第一题

1 微分方程及t_a、t_d、v_f的表达式

小球在任意时刻的速度$v(t)$所满足的微分方程

我们以向上为正方向。根据牛顿第二定律，小球在任意时刻受到的合力为：

- 上升阶段(速度为正):

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - f(v)$$

因为空气阻力方向与速度相反，故为负号。

- 下落阶段 (速度为负):

$$m\frac{dv}{dt} = mg - f(v)$$

此时速度为负，空气阻力方向向上，与速度相反。

因此，小球在任意时刻的微分方程可以统一表示为：

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{f(v)}{m} \cdot \mathrm{sign}(v)$$

其中，$\mathrm{sign}(v)$表示速度的方向。

上升时间t_a的表达式

在上升阶段，小球从初速度v_0减速至$v = 0$时达到最高点。因此，上升时间t_a可以通过积分求得：

$$t_a = \int_0^{t_a} dt = \int_{v_0}^{0} \frac{dv}{-g - \frac{f(v)}{m}} = \int_0^{v_0} \frac{dv}{g + \frac{f(v)}{m}}$$

下落时间t_d的表达式

下落阶段，小球从最高点(速度$v=0$)开始加速下落，最终回到水平面时速度为v_f。下落时间t_d的表达式为：

$$t_d = \int_0^{t_d} dt = \int_0^{v_f} \frac{dv}{g - \frac{f(v)}{m}}$$

注意，此处积分上限为v_f是因为下落时速度方向为负，我们取v_f为正的速度大小。

回到水平面时的速度v_f的表达式

由能量守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \int_0^{t_a+t_d} f(v)v(t)dt$$

求解即可。

2 比较t_a和t_d,以及v_f和v_0

关于t_a和t_d

在上升阶段，小球受到的阻力和重力都是向下的，合力较大，因此加速度较大，速度减小得快。而在下落阶段，虽然重力是向下的，但空气阻力是向上的，相当于合力较小，加速度较小，速度增加得慢。因此，可以推断：

$$t_a < t_d$$

关于v_f和v_0

由于在上升和下落过程中都存在空气阻力做功，能量会有一部分损失，所以小球回到地面时的速度v_f会小于初始速度v_0。因此：

$$v_f < v_0$$

第二题

1 求$L(v,\theta)$表达式

分解初速度：

小球的初速度可以分解为水平和垂直两个方向：

$$\begin{aligned} v_x &= v\cos\theta \\ v_y &= v\sin\theta \end{aligned}$$

运动分析：

水平方向上，由于忽略空气阻力，小球做匀速直线运动：

$$x(t) = v_x t = v\cos\theta\cdot t$$

垂直方向上，小球受到重力加速度g的影响，做抛体运动：

$$y(t) = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = v\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

飞行时间：

小球返回地面时，$y(t)=0$。解方程：

$$\begin{aligned} v\sin\theta\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 &= 0 \\ t(v\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt) &= 0 \end{aligned}$$

舍去$t=0$的解，得到飞行时间：

$$t = \frac{2v\sin\theta}{g}$$

轨迹参数方程：

因此，小球的轨迹参数方程为：

$$\begin{aligned} x(t) &= v\cos\theta\cdot t \\ y(t) &= v\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

轨迹长度的计算：

轨迹长度L可以通过计算曲线的弧长得到

$$L=\int_0^{t_{总}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

先求导数：

$$\begin{aligned}\tfrac{dx}{dt}&=vcos\theta\\ \tfrac{dy}{dt}&=v\sin\theta-gt\end{aligned}$$

代入

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\frac{2v\sin\theta}{g}}\sqrt{(v\cos\theta)^2+(v\sin\theta-gt)^2}dt\\ &=\frac{v^2}{g}\left[\sin\theta+\cos^2\theta\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)\right]\end{aligned}$$

2

代入(1)

$$L\left(v,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{v^2}{g}$$

$$L\left(v,\frac{\pi}{4}\right)=\frac{v^2}{g}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right)>\frac{v^2}{g}=L(v,\frac{\pi}{2})$$

3

$$\frac{dL}{d\theta}=\frac{v^2}{g}\left[\cos\theta+2\cos\theta(-\sin\theta)\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)+\cos^2\theta\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\right]=0$$

$$1-\sin\theta\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)+\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=0$$

$$\theta\approx0.3137\pi$$