傅里叶级数与傅里叶变换性质

傅里叶级数

① $x(t)$ 是以 T_0 为周期的周期函数

② 形式：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0t}$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jkw_0t}dt$$

其中 $w_0=\frac{2\pi}{T_0}$

傅里叶变换

① $x(t)$ 可以为非周期函数

② 形式：

$$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)e^{jwt}dt$$

两者关系：$a_k=\frac{1}{T_0}X(jkw_0)$ (3-40)

傅里叶级数

③ 线性性质

若 $x_1(t)\xrightarrow{FS} a_{1k}$

$x_2(t)\xrightarrow{FS} a_{2k}$

则

$ax_1(t)+bx_2(t)\xrightarrow{FS}$

$a\,a_{1k}+b\,a_{2k}$

傅里叶变换

③ 线性性质：

若 $x_1(t)\xrightarrow{F} X_1(jw)$

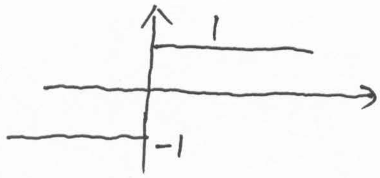
$x_2(t)\xrightarrow{F} X_2(jw)$

则 $ax_1(t)+bx_2(t)\xrightarrow{F}$

$aX_1(jw)+bX_2(jw)$

思考题：

求 $\mathrm{sgn}(t)=$



的傅里叶变换

傅里叶级数

④ 时移性质

若 $x(t)\xrightarrow{FS} a_k$

则 $x(t-t_0)\xrightarrow{FS} e^{-jkw_0t_0}a_k$ (3-72)

傅里叶变换

④ 时移性质

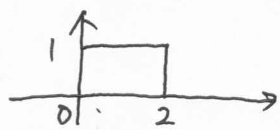
若 $x(t)\xrightarrow{F} X(jw)$

则 $x(t-t_0)\xrightarrow{F} e^{-jwt_0}X(jw)$

思考题：

~~求 $\sin(w_0t)$, $\cos(w_0t)$ 的~~

求



$\xrightarrow{F}$?

傅里叶级数	傅里叶变换
⑤ 频移 无	⑤ 频移 若 $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$ 则 $x(t)e^{jw_0t} \xrightarrow{F} X(j(w-w_0))$ 思考题： $\sin(w_0t) \xrightarrow{F} ?$ $\cos(w_0t) \xrightarrow{F} ?$
⑥ 共轭对称性 实偶 $\xrightarrow{FS}$ a_k为实数且 $a_k = a_{-k}$ 实奇 $\xrightarrow{FS}$ a_k为纯虚数，且 $a_k = -a_{-k}$	⑥ 共轭对称性 实偶 $\xrightarrow{F}$ 实偶 实奇 $\xrightarrow{F}$ 虚奇 实函数的傅里叶变换实部为偶函数 虚部为奇函数。 实函数的幅频特性为偶函数，相频特 性为奇函数。 思考题：一个实函数 $x(t)$ 的傅里叶变 $X(jw)$ 的实部为 $\frac{2}{w^2+1}$ ⓐ 若 $x(t)=0$ $(t>0$时$)$ 求 $x(t)$ ⓑ 若 $x(t)=0$ $(t<0$时$)$，求 $x(t)$
⑦ 微分 若 $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$ 则 $x'(t) \xrightarrow{FS} jkw_0a_k$	⑦ 微分 若 $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$ 则 $x'(t) \xrightarrow{F} jwX(jw)$
⑧ 积分 若 $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$ 则 $\int_{T_0} x(u)\,du \xrightarrow{FS} \frac{a_k}{jkw_0}$	⑧ 积分 若 $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$ 则 $\int_{-\infty}^{t} x(u)\,du \xrightarrow{F} \frac{X(jw)}{jw} + \pi X(j0)\delta($
⑨ 时间与频率尺度变换 若 $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$（以$T_0$为周期） 则 $x(at) \xrightarrow{FS} a_k$（以$\frac{T_0}{a}$为周期）	⑧ 时间与频率尺度变换 若 $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$ 则 $x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{\lvert a\rvert}X(j\frac{w}{a})$

傅里叶级数

⑩ 帕斯瓦尔定理

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$

⑪ 时域卷积、

若 $x(t)\xrightarrow{FS}a_k$

$h(t)\xrightarrow{FS}b_k$

则 $x(t)\circledast h(t)\xrightarrow{FS}T_0a_kb_k$

讲圆卷积概念

讲吉布斯现象

⑫ 调制性质

若 $x(t)\xrightarrow{FS}a_k$

$y(t)\xrightarrow{FS}b_k$

则 $x(t)y(t)\xrightarrow{FS}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_lb_{k-l}$

傅里叶变换

⑩ 帕斯瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$$

思考题：

求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt=\ ?$

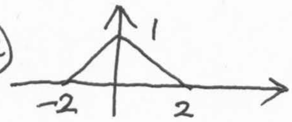
⑪ 时域卷积、

若 $x(t)\xrightarrow{F}X(j\omega)$

$h(t)\xrightarrow{F}H(j\omega)$

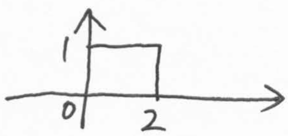
则 $x(t)*h(t)\xrightarrow{F}X(j\omega)H(j\omega)$

思考题：

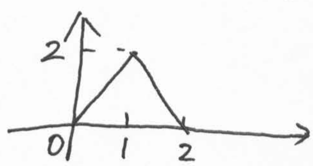
ⓐ 

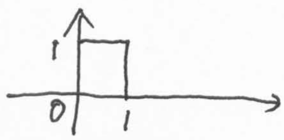
$\xrightarrow{F}$?

ⓑ 若：



$\xrightarrow{LTI}$



则 

$\xrightarrow{LTI}$?

⑫ 调制性质

若 $x_1(t)\xrightarrow{F}X_1(j\omega)$

$x_2(t)\xrightarrow{F}X_2(j\omega)$

则 $x_1(t)x_2(t)\xrightarrow{F}\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega)*X_2(j\omega)$