James Clerk Maxwell
1831 – 1879

Lesson 7

Electromagnetic Fields and Waves

物质本构关系
坡印亭定理
洛伦兹力方程
电磁场中的基本原理和定理

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn

从积分形式到微分形式的麦克斯韦方程组

根据矢量场的斯托克斯定律

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}}$$

麦克斯韦方程中两个旋度方程可写为

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

由上两式可得

$$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}} \qquad \boxed{\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}$$

矢量场的散度定律

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,dV}$$

麦氏方程中两个散度方程可写成，　　由此可得

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{D}\,dV = \int_V \rho_V\,dV$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}\,dV = 0$$

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_V}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0}$$

时谐矢量的复矢量表示

$$\boldsymbol{E}\left(x,y,z,t\right)=\boldsymbol{x}_0E_x\left(x,y,z,t\right)+\boldsymbol{y}_0E_y\left(x,y,z,t\right)+\boldsymbol{z}_0E_z\left(x,y,z,t\right)$$

$$E_x(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_x(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$
$$E_y(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_y(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$
$$E_z(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_z(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left\{[\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}}$$

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z)}$$

称*E*(*x*,*y*,*z*)为复矢量。

复矢量是矢量，每一个分量是复数，它不是时间的函数。

复矢量形式的麦克斯韦方程

引入***E***、***B***的复矢量后，麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}\left(x,y,z,t\right)=-\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\left(x,y,z,t\right)$

可表示为 $$\nabla\times\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=-\mathrm{Re}\left[\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}\left(x,y,z,t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

因为算符∇只对空间求导数，所以∇运算与取实部运算Re可调换次序，即

$$\mathrm{Re}\left[\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}\left(x,y,z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

由此得到

同理

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z)=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}\left(x,y,z\right)\\&\nabla\times\boldsymbol{H}(x,y,z)=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}\left(x,y,z\right)+\boldsymbol{J}\left(x,y,z\right)\\&\nabla\cdot\boldsymbol{D}(x,y,z)=\rho_V\left(x,y,z\right)\\&\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x,y,z)=0\end{aligned}}$$

引入复矢量表示后，两时谐矢量叉积的时间平均值计算可简化为取实部运算

$$\boxed{\left\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\right\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\right]}$$

麦克斯韦方程

	微分形式	积分形式	时谐场的复矢量形式
法拉第定理	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint_C\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$
安培定理	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint_C\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$
高斯定理	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$	$\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V\rho_V\mathrm{d}V$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$
磁通连续性原理	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$

- **微分形式**的麦克斯韦方程与**积分形式**的麦克斯韦方程中有关场量等都是**时间坐标与空间坐标的函数**；
- **复矢量形式**的麦克斯韦方程中有关场量等**只是空间坐标的函数**，复矢量形式的场量乘上$e^{j\omega t}$取实部才是微分形式、积分形式麦克斯韦方程中的场量。

从麦克斯韦方程组能看出什么?

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

- 两个旋度方程表示变化的磁场产生电场，变化的电场产生磁场。
- 两个散度方程，一个表示磁通的连续性，即磁场线既没有起始点也没有终点。这意味着空间不存在自由磁荷，或者说在人类研究所能达到的空间区域中至今还没有发现单独的磁荷存在。另一个表明电场是有源的。
- 时变场中电场的散度和旋度都不为零，所以电力线起始于正电荷而终止于负电荷。磁场的散度恒为零，而旋度不为零，所以磁场线是与电流交链的闭合曲线，并且磁场线与电场线两者还互相交链。在远离场源的无源区域中，电场和磁场的散度都为零，这时磁场线和电场线将自行闭合，相互交链，在空间形成电磁波。

电流连续性原理

❖ **麦克斯韦方程包含电流连续性原理。**

❖ 用算符∇点乘 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ 两边，并利用矢量运算恒等关系 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

得到 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})=0$

而根据式$\nabla\cdot D=\rho_V$，所以上式成为 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\rho_V}{\partial t}=0$ 或 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\dfrac{\partial\rho_V}{\partial t}$

这是关于电流和电荷的连续方程。

❖ 其物理意义就是流出体积元的电流等于体积元内电荷随时间的减少率。

❖ $J(x, y, z, t)$ 和 $\rho_V(x, y, z, t)$ 随时间作简谐变化时，引入与 $J(x, y, z, t)$ 对应的复矢量 $J(x, y, z)$ 以及与 $\rho_V(x, y, z, t)$ 对应的复数 $\rho_V(x, y, z)$，则有

时谐场的电荷守恒定律 。 $$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{J}(x,y,z)=-\mathrm{j}\omega\rho_V(x,y,z)}$$

麦克斯韦方程组中有几个是独立的?

- 式 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 包含在式 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 中。
- 因为对式 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 两边取散度可得到

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

- 如果把电荷与电流的连续方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\dfrac{\partial\rho_V}{\partial t}$ 作为基本方程，
- $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$ 也不是独立的方程，因为

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)=\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})=0$$

- 将上两式比较便得到 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$
- **所以如果将电流连续方程看作基本方程,麦克斯韦方程组中只有两个旋度方程是独立的。**

麦克斯韦方程+物质本构关系=一组自洽方程

- 麦克斯韦方程、电荷守恒与电流连续方程组中独立的方程是

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho_V}{\partial t}$$

- 其中独立的标量变量共16个，而独立的标量方程只7个，尚需9个独立的标量方程才能求解。
- 这另外的9个标量方程就由物质的本构关系提供

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\qquad\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\qquad\boldsymbol{J}_c=\sigma\boldsymbol{E}$$

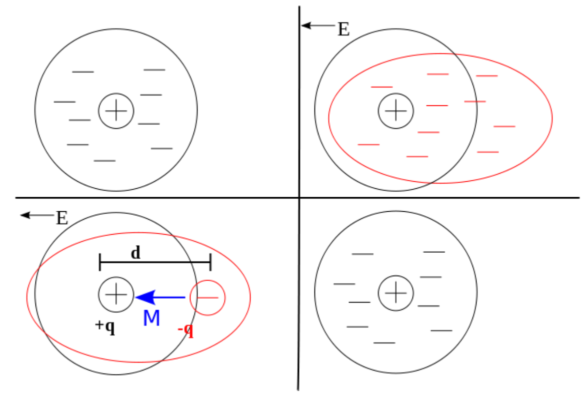
σ：电导率，S/m

- **物质的本构关系作为辅助方程与麦克斯韦方程组一起构成一组自洽的方程。反映物质对电磁场的作用**

物质可以按ε、μ、σ进行分类

- **线性与非线性：**
  - ε、μ、σ与E、B的强度无关，就是线性介质，否则就是非线性介质
- **均匀与非均匀：**
  - ε、μ、σ与空间坐标无关，就是均匀介质，否则就是不均匀介质。
- **各向同性与各向异性：**
  - ε、μ、σ与电磁波在空间传播的方向性无关，称为各向同性介质，否则就是 各向异性介质。
- 线性、均匀、各向同性介质称为**简单介质**。

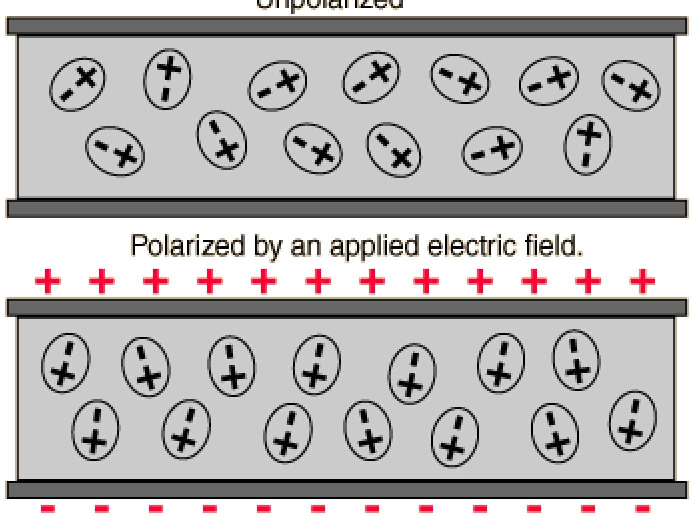
电场中介质看成无限多电偶极子集合



- 介质中总的电场包括没有介质时的电场以及因介质极化而致的诸多偶极子 p 产生的电场
- 电极化密度 $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$　χ_e：电极化率
- 定义电通量密度或电位移 D

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}}$$

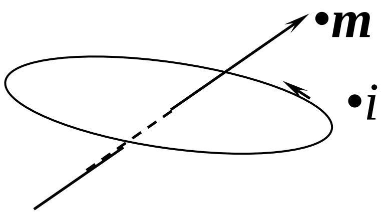
$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$



- ε 为介质的介电常数（或电容率），由介质特性决定。

磁场中介质可看成无限多有序排列的磁偶极子集合

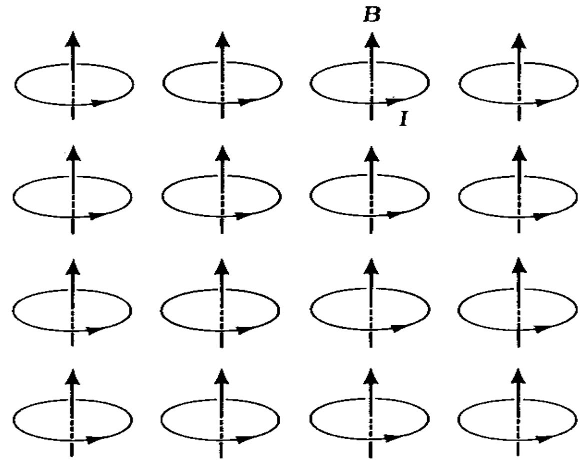
❖ 通电导线置于介质中时，除介质不存在时通电导线产生的磁场外，又有在通电导线产生的磁场感应下，构成介质的无限多小磁体有序排列产生的净磁场。



•(a)磁偶极子

❖ 合成磁通量密度B：

$$\boxed{\mathbf{B} = \varphi_0 \frac{\mu I}{2\pi\rho}} \qquad \boxed{\mu = \mu_r \mu_0}$$



•(b)磁矩沿磁场方向有序排列

μ叫做介质的磁导率，μ_r叫做介质的相对磁导率。

❖ 定义磁场强度H (单位A/m)

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu \mathbf{H}}$$

• 线性与非线性

ε、μ、σ与E、B 的强度无关，就是线性介质，否则就是非线性介质。

在非线性介质中，电极化强度P、磁化强度M与E、H不再是线性关系

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0\left(\chi_e^{(1)}E+\chi_e^{(2)}E^2+\chi_e^{(3)}E^3+\cdots\right)$$

$$\mathbf{M}=\chi_m^{(1)}H+\chi_m^{(2)}H^2+\chi_m^{(3)}H^3+\cdots$$

因此ε、μ不再是常量而跟E、H幅度有关。$\chi_e^{(1)},\chi_e^{(2)},\chi_e^{(3)}$ 和 $\chi_m^{(1)},\chi_m^{(2)},\chi_m^{(3)}$ 等分别叫做介质的一次、二次、三次电极化率和磁化率。

研究非线性媒质的电磁效应属于非线性电磁学及非线性光学的范围

• 均匀与非均匀

ε、μ、σ与空间坐标无关，就是均匀介质，否则就是不均匀介质。

线性、均匀、各向同性介质称为简单介质。

各向同性与各项异性

- ε、μ、σ与电磁波在空间传播的方向性无关，称为各向同性介质。反之则为各向异性介质。
- 若**某个方向的电场不仅产生同一方向的极化，而且产生其他方向的极化**，即D与E的方向不一致，且各方向的极化率不同，则这种媒质是电各向异性媒质。
- 同理若B与H方向不一致，且各方向的磁化率不同，则是磁各向异性媒质。
- 若D与E方向相同，B与H方向相同，则该媒质是各向同性媒质
- 各向同性媒质的极化率与磁化率都是标量
- 各向异性介质，**极化率与磁化率不再是标量，而是二阶张量**，或方阵。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}$$

物质可以按ε、μ、σ进行分类

- 色散与非色散：
  - ε、μ、σ与频率无关称为非色散介质，否则就是色散介质。
- 色散介质一定有损耗，有损耗的介质一定色散。
  - $\sigma \neq 0$的介质有损耗，可用复介电系数的介质表示。
- 当ε、μ为复数时，其虚部表示介质损耗。
- 完纯介质：$\sigma = 0$的介质
- 完纯导体：$\sigma = \infty$的介质

色散与非色散

❖ ε、μ、σ与频率无关称为非色散介质，否则就是色散介质。

❖ 极化或磁化的响应不是即时的，D及B不仅决定于E及H现在的值，还与E及H对时间的各阶导数有关。对于各向同性的色散媒质，构成方程成为下列微分方程形式：

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+\varepsilon_1\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\varepsilon_2\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\varepsilon_3\frac{\partial^3\mathbf{E}}{\partial t^3}+\cdots$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}+\mu_1\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\mu_2\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}+\mu_3\frac{\partial^3\mathbf{H}}{\partial t^3}+\cdots$$

❖ 只有对时间的各阶导数都很小，可以略去不计时，ε、μ、σ与频率无关，为非色散介质

色散介质一定有损耗，有损耗的介质一定色散

- 根据物质结构的经典电子理论，ε、μ为频率的函数，在高频电场作用下，D滞后于合成电场强度E，B滞后于合成磁场强度H。ε、μ为复数

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)-j\varepsilon''(\omega) \qquad \mu(\omega)=\mu'(\omega)-j\mu''(\omega)$$

- ε′(ω)是复介电常数的实部，它与频率函数的关系确定电磁波在介质中传播的色散特性；ε″(ω)为复介电常数的虚部，反映电磁波在介质中极化损耗。 μ″(ω)为复介电常数的虚部，反映电磁波在介质中磁化损耗。

- 在技术科学中通常用介质损耗角δ_e来表示介电损耗。δ_e定义为

$$\delta_e=\tan^{-1}\varepsilon''/\varepsilon'$$

介质损耗角一般表示表示电介质中电位移矢量D与电场强度E之间的相位差。

- $\sigma\neq0$的介质还存在欧姆损耗，其介电常数亦用复数表示

- 如果媒质在电场作用下既发生极化又发生磁化，同样在磁场作用下既发生磁化又发生极化。这种媒质称为磁电媒质，其本构关系为

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E} + \overline{\overline{\xi}} \cdot \mathbf{H} \qquad \mathbf{B} = \overline{\overline{\zeta}} \cdot \mathbf{E} + \overline{\overline{\mu}} \cdot \mathbf{H}$$

- 若上述四个量为标量，仍然磁电交叉耦合，成为双各向同性
- 具有下面本构关系的介质称为手征介质。

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} - \chi\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \chi\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

•用麦克斯韦方程求解电磁问题时，只有当所研究空间ε、μ、σ的具体表达式知道后，才能对麦克斯韦方程求解。

金属材料的介电常数

❖ 对于微波及其以下频率，$\boxed{\varepsilon''/|\varepsilon'|>>1}$,金属呈现导电性，电磁波在 金属中收到强烈衰减

❖ 对于更短波长的电磁波，$\boxed{\varepsilon'\approx 1,\quad \varepsilon''<<1}$,金属呈现电介质特性，对电磁波透明

❖ 介电常数实部和虚部的内在关系，克莱默-克朗宁关系

$$\varepsilon'_r(\omega)-1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega'\varepsilon''_r(\omega)}{\omega'^2-\omega^2}d\omega'$$

$$\varepsilon''_r(\omega)=-\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varepsilon'_r(\omega)-1}{\omega'^2-\omega^2}d\omega'$$

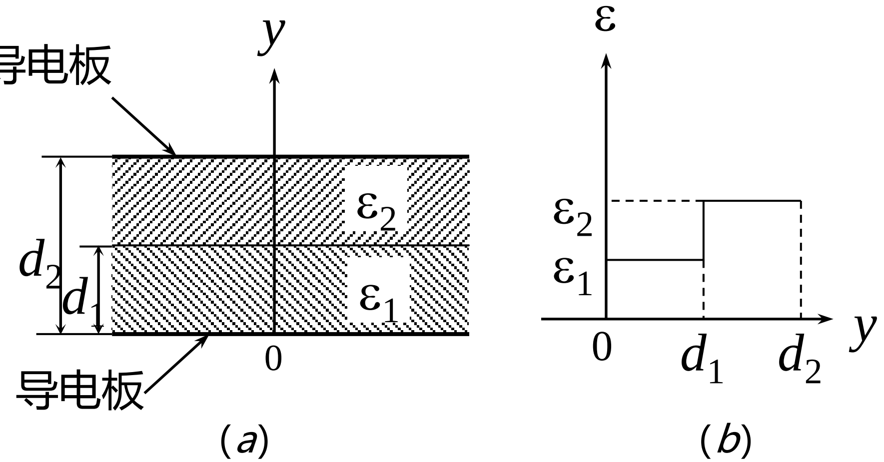
❖ 克莱默-克朗宁关系具有普遍性，线性系统的复响应函数的实部和虚部也具有类似关系

介质的特性ε、μ、σ描述举例

在图示情况下介电常数

ε是y的函数，可表示为

$$\varepsilon(y)=\begin{cases}\varepsilon_1 & 0\le y<d_1\\ \varepsilon_2 & d_1<y\le d\end{cases}$$



(a)两层状介质填充的平行导电板系统
(b)导电板间介质介电系数分布

如果假定介质1、2是绝缘介质，不导电，其磁导率μ_1、μ_2近似为μ_0，则得到

$$\mu_1=\mu_2=\mu_0 \qquad \sigma_1=\sigma_2=0$$

这就是对图示空间介质特性的具体描述，由此我们就能从麦克斯韦方程及物质的本构关系并在一定的边值条件下得出图示系统场问题的解。

因此我们对电磁问题的研究，一定要学会如何用ε、μ、σ描述介质的特性。

坡印廷功率流S(r,t)

- 电磁波有能量，电磁波传播时，其功率流怎么表示?
- 电场E的单位是 V/m，磁场H的单位是 A/m，E 与 H 乘积的单位是 W/m^2，与功率流密度的单位相同。
- 定义矢量 S(r, t) ，它是E(r,t)与H(r,t)的叉积， $\boxed{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}$
- S(r, t) 是矢量，它具有功率流的量纲。
- 这个S(r, t) 是否就是我们要找的电磁功率流呢?
- 考察它的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{S}(r,t)$ ，即通量体密度, 所包含的物理意义。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}(r,t)=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}(r,t)\times\boldsymbol{H}(r,t)\right)=\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}(r,\ t)-\boldsymbol{E}(r,t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}(r,t)$$

- $\nabla\cdot\boldsymbol{S}(r,t)$ 具体表达式可从麦克斯韦方程得到

坡印廷功率流S(r,t) 表示的物理意义

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\right)=\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)-\boldsymbol{E}(r,t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}(r,t)$$

❖ 而从麦克斯韦方程可得 $\boldsymbol{H}(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}(t)=-\mu\boldsymbol{H}(t)\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{H}(t)}{\partial t}$

$$\boldsymbol{E}(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{J}(t)+\varepsilon\boldsymbol{E}(t)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}(t)}{\partial t}$$

❖ 所以 $\nabla\cdot\boldsymbol{S}=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\mu}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\right)-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right)-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$

❖ 对上式两边在域V内作体积分并利用散度定理得到

$$\oint_S\boldsymbol{S}(t)\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V\left(\nabla\cdot\boldsymbol{S}(t)\right)\mathrm{d}V$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}(t)\cdot\boldsymbol{H}(t)\right)\mathrm{d}V-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\right)\mathrm{d}V-\int_V\left(\boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\right)\mathrm{d}V$$

坡印廷功率流S(r,t) 表示的物理意义

$$\oint_S \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{S})\mathrm{d}V=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V-\int_V(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}V$$

$\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}(t)\cdot\boldsymbol{H}(t)$ 表示单位体积中瞬时储存的**磁场能**

$\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)$ 表示单位体积中瞬时储存的**电场能**

$\left[-\boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\right]$ 表示**源提供的功率**

- 上式的右边表示体积V内源提供的功率以及V内储存能量随时间的减少率。根据能量守恒定律，它应当等于从体积V流出的功率。
- 上式左边就表示从V流出的电磁功率，而S(t)就表示电磁功率流。
- 上式表示的电磁能流关系称为坡印廷定理，而矢量S(r, t)称为瞬时坡印廷功率流。

坡印亨矢量的应用

❖ 对于一个封闭面S，当交变电磁场在一个周期内储能无变化时，坡印亨定理可写为

$$-\oint_S \boldsymbol{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V (\boldsymbol{J}\cdot \boldsymbol{E})\mathrm{d}V$$

❖表示单位体积中流进闭合面的 能量与其所围体积中电流做功引起的功率损耗相等。利用这一点，可以通过测量某处的坡印亨矢量来间接计算高压电器的功率损耗。——坡印亨矢量功率计

❖很好地解决“高压“下测功率的问题

❖拓展学习——坡印亨矢量在实际问题中的应用，如近场显微技术中的领域

复数坡印廷功率流

❖ 对于时谐场，定义复数坡印廷功率流S(r)，它是复矢量E(r)与H(r)的共轭复矢量H*(r)的叉积。

$$\boxed{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})}$$

❖ 通过复数坡印廷功率流S(r)求瞬态坡印廷功率流S(t)的时间平均值<S(t)>极为方便

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{S}(t) \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{E}(x,y,z,t) \times \boldsymbol{H}(x,y,z,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{E}(x,y,z,t) \times \boldsymbol{H}(x,y,z,t)\,\mathrm{d}(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})]\end{aligned}$$

❖ 因此时间平均坡印廷功率流 <S(t)> 的计算可简化为取复数坡印廷功率流 [$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$] 实部的运算。

复数坡印廷功率流的物理意义

❖ 因为 $\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ $\quad\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''$ $\quad\boldsymbol{J}_c(r)=\sigma\boldsymbol{E}(r)$

$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{J}$ $\quad\mu=\mu'-j\mu''$

❖ 所以 $\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r}))=-\mathrm{j}\omega[\mu|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2-\varepsilon^*|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2]-\sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$

❖ 或者 $\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})=-\dfrac{\mathrm{j}\omega}{2}[\mu|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2-\varepsilon^*|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2]-\dfrac{\sigma}{2}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$

$$=-\frac{\omega}{2}(\mu''|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2+\varepsilon''|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2)-\frac{\sigma}{2}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2-j2\omega\left(\frac{1}{4}\mu'|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2-\frac{1}{4}\varepsilon'|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2\right)$$

$$=-p_{\mathrm{r}}-j2\omega(w_{\mathrm{m}}-w_{\mathrm{e}})$$

❖ 式中 $p_{\mathrm{r}}=\mathrm{Re}[-\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})]=\dfrac{1}{2}\omega(\mu''|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2+\varepsilon''|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2)+\dfrac{1}{2}\sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$

$w_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{4}\mu'|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2$ $\qquad w_{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{4}\varepsilon'|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$

❖ w_e、w_m分别表示时间平均电场能密度与磁场能密度，p_r代表单位体积内电阻损耗与介质损耗。

复数坡印廷功率流的物理意义

- **利用散度定理** $\nabla\cdot\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}[\mu|\boldsymbol{H}|^2-\varepsilon^*|\boldsymbol{E}|^2]-\frac{\sigma}{2}|\boldsymbol{E}|^2=-p_\mathrm{r}-j2\omega(w_\mathrm{m}-w_\mathrm{e})$

$$-\oint_S \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S=\int_V(p_\mathrm{r}+\mathrm{j}2\omega(w_\mathrm{m}-w_\mathrm{e}))dV=P_\mathrm{R}+\mathrm{j}2\omega(W_\mathrm{m}-W_\mathrm{e})$$

- **式中** $P_\mathrm{R}=\int_V\frac{1}{2}\omega(\mu''|\boldsymbol{H}|^2+\varepsilon''|\boldsymbol{E}|^2)\mathrm{d}V+\int_V\frac{1}{2}\sigma|E|^2\,\mathrm{d}V$

$$W_\mathrm{m}=\int_V w_\mathrm{m}\mathrm{d}V\qquad W_\mathrm{e}=\int_V w_\mathrm{e}\mathrm{d}V$$

- **表示流入闭曲面S包围的体积V内的复数坡印廷功率的实部等于体积V内平均损耗的功率。 （有功功率）**
- **当体积V内储存的磁场能与电场能的时间平均值不相等时，对于时间呈现电性的或磁性的这部分平均净储能，需要用复数坡印廷功率流的虚部（无功功率）来平衡。可用来求解电磁问题的等效电路参数**

复数坡印廷功率流的应用

$$
\begin{aligned}
-\oint_{S} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}_0 \mathrm{d}S &= \int_{V} (p_{\mathrm{r}} + \mathrm{j}2\omega(w_{\mathrm{m}} - w_{\mathrm{e}}))dV \\
&= P_{\mathrm{R}} + \mathrm{j}2\omega(W_{\mathrm{m}} - W_{\mathrm{e}}) \\
&= P + jQ
\end{aligned}
$$

•电磁问题的等效电路参数计算

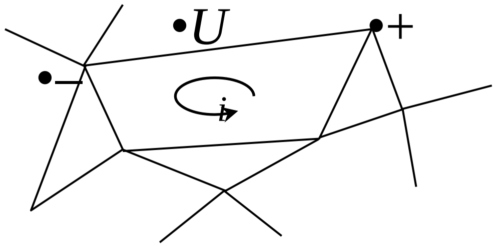
$$
R = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{I^2}\mathrm{Re}[-\oint_{S} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}_0 \mathrm{d}S]
$$

$$
X = \frac{Q}{I^2} = \frac{1}{I^2}\mathrm{Im}[-\oint_{S} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}_0 \mathrm{d}S]
$$

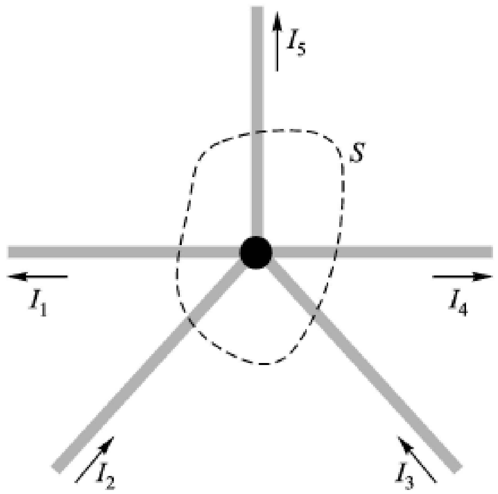
从麦克斯韦方程到基尔霍夫电压、电流定理

❖当 $\frac{\partial}{\partial t} \to 0$ (或所研究对象线度比波长小得多时)

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \to \Sigma U = 0$$



$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_V \mathrm{d}V = 0 \to \Sigma I = 0$$



❖这就是基尔霍夫定律，它是我们分析低频电路的理论基础。

从做题目角度看，学了第三章要掌握：

- 如何用麦克斯韦方程，知道E如何求H，知道H如何求E。

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

- 知道E、H如何求坡印廷功率流及电磁场能量密度

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$$

-

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},t) \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})^*\right]$$

【例】如果某区域内 $\mathbf{E}=\mathbf{x}_0 E_0 e^{-jkz}$，假定ε、μ是实数，求E(t)、H(t)、S(t)、<S(t)>，以及电场能密度$w_e(t)$，磁场能密度$w_h(t)$及其平均值$<w_E(t)>$、$<w_H(t)>$。

解：

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\frac{1}{-j\omega\mu}\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{y}_0 E_0\frac{k}{\omega\mu}e^{-jkz}$$

$$\mathbf{E}(t)=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{x}_0 E_0 e^{-jkz}e^{j\omega t}\right\}=\mathbf{x}_0 E_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\mathbf{H}(t)=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{y}_0\frac{k}{\omega\mu}E_0 e^{-jkz}e^{j\omega t}\right\}=\mathbf{y}_0\frac{k}{\omega\mu}E_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\mathbf{S}(t)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{H}(t)=\mathbf{z}_0\frac{k}{\omega\mu}E_0^2\cos^2(\omega t-kz)\qquad\langle\mathbf{S}(t)\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right\}=\mathbf{z}_0\frac{k}{\omega\mu}\frac{E_0^2}{2}$$

$$w_E(t)=\frac{\varepsilon E_0^2}{2}\cos^2(\omega t-kz)\qquad <w_E(t)>=\frac{\varepsilon}{4}E_0^2$$

$$w_H(t)=\frac{k^2E_0^2}{2\mu\omega^2}\cos^2(\omega t-kz)\qquad <w_H(t)>=\frac{k^2}{4\omega^2\mu}E_0^2=\frac{\varepsilon}{4}E_0^2$$

洛伦兹力

- 带电荷量 q、速度为 v 的质点在电磁场中受到的力为洛伦兹力方程

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})}$$

- F 的单位是牛顿（N），电荷量 q 的单位是库仑（C）
- $\boxed{\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}}$ 是电场力，它是带电体相互作用规律的实验总结。
- $\boxed{\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}}$ 是磁场力，也是实验规律的总结。
- F_m 正比于 v 与 B 的叉积。静止电荷 $v = 0$，所以磁场对静止电荷不起作用。
- 对运动电荷也仅当其速度 v 有与 B 垂直的分量时，$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \neq 0$ ，磁场才对运动电荷起作用。
- 磁场对运动电荷的作用力总是与运动电荷的速度 v 垂直，所以磁场力总是使荷电质点运动轨迹弯转。
- 洛伦兹方程描述了电磁场对构成物质的基本单元——电子和核的作用，而物质对电磁场的作用则由麦克斯韦方程和物质的本构关系反映出来。

等离子体

❖ 什么是等离子体?

– 等离子体是电离了的气体，含有大量带正电的离子和带负电的电子，与束缚在原子中的带负电的电子和带正电的核不同，等离子体中的电子和离子可以自由运动。

– 离开地面 80~120 km 高空的电离层就是一个等离子体，电离层是由太阳辐射来的紫外光电离高空大气而形成的。

❖ 等离子体分析模型：

– 如果时谐电场作用于等离子体，等离子体中的电子和离子将受电场力作用而运动。因为电子质量比离子质量小得多，离子的运动可忽略，电子将在平衡位置附近作简谐振动。电子离开平衡位置振荡，电子和离子的重心不重合，形成电偶极子。

– 时谐电场扰动下的等离子体可看成无限多振荡电偶极子的集合

等离子体单位体积中的电偶极矩

❖ 时谐场作用于等离子体，电子受到的力，按洛伦兹力方程为

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}$$

❖ 假设x为电子离开正离子的位移，在电子作简谐振荡假定下，有

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2\boldsymbol{x}$$

❖ 根据偶极子定义，偶极矩密度 *P* 为 $\boldsymbol{P} = -Ne\boldsymbol{x}$

❖ 由式(1)与式(2)求得x，再将此x代入式(3) 得到 $\boldsymbol{P} = \dfrac{-Ne^2}{m\omega^2}\boldsymbol{E}$

等离子体的等效介电常数

❖ 任何介质中 D 由自由空间部分与介质极化产生的电偶极矩 P 两部分构成。

❖ 等离子体也是一种介质，所以等离子体中 D 也由自由空间部分与电偶极矩P两部分构成，即

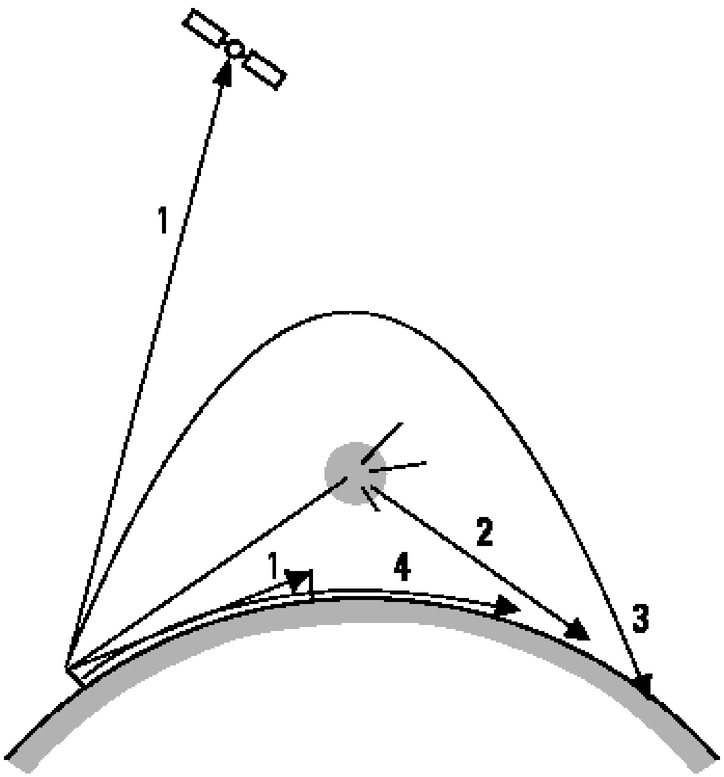
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} - \frac{Ne^2}{m\omega^2}\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{P}}^2}{\omega^2}\right)\boldsymbol{E}$$

❖ 式中 $\omega_{\mathrm{P}} = \sqrt{\dfrac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$ 称为等离子体频率。

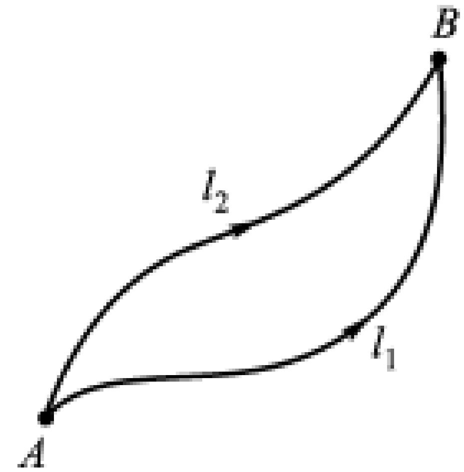
❖ 所以等离子体可用一有效介电常数为 $\varepsilon_{\mathrm{e}} = \varepsilon_0\left(1 - \dfrac{\omega_{\mathrm{P}}^2}{\omega^2}\right)$ 的介质等效。

电离层中等离子体对电磁波传播的影响

- 电离层中电子浓度随电离层离开地面的高度以及昼夜时间而变化。
- 白天的典型值为10^{12}电子/m^3，相应的$\omega_p = 5.64\times10^7$rad/s，或 $f_p = 9$MHz。
- 因此，如果电磁场的频率 $f >> f_p$，电离层与自由空间无多大差别。
- 但是对于较低频率的电磁场，ε 可以为负，对电磁波全反射，可作为电磁波的反射体。



矢量场的分类



❖ 若矢量场 A_1 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}_1=0$，称其为**无旋场**。

❖ 无旋场可以表示为一个标量场 Φ 的负梯度 $\boldsymbol{A}_1=-\nabla\Phi$

❖ 称Φ为A_1的**势函数**，并称能有上式表示的矢量场为**有势场**。无旋场也是有势场。

❖ 利用斯托克斯定理可以得出 $\oint_l \boldsymbol{A}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$

❖ 满足上式的矢量场称为**保守场**，无旋场也是保守场。保守场中场量的线积分与路径无关，即 $\int_{l_1}\boldsymbol{A}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1=\int_{l_2}\boldsymbol{A}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$

❖ 若A_2的散度恒为零，则称此矢量场为**管形场**，也称为**无源场**（此处是指散度源）。无源场总能表示为另一个矢量场的旋度，即 $\boldsymbol{A}_2=\nabla\times\boldsymbol{F}$

❖ 若在给定区域，**矢量场的散度、旋度恒为零**，则称此矢量场为**调和场**。

❖ 调和场是指既无旋又无源的矢量场。

散度和旋度

静电场的**有源无旋**性质：

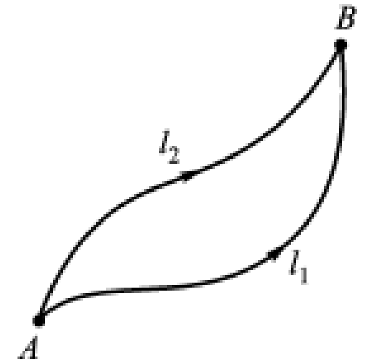
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

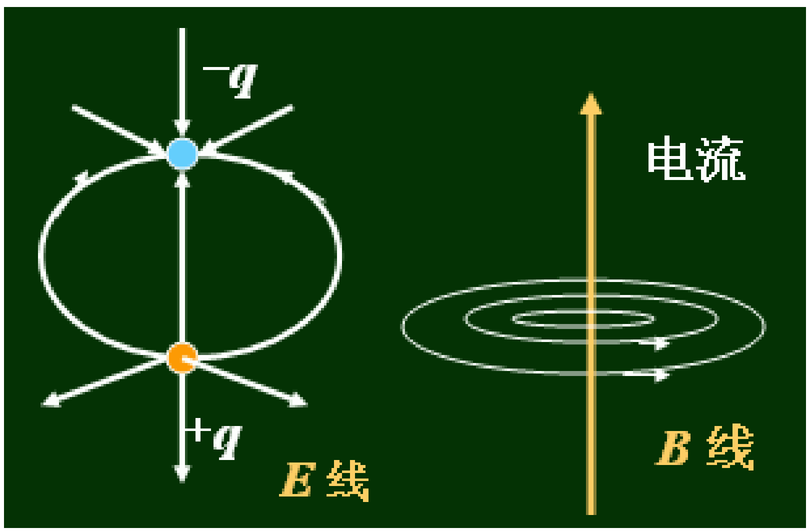
电荷分布点是电场的源点

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

静电场的场线无涡旋状结构

$$E = -\nabla \Phi$$





•恒定磁场的**有旋无源**性质：

没有单独的磁荷存在

磁场线的涡旋状结构

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

•矢量位函数A

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

亥姆霍兹定理

•一个矢量场的性质由激发场的源来确定。

•源有两个，一个是散度源（也称为通量源），另一个叫旋度源（也称为涡旋源）。

•那么反过来，若已知一个矢量场的散度和旋度，能否唯一确定该矢量场?答案是肯定的，这就是亥姆霍兹定理。

•亥姆霍兹定理：如果在体 V 内矢量场 A 的散度和旋度已知，在 V 的边界 S 上 A 的值也已知，则在 V 内任意一点 A 的值能唯一确定。

•这一定理的证明略去。据此定理，可以将任一矢量场 A 分解为一个无旋场与一个无源场之和，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$

•其中 A_1 是无旋场，A_2 是无源（散度源）场。

电磁场的几个基本原理和定理——叠加定理

❖ **满足叠加定理的基本条件：**如果在我们所研究的区域内及边界上，媒质的ε、μ、σ都与场强无关，即我们处理的是线性媒质。那么麦克斯韦方程所描述的系统就是线性系统，满足线性系统的叠加定理。

❖ **电磁场的叠加定理是指：**

若E_i、D_i、B_i、H_i，i从1到n，是给定边界条件下麦克斯韦方程的多个解，则 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i$ $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{D}_i$ $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{B}_i$ $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{H}_i$

必是麦克斯韦方程在同一边界条件下的解。

电磁场的唯一性定理

❖ 唯一性定理要回答在什么条件下麦克斯韦方程组的解才是唯一的。

❖ 假设V内的一组源对场量产生两个不同的解 $\begin{cases} \boldsymbol{E}_a \\ \boldsymbol{H}_a \end{cases}$, $\begin{cases} \boldsymbol{E}_b \\ \boldsymbol{H}_b \end{cases}$ ，且均满足麦氏方程。

❖ 这两组解之差 $\begin{cases} \delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{E}_b \\ \delta\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_a - \boldsymbol{H}_b \end{cases}$ 也满足麦氏方程

$$\nabla\times\delta\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\delta\boldsymbol{E} + \sigma\delta\boldsymbol{E} \qquad \nabla\times\delta\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\delta\boldsymbol{H}$$

❖ 重复类似于导出复数坡印廷定理的步骤，可得到关系

$$\nabla\cdot\left(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*\right) = -\mathrm{j}\omega\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2 - \varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right] - \sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2$$

❖ 或

$$\int_S \delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\mathrm{j}\omega\int_V\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2 - \varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right]\mathrm{d}V - \int_V \sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}V$$

电磁场的唯一性定理

$$\nabla\cdot\left(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*\right)=-\mathrm{j}\omega\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2-\varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right]-\sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2$$

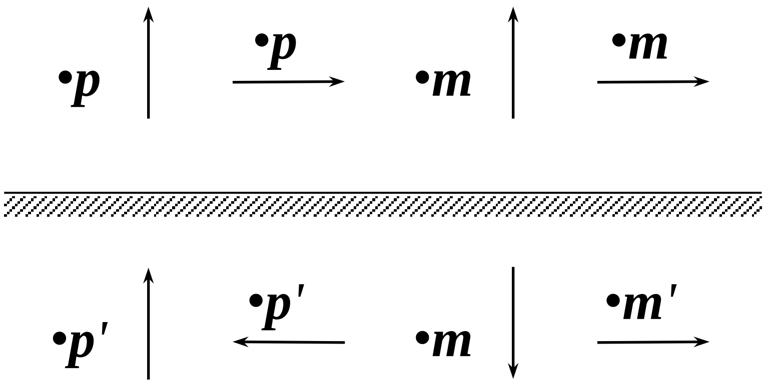
$$\int_S\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\mathrm{j}\omega\int_V\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2-\varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right]\mathrm{d}V-\int_V\sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}V$$

- 唯一性定理要求 $|\delta E|^2$及$|\delta H|^2$均为零，如果对于所假定的 V 内的两组解在边界 S 面上切向电场或切向磁场唯一指定，则 V 内的解是唯一的。
- 如果 S 面上的电场或磁场的切向分量给定，或者在 S 面上的部分区域给定 E 的切向分量，在 S 的其余表面给定 H 的切向分量

$$\left.\begin{aligned}\left(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1\right)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\\ \left(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1\right)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\end{aligned}\right\}\rightarrow$$ 那么在区域V内的电磁场是唯一确定的。

镜像定理

- 镜像定理源于唯一性定理。
- 镜像定理指：
  - 当源靠近理想导体壁时，所产生的场相当于原有的源和它对该壁作为镜面产生的镜像一起建立的场。



•电偶极子及磁偶极子在理想导体表面的镜像

- 确定镜像的原则：
  - 镜像与原有的源共同建立的场在边界上满足理想导体的边界条件（理想导体的边界条件在第5章专门讨论）。
- 求源靠近理想导体壁产生的场转化为求原有的源与其镜像产生的场，使场的求解大为简化。
- 电荷对平面理想导体壁的镜像是另一侧等距处与原电荷大小相等、符号相反的电荷。
- 电流元（即交变电偶极子）对理想导体平面表面的镜像如图所示。

等效原理

- 等效原理也源于唯一性定理。
- 等效原理指：**在某一空间区域内，能够产生同样场的两种源，称其在该区域内是等效的。**
- 如果源在闭曲面S包围的体积V内，闭曲面上有切向场 $n_0 \times H$ 和 $E \times n_0$，欲求 V 外某一点场时，有两种处理方法：
  - 直接由V内的一次源求 V 外的场；
  - 按照等效原理，假设 V 内为零场，而在界面 S 上有二次源 $n_0 \times \mathrm{H}$ 和 $E \times n_0$，求二次源在 V 外产生的场。
- 根据唯一性定理，二次源可以产生唯一的与真实源相同的场。因为它们在界面上有相同的切向场。

电型源与磁型源

- 二次源是一种等效源，或者说是一种虚源。
- $n_0 \times H$ 相当于电流密度矢量，记作 $n_0 \times H = J_s$，称为**电型源**。
- 对偶地把 $E \times n_0$ 称为磁流密度矢量，记作 $J_{ms} = E \times n_0$。称为**磁型源**。
- **注意，这里所引进的新的波源磁流，实际上就是切向电场，这纯粹是为了数学上的方便。**
- 但是真正的波源还是电荷和电流，因为切向电场实际上也由电荷和电流产生的。

磁型源作用下的麦克斯韦方程

- 位移电流密度和传导电流密度与磁场强度H的关系为 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D}$
- 引进磁流密度后，仿此也可写出 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\omega \boldsymbol{B}$
- 引入虚拟磁流后，按照连续性原理，必定有磁荷，于是有 $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \dfrac{-\partial \rho_{\mathrm{m}}}{\partial t}$
- 由于旋度的散度为零，可以推出 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_{\mathrm{m}}$
- 引进磁荷和磁流后，麦克斯韦方程组变为

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\omega \boldsymbol{B} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

电的量和磁的量具有对偶性

•电型源	磁型源
$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=0$	$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$
$\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=0$
$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$
$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\rho_{\mathrm{m}}/\mu$
$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\rho=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}+\mathrm{j}\omega\rho_{\mathrm{m}}=0$

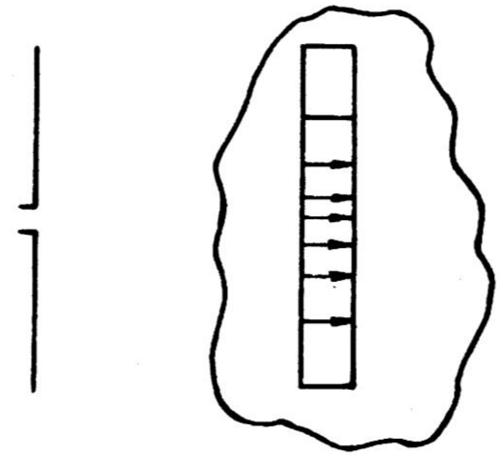
- ❖ 这两组方程式之间存在着明显的对应关系，如果将上两组方程式中的所有场量和源量作如下代换
- ❖ 电型源方程变为磁型源方程，而磁型源方程则变为电型源方程。电型源方程和磁型源方程式的这种对应形式称为二重性或对偶性。

$\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{H}$
$\boldsymbol{H}\Rightarrow-\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{H}\Rightarrow-\boldsymbol{E}$
$\varepsilon\Rightarrow\mu$	$\varepsilon\Rightarrow\mu$
$\mu\Rightarrow\varepsilon$	$\mu\Rightarrow\varepsilon$
$\rho\Rightarrow\rho_m$	$\rho_m=-\rho$
$\boldsymbol{J}\Rightarrow\boldsymbol{J}_m$	$\boldsymbol{J}_m\Rightarrow-\boldsymbol{J}$

电和磁对偶性的应用

❖ 电磁场方程式的二重性提供了这样一种便利，如果知道一个问题（例如电型源问题）的解就可由对偶关系得出它的对偶问题（为一磁型源问题）的解，而无需重复求解方程。

❖ 由电基本振子的辐射场写出磁基本振子的辐射场可作为二重性应用的简单例子。



(a) (b)

•电振子与磁振子的对偶

•(a) 电振子 (b) 磁振子（裂缝）

❖ 引入磁流、磁荷概念后，这两种基本辐射单元极其相似。

❖ 电基本振子天线表面上有交变电流，在天线的两端电流为零，而有电荷的堆积，电流和电荷之间满足连续性方程。

❖ 作为实际可行的磁振子的裂缝天线，其口径上有切向电场，相当于磁流密度，在裂缝的两端切向电场为零，即磁流为零，因而裂缝的两端也相当于磁荷的堆积。

互易定理

- 电磁互易定理反映两组不同的场源之间的影响和响应关系。
- 考虑同一线性介质中的两组频率相同的源 J^a、$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^{a}$ 和 J^b、$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^{b}$。我们用 E^a、H^a 表示源 a 产生的场，用 E^b、H^b 表示源 b 产生的场
- 互易定理是指： $\boxed{\int_V \left(\boldsymbol{E}^a \cdot \boldsymbol{J}^b - \boldsymbol{H}^a \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^{b}\right) \mathrm{d}V = \int_V \left(\boldsymbol{E}^b \cdot \boldsymbol{J}^a - \boldsymbol{H}^b \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^{a}\right) \mathrm{d}V}$
- 积分区域V是全空间。 注意积分中的量不是复共轭量，因此一般来说式中的积分并不表示功率。Rumsey将这两个积分称为反应（reaction）。
- 例如，式的左方的积分是场a对于源b的反应，并利用符号表示为

$$\langle a,b\rangle = \int_V \left(\boldsymbol{E}^a \cdot \boldsymbol{J}^b - \boldsymbol{H}^a \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}^{b}\right) \mathrm{d}V$$

- 而式右方的积分是场b对于源a的反应，用符号 $\langle b,a\rangle$表示。于是互易定理用反应可表示为 $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$
- 反应概念可以看作是彼此独立的场与源之间响应的量度。电路的互易定理是电磁互易定理的特例。

复习

❖ 要点

– 物质的本构关系
– 麦克斯韦方程反映电荷、电流产生场，洛伦兹力方程反映场对电荷、电流的作用。
– 等离子体是一种特殊的介质，其介电常数与频率有关。
– 坡印廷定理反映电磁运动符合能量守恒定律。

❖ 复习:

– 3.3-3.6(p127-142)

The End.

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn