第七章 Z变换

① 定义：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

其中 $z=re^{jw}$，因此

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(x[n]r^{-n}\right)e^{-jwn}$$

因此 $x[n]$的Z变换 等价于$x[n]r^{-n}$的离散傅里叶变换。

根据反变换公式：

$$x[n]r^{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(z)e^{jwn}\,dw$$

即

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(z)\left(re^{jw}\right)^{n}dw$$

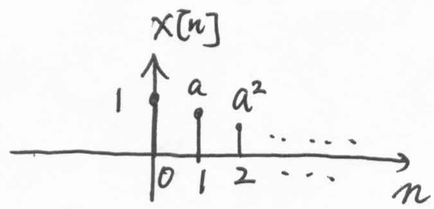
因为：$z=re^{jw}$，所以 $dz=jre^{jw}\,dw$

即 $dw=\frac{1}{jz}dz$，代入有：

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

② 典型信号Z变换

1. $x[n]=a^{n}u[n]$



$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{n}u[n]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(az^{-1}\right)^{n}$$

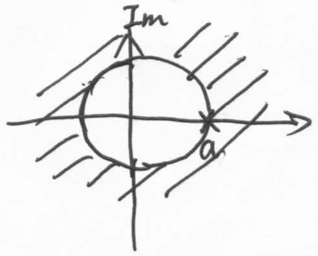
$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1-\left(az^{-1}\right)^{N}}{1-az^{-1}}$$

当且仅当 $|az^{-1}|<1$ 即 $|z|>|a|$ 时，

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

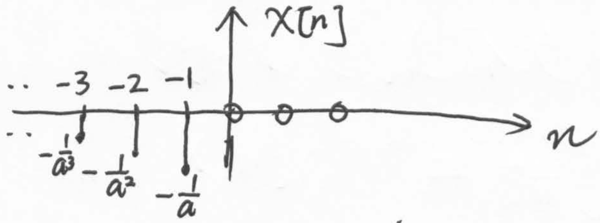
因此

$$a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad (\text{收敛域 } |z|>|a|)$$



（收敛域图）

2、 $x[n]=-a^n u[-n-1]$



$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}-a^n u[-n-1]z^{-n}$$

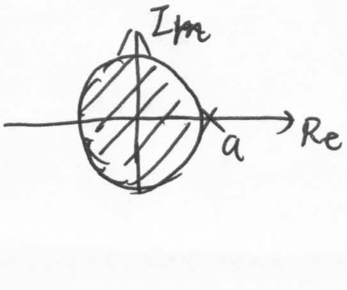
$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}-a^n z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}-(a^{-1}z)^n$$

$$=-\lim_{N\to+\infty}\frac{a^{-1}z-(a^{-1}z)^N}{1-a^{-1}z}$$

当且仅当 $|a^{-1}z|<1$ 即 $|z|<|a|$ 时，

$$X(z)=-\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=-\frac{1}{az^{-1}-1}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$



$(|z|<|a|)$

因此有：

$$a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$-a^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|<|a|$$

（最重要的两个公式）

3. $x[n] = b^{|n|}$

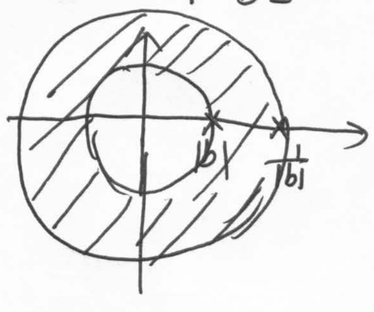
解：$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$

$$X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}$$

收敛域　$|z|>|b|$　$|z|<|b^{-1}|$

因此：

$$X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}} \quad \left(|b|<|z|<\frac{1}{|b|}\right)$$



4. $x[n] = \delta[n]$

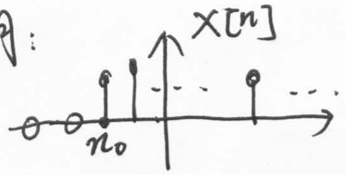
$X(z) = 1$　收敛域全Z平面。

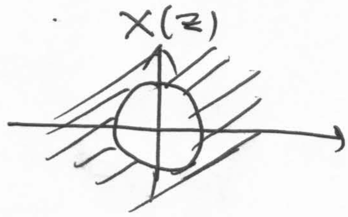
③ Z变换性质 P251 — P253

ⓐ $x[n]$有限长，$X(z)$收敛域整个平面。

ⓑ $x[n]$右边序列，$X(z)$收敛域某个圆外面。

证明：





若右边序列 $x[n]$，它的 $X(z)$ 收敛于某个 r_0，即

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}|x[n]|r_0^{-n}<+\infty$$

那么我们要证明对 $\forall r_1>r_0$，有

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}|x[n]|r_1^{-n}<+\infty$$

证明：

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}|x[n]|r_1^{-n}$$

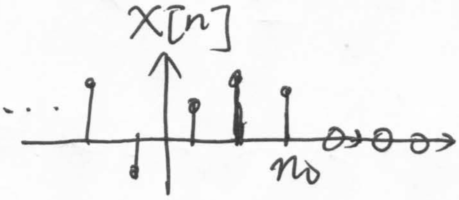
$$=\sum_{n=n_0}^{+\infty}|x[n]|\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n}\cdot r_0^{-n}$$

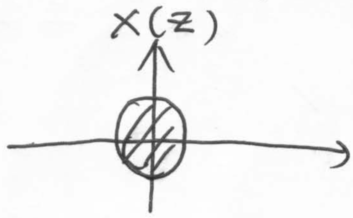
因为 $\frac{r_1}{r_0}>1$，因此

$$\text{上式}\leq \underbrace{\max\left\{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n_0},1\right\}}_{<+\infty}\sum_{n=n_0}^{+\infty}|x[n]|r_0^{-n}$$

命题成立。

ⓒ $x[n]$ 左边序列，$X(z)$ 收敛域为某个圆里面





若左边序列 $X(z)$ 收敛于某个 r_0，即

$$\sum_{n=-\infty}^{n_0} \left|x[n]\right| r_0^{-n} < +\infty$$

则要证明对 $\forall r_1 < r_0$，有

$$\sum_{n=-\infty}^{n_0} \left|x[n]\right| r_1^{-n} < +\infty$$

证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{n_0} \left|x[n]\right| r_1^{-n}$$

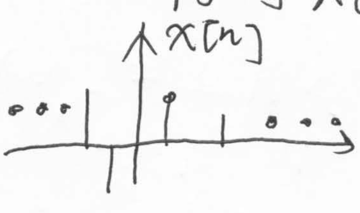
$$= \sum_{n=-\infty}^{n_0} \left|x[n]\right| \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n} r_0^{-n}$$

$$\leq \max\left\{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n_0}, 1\right\} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\right| r_0^{-n}$$

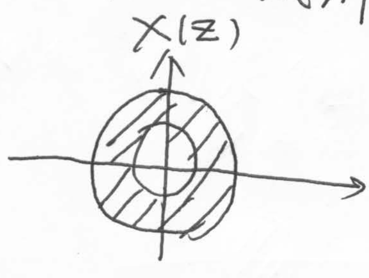
$$< +\infty$$

命题成立。

ⓓ 双边序列 $x[n]$，$X(z)$ 收敛域环状



$\longrightarrow$



ⓔ 线性性质

若 $x_1[n] \xrightarrow{Z} X_1(z)$，收敛域 R_1，$x_2[n] \xrightarrow{Z} X_2(z)$，收敛域 R_2

则 $a x_1[n] + b x_2[n] \xrightarrow{Z} a X_1(z) + b X_2(z)$ 收敛域至少 $R_1 \cap R_2$

例 7-7 P255

求 $x[n] = \cos(\omega_0 n)u[n]$ 的 Z 变换

$$\cos(\omega_0 n)u[n] = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u[n] + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u[n]$$

$$\downarrow Z \qquad\qquad \downarrow Z \qquad\qquad \downarrow Z$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$|z|>1 \qquad |z|>1$

$$X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right] \quad |z|>1$$

$$= \frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}} \quad |z|>1$$

求 $x[n] = \sin(\omega_0 n)u[n]$ 的 Z 变换

$$\sin(\omega_0 n)u[n] = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right]u[n]$$

$$\downarrow Z \qquad\qquad \downarrow Z \qquad\qquad \downarrow Z$$

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right]$$

$$= \frac{\sin\omega_0 \, z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}} \quad |z|>1$$

(f) 移位性质

若 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \qquad R$

则 $x[n-n_0] \xrightarrow{Z} X(z)\, z^{-n_0} \qquad R$

(g)

⑨ 线性加权

若 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$　　R

则 $nx[n] \xrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz}$　　至少 R

证明：$X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$

则 $\dfrac{dX(z)}{dz}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} -nx[n]z^{-n-1}$

所以 $-z\dfrac{dX(z)}{dz}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]z^{-n}$

即 $nx[n] \xrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

例 求 $nu[n]$ 的 z 变换 P256 例7-8

解：$u[n] \xrightarrow{Z} \dfrac{1}{1-z^{-1}}$　　$|z|>1$

则 $nu[n] \xrightarrow{Z} -z\dfrac{d\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)}{dz}$

$=\dfrac{z}{(z-1)^2}$　　$|z|>1$

ⓗ 序列指数加权

若 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$，　R

则 $a^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\dfrac{z}{a}\right)$，$|a|R$

ⓘ 时域扩展

若 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$　　R

则 $x_{(k)}[n] \xrightarrow{Z} X(z^k)$　　$R^{\frac{1}{k}}$

(j) 卷积性质

若 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$ R_1

$h[n] \xrightarrow{Z} H(z)$ R_2

则 $x[n] * h[n] \xrightarrow{Z} X(z)H(z)$ 至少 $R_1 \cap R_2$

(k) 共轭性质

若 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$ R

则 $x^*[n] \xrightarrow{Z} X^*(z^*)$ R

(l) 累加性质

若 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$ R

则 $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] * u[n] \longrightarrow \dfrac{X(z)}{1-z^{-1}}$

至少 $R \cap |z|>1$

(m) 初值定理

若 $x[n]$ 为因果序列，即当 $n<0$ 时 $x[n]=0$

则有：

$$x[0] = \lim_{z \to +\infty} X(z)$$

证明：

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} \ldots + x[n]z^{-n} \ldots$$

两边取 $z \to +\infty$，有：

$$\lim_{z \to +\infty} X(z) = x[0]$$，命题成立。

⑪ 终值定理

若 $x[n]$ 为因果序列，则

$$x[+\infty]=\lim_{n\to+\infty}x[n]=\lim_{z\to1}(z-1)X(z)$$

证明：$x[n]\xrightarrow{\mathcal{Z}}X(z)$

$x[n+1]\xrightarrow{\mathcal{Z}}zX(z)$

因此：$y[n]=x[n+1]-x[n]\xrightarrow{\mathcal{Z}}(z-1)X(z)$

因为 $x[n]$ 因果 $\Longrightarrow$ $y[n]$ 从 $n=-1$ 开始有值。

因此：

$$Y(z)=(z-1)X(z)=z\left(x[0]-x[-1]\right)+\left(x[1]-x[0]\right)+\left(x[2]-x[1]\right)z^{-1}\cdots$$

$$=zx[0]+x[1]-x[0]+\left(x[2]-x[1]\right)z^{-1}\cdots$$

所以

$$\lim_{z\to1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to1}\underline{zx[0]}+\underline{x[1]}-\underline{x[0]}+\left(x[2]-\underline{x[1]}\right)z^{-1}\cdots+$$

$$=\lim_{n\to+\infty}x[n]$$

命题得证。

④ 部分分式展开法

P262 例 7-14

已知 $X(z)=\dfrac{2z+4}{(z-1)(z-2)^2}$ $|z|>2$，求 $x[n]$

解：$\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}$

$= \dfrac{-1}{z} + \dfrac{6}{z-1} - \dfrac{5}{z-2} + \dfrac{4}{(z-2)^2}$

所以 $X(z) = -1 + \dfrac{6z}{z-1} - 5\dfrac{z}{z-2} + \dfrac{4z}{(z-2)^2}$

$= -1 + \dfrac{6}{1-z^{-1}} - \dfrac{5}{1-2z^{-1}} + \dfrac{4z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}$

$x[n] = -\delta[n] + 6u[n] - 5\cdot 2^n u[n] + 2\cdot n2^n u[n]$

例7-15

已知 $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z+2)}$ $|z|>2$，求 $x[n]$

解：$\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{z-1} + \dfrac{\frac{2}{3}}{z+2}$

则 $X(z) = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-z^{-1}} + \dfrac{\frac{2}{3}}{1+2z^{-1}}$

$x[n] = \frac{1}{3}u[n] + \frac{2}{3}(-2)^n u[n]$

⑤ 单边 Z 变换

定义：一个序列单边Z变换定义为：

$\overline{X(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$

$x[n] \xrightarrow{uz} \overline{X(z)}$

例 7-16　P264

求 $x[n]=a^n u[n+1]$ 的双边和单边 Z 变换

解：$$a^n u[n+1]=\frac{1}{a}\cdot a^{n+1}u[n+1]$$

$$\frac{1}{a}\cdot a^{n+1}u[n+1]\xrightarrow{Z}\frac{1}{a}\cdot z\cdot\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{a^{-1}z}{1-az^{-1}}\quad(|z|>|a|)$$

而 $$a^n u[n+1]\xrightarrow{UZ}\frac{1}{1-az^{-1}}\quad(|z|>|a|)$$

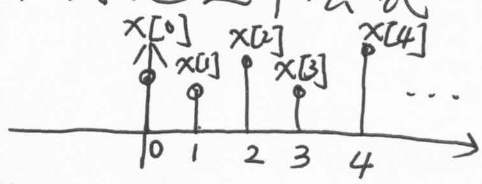
单边 Z 变换性质

移位性质：

若 $x[n]\xrightarrow{UZ}\widetilde{X(z)}$

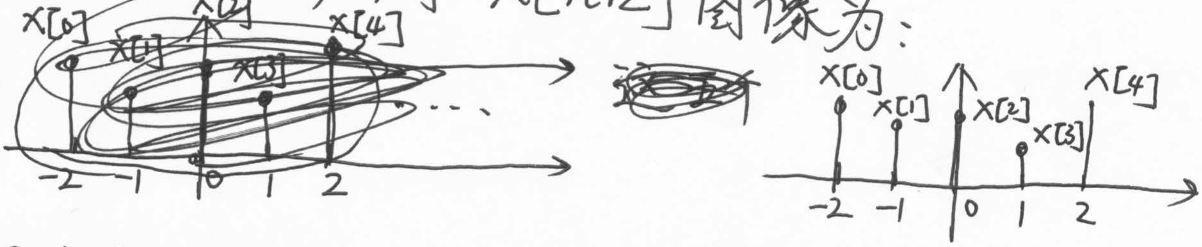
则 $$x[n+m]\xrightarrow{UZ}z^m\widetilde{X(z)}-z^m x[0]-z^{m-1}x[1]-z^{m-2}x[2]\cdots-zx[m-1]\quad(7\text{-}69)$$

看图记这个公式



$\xrightarrow{UZ}\widetilde{X(z)}$

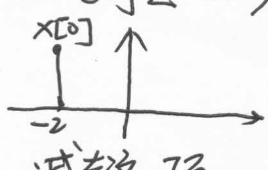
设 $m=2$，则 $x[n+2]$ 图像为：



现在要求 $x[n+2]$ 的单边Z变换，它等于

$$UZ\left[x[n+2]\right]=z^2\widetilde{X(z)}-x[0]z^2-x[1]z$$

这五项的影响



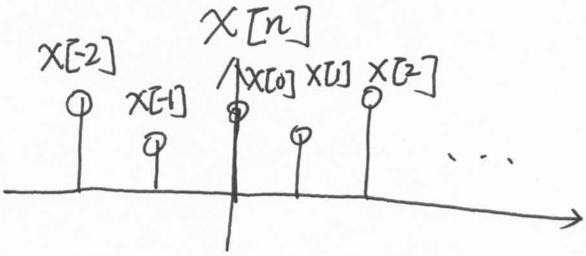
减去这一项

减去这一项

$$x[n-m] \xrightarrow{uZ} z^{-m}\widehat{X(z)} + x[-m] + x[-m+1]z^{-1} + x[-m+2]z^{-2}\cdots + x[-1]z^{-(m-1)}$$

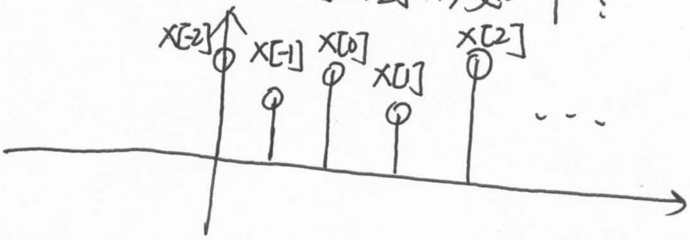
看图记这个公式

以 $m=2$ 为例



则有: $\widehat{X(z)} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2}\cdots$

$x[n-2]$ 图形如下:



则有: $uZ\left[x[n-2]\right] = x[-2] + x[-1]z^{-1} + x[0]z^{-2} + x[1]z^{-3} + x[2]z^{-\cdots}$

$= z^{-2}\left(x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2}\cdots\right) + x[-2] + x[-1]z^{-\cdots}$

$= z^{-2}\widehat{X(z)} + x[-2] + x[-1]z^{-1}$

⑥ 解差分方程

题型一、~~已知~~ ①

$$y[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

已知 $x[n] = 2^{n}u[n]$，求 $y[n]$

解：$Y(z)(1-3z^{-1}+2z^{-2})=X(z)(1-z^{-1})$

所以 $Y(z)=\dfrac{(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}\cdot\dfrac{1}{(1-2z^{-1})}\quad |z|>2$

$=\dfrac{1}{(1-2z^{-1})^2}$

~~$y[n]=n\cdot 2^{n-1}u[n]$~~

则：$y[n]=(n+1)2^n u[n+1]$

题型二：

$H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-2z^{-1})}$，其单位脉冲响应 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|<+\infty$，求

① 系统单位脉冲响应，并判断是否稳定

② 已知 $x[n]=3u[-n-1]+2u[n]$，求 $y[n]$

第七章题目汇编。

题型三 P265 例 7-18

$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$

输入 $x[n]=4^n u[n]$，$y[-1]=4$，求 $y[n]$

解：

$\widehat{Y(z)}-\frac{1}{4}[\widehat{Y(z)}z^{-1}+y[-1]]=\widehat{X(z)}$

$\widehat{Y(z)}[1-\frac{1}{4}z^{-1}]=\underbrace{\dfrac{1}{1-4z^{-1}}}_{y_{zs}[n]}+\underbrace{1}_{y_{zi}[n]}$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-4z^{-1})}}_{y_{zs}[n]} + \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{y_{zi}[n]}$$

$$= \underbrace{\frac{-\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{16}{15}}{1-4z^{-1}}}_{y_{zs}[n]} + \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{y_{zi}[n]}$$

$$y[n] = \underbrace{-\frac{1}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{16}{15}4^n u[n]}_{y_{zs}[n]} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]}_{y_{zi}[n]}$$

$$= \frac{14}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{16}{15}4^n u[n]$$

Z域框图：

$$a_2 y[n-2] + a_1 y[n-1] + a_0 y[n] = b_2 x[n-2] + b_1 x[n-1] + b_0 x$$

定理：假设 $w[n]$ 满足

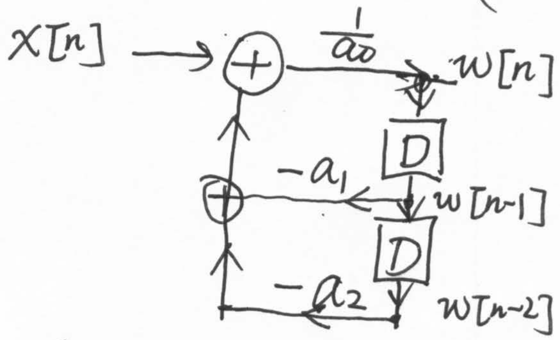
$$a_2 w[n-2] + a_1 w[n-1] + a_0 w[n] = x[n]$$

则有：

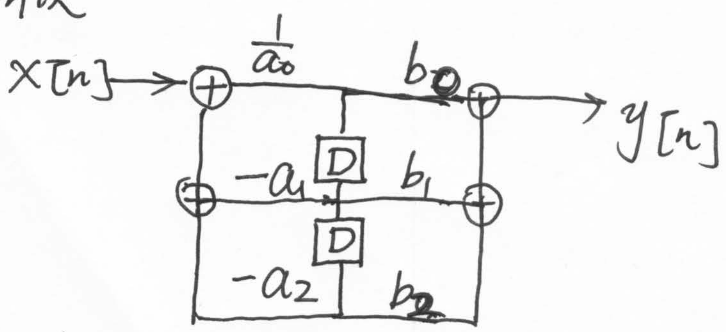
$$y[n] = b_2 w[n-2] + b_1 w[n-1] + b_0 w[n]$$

因此：

$$w[n] = \frac{1}{a_0}\left(x[n] - a_2 w[n-2] - a_1 w[n-1]\right)$$



所以

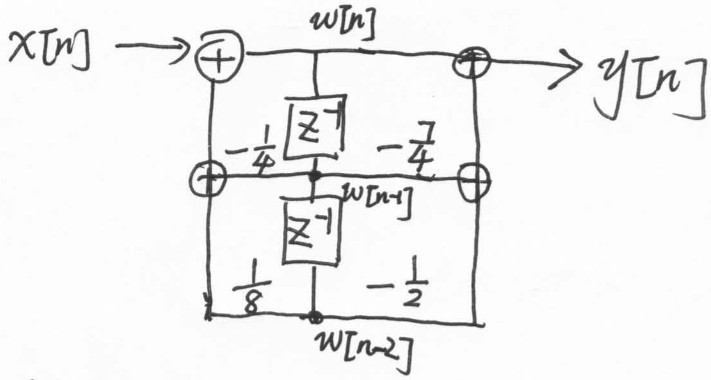


其中 D 可以由 z^{-1} 取代

P272 例7-25

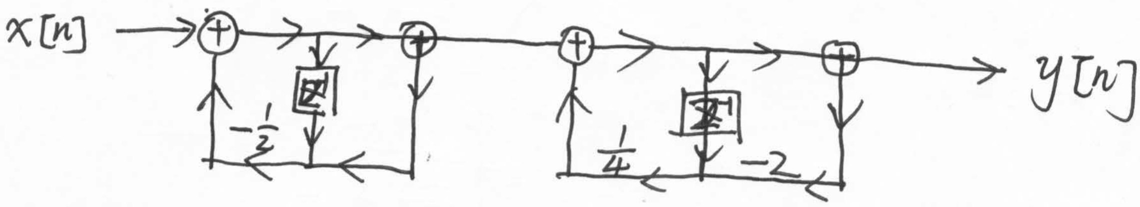
画 $H(z) = \dfrac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$ 框图

解：$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{7}{4}x[n-1]-\frac{1}{2}x[n-2]$



串联型

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$



并联型

$$H(z)=\frac{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$=4+\frac{-3-\frac{11}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$=4+\frac{-3-\frac{11}{4}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$=4+\frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{14}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$