离散时间傅里叶变换 性质讲义 (4.4)

定义一离散时间信号的傅里叶变换为:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \qquad P143\ (4\text{-}33)$$

注意: ① $X(e^{j\omega})$ 为周期信号, 周期为 2π

② $X(j\omega)$、$X_p(j\omega)$、$X(e^{j\omega})$ 关系

ⓐ $X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$ P179(5-5)

ⓑ $X_p(j\omega) = X(e^{j\omega T_s})$, $X(e^{j\omega}) = X_p(j\frac{\omega}{T_s})$ P180 5-8与5-9之间

ⓒ $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(j\frac{\omega - k2\pi}{T_s}\right)$ P180(5-9)

~~性质~~

反变换: $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

证明: 将 $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k}$ 代入, 有:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{j\omega(n-k)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\int_{2\pi} e^{j\omega(n-k)} d\omega$$

因为: $\int_{2\pi} e^{j\omega(n-k)} d\omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } n=k \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } n\neq k \text{ 时}, \end{cases}$

所以上式 $= \frac{1}{2\pi} x[n]\cdot 2\pi = x[n]$

得证。

典型信号的离散傅里叶变换

① $\delta[n] \xrightarrow{F} 1$ P145 (4-39)

② $a^n u[n] \xrightarrow{F} \dfrac{1}{1-ae^{-jw}}$ $|a|<1$ P145 (4-41)

③ $a^{|n|} \xrightarrow{F} \dfrac{1}{1-ae^{-jw}} + \dfrac{ae^{jw}}{1-ae^{jw}} = \dfrac{1-a^2}{1-2a\cos w+a^2}$ P146 (4-42)

④ $x[n] = \begin{cases} 1 & |n|\le N_1 \\ 0 & n>N_1 \end{cases} \xrightarrow{F} \dfrac{\sin(N_1+\frac{1}{2})w}{\sin\frac{w}{2}}$ P146 (4-43)

证明: $X(e^{jw}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jwn}$

$$= 1+2\cos w+2\cos 2w \cdots +2\cos(N_1 w)$$

$$= \frac{\sin(N_1+\frac{1}{2})w}{\sin\frac{w}{2}}$$

⑤ $1 \longrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$ P147 (4-48)

证明: 根据定义,

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jwn}$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})w}{\sin\frac{w}{2}} \quad (\text{参照④})$$

要证明: $\lim_{N\to+\infty}\dfrac{\sin(N+\frac{1}{2}w)}{\sin\frac{w}{2}} = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$

即要证用任意 $X(w)$ 与左边相乘并积分与右边相等。

左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} x(w)\left(\lim_{N\to+\infty}\dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})w}{\sin\frac{1}{2}w}\right)dw$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} X(w) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})w}{\sin\frac{1}{2}w} dw$$

换元，设 $w' = w-2k\pi$，

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} X(w'+2k\pi) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})(w'+2k\pi)}{\sin\frac{1}{2}(w'+2k\pi)} dw'$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} X(w+2k\pi) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})w}{\sin\frac{1}{2}w} dw$$

因为这是以 2π 为周期的函数

$$= 2\Big[\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} X(w+2k\pi) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})w}{w} dw$$

$$+ \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} X(w+2k\pi)\left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}w} - \frac{1}{w}\right]\sin(N+\tfrac{1}{2})w\, dw\Big]$$

$$= 2\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} X(w+2k\pi) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})w}{w} dw +$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{X(w+2k\pi)\left(\frac{w-2\sin\frac{1}{2}w}{2w\sin\frac{1}{2}w}\right)}_{\text{此函数在}[\pi,\pi)\text{上连续可微}} \underbrace{\sin(N+\tfrac{1}{2})w}_{\text{此项无限振荡}}}_{\text{所以此项为}0} dw\Big]$$

$$= 2\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{\left(\frac{X(w+2k\pi)-X(2k\pi)}{w}\right)}_{\text{此项连续可微}} \underbrace{\sin(N+\tfrac{1}{2})w}_{\text{此项无限振荡}}}_{\text{所以此项为}0} dw$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} X(2k\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})w}{w} dw$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(2k\pi) \lim_{N\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})w}{w} dw$$

换元：$(N+\frac{1}{2})w = w'$，则

$$= 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(2k\pi) \underbrace{\lim_{N\to+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin w'}{w'}\,dw'\right)}_{\text{等于}\pi}$$

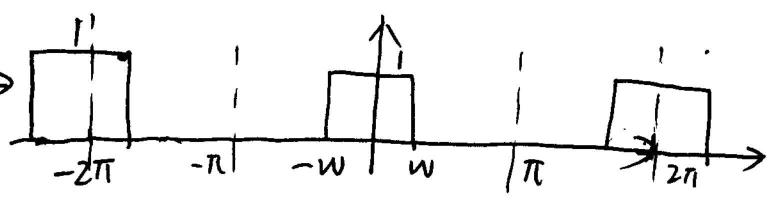
$$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(2k\pi)$$

而右边 $= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)\,\delta(w-2k\pi)\,dw$

$$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(2k\pi)$$

所以左边＝右边，得证。

⑥ $\dfrac{\sin Wn}{\pi n} \xrightarrow{F}$



P147 (4-49, 4-50, 4-51)

证明：先证明引理：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Wn}{n} = \begin{cases}\pi & 0<W<\pi \\ 0 & W=0 \\ -\pi & -\pi<W<0\end{cases}$$

证明：设 $f(W)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin Wn}{n}$

则 $f'(W) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\cos Wn = \lim_{N\to+\infty}\dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})w}{\sin\frac{1}{2}w}$

$$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$$ 请参照⑤

因为 $f(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(0\cdot n)}{n}=0$，则

$$f(W)=\int_0^W f'(u)\,du$$

$$=2\pi\int_0^W\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(u-2k\pi)\,du$$

当 $0<W<\pi$ 时，

$$\text{上式}=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_{-W}^{W}\Big(\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(u-2k\pi)}_{\text{因为此函数为偶函数}}\Big)du$$

$$=\pi\int_{-W}^{W}\delta(u)\,du$$

$$=\pi$$

当 $-\pi<W<0$ 时，同理可证上式 $=-\pi$

所以：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Wn}{n}=\begin{cases}\pi & 0<W<\pi\\ 0 & W=0\\ -\pi & -\pi<W<0\end{cases}$$

则有：

$$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Wn}{\pi n}e^{-jwn}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(Wn)\cos(wn)}{\pi n}-j\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Wn\sin wn}{\pi n}}_{\text{此项为奇函数，相加为0}}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(W+w)n}{n}+\frac{\sin(W-w)n}{n}\right]$$

当 $-W < w < W$ 时，

$$上式 = \frac{1}{2\pi}[\pi+\pi] = 1$$

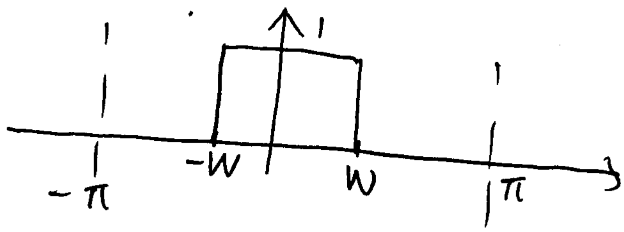
当 $W < w < \pi$ 时，

$$上式 = \frac{1}{2\pi}[\pi-\pi] = 0$$

当 $-\pi < w < -W$ 时，

$$上式 = \frac{1}{2\pi}[-\pi+\pi] = 0$$

所以：$\dfrac{\sin Wn}{\pi n} \xrightarrow{F}$



⑦ $$u[n] \xrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-jw}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$$

证明：$$X(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-jwn}$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\frac{1-e^{-jwN}}{1-e^{-jw}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-jw}} - \lim_{N\to+\infty}\frac{e^{-jwN}}{1-e^{-jw}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-jw}} - \lim_{N\to+\infty}\frac{e^{-jwN}}{e^{-j\frac{w}{2}}(e^{j\frac{w}{2}}-e^{-j\frac{w}{2}})}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-jw}} - \frac{e^{-jw(N-\frac{1}{2})}}{2j\sin\frac{w}{2}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-jw}} - \lim_{N\to+\infty}\frac{\cos[(N-\frac{1}{2})w]}{2j\sin\frac{w}{2}}$$ 中

$$+ \lim_{N\to+\infty}\frac{\sin(N-\frac{1}{2})w}{2\sin\frac{w}{2}}$$

上式中第2项为0，这是因为，对任意 $X(w)$，有：

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X(w)\cos[(N-\frac{1}{2})w]}{2\sin\frac{w}{2}}dw$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X(w)}{w}\cos(N-\tfrac{1}{2})w\,dw$$

$$+\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\underbrace{X(w)\left[\frac{1}{2\sin\frac{w}{2}}-\frac{1}{w}\right]}_{\text{此项连续可微}}\underbrace{\cos(N-\tfrac{1}{2})w}_{\text{无限振荡}}}_{\text{所以此项为0}}dw$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\underbrace{\left[\frac{X(w)-X(0)}{w}\right]}_{\text{此项连续可微}}\underbrace{\cos(N-\tfrac{1}{2})w}_{\text{无限振荡}}}_{\text{所以此项为0}}dw+$$

$$\lim_{N\to+\infty}X(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{\cos(N-\frac{1}{2})w}{w}}_{\substack{\text{此项为奇函数}\\\text{最终积分结果为0}}}dw$$

$$=0$$

上式中第三项 $=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$ 请参照⑤

所以：$u[n]=\dfrac{1}{1-e^{-jw}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$

离散时间傅里叶变换性质

① 线性

$x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$

$x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$

则 $x_1[n]+x_2[n] \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})+X_2(e^{j\omega})$

$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

则 $ax[n] \xrightarrow{F} aX(e^{j\omega})$　　P150 4-62

② 时移

$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

则：$x[n-n_0] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$　　P150 (4-63) 书上有笔误

③ 频移：

$e^{j\omega_0 n}\cdot x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$　　P150 (4-64)

④ 共轭与共轭对称性

实偶 $\xrightarrow{F}$ 实偶

实奇 $\xrightarrow{F}$ 虚奇

虚偶 $\xrightarrow{F}$ 虚偶

虚奇 $\xrightarrow{F}$ 实奇

实函数傅里叶变换实部为偶函数，虚部为奇函数；实函数幅频特性为偶函数；相频特性为奇函数。

⑤ 差分：

$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

则 $x[n]-x[n-1]=(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

P151 4-70

⑥ 时域扩展

定义 $x_{(k)}[n]$ 为 $x[n]$ 中每一个数插入 $k-1$ 个零构成的序列。则有:

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x_{(k)}[n] \xrightarrow{F} \underbrace{X(e^{j\omega k})}_{\text{此函数周期为}\frac{2\pi}{k}}$$ P152 (4-81)

⑦ 频域微分:

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

则 $$n\,x[n] \xrightarrow{F} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$ P154 (4-83)

⑧ 时域卷积

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \text{ 且 } h[n] \xrightarrow{F} H(e^{j\omega})$$

则 $$x[n] * h[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

证明: $$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

则 $F[x[n]*h[n]]$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]\right)e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]e^{-j\omega(n-k)} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-j\omega k}$$

$$= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

⑨ 调制性质

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$$

则 $x[n]y[n] \xrightarrow{F} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta}$

$$= X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega})$$

此式为周卷积的定义。

证明：求 $\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$ 的反变换，

有：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{2\pi} \underbrace{X(e^{j\theta})}_{2\pi\text{为周期函数}} e^{j\theta n}d\theta\right]\cdot$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{2\pi} \underbrace{Y(e^{j(\omega-\theta)})e^{j(\omega-\theta)n}}_{2\pi\text{为周期函数}}d\omega\right]$$

$$= x[n]\,y[n]$$

⑩ 帕斯瓦尔定理

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

则 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

证明：左边 $= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\, x[n]^*$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})e^{jwn}\,dw\right)^*$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{2\pi} X^*(e^{jw}) \cdot \left(x[n]e^{-jwn}\right) dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^*(e^{jw})\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jwn}\right) dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^*(e^{jw})\, X(e^{jw})\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left|X(e^{jw})\right|^2 dw$$

= 右边