

## Lesson 17

# Electromagnetic Fields and Waves

光纤

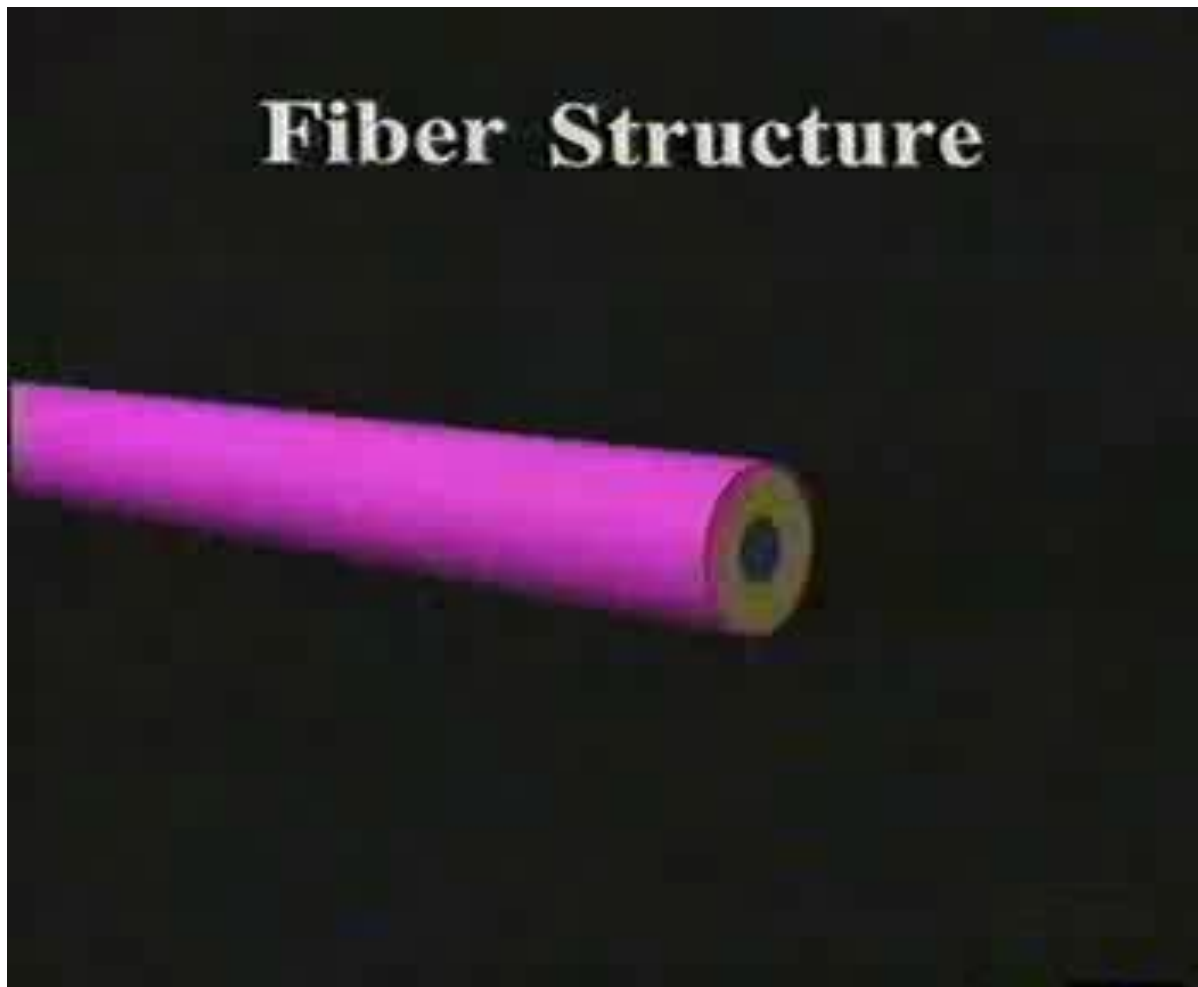
郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn

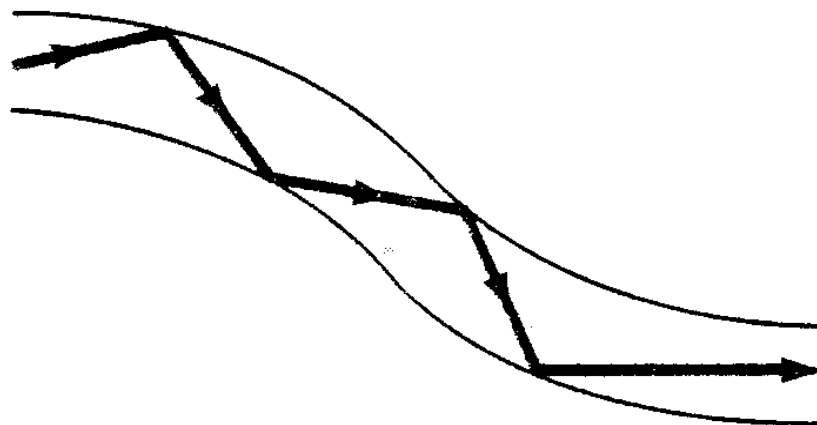


**James Clerk Maxwell**  
1831 – 1879

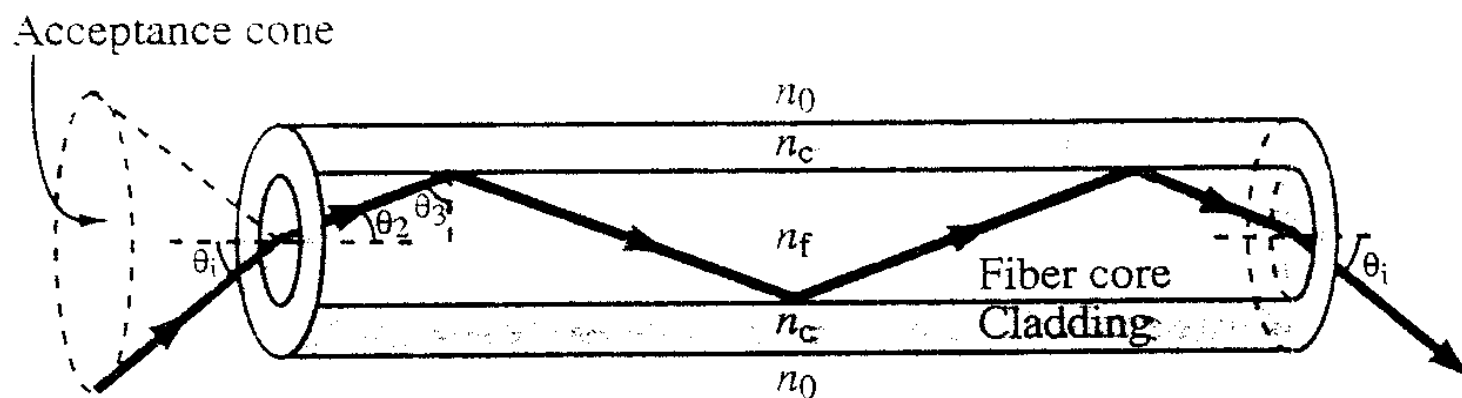
## 光纤的结构



## 光纤中光波传播的物理图景



(a) Optical fiber



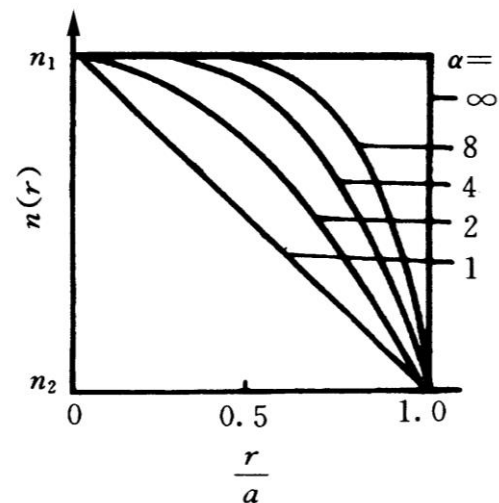
(b) Successive internal reflections

## 阶跃 (SI) 型和梯度 (GI) 型光纤

❖ 阶跃光纤中的折射率分布为  $n(\rho) = \begin{cases} n_1 & \rho \leq a \\ n_2 & \rho > a \end{cases}$

❖ 梯度型光纤中的折射率分布为

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{\rho}{a} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{2}} & \rho \leq a \\ n_1 (1 - 2\Delta)^{\frac{1}{2}} = n_2 & \rho > a \end{cases}$$



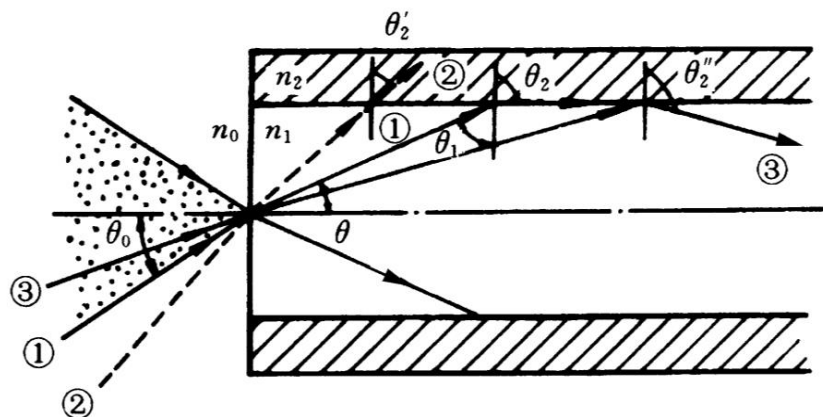
梯度光纤纤芯中的折射率分布

❖ 式中,  $a$  为纤芯半径,  $\alpha$  取值范围为 1 到  $\infty$ 。当  $\alpha \gg 10$  时, 折射率分布为阶跃型,  $\alpha = 1$  时为三角型, 梯度光纤中通常取  $\alpha \approx 2$ , 即按平方律分布。

❖ 定义相对折射率差  $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$

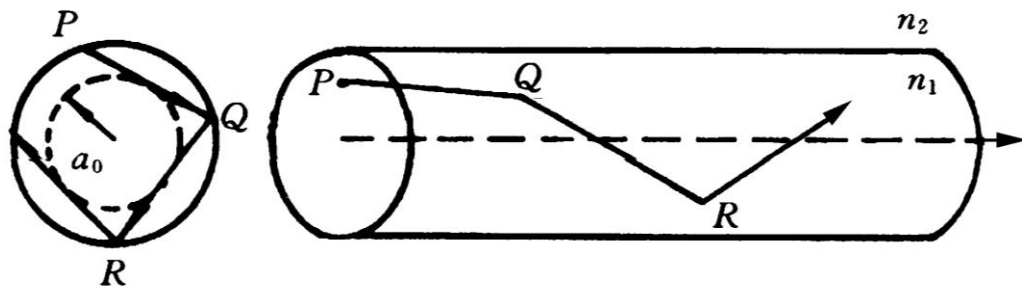
❖ 在石英光纤中,  $n_1 \approx 1.5$ ,  $\Delta \approx 0.01$ , 即包层折射率仅比纤芯略低一点。

## 子午光线和斜射光线

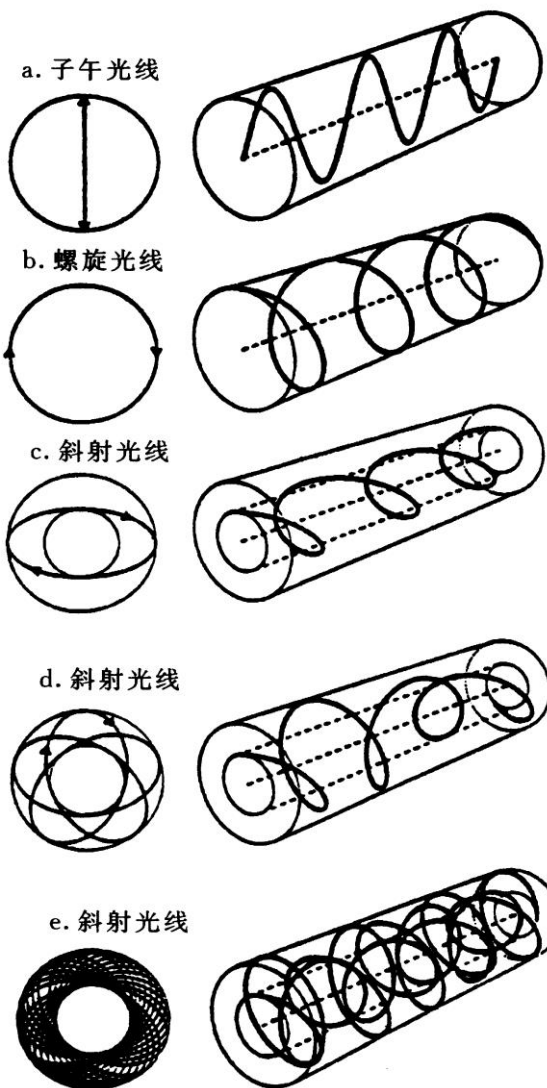


子午光线在阶跃光纤中的传输

❖ 子午光线是位于子午面（过光纤轴线的面）上的光线，而斜射光线是不经过光纤轴线传输的光线。



斜射光线在阶跃光纤中的传输

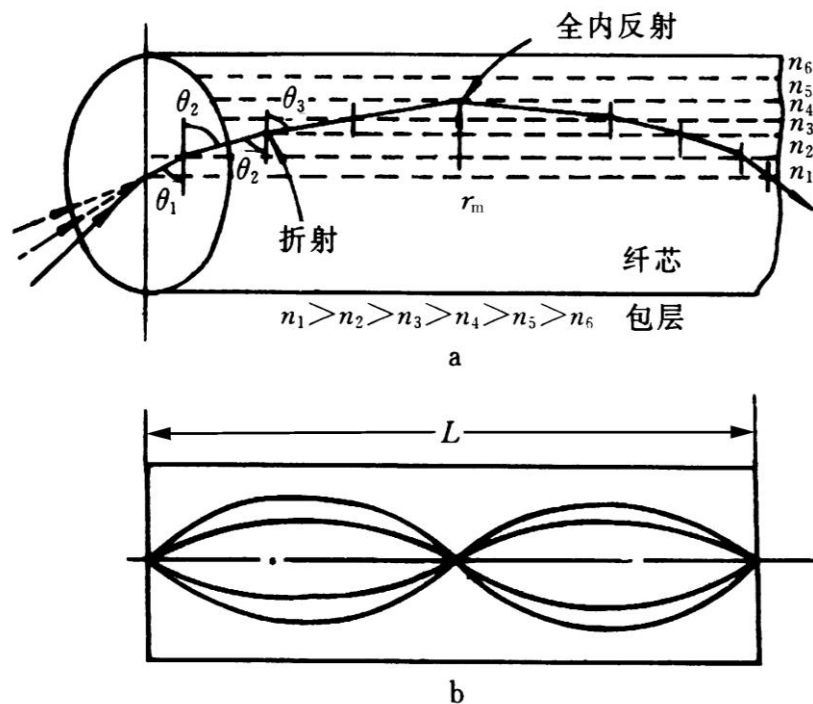


梯度光纤中的光线轨迹实例

## 梯度光纤中的光线轨迹和自聚焦

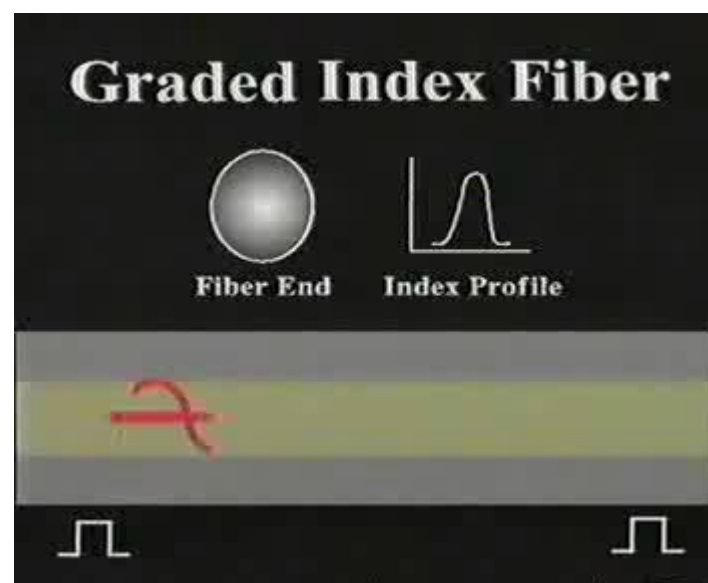
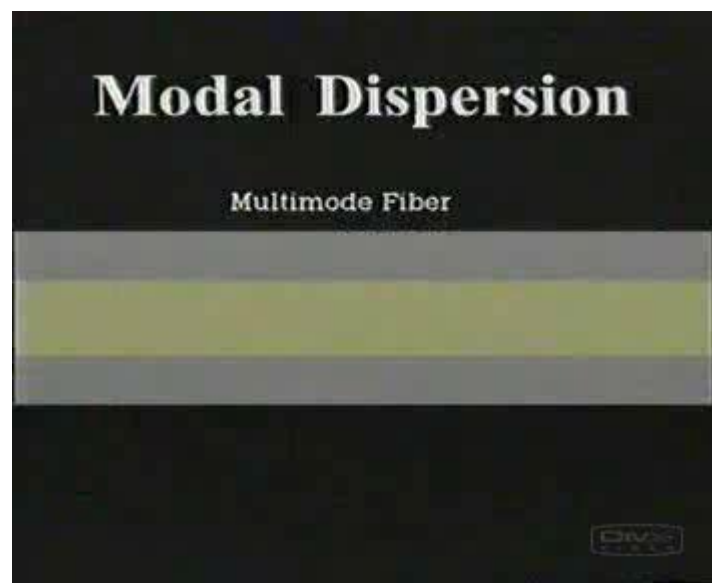
### ❖ 子午光线的传输特点

- ❖ 设纤芯由多层均匀的同轴层构成，每层的折射率自纤芯轴向外递减。光线由纤芯轴处入射，并向折射率递减的外层传输。

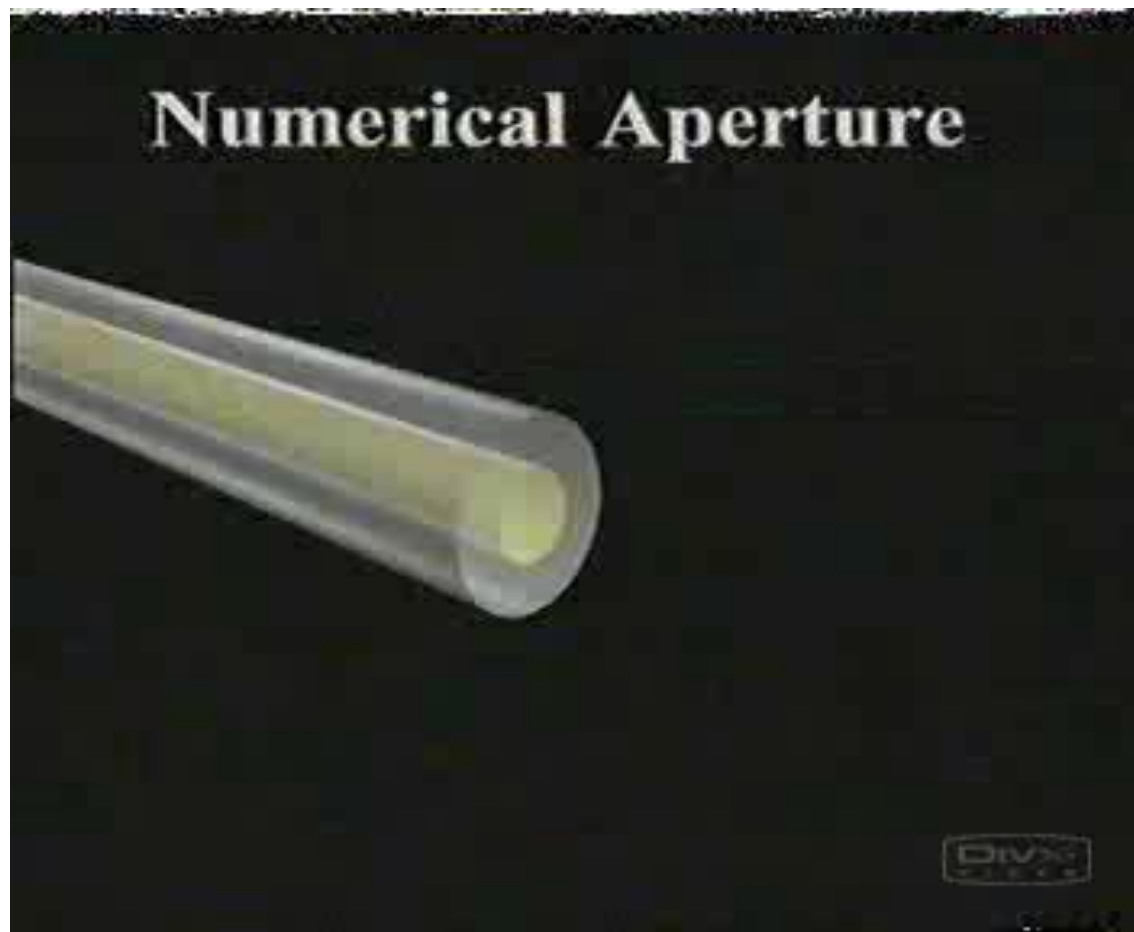


- ❖ 如果折射率分布合适，就有可能使不同角度入射的全部光线以同样的轴向速度在光纤中传输，同时到达光纤轴上的某点，即所有光线都有相同的空间周期 $L$ ，这种现象称为自聚焦。
- ❖ 可以预见，梯度光纤中的模间色散要比阶跃光纤小得多，从而有更高的传输带宽。

# 模间色散



## 数值孔径





**数值孔径**  $NA = \sin \theta_0 \approx n_1 \sqrt{2\Delta}$

❖ 定义  $\theta_c$  为芯包界面的全反射临界角，相应的入射角  $\theta_0$  为入射临界角。

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ$$

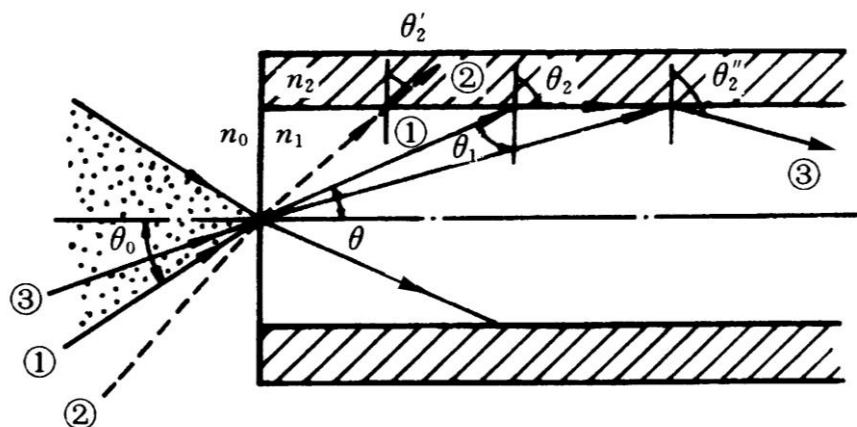
$$\sin \theta_c = n_2 / n_1$$

❖ 光线从空气（折射率  $n_0=1$ ）射入光纤端面，有三种典型情况。

❖ 光线到达芯包界面时恰好产生掠射

❖ 光线将射入包层

❖ 光线将在芯包界面产生全反射



子午光线在阶跃光纤中的传输

$$\theta_0 = \text{入射临界角 } \theta_0, \quad \theta_1 = \theta_c$$

$$\theta'_0 > \theta_0, \quad \theta'_1 < \theta_c$$

$$\theta''_0 < \theta_0, \quad \theta''_1 > \theta_c$$

**数值孔径**  $NA = \sin \theta_0 \approx n_1 \sqrt{2\Delta}$

❖ 入射临界角  $\theta_0$  是个很重要的参量,

❖ 它与光纤折射率的关系为

$$\sin \theta_0 = n_1 \sin(90^\circ - \theta_c) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx n_1 \sqrt{2\Delta}$$

❖ 数值孔径NA 定义为  $NA = \sin \theta_0 \approx n_1 \sqrt{2\Delta}$

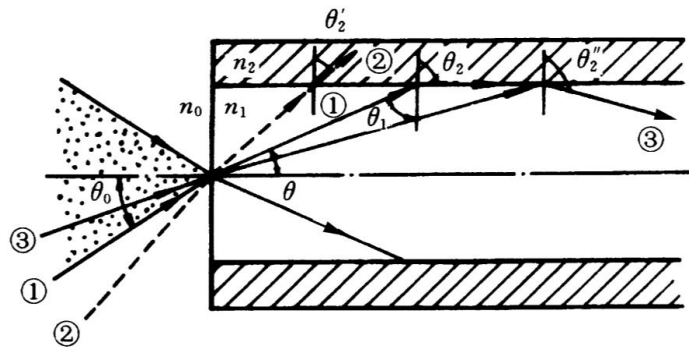
❖ NA决定于芯包折射率差 $\Delta$ , 与芯包直径无关,  $\Delta$ 越大, NA越大, 光纤聚光能力愈强。

❖ 但与降低损耗、增加带宽有矛盾。从降低损耗、增加带宽考虑, 希望 $\Delta$ 低一些。通常 $\Delta \approx 0.01$ , 则NA的值约为0.1~0.3。

❖ 梯度光纤的数值孔径可用局部数值孔径 $NA(\rho)$ 来描述

$$NA(\rho) = \sqrt{n^2(\rho) - n^2(a)} = n(\rho) \sqrt{2\Delta_\rho}$$

❖ 当 $\rho = 0$ 时  $NA(\rho)_{\max} = n(0)(\sqrt{2\Delta})$   $\Delta_\rho = [n(\rho) - n(a)] / n(\rho)$



子午光线在阶跃光纤中的传输

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

## 光纤特性的标量波动分析

❖ 分析模型——圆形介质光波导

❖ 标量波动分析的前提：**弱导近似**

$$n_1 \approx n_2 \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \approx 90^\circ$$

❖ 光纤中光线几乎与光纤轴平行。这种波非常接近于TEM模，假定横向场的偏振方向在传输过程中保持不变，可用一个标量来描述。

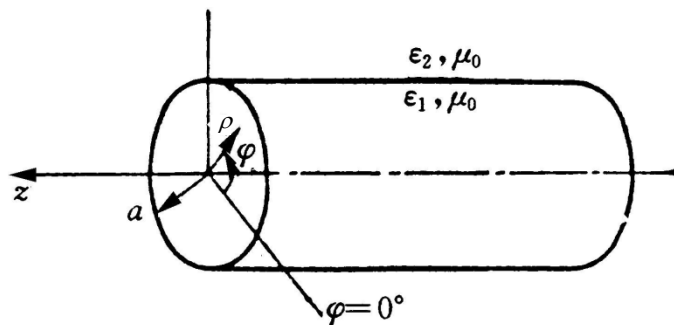
❖ 设横向电场沿y方向， $E_y$ 满足的标量波动方程

$$(\nabla^2 + k_i^2)E_{y_i} = 0 \quad i = 1, 2, \text{ 分别表示纤芯和包层中的量。}$$

❖ 分离变量法解标量波动方程，得到

$$E_{y_1} = \frac{A_m}{J_m(u)} J_m(u\tilde{\rho}) [\cos(m\varphi) \text{ 或 } \sin(m\varphi)] \quad \left( \tilde{\rho} = \frac{\rho}{a} < 1 \right) \quad u = k_{t_1} a = \left( k_0^2 n_1^2 - k_z^2 \right)^{\frac{1}{2}} a$$

$$E_{y_2} = \frac{A_m}{K_m(w)} K_m(w\tilde{\rho}) [\cos(m\varphi) \text{ 或 } \sin(m\varphi)] \quad \left( \tilde{\rho} = \frac{\rho}{a} > 1 \right) \quad w = k_{t_2} a = \left( k_z^2 - k_0^2 n_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} a$$



阶跃光纤的简化分析模型  
——圆形介质波导

## 解标量波方程

$$(\nabla^2 + k_i^2)E_{y_i} = 0$$

❖  $i=1, 2$ , 分别表示纤芯和包层的量。

❖ 圆柱坐标系下标量波方程为

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial E_y}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_i^2 E_y = 0$$

❖ 令  $E_y = \rho(\rho)\Phi(\varphi)e^{-jk_z z}$

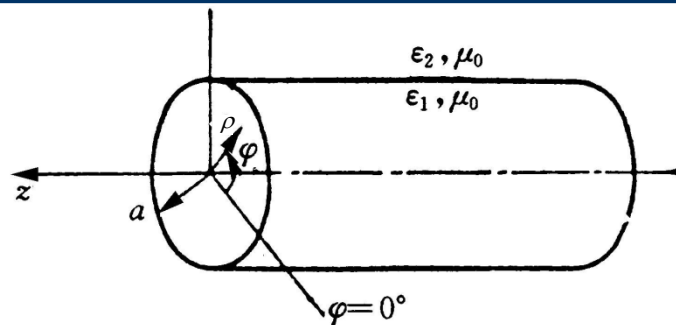
❖ 得出  $\frac{d^2 \rho(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho(\rho)}{d\rho} + (k_i^2 - k_z^2 - \frac{m^2}{\rho^2})\rho(\rho) = 0$ ,  $\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0$

❖ 其解为  $\Phi(\varphi) = ce^{jm\varphi}$  或  $\begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$

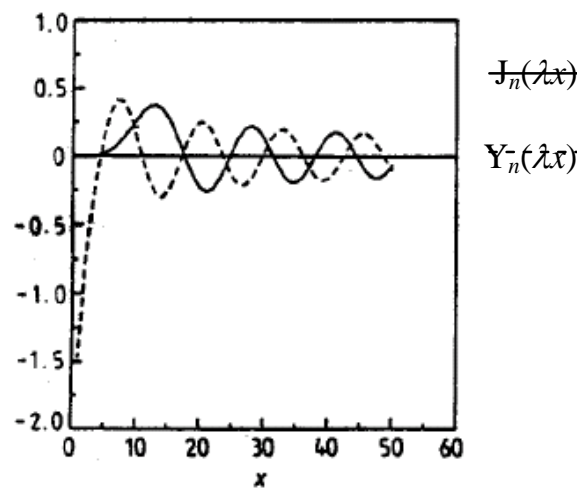
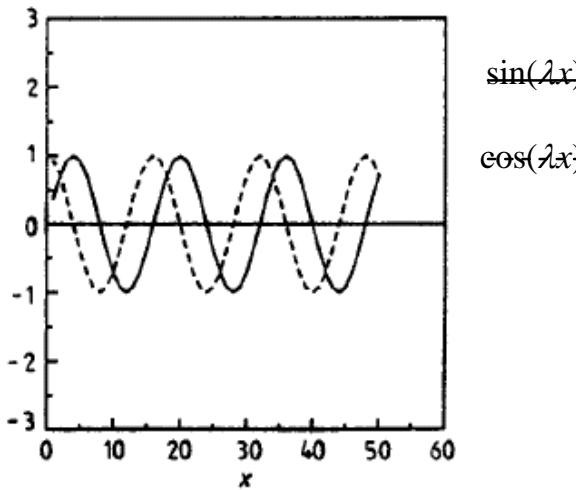
$$\rho_1(\rho) = DJ_m(k_{t1}\rho) \quad (\rho < a)$$

$$\rho_2(\rho) = DK_m(k_{t2}\rho) \quad (\rho > a)$$

❖  $a$ 为介质棒即纤芯的半径  $k_{t1}^2 = k_0^2 n_1^2 - k_z^2$   $k_{t2}^2 = k_0^2 n_2^2 - k_z^2$



# 贝塞尔函数与三角函数、指数函数

贝塞尔函数	正弦、余弦函数、指数函数
第 $n$ 阶贝塞尔方程	正弦、余弦函数、指数函数满足的微分方程
$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0$	$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$
(i) $\lambda^2 > 0$ , $\lambda$ 是实数, $n$ 为整数 用级数方法求解贝塞尔方程 得到两个独立的解: $J_n(\lambda x)$ ——第 $n$ 阶第一类贝塞尔函数 $Y_n(\lambda x)$ ——第 $n$ 阶第二类贝塞尔函数	(i) $\lambda^2 > 0$ , $\lambda$ 是实数 用级数方法求解上面的微分方程 得到两个独立的解: $\sin(\lambda x)$ ——正弦函数 $\cos(\lambda x)$ ——余弦函数
	

比较  $J_n(\lambda x)$ 、 $Y_n(\lambda x)$  与  $\sin(\lambda x)$ 、 $\cos(\lambda x)$  确有相似之处。

## 贝塞尔函数与三角函数、指数函数

(ii)  $\lambda^2 < 0$ ,  $\lambda$  是虚数

设  $\lambda = j\gamma$

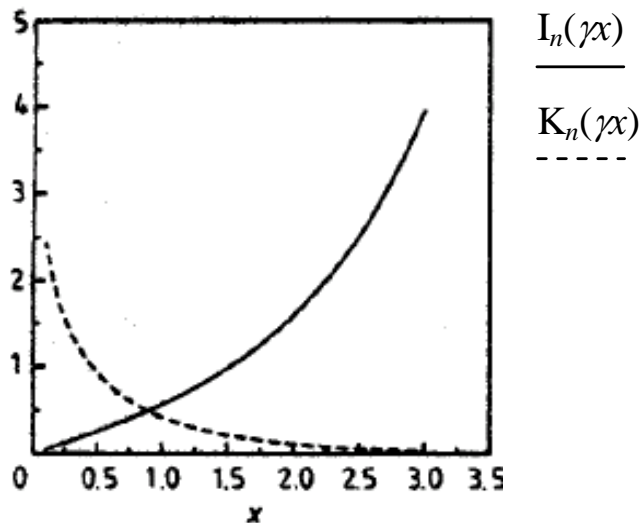
微分方程成为

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (\gamma^2 x^2 + n^2) y = 0$$

用级数方法求解得到两个独立的解

$I_n(\gamma x)$ ——第  $n$  阶第一类修正贝塞尔函数

$K_n(\gamma x)$ ——第  $n$  阶第二类修正贝塞尔函数



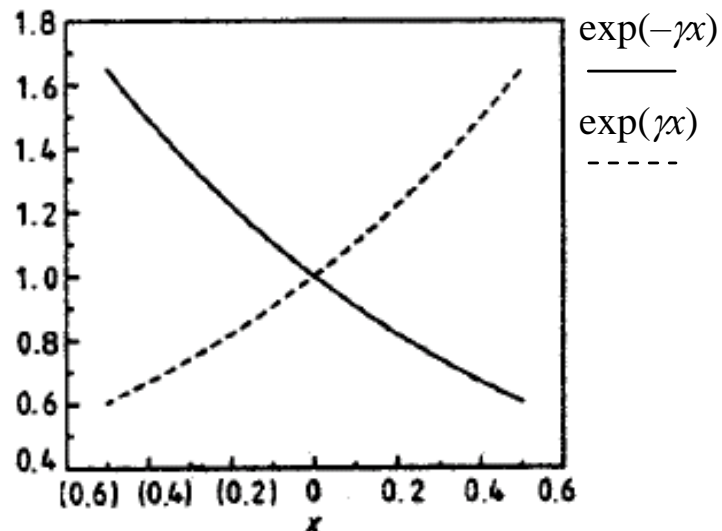
(ii)  $\lambda^2 < 0$ ,  $\lambda$  是虚数

设  $\lambda = j\gamma$

微分方程成为

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \gamma^2 y = 0$$

用级数方法求解得到两个独立的指数函数解

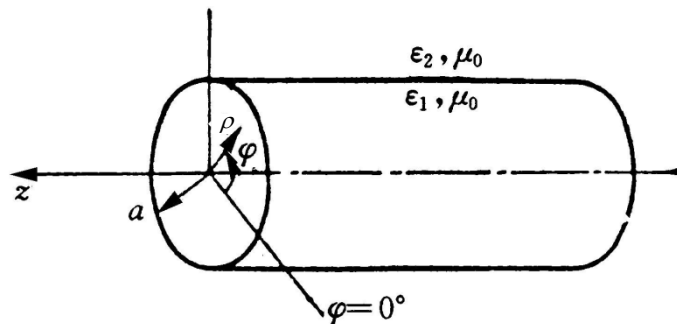


比较  $I_n(\gamma x)$ 、 $K_n(\gamma x)$  与  $\exp(-\gamma x)$ 、 $\exp(\gamma x)$  确有相似之处。

## 解标量波方程

$$\Phi(\varphi) = ce^{jm\varphi} \text{ 或 } \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{cases} \rho_1(\rho) = DJ_m(k_{t1}\rho) & (\rho < a) \\ \rho_2(\rho) = DK_m(k_{t2}\rho) & (\rho > a) \end{cases}$$



❖ 在  $r=a$  处有  $\rho(a) = DJ_m(k_{t1}a) = DJ_m(u) = DK_m(k_{t2}a) = DK_m(w)$

❖ 所以  $D = \frac{\rho(a)}{J_m(u)} = \frac{\rho(a)}{K_m(w)} \quad \begin{cases} u = k_{t1}a = (k_0^2 n_1^2 - k_z^2)^{\frac{1}{2}} a \\ w = k_{t2}a = (k_z^2 - k_0^2 n_2^2)^{\frac{1}{2}} a \end{cases}$

❖  $u$ 、 $w$  是以纤芯半径归一化的横向传播常数

❖ 将式  $D = \frac{\rho(a)}{J_m(u)} = \frac{\rho(a)}{K_m(w)}$  代入, 得到  $\begin{cases} \rho(\rho) = \frac{\rho(a)}{J_m(u)} J_m(u \tilde{\rho}) & \tilde{\rho} = \frac{\rho}{a} < 1 \\ \rho(\rho) = \frac{\rho(a)}{K_m(w)} K_m(w \tilde{\rho}) & \tilde{\rho} = \frac{\rho}{a} > 1 \end{cases}$

❖ 最后得到

$$E_{y1} = \frac{A_m}{J_m(u)} J_m(u \tilde{\rho}) [\cos(m\varphi) \text{ 或 } \sin(m\varphi)] \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{a} < 1$$

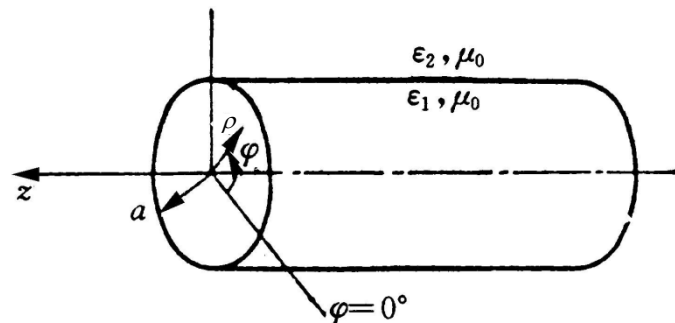
$$E_{y2} = \frac{A_m}{K_m(w)} K_m(w \tilde{\rho}) [\cos(m\varphi) \text{ 或 } \sin(m\varphi)] \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{a} > 1$$

## 弱导光纤的色散关系导出过程

❖  $E_z$ 、 $H_z$  虽然很小，但在导出色散关系时举足轻重

❖ 根据TEM模近似，由  $E_y$  求  $H_x$

❖ 由  $E_y$ 、 $H_x$  求  $E_z$ 、 $H_z$ ，并由  $E_z$ 、 $H_z$  在芯—包交界面连续得到色散关系



解题步骤：

(1) 确定  $a$ ， $\Delta$ ， $\lambda$

(2) 计算  $u^2 + w^2 = a^2 k_0^2 (n_1^2 - n_2^2)$  (2)

(3) 联立式(1)、(2) 计算  $u$  或  $w$

(4) 从  $u$  或  $w$  计算  $k_z$

$$u^2 = a^2 (k_0^2 n_1^2 - k_z^2)$$

$$w^2 = a^2 (k_z^2 - k_0^2 n_2^2)$$



## 柱坐标下纵向分量 $E_z$ 、 $H_z$

❖ TEM模近似  $H_x \approx -E_y / Z$ ,  $Z = \begin{cases} Z_1 = \frac{Z_0}{n_1} & \text{纤芯区} \\ Z_2 = \frac{Z_0}{n_2} & \text{包层区} \end{cases}$

$$H_{x_1} = -\frac{A_m}{J_m(u)} \frac{n_1}{\eta_0} J_m(u\tilde{\rho}) [\cos(m\varphi) \text{ 或 } \sin(m\varphi)] \quad \tilde{\rho} < 1$$

$$H_{x_2} = -\frac{A_m}{K_m(w)} \frac{n_2}{\eta_0} K_m(w\tilde{\rho}) [\cos(m\varphi) \text{ 或 } \sin(m\varphi)] \quad \tilde{\rho} > 1$$

❖ 场的纵向分量 $E_z$ 、 $H_z$ 可从麦氏方程得到

$$\begin{cases} E_z = \frac{-j}{\omega\epsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \approx \frac{j\eta_0}{k_0 n^2} \frac{dH_x}{dy} \\ H_z = \frac{j}{\omega\mu_0} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \approx \frac{j}{k_0 \eta_0} \frac{dE_y}{dx} \end{cases}$$

❖ 在纤芯区得到

$$E_{z_1} = -\frac{jA_m}{2k_0 n_1} \frac{u}{a} \left\{ \frac{J_{m+1}(u\tilde{\rho})}{J_m(u)} \sin[(m+1)\varphi] + \frac{J_{m-1}(u\tilde{\rho})}{J_m(u)} \sin[(m-1)\varphi] \right\}$$

$$H_{z_1} = \frac{jA_m u}{2k_0 a \eta_0} \left\{ \frac{J_{m+1}(u\tilde{\rho})}{J_m(u)} \cos[(m+1)\varphi] - \frac{J_{m-1}(u\tilde{\rho})}{J_m(u)} \cos[(m-1)\varphi] \right\}$$

❖ 同样可得包层区 $E_{z2}$ 、 $H_{z2}$ 。

柱坐标下纵向分量  $E_z$ 、 $H_z$ 

$$E_{y_1} = \frac{A_m}{J_m(u)} J_m(u\tilde{\rho}) [\cos(m\varphi) \text{ 或 } \sin(m\varphi)] \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{a} < 1$$

$$E_{y_2} = \frac{A_m}{K_m(w)} K_m(w\tilde{\rho}) [\cos(m\varphi) \text{ 或 } \sin(m\varphi)] \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{a} > 1$$

$$E_{z_1} = -\frac{jA_m}{2k_0 n_1} \frac{u}{a} \left\{ \frac{J_{m+1}(u\tilde{\rho})}{J_m(u)} \sin[(m+1)\varphi] + \frac{J_{m-1}(u\tilde{\rho})}{J_m(u)} \sin[(m-1)\varphi] \right\}$$

$$H_{z_1} = \frac{jA_m u}{2k_0 a Z_0} \left\{ \frac{J_{m+1}(u\tilde{\rho})}{J_m(u)} \cos[(m+1)\varphi] - \frac{J_{m-1}(u\tilde{\rho})}{J_m(u)} \cos[(m-1)\varphi] \right\}$$

$$E_{z_2} = -\frac{jA_m w}{2k_0 a n_2} \left\{ \frac{K_{m+1}(w\tilde{\rho})}{K_m(w)} \sin[(m+1)\varphi] - \frac{K_{m-1}(w\tilde{\rho})}{K_m(w)} \sin[(m-1)\varphi] \right\}$$

$$H_{z_2} = \frac{jA_m w}{2k_0 a Z_0} \left\{ \frac{K_{m+1}(w\tilde{\rho})}{K_m(w)} \cos[(m+1)\varphi] + \frac{K_{m-1}(w\tilde{\rho})}{K_m(w)} \cos[(m-1)\varphi] \right\}$$

❖ 较场的轴向分量与横向分量，在轴向分量表示式中多一项  $u/(ak_0)$  或  $w/(ak_0)$

$$\frac{u}{ak_0} = \frac{a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - k_z^2}}{ak_0} < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad \frac{w}{ak_0} = \frac{a}{ak_0} \sqrt{k_z^2 - k_0^2 n_2^2} < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

❖ 它们都在 $\Delta$ 数量级，即弱导光纤中场的轴向分量至少比横向分量小 $\Delta$ 数量级，合成场基本处于光纤横截面内，近似为TEM模。

## 色散方程

利用纤芯与包层交界面的边界条件，在  $\rho=a$  界面上，电场和磁场的轴向分量是连续的，例如  $E_{z_1} = E_{z_2}$ ，可得

$$\begin{aligned} \frac{u}{n_1} \frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)} \sin[(m+1)\varphi] + \frac{u}{n_1} \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} \sin[(m-1)\varphi] \\ = \frac{w}{n_2} \frac{K_{m+1}(w)}{K_m(w)} \sin[(m+1)\varphi] - \frac{w}{n_2} \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} \sin[(m-1)\varphi] \end{aligned}$$

由上式又可得

$$\begin{aligned} \frac{u}{n_1} \frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)} &= \frac{w}{n_2} \frac{K_{m+1}(w)}{K_m(w)} \\ \frac{u}{n_1} \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} &= -\frac{w}{n_2} \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} \end{aligned}$$

在弱导近似下  $n_1 \approx n_2$ ，令  $n_1 = n_2$ ，则上两式可简化为

$$u \frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)} = w \frac{K_{m+1}(w)}{K_m(w)} \quad u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -w \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)}$$

上面两式即为弱导近似下光纤标量解的特征方程。按贝塞尔函数的递推公式可证明这两式属同一方程。它们是超越方程，需用数值方法求解。

## 色散方程

$$u \frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)} = w \frac{K_{m+1}(w)}{K_m(w)} \quad u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -w \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} \quad (1)$$

❖ 解的步骤是

❖ (1) 先确定光纤芯半径  $a$ , 相对折射率差  $\Delta$  以及工作波长  $\lambda$  或  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$

❖ (2) 计算  $u^2 + w^2 = a^2 k_0^2 (n_1^2 - n_2^2) \quad (2)$

❖ (3) 联立解式 (1) 与式 (2), 得到  $u$  或  $w$

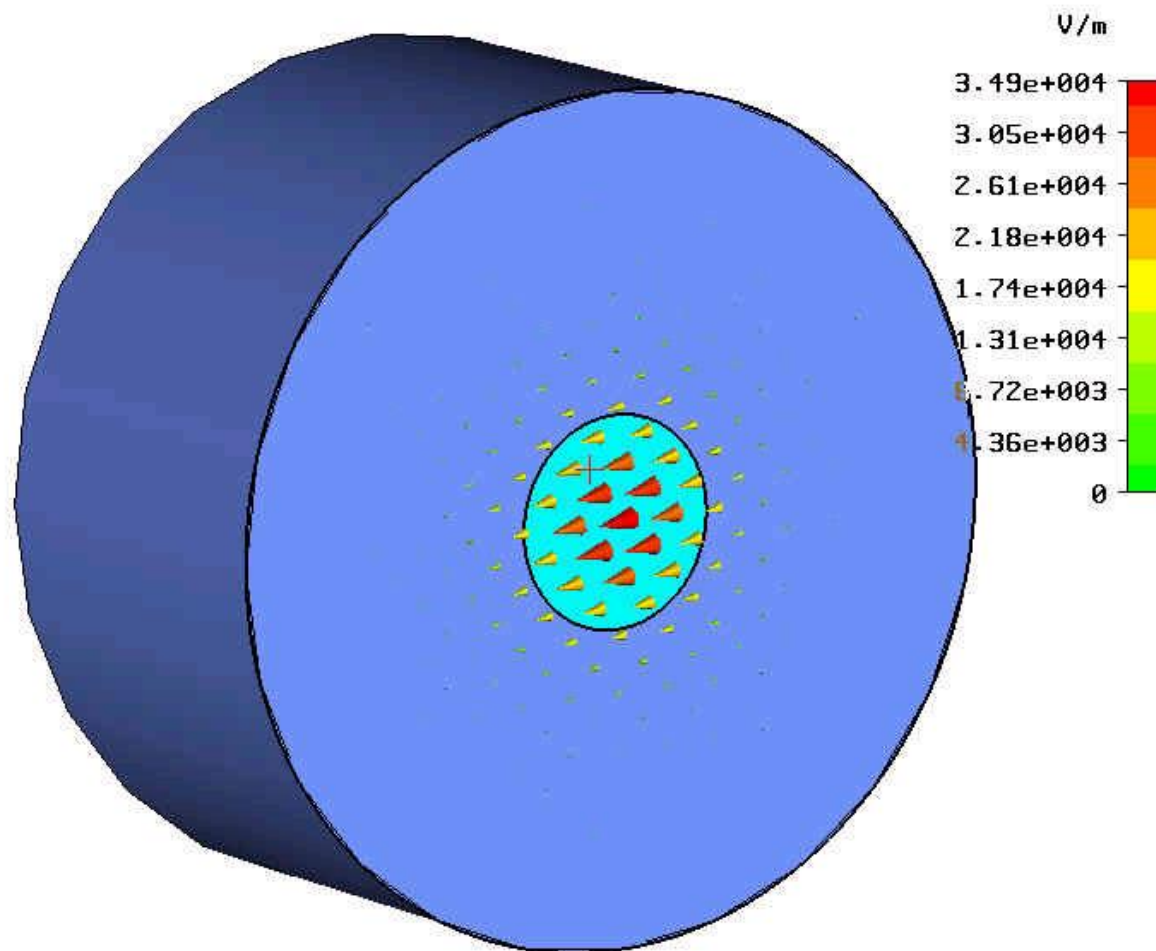
❖ (4) 从  $u^2 = a^2 (k_0^2 n_1^2 - k_z^2)$  或  $w^2 = a^2 (k_z^2 - k_0^2 n_2^2)$  求出  $k_z$

❖ 导模传播常数  $k_z$  的允许范围为  $k_0 n_2 \leq k_z \leq k_0 n_1$

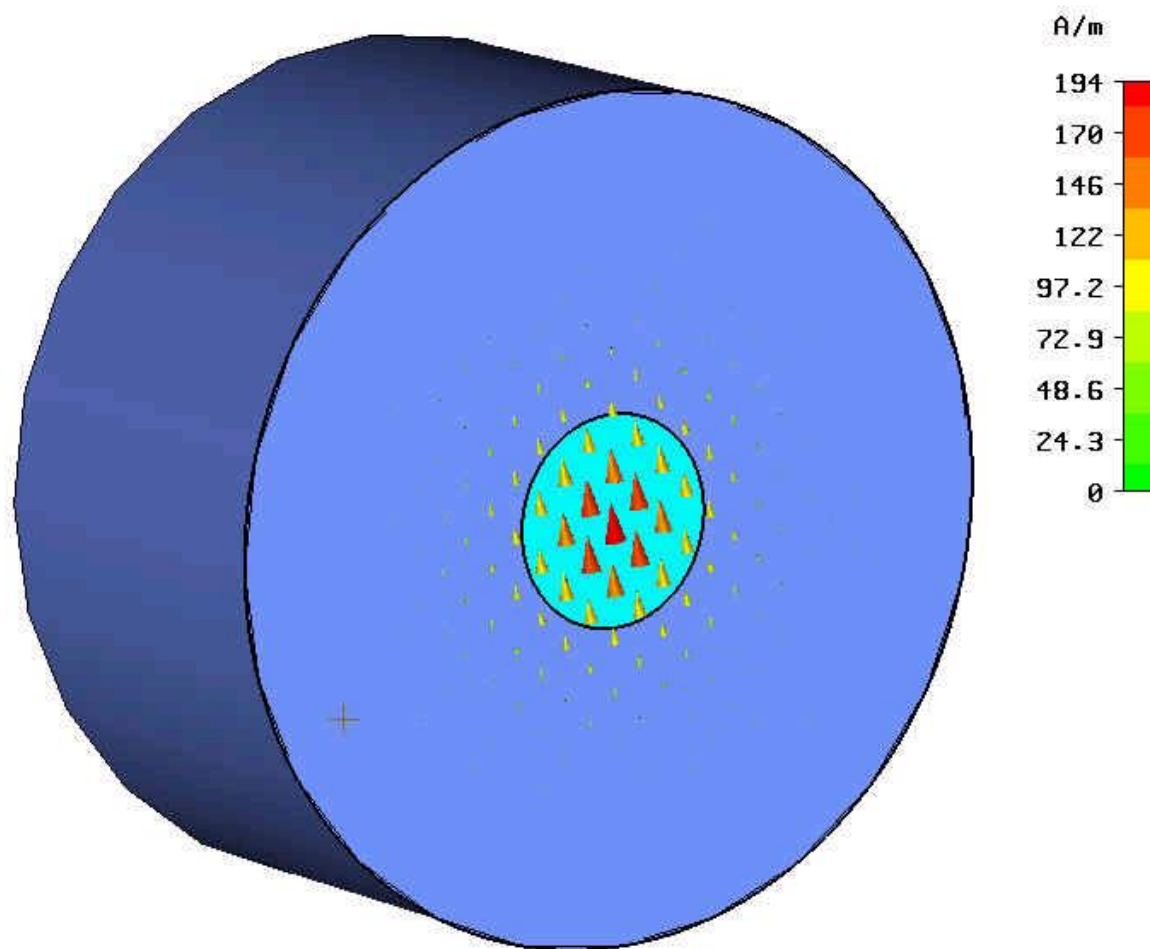
❖ 截止条件:

❖ 若  $w=0$ ,  $k_z=k_0 n_2$ , 则不满足  $K_m(w\tilde{\rho})|_{\rho \rightarrow \infty} = 0$  的条件, 导模将不再约束在纤芯中轴向传输, 能量向横向扩散, 故定义  $w=0$  为截止条件。

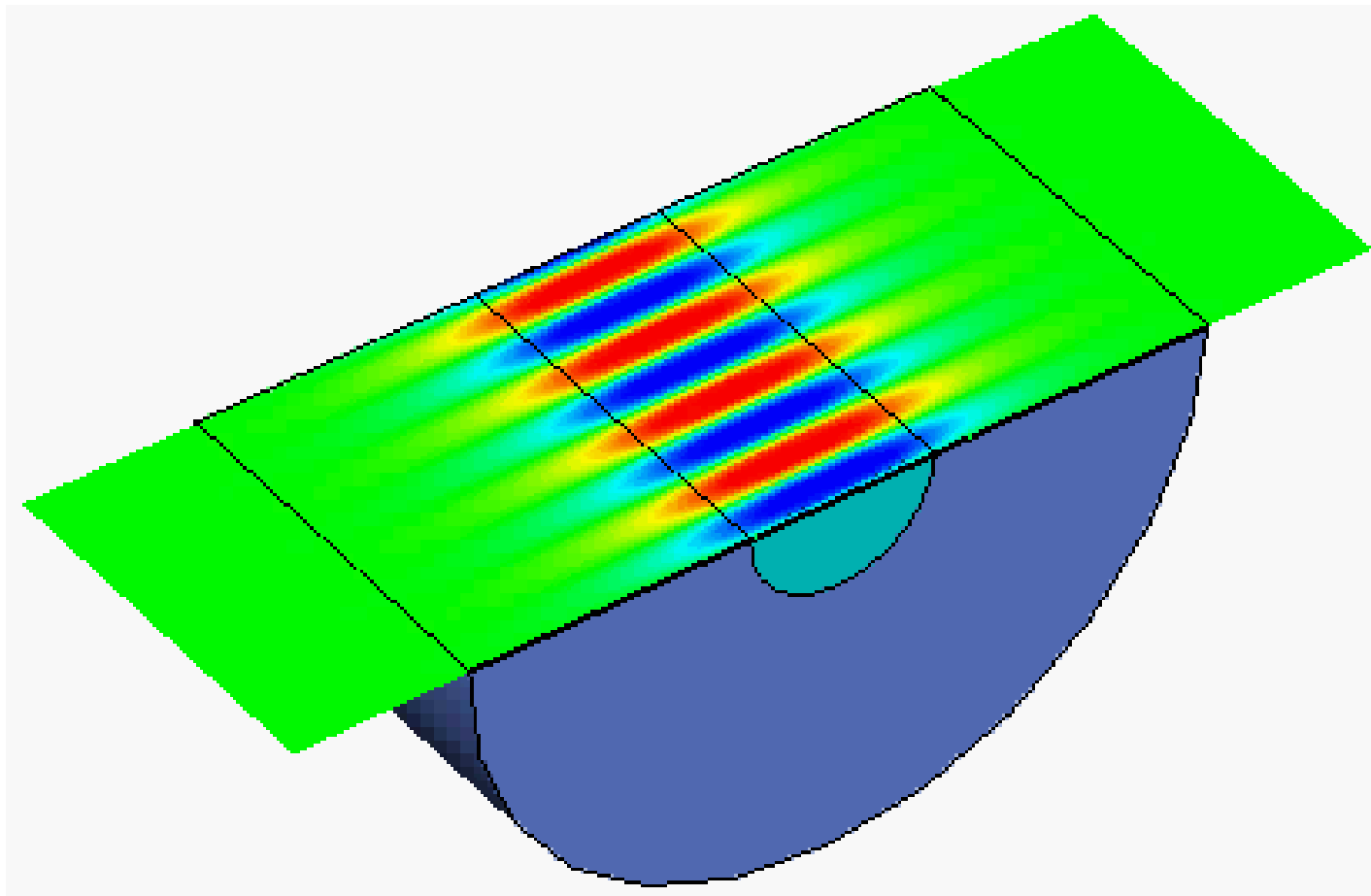
# 电场分布



# 磁场分布



# 行波



## 线偏振模与截止条件

❖ 线偏振模：弱导近似假定下，电场主要是 $E_y$ ，故是线偏振的。

❖ 截止条件：

❖ 如果电磁波不能局限在纤芯中传播而通过包层向外辐射，该模式电磁波的传播被截止。 $w = k_{t2}a = 0$  是波被限制在纤芯还是通过包层向外辐射的临界点

$$u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -w \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} \quad w^2 = a^2 (k_z^2 - k_0^2 n_2^2)$$

❖  $LP_{mn}$  模：

❖ 如果 $w=0$ ，则有  $J_{m-1}(u^c = k_{t1}^c a) = 0$ ， $k_{t1}^c$  是截止时纤芯内部的横向传播常数。

❖  $J_{m-1}(u^c = k_{t1}^c a)$  的每一个根对应一个线偏振模的横向传播常数。

❖ 第 $n$ 个有效根对应的那个线偏振模称为 $LP_{mn}$ 模。

❖  $m$ 表示圆周方向变化周期数， $n$ 表示场在半径方向最大值出现的次数。



## 截止频率

❖ 截止条件:  $w = k_{t2}a = 0$  是波被限制在纤芯还是通过包层向外辐射的临界点

$$w = 0 \Rightarrow J_{m-1}(u^c = k_{t1}^c a) = 0$$

❖ 它的每一个根对应一个线偏振模的横向传播常数。

❖ 定义  $P_{m-1,n}$  为贝塞尔函数  $J_{m-1}(u^c = k_{t1}^c a)$  的第  $n$  个有效根

❖ 对于  $LP_{mn}$  模

$$k_{t1}^c = \frac{P_{m-1,n}}{a}$$

❖ 因为截止时  $k_{t2} = 0$ ,  $k_z^c = n_2 k_0$ ,  $k_{t1}^{c^2} = k_0^2 n_1^2 - k_z^c = k_0^2 n_1^2 - k_0^2 n_2^2$

❖ 所以

$$\left( \frac{P_{m-1,n}}{a} \right)^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_2^2) \Rightarrow \text{截止频率 } f_{mn}^c = \frac{c}{2\pi a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} P_{m-1,n}$$

## LP<sub>01</sub>模没有低频截止

$$u \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -w \frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)}$$

❖ LP<sub>mn</sub>模的截止频率为

$$f_{mn}^c = \frac{c}{2\pi a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} P_{m-1,n}$$

❖ 对LP<sub>01</sub>模截止条件为J<sub>-1</sub>=0，根据贝塞尔函数的性质

$$J_{-m} = (-1)^m J_m$$

❖ J<sub>-1</sub>=-J<sub>1</sub>，所以J<sub>1</sub>的根也就是J<sub>-1</sub>的根。x=0是J<sub>1</sub>(x)的根。这个根是可以接受的。

❖ 因为x=0时J<sub>0</sub>(x=0)≠0，所以J<sub>1</sub>(0)/J<sub>0</sub>(0)有定义。J<sub>-1</sub>的第一个根P<sub>-11</sub>=0是有意义的。

❖ 因此对于LP<sub>01</sub>模，其截止频率为

$$f_{01}^c = \frac{c}{2\pi a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} P_{-1,1} = 0$$

❖ 这就是说LP<sub>01</sub>模没有低频截止，工作于LP<sub>01</sub>模的光纤任何频率下都能传播。

❖ 贝塞尔函数的根除了零以外最低的是2.405，它是J<sub>0</sub>的第一个根，与LP<sub>11</sub>模的截止条件对应。因此从直流直到这个频率范围内只有LP<sub>01</sub>线偏振模工作。

贝塞尔函数的根

贝塞尔函数	根			
J <sub>0</sub>	2.405	5.520	8.654	11.791
J <sub>1</sub>	0*	3.832	7.016	10.173
J <sub>2</sub>	0*	5.136	8.417	11.620
J <sub>3</sub>	0*	6.380	9.716	13.105

## 线偏振模的场分布

### ❖ LP<sub>mn</sub>模的场分布

$$E_{y_1} = A_m \frac{J_m(k_{t_1} \rho)}{J_m(k_{t_1} a)} [\cos(m\varphi) \text{ 或 } \sin(m\varphi)]$$

$$E_{y_2} = A_m \frac{K_m(k_{t_2} \rho)}{K_m(k_{t_2} a)} [\cos(m\varphi) \text{ 或 } \sin(m\varphi)]$$

### ❖ 关键是求 $k_{t_1}$ , $k_{t_2}$

### ❖ 对于LP<sub>01</sub>模

$$k_{t_1} = \frac{(1 + \sqrt{2})k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{1 + (4 + V^4)^{1/4}}$$

### ❖ 其它LP<sub>mn</sub>模

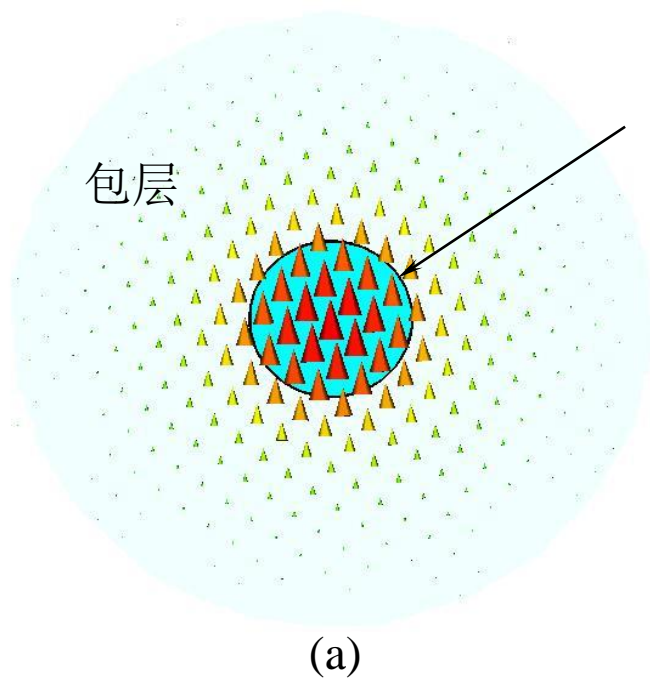
$$k_{t_1} = k_{t_1}^c \exp \left\{ \frac{\arcsin (S / k_{t_1}^c a) - \arcsin (S / V)}{S} \right\}$$

### ❖ 式中 $V = ak_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ (归一化频率)

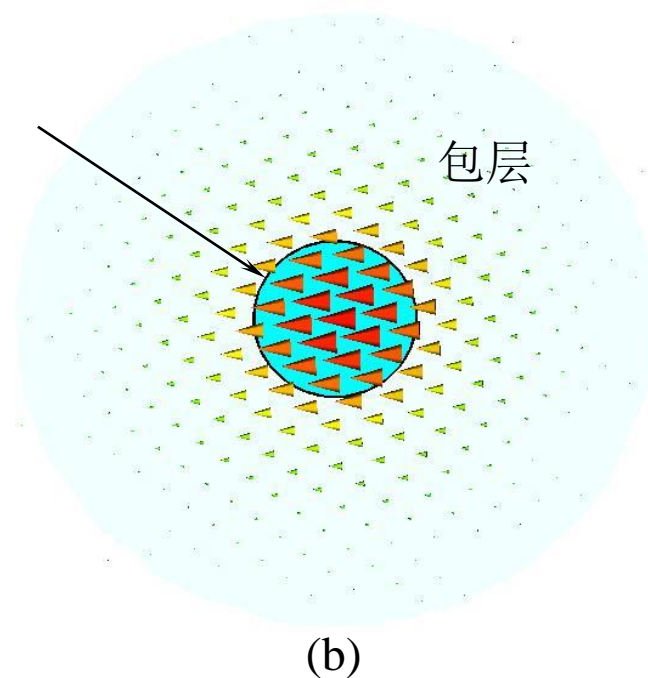
$$S^2 = (k_{t_1}^c a)^2 - m^2 - 1$$

## 场分布举例

❖  $LP_{01}$ 模电场分布（是二重简并的）



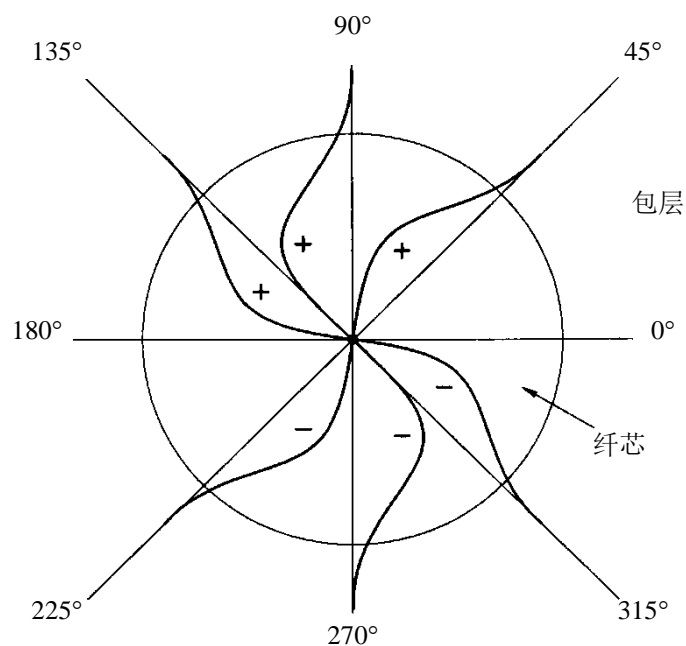
(a) 电场垂直指向



(b) 电场水平指向

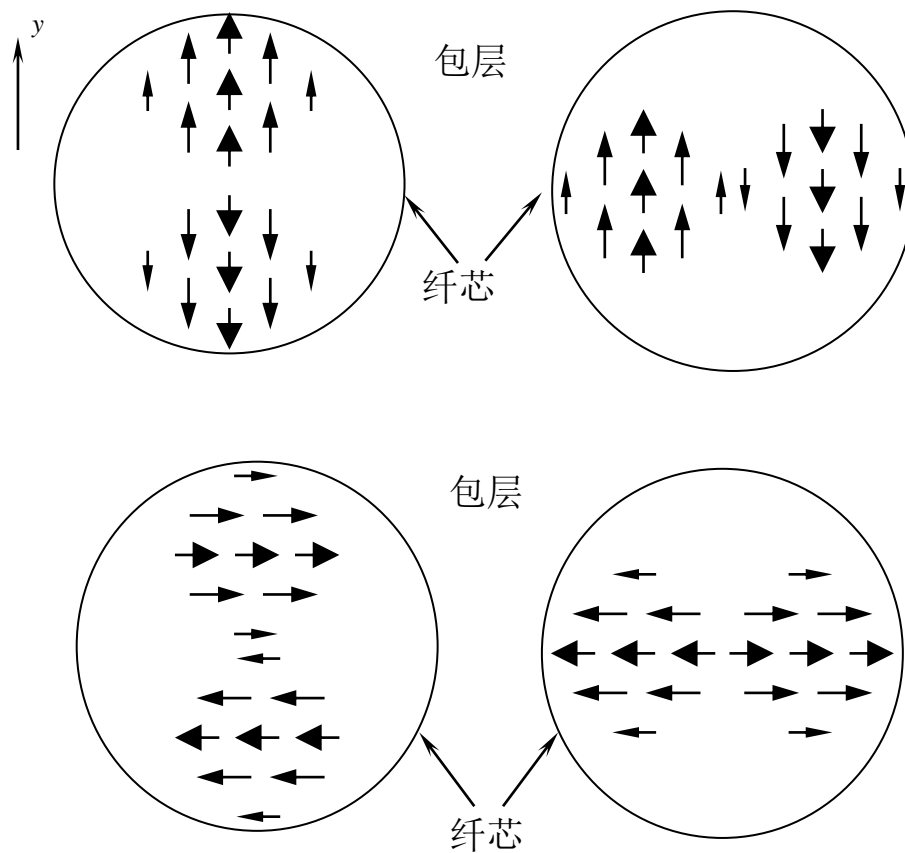
# 场分布举例

## ❖ $LP_{11}$ 模电场



$LP_{11}$  模电场经向与角向的变化

## 四重简并



## 归一化波导参量

### ❖ 归一化横向传播常数

$$\begin{cases} u = k_{t1}a = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - k_z^2} \\ w = k_{t2}a = a\sqrt{k_z^2 - k_0^2 n_2^2} \end{cases}$$

### ❖ 归一化频率 $V = \sqrt{u^2 + w^2} = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

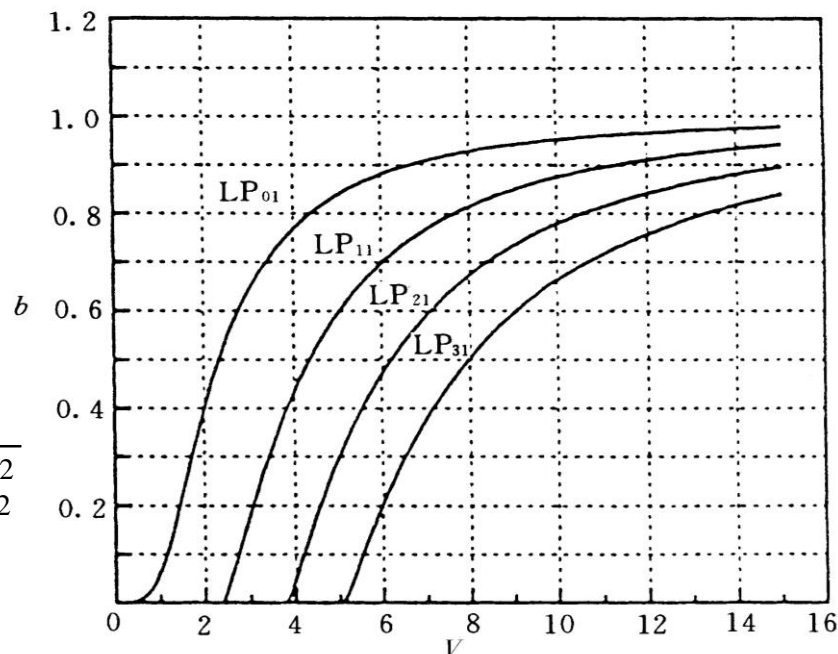
### ❖ 相对折射率差 $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$

### ❖ 以上参量又可定义归一化传播常数

$$b = 1 - \frac{u^2}{V^2} = \frac{(k_z^2 / k_0^2) - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$$

### ❖ 在弱导光纤近似下, $n_1 \approx n_2$ , $b \approx \frac{k_z / k_0 - n_1}{n_2 - n_1}$ 或 $k_z = n_1 k_0 (b\Delta + 1)$

### ❖ $k_z$ 与 $b$ 构成线性关系。应用特征方程的近似解, 对于任一给定 $V$ 值可求出 $u$ 从而确定 $b$ , 于是可作 $b$ 与 $V$ 的关系曲线。



归一化传播常数与归一化频率关系曲线

## 弱导光纤中的能量分布

$S_z = -\frac{1}{2} E_y H_x^*$  将  $E_y$ 、 $H_x^*$  表达式代入得到

❖  $\tilde{\rho} < 1$  纤芯区  $S_{z_1} = \frac{A_m^2}{2} \frac{n_1}{Z_0} \frac{J_m^2(u\tilde{\rho})}{J_m^2(u)} \cos^2(m\varphi)$

❖  $\tilde{\rho} > 1$  包层区  $S_{z_2} = \frac{A_m^2}{2} \frac{n_2}{Z_0} \frac{K_m^2(w\tilde{\rho})}{K_m^2(w)} \cos^2(m\varphi)$

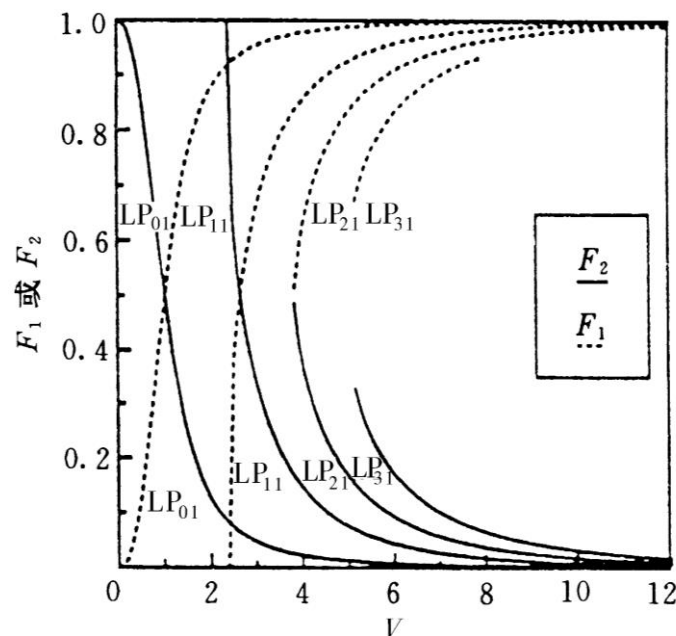
❖ 纤芯和包层中总功率流  $P_1$  和  $P_2$  为

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{n_1}{Z_0} \frac{A_m^2}{J_m^2(u)} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \tilde{\rho} J_m^2(u\tilde{\rho}) \cos^2(m\varphi) d\varphi d\tilde{\rho}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{n_2}{Z_0} \frac{A_m^2}{K_m^2(w)} \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \tilde{\rho} K_m^2(w\tilde{\rho}) \cos^2(m\varphi) d\varphi d\tilde{\rho}$$

$$F_1 = \frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{K_m^2(w)[J_m^2(u) - J_{m-1}(u)J_{m+1}(u)]}{J_m^2(u)K_{m-1}(w)K_{m+1}(w) - K_m^2(w)J_{m-1}(u)J_{m+1}(u)}$$

$$F_2 = \frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{J_m^2(u)[K_m^2(w) - K_{m-1}(w)K_{m+1}(w)]}{K_m^2(w)J_{m-1}(u)J_{m+1}(u) - J_m^2(u)K_{m-1}(w)K_{m+1}(w)}$$



纤芯与包层中传送功率与总功率之比  
 $F_1$ 、 $F_2$ 与归一化频率关系

## 色散

- ❖ 光纤色散主要有：**材料色散**、**波导色散**和**模间色散**三种色散效应。
- ❖ **材料色散**就是由于制作光纤材料的折射率随工作频率 $\omega$ 而变化，从而引起色散。
- ❖ **波导色散**是由于波导结构引起的色散，主要体现在相移常数 $k_z$ 是频率 $\omega$ 的函数。
- ❖ **模间色散**是由于光纤中不同模式有不同群速。只有多模光纤才会存在模间色散。模间色散比波导色散严重得多，这就是多模光纤传输信号的能力比单模光纤小得多的原因。
- ❖ 对于单模光纤一般还存在一个波导色散与材料色散相抵消的零色散频段，大大增加了传输距离。
- ❖  $LP_{01}$ 模是二重简并的。当光纤的圆对称受到干扰时，两个取向不同的简并模分裂成两个色散特性稍微不同的模式。这种模式色散称为**极化色散**。当光纤传输信号的带宽不大时，极化色散可以忽略不计，但当信号传输速率超过10Gb/s，极化色散成为限制光纤传输速率进一步提高的一个重要因素。



## 复习

### ❖ 要点

- 光纤的射线分析帮助我们形象直观地理解光在光纤中的传播，如数值孔径、光纤自聚集等。光纤的波动分析包括光纤射线分析。
- 由于光纤纤芯折射率比包层折射率稍大，光纤在纤芯中几乎与轴平行，场的纵向分量很小，因而可用标量波动分析近似。
- 在标量波动分析近似下，假定光纤中场是偏振的，记为LP模，横截面不同的场结构以下标mn标记，即 $LP_{mn}$ ，n表示半径方向暗环出现的次数，m表示圆周方向场变化周期数。
- LP模没有低频截止，最低模是 $LP_{01}$ 模。 $LP_{01}$ 模是二重简并的， $LP_{11}$ 模则是四重简并的。

### ❖ 复习

- 6.7, 6.8 (P.345-368)