

## Lesson 12

# Electromagnetic Fields and Waves

天线

郑史烈

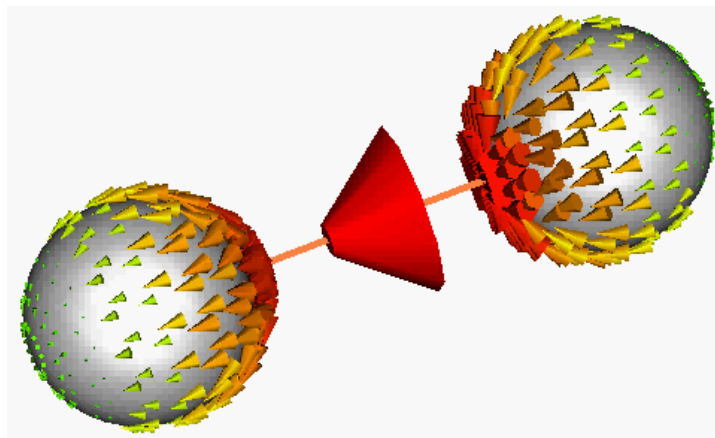
zhengsl@zju.edu.cn



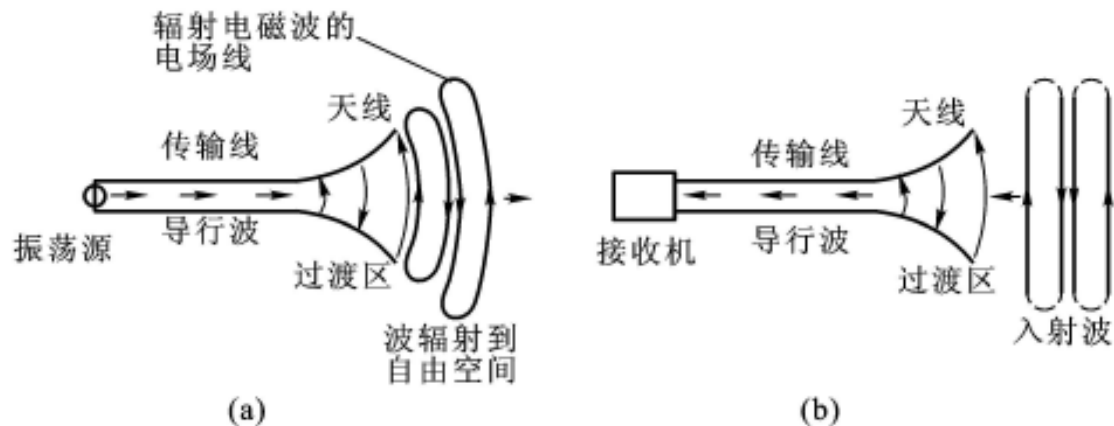
**James Clerk Maxwell**  
1831 – 1879

## 天线

- ❖ 随时间变化的电流和电荷在其周围必然产生随时间变化的电磁场，这种随时间变化的电场和磁场能相互转换。
- ❖ 在交变电流和电荷存在的情况下，必有部分电磁能离开波源（电流和电荷）向外传播，这就是电磁辐射。
- ❖ 能有效地辐射（或接收）电磁波的装置称为天线。



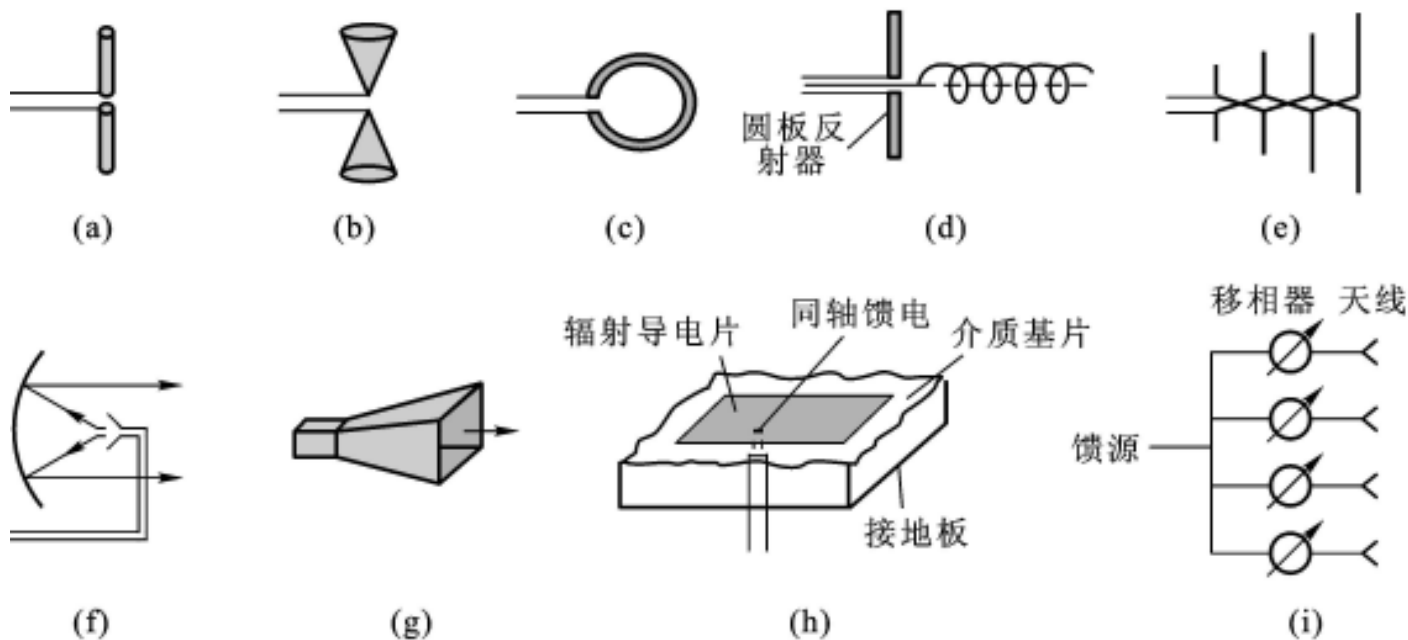
## 天线可看作转换器



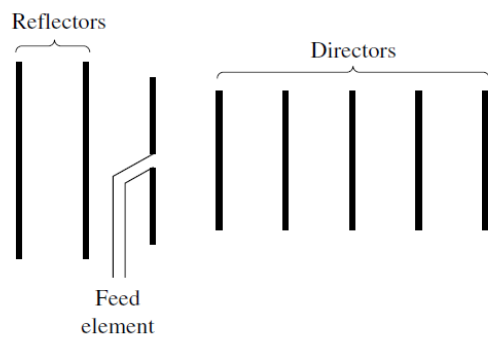
- ❖ 发射天线可以看作波导中传播的导行波到自由空间的转换器
- ❖ 接收天线则可看成自由空间传播的电磁波转变为波导中导行波的转换器
- ❖ 对天线的最基本要求：
  - 发射或接收电磁波的**方向性和极化特性**，对方向性和极化特性的具体要求视不同的应用环境而定。
  - 天线和波导的**匹配**，即在发射模式下，波导中导引的电磁波能全部通过天线辐射出去，在接收模式下，天线接收到的电磁波能量全部被检测器检测到。

## 天线举例

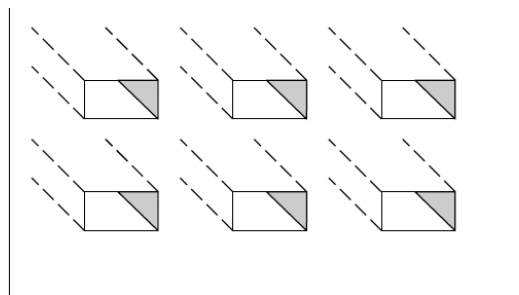
❖ 天线大体可分为线天线和口径天线两类。



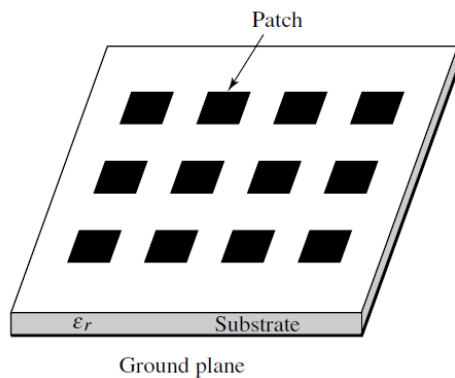
天线的特征与天线的形状、大小及构成材料有关。天线的大小一般以天线发射或接收电磁波的波长 $\lambda$ 来计量。因为工作于波长 $\lambda = 2\text{m}$ 的长为1m的偶极子天线的辐射特性与工作于波长 $\lambda = 2\text{cm}$ 的长为1cm的偶极子天线是相同的。



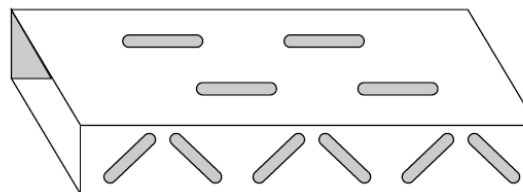
(a) Yagi-Uda array



(b) Aperture array



(c) Microstrip patch array



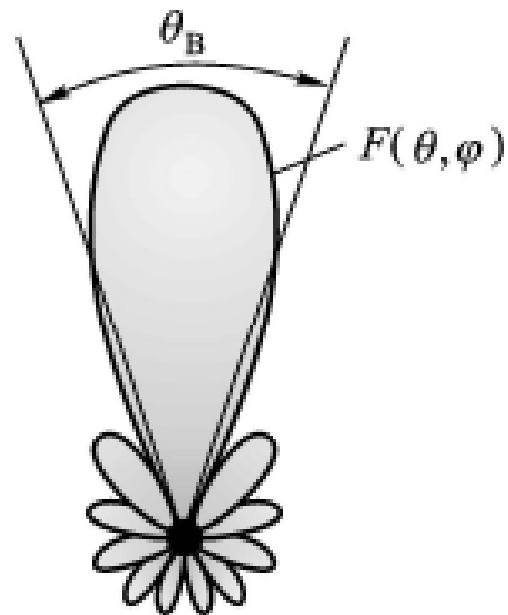
(d) Slotted-waveguide array

**Figure 1.6** Typical wire, aperture, and microstrip array configurations.

## 描述天线特性的主要参数

### ❖ 与天线方向性有关参数：方向性函数或方向图

- 离开天线一定距离处，描述天线辐射的**电磁场强度**或**功率**在空间的相对分布的数学表达式，称为天线的方向性函数；
- 把方向性函数用图形表示出来，就是方向图。
- 最大辐射波束通常称为方向图的主瓣。主瓣旁边的几个小的波束叫旁瓣。
- 表示方向图特性的参数，这些参数有：
  - 天线增益 $G$ （或方向性 $G_D$ ）
  - 波束宽度（或主瓣宽度）
  - 旁瓣电平。



❖ 天线效率      极化特性

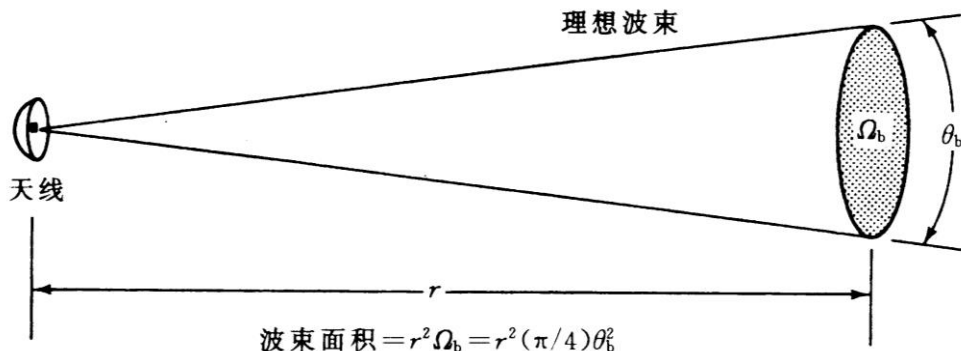
❖ 频带宽度      输入阻抗

❖ 天线噪声

## 天线增益G与方向性G<sub>D</sub>

天线增益是在波阵面某一给定方向天线辐射强度的量度

$$G = \frac{\text{单位立体角最大辐射功率}}{\text{馈入天线总功率}} \cdot 4\pi$$



因为天线总有损耗，天线辐射功率比馈入功率总小一些，所以天线增益总要比天线方向性小一些。

理想天线能把全部馈入天线的功率限制在某一立体角 $\Omega_B$ 内辐射出去，且在 $\Omega_B$ 立体角内均匀分布。这种情况下天线增益与天线方向性相等。

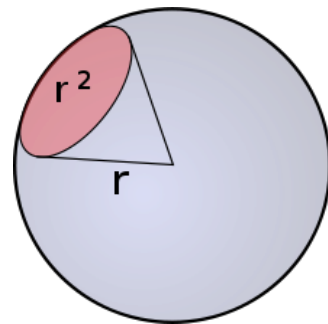
$$G = G_D = 4\pi / \Omega_B$$

Q: 增益(dB)可以是负的吗? 方向性系数呢?

天线方向性  $G_D$  与天线增益  $G$

定义略有不同

$$G_D = \frac{\text{单位立体角最大辐射功率}}{\text{总的辐射功率}} \cdot 4\pi$$



## 球坐标

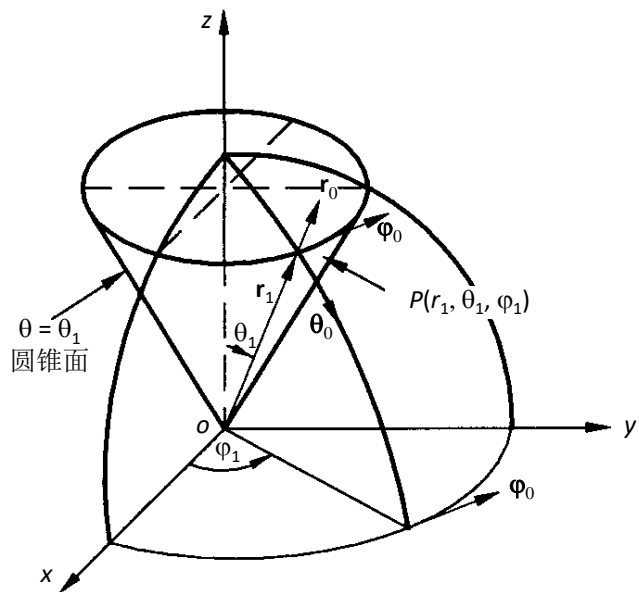


图1-31 点P在球坐标系中的坐标

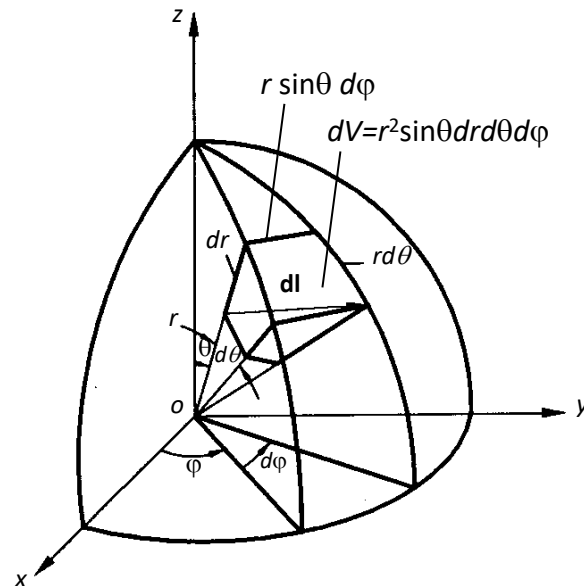


图1-32 球坐标系中微分体积元

$$d\mathbf{l} = \mathbf{r}_0 dr + \boldsymbol{\theta}_0 r d\theta + \boldsymbol{\varphi}_0 r \sin \theta d\varphi$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$dS_r = \mathbf{r}_0 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dS_\theta = \boldsymbol{\theta}_0 r \sin \theta dr d\varphi$$

$$dS_\varphi = \boldsymbol{\varphi}_0 r dr d\theta$$

球坐标系中球面上面积元 $dS_r$ 对球心所张立体角 $d\Omega$ 定义为

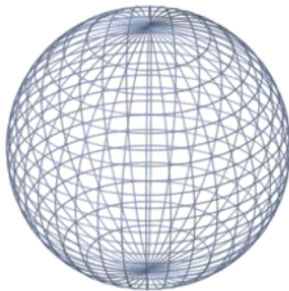
$$d\Omega = \frac{dS_r}{r^2}$$

整个球面对球心所张立体角 $\Omega$ 为

$$\Omega = \int \frac{dS_r}{r^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi$$



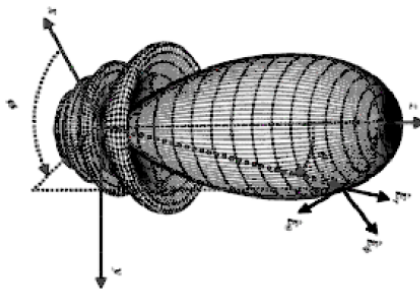
# 方向性



- **Isotropic:** In theory, the isotropic radiator is a notional reference antenna having by definition a directivity of 0 dBi (dB relative to **isotropic**), which means that the antenna transmits (or receives) electromagnetic radiation from **all** directions equally (3-D).



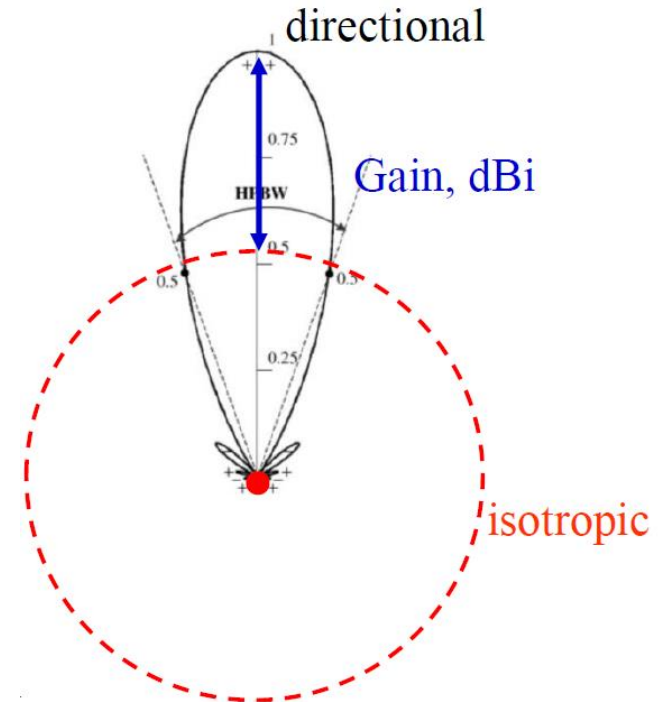
- **Omni-directional:** the antenna transmits (or receives) electromagnetic radiation from all directions equally in the certain cuts (usually, 2-D).



- **Directional:** the antenna transmits (or receives) electromagnetic radiation to certain directions only.

## 增益的表示

- Absolute or isotropic gain ( $G_{\text{dBi}}$ ), when the reference antenna is **an isotropic** antenna isolated in space
- The gain relative to a half-wave dipole ( $G_{\text{dBd}}$ ) when the reference antenna is a **half-wave dipole** isolated in space and with an equatorial plane that contains the given direction.

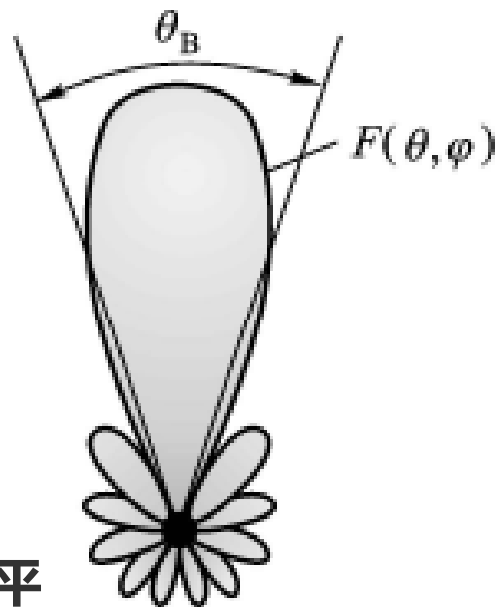


## 波束宽度与旁瓣电平

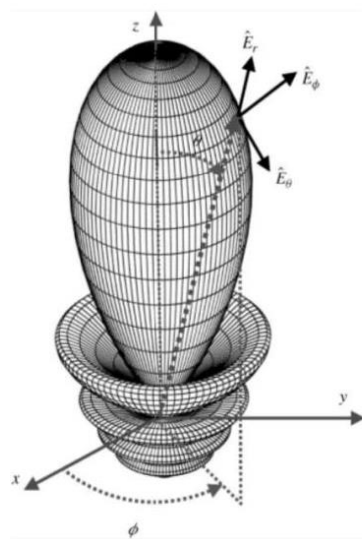
- ❖ 实际天线的辐射功率有时并不限制在一个波束中，在一个波束内也非均匀分布。在波束中心辐射强度最大，偏离波束中心，辐射强度减小。
- ❖ 辐射强度减小到**3dB**时的立体角即定义为 $\Omega_B$ 。
- ❖ 波束宽度 $\theta_B$ 与立体角 $\Omega_B$ 关系为

$$\Omega_B = \frac{\pi}{4} \theta_B^2$$

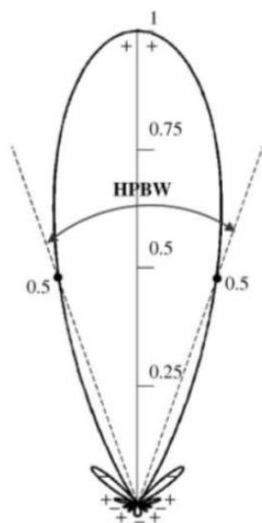
- ❖ 旁瓣电平
- ❖ 旁瓣电平是指离主瓣最近且电平最高的第一旁瓣电平
- ❖ 一般以分贝表示。方向图的旁瓣区一般是不需要辐射的区域，其电平应尽可能低。



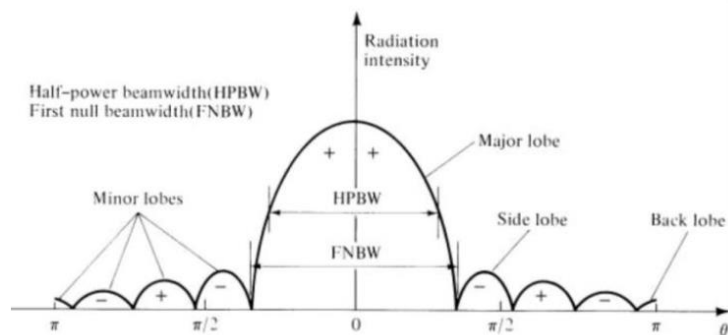
## 方向图的二维表示



3-D



极坐标



直角坐标

## Q: 损耗的来源? 影响天线效率的因素

## 天线效率与辐射电阻

天线效率  $\eta_A$  定义为,

$$\eta_A = \frac{P_\Sigma}{P_i} = \frac{P_\Sigma}{P_\Sigma + P_l}$$

$$G = \eta_A G_D$$

$P_i$  为输入功率;  $P_l$  为损耗功率;  $P_\Sigma$  为辐射功率。

天线的辐射电阻  $R_\Sigma$  用来度量天线辐射功率的能力, 它是以天线上流过的最大电流定义的, 其上损耗功率等于辐射功率。

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} I_m^2 R_\Sigma$$

$$R_\Sigma = \frac{2P_\Sigma}{I_m^2}$$

显然, 辐射电阻越大, 天线的辐射能力越强。

仿照引入辐射电阻的办法, 损耗电阻  $R_l$  为

$$R_l = \frac{2P_l}{I_m^2}$$

将上述两式代入效率公式, 得天线效率为

$$\eta_A = \frac{R_\Sigma}{R_\Sigma + R_l} = \frac{1}{1 + R_l/R_\Sigma}$$

可见, 要提高天线效率, 应尽可能提高  $R_\Sigma$ , 降低  $R_l$ 。

## 天线的辐射电阻与输入阻抗

❖ 天线输入阻抗的定义：

❖ 传输线将高频电磁能量馈入天线，以馈入点作为参考面上电压、电流定义天线输入阻抗。

$$Z_{\text{in}} = \frac{U_{\text{参考面}}}{I_{\text{参考面}}}$$

❖ **注意**天线输入阻抗 $Z_{\text{in}}$ 与天线辐射电阻的区别，天线辐射电阻用天线上最大电流 $I_m$ 定义。

❖ 天线输入阻抗与传输线特征阻抗（或等效阻抗）匹配时，才能使天线获得最大功率（发射模式时），或接收机接收到最大功率（接收模式时）。

## 极化特性、频带宽度与输入阻抗

❖ **极化特性**是指天线在最大辐射方向上电场矢量的方向随时间变化的规律。

- 按天线所辐射的电场的极化形式，可将天线分为线极化天线、圆极化天线和椭圆极化天线。
- 线极化又可分为水平极化和垂直极化；圆极化和椭圆极化都可分为左旋和右旋。

❖ **输入阻抗与电压驻波比：**

- 天线的输入阻抗等于传输线的特性阻抗，才能使天线获得最大功率。
- 当天线工作频率偏离设计频率时，天线与传输线的匹配变坏，致使传输线上电压驻波比增大，天线效率降低。因此在实际应用中，还引入电压驻波比参数，并且驻波比不能大于某一规定值。

❖ **天线的电参数都与频率有关**，当工作频率偏离设计频率时，往往要引起天线参数的变化。当工作频率变化时，天线的有关电参数不应超出规定的范围，这一频率范围称为**频带宽度**，简称为天线的**带宽**。

## 天线频宽定义

### Operating Frequency Bandwidth

Within the frequency range, **all selected parameters** or **performance** of antennas must meet the specific requirements.

$$BW = \frac{f_h - f_l}{f_c} \times 100\% \quad \longleftarrow \quad BW < 100\%$$

$$f_c = \frac{f_h + f_l}{2}$$

$$BW = f_h : f_l \quad \longleftarrow \quad BW \geq 100\%$$



## 天线噪声

- ❖ 天线噪声包括外部噪声和内部噪声两部分。
- ❖ 内部噪声来源于天线本身的损耗，用损耗电阻  $R_l$  等效。
- ❖ 在通带 $B$ 范围内等效损耗电阻  $R_l$  产生的噪声电压的均方值为

$$U_n^2 = 4kTBR_l$$

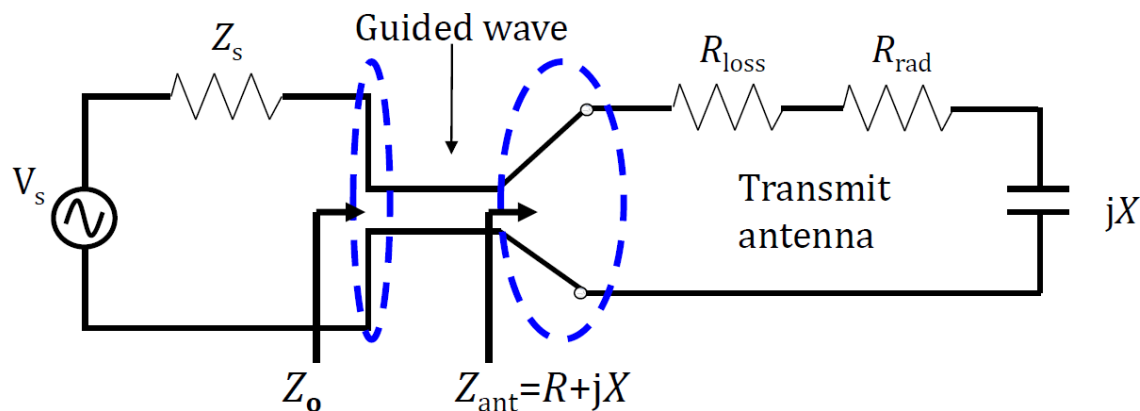
- ❖ 式中， $k$ 为玻尔兹曼常数； $T$ 是电阻器的绝对温度，单位K； $B$ 是带宽，单位为Hz； $R_l$ 是电阻，单位为 $\Omega$ 。
- ❖ 如果以上式表示的噪声电压源连接到一个匹配电阻负载  $R_l$ ，则输出到匹配电阻负载的噪声功率为

$$P_{ni} = kTB$$

## 天线噪声

- ❖ 外部噪声来源于宇宙、大气(含云、雨、雪)以及各种地物的热辐射，包括天空噪声 (sky noise) ， 大气噪声 (atmospheric noise) ， 地球噪声 (earth noise) 、 银河噪声 (galactic noise) 和人工噪声 (man-made noise) 。
- ❖ 天空噪声的噪声功率可表示为  $P_n = kT_A B$
- ❖ 式中， $B$ 是带宽， $k$ 是玻尔兹曼常数。 $T_A$ 是天线噪声温度。
- ❖ 注意，天线的噪声温度与天线具体的物理温度是两个不同的概念。
- ❖ 天线接收到的噪声功率越高， $T_A$ 也越高。
- ❖ 天线噪声温度是与天线接收到的噪声功率相关并由上式定义的温度。
- ❖ 如果天线指向底层大气或地球表面， $T_A$ 近似为290K，如果天线指向天空， $T_A$ 可能只有几K。因此，卫星通信地面站天线常常建在城市郊区，以躲开高层建筑等对天线的辐射，减小天线接收到的噪声功率。

## 回波损耗和S11参数



$$RL = -20 \log |\Gamma| \text{ dB}$$

or

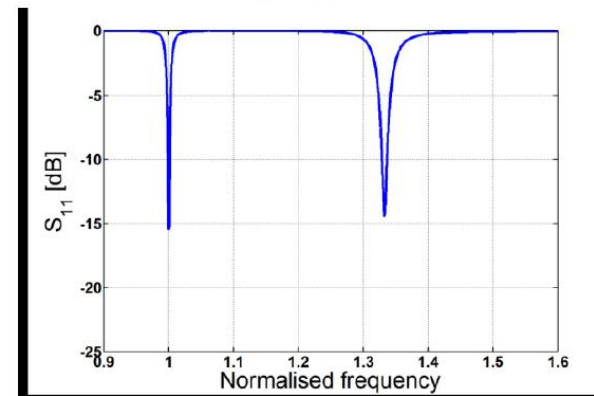
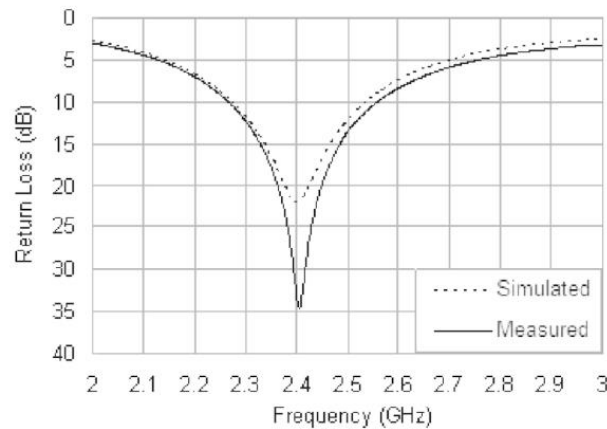
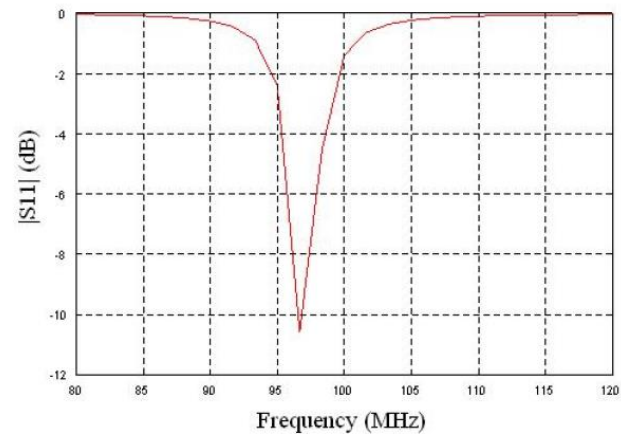
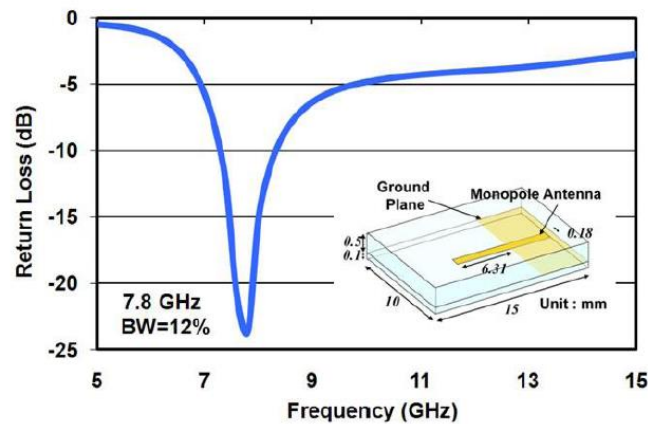
$$RL = 10 \log (P_{\text{input}} / P_{\text{reflected}})$$

Return loss:  $0 \sim \infty$ , if  $RL=0\text{dB}$  all reflected; if  $RL= \infty \text{ dB}$  no reflected

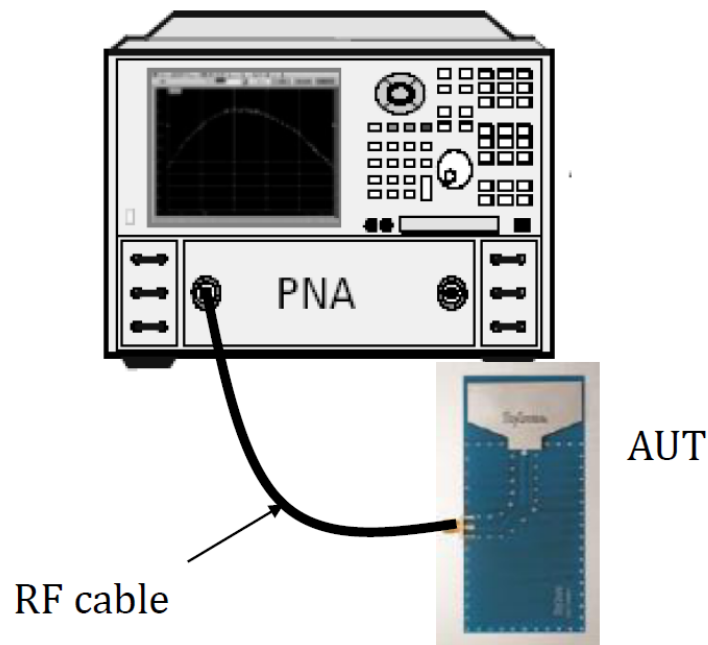
Usually  $RL=7, 10, 15, 20\text{dB}$  acceptable for various systems

S-parameter ( $|S_{11}|$ )  $\leq 0 \text{ dB}$ :  $-RL$  in dB

# Which are correct?



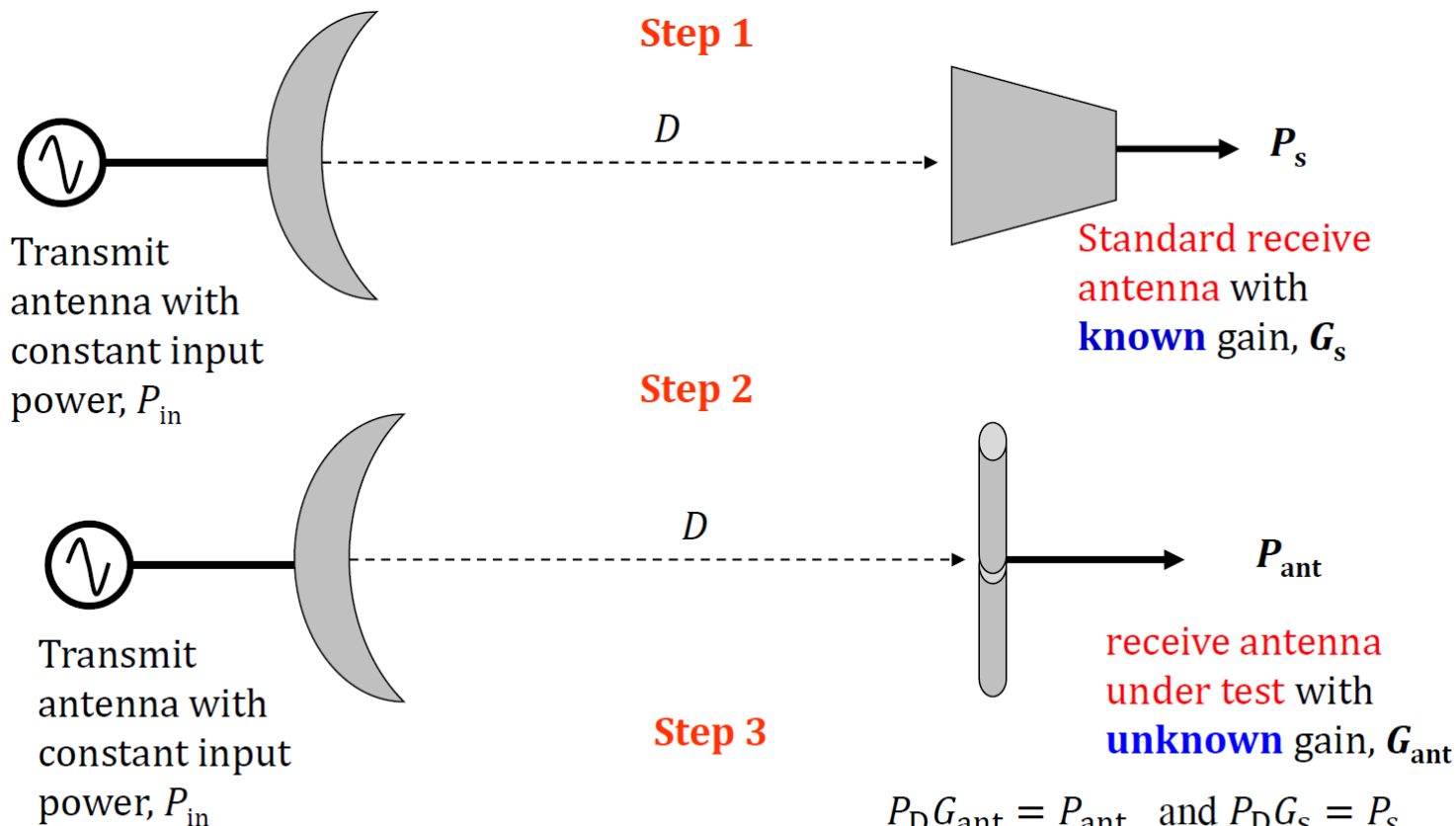
## 输入阻抗测量



- The impedance match can be measured by measuring **impedance of antenna**, **VSWR** or **return loss**.

- More commonly an Impedance Analyzer or Vector Network Analyzer (VNA) is used to measure all the parameters directly through S-parameter measurement (for VNA).

# 天线增益测量

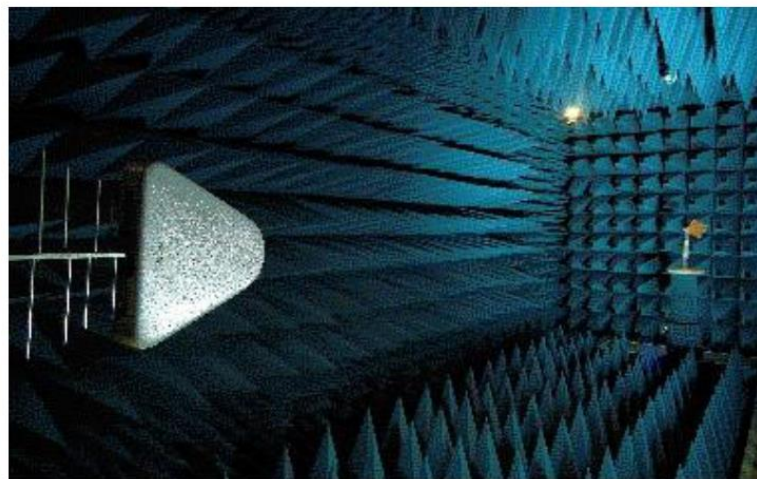


$$G_{ant} = G_s + P_{ant} - P_s \text{ in dB}$$

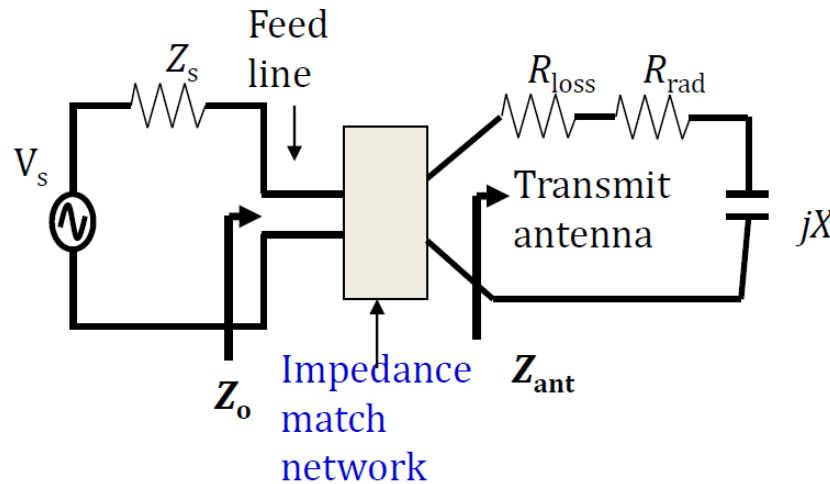
$$\frac{P_D G_{ant}}{P_D G_s} = \frac{P_{ant}}{P_s} \rightarrow G_{ant} = G_s \frac{P_{ant}}{P_s}$$

## 微波暗室

Most of radiation patterns and RF/EM measurements are conducted in EM anechoic chamber. (why?)



## 阻抗匹配设计



- Usually, the antenna input impedance is designed to match the feeding line which is connected to the antenna directly.
- If not, an impedance matching network, in particular, **LC circuits** will be designed and used between the antenna and feed line..

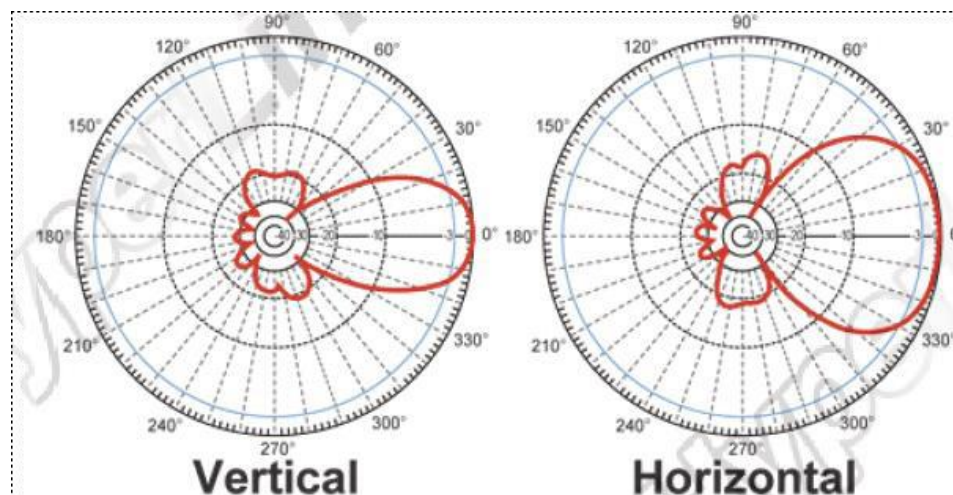


# HyperGain® 2.4 GHz 11 dBi Dual Cable Polarization Diversity Flat Patch Range Extender Antenna

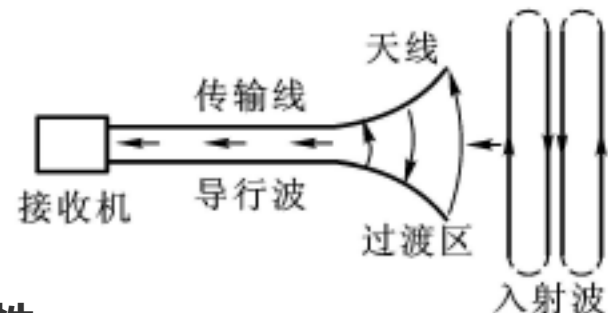
## Specifications

### Electrical Specifications

Frequency	2400-2500 MHz
Gain: Antenna 1 / Antenna 2	11 dBi / 11 dBi
Horizontal Beam Width (Antennas 1 & 2)	60 degrees
Vertical Beam Width (Antennas 1 & 2)	30 degrees
Impedance	50 Ohm
Max. Input Power	25 Watts
VSWR	< 1.5:1 avg.



## 天线的互易性与远区场定义



### ❖ 天线的互易性：

- 天线在发射模式和接收模式上具有相同的方向性。

### ❖ 远区场：

- 如果所观测点离开波源很远、很远，波源可近似为点源。从点源辐射的波其波阵面是球面。
  - 因为观测点离开点源很远很远，在观察者所在的局部区域，其波阵面可近似为平面，当作平面波处理。
  - 符合这一条件的场通常称为远区场。
- ❖ 在天线很多应用场合，远区场的假设都是成立的。远区场假设为我们分析研究天线辐射的场带来很大方便。
- ❖ 这里所谓很远很远都是以波长来计量的。

## 远区场定义

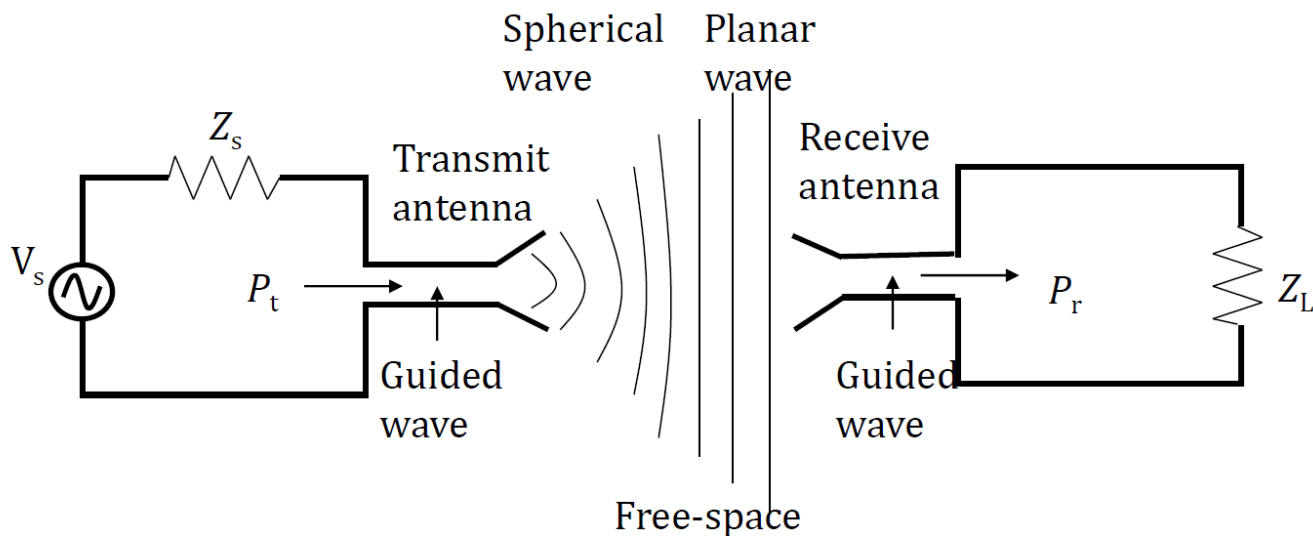
$$R_{far-field} = \frac{2D^2}{\lambda}$$

$R_{far-field}$  : the minimum distance from the antenna.

$D$  : the largest dimension of the antenna.

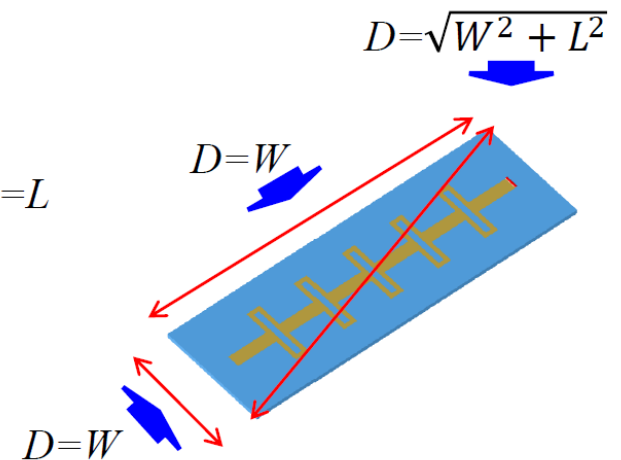
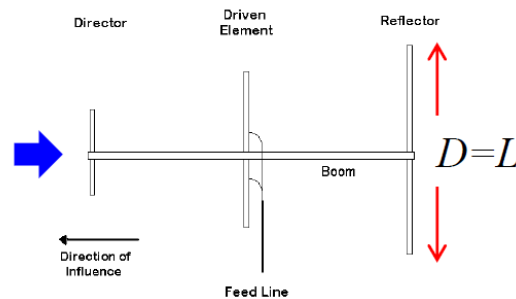
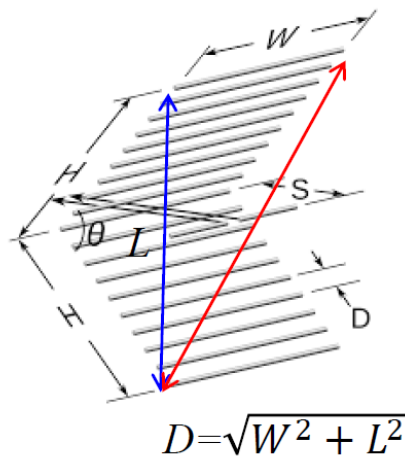
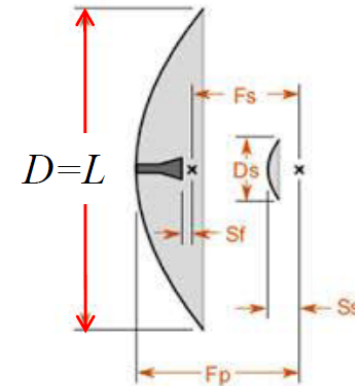
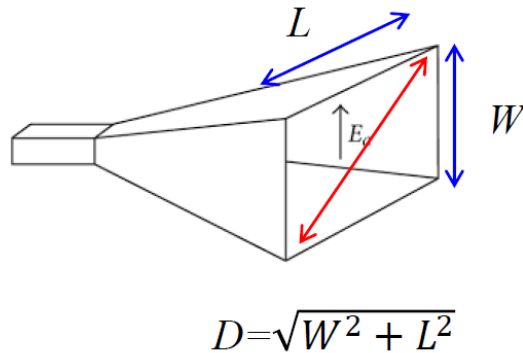
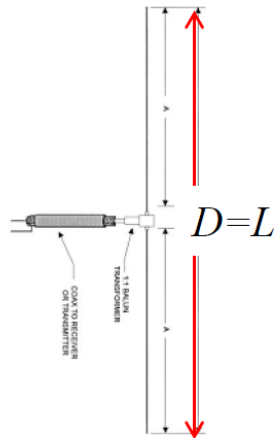
$\lambda$  : the wavelength at the operating frequency.

Radiation patterns are usually measured at a far-field zone where there are mainly the radiated power, which is of interest.

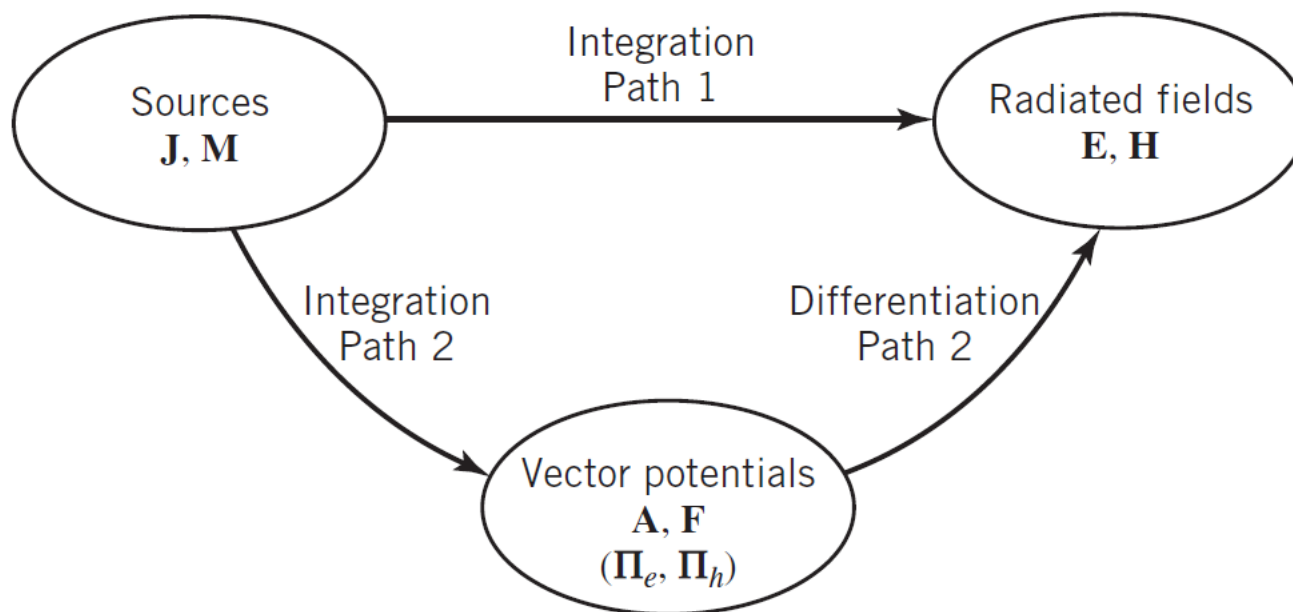


# Far-Field Zone (examples)

$$R_{far-field} = \frac{2D^2}{\lambda}$$



## 电磁问题的求解



$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} & \mathbf{E} &= -j\omega \left( \mathbf{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}{k^2} \right) & \nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\epsilon\Phi &= 0 \\
 \mathbf{D} &= -\nabla \times \mathbf{F} & \mathbf{H} &= -j\omega \left( \mathbf{F} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{F}}{k^2} \right) & \nabla \cdot \mathbf{F} + j\omega\mu\epsilon\Phi_m &= 0
 \end{aligned}$$

## 标量和矢量位函数

❖ 研究天线要从有源麦克斯韦方程出发

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

❖ 即从源 $\mathbf{J}$ 和边界条件（本章涉及的边界都假定趋于无穷远）决定 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 。

❖ 但也可通过求矢量位 $\mathbf{A}$ 与标量位 $\Phi$ 再求 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 。

❖ 矢量位 $\mathbf{A}$ 定义为  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

❖ 因为旋度的散度等于零，故  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，自动得到满足。

❖ 将  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  定义的 $\mathbf{B}$ 代入  $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$  得到  $\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = 0$

❖ 因为梯度的旋度等于零，我们选用下式定义标量位函数 $\Phi$

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi$$

❖  $\nabla\Phi$ 前取负号是考虑到静电场中电场强度 $\mathbf{E}$ 与电位 $\Phi$ 之间关系。

## 标量和矢量位函数

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi$$

❖ 注意,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  定义的 $\mathbf{A}$ 并不是唯一的。

❖ 因为如果我们定义另一个矢量位函数

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi$$

❖  $\Psi$ 是一个任意的标量函数, 由于梯度的旋度等于零, 所以

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$$

❖ 即 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}'$ 定义了同一个 $\mathbf{B}$ , 为保证矢量位 $\mathbf{A}$ 唯一, 有必要对矢量位 $\mathbf{A}$ 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 作一规定

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\varepsilon\Phi = 0 \quad \mathbf{E} = -j\omega\left(\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}}{k^2}\right)$$

❖ 这个规定称为洛伦兹条件。

## 亥姆霍兹定理

一个矢量场的性质由**激发场的源**来确定。

源有两个，一个是**散度源（也称为通量源）**，另一个叫**旋度源（也称为涡旋源）**。

那么反过来，若已知一个矢量场的散度和旋度，能否唯一确定该矢量场？答案是肯定的，这就是亥姆霍兹定理。



## 标量位函数 $\Phi$ 和矢量位函数 $A$ 满足的方程

将  $B = \nabla \times A$ ,  $E = -j\omega A - \nabla\Phi$

代入  $\nabla \times H = J + j\omega\epsilon E$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = j\omega\mu\epsilon\{-j\omega A - \nabla\Phi\} + \mu J$$

应用

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

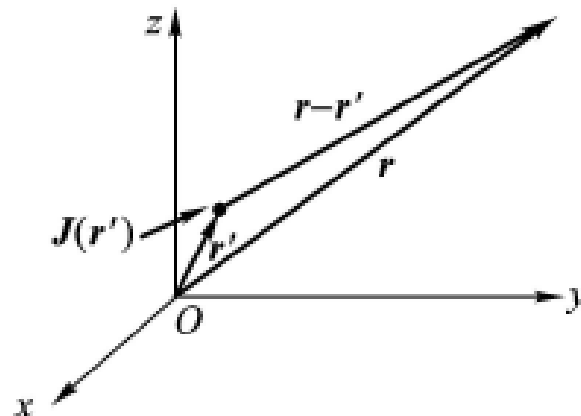
$$\nabla \cdot A + j\omega\mu\epsilon\Phi = 0$$

可得  $\nabla^2 A + \omega^2\mu\epsilon A = -\mu J$

将  $E = -j\omega A - \nabla\Phi$  代入  $\nabla \cdot E = \rho_v / \epsilon$

并再次应用  $\nabla \cdot A + j\omega\mu\epsilon\Phi = 0$  条件, 得到  $\nabla^2 \Phi + \omega^2\mu\epsilon\Phi = -\rho_v / \epsilon$

而由 
$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot A + j\omega\mu\epsilon\Phi &= 0 \\ E &= -j\omega A - \nabla\Phi \end{aligned} \right\} \rightarrow E = -j\omega\left(A + \frac{\nabla\nabla \cdot A}{k^2}\right)$$



对 $r'$ 处源 $J$ 积分求观察点 $r$ 处矢量位 $A$

## 非齐次亥姆霍兹方程的解

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \Phi + \omega^2 \mu \varepsilon \Phi = -\rho_v / \varepsilon$$

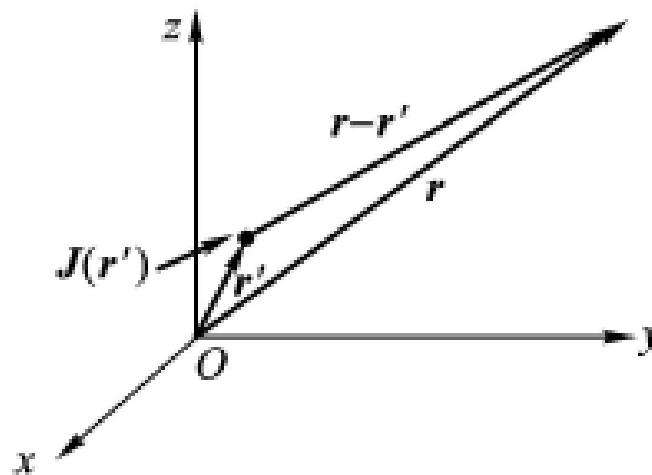
当边界趋于无穷远时，非齐次亥姆霍兹方程的解非常简单，又得到广泛的应用。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V dV' \frac{\rho_v(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

$\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  分别表示观察点（即所研究场点）及源所在点的位置矢量。 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  即观察点与源点之间的距离，积分要覆盖所有源所在的区域。



对 $\mathbf{r}'$ 处源 $\mathbf{J}$ 积分求观察点 $\mathbf{r}$ 处矢量位 $\mathbf{A}$

## 非齐次亥姆霍兹方程解的导出

❖ 以矢量位 $A$ 的解导出为例 
$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

❖ 如果满足方程 
$$\nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1)$$

的解格林函数 $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 已知, 则 
$$(\nabla^2 + k^2)A(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (2)$$

的解  $A(\mathbf{r})$  为 
$$A(\mathbf{r}) = \mu \int_{\infty} \mathbf{J}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'$$

❖ 其中 
$$\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \end{cases} \quad \iiint_{V'} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \notin V' \\ f(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V' \end{cases}$$

❖ 现用  $\mu \mathbf{J}$  乘式(1)的两边, 并作体积分

$$\nabla^2 \int_V \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + k_0^2 \int_V \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = - \int_V \mu \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'$$

❖ 与式(2)相比较, 就得到 
$$A(\mathbf{r}) = \mu \int_{\infty} \mathbf{J}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'$$

## 方程 $\nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 的解

❖ 假定源在原点,  $\mathbf{r}' = 0$

❖  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  满足的方程

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}) + k^2 g(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) = -\delta(r)$$

❖ 利用球坐标系中的对称关系,  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$   $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

❖ 上式成为

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dg}{dr} \right) + k^2 g = -\delta(r)$$

❖ 作变量替换  $rg = u$ ,  $g = \frac{u}{r}$   $\frac{dg}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}$

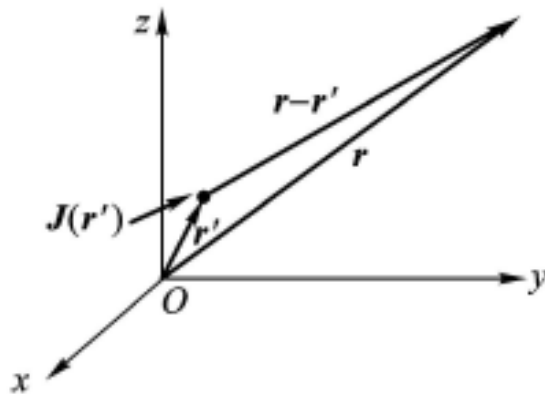
❖ 代入得到

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = 0$$

❖ 解为

$$u = A e^{-jkr} + B e^{jkr}$$

$$\Rightarrow g = A \frac{e^{-jk r}}{r} + B \frac{e^{jkr}}{r}$$



对  $\mathbf{r}'$  处源  $\mathbf{J}$  积分求观察点  $\mathbf{r}$  处矢量位  $\mathbf{A}$

**方程**  $\nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  **的解**

$$g = A \frac{e^{-jk r}}{r} + B \frac{e^{jkr}}{r}$$

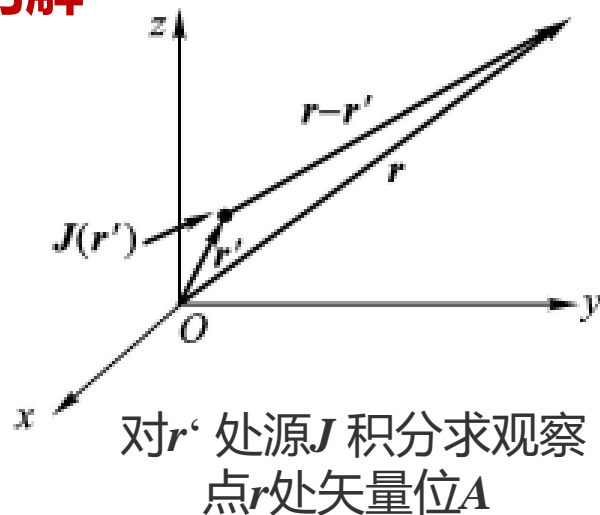
- ❖  $r \neq 0$  区域没有任何源, 同时只考虑从原点向外传播的波, 不考虑任何向原点传播的波, 则  $B=0$ 。所以

$$g(\mathbf{r}) = A \frac{e^{-jkr}}{r}$$

- ❖ 常数  $A$  取  $\frac{1}{4\pi}$ , 当源不在原点,  $r$  可用  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  代入, 所以一般情况下  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  为

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

- ❖ 将上式代入  $A(\mathbf{r}) = \mu \int_{\infty} \mathbf{J}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'$  就得到  $A(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$



## Φ和A解的进一步的解释

$$\left. \begin{aligned} A(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int_V \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV' \quad (1) \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V dV' \frac{\rho_v(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{\epsilon} g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV' \quad (2) \end{aligned} \right\} g(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

❖ 可理解为源  $\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}')$ ,  $\rho(r')/\epsilon$  与格林函数  $g(r)$  的卷积。

❖ 时域中线性系统的输出  $g(t)$  就是系统冲激响应  $h(t)$  与输入信号  $f(t)$  的卷积。

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (3)$$

❖ 式 (1)、(2) 与式 (3) 比较, 不难发现其对应关系

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\ \rho(r')/\epsilon \end{aligned} \right\} \leftrightarrow f(\tau), \quad g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \leftrightarrow h(t), \quad \left. \begin{aligned} A(\mathbf{r}) \\ \Phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \leftrightarrow g(t)$$

$g(r)$  是  $\delta(r)$  作用下系统的输出  $\leftrightarrow h(t)$  是  $\delta(t)$  作用下系统的输出。

## 复 习

### ❖ 要点

- 天线工作的两种模式：发射模式和接收模式。两种模式下天线都可看成一转换器，对天线的基本要求是发射或接收电磁波的方向性与极化特性，以及天线与传输系统的匹配。描述天线的参数有：天线的方向性（天线增益、方向性、波束宽度、旁瓣电平）、天线效率、极化特性、频带宽度、输入阻抗与天线噪声等。
- 引入标量位 $\Phi$ 和矢量位 $A$ 后，求天线辐射电磁场 $E$ 、 $H$ 转化为求 $\Phi$ 和 $A$ 。 $\Phi$ 和 $A$ 满足非齐次亥姆霍兹方程。对于赫兹偶极子模型，当边界趋于无穷远时，其解非常简单，可以理解为源  $\mu_0 J(r')$ ，  $\rho(r')/\varepsilon$  与格林函数 $g(r)$ 的卷积。

### ❖ 复习

- 8.1-8.2