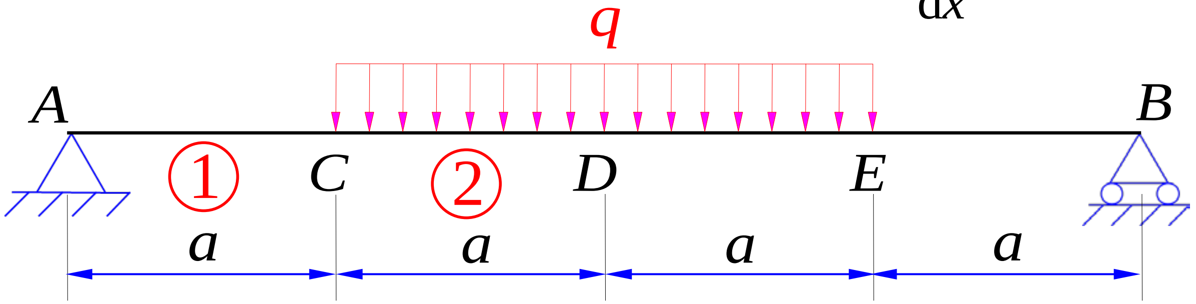
第六章　弯曲变形（二）

第16讲

计算梁挠度和转角的方法

梁的挠曲线近似微分方程 $$EI\frac{\mathrm{d}^2w(x)}{\mathrm{d}x^2}=M(x)$$



积分法（分两段）：
待定常数4个
边界条件1个
对称性条件1个
连续条件2个

方法	优点	缺点
（1）积分法	可以得到全梁的结果并可了解全梁变形的变化情况	推导过程复杂、繁琐

（2）叠加原理　工程中通常关心的是最大挠度和最大转角，或计算梁上指定截面处的挠度和转角。

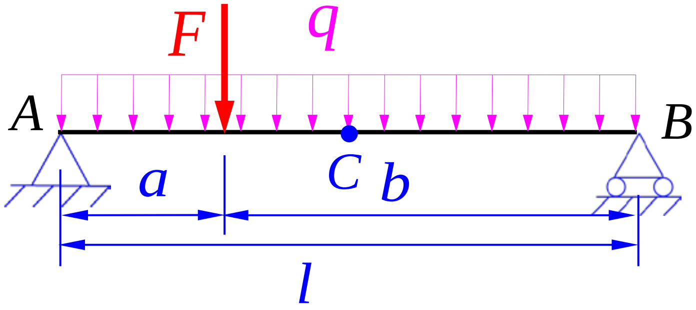
§6.4 按叠加原理求弯曲变形

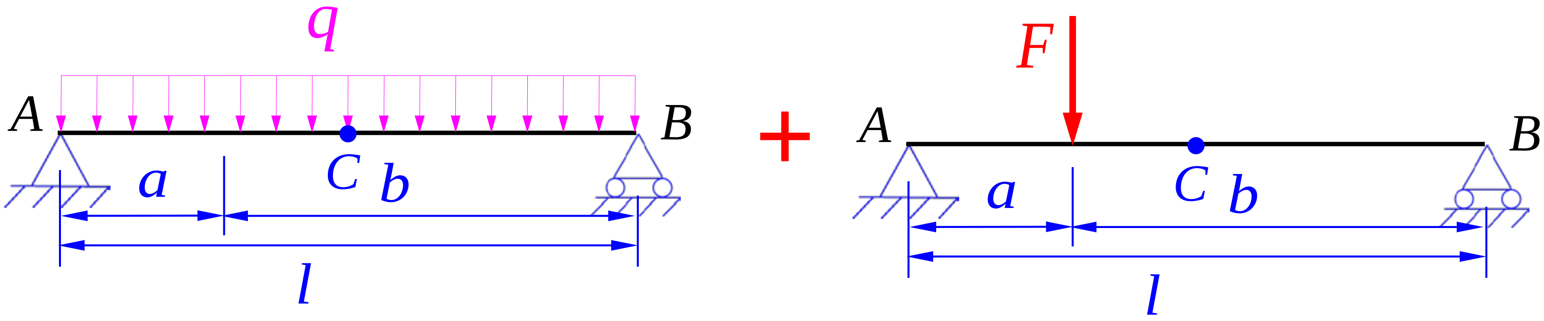
一、用叠加原理计算梁的变形

在材料服从胡克定律、且是小变形的前提下，载荷与它所引起的变形成线性关系。

当梁上同时作用几个载荷时，各个载荷所引起的变形是各自独立的，互不影响。

若计算几个载荷共同作用下在某截面上引起的变形，则可分别计算各个载荷单独作用下的变形，然后进行叠加。





叠加原理

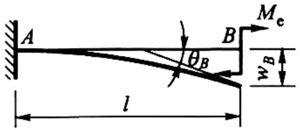
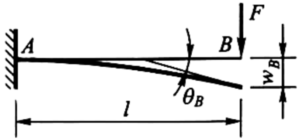
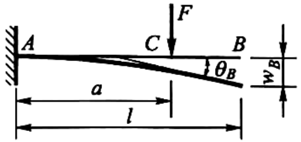
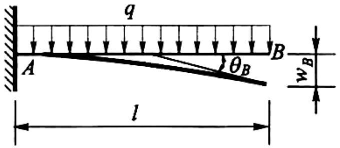
$$w_C = w_{C,q} + w_{C,F} \qquad \theta_A = \theta_{A,q} + \theta_{A,F} \qquad M_C = M_{C,q} + M_{C,F}$$

$$\theta_C = \theta_{C,q} + \theta_{C,F} \qquad \theta_B = \theta_{B,q} + \theta_{B,F} \qquad F_{SC} = F_{SC,q} + F_{SC,F}$$

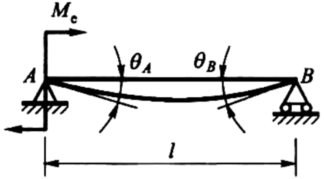
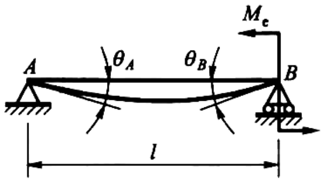
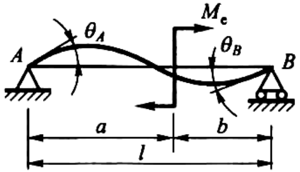
pp. 200–202

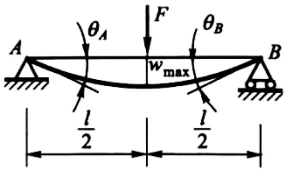
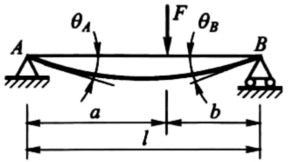
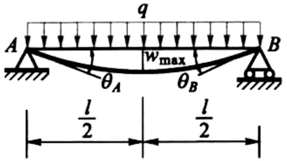
表6.1 梁在简单载荷作用下的变形

挠度w向上为正
转角θ逆时针转动为正

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
1		$w=-\frac{M_e x^2}{2EI}$	$\theta_B=-\frac{M_e l}{EI}$	$w_B=-\frac{M_e l^2}{2EI}$
2		$w=-\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$	$\theta_B=-\frac{Fl^2}{2EI}$	$w_B=-\frac{Fl^3}{3EI}$
3		$w=-\frac{Fx^2}{6EI}(3a-x)\ (0\leqslant x\leqslant a)$ $w=-\frac{Fa^2}{6EI}(3x-a)\ (a\leqslant x\leqslant l)$	$\theta_B=-\frac{Fa^2}{2EI}$	$w_B=-\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$
4		$w=-\frac{qx^2}{24EI}(x^2-4lx+6l^2)$	$\theta_B=-\frac{ql^3}{6EI}$	$w_B=-\frac{ql^4}{8EI}$

续表

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
5		$w=-\frac{M_e x}{6EIl}(l-x)(2l-x)$	$\theta_A=-\frac{M_e l}{3EI}$ $\theta_B=\frac{M_e l}{6EI}$	$x=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)l$, $w_{\max}=-\frac{M_e l^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x=\frac{l}{2}, w_{\frac{l}{2}}=-\frac{M_e l^2}{16EI}$
6		$w=-\frac{M_e x}{6EIl}(l^2-x^2)$	$\theta_A=-\frac{M_e l}{6EI}$ $\theta_B=\frac{M_e l}{3EI}$	$x=\frac{l}{\sqrt{3}}$, $w_{\max}=-\frac{M_e l^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x=\frac{l}{2}, w_{\frac{l}{2}}=-\frac{M_e l^2}{16EI}$
7		$w=\frac{M_e x}{6EIl}(l^2-3b^2-x^2)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ $w=\frac{M_e}{6EIl}[-x^3+3l(x-a)^2+(l^2-3b^2)x]$ $(a\leqslant x\leqslant l)$	$\theta_A=\frac{M_e}{6EIl}(l^2-3b^2)$ $\theta_B=\frac{M_e}{6EIl}(l^2-3a^2)$	

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
8		$w=-\frac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\right)$	$\theta_A=-\theta_B=-\frac{Fl^2}{16EI}$	$w_{\max}=-\frac{Fl^3}{48EI}$
9		$w=-\frac{Fbx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ $w=-\frac{Fb}{6EIl}\left[\frac{l}{b}(x-a)^3+(l^2-b^2)x-x^3\right]$ $(a\leqslant x\leqslant l)$	$\theta_A=-\frac{Fab(l+b)}{6EIl}$ $\theta_B=\frac{Fab(l+a)}{6EIl}$	设 $a>b$，在 $x=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$ 处，$w_{\max}=-\frac{Fb(l^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIl}$ 在 $x=\frac{l}{2}$ 处，$w_{\frac{l}{2}}=-\frac{Fb(3l^2-4b^2)}{48EI}$
10		$w=-\frac{qx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$	$\theta_A=-\theta_B=-\frac{ql^3}{24EI}$	$w_{\max}=-\frac{5ql^4}{384EI}$

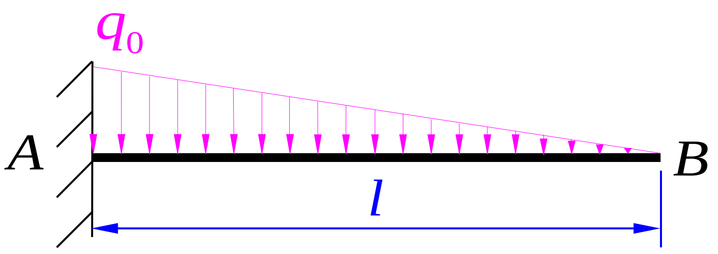
小结：表格中仅给出

两种梁：悬臂梁、简支梁

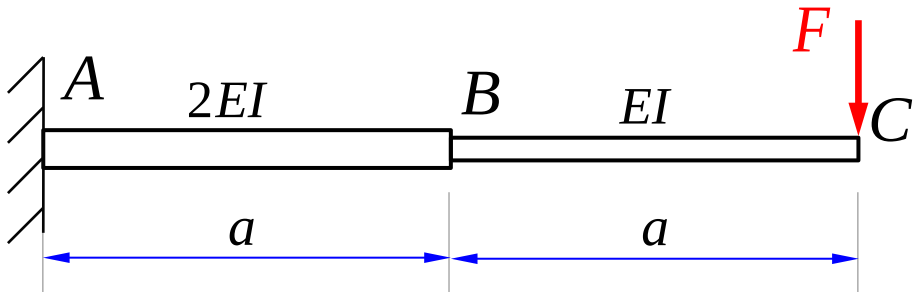
简单载荷：集中力、集中力偶；均布载荷；三角形载荷

$$w=-\frac{q_0x^2}{120EIl}(10l^3-10l^2x+5lx^2-x^3)$$

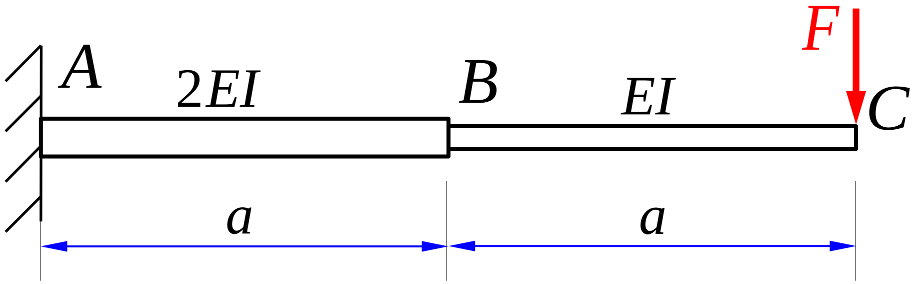
$$w_B=-\frac{q_0l^4}{30EI},\quad \theta_B=-\frac{q_0l^3}{24EI}$$



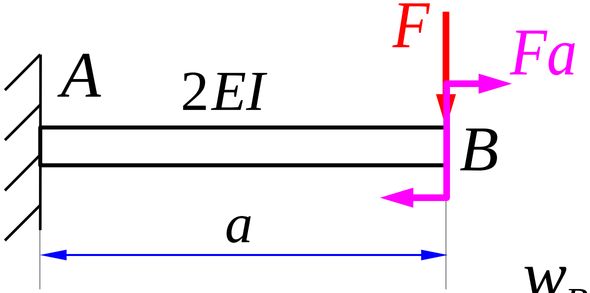
工程实际问题：梁和载荷的形式复杂多样，如何处理？



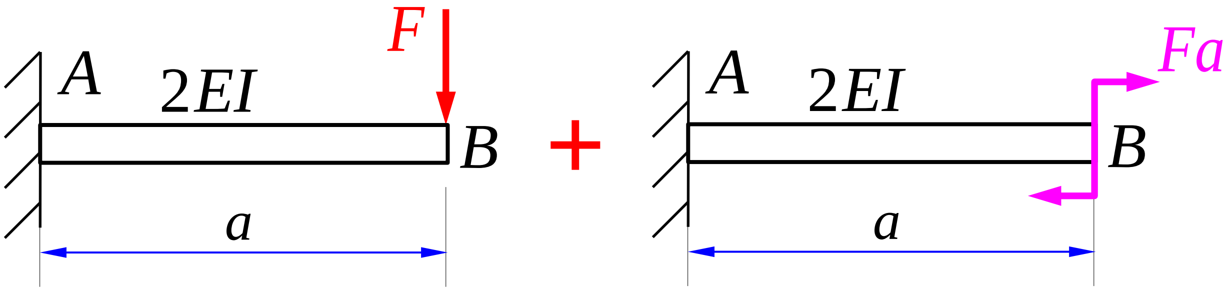
例1 用叠加法求图示变截面梁B和C 截面的挠度 w_B 和 w_C 。



解：（1）求w_B



$$w_B = -\frac{Fa^3}{3(2EI)} - \frac{Fa \cdot a^2}{2(2EI)} = -\frac{5Fa^3}{12EI}(\downarrow)$$



（2）求w_C

$$w_B=-\frac{5Fa^3}{12EI}(\downarrow)$$

$$w_C=w_{C1}+w_{C2}$$

$$w_{C1}=w_B+\theta_B\cdot a$$

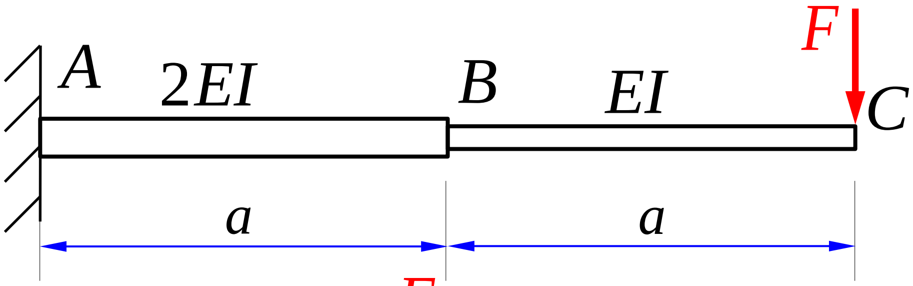
$$\theta_B=-\frac{Fa^2}{2(2EI)}-\frac{Fa\cdot a}{2EI}=-\frac{3Fa^2}{4EI}\text{(顺时针)}$$

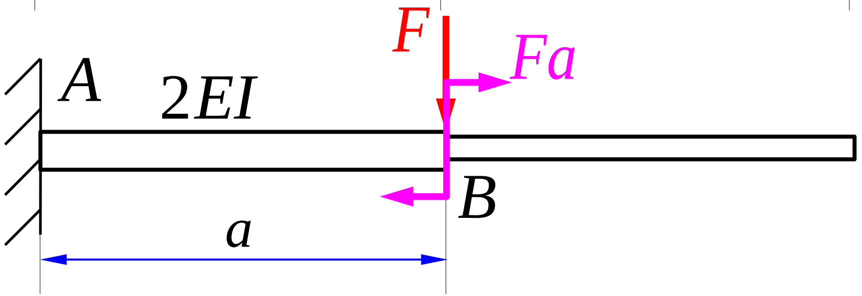
$$w_{C1}=-\frac{5Fa^3}{12EI}-\frac{3Fa^2}{4EI}\cdot a=-\frac{7Fa^3}{6EI}(\downarrow)$$

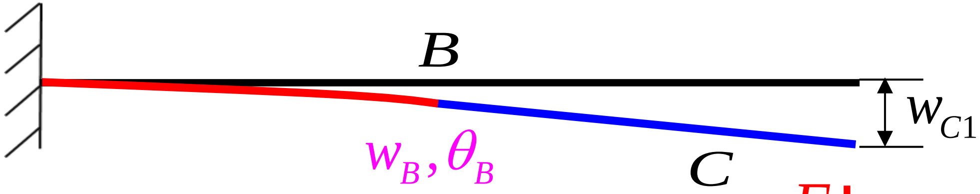
$$w_{C2}=-\frac{Fa^3}{3EI}$$

$$w_C=w_{C1}+w_{C2}=-\frac{7Fa^3}{6EI}-\frac{Fa^3}{3EI}$$

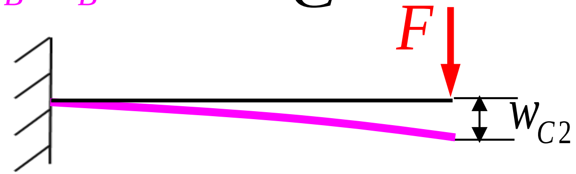
$$=-\frac{3Fa^3}{2EI}(\downarrow)$$



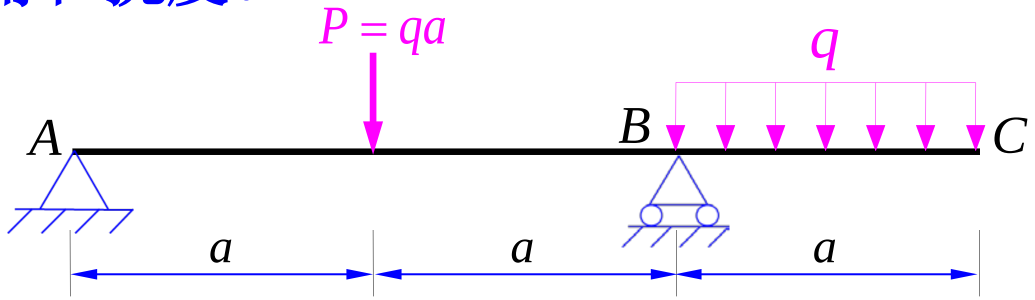




梁BC的变形



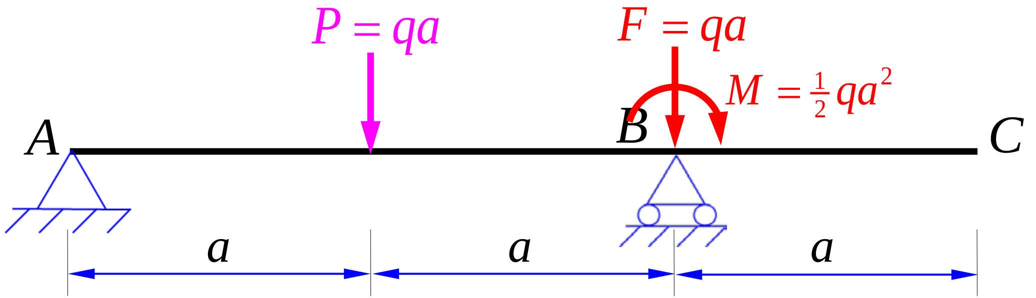
例2　已知外伸梁的弯曲刚度均为EI，用叠加法求图示梁C端的转角和挠度。



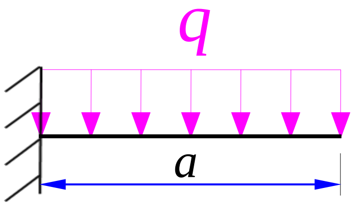
分析:

$$w_C = w_{C1} + w_{C2}$$

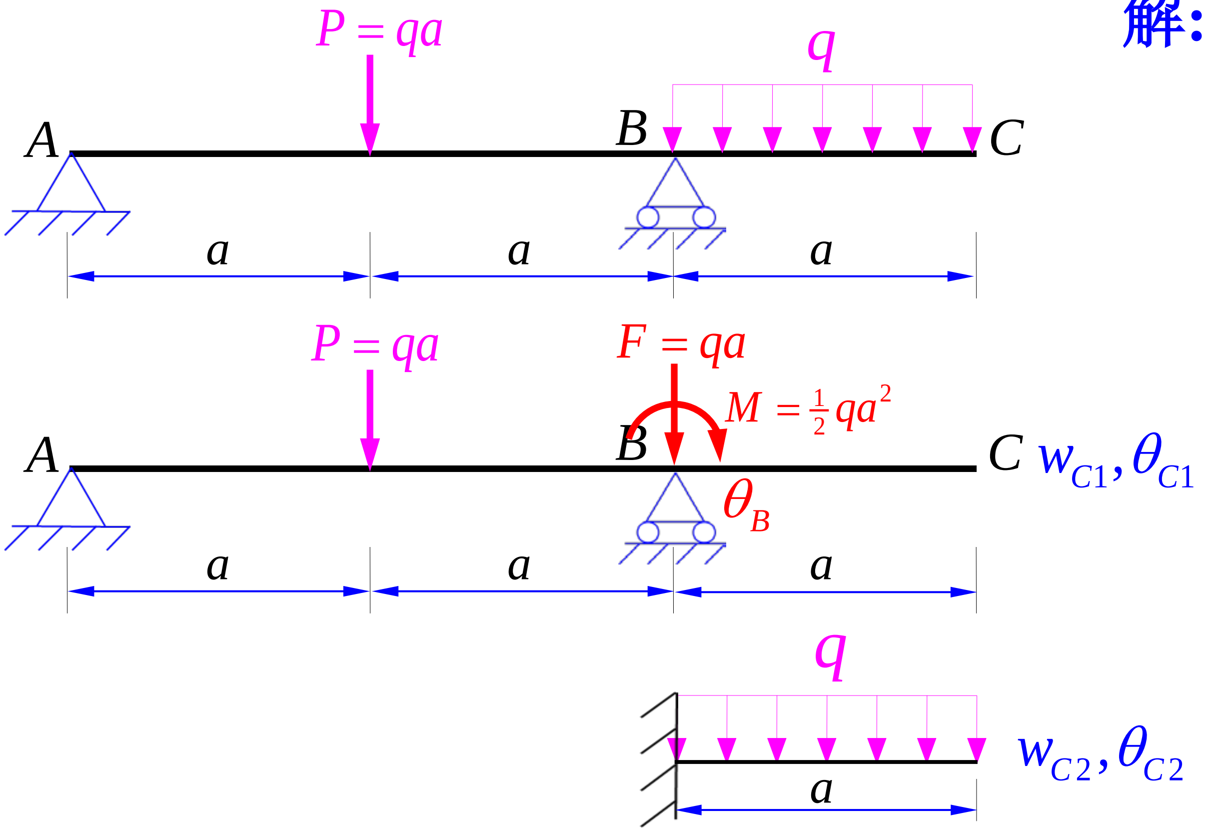
$$\theta_C = \theta_{C1} + \theta_{C2}$$



w_{C1}, θ_{C1}



w_{C2}, θ_{C2}



解: $\theta_C=\theta_{C1}+\theta_{C2}=\theta_B+\theta_{C2}$

$$\theta_B=-\frac{(\frac{1}{2}qa^2)\cdot 2a}{3EI}+\frac{qa\cdot(2a)^2}{16EI}$$

$$=-\frac{qa^3}{12EI}\text{（顺时针）}$$

$$\theta_{C2}=-\frac{qa^3}{6EI}\text{（顺时针）}$$

$$\theta_C=-\frac{qa^3}{12EI}-\frac{qa^3}{6EI}=-\frac{qa^3}{4EI}$$

（顺时针）

$$w_C=w_{C1}+w_{C2}$$

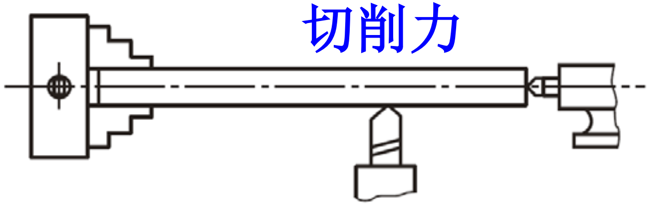
$$=\theta_B\cdot a-\frac{qa^4}{8EI}$$

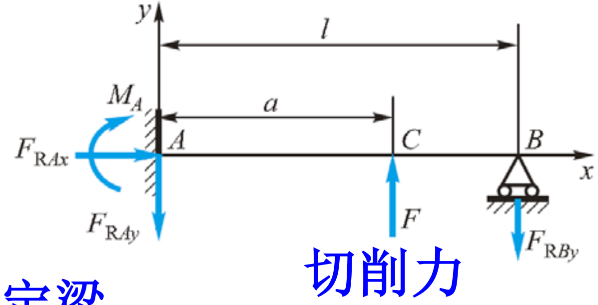
$$=-\frac{qa^3}{12EI}\cdot a-\frac{qa^4}{8EI}$$

$$=-\frac{5qa^4}{24EI}(\downarrow)$$

§6.5 简单超静定梁

一、超静定梁工程实例



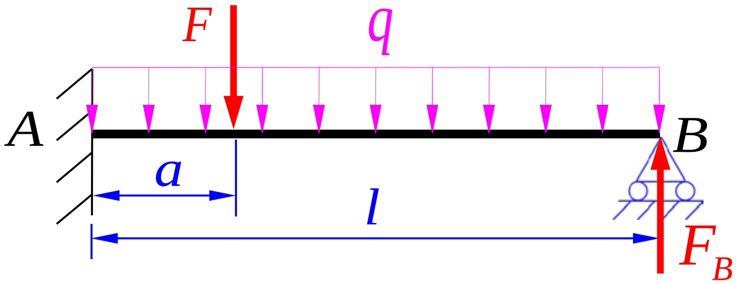


1次超静定梁

2次超静定梁

二、超静定梁问题的解法

1. 解除多余约束，用未知反力代替，得到基本静定系。



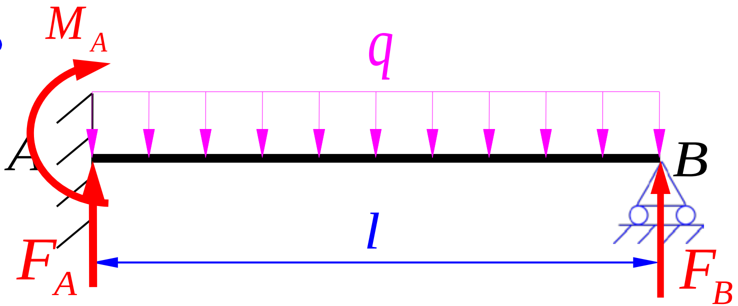
2. 根据变形协调方程和物理关系，建立补充方程。

3. 解出多余未知约束力。

多余的未知约束力解出之后，原问题即转化为静定梁问题，可根据实际需要，进一步求解出内力、应力、挠度、转角等！

然后可进行强度和刚度校核！

例3 求图示超静定梁支座的约束力。



解：将支座B看成多余约束

变形协调方程：$w_B = 0$

有：$$\frac{F_B l^3}{3EI} - \frac{ql^4}{8EI} = 0$$

$$F_B = \frac{3}{8} ql$$

分析：超静定次数？

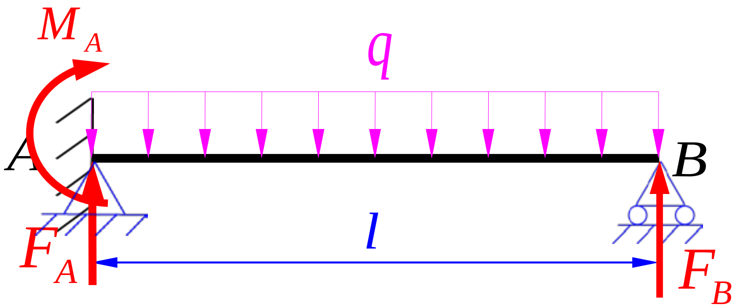
1次超静定

求支座A处的约束力：

$$\sum F_y = 0: \ F_A + F_B - ql = 0 \Rightarrow F_A = \frac{5}{8} ql$$

$$\sum M_A = 0: \ M_A + ql \times \frac{l}{2} - F_B l = 0 \Rightarrow M_A = -\frac{1}{8} ql^2$$

另解：将支座A对截面转动的约束看成多余约束



变形协调方程：$\theta_A = 0$

即 $-\dfrac{M_A l}{3EI} - \dfrac{ql^3}{24EI} = 0 \longrightarrow M_A = -\dfrac{1}{8}ql^2$

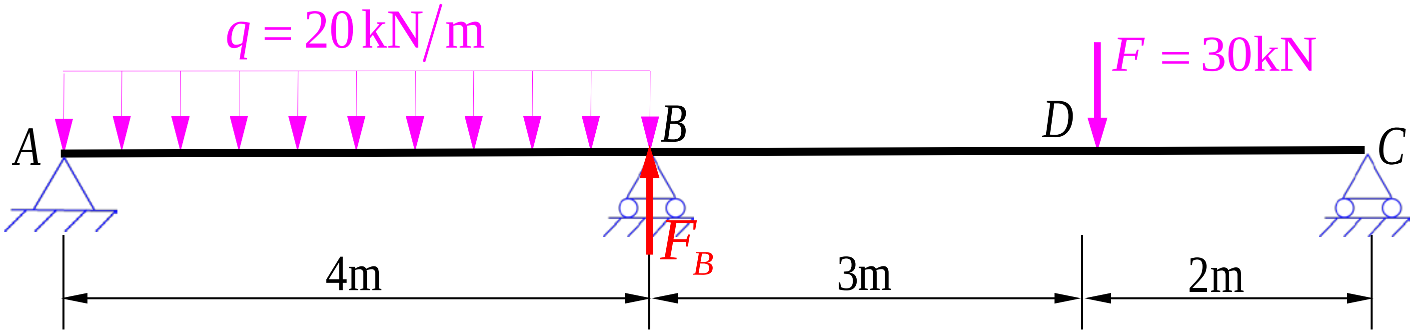
求支座的约束力：

$$\sum M_A = 0: \quad F_B l - M_A - ql \cdot \left(\tfrac{l}{2}\right) = 0 \longrightarrow F_B = \tfrac{3}{8}ql$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_A + F_B = ql \longrightarrow F_A = \tfrac{5}{8}ql$$

与前面计算结果相同

例4 图示超静定梁，弯曲刚度$EI = 5\times10^{6}\ \mathrm{N\cdot m^2}$，试求梁的支座约束力。



分析：1次超静定

将支座B看成多余约束， 变形协调方程：$w_B = 0$

采用P. 205的 例6.6的方法计算简支梁上部分受均布载荷作用下指定点的挠度

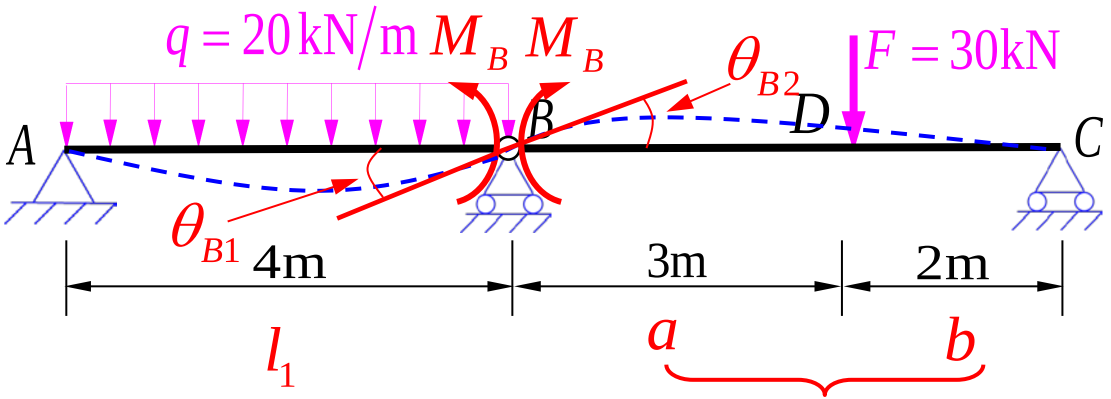
$$F_B = \frac{732F + 320ql}{1200} = 66.3\mathrm{kN}$$

另解：

解除B处对转角的约束，

施加一对力偶矩 M_B

变形协调方程 $\theta_{B1}=\theta_{B2}$



$$\boxed{a=\tfrac{3}{5}l_2,\ \ b=\tfrac{2}{5}l_2}$$

$$\theta_{B1}=\frac{ql_1^3}{24EI}+\frac{M_Bl_1}{3EI}$$

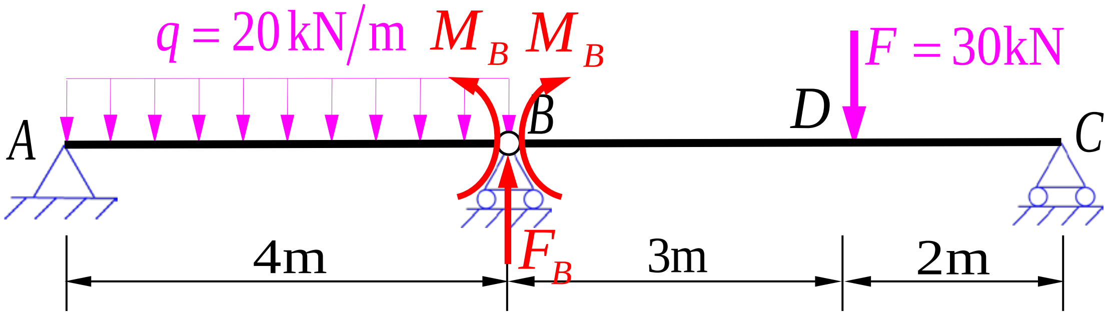
$$\theta_{B2}=-\frac{Fab(l_2+b)}{6EIl_2}-\frac{M_Bl_2}{3EI}=-\frac{7Fl_2^2}{125EI}-\frac{M_Bl_2}{3EI}$$

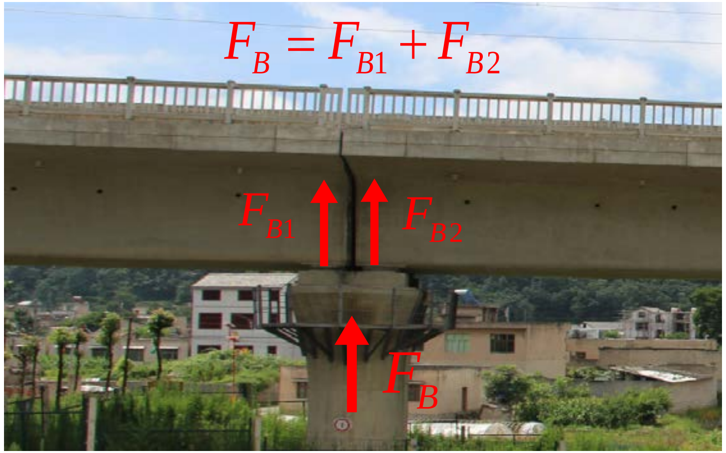
$$\theta_{B1}=\theta_{B2}\ \Longrightarrow\ \frac{ql_1^3}{24EI}+\frac{M_Bl_1}{3EI}=-\frac{7Fl_2^2}{125EI}-\frac{M_Bl_2}{3EI}$$

$$M_B=-\frac{1}{l_1+l_2}\left(\frac{ql_1^3}{8}+\frac{21Fl_2^2}{125}\right)=-\frac{1}{9}\left(\frac{20\times4^3}{8}+\frac{21\times30\times5^2}{125}\right)=-31.78\,\text{kN.m}$$

求F_B

$M_B = -31.78\text{kN.m}$





支座B的实际承受的是左右两段梁反力之和

$$\sum M_A = 0 \longrightarrow F_B l_1 + M_B - \tfrac{1}{2} q l_1^2 = 0$$

$$F_B = \tfrac{1}{2} q l_1 - \frac{M_B}{l_1} = \tfrac{1}{2} \times 20 \times 4 - \frac{-31.78}{4} = 47.9\text{kN}$$

$$\sum M_C = 0 \longrightarrow F_B l_2 + M_B - Fb = 0$$

$$F_B = F_D \frac{b}{l_2} - \frac{M_B}{l_2} = 30 \times \tfrac{2}{5} - \frac{-31.78}{5} = 18.4\text{kN}$$

\+

$F_B = 66.3\,\text{kN}$

与前同

§ 6.6 提高梁弯曲刚度的措施

一、梁的刚度校核

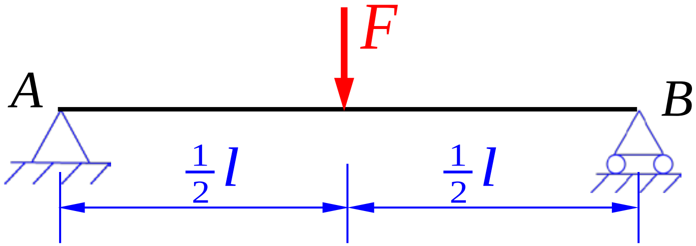
刚度条件：$\boxed{\dfrac{w_{\max}}{l} \le \left[\dfrac{w}{l}\right], \quad \theta_{\max} \le [\theta]}$

在土木工程（梁）：$\left[\dfrac{w}{l}\right] = \dfrac{1}{250} \sim \dfrac{1}{1000}$

在机械工程（轴）：$\left[\dfrac{w}{l}\right] = \dfrac{1}{5000} \sim \dfrac{1}{10000}$

传动轴：$[\theta] = 0.005 \sim 0.001\,\text{rad}$

例5 图示I20a工字钢梁 l =8m， E=200GPa，[w]= l/500， [σ]= 100MPa。试根据梁的刚度条件，确定梁的许可载荷 [F]，并校核强度。



查表：P374

I_z=2370 cm^4

W_z=237 cm^3

解： 由刚度条件 $w_{\max} = \dfrac{Fl^3}{48EI} \le [w] = \dfrac{l}{500}$

得 $F \le \dfrac{48EI}{500l^2} = 7.11\ \text{kN}$ $\qquad [F] = 7.11\text{kN}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{\frac{1}{4}Fl}{W_z} = 60\text{MPa} \le [\sigma] = 100\text{MPa}$$

该梁满足强度条件。

二、提高梁弯曲刚度的措施

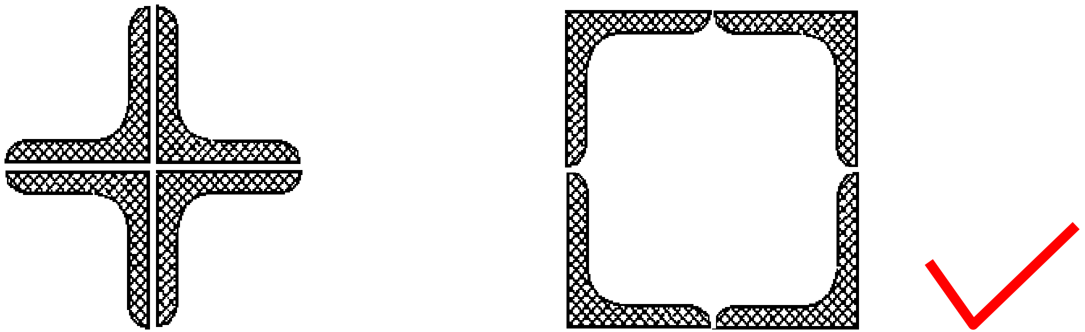
1. 增大梁的抗弯刚度 EI

(a) 增大 E

选用弹性模量E较高的材料也能提高梁的刚度。

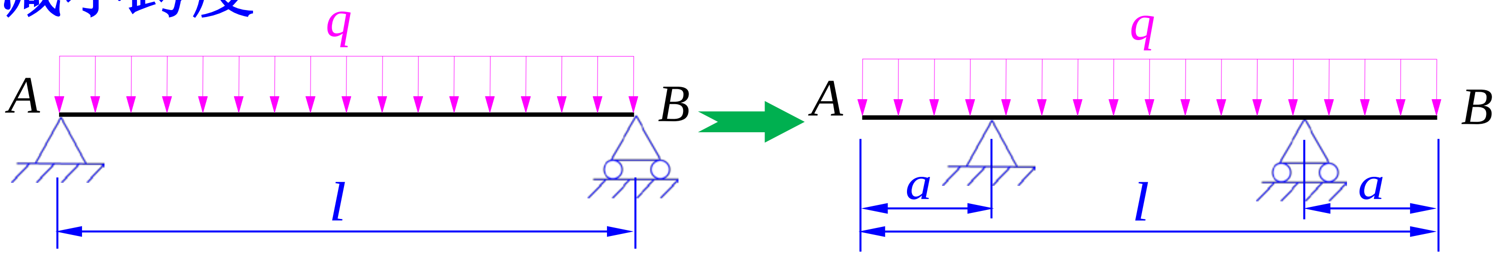
注意：对于各种钢材，弹性模量的数值相差甚微，因而与一般钢材相比，选用高强度钢材并不能提高梁的刚度。

(b) 增大 I



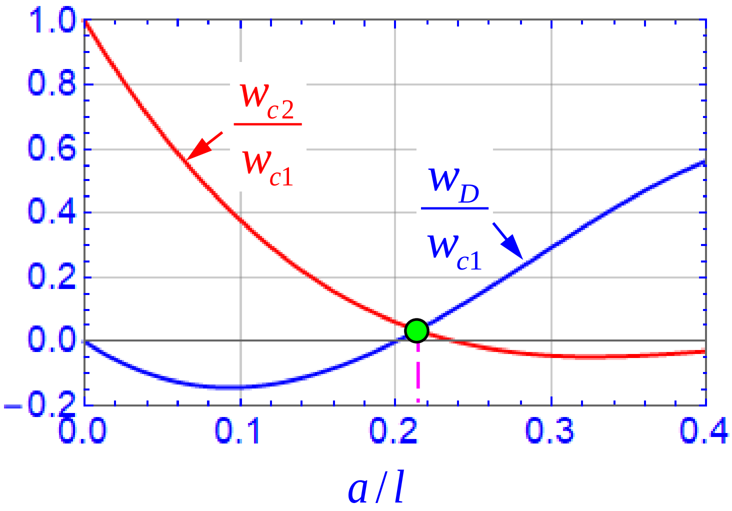
2. 减小跨度或增加支承

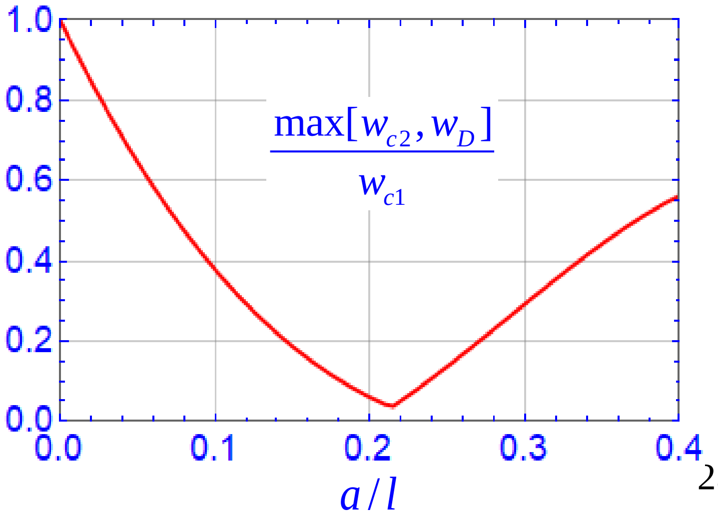
(a) 减小跨度



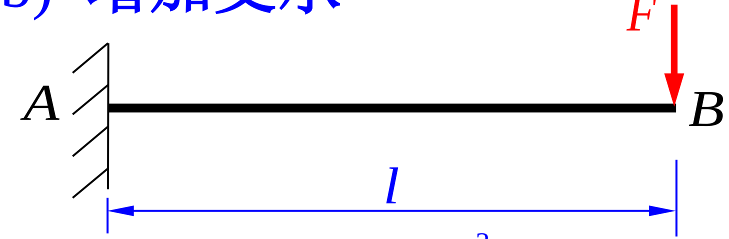
跨中的挠度 $w_{C1}=\dfrac{ql^4}{384EI}$

跨中的挠度 w_{C2}

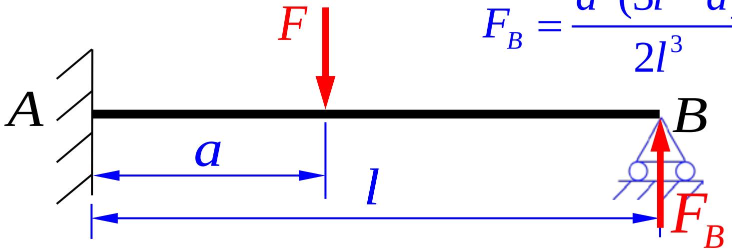




(b) 增加支承



$$w_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI}$$



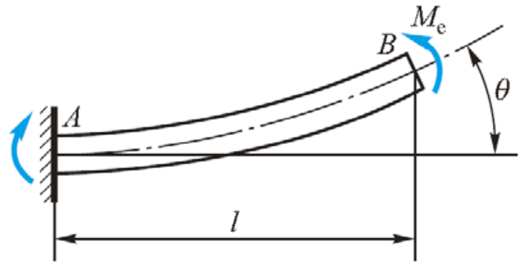
$$F_B = \frac{a^2(3l-a)}{2l^3}F$$

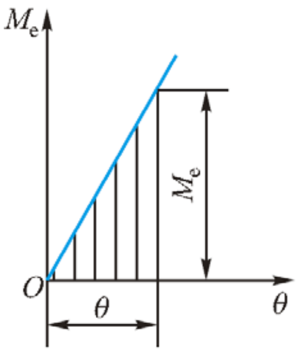
$$a = 0.5l: \quad w = 0.0273 \times \frac{Fl^3}{3EI}$$

$$a = 0.55l: \quad w_{\max} = 0.02795 \times \frac{Fl^3}{3EI}$$

§6.7 弯曲变形的应变能

悬臂梁的右端受弯曲力偶矩M_e作用，该梁发生纯弯曲变形。在线弹性范围内，M_e由零逐渐增加到最终值，B端截面的转角θ与M_e的关系是线性的。



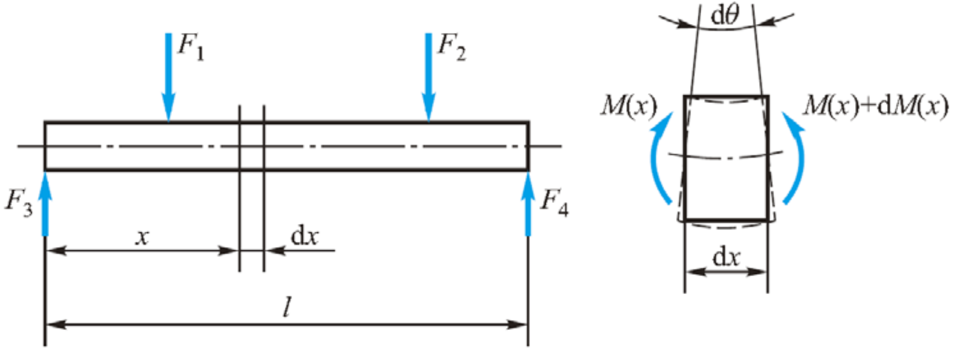


弯曲力偶矩所做的功 $W = \frac{1}{2} M_e \theta$

$$\theta = \frac{M_e l}{EI}$$

根据功能原理，纯弯曲的应变能为 $V_\varepsilon = W = \frac{1}{2} M_e \theta = \frac{M_e^2 l}{2EI}$

横力弯曲时梁横截面上同时有弯矩和剪力，且弯矩和剪力都随截面位置而变化，都是x的函数。



细长梁的情况下，对应于剪切的应变能与弯曲应变能相比，一般很小，可以不计， 所以只需要计算弯曲应变能。

梁微段的应变能为 $\mathrm{d}V_\varepsilon = \dfrac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI}$ 全梁的应变能为 $V_\varepsilon = \int_l \dfrac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$

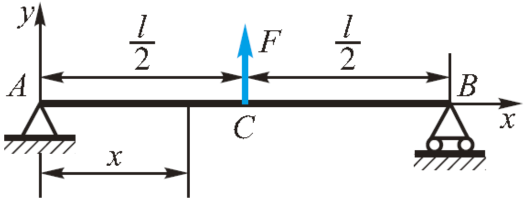
利用挠曲线的近似微分方程，应变能可以改写成

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_l EI\left[\frac{\mathrm{d}w^2(x)}{\mathrm{d}x^2}\right]^2 \mathrm{d}x$$

例6 弯曲刚度为EI的简支梁， 长度为长l， 跨度中点受向上的集中力F作用。试求梁跨度中点的挠度。

解： 梁的弯曲应变能为

$$V_{\varepsilon}=\int_{l}\frac{M^{2}(x)}{2EI}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\frac{(\frac{F}{2}x)^{2}}{2EI}\mathrm{d}x=\frac{F^{2}l^{3}}{96EI}$$



设梁跨度中点的挠度为w_C， 则外力所做的功为

$$W=\frac{1}{2}Fw_{C}$$

根据功能原理 $V_{\varepsilon}=W \longrightarrow \frac{1}{2}Fw_{C}=\frac{F^{2}l^{3}}{96EI} \longrightarrow w_{C}=\frac{Fl^{3}}{48EI}$

Thank you!

作业　P. 215：6.10(a)、6.11(c)

P. 222：6.35

对应第6版的题号 P. 209：6.10(a)、 6.11(c)；P. 216-217：6.35

下次课讲 第七章 应力和应变分析 强度理论