James Clerk Maxwell
1831 – 1879

Lesson 11

Electromagnetic Fields and Waves

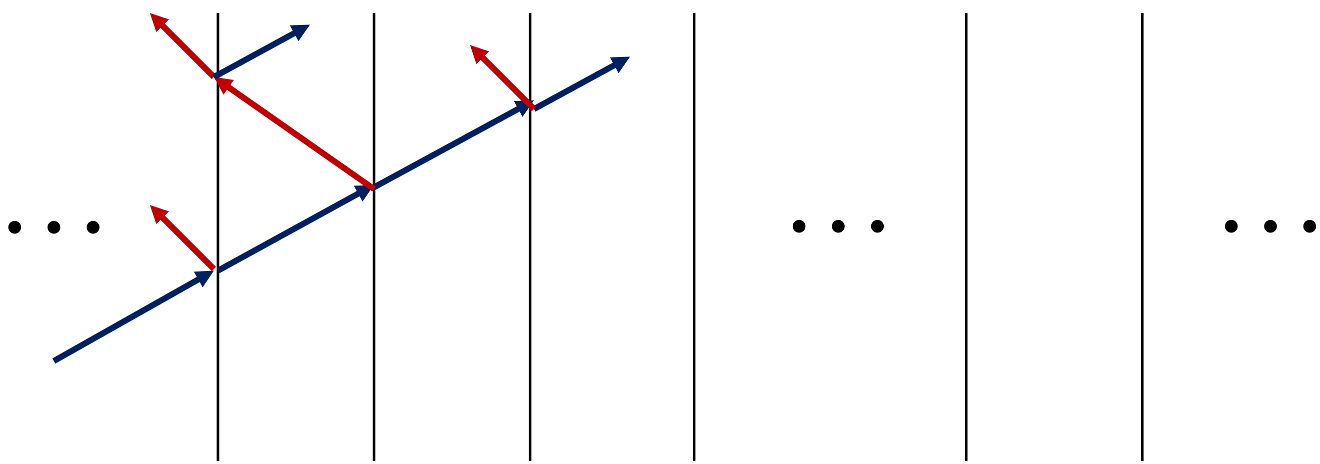
边界条件
波的反射与折射

郑史烈

Zhengsl@zju.edu.cn

波的反射与折射是研究不均匀介质中波传播的基本问题

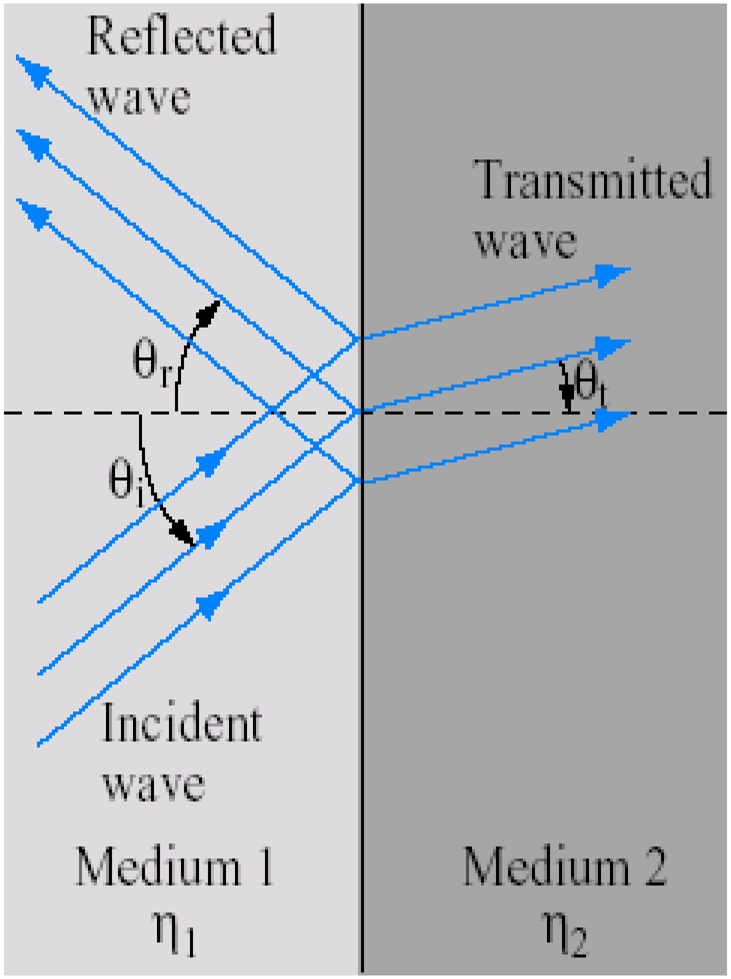
- 不均匀介质中波的传播（以一维不均匀介质为例）：
- 将一维不均匀介质用多层均匀介质代替



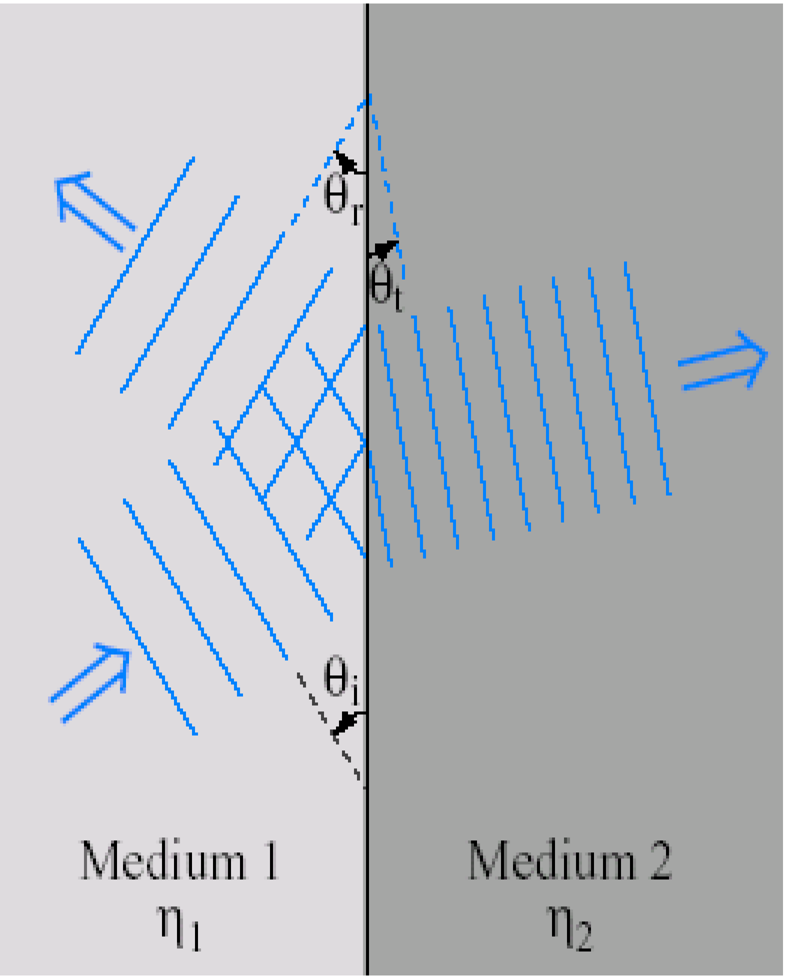
- 每一层均匀介质中波的传播属于均匀介质中波传播的问题
- **介质交界面波的反射与透射**
- 所以介质交界面对波的反射、透射是研究不均匀介质中波传播的基本问题。

介质交界面波反射、透射的图示

射线表示



波阵面表示



介质交界面波的反射、折射必须服从麦克斯韦方程

❖ 电磁波在两介质交界面的反射、折射必须服从麦克斯韦方程。

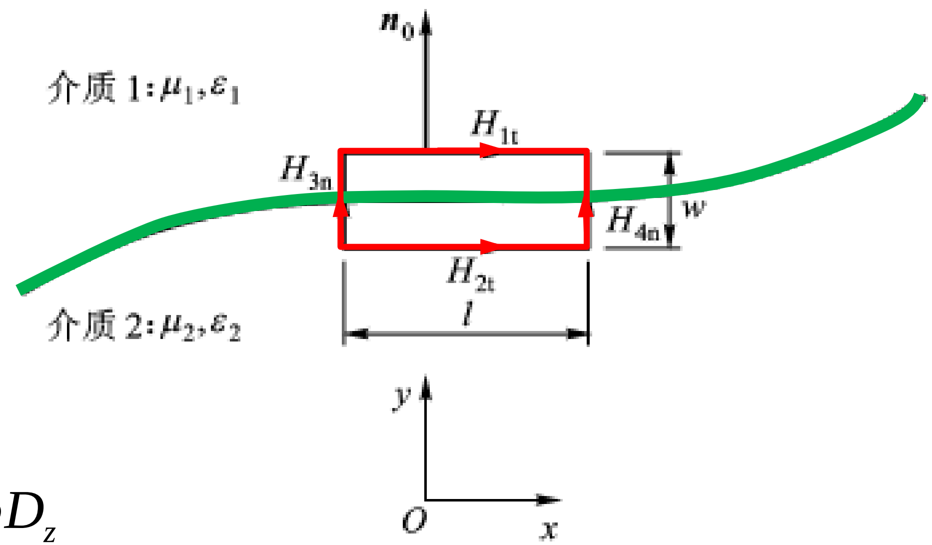
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{v}}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

❖ 要注意的是在介质交界面ε不连续，导数不存在，微分形式的麦克斯韦方程不能直接应用。

❖ 但我们可以用差分近似微分，或从积分形式的麦克斯韦方程出发导出交界面电磁场量必须满足的关系——边界条件。

边界条件的导出



- $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D}$ 的 z 分量

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \mathrm{j}\omega D_z$$

- 其差分形式是

$$\frac{H_{4n} - H_{3n}}{l} - \frac{H_{1t} - H_{2t}}{w} = J_z + \mathrm{j}\omega D_z$$

$$H_{2t} - H_{1t} = J_z w + (\mathrm{j}\omega D_z + \frac{H_{3n} - H_{4n}}{l})w$$

- 使矩形截面收缩到一个点，且窄边w比长边l更快趋于零，并定义 $\boldsymbol{J}_S = \lim\limits_{w \to 0} \boldsymbol{J}_V w$
- 得到 $(H_{2t} - H_{1t}) = J_S$ 或 $\boldsymbol{n}_0 \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_S$
- 同样的分析应用于 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{B}$ 的 z 分量
- 可得 $E_{1t} = E_{2t}$ 或 $\boldsymbol{n}_0 \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0$

边界条件的表述

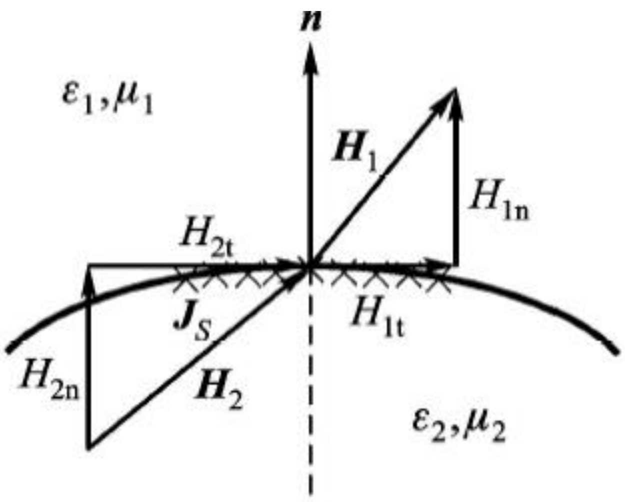
$$\boldsymbol{n}_0\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_S \qquad \boldsymbol{n}_0\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0$$

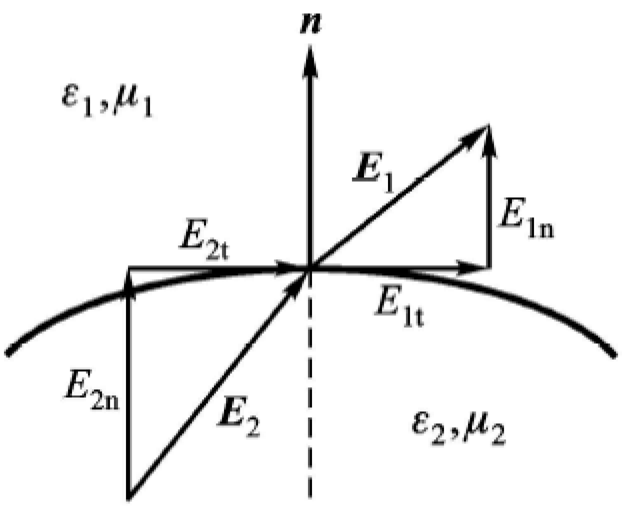
❖ 在介质交界面切向电场连续，而切向磁场不连续，其值等于表面电流。

❖ 常规材料的电导率总是有限，趋肤深度δ不等于零为一有限值。当$w\to 0$，即使体电流密度不为零，面电流密度还是等于零。所以面电流密度仅对于完纯导体才存在。因此边界条件又可归结为

❖ 两个具有有限电导率的介质，交界面切向电场和切向磁场都连续。

❖ 对于完纯导体交界面切向电场为零，$E_{1t}=0$，表面电流$J_S=n_0\times H$，n_0是导体表面的单位法向矢量。





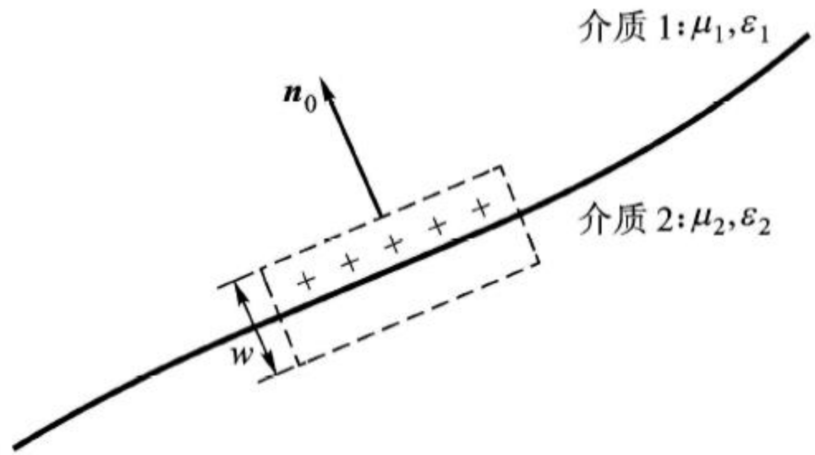
边界条件的导出

❖ 跨越交界面取一小盒子，并将

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$$

❖ 用于该小盒子，即流出该小盒子的电通量等于该小盒子内电荷。当高度w比底面积更快趋于零时，

$$\underbrace{\left[D_{1n}-D_{2n}\right]\cdot\left[\text{底面积}\right]}_{\text{流出小盒的电通量}}=\underbrace{\rho_S\cdot\left[\text{底面积}\right]}_{\text{小盒内总电荷}}$$



矢量D的边界条件

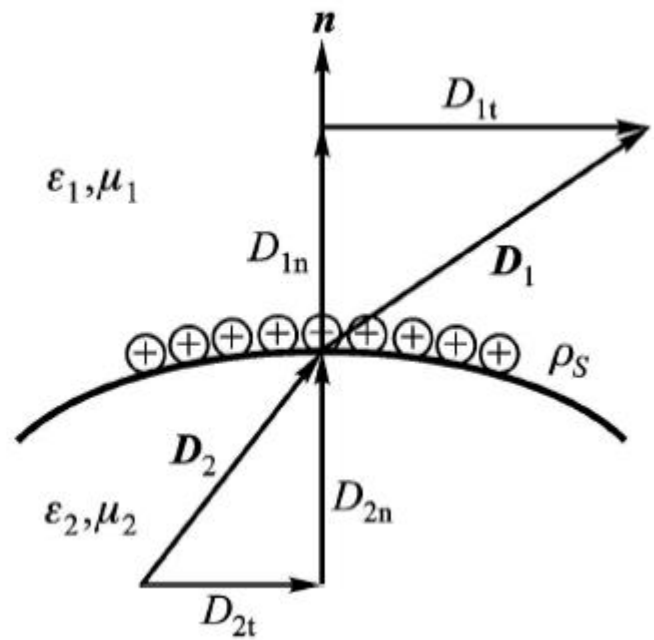
❖ 这样从 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$ 得到 $D_{1n}-D_{2n}=\rho_S$ $\boldsymbol{n}_0\cdot\left(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2\right)=\rho_S$

❖ 同样从 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 得到 $B_{1n}-B_{2n}=0$ $\boldsymbol{n}_0\cdot\left(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2\right)=0$

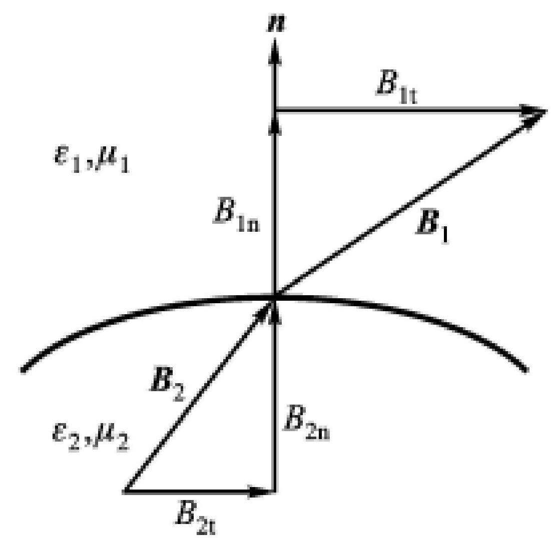
边界条件表述

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot \left(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2\right) = \rho_S \qquad \boldsymbol{n}_0 \cdot \left(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2\right) = 0$$

- **磁通量密度B的法向分量在交界面两旁连续，电通量密度D的法向分量在交界面两旁的不连续等于交界面表面电荷密度ρ_S。**
- **完纯导体内部不存在电磁场，即$E_{2n} = 0$，$D_{2n} = 0$**
- **所以完纯导体表面 $B_n = 0$，$D_n = \rho_S$，**
- **即完纯导体表面磁场的法线分量等于零，电通量密度的法向分量等于导体表面电荷密度ρ_S。**



n

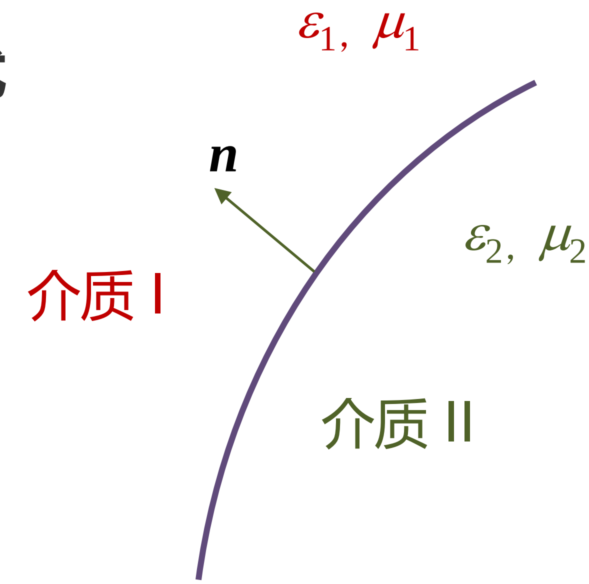


边界条件

❖ 介质交界面波的反射与透射特性由边界条件决定。

❖ 边界条件：麦克斯韦方程在介质交界面的形式

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_S$$
$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0$$
$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_S$$
$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0$$



❖ 特殊情况：介质——导体交界面（导体中场量=0）

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1=E_{t1}=0 \qquad \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{B}_1=\mathrm{B}_{n1}=0$$
$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1=H_{t1}=\boldsymbol{J}_S \qquad \boldsymbol{n}\cdot D_1=\mathrm{D}_{n1}=\rho_S$$

介质导体交界面边界条件

介质——导体交界面

切向电场为零 $E_t=0$

法向磁场为零 $H_n=0$

法向电场在法线n方向导数为零 $\frac{dE_n}{dn}=0$

切向磁场在法线方向倒数为零 $\frac{dH_t}{dn}=0$

介质交界面反射透射的两种情况 (本征坐标系中)

❖ TE（垂直极化）

– k 只有两个分量， $\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{x}_0 + k_z \boldsymbol{z}_0$

– E只有 y 分量， $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{y}_0 E_y$

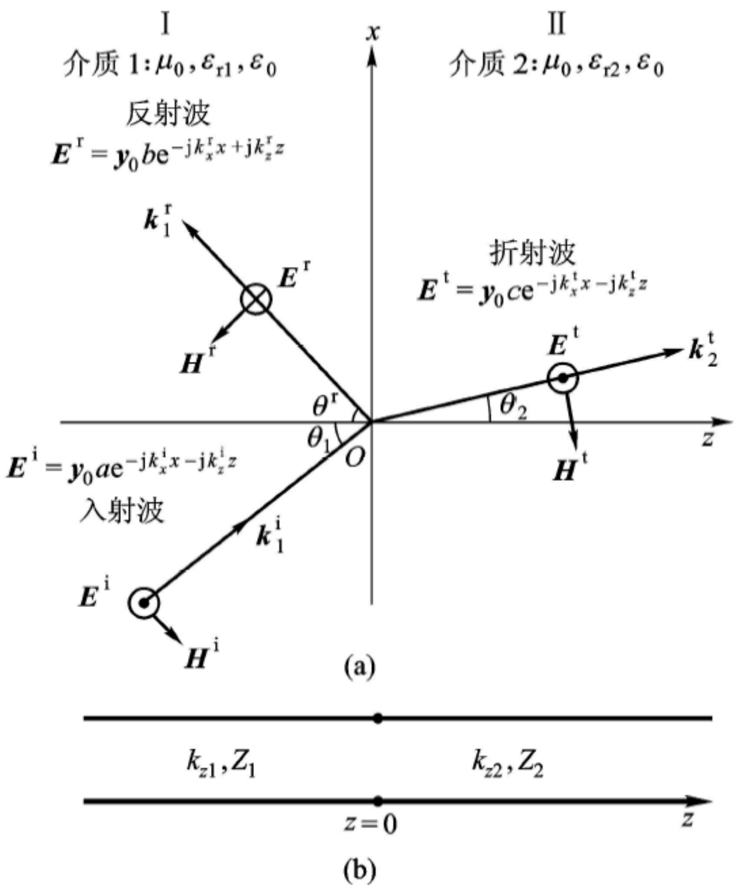
– H有纵向 z 分量， $\boldsymbol{H} = H_x \boldsymbol{x}_0 + H_z \boldsymbol{z}_0$

– E垂直于入射面（k与法线组成的平面）

定义反射系数 $\Gamma = \dfrac{E_y^{\mathrm{r}}}{E_y^{\mathrm{i}}}$

$$\boxed{\text{定义透射系数}\quad T = \frac{E_y^{\mathrm{t}}}{E_y^{\mathrm{i}}}}$$

❖ **介质交界面对波的反射、透射归结为求反射系数Γ与透射系数T。**



介质交界面对TE平面波（垂直极化波）的反射和透射

介质交界面反射透射的两种情况 (本征坐标系中)

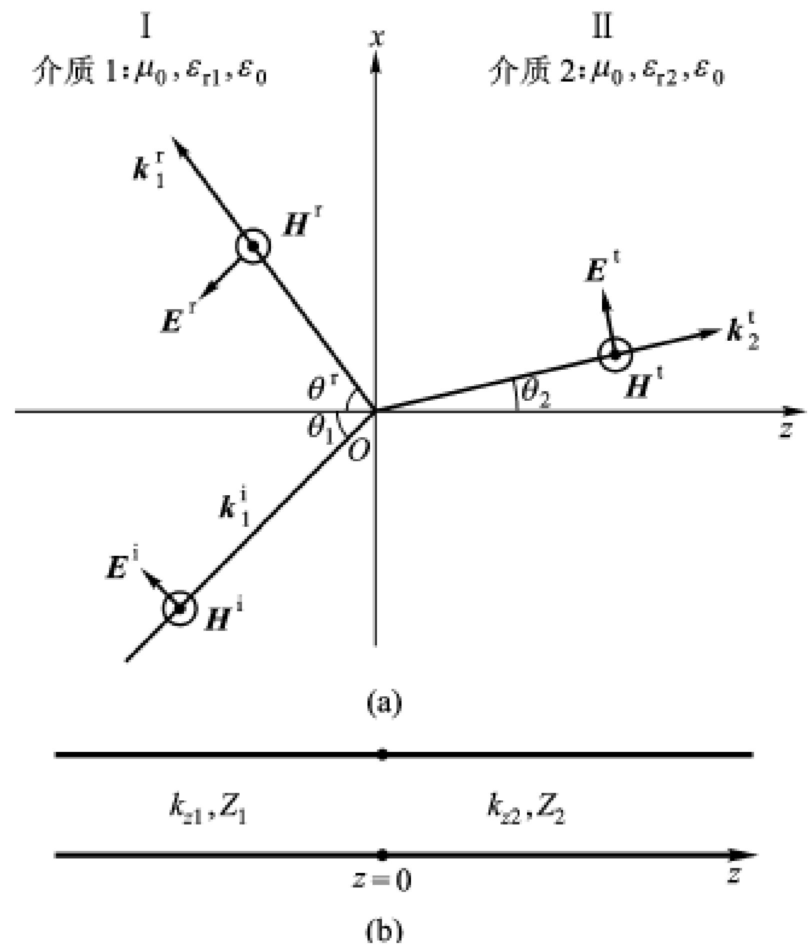
❖ TM（平行极化）

- k 只有两个分量，$\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{x}_0 + k_z \boldsymbol{z}_0$
- H只有 y 分量，$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{y}_0 H_y$
- E有纵向 z 分量，$\boldsymbol{E} = E_x \boldsymbol{x}_0 + E_z \boldsymbol{z}_0$
- E在入射面内（k与法线组成的平面）

定义反射系数 $\Gamma(z=0) = \dfrac{E_x^{\mathrm{r}}}{E_x^{\mathrm{i}}}$

定义透射系数 $T(z=0) = \dfrac{H_y^{\mathrm{t}}}{H_y^{\mathrm{i}}}$

❖ **介质交界面对波的反射、透射归结为求反射系数Γ与透射系数T。**



介质交界面对TM波平行极化波的反射、透射

介质交界面反射、透射的分析方法

❖ TE（垂直极化）

已知：入射波 $E^{\mathrm{i}}=\boldsymbol{y}_0 E_y=\boldsymbol{y}_0 a \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z}$

由麦克斯韦方程求出 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}=\boldsymbol{x}_0 H_x^{\mathrm{i}}+\boldsymbol{z}_0 H_z^{\mathrm{i}}$

引入反射系数 $\boldsymbol{\Gamma}',\left(E_y^{\mathrm{r}}=\boldsymbol{\Gamma}' E_y^{\mathrm{i}}\right)$,

写出反射波 $E_y^{\mathrm{r}},H_x^{\mathrm{r}}$.

引入透射系数 $T',\left(E_y^{\mathrm{t}}=T' E_y^{\mathrm{i}}\right)$,

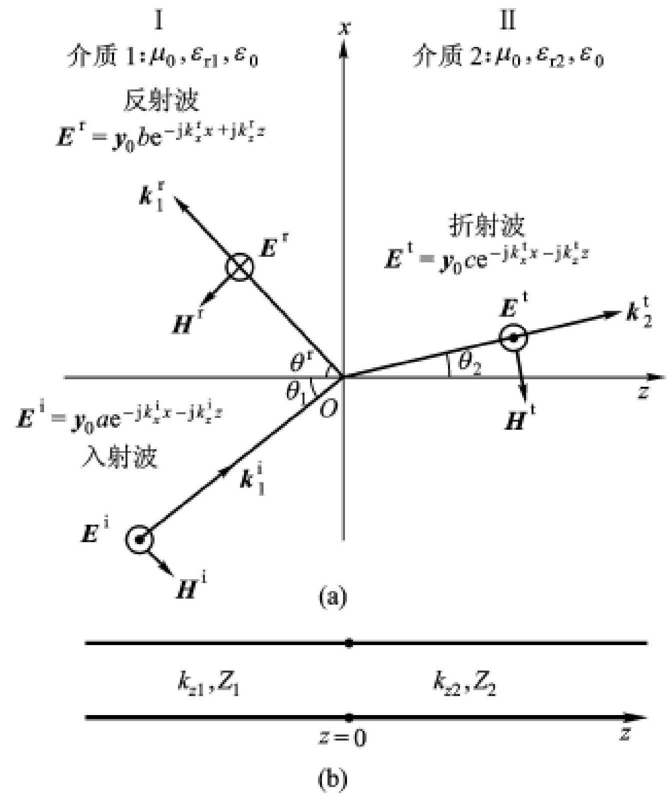
写出透射波 $E_y^{\mathrm{t}},H_x^{\mathrm{t}}$.

在介质交界面两旁切向场量连续

$E_y^{\mathrm{i}}+E_y^{\mathrm{r}}=E_y^{\mathrm{t}}$

$H_x^{\mathrm{i}}+H_x^{\mathrm{r}}=H_x^{\mathrm{t}}$

求出 $\boldsymbol{\Gamma}',T'$.



介质交界面对TE平面波（垂直极化波）的反射和透射

介质交界面反射、透射的分析方法

❖ **TM（平行极化）**

入射波 $H^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{y}_0 H_y = \boldsymbol{y}_0 a \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}} x} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}} z}$

由麦克斯韦方程求出 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{x}_0 E_x^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{z}_0 E_z^{\mathrm{i}}$

引入反射系数 $\boldsymbol{\Gamma}'', \left(E_x^{\mathrm{r}} = \Gamma'' E_x^{\mathrm{i}}\right),$

写出反射波 $H_y^{\mathrm{r}}, E_x^{\mathrm{r}}$

引入透射系数 $T'', \left(H_y^{\mathrm{t}} = T'' H_y^{\mathrm{i}}\right),$

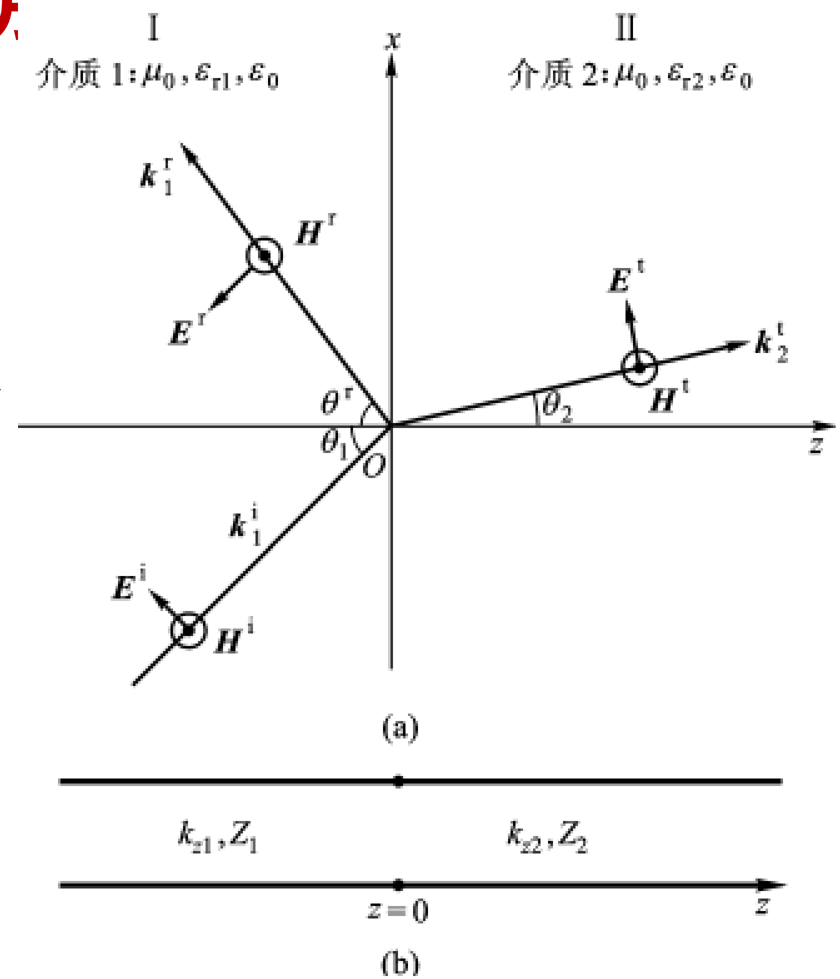
写出透射波 $H_y^{\mathrm{t}}, E_x^{\mathrm{t}}$

在介质交界面两旁切向场量连续

$$H_y^{\mathrm{i}} + H_y^{\mathrm{r}} = H_y^{\mathrm{t}}$$

$$E_x^{\mathrm{i}} + E_x^{\mathrm{r}} = E_x^{\mathrm{t}}$$

求出 $\boldsymbol{\Gamma}'', T''.$



介质交界面对TM波平行板化波的反射、透射

场量匹配法求介质交界面对TE波的反射与折射

❖ 场量匹配法：介质交界面两旁电场与磁场的切向分量连续

❖ 入射波场：TE入射平面波电场只有y分量

$$E_y^{\mathrm{r}}(x,z)=b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z}$$

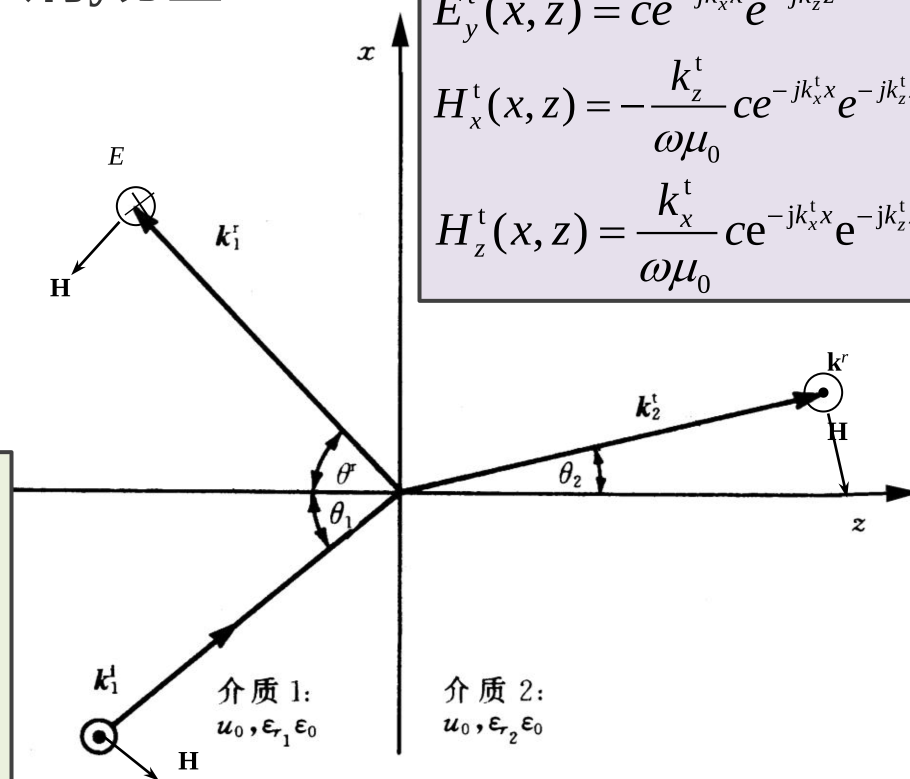
$$H_x^{\mathrm{r}}(x,z)=\frac{k_z^{\mathrm{r}}}{\omega\mu_0}b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z}$$

$$H_z^{\mathrm{r}}(x,z)=\frac{k_x^{\mathrm{r}}}{\omega\mu_0}b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z}$$

$$E_y^{\mathrm{t}}(x,z)=ce^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}e^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z}$$

$$H_x^{\mathrm{t}}(x,z)=-\frac{k_z^{\mathrm{t}}}{\omega\mu_0}ce^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}e^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z}$$

$$H_z^{\mathrm{t}}(x,z)=\frac{k_x^{\mathrm{t}}}{\omega\mu_0}ce^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z}$$



$$E_y^{\mathrm{i}}(x,z)=a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z}$$

$$H_x^{\mathrm{i}}(x,z)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\frac{\partial E_y^{\mathrm{i}}}{\partial z}=-\frac{k_z}{\omega\mu_0}a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z}$$

$$H_z^{\mathrm{i}}(x,z)=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\frac{\partial E_y^{\mathrm{i}}}{\partial x}=\frac{k_x}{\omega\mu_0}a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z}$$

边界条件的应用

- **交界面两边电场、磁场切向分量连续，要求对于任何 x 有关系**

$$E_y^{\mathrm{i}}(x,0)+E_y^{\mathrm{r}}(x,0)=E_y^{\mathrm{t}}(x,0)$$

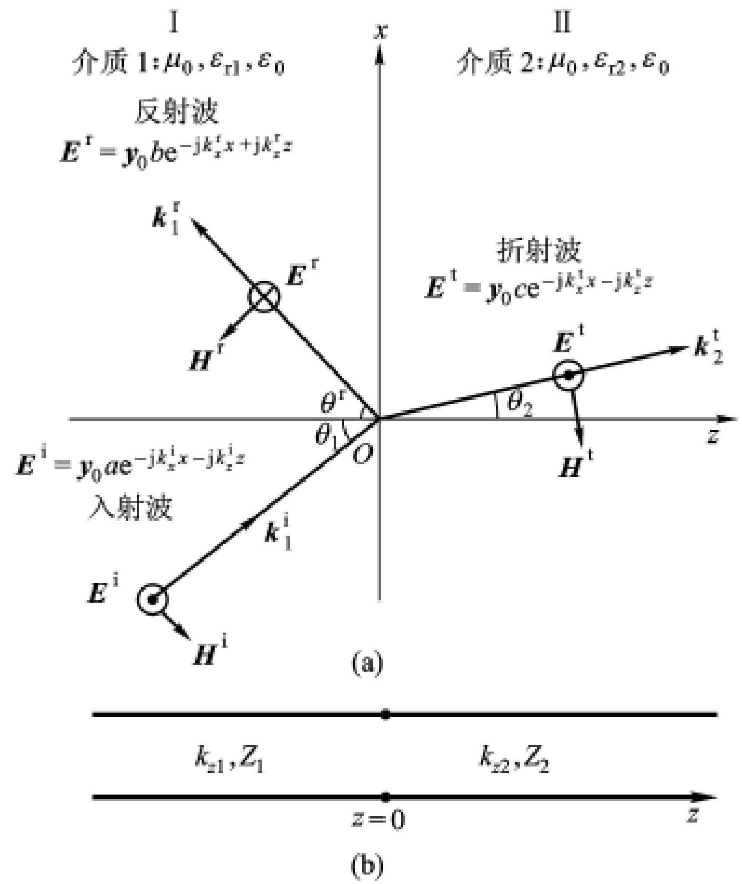
$$H_x^{\mathrm{i}}(x,0)+H_x^{\mathrm{r}}(x,0)=H_x^{\mathrm{t}}(x,0)$$

- **或**

$$a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}+b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}=c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}$$

$$-\frac{k_z^{\mathrm{i}}}{\omega\mu_0}a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}+\frac{k_z^{\mathrm{r}}}{\omega\mu_0}b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}=\frac{k_z^{\mathrm{t}}}{\omega\mu_0}c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}$$

- **从这两个方程可得到什么信息?**



介质交界面对TE平面波（垂直极化波）的反射和透射

反射定理 $\theta_1=\theta^{\mathrm{r}}$

$$ae^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}+be^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}=ce^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}$$

$$-\frac{k_z^{\mathrm{i}}}{\omega\mu_0}ae^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}+\frac{k_z^{\mathrm{r}}}{\omega\mu_0}be^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}=\frac{k_z^{\mathrm{t}}}{\omega\mu_0}ce^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}$$

- 要使上两式对任意 x 都成立，只有

$$k_x^{\mathrm{i}}=k_x^{\mathrm{r}}=k_x^{\mathrm{t}}=k_x$$

- 由此可得 $k_1\sin\theta_1=k_2\sin\theta_2$ $\quad n=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}1}}\sin\theta_1=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}2}}\sin\theta_2} \qquad \boxed{n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2}$$

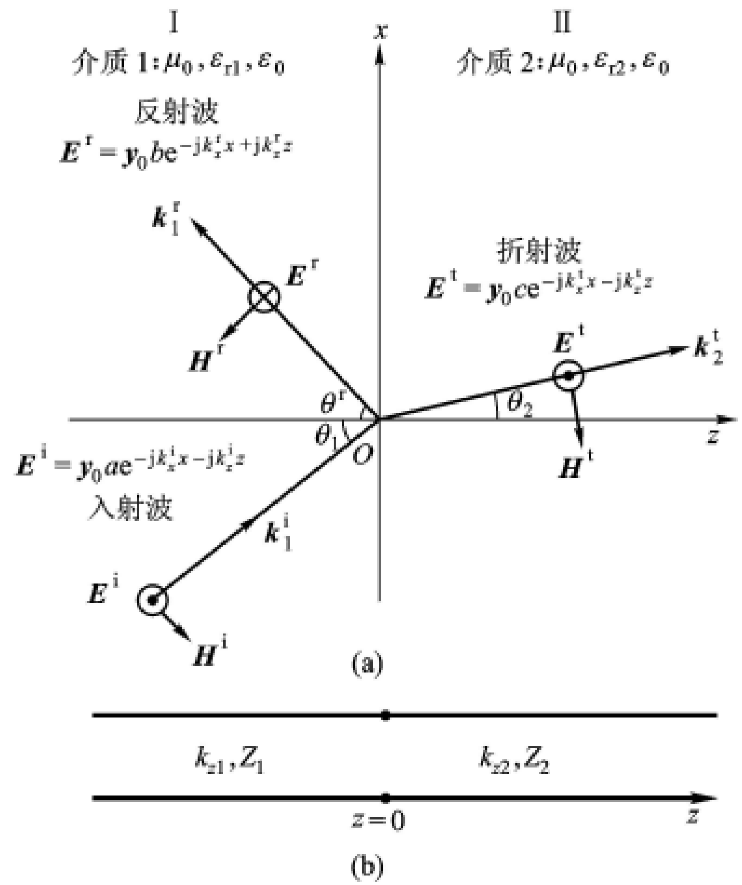
- 这就是物理学中熟知的斯耐尔定律

$$k_x^{\mathrm{i}}=k_x^{\mathrm{r}}=k_x=k_1\sin\theta_1 \qquad k_z^{\mathrm{r}}=k_z^{\mathrm{i}}=\sqrt{k_1^2-k_x^2}$$

- 由上两式可知，入射角与反射角的正切

  具有相同的数值 k_x/k_{z1} 即 $\boxed{\theta_1=\theta^{\mathrm{r}}}$

- 这就是反射定理



介质交界面对TE平面波（垂直极化波）的反射和透射

反射系数与折射系数

$$ae^{-jk_x^i x}+be^{-jk_x^r x}=ce^{-jk_x^t x} \qquad -\frac{k_z^i}{\omega\mu_0}ae^{-jk_x^i x}+\frac{k_z^r}{\omega\mu_0}be^{-jk_x^r x}=-\frac{k_z^t}{\omega\mu_0}ce^{-jk_x^t x}$$

❖ **在边界面上z=0**

❖ **得到** $a+b=c$ $\qquad Y_i=\dfrac{k_{zi}}{\omega\mu_0} \qquad i=1或2$

$$Y_1(a-b)=Y_2c \qquad \boxed{k_z^t=k_{z2}=\sqrt{k_2^2-k_x^{t2}}=k_0\sqrt{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}\sin^2\theta_1}}$$

❖ Y_i **具有导纳量纲，叫做** z **方向特征波导纳，其倒数**$Z_i=1/Y_i$**具有阻抗量纲，叫做** z **方向特征波阻抗。**

❖ **由此得到反射系数Γ (z = 0)与透射系数T(z=0)**

$$\Gamma(z=0)=\frac{E_y^r(z=0)}{E_y^i(z=0)}=\frac{b}{a}=\frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}=\frac{k_{z1}-k_{z2}}{k_{z1}+k_{z2}}$$

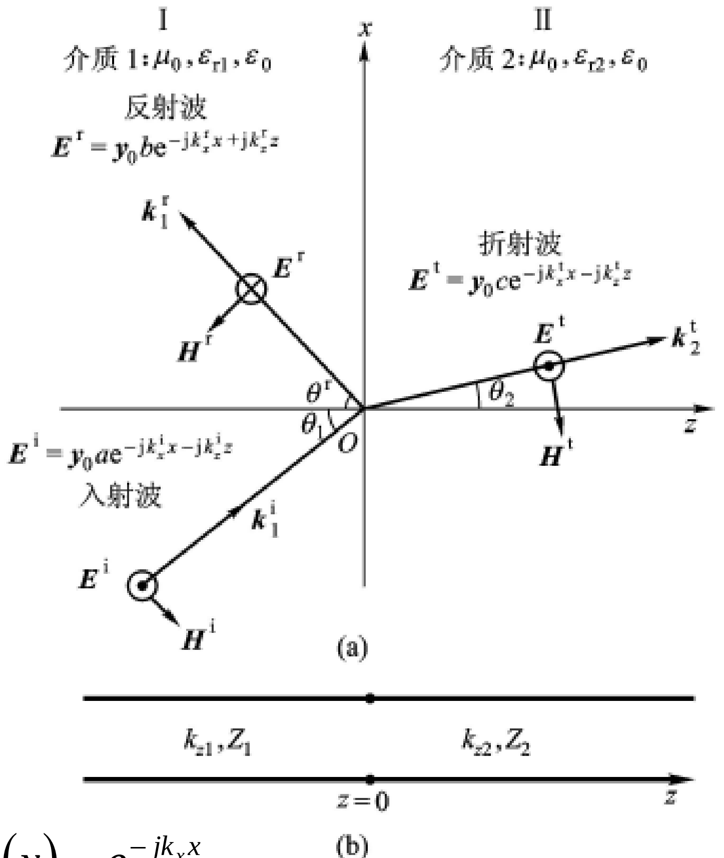
$$T(z=0)=\frac{E_y^t(z=0)}{E_y^i(z=0)}=\frac{c}{a}=\frac{2Y_1}{Y_1+Y_2}=\frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{2k_{z1}}{k_{z1}+k_{z2}}=1+\Gamma(z=0)$$

传输线模型法求介质交界面对TE波的反射与折射

❖ 区域I、II z方向波的传播都可用特定参数的传输线等效。

$$\kappa_1 = k_{z_1} = k_1 \cos\theta_1 \qquad Z_1 = \omega\mu / k_{z_1}$$

$$\kappa_2 = k_{z_2} = \sqrt{k_2^2 - k_{x_1}^2} = \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin\theta_1)^2} \qquad Z_2 = \omega\mu / k_{z_2}$$



❖ 边界条件 $\boldsymbol{E}_{t_1} = \boldsymbol{E}_{t_2} \qquad \boldsymbol{H}_{t_1} = \boldsymbol{H}_{t_2}$

$$\boldsymbol{E}_{t_1} = \boldsymbol{y}_0 E_{y_1} = -\boldsymbol{y}_0 \varphi(x) U_1(z)$$

$$\boldsymbol{H}_{t_1} = \boldsymbol{x}_0 H_{x_1} = \boldsymbol{x}_0 \varphi(x) I_1(z)$$

$$\boldsymbol{E}_{t_2} = \boldsymbol{y}_0 E_{y_2} = -\boldsymbol{y}_0 \varphi(x) U_2(z)$$

$$\boldsymbol{H}_{t_2} = \boldsymbol{x}_0 H_{x_2} = \boldsymbol{x}_0 \varphi(x) I_2(z)$$

❖ 模式函数满足 $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + k_x^2\right)\varphi(x) = 0$ 其解为 $\varphi(x) = e^{-jk_x x}$

❖ 所以

$$U_1(z=0) = U_2(z=0) \qquad I_1(z=0) = I_2(z=0)$$

传输线模型法求介质交界面对TE波的反射与折射

$$U_1(z=0)=U_2(z=0) \qquad I_1(z=0)=I_2(z=0)$$

❖ 两传输线在界面可直接连接，故有

$$\boxed{\Gamma(z=0)=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}}$$

❖ 因为 $U_1(z)=U_1^{\mathrm{i}}\left[1+\Gamma(z)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z_1}z}$

$$U_2(z)=U_2^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z_2}z}$$

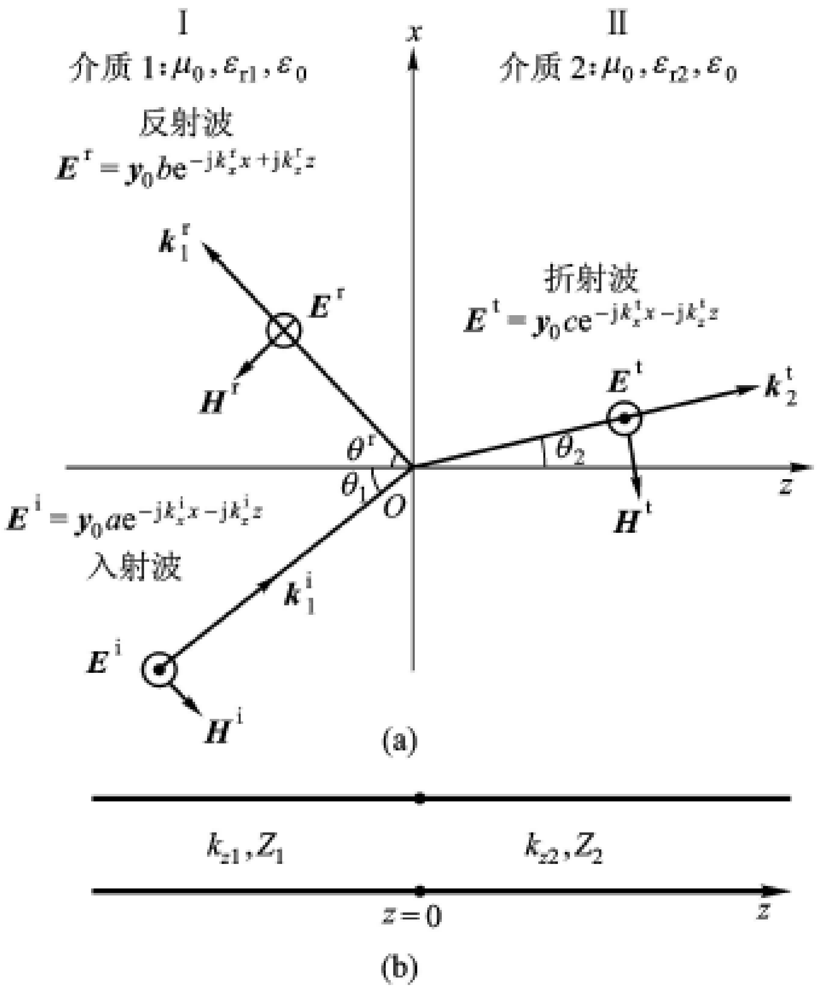
❖ 在z = 0交界面，$U_1(0)=U_2(0)$

$$U_1^{\mathrm{i}}\left(1+\Gamma(z=0)\right)=U_2^{\mathrm{i}}$$

❖ 所以折射系数 $T(z=0)=\dfrac{E_y^{\mathrm{t}}}{E_y^{\mathrm{i}}}=\dfrac{U_2^{\mathrm{i}}}{U_1^{\mathrm{i}}}$

$$\boxed{T(z=0)=1+\Gamma(z=0)}$$

❖ 与前面用场量匹配法得到的结果一致。



纵向场分布

❖ 横向场量沿纵向的分布与电压U、电流 I 沿传输线分布相同。

❖ $z<0$区域 I

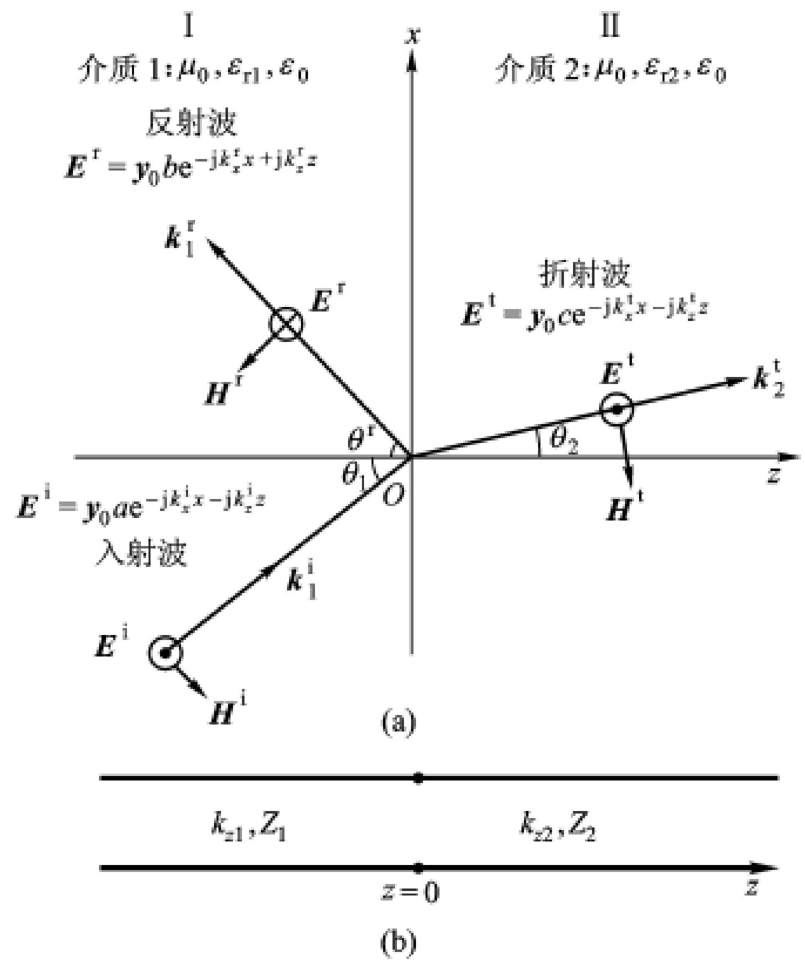
$$U_1(z)=\left[1+\Gamma_1(z)\right]U_1^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z_1}z}$$

$$I_1(z)=\left[1-\Gamma_1(z)\right]\frac{U_1^{\mathrm{i}}}{Z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z_1}z}$$

❖ $z>0$的区域 II

$$U_2(z)=U_2^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z_2}z}$$

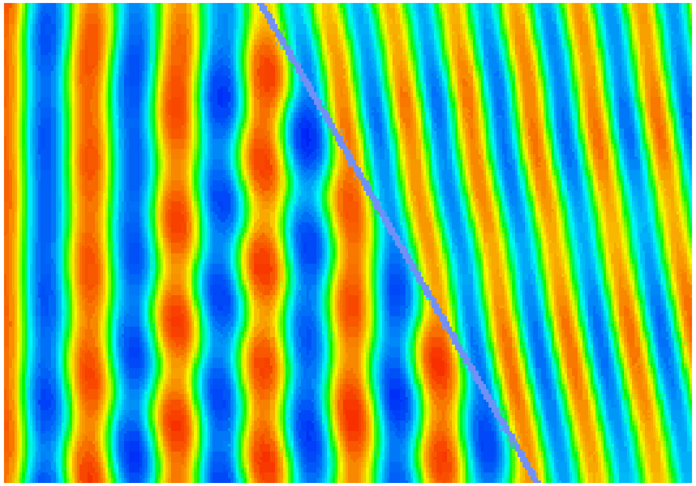
$$I_2(z)=\frac{U_2^{\mathrm{i}}}{Z_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z_2}z}$$



❖ $z=0$ 处电压U连续 $\left[1+\Gamma_1(z=0)\right]U_1^{\mathrm{i}}=U_2^{\mathrm{i}}$ $\dfrac{U_2^{\mathrm{i}}}{U_1^{\mathrm{i}}}=1+\Gamma_1(z=0)=T(z=0)$

区域 I 与 II 波传播的特征

- 区域 I、II 都有沿界面分量的波$e^{-jk_x x}$ 传播。
- 区域 I 入射波与反射波的叠加，与界面垂直的方向形成驻波。
- 沿界面方向为以 $e^{-jk_x x}$ 表示的行波。
- 区域 I I则是以 k_z 为特征的平面波。



场量匹配法求介质交界面对TM波的反射与折射

❖ 入射波场： $H_y^{\mathrm{i}} = a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z}$

从 $\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon \boldsymbol{E}$ 得到

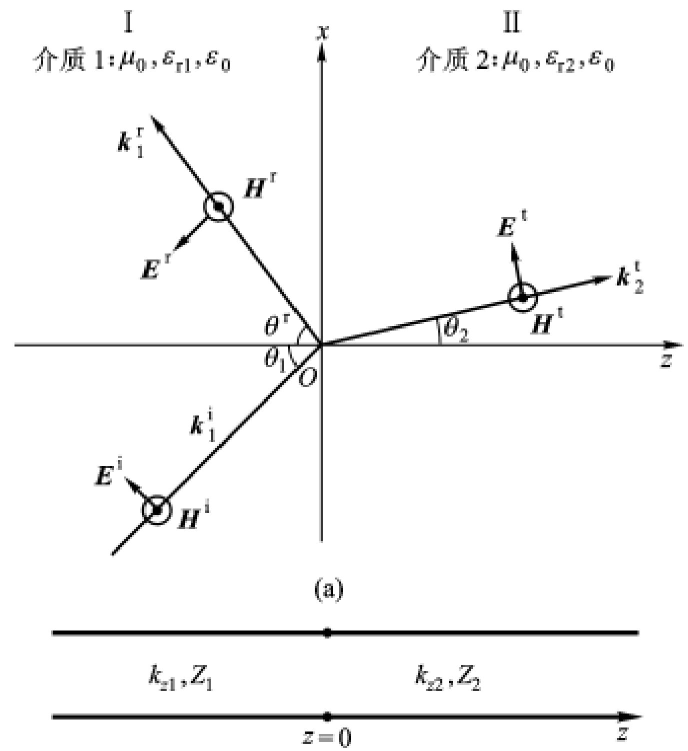
$$E_x^{\mathrm{i}} = \frac{k_z^{\mathrm{i}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r_1}}\varepsilon_0} a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z} \qquad E_z^{\mathrm{i}} = -\frac{k_x^{\mathrm{i}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r_1}}\varepsilon_0} a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z}$$

同样写出反射波场 $H_y^{\mathrm{r}} = b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x + \mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z}$

$$E_x^{\mathrm{r}} = -\frac{k_z^{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r_1}}\varepsilon_0} b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{r}x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z} \qquad E_z^{\mathrm{r}} = -\frac{k_x^{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r_1}}\varepsilon_0} b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{r}x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z}$$

同样写出折射波场 $H_y^{\mathrm{t}} = c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z}$

$$E_x^{\mathrm{t}} = \frac{k_z^{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r_2}}\varepsilon_0} c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z} \qquad E_z^{\mathrm{t}} = -\frac{k_x^{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r_2}}\varepsilon_0} c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z}$$



场量匹配法求介质交界面对TM波的反射与折射

❖ 边界条件关系式

$$H_y^{\mathrm{i}}(x,0)+H_y^{\mathrm{r}}(x,0)=H_y^{\mathrm{t}}(x,0)$$

$$E_x^{\mathrm{i}}(x,0)+E_x^{\mathrm{r}}(x,0)=E_x^{\mathrm{t}}(x,0)$$

❖ 可以得到与TE波类似的关系式

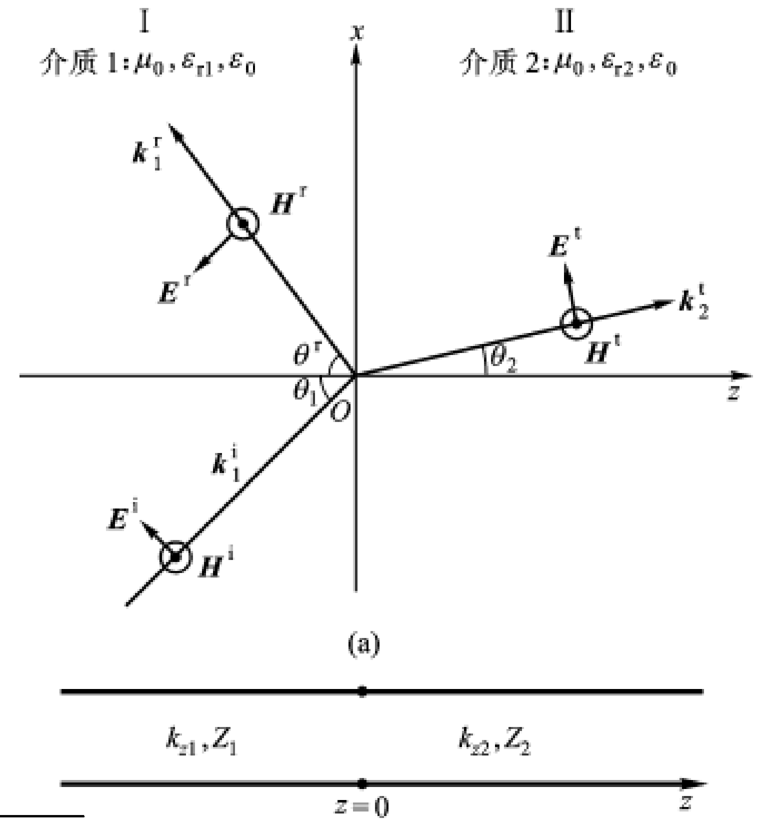
$$a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}+b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}=c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}$$

$$\frac{k_z^{\mathrm{i}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\varepsilon_0}a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}-\frac{k_z^{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\varepsilon_0}b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}=\frac{k_z^{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_2}\varepsilon_0}c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}$$

❖ 由此得到： $k_x^{\mathrm{i}}=k_x^{\mathrm{r}}=k_x^{\mathrm{t}}=k_x=k_1\sin\theta_1$

$$k_z^{\mathrm{i}}=k_z^{\mathrm{r}}=k_{z_1}=k_1\cos\theta_1$$

$$k_z^{\mathrm{t}}=k_{z_2}=\sqrt{k_2^2-k_x^{\mathrm{t}2}}=k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}_2}-\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\sin^2\theta_1}$$



❖ **由介质1的色散关系也可得出入射角与反射角相等的结论，折射角θ_2与入射角θ_1也满足斯耐尔定律。**

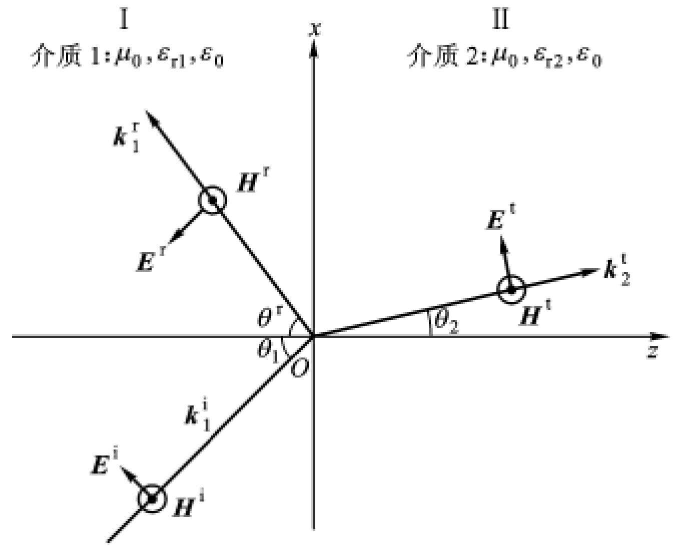
场量匹配法求介质交界面对TM波的反射与折射

$$a e^{-jk_x^i x} + b e^{-jk_x^r x} = c e^{-jk_x^t x}$$

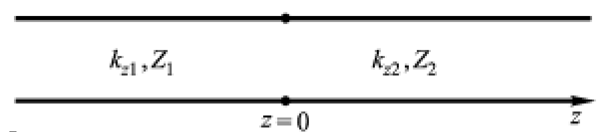
$$\frac{k_z^i}{\omega \varepsilon_{r_1} \varepsilon_0} a e^{-jk_x^i x} - \frac{k_z^r}{\omega \varepsilon_{r_1} \varepsilon_0} b e^{-jk_x^r x} = \frac{k_z^t}{\omega \varepsilon_{r_2} \varepsilon_0} c e^{-jk_x^t x}$$

❖ **边界面z=0，得到**

$$\begin{cases} a + b = c \\ Z_1 (a - b) = Z_2 c \end{cases} \qquad Z_i = \frac{k_{z_i}}{\omega \varepsilon_{r_i} \varepsilon_0}$$



(a)

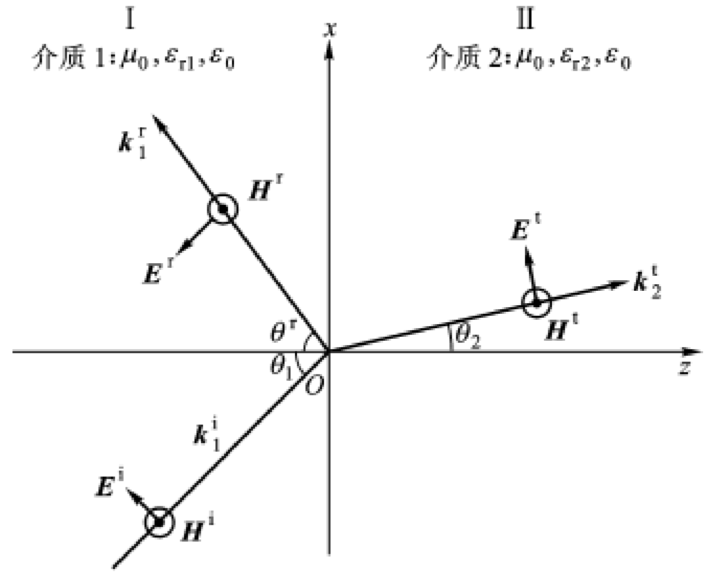


❖ **反射系数** $\Gamma(z=0)$ **与透射系数** $T(z=0)$

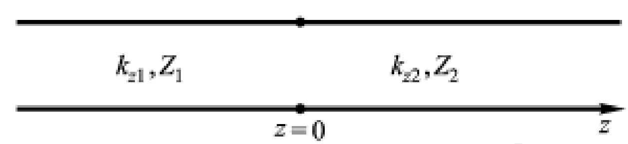
$$\Gamma(z=0) = \frac{E_x^r}{E_x^i} = -\frac{b}{a} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{\varepsilon_{r_1} k_{z_2} - \varepsilon_{r_2} k_{z_1}}{\varepsilon_{r_1} k_{z_2} + \varepsilon_{r_2} k_{z_1}}$$

$$T(z=0) = \frac{H_y^t}{H_y^i} = \frac{c}{a} = \boxed{\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = 1 - \Gamma(z=0)} = \frac{2\varepsilon_{r_2} k_{z_1}}{\varepsilon_{r_1} k_{z_2} + \varepsilon_{r_2} k_{z_1}}$$

传输线模型求介质交界面对TM波的反射与折射



(a)



$$\kappa_1=k_{z_1}\qquad \kappa_2=k_{z_2}$$

$$Z_1=\frac{k_{z_1}}{\omega\varepsilon_{r_1}\varepsilon_0}\qquad Z_2=\frac{k_{z_2}}{\omega\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0}$$

- **区域I与II z方向波的传播用传输线等效**
- **交界面(z=0)切向场连续可导出**

$$U_1\left(z=0^-\right)=U_2\left(z=0^+\right),\ I_1\left(z=0^-\right)=I_2\left(z=0^+\right)$$

- **传输线1与2可以直接连起来，故**

$$\boldsymbol{\Gamma}\left(z=0\right)=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}$$

- **电流** $I_1\left(z\right)=I_1^{i}e^{-jk_z z}+I_1^{r}e^{jk_z z}=\left(1-\boldsymbol{\Gamma}_1\left(z\right)\right)I_1^{i}e^{-jk_{z_1}z}$

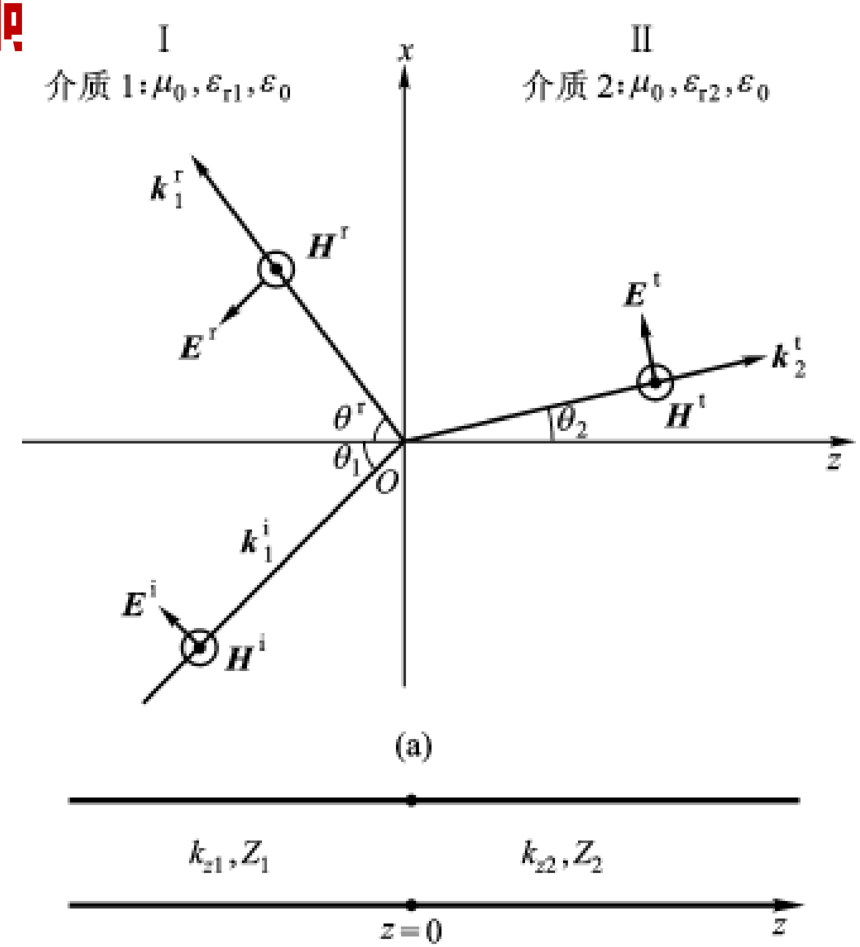
$$I_2\left(z\right)=I_2^{i}e^{-jk_z z}$$

- **由z=0处** $I_1\left(z=0\right)=I_2\left(z=0\right)$ **得到**

$$I_1^{i}\left(1-\boldsymbol{\Gamma}\left(z=0\right)\right)=I_2^{i}\qquad T\left(z=0\right)=\frac{H_y^{t}}{H_y^{i}}=\frac{I_2^{i}}{I_1^{i}}=1-\boldsymbol{\Gamma}\left(z=0\right)$$

介质交界面对波传播的影响

- 介质交界面对平面波的反射、折射的传输线模型可以这样理解：
- **在特定坐标系下，以波矢为特征的平面波倾斜投射到介质交界面时，在区域I与II，y方向没有波的传播，x方向有 $e^{-jk_x x}$ 的行波传播；**
- **在z方向，与z垂直的横向电场、磁场沿z 轴的传播与级联传输线上电压、电流波的传播等效。**



（*a*）介质交界面对TM波（平行极化波）的反射、折射（*b*）传输线类比

布儒斯特（Brewster）角

❖ 当入射波为TM波时，存在一个特定入射角θ_b，

❖ 当 $\theta=\theta_b$ 时，反射系数 $\Gamma_{TM}=0$。

❖ 就要求

$$\Gamma(z=0)=\frac{\varepsilon_{r_1}k_{z_2}-\varepsilon_{r_2}k_{z_1}}{\varepsilon_{r_1}k_{z_2}+\varepsilon_{r_2}k_{z_1}}=0$$

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\cos\theta_b=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\cos\theta_2$$

❖ 当然也要满足斯奈尔定律，

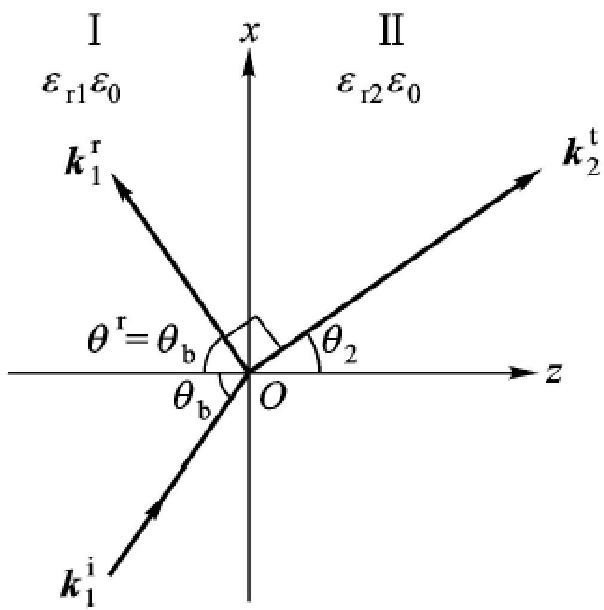
$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\sin\theta_b=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\sin\theta_2$$

❖ 解上述两个方程，得到

$$\theta_2+\theta_b=\pi/2$$

❖ 式中使$\Gamma=0$的这一特定入射角θ_b，称为布儒斯特角

。

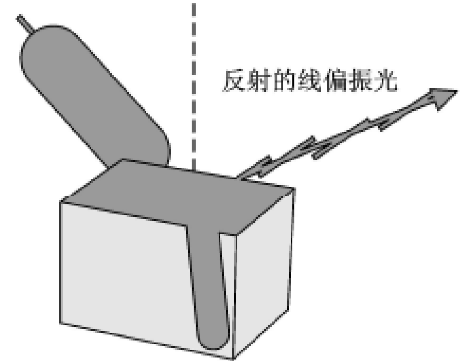


入射角等于布儒斯特角时平行极化平面波的反射和折射

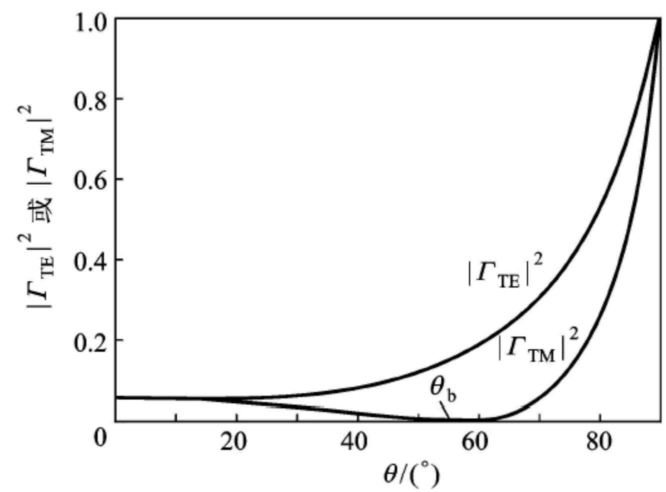
$$\boxed{\theta_b=\arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)}$$

非极化光从介质表面的反射

- 如果非极化光以布儒斯特角θ_b投射到介质交界面，那么非极化光中TM模成分全部折射到介质2，而TE模成分部分折射到介质2，部分反射回介质1。
- 所以**反射光**中只有TE极化波。
- 非极化光从空气投射到介质界面，假定介质界面是水平的，相对介电常数为2.25，我们想要知道其反射波的组成。可以设想入射波可分解为等量的两个极化波，一个水平极化，一个垂直极化。$|\Gamma_{TE}|^2$、$|\Gamma_{TM}|^2$比例于相应极化波的反射功率。由图可见$|\Gamma_{TE}|^2$比$|\Gamma_{TM}|^2$来得大。
- 所以反射光中垂直极化的波比其他方向极化的波占有较大的份额。



利用布儒斯特现象从非极化光得到极化光输出



反射功率与入射角关系

$\varepsilon=2.25\varepsilon_0$，布儒斯特角$\theta_b=56°$

当n_1大于n_2、入射角大于临界角θ_c时介质2中没有波的传播

- $n_1 < n_2$：反射、透射都发生
- $n_1 > n_2$ 当 $\theta > \theta_c$

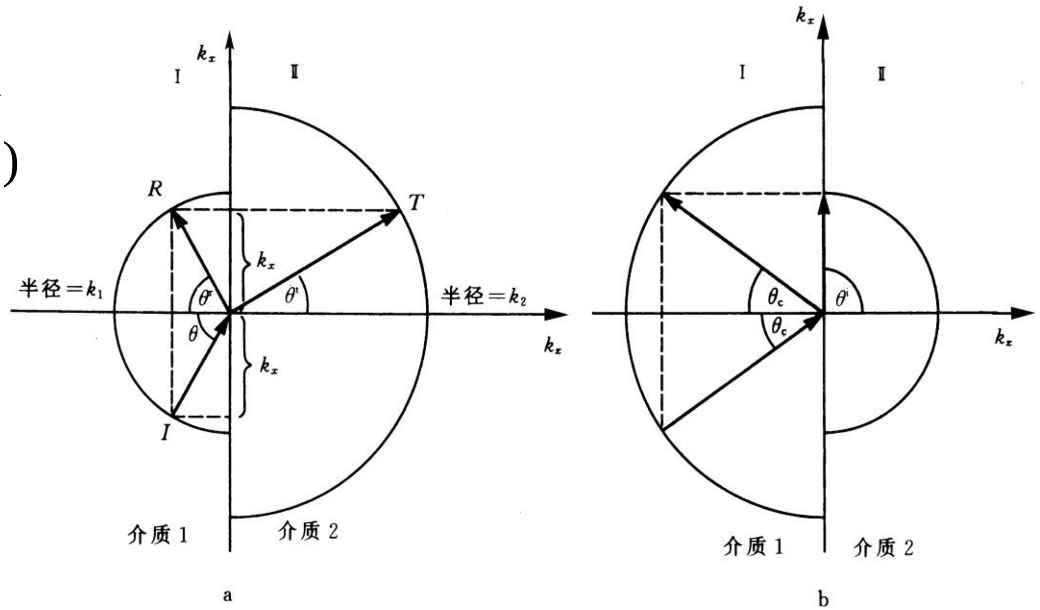
$$\theta_c = arc\sin(\frac{k_2}{k_1}) = arc\sin(\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}})$$

- k_x比k_2还要大，此时

$$k_{z2}^2 = k_2^2 - k_x^2 < 0$$

$$k_{z2} = \pm j\alpha \quad \alpha = \sqrt{k_x^2 - k_2^2}$$

- 折射波 $\boldsymbol{E}^t = \boldsymbol{y}_0 T a e^{-\alpha z} e^{-jk_x x}$



- E^t的瞬态表达式 $\boldsymbol{E}^t(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{y}_0 T a e^{-\alpha z}\cos(\omega t - k_x x)$
- 波沿 x 方向传播，但E^t的大小沿 z 作指数衰减（$e^{-\alpha z}$）。
- 即介质2中没有波的传播，但沿界面有波的传播。

当n_1大于n_2、入射角大于临界角θ_c时介质交界面发生全反射

❖ **临界角** $\theta_c = arc\sin(\frac{k_2}{k_1}) = arc\sin(\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}})$ **当** $\theta_1 > \theta_c$ **时，** k_{z2} **为**

$$k_{z2} = k_0\sqrt{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}\sin^2\theta_1} = \mathrm{j}k_0\sqrt{\varepsilon_{r1}\sin^2\theta_1 - \varepsilon_{r2}^2} = \mathrm{j}\alpha_2 \qquad \alpha_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_{r1}\sin^2\theta_1 - \varepsilon_{r2}^2}$$

❖ **此时特征导纳Y_2为** $Y_{2\mathrm{TE}} = \frac{k_{z2}}{\omega\mu} = \frac{\mathrm{j}\alpha_2}{\omega\mu}$ $\qquad Y_{2\mathrm{TM}} = -j\frac{\omega\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}{\alpha_2}$

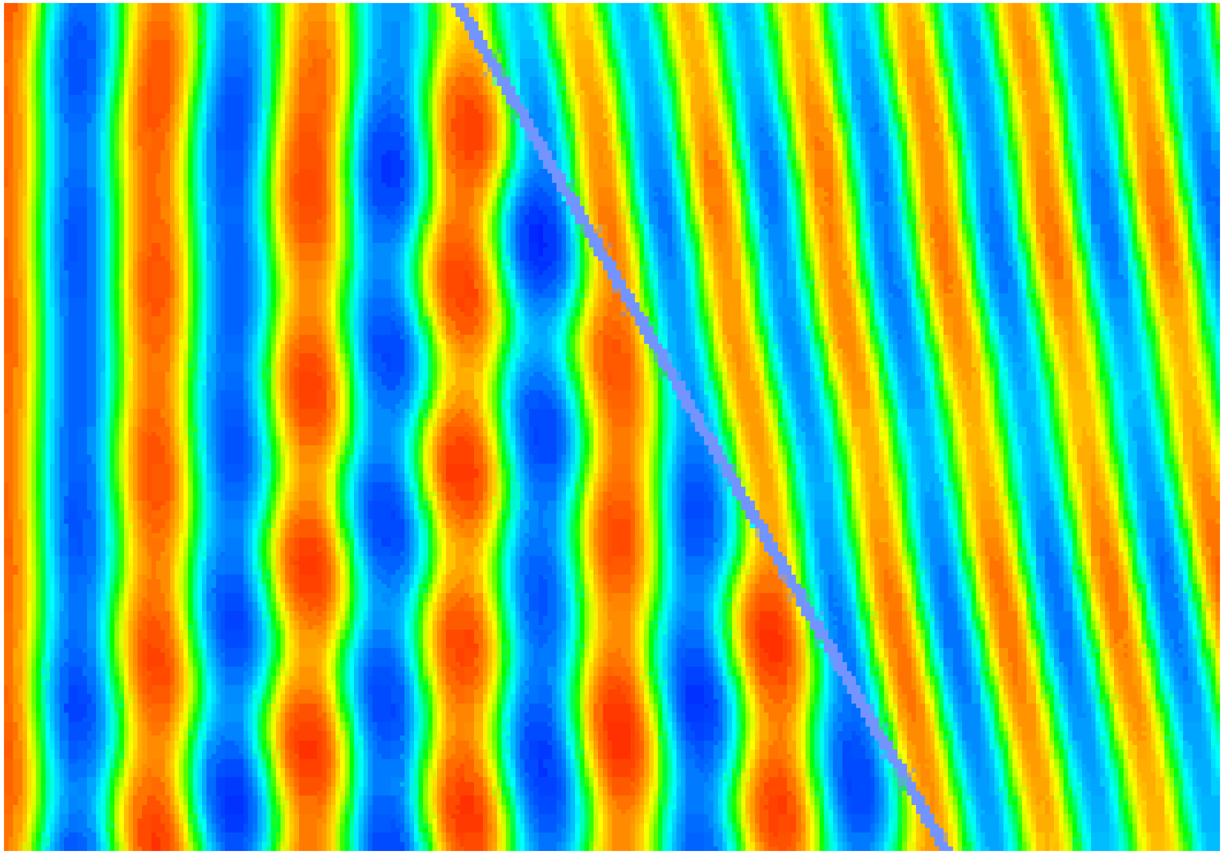
❖ **此时交界面的反射系数Γ**

$$\Gamma_{\mathrm{TE}} = \frac{\cos\theta_1 - \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi_{\mathrm{TE}}} \qquad \Gamma_{\mathrm{TM}} = \frac{-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi_{\mathrm{TM}}}$$

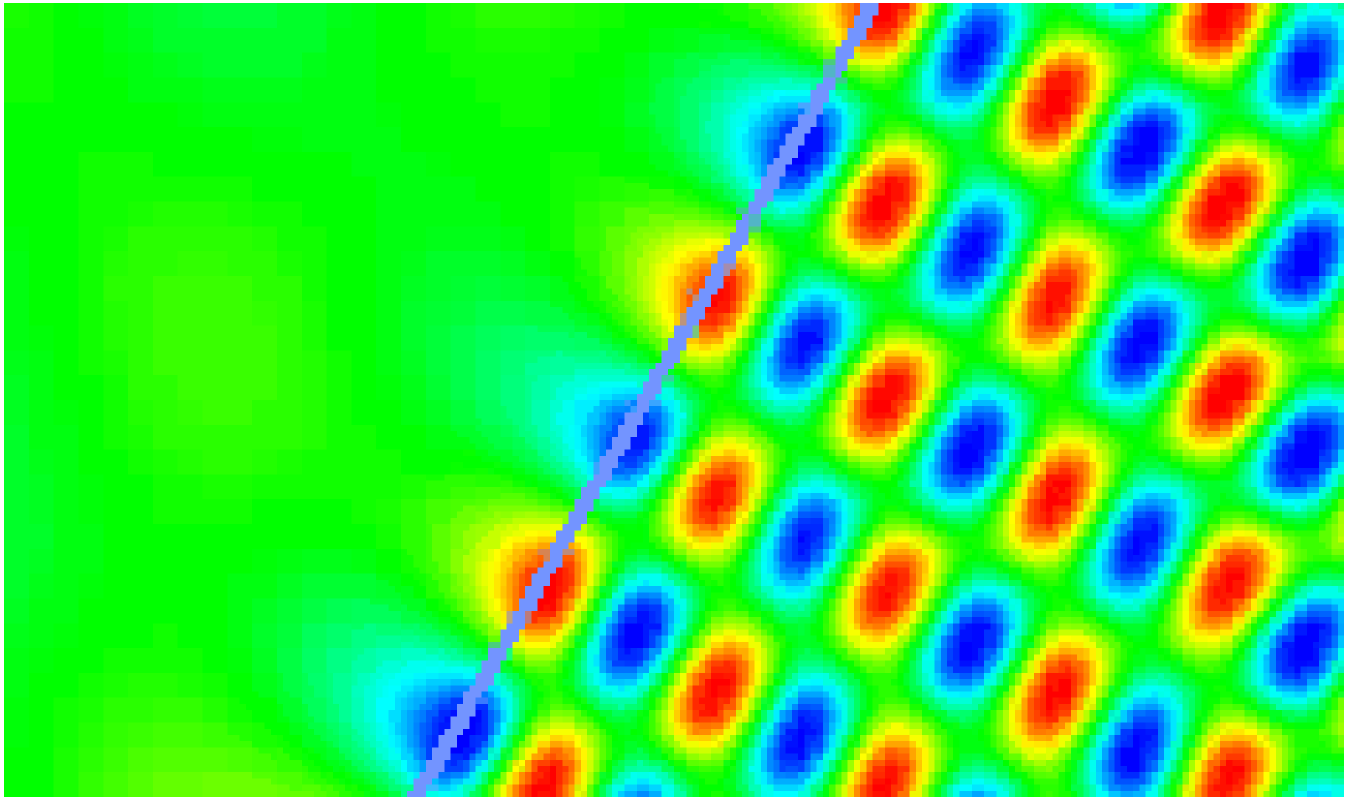
$$\varphi_{\mathrm{TE}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\cos\theta_1}\right) \qquad \varphi_{\mathrm{TM}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1}\right)$$

❖ **表示介质交界面发生全反射。**

介质交界面，入射角小于临界角



介质交界面，入射角大于临界角



吸收介质交界面—等幅面与等相位面分离

❖ **区域II** $\varepsilon_2 = \varepsilon'_2 - \mathrm{j}\varepsilon''_2$

$$k_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_{r2}} = k_{r2} - \mathrm{j}k_{i2}$$

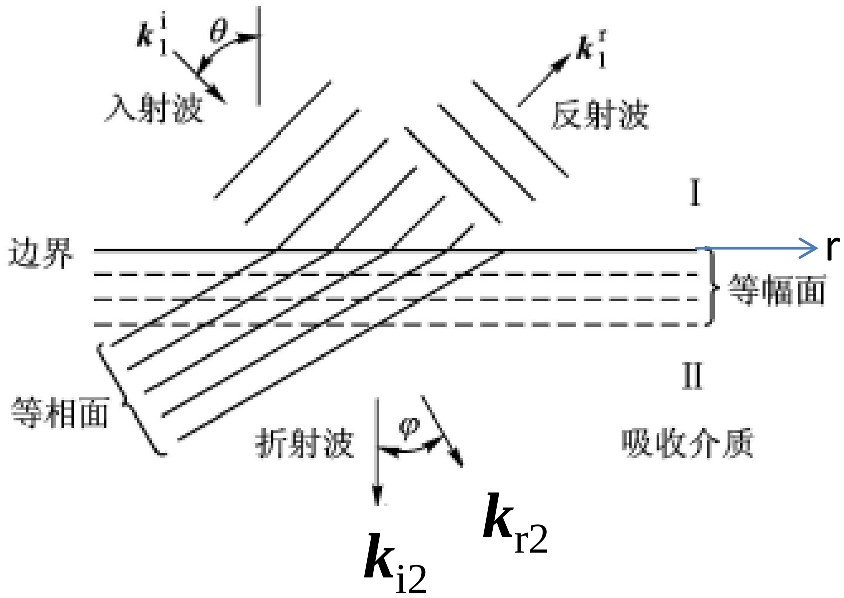
❖ **相位匹配**

$$\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_{r2} \cdot \boldsymbol{r} - \mathrm{j}\boldsymbol{k}_{i2} \cdot \boldsymbol{r}$$

❖ **由此得到**

$$\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_{r2} \cdot \boldsymbol{r}$$

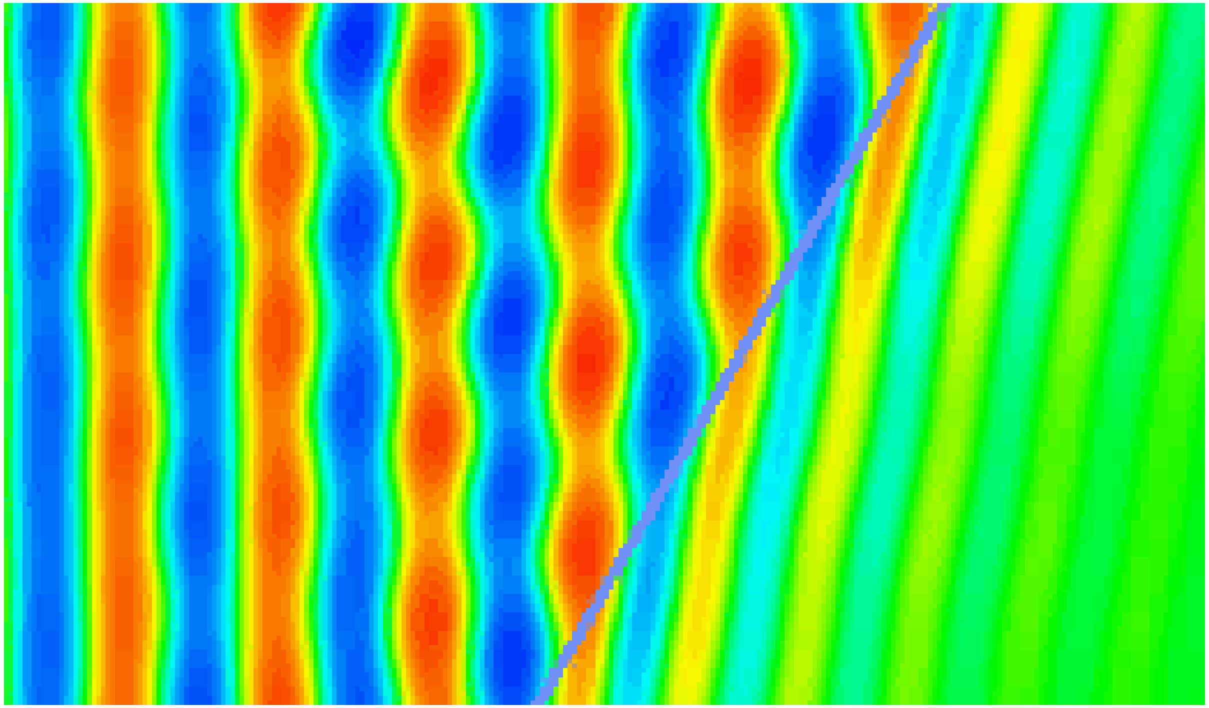
$$\boldsymbol{k}_{i2} \cdot \boldsymbol{r} = 0$$



❖ **确定等相位面k_{r2}的方向是任意的，取决于k_{r1}的方向，确定等幅的方向k_{i2}与边界面正交。**

❖ **等幅面与等相位面不一致，是非均匀平面波。**

介质1无损耗，介质2有损耗



吸收交界面的传输线模型

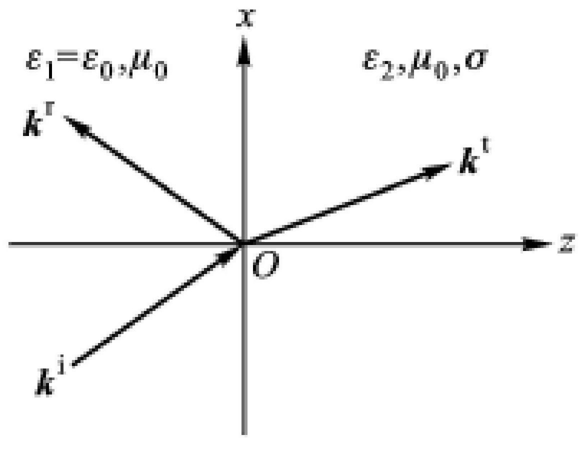
$$k_{z1}=k_1\cos\theta=k_0\cos\theta$$

$$Z_1=\frac{1}{Y_1}=\begin{cases}\omega\mu/k_{z1}\\ k_{z1}/\omega\varepsilon_0\end{cases}$$

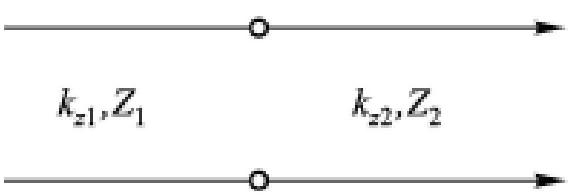
$$k_2=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_{r2}}\qquad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{r2}=\varepsilon_{r2}-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0},$$

$$k_{z2}=\sqrt{k_2^2-(k_0\sin\theta)^2}=k_0\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{r2}-\sin^2\theta}$$

$$Z_2=\frac{1}{Y_2}=\begin{cases}\omega\mu/k_{z2}\\ k_{z2}/\omega\varepsilon_2\end{cases}$$



(a)

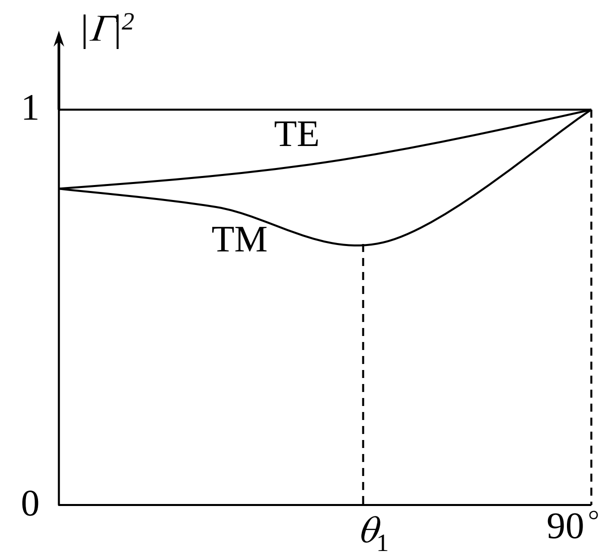


(b)

$$\boldsymbol{\Gamma}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}$$

$$T=1+\boldsymbol{\Gamma}\qquad(\mathrm{TE})$$

$$=1-\boldsymbol{\Gamma}\qquad(\mathrm{TM})$$



一种典型金属的反射系数模的平方

$|\Gamma|^2$与入射角的关系（在光频范围）

介质-导体交界面的反射

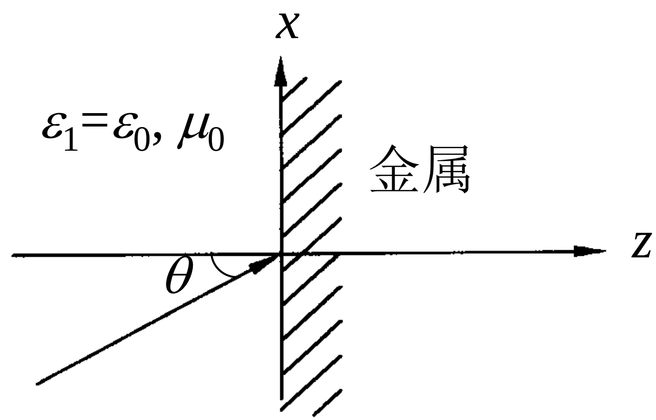
❖ **导体** $\nabla\times\boldsymbol{H}=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\sigma\boldsymbol{E}=j\omega(\varepsilon-j\dfrac{\sigma}{\omega})\boldsymbol{E}=j\omega\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}$

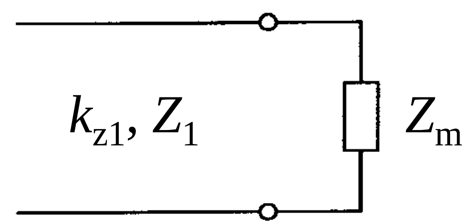
$$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}=\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_m,\qquad \varepsilon_{\mathrm{m}}=\varepsilon_{\mathrm{m}}'-\mathrm{j}\varepsilon_{\mathrm{m}}''$$

$$\varepsilon_{\mathrm{m}}'\approx 1,\qquad \varepsilon_{\mathrm{m}}''=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0},\qquad \varepsilon_{\mathrm{m}}''>>\varepsilon_{\mathrm{m}}'$$

$$k_{\mathrm{zm}}=\sqrt{k_0^2(\varepsilon_{\mathrm{m}}'-j\varepsilon_{\mathrm{m}}'')-k_x^2}\approx\sqrt{-jk_0^2\varepsilon_{\mathrm{m}}''}$$

$$=\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}(1-j)=\frac{1}{\delta}(1-j),\qquad \delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$$





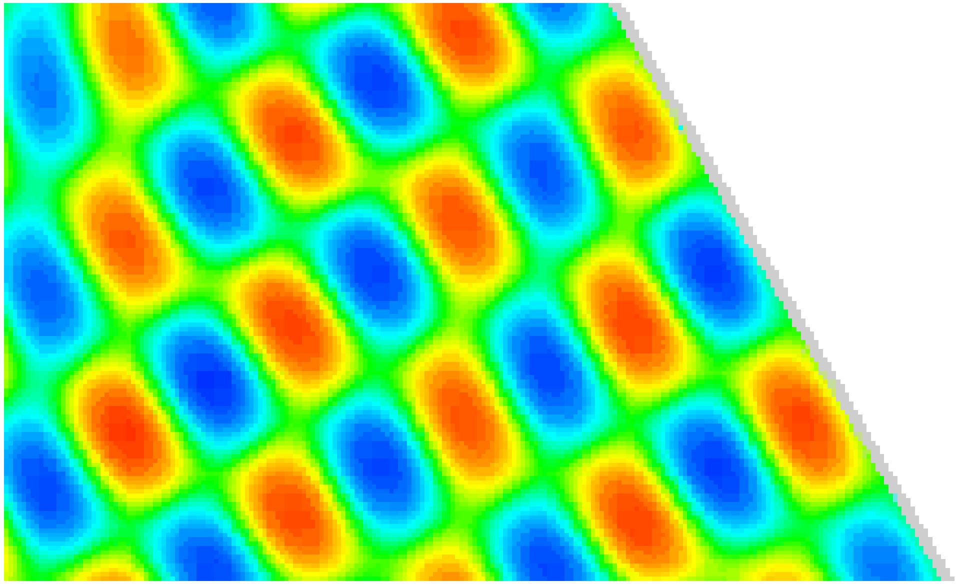
❖ δ **是趋肤深度，波阻抗为**

$$Z_{\mathrm{TE}}=Z_{\mathrm{TM}}=Z_{\mathrm{m}}=R(1+\mathrm{j}),\qquad R=\frac{\omega\mu_0\delta}{2}=\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}$$

❖ **反射系数** $\quad \varGamma=\dfrac{Z_m-Z_1}{Z_m+Z_1}$

❖ **对于完纯导体，** $\delta\to 0$ **，** $R\to 0$ **，反射系数** $\varGamma\to -1$

介质—导体



介质—介质交界面与介质—导体交界面对波的反射的区别

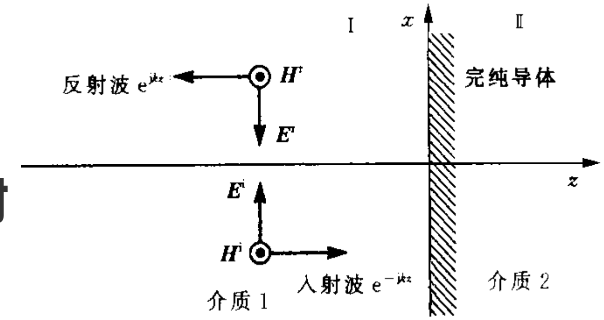
❖ 对于介质-导体交界面，不管入射波是TE模还是TM模，不管入射角，都是全反射，对于切向电场入射波与反射波还有180°相移。

❖ 对于介质-介质交界面，反射系数不仅与入射波型（TE模或TM模）有关还与入射角大小有关。

❖ 只有从密媒质到疏媒质（即从ε大的介质到ε小的介质）且入射角θ大于临界角θc时才发生全反射。θ > θc时入射波与反射波相移不是π，而是

$$\varphi_{\mathrm{TE}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\cos\theta_1}\right) \qquad \varphi_{\mathrm{TM}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1}\right)$$

平面波垂直投射到完纯导体表面的反射



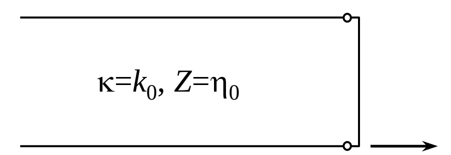
（a）

- ❖ 相当于TEM模投射到完纯导电面。用传输线等效时

$$E_x=\varphi(x)U(z)=U(z)$$

$$\varphi(x)=1$$

$$H_y=\varphi(x)I(z)=I(z)$$



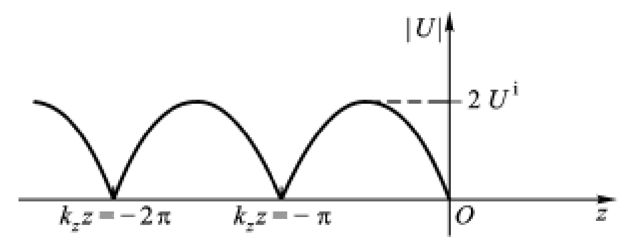
（b）

- ❖ U(z)、I(z)满足传输线方程，传输线参数为

$$k=k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\qquad Z=\eta_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$$

- ❖ 完纯导体用z=0处的短路线代替

$$U(z)=-2\mathrm{j}U^{\mathrm{i}}\sin(kz)\qquad I(z)=\frac{2}{\eta_0}U^{\mathrm{i}}\cos(kz)$$

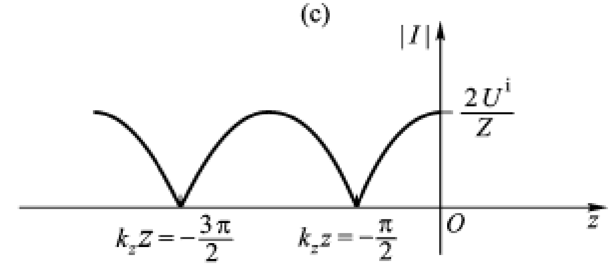


(c)

- ❖ U、I 的瞬时值为

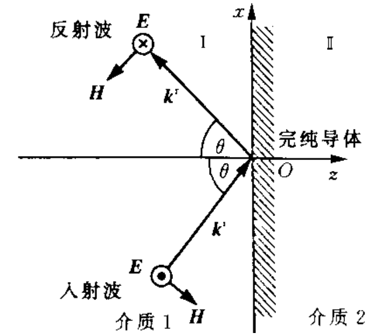
$$u(z,t)=\mathrm{Re}\left[U(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=2U^{\mathrm{i}}\sin(kz)\sin(\omega t)$$

$$i(z,t)=\mathrm{Re}\left[I(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\frac{2U^{\mathrm{i}}}{\eta_0}\cos(kz)\cos(\omega t)$$



(d)

TE平面波倾斜投射到完纯导体表面的反射

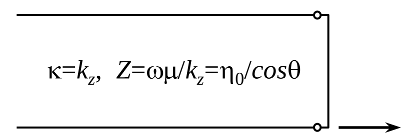


❖ **TE模场量** E_y，H_x、H_z

$$\begin{cases} E_y = -\varphi(x)U(z) = -e^{-jk_x x}U(z) \\ H_x = \varphi(x)I(z) = -e^{-jk_x x}I(z) \end{cases}$$

$$\varphi(x) = e^{-jk_x x}$$

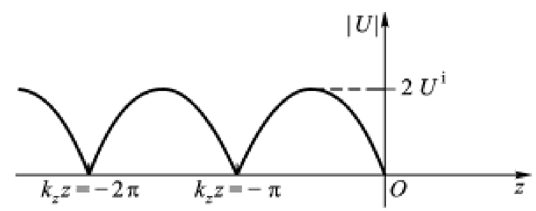
$$k_x = k_1 \sin\theta = k_0 \sin\theta$$



❖ **传输线 模型(完纯导体用短路线表示)**

$$k_z = k_1 \cos\theta = k_0 \cos\theta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\cos\theta$$

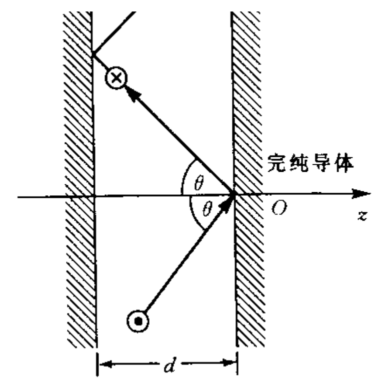
$$Z = \frac{\omega\mu_0}{k_z} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\Big/\cos\theta = \eta_0/\cos\theta$$



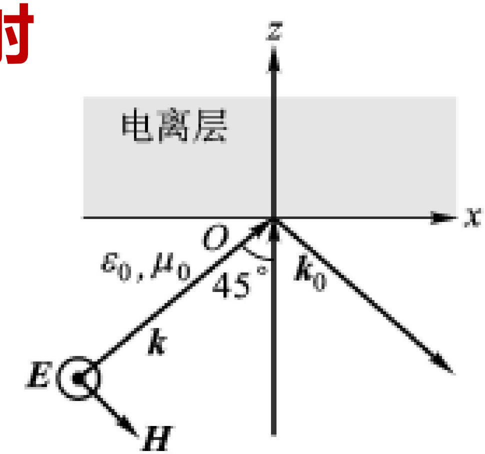
❖ **短路传输线上电压、电流的分布为纯驻波**

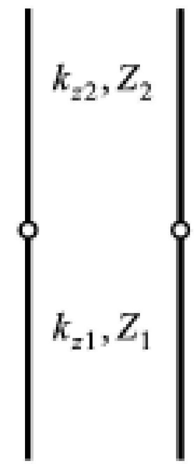
$$U(z) = -2jU^i \sin(k_z z)$$

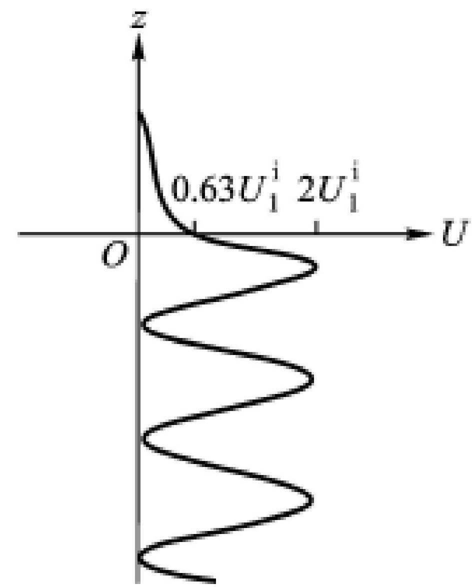
$$I(z) = \frac{2U^i}{Z}\cos(k_z z)$$



电离层的反射







❖电离层可看作等离子体， $\varepsilon = \varepsilon_0\left(1-\dfrac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}\right)$

❖当入射电磁波ω小于ω_{p}时，ε有可能小于1甚至为负。

❖设入射波角频率， $\omega = \omega_{\mathrm{p}}/\sqrt{5}$

❖则电离层用$\varepsilon_2 = -4\varepsilon_0$ 的介质表示。

❖当ε为负时，等离子体相当于一导体，对入射电磁波全反射。

电离层的反射

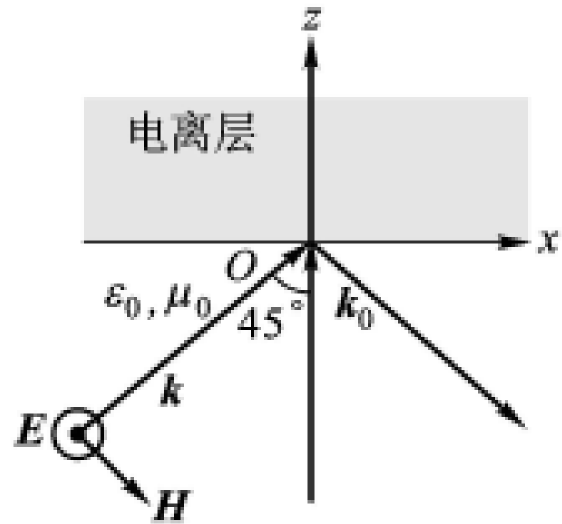
$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = k_0$$

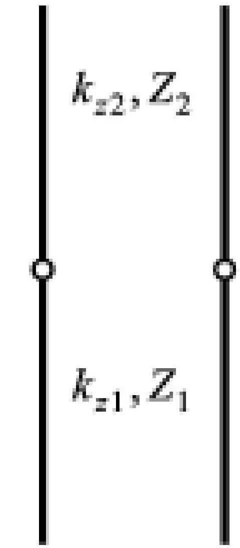
$$k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2} = \omega\sqrt{\mu_0(-4\varepsilon_0)} = -\mathrm{j}2k_0$$

$$k_x = k_1 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}k_0$$

$$k_{z1} = k_1 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}k_0$$

$$k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2} = \sqrt{-4k_0^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}k_0\right)^2} = -\mathrm{j}2.12k_0$$



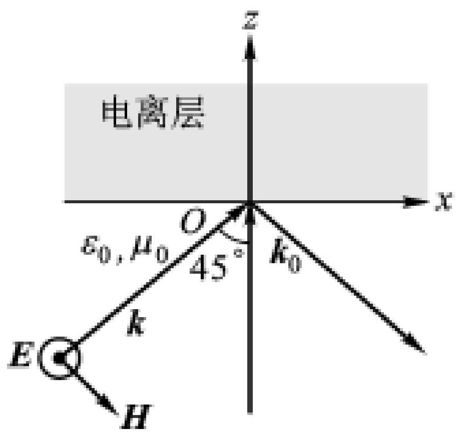


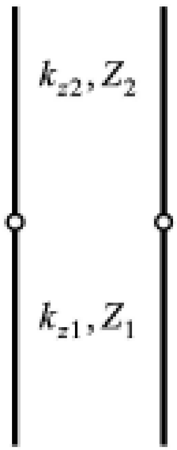
$$Z_1 = \begin{cases} \omega\mu_0/k_{z1} = \sqrt{2}\eta_0 & \text{TE} \\ k_{z1}/\omega\varepsilon_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta_0 & \text{TM} \end{cases} \qquad Z_2 = \begin{cases} \omega\mu/k_{z2} = \dfrac{\mathrm{j}}{2.12}\eta_0 & \text{TE} \\ k_{z2}/\omega\varepsilon_2 = \dfrac{\mathrm{j}2.12}{4}\eta_0 & \text{TM} \end{cases}$$

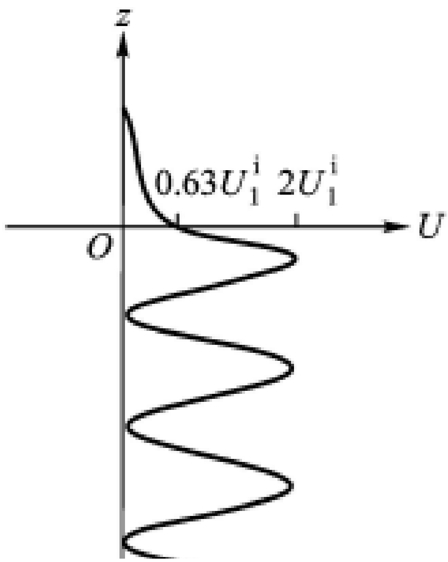
$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$\Gamma_{\text{TE}} = 1.0\mathrm{e}^{\mathrm{j}143^\circ} \qquad \Gamma_{\text{TM}} = 1.0\mathrm{e}^{\mathrm{j}286^\circ}$$

电离层的反射







$$\Gamma=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}$$

$$\Gamma_{\mathrm{TE}}=1.0\mathrm{e}^{\mathrm{j}143^\circ}$$

$$\Gamma_{\mathrm{TM}}=-1.0\mathrm{e}^{\mathrm{j}286^\circ}=1.0\mathrm{e}^{\mathrm{j}106^\circ}$$

❖**注意，TE、TM模反射系数的相角ψ是不同的。区域I为纯驻波**

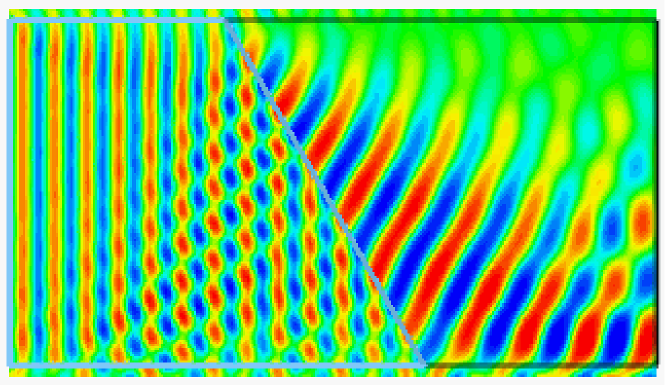
$$d_{\min 1}=\frac{\lambda}{4}+\frac{143^\circ}{720^\circ}\lambda=0.4486\lambda$$

$$\left|U(z=0)\right|=\left|U_1^{\mathrm{i}}\left(1+\Gamma_{\mathrm{TE}}(0)\right)\right|=0.63U_1^{\mathrm{i}}$$

❖**电离层中没有波的传播。沿界面有波的传播**

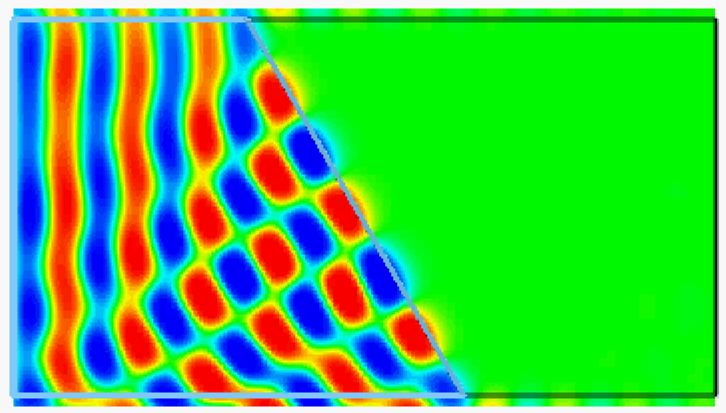
$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}k_0 x}$$

介质-电离层



等离子体中波为行波
(f高于f_p)

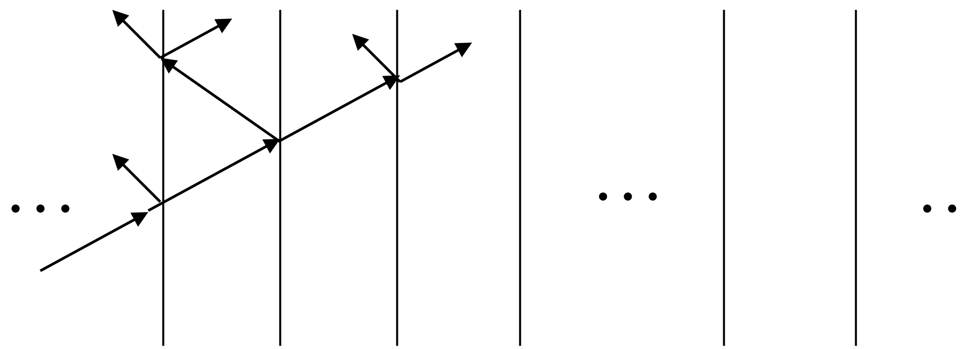
等离子体中没有波的传播
(f低于f_p)



多层平板介质中波的传播

多层平板介质系统其相对介电常数沿 z 轴的分布可表示为

$$\varepsilon_r(z)=\begin{cases}\varepsilon_{rI} & z<0\\ \varepsilon_{r1} & 0<z<z_1\\ \varepsilon_{r2} & z_1<z<z_2\\ \vdots & \vdots\\ \varepsilon_{rn} & z_{n-1}<z<z_n\\ \varepsilon_{rIII} & z>z_n\end{cases}$$



要确定区域 I 的反射波，区域 III 的透射波的大小及其传播方向，以及在 n 层介质内的场分布或波的传播。

在本征坐标系中 $\boldsymbol{k}=k_x\mathbf{x}_0+k_z\mathbf{z}_0$， $k_y=0$。

对 TE 模，$\boldsymbol{E}=E_y\mathbf{y}_0$， $\boldsymbol{H}=H_x\mathbf{x}_0+H_z\mathbf{z}_0$ 对 TM 模，$\boldsymbol{H}=H_y\mathbf{y}_0$， $\boldsymbol{E}=E_x\mathbf{x}_0+E_z\mathbf{z}_0$，

多层介质系统中场分布（或波的传播）的求解也有两个途径：场量匹配法，传输线模型法。

多层介质中TE波传播的传输线模型

❖ **电压$U(z)$、电流$I(z)$与第j层介质中场量E_{jy}, H_{jx}关系为**

$$E_{jy} = -\varphi_j(x) U_j(z)$$

$$H_{jx} = \varphi_j(x) I_j(z)$$

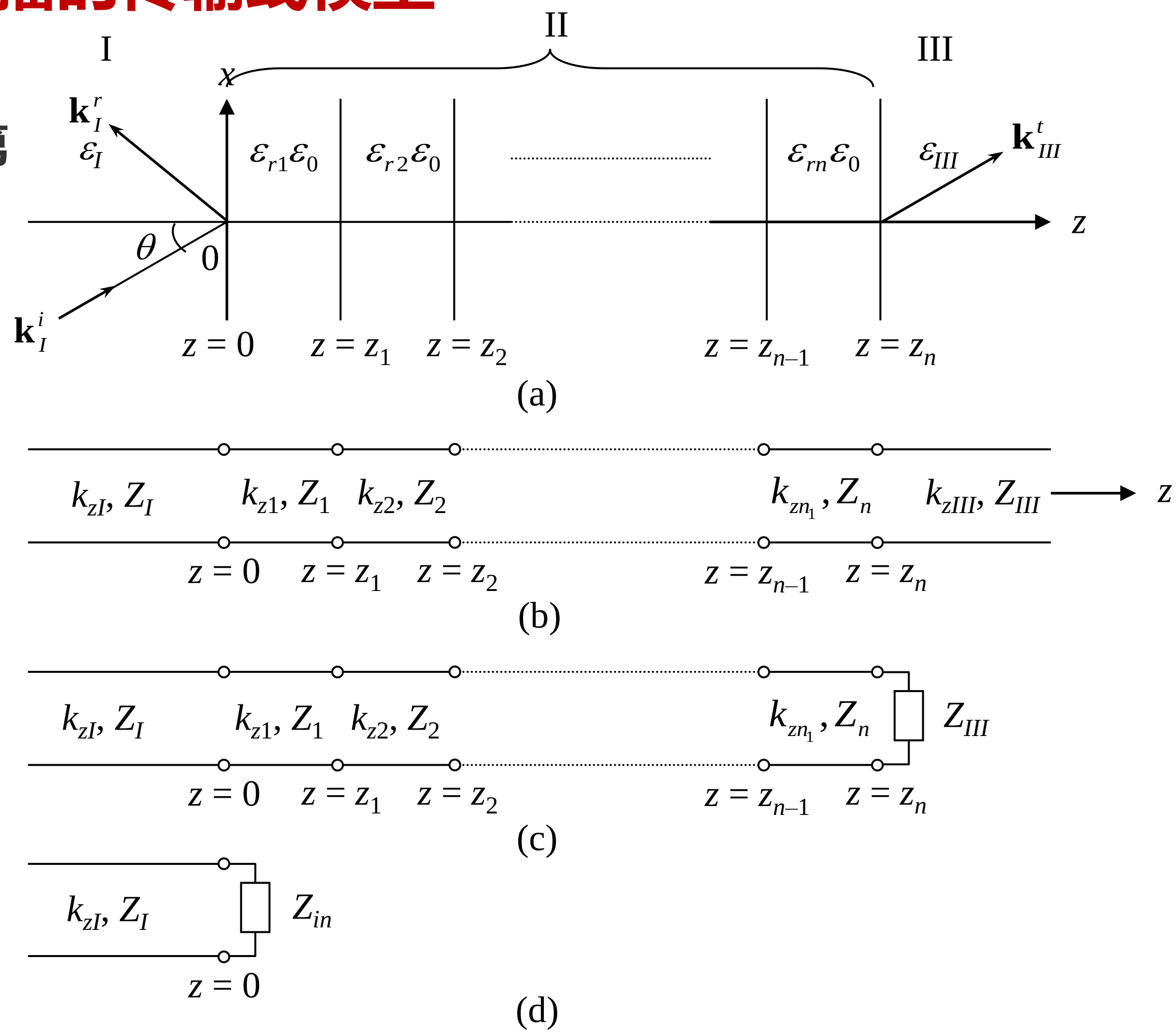
❖ **模式函数 $\varphi_j(x)$**

$$\varphi_j(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}$$

$$k_x = k_{x\mathrm{I}} = k_{x\mathrm{III}} = k_{xn} = k_{\mathrm{I}} \sin\theta$$

$$k_{zj} = \sqrt{k_i^2 - k_x^2} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_j - k_I^2 \sin^2\theta}$$

$$Z_j = \frac{1}{Y_j} = \omega\mu / k_{zj} \qquad j = \mathrm{I},\ \mathrm{III},\ 1,\ 2,\ \cdots, n$$



反射系数与场分布

❖ z = 0⁻处反射系数

$$\Gamma\left(z=0^-\right)=\frac{Z_{\mathrm{in}}(0)-Z_{\mathrm{I}}}{Z_{\mathrm{in}}(0)+Z_{\mathrm{I}}}=\frac{Y_{\mathrm{I}}-Y_{\mathrm{in}}(0)}{Y_{\mathrm{I}}+Y_{\mathrm{in}}(0)}$$

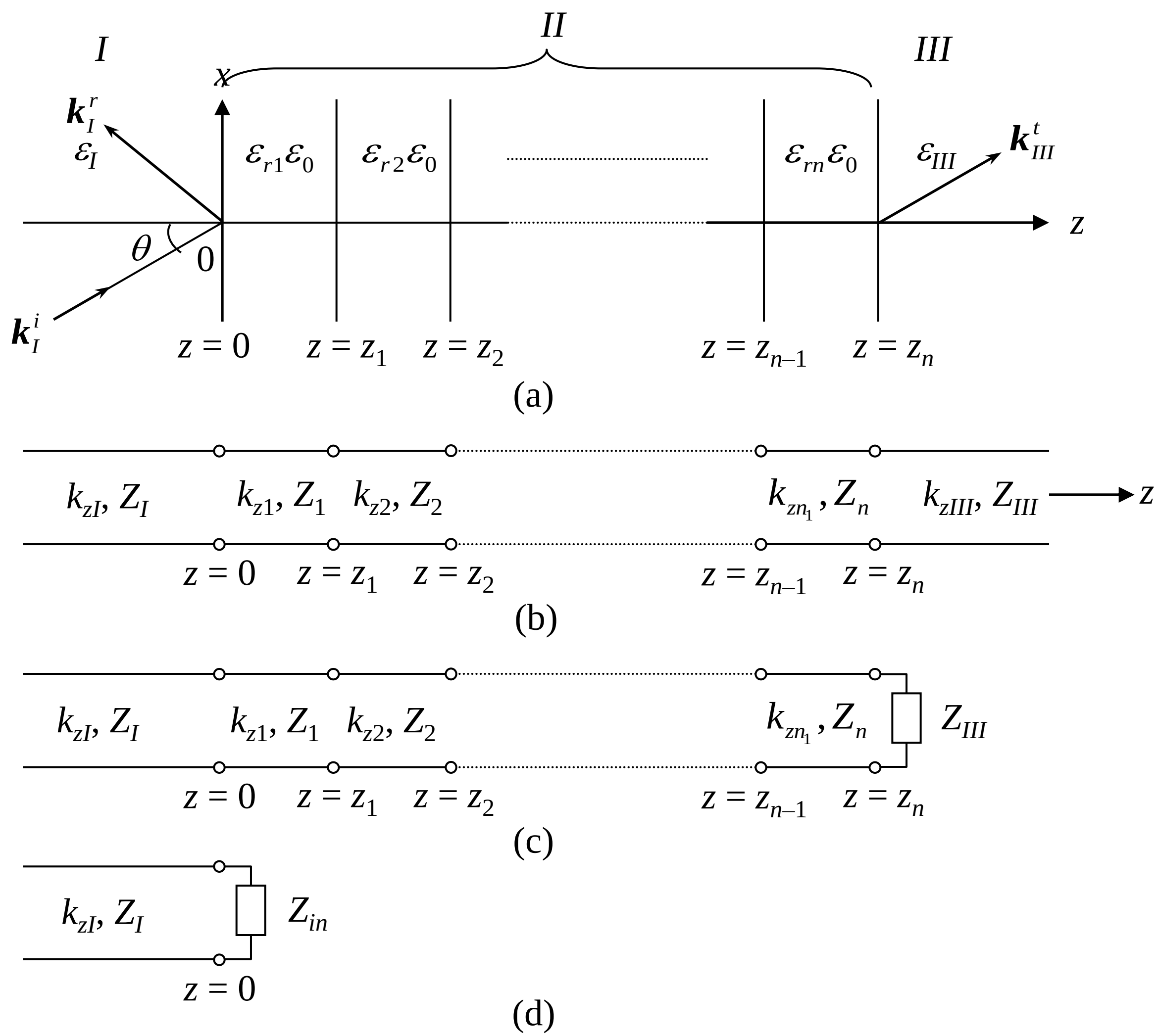
❖ 区域I中的电压、电流分布

$$U_I(z)=\left[1+\Gamma_I(z)\right]U_I^i e^{-jk_{z\mathrm{I}}z}$$

$$I_{\mathrm{I}}(z)=\left[1-\Gamma_{\mathrm{I}}(z)\right]\frac{U_{\mathrm{I}}^{\mathrm{i}}}{Z_{\mathrm{I}}}e^{-jk_{z\mathrm{I}}z}$$

❖ 式中

$$\Gamma_{\mathrm{I}}(z)=\Gamma_{\mathrm{I}}\left(0^-\right)e^{j2k_{z\mathrm{I}}z}$$



反射系数与场分布

❖ z = 0交界面U、I连续

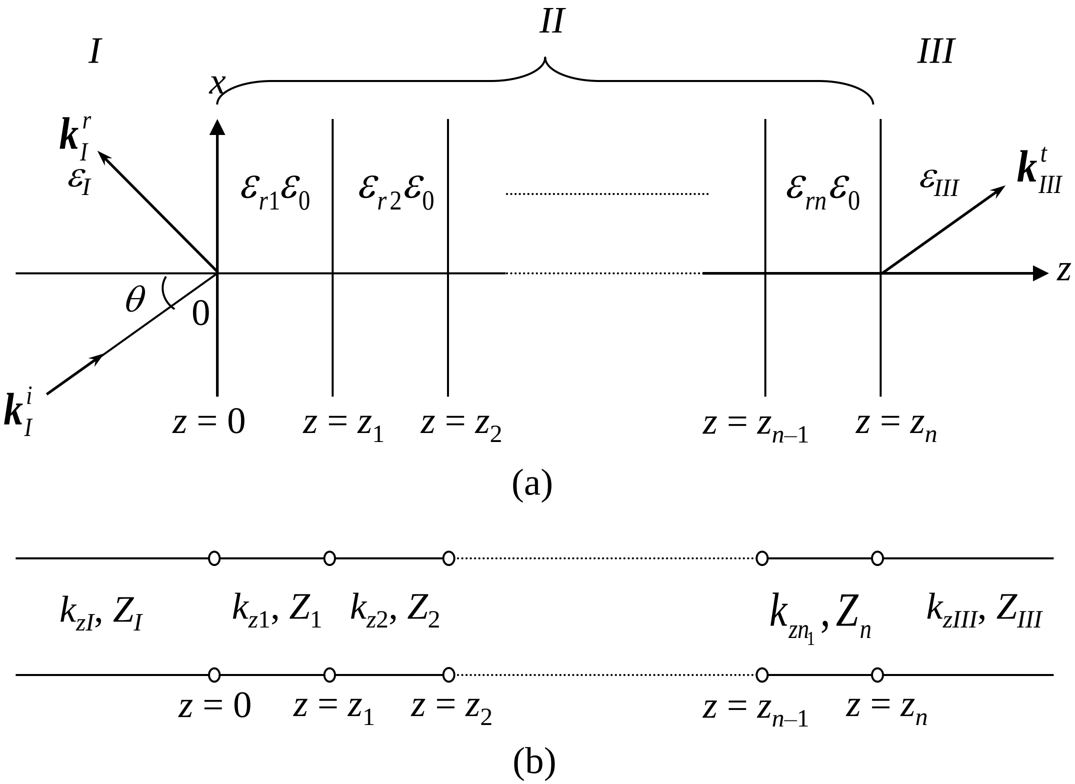
$$\left[1+\Gamma_I\left(0^-\right)\right]U_I^{\mathrm{i}}=\left[1+\Gamma_1\left(0^+\right)\right]U_1^{\mathrm{i}}$$

$$U_1^{\mathrm{i}}=\frac{1+\Gamma_I\left(0^-\right)}{1+\Gamma_1\left(0^+\right)}U_I^{\mathrm{i}}$$

❖ 式中

$$\Gamma_1\left(0^+\right)=\Gamma_1\left(z=z_1^-\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z_1}\left(z_1-0\right)}$$

$$\Gamma\left(z=z_1^-\right)=\frac{Z_{\mathrm{in}}\left(z=z_1^-\right)-Z_1}{Z_{\mathrm{in}}\left(z=z_1^-\right)+Z_1}$$



❖ 所以区域II第1节传输线上电压、电流为

$$U_1\left(z\right)=\left[1+\Gamma_1\left(z\right)\right]U_1^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z_1}z}\qquad I_1\left(z\right)=\left[1-\Gamma_1\left(z\right)\right]\frac{U_1^{\mathrm{i}}}{Z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z_1}z}$$

❖ 以此类推可得到区域II第二节、第三节以至第n节传输线上电压、电流分布。

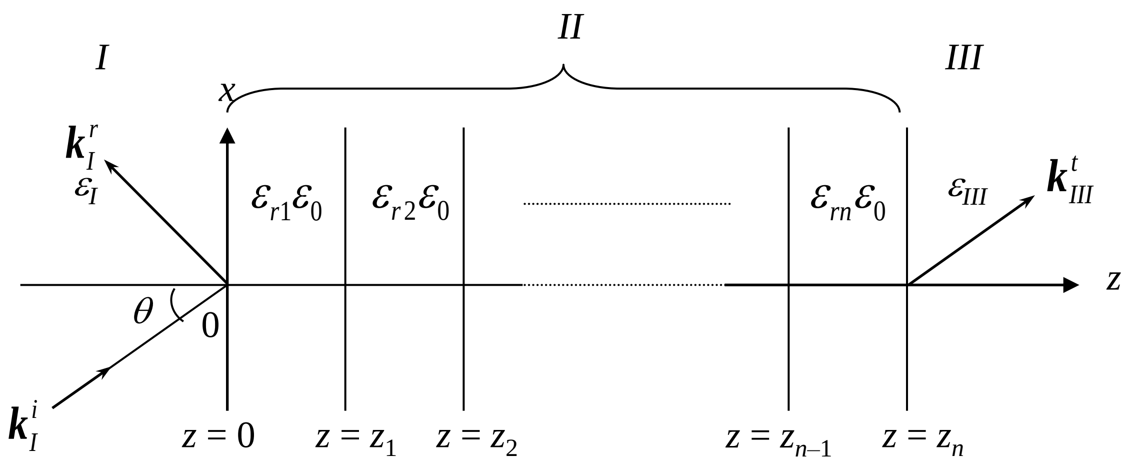
反射系数与场分布

❖ 在区域III，没有反射波，电压、电流都是行波。

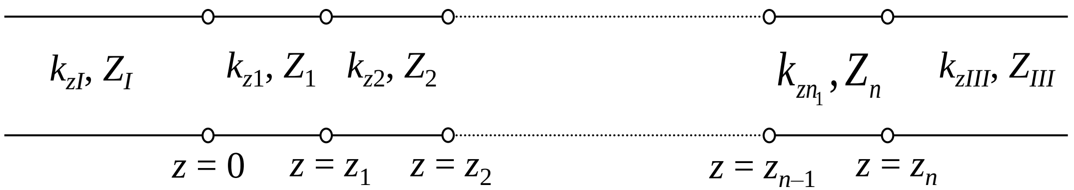
$$U_{\text{III}}^{i}\left(z=z_n^{+}\right)=U_n\left(z_n^{-}\right)$$
$$=U_n^{i}\left[1+\Gamma\left(z_n^{-}\right)\right]$$

$$I_{\text{III}}^{i}\left(z=z_n^{+}\right)=\frac{U_{\text{III}}^{i}\left(z=z_n^{+}\right)}{Z_{\text{III}}}$$

$$\Gamma\left(z_n^{-}\right)=\frac{Z_{\text{III}}-z_n}{Z_{\text{III}}+z_n}$$



(a)



(b)

复 习

❖ **要点**

- **边界条件**
- **介质交界面对TM波的反射、透射分析也可用场匹配与传输线模型两种方法分析。**
- **介质交界面对平面波的反射，如$\varepsilon_1<\varepsilon_2$，不管什么入射角$\theta$，不会全反射；如 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$，当$\theta>\theta c$，发生全反射，且相移与入射角有关。**
- **对于TM模，当$\theta=\theta_b$（布儒斯特角）入射波可无反射 全部透射到介质2。**
- **介质II为吸收介质时，介质II中透射波等幅面与等相位面不再重合，称为非均匀平面波。**
- **介质-介质交界面与介质-导体交界面对平面波的反射、透射是有区别的。**
- **等离子体当$\omega<\omega_p$时，其等效介电常数<0，相当于导体对入射波全反射，但接近界面的等离子体中还有电磁能量储存，只是随离开界面距离而不断衰减。**
- **多层介质系统对平面波的反射、透射用传输线模型分析最为方便，一定要掌握。**

❖ **复习**

- **5.2.2，5.3，5.4，5.5 （p. 222-251）**

The End.

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn