James Clerk Maxwell
1831 – 1879

Lesson 2

Electromagnetic Fields and Waves

传输线方程及其解

郑史烈

zhengsl@zju.edu.cn

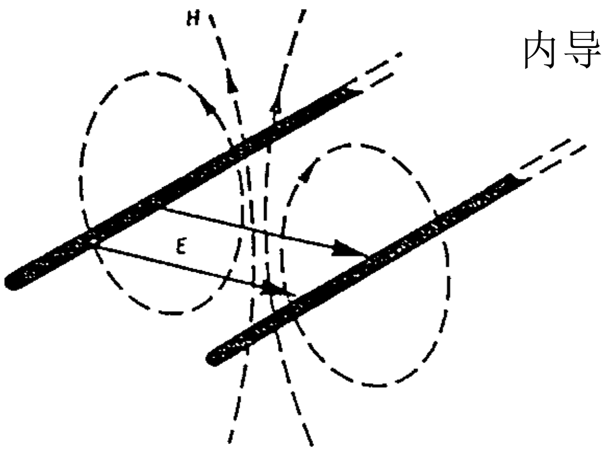
传输线

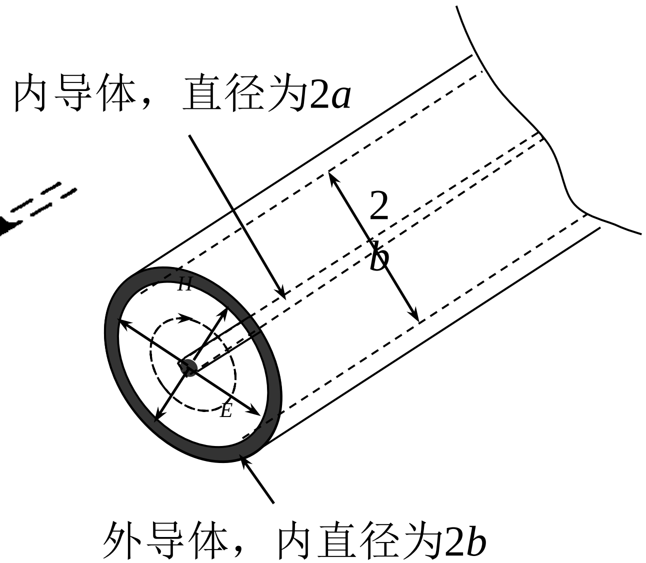
- 传输线的定义
- 为什么要研究传输线?
- 传输线理论的最基本假设
- 传输线方程解决什么问题?
- 常用的几类传输线:
- 常用传输线场分布的特点:TEM波

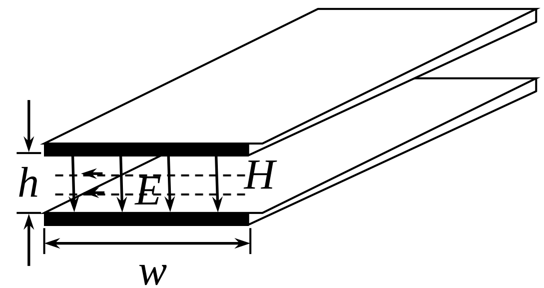
传输线在电路中相当于一个二端口网络

- 传输线在电路中相当于一个二端口网络，一个端口连接信号源，通常称为输入端，另一个端口连接负载，称为输出端。
- u_g 是信号源，信号可以是数字脉冲串，但本节主要针对随时间作简谐变化的连续波信号。
- R_g 是信号源的内阻。
- R_L 是负载。

常用传输线及其场结构







- ❖ **平行双导线、同轴线、微带线是常用的传输线。其横向尺寸比波长小得多，纵向尺寸比波长大得多，至少与波长可比。**
- ❖ **电话网用平行双导线，有线电视网都用同轴线，平行平板波导应用不多，其变形微带线则广泛用于集成电路。**

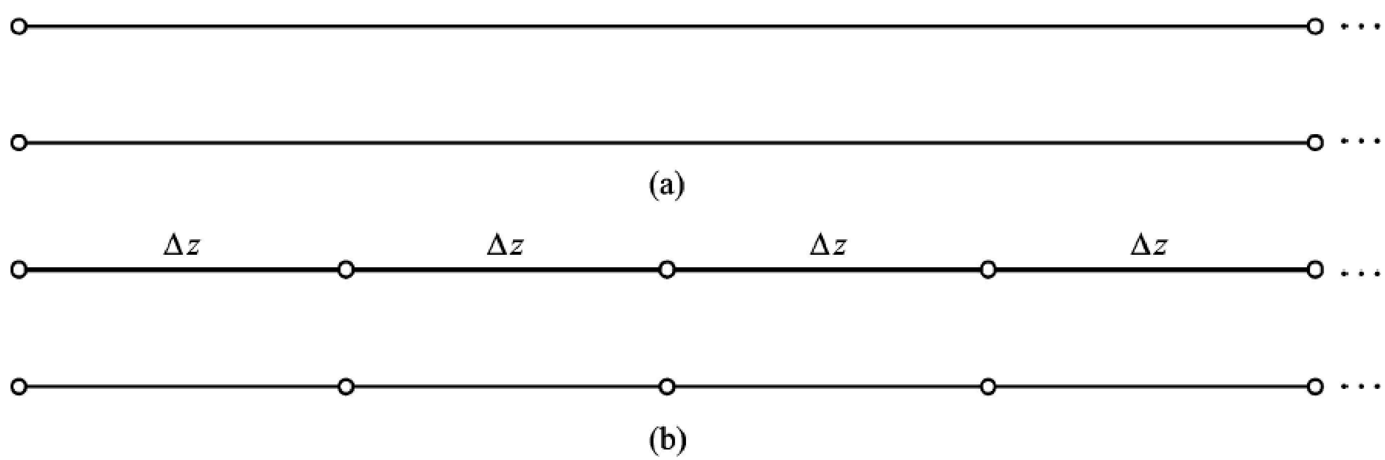
如何用基尔霍夫定律分析传输线

❖ 我们在电路原理中已学过基尔霍夫定律 ΣU=0，ΣI=0

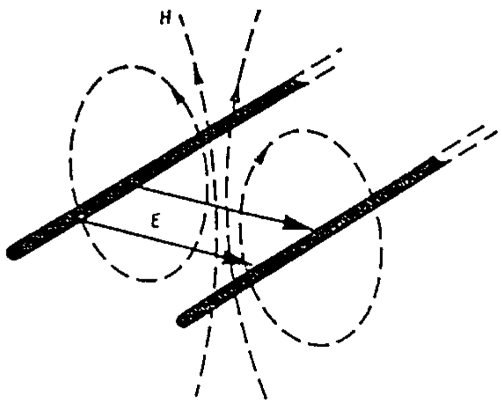
❖ 基尔霍夫定律适用范围： $\frac{\partial}{\partial t} \to 0$

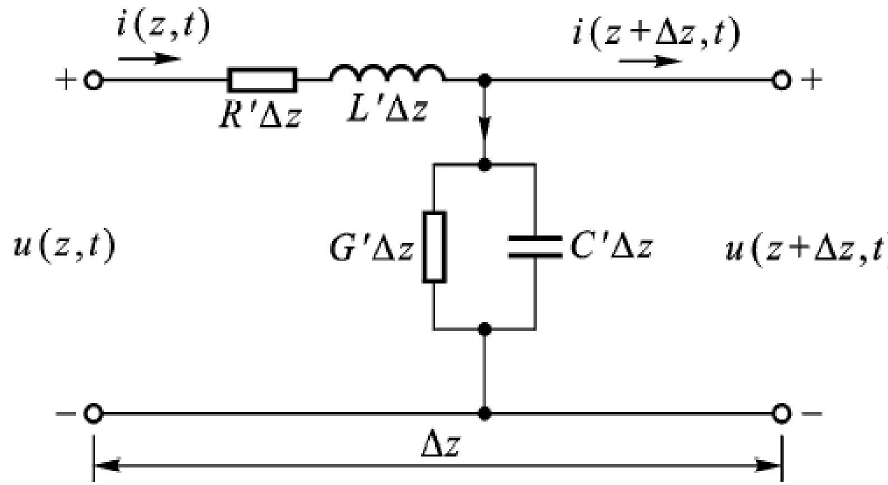
❖ 或所研究对象线度比波长小得多

❖ 如果把**长度为 l 的传输线分成N段**，只要每段长度 $\Delta l \ll \lambda$，那么在 Δl 长度内，基尔霍夫定律可以适用。



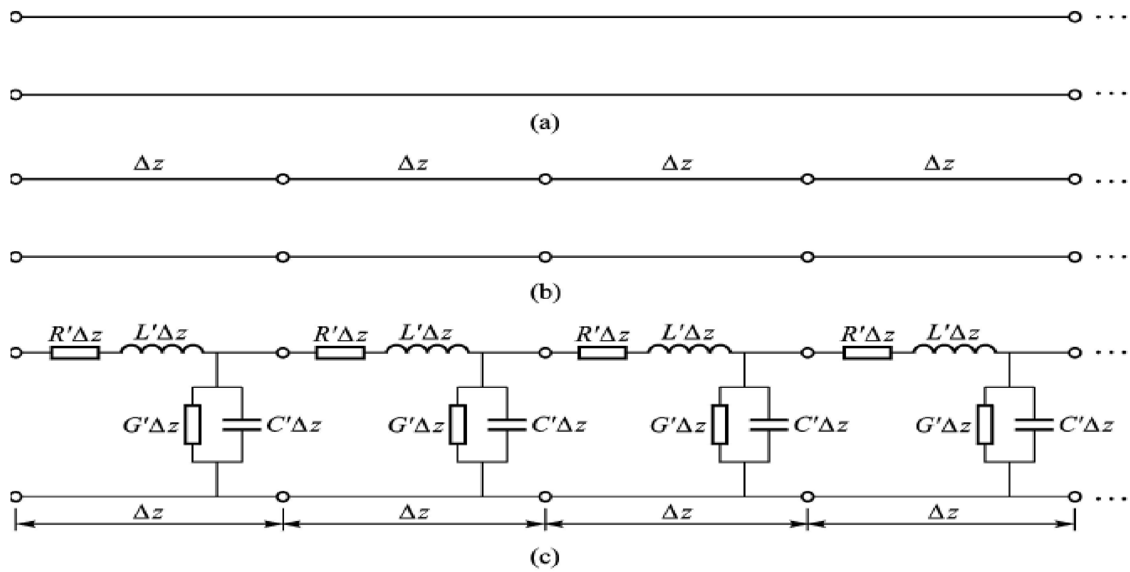
dz长度一段传输线的等效电路





- ❖ **串联电阻*R*表示**，当电流沿导体流动时，由于构成导体材料的电导率σ有限产生的欧姆损耗。
- ❖ **并联电导*G*表示**，当两导体间填充的介质不是完纯介质时，电导率σ不完全等于零，有少量漏电，会产生漏电损耗。
- ❖ **串联电感*L*表示**导体周围有磁场线，有磁场能量的储存。
- ❖ **并联电容*C*表示**两导体间存在电场，说明导体间储有电能。

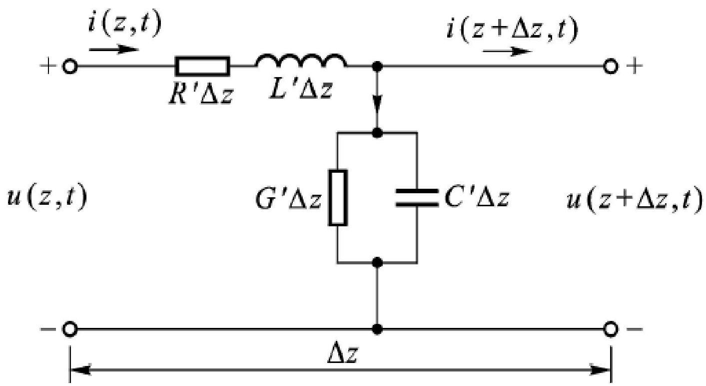
传输线的等效电路



❖ 如果将z方向无限长的传输线看成无限多Δz长度传输线的级联，而每一段Δz长度的传输线又用LC网络等效，那么z方向无限长的传输线就可用无限多级联的网络表示。

❖ 传输线的等效电路参数R'、G'、L'、C'沿传输线也是均匀分布的，故称它们为**分布电路参数**，在集总参数电路中，磁场集总在电感线圈里，电场集总在电容器里，能量集总损耗在电阻、电导上。

传输线方程



❖ 利用基尔霍夫电压、电流定律，可得

$$u(z,t)-R'\Delta z i(z,t)-L'\Delta z\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}-u(z+\Delta z,t)=0$$

$$i(z,t)-G'\Delta z u(z+\Delta z,t)-C'\Delta z\frac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t}-i(z+\Delta z,t)=0$$

❖ 除以Δz，并重新排列得到

$$\frac{u(z+\Delta z,t)-u(z,t)}{\Delta z}=-\left[R'i(z,t)+L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\right]$$

$$\frac{i(z+\Delta z,t)-i(z,t)}{\Delta z}=-\left[G'u(z+\Delta z,t)+C'\frac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t}\right]$$

传输线方程

$$\frac{u(z+\Delta z,t)-u(z,t)}{\Delta z}=-\left[R'i(z,t)+L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\right]$$

$$\frac{i(z+\Delta z,t)-i(z,t)}{\Delta z}=-\left[G'u(z+\Delta z,t)+C'\frac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t}\right]$$

❖ 当 $\Delta z\to 0$，取极限，得到

$$\boxed{\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}=-\left[R'i(z,t)+L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\right]}\qquad\boxed{\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=-\left[G'u(z,t)+C'\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right]}$$

❖ 这就是传输线上电压、电流满足的微分方程，称为**传输线方程**。

复数形式的传输线方程

❖ 引入简谐变量*u*(*z*, *t*)、*i*(*z*, *t*)的复数表示

$$u(z,t)=\mathrm{Re}\left[U(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \qquad i(z,t)=\mathrm{Re}\left[I(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

❖ 将上式代入传输线方程

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=-\left[G'u(z,t)+C'\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right] \qquad \frac{\partial u(z,t)}{\partial z}=-\left[R'i(z,t)+L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\right]$$

❖ 就得到复数形式的传输线方程（注意：*U*(*z*)、*I*(*z*)不是时间*t*的函数）。

$$\frac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z}=-(R'+\mathrm{j}\omega L')I(z)$$

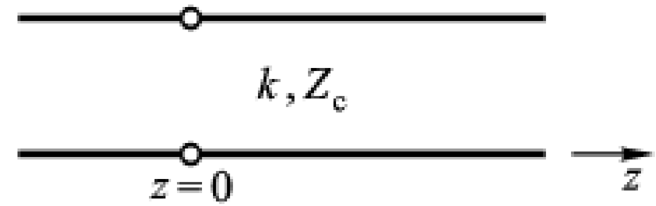
$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}=-(G'+\mathrm{j}\omega C')U(z)$$

当 $R'=0$，$G'=0$ 时 $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}\omega L'I}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}\omega C'U}$$

无耗传输线方程的解



$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} &= -\mathrm{j}\omega L'I \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} &= -\mathrm{j}\omega C'U\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2 L'C'U$$

❖ **定义** $\boxed{k = \omega\sqrt{L'C'}}$ **上式成为** $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k^2\right)U = 0$

❖ **其解为**

$$U = U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$$

$$I = \frac{1}{Z_{\mathrm{c}}}\left(U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right)$$

$$Z_{\mathrm{c}} = \frac{1}{Y_{\mathrm{c}}} = \frac{k}{\omega C'} = \frac{\omega L'}{k} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

❖ ***U*、*I* 都是复数，计及时间变量后并将取实部运算的Re省略后，可得**

$$\boxed{u(z,t) = \left[U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} + U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}\right]}$$

$$\boxed{i(z,t) = \frac{1}{Z_{\mathrm{c}}}\left[U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} - U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}\right]}$$

无耗传输线方程解的初步解释

$$u(z,t)=\left[U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz)}+U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+kz)}\right] \quad i(z,t)=\frac{1}{Z_{\mathrm{c}}}\left[U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz)}-U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+kz)}\right]$$

- 第一项表示入射波。第二项表示反射波。
- k称为传播常数。
- 入射波与反射波的相速 $v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\omega}{k}$ $\quad v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{r}}=-\dfrac{\omega}{k}$
- 波长 $\lambda=2\pi/k$
- 对于无损耗线，$k=\omega\sqrt{L'C'}$，故波的传播速度 $v_{\mathrm{p}}=1/\sqrt{L'C'}$
- Z_{c}为入射波电压与入射波电流之比，具有阻抗量纲，称为**特征阻抗**。其倒数$Y_{\mathrm{c}}=1/Z_{\mathrm{c}}$称为**特征导纳**。
- **反射波电压与反射波电流相位上刚好相差180°**

平行双导线、同轴线是无色散的

❖ 将平行双导线、同轴线的L'、C' 值代入，得到

$$v_{\mathrm{p}} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

❖ **电磁波沿平行双导线、同轴线传播的相速v_{p}等于填充介质中的光速。**

❖ 只要ε与频率无关，v_{p}也与频率无关。

❖ 电磁波传播速度v_{p}与频率无关，称为无色散。

❖ **平行双导线、同轴线是无色散的。**

有耗传输线方程的解

❖ 对于有损耗的情况，如果传播常数k与特征阻抗Z_c（或导纳Y_c）定义为

$$\mathrm{j}k=\sqrt{(R'+\mathrm{j}\omega L')(G'+\mathrm{j}\omega C')}\qquad Z_c=\frac{1}{Y_c}=\sqrt{\frac{R'+\mathrm{j}\omega L'}{G'+\mathrm{j}\omega C'}}$$

❖ 那么传输线方程

$$\frac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z}=-(R'+\mathrm{j}\omega L')I(z)\qquad \frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}=-(G'+\mathrm{j}\omega C')U(z)$$

❖ 成为 $\dfrac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}kZ_cI(z)\qquad \dfrac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}kY_cU(z)$

❖ 传输线上电压、电流的解仍取

$$\boxed{U=U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}}$$

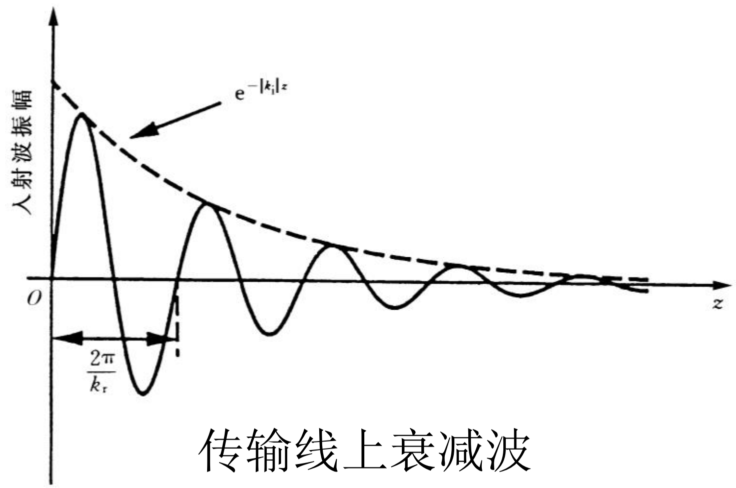
$$\boxed{I=\frac{1}{Z_c}\left(U\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right)}$$

❖ **但记住此时k、Z_c均为复数。**

有耗传输线方程的解

❖ 如将k记为 $k = k_r - jk_i$

❖ 则式
$$\begin{cases} U = U^{i}e^{-jkz} + U^{r}e^{jkz} \\ I = \dfrac{1}{Z_c}\left(U^{i}e^{-jkz} - U^{r}e^{jkz}\right) \end{cases}$$



传输线上衰减波

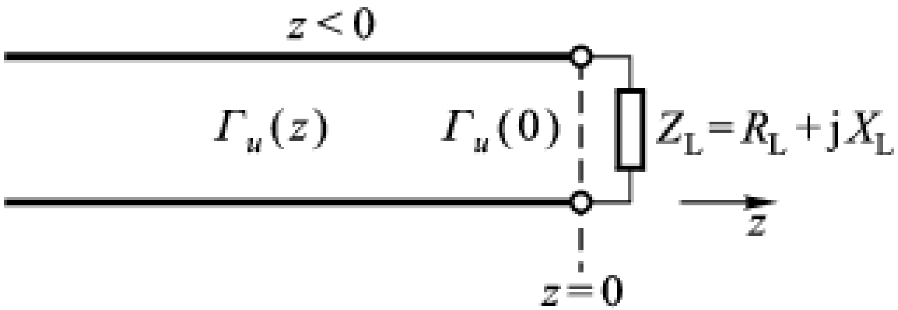
❖ 可改写为

$$U = U^{i}e^{-k_i z}e^{-jk_r z} + U^{r}e^{k_i z}e^{jk_r z} \qquad I = \frac{1}{Z_c}\left[U^{i}e^{-k_i z}e^{-jk_r z} - U^{r}e^{k_i z}e^{jk_r z}\right]$$

❖ 所以如果传播常数的虚部 $k_i>0$，损耗将使正方向传播的入射波振幅随 z 衰减，所以 k_i 称为波的衰减因子或衰减常数， k_r 称为相位常数，表示波的传播。

❖ **传输线上电压、电流的传播可用两个特征参数，即传播常数 k 与特征阻抗Z_c（或特征导纳Y_c）唯一地确定。**

传输线状态的表示



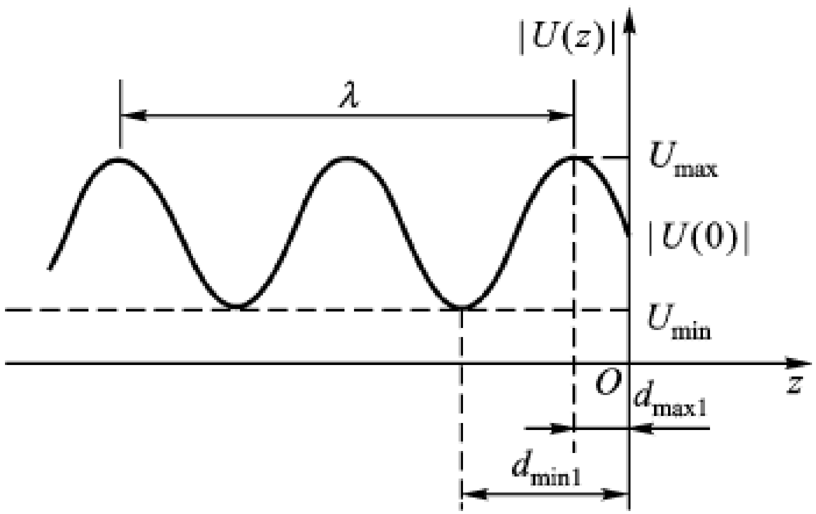
❖ 用电压U、电流I 表示

$$\begin{cases} U(z) = U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} \\ I(z) = \dfrac{1}{Z_{\mathrm{c}}}\left(U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right) \end{cases}$$

❖ 也可用入射波、反射波表示

$$U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} = \frac{1}{2}\left[U(z) + Z_{\mathrm{c}}I(z)\right]$$

$$U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} = \frac{1}{2}\left[U(z) - Z_{\mathrm{c}}I(z)\right]$$

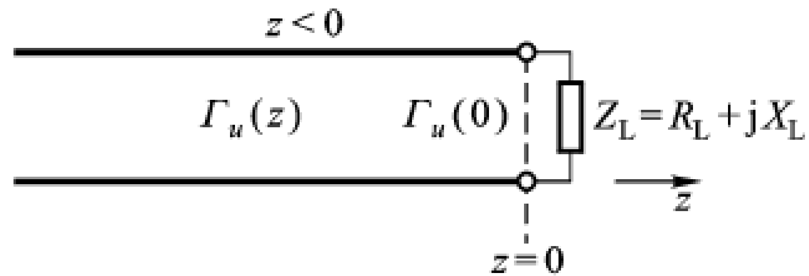


❖ 或用反射系数表示 $\Gamma_u(z) = \dfrac{U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}}{U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}$

❖ 或用阻抗（或导纳）表示 $Z(z) = \dfrac{1}{Y(z)} = \dfrac{U(z)}{I(z)}$

用反射系数表示传输线状态

$$\Gamma_u(z)=\frac{U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}}{U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}$$



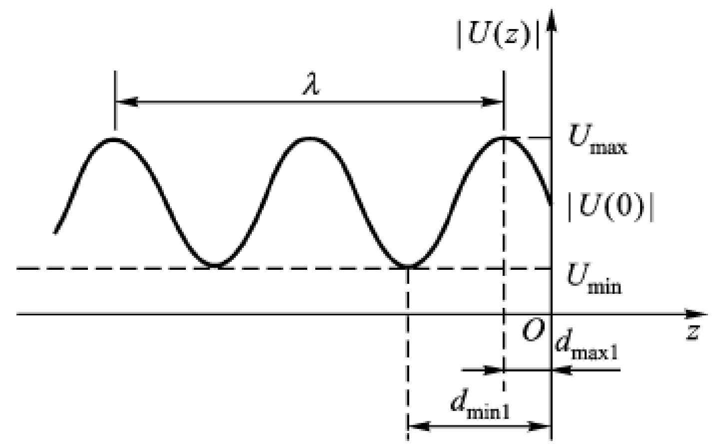
❖ 入射波 $U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$ 一般是已知量

$$U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}=\Gamma_u(z)U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$U(z)=[1+\Gamma_u(z)]U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$I(z)=[1-\Gamma_u(z)]\frac{U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}{Z_{\mathrm{c}}}$$

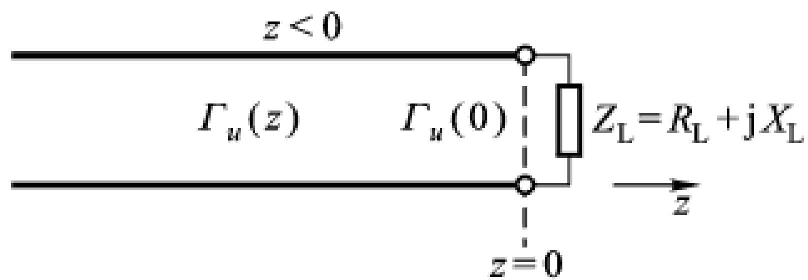
$$Z(z)=\frac{1}{Y(z)}=\frac{U(z)}{I(z)}=Z_{\mathrm{c}}\frac{(1+\Gamma_u(Z))}{(1-\Gamma_u(Z))}$$



❖ 或者 $$\Gamma_u(z)=\frac{Z(z)-Z_{\mathrm{c}}}{Z(z)+Z_{\mathrm{c}}}$$

❖ 所以由**反射系数** $\Gamma_u(z)$即可决定其他表示传输线状态的量。

传输线的状态一般由负载Z_L决定



❖ 传输线状态取决于

- 始端激励 (U^{i}, ω)
- 传输线特征参数（k，Z_c）
- 终端负载 $Z_L = R_L + jX_L$

❖ 对于给定激励、给定的传输线，其状态主要由**终端负载**决定。

❖ 因为 $\boxed{\Gamma_u(z) = \dfrac{Z(z)-Z_c}{Z(z)+Z_c}}$

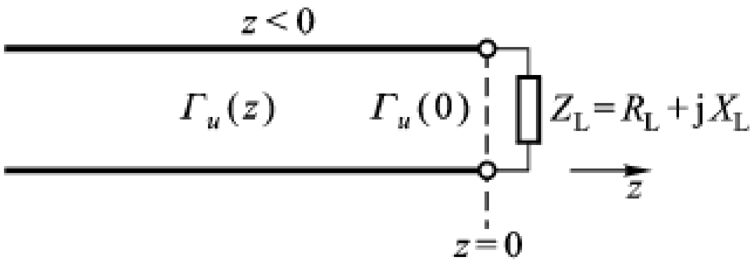
❖ 所以

$$\boxed{\Gamma_u(0) = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = |\Gamma_u(0)|\,e^{j\psi(0)}}$$

$$|\Gamma_u(0)| = \left|\frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}\right| = \sqrt{\frac{(R_L - Z_c)^2 + X_L^2}{(R_L + Z_c)^2 + X_L^2}} < 1 \qquad \psi(0) = \arctan\frac{2X_L Z_c}{R_L^2 + X_L^2 - Z_c^2}$$

传输线的反射系数的传播规律

$$\Gamma_u(0)=\frac{Z_L-Z_c}{Z_L+Z_c}=|\Gamma_u(0)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi(0)}$$

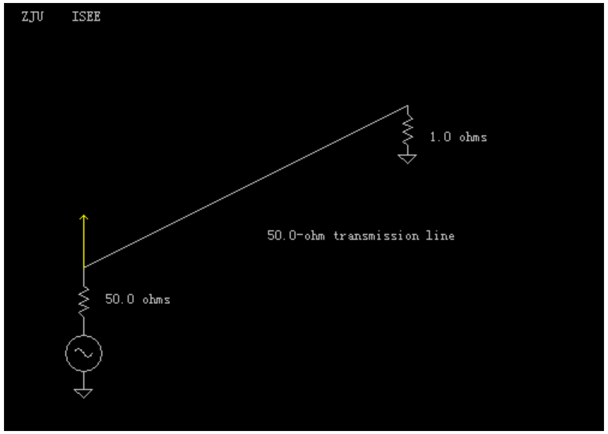


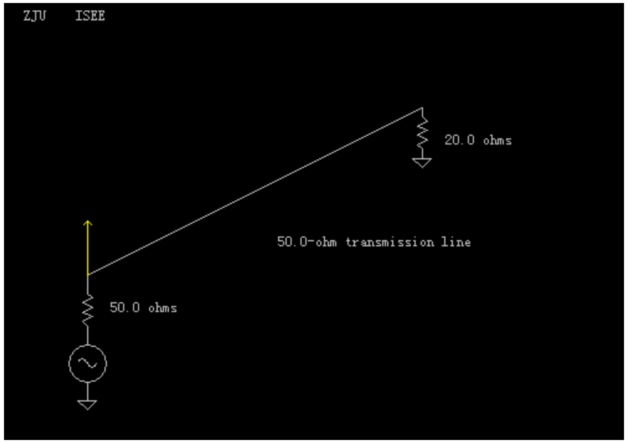
- 根据反射系数 Γ_u 的定义

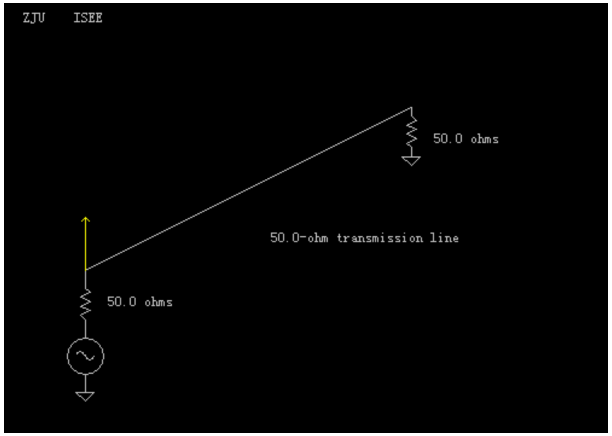
$$\Gamma_u(z)=\frac{U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}}{U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}=\frac{U^{\mathrm{r}}}{U^{\mathrm{i}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2kz}=\Gamma_u(0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2kz}$$

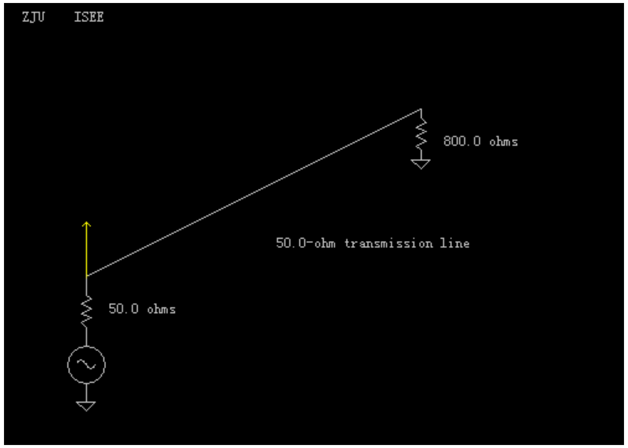
- 此即反射系数沿传输线变换的关系
- 因此，一旦由终端负载 Z_L 决定终端反射系数 $\Gamma_u(0)$后，即可由上式决定 $\Gamma_u(z)$
- 利用 $\Gamma_u(z)$ 与其他表示传输线状态的量的变换关系，即可得到表示传输线状态的量与负载 Z_L 的关系。

传输线纵向 $U(z)$、$I(z)$ 分布与终端负载阻抗 Z_L 有关



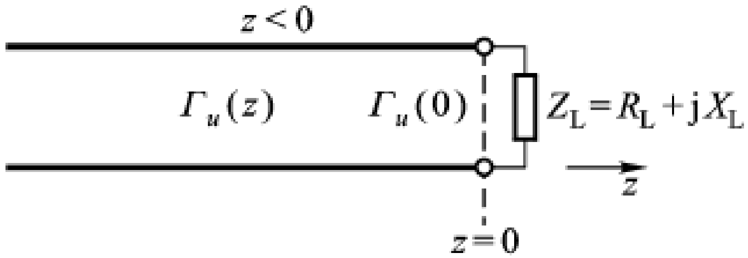






传输线上电压电流的传输规律

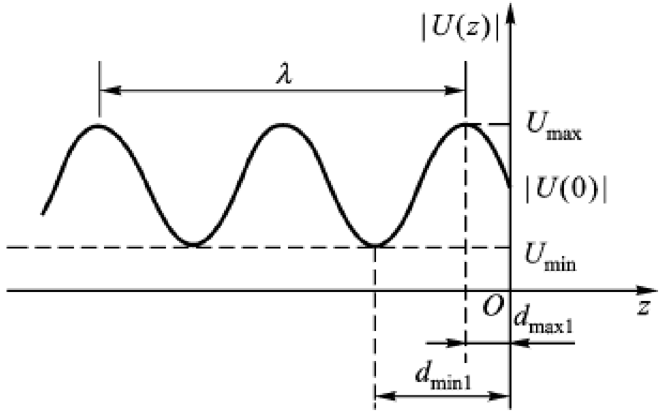
$$Z_L \Rightarrow \Gamma_u(0)=\frac{Z_L-Z_c}{Z_L+Z_c}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} U(0)=U^{i}(1+\Gamma_u(0)) \\ I(0)=U^{i}(1-\Gamma_u(0))/Z_c \end{cases}$$

$$\Gamma_u(0)\Rightarrow \Gamma_u(z)=\Gamma_u(0)e^{j2kz}$$

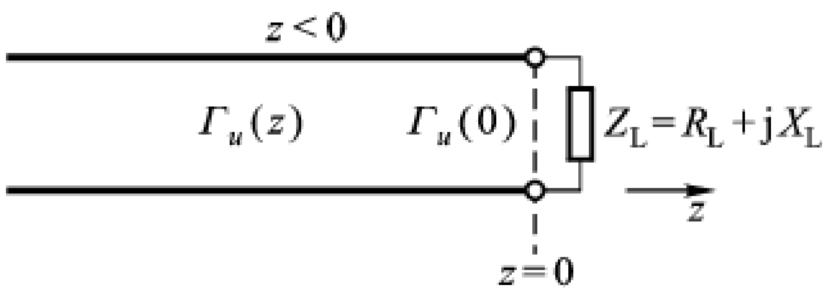
$$\Rightarrow \begin{cases} U(z)=U^{i}e^{-jkz}(1+\Gamma_u(z)) \\ I(z)=U^{i}e^{-jkz}(1-\Gamma_u(z))/Z_c \\ Z_{in}(z)=Z_c\left[1+\Gamma_u(z)\right]/\left[1-\Gamma_u(z)\right] \end{cases}$$



当（$z_2=-l$）并可进一步得到

$$U(z=-l)=U(0)\cos kl+jZ_cI(0)\sin kl$$
$$I(z=-l)=jY_cU(0)\sin kl+I(0)\cos kl$$

传输线上阻抗的传输规律



$$Z(0)=Z_c\frac{1+\Gamma_u(0)}{1-\Gamma_u(0)}$$

$$Z(z)=\frac{1}{Y(z)}=\frac{U(z)}{I(z)}=Z_c\frac{(1+\Gamma_u(Z))}{(1-\Gamma_u(Z))}$$

$$\Gamma_u(0)\Rightarrow\Gamma_u(z)=\Gamma_u(0)e^{j2kz}$$

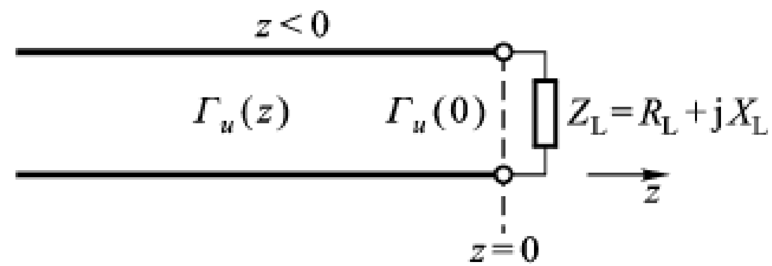
$$Z(z)=Z_c\frac{Z(0)-jZ_c\tan(kz)}{Z_c-jZ(0)\tan(kz)}$$

对于长度为l的传输线，定义z=0为终端，在z=-l为始端，

则始端输入阻抗

$$Z_{in}(z=-l)=Z_c\frac{Z_L+jZ_c\tan kl}{Z_c+jZ_L\tan kl}$$

反射系数沿传输线变换的图示

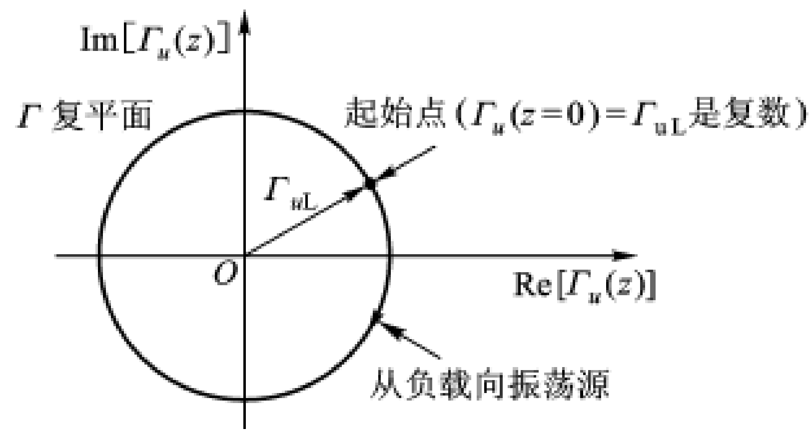


$$\Gamma_u(0)=\frac{Z_L-Z_c}{Z_L+Z_c}=|\Gamma_u(0)|e^{j\psi(0)}$$

$$|\Gamma_u(0)|=\left|\frac{Z_L-Z_c}{Z_L+Z_c}\right|=\sqrt{\frac{(R_L-Z_c)^2+X_L^2}{(R_L+Z_c)^2+X_L^2}}<1$$

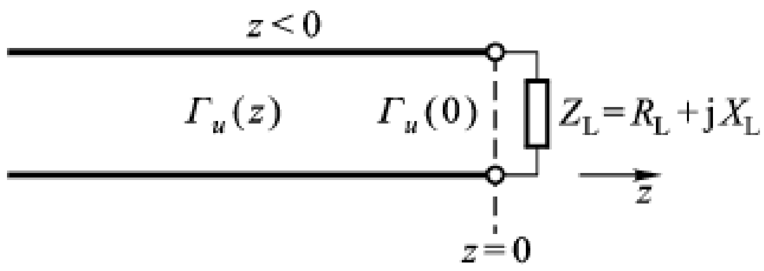
$$\psi(0)=\arctan\frac{2X_LZ_c}{R_L^2+X_L^2-Z_c^2}$$

- 反射系数沿传输线的变换只是相角变化。
- 在 Γ 复平面上，当阻抗Z_L不变时，传输线上Γ_u轨迹是以原点为圆心、半径为$|\Gamma_u(0)|$的圆，$|\Gamma_u(0)|\le 1$。
- 随 l 增加，沿顺时针方向转。l 增加 $\lambda/2$，相位变化重复一次。



$$\boxed{\Gamma_u(z)=\Gamma_u(0)e^{j2kz}}$$

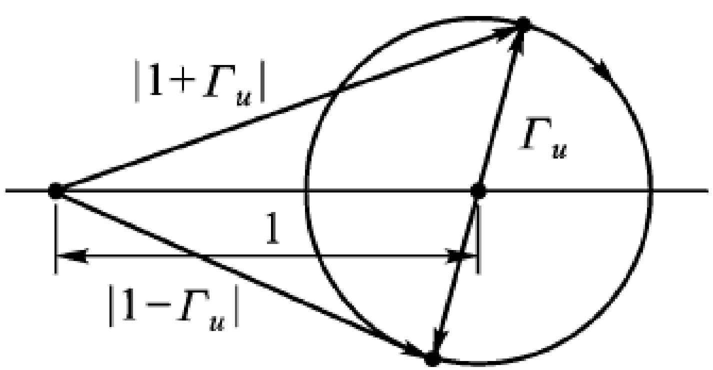
电压、电流沿传输线变换的图示



❖ $z = -l$ 处以入射波电压、电流归一化的电压、电流的模分别为

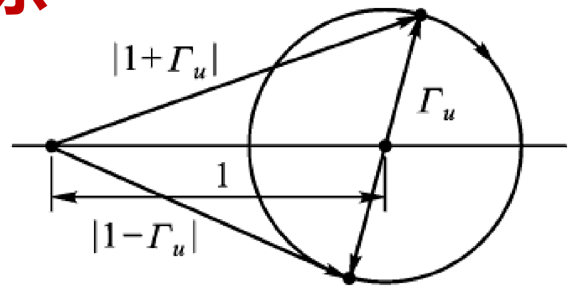
$$\left|\frac{U(z=-l)}{U^{i}e^{jkl}}\right| = |1+\Gamma_u(z=-l)| \qquad \left|\frac{I(z=-l)}{U^{i}e^{jkl}/Z_c}\right| = |1-\Gamma_u(z=-l)|$$

❖ 所以 $|1+\Gamma_u|$ 与 $|1-\Gamma_u|$ 沿等 $|\Gamma_u|$ 圆旋转就得到归一化电压电流沿传输线的变换



❖ $\dfrac{|1+\Gamma_u|}{|1-\Gamma_u|}$ 沿等 $|\Gamma_u|$ 圆旋转就得归一化阻抗沿传输线的变换。

传输线状态用驻波系数与驻波最小点位置表示



- 设$U^{\mathrm{i}}=1\mathrm{V}$，则 $|U(z=-l)|=|1+\Gamma_u(z=-l)|$

$$Z_c|I(z=-l)|=|1-\Gamma_u(z=-l)|$$

- 当 $\psi(0)-2kl=-2n\pi$

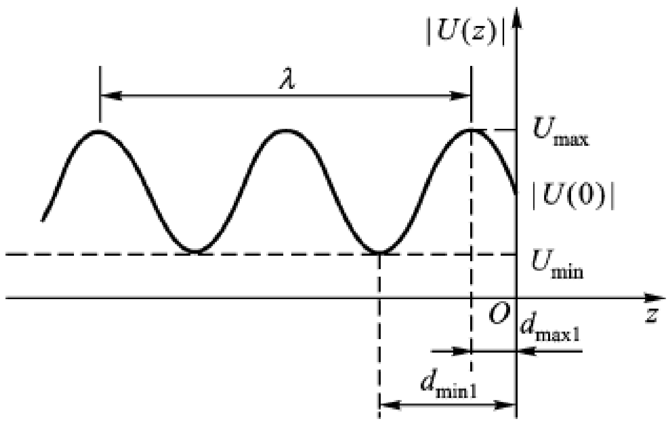
$$U_{\max}=1+|\Gamma_u(z=-l)|=1+|\Gamma_u(0)|$$

$$d_{\max}=\frac{\psi(0)}{2k}=\frac{\psi(0)\lambda}{4\pi}$$

- 当 $\psi(0)-2kl=-(2n+1)\pi$ $\quad U_{\min}=1-|\Gamma_u(z=-l)|=1-|\Gamma_u(0)|$

- **第一个驻波最小点位置**

$$d_{\min 1}=\frac{\psi(0)\lambda}{4\pi}+\frac{\lambda}{4}=d_{\max}+\frac{\lambda}{4}$$



- **驻波系数**

$$\rho=\frac{U_{\max}}{U_{\min}}=\frac{1+|\Gamma_u|}{1-|\Gamma_u|}\qquad |\Gamma_u|=\frac{\rho-1}{\rho+1}$$

开路、短路、匹配情况时的电压、电流分布

❖ **负载开路，** $Z_L = \infty$, $|\Gamma_u| = 1$, $\psi = 0$

$U_{max}=2$ $U_{min}=0$ $d_{min1}=\lambda/4$

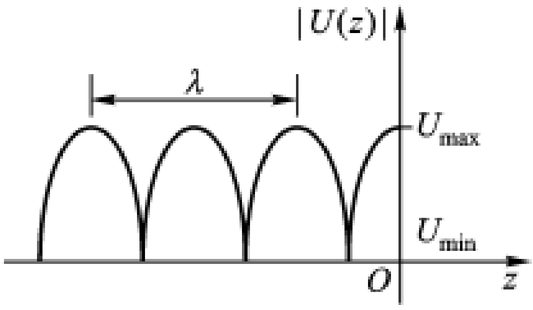
❖ **负载短路**$Z_L=0$，$|\Gamma_u|=1$，$\psi=180°$，**此时**

$U_{max}=2$ $U_{min}=0$ $d_{min1}=0$

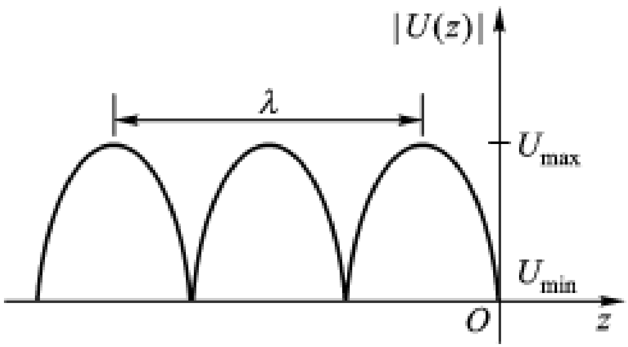
❖ **负载与传输线匹配，**$Z_L=Z_c$，$\Gamma_u=0$，

$U_{max}=1$ $U_{min1}=1$

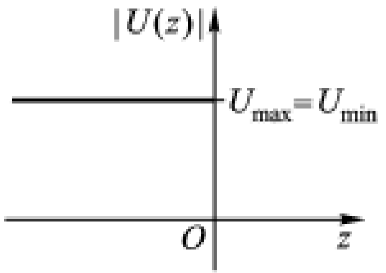
❖ **电压、电流沿传输线没有变化，这种状态称为行波。**



(a)



(b)



(c)

终端开路、短路时阻抗(或导纳)沿传输线变换的图示

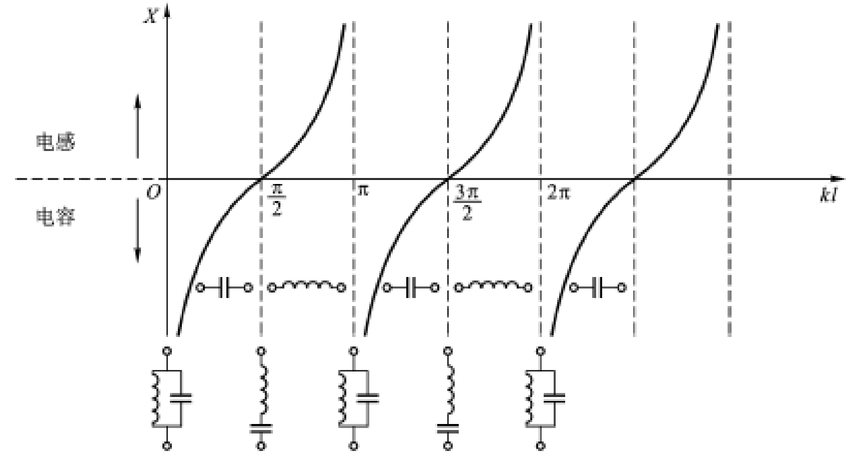
$$\boxed{Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan kl}{Z_c + jZ_L \tan kl}}$$

❖ **终端开路，即$Z_L=Z(0)=\infty$**

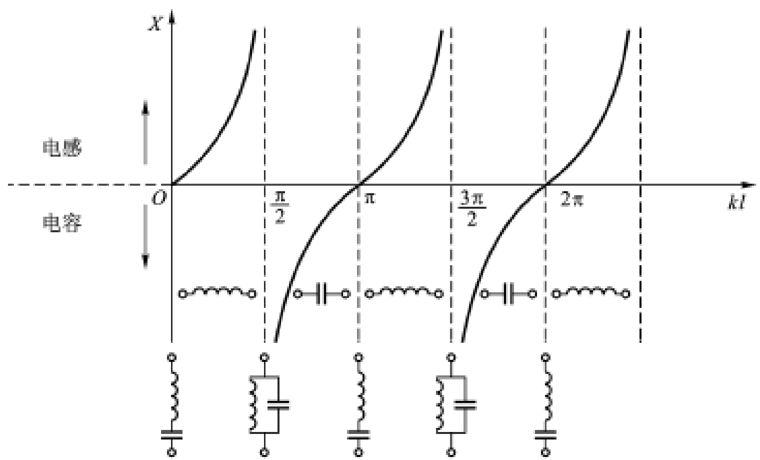
$$Z_{in}(z=-l) = \frac{Z_c}{j\tan kl}$$

❖ **终端短路，即$Z_L=Z(0)=0$**

$$Z_{in}(z=-l) = jZ_c \tan kl$$

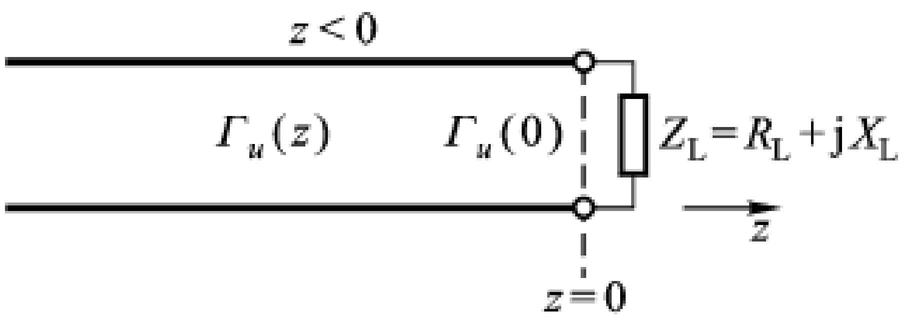


负载开路



负载短路

传输线上传输的功率



❖ 传输线上传输的功率可按下式计算

$$P(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[U(z)\cdot I^*(z)\right]$$

❖ $U(z)$、$I(z)$由入射波、反射波两项构成

$$P(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[U^{\mathrm{i}}(1+\varGamma_u(z))\cdot\frac{U^{\mathrm{i}*}}{Z_{\mathrm{c}}^*}(1-\varGamma_u^*(z))\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{|U^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}^*}-\frac{|U^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}^*}|\varGamma_u(z)|^2+\frac{|U^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}^*}\left(\varGamma_u(z)-\varGamma_u^*(z)\right)\right]$$

❖ 对于无损耗传输线，Z_c是实数，则上式第三项等于零。 $|\varGamma_u|$ 为常数

❖ 所以$P(z)=P$，不随位置而变

$$P=\frac{1}{2}\frac{|U^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}}-\frac{1}{2}\frac{|U^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}}|\varGamma_u|^2=P^{\mathrm{i}}-P^{\mathrm{r}} \qquad P^{\mathrm{i}}=\frac{1}{2}\frac{|U^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}}$$

❖ **传输线上任一点功率等于入射波功率与反射波功率之差**，而且 $\dfrac{P^{\mathrm{r}}}{P^{\mathrm{i}}}=|\varGamma_u|^2$

传输线上传输的功率

❖ 对于无损传输线，通过线上任一点的传输功率是相同的。但是为了简便起见，一般都取电压腹点或节点处计算。

❖ 如取电压腹点，则得功率为

$$P = \frac{1}{2}|U_{\max}|\cdot|I_{\min}| = \frac{1}{2}\frac{|U_{\max}|^2}{Z_c\rho}$$

❖ 如果取电压节点，则得

$$P = \frac{1}{2}|U_{\min}|\cdot|I_{\max}| = \frac{1}{2}\frac{Z_c|I_{\max}|^2}{\rho}$$

❖ 可见，当传输线的耐压一定或能载的电流一定，驻波系数 ρ 越趋近于1，传输功率越大。

传输效率

❖ 定义传输效率为传输线终端z=0处所接负载吸收功率P_L与传输线入口 $z=-l$ 处的输入功率P_{in}之比，用η 表示，即

$$\eta=\frac{P_L}{P_{in}}(\%)$$

❖ 考虑损耗后传输线上电压、电流表示式为

$$U=U^{i}\left(e^{-k_i z}e^{-jk_r z}+\Gamma_u(0)e^{k_i z}e^{jk_r z}\right)$$

$$I=\frac{U^{i}}{Z_c}\left(e^{-k_i z}e^{-jk_r z}-\Gamma_u(0)e^{k_i z}e^{jk_r z}\right)$$

$$\Gamma_u(0)=\frac{U^{r}}{U^{i}}$$ z=0 处反射系数

❖ 传输线任一点传输功率为

$$\boxed{P(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(UI^{*})=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{|U^{i}|^2}{Z_c^{*}}\right)\left(e^{-2k_i z}-|\Gamma_u(0)|^2 e^{2k_i z}\right)}$$

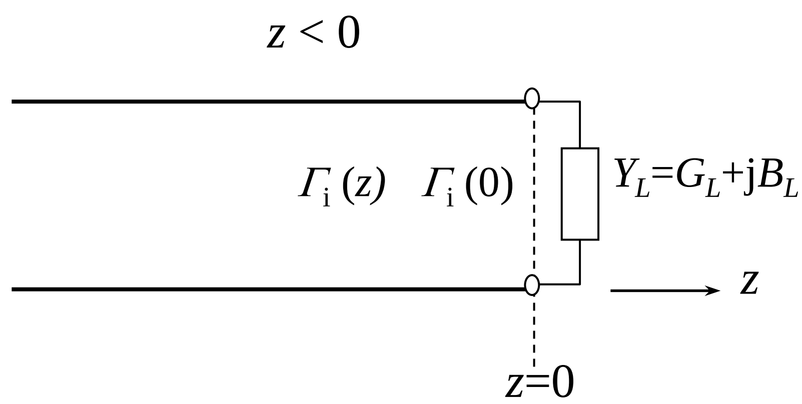
- **z=0处负载吸收功率为** $$P_L = P(z=0) = \frac{|V^{i}|^2}{2Z_c^*}\left(1-|\Gamma_u(0)|^2\right)$$
- **z = −l处输入功率为** $$P_{in} = P(z=-l) = \frac{|U^{i}|^2}{2Z_c^*}\left(e^{2k_i l}-|\Gamma_u(0)|^2 e^{-2k_i l}\right)$$
- **所以传输效率为** $$\eta = \frac{1-|\Gamma_u(0)|^2}{e^{2k_i l}-|\Gamma_u(0)|^2 e^{-2k_i l}}$$
- **利用指数函数与双曲函数之间关系** $$\eta = \frac{1}{\mathrm{ch}2k_i l + \frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{sh}2k_i l}$$
- **假如传输线损耗很小，或传输线长度很小，满足$k_i l$<<1，则 ch2$k_i l$≈1，$\mathrm{sh}2k_i l \approx 2k_i l$，并可得出**
- **（1）k_i 一定时，ρ 越小，l越短，η 越高；**
- **（2）ρ 一定时，k_i 越接近1，η 越高。**

电流反射系数与导纳

❖ 当负载用导纳表示时，不难得到

$$\Gamma_{\mathrm{i}}(z)=\frac{Y(z)-Y_{\mathrm{c}}}{Y(z)+Y_{\mathrm{c}}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{Z(z)}-\dfrac{1}{Z_{\mathrm{c}}}}{\dfrac{1}{Z(z)}+\dfrac{1}{Z_{\mathrm{c}}}}=\frac{Z_{\mathrm{c}}-Z_{\mathrm{L}}}{Z_{\mathrm{c}}+Z_{\mathrm{L}}}=-\Gamma_{u}(z)$$



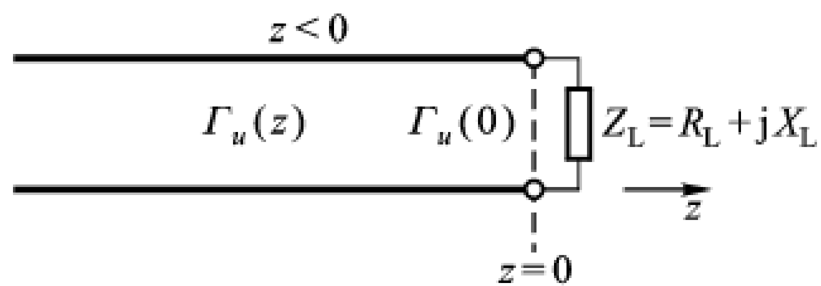
终端接负载Y_{L}的传输线

$$Y(z)=Y_{\mathrm{c}}\frac{1+\Gamma_{\mathrm{i}}(z)}{1-\Gamma_{\mathrm{i}}(z)}$$

$$\boxed{Y(z=-l)=Y_{\mathrm{c}}\frac{Y_{\mathrm{L}}+\mathrm{j}Y_{\mathrm{c}}\tan kl}{Y_{\mathrm{c}}+\mathrm{j}Y_{\mathrm{L}}\tan kl}}$$

传输线状态表示

$$\Gamma_u(z)=\frac{Z(z)-Z_c}{Z(z)+Z_c}$$



$$U(z)=[1+\Gamma_u(z)]U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$I(z)=[1-\Gamma_u(z)]\frac{U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}{Z_c}$$

$$Z(z)=\frac{1}{Y(z)}=\frac{U(z)}{I(z)}=Z_c\frac{(1+\Gamma_u(Z))}{(1-\Gamma_u(Z))}$$

$$\Gamma_u(z)$$

$$\Gamma_u(z)=\frac{U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}}{U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}=\frac{U^{\mathrm{r}}}{U^{\mathrm{i}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2kz}=\Gamma_u(0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2kz}$$

$$\rho=\frac{U_{\max}}{U_{\min}}=\frac{1+|\Gamma_u|}{1-|\Gamma_u|}$$

$$d_{\min 1}=\frac{\psi(0)\lambda}{4\pi}+\frac{\lambda}{4}=d_{\max}+\frac{\lambda}{4}$$

$$\Gamma_u(0)=\frac{Z_L-Z_c}{Z_L+Z_c}=|\Gamma_u(0)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi(0)}$$

第2讲复习

- **要点**
  - 传输线上电压、电流与位置z有关，可分解为入射波与反射波之和。电压入射波与电流入射波之比为特征阻抗Z_c，电压反射波与电流反射波相位相差180°。
  - 对于给定传输线，传输线状态由负载 Z_L 决定。
  - 描述传输线状态量的特征量有（U、I），（U^i，U^r），Γ, Z（或Y），（ρ, d_{min}），高频时，用Γ描述传输线的状态最好。它们相互之间可以转换。
  - 对于无损传输线，传输线上任一点传输功率相等，传输线处于匹配状态，传输效率最高。
- **复习**
  - 2.1- 2.3
- **预习**
  - 2.4-2.5

The End.

郑 史 烈

zhengsl@zju.edu.cn