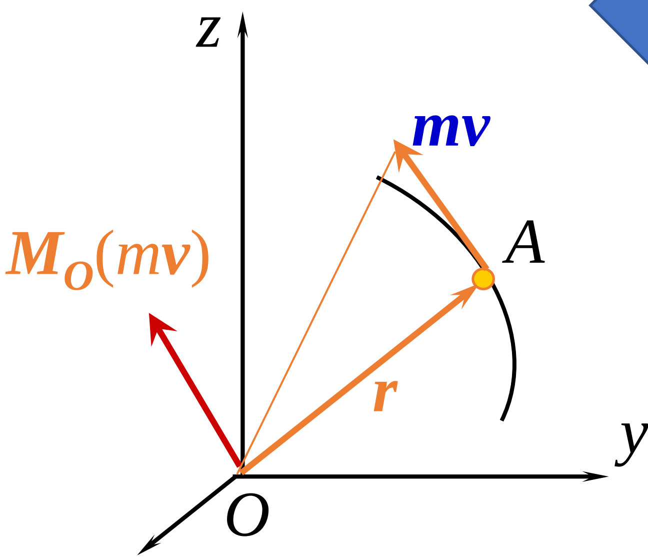
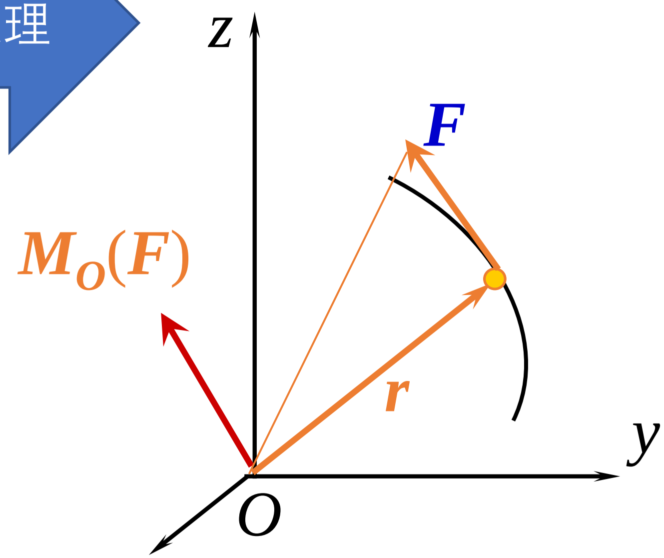
质点对一点动量矩





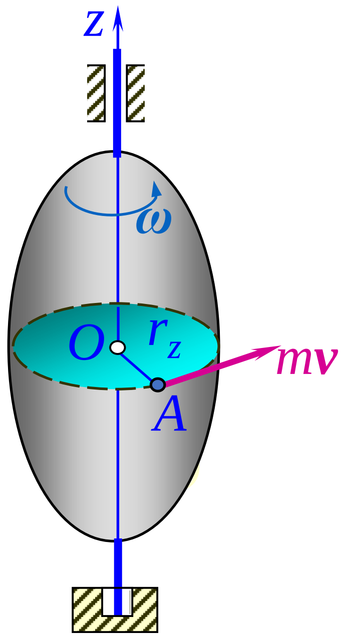
$$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

质点A的动量 mv 对点 O 的矩，定义为质点A对点 O 的动量矩

力F 对点 O 的矩，定义为F 对点 O 的力矩

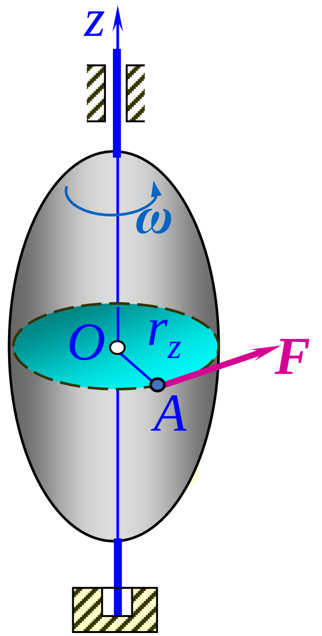
质点对轴的动量矩



$$M_z(m\boldsymbol{v}) = \overrightarrow{OA} \times (m\boldsymbol{v})$$

$$= r_z\, m\,(r_z\,\omega) = m r_z^2\,\omega$$

质点A的动量对转轴z的矩，定义为质点A对轴z的动量矩

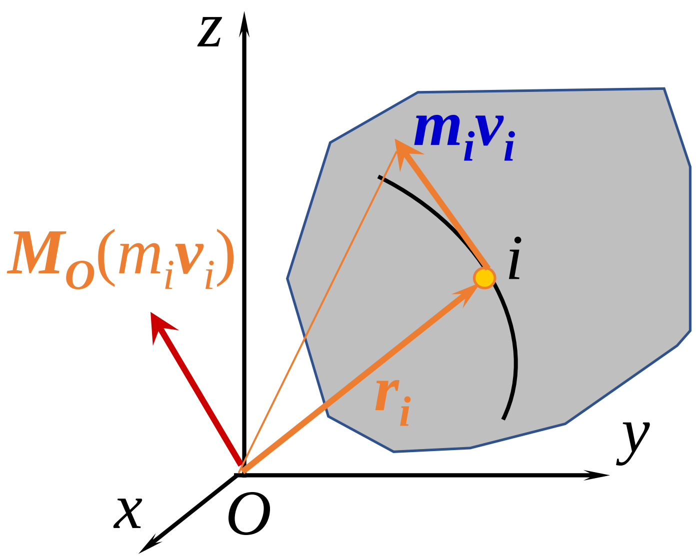


$$M_z(\boldsymbol{F}) = \overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}$$

$$= r_z\, F$$

力F对转轴z的矩，定义F对轴 z 的力矩

质点系对一点动量矩



质点系内各质点对某点 O 的动量矩的矢量和，称为这质点系对该点 O 的**动量矩**，用 L_O 表示，有

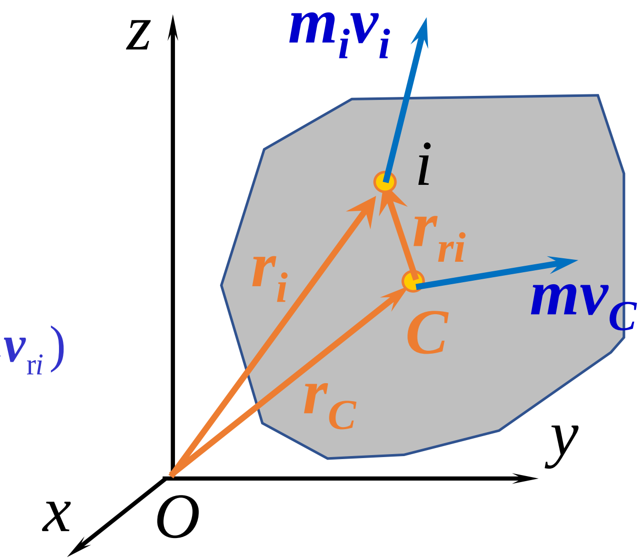
$$\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i)$$

质点系对一点动量矩

质点系对点 O 的动量矩

$$\boldsymbol{L}_O=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum[(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i})\times m_i(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i})]$$

$$=\underbrace{\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_C)}_{①}+\underbrace{\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i})}_{②}+\underbrace{\sum(\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i}\times m_i\boldsymbol{v}_C)}_{③}+\underbrace{\sum(\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i}\times m_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i})}_{④}$$



① $\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_C)=\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\boldsymbol{v}_C$

② $\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i})=\boldsymbol{r}_C\times\sum(m_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i})=\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\,\underbrace{\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}C}}_{0}=\boldsymbol{0}$

③ $\sum(\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i}\times m_i\boldsymbol{v}_C)=\sum(m_i\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i})\times\boldsymbol{v}_C=\sum m_i\,\underbrace{\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}C}}_{0}\times\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{0}$

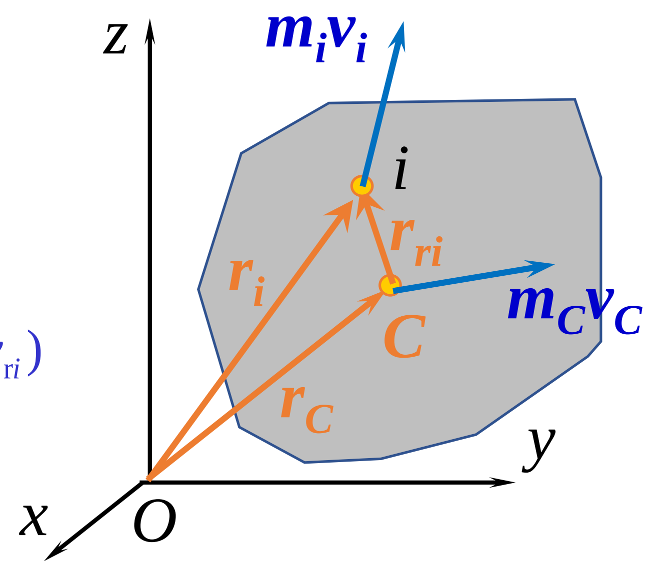
④ $\sum(\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i}\times m_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i})$ —— 质点系相对质心 C 的动量矩

质点系对一点动量矩

质点系对点 O 的动量矩

$$\boldsymbol{L}_O=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum[(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i})\times m_i(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i})]$$

$$=\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_C)+\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i})+\sum(\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i}\times m_i\boldsymbol{v}_C)+\sum(\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i}\times m_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i})$$



质点系对点 O 的动量矩的质心表达形式

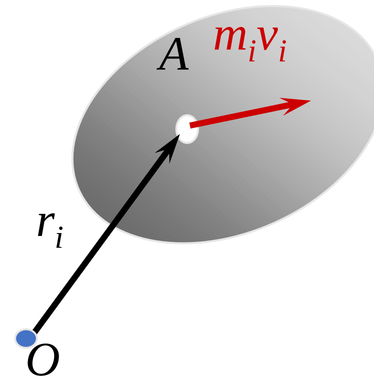
$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{L}_C$$

其中 $m=\sum m_i$ $\quad \boldsymbol{L}_C=\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})$

$\boldsymbol{L}_C$——质点系相对质心 C 的动量矩

常见刚体运动的动量矩

平动刚体对固定点O的动量矩



刚体质点系对点O 的动量矩

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C$$

其中 $$m = \sum m_i$$

$$\boldsymbol{L}_C = \sum (\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_{ri}) = 0$$

0

因此，平动刚体对点O 的动量矩为

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C$$

常见刚体运动的动量矩

转动刚体对固定转轴z的动量矩

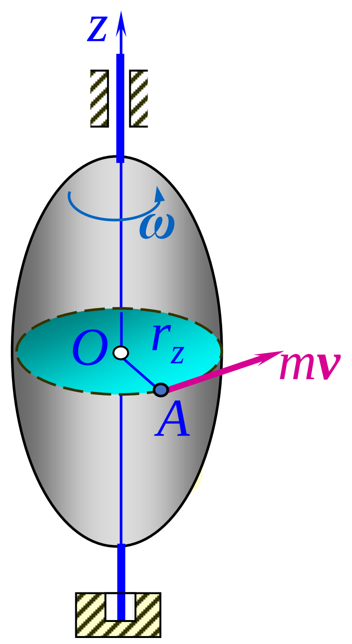
刚体上一个质点的动量对转轴z的动量矩为

$$M_z(m_i\boldsymbol{v}_i) = r_z\, m_i\, r_z\, \omega = m_i r_z^2\, \omega$$

从而整个刚体对轴 z 的动量矩

$$L_z = \sum M_z(m_i\boldsymbol{v}_i) = \omega \sum m_i r_{iz}^2 = J_z\, \omega$$

其中 $J_z = \sum m_i r_{iz}^2$，定义为**转动惯量**



即，**作定轴转动的刚体对转轴的动量矩，等于转动惯量与角速度的乘积。**

刚体对轴的转动惯量

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

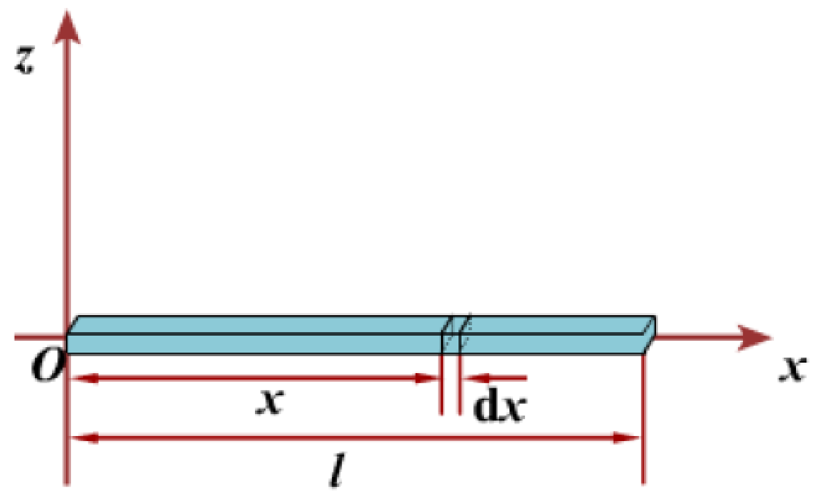
1. 简单形状物体的转动惯量计算

(1) 均质细直杆对一端的转动惯量

$$J_z = \int_0^l \rho_l x^2 \mathrm{d}x = \frac{\rho_l l^3}{3}$$

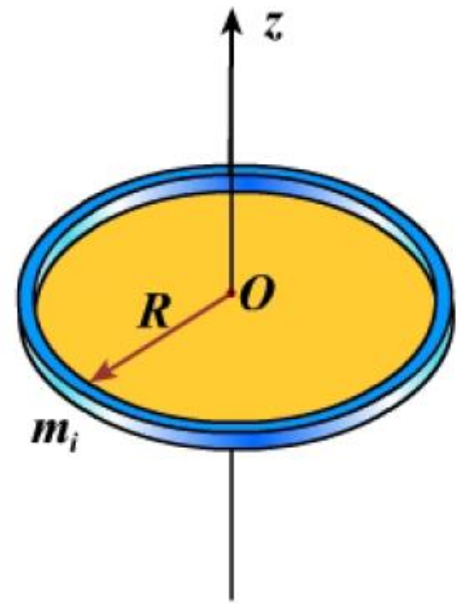
由 $m = \rho_l l$，得

$$J_z = \frac{1}{3} m l^2$$



（2）均质薄圆环对中心轴的转动惯量

$$J_z = \sum m_i R^2 = R^2 \sum m_i = mR^2$$



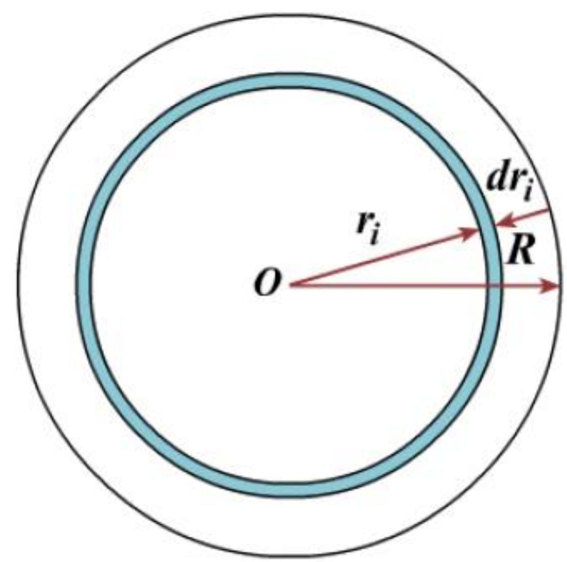
（3）均质圆板对中心轴的转动惯量

$$m_i = 2\pi\, r_i\, \mathrm{d}r_i \cdot \rho_A$$

式中： $\rho_A = \dfrac{m}{\pi R^2}$

$$J_O = \int_0^R (2\pi\, r \rho_A \mathrm{d}r \cdot r^2) = 2\pi\, \rho_A \frac{R^4}{4}$$

或 $J_O = \dfrac{1}{2} mR^2$



更多均质物体的转动惯量参见教科书288-289页。

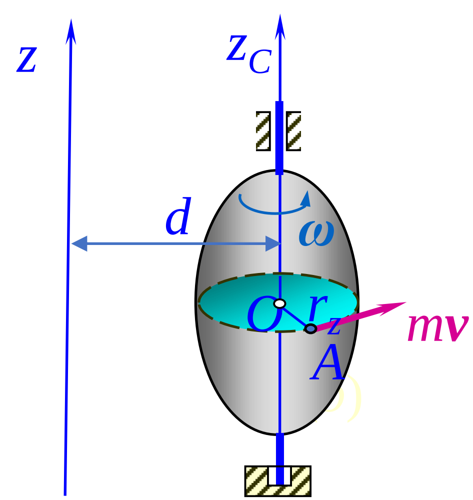
2. 回转半径（惯性半径）

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} \qquad 或 \qquad \boxed{J_z = m\rho_z^2}$$

3. 平行轴定理

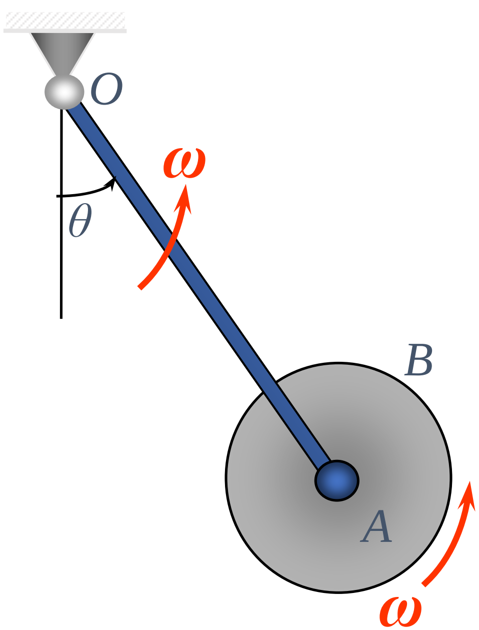
$$\boxed{J_z = J_{z_C} + md^2}$$

式中 z_C轴为过质心且与 z轴平行的轴，d 为 z 与 z_C 轴之间的距离。



动 量 矩

长度为l，质量不计的杆OA与半径为R、质量为m的均质圆盘B在A处铰接，杆OA有角速度ω ，轮B有相对杆OA的角速度ω （逆时针向）。试求圆盘对轴O的动量矩。



解：**根据** $$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{L}_C$$

则有 $$L_O=lmv_A+L_A$$

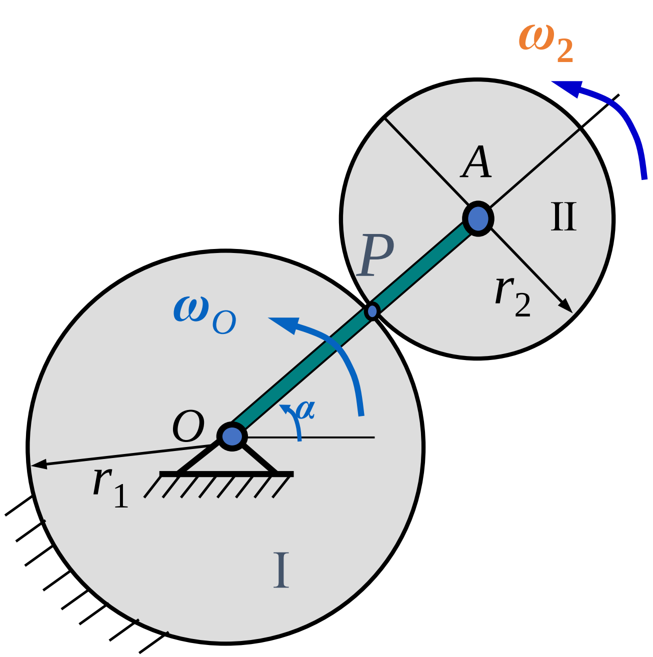
$$L_O=lml\omega+J_A\omega_A$$

$$L_O=ml^2\omega+\frac{1}{2}mR^2\times 2\omega$$

$$L_O=m(R^2+l^2)\omega$$

动 量 矩

行星齿轮机构在水平面内运动。质量为m_1的均质曲柄OA带动行星齿轮II在固定齿轮I上纯滚动。齿轮II的质量为m_2，半径为r_2。定齿轮I的半径为r_1。试求轮II对轴O的动量矩。



根据 $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C$

得

$$L_O = (r_1 + r_2)m_2 v_A + J_A\omega_2$$

$$v_A = (r_1 + r_2)\omega_O = r_2\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_0$$

动量矩定理

(1) 对定点的动量矩定理

质点系对定点*O*的动量矩为 $\boldsymbol{L}_O=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)$

将其两端求时间的导数，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\times m_i\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{r}_i\times m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\right)=\sum(\overbrace{\boldsymbol{v}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i}^{0}+\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{a}_i)$$

$$=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{a}_i)=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$$

其中 $\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$ **可分为外力对*O*点的矩和内力对*O*点的矩两项，**

即 $$\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})+\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})})$$

动量矩定理

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})})$$

而内力对*O*点的矩 $\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}) = \boldsymbol{0}$

所以有

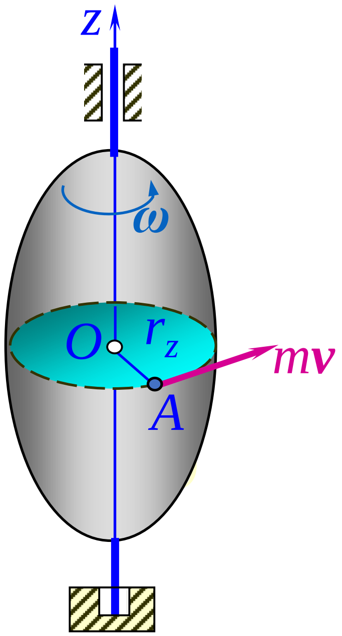
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})}$$

质点系对某固定点的**动量矩对时间的导数**，等于对同一点的**合外力矩**，这就是质点系**对定点的动量矩定理**。

动量矩定理

(2) 对定轴的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(F^{(\mathrm{e})})$$



质点系对某固定轴的**动量矩对时间的导数**,等于对同一轴的**合外力矩**，这就是质点系**对定轴的动量矩定理。**

动量矩守恒定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

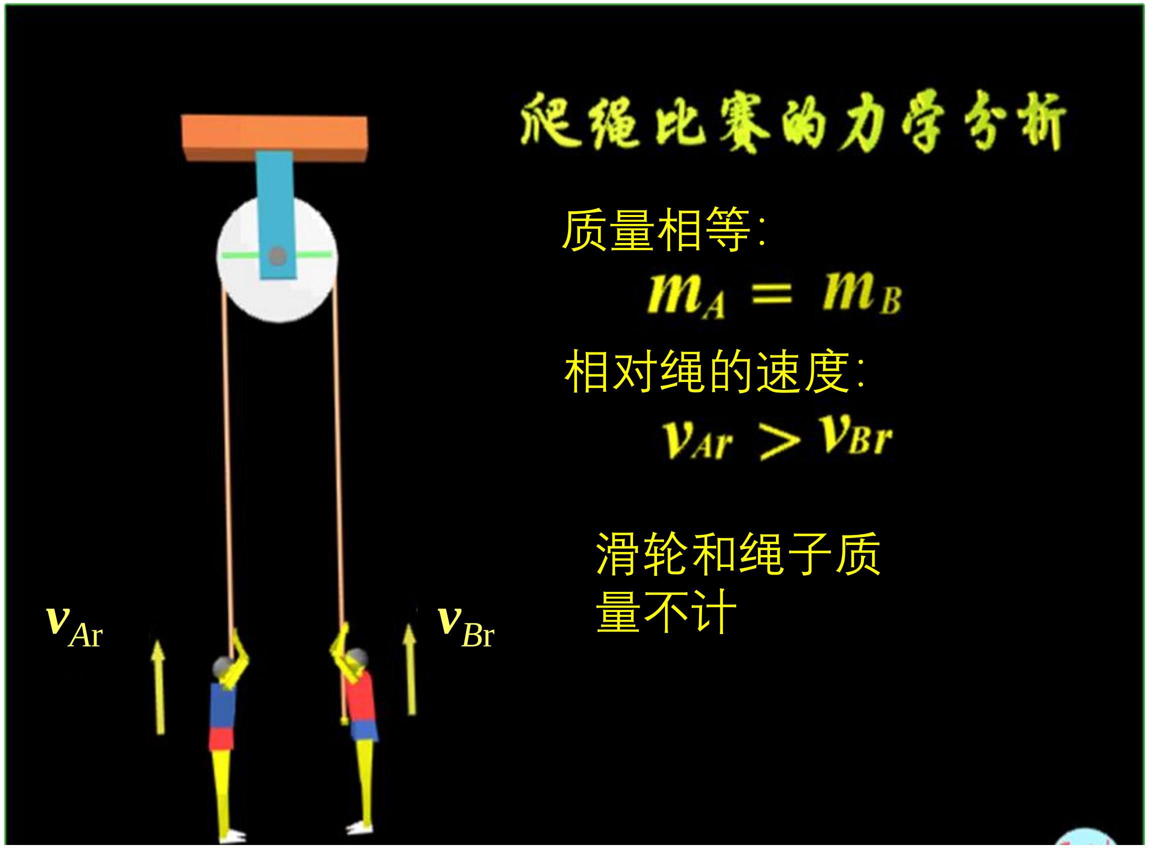
$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(F^{(\mathrm{e})})$$

(1) **如果**$\sum M_O(F_i^{(\mathrm{e})})\equiv 0$**，则由上面第一式 可知，**$L_O$ = **常矢量。**

(2) **如果**$\sum M_z(F^{(\mathrm{e})})\equiv 0$**，则由上面第二式 可知，**$L_z$ = **常量。**

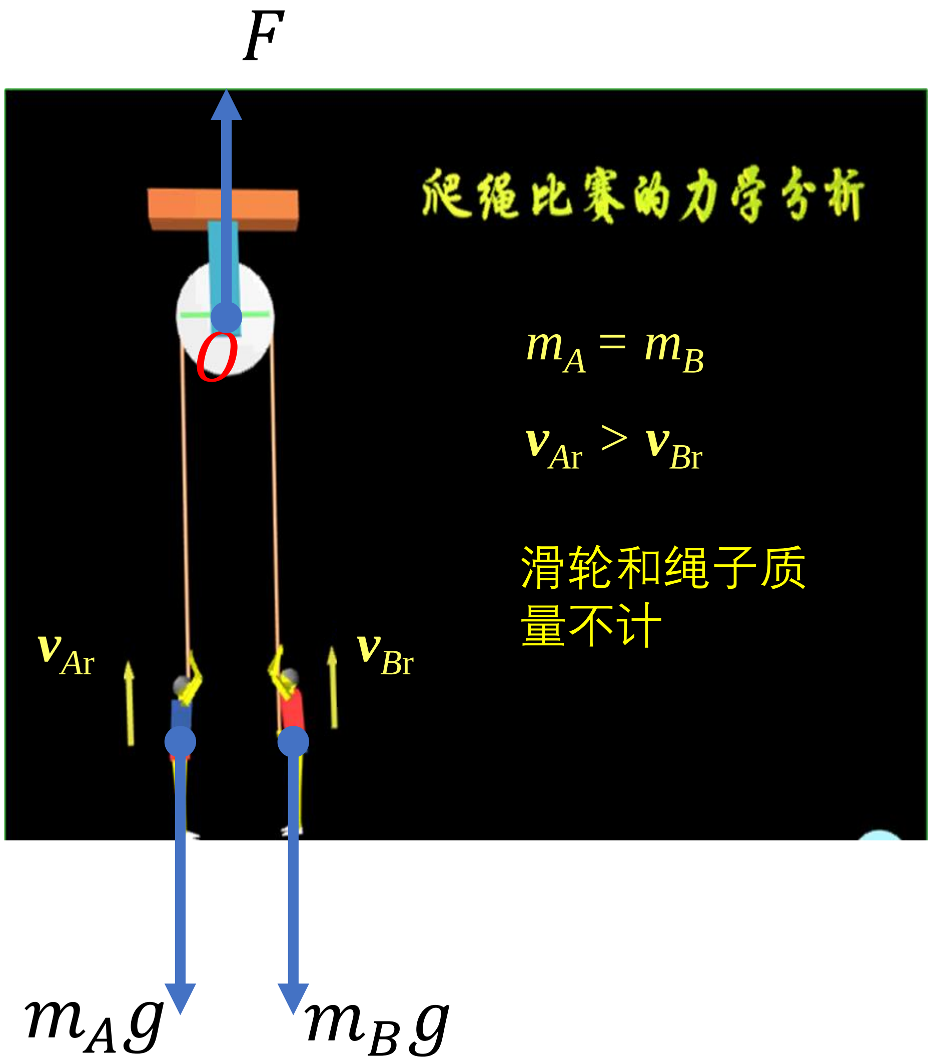
如作用于质点系的所有外力对某固定点(或固定轴)的矩始终等于零,则质点系对该点(或该轴)的**动量矩保持不变**。这就是质点系的动量矩守恒定理。

动量矩守恒定理



A和B,
谁先爬
到顶端?

动量矩守恒定理



外力对滑轮中心的力矩:

$$M_O = m_A g\, R - m_B g\, R$$

$$M_O = 0$$

系统对滑轮中心的动量矩守恒:

$$L_O = m_B v_{Ba} R - m_A v_{Aa} R = 常数$$

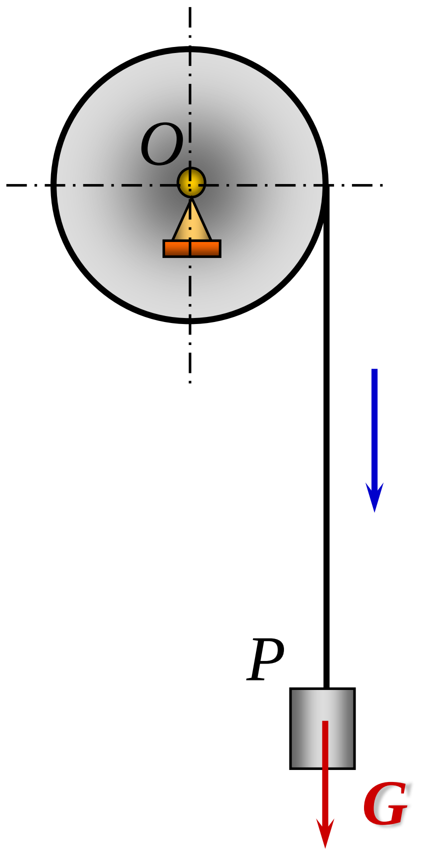
初始静止，有$L_O = 0$，因此

$$m_B v_{Ba} R - m_A v_{Aa} R = 0$$

$$v_{Ba} = v_{Aa}$$

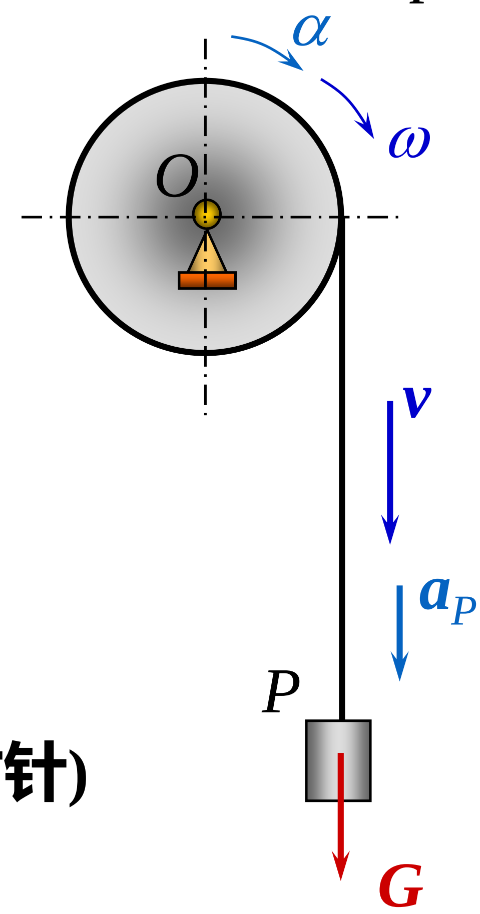
动量矩定理

例题 **均质圆轮半径为**R**、质量为**m**。圆轮在重物**P**带动下绕固定轴**O**转动，已知重物重量为**G**。试求重物下落的加速度。**



解：以整个系统为研究对象。

设圆轮的角速度和角加速度分别为ω和α，重物的加速度为a_P。



圆轮对轴O的动量矩

$$L_{O1}=J_O\omega=\frac{1}{2}mR^2\omega$$ (顺时针)

重物对轴O的动量矩

$$L_{O2}=mvR=\frac{G}{g}vR$$ (顺时针)

系统对轴O的总动量矩

$$L_O=L_{O1}+L_{O2}=\frac{1}{2}mR^2\omega+\frac{G}{g}vR$$ (顺时针)

系统对轴O的总动量矩 $L_O = L_{O1} + L_{O2} = \frac{1}{2}mR^2\omega + \frac{G}{g}vR$

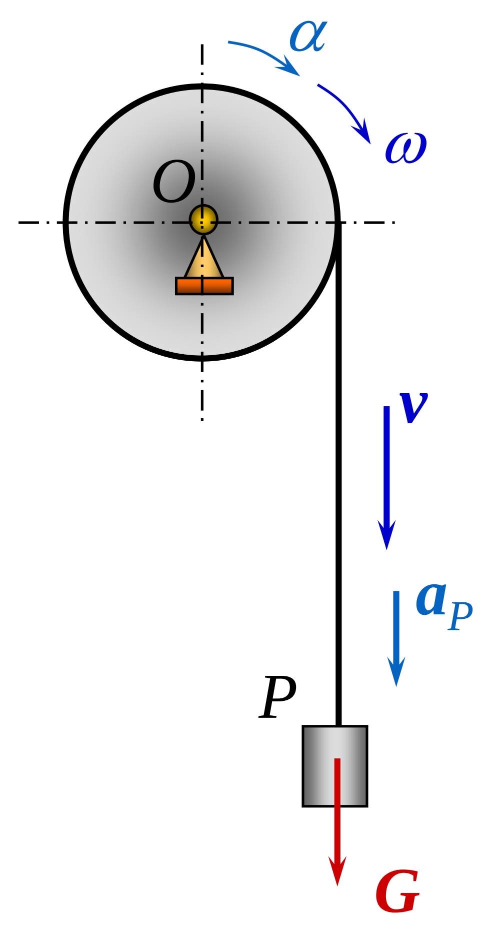
应用动量矩定理 $\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = M_O$

有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}mR^2\omega + \frac{G}{g}vR) = GR$

得 $\frac{1}{2}mR^2\alpha + \frac{G}{g}a_P R = GR$

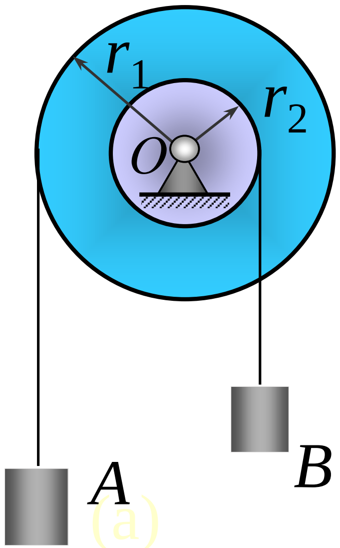
其中 $a_P = R\alpha$

所以求得重物下落的加速度大小 $a_P = \dfrac{G}{\frac{m}{2} + \frac{G}{g}}$



动量矩定理

例题　**两个鼓轮固连在一起，其总质量是** m **，对水平转轴** O **的转动惯量是** J_O**。鼓轮的半径是** r_1 **和** r_2 **。绳端悬挂的重物** A **和** B **质量分别是** m_1 **和** m_2 **(图a)，且** $m_1 > m_2$ **。试求鼓轮的角加速度。**



(a)

解：取鼓轮，重物 A、 B 和绳索为研究对象(图b)。对鼓轮的转轴 z (垂直于图面)应用动量矩定理，有

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = M_{Oz}$$

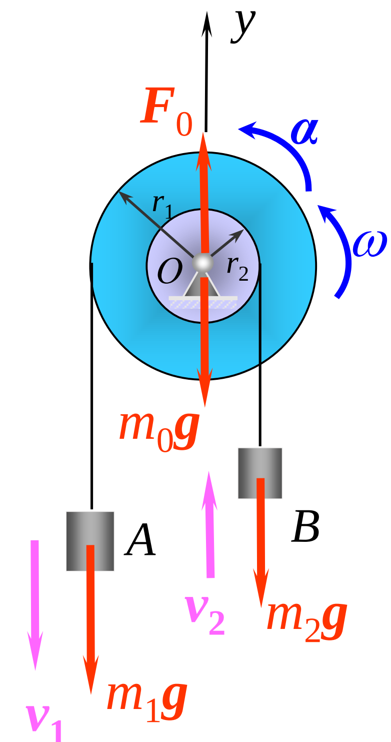
系统的动量矩由三部分组成，等于

$$L_{Oz} = J_O\omega + m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2$$

考虑到 $v_1 = r_1\omega$， $v_2 = r_2\omega$，则得

$$L_{Oz} = (J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega \qquad (1)$$

$$M_{Oz} = (m_1 r_1 - m_2 r_2) g \qquad (2)$$



(b)

$$L_{Oz} = (J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega \qquad (1)$$

$$M_{Oz} = (m_1 r_1 - m_2 r_2)g \qquad (2)$$

将式(1)、(2)代入方程

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = M_{Oz}$$

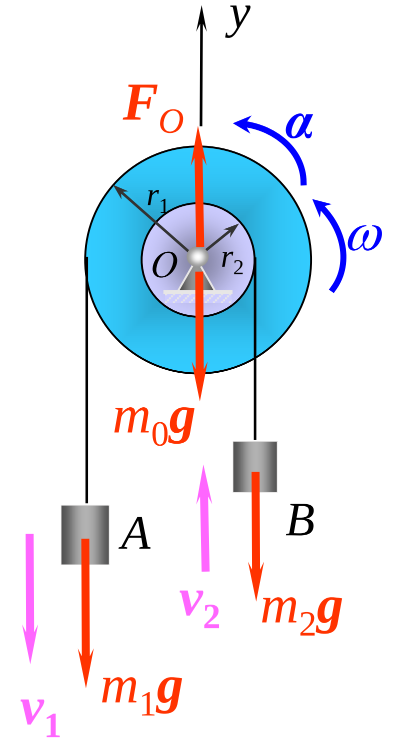
即得

$$(J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = (m_1 r_1 - m_2 r_2)g$$

从而求出鼓轮的角加速度

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2} g$$

方向为逆时针方向。



(b)

刚体的定轴转动微分方程

刚体对转轴 z 的动量矩: $L_z = J_z\omega = J_z \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$

于是根据动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_z(F^{(e)})}$$

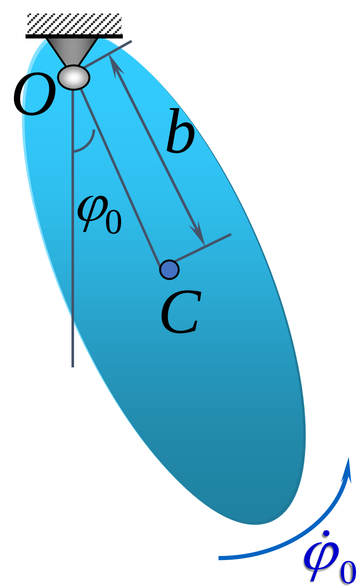
可得

$$\boxed{J_z \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

定轴转动刚体，**转动惯量与角加速度的乘积等于外力对转轴的主矩**，这就是刚体**定轴转动微分方程**

利用刚体的定轴转动微分方程，分析刚体在外力矩作用下的转动规律

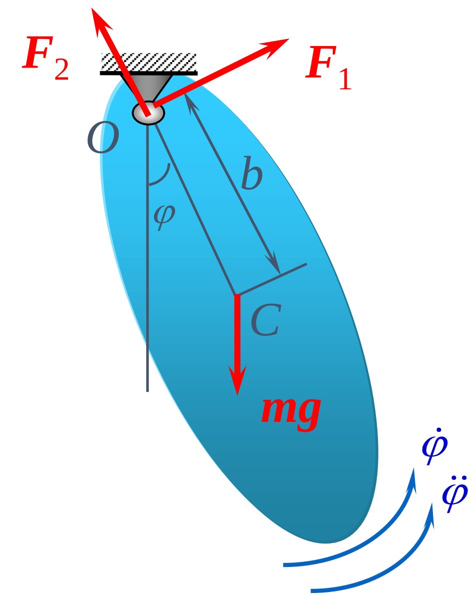
实例：**复摆绕水平轴转动。已知复摆的质量是 m，重心 C 到转轴 O 的距离 $OC = b$，复摆对转轴 O 的转动惯量是J_O，设摆动开始时 OC与铅直线的偏角是 φ_0 ，且复摆的初角速度为零，试求复摆的微幅摆动角度随时间的变化规律。（轴承摩擦和空气阻力不计）**



刚体的定轴转动微分方程

解： 受力分析：

复摆在任意位置时，所受的外力有重力 mg 和轴承 O 的约束力。（约束力沿质心轨迹的切线和法线方向分解成两个分力 F_1和 F_2）



运动分析：刚体绕O定轴转动，角位移、速度、加速度分别为φ、$\dot{\varphi}$、和$\ddot{\varphi}$

根据刚体绕定轴转动的微分方程 $J_z\ddot{\varphi} = M_z$

有

$$J_O \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgb\sin\varphi$$

整理有

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgb}{J_O}\sin\varphi = 0$$

当复摆作微摆动时，可令 $\sin\varphi \approx \varphi$，于是上式经过线性化后，可得复摆微幅摆动的微分方程

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgb}{J_O}\varphi = 0$$

刚体的定轴转动微分方程

复摆微幅摆动的微分方程 $\ddot{\varphi} + \frac{mgb}{J_O}\varphi = 0$

这是简谐运动的标准微分方程，通解为

$$\varphi = C_1 \cos\sqrt{\frac{mgb}{J_O}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{mgb}{J_O}}t$$

考虑到复摆运动的初条件：当 $t = 0$ **时**

$$\varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = 0$$

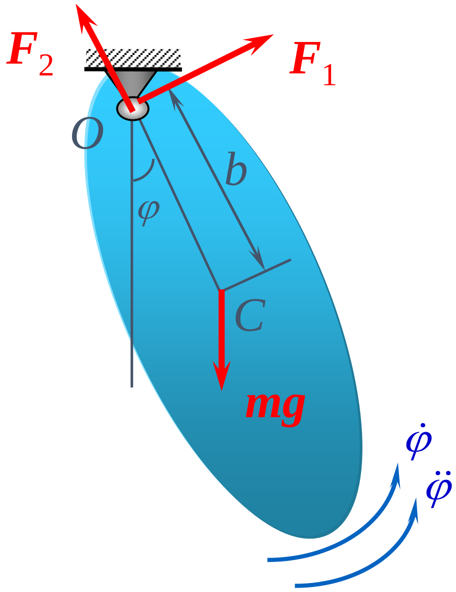
则复摆运动方程可写成

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\sqrt{\frac{mgb}{J_O}}t) \qquad \text{(a)}$$

摆动的频率 ω_0 **和周期** T **分别是**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{J_O}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgb}} \qquad \text{(b)}$$

刚体的定轴转动微分方程



复摆的摆动周期 T 是

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgb}} \qquad \text{(b)}$$

(b) 式可以写成

$$J_O=\frac{mgbT^2}{4\pi^2} \qquad \text{(c)}$$

- **工程上常利用关系(c) 测定形状不规则刚体的转动惯量**
- **为此，把刚体做成复摆并用试验测出它的摆动周期T ，然后由式(c) 求得转动惯量**

相对于质心的动量矩定理

质点系对固定点O的动量矩为（相对质心的形式）

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{L}_C,\qquad \boldsymbol{L}_C=\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})$$

$\boldsymbol{L}_C$—— 质点系相对质心C 的动量矩

由对定点的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{L}_C)=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

相对于质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C\right) = \sum\left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}\right) \quad （1）$$

左端 $$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{v}_C \times m_R \boldsymbol{v}_C}_{0} + \boldsymbol{r}_C \times m_R \boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$= \boldsymbol{r}_C \times m_R \boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

右端 $$= \sum\left[\left(\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i}\right) \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}\right] = \boldsymbol{r}_C \times \sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} + \sum\left(\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}\right)$$

代入（1）式有

$$\boldsymbol{r}_C \times m_{\mathrm{R}} \boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}L_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_C \times \sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} + \sum\left(\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}\right)$$

相对于质心的动量矩定理

$$\boldsymbol{r}_C \times m_{\mathrm{R}} \boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_C \times \sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} + \sum (\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

注意到由质心运动定理有 $m_{\mathrm{R}} \boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$

所以上式为

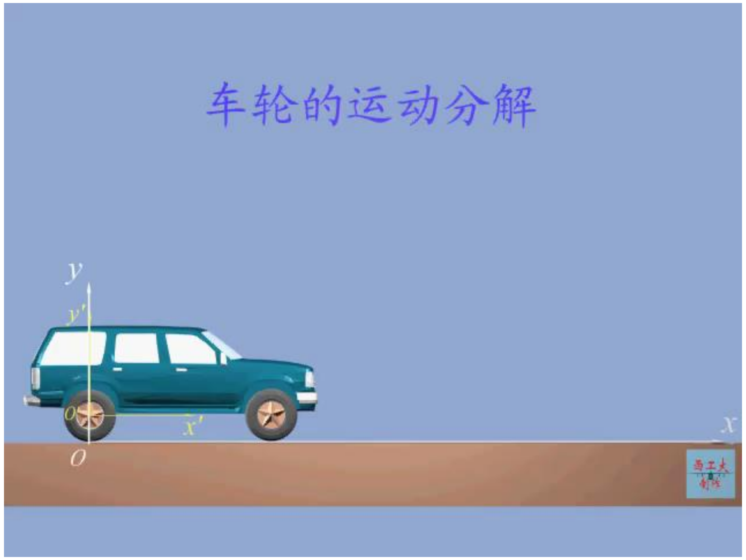
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum (\boldsymbol{r}_{\mathrm{r}i} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) = \sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) = \boldsymbol{M}_C}$$

这就是相对于质心的动量矩定理。

即，质点系**相对于质心的动量矩对时间的导数**，等于作用于质点系的**外力对质心的主矩**。

刚体的平面运动微分方程

- 由运动学知，刚体的平面运动可分解成**随质心的牵连平移**和**相对于质心的相对转动**

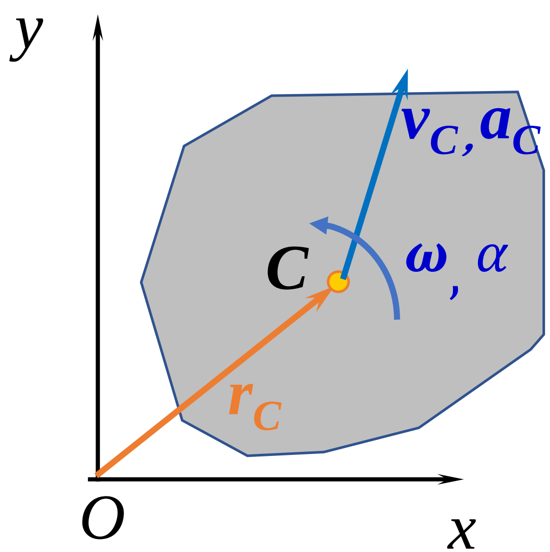


- **随质心的牵连平移可由质心的动量定理来确定**

$$m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_C=\sum \boldsymbol{F}$$

- **相对于质心的转动可由相对质心的动量矩定理来确定**

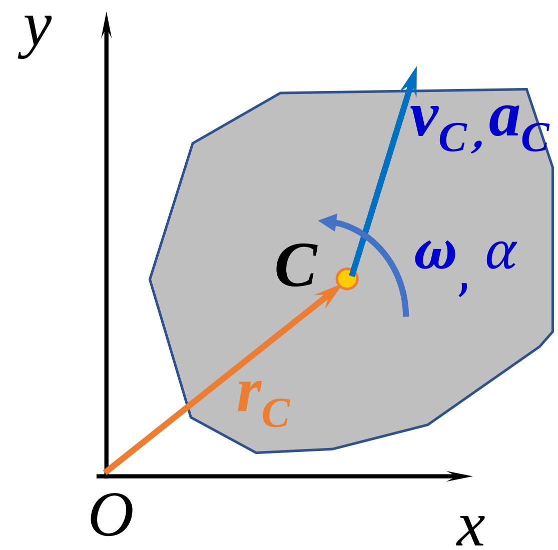
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F})$$



刚体的平面运动微分方程

- **随质心的牵连平移可由质心的动量定理来确定**

$$m_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}$$



- **相对于质心的转动可由相对质心的动量矩定理来确定**

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F})$$

- **将质心动量定理投影到轴 x、y 上，相对质心的动量矩定理投影到垂直于xy平面且过质心的轴 Cz'上，可得**

$$m_{\mathrm{R}}a_{Cx} = \sum F_x$$

$$m_{\mathrm{R}}a_{Cy} = \sum F_y$$

平移方程

$$\frac{\mathrm{d}L_{Cz'}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = M_{Cz'}(F)$$

转动方程

刚体的平面运动微分方程

$$m_{\mathrm{R}} a_{Cx} = \sum F_x \ , \quad m_{\mathrm{R}} a_{Cy} = \sum F_y \ , \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{Cz'}}{\mathrm{d}t} = M_{Cz'}(\boldsymbol{F})$$

注意到 $a_{Cx} = \ddot{x}_C \ , \quad a_{Cy} = \ddot{y}_C \ , \quad L_{Cz'} = J_{Cz'}\omega = J_{Cz'}\dot{\varphi}$

式中 $J_{Cz'}$表示刚体对轴 Cz' 的转动惯量。

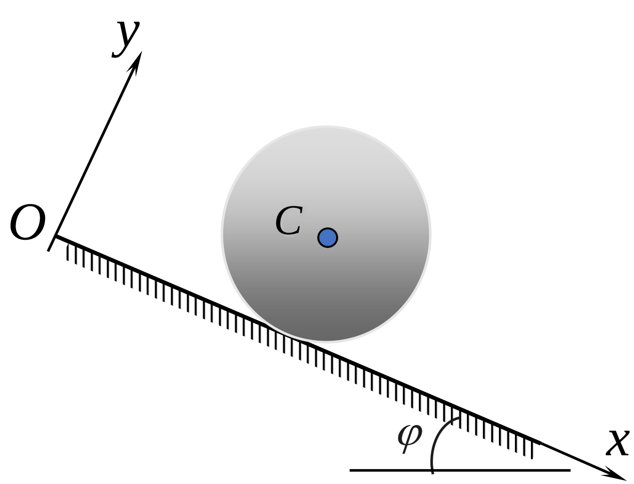
则有

$$\boxed{m_{\mathrm{R}} \ddot{x}_C = \sum F_x \ , \quad m_{\mathrm{R}} \ddot{y}_C = \sum F_y \ , \quad J_{Cz'}\ddot{\varphi} = M_{Cz'}(\boldsymbol{F})}$$

- 这就是刚体的平面运动微分方程。
- 可以应用它求解刚体作平面运动时的动力学问题。

刚体的平面运动微分方程

例题　匀质圆柱的质量是 m ，半径是 r，从静止开始沿倾角是 φ 的固定斜面向下滚动而不滑动。试求圆柱质心 C 的加速度。



解：

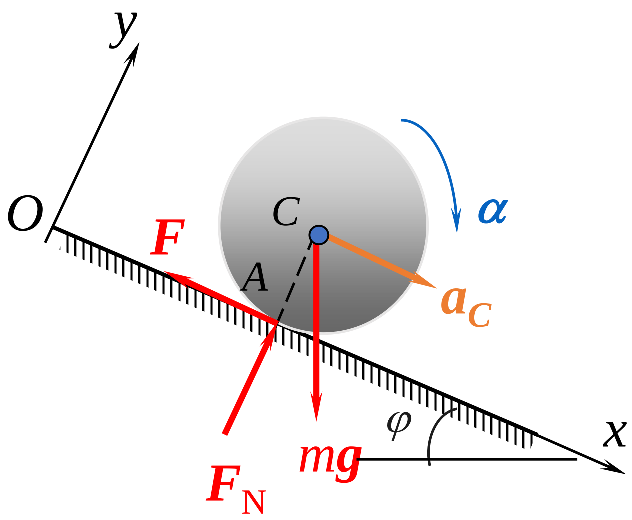
受力分析：圆柱受到$m\boldsymbol{g}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_N$

运动分析：圆柱质心沿斜面平动，

圆柱绕质心转动

由于圆柱只滚不滑，故有运动学关系

$$a_C = r\alpha$$

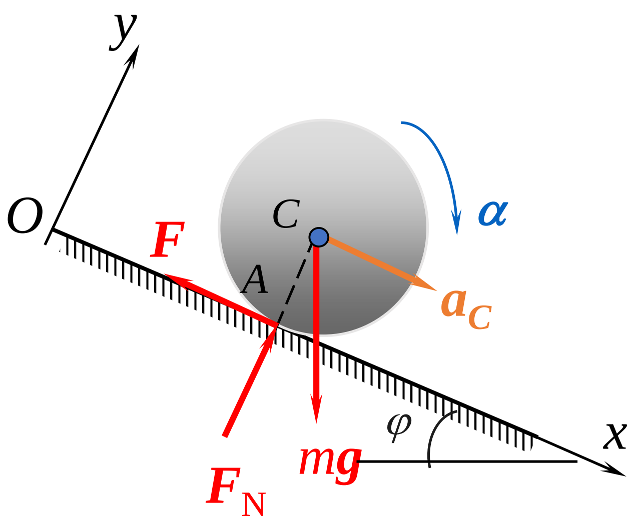


对于圆柱，列刚体平面运动微分方程

$$ma_C = mg\sin\varphi - F \qquad (1)$$

$$0 = F_N - mg\cos\varphi \qquad (2)$$

$$J_C\alpha = Fr \qquad (3)$$



由于圆柱只滚不滑，

$$a_C = r\alpha \qquad (4)$$

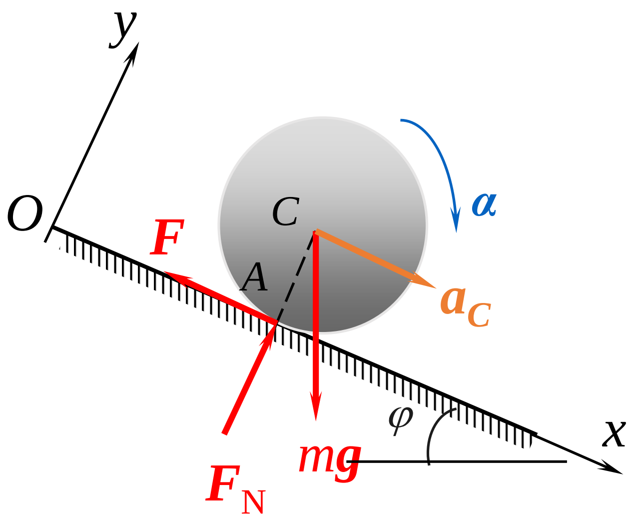
联立求解以上四个方程，并考虑到 $J_C = mr^2/2$，得到

$$a_C = \frac{2}{3}g\sin\varphi\,, \qquad F = \frac{1}{3}mg\sin\varphi\,, \qquad F_N = mg\cos\varphi$$

如果斜面与圆柱的静摩擦系数是 f_s，试求保证圆柱滚动而不滑动的条件。

保证圆柱滚动而不滑动的静力学条件 $F \le f_s F_N$

$$F = \frac{1}{3} mg \sin\varphi \ , \qquad F_N = mg\cos\varphi$$



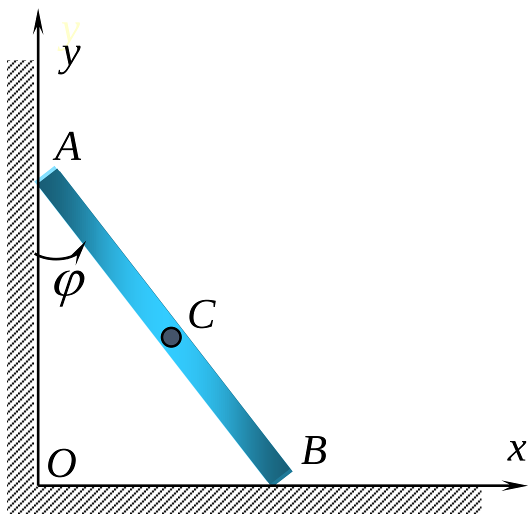
代入 F 和 F_N，则得

$$\frac{1}{3} mg \sin\varphi \le f_s mg\cos\varphi$$

$$\tan\varphi \le 3 f_s$$

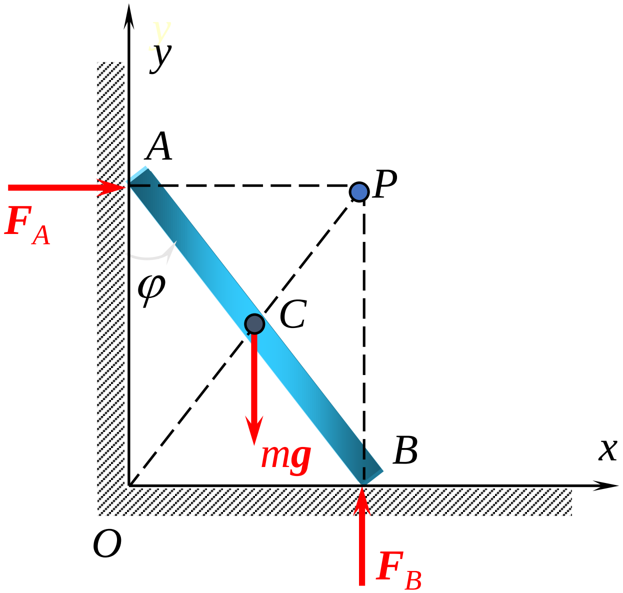
刚体的平面运动微分方程

例题 **均质细杆** AB **的质量是** m**，长度是** $2l$**，放在铅直面内，两端分别沿光滑的铅直墙壁和光滑的水平地面滑动。假设杆的初位置与墙成交角** φ_0**，初角速度等于零。试求杆沿铅直墙壁下滑时的角速度和角加速度。**



解:

受力如图所示。杆作平面运动，取坐标系 Oxy，则杆的运动微分方程可写成



$$m\ddot{x}_C = F_A \qquad \text{(a)}$$

$$m\ddot{y}_C = F_B - mg \qquad \text{(b)}$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F_B l \sin\varphi - F_A l \cos\varphi \qquad \text{(c)}$$

由几何关系知

$$x_C = l\sin\varphi \qquad \text{(d)}$$

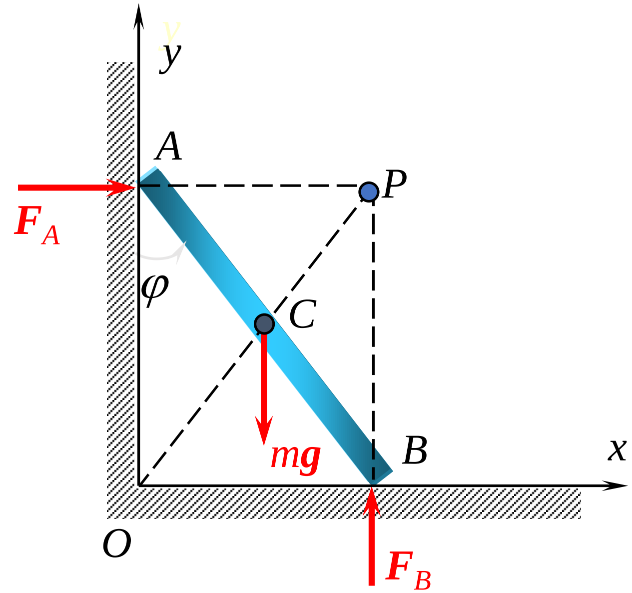
$$y_C = l\cos\varphi \qquad \text{(e)}$$

将式(d)和(e)对时间求导，得

$$\dot{x}_C = l\dot{\varphi}\cos\varphi \quad , \qquad \dot{y}_C = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\ddot{x}_C = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \qquad \text{(f)}$$

$$\ddot{y}_C = -l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi \qquad \text{(g)}$$



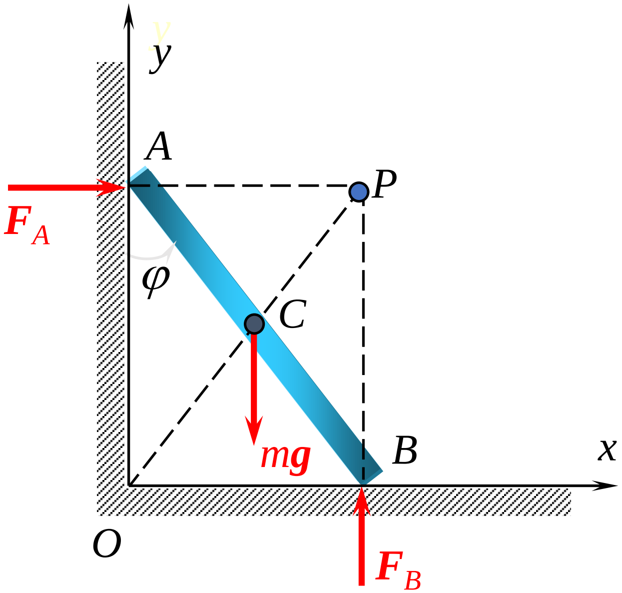
把 (f)**和**(g)**分别代入** (a)**和**(b)，**求出**F_A**和** F_B，**再把它们代入** (c)

$$J_C\ddot{\varphi} = F_B l\sin\varphi - F_A l\cos\varphi$$

最后得杆 AB **的角加速度**

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi \qquad \text{(h)}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi \qquad \text{(h)}$$



利用关系

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}$$

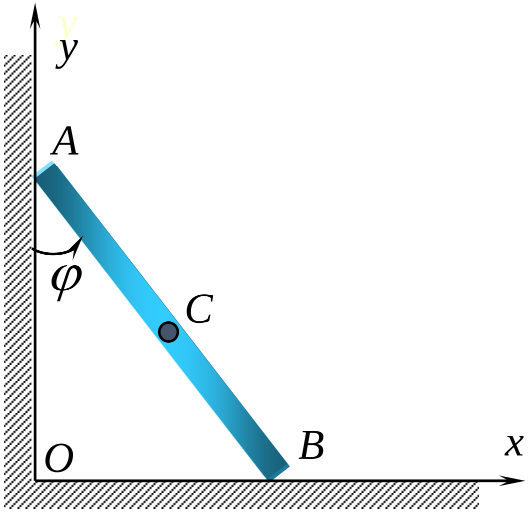
把上式化成积分

$$\int_0^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

求得杆*AB*的角速度

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)} \qquad \text{(i)}$$

思考：求当杆即将脱离墙时，杆与墙所成的夹角φ_1。



当杆即将脱离墙时，$F_A \to 0$。

以$F_A=0$代入微分方程，有$\ddot{x}_C=0$。再根据

$$\ddot{x}_C = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi \qquad \text{(h)}$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)} \qquad \text{(i)}$$

有 $$l\ddot{\varphi}\cos\varphi_1 = l\dot{\varphi}^2\sin\varphi_1$$

把(h) 和(i)的表达式在 $\varphi=\varphi_1$ 时的值代入上式，得关系

$$l\frac{3g}{4l}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = l\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)\sin\varphi_1$$

整理后，求得杆开始脱离墙时与墙所成的夹角

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\varphi_0\right)$$

亦可用下面方法求角速度和角加速度。

- **相对于瞬心的动量矩定理**

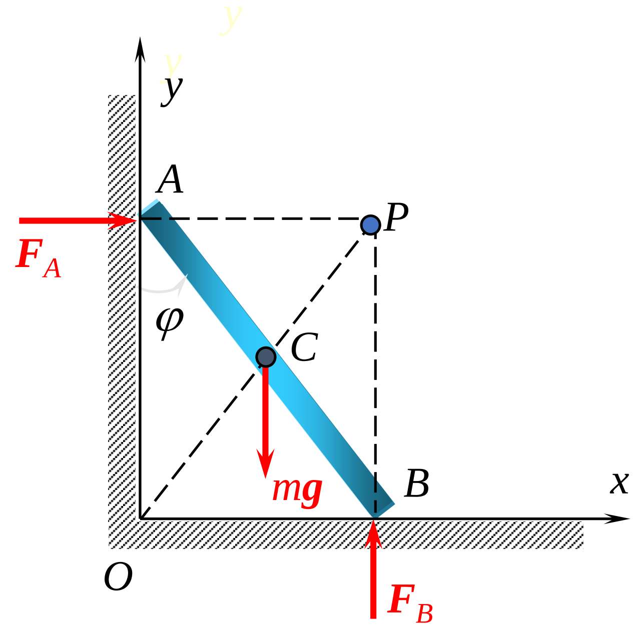
$$J_P\ddot{\varphi} = M_P,$$

其中 $J_P = \dfrac{1}{3}m\ (2l)^2,$

$$M_P = mgl\sin\varphi$$

解得

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\ \varphi$$



作业

- 习题11-6, 11-12, 11-15 , 11-25, 11-27, 11-28, 11-31