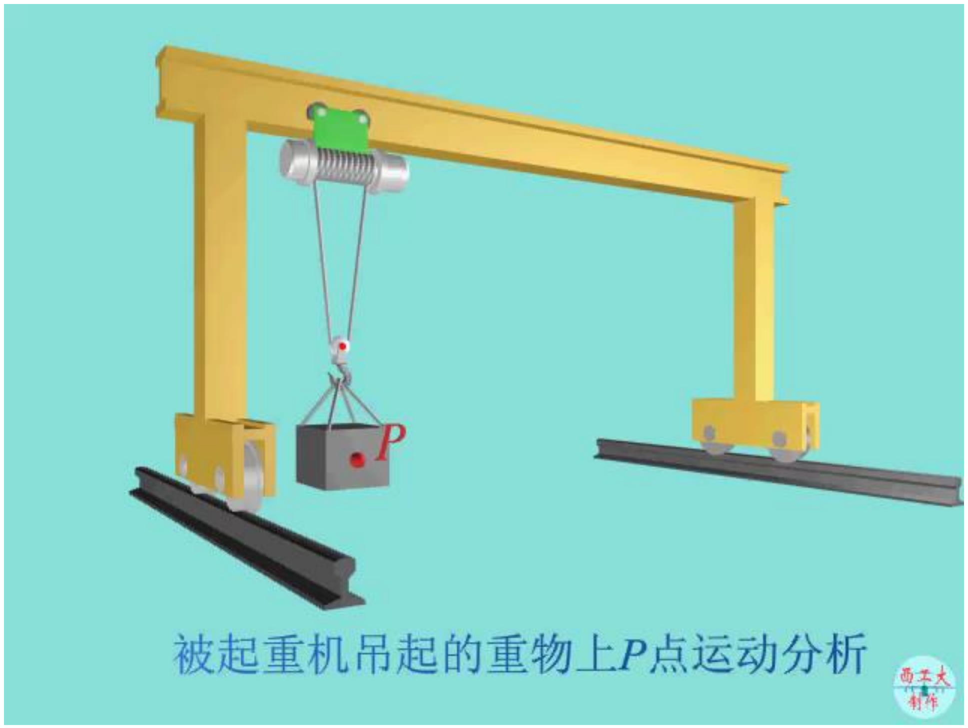
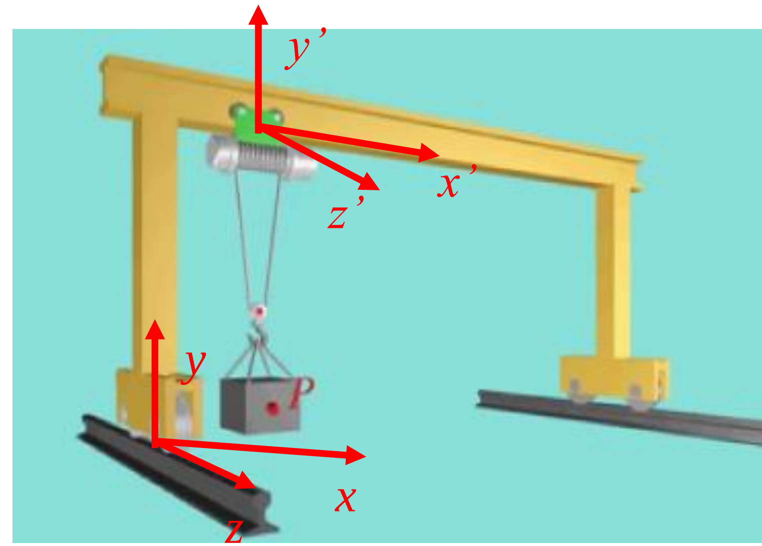
点的合成运动

合成运动基本概念





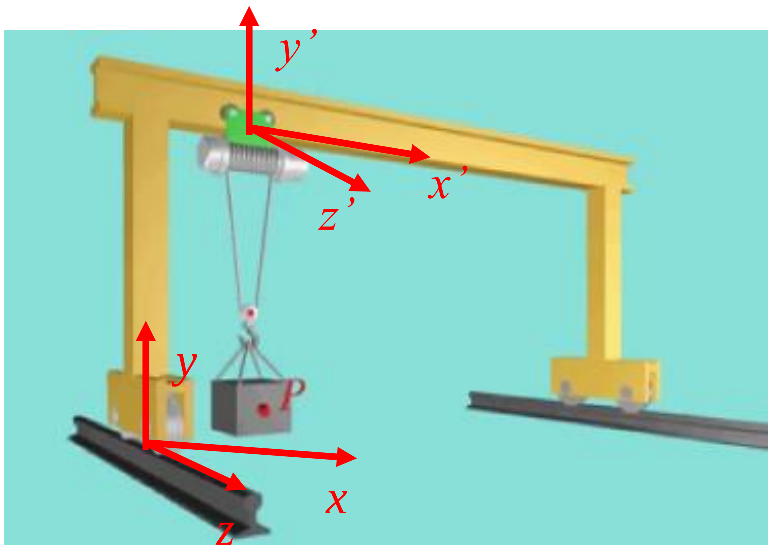
- xyz是固定的参考系
- x‘y’z’是随滑车平动的参考系
- 重物上的P点，在x‘y’z’参考系下做平行于y’轴的平动
- 重物上的P点，在xyz参考系下做倾斜向上的平动
- 不同的参考系下，P点的运动轨迹不同

合成运动基本概念

- 两种参考系

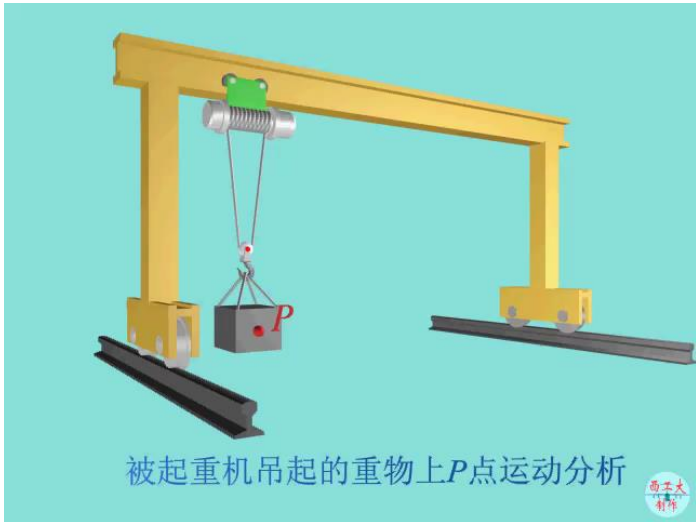
静参考系（定系）：**认定不动的参考系（xyz）。**

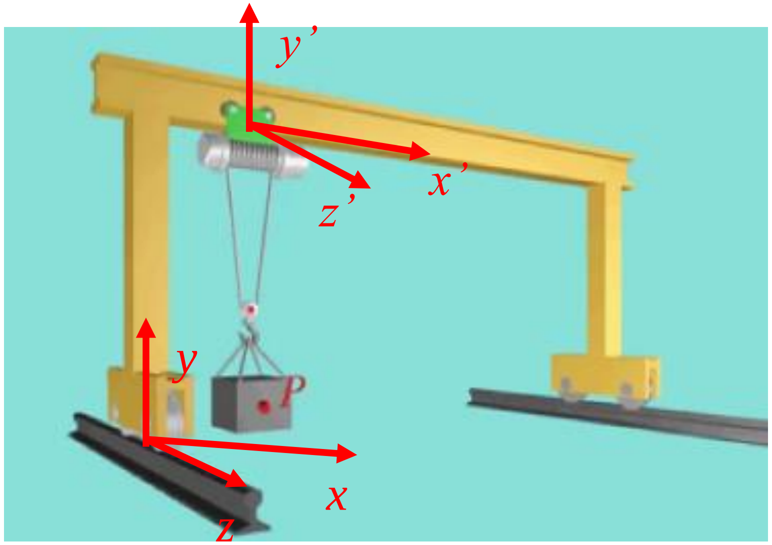
动参考系（动系）：**相对静系运动着的参考系（x’y’z’）。**



合成运动基本概念

三种运动





绝对运动：**动点对于定参考系的运动。**

相对运动：**动点对于动参考系的运动。**

牵连运动：**动参考系对于定参考系的运动。**

合成运动基本概念

- **物体的绝对运动可以看成是牵连运动和相对运动的合成结果。所以绝对运动也称为复合运动或合成运动。**
- **在所考察的瞬时，动系上与动点相重合的那一点，称为牵连点。**
- **由于相对运动，动点在动系上的位置随时间改变，所以牵连点具有瞬时性。**

合成运动基本概念

- 三种速度

绝对速度(absolute velocity) v_a：**动点相对定系的速度。**

相对速度(relative velocity) v_r：**动点相对动系的速度。**

牵连速度(carrier velocity) v_e：**动系上与动点重合的那一点（即牵连点）相对定系的速度。**

合成运动基本概念

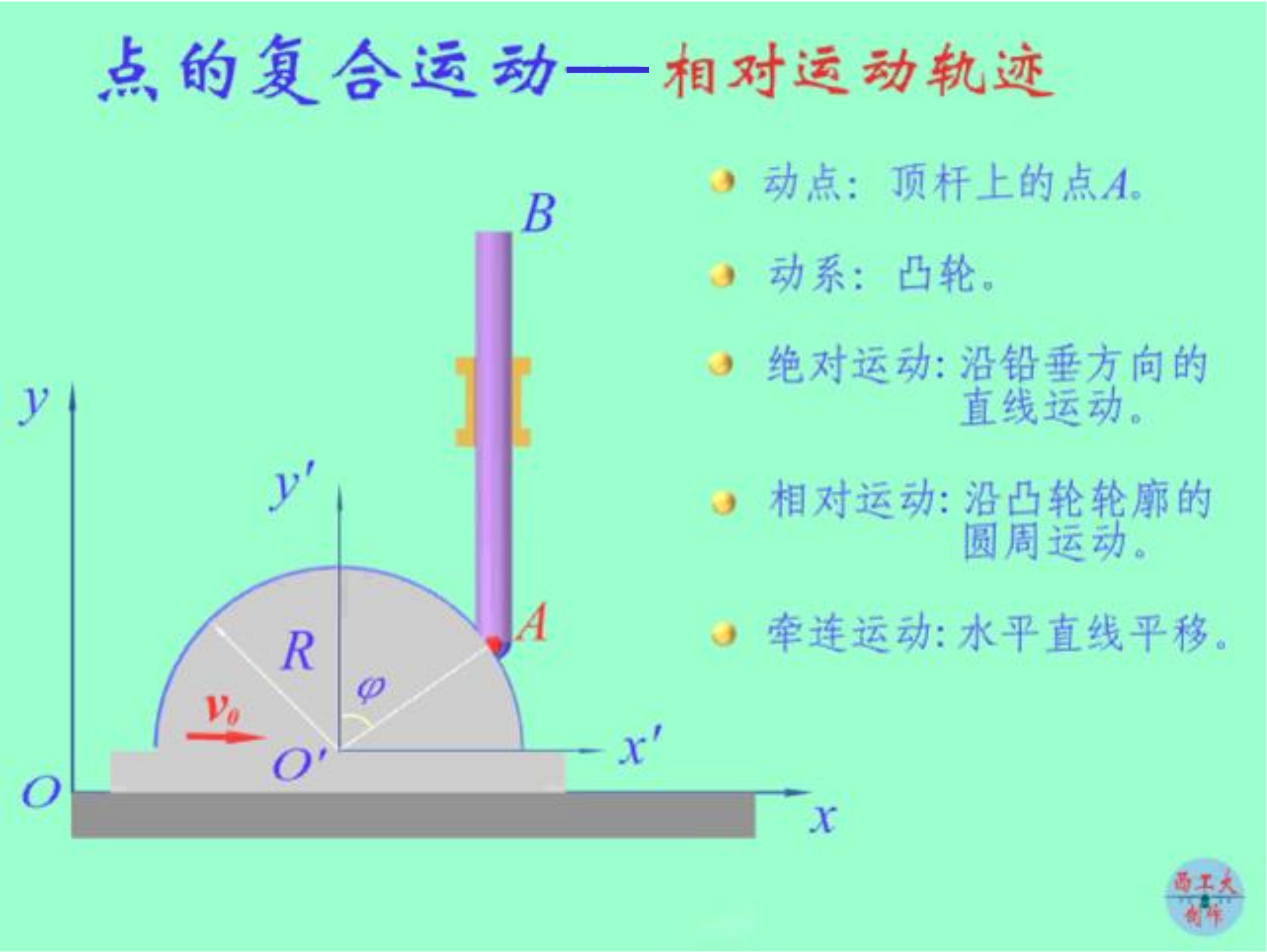
- 三种加速度

绝对加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$：动点对于定系的加速度称为绝对加速度。

相对加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$： 动点对于动系的加速度称为相对加速度。

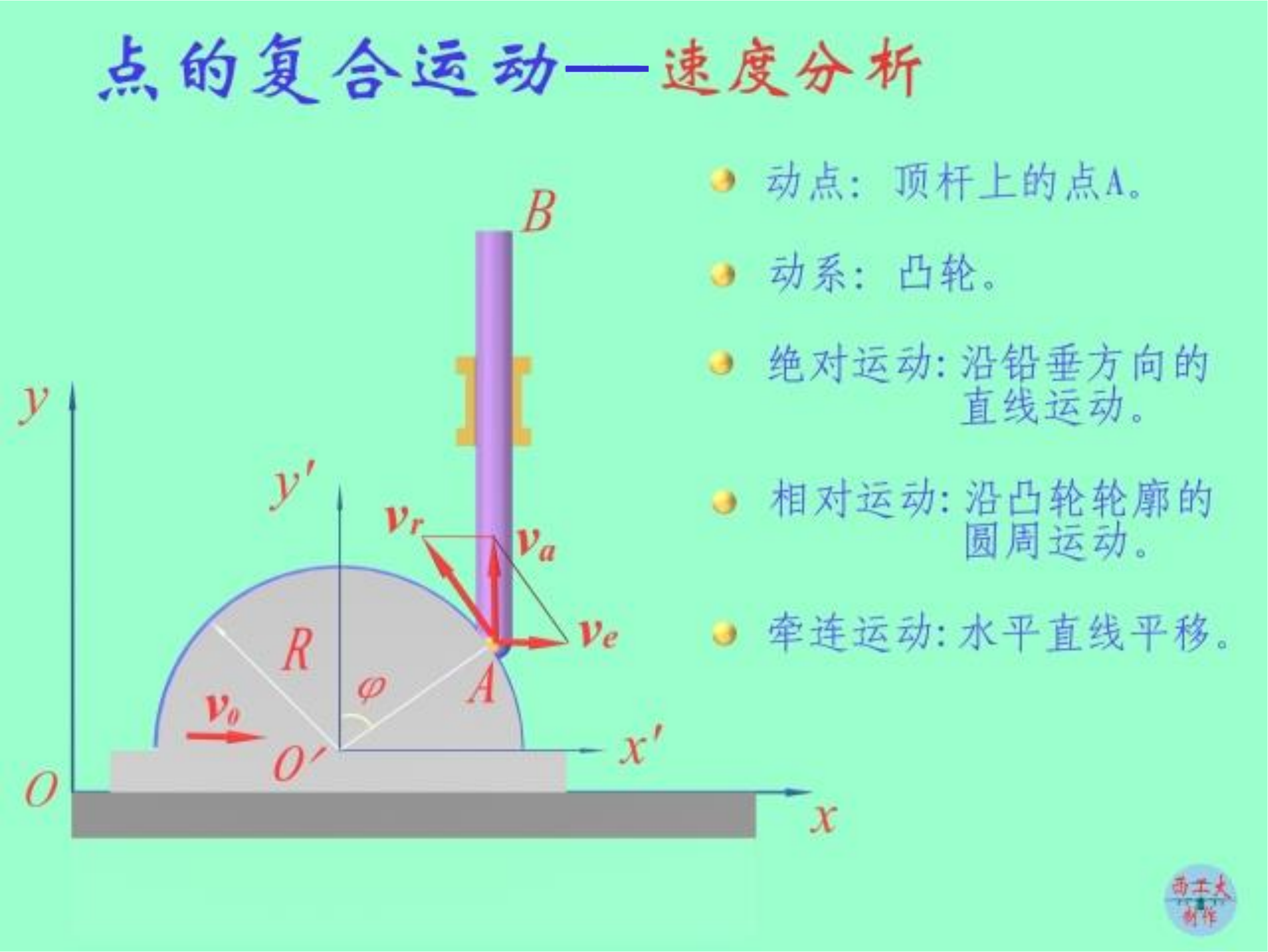
牵连加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$ ： 动系中与动点相重合的那一点（牵连点）对于定系的加速度称为牵连加速度。

合成运动基本概念



定系：Oxy
动系：O’x’y’

合成运动基本概念

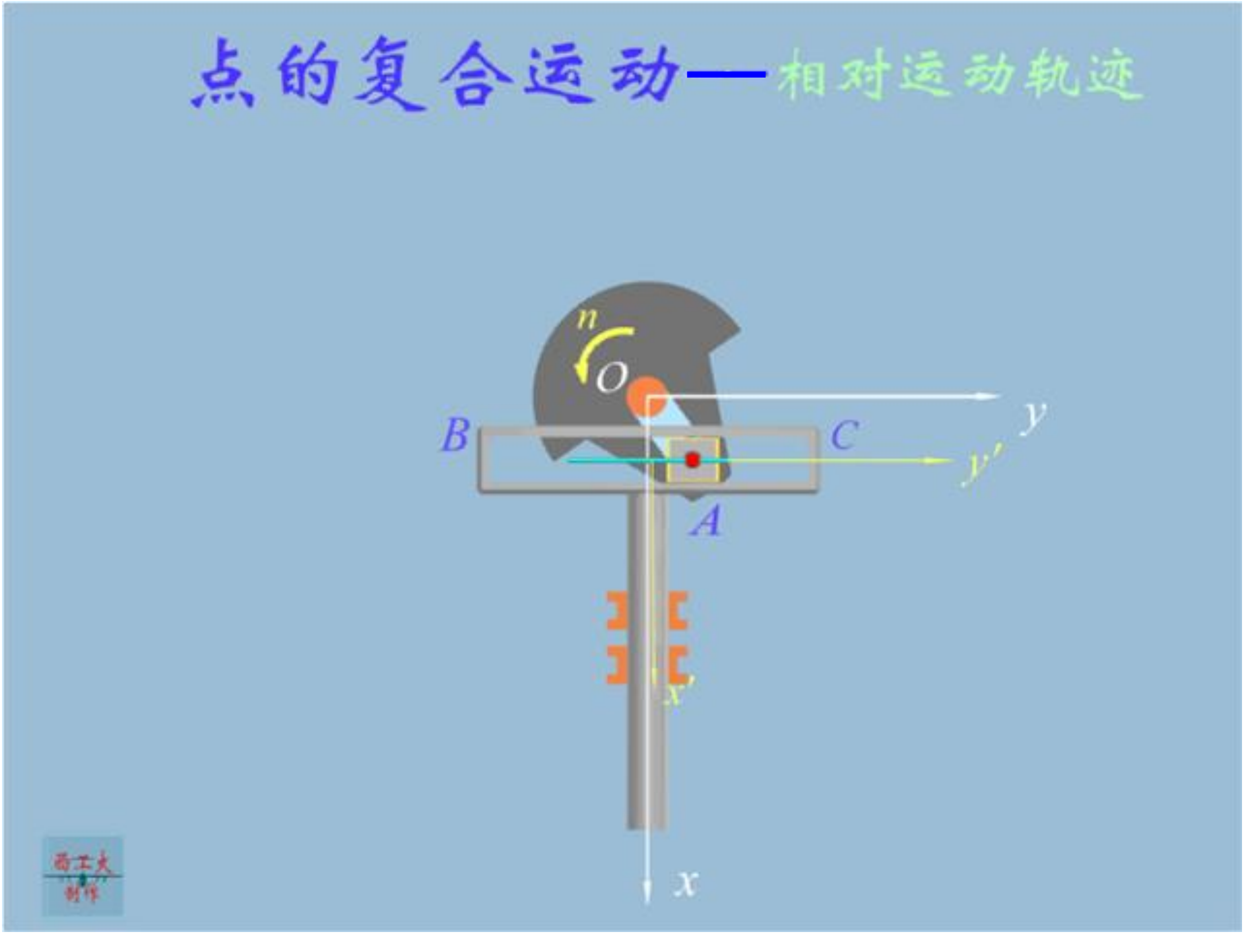


绝对速度($\boldsymbol{v}_a$)

相对速度($\boldsymbol{v}_r$)

牵连速度($\boldsymbol{v}_e$)

合成运动基本概念

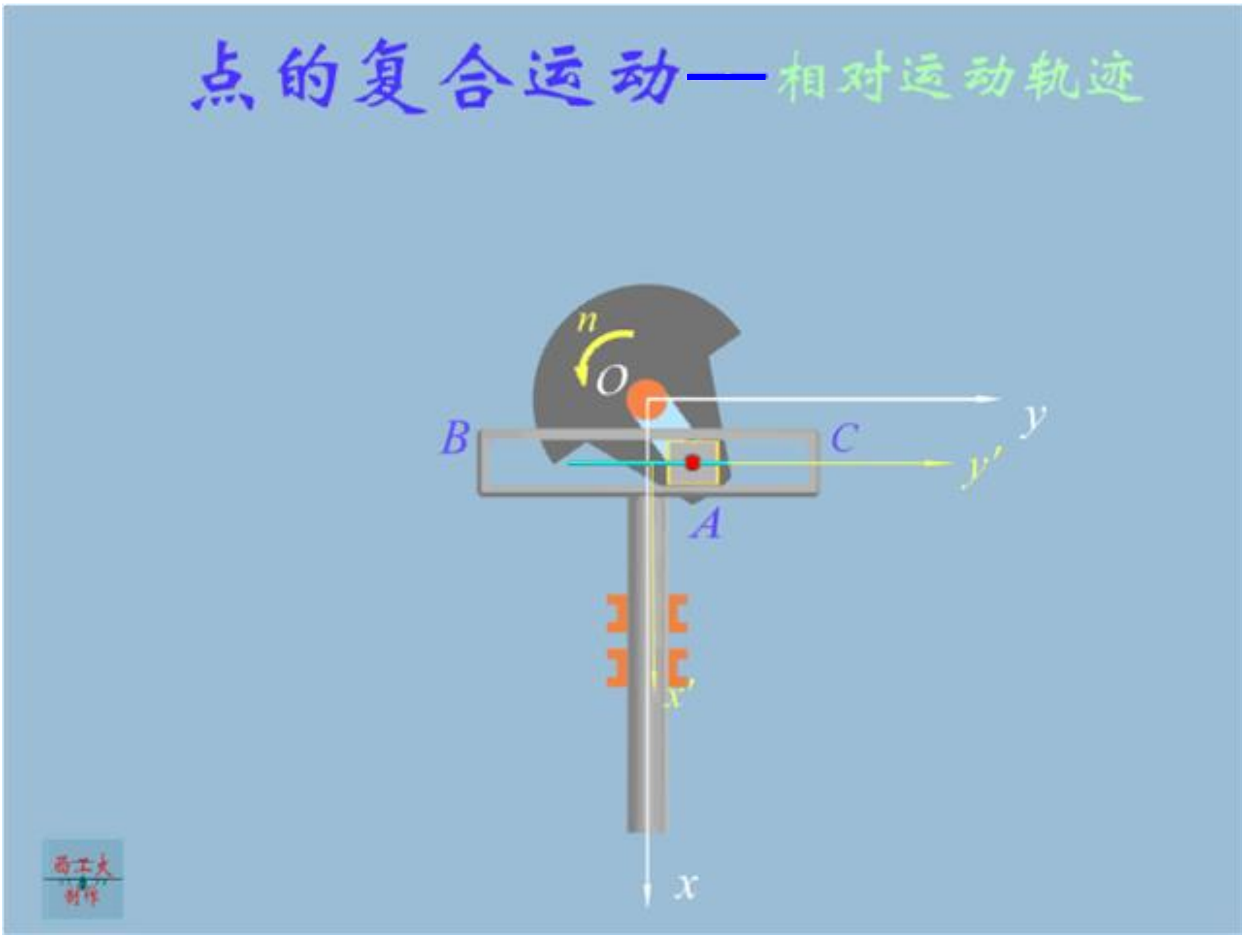


动点—滑块 A。

定系—**Oxy**。

动系—固连于T形槽杆BAC的参考系$O'x'y'$。

合成运动基本概念



动点—滑块 A。

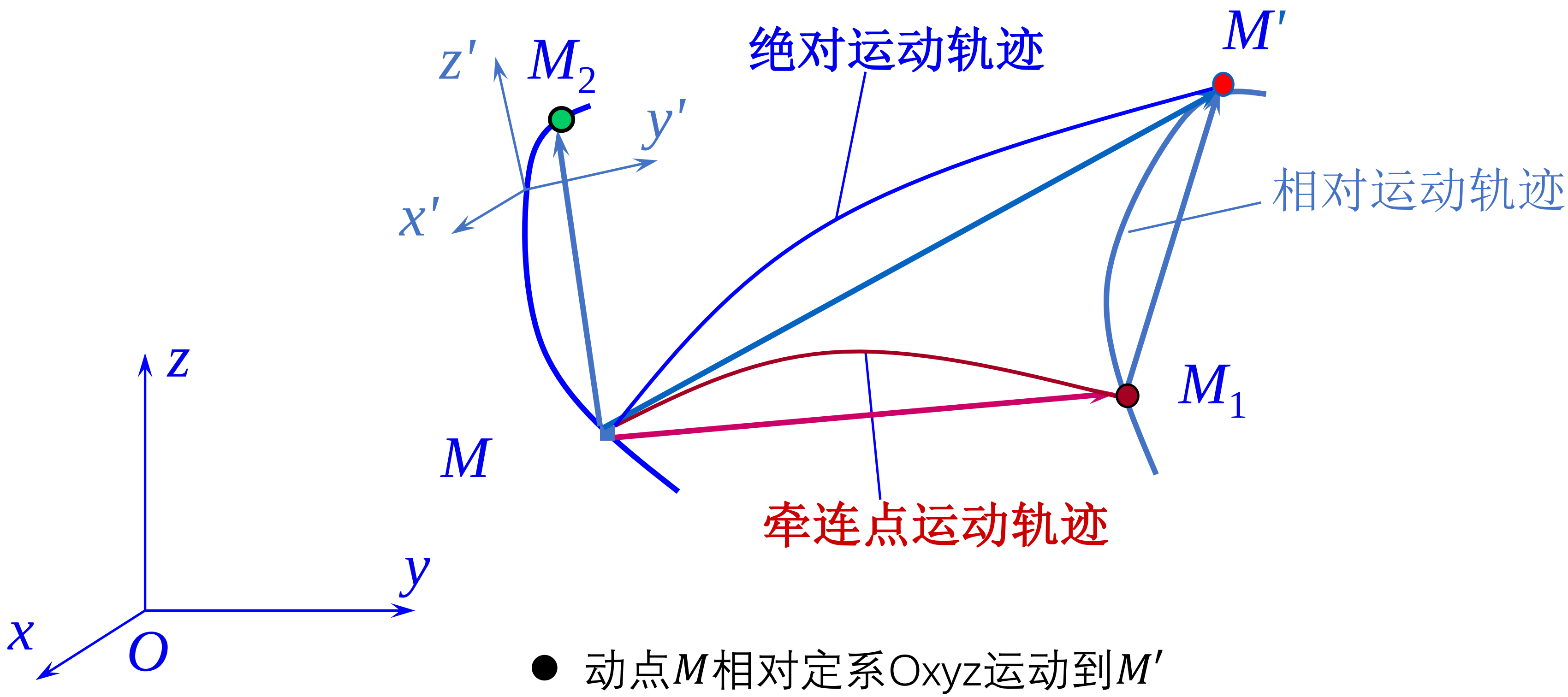
绝对运动—绕曲柄转动中心的圆周运动

相对运动—沿槽道的平移

牵连运动—沿竖直方向的平移

点的速度合成定理

● 三种运动轨迹



- 动点M相对定系Oxyz运动到M'
- 动点M相对动系O'x'y'z'运动到M_2
- 动点M对应的牵连点随动系运动到M_1

点的速度合成定理

● 速度合成定理

动点M在时间Δt 内的绝对位移

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t} \qquad (1)$$

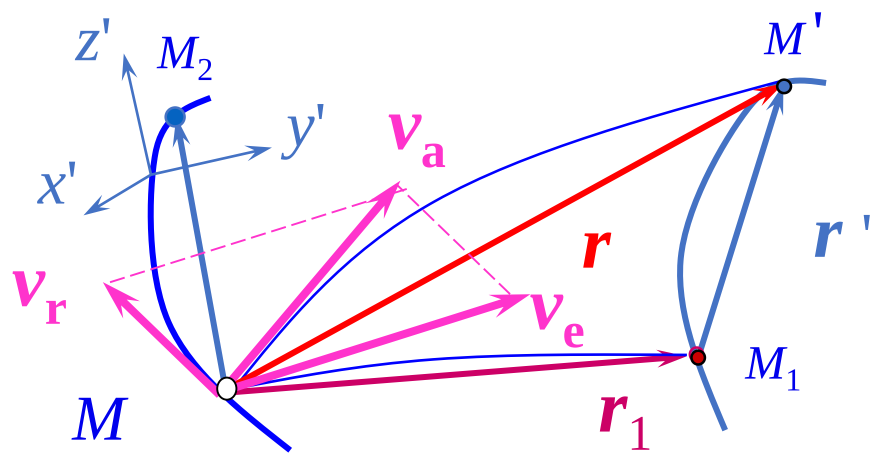
$$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$$

$$\boldsymbol{v}_a \qquad\qquad \boldsymbol{v}_e \qquad\qquad \boldsymbol{v}_r$$

因此，

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

绝对速度矢量等于牵连速度与相对速度的矢量和



点的速度合成定理

例题8-1 **军舰以37.04 km/h的速度向右前进，直升机以18km/h的速度垂直降落。试求直升飞机相对于军舰的速度。**

点的速度合成定理

解：

（1）运动分析

动点—直升机。

动系— $O_1x'y'$固连军舰上。

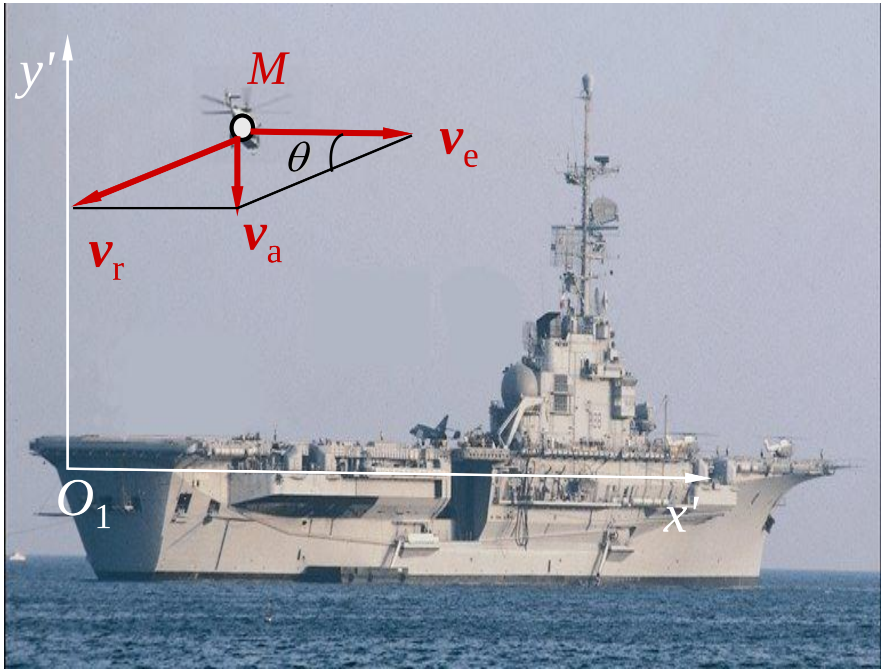
定系—固连地球。

绝对运动—垂直向下直线运动。

牵连运动—水平方向平移。

相对运动—直线运动。

点的速度合成定理



速度	v_a	v_e	v_r
大小	37.04 km/h	18 km/h	未知
方向	铅垂向下	水平向右	未知

（2） 速度分析

应用速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_r = \sqrt{v_e^2 + v_a^2} = \sqrt{(37.04)^2 + 18^2}$$

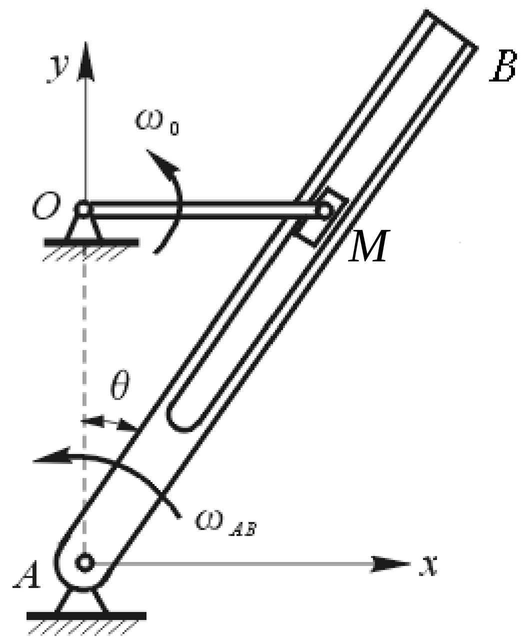
$$= 41.18\ \text{km/h}$$

$$\tan\theta = \frac{v_a}{v_e} = \frac{18}{37.04} = 0.486$$

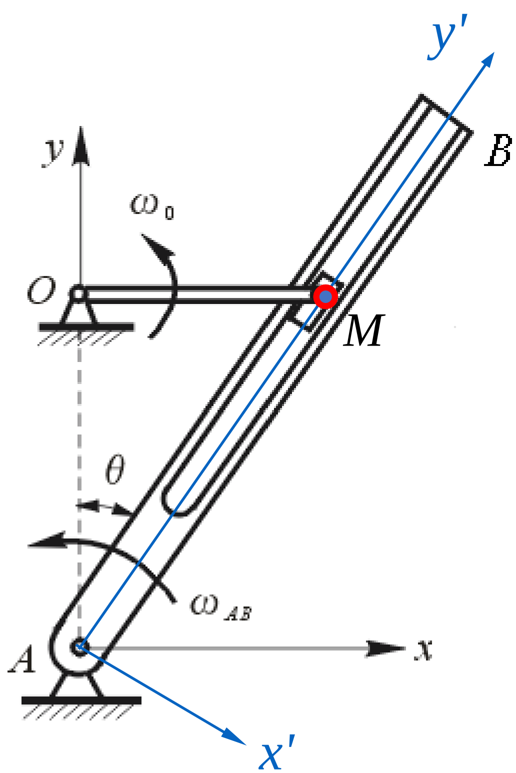
$$\theta = 25.92^\circ$$

点的速度合成定理

例题8-2 刨床的摆动导杆机构如图所示。曲柄OM**长**20 cm，**以转速**n=30 r/min**绕**O**点逆时针向转动，曲柄转轴与导杆转轴之间距离**OA = 20 cm 。**试求当曲柄在水平位置时导杆**AB**的角速度**ω_{AB}。



点的速度合成定理



解：

（1） 运动分析

动点 - **滑块** M 。

动系 - $Ax'y'$**固连于摇杆** AB。

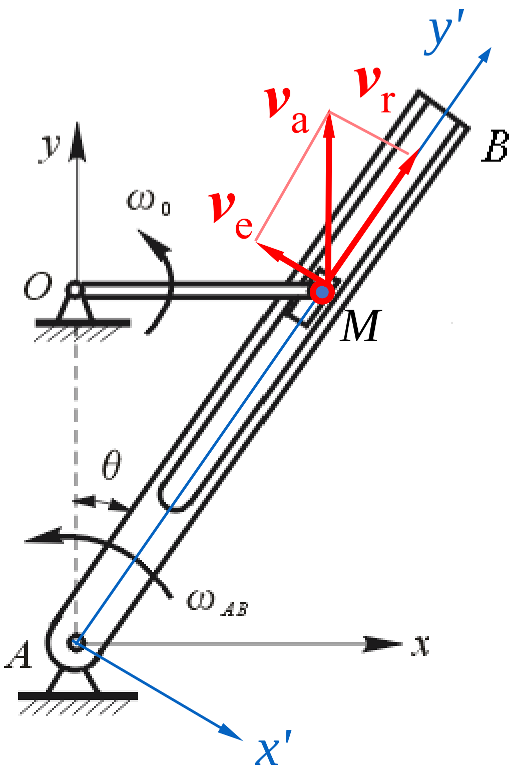
定系 - **固连于机座。**

绝对运动 - **以**O**为圆心的圆周运动。**

相对运动 - **沿**AB**的直线运动。**

牵连运动 - **摇杆绕**A**轴的摆动。**

点的速度合成定理



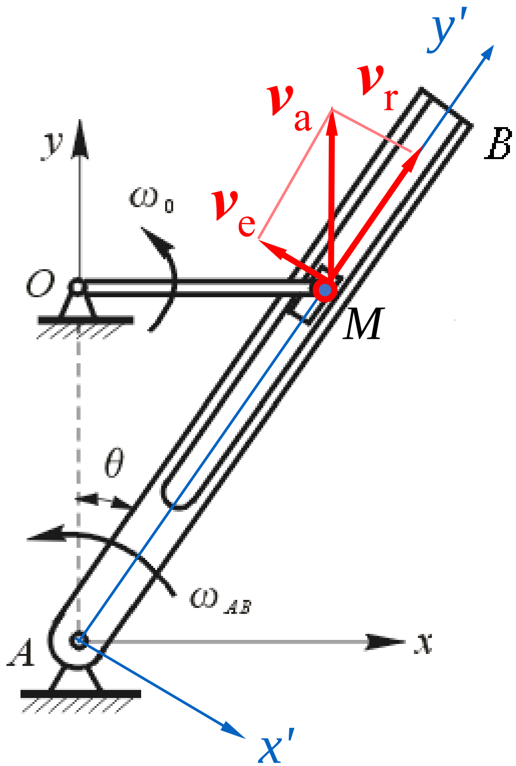
(2) 速度分析

根据点的速度合成定理，动点的绝对速度

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

速度	v_a	v_e	v_r
大小	$r\omega_0$	$AM\omega_{AB}$ （未知）	未知
方向	⊥OM向上	⊥AB	沿AB

点的速度合成定理



(3) 求角速度ω_{AB}

$$v_e = v_a \sin\theta = \omega_0 \frac{OM^2}{AM}$$

设摇杆在此瞬时的角速度为ω_{AB}，则

$$v_e = AM\,\omega_{AB}$$

解得

$$\omega_{AB} = \frac{v_e}{AM} = \omega_0 \frac{OM^2}{AM^2}$$

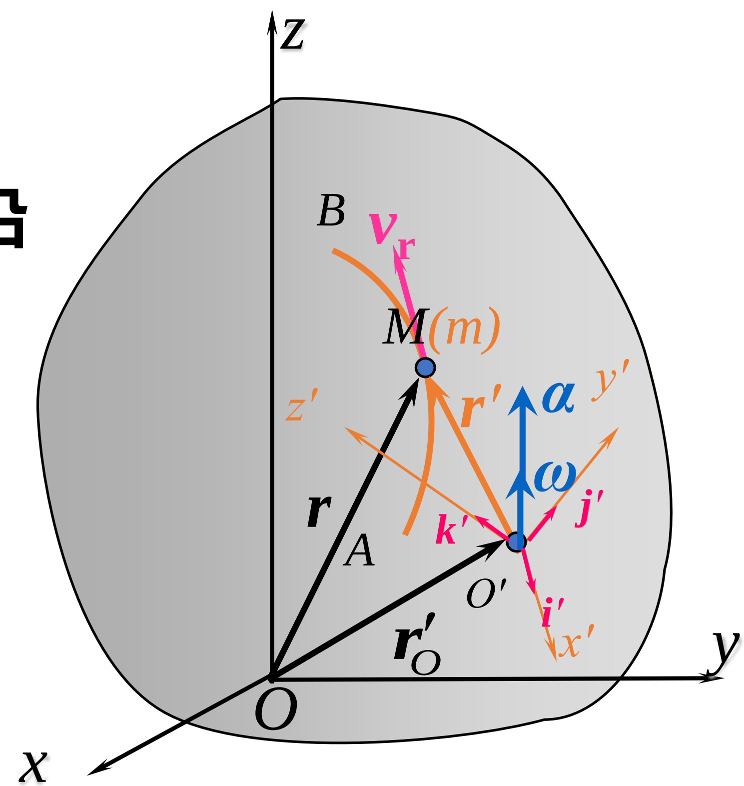
点的加速度合成定理

- **点的加速度合成定理**
- **科氏加速度**

点的加速度合成定理

1. 点的加速度合成定理

设动系$O'x'\ y'\ z'$以角速度ω和角加速度α绕定轴转动，转轴过点O'；动点M（m是牵连点）在动系下，沿相对轨迹AB运动。



(1) $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$与 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$

相对矢径 $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$

相对速度 $$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}'$$

相对加速度 $$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}' + \frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}' + \frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}'$$

点的加速度合成定理

(2) v_e与 a_e

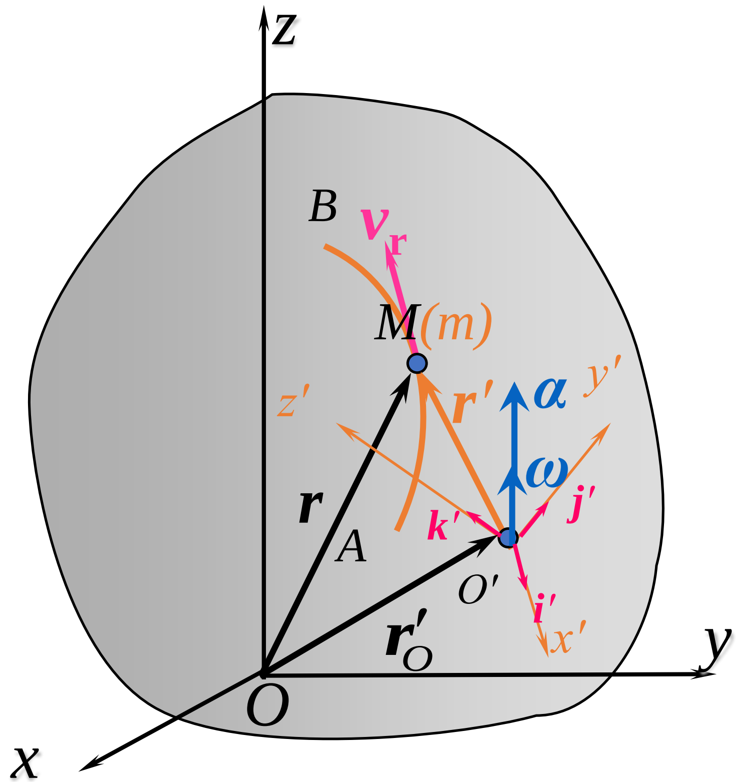
牵连速度（牵连点的速度）

$$v_e = v_m = \omega \times r'$$

牵连加速度

$$a_e = a_m = a_m^t + a_m^n = a_e^t + a_e^n$$

$$= \alpha \times r' + \omega \times v_e$$



点的加速度合成定理

$$v_e = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$$

$$v_r = \frac{dx'}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{k}'$$

(3) v_a与 a_a

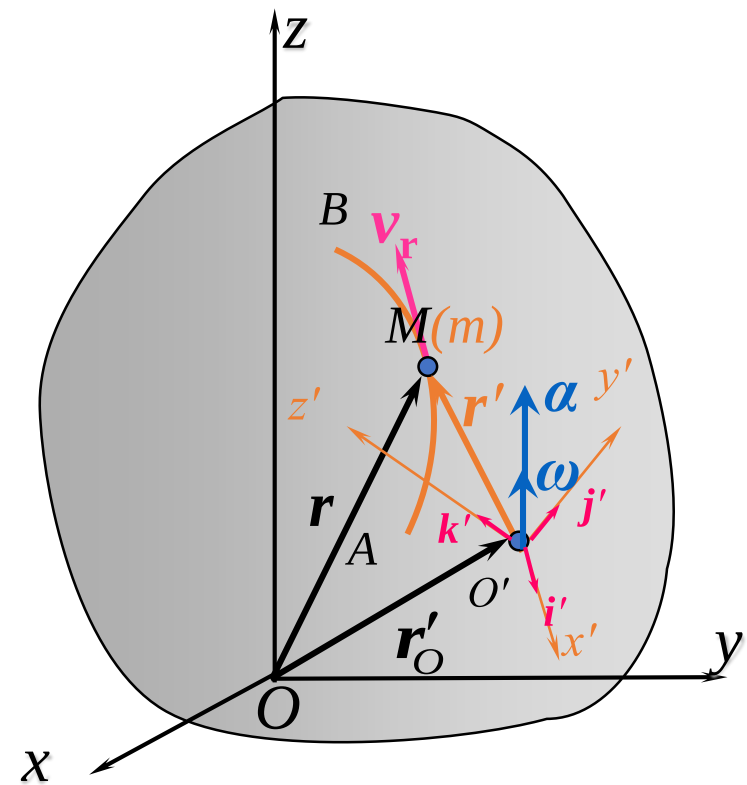
由点的速度合成定理 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

得 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}'$

在定系中求上式对时间 t 的导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}'\right)$$



点的加速度合成定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}'\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}$$

- $$\boldsymbol{a}_\mathrm{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{a}}{\mathrm{d}t}$$

- $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}_r}$$

$$= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}_r)$$

$$= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r)$$

$$= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_e}$$

$$= \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$

点的加速度合成定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{a}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}'\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_\mathrm{r}=\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}'}$$

- $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}'\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_\mathrm{r}=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}'}$$

$$=\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}'}_{\boldsymbol{a}_\mathrm{r}}+\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}')+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}')+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}')$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}'\right)$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$$

泊松公式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$$

点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

代入

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}$$

最后得到动点绝对加速度的表达式 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

上式右端的最后一项称为科氏(G. G. Coriolis)加速度，并用$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$表示，即

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

它表示了牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理（科里奥利定理），即当牵连运动是定轴转动时，动点在每一瞬时的绝对加速度，等于它的牵连加速度、相对加速度和科氏加速度三者的矢量和。

点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

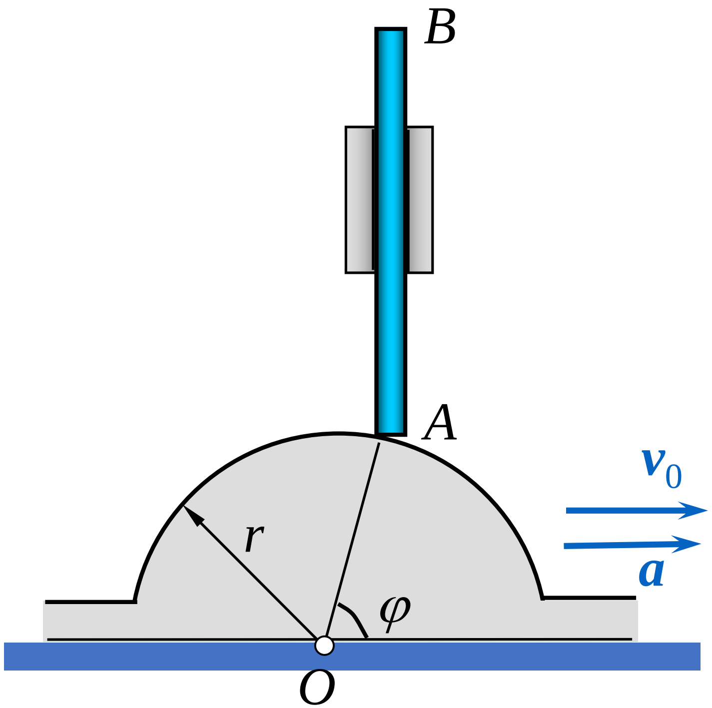
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

牵连运动是平移时点的加速度合成定理

当$\omega=0$时， $a_{\mathrm{C}}=0$**，此时有**

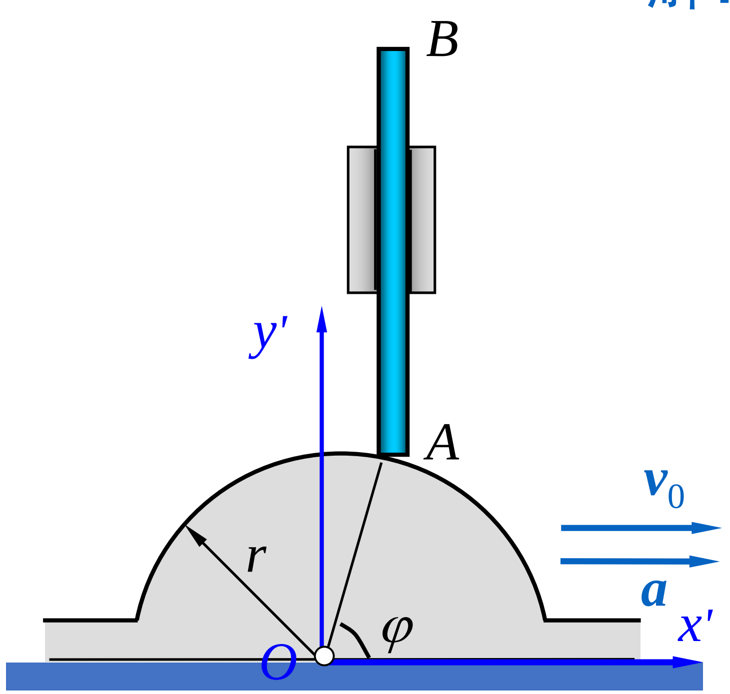
$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}$$

即，牵连运动为平移时，点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度的矢量和。



例题8-4 半径为r的半圆凸轮在水平面上向右作移动，从而推动顶杆AB沿铅垂导轨上下滑动，如图所示。在图示位置时，$\varphi=60°$，凸轮具有向右的速度v_0和加速度a。试求该瞬时顶杆AB的速度和加速度的大小。

解：（1） 运动分析



动点—— AB的端点A。

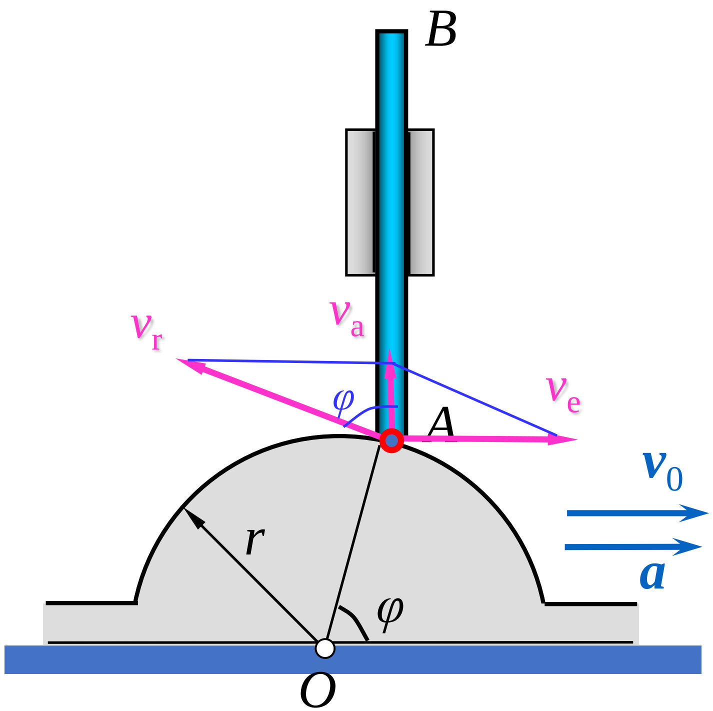
动系—— $Ox'y'$，固连于凸轮。

定系——固连于机座。

绝对运动——沿铅垂导轨直线运动。

相对运动——沿凸轮轮廓曲线运动。

牵连运动——凸轮水平直线平动。



速度	v_a	v_e	v_r
大小	未知	v	未知
方向	沿铅垂线	水平向右	$\perp AO$

（2）速度分析

根据速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

求得

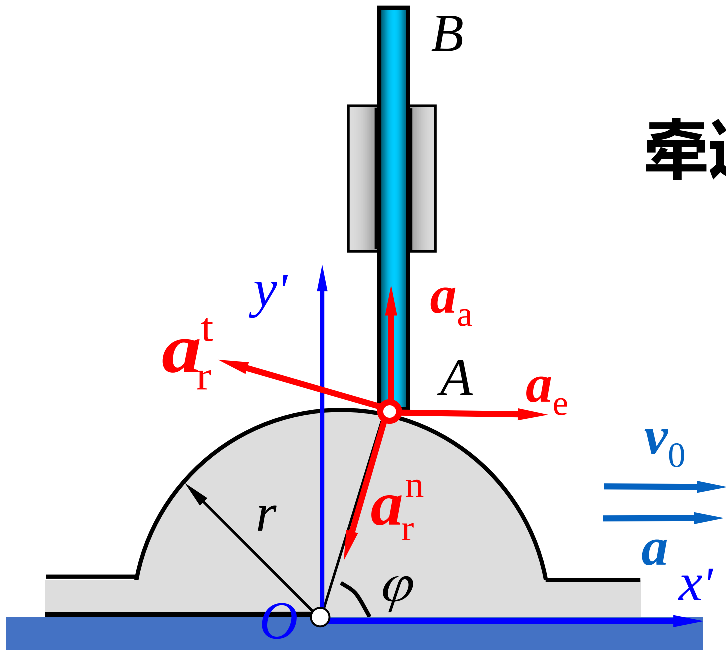
$$v_a = v_e \cot\varphi = v\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}v$$

此瞬时杆*AB*的速度方向向上。

并可求得相对速度

$$v_r = \frac{v_e}{\sin\varphi} = \frac{v}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}v$$

（3） 加速度分析



牵连运动是平移，应用加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_r^n$$

上式投影到 OA 上，得

$$a_a \sin\varphi = a_e \cos\varphi - a_r^n$$

解得杆AB加速度为

$$a_a = a\cot\varphi - \frac{v_r^2}{r\sin\varphi}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(a - \frac{8v^2}{3r}\right)$$

加速度	$\boldsymbol{a}_a$	$\boldsymbol{a}_e$	$\boldsymbol{a}_r^t$	$\boldsymbol{a}_r^n$
大小	未知	a	未知	v_r^2/r
方向	铅直	水平向右	$\perp AO$	由A指向O

作业

7-18, 7-20, 7-27, 7-29