James Clerk Maxwell
1831 – 1879

Lesson 13

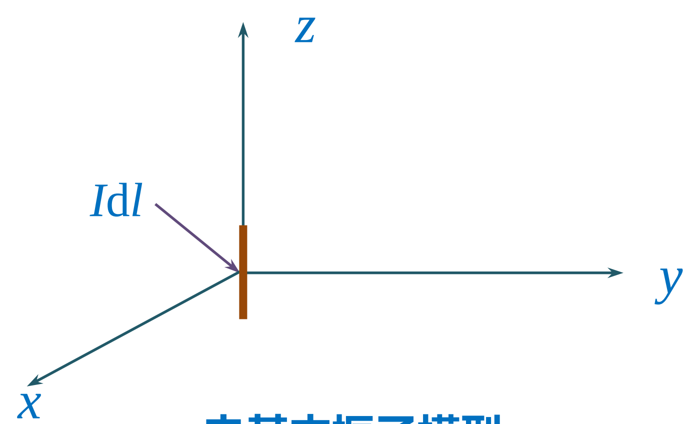
Electromagnetic Fields and Waves

电基本振子天线
磁基本振子天线

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn

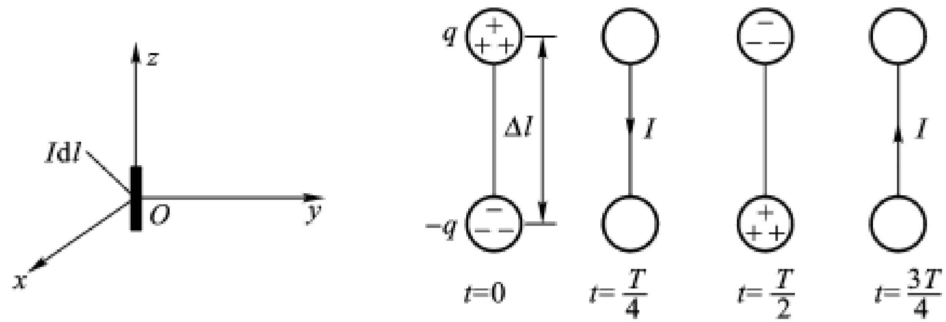
电基本振子



电基本振子模型

- ❖ **电基本振子（也称赫兹电偶极子）**
- ❖ **磁基本振子（也称赫兹磁偶极子）**
- ❖ 众多天线都可分解为基本振子的组合。
- ❖ 这两类基本振子具有对偶性
  - 知道了电基本振子辐射的场就可对偶地写出磁基本振子辐射的场。
- ❖ 电基本振子分析模型：一段有高频电流的短导线
  - 导线的直径$d/\lambda \ll 1$，因而可用线电流模型近似。
  - 长度$\Delta l/\lambda \ll 1$，Δl与波长相比很小很小，
  - 假定导线上各点电流的振幅和相位是相同的
- ❖ 实际线天线上电流是不均匀分布的。如果我们把实际线天线分成n段，只要n足够大，每段长度比波长小得多，这样每一段上电流可视为常数，就可看成是一个电基本振子。整个线天线辐射的场就是所有这些电基本振子辐射场的总和。所以电基本振子辐射场的分析是线天线工程计算的基础。

电基本振子模型实际上是一个振荡电偶极子



(a) (b)

❖ **电基本振子模型：**

– **第一种表述：在Δl长度内电流分布是与空间坐标无关的常数**

– **第二种表述：实际上是一个振荡偶极子。**

两者等价

❖ **设被Δl分开的两个储存电荷的小槽各存储+q与-q电荷量，构成一个电偶极子，其偶极矩为** $P = q\Delta l$

❖ **当偶极子作简谐振荡时** $\dfrac{\partial P}{\partial t} = \Delta l \dfrac{\partial q}{\partial t} = I\Delta l \Leftrightarrow \mathrm{j}\omega P$

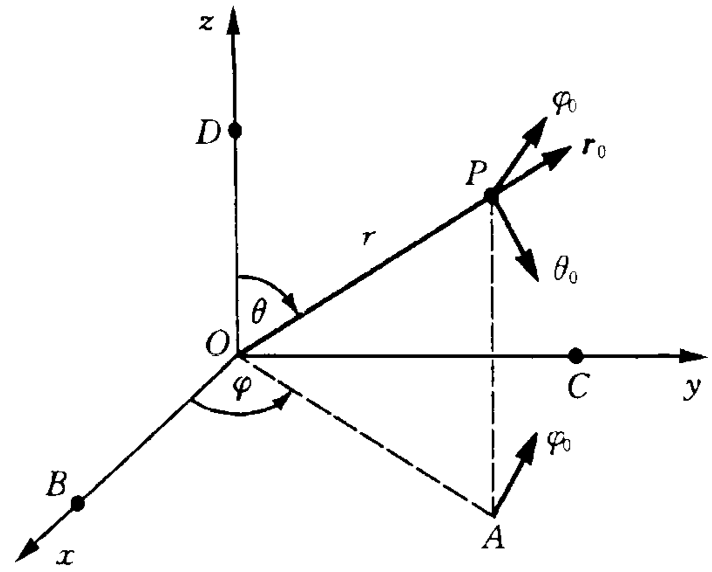
❖ **所以，电基本振子实际上就是振荡电偶极子。**

电基本振子辐射的电磁场

❖ 第一步求电基本振子产生矢量位A

❖ 关键是源 $J\mathrm{d}V$ 怎么表示。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathrm{d}V'\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$



球坐标

❖ 把电基本振子放到球坐标系的原点，偶极矩 p 的方向与坐标轴z重合。此时

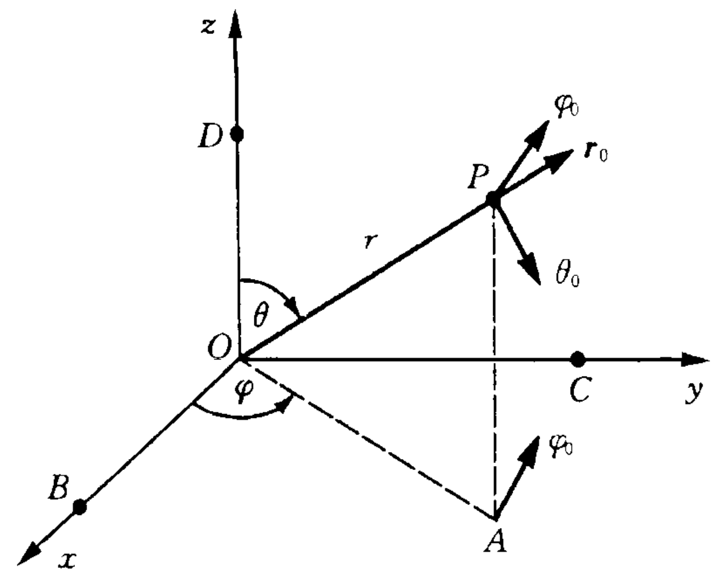
$$\Delta V'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')=I\Delta l\boldsymbol{z}_0$$

❖ 因为电流源所占有空间$\Delta V'=\Delta S\Delta l$，$\Delta S$为导线截面积，而$J\Delta S=I$。

❖ 因为这个无限小天线放在坐标原点，故$r'=0$，I 与 r' 无关，可以拿到积分号外。由此得到电基本振子产生的矢量位A为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{z}_0\frac{\mu I\Delta l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}$$

电基本振子辐射的电磁场



球坐标

❖ **由矢量位A求E、H**

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{z}_0\frac{\mu I\Delta l e^{-jkr}}{4\pi r}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_0 & \mathrm{r}\boldsymbol{\theta}_0 & \boldsymbol{r}\sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & \boldsymbol{r}\boldsymbol{A}_\theta & \boldsymbol{r}\sin\theta\boldsymbol{A}_\varphi\end{vmatrix}$$

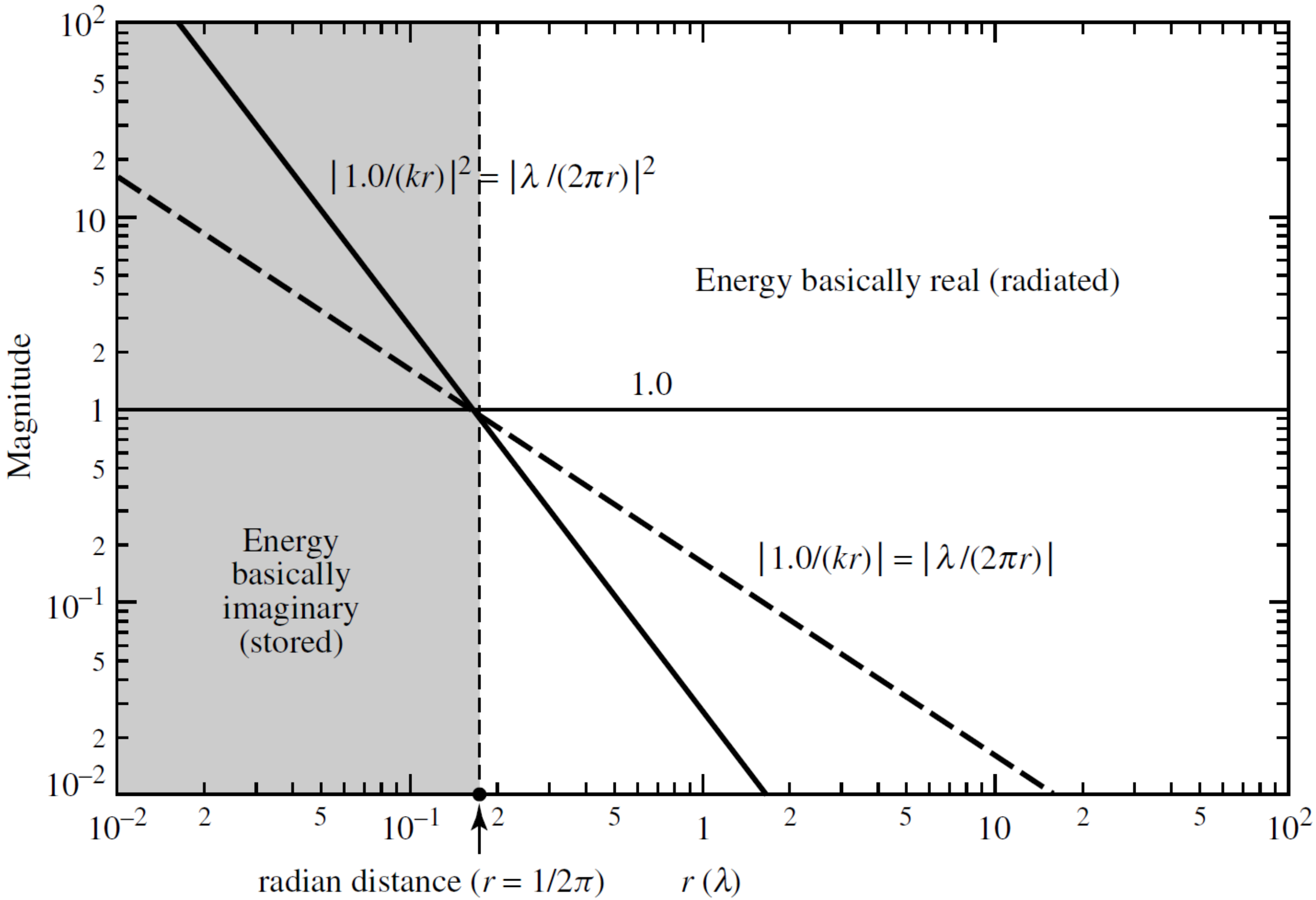
$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}=\varphi_0\frac{jkI\Delta l e^{-jkr}}{4\pi r}\left[1+\frac{1}{jkr}\right]\sin\theta$$

❖ **偶极子以外的区域，$J=0$，故得到**

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jkI\Delta l e^{-jkr}}{4\pi r}\left\{\boldsymbol{r}_0\left[\frac{1}{jkr}+\frac{1}{(jkr)^2}\right]2\cos\theta+\boldsymbol{\theta}_0\left[1+\frac{1}{jkr}+\frac{1}{(jkr)^2}\right]\sin\theta\right\}$$

❖ **远区，** $kr=2\pi r/\lambda>>1$

$$\boldsymbol{H}=\varphi_0\frac{jkI\Delta l e^{-jkr}}{4\pi r}\sin\theta \qquad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{\theta}_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jkI\Delta l e^{-jkr}}{4\pi r}\sin\theta$$


Magnitude
10^2
5
2
10
5
2
1
5
2
10^−1
5
2
10^−2
|1.0/(kr)|^2 = |λ/(2πr)|^2
Energy basically real (radiated)
1.0
|1.0/(kr)| = |λ/(2πr)|
Energy
basically
imaginary
(stored)
10^−2
2
5
10^−1
2
5
1
2
5
10
2
5
10^2
radian distance (r = 1/2π)
r (λ)

电基本振子远区场与平面波场比较

$$\boldsymbol{H}=\varphi_0\frac{jkI\Delta le^{-jkr}}{4\pi r}\sin\theta \qquad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{\theta}_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jkI\Delta le^{-jkr}}{4\pi r}\sin\theta$$

❖ **两者相似之处是：**

- **电场、磁场和波传播方向三者相互垂直。**
- **电场和磁场幅度之比均为本征阻抗。媒质中** $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ **大气中** $\eta\approx\eta_0=377\Omega$

❖ **但也有不同之处：**

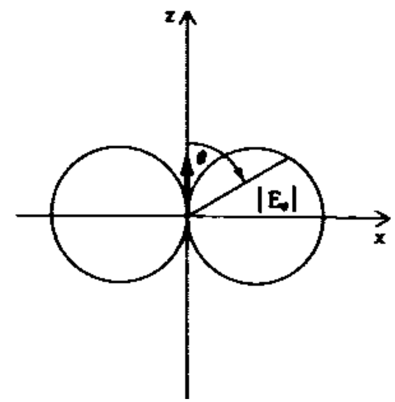
- **电基本振子产生的场按** $1/r$ **衰减，均匀平面波场是一常数。**
- **电基本振子产生的场的场强是** θ **的函数，均匀平面波场强是常数。**
- **电基本振子产生的场等相位面是球面，均匀平面波场等相位面是一平面。**
- **电基本振子辐射场在半径方向波的速度为** $v=\omega/k$ **，而均匀平面波在一固定方向速度为** ω/k**。**

电基本振子辐射场的特征—方向性函数与方向图

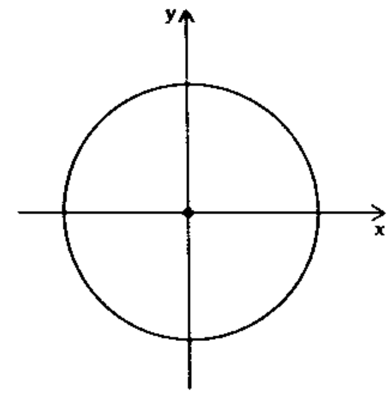
❖ **由电基本振子远区场**

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\theta}_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\mathrm{j}kI\Delta l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\sin\theta$$

$$|E_\theta|=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k|I|\Delta l}{4\pi r}|\sin\theta|$$



x-z平面



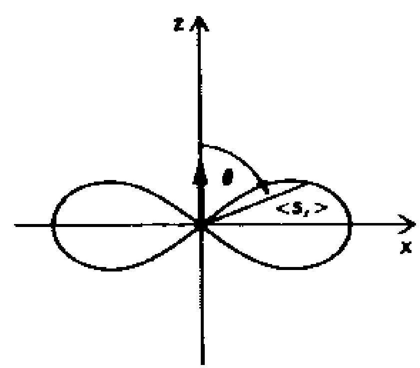
x-y平面

❖ **功率流**<S>

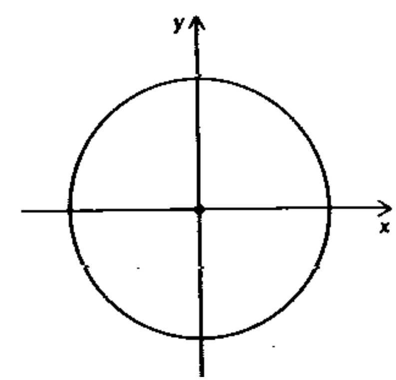
$$<\boldsymbol{S}>=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\boldsymbol{r}_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}|H_\varphi|^2=\boldsymbol{r}_0\frac{\eta_0}{2}\left(\frac{k|I|\Delta l}{4\pi r}\right)^2\sin^2\theta$$

❖ **将 $|E_\theta|$ 代入上式，得到**

$$<\boldsymbol{S}>=\boldsymbol{r}_0\frac{1}{2\eta_0}|E_\theta|^2$$

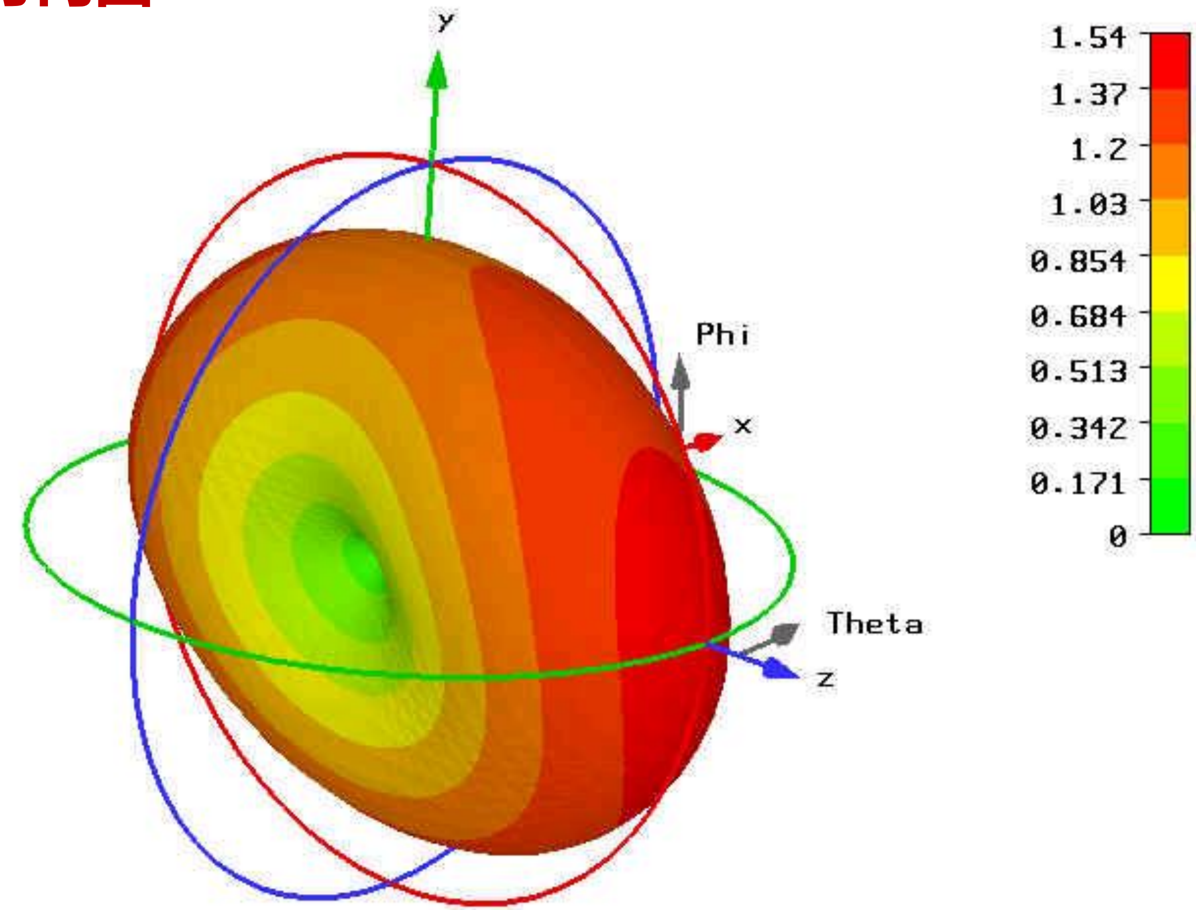


x-z平面



x-y平面

印刷偶极子天线方向图



电基本振子辐射场的特征—天线增益

❖ **功率流密度** $<\boldsymbol{S}_r>=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\boldsymbol{r}_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}|H_\varphi|^2=\boldsymbol{r}_0\frac{\eta_0}{2}(\frac{k|I|\Delta l}{4\pi r})^2\sin^2\theta$

❖ **辐射的总功率** $P=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta r^2\sin\theta<S_r>$

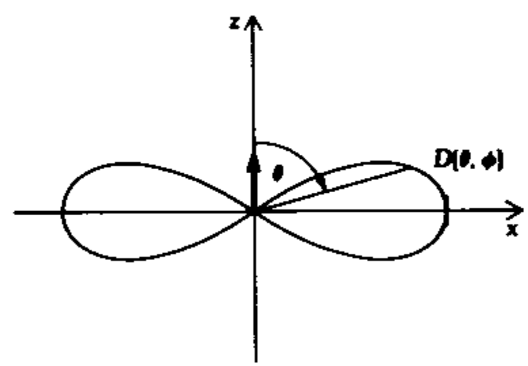
$$=\frac{\eta_0}{2}\left|\frac{kI\Delta l}{4\pi}\right|^2 2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin^3\theta=\frac{4\pi}{3}\eta_0\left|\frac{kI\Delta l}{4\pi}\right|^2$$

❖ **天线的方向增益** $G_{\mathrm{D}}(\theta,\varphi)=\frac{<Sr>}{P/4\pi r^2}=\frac{3}{2}\sin^2\theta$

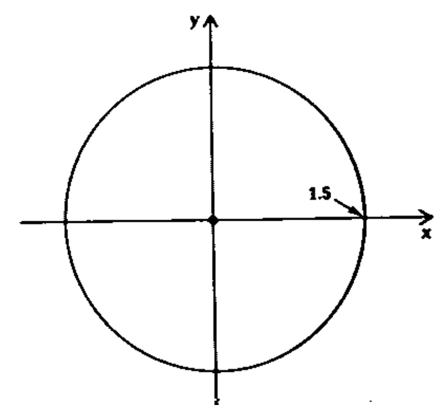
❖ **所以:**

在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ **方向，增益为 1.5**

θ**=0，增益等于零。**



x-z平面



x-y平面

电基本振子辐射场的特征—辐射电阻

❖ 定义天线辐射电阻R_{rad}为 $P=\dfrac{1}{2}I^2R_{\text{rad}}$

$$P=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta r^2\sin\theta<S_r>$$

$$=\frac{\eta_0}{2}\left|\frac{kI\Delta l}{4\pi}\right|^2 2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin^3\theta=\frac{4\pi}{3}\eta_0\left|\frac{kI\Delta l}{4\pi}\right|^2$$

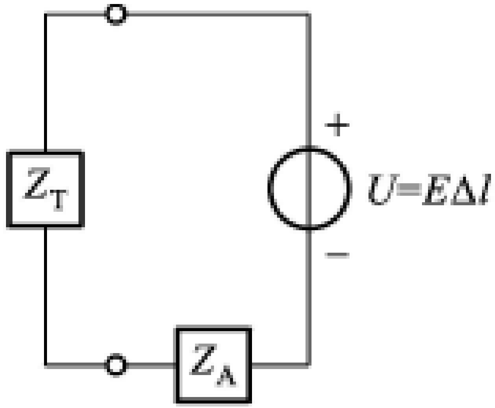
❖ 由此可得

$$R_{\text{rad}}=\frac{2P}{I^2}=\frac{\frac{8\pi}{3}\eta_0\left|\frac{kI\Delta l}{4\pi}\right|^2}{I^2}=\frac{8\pi}{3}\eta_0\left|\frac{k I\Delta l}{4\pi}\right|^2=\frac{2\eta_0}{3\lambda^2}\pi(\Delta l)^2$$

❖ 在自由空间，$\eta_0=120\pi$ ，代入上式得到

$$R_{\text{rad}}=80\pi^2\frac{(\Delta l)^2}{\lambda^2}$$

电基本振子辐射场的特征—有效面积



- 有效面积A_e定义为 $P_R = P_{rec} = A_e P_{波前}$
- $P_R = P_{rec}$ 为接收功率
- $P_{波前}$ 为接收波束波阵面到达接收天线辐射功率密度
- 在长度为 Δl 天线上感应的电压为 $U = E\Delta l$
- 天线与负载阻抗共轭匹配时天线接收功率最大 $Z_T = R_{rad} - jX_A = Z_A^*$
- 此时负载吸收功率

$$P_R = \frac{U^2}{8R_{rad}} = \frac{E^2(\Delta l)^2}{8R_{rad}} = A_e P_{波前} = A_e \frac{E^2}{2\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}$$

- 因为 $R_{rad} = \dfrac{\frac{2}{3}\pi(\Delta l)^2\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}{\lambda^2}$ 所以 $A_e = \dfrac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}(\Delta l)^2\lambda^2}{4\left[\frac{2}{3}\pi(\Delta l)^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\right]} = \dfrac{3\lambda^2}{8\pi}$

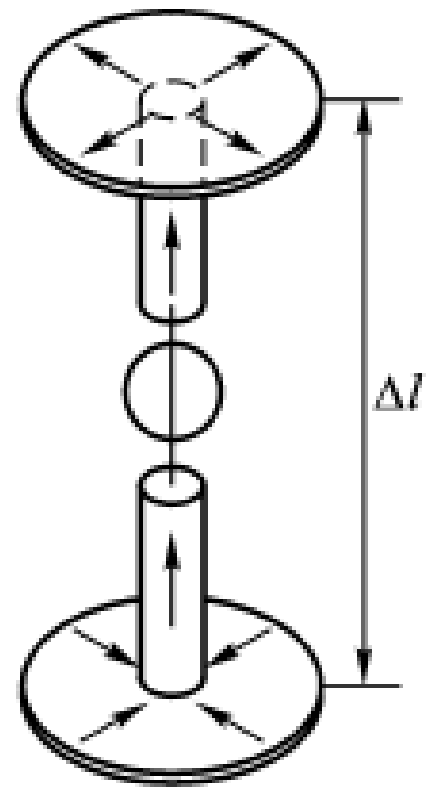
天线增益G与天线有效面积A_e普遍关系

$$A_e = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}(\Delta l)^2\lambda^2}{4\left[\frac{2}{3}\pi(\Delta l)^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\right]} = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$$

- 因为 $G_D = 3/2$；故得到 $\frac{G_D}{A_e} = \frac{3/2}{(3/8\pi)\lambda^2} = \frac{4\pi}{\lambda^2}$
- 所以 $G = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2}$ 或 $G_D = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2}$ （仅对天线无损时才成立）
- 上式是针对电基本振子这种特殊情况下导出的，但它对于所有其他天线也是成立的。
- 天线增益G与天线有效面积A_e是等价的，知道其中一个量即可得出另一个量。
- 显然，天线面积越大，有效面积也越大，但天线的增益与天线实际面积的关系并非如此简单，因为天线增益还与波长有关。

电容平板天线

- 严格地说有电流通过的一段很短的导线不能视作电流均匀分布的电基本振子，因为在短导线的两端电流必须降到零。
- 对于图示的电容平板天线，在连接两电容平板的短线段上，电流几乎均匀，可视作常数。
- 在上下两块平板上，电流都沿半径方向流动，方向却相反，一块板上电流指向圆心，另一块板上电流离开圆心。所以上下两块板在远区辐射场相互抵消。
- 这就是说对于电容平板天线，远区辐射场主要由连接电容板的短线段上流过的电流产生，而短线段上的电流可视为均匀分布。所以电容平板天线可视作电基本振子。



电容平板天线；平行板当作储存电荷的小槽，因此连接平板的短线上的电流为常数

电磁场的唯一性定理

❖ 唯一性定理要回答在什么条件下麦克斯韦方程组的解才是唯一的。

❖ 假设V内的一组源对场量产生两个不同的解 $\begin{cases}\boldsymbol{E}_a\\ \boldsymbol{H}_a\end{cases}$，$\begin{cases}\boldsymbol{E}_b\\ \boldsymbol{H}_b\end{cases}$，且均满足麦氏方程。

❖ 这两组解之差 $\begin{cases}\delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_a-\boldsymbol{E}_b\\ \delta\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_a-\boldsymbol{H}_b\end{cases}$ 也满足麦氏方程

$$\nabla\times\delta\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\delta\boldsymbol{E}+\sigma\delta\boldsymbol{E}\qquad \nabla\times\delta\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\delta\boldsymbol{H}$$

❖ 重复类似于导出复数坡印廷定理的步骤，可得到关系

$$\nabla\cdot\left(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*\right)=-\mathrm{j}\omega\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2-\varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right]-\sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2$$

❖ 或

$$\int_S\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\mathrm{j}\omega\int_V\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2-\varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right]\mathrm{d}V-\int_V\sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}V$$

电磁场的唯一性定理

$$\nabla\cdot\left(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*\right)=-\mathrm{j}\omega\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2-\varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right]-\sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2$$

$$\int_S\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\mathrm{j}\omega\int_V\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2-\varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right]\mathrm{d}V-\int_V\sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}V$$

❖ **唯一性定理要求 $|\delta\mathrm{E}|^2$及$|\delta\mathrm{H}|^2$均为零，如果对于所假定的 *V* 内的两组解在边界 *S* 面上切向电场或切向磁场唯一指定，则 *V* 内的解是唯一的。**

❖ **如果 *S* 面上的电场或磁场的切向分量给定，或者在 *S* 面上的部分区域给定 *E* 的切向分量，在 *S* 的其余表面给定 *H* 的切向分量**

$$\left.\begin{aligned}\left(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1\right)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\\\left(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1\right)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\end{aligned}\right\}\rightarrow$$ **那么在区域V内的电磁场是唯一确定的。**

等效原理

- 等效原理也源于唯一性定理。
- 等效原理指：**在某一空间区域内，能够产生同样场的两种源，称其在该区域内是等效的。**
- 如果源在闭曲面S包围的体积V内，闭曲面上有切向场 $n_0 \times H$ 和 $E \times n_0$，欲求 V 外某一点场时，有两种处理方法：
  - 直接由V内的一次源求 V 外的场；
  - 按照等效原理，假设 V 内为零场，而在界面 S 上有二次源 $n_0 \times \mathrm{H}$ 和 $E \times n_0$ ，求二次源在 V 外产生的场。
- 根据唯一性定理，二次源可以产生唯一的与真实源相同的场。因为它们在界面上有相同的切向场。

电型源与磁型源

- 二次源是一种等效源，或者说是一种虚源。
- $n_0\times H$ 相当于电流密度矢量，记作 $n_0\times H=J_s$，称为**电型源**。
- 对偶地把 $E\times n_0$ 称为磁流密度矢量，记作 $J_{ms}=E\times n_0$。称为**磁型源**。
- **注意，这里所引进的新的波源磁流，实际上就是切向电场，这纯粹是为了数学上的方便。**
- 但是真正的波源还是电荷和电流，因为切向电场实际上也由电荷和电流产生的。

磁型源作用下的麦克斯韦方程

❖ 位移电流密度和传导电流密度与磁场强度H的关系为 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D}$

❖ 引进磁流密度后，仿此也可写出 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\omega \boldsymbol{B}$

❖ 引入虚拟磁流后，按照连续性原理，必定有磁荷，于是有 $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \dfrac{-\partial \rho_{\mathrm{m}}}{\partial t}$

❖ 由于旋度的散度为零，可以推出 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_{\mathrm{m}}$

❖ 引进磁荷和磁流后，麦克斯韦方程组变为

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\omega \boldsymbol{B} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_{\mathrm{m}} \end{cases}$$

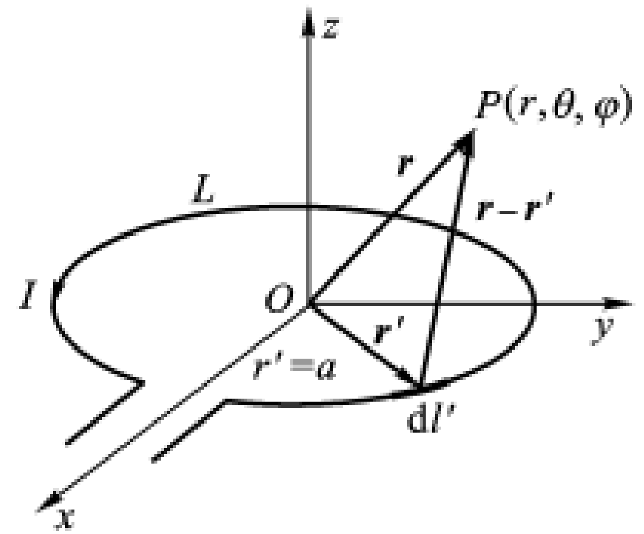
电的量和磁的量具有对偶性

电型源	磁型源
$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=0$	$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$
$\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=0$
$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$
$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\rho_{\mathrm{m}}/\mu$
$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\rho=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}+\mathrm{j}\omega\rho_{\mathrm{m}}=0$

- 这两组方程式之间存在着明显的对应关系，如果将上两组方程式中的所有场量和源量作如下代换
- 电型源方程变为磁型源方程，而磁型源方程则变为电型源方程。电型源方程和磁型源方程式的这种对应形式称为二重性或对偶性。

$\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{H}$
$\boldsymbol{H}\Rightarrow-\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{H}\Rightarrow-\boldsymbol{E}$
$\varepsilon\Rightarrow\mu$	$\varepsilon\Rightarrow\mu$
$\mu\Rightarrow\varepsilon$	$\mu\Rightarrow\varepsilon$
$\rho\Rightarrow\rho_m$	$\rho_m=-\rho$
$\boldsymbol{J}\Rightarrow\boldsymbol{J}_m$	$\boldsymbol{J}_m\Rightarrow-\boldsymbol{J}$

磁基本振子



磁基本振子

- 磁基本振子就是理想的磁偶极子。
- 任何载流细导线回路L都可看成一个磁基本振子。
- 磁基本振子模型：
  - 一个在x-y平面上半径为a的细导线小圆环。
  - 导线的线径可忽略，导线上电流可用线电流近似。
  - $a<<\lambda$，圆环上电流的振幅和相位处处相等。
- 圆环上载有高频时谐电流，$i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$，故其复数表示是，$I = I_m e^{j\varphi}$ 。
- 该磁基本振子的偶极矩M定义为 $\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{S} = IS\boldsymbol{z}_0$
- 式中，μ是磁导率，I 是复数表示的电流，S是回路L的有向面积，如果右手四指与电流方向一致，大拇指方向即S的方向。在图中，因为S在x-y平面，且逆时针转，故S的方向就是坐标轴z的正方向z_0。

磁基本振子的偶极矩M产生的矢量位A

❖ 磁基本振子M辐射的电磁场可以先求出M产生的矢量位A，然后求H和E。

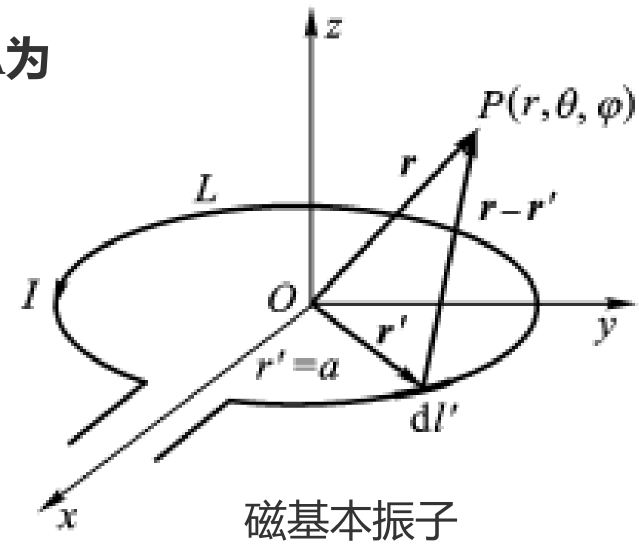
❖ 根据右上图，$J\mathrm{d}V$简化为$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$，故M产生的矢量位A为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_L \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

$$\boldsymbol{r}'=a\boldsymbol{\rho}_0'=a\left(\boldsymbol{x}_0\cos\varphi'+\boldsymbol{y}_0\sin\varphi'\right)$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\varphi}_0'a\mathrm{d}\varphi'=a\left(-\boldsymbol{x}_0\sin\varphi'+\boldsymbol{y}_0\cos\varphi'\right)\mathrm{d}\varphi'$$

$$\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}'=0 \qquad a/\lambda<<1$$



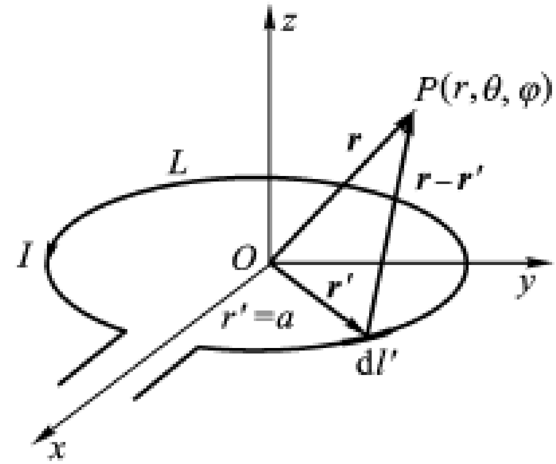
磁基本振子

❖ 最后得到 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\varphi}_0\dfrac{\mu IS}{4\pi}\left(\mathrm{j}k+\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\sin\theta \qquad S=\pi a^2$

❖ 考虑到关系式 $\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{\varphi}_0\sin\theta$

❖ 很容易写出A的一般表达式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\dfrac{1+\mathrm{j}kr}{4\pi r^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{r}$

由磁偶极子的矢量位A，求H和E



$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1+\mathrm{j}kr}{4\pi r^{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{\nabla\times\boldsymbol{A}}{\mu}=\nabla\times\left[\frac{IS}{4\pi}\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\sin\theta\boldsymbol{\varphi}_0\right]$$

$$\boldsymbol{H}=-\frac{ISk^{2}}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\left\{\boldsymbol{r}_0\left[\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^{2}}\right]2\cos\theta+\boldsymbol{\theta}_0\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^{2}}\right]\sin\theta\right\}$$

- **因为小电流环上的电流处处等幅同相，环本身又构成闭合回路，不会造成电荷的宏观堆积，故小电流环产生的标量位Φ≡0，**
- **故由** $\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}-\nabla\boldsymbol{\Phi}=-\mathrm{j}\omega A$ **，可得到电场强度**

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\varphi}_0\eta\frac{ISk^{2}}{4\pi}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\sin\theta$$

电基本振子与磁基本振子的对偶关系

- 电基本振子实际上就是振荡电偶极子 $I\Delta l\boldsymbol{z}_0 = \dfrac{\partial P}{\partial t} = \mathrm{j}\omega \boldsymbol{p}$
- 仿此，磁基本振子（载流细导线圆环）可等效为相距 Δl，两端磁荷分别为 $+q_m$ 和 $-q_{\mathrm{m}}$的振荡磁偶极子，其偶极距

$$M = q_{\mathrm{m}}\Delta \boldsymbol{l} = q_{\mathrm{m}}\Delta l\boldsymbol{z}_0 = IS\boldsymbol{z}_0$$

- 由此得到磁基本振子磁流 $i_{\mathrm{m}} = \dfrac{\mathrm{d}q_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{s}{\Delta l}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{s\mathrm{d}}{\Delta l\mathrm{d}t}\left[I_{\max}\cos(\omega t+\varphi)\right]$
- 其对应的磁流复量为 $I_{\mathrm{m}} = \mathrm{j}\omega\dfrac{s}{\Delta l}I \quad \left(I = I_{\max}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right)$
- 如果定义磁偶极子对应的磁流元为$I_m\Delta l$，那么它与电流环关系为

$$I_{\mathrm{m}}\Delta l = \mathrm{j}\omega SI = \mathrm{j}k\eta IS/\mu \qquad IS = \frac{I_{\mathrm{m}}\Delta l}{\mathrm{j}k\eta/\mu}$$

振荡电偶极子与振荡磁偶极子的对偶性

❖ **电基本振子**

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}=\varphi_0\frac{\mathrm{j}kI\Delta l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}]\sin\theta$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}$$

$$=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\mathrm{j}kI\Delta l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left\{\boldsymbol{r}_0[\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}]2\cos\theta+\boldsymbol{\theta}_0[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}]\sin\theta\right\}$$

❖ **磁基本振子**

$$\boldsymbol{H}=-\frac{ISk^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\left\{\boldsymbol{r}_0\left[\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]2\cos\theta+\theta_c\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]\sin\theta\right\}$$

$$E=\varphi_0\eta\frac{ISk^2}{4\pi}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\sin\theta$$

$$\boxed{I_\mathrm{m}\Delta l=\mathrm{j}\omega SI=\mathrm{j}k\eta IS/\mu}$$

❖ **函数结构完全相同，区别仅在于常数因子**

振荡电偶极子与振荡磁偶极子的对偶性

❖ 电基本振子 $\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mathrm{j}kI\Delta l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right]\sin\theta$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\mathrm{j}kI\Delta l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left\{\boldsymbol{r}_0\left[\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]2\cos\theta+\boldsymbol{\theta}_0\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]\sin\theta\right\}$$

❖ 如将 $IS=\frac{I_m\Delta l}{\mathrm{j}k\eta/\mu}$ 代入磁基本振子场表达式，得到

$$\boldsymbol{H}=jk\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mu I_m\Delta l\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left\{\boldsymbol{r}_0\left[\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]2\cos\theta+\boldsymbol{\theta}_0\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]\sin\theta\right\}$$

$$E=-\boldsymbol{\varphi}_0\, jk\mu I_m\Delta l\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)\sin\theta$$

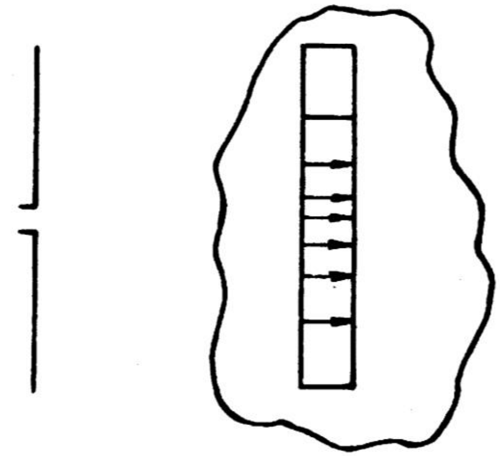
❖ 如果将电基本振子的辐射场H→–E，E→H，且将μ→ε，ε→μ，$I\to\mu I_m$，(就得到磁基本振子的辐射场。

❖ 电基本振子与磁基本振子这一对偶关系是电磁对偶性的具体例子。如果磁矩定义为 $M=\mu IS=\mu IS\boldsymbol{z}_0$ ，则就用$I\to I_m$。

电和磁对偶性的应用

❖ 电磁场方程式的二重性提供了这样一种便利，如果知道一个问题（例如电型源问题）的解就可由对偶关系得出它的对偶问题（为一磁型源问题）的解，而无需重复求解方程。

❖ 由电基本振子的辐射场写出磁基本振子的辐射场可作为二重性应用的简单例子。



(a) (b)

电振子与磁振子的对偶

(a) 电振子 (b) 磁振子（裂缝）

❖ 引入磁流、磁荷概念后，这两种基本辐射单元极其相似。

❖ 电基本振子天线表面上有交变电流，在天线的两端电流为零，而有电荷的堆积，电流和电荷之间满足连续性方程。

❖ 作为实际可行的磁振子的裂缝天线，其口径上有切向电场，相当于磁流密度，在裂缝的两端切向电场为零，即磁流为零，因而裂缝的两端也相当于磁荷的堆积。

复习

❖ 要点

– 电基本振子、磁基本振子是最基本的单元辐射天线，任何复杂天线都可看成电基本振子与磁基本振子的组合。根据电和磁的对偶原理，由电基本振子的辐射特性可对偶地得出磁基本振子的辐射特性。

– 电基本振子辐射的场在远区电场只有θ分量，磁场只有φ分量，其辐射功率流在电矩p的方向为零，与p垂直的方向辐射最强，电基本振子的增益、方向性、有效面积、辐射电阻、输入阻抗等分析结果要记牢。

❖ 复习

– 8.3-8.4

The End.

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn