拉氏变换初值定理与终值定理

① 初值定理：若 $x(t)$ 是因果信号，即当 $t<0$ 时 $x(t)=0$，且在 $t=0$ 时，$x(t)$ 不包含冲激函数或高阶奇异函数，则有

$$x(0^+) = \lim_{s\to+\infty} sX(s)$$

证明：$x(t)$ 因果 $\Longrightarrow$ $x(t) = x(t)u(t)$

$$x(t) = x(t)u(t) = \left[x(0^+) + x^{(1)}(0^+)t + \frac{x^{(2)}(0^+)}{2!}t^2 + \cdots \frac{x^{(n)}(0^+)}{n!}t^n\right]u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s}x(0^+) + \frac{1}{s^2}x^{(1)}(0^+) + \frac{1}{s^3}x^{(2)}(0^+) \cdots\cdots \frac{x^{(n)}(0^+)}{s^n}$$

则有：$$\lim_{s\to+\infty} sX(s) = x(0^+) + \underbrace{\left(\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}x^{(1)}(0^+) + \frac{1}{s^2}x^{(2)}(0^+)\cdots\cdots\right)}_{\text{此项为 } 0}$$

命题得证。

② 终值定理：若 $x(t)$ 是因果信号，且在 $t=0$ 时，$x(t)$ 不包含冲激函数或高阶奇异函数，则有：

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

证明：考查函数 $U(s) = \int_0^{+\infty} x'(t)e^{-st}dt$

① $$\lim_{s\to+\infty} U(s) = \lim_{s\to+\infty}\int_0^{+\infty} x'(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} x'(t)dt$$

$$= x(+\infty) - x(0)$$

又因为 $U(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dx(t)$

$$= x(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

由于 $x(t)$ 因果信号，所以 $\int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = X(s)$

$$U(s) = sX(s) - x(0)$$

对比两式易知

$$x(+\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Z变换的初值定理与终值定理

① 初值定理：对于因果序列 $x[n]$，即当 $n<0$ 时，$x[n]=0$，

有：$x[0] = \lim_{z\to+\infty} X(z)$

证明：$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2}\cdots\cdots$

两边取 $z\to+\infty$ 极限就是结果。

② 终值定理：对于因果序列 $x[n]$，若 $X(z)$ 极点落在单位圆内(单位圆上最多在 $z=1$ 处有一阶极点，则

$$\lim_{n\to+\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

证明：~~先~~考查 $y[n] = x[n+1] - x[n]$，$(n\geq 0)$ 则有

$$Y(z) = zX(z) - zx[0] - X(z)$$
$$= (z-1)X(z) - zx[0]$$

~~则此有~~ 所以有：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x[n+1]-x[n]\right)z^{-n} = (z-1)X(z) - zx[0]$$

两边取极限化简

$$\lim_{z \to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x[n+1] - x[n]\right) z^{-n} = \lim_{z \to 1} (z-1) X(z) - x[0]$$

即：

$$\lim_{z \to 1} (z-1) X(z) = \cancel{x[0]} + \cancel{x[1]} - \cancel{x[0]} + \cancel{x[2]} - \cancel{x[1]} + x[3] - \cancel{x[2]} \cdots\cdots + x[+\infty]$$

命题得证