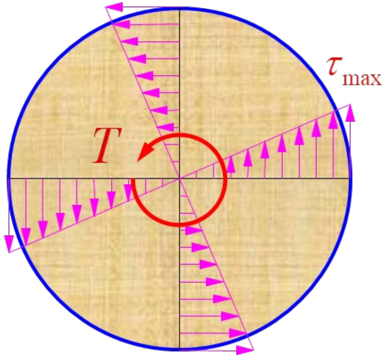
第三章　扭转（二）

第 9 讲

§ 3.4 圆轴扭转时的应力

一、横截面上的切应力

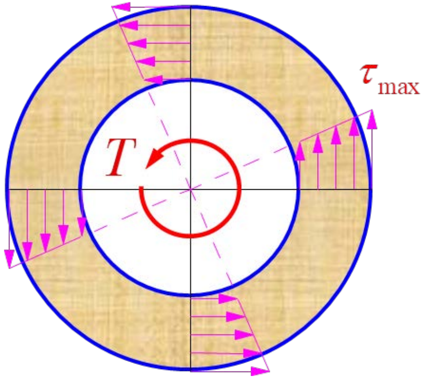
$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p} \quad ① \qquad \tau_{max} = \frac{T\rho_{max}}{I_p} = \frac{T}{W_p} \qquad W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}}$$ 抗扭截面系数



实心圆截面（直径为d）：$I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$， $W_p = \dfrac{\pi d^3}{16}$

空心圆截面（外直径为D、内直径为d 的）：$I_p = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \dfrac{\pi D^4(1-\alpha^4)}{32}$

$$W_p = \frac{\pi D^3(1-\alpha^4)}{16} \qquad \alpha = \frac{d}{D}$$



$$\tau_{薄壁} = \frac{T}{2\pi r_0^2\delta} \quad ② \qquad \delta \le \frac{r_0}{10}$$ 与精确解的误差 $< 5\%$

例1 在材料相同的条件下，用d/D=0.5的空心圆轴取代实心圆轴，所需要的材料之比为多少？

0.8

解：设实心轴的直径为 $d_{实}$，空心轴的 外直径为D，由题意知：

$$\tau_{\max,实} = \tau_{\max,空}$$

$$\frac{T}{\frac{\pi d_{实}^{3}}{16}} = \frac{T}{\frac{\pi D^{3}}{16}(1-0.5^{4})}$$

0.8

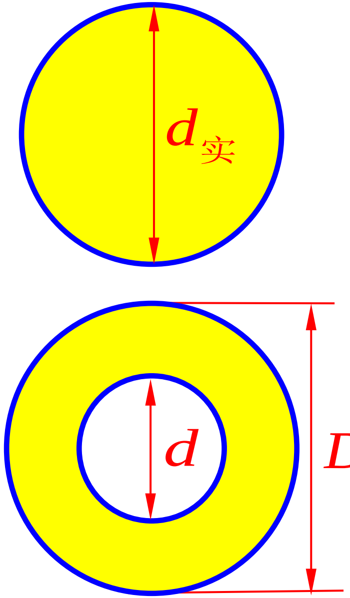
得：$\dfrac{D}{d_{实}} = 1.022$

1.192

0.8

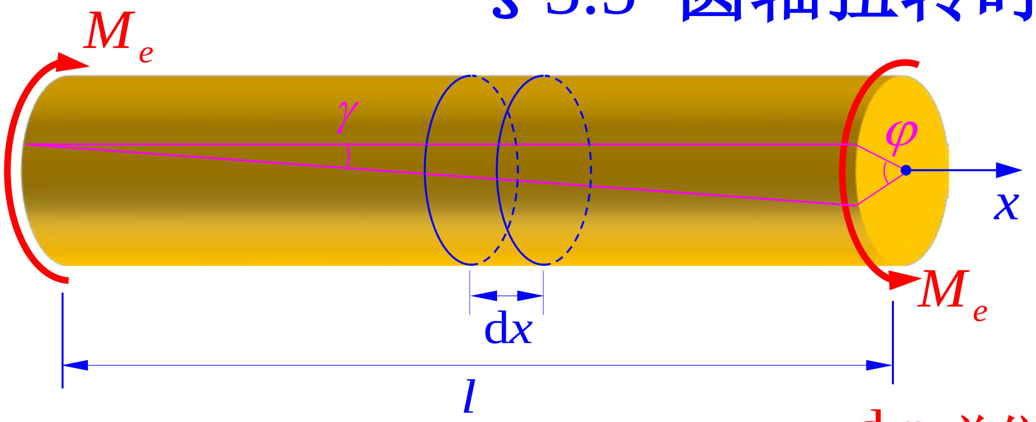
$$\frac{A_{空}}{A_{实}} = \frac{\frac{\pi}{4}(D^{2}-d^{2})}{\frac{\pi d_{实}^{2}}{4}} = \frac{\frac{\pi D^{2}}{4}(1-0.5^{2})}{\frac{\pi d_{实}^{2}}{4}} = 0.783$$

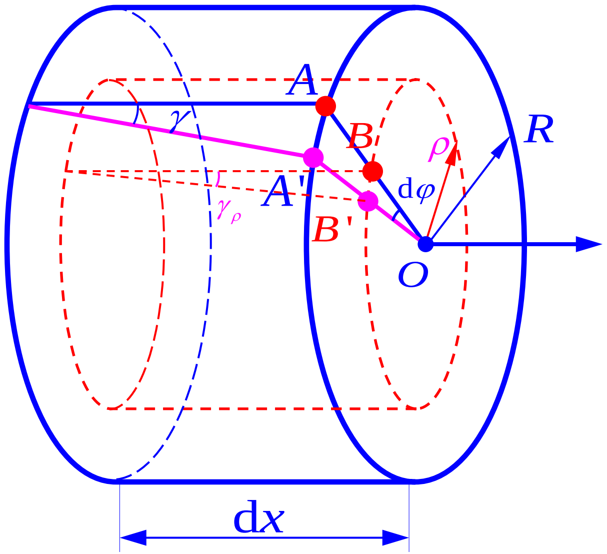
0.512



工程中大多使用空心圆轴，可显著节省材料！

§ 3.5 圆轴扭转时的变形





几何关系 $\gamma_\rho dx = \rho d\varphi \Rightarrow \gamma_\rho = \rho \dfrac{d\varphi}{dx}$ 单位长度扭转角

物理关系 $\tau_\rho = G\gamma_\rho \Rightarrow \tau_\rho = G\rho \dfrac{d\varphi}{dx}$

静力关系 $\int_A \rho \cdot \tau_\rho dA = T \Rightarrow G\dfrac{d\varphi}{dx}\int_A \rho^2 dA = T \Rightarrow GI_p \dfrac{d\varphi}{dx} = T$

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}}$$

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$$

若车床丝杆扭转角过大，会影响车刀进给，降低加工精度；镗床的主轴或磨床的传动轴若扭转角过大，将引起扭转振动，影响工件的精度和光洁度。

圆轴扭转时的刚度条件：

$$\varphi' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{T}{GI_{\mathrm{p}}} \le [\varphi'] \qquad \mathrm{rad/m}$$

$$\varphi' = \frac{T}{GI_{\mathrm{p}}} \times \frac{180}{\pi} \le [\varphi'] \qquad {}^{\circ}/\mathrm{m}$$

$[\varphi']$ 可从有关规范和手册中查到，常取在0.15–0.3（°/m）

对于一般的传动轴可放宽到2°/m左右

对于大多数的机床，刚度是主要问题。因此，用刚度作为控制因素的轴是比较普遍的。

两截面间的相对扭转角

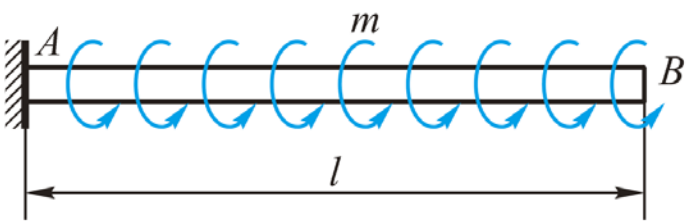
$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T}{GI_{\mathrm{p}}}$$

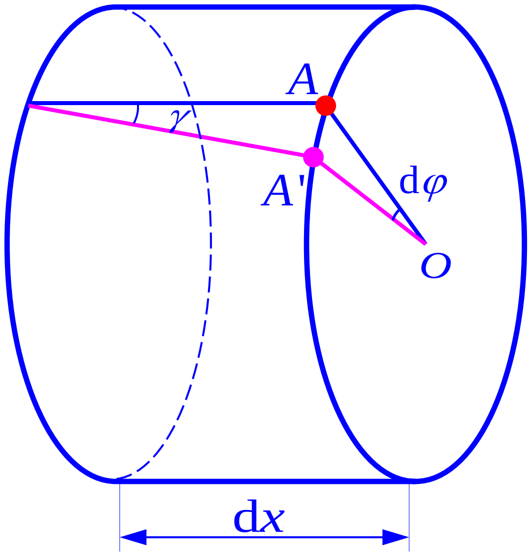
$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T(x)}{G(x)I_{\mathrm{p}}(x)}$$ （非均匀扭转变形）

$$\varphi=\int_l\frac{T(x)}{G(x)I_{\mathrm{p}}(x)}\mathrm{d}x$$

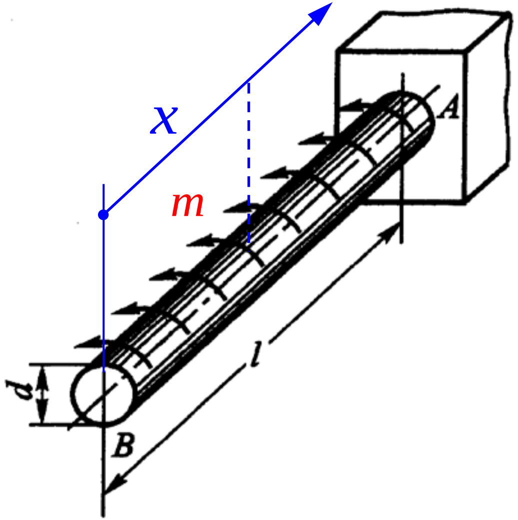
若T,G,I_p均为常数，$\varphi=\dfrac{Tl}{GI_{\mathrm{p}}}$ 抗扭刚度

拉压杆的伸长：$\Delta l=\dfrac{F_{\mathrm{N}}l}{EA}$ 抗拉刚度





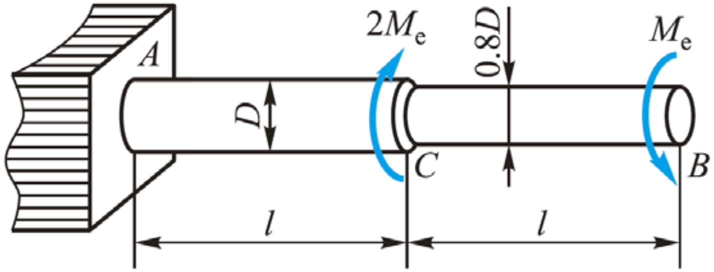
例2　已知杆件的直径为d，材料的切变模量为G。受均布力偶矩m作用。求图示杆件截面B相对于截面A的扭转角。



解：
$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T}{GI_{\mathrm{p}}},\qquad T(x)=m\cdot x$$

$$\varphi_{BA}=\int_0^l\frac{T(x)}{GI_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}x$$

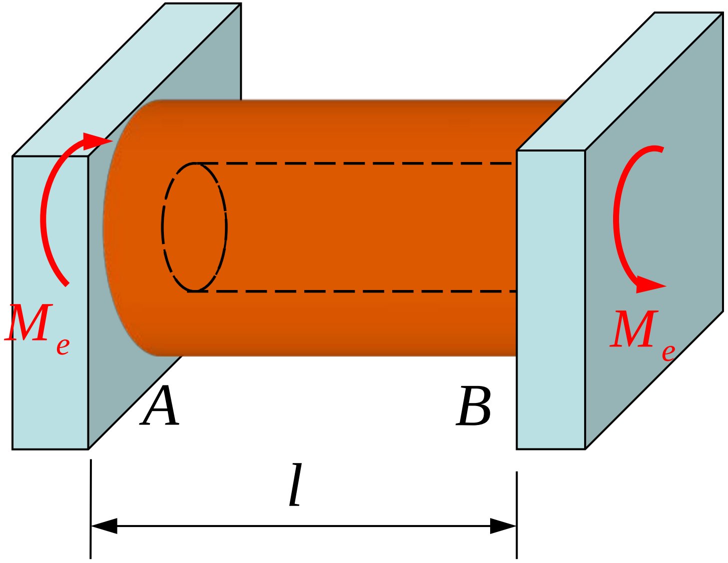
$$\varphi_{BA}=\frac{1}{G\frac{\pi}{32}d^4}\int_0^l mx\mathrm{d}x=\frac{16ml^2}{G\pi d^4}$$

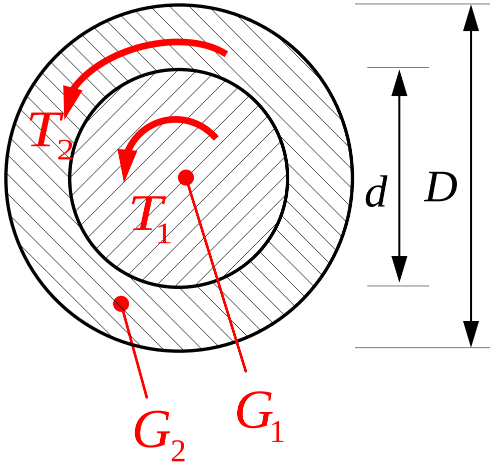


$$\varphi_{BA}=\varphi_{BC}+\varphi_{CA}=\frac{T_{BC}l_{BC}}{GI_{\mathrm{p},BC}}+\frac{T_{CA}l_{CA}}{GI_{\mathrm{p},CA}}$$

$$=\frac{M_{\mathrm{e}}l}{G\frac{\pi}{32}(\frac{4}{5}D)^4}+\frac{-M_{\mathrm{e}}l}{G\frac{\pi}{32}(D)^4}=\frac{369M_{\mathrm{e}}l}{8\pi GD^4}$$

例3　由不同材料的实心圆截面杆和空心圆截面杆粘结在一起的组合杆，长度均为 l，其切变模量分别为G_1和G_2。当组合杆的两端面各自固结于刚性板上，并在刚性板上作用一对外偶矩M_e，试求分别作用于内外杆上的扭矩。





分析：

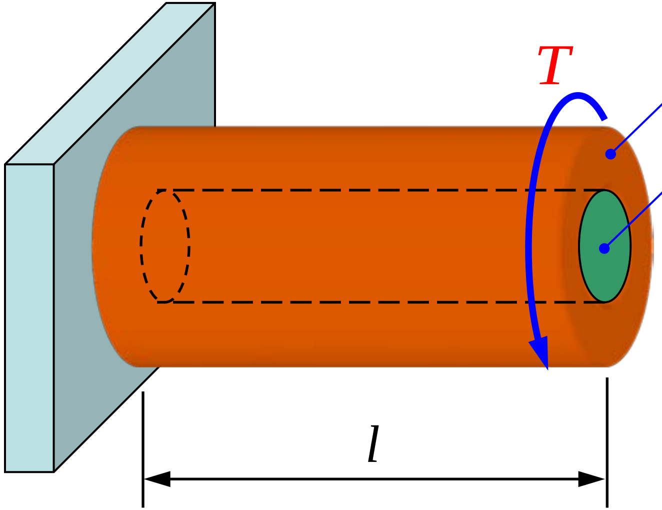
设内轴与外管承受的扭矩分别为T_1和T_2，

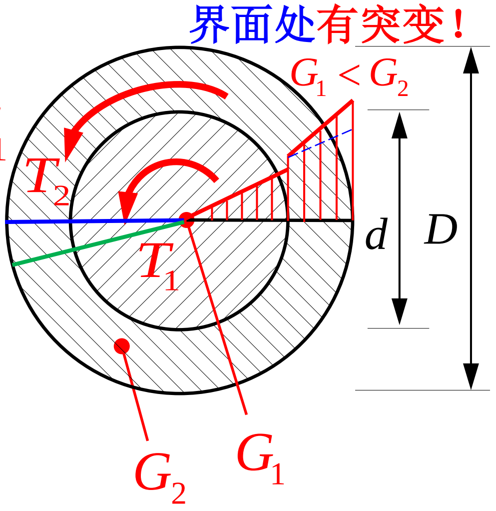
$$T_1 + T_2 = M_e$$

扭转超静定问题

一次超静定

解：设内轴与外管承受的扭矩分别为T_1和T_2，





$T_1 + T_2 = T$，　$T = M_e$

变形协调方程：

平面假设仍成立

变形后外管与内轴两端截面的相对扭转角应相等，即

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\frac{T_1\, l}{G_1 I_{p内}} = \frac{T_2\, l}{G_2\, I_{p外}}$$

$$I_{p内} = \frac{1}{32}\pi d^4$$

$$I_{p外} = \frac{1}{32}\pi(D^4 - d^4)$$

$$T_1 = \frac{G_1 I_{p内}}{G_1 I_{p内} + G_2\, I_{p外}} T$$

$$T_2 = \frac{G_2\, I_{p外}}{G_1 I_{p内} + G_2\, I_{p外}} T$$

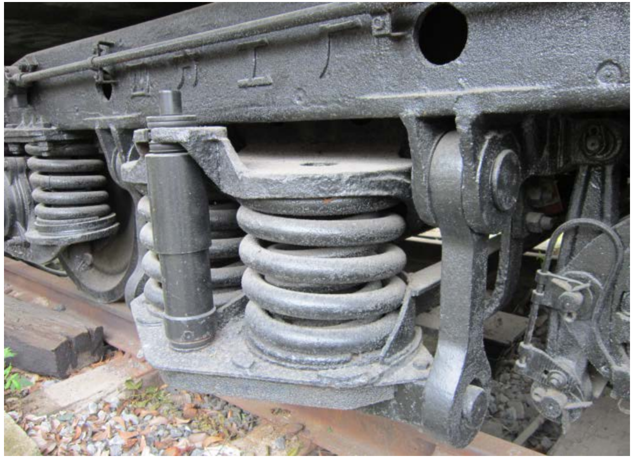
进而可以算得复合轴横截面上的切应力！

切应力的分布特征？

§ 3.6 圆柱螺旋弹簧的应力和变形

圆柱螺旋弹簧在工程中应用极广。它可用于缓冲减振，如火车和汽车轮轴的支承弹簧。又可用于控制机械运动，如凸轮机构的压紧弹簧、内燃机的气阀弹簧等。也可用于测量力的大小，如弹簧秤中的弹簧。

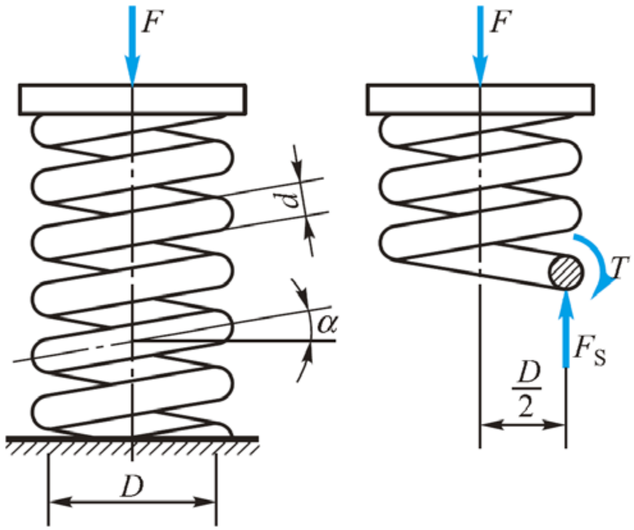
圆柱螺旋弹簧簧丝的轴线是一条空间螺旋线。



一、弹簧丝横截面上的应力

受轴向压力(拉力) F 作用时，若圆柱螺旋弹簧的螺旋角 $\alpha < 5^\circ$ 时，近似地认为弹簧丝横截面与弹簧轴线（亦即与力 F ）在同一平面内。一般将这种弹簧称为密圈螺旋弹簧。

当弹簧丝横截面的直径 d 远小于弹簧中径，即弹簧圈的平均直径 D 时，可以略去弹簧丝曲率的影响，近似地用直圆杆公式计算。



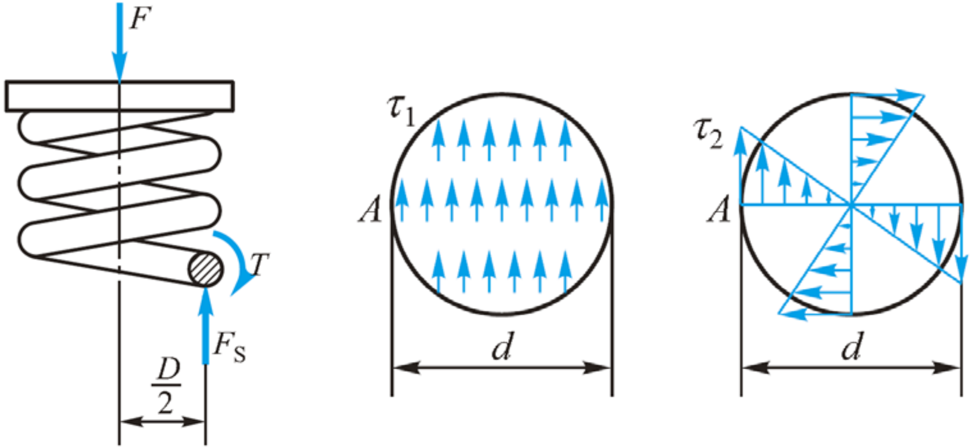
弹簧中径

以弹簧丝的任意横截面取出上面部分作为研究对象，根据平衡方程

剪力 $F_S = F$ ； 扭矩 $T = F\dfrac{D}{2}$

$$\tau_1 = \frac{F_S}{A} = \frac{F_S}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{4F_S}{\pi d^2}$$

$$\tau_{2\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{F\frac{D}{2}}{\frac{\pi}{16}d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3}$$



弹簧丝横截面上任意点的总应力，应是剪切和扭转两种切应力的矢量和。在靠近轴线的内侧点A处， τ_1和$\tau_{2\max}$方向一致，总应力达到最大值，

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_{2\max} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8FD}{\pi d^3}$$

用直杆的扭转公式计算应力，没有考虑弹簧丝实际上是一个曲杆，在 D/d 较小时，会引起较大的误差。此外，认为剪切引起的切应力 τ_1 “均匀分布”于截面上，也是一个假定。

在考虑了弹簧丝曲率和 τ_1 并非均匀分布等两个因素后，最大切应力的修正公式为

$$\tau_{\max} = \left(\frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c}\right)\frac{8FD}{\pi d^3} = k\frac{8FD}{\pi d^3} \qquad c = \frac{D}{d}, \quad k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c}$$

c称为弹簧指数，k称为曲度系数

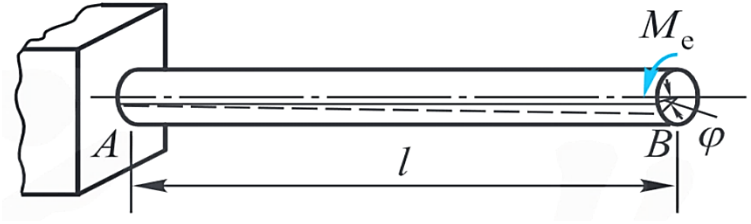
螺旋弹簧的曲度系数k

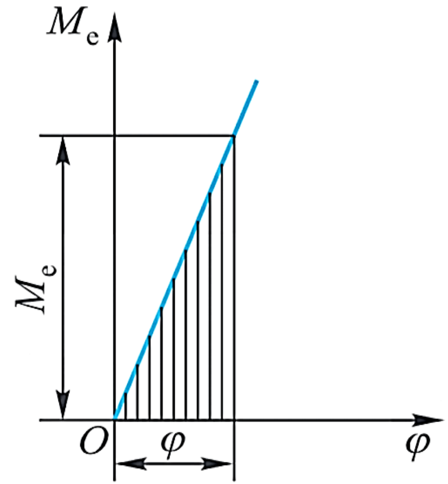
c	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	12	14
k	1.40	1.35	1.31	1.28	1.25	1.23	1.21	1.20	1.18	1.17	1.16	1.15	1.14	1.12	1.10

c 越小，k 越大！

二、弹簧的变形

1. 圆轴扭转时的应变能





$$W=\frac{1}{2}M_e\varphi \qquad \varphi=\frac{M_e l}{GI_p}$$

$$W=\frac{M_e^2 l}{2GI_p} \xleftrightarrow{M_e=T} V_\varepsilon=\frac{T^2 l}{2GI_p} \longleftrightarrow V_\varepsilon=\frac{GI_p}{2l}\varphi^2$$

功能原理

$$W=V_\varepsilon$$

扭转情形应变能计算： $V_\varepsilon = \iiint_V v_\varepsilon \mathrm{d}V \qquad v_\varepsilon = \dfrac{1}{2}\tau\gamma$

$$V_\varepsilon = \iiint_V \tfrac{1}{2}\tau\gamma \mathrm{d}V = \iiint_V \tfrac{1}{2G}\tau^2 \mathrm{d}V = \iiint_V \tfrac{1}{2G}\left(\tfrac{T\rho}{I_P}\right)^2 \mathrm{d}V$$

$$\Rightarrow V_\varepsilon = \int_l \iint_A \frac{1}{2G}\frac{T^2}{I_\mathrm{p}^2}\rho^2 \mathrm{d}A\mathrm{d}l = \int_l \frac{1}{2G}\frac{T^2}{I_\mathrm{p}^2}\left(\iint_A \rho^2 \mathrm{d}A\right)\mathrm{d}l = \int_l \frac{1}{2G}\frac{T^2}{I_\mathrm{p}^2} I_p \mathrm{d}l = \int_l \frac{T^2(x)}{2G(x)I_\mathrm{p}(x)}\mathrm{d}x$$

等直圆杆

M_e、G、I_p 均为常数

$$\Rightarrow \boxed{V_\varepsilon = \frac{T^2 l}{2GI_\mathrm{p}} \qquad V_\varepsilon = \frac{GI_\mathrm{p}}{2l}\varphi^2}$$

分段直杆 $V_\varepsilon = \sum_i \dfrac{T_i^2 l_i}{2G_i I_{\mathrm{p}i}}$

变截面直杆 $V_\varepsilon = \displaystyle\int_0^l \frac{T^2}{2GI_\mathrm{p}(x)}\mathrm{d}x$

变截面且变外力矩直杆 $V_\varepsilon = \displaystyle\int_0^l \frac{T^2(x)}{2GI_\mathrm{p}(x)}\mathrm{d}x$

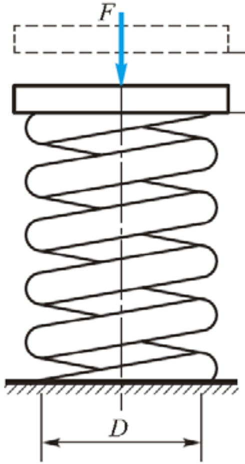
2. 弹簧的应变能

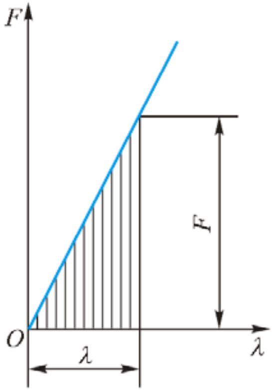
$$V_{\varepsilon}=\frac{T^{2}l}{2GI_{\mathrm{p}}}=\frac{\left(F\dfrac{D}{2}\right)^{2}n\pi D}{2G\dfrac{\pi d^{4}}{32}}=\frac{4F^{2}D^{3}n}{Gd^{4}}$$

G为簧丝材料的切变模量

n为弹簧的有效圈数（即扣除两端与弹簧座接触部分后的圈数）$l=n\pi D$

弹簧在轴向压力（或拉力） 作用下，轴线方向的总缩短（或伸长）量λ，就是弹簧的变形。在弹性范围内，试验表明，压力F与变形λ成正比，即F与λ的关系呈一条斜直线。





当外力从零增加到最终值时，它做的功等于斜直线下的面积，即

$$W=\frac{1}{2}F\lambda$$

由功能原理，外力完成的功应等于储存于弹簧的应变能，即

$$W = V_\varepsilon$$

$$\frac{1}{2}F\lambda = \frac{4F^2D^3n}{Gd^4} \longrightarrow \lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4} \longrightarrow \lambda = \frac{F}{C}$$

令 $C = \dfrac{Gd^4}{8D^3n}$　　C 称为弹簧的刚度系数

代表弹簧抵抗变形的能力

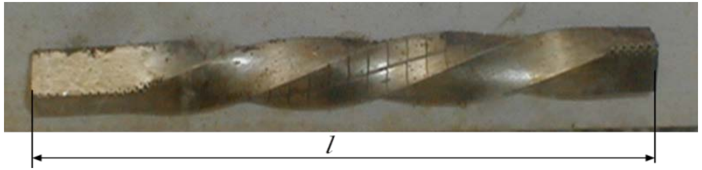
$$\tau_{\max} = k\frac{8FD}{\pi d^3}$$

λ与d^4成反比，如希望弹簧有较好的减振和缓冲作用，即要求它有较大变形（比较柔软）时，应使弹簧丝横截面直径d尽可能小一些，但相应的$\tau_{\max}$的数值会增高，这就要求弹簧材料有较高的$[\tau]$。此外，增加有效圈数n和加大弹簧中径D，都可以取得增大λ的效果。

§3.7 非圆截面杆扭转的概念

圆截面杆扭转时的应力和变形公式，均建立在平面假设 的基础上。

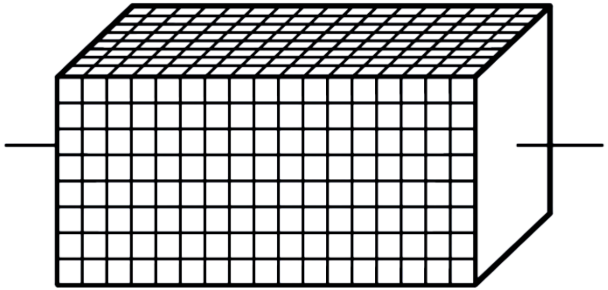
对于非圆截面杆，受扭时横截面不再保持为平面，杆的横截面已由原来的平面变成了曲面，这一现象称为截面翘曲。



矩形截面杆扭转

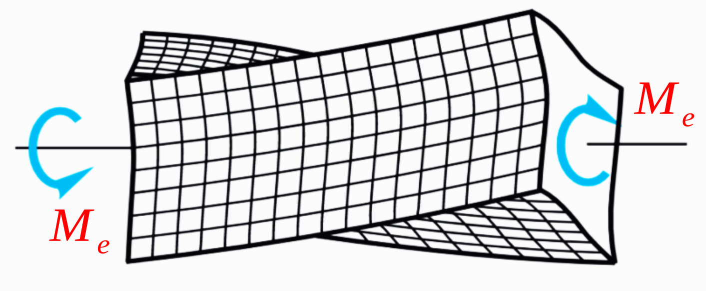
矩形截面弹簧

非圆（矩形）截面杆



当端面可以自由翘曲时，称为自由扭转；当端面受到约束而不能自由翘曲时，称为约束扭转。

约束扭转由于相邻梁截面的翘曲程度不同，将在横截面上产生附加的正应力。



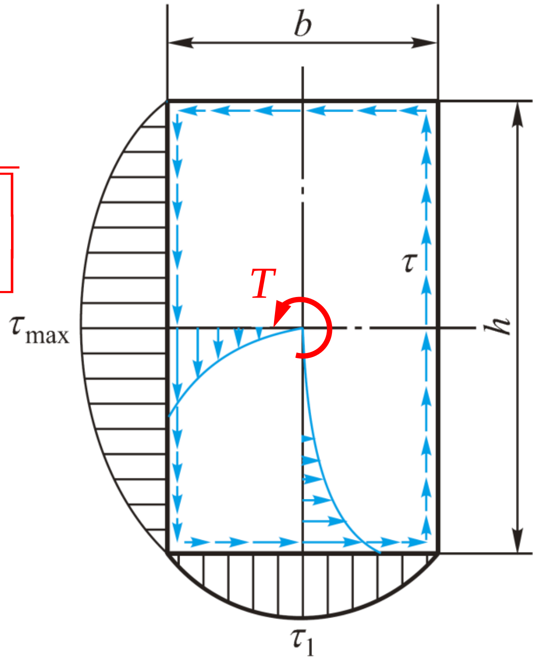
非圆截面杆扭转时将发生截面翘曲，变形后的平面不再保持平面。因此，圆轴扭转时的应力、变形公式对非圆截面杆均不适用！

工字钢、槽钢、薄壁杆件，约束扭转时引起的正应力往往是相当大的；矩形截面、椭圆截面的实体杆件，约束扭转时引起的正应力很小。

矩形截面杆自由扭转时的弹性力学解 [1]

$$\tau_{\max}=\frac{T\left[1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2\operatorname{ch}\frac{n\pi h}{2b}}\right]}{hb^2\left[\frac{1}{3}-\frac{64}{\pi^5}\frac{b}{h}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\frac{n\pi h}{2b}}{n^5}\right]}$$

$$\varphi'=\frac{T}{Ghb^3\left[\frac{1}{3}-\frac{64}{\pi^5}\frac{b}{h}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\frac{n\pi h}{2b}}{n^5}\right]}$$



$h > b$

矩形截面杆扭转的切应力（结论）

1. 在横截面的边缘上各点的切应力均与周边平行；
2. 且截面的四个角点上切应力均为零；
3. 最大切应力发生在长边中点处。

[1] 徐芝纶 弹性力学（上册），第4版， 高等教育出版社，2006.

弹性力学解的处理

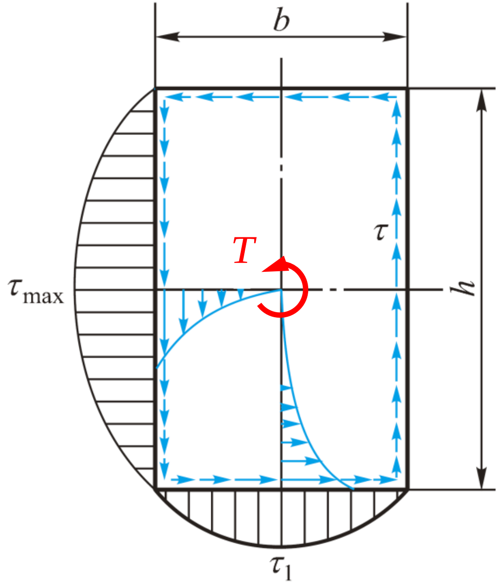
$$\tau_{\max}=\frac{T\left[1-\dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2\operatorname{ch}\frac{n\pi h}{2b}}\right]}{hb^2\left[\dfrac{1}{3}-\dfrac{64}{\pi^5}\dfrac{b}{h}\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\frac{n\pi h}{2b}}{n^5}\right]}$$

$$\varphi'=\frac{T}{Ghb^3\left[\dfrac{1}{3}-\dfrac{64}{\pi^5}\dfrac{b}{h}\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\frac{n\pi h}{2b}}{n^5}\right]}$$

$$\tau_{\max}=\frac{T}{hb^2\alpha}$$

$$\varphi'=\frac{T}{Ghb^3\beta}$$

α和β只与矩形截面边长的比值h/b有关



矩形截面杆自由扭转时的系数　　P. 104 表3.2

h/b	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
α	0.208	0.219	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
ν	1.000	0.930	0.858	0.796	0.767	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743

当 $\dfrac{h}{b}>10$（狭长矩形截面）

时，有 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{3}$，$\nu=0.743$

$\tau_1=\nu\tau_{\max}$（短边中点）

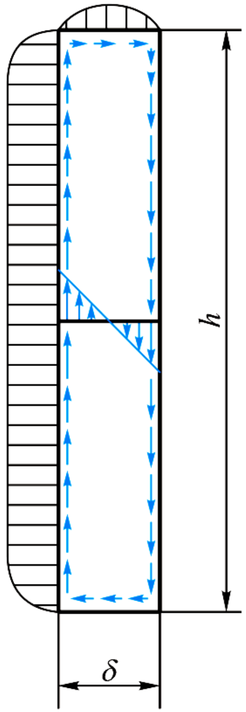
矩形截面杆的扭转（$h>b$）

$\tau_{max} = \dfrac{T}{\alpha h b^2}$（长边中点处）； $\tau_1 = \nu \tau_{max}$（短边中点处）

$$\varphi' = \frac{T}{Ghb^3\beta} \Longrightarrow \varphi' = \frac{T}{GI_t}$$

GI_t 非圆形截面杆的抗扭刚度

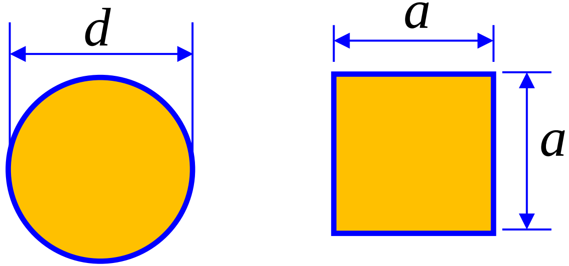
$I_t = \beta h b^3$ 非圆形截面的相当极惯性矩



狭长矩形截面（$\dfrac{h}{\delta} > 10$）： $\alpha = \beta = \dfrac{1}{3}$

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{\frac{1}{3}h\delta^2}, \qquad \varphi' = \frac{T}{GI_t} = \frac{T}{G\cdot\frac{1}{3}h\delta^3}$$

例5 T、G、A、l 均相同的两根轴，截面分别为圆形和正方形。试比较两者的最大扭转切应力与扭转变形。



解： 1）圆形截面（circular）

$$\tau_{\max}^{\text{cir}}=\frac{16T}{\pi d^3},\qquad \varphi^{\text{cir}}=\frac{32Tl}{G\pi d^4}.$$

2）正方形截面（square）

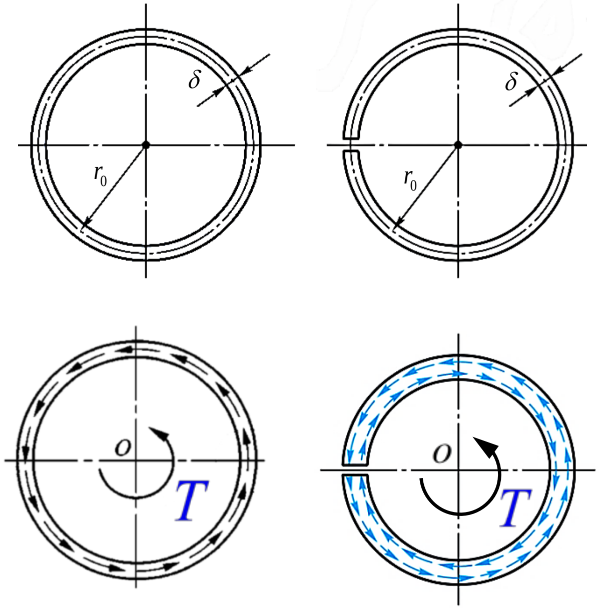
$$\tau_{\max}^{\text{squ}}=\frac{T}{\alpha\cdot a^3}=\frac{T}{0.208a^3},\qquad \varphi^{\text{squ}}=\frac{Tl}{G\cdot\beta a^4}=\frac{Tl}{0.141Ga^4}.$$

3）比值　　两种截面的面积相同，有 $\frac{\pi d^2}{4}=a^2 \Rightarrow \frac{a}{d}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

$$\frac{\tau_{\max}^{\text{cir}}}{\tau_{\max}^{\text{squ}}}=\frac{16\times0.208a^3}{\pi d^3}=0.737,\qquad \frac{\varphi^{\text{cir}}}{\varphi^{\text{squ}}}=\frac{32\times0.141a^4}{\pi d^4}=0.886\ .$$

无论是扭转强度，还是扭转刚度，圆形截面都比正方形截面更优！

例6 截面为圆环形的开口和闭口薄壁杆件。设两杆的截面具有相同的平均半径r_0和壁厚δ。试比较两者的扭转强度。



解：$\tau_{闭口} = \dfrac{T}{2\pi r_0^2 \delta}$ 薄壁杆件 $\delta \le \dfrac{r_0}{10}$

开口：看成狭长矩形

$$h = 2\pi r_0 \qquad h/\delta > 10$$

$$\tau_{开口} = \frac{T}{\frac{1}{3}h\delta^2} = \frac{T}{\frac{1}{3}2\pi r_0 \delta^2} = \frac{3T}{2\pi r_0 \delta^2}$$

$$\frac{\tau_{开口}}{\tau_{闭口}} = \frac{3T}{2\pi r_0 \delta^2} \Big/ \frac{3}{2\pi r_0^2 \delta} = 3\frac{r_0}{\delta}$$

开口薄壁杆件内的切应力远大于闭口薄壁杆件内的切应力

Thank you!

作业

P. 114-115：3.14

P. 117：3.23、3.24

对应第6版的题号：P. 108：3.14；P. 111：3.23、3.24

下次课内容 附录 I 截面的几何性质