动 力 学

- 动力学的任务

研究物体的机械运动与作用力之间的关系。

- 动力学的基本内容

牛顿力学——在牛顿定律基础上建立的动力学。

分析力学——以虚位移原理和达朗贝尔原理为基础，建立受约束系统普遍方程，从而推出拉格朗日方程。

动 力 学

- 动力学的分类

质点动力学　　　　质点系动力学

质　点——是指具有一定质量但可以忽略其尺寸大小的物体。

质点系——一群具有某种联系的质点。例如刚体，可以看成不变形的质点系（任意两个质点间的距离不变）。

质点动力学

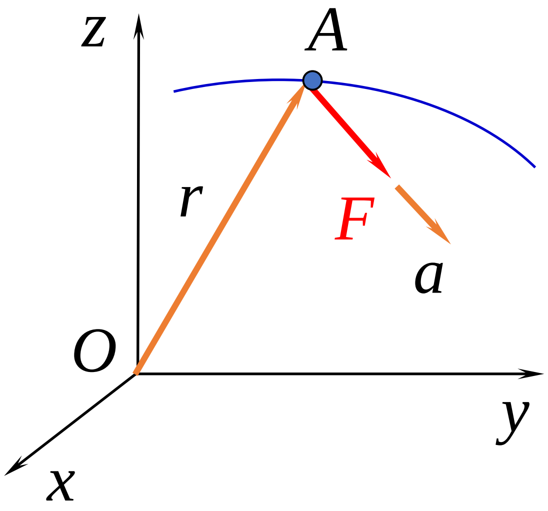
质点是物体最简单、最基本的模型，是构成复杂物体系统的基础。质点动力学基本方程给出了**质点受力与其运动变化之间的联系。**

通过质点动力学的基本方程，运用微积分方法，求解一个质点的动力学问题。

质点运动微分方程

1. 矢量形式

设有可以自由运动的质点 A，质量是 m，作用力的合力是 F，加速度是 a。由运动学可知



$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

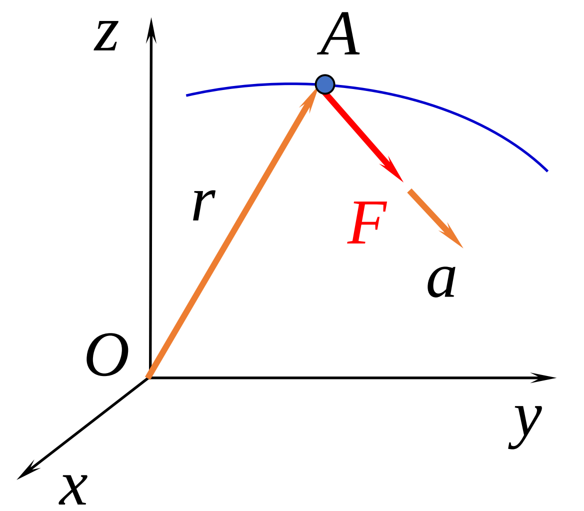
牛顿第二定律 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ 可写成

$$m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}$$

这就是质点运动微分方程的矢量形式。

§10-1 质点运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}$$



2. 直角坐标形式

把上式沿固定直角坐标系 $Oxyz$ 的各轴投影,得

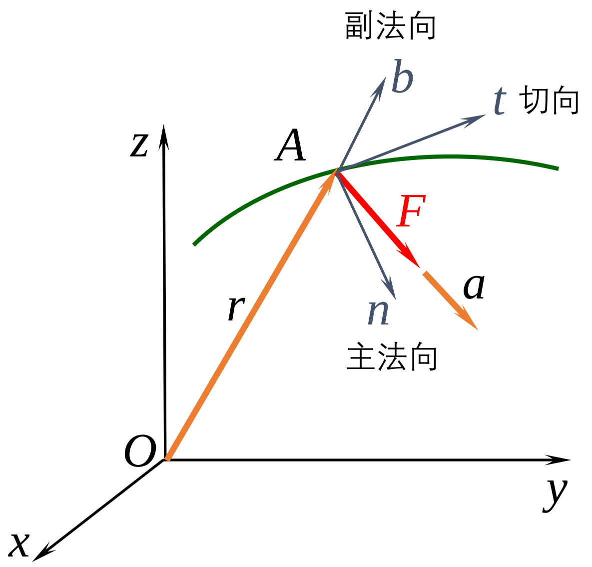
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x,\quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_y,\quad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=F_z$$

F_x、 F_y、 F_z是作用力 F 的合力在各轴上的投影。上式是直角坐标形式的质点运动微分方程。

§10-1 质点运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}$$

3. 自然形式



如采用自然轴系 *Atnb*，把牛顿第二定律$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$向各轴投 影，可得

$$ma_{\mathrm{t}}=F_{\mathrm{t}},\qquad ma_{\mathrm{n}}=F_{\mathrm{n}},\qquad ma_{\mathrm{b}}=F_{\mathrm{b}}$$

其中 $a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$ $a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{\rho}$ $a_{\mathrm{b}}=0$

因此 $m\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=F_{\mathrm{t}},$ $m\dfrac{v^2}{\rho}=F_{\mathrm{n}},$ $0=F_{\mathrm{b}}$

上式就是自然形式的质点运动微分方程。

质点动力学基本问题

$$m\,a = F$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z \end{cases}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = F_{\mathrm{t}},\quad m\frac{v^2}{\rho} = F_{\mathrm{n}},\quad 0 = F_{\mathrm{b}}$$

- 已知质点的运动规律 $r = r(t)$，通过导数运算，求出加速度，代入左边公式，即得作用力 F。

质点动力学的第一类问题：已知运动，求力。

质点动力学基本问题

$$m\,a = F$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z \end{cases}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = F_\mathrm{t},\quad m\frac{v^2}{\rho} = F_\mathrm{n},\quad 0 = F_\mathrm{b}$$

- 已知作用在质点上的力$F(t)$，利用初始条件，通过时间积分得到质点的运动方程$\boldsymbol{r}(t)$。

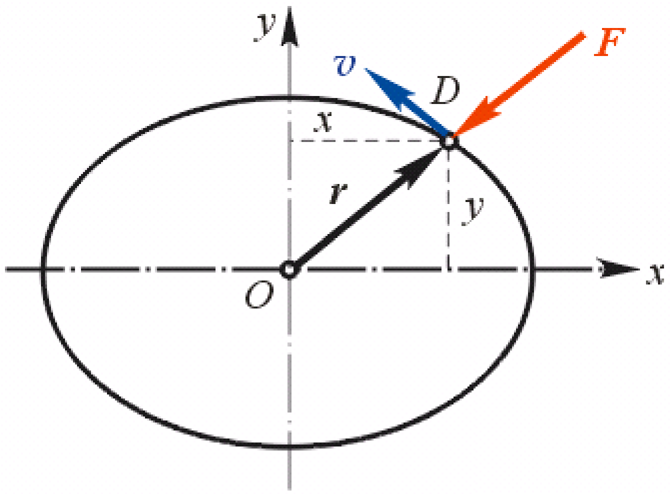
质点动力学的第二类问题：已知力，求运动。

质点动力学基本问题

例题 质点D在固定平面Oxy内运动，已知质点的质量m，运动方程是

$$x = A\cos kt \quad , \quad y = B\sin kt$$

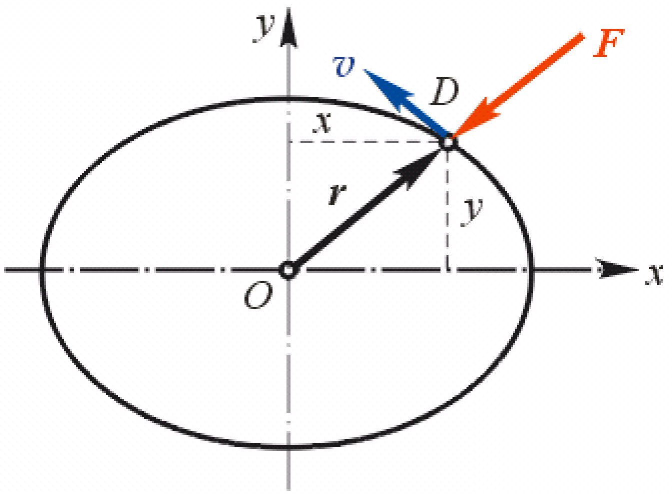
式中A、B、k都是常数量。试求作用于质点D的力F。



解：　　本题属于第一类问题。由运动方程求导得到质点的加速度在固定坐标轴x、y上的投影，即

$$a_x = \ddot{x} = -k^2 A\cos kt = -k^2 x$$

$$a_y = \ddot{y} = -k^2 A\sin kt = -k^2 y$$



代入

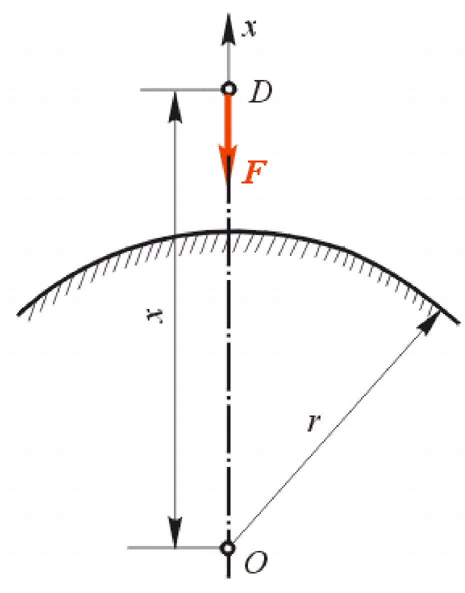
$$m\ddot{x} = F_x \ , \ m\ddot{y} = F_y$$

得　$F_x = -mk^2 x$ ，　$F_y = -mk^2 y$

例题　由地球上空某点沿铅垂方向发射宇宙飞船。地球对飞船的作用力F可由万有引力公式求得，即

$$F=\mu\frac{m}{x^2}$$

式中，m是飞船的质量，地球的引力常数 $\mu=3.986\times10^5\,\mathrm{km^3/s^2}$，$x$是飞船到地心$O$的距离。已知初始发射速度是$v_0$，初始发射点的坐标是$x_0$。不计空气阻力和不考虑地球自转，求飞船在位置$x_1$处的速度$v_1$。



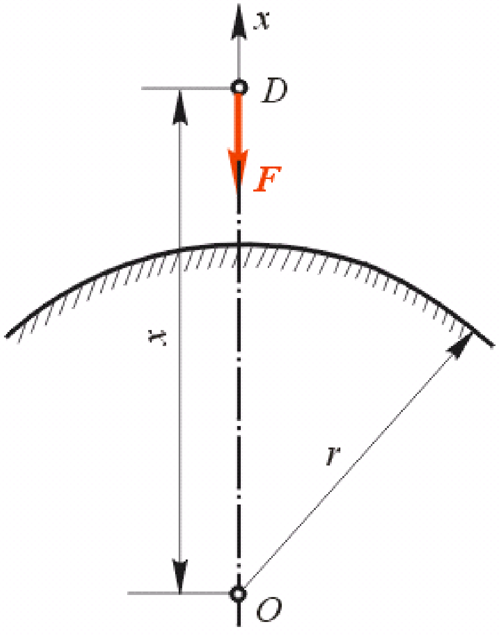
解：

飞船的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-F=-\frac{\mu m}{x^2}$$

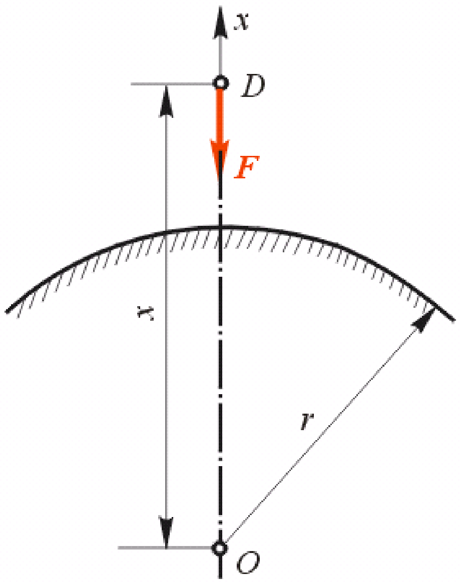
考虑到 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ ，上式可改写为

$$m\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mu m}{x^2}$$



§10-2 质点动力学基本问题

$$m\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mu m}{x^2}$$



分离变量。并求定积分，有

$$\int_{v_0}^{v_1} mv\mathrm{d}v=-\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mu m}{x^2}\mathrm{d}x$$

式中，v_0是发射速度，x_0是发射点的坐标

积分后得 $$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{\mu m}{x_1}-\frac{\mu m}{x_0}$$

$$v_1=\sqrt{v_0^2+\frac{2\mu}{x_1}-\frac{2\mu}{x_0}}$$

质点动力学基本问题

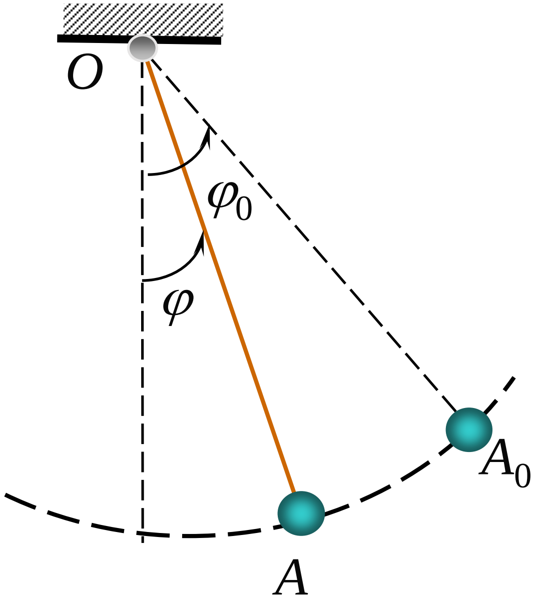
质点动力学解题步骤:

（1）适当选取研究对象，进行受力分析和运动分析。

（2） 建立质点的动力学方程或运动微分方程。

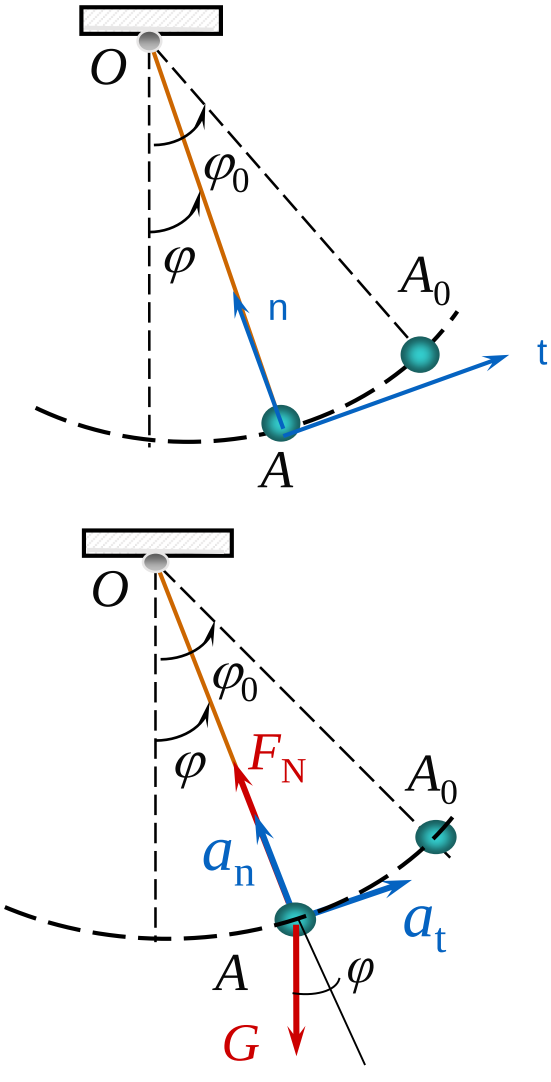
（3） 解动力学方程并分析结果。

例题 单摆 A 的摆锤重 G ,绳长 l ,悬于固定点 O ,绳的质量不计。设开始时绳与铅垂线成偏角 $\varphi_0 \leq \pi/2$,并被无初速释放，试求绳中拉力的最大值。



解:

以摆锤A为研究对象。选择如图所示自然轴系。任意瞬时，质点的加速度在切向和法向的投影为



$$a_t = l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = l\ddot{\varphi}$$

写出质点的自然形式的运动微分方程

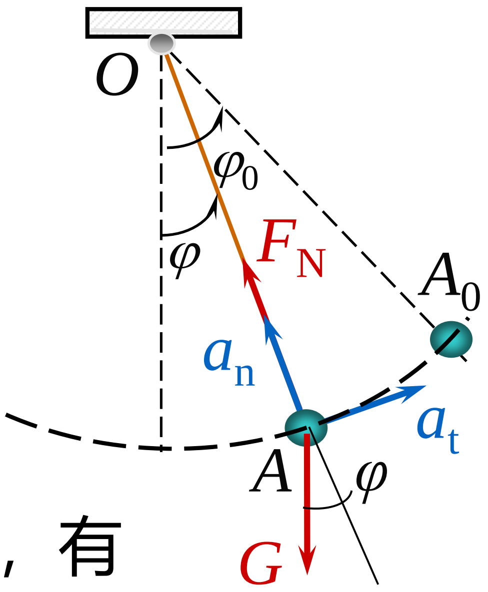
$$ma_t = \frac{G}{g}l\ddot{\varphi} = -G\sin\varphi \qquad (1)$$

$$ma_n = \frac{G}{g}l\dot{\varphi}^2 = F_N - G\cos\varphi \qquad (2)$$

$$ma_{\mathrm{t}} = \frac{G}{g} l \ddot{\varphi} = -G \sin\varphi \qquad (1)$$

$$ma_{\mathrm{n}} = \frac{G}{g} l \dot{\varphi}^2 = F_{\mathrm{N}} - G\cos\varphi \qquad (2)$$

考虑到



$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

则式(1)化成

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^2}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

对上式采用定积分,把初条件作为积分下限，有

$$\int_0^{\dot{\varphi}} \mathrm{d}(\dot{\varphi}^2) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (-\frac{2g}{l}\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

从而得

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \qquad (4)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \qquad (4)$$

$$\frac{G}{g} l\ddot{\varphi} = -G\sin\varphi \qquad (1)$$

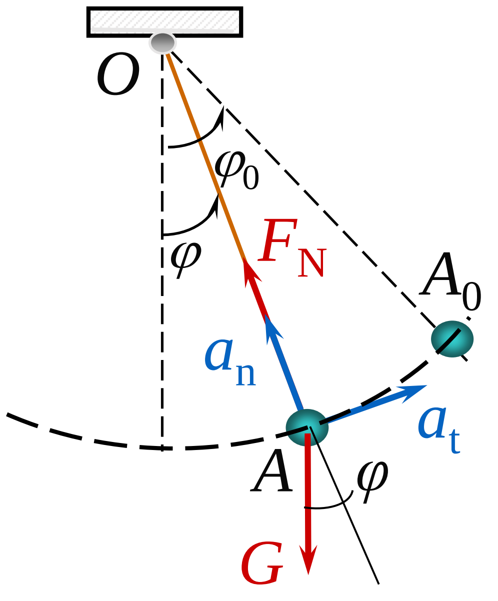
$$\frac{G}{g} l\dot{\varphi}^2 = F_N - G\cos\varphi \qquad (2)$$

把式(4)代入式(2)，得绳拉力

$$F_N = G(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$$

显然，当摆球 A 到达最低位置 $\varphi = 0$ 时，有最大值。故

$$F_{N\max} = G(3 - 2\cos\varphi_0)$$



作业

习题 9-3， 9-7， 9-14