《信号与系统》

竝

Chapter 1 信号与系统基本概念

1、信号的分类

奇信号与偶信号

奇信号：$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$　　$x_o[n]=\frac{1}{2}[x[n]-x[-n]]$

偶信号：$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$　　$x_e[n]=\frac{1}{2}[x[n]+x[-n]]$

任何一个信号都可以分解为奇信号与偶信号的和

能量信号与功率信号

能量信号：$E=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x(t)\mid^2\ dt\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\mid x[n]\mid^2\end{cases}$　　**功率信号**：$P=\begin{cases}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\mid x(t)\mid^2\ dt\\ \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{+N}\mid x[n]\mid^2\end{cases}$

周期信号是功率信号，除了具有无限能量与无限功率的信号外，

时限的或 $t\to\infty, f(t)=0$ 的非周期信号就是**能量信号**；

$t\to\infty, f(t)\neq 0$ 的就是**功率信号**。

2、基本连续时间信号

阶跃函数 $u(t)$　冲激函数 $\delta(t)$ 抽样函数 $Sa(t)$

$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$　　$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt$

$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta^{(n)}(t-t_0)dt=(-1)^n x(t_0)$　　$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$　（冲激函数筛选性）

$\delta(t)=\delta(-t)$　　$\delta'(t)=-\delta'(-t)$

$x(t)\delta'(t)=x(0)\delta'(t)-x'(0)\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta^{(n)}(t-t_0)dt=(-1)^n x(t_0)$

$\delta[f(t)]=\sum\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)$　（其中 t_i 为 $f(t)$ 的零点）

$Sa(t)=\frac{sint}{t}$　　$\int_0^{\infty}Sa(t)dt=\pi/2$　　$\int_{-\infty}^{+\infty}Sa(t)dt=\pi$

$Sinc(t)=Sa(\pi t)$

3、基本离散时间信号

阶跃序列 $u[n]$　脉冲序列 $\delta[n]$

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1] \qquad u[n]=\sum_{i=-\infty}^{n}\delta[i]$$

4、系统的基本性质

（这里考虑连续时间信号，离散同理）

系统	性质	通俗语言	举例
线性	叠加性、齐次性	多项式中，每一项都有 x，且每一个 x 都是一次项	$y(t)=x(t)+x(t+1)$
时不变性	特性不随时间变化	t 只在括号里，且 t 的系数为 1	$y(t)=2x(t-1)$
无记忆性	输出仅取决于当前输入	括号里是且只是 t	$y(t)=e^{x(t)}$
因果性	任何时刻的输出仅取决于现在或之前的输入，与之后的输入无关	任意 $x(t_1)$、$y(t_2)$　$t_1<t_2$	$y(t)=x(t-1)+x(t-2)$
可逆性	不同的输入对应不同的输出	单射	/
稳定性	若输入有界，输出一定有界	/	/

Chapter 2 LTI系统的时域分析

1、连续时间LTI系统的时域分析

信号的脉冲分解

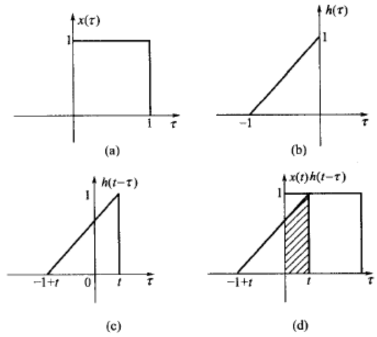
$\forall\, x(t) \qquad x(t)=x(t)*\delta(t)$

单位冲激响应

若 $\delta(t)\longrightarrow h(t)$　则 $x(t)\longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$

卷积积分图示法

对于 $y(t)=x(t)*h(t)$ 。**翻转、平移、相乘、积分。**



卷积的性质

1、交换律、结合律、分配律

2、$x(t)*h(t)=\frac{dx(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda$

3、$x(t)*\delta^{(n)}(t-t_0)=x^{(n)}(t-t_0)$

4、$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda$

2、离散时间LTI系统的时域分析

信号的脉冲分解

$\forall\ x[n] \qquad x[n]=x[n]*\delta[n]$

单位冲激响应

若 $\delta[n]\longrightarrow h[n]$ 则 $x[n]\longrightarrow y[n]=x[n]*h[n]$

卷积积分图示法

对于 $y([n]=x[n]*h[n]$ 。**翻转、平移、相乘、求和。**

卷积的性质

1、交换律、结合律、分配律

2、$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$

3、$x[n]*u[n]=\sum\limits_{i=-\infty}^{n}x[i]$

3、单位冲激/脉冲响应与LTI系统性质

可逆性

$h(t)*h_1(t)=\delta(t) \quad / \quad h[n]*h_1[n]=\delta[n] \qquad h_1$：逆响应

稳定性

$\int_{-\infty}^{+\infty}\mid h(t)\mid dt<\infty \quad / \quad \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\mid h[n]\mid<\infty$

因果性

$t<0$ 时，$h(t)=0$

单位阶跃响应

$u(t)\longrightarrow s(t) \quad / \quad u[n]\longrightarrow s[n]$

有 $\begin{cases} s(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \quad / \quad s[n]=u[n]*h[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{n}h[k] \\ h(t)=\frac{ds(t)}{dt} \quad / \quad h[n]=s[n]-s[n-1] \end{cases}$

则 $\begin{cases} y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \frac{ds(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * s(t) \\ y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * (s[n] - s[n-1]) = (x[n] - x[n-1]) * s[n] \end{cases}$

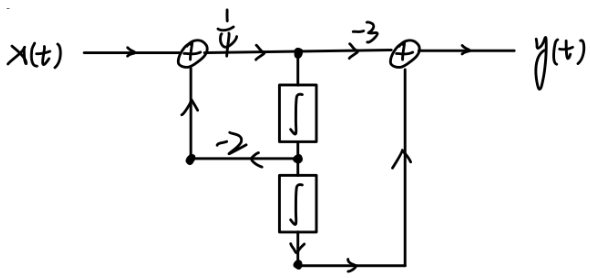
4、LTI系统的框图表示

对于 $f(y(t)) = g(x(t))$ 考虑 $f(w(t)) = x(t)$ 与 $y(t) = g(w(t))$ 将前式最高次项单独移到等式一侧，即可画出框图

例如： $4y''(t) + 2y'(t) = -3x''(t) + x(t)$

考虑 $4w''(t) + 2w'(t) = x(t)$ 与 $y(t) = -3w''(t) + w(t)$ 且 $w''(t) = \frac{x(t)-2w'(t)}{4}$

则框图如下



Chapter 3 连续时间信号与系统的频域分析

1、连续时间周期信号的傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad (\omega_0 = 2\pi/T_0)$$

存在收敛条件，也存在吉布斯现象。

典型周期信号的傅里叶展开

	函数	傅里叶级数
三角函数	$x(t) = sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$	$a_1 = \frac{1}{2j} \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad a_k = 0, \mid k \mid \neq 1$
周期方波信号	$x(t) = \begin{cases} 1 & \lvert t \rvert < T_1 \\ 0 & T_1 < \lvert t \rvert < T_2 \end{cases}$	$a_k = \begin{cases} 2T_1/T & k = 0 \\ \frac{2sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} & k \neq 0 \end{cases}$
周期三角脉冲信号	周期为 T	$a_k = \frac{1}{2}Sa^2(\frac{\pi}{2}k)$

2、连续时间非周期信号的傅里叶变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = |X(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

存在收敛条件，也存在吉布斯现象。

典型傅里叶变换对

	函数	傅里叶变换
单边指数信号	$e^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$
	$te^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
双边指数信号	$e^{-a\|t\|}$	$\frac{1}{a+j\omega}+\frac{1}{a-j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
单位冲激信号	$\delta(t)$	1
抽样函数	$\frac{sin\omega_c t}{\pi t}$	$\begin{cases}1 & \|\omega\|<\omega_c \\ 0 & else\end{cases}$
矩形窗函数	$\begin{cases}1 & \|t\|<T \\ 0 & else\end{cases}$	$2TSa(\omega T)=\frac{2sin\omega T}{\omega}$

3、连续时间周期信号的傅里叶变换

$$e^{j\omega_0 t}\overset{F}{\longleftrightarrow}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$x(t)=\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}\overset{F}{\longleftrightarrow}X(j\omega)=2\pi\sum_k a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

	函数	傅里叶变换
余弦信号	$cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
正弦信号	$sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
周期冲激串	$\delta_T(t)=\sum_k\delta(t-kT)$	$\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)=\omega_0\sum_k\delta(\omega-k\omega_0)$

4、连续时间傅里叶变换的性质

线性性质

$$ax_1(t)+bx_2(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}aX_1(j\omega)+bX_2(j\omega)$$

时移性质

$$x(t-t_0)\overset{F}{\longleftrightarrow}e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

频移性质

$$x(t)e^{j\omega_0 t}\overset{F}{\longleftrightarrow}X(j(\omega-\omega_0))$$

$$\text{有}\begin{cases}x(t)cos(\omega_0 t)\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2}[X(j(\omega-\omega_0))+X(j(\omega+\omega_0))] \\ x(t)sin(\omega_0 t)\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2j}[X(j(\omega-\omega_0))-X(j(\omega+\omega_0))]\end{cases}$$

共轭性与共轭对称性

若 $x(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(j\omega)$ 则 $x^*(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X^*(-j\omega)$ （共轭性）

若 $x(t)=x^*(t)$ 则 $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$ （共轭对称性）

易得：若 $x(t)$ 为偶函数，则 $X(j\omega)$ 为实值函数；若 $x(t)$ 为奇函数，则 $X(j\omega)$ 为纯虚函数。（这里 $x(t)$ 为实值函数）

即 $X(j\omega)$ 的实部由 $x(t)$ 的偶部贡献，$X(j\omega)$ 的虚部由 $x(t)$ 的奇部贡献 （若 $x(t)$ 为纯虚函数，则恰好相反）

微分特性

$$x^{(n)}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n X(j\omega)$$

积分特性

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

时间与频率尺度变换

$$\begin{cases} x(at) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X(j\frac{\omega}{a}) \\ \frac{1}{|a|}x(\frac{t}{a}) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(ja\omega) \end{cases}$$

对偶性

$$若\ x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)\ 则 \begin{cases} X(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi x(-\omega) \\ -jtx(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \end{cases}$$

帕斯瓦尔定理

$$若\ x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)\ 则 \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

时域卷积性质

$$x(t) * h(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

调制性质

$$x(t) \cdot h(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * H(j\omega)$$

5、连续时间LTI系统的频域分析

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) \Longrightarrow H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$$

线性常微分方程表征的LTI系统

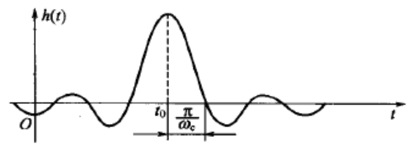
$$\sum a_m y^{(m)}(t) = \sum b_n x^{(n)}(t) \Longrightarrow \sum a_m (j\omega)^m Y(j\omega) = \sum b_n (j\omega)^n X(j\omega) \Longrightarrow H(j\omega) = \sum b_n (j\omega)^n / \sum a_m (j\omega)^m$$

6、信号的滤波与理想低通滤波器

频域特性与冲激响应

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & ,|\omega| < \omega_c \\ 0 & ,else \end{cases}$$

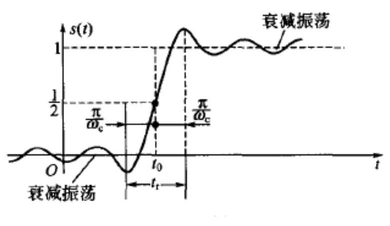
$$h(t) = \frac{sin[\omega_c(t-t_0)]}{\pi(t-t_0)}$$



阶跃响应

$$u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$s(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \begin{cases} [\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)]e^{-j\omega t_0} & ,|\omega| < \omega_c \\ 0 & ,else \end{cases}$$



则可得 $s(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si[\omega_c(t-t_0)]$ 其中 $Si(t)=\int_0^t\frac{sinx}{x}dx$

对矩形脉冲的响应

若 $x(t)=u(t)-u(t-\tau)$ 则 $y(t)=\frac{1}{\pi}\{Si[\omega_c(t-t_0)]-Si[\omega_c(t-t_0-\tau)]\}$

Chapter 4 离散时间信号与系统的频域分析

1、离散时间周期信号的傅里叶级数

$x[n]=\sum_{k=<n>}a_ke^{jk\omega_0n}$ $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\omega_0n}$ $(\omega_0=\frac{2\pi}{N})$

没有收敛条件，也不存在吉布斯现象。

2、离散时间非周期信号的傅里叶变换

$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega})=\sum_n x[n]e^{-j\omega n}$

存在收敛条件，但不存在吉布斯现象。

典型傅里叶变换对

	函数	傅里叶变换
单边指数信号	$a^n\cdot u[n]$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
双边指数信号	$a^{\lvert n\rvert}$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{1}{1-ae^{j\omega}}=\frac{1-a^2}{1-2acos\omega+a^2}$
单位脉冲信号	$\delta[n]$	1
常数信号	1	$2\pi\sum_k\delta(\omega-2k\pi)$
矩形脉冲信号	$\begin{cases}1 & \lvert n\rvert\le N_1\\0 & \lvert n\rvert>N_1\end{cases}$	$\frac{sin(N_1+\frac{1}{2})\omega}{sin(\frac{1}{2}\omega)}$
矩形窗函数	$\frac{sin\omega_cn}{\pi n}$	$\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\0 & else\end{cases}$

3、离散时间周期信号的傅里叶变换

$e^{j\omega_0n}\xleftrightarrow{F}2\pi\sum_l\delta(\omega-\omega_0-2l\pi)$

$x[n]=\sum_{k=<N>}a_ke^{jk\omega_0n}\xleftrightarrow{F}2\pi\sum_k a_k\delta(\omega-k\omega_0)$

	函数	傅里叶变换
余弦信号	$cos(\omega_0n)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
正弦信号	$sin(\omega_0n)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
周期冲激串	$\delta_T[n]=\sum_k\delta[n-kN]$	$\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)=\omega_0\sum_k\delta(\omega-k\omega_0)$

4、离散时间傅里叶变换的性质

线性性质

$$ax_1[n]+bx_2[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

时移性质

$$x[n-n_0]\overset{F}{\longleftrightarrow}e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

频移性质

$$x[n]e^{j\omega_0 n}\overset{F}{\longleftrightarrow}X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

$$\text{有}\begin{cases}x[n]cos\omega_0 n\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2}[X(e^{j(\omega-\omega_0)})+X(e^{j(\omega+\omega_0)})]\\ x[n]sin\omega_0 n\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2j}[X(e^{j(\omega-\omega_0)})-X(e^{j(\omega+\omega_0)})]\end{cases}$$

共轭性与共轭对称性

若 $x[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}X(e^{j\omega})$ 则 $x^*[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}X^*(e^{-j\omega})$ （共轭性）

若 $x[n]=x^*[n]$ 则 $X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$ （共轭对称性）

易得：若 $x[n]$ 为偶函数，则 $X(e^{j\omega})$ 为实值函数；若 $x[n]$ 为奇函数，则 $X(e^{j\omega})$ 为纯虚函数。（这里 $x[n]$ 为实值函数）

即 $X(e^{j\omega})$ 的实部由 $x[n]$ 的偶部贡献，$X(e^{j\omega})$ 的虚部由 $x[n]$ 的奇部贡献 （若 $x[n]$ 为纯虚函数，则恰好相反）

时域差分性

$$x[n]-x[n-1]\overset{F}{\longleftrightarrow}(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

累加性

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-e^{j\omega}}x(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_k\delta(\omega-2\pi k)$$

时域扩展

$$\text{定义内插 } x_{(k)}[n]=\begin{cases}x[n/k] & n\text{为}k\text{的整倍数}\\ 0 & else\end{cases}$$

有 $x_{(k)}[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}X(e^{jk\omega})$

频域微分

$$-jnx[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

帕斯瓦尔定理

$$\sum_n|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega\qquad\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^2=\sum_{k=<N>}|a_k|^2$$

时域卷积性质

$$x[n]*h[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})\qquad x[n]*h[n]\overset{FS}{\longleftrightarrow}Na_kb_k$$

调制性质

$$x[n]\cdot h[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\theta})\cdot H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta\qquad x[n]\cdot h[n]\overset{FS}{\longleftrightarrow}a_k*b_k=\sum_{l=<N>}a_l\cdot b_{k-l}$$

5、对偶性

离散傅里叶级数的对偶性

若 $x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a[k]$ 则 $a[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}x[-k]$

离散时间与连续时间傅里叶级数的对偶性

若 $x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$ 则 $X(e^{jt}) \overset{FS}{\longleftrightarrow} x[-k]$

若 $x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$ 则 $a[n] = a_n \overset{F}{\longleftrightarrow} x(-\omega)$

6、离散时间LTI系统的频域分析

$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$

线性常微分方程表征的LTI系统

$\sum\limits_k a_k y[n-k] = \sum\limits_k b_k x[n-k] \Longrightarrow \sum\limits_k a_k(e^{-jk\omega})Y(e^{j\omega}) = \sum\limits_k b_k(e^{-jk\omega})X(e^{j\omega}) \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \sum b_k e^{-jk\omega}/\sum a_k e^{-jk\omega}$

7、信号的滤波与理想滤波器

频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c < |omega| \le \pi \end{cases}$$

$h[n] = \frac{sin\omega_c n}{\pi n}$

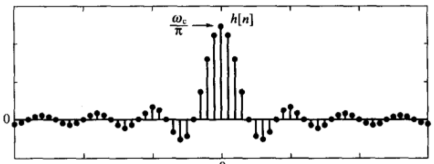


图 4-19　离散时间理想低通滤波器的单位脉冲响应($\omega_c = \frac{\pi}{4}$)

单位阶跃响应

$s[n] = \sum\limits_{m=-\infty}^{n} h[m]$

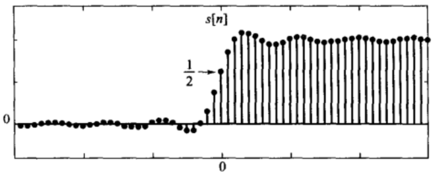


图 4-20　离散时间理想低通滤波器的单位阶跃响应

Chapter 5 采样与调制

1、连续信号的时域采样定理

冲激串采样

采样函数 $p(t) = \sum\limits_n \delta(t-nT) \overset{F}{\longleftrightarrow} P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum\limits_k \delta(\omega - k\omega_s)$　其中 T 为采样周期　$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

则 $x_p(t) = x(t)\cdot p(t) = \sum\limits_n x(t)\delta(t-nT) = \sum\limits_n x(nT)\delta(t-nT) = \sum\limits_n x_d[n]\delta(t-nT)$

$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{T}\sum\limits_k X(j(\omega - k\omega_s)$　　$X_d(e^{j\omega}) = X_p(j\frac{\omega}{T}) = \frac{1}{T}\sum\limits_k X(j(\omega - 2k\pi)/T)$

奈奎斯特率

信号最高频率的两倍 $\omega_n = 2\omega_{max}$

采样定理

采样频率必须大于奈奎斯特率，此时 $x(t)$ 唯一由样本值序列 $x[n]=x(nT)$ 确定且可恢复，否则会发生混叠。

欠采样

若采样频率小于奈奎斯特率，则会发生混叠，经带限内插后所得 $x_r(t)$ 满足 $x_r(t)|_{t=nT}=x(nT)$

若为正弦信号，则可获得 $x_r(t)$ 但会从高频变成低频，且相位倒置

2、离散信号的时域采样定理

脉冲串采样

$$p[n]=\sum_k \delta[n-kN] \overset{F}{\longleftrightarrow} P(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_k \delta(\omega-k\omega_s) \qquad \text{其中 } T \text{ 为采样周期} \quad \omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

则 $x_p[n]=x[n]\cdot p[n]=\sum_k x[kN]\delta[n-kN]=\begin{cases} x[n] & n=kN \\ 0 & else \end{cases}$

$$X_p(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} P(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega-k\omega_s)})$$

采样定理

采样频率必须大于奈奎斯特率，此时 $x[n]$ 唯一由样本值序列 $x[kn]$ 确定且可恢复，否则会发生混叠。

抽取/减采样

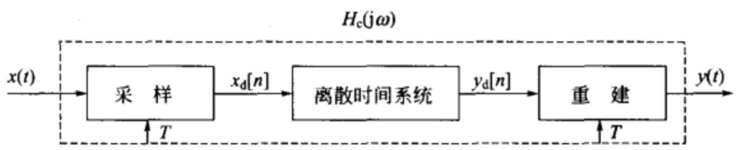
$$x_s[n]=x[nN]=x_p[nN] \qquad X_s(e^{j\omega})=X_p(e^{j\omega/N})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega-2\pi k)/N})$$

内插/增采样

$$x[n]=\begin{cases} x_s[n/N] & n=kN \\ 0 & else \end{cases} \qquad X(e^{j\omega})=X_s(e^{j\omega N})$$

3、连续时间的离散信号处理

原理框图如下



连续时间信号的离散时间处理，其中 $x_d[n]=x(nT)$，$y_d[n]=y(nT)$

$$X_d(e^{j\omega})=X_p(j\tfrac{\omega}{T})=\frac{1}{T}\sum_k X(j(\omega-2k\pi)/T) \Longleftrightarrow X(j\omega)=TX_d(e^{j\omega T}) \quad |\omega|<\omega_s/2$$

由图可得 $Y(j\omega)=TY_d(e^{j\omega T}) \quad |\omega|<\omega_s/2 \Longrightarrow Y(j\omega)=\begin{cases} TX_d(e^{j\omega T})H_d(e^{j\omega T}) & |\omega|<\omega_s/2 \\ 0 & else \end{cases}$

定义 $H_c(j\omega)=\begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & |\omega|<\omega_s/2 \\ 0 & else \end{cases}$ 则 $Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H_c(j\omega)$

$$H_d(e^{j\omega})=\sum_k H_c(j(\omega-2k\pi)/T)=\frac{1}{T}\sum_k TH_c(j(\omega-2k\pi)/T) \Longrightarrow h_d[n]=Th_c(nT)$$

Chapter 6 信号与系统的复频域分析

1、拉普拉斯变换

令 $s=\sigma+j\omega$　　则 $X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt \Longleftrightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$

收敛域 ROC

使得 $x(t)$ 的拉氏变换存在的 s 的值的范围，若 ROC 包含 $j\omega$ 轴，则 $F[x(t)]$ 一定收敛

x(t) 时域特性与 X(s) 收敛域关系

（1）$X(s)$ 收敛域一定呈带状区域

（2）若 $x(t)$ 为有理函数，则 ROC 不应包含任何极点；若 $X(s)$ 为有理函数，则 ROC 的边界由极点限定或无穷远且不包含任何极点

（3）若 $x(t)$ 时限且绝对可积，则 ROC 为整个 s 平面

（4）若 $x(t)$ 为右边信号，则 ROC 为最右极点的右边；若 $x(t)$ 为左边信号，则 ROC 为最左极点的左边；若 $x(t)$ 为双边信号，则 ROC 为带状区域。

典型拉普拉斯变换对

函数	拉普拉斯变换	ROC
$\delta(t)$	1	整个平面
$u(t)$	$1/s$	$Res>0$
$-u(-t)$	$1/s$	$Res<0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$1/s^n$	$Res>0$
$cos\omega_0t\cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$Res>0$
$sin\omega_0t\cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$Res>0$

2、双边拉普拉斯变换性质

性质	信号	拉普拉斯变换	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
线性	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	至少包含：$R_1\cap R_2$
时移	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
S 域平移	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R+\mathrm{Re}\{s_0\}$
时域尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Ra
共轭	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
卷积	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	至少包含：$R_1\cap R_2$
时域微分	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$	$sX(s)$	至少包括 R
S 域微分	$-tx(t)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s)$	R
时域积分	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	至少包括：$R\cap\{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$

初值和终值定理

若 $t<0, x(t)=0$ 且在 $t=0$ 不包括任何冲激或高阶奇异函数，则

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$$

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$$

3、周期信号与抽样信号的拉氏变换性质

周期信号

前提：$t<0$ 时，$x(t)=0$

$X(s)=X_1(s)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}e^{-nsT}=X_1(s)\frac{1}{1-e^{-sT}}\quad Re\{s\}>0$

抽样信号

$\delta_T(t)\cdot u(t)\xleftrightarrow{L}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}e^{-nsT}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\quad Re\{s\}>0$

$x(t)\cdot\delta_T(t)\cdot u(t)\xleftrightarrow{L}X_s(s)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x(nT)e^{-nsT}$

4、拉氏反变换

考虑 $X(s)=(b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m)/(a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n)$

分母有n个互异实根

例： $X(s)=\frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}\quad Re\{s\}>0$

解： 令分母的3个互异实根分别为 $p_1=0\quad p_2=-1\quad p_3=-3$

$X(s)=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+1}+\frac{c_3}{s+3}$ 其中 $c_i=(s-p_i)X(s)|_{s=p_i}$ 可得 $c_1=\frac{100}{3}\quad c_2=-20\quad c_3=-\frac{10}{3}$

则 $X(s)=\frac{\frac{100}{3}}{s}+\frac{-20}{s+1}+\frac{-\frac{10}{3}}{s+3}$

则 $x(t)=(\frac{100}{3}-20e^{-t}-\frac{10}{3}e^{-3t})\cdot u(t)$

分母有k重根

例： $X(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}\quad Re\{s\}>0$

解： 令分母的2个互异实根分别为 $p_1=-1\quad p_2=0$

$X(s)=\frac{k_{11}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{13}}{s+1}+\frac{k_2}{s}$ 其中 $k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\cdot\frac{d^{i-1}((s+1)^3X(s))}{ds^{i-1}}|_{s=p_i}$ 可得
$k_{11}=3\quad k_{12}=2\quad k_{13}=2\quad k_2=-2$

则 $X(s)=\frac{3}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s}$

则 $x(t)=(\frac{3}{2}t^2e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}-2)\cdot u(t)$

5、单边拉氏变换性质

$\tilde{X}(s)=\int_0^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$ 记为 $\quad x(t)\xleftrightarrow{uL}\tilde{X}(s)$

时域微分

$\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{uL}s\tilde{X}(s)-x(0)\quad\Longrightarrow\quad\frac{d^{(n)}x(t)}{dt^n}\xleftrightarrow{uL}s^n\tilde{X}(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x'(0)-\cdots-x^{(n-1)}(0)$

时域积分

$\int_{-\infty}^{t}x(t)dt\xleftrightarrow{uL}\frac{1}{s}\tilde{X}(s)+\int_{-\infty}^{0^-}x(\tau)d\tau/s$

卷积

当 $t<0\quad x_1(t)=x_2(t)=0$ 时，$x_1(t)*x_2(t)\xleftrightarrow{uL}\tilde{X}_1(s)\cdot\tilde{X}_2(s)$

6、连续时间LTI系统的S域分析

系统函数

$y(t) = H(s)e^{st}$

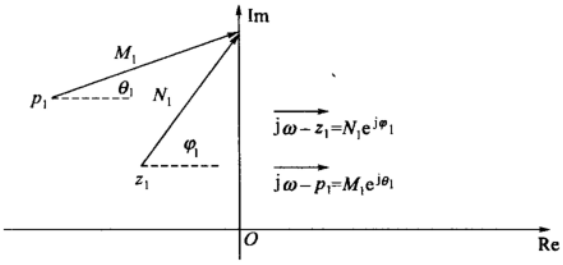
若 $\sum a_m y^{(m)}(t) = \sum b_n x^{(n)}(t)$ 则 $Y(s)\sum a_m s^m = X(s)\sum b_n s^n$

可得 $H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \sum a_m s^m / \sum b_n s^n = H_\infty \cdot \frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)}$　其中 H_∞ 为 b 的最高项除以 a 的最高项

H(s)与H(jw)

$$H(s) = H_\infty \cdot \frac{\prod \overrightarrow{s-z_i}}{\prod \overrightarrow{s-p_i}} \xRightarrow{s=j\omega} H_\infty \cdot \frac{\prod \overrightarrow{j\omega-z_i}}{\prod \overrightarrow{j\omega-p_i}} = H_\infty \cdot \frac{N_1N_2\ldots N_m}{M_1M_2\ldots M_n} \cdot e^{j[(\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_m)-(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]}$$

$$\overrightarrow{j\omega - z_i} = N_i e^{j\varphi_i}$$



稳定性

ROC 包含 $j\omega$ 轴

因果性

ROC 为右边平面

全响应求解

例： $y'' + 3y' + 2y = 5e^{-3t}u(t)$　$y(0^-) = 1$　$y'(0^-) = 2$

解： 两边同求单边拉氏变换，得 $[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{5}{s+3}$

移项得 $Y(s) = \frac{\frac{5}{s+3} + (s+3)y(0) + y'(0)}{s^2+3s+2}$　则 $Y_{zs}(s) = \frac{\frac{5}{s+3}}{s^2+3s+2}$　$Y_{zi}(s) = \frac{(s+3)y(0)+y'(0)}{s^2+3s+2}$

数值代入即可

Chapter 7 Z变换

1、双边Z变换

令 $z = re^{j\omega}$　则 $X(z) = \sum\limits_n x[n]z^{-n} \Longleftrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$

收敛域

(1) 有限长序列：$X(z) = \sum\limits_{n=n_1}^{n_2} x[n]z^{-n}$　$ROC: \begin{cases} |z| > 0 & n_1 > 0 \\ |z| < \infty & n_2 < 0 \\ 0 < |z| < \infty & n_1 < 0, n_2 > 0 \end{cases}$

(2) 右边序列：$X(z) = \sum\limits_{n=n_1}^{\infty} x[n]z^{-n}$　$ROC: R_x^- < |z|(< \infty)$　$(n_1 < 0)$

(3) 左边序列：$X(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{n_2} x[n]z^{-n}$　$ROC: (0 <)|z| < R_x^+$　$(n_2 > 0)$

(4) 双边序列:　　左+右　　$ROC: R_x^- < |z| < R_x^+$

2、Z变换性质与常用Z变换

性质

性质名称	时域	Z 变换	收敛域
	$x[n]$	$X(z)$	$ROC=R_x: R_{x^-} < \|z\| < R_{x^+}$
	$y[n]$	$Y(z)$	$ROC=R_y: R_{y^-} < \|z\| < R_{y^+}$
线性	$a_1 x[n]+a_2 y[n]$	$a_1 X(z)+a_2 Y(z)$	至少 $R_x \cap R_y$
移位	$x[n-m]$	$z^{-m}X(z)$	$R_x < \|z\| < R_{x^+}$
线性加权	$nx[n]$ $n^m x[n]$	$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$ $\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{(m)}X(z)$	$R_{x^-} < \|z\| < R_{x^+}$
时间扩展	$x_{(k)}=\begin{cases}x[n/k], n=rk\\0, \quad n\neq rk\end{cases}$ r 为整数	$X(z^k)$	$R_x^{1/k}$
时间反转	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R_x^{-1}
差分	$x[n]-x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	至少 $R_x \cap \|z\|>0$
Z 域尺度变换	$e^{j\omega_0 n}x[n]$ $z_0^n x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$ $X(z/z_0)$	R_x $z_0 R_x$
卷积定理	$x[n]*y[n]$	$X(z)Y(z)$	至少 $R_x \cap R_y$
共轭	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
累加	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	至少 $R_x \cap \|z\|>1$
初值定理	$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$		$x[n]$为因果序列, $\|z\|>R_x^-$
终值定理	$x[\infty]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$		$x[n]$为因果序列,且当 $\|z\|\geq 1$ 时, $(z-1)X(z)$收敛

常用Z变换

序列	Z变换	收敛域
$\delta[n]$	1	整个Z平面
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	除去0(若$m>0$)或∞(若$m<0$)的所有z
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$
$\cos\omega_0 n \cdot u[n]$	$\frac{1-\cos\omega_0 \cdot z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 \cdot z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$\sin\omega_0 n \cdot u[n]$	$\frac{\sin\omega_0 \cdot z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 \cdot z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$r^n\cos\omega_0 n \cdot u[n]$	$\frac{1-r\cos\omega_0 \cdot z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 \cdot z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\|z\|>r$
$r^n\sin\omega_0 n \cdot u[n]$	$\frac{r\sin\omega_0 \cdot z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 \cdot z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\|z\|>r$

3、Z反变换

幂级数展开法（长除法）

将 $X(z)$ 展开为 $x[0]+x[1]z^{-1}+\cdots+x[n]z^{-n}$ 的形式

部分分式展开法

例： $X(z)=\frac{z-2}{1-2z} \quad |z|>|\frac{1}{2}|$

解： 转化为以 z^{-1} 为变量，即 $X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

可得 $x[n]=(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]-(\frac{1}{2})^{n+1}u[n]$

围线积分法（留数法）

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x[n]=\sum\limits_m Res[X(z)z^{n-1}]|_{z=p_m} & \text{右边} \\ x[n]=-\sum\limits_m Res[X(z)z^{n-1}]|_{z=p_m} & \text{左边} \end{cases}$$

其中 $Res[X(z)z^{n-1}]|_{z=p_m}=\frac{1}{(L-1)!}[\frac{d^{L-1}}{dz^{L-1}}(z-p_m)^L X(z)z^{n-1}]|_{z=p_m}$ $\quad P_m$ 为 L 阶极点

例： $X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z|>\frac{1}{2}$

解： 右边信号，且 $p_1=\frac{1}{2} \quad p_2=-\frac{1}{2}$ 均为二阶极点

$Res[X(z)z^{n-1}]|_{z=p_1}=\frac{1}{(2-1)!}[\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}(z-p_1)^2X(z)z^{n-1}]|_{z=p_1}=(-\frac{1}{2})^n$

$Res[X(z)z^{n-1}]|_{z=p_2}=\frac{1}{(2-1)!}[\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}(z-p_2)^2X(z)z^{n-1}]|_{z=p_2}=0$

即 $x[n]=Res[X(z)z^{n-1}]|_{z=p_1}+Res[X(z)z^{n-1}]|_{z=p_2}=(-\frac{1}{2})^n u[n]$

4、单边Z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n} \text{ 记为 } \quad x[n]\overset{uZ}{\longleftrightarrow}X(z)$$

移位性质

$$x[n+m]\overset{uZ}{\longleftrightarrow}z^{m}[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]z^{-k}]$$

$$x[n-m]\overset{uZ}{\longleftrightarrow}z^{-m}[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x[k]z^{-k}]$$

5、离散时间LTI系统的Z域分析

因果性

ROC 包含 $z=\infty$

稳定性

ROC 包含单位圆，且极点都在单位圆内

全响应求解

例：$y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=x[n]=4^{n}u[n] \quad y[-2]=0 \quad y[-1]=1$

解：两边同求单边 Z 变换，得 $Y(z)+z^{-1}[Y(z)+y[-1]z]-6z^{-2}[Y(z)+y[-2]z^{2}+y[-1]z]=\frac{1}{1-4z^{-1}}$

代入条件，移项得 $Y(z)=\frac{1}{(1+z^{-1}-6z^{-2})(1-4z^{-1})}+\frac{-1+6z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$

则 $Y_{zs}(z)=\frac{1}{(1+z^{-1}-6z^{-2})(1-4z^{-1})} \quad Y_{zi}(z)=\frac{-1+6z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$