附录I 平面图形的几何性质

第 10 讲

前面已经接触到的几个截面几何性质

拉压： 横截面的面积 A，形心位置（简单截面形状）

扭转： 横截面的极惯性矩 I_{p}

截面几何性质只与截面的几何形状有关。

后续分析和计算中还会用到其他平面图形的几何性质：

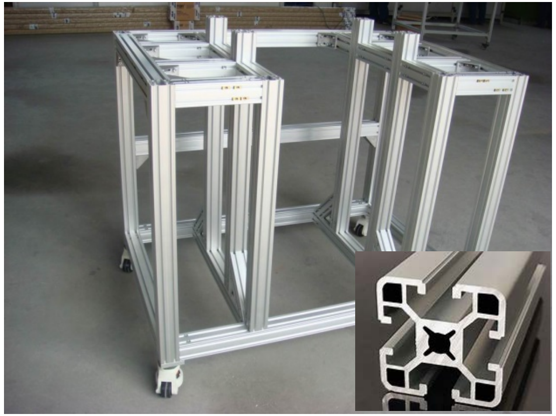
形心、静矩、惯性矩、惯性半径、惯性积、主惯性矩、形心主惯性矩等，并且截面形状更加多样。

圆形截面、矩形截面

工字形截面

L形截面

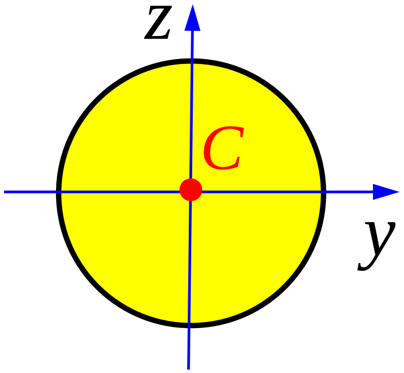
中空截面

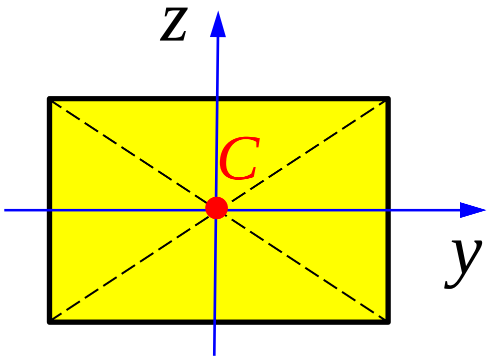


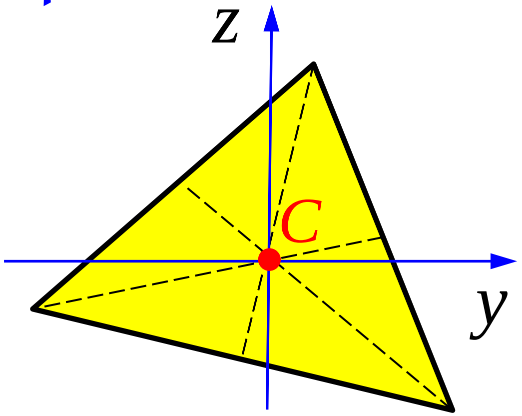
铝合金型材截面

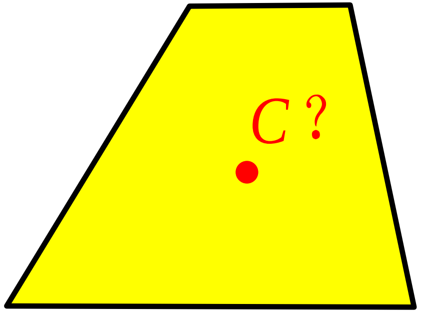
高铁桥板截面

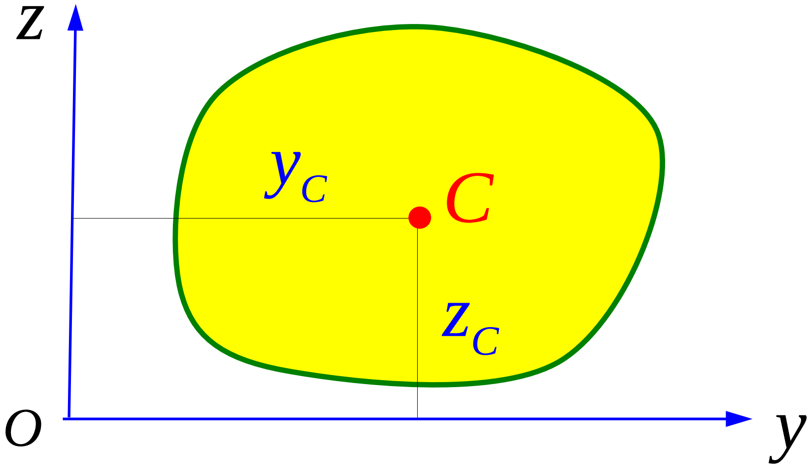
形心: 截面图形的几何中心



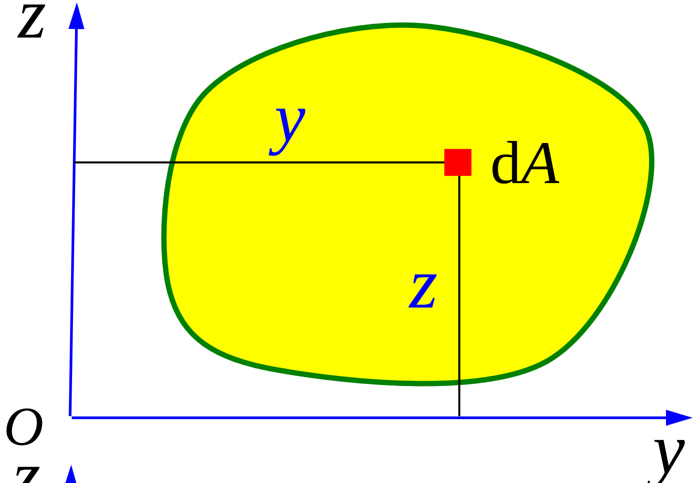








§ I.1 截面的静矩和形心

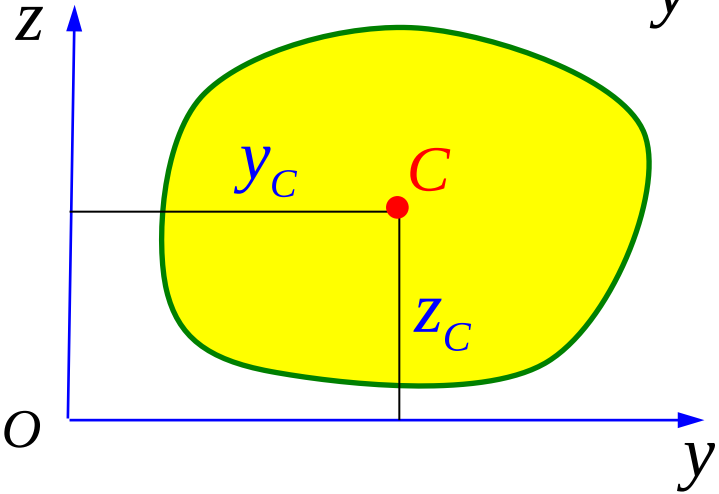


定义： $S_z = \int_A y \, dA$ 称为：对z (y) 的静矩或一次矩

$S_y = \int_A z \, dA$

单位：m³（cm³，mm³）

注意：静矩值可正、可负，也可为0。



形心坐标

$$y_C = \frac{\int_A y \, dA}{A} = \frac{S_z}{A}$$

$$z_C = \frac{\int_A z dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_z &= y_C A \\ S_y &= z_C A \end{aligned}}$$

例1 计算三角形截面对底边的静矩和形心。

$$S_y = \int_A z\mathrm{d}A$$

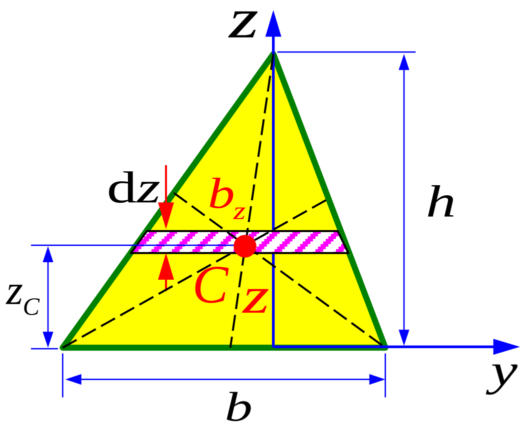
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}A &= b_z \mathrm{d}z \\ \frac{b_z}{b} &= \frac{h-z}{h} \end{aligned}\right\} \rightarrow \mathrm{d}A = \frac{b}{h}(h-z)\mathrm{d}z$$

$$S_y = \int_0^h z \cdot \tfrac{b}{h}(h-z)\,\mathrm{d}z$$

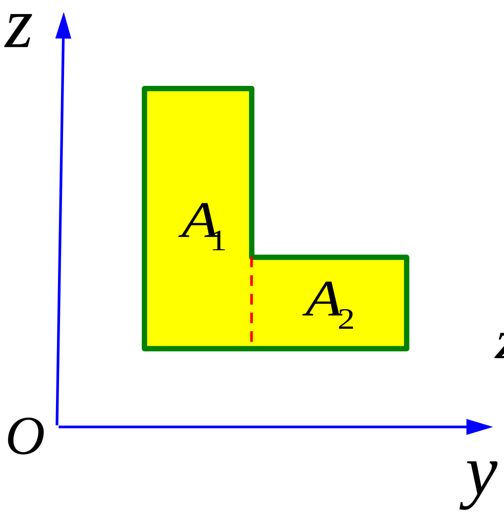
$$= \tfrac{b}{h}\left(h \cdot \tfrac{1}{2} z^2 \Big|_0^h - \tfrac{1}{3} z^3 \Big|_0^h\right) = \tfrac{1}{6} bh^2$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$

形心是三角形中线的交点！



组合截面的静矩和形心



$$y_c A = y_c(A_1 + A_2) \quad y_{c1}A_1 + y_{c2}A_2$$

$$S_z = \int_A y\,\mathrm{d}A = \int_{A_1} y\,\mathrm{d}A + \int_{A_2} y\,\mathrm{d}A$$

$$S_y = \int_A z\,\mathrm{d}A = \int_{A_1} z\,\mathrm{d}A + \int_{A_2} z\,\mathrm{d}A$$

$$z_c A = z_c(A_1 + A_2) \quad z_{c1}A_1 + z_{c2}A_2$$

$$y_c = \frac{y_{c1}A_1 + y_{c2}A_2}{A_1 + A_2}$$

$$z_c = \frac{z_{c1}A_1 + z_{c2}A_2}{A_1 + A_2}$$

组合截面的静矩和形心

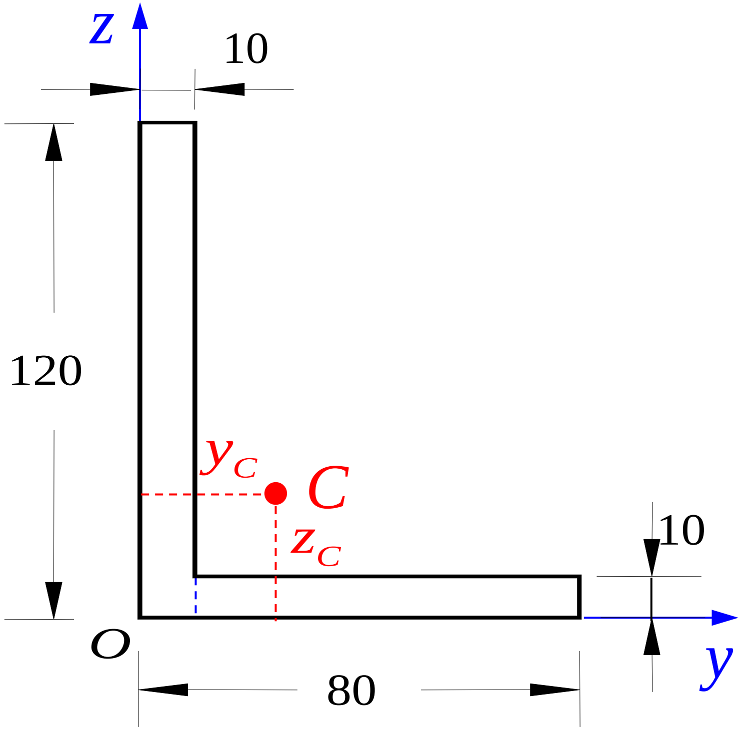
$$S_z = \int_A y \mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{n} y_{ci} A_i$$

$$S_y = \int_A z \, \mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{n} z_{ci} A_i$$

$$\boxed{y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ci} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}}$$

$$\boxed{z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{ci} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}}$$

例2　确定图示图形形心C的位置。



解：建立坐标系如图

$$y_C = \frac{S_z}{A}$$

$$= \frac{10\times120\times5 + 70\times10\times(10+35)}{1200+700}$$

$$= 19.7\text{mm}$$

$$z_C = \frac{S_y}{A}$$

$$= \frac{10\times120\times60 + 70\times10\times5}{1200+700}$$

$$= 39.7\text{mm}$$

§ I.2 惯性矩和惯性半径

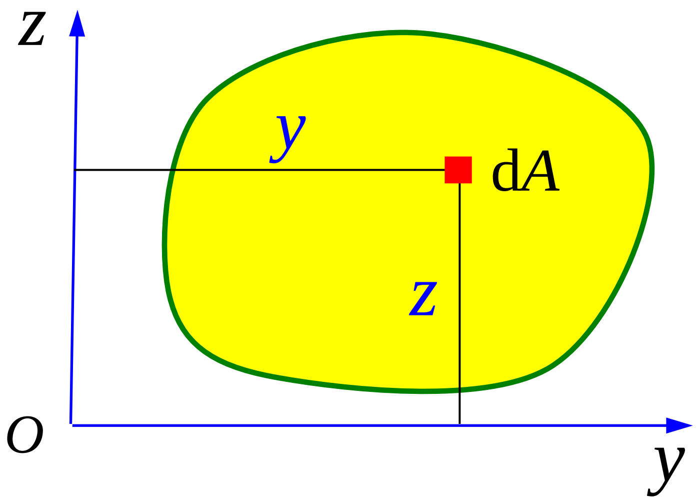
一、惯性矩

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A$$

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A$$

称为对y轴或z轴的惯性矩

（或称截面二次轴矩）



单位：m^4（cm^4，mm^4）

注：惯性矩恒为正值。

二、惯性半径

工程中常把惯性矩表示为平面图形的面积与某一长度平方的乘积，即

$$I_y = Ai_y^2,\ I_z = Ai_z^2 \quad \text{或} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}},\quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

i_y和i_z分别称为平面图形对y轴和z轴的惯性半径。

三、极惯性矩

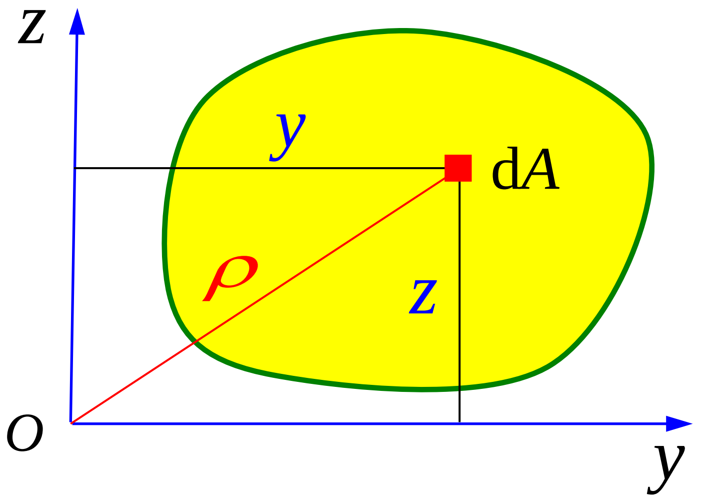
$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

称为截面对O点的极惯性矩

（或称截面的二次极矩）

$$\because \quad \rho^2 = y^2 + z^2$$

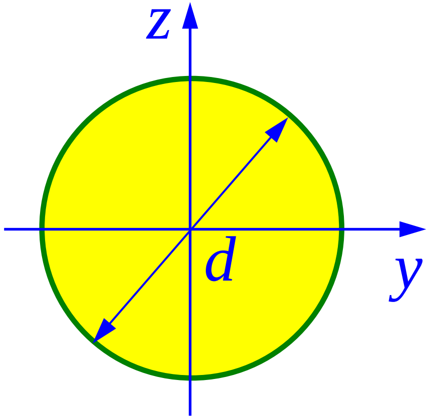
$$\therefore \quad I_p = I_y + I_z$$



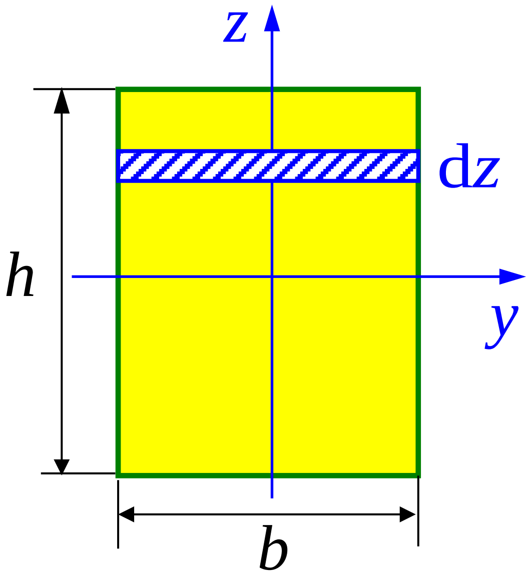
圆形截面

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

$$= \int_0^{d/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \mathrm{d}\rho = \frac{1}{32}\pi d^4$$



例3 求图示矩形对对称轴y、z的惯性矩



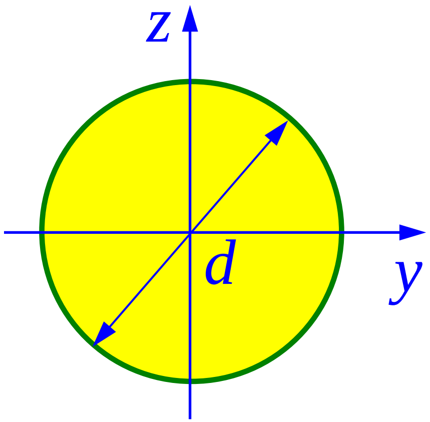
解：$$I_y = \int_A z^2 \,\mathrm{d}A$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b\mathrm{d}z = \frac{1}{3} b z^3 \Big|_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \frac{1}{3} b\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{bh^3}{12}$$

同理：$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$

例4 求图示圆平面对y、z轴的惯性矩



解：$I_y = I_z,\qquad I_{\mathrm{p}} = I_y + I_z$

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} I_{\mathrm{p}}$$

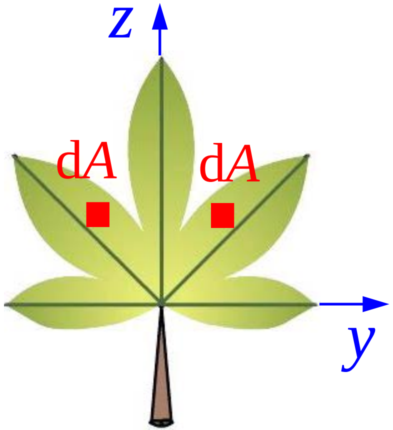
$$I_{\mathrm{p}} = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \frac{1}{32}\pi d^4$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} I_{\mathrm{p}} = \frac{1}{64}\pi d^4$$

§ I.3　惯性积

$$I_{yz} = \int_A yz \, \mathrm{d}A$$

称为截面对y、z轴的惯性积

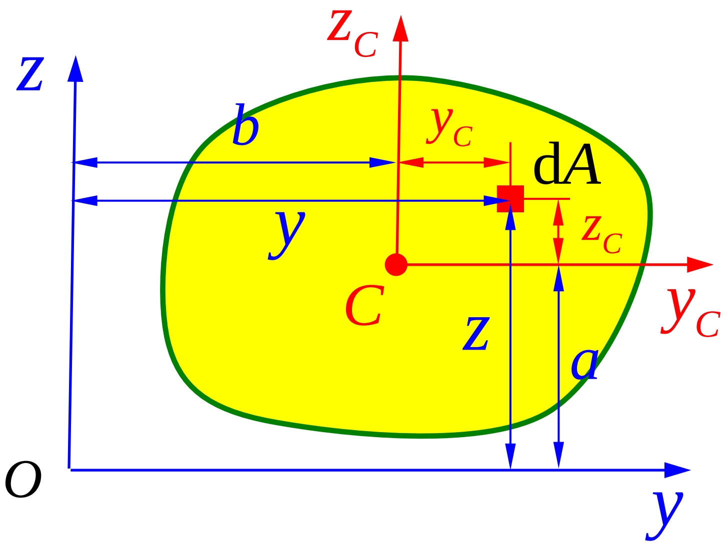


注：惯性积可正、可负，也可为0。

如果所选的正交坐标轴中，有一个坐标轴是截面的对称轴，则其惯性积必等于零，即

$$I_{yz} \equiv 0$$

§ I.4 平行移轴公式



坐标转换公式：

$$\boxed{\begin{aligned} y &= y_c + b \\ z &= z_c + a \end{aligned}}$$

y–z 坐标系中

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A$$

$$I_z = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A$$

$$I_{yz} = \int_A yz \, \mathrm{d}A$$

y_c–z_c坐标系中

$$I_{y_c} = \int_A z_c^{\,2} \, \mathrm{d}A$$

$$I_{z_c} = \int_A y_c^{\,2} \, \mathrm{d}A$$

$$I_{y_c z_c} = \int_A y_c z_c \, \mathrm{d}A$$

$$\boxed{z = z_c + a}$$

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A$$

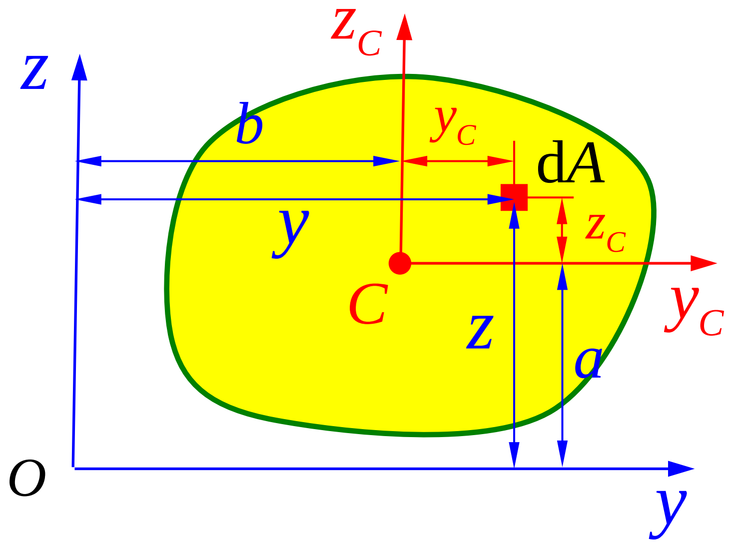
$$= \int_A (z_c + a)^2 \, \mathrm{d}A$$

$$= \int_A z_c^{\ 2} \, \mathrm{d}A + 2a \underbrace{\boxed{\int_A z_c \, \mathrm{d}A}}_{} + a^2 \int_A \mathrm{d}A$$

$$\int_A z_c \, \mathrm{d}A = 0$$

$$= I_{y_c} + a^2 A$$

即有： $I_y = I_{y_C} + a^2 A$



$$\boxed{y = y_c + b}$$

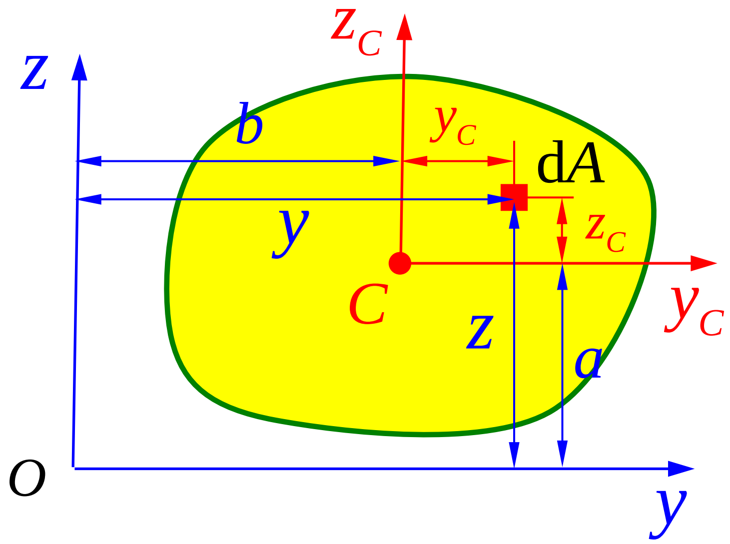
$$I_z = \int_A y^2 \,\mathrm{d}A$$

$$= \int_A (y_c + b)^2 \,\mathrm{d}A$$

$$= \int_A y_c{}^2 \,\mathrm{d}A + 2b \overbrace{\boxed{\int_A y_c \,\mathrm{d}A}}^{0} + b^2 \int_A \mathrm{d}A$$

$$= I_{z_c} + b^2 A$$

即有：$I_z = I_{z_C} + b^2 A$



$$\boxed{y = y_c + b, \quad z = z_c + a}$$

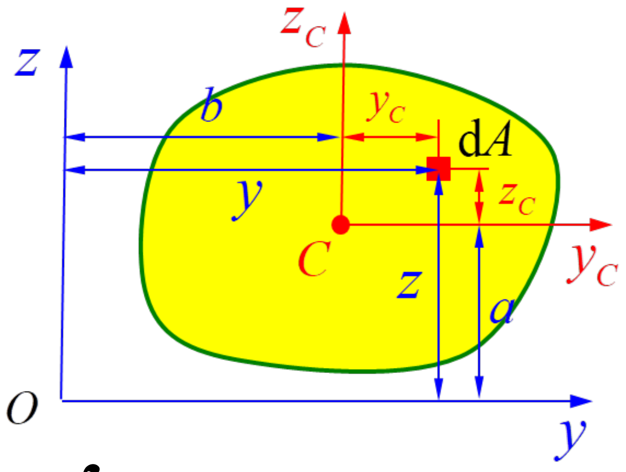
$$I_{yz} = \int_A yz\,\mathrm{d}A$$

$$= \int_A (y_c + b)(z_c + a)\,\mathrm{d}A$$

$$= \int_A y_c z_c\,\mathrm{d}A + a\underbrace{\boxed{\int_A y_c\,\mathrm{d}A}}_{=0} + b\underbrace{\boxed{\int_A z_c\,\mathrm{d}A}}_{=0} + ab\int_A \mathrm{d}A$$

$$= I_{y_c z_c} + abA$$

即有： $I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA$

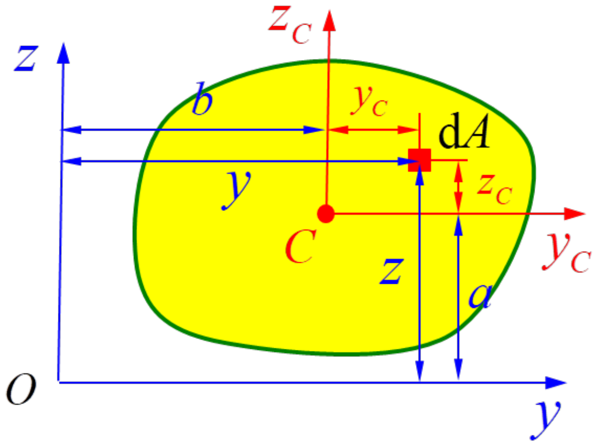


平行移轴公式

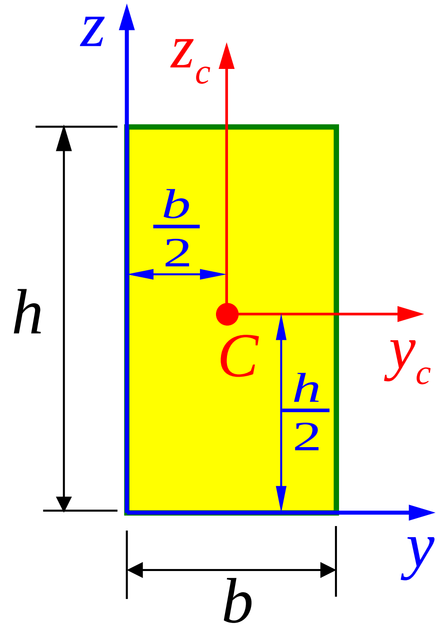
$$I_y = I_{y_C} + a^2 A$$

$$I_z = I_{z_C} + b^2 A$$

$$I_{yz} = I_{y_C z_C} + abA$$



例5 求矩形截面对y、z坐标轴的惯性矩和惯性积



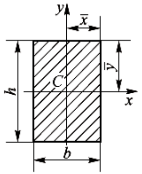
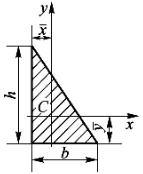
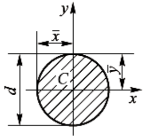
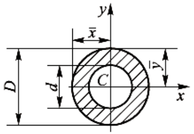
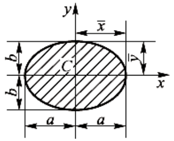
解：确定形心位置，建立$y_C C z_C$坐标系

$$I_y = I_{y_c} + \left(\tfrac{h}{2}\right)^2 A = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

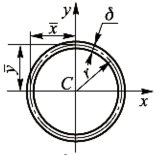
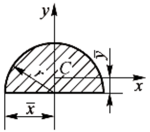
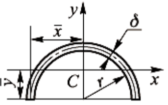
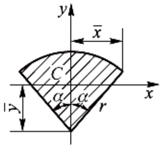
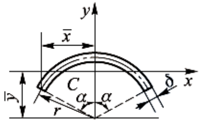
$$I_z = I_{z_c} + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 A = \frac{hb^3}{12} + \frac{hb^3}{4} = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{yz} = I_{y_c z_c} + \tfrac{h}{2} \cdot \tfrac{b}{2} \cdot A = \frac{h^2 b^2}{4}$$

附录II　常用截面的平面图形几何性质

截面形状和原点在形心的坐标轴	面积	至形心 C 的距离		惯性矩		惯性积
	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	I_x	I_y	I_{xy}
	bh	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$-\frac{b^2h^2}{72}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0
	$\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$	$\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$	0
	πab	a	b	$\frac{\pi ab^3}{4}$	$\frac{\pi ba^3}{4}$	0

续表

截面形状和原点在形心的坐标轴	面积	至形心 C 的距离		惯性矩		惯性积
	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	I_x	I_y	I_{xy}
 $\delta \ll r$	$2\pi r\delta$	r	r	$\pi r^3\delta$	$\pi r^3\delta$	0
	$\frac{\pi r^2}{2}$	r	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{(9\pi^2-64)r^4}{72\pi}$ $\approx 0.109\,8r^4$	$\frac{\pi r^4}{8}$	0
 $\delta \ll r$	$\pi r\delta$	r	$\frac{2r}{\pi}$	$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\right)r^3\delta$	$\frac{\pi}{2}r^3\delta$	0
 $\alpha \ll \pi/2$	αr^2	$r\sin\alpha$	$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	$\frac{r^4}{4}\left(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\frac{16\sin^2\alpha}{9\alpha}\right)$	$\frac{r^4}{4}(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$	0
 $\delta \ll r$	$2\alpha r\delta$	$r\sin\alpha$	$\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	$r^3\delta\left(\frac{2\alpha+\sin 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\alpha}{\alpha}\right)$	$r^3\delta(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$	0

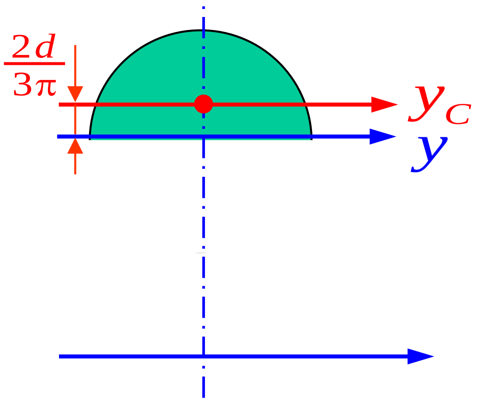
例6 求图示平面图形对y 和z 轴的惯性矩

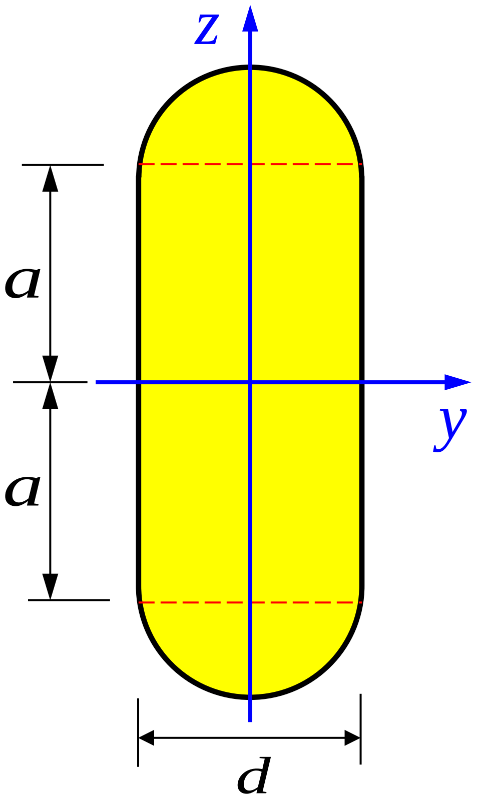
解：
$$I_z=\frac{2a\cdot d^3}{12}+2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi d^4}{64}\right)$$

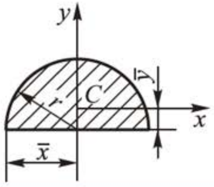
$$=\frac{(3\pi d+32a)}{192}d^3$$

$$I_y=\frac{d(2a)^3}{12}$$

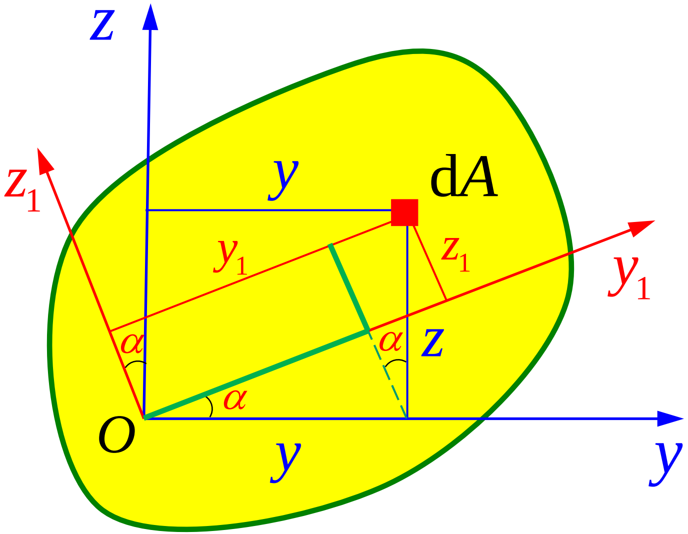
$$+\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\pi d^4}{64}-\frac{\pi d^2}{8}\left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2+\frac{\pi d^2}{8}\left(\frac{2d}{3\pi}+a\right)^2\right\}\times 2$$





截面形状和原点在形心的坐标轴	面积	至形心 C 的距离		惯性矩		惯性积
	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	I_x	I_y	I_{xy}
	$\frac{\pi r^2}{2}$	r	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{(9\pi^2-64)r^4}{72\pi}$ $\approx 0.1098r^4$	$\frac{\pi r^4}{8}$	0

§ I.5　转轴公式　主惯性轴



α—逆时针转为正

坐标转换公式：

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= y\cos\alpha + z\sin\alpha \\ z_1 &= z\cos\alpha - y\sin\alpha \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A z_1^2\,\mathrm{d}A \\ &= \int_A (z\cos\alpha - y\sin\alpha)^2\,\mathrm{d}A \\ &= \int_A (z^2\cos^2\alpha - 2yz\sin\alpha\cos\alpha + y^2\sin^2\alpha)\,\mathrm{d}A \\ &= I_y\cos^2\alpha + I_z\sin^2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha \\ &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= y\cos\alpha + z\sin\alpha \\ z_1 &= z\cos\alpha - y\sin\alpha \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
I_{z_1} &= \int_A {y_1}^2 \,\mathrm{d}A = \int_A (y\cos\alpha + z\sin\alpha)^2 \,\mathrm{d}A \\
&= \int_A (y^2\cos^2\alpha + 2yz\sin\alpha\cos\alpha + z^2\sin^2\alpha)\,\mathrm{d}A \\
&= I_z\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha \\
&= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{y_1z_1} &= \int_A y_1 z_1 \,\mathrm{d}A = \int_A (y\cos\alpha + z\sin\alpha)(z\cos\alpha - y\sin\alpha)\,\mathrm{d}A \\
&= \int_A [(z^2 - y^2)\sin\alpha\cos\alpha + yz(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]\mathrm{d}A \\
&= \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha
\end{aligned}$$

主惯性轴和主惯性矩

令：$I_{y_1 z_1}(\alpha)=\dfrac{I_y-I_z}{2}\sin 2\alpha+I_{yz}\cos 2\alpha=0$

$$\tan(2\alpha_0)=-\frac{2I_{yz}}{I_y-I_z}$$

一定存在α_0，使得

$$I_{y_1 z_1}(\alpha_0)=0$$

此时对应的坐标轴 y_0、z_0称为**主惯性轴**。

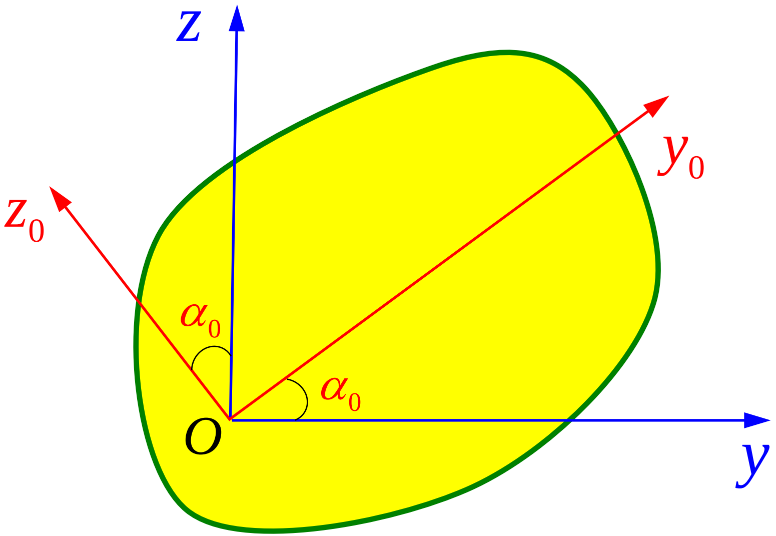
对**主惯性轴** y_0、z_0的惯性矩称为**主惯性矩**。

转轴公式

$$I_{y_1}=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha-I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_{z_1}=\frac{I_y+I_z}{2}-\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha+I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_{y_1 z_1}=\frac{I_y-I_z}{2}\sin 2\alpha+I_{yz}\cos 2\alpha$$



形心主惯性轴和形心主惯性矩

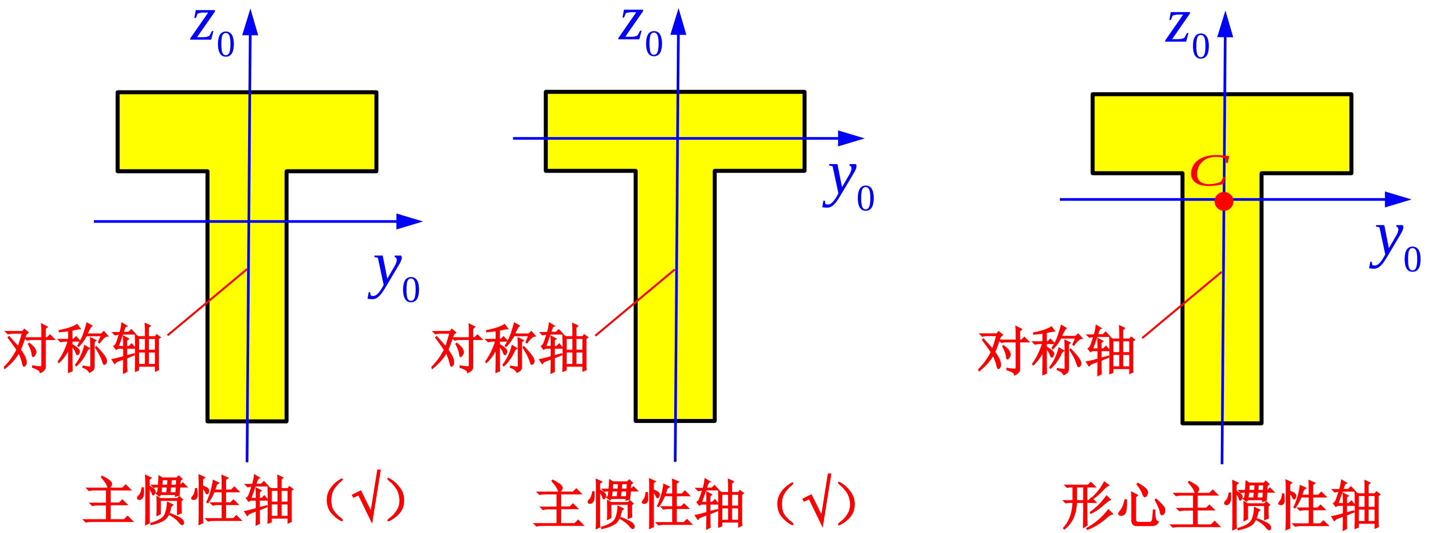
过形心的主惯性轴称为形心主惯性轴。

任意平面图形必定存在一对相互垂直的形心主惯性轴。

平面图形对形心主惯性轴的惯性矩称为形心主惯性矩。

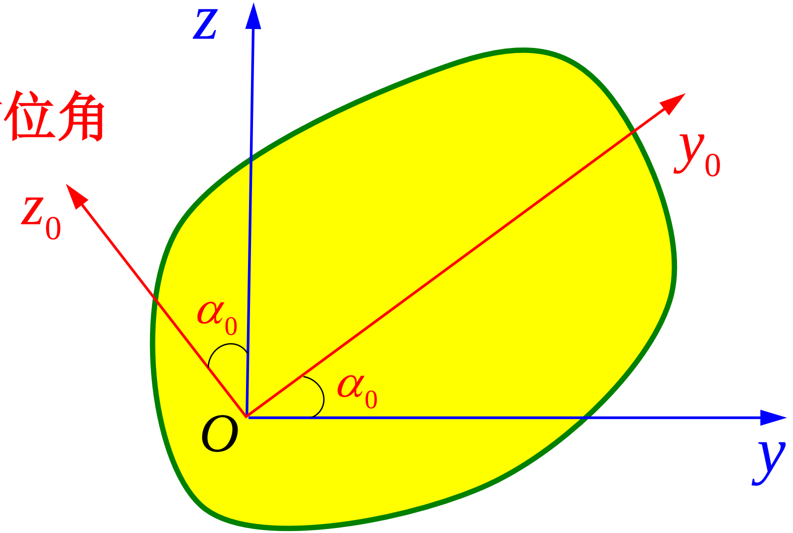
说明：具有一个或两个对称轴的正交坐标轴一定是平面图形的主惯性轴。

（因为此时恒有 $I_{y_0 z_0} \equiv 0$ ）



主惯性轴方位：

设正交坐标轴 y_0、z_0为主惯性轴，其方位角为α_0，则



$$I_{y_1 z_1}(\alpha) = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tan(2\alpha_0) = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

$2\alpha_0$在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 范围内肯定有一根，有α_0在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 范围内肯定有一根，得其中一根主惯性轴的方位角α_0；取 $\alpha_0+\frac{\pi}{2}$ 即得另一根主惯性轴的方位角。

计算主惯性矩的大小：

$$I_{y_1 z_1}(\alpha)=0 \Longrightarrow \alpha_0=\frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{2I_{yz}}{I_y-I_z}\right)$$

$$I_{y_1}=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha_0-I_{xy}\sin 2\alpha_0$$

$$I_{z_1}=\frac{I_y+I_z}{2}-\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha_0+I_{xy}\sin 2\alpha_0$$

考察惯性矩的极值：

$$I_{y_1}=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha-I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\frac{dI_{y_1}}{d\alpha}=0 \Longrightarrow -(I_y-I_z)\sin 2\alpha-2I_{yz}\cos 2\alpha=0$$

$$\frac{dI_{z_1}}{d\alpha}=0 \Longrightarrow (I_y-I_z)\sin 2\alpha+2I_{yz}\cos 2\alpha=0$$

$$I_{z_1}=\frac{I_y+I_z}{2}-\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha+I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\Longrightarrow \frac{(I_y-I_z)}{2}\sin 2\alpha+I_{yz}\cos 2\alpha=0$$

惯性矩达到极值时正好对应 $I_{y_1 z_1}=0$ 的情形！

$$I_{y_1 z_1}=\frac{I_y-I_z}{2}\sin 2\alpha+I_{yz}\cos 2\alpha \equiv 0$$

极值的惯性矩即是主惯性矩！

计算主惯性矩的大小（另一种方法）：

$$I_{y_1}=\frac{I_y+I_z}{2}+\boxed{\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha-I_{xy}\sin 2\alpha}$$

$$I_{z_1}=\frac{I_y+I_z}{2}\boxed{-\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha+I_{xy}\sin 2\alpha}$$

$$I_{\max}=\frac{I_y+I_z}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}$$

$$I_{\min}=\frac{I_y+I_z}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}$$

$\boxed{\text{辅助角公式}}$

$$y=a\cos\theta\pm b\sin\theta$$

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta\mp\varphi)$$

$$\varphi=\arctan(b/a)$$

最大值 $\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}$

最小值 $-\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}$

小　结

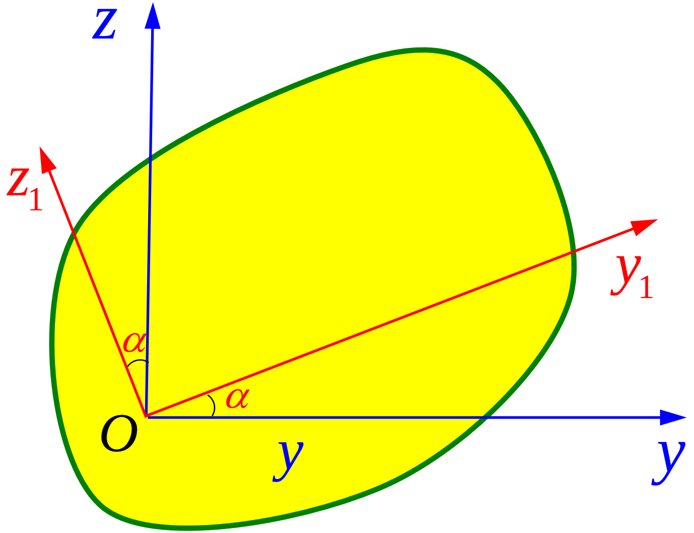
1. I_{y_1}和I_{z_1}同时达到极值。其中一个是极大值，另一个必为极小值。

2. I_{y_1}和I_{z_1}达到极值时。恒有$I_{y_1z_1}=0$，即此时y_1和z_1轴为主惯性轴。

3. 恒有关系式 $I_{y_1}+I_{z_1}=I_y+I_z=I_p$

$$I_{y_1}=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha-I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{z_1}=\frac{I_y+I_z}{2}-\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha+I_{yz}\sin 2\alpha$$



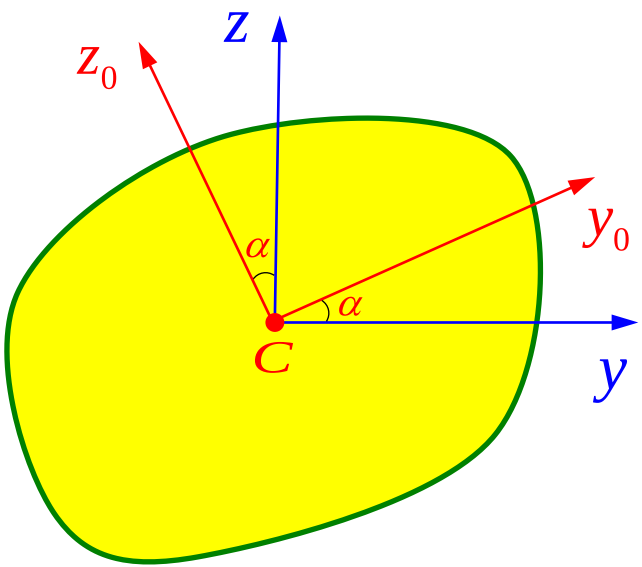
确定形心主惯性轴的位置及形心主惯性矩大小的步骤：

1）确定形心位置C；

2）通过形心C 建立参考坐标 yCz，

求出 I_y、I_z、I_{yz}；

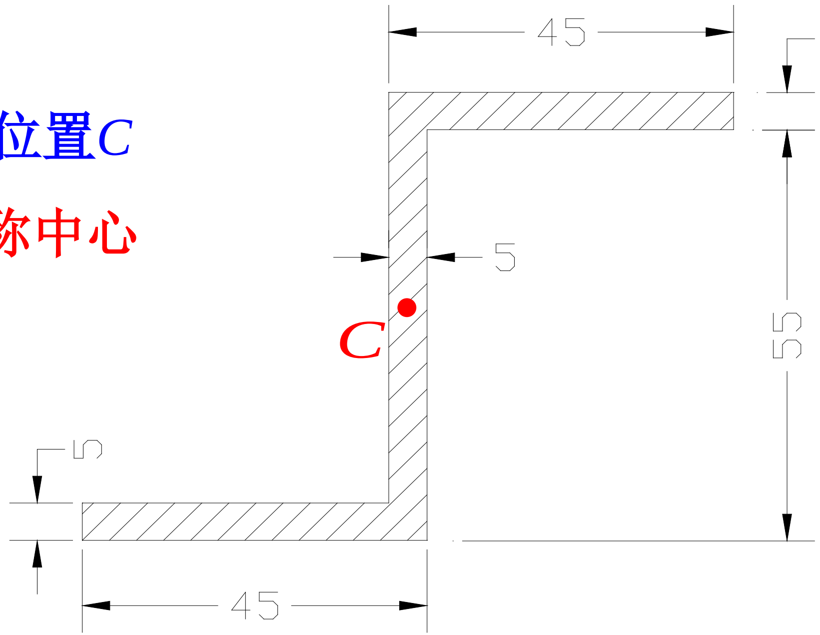
3）求出α_0 及 I_{y0}、I_{z0} 。



例7 求图示平面图形形心主惯性轴的方位及形心主惯性矩的大小。

解： 1）确定形心位置C

形心在反对称中心



单位：mm

2）通过形心C 建立参考坐标 yCz；

求出 I_y、I_z、I_{yz} ；

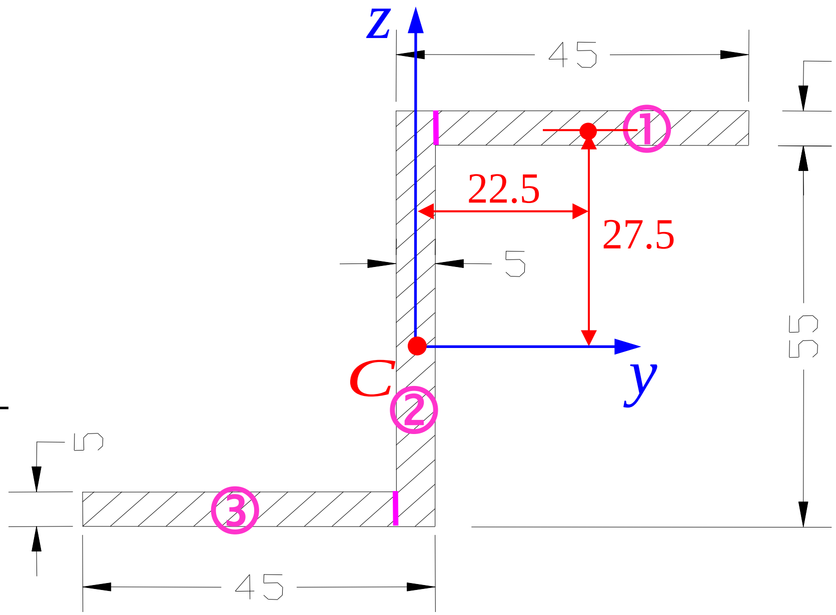
（I）计算对y轴的惯性矩：

将平面图形分成①、②和③三个矩形

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 2I_y^{(1)} + I_y^{(2)}$$

$$= 2\times\left(\frac{40\times5^3}{12} + 40\times5\times27.5^2\right) + \frac{5\times60^3}{12}$$

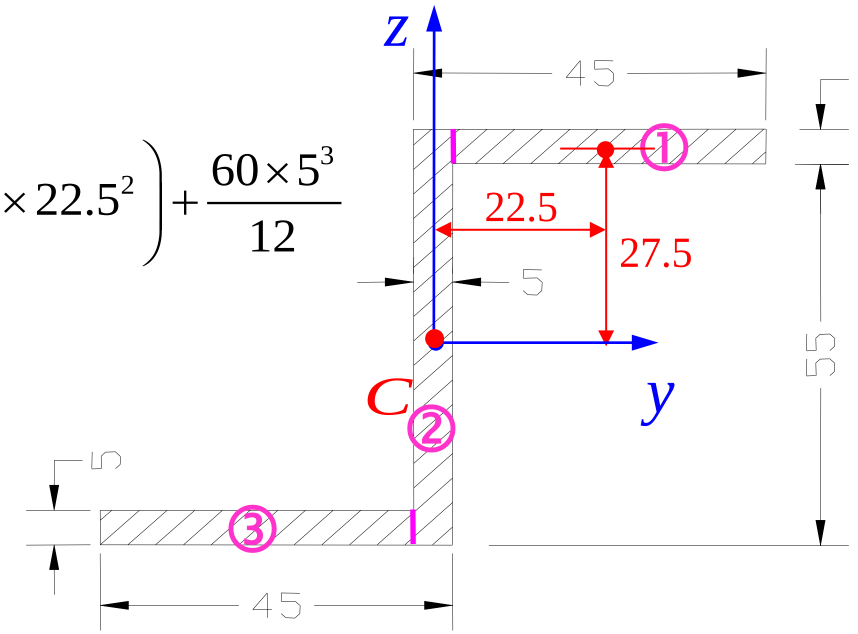
$$= 393333\ \text{mm}^4 = 39.33\ \text{cm}^4$$



（II）计算对z轴的惯性矩：

$$I_z = 2I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = 2\times\left(\frac{5\times 40^3}{12} + 40\times 5\times 22.5^2\right) + \frac{60\times 5^3}{12}$$

$$= 256458\,\text{mm}^4 = 25.65\,\text{cm}^4$$



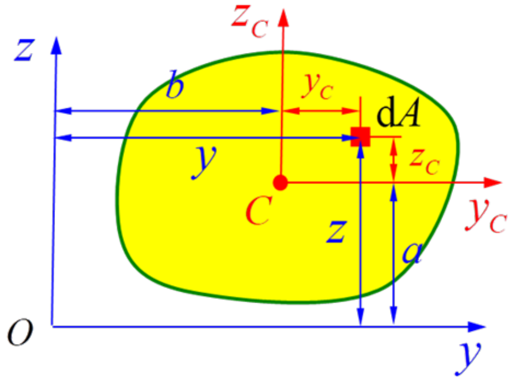
（III）计算惯性积：

$$I_{yz} = I_{yz}^{(1)} + I_{yz}^{(2)} + I_{yz}^{(3)}$$

$$= 40\times 5\times 27.5\times 22.5 + 0$$

$$+ 40\times 5\times(-27.5)\times(-22.5)$$

$$= 247500\,\text{mm}^4 = 24.75\text{cm}^4$$



$$I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA$$

形心主惯性轴的方位：

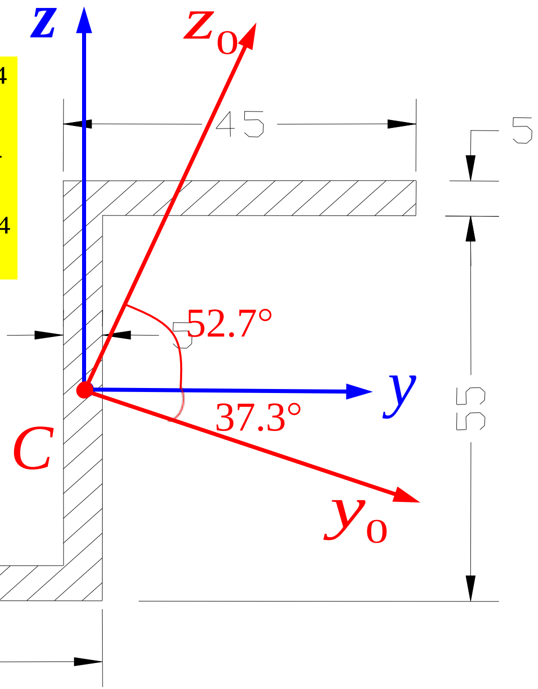
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = -\frac{2\times 24.75}{39.33-25.65} = -3.618$$

$I_y = 39.33\,\text{cm}^4$

$I_z = 25.65\,\text{cm}^4$

$I_{yz} = 24.75\,\text{cm}^4$

$\alpha_0 = -37.3°$ α 逆时针转为正



形心主惯性矩的大小：

$$I_{y_0} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha_0 - I_{yz}\sin 2\alpha_0$$

$$I_{z_0} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha_0 + I_{yz}\sin 2\alpha_0$$

$\alpha_0 = -37.3°$

$I_{y_0} = 58.17\,\text{cm}^4 = I_{max}$ 截面离开轴越远，惯性矩越大！

$I_{z_0} = 6.81\,\text{cm}^4 = I_{min}$

谢谢各位！

作业

P361: I.2(b)

P362-363: I.9 (b)、I.10

对应第6版的题号 P349-350: I.2(b); P351: I.9 (b); P352: I.10

下次课讲 第四章 弯曲内力