动量与冲量

1. 动　量

（1） 质点的动量

质点的质量 m 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的乘积 $m\boldsymbol{v}$ 称为该**质点的动量**，它是一个矢量，方向与速度一致。

（2） 质点系的动量

质点系内各质点的动量的矢量和称为该**质点系的动量**，用 $\boldsymbol{p}$ 表示有

$$\boldsymbol{p} = \sum m_i \boldsymbol{v}_i$$

质点系的动量矢量：

$$\boldsymbol{p} = \sum m_i \boldsymbol{v}_i$$

（3） 质点系动量的投影式

以 p_x、p_y 和 p_z 分别表示质点系的动量在固定直角坐标轴 x，y 和 z 上的投影，则有

$$p_x = \sum m_i v_{ix}\ ,\quad p_y = \sum m_i v_{iy}\ ,\quad p_z = \sum m_i v_{iz}$$

（4） 质点系动量计算

质点系的质心 C 的矢径 $\boldsymbol{r}_C$ 表达式可写为

$$M\boldsymbol{r}_C = \sum m_i \boldsymbol{r}_i$$

其中， M 是质点系的总质量 $M = \sum m_i$ 。将上式两端对时间求导数，即得

$$M\boldsymbol{v}_C = \sum m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{p}$$

质点系的动量等于质点系的总质量与质心速度的乘积。

投影到各坐标轴上有

$$p_x = \sum m_i v_{ix} = M v_{Cx}$$

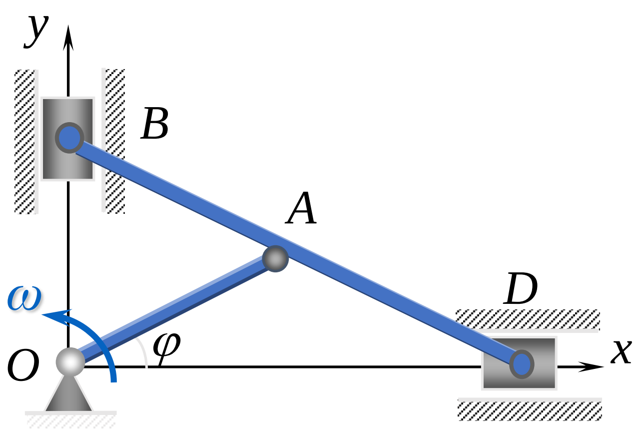
$$p_y = \sum m_i v_{iy} = M v_{Cy}$$

$$p_z = \sum m_i v_{iz} = M v_{Cz}$$

动量与冲量

求当曲柄 OA 与水平成角 φ 时**整个机构的动量**：

画椭圆的机构由均质的曲柄 OA 、规尺 BD 以及滑块 B 和 D 组成，曲柄与规尺的中点 A 铰接。已知规尺长 $2l$ ，质量是 $2m_1$ ；两滑块的质量都是 m_2 ；曲柄长 l ，质量是 m_1 ，并以角速度 ω 绕定轴 O 转动。

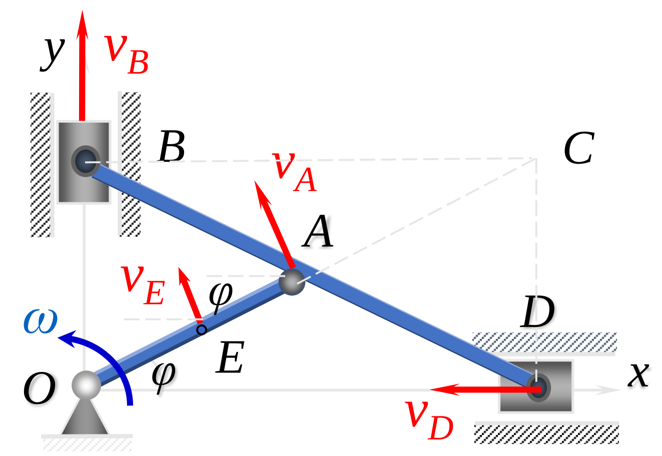


整个机构的动量等于曲柄 OA、规尺 BD、滑块 B 和 D 的动量的矢量和，即

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{OA} + \boldsymbol{p}_{BD} + \boldsymbol{p}_{B} + \boldsymbol{p}_{D}$$

解:

整个机构的动量等于曲柄OA、规尺BD、滑块B 和D的动量的矢量和，即



$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{OA} + \boldsymbol{p}_{BD} + \boldsymbol{p}_B + \boldsymbol{p}_D$$

系统的动量在坐标轴 x 上的投影为

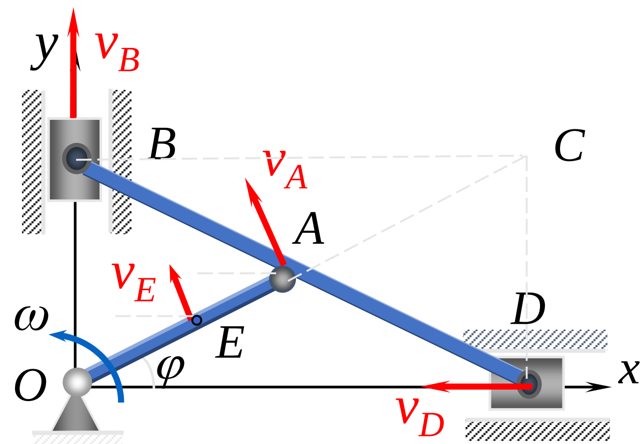
$$p_x = -m_1 v_E \sin\varphi - (2m_1)v_A \sin\varphi - m_2 v_D$$

$$= -m_1 \frac{l}{2}\omega\sin\varphi - (2m_1)l\omega\sin\varphi - m_2 2l\omega\sin\varphi$$

$$= -(\frac{5}{2}m_1 + 2m_2)l\omega\sin\varphi$$

系统的动量在 y 轴上的投影为

$$p_y = m_1 v_E \cos\varphi + (2m_1) v_A \cos\varphi + m_2 v_B$$
$$= m_1 \frac{l}{2}\omega\cos\varphi + (2m_1) l\omega\cos\varphi + m_2 2l\omega\cos\varphi$$
$$= (\frac{5}{2}m_1 + 2m_2) l\omega\cos\varphi$$



所以，系统的动量大小为

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$
$$= \frac{1}{2}(5m_1 + 4m_2) l\omega$$

方向余弦为为 $\cos(\boldsymbol{p}, x) = \dfrac{p_x}{p}$， $\cos(\boldsymbol{p}, y) = \dfrac{p_y}{p}$

动量与冲量

2. 冲　量

(1) 常力的冲量

常力与作用时间t 的乘积 Ft 称为常力的冲量。并用 I 表示，即有

$$I = Ft$$

冲量是矢量，方向与力相同。

(2) 变力的冲量

若力 F 是变力，则如下积分表示力 F 在 t 时间间隔内的冲量为

$$\mathbf{I} = \int_0^t \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$$

动量定理

1.动量定理

质点系的动量为 $\boldsymbol{p}=\sum m_i\boldsymbol{v}_i$，该式两端对时间求导，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum\frac{\mathrm{d}(m_i\boldsymbol{v}_i)}{\mathrm{d}t}=\sum m_i\boldsymbol{a}_i=\sum\boldsymbol{F}_i$$

把作用于每个质点的力$\boldsymbol{F}_i$分为内力$\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}$和外力$\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$，则得

$$\sum\boldsymbol{F}_i=\sum\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}+\sum\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

因为内力以作用力和反作用力的形式成对出现，矢量之和：

$$\sum\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}=\boldsymbol{0}$$

则有 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$ ➡ 动量对时间的导数等于合外力

动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}$$

上面的动量定理可以写成投影形式，即

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_x^{(\mathrm{e})}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_y^{(\mathrm{e})} \qquad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}=\sum F_z^{(\mathrm{e})}$$

即，质点系的动量在固定轴上的投影对时间的导数,等于该质点系的所有外力在同一轴上的投影的代数和。

动量定理

2.冲量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}$$

设在 t_1 到 t_2 过程中，质点系的动量由$\boldsymbol{p}_1$ 变为 $\boldsymbol{p}_2$ ，则对上式积分，可得

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\sum\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}\mathrm{d}t\equiv\sum \boldsymbol{I}$$

质点系的动量在一段时间内的变化量，等于作用于质点系的外力在同一段时间内的冲量的矢量和。这就是质点系动量定理的积分形式，也称为质点系的**冲量定理**。

动量定理

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\sum\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}\mathrm{d}t\equiv\sum\boldsymbol{I}$$

冲量定理方程可以投影到固定直角坐标轴系上

$$p_{2x}-p_{1x}=\sum\int_{t_1}^{t_2}F_x^{(\mathrm{e})}\mathrm{d}t=\sum I_x$$

$$p_{2y}-p_{1y}=\sum\int_{t_1}^{t_2}F_y^{(\mathrm{e})}\mathrm{d}t=\sum I_y$$

$$p_{2z}-p_{1z}=\sum\int_{t_1}^{t_2}F_z^{(\mathrm{e})}\mathrm{d}t=\sum I_z$$

即，质点系动量在某固定轴上的变化量,等于外力的冲量在同一轴上的投影的代数和。

动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

3.动量守恒定理

（1） 如果动量定理中$\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}=\mathbf{0}$，则有

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0=\text{常矢量}$$

其中： p_0 为质点系初始瞬时的动量 。

在运动过程中,如作用于质点系的**合外力始终等于零**，则质点系的动量保持不变，这就是质点系的**动量守恒定理。**

动量定理

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_x^{(e)},\quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_y^{(e)},\quad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}=\sum F_z^{(e)}$$

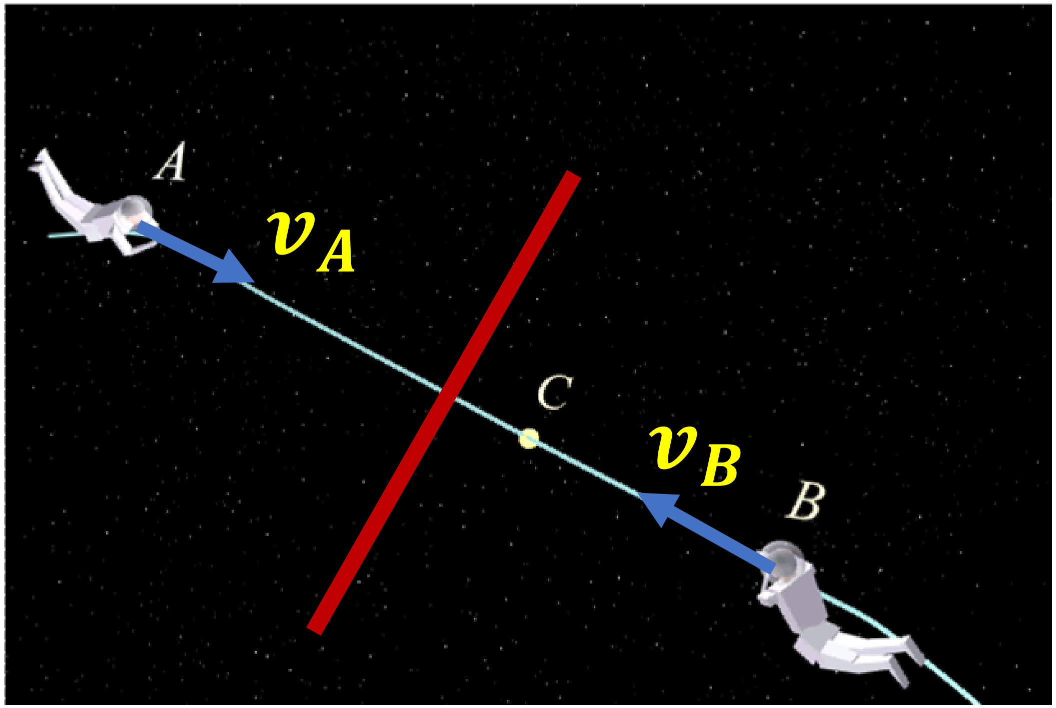
如果在上式中$\sum F_x^{(e)}\equiv 0$，则有

$$p_x=p_{0x}=\text{常 量}$$

其中： p_{0x} 为质点系初始瞬时的动量 在x轴上的投影。

在运动过程中,如作用于质点系的所有外力在某一轴上的投影的代数和始终等于零，则质点系的动量在该轴上的投影保持不变。

实例分析：太 空 拔 河



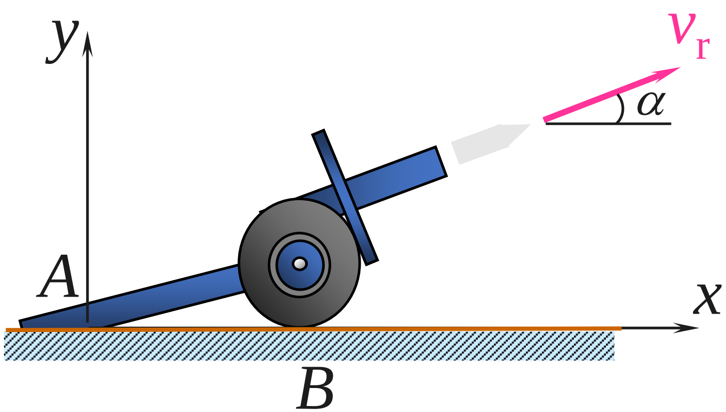
宇航员在太空拔河，开始静止。若A的力气大于B的力气，谁胜谁负?

太空中，宇航员受力近似为零

动量守恒：　$p_{AB}=m_Av_A-m_Bv_B=0$

$$m_Av_A=m_Bv_B$$

例题：火炮（包括炮车与炮筒）的质量是 m_1，炮弹的质量是 m_2，炮弹相对炮车的发射速度是 v_r，炮筒对水平面的仰角是 α。设火炮放在光滑水平面上，试求火炮的后坐速度和炮弹的发射速度。



(a)

解:

取火炮和炮弹（包括炸药）这个系统作为研究对象。

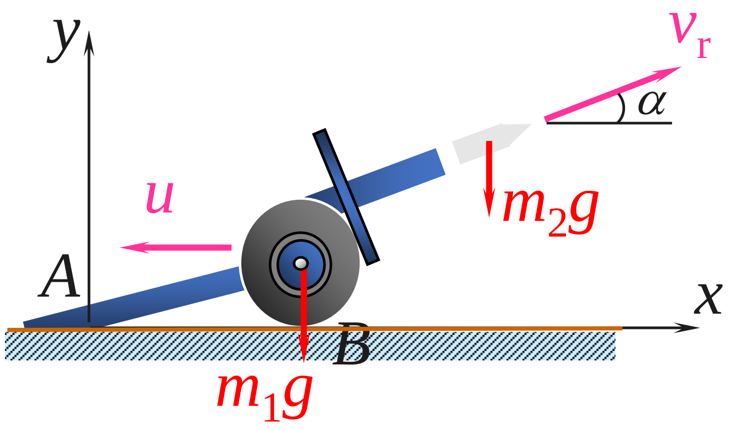
设火炮的反座速度是 $\boldsymbol{u}$，炮弹的发射速度是 $\boldsymbol{v}$，则有

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

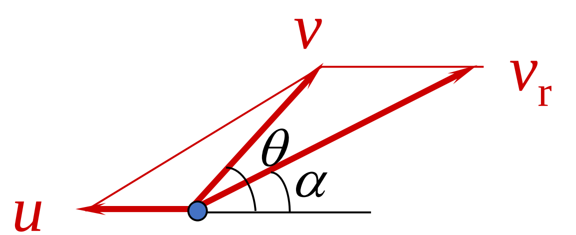
在x轴上投影

$$v_x = -u + v_{\mathrm{r}} \cos \alpha$$

作用在系统上的外力在水平轴 x 的投影都是零，即有$\sum F_{ix} = 0$。



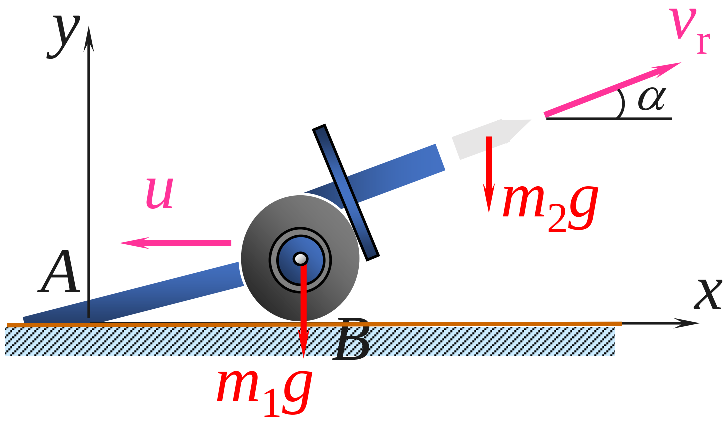
(a)



(b)

速度在x轴上投影

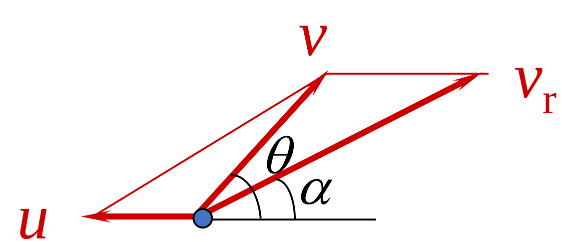
$$v_x = -u + v_r \cos \alpha$$



作用在系统上的外力在水平轴 x 的投影都是零，即有$\sum F_{ix} = 0$

x轴方向动量守恒：

$$p_x = p_x^0 = 0$$

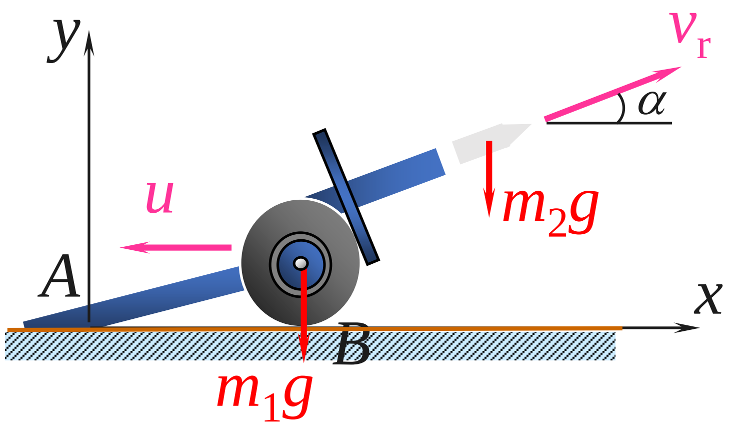


$$p_x = m_2 v_x - m_1 u =$$

$$m_2 (-u + v_r \cos \alpha) - m_1 u = 0$$

解得火炮的后坐速度：$u = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v_r \cos \alpha$

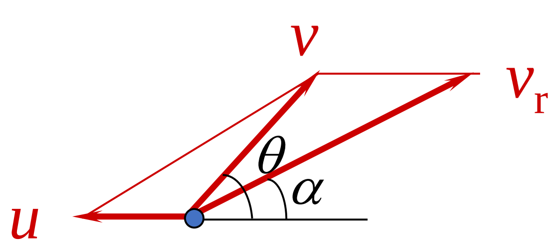
炮弹速度矢量 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$



炮弹速度在x轴上投影

$$v_x = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{\mathrm{r}} \cos \alpha$$

炮弹速度在y轴上投影



$$v_y = v_{\mathrm{r}} \sin \alpha$$

质心运动定理

1.质心运动定理

质点系动量可以表达为 $\boldsymbol{p}=\sum m_i \boldsymbol{v}_i = M\boldsymbol{v}_C$

把上式带入动量定理 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$

得到 $M\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}=M\boldsymbol{a}_C=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$

其中， a_C质心的加速度。

质点系的总质量与其质心加速度的乘积,等于所有外力的矢量和, 这就是**质心运动定理**。

质心运动定理

投影表达式

质心运动定理表达式可以投影到固定直角坐标轴系上，得到沿着各个坐标轴的分量表达式：

$$\boxed{\begin{aligned} M\frac{\mathrm{d}^2 x_C}{\mathrm{d}t^2} &= \sum F_x^{(\mathrm{e})} \\ M\frac{\mathrm{d}^2 y_C}{\mathrm{d}t^2} &= \sum F_y^{(\mathrm{e})} \\ M\frac{\mathrm{d}^2 z_C}{\mathrm{d}t^2} &= \sum F_z^{(\mathrm{e})} \end{aligned}}$$

质心运动定理

刚体系统质心运动定理表达式

如果刚体系统由 N 个部分构成，则各个部分的质量与其质心的加速度的乘积的矢量和，等于该刚体系统所受外力的矢量和

$$\sum_{j=1}^{N} M_j \boldsymbol{a}_{Cj} = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

质心运动定理

质心运动定理 $$M\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

质心运动守恒定理

如果$\sum F_i^{(e)} \equiv 0$，则 $a_C = 0$，从而质心速度恒定

$$\boldsymbol{v}_C = 常矢量$$

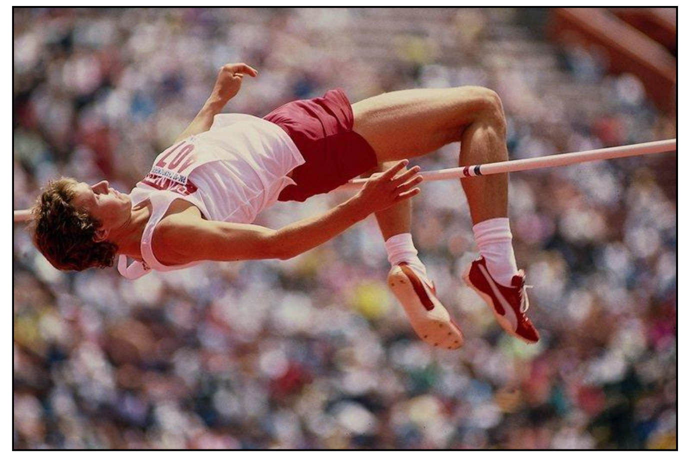
如果在初瞬时质心处于静止，则$\boldsymbol{v}_C = 0$，质心将停留在原处，即$\boldsymbol{x}_C = \boldsymbol{x}_C(\boldsymbol{t=0})$

质心运动定理

用质心运动定理来分析跳高姿势？

$$Ma_C = \sum F^{(e)}$$

(1)运动员起跳后, 身体的质心作抛物线运动。



(2)不管手脚如何运动，各关节力及肌肉力均为内力,不影响质心的运动。

(3)虽然采用不同的姿势对质心运动没有影响，但采用各种姿势过杆时，质心相对于身体处于不同位置。

质心运动定理

跨越式——采用这种方式过杆时，人体质心大约在腹部,而横杆在双腿的下方。质心大约在杆上方30 cm处过杆。

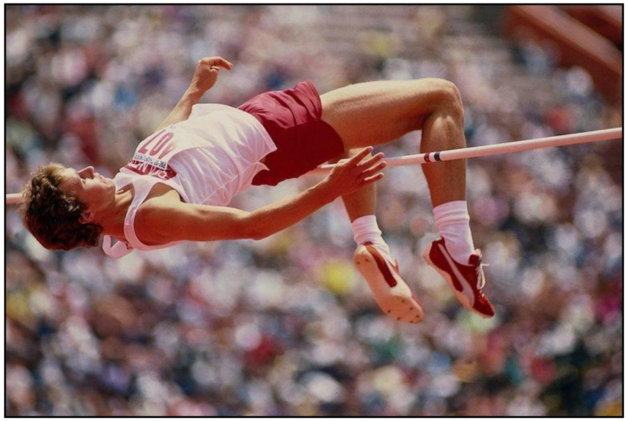
俯卧式——人体质心大约在腹部，而横杆在身体的下方,此时人体与杆平行，质心大约在杆上方10 cm处过杆。

跨越式

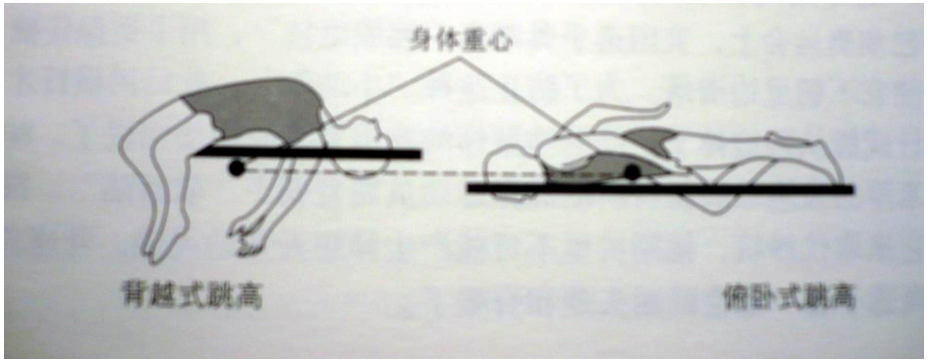
俯卧式

质心运动定理

背越式——人体质心不在身体的内部！质心的位置依身体的弯曲程度而定,至少可在背部下方10 cm，此时有可能质心从横杆下方通过。



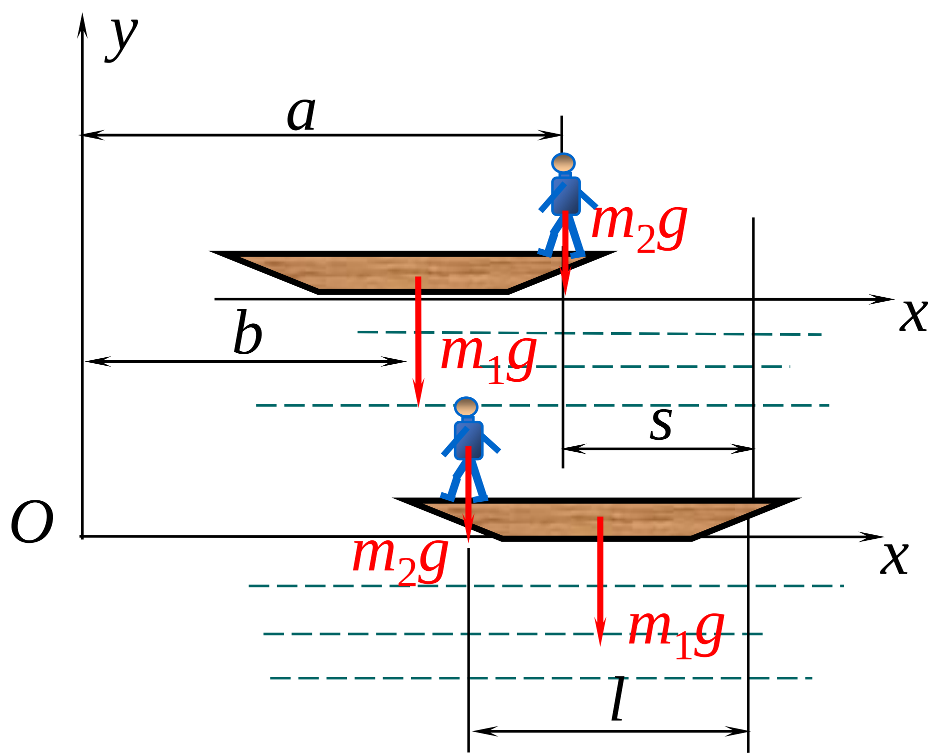
背越式



采用背越式姿势,身体弯曲得越厉害,质心距腰部越远,过杆的高度越高。

质心运动定理

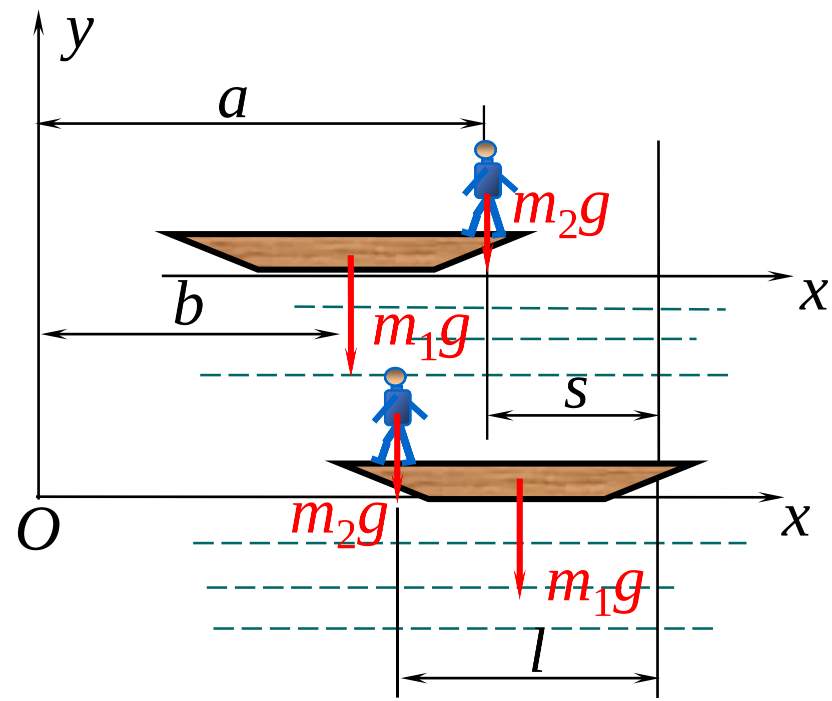
例题　如图所示，在静止的小船上，一人自船头走到船尾，设人质量为m_2，船的质量为m_1，船长l，水的阻力不计。试求船的位移。



解：取人与船组成质点系。

因不计水的阻力，故外力在水平轴上的投影之和等于零，即$\sum F_x \equiv 0$。则有系统质心的速度恒定

$$\dot{x}_C = \dot{x}_{C0} = \text{常量}$$



系统初瞬时静止，因此质心在水平轴上位置保持不变。即有

$$x_C = x_{C0} = \text{常量}$$

取坐标轴如图所示。在人走动前，系统的质心坐标为

$$x_{C0} = \frac{m_2 a + m_1 b}{m_2 + m_1}$$

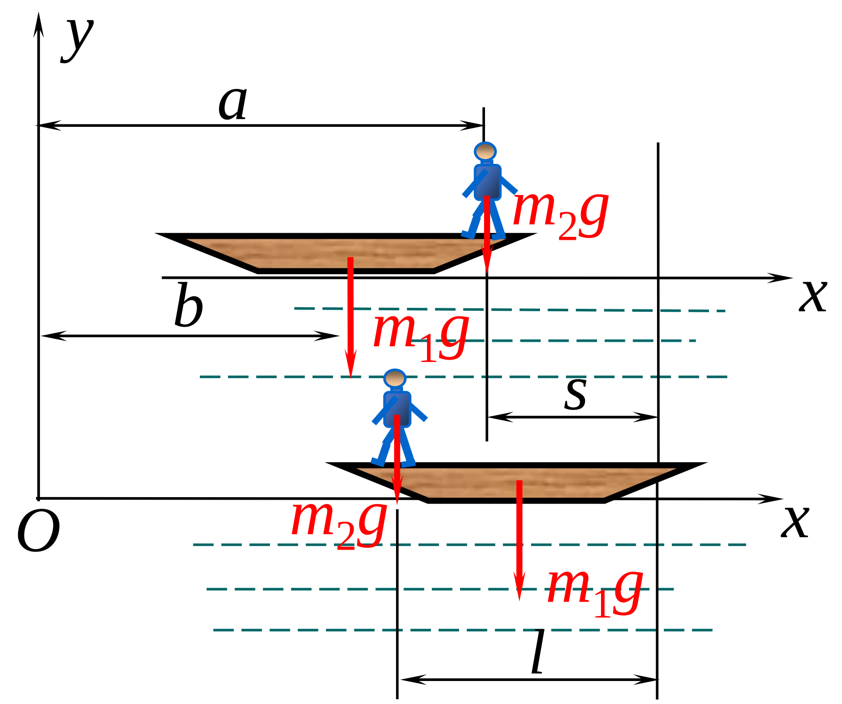
人走到船尾时，船移动的距离为s，则质心的坐标为

$$x_C = \frac{m_2(a+s-l)+m_1(b+s)}{m_2+m_1}$$

质心位置不变 $x_C = x_{C0}$

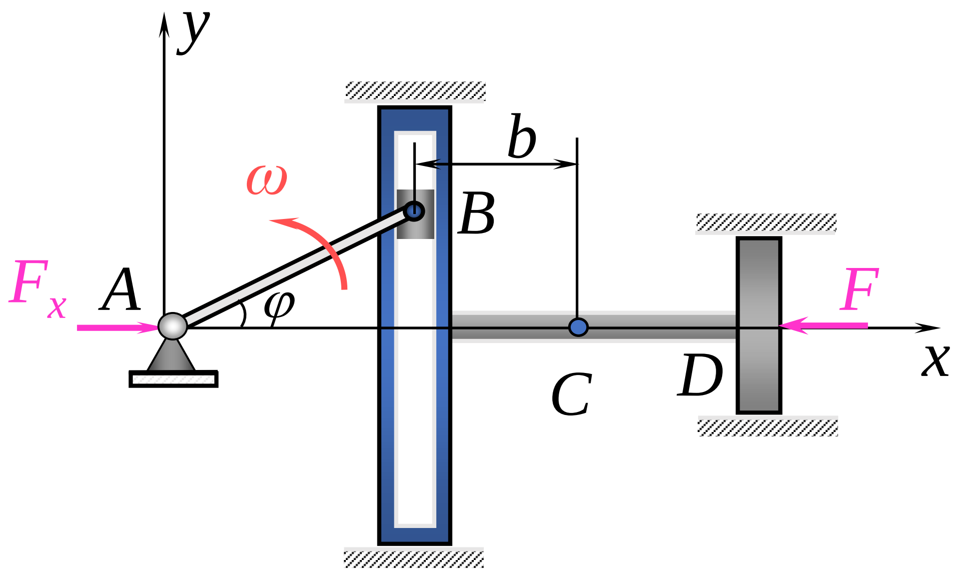
可以求得小船移动的位移

$$s = \frac{m_2 l}{m_2 + m_1}$$

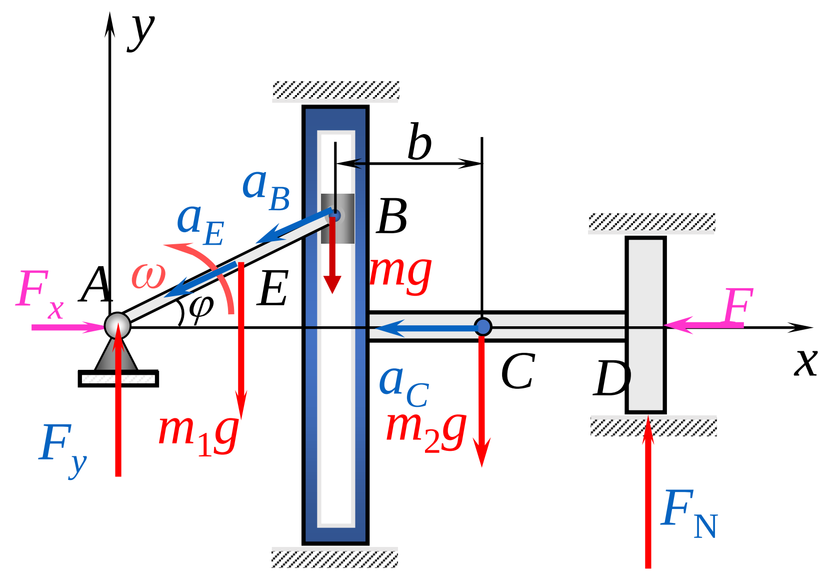


§11-3 质心运动定理

例题 均质曲柄AB长r，质量为m_1，假设受力偶作用以不变的角速度ω转动，并带动滑槽连杆以及与它固连的活塞D，如图所示。滑槽、连杆、活塞总质量为m_2，质心在点C。在活塞上作用一恒力F。滑块B质量为m，不计摩擦，试求作用在曲柄轴A处的水平反力F_x。



解：选取整个系统为研究对象。



刚体系统质心运动定理

$$\sum_{j=1}^{N} M_j \boldsymbol{a}_{Cj} = \sum \boldsymbol{F}^{(e)}$$

在x轴上的投影为

$$-m_1 a_E \cos\varphi - m a_B \cos\varphi - m_2 a_C = F_x - F$$

带入加速度： $$-m_1 \frac{r}{2}\omega^2 \cos\varphi - m r\omega^2 \cos\varphi - m_2 r\omega^2 \cos\varphi = F_x - F$$

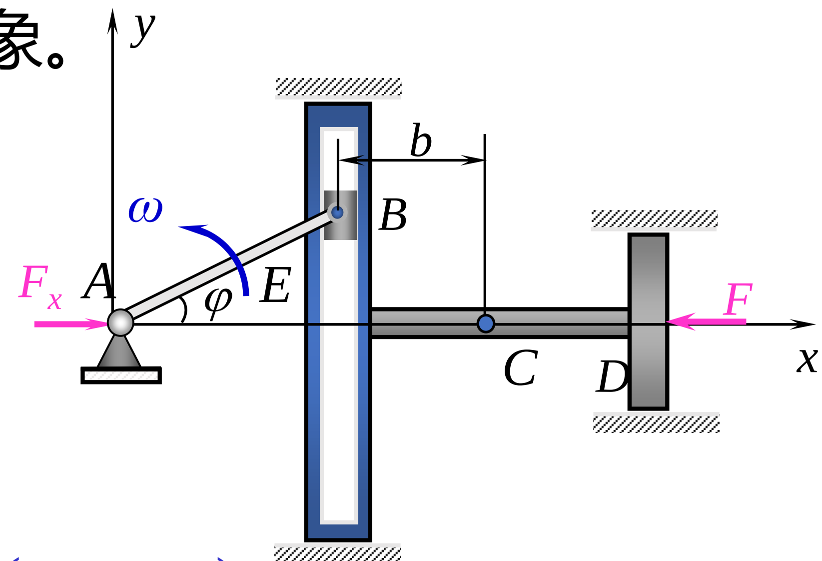
求得作用在曲柄轴A处的水平反力

$$F_x = F - (\frac{1}{2}m_1 + m + m_2) r\omega^2 \cos\varphi$$

§11-3 质心运动定理

思考题　**如何求作用在曲柄轴A处的竖直反力?**

解：选取杆AB和滑块B为研究对象。

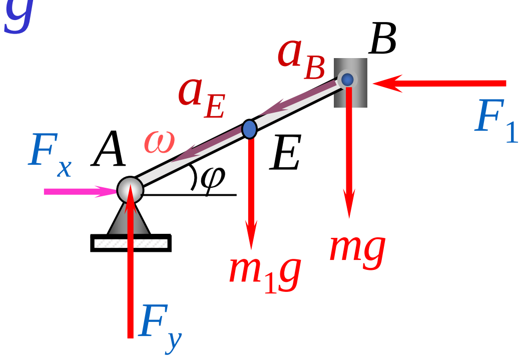


由刚体系质心运动定理

$$m_1 \boldsymbol{a}_E + m \boldsymbol{a}_B = \sum F_i^{(e)}$$

沿着y轴投影得

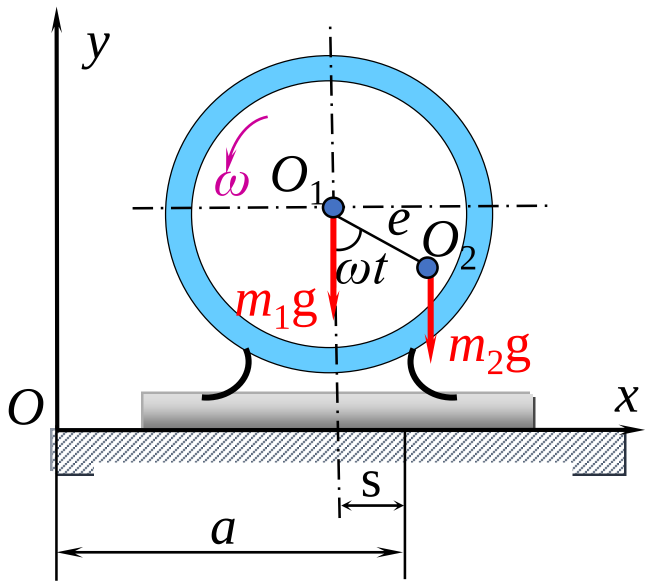
$$-m_1 a_E \sin\varphi - m a_B \sin\varphi = F_y - (m_1 + m_2) g$$



求得作用在曲柄轴A处的竖直反力

$$F_y = (m_1 + m) g - \left(\frac{1}{2} m_1 + m\right) r\omega^2 \sin\varphi$$

例题 电动机的外壳放在光滑水平面上，定子的质量是 m_1，转子的质量是 m_2，转子的轴线通过定子的质心 O_1。制造和安装的误差，使转子的质心 O_2对它的轴线有一个很小的偏心距 e（图中有意夸张）。各处摩擦不计，初始时电动机静止。试求：（1） 转子以匀角速ω 转动时电动机外壳在水平方向的运动方程；（2）机座的铅直反力。



（1）电动机外壳在水平方向的运动方程

设电动机的水平位移为s。由于电动机不固定，且不计摩擦，故外力在水平轴上的投影之和等于零，即$\sum F_x \equiv 0$。则有

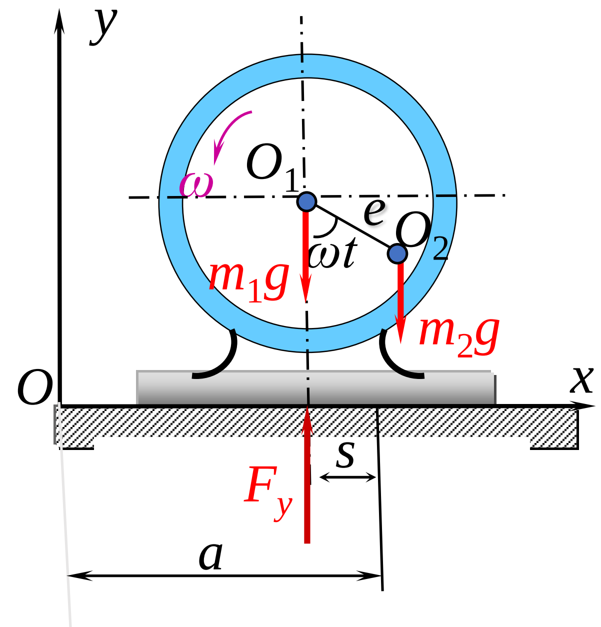
$$\dot{x}_C = \dot{x}_{C0} = 常量$$

又因系统初瞬时静止，因此质心在水平轴上保持不变，即有

$$x_C = x_{C0} = 常量$$

已知 $x_{C0} = a$，得

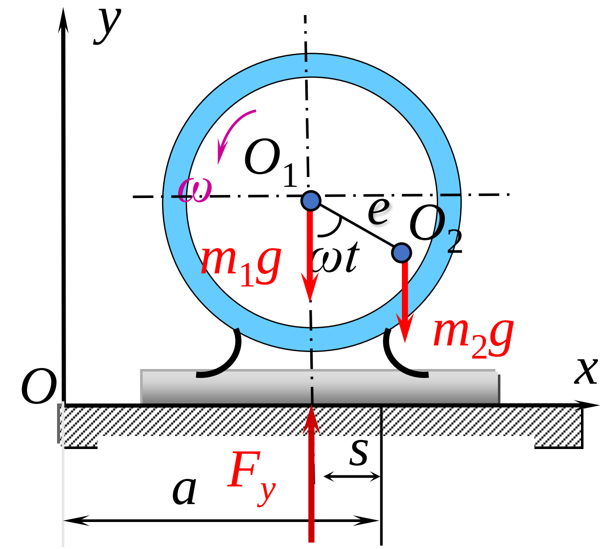
$$x_C = \frac{m_1(a-s) + m_2(a - s + e\sin\omega t)}{m_1 + m_2}$$



$$x_{C0} = a$$

$$x_C = \frac{m_1(a-s) + m_2(a-s+e\sin\omega t)}{m_1+m_2}$$

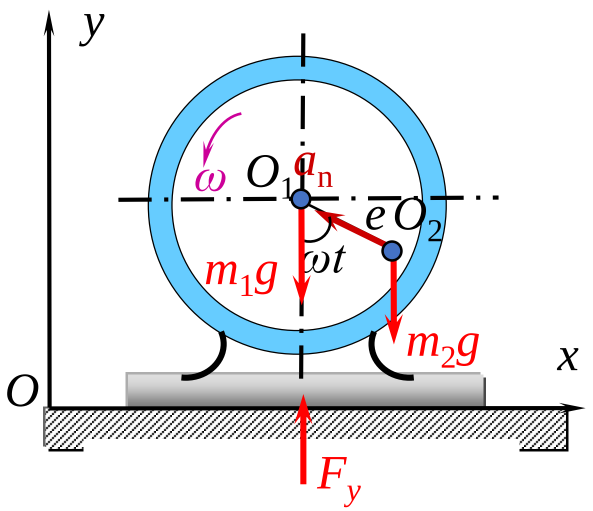
由$x_C = x_{C0}$解得电动机外壳在水平方向的运动方程：



$$s = \frac{m_2}{m_1+m_2} e\sin\omega t$$

由此可见，当转子偏心的电动机未用螺栓固定时，将在水平面上作往复运动。

（2）机座的铅直反力



由刚体系质心运动定理有

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

沿铅直方向（y轴）投影，得到

$$m_2 a_n \cos\omega t = F_y - m_1 g - m_2 g$$

即 $$m_2 e\omega^2 \cos\omega t = F_y - m_1 g - m_2 g$$

因此求得机座的铅直反力

$$F_y = m_1 g + m_2 g + m_2 e\omega^2 \cos\omega t$$

作业

习题10-6, 10-10, 10-15