第3章 正弦交流电路

- 正弦交流电量的基本概念
- 正弦交流电路的相量分析方法
- 交流功率分析

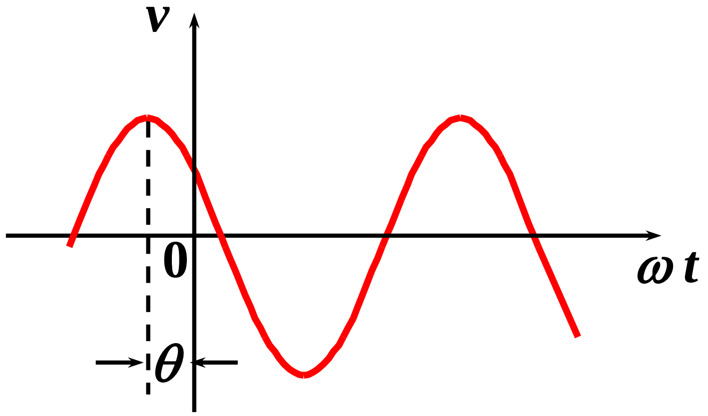
3.1 正弦交流电量的基本概念

3.1.1 正弦量的定义

大小方向随时间按正弦规律变化的电压、电流。

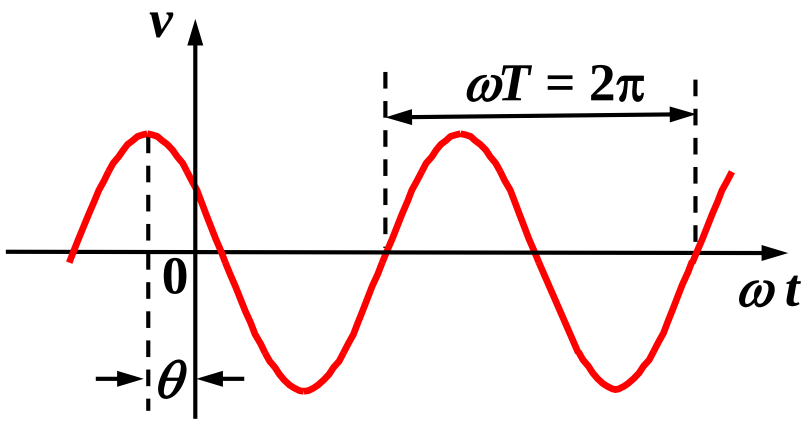
瞬时值表达式 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ 或 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$

波形



V_m, ω, θ ——正弦量的三要素

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$



● 正弦量的三要素

(1) 幅值 (振幅、 最大值) V_m

(2) 角频率 ω： 反映正弦量变化的快慢。 $\omega = \mathrm{d}(\omega t + \theta) / \mathrm{d}t$

单位时间内变化的角度　　　　单位： rad/s，弧度/秒

周期 T : 完成一个循环变化所需时间，单位：s 。

频率 f : 每秒钟完成循环的次数，单位：Hz 。

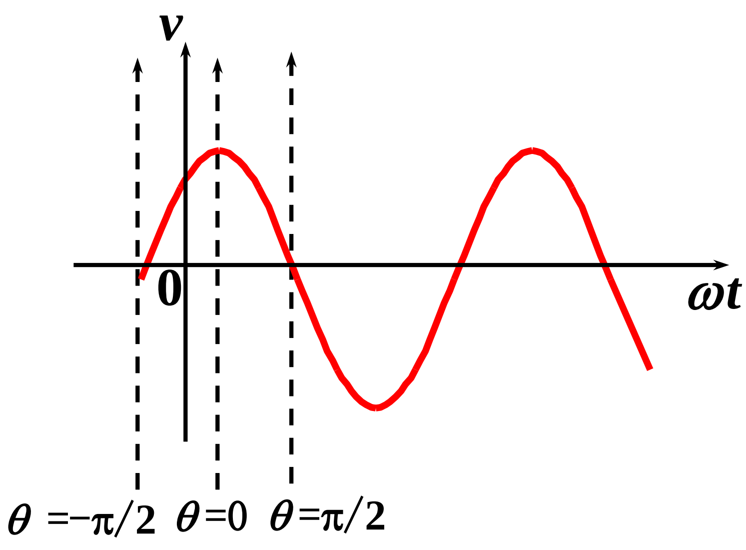
关系： $f = \dfrac{1}{T}$　　　$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

$v(t) = V_m \cos(\omega t+\theta)$　　　$(\omega t+\theta)$：相位、相角、相位角

(3) 初相位θ：正弦量在 $t=0$时的相位角。(反映正弦量的初始值)

当 $t = 0$ 时，$i(t) = I_m \cos\theta$

初相位θ和计时起点有关，计时起点不同，初相位不同。



$\theta = 0$ 则 $v = V_m \cos\omega t$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 则 $v = V_m \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$

$\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ 则 $v = V_m \cos(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$

一般规定：$|\theta| \leq \pi$。

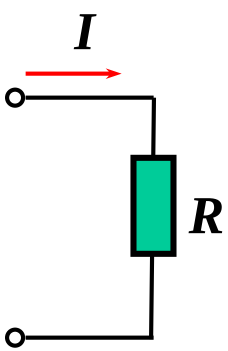
$\theta = 0$ 的正弦量为参考正弦量

3.1.2 正弦量的重要特性参数

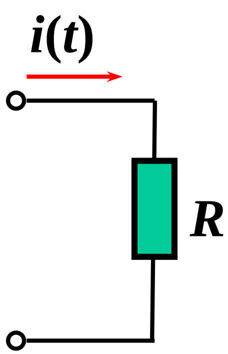
一、有效值 (effective value)

(1) 有效值的定义

定义　周期性电流 ***i*** 流过电阻 ***R*** 在一周期 ***T*** 内消耗的电能，等于一直流电流 ***I*** 流过 ***R*** 在时间 ***T*** 内消耗的电能，则称电流 ***I*** 为周期性电流 ***i*** 的有效值。



$$E_{DC} = I^2RT$$



$$E_T = \int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t$$

若 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{DC}} = \boldsymbol{E}_T$，则 $\boldsymbol{I}$ 为周期电流的有效值

$$\boldsymbol{I^2 RT = \int_0^T i^2(t) R \mathrm{d}t}$$

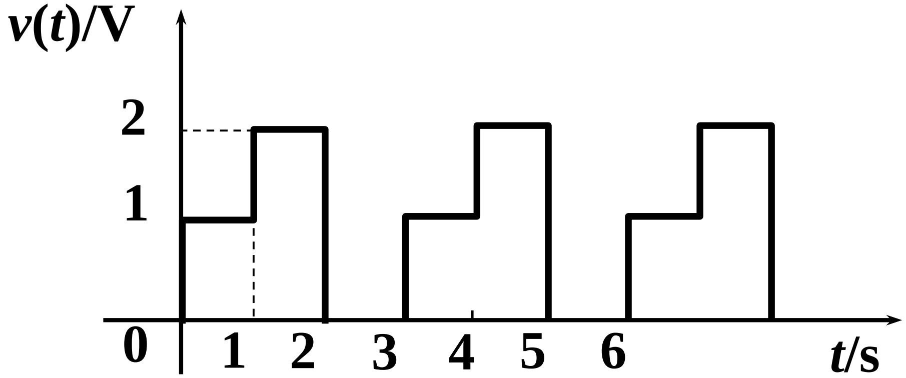
$$\boxed{I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}}$$

同样，可定义电压有效值：

$$\boxed{V_{rms} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\mathrm{d}t}}$$

有效值也称均方根值（**root-mean-square**，简记为 **rms**。**)**

例 周期电压如图所示。求其有效值V_{rms}。



解 根据有效值的定义，有

$$V_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\mathrm{d}t}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\int_0^1 1^2\mathrm{d}t+\int_1^2 2^2\mathrm{d}t+\int_2^3 0^2\mathrm{d}t\right)}$$

$$\approx 1.29\ \mathrm{V}$$

(2) 正弦电流、电压的有效值

设电流 $\boldsymbol{i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta)}$

$$I_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t+\theta)\,\mathrm{d}t}$$

$$\because\quad \int_0^T\cos^2(\omega t+\theta)\mathrm{d}t=\int_0^T\frac{1+\cos 2(\omega t+\theta)}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}T$$

$$\therefore\quad I_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}\approx 0.707I_m$$

或 $$I_m=\sqrt{2}I_{rms}$$

即 $$i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta)=\sqrt{2}I_{rms}\cos(\omega t+\theta)$$

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$$V_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m \qquad 或 \qquad V_m = \sqrt{2} V_{rms}$$

工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。

测量中，电磁式交流电压、电流表读数均为有效值。

* 区分电压、电流的瞬时值、有效值、最大值的符号。

$$v \quad i \qquad\qquad V_{rms} \quad I_{rms} \qquad\qquad V_m \quad I_m$$

二、峰峰值和平均值

峰峰值（**peak-to-peak value**）是指一个周期内信号最大值和最小值之差，它描述了信号值的变化范围。

平均值（**average value; mean value**）是信号在一个周期内的积分与周期长度的商。

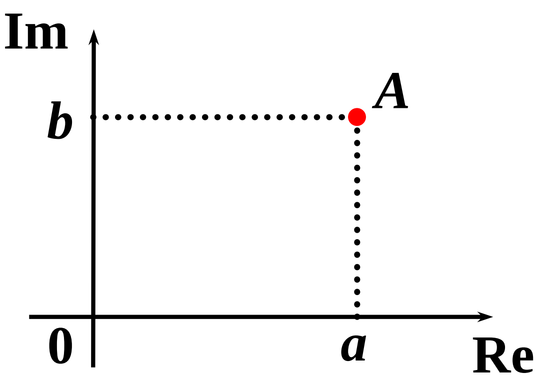
3.2 正弦交流电路的相量分析方法

- 复数的表示与运算

1、复数 *A* 表示形式：

直角坐标形式（代数式）：　$A = a + jb$

$(j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位$)$



三角形式：

$$A = |A| \ (\cos\theta + j\sin\theta)$$

直角坐标表示

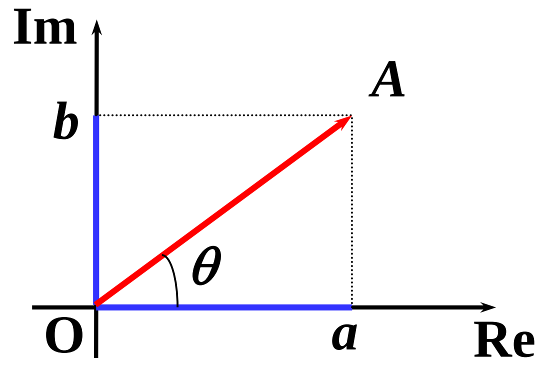
$$\begin{cases} a = |A|\cos\theta \ \boxed{= \mathrm{Re}[A]} \\ b = |A|\sin\theta \ \boxed{= \mathrm{Im}[A]} \end{cases}$$

其中|A|为模，$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$

θ为幅角，$\theta = \mathrm{arctag}\,\dfrac{b}{a}$

$(a + j b)$ 还可表示为原点到A的相量（Phasor）

相量表示



欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

极坐标形式（指数形式）

$$A = |A| e^{j\theta} = |A| \angle \theta$$

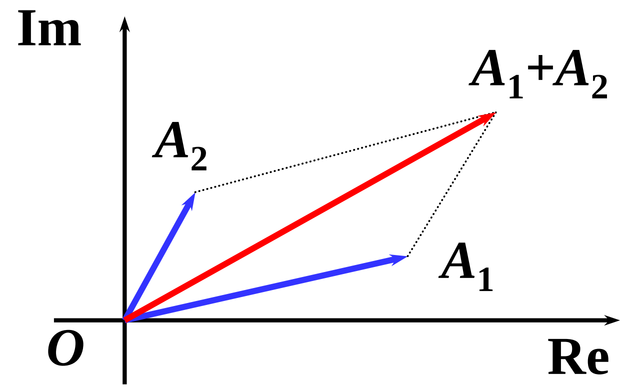
2、复数运算

(1) 加减运算——直角坐标

若 $A_1=a_1+jb_1$， $A_2=a_2+jb_2$

则 $A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j\,(b_1 \pm b_2)$

加减法可用图解法。



(2) 乘除运算——极坐标

若 $A_1 = |A_1| \angle \theta_1$ ，若 $A_2 = |A_2| \angle \theta_2$

则 $A_1 A_2 = |A_1|\,|A_2| \angle \theta_1 + \theta_2$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{|A_1| \angle \theta_1}{|A_2| \angle \theta_2} = \frac{|A_1|\, e^{j\theta_1}}{|A_2|\, e^{j\theta 2}} = \frac{|A_1|}{|A_2|}\, e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{|A_1|}{|A_2|} \angle \theta_1 - \theta_2$$

乘法：模相乘，角相加； 除法：模相除，角相减。

例 计算

$$\frac{(10+j6.28)(20-j31.9)}{10+j6.28+20-j31.9}$$

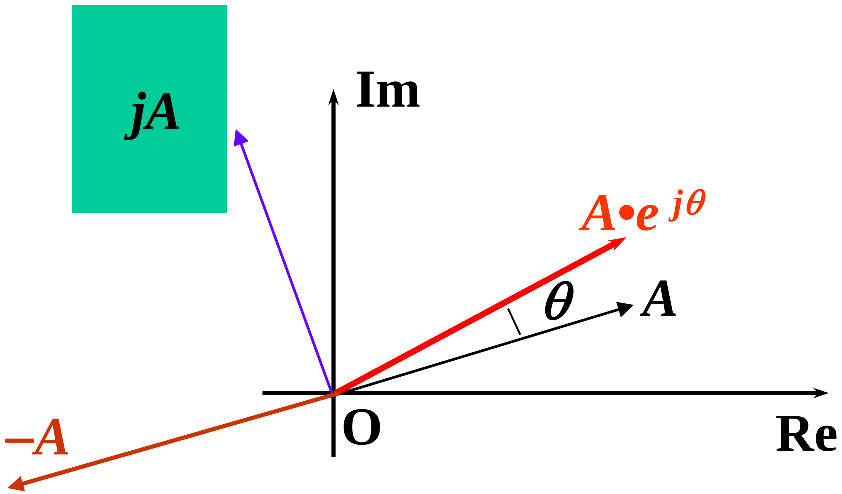
$$=\frac{11.81\angle 32.13^{o}\times 37.65\angle -57.61^{o}}{39.45\angle -40.5^{o}}$$

$$=10.89+j2.86$$

3、旋转因子

复数 $e^{j\theta} = 1\angle\theta$

$A\bullet e^{j\theta}$ 相当于A逆时针旋转一个角度θ，而模不变。



欧拉公式

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = -j$$

$$e^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$$

故 $+j$， $-j$， -1 都可以看成旋转因子。

$e^{j\omega t}$：模为 1、幅角为 ωt 的旋转相量

3.2.1 正弦量的相量表示

造一个复指数函数

$$A(t) = V_m \mathrm{e}^{j(\omega t+\theta)}$$

$$= V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta\ )$$

若对 ***A*(*t*)** 取实部：

$$\mathrm{Re}\left[A(t)\right] = V_m \cos(\omega t + \theta)$$ 是一个正弦量

若对 ***A*(*t*)** 取虚部：

$$\mathrm{Im}[A(t)] = V_m \sin(\omega t + \theta\ )$$ 也是一个正弦量

任意一个正弦时间函数都可以找到唯一的与其对应的复指数函数：

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad \leftrightarrow \quad A(t) = V_m e^{j(\omega t+\theta)}$$

***A*(*t*)**还可以写成

$$A(t) = \underbrace{V_m e^{j\theta}}_{\text{复常数}} \, e^{j\omega t}$$

旋转相量

$$\dot{V} = V_m e^{j\theta} = V_m \angle \theta \quad \leftrightarrow \quad v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

相量

称 $\dot{V} = V_m \angle \theta$ 为正弦量 $\boldsymbol{v(t)}$ 对应的相量。

相量包含了正弦量的两个要素 $\boldsymbol{V_m}$, $\boldsymbol{\theta}$

同样可以建立正弦电压与相量的对应关系：

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{V} = V_m \angle \theta$$

注意：

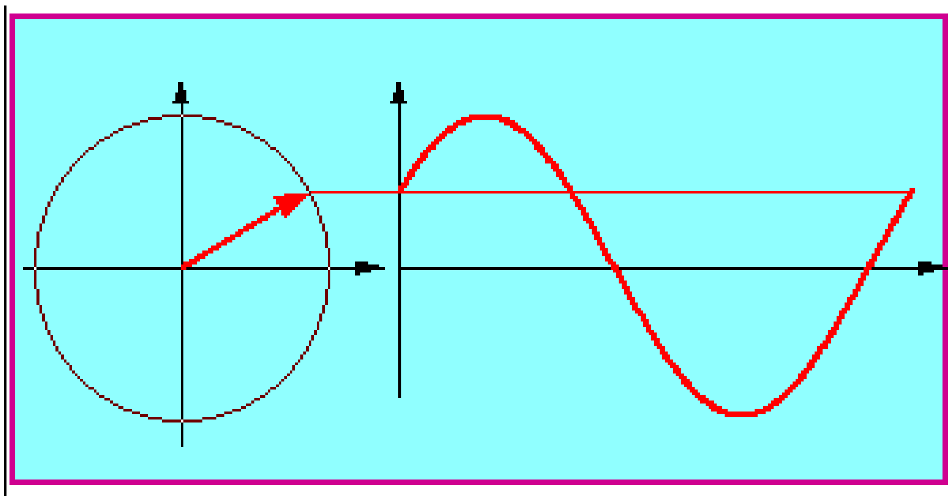
$$v(t) = \mathrm{Re}[\dot{V}\ e^{j\omega t}\ ]$$

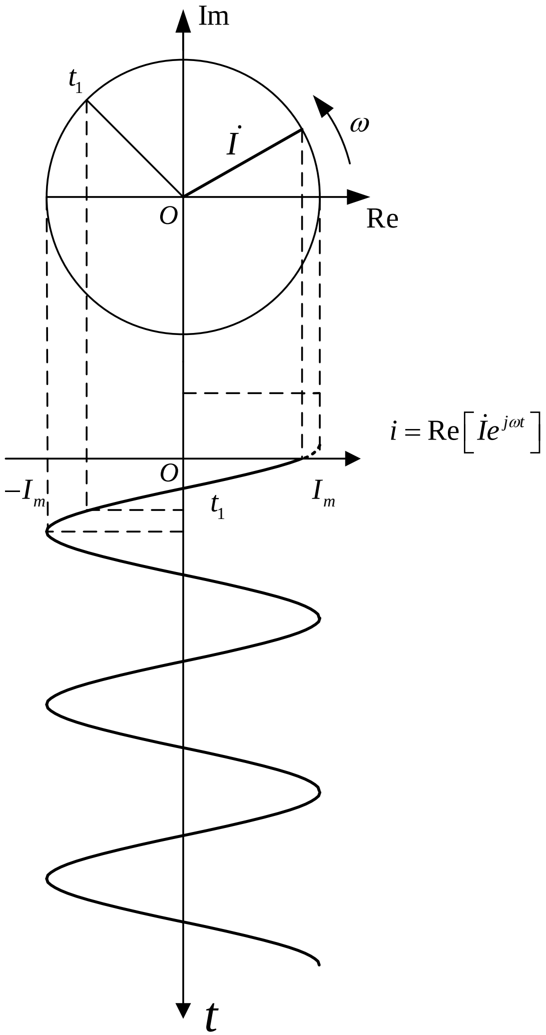
一、旋转相量与正弦时间函数对应关系的几何意义

$\dot{I}e^{j\omega t}=I_m e^{j\theta}e^{j\omega t}=I_m e^{j(\omega t+\theta)}$是模为$I_m$、初始角度为$\theta$ 的旋转相量。

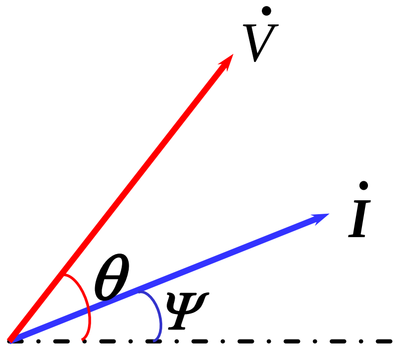
正弦时间函数 $i=I_m\cos(\omega t+\theta)$是旋转相量 $I_m e^{j(\omega t+\theta)}$ 在实轴上的投影。

正弦时间函数 $i=I_m\sin(\omega t+\theta)$ 是旋转相量 $I_m e^{j(\omega t+\theta)}$ 在虚轴上的投影。





相量图 (Phasor Diagram)



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi) \rightarrow \dot{I} = I_m \angle \psi$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \rightarrow \dot{V} = V_m \angle \theta$$

注意

不同频率的相量不能画在一张相量图上。

二、相位关系

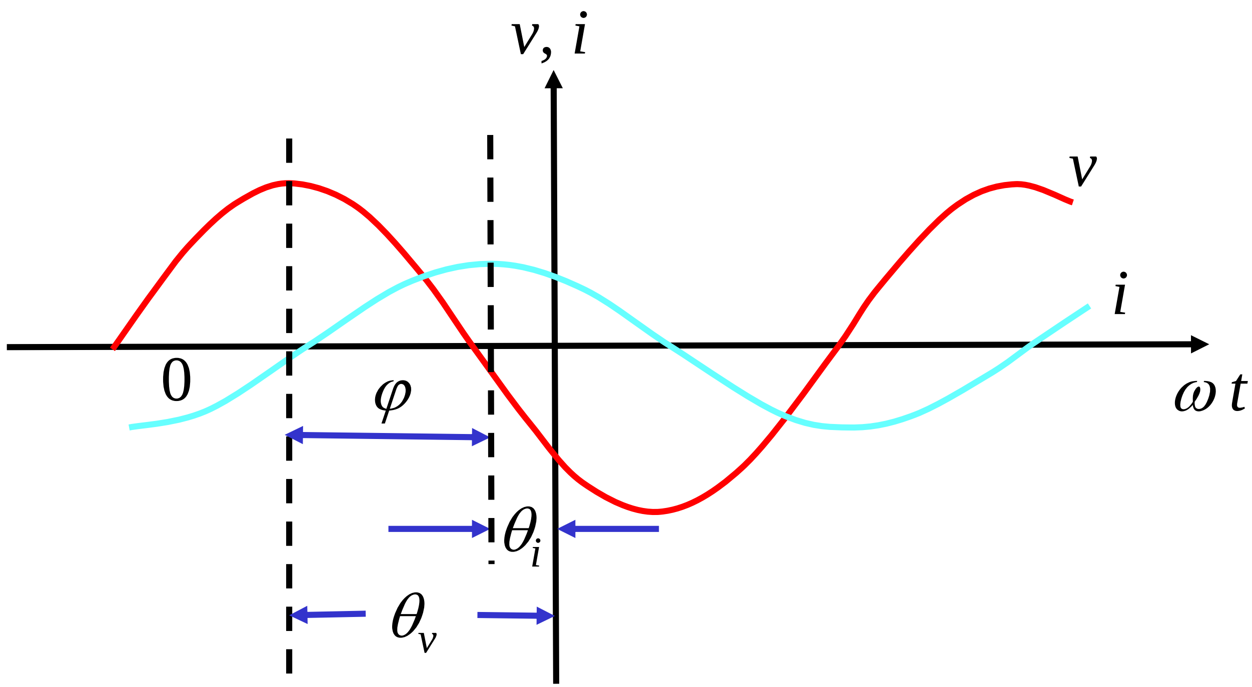
设 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$, $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$

相位差：$\varphi = (\omega t + \theta_v) - (\omega t + \theta_i) = \theta_v - \theta_i$

等于初相位之差

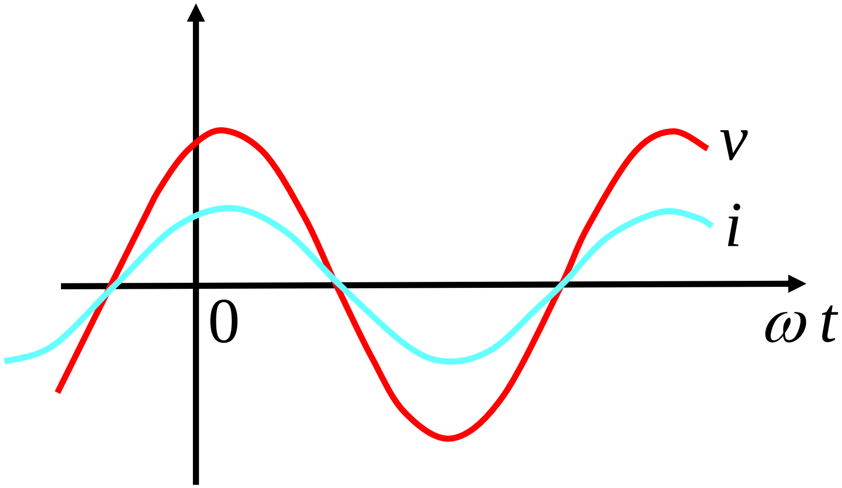
规定：$|\varphi| \leq \pi$ (180°)

- $\varphi>0$， v 超前 i φ 角，或 i 滞后 v φ 角, (v 比 i 先到达最大值)；
- $\varphi<0$， i 超前 v φ 角，或 v 滞后 i φ 角, i 比 v 先到达最大值）。

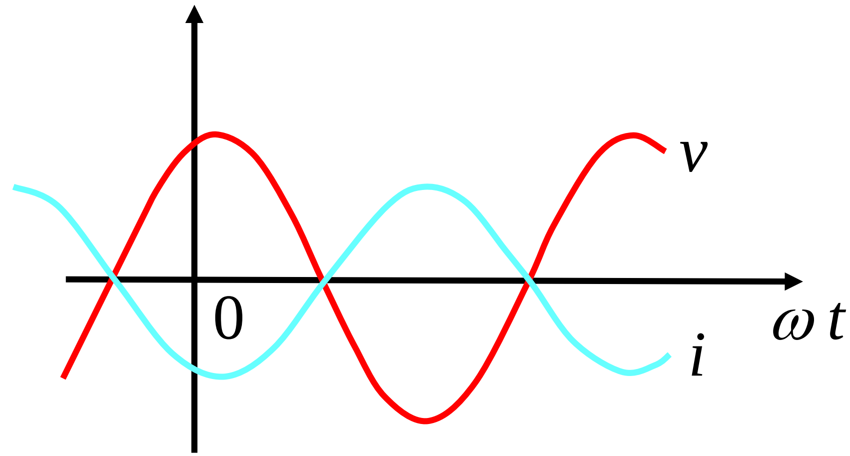


特殊相位关系

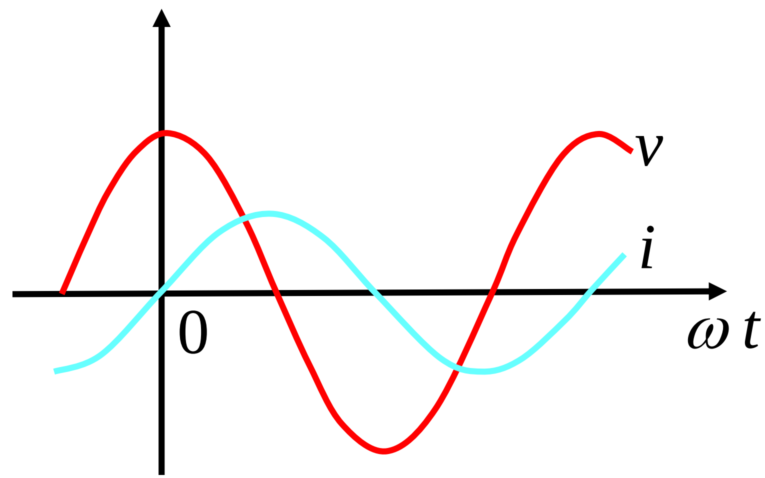
$\varphi = 0$， 同相



$\varphi = \pm\pi$ ($\pm 180^{\circ}$)， 反相



$\varphi = \pi/2$： v 领先 i $\pi/2$， 相位正交



同样可比较两个电压或两个电流的相位差。

例　　计算下列两正弦量的相位差。

结论

解

$$(1)\quad i_1(t)=10\cos(100\pi\, t+3\pi/4)$$

$$i_2(t)=10\cos(100\pi\, t-\pi/2)$$

$$\varphi=3\pi/4-(-\pi/2)=5\pi/4>0$$

$$\rightarrow\quad \varphi=5\pi/4-2\pi=-3\pi/4$$

两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较。

$$i_2(t)=3\cos(100\pi t-150^0)$$

$$\rightarrow\quad \varphi=-30^0-(-150^0)=120^0$$

$$\omega_1\neq\omega_2$$

不能比较相位差

$$(4)\quad i_1(t)=5\cos(100\pi\, t-30^0)$$

$$i_2(t)=-3\cos(100\pi\, t+30^0)$$

三、正弦量与相量的运算

1、同频率正弦量相加减

取实部

$$v_1(t) = \mathrm{Re}(\dot{V}_1 e^{j\omega t})$$

$$v_2(t) = \mathrm{Re}(\dot{V}_2 e^{j\omega t})$$

$$v_1(t) + v_2(t) = \mathrm{Re}\left(\dot{V}_1 e^{j\omega t}\right) + \mathrm{Re}\left(\dot{V}_2 e^{j\omega t}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\dot{V}_1 e^{j\omega t} + \dot{V}_2 e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(\dot{V}_1 + \dot{V}_2\right) e^{j\omega t}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\dot{V} e^{j\omega t}\right)$$

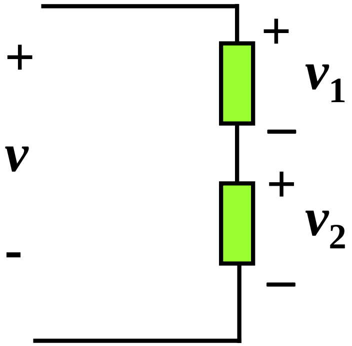
$$\therefore \quad \dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

故同频的正弦量相加减运算就变成对应的相量相加减运算。

$$\boldsymbol{i_1 \pm i_2 = i_3}$$

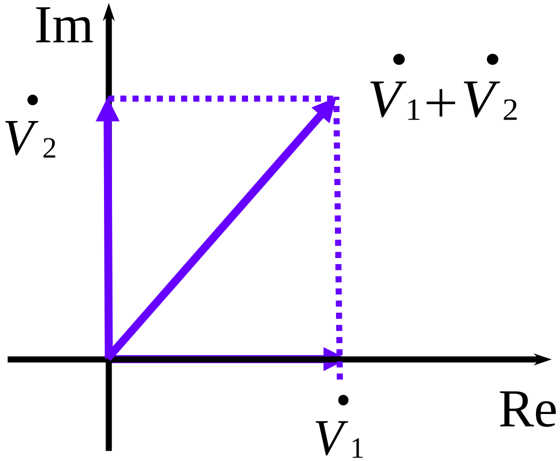
$$\dot{I}_1 \pm \dot{I}_2 = \dot{I}_3$$

例1



$$\dot{V}_1 = 3\angle 0^{\circ}\ \text{V} \qquad \dot{V}_2 = 4\angle 90^{\circ}\ \text{V}$$

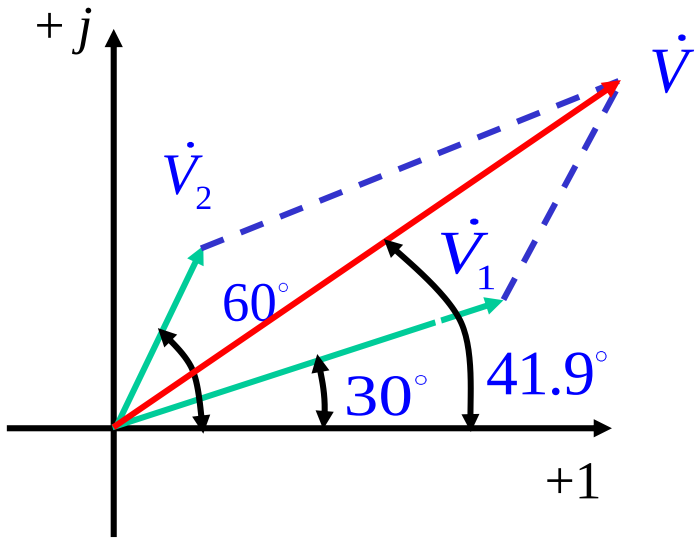
同频正弦量的加、减运算可借助相量图进行。

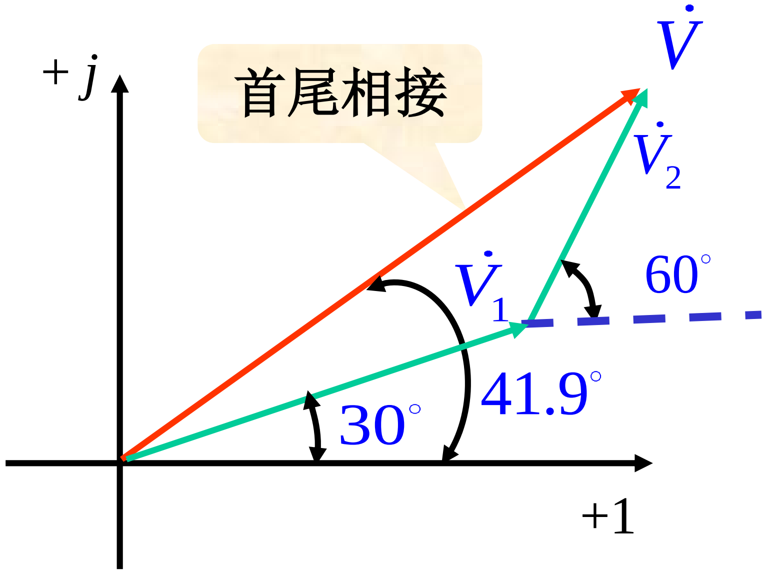


$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 5\angle 53.1^{\circ}\ \text{V}$$

$$v = 5\cos(\omega t + 53.1^{\circ})\ \text{V}$$

例2 求电压和。$\dot{V}_1 = 6\angle 30^\circ$ V　　$\dot{V}_2 = 4\angle 60^\circ$V





2、正弦量的微分，积分运算

$$i \leftrightarrow \dot{I} \qquad\qquad v \leftrightarrow \dot{V}$$

$$\frac{di}{dt} \leftrightarrow j\omega\dot{I} \qquad\qquad \int v dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}\dot{V}$$

证明

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}[\dot{I}e^{j\omega t}]$$
$$= \mathrm{Re}[\frac{d}{dt}(\dot{I}e^{j\omega t})]$$
$$= \mathrm{Re}[(j\omega\ \dot{I})\ e^{j\omega t}]$$

$$\int v dt = \int V\cos(\omega t + \theta)\ dt$$
$$= \mathrm{Re}\int \dot{V}e^{j\omega t} dt$$
$$= \mathrm{Re}\left[\frac{\dot{V}}{j\omega}e^{j\omega t}\right]$$

小结

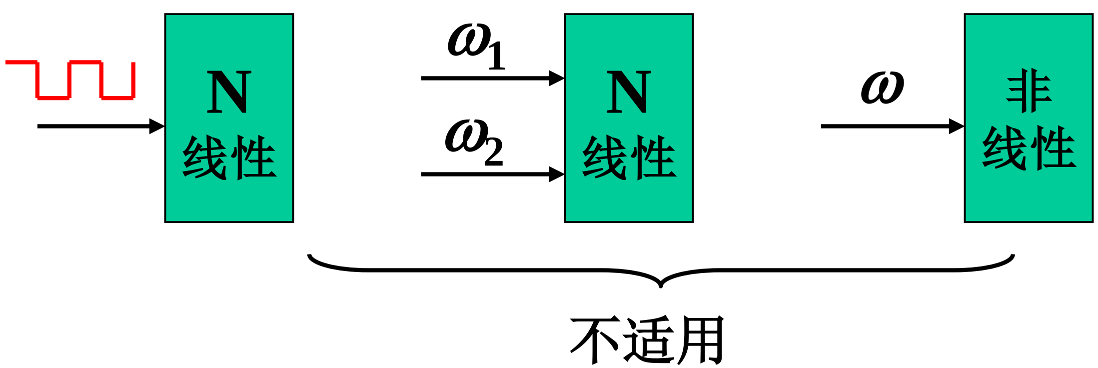
① 正弦量 $\rightleftarrows$ 相量

时域　　　　频域

时域：在变量是时间函数条件下研究网络，以时间为自变量分析电路。

频域：在变量经过适当变换的条件下研究网络，以频率为自变量分析电路。

② 相量法只适用于激励为同频正弦量的线性电路。



3.2.2 电路元件基本物理量的相量描述

一、阻抗（ Impedance ）和导纳（Admittance）

阻抗 $Z=\dfrac{\dot{V}}{\dot{I}}$ 单位：欧姆

注意：阻抗
不是相量

电阻 $Z_R=R$

电感 $Z_L=j\omega L$

电容 $Z_C=\dfrac{1}{j\omega C}$

阻抗也可表示为

$$Z = R + jX$$

其中R为电阻(resistance)，X为电抗(reactance)。

当$X > 0$时，称为感性阻抗或滞后阻抗。

当$X < 0$时，称为容性阻抗或超前阻抗。

阻抗也可表示为极坐标形式

$$Z = |Z| \angle \theta$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

导纳 $Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{V}}$ **单位：西门子（S）**

电阻 $Y_R = \frac{1}{R}$

电感 $Y_L = \frac{1}{j\omega L}$

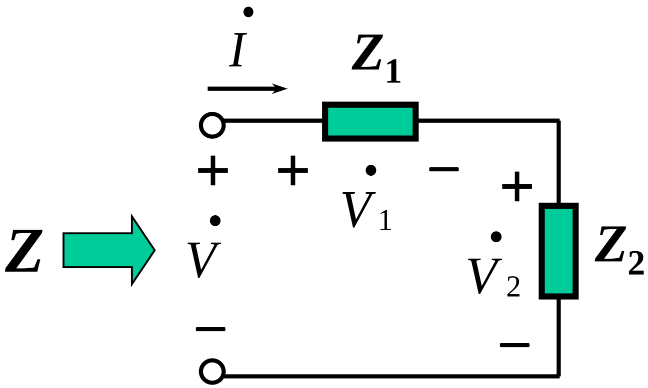
电容 $Z_C = j\omega C$

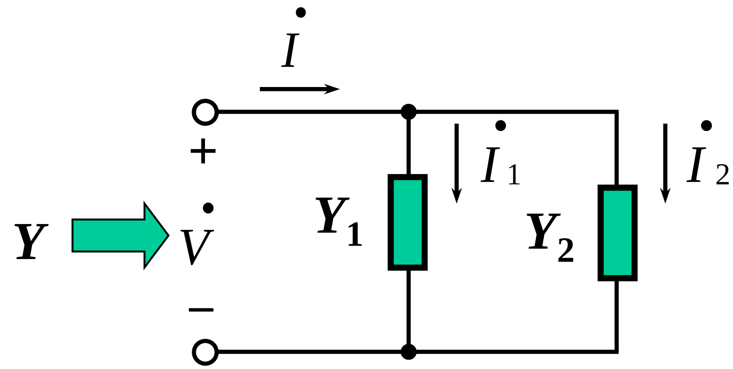
导纳也可表示为

$$Y = G + jB$$

其中G为电导（conductance），B为电纳（Susceptance）。电导和电纳的单位均为西门子。

二、串联、并联和Y-Δ电阻变换





$$\begin{cases} Z = Z_1 + Z_2 \\ \dot{V}_1 = \dfrac{Z_1}{Z}\dot{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = Y_1 + Y_2 \\ \dot{I}_1 = \dfrac{Y_1}{Y}\dot{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ \dot{I}_1 = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\dot{I} \end{cases}$$

同直流电路相似：

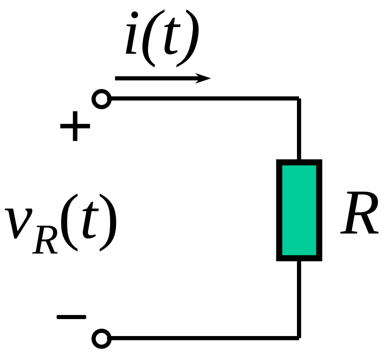
串联： $Z = \sum Z_k,\quad \dot{V}_k = \dfrac{Z_k}{\sum Z_k}\dot{V}$

并联： $Y = \sum Y_k,\quad \dot{I}_k = \dfrac{Y_k}{\sum Y_k}\dot{I}$

Y-Δ电阻变换的公式也类似，可自己列写。

三、电路元件电压电流关系的相量形式

1、电阻



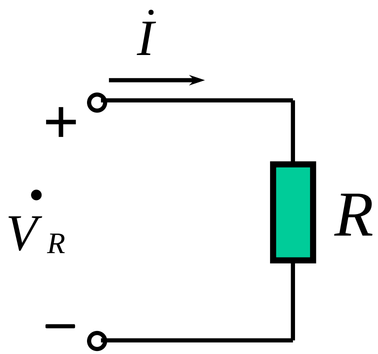
已知 $i_R(t) = I_{m,R}\cos(\omega t + \phi_i)$

则 $v_R(t) = Ri_R(t) = RI_{m,R}\cos(\omega t + \phi_i)$

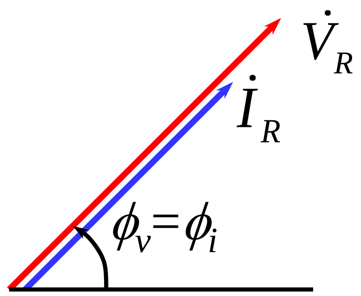
特点：(1) *v*， *i* 同频

(2) 相位关系：*v*, *i* 同相

(3) 有效值关系：$V_R = RI_R$



相量模型



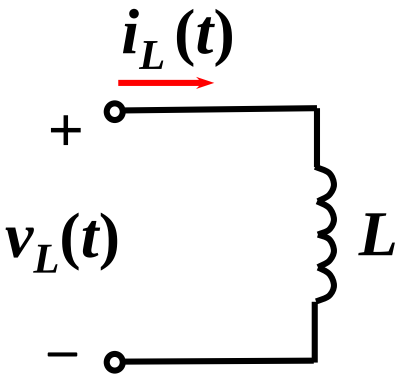
相量图

相量表示：

$$\dot{V}_R = R\dot{I}_R$$

$$\dot{I}_R = G\dot{V}_R$$

2、电感



设 $i_L(t) = I_{m,L}\cos(\omega t + \phi_i)$

则 $v_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{-\omega L I_{m,L}}_{V_{m,L}}\sin(\omega t + \phi_i)$

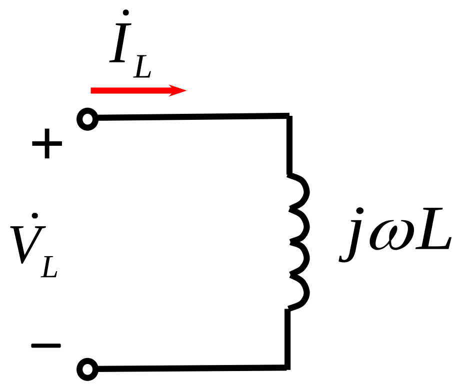
$$= V_{m,L}\cos(\omega t + \phi_i + \frac{\pi}{2})$$

特点： (1) *v*, *i* 同频

(2) 相位关系： $\phi_v = \phi_i + 90^\circ$ **(*v* 超前 *i* 90°)**

(3) 幅值关系： $V_{m,L} = \omega L I_{m,L}$

或 $I_{m,L} = \dfrac{V_{m,L}}{\omega L}$

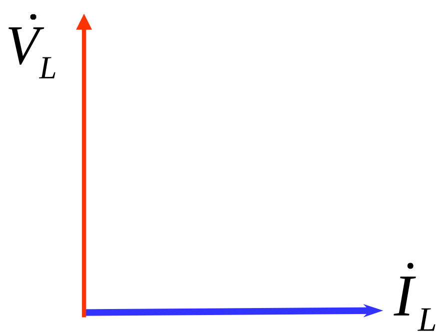


相量表示：

$$\dot{V}_L = V_L \angle \phi_v$$

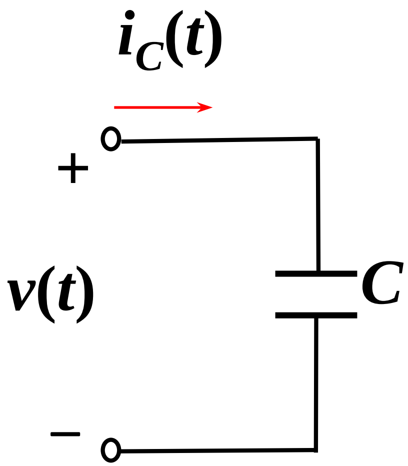
$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}_L}{j\omega L}$$

$$\dot{V}_L = j\omega L \dot{I}_L$$



相量图

3、电容



已知 $v_C(t) = V_{m,C}\cos(\omega t + \phi_v)$

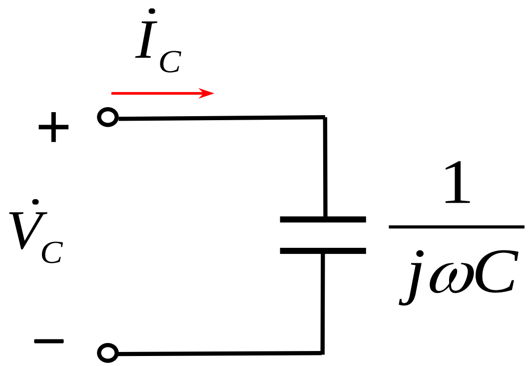
则 $i_C(t) = C\dfrac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega C V_{m,C}\sin(\omega t + \phi_C)$

$$= \omega C V_{m,C}\cos(\omega t + \phi_C + \frac{\pi}{2})$$

特点：(1) *v*, *i* 同频

(2) 相位关系： *i* 超前 *v* 90°

(3) 幅值关系： $I_{m,C} = \omega C v_{m,C}$

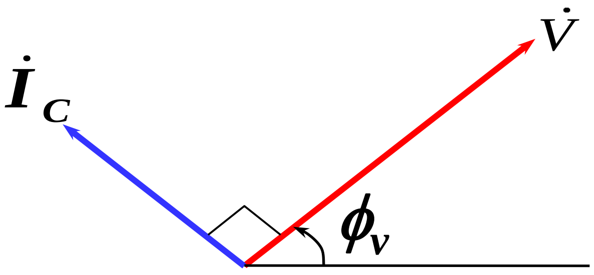


相量形式：

$$\dot{V}_C = V_C \angle \phi_v$$

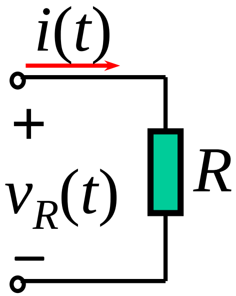
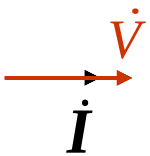
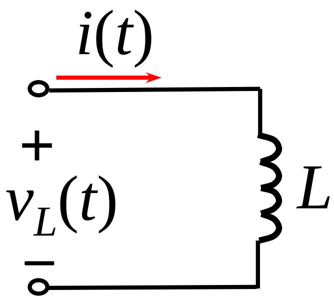
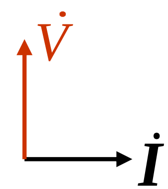
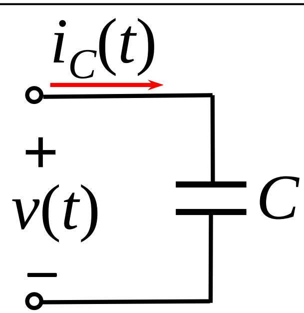
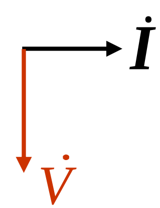
$$\dot{I}_C = j\omega C \dot{V}_C$$

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C$$



相量图

小结：

元件	v, i 关系	相量关系	幅值关系	相位
	$v = Ri$	$\dot{V} = R\dot{I}$	$V_m = RI_m$	
	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$\dot{V} = j\omega L\dot{I}$	$V_m = \omega L I_m$	
	$i = C\dfrac{dv}{dt}$	$\dot{V} = \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}$	$V_m = \dfrac{1}{\omega C} I_m$	

3.2.3 基尔霍夫定律的相量形式

同频率的正弦量加减可以用对应的相量形式来进行计算。因此，在正弦电流电路中，**KCL**和**KVL**可用相应的相量形式表示：

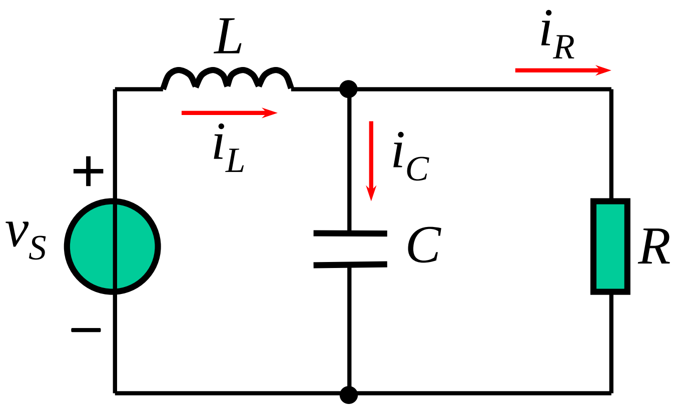
$$\sum i(t)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum \dot{I}=0$$

$$\sum v(t)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum \dot{V}=0$$

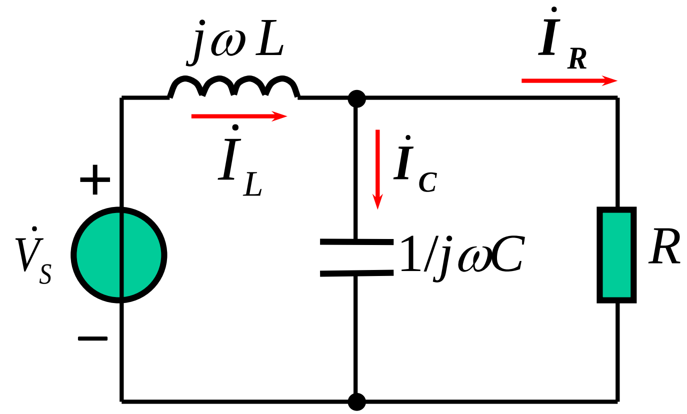
上式表明：

- 流入某一节点的所有正弦电流用相量表示时仍满足**KCL**；
- 而任一回路所有支路正弦电压用相量表示时仍满足**KVL**。

一、电路的相量模型（phasor model ）



时域电路



相量模型

$$
\begin{cases}
i_L = i_C + i_R \\
L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t = v_S \\
R i_R = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
\dot{I}_L = \dot{I}_C + \dot{I}_R \\
j\omega L \dot{I}_L + \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}_C = \dot{V}_S \\
R \dot{I}_R = \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}_C
\end{cases}
$$

时域列写微分方程　　　　相量形式代数方程

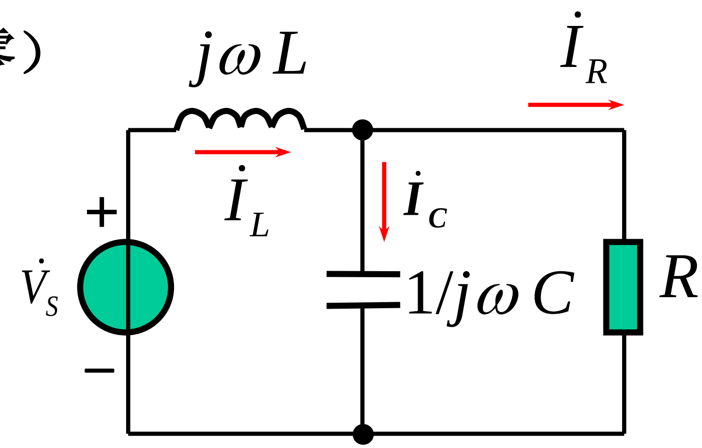
相量模型：电压、电流用相量；元件用复数阻抗或导纳。

二、相量图

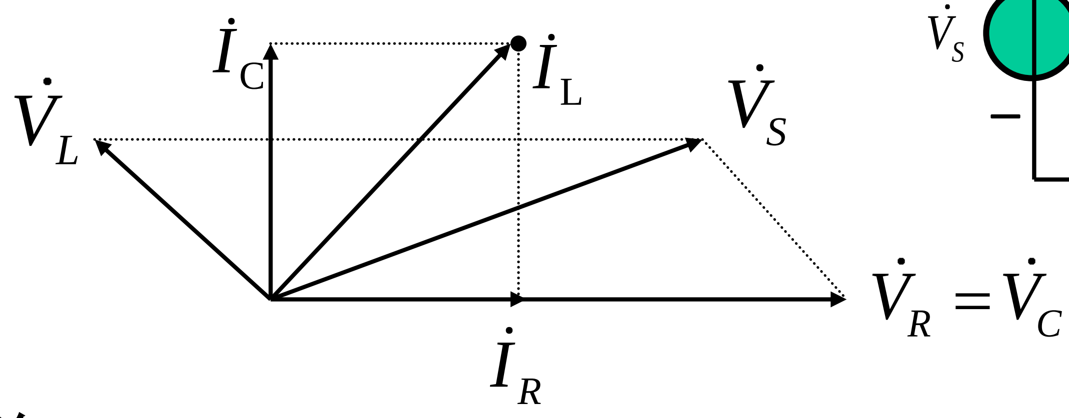
1. 同频率的正弦量才能表示在同一个向量图中

2. 反时针旋转初始相位角

3. 选定一个参考相量（设初相位为零）



例：上例中选 $\dot{V}_R$ 为参考相量



用途：

①定性分析

②利用比例尺定量计算

电阻电路与正弦电流电路相量法分析比较：

电阻电路：

$$\begin{cases} \text{KCL}: & \sum i = 0 \\ \text{KVL}: & \sum v = 0 \\ \text{元件约束关系}: & v = Ri \\ \text{或} & i = Gv \end{cases}$$

正弦电路相量分析：

$$\begin{cases} \text{KCL}: & \sum \dot{I} = 0 \\ \text{KVL}: & \sum \dot{V} = 0 \\ \text{元件约束关系}: & \dot{V} = Z\dot{I} \\ \text{或} & \dot{I} = Y\dot{V} \end{cases}$$

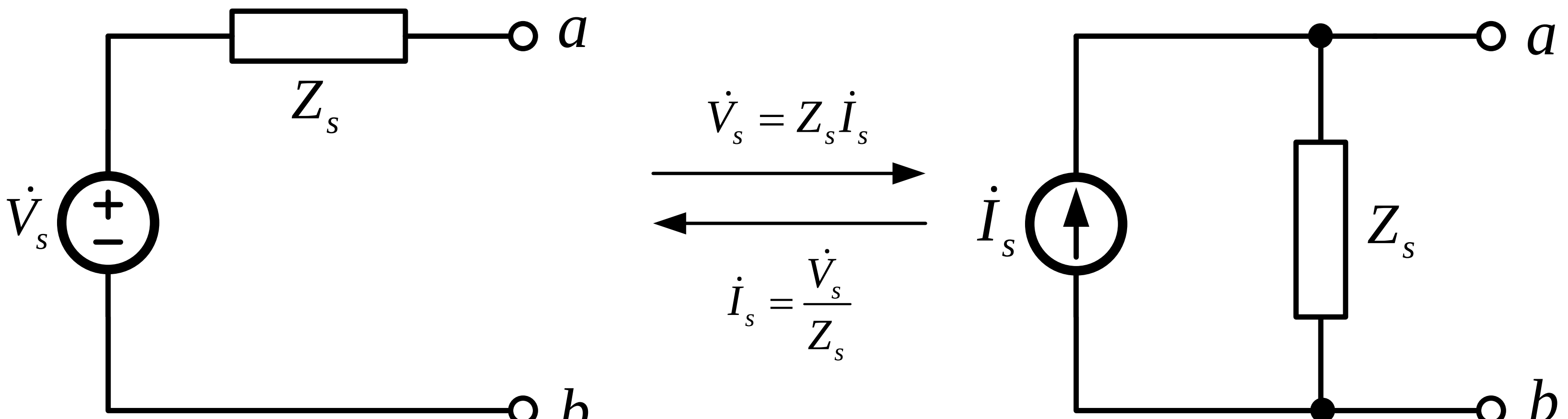
可见，二者依据的电路定律是相似的。只要作出正弦电流电路的相量模型，便可将电阻电路的分析方法推广应用于正弦稳态的相量分析中。

3.2.4 叠加定理、戴维南定理和诺顿定理在相量域的推广

一、相量域的叠加定理

类似于直流电路的证明方法，可验证叠加定理可以推广到相量域。

二、相量域的戴维南定理和诺顿定理

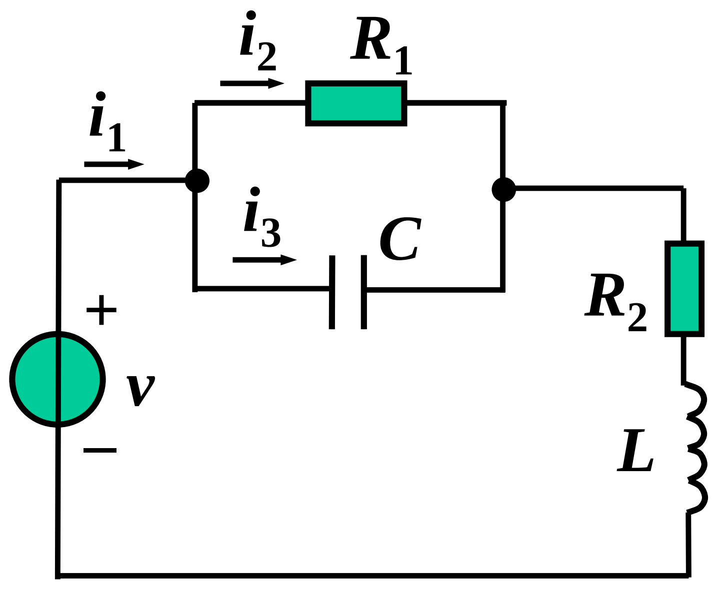


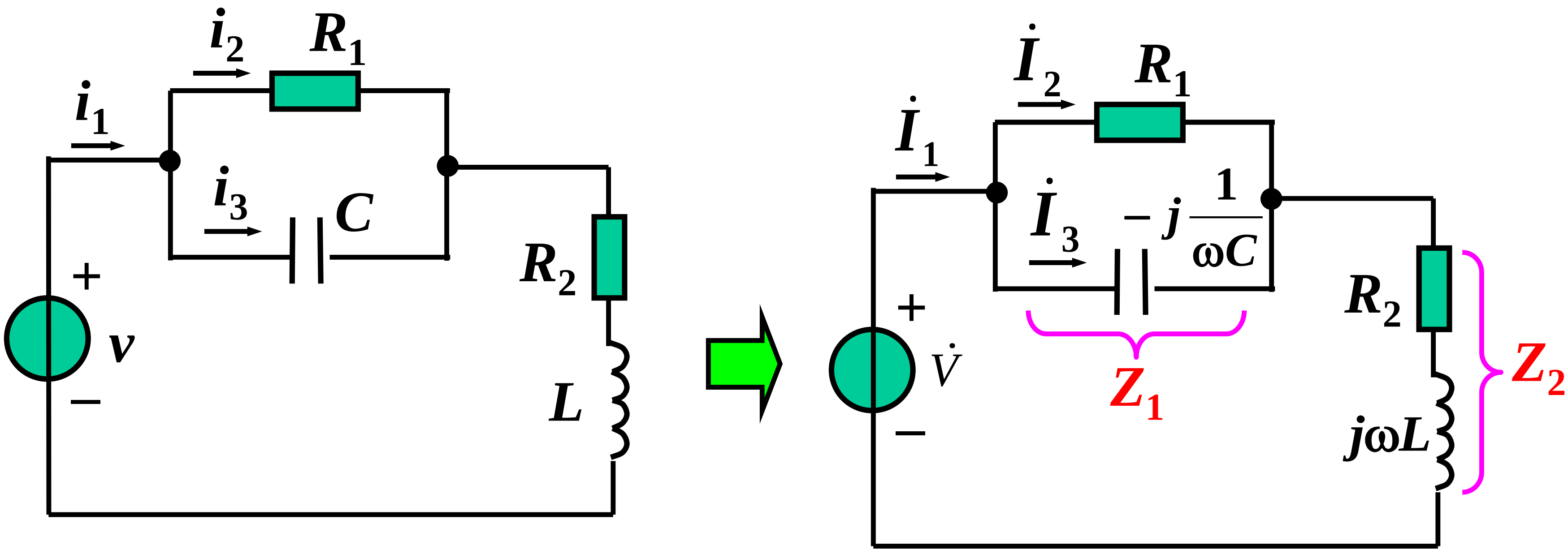
$$\dot{V}_s = Z_s \dot{I}_s \quad \Leftrightarrow \quad \dot{I}_s = \frac{\dot{V}_s}{Z_s}$$

3.2.5 网孔电流法和节点电压法在相量域的推广

网孔电流法的基础是KVL，节点电压法的基础是KCL。既然基尔霍夫定律可推广到相量域，那么网孔电流法和节点电压法同样适用于相量域。

例 1 已知: $R_1 = 1000\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $L = 500\ \text{mH}$, $C = 10\ \mu\text{F}$, $V = 100\ \text{V}$, $\omega = 314\ \text{rad/s}$, 求:各支路电流。



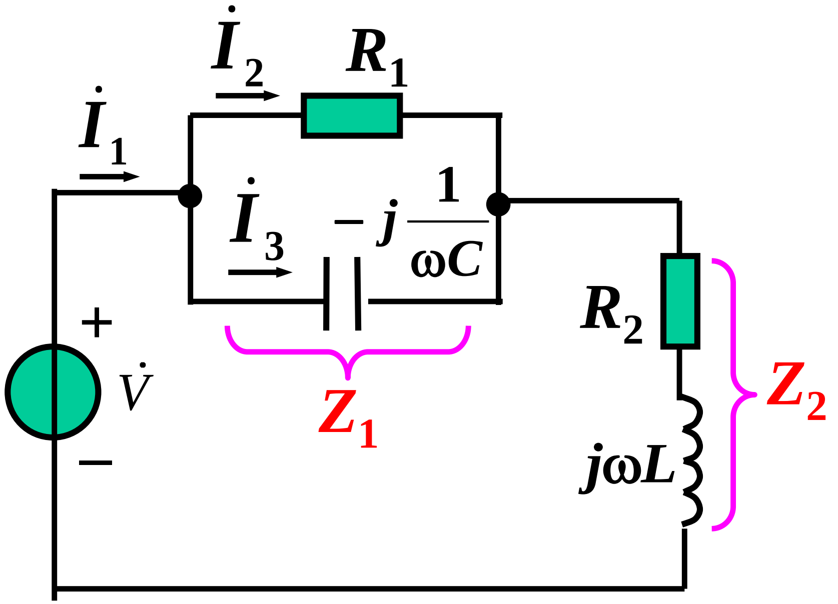


解： 画出电路的相量模型

$$Z_1=\frac{R_1(-j\,1/\omega C)}{R_1-j\,1/\omega C}=\frac{1000\times(-j318.47)}{1000-j318.47}=\frac{318.47\times10^3\angle-90^\circ}{1049.5\angle-17.7^\circ}$$

$$=303.45\angle-72.3^\circ=92.11-j289.13\,\Omega$$

$$Z_2=R_2+j\omega L=10+j157\,\Omega$$



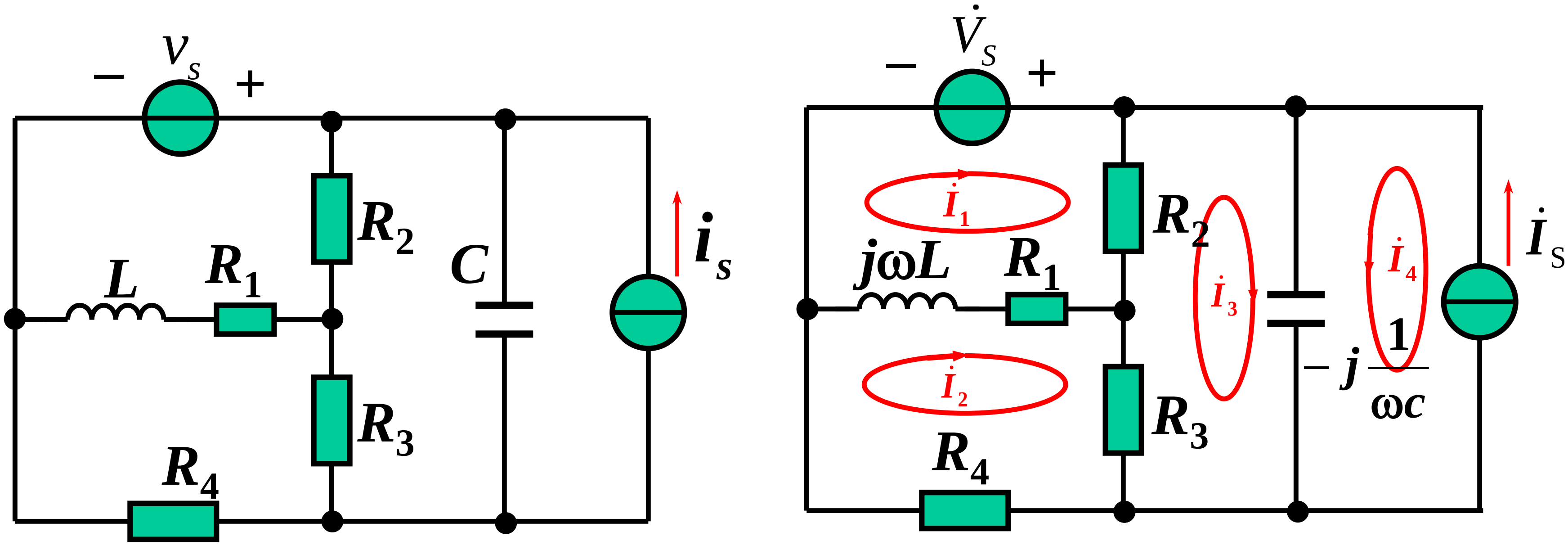
$$
\begin{aligned}
Z &= Z_1 + Z_2 \\
&= 92.11 - j289.13 + 10 + j157 \\
&= 102.11 - j132.13 \\
&= 166.99\angle -52.3^\circ\ \Omega
\end{aligned}
$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{100\angle 0^\circ}{166.99\angle -52.3^\circ} = 0.6\angle 52.3^\circ\ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\,{}^{1}\!/\!_{\omega C}}{R_1 - j\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1 = \frac{-j318.47}{1049.5\angle -17.7^\circ} \times 0.6\angle 52.3^\circ = 0.181\angle -20^\circ\ A$$

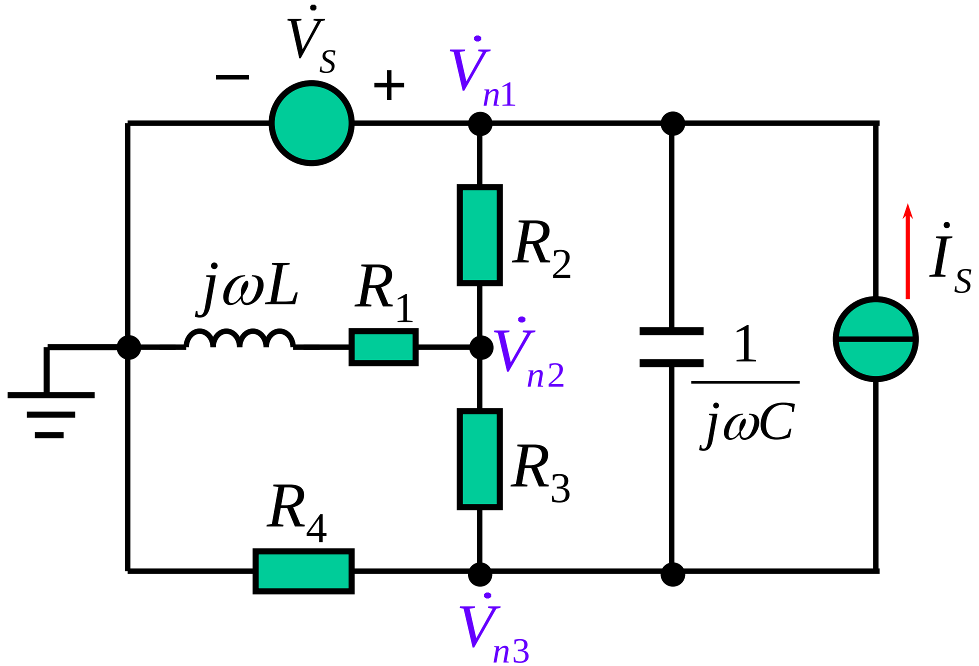
$$\dot{I}_3 = \frac{R_1}{R_1 - j\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1 = \frac{1000}{1049.5\angle -17.7^\circ} \times 0.6\angle 52.3^\circ = 0.57\angle 70^\circ\ A$$

例2　列写电路的网孔电流方程和节点电压方程



解:　网孔法:

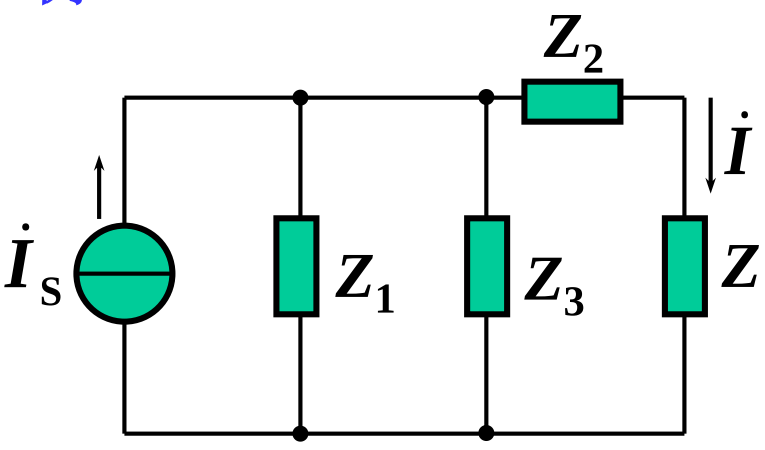
$$
\begin{cases}
(R_1+R_2+j\omega L)\dot{I}_1-(R_1+j\omega L)\dot{I}_2-R_2\dot{I}_3=\dot{V}_S \\
(R_1+R_3+R_4+j\omega L)\dot{I}_2-(R_1+j\omega L)\dot{I}_1-R_3\dot{I}_3=0 \\
(R_2+R_3-j\dfrac{1}{\omega C})\dot{I}_3-R_2\dot{I}_1-R_3\dot{I}_2-j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}_4=0 \\
\dot{I}_4=\dot{I}_S
\end{cases}
$$



节点法:

$$\begin{cases} \dot{V}_{n1} = \dot{V}_S \\ -\dfrac{1}{R_2}\dot{V}_{n1} + \left(\dfrac{1}{R_1 + j\omega L} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right)\dot{V}_{n2} - \dfrac{1}{R_3}\dot{V}_{n3} = 0 \\ -j\omega C\dot{V}_{n1} - \dfrac{1}{R_3}\dot{V}_{n2} + \left(\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + j\omega C\right)\dot{V}_{n3} = -\dot{I}_S \end{cases}$$

例3

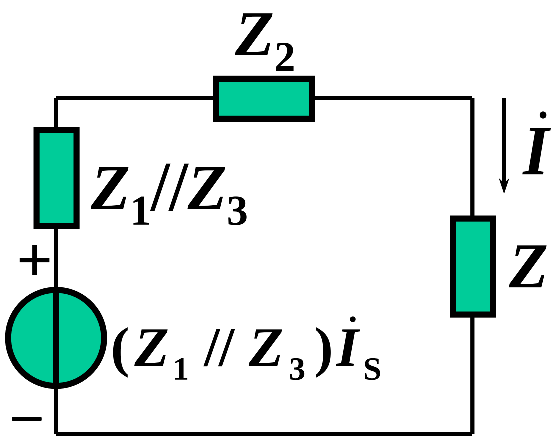


已知：$\dot{I}_S = 4\angle 90^{\circ}\ \text{A}$， $Z_1 = Z_2 = -j30\ \Omega$

$Z_3 = 30\ \Omega$， $Z = 45\ \Omega$

求：$\dot{I}$.

解：



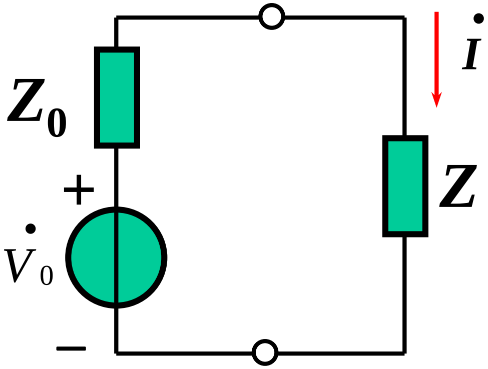
法一：电源变换

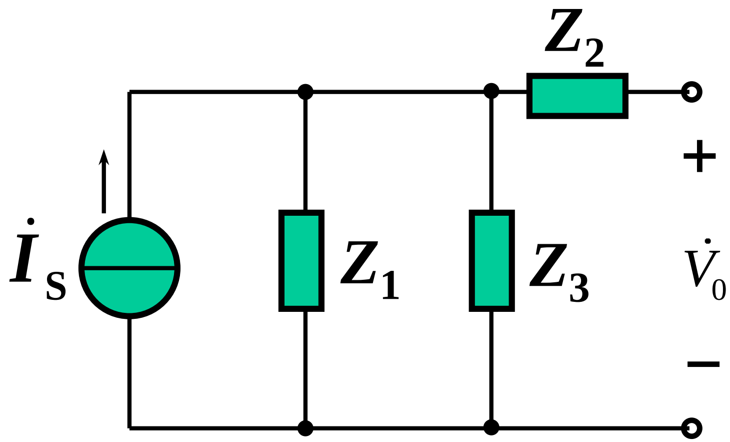
$$Z_1//Z_3 = \frac{30(-j30)}{30-j30} = 15 - j15\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_S(Z_1//Z_3)}{Z_1//Z_3+Z_2+Z} = \frac{j4(15-j15)}{15-j15-j30+45}$$

$$= \frac{5.657\angle 45^{\circ}}{5\angle -36.9^{\circ}} = 1.13\angle 81.9^{\circ}\ \text{A}$$

法二：戴维南等效变换





求开路电压：

$$\dot{V}_0 = \dot{I}_S (Z_1 // Z_3)$$

$$= 84.86\angle 45^{\circ}\ \mathrm{V}$$

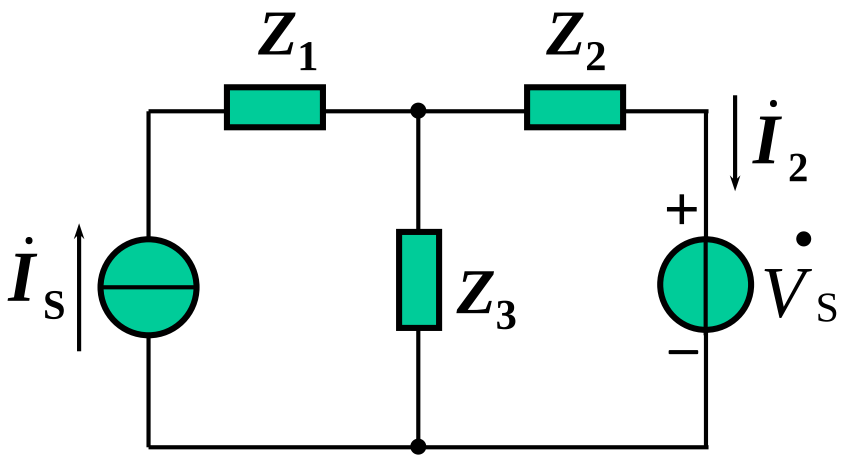
求等效电阻：

$$Z_0 = Z_1 // Z_3 + Z_2$$

$$= 15 - j45\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_0}{Z_0 + Z} = \frac{84.86\angle 45^{\circ}}{15 - j45 + 45} = 1.13\angle 81.9^{\circ}\ \mathrm{A}$$

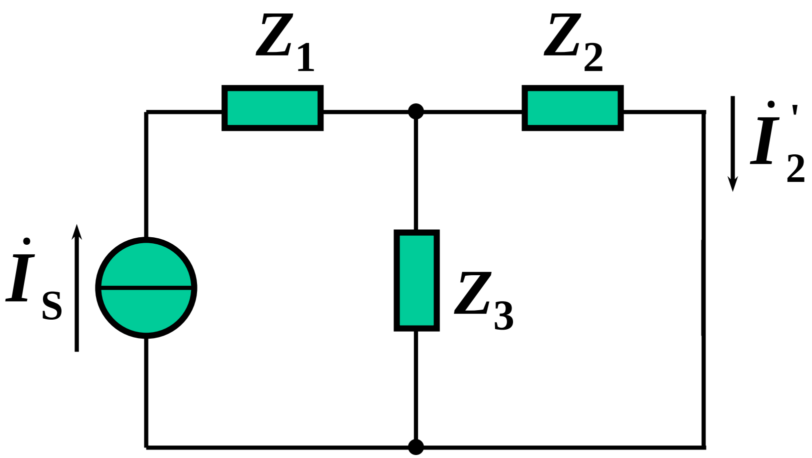
例4 用叠加定理计算电流 $\dot{I}_2$



已知: $\dot{V}_S = 100\angle 45^o\,\mathrm{V}$, $\dot{I}_S = 4\angle 0^o\,\mathrm{A}$,

$Z_1 = Z_3 = 50\angle 30^o\,\Omega$, $Z_3 = 50\angle -30^o\,\Omega$.

解: (1) $\dot{I}_S$ 单独作用($\dot{V}_S$ 短路):

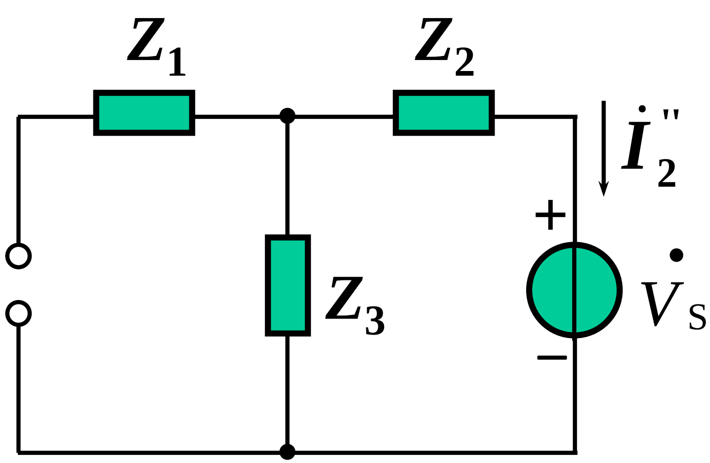


$$\dot{I}_2' = \dot{I}_S \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$= 4\angle 0^{\circ} \times \frac{50\angle 30^{\circ}}{50\angle -30^{\circ} + 50\angle 30^{\circ}}$$

$$= \frac{200\angle 30^{\circ}}{50\sqrt{3}} = 2.31\angle 30^{\circ}\,\mathrm{A}$$

(2) $\dot{V}_S$ 单独作用($\dot{I}_S$ 开路):



$$\dot{I}_2'' = -\frac{\dot{V}_S}{Z_2 + Z_3}$$

$$= \frac{-100\angle 45^{\circ}}{50\sqrt{3}} = 1.155\angle -135^{\circ}\,\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2''$$

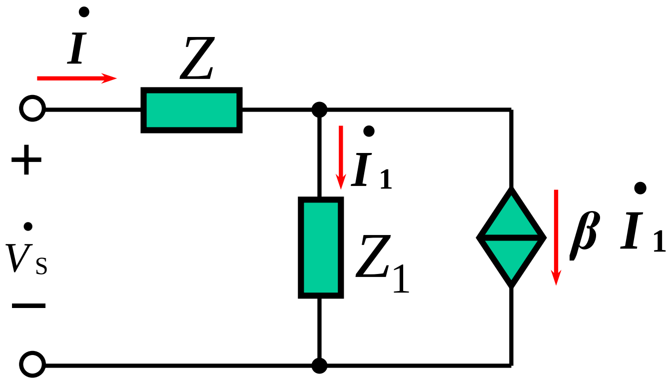
$$= 2.31\angle 30^{\circ} + 1.155\angle -135^{\circ}$$

$$= (2 + \mathrm{j}1.155) + (-0.817 - \mathrm{j}0.817)$$

$$= 1.183 - \mathrm{j}0.338$$

$$= 1.23\angle -15.9^{\circ}\,\mathrm{A}$$

例5　已知：$Z=10+j50\ \Omega$，$Z_1=400+j1000\ \Omega$。



问：β 等于多少时，$\dot{I}_1$和$\dot{V}_S$相位差90°？

分析：找出 $\dot{I}_1$和$\dot{V}_S$关系：$\dot{V}_S=Z_{转}\dot{I}_1$，

$Z_{转}$实部为零，相位差为90°。

解：

$$\dot{V}_S=Z\dot{I}+Z_1\dot{I}_1=Z(1+\beta)\dot{I}_1+Z_1\dot{I}_1$$

$$\frac{\dot{V}_S}{\dot{I}_1}=(1+\beta)Z+Z_1=410+10\beta+j(50+50\beta+1000)$$

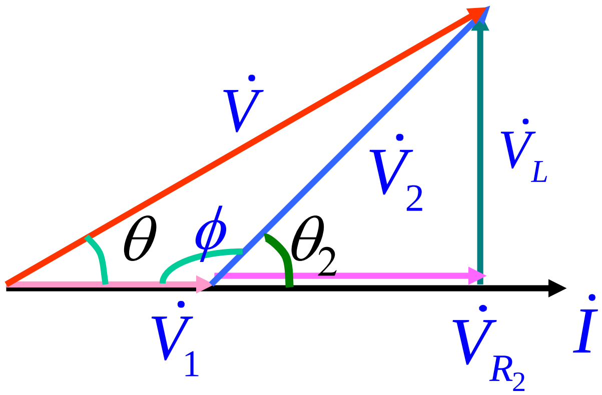
令　$410+10\beta=0$，$\beta=-41$

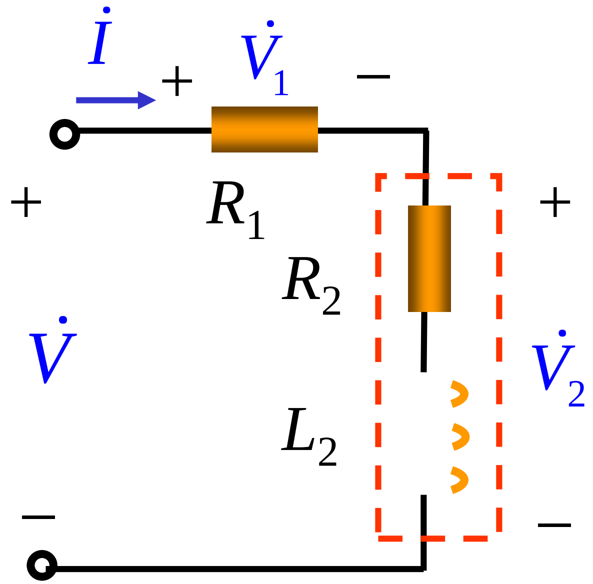
$$\frac{\dot{V}_S}{\dot{I}_1}=-j1000$$　故电流领先电压 90°。

例6 已知：$V = 115$ V, $V_1 = 55.4$ V , $V_2 = 80$ V, $R_1 = 32\ \Omega$, $f = 50$ Hz。 求：线圈的电阻 R_2 和电感 L_2 。

解 方法一、 画相量图分析。

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \dot{V}_{R_2} + \dot{V}_L$$





$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\phi$$

$$\cos\phi = -0.4237 \quad \therefore \phi \approx 115.1^\circ$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \phi = 64.9^\circ$$

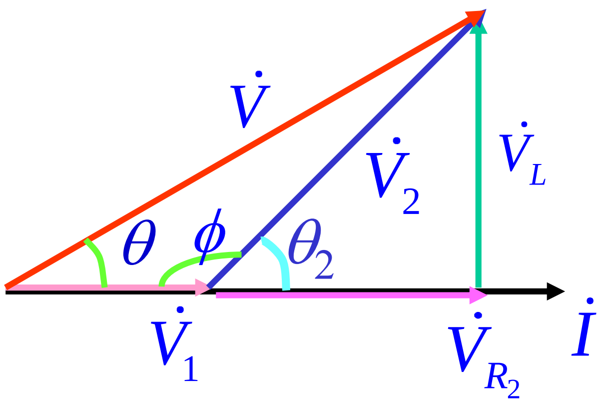
$$I = V_1 / R_1 = 55.4 / 32 = 1.73\text{A}$$

$$|Z_2| = V_2 / I = 80 / 1.73 \approx 46.2\ \Omega$$

$$R_2 = |Z_2| \cos\theta_2 \approx 19.6\ \Omega$$

$$X_2 = |Z_2| \sin\theta_2 \approx 41.8\ \Omega$$

$$L = X_2 / (2\pi f) \approx 0.133\ \text{H}$$



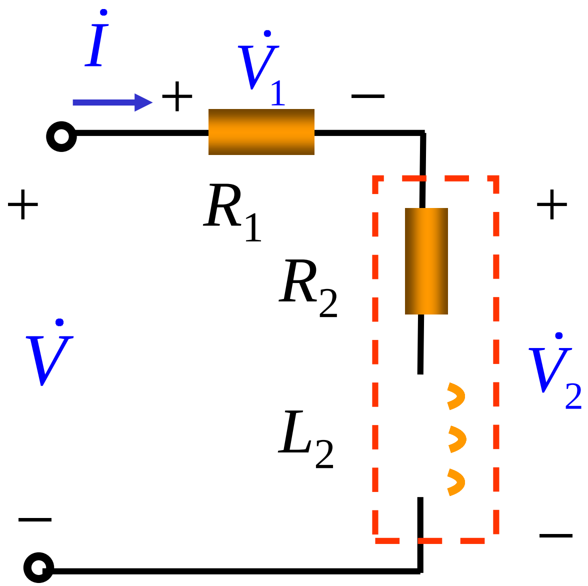
方法二

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 55.4\angle 0^0 + 80\angle\theta_2 = 115\angle\theta$$

$$\begin{cases} 55.4 + 80\cos\theta_2 = 115\cos\theta \\ 80\sin\theta_2 = 115\sin\theta \end{cases}$$

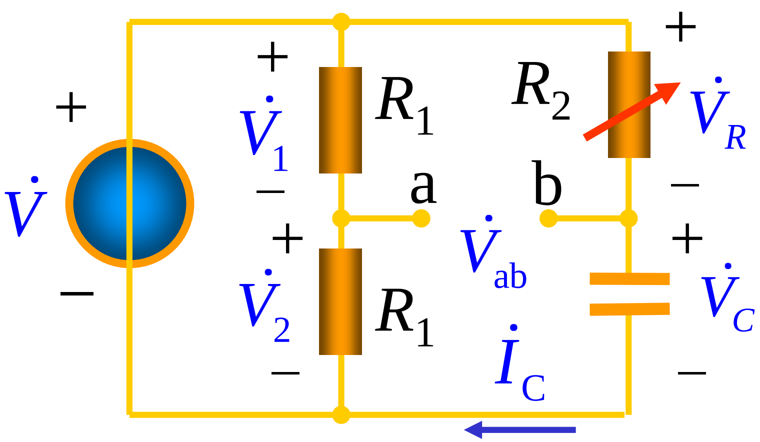
$$\Rightarrow \cos\theta_2 = 0.424$$

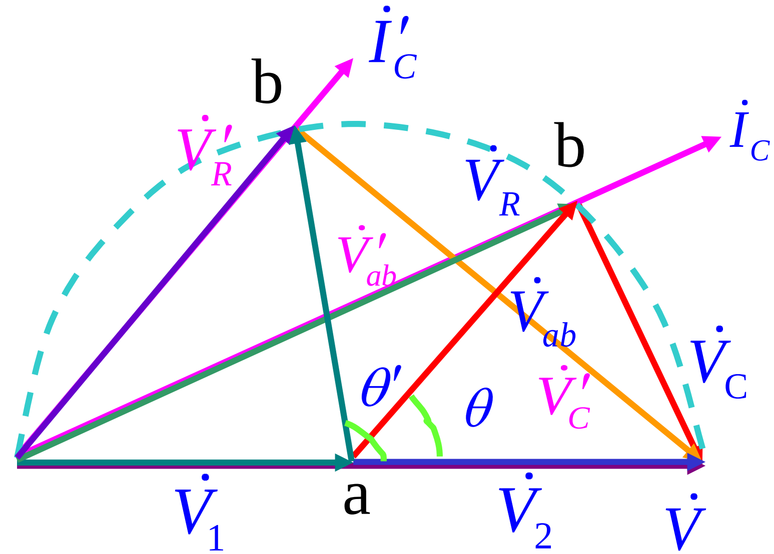
$$\theta_2 \approx 64.9^0$$



其余步骤同解法一。

例7　移相桥电路。当 R_2 由 0→∞ 时，$\dot{V}_{ab}$ 如何变化？





解:　用相量图分析

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2\,,\quad \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \frac{\dot{V}}{2}$$

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C \qquad \dot{V}_{ab} = \dot{V}_R - \dot{V}_1$$

当 $R_2=0$，$\theta=180°$；

当 $R_2\to\infty$，$\theta=0°$。

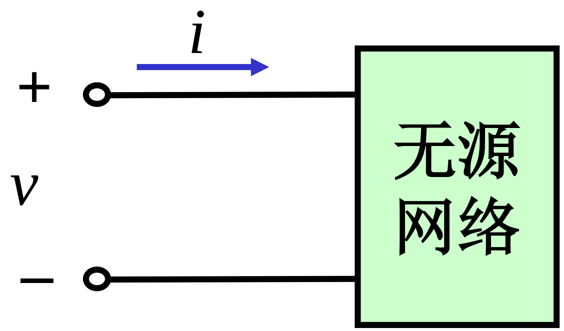
由相量图可知，当 R_2 改变，$\dot{V}_{ab} = \frac{\dot{V}}{2}$ 不变，相位改变，

θ 为移相角，移相范围 $180^{\circ} \sim 0^{\circ}$

3.3 交流功率分析

3.3.1 重要物理量

一、瞬时功率 *p*（Instantaneous power）



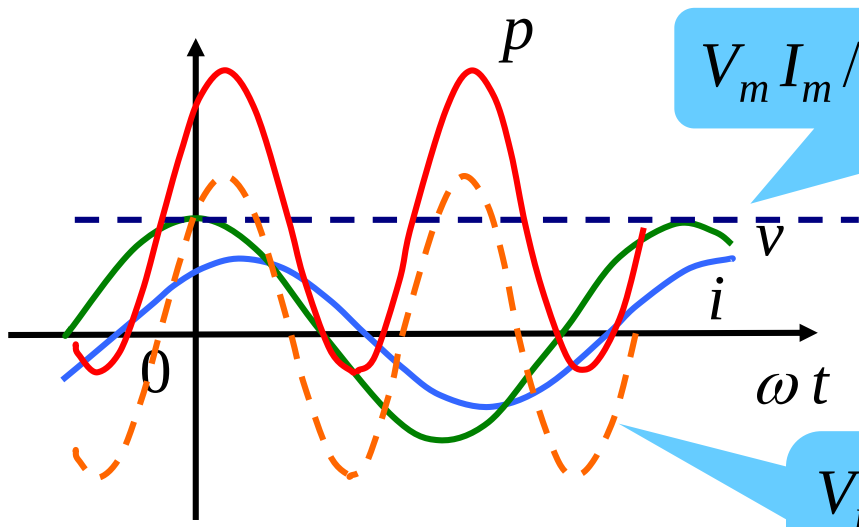
$$v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta_v)$$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta_i)$$

$$p(t)=vi=V_m\cos(\omega t+\theta_v)\cdot I_m\cos(\omega t+\theta_i)$$

$$=\frac{1}{2}V_mI_m\left[\cos(\theta_v-\theta_i)+\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)\right]$$

$$p(t) = \frac{1}{2}V_m I_m\left[\cos\left(\theta_v-\theta_i\right)+\cos\left(2\omega t+\theta_v+\theta_i\right)\right]$$



$V_m I_m/2*\cos(\theta_v-\theta_i)$ 恒定分量。

$V_m I_m/2*\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)$ 为正弦分量。

- p 有时为正，有时为负；
- $p>0$，电路吸收功率；
- $p<0$，电路发出功率；

二、平均功率（Average power）或有功功率（Active power）*P*

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}V_mI_m\left[\cos\left(\theta_v-\theta_i\right)+\cos\left(2\omega t+\theta_v+\theta_i\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}V_mI_m\cos\left(\theta_v-\theta_i\right)$$

$$\boxed{P=\frac{1}{2}V_mI_m\cos\left(\theta_v-\theta_i\right)=V_{rms}I_{rms}\cos\left(\theta_v-\theta_i\right)}$$

P 的单位：W（瓦）

$\theta_v-\theta_i$：功率因数角

$\cos(\theta_v-\theta_i)$：功率因数（Power factor）

$$\cos(\theta_v - \theta_i) \begin{cases} 1, & \text{纯电阻} \\ 0, & \text{纯电抗} \end{cases}$$

一般地， $0 \le \left|\cos(\theta_v - \theta_i)\right| \le 1$

$X > 0,\ \theta_v - \theta_i > 0$，感性；$X < 0,\ \theta_v - \theta_i < 0$，容性。

结论

平均功率实际上是电阻消耗的功率，亦称为有功功率。表示电路实际消耗的功率，它不仅与电压电流有效值有关，而且与 $\cos(\theta_v - \theta_i)$ 有关，这是交流和直流的很大区别，主要由于电压、电流存在相位差。

三、无功功率 *Q*（Reactive power）

$$Q \overset{\text{def}}{=} V_{rms} I_{rms} \sin\left(\theta_v - \theta_i\right)$$

单位：var（乏）。

- $Q > 0$，表示网络吸收无功功率；
- $Q < 0$，表示网络发出无功功率。
- Q 的大小反映网络与外电路交换功率的速率，是由储能元件L、C的性质决定的。

四、视在功率 *S*（Apparent power）

$$S \overset{\text{def}}{=} V_{rms} I_{rms}$$

单位: VA (伏安)

电气设备的容量

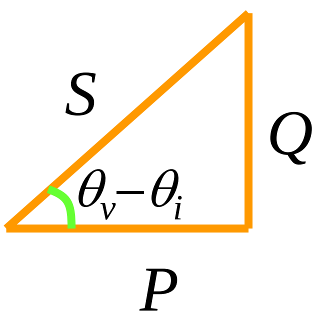
有功，无功，视在功率的关系：

有功功率： $P = V_{rms}I_{rms}\cos(\theta_v-\theta_i)$ 单位：W

无功功率： $Q = V_{rms}I_{rms}\sin(\theta_v-\theta_i)$ 单位：var

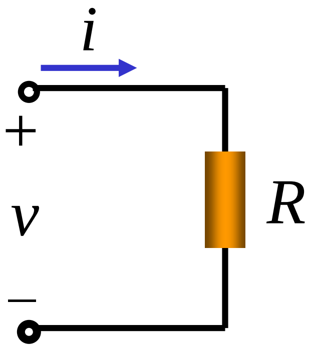
视在功率： $S = V_{rms}I_{rms}$ 单位：VA

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}$$



功率三角形

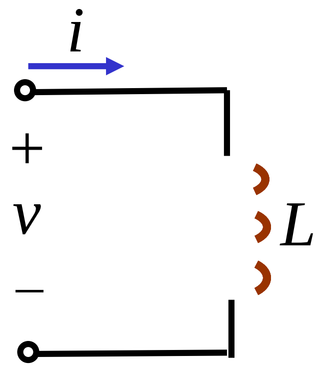
五、*R*、*L*、*C*元件的有功功率和无功功率



$$P_R = V_{rms}I_{rms}\cos(\theta_v-\theta_i)=V_{rms}I_{rms}\cos 0^\circ$$

$$=V_{rms}I_{rms}=I_{rms}^{\ 2}R_{rms}=V_{rms}^{\ 2}/R$$

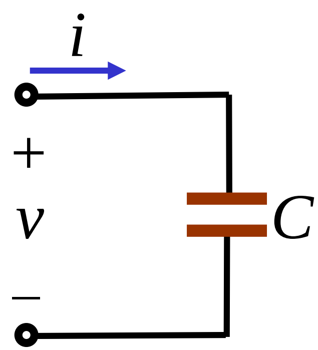
$$Q_R = V_{rms}I_{rms}\sin(\theta_v-\theta_i)=V_{rms}I_{rms}\sin 0^\circ = 0$$



$$P_L = V_{rms}I_{rms}\cos(\theta_v-\theta_i) =V_{rms}I_{rms}\cos 90^\circ =0$$

$$Q_L = V_{rms}I_{rms}\sin(\theta_v-\theta_i) =V_{rms}I_{rms}\sin 90^\circ$$

$$= V_{rms}I_{rms}=I_{rms}^{\ 2}X_L$$

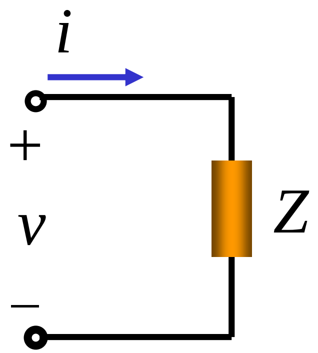


$$P_C = V_{rms}I_{rms}\cos(\theta_v-\theta_i) =V_{rms}I_{rms}\cos(-90^\circ)=0$$

$$Q_C = V_{rms}I_{rms}\sin(\theta_v-\theta_i) =V_{rms}I_{rms}\sin(-90^\circ)$$

$$= -V_{rms}I_{rms}= I_{rms}^{\ 2}X_C$$

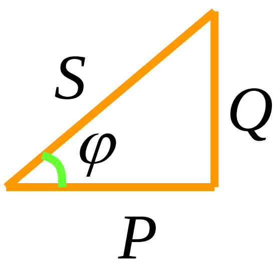
六、任意阻抗的功率计算



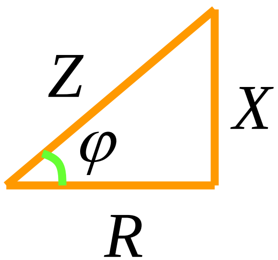
$$P_Z = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) = I_{rms}{}^2 |Z| \cos(\theta_v - \theta_i) = I_{rms}{}^2 R$$

$$Q_Z = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i) = I_{rms}{}^2 |Z| \sin(\theta_v - \theta_i) = I_{rms}{}^2 X$$

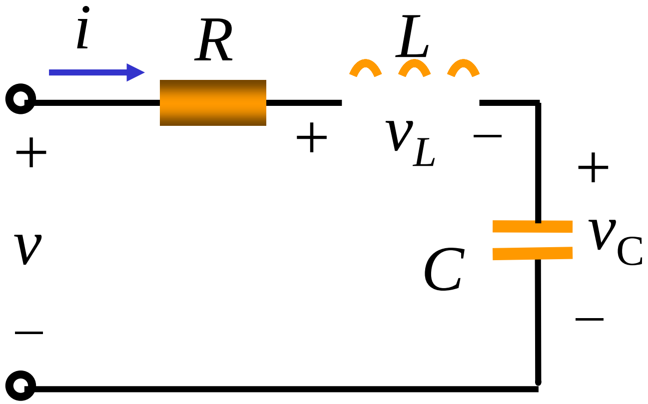
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = I_{rms}^2 \sqrt{R^2 + X^2} = I_{rms}^2 |Z|$$

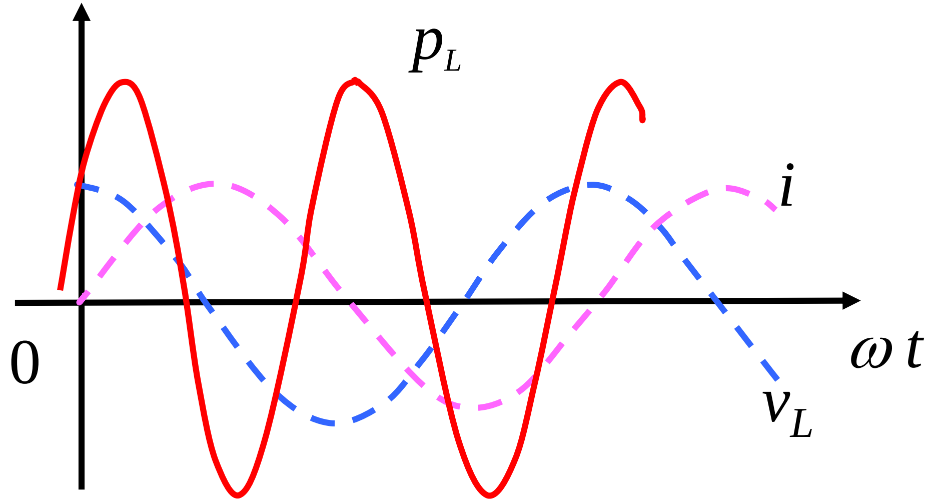


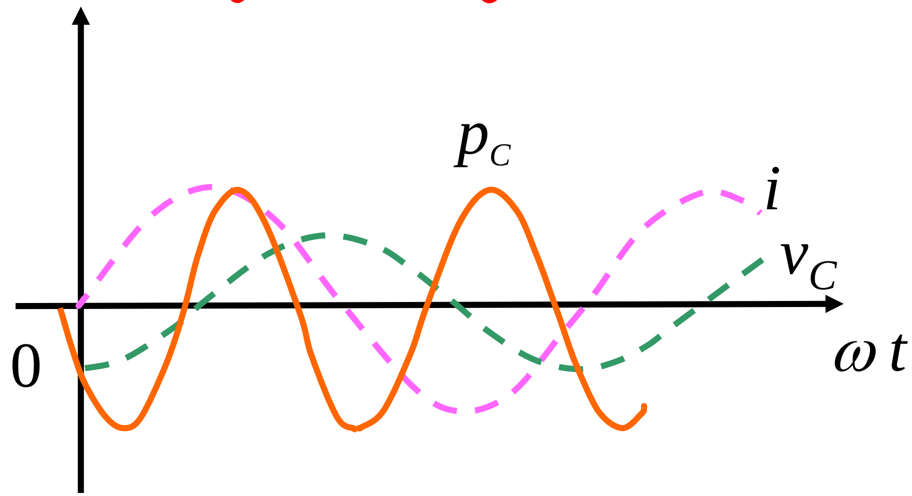
相似三角形



电感、电容的无功补偿作用







L 发出功率时，C 刚好吸收功率，与外电路交换功率为 p_L+p_C。L、C 的无功具有互相补偿的作用。

无功的物理意义:

反映电源和负载之间交换能量的速率。

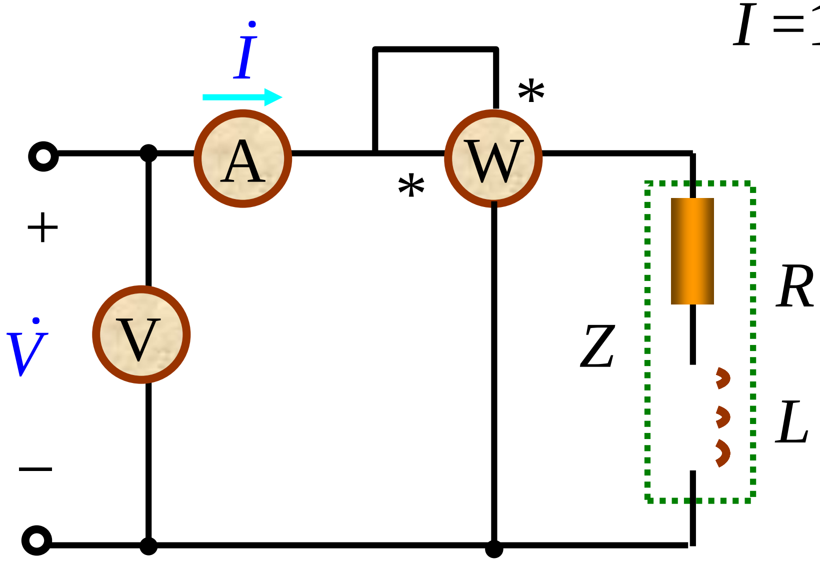
以纯电感为例

$$Q_L = I_{rms}^2 X_L = I_{rms}^2 \omega L = \omega \cdot \frac{1}{2} L \left(\sqrt{2} I_{rms}\right)^2$$

$$= \omega \cdot \frac{1}{2} L I_{\mathrm{m}}{}^2$$

$$= \frac{2\pi}{T} \cdot W_{\max}$$

例1 三表法测线圈参数。 已知：$f = 50$ Hz，且测得$V = 50$ V，$I = 1$ A，$P = 30$ W。



解法 1

$$S = VI = 50 \times 1 = 50\text{VA}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40\ \text{var}$$

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{30}{1} = 30\ \Omega$$

$$X_L = \frac{Q}{I^2} = \frac{40}{1} = 40\ \Omega$$

$$\Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{40}{100\pi} = 0.127\ \text{H}$$

解法 2 $P = I^2 R$ $\therefore R = \dfrac{P}{I^2} = \dfrac{30}{1^2} = 30\ \Omega$

$|Z| = \dfrac{V}{I} = \dfrac{50}{1} = 50\ \Omega$ 又 $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\omega}\sqrt{|Z|^2 - R^2} = \frac{1}{314}\sqrt{50^2 - 30^2} = \frac{40}{314} = 0.127\ \mathrm{H}$$

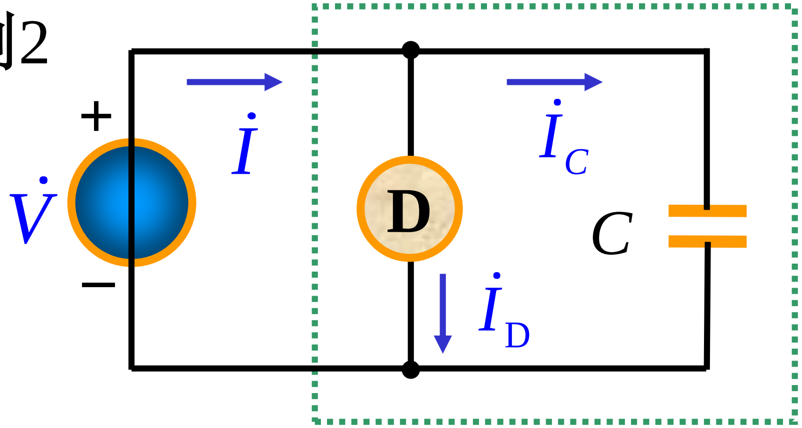
解法 3 $P = VI\cos\phi$ $\Rightarrow$ $\cos\phi = \dfrac{P}{VI} = \dfrac{30}{50\times 1} = 0.6$

$$|Z| = \frac{V}{I} = \frac{50}{1} = 50\ \Omega$$

$$R = |Z|\cos\phi = 50\times 0.6 = 30\ \Omega$$

$$X_L = |Z|\sin\phi = 50\times 0.8 = 40\ \Omega$$

例2



已知：电动机 P_D=1000W，V = 220 V，f =50 Hz， C =30 μF，$\cos\varphi_D$ = 0.8，求：负载电路的功率因数。（$\varphi_D= \theta_v-\theta_i$）

解

$$I_D = \frac{P_D}{V\cos\varphi_D} = \frac{1000}{220\times0.8} \approx 5.68 \text{ A}$$

$$\because \quad \cos\varphi_D = 0.8\ (\text{感性}), \quad \therefore\ \varphi_D \approx 36.8^\circ$$

设 $\dot{V} = 220\angle 0^\circ$

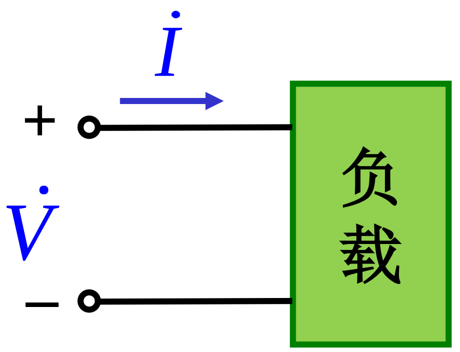
$$\dot{I}_D = 5.68\angle -36.8^\circ\ , \quad \dot{I}_C = 220\angle 0^\circ \cdot \mathrm{j}\omega C = \mathrm{j}2.08$$

$$\dot{I} = \dot{I}_D + \dot{I}_C = 4.54 - \mathrm{j}1.33 = 4.73\angle -16.3^\circ$$

$$\cos\varphi = \cos[0^\circ - (-16.3^\circ)] \approx 0.96$$

七、复功率（Complex power）

为了用相量 $\dot{V}$ 和 $\dot{I}$ 来计算功率，引入“复功率”



定义：$\dot{S} = \dot{V}_{rms}\dot{I}_{rms}^{\ *}$ 单位 VA

$$\dot{S} = V_{rms}I_{rms}\angle(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{rms}I_{rms}\cos(\theta_v - \theta_i) + \mathrm{j}V_{rms}I_{rms}\sin(\theta_v - \theta_i)$$

也可表示为：

$$= P + \mathrm{j}Q$$

$$\dot{S} = \dot{V}_{rms}\dot{I}_{rms}^{\ *} = Z\dot{I}_{rms}\cdot\dot{I}_{rms}^{\ *} = ZI_{rms}^{2} = (R + \mathrm{j}X)I_{rms}^{2} = RI_{rms}^{2} + \mathrm{j}XI_{rms}^{2}$$

or $\dot{S} = \dot{V}_{rms}\dot{I}_{rms}^{\ *} = \dot{V}_{rms}(\dot{V}_{rms}Y)^{*} = \dot{V}_{rms}\cdot\dot{V}_{rms}^{\ *}Y^{*} = V_{rms}^{2}Y^{*}$

结论

① $\dot{S}$是复数，而不是相量，它不对应任意正弦量；

② $\dot{S}$把 P、Q、S 联系在一起，它的实部是平均功率，虚部是无功功率，模是视在功率；

3.3.2 交流功率守恒（Conservation of AC power）

KVL + KCL

↓

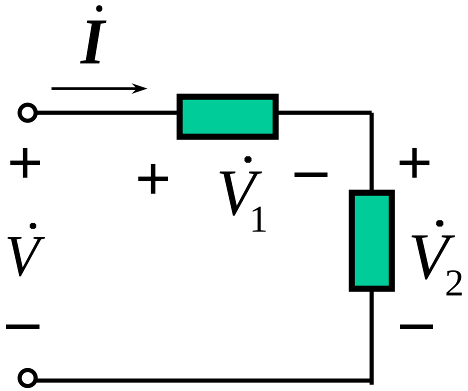
复功率守恒定理：在正弦稳态下，任一电路的所有支路吸收的复功率之和为零。即

$$\sum_{k=1}^{b} \dot{S}_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{b} \dot{V}_k \dot{I}_k^* = 0$$

$$\sum_{k=1}^{b}(P_k + \mathrm{j}Q_k) = 0 \qquad \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{b} P_k = 0 & \text{有功守恒} \\ \sum\limits_{k=1}^{b} Q_k = 0 & \text{无功守恒} \end{cases}$$

注意

*** 复功率守恒，视在功率不守恒.**



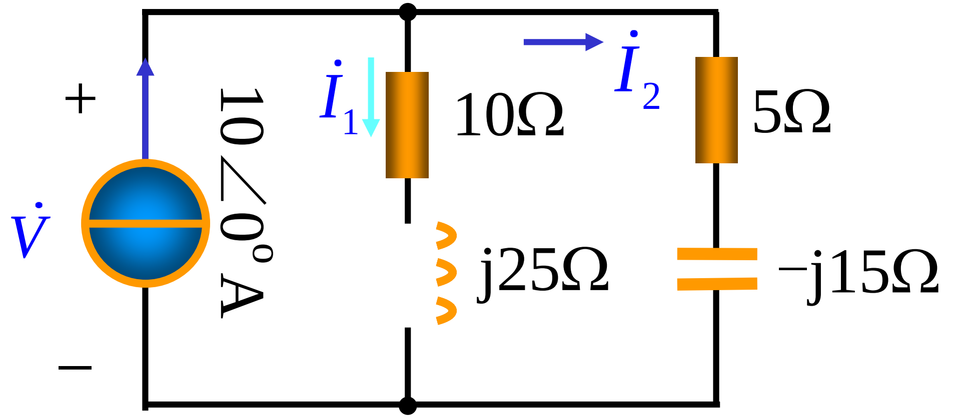
$$\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^* = (\dot{V}_1 + \dot{V}_2)\dot{I}^*$$

$$= \dot{V}_1\dot{I}^* + \dot{V}_2\dot{I}^* = \dot{S}_1 + \dot{S}_2$$

$$\because V \neq V_1 + V_2$$

$$\therefore S \neq S_1 + S_2$$

例　求电路各支路的复功率



解1

$$Z=(10+j25)//(5-j15)$$

$$\dot{V}=10\angle 0^{\circ}\times Z\ \approx 236\angle(-37.1^{\circ})\ \text{V}$$

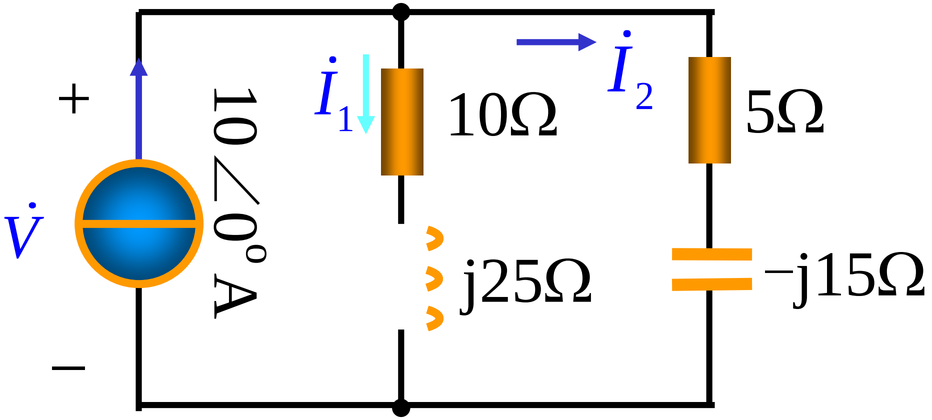
$$\dot{S}_{发}=236\angle(-37.1^{\circ})\times 10\angle 0^{\circ}\approx 1882-j1424\ \text{VA}$$

$$\dot{S}_{1吸}=V^2Y_1^*=236^2\left(\frac{1}{10+j25}\right)^*\approx 768+j1920\quad \text{VA}$$

$$\dot{S}_{2吸}=V^2Y_2^*\approx 1113-j3345\ \text{VA}$$

$$\dot{S}_{1吸}+\dot{S}_{2吸}=\dot{S}_{发}$$

解2



$$\dot{I}_1 = 10\angle 0^{o} \times \frac{5-\text{j}15}{10+\text{j}25+5-\text{j}15}$$

$$\approx 8.77\angle(-105.3^{o})\quad \text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_S - \dot{I}_1 = 14.94\angle 34.5^{o}\quad \text{A}$$

$$\dot{S}_{1吸} = I_1{}^2 Z_1 = 8.77^2 \times (10+\text{j}25) \approx 769+\text{j}1923\ \text{VA}$$

$$\dot{S}_{2吸} = I_2{}^2 Z_2 = 14.94^2 \times (5-\text{j}15) \approx 1116-\text{j}3348\ \text{VA}$$

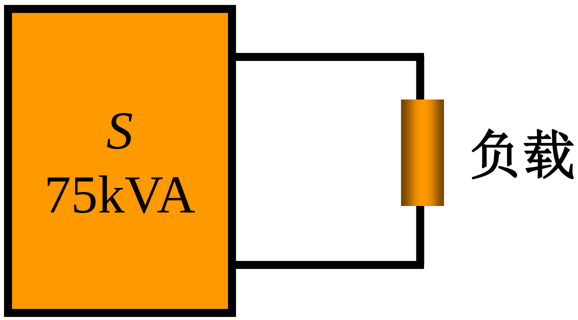
$$\dot{S}_{发} = \dot{I}_1 Z_1 \cdot \dot{I}_S{}^{*} = 10 \times 8.77\angle(-105.3^{o})(10+\text{j}25)$$

$$\approx 1885-\text{j}1423\ \text{VA}$$

3.3.3 功率因数的校正（Power factor correction）

功率因数低带来的问题：

① 设备不能充分利用，电流到了额定值，但功率容量还有；



$$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) = S\cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$\cos(\theta_v - \theta_i) = 1, \quad P = S = 75\ \text{kW}$$

$$\cos(\theta_v - \theta_i) = 0.7, \quad P = 0.7S = 52.5\ \text{kW}$$

设备容量 S（额定）向负载送多少有功要由负载的阻抗角决定。

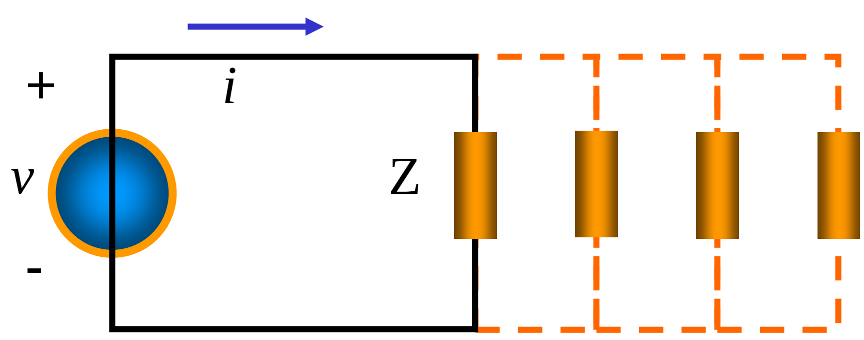
一般用户： 异步电机 空载 $\cos(\theta_v - \theta_i) = 0.2 \sim 0.3$

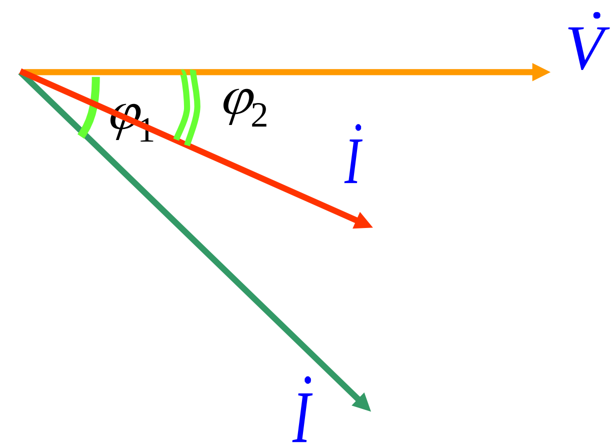
满载 $\cos(\theta_v - \theta_i) = 0.7 \sim 0.85$

日光灯 $\cos(\theta_v - \theta_i) = 0.45 \sim 0.6$

② 当输出相同的有功功率时，线路上电流大，线路压降损耗大。

$$I_{rms} = \frac{P}{V_{rms}\cos\left(\theta_v - \theta_i\right)}$$





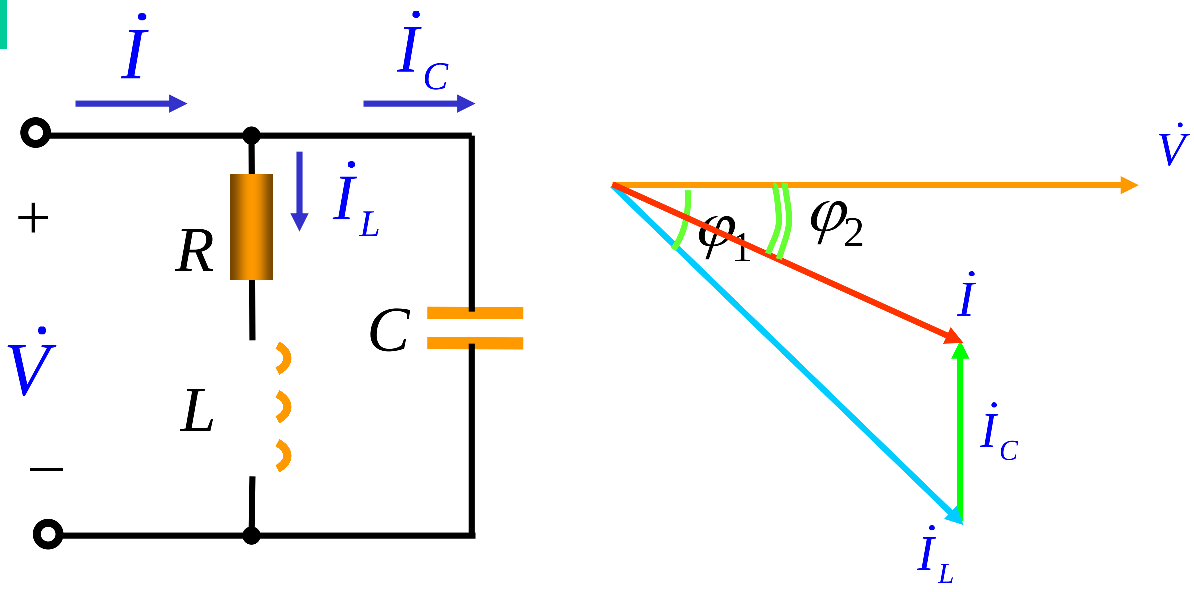
$P = V_{rms} I_{rms} \cos\left(\theta_v - \theta_i\right)$　　$I_{rms} \downarrow$ ➡ $V_{rms} \uparrow$　$\cos\left(\theta_v - \theta_i\right) \uparrow$

解决办法：　（1）高压传输

（2）改进自身设备

（3）并联电容，提高功率因数 。

分析



特点：

并联电容后，原负载的电压和电流不变，吸收的有功功率和无功功率不变，即：负载的工作状态不变。但电路的功率因数提高了。

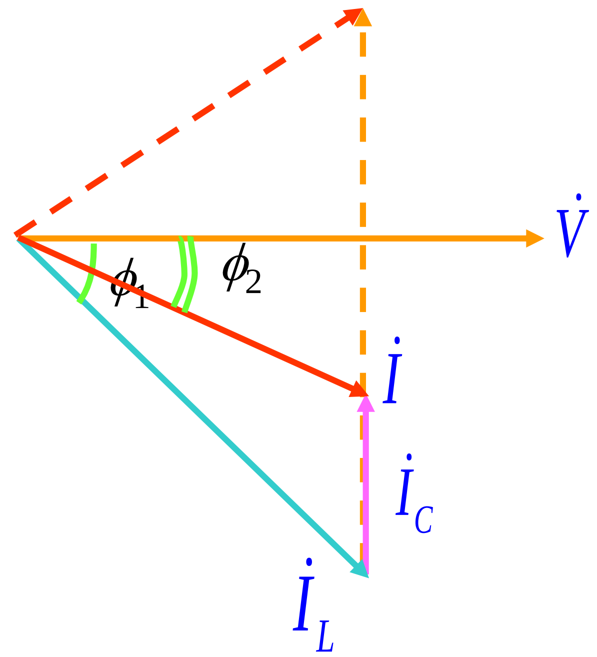
并联电容的确定：

$$I_C = I_L \sin\phi_1 - I\sin\phi_2$$

将 $I = \dfrac{P}{V\cos\phi_2}$ ， $I_L = \dfrac{P}{V\cos\phi_1}$ 代入得

$$I_C = \omega C V = \frac{P}{V}(\mathrm{tg}\phi_1 - \mathrm{tg}\phi_2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{P}{\omega V^2}(\mathrm{tg}\phi_1 - \mathrm{tg}\phi_2)}$$

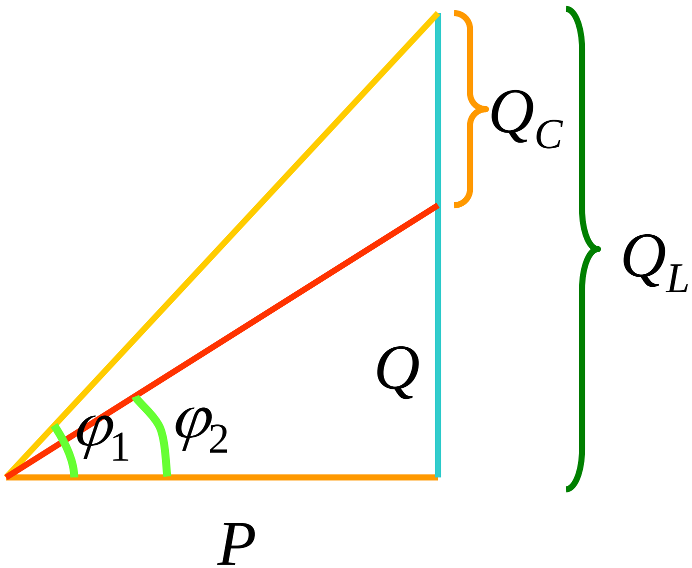


补偿容量不同

- 欠
- 全——不要求(电容设备投资增加, 经济效果不明显)
- 过——功率因数又由高变低(性质不同)

综合考虑，提高到适当值为宜(0.9 左右)。

并联电容也可以用功率三角形确定：



$$|Q_C| = |Q_L - Q| = P(tg\varphi_1 - tg\varphi_2)$$

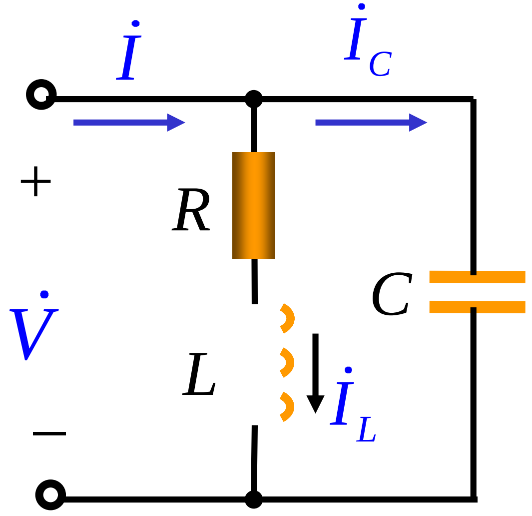
$$|Q_C| = \omega C V^2$$

$$\therefore \quad C = \frac{P}{\omega V^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

从功率角度看：

并联电容后，电源向负载输送的有功$VI_L \cos\varphi_1 = VI \cos\varphi_2$不变，但是电源向负载输送的无功 $VI_L \sin\varphi_2 < VI_L \sin\varphi_1$ 减少了，减少的这部分无功由电容来补偿，使感性负载吸收的无功不变，而功率因数得到改善。

例　已知：$f = 50$ Hz, V =220 V, P =10 kW, $\cos\varphi_1$=0.6，要使功率因数提高到0.9 ，求并联电容C，并联前后电路的总电流各为多大?



解

$$\cos\varphi_1 = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 \approx 53.13^{\circ}$$

$$\cos\varphi_2 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 \approx 25.84^{\circ}$$

$$C = \frac{P}{\omega V^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

$$= \frac{10\times 10^3}{314\times 220^2}(\mathrm{tg}53.13^{\circ} - \mathrm{tg}25.84^{\circ}) \approx 557\ \mu\mathrm{F}$$

未并电容时：$I = I_L = \dfrac{P}{V\cos\phi_1} = \dfrac{10\times 10^3}{220\times 0.6} \approx 75.8\mathrm{A}$

并联电容后：$I = \dfrac{P}{V\cos\phi_2} = \dfrac{10\times 10^3}{220\times 0.9} \approx 50.5\ \mathrm{A}$

若要使功率因数从0.9再提高到0.95， 试问还应增加多少并联电容，此时电路的总电流是多大？

解

$$\cos\varphi_1 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 \approx 25.84^{\circ}$$

$$\cos\varphi_2 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 \approx 18.19^{\circ}$$

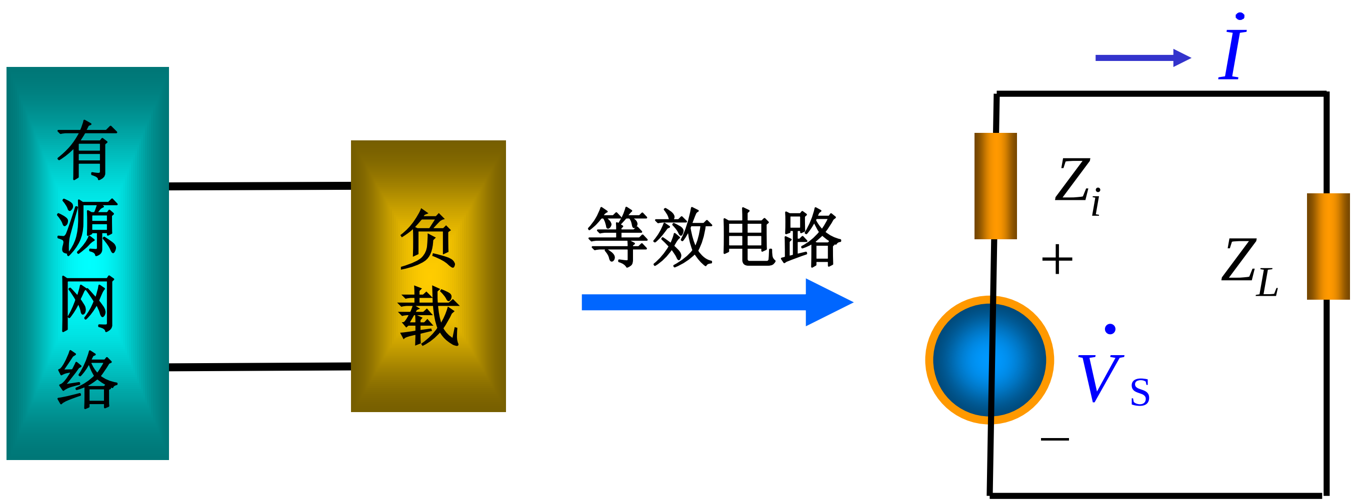
$$C = \frac{P}{\omega V^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2) \qquad\qquad I = \frac{10\times10^3}{220\times0.95} \approx 47.8\ \mathrm{A}$$

$$= \frac{10\times10^3}{314\times220^2}(\mathrm{tg}25.84^{\circ} - \mathrm{tg}18.19^{\circ}) \approx 103\ \mu\mathrm{F}$$

注意

$\cos\varphi$ 提高后，线路上总电流减少，但继续提高$\cos\varphi$ 所需电容很大，增加成本，总电流减小却不明显。因此, 一般将$\cos\varphi$ 提高到 0.9 即可。

3.3.4 最大功率传输定理



$$Z_i = R_i + jX_i,\quad Z_L = R_L + jX_L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_S}{Z_i + Z_L},\quad I = \frac{V_S}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}}$$

有功功率 $P = R_L I^2 = \dfrac{R_L V_S^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$

讨论 正弦电路中负载获得最大功率P_{max}的条件

$$P=\frac{R_L V_S^2}{(R_i+R_L)^2+(X_i+X_L)^2}$$

$$P=\frac{R_L V_S^2}{(R_i+R_L)^2}$$

① 若$Z_L=R_L+jX_L$可任意改变

$$P_{max}=\frac{V_S^2}{4R_i}$$

a）先设 R_L 不变，X_L 改变

显然，当 $X_i+X_L=0$，即 $X_L=-X_i$ 时，P 获得最大值。

b）再讨论 R_L 改变时，P 的最大值

当$R_L=R_i$ 时，P 获得最大值

$R_L=R_i$　　$X_L=-X_i$ $\rightarrow$ $Z_L=Z_i^*$

最佳匹配条件

② 若$Z_L = R_L + jX_L$只允许X_L改变

获得最大功率的条件是：$X_i + X_L = 0$，即 $X_L = -X_i$

最大功率为 $$P_{\max} = \frac{R_L V_S^2}{(R_i + R_L)^2}$$

③ 若$Z_L = R_L$为纯电阻

电路中的电流为： $$\dot{I} = \frac{\dot{V}_S}{Z_i + R_L}, \quad I = \frac{V_S}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}}$$

负载获得的功率为： $$P = \frac{R_L V_S^2}{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}$$

模匹配

令 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_L} = 0 \Rightarrow$ 获得最大功率条件：$R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = |Z_i|$

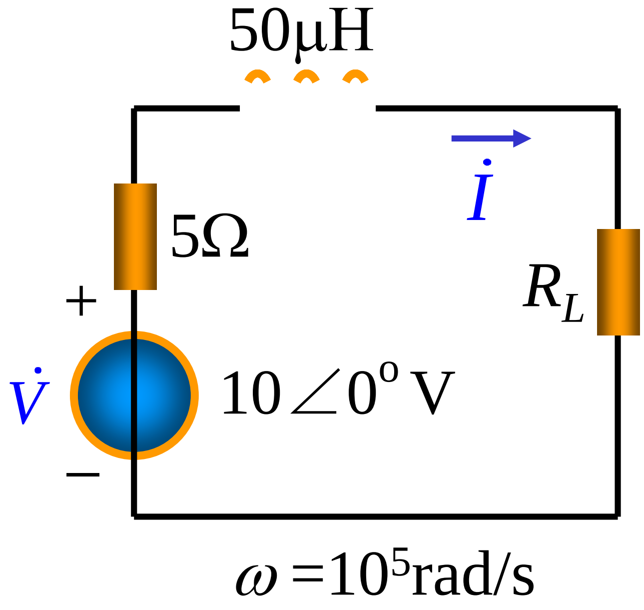
例 电路如图，求：

1. $R_L = 5\ \Omega$ 时其消耗的功率；

2. $R_L = ?$ 能获得最大功率，并求最大功率；

3. 在 R_L 两端并联一电容，问 R_L 和 C 为多大时能与内阻抗最佳匹配，并求最大功率。

解



$$Z_i = R + jX_L = 5 + j10^5 \times 50 \times 10^{-6}$$

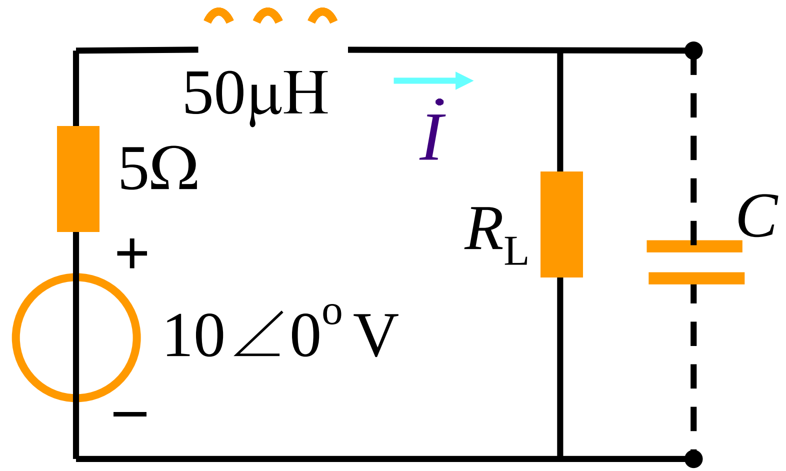
$$= 5 + j5\ \ \Omega$$

1. $$\dot{I} = \frac{10\angle 0^{\circ}}{5 + j5 + 5} \approx 0.89\angle(-26.6^{\circ})\ \text{A}$$

$$P_L = I^2 R_L = 0.89^2 \times 5 \approx 4\ \text{W}$$

2. 当 $R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} \approx 7.07\ \Omega$ 获最大功率

$$\dot{I} = \frac{10\angle 0^{\circ}}{5 + j5 + 7.07} = 0.766\angle(-22.5^{\circ})\text{A}$$



$$P_L = I^2 R_L = 0.766^2 \times 7.07 = 4.15\text{W}$$

3. $$Y = \frac{1}{R_L} + j\omega C$$

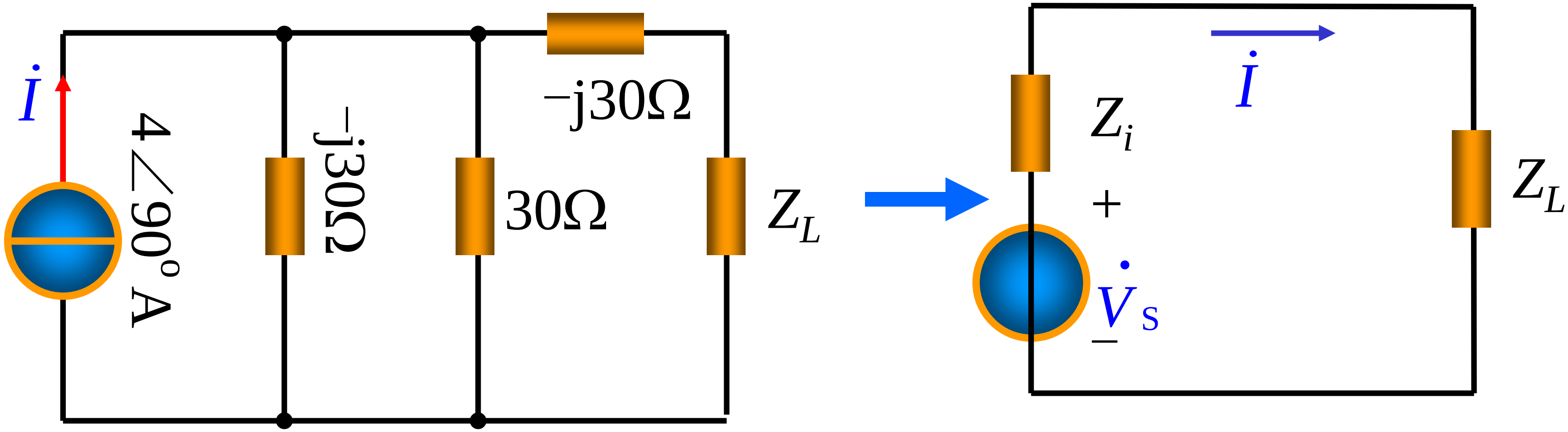
$$Z_L = \frac{1}{Y} = \frac{R_L}{1 + j\omega C R_L} = \frac{R_L}{1 + (\omega C R_L)^2} - j\frac{\omega C R_L^2}{1 + (\omega C R_L)^2}$$

当 $$\begin{cases} \dfrac{R_L}{1 + (\omega C R_L)^2} = 5 \\ \dfrac{\omega C R_L^2}{1 + (\omega C R_L)^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_L = 10\ \Omega \\ C = 1\ \mu\text{F} \end{cases}$$ 获最大功率

$$\dot{I} = \frac{10\angle 0^{\circ}}{10} = 1\text{A}$$

$$P_{\max} = I^2 R_i = 1 \times 5 = 5\text{W}$$

例　求 $Z_L=?$ 时能获得最大功率，并求最大功率。



解

$$Z_i=-j30+(-j30//30)=15-j45\ \Omega$$

$$\dot{V}_S=j4\times(-j30//30)=60\sqrt{2}\angle 45^0$$

当 $Z_L=Z_i^*=15+j45\ \Omega$

有 $P_{\max}=\dfrac{(60\sqrt{2})^2}{4\times15}=120\ \text{W}$