$ZJU-I$机械臂雅可比矩阵计算实验报告

1. 实验目的

本次实验的目的是推导并计算$ZJU-I$机械臂其在**零点位置** $q=[0,0,0,0,0,0]$ 时的雅可比矩阵 $J(q)$。

2. 机械臂 D-H 参数

2.1 原始 D-H 参数表

下表为本次实验所用机械臂的原始D-H参数表。所有关节均为旋转关节。

连杆 (No.)	a_i	α_i	d_i	θ_i (变量)
1	0	-90°	230mm	θ_1
2	185mm	0	-54mm	θ_2 (-90°)
3	170mm	0	0	θ_3
4	0	90°	77mm	θ_4 (90°)
5	0	90°	77mm	θ_5 (90°)
6	0	0	85.5mm	θ_6

2.2 用于计算的 D-H 参数（标准化）

为便于计算，我们将长度单位统一为**米（m）**，并明确定义关节变量 θ_i 与D-H参数表中的实际角度 θ_i^* 之间的关系。

连杆 i	a_i (m)	α_i (rad)	d_i (m)	关节角 θ_i^*
1	0	$-\pi/2$	0.230	θ_1
2	0.185	0	-0.054	$\theta_2-\pi/2$
3	0.170	0	0	θ_3

连杆 i	a_i (m)	α_i (rad)	d_i (m)	关节角 θ_i^*
4	0	$\pi/2$	0.077	$\theta_4+\pi/2$
5	0	$\pi/2$	0.077	$\theta_5+\pi/2$
6	0	0	0.0855	θ_6

3. 雅可比矩阵推导过程

3.1 计算状态

我们计算在**零点位置** $q=[0,0,0,0,0,0]$ 时的雅可比矩阵。根据 2.2 节的定义，此时用于计算的实际 D-H角度 θ_i^* 为：

- $\theta_1^*=\theta_1=0$
- $\theta_2^*=\theta_2-\pi/2=0-90^\circ=-90^\circ$
- $\theta_3^*=\theta_3=0$
- $\theta_4^*=\theta_4+\pi/2=0+90^\circ=90^\circ$
- $\theta_5^*=\theta_5+\pi/2=0+90^\circ=90^\circ$
- $\theta_6^*=\theta_6=0$

3.2 计算齐次变换矩阵 $A_i(q=0)$

标准的D-H变换矩阵 A_i 定义为：

$$A_i=\mathrm{Rot}_z(\theta_i^*)\cdot\mathrm{Trans}_z(d_i)\cdot\mathrm{Trans}_x(a_i)\cdot\mathrm{Rot}_x(\alpha_i)$$

代入 $q=0$ 时的参数（使用 $\cos,\sin$ 简写为 c,s）：

$$A_1=\begin{bmatrix}c_1 & -s_1c\alpha_1 & s_1s\alpha_1 & a_1c_1\\ s_1 & c_1c\alpha_1 & -c_1s\alpha_1 & a_1s_1\\ 0 & s\alpha_1 & c\alpha_1 & d_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0.23\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}(\text{因 }\theta_1^*=0,\alpha_1=-90^\circ)$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -0.185\\ 0 & 0 & 1 & -0.054\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}(\text{因 }\theta_2^*=-90^\circ,\alpha_2=0)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.170 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (因 $\theta_3^* = 0, \alpha_3 = 0$)

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.077 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (因 $\theta_4^* = 90^\circ, \alpha_4 = 90^\circ$)

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.077 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (因 $\theta_5^* = 90^\circ, \alpha_5 = 90^\circ$)

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0855 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (因 $\theta_6^* = 0, \alpha_6 = 0$)

3.3 计算累积变换矩阵 T_0^i

$T_0^i = A_1 A_2 \cdots A_i$。$T_0^i$ 的前三列构成了旋转矩阵 R_0^i，第四列构成了位置向量 p_i。

$$T_0^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^1 = A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = T_0^1 A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.054 \\ 1 & 0 & 0 & 0.415 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (0.415 = 0.23 - (-0.185))

$$T_0^3 = T_0^2 A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.054 \\ 1 & 0 & 0 & 0.585 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (0.585 = 0.415 + 0.170)

$$T_0^4 = T_0^3 A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.023 \\ 0 & 0 & 1 & 0.585 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (0.023 = -0.054 + 0.077)

$$T_0^5 = T_0^4 A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.023 \\ 0 & 1 & 0 & 0.662 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (0.662 = 0.585 + 0.077)

$$T_0^6 = T_0^5 A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.0855 \\ 1 & 0 & 0 & 0.023 \\ 0 & 1 & 0 & 0.662 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 提取 z 向量和 p 向量

z_{i-1} 是 R_0^{i-1} 的第三列。p_{i-1} 是 T_0^{i-1} 的第四列。
末端位置 $p_6 = [0.0855, 0.023, 0.662]^T$。

- $i = 1$:
  - $z_0 = [0, 0, 1]^T$
  - $p_0 = [0, 0, 0]^T$
  - $p_6 - p_0 = [0.0855, 0.023, 0.662]^T$
- $i = 2$:
  - $z_1 = [0, 1, 0]^T$ (来自 T_0^1 的第3列)
  - $p_1 = [0, 0, 0.23]^T$
  - $p_6 - p_1 = [0.0855, 0.023, 0.432]^T$
- $i = 3$:
  - $z_2 = [0, 1, 0]^T$ (来自 T_0^2 的第3列)
  - $p_2 = [0, -0.054, 0.415]^T$
  - $p_6 - p_2 = [0.0855, 0.077, 0.247]^T$
- $i = 4$:
  - $z_3 = [0, 1, 0]^T$ (来自 T_0^3 的第3列)
  - $p_3 = [0, -0.054, 0.585]^T$
  - $p_6 - p_3 = [0.0855, 0.077, 0.077]^T$
- $i = 5$:
  - $z_4 = [0, 0, 1]^T$ (来自 T_0^4 的第3列)
  - $p_4 = [0, 0.023, 0.585]^T$
  - $p_6 - p_4 = [0.0855, 0, 0.077]^T$

- $i = 6$:
  - $z_5 = [1, 0, 0]^T$ (来自 T_0^5 的第3列)
  - $p_5 = [0, 0.023, 0.662]^T$
  - $p_6 - p_5 = [0.0855, 0, 0]^T$

3.5 计算雅可比矩阵各列 J_i

$J_i = [(z_{i-1} \times (p_6 - p_{i-1}))^T, (z_{i-1})^T]^T$

- J_1:
  - $J_{v,1} = z_0 \times (p_6 - p_0) = [0, 0, 1]^T \times [0.0855, 0.023, 0.662]^T = [-0.023, 0.0855, 0]^T$
  - $J_{\omega,1} = z_0 = [0, 0, 1]^T$
  - $J_1 = [-0.023, 0.0855, 0, 0, 0, 1]^T$
- J_2:
  - $J_{v,2} = z_1 \times (p_6 - p_1) = [0, 1, 0]^T \times [0.0855, 0.023, 0.432]^T = [0.432, 0, -0.0855]^T$
  - $J_{\omega,2} = z_1 = [0, 1, 0]^T$
  - $J_2 = [0.432, 0, -0.0855, 0, 1, 0]^T$
- J_3:
  - $J_{v,3} = z_2 \times (p_6 - p_2) = [0, 1, 0]^T \times [0.0855, 0.077, 0.247]^T = [0.247, 0, -0.0855]^T$
  - $J_{\omega,3} = z_2 = [0, 1, 0]^T$
  - $J_3 = [0.247, 0, -0.0855, 0, 1, 0]^T$
- J_4:
  - $J_{v,4} = z_3 \times (p_6 - p_3) = [0, 1, 0]^T \times [0.0855, 0.077, 0.077]^T = [0.077, 0, -0.0855]^T$
  - $J_{\omega,4} = z_3 = [0, 1, 0]^T$
  - $J_4 = [0.077, 0, -0.0855, 0, 1, 0]^T$
- J_5:
  - $J_{v,5} = z_4 \times (p_6 - p_4) = [0, 0, 1]^T \times [0.0855, 0, 0.077]^T = [0, 0.0855, 0]^T$
  - $J_{\omega,5} = z_4 = [0, 0, 1]^T$
  - $J_5 = [0, 0.0855, 0, 0, 0, 1]^T$
- J_6:
  - $J_{v,6} = z_5 \times (p_6 - p_5) = [1, 0, 0]^T \times [0.0855, 0, 0]^T = [0, 0, 0]^T$
  - $J_{\omega,6} = z_5 = [1, 0, 0]^T$
  - $J_6 = [0, 0, 0, 1, 0, 0]^T$

4. 雅可比矩阵 $J(q=0)$

将上述6个列向量 J_1 到 J_6 组合成 6×6 矩阵，得到在零点位置 $q=[0,0,0,0,0,0]$ 时的雅可比矩阵：

$$J(q=0) = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 & J_6 \end{bmatrix}$$

$$J(q=0) = \begin{bmatrix} -0.023 & 0.432 & 0.247 & 0.077 & 0 & 0 \\ 0.0855 & 0 & 0 & 0 & 0.0855 & 0 \\ 0 & -0.0855 & -0.0855 & -0.0855 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$