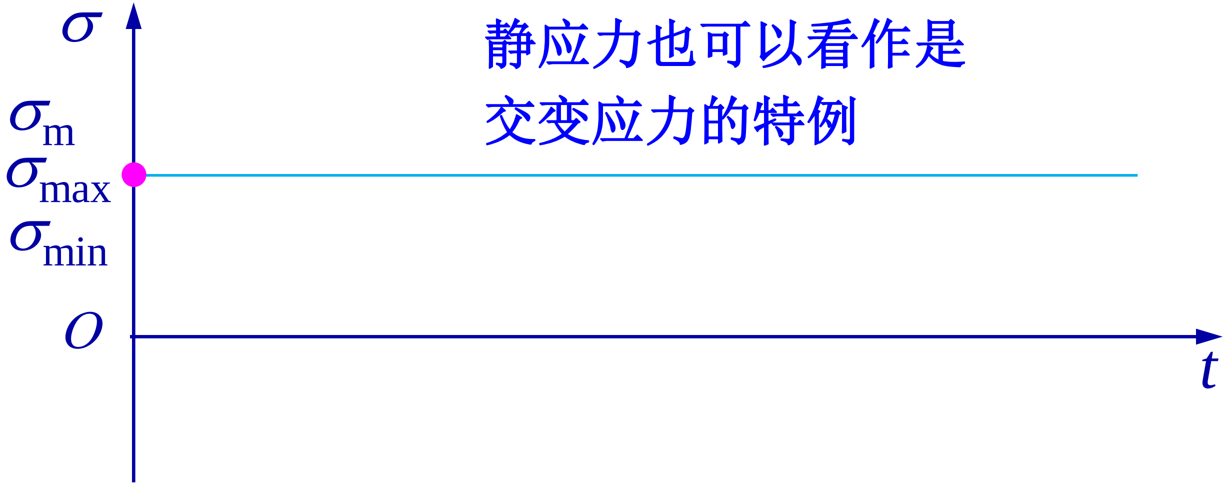


$$r=\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}=-\infty$$

$$-\sigma_{\mathrm{a}}=\sigma_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sigma_{\min}$$

$$\sigma_{\max}=0$$

（3）静应力



静应力也可以看作是交变应力的特例

$$r=\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}=1$$

$$\sigma_{\mathrm{m}}=\sigma_{\max}=\sigma_{\min}$$

$$\sigma_{\mathrm{a}}=0$$

§11.3 疲劳极限

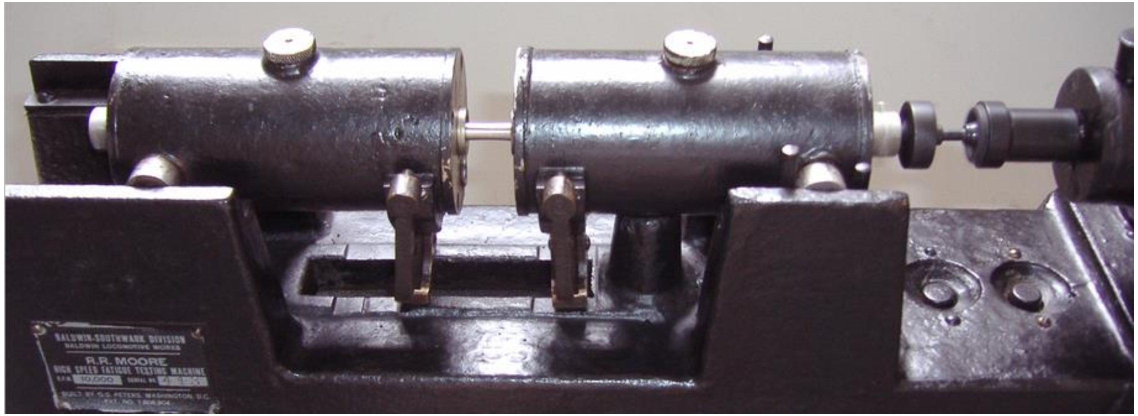
一、材料疲劳极限

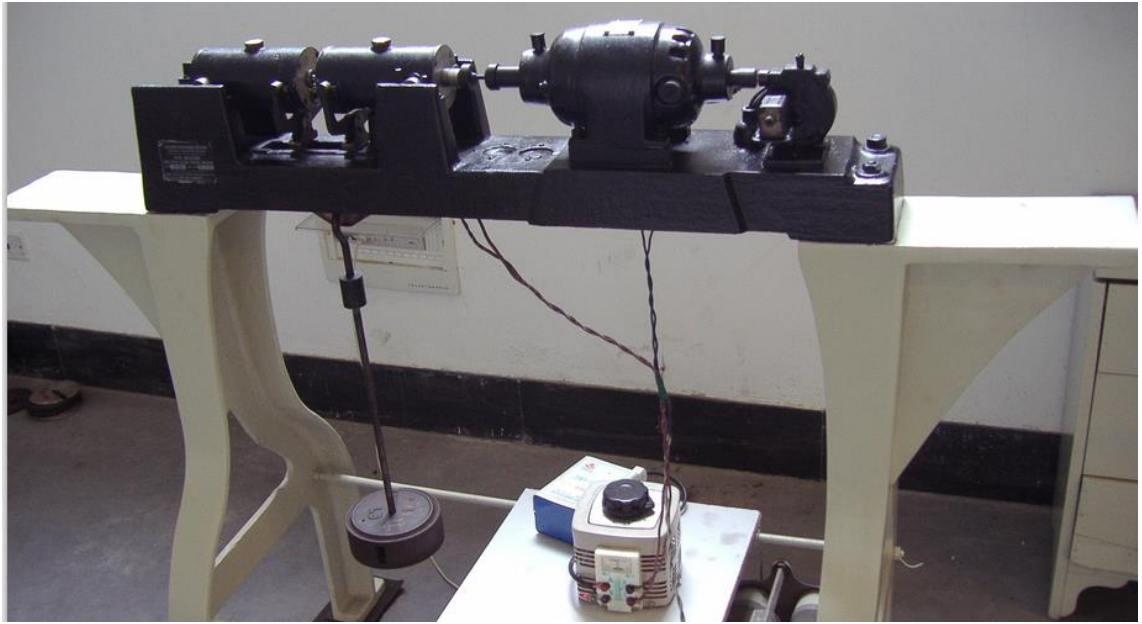
（1） 材料疲劳寿命

试样疲劳破坏时所经历的应力循环次数称为材料的疲劳寿命

（2）材料疲劳极限

循环应力只要不超过某个“最大限度”, 构件就可 以经历无数次循环而不发生疲劳破坏，这个限度值称 为“疲劳极限”，用σ_r 表示（r是循环特征）



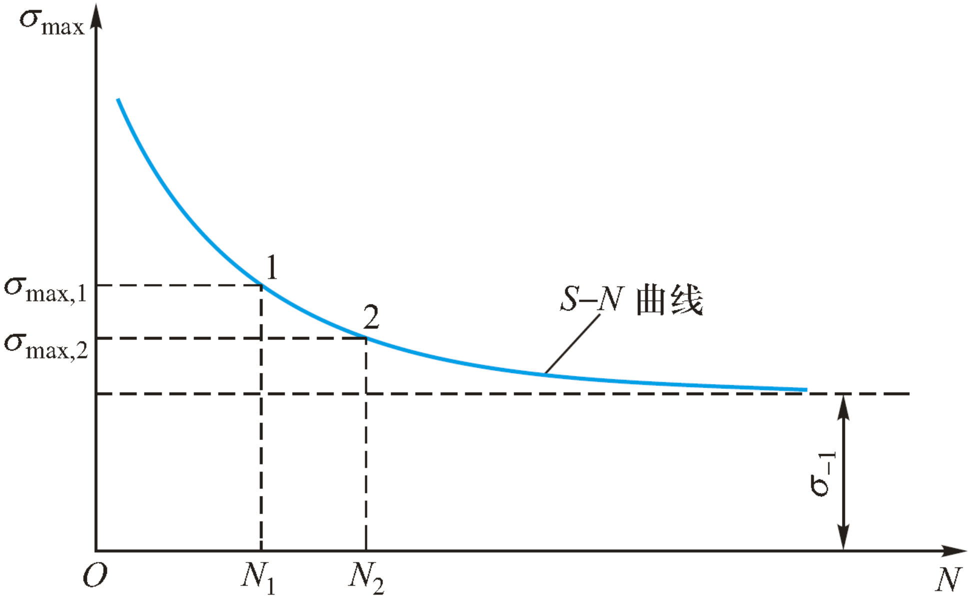


确定材料的疲劳性能需做疲劳试验，在疲劳试验机上完成

纯弯疲劳试验机

二、疲劳极限的测定

若试样的最大应力为 $\sigma_{max,1}$，经历N_1次循环后发生疲劳破坏，则N_1称为应力为 $\sigma_{max,1}$时的疲劳寿命，简称寿命。



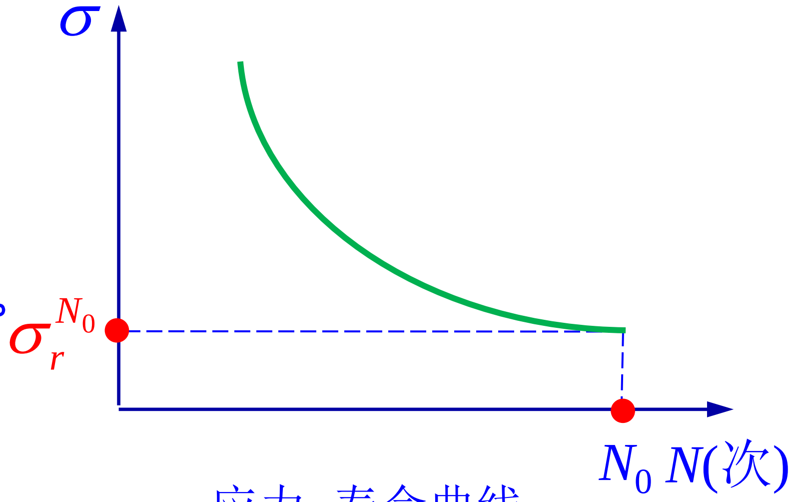
应力–寿命曲线（S–N曲线）

钢试样的疲劳试验表明，当应力降到某一极限值时，S–N曲线趋近于水平线。这表明只要应力不超过这一极限值，N可无限增长，即试样可以经历无限次循环而不发生疲劳破坏。交变应力的这一极限值称为疲劳极限或持久极限。

对称循环的疲劳极限记为σ_{-1}，下标–1表示对称循环的循环特征为$r = -1$

常温下的试验结果表明，如钢试样经历10^7次循环仍未发生疲劳破坏，则再增加循环次数，也不会发生疲劳破坏。所以，就把在10^7次循环下仍未发生疲劳破坏的最大应力，规定为钢材的疲劳极限，而把$N_0=10^7$称为循环基数。

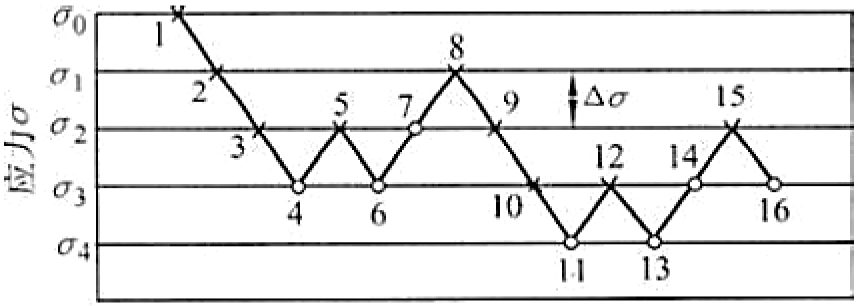
有色金属的S–N曲线无明显趋于水平的直线部分。通常规定一个循环基数，如$N_0=10^8$，把它对应的最大应力作为这类材料的“条件”疲劳极限。



应力–寿命曲线
（S –N 曲线）

除了对试样进行疲劳试验外，有时也采用对实际零件或构件直接进行疲劳试验。

更准确测定材料的疲劳极限的方法：**升降法**



指定寿命 $N=10^7$；×—破坏；○—通过

常用材料疲劳极限：

低碳钢： $\sigma_b = 400 \sim 500\text{MPa}$ $\sigma_{-1} = 170 \sim 220\text{MPa}$

铸铁： $\sigma_b = 250\text{MPa}$左右 $\sigma_{-1} = 110\text{MPa}$左右

QT800： $\sigma_b = 800\text{MPa}$左右 $\sigma_{-1} = 285\text{MPa}$左右

§11.4　影响疲劳极限的因素

1. 构件外形的影响（应力集中会显著降低构件的疲劳极限）

2. 构件尺寸的影响（随着试件横截面尺寸的增大，疲劳极限会相应地降低）

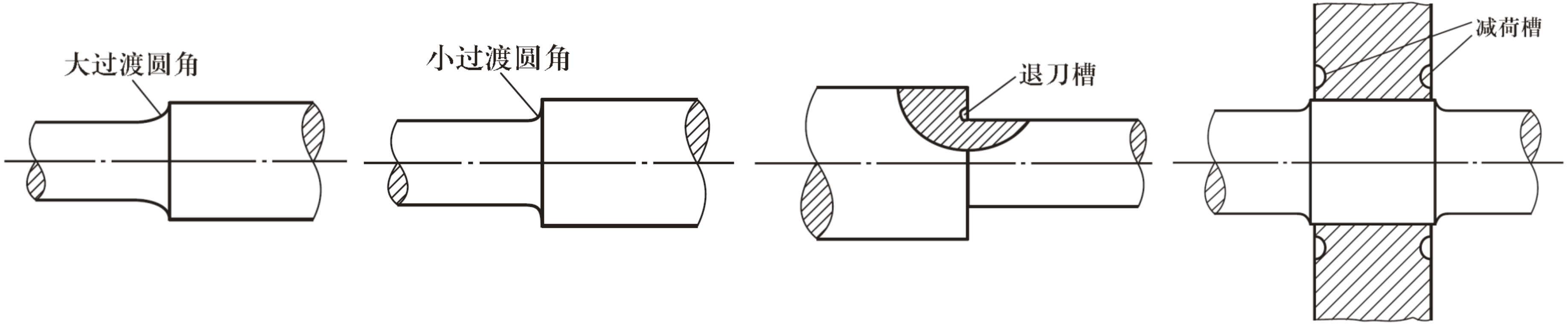
3. 构件表面质量的影响（表面质量越高，疲劳极限越高）

4. 构件的工作环境，如温度、腐蚀性环境都将影响构件的疲劳极限

§ 11.5 提高构件疲劳强度的措施

疲劳裂纹的形成主要在应力集中的部位和构件表面。提高疲劳强度应从减缓应力集中、提高表面质量等方面入手。

1. 减缓应力集中　避免出现方形或带有尖角的孔和槽。在截面尺寸突然改变处（如阶梯轴的轴肩）采用半径足够大的过渡圆角，在直径较大的轴上开减荷槽或退刀槽。



2. 降低表面粗糙度 构件表面加工质量对疲劳强度影响很大。高强度钢对表面粗糙度更为敏感，只有经过精加工，才更有利于发挥它的高强度性能。否则将会使疲劳极限大幅度下降，失去采用高强度钢的意义。在使用中也应尽量避免使构件表面受到机械损伤（如划伤、刻印等）或化学损伤（如腐蚀、生锈等）。

3. 增加表层强度 为了强化构件的表层，可采用热处理和化学处理，如表面高频淬火、渗碳、氮化等， 皆可使构件疲劳强度有显著提高。也可以用机械的方法强化表层，如滚压、喷丸等， 以提高疲劳强度。

谢谢大家

作业（第II册）

Page 52: 11.1

Page 53: 11.2，11.3

对应第6版的题号 Page 51: 11.1，11.2，11.3

下次为习题课　试卷分析