James Clerk Maxwell
1831 – 1879

Lesson 8

Electromagnetic Fields and Waves

波方程

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn

从无源空间的麦克斯韦方程到波方程

❖ 无源空间麦氏方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}\\ \nabla\times\boldsymbol{H} &= \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E} &= 0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H} &= 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

波方程

$$\boxed{\left(\nabla^2+k^2\right)\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{matrix}\right. = 0} \qquad k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{H}$去耦

❖ 因为 $\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right)=-\mathrm{j}\omega\mu\left(\nabla\times\boldsymbol{H}\right)=-\mathrm{j}\omega\mu\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\right)=\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}$

❖ 利用恒等关系 $\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}\right)-\nabla^2\boldsymbol{E}$ 以及 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 得到

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{E}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}=0}$$

❖ 同理 $\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{H}\right)=\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\left(-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}\right)=\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{H}$ 及 $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$

得到

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{H}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{H}=0}$$

算符∇对$e^{-jk\cdot r}$的作用

设

$$\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{x}_0 + k_y \boldsymbol{y}_0 + k_z \boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 + z\boldsymbol{z}_0$$

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$$

E_0是常数矢量

则:

$$\nabla\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)}$$

$$= -\mathrm{j}\left(k_x \boldsymbol{x}_0 + k_y \boldsymbol{y}_0 + k_z \boldsymbol{z}_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)}$$

$$= -\mathrm{j}\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

❖利用 $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi + \Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$　　$\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A}) = \nabla\Phi\times\boldsymbol{A} + \Phi\nabla\times\boldsymbol{A}$

得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) = \boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0$$

$$= -j\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) = -\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = \nabla\times\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) = \nabla\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\times\boldsymbol{E}_0 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla\times\boldsymbol{E}_0$$

$$= -j\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = -\mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{E} = \nabla\cdot\nabla\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) = \nabla^2\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) = -k^2\boldsymbol{E}$$

边界趋于无穷远时无源、简单介质中波方程的解

❖ 波方程 $\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$

❖ 其解E和H可表示成一个常数矢量E_0、H_0与一个指数函数$e^{-jk\cdot r}$的乘积。

$$\boxed{\boldsymbol{E}(r)=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}$$

❖ 式中

$$\boldsymbol{E}_0=E_{0x}\boldsymbol{x}_0+E_{0y}\boldsymbol{y}_0+E_{0z}\boldsymbol{z}_0 \qquad \boldsymbol{H}_0=H_{0x}\boldsymbol{x}_0+H_{0y}\boldsymbol{y}_0+H_{0z}\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_y\boldsymbol{y}_0+k_z\boldsymbol{z}_0 \qquad k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{x}_0+y\boldsymbol{y}_0+z\boldsymbol{z}_0$$

❖ 因为

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=\left(-k^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$$

分离变量法解波方程

❖ 矢量波方程 $\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$ 可简化到解 $(\nabla^2+k^2)\Phi(x,y,z)=0$

❖ 设

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=E_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0+E_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0+E_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z)=H_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0+H_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0+H_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0$$

❖ 代入波方程便得

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\left[E_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0+E_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0+E_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0\right]\\ \left[H_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0+H_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0+H_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0\right]\end{cases}=0$$

❖ 要使上式成立，只有等式左边每个分量都等于零，即

$$(\nabla^2+k^2)\begin{cases}E_x(x,y,z)\\ E_y(x,y,z)\\ E_z(x,y,z)\end{cases}=0 \qquad (\nabla^2+k^2)\begin{cases}H_x(x,y,z)\\ H_y(x,y,z)\\ H_z(x,y,z)\end{cases}=0$$

❖ 所以对波方程的求解归结为解标量波方程

$$(\nabla^2+k^2)\Phi(x,y,z)=0$$

分离变量法解 $(\nabla^2+k^2)\Phi(x,y,z)=0$ 方程

❖ 设 $\boxed{\Phi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)}$ 得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)X(x)Y(y)Z(z)=0$$

❖ 等式两边除以 $X(x)Y(y)Z(z)$ 得到

$$\frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{X(x)}+\frac{\frac{\partial^2 (Y)}{\partial y^2}}{Y(y)}+\frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)}+k^2=0$$

❖ 等式左边第一、二、三项分别只是x、y、z的函数，要使它们加起来为常数 $-k^2$ 只能是每一项都等于某一待定常数 $-k_x^2,-k_y^2,-k_z^2$

$$\boxed{\frac{d^2X(x)}{dx^2}+k_x^2X(x)=0 \qquad \frac{d^2Y(y)}{dy^2}+k_y^2Y(y)=0 \qquad \frac{d^2Z(z)}{dz^2}+k_z^2Z(z)=0}$$

❖ 以及 $\boxed{k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon}$

分离变量法解 $(\nabla^2+k^2)\Phi(x,y,z)=0$ 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X(x)=0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y(y)=0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2Z(z)}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2Z(z)=0$$

❖其解分别为 $\boxed{X(x)\sim e^{-jk_xx}}$ $\boxed{Y(y)\sim e^{-jk_yy}}$ $\boxed{Z(z)\sim e^{-jk_zz}}$

❖ $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_xx}$ 表示沿x方向传播到无穷远的波，另一个解 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_xx}$ 表示逆x方向由无穷远传播来的波，因为假定边界趋于无穷远，不存在反射波，这个解可以不予考虑。

❖可得 $\boxed{\Phi(x.y.z)\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_xx+k_yy+k_zz)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}$

❖式中 $\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_y\boldsymbol{y}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$ $\boxed{k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon}$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{x}_0+y\boldsymbol{y}_0+z\boldsymbol{z}_0$$

❖k称为波矢，其绝对值k称为传播常数，**k^2满足的方程称为介质的色散方程。**

矢量波方程$(\nabla^2+k^2)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$ 的解

❖ 所以电场E和磁场H在均匀介质中每一分量的解为

$$E_i(x,y,z)=E_{0i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},i=x,y,z \qquad H_i(x,y,z)=H_{0i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},i=x,y,z$$

❖ $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{x}_0E_{0x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{y}_0E_{0y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{z}_0E_{0z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\mathbf{E}_0e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\boldsymbol{E}_0=E_{0x}\boldsymbol{x}_0+E_{0y}\boldsymbol{y}_0+E_{0z}\boldsymbol{z}_0$$

❖ 同理 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}(x,y,z)=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ $\qquad \boldsymbol{H}_0=H_{0x}\boldsymbol{x}_0+H_{0y}\boldsymbol{y}_0+H_{0z}\boldsymbol{z}_0$

❖ 计及时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 后，其解为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$$

❖ 从形式上看表示电场E和磁场H的解是一个常数矢量E_0、H_0与一个指数函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 的乘积。

$E(r)=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 与 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 的内涵

- **E、H、k三者相互垂直，且构成右手螺旋关系**

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$$

$\Rightarrow$ 代入平面波解

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}_0=\dfrac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\\ \boldsymbol{E}_0=-\dfrac{1}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0\\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}_0=0\\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=0\end{cases}$$

- **模|E|与|H|之比为一常数，称为波阻抗**

引入单位波矢κ_0使得$\kappa_0\ \kappa_0=1$，$k=k\kappa_0$则得

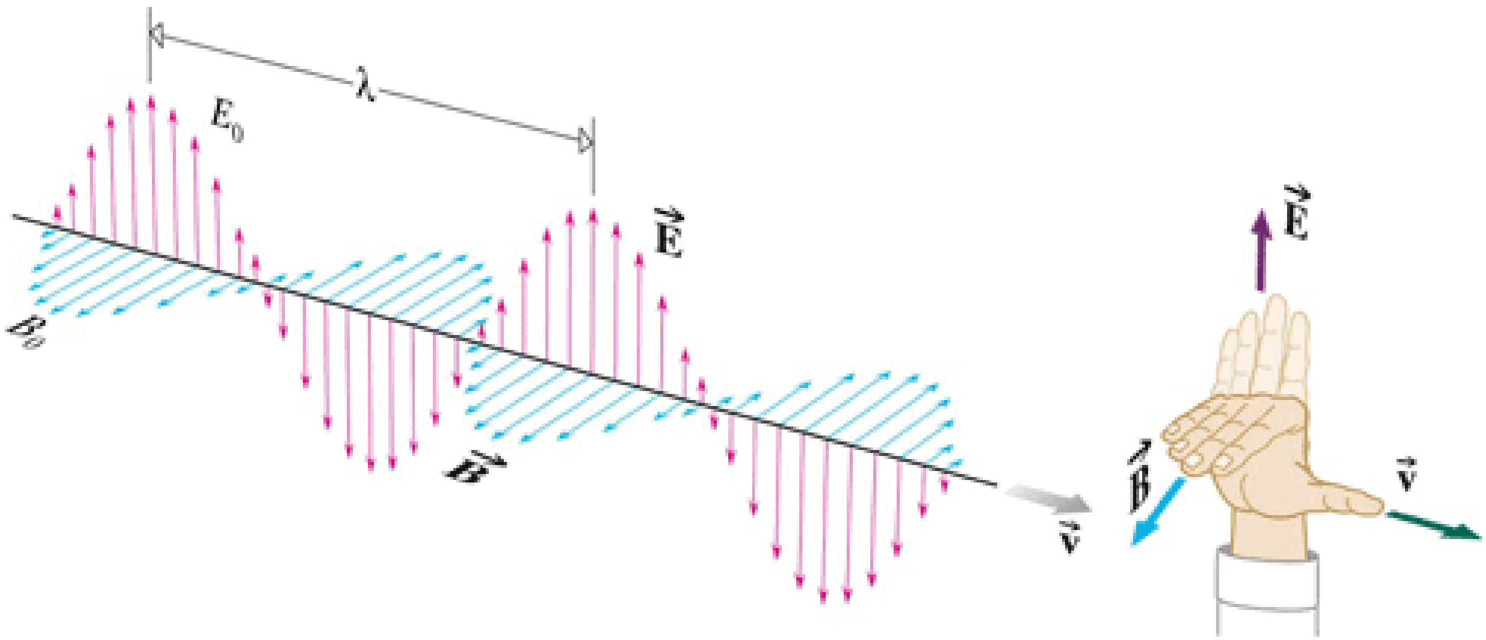
$$\boldsymbol{E}_0=-Z\kappa_0\times\boldsymbol{H}_0\qquad \boldsymbol{H}_0=Y\kappa_0\times\boldsymbol{E}_0\qquad Z=\frac{1}{Y}=\omega\mu/k=k/\omega\varepsilon=\sqrt{\mu/\varepsilon}$$

Z、Y称为均匀介质中平面波的本征阻抗或本征导纳，表示模|E|与|H|之比。

本征阻抗也叫波阻抗。

- **对于自由空间，波阻抗为 377Ω，习惯上用η_0表示。**

E、H、k三者相互垂直并构成右手螺旋关系



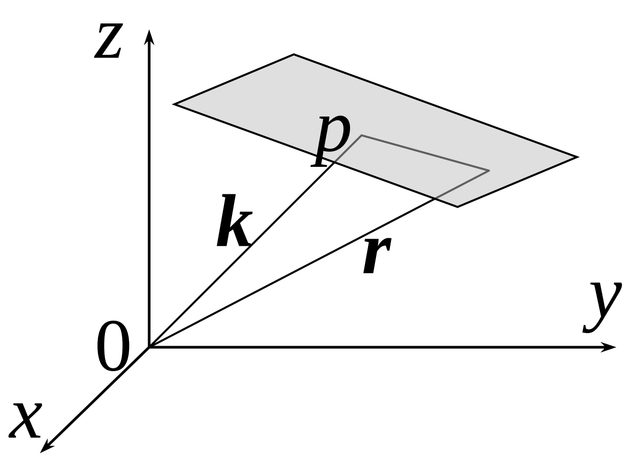
$E(r)=\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 与 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 的内涵

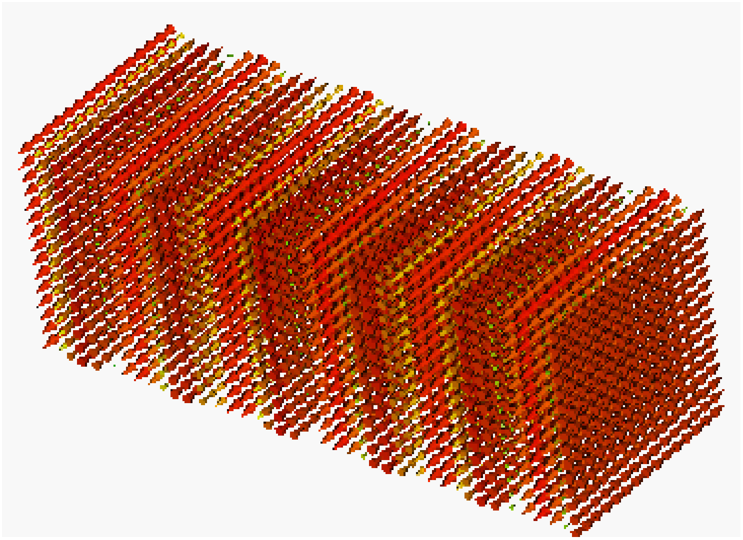
❖ **在与k垂直的平面内，波的相位到处都相等。这就是平面波名称的由来。**

❖ **对** $E(r)=\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ **乘** $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ **取实部得到**

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\boldsymbol{E}_0 \cos\left(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)$$

❖ **在与k垂直的平面内，r在k上的投影都等于** $\overline{OP}$ **，即相位都相等。**





波长与相速

❖ 为方便，选择一个特定的坐标系使得

$$\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{x}_0,\quad \mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{y}_0,\quad \mathbf{k} = k\mathbf{z}_0$$

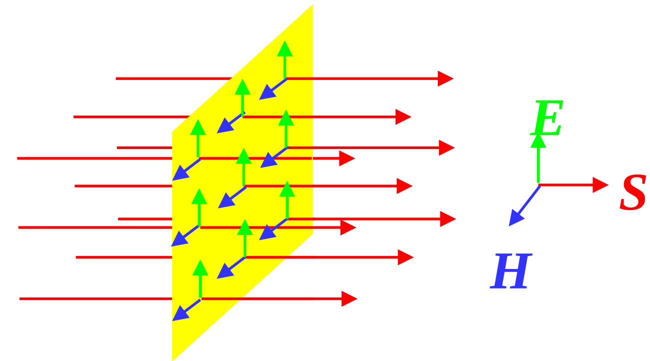
❖ 在这个特定坐标系中，电场、磁场、波矢各只有一个分量。

❖ 于是平面波解成为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{x}_0 E_0 \cos(\omega t - kz)$$

❖ 故得

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad v_{\mathrm{p}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$



对于传播方向k而言，电场及磁场仅具有横向分量，因此这种电磁波称为**横电磁波**，或称为**TEM**波。以后我们将会遇到在传播方向上具有电场或磁场分量的非TEM波。

根据电场强度及磁场强度，即可求得复能流密度矢量 S_c

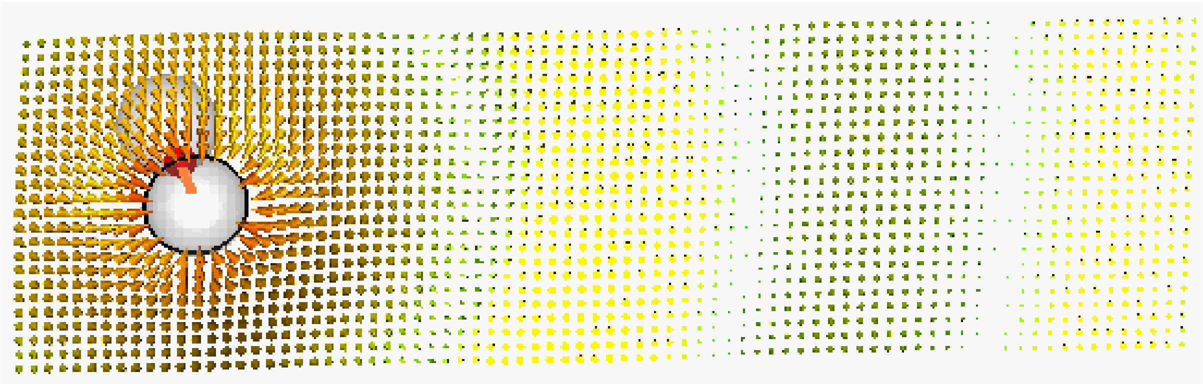
$$\boldsymbol{S}_c = \boldsymbol{E}_x \times \boldsymbol{H}_y^* = \boldsymbol{z}_0 \frac{E_{x0}^2}{Z} = \boldsymbol{z}_0 Z H_{y0}^2$$

可见，此时复能流密度矢量为**实数**，**虚部为零**。这就表明，电磁波能量仅向正 z 方向**单向流动**，空间不存在来回**流动**的交换能量。

❖ 均匀平面波的波面是无限大的平面，而波面上各点的场强振幅又均匀分布，因而波面上各点的能流密度相同，可见这种均匀平面波具有无限大的能量。显然，实际中不可能存在这种均匀平面波。

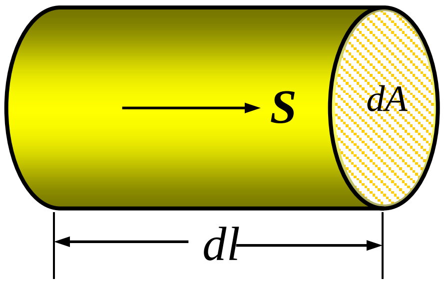
❖ 当观察者离开波源很远时，波面很大，而观察者仅限于局部区域，则可以近似作为均匀平面波。

❖ 利用空间傅里叶变换，可将非平面波展开为很多平面波之和，所以平面波是最基本的波。



能 速

若沿能流方向取出长度为 dl，截面为 dA 的圆柱体，如图示。



设圆柱体中能量均匀分布，且平均单位体积能量密度为 w_{av}，能流面密度为$S(t)$，则柱体中总储能为（w_{av}dA dl），穿过端面 A 的总能量为（ $S(t)$ dA ）。

若圆柱体中全部储能在 dt 时间内全部穿过端面 A，则

$$S(t)dAdt = w_{av}dldA \qquad S(t)dA = \frac{w_{av}dldA}{dt} = w_{av}dA\frac{dl}{dt}$$

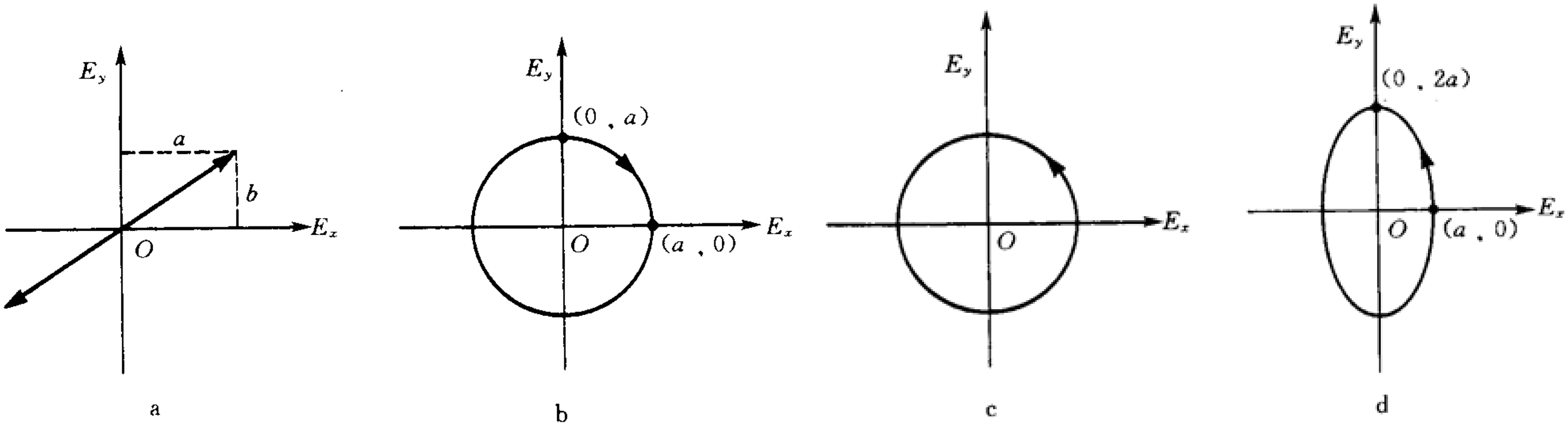
式中 $\frac{dl}{dt}$ **比值显然代表单位时间内的能量位移**，因此该比值称为能量速度，以 v_e 表示。由此求得

$$S(t) = E(r,t) \times H(r,t)$$

$$v_e = \frac{S(t)\cdot \mathbf{S_0}}{w_{av}} \qquad w_{av} = \frac{1}{2}\varepsilon E(r,t)\cdot E(r,t) + \frac{1}{2}\mu H(r,t)\cdot H(r,t) \qquad v_e = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = v_p$$

由此可见，在理想介质中，**平面波的能量速度等于相位速度**。

极化



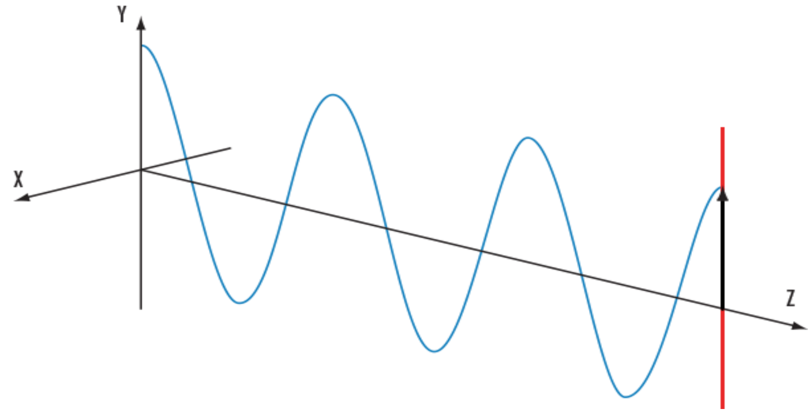
- 电磁波的极化描述电磁波运动的空间性质。
- 波的极化可以用固定点的**电场矢量**末端点在与波矢k垂直的平面内投影随时间运动的轨迹来描述。
- 如果电场矢量末端点运动轨迹是一条直线，这种波称为**线极化波**。
- 如果末端点运动轨迹是一个圆，称为**圆极化波**。
- 如果末端点运动轨迹是一个椭圆，称为**椭圆极化波**。

极化（polarization）

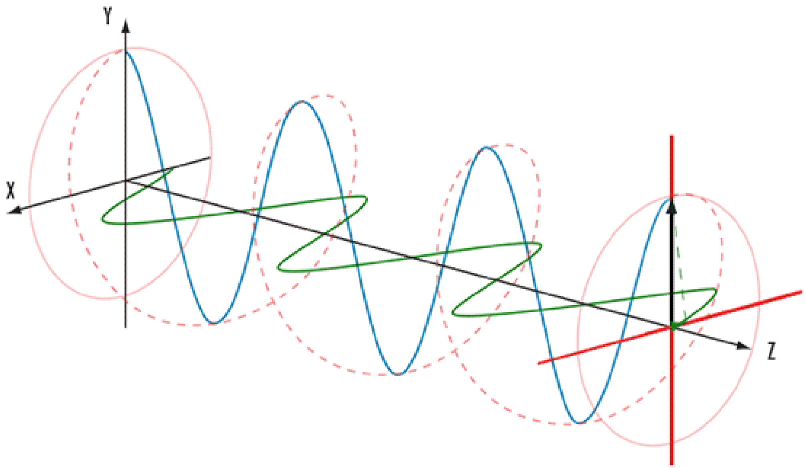
❖ 电场、磁场是矢量。

❖ 把电磁波的电场方向叫电磁波的极化。

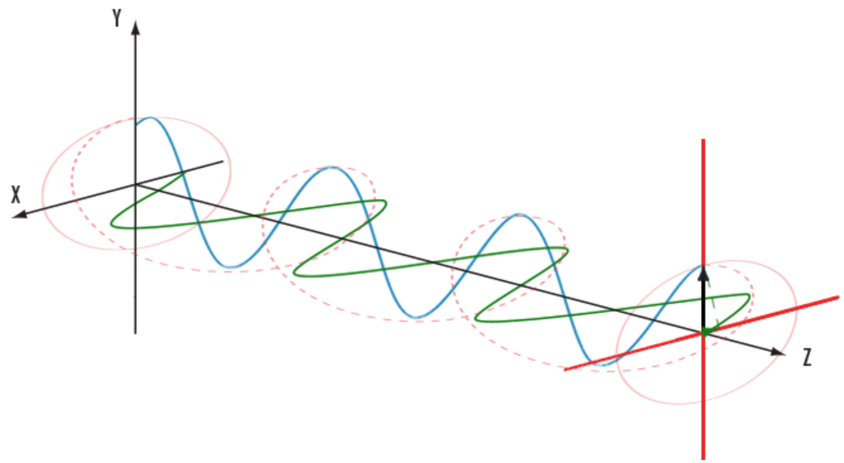
❖ 光学中通常称为“偏振”。



线极化：电场矢量端点随时间变化的轨迹是一直线，分为水平极化和垂直极化。

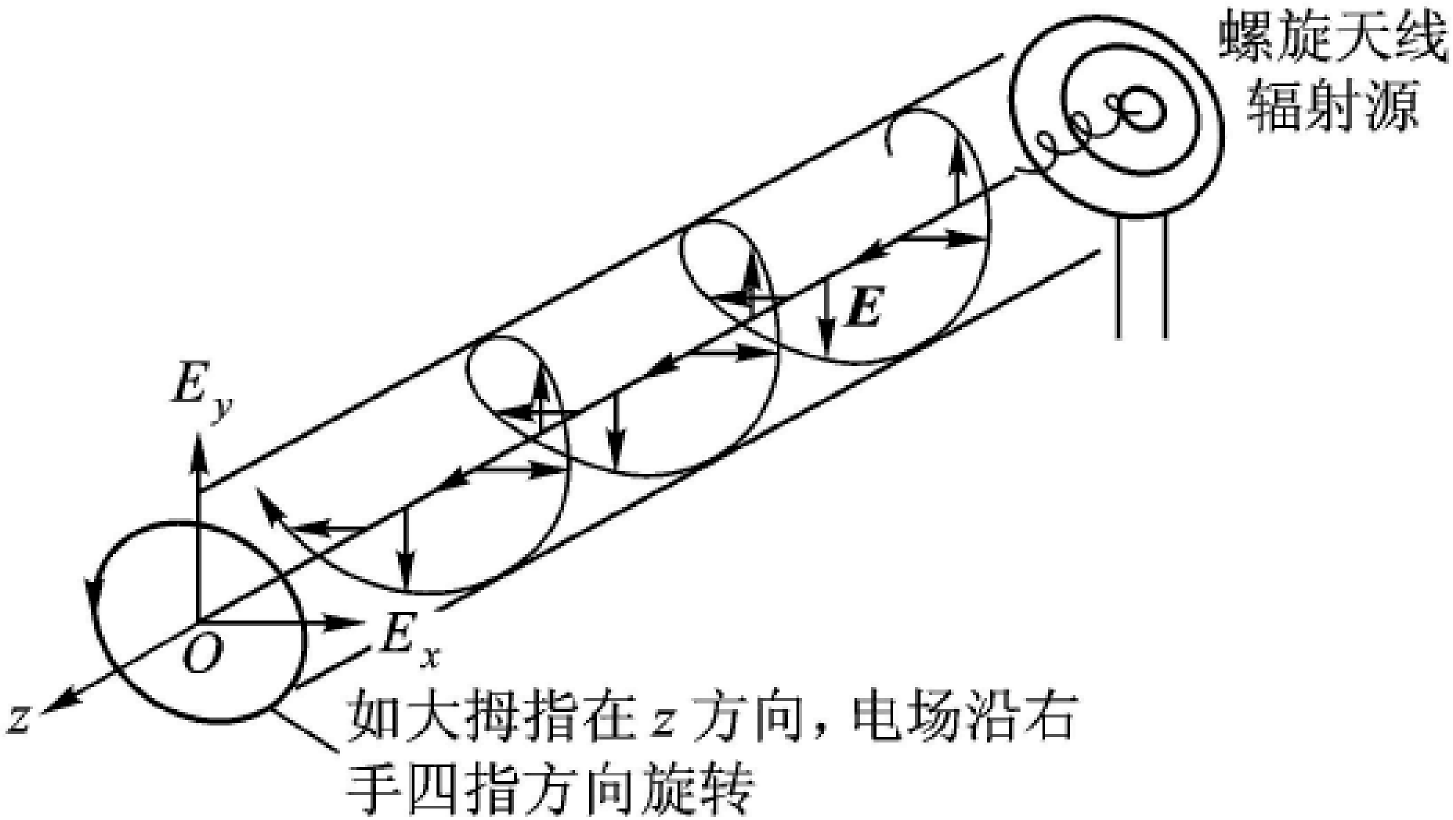


圆极化：电场矢量端点随时间变化的轨迹是一个圆，分为左旋和右旋。



椭圆极化：电场矢量端点随时间变化的轨迹是一个椭圆，分为左旋和右旋。

圆极化波



圆极化（右旋）

如何判定波的极化?

❖ 取k为z轴，电场与k垂直，只有Ex、Ey两个分量，可表示为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 E_{xm} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_\mathrm{a})} + \boldsymbol{y}_0 E_{ym} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_\mathrm{b})}$$

❖ 根据时谐矢量的复矢量表示的定义，可得

$$\boxed{\begin{aligned} E_x(z,t) &= \mathrm{Re}\left[E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_\mathrm{a})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \\ &= E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_\mathrm{a}) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_y(z,t) &= \mathrm{Re}\left[E_{ym}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_b)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \\ &= E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_\mathrm{b}) \end{aligned}}$$

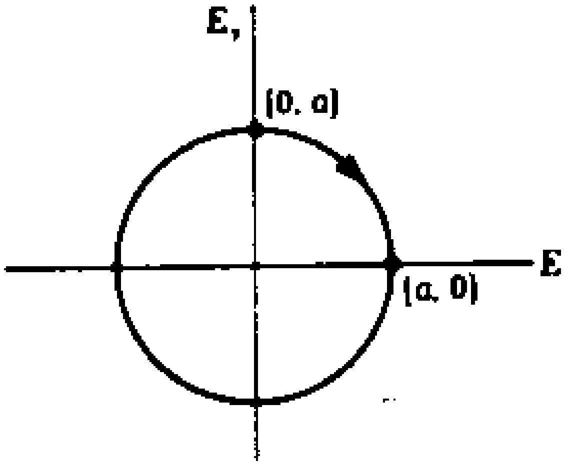
❖ 如果Ex, Ey相位满足 $\varphi = \varphi_\mathrm{b} - \varphi_\mathrm{a} = 0$或$\pi$

❖ 那么Ex, Ey满足的方程为 $E_y = \pm(\dfrac{E_{ym}}{E_{xm}})E_x$

❖ 这是关于斜率为 $(\pm\dfrac{E_{ym}}{E_{xm}})$ 的直线。故是线极化的。

❖ φ=0取正号，φ=π取负号。

如何判定波的极化?



❖ 圆极化波 $E_x(z,t) = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_a)$

$$E_y(z,t) = E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_b)$$

❖ 定义 $\varphi = \varphi_b - \varphi_a = \pm\dfrac{\pi}{2}, \quad A = \dfrac{E_{ym}}{E_{xm}} = 1$

❖ 先考虑 φ=π/2，A=1得到

$$E_x = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_a) \qquad E_y = -E_{xm}\sin(\omega t - kz + \varphi_a)$$

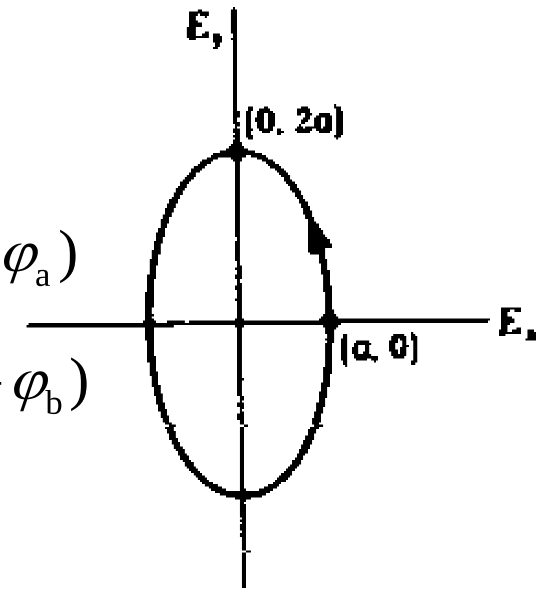
❖ 消去t，得到 $E_x^2 + E_y^2 = E_{xm}^2$

❖ 其图解在Ex – Ey平面这是一个圆，所以是圆极化的。圆的半径等于E_{xm}。

❖ 注意电场矢量E末端点随时间是顺时针转的，如果用左手顺着旋转方向，大拇指就指向z，故称左手极化波。

❖ 当φ=-π/2，A=1时，也得到一个圆极化波，但这是右手圆极化波 。

如何判定波的极化?



❖ **椭圆极化**

$$E_x(z,t)=\mathrm{Re}\left[E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_a)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_{\mathrm{a}})$$

$$E_y(z,t)=\mathrm{Re}\left[E_{ym}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_b)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\varphi_{\mathrm{b}})$$

❖ **考虑** φ=-π/2， $A=E_{ym}/E_{xm}=2$

$$E_x=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_{\mathrm{a}}) \qquad E_y=2E_{xm}\sin(\omega t-kz+\varphi_{\mathrm{a}})$$

❖ **消去t 得到** $$\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{2E_{xm}}\right)^2=1$$

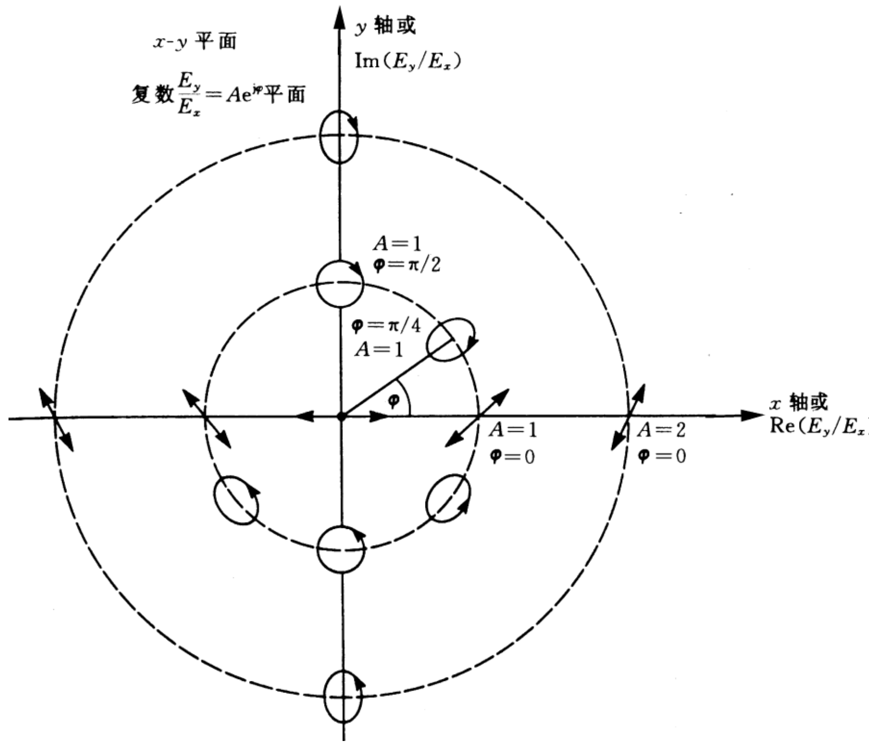
❖ **所以是椭圆极化的。对于其他的φ与A，一般都是椭圆极化的。**

如何判定波的极化——邦加球

假定复矢量表示的电场$\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{x}_0E_x+\boldsymbol{y}_0E_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

定义A和φ $E_y/E_x=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$



1）对于线极化波，E_y/E_x 在该复平面对应的点就是实轴，φ=0或π。

2）对于圆极化，在该复平面对应的点就是A=1，φ=±π/2。

3）如果 E_y/E_x 落在上半平面，都是左手椭圆极化的，E_y/E_x 落在下半平面都是右手椭圆极化的。

极化波的分解

❖ 任何一个线极化波、圆极化波或椭圆极化波可分解成两个线极化波的叠加

❖ 任何一个线极化波都可以表示成旋向相反、振幅相等的两圆极化波的叠加，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_m \mathrm{e}^{-jkz} = (\mathbf{x}_0 + j\mathbf{y}_0)\frac{E_m}{2}\mathrm{e}^{-jkz} + (\mathbf{x}_0 - j\mathbf{y}_0)\frac{E_m}{2}\mathrm{e}^{-jkz}$$

❖ 任何一个椭圆极化波也可以表示成旋向相反、振幅不等的两圆极化波的叠加，即

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (\mathbf{x}_0 E_{xm} + \mathbf{y}_0 E_{ym})\mathrm{e}^{-jkz} \\ &= (\mathbf{x}_0 - j\mathbf{y}_0)\frac{E_{xm} + jE_{ym}}{2}\mathrm{e}^{-jkz} + (\mathbf{x}_0 + j\mathbf{y}_0)\frac{E_{xm} - jE_{ym}}{2}\mathrm{e}^{-jkz}\end{aligned}$$

极化应用举例

❖无线电波与电视信号的接收

调幅电台辐射的电磁波其电场垂直于地面平行于天线塔。所以收音机天线就要安置得与电场方向平行，即与地面垂直接收效果才最好。

对于电视广播，电场E与地面平行，所以电视机接收天线就要与地面平行，且对准电视发射台方向。

很多调频广播电台，波是圆极化的，接收天线就可任意放置，只要对准电视信号发来的方向。在移动卫星通信和卫星导航定位系统中，由于卫星姿态随时变更，应该使用圆极化电磁波。

❖应用正交极化的通信系统

为了增加特定频率范围内的通信容量，某些卫星通信系统利用正交极化的两个波束，使通信容量比单极化通信系统增加一倍。

❖在微波设备中，有些器件的功能就是利用了电磁波的极化特性获得的，例如，铁氧体环行器及隔离器等。

❖光学中将光波的极化称为**偏振**

❖太阳光不具有固定的极化特性，其极化特性是随机的，也叫非偏振光。为了获得偏振光必须采取特殊方法，比如起偏器，偏振控制器等。

❖立体电影是利用两个相互垂直的偏振镜头从不同的角度拍摄的。因此，观众必须佩带一副左右相互垂直的偏振镜片，才能看到立体效果。

有耗介质

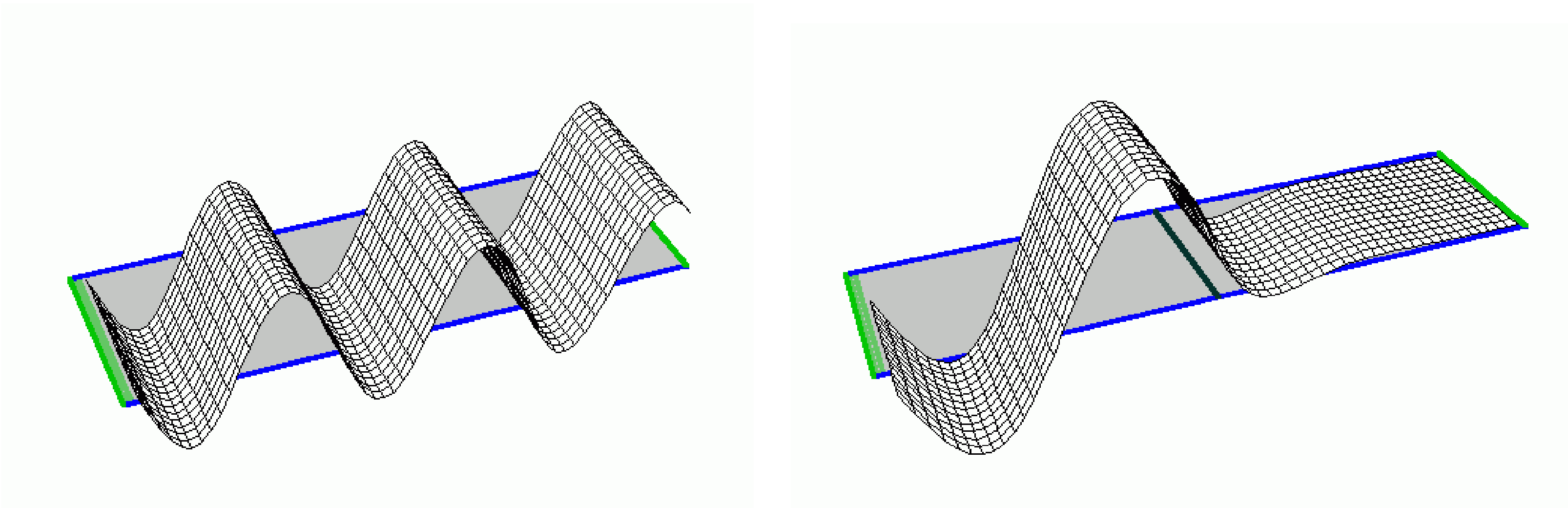
❖平面波在导电媒质中传播时，振幅不断衰减的物理原因是由于电导率 σ 引起的热损耗，所以导电媒质又称为有耗媒质，而电导率为零的理想介质又称为无耗媒质。

❖ 一般说来，媒质的损耗除了由于电导率引起的热损失以外，媒质的极化和磁化现象也会产生损耗。考虑到这类损耗时，媒质的介电常数及磁导率皆为复数，即 $\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''$，$\mu=\mu'-\mathrm{j}\mu''$。

❖ 复介电常数和复磁导率的虚部代表损耗，分别称为极化损耗和磁化损耗。

有耗介质(导电介质)中的平面波

❖ 波在传播方向幅度按指数衰减，即波传播的方向与衰减的方向一致



❖ 分析方法：

导电介质中电导率σ为有限值，

可用复数介电系数表示

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

导体存在时电磁波的传播

❖导电介质与非导电介质主要区别：

在导体内部有自由电子的存在，这一部分自由电荷在电场的作用下会发生定向移动形成传导电流，产生焦耳热，因而导体中电磁场的传播属性和绝缘介质中的情况是不同的。而且电磁能量转化为热量，所以导体内部的电磁波应该是一种衰减波。

电磁波在导体中传播时，除了要满足麦克斯韦方程组以外，还要满足欧姆定律和电荷守恒定律。要研究这个问题，必须把麦克斯韦方程组、欧姆定律和电荷守恒定律联立起来求解。

在静电情形下，导电介质内不存在自由电荷分布。自由电荷只分布在导体的表面。在时变化电磁场中，导电介质中是否存在自由电荷分布呢?

导体内自由电荷的分布

设导体内部某区域内有自由电荷分布，密度为ρ，则这点激发的电场可表示为

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_{\mathrm{v}}$$

在电场E作用下，导体内引起传导电流J，有欧姆定律和电荷守恒定律

$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E} \qquad \nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho_v}{\partial t}=0$$

联立求解这几个方程，得到

$$\boxed{\rho(t)=\rho_0\exp(-\frac{\sigma}{\varepsilon}t)=\rho_0\exp(-\frac{t}{\tau})}$$

$\tau=\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$ 为**特征时间或驰豫时间**，表示ρ减小到 ρ_0/e 所需时间。

因此，只要电磁波的频率满足

$$\omega \ll \tau^{-1} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$$

导体中自由电荷衰减是相当快的，并且完全由导体自身性质确定，与在导体中进行何种电磁过程无关，所以在讨论电磁波在导体中的传播问题时，可以认为ρ= 0。

一般金属：τ的数量级为10^{-17}秒，也就是说只要电磁波频率 ω<<10^{17}Hz时，金属导体可看成良导体。

❖**定量描述导电介质的导电强弱的程度，事实上是考察导电介质中传导电流与位移电流之比**

$$\frac{\text{传导电流}}{\text{位移电流}}=\left|\frac{\sigma E}{\omega\varepsilon E}\right|=\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)=\begin{cases}<<1\left[\text{传导电流远小于位移电流}\right] & \text{弱导电介质}\\ \sim 1\left[\text{传导电流远接近位移电流}\right] & \text{半导体}\\ >>1\left[\text{传导电流远大于位移电流}\right] & \text{良导体}\end{cases}$$

有耗介质(导电介质)用复介电系数表示的麦氏方程

- 对于电导率为σ的各向同性导体 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}} = \sigma \boldsymbol{E}$
- 安培全电流定律的微分形式为 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}$
- 代入，得到 $$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega(\varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega})\boldsymbol{E}$$
- 定义**复介电常数**，$\boxed{\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}}$，虚部表示**介质电导率**的影响
- 引入复介电常数后，麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

- 所以引入复介电常数后有耗介质中麦氏方程与无耗介质中相同

有耗介质中波方程及其解

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\mathrm{j}\omega\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad(\nabla^2+k^2)\boldsymbol{E}=0\qquad k^2=\omega^2\mu\tilde{\varepsilon}$$

❖ 其解也是平面波，如在特定坐标系下，使得E、H、k 都只有一个分量，便得到

$$\boldsymbol{E}=\mathbf{x}_0E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{y}_0(\frac{E_0}{\eta})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\qquad \eta=\sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}}$$

❖ η为导电介质的波阻抗。因为 $\tilde{\varepsilon}$ 是复数，所以导电介质中k, η 都是复数。

❖ 定义 $\eta=|\eta|e^{j\varphi}$ $\qquad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}[1-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}]^{1/2}=k_\mathrm{r}-\mathrm{j}k_\mathrm{i}$

❖ $\sigma/\omega\varepsilon$ 称为导电介质的**损耗正切**。

❖ **所以导电介质中尽管也取平面波形式的解，但 k , η 都是复数。**

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}[1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}]^{1/2}=k_{\mathrm{r}}-\mathrm{j}k_{\mathrm{i}}$$

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}}$$

$$\begin{cases} k_r=\left(\dfrac{\omega^2\mu\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1+\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\,\right]^{\frac{1}{2}} \\ k_i=\left(\dfrac{\omega^2\mu\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]^{\frac{1}{2}} \\ \tilde{\eta}=|\tilde{\eta}|e^{\mathrm{j}\phi}=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\left[1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}}\exp\left(\mathrm{j}\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\right) \end{cases}$$

$$\lambda'=\frac{2\pi}{k_r}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}}$$

$$v_{\mathrm{p}}'=\frac{\omega}{k_r}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}}$$

$$k^2=k_r^{\ 2}-k_i^{\ 2}-2\mathrm{j}k_rk_i=\omega^2\mu\varepsilon\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}k_r^{\ 2}-k_i^{\ 2}=\omega^2\mu\varepsilon\\ 2k_rk_i=\omega\sigma\mu\end{cases}$$

有耗介质中平面波解的特点

❖ 有耗介质中将复数形式的k、η 代入E、H表达式

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}_0 E_0 \mathrm{e}^{-k_\mathrm{i} z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j} k_\mathrm{r} z} \qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{y}_0 \frac{E_0}{|\eta|} e^{-k_\mathrm{i} z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j} k_\mathrm{r} z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$

❖ 瞬时值为

$$\boxed{E_x=E_0 \mathrm{e}^{-k_\mathrm{i} z} \cos(\omega t-k_\mathrm{r} z)} \qquad \boxed{H_\mathrm{y}=\frac{E_0}{|\eta|} \mathrm{e}^{-k_\mathrm{i} z} \cos(\omega t-k_\mathrm{r} z-\varphi)}$$

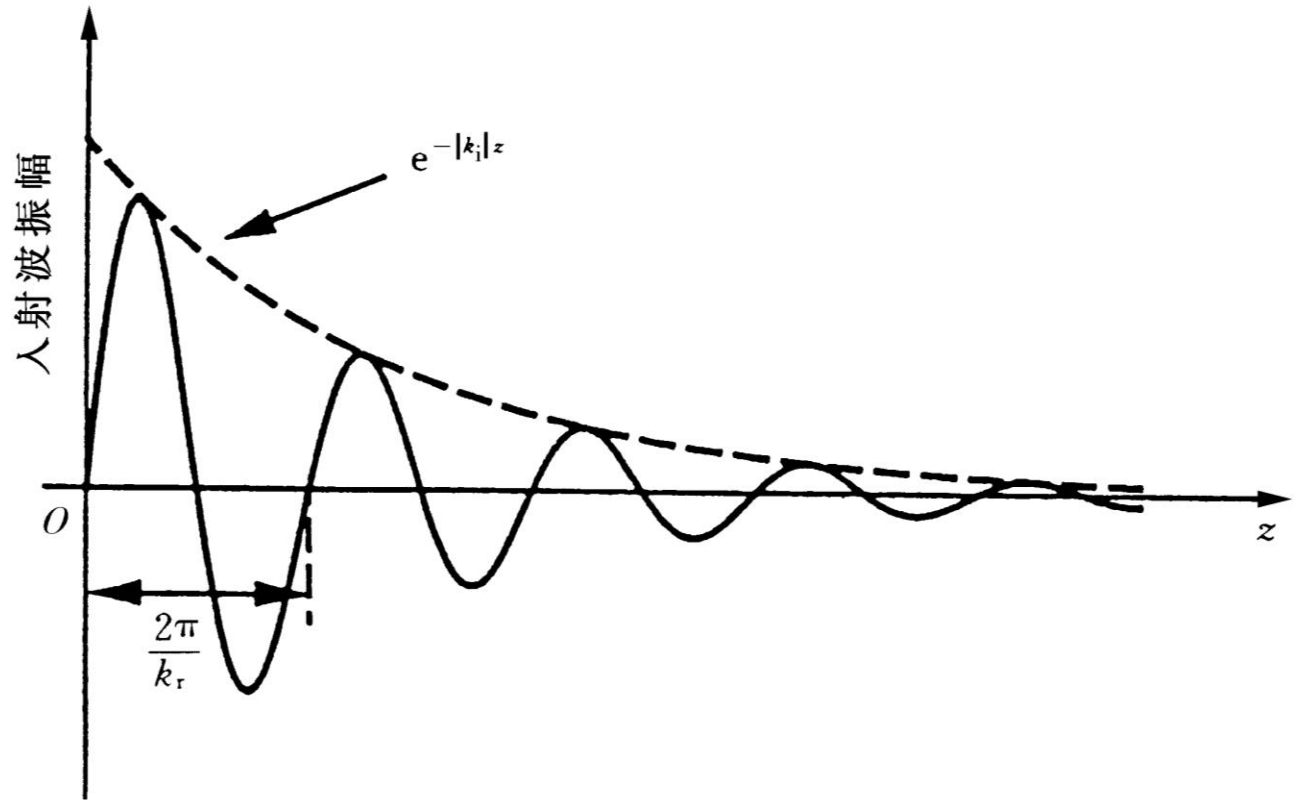
❖ z方向传播的**速度**为 $\boxed{v_\mathrm{p}=\omega / k_\mathrm{r}}$

❖ 随着波向+z方向传播，幅度则按指数规律衰减。当 $k_{iz}=k_i d_\mathrm{p}=1$ 时，场幅度衰减到 z=0 处的1/e。定义**穿透深度** $\boxed{d_\mathrm{p}=1/k_\mathrm{i}}$

❖ **当介电常数为复数时，虚部 ε使正 z 方向传播的波衰减，故虚部ε_i 表示介质的损耗。**

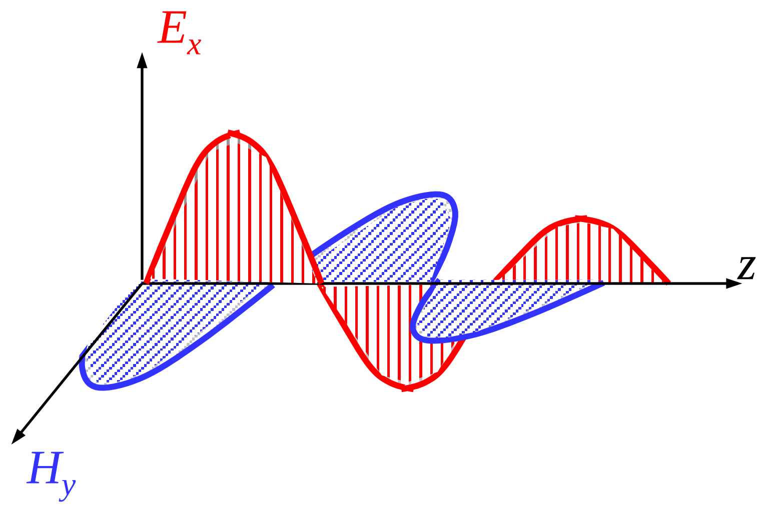
有耗介质中波的传播

波在传播方向幅度按指数衰减，即波传播的方向与衰减的方向一致



坡印亭矢量与能量密度

$$
\begin{cases}
\mathbf{S}=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{E}\times\mathrm{H}^{*}\right)=\dfrac{\hat{e}_z}{2|\tilde{\eta}|}|\mathbf{E}_0|^2 e^{-2k_i|z|}e^{-j\varphi} \\
w_e=\dfrac{1}{4}\varepsilon|\mathbf{E}_0|^2 e^{-2\alpha|z|} \\
w_m=w_e\left[1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\geq w_e
\end{cases}
$$



❖导电介质中电场能量密度小于磁场能量密度

❖复能流密度的实部及虚部均不会为零，这就意味着平面波在导电媒质中传播时，既有单向流动的传播能量，又有来回流动的交换能量。

电导率很小的介质

❖电导率很小的介质，其$\sigma/\omega\varepsilon<<1$，$k$可近似为

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon(1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})}\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon}(1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon})\qquad 其中\begin{cases}k_{\mathrm{r}}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\\ k_{\mathrm{i}}=\dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\end{cases}$$

❖因此在电导率很小的介质中，波以传播常数 k_r 沿正 z 方向传播，其幅度不断衰减，衰减速率为k_i（N/m），每行进d_p距离，波衰减到$1/e$，d_p **称为穿透深度**。

$$d_p=\frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

电导率很大的的介质

❖电导率很大的介质叫良导体， σ/ωε>>1，此时k近似为

$$k \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}[1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}]^{1/2}=\sqrt{\omega\mu(\frac{\sigma}{2})}(1-\mathrm{j})$$

k的实部与虚部相等

❖因此穿透深度为

$$d_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\delta$$

❖ δ 表示 d_p 很小很小，习惯上称为**趋肤深度**。这就是说对于良导体电磁场主要集中在表面趋肤深度 δ 厚度的薄层内，这种效应称为**趋肤效应**

完纯导体

❖对于完纯导体，$\sigma\to\infty$，趋肤深度

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}\to 0$$

❖导体内没有电磁场

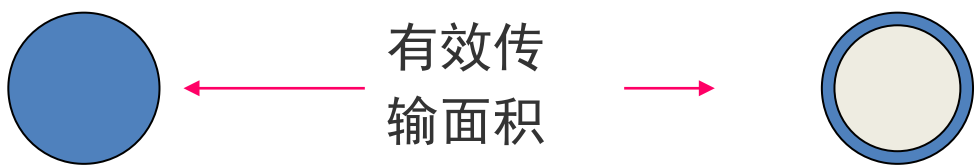
❖此时欧姆定律 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$

❖因为$\sigma\to\infty$，欲保证表面电流有限，$E\to 0$。

❖对于Au, Ag, Cu, Al等良导体，可被视为完纯导体，例如Cu的电导率$\sigma=5.8\times10^{7}$S/m。某些金属在极低温度下呈超导特性，称为超导体，超导铅在4.2K对于直流其电导率σ大于2.7×10^{20}S/m。

完纯导体

由于导体的趋肤效应，导体中高频电流集中于表 面，内部的电流则随深度的增加而迅速减小。尽管导体的截面很大，但真正用于电流传输的有效面积则很小。导体的高频电阻必然大于低频或直流电阻。



【例】计算频率100Hz,1MHz,10GHz的电磁波在Cu中的穿透深度。

解：金属铜的电导率σ =5.8×107/欧 米

$$\delta_1=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{1}{2\pi\times100\times4\pi\times10^{-7}\times5.8\times10^{7}}}=6.6(\mathrm{mm})$$

$$\delta_2=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{1}{2\pi\times100\times10^{6}\times4\pi\times10^{-7}\times5.8\times10^{7}}}=66(\mu\mathrm{m})$$

$$\delta_3=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{1}{2\pi\times100\times10^{10}\times4\pi\times10^{-7}\times5.8\times10^{7}}}=6600(\mathrm{A})$$

潜艇间的通信

- 由于电磁波在海水中传播衰减很快，这给潜艇间通信带来了困难。海水的相对介电常数差不多为 81，平均电导率为 4 S/m，可得衰减常数 k_i 为

$$k_{\mathrm{i}} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}[1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2]^{1/4}\sin[\frac{1}{2}\arctan^{-1}(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})]$$

- 随着频率增加，损耗不断增加，在很高的频率，

$$k_{\mathrm{i}} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = 83.8\mathrm{N/m} = 728\mathrm{dB/m}$$

- 这个衰减系数非常大，波每传播4 mm距离，功率就衰减一半。
- 为使损耗减小，工作频率必须降低，但是，即使 f=1kHz，衰减还是较大

$$k_{\mathrm{i}} = 0.126\mathrm{N/m} = 1.1\mathrm{dB/m}$$ (1kHz时)

- 因此，在1kHz频率，电磁波在海水中传播100m，其衰减达到110dB。如应用更低的频率，可传播的信号速率就很小。

电磁波穿透冰层的深度

❖冰的电导率很小，$\sigma \approx 10^{-6}$S/m，$\varepsilon \approx 3.2\varepsilon_0$

❖损耗正切$=10^{-6}/[2\pi f \times 3.2 \times 8.85 \times 10^{-12}]=5.6 \times 10^3/f$,

❖当频率在兆赫范围，损耗正切是很小的。其穿透深度$d_p \approx 9.5$km，这就是说在兆赫频率范围，电磁波用于探测冰层厚度是很好的。美国阿波罗登月飞行也利用兆赫范围频率电磁波，因在该频率范围月球表面电导率也很低，电磁波有较大的穿透深度。

❖对于更高的频率，由于冰层中含有气泡，气泡中空气对高频电磁波产生散射，上面简单的模型对于更高频率的电磁波不再适用。

微波炉

❖微波炉中的磁控管将50Hz的市电功率转换为微波功率（2450MHz），

❖用微波加热食物的原理是多数食物对于微波为有耗介质，微波穿透这些食物时，在食物内部的微波损耗就转变为热。特点是升温速度快，而且可从食物内部热起来。

❖牛排的损耗正切很大，所以牛排可用微波烹饪。

❖Polystyrene的介电常数接近自由空间介电常数，损耗很小，对微波可看作透明。所以这种材料可做加热食物的容器。

❖牛排的介电常数近似为$\varepsilon=40(1-j0.3)\varepsilon_0$，在$f$=3GHz时，其复数波数$k$为

$$k = 402 - j59$$

穿透深度$d_p=1/k_i=1.7$cm，所以在接近牛排表面0.85cm的范围内，微波功率损耗63%，尚有37%功率可用于加热离表面0.85cm以内的牛排。

色散

❖ 色散定义：**电磁波在介质中传播速度与频率的关系称为色散。**

❖ **对理想介质**：$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

❖ k 与 ω 成正比，相速 v_p 与频率 ω 无关，所以理想介质是非色散介质。

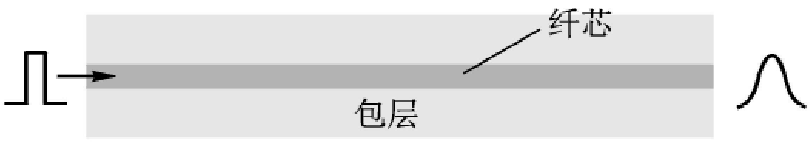
❖ 如果 k 与 ω 不成线性关系，相速 v_p 与ω有关，这种介质就称为色散介质。

❖ **对有耗介质**：$k = \omega\sqrt{\mu\tilde{\varepsilon}} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1 - \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}$

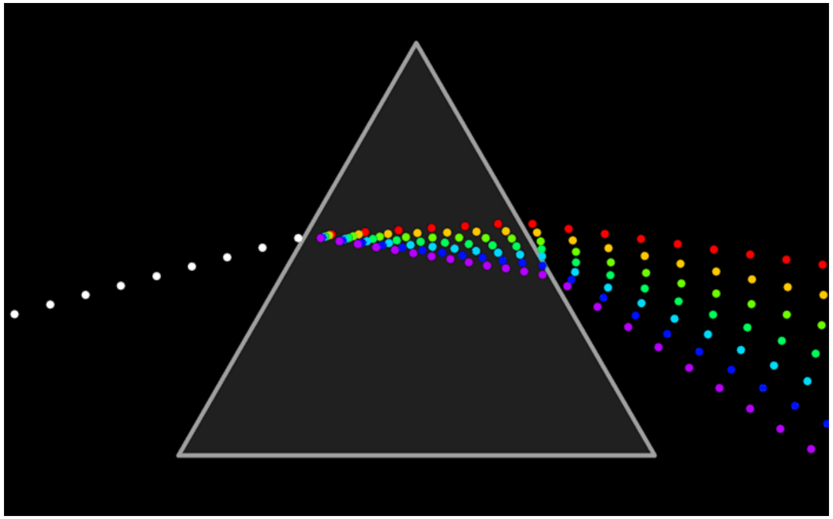
❖ k 是 ω 的复杂函数， v_p 与 ω 有关，所以有耗介质一定是色散的。反过来色散介质一定有损耗。

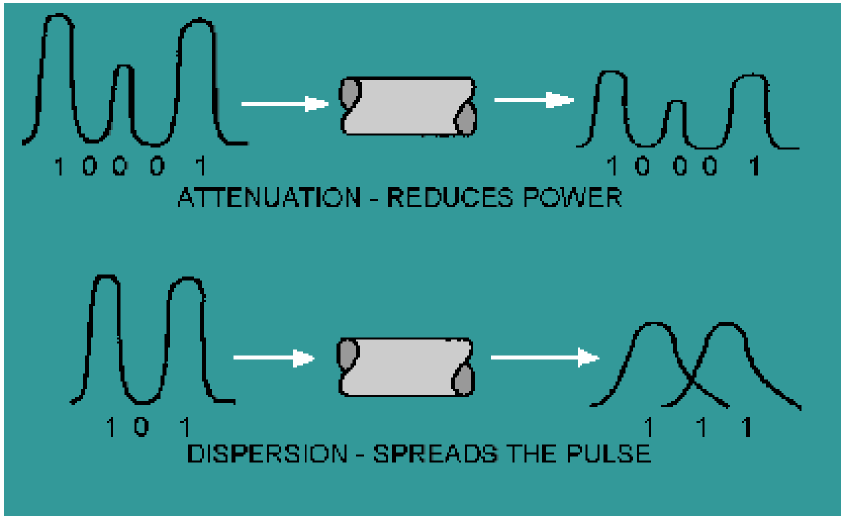
❖ 引起色散的原因是多方面的，介质色散只是其一。

❖ 色散引起波导传输信号的畸变。



色散




1 0 0 0 1
1 0 0 0 1
ATTENUATION - REDUCES POWER
1 0 1
1 1 1
DISPERSION - SPREADS THE PULSE

群速

❖ $E(z,t)=E_0\cos(\omega t-kz)$ 称为单色波。加上信号后就不再是单色波。

❖ 设传播的信号只含两个频率分量，一个比载波 ω_c 略高，另一个比 ω_c 略低，其瞬时表达式为 $E(t)=E_0\cos(\omega_c-\mathrm{d}\omega)t+E_0\cos(\omega_c+\mathrm{d}\omega)t$

❖ 此信号沿波导传播z 距离后，两个波的合成为

$$E(z,t)=E_0\cos[(\omega_c-\mathrm{d}\omega)t-(k_{z_c}-\mathrm{d}k_z)z]+E_0\cos[(\omega_c+\mathrm{d}\omega)t-(k_{z_c}+\mathrm{d}k_z)z]$$

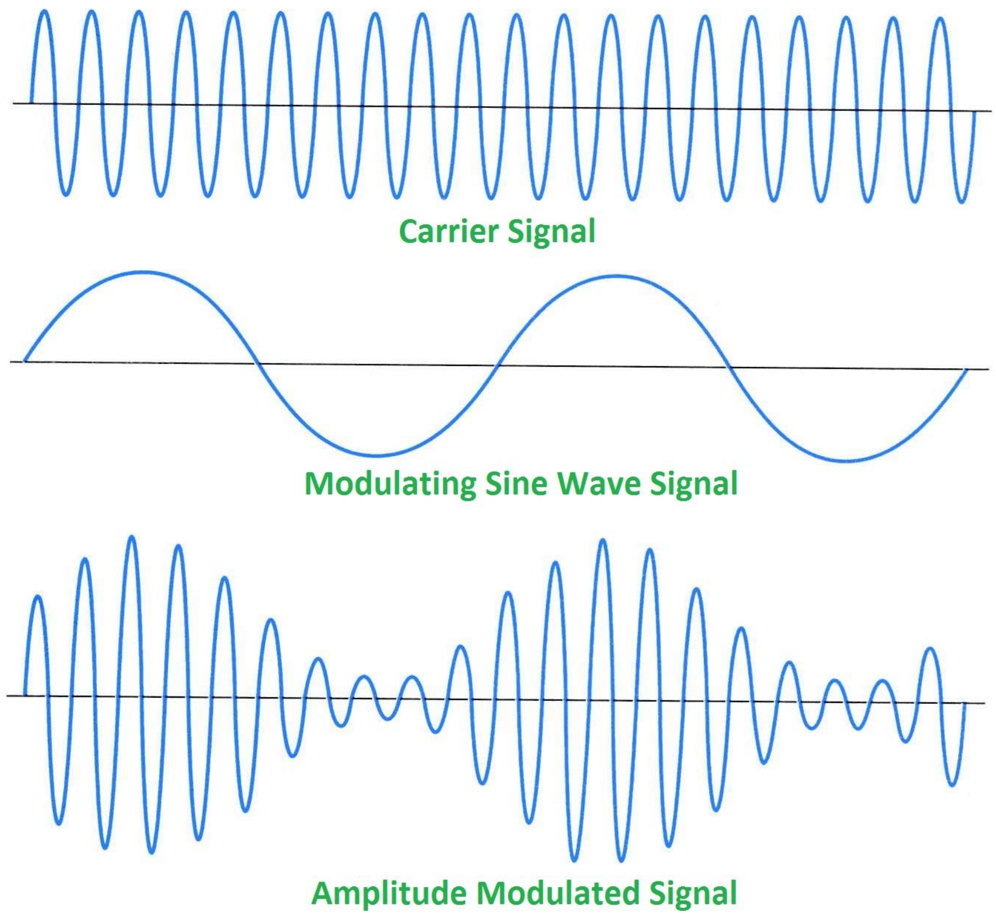
$$E(z,t)=2E_0\cos[(\mathrm{d}\omega)t-(\mathrm{d}k_z)z]\cos(\omega_c t-k_{z_c}z)$$

❖ 可看成是一载波 $\cos(\omega_c t-k_{z_c}z)$ 其振幅被低频波 $\cos[(\mathrm{d}\omega)t-(\mathrm{d}k_z)z]$ 调制。

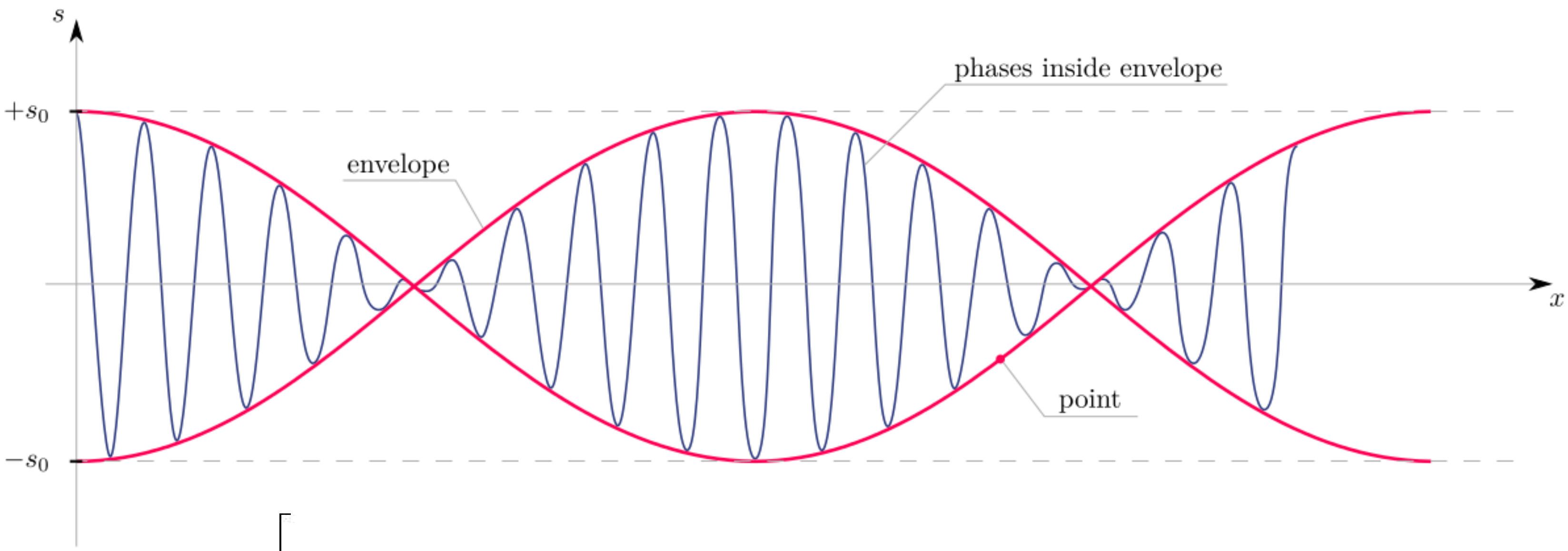
❖ 振幅包络的传播速度为 $v_g=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k_z$

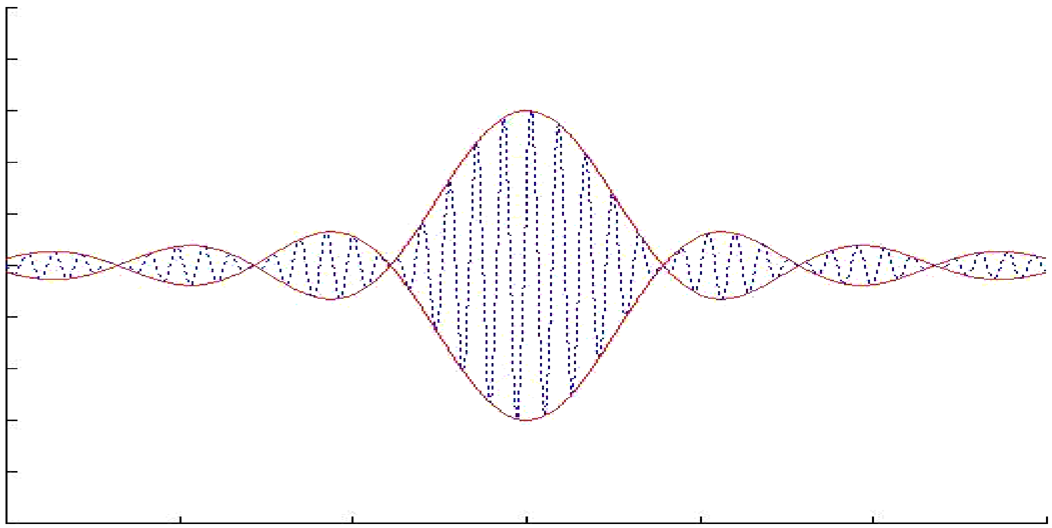
❖ 如果信号中包含更多的频率分量，那么在一个不大的频率范围内，整个信号包络可近似为以 v_g 速度在传播，称 v_g 为群速。

合成波的振幅被Δω的波所调制

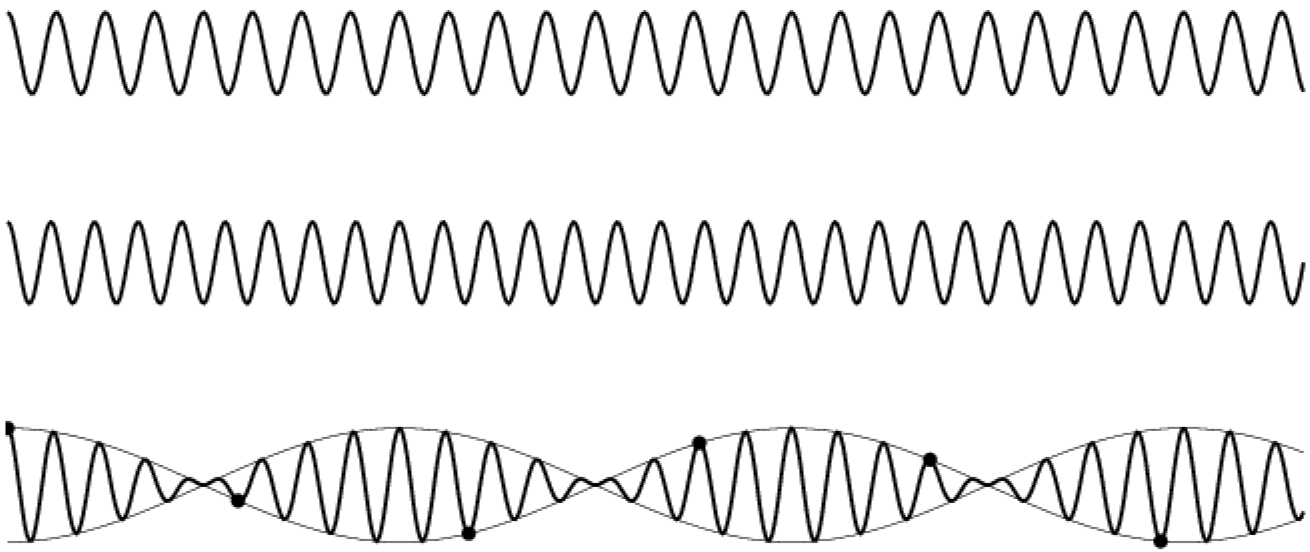


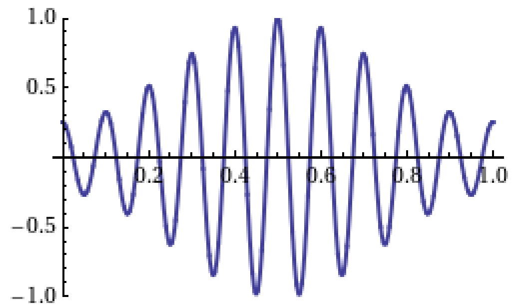
Group Velocity and Phase Velocity



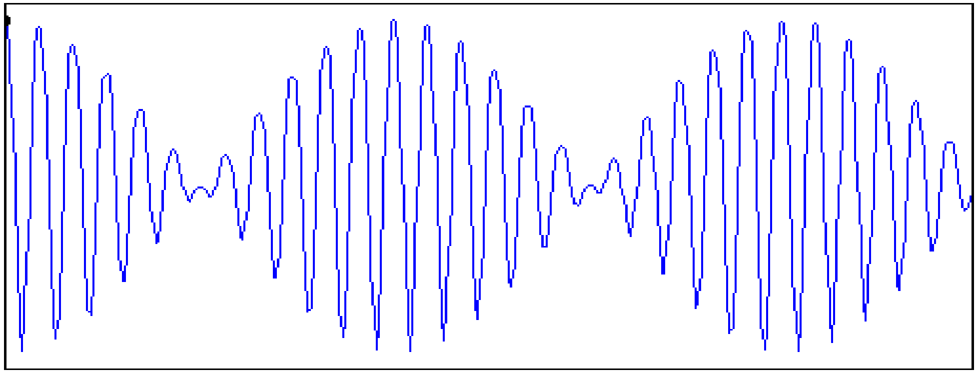


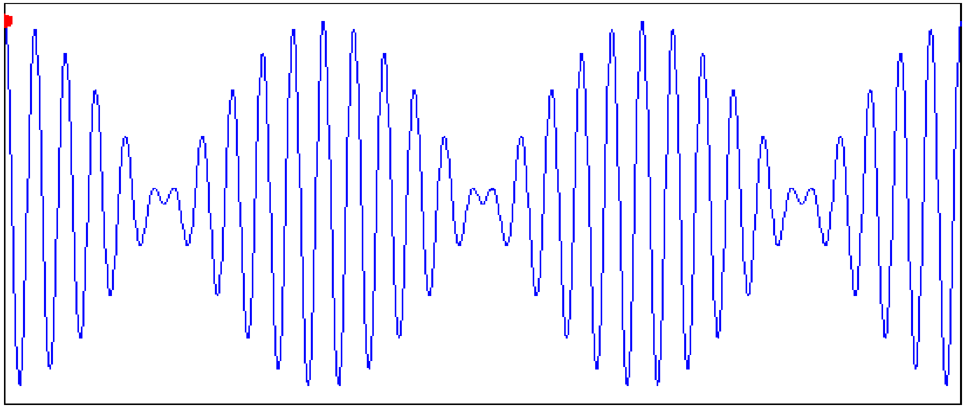
Group Velocity and Phase Velocity





Group Velocity and Phase Velocity

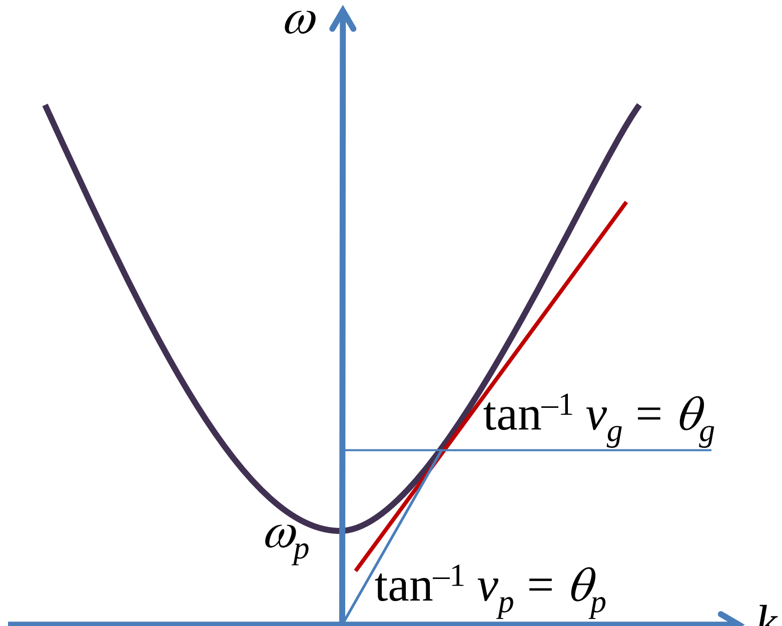




色散特性曲线：在 ω—k 平面上表示 $k(\omega)$ 为一条曲线

❖ 与原点连线斜率 $\tan(\theta_p)$ 表示该点相速

$$v_p = \omega / k_z$$



等离子体色散曲线

❖ 切线斜率 $\tan(\theta_g)$ 表示该点群速

$$v_g = d\omega / dk_z$$

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p}\left(\frac{dv_p}{d\omega}\right)}$$

❖ 如果 v_p 与频率无关，则群速等于相速，$v_g = v_p$

❖ 当$d\,v_p/d\,\omega \neq 0$时， $v_p \neq v_g$，又分二种情况：

– 当$\frac{dv_p}{d\omega} < 0$，$v_g < v_p$时称为**正常色散**；当$\frac{dv_p}{d\omega} > 0$，$v_g > v_p$时称为**反常色散**

复习

- 由麦克斯韦方程可得到 E 与 H 去耦的波方程 $\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$
- 在无源简单介质中，其解为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$　$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$
- 平面波，其特征是 E、H、k 三者**相互垂直构成右手螺旋关系**。
- **波的极化**可以用固定点的电场矢量末端点在与波矢k垂直的平面内的投影随时间运动的轨迹来描述。
- 引入**复介电常数**后，传播常数、波阻抗均为复数。
- k 的实部 k_r 表示波的传播，虚部表示传播方向波的衰减。
- 波传播速度与频率有关称为色散，色散关系可用 k-ω 表示。
- 相速 $v_{\mathrm{p}}=\dfrac{\omega}{k}$，群速 $v_{\mathrm{g}}=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$。

The End.

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn