1. 随机误差

指在同一条件下，对同一被测几何量进行多次重复测量时，绝对值和符号以不可预定的方式变化着的误差称为随机误差。

从表面看，随机误差没有任何规律，表现为纯粹的偶然性，因此也讲其称为偶然误差。

2. 随机误差的特点

在一定测量条件下对同一值进行大量重复测量时，总体随机误差的产生满足统计规律，即具有有界性、对称性、抵偿性、单峰性。因此，可以分析和估算误差值的变动范围，并通过取平均值的办法来减小其对测量结果的影响。

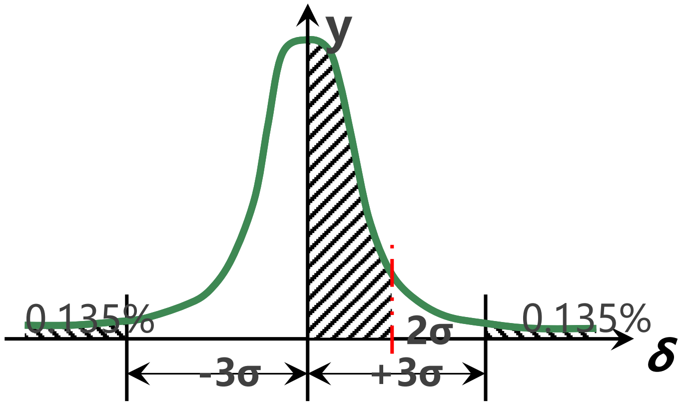
正态分布曲线的两个基本参数是平均值 $\bar{x}$ 和标准偏差 σ。$\bar{x}$ 决定曲线的位置，σ 决定曲线的形状，它并不是一个具体的偏差，而只表明随机误差的分散程度，σ 越小，曲线越陡，随机误差分布越集中，测量越精密。

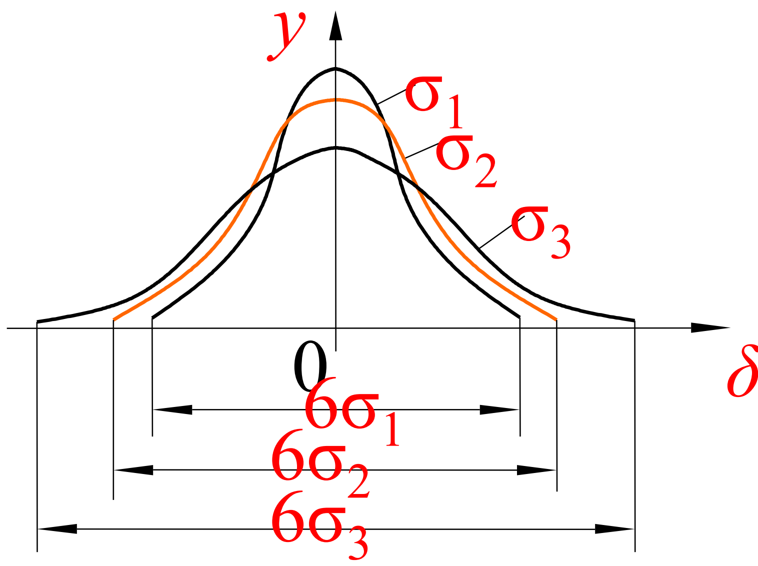
标准偏差σ是反映测量列数值分散程度的一项指标，

是测量列中单次测量值（任一测得值）的标准偏差。

3. 单次测量的标准偏差 σ

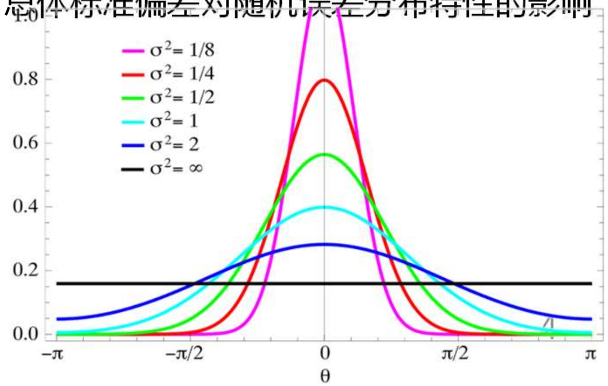
- 标准偏差σ，它反映了测量值的离散程度，是测量值*x* *的正态分布函数的一个重要参数。*
- σ越小，曲线峰值越高，图形越尖锐，表明测量值数据集中，重复性好。





不同的σ对应不同形状的正态分布曲线，σ越小，y_{max}值越大，曲线越陡，随机误差越集中，即测得值分布越集中，测量精密度越高；σ越大，y_{max}值越小，曲线越平坦，随机误差越分散，即测得值分布越分散，测量精密度越低。图所示为$\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$时三种正态分布曲线，因此，σ可作为表征各测得值的精度指标。

总体标准偏差对随机误差分布特性的影响



4. 单次测量的极限误差值

- 由于超出$\delta=\pm3\sigma$的概率已很小，故在实践中常认为$\delta=\pm3\sigma$的概率$P\approx1$。从而将$\pm3\sigma$看作是单次测量的随机误差的极限值，将此值称为极限误差，记作

$$\delta_{\lim}=\pm3\sigma=\pm3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}}$$

即单次测量的测量结果为:

$$X=X_i\pm\delta_{\lim}=X_i\pm3\sigma$$

式中 x_i 为某次测得值。

极限误差Δ $\Delta=3\sigma$

$$\int_{-3\sigma}^{+3\sigma}f(\delta)d\delta=p(-3\sigma<\delta<+3\sigma)=99.7\%$$

从上式可见，随机误差绝对值大于3σ的概率很小，只有0.3%，出现的可能性很小。因此定义:

$$\Delta=3\sigma$$

5. 测量列算术平均值的标准偏差

- 相同条件下，对同一被测量，将测量列分为若干组，每组进行*n*次的测量称为多次测量。
- 标准偏差σ代表一组测得值中任一测得值的精密程度，但在多次重复测量中是以算术平均值作为测量结果的。
- 因此，更重要的是要知道算术平均值的精密程度，可用算术平均值的标准偏差表示。
- 根据误差理论，测量列算术平均值的标准偏差用下式计算

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

6. 多次测量的测量结果

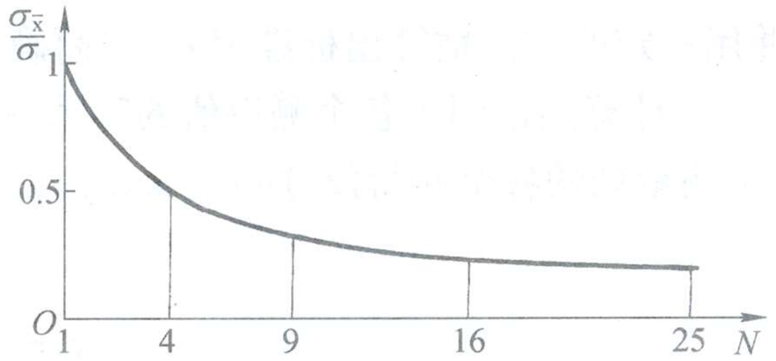
根据误差理论，测量列算术平均值的标准偏差与测量列单次测量值的标准偏差存在如下关系：

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

说明测量次数越多，$\sigma_{\bar{x}}$越小，测量精密度就越高。但当σ一定时，N>10以后，$\sigma_{\bar{x}}$减小已很缓慢，故一般取N=10～15次为宜。

多次测量的测量结果可表示为

$$x_e = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}}$$



$\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sigma}$的关系

7. 随机误差的处理过程

1）采用多次（一般为5-15次）重复测量，减少随机误差的影响。

2）取多次测量的算术平均值作为测量结果，以提高测量精度。

若在相同条件下，重复测量n次，

单次测量的标准偏差为σ　　一组测得值中任一测得值的精密程度

则n次测量的算术平均值标准偏差 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ 　算术平均值的精密程度

测量结果为 $x_e = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}}$

例：对一轴进行10次测量，其测得值列表如下，求测量结果。

x_i (mm)
50.454
50.459
50.459
50.454
50.458
50.459
50.456
50.458
50.458
50.455
$\bar{x}$=50.457

10次测量的极限误差

解:1）求算术平均值$\bar{x}$；

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i \quad =50.457\text{mm}$$

2）求残余误差；

$$\sum v_i=0,\quad \sum v_i^2=38\mu\text{m}$$

3）求单次测量的标准偏差σ；

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2}=2.05\mu\text{m}$$

单次测量极限误差

$$x_e = x_i \pm 3\sigma$$

4）求算术平均值的标准偏差$\sigma_{\bar{x}}$；

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2.05}{\sqrt{10}}=0.65\mu\text{m}$$

$$\pm 3\sigma_{\bar{x}}=\pm 1.95\mu\text{m}$$

5）得测量结果

$$l=\bar{x}\pm 3\sigma_{\bar{x}}=50.457\pm \mathbf{0.002mm}$$

等精度测量列的数据处理

课堂作业

1．用某一测量方法在重复条件下对某一试件轴测量了四次，其测得值如下（单位mm）：20.001，20.002，20.000，19.997。若已知测量的单次测量的标准偏差值为1μm。
求第三次测量的测量结果表示。

$$X = X_i \pm \delta_{\lim} = X_i \pm 3\sigma = 20.000 \pm 0.003\text{mm}$$

2．用某一测量方法在重复条件下对某一试件测量了四次，其测得值如下（单位mm）：20.001，20.002，20.000，19.997。若已知测量的**单次测量的极限误差值为±3**μm，求多次（本四次）测量的测量结果。

$$3\sigma = \pm 0.003\text{mm}$$

$$\sigma = 0.001\text{mm}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.001/2 = 0.0005\text{mm}$$

$$x_e = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}} = 20.000 \pm 0.0015\text{mm}$$

比较两式可见，单次测量结果的误差大，测量的可靠性差。因此精密测量中常用重复测量的算术平均值作为测量结果，用算术平均值的标准偏差或算术平均值的极限误差评定算术平均值的精密度。

$$\pm 0.0015\text{mm} < \pm 0.003\text{mm}$$