连续卷积公式的推导

复习：连续的线性时不变系统，应该具有以下三个性质：

① 若 $x(t) \xrightarrow{系统} y(t)$，则 $ax(t) \xrightarrow{系统} ay(t)$ $(a\in R)$
（线性性质1）

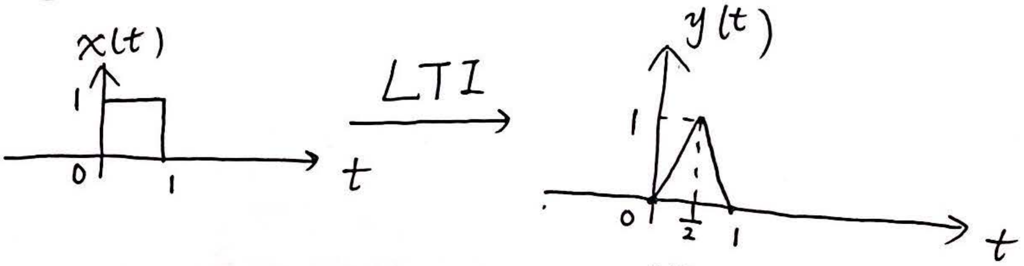
② 若 $x_1(t) \xrightarrow{系统} y_1(t)$，$x_2(t) \xrightarrow{系统} y_2(t)$，则

$$x_1(t)+x_2(t) \xrightarrow{系统} y_1(t)+y_2(t)$$ （线性性质2）

③ 若 $x(t) \xrightarrow{系统} y(t)$，则 $x(t+t_0) \xrightarrow{系统} y(t+t_0)$ $(t_0\in R)$
（时不变性质）

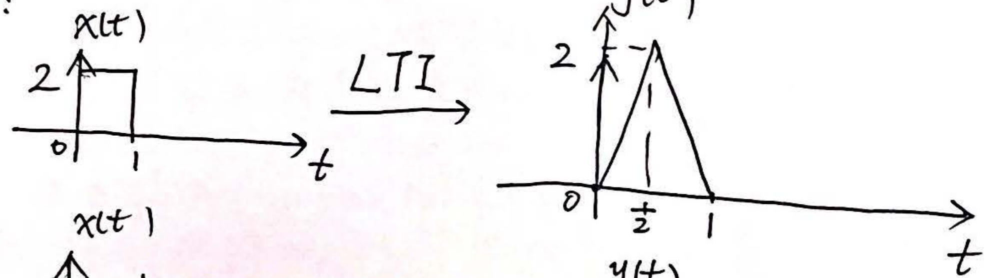
请做题：

若



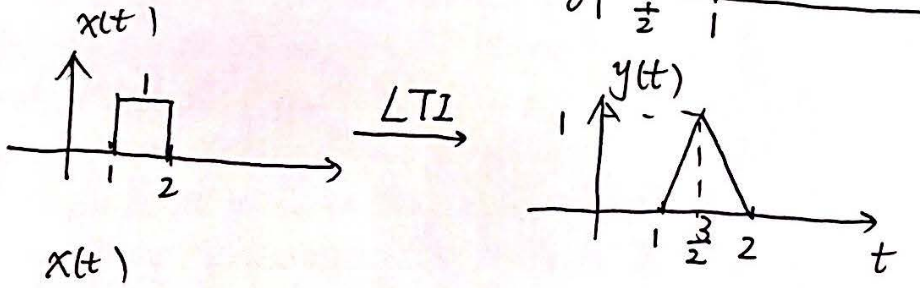
则有：

①



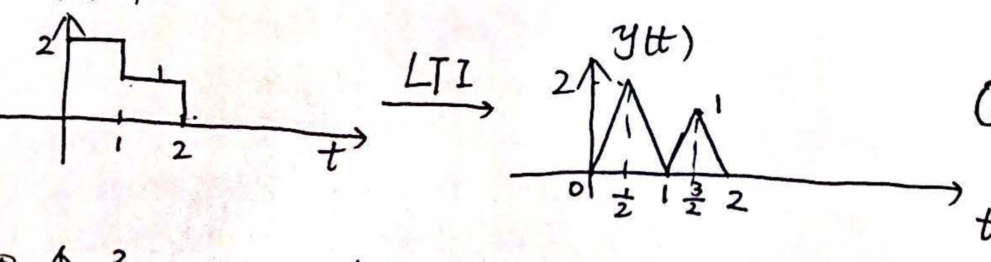
（这题简单吧）

②



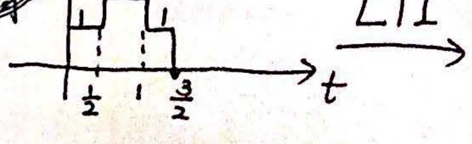
（这题也不难吧）

③



①+②即可。

④

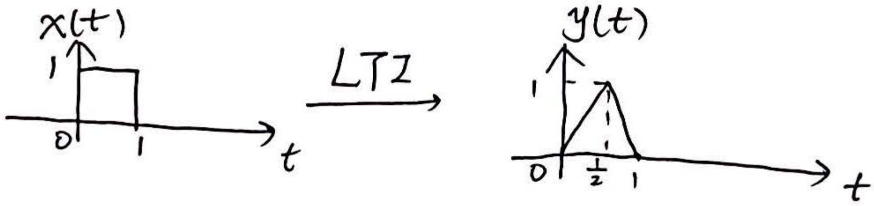


?

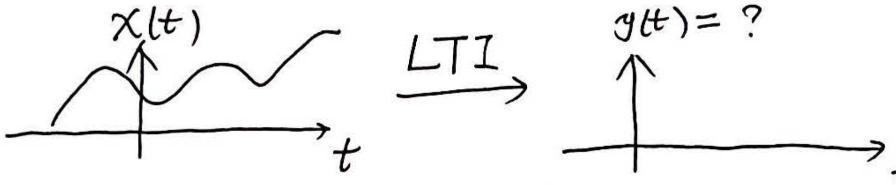
（稍难但也能做，请自己做）

下面真正的难题来了：

⑤ 若



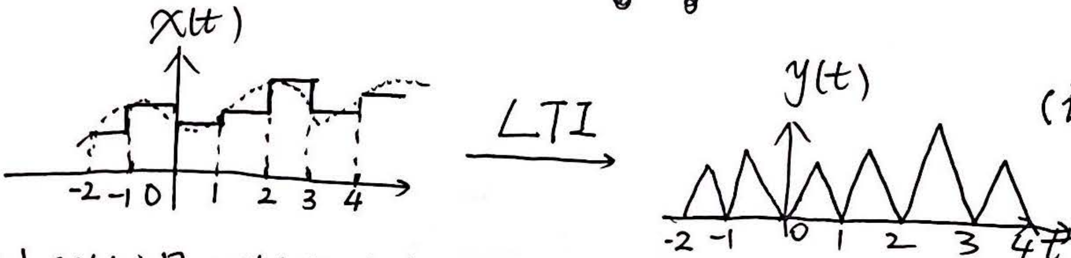
则任意一个函数



(做不出来了吧)

我也做不出来！但是，我却能做一道稍微简单一点的题：

我知道若 $x(t)$ 是下面这个阶梯函数

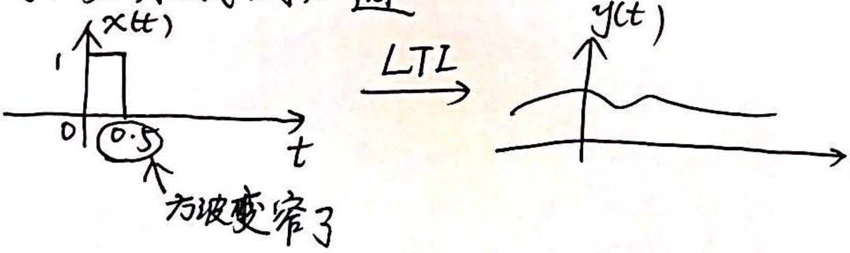


(请自己做这题)

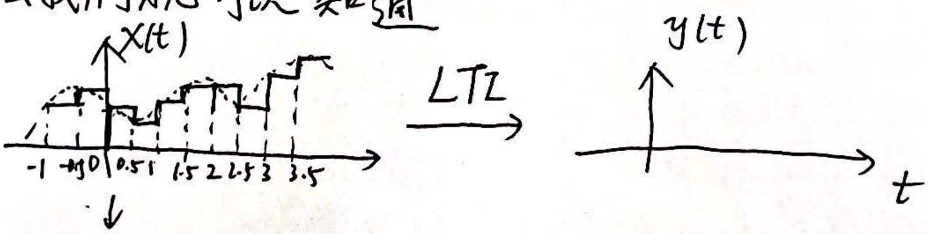
则 $y(t)$ 是可以做出来的。

我们可以用阶梯函数近似任何 $x(t)$，从而近似获得输出 $y(t)$。有同学会说，上面那个近似 $x(t)$ 也太不精确了吧。

是的，如果我们知道

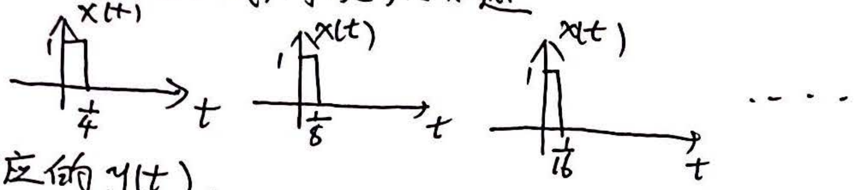


那么我们就可以知道



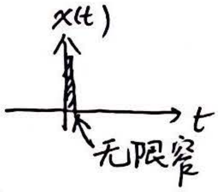
这个阶梯函数离虚线的 $x(t)$ 又近了一步。

要想更精确，我们必须知道



对应的 $y(t)$。

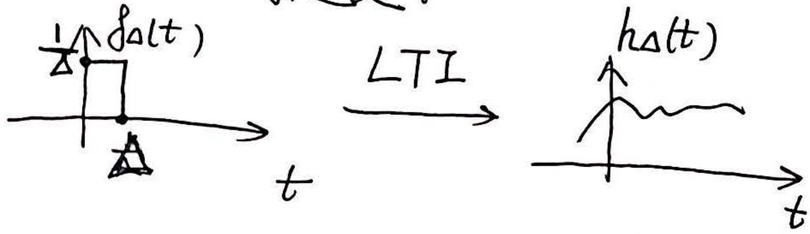
我们最好知道一个无限窄脉冲信号



对应的 $y(t)$

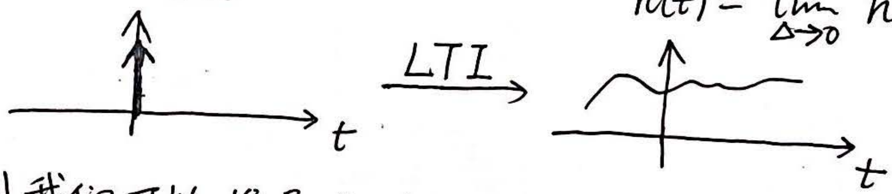
则我们就能求出任意 $x(t)$ 对应的 $y(t)$

冲激函数的定义：

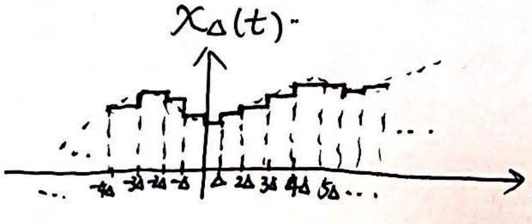


假设 $\delta(t) = \lim\limits_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$

$h(t) = \lim\limits_{\Delta \to 0} h_\Delta(t)$



则我们可以推导连续卷积公式如下：



$\xrightarrow{LTI} y_\Delta(t)$

$$x_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

以Δ为间隔的阶梯函数

在 $[k\Delta,(k+1)\Delta)$ 上 $\delta_\Delta(t-k\Delta)=\frac{1}{\Delta}$

乘以Δ后与 $\frac{1}{\Delta}$ 抵消

由于

$$\delta_\Delta(t) \xrightarrow{LTI} h_\Delta(t)$$

则

$$\delta_\Delta(t-k\Delta) \xrightarrow{LTI} h_\Delta(t-k\Delta) \quad \text{(时不变性质)}$$

$$x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \xrightarrow{LTI} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \quad \text{(线性性质1)}$$

$$x_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \xrightarrow{LTI} y_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \quad \text{(线性性质2)}$$

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \xrightarrow{LTI} y(t)=\lim_{\Delta\to 0}y_\Delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\left[\lim_{\Delta\to 0}h_\Delta(t-k\Delta)\right]\cdot\Delta$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\,h(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

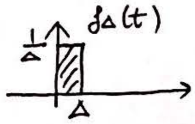
连续卷积公式

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

在讲卷积具体计算前，我们先补充讲解 $\delta(t)$ 性质

~~性质1：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$~~

性质1： $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$

证明： 由于 

，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\Delta(t)dt=\frac{1}{\Delta}\cdot\Delta=1$

因此： $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\Delta(t)dt=\lim_{\Delta\to 0}1=1$

性质2： $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t)dt=x(0)$ （性质1可以看作性质2的特例，为什么？）

证明： $$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\left[\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)\right]dt$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta_\Delta(t)dt$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\int_{0}^{\Delta}x(t)\cdot\frac{1}{\Delta}\,dt \quad \text{（为什么？）}$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{0}^{\Delta}x(t)\,dt$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\cdot x(\xi)\cdot\Delta \quad \text{（积分中值定理）}\ (0\le\xi\le\Delta)$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}x(\xi)\ \ (\xi\in[0,\Delta])=x(0)$$

性质3： $x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$

在证明性质3前，需要补充一些知识。

性质3的等号是什么意思？ $\delta(t)$ 是我们没有接触过的"奇异函数"，两个奇异函数相等是什么意思？

补充知识：两个函数相等的定义。

定义1（中学的定义）：两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 相等，是指对任意 $t\in R$，有 $f_1(t)=f_2(t)$

即每一个点上 f_1 与 f_2 都相等，才说两个函数相等。

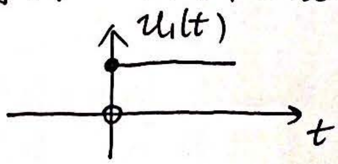
20世纪初，法国数学家勒贝格（Lebesgue）在研究奇异函数时，发现上述定义太严格，于是他独创性的给出了下面的定义。

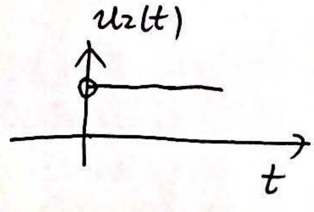
定义2（勒贝格1904年）：两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 相等，是指对任意一个函数 $y(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,y(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\,y(t)\,dt .$$

请注意①是任意函数 $y(t)$（当然 $y(t)$ 有限制，我们暂不讨论）都有上面式子成立。②上面那个积分可以发散，要发散就一起发散。

例1、以下两个函数相等





$$u_1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}\qquad u_2(t)=\begin{cases}0 & t\leq 0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

证明：$u_1(t)$ 与 $u_2(t)$ 只有 $t=0$ 时不相等 $u_1(0)=1$，$u_2(0)=0$

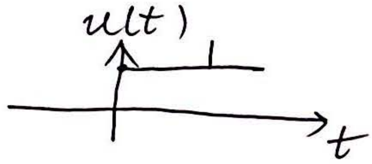
而一个点的值不影响积分值，所以任意 $y(t)$ 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,u_1(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,u_2(t)\,dt$$

根据定义2， $u_1(t)=u_2(t)$

进一步的，其实在这个例子中，只要 $u_1(0)$ 和 $u_2(0)$ 取任意实数，$u_1(t)$ 都等于 $u_2(t)$。

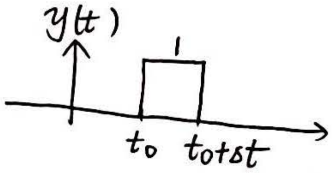
在教材中，我们定义阶跃函数



我们从不去说 $u(0)$ 等于多少。这是因为在勒贝格定义中，$u(0)$ 不管等于多少，$u(t)$ 表示的都是同一个函数。

例2：如果两个函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在某个区间 $[t_0, t_0+\Delta t)$ 上，恒有 $f_1(t) > f_2(t)$，则 $f_1(t) \neq f_2(t)$

证明：构造



$$y(t)=\begin{cases}1, & t_0 \le t \le t_0+\Delta t \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,y(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_1(t)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\,y(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_2(t)\,dt$$

由于在这个区间上 $f_1(t) > f_2(t)$

则有 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,y(t)\,dt > \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\,y(t)\,dt$$

根据定义2，$f_1(t) \neq f_2(t)$

例3：如果在有限个点上 $f_1(t) \neq f_2(t)$，其他点上 $f_1(t)=f_2(t)$

则 $f_1(t)=f_2(t)$。（自己证明）

例4：勒贝格创造了一种积分——勒贝格积分（Lebesgue Integral），在这种积分下，例3的有限个点可以变为可数个点，即：

如果在可数个点上，$f_1(t) \neq f_2(t)$，其他点上 $f_1(t)=f_2(t)$

则 $f_1(t)=f_2(t)$

可参阅实变函数教材搞懂勒贝格积分。

今后我们说两个函数相等，专指定义2。

定理：若 $h_1(t)=h_2(t)$，则

$$x(t)*h_1(t)=x(t)*h_2(t)$$

证明：

$$x(t)*h_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h_1(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h_1(\tau)d\tau \quad (\text{换元})$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h_2(\tau)d\tau \quad (\text{定义2})$$

$$=x(t)*h_2(t)$$

（每一步都要仔细看，请补充细节）

这个定理说明，用定义2来分析LTI系统，是不会矛盾的。

下面我们证明性质3：

$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$$

证明：左边 $=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)[x(t)\delta(t)]dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)y(t)]\delta(t)dt$$

$$=x(0)y(0) \quad (\text{性质2})$$

而右边 $=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)[x(0)\delta(t)]dt$

$$=x(0)\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)\delta(t)dt$$

$$=x(0)y(0)$$

左边 = 右边

所以 $x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$

（仔细结合前面知识看这个证明，希望你能看懂）

性质4：$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$（特例：$\delta(-t)=\delta(t)$）

证明：左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\delta(at)dt$

换元，设 $at=t'$，则有

当 $a>0$ 时，左边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\frac{t'}{a})\delta(t')\, d(\frac{t'}{a})$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} y(\frac{t'}{a})\delta(t')dt'$$

$$= \frac{1}{a}\, y(\frac{0}{a}) = \frac{1}{a}y(0) \quad \text{（性质2）}$$

当 $a<0$ 时，左边 $= \int_{+\infty}^{-\infty} y(\frac{t'}{a})\delta(t')\, d(\frac{t'}{a})$

$$= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} y(\frac{t'}{a})\delta(t')dt'$$

$$= -\frac{1}{a}\, y(\frac{0}{a}) = -\frac{1}{a}y(0) \quad \text{（性质2）}$$

因此，左边 $= \frac{1}{|a|}y(0)$

右边 $= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\left[\frac{1}{|a|}\delta(t)\right]dt$

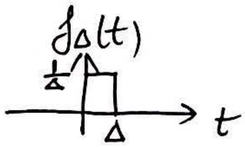
$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\delta(t)dt$$

$$= \frac{1}{|a|}y(0) \quad \text{（性质2）}$$

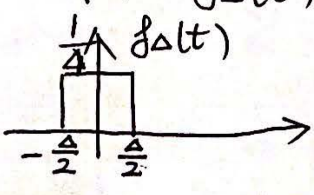
左边 = 右边，命题成立。

性质5. （$\delta(t)$的多样性）

前面，我们定义 $\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$，其中



下面我们证明，$\delta_\Delta(t)$也可以如下定义



，则

$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

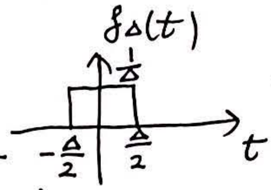
证明：根据定义2，如果我们要证明某函数

$$x(t)=\delta(t)$$

我们只须证明，任意 $y(t)$ 有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,x(t)\,dt = y(0)$$ 为什么？

接下来我们证明：

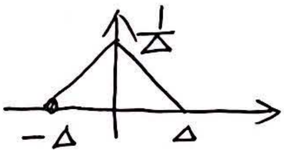
$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\Big[$$  $$\Big]\,dt$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} y(t)\,dt$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\cdot y(\xi)\cdot\Delta \qquad \left(\xi\in\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right]\right)$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} y(\xi) \qquad \left(\xi\in\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right]\right)$$

$$= y(0)$$ ，得证。

练习：证明若  则 $\delta(t)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$

下面我们证明

$$\lim_{\omega\to+\infty}\frac{\sin(\omega t)}{\pi t} = \delta(t)$$

证明：（注：此证明复杂，可略过，不过希望大家记住结论，后续会用到。）

引理1：若 $y(t)$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 连续且有界，则

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\sin(\omega t)\,dt = 0$$

证明：
$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\sin(\omega t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,d[\cos(\omega t)]$$

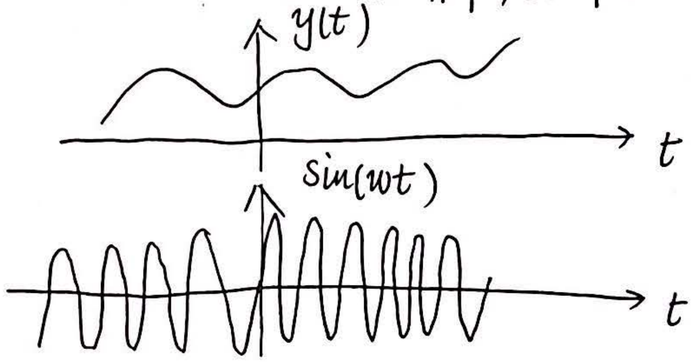
$$= -\frac{1}{\omega}\big[y(t)\cos(\omega t)\big]\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega t)\,d[y(t)]$$

$$= -\underbrace{\frac{1}{w}}_{\underset{w\to+\infty}{\uparrow}}\underbrace{\left[y(t)\cos(wt)\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\uparrow\ \text{有限值}} + \underbrace{\frac{1}{w}}_{\underset{w\to+\infty}{\uparrow}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y'(t)\cos(wt)\,dt}_{\uparrow\ \text{有限值}}$$

$$= 0$$

以上证明不严格，我们假定了 $y(t)\cos(wt)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} y'(t)\cos(wt)dt$ 有限。严格证明参阅张筑生《数学分析新讲》第二十章。

这个引理直观好理解，如下：



当 w 很大时，$\sin(wt)$ 振荡非常巨烈，如果和 $y(t)$ 相乘，在一小段内，必然正负循环很多次，这些值如果积分，会相互抵消，因此 $\lim\limits_{w\to+\infty}\int y(t)\sin[(wt)]dt = 0$

引理二、$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \pi$

证明：设 $I(a) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-at}dt \qquad (a>0)$

则 $\frac{dI(a)}{da} = -\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-at}dt$

$$= -\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty}e^{-at}\left[e^{jt}-e^{-jt}\right]dt$$

$$= +\frac{1}{2j}\left[\int_0^{+\infty}e^{-(a+j)t}dt - \int_0^{+\infty}e^{-(a-j)t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{a+j}\left(1-e^{-(a+j)+\infty}\right) - \frac{1}{a-j}\left(1-e^{-(a-j)+\infty}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{a+j}-\frac{1}{a-j}\right] = -\frac{1}{a^2+1}$$

因此：$I(a) = -\arctan(a) + C$ （因为 $[\arctan(a)]' = \frac{1}{a^2+1}$）（C是常数）

又因为：$I(+\infty)=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-at}dt \quad (a>0)$

$= 0$

所以：$-\arctan(+\infty)+c=0 \Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$

$$I(a)=-\arctan(a)+\frac{\pi}{2}$$

因此：$I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-0\cdot t}dt$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=-\arctan(0)+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

由于 $\frac{\sin(t)}{t}$ 是偶函数，因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$

引理 2：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(wt)}{t}dt=\pi \quad (w>0)$

请自己证明。

利用上面引理，证明 $\lim\limits_{w\to+\infty}\frac{\sin(wt)}{\pi t}=\delta(t)$

证明：只须证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)\left[\lim_{w\to+\infty}\frac{\sin(wt)}{\pi t}\right]dt=y(0)$$

左边 $=\lim\limits_{w\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{y(t)}{\pi t}\right]\sin(wt)dt$

根据引理1，若 $\frac{y(t)}{\pi t}$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 连续且有界，则左边 $=0$。但是，$\frac{y(t)}{\pi t}$ 在 $t=0$ 时不连续且无界，不能直接利用引理1。因此，我们引入下面技巧：

~~左边~~

$$左边 = \lim_{w\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(y(t)-y(0))+y(0)}{\pi t}\sin(wt)\,dt$$

$$= \underbrace{\lim_{w\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{y(t)-y(0)}{\pi t}\right]\sin(wt)\,dt}_{①} + \underbrace{y(0)\lim_{w\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(wt)}{\pi t}\,dt}_{②}$$

下面分析①和②

若设 $f(t) = \begin{cases} \dfrac{y(t)-y(0)}{\pi t}, & t\neq 0 \\ \dfrac{y'(0)}{\pi} & t=0 \end{cases}$

可以证明 $f(t)$ 在 $t=0$ 处有界且连续，因此

$$① = \lim_{w\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(wt)\,dt$$

$$= 0 \qquad (引理1)$$

另一方面

$$② = \frac{y(0)}{\pi}\lim_{w\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(wt)}{t}\,dt$$

$$= \frac{y(0)}{\pi}\cdot\pi = y(0) \qquad (引理3)$$

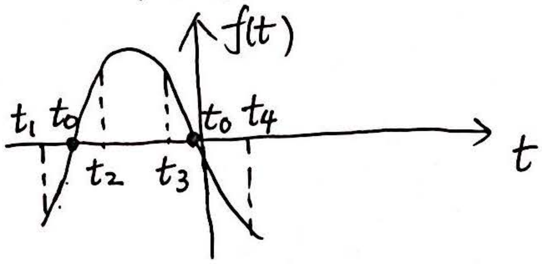
因此，左边 = ①+② = $0+y(0) = y(0)$，得证。

性质6： $\delta(f(t)) = \sum\limits_{\substack{所有\\ f(t_0)=0\\ 的t_0}} \dfrac{1}{|f'(t_0)|}\delta(t-t_0)$ （性质4是性质6的特例）

证明：只须证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\delta(f(t))dt = \sum_{\substack{\text{所有}t_0\\ \text{满足}\\ f(t_0)=0}} \frac{1}{|f'(t_0)|} y(t_0)$$

不失一般性，设



其中 $f(t)$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 单调增
$f(t)$ 在区间 $[t_3, t_4]$ 单调减

$$\text{则 左边} = \underbrace{\int_{-\infty}^{t_1} y(t)\delta(f(t))dt}_{①} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} y(t)\delta(f(t))dt}_{②} + \underbrace{\int_{t_2}^{t_3} y(t)\delta(f(t))dt}_{③} + \underbrace{\int_{t_3}^{t_4} y(t)\delta(f(t))dt}_{④} + \underbrace{\int_{t_4}^{+\infty} y(t)\delta(f(t))dt}_{⑤}$$

由于在区间 $(-\infty, t_1]$，$[t_2, t_3]$，$[t_4, +\infty)$ 中，
$f(t) \neq 0$，则在这些区间上，$\delta(f(t)) \equiv 0$

因此 ① = ③ = ⑤ = 0

下面我们看②，④

先看②，假设 $t_1 < t_0 < t_2$ 且 $f(t_0) = 0$。~~如上图，则有：~~

$\cancel{② = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\delta(f(t))dt}$

设 $f(t) = u$，由于 $f(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 单调增，因此存在反函数 $f^{-1}(u) = t$。

$$② = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\delta(f(t))dt$$

换元设 $f(t)=u$，则 $f^{-1}(u)=t$，有：

② $= \int_{f^{-1}(t_1)}^{f^{-1}(t_2)} y(f^{-1}(u))\,\delta(u)\, d[f^{-1}(u)]$

$= \int_{f^{-1}(t_1)}^{f^{-1}(t_2)} y(f^{-1}(u))\,\delta(u)\,[f^{-1}(u)]'\, du$

$= y(f^{-1}(0))\,[f^{-1}(0)]'$

由于 $f(t_0)=0$ 则 $f^{-1}(0)=t_0$

又由于反函数导数是原函数分之一，因此

$$[f^{-1}(0)]' = \frac{1}{f(t_0)'}$$

② $= \frac{1}{f(t_0)'}\, y(t_0)$ ，由于在 $[t_1, t_2]$ 上 $f(t)$ 单调增，

因此 $f(t_0) > 0$ ，所以

② $= \frac{1}{|f(t_0)'|}\, y(t_0)$

再看④，也假设 $t_3 < t_0 < t_4$ 且 $f(t_0)=0$

设 $f(t)=u$，由于 $f(t)$ 在 $[t_3, t_4]$ 单调减，因此存在反函数 $f^{-1}(u)=t$

④ $= \int_{t_3}^{t_4} y(t)\,\delta(f(t))\,dt$

换元设 $f(t)=u$，则 $f^{-1}(u)=t$，有

④ $= \int_{f^{-1}(t_3)}^{f^{-1}(t_4)} y(f^{-1}(u))\,\delta(u)\, d[f^{-1}(u)]$

$= \int_{f^{-1}(t_3)}^{f^{-1}(t_4)} y(f^{-1}(u))\,[f^{-1}(u)]'\,\delta(u)\, du$

由于 $f(t)$ 在 $[t_3, t_4]$ 单调减，所以

$f^{-1}(t_3) > f^{-1}(t_4)$ ，则

④ $= -\int_{f^{-1}(t_4)}^{f^{-1}(t_3)} y(f^{-1}(u))[f^{-1}(u)]' \delta(u)\,du$

$= - y(f^{-1}(0))[f^{-1}(0)]'$

同前面推理，有

④ $= -\frac{1}{f(t_0)'} y(t_0)$

由于 $f(t)$ 在 $[t_3, t_4]$ 单调减，所以 $f(t_0)' < 0$，因此

④ $= \frac{1}{|f(t_0)'|} \cdot y(t_0)$

如果 $f(t)$ 形式更复杂，有更多零点，证明和上面类似。

因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,\delta(f(t))\,dt = \sum_{\substack{\text{所有}t_0\\ \text{满足}\\ f(t_0)=0}} \frac{1}{|f'(t_0)|} y(t_0)$$

命题成立。

练习题：求 $\delta(\sin t)$，$\delta(\cos t)$，$\delta(t^2-3t+2)$