James Clerk Maxwell
1831 – 1879

Lesson 6

Electromagnetic Fields and Waves

矢量分析与场论

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn

积分与微分形式的麦克斯韦方程

积分形式	微分形式
$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$
$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_V$
$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$
反映场在局部区域的平均性质	反映场在空间每一点的性质

- 当所考虑局部区域→0，积分形式麦氏方程就变为微分形式麦氏方程。
- 怎么从积分形式麦氏方程得出微分形式麦氏方程?
- ∇是什么?　　∇•是什么?　　∇×是什么?

标量、矢量与场

❖标量：只有大小，没有方向，这种物理量称为标量，如温度T、电荷密度ρ。

❖矢量：要用大小及方向同时表示的物理量称为矢量。如速度V、电场强度E。

❖场：如果在空间域Ω上，每一点都存在一确定的物理量A，我们就说：场域Ω上存在由场量A构成的场。

❖如果A是标量，我们就说场域Ω上存在一标量场；同理如果A是矢量，则说明场域Ω上存在一矢量场。

❖场是物质存在的一种形态，但有别于实物粒子。在空间同一点上同时允许存在多种场，或者一种场的多种模式。这与实物粒子的不可入性和排他性有天壤之别。

❖你能列举多少标量、矢量、场？

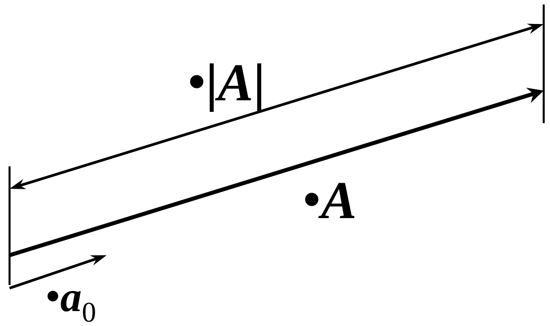
矢量A在空间 的表示及自由矢量

❖ 矢量A在空间可用一有向线段表示

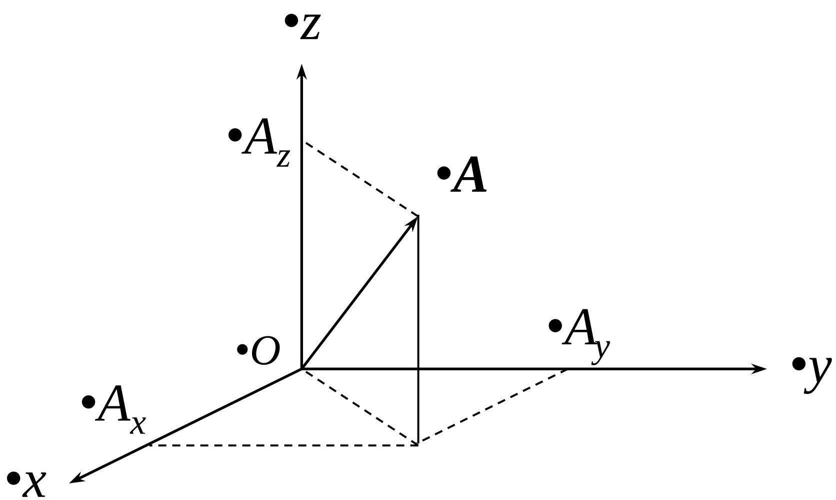
$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{a}_0$$

❖ 自由矢量：两矢量的模和方向都相同时就可以认为此两矢量是彼此相等的一类矢量 。

❖ 对于自由矢量常常把矢量的起点平移到坐标原点，以使分析简化。

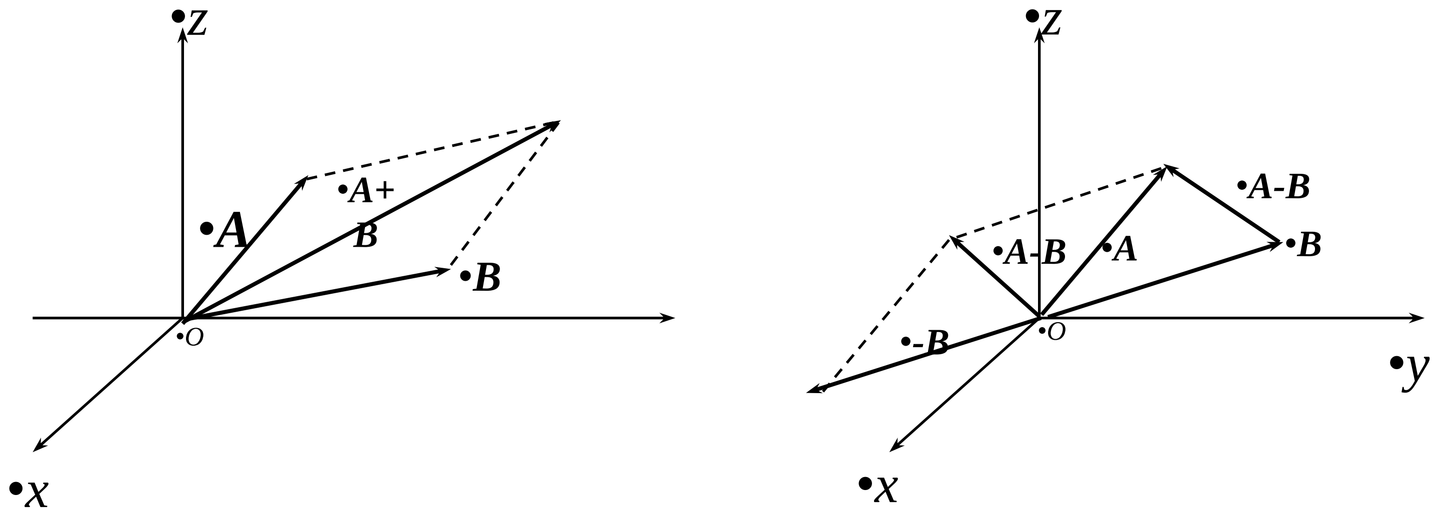


• 矢量A的有向线段表示



•矢量A在直角坐标系中表示

矢量的加法和减法运算



- 矢量A和B通过加法运算定义一个新的矢量C

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$$

- 矢量加法按平行四边形法则进行
- 矢量A和B的减法运算$A-B$定义为$A+(-B)$，即

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\left(-\boldsymbol{B}\right)$$

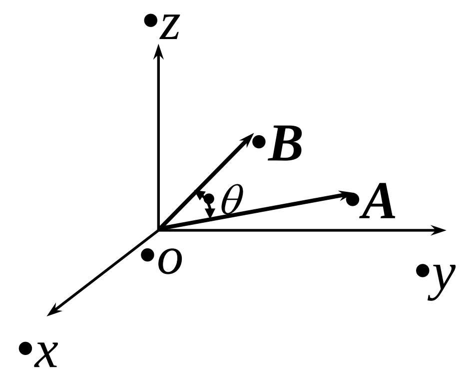
两矢量的标积与矢积

❖ 两矢量A、B的标积为一标量C，其定义是

$$C = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$$

θ是矢量A、B间夹角

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$$



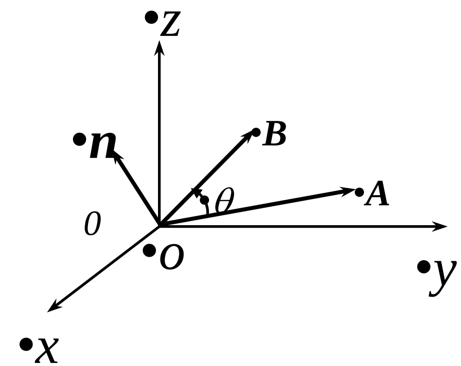
• (a) 两矢量的标积

❖ 两矢量A、B的矢积为一新的矢量D，其模为

$$|\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$$

而D的方向由单位矢量n_0表示，n_0与A、B构成右手螺旋关系。θ定义为从矢量A到B的夹角。

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$$



• (b) 两矢量的叉积

矢径*r*

❖ 场量的空间位置在确定的坐标系中用矢径*r*表示，如电荷密度ρ、电场强度*E*，可表示为

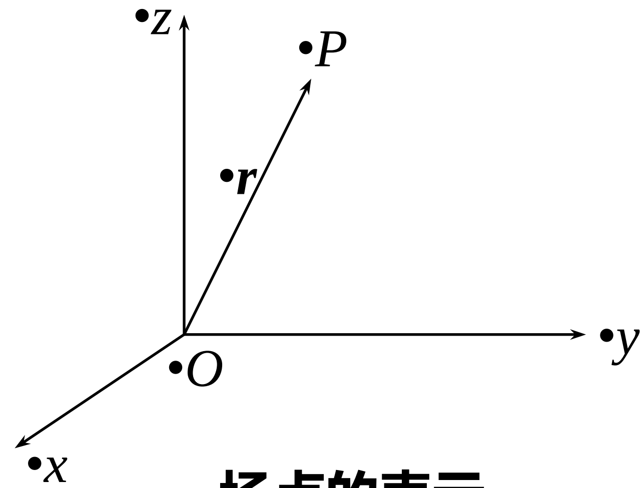
$$\rho(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

❖ 在直角坐标系中，表示场量空间位置的矢径*r*可表示为

$$\mathbf{r}=x\mathbf{x}_0+y\mathbf{y}_0+z\mathbf{z}_0$$

矢径*r*的模为

$$|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



•场点的表示

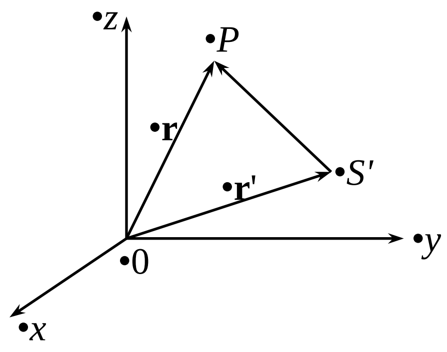
❖ x_0、y_0、z_0分别为坐标轴*x*、*y*、*z*增加方向的单位矢量,彼此正交,故具有性质

$$\mathbf{x}_0\cdot\mathbf{x}_0=\mathbf{y}_0\cdot\mathbf{y}_0=\mathbf{z}_0\cdot\mathbf{z}_0=1\qquad \mathbf{x}_0\cdot\mathbf{y}_0=\mathbf{y}_0\cdot\mathbf{z}_0=\mathbf{z}_0\cdot\mathbf{x}_0=0$$

$$\mathbf{x}_0\times\mathbf{y}_0=\mathbf{z}_0,\quad \mathbf{y}_0\times\mathbf{z}_0=\mathbf{x}_0,\quad \mathbf{z}_0\times\mathbf{x}_0=\mathbf{y}_0$$

距离矢量

当需要与所研究场点的空间坐标区分时，激发场的源（如电荷密度ρ与电流密度J）的空间位置常用上标带撇的矢径r‘表示。因此随时间、空间变化的场源ρ、J可表示为 $\rho(\mathbf{r}',t)$, $\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)$。从源点指向所研究场点的矢量用R表示。



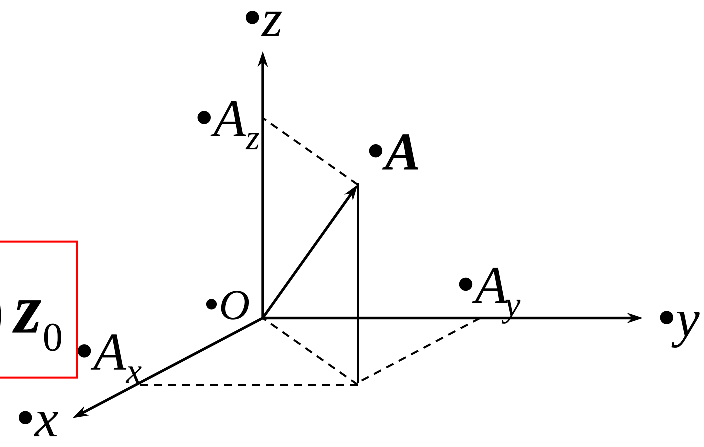
$$\boxed{\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'}$$

R叫作距离矢量，其模表示源所在点到所研究场点的距离。

场量的空间位置表示

❖ 在直角坐标系中，场矢量A可表示成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_x(\boldsymbol{r})\boldsymbol{x}_0 + A_y(\boldsymbol{r})\boldsymbol{y}_0 + A_z(\boldsymbol{r})\boldsymbol{z}_0$$



或

•矢量$\boldsymbol{A}$在直角坐标系中表示

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0 + A_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0 + A_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0$$

并简记为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{x}_0 + A_y\boldsymbol{y}_0 + A_z\boldsymbol{z}_0$$

式中，A_x、A_y、A_z为矢量A在x、y、z轴上的投影，它们都是空间位置的函数。

$A\cdot B$与$A\times B$计算

设矢量A和B可表示成
$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0$$
$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{x}_0+B_y\boldsymbol{y}_0+B_z\boldsymbol{z}_0$$

矢量A与B在直角坐标系中的标积、矢积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=\left(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(B_x\boldsymbol{x}_0+B_y\boldsymbol{y}_0+B_z\boldsymbol{z}_0\right)\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=\left(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0\right)\times\left(B_x\boldsymbol{x}_0+B_y\boldsymbol{y}_0+B_z\boldsymbol{z}_0\right)\\&=\boldsymbol{x}_0\left(A_yB_z-A_zB_y\right)+\boldsymbol{y}_0\left(A_zB_x-A_xB_z\right)+\boldsymbol{z}_0\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x}_0&\boldsymbol{y}_0&\boldsymbol{z}_0\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}\end{aligned}$$

算符∇

算符 $$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

- ∇是一个矢量。
- ∇与一般的矢量不同，它有微分运算功能。
- 梯度：∇作用于一标量场$\Phi(x, y, z)$可得到一个矢量

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

算符∇

❖ 散度：∇作用于一矢量场$A(x, y, z)$，如果是点乘运算得到一标量场

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 \right) \cdot \left(A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0 \right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

❖ 旋度：∇作用于一矢量场，如果是叉积运算，得到一个新的矢量场

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)\boldsymbol{x}_0 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)\boldsymbol{y}_0 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\boldsymbol{z}_0$$

梯度、散度、旋度

❖ 梯度： $\nabla\Phi$是一矢量 $$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

– $\nabla\Phi$ 的方向就是等位面的法线方向，而等位面的法线方向是场变化最陡的方向。所以梯度 $\nabla\Phi$ 的方向就是 Φ 变化最陡的方向。

– $\nabla\Phi$ 的大小为最大变化率方向的变化率(即最大变化率)。

❖ 散度：通量的体密度

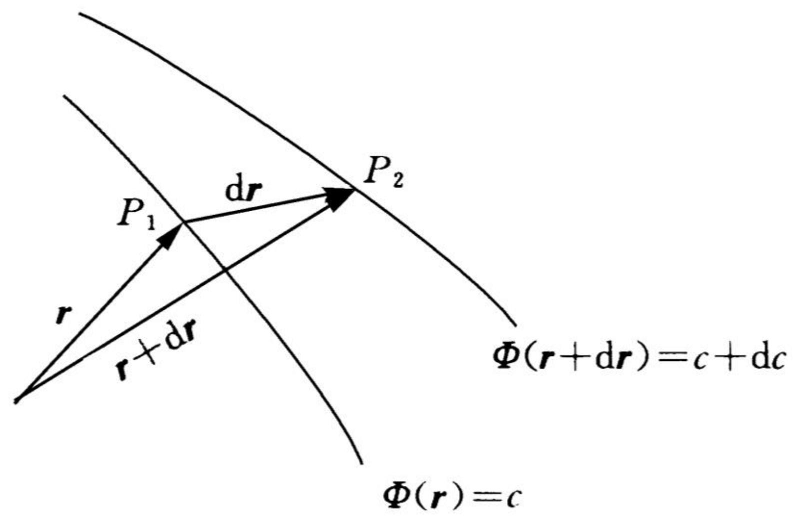
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

❖ 旋度：$\nabla\times A$ 是一个矢量，其大小为最大环量面密度，方向为最大环量面密度时面积元法线 n 的方向

$$\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{n}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\mathrm{l}}{\Delta S}$$

等值面、方向导数的定义

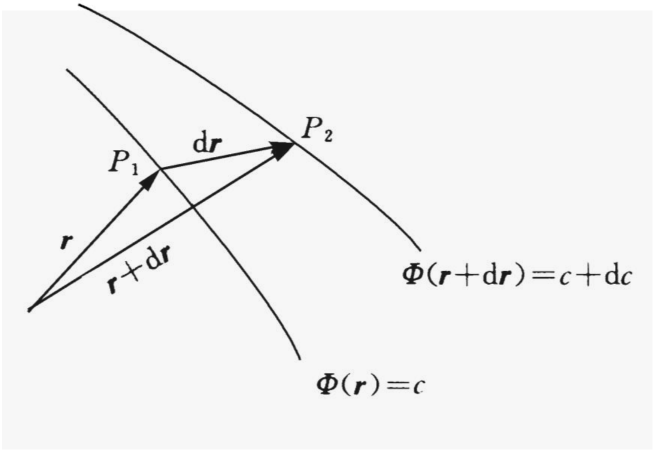
- 等值面：标量场Φ中数值相同的点构成的曲面
- 方向导数：场在指定方向变化率称为场在该方向的方向导数 $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r$
- 当dr→0时的极限就是dr方向的方向导数。



梯度grad $\Phi = \nabla \Phi$

设 $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{x}_0 + dy\boldsymbol{y}_0 + dz\boldsymbol{z}_0$ 当$|d\boldsymbol{r}|$很小时

$$\mathrm{d}\Phi = \Phi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{dr}) - \Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$



按照算符∇的定义

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 \right)\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

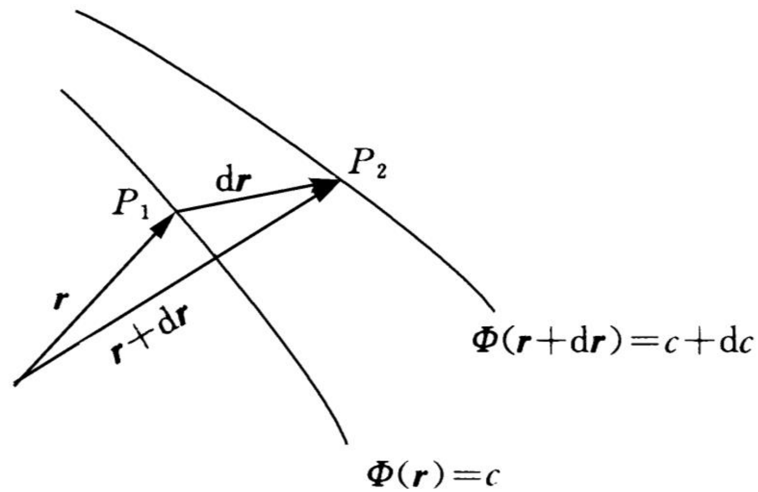
$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = \Phi(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) - \Phi(\boldsymbol{r}) = \nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}$$

因为

$$\nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 \right) \cdot \left(\mathrm{d}x\boldsymbol{x}_0 + \mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0 + \mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0 \right)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$



- ❖ $\nabla\Phi$是一个矢量。
- ❖ $\nabla\Phi$的方向即等位面的法线方向

因为，如果dr与等位面$\Phi(r)=c$相切

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi=\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0}$$

所以$\nabla\Phi$的方向就是等位面的法线方向，而等位面的法线方向是场变化最陡的方向。所以梯度$\nabla\Phi$的方向就是Φ变化最陡的方向。

- ❖ $\nabla\Phi$的大小为最大变化率方向的变化率(即最大变化率)。

设$\nabla\Phi$与dr的夹角为θ，则 $\boxed{\mathrm{d}\Phi=|\nabla\Phi||\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\theta}$

当dr与等位面法线重合时，

$\theta=0$，dΦ 最大，此时 $|\nabla\Phi|=\left|\frac{d\Phi}{dr}\right|$ r在等位面法线方向

梯度$\nabla\Phi$充分描述了标量场Φ在空间变化的特征

❖标量场空间任一点（x, y, z）沿任一方向的变化率（即方向导数）是不一样的。

❖最大变化率（即最大方向导数）的方向就是梯度$\nabla\Phi$的方向，最大变化率（即最大方向导数）就是梯度$\nabla\Phi$的大小。

❖梯度$\nabla\Phi$在任一方向l_0 的投影（$\nabla\Phi\cdot l_0$）就是该方向的变化率（即该方向的方向导数）。

❖梯度$\nabla\Phi$是描述标量场Φ随空间变化特性非常好的一个物理量。

❖经过梯度运算，可由一个标量场得到一个矢量场。

❖说明经过梯度运算由标量场得到矢量场的例子。

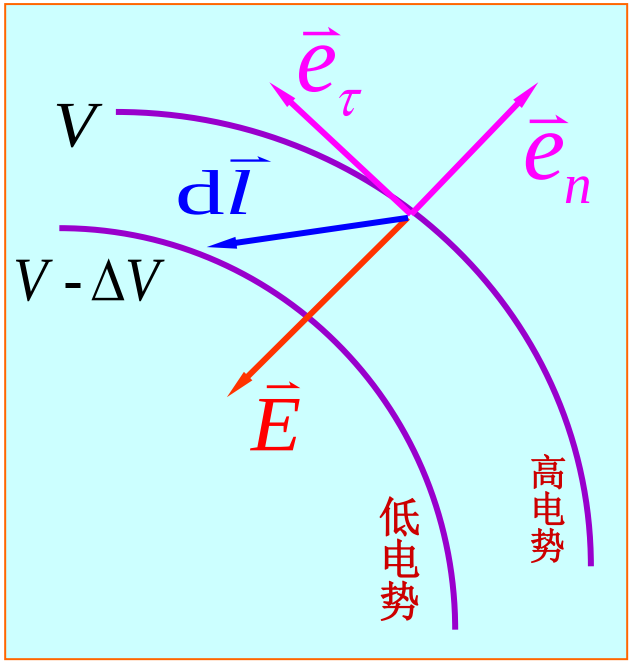
梯度的例子

❖ 电场强度方向与等势面垂直，由电势高的等势面指向电势低的等势面。

$$\vec{E} = -\nabla V$$ （**电势梯度**）

1）电场线与等势面处处正交.（等势面上移动电荷，电场力不做功.）

2）等势面密处电场强度大；等势面疏处电场强度小.



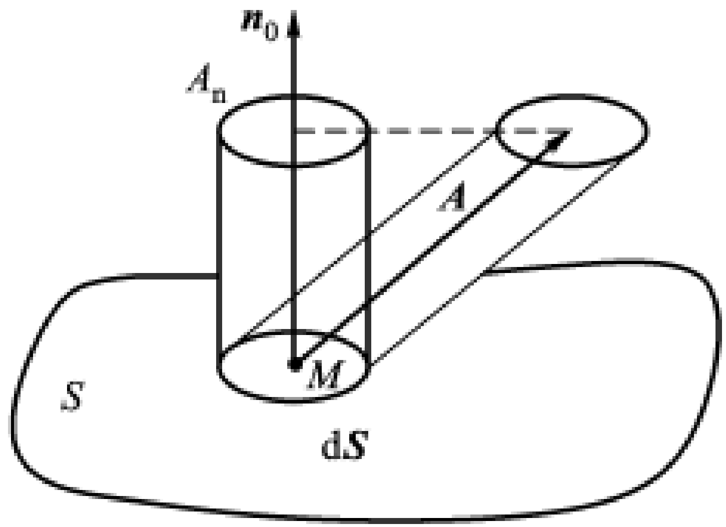
矢量场通量的定义

❖ 通量：矢量场A沿有向曲面S的曲面积分

$$\boxed{\psi=\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S_x\boldsymbol{x}_0+\mathrm{d}S_y\boldsymbol{y}_0+\mathrm{d}S_z\boldsymbol{z}_0$$

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{x}_0+A_y\mathbf{y}_0+A_z\mathbf{z}_0$$

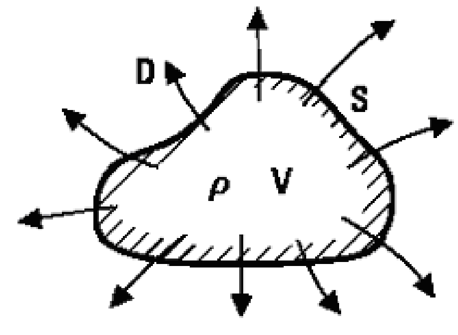


❖ 所以

$$\psi=\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\left(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_x\boldsymbol{x}_0+\mathrm{d}\boldsymbol{S}_y\boldsymbol{y}_0+\mathrm{d}\boldsymbol{S}_z\boldsymbol{z}_0\right)$$

$$=\int_S A_x\mathrm{d}\boldsymbol{S}_x+A_y\mathrm{d}\boldsymbol{S}_y+A_z\mathrm{d}\boldsymbol{S}_z$$

矢量场A通量的体密度—散度div A



- 如果S是一个闭曲面，并取其外侧为正侧，则

$\boxed{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$ 表示A从闭曲面流出的通量。

- 对于流体而言：
  - 当通量为正时，表示有净流量流出，说明存在着流体的源。
  - 当通量为负时，表示有净的流量流入，说明存在着流体的负源。
  - 当通量为零时，表示流入与流出的流量相等，说明体积内正负源的总和为零。
- 定义通量的**体密度**称为矢量场A的散度记为div A

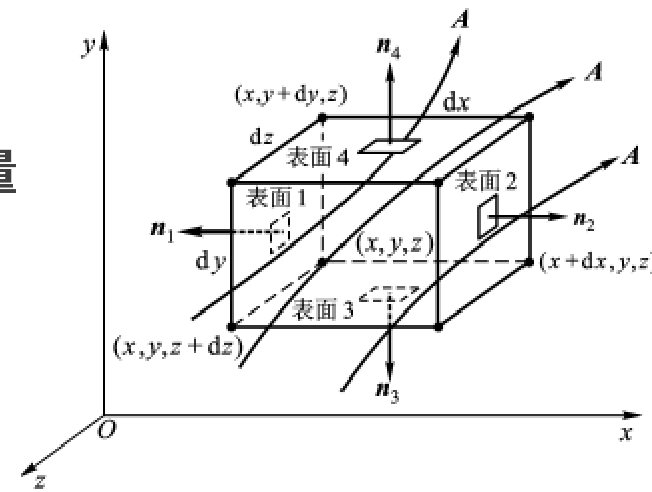
所以div A是一个标量。

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}}$$

散度

$$\boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}}$$

❖ 设ΔV为一立方体，边长为dx、dy、dz，通量计算可在立方体的六个侧面上进行。在$x = x_0$与x_0 + dx两个侧面，A_y、A_z分量对积分没有贡献，只要考虑A_x分量



$$\int_{\Delta S(x=x_0)+S(x=x_0+\mathrm{d}x)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\int_{\Delta S(x=x_0)}\left(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(-x_0\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int_{\Delta S(x=x_0+\mathrm{d}x)}\left(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(x_0\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\Delta S(x=x_0)}-A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int_{\Delta S(x=x_0+\mathrm{d}x)}A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left(A_x\big|_{x=x+dx}-A_x\big|_{x=x_0}\right)dydz$$

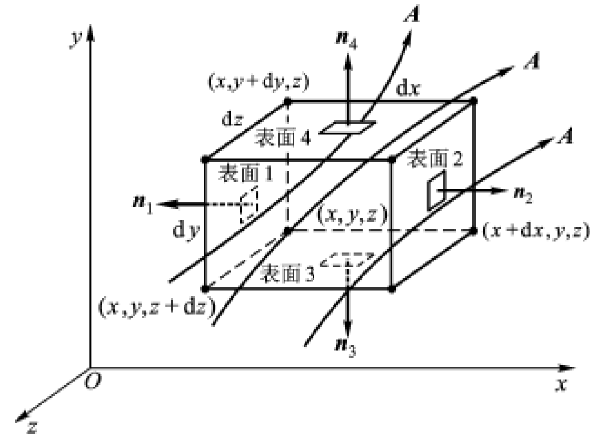
dy、dz很小，在dydz小面积内，Ax为常数

$$\boxed{\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{\Delta S(x=x_0)+S(x=x_0+\mathrm{d}x)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\left(A_x\big|_{x=x_0+\mathrm{d}x}-A_x\big|_{x=x_0}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{A_x\big|_{x=x_0+\mathrm{d}x}-A_x\big|_{x=x_0}}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial A_x}{\partial x}}$$

散度div A

❖ 在$y = y_0$与$y_0 + dy$两个侧面，A_x、A_z两个分量对积分没有贡献，只要考虑A_y分量

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta S(y=y_0)+S(y=y_0+dy)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_y}{\partial y}$$



❖ 在$z = z_0$与$z_0 + dz$两个侧面，A_x、A_y分量对积分没有贡献，只要考虑A_z分量

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta S(z=z_0)+S(z=z_0+dz)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

❖ 所以

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

❖ 因为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

所以

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$

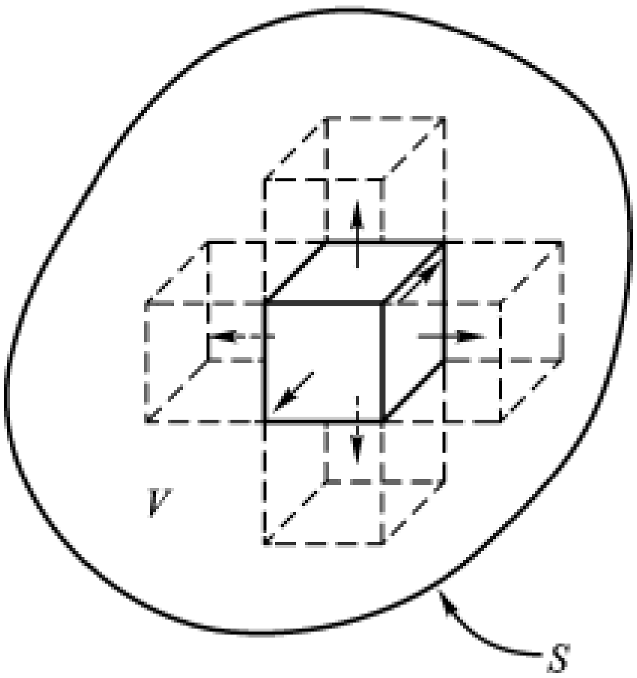
散度定理

对于由N个体积元ΔV 构成的体积V，

根据散度定义 $$\sum_N\left(\oint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)=\sum_N(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Delta V$$

当 $N\to\infty,\quad \Delta V\to \mathrm{d}V$ ，

上式求和变成积分。因为除了包围体积V的闭曲面S外，所有相邻体积元交界面上 $\oint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 相互抵消，这样我们就得到



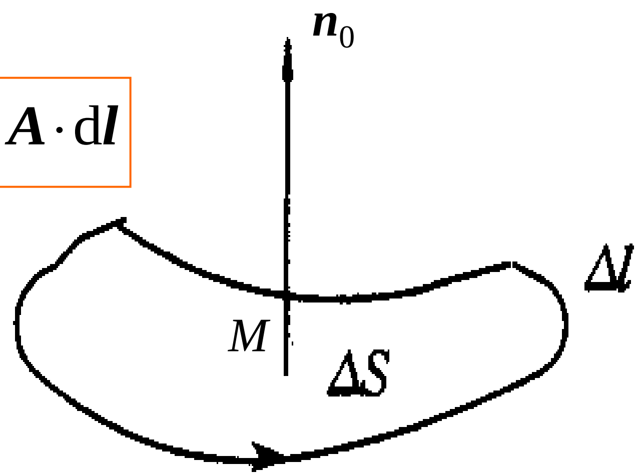
$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}V$$

这就是著名的散度定理。它表示矢量A沿闭曲面的面积分$\oint_S\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$（或矢量场$A$流出闭合曲面$S$的通量）等于矢量$A$的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 的体积分，积分域V为S包围的体积。

矢量场A沿有向闭合曲线l的环量

❖ 矢量场*A*在有向闭合曲线上的线积分 $\boxed{\Gamma=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$

定义为矢量场*A*沿有向闭合曲线*l*的环量



环量面密度

❖ 环量是标量。矢量场*A*中任一点*M*，在*M*点任一个方向*n*，过*M*点作一微小曲面Δ*S*，其法线方向与*n*一致。ΔS的周界为Δ*l*。*n*和Δ*l* 构成右手螺旋关系，计算积分，$\Gamma=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ ，这就是*n* 方向环量。

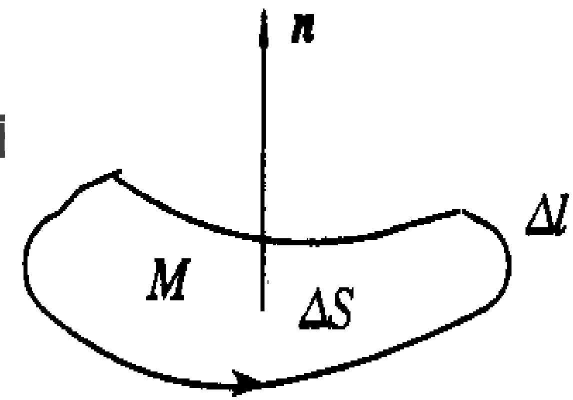
❖ 因为*n*可任取，故从*M*点可计算出无限多个环量。这 些无限多环量描述场在*M*点的涡旋性质。

❖ 在直角坐标系中

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma&=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint\left(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\boldsymbol{x}_0+\mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0+\mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0\right)\\&=\oint_l\left(A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z\right)\end{aligned}}$$

环量面密度

❖ 若矢量场A沿正Δl方向的环量$\Delta\Gamma$与面积ΔS在M点处保持以n为法线方向条件下，以任意方式缩向M点时，其极限



环量面密度

$$\lim_{\substack{\Delta S\to M\\(\text{或}\Delta S\to 0)}}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\lim_{\substack{\Delta S\to M\\(\text{或}\Delta S\to 0)}}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

存在，则称它为矢量场A在M处沿方向n的环量面密度。

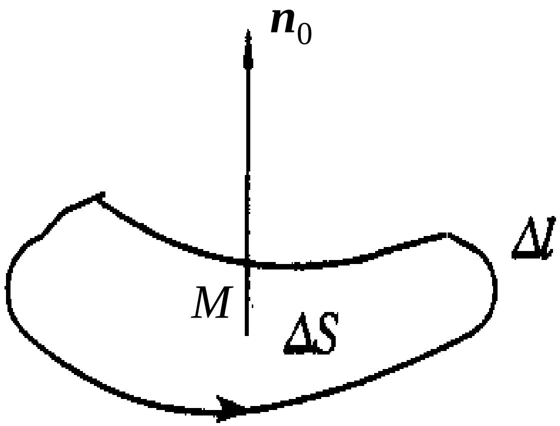
❖ 从环量面密度的定义可知，它是一个与方向有关的量。

❖ 空间给定点有无数个方向，每一个方向对应一个环量面密度。

旋度Curl *A*的定义

❖ 矢量场*A*的旋度Curl *A*定义为

$$\left(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{n}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}l}{\Delta S}$$



环量面密度

❖ 矢量场*A*的旋度Curl *A*在空间某一点给定方向的投影就是该方向的环量面密度。

❖ 当*n*的方向与Curl *A*的方向一致时，得到最大的环量面密度。

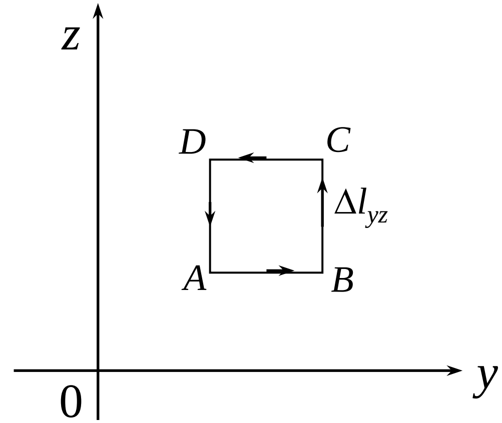
❖ 这个定义跟标量场中梯度和方向导数之间的关系类似，梯度在某一方向投影就是该方向的方向导数。

❖ 旋度Curl *A*是一个矢量，其大小为最大环量面密度，方向为最大环量面密度时面积元法线*n*的方向。

旋度Curl *A*的计算

Curl *A*在*x*方向投影为

$$\boxed{(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{x}_0=\lim_{\Delta S_x\to 0}\frac{\oint_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}}{\Delta S_x}}$$



矢量场旋度在一个面积元上的计算

$$\boldsymbol{A}_{yz}=A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}=\mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0+\mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0$$

$$\int_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}$$

$$=\int_{\overline{ABCD}}\left[A_y\big|_{\text{on }\overline{AB}}\mathrm{d}y+A_z\big|_{\text{on }\overline{BC}}\mathrm{d}z+\left(-A_y\big|_{\text{on }\overline{CD}}\mathrm{d}y\right)+\left(-A_z\big|_{\text{on }\overline{DA}}\mathrm{d}z\right)\right]$$

$$\underbrace{=}_{\text{矩形}ABCD\text{无穷小}}\left(A_y\big|_{\text{on }\overline{AB}}\right)\Delta y-\left(A_y\big|_{\text{on }\overline{CD}}\right)\Delta y+\left(A_z\big|_{\text{on }\overline{BC}}\right)\Delta z-\left(A_z\big|_{\text{on }\overline{DA}}\right)\Delta z$$

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{x}_0&=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\int_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}}{\Delta S_x}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left(\frac{\left(A_y\big|_{\text{on }\overline{AB}}\right)\Delta y-\left(A_y\big|_{\text{on }\overline{CD}}\right)\Delta y+\left(A_z\big|_{\text{on }\overline{BC}}\right)\Delta z-\left(A_z\big|_{\text{on }\overline{DA}}\right)\Delta z}{\Delta y\Delta z}\right)\\&=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left(\frac{A_z\big|_{\text{on }\overline{BC}}-A_z\big|_{\text{on }\overline{DA}}}{\Delta y}-\frac{A_y\big|_{\text{on }\overline{CD}}-A_y\big|_{\text{on }\overline{AB}}}{\Delta z}\right)=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\end{aligned}}$$

旋度Curl A的计算

同理，A的旋度在y方向投影为

$$(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A})\cdot \boldsymbol{y}_0 = \lim_{\Delta S_y \to 0} \frac{\int_{\Delta l_{xz}} \boldsymbol{A}_{xz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{xz}}{\Delta S_y} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

A的旋度在z方向投影为

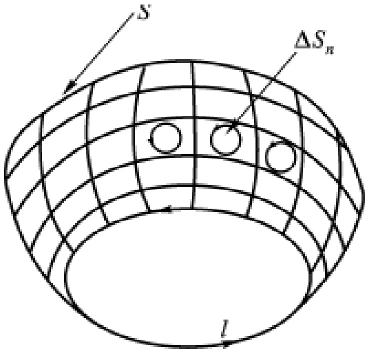
由（Curl$A$）矢量在x、y、z方向的三个分量，故Curl$A$可表示为

$$\mathrm{Curl}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{x}_0 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{y}_0 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{z}_0 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

斯托克斯定理

- 对于有限面积S，如果将S分成无限多小矩形面积元S_n之和；当ΔS_n足够小时，根据旋度定义，可得

$$\boxed{\sum_n (\nabla\times \boldsymbol{A})\cdot \boldsymbol{n}\Delta S_n = \sum_n \oint_{\Delta l_n} \boldsymbol{A}_n \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_n}$$



- 左边即（$\nabla\times \boldsymbol{A}$）穿过面积$S$总的通量

$$\sum_n (\nabla\times \boldsymbol{A})\cdot \boldsymbol{n}\Delta S_n = \int (\nabla\times \boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

- 右边n个线积分，除了包围面积S的周边C以外，所有相邻面积元交界线的线积分都抵消，故有 $\boxed{\sum_n \oint_{\Delta l_n} \boldsymbol{A}_n \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_n = \oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$

- 由此得到

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_S (\nabla\times \boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

著名的斯托克斯定理，它表示矢量A沿闭曲线C的线积分（或环量）等于A的旋度 $\nabla\times \boldsymbol{A}$ 穿过曲线C包围的面积S的面积分。

龙卷风

从积分形式到微分形式的麦克斯韦方程组

根据矢量场的斯托克斯定律 $$\boxed{\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

麦克斯韦方程中两个旋度方程可写为

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由上两式可得 $$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}} \qquad \boxed{\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}$$

矢量场的散度定律 $$\boxed{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}V}$$

麦氏方程中两个散度方程可写成，　　　由此可得

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}V = \int_V \rho_V \,\mathrm{d}V \qquad \boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_V}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V = 0 \qquad \boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0}$$

微分形式的麦克斯韦方程组

❖ 法拉第定律

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

高斯定律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_V$$

❖ 推广的安培定律

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

磁通连续性原理

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

❖ 积分形式的麦克斯韦方程组反映电磁运动在某一局部区域的平均性质。

❖ 微分形式的麦克斯韦方程反映场在空间每一点的性质，它是积分形式的麦克斯韦方程当积分域缩小到一个点的极限。

❖ 以后我们对电磁问题的分析一般都从微分形式的麦克斯韦方程出发。

从麦克斯韦方程组能看出什么?

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

- 两个旋度方程表示变化的磁场产生电场，变化的电场产生磁场。
- 两个散度方程，一个表示磁通的连续性，即磁场线既没有起始点也没有终点。这意味着空间不存在自由磁荷，或者说在人类研究所能达到的空间区域中至今还没有发现单独的磁荷存在。另一个表明电场是有源的。
- 时变场中电场的散度和旋度都不为零，所以电力线起始于正电荷而终止于负电荷。磁场的散度恒为零，而旋度不为零，所以磁场线是与电流交链的闭合曲线，并且磁场线与电场线两者还互相交链。在远离场源的无源区域中，电场和磁场的散度都为零，这时磁场线和电场线将自行闭合，相互交链，在空间形成电磁波。

时谐矢量的复矢量表示

设随时间作简谐变化的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z,t)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z,t)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z,t)$$

其x 分量$E_x(x, y, z, t)$表示为

$$E_x(x,y,z,t)=E_1(x,y,z)\cos(\omega t+\varphi_1)$$

这是一个时谐标量，与其对应的复数表示是

$$E_x(x,y,z)=E_1(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}$$

于是 $$\boxed{E_x(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_x(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]}$$

所以时谐标量 $E_x(x,y,z,t)$ 与复数 $E_x(x,y,z)$ 对应。

时谐矢量的复矢量表示

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z,t)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z,t)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z,t)$$

同样 $$E_y(x,y,z,t)=E_2(x,y,z)\cos(\omega t+\varphi_2)$$

可表示成 $$\boxed{E_y(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_y(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]}$$

式中 $$E_y(x,y,z)=E_2(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$$

同样 $$E_z(x,y,z,t)=E_3(x,y,z)\cos(\omega t+\varphi_3)$$

可表示成 $$\boxed{E_z(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_z(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]}$$

式中 $$E_z(x,y,z)=E_3(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_3}$$

时谐矢量的复矢量表示

$$\boldsymbol{E}\left(x,y,z,t\right)=\boldsymbol{x}_0E_x\left(x,y,z,t\right)+\boldsymbol{y}_0E_y\left(x,y,z,t\right)+\boldsymbol{z}_0E_z\left(x,y,z,t\right)$$

$$E_x(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_x(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$E_y(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_y(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$E_z(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_z(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left\{[\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}}$$

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z)}$$

称*E*(*x*,*y*,*z*)为复矢量。

复矢量是矢量，每一个分量是复数，它不是时间的函数。

两时谐矢量叉积的时间平均值

❖ 设复矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_r + j\boldsymbol{E}_i$， $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_r + j\boldsymbol{H}_i$，

与复矢量对应的时谐矢量为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$， $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \boldsymbol{E}_r\cos(\omega t) - \boldsymbol{E}_i\sin(\omega t)$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \boldsymbol{H}_r\cos(\omega t) - \boldsymbol{H}_i\sin(\omega t)$$

❖ 所以 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ 的时间平均值是

$$\boxed{\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{H}_r + \boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{H}_i\right)}$$

两时谐矢量叉积的时间平均值

$$\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)dt=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{H}_r+\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{H}_i)$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_r+j\boldsymbol{E}_i,\quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_r+j\boldsymbol{H}_i,$$

如果我们取复矢量 $E(r)$ 与 $H(r)$ 的共轭复矢量$\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$的叉积

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{H}_r+\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{H}_i+j(\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{H}_r-\boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{H}_i)}$$

因此 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ **的时间平均值又可表示为**

$$\boxed{\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\right]}$$

两时谐矢量叉积的时间平均值计算可简化为取实部运算。

时谐场量*E*、*D*、*B*、*H*、*J*与*ρ*的复矢量表示

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \quad \boldsymbol{D}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{D}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \quad \boldsymbol{H}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{H}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\boldsymbol{J}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{J}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \quad \rho_V(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\rho_V(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

复矢量

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,)=\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z)$$

不是时间t 的函数，它们是矢量，有三个分量，每个分量是复数。

根据复矢量的定义，对时谐矢量的运算与对应的复矢量乘以jω等效，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x,y,z,t)\leftrightarrow \mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)$$

复矢量形式的麦克斯韦方程

引入$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$的复矢量后，麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=-\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$

可表示为

$$\nabla\times\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=-\mathrm{Re}\left[\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

因为算符∇只对空间求导数，所以∇运算与取实部运算Re可调换次序，即

$$\mathrm{Re}\left[\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

由此得到

同理

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z)=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(x,y,z)=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}(x,y,z)+\boldsymbol{J}(x,y,z)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(x,y,z)=\rho_V(x,y,z)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x,y,z)=0$$

引入复矢量表示后，两时谐矢量叉积的时间平均值计算可简化为取实部运算

$$\left\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\right\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\right]$$

麦克斯韦方程

	微分形式	积分形式	时谐场的复矢量形式
法拉第定理	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint_C\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$
安培定理	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint_C\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$
高斯定理	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$	$\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V\rho_V\mathrm{d}V$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$
磁通连续性原理	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$

- **微分形式**的麦克斯韦方程与**积分形式**的麦克斯韦方程中有关场量等都是**时间坐标与空间坐标的函数；**
- **复矢量形式**的麦克斯韦方程中有关场量等**只是空间坐标的函数**，复矢量形式的场量乘上$e^{j\omega t}$取实部才是微分形式、积分形式麦克斯韦方程中的场量。

复习

❖ 要点

- 梯度、散度、旋度的物理意义
- 微分形式Maxwell方程
- 时谐矢量的复矢量表示及优点
- 复矢量形式麦克斯韦方程

❖ 复习:

- 3.3-3.6(p127-142)

The End.

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn