专业：计算机科学与技术
姓名：金杰鹏
学号：3220102509
日期：2023 年 10 月 15 日

浙江大学课程作业

课程名称： 数学建模 指导老师： 谈之奕 成绩

作业内容： HW01

一、 第一题

k 名专家对 n 件作品按从优到劣的顺序进行排序，用 $\boldsymbol{\sigma}_j^i = l$ 表示专家 i 认为作品 j 位于第 l 位。记 $\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_1^i, \sigma_2^i, \cdots, \sigma_n^i)$ 为专家 i 的排序向量 $i = 1, \cdots, k$，$\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \cdots, \boldsymbol{\sigma}_k\}$ 为 k 名专家的排序集合。现希望给出一种能较好地反映所有专家意见的综合排序。

对两个 n 维向量 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 和 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$，定义它们之间的距离为 $L_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$。排序 $\boldsymbol{\sigma}$ 与一组排序 $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \cdots, \boldsymbol{\sigma}_k\}$ 的综合距离定义为 $d(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Sigma}) = \sum\limits_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_i)$ 对给定的 $\boldsymbol{\Sigma}$，与 $\boldsymbol{\Sigma}$ 综合距离最小的排序记为 $\boldsymbol{\sigma}^*$。

1 问题一

给定 $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \cdots, \boldsymbol{\sigma}_k\}$ ，求 n 维向量 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_i)$ 最小。你能否根据 $\boldsymbol{\mu}$ 给出 n 件作品的一种综合排序 $\boldsymbol{\sigma}'$ ？$\boldsymbol{\sigma}^*$ 是否也能从 $\boldsymbol{\mu}$ 得到，为什么？

1.1 求 n 维向量 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_i)$ 最小。

依题意，我们有：

$$\sum_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_i) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} |\mu_j - \sigma_{ij}| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} |\mu_j - \sigma_{ij}|$$

因为 $\boldsymbol{\mu}$ 的各个分量是独立的，所以要求 $\boldsymbol{\mu}$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_i)$ 最小，只需求每个 μ_j 使得 $\sum\limits_{i=1}^{k} |\mu_j - \sigma_{ij}|$ 最小。

这就转换成了经典的绝对值最小的问题，由初中知识可知：

μ_j 取 $\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \cdots, \sigma_{kj}$ 的中位数时，$\sum\limits_{i=1}^{k} |\mu_j - \sigma_{ij}|$ 最小。

当然，当 k 为偶数时，μ_j 可取中位数左右的两数区间内的任意值，不改变最小结果。但为了避免中位数左右两数差值过大造成的影响，我们这里就取中位数，也就是中位数左右两数的平均值。

所以，$\boldsymbol{\mu}$ 各个分量的取值为：

$$\mu_j = \begin{cases} \dfrac{\sigma_{\frac{k}{2}j} + \sigma_{(\frac{k}{2}+1)j}}{2}, & k\text{为偶数} \\ \sigma_{\frac{k+1}{2}j}, & k\text{为奇数} \end{cases}$$

1.2 能否根据 $\boldsymbol{\mu}$ 给出 n 件作品的一种综合排序 $\boldsymbol{\sigma}'$?

虽说上文我们得到的 $\boldsymbol{\mu}$ 是最贴近 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的向量，但是不能直接拿来用作综合排序，因为我们得到的分量 μ_j 不一定是互不相同的自然数。

所以，我们需要对 $\boldsymbol{\mu}$ 进行处理，使得其分量为整数，同时又能尽量保持 $\boldsymbol{\mu}$ 的特性。

很自然，我们能想到对 $\boldsymbol{\mu}$ 的每一分量进行排序，然后将位次作为新的分量值，例如，向量 $\boldsymbol{\mu} = (1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5)$，我们对其进行排序，得到 $\boldsymbol{\sigma}' = (1, 2, 3, 4, 5)$。但这样做的话是最优的吗？

实际上，这就是诱导排序（*Induced permutation*）。我们要证明，这样做得到的 $\boldsymbol{\sigma}'$ 是最优的，也就是证明 $L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}') \leq L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x})$，其中 $\boldsymbol{x}$ 是除 σ' 外任意一个整数向量。

因为 $\boldsymbol{x}$ 不是对 $\boldsymbol{\mu}$ 进行排序得到的向量，所以肯定至少有一组索引 i, j，满足 $x_i > x_j$，而 $\sigma'_i < \sigma'_j$ 且 $\mu_i < \mu_j$。

我们记 $\boldsymbol{x}'$ 为将 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量与第 j 个分量交换后得到的向量，如果我们证明出 $L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}') \leq L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x})$，那么就说明任意一个向量改造得越像 $\boldsymbol{\sigma}'$，离 $\boldsymbol{\mu}$ 距离越近（准确来说，应该是不增），也就证明得出了 $\boldsymbol{\sigma}'$ 是最优的。

接下来，我们尝试证明 $L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}') \leq L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x})$。

即证：

$$
\begin{aligned}
L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}') - L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}) &= \sum_{k=1}^{n} |x'_k - \mu_k| - \sum_{k=1}^{n} |x_k - \mu_k| \\
&= |x'_i - \mu_i| + |x'_j - \mu_j| - |x_i - \mu_i| - |x_j - \mu_j| \\
&= |x_j - \mu_i| + |x_i - \mu_j| - |x_i - \mu_i| - |x_j - \mu_j| \\
&= |x_i - \mu_j| - |x_i - \mu_i| - (|x_j - \mu_j| - |x_j - \mu_i|) \leq 0
\end{aligned}
$$

记 $f(x) = |x - \mu_j| - |x - \mu_i|$，我们有 $\mu_i < \mu_j$，则

$$
f(x) = \begin{cases} \mu_j - \mu_i, & x \leq \mu_i \\ -2x + \mu_i + \mu_j, & \mu_i < x < \mu_j \\ \mu_i - \mu_j, & x \geq \mu_j \end{cases}
$$

显然，$f(x)$ 是不增的。由于 $x_i > x_j$，所以 $f(x_i) \leq f(x_j)$，即 $|x_i - \mu_j| - |x_i - \mu_i| - (|x_j - \mu_j| - |x_j - \mu_i|) \leq 0$。

所以，我们证明了 $L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}') \leq L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x})$，也就证明了 $L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}') \leq L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x})$，这说明 $\boldsymbol{\sigma}'$ 是最优的。

所以，能根据 $\boldsymbol{\mu}$ 给出 n 件作品的一种综合排序 $\boldsymbol{\sigma}'$。

1.3 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 是否也能从 $\boldsymbol{\mu}$ 得到?

因为在 k 为偶数时，我们实际上可以取 μ_j 为中位数左右的两数区间内的任意值，也就是说，得到的 $\boldsymbol{\mu}$ 不一定是唯一的。上一小问中，我们只证明了特定的 $\boldsymbol{\mu}_X$ 对应的 $\boldsymbol{\sigma}'_X$ 是最优的，但是我们不知道，对于任意的 $\boldsymbol{\mu}$，这个 $\boldsymbol{\sigma}'_X$ 是否是最优的。

所以，我们不能保证 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 也能从 $\boldsymbol{\mu}$ 得到。

2 问题二

有人提议用 Borda 计分法给出综合排序。首先计算作品 j 的平均得分 $\beta_j = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sigma_j^i$，再按得分从小到大的顺序对作品进行排序（得分相同的作品之间的顺序可任意确定），由此给出一种综合排序 $\boldsymbol{\sigma}''$ 。证明：对任意 j ，$\sum_{i=1}^{k}|\beta_j - \sigma_j^i| \leq 2\sum_{i=1}^{k}|\mu_j - \sigma_j^i|$

2.1 证明

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}|\beta_j - \sigma_j^i| &= \sum_{i=1}^{k}|\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}\sigma_j^m - \sigma_j^i| \\
&= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}|\sigma_j^m - \sigma_j^i| \\
&= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}|\sigma_j^m - \mu_j + \mu_j - \sigma_j^i| \\
&\leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}(|\sigma_j^m - \mu_j| + |\mu_j - \sigma_j^i|) \\
&= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}|\sigma_j^m - \mu_j| + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}|\mu_j - \sigma_j^i| \\
&= \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}|\sigma_j^m - \mu_j| + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}|\mu_j - \sigma_j^i| \\
&= \sum_{m=1}^{k}|\sigma_j^m - \mu_j| + \sum_{i=1}^{k}|\mu_j - \sigma_j^i| \\
&= 2\sum_{i=1}^{k}|\mu_j - \sigma_j^i|
\end{aligned}
$$

证毕。

3 问题三

证明：$d(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\Sigma}) \le 3d(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\Sigma})$ 且 $d(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\Sigma}) \le 5d(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\Sigma})$

3.1 证明 $d(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\Sigma}) \le 3d(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\Sigma})$

我们再把第一题中的 $\boldsymbol{\mu}$ 请回来，并把证过的 $\forall x, L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}') \le L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x})$ 带过来

$$\begin{aligned}
d(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\Sigma}) &= \sum_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma}_i) \\
&\le \sum_{i=1}^{k} (L_1(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}) + L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_i)) \quad (\text{展开一下，由绝对值不等式易知}) \\
&\le \sum_{i=1}^{k} (L_1(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\mu}) + L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_i)) \quad (\forall x, L_1(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}) \le L_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})) \\
&\le \sum_{i=1}^{k} (L_1(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}_i) + L_1(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\mu}) + L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_i)) \quad (\text{展开一下，由绝对值不等式易知}) \\
&\le 3 \sum_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}_i)
\end{aligned}$$

最后一个不等号是因为 $\boldsymbol{\mu}$ 是真正意义上的最优的（但不是排列数），所以 $L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_i) \le L_1(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}_i)$

3.2 证明 $d(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\Sigma}) \le 5d(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\Sigma})$

我们回头看看第二问，证明了 $\forall j, \sum_{i=1}^{k} |\beta_j - \sigma_j^i| \le 2 \sum_{i=1}^{k} |\mu_j - \sigma_j^i|$，所以我们有：

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} |\beta_j - \sigma_j^i| &\le 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} |\mu_j - \sigma_j^i| \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} |\beta_j - \sigma_j^i| &\le 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} |\mu_j - \sigma_j^i| \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}_i) &\le 2 \sum_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_i)
\end{aligned}$$

所以我们可以得到一个重要的不等式：

$$\sum_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}_i) \le 2 \sum_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}_i)$$

在 Borda 记分法中，我们从计算 β_j 得到原始的 $\boldsymbol{\beta}$，到综合排序 $\boldsymbol{\sigma}''$ 的过程中，也是对 $\boldsymbol{\beta}$ 进行了诱导排序，所以我们有 $\forall x, L_1(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\beta}) \le L_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})$

仿照上一问的证明，我们可以得到：

$$
\begin{aligned}
d(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\Sigma}) &= \sum_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\sigma}_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} (L_1(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\beta}) + L_1(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}_i)) \quad (\text{展开一下，由绝对值不等式易知}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} (L_1(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\beta}) + L_1(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}_i)) \quad (\forall x, L_1(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\beta}) \leq L_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta})) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} (L_1(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}_i) + L_1(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\beta}) + L_1(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}_i)) \quad (\text{展开一下，由绝对值不等式易知}) \\
&\leq 5 \sum_{i=1}^{k} L_1(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}_i)
\end{aligned}
$$

证毕。

二、 第二题

n 支球队进行比赛，每场比赛在两支球队之间进行，任意两支球队之间至多进行一场比赛，每支球队参与比赛的场数相同。记队 i 与队 j 比赛中，队 i 的得分为 p_{ij} ，队 j 的得分为 p_{ji} ，队 i 的分差为 $q_{ij}=p_{ij}-p_{ji}$ 。与队 i 进行过比赛的球队集合记为 T_i 。约定 $i\in T_i$ ，且 $q_{ii}=0$ 。记 $|T_1|=|T_2|=\cdots=|T_n|=l$ 。

A-B	5-10
A-D	57-45
B-C	10-7
C-D	3-10

表 1:

1　问题一

记 s_i 为队 i 在各场比赛中分差之和，即 $s_i=\sum\limits_{j\in T_i}q_{ij}$ 称 $\mathbf{S}=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 为分差向量，可用来衡量各球队的实力。若四支球队之间的比赛结果如表所示，求向量 $\mathbf{S}$

1.1　求向量 S

通过图表，我们构造矩阵，其中从上到下，从左到右，分别是 A,B,C,D 四支队伍的得分。矩阵每个元素记录了行队伍指向列队伍的分差。

$$\mathbf{P}=\begin{array}{c}\\A\\B\\C\\D\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}A & B & C & D\end{array}\\\begin{pmatrix}0 & -5 & 0 & 12\\5 & 0 & 3 & 0\\0 & -3 & 0 & -7\\-12 & 0 & 7 & 0\end{pmatrix}\end{array},$$

依题意，分差向量就是每行元素之和

$$\mathbf{S}=P\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\8\\-10\\-5\end{pmatrix}$$

2　问题二

对任意 $j\in T_i$ ，若 $k\in T_j$ ，则称队 i 与队 k 之间进行了一场“二级比赛”，且在该场比赛中队 i 的分差为 $q_{ij}+q_{jk}$ 。（队 i 可与自身进行二级比赛，队 i 与队 j 之间可以进行多场二级比赛）。记 $s_i^{(2)}$ 为队 i 在所有可能的 l^2 场二级比赛中的分差之和，$\mathbf{S}^{(2)}=(s_1^{(2)},s_2^{(2)},\cdots,s_n^{(2)})^T$ 。称为二级分差向量。对表中所示的比赛结果，求向量 $\mathbf{S}^{(2)}$

2.1　求向量 $\mathbf{S}^{(2)}$

找规律的部分我们放到下一题讲，这题我们直接用枚举法。注意：题目中约定了 $i\in T_i$。

$$A \Rightarrow B: \begin{cases} A \to A \to B : -5 \\ A \to B \to B : -5 \\ q^{(2)}_{A\Rightarrow B} = -10 \end{cases} \quad A \Rightarrow C: \begin{cases} A \to B \to C : -2 \\ A \to D \to C : 19 \\ q^{(2)}_{A\Rightarrow C} = 17 \end{cases} \quad A \Rightarrow D: \begin{cases} A \to A \to D : 12 \\ A \to D \to D : 12 \\ q^{(2)}_{A\Rightarrow D} = 24 \end{cases}$$

$$B \Rightarrow C: \begin{cases} B \to B \to C : 3 \\ B \to C \to C : 3 \\ q^{(2)}_{B\Rightarrow C} = 6 \end{cases} \quad B \Rightarrow D: \begin{cases} B \to A \to D : 17 \\ B \to C \to D : -4 \\ q^{(2)}_{B\Rightarrow D} = 13 \end{cases} \quad C \Rightarrow D: \begin{cases} C \to C \to D : -7 \\ C \to D \to D : -7 \\ q^{(2)}_{C\Rightarrow D} = -14 \end{cases}$$

所以我们可以得到：

$$\mathbf{P}^{(2)} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -10 & 17 & 24 \\ 10 & 0 & 6 & 13 \\ -17 & -6 & 0 & -14 \\ -24 & -13 & 14 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

依题意，二级分差向量就是 $\mathbf{P}^{(2)}$ 每行元素之和

$$\mathbf{S}^{(2)} = P^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ -37 \\ -23 \end{pmatrix}$$

3 问题三

定义矩阵 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times n}$，其中 $m_{ij}=\begin{cases}1, & 若 j\in T_i,\\ 0, & 其他\end{cases}$。试给出由 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{S}$ 计算 $\mathbf{S}^{(2)}$ 的公式，并说明 $\mathbf{M}^2$ 中各元素的含义

3.1 由 M 和 S 计算 $\mathbf{S}^{(2)}$ 的公式

我们先把矩阵 $\mathbf{P}$，$\mathbf{M}$，$\mathbf{S}$，$\mathbf{S}^{(2)}$ 放在一起：

$$\mathbf{P}=\begin{array}{c c}& \begin{array}{cccc} A & B & C & D\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\\C\\D\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 12\\ 5 & 0 & 3 & 0\\ 0 & -3 & 0 & -7\\ -12 & 0 & 7 & 0\end{pmatrix}\end{array},\mathbf{M}=\begin{array}{c c}& \begin{array}{cccc} A & B & C & D\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\\C\\D\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array},\mathbf{S}=\begin{array}{c c}\begin{array}{c}A\\B\\C\\D\end{array} & \begin{pmatrix} 7\\ 8\\ -10\\ -5\end{pmatrix}\end{array},\mathbf{S}^{(2)}=\begin{array}{c c}\begin{array}{c}A\\B\\C\\D\end{array} & \begin{pmatrix} 31\\ 29\\ -37\\ -23\end{pmatrix}\end{array},$$

每队的一级分差之和的计算公式为：

$$s_i^{(1)}=\sum_{j\in T_i}q_{ij}$$

每队的二级分差之和的计算公式为：

$$s_i^{(2)}=\sum_{j\in T_i}\sum_{k\in T_j}(q_{ij}+q_{jk})=\sum_{j\in T_i}\sum_{k\in T_j}q_{ij}+\sum_{j\in T_i}\sum_{k\in T_j}q_{jk}$$

我们先看第一个量 $\sum\limits_{j\in T_i}\sum\limits_{k\in T_j}q_{ij}$。我们可以发现，对于每一个特定的 $j_0\in T_i$，我们都要计算 $|T_j|$ 次 q_{ij}，也就是 l 次，所以它等于 $l\sum\limits_{j\in T_i}q_{ij}$，也就是 ls_i：

$$\sum_{j\in T_i}\sum_{k\in T_j}q_{ij}=l\sum_{j\in T_i}q_{ij}=ls_i$$

$$\begin{pmatrix}\sum\limits_{j\in T_i}\sum\limits_{k\in T_j}q_{1j}\\ \sum\limits_{j\in T_i}\sum\limits_{k\in T_j}q_{2j}\\ \vdots\\ \sum\limits_{j\in T_i}\sum\limits_{k\in T_j}q_{nj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ls_1\\ ls_2\\ \vdots\\ ls_n\end{pmatrix}=l\mathbf{S}$$

再看第二个量 $\sum\limits_{j\in T_i}\sum\limits_{k\in T_j}q_{jk}$。

显然，通过一级分差的定义，我们有 $\sum\limits_{k\in T_j}q_{jk}=s_j$，第二个量转换为 $\sum\limits_{j\in T_i}s_j$。可以感受到，$T_i$ 和 $\mathbf{M}$ 肯定是有关联的。

实际上，T_i 就是 $\mathbf{M}$ 的第 i 行的非零元素的索引集合。我们记 $\mathbf{M}$ 第 i 行为 $\mathbf{M}_i^T$，则 $\sum\limits_{j\in T_i}s_j$ 就是 $\mathbf{M}_i^T\mathbf{S}$。

$$\sum_{j\in T_i}\sum_{k\in T_j} q_{jk} = \sum_{j\in T_i} s_j = \mathbf{M}_i^T\mathbf{S}$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{j\in T_1}\sum\limits_{k\in T_j} q_{jk} \\ \sum\limits_{j\in T_2}\sum\limits_{k\in T_j} q_{jk} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j\in T_n}\sum\limits_{k\in T_j} q_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^T\mathbf{S} \\ \mathbf{M}_2^T\mathbf{S} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_n^T\mathbf{S} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^T\mathbf{S} = \mathbf{M}\mathbf{S}$$

所以，我们可以得到：

$$\mathbf{S}^{(2)} = \begin{pmatrix} s_1^{(2)} \\ s_2^{(2)} \\ \vdots \\ s_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j\in T_1}\sum\limits_{k\in T_j} q_{1j} + \sum\limits_{j\in T_1}\sum\limits_{k\in T_j} q_{jk} \\ \sum\limits_{j\in T_2}\sum\limits_{k\in T_j} q_{2j} + \sum\limits_{j\in T_2}\sum\limits_{k\in T_j} q_{jk} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j\in T_n}\sum\limits_{k\in T_j} q_{nj} + \sum\limits_{j\in T_n}\sum\limits_{k\in T_j} q_{jk} \end{pmatrix} = l\mathbf{S} + \mathbf{M}\mathbf{S} = (l\mathbf{I} + \mathbf{M})\mathbf{S}$$

3.2 $\mathbf{M}^2$ 中各元素的含义

我们计算得到：

$$\mathbf{M}^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array},$$

$\mathbf{M}^2$ 中的元素 m_{ij}^2 表示队伍 i 和队伍 j 之间进行了二级比赛的次数。

4 问题四

类似地，对任意整数 r ，可定义 r 级比赛和 r 级分差向量 $\mathbf{S}^{(r)}$ ，试给出由 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{S}$ 计算 $\mathbf{S}^{(r)}$ 的公式。

4.1 由 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{S}$ 计算 $\mathbf{S}^{(r)}$ 的公式

其实每一层都是在外边多套了一层求和，例如，我们先看看三级分差向量 $\mathbf{S}^{(3)}$：

$$\begin{aligned} s_i^{(3)} &= \sum_{j\in T_i}\sum_{k\in T_j}\sum_{l\in T_k}(q_{ij} + q_{jk} + q_{kl}) \\ &= \sum_{j\in T_i}\sum_{k\in T_j}\sum_{l\in T_k} q_{ij} + \sum_{j\in T_i}\sum_{k\in T_j}\sum_{l\in T_k} q_{jk} + \sum_{j\in T_i}\sum_{k\in T_j}\sum_{l\in T_k} q_{kl} \\ &= l^2 s_i + l\mathbf{M}_i^T\mathbf{S} + \sum_{j\in T_i}\mathbf{M}_j^T\mathbf{S} \\ &= l^2 s_i + l\mathbf{M}_i^T\mathbf{S} + \mathbf{M}_i^T\mathbf{M}\mathbf{S} \end{aligned}$$

所以，我们可以得到：

$$\mathbf{S}^{(3)} = (l^2\mathbf{I} + l\mathbf{M} + \mathbf{M}^2)\mathbf{S}$$

我们猜想，r 级分差向量 $\mathbf{S}^{(r)}$ 的计算公式为：

$$\mathbf{S}^{(r)} = \sum_{i=0}^{r-1} l^{r-1-i}\mathbf{M}^i\mathbf{S}$$

以下进行证明：

正如前文所说，实际上，T_i 就是 $\mathbf{M}$ 的第 i 行的非零元素的索引集合。所以，类似 $\sum\limits_{a\in T_i} x_a$ 的式子，其实就等于 $\mathbf{M}_i^T\mathbf{x}$。如果再套一层，例如 $\sum\limits_{a\in T_i}\mathbf{M}_a^T\mathbf{x}$，其实就等于 $\mathbf{M}_i^T\mathbf{M}\mathbf{x}$。

我们取 $r = k+1$，可以得到：

$$\begin{aligned}
s_i^{(k+1)} &= \sum_{i_1\in T_i}\cdots\sum_{i_k\in T_{i_{k-1}}}\sum_{i_{k+1}\in T_{i_k}}(q_{ii_1} + q_{i_1i_2} + \cdots + q_{i_ki_{k+1}}) \\
&= \sum_{i_1\in T_i}\cdots\sum_{i_k\in T_{i_{k-1}}}\sum_{i_{k+1}\in T_{i_k}} q_{ii_1} + \sum_{i_1\in T_i}\cdots\sum_{i_k\in T_{i_{k-1}}}\sum_{i_{k+1}\in T_{i_k}} q_{i_1i_2} + \cdots + \sum_{i_1\in T_i}\cdots\sum_{i_k\in T_{i_{k-1}}}\sum_{i_{k+1}\in T_{i_k}} q_{i_ki_{k+1}} \\
&= \sum_{i_1\in T_i} l^k q_{ii_1} + \sum_{i_1\in T_i}\sum_{i_2\in T_{i_1}} l^{k-1}q_{i_1i_2} + \cdots + \sum_{i_1\in T_i}\sum_{i_2\in T_{i_1}}\cdots\sum_{i_k\in T_{i_{k-1}}} s_{i_k} \\
&= l^k s_i + l^{k-1}\mathbf{M}_i^T\mathbf{S} + \cdots + \mathbf{M}_i^T\mathbf{M}^{k-1}\mathbf{S}
\end{aligned}$$

所以有：

$$\mathbf{S}^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k} l^{k-i}\mathbf{M}^i\mathbf{S}$$

我们的猜想成立。

由 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{S}$ 计算 $\mathbf{S}^{(r)}$ 的公式为：

$$\mathbf{S}^{(r)} = \sum_{i=0}^{r-1} l^{r-1-i}\mathbf{M}^i\mathbf{S}$$

专业：计算机科学与技术
姓名：金杰鹏
学号：3220102509
日期：2023 年 10 月 29 日

浙江大学 课程作业

课程名称：数学建模 指导老师：谈之奕 成绩

作业内容：HW02

一、 第一题

某种硬币单枚质量为 W 克。现有 N 堆该种硬币，依次标记为 $1,2,\cdots,N$ ，其中可能有若干堆，每堆均是伪币。所有伪币质量均相同，且不为 W 。伪币所在堆的指标集记为 I 。为求出 I ，现用一可精确测得质量的电子秤称量两次。第一次从每堆硬币中各取 1 枚，称得总质量为 M_1 克，第二次从第 i 堆硬币中取 p^i 枚，$i=1,2,\cdots,N$ ，称得总质量为 M_2 克，这里 p 为正整数（假设每堆硬币数量足够多）。

1 问题一

试给出 M_1, M_2 和 W 的某个函数，其值仅与 I 和 p 有关，而与伪币的质量无关。

1.1 解答

我们设伪币的质量为 W_0 ，设有 k 堆伪币，记伪币所在堆的指标集为 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ ，真币所在堆的指标集为 $\{i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_N\}$ ，依题意有

$$
\begin{aligned}
M_1 &= kW_0 + (N-k)W \\
M_2 &= (p^{i_1}+p^{i_2}+\cdots+p^{i_k})W_0 + (p^{i_{k+1}}+p^{i_{k+2}}+\cdots+p^{i_N})W
\end{aligned}
$$

提出 W_0 ，得到

$$
W_0 = \frac{M_1-(N-k)W}{k} = \frac{M_2-(p^{i_{k+1}}+p^{i_{k+2}}+\cdots+p^{i_N})W}{p^{i_1}+p^{i_2}+\cdots+p^{i_k}}
$$

上式右边即为所求函数。

我们可以将该函数左右两边分别减去 W ，并引入基数记号 $|I|=k$ ，

$$
\begin{aligned}
\frac{M_1-NW}{|I|} &= \frac{M_2-\sum\limits_{i=1}^{N}p^iW}{\sum\limits_{j=1}^{k}p^{i_j}} \\
&= \frac{M_2-\frac{p(p^N-1)}{p-1}W}{\sum\limits_{i\in I}p^i}
\end{aligned}
$$

这样更能体现出函数与 I 和 p 的关系。

2 问题二

为能用上述方法通过两次称量求出指标集 I ，p 应满足什么条件？试给出某个满足条件的 p 值；并说明若取 $p = 2$ ，可能无法用上述方法通过两次称量求出 I 。

2.1 方法一

1. 为能用上述方法通过两次称量求出指标集 I ，p 应满足什么条件？试给出某个满足条件的 p 值；

   PS: 本法我们要求真币与假币质量均为整数，如不是整数，则进行单位换算后再赋给 W 和 W_0 。（如称量精度为 0.01 克，则均乘以 100 ）。

   为了能两次测出伪币集，我们其实就是要考虑，怎么让每一堆取出来的质量，表示时互不干扰。

   所以，如果第一堆称出来的质量为 p^1W，第二堆称出来的质量为 p^2W_0，则在 p 进制表示中表示出来为 W_0W0，这样就不会干扰了。

   因此，我们要选取的 p 应该满足，$p > max\{W_0, W\}$。

   由于伪币质量不知道：则如果 $NW > M_1$，我们取 $p > W$ 即可；如果 $NW < M_1$，我们不妨取 $p >= M_1$。

   此时就能保证，每一堆取出来的质量，用 p 进制表示时互不干扰。

2. 并说明若取 $p = 2$ ，可能无法用上述方法通过两次称量求出 I 。

   当 $p = 2$ 时，如果 $W_0 = 2$，$W = 3$，则显然按上述方法，化成 p 进制时，每堆的质量会产生干扰，我们不能判断 I。

2.2 方法二

我们可以看到，在上一个方法中，由于不知道伪币质量，所以当 $NW < M_1$，我们须取 $p >= M_1$。这是一个相当大的数，我们须考虑是否能取到更小的 p。

1. 为能用上述方法通过两次称量求出指标集 I ，p 应满足什么条件？试给出某个满足条件的 p 值；

   我们来观察一下第一题中求得的函数：

$$\frac{M_1 - NW}{|I|} = \frac{M_2 - \frac{p(p^N-1)}{p-1}W}{\sum\limits_{i\in I} p^i}$$

即

$$\frac{\sum\limits_{i\in I} p^i}{|I|} = \frac{M_2 - \frac{p(p^N-1)}{p-1}W}{M_1 - NW}$$

   当我们选定一个 p 后，右边的分式就是一个常数，记作 C，且我们必然可以枚举 $|I| = \{1, 2, \cdots, N\}$，使得存在某一种结果使得左边的分子可以表示成 $\sum\limits_{i\in I} p^i$ 的形式。

   下面，我们证明当 $p > N$ 时，这种结果只有一种。

   假设目前我们通过枚举，找到了两种结果，分别记作 $|I_1|, |I_2|$，即

$$C = \frac{\sum_{i\in I_1} p^i}{|I_1|} = \frac{\sum_{i\in I_2} p^i}{|I_2|}$$

将 $\sum_{i\in I_1} p^i$ 和 $\sum_{i\in I_2} p^i$ 化成 p 进制，分别为 $i_{11}i_{12}\cdots i_{1|I_1|}$ 和 $i_{21}i_{22}\cdots i_{2|I_2|}$，且每一位上 $i_{jk}\in\{0,1\}$，由于我们限制了 $|I_1|,|I_2|\le N<p$，所以每一位乘以 $|I_1|$ 或 $|I_2|$ 后，仍然小于 p，它们在 p 进制下不产生进位。所以对于每一位，我们有

$$i_{1k}|I_2| = i_{2k}|I_1|$$

显然，上式给出了 $|I_1|=|I_2|$ 的要求。除此之外，在 p 进制下，$\sum_{i\in I_1} p^i$ 和 $\sum_{i\in I_2} p^i$ 的表示中，至少有一位不同。（否则，如果两者的表示中，每一位都相同，则两者相等，且 $|I_1|=|I_2|$，与假设矛盾。）假定这一位是第 k 位，不妨设 $i_{1k}=1$，$i_{2k}=0$。

所以，此时 p 进制下有

$$i_{1k}|I_2| = |I_2| \ne 0 = i_{2k}|I_1|$$

产生矛盾，所以假设不成立。

所以，当 $p>N$ 时，这种结果只有一种。

2. 并说明若取 $p=2$，可能无法用上述方法通过两次称量求出 I。

当 $p=2$ 时，我们构造下述反例：$N=7$，$I=\{1,5,7\}$，$W=2$，$W_0=1$，则我们可算得 $M_1=3*1+4*2=11$, $M_2=1*2^1+2*2^2+2*2^3+2*2^4+1*2^5+2*2^6+1*2^7=346$

由此，我们可以求得 $C=54$

枚举 $|I|=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，我们可以得到

$$|I_1| = 3, 54*3 = 162 = 2^1+2^5+2^7$$

$$|I_2| = 4, 54*4 = 216 = 2^3+2^4+2^6+2^7$$

此时我们无法确定 $|I|$，所以无法求出 I。

3　两种方法总结

根据上述两种方法，我们可以总结出，当 $NW>M_1$ 时，我们可以取 $p>min\{W',N\}$，此时的 W' 为将 W,W_0 都化为整数后的结果。当 $NW<M_1$ 时，我们可以取 $p>N$。此时我们可以通过两次称量求出 I。

二、 第二题

1 问题一

现有 $2^N - 1$ 枚硬币，其中一枚是伪币。每枚真币的质量已知，伪币较真币为轻。如何用可精确测得质量的电子秤称量不超过 N 次找出伪币，试给出你的方案；

1.1 自适应方案

解答：第一次称量开始时，我们有 $2^N - 1$ 枚硬币，将其分成 2^{N-1} 枚，$2^{N-1} - 1$ 两堆。我们选取其中一堆进行称量，如果质量正常，则伪币在另一堆中。可以看到，此时枚数有两种形式，我们分别讨论：

1. 如果开始称量时，硬币枚数的形式为 2^k，

   我们将其分成枚数相等的两堆；选取其中一堆进行称量，如果质量正常，则伪币在另一堆中。可以发现，一旦硬币枚数的形式为 2^k，则会持续这种形式，直到开始称量时，硬币枚数的形式为 2^1，此时再称量一次，即可找出伪币。所以，此时称量次数为 k。

2. 如果开始称量时，硬币枚数的形式为 $2^k - 1$，

   我们将其分成 2^{k-1} 枚，$2^{k-1} - 1$ 枚两堆；我们选取其中一堆进行称量，如果质量正常，则伪币在另一堆中。在这次称量后，

   (a) 如果伪币在 2^{k-1} 枚的一堆中，由 1 中的分析可知，需要再称量 $k - 1$ 次。所以，此时称量次数为 k；

   (b) 如果伪币在 $2^{k-1} - 1$ 枚的一堆中，则我们继续将 $2^{k-1} - 1$ 枚分成 2^{k-2} 枚，$2^{k-2} - 1$ 枚两堆；可知，分成 2^{k-2} 枚这种形式后，总的称量次数仍为 k；所以我们在之后的讨论中，只需关注 $2^k - 1$ 枚这种形式。

   因为第一次称量得出 $2^{k-1} - 1$ 枚，第二次称量得出 $2^{k-2} - 1$ 枚，第 $k - 2$ 次称量得出 $2^{k-(k-2)} - 1 = 2^2 - 1 = 3$ 枚。最后三枚硬币中有一枚是伪币，两次称量中选取不同的一枚硬币进行称量，即可找出伪币。所以需要称量 k 次。

综上所述，当硬币枚数为 $2^N - 1$ 时，最多需要称量 N 次。

1.2 非自适应方案

我们知道，从 1 到 $2^N - 1$ 这些数恰好都能用 N 二进制编码表示（$2^N - 1$ 正好是 N 位全为 1 的二进制数）。我们尝试根据这个性质设计一个非自适应方案。

将这 $2^N - 1$ 枚硬币从 1 到 $2^N - 1$ 进行编号，

按照这个思路，我们可以构建一个矩阵 $\mathbf{A}$，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{N\times 2^N-1}$$

其中，每一列从上到下就是一个从高位到低位的二进制数，例如，第一列为 $0\cdots001$。

我们依照这个矩阵的行进行称量，其中，1 表示称量该枚硬币，0 表示不称量该枚硬币。并且把称量结果记录下来，如果偏轻，则记录 1，如果正常，则记录 0。

所以，根据 N 次称量，我们可以得到一个 N 维向量，根据这个编号，我们可以得到伪币的编号。

举个例子，我们有 7 枚硬币，编号为 $1,2,3,4,5,6,7$，

我们可以构建矩阵 $\mathbf{A}$，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 7}$$

如果第一、二行较轻，第三行正常，则称量结果为 110，根据这个结果，可以得到伪币的编号为 6。

2 问题二

设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为 n 维向量，$x_i \in \{0,1\}^n, i = 1,2,\cdots,n$ ，$\mathbf{\Phi}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\mathbf{b} = \mathbf{\Phi x}$ 。压缩感知（Compressed Sensing）问题希望通过构造适当的 $\mathbf{\Phi}$ ，由 $\mathbf{b}$ 唯一确定 $\mathbf{x}$ 。试写出可用于求解（1）中问题的矩阵 $\mathbf{\Phi}$ ；

2.1 解答

这其实就是我们上一问所说的非自适应方案。

取 $\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}$ ，记 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_{2^N-1})^T$ ，其中 b_i 为第 i 次称量结果，如果偏轻，则 $b_i = 1$ ，否则 $b_i = 0$ 。因为此时只有 1 枚伪币，我们限制 $\mathbf{x}$ 的非零分量数不超过 1 ，

因为每列都是不同的二进制数，且列向量的集合肯定包含 $\mathbf{b}$，所以能通过 $\mathbf{b} = \mathbf{\Phi x}$ 唯一确定 $\mathbf{x}$ （其实就是确定 $\mathbf{\Phi}$ 中的哪一列等于 $\mathbf{b}$）。

3 问题三

称 n 维向量 $\mathbf{x}$ 为 k -稀疏（k -sparse）的，若 $\mathbf{x}$ 的非零分量数不超过 k ，所有 k -稀疏向量全体记为 Σ_k 。证明：当 $k < \frac{n}{2}$ 时，若 $\mathbf{\Phi}$ 中任意 $2k$ 个列向量线性无关，则 $\mathbf{b} = \mathbf{\Phi x}$ 在 Σ_k 中至多只有一个解。

3.1 证明

用反证法证明。

假设 $\mathbf{b} = \mathbf{\Phi x}$ 在 Σ_k 中有两个不同的解 $\mathbf{x_1}$ 和 $\mathbf{x_2}$ ，则 $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}) = \mathbf{0}$ 。记 $\mathbf{\Phi}$ 的零空间为 $\mathcal{N}(\mathbf{\Phi})$，则 $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} \in \mathcal{N}(\mathbf{\Phi})$，且 $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} \neq \mathbf{0}$。

因为 $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \Sigma_k$ ，根据列向量的减法，我们可以得到 $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} \in \Sigma_{2k}$ 。

所以 $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} \in \Sigma_{2k} \cap \mathcal{N}(\mathbf{\Phi})$，且 $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} \neq \mathbf{0}$，

实际上，如果 $\mathbf{\Phi}$ 中任意 $2k$ 个列向量线性无关，那么 $\Sigma_{2k} \cap \mathcal{N}(\mathbf{\Phi}) = \{\mathbf{0}\}$ （将在下文给出证明），所以 $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} = \mathbf{0}$，与假设矛盾。

所以，当 $k < \frac{n}{2}$ 时，若 $\mathbf{\Phi}$ 中任意 $2k$ 个列向量线性无关，则 $\mathbf{b} = \mathbf{\Phi x}$ 在 Σ_k 中至多只有一个解。

3.2　证明：如果 $\mathbf{\Phi}$ 中任意 $2k$ 个列向量线性无关，那么 $\Sigma_{2k} \cap \mathcal{N}(\mathbf{\Phi}) = \{\mathbf{0}\}$

我们也采用反证法证明。假设 $\mathbf{x} \in \Sigma_{2k} \cap \mathcal{N}(\mathbf{\Phi})$，且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$。

记 $T \in \{1, 2, \cdots, N\}$ 为 x_j 不为零的索引 j 的集合，其中 $|T| = m \leq 2k$，

记 $\mathbf{\Phi}$ 的子集为 $\phi = \{\phi_i | i \in T\}$，则由 $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{\Phi})$ 可知，

$$\mathbf{\Phi x} = \sum_{i \in T} x_i \phi_i = \mathbf{0}$$

但是 $\mathbf{\Phi}$ 中任意 $2k$ 个列向量线性无关，也就说明 $\mathbf{\Phi}$ 中任意 m 个列向量线性无关，所以上式成立当且仅当 $x_i = 0, i \in T$，

所以 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$，与假设矛盾。

一、 在橄榄球比赛中，每一回合进攻方有达阵（touchdown）得 6 分，射门（field-goal）得 3 分和不得分三种结果（不考虑防守方得分）。设 A,B 两队作为进攻方时，出现三种结果的概率均分别为$\alpha,\beta,\gamma,\alpha+\beta+\gamma=1$。现设比赛进入加时赛。在加时赛前，通过抛掷硬币竞猜，猜对一方可选择第一回合作为进攻方或防守方。不妨设 A 为第一回合进攻方。

（1）若赛制采用突然死亡法，即首先得分一方获得比赛胜利，若当前回合进攻方未得分，则下一回合由另一队作为进攻方。试求 A 获得比赛胜利的概率；

（2）若对赛制作如下修改：

（i）若第一回合 A 达阵，A 获得比赛胜利；

（ii）若第一回合 A 射门，第二回合由 B 作为进攻方。若在第二回合中 B 达阵，则 B 获得比赛胜利。若 B 不得分，A 获得比赛胜利。若 B 射门，第三回合由 A 作为进攻方，并开始实行突然死亡法。

（iii）若第一回合 A 不得分，第二回合由 B 作为进攻方，并开始实行突然死亡法。

记第一回合 A 射门或不得分情况下，A 获得比赛胜利的概率分别为a和b，试写出 A 获得比赛胜利的概率的表达式；

（3）试求新赛制下，A 获得比赛胜利的概率，并从公平性角度比较两种赛制哪种更合理。

二、在传染病防控中，通过对大范围人群进行检测，可有效控制传染源。假设某区域内一种传染病的感染率为p，区域内每人是否感染相互独立。对每人提取相关样本进行检测，检测结果有阳性和阴性两种。来自某个人的样本称为个体样本，检测结果为阳性当且仅当该人已被感染。若干份个体样本混合后的样本称为混合样本。对由任意份个体样本混合成的混合样本，检测结果为阳性当且仅当其中至少有一份个体样本检测结果为阳性。

现需找出n人中所有的感染者，采用以下减半群试法（halving scheme for pooled testing）。将n份个体样本组成混合样本Π进行检测。若Π的检测结果为阴性，则n人中无感染者。若Π的检测结果为阳性，则将n人随机分成人数分别为$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$和$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$的两组 A 和 B。对每一组，取该组人的个体样本组成混合样本。记两组的混合样本分别为Π_A和Π_B。先对Π_A进行检测，若Π_A的检测结果为阴性，则感染者必在组 B 中。若Π_A的检测结果为阳性，再对Π_B进行检测。若Π_B的检测结果为阴性，则感染者仅在组 A 中。若Π_B的检测结果为阳性，则 A 和 B 两组中均有感染者。对有感染者的组重复上述操作，直至找出所有感染者为止。

记X_n为对n人按上述方式进行检测所需的检测次数，Y_n为对含有感染者的n人按上述方式进行检测所需的检测次数。

（1）试给出$E(X_n)$和$E(Y_n)$之间的关系；

（2）试写出$E(Y_n)$所满足的递推关系。

专业：计算机科学与技术
姓名：金杰鹏
学号：3220102509
日期：2023 年 11 月 5 日

浙江大学 课程作业

课程名称：数学建模 指导老师：谈之奕 成绩

作业内容：HW03

一、 第一题

1 若赛制采用突然死亡法，即首先得分一方获得比赛胜利，若当前回合进攻方未得分，则下一回合由另一队作为进攻方。试求 A 获得比赛胜利的概率

A 在进攻局得分的概率为 $\alpha+\beta$，要到下一次 A 进攻，需要 A 和 B 都不得分，所以 A 获胜的概率为：

$$P(A) = \alpha + \beta + \gamma^2 P(A)$$
$$\Rightarrow P(A) = \frac{\alpha+\beta}{1-\gamma^2} = \frac{1-\gamma}{1-\gamma^2} = \frac{1}{1+\gamma}$$

2 修改赛制后，A 获得比赛胜利的概率的表达式

A 获得比赛胜利的概率的表达式为：

$$P_{修}(A) = \alpha + \beta a + \gamma b$$

3 试求新赛制下，A 获得比赛胜利的概率，并从公平性角度比较两种赛制哪种更合理

1. A 达阵的情况下，A 获胜的概率为 1。
2. A 射门的情况下，B 达阵的概率为 α，B 射门的概率为 β，B 不得分的概率为 γ，所以 A 获胜的概率为：$a = \beta P(A) + \gamma = \beta\frac{1}{1+\gamma} + \gamma$
3. A 不得分的情况下，由于此时是 B 在突然死亡法中首发，所以 B 获胜的概率为 $P(B) = \frac{1}{1+\gamma}$，所以 A 获胜的概率为：$b = 1 - P(B) = \frac{\gamma}{1+\gamma}$

所以 A 获得比赛胜利的概率为：

$$\begin{aligned} P_{修}(A) &= \alpha + \beta a + \gamma b \\ &= 1 - \beta - \gamma + \beta(\beta\frac{1}{1+\gamma} + \gamma) + \gamma(\frac{\gamma}{1+\gamma}) \\ &= 1 - \beta - \gamma + \beta\gamma + \frac{\beta^2+\gamma^2}{1+\gamma} \\ &= \beta\gamma - \beta + \frac{1+\beta^2}{1+\gamma} \end{aligned}$$

所以两个赛制的概率为：

$$P_{原}(A) = \frac{1}{1+\gamma}$$
$$P_{修}(A) = \beta\gamma - \beta + \frac{1+\beta^2}{1+\gamma}$$

考虑公平性，就是要考虑哪种概率可以更接近 $\frac{1}{2}$。
根据实际情况，有 $0<\alpha,\beta,\gamma<1$，所以显然有

$$P_{原}(A) > \frac{1}{2}$$

构造函数 $f(\beta) = P_{修}(A) - \frac{1}{2} = \beta\gamma - \beta + \frac{1+\beta^2}{1+\gamma} - \frac{1}{2}$，所以：

$$f(\beta) = \frac{\beta^2 + (\gamma^2-1)\beta - \frac{\gamma-1}{2}}{1+\gamma}$$

记 $g(x) = \beta^2 + (\gamma^2-1)\beta - \frac{\gamma-1}{2}$，由二次函数的判别式：

$$\Delta = (\gamma^2-1)^2 + 2(\gamma-1) = (\gamma-1)(\gamma^3+\gamma^2-\gamma+7) < 0$$

所以 $g(x)$ 恒大于 0，所以 $f(\beta)$ 恒大于 0，所以

$$P_{修}(A) > \frac{1}{2}$$

又：

$$P_{原} - P_{修} = \beta\frac{1-\gamma^2-\beta}{1+\gamma} > \beta\frac{1-\gamma-\beta}{1+\gamma} = \beta\frac{\alpha}{1+\gamma} > 0$$

所以：

$$1 > P_{原}(A) > P_{修}(A) > \frac{1}{2}$$

所以新赛制更合理。

二、 第二题

1 试给出 $E(X_n)$ 和 $E(Y_n)$ 之间的关系

因为 Y_n 已确定有感染者，所以不需要再进行第一次检测。
而 X_n 需要进行第一次检测，所以有

$$\begin{aligned} X_n &= \text{首检} + (\text{首检出阴性的后续检测次数} + \text{首检出阳性的后续检测次数}) \\ &= 1 + (0 * (1-p)^n + Y_n * (1-(1-p)^n)) \\ &= 1 + Y_n * (1-(1-p)^n) \end{aligned}$$

所以

$$E(X_n) = E(1 + Y_n * (1 - (1-p)^n)) = 1 + (1 - (1-p)^n) * E(Y_n)$$

2 试写出 $E(Y_n)$ 所满足的递推关系

1. 当 n 为偶数时，将 n 人分成两组，每组人数为 $\frac{n}{2}$，记为 A 组和 B 组，先检测 A 组。
   (a) 如果 A 组的混合检测结果为阴性，则只需要对 B 组进行分组检测，此时后续检测次数为 $Y_{\frac{n}{2}}$
   (b) 如果 A 组的混合检测结果为阳性，则需要对 A 组进行分组检测，对 B 组进行混合检测：此时后续检测次数为 $Y_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}}$。

   又因为：

$$P(A\text{阴性}|\text{有传染者}) = \frac{(1-p)^{n/2}(1-(1-p)^{n/2})}{1-(1-p)^n}, \quad P(A\text{阳性}|\text{有传染者}) = \frac{1-(1-p)^{n/2}}{1-(1-p)^n}$$

   所以 Y_n 有：

$$\begin{aligned}
Y_n &= 1 + P(A\text{阴性}|\text{有传染者})Y_{\frac{n}{2}} + P(A\text{阳性}|\text{有传染者})(Y_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}}) \\
&= 1 + \frac{(1-p)^{n/2}(1-(1-p)^{n/2})}{1-(1-p)^n}Y_{\frac{n}{2}} + \frac{1-(1-p)^{n/2}}{1-(1-p)^n}(Y_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}}) \\
&= 1 + Y_{\frac{n}{2}} + \frac{1-(1-p)^{n/2}}{1-(1-p)^n}X_{\frac{n}{2}} \\
&= 1 + Y_{\frac{n}{2}} + \frac{1}{1+(1-p)^{n/2}}(1 + (1-(1-p)^{\frac{n}{2}})Y_{\frac{n}{2}}) \\
&= \frac{2 + (1-p)^{n/2} + 2Y_{\frac{n}{2}}}{1+(1-p)^{n/2}}
\end{aligned}$$

   所以 $E(Y_n)$ 有：

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= E(\frac{2 + (1-p)^{n/2} + 2Y_{\frac{n}{2}}}{1+(1-p)^{n/2}}) \\
&= \frac{2 + (1-p)^{n/2} + 2E(Y_{\frac{n}{2}})}{1+(1-p)^{n/2}}
\end{aligned}$$

2. 当 n 为奇数时，将 n 人分成两组，每组人数为 $\frac{n-1}{2}$ 和 $\frac{n+1}{2}$，记为 A 组和 B 组，先检测 A 组。
   (a) 如果 A 组的混合检测结果为阴性，则只需要对 B 组进行分组检测，此时后续检测次数为 $Y_{\frac{n+1}{2}}$
   (b) 如果 A 组的混合检测结果为阳性，则需要对 A 组进行分组检测，对 B 组进行混合检测：此时后续检测次数为 $Y_{\frac{n-1}{2}} + X_{\frac{n+1}{2}}$。

   又因为：

$$P(A\text{阴性}|\text{有传染者}) = \frac{(1-p)^{\frac{n-1}{2}}(1-(1-p)^{\frac{n+1}{2}})}{1-(1-p)^n}, \quad P(A\text{阳性}|\text{有传染者}) = \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n}$$

   所以 Y_n 有：

$$
\begin{aligned}
Y_n &= 1 + P(A\text{阴性}|\text{有传染者})Y_{\frac{n+1}{2}} + P(A\text{阳性}|\text{有传染者})(Y_{\frac{n-1}{2}} + X_{\frac{n+1}{2}}) \\
&= 1 + \frac{(1-p)^{\frac{n-1}{2}}(1-(1-p)^{\frac{n+1}{2}})}{1-(1-p)^n}Y_{\frac{n+1}{2}} + \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n}(Y_{\frac{n-1}{2}} + X_{\frac{n+1}{2}}) \\
&= 1 + \frac{(1-p)^{\frac{n-1}{2}}(1-(1-p)^{\frac{n+1}{2}})}{1-(1-p)^n}Y_{\frac{n+1}{2}} + \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n}(Y_{\frac{n-1}{2}} + 1 + (1-(1-p)^{\frac{n+1}{2}})Y_{\frac{n+1}{2}}) \\
&= 1 + \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n} + \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n}Y_{\frac{n-1}{2}} + \frac{1-(1-p)^{\frac{n+1}{2}}}{1-(1-p)^n}Y_{\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}
$$

所以 $E(Y_n)$ 有：

$$
\begin{aligned}
E(Y_n) &= E(1 + \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n} + \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n}Y_{\frac{n-1}{2}} + \frac{1-(1-p)^{\frac{n+1}{2}}}{1-(1-p)^n}Y_{\frac{n+1}{2}}) \\
&= 1 + \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n} + \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n}E(Y_{\frac{n-1}{2}}) + \frac{1-(1-p)^{\frac{n+1}{2}}}{1-(1-p)^n}E(Y_{\frac{n+1}{2}})
\end{aligned}
$$

3. 综上所述，Y_n 满足递推关系：

$$
E(Y_n) = \begin{cases} \frac{2+(1-p)^{n/2}+2E(Y_{\frac{n}{2}})}{1+(1-p)^{n/2}}, & n\text{为偶数} \\ 1 + \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n} + \frac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n}E(Y_{\frac{n-1}{2}}) + \frac{1-(1-p)^{\frac{n+1}{2}}}{1-(1-p)^n}E(Y_{\frac{n+1}{2}}), & n\text{为奇数} \end{cases}
$$

其中，$E(Y_1) = 0$。

2.1 优化

1. 实际上，其实我们可以把奇偶的放在一起（我之前做的时候没有想到）。

   我们将 n 人分成两组，人数分别为 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 和 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$，记为 A 组和 B 组，先检测 A 组。

   (a) 如果 A 组的混合检测结果为阴性，则只需要对 B 组进行分组检测，此时后续检测次数为 $Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

   (b) 如果 A 组的混合检测结果为阳性，则需要对 A 组进行分组检测，对 B 组进行混合检测：此时后续检测次数为 $Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + X_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$。

   又因为：

$$
P(A\text{阴性}|\text{有传染者}) = \frac{(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(1-(1-p)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})}{1-(1-p)^n}, \quad P(A\text{阳性}|\text{有传染者}) = \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n}
$$

   所以 Y_n 有：

$$
\begin{aligned}
Y_n &= 1 + P(A\text{阴性}|\text{有传染者})Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + P(A\text{阳性}|\text{有传染者})(Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + X_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}) \\
&= 1 + \frac{(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(1-(1-p)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})}{1-(1-p)^n}Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n}(Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + X_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}) \\
&= 1 + \frac{(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(1-(1-p)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})}{1-(1-p)^n}Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n}(Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1 + (1-(1-p)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil})Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}) \\
&= 1 + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n} + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n}Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \frac{1-(1-p)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{1-(1-p)^n}Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}
\end{aligned}
$$

   所以 $E(Y_n)$ 有：

$$\begin{aligned}E(Y_n) &= E(1 + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n} + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n} Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \frac{1-(1-p)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{1-(1-p)^n} Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}) \\ &= 1 + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n} + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n} E(Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) + \frac{1-(1-p)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{1-(1-p)^n} E(Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})\end{aligned}$$

2. 综上所述，Y_n 满足递推关系：

$$E(Y_n) = 1 + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n} + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n} E(Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) + \frac{1-(1-p)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{1-(1-p)^n} E(Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$$

其中，$E(Y_1) = 0$。

专业：计算机科学与技术
姓名：金杰鹏
学号：3220102509
日期：2023 年 11 月 11 日

浙江大学 课程作业

课程名称：数学建模 指导老师：谈之奕 成绩

作业内容：HW04

一、 第一题

学校希望从 n 名学生中录取一名，学生以随机顺序逐个前来面试。通过面试可给出已面试者的综合素质高低顺序，某位学生是否被录取须在该学生面试后立即决定，在作出不录取决定后方能面试下一名学生。考虑到最优秀的学生可能在录取后选择其他学校，学校希望录取到所有考生中综合素质第二名的学生的概率尽可能大。

1 问题一：分别记 f_k 和 g_k 为综合素质在前 k 名面试的学生中居于第一名和第二名的学生在所有学生中居于第二名的概率。求 f_k 和 g_k 。

1.1 f_k

我们记 A 为任意一位学生，$A=i$ 表示其绝对名次为 i，$y_k=j$ 表示其在前 k 名面试的学生中居于第 j 名。则有：

$$\begin{aligned}
f_k &= P(A=2|y_k=1) \\
&= \frac{P(A=2,y_k=1)}{P(y_k=1)} \\
&= \frac{P(y_k=1|A=2)P(A=2)}{P(y_k=1)}
\end{aligned}$$

1. 对每个同学，他绝对第二的概率为 $\frac{1}{n}$，所以

$$P(A=2)=\frac{1}{n}$$

2. 学生在前 k 名的概率为 $\frac{k}{n}$，在前 k 名中相对第一的概率为 $\frac{1}{k}$，所以

$$P(y_k=1)=\frac{k}{n}\times\frac{1}{k}=\frac{1}{n}$$

3. 因为在 A 绝对第二的条件下：如果该学生在前 k 名中相对第一，则

   (a) 绝对第二的学生在前 k 名，他的可能位置有 k 个

   (b) 绝对第一的学生在 k 名之后，他的可能位置有 $n-k$ 个

   (c) 其他学生可任意排列，他们的可能位置有 $(n-2)!$ 个

所以

$$P(y_k = 1|A = 2) = \frac{k(n-k)(n-2)!}{n!} = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

综上所述，我们得到

$$f_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

1.2 g_k

与 f_k 类似，我们有

$$\begin{aligned} g_k &= P(A = 2|y_k = 2) \\ &= \frac{P(A = 2, y_k = 2)}{P(y_k = 2)} \\ &= \frac{P(y_k = 2|A = 2)P(A = 2)}{P(y_k = 2)} \end{aligned}$$

同理可知

$$P(y_k = 2) = P(A = 2) = \frac{1}{n}$$

考察 $P(y_k = 2|A = 2)$。在 A 绝对第二的条件下：如果该学生在前 k 名中相对第二，则

1. 绝对第一、第二的学生都在前 k 名，他们的可能位置有 $k(k-1)$ 个
2. 其他学生可任意排列，他们的可能位置有 $(n-2)!$ 个

所以

$$P(y_k = 2|A = 2) = \frac{k(k-1)(n-2)!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

综上所述，我们得到

$$g_k = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

1.3 综上

所以

$$f_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \quad , \quad g_k = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

2 记 v_k 为不录取前 k 名学生后，采用最优策略可能录取到综合素质第二名的学生的概率的最大值。试写出 v_k 满足的递推关系。

显然有 $v_n = 0$。

当如录取前 k 名学生，我们进入第 $k+1$ 次面试。为了让可能录取到综合素质第二名的学生的概率最大，如果第 $k+1$ 名学生为相对排名第一或第二，且录取他的成功概率好于进行下一轮面试的成功概率，我们就录取他；否则我们就不录取他，进入下一轮。

此时我们面对的第 $k+1$ 名学生有三种情况：

1. 相对排名第一，$P=\frac{1}{k+1}$，则我们比较 f_{k+1} 和 v_{k+1} 的大小，如果 $f_{k+1}>v_{k+1}$，则我们录取他，否则我们不录取他，进入下一轮。
2. 相对排名第二，$P=\frac{1}{k+1}$，则我们比较 g_{k+1} 和 v_{k+1} 的大小，如果 $g_{k+1}>v_{k+1}$，则我们录取他，否则我们不录取他，进入下一轮。
3. 相对排名第三或更后，$P=\frac{k-1}{k+1}$，则我们不录取他，进入下一轮。

所以我们有

$$v_k=\frac{1}{k+1}\max(f_{k+1},v_{k+1})+\frac{1}{k+1}\max(g_{k+1},v_{k+1})+\frac{k-1}{k+1}v_{k+1}$$

尾部条件为 $v_n=0$。

当 $k=0$ 时，$v_0=max(f_1,v_1)$，所以：

$$v_k=\begin{cases}\max(f_1,v_1) & k=0\\ \frac{1}{k+1}\max(f_{k+1},v_{k+1})+\frac{1}{k+1}\max(g_{k+1},v_{k+1})+\frac{k-1}{k+1}v_{k+1} & 0<k<n\\ 0 & k=n\end{cases}$$

如果我们将已求得的 f_k 和 g_k 代入上式，我们可以得到

当 $k=0$ 时，$v_0=max(\frac{1}{n},v_1)$；当 $0<k<n$ 时，

$$\begin{aligned}v_k&=\frac{1}{k+1}\max(f_{k+1},v_{k+1})+\frac{1}{k+1}\max(g_{k+1},v_{k+1})+\frac{k-1}{k+1}v_{k+1}\\&=\frac{1}{k+1}\max(\frac{(k+1)(n-k-1)}{n(n-1)},v_{k+1})+\frac{1}{k+1}\max(\frac{(k+1)k}{n(n-1)},v_{k+1})+\frac{k-1}{k+1}v_{k+1}\\&=\max(\frac{(n-k-1)}{n(n-1)},\frac{v_{k+1}}{k+1})+\max(\frac{k}{n(n-1)},\frac{v_{k+1}}{k+1})+\frac{k-1}{k+1}v_{k+1}\end{aligned}$$

所以：

$$v_k=\begin{cases}\max(\frac{1}{n},v_1) & k=0\\ \max(\frac{(n-k-1)}{n(n-1)},\frac{v_{k+1}}{k+1})+\max(\frac{k}{n(n-1)},\frac{v_{k+1}}{k+1})+\frac{k-1}{k+1}v_{k+1} & 0<k<n\\ 0 & k=n\end{cases}$$

3 求 v_k ，并给出相应的最优策略。

最优策略：$k=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 时，录取前 k 名学生，否则不录取。

3.1 $k\ge k_0$

我们分析 v_k 的递推关系式：

1. $v_n = 0$

2. $v_{n-1} = \max\left(\frac{n-(n-1)-1}{n(n-1)}, 0\right) + \max\left(\frac{n-1}{n(n-1)}, 0\right) + \frac{n-1-1}{n-1+1} \cdot 0 = \frac{1}{n}$

3. $v_{n-2} = \max\left(\frac{n-(n-2)-1}{n(n-1)}, \frac{1}{n(n-1)}\right) + \max\left(\frac{n-2}{n(n-1)}, \frac{1}{n(n-1)}\right) + \frac{n-2-1}{n-2+1} \cdot \frac{1}{n}$

   可以看到，从 v_{n-2} 开始，max 的部分会随 n 发生变化。我们暂时假设都选取 max 中的第一项：

$$v_{n-2} = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{n-2-1}{n-2+1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2n-4}{n(n-1)}$$

4.

$$\begin{aligned}
v_{n-3} &= \max\left(\frac{n-(n-3)-1}{n(n-1)}, \frac{2n-4}{n(n-1)(n-2)}\right) + \max\left(\frac{n-3}{n(n-1)}, \frac{2n-4}{n(n-1)(n-2)}\right) + \frac{n-3-1}{n-3+1} \cdot \frac{2n-4}{n(n-1)} \\
&= \max\left(\frac{2}{n(n-1)}, \frac{2}{n(n-1)}\right) + \max\left(\frac{n-3}{n(n-1)}, \frac{2}{n(n-1)}\right) + \frac{2(n-4)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} + \frac{n-3}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)}{n(n-1)} \\
&= \frac{3n-9}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

观察 $v_n = 0$，$v_{n-1} = \frac{n-1}{n(n-1)}$，$v_{n-2} = \frac{2n-4}{n(n-1)}$，$v_{n-3} = \frac{3n-9}{n(n-1)}$，我们猜测当第二个 max 选第一项，即 $v_{k+1} \le g_{k+1}$ 的条件下，有 $v_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)} = f_k$，下用数学归纳法证明：

设当 $m \ge k$ 时，$v_m = f_m$，则 $m = k-1$ 时，如果有 $v_k \le g_k$，则

$$\begin{aligned}
v_{k-1} &= \max\left(\frac{n-(k-1)-1}{n(n-1)}, \frac{v_k}{k}\right) + \max\left(\frac{k-1}{n(n-1)}, \frac{v_k}{k}\right) + \frac{k-1-1}{k-1+1} \cdot v_k \\
&= \max\left(\frac{n-k}{n(n-1)}, \frac{n-k}{n(n-1)}\right) + \max\left(\frac{k-1}{n(n-1)}, \frac{n-k}{n(n-1)}\right) + \frac{k-2}{k} \cdot \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \\
&= \frac{n-k}{n(n-1)} + \frac{k-1}{n(n-1)} + \frac{(k-2)(n-k)}{n(n-1)} \\
&= \frac{(k-1)(n-k+1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

所以，记 k_0 为不满足 $v_k \le g_k$ 的最大值，对 $k > k_0$，有 $v_{k-1} = f_{k-1}$。

我们不妨解出 k_0，即

$$\begin{aligned}
v_{k_0} &> g_{k_0} \\
\frac{k_0(n-k_0)}{n(n-1)} &> \frac{k_0(k_0-1)}{n(n-1)} \\
k_0(n-k_0) &> k_0(k_0-1) \\
n-k_0 &> k_0-1 \\
k_0 &< \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

取 $k_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，则对 $k > k_0$，有 $v_{k-1} = f_{k-1}$。更进一步，即对 $k \ge k_0$，有 $v_k = f_k$。

3.2 $k < k_0$

当 $k = k_0 - 1$ 时，此时 $v_{k_0} = f_{k_0} > g_{k_0}$，所以

$$
\begin{aligned}
v_{k_0-1} &= \max\left(\frac{n-(k_0-1)-1}{n(n-1)}, \frac{v_{k_0}}{k_0}\right) + \max\left(\frac{k_0-1}{n(n-1)}, \frac{v_{k_0}}{k_0}\right) + \frac{k_0-1-1}{k_0-1+1} \cdot v_{k_0} \\
&= \frac{2v_{k_0}}{k_0} + \frac{k_0-2}{k_0} \cdot v_{k_0} \\
&= v_{k_0} \\
&= \frac{k_0(n-k_0)}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

因为 $f_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}, g_k = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$，二者随 k 单调递减，所以对 $k < k_0 - 1$，有 $v_k > f_k$ 且 $v_k > g_k$，所以 $v_k = v_{k+1}$。

3.3 综上

取 $k_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，则：

$$
v_k = \begin{cases} \frac{k(n-k)}{n(n-1)} & k_0 \leq k \leq n \\ v_{k+1} & 0 \leq k < k_0 \end{cases}
$$

3.4 最优策略

概率最大化时：

1. 当 $0 \leq k < k_0$ 时，我们知道 $v_k > f_k$ 且 $v_k > g_k$，所以我们不录取前 k 名学生，进入下一轮。
2. 当 $k_0 \leq k \leq n$ 时，我们知道 $v_k = f_k$，且 $v_k \leq g_k$，而随着 k 的增大，f_k 单调递减，所以 v_k，这是不好的。

   所以我们要尽早选出结果，且让得到的结果尽可能好。所以我们此时碰到相对成绩第一名或第二名的学生时，我们就录取他，结束面试。

3.5 总结

v_k 的结果为：

$$
v_k = \begin{cases} \frac{k(n-k)}{n(n-1)} & k_0 \leq k \leq n \\ v_{k+1} & 0 \leq k < k_0 \end{cases}
$$

最优策略为：

不录取前 $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$ 名学生，在之后的学生中，如果碰到相对成绩第一名或第二名的学生时，我们就录取他，结束面试。

二、 第二题

一种彩票每注面额 1 元，投注者可从 P 种可能方案中选择 1 种。彩票设置大、中、小三类奖项，若某注彩票选择的方案属于某类奖项获奖方案之一，该注彩票获得相应的奖项。只有 1 种方案可获大奖，总奖金额为 J，由所有获奖的彩票平分。有 s 种方案可获中奖，总奖金额为 rN，由所有获奖的彩票平分，其中 N 为当期彩票的总投注额，$0 < r < 1$ 。有 t 种方案可获小奖，小奖每注奖金为固定值 a 元。

1 求当期共有 w 注彩票获得大奖的概率。

$$P = C_N^w \cdot (\frac{1}{P})^w \cdot (1 - \frac{1}{P})^{N-w}$$

2 求每注彩票的期望收益。

单个不太好分析，我们从总的收益入手。

考虑 N 注彩票的期望收益：

$$E_N = (1 - (1 - \frac{1}{P})^N)J + (1 - (1 - \frac{s}{P})^N)rN + N \cdot \frac{t}{P}a$$

所以每注彩票的期望收益为：

$$E = \frac{E_N}{N} = (1 - (1 - \frac{1}{P})^N)\frac{J}{N} + (1 - (1 - \frac{s}{P})^N)r + \frac{t}{P}a$$

3 该种彩票会将上期未中的大奖与中奖奖金注入奖池，作为当期大奖的奖金。试证明，若当期大奖总奖金额 $J < (1 - r)P - at$，则每注彩票的期望收益仍小于面值。

根据伯努利不等式 $(1 + x)^n \geq 1 + nx, \forall x > -1, n \geq 1$，所以 $(1 - \frac{1}{P})^N \geq 1 - \frac{N}{P}$，我们有

$$\begin{aligned}
E &= (1 - (1 - \frac{1}{P})^N)\frac{J}{N} + (1 - (1 - \frac{s}{P})^N)r + \frac{t}{P}a \\
&< (1 - (1 - \frac{N}{P}))\frac{J}{N} + r + \frac{t}{P}a \\
&= \frac{J}{P} + r + \frac{t}{P}a \\
&< 1
\end{aligned}$$

由此，每注彩票的期望收益仍小于面值。

专业：计算机科学与技术
姓名：金杰鹏
学号：3220102509
日期：2023 年 11 月 13 日

浙江大学 课程作业

课程名称：数学建模 指导老师：谈之奕 成绩
作业内容：HW05

一、 第一题

足球比赛在规定比赛时间内打平，且加时赛中双方均无进球时需通过点球决胜。点球决胜阶段分为 K 轮，每轮中两支球队先后各罚点球一次。若 K 轮结束后双方进球数相同，则加赛一轮，若双方进球数仍相同，则继续加赛一轮，直至分出胜负为止。由于点球进球的概率极高，每轮罚球先后顺序对点球决胜的结果可能产生较大影响。现规则通过抽签决定先罚球队，在所有轮中均由该队先罚。拟议中的新规则为第一轮先罚球队由抽签决定，此后每轮罚球先后顺序与上一轮罚球先后顺序相反。假设进球概率只与罚球先后顺序有关，而与球队和轮次无关。每轮先罚球队与后罚球队进球的概率分别为 p 和 q ，其中 $p > q$ 。为简单起见，假定 $K = 2$。

1 试分别计算两轮结束后，采用现规则和新规则两种情况下，第一轮先罚球队获胜、第一轮后罚球队获胜与双方进球数相同的概率，并对 $p = \frac{3}{4}, q = \frac{2}{3}$ 给出具体结果。

1.1 现规则

枚举一下，可以得到如下的结果：

先罚进球	后罚进球	概率
0	0	$(1-p)^2(1-q)^2$
0	1	$2(1-p)^2q(1-q)$
0	2	$(1-p)^2q^2$
1	0	$2p(1-p)(1-q)^2$
1	1	$4p(1-p)q(1-q)$
1	2	$2p(1-p)q^2$
2	0	$p^2(1-q)^2$
2	1	$2p^2q(1-q)$
2	2	p^2q^2

表 1: 两轮顺序相同

所以

1. 先罚获胜的概率为：

$$P_{\text{现-先罚胜}} = 2p(1-p)(1-q)^2 + p^2(1-q)^2 + 2p^2q(1-q)$$

2. 后罚获胜的概率为：

$$P_{\text{现-后罚胜}} = 2(1-p)^2q(1-q) + (1-p)^2q^2 + 2p(1-p)q^2$$

3. 双方进球数相同的概率为：

$$P_{\text{现-平局}} = (1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + p^2q^2$$

1.2 新规则

如果先罚队伍在第二轮仍然先罚进球，那么新规则和现规则的结果是一样的。所以我们只考虑先罚队伍先罚不进球的情况。

先罚进球	后罚进球	概率
0	0	$(1-p)^2(1-q)^2$
0	1	$(1-p)^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2$
0	2	$p(1-p)q(1-q)$
1	0	$(1-p)^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2$
1	1	$p^2(1-q)^2 + 2p(1-p)q(1-q) + (1-p)^2q^2$
1	2	$p(1-p)q^2 + p^2q(1-q)$
2	0	$p(1-p)q(1-q)$
2	1	$p(1-p)q^2 + p^2q(1-q)$
2	2	p^2q^2

表 2: 两轮顺序不相同

所以，顺序不相同时

1. 先罚获胜的概率为：

$$P_{\text{不同-先罚胜}} = (1-p)^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2 + p(1-p)q(1-q) + p(1-p)q^2 + p^2q(1-q)$$

2. 后罚获胜的概率为：

$$P_{\text{不同-后罚胜}} = (1-p)^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2 + p(1-p)q(1-q) + p(1-p)q^2 + p^2q(1-q)$$

3. 双方进球数相同的概率为：

$$P_{\text{不同-平局}} = (1-p)^2(1-q)^2 + p^2(1-q)^2 + 2p(1-p)q(1-q) + (1-p)^2q^2 + p^2q^2$$

所以，新规则下

1. 先罚获胜的概率为：

$$
\begin{aligned}
P_{\text{新-先罚胜}} &= \frac{1}{2}(P_{\text{现-先罚胜}} + P_{\text{不同-先罚胜}}) \\
&= \frac{1}{2}[2p(1-p)(1-q)^2 + p^2(1-q)^2 + 2p^2q(1-q) \\
&\quad + (1-p)^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2 + p(1-p)q(1-q) + p(1-p)q^2 + p^2q(1-q)] \\
&= \frac{1}{2}[p^2(1-q)^2 + 3p^2q(1-q) + p(1-p)q^2 + (1-p)^2q(1-q) + 3p(1-p)(1-q)^2 \\
&\quad + p(1-p)q(1-q)]
\end{aligned}
$$

2. 后罚获胜的概率为：

$$
\begin{aligned}
P_{\text{新-后罚胜}} &= \frac{1}{2}(P_{\text{现-后罚胜}} + P_{\text{不同-后罚胜}}) \\
&= \frac{1}{2}[2(1-p)^2q(1-q) + (1-p)^2q^2 + 2p(1-p)q^2 \\
&\quad + (1-p)^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2 + p(1-p)q(1-q) + p(1-p)q^2 + p^2q(1-q)] \\
&= \frac{1}{2}[(1-p)^2q^2 + 3p(1-p)q^2 + p^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2 + p(1-p)q(1-q) + 3(1-p)^2q(1-q)]
\end{aligned}
$$

3. 双方进球数相同的概率为：

$$
\begin{aligned}
P_{\text{新-平局}} &= \frac{1}{2}(P_{\text{现-平局}} + P_{\text{不同-平局}}) \\
&= \frac{1}{2}[(1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + p^2q^2 \\
&\quad + (1-p)^2(1-q)^2 + p^2(1-q)^2 + 2p(1-p)q(1-q) + (1-p)^2q^2 + p^2q^2] \\
&= \frac{1}{2}[2(1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + 2p^2q^2 + p^2(1-q)^2 + 2p(1-p)q(1-q) + (1-p)^2q^2]
\end{aligned}
$$

1.3 综上

1. 现规则：

   (a) 先罚获胜的概率为：

$$P_{\text{现-先罚胜}} = 2p(1-p)(1-q)^2 + p^2(1-q)^2 + 2p^2q(1-q)$$

   (b) 后罚获胜的概率为：

$$P_{\text{现-后罚胜}} = 2(1-p)^2q(1-q) + (1-p)^2q^2 + 2p(1-p)q^2$$

   (c) 双方进球数相同的概率为：

$$P_{\text{现-平局}} = (1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + p^2q^2$$

2. 新规则：

(a) 先罚获胜的概率为：

$$\begin{aligned} P_{\text{新-先罚胜}} = &\frac{1}{2}[p^2(1-q)^2 + 3p^2q(1-q) + p(1-p)q^2 + (1-p)^2q(1-q) \\ &+ 3p(1-p)(1-q)^2 + p(1-p)q(1-q)] \end{aligned}$$

(b) 后罚获胜的概率为：

$$\begin{aligned} P_{\text{新-后罚胜}} = &\frac{1}{2}[(1-p)^2q^2 + 3p(1-p)q^2 + p^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2 \\ &+ p(1-p)q(1-q) + 3(1-p)^2q(1-q)] \end{aligned}$$

(c) 双方进球数相同的概率为：

$$\begin{aligned} P_{\text{新-平局}} = &\frac{1}{2}[2(1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + 2p^2q^2 \\ &+ p^2(1-q)^2 + 2p(1-p)q(1-q) + (1-p)^2q^2] \end{aligned}$$

1.4 具体结果

当 $p=\frac{3}{4}, q=\frac{2}{3}$ 时，我们可以得到如下的结果：

1. 现规则：

(a) 先罚获胜的概率为：

$$\begin{aligned} P_{\text{现-先罚胜}} &= 2p(1-p)(1-q)^2 + p^2(1-q)^2 + 2p^2q(1-q) \\ &= \frac{2\times3\times1\times1^2 + 3^2\times1^2 + 2\times3^2\times2\times1}{4^2\times3^2} \\ &= \frac{51}{144} \end{aligned}$$

(b) 后罚获胜的概率为：

$$\begin{aligned} P_{\text{现-后罚胜}} &= 2(1-p)^2q(1-q) + (1-p)^2q^2 + 2p(1-p)q^2 \\ &= \frac{2\times1^2\times2\times1 + 1^2\times2^2 + 2\times3\times1\times2^2}{4^2\times3^2} \\ &= \frac{32}{144} \end{aligned}$$

(c) 双方进球数相同的概率为：

$$\begin{aligned} P_{\text{现-平局}} &= (1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + p^2q^2 \\ &= \frac{1^2\times1^2 + 4\times3\times1\times2\times1 + 3^2\times2^2}{4^2\times3^2} \\ &= \frac{61}{144} \end{aligned}$$

2. 新规则：

(a) 先罚获胜的概率为：

$$\begin{aligned}
P_{\text{新-先罚胜}} &= \frac{1}{2}[p^2(1-q)^2 + 3p^2q(1-q) + p(1-p)q^2 + (1-p)^2q(1-q) \\
&\quad + 3p(1-p)(1-q)^2 + p(1-p)q(1-q)] \\
&= \frac{3^2\times1^2+3\times3^2\times2\times1+3\times1\times2^2+1^2\times2\times1+3\times3\times1\times1^2+3\times2\times1}{2\times4^2\times3^2} \\
&= \frac{92}{288}
\end{aligned}$$

(b) 后罚获胜的概率为：

$$\begin{aligned}
P_{\text{新-后罚胜}} &= \frac{1}{2}[(1-p)^2q^2 + 3p(1-p)q^2 + p^2q(1-q) + p(1-p)(1-q)^2 \\
&\quad + p(1-p)q(1-q) + 3(1-p)^2q(1-q)] \\
&= \frac{1^2\times2^2+3\times3\times1\times2^2+3^2\times2\times1+3\times1\times1^2+3\times1\times2\times1+3\times1^2\times2\times1}{2\times4^2\times3^2} \\
&= \frac{73}{288}
\end{aligned}$$

(c) 双方进球数相同的概率为：

$$\begin{aligned}
P_{\text{新-平局}} &= \frac{1}{2}[2(1-p)^2(1-q)^2 + 4p(1-p)q(1-q) + 2p^2q^2 \\
&\quad + p^2(1-q)^2 + 2p(1-p)q(1-q) + (1-p)^2q^2] \\
&= \frac{2\times1^2\times1^2+4\times3\times1\times2\times1+2\times3^2\times2^2+3^2\times1^2+2\times3\times2\times1+1^2\times2^2}{2\times4^2\times3^2} \\
&= \frac{123}{288}
\end{aligned}$$

2 假设在前两轮结束后，双方进球数相同。试分别计算在加赛阶段，采用现规则和新规则两种情况下，加赛第一轮先罚球队获胜与加赛第一轮后罚球队获胜的概率。

2.1 现规则

第一轮的可能性有：

第一轮

胜 败 下一轮

对加赛第一轮先罚球队，第一轮胜的概率为 $p(1-q)$，第一轮败的概率为 $(1-p)q$，第一轮平局的概率为 $(1-p)(1-q)+pq = 1-p-q+2pq$。所以加赛第一轮先罚球队获胜的概率为：

$$P_{\text{现-加赛先罚胜}} = p(1-q) + (1-p-q+2pq)P_{\text{现-加赛先罚胜}}$$

解得

$$P_{\text{现-加赛先罚胜}} = \frac{p(1-q)}{p+q-2pq}$$

同理，加赛第一轮后罚球队获胜的概率为：

$$P_{\text{现-加赛后罚胜}} = \frac{q(1-p)}{p+q-2pq}$$

2.2 新规则

加赛第一轮先罚的可能性有：

第一轮

胜 败 下一轮后罚

所以对加赛第一轮先罚球队：

$$P_{\text{新-加赛先罚胜}} = p(1-q) + (1-p-q+2pq)\cdot P_{\text{新-加赛后罚胜}}$$

加赛第一轮后罚的可能性有：

第一轮

胜 败 下一轮先罚

所以对加赛第一轮先罚球队：

$$P_{\text{新-加赛后罚胜}} = q(1-p) + (1-p-q+2pq)\cdot P_{\text{新-加赛先罚胜}}$$

解得，

$$\begin{cases} P_{\text{新-加赛先罚胜}} & = \frac{1-q+pq}{2-p-q+2pq} \\ P_{\text{新-加赛后罚胜}} & = \frac{1-p+pq}{2-p-q+2pq} \end{cases}$$

二、 第二题

n 支球队通过淘汰赛决出冠军。赛程分为 r 轮，第 l 轮共有 m_l 场比赛，$l = 1, 2, \cdots, r$，r 和 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ 的值由赛制规定。每场比赛在两支球队间进行，比赛结果为一支球队获胜，一支球队落败，落败的球队被淘汰。同一轮中的各场比赛同时进行，一支球队不能参加同一轮的两场比赛，不同轮的比赛先后进行。每轮所有比赛的对阵双方在该轮开始前从所有当前未被淘汰的球队中以完全随机的方式选出。只有一支球队未被淘汰时赛程结束，该球队即为冠军。

记队 i 的水平值为 v_i，$i = 1, 2, \cdots, n$，设队 i 与队 j 比赛时，队 i 获胜的概率为 $\frac{v_i}{v_i+v_j}$，队 j 获胜的概率为 $\frac{v_j}{v_i+v_j}$。记 $n_k = 2^s + k$，其中 s, k 为正整数，$0 \le k < 2^s$。设 $v_1 > v = v_2 = \cdots = v_n > 0$。

1 试给出为保证赛制可行 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ 应满足的条件；

显然，m_l 应为正整数。要保证赛制可行，我们要淘汰 $n-1$ 支球队，由于每一场淘汰一支球队，即要有

$$\sum_{l=1}^{r} m_l = n - 1$$

同时，赛制要考虑到当前未被淘汰的球队数，对第 i 轮，未被淘汰的球队数为 $n - \sum_{l=1}^{i-1} m_l$，又因为每场比赛需要两支球队，所以

$$n - \sum_{l=1}^{i-1} m_l \geq 2m_i$$

综上，赛制可行的条件为：

1. m_l 为正整数
2. $\sum\limits_{l=1}^{r} m_l = n - 1$
3. $\forall i \in \{1, 2, \cdots, r\}, n - \sum\limits_{l=1}^{i-1} m_l \geq 2m_i$，（$i = 1$ 时，$n \geq 2m_1$）

2 问 $n = 4$ 时共有多少种不同的赛制。采用哪种赛制可使队 1 获得冠军的概率最大，采用哪种赛制可使队 1 获得冠军的概率最小；

根据上一问的结论，我们可以列出 $n = 4$ 时的所有赛制：

Id	m_1	m_2	m_3
1	2	1	0
2	1	1	1

记 p_{ij} 为队 i 战胜队 j 的概率，$i, j = 1, 2, 3, 4$，$i \neq j$。因为 $v_1 > v = v_2 = \cdots = v_n > 0$，所以 $p_{1j} = \frac{v_1}{v_1+v}$，$p_{ij} = \frac{1}{2}$ 对于所有 $i, j \in \{2, 3, 4\}, i \neq j$。我们记

$$\alpha = \frac{v_1}{v_1 + v} \in (\frac{1}{2}, 1)$$

2.1 赛制 1

选用赛制 1 时，队 1 总是要打两场比赛。由于其他队伍的胜率五五开，所以队 1 在每轮碰到的队伍都是均匀分布的。所以队 1 获得冠军的概率为：

$$P_1 = \alpha^2$$

2.2 赛制 2

选用赛制 2 时，队 1 在第一场比赛中出场的概率为 $\frac{1}{2}$，在第二场比赛中出场的概率为 $\frac{2}{3}$。

1. 第一场出场，第二场出场，队 1 得冠的概率：$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \alpha^3$
2. 第一场出场，第二场不出场，队 1 得冠的概率：$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \alpha^2$
3. 第一场不出场，第二场出场，队 1 得冠的概率：$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \alpha^2$

4. 第一场不出场，第二场不出场，队 1 得冠的概率：$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \alpha$

所以队 1 获得冠军的概率为：

$$
\begin{aligned}
P_2 =& \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \alpha^3 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \alpha^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \alpha^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \alpha \\
=& \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{6}\alpha
\end{aligned}
$$

2.3 结论

因为

$$
\begin{aligned}
P_2 - P_1 =& \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{6}\alpha - \alpha^2 \\
=& \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{6}\alpha \\
=& \frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(2\alpha-1) < 0
\end{aligned}
$$

所以队 1 采用赛制 1 时获得冠军的概率最大，采用赛制 2 时获得冠军的概率最小。

3 若 $m_1 = k$，求队 1 在第一轮结束后未被淘汰的概率 f_1，若 $m_1 = j < k, m_2 = k - j$，求队 1 在第二轮结束后未被淘汰的概率 f_2，并证明 $f_1 - f_2 > 0$；

队 1 参加第一轮的概率为 $\frac{2m_1}{n} = \frac{2k}{n}$，所以

$$
\begin{aligned}
f_1 &= P(\text{参加第一轮并获胜}) + P(\text{不参加第一轮}) \\
&= \frac{2k}{n} \times \alpha + 1 - \frac{2k}{n} \\
&= \frac{2k}{n}(\alpha - 1) + 1
\end{aligned}
$$

队 1 参加第一轮的概率为 $\frac{2m_1}{n} = \frac{2j}{n}$，参加第二轮的概率为 $\frac{2m_2}{n-m_1} = \frac{2(k-j)}{n-j}$，所以

$$
\begin{aligned}
f_2 &= [P(\text{参加第一轮并获胜}) + P(\text{不参加第一轮})] \times [P(\text{参加第二轮并获胜}) + P(\text{不参加第二轮})] \\
&= (\frac{2j}{n} \times \alpha + 1 - \frac{2j}{n}) \times (\frac{2(k-j)}{n-j} \times \alpha + 1 - \frac{2(k-j)}{n-j}) \\
&= (\frac{2j}{n}(\alpha - 1) + 1) \times (\frac{2(k-j)}{n-j}(\alpha - 1) + 1)
\end{aligned}
$$

证明 $f_1 - f_2 > 0$，即证明

$$
(\frac{2k}{n}(\alpha - 1) + 1) - (\frac{2j}{n}(\alpha - 1) + 1) \times (\frac{2(k-j)}{n-j}(\alpha - 1) + 1) > 0
$$

显然这是一个关于 α 的开口向下的二次函数。因为 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$，且：

1. 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时，

$$
\begin{aligned}
f_1 - f_2 &= (1-\frac{k}{n}) - (1-\frac{j}{n})(1-\frac{k-j}{n-j}) \\
&= -\frac{k}{n} + \frac{j}{n} + \frac{k-j}{n-j} - \frac{j(k-j)}{n(n-j)} \\
&= \frac{(k-j)(j+1)}{n(n-j)} > 0
\end{aligned}
$$

2. 当 $\alpha = 1$ 时，$f_1 - f_2 = 0$

所以对于 $\forall \alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$，$f_1 - f_2 > 0$。

4 证明：$r = s+1$ 且 $m_1 = k, m_l = 2^{s-l+1}, l = 2, 3, \cdots, s+1$ 的赛制对队 1 最为有利。

因为 $n = 2, 3$ 时只可能有一种赛制，所以我们只考虑 $n \geq 4$ 的情况。

当 $n = 4$ 时，此时 $s = 1$，$k = 2$。我们已经证明了 $r = 2$ 且 $m_1 = 2, m_2 = 1$ 的赛制对队 1 最为有利。

接下来，我们尝试用数学归纳法证明：

假设对于 $n \leq 2^s + k - 1$，s, k 为正整数，$1 \leq k < 2^s$，$r = s+1$ 且 $m_1 = k, m_l = 2^{s-l+1}, l = 2, 3, \cdots, s+1$ 的赛制对队 1 最为有利。

当 $n = 2^s + k$ 时：

1. $m_1 < k$，根据归纳假设，比完第 m_1 场后，在剩下的 $n - m_1 = 2^s + k - m_1 \leq 2^s + k - 1$ 中，选取 $m_2 = k - m_1$ 是最有利的。

   根据第三题可知，对队 1 来说，这种比法不如一轮比完 k 场，所以这种赛制不是最有利的。

2. $m_1 > k$，根据归纳假设，比完第 m_1 场后，在剩下的 $n - m_1 = 2^s + k - m_1 = 2^{s-1} + 2^{s-1} + k - m_1$ 中，选取 $m_2 = 2^{s-1} + k - m_1$ 是最有利的。

   我们用类似第三题的方法来证明这种选法不如一轮比完 k 场。

   采取类似的标记法：$m_1 = k$ 时，记采用题干的策略，到和新策略同等的轮数时，队 1 获胜的概率为 g_1（直到 2^{s-1}）

$$
g_1 = \alpha f_1 = \alpha(\frac{2k}{n}(\alpha - 1) + 1)
$$

记 $m_1 = j > k, m_2 = 2^{s-1} + k - j$，队 1 在第二轮结束后未被淘汰的概率为 g_2。

队 1 参加第一轮的概率为 $\frac{2m_1}{n} = \frac{2j}{n}$，参加第二轮的概率为 $\frac{2m_2}{n-m_1} = \frac{2(2^{s-1}+k-j)}{n-j}$，所以

$$
\begin{aligned}
g_2 &= [P(\text{参加第一轮并获胜}) + P(\text{不参加第一轮})] \times [P(\text{参加第二轮并获胜}) + P(\text{不参加第二轮})] \\
&= (\frac{2j}{n} \times \alpha + 1 - \frac{2j}{n}) \times (\frac{2(2^{s-1}+k-j)}{n-j} \times \alpha + 1 - \frac{2(2^{s-1}+k-j)}{n-j}) \\
&= (\frac{2j}{n}(\alpha - 1) + 1) \times (\frac{2(2^{s-1}+k-j)}{n-j}(\alpha - 1) + 1)
\end{aligned}
$$

考虑证明 $g_1 - g_2 > 0$，即证明

$$\alpha(\frac{2k}{n}(\alpha-1)+1)-(\frac{2j}{n}(\alpha-1)+1)\times(\frac{2(2^{s-1}+k-j)}{n-j}(\alpha-1)+1)>0$$

考察二次项系数：

$$\begin{aligned}&\frac{2k}{n}-\frac{2j}{n}\times\frac{2(2^{s-1}+k-j)}{n-j}\\=&\frac{2k}{n}-\frac{4j(2^{s-1}+k-j)}{n(n-j)}\\=&\frac{2}{n(n-j)}(k(n-j)-2j(2^{s-1}+k-j))\\=&\frac{2}{n(n-j)}(k(2^s+k-j)-j(2^s+2k-2j))\end{aligned}$$

因为 $ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$，所以

$$\begin{aligned}k(2^s+k-j)-j(2^s+2k-2j)=&\frac{(2^s+2k-j)^2-(2^s-j)^2}{4}-\frac{(2^s+2k-j)^2-(2^s+2k-3j)^2}{4}\\=&\frac{(2^s+2k-3j)^2-(2^s-j)^2}{4}\\=&\frac{1}{4}(2^{s+1}+2k-4j)(2k-2j)\\=&(2^s+k-2j)(k-j)\end{aligned}$$

因为 $2^s+k=n\geq 2j$，且 $k<j$，所以

$$(2^s+k-2j)(k-j)\leq 0$$

所以这是一个关于 α 的开口向下的二次函数或者线性函数。因为 $\alpha\in(\frac{1}{2},1)$，且：

(a) 当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}g_1-g_2=&\frac{1}{2}(1-\frac{k}{n})-(1-\frac{j}{n})(1-\frac{2^{s-1}+k-j}{n-j})\\=&-\frac{1}{2}-\frac{k}{2n}+\frac{j}{n}+\frac{2^{s-1}+k-j}{n-j}-\frac{j(2^{s-1}+k-j)}{n(n-j)}\\=&\frac{2^s+k-n}{2n}\\=&0\end{aligned}$$

(b) 当 $\alpha=1$ 时，$g_1-g_2=0$

根据开口向下的二次函数或者线性函数的性质，我们可以知道：

$$\forall\alpha\in(\frac{1}{2},1),g_1-g_2\geq 0$$

所以这种选法不如一轮比完 k 场，这种赛制不是最有利的。

综上，$r=s+1$ 且 $m_1=k,m_l=2^{s-l+1},l=2,3,\cdots,s+1$ 的赛制对队 1 最为有利。

专业：计算机科学与技术
姓名：金杰鹏
学号：3220102509
日期：2023 年 12 月 09 日

浙江大学 课程作业

课程名称：数学建模 指导老师：谈之奕 成绩

作业内容：HW06

一、 第一题

现有一总数为 N 的人群,任一人每天随机地和其它 A 人接触交谈。当知晓某一传闻的传播者(Spreader)和从未听过此传闻的未知者（Ignorant）交谈时，他将传闻告诉后者，后者也将知晓此传闻并在以后继续传播。当传播者和一已听过此传闻的人交谈时，双方均意识到传闻有假，从而成为抵制者（Stiflers），之后两人都不再传播这一传闻。记 t 时刻传播者、未知者和抵制者的人数分别为 $S(t)$，$I(t)$ 和 $R(t)$ 。

1 试给出 $S(t)$，$I(t)$ 和 $R(t)$ 所满足的微分方程（组）；

单位时间内每人与 A 个人接触，其中 N 为总人数，未知者占比为 $\frac{I(t)}{N}$

1. 单位时间内一个传播者接触的未知者人数为 $A\frac{I(t)}{N}$，单位时间内新增传播者数量为 $A\frac{I(t)}{N}S(t)$。
2. 单位时间内一个传播者接触的传播者人数为 $A\frac{S(t)}{N}$，双方均意识到传闻有假，从而都成为抵制者；又因为传播者 A 跟传播者 B 接触，与传播者 B 跟传播者 A 的结果是一样的，其中涉及重复计算，所以单位时间内由传播者 to 传播者引起的新增抵制者数量为 $2A\frac{S(t)}{N}S(t)\cdot\frac{1}{2}$
3. 单位时间内一个传播者接触的抵制者人数为 $A\frac{R(t)}{N}$，其中的传播者意识到传闻有假，从而成为抵制者。所以单位时间内新增抵制者数量为 $A\frac{R(t)}{N}S(t)$。

记 $p = A\frac{S(t)}{N} + A\frac{R(t)}{N}$，$q = A\frac{I(t)}{N}$。我们可以得到微分方程组如下：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = qS(t) - pS(t) \\ \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -qS(t) \\ \frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = pS(t) \end{cases} \tag{1}$$

展开来就是

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{A}{N}[I(t) - S(t) - R(t)]S(t) \\ \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{A}{N}[-I(t)]S(t) \\ \frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{A}{N}[S(t) + R(t)]S(t) \end{cases} \tag{2}$$

2 设 N 充分大，记 $s(t)$，$i(t)$ 和 $r(t)$ 为 t 时刻传播者、未知者和抵制者在人群中所占比例，且 $i(0)=\alpha>0$，$s(0)=\beta>0$。试给出描述 $s(t)$ 和 $i(t)$ 关系的函数式；

$p=A\frac{S(t)}{N}+A\frac{R(t)}{N}=As(t)+Ar(t)$，$q=A\frac{I(t)}{N}=Ai(t)$，且对（2）式两边同时除以 N，得到

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=A[i(t)-s(t)-r(t)]s(t)\\ \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=A[-i(t)]s(t)\\ \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=A[s(t)+r(t)]s(t)\end{cases} \tag{3}$$

$i(t)\neq 0$ 时，前两个式子相除，得到

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}i(t)}=\frac{i(t)-s(t)-r(t)}{-i(t)} \tag{4}$$

因为 $i(t)+s(t)+r(t)=1$，所以 $r(t)=1-i(t)-s(t)$，代入（4）式，得到

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}i(t)}=\frac{i(t)-s(t)-1+i(t)+s(t)}{-i(t)}=\frac{2i(t)-1}{-i(t)} \tag{5}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}i(t)}&=\frac{2i(t)-1}{-i(t)}\\ \mathrm{d}s(t)&=\frac{2i(t)-1}{-i(t)}\mathrm{d}i(t)\\ s(t)&=\ln(i(t))-2i(t)+C\end{aligned}$$

由于 $i(0)=\alpha>0$，$s(0)=\beta>0$，所以 $C=-\ln(\alpha)+2\alpha+\beta$，所以

$$s(t)=\ln(i(t))-2i(t)-\ln(\alpha)+2\alpha+\beta \qquad (i(t)\neq 0)$$

3 证明：$\lim\limits_{t\to\infty}i(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}s(t)$ 均存在，且 $\lim\limits_{t\to\infty}i(t)<\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{t\to\infty}s(t)=0$。

3.1 证明 $\lim\limits_{t\to\infty}i(t)$ 存在

1. 如果存在 $i(t)=0$ 的时刻，由于此时 $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=A[-i(t)]s(t)=0$，所以 $i(t)$ 之后的值都为 0，所以 $\lim\limits_{t\to\infty}i(t)=0$，且 $\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=A[i(t)-s(t)-r(t)]s(t)=-As(t)$，所以 $s(t)=s(0)e^{-At}$，所以 $\lim\limits_{t\to\infty}s(t)=0$。
2. 如果存在 $s(t)=0$ 的时刻，所以此时三者的值都不改变，说明极限存在。
3. 若任一时刻 $s(t)\neq 0$ 或 $i(t)\neq 0$，则 $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=A[-i(t)]s(t)<0$，所以 $i(t)$ 单调递减，且 $i(t)$ 有下界 0，所以 $\lim\limits_{t\to\infty}i(t)$ 存在。同时由于 $s(t)$ 与 $i(t)$ 之间的关系为 $s(t)=\ln(i(t))-2i(t)-\ln(\alpha)+2\alpha+\beta$，所以 $\lim\limits_{t\to\infty}s(t)$ 存在。

3.2 证明 $\lim\limits_{t\to\infty}i(t)<\frac{1}{2},\lim\limits_{t\to\infty}s(t)=0$

$i(t)=0$ 的情况在上小题中已经证明，所以只需要证明 $i(t)\neq 0$ 的情况。（且 $i(t)\neq 0$ 的情况下，我们才能给出 $s(t)$ 与 $i(t)$ 的关系式）

因为 $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty} s(t)$ 存在，所以

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=0 \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

所以

$$\lim_{t\to\infty} A[i(t)-s(t)-r(t)]s(t)=0 \qquad \lim_{t\to\infty} A[-i(t)]s(t)=0$$

即

$$\lim_{t\to\infty}[2i(t)-1]s(t)=0 \qquad \lim_{t\to\infty}[-i(t)]s(t)=0$$

所以

$$\lim_{t\to\infty} s(t)=\lim_{t\to\infty}[-(2i(t)-1)+2i(t)]s(t)=-0-2*0=0$$

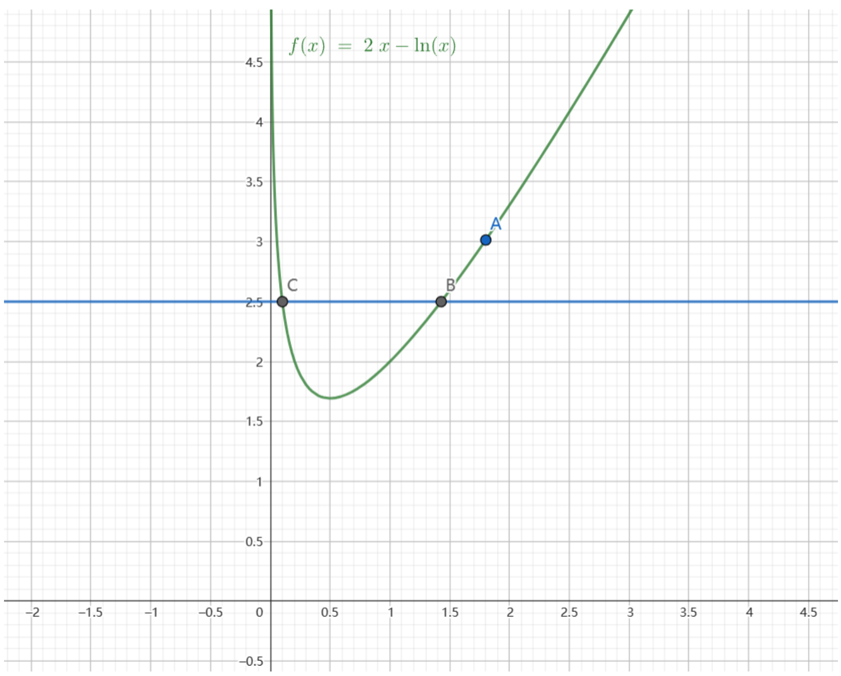
一个结论证毕。接下来证明 $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)<\frac{1}{2}$。

因为 $\lim\limits_{t\to\infty} s(t)=0$，所以

$$\lim_{t\to\infty} s(t)=\lim_{t\to\infty}(\ln(i(t))-2i(t)-\ln(\alpha)+2\alpha+\beta)=\ln(\lim_{t\to\infty} i(t))-2\lim_{t\to\infty} i(t)-\ln(\alpha)+2\alpha+\beta=0$$

考察函数 $f(x)=\ln(x)-2x$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增。

假设 $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)\geq\frac{1}{2}$，由于 $\ln(\lim\limits_{t\to\infty} i(t))-2\lim\limits_{t\to\infty} i(t)=\ln(\alpha)-2\alpha-\beta>\ln(\alpha)-2\alpha$，则必有 $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)>\alpha$（如下图所示）



但是我们知道 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}<0$，所以 $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)<i(0)=\alpha$，与假设矛盾，所以 $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)<\frac{1}{2}$。

综上所述，$\lim\limits_{t\to\infty} i(t)<\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{t\to\infty} s(t)=0$。

二、 第二题

一商船试图逃避海盗追逐。记 t 时刻商船和海盗的位置分别为 $(x_a(t), y_a(t))$ 与 $(x_b(t), y_b(t))$，商船和海盗的速度分别为 $v_a(t)$ 与 $v_b(t)$，航向与 x 轴正向夹角分别为 $\alpha(t)$ 与 $\beta(t)$。在零时刻商船位于 $(0, 0)$ 处，海盗位于 (x_0, y_0) 处，其中 $x_0 \geq 0, y_0 \leq 0$。商船始终在第一象限内（含坐标轴正向）行驶，海盗可观测到商船的位置并随时调整航向。记 $r(t)$ 为 t 时刻商船和海盗的距离，$\theta(t)$ 为 t 时刻连接商船和海盗的直线与 x 轴正向的夹角。

1 试写出 $x_a(t)$，$y_a(t)$，$x_b(t)$，$y_b(t)$ 所满足的微分方程；

显然：

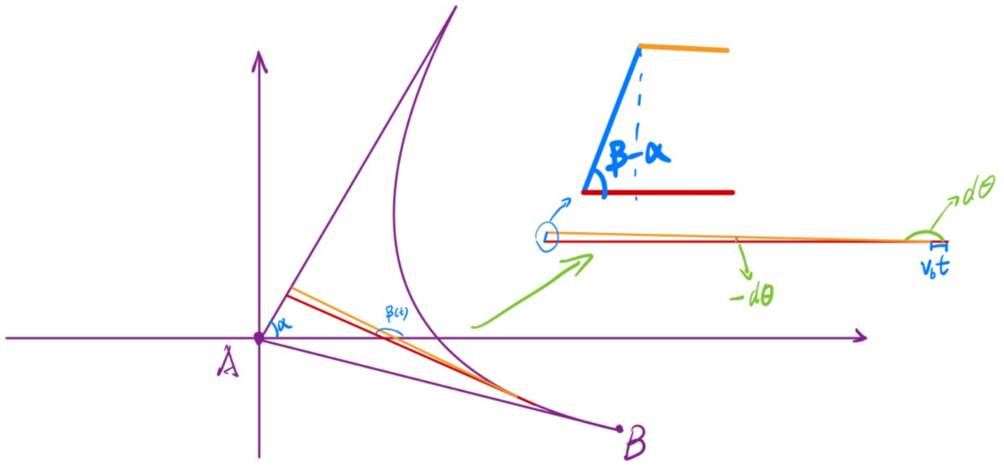
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_a(t)}{\mathrm{d}t} &= v_a(t)\cos(\alpha(t)) \\
\frac{\mathrm{d}y_a(t)}{\mathrm{d}t} &= v_a(t)\sin(\alpha(t)) \\
\frac{\mathrm{d}x_b(t)}{\mathrm{d}t} &= v_b(t)\cos(\beta(t)) \\
\frac{\mathrm{d}y_b(t)}{\mathrm{d}t} &= v_b(t)\sin(\beta(t))
\end{aligned}
$$

2 为使 $r(t)$ 减小最快，海盗应选择怎样的航向；

在海盗追击商船的过程中，海盗应选择每时每刻均沿两者直线方向的航向，此时 $r(t)$ 减小最快。这是因为它导致 r(t) 在任何时间 t 的最陡下降。如果海盗航向不沿两者直线方向，那么 r(t) 的下降速度将会减慢。此时，$\theta(t) = \beta(t)$

3　若 $v_a(t) \equiv v_a$，$v_b(t) \equiv \lambda v_a$，其中 λ 为参数，且海盗采用（2）中航向，试写出 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 所满足的微分方程；

如下图所示：



所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r(t) &= -v_b(t)\mathrm{d}t + v_a(t)\cos(\beta(t)-\alpha(t))\mathrm{d}t \\
&= -\lambda v_a \mathrm{d}t + v_a\cos(\beta(t)-\alpha(t))\mathrm{d}t \\
&= v_a[(\cos(\beta(t)-\alpha(t))-\lambda)\mathrm{d}t]
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} &= v_a(\cos(\beta(t)-\alpha(t))-\lambda) \\
&= v_a(\cos(\theta(t)-\alpha(t))-\lambda)
\end{aligned}$$

对于 $\theta(t)$，有

$$-\mathrm{d}\theta(t) = \sin(-\mathrm{d}\theta(t)) = \frac{v_a\mathrm{d}t\sin(\theta(t)-\alpha(t))}{r(t)}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{v_a\sin(\alpha(t)-\theta(t))}{r(t)}$$

综上

$$\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = v_a(\cos(\alpha(t)-\theta(t))-\lambda) \\
\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{v_a\sin(\alpha(t)-\theta(t))}{r(t)}
\end{cases}$$

4 **若 $\alpha(t)\equiv 0$，且海盗采用（2）中航向，试写出 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 的关系，并在 $\lambda=1$ 时求出 $r(t)$ 和 $\theta(t)$。**

由上一问与条件 $\alpha(t)\equiv 0$，我们可以得到微分方程组如下：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=v_a(\cos(\theta(t))-\lambda)\\ \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_a\sin(\theta(t))}{r(t)}\end{cases}$$

两式相除，得到

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}\theta(t)}=\frac{r(t)}{\sin(\theta(t))}(\lambda-\cos(\theta(t)))$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r(t)}{r(t)}&=\frac{\cos(\theta(t))-\lambda}{\sin(\theta(t))}\mathrm{d}\theta(t)\\ \ln(r(t))&=\lambda\ln\left(\sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)\right)-\lambda\ln\left(\cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)\right)-\ln(\sin(\theta(t)))+C\\ r(t)&=C\frac{1}{\sin(\theta(t))}\left(\tan\frac{\theta(t)}{2}\right)^{\lambda}\end{aligned}$$

$t=0$ 时，$r(0)=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，$\sin\theta(0)=\frac{-y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，$\cos\theta(0)=\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，$\tan\frac{\theta(0)}{2}=\frac{1-\cos\theta(0)}{\sin\theta(0)}=\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}+x_0}{-y_0}$，所以

$$C=-y_0\left(\frac{x_0-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{y_0}\right)^{\lambda}$$

所以，$r(t)$ 与 $\theta(t)$ 的关系为

$$r(t)=-y_0\left(\frac{x_0-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{y_0}\right)^{\lambda}\frac{1}{\sin(\theta(t))}\left(\tan(\frac{\theta(t)}{2})\right)^{\lambda}$$

当 $\lambda=1$ 时，$r(t)$ 与 $\theta(t)$ 的关系为

$$\begin{aligned}r(t)&=-y_0\left(\frac{x_0-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{y_0}\right)\frac{1}{\sin(\theta(t))}\left(\tan(\frac{\theta(t)}{2})\right)\\ &=-y_0\left(\frac{x_0-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{y_0}\right)\frac{1}{\sin(\theta(t))}\left(\frac{\sin\theta(t)}{1+\cos(\theta(t))}\right)\\ &=\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0}{1+\cos(\theta(t))}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_a\sin(\theta(t))}{r(t)}=-\frac{v_a\sin(\theta(t))}{\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0}{1+\cos(\theta(t))}}=-\frac{v_a(1+\cos(\theta(t)))\sin(\theta(t))}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_a(1+\cos(\theta(t)))\sin(\theta(t))}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{(1+\cos(\theta(t)))\sin(\theta(t))} = -\frac{v_a}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0}\mathrm{d}t$$

$$\frac{1-2\cos^2(\frac{\theta(t)}{2})(\ln(\cos(\frac{\theta(t)}{2}))-\ln(\sin(\frac{\theta(t)}{2}))}{2\,(\cos(\theta(t))+1)} = -\frac{v_a}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0}t+C$$

$$\frac{1-(\cos(\theta(t))+1)(\ln(\frac{1}{\tan(\frac{\theta(t)}{2})}))}{2\,(\cos(\theta(t))+1)} = -\frac{v_a}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0}t+C$$

$$\frac{1}{2(\cos(\theta(t))+1)}+\frac{\ln(\tan(\frac{\theta(t)}{2}))}{2} = -\frac{v_a}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0}t+C$$

$$\frac{1}{2(\cos(\theta(t))+1)}+\frac{\ln(\sqrt{\frac{1-\cos(\theta(t))}{1+\cos(\theta(t))}})}{2} = -\frac{v_a}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0}t+C$$

$$\frac{1}{2(\cos(\theta(t))+1)}+\frac{1}{4}\ln(\frac{1-\cos(\theta(t))}{1+\cos(\theta(t))}) = -\frac{v_a}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0}t+C$$

将 $t=0$ 代入上式，可以得到 C 的值。所以我们可以得到 $\theta(t)$ 的表达式。同时，因为我们已经知道了 $r(t)$ 与 $\theta(t)$ 的关系，所以我们可以得到 $r(t)$ 的表达式。

专业：计算机科学与技术
姓名：金杰鹏
学号：3220102509
日期：2023 年 12 月 12 日

浙江大学 课程作业

课程名称：数学建模 指导老师：谈之奕 成绩

作业内容：HW07

一、 第一题

一球状水滴，初始半径为 $a \geq 0$ ，在 $t=0$ 时刻以初速度 $v=0$ 在重力作用下穿过均匀的云层下落，吸收水蒸气后仍保持球状，但半径逐渐增大。记 t 时刻水滴的质量、半径和速度分别为 $m(t)$ 、$r(t)$ 和 $v(t)$ ，ρ 为水的密度，g 为重力加速度，空气阻力不计。

1 假设单位时间内，水滴质量增加值与其表面积成正比，比例系数为 c 。试写出 $r(t)$ 的表达式和 $v(t)$ 满足的微分方程；

1.1 $r(t)$ 的表达式：

依题意：

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = C \cdot S_{表} = C \cdot 4\pi r^2$$

又 $m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$ ，所以：

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 4\pi\rho r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

所以：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{\rho}$$

由于初始半径为 a ，所以：

$$r(t) = \frac{C}{\rho}t + a$$

1.2 $v(t)$ 满足的微分方程：

因为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} &= mg \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= mg \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g - \frac{v}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\
&= g - \frac{v}{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}\frac{\mathrm{d}(\rho\frac{4}{3}\pi r^3)}{\mathrm{d}t} \\
&= g - \frac{3v}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\
&= g - \frac{3v}{r}\frac{C}{\rho}
\end{aligned}
$$

又

$$
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{\rho}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}
$$

，所以：

$$
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{\rho}{C}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho}{C}(g - \frac{3v}{r}\frac{C}{\rho}) = \frac{\rho}{C}g - \frac{3v}{r}
$$

综上，$r(t)$ 的表达式为 $r(t) = \frac{C}{\rho}t + a$ ，$v(t)$ 满足的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{\rho}{C}g - \frac{3v}{r}$ 。

2 假设单位时间内，水滴质量增加值与其大圆面积和速度的乘积成正比，比例系数为 k 。试写出 $r(t)$ 满足的微分方程；

依题意：

$$
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = k \cdot S_{\text{大圆}} \cdot v = k \cdot \pi r^2 \cdot v
$$

又 $m = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ ，所以：

$$
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 4\pi\rho r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}
$$

所以：

$$
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{kv}{4\rho}
$$

3 试求出（1）中 $v(t)$ 的表达式，并证明 $v(t) = \frac{gt}{4}(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3})$ 。

已知 $v(t)$ 满足的微分方程为

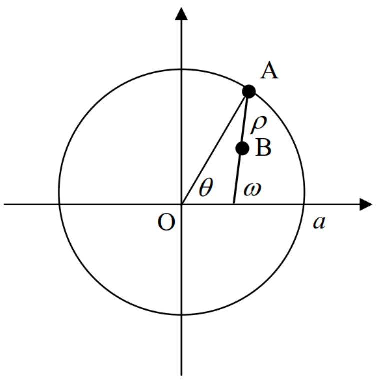
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} &= \frac{\rho}{C}g - \frac{3v}{r} \\
\Rightarrow \frac{r^3\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} + 3r^2v &= \frac{\rho}{C}gr^3 \\
\Rightarrow \mathrm{d}(r^3v) &= \frac{\rho}{4C}g\mathrm{d}r^4 \\
\Rightarrow r^3v &= \frac{\rho}{4C}g(r^4 - a^4) \\
\Rightarrow v &= \frac{\rho}{4C}gr(1 - \frac{a^4}{r^4}) \\
&= \frac{\rho}{4C}gr(1 - \frac{a}{r})(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3}) \\
&= \frac{g}{4}\frac{\rho}{C}(r-a)(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3})
\end{aligned}
$$

因为 $r(t)$ 的表达式为 $r(t) = \frac{C}{\rho}t + a$ ，所以：

$$
v(t) = \frac{gt}{4}(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3})
$$

二、 第二题

物体 A 沿圆心为 O ，半径为 a 的圆周逆时针作匀速运动。零时刻物体 B 位于 O 点，在此后的任意时刻，均沿着连接物体 A 和物体 B 当前所在位置的直线方向向物体 A 运动，速率不变，直至到达圆周。相同时间内物体 B 移动的距离为物体 A 的 n 倍。设 O 点坐标为 $(0,0)$ ，零时刻物体 A 的位置为 $(a,0)$ 。记 t 时刻物体 B 所在位置的坐标为 (x,y) ，连接物体 A 当前所在位置与 O 的直线与 x 轴正向的夹角为 θ ，物体 A 和物体 B 的距离为 ρ ，连接物体 A 和物体 B 当前所在位置的直线与 x 轴正向夹角为 ω 。（参见下图）



1 求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}$ 与 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}$ （以 ω 为参数）；

设运动的距离为 s ，则 $s = n\theta a$ ，所以：

$$
\mathrm{d}x = (\mathrm{d}s)\cos\omega = na\cos\omega\mathrm{d}\theta
$$

$$
\mathrm{d}y = (\mathrm{d}s)\sin\omega = na\sin\omega\mathrm{d}\theta
$$

所以：

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} & = na\cos\omega \\ \frac{dy}{d\theta} & = na\sin\omega \end{cases}$$

2　**试写出物体 B 的运动轨迹在 (x, y) 处的切线方程和法线方程（必要时可以 ω, θ, ρ 为参数）；**

A 点的坐标为 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ ，所以 B 点的坐标为 $(a\cos\theta - \rho\cos\omega, a\sin\theta - \rho\sin\omega)$ ，切线方向为 AB 的方向，所以切线方程为：

$$y = \tan\omega(x - a\cos\theta) + a\sin\theta$$

法线方向为 AB 的法向，所以法线方程为：

$$y = -\frac{1}{\tan\omega}(x - a\cos\theta + \rho\cos\omega) + a\sin\theta - \rho\sin\omega = -\frac{1}{\tan\omega}(x - a\cos\theta) + a\sin\theta + \frac{\rho}{\sin\omega}$$

3　**将 ω 和 ρ 视作 θ 的函数，试写出 ω 和 ρ 满足的微分方程（组）（不含其他参数）。**

已知 $x = a\cos\theta - \rho\cos\omega$ ， $y = a\sin\theta - \rho\sin\omega$ ，所以：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -a\sin\theta - (\frac{d\rho}{d\theta}\cos\omega - \rho\frac{d\omega}{d\theta}\sin\omega) &= na\cos\omega \\ \frac{dy}{d\theta} &= a\cos\theta - (\frac{d\rho}{d\theta}\sin\omega + \rho\frac{d\omega}{d\theta}\cos\omega) &= na\sin\omega \end{aligned}$$

所以：

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\theta} & = a\sin(\omega - \theta) - na \\ \frac{d\omega}{d\theta} & = \frac{a}{\rho}(\cos(\omega - \theta)) \end{cases}$$

消去显含 θ 的项，得：

$$(\frac{d\rho}{d\theta} + na)^2 + (\rho\frac{d\omega}{d\theta})^2 = a^2$$

专业：计算机科学与技术
姓名：金杰鹏
学号：3220102509
日期：2023 年 12 月 24 日

浙江大学 实验报告

课程名称：数学建模 指导老师：谈之奕 成绩

作业内容：HW08

一、 第一题

一单行道上有 n 个车位，按车行方向分别记为 $1,2,\cdots,n$ 。每个车位有空闲和占用两种状态，车位 i 空闲的概率为 $\alpha_i>0$，且各车位是否空闲相互独立。车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态。若在车位 i 上停车的效用为 $U_i>0$，未在 n 个车位上停车的效用为 0。一车从该道路起点出发沿道路单向行驶，试寻找一停车策略，使期望效用达到最大。

1 记 $V_i, i=1,\cdots,n+1$ 为驶过车位 $i-1$ 后（车位 0 为道路起点）开始计划停车所可能获得的最大期望效用，试写出 V_i 所满足的递推关系；

显然：

$$V_{n+1}=0$$

因为车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态，所以如果车位 i 空闲（概率为 α），则考量停车在车位 i 的效用（U_i）与不停车的效用（V_{i+1}），取较大者；如果车位 i 占用（概率为 $1-\alpha$），则只能考虑不停车的效用（V_{i+1}）。

V_i 应满足如下递推关系：

$$V_i=\alpha_i\max\{U_i,V_{i+1}\}+(1-\alpha_i)V_{i+1}, i=1,\cdots,n \tag{1}$$

2 令 $x_i = V_i - V_{i+1}, i = 1, \cdots, n$，试写出求解该问题的以 x_i 为决策变量的数学规划。

$$
\begin{aligned}
x_i &= V_i - V_{i+1} \\
&= \alpha_i \max\{U_i, V_{i+1}\} + (1 - \alpha_i)V_{i+1} - V_{i+1} \\
&= \alpha_i \max\{U_i - V_{i+1}, 0\} \\
&= \alpha_i \max\{U_i - \sum_{j=i+1}^{n} x_j, 0\}
\end{aligned}
$$

所以，目标函数为：

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i$$

约束条件为：

$$
\begin{cases}
x_i \geq 0 \\
x_i + \alpha_i \sum_{j=i+1}^{n} x_j \geq \alpha_i U_i
\end{cases}
$$

停车策略为：

1. 如果 $x_i = 0$，则不在车位 i 停车；
2. 如果 $x_i > 0$，若车位 i 空则停车；

二、 第二题

中铁网发售某地区的铁路车票，近期推出一款名为“中铁卡”的优惠产品。每张中铁卡售价为 C 元，有效期为 T 天，可随时购买，立即生效。购买了中铁卡的乘客在其有效期内购买面值为 p 元的车票只须实付 βp 元，其中 $0<\beta<1$。已知准备购买的 n 张车票价格 p_j 和购票时间 $t_j, j=1,\cdots,n$，其中 $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$，欲使购买中铁卡和车票支付的总金额最小。

为此，构造有向图 $G=(V,E)$，其中 $V=\{u,w,v_1,\cdots,v_n\}$，v_j 对应于需购买的第 j 张车票。试确定 G 的边和每条边的权，使该问题等价于寻找图 G 中自 u 到 w 的一条最短有向路。

1　解

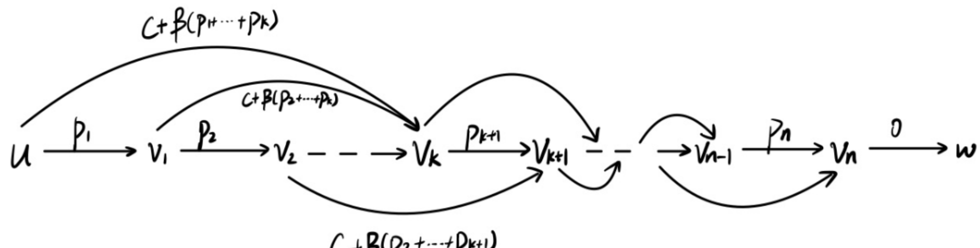
构造有向图 $G=(V,E)$，其中 $V=\{u,w,v_1,\cdots,v_n\}$，v_j 对应于需购买的第 j 张车票。u 代表第 0 天，w 代表第 t_n+1 天。v_j 代表第 t_j 天。

根据贪心策略，购票的时间一定是在某一个节点上。

如果不购买中铁卡，那么有向图中的边即为车票价格，我们记 $v_n \to w$ 的边权为 0，$u \to v_1$ 的边权为 p_1，$v_1 \to v_2$ 的边权为 p_2，以此类推，$v_{n-1} \to v_n$ 的边权为 p_n。

从 u 开始，如果在第 t_j 天购买中铁卡，那么我们在有向图中添加一条边 $v_j \to v_k$，其中 k 是满足 $t_k - t_j \leq T$ 的最大的 k，边权为 $C + p_j + p_{j+1} + \cdots + p_k$。如果在第 t_j 天购买中铁卡时，加上 T 的时长正好超过了 t_n，那么我们将添加的边指向 t_n，并停止添加边。

举个例子：



然后我们在有向图中找到从 u 到 w 的最短路径，这条路径上，下标差值大于 1 的边就是我们要购买中铁卡的时间，边权就是我们要支付的总金额。

专业：计算机科学与技术
姓名：金杰鹏
学号：3220102509
日期：2023 年 12 月 31 日

浙江大学 课程作业

课程名称：数学建模 指导老师：谈之奕 成绩

作业内容：HW09

一、 第一题

中世纪英国学者 Alcuin 在他的著作中给出了下面的过河问题。现有 n 件物品需用一艘船从河的左岸运至右岸。两件不同的物品之间可能存在排斥性，即它们不能同时位于河的一侧，除非此时船也在河的这一侧。用图 $G=(V,E)$ 表示物品之间的排斥性。V 中每个顶点表示一件物品，两个顶点之间有边相连当且仅当这两个顶点表示的物品是排斥的。所有物品和船的一种状态可用三元组 (V_L,V_R,b) 表示，其中 V_L,V_R 分别代表位于河左岸和右岸的物品集，且有 $V_L\cup V_R=V,V_L\cap V_R=\emptyset$，$b\in\{左,右\}$ 表示船所在的位置。船从左岸到达右岸，或从右岸到达左岸的过程称为一次运输。每次运输时船至多装载 k 件物品，k 称为船的容量。现要求给出一由多次运输组成的可行运输方案，将所有物品从左岸运到右岸。

1 请用图论语言表示一次允许的运输过程导致的状态变化进而完整描述上述问题。

我们记 $(L_t|B_t|R_t)$ 表示第 t 次运输中的运输情况。其中 L_t,B_t,R_t 分别表示第 t 次运输过程中左岸、船上和右岸的点的集合。“$\rightarrow$”“$\leftarrow$”分别表示第 t 次的运输方向。

显然，t 为奇数时，船的运输方向为“$\rightarrow$”，为偶数时，船的运输方向为“$\leftarrow$”。

我们考虑以下三个条件：

1. 左岸、船上、右岸的物品集两两不交，且它们的并集为 V。船上的物品数不超过 k。
2. 初始状态下，左岸的物品集为 V，船上和右岸的物品集为空。最终状态下，右岸的物品集为 V，船上和左岸的物品集为空。
3. 奇数情况下，船的运输方向为“$\rightarrow$”，左岸和船上的物品并集不变，右岸的物品集为上一次运输后的右岸物品集。偶数情况下，船的运输方向为“$\leftarrow$”，右岸和船上的物品并集不变，左岸的物品集为上一次运输后的左岸物品集。

一次可行的运输过程则可以表示为：存在有限的序列：$(L_1,B_1,R_1),(L_2,B_2,R_2),...,(L_s,B_s,R_s)$ 使之满足三个条件：

1. 对任意的 t，L_t,B_t,R_t 为点集 V 的一个划分，L_t 和 R_t 是 G 的独立集, 且 $|B_t|\leq k(|B_t|$ 表示集合 B_t 中的元素个数)
2. $L_1\cup B_1=V,R_1=\emptyset$; $B_s\cup R_s=V,L_s=\emptyset$
3. 对于偶数 $t\geq 2$，有 $B_t\cup R_t=B_{t-1}\cup R_{t-1},L_t=L_{t-1}$; 对于奇数 $t\geq 3$, 有 $L_t\cup B_t=L_{t-1}\cup B_{t-1},R_t=R_{t-1}$

2 记 $\beta(G)$ 为 G 的最小顶点覆盖所包含顶点的数目，k^* 为 G 的 Alcuin 数，即存在可行运输方案时船容量的最小值，证明 $\beta(G) \le k^* \le \beta(G)+1$。

设 V_c 是图 G 的最小顶点覆盖，那么有 $|V_c| = \beta(G)$, $V \setminus Vc$ 为图的最大独立集。

2.1 证明 $k^* \le \beta(G)+1$

当船容量为 $\beta(G)+1$ 时，可以有如下的运输方案：

将 V_c 中的点始终放在船上，将 $V \setminus Vc$ 中的点逐一放在船上从左岸运到右岸，最后再将 V_c 中的点运到右岸。

因此有 $k^* \le \beta(G)+1$

2.2 证明 $k^* \ge \beta(G)$

若 $k^* < \beta(G)$, 则在船第一次离开左岸后岸上的物品数至少为 $n-k^* > n-\beta(G)$，此时左岸的物品，比最大独立集的元素多，无法构成独立集。所以有 $k^* \ge \beta(G)$

综上所述，有 $\beta(G) \le k^* \le \beta(G)+1$

3 设 X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 为 V 的子集，$X = \cup_{i=1}^{3} X_i, Y = V \setminus X$，这些子集满足以下条件：

1. X_1, X_2, X_3 两两不交，X 为 G 的独立集；
2. $|Y| \le k$，Y_1, Y_2 为 Y 的非空子集；
3. $X_1 \cup Y_1$ 和 $X_2 \cup Y_2$ 为 G 的独立集；
4. $|Y_1| + |Y_2| \ge |X_3|$。

试设计一可行运输方案，并证明其运输次数不超过 $2|V|+1$。

3.1 设计可行运输方案

用符号 $(L|B|R)$ 表示左侧有集集合 L，B 在船上，R 在右岸。根据题目的条件，我们先考虑 $|X_3| \ge 2$ 的情况（第三步中会用到这个条件）。

3.2 $|X_3| \ge 2$ 的情况

1. 因为 Y 中的其他元素可能与 X 中的元素排斥，所以我们尽可能将 Y 留在船上。由条件 (2)，船可以携带集合 Y ，留下 X 在左岸，把 Y_1 放在右岸，然后返回左岸。这之后三元集的情况为 $(L : X|B : Y - Y_1|R : Y_1)$。完成该步骤，船移动了 2 次
2. 在第二步中，我们将 X_1 移到右岸。完成上一步骤后，船有 $|Y_1| \ge 1$ 的余量，将 X_1 切割成最大为 $|Y_1|$ 的子集合，然后分批过河。这样多次之后，三元集的情况为 $(L : X_2, X_3|B : Y - Y_1|R : X_1, Y_1)$。完成该步骤，船移动了 $2\lceil |X_1|/|Y_1| \rceil$ 次

3. 在第三步中，我们将 X_3 移到右岸。由于 $|Y_1|+|Y_2| \geq |X_3|$, 我们考虑把 X_3 分成两个不相交子集 X_{31}, X_{32}, 并且这两个集合满足 $0<|X_{31}| \leq |Y_1|, 0<|X_{32}| \leq |Y_2|$。这是在 $|X_3| \geq 2$ 的基础上的，所以我们一开始对 $|X_3|$ 的值进行限制。

   从左岸出发走 4 次，每次的情况为：

   (a) $(L: X_2, X_{32} | B_{\rightarrow}: Y-Y_1, X_{31} | R: X_1, Y_1)$
   (b) $(L: X_2, X_{32} | B_{\leftarrow}: Y | R: X_1, X_{31})$
   (c) $(L: X_2, Y_2 | B_{\rightarrow}: Y-Y_2, X_{32} | R: X_1, X_{31})$
   (d) $(L: X_2, Y_2 | B_{\leftarrow}: Y-Y_2 | R: X_1, X_3)$

   完成该步骤，船移动了 4 次

4. 在第四步中，我们将 X_2 移到右岸。完成上一步骤后，船有至少 $|Y_2| \geq 1$ 的余量，可以将 X_2 载到对岸，之后两岸的情况为 $(L: Y_2 | B: Y-Y_2 | R: X)$。完成该步骤，船一移动了, $2\lceil |X_2|/|Y_2| \rceil$ 次

5. 最后只需要把 Y_2 放到右岸，最后的情况是 $L: \emptyset | B_{\rightarrow}: Y | R: X$。完成该步骤，船移动了 1 次

综上所述，船移动了 $2+2\lceil |X_1|/|Y_1| \rceil+4+2\lceil |X_2|/|Y_2| \rceil+1=2\lceil |X_1|/|Y_1| \rceil+2\lceil |X_2|/|Y_2| \rceil+7$ 次。因为 Y_1, Y_2 非空，所以 $|Y_1|,|Y_2| \geq 1$ $|V| \geq |X_1|+|X_2|+|X_3|+1$，移动次数

$$
\begin{aligned}
2\lceil |X_1|/|Y_1| \rceil+2\lceil |X_2|/|Y_2| \rceil+7 &= 2(|X_1|+|X_2|)+7 \\
&\leq 2(|V|-|X_3|-1)+7 \\
&= 2|V|-2|X_3|+5 \\
&\leq 2|V|+1
\end{aligned}
$$

3.3 $|X_3|=1$ 的情况

此时我们将第二步和第三步进行修改，总的方法如下：

1. 因为 Y 中的其他元素可能与 X 中的元素排斥，所以我们尽可能将 Y 留在船上。由条件 (2)，船可以携带集合 Y ，留下 X 在左岸，把 Y_1 放在右岸，然后返回左岸。这之后三元集的情况为 $(L: X | B: Y-Y_1 | R: Y_1)$。完成该步骤，船移动了 2 次

2. 在第二步中，我们将 X_1 移到右岸。完成上一步骤后，船有 $|Y_1| \geq 1$ 的余量，将 X_1 切割成最大为 $|Y_1|$ 的子集合，然后分批过河。这样多次之后，我们能将左岸的 $|X_1|$ 都转移到右岸。在最后一步回到左岸时，我们将 $|Y_1|$ 移回船上，状态为 $L: X_2, X_3 | B: Y | R: X_1$。完成该步骤，船移动了 $2\lceil |X_1|/|Y_1| \rceil$ 次

3. 在第三步中，我们将 X_3 移到右岸。

   从左岸出发，每次的情况为：

   (a) $(L: X_2, Y_2 | B_{\rightarrow}: Y-Y_2, X_3 | R: X_1)$
   (b) $(L: X_2, Y_2 | B_{\leftarrow}: Y-Y_2 | R: X_1, X_3)$

   完成该步骤，船移动了 2 次

4. 完成上一步骤后，船有至少 $|Y_2| \geq 1$ 的余量，可以将 X_2 载到对岸，之后两岸的情况为 $(:: Y_2|B : Y - Y_2|R : X)$。完成该步骤，船一移动了, $2\lceil|X_2|/|Y_2|\rceil$ 次

5. 最后只需要把 Y_2 放到右岸，最后两岸的情况是 $L : \emptyset|B_{\rightarrow} : Y|R : X$。完成该步骤，船移动了 1 次

综上所述，船移动了 $2 + 2\lceil|X_1|/|Y_1|\rceil + 2 + 2\lceil|X_2|/|Y_2|\rceil + 1 = 2\lceil|X_1|/|Y_1|\rceil + 2\lceil|X_2|/|Y_2|\rceil + 5$ 次。因为 Y_1, Y_2 非空，所以 $|Y_1|, |Y_2| \geq 1$ $|V| \geq |X_1| + |X_2| + |X_3| + 1$，移动次数

$$
\begin{aligned}
2\lceil|X_1|/|Y_1|\rceil + 2\lceil|X_2|/|Y_2|\rceil + 5 &= 2(|X_1| + |X_2|) + 5 \\
&\leq 2(|V| - |X_3| - 1) + 5 \\
&= 2|V| - 2|X_3| + 3 \\
&= 2|V| + 1
\end{aligned}
$$

3.4 $|X_3| = 0$ 的情况

此时我们将第二步和第三步进行修改，总的方法如下：

1. 因为 Y 中的其他元素可能与 X 中的元素排斥，所以我们尽可能将 Y 留在船上。由条件 (2)，船可以携带集合 Y ，留下 X 在左岸，把 Y_1 放在右岸，然后返回左岸。这之后三元集的情况为 $(L : X|B : Y - Y_1|R : Y_1)$。完成该步骤，船移动了 2 次

2. 在第二步中，我们将 X_1 移到右岸。完成上一步骤后，船有 $|Y_1| \geq 1$ 的余量，将 X_1 切割成最大为 $|Y_1|$ 的子集合，然后分批过河。这样多次之后，我们能将左岸的 $|X_1|$ 都转移到右岸。在最后一步回到左岸时，我们将 $|Y_1|$ 移回船上，状态为 $L : X_2|B : Y|R : X_1$。完成该步骤，船移动了 $2\lceil|X_1|/|Y_1|\rceil$ 次

3. 完成上一步骤后，船有至少 $|Y_2| \geq 1$ 的余量，可以将 X_2 载到对岸，之后两岸的情况为 $(:: Y_2|B : Y - Y_2|R : X)$。完成该步骤，船一移动了, $2\lceil|X_2|/|Y_2|\rceil$ 次

4. 最后只需要把 Y_2 放到右岸，最后两岸的情况是 $L : \emptyset|B_{\rightarrow} : Y|R : X$。完成该步骤，船移动了 1 次

综上所述，船移动了 $2 + 2\lceil|X_1|/|Y_1|\rceil + 2\lceil|X_2|/|Y_2|\rceil + 1 = 2\lceil|X_1|/|Y_1|\rceil + 2\lceil|X_2|/|Y_2|\rceil + 3$ 次。因为 Y_1, Y_2 非空，所以 $|Y_1|, |Y_2| \geq 1$ $|V| \geq |X_1| + |X_2| + 1$，移动次数

$$
\begin{aligned}
2\lceil|X_1|/|Y_1|\rceil + 2\lceil|X_2|/|Y_2|\rceil + 3 &= 2(|X_1| + |X_2|) + 3 \\
&\leq 2(|V| - |X_3| - 1) + 3 \\
&= 2|V| - 2|X_3| + 1 \\
&= 2|V| + 1
\end{aligned}
$$

3.5 综上所述

综上所述，移动次数不超过 $2|V| + 1$。

二、 第二题

考虑图上的警察与小偷游戏（cop and robber game）。给定连通无向图 $G=(V,E)$ 。游戏开始前，每位警察先占据图中一个顶点，小偷再选择图中一个顶点。随后警察和小偷轮流行动，在每一轮中，所有警察先行动，小偷后行动。每次行动可沿图上一条边从一个顶点到达另一个顶点，也可原地不动。警察和小偷都了解图的形状并能在行动前看到其他人的位置。若在某次行动后，某个警察和小偷位于同一顶点，则称警察抓获小偷。对某个图 G ，不论警察和小偷的初始位置为何以及小偷如何行动，警察总能采取相应的行动方案在有限轮后抓获小偷所需的最少警察数称为图 G 的警察数（cop-number），记为 $c(G)$。

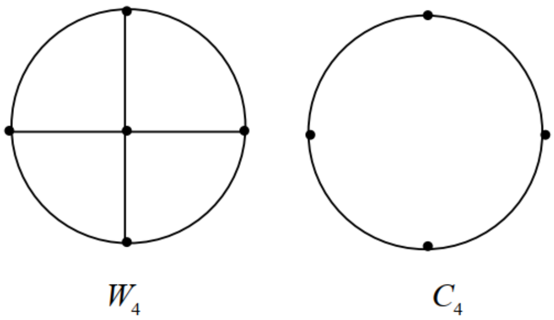


图 1: Example Image

1　分别求轮 W_4 和圈 C_4 的警察数。

1.1　轮 W_4 的警察数

轮 W_4 的警察数为 1。无论警察和小偷的初始位置为何以及小偷如何行动，警察只要走到中心的点上，就一定能抓获小偷，而这是显然可通过有限步得到的的。

1.2　圈 C_4 的警察数

圈 C_4 的警察数为 2。因为二者的速度相同，所以一个警察不够。

2　证明：若 $c(G)=1$，必存在顶点 u,w，使得 $N(u)\cup\{u\}\subseteq N(w)\cup\{w\}$，这里 $N(v)$ 是图中与 v 有边相连的顶点集。

采用反证法。

尝试证明：若对于任意的 u,w，有 $N(u)\cup\{u\}\not\subseteq N(w)\cup\{w\}$，那么 $c(G)\neq 1$。

游戏开始前，由条件可知，一定存在一个警察无法控制的点，小偷选择该点即可。

游戏开始后，对于小偷行动前的每一个时刻，设此时小偷位于 u，警察位于 w，小偷只需要前往不被警察控制的点就可以不被抓捕。

所以，一个警察不够，即 $c(G)\neq 1$。

于是，若 $c(G)=1$，必存在顶点 u,w，使得 $N(u)\cup\{u\}\subseteq N(w)\cup\{w\}$。

3 试通过建立该问题与图论中某问题的联系给出 $c(G)$ 的一个上界。

只要警察通过有限步到达最小支配集中的一个点，就一定能抓到小偷。

所以，$c(G) \leq \gamma(G)$，其中 $\gamma(G)$ 表示图 G 的最小支配集的大小。

4 设在 G 中没有长度为 3 或 4 的圈，G 的最小度 $\delta(G) = d$。

4.1 证明：若警察数不超过 $d-1$，则不论警察选择哪些顶点，小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第一轮抓获小偷。

小偷在第一轮必定被抓住当且仅当警察占据了图的支配集。

所以问题转为证明：设在 G 中没有长度为 3 或 4 的圈，G 的最小度 $\delta(G) = d$，此时最小支配集的大小 $\gamma(G) \geq d$。

我们任选一个支配集 A，考察一个支配集 A 外的点 w（如不存在，则表示支配集即为顶点集，这对连通图是不可能的）。因为 G 的最小度 $\delta(G) = d$，则有 $N(w) = \{w_1, w_2, ..., w_N\}$，其中 $N \geq d$。

我们将 $N(w)$ 中属于 A 的点记作 v_i，将 $N(w)$ 中被支配集 A 支配的点记作 u_i。则 $N(w) = \{v_1, v_2, ..., v_m, u_1, u_2, ..., u_n\}$，其中 $m + n = N \geq d$。

根据题目条件：

1. 因为 w 被 $v_1, v_2, ..., v_m$ 支配，所以 u_i 不能被 $v_1, v_2, ..., v_m$ 中的点支配，否则会形成长度为 3 的圈。

   $$\text{支配}w\text{的点}(v_i) \to w \to u_i \to \text{支配}w\text{的点}(v_i)$$

2. 不同的 u_i 不能被同一个点支配，否则会形成长度为 4 的圈。

   $$\text{支配}u_{i_1}, u_{i_2}\text{的点}(V) \to u_{i_1} \to w \to u_{i_2} \to \text{支配}u_{i_2}, u_{i_2}\text{的点}(V)$$

因为不同的 u_i 不能被同一个点支配（支配集中要有 n 个点），且 u_i 不能被 $v_1, v_2, ..., v_m$ 中的点支配（那 n 个点不能包含这 m 个点），所以 A 中至少要有 $m + n = N \geq d$ 个点。

所以，任一支配集的大小 $\gamma(G) \geq d$。

所以，若警察数不超过 $d-1$，则不论警察选择哪些顶点，小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第一轮抓获小偷。

4.2 证明：若警察数不超过 d，则不论警察选择哪些顶点，小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第二轮抓获小偷。

若在 $t-1$ 轮警察行动后小偷所在地为 x，则有 $N(x) = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$，其中 $N \geq d$。

由上一问的分析可知，$N(x)$ 要被支配至少需要 n 个不同的点，此时仅有不超过 $d-1$ 个警察，因此 $N(x)$ 中一定存在一个不被支配的点，小偷只需要前往那个点就可以不被抓捕。

4.3 证明：$c(G) \geq \delta(G)$

由 4.1,4.2，根据数学归纳法可知：若警察数不超过 $d-1$，则不论警察选择哪些顶点，小偷总可以选择某个顶点使得警察在任何一轮都无法抓获小偷；

所以 $c(G) \geq \delta(G)$。