第5章 谐振电路和滤波器

*RLC*串联谐振电路

*RLC*并联谐振电路

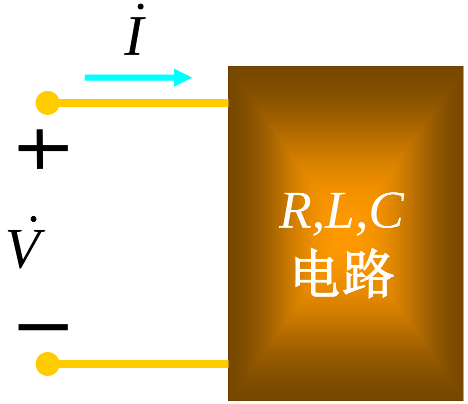
基本滤波器

5.1 *RLC*串联和并联谐振电路

谐振是正弦电路在特定条件下产生的一种特殊物理现象。

谐振定义

含R、L、C的一端口电路，在特定条件下出现端口电压、电流同相位的现象时，称电路发生了**谐振**。

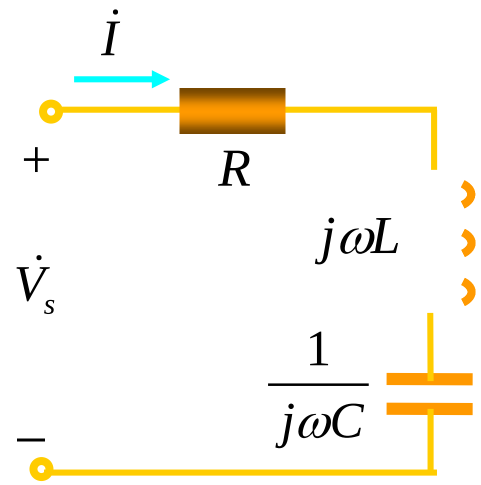


$$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = Z = R$$

发生谐振

谐振的另一种定义：电路传递函数的幅值在某频率处到达峰值，称电路在该频率处发生了谐振。

5.1.1 *RLC*串联谐振电路



串联谐振的条件

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\left(X_L + X_C\right)$$

$$= R + jX$$

当 $X = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ 时，电路发生谐振。

谐振条件

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$ 谐振角频率

仅与电路参数有关

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$ 谐振频率（固有频率）

1、串联电路实现谐振的方式

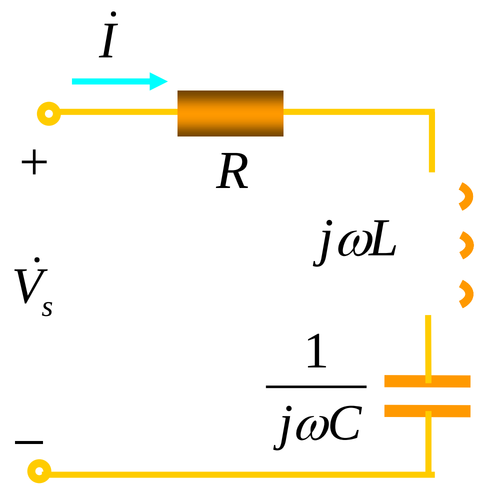
(1) LC 不变，改变外加电源频率$\boldsymbol{\omega}$

谐振频率ω_0由电路参数决定，一个RLC串联电路只有一个对应的ω_0，当$\boldsymbol{\omega}=\omega_0$时，电路发生谐振。

(2) 电源频率不变$\boldsymbol{\omega}$，改变 L 或 C (常改变C)，当$\boldsymbol{\omega}=\omega_0$时，电路发生谐振。

2、串联电路的传递函数

$$H(j\omega)=\frac{\dot{I}}{\dot{V}_s}=\frac{1}{Z}=\frac{1}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$



3、*RLC*串联电路满足谐振条件时的特性

(1) 传递函数的幅值取得最大值$1/R$。 ⟸ $H(j\omega)=\dfrac{\dot{I}}{\dot{V}_s}=\dfrac{1}{Z}=\dfrac{1}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}$

(2) 电路的阻抗为纯电阻 R，且阻抗值$|Z|$最小。

(3) 电流 $\dot{I}$ 与电压 $\dot{V}_s$ 同相。

(4) LC上的电压大小相等，相位相反，串联总电压为零，也称**电压谐振**，即

$$\dot{V}_L+\dot{V}_C=0,\ L、C\ \text{相当于短路}$$

$$\text{电源电压全部加在电阻上,}\ \dot{V}_R=\dot{V}_s$$

（5）谐振时的功率

设 $v_s = V_m \cos\omega_0 t$，$P = \dfrac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi = \dfrac{1}{2} V_m I_m = \dfrac{1}{2} R I_m^{\ 2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{V_m^{\ 2}}{R}$

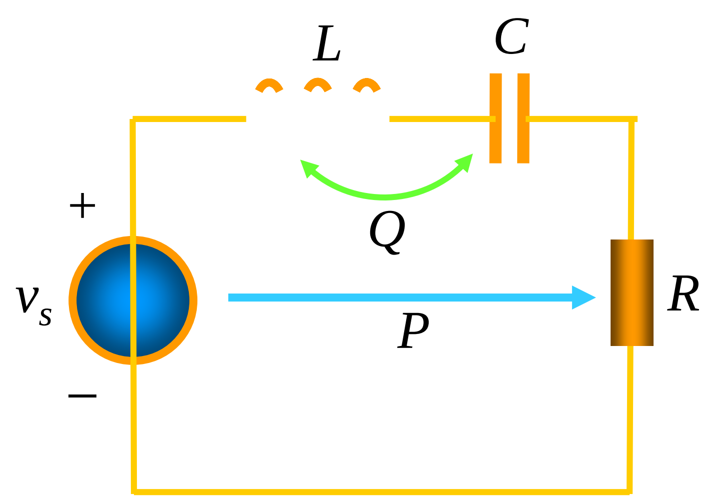
电源向电路输送电阻消耗的功率，电阻消耗功率达最大。

无功功率 $\quad Q_A = \dfrac{1}{2} V_m I_m \sin\varphi = Q_L + Q_C = 0$

$$Q_L = \frac{1}{2}\omega_0 L I_m^{\ 2},\quad Q_C = -\frac{1}{2\omega_0 C} I_m^{\ 2} = -\frac{1}{2}\omega_0 L I_m^{\ 2}$$

注意

电源不向电路输送无功。电感中的无功与电容中的无功大小相等，互相补偿，彼此进行能量交换。



(6) 谐振时的能量关系

$$i_L = \frac{V_m}{R}\cos\omega_0 t = I_m \cos\omega_0 t$$

$$v_C = \frac{I_m}{\omega_0 C}\cos\left(\omega_0 t - 90^\circ\right) = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m \sin\omega_0 t$$

$$W_C = \frac{1}{2}Cv_C^2 = \frac{1}{2}LI_m^2 \sin^2\omega_0 t \quad \longrightarrow \quad \text{电场能量}$$

$$W_L = \frac{1}{2}Li_L{}^2 = \frac{1}{2}LI_m^2 \cos^2\omega_0 t \quad \longrightarrow \quad \text{磁场能量}$$

① 电感和电容能量按正弦规律变化，其幅值相等。L、C的电场能量和磁场能量作周期振荡性的交换，而不与电源进行能量交换。

② 总能量是不随时间变化的常量。

$$W_A = W_L + W_C = \frac{1}{2}LI_m^2$$

品质因数 Q 定义

$$Q = 2\pi \frac{\text{谐振时电路中储存的电磁能量}}{\text{谐振时一周期内电路消耗的能量}}$$

$$= 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I_m^2}{\frac{1}{2} I_m^2 R \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 R C}$$

Q 是反映谐振回路中电磁振荡程度的量，Q 越大，总能量就越大，维持振荡所消耗的能量愈小，振荡程度越剧烈。意味着振荡电路的“品质”愈好。

(7) 谐振时电感、电容两端的电压

$$\dot{V}_L = j\omega_0 L\dot{I} = j\omega_0\ L\frac{\dot{V}_s}{R} = jQ\dot{V}_s$$

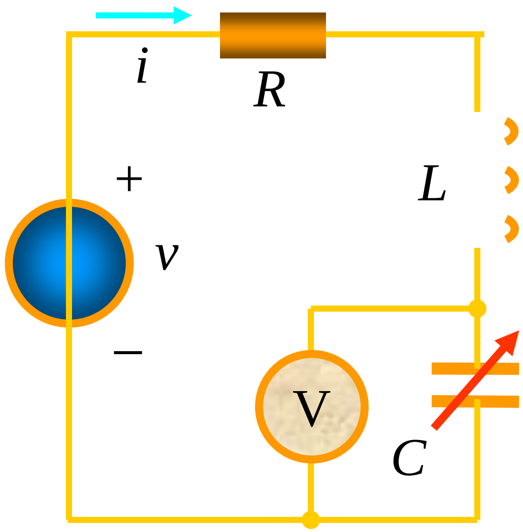
$$\dot{V}_C = -j\frac{\dot{I}}{\omega_0 C} = -j\omega_0\ L\frac{\dot{V}_s}{R} = -jQ\dot{V}_s$$

$$\left|\dot{V}_L\right| = \left|\dot{V}_C\right| = QV_m$$

当 $Q >> 1$时 $\left|\dot{V}_L\right| = \left|\dot{V}_C\right| = QV_m >> V_m$

谐振时出现过电压

例



一接收器的电路参数为：V_{rms}=10 V，$\omega = 5\times10^3$ rad/s，改变电容 C 使电路中的电流最大，此时 I_{rms} = 200 mA，测得电容两端电压为 600 V，求 R、L、C 及 Q。

解

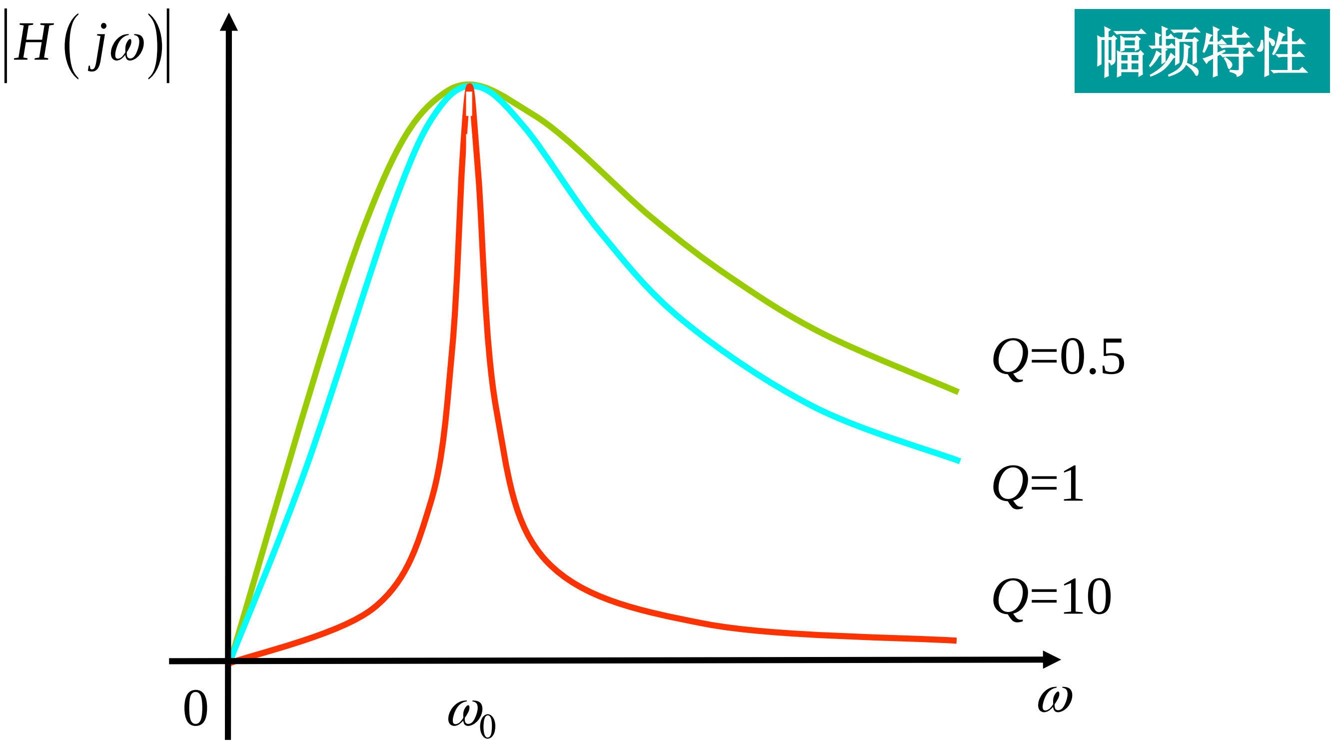
$$R = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} = \frac{10}{200\times10^{-3}} = 50\Omega$$

$$V_C = QV \Rightarrow Q = \frac{V_C}{V} = \frac{600}{10} = 60$$

$$L = \frac{RQ}{\omega_0} = \frac{50\times60}{5\times10^3} = 60\ \text{mH} \qquad C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \approx 6.67\ \mu\text{F}$$

4、*RLC*串联电路的频率响应

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{\dot{I}(j\omega)}{\dot{V}_S(j\omega)}\right| = \frac{1}{\left|R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



表明

① 谐振电路具有选择性

串联谐振电路对不同频率信号有不同的响应，对谐振信号响应最大，而对远离谐振频率的信号具有抑制能力。这种对不同输入信号的选择能力称为“选择性”。

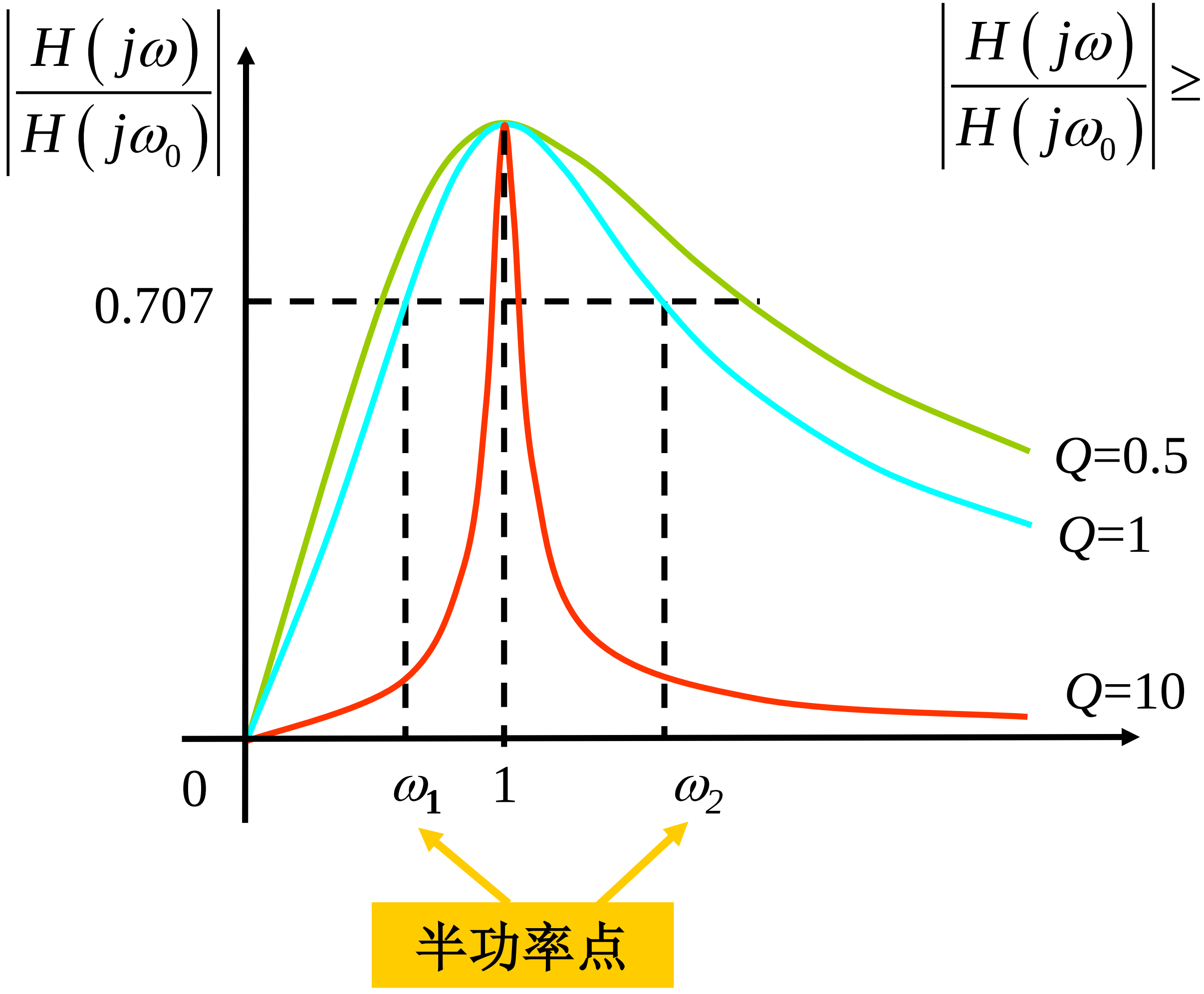
② 谐振电路的选择性与Q成正比

Q 越大，谐振曲线越陡，电路对非谐振频率信号的抑制能力更强。意味着电路对信号的频率选择性更好。因此，Q是反映谐振电路性能的一个重要指标。

5、*RLC*串联电路的带宽

半功率点

$$\left|\frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)}\right| \geq 1/\sqrt{2} \approx 0.707$$



$$\omega_2 > \omega_1$$

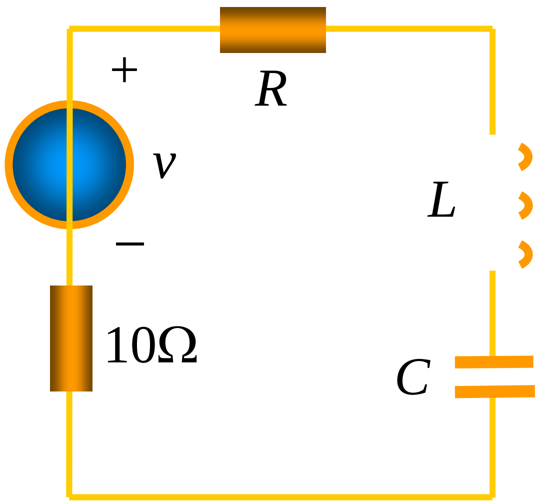
通频带

$$\left|\frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \end{cases}$$

$$B = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

通频带规定了谐振电路允许通过信号的频率范围，是比较和设计谐振电路的性能指标。

例



一信号源与R、L、C电路串联，要求 $f_0 = 10^4$ Hz，$\triangle f = 100$ Hz，$R = 15\ \Omega$，请设计一个线性电路。

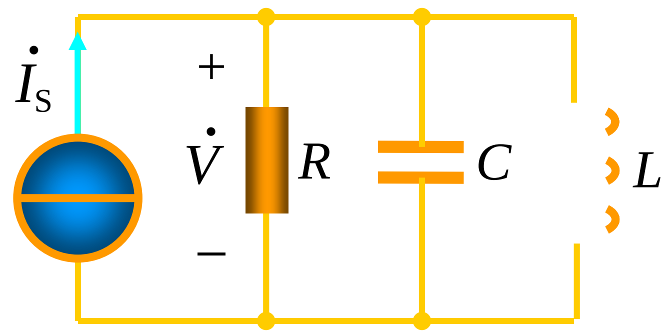
解

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{10^4}{100} = 100$$

$$L = \frac{RQ}{\omega_0} = \frac{100 \times 15}{2\pi \times 10^4} \approx 39.8\ \mathrm{mH}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \approx 6360\ \mathrm{pF}$$

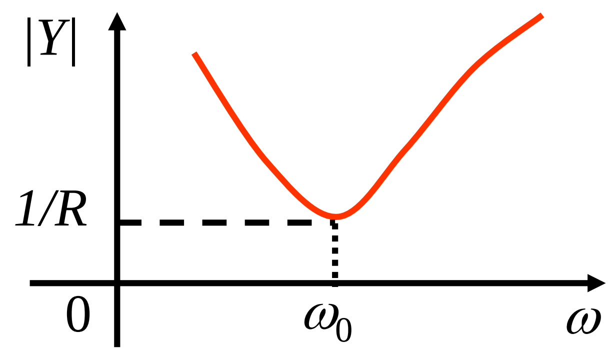
5.1.2 *RLC*并联谐振电路



并联谐振的条件

$$Y = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$



谐振角频率 $$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

谐振频率 $$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

1、并联电路的传递函数

$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}}{\dot{I}_s}=\frac{1}{Y}=\frac{1}{\frac{1}{R}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}$$

2、*RLC*并联电路满足谐振条件时的特性

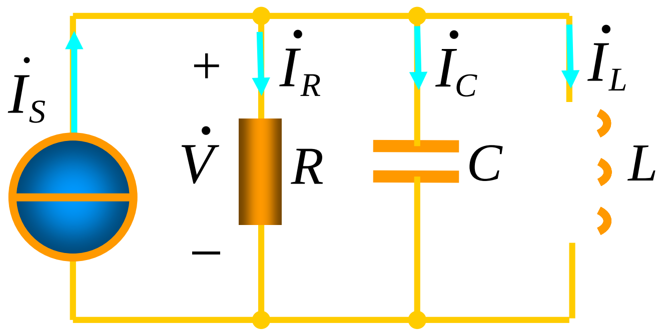
(1) 传递函数的幅值取得最大值 R。

(2) 入端导纳为纯电导，导纳值$|Y|$最小，端电压达最大。

(3) ***L***、***C***上的电流大小相等，相位相反，并联总电流为零，

也称电流谐振，即

$$\dot{I}_L+\dot{I}_C=0$$



电源电流全部流过电阻，即 $\dot{I}_R=\dot{I}_S$

(4) 谐振时的功率

设 $i_s = I_m \cos \omega_0 t$

$$P = \frac{1}{2} R I_m{}^2$$

$$\left.\begin{aligned} Q_L &= \frac{1}{2}\omega_0 C V_m{}^2 \\ Q_C &= -\frac{1}{2}\omega_0 C V_m{}^2 \end{aligned}\right\rangle \quad Q_A = Q_L + Q_C = 0$$

(5) 谐振时的能量

$$\left.\begin{aligned} W_L &= \frac{1}{2} L i_L{}^2 = \frac{1}{2} R^2 C I_m^2 \sin^2 \omega_0 t \\ W_C &= \frac{1}{2} C v_C^2 = \frac{1}{2} R^2 C I_m^2 \cos^2 \omega_0 t \end{aligned}\right\rangle$$

$$W(\omega_0) = W_L(\omega_0) + W_C(\omega_0) = \frac{1}{2} R^2 C I_m^2$$

(6) 谐振时的 Q 值

$$Q = 2\pi \frac{\text{谐振时电路中储存的电磁能量}}{\text{谐振时一周期内电路消耗的能量}} = 2\pi \frac{\frac{1}{2}R^2CI_m^2}{\frac{1}{2}I_m^2R\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

$$= \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

(7) 并联谐振电路的带宽

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}$$

(8) 谐振时流过电感、电容的电流

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}}{j\omega_0 L} = -j\omega_0 RC\dot{I}_S = -jQ\dot{I}_S$$

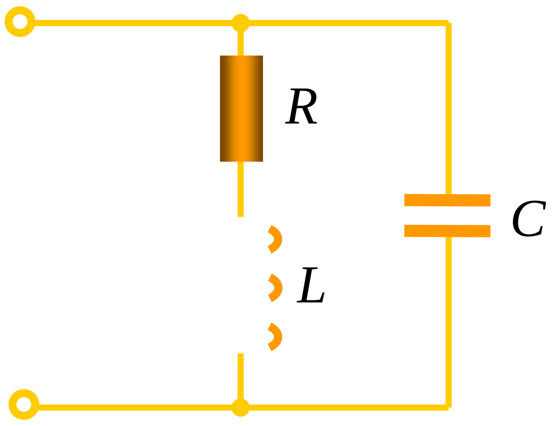
$$\dot{I}_C = \dot{V}j\omega_0 C = \dot{I}_S R\bullet j\omega_0 C = jQ\dot{I}_S$$

$$\left|\dot{I}_L\right| = \left|\dot{I}_C\right| = QI_m$$

谐振时出现过电流

3、实际电感线圈与电容器的并联谐振

实际的电感线圈总是存在电阻，因此当电感线圈与电容器并联时，电路如图：



(1) 谐振条件

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$

注意

① 电路发生谐振是有条件的，在电路参数一定时，满足：

$$\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2>0,\qquad \text{即} R<\sqrt{\frac{L}{C}}$$ 时，可以发生谐振。

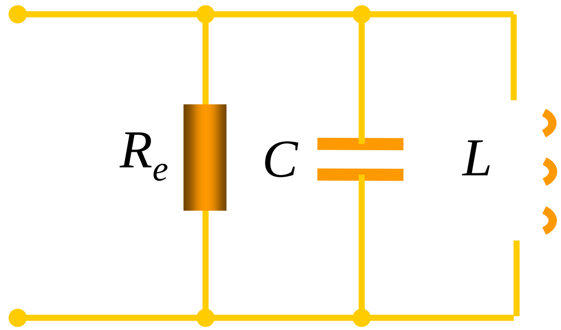
② 一般线圈电阻 $R<<\omega L$，则等效导纳为：

$$Y=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+j\left(\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right)$$

$$\approx\frac{R}{(\omega L)^2}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)$$

谐振角频率 $\longrightarrow$ $\omega_0\approx\frac{1}{\sqrt{LC}}$

等效电路



$$R_e \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R}$$

品质因数

$$Q = \frac{R_e}{\omega_0 L} = \omega_0 R_e C = \frac{\omega_0 L}{R}$$

线圈的品质因数

谐振特点：

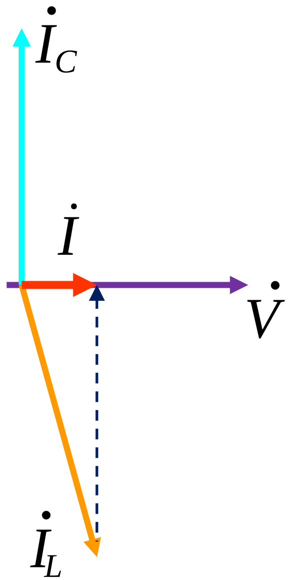
① 电路发生谐振时，输入阻抗很大；

$$\boxed{Z(\omega_0) = R_e \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = \frac{L}{RC}}$$

② 电流一定时，端电压较高。

$$\left|\dot{V}\right| = \left|\dot{I}\right| Z = \left|\dot{I}\right| \frac{L}{RC}$$

③ 支路电流是总电流的 Q 倍。



设 $R << \omega L$

$$\left|\dot{I}_L\right| = \left|\dot{I}_C\right| \approx \frac{\left|\dot{V}\right|}{\omega_0 L} = \left|\dot{V}\right| \omega_0 C$$

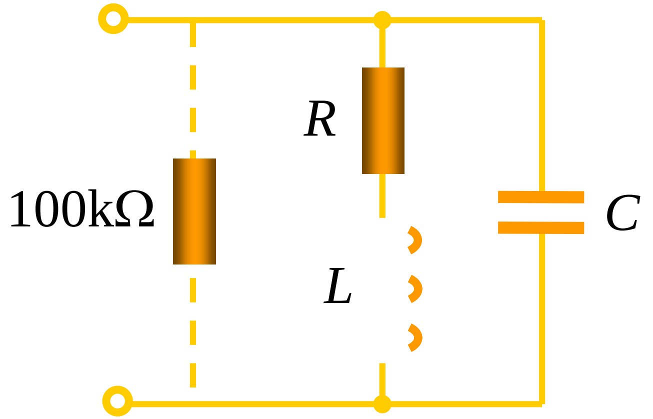
$$\frac{\left|\dot{I}_L\right|}{\left|\dot{I}\right|} = \frac{\left|\dot{I}_C\right|}{\left|\dot{I}\right|} = \frac{\left|\dot{V}\right| / \omega_0 L}{\left|\dot{V}\right| (RC / L)} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q$$

$$\left|\dot{I}_L\right| = \left|\dot{I}_C\right| = QI_m >> I_m$$

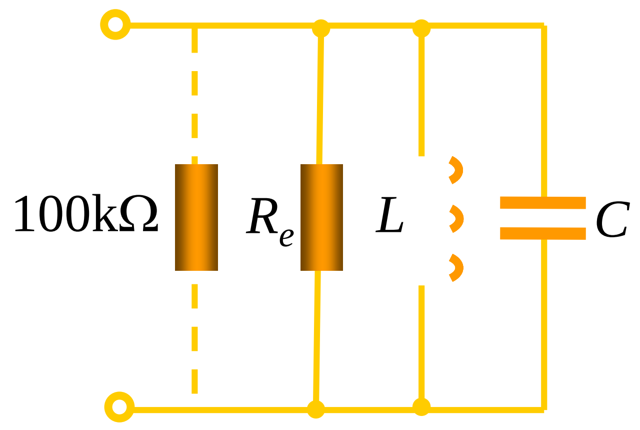
小结

	ω_0	Q	B
串联 *RLC*	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 RC}$	$\frac{R}{L}=\frac{\omega_0}{Q}$
并联 *RLC*	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{R}{\omega_0 L}=\omega_0 RC$	$\frac{1}{RC}=\frac{\omega_0}{Q}$
实际 *L* 和 *C* 并联	$\sim\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\sim\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 RC}$	$\sim\frac{R}{L}=\frac{\omega_0}{Q}$

例1 如图 $R = 10\ \Omega$ 的线圈其 $Q_L = 100$，与电容接成并联谐振电路，如再并联上一个 $100\ \text{k}\Omega$ 的电阻，求电路的 Q。



等效电路



解

$$Q_L = 100 = \frac{\omega_0 L}{R}$$

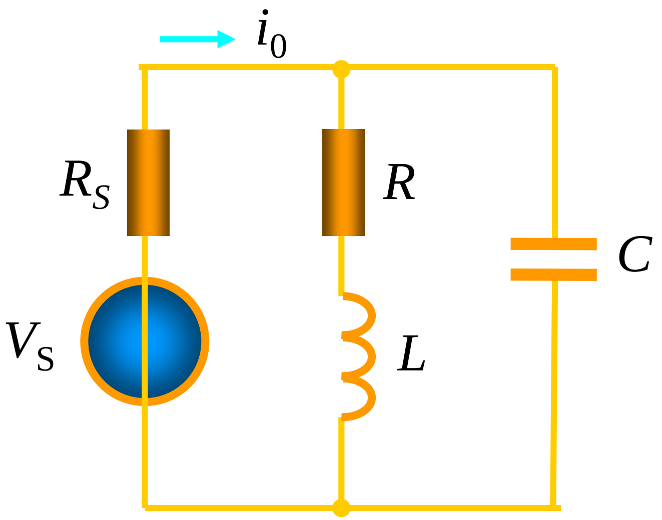
$$\omega_0 L = R Q_L = 1000\ \Omega >> R$$

$$R_e \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = \frac{10^6}{10} = 100\text{k}\Omega$$

$$R_{eq} = 100//100 = 50\text{k}\Omega$$

$$Q = \frac{R_{eq}}{\omega_0 L} = \frac{50\times 10^3}{1000} = 50$$

例2 如图 $R_S = 50\ \mathrm{k\Omega}$，$V_S = 100\ \mathrm{V}$（有效值），$\omega_0 = 10^6$，$Q_L = 100$，谐振时线圈获取最大功率，求 L、C、R 及谐振时 I_0、线圈两端的 V 和谐振电路的功率 P。



解

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R} = 100$$

$$R_e = \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = R_S = 50\ \mathrm{k\Omega}$$

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I_0 = \frac{V_S}{R_e + R_S} = \frac{100}{2\times 50\times 10^3} = 1\ \mathrm{mA}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = 5\ \Omega \\ L = 0.5\ \mathrm{mH} \\ C = 0.002\ \mathrm{\mu F} \end{cases}$$

$$V = \frac{V_S}{2} = 50\mathrm{V}$$

$$P = VI_0 = 0.05\mathrm{W}$$

5.2 基本滤波器

5.2.1 滤波器的分类及其频率响应

一、滤波器概述

工程上根据输出端口对信号频率范围的要求，设计专门的网络，置于输入和输出端口之间，使输出端口所需要的频率分量能够顺利通过，而抑制或削弱不需要的频率分量，这种具有选频功能的中间网络，工程上称为滤波器。

- 滤波电路的传递函数定义

$V_i \longrightarrow$ 滤波电路 $\longrightarrow V_o$

$$H(\omega)=\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}$$

二、滤波电路分类

① 按所处理信号分 → 模拟和数字滤波器

② 按所用元件分 → 无源和有源滤波器

③ 按滤波特性分 → 低通滤波器（LPF）

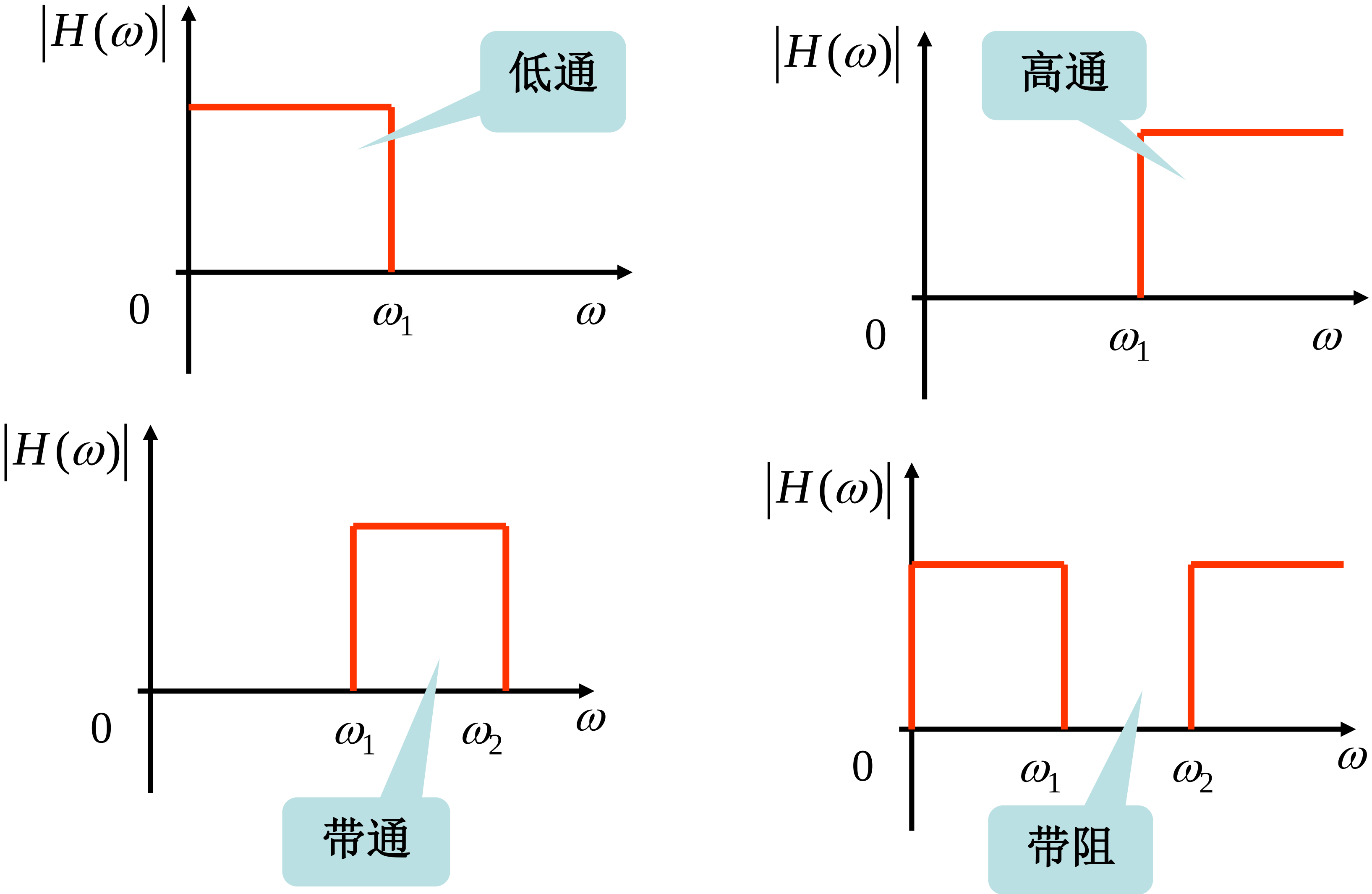
高通滤波器（HPF）

带通滤波器（BPF）

带阻滤波器（BEF）

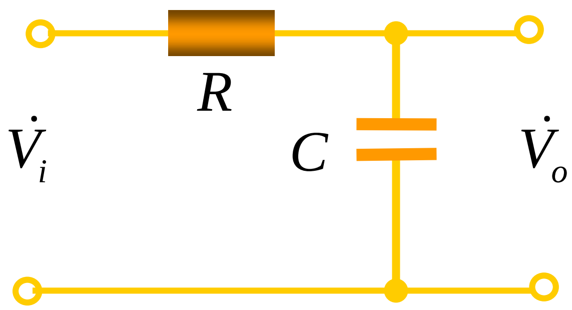
全通滤波器（APF）

三、滤波电路的频率响应（幅频特性）



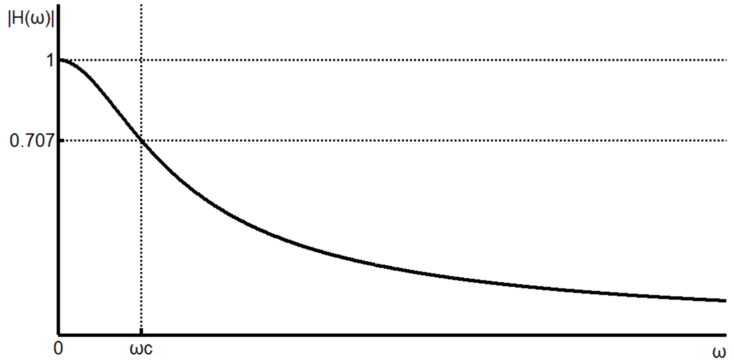
5.2.2 无源滤波器简介

1、一阶*RC*无源低通滤波器



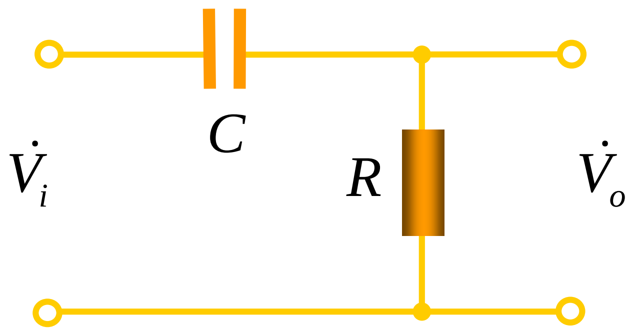
传递函数

$$H(\omega)=\frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$



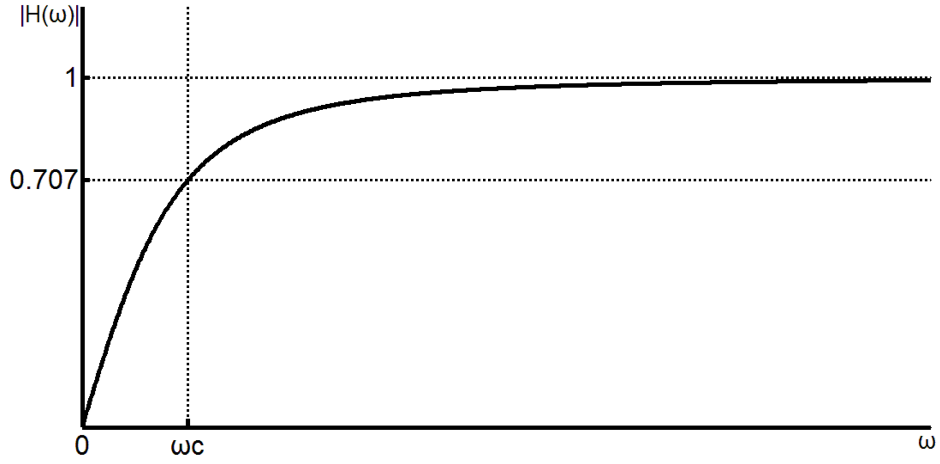
$$|H(\omega)|=\left|\frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i}\right|=\frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2+1}}$$

2、一阶RC无源高通滤波器

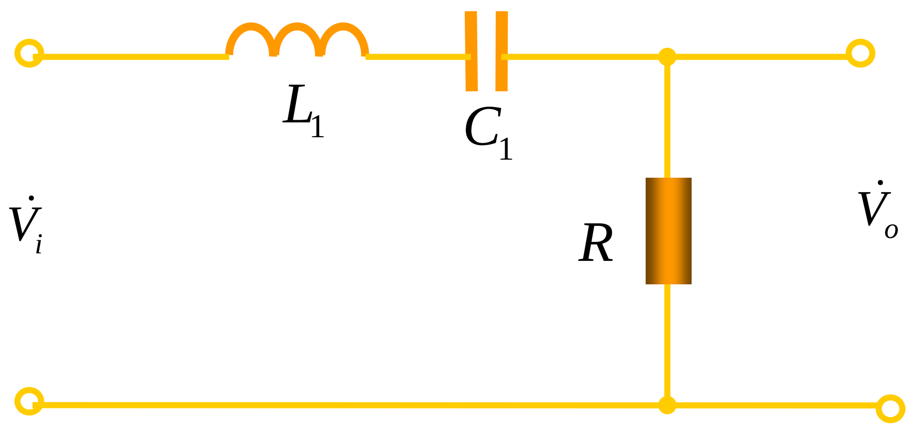


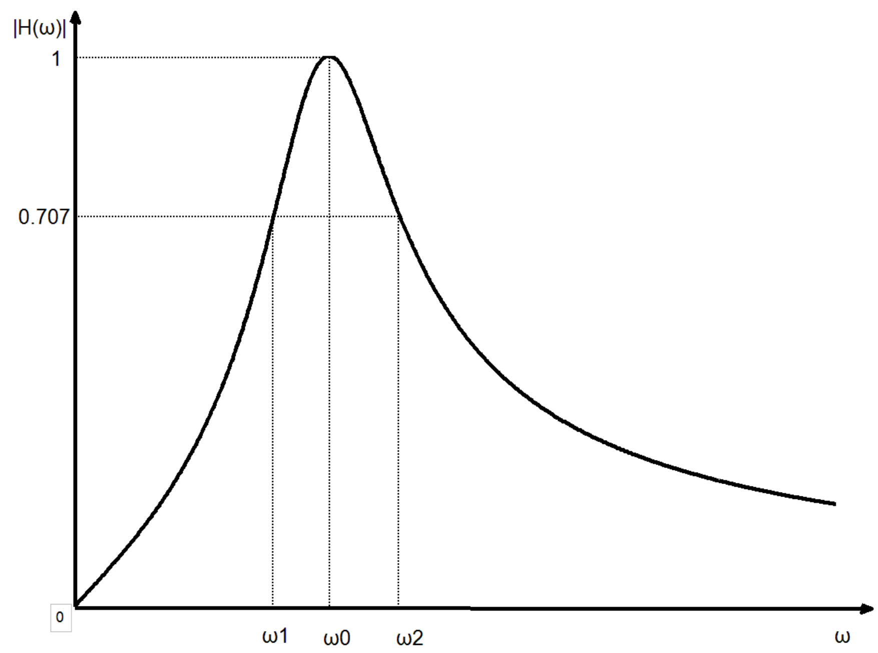
传递函数

$$\left|H(\omega)\right| = \left|\frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i}\right| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$



3、一阶RC无源带通滤波器

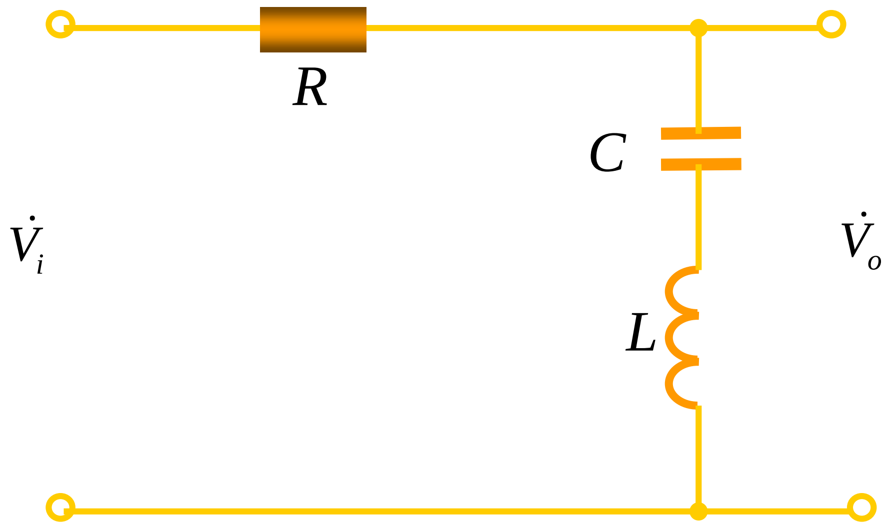




传递函数

$$\left|H(\omega)\right| = \left|\frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i}\right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

4、 一阶*RC*无源带阻滤波器



传递函数

$$\left|H(\omega)\right| = \frac{\left|\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$