冲激函数 $\delta(t)$ 的更严格定义

定义1： $x(t) \in C^2$（平方有限信号），是指

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt = B < +\infty$$

定义2： $C(t)$ 为冲激函数 $\delta(t)$ 的母函数，是指：

① $\int_{-\infty}^{+\infty} C(t)dt = 1$

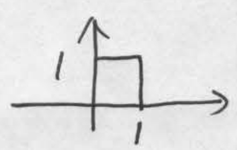
② $\forall \varepsilon > 0$， $\exists a \in R^+$，使

i) $\int_{-\infty}^{-a} C(t)^2 dt + \int_{a}^{+\infty} C(t)^2 dt < \varepsilon$

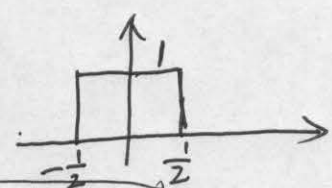
ii) $1-\varepsilon < \int_{-a}^{a} C(t)dt < 1$

练习：试证明：如下三个函数为 $\delta(t)$ 的母函数。

①

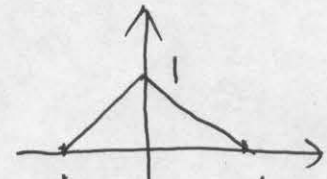


②



③ $\frac{\sin t}{\pi t}$

④



定义3： $\delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta} C\left(\frac{t}{\Delta}\right)$

定义4： $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$

定义5： $\forall x(t) \in C^2$，则

$$\int_a^b x(t)\delta(t)dt = \lim_{\Delta \to 0} \int_a^b x(t)\delta_\Delta(t)dt$$

定理1：如果 $x(t) \in C^2$，则有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

证明： $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta_\Delta(t)dt$$

定义3 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t)}{\Delta}C\left(\frac{t}{\Delta}\right)dt$

$\overset{t'=\frac{t}{\Delta}}{=}\lim\limits_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\Delta t')\,C(t')\,dt'$

$=\lim\limits_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{-a}\underset{①}{x(\Delta t)}C(t)\,dt+\lim\limits_{\Delta\to 0}\int_{a}^{+\infty}\underset{②}{x(\Delta t)}C(t)\,dt$

$+\lim\limits_{\Delta\to 0}\int_{-a}^{a}\underset{③}{x(\Delta t)}C(t)\,dt$

第一步：证明 ①+②＝0

$|①+②|\le|①|+|②|$

$=\lim\limits_{\Delta\to 0}\left|\int_{-\infty}^{-a}x(\Delta t)\,C(t)\,dt\right|+$

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\left|\int_{a}^{+\infty}x(\Delta t)\,C(t)\,dt\right|$

$\le\sqrt{\int_{-\infty}^{-a}x(\Delta t)^2\,dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{-a}C(t)^2\,dt}+$

$\sqrt{\int_{a}^{+\infty}x(\Delta t)^2\,dt}\sqrt{\int_{a}^{+\infty}C(t)^2\,dt}$

(这一步用到公式 $\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\le\sqrt{\int_a^b x(t)^2dt}\sqrt{\int_a^b y(t)^2 dt}$

$\le 2\sqrt{B}\,\varepsilon$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$|①+②|\to 0\Longrightarrow ①+②=0$

第二步：证明 ③＝$x(0)$

③ $=\lim\limits_{\Delta\to 0}\int_{-a}^{a}x(\Delta t)\,C(t)\,dt$

$=\int_{-a}^{a}\left(\lim\limits_{\Delta\to 0}x(\Delta t)\right)C(t)\,dt$

$=x(0)\int_{-a}^{a}C(t)\,dt$

因为 $1-\varepsilon < \int_{-a}^{a} C(t)dt < 1$，所以

$(1-\varepsilon)x(0) < ③ < x(0)$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，③ $= x(0)$

命题得证。

练习：证明 $\int_a^b x(t)\delta(t)dt = \begin{cases} 0 & 当 a<0 且 b<0 \\ 0 & 当 a>0 且 b>0 \\ x(0) & 当 a<0 \quad b>0 \\ -x(0) & 当 a>0 \quad b<0 \end{cases}$

练习：证明：$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$ ①

$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$ ②

$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$ ③

$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

$\delta(t) = \delta(-t)$

$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t) \qquad u'(t) = \delta(t)$

定义：$\delta'(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta'(t)$

证明：① $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta'(t)dt = -x'(0)$

② $x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$

③ $\delta'(t) = -\delta'(-t)$