傅里叶变换讲义

一、推导：

以T_0为周期函数$x(t)$可表示为傅氏级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0t}$$

其中：$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jkw_0t}dt \qquad ①$$

定义：$$X(jw)=\int_{T_0} x(t)e^{-jwt}dt$$

则有：$$a_k=\frac{1}{T_0}X(jkw_0)$$

代入①得：

$$x(t)=\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jkw_0)e^{jkw_0t} \qquad ②$$

现在要将②推广至非周期函数$x(t)$，即$T_0\to+\infty$

$w_0=\frac{2\pi}{T_0}\longrightarrow 0$，有：

$$x(t)=\frac{1}{w_0T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jkw_0)e^{jkw_0t}\cdot w_0$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jkw_0)e^{jkw_0t}\cdot w_0$$

当$w_0\longrightarrow 0$时，上式写为：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)e^{jwt}dw$$

因此有：

$$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt}dt \quad (傅里叶变换) \qquad (3\text{-}44)$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)e^{jwt}dw \quad (傅里叶反变换) \qquad (3\text{-}45)$$

二、另一种视角看傅里叶变换与反变换公式

将$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-jwu}du$代入反变换公式右端，我们看看是否等于左边$x(t)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)e^{-jwu}du\right]e^{jwt}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)du\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jw(t-u)}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)du\cdot\frac{1}{j(t-u)}e^{jw(t-u)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)du\cdot\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{j(t-u)}\left[e^{jN(t-u)}-e^{-jN(t-u)}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)du\cdot\lim_{N\to+\infty}\frac{2\sin N(t-u)}{(t-u)}$$

$$=\frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cancel{2\pi}\,x(u)\delta(t-u)du$$

(这一步用到 $\lim_{N\to+\infty}\frac{\sin Nt}{t}=\pi\delta(t)$)

$$=x(t)$$

同理，若将 $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)e^{jwt}dv$ 代入傅里叶变换公式，看看右边是否等于左边

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(jv)e^{jvt}dv\right]e^{-jwt}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jv)dv\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(v-w)t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jv)dv\cdot\frac{1}{j(v-w)}e^{j(v-w)t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jv)dv\cdot\lim_{N\to+\infty}\frac{2\sin N(v-w)}{(v-w)}$$

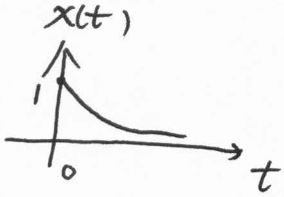
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jv)\delta(v-w)dv\cdot 2\pi$$

$$=X(jw)$$

三、典型傅里叶变换对

① 单边指数信号

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a>0$$



$$X(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-jwt} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+jw)t} dt$$

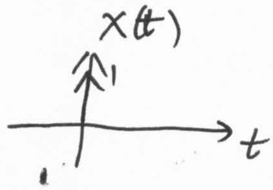
$$= \frac{1}{a+jw} e^{-(a+jw)t} \Big|_{+\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{a+jw}\left[1 - e^{-(a+jw)\cdot +\infty}\right]$$

$$= \frac{1}{a+jw}$$

② 单位冲激信号:

$$x(t) = \delta(t)$$



$$X(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-jwt} dt$$

$$= e^{-j\cdot 0\cdot w} = 1$$

③ 双边指数信号

$$x(t) = e^{-|a|t} \quad (a>0)$$

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-jwt} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-jwt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-jw)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+jw)t} dt$$

$$= \frac{1}{a-jw} + \frac{1}{a+jw}$$

$$= \frac{2a}{a^2+w^2}$$

④ 冲激偶信号 $\delta'(t)$

$$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)e^{-jwt}dt$$

$$=-\left.\frac{d(e^{-jwt})}{dt}\right|_{t=0}$$

$$=+jwe^{-jwt}\Big|_{t=0}$$

$$=jw$$

⑤ 抽样函数

$$x(t)=\frac{\sin(w_ct)}{\pi t}$$

$$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin w_ct}{\pi t}e^{-jwt}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w_ct)}{\pi t}\cos(wt)dt-\underbrace{j\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin w_ct}{\pi t}\sin(wt)dt}_{\text{奇函数，积分}0}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w_ct)\cos(wt)}{\pi t}dt$$

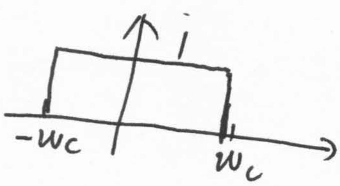
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w_c+w)t}{\pi t}dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w_c-w)t}{\pi t}dt$$

应用公式 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Nt}{\pi t}dt=\begin{cases}1 & N>0\\ 0 & N=0\\ -1 & N<0\end{cases}$

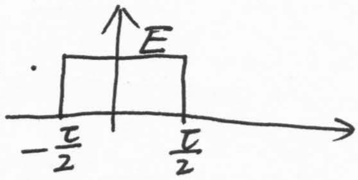
$$X(jw)=\begin{cases}1, & -w_c<w<w_c\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

因此：

$$\frac{\sin(w_ct)}{\pi t}\xrightarrow{F}$$



⑥ 矩形窗

$x(t) =$ 

$$X(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt$$

$$= E \cdot \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{\frac{\tau}{2}}^{-\frac{\tau}{2}}$$

$$= E \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot 2j\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$= \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cancel{= E\tau Sa\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}$$

$$= E\tau\, Sa\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)$$

⑦ 常数

$$x(t) = 1$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt$$

$$= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega N} - e^{j\omega N}\right]$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{2\sin(N\omega)}{\omega}$$

$$= 2\pi\,\delta(\omega)$$

最后一步用到 $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\sin(Nt)}{t} = \pi\,\delta(t)$

⑧ 高斯脉冲信号

$$x(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

先证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

证：设 $A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

则 $A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

设 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$

则 $A^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} d(r^2)$

$= \pi$

所以 $A = \sqrt{\pi}$

$X(j\omega) = E\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} e^{-j\omega t} dt$

$= E\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2 + j\omega\tau^2 t}{\tau^2}} dt$

$= E\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(t+\frac{j\omega\tau^2}{2}\right)^2}{\tau^2}} dt \cdot e^{-\frac{\omega^2\tau^4}{4\tau^2}}$

设 $x = \frac{t + \frac{j\omega\tau^2}{2}}{\tau}$，则有：

上式 $= E\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\pi} E\tau e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$

⑨ 阶跃函数 $u(t)$

$x(t) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} dt$

$= \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{+\infty}^{0}$

$= \frac{1}{j\omega}\left[1 - \lim_{N\to+\infty} e^{-j\omega N}\right]$

$$= \frac{1}{jw}\left[1 - \lim_{N\to+\infty} \cos wN + j \lim_{N\to+\infty} \sin wN\right]$$

$$= \underset{①}{\frac{1}{jw}} - \underset{②}{\frac{1}{j} \lim_{N\to+\infty} \frac{\cos wN}{w}} + \underset{③}{\lim_{N\to+\infty} \frac{\sin wN}{w}}$$

上式中： $③ = \pi\delta(w)$ （利用公式 $\lim_{N\to+\infty} \frac{\sin Nt}{t} = \pi\delta(t)$）

下面我们证明 $② = 0$

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w) \frac{\cos wN}{w} dw$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{X(w) - X(0)}{w}\right] \cos(wN)\, dw \quad ① +$$

$$X(0) \lim_{N\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(wN)}{w} dw \quad ②$$

设 $f(w) = \begin{cases} \dfrac{X(w) - X(0)}{w} & w \neq 0 \\ X'(0) & w = 0 \end{cases}$

则上式中 $① = \lim_{N\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) \cos(wN)\, dw = 0$，这一步

用到在 $(-\infty, +\infty)$ 连续可导函数与 $\cos(wN)$ 相乘积分在 $N\to+$

下为0。

由于 $\cos(wN)$ 为 w 的偶函数，则 $\frac{\cos(wN)}{w}$ 为 w 奇函数

所以： $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(wN)}{w} dw = 0$，上式 $② = 0$

则有： $\lim_{N\to+\infty} \frac{\cos wN}{w} = 0$

所以： $X(jw) = \frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$