离散卷积公式的推导

一、离散条件下卷积公式推导

复习：一个离散的线性时不变系统（Linear Time-Invariant System，LTI System）应该满足以下三个性质：

① 若 $x[n] \xrightarrow{\text{系统}} y[n]$，则 $ax[n] \xrightarrow{\text{系统}} ay[n]$ $(a \in R)$

（线性性质 1）

② 若 $x_1[n] \xrightarrow{\text{系统}} y_1[n]$，$x_2[n] \xrightarrow{\text{系统}} y_2[n]$，则 $x_1[n]+x_2[n] \xrightarrow{\text{系统}} y_1[n]+y_2[n]$

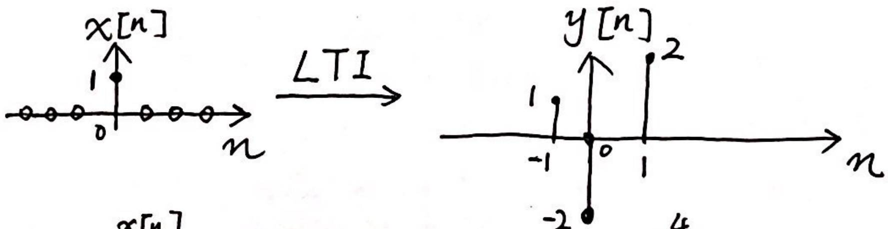
（线性性质 2）

③ 若 $x[n] \xrightarrow{\text{系统}} y[n]$，则 $x[n+n_0] \xrightarrow{\text{系统}} y[n+n_0]$ $(n_0 \in Z)$

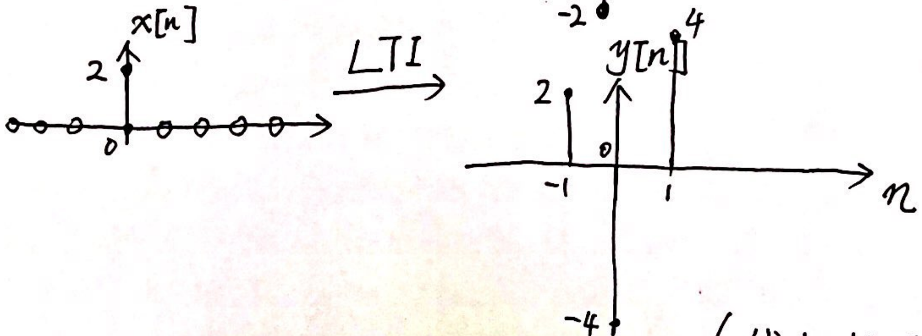
（时不变性质）

请做题：

① 若



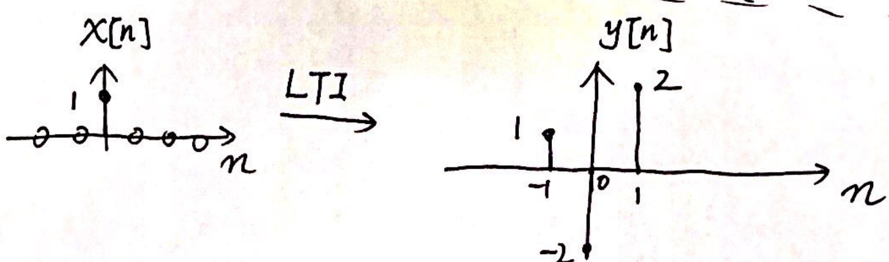
则



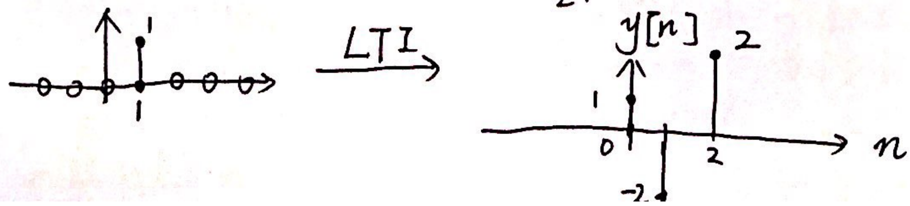
（先自己试一下画右边再看答案）

（线性性质 1）

② 若



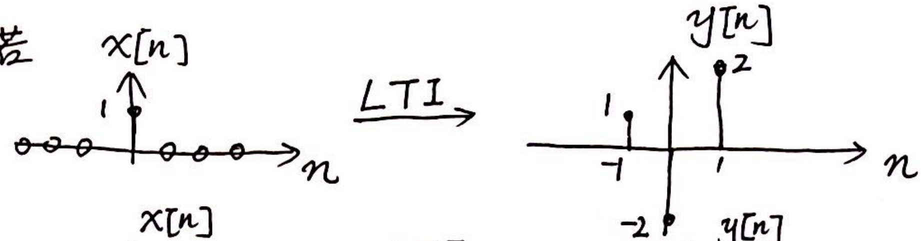
则



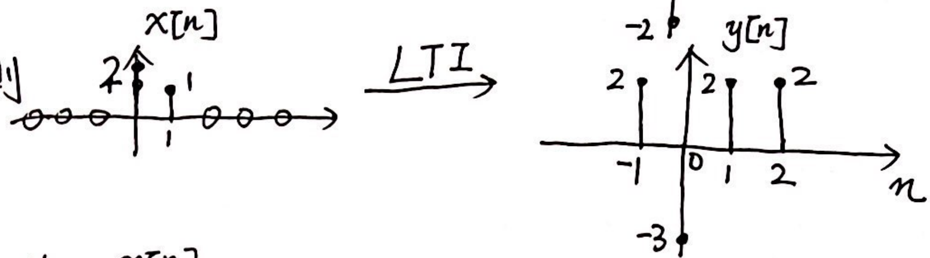
（时不变性质）

扫描全能王 创建

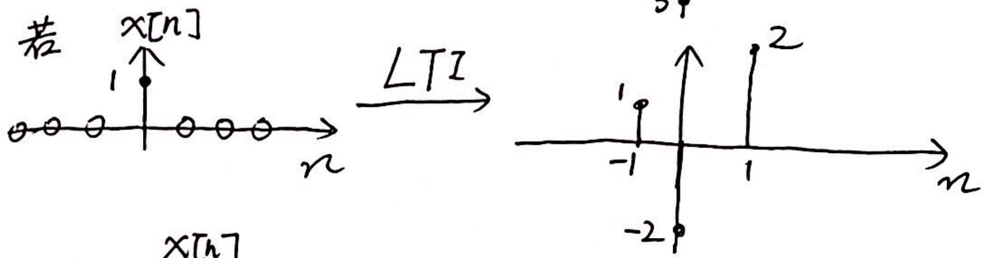
③ 若



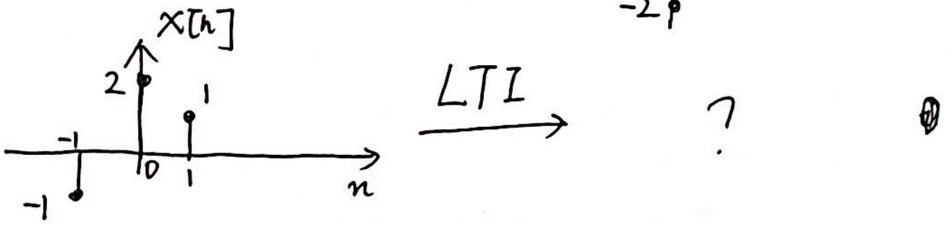
则



④ 若

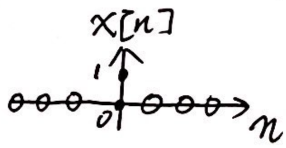


则



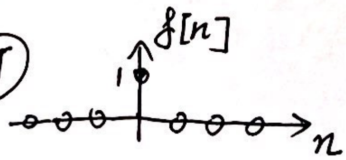
请自己做④，总结一下方法。

总结：~~如果~~对于一个离散LTI系统，如果我们知道



对应的输出y[n]，那么我们就知道了所有x[n]通过这个LTI系统后的输出y[n]。

定义：①



把这个0处为1，其他地方为0的特殊的输入定义为δ[n]，即单位脉冲。

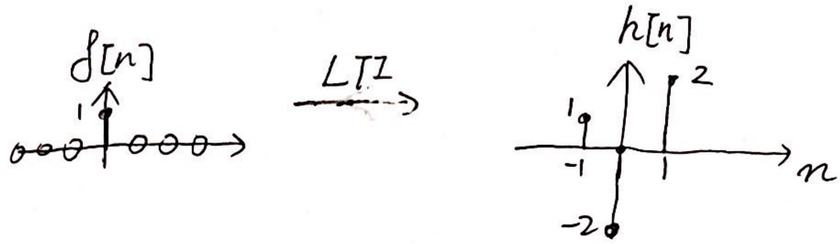
$\delta[0]=1$，$\delta[1]=0$，$\delta[-1]=0$ ....

② $\delta[n] \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow h[n]$

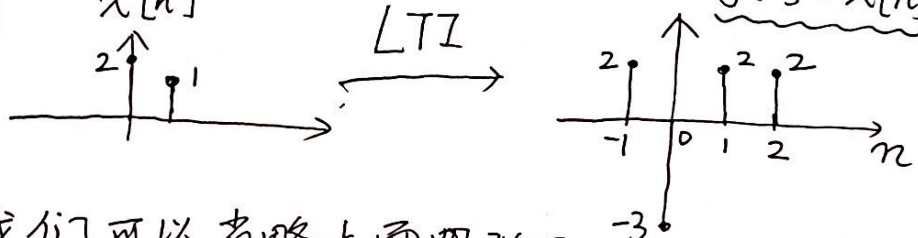
把 $\delta[n]$ 输入LTI后获得的输出定义为 $h[n]$，即单位脉冲响应（不同的LTI有不同的 $h[n]$；若两个LTI的 $h[n]$ 一样，则这两个LTI一样）

③ 把下面这种出题方式定义为卷积（convolution），用 $*$ 表示

若



则



$y[n] = x[n] * h[n]$

卷积就是做这道题！

我们可以省略上面四张图，直接写：

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

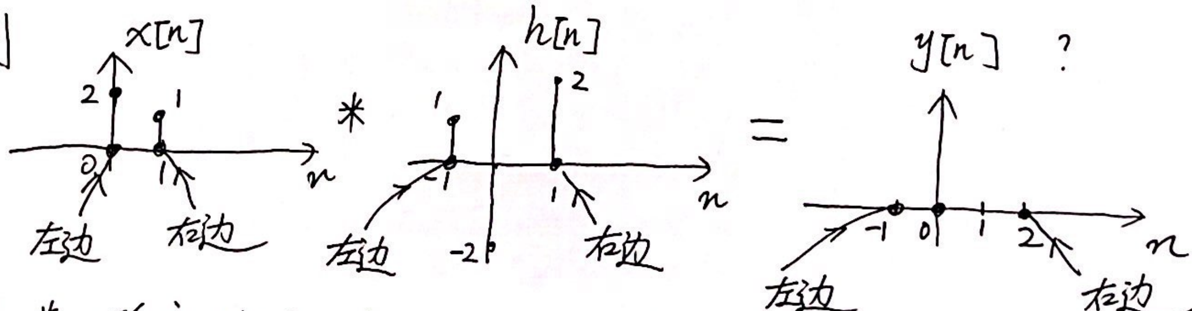
，$x[n] \rightarrow \boxed{\begin{matrix} LTI \\ h[n] \end{matrix}} \rightarrow y[n] = x[n] * h[n]$

但请注意，卷积的道理是上面这四张图，请仔细思考底下那个简单公式对应上面四张图所做的简化！

卷积的简便计算方法

方法1：列表法。

例



第一步，确定 $y[n]$ 不为0的取值范围

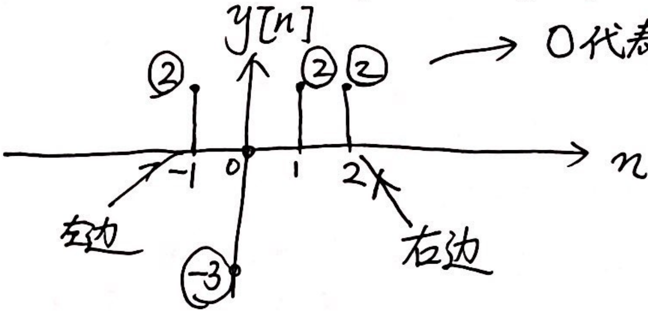
$y[n]$ 的左边 $=$ $x[n]$ 的左边 $+$ $h[n]$ 左边 $= 0 + (-1) = -1$

$y[n]$ 的右边 $=$ $x[n]$ 的右边 $+$ $h[n]$ 右边 $= 1 + 1 = 2$

第二步：列表法确定 $y[n]$ 取值

	$h[n]=\{1,-2,2\}$ → 从左抄到右				
$x[0]=2$	2	-4	4		→ 用 $x[0]=2$ 去乘 $h[n]$
$x[1]=1$		1	-2	2	→ 用 $x[1]=1$ 去乘 $h[n]$ 并右移一格
$y[n]$	2	-3	2	2	→ 上两行相加

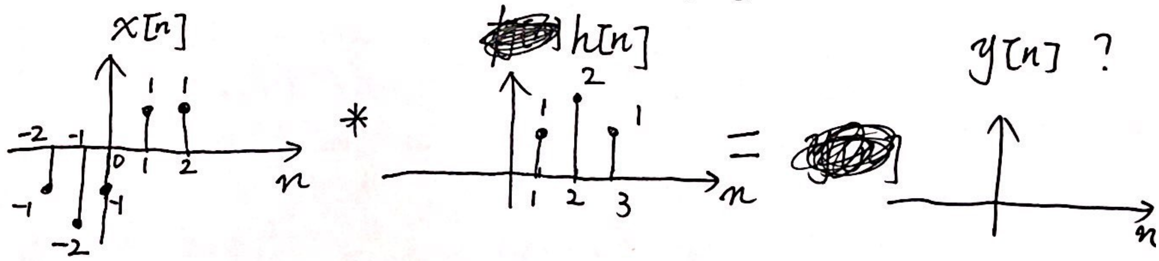
第三步：结合第一步与第二步画出 $y[n]$



→ O代表从左到右的数值。

请仔细体会上面步骤最开始作图的关系。

练习

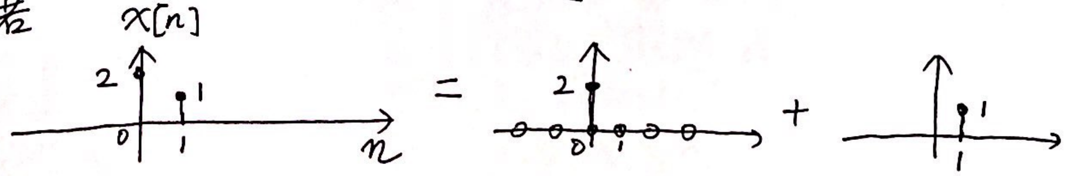


方法 2：公式法

卷积公式的推导

① 将 $x[n]$ 表示为 $\delta[n-k]$ 求和形式

例如：若



$$= 2\delta[n] + \delta[n-1]$$

$$= x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1]$$

一般的 我们有:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]$$

因此 卷积公式可以推导为:

$$\delta[n]\xrightarrow{LTI}h[n]\quad(\delta[n]与h[n]定义)$$

$$\delta[n-k]\xrightarrow{LTI}h[n-k]\quad(时不变性质)$$

$$x[k]\delta[n-k]\xrightarrow{LTI}x[k]h[n-k]\quad(线性性质1)$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]\xrightarrow{LTI}y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]\quad(线性性质2)$$

卷积公式

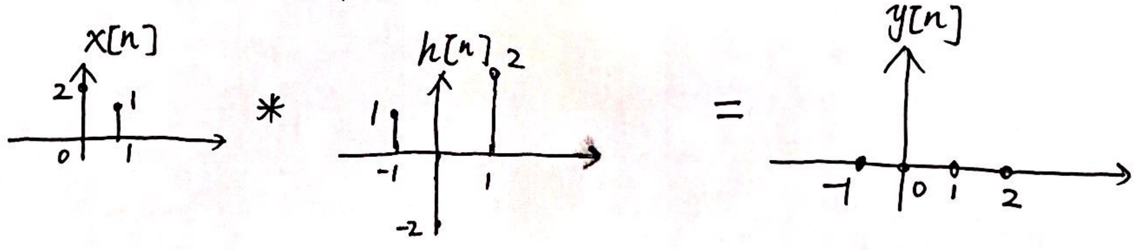
$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

利用卷积公式计算卷积的方法:

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}}_{④求和}\underbrace{x[k]}_{③相乘}h[\underbrace{-}_{①翻转}(k-\underbrace{n}_{②平移})]$$

例:



步骤1: 与列表法一样, 确定 y[n] 取值范围

y[n]左边 = x[n]左边 + h[n]左边 = 0-1 = -1

y[n]右边 = x[n]右边 + h[n]右边 = 1+1 = 2

步骤2：

2　1 → x[n]从左抄到右

× → 相乘

h[-n]即 h[n]从右抄到左　2　-2　1

翻转

2 ← y[n]最左边的数为2

2　1 → x[n]

×　× → 相乘

2　-2　1 → h[n]平移1个单位

-4 + 1 = -3 ← y[n]第2个数为-3

求和

2　1 → x[n]

×　× → 相乘

2　-2　1 → h[n]再平移一个单位

4　-2 = 2 ← y[n]从左第3个数为2

求和

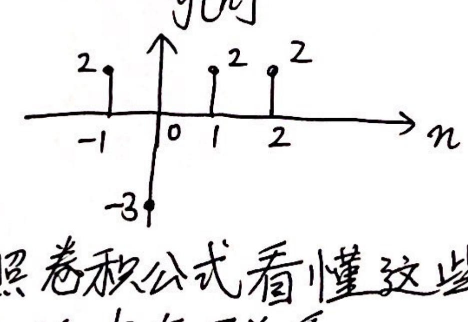
2　1 → x[n]

×

2　-2　1 → h[-n]再平移一个单位

2 ← y[n]最右一个数为2

因此



请对照卷积公式看懂这些步骤，同时对比列表法，看一下两种方法的内在联系

思考题：

① 两个长度为N的序列卷积，需要多少次加法，多少次乘法？

② 一个长度N_1的序列与一个长度N_2的序列卷积，获得序列长度为多少？

③ 用Matlab编写两个序列卷积程序

$Y = conv(X, H)$