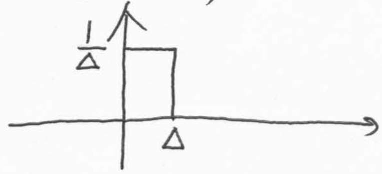
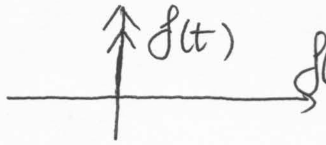
冲激函数 $\delta(t)$ 的严格定义

定义1： $\delta_\Delta(t)$



定义2



$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

定义3：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t)\,dt=\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta_\Delta(t)\,dt$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{0}^{\Delta}x(t)\,dt$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\cancel{\Delta}}\,x(\xi)\cdot\cancel{\Delta}$$

（其中 $0\le\xi\le\Delta$）

$$=\lim_{\Delta\to 0}x(\xi)=x(0)$$

定义4：两个函数 $h_1(t)$ 与 $h_2(t)$ 相等，是指对任意 $x(t)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)^2dt<+\infty$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)h_1(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)h_2(t)\,dt$$

因此，要证明一个函数 $h(t)=\delta(t)$，只需证明对任意 $x(t)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)^2dt<+\infty$，有，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)h(t)\,dt=x(0)$$

接下来我们证明一些 $\delta(t)$ 的性质。

① $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

证明：用一个函数 $y(t)$ 与左边和右边相乘并积分

左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0)\,y(0)$

右边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,x(0)\,\delta(t)\,dt = x(0)\,y(0)$

左边 = 右边，命题得证

(注意：这里用到函数相等的定义4)

② $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

证明：用一个函数 $y(t)$ 与左边和右边相乘并积分

右边 $= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,\delta(t)\,dt = \frac{1}{|a|}\,y(0)$

左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,\delta(at)\,dt$

设 $at = t'$ 换元（注：根据定义2、3很容易
证明，$\delta(t)$ 的积分满足常规积分所有性质，因此积分
换元公式也成立。）

ⓐ 当 $a > 0$ 时

左边 $= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')\,y\!\left(\frac{t'}{a}\right) dt' = \frac{1}{a}\,y(0)$

ⓑ 当 $a < 0$ 时

左边 $= \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(t')\,y\!\left(\frac{t'}{a}\right) dt' = -\frac{1}{a}\,y(0)$

因此：左边 = 右边 $= \frac{1}{|a|}\,y(0)$

命题得证。

③ $$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sin(Nt)}{t}=\pi\delta(t)$$

这个不太好证明，请慢慢看。

引理1. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\pi$$

证明：设 $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-at}\,dt$

则有：
$$\frac{dI(a)}{da}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\cancel{t}}e^{-at}\cdot(-\cancel{t})\,dt$$
$$=-\int_0^{+\infty}e^{-at}\sin t\,dt$$
$$=-\int_0^{+\infty}\frac{1}{2j}\left[e^{-(a-j)t}-e^{-(a+j)t}\right]d$$
$$=-\frac{1}{2j}\left[-\frac{1}{a-j}e^{-(a-j)t}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{a+j}e^{-(a+j)t}\Big|\right.$$
$$=-\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{a-j}-\frac{1}{a+j}\right]$$
$$=-\frac{1}{a^2+1}$$

则有：$I(a)=-\arctan(a)+C$

（这里利用了 $[\arctan(a)]'=\frac{1}{a^2+1}$ ）

又因为：$I(+\infty)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-\infty t}\,dt=0$

所以 $-\arctan(+\infty)+C=0$

即 $-\frac{\pi}{2}+C=0\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$

所以 $I(a)=-\arctan(a)+\frac{\pi}{2}$

$$I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=-\arctan(0)+\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

由于 $\frac{\sin t}{t}$ 为偶函数，因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

引理1得证。

引理2：若 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续可积，且导函数 $f'(t)$ 绝对可积，则有：

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(Nt)\,dt = 0$$

证明：
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(Nt)\,dt$$
$$= \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,d\cos(Nt)$$
$$= \frac{1}{N}\underbrace{f(t)\cos(Nt)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{有限大小}} - \frac{1}{N}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\cos(Nt)\,dt}_{\text{有限大小}}$$

因此，当 $N\to+\infty$ 时，上式两项都为0，命题成立。实际上，只要 $f(t)$ 是连续的，此式都成立。具体证法参见《数学分析新讲》第二册傅里叶变换一章。

有了引理1、引理2，我们开始证明

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sin Nt}{t} = \pi\delta(t)$$

证明：用一个函数 $x(t)$ 与左边和右边相乘并积分

右边 $= \int_{-\infty}^{+\infty}\pi x(t)\delta(t)\,dt = \pi x(0)$

主要是左边。

左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{\sin Nt}{t}\right)dt$

$$= \lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\frac{\sin(Nt)}{t}\,dt \quad (定义3)$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x(t)}{t}\right)\sin(Nt)\,dt$$

这一步不能直接用引理2，因为 $\frac{x(t)}{t}$ 在 $t=0$ 处不连续！但我们可以用以下技巧

左边 $= \lim\limits_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{x(t)-x(0)}{t}\right]\sin(Nt)\,dt$

$$+\ x(0)\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(Nt)}{t}\,dt$$

设 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{x(t)-x(0)}{t} & t\neq 0 时\\ x'(0) & t=0 时\end{cases}$

则 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

因此，第一项

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{x(t)-x(0)}{t}\right]\sin(Nt)\,dt$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(Nt)\,dt = 0 \quad (引理2$$

而第二项 $= x(0)\lim\limits_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(Nt)}{t}\,dt$

设 $Nt=t'$，则有：

第二项 $= x(0)\,\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t'}{\frac{t'}{N}}\,dt'$

$= x(0)\int^{+\infty} \sin t' \, dt'$ …