系统的基本性质

一、线性系统和非线性系统
(Linear System) (Non-Linear System)

线性系统定义：

定义a：若一个系统 $x(t) \xrightarrow{\text{系统}} y(t)$ 满足以下性质：

i) 若任意 $x(t) \longrightarrow y(t)$，则有对任意 $a \in R$，有
$ax(t) \longrightarrow ay(t)$

ii) 若任意 $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$，任意 $x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$，~~则对~~
~~任意 $a \in R$，$b \in R$，有~~

则有：

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

则我们说该系统是线性系统。

线性系统另一个定义：

定义b：若系统 $x(t) \xrightarrow{\text{系统}} y(t)$ 满足以下性质：

若对任意 ~~$x_1(t)$，$x_2(t)$~~ $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$，$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$

则对任意 $a \in R$，$b \in R$，有：

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

则我们说该系统线性系统。

下面我们证明，定义a与定义b是等价的。

证明：关键是体会两种定义中的"任意"二字。

i) 先证明定义b $\longrightarrow$ 定义a

定义b：$ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t)$

由于 $x_1(t)$，$x_2(t)$，a，b 任意，可取
$b = 0$，$x_1(t) = x(t) \longrightarrow y_1(t) = y(t)$，则

$$a x_1(t) + 0\cdot x_2(t) \longrightarrow a y_1(t) + 0\cdot y_2(t)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ a x(t) & \longrightarrow & a y(t) \end{array}$$

（这是定义a的第一个条件）

再取 $a=b=1$（再次注意 a,b 任意），则有：

$$1\cdot x_1(t) + 1\cdot x_2(t) \Longrightarrow 1\cdot y_1(t) + 1\cdot y_2(t)$$

即 $x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$（定义a的第二个条件）

ii）再证明定义a ⟶ 定义b

定义a(i)：任意 a，任意 $x(t)$，有 $a x(t) \rightarrow a y(t)$

取 $a=a$，$x(t) = x_1(t)$，有：$a x_1(t) \rightarrow a y_1(t)$

取 $a=b$，$x(t) = x_2(t)$，有 $b x_2(t) \rightarrow b y_2(t)$

定义a(ii)：任意 $x_1(t)$，任意 $x_2(t)$，有 $x_1(t)+x_2(t) \rightarrow y_1(t)+y_2(t)$

取 $a x_1(t) = x_1(t)$ 取 $b x_2(t) = x_2(t)$，有

$$a x_1(t) + b x_2(t) \Longrightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$$

得证。

非线性系统定义：不是线性系统就是非线性系统。

接下来我们辨别一下线性系统和非线性系统

① $y(t) = 3x(t)$

首先这个写法的意思是：任意 $x(t)$，有

$$x(t) \xrightarrow{\text{系统}} y(t) = 3x(t)$$

即对任意输入，输出是原来的3倍。

它是线性系统吗？（是）

证明：定义 a (i)，若任意 $x(t) \longrightarrow y(t)=3x(t)$，则有：

$$\underbrace{\{ax(t)\}}_{\text{把}ax(t)\text{看成一包}x(t)\text{做为输入}} \longrightarrow \underbrace{3[ax(t)]}_{\text{这一包到了这里，系统对所有输入乘3}} = a[3x(t)] = ay(t)$$

定义 a (ii) 若任意 $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)=3x_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)=3x_2(t)$

则 $\underbrace{x_1(t)+x_2(t)}_{\text{这一包是输入}} \longrightarrow \underbrace{3[x_1(t)+x_2(t)]}_{\text{这一包输出是输入乘3}} = 3x_1(t)+3x_2(t)$

$= y_1(t)+y_2(t)$

满足定义 a(i)(ii)，因此线性。

练习：① 证明 $y(t)=ax(t)$，($a\in R$ 是任意实数) 是线性系统

② 证明：$y(t)=3x(t+1)$ 是线性系统。

③ 证明：$y(t)=5x(t-1)+7x(1-t)$ 是线性系统。

④ 证明：$y(t)=tx(t)$ 是线性系统

② $y(t)=x(t)+3$ 是线性系统吗？

答案：不是，它是非线性系统。

证明：请注意，如果我们要证明一个系统线性，严格的证明它满足定义 a 的两条性质；但如果我们要证明系统非线性，则我们只需举一个反例，说明它不满足定义 a 的性质 (i) 或 (ii) 即可。

反例如下：

设 $x(t)\equiv 0 \longrightarrow y(t)=0+3\equiv 3$

现在我们设输入 $x(t) = \underset{\text{这是}a}{2} \times \underset{\text{这是原来输入}}{0} = 0$

则系统实际输出为

$$x(t) = 2\times 0 = 0 \xrightarrow{\text{实际系统}} y(t) = 0+3 = 3$$

但是，假设系统线性，根据定义 a(i)，我们希望系统输出为：

$$x(t) = 2\times 0 \xrightarrow{\text{希望系统}} y(t) = 2\times 3 = 6$$

实际 ≠ 希望，因此系统线性假设不成立，不是线性系统

练习：① 证明：$y(t) = e^{x(t)}$ 非线性。

~~② 证明：$y(t) = t\,x(t)$ 非线性~~。

② 证明：$y(t) = x(t) + t$ 非线性

③ 证明：$y(t) = x(t)^2$ 非线性

总结：线性系统判据：每一项都有 x，每一项 x 都是一次。

二、时不变系统与时变系统

时不变系统定义：若 $\forall x(t) \xrightarrow{\text{系统}} y(t)$，则 $\forall t_0 \in R$，有：

(Time-Invariant System)

$$x(t+t_0) \xrightarrow{\text{系统}} y(t+t_0)$$

（输入不变，延时一段，输出还一样。）

时变系统定义：不是时不变，就是时变。

例：

① $y(t) = 3x(t)$ （时不变）

证明：因为 $\forall x(t) \longrightarrow y(t) = 3x(t)$，则有：

$$x(t+t_0) \longrightarrow 3x(t+t_0) = y(t+t_0)$$

以上这一步如果要详细写是下面这样：

设 $u(t) = x(t+t_0)$，则系统输出为 $3u(t)$ ……

记住系统只是把输入乘3后输出。

输出 $3u(t) = 3x(t+t_0) = y(t+t_0)$

得证。

② $y(t) = e^{x(t)}$ 时不变

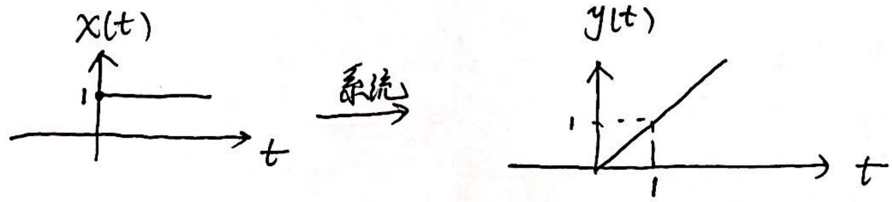
证明：$\forall x(t) \longrightarrow y(t) = e^{x(t)}$，则

$$u(t)=x(t+t_0) \longrightarrow e^{u(t)} = e^{x(t+t_0)} = y(t+t_0)$$

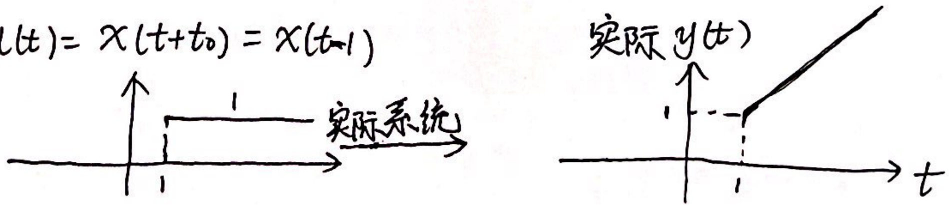
得证。

③ $y(t) = t\,x(t)$ （时变）

反例如下：

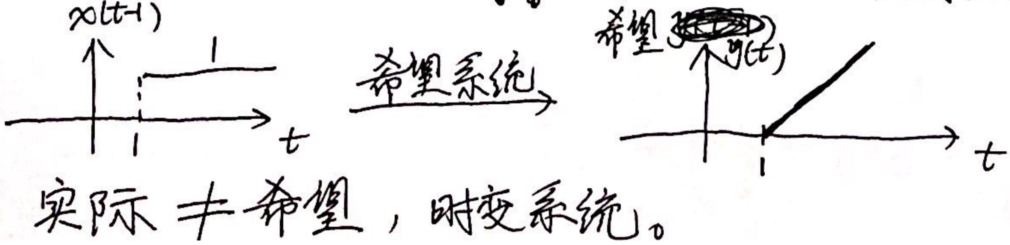


设 $t_0 = -1$，则



若该系统时不变，则我们希望输入右移1格，输出也右移一格

即



实际 ≠ 希望，时变系统。

④ $y(t)=x(1-t)$ （时变）

自己举反例

⑤ $y(t)=x(3t)$ （时变）

自己举反例

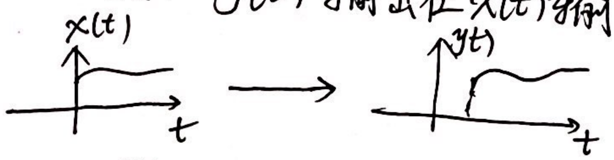
总结时不变系统判据：(i) t 只在 x 的括号里，不在括号外。

(ii) t 只能是 t，不能是 $2t$，$3t$，t^2，$-t$ 等。

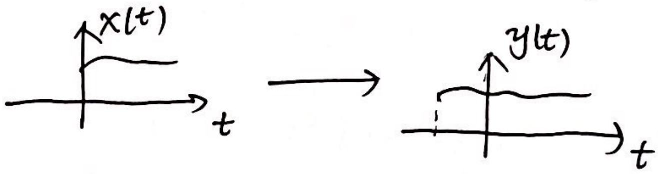
三、因果系统与非因果系统

(Causal System) (Non-Causal System)

因果系统定义：$y(t)$ 输出在 $x(t)$ 输入之后



因果系统



非因果系统

例

① $y(t)=x(t-1)$ 因果

② $y(t)=tx(t-1)$ 因果

③ $y(t)=x(t+2)$ 非因果

④ $y(t)=x(\frac{1}{2}t)$ 非因果

总结因果系统判据：x 括号里的值小于 y 括号里的值。

四、无记忆系统和记忆系统

无记忆系统定义：输出只取决于该时刻输入。

例：

$y(t)=x(t)+x(t^2)$ 无记忆

$y[n]=3x[n]-2x[n^2]$ 无记忆

$y[n]=x[n-1]$ 记忆

$y[n]=x[n+1]$ 记忆

五、稳定系统与不稳定系统

稳定系统定义：若 $x(t) \xrightarrow{\text{系统}} y(t)$，如果对 $\forall t$，有 $|x(t)| < M$，则 $\exists N$，有对 $\forall t$，$|y(t)| < N$

若输入有界则输出有界

例：① $y(t) = x(t)^2$ 稳定

证明：若 $\forall t$，$|x(t)| < M$，则有

$\forall t$，$|y(t)| < M^2$。

② $y(t) = e^{x(t)}$，$y[n] = 3x[n] - x[n]^2$

$$y[n] = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x[n-k]$$

都稳定

③ $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ 不稳定

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ 不稳定

请举反例。

六：可逆系统与不可逆系统

可逆系统定义：$x(t) \xrightarrow{\text{系统}} y(t)$，若知道 $y(t)$ 能唯一确定 $x(t)$，则系统可逆

例：① $y[n] = x[n]^2$ 不可逆

反例 $y[n] \equiv 4$，则 $x[n] = 2$ 或 $x[n] = -2$，不唯一

② $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ 可逆，因为 $x[n] = y[n] - y[n-1]$

③ $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ 可逆，因为：$x(t) = \frac{dy(t)}{dt}$