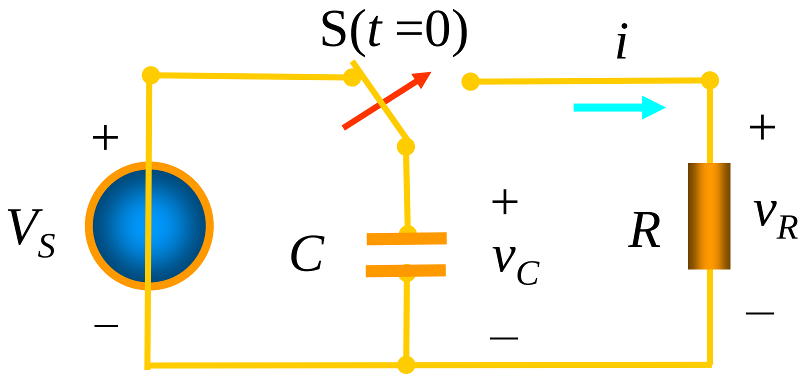
第4章 过渡过程的经典解法

- 一阶电路的响应
- 二阶电路的响应

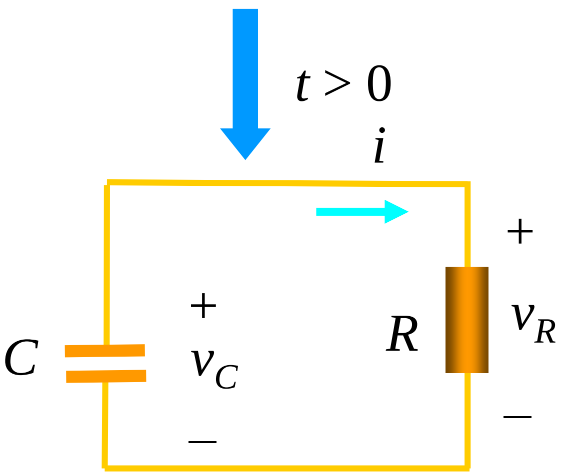
4.1 一阶电路（First-order circuits）的响应

4.1.1 一阶电路的零输入响应

零输入响应 → 换路后外加激励为零，仅由动态元件初始储能产生的电压和电流。

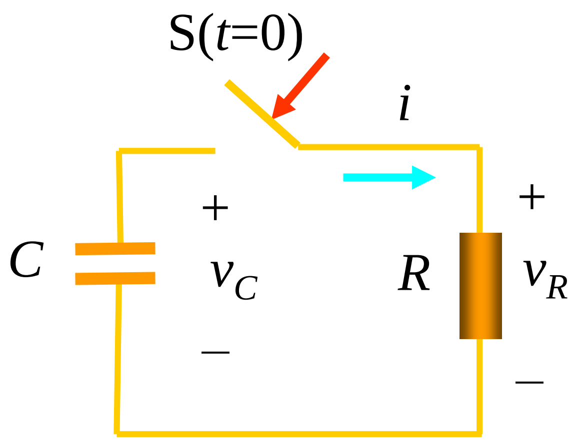


一、*RC*电路的零输入响应（Response of an source-free *RC* circuit）



已知 $v_C(0_-)=V_0$

$$\begin{cases} i=-C\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} \\ v_R=Ri \end{cases}$$



$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}+v_C=0 \\ v_C(0_+)=V_0 \end{cases}$$

特征方程 $RCs+1=0$

特征根 $s=-\dfrac{1}{RC}$

$$v_C(t)=ke^{st}$$

代入初始值 $v_C(0_+)=v_C(0_-)=V_0$

$\Rightarrow$ $k=V_0$

$$v_c = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$

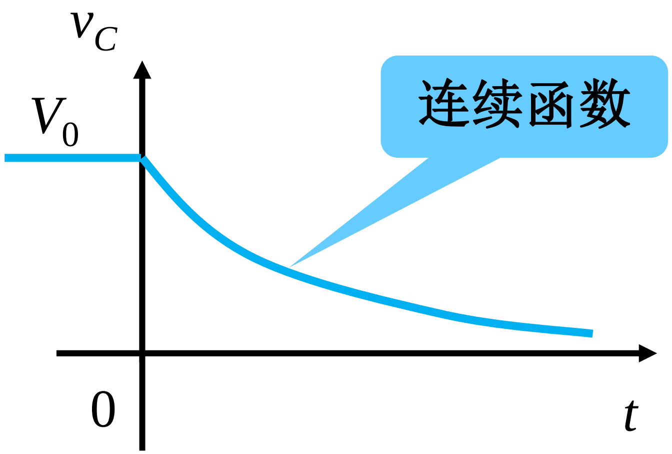
$$i = \frac{v_C}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$

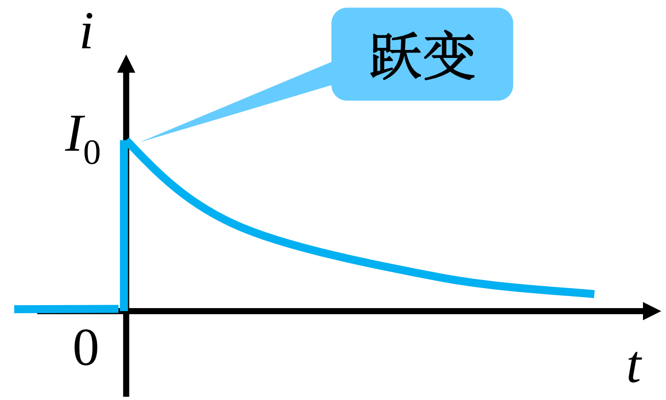
或

$$i = -C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = -CV_0 e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

表明

① 电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；





② 响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与***RC***有关；

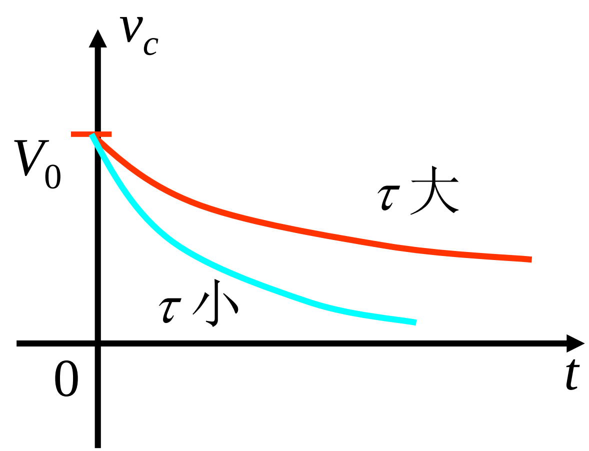
令 $\tau=RC$，称τ为一阶电路的时间常数（**Time constant**）

$$\tau = RC$$

时间常数τ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大→过渡过程时间长

τ 小→过渡过程时间短



物理含义 → 电压初值一定：

C 大（R 一定）　$W = Cv^2/2$　储能大

R 大（C 一定）　$i = v/R$　放电电流小

放电时间长

t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$v_c = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	V_0	$V_0 e^{-1}$	$V_0 e^{-2}$	$V_0 e^{-3}$	$V_0 e^{-5}$
	V_0	$0.368V_0$	$0.135V_0$	$0.05V_0$	$0.007V_0$

注意

(a) 时间常数τ: 电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。

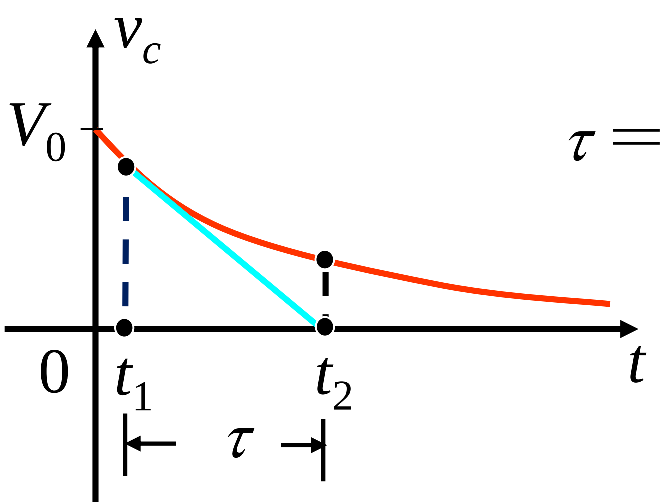
工程上认为： 经过 3τ~5τ，过渡过程基本结束。

(b) 时间常数τ的几何意义

$$v_{\mathrm{C}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

t_1时刻曲线的斜率等于

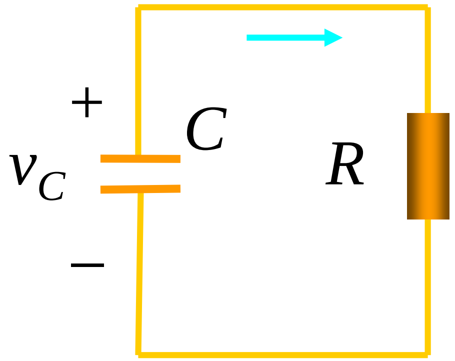
$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t_1} = -\frac{V_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t_1} = -\frac{1}{\tau}v_C(t_1) = \frac{0 - v_C(t_1)}{t_2 - t_1}$$



$\tau = t_2 - t_1$ → 次切距的长度

$$v_C(t_2) = V_0 e^{-\frac{t_2}{\tau}} = V_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} e^{-1} = e^{-1} v_C(t_1) \approx 0.368 v_C(t_1)$$

③能量关系 → 电容不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。



设 $v_C(0_+) = V_0$

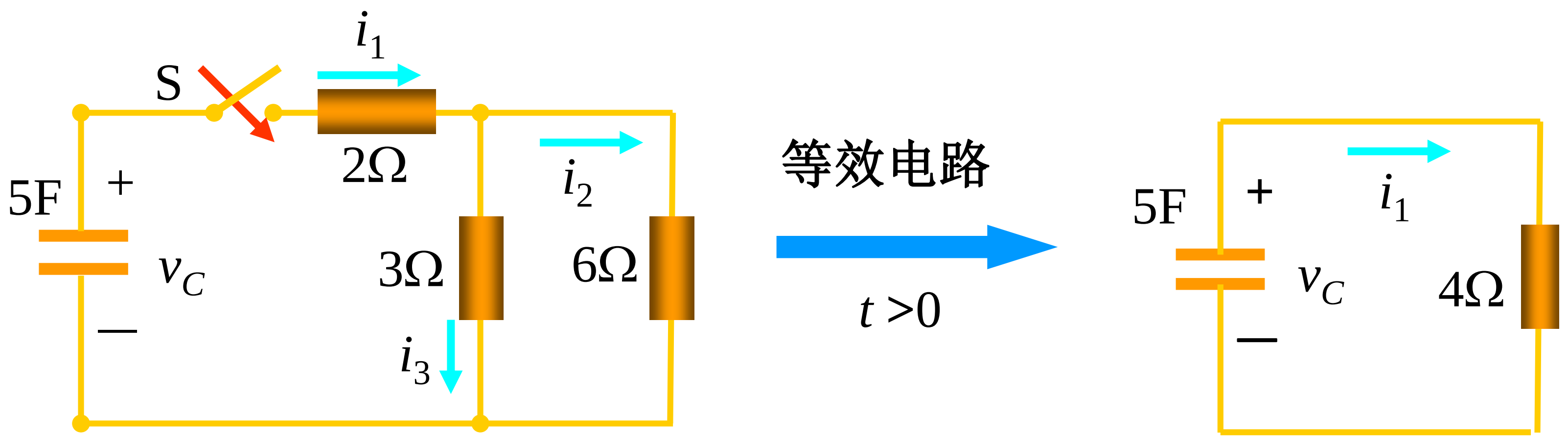
电容放出能量： → $\frac{1}{2}CV_0^2$

电阻吸收（消耗）能量： →

$$W_R = \int_0^{\infty} i^2 R\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \left(\frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R\mathrm{d}t$$

$$= \frac{V_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} \mathrm{d}t = \frac{V_0^2}{R} \left(-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \right) \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2}CV_0^2$$

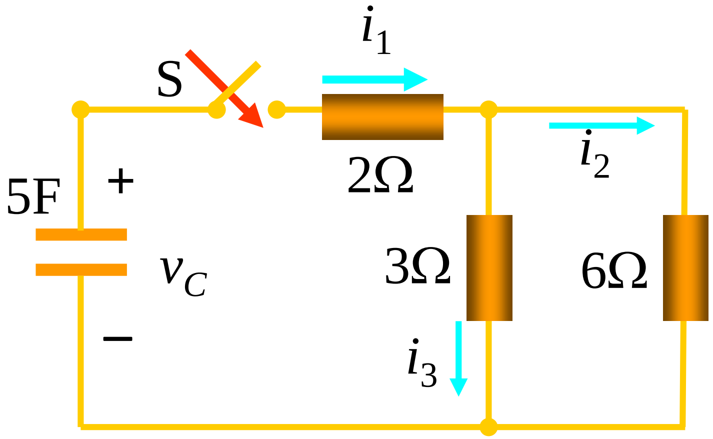
例1　图示电路中的电容原充有24V电压，求S闭合后，电容电压和各支路电流随时间变化的规律。

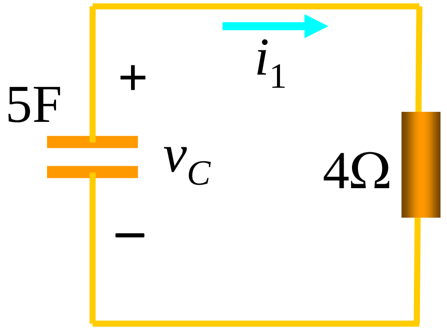


解　这是一个求一阶RC零输入响应问题，有：

$$v_C = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

$$V_0 = 24\ \text{V} \quad \tau = RC = 5 \times 4 = 20\ \text{s}$$





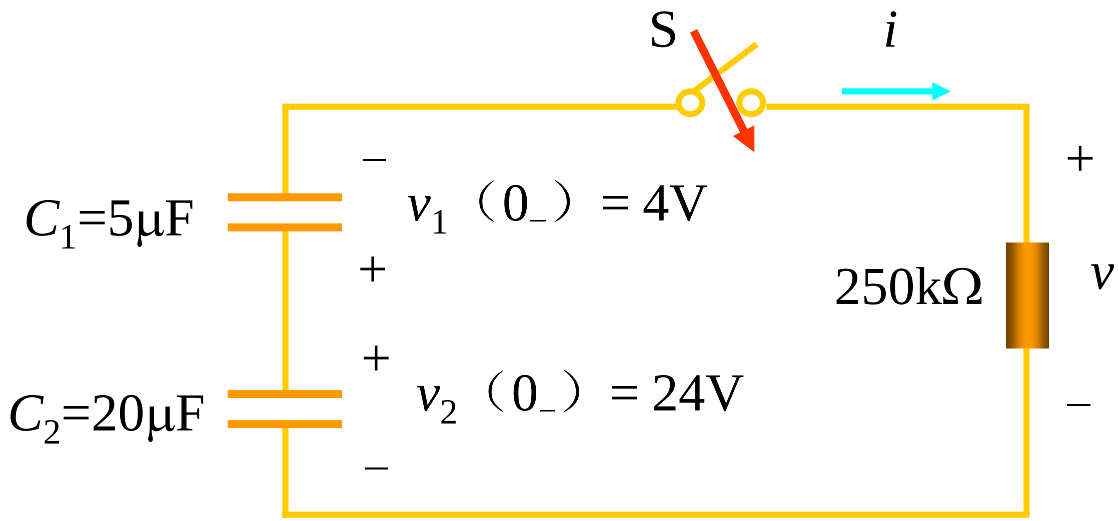
$$v_c = 24\, e^{-\frac{t}{20}} \ \text{V}，\quad t \geq 0$$

$$i_1 = v_C/4 = 6e^{-\frac{t}{20}} \ \text{A}$$

分流得：

$$i_2 = \frac{2}{3} i_1 = 4e^{-\frac{t}{20}} \ \text{A} \qquad i_3 = \frac{1}{3} i_1 = 2e^{-\frac{t}{20}} \ \text{A}$$

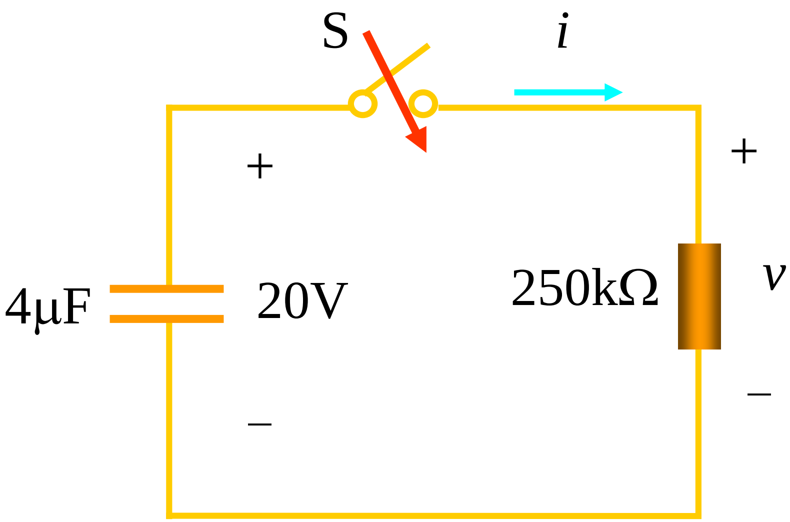
例2　求:(1)图示电路S闭合后各元件的电压和电流随时间变化的规律，(2）电容的初始储能和最终时刻的储能及电阻的耗能。



解

这是一个求一阶*RC*零输入响应问题，有：

$$C = \frac{C_2 C_1}{C_1 + C_2} = 4\ \mu\text{F} \qquad v(0_+) = v(0_-) = 20\ \text{V}$$



$$\tau = RC = 250 \times 4 \times 10^{-3} = 1\ \text{s}$$

$$v = 20e^{-t} \qquad t \geq 0$$

$$i = \frac{v}{250 \times 10^{3}} = 80e^{-t}\ \mu\text{A}$$

$$v_1 = v_1(0) + \frac{1}{C_1}\int_0^t i(\xi)d\xi = -4 - \frac{1}{5}\int_0^t 80e^{-t}\text{d}t$$

$$= (16e^{-t} - 20)\text{V}$$

$$v_2 = v_2(0) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i(\xi)\text{d}\xi = 24 + \frac{1}{20}\int_0^t 80e^{-t}\text{d}t$$

$$= (4e^{-t} + 20)\text{V}$$

初始储能

$$w_1 = \frac{1}{2}(5\times 10^{-6}\times 16) = 40\mu\text{J}$$

$$w_2 = \frac{1}{2}(20\times 10^{-6}\times 24^2) = 5760\mu\text{J}$$

最终储能

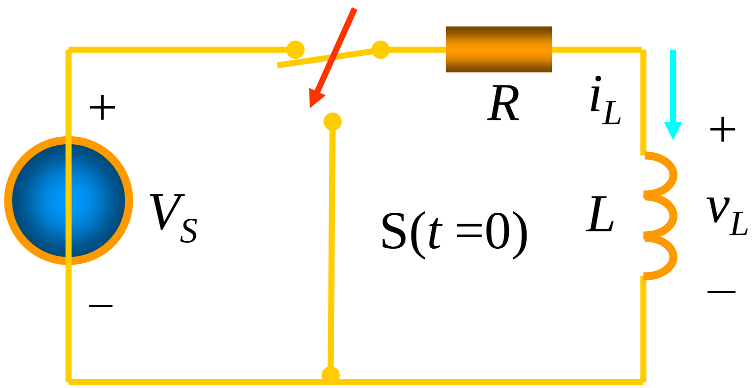
$$w = w_1 + w_1 = \frac{1}{2}(5+20)\times 10^{-6}\times 20^2 = 5000\mu\text{J}$$

电阻耗能

$$w_R = \int_0^{\infty} Ri^2 \mathrm{d}t = \int_0^{t} 250\times 10^3\times (80e^{-t})^2 \mathrm{d}t$$

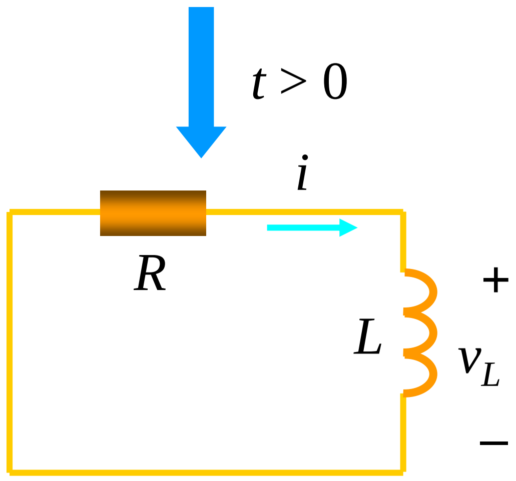
$$= 5800 - 5000 = 800\mu\text{J}$$

二、*RL*电路的零输入响应（Response of an source-free *RL* circuit）



$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{V_S}{R_1 + R} = I_0$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \quad t \geq 0$$



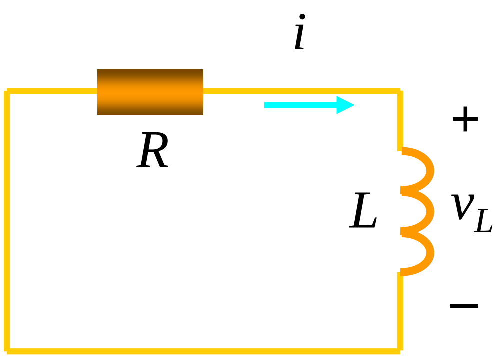
特征方程 $Ls+R=0$

特征根 $s = -\frac{R}{L}$ $i_L(t) = ke^{st}$

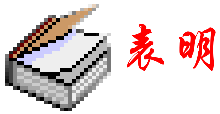
代入初值 → $k = i_L(0_+) = I_0$

→ $i_L(t) = I_0 e^{st} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \ \tau = \frac{L}{R} = -\frac{1}{s}, \quad t \geq 0$

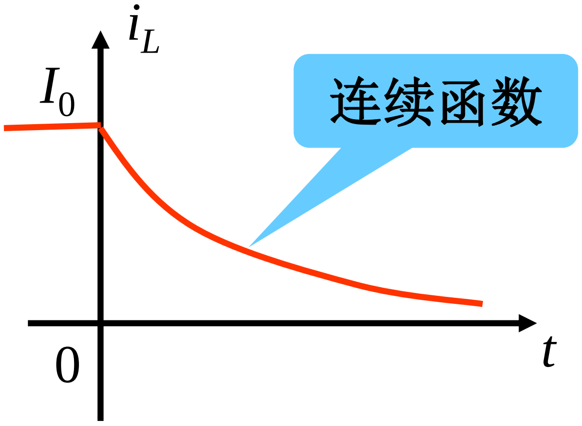
$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

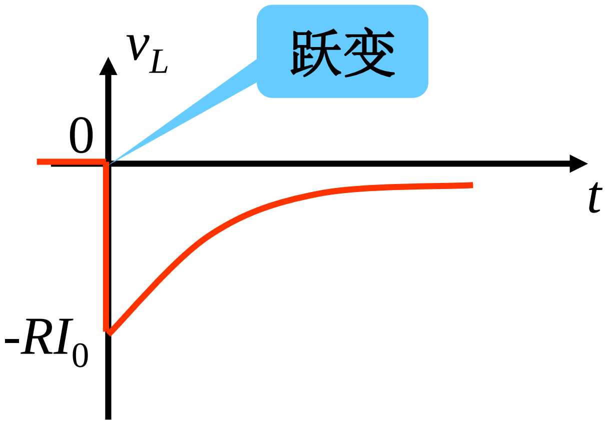


$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



①电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；





② 响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与L/R有关；

$$\tau = L/R$$

称为一阶RL电路时间常数

时间常数τ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ 大→过渡过程时间长

τ 小→过渡过程时间短

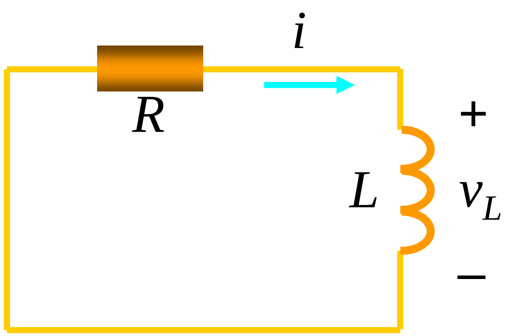
物理含义 → 电流初值$i_L(0)$一定：

L大　$W=Li_L^2/2$　起始能量大

R小　$P=Ri^2$　放电过程消耗能量小

} 放电慢，τ 大

③能量关系 → 电感不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。



设 $i_L(0_+) = I_0$

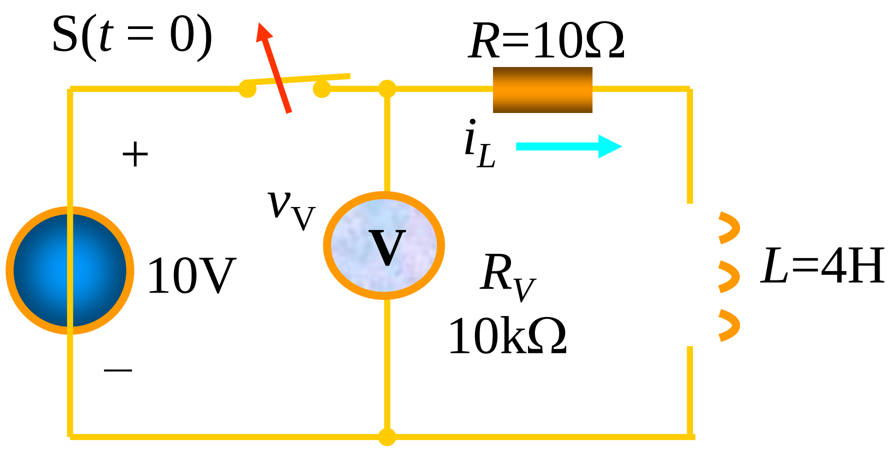
电感放出能量： → $\frac{1}{2}LI_0^2$

电阻吸收（消耗）能量： →

$$W_R = \int_0^\infty i^2 R\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (I_0 e^{-\frac{t}{L/R}})^2 R\,\mathrm{d}t$$

$$= I_0^2 R \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{L/R}}\mathrm{d}t = I_0^2 R\left(-\frac{L/R}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{2}LI_0^2$$

例1　t=0时，打开开关S，求v_V 。电压表量程：50 V



解

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\ \text{A}$$

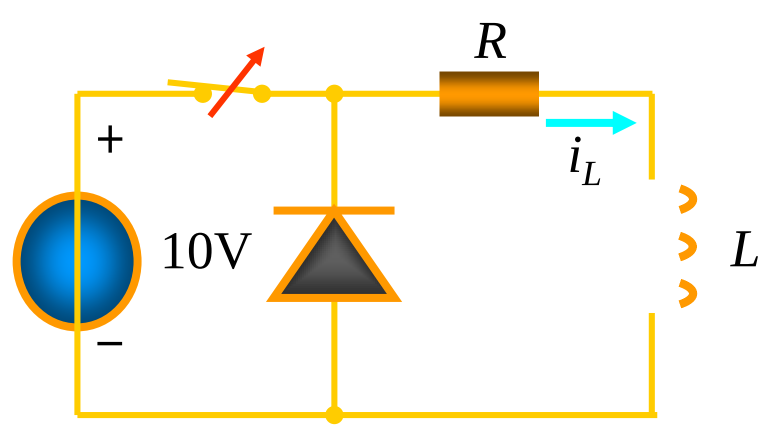
$$i_L = e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$

$$\tau = \frac{L}{R+R_V} = \frac{4}{10000} = 4\times 10^{-4}\,s$$

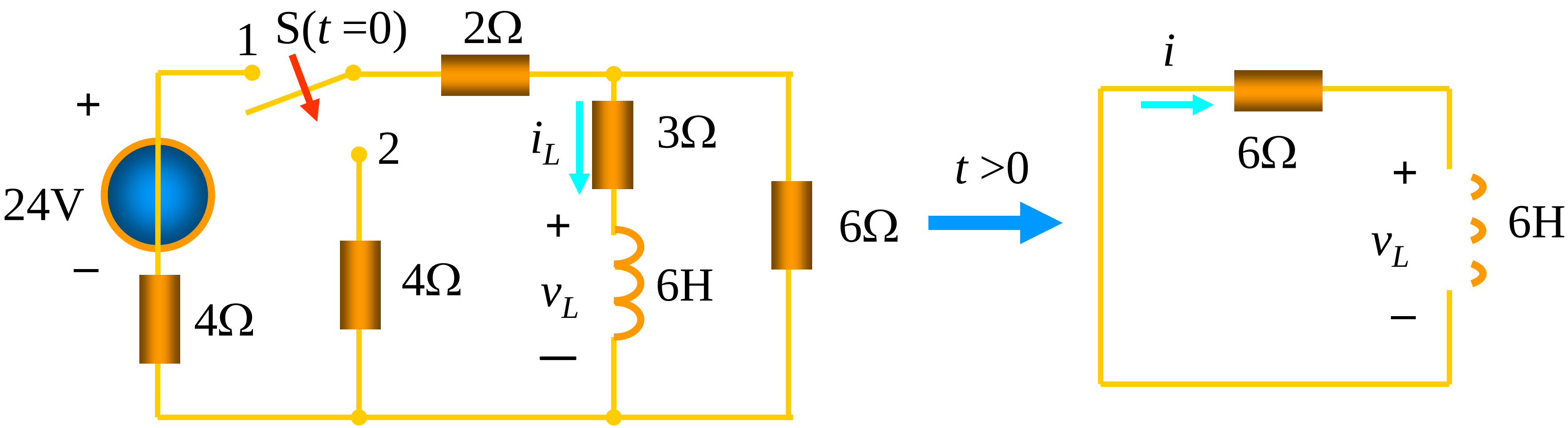
$$v_V = -R_V i_L = -10000e^{-2500t} \qquad t \geq 0$$

$v_V(0_+)$=－ 10000V

造成 V 损坏。



例2　t=0时, 开关S由1→2，求电感电压和电流及开关两端电压 v_{12}。

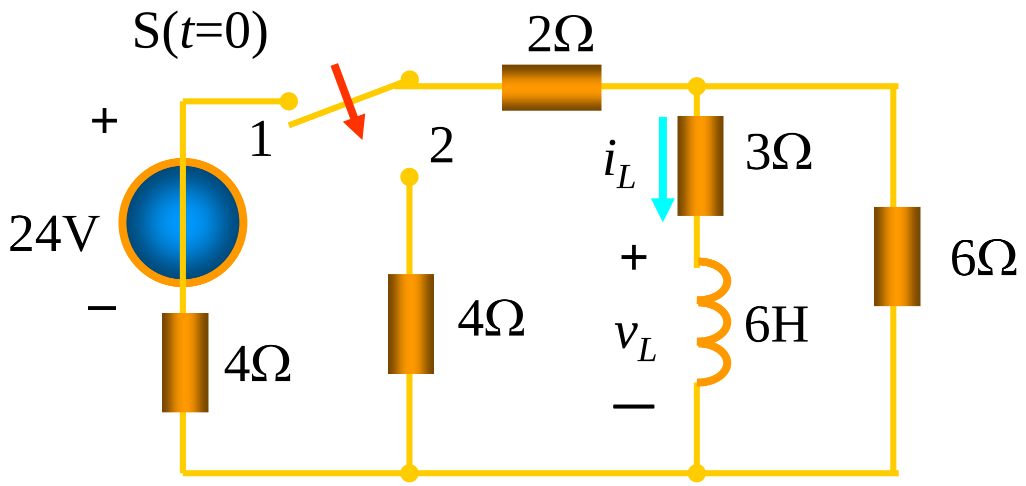


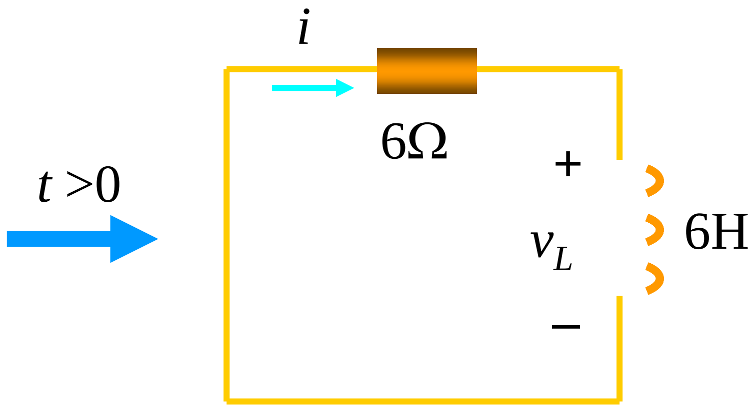
解

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{24}{4+2+3//6} \times \frac{6}{3+6} = 2\text{A}$$

$$R = 3 + (2+4)//6 = 6\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{6}{6} = 1\ \text{S}$$





$$i_L = 2e^{-t}\text{A} \quad v_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -12e^{-t}\ \text{V} \quad t \geq 0$$

$$v_{12} = 24 + 4 \times \frac{i_L}{2} = 24 + 4e^{-t}\ \text{V}$$

小结

①一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应，都是由初始值衰减为零的指数衰减函数。

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

*RC*电路 $v_C(0_+) = v_C(0_-)$

*RL*电路 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$

②衰减快慢取决于时间常数τ

*RC*电路 $\tau = RC$

$\tau = L/R$ *RL*电路

*R*为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

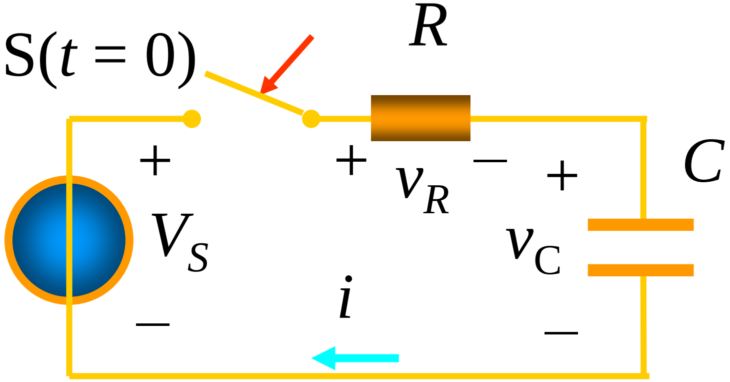
③同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

④一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为**零输入线性**。

4.1.2 一阶电路的零状态响应

零状态响应 → 动态元件初始能量为零，由$t>0$电路中外加激励作用所产生的响应。

一、*RC*电路的直流响应



$v_C(0_-)=0$

非齐次线性常微分方程

方程： $$RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}+v_C=V_S$$

解答形式为：

$$v_C=v_C'+v_C''$$

非齐次方程特解

齐次方程通解

v'_C → 特解（强制分量）

$$RC\frac{dv_C}{dt}+v_C=V_S$$ 特解 → $$v'_C=V_S$$

与输入激励的变化规律有关，为电路的稳态解

v''_C → 通解（自由分量，暂态分量）

$$RC\frac{dv_C}{dt}+v_C=0$$ 的通解 → $$v''_C=ke^{-\frac{t}{RC}}$$

变化规律由电路参数和结构决定

$\boxed{\text{全解}}$

$$v_C(t) = v'_C + v''_C = V_S + ke^{-\frac{t}{RC}}$$

由初始条件 $v_C(0_+)=0$ 定积分常数 k

$v_C(0_+) = k+V_S= 0$ → $k= -V_S$

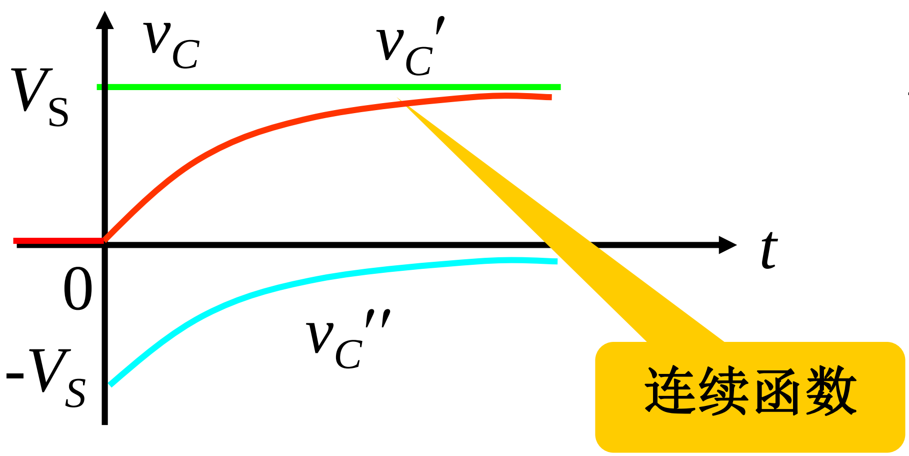
$$v_C = V_S - V_S e^{-\frac{t}{RC}} = V_S\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad (t \geq 0)$$

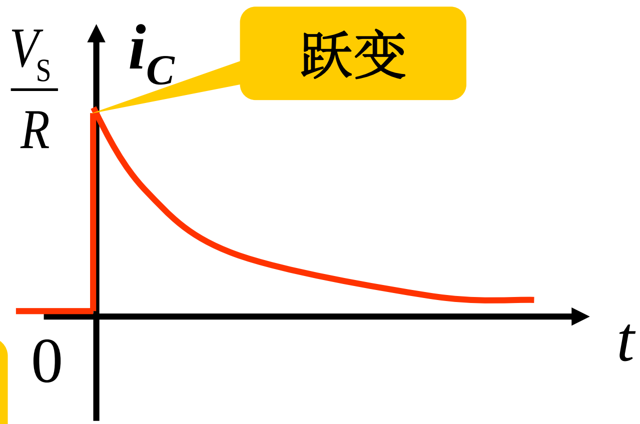
从以上式子可以得出： $i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{V_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

表明

①电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数；电容电压由两部分构成：

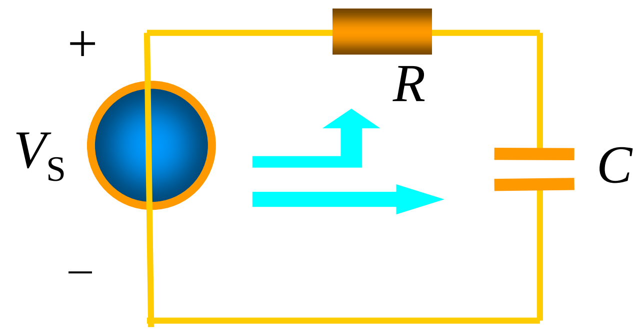
稳态分量（强制分量） + 暂态分量（自由分量）





②响应变化的快慢，由时间常数$\tau=RC$决定；τ 大，充电慢，τ 小充电就快。

③响应与外加激励成线性关系；



④能量关系

电源提供能量：$$\int_0^\infty V_S i dt = V_S q = C V_S^2$$

电阻消耗能量：$$\int_0^\infty i^2 R \mathrm{d} t = \int_0^\infty \left(\frac{V_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R \mathrm{d} t = \frac{1}{2} C V_S^2$$

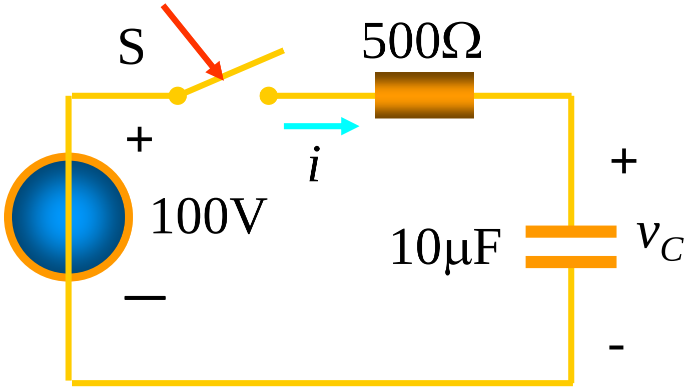
电容储存能量：$$\frac{1}{2} C V_S^2$$

表明

电源提供的能量一半消耗在电阻上，一半转换成电场能量储存在电容中。

例　t=0时，开关S闭合，已知 $v_C(0_-)=0$，求(1)电容电压和电流，(2) v_C＝80V时的充电时间t 。

解　**(1)** 这是一个RC电路零状态响应问题，有：



$$\tau = RC = 500 \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

$$v_C = V_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1 - e^{-200t})\text{V} \quad (t \geq 0)$$

$$i = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{V_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2e^{-200t}\text{A}$$

(2) 设经过 t_1 秒，v_C＝80 V

$$80 = 100(1 - e^{-200t_1}) \quad \rightarrow \quad t_1 = 8.045\ \text{ms}$$

二、*RL*电路的直流响应

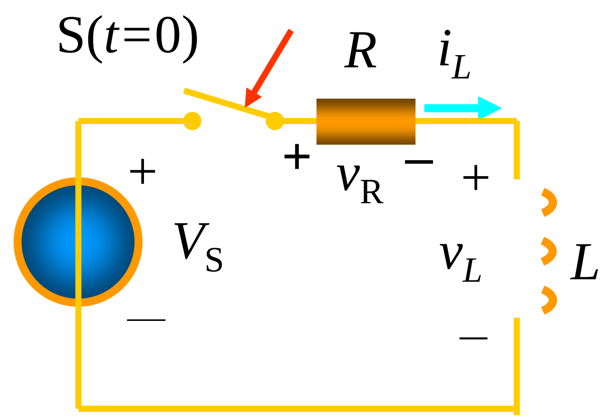
已知 $i_L(0_-)=0$，电路方程为：

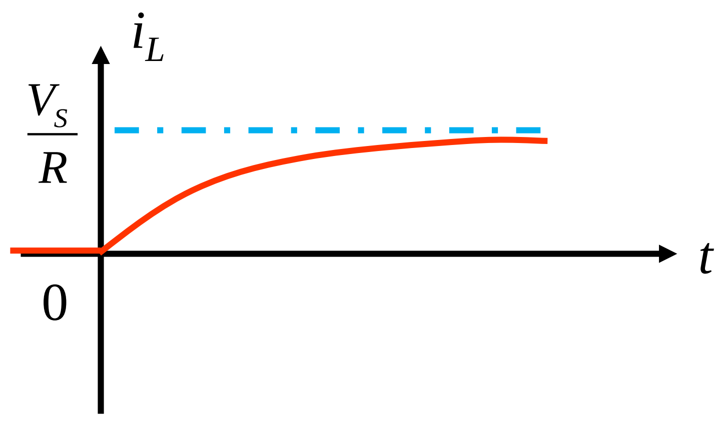
$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=V_S$$

$$i_L=i_L'+i_L''\qquad=\frac{V_S}{R}+ke^{-\frac{R}{L}t}$$

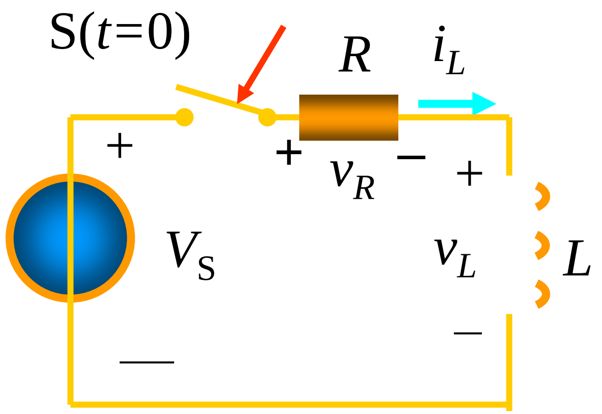
$$i_L(0_+)=0\quad\rightarrow\quad k=-\frac{V_S}{R}$$

$$\boxed{i_L=\frac{V_S}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

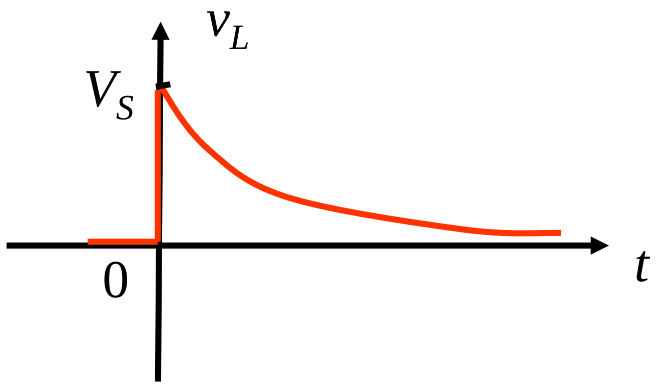




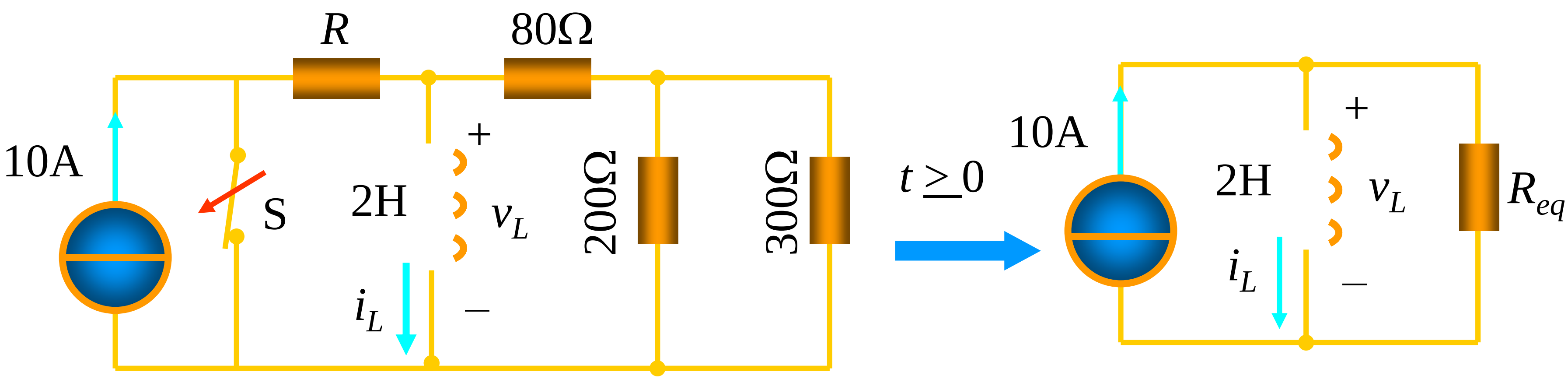
$$i_L = \frac{V_S}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = V_S e^{-\frac{R}{L}t}$$



例　t=0时开关S打开，求 t >0 后 i_L、v_L的变化规律。



解

这是RL电路零状态响应问题，先化简电路，有：

$$R_{eq} = 80 + 200//300 = 200\ \Omega$$

$$\tau = L/R_{eq} = 2/200 = 0.01\text{ s}$$

$$i_L(\infty) = 10\text{A} \qquad i_L(t) = 10(1 - e^{-100t})\ \text{A}$$

$$v_L(t) = 10 \times R_{eq} e^{-100t} = 2000 e^{-100t}\ \text{V}$$

小结

①电路的零状态响应是由外加激励和电路特性决定的。

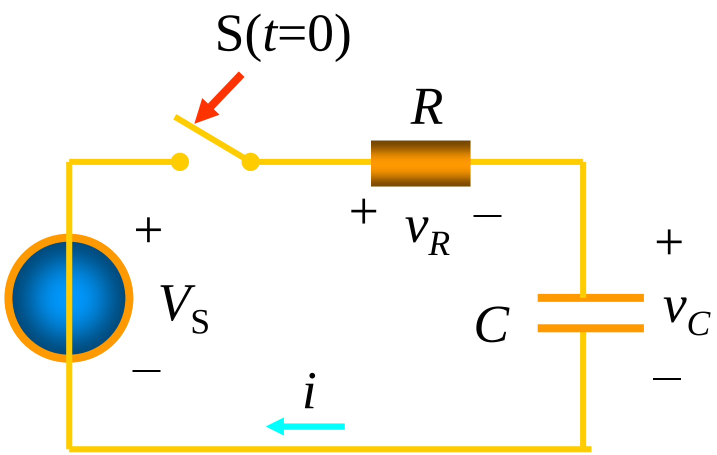
② 当系统的起始状态为零时，线性电路的零状态响应与外施激励成线性关系, 即所谓的“零状态线性”。

4.1.3 一阶电路的全响应

全响应 → 电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

一、全响应

以*RC*电路为例，电路微分方程：



$$RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}+v_C=V_S$$

解答为：$v_C(t)=v_C'+v_C''$

$$\tau=RC$$

$$\begin{cases} \text{特解} \quad v_C'=V_S \\ \text{通解} \quad v_C''=ke^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

由初始值定 k

$$v_C(0_-) = V_0$$

$$v_C(0_+) = k + V_S = V_0$$

$$\therefore k = V_0 - V_S$$

$$v_C = V_S + ke^{\frac{-t}{\tau}} = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

二、全响应的两种分解方式

①着眼于电路的两种工作状态 → 物理概念清晰

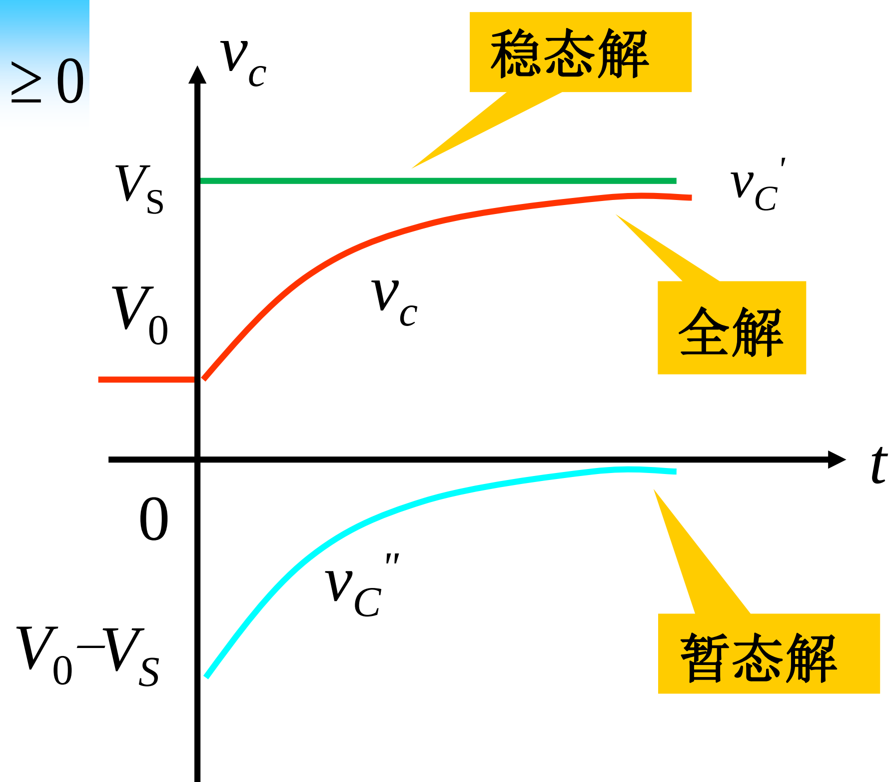
全响应 = 强制分量(稳态解)+自由分量(暂态解)

Complete response = forced response + natural response

(Steady-state response) **(transient response)**

$$v_C = V_S + ke^{\frac{-t}{\tau}} = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \ge 0$$

强制分量 自由分量

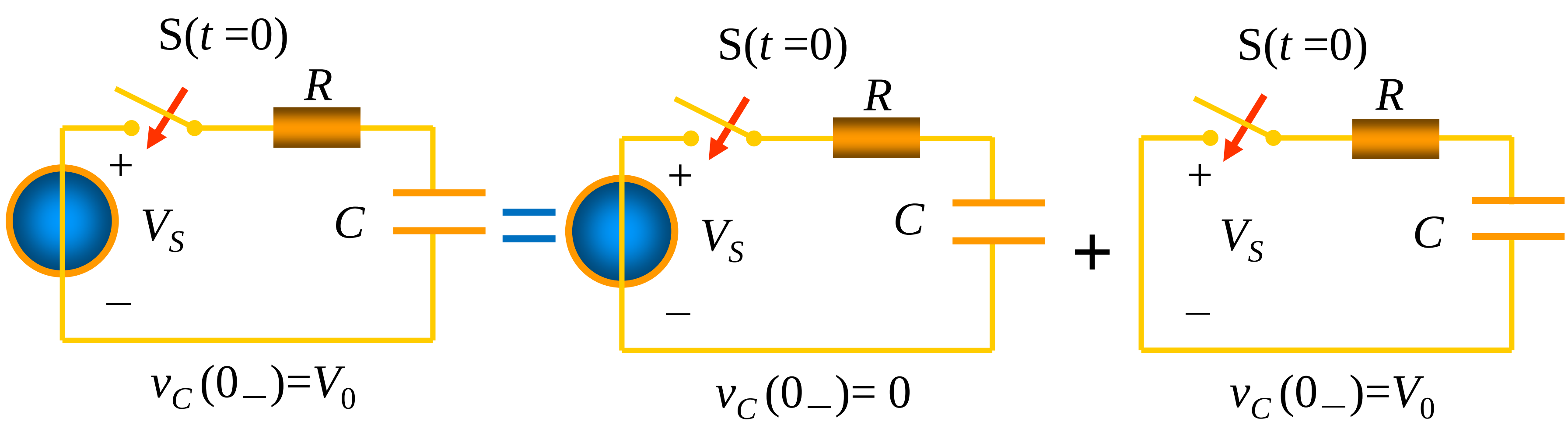


②着眼于因果关系 → 便于叠加计算

$$v_C = V_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

零状态响应　　　零输入响应

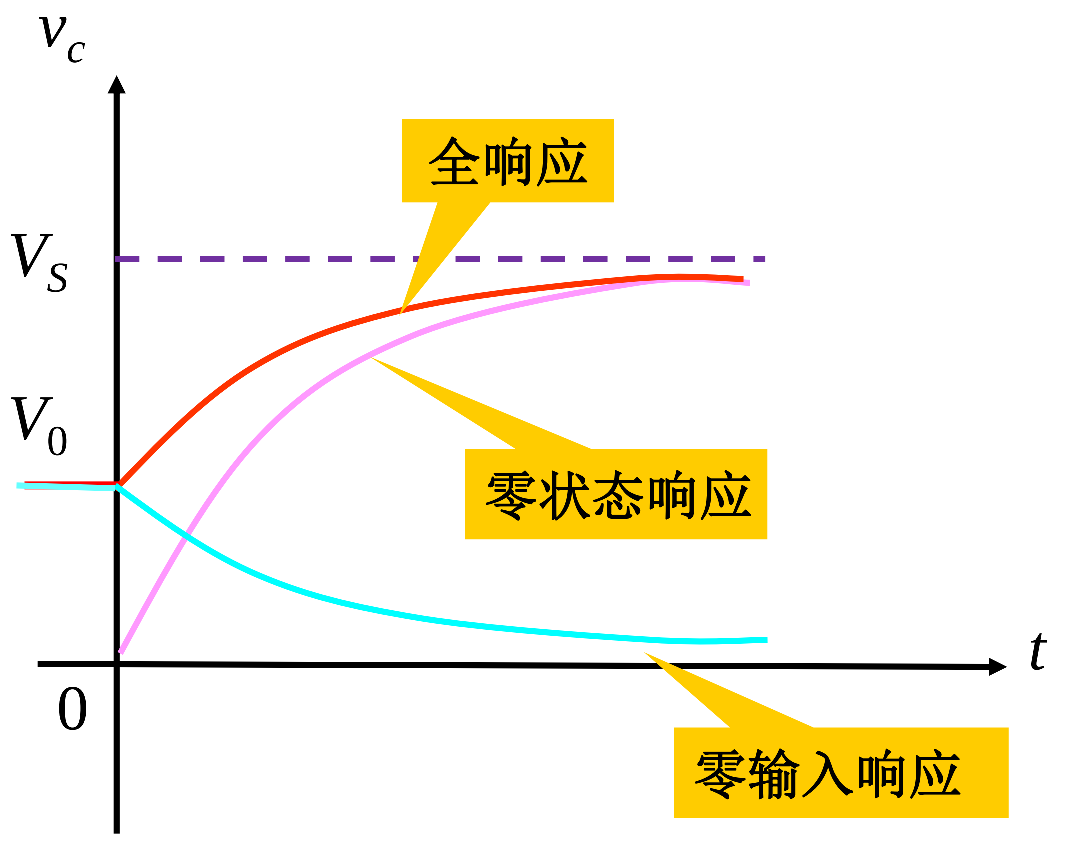
全响应 = 零状态响应 + 零输入响应



$$v_C = V_S\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

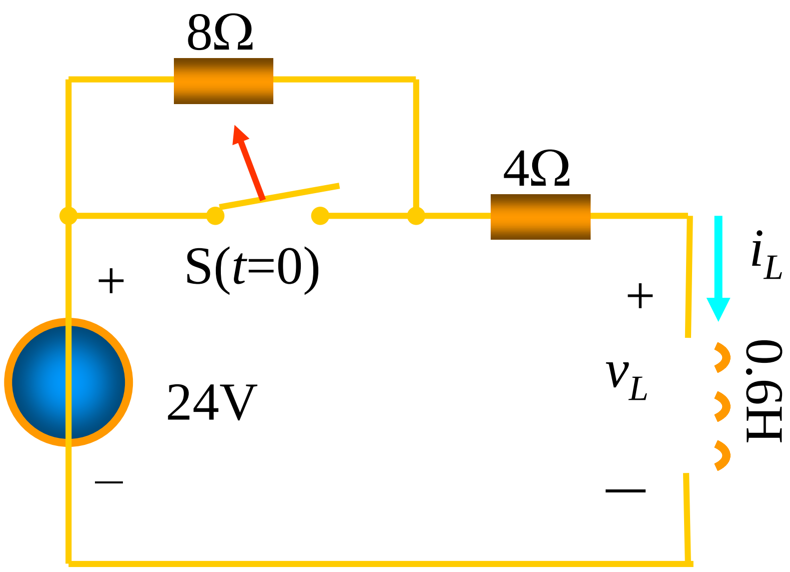
零状态响应

零输入响应



例1　$t=0$ 时 ，开关S打开，求 $t>0$ 后的i_L、v_L。

解　这是RL电路全响应问题，



有：

$$i_L(0^-)=i_L(0^+)$$
$$=24/4=6\text{A}$$

$$\tau=L/R=0.6/12=1/20\text{ s}$$

零输入响应： $i_L'(t)=6e^{-20t}\text{A}$

零状态响应： $i_L''(t)=\dfrac{24}{12}(1-e^{-20t})\text{A}$

全响应： $i_L(t)=6e^{-20t}+2(1-e^{-20t})=2+4e^{-20t}\text{A}$

或求出稳态分量： $i_L(\infty)=24/12=2\text{A}$

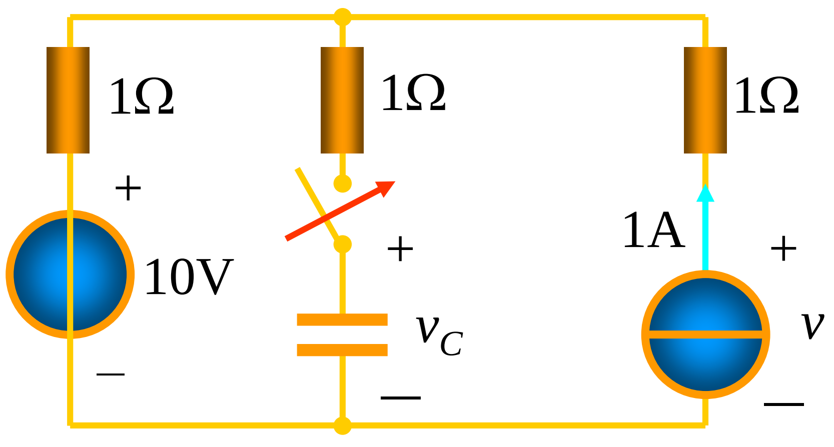
全响应： $i_L(t)=2+ke^{-20t}\text{A}$

代入初值有： $6=2+k$ → $k=4$

例2 $t=0$时，开关K闭合，求$t>0$后的i_C、v_C及电流源两端的电压。

$(v_C(0^-)=1\ \text{V}, C=1\ \text{F})$

解 这是RC电路全响应问题，有：

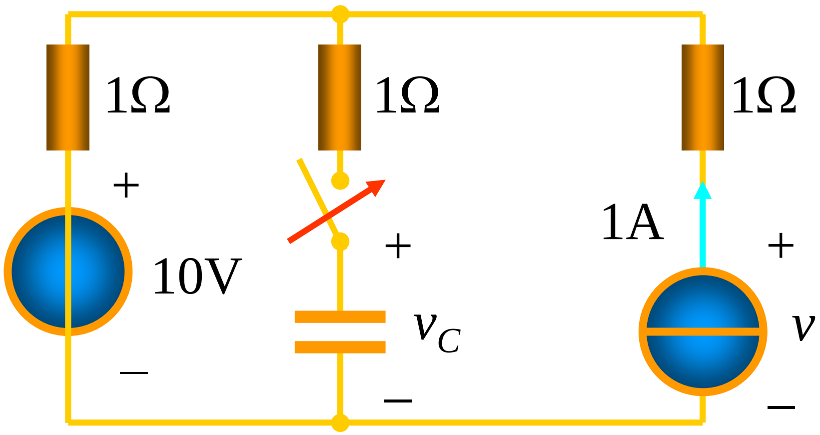


稳态分量：

$$v_C(\infty)=10+1=11\ \text{V}$$

$$\tau = RC = (1+1)\times 1 = 2\text{s}$$

全响应： $v_C(t) = 11 + Ae^{-0.5t}\,\text{V}$



$$v_C(t) = 11 - 10e^{-0.5t}\,\text{V}$$

$$i_C(t) = \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = 5e^{-0.5t}\,\text{A}$$

$$v(t) = 1\times 1 + 1\times i_C + v_C = 12 - 5e^{-0.5t}\,\text{V}$$

4.1.4 一阶电路的三要素法分析

一阶电路的数学模型是一阶线性微分方程：

$$a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+bf=c$$

特解

其解答一般形式为： $f(t)=f'(t)+ke^{-\frac{t}{\tau}}$

令 $t=0_+$ $\quad f(0_+)=f'(0_+)+k$

$$k=f(0_+)-f'(0_+)$$

$$f(t)=f'(t)+[f(0_+)-f'(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

直流激励时： $f'(t)=f'(0_+)=f(\infty)$

$$\rightarrow \quad f(t)=f(\infty)+\overbrace{\left[f(0_+)-f(\infty)\right]}^{k}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

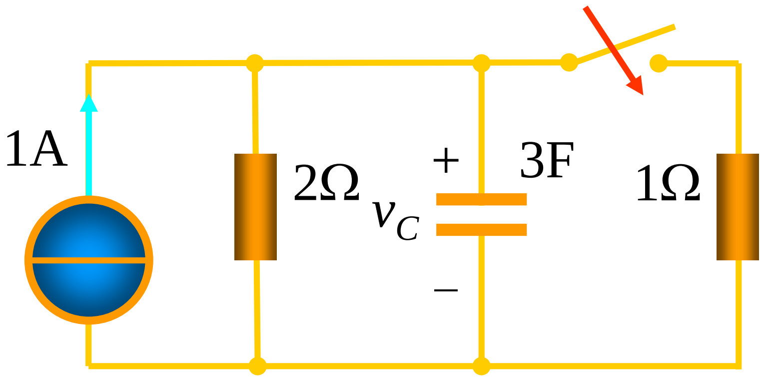
三要素 $\begin{cases} f(\infty) & \text{稳态解} \\ f(0_+) & \text{初始值} \\ \tau & \text{时间常数} \end{cases}$

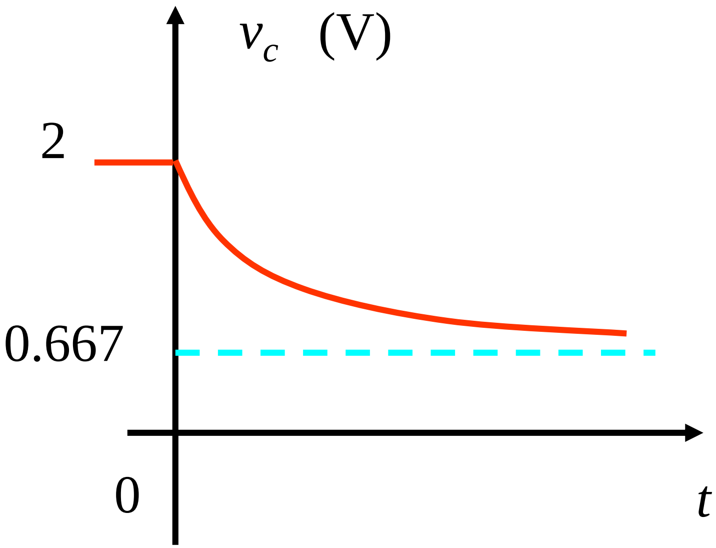
- $f(\infty)$ 稳态解 → 用$t\rightarrow\infty$的稳态电路求解
- $f(0_+)$ 初始值 → 用0_+等效电路求解
- τ 时间常数

注意

分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题。

例1　已知：t=0 时合开关，求换路后的 $v_C(t)$





解

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 2\text{V}$$

$$v_C(\infty) = (2//1) \times 1 = 0.667\text{V}$$

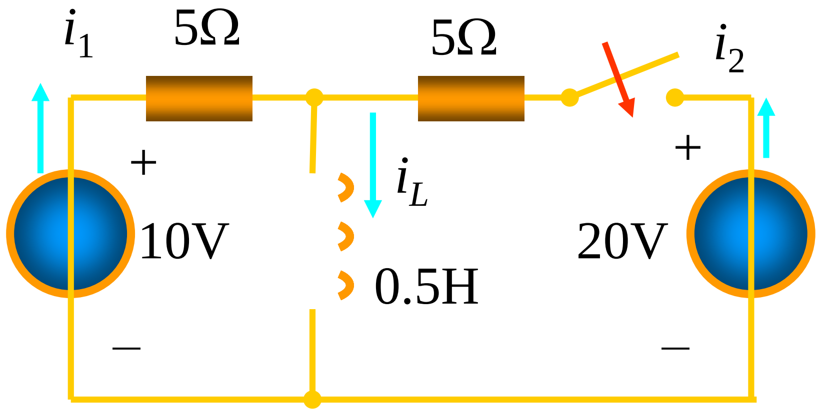
$$\tau = R_{eq}C = \frac{2}{3} \times 3 = 2\ \text{s}$$

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0_+) - v_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_C = 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t} = 0.667 + 1.33e^{-0.5t} \quad t \geq 0$$

例2　t=0时，开关闭合，求t >0后的i_L、i_1、i_2

解



方法一

三要素为:

$$i_L(0_+) = i_L(0\_) = 10/5 = 2\text{A}$$

$$i_L(\infty) = 10/5 + 20/5 = 6\text{A}$$

$$\tau = L/R = 0.6/(5//5) = 1/5\text{s}$$

三要素公式　$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_L(t) = 6 + (2-6)e^{-5t} = 6 - 4e^{-5t} \quad t \geq 0$$

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0.5 \times (-4e^{-5t}) \times (-5) = 10e^{-5t}$$

$$i_1(t) = (10 - v_L)/5 = 2 - 2e^{-5t}$$

$$i_2(t) = (20 - v_L)/5 = 4 - 2e^{-5t}$$

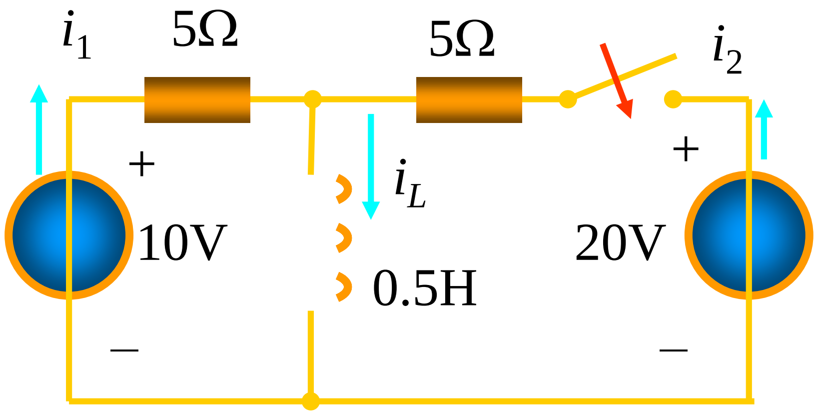
方法二

三要素为：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10/5 = 2\text{A}$$

$$i_L(\infty) = 10/5 + 20/5 = 6\text{A}$$

$$\tau = L/R = 0.6/(5//5) = 1/5\text{s}$$



$$i_1(0_+) = \frac{(10-20)}{10} + 1 = 0\text{A}$$

$$i_1(\infty) = 10/5 = 2\text{A}$$

$$i_2(0_+) = \frac{(20-10)}{10} + 1 = 2\text{A}$$

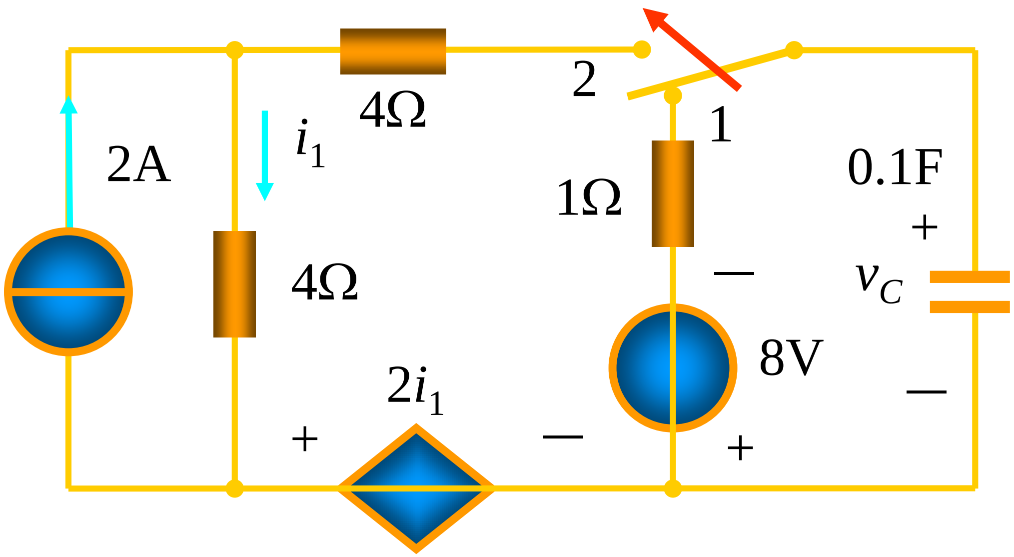
$$i_2(\infty) = 20/5 = 4\text{A}$$

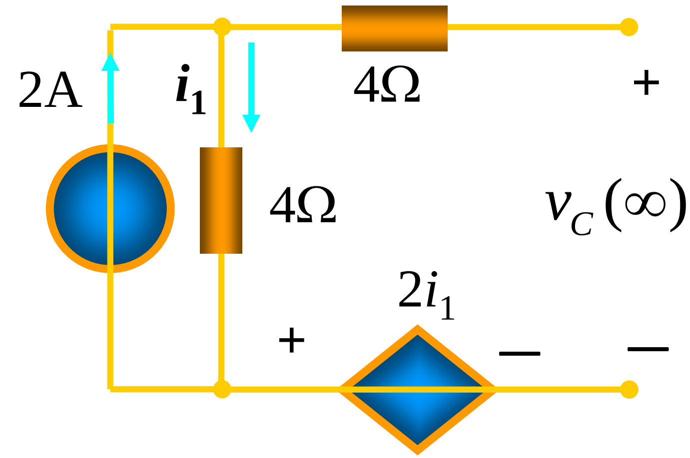
$$i_L(t) = 6 + (2-6)e^{-5t} = 6 - 4e^{-5t} \quad t \geq 0$$

$$i_1(t) = 2 + (0-2)e^{-5t} = 2 - 2e^{-5t}$$

$$i_2(t) = 4 + (2-4)e^{-5t} = 4 - 2e^{-5t}$$

例3　已知：t=0时开关由1→2，求换路后的$v_C(t)$





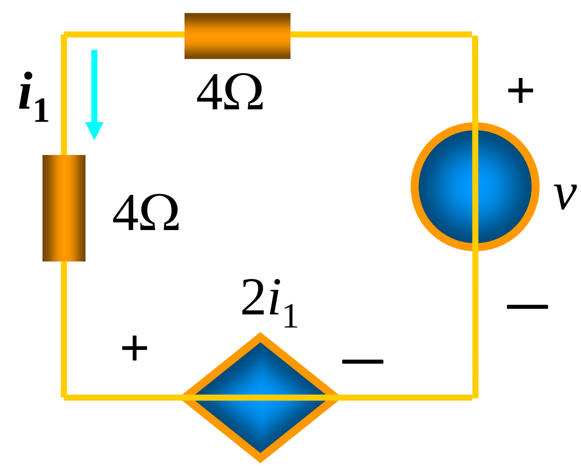
解

三要素为：

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = -8\text{V}$$

$$v_C(\infty) = 4i_1 + 2i_1 = 6i_1 = 12\text{V}$$

$$v = 10i_1 \rightarrow R_{eq} = v / i_1 = 10\Omega$$

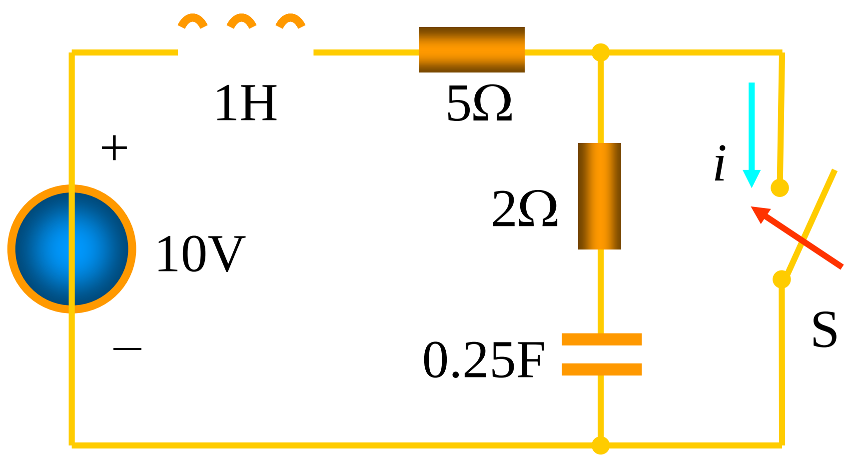


$$\tau = R_{eq}C = 10\times 0.1 = 1\text{s}$$

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_C(t) = 12 + [-8-12]e^{-t} = 12 - 20e^{-t}\,\text{V}$$

例4 已知：$t = 0$时开关闭合，求换路后的电流 $i(t)$。



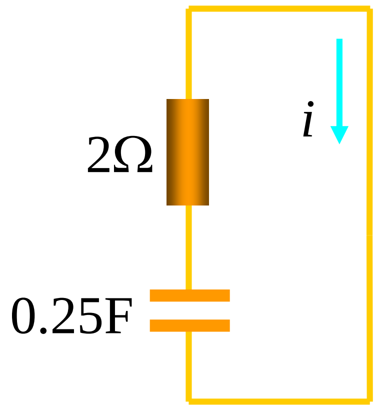
解

三要素为：

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 10\text{V}$$

$$v_C(\infty) = 0$$

$$\tau_1 = R_{eq}C = 2\times 0.25 = 0.5\ \text{s}$$



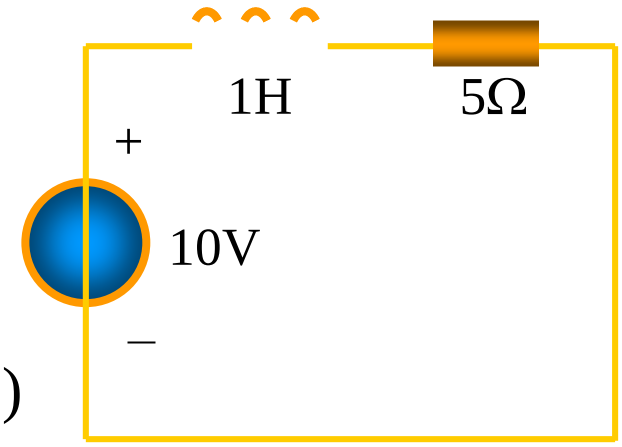
$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-2t}$$

三要素为：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

$$i_L(\infty) = 10/5 = 2\text{A}$$

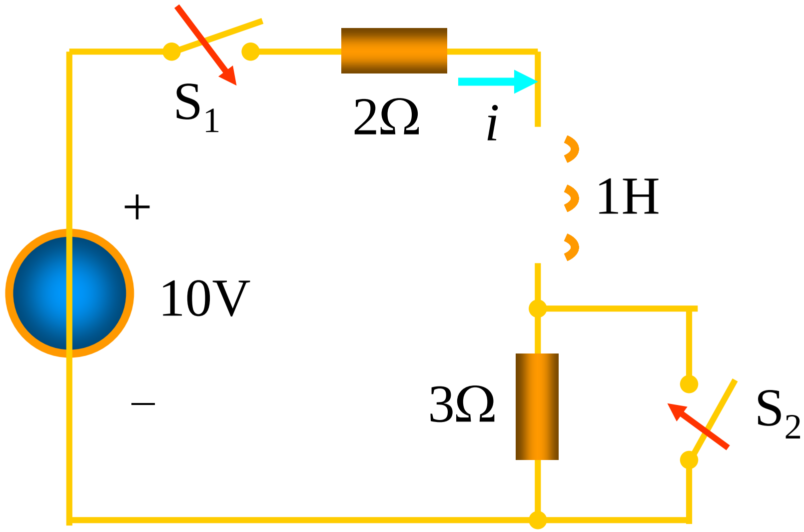
$$\tau_2 = L/R_{eq} = 1/5 = 0.2\text{s}$$



$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 2(1 - e^{-5t})$$

$$i(t) = i_L(t) + \frac{v_C(t)}{2} = 2(1 - e^{-5t}) + 5e^{-2t}$$

例5 已知：电感无初始储能，$t = 0$时闭合S_1，$t = 0.2$ s 时闭合S_2，求两次换路后的电感电流$i(t)$。



解

$0 < t < 0.2$ s

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

$$\tau_1 = L / R = 1/5 = 0.2 \text{ s}$$

$$i(\infty) = 10/5 = 2 \text{ A}$$

$$i(t) = 2 - 2e^{-5t} \text{ A}$$

$t > 0.2$ s

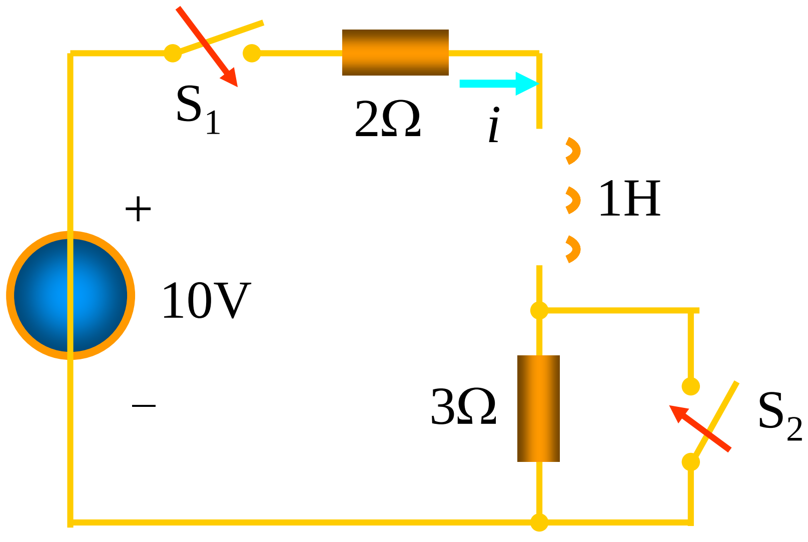
$$i(0.2_-) = 2 - 2e^{-5\times 0.2} \approx 1.26\ \text{A}$$

$$i(0.2_+) \approx 1.26\ \text{A}$$

$$\tau_2 = L / R = 1/2 = 0.5$$

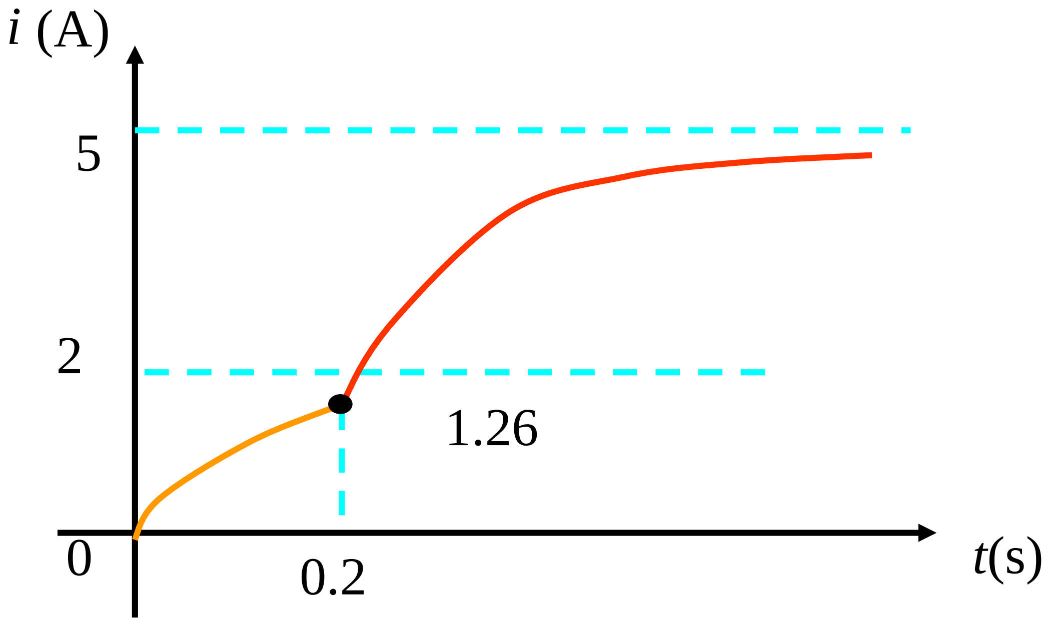
$$i(\infty) = 10/2 = 5\ \text{A}$$

$$i(t) = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)}\ \text{A}$$



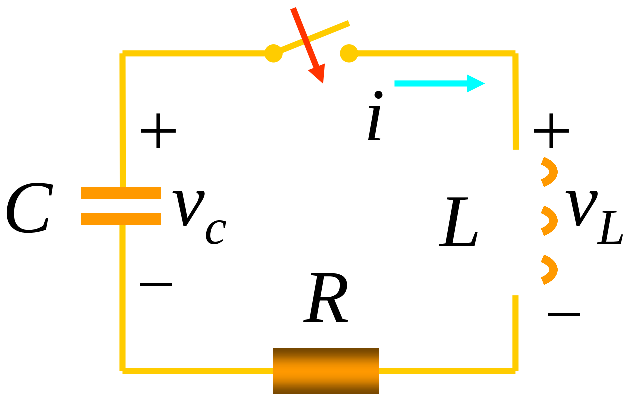
$$i = 2 - 2e^{-5t} \qquad (0 < t \le 0.2\text{s})$$

$$i = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} \qquad (t \ge 0.2\text{s})$$



4.2 二阶电路的响应

4.2.1 二阶电路的零输入响应



已知： $v_C(0_+)=V_0 \quad i(0_+)=0$

电路方程： $Ri+v_L-v_C=0$

$$i=-C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} \qquad v_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

以电容电压为变量： $LC\dfrac{\mathrm{d}^2v_C}{\mathrm{d}t}+RC\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}+v_C=0$

以电感电流为变量： $LC\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t}+RC\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+i=0$

以电容电压为变量时的初始条件：

$v_C(0_+)=V_0$ $\quad$ $i(0_+)=0$ $\quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=0$

以电感电流为变量时的初始条件：

$i(0_+)=0$ $\quad$ $v_C(0_+)=V_0$ $\quad \Rightarrow$

$$v_C(0_+)=v_L(0_+)=L\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=V_0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\frac{V_0}{L}$$

电路方程： $LC\frac{\mathrm{d}^2v_C}{\mathrm{d}t}+RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}+v_C=0$

特征方程： $LCs^2+RCs+1=0$

特征根：

$$s=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

零输入响应的三种情况

$R>2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 两个不等负实根

过阻尼

overdamped

$R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 两个相等负实根

临界阻尼

Critically damped

$R<2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 两个共轭复根

欠阻尼

underdamped

$$\boxed{(1)\;\; R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$v_C = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

$$v_C(0_+) = V_0 \rightarrow k_1 + k_2 = V_0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}\right|_{(0_+)} \rightarrow s_1 k_1 + s_2 k_2 = 0$$

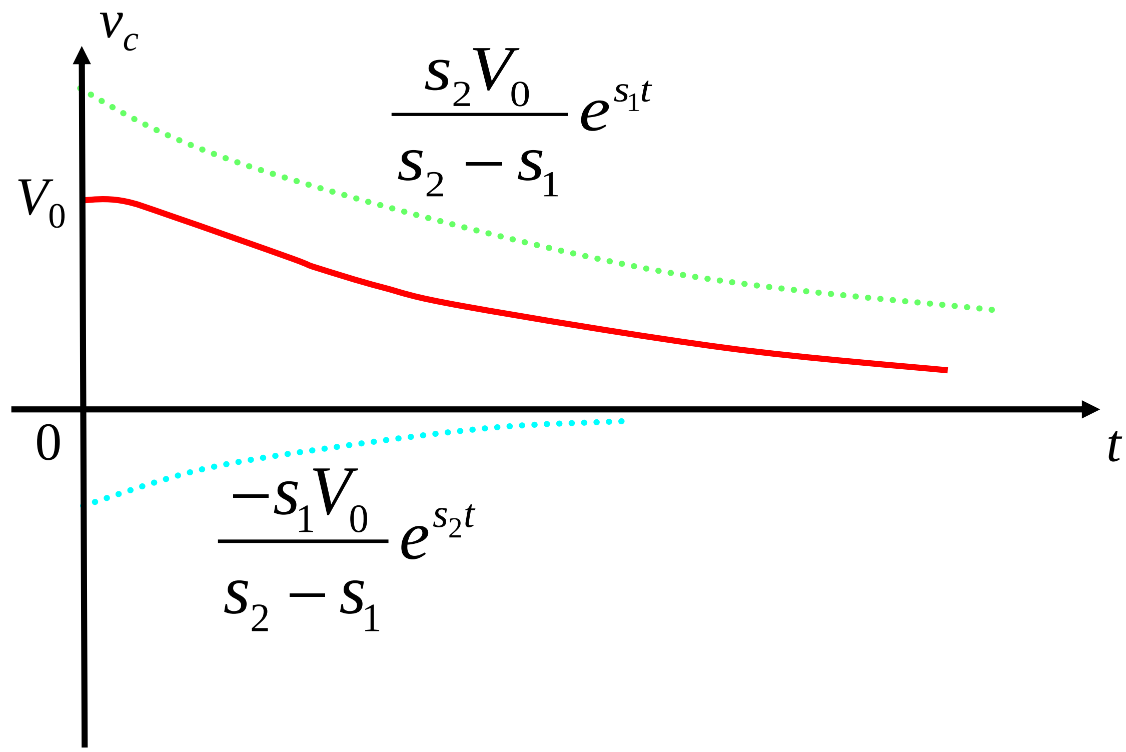
$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{s_2}{s_2 - s_1} V_0 \\ k_2 = \dfrac{-s_1}{s_2 - s_1} V_0 \end{cases}$$

$$v_C = \frac{V_0}{s_2 - s_1}\left(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}\right)$$

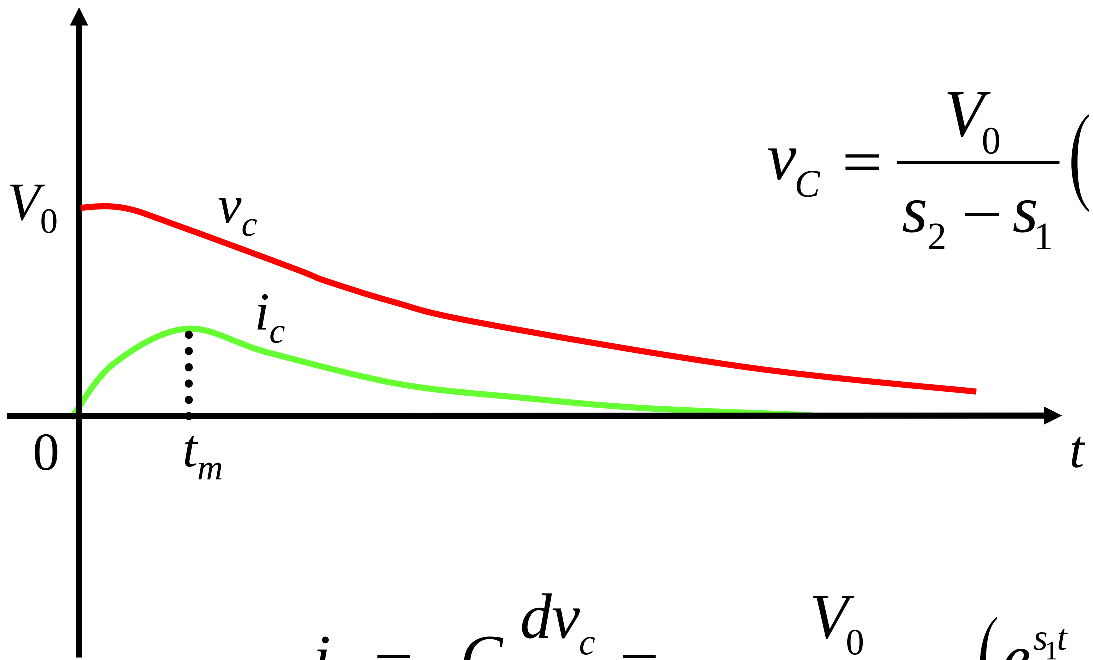
① 电容电压

$$v_C = \frac{V_0}{s_2 - s_1}\left(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}\right)$$

设 $|s_2| > |s_1|$



② 电容和电感电流



$$v_C = \frac{V_0}{s_2 - s_1}\left(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}\right)$$

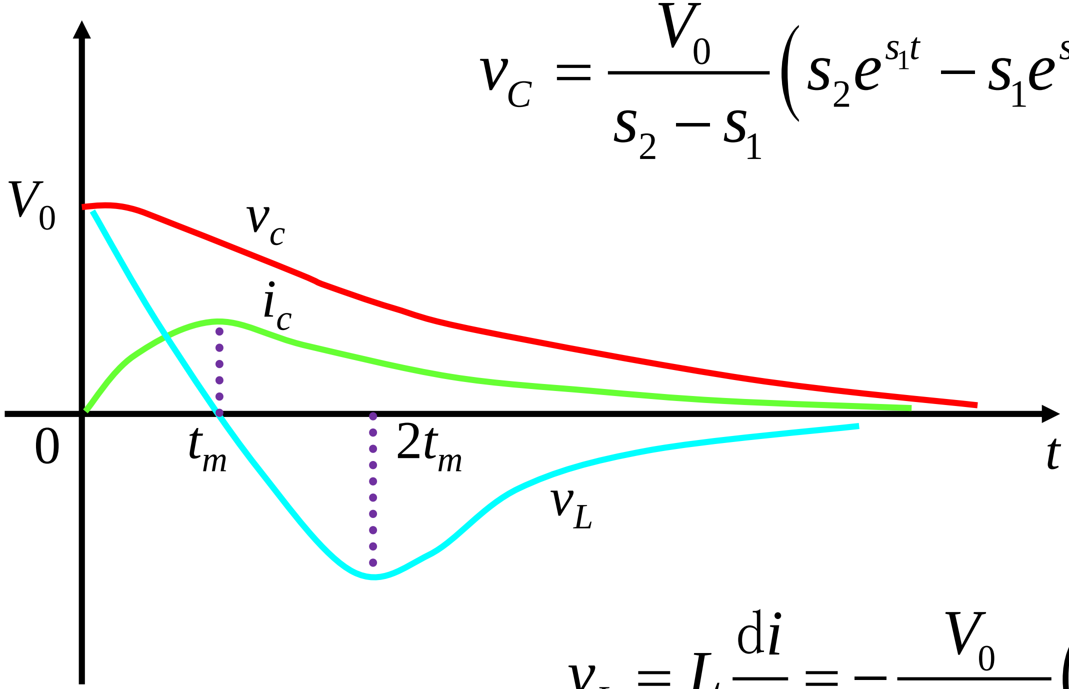
$$i_C = -C\frac{dv_c}{dt} = -\frac{V_0}{L\left(s_2 - s_1\right)}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)$$

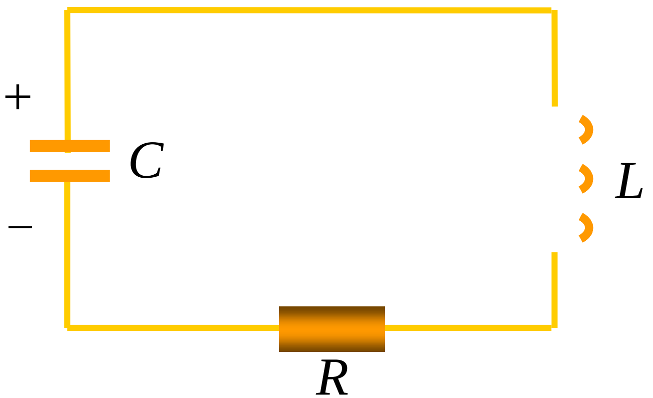
$t = 0_+ \quad i_c = 0, \quad t = \infty \quad i_c = 0$

$i_c > 0 \quad t = t_m$ 时 i_c 最大

③ 电感电压

$$v_C = \frac{V_0}{s_2 - s_1}\left(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}\right)$$





$$v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{V_0}{s_2 - s_1}\left(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}\right)$$

$t = 0,\ \ v_L = V_0 \quad t = \infty,\ \ v_L = 0$

$0 < t < t_m$ ， i 增加，$v_L > 0$， $t > t_m$ i 减小，$v_L < 0$

$t = 2\,t_m$时，$|\,v_L\,|$最大。

$$v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{V_0}{s_2 - s_1}\left(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}\right)$$

$i_C = i$ 为极值时，即 v_L=0 时的 t_m 计算如下:

$$s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t} = 0 \qquad \frac{s_2}{s_1} = \frac{e^{s_1 t_m}}{e^{s_2 t_m}}$$

$$t_m = \frac{\ln\frac{s_2}{s_1}}{s_1 - s_2}$$

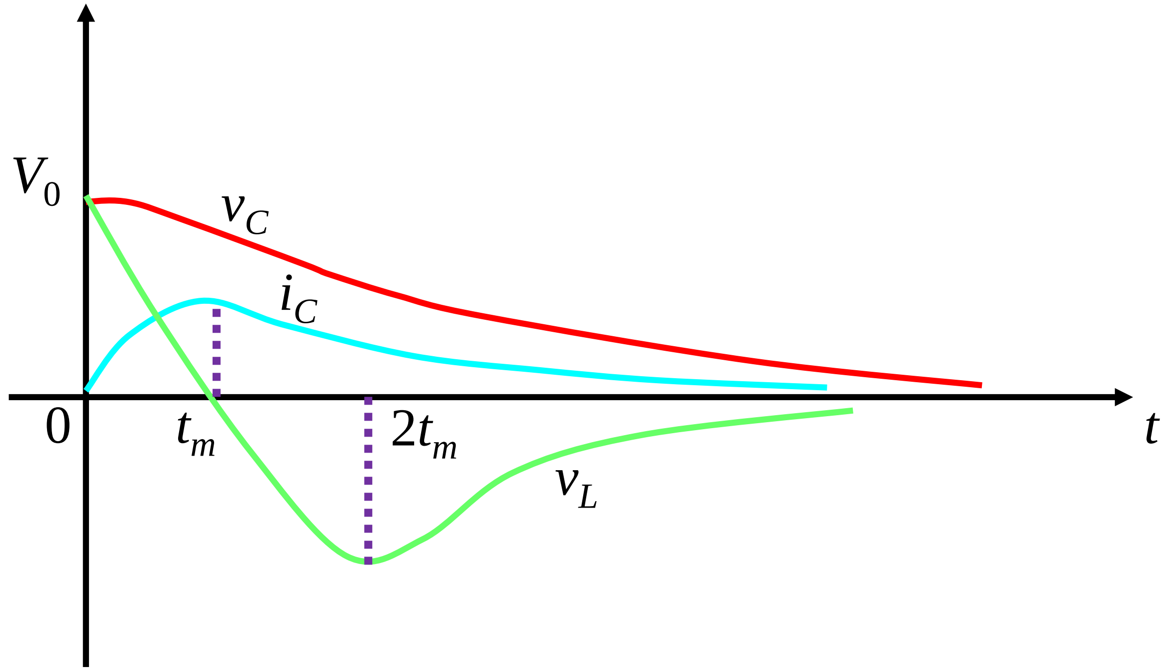
由 $\mathrm{d}v_L/\mathrm{d}t$ 可确定 v_L 为极小时的 t_{min} .

$$s_1{}^2 e^{s_1 t} - s_2{}^2 e^{s_2 t} = 0$$

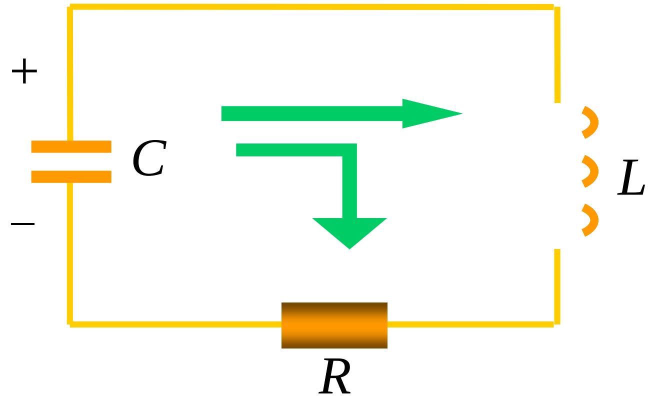
$$t_{\min} = \frac{2\ln\frac{s_2}{s_1}}{s_1 - s_2}$$

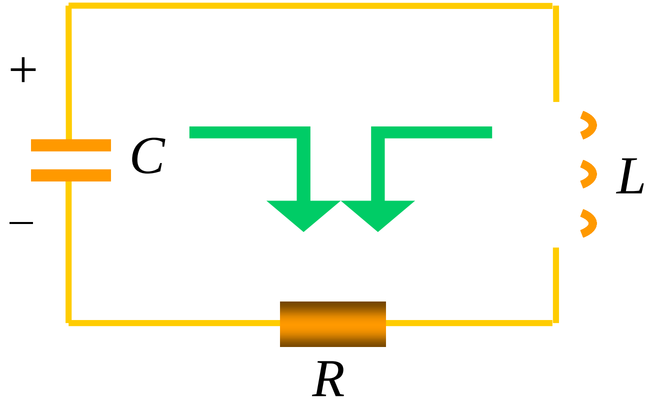
$$\Rightarrow \quad t_{min} = 2t_m$$

④ 能量转换关系



$0 < t < t_m$ v_C 减小，i 增加。 $t > t_m$ v_C 减小，i 减小。





$$\boxed{(2)\ \ R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

共轭复根

令： $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ （衰减系数） $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ （谐振角频率）

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ （固有振荡角频率） $s = -\alpha \pm j\omega$

v_c **的解答形式：**

$$v_C = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} = e^{-\alpha t}(k_1 e^{j\omega t} + k_2 e^{-j\omega t})$$

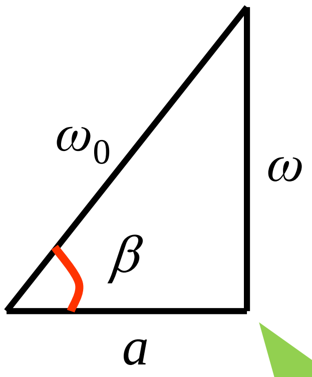
经常写为：

$$v_C = ke^{-\alpha t}\sin(\omega t + \beta)$$

$$v_c = ke^{-\alpha t}\sin(\omega t + \beta)$$

由初始条件$\begin{cases} v_C(0^+) = V_0 \rightarrow k\sin\beta = V_0 \\ \dfrac{dv_C}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow k(-\alpha)\sin\beta + k\omega\cos\beta = 0 \end{cases}$

$$k = \frac{V_0}{\sin\beta} \text{，} \quad \beta = \mathrm{arctg}\frac{\omega}{\alpha}$$



ω，ω_0，δ的关系

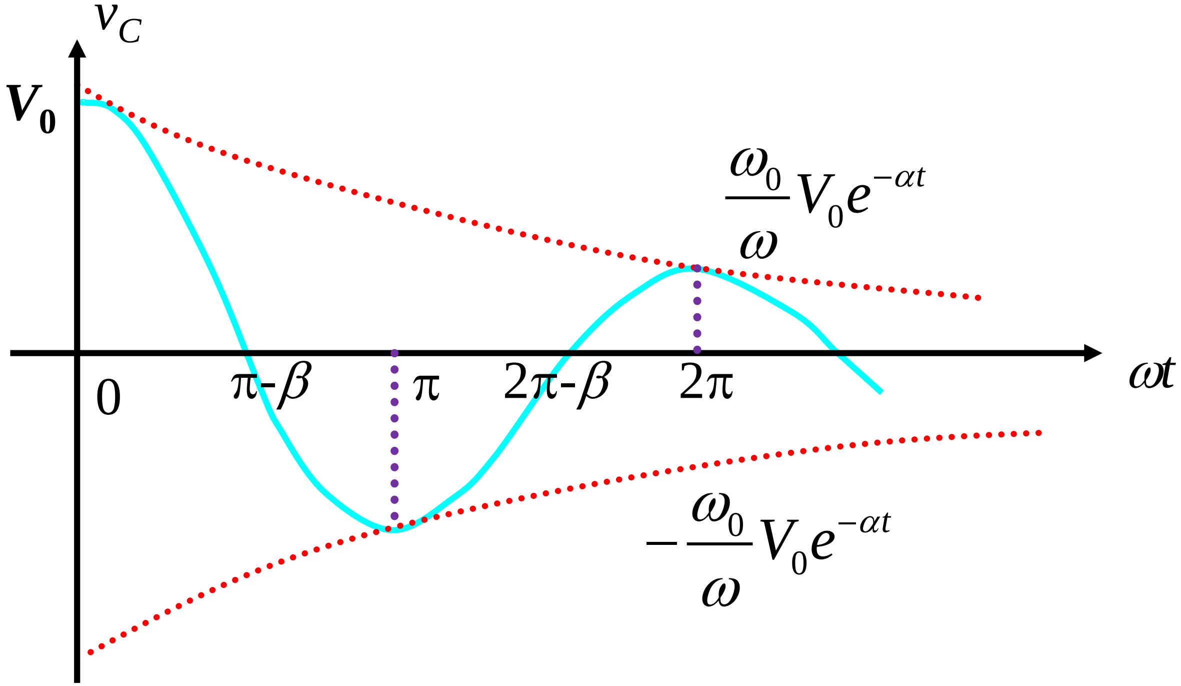
$$\sin\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad k = \frac{\omega_0}{\omega}V_0$$

$$v_C = \frac{\omega_0}{\omega}V_0 e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \beta)$$

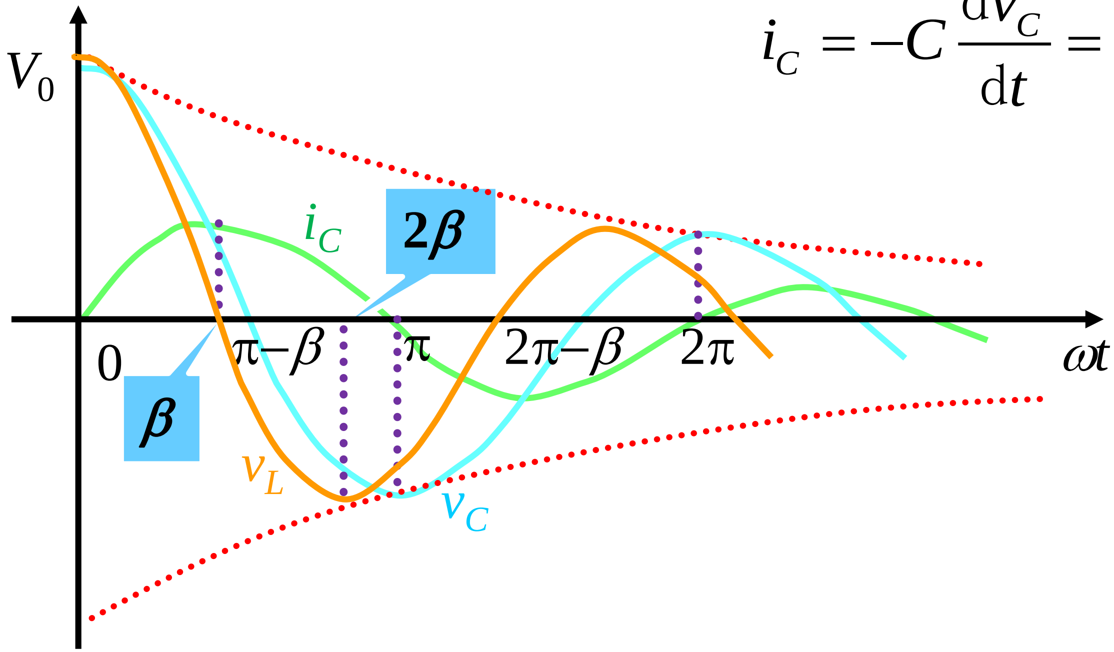
$$v_C = \frac{\omega_0}{\omega} V_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta)$$

v_C 是振幅以 $\pm\frac{\omega_0}{\omega} V_0 e^{-\alpha t}$ 为包络线依指数衰减的正弦函数。

$t = 0$ 时 $v_c = V_0$　　　　$v_C = 0$：$\omega t = \pi - \beta$，$2\pi - \beta$ ... $n\pi - \beta$



$$i_C = -C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin\omega t$$



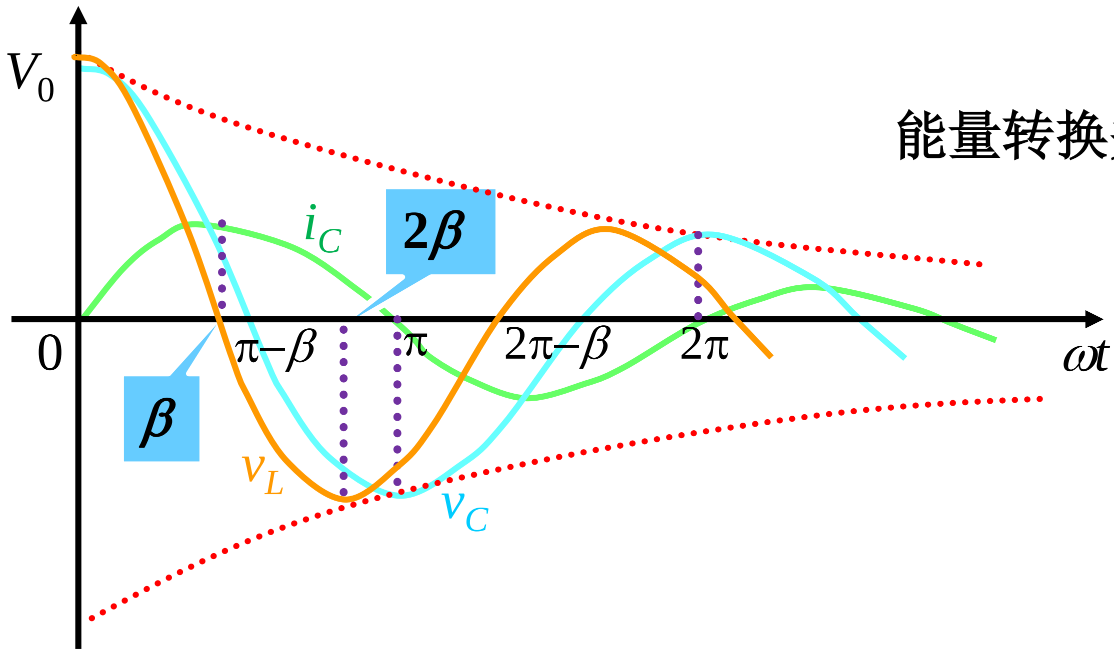
i_c= 0： ωt = 0， π， 2π ... ， nπ ， 为 v_c极值点，

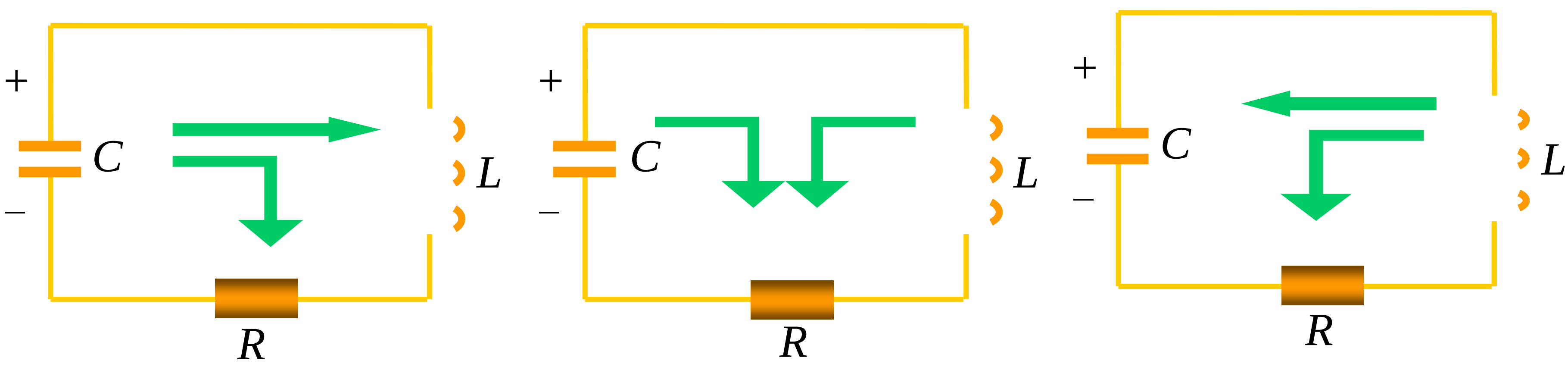
i_c 的极值点为 v_L 零点。

$$v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{\omega}V_0 e^{-\alpha t}\sin(\omega t-\beta)$$

v_L= 0： $\omega t = \beta$ ， π+β， 2π+β ... ， nπ+β

能量转换关系：





$0 < \omega t < \beta$ $\beta < \omega t < \pi-\beta$ $\pi-\beta < \omega t < \pi$

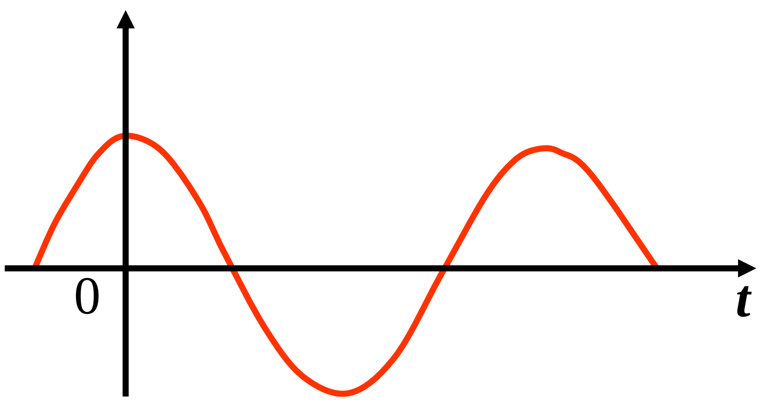
特例：$R=0$ 时

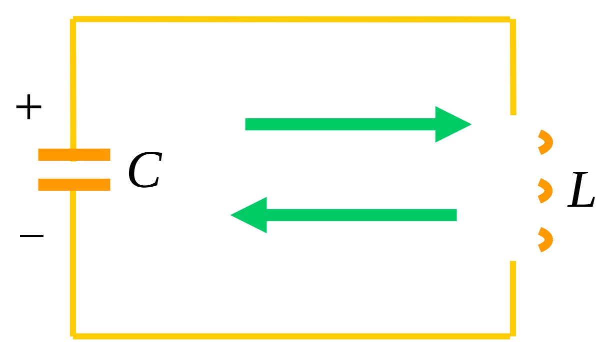
$$\alpha=0\ ,\quad \omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\ ,\ \beta=\frac{\pi}{2}$$

$$v_C=V_0\sin(\omega t+90^0)=v_L$$

$$i=\frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t$$

→ 等幅振荡





$$(3)\quad \boxed{R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L} = -\alpha$$

相等负实根

$$v_C = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$$

由初始条件 $\begin{cases} v_c(0^+) = V_0 \rightarrow k_1 = V_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0 \rightarrow k_1(-\alpha) + k_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} k_1 = V_0 \\ k_2 = V_0 \alpha \end{cases}$$

$$v_C = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$$

$$A_1 = V_0 \quad A_2 = V_0 \alpha$$

$$\left.\begin{aligned} v_C &= V_0 e^{-\alpha t}(1+\alpha t) \\ i_C &= -C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0}{L} t e^{-\alpha t} \\ v_L &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = V_0 e^{-\alpha t}(1-\alpha t) \end{aligned}\right\} \quad \text{非振荡放电}$$

小结

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$ 过阻尼，非振荡放电 $$v_C = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$ 临界阻尼，非振荡放电 $$v_C = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$ 欠阻尼，振荡放电 $$v_C = k e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta)$$

由初始条件 $\begin{cases} v_C(0_+) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}(0_+) \end{cases}$ 定常数

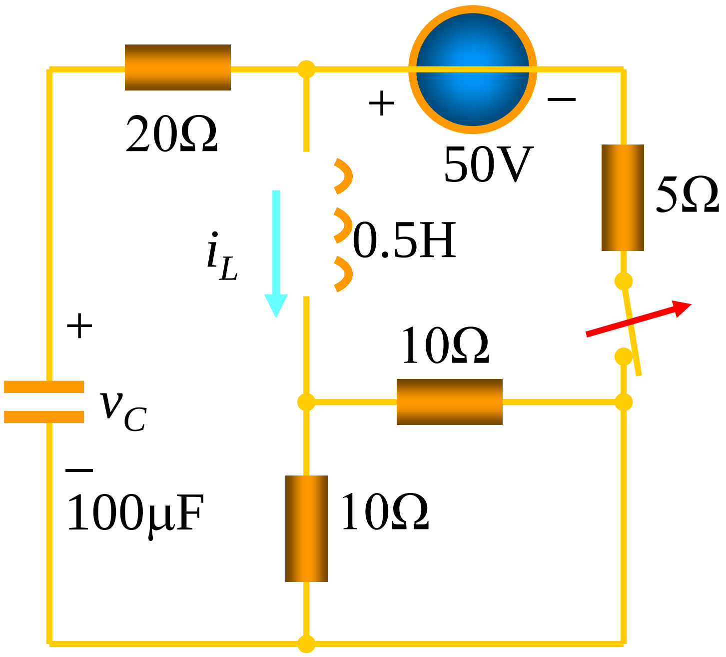
可推广应用于一般二阶电路

例1　　　电路如图，$t = 0$ 时打开开关。求 v_C 并画出其变化曲线。

解

（1） $v_C(0_-)=25V$

$i_L(0_-)=5A$



（2）开关打开为RLC串联电路，方程为：

$$LC\frac{d^2v_C}{dt}+RC\frac{dv_C}{dt}+v_C=0$$

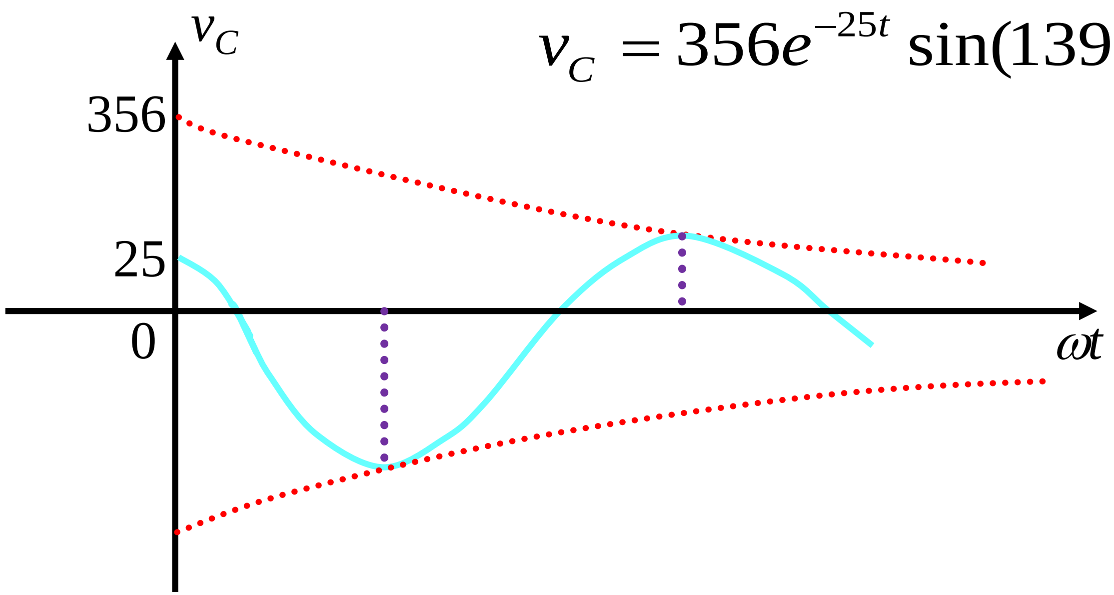
特征方程为：$50s^2+2500s+10^6=0$

$$s=-25\pm j139 \qquad v_C = ke^{-25t}\sin(139t+\beta)$$

$$v_C = k e^{-25t}\sin(139t+\beta)$$

(3) $\begin{cases} v_C(0_+) = 25 \\ C\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = -5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} k\sin\beta = 25 \\ k(139\cos\beta - 25\sin\beta) = \dfrac{-5}{10^{-4}} \end{cases}$

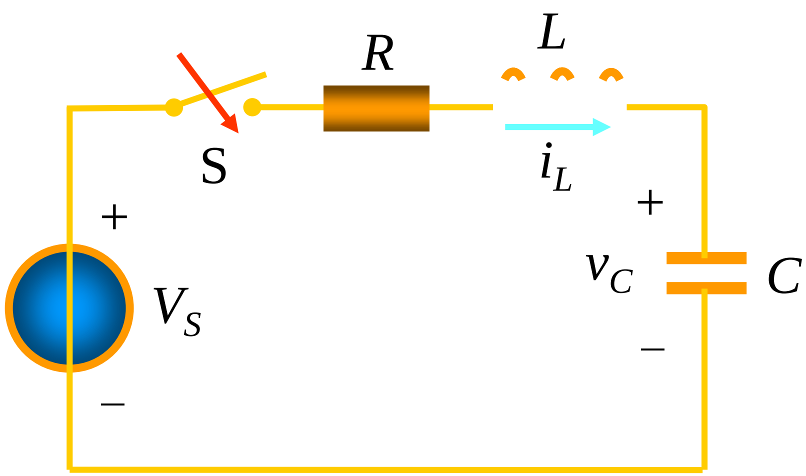
$$k = 356\ ,\quad \beta = 176^0$$



$$v_C = 356e^{-25t}\sin(139t + 176^0)\ \mathrm{V}$$

4.2.2 二阶电路的零状态响应

例 $v_C(0_-)=0$，$i_L(0_-)=0$



$$v = v_C' + v_C''$$

特解

通解

微分方程为：

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C = V_\mathrm{S}$$

特征方程为：

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0$$

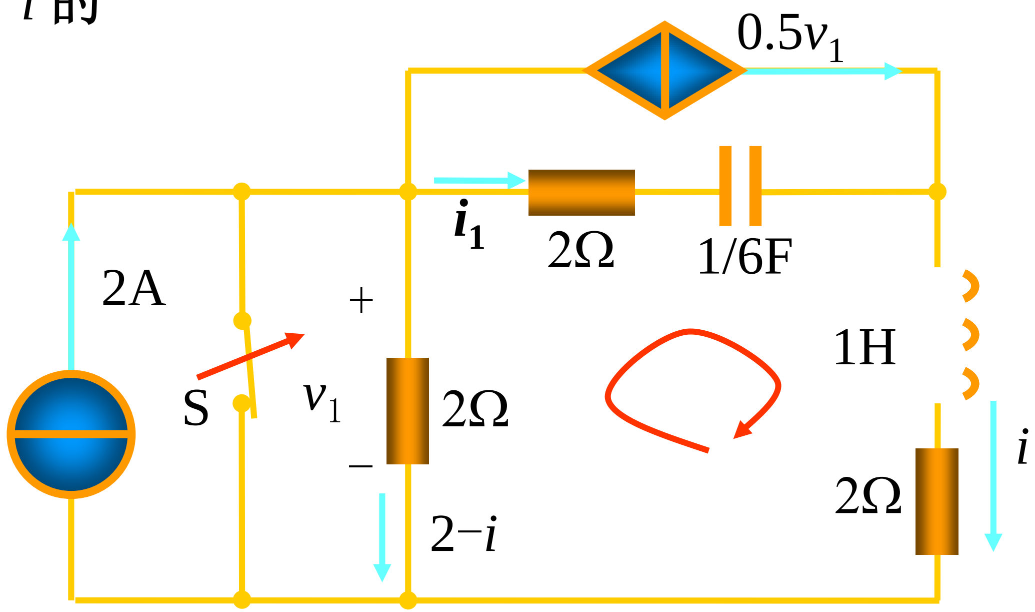
特解： $v_\mathrm{C}' = V_\mathrm{S}$

v_C的一般形式为：

$$\begin{cases} v_C = V_S + k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad (s_1 \neq s_2) \\ v_C = V_S + k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t} \quad (s_1 = s_2 = -\alpha) \\ v_C = V_S + k e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta) \quad (s_{1、2} = -\alpha \pm j\omega) \end{cases}$$

由初值 $v_C(0_+)$和 $\dfrac{dv_C(0_+)}{dt}$ 确定两个常数。

例　$t = 0$ 时刻打开开关，求电流 i 的零状态响应。



解　首先写微分方程

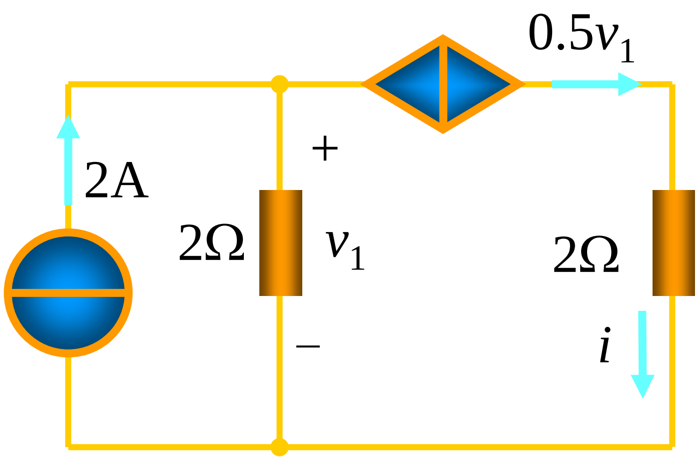
$$i_1 = i - 0.5 v_1$$
$$= i - 0.5(2 - i)\times 2$$
$$= 2i - 2$$

由KVL：$$2(2-i) = 2i_1 + 6\int i_1 dt + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2i$$

整理得：$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 12i = 12$$

二阶非齐次常微分方程

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 8\frac{di}{dt} + 12i = 12$$



稳态模型

解答形式为： $i = i' + i''$

第二步求通解 i''

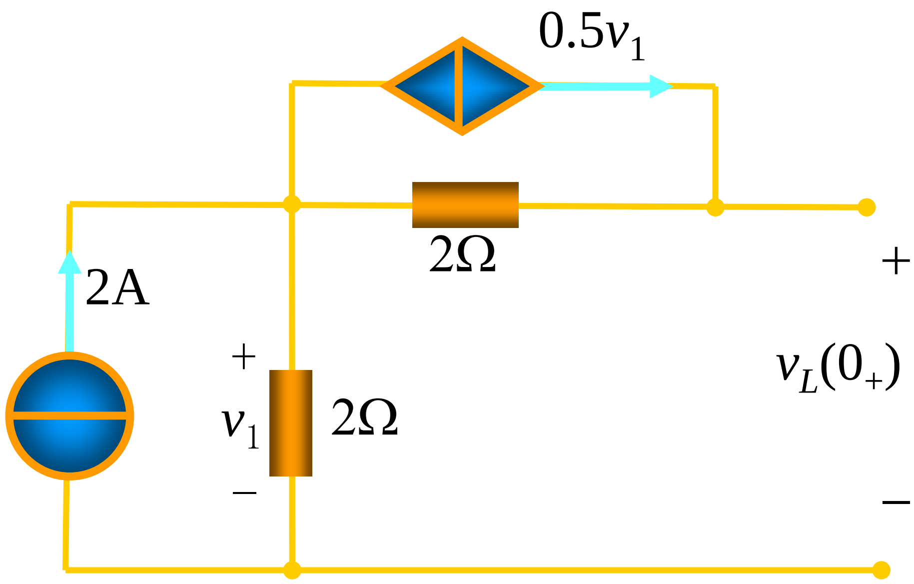
特征根为： $s_1 = -2$ ， $s_2 = -6$

$$i'' = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-6t}$$

第三步求特解 i'

由稳态模型有： $i' = 0.5\, v_1$ $v_1 = 2(2 - 0.5 v_1)$

$\Rightarrow$ $v_1 = 2$ $i' = 1\text{A}$



第四步定常数

$$i = 1 + k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-6t}$$

$$\begin{cases} i(0_+) = i(0_-) = 0 \\ L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0_+) = v_L(0_+) \end{cases}$$

由0_+电路模型： $v_L(0_+) = 0.5v_1 \times 2 + v_1 = 2v_1 = 8\text{V}$

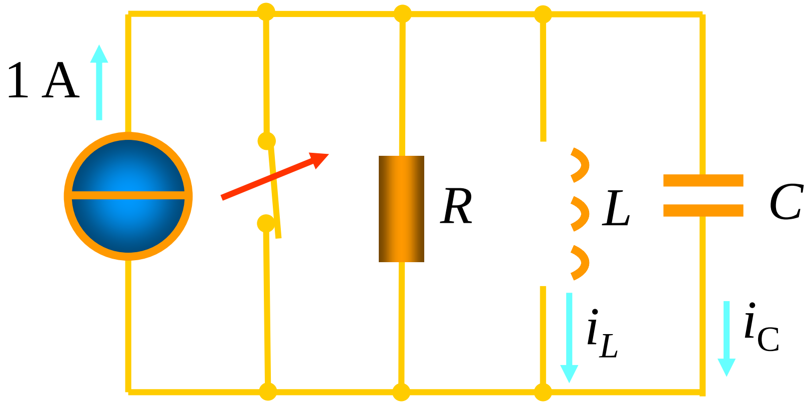
$$\begin{cases} 0 = 1 + k_1 + k_2 \\ 8 = -2k_1 - 6k_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = 0.5 \\ k_2 = -1.5 \end{cases}$$

$$\therefore \quad i = 1 + 0.5e^{-2t} - 1.5e^{-6t} \quad \text{A}$$

4.2.3 二阶电路的全响应

例 已知：$R = 50\ \Omega$，$L = 0.5\ \text{H}$，$C = 100\ \mu\text{F}$，$i_L(0_-) = 2\ \text{A}$，$v_C(0_-) = 0$，求：i_L

解



(1) 列微分方程

应用结点法：

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = 1$$

$$RLC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = 50$$

(2) 求特解

$$i'_{\mathrm{L}} = 1\ \text{A}$$

$$RLC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri_L=50$$

(3) 求通解　　特征方程为：$s^2+200s+20000=0$

特征根为：$s=-100\pm j100$

$$\Rightarrow \quad i=1+ke^{-100t}\sin(100t+\phi)$$

(4) 定常数

$$\begin{cases}1+k\sin\phi=2 & \leftarrow i_L(0_+)=2\mathrm{A}\\ 100k\cos\phi-100k\sin\phi=0 & \leftarrow v_L(0_+)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\phi=45^\circ\\ k=\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \quad i_L=1+\sqrt{2}e^{-100t}\sin(100t+45^\circ)$$

小结

1. 二阶电路含二个独立储能元件，是用二阶常微分方程所描述的电路。

2. 二阶电路的性质取决于特征根，特征根取决于电路结构和参数，与激励和初值无关。

$$s=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

$\alpha>\omega_0$ 过阻尼，非振荡放电 $\quad v_C=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$

$\alpha=\omega_0$ 临界阻尼，非振荡放电 $\quad v_C=k_1e^{-\alpha t}+k_2te^{-\alpha t}$

$\alpha<\omega_0$ 欠阻尼，振荡放电 $\quad v_C=ke^{-\alpha t}\sin(\omega t+\beta)$

3. 求二阶电路全响应的步骤

(a) 列写 $t > 0_+$ 电路的微分方程

(b) 求通解

(c) 求特解

(d) 全响应=强制分量+自由分量

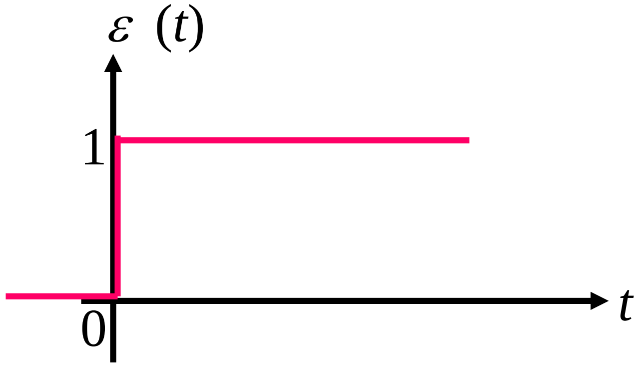
(e) 由初值 $\left.\begin{array}{l} f(0_+) \\ \dfrac{df}{dt}(0_+) \end{array}\right\rangle$ **定常数。**

4.3 一阶电路和二阶电路的阶跃响应

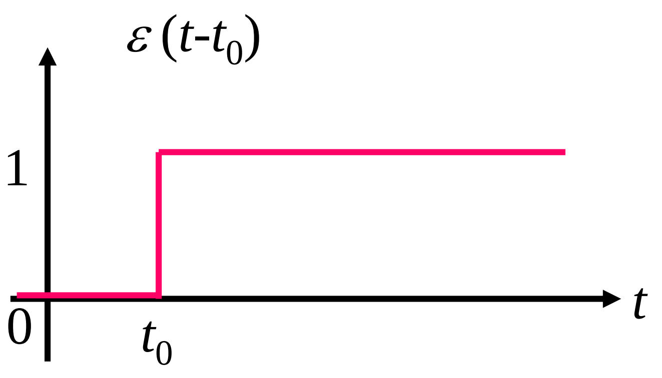
单位阶跃函数简介

- 定义

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$



- 单位阶跃函数的延迟

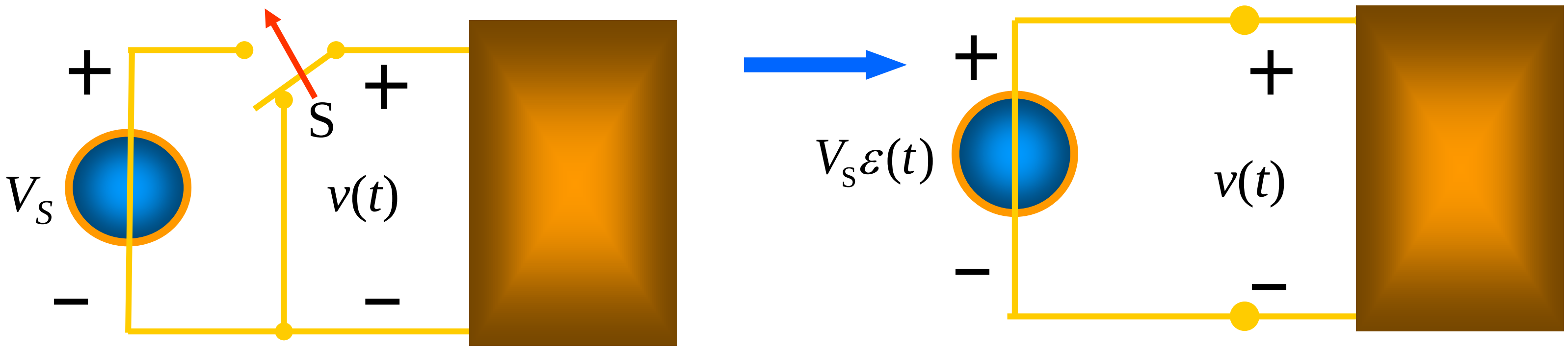


$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

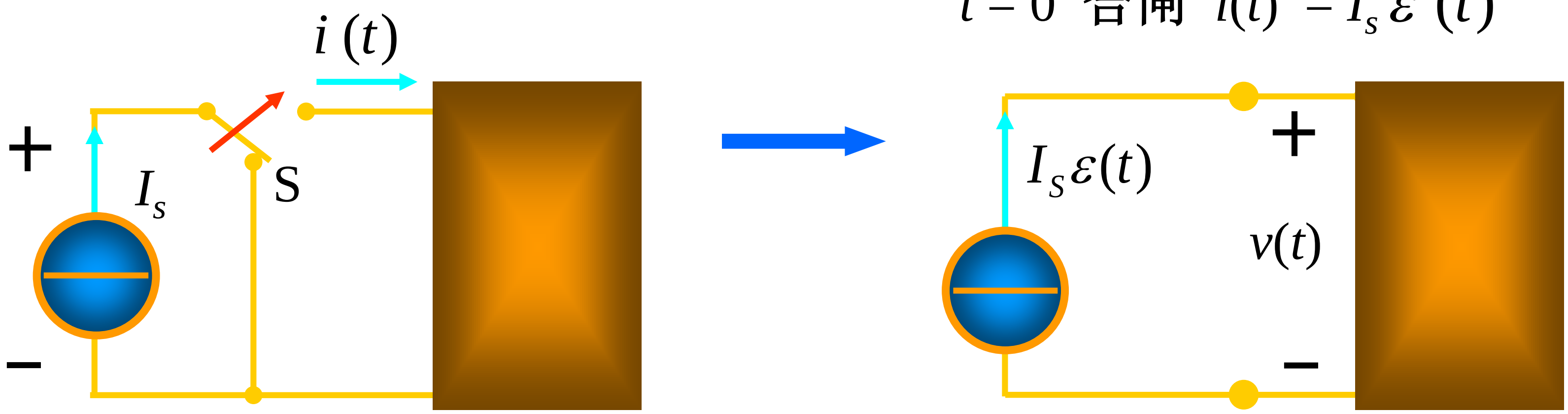
● 单位阶跃函数的作用

① 在电路中模拟开关的动作

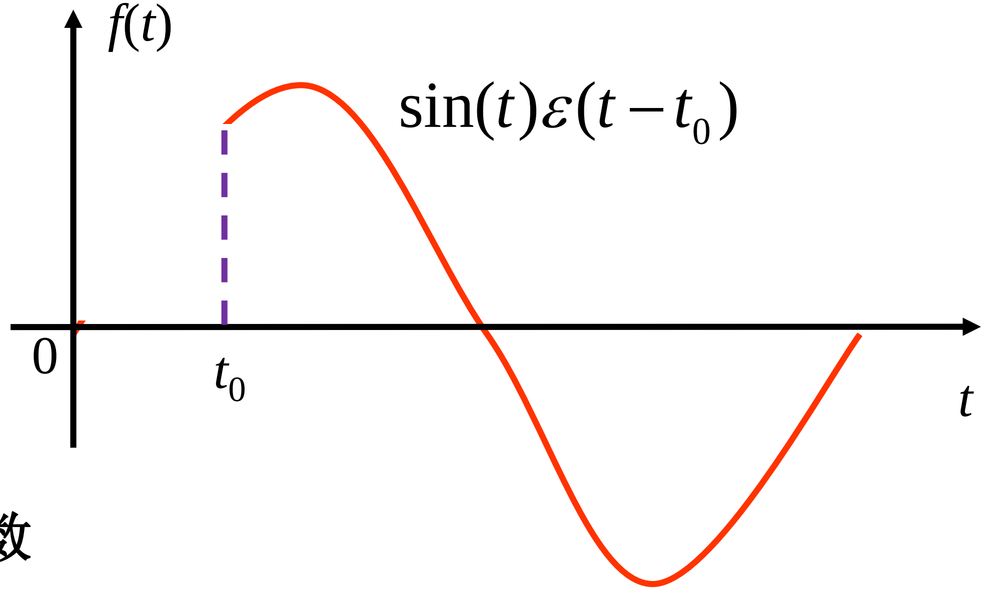
$t = 0$ 合闸 $v(t) = V_S\,\varepsilon(t)$



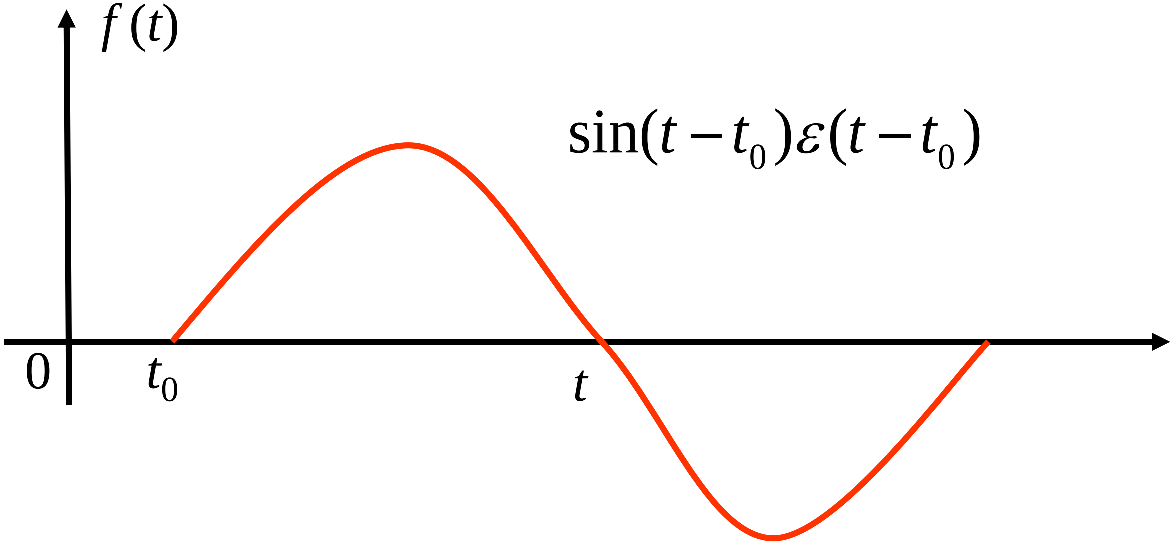
$t = 0$ 合闸 $i(t) = I_s\,\varepsilon(t)$



② 起始一个函数

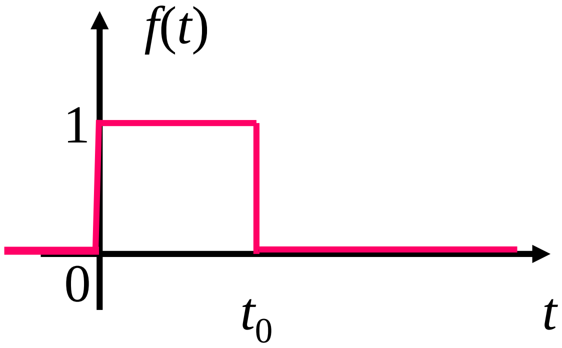


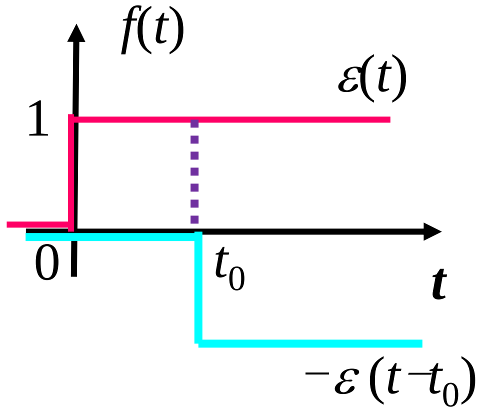
③ 延迟一个函数



● 用单位阶跃函数表示复杂的信号

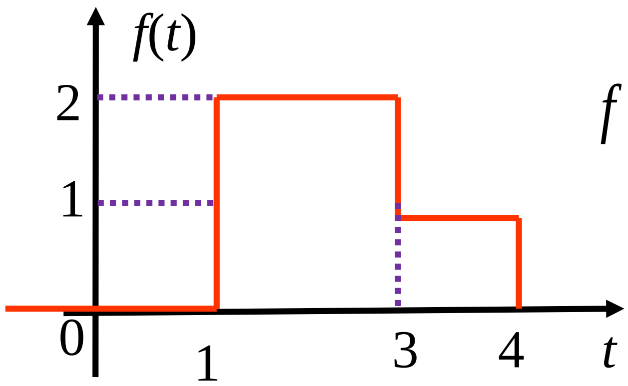
例 1





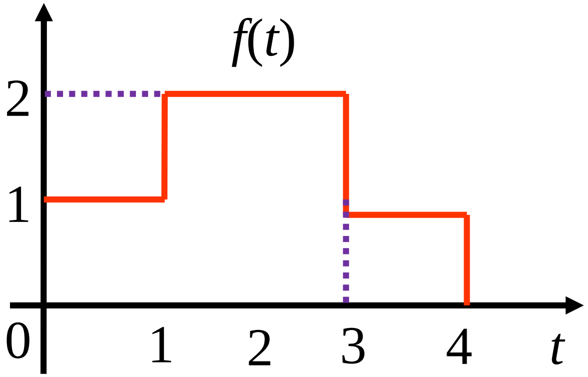
$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

例 2

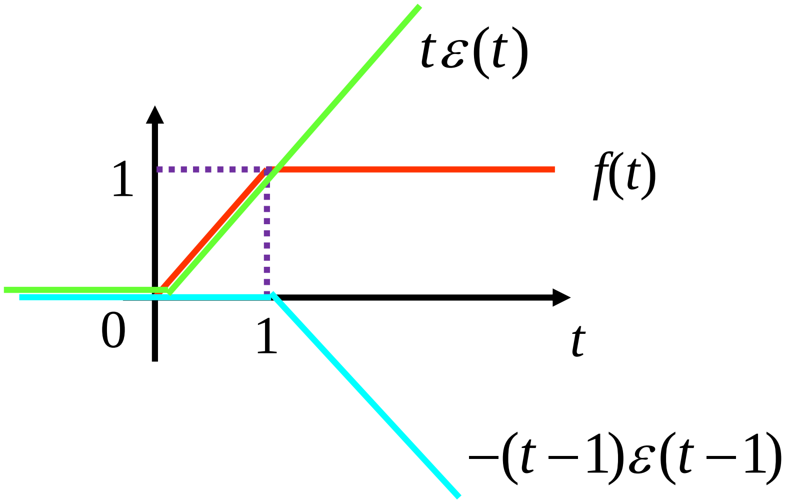


$$f(t)=2\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-3)-\varepsilon(t-4)$$

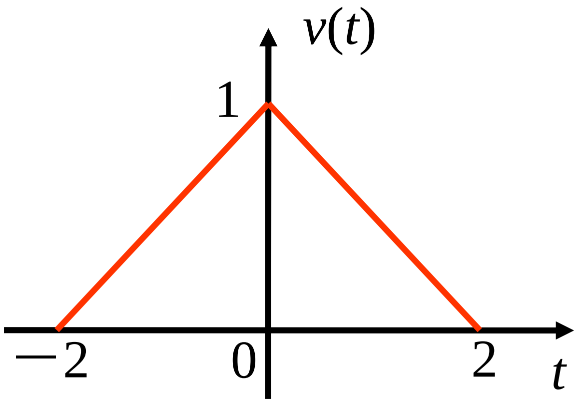
例 3 $f(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-3)-\varepsilon(t-4)$



例 4 $f(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+\varepsilon(t-1)=t\,\varepsilon(t)-(t-1)\,\varepsilon(t-1)$



例 5　已知电压v(t)的波形如图，试画出下列电压的波形。



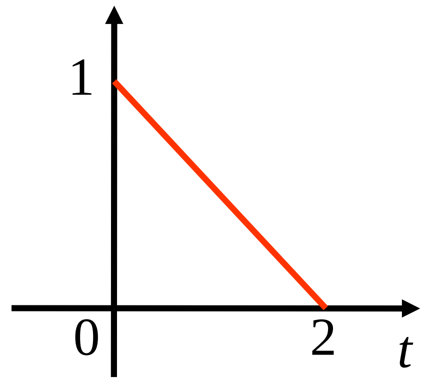
(1) $v(t)\varepsilon(t)$

(2) $v(t-1)\varepsilon(t)$

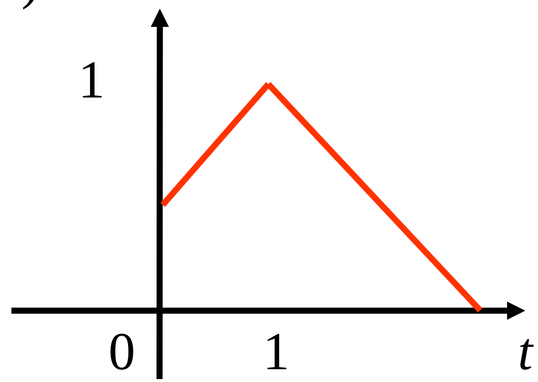
(3) $v(t-1)\varepsilon(t-1)$

(4) $v(t-2)\varepsilon(t-1)$

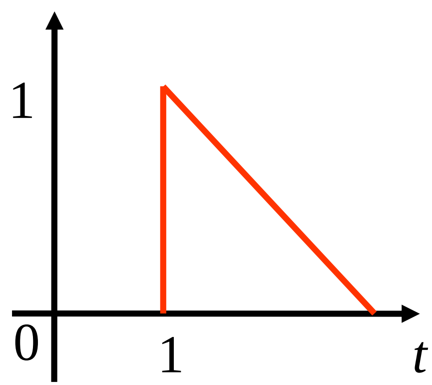
(1)



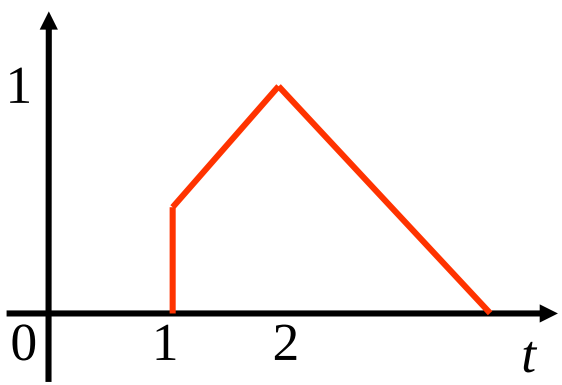
(2)



(3)



(4)

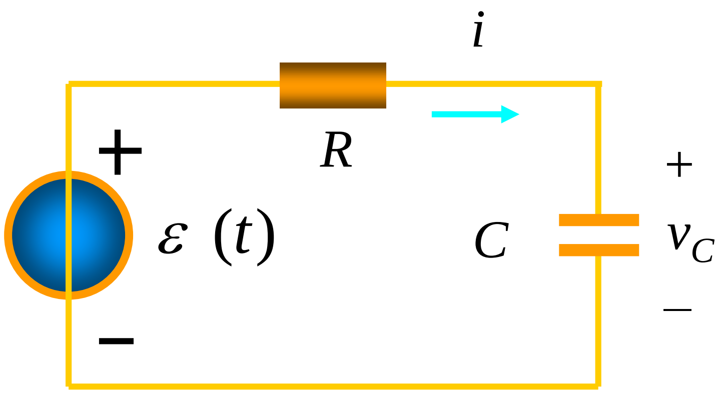


4.3.1 一阶电路的阶跃响应

阶跃响应 → 激励为单位阶跃函数时，电路中产生的零状态响应。

$$v_C(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\varepsilon(t)$$

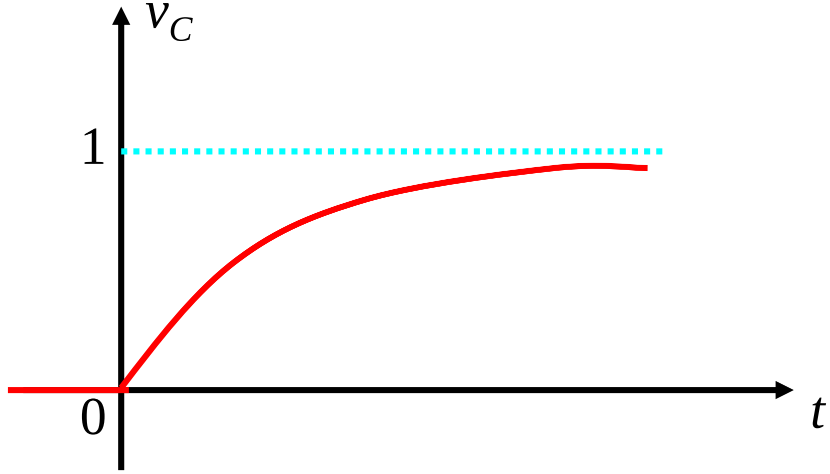
$$i(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

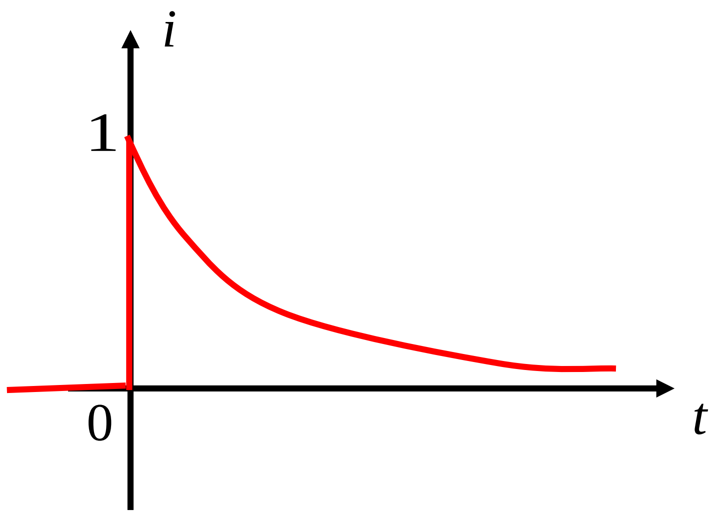


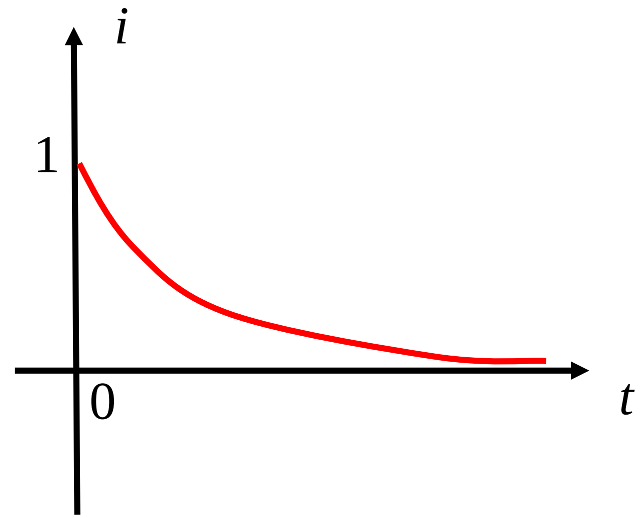
$v_C(0_-)=0$

注意

$i=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$ 和 $i=e^{-\frac{t}{RC}}\quad t\geq 0$ 的区别



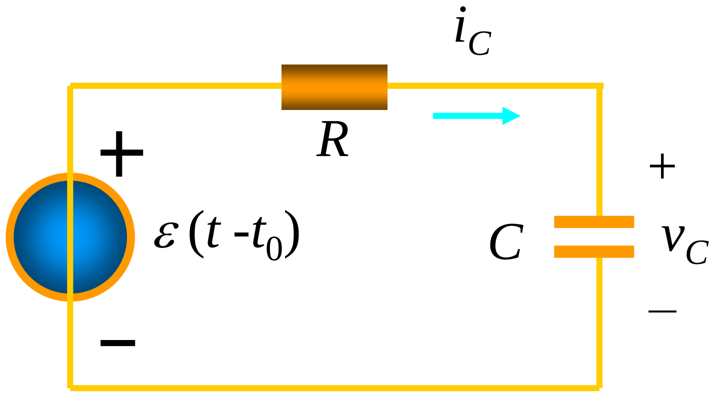




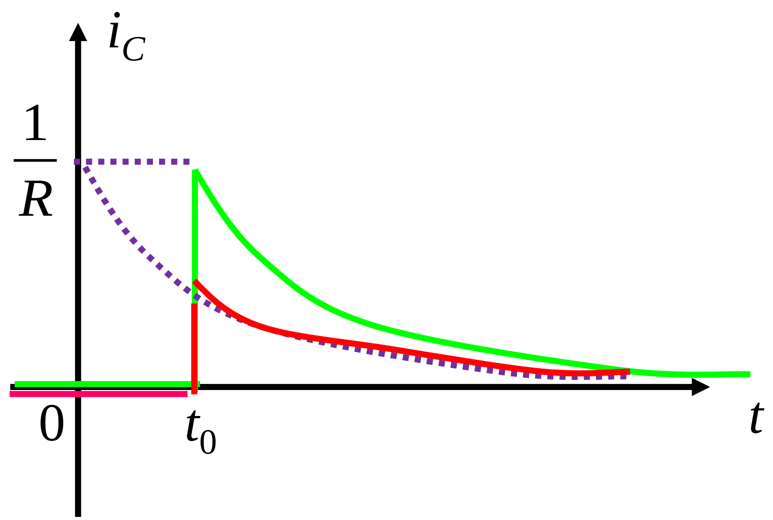
$$i = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$i = e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$

激励在 $t = t_0$ 时加入，
则响应从 $t = t_0$开始。



$$i_C = \frac{1}{R} e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \varepsilon(t-t_0)$$

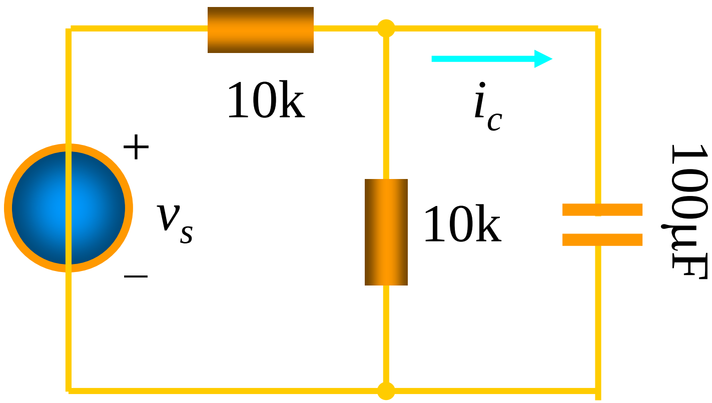


注意

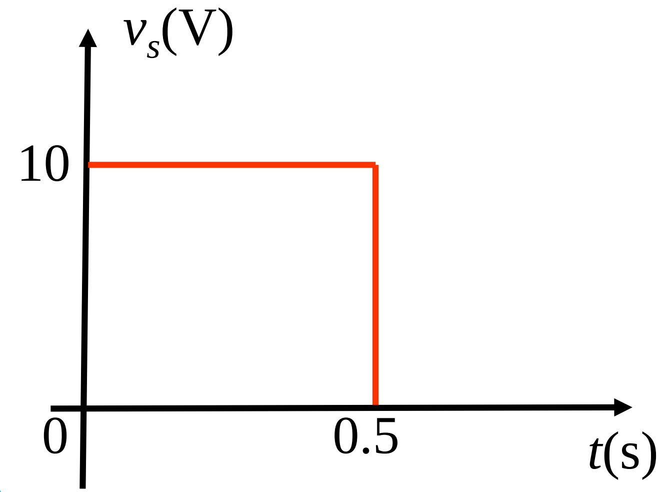
不要写为：

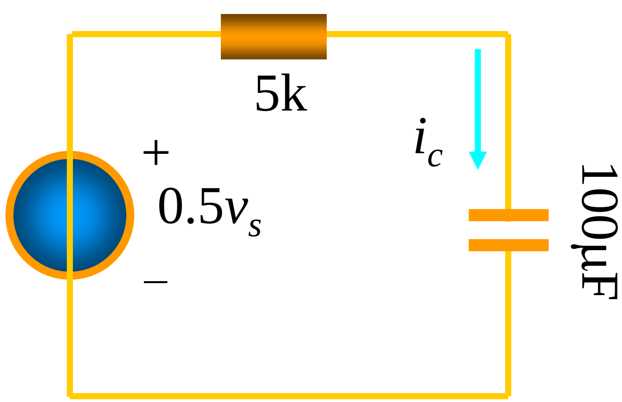
$$\frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t-t_0)$$

例　　求图示电路中电流 $i_C(t)$



$v_C(0^-) = 0$



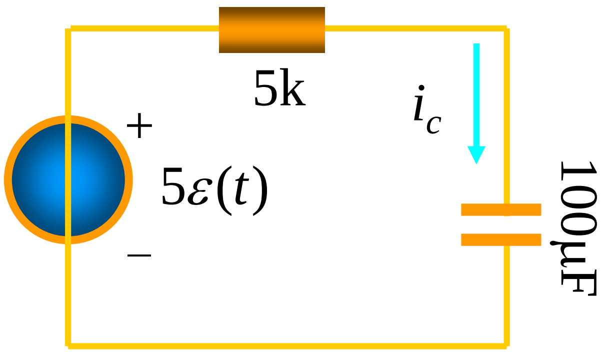


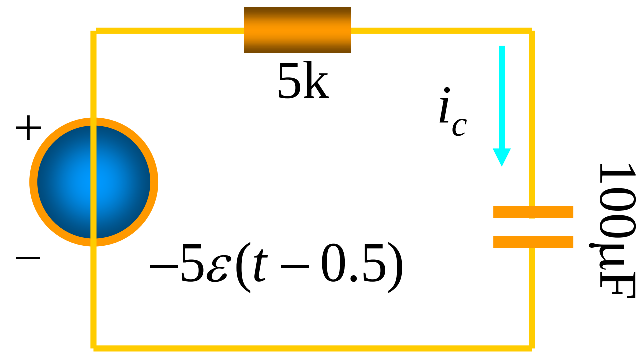
$v_C(0^-)=0$

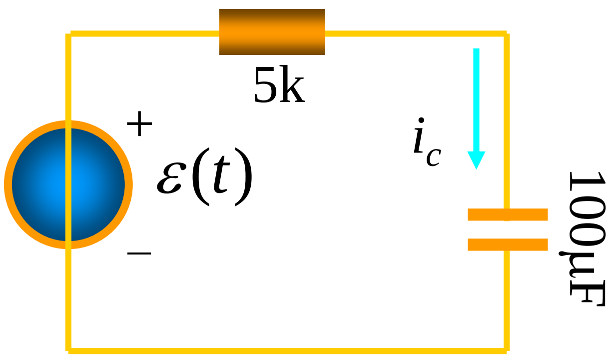
$$v_S = 10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)$$

应用叠加定理

$$v_S = 10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)$$







阶跃响应为：

$$\tau = RC = 100\times 10^{-6}\times 5\times 10^{-3} = 0.5\ \mathrm{s}$$

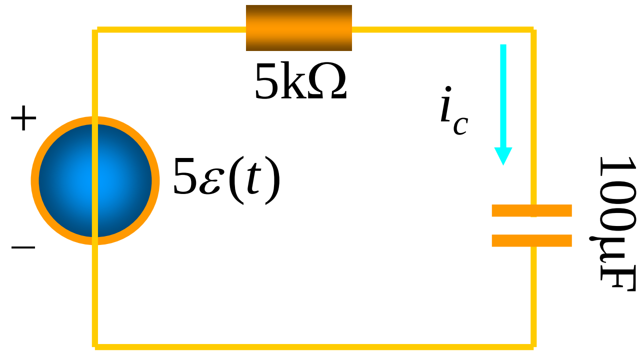
$$v_C(t) = (1-e^{-2t})\varepsilon\ (t)$$

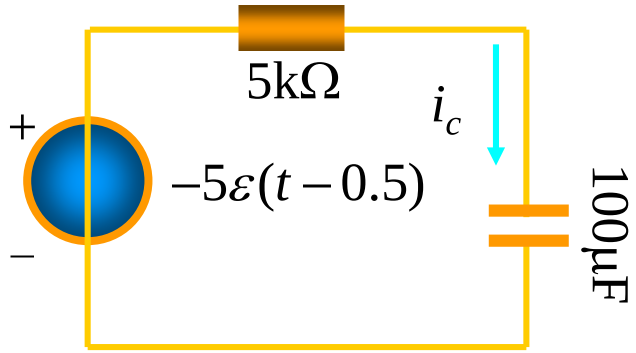
$$i_C = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}e^{-2t}\varepsilon\ (t)\quad \mathrm{mA}$$

由齐次性和叠加性得实际响应为：

$$i_C = 5\left[\frac{1}{5}e^{-2t}\varepsilon(t) - \frac{1}{5}e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\right]$$

$$= e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5) \quad \mathrm{mA}$$





分段表示为：

$$i_C = e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)$$

$$0 < t < 0.5 \quad \varepsilon(t) = 1 \quad \varepsilon(t-0.5) = 0$$

$$i_C = e^{-2t}$$

$$t > 0.5 \quad \varepsilon(t) = 1 \quad \varepsilon(t-0.5) = 1$$

$$i_C = e^{-2t} - e^{-2(t-0.5)} = e^{-2(t-0.5)}(e^{-1} - 1)$$

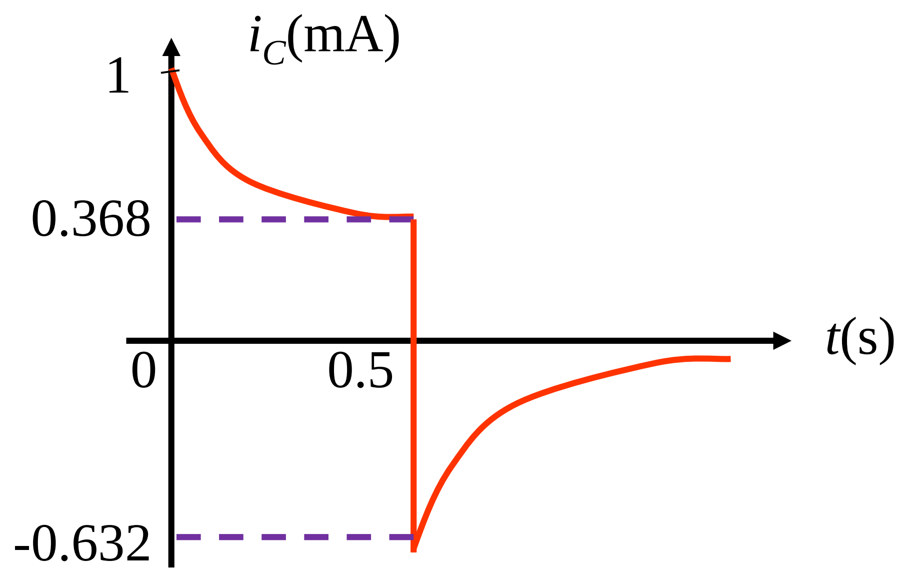
$$= -0.632e^{-2(t-0.5)}$$

$$i_C = e^{-2t}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-0.5)\right]-0.632e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)$$

分段表示为：

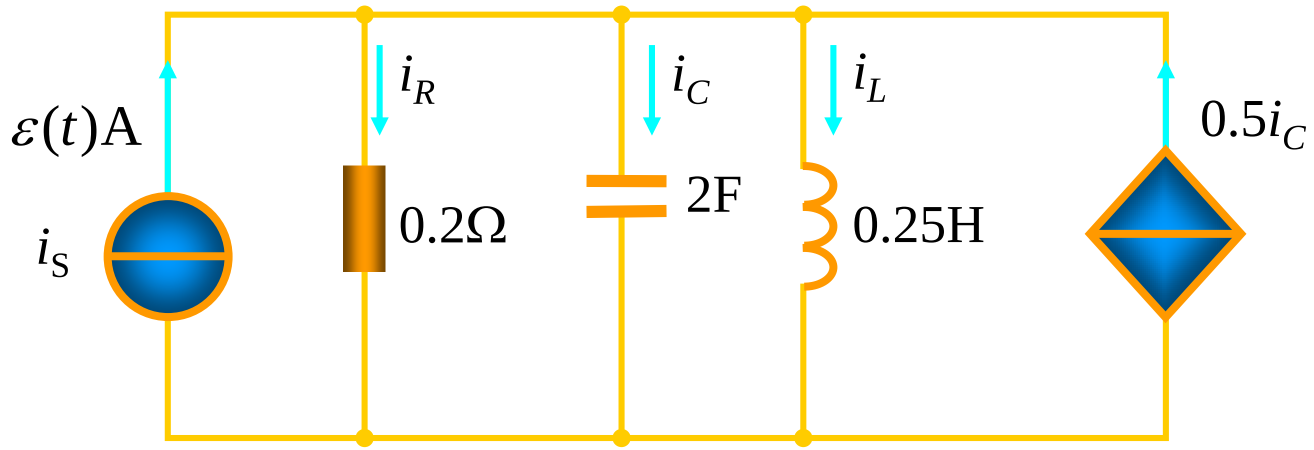
$$i_C(t)=\begin{cases} e^{-2t}\ \ \text{mA} & (0<t<0.5\,\text{s}) \\ -0.632e^{-2(t-0.5)}\ \ \text{mA} & (t>0.5\,\text{s}) \end{cases}$$

波形



4.3.2 二阶电路的阶跃响应

例　已知图示电路中$v_C(0_-)=0$，$i_L(0_-)=0$，求单位阶跃响应 i_L(t）



解　对电路应用KCL列结点电流方程有

$$i_R + i_C + i_L - 0.5i_C = i_S$$

$$i_R + 0.5i_C + i_L = \varepsilon(t)$$

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} \qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}\, v_C}{\mathrm{d}\, t} = LC\frac{\mathrm{d}^2\, i_L}{\mathrm{d}\, t^2}$$

代入已知参数并整理得： $$\frac{\mathrm{d}\, i_L^2}{\mathrm{d}\, t^2} + 5\frac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} + 4i_L = 4\varepsilon(t)$$

这是一个关于的二阶线性非齐次方程，其解为

$$i_L = i' + i''$$

特解 $i' = 1$

特征方程 $s^2 + 5s + 4 = 0$

解得特征根

$$s_1 = -1 \qquad s_2 = -4$$

通解 $i'' = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$

$$i_L = 1 + k_1 e^{-t} + k_2 e^{-4t}$$

代初始条件 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + s_1 + s_2 = 0 \\ -s_1 - 4s_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\dfrac{4}{3} \\ s_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

阶跃响应

$$i_L(t) = s(t) = \left(1 - \frac{4}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{-4t}\right) \varepsilon(t) \quad \text{A}$$

电路的动态过程是过阻尼性质的。

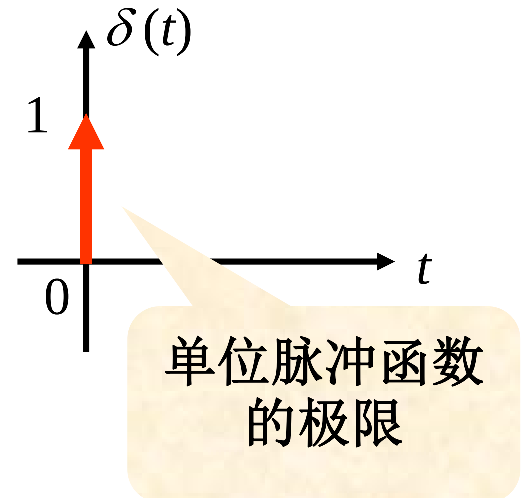
4.4 一阶电路和二阶电路的冲激响应

单位冲激函数简介

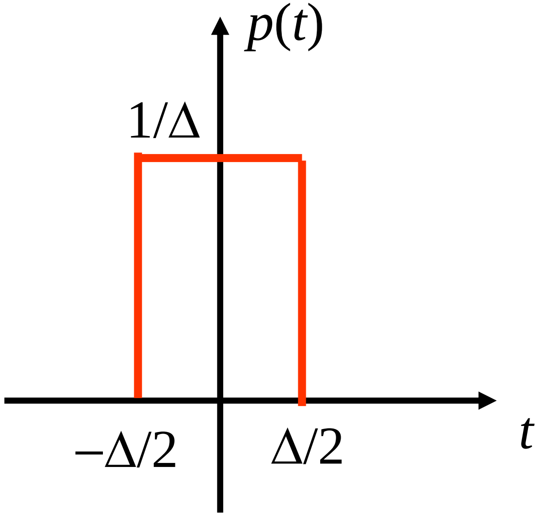
● 定义

$$\delta(t)=0 \quad (t\neq 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$



$$p(t)=\frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon\left(t+\frac{\Delta}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)\right]$$

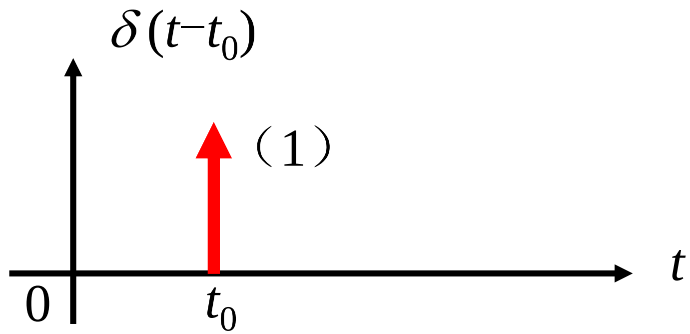


$$\Delta\to 0 \qquad \frac{1}{\Delta}\to\infty$$

$$\lim_{\Delta\to 0}p(t)=\delta(t)$$

● 单位冲激函数的延迟

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \quad (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$



● 单位冲激函数的性质

① 冲激函数对时间的积分等于阶跃函数

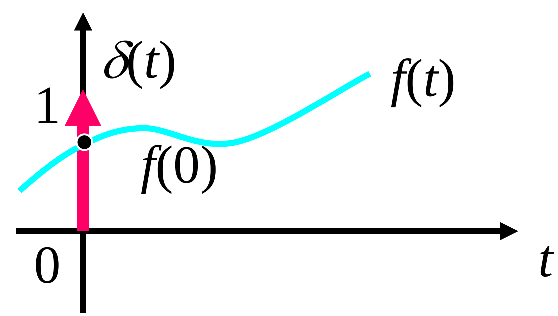
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & t < 0_- \\ 1 & t > 0_+ \end{cases} = \varepsilon(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$$

② 冲激函数的筛分性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

$$f(0)\delta(t)$$



同理 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$

例 $$\int_{-\infty}^{\infty}(\sin t + t)\delta(t-\frac{\pi}{6})\mathrm{d}t$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}=1.02$$

注意

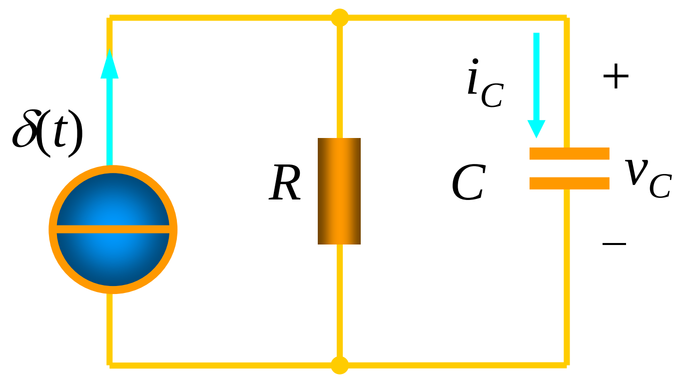
$f(t)$在 t_0 处连续

4.4.1 一阶电路的冲激响应

冲激响应 → 激励为单位冲激函数时，电路中产生的零状态响应。

例1　求单位冲激电流激励下的RC电路的零状态响应。

解　分二个时间段考虑冲激响应



$v_C(0_-) = 0$

(1)　t 在 $0_- \rightarrow 0_+$间

电容充电，方程为

$$C\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}+\frac{v_c}{R}=\delta(t)$$

注意

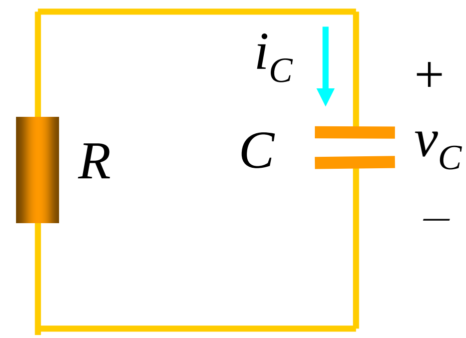
v_c不是冲激函数 ， 否则KCL不成立

$$\int_{0_-}^{0_+} C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \int_{0_-}^{0_+} \cancelto{0}{\frac{v_C}{R}\mathrm{d}t} = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

$$\rightarrow \quad C\left[v_C(0_+) - v_C(0_-)\right] = 1 \quad \rightarrow \quad v_C(0_+) = \frac{1}{C} \neq v_C(0_-)$$

结论 电容中的冲激电流使电容电压发生跃变。

(2) $t > 0_+$ 为零输入响应（电容放电）

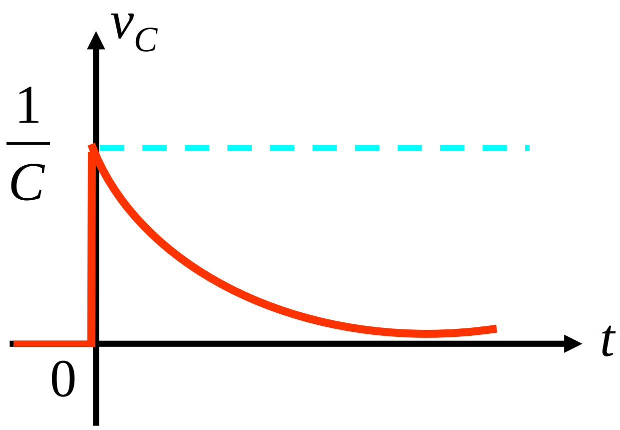


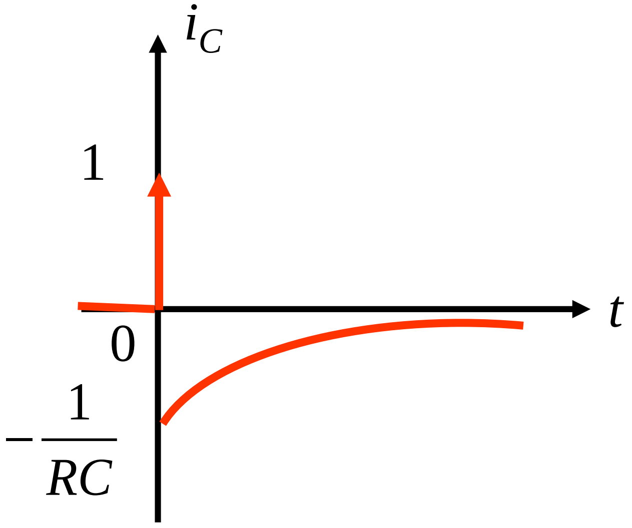
$$v_C = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0_+$$

$$v_C(0_+) = \frac{1}{C}$$

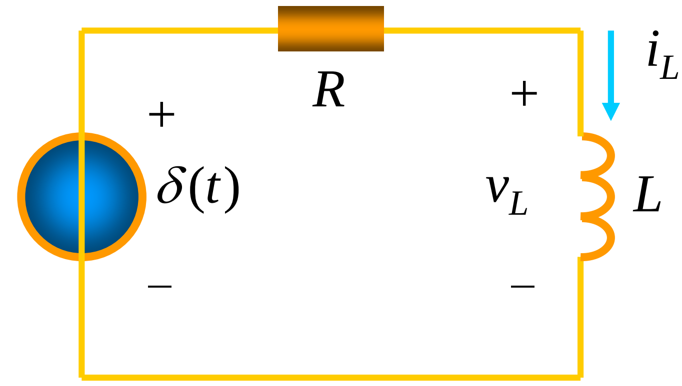
$$i_C = -\frac{v_C}{R} = -\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0_+$$

$$\begin{cases} v_C = \dfrac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \\ i_C = \delta(t) - \dfrac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \end{cases}$$





例2　求单位冲激电压激励下的RL电路的零状态响应。



$i_L(0_-)=0$

解　分二个时间段考虑冲激响应

(1)　t 在 $0_- \to 0_+$间方程为

$$Ri_L + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$$

$$\cancelto{0}{\int_{0_-}^{0_+} Ri_L \mathrm{d}t} + \int_{0_-}^{0_+} L\frac{di_L}{dt}\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

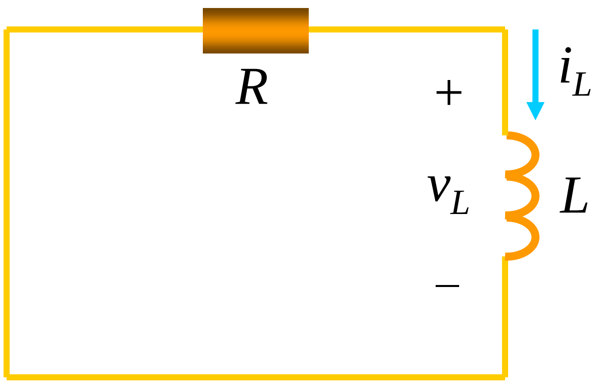
$$\Rightarrow \quad L\left[i_L(0_+) - i_L(0_-)\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad i_L(0_+) = \frac{1}{L} \neq i_L(0_-)$$

注意

i_L不是冲激函数，否则KVL不成立。

电感上的冲激电压使电感电流发生跃变。

(2) $t > 0_+$ 为零输入响应（电感放电）

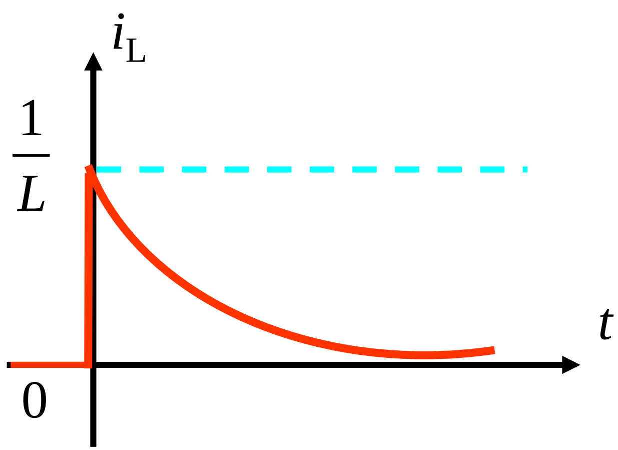


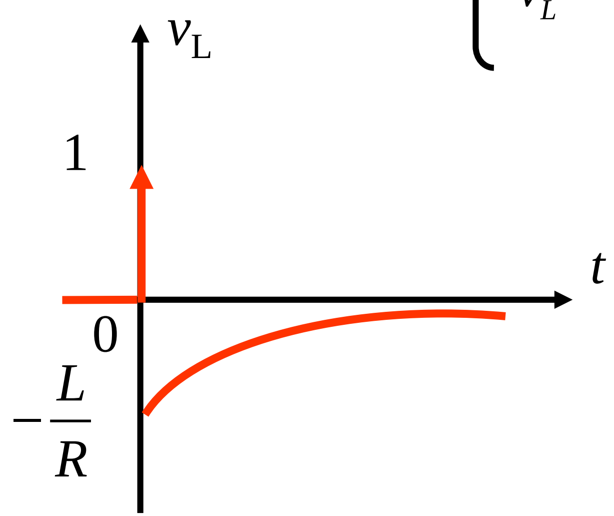
$$\tau = \frac{L}{R} \qquad i_L(0_+) = \frac{1}{L}$$

$$i_L = \frac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0_+$$

$$v_L = -i_L R = -\frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0_+$$

$$\begin{cases} i_L = \dfrac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t) \\ v_L = \delta(t) - \dfrac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t) \end{cases}$$

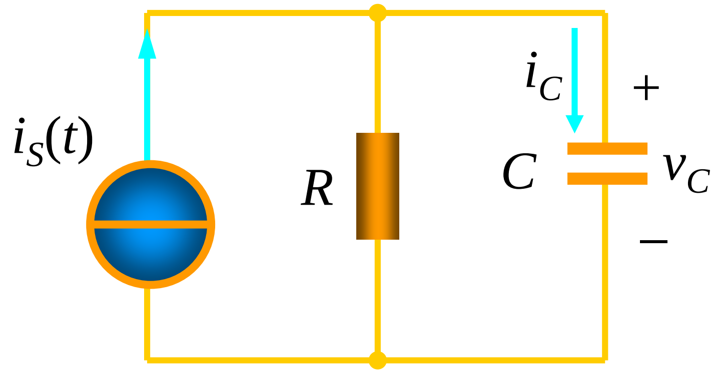




单位阶跃响应和单位冲激响应关系

单位阶跃	单位阶跃响应	$\delta(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t)$
$\varepsilon(t)$	$s(t)$	
单位冲激	**单位冲激响应**	$h(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)$
$\delta(t)$	$h(t)$	

例　求$i_s(t)$为单位冲激时电路响应$v_C(t)$和$i_C(t)$.



$v_C(0_-)=0$

解

先求单位阶跃响应：

令　$i_S(t) = \varepsilon(t)$

$v_C(0_+)=0$　　　$v_C(\infty)=R$　　　$\tau = RC$

$$\Rightarrow \quad v_C(t) = R\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\varepsilon(t)$$

$i_C(0_+)=1$　　　$i_C(\infty)=0$　　　$\Rightarrow \quad i_C = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$

再求单位冲激响应，令：　$i_S(t) = \delta(t)$

$$v_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\varepsilon(t)$$

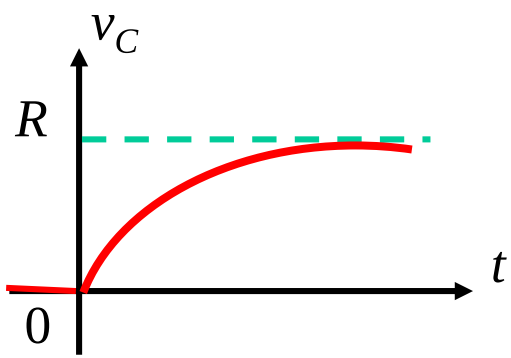
$$= \cancelto{0}{R\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}\delta(t) + \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

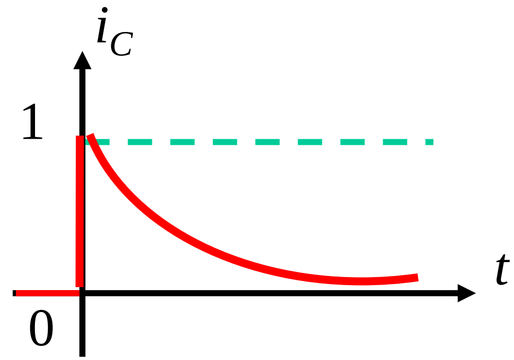
$$\boxed{f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)}$$

$$i_{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \right] = e^{-\frac{t}{RC}}\delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

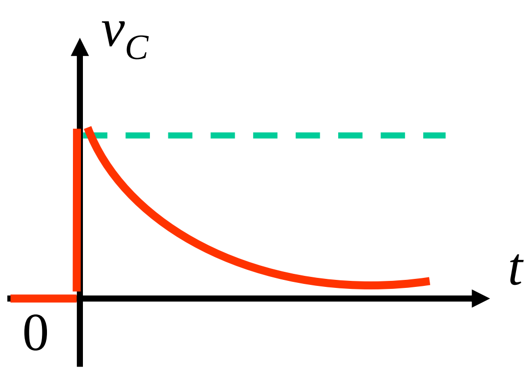
$$= \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

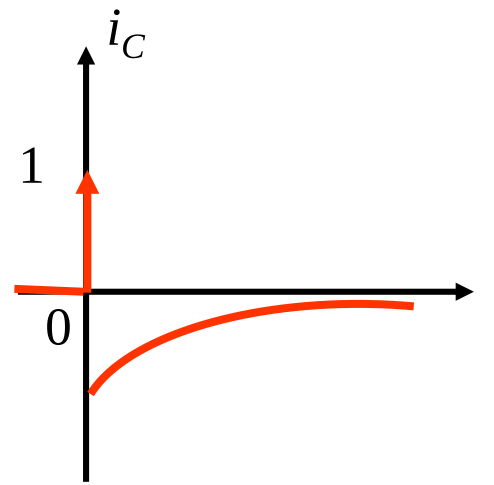
阶跃响应





冲激响应

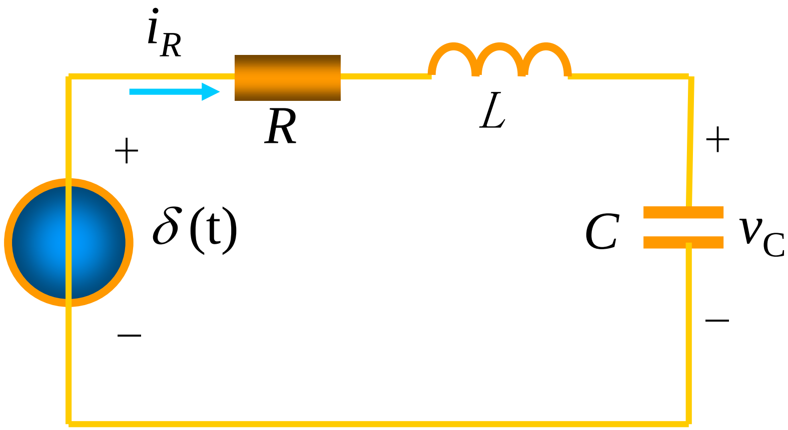




4.4.2 二阶电路的冲激响应

例　求单位冲激电压激励下的RLC电路的零状态响应。

解　KVL方程为



$$LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}+v_C=\delta(t)$$

$$\int_{0_-}^{0_+}LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}v_C\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t$$

有限值　　有限值

t 在0_-至0_+间

$$\int_{0_-}^{0_+}LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t=1$$

$$\int_{0_-}^{0_+} LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t = 1 \quad \Rightarrow \quad LC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}(0_+) - \cancelto{0}{LC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}(0_-)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad i_L(0_+) = i_C(0_+) = \frac{1}{L}$$

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 0$$

$$\frac{dv_C(0_+)}{dt} = \frac{i_L(0_+)}{C} = \frac{1}{LC}$$

$t > 0_+$为零输入响应

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + v_C = 0$$

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \Rightarrow \quad v_C = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 s_1 + k_2 s_2 = \dfrac{1}{LC} \end{cases}$$

$$k_2 = -k_1 = \frac{\dfrac{1}{LC}}{s_2 - s_1}$$

$$v_C = \frac{-1}{LC(s_2 - s_1)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})\varepsilon(t)$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$(s_{1、2} = -\alpha \pm \mathrm{j}\omega)$$

$$v_C = ke^{-\alpha t}\sin(\omega t + \beta)$$

$$\longrightarrow \quad v_C = \frac{1}{\omega LC}e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\varepsilon(t)$$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \Rightarrow \quad v_C = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$$

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ -\alpha k_1 + k_2 = \dfrac{1}{LC} \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \dfrac{1}{LC} \end{cases}$$

$$v_C = \frac{1}{LC} t e^{-\alpha t} \varepsilon(t)$$