James Clerk Maxwell
1831 – 1879

Lesson 9

Electromagnetic Fields and Waves

各向异性介质中的平面波

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn

各向异性介质中的本构关系

在电各向异性介质中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 不再平行，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 一般的线性关系为

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

而在磁各向异性介质中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 不再平行，其关系为

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \tag{2}$$

式（1）表示在电各向异性介质中，外加电场 E_x 分量可感应 D_x、D_y、D_z 三个分量，而式（2）表示，外加磁场 B_x 分量可感生 H_x、H_y、H_z 三个分量。其余类推。

并矢

两矢量的直接相乘，如

$$\overleftrightarrow{C} = \boldsymbol{AB} = (A_x \mathbf{x}_0 + A_y \mathbf{y}_0 + A_z \mathbf{z}_0)(B_x \mathbf{x}_0 + B_y \mathbf{y}_0 + B_z \mathbf{z}_0)$$

$$= A_x B_x \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 + A_x B_y \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 + A_x A_z \mathbf{x}_0 \mathbf{z}_0 +$$

$$A_y B_x \mathbf{y}_0 \mathbf{x}_0 + A_y B_y \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0 + A_y B_z \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0 +$$

$$A_z B_x \mathbf{z}_0 \mathbf{x}_0 + A_z B_y \mathbf{z}_0 \mathbf{y}_0 + A_z B_z \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0$$

称 $\overleftrightarrow{C}$ 为并矢。所以在三维空间，标量用一个元素表示，矢量用三个元素表示，而并矢就要用 9 个元素表示。

并矢的一次标积 $\overleftrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{B}$，其运算法则是夹在中间两个单位矢量按标积运算。

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \qquad \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0 = 0$$

并矢的二次标积 $\overleftrightarrow{A} : \overleftrightarrow{B}$，其运算法则是夹在中间的两个单位矢量先按标积运算，剩下的两边的两个单位矢量再进行一次标积运算。如

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 : \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0 = 1 \quad \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 : \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0 = 0$$

各向异性介质本构关系的并矢表示

❖ 如定义并矢

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0 & \varepsilon_{xy}\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0 & \varepsilon_{xz}\mathbf{x}_0\mathbf{z}_0 \\ \varepsilon_{yx}\mathbf{y}_0\mathbf{x}_0 & \varepsilon_{yy}\mathbf{y}_0\mathbf{y}_0 & \varepsilon_{yz}\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0 \\ \varepsilon_{zx}\mathbf{z}_0\mathbf{x}_0 & \varepsilon_{zy}\mathbf{z}_0\mathbf{y}_0 & \varepsilon_{zz}\mathbf{z}_0\mathbf{z}_0 \end{pmatrix}$$

❖ 而 $\boldsymbol{D} = D_x\mathbf{x}_0 + D_y\mathbf{y}_0 + D_Z\mathbf{z}_0$ $\quad$ $\boldsymbol{E} = E_x\mathbf{x}_0 + E_y\mathbf{y}_0 + E_z\mathbf{z}_0$

❖ 那么引入并矢后，D和E关系可简写为 $\mathbf{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}$

❖ 因为

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E} = (\varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z)\mathbf{x}_0 + (\varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z)\mathbf{y}_0 + (\varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z)\mathbf{z}_0$$

电各向异性介质中的波方程

❖ 电各向异性介质中麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}}_r\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0 \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

❖ 由此可导出电磁场满足的矢量波动方程

$$\boxed{\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}-k_0^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}}_r\cdot\boldsymbol{E}=0} \qquad \boxed{\nabla\times(\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{-1}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H})-k_0^2\boldsymbol{H}=0}$$

❖ 假定各向异性介质中波方程也有平面波形式的解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

❖ 代入波动方程，经过矢量运算得到

$$\nabla\times(\nabla\times E)=\nabla(\nabla\cdot E)-\nabla^2E$$

$$\boxed{k^2\boldsymbol{E}_0-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0)-k_0^2\overleftrightarrow{\varepsilon}_r\cdot\boldsymbol{E}=0} \qquad \boxed{\boldsymbol{k}\times\overleftrightarrow{\varepsilon}_r^{-1}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0)+k_0^2\boldsymbol{H}_0=0}$$

❖ 这就是平面波复振幅应当满足的矢量方程

单轴介质的色散方程

- 矢量波方程 $k^2\boldsymbol{E}_0-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0)-k_0^2\overleftrightarrow{\varepsilon}_r\cdot\boldsymbol{E}_0=0$

单轴介质张量表示

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_\perp & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_\perp & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{//}\end{pmatrix}$$

- 将单轴介质张量表达式代入 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=0$ 得到

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=\left(1-\frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_\perp}\right)k_zE_z$$

- 再将上式代入矢量波动方程,分解为直角坐标分量方程后可写成下面的矩阵形式

$$\begin{pmatrix}k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp & 0 & -\left(1-\dfrac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_\perp}\right)k_xk_z\\ 0 & k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp & -(1-\dfrac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_\perp})k_yk_z\\ 0 & 0 & k_x^2+k_y^2+\dfrac{\varepsilon_{//}k_z^2}{\varepsilon_\perp}-\omega^2\mu\varepsilon_{//}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{0x}\\ E_{0y}\\ E_{0z}\end{pmatrix}=0$$

$$D=\varepsilon_{\perp}E_{0x}x_0+\varepsilon_{\perp}E_{0y}y_0+\varepsilon_{//}E_{0z}z_0$$

$$k\cdot D=k_x\varepsilon_{\perp}E_{0x}+k_y\varepsilon_{\perp}E_{0y}+k_z\varepsilon_{//}E_{0z}=0$$

$$\varepsilon_{\perp}(k_xE_{0x}+k_yE_{0y})=-k_z\varepsilon_{//}E_{0z}$$

$$k\cdot E_0=k_xE_{0x}+k_yE_{0y}+k_zE_{0z}=(1-\frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}})k_zE_{0z}$$

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_{\perp} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{//}\end{pmatrix}$$

$$k^2\boldsymbol{E}_0-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0)-k_0^2\ \varepsilon_{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{E}_0=0$$

$$k^2(E_{0x}\boldsymbol{x}_0+E_{0y}\boldsymbol{y}_0+E_{0z}\boldsymbol{z}_0)-(k_x\boldsymbol{x}_0+k_y\boldsymbol{y}_0+k_z\boldsymbol{z}_0)(1-\frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}})k_zE_{0z}-\omega^2\mu(\varepsilon_{\perp}E_{0x}\boldsymbol{x}_0+\varepsilon_{\perp}E_{0y}\boldsymbol{y}_0+\varepsilon_{\|}E_{0z}\boldsymbol{z}_0)=0$$

$$(k^2\text{-}\omega^2\mu\varepsilon_{\perp})\ E_{0x}-(1-\frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}})k_xk_zE_{0z}=0$$

$$(k^2\text{-}\omega^2\mu\varepsilon_{\perp})\ E_{0y}-(1-\frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}})k_yk_zE_{0z}=0$$

$$(k^2-k_z{}^2+\frac{\varepsilon_{//}k_z{}^2}{\varepsilon_{\perp}}-\omega^2\mu\varepsilon_{\|})E_{0z}=0$$

单轴介质色散方程

$$\det\begin{pmatrix} k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp & 0 & -(1-\dfrac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_\perp})k_xk_z \\ 0 & k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp & -(1-\dfrac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_\perp})k_yk_z \\ 0 & 0 & k_x^2+k_y^2+\dfrac{\varepsilon_{//}k_z^2}{\varepsilon_\perp}-\omega^2\mu\varepsilon_{//} \end{pmatrix}=0$$

- 它有两个解 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon_\perp$ $\quad k_x^2+k_y^2+\dfrac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_\perp}k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon_{//}$
- 设θ是波矢k与z轴的夹角，第二个解可写成更方便的形式

$$k^2(\sin^2\theta+\frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_\perp}\cos^2\theta)=\omega^2\mu\varepsilon_{//}$$

- 单轴介质中可能传播两种平面波，具有不同的物理特征，分别称为寻常波和非寻常波。

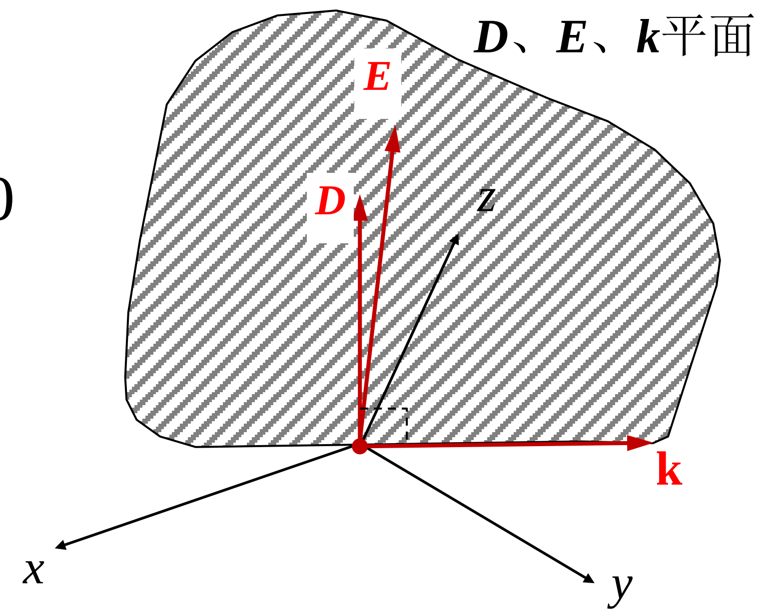
电各向异性介质中D，H，k三者互相垂直

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

- 代入散度方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0 \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$
- 得到 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=0 \qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}=0$
- 说明D和B(或H)均与波矢量垂直
- 再以平面波解代入旋度方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$$

- 得到 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\boldsymbol{D}$
- 说明D，H（B）和k三个矢量是按右手螺旋关系互相垂直的



各向异性介质中平面波场矢量与波矢量的关系

电各向异性介质中D与E不再平行

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

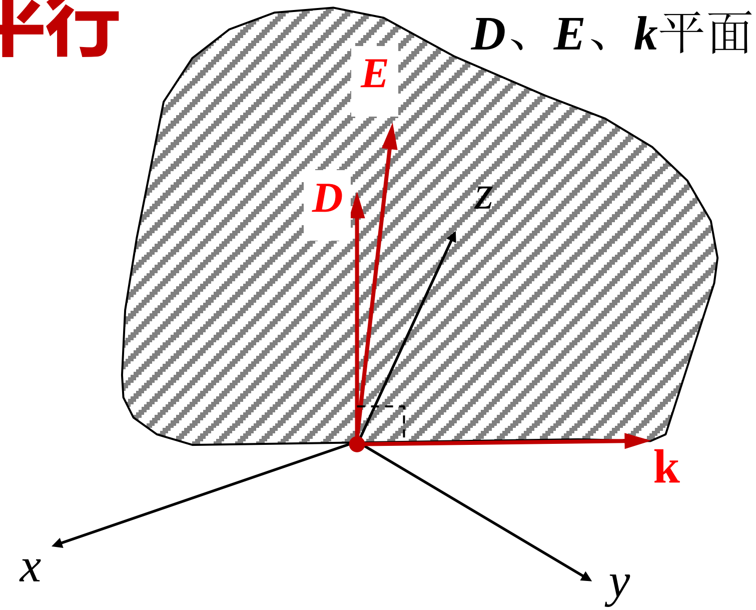
❖ 由于介电常数$\overleftrightarrow{\varepsilon}$是张量，D与E一般是不平行的,将平面波解代入矢量波方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}-\omega^2\mu\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}=0$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}-\omega^2\mu\boldsymbol{D}=0\quad(1)$$

❖ 因为 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})$

$$=k^2\left(\boldsymbol{E}-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}}{k^2}\boldsymbol{k}\right)=k^2\boldsymbol{E}_\perp\quad(2)$$



各向异性介质中平面波场矢量与波矢量的关系

❖ $E_\perp$是电场垂直于波矢量k方向的分量

❖ 式(1)与式(2) 比较，得到

$$\boldsymbol{D}=\frac{k^2}{\omega^2\mu}\boldsymbol{E}_\perp$$

❖ 因此E的垂直于k的分量与矢量D平行，E矢量处于D与k构成的平面内。

寻常波（Ordinary Wave）

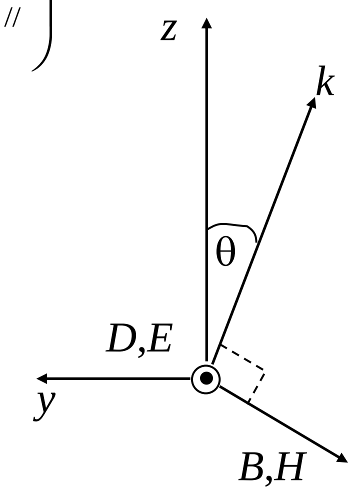
波方程

$$\begin{pmatrix} k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp & 0 & -\left(1-\dfrac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_\perp}\right)k_x k_z \\ 0 & k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp & -(1-\dfrac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_\perp})k_y k_z \\ 0 & 0 & k_x^2+k_y^2+\dfrac{\varepsilon_{//}k_z^2}{\varepsilon_\perp}-\omega^2\mu\varepsilon_{//} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix}=0$$

寻常波解 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon_\perp$ **,由此得到** $v_\mathrm{p}=\omega/k=1/\sqrt{\mu\varepsilon_\perp}$

将$k^2-\omega^2\mu\varepsilon_\perp=0$**代入波方程还得到** $E_z=0$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=0 \xrightarrow[\text{将单轴晶体的}\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}}\text{代入}]{} \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=\left(1-\frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_\perp}\right)k_z \underbrace{E_z}_{E_z=0}=0$$



表明波的电场矢量E 没有平行于波矢量k的分量，E与D的方向重合。由于E_z=0，

所以E（以及D）与光轴z方向垂直，因此E及D垂直于k和z轴构成的平面。

与各向同性介质中的平面波性质相同，所以称为寻常波。

非寻常波（Extraordinary Wave）

- 取光轴 z 和波矢 k 构成的截面为 y–z平面，在如此选取的坐标系中

$$k_x = 0, \qquad E_x = 0$$

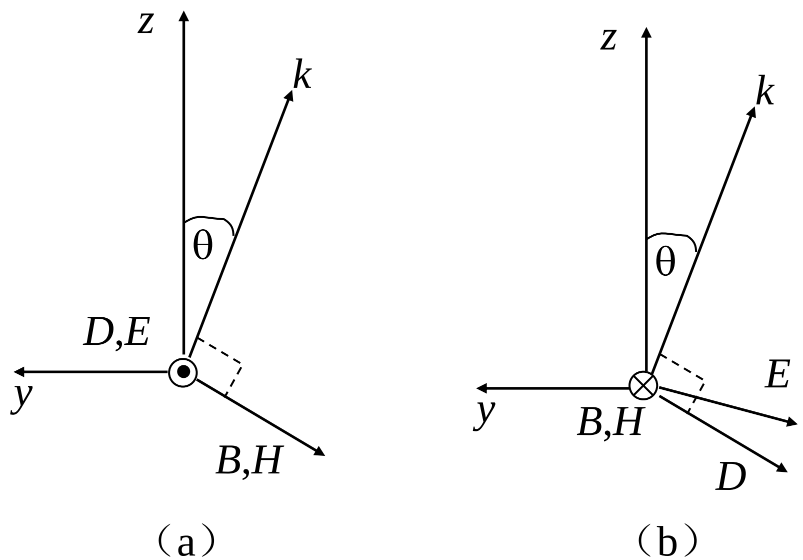
- E和D都处于y–z平面内，但E有沿波传播方向的分量，而D与k总是垂直的，所以D与E不再保持平行。

- 由

$$k^2(\sin^2\theta + \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}\cos^2\theta) = \omega^2\mu\varepsilon_{//}$$

- 可得出

$$v_p = \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\mu\varepsilon_{//}} + \frac{\cos^2\theta}{\mu\,\varepsilon_{\perp}}}$$

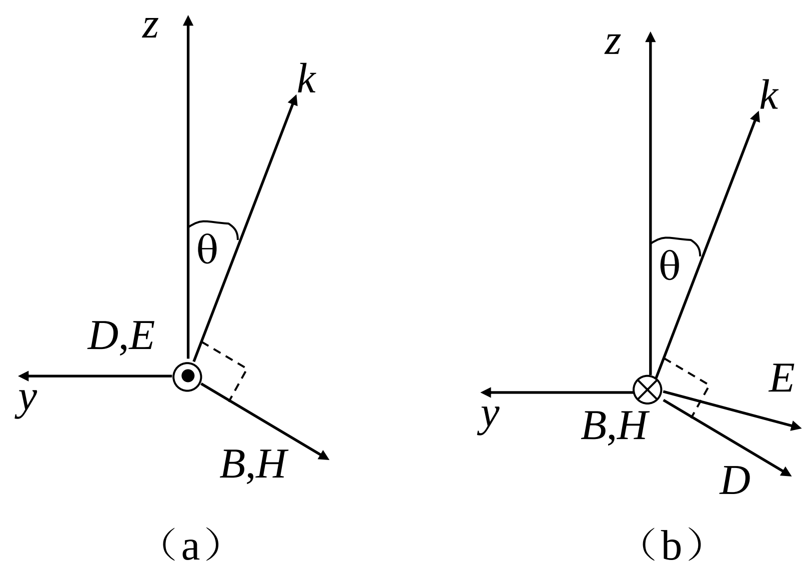


电磁场矢量与波矢量关系
（a）寻常波 （b）非寻常波

非寻常波（Extraordinary Wave）

$$v_p = \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\mu\varepsilon_{//}} + \frac{\cos^2\theta}{\mu\,\varepsilon_{\perp}}}$$

- **可见波的相速与传播方向有关。**
- **当一极化方向任意的线极化波入射到单晶片上时将分解为极化方向垂直于 y–z 平面的寻常波和极化在 y–z平面内的非寻常波。**
- **由于两种波的 k 值不同，折射角不同，在晶片内这两个波的射线将分离，这就是双折射现象。**



电磁场矢量与波矢量关系
(a) 寻常波 (b) 非寻常波

折射率与 θ 角有关

$$k^2\left(\sin^2\theta+\frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}\cos^2\theta\right)=\omega^2\mu\varepsilon_{//}$$

$$\varepsilon_e(\theta)=\frac{\varepsilon_{//}}{\sin^2\theta+\frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}\cos^2\theta}=\frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{//}}+\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{\perp}}}$$

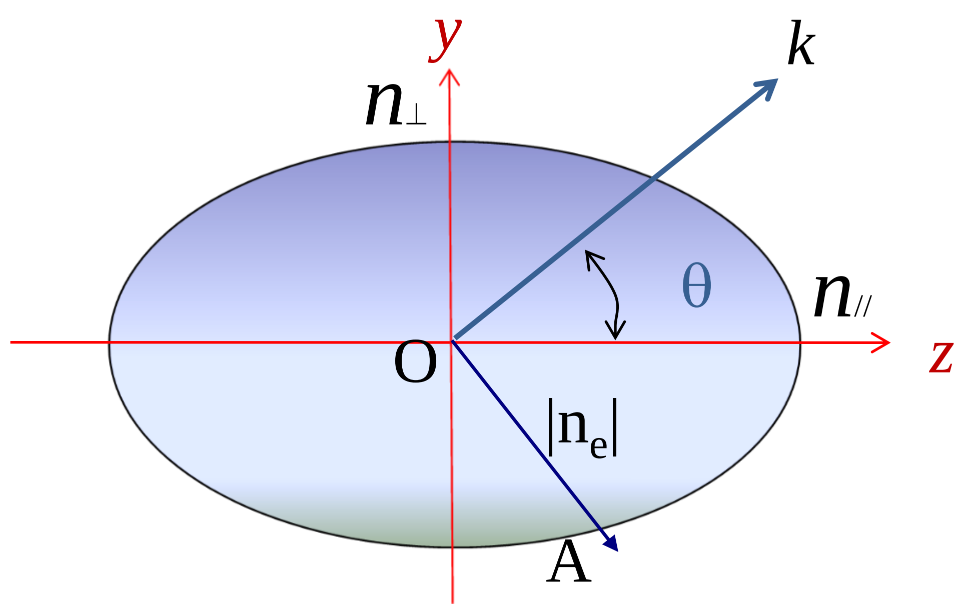
$$\frac{1}{n_e(\theta)^2}=\frac{\sin^2\theta}{n_{//}^2}+\frac{\cos^2\theta}{n_{\perp}^2}$$

可以证明，n_e的轨迹是个椭圆

当k以与z轴夹角为θ入射时，

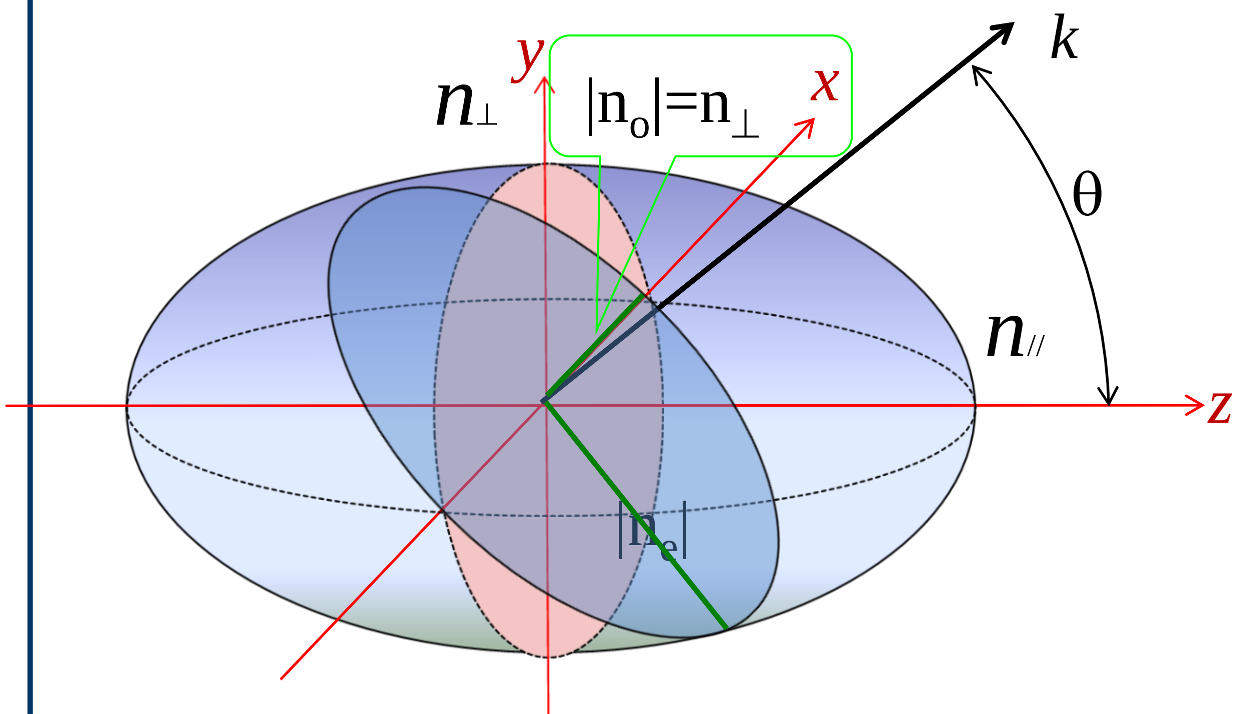
与k垂直并与椭圆相交的点A与

中心O点的连线大小即为n_e



折射率椭球

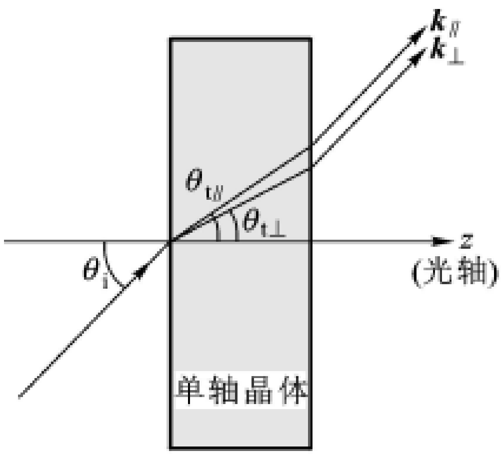
折射率椭球表示晶体折射率在晶体空间各方向（光波的D矢量方向）上的全部取值分布的几何图形，通过椭球中心的每一矢径的方向，代表D矢量的方向，其长度为D矢量在此方向振动的光波的折射率



- ✓**传播方向为k入射到单轴晶体，有两个波出现，这两个波的折射率分别等于与k垂直相交于椭球的椭圆的半个主轴的半轴长**
- ✓**两个波的D矢量振动方向分别平行于这个椭圆的两个主轴方向**

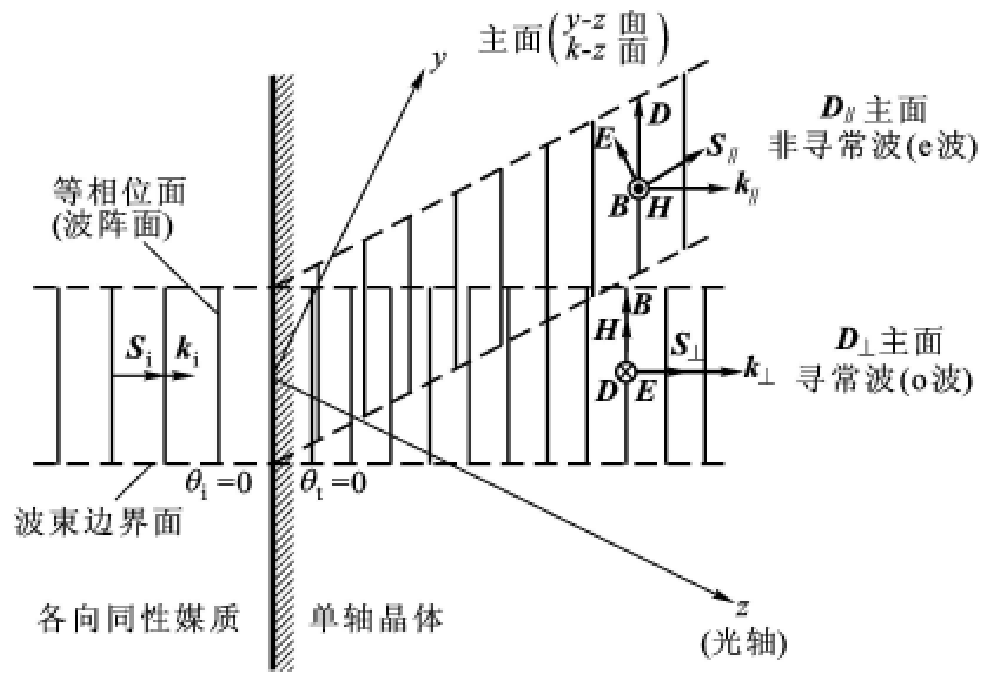
双折射 (double refraction)

单轴晶体中的双折射



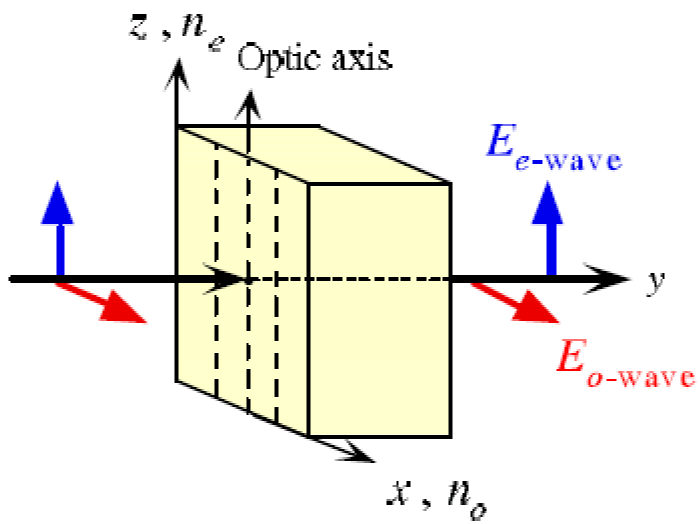
4-13

发生双折射时的波矢与功率流

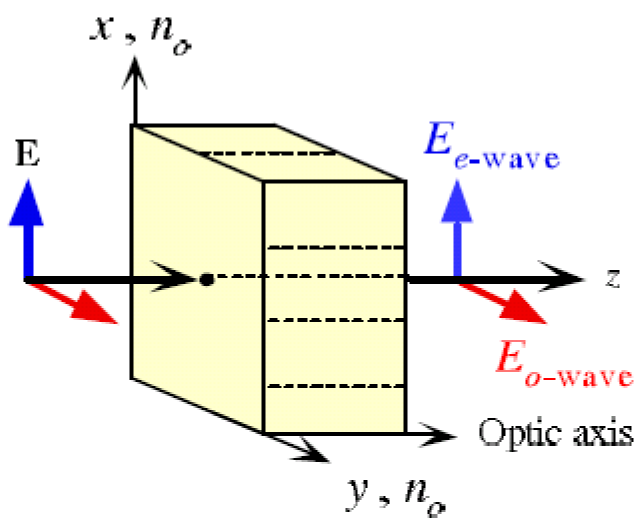


双折射

光轴平行晶面



光轴垂直晶面

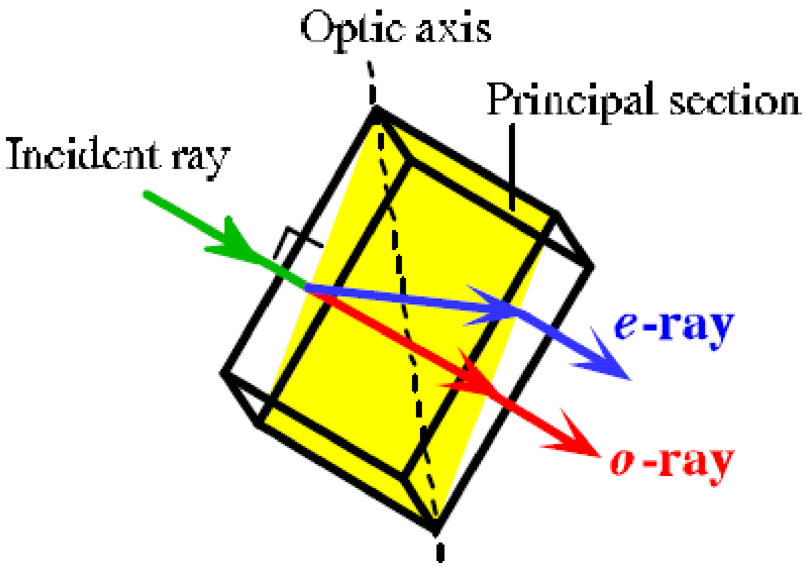


一线偏振光，分为两个沿同一路径传播、振动方向相互垂直的光波，因为折射率不同，传播速度不同，出晶体时偏振态可能会变，一般为椭圆偏振光

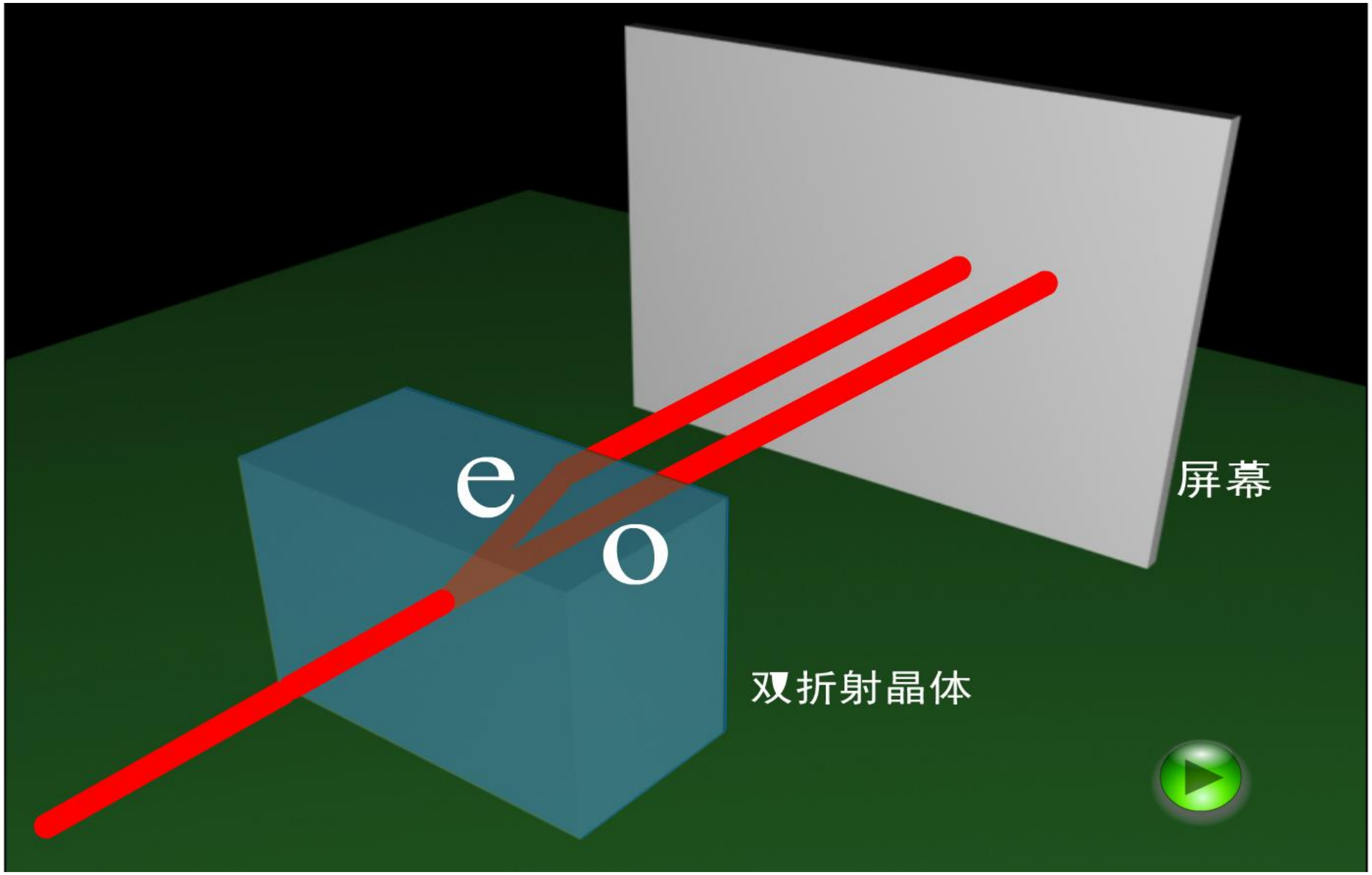
此时o光、e光折射率相同，通过晶体后，传播方向不变，偏振态不变

双折射

光轴与晶面斜交，正入射

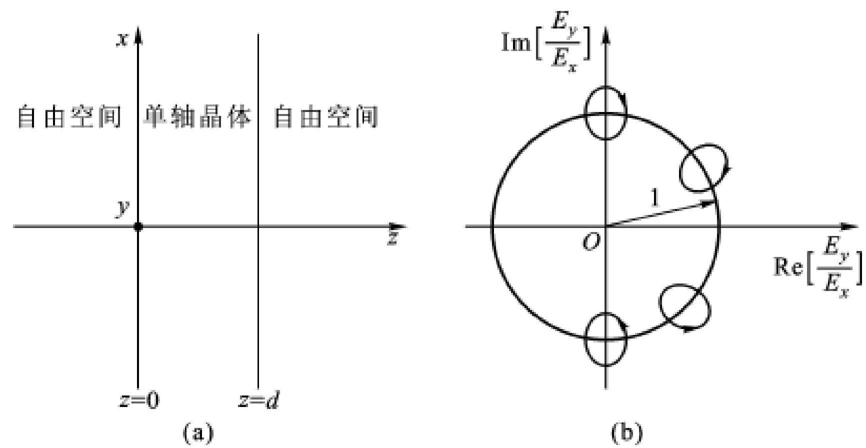


一线偏振光，分为两个沿不同路径传播（能流S的方向）、振动方向相互垂直的两束光，e光相对于入射波的位置有一平移


e
o
屏幕
双折射晶体

怎样产生圆极化光

Q: 哪个轴是为光轴?



假定一个线极化波从左边入射，

并表示为 $\boxed{\boldsymbol{E} = E_0(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}_0)e^{-jkz}}$

$(z < 0,\ k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0})$

忽略在z=0和z=d边界波的反射效

应，则波刚通过该各向异性媒质

板时可表示为 $\boxed{\boldsymbol{E} = E_0(\boldsymbol{x}_0 e^{-jk_e d} + \boldsymbol{y}_0 e^{-jk_0 d})e^{-jk(z-d)} \qquad (z > d)}$

波通过各向异性媒质板后其极化形式可由右式决定 $E_y / E_x = e^{(-jk_0 d + jk_e d)}$

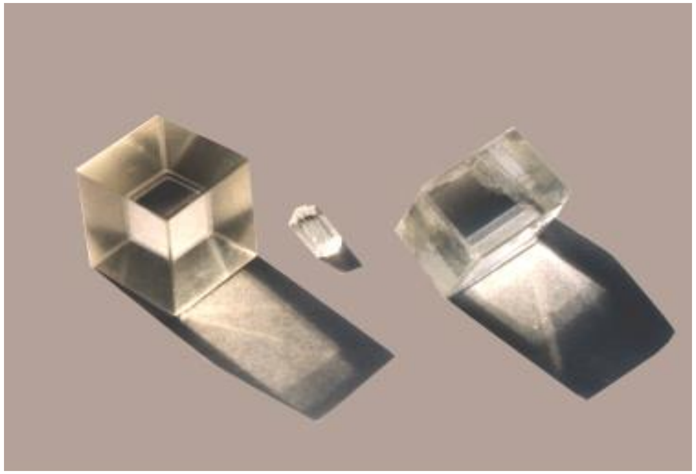
如果 $-k_0 d + k_e d = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ 得到圆极化波

满足上式的最短距离

$$d = \frac{\pi/2}{k_e - k_o}$$

各向异性晶体

很多晶体，如方解石、石英在光频中呈现各向异性特性。对于方解石晶体，$\varepsilon_{//}=2.21\varepsilon_0$, $\varepsilon_{\perp}=2.76\varepsilon_0$，是实数。所以在方解石晶体中波传播的速度与波的极化有关。



Étienne-Louis Malus
(1775-1812)

马吕斯1808年发现反射时光的偏振，确定了偏振光强度变化的规律（现称为马吕斯定律）。他研究了光在晶体中的双折射现象，1811年，他与J.毕奥各自独立地发现折射时光的偏振，提出了确定晶体光轴的方法，研制成一系列偏振仪器 。

二色性（dichroism）

❖有些各向异性介质，对于一个极化方向的波是透明传播的，但对另一极化方向的波就有吸收。所以对于某一极化方向，介电常数是实数，另一极化方向，介电常数是复数，这种性质称为二色性。

❖1928年，一个叫做Edwin H. Land的年轻人发现了一种薄膜，当随机极化的太阳光经过该薄膜后就成为线极化了。这种材料几经改进，现称为做偏振片。偏振片是一种人工的二色性材料。

Edwin H. Land
1909-1991

极化太阳镜：介质表面反射的太阳光包含较多的垂直极化分量，因此，如果太阳镜用极化薄膜制作，且选择薄膜的极化方向使得水平极化光容易通过，垂直极化光不容易通过，那么这种太阳镜与一般的浅色镜相比可较好滤掉部分耀眼的光，因为对于一般的浅色太阳镜，任何极化方向光同样衰减。

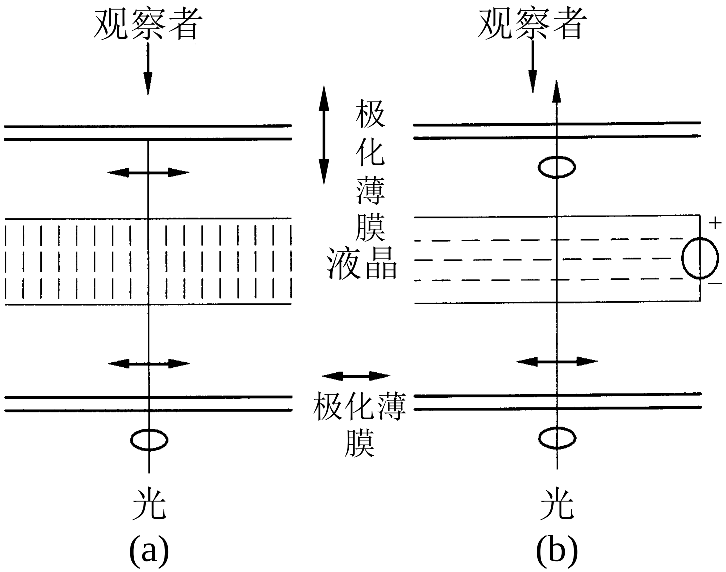
3D 立体电影

❖3D立体电影的制作有多种形式，其中较为广泛采用的是**偏光眼镜法**。它以人眼观察景物的方法，利用两台并列安置的电影摄影机，分别代表人的左、右眼，同步拍摄出两条略带水平视差的电影画面。

❖放映时，将两条电影影片分别 装入左、右电影放映机，并在放映镜头前分别**装置两个偏振轴互成90度的偏振镜**。两台放映机需同步运转，同时将画面投放在金属银幕上，形成左像右像双影。当观众戴上特制的偏光眼镜时，由于左、右两片偏光镜的偏振轴互相垂直，并与放映镜头前的偏振轴相一致；致使观众的左眼只能看到左像、右眼只能看到右像，通过双眼汇聚功能将左、右像叠和在视网膜上，由大脑神经产生三维立体的视觉效果。展现出一幅幅连贯的立体画面，使观众感到景物扑面而来、或进入银幕深凹处，能 产生强烈的“身临其境”感。

液晶

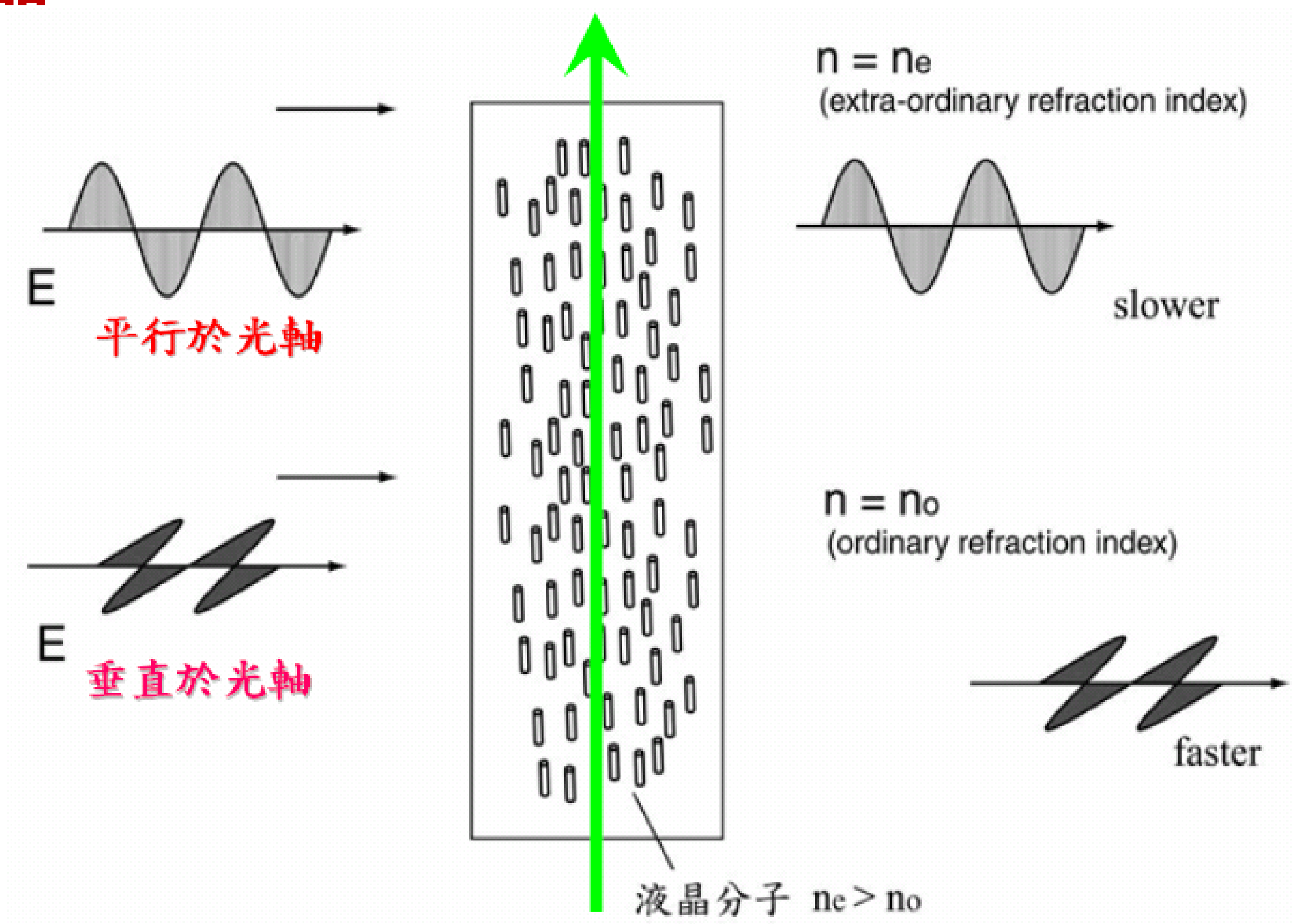
液晶是一种液体，其分子有序排列，液晶可以被电场激活。在非激活态，液晶是各向同性的，当加上电场后，液晶中分子将平行于电场或垂直于电场排列，并成为各向异性介质。



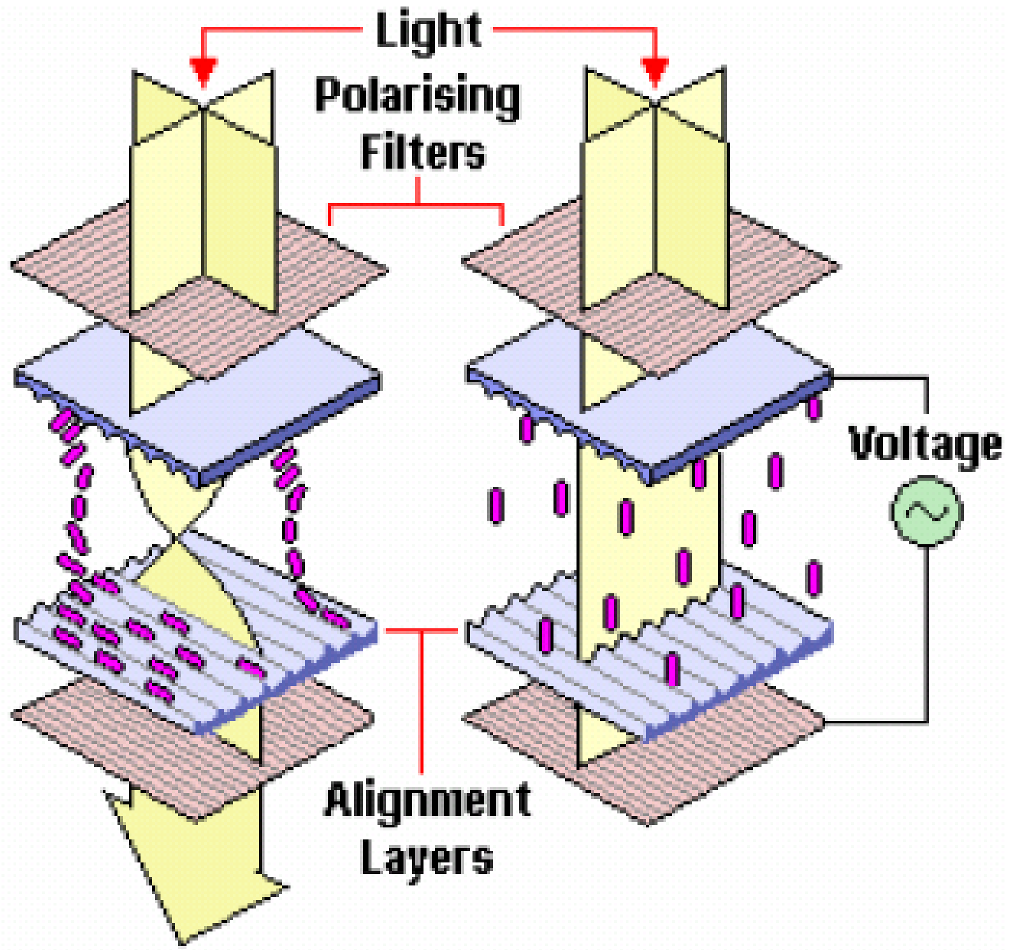
作为显示器的液晶
(a) 正常态（非激活态） (b) 激活态

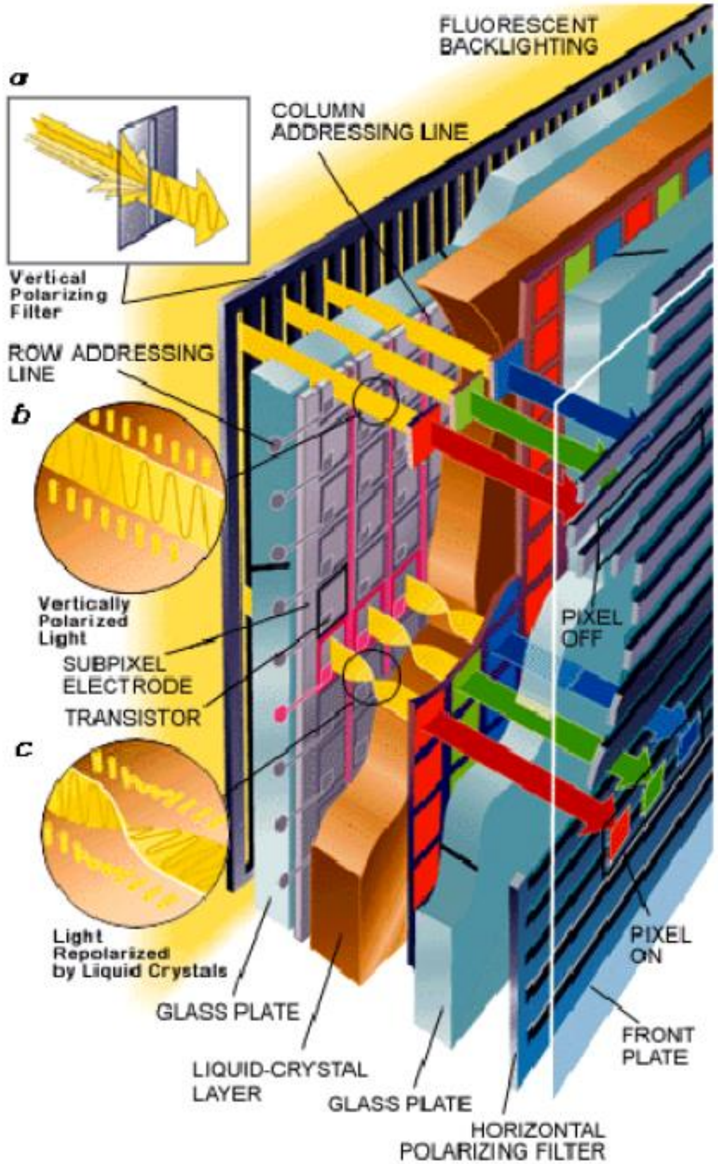
上图给出一个典型的液晶显示器原理结构，它是工作于所谓的“扭曲”（DAP）模式。图（a）表示激活前的正常态，进入液晶的光已被偏振片极化，该极化光通过液晶时极化方向不变。当通过第二个偏振片时全部被吸收。最终结果没有光通过显示器。而在激活态，液晶改变通过光的极化方向，第二个偏振片对于改变了极化方向的通过光是透明的，所以光能通过显示器。

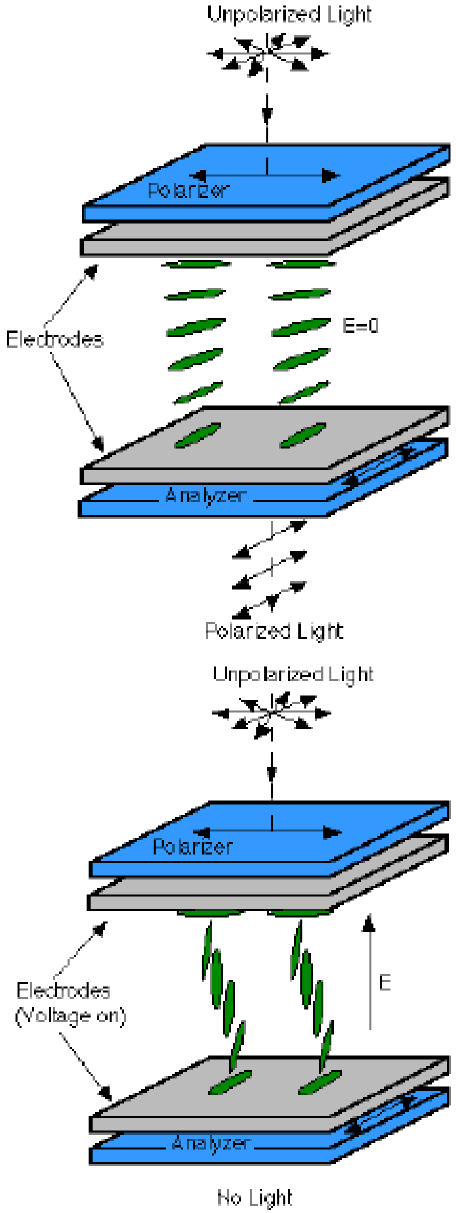
液晶


n = ne
(extra-ordinary refraction index)
E
平行於光軸
slower
n = no
(ordinary refraction index)
E
垂直於光軸
faster
液晶分子 ne > no

LCD原理




FLUORESCENT BACKLIGHTING
a
COLUMN ADDRESSING LINE
Vertical Polarizing Filter
ROW ADDRESSING LINE
b
Vertically Polarized Light
SUBPIXEL ELECTRODE
TRANSISTOR
c
Light Repolarized by Liquid Crystals
GLASS PLATE
LIQUID-CRYSTAL LAYER
GLASS PLATE
HORIZONTAL POLARIZING FILTER
PIXEL OFF
PIXEL ON
FRONT PLATE


Unpolarized Light
Polarizer
Electrodes
E=0
Analyzer
Polarized Light
Unpolarized Light
Polarizer
Electrodes (Voltage on)
E
Analyzer
No Light

磁各向异性介质的张量表示

❖ B与H不再平行，其关系为

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

❖ 引入并矢 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}}$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_{xx}\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0 & \mu_{xy}\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0 & \mu_{xz}\mathbf{x}_0\mathbf{z}_0 \\ \mu_{yx}\mathbf{y}_0\mathbf{x}_0 & \mu_{yy}\mathbf{y}_0\mathbf{y}_0 & \mu_{yz}\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0 \\ \mu_{zx}\mathbf{z}_0\mathbf{x}_0 & \mu_{zy}\mathbf{z}_0\mathbf{y}_0 & \mu_{zz}\mathbf{z}_0\mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$$

❖ 与H关系可记为

$$\boldsymbol{B} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{H}$$

铁氧体

❖铁氧体是一族化合物的总称，属于非金属磁性材料，其磁导率很高，但电导率很低，因此电磁波能深入其内部与其中的自旋电子发生相互作用。介电常数大约在 2～35 之间。

❖铁氧体在外加恒定磁场H_0作用下，显示**磁各向异性**。

❖高频下磁化铁氧体的相对导磁率是一反对称二阶张量

$$\overleftrightarrow{\mu}_r = \begin{bmatrix} \mu_{11} & -j\mu_{12} & 0 \\ j\mu_{12} & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mu_{11} = 1 + \frac{\omega_g \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2}$$

$$\mu_{12} = \frac{-\omega \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2}$$

$$\omega_m = \gamma_e M_0 \qquad \omega_g = \gamma_e H_0$$

$\gamma_e = e/m = -1.76\times1011$ C/kg，是一常数，称为**旋磁比**。

M_0 是外磁场作用下的饱和磁化强度

高频下磁化铁氧体的特点

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_r=\begin{bmatrix}\mu_{11} & -\mathrm{j}\mu_{12} & 0\\ \mathrm{j}\mu_{12} & \mu_{11} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \mu_{11}=1+\frac{\omega_g\omega_m}{\omega_g^2-\omega^2}\qquad \mu_{12}=\frac{\omega\omega_m}{\omega_g^2-\omega^2}$$

$$\omega_m=\gamma_e M_0\qquad \omega_g=\gamma_e H_0$$

- 如果 $\omega_g=0,\ \ \omega_m=0,$ 则 $\mu_{11}=1,\ \ \mu_{12}=0,\ \ \boldsymbol{b}=\mu_0\boldsymbol{h}$
- 未受磁化的铁氧体是一均匀各向同性的介质。
- 当一恒定磁场H_0加在铁氧体上时，它变成一块各向异性介质。
- 如果ω=0（没有高频场），则 $\mu_{11}=1+\dfrac{\omega_m}{\omega_g}$ $\mu_{12}=0$ 铁氧体成为一种磁性单轴晶体。
- μ_{11}、μ_{12}都是外加直流磁场H_0、饱和磁化强度M_0和外加频率ω的函数。因此可以用改变H_0的办法改变μ_{11}和μ_{12}。
- 当$\omega=\omega_g$，$\mu_{11}\to\infty$，$\mu_{12}\to\infty$，发生所谓共振现象。称它为铁磁共振。
- 张量磁导率μ_r是在$h \ll H_0$情况下得到的，因此b和h的关系是线性的。

磁矩进动方程

电子磁矩M在外磁场中H的运动方程： **γ_e是旋磁比.**

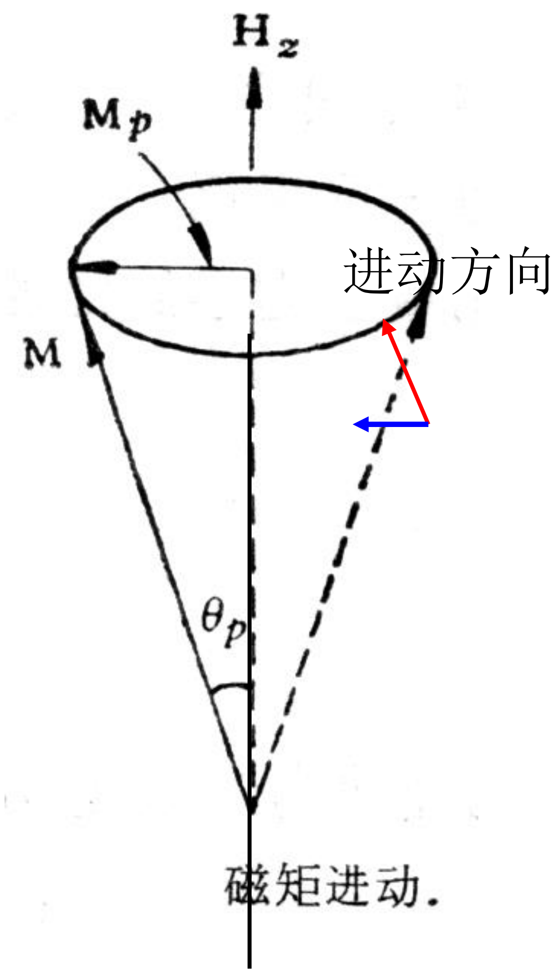
$$\frac{dM}{dt} = -\gamma_e M \times H$$

由此方程可以看出，矢量MxH垂直于M和H构成的平面，不改变M的大小，改变M的方向使得电子在自旋的同时还以外磁场为方向转动，这种双重旋转运动称为进动。

进动频率

$$\omega_g = \gamma_e H_0$$

如果外加ω交变电磁波的时候，交变场与M相互作用的依赖于ω与ω_g差值



磁化铁氧体中的波方程及其平面波解

❖ 磁化铁氧体的本构关系 $\boldsymbol{b} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \cdot h$

❖ 麦克斯韦方程组中两个旋度方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega \overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{h} \qquad \nabla \times \boldsymbol{h} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

❖ 消去E，得到磁化铁氧体中波方程

$$-\nabla^2 \boldsymbol{h} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h}) - \omega^2 \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{h} = 0$$

❖ 假设铁氧体中具有平面波解 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_0 \mathrm{e}^{-jk\cdot r}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{x}_0 + k_y \boldsymbol{y}_0 + k_z \boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 + z\boldsymbol{z}_0 \end{cases}$$

❖ 得到磁化铁氧体中平面波解满足的波方程：

$$\boxed{k^2 \boldsymbol{h}_0 - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{h}_0) - \omega^2 \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{h}_0 = 0}$$

磁化铁氧体中的波方程及其平面波解

❖ 磁化铁氧体中平面波解满足的波方程 $\boxed{k^2\boldsymbol{h}_0-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{h}_0)-\omega^2\varepsilon_0\overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{h}_0=0}$

❖ 写成分量形成，并设 k 在 x-z 平面与 z 轴成 θ 角，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{h}_0=h_x\boldsymbol{x}_0+h_y\boldsymbol{y}_0+h_z\boldsymbol{z}_0\\ \boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_z\boldsymbol{z}_0\end{cases}\qquad \begin{matrix}k_x=k\sin\theta & k_z=k\cos\theta\\ k_y=0 & \end{matrix}$$

❖ 则

$$\begin{bmatrix}k^2-k^2\sin^2\theta-k_0^2\mu_{11} & \mathrm{j}k_0^2\mu_{12} & -k^2\sin\theta\cos\theta\\ -\mathrm{j}k_0^2\mu_{12} & k^2-k_0^2\mu_{11} & 0\\ -k^2\sin\theta\cos\theta & 0 & k^2-k^2\cos^2\theta-k_0^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_x\\ h_y\\ h_z\end{bmatrix}=0$$

❖ 其非零解必须使其系数行列式为零，则得传播常数的两个解 $k^\pm$ 为

$$\boxed{k^\pm=k_0\left\{\frac{(\mu_{11}^2-\mu_{12}^2-\mu_{11})\sin^2\theta+2\mu_{11}\pm\left[(\mu_{11}^2-\mu_{12}^2-\mu_{11})^2\sin^2\theta+4\mu_{12}^2\cos^2\theta\right]^{1/2}}{2\left[(\mu_{11}-1)\sin^2\theta+1\right]}\right\}^{1/2}}$$

磁化铁氧体中的平面波解

$$k^{\pm}=k_0\left\{\frac{(\mu_{11}^2-\mu_{12}^2-\mu_{11})\sin^2\theta+2\mu_{11}\pm\left[(\mu_{11}^2-\mu_{12}^2-\mu_{11})^2\sin^2\theta+4\mu_{12}^2\cos^2\theta\right]^{1/2}}{2\left[(\mu_{11}-1)\sin^2\theta+1\right]}\right\}^{1/2}$$

❖.**纵向传播的波：波矢k平行于直流磁场H_0，$\theta=0$**

$$k^{\pm}=k_0(\mu_{11}\pm\mu_{12})^{1/2}$$

❖**横向传播的波：波矢k 正交于直流磁场 H_0，$\theta=\pi/2$**

❖**当 $h\perp H_0$ 时，有**

$$k=k_0\left(\frac{\mu_{11}^2-\mu_{12}^2}{\mu_{11}}\right)^{1/2}$$

❖**当 $h//H_0$ 时，因为 H_0 在 z 方向，故 h 也只有 h_z分量，可得**

$$k=k_0 \qquad k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

磁化铁氧体中的平面波解——纵向传播的波

$$\begin{bmatrix} k^2-k^2\sin^2\theta-k_0^2\mu_{11} & \mathrm{j}k_0^2\mu_{12} & -k^2\sin\theta\cos\theta \\ -\mathrm{j}k_0^2\mu_{12} & k^2-k_0^2\mu_{11} & 0 \\ -k^2\sin\theta\cos\theta & 0 & k^2-k^2\cos^2\theta-k_0^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}=0$$

❖纵向传播的波： $k^{\pm}=k_0(\mu_{11}\pm\mu_{12})^{1/2}$

❖由波矢k平行于直流磁场H_0， $\theta=0$

❖得到

$$\left.\begin{array}{l} h_z=0 \\ \dfrac{h_y}{h_x}=\dfrac{k^2-k_0^2\mu_{11}}{k_0^2(-j\mu_{12})}=\pm\mathrm{j} \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{h}_0^{\mp}=h_x\left(\boldsymbol{x}_0\pm\mathrm{j}\boldsymbol{y}_0\right)}$$

❖上式的解是圆极化波， $\boldsymbol{h}_0^{\mp}$ 分别代表左旋和右旋圆极化波的磁场强度。

❖右旋波和左旋波的传播速度是不同的。

❖ 记有效相对磁导率 $\mu_e^{\mp}=\mu_{11}\pm\mu_{12}$

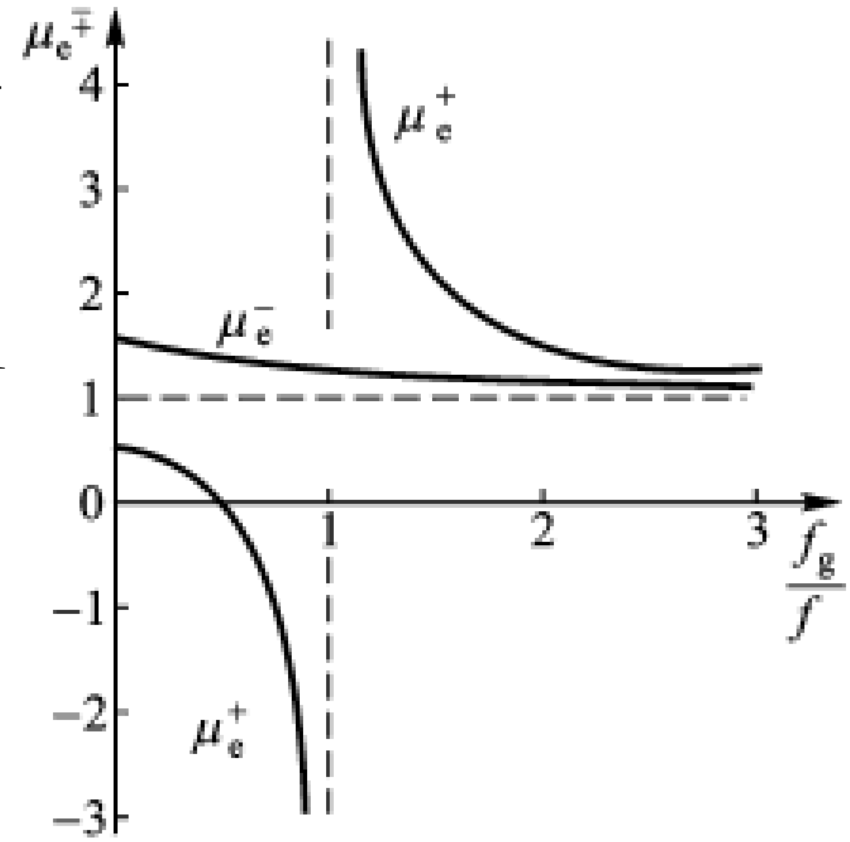
❖则左旋与右旋波的有效波数 $k^{\mp}=k_0\sqrt{\mu_e^{\mp}}$

磁化铁氧体中的平面波解——纵向传播的波

$$\mu_e^{\mp} = \mu_{11} \pm \mu_{12} \Leftarrow \begin{cases} \mu_{11} = 1 + \dfrac{\omega_g \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} \\ \mu_{12} = \dfrac{\omega \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} \end{cases}$$

$$\mu_e^{\mp} = \mu_{11} \pm \mu_{12} = 1 + f_m (f_g \pm f)^{-1}$$

- **从图中可见:**
- μ_e^{+} **具有共振特性，有通带止带**
- μ_e^{-} **无共振特性**



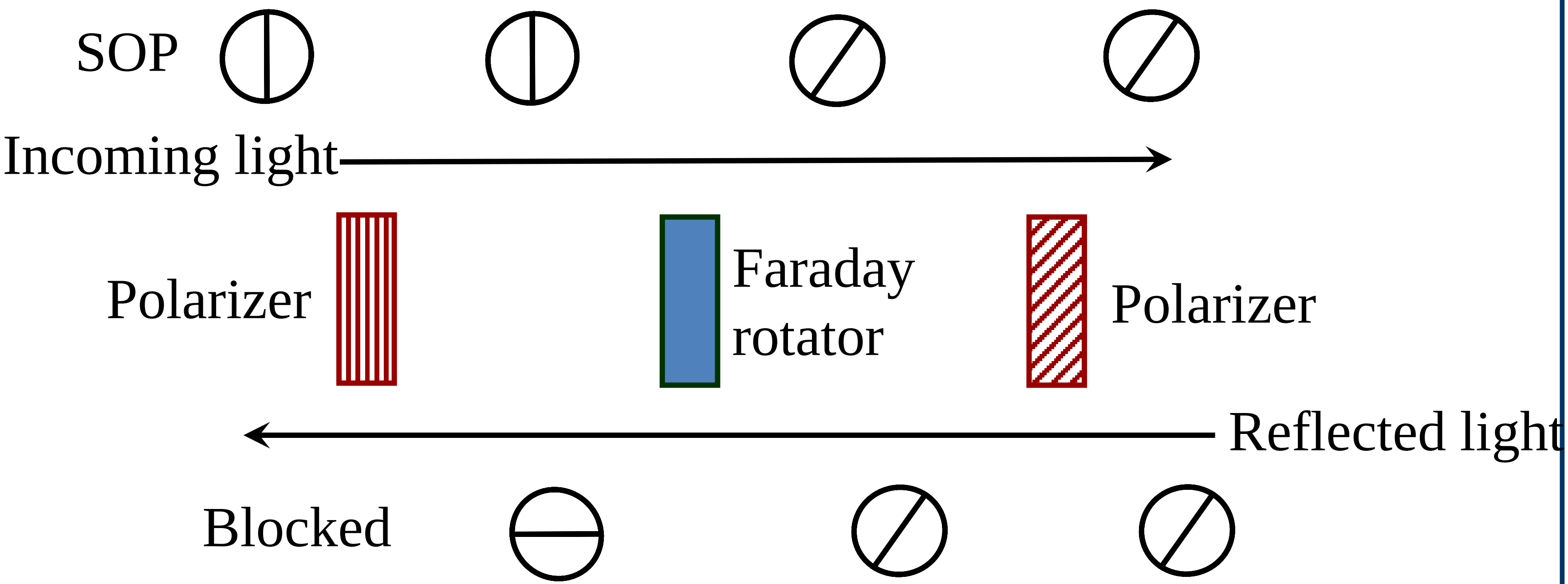
9.8GHz平面波在YIG铁氧体中平行于直流磁场传播时与f_g/f关系

磁化铁氧体中的平面波解——纵向传播的波

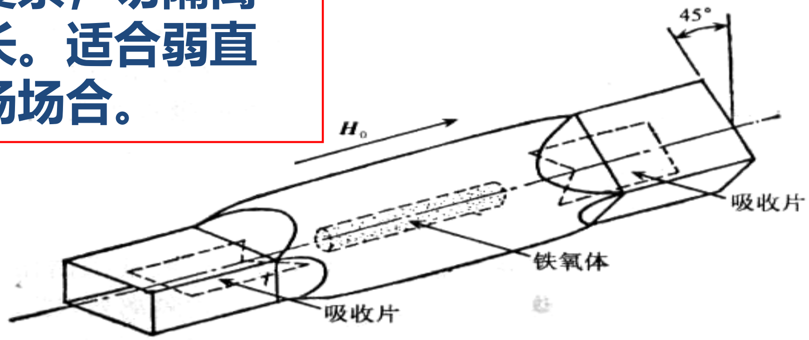
$$\boldsymbol{h}_0^{\mp}=h_x\left(\boldsymbol{x}_0\pm \mathrm{j}\boldsymbol{y}_0\right) \qquad k^{\pm}=k_0(\mu_{11}\pm\mu_{12})^{1/2}$$

- 平面波在各向异性铁氧体中传播，由于分解成左、右旋圆极化波的k值不同而具有不同相速，从而使合成波的极化平面旋转。
- 假如两分量相等或无衰减、极化平面的转角 φ 由 $\varphi=\dfrac{(k^{-}-k^{+})z}{2}$ 计算
- 当$\omega>>\omega_g$, $\omega>>\omega_m$，上式成为 $\varphi=\dfrac{\omega_m}{2c}z$
- 式中，c是铁氧体材料中光速，因此这种情况转角与频率无关 从而把铁氧体可以制成宽带器件。
- 如果波在反向传播，可得相同转角，这表明铁氧体这种各向异性介质是非互易的，这种非互易性质即法拉第旋转。

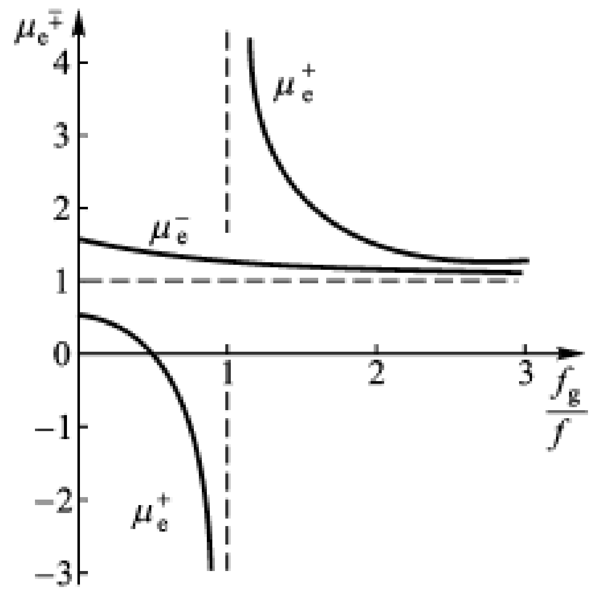
隔离器

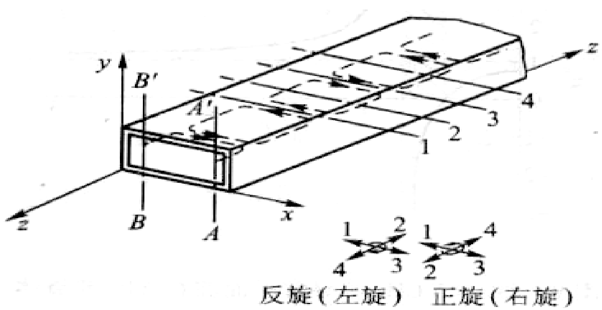

SOP
Incoming light
Polarizer
Faraday rotator
Polarizer
Reflected light
Blocked

功率容量低，机械机构复杂，切隔离器较长。适合弱直流磁场场合。

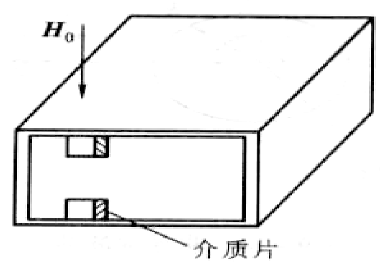


法拉第旋转隔离器的结构示意图





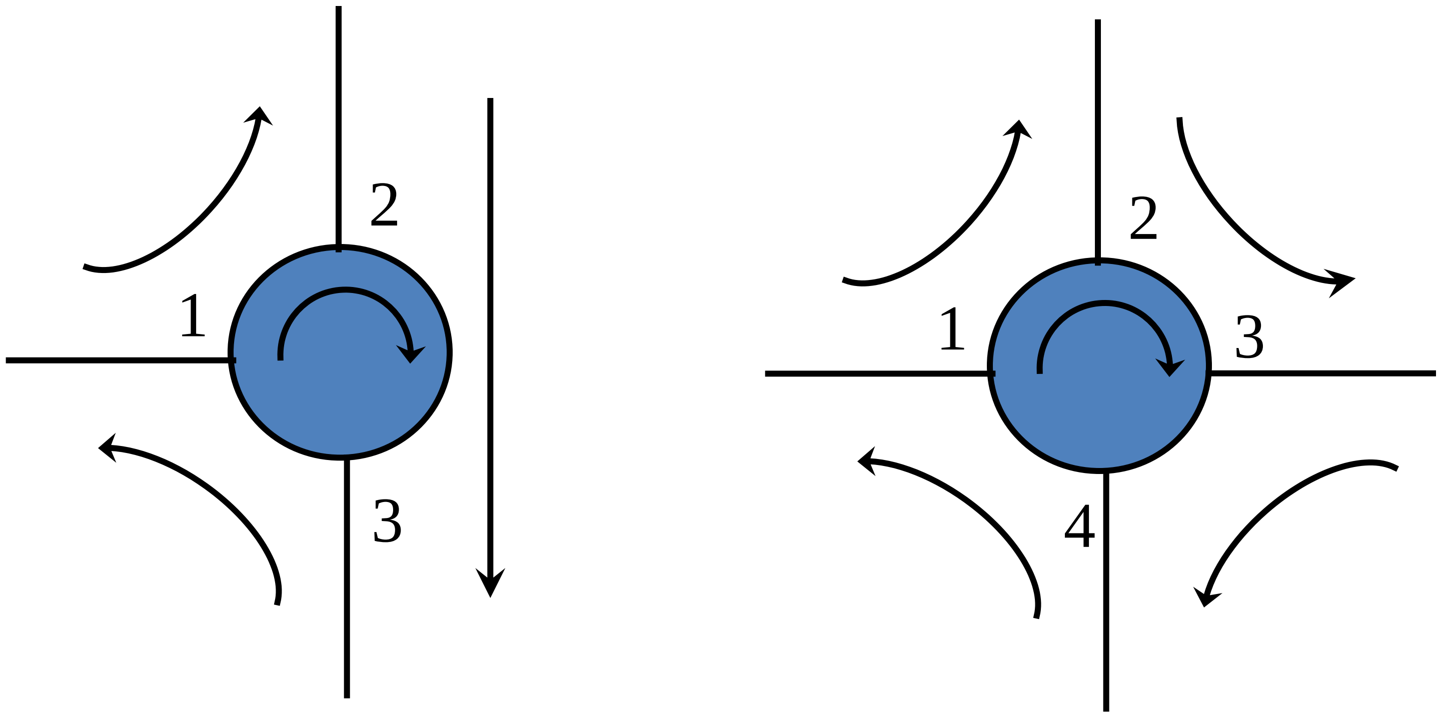
矩形波导中 TE_{10} 模的圆极化现象



谐振式隔离器

容易设计，但所需直流磁场高，体积大，多用于高功率情况。

环行器



磁化铁氧体中的平面波解——横向传播的波 ($h // H_0$)

❖ 对于横向传播的波，当 $\boldsymbol{h} // \boldsymbol{H}_0$ 时，h 只有 h_z 分量

$$k = k_0 \qquad k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

❖ 波数 k 与铁氧体的各向异性无关，因而铁氧体中的场与各向同性介质中的场是一样的，故这种波一般称为寻常波。

❖ 因为 h_z 是磁场强度 h 的唯一非零分量，故 $b_z=\mu_0 h_z$ 是磁通量密度矢量的唯一非零分量。

❖ 从旋度方程 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{B} \;\Rightarrow\; \omega \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{E}_0$

❖ 得电场的唯一非零分量 $E_y = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} h_z$

❖ 以及 $\boldsymbol{k} = k_0 \boldsymbol{x}_0$

❖ 因此寻常波是线极化TEM_x波，如同在 μ_0 和 ε 的各向同性介质中传播一样。

磁化铁氧体中的平面波解——横向传播的波 ($h \perp H_0$)

❖ 对于铁氧体中传播的非寻常波 $k = k_0 \left(\dfrac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_{11}} \right)^{1/2}$

$$\begin{bmatrix} k^2 - k^2 \sin^2\theta - k_0^2 \mu_{11} & \mathrm{j} k_0^2 \mu_{12} & -k^2 \sin\theta \cos\theta \\ -\mathrm{j} k_0^2 \mu_{12} & k^2 - k_0^2 \mu_{11} & 0 \\ -k^2 \sin\theta \cos\theta & 0 & k^2 - k^2 \cos^2\theta - k_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0$$

❖ 可以分别求得电场和磁场如下

$$\begin{cases} h_z = 0 \\ \dfrac{h_y}{h_x} = -\mathrm{j} \dfrac{\mu_{11}}{\mu_{12}} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_x = b_z = 0 \\ b_y = \left(\dfrac{\mu_0 k^2}{k_0^2} \right) h_y = \mu_0 \mu_e h_y \end{cases}$$

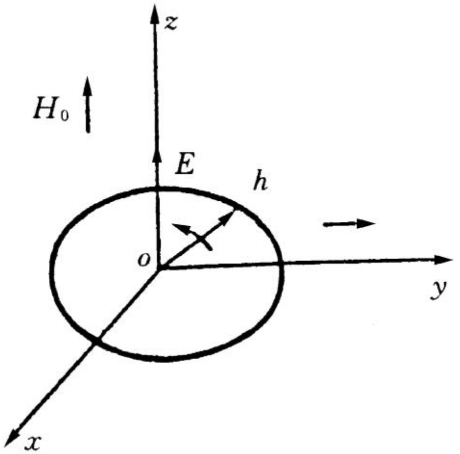
$$\begin{cases} E_x = E_y = D_x = D_y = 0 \\ E_z = -\sqrt{\dfrac{\mu_0 \mu_e}{\varepsilon_0}} h_y \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{k} = k\boldsymbol{x}_0 \qquad k = k_0 \sqrt{\mu_e} \\ \mu_e = \dfrac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_{11}} = \dfrac{f^2 - (f_g + f_m)^2}{f^2 - f_g^2 - f_g f_m} \end{cases}$$

磁化铁氧体中的平面波解——横向传播的波 ($h \perp H_0$)

$$\begin{cases} h_z = 0 \\ \dfrac{h_y}{h_x} = -j\dfrac{\mu_{11}}{\mu_{12}} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_x = b_z = 0 \\ b_y = \left(\dfrac{\mu_0 k^2}{k_0^2}\right) h_y = \mu_0 \mu_e h_y \end{cases}$$

$$E_x = E_y = D_x = D_y = 0 \qquad E_z = -\sqrt{\frac{\mu_0 \mu_e}{\varepsilon_0}} h_y$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{k} = k\boldsymbol{x}_0 \qquad k = k_0\sqrt{\mu_e} \\ \mu_e = \dfrac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_{11}} = \dfrac{f^2 - (f_g + f_m)^2}{f^2 - f_g^2 - f_g f_m} \end{cases}$$



非寻常波的椭圆极化

❖ **可见非寻常波是TEx波。*H* 在x-y平面内是椭圆极化的**

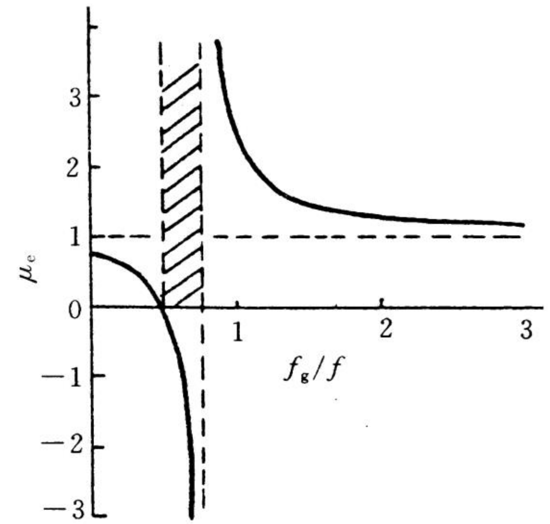
$$h_y / h_x = -\mathrm{j}(\mu_{11} / \mu_{12})$$

磁化铁氧体中的平面波解——横向传播的波 ($h \perp H_0$)

$$\begin{cases} h_z = 0 \\ \dfrac{h_y}{h_x} = -j\dfrac{\mu_{11}}{\mu_{12}} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_x = b_z = 0 \\ b_y = \left(\dfrac{\mu_0 k^2}{k_0^2}\right) h_y = \mu_0 \mu_e h_y \end{cases}$$

$$E_x = E_y = D_x = D_y = 0 \qquad E_z = -\sqrt{\frac{\mu_0 \mu_e}{\varepsilon_0}} h_y$$

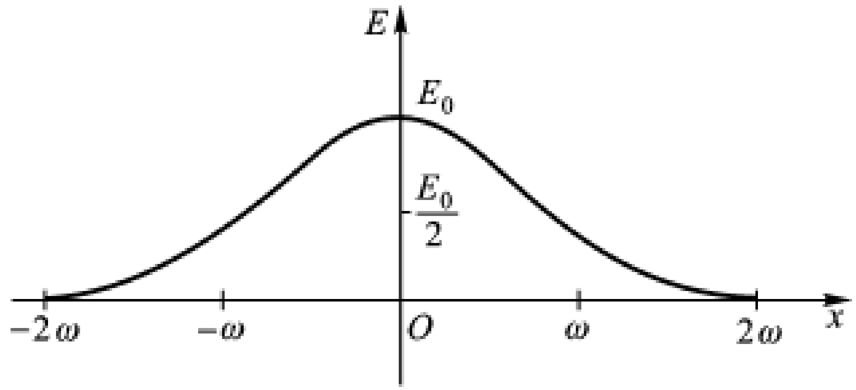
$$\begin{cases} \boldsymbol{k} = k\boldsymbol{x}_0 \qquad k = k_0 \sqrt{\mu_e} \\ \mu_e = \dfrac{\mu_{11}^2 - \mu_{12}^2}{\mu_{11}} = \dfrac{f^2 - (f_g + f_m)^2}{f^2 - f_g^2 - f_g f_m} \end{cases}$$



9.4GHz非寻常平面波在YIG铁氧体中垂直于直流磁场传播时μ_e与f_g/f的关系

- ❖ **由μe的表达式可见，当** $f_g/f = 1 - f_m/f_g$，$\mu_e = 0$；
- ❖ **当** $f_g / f = -f_m / 2f + \sqrt{(f_m / 2f)^2 + 1}$ **时，可出现极点。**

高斯波束



- 均匀平面波有以下两个特点，
  - 波的幅度在整个空间是常数
  - 等相位面是平行平面。
- 对于更复杂的波，波的幅度不再均匀，波前不再是平面。
- 例如激光束，其幅度在中心轴线上最强，离开轴线愈远光场愈弱。
- 场按高斯分布的波束称为高斯波束

$$\boldsymbol{E}(x,\ z=0)=\boldsymbol{y}_0 E_0 \mathrm{e}^{-x^2/w^2}$$

- 高斯波束传播的分析方法：将高斯波束展开为无限多平面波叠加，研究每个平面波的传播，再把这些平面波加起来。

高斯波束展开为平面波的叠加

❖ z=0 的平面高斯波束

$$\boldsymbol{E}(x, z=0) = \boldsymbol{y}_0 E_0 \mathrm{e}^{-x^2/w^2}$$

❖ 设 y 方向极化的平面波表示为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{y}_0 A \mathrm{e}^{-j(k_x x + k_z z)} \qquad k_x{}^2 + k_z{}^2 = k^2, \quad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

❖ 将 z=0 平面电场用平面波 e^{-jkx} 展开

$$\boldsymbol{E}(x, z=0) = \boldsymbol{y}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x A(k_x) \mathrm{e}^{-jk_x x}$$

❖ $A(k_x)$ 为x方向波数为 k_x 的平面波分量幅值，根据傅里叶变换理论

$$A(k_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x E\left(x, z=0\right) \mathrm{e}^{jk_x x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x E_0 \mathrm{e}^{-x^2/w^2} \mathrm{e}^{jk_x x}$$

高斯波束展开为平面波的叠加

- z=0 的平面高斯波束 $\boldsymbol{E}(x, z=0)=\boldsymbol{y}_0 E_0 \mathrm{e}^{-x^2/w^2}$
- 将 z=0 平面电场用平面波展开 $\boldsymbol{E}(x, z=0)=\boldsymbol{y}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x A(k_x) \mathrm{e}^{-jk_x x}$

$$A(k_x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x E\left(x, z=0\right) \mathrm{e}^{jk_x x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x E_0 \mathrm{e}^{-x^2/w^2} \mathrm{e}^{jk_x x}$$

- 积分可得解析结果 $A(k_x)=\dfrac{E_0 w}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{w^2 k_x^2}{4}}$

- 诸多平面波沿z轴的传播，只要乘上 $\mathrm{e}^{-jk_z z}$ 即可

$$\boldsymbol{E}(x, z)=\boldsymbol{y}_0 \frac{E_0 w}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x \mathrm{e}^{\frac{-w^2 k_x^2}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x+k_z z)}$$

高斯波束展开为平面波的叠加

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0 w}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x \mathrm{e}^{\frac{-w^2k_x^2}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x+k_z z)}$$

❖ 式中，$k_z=\sqrt{k^2-k_x^2}$ 当 $k_x>k$， $k_z=-\mathrm{j}\sqrt{k_x^2-k^2}$ 是虚数，所以上述解当 z→∞ 仍有界

❖ 进行变量替换，使 $k_x=ku$，以及 $\mathrm{d}k_x=k\mathrm{d}u$

$$\boldsymbol{E}(x,\ z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0 kw}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\ \mathrm{e}^{\frac{-k^2w^2u^2}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kux+k\sqrt{1-u^2}z)}$$

❖ 对于大多数激光束，$kw>>1$条件都满足，除非 u 比 1 小得多，上式第一个指数项可忽略。

❖ 当$u<<1$时第二项中 $\sqrt{1-u^2}\approx 1-\frac{u^2}{2}$ 其最终解为

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0 kw}{2P}\mathrm{e}^{q^2/4P^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\boldsymbol{y}_0E_0\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{j}\frac{z}{z_\mathrm{f}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{\left[\frac{-x^2}{w^2(1+\frac{z^2}{z_\mathrm{f}^2}]}(1+\mathrm{j}\frac{z}{z_\mathrm{f}})\right]}$$

高斯波束展开为平面波的叠加

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0kw}{2P}\mathrm{e}^{q^2/4P^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\boldsymbol{y}_0E_0\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{j}\frac{z}{z_\mathrm{f}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}e^{\left[\frac{-x^2}{w^2(1+\frac{z^2}{z_\mathrm{f}^2}]}(1+\mathrm{j}\frac{z}{z_\mathrm{f}})\right]}$$

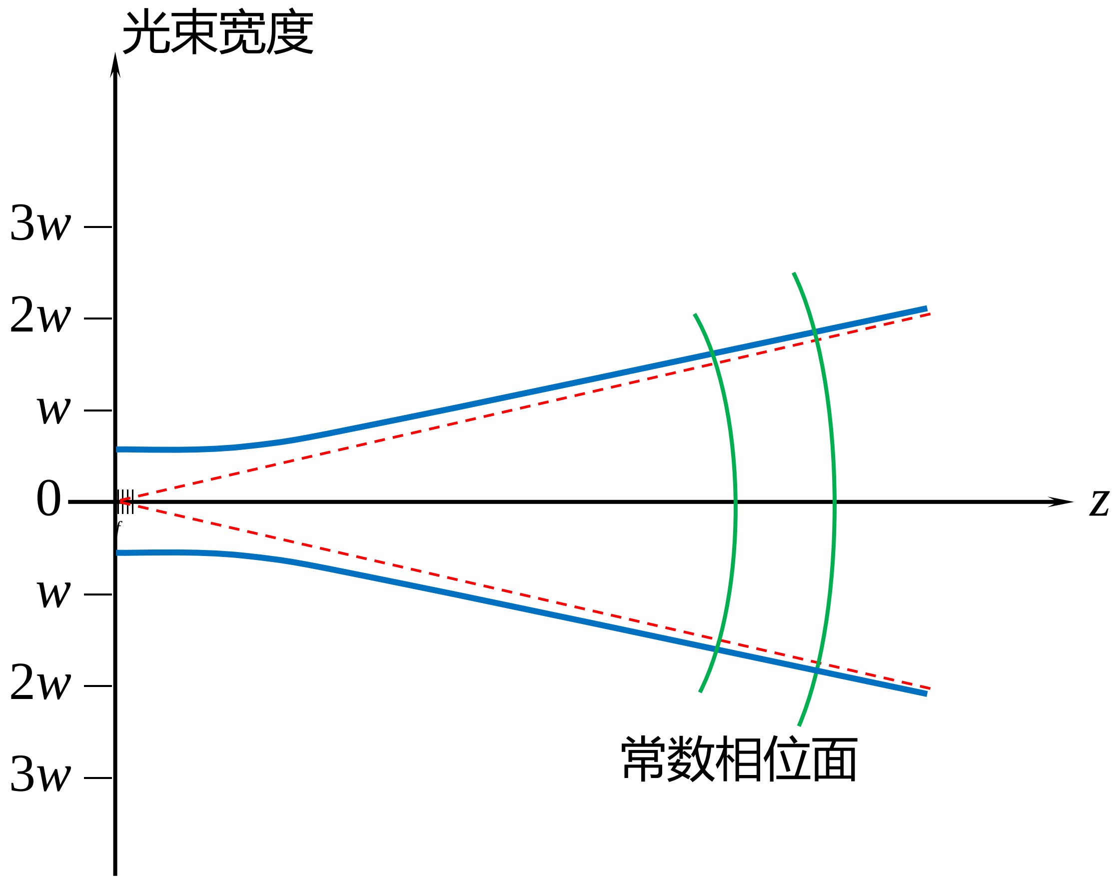
❖ 式中 $z_f=kw^2/2$。当$z>>z_f$，波的幅度和相位主要由第二个指数项决定。

❖ 所以当波束传播相当一段距离后，在 z 处波束的宽度为 wz/z_f

$$\text{相位}=-kz-\frac{x^2}{w^2}\frac{z_\mathrm{f}}{z}+\frac{\pi}{4}\approx-k\sqrt{z^2+x^2}+\frac{\pi}{4}$$

❖ 当光束沿 z 轴传播相当一段距离后，高斯波束变得越来越宽，其宽度与z近似线性关系， 而等相位面成为一柱面，这种现象称为**高斯波束衍射**。

高斯波束的衍射



当 $z/z_f \to \infty$ 光束宽度与 z 成线性关系

复习

- 电各向异性介质可用并矢 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 表示，波在其中的传播可分为寻常波与非寻常波，非寻常波的传播特性与方向有关。
- 铁氧体未经磁化是各向同性的。当一恒定磁场H_0加在铁氧体上时，它变成一块各向异性介质。
- 铁氧体中传播的波可以分为纵向传播的波与横向传播的波。纵向传播的波是圆极化波。左旋波和右旋波相速不等。右旋波有共振特性，有通带止带纵向传播的波是非互易的，存在法拉第旋转效应。横向传播的波分为寻常波与非寻常波。寻常波就是普通的TEM波，非寻常波是椭圆极化波。其极化特性相互垂直。
- 高斯波束是分析实际激光束的一个十分迫近的模型，可将它展开为无限多平面波的叠加。高斯波束沿z轴传播一段距离后，其宽度与z轴近似线性关系，等相位面成为一柱面。这称为高斯波束衍射。

The End.

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn