James Clerk Maxwell
1831 – 1879

Lesson 10

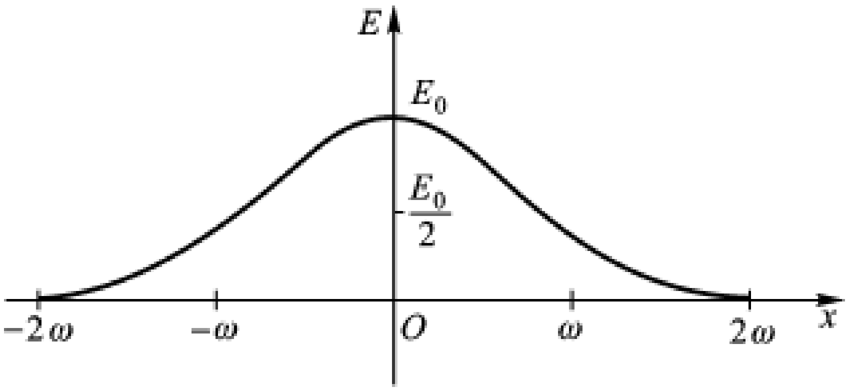
Electromagnetic Fields and Waves

高斯光束
电磁波传播的传输线等效

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn

高斯波束



- 均匀平面波有以下两个特点，
  - 波的幅度在整个空间是常数
  - 等相位面是平行平面。
- 对于更复杂的波，波的幅度不再均匀，波前不再是平面。
- 例如激光束，其幅度在中心轴线上最强，离开轴线愈远光场愈弱。
- 场按高斯分布的波束称为高斯波束

$$\boldsymbol{E}(x,\ z=0)=\boldsymbol{y}_0 E_0 \mathrm{e}^{-x^2/w^2}$$

- 高斯波束传播的分析方法：**将高斯波束展开为无限多平面波叠加，研究每个平面波的传播，再把这些平面波加起来。**

高斯波束展开为平面波的叠加

❖ z=0 的平面高斯波束

$$\boldsymbol{E}(x, z=0) = \boldsymbol{y}_0 E_0 \mathrm{e}^{-x^2/w^2}$$

❖ 设 y 方向极化的平面波表示为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{y}_0 A \mathrm{e}^{-j(k_x x + k_z z)} \qquad k_x{}^2 + k_z{}^2 = k^2, \quad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

❖ 将 z=0 平面电场用平面波 e^{-jkx} 展开

$$\boldsymbol{E}(x, z=0) = \boldsymbol{y}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x A(k_x) \mathrm{e}^{-jk_x x}$$

❖ $A(k_x)$ 为x方向波数为 k_x 的平面波分量幅值，根据傅里叶变换理论

$$A(k_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x E\left(x, z=0\right) \mathrm{e}^{jk_x x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x E_0 \mathrm{e}^{-x^2/w^2} \mathrm{e}^{jk_x x}$$

高斯波束展开为平面波的叠加

❖ z=0 的平面高斯波束 $\boldsymbol{E}(x,z=0)=\boldsymbol{y}_0 E_0 \mathrm{e}^{-x^2/w^2}$

❖ 将 z=0 平面电场用平面波展开 $\boldsymbol{E}(x,z=0)=\boldsymbol{y}_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x A(k_x)\mathrm{e}^{-jk_x x}$

$$A(k_x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x E\left(x,z=0\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x E_0\mathrm{e}^{-x^2/w^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x}$$

❖ 积分可得解析结果 $A(k_x)=\dfrac{E_0 w}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{w^2k_x^2}{4}}$

❖ 诸多平面波沿z轴的传播，只要乘上 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$ 即可

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0 w}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x\mathrm{e}^{\frac{-w^2k_x^2}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x+k_z z)}$$

高斯波束展开为平面波的叠加

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0 w}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x \mathrm{e}^{\frac{-w^2k_x^2}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x+k_z z)}$$

- 式中，$k_z=\sqrt{k^2-k_x^2}$ 当 $k_x>k$， $k_z=-\mathrm{j}\sqrt{k_x^2-k^2}$ 是虚数，所以上述解当 $z\to\infty$ 仍有界
- 进行变量替换，使 $k_x=ku$，以及 $\mathrm{d}k_x=k\mathrm{d}u$

$$\boldsymbol{E}(x,\ z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0 kw}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\ \mathrm{e}^{\frac{-k^2w^2u^2}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kux+k\sqrt{1-u^2}z)}$$

- 对于大多数激光束，$kw>>1$条件都满足，除非 u 比 1 小得多，上式第一个指数项可忽略。
- 当$u<<1$时第二项中 $\sqrt{1-u^2}\approx 1-\frac{u^2}{2}$ 其最终解为

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0 kw}{2P}\mathrm{e}^{q^2/4P^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\boldsymbol{y}_0 E_0\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{j}\frac{z}{z_\mathrm{f}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{\left[\frac{-x^2}{w^2(1+\frac{z^2}{z_\mathrm{f}^2}]}(1+\mathrm{j}\frac{z}{z_\mathrm{f}})\right]}$$

高斯波束展开为平面波的叠加

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0kw}{2P}\mathrm{e}^{q^2/4P^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\boldsymbol{y}_0E_0\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{j}\dfrac{z}{z_\mathrm{f}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{\left[\frac{-x^2}{w^2(1+\frac{z^2}{z_\mathrm{f}^2}]}(1+\mathrm{j}\frac{z}{z_\mathrm{f}})\right]}$$

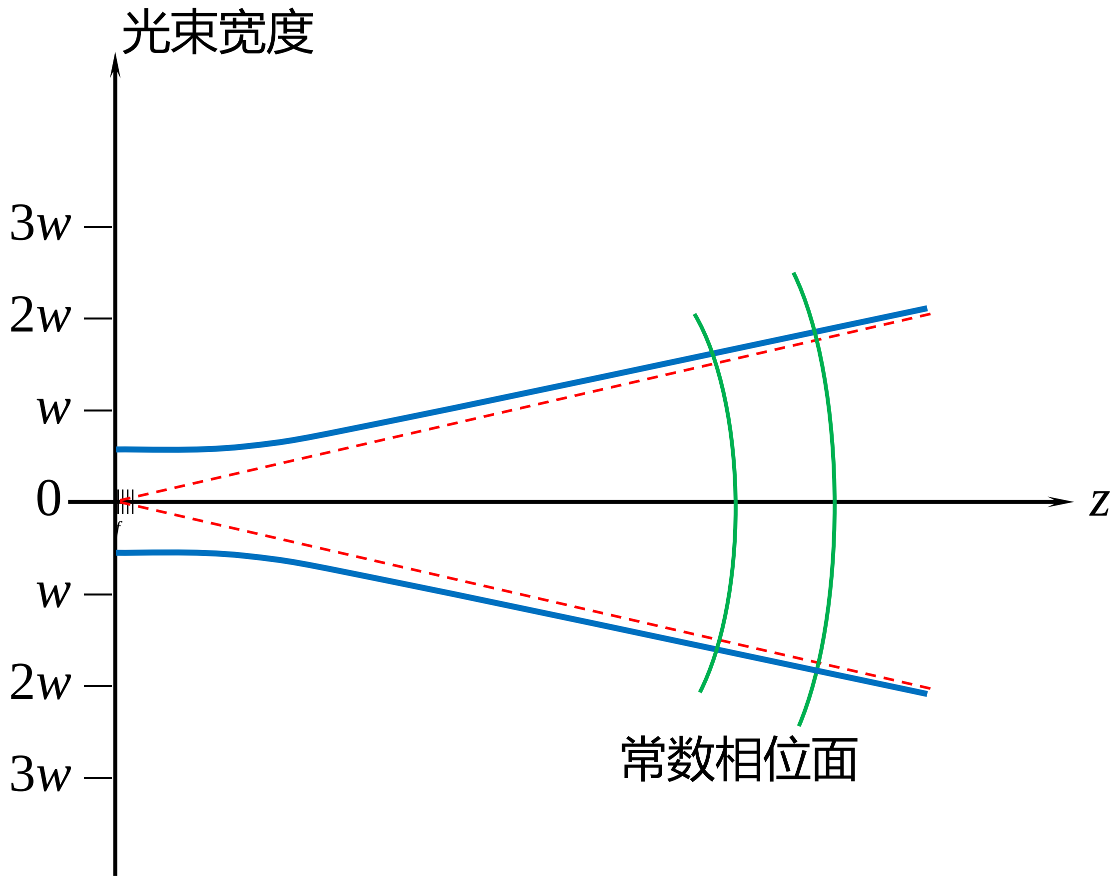
❖ 式中 $z_f=kw^2/2$。当$z>>z_f$，波的幅度和相位主要由第二个指数项决定。

❖ 所以当波束传播相当一段距离后，在 z 处波束的宽度为 wz/z_f

$$\text{相位}=-kz-\frac{x^2}{w^2}\frac{z_\mathrm{f}}{z}+\frac{\pi}{4}\approx-k\sqrt{z^2+x^2}+\frac{\pi}{4}$$

❖ 当光束沿 z 轴传播相当一段距离后，高斯波束变得越来越宽，其宽度与z近似线性关系， 而等相位面成为一柱面，这种现象称为**高斯波束衍射**。

高斯波束的衍射



当 $z/z_f \to \infty$ 光束宽度与 z 成线性关系

平面波传播的传输线模型

❖ 传输线(趋于无穷远) 平面波(特定坐标系)

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+k^2\right)U=0}$$

$$\boxed{\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{Bmatrix}=0}$$

$$U=U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$I=\frac{1}{Z_{\mathrm{c}}}U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

❖ 如果能将电磁波的传播用传输线上电压、电流波的传播等效，这将十分有助于对电磁波传播的理解，同时也可借用成熟的传输线理论与技术处理电磁波的传播问题。

❖ 可证明如果电磁波按TE、TM模分解，那么对每种模式的横向电磁场量沿纵向的传播可用传输线上电压、电流的传播等效。

TEM模传播的传输线模型

❖ TEM模

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{x}_0 \qquad E_x = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

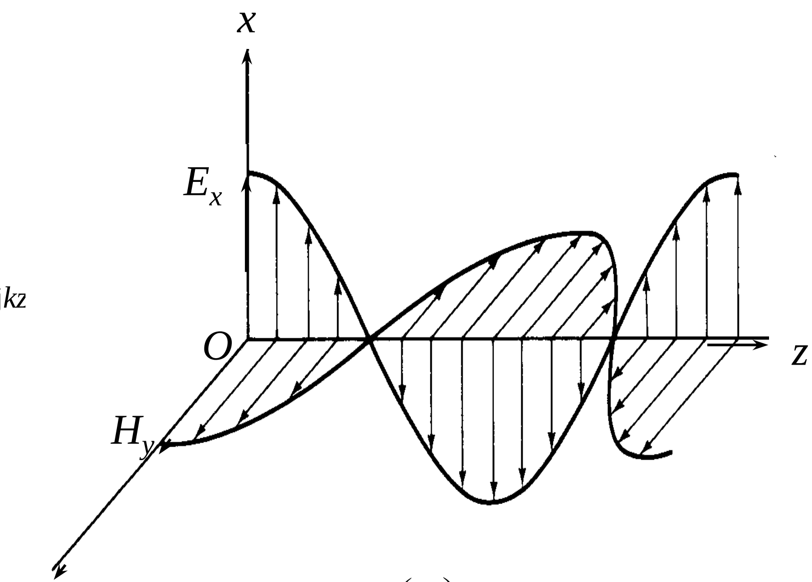
$$\mathbf{H} = H_y \mathbf{y}_0 \qquad H_y = H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} = \frac{E_0}{\eta} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

❖ 如果我们把 E_x 写成模式函数 φ 与电压 $U(z)$ 的乘积，H_y 写成模式函数 φ 与电流 $I(z)$ 的乘积，即

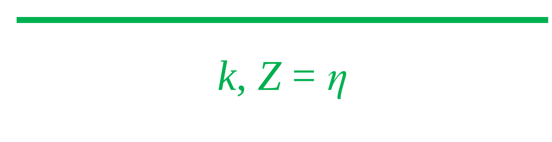
$$\boxed{E_x = \varphi U(z)} \qquad \boxed{H_y = \varphi I(z)}$$

❖ 式中 $U(z) = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \qquad I(z) = \dfrac{E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}{\eta}$

$$\varphi = 1$$



（a）



（b）

（a）TEM模场 （b）等效传输线

TEM模传播的传输线模型

$$U(z) = E_0 e^{-jkz} \qquad I(z) = \frac{E_0 e^{-jkz}}{\eta}$$

❖ **满足传输线方程**

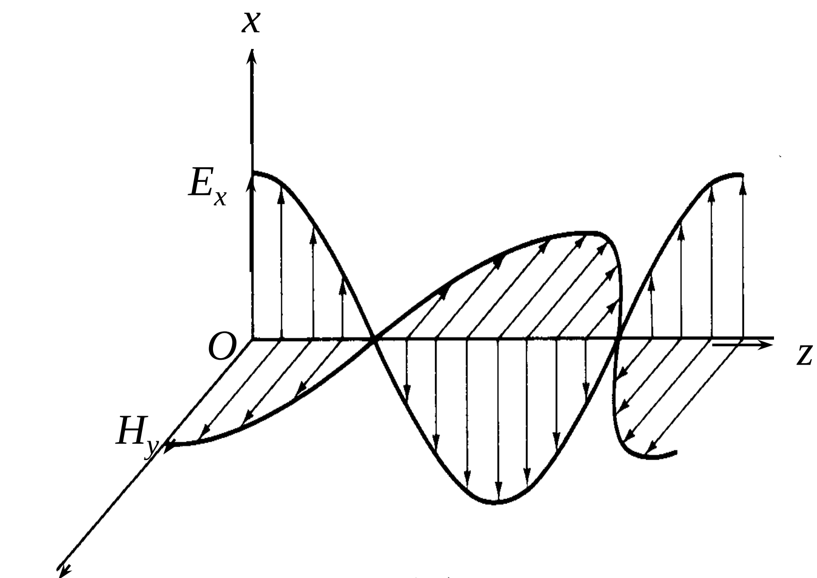
$$\frac{dU(z)}{dz} = -jkZI(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -jkYU(z)$$

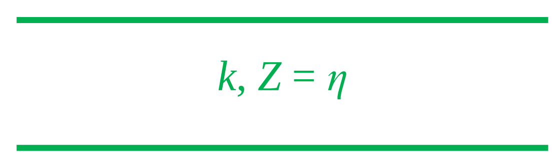
$$Z = \frac{1}{Y} = \eta$$

❖ **Z 为传输线的特征阻抗，Y 为特征导纳，k 为传输线的传播常数。**

❖ **这就是说就平面波沿波矢 k 方向（z方向）的传播与特征阻抗为 η，传播常数为 k 的传输线上电压、电流波的传播相当。**



（a）



（b）

（a）TEM模场 （b）等效传输线

TE模传播的传输线模型

❖ 定义

$$E_y = -E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = -\varphi(x) U(z)$$

$$H_x = \frac{k_z}{\omega\mu} E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) I(z)$$

❖ 式中 $U(z) = E_0 e^{-jk_z z}$ $\quad I(z) = \frac{k_z}{\omega\mu} E_0 e^{-jk_z z}$

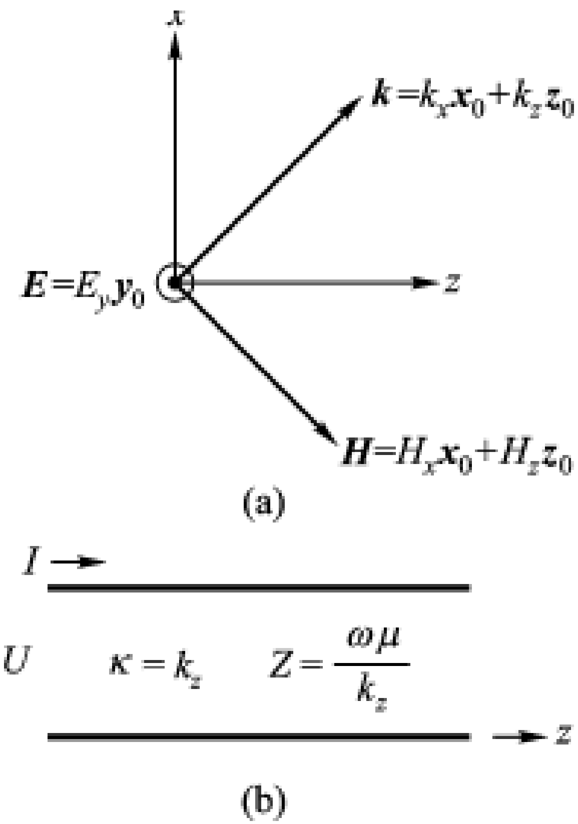
$$\varphi(x) = e^{-jk_x x}$$

❖ 那么$U(z)$、$I(z)$也满足传输线方程

$$\frac{dU(z)}{dz} = -jkZI(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -jkYU(z)$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{\omega\mu}{k_z}$$



❖ $\varphi(x)$ 表示场在 x 方向的分布，$U(z)$、$I(z)$表示场 E_y、H_x 沿纵向 z 的分布，满足传输线方程，传输线的传播常数等于 k_z，特征阻抗 $Z = \omega\mu / k_z$ 。

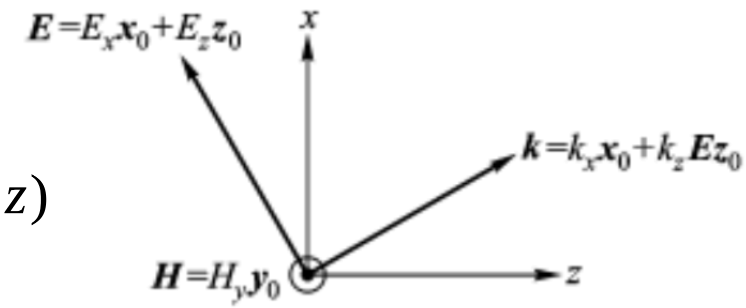
TM模传播的传输线模型

❖ **如果定义**

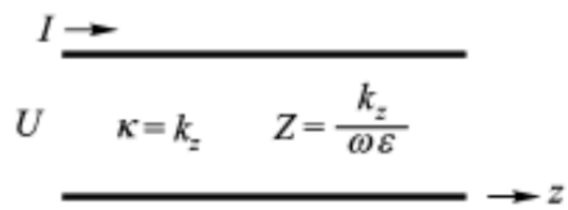
$$H_y = H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) I(z)$$

$$E_x = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) U(z)$$

$$U(z) = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} H_0 e^{-jk_z z} \quad I(z) = H_0 e^{-jk_z z} \quad \varphi(x) = e^{-jk_x x}$$



(a)



(b)

❖ **那么$U(z)$、$I(z)$也满足传输线方程**

$$\frac{dU(z)}{dz} = -jkZI(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -jkYU(z)$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon}$$

❖ **模式函数 $\varphi(x)$ 表示场在 x 方向变化，$U(z)$、$I(z)$ 表示场沿纵向的变化，满足传输线方程，传输线的传播常数等于 k_z，特征阻抗 $Z = k_z/\omega\varepsilon$ 。**

电磁波可分解为TE与TM两种模式的线性组合

TE模

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})$$

$$E'_z = 0$$

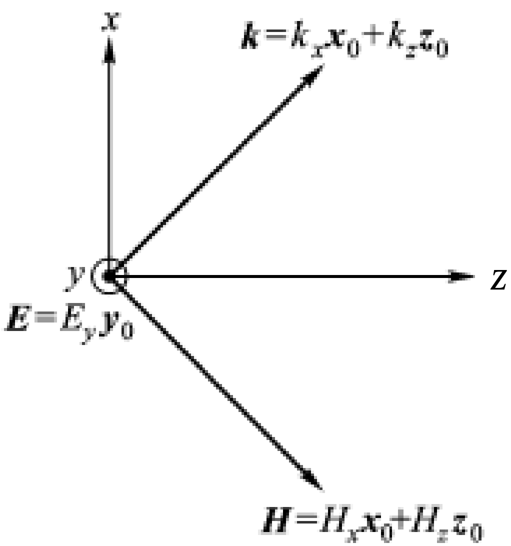
$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) + H'_z \boldsymbol{z}_0$$

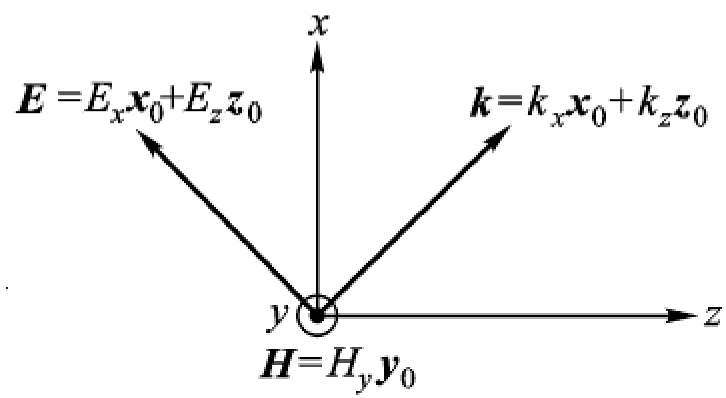
TM模

$$\boldsymbol{E}''(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}''_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) + E''_z(\boldsymbol{r})\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{H}''(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}''_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})$$

$$H''_z(\mathbf{r}) = 0$$





电磁波传播的传输线模型的条件与结论

- ❖ 条件
  - 将场分解为TE模、TM模，并将场量分解为横向场量与纵向场量。
- ❖ 将横向场量E_t、H_t再分解成模式函数e、h与其幅值U (z)、I (z)的乘积。
- ❖ 主要结论
  - U (z)、I (z)就满足传输线方程。

TE

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) \\ E'_z = 0 \\ \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) + H'_z \boldsymbol{z}_0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) U'(z)$$

$$\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho}) I'(z)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Z' I'(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}I'(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Y' U'(z) \end{cases}$$

$$Z' = \frac{1}{Y'} = \frac{\omega\mu}{k_z}$$

$$\left(\nabla_{\mathrm{t}}^2 + k_{\mathrm{t}}^2\right)\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) = 0$$

$$k_{\mathrm{t}}^2 = k^2 - k_z^2$$

TM

$$\begin{cases} \mathbf{E}''(\mathbf{r}) = \mathbf{E}''_{\mathrm{t}}(\mathbf{r}) + E''_z(\mathbf{r})\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{H}''(\mathbf{r}) = \mathbf{H}''_{\mathrm{t}}(\mathbf{r}) \\ H''_z(\boldsymbol{r}) = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}''_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}''(\boldsymbol{\rho}) U''(z)$$

$$\boldsymbol{H}''_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{h}''(\boldsymbol{\rho}) I''(z)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U''(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Z'' I''(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}I''(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Y'' U''(z) \end{cases}$$

$$Z'' = \frac{1}{Y''} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon}$$

$$\left(\nabla_{\mathrm{t}}^2 + k_{\mathrm{t}}^2\right)\boldsymbol{h}''(\boldsymbol{\rho}) = 0$$

$$k_{\mathrm{t}}^2 = k^2 - k_z^2$$

TE模的传输线模型

❖ 将TE模场量表示成横向场量与纵向场量的组合

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) \\ E'_z = 0 \\ \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) + H'_z \boldsymbol{z}_0 \end{cases}$$

❖ 横向场量分解为模式函数与模式函数幅值的乘积

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) U'(z) \\ \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho}) I'(z) \end{cases}$$

❖ 关键是求模式函数e'(ρ)、h'(ρ)与其幅值U'(z)、I'(z)

❖ 定义横向算符 $\nabla = \nabla_{\mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$ $\quad \nabla_{\mathrm{t}} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0$ $\quad \nabla^2 = \nabla_{\mathrm{t}}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

❖ 由 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ 得到

$$\left(\nabla_{\mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) \cdot E'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \left(\nabla_{\mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) \cdot \left(\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) U'(z)\right) = 0$$

❖ 进一步得到 $\nabla_{\mathrm{t}} \cdot \left[\boldsymbol{e}'(\rho) U'(z)\right] = 0$ $\qquad \boxed{\nabla_{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) = 0}$

TE模的传输线模型

❖ 将TE模场量表示成横向场量与纵向场量的组合

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})$$
$$E'_z=0$$
$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})+H'_z\boldsymbol{z}_0$$

❖ 横向场量分解为模式函数与模式函数幅值的乘积

$$\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)$$
$$\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z)$$

❖ 定义横向算符 $\nabla_{\mathrm{t}}=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0$ $\qquad \nabla=\nabla_{\mathrm{t}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$

❖ 由 $\nabla\times H'=\mathrm{j}\omega\varepsilon E'$ 得到 $\left(\nabla_{\mathrm{t}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\times\left(\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}+H_z\boldsymbol{z}_0\right)=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}'=\mathrm{j}\omega\varepsilon\left(\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}+E'_z\boldsymbol{z}_0\right)$

❖ 进一步得到

$$\nabla_{\mathrm{t}}\times\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E'_z=0$$
$$\nabla_{\mathrm{t}}\times\left[\boldsymbol{h}'(\rho)I'(z)\right]=0$$
$$\boxed{\nabla_{\mathrm{t}}\times h'(\boldsymbol{\rho})=0}$$

TE模的传输线模型

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z) \qquad \nabla=\nabla_{\mathrm{t}}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

$$E'_z=0 \qquad \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z)$$

$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})+H'_z\boldsymbol{z}_0$$

❖ 波方程 $\left(\nabla^2+k^2\right)\boldsymbol{E}=0$

$$\nabla_{\mathrm{t}}^2\left[\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right]+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right]+k^2\left[\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right]=0$$

❖ 等式两边用 $\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)$ 去除，得到 $\boxed{\dfrac{\nabla_{\mathrm{t}}^2\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})}{\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})}+\dfrac{\dfrac{\partial^2U'(z)}{\partial z^2}}{U'(z)}+k^2=0}$

❖ 令 $\dfrac{\partial^2U'(z)}{\partial z^2}\Big/U'(z)=-k_z^2 \qquad k_{\mathrm{t}}^2=k^2-k_z^2$

❖ 可得 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2U'(z)}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2U'(z)=0} \qquad \left(\nabla_{\mathrm{t}}^2+k_{\mathrm{t}}^2\right)\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})=0$

TE模的传输线模型

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) \qquad E'_z = 0 \qquad \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z) \qquad \nabla = \nabla_{\mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) + H'_z\boldsymbol{z}_0 \qquad \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z)$$

$$\left(\nabla_{\mathrm{t}}^2 + k_{\mathrm{t}}^2\right)\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad k_{\mathrm{t}}^2 = k^2 - k_z^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U'(z)}{\mathrm{d}z^2} + k_z^2U'(z) = 0 \qquad \left(\nabla_{\mathrm{t}}^2 + k_{\mathrm{t}}^2\right)\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) = 0$$

- ❖ 二阶微分方程可用两个耦合的一阶微分方程表示

$$\frac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_zZ'I'(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}I'(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_zY'U'(z)$$

- ❖ 式中 $Z' = 1/Y'$
- ❖ 关键是Z '或Y '到底是什么？怎么求？

TE模的传输线模型

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_z Z' I'(z) \quad (1)} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}I'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_z Y' U'(z)}$$

- **利用旋度方程**

$$\nabla\times\boldsymbol{E}'=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}' \quad \rightarrow \quad \left(\nabla_\mathrm{t}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\times\boldsymbol{E}'_\mathrm{t}=-\mathrm{j}\omega\mu\left(\boldsymbol{H}'_\mathrm{t}+H'_z\boldsymbol{z}_0\right)$$

- **由横向分量相等，可得**

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{E}'_\mathrm{t}\right)=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}'_\mathrm{t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}\left[\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right]=-\mathrm{j}\omega\mu\left[\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z)\right]$$

- **引入归一化条件** $\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})\times\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{z}_0$

- **因此得到**

$$\frac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}\omega\mu I'(z)$$

- **并改写成**

$$\frac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_z\frac{\omega\mu}{k_z}I'(z) \quad (2)$$

- **式(2)与式(1)相比**

$$\boxed{Z'=\frac{1}{Y'}=\frac{\omega\mu}{k_z}}$$

TE模的传输线模型

❖ **时间平均纵向坡印廷功率流**

$$
\begin{aligned}
P'_z &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}'^*\right)\cdot\boldsymbol{z}_0\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{E}'_t\times\boldsymbol{H}'^*_t\right)\cdot\boldsymbol{z}_0\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left[\left(\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right)\times\left(\boldsymbol{h}'^*(\boldsymbol{\rho})I'^*(z)\right)\right]\cdot\boldsymbol{z}_0\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{U'(z)I'^*(z)\left[\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})\times\boldsymbol{h}'^*(\boldsymbol{\rho})\right]\cdot\boldsymbol{z}_0\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[U'(z)I'^*(z)\right]
\end{aligned}
$$

❖ **传输线传送的功率** $\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[U'(z)I'^*(z)\right]$

❖ **正好等于坡印廷功率流的纵向（z方向）分量，也就是z方向的坡印廷功率流。**

电磁波传播传输线模型

TE 模	TM 模
$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}'_{t}$	$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}''_{t}+E''_{z}\boldsymbol{z}_0$
$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}'_{t}+H'_{z}\boldsymbol{z}_0$	$\mathrm{H}=\mathrm{H}''_{t}$
$\boldsymbol{E}'_{z}=0$	$H''_{z}=0$
$\boldsymbol{E}'_{t}=\boldsymbol{e}'(\rho)U'(z)$	$\boldsymbol{E}''_{t}=\boldsymbol{e}''(\rho)U''(z)$
$\boldsymbol{H}'_{t}=\boldsymbol{h}'(\rho)I'(z)$	$\boldsymbol{H}''_{t}=\boldsymbol{h}''(\rho)I''(z)$
$\nabla_{t}\cdot\boldsymbol{e}'=0$	$\nabla_{t}\cdot\boldsymbol{h}''=0$
$\nabla_{t}\times\boldsymbol{h}'=0$	$\nabla_{t}\times\boldsymbol{e}''=0$
$(\nabla_{t}^{2}+k_{t}^{2})\boldsymbol{e}'=0$	$(\nabla_{t}^{2}+k_{t}^{2})\boldsymbol{h}''=0$
$k_{t}^{2}=k^{2}-k_{z}^{2}$	$k_{t}^{2}=k^{2}-k_{z}^{2}$
$\boldsymbol{h}'=\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{e}'$	$\boldsymbol{e}''=-\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{h}''$
$\dfrac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k'_{z}Z'I'(z)$	$\dfrac{\mathrm{d}U''(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k''_{z}Z''I''(z)$
$\dfrac{\mathrm{d}I'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k'_{z}Y'U'(z)$	$\dfrac{\mathrm{d}I''(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k''_{z}Y''U''(z)$
$Z'=\dfrac{1}{Y'}=\dfrac{\omega\mu}{k'_{z}}$	$Z''=\dfrac{1}{Y''}=\dfrac{k''_{z}}{\omega\varepsilon}$

而时间平均纵向坡印廷功率流 $P'_{z}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}'^{*}\right)\cdot\boldsymbol{z}_0\right]=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[U'(z)I'^{*}(z)\right]$

从解方程角度看传输线模型的优点

❖ **由主教材表4-1可见，电磁场用TE及TM两种模式的场叠加表示后，本来要解耦合的三维波方程简化为解二维的波方程**

$$(\nabla^2 + k_t^2)\begin{cases} \boldsymbol{e}' = 0 & \text{TE模} \\ \boldsymbol{h}'' = 0 & \text{TM模} \end{cases}$$

❖ **以及耦合的一维传输线方程**

$$\frac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Z I(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Y U(z)$$

$$k_z^2 = k^2 - k_t^2 \qquad Z = \frac{1}{Y} \begin{cases} \omega\mu / k_z & \text{TE模} \\ k_z / \omega\varepsilon & \text{TM模} \end{cases}$$

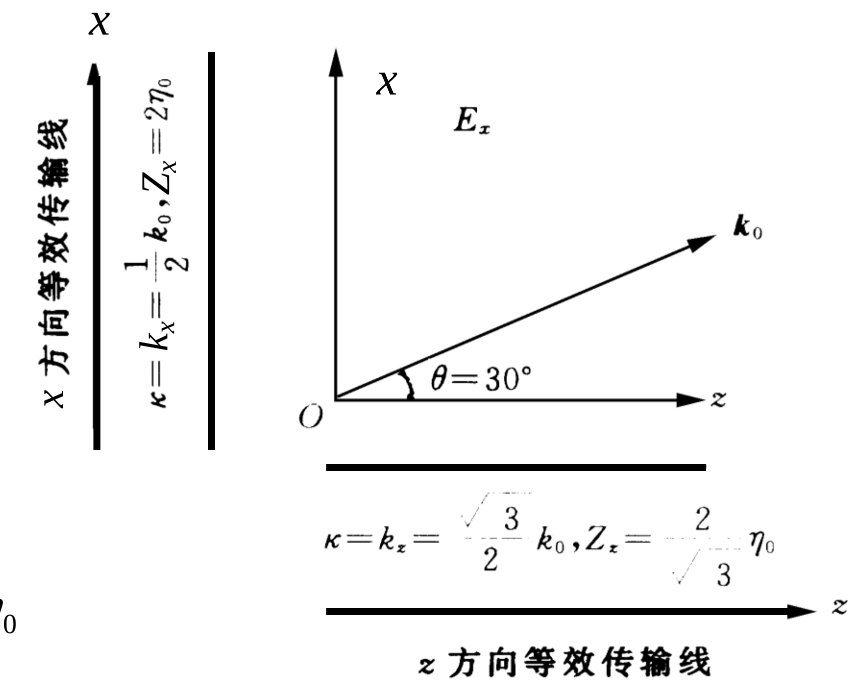
❖ **二维特征波方程中的本征值 k_t 也称为横向传播常数，由具体波导的横向边界条件确定。与本征值 k_t 相应的本征函数*e*、*h*通常称为模式函数。模式函数只与横向坐标有关，表示场在横截面的分布。模式函数的幅值U(z)、I(z)满足传输线方程。**

电磁波传播的传输线模型的物理意义

- 首先把电磁场按TE、TM模式分解，再将横向场量表示成模式函数与其幅值的乘积。模式函数e、h只是横向坐标的函数，表示场在横截面分布，由二维波方程描述。
- 模式函数的幅值$U(z)$、$I(z)$只与纵向坐标有关，并满足传输线方程。传输线的传播常数等于波的纵向传播常数，传输线传送的功率等于波的纵向功率流。波的一个传播模式与一个特定参数（k_z、Z）的传输线等效。如果存在无限多个模式，就要用无限多对传输线等效。
- 当波用传输线等效时，按TE、TM模分解后横向场量 E_t、H_t 分离为模式函数与其幅值的乘积，只是其幅值沿纵向的变化规律与一特定参数传输线上电压、电流的变化规律相当。
- 波传播的传输线模型不反映电磁场在横截面内的分布情况。横截面内场分布要通过解模式函数 e、h 满足的二维波方程得到。
- 需要指出的是，纵向、横向是相对而言的，究竟哪一个方向选为纵向，要视具体问题而定。研究不均匀问题时，通常选择不均匀方向为纵向。

自由空间沿z、x方向传播的TE平面波传输线模型

❖ 【例4-11】自由空间TE平面波波矢k_0在x-z平面内，与z轴夹角θ = 30°，给出波在z方向、x方向传播的等效传输线模型。



❖ 解：对于 x 方向波传播的等效传输线：

❖ **传播常数** $\kappa = k_x = k_0 \sin 30^\circ = \dfrac{k_0}{2}$

❖ **特征阻抗** $Z_x = \dfrac{\omega\mu}{k_x} = \dfrac{\omega\mu}{k_0/2} = 2\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 2\eta_0$

❖ 对于 z 方向 波传播的等效传输线：

❖ **传播常数**

$$\kappa = k_z = k_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}k_0$$

特征阻抗 $Z_z = \dfrac{\omega\mu}{k_z} = \dfrac{\omega\mu}{\frac{\sqrt{3}}{2}k_0} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\eta_0$

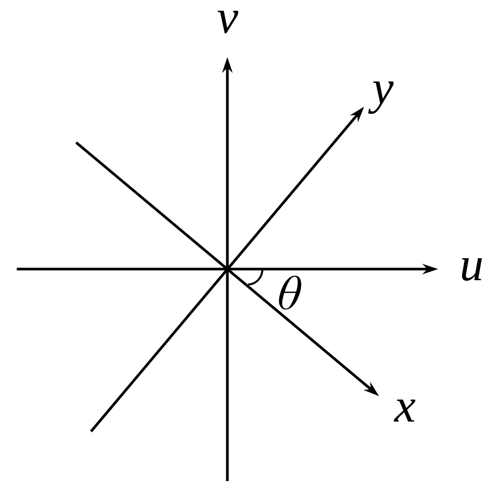
TE模、TM模同时存在时的阻抗矩阵

- 纵向坡印廷功率流P_z，只与横向电场与横向磁场有关，横向电场与横向磁场之比Z具有阻抗量纲，这个物理量在工程应用中很重要。

- 在特定坐标系下，如波矢k只有x、z两个分量，$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$

- 阻抗Z是标量

$$Z=\frac{1}{Y}\begin{cases}\omega\mu/k_z & \text{TE模}\\ \mathrm{k}_z/\omega\varepsilon & \text{TM模}\end{cases}$$



坐标（u, v）与（x, y）变换关系

- 一般情况，k有三个分量，TE、TM模同时存在，横向电场与横向磁场之比要用矩阵[Z] 表示。

$$\begin{bmatrix}E_y\\E_x\end{bmatrix}=\boldsymbol{Z}\begin{bmatrix}-H_x\\H_y\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{Z}\text{是}2\times2\text{矩阵}$$

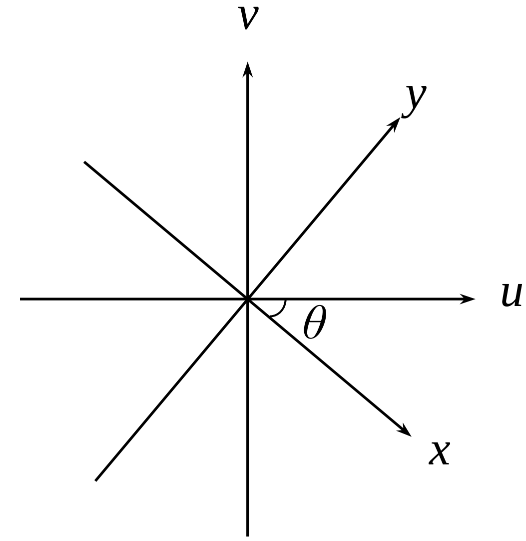
- 求阻抗矩阵 [Z] 的思路：
  - 在k只有两个分量，即 $\boldsymbol{k}=k_u\boldsymbol{u}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$的所谓本征坐标系（u，v，z）中得到表示横向场量之比的TE、TM模的阻抗 Z_{TE}，Z_{TM}
  - 利用本征坐标系（u，v，z）与结构坐标系 (x，y，z) 的变换关系得到 (x，y，z) 坐标系中的阻抗矩阵 [Z]

TE模、TM模同时存在时的阻抗矩阵

❖ 在本征坐标系（u，v，z）下，如波矢k只有u、z两个分量， $\boldsymbol{k}=k_u\boldsymbol{u}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$ ， 阻抗 Z 是标量

$$\frac{E'_v}{-H'_u}=Z_{\mathrm{TE}}=\frac{\omega\mu}{k_z} \qquad \text{(对于TE模)}$$

$$\frac{E''_u}{H''_v}=Z_{\mathrm{TM}}=\frac{k_z}{\omega\varepsilon} \qquad \text{(对于TM模)}$$



坐标（u, v）与（x, y）
变换关系

❖ 坐标（u，v）与（x，y）的变换关系

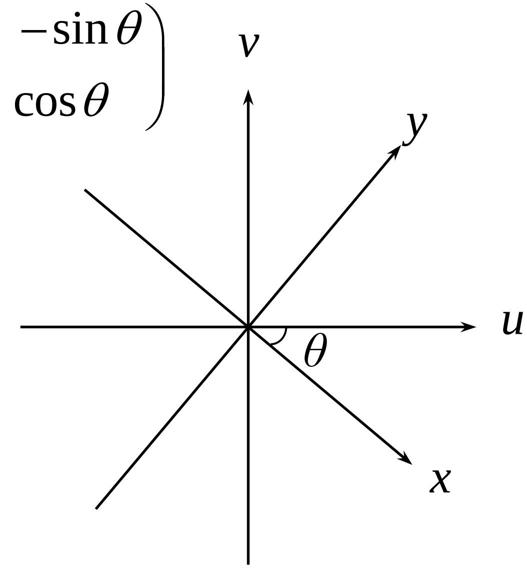
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} u \\ \mathrm{v} \end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=T^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad T^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

❖ 进一步得到场量变换关系 $\begin{pmatrix} E_y \\ E_x \end{pmatrix}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E'_v \\ E''_u \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} -H'_u \\ H''_v \end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} -H_x \\ H_y \end{pmatrix}$

TE模、TM模同时存在时的阻抗矩阵

$$\begin{pmatrix} E_y \\ E_x \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E'_v \\ E''_u \end{pmatrix} (1) \qquad \begin{pmatrix} -H'_u \\ H''_v \end{pmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} -H_x \\ H_y \end{pmatrix} (2) \qquad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



坐标（u, v）与（x, y）变换关系

❖ **变换矩阵元 cosθ、sinθ 可用 k_x，k_y，k_z 表示**

$$\cos\theta = \frac{k_x}{k_u} \qquad \sin\theta = \frac{k_y}{k_u}$$

❖ **当TE、TM模同时存在时，$[Z_{\mathrm{TE}}、Z_{\mathrm{TM}}]$ 可合并写成矩阵形式**

$$\begin{pmatrix} E'_v \\ E''_u \end{pmatrix} = \frac{\omega\mu}{k_z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_z^2}{k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H'_u \\ H''_v \end{pmatrix}$$

❖ **将式（1）、式（2）代入，得到**

$$\begin{pmatrix} E_y \\ E_x \end{pmatrix} = \boldsymbol{Z} \begin{pmatrix} -H_x \\ H_y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\omega\mu}{k_z} \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{k_y^2}{k^2} & -\dfrac{k_x k_y}{k^2} \\ -\dfrac{k_x k_y}{k^2} & 1 - \dfrac{k_x^2}{k^2} \end{pmatrix}$$

复习

- 电各向异性介质可用并矢 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 表示，波在其中的传播可分为寻常波与非寻常波，非寻常波的传播特性与方向有关。
- 铁氧体未经磁化是各向同性的。当一恒定磁场H_0加在铁氧体上时，它变成一块各向异性介质。
- 铁氧体中传播的波可以分为纵向传播的波与横向传播的波。纵向传播的波是圆极化波。左旋波和右旋波相速不等。右旋波有共振特性，有通带止带纵向传播的波是非互易的，存在法拉第旋转效应。横向传播的波分为寻常波与非寻常波。寻常波就是普通的TEM波，非寻常波是椭圆极化波。其极化特性相互垂直。
- 高斯波束是分析实际激光束的一个十分迫近的模型，可将它展开为无限多平面波的叠加。高斯波束沿z轴传播一段距离后，其宽度与z轴近似线性关系，等相位面成为一柱面。这称为高斯波束衍射。

复习

- 电磁波的传播可用传输线上电压、电流波的传播等效传输线模型。
- 传输线模型的要点是，首先将场分解成TE与TM两种模式，再将场量分解为横向场量与纵向场量，进一步又将横向场量分解为模函数与其幅值乘积，即 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\rho})U(z)$， $\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\rho})I(z)$
- 模式函数的幅值$U(z)$、$I(z)$满足传输线方程，其传播常数等于纵向传播常数k_z，特征阻抗 $Z_{\mathrm{c}}=\omega\mu/k_z$ （对于TE模） 或 $Z_{\mathrm{c}}=k_z/\omega\varepsilon$ （对于TM模），传输线传送功率等于波的纵向功率流 p_z。

The End.

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn