于慧敏主编<信号与系统>第一章 (P25-28)习题解答

（注：题目为黑色，解答为兰色，偶尔有红色）

1.1 试说明图 1-52（图在此略）中各种信号属哪类信号：周期、连续、能量或功率、确定信号。

解答：以表格形式比较清楚：

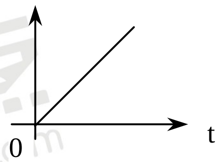
小题	周期	连续	离散	确定	随机	能量	功率
(a)	√	√		√			√
(b)	非	√		√		√	
(c)	非		√	√		√	
(d)	非	√			√		√
(e)	非	√		√			√
(f)	非	√		√			

1.2 画出以下各信号的波形：

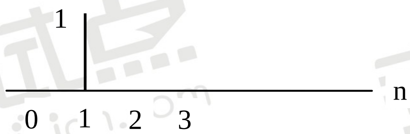
（1） $tu(t)$；　（2） $n\{u[n]-u[n-2]\}$；　（3） $(t-1)u(t-1)$；

(4) $(\frac{1}{2})^{n-2}u[n-2]$；(5) $e^{-t}[u(t)-u(t-1)]$；　（6） $\sin(t-2\pi)u(t-2\pi)$。

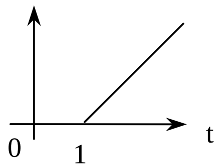
解答：(1)



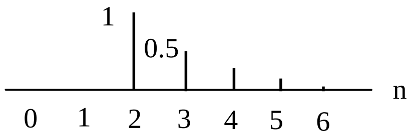
(2)



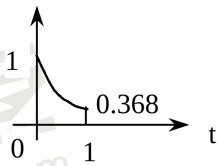
(3)



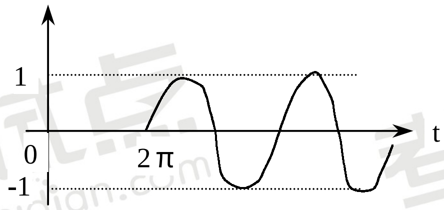
(4)



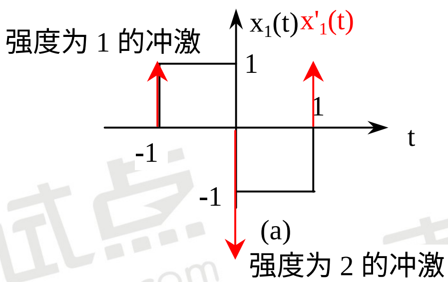
(5)



(6)

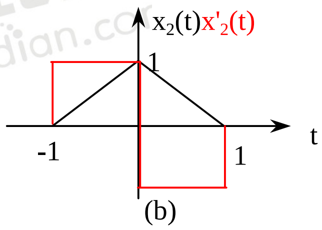


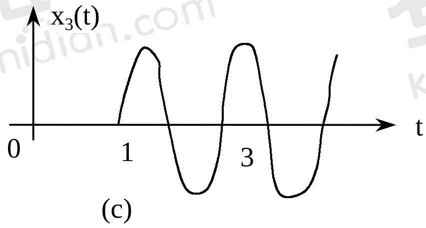
1.3 写出图 1－53 中各信号的函数表达式(注意：(b)、(d)、(e) 用 u(t)的形式)。



(a)

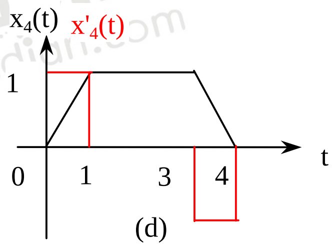
解答：(a) $x_1(t)=u(t+1)-2u(t)+u(t-1)$

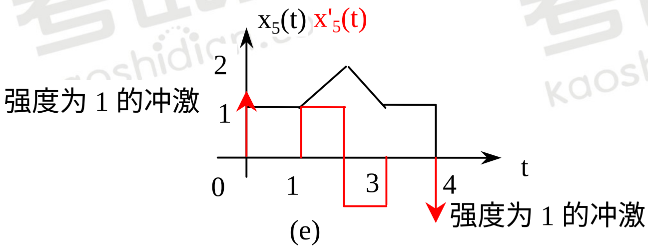




解答：(b) $x_2(t)=1-|t|,0<|t|<1$ (c) $x_3(t)=\sin[\pi(t-1)\cdot u(t-1)]$

$$x_2(t)=(t+1)u(t+1)-2tu(t)+(t-1)u(t-1)$$





解答：(d) $x_4(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le 1 \\ 1 & 1\le t\le 3 \\ 4-t & 3\le t\le 4 \end{cases}$; (e) $x_5(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t\le 1 \\ t & 1\le t\le 2 \\ 4-t & 2\le t\le 3 \\ 1 & 3\le t\le 4 \end{cases}$

$$x_4(t)=tu(t)+(1-t)u(t-1)+(3-t)u(t-3)+(t-4)u(t-4)$$

$$x_5(t)=u(t)+(t-1)u(t-1)+(4-2t)u(t-2)+(t-3)u(t-3)-u(t-4)$$

1.4 画出图 1-53 中 (a)、(b)、(d)、(e)的微分信号。

解答: 如上题图中画上的红色线条

1.5 已知一连续信号如图 1-54 所示，试画出下列各式的波形。

（1） f(2t-1)；（2） f(1-2t)；（3） f(-t/2+1)；（4） f(t)[δ (t+1)+ δ (t-2)]

解答:

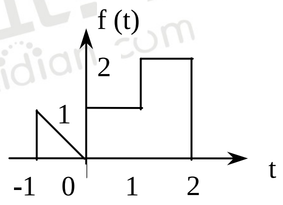
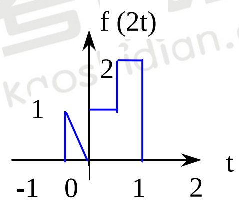
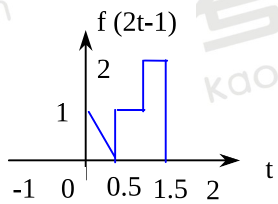


图 1-54 题 1.5 图

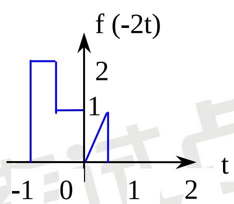
(1)

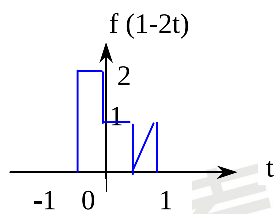




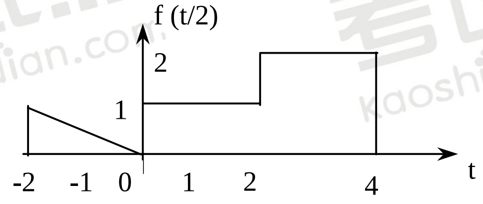
$$f(t)=\begin{cases} -t & -1<t<0 \\ u(t) & 0\le t\le 1 \\ 2u(t-1) & 1<t<2 \end{cases}$$

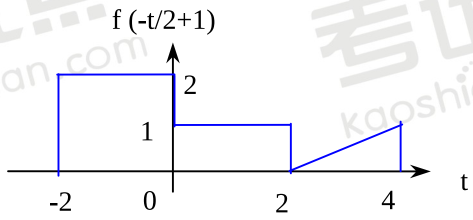
(2)



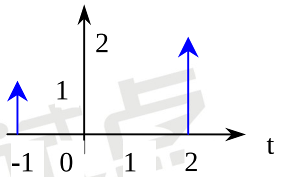


(3)





(4) f(t)[δ(t+1)+δ(t-2)]



1.6 已知信号 x(3-2t)的波形如图 1-55 所示，试画出信号 x(t)的波形。

解答：

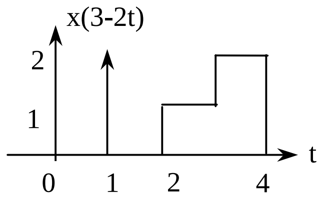
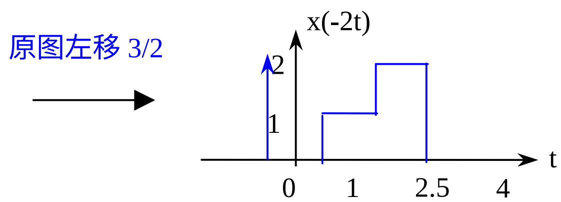
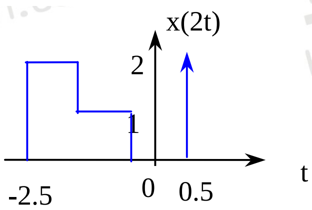


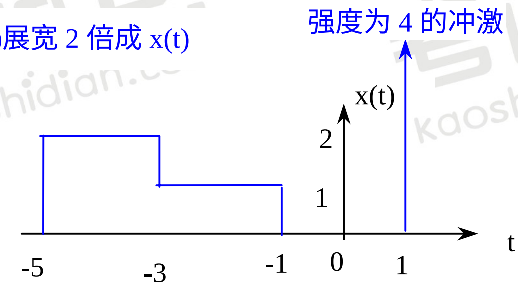
图 1-55 题 1.6 图



x(-2t)反转成 x(2t)



x(2t)展宽 2 倍成 x(t)



1.7 已知信号 x[n]如图 1-56 所示，试画出下列信号 x(t)的波形。

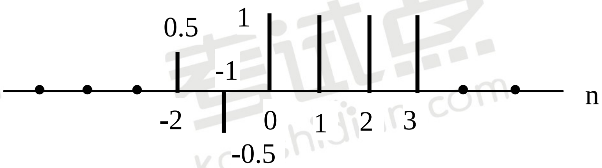
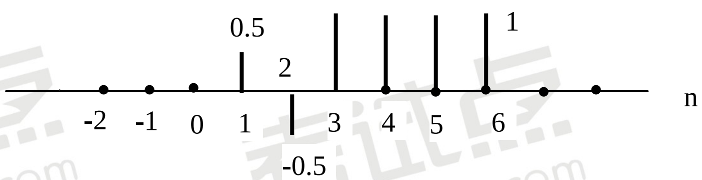


图 1-56 题 1.7 图

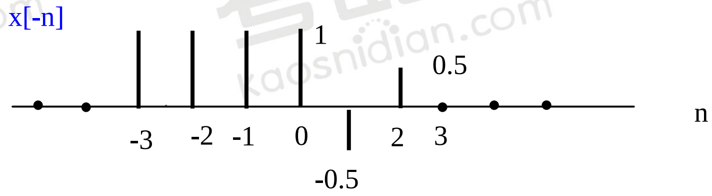
(1) x[n-3]；(2) x[4-n]；(3) x[2n+1]；(4) x[n-3]δ[n-3].

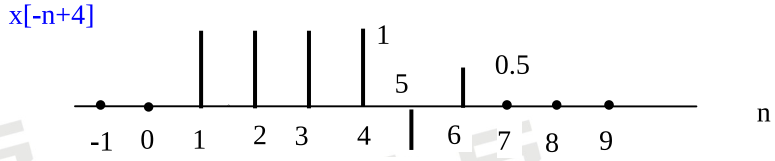
解答：

(1) x[n-3]

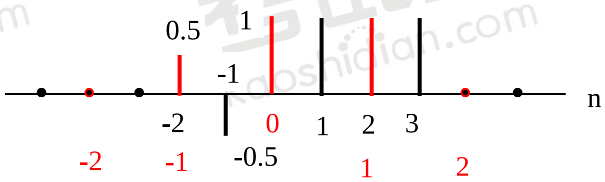


(2) x[4-n]=x[-n+4]　x[n] ⟶ x[-n] ⟶ x[-n+4]=x[-(n-4)]

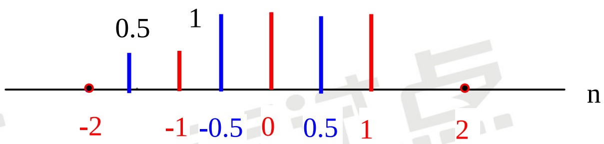




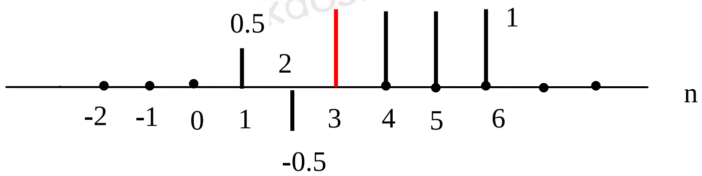
(3) x[2n+1] ⟶ x[2n](如图中红色)



⟶ x[2n+1] (如图中兰色，即向左移 0.5 个单位)



(4) 从 (1) 得 x[n-3] δ [n-3] (如图中红色，其他为 0)



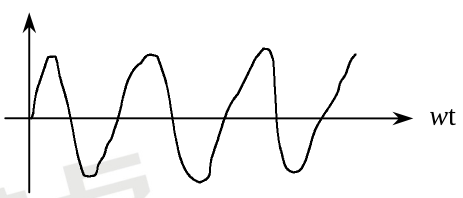
1.8 给出各下列时间函数的波形图，注意它们的区别。

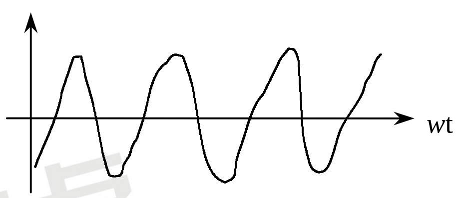
(1) $x_1(t)=\sin(wt)\cdot u(t)$ ；　　(2) $x_2(t)=\sin[w(t-t_0)]\cdot u(t)$

(3) $x_3(t)=\sin(wt)\cdot u(t-t_0)$ ；　　(4) $x_4(t)=\sin[w(t-t_0)]\cdot u(t-t_0)$

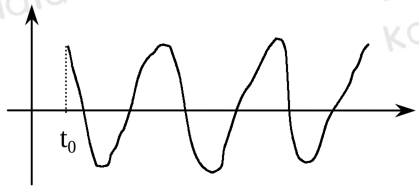
解答：

(1) $x_1(t)=\sin(wt)\cdot u(t)$ （变成了单边函数）；(2) $x_2(t)=\sin[w(t-t_0)]\cdot u(t)$

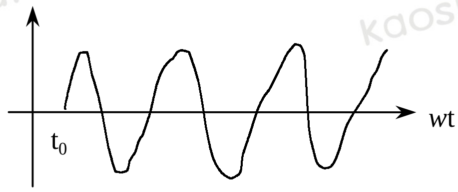




(3) $x_3(t)=\sin(wt)\cdot u(t-t_0)$



(4) $x_4(t)=\sin[w(t-t_0)]\cdot u(t-t_0)$



1.9 画出图 1-57 中各信号的奇信号与偶信号。

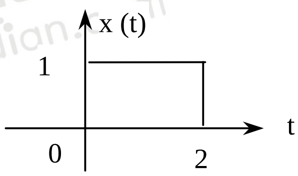


图 (1)

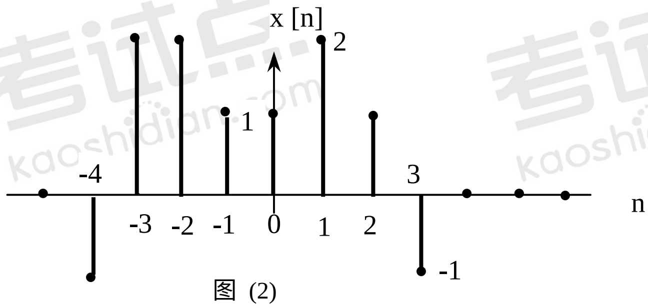


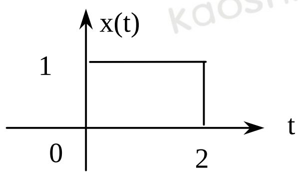
图 (2)

解答：因为一个信号可分解为偶信号与奇信号之和：$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$；

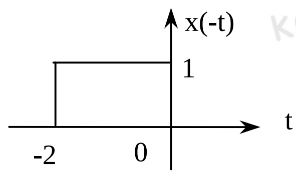
其中：$x_e(t)$ 为偶信号：$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$

$x_o(t)$ 为奇信号：$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$

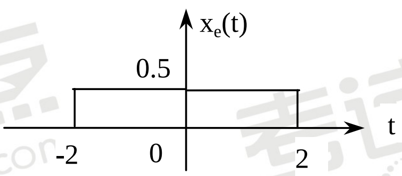
(1)



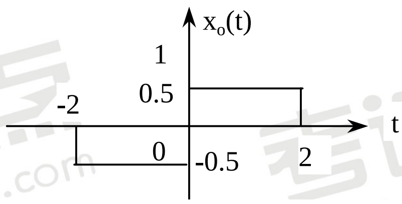
图(a) 原信号 x(t)



图(b) 原信号的反转 x(-t)



图(c) 原信号的偶信号分量 $x_e(t)$

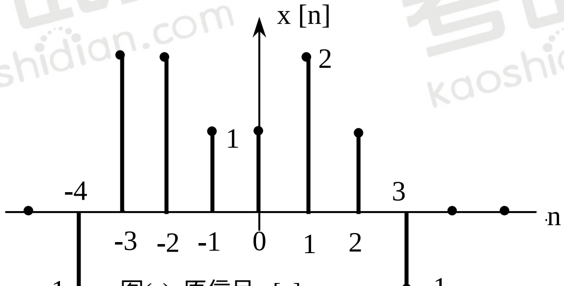


图(d) 原信号的奇信号分量 $x_o(t)$

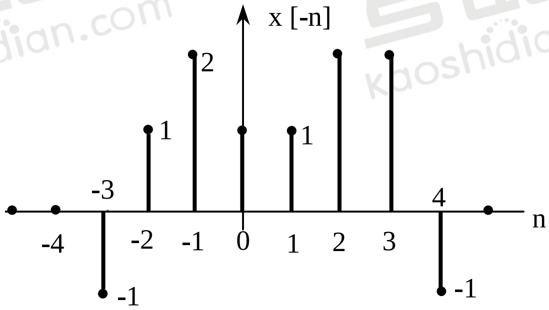
(2)类似于连续信号，离散信号也可分解为偶信号与奇信号之和: $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$

其中：$x_e[n]$ 为偶信号：$x_e[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[-n]\}$

$x_o[n]$ 为奇信号：$x_o[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x[n]\}$



图(a) 原信号 x[n]



图(b) 原信号的反转 x[-n]

此处偶信号 $x_e[n]$ 与奇信号 $x_o[n]$ 均不再画出

偶信号 $x_e[n]=\{\frac{1}{2}(-1,2-1,2+1,1+2,\underset{\downarrow}{1+1},2+1,1+2,-1+2,-1)\}$

$=\{-0.5，0.5，1.5，1.5，\underset{\downarrow}{1}，1.5，1.5，0.5，-0.5\}$

奇信号 $x_o[n]=\frac{1}{2}\{(-1,2+1,2-1,1-2,\underset{\downarrow}{1-1},2-1,1-2,-1-2,1)\}$

$=\{-0.5，1.5，0.5，-0.5，\underset{\downarrow}{0}，0.5，-0.5，-1.5，0.5\}$

1.10 判定下列时间信号的周期性，试确定它的基波周期。

(1) $x(t)=3\cos(4t+\frac{\pi}{3})$；　(2) $x(t)=e^{\alpha(\pi t-1)}$

(3) $x(t)=[\cos 2\pi t]u(t)$；　(4) $x[n]=\cos n/4$

(5) $x[n]=\cos(\frac{8\pi n}{7}+2)$；　(6) $x[n]=2\cos(n\pi/4)+3\sin(n\pi/6)-\cos n\pi/2)$

解答：(1) $T_0=\frac{2\pi}{|w_0|}=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$；　(2) 当 a 为实数时，$x(t)$ 是非周期信号；

(3) 单边正弦信号，非周期信号；

(4) 正弦序列，$\omega_0=1/4$，$2\pi/\omega_0=8\pi$ 为无理数，非周期序列；

(5) 正弦序列，$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{7}{4}$ 为有理数，周期序列，周期为 $T=7$；

(6) 周期序列，周期为 $T=24$。

1.11 如 x_1(t)和 x_2(t)分别是具有基波周期为 T_1 与 T_2 的周期信号，试问在什么条件下，这两个信号之和 x_1(t)+x_1(t)是周期性的？如果该信号是周期的，基波周期是什么？

解答：$x_1(t)$ 的周期为 T_1，即有 $x_1(t)=x_1(t+T_1)$，$x_2(t)$ 的周期为 T_2，即有

$x_2(t)=x_2(t+T_2)$，当 T_1/T_2 为有理数，即可以表示为 $T_1/T_2=n/m$ 时，$x_1(t)+x_2(t)$ 为

周期信号，周期为 $T=mT_1=nT_2$，也即当 T 为 T_1，T_2 最小公倍数时信号是周期的。

1.12 试判断以下系统的性质：记忆、因果、线性、时不变、稳定性。

（1） $y(t)=e^{xt}$ ；（2） $y[n]=x[n]x[n-1]$ ；（3） $y(t)=\frac{dx}{ddt}$ ；

（4） $y[n]=x[n-2]-x[n+1]$ ；（5） $y(t)=\sin(4t)x(t)$ ；（6） $y[n]=x[4n]$。

解答：以表格形式比较清楚：

小题	记忆	因果	线性	时不变	稳定性
(1)	×	√	×	√	√
(2)	√	√	×	√	√
(3)	√	√	√	√	√
(4)	√	×	√	×	×
(5)	×	√	√	×	√
(6)	×	√	√	√	√

（1） $y(t)=e^{xt}$

（a）系统在时刻 t 的输出只与时刻 t 的输入有关，无记忆系统；

（b）系统在时刻 t 的输出与时刻 t 以后的输入无关，因果系统；

（c）若 $y_1(t)=e^{x_1(t)}$，$y_2(t)=e^{x_2(t)}$，而 $y(t)=e^{x_1(t)+x_2(t)}\neq y_1(t)+y_2(t)$，非线性系统；

（d） $y_1(t)=e^{x_1(t)}$，$x_2(t)=x_1(t-t_0)$，$y_2(t)=e^{x_2(t)}=e^{x_1(t-t_0)}=y_1(t-t_0)$，时不变系统；

（e）若 $|x(t)|<M$，则 $|y(t)|<e^M$，稳定系统。

（2） $y[n]=x[n]x[n-1]$

（a）系统在时刻 n 的输出与时刻 $n-1$ 的输入有关，记忆系统；

（b）系统在时刻 n 的输出与时刻 n 以后的输入无关，因果系统；

（c）若 $y_1[n]=x_1[n]x_1[n-1]$，$y_2[n]=x_2[n]x_2[n-1]$，以及 $y[n]=x[n]x[n-1]$，其中 $x[n]=x_1[n]+x_2[n]$，则有 $y[n]=(x_1[n]+x_2[n])(x_1[n-1]+x_2[n-1])\neq y_1[n]+y_2[n]$，非线性系统；

（d）假设 $y_1[n]=x_1[n]x_1[n-1]$，$y_2[n]=x_2[n]x_2[n-1]$，且 $x_2[n]=x_1[n-n_0]$，则有 $y_2[n]=x_1[n-n_0]x_1[n-n_0-1]=y_1[n-n_0]$，时不变系统；

（e）若 $|x[n]|<M$，则有 $|y[n]|<M^2$，稳定系统。

（3） $y(t)=\frac{dx}{ddt}$

（a） $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$，系统在时刻 t 的输出与时刻 $t+\Delta t$ 的输入有关，

记忆系统；

(b) 此系统为 LTI 系统（以下可验证），又系统的单位冲激响应为 $h(t)=d\delta(t)/dt$，当 $t<0$ 时，$h(t)=0$，是因果系统；

(c) 若 $y_1(t)=\dfrac{dx_1(t)}{dt}$，$y_2(t)=\dfrac{dx_2(t)}{dt}$，$y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$，其中 $x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$，

则有 $y(t)=a_1\dfrac{dx_1(t)}{dt}+a_2\dfrac{dx_2(t)}{dt}=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$，是线性系统；

(d) 若 $y_1(t)=\dfrac{dx_1(t)}{dt}$，$x_2(t)=x_1(t-t_0)$，

则有 $y_2(t)=\dfrac{dx_2(t)}{dt}=\dfrac{dx_1(t-t_0)}{dt}=y_1(t-t_0)$，是时不变系统；

(e) 取 $x(t)=u(t)$，显然 $x(t)$ 是有界的，但输出 $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=\delta(t)$ 无界，是不稳定系统；

(4) $y[n]=x[n-2]+x[n+1]$

(a) 系统在时刻 n 的输出与时刻 $n-2$ 以及时刻 $n+1$ 的输入有关，记忆系统；
(b) 系统在时刻 n 的输出与时刻 $n+1$（时刻 n 以后）的输入有关，非因果系统；
(c) 若 $y_1[n]=x_1[n-2]+x_1[n+1]$，$y_2[n]=x_2[n-2]+x_2[n+1]$，以及 $y[n]=x[n-2]+x[n+1]$，其中 $x[n]=a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$，则有

$y[n]=a_1x_1[n-2]+a_2x_2[n-2]+a_1x_1[n+1]+a_2x_2[n+1])=a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$，是线性系统；

(d) 若 $y_1[n]=x_1[n-2]+x_1[n+1]$，$x_2[n]=x_1[n-n_0]$，则有

$y_2[n]=x_2[n-2]+x_2[n+1]=x_1[n-2-n_0]+x_1[n+1-n_0]=y_1[n-n_0]$，时不变系统；

(e) 若 $|x[n]|<M$，则有 $|y[n]|<2M$，稳定系统。

(5) $y(t)=\sin(4t)x(t)$

(a) 系统在时刻 t 的输出只与时刻 t 的输入有关，无记忆系统；
(b) 系统在时刻 t 的输出与时刻 t 以后的输入无关，因果系统；
(c) 若 $y_1(t)=\sin(4t)x_1(t)$，$y_2(t)=\sin(4t)x_2(t)$，$x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$，则有

$y(t)=\sin(4t)x(t)=a_1\sin(4t)x_1(t)+a_2\sin(4t)x_2(t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$，是线性系统；

(d) 若 $y_1(t)=\sin(4t)x_1(t)$， $y_2(t)=\sin(4t)x_2(t)$，其中 $x_2(t)=x_1(t-t_0)$，则有 $y_2(t)=\sin(4t)x_1(t-t_0)$，而 $y_1(t-t_0)=\sin(4(t-t_0))x_1(t-t_0)$，是时变系统；

(e) 若 $|x(t)|<M$，则有 $|y(t)|<M$，是稳定系统。

(6) $y[n]=x[4n]$

(a) 系统在时刻 n 的输出与时刻 $4n$ 的输入有关，记忆系统；

(b) 系统在时刻 n 的输出与时刻 $4n$ 的输入有关，当 $n>0$ 时，时刻 $4n$ 在时刻 n 之后，因此，是非因果系统；

(c) 若 $y_1[n]=x_1[4n]$， $y_2[n]=x_2[4n]$，以及 $x[n]=a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$，则有 $y[n]=x[4n]=a_1x_1[4n]+a_2x_2[4n]=a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$，线性系统；

(d) 若 $y_1[n]=x_1[4n]$， $x_2[n]=x_1[n-n_0]$，则有 $y_2[n]=x_2[4n]=x_1[4n-n_0]$，而 $y_1[n-n_0]=x_1[4(n-n_0)]$，因此，是时变系统；

(e) 若 $|x[n]|<M$，则有 $|y[n]|<M$，是稳定系统。

1.13 有一离散时间系统，输入为 x[n]时，系统的输出 y[n]为

$$y[n]=x[n]x[n-2]$$

问：(1)系统是记忆系统吗？

(2)当输入为 $A\delta[n]$，A 为任意实数或复数，求系统输出。

解答：(1) 是；因为系统在时刻 n 的输出 y[n]不但取决于 n 时刻的输入，还与时刻 n-2 的输入有关；

(2) $y[n]=A\delta[n]A\delta[n-2]=A^2\delta[n]\delta[n-2]=0$

1.14 一连续时间线性系统 S，其输入为 x(t)，输出为 y(t)，有以下关系：

$$x(t)=e^{j2t}\xrightarrow{S}y(t)=e^{j3t}$$

$$x(t)=e^{-j2t}\xrightarrow{S}y(t)=e^{-j3t}$$

(1) 若 $x_1(t)=\cos 2t$，求系统的输出 $y_1(t)$；

(2) 若 $x_2(t)=\cos(2t-1)$，求系统的输出 $y_2(t)$。

解：(1) $x_1(t)=\cos 2t=\frac{1}{2}(e^{j2t}+e^{-j2t})$，$y_1(t)=\frac{1}{2}(e^{j3t}+e^{-j3t})=\cos 3t$ （线性系统）；

(2) $x_2(t)=\cos(2t-1)=\frac{1}{2}(e^{j(2t-1)}+e^{-j(2t-1)})=\frac{1}{2}(e^{-j}e^{j2t}+e^{j}e^{-j2t})$，

由于是线性系统，有 $y_2(t)=\frac{1}{2}(e^{-j}e^{j3t}+e^{j}e^{-j3t})=\cos(3t-1)$

1.15 用 u[n]表示图 1-58 所示的各序列。

解：图 1-58 见 P27，此略。

(1) $y[n]=u[n+1]-u[n-4]$

(2) $y[n]=\frac{(n+1)}{2}\{u[n]-u[n-5]\}$

(3) $x[n]=(2n+2)u[n]+(4-2n)u[n-2]+(8-2n)u[n-5]+(2n-14)u[n-7]$

1.16 求下列积分的值。

(1) $\int_{-4}^{4}(t^2+3t+2)[\delta(t)+\delta(t-1)]dt$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)\delta(t-\frac{\pi}{2})dt$

(3) $\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+t)\delta(\cos t)dt$

解：(1) $\int_{-4}^{4}(t^2+3t+2)[\delta(t)+\delta(t-1)]dt=f(0)+f(1)=2+6=8$；

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)\delta(t-\frac{\pi}{2})dt=f(\frac{\pi}{2})=1$；

(3) $\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+t)\delta(\cos t)dt=(1+t)\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}}+(1+t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}+(1+t)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}+(1+t)\Big|_{t=-\frac{3\pi}{2}}=4$；

1.17 证明：$\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$。

证明：(1) 当 $t\neq 0$ 时，$2t\neq 0$，于是有 $\delta(2t)=0$；

(2) 又 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t)dt\overset{t_1=2t}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t_1)d(\frac{t_1}{2})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t_1)dt_1=\frac{1}{2}$；当 t=0

因此有，$\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$。

1.18 一个 LTI 系统，当输入 $x(t)=u(t)$ 时，输出为 $y(t)=e^{-t}u(t)+u(-1-t)$。求该系统对图 1-59 所示输入信号 $x(t)$ 的响应，并画出其波形。

解：当输入信号为 $x(t)=u(t)$ 时， 系统的输出为 $y(t)=e^{-t}u(t)+u(-1-t)$

现输入信号为 $x_1(t)=u(t-1)-u(t-2)$

由于是 LTI 系统，因此输出为 $y_1(t)=y(t-1)-y(t-2)$，即

$y_1(t)=e^{-(t-1)}u(t-1)+u(-t)-e^{-(t-2)}u(t-2)-u(1-t)$，其时域波形如下图所示。

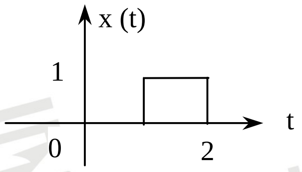
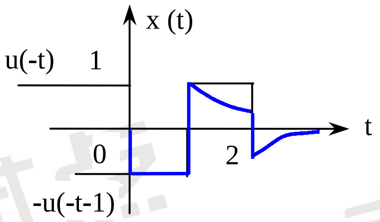


图 1-59 题 1.18 图



题 1.18 解答示意图

1.19 已知一个 LTI 系统图 1-60（a）所示信号 $x_1(t)$ 的响应 $y_1(t)$ 如图 1-60（b），求该系统对题图 1-60（c），1-60（d）所示信号 $x_2(t)$、$x_3(t)$ 的响应，并画出其波形。

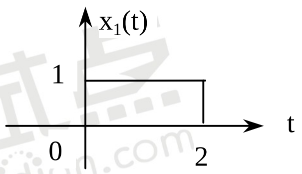


图 1-60（a）

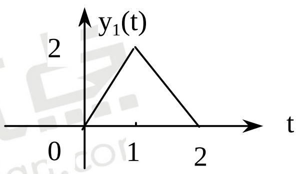


图 1-60（ b）

图 1-60 题 1.19 图

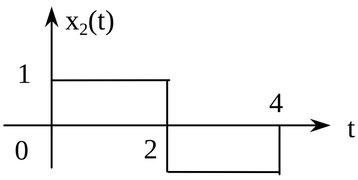


图 1-60（c）

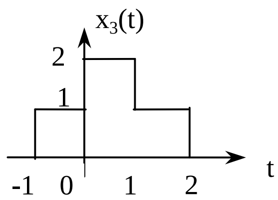


图 1-60（d）

解：(1) 由图 1-60（c）知：$x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-2)$

由于是 LTI 系统，便有 $y_2(t)=y_1(t)-y_1(t-2)$，图见 1-60（c'）；

(2) 由图 1-60（d）知：$x_3(t)=x_1(t+1)+x_1(t)$，同（1）理，有

$y_3(t)=y_1(t+1)+y_1(t)$，图见 1-60（d'）。

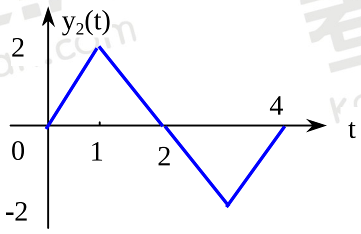


图 1-60（c'）

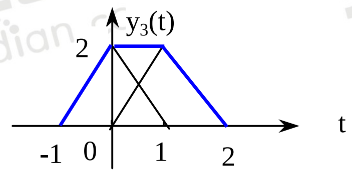


图 1-60（d'）

1.20　如图 1-61 所示的反馈系统，假设 n<0, y[n]=0, 试画出 $x[n]=\delta[n]$ 时的 y[n]。

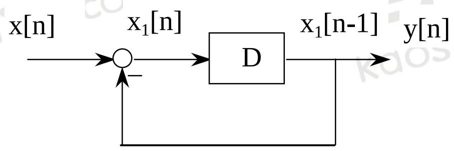


图 1-61　题 1.20 图

解：因为 $y[n]=x_1[n-1]$ ； $y[n+1]=x_1[n]$

$$x_1[n]=x[n]-y[n]$$

故： $y[n+1]+y[n]=x[n]$

当 n=-1 时： $y[0]+y[-1]=x[-1]$

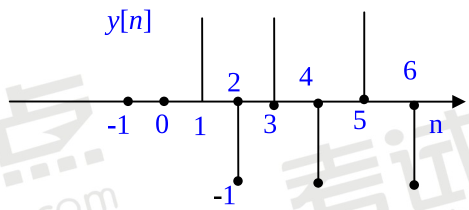
因为 n<0, y[n]=0, 且 $x[n]=\delta[n]$ ；故： $y[0]=0$

当 n=0 时： $y[1]+y[0]=x[0]$ ；故： $y[1]=1$

当 n=1 时： $y[2]+y[1]=x[1]$ ；故： $y[2]=-1$

当 n=2 时： $y[3]+y[2]=x[2]$ ；故： $y[3]=1$

显然， $y[n]=(-1)^{n-1}u[n-1]$



题 1.20 解答示意图

1.21　对图所示级联，3 个系统具有以下输入输出关系

S1： $y[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{2}], \text{n is even} \\ 0,\ n\ is\ odd \end{cases}$

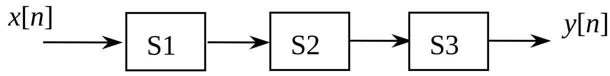


图 1-62　题 1.21 图

S2： $y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{4}x[n-2]$

S3： $y[n]=x[2n]$

求：(1) 整个系统的输入输出关系；

(2) 整个系统是线性时不变系统吗？

解：设系统 S1、S2 的输出分别为 $w_1[n]$和 $w_2[n]$，则

(1) 系统 S1 的输出： $w_1[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{2}], \text{n is even} \\ 0,\ n\ is\ odd \end{cases}$

(2) 系统 S2 的输出：

$$w_2[n]=w_1[n]+\frac{1}{2}w_1[n-1]+\frac{1}{4}w_1[n-2]=\begin{cases} x[\frac{n}{2}]+\frac{1}{4}x[\frac{n-2}{2}], \text{n is even} \\ \frac{1}{2}x[\frac{n-1}{2}], \quad \text{n is odd} \end{cases}$$

(3) 整个系统也即 S3 的输出： $y[n]=y_3[n]=w_2[2n]$

所以 $y[n]=x[n]+\frac{1}{4}x[n-1]$

(2) 因为呈线性关系，故是线性系统。还可容易地判定系统也是时不变系统。

1.22 用直角坐标形式表示下列复数：$\frac{1}{2}e^{j\pi}$；$e^{-j\frac{\pi}{2}}$；$e^{j\frac{5\pi}{2}}$；$\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$；$\sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}}$。

解：因为：复数的三种形式分别为：

极坐标形式：$A=re^{j\theta}$；三角形式：$A=r(\cos\theta+j\sin\theta)$

直角坐标形式：$A=a+jb$，其中：$\begin{cases}a=r\cos\theta\\ b=r\sin\theta\end{cases}$

所以：(1) $\frac{1}{2}e^{j\pi}=\frac{1}{2}\cos\pi=-\frac{1}{2}$；　　(2) $e^{-j\frac{\pi}{2}}=j\sin(-\frac{\pi}{2})=-j$；

(3) $e^{j\frac{5\pi}{2}}=j$；　　(4) $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+j\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1+j$

(5) $\sqrt{2}e^{-j\frac{9\pi}{4}}=\sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4})+j\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4})=-1-j$

1.23 用极坐标形式（$re^{j\theta t}$，$-\pi<\theta\le\pi$）表示下列复数：

－2，3j，1＋j，j(1－j)，$\frac{(\sqrt{2}+j\sqrt{2})}{1+j\sqrt{3}}$，（1＋j）（1－j）。

解：(1) $-2=2e^{j\pi}$；　　(2) $3j=3e^{j\frac{\pi}{2}}$；

(3) $1+j=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$；　　(4) $j(1-j)=1+j=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$；

(5) $\frac{(\sqrt{2}+j\sqrt{2})}{1+j\sqrt{3}}=\frac{2e^{j\frac{\pi}{4}}}{2e^{j\frac{\pi}{3}}}=e^{-j\frac{\pi}{12}}$；(6) $(1+j)(1-j)=2=2e^{j0}$

1.24 有一线性时不变系统，当激励 $x_1(t)=u(t)$ 时，响应 $y_1(t)=e^{-at}u(t)$，试求当 $x_2(t)=\delta(t)$ 时，响应 $y_2(t)$ 的表示式（假定起始时刻系统无储能）。

解：因为 $x_1(t)=u(t)$，而 $x_2(t)=\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}=\frac{dx_1(t)}{dt}$

故从输入间的关系，可得其输出的关系（由题知起始时刻系统无储能）：

$$y_2(t)=\frac{dy_1(t)}{dt}=\frac{d(e^{-at}u(t))}{dt}=\delta(t)-ae^{-at}u(t)$$

于慧敏主编<信号与系统>第二章作业(P69－75) 习题解答

2.1-2.17

2.1 求下列各函数 $x(t)$与 $h(t)$的卷积 $x(t)*h(t)$。

(1) $x(t)=e^{\alpha t}u(t)$， $h(t)=u(t), a\neq 0$;

(2) $x(t)=\delta(t)$， $h(t)=\cos w_0 t+\sin w_0 t$ ；

(3) $x(t)=(1+t)[u(t)-u(t-1)]$， $h(t)=u(t)-u(t-2)$

(4) $x(t)=\sin 2t\cdot u(t)$， $h(t)=u(t)$

(5) $x(t)=u(t)-2u(t-2)+u(t-4)$， $h(t)=e^{2t}$

(6) x(t)与 h(t)如图 2-34 所示。

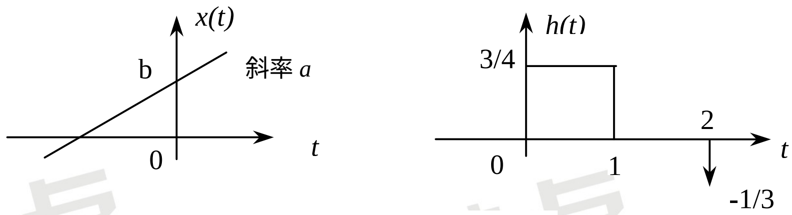


图 2-34 题 2-1 第（6）题

解：(1) $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$

$$=\int_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau=-\frac{1}{a}e^{-\alpha\tau}\Big|_0^t=\frac{1}{a}(1-e^{-\alpha t})u(t)$$

(2) $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)[\cos w_0 t+\sin w_0 t]d\tau$

$$=\cos w_0 t+\sin w_0 t$$

(3) 方法一为作图法：

当 $t<0$ 时， $y(t)=x(t)*h(t)=0$

当 $0\le t<1$ 时， $y(t)=x(t)*h(t)=\int_0^t(1+\tau)d\tau=t+\frac{t^2}{2}$

当 $1\le t<2$ 时， $y(t)=x(t)*h(t)=\int_0^1(1+\tau)d\tau=\frac{3}{2}$

当 $2\le t<3$ 时, $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{t-2}^{1}(1+\tau)d\tau=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{3}{2}$

当 $3\le t$ 时, $y(t)=x(t)*h(t)=0$

方法二：直接计算法：

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)[u(\tau)-u(\tau-1)][u(t-\tau)-u(t-\tau-2)]d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)u(\tau)u(t-\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)u(\tau)u(t-\tau-2)d\tau$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)u(\tau-1)u(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)u(\tau-1)u(t-\tau-2)d\tau$$
$$=u(t)\int_{0}^{t}(1+\tau)d\tau-u(t-2)\int_{0}^{t-2}(1+\tau)d\tau-u(t-1)\int_{1}^{t}(1+\tau)d\tau+u(t-3)\int_{1}^{t-2}(1+\tau)d\tau$$
$$=(t+\frac{t^2}{2})u(t)-(t+\frac{t^2}{2}-\frac{3}{2})u(t-1)-(\frac{t^2}{2}-t)u(t-2)+(\frac{t^2}{2}-t-\frac{3}{2})u(t-3)$$

(4) 当 $t<0$ 时，$y(t)=x(t)*h(t)=0$；

当 $t>0$ 时，

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\sin 2\tau u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$
$$=u(t)\int_{0}^{t}\sin 2\tau d\tau=-\frac{1}{2}\cos 2\tau\Big|_{0}^{t}u(t)=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)u(t)$$

(5) $$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[u(t-\tau)-2u(t-\tau-2)+u(t-\tau-4)]e^{2\tau}d\tau$$
$$=\int_{t-2}^{t}e^{2\tau}d\tau-\int_{t-4}^{t-2}e^{2\tau}d\tau=\frac{1}{2}(e^{2t}-2e^{2(t-2)}+e^{2(t-4)})$$

(6) $x(t)=at+b$，$h(t)=\frac{4}{3}[u(t)-u(t-1)]-\frac{1}{3}\delta(t-2)$

方法一：

$$y(t)=x(t)*h(t)=\frac{4}{3}\int_{t-1}^{t}(a\tau+b)d\tau+(at+b)*(-\frac{1}{3})\delta(t-2)$$
$$=\frac{4}{3}(\frac{a\tau^2}{2}+b\tau)\Big|_{t-1}^{t}+(-\frac{1}{3})[a(t-2)+b]=at+b$$

方法二：

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[a(t-\tau)+b]\{\frac{4}{3}[u(\tau)-u(\tau-1)]-\frac{1}{3}\delta(\tau-2)\}d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{3}[a(t-\tau)+b][u(\tau)-u(\tau-1)]d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3}[a(t-\tau)+b]\delta(\tau-2)d\tau$$
$$=\frac{4}{3}\int_{0}^{1}[a(t-\tau)+b]d\tau-\frac{1}{3}[a(t-2)+b]=\frac{4}{3}(at-\frac{a}{2}+b)-\frac{1}{3}(at-2a+b)$$
$$=at+b$$

2.2 求下列离散序列 $x(n)$与 $h(n)$的卷积和。

(1) $x[n]=nu[n]$，$h[n]=\delta[n-2]$；　　(2) $x[n]=2^n u[n]$，$h[n]=u[n]$

(3) $x[n]=2^n u[-n-1]$，$h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n-1]$；　　(4) $x[n]=a^n u[n]$，$h[n]=\beta^n u[n]$；

(5) $x[n]=(-1)^n(u[-n]-u[-n-8])$，$h[n]=u[n]-u[n-8]$

解：(1) $x[n]*h[n]=nu[n]*\delta[n-2]=[n-2]u[n-2]$

(2)用到等比数列前 n 项的求和公式：$S=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ （通项：$a_n=a_1q^{n-1}$）

此题：$a_1=1, q=2$

$$x[n]*h[n]=2^n u[n]*u[n]=(\sum_{k=0}^{n}2^k)u[n]=(2^{n+1}-1)u[n]$$

(3) 用到无穷等比递减数列求和公式：$S=\dfrac{a_1}{1-q}, |q|<1$ （通项：$a_n=a_1q^{n-1}$）

此题，当 n<0 时，$a_1=2^{n-2}, q=2^{-2}$；当 n>=0 时，$a_1=2^{-n-2}, q=2^{-2}$

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k u[-k-1](\frac{1}{2})^{n-k}u[n-k-1]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{2k-n}u[-k-1]u[n-k-1]=\begin{cases}\sum_{k=-\infty}^{n-1}2^{2k-n}=\dfrac{2^n}{3} & n<0\\ \sum_{k=-\infty}^{-1}2^{2k-n}=\dfrac{2^{-n}}{3} & n\geq 0\end{cases}=\frac{2^{-|n|}}{3}$$

(4) 用到等比数列前 n 项的求和公式（参见（2））：且此题：$a_1=1, q=\dfrac{\alpha}{\beta}$

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^k u[k]\beta^{n-k}u[n-k]=u[n]\beta^n\sum_{k=0}^{n}(\frac{\alpha}{\beta})^k=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}u[n];$$

(5) $x[n]=(-1)^n(u[-n]-u[-n-8])=(-1)^n(u[n+7]-u[n-1])$

$$x[n]*h[n]=\{(-1)^n(u[n+7]-u[n+1])\}*\{u[n]-u[n-8]\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k(u[k+7]-u[k-1])(u[n-k]-u[n-k-8])$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k u[k+7]u[n-k]-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k u[k+7]u[n-k-8]$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k u[k-1]u[n-k]+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k u[k-1]u[n-k-8]$$

$$=u[n+7]\sum_{k=-7}^{n}(-1)^k-u[n-1]\sum_{k=-7}^{n-8}(-1)^k-u[n-1]\sum_{k=1}^{n}(-1)^k+u[n-9]\sum_{k=1}^{n-8}(-1)^k$$

$$=\frac{(-1)^n-1}{2}u[n+7]+[1-(-1)^n]u[n-1]+\frac{(-1)^n-1}{2}u[n-9]$$

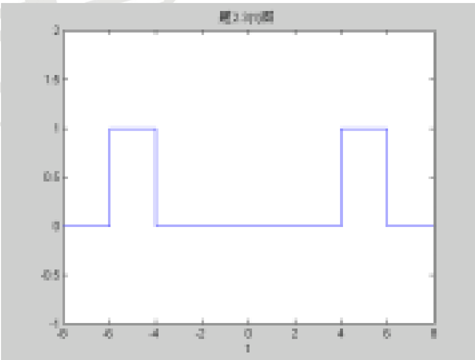
$$=\frac{(-1)^n-1}{2}(u[n+7]-2u[n-1]+u[n-9])$$

2.3 已知 $x_1(t)=u(t+1)-u(t-1)$，$x_2(t)=\delta(t+5)+\delta(t-5)$，$x_3(t)=\delta(t+\frac{1}{2})+\delta(t-\frac{1}{2})$，画出下列各卷积波形。(1) $x_1(t)*x_2(t)$；(2) $x_1(t)*x_2(t)*x_3(t)$；(3) $x_1(t)*x_3(t)$

解： (1) $x_1(t)*x_2(t)=[u(t+1)-u(t-1)]*[\delta(t+5)+\delta(t-5)]$

$$=u(t+6)+u(t-4)-u(t+4)-u(t-6)$$

也可直接计算为： $x_1(t)*x_2(t)=x_1(t+5)+x_1(t-5)$；



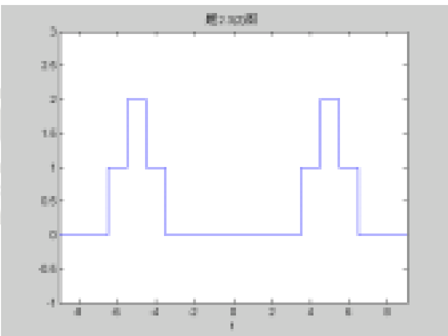
(2) $x_1(t)*x_2(t)*x_3(t)$

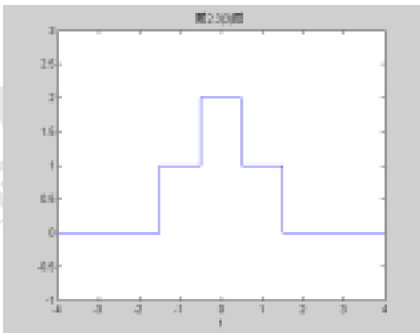
$$=[u(t+6)+u(t-4)-u(t+4)-u(t-6)]*[\delta(t+\frac{1}{2})+\delta(t-\frac{1}{2})]$$

$$=u(t+6.5)-u(t+4.5)+u(t+5.5)-u(t+3.5)+u(t-3.5)-u(t-5.5)$$

$$+u(t-4.5)-u(t-6.5)$$

也可先设 $x_1(t)*x_2(t)=y(t)$，则有 $x_1(t)*x_2(t)*x_3(t)=y(t+\frac{1}{2})+y(t-\frac{1}{2})$；





(3) $x_1(t)*x_3(t)=[u(t+1)-u(t-1)]*\delta(t+\frac{1}{2})+\delta(t-\frac{1}{2})$

$$=u(t+1.5)-u(t-0.5)+u(t+0.5)-u(t-1.5)$$

也可直接计算为：$x_1(t)*x_3(t)=x_1(t+\frac{1}{2})+x_1(t-\frac{1}{2})$

2.4 设 $y(t)=e^{-t}u(t)*\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)$，证明 $y(t)=Ae^{-t}$，$0\le t\le 3$，并求 A 值。

证明：$y(t)=e^{-t}u(t)*\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}e^{-t}u(t)*\delta(t-3k)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}e^{-(t-3k)}u(t-3k)$，

当 $0\le t\le 3$ 时，有 $y(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{0}e^{-(t-3k)}=e^{-t}\sum\limits_{k=-\infty}^{0}e^{3k}=\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-3}}=Ae^{-t}$，其中 $A=\dfrac{1}{1-e^{-3}}$；

2.5 求图 2-35 所示信号 x(t)与 h(t)的卷积，并用图解的方法画出 x(t)* h(t)的波形。

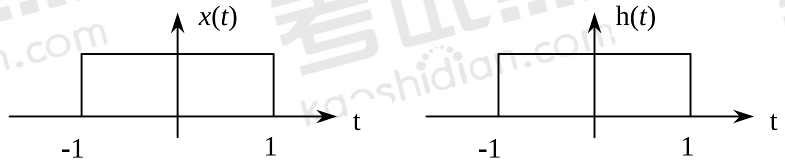


图 2-35 第(1)题图

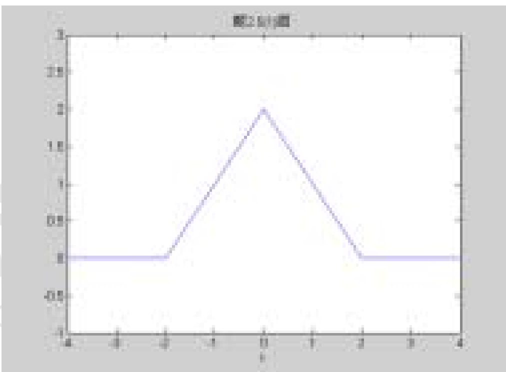
其余题图略（参见 P70）。

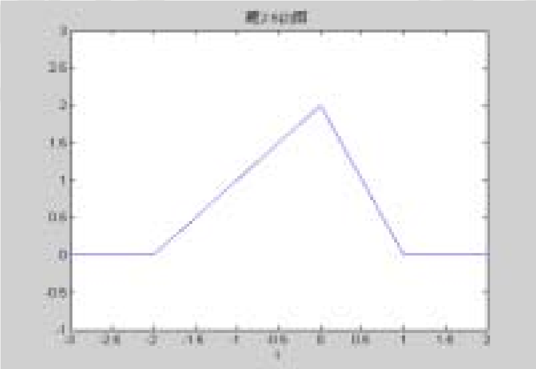
解：(1) 当 $|t|\ge 2$ 时 $x(t)*h(t)=0$

当 $-2<t<0$ 时 $x(t)*h(t)=\int_{-1}^{t+1}d\tau=t+2$

当 $0<t<2$ 时 $x(t)*h(t)=\int_{t-1}^{1}d\tau=2-t$

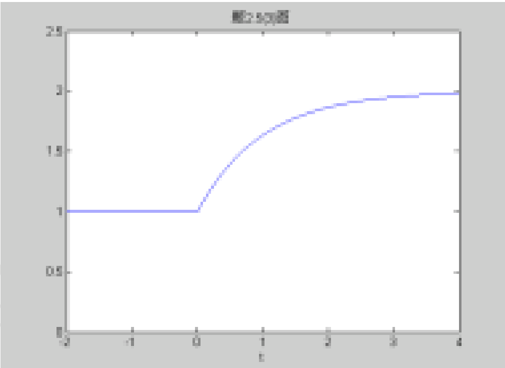
(2) $x(t)*h(t)=\begin{cases}2(1-t) & 0\le t<1\\ t+2 & -2\le t<0\\ 0 & 其它t\end{cases}$

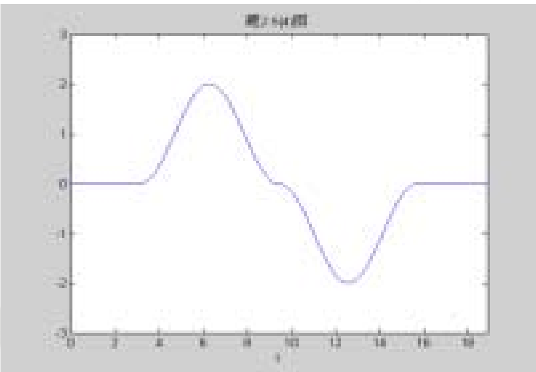




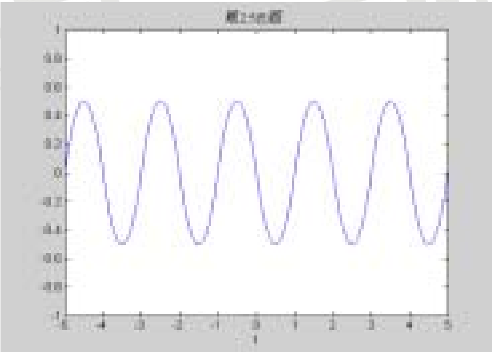
(3) $x(t)*h(t)=\begin{cases}1 & t<0\\ 2-e^{-t} & t\geq 0\end{cases}$；

(4) $x(t)*h(t)=\begin{cases}1+\cos t & \pi\leq t<3\pi\\ -1-\cos t & 3\pi\leq t<5\pi\\ 0 & 其它t\end{cases}$；



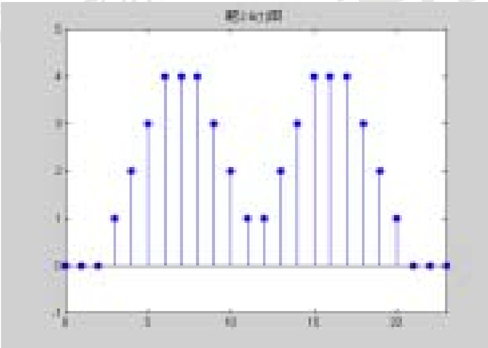


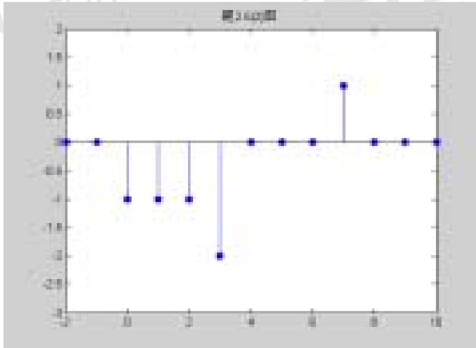
(5) $x(t)*h(t)=\begin{cases}-2t^2-2t & -1\leq t<0\\ 2t^2-2t & 0\leq t<1\end{cases}$，且为周期信号，其周期$T=2$；



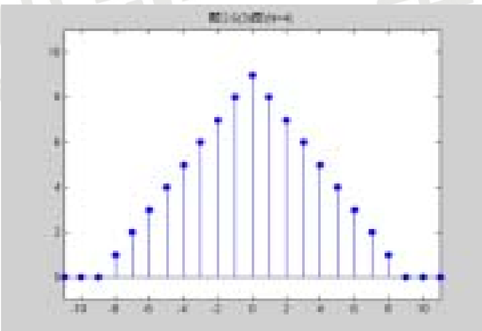
2.6　计算图 2-36 所示信号 $x(n)$与 $h(n)$的卷积和。

解：题图参见 P70 图 2-36，此略。





（3）N＝4



$$y[n]=x[n]*h[n]$$

$$=\begin{cases}0, & n<-8\\ \sum_{-4}^{4+n}1=9+n, & -8\le n<0\\ \sum_{-4+n}^{4}1=9-n, & 0\le n<8\\ 0, & n.>8\end{cases}$$

2.7　考虑一离散时间系统，其单位样值（脉冲）响应为　$h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$

（1）求 A 以满足　$h[n]-Ah[n-1]=\delta[n]$

（2）利用（1）的结果，求系统的逆系统的单位样值（脉冲）响应。

解：(1)　$h[n]-Ah[n-1]=\delta[n]$，其中 $h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$，

令 $n=1$，则有 $h[1]-Ah[0]=\frac{1}{2}-A=0$，于是有 $A=\frac{1}{2}$；

（2）设逆系统的单位脉冲响应为 $h_1[n]$，则有 $h_1[n]*h[n]=\delta[n]$，即有，

$$h_1[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_1[k]h[n-k]=\delta[n]=h[n]-\frac{1}{2}h[n-1]$$，因此

$$h_1[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

2.8 某 LTI 系统的单位冲激响应为 $h_0(t)$，当输入为 $x_0(t)$ 时，系统对 $x_0(t)$ 的响应为 $y_0(t)=x_0(t)*h_0(t)$（如图 2-37 所示）。现给出以下各组单位冲激响应 $h(t)$ 和输入 $x(t)$，分别求 $y(t)=x(t)*h(t)$（用 $y_0(t)$ 表示），并画出 $y(t)$ 的波形图。

(1) $x(t)=3x_0(t)\,,h(t)=h_0(t)$;

(2) $x(t)=x_0(t)-x_0(t-2)\,,h(t)=h_0(t)$;

(3) $x(t)=x_0(t-2)\,,h(t)=h_0(t+1)$;

(4) $x(t)=x_0(-t)\,,h(t)=h_0(-t)$;

(5) $x(t)=\dfrac{dx_0(t)}{dt}\,,h(t)=h_0(t)$;

(6) $x(t)=\dfrac{dx_0(t)}{dt}\,,h(t)=\dfrac{dh_0(t)}{dt}$。

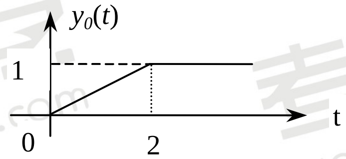
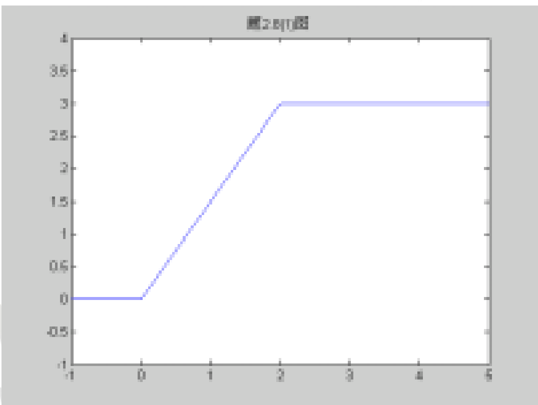
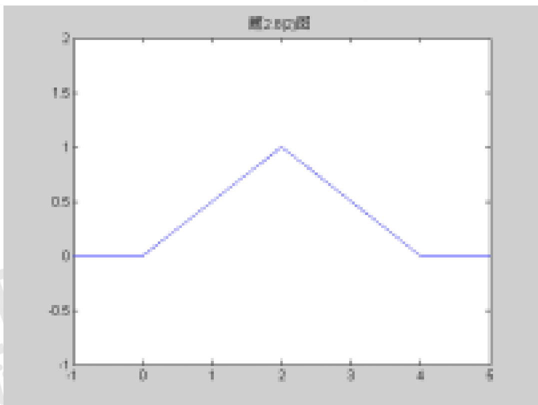


图 2-37　2.8 题图

解：(1) $x(t)*h(t)=3x_0(t)*h_0(t)=3y_0(t)$；

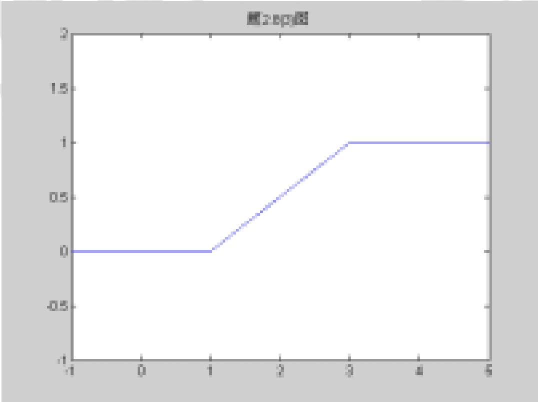
(2) $x(t)*h(t)=[x_0(t)-x_0(t-2)]*h_0(t)=y_0(t)-y_0(t-2)$；

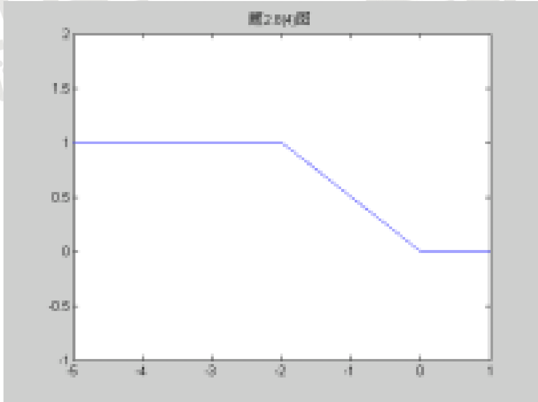




(3) $x(t)*h(t)=x_0(t-2)*h_0(t+1)=y_0(t-1)$；

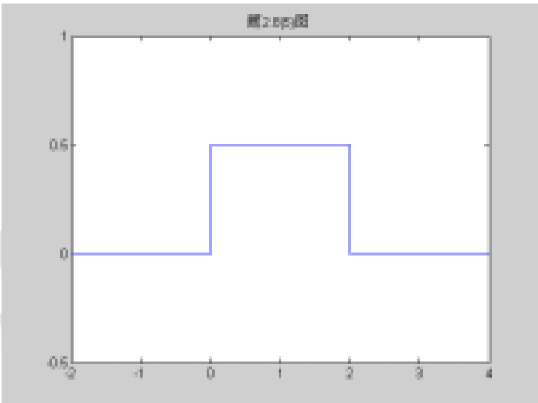
(4) $x(t)*h(t)=x_0(-t)*h_0(-t)=y_0(-t)$；

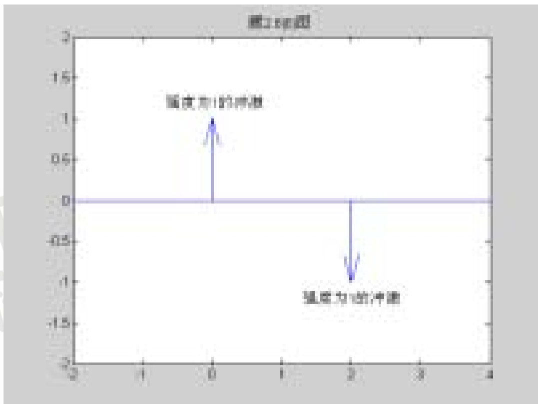




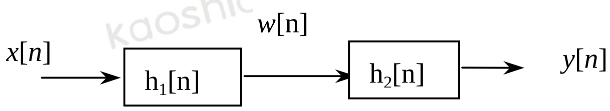
(5) $x(t)*h(t)=\frac{dx_0(t)}{dt}*h_0(t)=\frac{dy_0(t)}{dt}$；

(6) $x(t)*h(t)=\frac{dx_0(t)}{dt}*\frac{dh_0(t)}{dt}=\frac{d^2y_0(t)}{dt^2}$；





2.9 对图 2-38 所示两个 LTI 系统的级联，已知：$h_1[n]=\alpha^n u[n]+\beta^n u[n]$，$|\alpha|<1,|\beta|<1;\alpha\neq\beta\neq-\frac{1}{2}$；$h_2[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n]$；输入 $x[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$。求输出 $y[n]=x[n]*h_1[n]*h_2[n]$。



2-38

解：因为 LTI 级联系统的卷积与次序无关，故

$$x[n]*h_2[n]=\{\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]\}*(-\frac{1}{2})^n u[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n]+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

$=(-\frac{1}{2})^n\delta[n]=\delta[n]$；（因为当 n=0 时非零）

$$y[n]=x[n]*h_1[n]*h_2[n]=\delta[n]*h_1[n]=*h_1[n]=\alpha^n u[n]+\beta^n u[n]$$

2.10 求 $y[n]=x_1[n]*x_2[n]*x_3[n]$。其中 $x_1[n]=(0.5)^n u[n]$，$x_2[n]=u[n+3]$ 和 $x_3[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$。求卷积：

（1） $x_1[n]*x_2[n]$； (2) $x_1[n]*x_2[n]*x_3[n]$； （3） $x_2[n]*x_3[n]$

解：(1) $x_1[n]*x_2[n]$

$$=0.5^n u[n]*u[n+3]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}0.5^k u[k]u[n-k+3]=u[n+3]\sum_{k=0}^{n+3}0.5^k$$
$$=2(1-0.5^{n+4})u[n+3]$$

（2） $x_2[n]*x_3[n]=u[n+3]*\{\delta[n]-\delta[n-1]\}=u[n+3]-u[n+2]=\delta[n+3]$

$$x_1[n]*x_2[n]*x_3[n]=\delta[n+3]*x_1[n]=x_1[n+3]=(0.5)^{n+3}u[n+3]$$

（3） $x_2[n]*x_3[n]=u[n+3]*(\delta[n]-\delta[n-1])=u[n+3]-u[n+2]=\delta[n+3]$；

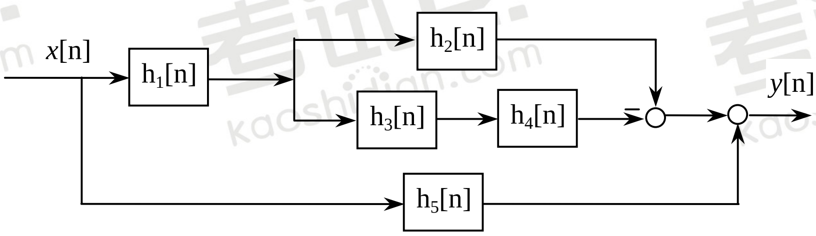
2.11 对如图 2-39 所示的 LTI 系统的互联：

（1） 用 $h_1[n]$、$h_2[n]$、$h_3[n]$、$h_4[n]$、$h_5[n]$ 表示总的单位冲激响应 $h[n]$；

（2） 当 $h_1[n]=4(\frac{1}{2})^n(u[n]-u[n-3])$，$h_2[n]=h_3[n]=(n+1)u[n]$，$h_4[n]=\delta[n-1]$，$h_5[n]=\delta[n]-4\delta[n-3]$，求单位冲激响应 $h[n]$；

（3） $x[n]$ 如图 2-40 所示，求（2）中所给的系统的响应，并画出响应的波形图。

解：



2-39

(1) $h[n]=h_1[n]*\{h_2[n]-h_3[n]*h_4[n]\}+h_5[n]$

(2) $h_3[n]*h_4[n]=(n+1)u[n]*\delta[n-1]=nu[n-1]$

$$h_2[n]-h_3[n]*h_4[n]=(n+1)u[n]-nu[n-1]=u[n]$$

$$h_1[n]*\{h_2[n]-h_3[n]*h_4[n]\}=4(\frac{1}{2})^n(u[n]-u[n-3])*u[n]$$

$$=4\{\sum_{k=-\infty}^{n}(\frac{1}{2})^k u(k)-\sum_{k=-\infty}^{n}(\frac{1}{2})^k u(k-3)\}=4\sum_{k=0}^{2}(\frac{1}{2})^k$$

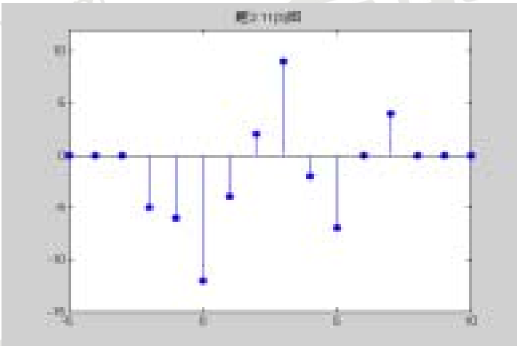
$$=4\{\delta[n]+\frac{3}{2}\delta[n-1]+\frac{7}{4}\delta[n-2]\}=4\delta[n]+6\delta[n-1]+7\delta[n-2]$$

$$h[n]=h_1[n]*\{h_2[n]-h_3[n]*h_4[n]\}+h_5[n]=5\delta[n]+6\delta[n-1]+7\delta[n-2]-4\delta[n-3]$$

(3) 将不同的 n 代入上式，可得（3）

n	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y[n]	…	0	-5	-6	-12	-4	2	4	-2	-7	0	4	0	…

波形图如下图所示



2.12 考虑一个 LTI 系统，其输入和输出关系通过如下方程联系

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

(1) 求该系统的单位冲激响应；

(2) 当输入如图 2-41 所示，求系统的响应。

解：(1) 因为系统输入为 $\delta(t)$，故系统输出即为系统的单位冲激响应，即：

$$y(t)=h(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}\delta(\tau-2)d\tau=\begin{cases}0 & t<2\\ e^{-(t-2)} & t>2\end{cases}=e^{-(t-2)}u(t-2)$$

(2) 因为图 2-41 所示的输入为 u(t+1)-u(t-2), 故系统输出：

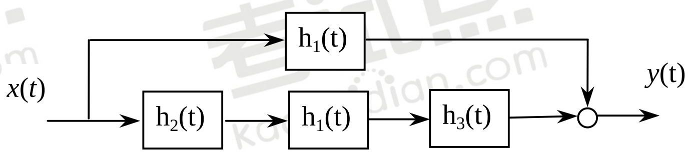
$$\begin{aligned}y(t)&=x(t)*h(t)=[u(t+1)-u(t-2)]*e^{-(t-2)}u(t-2)\\&=(1-e^{1-t})u(t-1)-(1-e^{4-t})u(t-4)\end{aligned};$$

2.13 如图 2-42 所示级联系统，各子系统的冲激响应分别为 $h_1(t)=u(t)$（积分器），

$h_2(t)=\delta(t-1)$（单位延时器），$h_3(t)=-\delta(t)$（倒相器）。

(1) 试求总的系统的冲激响应；

(2) 当 $x(t)$ 如图 2-41 所示，求系统对该信号的响应 $y(t)$。



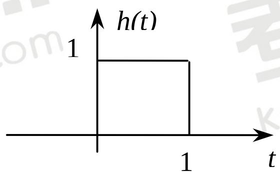
2-42

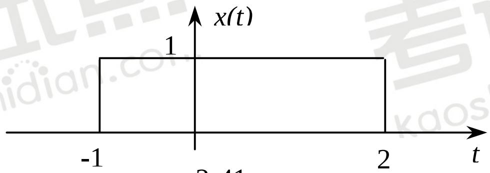
解：(1) $h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)=u(t)*\delta(t-1)*[-\delta(t)]=u(t-1)*[-\delta(t)]=-u(t-1)$

$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)=u(t)-u(t-1)$$

(2) 根据（1），可知 h(t)如下图示， 因此，求系统响应 $y(t)$即为求下面两个信号的卷积

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_0^t x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$





2-41

① 当 t＜－1 时， $x(\tau)$与$h(t-\tau)$无重叠部分，乘积为零，故

$$y(t)=x(t)*h(t)=0$$

② 当－1≤t＜0 时， $x(\tau)$与$h(t-\tau)$的重叠区为 $[-1, t]$，乘积为

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-1}^{t}d\tau=t+1$$

③ 当 0≤t＜2 时，$x(\tau)$与$h(t-\tau)$的重叠区为 $[-1+t, t]$，乘积为

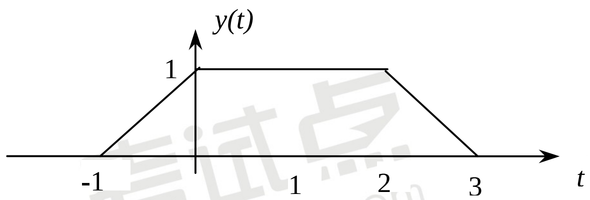
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-1+t}^{t}d\tau=1$$

④ 当 2≤t＜3 时，$x(\tau)$与$h(t-\tau)$的重叠区为 $[-1+t, 2]$，乘积为

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-1+t}^{2}d\tau=3-t$$

⑤ 当 t>3 时，$x(\tau)$与$h(t-\tau)$无重叠区，乘积为零。综上所述有

$$y(t)=\begin{cases}t+1 & (-1<t<0)\\ 1 & (0<t<2)\\ 3-t & (2<t<3)\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$，其示意图如下所示。



亦可直接计算：

（2） $$\begin{aligned}y(t)&=x(t)*h(t)=[u(t+1)-u(t-2)]*[u(t)-u(t-1)]\\&=(t+1)u(t+1)-tu(t)-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)\end{aligned}$$；

2.14 下面均为连续时间 LTI 系统的单位脉冲响应，试判定每一个系统是否因果和/或稳定的，陈述理由。

（1） $h(t)=e^{-4t}\cdot u(t-2)$；（2） $h(t)=e^{-6t}\cdot u(3-t)$

（3） $h(t)=e^{-2t}\cdot u(t+50)$；（4） $h(t)=e^{2t}\cdot u(-1-t)$

（5） $h(t)=e^{-6|t|}$；（6） $h(t)=te^{-t}\cdot u(t)$；

（7） $h(t)=(-2e^{-t}-e^{(t-100)/100})\cdot u(t)$。

解：（1）因果，稳定；从因果性及稳定性的定义出发，当 t<0（实际上，t<2）时，$h(t)$＝0，系统是因果的；又因 $h(t)$ 绝对可积，故系统是稳定的。

（2）非因果，非稳定；因为 $u(3-t)=u[-(t-3)]$，显然不满足系统因果性条件；又因：

$$\int_{-\infty}^{-3}h(t)dt=\int_{-\infty}^{-3}e^{-6t}dt=\infty$$，故系统不稳定。

（3） 非因果，稳定；非因果很显然；因为

$$\int_{-50}^{\infty}h(t)dt=\int_{-50}^{\infty}e^{-2t}dt<\infty$$ 绝对可积，故系统是稳定的。

（4） 非因果，稳定；因为 $u(-1-t)=u[-(t+1)]$；不满足系统因果性条件；又因

$$\int_{-\infty}^{-1}h(t)dt=\int_{-\infty}^{-1}e^{2t}dt<\infty$$ 绝对可积，故系统是稳定的。

（5）非因果，稳定。$h(t)=e^{-6|t|}$；$t<0$ 时，$h(t)\neq 0$，非因果，又 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$，稳定；

（6）因果，稳定。$h(t)=te^{-t}u(t)$；$t<0$ 时，$h(t)=0$，因果，又 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$，稳定；

（7）因果，不稳定。$h(t)=(-2e^{-t}-e^{\frac{t-100}{100}})u(t)$；$t<0$ 时，$h(t)=0$，因果，又 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt$ 发散，不稳定。

2.15 下面均为离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应，试判定每一个系统是否因果和/或稳定

的，陈述理由。

（1） $h[n]=(\frac{1}{5})^n\cdot u[n]$； （2） $h[n]=(\frac{4}{5})^n\cdot u[n+2]$；

（3） $h[n]=(\frac{1}{2})^n\cdot u[-n]$； （4） $h[n]=5^n\cdot u[3-n]$；

（5） $h[n]=(-\frac{1}{2})^n\cdot u[n]+(1.01)^n u[n-1]$；

（6） $h[n]=(-\frac{1}{2})^n\cdot u[n]+(1.01)^n u[1-n]$；

（7） $h[n]=n(\frac{1}{3})^n\cdot u[n-1]$。

解：依照上面连续系统的做法，逐一分析，可得如下结果：

（1） 因果，稳定；从因果性及稳定性的定义出发，当 n<0 时，$h[n]=0$，故系统是因果的；又因 $h[n]$ 绝对可和，即 $\sum_0^{\infty} h[n]=\sum_0^{\infty}(\frac{1}{5})^n<\infty$；故系统是稳定的。

（2） 非因果，稳定；因为 $u[n+2]$ 显然不满足系统因果性条件；又因：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]=\sum_{n=-2}^{\infty}(\frac{4}{5})^n<\infty$$ ；故系统是稳定的。

（3） 非因果，非稳定。因为 $u[-n]$ 显然不满足系统因果性条件；又因：

$$\sum_{-\infty}^{\infty} h[n]=\sum_{-\infty}^{0}(\frac{1}{2})^n=\sum_{0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{-n}=\infty$$ ；故系统是非稳定的。

（4） 非因果，稳定。因为 $u[-(n-3)]$ 显然不满足系统因果性条件；又因：

$$\sum_{-\infty}^{\infty} h[n]=\sum_{-\infty}^{-3}5^n=\sum_{3}^{\infty}5^{-n}<\infty$$ ；故系统是稳定的。

（5） 因果，不稳定。$h[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n]+1.01^n u[n-1]$，$n<0$ 时，$h[n]=0$，因果，又 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|$ 发散，不稳定；

（6） 非因果，稳定。$h[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n]+1.01^n u[1-n]$，$n<0$ 时，$h[n]\neq 0$，非因果，又 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$，稳定；

（7） 因果，稳定。$h[n]=n(\frac{1}{3})^n u[n-1]$，$n<0$ 时，$h[n]=0$，因果，又

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$，稳定。

2.16 判断下面有关 LTI 系统的说法是对是错。并陈述理由。

（1）若 h(t)是一个因果稳定系统的单位冲激响应，则 h(t)满足 $\lim_{t\to\infty}|h(t)|=0$；

解答：(1) 对。

（2）若 h(t)是一个 LTI 系统的单位冲激响应，并且 h(t)是周期的且非零，则系统是不稳定；

解答：(1) 对。$\because \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=+\infty$

（3）一个因果的 LTI 系统的逆系统总是因果的；

解答：(3) 错。例如单位冲激响应 $\delta(t-1)$ 是因果的，但其 LTI 系统的逆系统 $\delta(t+1)$ 不是因果的。

（4）若 $|h[n]|\le k$ （对每一个 n），k 为某已知数，则以 h[n]作为单位脉冲响应的 LTI 系统是稳定的；

解答：(4) 错。因为：$s[n]=u[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$。例如 h[n]=1, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=+\infty$,

（5）若一个离散时间 LTI 系统其单位脉冲响应 h[n]为有限长且有界，则系统是稳定的；

解答：(5) 对 $\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<+\infty$

（6）若一个 LTI 系统是因果的，它就是稳定的；

解答：(6) 错。因为因果系统与系统的稳定性定义不同。

LTI 系统稳定的充要条件是其单位脉冲响应绝对可积。而因果性的充要条件是其单位脉冲响应满足 h[n]=0，当 n<0

（7）一个非因果的 LTI 系统与一个因果的 LTI 系统级联，必定是非因果的；

解答：(7) 错

例如$h_1(t)=\delta(t+1), h_2(t)=\delta(t-2),\quad h(t)=h_1(t)*h_2(t)=\delta(t-1)$是因果的

（8）当且仅当一个连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应 s(t)是绝对可积的，即 $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|dt<\infty$，则该系统就是稳定的；

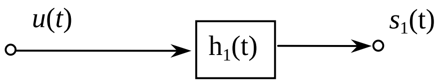
解答：(8) 错。因为 s(t)是绝对可积的不等于 h(t)绝对可积。

$\because h(t)*x(t)=x'(t)*s(t)$，如$s(t)=\delta(t), x(t)=u(t)$ 则 $h(t)*x(t)=\delta(t)\to\infty$

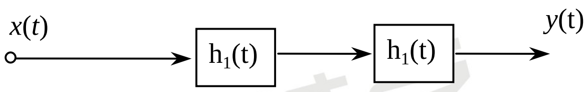
（9）当且仅当一个离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应 s[n]在 n<0 是零，该系统就是因果的。

解答：(9) 对。因为 $s[n]=s[n-1]+h[n]$，若 s[n]在 n<0 是零，h[n]在 n<0 时也必小于零，满足离散时间 LTI 系统的因果性充要条件。

2.17　已知如图 2-43（a）所示连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应为：$s_1(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$ 。现对如图 2-43（b）所示的系统，如果 $x(t)=u(t)-u(t-2)$，求系统响应 $y(t)=x(t)*h(t)$，并绘出 y(t)的波形。



图(a)



图(b)

图 2-43　题 2.17 图

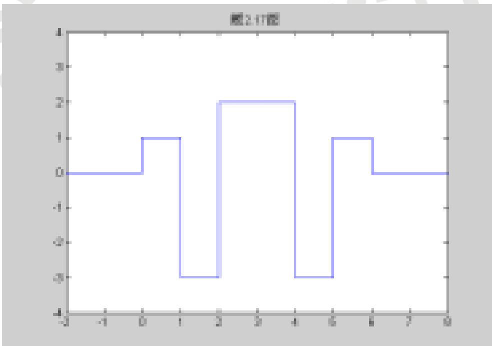
解：(1) 由 LTI 系统的线性叠加原理，据已知条件可得：

$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*h_1(t)*h_2(t)=[u(t)-2u(t-1)+u(t-2)+2u(t-3)-u(t-4)]*h_1(t)$$

$$=[u(t)-2u(t-1)+2u(t-3)-u(t-4)]*h_1(t)$$

$$=u(t)-4u(t-1)+5u(t-2)-5u(t-4)+4u(t-5)-u(t-6)$$

(2) 波形图



于慧敏主编＜信号与系统＞第二章作业(P69－75) 习题解答

2.18-2.26

2.18 已知某连续时间 LTI 系统，当输入为如图 2-44（a）所示的 $x_1(t)$ 时，输出为如图 2-44（b）所示的 $y_1(t)$。现若给该系统施加的输入信号为 $x_2(t)=(\sin\pi t)[u(t)-u(t-1)]$，求系统的输出响应 $y_2(t)$。

解：由 $\dfrac{dx_1(t)}{dt}=\delta(t)-\delta(t-2)$，$\dfrac{dy_1(t)}{dt}=u(t)-u(t-1)-u(t-2)+u(t-3)$，可得

系统的单位脉冲响应为：$h(t)=u(t)-u(t-1)$

当输入为 $x_2(t)=\sin\pi t[u(t)-u(t-1)]$ 时

系统的输出为 $y_2(t)=x_2(t)*h(t)=\dfrac{1-\cos\pi t}{\pi}[u(t)-u(t-2)]$；

2.19 如图 2-45 所示电路，t<0 时，开关位于“1”且已达到稳定，t=0 时刻开关自“1”转自“2”。

（1）写出一个微分方程，可在 -∞< t<+∞ 时间内描述系统；

（2）试求系统 t>0 时的零状态响应和零输入响应及完全响应。

解：(1）由图可出系统的微分方程：$Ri(t)+L\dfrac{di(t)}{dt}+\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=e(t)$

其中 $R=1\Omega$，$C=1F$，$L=2H$，$e(t)=10+10u(t)$

于是有，$2\dfrac{di(t)}{dt}+i(t)+\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=10+10u(t)$

两边求导有，$\dfrac{d^2i(t)}{dt^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{di(t)}{dt}+\dfrac{1}{2}i(t)=5\delta(t)$；

（2）因为 $t<0$ 时，系统已达到稳定，有 $i(0_-)=0$，且 $L\dfrac{di(t)}{dt}\Big|_{t=0_-}=u_L(0_-)=0$，即 $i'(0_-)=0$

此系统的初始状态为零，零状态响应即为完全响应；当 $t=0$ 时，开关由位置“1”转至位置“2”

激励电压 $e(t)$ 由 $10V$ 跳变为 $20V$，由于电容两端电压不能跳变，即 $u_c(0_+)=10$，又流过电感的电流不能跳变，即 $i(0_+)=i(0_-)=0$，电阻两端电压为 $u_R(0_+)=Ri(0_+)=0$

于是有$u_L(0_+)=e(0_+)-u_c(0_+)-u_R(0_+)=10$，$L\frac{di(t)}{dt}\Big|_{t=0_+}=u_L(0_+)=10$

即$i'(0_+)=5$；$t>0$时，$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{2}i(t)=0$，特征值为$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$

解的形式为$i(t)=e^{-\frac{t}{4}}(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t+c_2\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t)$

代入条件$i(0_+)=0$以及$i'(0_+)=5$，可得$c_1=0$，$c_2=\frac{20}{\sqrt{7}}$，即$i(t)=\frac{20}{\sqrt{7}}e^{-\frac{t}{4}}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t$；

2.20 给定系统的微分方程、输出信号的起始条件以及激励信号，试分别求它们的完全响应（t≥0）,并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应各分量。

（1）$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=x(t), y(0\_)=y'(0\_)=1, x(t)=u(t)$

（2）$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}+x(t), y(0\_)=1, y'(0\_)=0, x(t)=u(t)$

(3) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dx^2}+\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$，其中$y(0_)=1$，$y'(0\_)=0$，

$x(t)=e^{-3t}u(t)$；

（4）$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$，$x(t)=-2u(-t)+2u(t)$；

（5）$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$，$x(t)=2u(-t)+4e^{-t}u(t)$；

解：(1) 特征方程：$\lambda^2+5\lambda+6=0$，特征根为：$\lambda_1=-2$；$\lambda_2=-3$

齐次解：$y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

特解也即强迫响应：$y_p(t)=B$；代入原方程(1)解之：$B=\frac{1}{6}$

系统完全响应：$y(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}+\frac{1}{6}$

因为：$y_{zi}(0\_)=C_1+C_2=1$；$y'_{zi}(0\_)=-2C_1-3C_2=1$

解之：$C_1=4, C_2=-3$

故零输入分量：$y_{zi}(t)=\{4e^{-2t}-3e^{-3t}\}u(t)$

下面求零状态响应

方法一(如书上的方法)：$y_{zs}(t)=\{C_{zs1}e^{-2t}+C_{zs2}e^{-3t}+\frac{1}{6}\}\cdot u(t)$

对上式求导：$y'_{zs}(t)=(C_{zs1}e^{-2t}+C_{zs2}e^{-3t}+\frac{1}{6})\Big|_{t=0}\delta(t)+[-2C_{zs1}e^{-2t}-3C_{zs2}e^{-3t}]u(t)$

$$y''_{zs}(t)=(C_{zs1}e^{-2t}+C_{zs2}e^{-3t}+\frac{1}{6})\Big|_{t=0}\delta'(t)+[-2C_{zs1}e^{-2t}-3C_{zs2}e^{-3t}]\delta(t)$$
$$+[4C_{zs1}e^{-2t}+9C_{zs2}e^{-3t}]u(t)$$

将上面式子代入原方程，注意 t=0

$$y''_{zs}(t)+5y'_{zs}(t)+6y_{zs}(t)=0$$

方程两边关于$\delta(t)$的系数应该相等

$C_{zs1}+C_{zs2}+\frac{1}{6}=0$ ；

$2C_{zs1}+3C_{zs2}=0$ ；　解之：$C_{zs1}=-\frac{1}{2};C_{zs2}=\frac{1}{3}$

于是，零状态响应：$y_{zs}(t)=\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}\}u(t)$

方法二：零初始条件下应用求系统传递函数再求反变换方法得到零状态响应更简单：

因为输出的拉氏变换：$y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+5s+6}=\frac{1}{6s}-\frac{1}{2(s+2)}+\frac{1}{3(s+3)}$

故零状态分量：$y_{zs}(t)=\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}\}u(t)$

系统完全响应：$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\{\frac{1}{6}+\frac{7}{2}e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-3t}\}u(t)$

自由响应分量：$(\frac{7}{2}e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-3t})u(t)$ ；强迫响应分量：$\frac{1}{6}u(t)$ ；

解：(2) 特征方程：$\lambda^2+3\lambda+2=0$，特征根为：$\lambda_1=-1$ ；$\lambda_2=-2$

齐次解：$y_h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

特解也即强迫响应：$y_p(t)=B$ ；代入原方程(1)解之：$B=\frac{1}{2}$

系统完全响应：$y(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}+\frac{1}{2}$

因为：$y_{zi}(0_-)=C_1+C_2=1$ ；$y'_{zi}(0_-)=-C_1-2C_2=0$

解之：$C_1=2,C_2=-1$

故零输入分量：$y_{zi}(t)=\{2e^{-t}-e^{-2t}\}u(t)$

方法一：

$y_{zs}(t)=\{C_{zs1}e^{-t}+C_{zs2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\}\cdot u(t)$；求其一阶、二阶导数后代入原方程(t=0)

$y''_{zs}(t)+3y'_{zs}(t)+2y_{zs}(t)=\delta'(t)+\delta(t)$

方程两边关于$\delta(t)$的系数应该相等

$C_{zs1}+C_{zs2}+\frac{1}{2}=1$；

$2C_{zs1}+C_{zs2}+\frac{2}{3}=1$；　解之：$C_{zs1}=-1;C_{zs2}=\frac{3}{2}$

于是，零状态响应：$y_{zs}(t)=\{\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\}u(t)$

仿(1)方法二，可求得：$y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+3s+2}=\frac{1}{2s}-\frac{1}{(s+1)}+\frac{3}{2(s+2)}$

故零状态分量：$y_{zs}(t)=\{\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\}u(t)$

系统完全响应：$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\{\frac{1}{2}+e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\}u(t)$

自由响应：$(e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t})u(t)$；强迫响应：$\frac{1}{2}u(t)$；

解：(3) 零输入响应：特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$y_{zi}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

代入初值$y(0_+)=1$，$y'(0_+)=0$，可得$c_1=2$，$c_2=-1$，即$y_{zi}(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$；

零状态响应：$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\delta'(t)-2\delta(t)+7e^{-3t}u(t)$

根据冲激函数匹配法可得，$y(0_+)=1$，$y'(0_+)=-5$；

$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=7e^{-3t}$，（$t>0$ 时），特解形式为指数信号 ce^{-3t}，可得

$y_{zsp}(t)=\frac{7}{2}e^{-3t}$，齐次解的形式为$y_{zsh}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

于是有$y_{zs}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+\frac{7}{2}e^{-3t}$，代入初值$y(0_+)=1$，$y'(0_+)=-5$，有$c_1=\frac{1}{2}$，

$c_2=-3$，即$y_{zs}(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-3e^{-2t}+\frac{7}{2}e^{-3t}$；

完全响应：$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{7}{2}e^{-3t}$，（$t>0$ 时）；

自由响应：$(\frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t})u(t)$；强迫响应：$\frac{7}{2}e^{-3t}u(t)$；

解：(4) $t<0$ 时，$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=-2$，稳态解为 $y(t)=-\frac{1}{3}$

即系统的初值为 $y(0_-)=-\frac{1}{3}$，$y^{'}(0_-)=0$；

零输入响应：特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$，$y_{zi}(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$

代入初值 $y(0_+)=-\frac{1}{3}$，$y^{'}(0_+)=0$，有 $c_1=-1$，$c_2=\frac{2}{3}$，即 $y_{zi}(t)=-e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-3t}$；

零状态响应：考虑 $t\geq 0$ 时，$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=12\delta(t)+2u(t)$

根据冲激函数匹配法有，$y(0_+)=0$，$y^{'}(0_+)=12$；

$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=2$，（$t>0$ 时），特解形式为常数，可得 $y_{zsp}(t)=\frac{1}{3}$

齐次解的形式为 $y_{zsh}(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$ 是有 $y_{zs}(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{3}$

代入初值 $y(0_+)=0$，$y^{'}(0_+)=12$ 有 $c_1=11$，$c_2=-\frac{34}{3}$，即 $y_{zs}(t)=11e^{-2t}-\frac{34}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}$；

完全响应：$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=10e^{-2t}-\frac{32}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}$，（$t>0$ 时）；

自由响应：$(10e^{-2t}-\frac{32}{3}e^{-3t})u(t)$；强迫响应：$\frac{1}{3}u(t)$；

解：(5) $t<0$ 时，$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2$，稳态解为 $y(t)=1$，即系统的初值为 $y(0_-)=1$；

零输入响应：$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0$，解的形式为 $y(t)=ce^{-2t}$

代入初值 $y(0_-)=1$，可得 $y_{zi}(t)=e^{-2t}$；

零状态响应：考虑 $t\geq 0$ 时，$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2\delta(t)$

根据冲激函数匹配法有，$y(0_+)=2$，可得 $y_{zs}(t)=2e^{-2t}$；

完全响应：$y(t)=3e^{-2t}$；自由响应为 $3e^{-2t}u(t)$，强迫响应为 0；

2.21 求下列微分方程描述的因果系统单位冲激响应 $h(t)$和阶跃响应 $s(t)$。

(1) $\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2\frac{dx(t)}{dt}$

(2) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$

(3) $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$

(4) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$，

解：(一) 求单位冲激响应 $h(t)$

系统的 h(t)是输入信号为 $\delta(t)$、起始条件等于零时的系统输出。由于输入信号 $x(t)=\delta(t)$ 在 t＞0 时为零。因此，t＞0 时系统的输入信号为零，即系统响应为齐次解的形式。又由于输入信号 $x(t)=\delta(t)$ 仅在 t=0 处非零，因此，冲激响应的特解仅在 t=0 处被反映出来，其特解形式为 $\delta(t)$ 及其导数形式。

(1) ①齐次解：$h_h(t)=C_1e^{-3t}\cdot u(t)$

②特解： $h_p(t)=B\delta(t)$ 代入原方程：$B\delta'(t)+3B\delta(t)=2\delta'(t)$；故 B＝2

③全解：$h(t)=h_h(t)+h_p(t)=2\delta(t)+C_1e^{-3t}\cdot u(t)$

$$h'(t)=2\delta'(t)+C_1e^{-3t}\delta(t)+3C_1e^{-3t}\cdot u(t)$$

将 $h(t)$、$h'(t)$ 代入原方程,并考虑是冲激响应，仅在 t=0 处被反映，则

$2\delta'(t)+C_1\delta(t)+3\cdot 2\delta(t)=2\delta'(t)$，也即 $C_1=-6$

从而系统单位冲激响应 $h(t)$：

$$h(t)=2\delta(t)-6e^{-3t}\cdot u(t)$$

(2) ①齐次解。

方程的特征方程：$\lambda^2+\lambda+1=0$；有共轭复根 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{2}{\sqrt{3}}$

冲激响应的齐次解：$h_h(t)=e^{-0.5t}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\cdot u(t)$

②特解：将输入信号 $x(t)=\delta(t)$ 代入原方程右边：$\delta'(t)+\delta(t)$；显见：当输入的微分阶数小于 2 阶时，特解中不含有冲激函数，即 B＝0

③因此全解：$h(t)=h_p(t)$

分别求出 $h'(t)$、$h''(t)$；再与 $h(t)$ 一起代入原方程，并考虑仅在 t=0 处被反映，则有

$$C_1\delta'(t)+(\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{2}C_1)\delta(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

故：$C_1=1$；$C_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$；从而系统单位冲激响应 $h(t)$：

$$h(t)=e^{-0.5t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\cdot u(t)$$

（二）已知 h(t)求单位阶跃响应 s(t)，即求 h(t)与 u(t)的卷积

(1) 因为：$h(t)=2\delta(t)-6e^{-3t}\cdot u(t)$；

故：$s(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}(2\delta(\tau)-6e^{-3\tau})d\tau=2e^{-3t}$

(2) 因为：$h(t)=e^{-0.5t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\cdot u(t)$

故：$s(t)=u(t)*h(t)=\int_{0}^{t}\{e^{-0.5\tau}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\tau+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\}d\tau$

$$s(t)=[1-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3})-e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3})]u(t)$$

(3) 单位阶跃响应 $s(t)$ 满足

$$\frac{ds(t)}{dt}+2s(t)=\frac{d^2u(t)}{dt^2}+3\frac{du(t)}{dt}+3u(t)=\delta^{'}(t)+3\delta(t)+3u(t)$$

根据冲激函数匹配法有，$s(0_+)=1$，$s(t)$ 的形式为 $s(t)=\delta(t)+ce^{-2t}+\frac{3}{2}$

代入初值 $s(0_+)=1$，可得 $s(t)=\delta(t)-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}$，$t>0$

即 $s(t)=\delta(t)-(\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2})u(t)$；

单位冲激响应 $h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\delta^{'}(t)+\delta(t)+e^{-2t}u(t)$；

(4)单位阶跃响应 $s(t)$ 满足 $\frac{d^2s(t)}{dt^2}+3\frac{ds(t)}{dt}+2s(t)=\delta^{'}(t)+\delta(t)+u(t)$

根据冲激函数匹配法有，$s(0_+)=1$，$s^{'}(0_+)=-2$ $s(t)$ 的形式为 $s(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+\frac{1}{2}$

代入初值 $s(0_+)=1$，$s^{'}(0_+)=-2$，可得 $s(t)=-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}$，$t>0$

即 $s(t)=(-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2})u(t)$；

单位冲激响应 $h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\delta(t)+(e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$；

2.22 求下列因果离散 LTI 系统的单位脉冲响应。

（1） $y[n]=x[n]-3x[n-1]+3x[n-2]-3x[n-3]$；

（2） $y[n]+\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]$

（3） $y[n]-4y[n-1]+3y[n-2]=x[n]+2x[n-2]$

解：(1) 令 $x[n]=\delta[n]$，则此题可直接写出：

$$h[n]=\delta[n]-3\delta[n-1]+3\delta[n-2]-3\delta[n-3]$$

（2）原式为：$y[n]+\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=\delta[n]$

当 n=0：$y[0]+\frac{5}{6}y[-1]+\frac{1}{6}y[-2]=1$

因为对于因果系统必有：$y[-1]=y[-2]=0$。故 $y[0]=1$

又因特征方程：$\lambda^2+\frac{5}{6}\lambda+\frac{1}{6}=0$，特征根为：$\lambda_1=\frac{1}{2}$；$\lambda_2=\frac{1}{3}$

故有：$y[n]=C_1(-\frac{1}{2})^n+C_2(-\frac{1}{3})^n$

代入初始条件 $y[-1]=0$，$y[0]=1$，有

$$y[-1]=C_1(-\frac{1}{2})^{-1}+C_2(-\frac{1}{3})^{-1}=0$$

$$y[0]=C_1+C_2=1$$

解之，得 $C_1=3,C_2=-2$

故得单位阶跃响应：$h[n]=[3(-\frac{1}{2})^n-2(-\frac{1}{3})^n]u(n)$

(3) 先求出输入为 δ[n]时的系统单位阶跃响应 $h_1[n]$，利用时不移性可求得输入单独为 δ[n-2]时的系统单位阶跃响应 $h_2[n]$，最后由线性系统的叠加原理，将 $h_1[n]$ 与 $h_2[n]$ 相加便得到总的系统单位阶跃响应 h[n]

第一步：对 $y[n]-4y[n-1]+3y[n-2]=\delta[n]$

当 n=0：$y[0]=1-4y[-1]-3y[-2]$

因为对于因果系统必有：$y[-1]=y[-2]=0$。故 $y[0]=1$

又因特征方程：$\lambda^2-4\lambda+3=0$，特征根为：$\lambda_1=1$；$\lambda_2=3$

故有：$y[n]=C_1(1)^n+C_2(3)^n$

代入初始条件 $y[-1]=0$， $y[0]=1$，解之得：$C_1=-\frac{1}{2}, C_2=\frac{3}{2}$

故得单位阶跃响应：$h_1[n]=[(-\frac{1}{2})+(\frac{2}{3})(3)^n]u(n)$

第二步：求输入为 δ[n-2]时的系统单位阶跃响应 $h_2[n]$

即设原式为 $y[n]-4y[n-1]+3y[n-2]=\delta[n-2]$

由时不变系统特性：单位阶跃响应：$h_2[n]=[(-\frac{1}{2})+(\frac{2}{3})(3)^{n-2}]u(n-2)$

总的单位阶跃响应 $h[n]=h_1[n]+2h_2[n]$

即：
$$h[n]=[(-\frac{1}{2})+(\frac{3}{2})(3)^n]u(n)+2[(-\frac{1}{2})+(\frac{3}{2})(3)^{n-2}]u(n-2)$$
$$=[-\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})(3)^n)u[n]+3(3)^{n-2}]u[n-2]=[(-\frac{3}{2})+(\frac{5}{2})(3)^n]u[n]$$

2.23 解差分方程（n≥0），并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应各分量。（假定系统为因果系统）

(1) $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=0, y[-1]=2, y[-2]=1$

解：(1) 由原方程 $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=0$ 可知

系统特征方程：$\lambda^2+3\lambda+2=0$，特征根为：$\lambda_1=-1$；$\lambda_2=-2$

故有：$y[n]=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n$

将起始条件：$y[-1]=2, y[-2]=1$ 代入原方程，可求到初始条件：$y[0]=-8, y[1]=20$

代入方程 y[n]后求解得：$C_1=4, C_2=-12$

故，完全响应为：$y[n]=[4(-1)^n-12(-2)^n]u[n]$

——因为输入为零，故自由响应分量与零输入响应相同，无强迫响应分量。
同时，零状态响应为零。

即： 零输入响应 $y_{zi}[n]=[4(-1)^n-12(-2)^n]u[n]$

零状态响应 $y_{zs}[n]=0$

自由响应分量 $y[n]=[4(-1)^n-12(-2)^n]u[n]$

强迫响应分量 $y[n]=0$

(2) $y[n]+\frac{3}{2}y[n-1]-y[n-2]=u[n], y[-1]=1, y[-2]=0$ --注意此题与书上不同！书上的题目无法求特征根，且初始条件有误

解：因为系统特征方程：$\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda-1=0$，特征根为： $\lambda_1=-2$；$\lambda_2=\frac{1}{2}$

所以方程的齐次解为：$y_h[n]=C_1(-2)^n+C_2(\frac{1}{2})^n$

将方程的一个特解 $y_p[n]=D$ 代入原方程：$D+\frac{3}{2}D-D=1$；解之：$D=\frac{2}{3}$

方程的全解：$y[n]=C_1(-2)^n+C_2(\frac{1}{2})^n+\frac{2}{3}$

方程的初始条件 $y[0],y[1]$ 可由已知的起始条件 $y[-1]=1,y[-2]=0$ 求出：

$y[0]=1-\frac{3}{2}y[-1]+y[-2]=-\frac{1}{2}$；$y[1]=1-\frac{3}{2}y[0]+y[-1]=\frac{11}{4}$

将初始条件 $y[0],y[1]$ 代入方程的全解，求得：$C_1=-\frac{16}{15},C_2=-\frac{1}{10}$

故系统的完全响应为：$y[n]=\{\frac{2}{3}-\frac{16}{15}(-2)^n-\frac{1}{10}(\frac{1}{2})^n\}u[n]$

自由响应分量：$y[n]=\{-\frac{16}{15}(-2)^n-\frac{1}{10}(\frac{1}{2})^n\}u[n]$

强迫响应分量：$y[n]=(\frac{2}{3})u[n]$

零输入响应：$y_{zi}[n]=A_1(-2)^n+A_2(\frac{1}{2})^n$,代入起始条件 $y[-1]=1,y[-2]=0$，得

$$y_{zi}[-1]=-\frac{1}{2}A_1+2A_2=1$$

$$y_{zi}[-2]=\frac{1}{4}A_1+4A_2=0$$

解之，$A_1=-\frac{8}{5},A_2=\frac{1}{10}$

故系统零输入响应 $y_{zi}[n]=\{-\frac{8}{5}(-2)^n+\frac{1}{10}(\frac{1}{2})^n\}u[n]$

书上的方法我以为更麻烦一些：即先将起始条件 $y[-1]=1,y[-2]=0$ 代入原方程求出初始条件 $y[0],y[1]$

$y_{zi}[0]=-\frac{3}{2}y[-1]+y[-2]=-\frac{3}{2}$；$y_{zi}[1]=-\frac{3}{2}y[0]+y[-1]=\frac{13}{4}$

然后再代入零输入方程：$y_{zi}[0]=A_1+A_2=-\frac{3}{2}$

$$y_{zi}[1]=-2A_1+\frac{1}{2}A_2=\frac{13}{4}$$

解之：$A_1=-\frac{8}{5},A_2=\frac{1}{10}$；结果与上相同。

零状态响应 $y_{zs}[n]=\frac{2}{3}+C_{zs1}(-2)^n+C_{zs2}(\frac{1}{2})^n$；

考虑：y[-1]=0, y[-2]=0 代入系统原方程可得：$y[0]=1,y[1]=-\frac{1}{2}$

代入上面零状态响应方程，可求得：$C_{zs1}=\frac{8}{15},C_{zs2}=-\frac{1}{5}$

故系统零状态响应 $y_{zs}[n]=\{\frac{2}{3}+\frac{8}{15}(-2)^n-\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^n\}u[n]$

因而系统的完全响应又可写为：$y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]$

(3) $y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=3^n, y[-1]=y[0]=0$

解：因为系统特征方程：$\lambda^2+2\lambda+1=0$，特征根为：$\lambda_1=\lambda_2=-1$；

所以方程的齐次解为：$y_h[n]=(C_0+C_1n)(-1)^n$

将方程的一个特解 $y_p[n]=D\cdot 3^n$ 代入原方程：$D\cdot 3^2+2\cdot D\cdot 3+D=3^2$；解：$D=\frac{9}{16}$；

故，方程的全解：$y[n]=(C_0+C_1n)(-1)^n+\frac{9}{16}\cdot 3^n$

考虑零输入响应：由于初值为 $y[0]=0$，$y[1]=0$，且激励为 0，可得 $y_{zi}[n]=0$；

考虑零状态响应：可计算出在输入激励下的初值为 $y[0]=1$，$y[1]=1$

代入方程：$y_{zs}[n]=(C_0+C_1n)(-1)^n+\frac{9}{16}3^n$ 后，可计算得到：$C_0=\frac{7}{16}, C_1=\frac{1}{4}$

于是零状态响应与完全响应均为：$y_{zs}[n]=[(\frac{7}{16}+\frac{n}{4})(-1)^n+\frac{9}{16}3^n]u[n]$；

自由响应：$(\frac{7}{16}+\frac{n}{4})(-1)^n u[n]$；

强迫响应：$y_{zs}[n]=\frac{9}{16}3^n u[n]$。

(4) $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n], x[n]=u[-n]+2u[n]$

解：因为当 $n<0$ 时，$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=1$

考虑系统的稳态解：$y[n]+\frac{1}{2}y[n]=1$，即 $y[n]=\frac{2}{3}$，由此可得初值 $y[-1]=\frac{2}{3}$；

当 $n\geq 0$ 时，$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=2u[n]$，

因为系统特征方程：$\lambda+\frac{1}{2}=0$，特征根为：$\lambda_1=-\frac{1}{2}$；

所以方程的齐次解为：$y_h[n]=C_0(-\frac{1}{2})^n$

将方程的一个特解 $y_p[n]=D$ 代入原方程：$D+\frac{1}{2}D=2$；解：$D=\frac{4}{3}$；

故，方程的全解：$y[n]=C_0(-\frac{1}{2})^n+\frac{4}{3}$

考虑零输入响应：由 $y[-1]=\frac{2}{3}$ 可得 $y[0]=-\frac{1}{3}$，又 $y_{zi}[n]$ 的形式为

$y_{zi}[n]=C_0(-\frac{1}{2})^n$，代入初值 $y[0]=-\frac{1}{3}$，可得 $y_{zi}[n]=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n]$；

考虑零状态响应：初值为 $y[0]=2$，$y_{zs}[n]$ 的形式为 $y_{zs}[n]=C_1(-\frac{1}{2})^n+\frac{4}{3}$

代入初值 $y[0]=2$，可得 $y_{zs}[n]=[\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n+\frac{4}{3}]u[n]$；

故：完全响应：$y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]=[\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n+\frac{4}{3}]u[n]$；

其中：自由响应：$\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n]$，强迫响应：$\frac{4}{3}u[n]$。

2.24 有某一因果离散时间 LTI 系统，当输入为 $x_1[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$ 时，其输出的完全响应 $y_1[n]=2^n u[n]-(\frac{1}{2})^n u[n]$；系统的起始状态不变，当输入为 $x_2[n]=2(\frac{1}{2})^n u[n]$ 时，系统的完全响应为 $y_2[n]=3\cdot 2^n u[n]-2(\frac{1}{2})^n u[n]$。试求：

（1）系统的零输入响应；

（2）系统对输入为 $x_3[n]=0.5(\frac{1}{2})^n u[n]$ 的完全响应（系统的初始状态保持不变）。

解：(1)由于 $x_2[n]=2x_1[n]$，便有 $y_{2zs}[n]=2y_{1zs}[n]$

考虑到 $y_1[n]=y_{1zs}[n]+y_{zi}[n]$ 以及 $y_2[n]=y_{2zs}[n]+y_{zi}[n]$

不难得出 $y_{zi}[n]=2y_1[n]-y_2[n]$，即 $y_{zi}[n]=-2^n u[n]$。

(2)由于 $x_3[n]=0.5x_1[n]$，故 $y_{3zs}[n]=0.5y_{1zs}[n]=0.5(y_1[n]-y_{zi}[n])$

因而

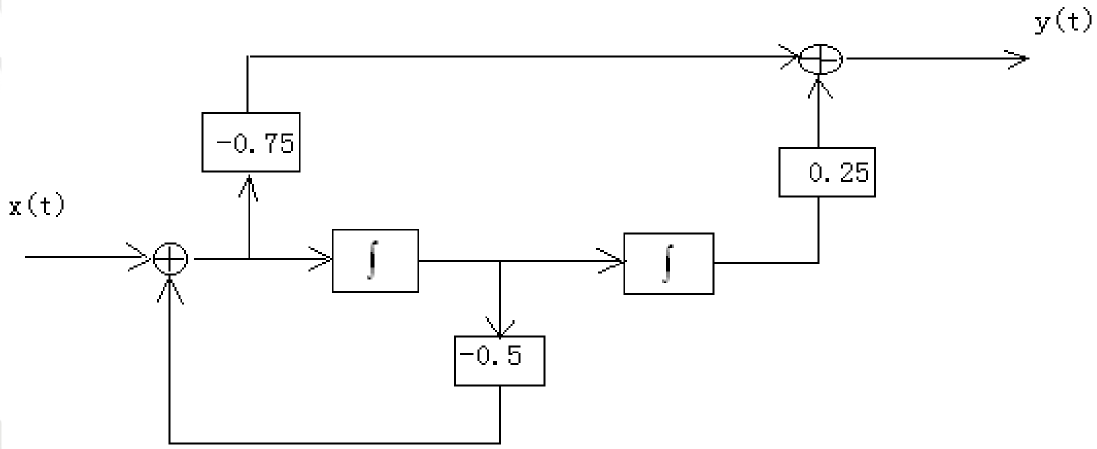
$$\begin{aligned}y_3[n]&=y_{3zs}[n]+y_{zi}[n]=0.5y_1[n]+0.5y_{zi}[n]\\&=0.5(2^n u[n]-(\frac{1}{2})^n u[n]-2^n u[n])=-(\frac{1}{2})^{n+1}u[n]\end{aligned}$$

2.25 写出下列每个连续时间 LTI 系统的模拟框图，假定这些系统都是初始静止的。

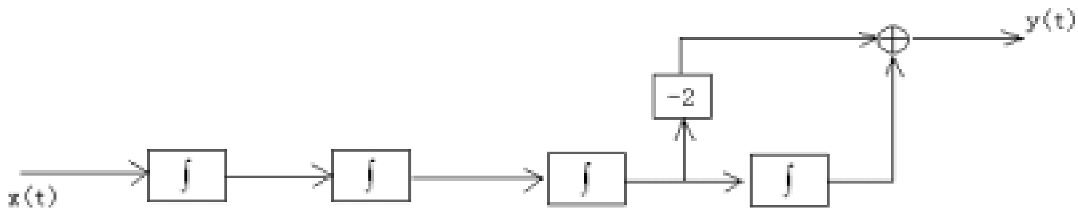
（1）$4\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}=x(t)-3\frac{d^2x(t)}{dt^2}$；(2) $\frac{d^4y(t)}{dt^4}=x(t)-2\frac{dx(t)}{dt}$

（3）$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)+\frac{dx(t)}{dt}+3\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$。

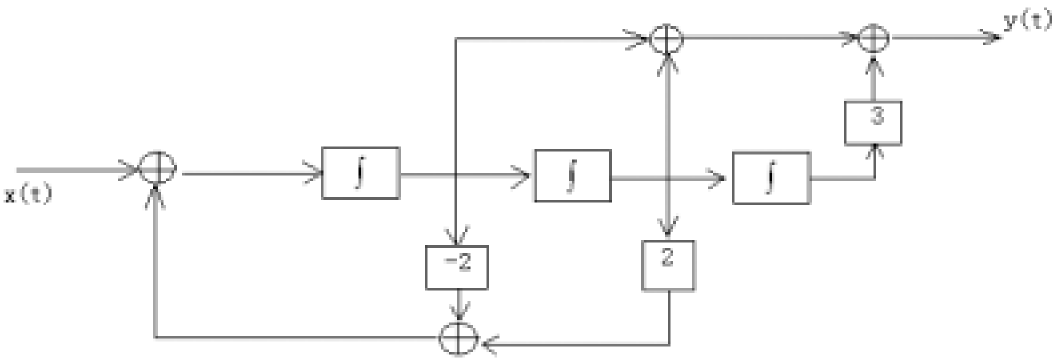
解：(1)应该有 2 个积分器



（2）应该有 4 个积分器



（3）先对方程两边求导，以消去方程左边的积分号，故应该有 3 个积分器

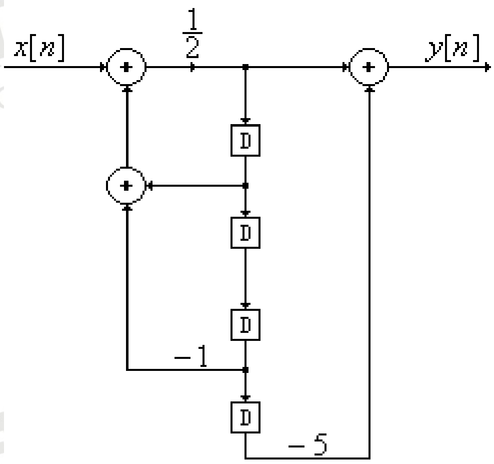


2.26　写出下列每个离散时间 LTI 系统的模拟框图，假定这些系统都是初始静止的。

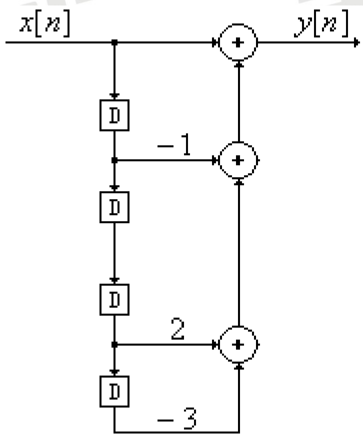
（1）$2y[n]-y[n-1]+y[n-3]=x[n]-5x[n-4]$

（2）$y[n]=x[n]-x[n-1]+2x[n-3]-3x[n-4]$

解答：因为有 x[n-4]，故应该有 4 个单位延时器

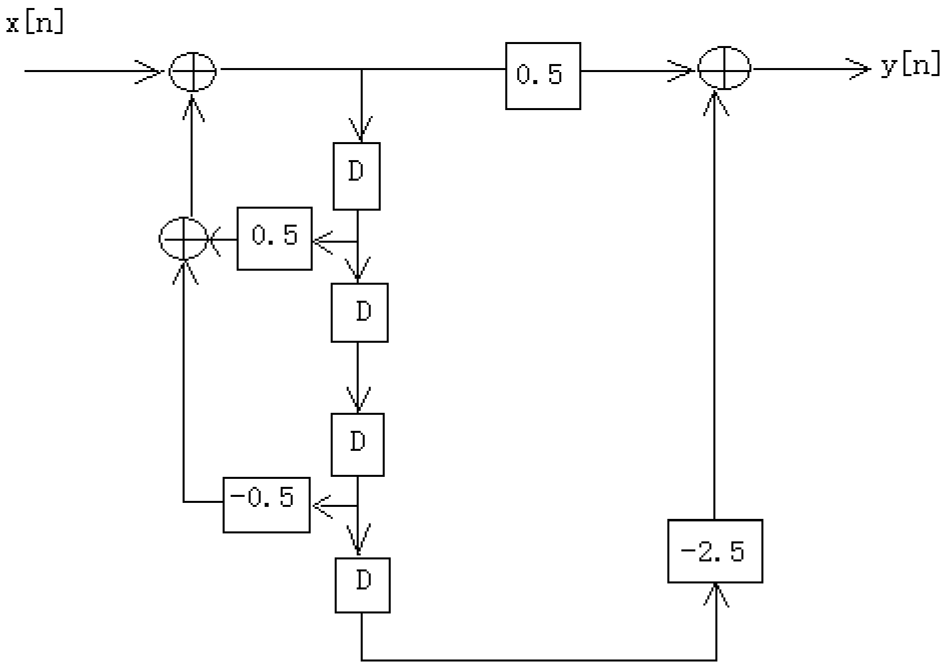


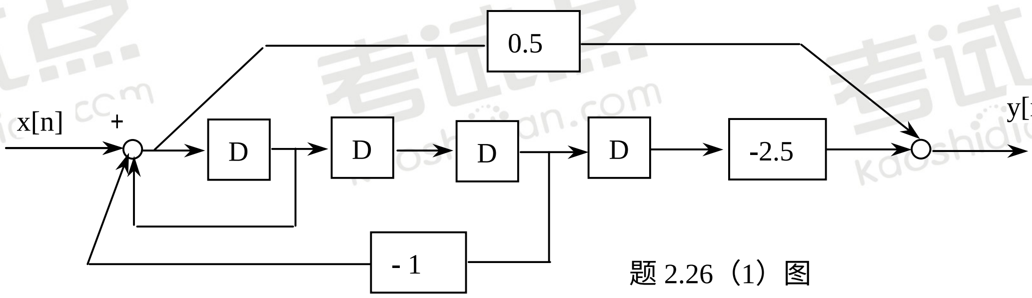
题2.26(1)图



题2.26(2)图

或者如下图：



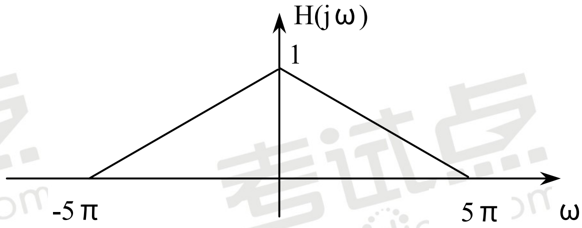


题 2.26（1） 图

<信号与系统>第三章作业（P122-129）笔一部分 3.1-3.7

3.1 已知某 LTI 系统对 e^{jwt} 的特征值 H(jω)如图所示，求系统对下列输入信号的响应：

(1) 直流信号 $x(t)=E$ ；　　　(2) $x(t)=\sum_{k=-10}^{10} a_k e^{ikw_0t}, w_0=\pi$



题 3.1 图

解： $H(jw)=1-\frac{|k|}{5\pi}w, |w|\le 5\pi$

（1）因为：$x(t)=E$， $\omega_0=0$，由图得 H(j0)＝1

故：响应为： $y(t)=H(j\omega_0)E=H(j0)E=E$

（2）当输入为 $x_k(t)=a_k e^{jk\pi}$，由已知条件 $|k|\le 4$ 时，H(jw)不为零，而 $|k|\ge 5$，H(jw)=0

故响应为： $y_k(t)=H(jk\pi)a_k e^{jk\pi}=(1-\frac{|k|}{5})a_k e^{jk\pi}$， $|k|\le 4$

当 $|k|>5$ 时，激励 $x_k(t)=a_k e^{jk\pi}$ 产生的响应为 0（由于 $|k|>5$ 时，$H(jk\pi)=0$），因

此有 $y(t)=\sum_{k=-4}^{4} y_k(t)=\sum_{k=-4}^{4}(1-\frac{|k|}{5})a_k e^{jk\pi}$

3.2. 求下列信号的傅里叶级数：

(1) $x(t)=\cos 2t+\sin 4t$ ；　　　(2) $x(t)$ 如图 3-31(a)所示;

(3) $x(t)$ 如图 3-31(b)所示;　　　(4) $x(t)$ 如图 3-31(c)所示;

(5) $x(t)$ 如图 3-31(d)所示。

解（1）方法一：根据欧拉公式直接写出指数如下的形式：

$$x(t)=\frac{1}{2}(e^{j2t}+e^{-j2t})+\frac{1}{j2}(e^{j4t}-e^{-j4t})=-\frac{1}{j2}e^{-j4t}+\frac{1}{2}e^{-j2t}+\frac{1}{2}e^{j2t}+\frac{1}{j2}e^{j4t}$$

显然： $w_0=2$

$a_{-2}=-\frac{1}{j2}$；$a_{-1}=\frac{1}{2}$；$a_0=0$；$a_1=\frac{1}{2}$；$a_2=\frac{1}{j2}$

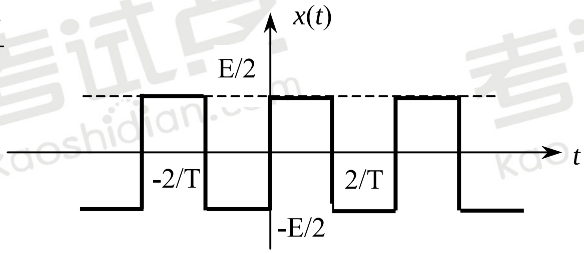
方法二：因为周期为 $T=\pi$，$\omega_0=2$，傅立叶级数为：

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j2t}+\frac{1}{2}e^{-j2t}+\frac{1}{2j}e^{j4t}-\frac{1}{2j}e^{-j4t};$$

(2) $x(t)$ 如图 3-31(a)所示

解：$x(t)$ 的周期为 T，有 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

在一个周期内有：



题 3.2 图(a)

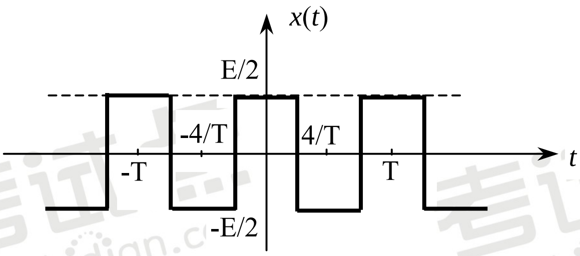
$$x(t)=\begin{cases}\frac{E}{2},0\le t\le T/2\\ -\frac{E}{2},-T/2\le t<0\end{cases}$$

设 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$，其中 $a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

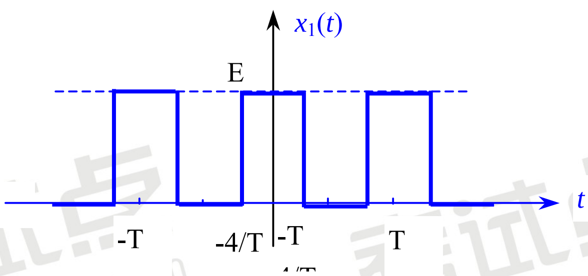
$k\neq 0$ 时，$a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-\frac{E}{2})e^{-jk\omega_0 t}dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{E}{2}e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{E[1-(-1)^k]}{j2k\pi}$

$k=0$ 时，$a_0=0$；

(3) $x(t)$ 如图 3-31(b)所示



题 3.2 图(b)



题 3.2 图(b')

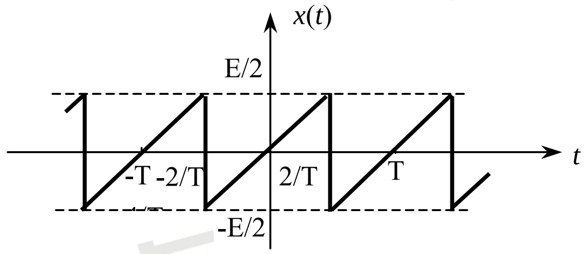
解： 如图（b）与(b')，可设 $x_1(t)=x(t)+\frac{E}{2}$

则 $x_1(t)$ 为周期矩形脉冲，其周期为 T，脉冲宽度为 $T/2$，脉冲幅度为 E（其 Fourier 级数我们已经在教材 P81 页求周期方波时求过，只不过幅度不同。）

若 $x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{1k}e^{jk\omega_0 t}$，则有 $k\neq 0$ 时，$a_{1k}=\frac{E\omega_0 T/4}{\pi}Sa(k\omega_0\frac{T}{4})=\frac{E}{2}Sa(\frac{k\pi}{2})$，$a_{10}=\frac{E}{2}$

设 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ ，则有 $a_k=a_{1k}=\frac{E}{2}Sa(\frac{k\pi}{2})$，而 $a_0=a_{10}-\frac{E}{2}=0$

(4) $x(t)$ 如图 3-31(c)所示



题 3.2 图(c)

解：$x(t)$ 的周期为 T

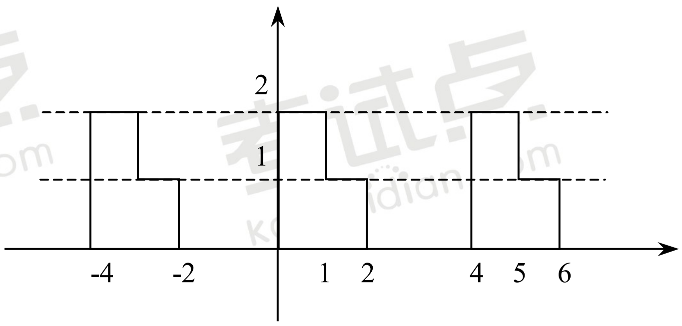
当 $-\frac{T}{2}\le t<\frac{T}{2}$ 时， $x(t)=\frac{E}{T}t$

设 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$

则有 $k\neq 0$ 时， $a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{E}{T}te^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{j(-1)^k E}{2k\pi}$

当 $k=0$ 时， $a_0=0$

(5) $x(t)$ 如图 3-31(d)所示。



解：方法一(直接计算，因为该题特别简单，被积函数是 1 或 2，直接计算也很容易)：

如图 $x(t)$ 的周期为 4，设 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ ，在一个周期内

$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\left(\int_0^1 2e^{-jk\frac{2\pi}{4}t}dt+\int_1^2 e^{-jk\frac{2\pi}{4}t}dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}t}}{-jk\frac{\pi}{2}}\Bigg|_{t=0}^{t=1}+\frac{1}{4}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}t}}{-jk\frac{\pi}{2}}\Bigg|_{t=1}^{t=2}=\frac{1}{-j2k\pi}\left(2e^{-jk\frac{\pi}{2}}-2+e^{-jk\pi}-e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}-2+(-1)^k}{-j2k\pi};$$

当 $k=0$ 时， $a_0=\frac{3}{4}$

方法二：令 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$，其中 $x_1(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ 0 & 1\le t<4\end{cases}$， $x_2(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<2\\ 0 & 2\le t<4\end{cases}$，

$x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 都是周期为 4 的周期信号，设 $x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{1k}e^{jk\omega_0 t}$ ， $x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{2k}e^{jk\omega_0 t}$ ，

则有 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(c_{1k}+c_{2k})e^{jk\omega_0 t}$

当 $k\neq 0$ 时， $c_{1k}=\dfrac{1-e^{-j\frac{k\pi}{2}}}{j2k\pi}$ ， $c_{2k}=\dfrac{1-e^{-jk\pi}}{j2k\pi}$ ，

即有 $c_k=c_{1k}+c_{2k}=\dfrac{2-e^{-j\frac{k\pi}{2}}-e^{-jk\pi}}{j2k\pi}$ ，其中 $c_0=\dfrac{3}{4}$ ；

3.3 (1)求冲激串 $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 的傅里叶变换；

(2)已知某一 LTI 系统的单位冲激响应 h(t)，如图 3-32 所示，求该系统对冲激串 $\delta_T(t)$ 响应 y(t)的傅里叶级数。

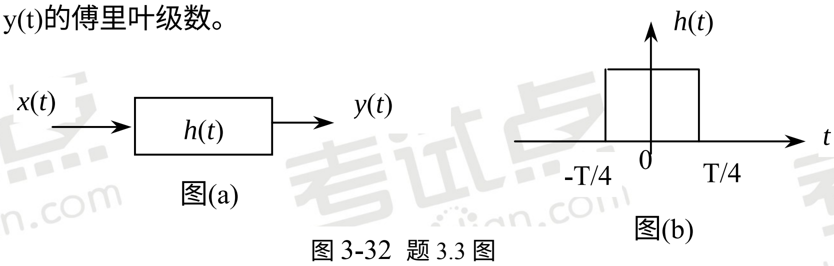


图 3-32 题 3.3 图

解：(1)答案为 $X(j\varpi)=\dfrac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$

可有 2 种方法，一是直接计算， 如教材 P95，式（3-80）；二是如下应用频移性质

由于 $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，是周期为 T 的周期信号

设 $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}$ ，其中 $c_k=\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\dfrac{1}{T}$

即 $\delta_T(t)=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_0 t}$ （其中 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$ ）

由于 $1\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega)$

根据傅立叶变换的频域平移性质有， $e^{jk\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$

因此有 $\delta_T(t)\xleftrightarrow{FT}\dfrac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$ ；

(2) 由于系统的单位冲激响应 h(t)已知，可以据此而求出其频谱。因为 h(t)是方波脉冲，直接由典型信号的频谱得：

$$h(t) \xleftrightarrow{FT} H(j\omega) = \frac{T}{2} Sa(\frac{\omega T}{4})$$

由于激励 $\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$ ，为复指数信号，由系统特征函数的概念，可得响应 y(t)的傅里叶级数形式为：

$$y(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{T}{2}Sa(\frac{k\omega_0 T}{4})e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{k\pi}{2})e^{jk\omega_0 t}$$

3.4 （1）如果以 T 为周期的信号 x(t)同时满足 $x(t) = -x(t-\frac{T}{2})$，则称 x(t)为奇谐信号，证明奇谐信号的傅里叶级数中只包含奇次谐波分量

（2）如果 x(t)是周期为 2 的奇谐信号，且 x(t)=t，0<t<1，画出 x(t)的波形，并求出它的傅里叶级数系数。

解：(1) 只需要证明奇谐信号的傅里叶级数中偶次谐波分量的系数为 0。

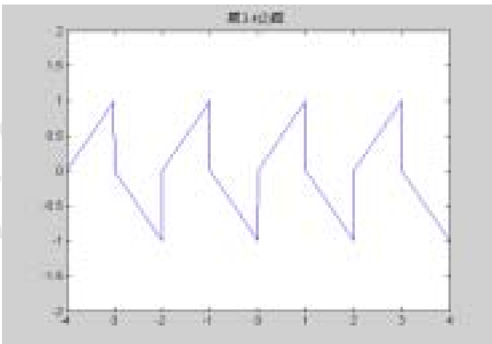
$$a_{2N} = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j(4N\pi/T)t}dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j(4N\pi/T)t}dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} x(t)e^{-j(4N\pi/T)t}dt$$

$$= \frac{1}{T}(\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j(4N\pi/T)t}dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -x(t-\frac{T}{2})e^{-j(4N\pi/T)t}dt)$$

$$= \frac{1}{T}(\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j(4N\pi/T)t}dt + \int_0^{\frac{T}{2}} -x(t)e^{-j(4N\pi/T)t}dt) = 0$$

故只含奇次谐波分量

(2) $x(t) = \begin{cases} -1-t & -1 < t \le 0 \\ t & 0 < t \le 1 \end{cases}$，



设 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$

有

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt ,$$

$$c_k = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(t+1)e^{-jk\pi t}dt + \frac{1}{2}\int_0^1 te^{-jk\pi t}dt = \frac{1-(-1)^k}{j2k\pi}(1+\frac{2}{jk\pi})$$

当 k 为偶数时，$c_k = 0$，当 k 为奇数时，$c_k = \frac{1}{jk\pi}(1+\frac{2}{jk\pi})$；

3.5 利用傅里叶变换公式，求下列信号的傅里叶变换

（1） $e^{-2(t-2)}\cdot u(t-2)$　　（2） $e^{-2|t-3|}$

（3） $\delta(t+\pi)+\delta(t-\pi)$　　（4） $\frac{d}{dt}[u(t+2)-u(t-2)]$

（5） $x(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-1)]$；　　（6） $x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t, & |t|\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

解：（1） $X(j\varpi)=\frac{e^{-j2\omega}}{2+j\omega}$ （答案）

$$X(j\varpi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2(t-2)}u(t-2)e^{-j\omega t}dt=\int_{2}^{+\infty}e^{-2(t-2)}e^{-j\omega t}dt$$
$$=\int_{2}^{+\infty}e^{-(2+j\omega)t+4}dt=\left.\frac{e^{-(2+j\omega)t+4}}{-(2+j\omega)}\right|_{t=2}^{t=\infty}=\frac{e^{-j2\omega}}{2+j\omega}$$

（2） $X(j\varpi)=\frac{e^{-j3\omega}}{2-j\omega}+\frac{e^{-j3\omega}}{2+j\omega}=\frac{4e^{-j3\omega}}{4+\omega^2}$ （答案）

$$X(j\varpi)\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|t-3|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{3}e^{-2(3-t)}e^{-j\omega t}dt+\int_{3}^{+\infty}e^{-2(t-3)}e^{-j\omega t}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{3}e^{(2-j\omega)t-6}dt+\int_{3}^{+\infty}e^{-(2+j\omega)t+6}dt$$
$$=\left.\frac{e^{(2-j\omega)t-6}}{(2-j\omega)}\right|_{t=-\infty}^{t=3}+\left.\frac{e^{-(2+j\omega)t+6}}{-(2+j\omega)}\right|_{t=3}^{t=\infty}=\frac{e^{-j3\omega}}{2-j\omega}+\frac{e^{-j3\omega}}{2+j\omega}=\frac{4e^{-j3\omega}}{4+\omega^2}$$

（3） $X(j\omega)=2\cos\omega\pi$ （答案）

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(t+\pi)+\delta(t-\pi))e^{-j\omega t}dt=e^{j\omega\pi}+e^{-j\omega\pi}=2\cos\omega\pi$$

（4） $X(j\omega)=j2\sin 2\omega$ （答案）

$$\frac{d}{dt}[u(t+2)-u(t-2)]=\delta(t+2)-\delta(t-2)$$
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(t+2)-\delta(t-2))e^{-j\omega t}dt=e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}=j2\sin 2\omega$$

（5） $X(j\omega)=\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$ （答案）

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{1}e^{-(1+j\omega)t}dt=\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}\;;$$

（6） $X(j\omega)=2Sa(\omega)+Sa(\omega-\pi)+Sa(\omega+\pi)$ （答案）

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi t)e^{-j\omega t}dt=2Sa(\omega)+Sa(\omega-\pi)+Sa(\omega+\pi)\ ;$$

3.6 利用傅里叶反变换公式，求下列反变换

（1） $X(j\omega)=\pi[\delta(\omega+3\pi)+\delta(\omega-2\pi)]$

（2） $X(j\omega)=2[u(\omega+3)-u(\omega-3)]e^{j(-\frac{3}{2}\omega+\pi)}$

解：(1) $x(t)=\frac{1}{2}e^{-j3\pi t}+\frac{1}{2}e^{j2\pi t}$ （答案）

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi(\delta(\omega+3\pi)+\delta(\omega-2\pi))e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2}e^{-j3\pi t}+\frac{1}{2}e^{j2\pi t}$$

(2) $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3}2e^{j(-\frac{3}{2}\omega+\pi)}e^{j\omega t}d\omega=-\frac{1}{\pi}\int_{-3}^{3}e^{j(t-\frac{3}{2})\omega}d\omega=-\frac{2\sin 3(t-\frac{3}{2})}{\pi(t-\frac{3}{2})}$ （答案）

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2(u(\omega+3)-u(\omega-3))e^{j(-\frac{3}{2}\omega+\pi)}e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3}2e^{j(-\frac{3}{2}\omega+\pi)}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3}(-2e^{j(t-\frac{3}{2})\omega})d\omega$$
$$=-\frac{1}{\pi}\left.\frac{e^{j(t-\frac{3}{2})\omega}}{j(t-\frac{3}{2})}\right|_{\omega=-3}^{\omega=3}=-\frac{2\sin 3(t-\frac{3}{2})}{\pi(t-\frac{3}{2})}=-\frac{6}{\pi}Sa[3(t-\frac{3}{2})]$$

3.7 已知 x(t)的傅里叶变换为 $X(j\omega)$，试将 P124 图 3-33 所示各信号的傅里叶变换用 $X(j\omega)$ 来表示。

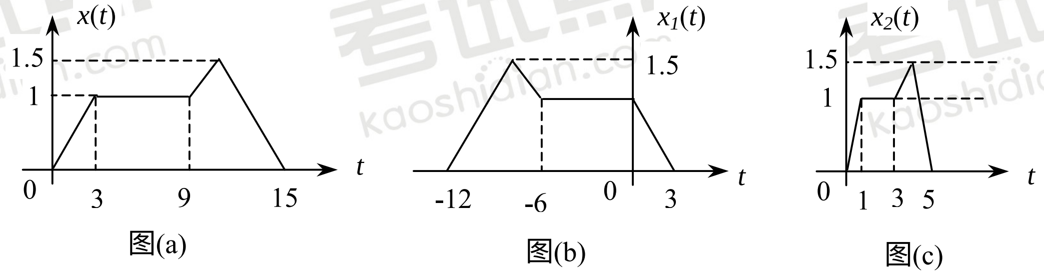


图 3-33 题 3.7 图

解：(1) 由图（b）知：$x_1(t)=x(-t+3)$ 可有 2 种方法：先时间反转再时移，或相反

设 $x(t)\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)$，先时间平移再反转。

有 $x(t+3)\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)e^{j3\omega}$，有 $x(-t+3)\xleftrightarrow{FT}X(-j\omega)e^{-j3\omega}$；

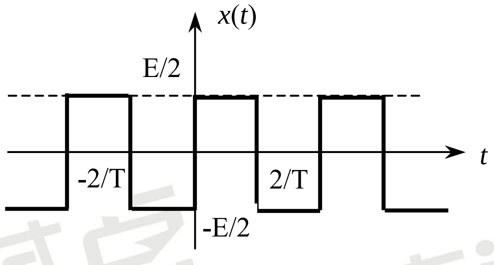
（2）又由图（c）知：$x_2(t)=x(3t)$，采用尺度变换（压缩）

由于 $x(t)\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)$，有 $x(3t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{3}X(j\frac{\omega}{3})$；

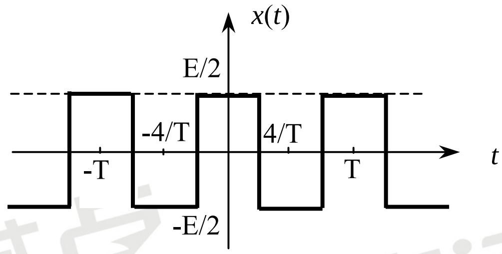
<信号与系统>第三章作业（P122-129）第二部分（3.8-3.16）

3.8 求下列信号的傅里叶变换：

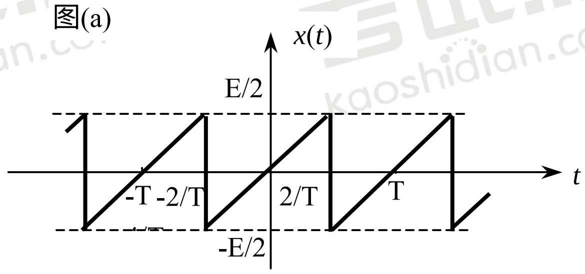
（1） 求如图 3-31 所示的各周期信号的傅里叶变换；



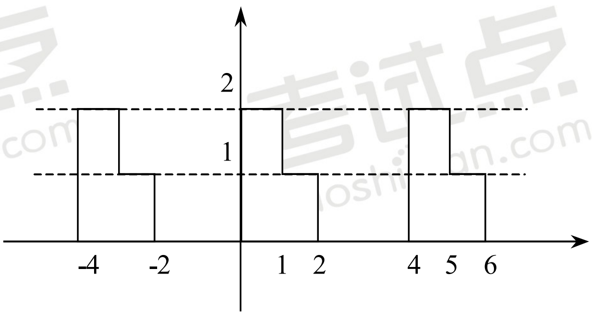
图(a)



图(b)



图(c)



图(d) 图 3-31 题 3.8 图

（2） $e^{-at}\cos\omega_0 t \bullet u(t) \quad a>0$；

（3） $e^{-3|t|}\cdot\cos 2t$；

（4） $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\delta(t-kT) \quad |a_k|<1$；

（5） $\delta'(t)+2\delta(3-2t)$；

（6） $\left[te^{-t}\cos 4t\right]u(t)$；

（7） $\left[\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\right]\left[\dfrac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$；

（8） $x(t)$ 如图 3-34（a）所示；

（9） $x(t)$ 如图 3-34（b）所示；

（10） $x(t)$ 如图 3-34（c）所示；

（11） $x(t)$ 如图 3-34（d）所示。

解：（1） 显见，图 3-31 均为周期函数，故应该先求出各周期函数的傅里叶级数的系数 a_k 而在 3.2 题的答案已经给出了各周期函数的 a_k，这里问题就比较简单了。

因为图（a）的傅里叶级数的系数 a_k 已知(3.2 题(2)的答案)：

$k \neq 0$ 时，$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-\frac{E}{2})e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{E}{2}e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{E[1-(-1)^k]}{j2k\pi}$

$k = 0$ 时，$a_0 = 0$；故

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = -jE\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$$；

因为图（b）的傅里叶级数的系数 a_k 已知（3.2 题(3)的答案）：

$a_k = \frac{1}{2}Sa(\frac{k\pi}{2})$；故

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{k\pi}{2})\delta(\omega - k\omega_0)$$；

因为图（c）的傅里叶级数的系数 a_k 已知（3.2 题(4)的答案）：

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{E}{T}te^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{j(-1)^k E}{2k\pi}$$

故：$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = jE\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$

因为图（d）的傅里叶级数的系数 a_k 已知（3.2 题(5)的答案）：

$$a_k = \frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}} - 2 + (-1)^k}{-j2k\pi}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = -j\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2 - e^{-jk\frac{\pi}{2}} - (-1)^k}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$$。

（2）$e^{-at}\cos\omega_0 t \bullet u(t) \quad a > 0$

解：因为单边指数函数 $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j\omega}$

由频移性质：$x(t)\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}[X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))]$

所以：$e^{-at}\cos\omega_0 t \bullet u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{a+j(\omega+\omega_0)}\right] = \frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$

（3）$e^{-3|t|}\cdot\cos 2t$

解：因为双边指数函数 $e^{-a|t|}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

由频移性质：$x(t)\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}[X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))]$，易得

$$e^{-3|t|}\cos 2t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}[\frac{6}{9+(\omega-2)^2} + \frac{6}{9+(\omega+2)^2}] = \frac{3}{9+(\omega-2)^2} + \frac{3}{9+(\omega+2)^2}$$

（4）$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\delta(t-kT) \quad |a_k| < 1$

解：因为原信号本身是非周期函数，这里应该先采用 F 变换的时移性质，再运用线性性质

因为 $\delta(t)\xleftrightarrow{F}1 \quad \Rightarrow \quad \delta(t-kT)\xleftrightarrow{F}e^{-j\omega kT}$

由傅里叶变换的线性性质，可得

$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\delta(t-kT)\xleftrightarrow{F}\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-j\omega kT}$

(5) $\delta'(t)+2\delta(3-2t)$

解：利用线性性质分别对 $\delta'(t)$ 和 $2\delta(3-2t)$ 进行 F 变换，然后再叠加

因为 $\delta(t)\xleftrightarrow{FT}1$， $\delta(t+3)\xleftrightarrow{FT}e^{j3\omega}$ （时域平移）

$\delta(3-2t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}e^{-j\frac{3}{2}\omega}$ （时域尺度变换）

又因 $\delta'(t)\xleftrightarrow{FT}j\omega\cdot 1$ （时域微分），因此叠加扣： $X(j\omega)=j\omega+\frac{1}{2}e^{-j\frac{3}{2}\omega}$；

(6) $\left[te^{-t}\cos 4t\right]u(t)$；

解：令 $x_1(t)=e^{-t}\cos(4t)u(t)$，利用（2）有 $X_1(j\omega)=\frac{1+j\omega}{(1+j\omega)^2+16}$

由频域微分性质，于是有 $X(j\omega)=j\frac{dX_1(j\omega)}{d\omega}=\frac{(1+j\omega)^2-16}{[(1+j\omega)^2+16]^2}$；

(7) $\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$；

解：令 $x_1(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$， $x_2(t)=\frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}$

则有 $X_1(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，由时移性质： $X_2(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega} & |\omega|<2\pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

根据频域卷积性质有：

$$X(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega)*X_2(j\omega)$$

$$=-\frac{j}{2\pi}(1+e^{-j\omega})[u(\omega+3\pi)-u(\omega+\pi)-u(\omega-\pi)+u(\omega-3\pi)]$$

(8) $x(t)$ 如图 3-34（a）所示；

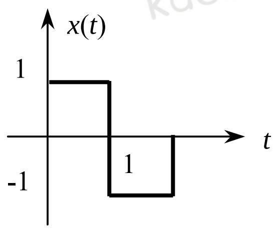


图 3-34 (a)

解：由图知： $x(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$

故直接由 F 变换公式

$$X(j\omega)=\int_0^1 e^{-j\omega t}dt-\int_1^2 e^{-j\omega t}dt=\frac{1-2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{j\omega}$$

（9）$x(t)$ 如图 3-34（b）所示；

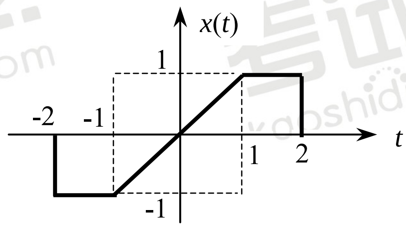


图 3-34 (b)

解：因为方波是冲激函数的导数，斜坡是阶跃的导数

由图知可利用这些关系，令 $x_1(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$

则 $x_1(t)=-\delta(t+2)+u(t+1)-u(t-1)-\delta(t-2)$

直接可求其 F 变换

$$X_1(j\omega)=-e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}+\frac{2\sin\omega}{\omega}=2Sa(\omega)-2\cos\omega$$，且 $X_1(j0)=0$

根据时域积分性质有，$X(j\omega)=\dfrac{X_1(j\omega)}{j\omega}+\pi X_1(j0)\delta(\omega)=\dfrac{2[Sa(\omega)-\cos\omega]}{j\omega}$

（10）$x(t)$ 如图 3-34（c）所示；

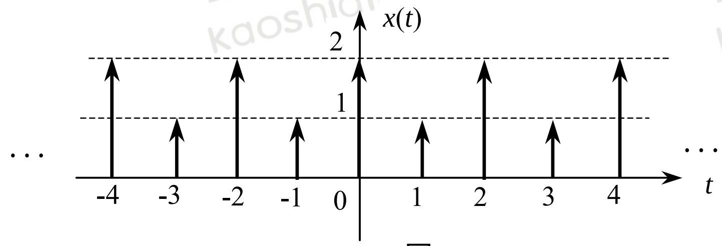


图 3-34 (c)

解：由图（c）知此为周期冲激函数，并可看成是 2 个周期函数的叠加

令 $x_1(t)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)$，$x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k+1)$，则有 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

易知：$X_1(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)$，$X_2(j\omega)=e^{j\omega}\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)$

于是有：$X(j\omega)=X_1(j\omega)+X_2(j\omega)=\pi(2+e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)$；

（11）$x(t)$ 如图 3-34（d）所示。

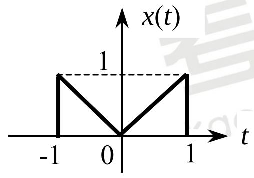


图 3-34 (d)

解：方法一：直接计算

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0}(-t)e^{-j\omega t}dt+-\int_{0}^{1}te^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{j\omega}[te^{=j\varpi t}+\frac{1}{j\omega}e^{=j\varpi t}]_{-1}^{0}-\frac{1}{j\omega}[te^{=j\varpi t}+\frac{1}{j\omega}e^{=j\varpi t}]_{0}^{1}$$

$$=\frac{2\sin\varpi}{\omega}+\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}-2}{\omega^2}=\frac{2\sin\varpi}{\omega}+\frac{2\cos\varpi-2}{\omega^2}$$

$$=2Sa(\varpi)-\frac{4\sin^2(\frac{\varpi}{2})}{\omega^2}=2Sa(\varpi)-Sa^2(\frac{\varpi}{2})$$

方法二：

仿（9），令 $x_1(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ 则有 $x_1(t)=\delta(t+1)-u(t+1)+2u(t)-u(t-1)-\delta(t-1)$

可得 $X_1(j\omega)=e^{j\omega}-e^{-j\omega}+\dfrac{2-e^{-j\omega}-e^{j\omega}}{j\omega}$

$X_1(j0)=0$

根据时域积分性质有

$$X(j\omega)=\frac{X_1(j\omega)}{j\omega}+\pi X_1(j0)\delta(\omega)=2Sa(\omega)-Sa^2(\frac{\omega}{2})$$ ；

3.9　对于下列各傅里叶变换，根据傅里叶变换性质确定其对应于时域信号是否是实、虚、或者不是，偶、奇或都不是。

（1）$X(j\omega)=u(\omega)-u(\omega-2)$；　　（2）$X(j\omega)=\cos(2\varpi)\sin(\frac{\varpi}{2})$；

（3）$X(j\omega)=A(\omega)e^{jB(\omega)}$，式中 $A(\omega)=\dfrac{\sin 2\omega}{\omega}$ 和 $B(\omega)=2\omega+\dfrac{\pi}{2}$；

（4）$X(j\omega)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)$

解：(1) 设 $x(t)\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)$，已知 $X(j\omega)=u(\omega)-u(\omega-2)$

根据对偶性质有，$X(jt)\xleftrightarrow{FT}2\pi x(-\omega)$

由于 $X(jt)=u(t)-u(t-2)$ 为实信号，且非奇对称、非偶对称

故有：$x(-\omega)$ 为复信号（实部，虚部都不为零），且实部偶对称，虚部奇对称

因此：$x(t)$ 为复信号（实部，虚部都不为零），且实部偶对称，虚部奇对称；

解：(2) 设 $x(t)\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)$，$X(j\omega)=\cos(2\omega)\sin\dfrac{\omega}{2}$

根据对偶性质有，$X(jt)\xleftrightarrow{FT}2\pi x(-\omega)$

由于 $X(jt)=\cos(2t)\sin\dfrac{t}{2}$ 为实奇信号，故有 $x(-\omega)$ 为虚奇信号）

因此有 $x(t)$ 为虚奇信号；

解：(3) 方法一（直接计算）：设 $x(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=A(\omega)e^{jB(\omega)}$，$x^*(t)\xleftrightarrow{F}X^*(-j\omega)$

$$X^*(-j\omega)=\left(A(-\omega)e^{jB(-\omega)}\right)^*=A(\omega)[\cos B(-\omega)-j\sin B(-\omega)]$$
$$=A(\omega)\left[\cos(-2\omega+\frac{\pi}{2})-j\sin B(-2\omega+\frac{\pi}{2})\right]$$
$$=A(\omega)\left[\cos(2\omega-\frac{\pi}{2})+j\sin(2\omega-\frac{\pi}{2})\right])$$

$$= A(\omega)\left[-\cos(\pi+2\omega-\frac{\pi}{2})-j\sin(\pi+2\omega-\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= -A(\omega)\left[\cos(2\omega+\frac{\pi}{2})+j\sin(2\omega+\frac{\pi}{2})\right] = -X(j\omega)$$

所以：$x^*(t) = -x(t)$，即 $x(t)$是纯虚数。

又：$x(-t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega t}dt = \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau}d(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau = X(-j\omega) = \left(-X(j\omega)\right)^*$

所以：$x(t)$是非奇非偶的纯虚数；

方法二（利用对偶性质）：

因为，$X(j\omega) = A(\omega)e^{jB(\omega)}$，其中 $A(\omega) = \dfrac{\sin 2\omega}{\omega}$，$B(\omega) = 2\omega + \dfrac{\pi}{2}$

$$X(j\omega) = \frac{\sin 2\omega}{\omega}e^{j(2\omega+\frac{\pi}{2})} = -\frac{(\sin 2\omega)^2}{\omega} + j\frac{\sin 2\omega\cos 2\omega}{\omega}$$

若 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$，则有 $jx(t) \xleftrightarrow{FT} jX(j\omega)$

而 $jX(j\omega) = -\dfrac{\sin 2\omega\cos 2\omega}{\omega} - j\dfrac{(\sin 2\omega)^2}{\omega}$，$jX(j\omega)$ 的实部为偶对称，虚部为奇对称，

可得 $jx(t)$ 为实信号，但非奇对称，非偶对称，于是有 $x(t)$ 为纯虚信号，但非奇对称，非偶对称；

解：(4) $X(j\omega)$ 是实值函数

$$X(-j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(-\omega-\frac{k\pi}{4}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right) = X(j\omega)$$

$X(j\omega)$ 是偶函数

所以：$X(j\omega)$ 对应的时域信号是实信号、偶函数

3.10 对下列每一个变换，求对应的连续时间信号：

（1）$X(j\omega) = \dfrac{2\sin[3(\omega-\pi)]}{(\omega-\pi)}$；　　（2）$X(j\omega) = \cos(4\omega)$；

（3）$X(j\omega) = \cos(2\omega+\dfrac{\pi}{3})$；　　（4）$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$，如图 3-35 所示。

解：(1) 因为：$X(j\omega) = \dfrac{2\sin[3(\omega-\pi)]}{\omega-\pi}$

据基本 F 变换可知：当 $x_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 = 3 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，则有 $X_1(j\omega) = 2\cdot T_1\dfrac{\sin(\omega T_1)}{T_1\omega} = 6\dfrac{\sin(3\omega)}{3\omega}$，

根据频域平移性质则有，$x(t) = x_1(t)e^{j\varpi_0 t}\Big|_{\varpi_0=\pi} = \begin{cases} e^{j\pi t} & |t| < 3 \\ 0 & 其它 \end{cases}$；

解：(2) 据欧拉公式 $X(j\omega) = \cos(4\omega) = \dfrac{e^{j4\omega}+e^{-j4\omega}}{2}$

由于 $\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$，根据时域平移性质有，$\delta(t+4) \xleftrightarrow{FT} e^{j4\omega}$，$\delta(t-4) \xleftrightarrow{FT} e^{-j4\omega}$，

因此有 $x(t)=\frac{1}{2}[\delta(t+4)+\delta(t-4)]$；

解：(3) 与（2）相仿：$X(j\omega)=\cos(2\omega+\frac{\pi}{3})$，先由欧拉公式展开式可得到

$$x_1(t)=\frac{\delta(t+2)+\delta(t-2)}{2}\xleftrightarrow{FT}\cos 2\omega$$

再根据频域平移性质得到：

$$x(t)=e^{-j\frac{\pi}{6}t}x_1(t)=e^{-j\frac{\pi}{6}t}\frac{\delta(t+2)+\delta(t-2)}{2}=\frac{1}{2}[e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(t+2)+e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(t-2)]$$

解：(4)

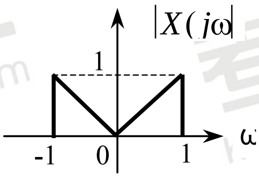


图 3-35 (a)

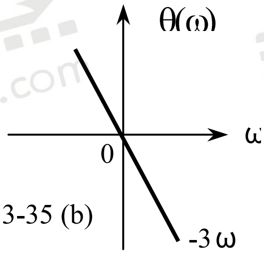


图 3-35 (b)

令 $X_1(j\omega)=|X(j\omega)|=\begin{cases}|\omega| & |\omega|<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，则有

$$x_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_1(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}\omega e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1}\omega e^{j\omega t}d\omega=\frac{t\sin t+\cos t-1}{\pi t^2}$$

由于相位谱提供的是信号在时间轴的位移信息（P96），故

根据时域平移性质有 $x(t)=x_1(t-3)=\frac{(t-3)\sin(t-3)+\cos(t-3)-1}{\pi(t-3)^2}$。

3.11 求图 3-36 所示三角形调幅信号的频谱（此处图略）。

解：令 $x_1(t)=\begin{cases}1-\frac{2}{\tau_1}|t| & |t|<\frac{\tau_1}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，则 $x(t)=x_1(t)\cos\omega_0 t$

再令 $x_2(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}$，则有 $x_2(t)=\frac{2}{\tau_1}\left[u(t+\frac{\tau_1}{2})-2u(t)+u(t-\frac{\tau_1}{2})\right]$

由线性瓦特地，易得出 $X_2(j\omega)=\frac{4(\cos\frac{\omega\tau_1}{2}-1)}{j\omega\tau_1}$，且 $X_2(j0)=0$

于是有 $X_1(j\omega)=\frac{X_2(j\omega)}{j\omega}=\frac{4(1-\cos\frac{\omega\tau_1}{2})}{\omega^2\tau_1}=\frac{\tau_1}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau_1}{4})$

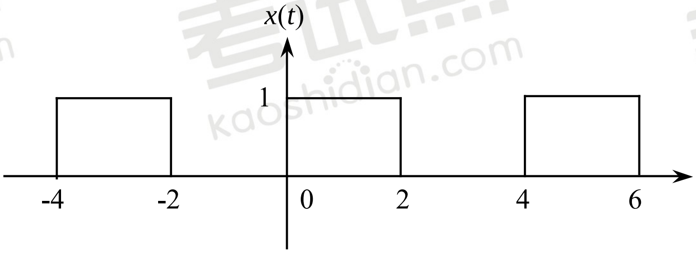
根据频域平移性质有，$X(j\omega)=\frac{\tau_1}{4}\left[Sa^2(\frac{\omega-\omega_0}{4}\tau_1)+Sa^2(\frac{\omega+\omega_0}{4}\tau_1)\right]$

3.12 求图 3-37 所示周期信号的频谱或傅里叶级数系数。

注：利用傅里叶变换相关性质及将信号看成是某一周期信号与 $\sin\omega_0 t$ 相乘的结果。

图（*a*）

解法一：将图（*a*）中的 $x_1(t)$ 可以看成是下面的周期信号（T=4）与 $\sin\pi t$ 的乘积



即：$x_1(t)=x(t)\sin\pi t \quad \Rightarrow \quad x_1(t)\xleftrightarrow{F}\frac{j}{2}[X(j(\omega+\pi))-X(j(\omega-\pi))]$

而 $x(t)$ 的傅里叶级数的系数为：$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\int_0^2 e^{-jk\frac{2\pi}{4}t}dt$

当 $k=0$ 时，$a_k=\frac{1}{2}$

当 $k\neq 0$ 时，$a_k=\frac{1}{4}\left.\frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{-j\frac{k\pi}{2}}\right|_{t=0}^{t=2}=-\frac{e^{-jk\pi}-1}{j2k\pi}=\begin{cases}0 & k=2l\\ \frac{1}{jk\pi} & k=2l+1\end{cases}$

故，$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T})$

$$\begin{aligned}X_1(j\omega)&=\frac{j}{2}[X(j(\omega+\pi))-X(j(\omega-\pi))]\\&=\frac{j}{2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T}+\pi)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T}-\pi)\right]\\&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\delta(\omega-\frac{2l-1}{2}\pi)+\frac{j\pi}{2}\delta(\omega+\pi)-\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\delta(\omega-\frac{2l+3}{2}\pi)-\frac{j\pi}{2}\delta(\omega-\pi)\\&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{-4}{(2l-1)(2l+3)}\delta(\omega-\frac{2l+1}{2}\pi)+\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\pi)-\delta(\omega+\pi)]\end{aligned}$$

解法二（直接求解的方法）：$x_1(t)$ 为周期 T=4 的周期函数，该周期函数的傅里叶级数 a_k 为

$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\int_0^2\sin\pi t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\int_0^2\frac{e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}}{2j}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt$$

当 $k=\pm 2$ 时，$a_k=\pm\frac{1}{4j}$

当 $k\neq\pm 2$ 时，

$$a_k=\frac{1}{8j}\left.\left(\frac{e^{j(\pi-\frac{k\pi}{2})t}}{j(\pi-\frac{k\pi}{2})}-\frac{e^{-j(\pi+\frac{k\pi}{2})t}}{-j(\pi+\frac{k\pi}{2})}\right)\right|_{t=0}^{t=2}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{-jk\pi}-1}{(k+2)(k-2)}\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{-2}{\pi(k+2)(k-2)} & k=2l+1\\ 0 & k=2l\end{cases}$$

则 $x_1(t)$ 的傅里叶变换为：

$$\begin{aligned}X_1(j\omega)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)\\&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{-4}{(2l-1)(2l+3)}\delta\left(\omega-\frac{(2l+1)\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\pi)-\delta(\omega+\pi)]\end{aligned}$$

解法三：令 $x_0(t)$ 为周期信号（周期为4），在 $0\le t<4$ 上满足，$x_0(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<2\\ 0 & 2\le t<4\end{cases}$，

则有 $x_1(t)=x_0(t)\sin(\pi t)=\frac{1}{2j}x_0(t)(e^{j\pi t}-e^{-j\pi t})$

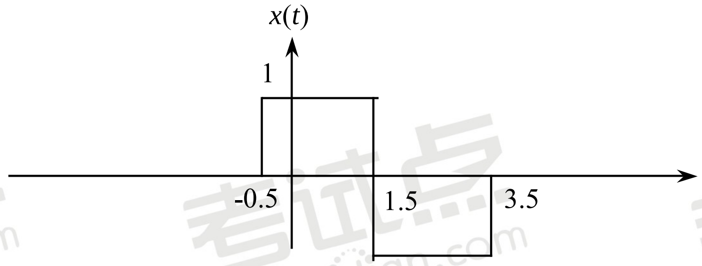
设 $x_0(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_{0k}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$ ，则有 $c_{00}=\frac{1}{2}$ ，$k\neq 0$ 时，$c_{0k}=\frac{1-(-1)^k}{j2k\pi}$

若 $x_1(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_{1k}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$ ，则有 $c_{12}=\frac{1}{4j}$ ，$c_{1(-2)}=\frac{-1}{4j}$

当 $k\neq\pm 2$ 时，$c_{1k}=\frac{1}{2j}[c_{0(k-2)}-c_{0(k+2)}]=\frac{1-(-1)^k}{(4-k^2)\pi}$ ；

图（b）

解法一：将图（b）中的 $x_2(t)$ 看成是周期为 4 的下面的周期信号与 $\cos\pi t$ 的乘积



即：$x_2(t)=x(t)\cos\pi t \quad\Rightarrow\quad x_2(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2}[X(j(\omega-\pi))+X(j(\omega+\pi))]$

因为 $x(t)$ 的傅里叶级数的系数为：

$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\left[\int_{-0.5}^{1.5}e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt-\int_{1.5}^{3.5}e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt\right]$$

当 k=0 时， $a_k=0$

当 $k\neq 0$ 时，

$$a_k=\frac{1}{4}\left[\left.\frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{-j\frac{k\pi}{2}}\right|_{t=-0.5}^{t=1.5}-\left.\frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}t}}{-j\frac{k\pi}{2}}\right|_{t=1.5}^{t=3.5}\right]=\frac{2e^{-j\frac{3k}{4}\pi}-2e^{j\frac{k}{4}\pi}}{-j2k\pi}=\begin{cases}0 & k=2l\\ \dfrac{e^{-j\frac{3k}{4}\pi}-e^{j\frac{k}{4}\pi}}{-j(2l+1)\pi} & k=2l+1\end{cases}$$

所以 $X(j\omega)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T})$，从而可求出 $x_2(t)$ 的傅里叶变换为：

$$X_2(j\omega)=\frac{1}{2}\left[X(j(\omega-\pi))+X(j(\omega+\pi))\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T}-\pi)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T}+\pi)\right]$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\frac{3(2l+1)}{4}\pi}-e^{j\frac{(2l+1)}{4}\pi}}{-j(2l+1)}\delta(\omega-\frac{2l+3}{2}\pi)+\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\frac{3(2l+1)}{4}\pi}-e^{j\frac{(2l+1)}{4}\pi}}{-j(2l+1)}\delta(\omega-\frac{2l-1}{2}\pi)$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2e^{j\frac{2l-1}{4}\pi}}{j(2l-1)}+\frac{2e^{j\frac{2l+3}{4}\pi}}{j(2l+3)}\right)\delta(\omega-\frac{2l+1}{2}\pi)$$

解法二（直接求解的方法）：

$x_2(t)$ 为周期 T=4 的周期函数，该周期函数的傅里叶级数 a_k 为

$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x_2(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{4}\left[\int_{-0.5}^{1.5}\cos\pi t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt+\int_{1.5}^{3.5}-\cos\pi t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt\right]$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-0.5}^{1.5}\cos\pi t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{2}\int_{-0.5}^{1.5}\frac{e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}}{2}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt$$

当 $k=\pm2$ 时，$a_k=0$

当 $k\neq\pm2$ 时

$$a_k=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{j\pi(1-\frac{k}{2})t}}{j\pi(1-\frac{k}{2})}+\frac{e^{-j\pi(1+\frac{k}{2})t}}{-j\pi(1+\frac{k}{2})}\right)\Bigg|_{t=-0.5}^{t=1.5}=\frac{-1}{2j\pi}\left(\frac{e^{j\pi(1-\frac{k}{2})t}}{k-2}+\frac{e^{-j\pi(1+\frac{k}{2})t}}{k+2}\right)\Bigg|_{t=-0.5}^{t=1.5}$$
$$=\frac{-1}{2\pi}\left(\frac{e^{j\frac{k}{4}\pi}-e^{-j\frac{3k}{4}\pi}}{k-2}+\frac{e^{-j\frac{3k}{4}\pi}-e^{j\frac{k}{4}\pi}}{k+2}\right)=\frac{-1}{2\pi}\left(\frac{e^{j\frac{k}{4}\pi}-e^{-jk\pi}e^{j\frac{k}{4}\pi}}{k-2}+\frac{e^{-jk\pi}e^{j\frac{k}{4}\pi}-e^{j\frac{k}{4}\pi}}{k+2}\right)$$
$$=\begin{cases}\frac{-1}{\pi}\left(\frac{e^{j\frac{2l+1}{4}\pi}}{2l-1}-\frac{e^{j\frac{2l+1}{4}\pi}}{2l+3}\right) & k=2l+1\\ 0 & k=2l\end{cases}$$

则 $x_2(t)$ 的傅里叶变换为：

$$X_2(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\frac{-2e^{j\frac{2l+1}{4}\pi}}{2l-1}+\frac{2e^{j\frac{2l+1}{4}\pi}}{2l+3}\right]\delta\left(\omega-\frac{(2l+1)\pi}{2}\right)$$

或者：$X_2(j\omega)=\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}\left[\frac{2e^{j\frac{2l-1}{4}\pi}}{j(2l-1)}+\frac{2e^{j\frac{2l+3}{4}\pi}}{j(2l+3)}\right]\delta\left(\omega-\frac{(2l+1)\pi}{2}\right)$

解法三：令 $x_0(t)$ 为周期信号（周期为 4）

在 $-0.5\le t<3.5$ 上满足，$x_0(t)=\begin{cases}1 & -0.5\le t<1.5\\ 0 & 1.5\le t<3.5\end{cases}$

则有 $x_2(t)=x_0(t)\cos(\pi t)=\frac{1}{2}x_0(t)(e^{j\pi t}+e^{-j\pi t})$，设 $x_0(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{0k}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$

则有 $c_{0k}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{k\pi}{4}}Sa(\frac{k\pi}{2})$，若 $x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{2k}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$

则有，$c_{2k}=\frac{1}{2}[c_{0(k-2)}+c_{0(k+2)}]=\frac{je^{-j\frac{k\pi}{4}}}{4}\left[Sa(\frac{k-2}{2}\pi)-Sa(\frac{k+2}{2}\pi)\right]$。

3-13 设 $x(t)$是一连续时间周期信号，其基波频率为 ω_0，傅里叶级数系数为 a_k，求信号 $x_2(t)=x(1-t)+x(t-1)$ 的频谱或傅里叶级数系数。

解：因为由题意 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$

根据题目要求有

$$x_2(t)=x(1-t)+x(t-1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0(1-t)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0(t-1)}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{-jk\omega_0}e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a_{-k}+a_k)e^{-jk\omega_0}e^{jk\omega_0 t}$$

因此，信号 $x_2(t)$ 的傅立叶级数的系数为 $(a_{-k}+a_k)e^{-jk\omega_0}$；

3-14 有三个连续时间周期信号，其傅里叶级数或傅里叶变换表示如下：

$$x_1(t)=\sum_{k=0}^{10}(\frac{1}{2})^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t}\ ;\ X_2(j\omega)=\sum_{k=-10}^{10}2\pi\cos(k\pi)\delta(\omega-k\frac{2\pi}{50})$$

$$x_3(t)=\sum_{k=-15}^{15}j\sin(\frac{k\pi}{2})e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

利用傅里叶级数或傅里叶变换性质帮助回答下列问题：

（1）三个信号哪些是实值的？ （2）哪些又是偶函数？

解：(1) 根据连续时间傅里叶级数或傅里叶变换的性质知：实信号的傅立叶级数系数以及傅立叶变换为共轭对称，故，$x_2(t)$ 与 $x_3(t)$ 为实信号；

因为：$a_{1k}=(\frac{1}{2})^k$；$a_{-1k}=0$；

$a_{2k}=\cos(k\pi)$；$a_{-2k}=\cos(-k\pi)=\cos(k\pi)=a_{2k}$；

$a_{3k}=j\sin(\frac{k\pi}{2})$；；$a_{-3k}=j\sin(\frac{-k\pi}{2})=-j\sin(\frac{k\pi}{2})$；$a^*{}_{-3k}=j\sin(\frac{k\pi}{2})=a^*{}_{3k}$

(2) 又因实偶信号的傅立叶级数系数以及傅立叶变换为实偶对称，显然，只有

$a_{-2k}=\cos(-k\pi)=\cos(k\pi)=a_{2k}$ 为实值且为偶函数

由此可知，$x_2(t)$ 为实偶信号。

3-15 现对一信号 $x(t)$ 给出如下信息：

(1) x(t)是实的且为偶函数

(2) x(t)是周期的，周期 T＝2，傅里叶系数为 a_k

(3) 对|k|>1，a_k＝0

(4) $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$

试确定两个不同的信号都满足这些条件。

解：由条件（1）、(2)：x(t)是周期的、实的且为偶函数，所以 $a_k = a_{-k}$，且 a_k 为实数。

再由条件（3），$|k| > 1$ 时，$x(t)$ 的傅立叶系数 $a_k = 0$。故信号 x(t)可以表示为：

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{T}t} + a_1 e^{-j\frac{2\pi}{T}t} = a_0 + 2a_1 \cos \pi t \quad (T = 2，\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi)$$

结合条件（4），$\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = a_0^2 + 2a_1^2 = 1$

（1） 若取 $a_0 = 0$ $\quad a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x(t) = \sqrt{2}\cos \pi t$

（2）若取 $a_1 = 0$ $\quad a_0 = 1$ $\quad x(t) = 1$

（3）若取 $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$a_1 = \pm\frac{1}{2}$，$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \cos \pi t$

其实。因为方程数 1 少于未知数个数 2，所以存在无穷解可以满足题中各条件。

3-16 考虑信号 x(t)，其傅里叶变换为 X(jω)，且满足以下条件：

（1） $F^{-1}\{(2 + j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-t}u(t)$，A 与 t 无关，且 A 为实数和 A>0;

（2） $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 1$

求。

解：因为 $Ae^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{A}{1 + j\omega} = (2 + j\omega)X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \frac{A}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} = \frac{A}{1 + j\omega} - \frac{A}{2 + j\omega} \xleftrightarrow{F^{-1}} x(t) A(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

由帕斯瓦尔定理：$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = A^2 \int_0^{\infty} (e^{-t} - e^{-2t})^2 dt = 1$

积分并解之，得 $A = 2\sqrt{3}$

所以 x(t)的时域表达式：$x(t) = 2\sqrt{3}(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$。

＜信号与系统＞第三章作业（P122-129）第三部分 3.17-3.25

3.17 设 x(t)的傅里叶变换 X(jω)满足以下条件：

（1） x(t)为实值信号，且 x(t)=0，t<0；

（2） $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}e^{j\omega t}d\omega = e^{-|t|}$

求 x(t)的时域表达式。

解：由条件（1），x(t)是实值信号，则 x(t)分解后的偶部对应其傅里叶变换 X(jω)的实部，

即：$x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}\xleftrightarrow{F}\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$；考虑 F 变换公式(3-53)，知

所以：$\frac{x(t)+x(-t)}{2}=e^{-|t|}$

因为 x(t)=0, 当 t<0 时

所以得到 x(t)的时域表达式：$x(t)=2e^{-t}u(t)$

3.18 设图 3-38 所示信号 x(t)的傅里叶变换为 X(jω)：

（1） 求 X(jω)的相频特性 θ(ω)

（2） 求 X(0)

（3） 求 $\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)d\omega$

（4） 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}\cdot e^{j2\omega}d\omega$

（5） 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$

（6） 画出 Re{X(jω)}的反变换

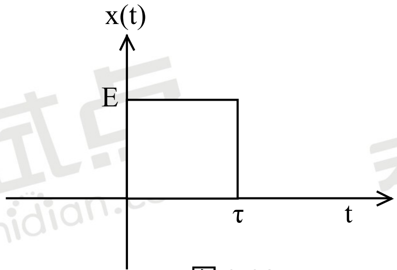


图 3-38

解：（1） 方法一：

信号 x(t)可看成是矩形窗函数 $x_1(t)$（$T_1=\tau/2$）经过时移 t_0（$t_0=\tau/2$）并乘以常数 E 得到，

即：$x(t)=Ex_1(t-\frac{\tau}{2})$,因此 x(t)的傅里叶变换为：

$X(j\omega)=\frac{2E\sin\frac{\tau\omega}{2}}{\omega}e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$；易知其相频特性为：$\theta(\omega)=-\frac{\tau\omega}{2}$

方法二（直接计算）：信号 $x(t)=E[u(t)-u(t-\tau)]$，

$X(j\omega)=\int_0^{\tau}Ee^{-j\omega t}dt=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$；可得相位特性为：$\theta(\omega)=-\frac{\tau\omega}{2}$；

（2） 因为 $X(0)=\lim_{\omega\to0}X(j\omega)=\lim_{\omega\to0}\frac{2E\sin\frac{\tau\omega}{2}}{\omega}e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}=\lim_{\omega\to0}E\tau Sa(\frac{\tau\omega}{2})e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}=E\tau$

故 $X(0)=\int_0^{\tau}Edt=E\tau$

(3) 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = 2\pi x(t)$

令 $t=0$，可得 $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 2\pi x(0)$，由于 $x(t)$ 在 $t=0$ 处不连续，应有

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 2\pi\frac{x(0_-)+x(0_+)}{2} = E\pi$$

(4) 令 $x_1(t)=u(t+1)-u(t-1)$，可得 $x_1(t) \xleftrightarrow{FT} X_1(j\omega)=2Sa(\omega)$

（或：$x_1(t)=\begin{cases}1 & |t|<1 \\ 0 & else\end{cases} \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$）

由时域卷积性质，可得：$f(t)=x(t)*x_1(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)X_1(j\omega)=F(j\omega)$

再由 F 反变换公式(3-54)，并代入 $X_1(j\omega)=2Sa(\omega)$，得

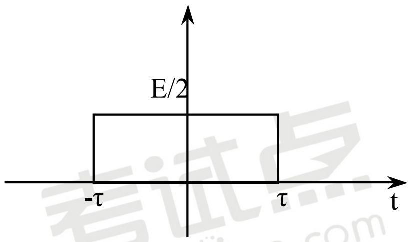
$\int_{-\infty}^{\infty} 2X(j\omega)Sa(\omega)e^{j\omega t}d\omega = 2\pi\{x(t)*x_1(t)\}$，令 $t=2$ 可得，

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega = 2\pi[x(t)*x_1(t)]_{t=2} = \begin{cases}0 & \tau<1 \\ 2\pi E(\tau-1) & 1\le\tau<3 \\ 4\pi E & \tau\ge 3\end{cases}；$$

(5) 由帕斯瓦尔定理：$\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt = 2\pi E^2\tau$

(6) 由于 $\mathrm{Re}[X(j\omega)] \xleftrightarrow{IFT} x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}=\frac{E}{2}\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]$

于是可画出 Re{X(jω)}的反变换图



3.19 有一系统其频率响应为：$H(j\omega)=\frac{\sin 3\omega}{\omega}\cdot\cos\omega$，求它的单位冲激响应 h(t)。

解：方法一：$H(j\omega)=\frac{\sin 3\omega}{\omega}\cdot\cos\omega=\frac{\sin 3\omega}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right)=\frac{e^{j\omega}}{2}\frac{\sin 3\omega}{\omega}+\frac{e^{-j\omega}}{2}\frac{\sin 3\omega}{\omega}$

因为：$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1 \\ 0 & |t|>T_1\end{cases} \xleftrightarrow{F} \frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$

所以：$h(t)=\left.\dfrac{x(t+1)+x(t-1)}{4}\right|_{T_1=3}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & |t|<2\\ \dfrac{1}{4} & 2<|t|<4\\ 0 & else\end{cases}$

方法二：设 $H_1(j\omega)=\dfrac{\sin(3\omega)}{\omega}$，则有 $h_1(t)=\begin{cases}0.5 & |t|<3\\ 0 & |t|>3\end{cases}$，

$$H(j\omega)=H_1(j\omega)\cos\omega=\frac{1}{2}\left[H_1(j\omega)e^{j\omega}+H_1(j\omega)e^{-j\omega}\right]$$

根据傅立叶变换的时域平移性质有 $h(t)=\dfrac{1}{2}\left[h_1(t+1)+h_1(t-1)\right]=\begin{cases}0.5 & |t|<2\\ 0.25 & 2\le|t|<4\\ 0 & |t|\ge 4\end{cases}$；

3.20 有一因果 LTI 系统，其频率响应为 $H(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+3}$，对某一特定的输入 x(t)，其输出是

$y(t)=e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)$，求 x(t)。

解：输出的傅里叶变换为：$Y(j\omega)=\dfrac{1}{3+j\omega}-\dfrac{1}{4+j\omega}=\dfrac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}$

输入的傅里叶变换为：$X(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}=\dfrac{1}{4+j\omega}$

输入 x(t)：$x(t)=F^{-1}\{X(j\omega)\}=e^{-4t}u(t)$

3.21 已知某一因果二阶 LTI 系统的频率响应为：$H(j\omega)=\dfrac{j\omega}{(j\omega)^2+3j\omega+2}$，试求

(1) 该系统的微分方程

(2) 该系统的单位脉冲响应

(3) 若输入 x(t)如图 3－38 所示，求系统输出。

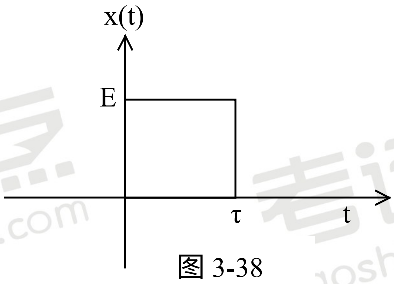


图 3-38

解：(1) 因为 $H(j\omega)=\dfrac{j\omega}{(j\omega)^2+3j\omega+2}=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

即：$[(j\omega)^2+3j\omega+2]Y(j\omega)=j\omega X(j\omega)$

系统的微分方程为：$\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$；

(2) 因为 $H(j\omega)=\dfrac{j\omega}{(j\omega)^2+3j\omega+2}=\dfrac{2}{j\omega+2}-\dfrac{1}{j\omega+1}$

容易求得系统的单位脉冲响应 h(t)：$h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}=(2e^{-2t}-e^{-t})u(t)$

(3) 方法一：给定的输入信号可以表示为矩形脉冲的时移（参见题 3.18(1)），

因此输入的傅里叶变换：$X(j\omega)=Ee^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\dfrac{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$

输出的傅里叶变换：$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{2Ee^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\cdot j\omega}{\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}\cdot\dfrac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2j}$

$$=E\left(\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}\right)\left(1-e^{-j\omega\tau}\right)$$

输出的时域表达式：$y(t)=F^{-1}\{Y(j\omega)\}=E\left[(e^{-t}-e^{-2t})u(t)-(e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)})u(t-\tau)\right]$

方法二：$x(t)=E[u(t)-u(t-\tau)]$，$\dfrac{dx(t)}{dt}=E[\delta(t)-\delta(t-\tau)]$

则：$\dfrac{dx(t)}{dt}\overset{FT}{\longleftrightarrow}E(1-e^{-j\omega\tau})$

输出：$Y(j\omega)=\dfrac{E(1-e^{-j\omega\tau})}{(j\omega)^2+3j\omega+2}=(\dfrac{1}{j\omega+1}-\dfrac{1}{j\omega+2})E(1-e^{-j\omega\tau})$

于是，可得：$y(t)=E(e^{-t}-e^{-2t})u(t)-E[e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}]u(t-\tau)$；

3.22 一因果 LTI 系统的方程为 $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+5\dfrac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)$

(1) 求该系统的单位冲激响应 h(t)；

(2) 若 $x(t)=te^{-t}u(t)$，该系统的响应是什么？

(3) 若 $x(t)=e^{-2t}u(t)$，该系统的响应又是什么？

(4) 若 $x(t)=\sum_{k=0}^{5}(\frac{1}{2})^k\cos 100\pi kt$，该系统的响应又是什么？

解：(1) 因为 $x(t)=\delta(t)\overset{FT}{\longleftrightarrow}1=X(j\omega)$

所以 $H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\dfrac{j\omega+1}{(j\omega)^2+5j\omega+6}=\dfrac{2}{j\omega+3}-\dfrac{1}{j\omega+2}$

取 F 反变换得该系统的单位冲激响应 h(t)：

$h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}=(2e^{-3t}-e^{-2t})u(t)$；

(2) 若 $x(t)=te^{-t}u(t)$，令 $x_1(t)=e^{-t}u(t)$，则 $e^{-t}\overset{FT}{\longleftrightarrow}X_1(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+1}$

由频域微分性质可得：$X(j\omega)=te^{-t}\xleftrightarrow{FT}j\dfrac{dX_1(j\omega)}{d\omega}=\dfrac{1}{(j\omega+1)^2}$，于是

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}=\frac{0.5}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}+\frac{0.5}{j\omega+3},$$

于是，系统的响应为：$y(t)=F^{-1}\{Y(j\omega)\}=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$；

(3) 若 $x(t)=e^{-2}u(t)$， $e^{-2t}\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+2}$，于是

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)^2(j\omega+3)}=\frac{2}{j\omega+2}-\frac{1}{(j\omega+2)^2}-\frac{2}{j\omega+3},$$

于是，系统的响应为：$y(t)=(2e^{-2t}-te^{-2t}-2e^{-3t})u(t)$；

(4) 若 $x(t)=\sum_{k=0}^{5}(\frac{1}{2})^k\cos(100k\pi t)=\sum_{k=0}^{5}(\frac{1}{2})^{k+1}(e^{j100k\pi t}+e^{-j100k\pi t})$，

当输入为 $x_k(t)=e^{j100k\pi t}$（$k\neq 0$ 时），输出即为

$$y_k(t)=H(j100k\pi)e^{j100k\pi t}=(\frac{2}{3+j100k\pi}-\frac{1}{2+j100k\pi})e^{j100k\pi};$$

而当 $k=0$ 时， $x_0(t)=1$，对应的输出为 $y_0(t)=\dfrac{1}{6}$

于是系统的响应为：$y(t)=\dfrac{1}{6}+\sum_{\substack{k=-5\\k\neq 0}}^{5}(\dfrac{1}{2})^{k+1}(\dfrac{2}{3+j100k\pi}-\dfrac{1}{2+j100k\pi})e^{j100k\pi}$；

3.23 利用卷积性质，用频域法求下列各信号 x(t)和 h(t)的卷积

(1) $x(t)=e^{-t}u(t)$， $h(t)=e^{-3t}u(t)$； (2) $x(t)=te^{-t}u(t)$， $h(t)=e^{-3t}u(t)$；

(3) $x(t)=u(t+1)-u(t-1), h(t)=u(t+1)-u(t-1)$。

解：(1) $x(t)=e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}$

$h(t)=e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega)=\dfrac{1}{3+j\omega}$

所以：$x(t)*h(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{1}{(1+j\omega)(3+j\omega)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+j\omega}-\dfrac{1}{3+j\omega}\right)$

$x(t)*h(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})u(t)$；

（2） $x(t)=te^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} j\dfrac{d\{\frac{1}{1+j\omega}\}}{d\omega}=\dfrac{1}{(1+j\omega)^2}$

所以：$x(t)*h(t)\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{(1+j\omega)^2(3+j\omega)}=\dfrac{1}{4}[\dfrac{2}{(j\omega+1)^2}-\dfrac{1}{j\omega+1}+\dfrac{1}{j\omega+3}]$

可得： $y(t)=x(t)*h(t)=\dfrac{1}{4}(2te^{-t}-e^{-t}+e^{-3t})u(t)$；

（3） 因为：$x(t)=u(t+1)-u(t-1)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=(e^{j\omega}-e^{-j\omega})\left(\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$

$h(t)=u(t+1)-u(t-1)\xleftrightarrow{F}H(j\omega)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$

所以：$x(t)*h(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)H(j\omega)=\left(\dfrac{2\sin\omega}{\omega}\right)^2=4Sa^2(\omega)$

设 $x_1(t)=\begin{cases}E(1-\frac{2}{\tau}|t|) & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$，则 $X_1(j\omega)=\dfrac{E\tau}{2}Sa^2(\dfrac{\omega\tau}{4})$ (参见 P100 例 3-7)

若令 $\tau=4$， $E=2$，

则有 $X_1(j\omega)=\dfrac{E\tau}{2}Sa^2(\dfrac{\omega\tau}{4})=4Sa^2(\omega)=Y(j\omega)$，此时 $x_1(t)=y(t)$，

即 $y(t)=x(t)*h(t)=\begin{cases}2(1-\frac{|t|}{2}) & |t|<2\\ 0 & |t|>2\end{cases}$；

3.24 设 x(t)的傅里叶变换为 $X(j\omega)$，令 p(t)是基波频率为 ω_0 的周期信号。其傅里叶级数是

$$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0}$$

求：(1) $y(t)=x(t)\cdot p(t)$ 的傅里叶变换；

(2) 若 $X(j\omega)$ 如图 3-39 所示，对下列每个 p(t)画出 y(t)的频谱。

① $p(t)=\cos(\dfrac{t}{2})$； ② $p(t)=\cos t$； ③ $p(t)=\cos 2t$；

④ $p(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-\pi k)$；⑤ $p(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2\pi k)$； ⑥ $p(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-4\pi k)$。

解：(1) 因为 $x(t)e^{jk\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}X(j(\omega-k\omega_0))$，于是由线性性质有

$$x(t)p(t)=x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k x(t)e^{jk\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k X(j(\omega-k\omega_0))$$

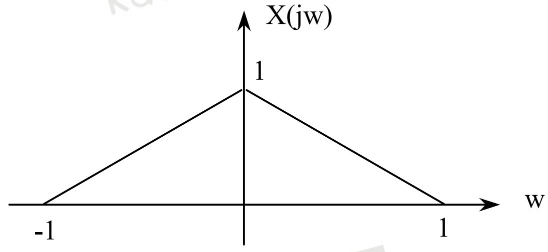


图 3-39

(2) ① $p(t)=\cos(\frac{t}{2})=\frac{1}{2}(e^{j\frac{t}{2}}+e^{-j\frac{t}{2}})$；

可得 $x(t)p(t)=\frac{x(t)}{2}(e^{j\frac{t}{2}}+e^{-j\frac{t}{2}})\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}[X(j(\omega-\frac{1}{2}))+X(j(\omega+\frac{1}{2}))]$；

② $p(t)=\cos t=\frac{1}{2}(e^{jt}+e^{-jt})$；

可得 $x(t)p(t)=\frac{x(t)}{2}(e^{jt}+e^{-jt})\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}[X(j(\omega-1))+X(j(\omega+1))]$；

③ $p(t)=\cos 2t=\frac{1}{2}(e^{j2t}+e^{-j2t})$，

可得 $x(t)p(t)=\frac{x(t)}{2}(e^{j2t}+e^{-j2t})\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}[X(j(\omega-2))+X(j(\omega+2))]$；

④ $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\pi)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j2kt}$，

可得 $x(t)p(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)e^{j2kt}\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-2k))$

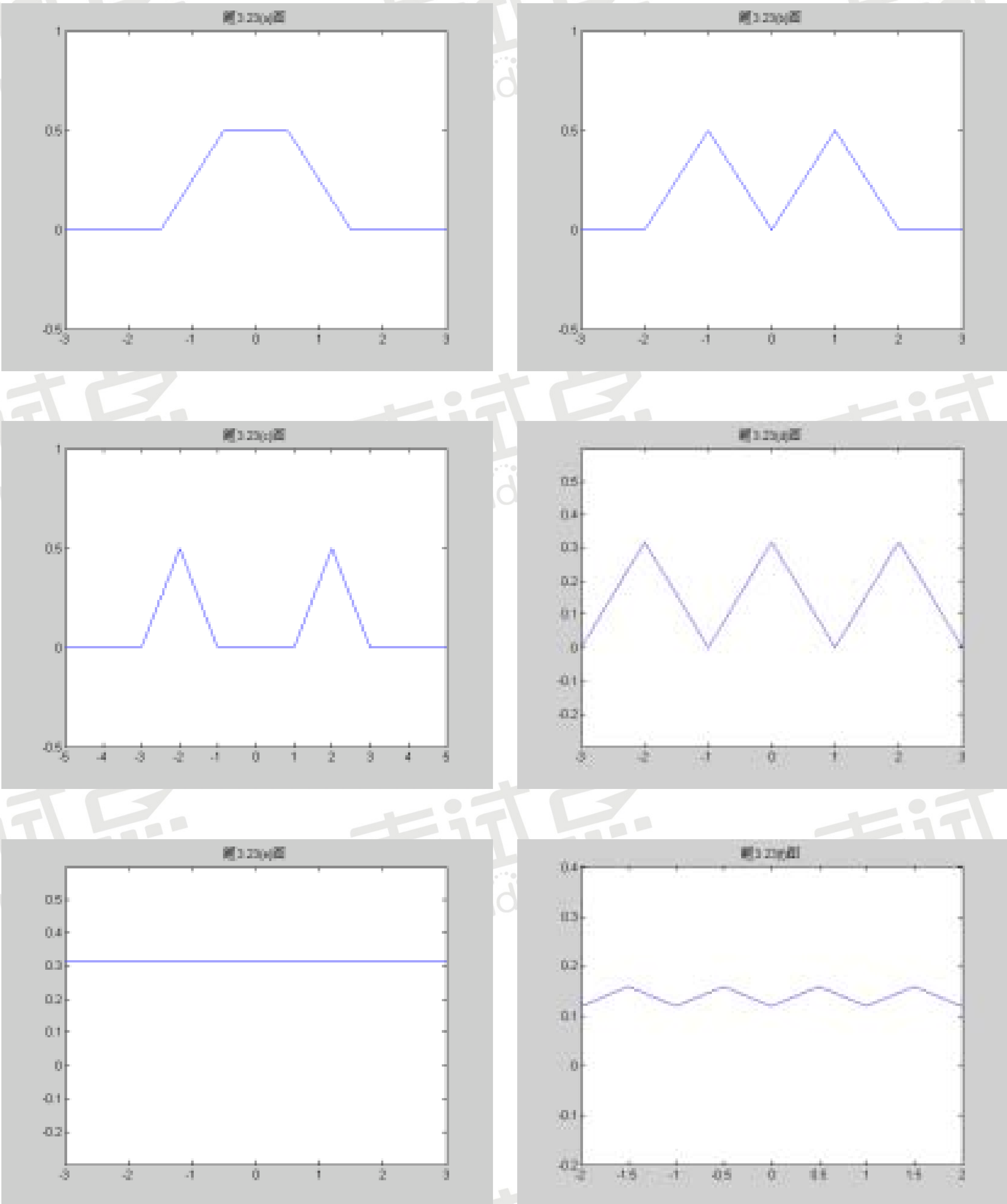
⑤ $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k\pi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jkt}$，

可得 $x(t)p(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)e^{jkt}\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k))=\frac{1}{\pi}$

⑥ $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-4k\pi)=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{k}{2}t}$，

可得 $x(t)p(t)=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)e^{j\frac{k}{2}t}\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{4\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-\frac{k}{2}))$。

相应的频谱如下所示。



3.25 考虑一 LTI 系统，对输入为 $x(t)=\left[e^{-t}+e^{-3t}\right]u(t)$ 的响应 y(t)是 $y(t)=\left[2e^{-t}-2e^{-4t}\right]u(t)$，

(1) 求系统的频率响应 $H(j\omega)$

(2) 确定该系统的单位冲激响应 h(t)

(3) 求该系统的微分方程

解：(1) 易知输入的傅里叶变换：$X(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}+\frac{1}{3+j\omega}=\frac{2(2+j\omega)}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$

输出的傅里叶变换：$Y(j\omega)=\frac{2}{1+j\omega}-\frac{2}{4+j\omega}=\frac{6}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$

系统的频率响应：$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}=\frac{3/2}{2+j\omega}+\frac{3/2}{4+j\omega}$

（2）系统的单位冲激响应 h(t)：$h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}=\left(\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-4t}\right)u(t)$

（3）系统的微分方程

因为 $H(j\omega)=\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}=\frac{9+3j\omega}{(j\omega)^2+6j\omega+8}$

所以 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$

<信号与系统>第三章作业（P122-129）第四部分 3.26-3.34

3.26 证明 LTI 系统对周期信号的响应仍是周期信号且不会产生新的谐波分量或新的频率分量。

证明：设 LTI 系统的频率响应为 $H(j\omega)$，输入信号 $x(t)$ 为周期信号，且周期为 T，则 $x(t)$ 可以展开为，$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$；其中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ 为周期信号 $x(t)$ 的基频，a_k（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）为 $x(t)$ 的傅立叶级数；当输入为 $x_k(t)=e^{jk\omega_0 t}$ 时，系统对应的输出应为 $y_k(t)=H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$（特征函数），由于是 LTI 系统，故当输入为 $x(t)$ 时，系统的输出为 $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$，由此可见输出 $y(t)$ 仍为周期信号，且无新的谐波分量。

3.27 考虑一 LTI 系统，其单位冲激响应为：$h(t)=\frac{\sin 5(t-1)}{\pi(t-1)}$，求系统对下面各输入信号的响应：

（1） $x(t)=\cos(7t+\frac{\pi}{3})$；　（2） $x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin kt$；

（3） $x(t)=\frac{\sin 5(t+1)}{\pi(t+1)}$；　（4） $x(t)\left[\frac{\sin\frac{5}{2}t}{\pi t}\right]^2$。

解：因为 $\frac{\sin Wt}{\pi t}\xleftrightarrow{F}\begin{cases}1 & |\omega|<W\\ 0 & |\omega|>W\end{cases}$

所以由时移性质的：$h(t)=\frac{\sin 5(t-1)}{\pi(t-1)}\xleftrightarrow{F}H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega} & |\omega|<5\\ 0 & |\omega|>5\end{cases}$

（1） $x(t)=\cos(7t+\frac{\pi}{3})\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=\pi\left[e^{j\frac{\pi}{3}}\cdot\delta(\omega-7)+e^{-j\frac{\pi}{3}}\cdot\delta(\omega+7)\right]$

输出的傅里叶变换：$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=0$

所以输出响应 $y(t)=F^{-1}\{Y(j\omega)\}=0$

（2） $y(t)=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k^2}\sin k(t-1)$

(3) $x(t)=\dfrac{\sin 5(t+1)}{\pi(t+1)} \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)=\begin{cases} e^{j\omega} & |\omega|<5 \\ 0 & |\omega|>5 \end{cases}$

输出的傅里叶变换为：$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\begin{cases} 1 & |\omega|<5 \\ 0 & |\omega|>5 \end{cases}$

所以输出响应为：$y(t)=F^{-1}\{Y(j\omega)\}=\dfrac{\sin 5t}{\pi t}$。

(4) $y(t)=[\dfrac{\sin\frac{5}{2}(t-1)}{\pi(t-1)}]^2$

3.28 如图 3－40 所示周期信号 v_i(t)加到 RC 低通滤波器电路，已知 v_i(t)得基波频率 $f_0=\dfrac{2\pi}{T}=1kHz, E=1V, R=1k\Omega, C=0.1\mu F$ ：

(1) 设电容器两端电压为 v_c(t)，求系统的频率响应 $H(j\omega)=\dfrac{V_c(j\omega)}{V_i(j\omega)}$

(2) 求 v_c(t)的直流分量、基波和五次谐波的幅度

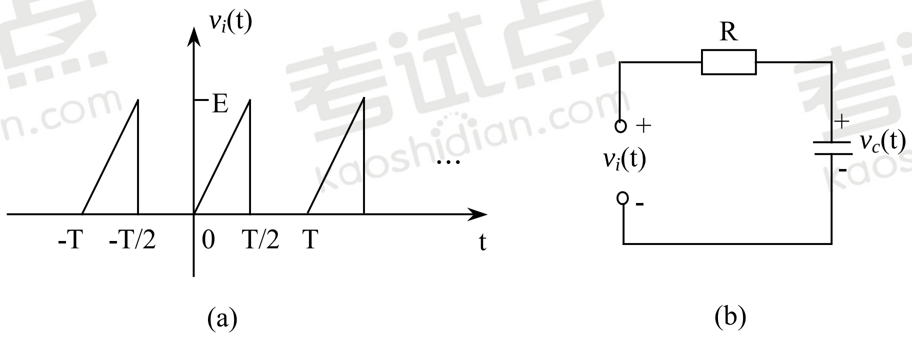


图 3-40 题 3.28 图

解：

(1) 由基尔霍夫定理：$v_c(t)+RC\dfrac{dv_c(t)}{dt}=v_i(t)$，两边取傅里叶变换，得

$V_c(j\omega)+j\omega RCV_c(j\omega)=V_i(j\omega)$，则 $H(j\omega)=\dfrac{V_c(j\omega)}{V_i(j\omega)}=\dfrac{1}{1+RCj\omega}=\dfrac{1}{1+10^{-4}j\omega}$

(2) 由周期函数得傅里叶级数：$V_i=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk1000t}$

其中：

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}te^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$= \begin{cases} \frac{2E}{T^2}\left[\frac{1}{-jk\omega_0}\left(\frac{T}{2}(-1)^k + \frac{(-1)^k-1}{jk\omega_0}\right)\right] = \frac{(-1)^k jE}{2k\pi} + \frac{E\left((-1)^k-1\right)}{2k^2\pi^2} & k \neq 0 \\ \frac{E}{4} \quad k=0 \end{cases}$$

所以：$V_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk1000t}$

其中：$b_k = a_k H(jk\frac{2\pi}{T}) = \frac{a_k}{1+j0.1k}$

$$b_0 = a_0 = \frac{E}{4} = \frac{1}{4}$$

$$b_1 = \frac{a_1}{1+j0.1} = E\left(\frac{-j}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}\right)\frac{1}{1+j0.1}$$

$$b_5 = \frac{a_5}{1+j0.1} = E\left(\frac{-j}{10\pi} - \frac{1}{25\pi^2}\right)\frac{1}{1+j0.1}$$

3.29 由图 3－41 所示的 RL 电路，电流源输出电流为输入 x(t)，系统的输出为流经电感线圈的电流 y(t)。

(1) 求该系统的频率响应 $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$；

(2) 写出关联 x(t)和 y(t)的微分方程；

(3) 若 x(t)=cos(t)，求输出 y(t)

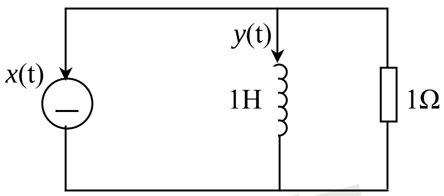


图 3-41 题 3.29 图

解：

(1) 电阻的阻抗为：R　　电感的阻抗为：$j\omega L$

由此得到：$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = -\frac{R}{R+j\omega L} = -\frac{1}{1+j\omega}$

(2) 对上式进行傅里叶反变换，得微分方程

$$y'(t) + y(t) = -x(t)$$

(3) 输入 $x(t) = \cos t$，则输出为 $y(t) = |H(j\omega_0)|\cos(t + \theta(\omega_0))$

因为：$\omega_0 = 1$　　$H(j\omega_0) = \frac{1}{1+j}$　　$|H(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\theta(\omega_0) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

所以：$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t + \frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t - \frac{\pi}{4})$

3.30 由图 3－42 所示的 RLC 电路，试求

（1） 系统的频率响应 $H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$；

（2） 写出关联 x(t)和 y(t)的微分方程；

（3） 若 x(t)=sin(t)，求输出 y(t)

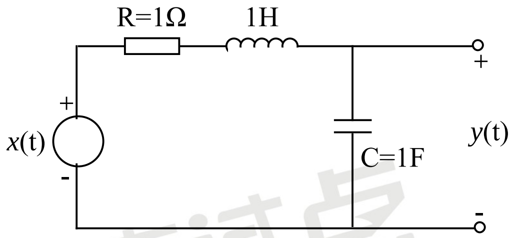


图 3-42 题 3.30 图

解：（1）电阻的复阻抗为 R，电感的复阻抗 $j\omega L$，电容的复阻抗 $\dfrac{1}{j\omega C}$，所以由电路图可知：

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{(j\omega)^2 LC+j\omega RC+1}=\frac{1}{(j\omega)^2+j\omega+1}$$

（2）对上式取傅里叶反变换，得微分方程：

$$y''(t)+y'(t)+y(t)=x(t)$$

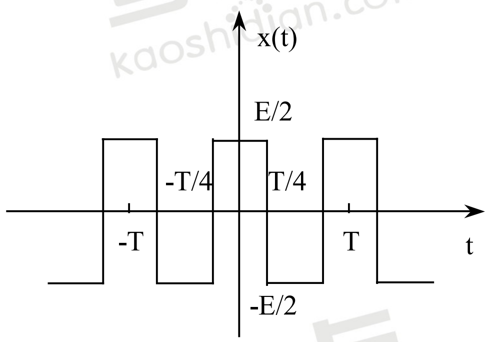
（3）输入 $x(t)=\sin t$，则输出为 $y(t)=|H(j\omega_0)|\sin(t+\theta(\omega_0))$

因为：$\omega_0=1 \quad H(j\omega_0)=-j \quad |H(j\omega_0)|=1 \quad \theta(\omega_0)=-\dfrac{\pi}{2}$

所以：$y(t)=\sin(t-\dfrac{\pi}{2})=-\cos(t)$

3.31 考虑一连续时间 LTI 系统，其单位冲激响应为：$h(t)=e^{-|t|}$，对下列各输入情况，求输出 y(t)的傅里叶变换或傅里叶级数：

（1） $x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k)$ （2） $x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(t-k)$ （3） x(t)如图 3-31(b)所示周期方波



(b)

图 3-31

解：$h(t)=e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} H(j\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$

(1) x(t)是周期 T＝2 的周期函数，其傅里叶级数系数为 1：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

所以 $Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{2}{1+\omega^2}\delta(\omega-2k\pi)=2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{2}{1+(2k\pi)^2}\delta(\omega-2k\pi)$

(2) x(t)是周期 T＝2 的周期函数，其傅里叶级数系数为：

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-1/2}^{3/2}(\delta(t)-\delta(t-1))e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{2}\left(1-e^{-jk\pi}\right)=\frac{1}{2}(1-\cos k\pi)$$

所以 $x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(t-k) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)=\dfrac{2\pi}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\dfrac{2\pi}{T})=\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{2}(1-\cos k\pi)\delta(\omega-k\pi)$

所以：$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1-\cos k\pi}{1+\omega^2}\delta(\omega-k\pi)=\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1-\cos k\pi}{1+(k\pi)^2}\delta(\omega-k\pi)$

(3) x(t)的傅里叶级数系数 a_k ，则输入的傅里叶变换为：

$$X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

所以输出：$Y(j\omega)=2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_kH(jk\omega_0)\delta(\omega-k\omega_0)=2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k\dfrac{2}{1+(k\omega_0)^2}\delta(\omega-k\omega_0)$

$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$　　$a_k=\dfrac{E}{2}Sa(\dfrac{k\pi}{2})$，而 $a_0=0$

鉴于有些同学认为定义式和上次王老师讲的方法不一致，所以特别按照定义式推导了一遍

$$\begin{aligned}
a_k&=\frac{1}{T}\left(\int_{-T/4}^{T/4}\frac{E}{2}e^{-jk\omega_0 t}dt-\int_{T/4}^{3T/4}\frac{E}{2}e^{-jk\omega_0 t}dt\right)\\
&=\frac{E}{2T}\times\frac{e^{-jk\omega_0\frac{T}{4}}-e^{jk\omega_0\frac{T}{4}}-e^{-jk\omega_0\frac{3T}{4}}+e^{-jk\omega_0\frac{T}{4}}}{-jk\omega_0}\\
&=\frac{E}{2T}\times\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}-e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{3\pi}{2}k}+e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{-jk\omega_0}\qquad k\neq 0\\
&=\frac{E}{T}\times\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}-e^{j\frac{\pi}{2}k}}{-jk\omega_0}=\frac{E}{T}\frac{2\sin\frac{\pi}{2}k}{k\omega_0}=\frac{E}{2}Sa(\frac{\pi k}{2})
\end{aligned}$$

3.32 电路如图 3-43 所示，激励电流源为 $i_1(t)$，输出电压为 $v_1(t)$，试求：

(1) 系统的频率响应 $H(j\omega)=\dfrac{V_1(j\omega)}{I_1(j\omega)}$

(2) 能否使 $v_1(t)$和 $i_1(t)$波形一样（无失真）？如能试确定 R_1 和 R_2（设给定 L＝1H，C＝

1F)。

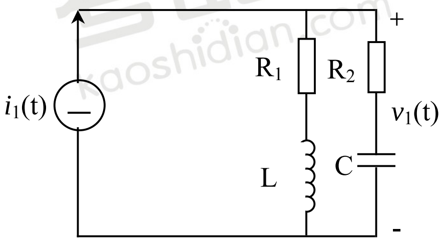


图 3-43　题 3.32 图

解：电阻的复阻抗为 R，电感的复阻抗 $j\omega L$，电容的复阻抗 $\frac{1}{j\omega C}$，所以有电路图可知：

$$\frac{V_1(j\omega)}{R_2+\frac{1}{j\omega C}}+\frac{V_1(j\omega)}{R_1+j\omega L}=I_1(j\omega)$$

所以　$$H(j\omega)=\frac{V_1(j\omega)}{I_1(j\omega)}=\frac{\left(R_2+\frac{1}{j\omega C}\right)(R_1+j\omega L)}{R_2+\frac{1}{j\omega C}+R_1+j\omega L}=\frac{R_1+j\omega(L+R_1R_2C)+(j\omega)^2R_2LC}{1+j\omega(R_1+R_2)+(j\omega)^2LC}$$

若 L=1H, C=1F，则

$$H(j\omega)=\frac{R_1+j\omega(1+R_1R_2)+(j\omega)^2R_2}{1+j\omega(R_1+R_2)+(j\omega)^2}$$

（2）要使 $v_1(t)$和 $i_1(t)$的波形无失真，必须 $H(j\omega)=1$， $R_1=1\Omega, R_2=1\Omega$

3.33 一个理想带通滤波器的幅频特性和相频特性如图 3-44 所示，试求它的冲激响应。并说明此滤波器在时域上是否是物理可实现的？

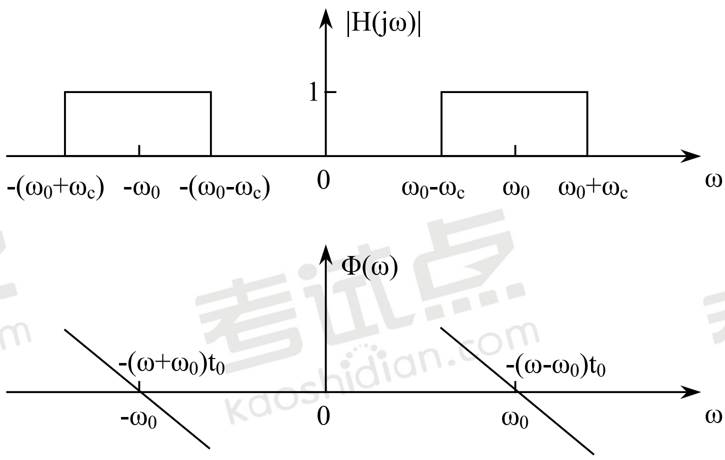


图 3-44　题 3.33 图

解：由图可知：

$$H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j(\omega+\omega_0)t_0} & |\omega+\omega_0|<\omega_c\\ e^{-j(\omega-\omega_0)t_0} & |\omega-\omega_0|<\omega_c\\ 0 \quad else & \end{cases}$$

又因为：$H_1(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c \\ 0 & else\end{cases} \xleftrightarrow{F^{-1}} h_1(t)=\dfrac{\sin\omega_c t}{\pi t}$

$$e^{-j\omega t_0}H_1(j\omega) \xleftrightarrow{F^{-1}} h_1(t-t_0)=\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}$$ 时移特性

$$e^{-j(\omega+\omega_0)t_0}H_1(j(\omega+\omega_0)) \xleftrightarrow{F^{-1}} e^{-j\omega_0 t}h_1(t-t_0)=\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}e^{-j\omega_0 t}$$ 频移特性

并且 $H(j\omega)=e^{-j(\omega+\omega_0)t_0}H_1(j(\omega+\omega_0))+e^{-j(\omega-\omega_0)t_0}H_1(j(\omega-\omega_0))$

则其冲激响应应为：

$$h(t)=\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}\left(e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}\right)=\frac{2\sin\omega_c(t-t_0)\cos\omega_0 t}{\pi(t-t_0)}$$

由于当 t<0 时，h(t)≠0，所以系统是非因果的，物理上不能实现

3.34 考虑一连续时间理想滤波器 $H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c\,] \\ 0 & else\end{cases}$，当输入如图 3-45 所示，求系统输出。当满足 $T>>\dfrac{2\pi}{\omega_c}$ 时，画出输出信号的大致波形。

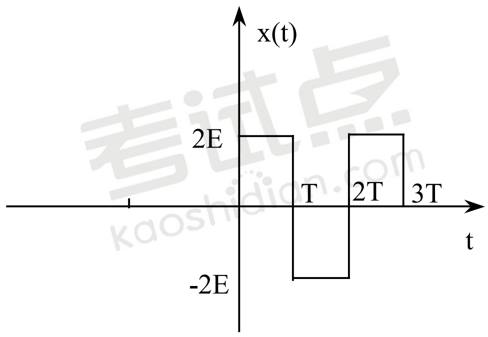


图 3-45　题 3.34 图

解

$$H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & else\end{cases} \xleftrightarrow{F^{-1}} h(t)=\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}$$

理想低通滤波器的阶跃响应应为：$s(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}Si[\omega_c(t-t_0)]$

输入 x(t)可以表示为：$x(t)=2E\left(u(t)-2u(t-T)+2u(t-2T)-u(t-3T)\right)$

则系统的输出为：

$$y(t)=\frac{2E}{\pi}\left\{Si[\omega_c(t-t_0)]-2Si[\omega_c(t-t_0-T)]+2Si[\omega_c(t-t_0-2T)]-Si[\omega_c(t-t_0-3T)]\right\}$$

于慧敏主编<信号与系统>第四章作业(P173~183) 习题解答

4.1 ~ 4.15

4.1 确定下列离散时间周期信号的傅里叶级数，并写出每一组系数 a_k 的模和相位

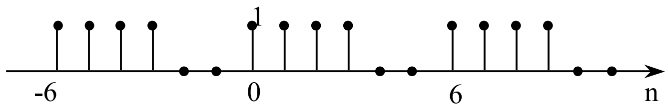
（1） x[n]如图 4-28（a）所示　　　　（2）　x[n]如图 4－28（b）所示

（3）　$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{2\delta[n-4m]+4\delta[n-1-4m]\}$　　（4）　$x[n]=\cos(2\pi n/3)+\sin(2\pi n/3)$

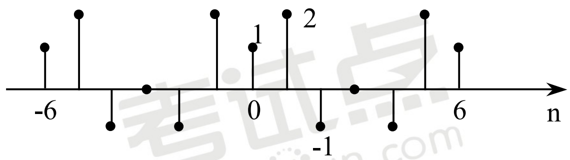
（5）　$x[n]=1-\sin(\pi n/4),\ \ 0\le n\le 3$，且 x[n]以 4 为周期

（6）　$x[n]=1-\sin(\pi n/4),\ \ 0\le n\le 11$，且 x[n]以 12 为周期

（7）　$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n$，　$0\le n\le 7$ 且 x[n]以 8 为周期



(a)



(b)

图 4－28

（1）解：该周期信号的周期 N 为 6，$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<6>}a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{6}\left(1+e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+e^{-j\pi k}\right)$$

$$=\frac{1}{6}e^{-j\frac{k}{2}\pi}\left(e^{j\frac{k}{2}\pi}+e^{j\frac{k}{6}\pi}+e^{-j\frac{k}{6}\pi}+e^{-j\frac{k}{2}\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{6}e^{-j\frac{k}{2}\pi}\left(2\cos\frac{k}{2}\pi+2\cos\frac{k}{6}\pi\right)$$

$$|a_k|=\frac{1}{3}\left|\cos\frac{k}{2}\pi+\cos\frac{k}{6}\pi\right|\qquad a_k\ \text{的相位为}\ -\frac{k\pi}{2}$$

另外一种答案：

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{6}\left(1+e^{-j\frac{\pi}{3}k}+e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+e^{-j\pi k}\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{6}\times\frac{1-e^{-j\frac{4\pi}{3}k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{3}k}}=\frac{1}{6}\times\frac{e^{-j\frac{2\pi}{3}k}\left(e^{j\frac{2\pi}{3}k}-e^{-j\frac{2\pi}{3}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{6}k}\left(e^{j\frac{\pi}{6}k}-e^{-j\frac{\pi}{6}k}\right)}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\sin\frac{2k\pi}{3}}{6\sin\frac{k\pi}{6}} & 1\le k\le 5\\ \frac{2}{3} & k=0\end{cases}$$

$$|a_k|=\begin{cases}\frac{\sin\frac{2k\pi}{3}}{6\sin\frac{k\pi}{6}} & 1\le k\le 5\\ \frac{2}{3} & k=0\end{cases}$$

a_k 的相位为 $-\frac{k\pi}{2}$

(2) 解：该周期信号的周期 N 为 6， $x[n]=\sum_{k=<N>}a_ke^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<6>}a_ke^{jk\frac{\pi}{3}n}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{6}\left(1+2e^{-j\frac{\pi}{3}k}-e^{-j\frac{2\pi}{3}k}-e^{-j\frac{4\pi}{3}k}+2e^{-j\frac{5\pi}{3}k}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+4\cos\frac{k\pi}{3}-2\cos\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$|a_k|=\left|\frac{1}{6}\left(1+4\cos\frac{k\pi}{3}-2\cos\frac{2k\pi}{3}\right)\right|,\qquad a_k\text{ 的相位}\begin{cases}0 & k=0,1,2,4,5\\ \pi & k=3\end{cases}$$

(3) 解：该周期信号的周期 N 为 4

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_ke^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<4>}a_ke^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{4}\left(2+4e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)=\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{2}k-j\sin\frac{\pi}{2}k$$

$$|a_k|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{k\pi}{2}\right)^2+\sin\frac{k\pi}{2}}$$

$$a_k\text{ 的相位}-arctg\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\frac{1}{2}+\cos\frac{k\pi}{2}}=\begin{cases}0 & k=4m\\ -arctg2 & k=4m+1\\ \pi & k=4m+2\\ arctg2 & k=4m+3\end{cases}\quad m\text{ 为整数}$$

(4) 解：该周期信号的周期 N 为 3

$$x[n]=\cos(2\pi n/3)+\sin(2\pi n/3)$$

$$=\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}n}+e^{-j\frac{2\pi}{3}n}}{2}+\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}n}-e^{-j\frac{2\pi}{3}n}}{2j}=\frac{1-j}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}n}+\frac{1+j}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}n}$$

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<3>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{3}n}$$

则：一个周期内 $a_0=0$， $a_1=\frac{1-j}{2}$， $a_{-1}=\frac{1+j}{2}$。

a_k 的相位 $\begin{cases}0 & k=3m\\ -\pi/4 & k=3m+1\\ \pi/4 & k=3m+2\end{cases}$

（5）解：该周期信号的周期 N 为 4， $x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<4>}a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{4}\left(1+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})e^{-j\frac{\pi}{2}k}+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})e^{-j\frac{3\pi}{2}k}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+(2-\sqrt{2})\cos\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$|a_k|=\left|\frac{1}{4}\left(1+(2-\sqrt{2})\cos\frac{k\pi}{2}\right)\right|$$ a_k 的相位为 0

（6）解：该周期信号的周期 N 为 12， $x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<12>}a_k e^{jk\frac{\pi}{6}n}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11}(1-\sin(\pi n/4))e^{-j\frac{k\pi}{6}n}$$

$$a_k=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11}(1-\sin\frac{\pi n}{4})e^{-jk\frac{\pi}{6}n}=\frac{1}{12}[1+2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cos\frac{k\pi}{6}+2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cos\frac{k\pi}{2}$$
$$+2\cos\frac{2k\pi}{3}+2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\cos\frac{5k\pi}{6}+2(-1)^k]$$

（7）解：该周期信号的周期 N 为 8， $x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<8>}a_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{8}\left(\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\frac{k\pi}{4}n}\right)=\frac{1}{8}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}e^{-jk\frac{\pi}{4}}\right)^8}{1-\frac{1}{3}e^{-jk\frac{\pi}{4}}}=\frac{3(1-\frac{1}{3^8})}{8(3-e^{-j\frac{k\pi}{4}})}=\frac{\frac{820}{6561}}{1-\frac{1}{3}e^{-jk\frac{\pi}{4}}}$$

$$|a_k| = \frac{\frac{820}{6561}}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}\cos\frac{k\pi}{4})^2 + (\frac{1}{3}\sin\frac{k\pi}{4})^2}} \quad a_k \text{ 的相位为 } -arctg\frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{3-\cos\frac{k\pi}{4}}$$

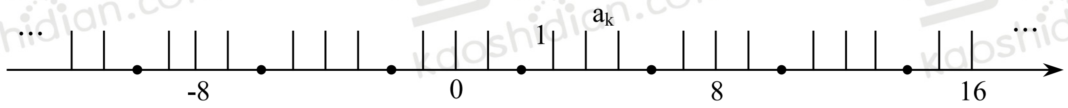
4.2 已知以下每一离散周期信号的傅里叶级数系数 a_k，且周期都为 8，试确定各信号 x[n]。

（1） $a_k = \cos\left(\frac{k}{4}\pi\right) + \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right)$ （2） $a_k = \sin\frac{k\pi}{4}, 0 \le k \le 7$

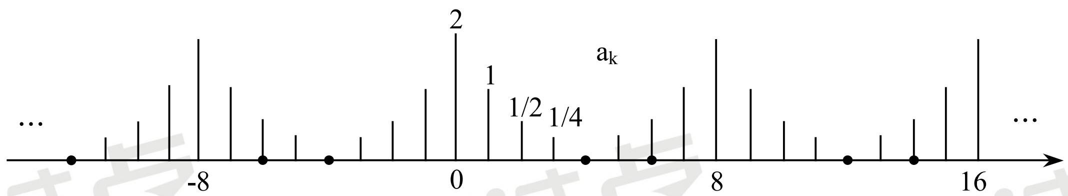
（3）a_k 如图 4－29（a）所示（a0=1,a1=1,a2=0,a3=1,a4=1,a5=1,a6=0,a7=1）

（4）a_k 如图 4－29（b）所示（a0=2,a1=1,a2=1/2,a3=1/4,a4=0,a5=1/4,a6=1/2,a7=1）

（5） $a_k = -a_{k-4}, x[2n+1] = (-1)^n$



(a)



(b)

解：$x[n]$ 的周期为 $N=8$，有 $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$

(1)

$$a_k = \cos\frac{k\pi}{4} + \sin\frac{3k\pi}{4} = \frac{1}{2}e^{j\frac{k\pi}{4}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{k\pi}{4}} + \frac{1}{2j}e^{j\frac{3k\pi}{4}} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{3k\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{n=-3}^{4} x[n]e^{jk\frac{\pi}{4}n}$$

当 $-3 \le n \le 4$ 时， $x[-3] = 4j$， $x[-1] = 4$， $x[1] = 4$， $x[3] = -4j$，其他 $x[n] = 0$。

(2)

$$a_k = \sin\frac{k\pi}{4} = \frac{1}{2j}e^{j\frac{k\pi}{4}} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{k\pi}{4}} = \frac{1}{8}\sum_{n=-3}^{4} x[n]e^{jk\frac{\pi}{4}n},$$

当 $-3 \le n \le 4$ 时， $x[1] = -4j$， $x[-1] = 4j$，其他 $x[n] = 0$。

(3)

注：本题有问题，由图可得傅立叶系数 a_k 的周期为 4，故序列 $x[n]$ 的周期为 4（而不是题中所说的 8）。

$$x[n] = \sum_{k=-1}^{2} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n} = e^{-j\frac{n\pi}{2}} + 1 + e^{j\frac{n\pi}{2}} = 1 + 2\cos\frac{n\pi}{2}$$

(4)

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<8>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{8}n}$$
$$=2+e^{j\frac{\pi}{4}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\frac{1}{4}e^{j\frac{3\pi}{4}n}+\frac{1}{4}e^{j\frac{5\pi}{4}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{6\pi}{4}n}+e^{j\frac{7\pi}{4}n}$$
$$=2+2\cos\frac{\pi}{4}n+\cos\frac{\pi}{2}n+\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4}n$$

(5)

$$x[2n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}2n}=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$
$$=a_0+a_1e^{j\frac{\pi}{2}n}+a_2e^{j\pi n}+a_3e^{j\frac{3\pi}{2}n}-a_0e^{j2\pi n}-a_1e^{j\frac{5\pi}{2}n}-a_2e^{j\frac{6\pi}{2}n}-a_3e^{j\frac{7\pi}{2}n}$$
$$=0$$

所以：$x[n]=\begin{cases}0 & n=2k\\ (-1)^k & n=2k+1\end{cases}$　k 为整数

4.3 周期为 N 的 x[n]的傅里叶级数表示为：$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$

(1)　设 N 为偶数，且满足 $x[n]=-x\left[n+\frac{N}{2}\right]$，对全部 n。证明 $a_{2k}=0$，k 为任意整数。

(2)　设 N 可以被 4 除尽，且满足 $x[n]=-x\left[n+\frac{N}{4}\right]$，对全部 n。证明 $a_{4k}=0$，k 为任意整数。

证明：

(1)

将序列 $x[n]$ 表示为，$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$，

则有，$x\left[n+\frac{N}{2}\right]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}(n+\frac{N}{2})}=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\pi}e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=-x[n]=-\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$，

故有，$a_k e^{jk\pi}=-a_k$，即 $(-1)^k a_k=-a_k$，

当 k 为偶数时，有 $a_k=-a_k$，即 $a_k=0$。

(2)

将序列 $x[n]$ 表示为，$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$，

则有，$x\left[n+\frac{N}{4}\right]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}(n+\frac{N}{4})}=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j\frac{k\pi}{2}}e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=-x[n]=-\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$，

故有，$a_k e^{j\frac{k\pi}{2}} = -a_k$，当 $k = 4l$ 时，有 $a_{4l} e^{j2l\pi} = -a_{4l}$，即 $a_{4l} = -a_{4l} = 0$。

4.4　x[n]是一个周期为 N 的实周期信号，其傅里叶级数系数为 a_k，其直角坐标表示式为 $a_k = b_k + jc_k$，其中 b_k 和 c_k 都是实数

（1）　证明 $a_{-k} = a_k^*$，进而推出 b_k 与 b_{-k}，c_k 与 c_{-k} 之间的关系。（提示利用 x*[n]=x[n]）

（2）　设 N 为偶数，证明 $c_{N/2}=0$，且 $a_{N/2}$ 是实数。

（3）　利用（1）所得到的结果，证明 x[n]也能表示为如下三角函数形式的傅里叶级数：

若 N 为奇数，则有 $x[n] = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right)$

若 N 为偶数，则有 $x[n] = \left(a_0 + a_{\frac{N}{2}}(-1)^n\right) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right)$

（4）　证明若 a_k 的坐标为 $A_k e^{j\theta_k}$，那么 x[n]的傅里叶级数表示也能写成如下形式：

若 N 为奇数，则有 $x[n] = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N} + \theta_k\right)$

若 N 为偶数，则有 $x[n] = \left(a_0 + a_{\frac{N}{2}}(-1)^n\right) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N} + \theta_k\right)$

（5）　假设 x[n]和 z[n]如图 4-30 所示，它们的三角函数形式的傅里叶级数为：

$$x[n] = a_0 + 2\sum_{k=1}^{3}\left(b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) - c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right)$$

$$z[n] = d_0 + 2\sum_{k=1}^{3}\left(d_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) - f_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right)$$

试画出下面信号

$$z[n] = a_0 - d_0 + 2\sum_{k=1}^{3}\left(d_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) + (f_k - c_k)\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right)$$

解：

（1）傅立叶级数的共轭特性可得，若 $x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$，则 $x^*[n] \xleftrightarrow{FS} a_{-k}^*$

因为：x[n]=x*[n]

所以　$a_{-k} = a_k^*$

又因：$a_k^* = b_k - jc_k$，　$a_{-k} = b_{-k} + jc_{-k}$

所以 $b_k = b_{-k}$， $c_k = -c_{-k}$

(2)

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$a_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\frac{N}{2}\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n] e^{-jn\pi} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} (-1)^n x[n]$$

由于 $x[n]$ 是实序列，故 $a_{N/2}$ 为实数，即 $c_{N/2} = 0$

(3)

当 N 为奇数：

$$x[n] = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (b_k + jc_k) e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{-1} (b_k + jc_k) e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_k + jc_k) e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_{-k} + jc_{-k}) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_k + jc_k) e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_k - jc_k) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + a_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (b_k + jc_k) e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(b_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - c_k \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)$$

当 N 为偶数时

$$x[n]=\sum_{k=-(\frac{N}{2}-1)}^{\frac{N}{2}}(b_k+jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=-(\frac{N}{2}-1)}^{-1}(b_k+jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}(b_k+jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(b_{-k}+jc_{-k})e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(b_k+jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(b_k-jc_k)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(b_k+jc_k)e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n$$

$$=a_0+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(b_k\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)$$

(4)

当 N 为奇数：

$$x[n]=\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}A_k e^{j\theta_k}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{-1}A_k e^{j\theta_k}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k e^{j\theta_k}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_{-k}e^{j\theta_{-k}}e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k e^{j\theta_k}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k e^{-j\theta_k}e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k e^{j\theta_k}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(A_k\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}+\theta_k\right)\right)$$

或者

$$x[n]=a_0+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}(b_k\cos\frac{2\pi kn}{N}-c_k\sin\frac{2\pi kn}{N})$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}(A_k\cos\theta_k\cos\frac{2\pi kn}{N}-A_k\sin\theta_k\sin\frac{2\pi kn}{N})$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}A_k\cos(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k)$$

当 N 为偶数时

$$x[n]=\sum_{k=-(\frac{N}{2}-1)}^{\frac{N}{2}} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$=\sum_{k=-(\frac{N}{2}-1)}^{-1} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_{-k} e^{j\theta_{-k}} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_k e^{-j\theta_k} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}+a_{\frac{N}{2}}(-1)^n$$

$$=a_0++a_{\frac{N}{2}}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(A_k\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}+\theta_k\right)\right)$$

或者：

$$x[n]=a_0+a_{N/2}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(b_k\cos\frac{2\pi kn}{N}-c_k\sin\frac{2\pi kn}{N})$$

$$=a_0+a_{N/2}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}(A_k\cos\theta_k\cos\frac{2\pi kn}{N}-A_k\sin\theta_k\sin\frac{2\pi kn}{N})$$

$$=a_0+a_{N/2}(-1)^n+2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}A_k\cos(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k)$$

(5) $y[n]=a_0-d_0+2\sum_{k=1}^{3}(d_k\cos\frac{2\pi kn}{7}+f_k\sin\frac{2\pi kn}{7}-c_k\sin\frac{2\pi kn}{7})$

其中，a_0 为序列 $x[n]$ 的直流分量，即 $a_0=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6}x[n]=1$，

d_0 为序列 $z[n]$ 的直流分量，即 $d_0=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6}z[n]=1$，

而 $d_0+2\sum_{k=1}^{3}d_k\cos\frac{2\pi kn}{7}=Even(z[n])=\frac{z[n]+z[-n]}{2}$，

以及 $2\sum_{k=1}^{3}(-c_k\sin\frac{2\pi kn}{7})=Odd(x[n])=\frac{x[n]-x[-n]}{2}$，

$2\sum_{k=1}^{3}f_k\sin\frac{2\pi kn}{7}=-Odd(z[n])=\frac{z[-n]-z[n]}{2}$

故有

$$y[n]=a_0-2d_0+Even(z[n])-Odd(z[n])+Odd(x[n])$$

$$=-1+\frac{1}{2}(z[n]+z[-n])-\frac{1}{2}(z[n]-z[-n])+\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])$$

$$=-1+z[-n]+\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])$$

(图略)

4.5 求下列信号的离散时间傅里叶变换

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$　　(2) $2^n \cdot u[-n]$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}$　　(4) $\delta[6-2n]$

(5) $\delta[n-2]+\delta[n+2]$　　(6) $u[n-1]-u[n-5]$

(7) $(a^n \cos\omega_0 n)u[n], |a|<1$　　(8) $\left(a^{|n|}\sin\omega_0 n\right), |a|<1$

(9) $n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$　　(10) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n-4k]$

(11) x[n]如图 4-31（a）所示　　(12) x[n]如图 4-31（b）所示

解：

(1)　因为 $a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, |a|<1$，时移性质 $x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

所以，令 $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

$$x[n-1]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{F} \frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

(2)　因为 $a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, |a|<1$，时间反转性质 $x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$

令 $x[n]=2^n \cdot u[-n] \quad \Rightarrow \quad x[-n]=2^{-n}\cdot u[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]$

则 $x[-n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$，所以 $x[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$

或者：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{0} 2^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-0.5e^{j\omega}}$$

(3)　因为 $a^{|n|} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}, |a|<1$，时移性质 $x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

所以，令 $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$

$$x[n-1]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}\xleftrightarrow{F}\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

（4） $x[n]=\delta[6-2n]$

解：定义：$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[6-2n]e^{-j\omega n}=e^{-j3\omega}$

（5） 因为 $\delta[n]\xleftrightarrow{F}1$ $\quad x[n-n_0]\xleftrightarrow{F}e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

所以 $\delta[n-2]\xleftrightarrow{F}e^{-j2\omega}$ $\quad \delta[n+2]\xleftrightarrow{F}e^{j2\omega}$

$$\delta[n-2]+\delta[n+2]\xleftrightarrow{F}e^{-j2\omega}+e^{j2\omega}=2\cos(2\omega)$$

或者：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\delta[n-2]+\delta[n+2])e^{-j\omega n}=e^{-j2\omega}+e^{j2\omega}=2\cos 2\omega$$

（6） $X(e^{j\omega})=\sum_{n=1}^{4}e^{-j\omega n}=e^{-j\omega}\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}=e^{-j\frac{5}{2}\omega}\frac{\sin 2\omega}{\sin(\omega/2)}$

（7） 因为 $a^n u[n]\xleftrightarrow{F}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}},|a|<1$，调制 $x[n]\cos\omega_0 n\xleftrightarrow{F}\frac{X(e^{j(\omega-\omega_0)})+X(e^{j(\omega+\omega_0)})}{2}$

所以

$$(a^n\cos\omega_0 n)u[n],|a|<1\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\omega_0)}}+\frac{1}{1-ae^{-j(\omega+\omega_0)}}\right)=\frac{1-ae^{-j\omega}\cos\omega_0}{1-2ae^{-j\omega}\cos\omega_0+a^2e^{-j2\omega}}$$

（8） 因为 $a^{|n|}\xleftrightarrow{F}\frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}$， $x[n]\sin\omega_0 n\xleftrightarrow{F}\frac{j}{2}\left(X(e^{j(\omega+\omega_0)})-X(e^{j(\omega-\omega_0)})\right)$

$$\left(a^{|n|}\sin\omega_0 n\right),|a|<1\xleftrightarrow{F}\frac{j}{2}\left(\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega+\omega_0)+a^2}-\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega-\omega_0)+a^2}\right)$$

（9） 因为 $a^n u[n]\xleftrightarrow{F}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}},|a|<1$ 频域微分性质 $nx[n]\xleftrightarrow{F}j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

所以：$n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\xleftrightarrow{F}j\frac{d\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)}{d\omega}=\frac{\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}=\frac{2e^{-j\omega}}{\left(2-e^{-j\omega}\right)^2}$

（10） 因为 $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\delta[n-4k] \quad \Rightarrow \quad x[n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{|4k|} & n=4k \\ 0 & else\end{cases}$

令 $x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|4n|}$，则 x[n]相当于对信号 x_1[n]进行内插，即

$$x[n]=\begin{cases}x_1[n/4] & n\text{为4的整数倍} \\ 0 & n\text{不为4的整数倍}\end{cases}$$

由信号的时域扩展性质 $x_{(k)}[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{jk\omega})$ 和 $x_1[n]\xleftrightarrow{F}\dfrac{1-2^{-8}}{1-2^{-3}\cos\omega+2^{-8}}$

得到 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\delta[n-4k]\xleftrightarrow{F}\dfrac{1-2^{-8}}{1-2^{-3}\cos 4\omega+2^{-8}}$

（11） 图 4-31（a）为矩形脉冲信号 x_1[n]（N_1=2）向右移动 2 位

$$x_1[n]\xleftrightarrow{F}\frac{\sin\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \qquad x[n-n_0]\xleftrightarrow{F}e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

所以 $x[n]=x_1[n-2]\xleftrightarrow{F}e^{-j2\omega}\dfrac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

或者：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

（12） 利用定义

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}e^{j3\omega}+e^{j2\omega}+\frac{3}{2}e^{j\omega}+2+\frac{3}{2}e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}+\frac{1}{2}e^{-j3\omega}$$
$$=2+3\cos\omega+2\cos 2\omega+\cos 3\omega$$

4.6 下列是各离散时间信号的傅里叶变换，求原信号

（1） $X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & 0\le|\omega|\le\omega_c \\ 0 & \omega_c\le|\omega|\le\pi\end{cases}$ （2） $X(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega}+2e^{-j2\omega}-3e^{-j3\omega}+4e^{-j4\omega}$

（3） $X(e^{j\omega})=e^{-j\omega/2},-\pi\le\omega<\pi$ （4） $X(e^{j\omega})=\cos^2\omega+j\sin 3\omega$

（5） $X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}k\right)$ （6） $X(e^{j\omega})=\dfrac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-2j\omega}}$

(7) $X(e^{j\omega})=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8 e^{-j8\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$ (8) $X(e^{j\omega})$ 如图 4-32 所示

解：

(1) 由定义 $x[n]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega n}d\omega=\dfrac{e^{j\omega_c n}-e^{-j\omega_c n}}{2\pi jn}=\dfrac{\sin\omega_c n}{n\pi}$

(2) 由于 $\delta[n]\xleftrightarrow{F}1$ 时移性质 $x[n-n_0[\xleftrightarrow{F}e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$ 和线性性质

得 $X(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega}+2e^{-j2\omega}-3e^{-j3\omega}+4e^{-j4\omega}$ 的原信号为：

$\delta[n]-\delta[n-1]+2\delta[n-2]-3\delta[n-3]+4\delta[n-4]$

(3) 由定义

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\omega/2}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{e^{j\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}-e^{-j\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}}{2\pi j(n-\frac{1}{2})}=\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\pi}{\pi(n-\frac{1}{2})}$$

(4)

$$X(e^{j\omega})=\cos^2\omega+j\sin 3\omega=\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega)+j\sin 3\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{j2\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}+\frac{1}{2}e^{j3\omega}-\frac{1}{2}e^{-j3\omega}$$

由 $\delta[n]\xleftrightarrow{F}1$ 时移性质 $x[n-n_0[\xleftrightarrow{F}e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$ 和线性性质，得

$$x[n]=\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{1}{4}\delta[n+2]+\frac{1}{4}\delta[n-2]+\frac{1}{2}\delta[n+3]-\frac{1}{2}\delta[n-3]$$

(5) 由定义

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}k\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=<4>}(-1)^k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

或者

若 $x[n]$ 为周期序列，则有 $X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$，

现有 $X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(\omega-\frac{k\pi}{2})$，即 $\omega_0=\frac{\pi}{2}$，周期 $N=4$，$a_k=\frac{(-1)^k}{2\pi}$，

$$x[n]=\sum_{k=0}^{3}a_k e^{jk\omega_0 n}=\frac{1-e^{j\frac{\pi n}{2}}+e^{j\pi n}-e^{j\frac{3\pi n}{2}}}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\left[1+(-1)^n-2\cos\frac{\pi n}{2}\right]$$

(6) $$X(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-2j\omega}}=\frac{-3}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{4}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

由 $a^n u[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}},|a|<1$ 和线性性质，得

$$x[n]=\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+4\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$$

(7) $$X(e^{j\omega})=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8 e^{-j8\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}=1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^7$$

由 $\delta[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}1$ 时移性质 $x[n-n_0[\overset{F}{\longleftrightarrow}e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$ 和线性性质，得

$$x[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^2\delta[n-2]+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^7\delta[n-7]$$
$$=\sum_{k=0}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^k\delta[n-k]$$

或者：

令 $X_1(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$，则有 $x_1[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$，

根据时域平移性质有，$x_1[n-8]=(\frac{1}{2})^{n-8}u[n-8]\overset{FT}{\longleftrightarrow}\frac{e^{-j8\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$，

因此有，$x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]-2^{-8}(\frac{1}{2})^{n-8}u[n-8]=2^{-n}(u[n]-u[n-8])$

(8) 方法一：按照定义

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{5}{8}\pi}e^{j\omega n}d\omega+\int_{-\frac{3}{8}\pi}^{\frac{3}{8}\pi}e^{j\omega n}d\omega+\int_{\frac{5}{8}\pi}^{\pi}e^{j\omega n}d\omega\right)=\frac{\sin\left(\frac{3}{8}\pi n\right)}{\pi n}(1+(-1)^n)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin\left(\frac{1}{8}\pi n\right)}{\pi n}(1+(-1)^n)$$

所以 $x[n]=\left(\dfrac{\sin\left(\frac{3}{8}\pi n\right)}{\pi n}+\dfrac{\sin\left(\frac{1}{8}\pi n\right)}{\pi n}\right)(1+(-1)^n)$

方法二：将 $X(e^{j\omega})$ 看成是两个函数 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 的叠加，$X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 又可以看成是抽样函数 $X_{11}(e^{j\omega})$（W=6π/8）和 $X_{21}(e^{j\omega})$（W=2π/8）在频域上的压缩（2 倍），由时域扩展性质，等价于信号时域的扩展。由此得到结论。

$$X_{11}(e^{j\omega})\xleftrightarrow{F^{-1}}x_{11}[n]=\frac{\sin\left(\frac{6}{8}\pi n\right)}{n\pi}\qquad X_1(e^{j\omega})=X_{11}(e^{j2\omega})$$

所以：

$$x_1[n]=x_{11(2)}[n]=\begin{cases}x_{11}[n/2] & n\text{为2的整数倍}\\ 0 & n\text{不为2的整数倍}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\dfrac{\sin\left(\frac{3}{8}\pi n\right)}{\pi n} & n\text{为2的整数倍}\\ 0 & n\text{不为2的整数倍}\end{cases}$$

$x_2[n]$依此类推，$x[n]=x_1[n]+x_2[n]$

4.7 已知 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 N 的周期信号，x[n]是从 $\tilde{x}[n]$ 中任意截取一个周期所得到的非周期信号，假设 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数系数为 a_k，x[n]的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$，证明：

$$a_k=\frac{1}{N}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

证明：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}=\frac{1}{N}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

证毕

4.8 设 $X(e^{j\omega})$ 是图 4-33 所示的 x[n]的傅里叶变换，不经求出 $X(e^{j\omega})$ 完成下列计算

（1）求 $X(e^{j0})$　　（2）求 $\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega$

（3）求 $X(e^{j\pi})$　　（4）求并画出傅里叶变换为 $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ 的信号

(5) 求 $\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$　　　　(6) 求 $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$

解：

(1) 因为 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$

$$X(e^{j0})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]=-1+1+2+1+1+2+1-1=6$$

(2) 因为 $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

$$\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega=2\pi x[0]=4\pi$$

(3) $X(e^{j\pi})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](-1)^n=1-1+2-1-1+2-1+1=2$

(4) $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}\overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow}\frac{x[n]+x[-n]}{2}$

n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x[n]	0	0	0	0	0	-1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	-1	0
x[-n]	0	-1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	-1	0	0	0	0	0
	0	-1/2	0	1/2	1	0	0	1	2	1	0	0	1	1/2	0	-1/2	0

(5) 由帕斯瓦尔定理 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2=28\pi$$

(6) 由频域微分性质 $nx[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ 和帕斯瓦尔性质

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|nx[n]\right|^2=316\pi$$

4.9 求习题 4.1（1）、（2）、（4）所对应周期信号的傅里叶变换

解

（1）

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\sin\dfrac{2k\pi}{3}}{6\sin\dfrac{k\pi}{6}} & 1\le k\le 5\\ \dfrac{2}{3} & k=0\end{cases}\qquad X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\quad N=6$$

(2)

$$a_k=\frac{1}{6}\left(1+4\cos\frac{k\pi}{3}-2\cos\frac{2k\pi}{3}\right)\qquad X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\quad N=6$$

(4)

$$x[n]=\cos(\frac{2\pi n}{3})+\sin(\frac{2\pi n}{3}),$$

$$\cos(\frac{2\pi n}{3})\xleftrightarrow{FT}\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\frac{2\pi}{3}-2k\pi)+\delta(\omega+\frac{2\pi}{3}-2k\pi)\right],$$

$$\sin(\frac{2\pi n}{3})\xleftrightarrow{FT}\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\frac{2\pi}{3}-2k\pi)-\delta(\omega+\frac{2\pi}{3}-2k\pi)\right],$$

故有， $X(e^{j\omega})=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[(1-j)\delta(\omega-\frac{2\pi}{3}-2k\pi)+(1+j)\delta(\omega+\frac{2\pi}{3}-2k\pi)\right]$

4.10 利用傅里叶变换的性质，求下列信号的频谱

(1) $\dfrac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}\cdot\dfrac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$ ；　(2) $(n+1)a^n\cdot u[n],|a|<1$

(3) 如图 4－34 所示三角形脉冲

解：

(1)

$$\frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}\xleftrightarrow{F}X_1(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & |\omega|<\frac{\pi}{3}\text{(一个周期内)}\\ 0 & else\end{cases}\qquad \text{矩形窗函数}$$

$$\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}\xleftrightarrow{F}X_1(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & |\omega|<\frac{\pi}{4}\text{(一个周期内)}\\ 0 & else\end{cases}\qquad \text{矩形窗函数}$$

由傅里叶变换得乘积性质： $x[n]\cdot y[n]\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

得： $$\frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}\cdot\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & |\omega|<\dfrac{\pi}{12}\\ \dfrac{7}{24}-\dfrac{|\omega|}{2\pi} & \dfrac{\pi}{12}<|\omega|<\dfrac{7\pi}{12}\\ 0 & \dfrac{7\pi}{12}<|\omega|<\pi\end{cases}$$

(2) 因为 $a^nu[n]\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}},|a|<1$ 频域微分性质 $nx[n]\xleftrightarrow{F}j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

$$(n+1)a^n u[n] = na^n u[n] + a^n u[n] \xleftrightarrow{F} j\frac{d\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)}{d\omega} + \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$$

（3）

方法一：

$$y[n] = x[n]-x[n-1] = \begin{cases} \frac{E}{N_1} & -N_1 < n \le 0 \\ -\frac{E}{N_1} & 0 < n \le N_1 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$y[n]-y[n-1] = \frac{E}{N_1}\delta[n-(-N_1+1)] - \frac{2E}{N_1}\delta[n-1] + \frac{E}{N_1}\delta[n-(N_1+1)]$$

由傅里叶变换的时域差分性质：$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{F} (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

所以：

$$y[n]-y[n-1] \xleftrightarrow{F} (1-e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}) = \frac{E}{N_1}e^{-j\omega}\left(e^{j\omega N_1} - 2 + e^{-j\omega N_1}\right) = \frac{E}{N_1}e^{-j\omega}\left(e^{j\frac{\omega}{2}N_1} - e^{-j\frac{\omega}{2}N_1}\right)^2$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{E}{N_1}\frac{e^{-j\omega}\left(e^{j\frac{\omega}{2}N_1} - e^{-j\frac{\omega}{2}N_1}\right)^2}{(1-e^{-j\omega})}$$

$$y[n] = x[n]-x[n-1] \quad \Rightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-e^{-j\omega})}Y(e^{-j\omega}) = \frac{E}{N_1}\frac{\left(e^{j\frac{\omega}{2}N_1} - e^{j\frac{\omega}{2}N_1}\right)^2}{\left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}\right)^2} = \frac{E}{N_1}\left(\frac{\sin(\frac{\omega}{2}N_1)}{\sin(\frac{\omega}{2})}\right)^2$$

方法二：

本题应附加条件 N_1 为偶数。

将序列 $x[n]$ 表示为，$x[n] = x_1[n] * x_1[n]$，

其中，$x_1[n] = \begin{cases} \frac{\sqrt{E}}{N_1-1} & |n| \le \frac{N_1}{2}-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，

$$x_1[n] \xleftrightarrow{FT} X_1(j\omega) = \frac{\sqrt{E}}{N_1-1}\frac{\sin(\frac{N_1-1}{2}\omega)}{\sin\frac{\omega}{2}},$$

根据傅立叶变换的卷积性质有， $x[n]\xleftrightarrow{FT}[X_1(j\omega)]^2=\dfrac{E}{(N_1-1)^2}\dfrac{\sin^2(\frac{N_1-1}{2}\omega)}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$。

4.11 已知 x[n]为周期 N，其傅里叶级数表示式为：$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$，试用 a_k 表示下列信号的傅里叶级数系数。

（1） $x[n-n_0]$ （2） $x[n]-x[n-1]$ （3） $x[n]-x[n-\frac{N}{2}]$ （N 为偶数）

（4） $x[n]+x[n+\frac{N}{2}]$ （N 为偶数，此时该信号周期为 N/2）

（5） $x^*[-n]$ （6） $(-1)^n x[n]$ (N 为偶数)

（7） $(-1)^n x[n]$ (N 为奇数，此时该信号周期为 2N)

（8） $y[n]=\begin{cases}x[n] & n\text{为偶数}\\ 0 & \text{n为奇数}\end{cases}$

解：

（1） 由傅里叶级数的时移性质：$x[n]\xleftrightarrow{Fs}a_k \quad\Rightarrow\quad x[n-n_0]\xleftrightarrow{Fs}a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$

（2） 由傅里叶级数的时域差分性质：

$$x[n]\xleftrightarrow{Fs}a_k \quad\Rightarrow\quad x[n]-x[n-1]\xleftrightarrow{Fs}(1-e^{-jk(2\pi/N)})a_k$$

（3） 由傅里叶级数的时移性质和时域差分性质

$$x[n]-x[n-\frac{N}{2}]\xleftrightarrow{Fs}a_k-e^{-jk\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}}a_k=\left(1-(-1)^k\right)a_k$$

（4） 由傅里叶级数的时移性质和时域差分性质

$$x[n]+x[n+\frac{N}{2}]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k[1+(-1)^k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

在上面的和式中，当变量 k 为奇数时，由于 $1+(-1)^k=0$，故仅剩 k 为偶数的项，

因此有， $x[n]+x[n+\frac{N}{2}]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k[1+(-1)^k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=2\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1}a_{2l}e^{jl\frac{4\pi}{N}n}$，

$x[n]+x[n+\frac{N}{2}]$ 的周期为 $N/2$，其 FS 系数为 $2a_{2k}$， $k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$。

（5） 由傅里叶级数的共轭性质和时间反转性质

$$x^*[n]\xleftrightarrow{Fs}a^*_{-k} \qquad x[-n]\xleftrightarrow{Fs}a_{-k}$$

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{Fs} a_k^*$$

(6) $(-1)^n x[n] = e^{j\frac{N}{2}\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} x[n]$，由傅里叶级数的频移性质

$$(-1)^n x[n] \xleftrightarrow{Fs} a_{k-\frac{N}{2}}$$

或者

$$(-1)^n x[n] = (-1)^n \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=<N>} a_k (-1)^n e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \sum_{k=<N>} a_k e^{j(k+\frac{N}{2})\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=<N>} a_{(l-\frac{N}{2})} e^{jl\frac{2\pi}{N}n}$$

$(-1)^n x[n]$ 的 FS 系数为 $a_{k-\frac{N}{2}}$。

(7)

$(-1)^n x[n]$， N 为奇数，此时信号的周期为 $2N$。

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{2} \sum_{k=<2N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}，$$

$$(-1)^n x[n] = \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=<2N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{2} \sum_{k=<2N>} a_k (-1)^n e^{j2k\frac{\pi}{N}n} = \frac{1}{2} \sum_{k=<2N>} a_k e^{j(2k-N)\frac{\pi}{N}n}，$$

设 $(-1)^n x[n] \xleftrightarrow{FS} b_k$，则有 $b_{2k-N} = \frac{a_k}{2}$，

由于 N 为奇数，故 $2k-N$ 为奇数，$(-1)^n x[n]$ 的 FS 系数 b_k 的偶数项为零，

即当 k 为偶数时，有 $b_k = 0$，而当 k 为奇数时，有 $b_k = \frac{a_{(k+N)/2}}{2}$。

综上所述，可得，$b_k = \begin{cases} \frac{a_{(k+N)/2}}{2} & k\text{为奇数} \\ 0 & k\text{为偶数} \end{cases}$。

(8) $y[n] = \frac{1+(-1)^n}{2} x[n]$，参照（6）（7）求解

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n\text{为奇数} \\ x[n] & n\text{为偶数} \end{cases}，$$

设 $y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k$，由于 $y[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + (-1)^n x[n]\}$，

当 $x[n]$ 的周期 N 为偶数时，有 $b_k = \frac{1}{2}(a_k + a_{k-N/2})$，

当 $x[n]$ 的周期 N 为奇数时，有 $b_k=\begin{cases}\frac{1}{2}a_k & k\text{为偶数}\\ \frac{1}{2}(a_k+a_{(k+N)/2}) & k\text{为奇数}\end{cases}$。

4.12 某一序列满足以下关系：

（1）x[n]为实偶信号；（2）x[n]有周期 N＝10 和傅里叶系数 a_k

（3）a_{11}=5 （4）$\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=500$

证明 $x[n]=A\cos(Bn+C)$，并确定常数 A、B、C 的值。

证明：

因为 x[n]是实偶信号 所以 a_k 为实且偶

$$\sum_{n=0}^{9}|a_k|^2=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50$$

a_{11}=5 $\quad a_{11}=a_1=a_{-1}=a_9=5$

$a_1^2+a_9^2=50$ 所以 $a_0=a_2=\cdots=a_8=0$

所以 $x[n]=\sum_{k=0}^{9}a_k e^{jk\frac{2\pi}{10}n}=5e^{j\frac{\pi}{5}n}+5e^{j\frac{9\pi}{5}n}=5e^{j\frac{\pi}{5}n}+5e^{-j\frac{\pi}{5}n}=10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$

$A=10 \quad B=\frac{\pi}{5} \quad C=0$

4.13 已知 $x[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega})$，利用傅里叶变换性质，用 $X(e^{j\omega})$ 表示下列信号的频谱

（1） $x_1[n]=x[1-n]+x[-1-n]$ （2） $x_1[n]=x[-n]\cdot\cos\omega_0 n \quad 0<\omega<\pi$

（3） $x_1[n]=\frac{x^*[-n]+x[n]}{2}$ （4） $x_1[n]=(n-1)^2x[n]$

解：

（1）由 $x[-n]\xleftrightarrow{F}X(e^{-j\omega}) \quad x[n-n_0]\xleftrightarrow{F}e^{-j\omega n}X(e^{j\omega})$

所以 $x_1[n]=x[1-n]+x[-1-n]\xleftrightarrow{F}X(e^{-j\omega})\left(e^{-j\omega}+e^{j\omega}\right)=2\cos\omega X(e^{-j\omega})$

（2）由 $x[-n]\xleftrightarrow{F}X(e^{-j\omega}) \quad x[n]\cos\omega_0 n\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2}\left(X(e^{j(\omega-\omega_0)})+X(e^{j(\omega+\omega_0)})\right)$

所以 $x_1[n]=x[-n]\cdot\cos\omega_0 n\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2}\left(X(e^{-j(\omega-\omega_0)})+X(e^{-j(\omega+\omega_0)})\right)$

（3）由 $x[-n]\xleftrightarrow{F}X(e^{-j\omega}) \quad x^*[n]\xleftrightarrow{F}X^*(e^{-j\omega})$

$$x_1[n]=\frac{x^*[-n]+x[n]}{2}\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2}\left[X^*(e^{j\omega})+X(e^{j\omega})\right]=\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$$

(4) $nx[n] \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

$$x_1[n]=(n-1)^2x[n]=n^2x[n]-2nx[n]+x[n] \xleftrightarrow{F} -\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2}-j2\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}+X(e^{j\omega})$$

4.14 对于下面每一傅里叶变换，利用傅里叶变换的性质，确定是否对于时域信号①实、虚信号，或都不是；②偶、奇信号，或均不是

(1) $X(e^{j\omega})=e^{-j\omega}\sum_{k=1}^{10}\sin k\omega$　　(2) $X(e^{j\omega})=j\sin(\omega)\cos 2\omega$

(3) $X(e^{j\omega})=A(\omega)+e^{jB(\omega)}$，其中 $A(\omega)$ 满足 $A(-\omega)=A(\omega)$，且 $A(\omega)$ 为实值函数，

$$B(\omega)=\begin{cases}-\frac{3}{2}\omega & 0\le|\omega|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

解：

(1) $x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})=\left(e^{j\omega}\sum_{k=1}^{10}\sin(-k\omega)\right)^* = -e^{-j\omega}\sum_{k=1}^{10}\sin(k\omega)=-X(e^{j\omega})$

所以：$x^*[n]=-x[n]$　　x[n]为重虚数

或：频谱的实部为，$\mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right]=\cos\omega\sum_{k=1}^{10}\sin(k\omega)$，奇对称，

频谱的虚部为，$\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]=-\sin\omega\sum_{k=1}^{10}\sin(k\omega)$，偶对称，

$x[n]$ 为纯虚信号

又　$X(e^{-j\omega})=e^{j\omega}\sum_{k=1}^{10}\sin(-k\omega)=-e^{j\omega}\sum_{k=1}^{10}\sin(k\omega)$　所以 x[n]既不是奇信号，也不是偶信号。

(2) $X(e^{j\omega})=j\sin(\omega)\cos 2\omega$

$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})=\left(j\sin(-\omega)\cos(-2\omega)\right)^* = j\sin(\omega)\cos(2\omega)=X(e^{j\omega})$

所以：$x^*[n]=x[n]$　　x[n]为实数

又 $X(e^{-j\omega})=-j\sin(\omega)\cos(2\omega)=-X(e^{j\omega})$　　$X(e^{j\omega})$ 是奇函数且为重虚数

所以：x[n]为奇信号

或者：

频谱为虚奇对称，$x[n]$ 为实奇信号。

(3) $X(e^{j\omega})=A(\omega)+e^{jB(\omega)}$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega}) = \left(A(-\omega) + e^{jB(-\omega)}\right)^* = A(\omega) + e^{-jB(-\omega)} = A(\omega) + e^{jB(\omega)} = X(e^{j\omega})$$

所以：$x^*[n] = x[n]$ x[n]为实数

又 $X(e^{j\omega}) = A(\omega) + e^{jB(\omega)} = A(\omega) + e^{-\frac{3}{2}\omega}$ $X(e^{-j\omega}) = A(-\omega) + e^{jB(-\omega)} = A(\omega) - e^{\frac{3}{2}\omega}$

所以：x[n]既不是奇信号，也不是偶信号。

或者：

$$B(\omega) = \begin{cases} -\frac{3}{2}\omega + \pi & |\omega| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases},$$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \mathrm{A}(\omega) - \cos\frac{3}{2}\omega + j\sin\frac{3}{2}\omega & |\omega| \le \frac{\pi}{2} \\ \mathrm{A}(\omega) & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases},$$

频谱实部偶对称，虚部奇对称，$x[n]$为实信号，但非奇，非偶。

4.15

（1） 设 x[n]和 y[n]都是以 N 为周期的，它们的傅里叶级数系数分别为 a_k 和 b_k，试证明离散时间傅里叶级数的调制性质

$x[n]y[n] \xleftrightarrow{Fs} c_k$ 其中：$c_k = \sum_{l=<N>} a_l b_{k-l} = \sum_{l=<N>} b_l a_{k-l}$

（2） 利用调制性质，求下列信号的傅里叶级数表示，其中 x[n]的傅里叶级数系数为 a_k：

① $x[n]\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$； ② $x[n]\cdot\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]$

（3） 如果 $x[n] = \cos\frac{\pi n}{3}$，y[n]的周期为 12，且 $y[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le 3 \\ 0 & 4 \le |n| \le 6 \end{cases}$ 求信号 x[n]y[n]的傅里叶级数的系数。

（4） 利用（1）的结果证明 $\sum_{n=<N>} x[n]y[n] = N\sum_{l=<N>} a_l b_{-l}$

证明：

（1）

$$x[n]y[n] = \sum_{l=<N>} a_l e^{jl\frac{2\pi}{N}n} \cdot \sum_{m=<N>} b_m e^{jm\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{l=<N>}\sum_{m=<N>} a_l b_m e^{j(l+m)\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \sum_{l=<N>}\sum_{k=<N>} a_l b_{k-l} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad m+l=k$$

$$= \sum_{k=<N>}\left(\sum_{l=<N>} a_l b_{k-l}\right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

所以 $c_k=\sum_{l=<N>}a_l b_{k-l}$

(2)

① $\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{j3\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j3\frac{2\pi}{N}n}\right)\qquad b_3=\frac{1}{2}\qquad b_{-3}=\frac{1}{2}$

$$c_k=\sum_{l=<N>}b_l a_{k-l}=\frac{1}{2}\left(a_{k-3}+a_{k+3}\right)$$

② $\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]\xleftrightarrow{Fs}b_k=\frac{1}{N}$

$$c_k=\sum_{l=<N>}a_l b_{k-l}=\frac{1}{N}\sum_{l=<N>}a_l$$

(3) $x[n]=\cos\frac{\pi n}{3}=\frac{1}{2}\left(e^{j2\frac{2\pi}{12}n}+e^{-j2\frac{2\pi}{12}n}\right)\quad\Rightarrow\quad a_2=a_{-2}=\frac{1}{2}$

$$b_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}y[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{12}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{6}+2\cos\frac{k\pi}{3}+2\cos\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$b_k=\frac{1}{12}\frac{\sin\frac{7k\pi}{12}}{\sin\frac{k\pi}{12}}\qquad b_0=\frac{7}{12}$$

$$c_k=\sum_{l=<N>}a_l b_{k-l}=a_2 b_{k-2}+a_{-2}b_{k+2}=\frac{1}{2}\left(b_{k-2}+b_{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{12}\left(1-2\cos\frac{k\pi}{2}-\cos\frac{k\pi}{3}+\cos\frac{k\pi}{6}\right)$$

或

$$c_k=\sum_{l=<N>}a_l b_{k-l}=a_2 b_{k-2}+a_{-2}b_{k+2}=\frac{1}{2}(b_{k-2}+b_{k+2})$$
$$=\frac{1}{24}\left[\frac{\sin\frac{7(k-2)\pi}{12}}{\sin\frac{(k-2)}{12}\pi}+\frac{\sin\frac{7(k+2)\pi}{12}}{\sin\frac{(k+2)}{12}\pi}\right]$$

(4) 证明

由（1）得 $\sum_{l=<N>}a_l b_{k-l}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]y[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

令 k=0

$$\sum_{l=<N>}a_l b_{-l}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]y[n]\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=<N>}x[n]y[n]=N\sum_{l=<N>}a_l b_{-l}$$

于慧敏主编＜信号与系统＞第四章作业(P173－183) 习题解答

4.16-4.36

4.16 确定下列信号中哪些信号得傅里叶变换满足下列条件之一

① $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}=0$　② $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=0$

③ $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega}d\omega=0$　④ $X(e^{j0})\neq 0$

⑤ 存在一个实数 a，使得 $X(e^{j\omega})e^{ja\omega}$ 是一个偶函数。

(1) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$　(2) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

(3) $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+1]$　(4) $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+3]$

(5) $x[n]=\delta[n-2]-\delta[n+2]$　(6) x[n]如图 4-35(a)所示

(7) x[n]如图 4-35(b)所示

解：

条件① $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}=0$ 表示 x[n]的偶部 $\frac{x[n]+x[-n]}{2}$ 为 0，奇函数

条件② $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=0$ 表示 x[n]的奇部 $\frac{x[n]-x[-n]}{2}$ 为 0，偶函数

条件③ $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega}d\omega=0$ 表示 x[1]=0

条件④ $X(e^{j0})\neq 0$ 表示 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\neq 0$

条件⑤ 存在一个实数 a $X(e^{j\omega})e^{ja\omega}$ 是偶函数 表示 y[n]=x[n＋a]为偶函数

(1) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$　$\frac{x[n]+x[-n]}{2}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n]\right)$ 不为零

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{1-1/3}\neq 0$　所以满足条件④

(2) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$　$\frac{x[n]-x[-n]}{2}=0$　满足条件②

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2}{1-1/3}\neq 0$　满足条件④

当 a=0 时，x[n+a]=x[n]为偶函数　满足条件⑤

(3) $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+1]$

$\frac{x[n]-x[-n]}{2}=\frac{\delta[n-1]+\delta[n+1]-\delta[-n-1]-\delta[-n+1]}{2}=0$ 满足条件②

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\delta[n-1]+\delta[n+1])=2\neq 0$ 满足条件④

当 a=0 时，x[n+a]=x[n]为偶函数 满足条件⑤

（4） $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+3]$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\delta[n-1]+\delta[n+3])=2\neq 0$ 满足条件④

当 a=－1 时，$y[n]=x[n+a]=\delta[n-2]+\delta[n+2]$ 为偶函数 满足条件⑤

（5） $x[n]=\delta[n-2]-\delta[n+2]$

$\frac{x[n]+x[-n]}{2}=\frac{\delta[n-2]-\delta[n+2]+\delta[-n-2]-\delta[-n+2]}{2}=0$ 满足条件①

$x[1]=0$ 满足条件③

（6）

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\neq 0$ 满足条件④

x[n]为偶函数，满足条件（2）

当 a=2 时，$y[n]=x[n+a]$ 为 x[n]左移两个单位，为偶函数，满足条件⑤

（7）

$\frac{x[n]+x[-n]}{2}=0$ 满足条件①

当 a=1 或－1 时，$y[n]=x[n+a]$ 为 x[n]左/右移一个单位，为偶函数，满足条件⑤

或者：

本题中所给信号均为实信号，故频谱一定满足：实部偶对称，虚部奇对称。

（1） $\mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right]=0$，信号 $x[n]$ 应为实奇信号，

信号⑤ $x[n]=\delta[n-2]-\delta[n+2]$ 以及信号⑦满足该条件；

（2） $\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]=0$，信号 $x[n]$ 应为实偶信号，

信号② $x[n]=3^{-|n|}$，信号③ $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+1]$，以及信号⑥满足该条件；

（3） $\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega}d\omega=0$，

由于 $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$，该条件即为 $x[1]=0$，

信号⑤ $x[n]=\delta[n-2]-\delta[n+2]$ 满足该条件；

（4） $X(e^{j0})\neq 0$，

$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$，此条件即为 $X(e^{j0})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\neq 0$，

信号① $x[n]=3^{-n}u[n]$，信号② $x[n]=3^{-|n|}$，信号③ $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+1]$，

信号④ $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+3]$，以及信号⑥满足该条件；

（5）存在整数 a，使得 $X(e^{j\omega})e^{ja\omega}$ 是偶函数，

根据时域平移性质有 $x[n+a]\xleftrightarrow{FT}X(e^{j\omega})e^{ja\omega}$，

若 $X(e^{j\omega})e^{ja\omega}$ 是偶函数，则 $X(e^{j\omega})e^{ja\omega}$ 一定还是实函数（由于 $x[n+a]$ 是实信号），

即 $x[n+a]$ 为实偶信号，或者 $x[n]$ 经过平移以后可以成为实偶信号。

信号② $x[n]=3^{-|n|}$，信号③ $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+1]$，

信号④ $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+3]$，信号⑥以及信号⑦满足该条件；

4.17 借助于表 4-1 和表 4-3，当 $X(e^{j\omega})$ 为

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}\left[\frac{\sin\frac{3}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]+3\pi\delta(\omega)\qquad -\pi<\omega\le\pi$$

求 x[n]

解：由累加性质 $\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\xleftrightarrow{F^{-1}}\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$

$$\frac{\sin\frac{3}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\xleftrightarrow{F^{-1}}x_1[n]=\begin{cases}1 & |n|\le 1\\ 0 & |n|>1\end{cases}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\frac{3}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}=3$$

所以：$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[n]=\begin{cases}0 & n<-1\\ n+2 & |n|\le 1\\ 3 & n>1\end{cases}$

4.18 设某信号 x[n]的频谱为 $X(e^{j\omega})$ 且已知以下条件：

（1） x[n]=0，n>0 （2） x[0]>0

(3) $\operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\}=\sin\omega-\sin 2\omega$ (4) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega=6\pi$

求 x[n]

解

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega=\frac{6\pi}{2\pi}=3$$

由 $\operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\}=\sin\omega-\sin 2\omega$ 得 $X(e^{j\omega})=A+e^{j\omega}-e^{j2\omega}$

$$X(e^{j\omega})=A+e^{j\omega}-e^{j2\omega}\xleftrightarrow{F^{-1}}x[n]=A\delta[n]+\delta[n+1]-\delta[n+2]$$

由 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=A^2+1+1=3$ x[0]＝A>0

得 A=1

所以：$x[n]=\delta[n]+\delta[n+1]-\delta[n+2]$

4.19

（1） 设 $y[n]=\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right]^2*\left(\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right)$，其中 $|\omega_c|\le\pi$，试确定 ω_c 得取值范围，以保证

$$y[n]=\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right]^2$$

（2） 设 $y[n]=\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right]*\left(\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right)$，重新回答（1）得问题，以确保

$$y[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

解：

$$x_1[n]=\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}\xleftrightarrow{F}X_1(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}\qquad x_2[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\xleftrightarrow{F}X_2(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\frac{\pi}{4}\\ 0 & \frac{\pi}{4}<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

$$x_1[n]*x_2[n]\xleftrightarrow{F}X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

（1） $\bar{x}_2[n]=x_2[n]\cdot x_2[n]\xleftrightarrow{F}\bar{X}_2(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_2(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta=\begin{cases}A & |\omega|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<|\omega|\le\pi\end{cases}$

$y[n]\xleftrightarrow{F}\bar{X}_2(e^{j\omega})X_1(e^{j\omega})$

为了使 $y[n]=\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right]^2=\bar{x}_2[n]$，必须使 $y[n]\xleftrightarrow{F}\bar{X}_2(e^{j\omega})$，即 $X_1(e^{j\omega})$ 中的 ω_c 满足

$$\frac{\pi}{2}<|\omega_c|\le\pi$$

（2） $\bar{x}_2[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\xleftrightarrow{F}\bar{X}_2(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\left(X(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})})+X(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})})\right)$，作图得

$$\bar{X}_2(e^{j\omega})=\begin{cases}0 & |\omega|\le\frac{\pi}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4}<|\omega|\le\frac{3\pi}{4}\\ 0 & \frac{3\pi}{4}<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

$x_2[n]=\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$ 的频谱 $X_2(e^{j\omega})\ne 0$ 的范围为 $|\omega|<\pi/4$，

$\bar{x}_2[n]=x_2[n]\cos\frac{\pi n}{2}$ 的频谱 $\bar{X}_2(e^{j\omega})\ne 0$ 的范围为 $\pi/4<|\omega|<3\pi/4$，

为了使 $y[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)=\bar{x}_2[n]$，必须使 $y[n]\xleftrightarrow{F}\bar{X}_2(e^{j\omega})$，即 $X_1(e^{j\omega})$ 中的 ω_c 满足

$$\frac{3\pi}{4}<|\omega_c|\le\pi$$

4.20 设图 4-36(a)所示的频谱 $X(e^{j\omega})$ 的原信号为 x[n]，试用 x[n]表示图 4-36 中其他频谱所对应的信号。

解：

（1） $X_1(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\left(X(e^{j(\omega-\pi)})+X(e^{j(\omega+\pi)})\right)$

所以 $x_1[n]=\frac{1}{2}\left(e^{j\pi n}x[n]+e^{-j\pi n}x[n]\right)=(-1)^n x[n]$

或者：

$X_1(e^{j\omega})=X(e^{j(\omega-\pi)})$，故有 $x_1[n]=x[n]e^{jn\pi}=(-1)^n x[n]$

(2) $X_2(e^{j\omega})=\frac{\pi}{2}\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ $\quad nx[n]\xleftrightarrow{F} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

所以 $x_2[n]=-j\frac{\pi}{2}nx[n]$

(3) $X_3(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})+X_2(e^{j\omega})$

所以 $x_3[n]=x[n]-j\frac{\pi}{2}nx[n]$

(4) $X_4(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})+X_1(e^{j\omega})$

所以 $x_4[n]=x[n]+(-1)^n x[n]$

(5) $X_5(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})-X_2(e^{j\omega})$

所以 $x_5[n]=x[n]+j\frac{\pi}{2}nx[n]$

或者：

$X_5(e^{j\omega})=X_3(e^{-j\omega})$，故有 $x_5[n]=x_3[-n]=(1+j\frac{n\pi}{2})x[-n]$

4.21 已知 $x[n]\xleftrightarrow{F}A(\omega)+jB(\omega)$，其中 $A(\omega),B(\omega)$ 都为实值函数。试用 x[n]表示对应于变换为 $Y(e^{j\omega})=B(\omega)+A(\omega)e^{-j\omega}$ 的时间信号 y[n]

解：由题意知 $x_e[n]\xleftrightarrow{F}A(\omega)$ $\quad x_o[n]\xleftrightarrow{F}jB(\omega)$ $\quad x_e[n-1]\xleftrightarrow{F}A(\omega)e^{-j\omega}$

$$y[n]=-jx_o[n]+x_e[n-1]=-\frac{j}{2}\left(x[n]-x[-n]\right)+\frac{1}{2}\left(x[n-1]+x[-n+1]\right)$$

4.22 考虑一离散时间信号 x[n]，其傅里叶变换如图 4－37 所示，试画出下面连续时间信号

(1) $x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[-n]e^{jnt}$ ； (2) $x_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[-n]e^{j\left(\frac{2\pi}{8}\right)nt}$

(3) $x_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{j\left(\frac{2\pi}{10}\right)nt}$ (4) $x_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\{x[n]\}e^{j\left(\frac{2\pi}{4}\right)nt}$

解：$x[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega})=\begin{cases}2+j\frac{2}{\pi}\omega & |\omega|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<|\omega|\le\pi\end{cases}$ $\quad x[-n]\xleftrightarrow{F}X(e^{-j\omega})=\begin{cases}2-j\frac{2}{\pi}\omega & |\omega|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<|\omega|\le\pi\end{cases}$

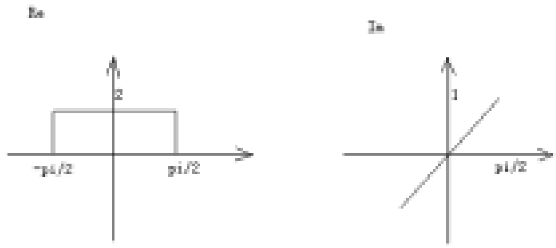
$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$ $\quad X(e^{-j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[-n]e^{-j\omega n}$

（1） $x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{jnt} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=t}$

或者：

令 $t=-\omega$，可得 $x_1(-\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-jn\omega}$，即 $x_1(-\omega)$ 为序列 $x[-n]$ 的 DTFT，

$x_1(\omega)$ 应为 $x[n]$ 的 DTFT，因此 $x_1(t)$ 如图所示。

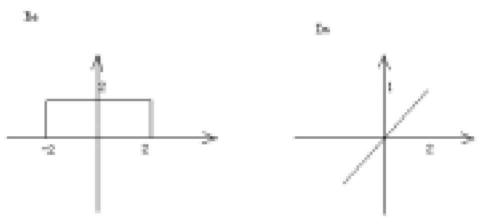


（2） $x_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{j\left(\frac{2\pi}{8}\right)nt} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{8}t}$

或者：

令 $t=-\frac{8\omega}{2\pi}$，可得 $x_2(-\frac{4\omega}{\pi})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-jn\omega}$，即 $x_2(-\frac{4\omega}{\pi})$ 为序列 $x[-n]$ 的 DTFT，

$x_2(\frac{4\omega}{\pi})$ 应为 $x[n]$ 的 DTFT，因此 $x_2(t)$ 如图所示。

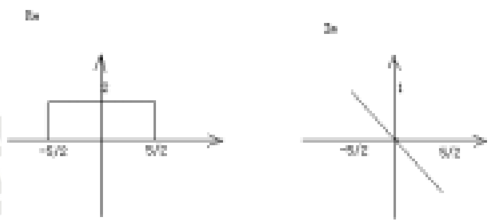


（3） $x_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\left(\frac{2\pi}{10}\right)nt} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\frac{2\pi}{10}t}$

或者：

令 $t=-\frac{10\omega}{2\pi}$，可得 $x_3(-\frac{5\omega}{\pi})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$，即 $x_3(-\frac{5\omega}{\pi})$ 为序列 $x[n]$ 的 DTFT，

因此 $x_3(t)$ 如图所示。



(4) $\mathrm{Re}\{x[n]\}=\dfrac{x[n]+x^*[n]}{2}$

$$x_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\{x[n]\}e^{j\left(\frac{2\pi}{4}\right)nt}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{j\left(\frac{2\pi}{4}\right)nt}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*[n]e^{j\left(\frac{2\pi}{4}\right)nt}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(X(e^{j\omega})+X^*(e^{-j\omega})\right)\Big|_{\omega=-\frac{\pi}{2}t}$$

$$=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=-\frac{\pi}{2}t}$$

或者：

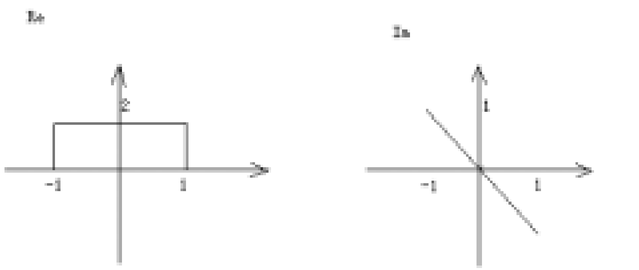
令 $t=-\dfrac{4\omega}{2\pi}$，可得 $x_4(-\dfrac{2\omega}{\pi})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\{x[n]\}e^{-jn\omega}$，

即 $x_4(-\dfrac{2\omega}{\pi})$ 为序列 $\mathrm{Re}\{x[n]\}$ 的 DTFT，

这里由于序列 $x[n]$ 的频谱的实部偶对称，虚部奇对称，

因此序列 $x[n]$ 本身就是实序列，即 $x_4(-\dfrac{2\omega}{\pi})$ 为序列 $x[n]$ 的 DTFT，

因此 $x_4(t)$ 如图所示。



4.23

(1) 设 x[n]的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$，如图 4－38 所示，对于下列每一个 p[n]，概略画出信号 w[n]=x[n]p[n]的傅里叶变换

1) $p[n]=\cos\pi n$　　　2) $p[n]=\cos(\pi n/2)$

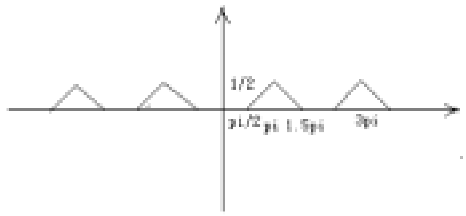
3) $p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]$　　　4) $p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$

(2) 假设 (1) 中的信号 w[n]作为输入加到一个单位脉冲响应为 $h[n]=\dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$ 的 LTI 系统上去，求对应 (1) 中所选 p[n]的输出 y[n].

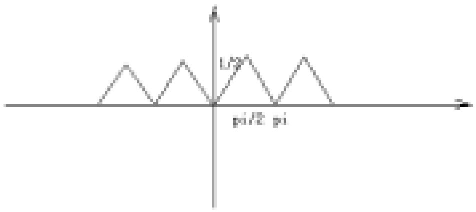
解

(1) $w[n]=x[n]\cdot p[n]\xleftrightarrow{F}W(e^{j\omega})=\dfrac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})\otimes P(e^{j\omega})=\dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\theta})P(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

1) $w[n]=x[n]\cos\pi n\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{2}\left(X(e^{j(\omega-\pi)}+X(e^{j(\omega+\pi)}\right)$

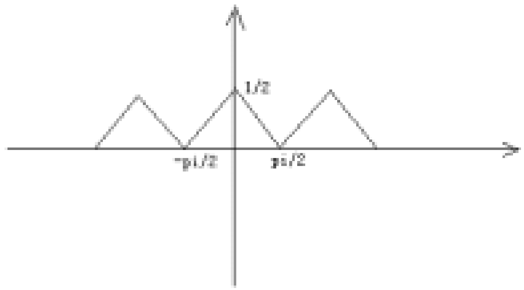


2) $w[n]=x[n]\cos(\pi n/2)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2}\left(X(e^{j(\omega-\pi/2)})+X(e^{j(\omega+\pi/2)})\right)$



3) $p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]\xleftrightarrow{F}\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi k)$

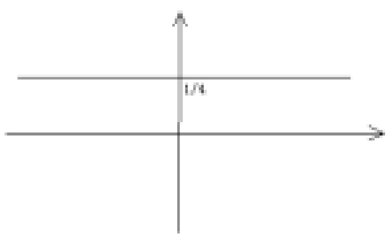
$$W(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})\otimes P(e^{j\omega})=\frac{1}{2}X(e^{j\omega})\otimes\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi k)=\frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega})+X(e^{j(\omega+\pi)})\right]$$



4) $p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]\xleftrightarrow{F}\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{\pi k}{2})$

$$W(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})\otimes P(e^{j\omega})=\frac{1}{4}X(e^{j\omega})\otimes\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{\pi k}{2})$$

$$=\frac{1}{4}\left[X(e^{j\omega})+X(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})})+X(e^{j(\omega-\pi)})+X(e^{j(\omega-\frac{3\pi}{2})})\right]=\frac{1}{4}$$



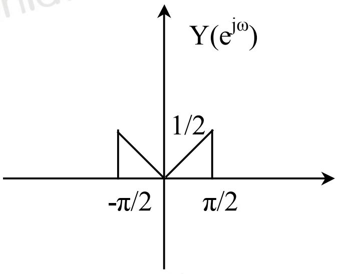
(2) 因为 $h[n]=\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} \stackrel{F}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & |\omega|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<|\omega|\le\pi\end{cases}$ 为一低通滤波器

所以

1） $Y(e^{j\omega})=W(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=0$ y[n]=0

2） $y[n]\stackrel{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2}\left[X(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})})+X(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})})\right]H(e^{j\omega})=\frac{1}{2}H(e^{j\omega})-\frac{1}{2}X(e^{j\omega})$，

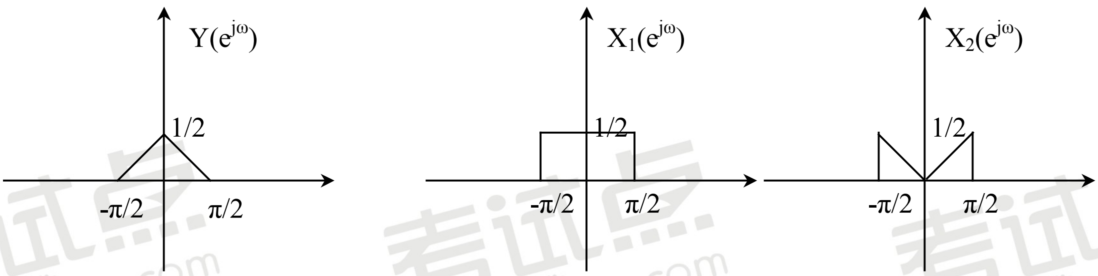
输出 $y[n]=\frac{h[n]}{2}-\frac{x[n]}{2}=\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{2\pi n}-2\frac{\sin^2\frac{\pi n}{4}}{\pi^2 n^2}$



3） $y[n]\stackrel{FT}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega})+X(e^{j(\omega+\pi)})\right]H(e^{j\omega})=\frac{1}{2}X(e^{j\omega})$，

输出 $y[n]=\frac{x[n]}{2}=2\frac{\sin^2\frac{\pi n}{4}}{\pi^2 n^2}$

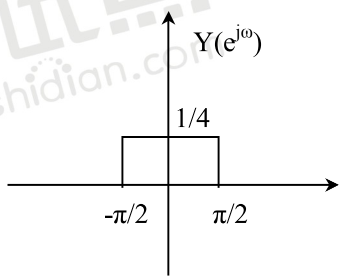
或者：



$Y(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})-X_2(e^{j\omega})$ $x_1[n]=\frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{2\pi n}$ $x_2[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2\pi n}-2\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\pi n}\right)^2$

所以 $y[n]=x_1[n]-x_2[n]=2\left(\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{\pi n}\right)^2$

4）



$y[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{4}H(e^{j\omega})$，输出 $y[n] = \dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{4\pi n}$

4.24 设周期为 2 的信号 x[n]=(-1)^n 的傅里叶级数系数为 a_k，利用对偶性求周期为 2 的信号 g[n]=a_n 的傅里叶级数系数。

解

由对偶性知 $x[n] \overset{Fs}{\longleftrightarrow} a[k] \quad \Rightarrow \quad a[n] \overset{Fs}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}x[-k]$

所以：$g[n] = a_n \overset{Fs}{\longleftrightarrow} b_k = \frac{1}{N}x[-k] = \frac{1}{2}(-1)^{(-k)} = \frac{1}{2}(-1)^k$

或者：$b_k = \frac{1}{2}(a[0] + a[-1]e^{jk\pi}) = \frac{1}{2}(a[0] + a[1]e^{jk\pi}) = \frac{x[k]}{2} = \frac{(-1)^k}{2}$

4.25 某一因果 LTI 系统的差分方程为：$y[n] + \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - x[n-1]$，求

（1） 该系统的频率响应

（2） 求该系统的单位脉冲响应

（3） 求该系统对输入信号 $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ 的响应 y[n]

解

（1） 差分方程两边取傅里叶变换得

$$Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{6}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$$

系统的频率响应为：$H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \dfrac{1-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}} = \dfrac{\frac{9}{5}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \dfrac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

（2） 系统地单位脉冲响应：$h[n] = F^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{9}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

（3） 输入信号 $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

所以：输出 y[n]的傅里叶变换为：

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{\frac{6}{5}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{3}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}-\frac{\frac{16}{5}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$y[n]=\frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-\frac{16}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

4.26 某一因果稳定 LTI 系统，对 $\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$ 的零状态响应为 $\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]\to n\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$

（1）求该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$　　　（2）求该系统的差分方程

解：

（1）输入 x[n]的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}e^{-j\omega}}$

由频域微分性质 $nx[n]\overset{F}{\longleftrightarrow} j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$，可以得到

输出 y[n]的傅里叶变换 $Y(e^{j\omega})=j\dfrac{d\left(X(e^{j\omega})\right)}{d\omega}=\dfrac{\frac{2}{3}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{2}{3}e^{-j\omega}\right)^2}$

所以系统的频率响应为：$H(e^{j\omega})=\dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\dfrac{\frac{2}{3}e^{-j\omega}}{1-\frac{2}{3}e^{-j\omega}}$

（2）系统的差分方程为：$y[n]-\frac{2}{3}y[n-1]=\frac{2}{3}x[n-1]$

4.27 假设某一 LTI 系统，其单位脉冲响应为 h[n]，频率响应为 $H(e^{j\omega})$，具有以下性质：

（1）$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\to g[n]$，其中 g[n]=0，n≥2 和 n<0；

（2）$H(e^{j\frac{\pi}{2}})=1$　　　（3）$H(e^{j\omega})=H(e^{j(\omega-\pi)})$

试求（1）h[n]；（2）该系统的差分方程；（3）系统对 u[n]的响应

解

（1）

由性质（1）知：$g[n]=a\delta[n]+b\delta[n-1]$，所以 $G(e^{j\omega})=a+be^{-j\omega}$　　$X(e^{-j\omega})=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

所以：系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega})=\frac{G(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\left(a+be^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)=a+(b-\frac{a}{4})e^{-j\omega}-\frac{b}{4}e^{-j2\omega}$$

由性质（3）$H(e^{j(\omega-\pi)})=a-(b-\frac{a}{4})e^{-j\omega}-\frac{b}{4}e^{-j2\omega}=a+(b-\frac{a}{4})e^{-j\omega}-\frac{b}{4}e^{-j2\omega}$，得 $b=\dfrac{a}{4}$

由性质（2）：$H(e^{j\frac{\pi}{2}})=(a-jb)\left(1+j\frac{1}{4}\right)=1 \quad\Rightarrow\quad a=\dfrac{16}{17}\quad b=\dfrac{4}{17}$

所以 $H(e^{j\omega})=\left(\dfrac{16}{17}+\dfrac{4}{17}e^{-j\omega}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}e^{-j\omega}\right)=\dfrac{16}{17}-\dfrac{1}{17}e^{-j2\omega}$

$$h[n]=\frac{16}{17}\delta[n]-\frac{1}{17}\delta[n-2]$$

（2）该系统的差分方程为：$y[n]=\dfrac{16}{17}x[n]-\dfrac{1}{17}x[n-2]$

（3）因为 $u[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$，所以系统对 u[n]的响应 y[n]的傅里叶变换为：

$$\begin{aligned}Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})&=\left(\frac{16}{17}-\frac{1}{17}e^{-j2\omega}\right)\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\left(\frac{16}{17}-\frac{1}{17}e^{-j2\omega}\right)\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\\&=\frac{1}{17}\left(1+e^{-j\omega}+\frac{15}{1-e^{-j\omega}}\right)+\frac{15}{17}\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\end{aligned}$$

系统对 u[n]的响应 y[n]为：$y[n]=\dfrac{1}{17}\left(\delta[n]+\delta[n-1]+15u[n]\right)=\dfrac{16}{17}u[n]-\dfrac{1}{17}u[n-2]$

或

直接由差分方程获得，当输入为 $u[n]$ 时，输出为 $y[n]=\dfrac{16}{17}u[n]-\dfrac{1}{17}u[n-2]$。

4.28 对于下列周期输入，求示于图 4-39 的理想带通滤波器的输出。

（1）$x[n]=(-1)^n$；

（2）$x[n]=1+\sin(\frac{3\pi}{8}n+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{3}\pi n+\frac{\pi}{4}\right)$

（3）$x[n]=\sum\limits_{k=-4}^{4}a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{9}\right)n}$

解：

（1）$x[n]=(-1)^n=\cos n\pi$

$$X(e^{j\omega})=\pi\delta(\omega-\pi)+\pi\delta(\omega+\pi)\qquad -\pi<\omega<\pi$$

所以输出 y[n]=0

(2) $x[n]=1+\sin(\frac{3\pi}{8}n+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{3}\pi n+\frac{\pi}{4}\right)$

在一个周期$(-\pi\quad\pi)$内，$X(e^{j\omega})$的频谱线存在于$\omega=0,\pm\frac{3\pi}{8},\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{2\pi}{3}$处的冲激串，由图可知，经过带通滤波后，$\omega=3\pi/8$的频率成分可以通过，所以$y[n]=\sin\left(\frac{3\pi}{8}n+\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $x[n]=\sum_{k=-4}^{4}a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{9}\right)n}$

因为 $\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\xleftrightarrow{F}2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$

所以在一个周期$(-\pi\quad\pi)$内，$X(e^{j\omega})$的频谱线存在于$\omega=0,\pm\frac{2\pi}{9},\pm\frac{4\pi}{9},\pm\frac{6\pi}{9},\pm\frac{8\pi}{9}$处的冲激串，由图可知，没有冲激串通过滤波器，所以 y[n]=0

4.29 某一频率响应为$H(e^{j\omega})$的 LTI 系统，其输入为如下冲激串时$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$，其输出为：$y[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)$，求$H(e^{jk\pi/2})$在 k=0,1,2,3 时的值。

解：x[n]是周期为 4 的冲激串，其傅里叶级数系数为

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{4}\sum_{n=<4>}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{2}n}$$，则 $a_0=a_1=a_2=a_3=\frac{1}{4}$

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$y[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{2}n}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

由特征函数的性质：当$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0 n}$时，输出$y[n]=\sum_{k=<N>}a_k H(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}$

则

$$\begin{aligned}y[n]&=\frac{1}{4}H(e^{j0})e^{j0}+\frac{1}{4}H(e^{j\frac{\pi}{2}})e^{j\frac{\pi}{2}n}+\frac{1}{4}H(e^{j\frac{2\pi}{2}})e^{j\frac{2\pi}{2}n}+\frac{1}{4}H(e^{j\frac{3\pi}{2}})e^{j\frac{3\pi}{2}n}\\&=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{3\pi}{2}n}\end{aligned}$$

对比相应的系数得：$H(e^{j0})=H(e^{j\pi})=0\qquad H(e^{j\frac{\pi}{2}})=2e^{j\frac{\pi}{4}}\qquad H(e^{j\frac{3\pi}{2}})=2e^{-j\frac{\pi}{4}}$

4.30 某一因果离散时间 LTI 系统，其差分方程为 $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$，在下面输入情况下，求输出 y[n]的傅里叶级数系数。

（1） $x[n]=\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

（2） $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)$

解：

由差分方程得系统的频率响应为 $H(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\theta(\omega)}$

方法一：利用 $A\cos(\omega_0 n+\theta_0)\to A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos(\omega_0 n+\theta_0+\theta(\omega_0))$，

$A\sin(\omega_0 n+\theta_0)\to A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\sin(\omega_0 n+\theta_0+\theta(\omega_0))$

可以解得。

方法二：

由特征函数的性质：当 $x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0 n}$ 时，输出 $y[n]=\sum_{k=<N>}a_k H(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}$

输入输出信号傅里叶级数系数的对应关系为：$a_k\to a_k H(e^{jk\omega_0})$

(1) $x[n]=\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n}-e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right)$ 所以 $a_{-1}=-\frac{1}{2j}$， $a_1=\frac{1}{2j}$

输出的傅里叶级数系数：$b_{-1}=a_{-1}H(e^{-j\frac{\pi}{4}})=-\frac{1}{2j}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{j}{2-e^{j\frac{\pi}{4}}}$

$$b_1=a_1H(e^{j\frac{\pi}{4}})=\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}=\frac{j}{2-e^{-j\frac{\pi}{4}}}$$

或者：

输出为 $y[n]=\frac{1}{2j}\left[H(e^{j\frac{\pi}{4}})e^{j\frac{\pi}{4}n}-H(e^{-j\frac{\pi}{4}})e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]=\frac{1}{2j}\left[\dfrac{e^{j\frac{\pi}{4}n}}{1-0.5e^{-j\frac{\pi}{4}}}-\dfrac{e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{1-0.5e^{j\frac{\pi}{4}}}\right]$。

(2) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)$ 周期为 N=8

$$x[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{8}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{8}n}+\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\frac{2\pi}{8}n}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\frac{2\pi}{8}n}+\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j3\frac{2\pi}{8}n}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j3\frac{2\pi}{8}n}$$

所以 $a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}}$，$a_{-2}=-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}}$，$a_3=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{3}}$，$a_{-3}=-\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{3}}$

输出信号为，

$$y[n]=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{4}n}}{1-0.5e^{j\frac{\pi}{4}}}+\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{1-0.5e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)+\frac{1}{2j}\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}n}}{1-0.5e^{j\frac{\pi}{2}}}-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{1-0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}}\right)$$
$$+\frac{1}{2j}\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{3}{4}\pi n}}{1-0.5e^{j\frac{3\pi}{4}}}-\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\frac{3}{4}\pi n}}{1-0.5e^{-j\frac{3\pi}{4}}}\right)$$

4.31 考虑某一离散时间 LTI 系统，其单位脉冲响应为 $h[n]=\dfrac{\sin\frac{7}{12}\pi n}{\pi n}$

（1） 已知系统的输入是 $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$，求输出 y[n]的傅里叶级数系数，并把它表示为三角函数的形式。

（2） 已知系统的输入为 $x[n]=\delta[n+2]+\delta[n-2]$，求系统输出

（3） 已知系统的输入 x[n]如图 4-40 所示，求系统输出

（4） 已知系统的输入等于$(-1)^n$乘以图 4-40 所示信号，求系统的输出。

解：

$$h[n]=\frac{\sin\frac{7}{12}\pi n}{\pi n}\overset{F}{\longleftrightarrow}H(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & |\omega|\le\frac{7\pi}{12}\\ 0 & \frac{7\pi}{12}<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

（1）

输入信号为 $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]=\sum_{k=-1}^{2}\frac{1}{4}e^{jk\frac{\pi}{2}n}=\frac{1}{4}(e^{-j\frac{\pi n}{2}}+1+e^{j\frac{\pi n}{2}}+e^{j\pi n})$，

频率 $\omega=0,\pm\pi/2$ 的信号分量可以通过系统，

输出信号为 $y[n]=\frac{1}{4}(e^{-j\frac{\pi n}{2}}+1+e^{j\frac{\pi n}{2}})=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi n}{2}$。

或者

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]\qquad a_0=a_1=a_2=a_3=\frac{1}{4}\qquad X(e^{j\omega})=\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{\pi k}{2}\right)$$

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})=\frac{\pi}{2}\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}\delta(\omega-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}\delta(\omega+\frac{\pi}{2})\qquad -\pi<\omega<\pi$$

$$b_k = a_k H(e^{jk\omega_0}) = a_k H(e^{jk\frac{\pi}{2}})$$ 所以 $b_0 = b_1 = b_3 = \frac{1}{4}$

$$y[n] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi n}{2}$$

（2） $x[n] = \delta[n+2] + \delta[n-2]$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \frac{\sin\frac{7}{12}\pi(n+2)}{\pi(n+2)} + \frac{\sin\frac{7}{12}\pi(n-2)}{\pi(n-2)}$$

（3） x[n]周期为 N=8 $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - \frac{1}{4}\pi k)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \left.\frac{\sin\frac{2N_1+1}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \frac{\sin\frac{5\pi k}{8}}{8\sin\frac{\pi k}{8}},\quad k \neq 0, \pm 8, \pm 16, \ldots \quad a_k = \frac{2N_1+1}{N} = \frac{5}{8},\quad k = 0, \pm 8, \pm 16, \ldots$$

所以

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$= 2\pi\frac{5}{8}\delta(\omega) + 2\pi\frac{\sin\frac{5\pi}{8}}{8\sin\frac{\pi}{8}}\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right] + 2\pi\frac{\sin\frac{5\pi}{4}}{8\sin\frac{\pi}{4}}\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad -\pi < \omega < \pi$$

$$y[n] = \frac{5}{8} + \frac{\sin\frac{5\pi}{8}}{4\sin\frac{\pi}{8}}\cos\frac{\pi}{4}n - \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2}n$$

（4）令图 4-40 中的信号为 $x_1[n]$，则 $x[n] = (-1)^n x_1[n] = e^{jn\pi} x_1[n] \xleftrightarrow{Fs} a_{k-4}$

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k-4} \delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \delta(\omega - \pi - \frac{1}{4}\pi l)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \left.\frac{\sin\frac{2N_1+1}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \frac{\sin\frac{5\pi k}{8}}{8\sin\frac{\pi k}{8}},\quad k \neq 0, \pm 8, \pm 16, \ldots \quad a_k = \frac{2N_1+1}{N} = \frac{5}{8},\quad k = 0, \pm 8, \pm 16, \ldots$$

所以

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$=2\pi\frac{1}{8}\delta(\omega)-2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{8\sin\frac{3\pi}{8}}\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)\right]+2\pi\frac{\sin\frac{5\pi}{4}}{8\sin\frac{\pi}{4}}\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]\quad -\pi<\omega<\pi$$

$$y[n]=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}tg\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}n-\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2}n$$

或者：

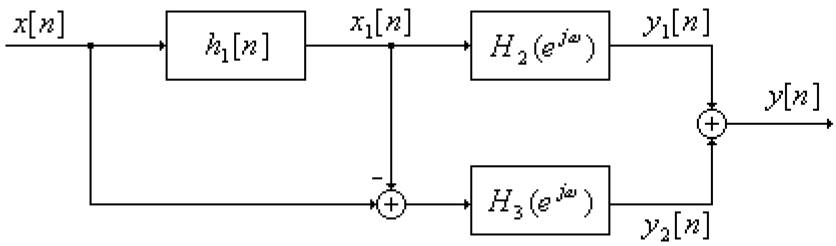
频率 $\omega=0,\pm\pi/4,\pm\pi/2$ 的信号分量可以通过系统，

这些频率成分分别对应于 $k=4,(4\pm1),(4\pm2)$，

因此输出信号为，
$$\begin{aligned}y[n]&=a_2e^{-j\frac{\pi n}{2}}+a_3e^{-j\frac{\pi n}{4}}+a_4+a_5e^{j\frac{\pi n}{4}}+a_6e^{j\frac{\pi n}{2}}\\&=a_2e^{-j\frac{\pi n}{2}}+a_3e^{-j\frac{\pi n}{4}}+a_4+a_{-3}e^{j\frac{\pi n}{4}}+a_{-2}e^{j\frac{\pi n}{2}}\end{aligned}$$，

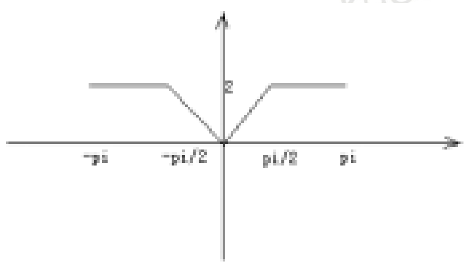
代入 a_k 可得，$y[n]=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}\tan(\pi/8)\cos(\dfrac{\pi n}{4})-\dfrac{1}{4}\cos(\dfrac{\pi n}{2})$。

4.32 某离散时间 LTI 系统如图 4-41(a)所示，其中 $h_1[n]=\delta[n]-\dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$，$H_2(e^{j\omega}),H_3(e^{j\omega})$ 分别如图 4-41(b)(c)所示，输入信号的频谱如图 4-41(d)所示。求系统的频率响应，并求 y[n]。



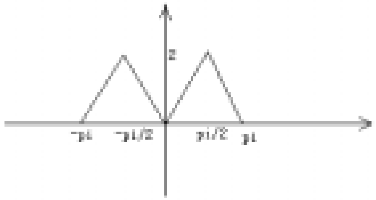
解：$h_1[n]=\delta[n]-\dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}\overset{F}{\longleftrightarrow}H_1(e^{j\omega})=1-\tilde{H}(e^{j\omega})\qquad \tilde{H}(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & |\omega|\le\dfrac{\pi}{2}\\0 & \dfrac{\pi}{2}<|\omega|\le\pi\end{cases}$

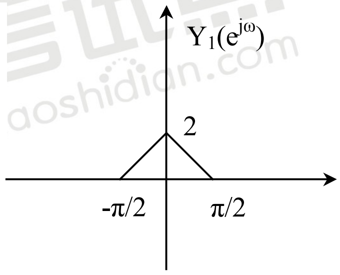
$$H(e^{j\omega})=H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})-H_1(e^{j\omega})H_3(e^{j\omega})+H_3(e^{j\omega})$$



求 y[n]

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$





所以输出 $Y(e^{j\omega})=Y_1(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})})+Y_1(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})})$ $\quad y_1[n]=8\left(\dfrac{\sin\frac{\pi n}{4}}{\pi n}\right)^2$ （利用 4.23（2）的 3)）

$$y[n]=2y_1[n]\cos\frac{\pi}{2}n=16\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\pi n}\right)^2\cos\frac{\pi}{2}n$$

或直接利用定义式计算

4.33 对下列差分方程所描述的因果 LTI 系统，确定其逆系统的频率响应，单位脉冲响应及描述逆系统的差分方程

（1） $y[n]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$ （2） $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$

（3） $y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$

（4） $y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$

解 对差分方程两边求傅里叶变换

（1） 原系统的频率响应： $H(e^{j\omega})=\dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=1-\dfrac{1}{2}e^{-j\omega}$

逆系统的频率响应： $H(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

对因果系统： $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

逆系统的差分方程： $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$

（2） 原系统的频率响应： $H(e^{j\omega})=\dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

逆系统的频率响应： $H(e^{j\omega})=1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}$

对因果系统： $h[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$

逆系统的差分方程：$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]$

（3） 原系统得频率响应：$H(e^{j\omega})=\dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\dfrac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$

逆系统得频率响应：$H(e^{j\omega})=\dfrac{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$

对因果系统：$H(e^{j\omega})=1+\dfrac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\dfrac{2}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

$$h[n]=\delta[n]+2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

逆系统差分方程：$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$

（4） 原系统得频率响应：$H(e^{j\omega})=\dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\dfrac{1}{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$

逆系统得频率响应：$H(e^{j\omega})=1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}$

对因果系统：$h[n]=\delta[n]+\frac{5}{4}\delta[n-1]-\frac{1}{8}\delta[n-2]$

逆系统差分方程：$y[n]=x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$

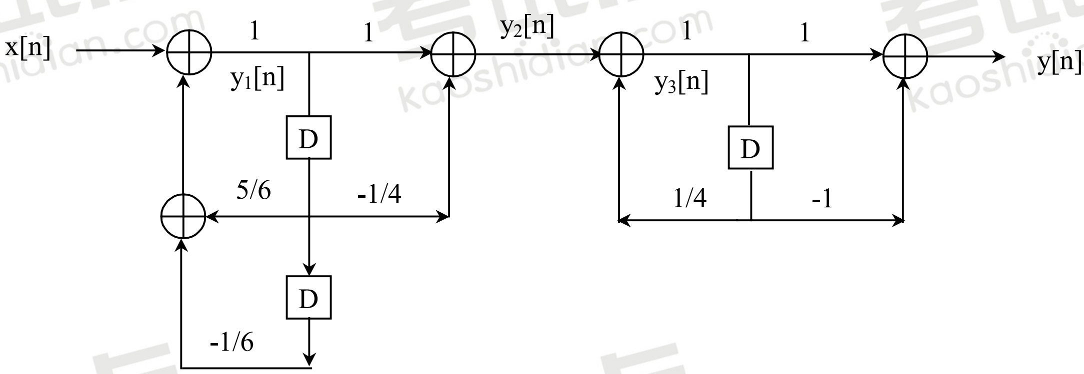
4.34 图 4－42 为一因果 LTI 系统的方框图实现，试求：

（1）该系统的差分方程　　（2）该系统的频率响应

（3）该系统的单位脉冲响应

解

（1）



$$y_1[n]=x[n]+\frac{5}{6}Dy_1[n]-\frac{1}{6}D^2y_1[n]=x[n]+\frac{5}{6}y_1[n-1]-\frac{1}{6}y_1[n-2]$$

$$y_2[n]=y_1[n]-\frac{1}{4}Dy_1[n]=y_1[n]-\frac{1}{4}y_1[n-1]$$

$$y_3[n]=y_2[n]+\frac{1}{4}Dy_3[n]=y_2[n]+\frac{1}{4}y_3[n-1]$$

$$y[n]=y_3[n]-Dy_3[n]=y_3[n]-y_3[n-1]$$

解出上述差分方程：

$$\frac{y[n]}{1-D}=\frac{x[n]}{1-\frac{5}{6}D+\frac{1}{6}D^2}\quad\Rightarrow\quad y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]-x[n-1]$$

（2）该系统的频率响应

对差分方程两边取傅里叶变换，得

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

（3）对系统得频率响应进行拉氏反变换，得系统的单位脉冲响应

$$H(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}=\frac{4}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}-\frac{3}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

所以：$h[n]=4\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]-3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

4－35 某一因果 LTI 系统的差分方程为：$y[n]-ay[n-1]=bx[n]+x[n-1]$，其中 a 为实数，且$|a|<1$

（1） 求 b 的值，使该系统的频率响应满足$\left|H(e^{j\omega})\right|=1$，$-\infty<\omega<\infty$，这样的系统称为全通系统。

（2） 当 a=-1/2，b 取（1）中所求得值时，概略画出$0\le\omega\le\pi$区间内的$H(e^{j\omega})$的相频特性。

（3） 当 a=1/2，b 取（1）中所求得值时，概略画出$0\le\omega\le\pi$区间内的$H(e^{j\omega})$的相频特性。

（4） 如果输入为$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, a=-1/2，b 取（1）中所求得值时求该系统的输出，并绘出输出的图形，从中可以看出，系统的非线性相频特性对响应的影响。

解：

（1）由差分方程的系统的频率响应为：

$$H(e^{j\omega})=\frac{b+e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

由条件$\left|H(e^{j\omega})\right|=1$，得到$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{\left|b+e^{-j\omega}\right|}{\left|1-ae^{-j\omega}\right|}=1\quad\Rightarrow\quad 1+b^2+2b\cos\omega=1+a^2-2a\cos\omega$

$(a+b)(a-b-2\cos\omega)=0$ （对所有的 ω 都成立）

所以 a+b=0，即 b=-a

（2）当 a=-1/2，b=1/2 时，

$$H(e^{j\omega})=\frac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}=\frac{1+2e^{-j\omega}}{2+e^{-j\omega}}=\frac{1+2\cos\omega-j2\sin\omega}{2+\cos\omega-j\sin\omega}=\frac{4+5\cos\omega-j3\sin\omega}{5+4\cos\omega}$$

$H(e^{j\omega})$ 的相频特性为：$\theta(\omega)=-\arctan\frac{3\sin\omega}{4+5\cos\omega}$ 或者

$$\theta(\omega)=-arctg\frac{2\sin\omega}{1+2\cos\omega}+arctg\frac{\sin\omega}{2+\cos\omega}$$

（3）a=1/2，b=-1/2 时，

$$H(e^{j\omega})=\frac{-\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}=\frac{-1+2e^{-j\omega}}{2-e^{-j\omega}}=\frac{-1+2\cos\omega-j2\sin\omega}{2-\cos\omega+j\sin\omega}=\frac{-4+5\cos\omega-j3\sin\omega}{5-4\cos\omega}$$

$H(e^{j\omega})$ 的相频特性为：$\theta(\omega)=\arctan\frac{3\sin\omega}{4-5\cos\omega}$ 或者

$$\theta(\omega)=arctg\frac{2\sin\omega}{1-2\cos\omega}-arctg\frac{\sin\omega}{2-\cos\omega}$$

（4）$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$，则 $X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})=\frac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}=\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

由此得：$y[n]=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

4.36 两个离散时间 LTI 系统的频率响应分别为：

$$H_1(e^{j\omega})=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\qquad H_2(e^{j\omega})=\frac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

（1） 证明 $\left|H_1(e^{j\omega})\right|=\left|H_2(e^{j\omega})\right|$，但是 $H_2(e^{j\omega})$ 的相位的绝对值大于 $H_1(e^{j\omega})$ 的相位绝对值

（2） 求出这两个系统的单位脉冲响应和单位阶跃响应，并加以图示

（3） 证明 $H_2(e^{j\omega})$ 可表示为 $H_2(e^{j\omega})=G(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})$，其中 $G(e^{j\omega})$ 是一个全通系统，频率响应为 $H_1(e^{j\omega})$ 形式的系统通常称为最小相移系统。这表明非最小相移系统总可

以分解为最小相移系统与全通系统的级联。

解：

(1) $$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \frac{\left|1+\frac{1}{2}\cos\omega - j\frac{1}{2}\sin\omega\right|}{\left|1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right|} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\omega}}{\left|1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right|}$$

$$\left|H_2(e^{j\omega})\right| = \frac{\left|\frac{1}{2}+\cos\omega - j\sin\omega\right|}{\left|1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right|} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\omega}}{\left|1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right|}$$

所以$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \left|H_2(e^{j\omega})\right|$

两个系统的相位分别为：

$$\theta_1(\omega) = -arctg\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1+\frac{1}{2}\cos\omega} + arctg\frac{\frac{1}{4}\sin\omega}{1+\frac{1}{4}\cos\omega}$$

$$\theta_2(\omega) = -arctg\frac{\sin\omega}{\frac{1}{2}+\cos\omega} + arctg\frac{\frac{1}{4}\sin\omega}{1+\frac{1}{4}\cos\omega}$$

当 $0<\omega<\pi$ 时，$arctg\frac{\frac{1}{4}\sin\omega}{1+\frac{1}{4}\cos\omega} > 0$，且 $\frac{1}{2}+\cos\omega < 2+\cos\omega$

所以：$\left|\theta_2(e^{j\omega})\right| > \left|\theta_1(e^{j\omega})\right|$

(2) 单位脉冲响应：

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1+0.5e^{-j\omega}}{1+0.25e^{-j\omega}} = 2 - \frac{1}{1+0.25e^{-j\omega}},$$

可得系统 1 的单位脉冲响应为，$h_1[n] = 2\delta[n] - 4^{-n}u[n]$，

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{0.5+e^{-j\omega}}{1+0.25e^{-j\omega}} = 4 - \frac{7/2}{1+0.25e^{-j\omega}},$$

系统 2 的单位脉冲响应为，$h_2[n] = 4\delta[n] - \frac{7}{2}\times 4^{-n}u[n]$，

阶跃响应：

系统 1 的单位阶跃响应为，$g_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h_1[k] = 2u[n] - \frac{4}{3}\left[1-4^{-(n+1)}\right]u[n]$，

系统 2 的单位阶跃响应为，$g_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h_2[k] = 4u[n] - \frac{14}{3}\left[1-4^{-(n+1)}\right]u[n]$。

(3) 设 $H_2(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})$，则

$$G(e^{j\omega}) = \frac{H_2(e^{j\omega})}{H_1(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\left|G(e^{j\omega})\right|=\frac{\left|\frac{1}{2}+e^{-j\omega}\right|}{\left|1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right|}=\frac{\left|\frac{1}{2}+\cos\omega-j\sin\omega\right|}{\left|1+\frac{1}{2}\cos\omega-j\frac{1}{2}\sin\omega\right|}=1$$

可见，它是一个全通系统。

【5-1】解：$x(t)$ 经过低通滤波器后的输出 $x_1(t)$ 的频率分量应在 $\pm 2000\pi(rad/s)$ 以内，

即 $x_1(t)$ 的 $\omega_M = 2000\pi$ 。

根据奈奎斯特抽样定理可得，当抽样频率 ω_s 满足：$\omega_s \ge 2|\omega_M|$ 时，

$x_1(t)$ 能根据其采样值得到无失真的恢复，即要求 $\omega_s \ge 4000\pi$，

这时要求 $T_s = \dfrac{2\pi}{\omega_s} \le 0.5\times 10^{-3} s$ 。

（1）（3）（4）这三种情况的抽样间隔满足条件，而情况（2）则不满足。

【5-2】解：

（1）$\cos(1000\pi t)$ 的频带上限为：$\omega_{1M} = 1000\pi$，

$\sin(3000\pi t)$ 的频带上限为：$\omega_{2M} = 3000\pi$，

因此，$x(t)$ 的频带上限为：$\omega_M = 3000\pi$，

奈奎斯特抽样频率为 $\omega_s = 2\omega_M = 6000\pi$；

（2）$x(t) = \dfrac{\sin\omega_c t}{\pi t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & 其它 \end{cases}$，

$\omega_M = \omega_c$，奈奎斯特抽样频率为 $\omega_s = 2\omega_c$；

（3）$x(t) = \left(\dfrac{\sin\omega_c t}{\pi t}\right)^2$，$\omega_M = 2\omega_c$，奈奎斯特抽样频率为 $\omega_s = 2\omega_c$；

（4）$x_1(t) = \dfrac{\sin 1000\pi t}{\pi t}$ 的频带上限为：$\omega_{1M} = 1000\pi$，

$x_2(t) = \dfrac{\sin 2000\pi t}{\pi t}$ 的频带上限为：$\omega_{2M} = 2000\pi$，

$x(t) = x_1(t) * x_2(t)$ 的频带上限为：$\omega_M = \omega_{1M} = 1000\pi$，

奈奎斯特抽样频率为：$\omega_s = 2\omega_M = 2000\pi$；

（5）$x(t) = x_1(t)x_2(t)$，$X(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$，$\omega_M = 3000\pi$，

奈奎斯特抽样频率为：$\omega_s = 2\omega_M = 6000\pi$ 。

【5-3】解：

（1）$x(t)$ 的频带上限为 $\omega_M = 5\pi$，

频率 $\omega = 5\pi$ 所对应的信号分量为 $\frac{\sin(5\pi t)}{32}$，

当 $T = 0.2$ 时，有 $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 10\pi$，

由于信号 $x(t)$ 的频谱当 $\omega = 5\pi$ 时并不为零，因此刚好会发生频谱混叠。

（2）设 $x_p(t)$ 通过截止频率为 π/T，通带增益为 T 的理想低通滤波器后输出为 $x_r(t)$，

由于滤波器的截止频率为：$\pi/T = 5\pi$，

因此原信号 $x(t)$ 中的信号分量 $\frac{\sin(5\pi t)}{32}$ 被滤除，

故有，$x_r(t) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\sin(k\pi t)}{2^k} = \frac{1}{2j} \sum_{k=1}^{4} \frac{(e^{jk\pi t} - e^{-jk\pi t})}{2^k}$。

【5-4】解：（原题中的 T 应改为 $T = 0.2$）

信号 $x(t)$ 的频谱为：$X(j\omega) = \pi[\delta(\omega + 2\pi) + \delta(\omega - 2\pi)]$，

设 $x(t)$ 经过冲激串抽样后的信号为 $x_p(t)$，

则 $x_p(t)$ 的频谱为：$X_p(j\omega) = 5\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega + 10k\pi + 2\pi) + \delta(\omega + 10k\pi - 2\pi)]$，

$h(t)$ 的频谱为：$H(j\omega) = TSa^2(\frac{\omega T}{2}) = 0.2Sa^2(0.1\omega)$，

重建信号 $x_r(t)$ 的频谱为，

$$X_r(j\omega) = X_p(j\omega)H(j\omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega + 10k\pi + 2\pi) + \delta(\omega + 10k\pi - 2\pi)] Sa^2(0.1\omega)$$

$$= \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [Sa^2(k\pi + 0.2\pi)\delta(\omega + 10k\pi + 2\pi) + Sa^2(k\pi - 0.2\pi)\delta(\omega + 10k\pi - 2\pi)]$$

$X_r(\omega)$ 为偶对称的冲激串，冲激出现的位置 $\pm 2\pi, \pm 8\pi, \pm 12\pi, \cdots$，

因此可得重建信号为，

$$x_r(t) = Sa^2(0.2\pi)\cos 2\pi t + \sum_{k=1}^{\infty} [Sa^2(k\pi + 0.2\pi)\cos(10k + 2)\pi t] + \sum_{k=1}^{\infty} [Sa^2(k\pi - 0.2\pi)\cos(10k - 2)\pi t]$$ 。

【5-5】证明：

信号的重建公式为，$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{T\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - nT)]$，

若取 $\omega_c=\frac{\omega_s}{2}$，则有 $\frac{\omega_c T}{\pi}=\frac{\omega_s T}{2\pi}=1$，

当 $t=kT$ 时，有 $x_r(kT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)Sa\left[\omega_c(k-n)T\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)Sa\left[(k-n)\pi\right]$

由于 $Sa\left[(k-n)\pi\right]=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases}$，故有 $x_r(kT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)Sa\left[(k-n)\pi\right]=x(kT)$。

【5-6】解：

（1）$F(j\omega)=X_1(j\omega)+X_2(j\omega)$，

可得，$f(t)$ 的最高频率为 300Hz，

奈奎斯特抽样频率为 600Hz，即 $T_{\max}=\frac{1}{600}(s)$；

（2）$F(j\omega)=2X_1(j2\omega)$，

可得，$f(t)$ 的最高频率为 50Hz，

奈奎斯特抽样频率为 100Hz，即 $T_{\max}=\frac{1}{100}=0.01(s)$；

（3）$F(j\omega)=\frac{1}{2}X_2(j\frac{\omega}{2})$，

可得，$f(t)$ 的最高频率为 600Hz，

奈奎斯特抽样频率为 1200Hz，即 $T_{\max}=\frac{1}{1200}(s)$；

（4）$f(t)=x_1(t-10)$，$F(j\omega)=e^{-j10\omega}X_1(j\omega)$，

$f(t)$ 的最高频率为 100Hz，

奈奎斯特抽样频率为 200Hz，即 $T_{\max}=\frac{1}{200}=0.005(s)$；

（5）$x_1(t)$ 的最高频率为 100Hz，$x_2(t/3)$ 的最高频率为 100Hz，

可得，$f(t)=x_1(t)x_2(t/3)$ 的最高频率为：200Hz，

奈奎斯特抽样频率为 400Hz，即 $T_{\max}=\frac{1}{800}(s)$。

【5-7】解：

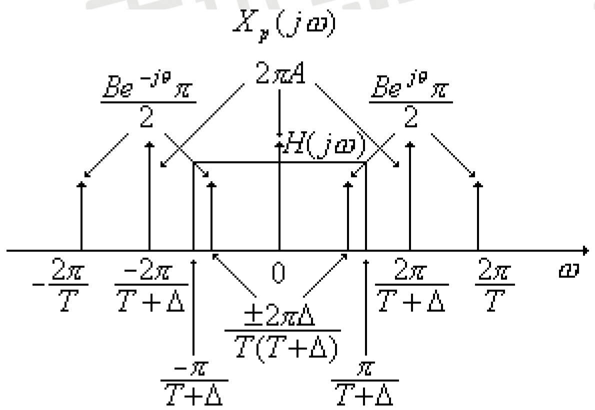
$$x(t)=A+B\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta\right)=A+\frac{Be^{j\theta}}{2}e^{j\frac{2\pi}{T}t}+\frac{Be^{-j\theta}}{2}e^{-j\frac{2\pi}{T}t},$$

$$X(j\omega)=2\pi A\delta(\omega)+\frac{Be^{j\theta}}{2}\pi\delta(\omega-\frac{2\pi}{T})+\frac{Be^{-j\theta}}{2}\pi\delta(\omega+\frac{2\pi}{T}),$$

$$x_p(t)=x(t)p(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n(T+\Delta)),$$

$$X_p(j\omega)=\frac{1}{T+\Delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))，其中\ \omega_s=\frac{2\pi}{T+\Delta},$$

$X_p(j\omega)$ 以及低通滤波器的频响 $H(j\omega)$ 如题图 5.7 所示，



题5.7图

Δ 应满足 $\frac{\pi}{T+\Delta}>\frac{2\pi\Delta}{T(T+\Delta)}$， 即 $\Delta>\frac{T}{2}$，

$x_p(t)$ 经低通滤波后输出为 $y(t)$， $y(t)$ 的频谱为，

$$Y(j\omega)=2\pi A\delta(\omega)+\frac{Be^{j\theta}\pi}{2}\delta(\omega-\frac{2\pi\Delta}{T(T+\Delta)})+\frac{Be^{-j\theta}\pi}{2}\delta(\omega+\frac{2\pi\Delta}{T(T+\Delta)}),$$

$$y(t)=A+\frac{Be^{j\theta}}{2}e^{j\frac{2\pi\Delta}{T(T+\Delta)}t}+\frac{Be^{-j\theta}}{2}e^{-j\frac{2\pi\Delta}{T(T+\Delta)}t}=A+B\cos\left[\frac{2\pi\Delta t}{T(T+\Delta)}+\theta\right],$$

$$x(at)=A+B\cos\left(\frac{2a\pi}{T}t+\theta\right),$$

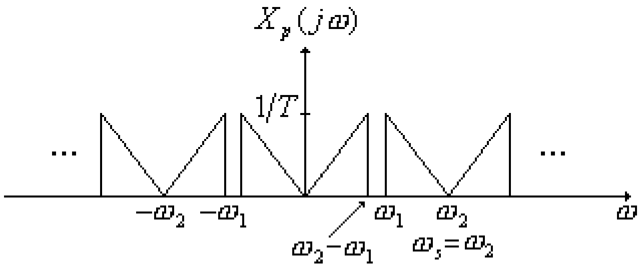
由于 $y(t)=x(at)$，故有 $\frac{2\pi\Delta}{T(T+\Delta)}=\frac{2a\pi}{T}$， 即 $a=\frac{\Delta}{T+\Delta}$。

【5-8】解：

令 $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$， 则抽样信号 $x_p(t)$ 的频谱如题 5.8 图所示，

当 $\omega_s=\omega_2$ 时，若取 $A=T$， $\omega_b=\omega_2=\omega_s=\frac{2\pi}{T}$， $\omega_2-\omega_1<\omega_a<\omega_1$，

则 $x_p(t)$ 通过带通滤波器后的输出 $x_r(t)=x(t)$。



题5.8图

【5-9】解：

序列 $x[n]$ 的 $\omega_M=\dfrac{3\pi}{7}$，奈奎斯特抽样频率为 $\omega_s=2\omega_M=\dfrac{6\pi}{7}$，

抽样间隔 N 应满足：$N<\dfrac{2\pi}{\omega_s}=\dfrac{2\pi}{6\pi/7}=\dfrac{7}{3}$，可取 $N=2$。

【5-10】解：

$H(e^{j\omega})$ 满足：$X_p(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})$。

采样序列为 $p[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-1-4k]$，其频谱为：

$$P(e^{j\omega})=\frac{\pi}{2}e^{-j\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\frac{k\pi}{2}}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right),$$

采样后序列 $x_p[n]$ 的频谱为：

$$X_p(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\theta})P(e^{j(\omega-\theta)})d\theta=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}e^{-j\frac{k\pi}{2}}X(e^{j(\omega-\frac{k\pi}{2})}),$$

现要求重建信号满足 $x_r(t)=x(t)$，即 $X_p(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})$，

可取 $H(e^{j\omega})=\begin{cases}4 & |\omega|\le\dfrac{\pi}{4}\\ 0 & \dfrac{\pi}{4}\le|\omega|\le\pi\end{cases}$。

【5-11】解：

对序列 $x[n]$ 进行 $N=3$ 的等间隔抽样，设抽样后的序列为 $x_p[n]$，

再对 $x_p[n]$ 进行理想的低通滤波，低通滤波器的截止频率为 $\dfrac{\pi}{3}$，通带增益为 3，

可得重建信号 $x_r[n]$ 为：$x_r[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[3k]\frac{\sin\frac{\pi}{3}(n-3k)}{\frac{\pi}{3}(n-3k)}$，

现有，$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[3k]\frac{\sin\frac{\pi}{3}(n-3k)}{\frac{\pi}{3}(n-3k)}=x_r[n]$，

即要求抽样满足奈奎斯特定理，故有，$\omega_s=\frac{2\pi}{N}=\frac{2\pi}{3}\geq 2\omega_M$，

于是有 $\omega_M\leq\frac{\pi}{3}$，即当 $\frac{\pi}{3}\leq|\omega|\leq\pi$ 时，有 $X(e^{j\omega})=0$。

【5.12】解：

$x_c(t)$ 的最高频率为：$\omega_M=1000\pi$，

奈奎斯特抽样频率为：$\omega_s=2000\pi$，

最大抽样间隔为：$T=\frac{2\pi}{\omega_s}=\frac{2\pi}{2000\pi}=10^{-3}(s)$，

$x_d[n]=x_c(n\times10^{-3})$ 为 $x_c(t)$ 的抽样值序列，且抽样满足奈奎斯特抽样定理，

即抽样过程中频谱无混叠，并有 $X_d(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j(\omega-\frac{2k\pi}{T}))$。

（1）若 $X_d(e^{j\omega})$ 为实函数，则 $X_c(e^{j\omega})$ 亦为实函数；

（2）若对所有 ω，$X_d(e^{j\omega})$ 的最大值为 1，则 $X_c(e^{j\omega})$ 的最大值为 T，即 10^{-3}；

（3）若 $\frac{3\pi}{4}\leq|\omega|\leq\pi$ 时，$X_d(e^{j\omega})=0$，

根据采样理论有 $\omega=\Omega T$，其中 Ω 为模拟角频率，ω 为数字角频率，

$\omega=\frac{3\pi}{4}$ 时，$\Omega=750\pi$，

$\omega=\pi$ 时，$\Omega=1000\pi$，

即当 $|\omega|\geq 750\pi$ 时，（注：这里的 ω 实际应记为 Ω，即模拟角频率），

有 $X_c(e^{j\omega})=0$。

（4）若 $X_d(e^{j\omega})=X_d(e^{j(\omega-\pi)})$，

由于数字角频率 $\omega=\pi$ 对应于模拟角频率 $\Omega=1000\pi$，

应有，$X_x(j\omega)=X_x(j(\omega-1000\pi))$。

【5-13】解：

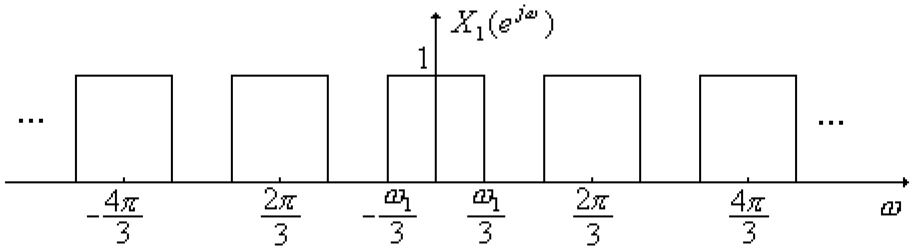
$x[n]=\dfrac{\sin\omega_1 n}{\pi n}$ 的频谱为： $X(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_1\\ 0 & \omega_1<|\omega|\le\pi\end{cases}$，

设零值插入后的信号为 $x_1[n]$，则 $x_1[n]=x_{(3)}[n]=\begin{cases}x[n/3] & n=3k\\ 0 & n\ne 3k\end{cases}$，

应有， $X_1(e^{j\omega})=X(e^{j3\omega})$

（1） $\omega_1\le\dfrac{3\pi}{5}$ 时， $X_1(e^{j\omega})$ 的结果如题 5.13 图（a）所示，

频谱在 $\omega=\dfrac{2k\pi}{3}$ 处，有宽度为 $\dfrac{2\omega_1}{3}$，幅度为1的矩形脉冲。



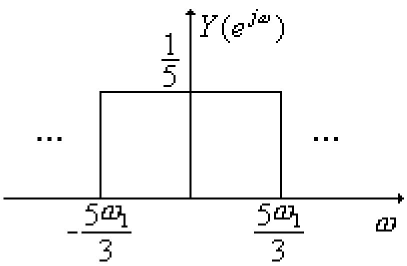
题5.13图(a)

$x_1[n]$经低通滤波后，将保留 $X_1(e^{j\omega})$ 在 $\omega=2k\pi$ 处的矩形脉冲，滤除其它地方的脉冲，

即 $W(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$。

最后对 $w[n]$进行抽取， $y[n]=w[5n]$， $y[n]$ 的频谱如题 5.12 图（b）所示，

可得，$y[n]=\dfrac{\sin\frac{5}{3}\omega_1 n}{5\pi n}$。



题5.13图(b)

（2） $\pi>\omega_1>\dfrac{3\pi}{5}$ 时，与（1）的情况类似，

$X_1(e^{j\omega})$ 的频谱在位于 $\omega=\dfrac{2k\pi}{3}$，处有宽度为 $\dfrac{2\omega_1}{3}$，幅度为1的矩形脉冲，

这时脉冲宽度的范围为 $\frac{2\pi}{5} \sim \frac{2\pi}{3}$。

$x_1[n]$经低通滤波后，将保留 $X_1(e^{j\omega})$ 在 $\omega = 2k\pi$ 处的矩形脉冲，滤除其它地方的脉冲，

但脉冲宽度被限制在 $|\omega| \le \pi/5$ 的范围内。

最后对 $w[n]$进行抽取， $y[n]$的频谱 $Y(e^{j\omega})$ 将被限制在 $|\omega| \le \pi$ 的范围内，

即对所有的 ω 均有， $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{5}$，

这时，$y[n] = \frac{\delta[n]}{5}$。

【5-14】解：

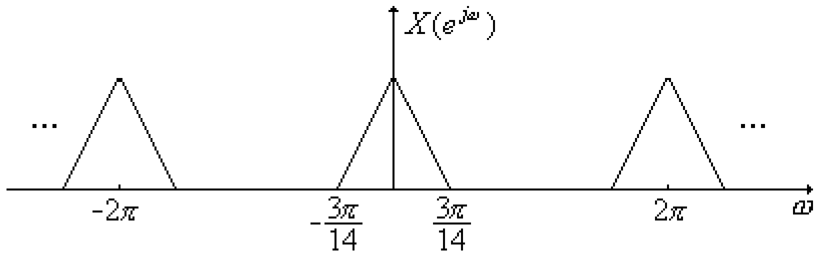
$x[n]$的最高频率为 $\omega_M = \frac{3\pi}{14}$，设其频谱如题 5.14 图（a）所示，

对 $x[n]$进行 $L = 3$ 的增速采样，设输出为 $x_1[n]$，

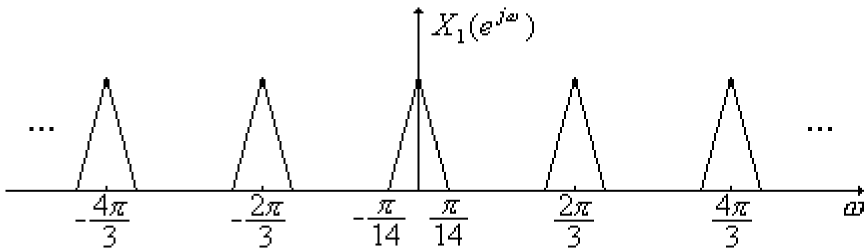
则 $x_1[n]$的最高频率为 $\omega_{1M} = \frac{\pi}{14}$，其频谱如题 5.14 图（b）所示，

然后再对 $x_1[n]$进行 $M = 14$ 的减速采样，设输出为 $y[n]$，

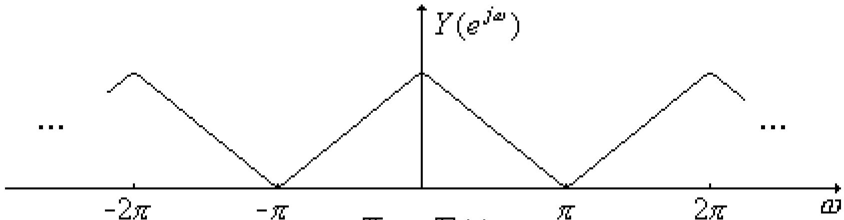
则 $y[n]$的频谱 $Y(e^{j\omega})$ 将占满 $|\omega| < \pi$ 的整个区域，如题 5.14 图（c）所示。



题5.14图(a)



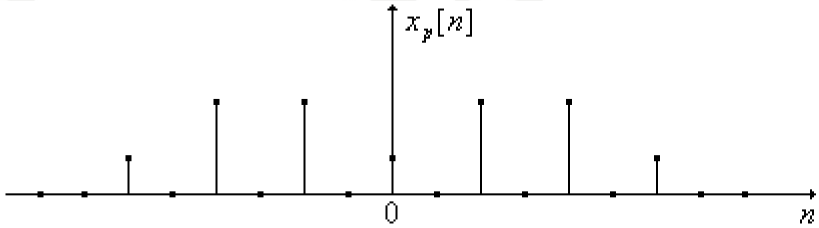
题5.14图(b)



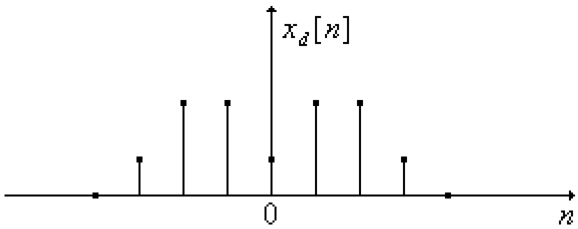
题5.14图(c)

【5-15】解：

（1） $x_p[n]$ 与 $x_d[n]$ 分别如图 5-6（a）与（b）所示，

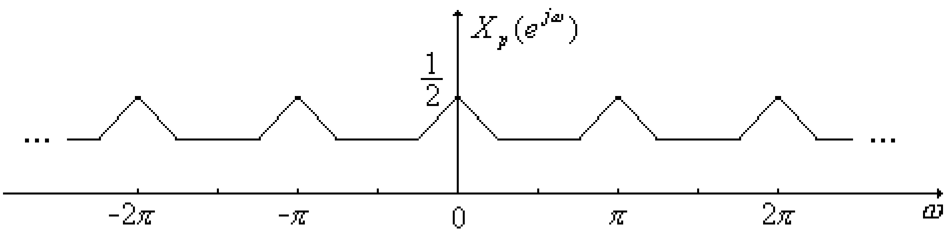


题5.15图(a)

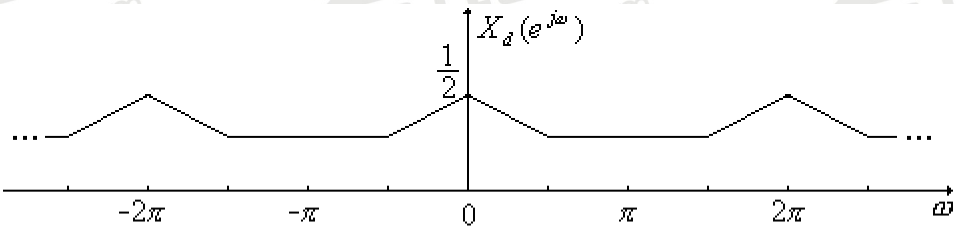


题5.15图(b)

（2） $X_p(e^{j\omega})$ 与 $X_d(e^{j\omega})$ 分别如图 5-6（c）与图（d）所示，



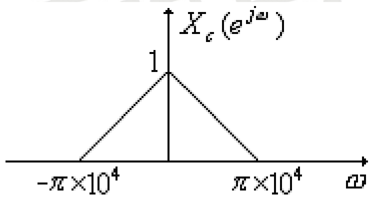
题5.15图(c)



题5.15图(d)

【5-16】解：

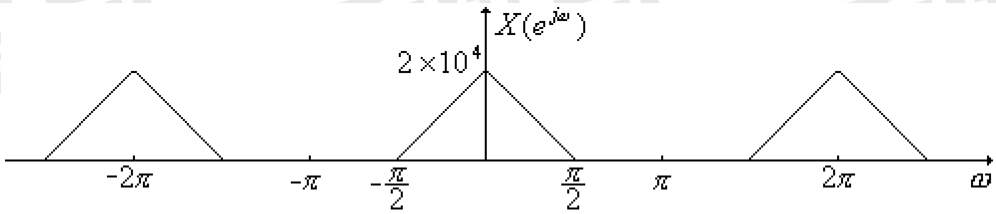
注：由于原图比较难画，这里将 $X_C(e^{j\omega})$ 改为题 5.16 图（a）所示的图形，并不影响分析的结果。



题5.16图(a)

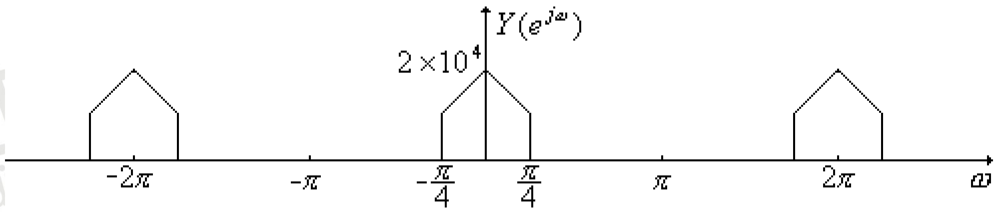
（1）$X(e^{j\omega})=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j\dfrac{\omega-2k\pi}{T})=2\times10^4\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j2\times10^4(\omega-2k\pi))$，

其中$1/T=20kHz$，其结果如题 5.16 图（b）所示，

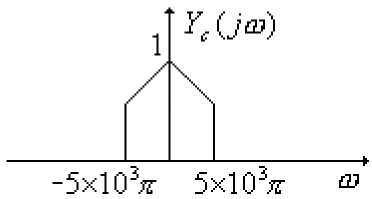


题5.16图(b)

（2）$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$，其结果如题 5.16 图（c）所示，



题5.16图(c)



题5.16图(d)

（3）当$|\omega|<\dfrac{\pi}{T}=2\times10^4\pi$时，有$Y_c(j\omega)=TY(e^{j\omega T})$，

当$|\omega|\geq\dfrac{\pi}{T}=2\times10^4\pi$时，$Y_c(j\omega)=0$，

其结果如题 5.16 图（d）所示。

【5-17】解：

设$H_c(j\omega)=H_1(j\omega)H_L(j\omega)$，其中

$H_1(j\omega)=j\omega$为微分器，其单位冲激响应为，$h_1(t)=\delta^{'}(t)$，

$H_L(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\leq\omega_c\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 为低通滤波器，其单位冲激响应为，$h_L(t)=\dfrac{\sin\omega_c t}{\pi t}$，

整个带限微分器的单位冲激响应为，

$$h_c(t)=h_1(t)*h_L(t)=\delta^{'}(t)*h_L(t)=\frac{dh_L(t)}{dt}=\frac{\omega_c t\cos\omega_c t-\sin\omega_c t}{\pi t^2},$$

若用离散时间系统来实现，则离散系统的频率响应应为，

$$H_d(e^{j\omega})=H_c(j\frac{\omega}{T})=\begin{cases} j\dfrac{\omega}{T} & |\omega|<\omega_c T \\ 0 & \omega_c T<|\omega|<\pi \end{cases},$$

单位脉冲响应为， $h_d[n]=Th_c(nT)=\dfrac{n\omega_c T\cos(n\omega_c T)-\sin(n\omega_c T)}{\pi n^2 T}$。

【5-18】解：

离散时间系统的差分方程为， $y[n]-\frac{1}{3}y[n-1]=x[n]$，

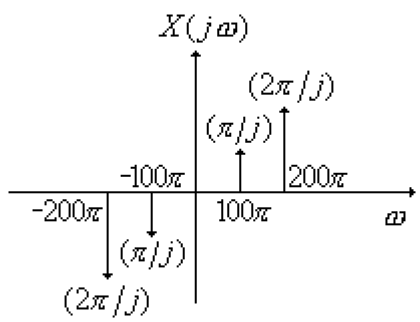
系统的频率响应应为， $H_d(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$，

对应的连续时间系统的频率响应应为， $H_c(j\omega)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega T}}$。

【5-19】解：

（1） $x(t)=\sin 100\pi t+2\sin 200\pi t$，其频谱为，

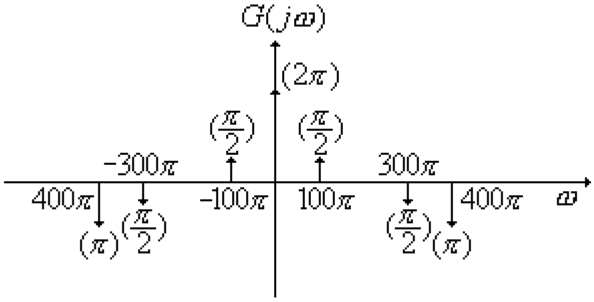
$$X(j\omega)=\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-100\pi)-\delta(\omega+100\pi)]+\frac{2\pi}{j}[\delta(\omega-200\pi)-\delta(\omega+200\pi)],$$



题5.19图(a)

（2） $g(t)=x(t)\sin 200\pi t$，其频谱为，

$$G(j\omega)=\frac{X(j(\omega-200\pi))}{2j}-\frac{X(j(\omega+200\pi))}{2j},$$



题5.19图(b)

（3）设 $f(t)=g(t)\sin 400\pi t$，其频谱为，

$$F(j\omega)=\frac{G(j(\omega-400\pi))}{2j}-\frac{G(j(\omega+400\pi))}{2j},$$

（4）设低通滤波器的输出为 $y(t)$，

由于低通滤波器的频率响应为 $H(j\omega)=\begin{cases}2 & |\omega|<400\pi \\ 0 & |\omega|\ge 400\pi\end{cases}$，

因此 $y(t)$ 的频谱将限制于 $|\omega|<400\pi$ 范围内，

可得 $Y(j\omega)=\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega+100\pi)-\delta(\omega-100\pi)+\delta(\omega-300\pi)-\delta(\omega+300\pi)]$，

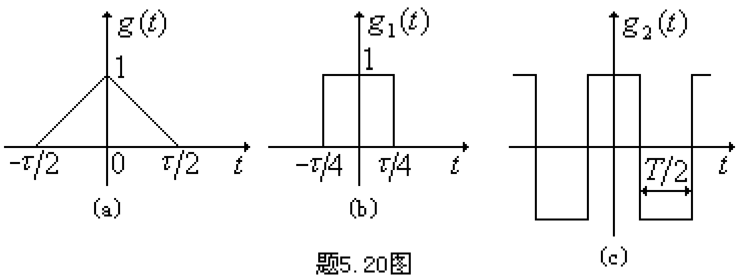
有 $y(t)=\frac{1}{2}(\sin 300\pi t-\sin 100\pi t)$。

【5-20】解：

（1） $x_1(t)=g(t)\cos\Omega_0 t$，其中 $g(t)$ 为三角脉冲，其波形如题 5.20 图（a）所示。

$g(t)$ 可以视为两个矩形脉冲的卷积，即 $g(t)=\frac{2}{\tau}[g_1(t)*g_1(t)]$，

$g_1(t)$ 为矩形脉冲，其波形如题 5.20 图（b）所示。



题5.20图

$$G_1(j\omega)=\frac{\tau}{2}Sa(\frac{\omega\tau}{4}),\quad G(j\omega)=\frac{2}{\tau}[G_1(j\omega)]^2=\frac{\tau}{2}\left[Sa(\frac{\omega\tau}{4})\right]^2,$$

$$X_1(j\omega)=\frac{1}{2}\left[G(j(\omega-\Omega_0))+G(j(\omega+\Omega_0))\right]。$$

（3） $x_2(t)=g(t)g_2(t)$，其中 $g_2(t)$ 是周期方波，其波形如题 5.20 图（c）所示。

$$G_2(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)，其中$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}，\quad a_k=\frac{2\sin(k\pi/2)}{k\pi}\ （k\neq 0），\quad a_0=0，$$

$$X_2(j\omega)=\frac{1}{2\pi}G(j\omega)*G_2(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kG(j(\omega-k\omega_0))。$$

【5-21】解：

由于 $x_1(t)=x(t)\cos(5wt)$，故有

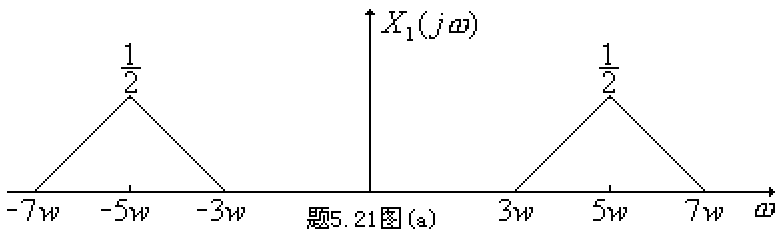
$X_1(j\omega)=\frac{1}{2}\left[X(j(\omega-5w))+X(j(\omega+5w))\right]$，其结果如题 5-21 图（a）所示，

经带通滤波后，$x_2(t)$ 的频谱如题 5-21 图（b）所示，

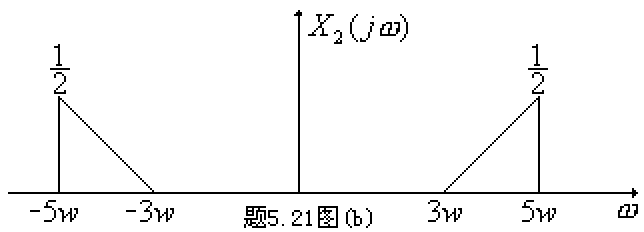
由于 $x_2(t)=x_1(t)\cos(3wt)$，故有，

$X_2(j\omega)=\frac{1}{2}\left[X_1(j(\omega-3w))+X_1(j(\omega+3w))\right]$，

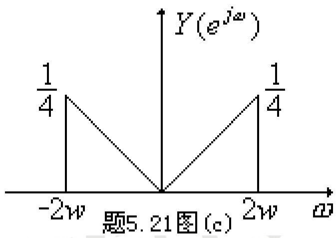
低通滤波后 $y(t)$ 的频谱如题 5-21 图（c）所示。



题5.21图(a)



题5.21图(b)



题5.21图(c)

于慧敏主编<信号与系统>(P257-260)第六章 6.10-6.25 习题解答

6.10 已知系统的微分方程为：$y''+2y'-3y=2x'+3x$，试求下列输入时的零状态响应 $y_{zs}(t)$.

(1) x(t)=u(t)　　　　　(2) $x(t)=e^{-t}u(t)$

解：对系统的微分方程两边取双边拉氏变换得：

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2s+3}{s^2+2s-3}$$

（1）$X(s)=\frac{1}{s}$；$Y(s)=\frac{2s+3}{s^2+2s-3}\cdot\frac{1}{s}=\frac{\frac{5}{4}}{s-1}-\frac{\frac{1}{4}}{s+3}-\frac{1}{s}$

所以：$y_{zs}(t)=\left(\frac{5}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-3t}-1\right)u(t)$

（2）$X(s)=\frac{1}{s+1}$

$$Y(s)=\frac{2s+3}{s^2+2s-3}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{\frac{5}{8}}{s-1}-\frac{\frac{3}{8}}{s+3}-\frac{\frac{1}{4}}{s+1}$$

所以：$y_{zs}(t)=\left(\frac{5}{8}e^{t}-\frac{3}{8}e^{-3t}-\frac{1}{4}e^{-t}\right)u(t)$

6.11 已知某系统的系统函数 H(s)及起始条件如下，求零输入响应。

$$H(s)=\frac{s}{s^2+4}\qquad y(0^-)=0,\qquad y'(0^-)=1$$

解：$H(s)=\frac{s}{s^2+4}\quad\Rightarrow\quad y''(t)+4y(t)=x'(t)$

对上式两边取单边拉氏变换得：

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=sX(s)-x(0)$$

$$Y(s)=\frac{sX(s)-x(0)+sy(0)+y'(0)}{s^2+4}=\frac{sX(s)-x(0)+1}{s^2+4}$$

所以，系统得零输入响应的拉氏变换为：$Y_{zi}(s)=\frac{1}{s^2+4}$

由此得系统的零输入响应为：$y_{zi}(t)=\frac{1}{2}\sin 2t\cdot u(t)$

6.12 下面为某因果系统的微分方程模型及输入 x(t)，求 y_{zs} 的初值 $y_{zs}(0^+)$ 和 $y_{zs}(\infty)$.

$$y''+3y'+y=x'+4x(t)\qquad x(t)=e^{-t}u(t)$$

解：对微分方程两边取双边拉氏变换：$Y(s)=\frac{s+4}{s^2+3s+1}\cdot\frac{1}{s+1}$

由于 Y(s)分子阶数小于分母，故在 t=0 时不包含冲激函数及其导数

故，由初值定理：$y_{zs}(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty} sY(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{s(s+4)}{(s^2+3s+1)(s+1)}=0$

再，因为 Y(s)的极点均在 s 平面的左半平面

故由终值定理：$y_{zs}(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sY(s)=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s(s+4)}{(s^2+3s+1)(s+1)}=0$

6.13 某因果 LTI 系统具有以下性质：

(1) 当激励 $x(t)=e^{2t}$，对全部 t 时，输出 $y(t)=\frac{1}{6}e^{2t}$

(2) h(t)满足下列微分方程：$\frac{dh}{dt}+2h(t)=(e^{-4t})u(t)+bu(t)$

这里 b 是一个未知数，试求 b，H(s)

解：由已知的性质（1）得：$H(s)\big|_{s=2}=\frac{1}{6}$

由性质（2）得：$H(s)=\dfrac{1}{s+2}\left(\dfrac{1}{s+4}+\dfrac{b}{s}\right)=\dfrac{(1+b)s+4b}{s(s+2)(s+4)}$

将性质（1）的结果代入性质（2)，得：b=1 $\quad H(s)=\dfrac{2}{s(s+4)}$

6.14 已知某稳定的 LTI 系统 t>0，x(t)=0，$X(s)=\dfrac{s+2}{s-2}$，系统的输出

$y(t)=\left[-\frac{2}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)\right]$，试求（1）H(s)及收敛域；(2）h(t)

解：因为：$y(t)=\left[-\frac{2}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)\right] \quad\Rightarrow\quad Y(s)=\dfrac{\frac{2}{3}}{s-2}+\dfrac{\frac{1}{3}}{s+1}=\dfrac{s}{(s+1)(s-2)}$

所以：(1) $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{2}{(s+1)(s+2)}$，因为是稳定系统，故：ROC：Re{s}>-1

(2) 因为 $H(s)=\dfrac{2}{s+2}-\dfrac{1}{s+1}$ 所以：$h(t)=\left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)u(t)$

6.15 已知某因果的 LTI 系统的微分方程：$y''+3y'+2y=x(t), y(0^-)=3, y'(0^-)=-5$，求当 x(t)=2u(t)时系统的全响应、零输入响应、零状态响应。

解：因为 $X(s)=\dfrac{2}{s}$，对微分方程两边取单边拉氏变换：

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+3sY(s)-3y(0)+2Y(s)=X(s)$，整理得

$$Y(s)=\frac{X(s)+(s+3)y(0)+y'(0)}{s^2+3s+2}=\frac{X(s)+3(s+3)-5}{s^2+3s+2}$$

故，$Y_{zi}(s)=\dfrac{3(s+3)-5}{s^2+3s+2}=\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{1}{s+1}$ $\quad Y_{zs}(s)=\dfrac{X(s)}{s^2+3s+2}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{1}{s+2}$

所以：系统的零输入响应： $y_{zi}(t)=\left(e^{-t}+2e^{-2t}\right)u(t)$

系统的零状态响应： $y_{zs}(t)=\left(1-2e^{-t}+e^{-2t}\right)u(t)$

系统的全响应为： $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\left(1-e^{-t}+3e^{-2t}\right)u(t)$

6.16 已知 RLC 电路如图 6-34 所示，写出描述系统的微分方程，并利用单边拉氏变换求出系统对 $v_i(t)=e^{-3t}u(t)$ 的全响应 $v_c(t)$，并用 S 域元件模型验证其结果的正确性。已知 $v_c(0^-)=1, v_c'(0^-)=2$。

解： $i(t)=C\dfrac{dv_c(t)}{dt}$ $\quad v_i(t)=Ri(t)+L\dfrac{di(t)}{dt}+v_c(t)$

所以： $v_i(t)=RC\dfrac{dv_c(t)}{dt}+LC\dfrac{d^2i(t)}{dt^2}+v_c(t)$

两边取单边拉氏变换： $V_i(s)=RC\left(sV_c(s)-v_c(0)\right)+LC\left(s^2V_c(s)-sv_c(0)-v_c'(0)\right)+V_c(s)$

代入相关参数： $V_c(s)=\dfrac{V_i(s)+\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}s\right)+1}{\dfrac{1}{2}s^2+\dfrac{3}{2}s+1}$

利用 S 域模型电路：

$$
\begin{aligned}
V_c(s)&=\frac{1}{sC}I_c(s)+\frac{1}{s}v_c(0)=\frac{1}{sC}\cdot\frac{V_i(s)-V_c(s)+Li_L(0)}{R+sL}+\frac{1}{s}v_c(0)\\
&=\frac{V_i(s)-V_c(s)+LC\left.\dfrac{dv_c(t)}{dt}\right|_{t=0}+\left(LCs+RC\right)v_c(0)}{s\left(LCs+RC\right)}\\
&=\frac{V_i(s)-V_c(s)+LCv_c'(0)+\left(LCs+RC\right)v_c(0)}{s\left(LCs+RC\right)}
\end{aligned}
$$

与上述方程相同

系统的零输入响应拉氏变换为： $V_{c,zi}(s)=\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}s\right)+1}{\dfrac{1}{2}s^2+\dfrac{3}{2}s+1}=\dfrac{4}{s+1}-\dfrac{3}{s+2}$

系统的零状态响应拉氏变换为： $V_{c,zs}(s)=\dfrac{V_i(s)}{\dfrac{1}{2}s^2+\dfrac{3}{2}s+1}$ $\quad V_i(s)=\dfrac{1}{s+3}$

$$V_{c,zs}(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

系统的零输入响应： $v_{c,zi}(t)=\left(4e^{-t}-3e^{-2t}\right)u(t)$

系统的零状态响应：$v_{c,zs}(t)=\left(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t}\right)u(t)$

系统的全响应：$v_c(t)=v_{c,zi}(t)+v_{c,zs}(t)=\left(5e^{-t}-5e^{-2t}+e^{-3t}\right)u(t)$

6.17 已知某系统函数 H(s)的极点位于 s=-3 处，零点在 s=-a，H∞=1，该系统的阶跃响应中包含一项为 k_1e^{-3t}，若 a 从 0 变到 5，问响应的 k_1 如何变化？

解：由已知条件知：$H(s)=\dfrac{k(s+a)}{s+3}$

由 $H_\infty=\left.\dfrac{k(s+a)}{s+3}\right|_{s=\infty}=k=1$，得 $H(s)=\dfrac{s+a}{s+3}$

系统阶跃响应的位氏变换为：$Y(s)=H(s)\cdot\dfrac{1}{s}=\dfrac{s+a}{s(s+3)}=\dfrac{\frac{a}{3}}{s}-\dfrac{\frac{a-3}{3}}{s+3}$

其反变换 $y(t)=\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{a-3}{3}e^{-3t}\right)u(t)$，因已知含 k_1e^{-3t}，故：$k_1=-\dfrac{a-3}{3}$

易知：当 a 从 0 变到 5 时，k_1 从 1 变到-2/3

6.18 根据响应的零极点图，确定下列每个拉氏变换相应系统的频率响应。

（1） $H_1(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s+3)}$ $\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$

（2） $H_1(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s+1}$， $\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$

解：（1） 易知 $H_1(j\omega)=\dfrac{1}{(j\omega+2)(j\omega+3)}$

当 $\omega=0$ $\quad H_1(j\omega)$ 的模 1/6， $H_1(j\omega)$ 的相位：0

当 $\omega\to\infty$ $\quad H_1(j\omega)$ 的模 0， $H_1(j\omega)$ 的相位：-180°

所以，该系统为低通系统

（2） $H_2(s)=\dfrac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2+j2\omega+1}=\dfrac{-\omega^2}{1-\omega^2+j2\omega}$

当 $\omega=0$ $\quad H_1(j\omega)$ 的模 0， $H_1(j\omega)$ 的相位：-0°

当 $\omega\to\infty$ $\quad H_1(j\omega)$ 的模 1， $H_1(j\omega)$ 的相位：180°

所以，该系统为高通系统

6.19 已知 LTI 因果系统的输入 $x(t)=e^{-3t}u(t)$，单位冲激响应为 $h(t)=e^{-t}u(t)$，试分别用时域分析法和频域分析法求出系统的响应 y(t)。

解：（1） 时域分析法：即卷积法求系统响应

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}e^{-3\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\left.\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right|_{-\infty}^{t}=\left(\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$$

（2）复频域分析法

$$x(t)=e^{-3t}u(t)\quad\stackrel{L}{\longleftrightarrow}\quad X(s)=\frac{1}{s+3}\qquad h(t)=e^{-t}u(t)\quad\stackrel{L}{\longleftrightarrow}\quad H(s)=\frac{1}{s+1}$$

所以：$Y(s)=H(s)X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{s+1}-\dfrac{\frac{1}{2}}{s+3}$

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$$

6.20 某 LTI 系统的零极点如图 6-35 所示，指出与该极零点分布有关的所有可能的收敛域，并对每一个收敛域确定系统的稳定性、因果性。

解：(a) 图略

ROC：Re{s}>-1 ，因果，稳定

ROC：Re{s}<-2，非因果，不稳定

ROC：-2<Re{s}<-1，非因果，不稳定

(b)

ROC：Re{s}>1 ，因果，不稳定

ROC：-1<Re{s}<1 ，非因果，稳定

ROC：-2<Re{s}<-1，非因果，不稳定

ROC：Re{s}<-2，非因果，不稳定

6.21 已知某 LTI 系统，当输入 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 时，零状态响应 $y_{zs}(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+2e^{-3t}$，求该系统的 h(t)，H(s)，并写出描述该系统的微分方程式。

解：因为输入 $x(t)=e^{-t}u(t)\stackrel{L}{\longleftrightarrow}X(s)=\dfrac{1}{s+1}$

零状态响应 $y_{zs}(t)=\dfrac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+2e^{-3t}\stackrel{L}{\longleftrightarrow}Y_{zs}(s)=\dfrac{\frac{1}{2}}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{2}{s+3}=\dfrac{3s^2+9s+8}{2(s+1)(s+2)(s+3)}$

所以系统函数：$H(s)=\dfrac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\dfrac{3s^2+9s+8}{2(s+2)(s+3)}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{4}{s+3}$

单位冲激响应：$h(t)=\dfrac{3}{2}\delta(t)+e^{-2t}u(t)-4e^{-3t}u(t)$

描述该系统的微分方程：$2y''+10y'+12y=3x''+9x'+8x$

6.22 已知某系统的单位阶跃响应 $s(t)=(1-e^{-2t})u(t)$，求输出响应 $y(t)=(-e^{-2t}+e^{-t})u(t)$ 时的输入信号。

解：因为单位阶跃输入的拉氏变换为：$x_1(t)=u(t)\stackrel{L}{\longleftrightarrow}X_1(s)=\dfrac{1}{s}$

已知单位阶跃响应的拉氏变换：$s(t)=(1-e^{-2t})u(t)\xleftrightarrow{L}S(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}=\frac{2}{s(s+2)}$

所以系统函数为：$H(s)=\frac{S(s)}{X_1(s)}=\frac{2}{s+2}$

对已知的输出 $y(t)=(-e^{-2t}+e^{-t})u(t)$ 进行拉氏变换：$Y(s)=\frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$

由系统函数的概念，对应的输入信号的拉氏变换为：$X(s)=\frac{Y(s)}{H(s)}=\frac{1}{2(s+1)}$

所以，对应的输入为：$x(t)=\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$

6.23 已知单边拉氏变换：$X(s)=\frac{s^2-3}{s+2}$，求其反变换 $x(t)$。

解：$X(s)=\frac{s^2-3}{s+2}=\frac{(s^2-4)+1}{s+2}=s-2+\frac{1}{s+2}$

所以反变换为：$x(t)=\delta'(t)-2\delta(t)+e^{-2t}u(t)$

6.24 确定下列各信号的单边拉氏变换，并给出相应的收敛域。

(1) $x(t)=e^{-2t}u(t+1)$　　(2) $x(t)=\delta(t+1)+\delta(t)+e^{-2(t+3)}u(t+1)$

(3) $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-4t}u(t)$　　(4) $x(t)=\frac{1}{t}(1-e^{-at})$

解：(1) 下面均从单边拉氏变换的定义出发求（对简单的情况，也可直接求，如（3））

$$X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-2t}u(t+1)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-2t}e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-(s+2)t}}{-(s+2)}\right|_0^\infty=\frac{1}{s+2}$$

ROC：Re{s}>-2

(2)

$$X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty\left(\delta(t+1)+\delta(t)+e^{-2(t+3)}u(t+1)\right)e^{-st}dt$$

$$=1+\int_0^\infty e^{-2(t+3)}e^{-st}dt=1+e^{-6}\left.\frac{e^{-(s+2)t}}{-(s+2)}\right|_0^\infty=1+\frac{e^{-6}}{s+2}$$

ROC：Re{s}>-2

(3)

$$X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty\left(e^{-2t}u(t)+e^{-4t}u(t)\right)e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+4}=\frac{2s+6}{(s+2)(s+4)}$$

ROC：Re{s}>-2

(4) $X(s)=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty\frac{1}{t}\left(1-e^{-at}\right)e^{-st}dt$

应用 S 域的微分性质：$\frac{d}{ds}X(s)=-tx(t)$

$$X'(s)=\int_0^{\infty}-\left(1-e^{-at}\right)e^{-st}dt=-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)$$

$$X(s)=-\left(\ln s-\ln(s+a)\right)=-\ln\frac{s}{s+a}$$

6.25 如图 6-36 所示反馈系统，试求

（1） $H(s)=\dfrac{V_2(s)}{V_1(s)}$

（2）K 满足什么条件时系统稳定

（3）在临界稳定条件下，求系统的 h(t)

解：(1)

$E(s)=V_1(s)+V_2(s)$

$V_2(s)=\dfrac{Ks}{s^2+4s+4}E(s)$ 所以： $H(s)=\dfrac{V_2(s)}{V_1(s)}=\dfrac{Ks}{s^2+(4-K)s+4}$

（2）系统稳定，则系统的频率响应 $H(j\omega)$ 存在，即 H(s)的收敛域包含虚轴

也即 H(s)的极点均在 S 平面的左半平面

令： $s^2+(4-K)s+4=0$ $\quad s_{1,2}=\dfrac{-(4-K)\pm\sqrt{(4-K)^2-16}}{2}$

H(s)的收敛域 ROC: Re{s1}>max(Re{s1},Re{s2})

所以： $K\le 4$

（3）当 H(s)的极点落在 jw 轴上时，系统临界稳定，易知，此时 K=4

$$H(s)=\frac{4s}{s^2+4}\xleftrightarrow{L^{-1}}h(t)=4\cos 2tu(t)$$

于慧敏主编<信号与系统>(P257-260)第六章 6.1-6.9 习题解答

6.1 确定下列函数的拉氏变换收敛域及零极点图

(1) $e^{at}u(t)$ a>0 (2) $e^{-b|t|}$ b>0 (3) $e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)$ (4) $u(t-3)$

(5) $e^{3t}u(-t)+e^{5t}u(-t)$ (6) $\delta(t-t_0)$ (7) $\delta(t)+u(t)$ (8) $u(t-1)-u(t-2)$

解：(1) $e^{at}u(t)\xleftrightarrow{L}\dfrac{1}{s-a}$ 右边信号，ROC 为 Re{s}>a

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{at}u(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{at}e^{-st}dt=-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{s-a}$$ ROC 为 Re{s}>a

(2) $e^{-b|t|}\xleftrightarrow{L}\dfrac{2b}{s^2-b^2}$ 双边信号，ROC：-b < Re{s}< b

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-b|t|}e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{bt}e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-bt}e^{-st}dt=-\frac{e^{-(s-b)t}}{s-b}\bigg|_{-\infty}^{0}-\frac{e^{-(s+b)t}}{s+b}\bigg|_0^{\infty}=\frac{2b}{s^2-b^2}$$

第一项积分的收敛域为 Re{s}< b，第二项积分的收敛域为 Re{s}>-b

所以 ROC：-b < Re{s}< b

(3) $e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)\xleftrightarrow{L}\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s+2}=\dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$ 右边信号，ROC 为 Re{s}>-1

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-t}+e^{-2t})u(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t}e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-2t}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{e^{-(s+1)t}}{s+1}\bigg|_0^{\infty}-\frac{e^{-(s+2)t}}{s+2}\bigg|_0^{\infty}=\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

第一项积分的收敛域为 Re{s}>-1，第二项积分的收敛域为 Re{s}>-2

所以 ROC： Re{s}>-1

(4) $u(t-3)\xleftrightarrow{L}\dfrac{e^{-3s}}{s}$ 右边信号，ROC 为 Re{s}>0

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t-3)e^{-st}dt=\int_{3}^{\infty}e^{-st}dt=-\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_3^{\infty}=\frac{e^{-3s}}{s}$$ ROC 为 Re{s}>0

也可以先求出 u(t) 的拉氏变换，再运用时移性质，得到 u(t-3)的拉氏变换

(5) $e^{-3t}u(t)\xleftrightarrow{L}\dfrac{1}{s+3}$ $x(at)\xleftrightarrow{L}\dfrac{1}{|a|}X(\dfrac{s}{a})$ $\Rightarrow$ $e^{3t}u(-t)\xleftrightarrow{L}\dfrac{1}{-s+3}=-\dfrac{1}{s-3}$

$e^{3t}u(-t)+e^{5t}u(-t)\xleftrightarrow{L}-\dfrac{1}{s-3}-\dfrac{1}{s-5}=-\dfrac{2s-8}{(s-3)(s-5)}$ 左边信号，ROC 为 Re{s}<3

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{3t}+e^{5t})u(-t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{3t}e^{-st}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{5t}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{e^{-(s-3)t}}{s-3}\bigg|_{-\infty}^{0}-\frac{e^{-(s-5)t}}{s-5}\bigg|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-5}=-\frac{2s-8}{(s-3)(s-5)}$$

第一项积分的收敛域为 Re{s}<3，第二项积分的收敛域为 Re{s}<5

所以 ROC 为 Re{s}<3

（6）由时移性质可直接得：$\delta(t-t_0)\xleftrightarrow{L}e^{-t_0 s}$ 有限信号 ROC 为 R（整个 S 平面）

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-st}dt=e^{-st}\Big|_{t=t_0}=e^{-st_0}$$

（7）$\delta(t)+u(t)\xleftrightarrow{L}1+\frac{1}{s}=\frac{s+1}{s}$ 右边信号，ROC 为 Re{s}>0

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt+\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-st}dt=e^{-st}\Big|_{t=0}+\int_{0}^{\infty}e^{-st}dt=1-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{0}^{\infty}=1+\frac{1}{s}=\frac{s+1}{s}$$

第二项积分的收敛域为 Re{s}>0

所以 ROC 为 Re{s}>0

（8）$u(t-1)-u(t-2)\xleftrightarrow{L}\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}$ 有限信号 ROC 为 R

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}(u(t-1)-u(t-2))e^{-st}dt=\int_{1}^{2}e^{-st}dt=-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{1}^{2}=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}$$

6.2 对下列每个拉氏变换及其收敛域，确定时间函数 x(t)

（1）$\frac{1}{s^2+4}$ Re{s}>0 （2）$\frac{1}{s+1}$ Re{s}>-1 （3）$\frac{s}{s^2+25}$ Re{s}>0

（4）$\frac{s+1}{s^2+5s+6}$ Re{s}<-3 （5）$\frac{s+1}{s^2+5s+6}$ -3<Re{s}<-2

（6）$\frac{s^2-s+1}{s^2+2s+1}$ Re{s}>-1 （7）$\frac{s+1}{s(s^2+3s+2)}$ -1<Re{s}<0

（8）$\frac{s+2}{(s+2)^2+9}$ Re{s}<-2

解：（1）因为 $\sin\omega_0 t\cdot u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ $\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$ ，所以是右边信号

$$\frac{1}{s^2+4}=\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>0\xleftrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{2}\sin 2tu(t)$$

（2）因为 $e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+a}$ $\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$，所以是右边信号

$$\frac{1}{s+1}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1\xleftrightarrow{L^{-1}}e^{-t}u(t)$$

（3）因为 $\cos\omega_0 t\cdot u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$ $\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$ ，所以

$$\frac{1}{s^2+25}=\frac{s}{s^2+5^2}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>0\xleftrightarrow{L^{-1}}\cos 5tu(t)$$

(4) 因为 $-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{1}{s+a}$ $\quad Re\{s\}<-a$，所以，原信号是左边信号

$$\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{2}{s+3}-\frac{1}{s+2} \qquad Re\{s\}<-3 \xleftrightarrow{L^{-1}} -2e^{-3t}u(-t)+e^{-2t}u(-t)$$

(5) $\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}=\dfrac{2}{s+3}-\dfrac{1}{s+2}$ $\quad$ -3<Re{s}<-2，所以，原信号是双边信号

故：$\dfrac{2}{s+3}$ $\quad Re\{s\}>-3 \xleftrightarrow{L^{-1}} 2e^{-3t}u(t) \qquad \dfrac{1}{s+2} \quad Re\{s\}<-2 \xleftrightarrow{L^{-1}} -e^{-2t}u(-t)$

$$\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{2}{s+3}-\frac{1}{s+2} \quad -3<Re\{s\}<-2 \xleftrightarrow{L^{-1}} 2e^{-3t}u(t)+e^{-2t}u(-t)$$

(6) $\dfrac{s^2-s+1}{s^2+2s+1}=1+\dfrac{-3s}{s^2+2s+1}=1-\dfrac{3}{s+1}+\dfrac{3}{(s+1)^2}$ $\quad$ Re{s}>-1

因为 $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{1}{s+a} \quad Re\{s\}>-a \qquad te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{1}{(s+a)^2} \quad Re\{s\}>-a$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1$$

所以：$\dfrac{s^2-s+1}{s^2+2s+1} \quad Re\{s\}>-1 \xleftrightarrow{L} \delta(t)-3e^{-t}u(t)+3te^{-t}u(t)$

(8) 因为 $e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \quad Re\{s\}>-a$， $x(at) \xleftrightarrow{L} \dfrac{1}{|a|}X(\dfrac{s}{a})$ $\quad$ ROC: Ra

所以：$e^{at}\cos(-\omega_0 t)\cdot u(-t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{-s+a}{(-s+a)^2+\omega_0^2} \quad Re\{s\}<a$

$$\frac{s+2}{(s+2)^2+9} \quad Re\{s\}<-2 \xleftrightarrow{L^{-1}} -e^{-2t}\cos 3t\cdot u(-t)$$

6.3 信号 $x(t)=e^{-5t}u(t)+e^{-\beta t}u(t)$ 的拉氏变换为 X(s)，若 X(s)的 ROC 是 Re{s}>-3，对β的实部和虚部应附加什么限制？

解：因为 $x(t)=e^{-5t}u(t)+e^{-\beta t}u(t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{1}{s+5}+\dfrac{1}{s+\beta}$

其 ROC 为 Re{s}>max(-5, Re{-β})= -3

所以：Re{β}=3，而以对虚部 Im{β}没有限制，可取任意值

6.4 设 x(t)是某信号，它有一个有理的拉氏变换共有两个极点，分别是 s= -1，s= -3，若 $g(t)=e^{2t}x(t)$，其傅氏变换 G(jω)收敛，试问 x(t)是什么信号？右边？左边？双边？

解：假设 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$，ROC＝R1

则 g(t)的拉氏变换为： $g(t)=e^{2t}x(t)\xleftrightarrow{L}X(s-2)$ ROC＝R1＋2

g(t)的傅氏变换 G(jω)收敛，表示当 s= jω 时，G(s)是收敛的，即 G(s)的收敛域包含 jω 轴。所以：

若 x(t)是左边信号，则 X(s)的 ROC：Re{s}<-3，G(s)的 ROC：Re{s}<-1，没有包含 jω 轴。所以 x(t)不是左边信号。

若 x(t)是右边信号，则 X(s)的 ROC：Re{s}>-1，G(s)的 ROC：Re{s}>1，没有包含 jω 轴。所以 x(t)不是右边信号。

若 x(t)是双边信号，则 X(s)的 ROC：-3<Re{s}<-1，G(s)的 ROC：-1<Re{s}<1，包含 jω 轴。所以 x(t)是双边信号。

6.5 求图 6-31 中各信号的拉氏变换

解：(1) $x_1(t)=Au(t)-\frac{A}{\tau}tu(t)+\frac{A}{\tau}(t-\tau)u(t-\tau)$

因为：$u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s}$ $\quad -tx(t)\xleftrightarrow{L}\frac{dX(s)}{ds}$ $\quad x(t-\tau)\xleftrightarrow{L}e^{-\tau s}X(s)$

所以：$x_1(t)\xleftrightarrow{L}\frac{A}{s}+\frac{A}{\tau}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds}+\frac{A}{\tau}\left\{-e^{-\tau s}\frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds}\right\}=\frac{A}{s}-\frac{A}{\tau}\left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s^2}\right)$

若用直接法：

$$X_1(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)e^{-st}dt=\int_0^{\tau}(A-\frac{A}{\tau}t)e^{-st}dt=\frac{A}{s}-\frac{Ae^{-\tau s}}{s}-\frac{A}{\tau}\left\{-\frac{\tau e^{-\tau s}}{s}-\frac{e^{-\tau s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$=\frac{A}{s}-\frac{A}{\tau}\cdot\frac{1-e^{-\tau s}}{s^2}$$

(2) $x_2(t)=tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)$

则：$x_2(t)\xleftrightarrow{L}X_2(s)=-\frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds}+2e^{-s}\frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds}-e^{-2s}\frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds}=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}=\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}$

或者用直接法：

$$X_2(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x_2(t)e^{-st}dt=\int_0^1 te^{-st}dt+\int_1^2(-t+2)e^{-st}dt$$

$$=-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}-1}{s^2}+\frac{2e^{-2s}-e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s^2}-\frac{2e^{-2s}-2e^{-s}}{s}$$

$$=\frac{e^{-2s}-2e^{-s}+1}{s^2}=\frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s^2}$$

(3) $x_3(t)=u(t)+u(t-1)-u(t-2)-u(t-3)$

所以：$x_3(t)\xleftrightarrow{L}X_3(s)=\frac{1}{s}\left(1+e^{-s}-e^{-2s}-e^{-3s}\right)$

或者用直接法：

$$X_3(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x_3(t)e^{-st}dt=\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^2 2e^{-st}dt+\int_2^3 e^{-st}dt$$
$$=-\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^1-\frac{2e^{-st}}{s}\bigg|_1^2-\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{20}^3=\frac{1}{s}(1+e^{-s}-e^{-2s}-e^{-3s})$$

(4) $x_4(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$

所以：$x_4(t)\xleftrightarrow{L}X_4(s)=\frac{1}{s}\left(1-2e^{-s}+e^{-2s}\right)$

或者用直接法：

$$X_4(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x_4(t)e^{-st}dt=\int_0^1 e^{-st}dt-\int_1^2 e^{-st}dt$$
$$=-\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^1+\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_1^2=\frac{1}{s}(1-2e^{-s}+e^{-2s})$$

(5) $x_5(t)=\sin t\cdot u(t)+\sin(t-\pi)\cdot u(t-\pi)$

所以：$x_5(t)\xleftrightarrow{L}X_5(s)=\dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

或者用直接法(需要用到分部积分)：

$$X_5(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x_5(t)e^{-st}dt=\int_0^{\pi}\sin te^{-st}dt==\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

(6) $x_6(t)=2u(t-1)-2u(t-2)+2u(t-3)-2u(t-4)$

所以：$x_6(t)\xleftrightarrow{L}X_6(s)=\dfrac{2}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s}-e^{-4s}\right)$

或者用直接法：

$$X_6(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x_6(t)e^{-st}dt=2\int_1^2 e^{-st}dt+2\int_{3`}^4 e^{-st}dt=\frac{2}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s}-e^{-4s}\right)$$

6.6 设 y(t)=x(t)+Ax(-t)，$x(t)=Be^{-t}u(t)$,y(t)的拉氏变换为 $Y(s)=\dfrac{s}{s^2-1}$，-1<Re{s}<1，试确定 A 和 B 的值。

解：由已知条件知，y(t)为双边信号

因为 $x(t)=Be^{-t}u(t)\xleftrightarrow{L}X(s)=\dfrac{B}{s+1}$ ROC：Re{s}>-1

y(t)=x(t)+Ax(-t)， $Y(s)=X(s)+AX(-s)=\dfrac{B}{s+1}+\dfrac{AB}{1-s}=\dfrac{(B-AB)s-(B+AB)}{s^2-1}=\dfrac{s}{s^2-1}$

故：$A=-1$ $B=\dfrac{1}{2}$

6.7 有两个右边信号 x(t)、y(t)满足以下微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2y(t)+\delta(t)\\ \dfrac{dy}{dt}=2x(t)\end{cases}$$ ，试求 X(s)、Y(s)及其收敛域

解：等式两边取拉氏变换：

$$\begin{cases}sX(s)=-2Y(s)+1\\ sY(s)=2X(s)\end{cases}$$ ，解得 $$X(s)=\frac{s}{s^2+4}\qquad ROC:\mathrm{Re}\{s\}>0$$ $$Y(s)=\frac{2}{s^2+4}\qquad ROC:\mathrm{Re}\{s\}>0$$

6.8 求 P258 图 6-32 所示单边正弦半波整流和全波整流周期信号的拉氏变换

解

（1） 第一个周期的拉氏变换为：

$$x_{11}(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\left(u(t)-u(t-\frac{T}{2})\right)\xleftrightarrow{L}X_{11}(s)=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left(1+e^{-\frac{T}{2}}\right)$$

（可以通过直接计算得到上式：需要用到分部积分）

$$X_{11}(s)=\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}e^{-st}dt=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left(1+e^{-\frac{T}{2}}\right)$$

所以 $$X_1(s)=X_{11}(s)\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\cdot\left(1+e^{-\frac{T}{2}}\right)\cdot\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{T}{2}s}}$$

（2） $x_2(t)=x_1(t)+x_1(t-\frac{T}{2})$

所以： $$X_2(s)=(1+e^{-\frac{T}{2}s})X_1(s)=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\cdot\frac{(1+e^{-\frac{T}{2}s})}{1-e^{-\frac{T}{2}s}}$$

6.9 求 P269 图 6-33 所示信号的拉氏变换

解：(1) $x_1(t)=e^{-t}\left(u(t)-2u(t-1)+2u(t-2)-...\right)$

所以： $$X_1(s)=\frac{1}{s+1}\left(1-2e^{-(s+1)}+2e^{-2(s+1)}-\cdots\right)=\frac{1}{s+1}\cdot\left(-1+\frac{2}{1+e^{-(s+1)}}\right)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1-e^{-(s+1)}}{1+e^{-(s+1)}}$$

（2） x_2 为周期为 2 的周期函数，一个周期内的拉氏变换为：

$$
\begin{aligned}
X_{21}(s) &= \int_0^2 x_2(t)e^{-st}\,dt = \int_0^1 e^{-t}e^{-st}\,dt - \int_1^2 e^{-(t-1)}e^{-st}\,dt \\
&= -\left.\frac{e^{-(s+1)t}}{s+1}\right|_0^1 + e\left.\frac{e^{-(s+1)t}}{s+1}\right|_1^2 \\
&= \frac{1-e^{-(s+1)}+e^{-(2s+1)}-e^{-s}}{s+1} = \frac{(1-e^{-s})(1-e^{-(s+1)})}{s+1}
\end{aligned}
$$

$$
X_2(s) = X_{21}(s)\left.\frac{1}{1-e^{-Ts}}\right|_{T=2} = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1-e^{-(s+1)}}{1+e^{-s}}
$$

于慧敏主编<信号与系统>(P288-291)第七章 7.1-7.10 习题解答

7.1 求下列序列的 Z 变换，并确定其收敛域。

（1） $x[n]=\{x[-2],x[-1],x[0],x[1],x[2]\}=\{-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\}$；

（2） $x[n]=a^n[\cos(\omega_0 n)+\sin(\omega_0 n)]\cdot u[n]$；

（3） $x[n]=\begin{cases}(\frac{1}{4})^n, n\geq 0\\ (\frac{1}{2})^{-n}, n<0\end{cases}$；

（4） $x[n]=(\frac{1}{3})^{-n}u[n]$；

（5） $x[n]=(\frac{1}{3})^n u[-n]$；

（6） $x[n]=\frac{1}{2}nu[-n]$；

（7） $x[n]=ne^{an}u[n]$。

解：（1）直接由定义可以得：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-2}^{2}x[n]z^{-n}=-\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}z+1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\text{；}ROC:O<|z|<\infty$$

（2） $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n[\cos(\omega_0 n)+\sin(\omega_0 n)]\cdot z^{-n}$

因为（参见 P262 例 7-1） $Z[a^n u[n]]=\frac{1}{1-az^{-1}}$；$ROC:|z|>|a|$

又因（参见 P268 例 7-7）：$Z[a^n\cos(\omega_0 n)u[n]]=\frac{1-z^{-1}[a\cos\omega_0]}{1-z^{-1}[2a\cos\omega_0]+a^2z^{-2}}$； $ROC:|z|>a$

仿上：$Z[a^n\sin(\omega_0 n)u[n]]=\frac{z^{-1}[a\sin\omega_0]}{1-z^{-1}[2a\cos\omega_0]+a^2z^{-2}}$；$ROC:|z|>a$

利用线性叠加性质：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n[\cos(\omega_0 n)+\sin(\omega_0 n)]\cdot z^{-n}=\frac{1-z^{-1}a[\sin\omega_0+\cos\omega_0]}{1-z^{-1}[2a\cos\omega_0]+a^2z^{-2}}\text{；}ROC:|z|>a$$

（3）此题的 x[n]为双边序列，故可以分别按左边序列与右边序列求出它们的 Z 变换后再利用叠加原理求出总的 Z 变换

当 n≥0 时，因为（参见 P262 例 7-1） $Z[a^n u[n]]=\frac{1}{1-az^{-1}}$；这里 $a=\frac{1}{4}$

故 $$Z[(\frac{1}{4})^n u[n]]=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\text{；}ROC:|z|>\frac{1}{4}$$

当 n≤0 时，(参见 P265 例 7-3)：$(\frac{1}{2})^{-n}u[-n-1]=-[-(2)^n u[-n-1]]$

再参见 P263 例 7-2：

$$Z[(\frac{1}{2})^{-n}u[-n-1]]=-\sum_{n=-\infty}^{-1}[(-2)^n z^{-n}]=-\{\sum_{m=1}^{\infty}[(-2)^{-n}z^n]+2^0 z^0\}$$

$$=-1+\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^n=-1+\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{z}{2})^{n+1}}{1-\frac{z}{2}}=-1+\frac{2}{2-z}=-\frac{z}{z-2}=-\frac{1}{1-2z^{-1}}$$，$ROC:|z|<2$

综合上述，即可得

$$X[z]=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}\text{；}ROC:\frac{1}{4}<|z|<2$$

(4) 易知：x[n]是右边序列，故参见 P262 例 7-1 可得

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}3^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{z})^n=\frac{1}{1-3z^{-1}}\text{；}ROC:|z|>3$$

(5) x[n]是左边序列，故参见参见 P265 例 7-3：$(\frac{1}{3})^n u[-n]=-[-(\frac{1}{3})^n u[-n]]$

再参见 P263 例 7-2：

$$Z[(\frac{1}{3})^n u[-n]]=1-\sum_{n=-\infty}^{-1}[-(\frac{1}{3})^n z^n]=1-\{\sum_{m=1}^{\infty}[-(\frac{3}{z})^m]\}=1-\frac{1}{1-3z^{-1}}=\frac{-3z^{-1}}{1-3z^{-1}}$$

$ROC:|z|<3$

(6) x[n]是左边序列，$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}(\frac{1}{2}n)z^{-n}=-\sum_{m=0}^{\infty}(\frac{1}{2}m)z^m=-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}mz^m$

有多种方法可得 $\sum_{m=0}^{\infty}mz^m=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$，

故：$X(z)=-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}mz^m=-\frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=-\frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2}$；$ROC:|z|<1$

(第一种方法：直接计算

$$\sum_{m=0}^{\infty}mz^m=z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\cdots\cdots$$

$$=z^{-1}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\cdots\cdots$$

$$+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\cdots\cdots$$

$$+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\cdots\cdots$$

$$+\cdots\cdots$$

$$=z^{-1}(\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}+\cdots\cdots)=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

第二种方法：利用线性加权性质（P269 式 7-29）：

若 $x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X[z]$；则 $nx[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}-z\frac{dX[z]}{dz}$

因为：$u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{z}{z-1}$，$\sum_{m=0}^{\infty}mz^{m}=-z\frac{d}{dz}(\frac{z}{z-1})=\frac{z}{(z-1)^{2}}$

故：$X(z)=-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}mz^{m}=-\frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^{2}}$ ；$ROC:|z|<1$）

（7）利用线性加权性质（P269 式 7-29）：若 $x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X[z]$；则 $nx[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}-z\frac{dX[z]}{dz}$

因为：$e^{an}u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-e^{a}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{a}}$，$ROC:|z|>e^{a}$

故，$Z[ne^{an}u[n]]=\frac{e^{a}z}{(z-e^{a})^{2}}$ ；$ROC:|z|>e^{a}$

7.2 求下列函数的 Z 反变换：

(1) $\frac{1}{1+0.5z^{-1}}$, $|z|>0.5$ ； (2) $\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$, $|z|>0.5$ ；

(3) $\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$, $|z|>\frac{1}{2}$ ； (4) $\frac{z-a}{1-az}$, $|z|>\left|\frac{1}{a}\right|$ ；

(5) $\frac{z^{2}+z+1}{z^{2}+3z+2}$, $|z|>2$ ； (6) $\frac{z}{(z-1)(z^{2}-1)}$, $|z|>1$ ；

(7) $\frac{z^{2}-az}{(z-a)^{3}}$, $|z|>|a|$。

解：(1) 由收敛域可知，上述原信号均是右边信号

故 $x[n]=Z^{-1}[\frac{1}{1+0.5z^{-1}}]=(-0.5)^{n}u[n]$

(2) $x[n]=Z^{-1}[\frac{1}{1-0.5z^{-1}}]=(0.5)^{n}u[n]$

(3)因为 $X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=-\frac{3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

故 $x[n]=Z^{-1}[X(z)]=\{-3(-\frac{1}{4})^{n}+4((-\frac{1}{2})^{n}\}u[n]$

(4) 因为 $X(z)=\frac{z-a}{1-az}=\frac{z^{-1}-\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}$

故 $x[n]=Z^{-1}[X(z)]=(\frac{1}{a})^{n-1}u[n-1]-(\frac{1}{a})^{n+1}\}u[n]$

(5) $X(z)=\frac{z^2+z+1}{z^2+3z+2}=1-\frac{2z+1}{z^2+3z+2}=1-\frac{3}{z+2}+\frac{1}{z+1}$

故 $x[n]=Z^{-1}[X(z)]=\{\delta[n]-3(-2)^{n-1}+(-1)^{n-1}\}u[n]$

(6) 采用留数法（或部分分式法） $X(z)=\frac{z}{(z-1)(z^2-1)}=\frac{z}{(z-1)^2(z+1)}$ ；

可见有一个单极点 z= -1 和 2 个重极点 z=+1

$$x[n]=\{\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=-1}+\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=1}\}u[n]$$

$$=\{(z+1)\frac{z\cdot z^{n-1}}{(z-1)^2(z+1)}\}_{z=-1}+\frac{d}{dz}\{(z-1)^2\frac{z\cdot z^{n-1}}{(z-1)^2(z+1)}\}_{z=1}u[n]$$

$$=\{\frac{(-1)^n}{4}+\frac{2n-1}{4}\}u[n]$$

(7) 采用部分分式法（查表）或留数法（特别简单）均可求

部分分式法（查表） $X(z)=\frac{z(z-a)}{(z-a)^3}=\frac{z}{(z-a)^2}=\frac{1}{a}\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$

$$x[n]=Z^{-1}[X(z)]=na^{n-1}u[n]$$

留数法： $x[n]=\{\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=a}=\frac{d}{dz}\{(z-a)^2\frac{z\cdot z^{n-1}}{(z-a)^2}\}_{z=a}u[n]=na^{n-1}u[n]$

7.3 利用 Z 变换的性质求下列序列的 Z 变换 X（z)。

（1） $(-1)^n nu[n]$ ；(2） $(n-2)^2u[n-1]$ ；(3） $\frac{a^n}{n+1}u[n]$ ；(4） $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i$ ；

（5） $(n+1)[u[n]-u[n-3]]*[u[n]-u[n-4]]$。

解： (1) 因为 $Z[(-1)^n u[n]]=\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{z}{z+1}$ ； $ROC:|z|>1$

由线性加权性质：若 $x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X[z]$ ；则 $nx[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}-z\frac{dX[z]}{dz}$

$$Z[(-1)^n nx[n]]=-z\frac{d}{dz}(\frac{z}{z+1})=\frac{-z}{(z+1)^2}$$

（2） 法一：因为 $u[n-1]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{z-1}$ ；设 $x_1[n]=(n-1)u[n-1]$

则 $X_1(z)=\frac{z}{(z-1)^2}z^{-1}=\frac{1}{(z-1)^2}$

设 $x_2[n]=(n-1)^2u[n-1]=(n-1)x_1[n]=nx_1[n]-x_1[n]$

则 $X_2(z)=-z\dfrac{d}{dz}X_1(z)-X_1(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^3}$

因为：$x[n]=(n-2)^2u[n-1]=(n^2-4n+4)u[n-1]=x_2[n]-2x_1[n]+u[n-1]$

由线性性质：

$$X(z)=X_2(z)-2X_1(z)+Z[u[n-1]]=\frac{z+1}{(z-1)^3}-\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}=\frac{z^2-3z+4}{(z-1)^3}$$

$ROC:|z|>1$

法二：

因为 $u[n-1]\overset{z}{\longleftrightarrow}\dfrac{1}{z-1}$，故 $(n-2)^2u[n-1]=(n^2-4n+4)u[n-1]$

由线性加权性质：$Z[nu[n-1]]=-z\dfrac{d}{dz}[(\dfrac{1}{z-1})]=\dfrac{z}{(z-1)^2}$

再由线性加权性质：$Z[n^2u[n-1]]=-z\dfrac{d}{dz}[\dfrac{z}{(z-1)^2}]=\dfrac{z^2+z}{(z-1)^3}$

由线性性质，有：

$$(n-2)^2u[n-1]=(n^2-4n+4)u[n-1]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{z^2+z}{(z-1)^3}-\frac{4z}{(z-1)^2}+\frac{4}{z-1}=\frac{z^2-3z+4}{(z-1)^3}$$

$ROC:|z|>1$

(3) 法一：这题应由 z 域的积分性质求，然我们的教材上没有积分性质，可由定义求

$$Z\{\frac{a^n}{n+1}u[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n+1}z^{-n}=[1+\frac{az^{-1}}{2}+\frac{(az^{-1})^2}{3}+\frac{(az^{-1})^3}{4}+\cdots+\frac{(az^{-1})^{n-1}}{n}+\cdots]$$

$$=-\frac{1}{az^{-1}}\{-[az^{-1}+\frac{(az^{-1})^2}{2}+\frac{(az^{-1})^3}{3}+\frac{(az^{-1})^4}{4}+\cdots+\frac{(az^{-1})^n}{n}+\cdots]\}$$

$$=-\frac{\ln(1-az^{-1})}{az^{-1}}=\frac{z}{a}\ln(\frac{z}{z-a});\qquad |az^{-1}|<1;|z|>a$$

法二：因为 $a^nu[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\dfrac{z}{z-a};\qquad ROC:|z|>a$

积分性质：$Z[\dfrac{1}{n+a}x[n]]=-z^a\displaystyle\int_{-\infty}^{z}\frac{X(v)}{v^{a+1}}dv$；$Z[\dfrac{1}{n}x[n]]=-\displaystyle\int_{-\infty}^{z}X(v)v^{-1}dv$

$$Z[\frac{a^n}{n+1}u[n]]=z\int_z^{\infty}\frac{\frac{v}{v-a}}{v^2}dv=z\int_z^{\infty}\frac{1}{v(v-a)}=\frac{z}{a}\ln(\frac{z}{z-a})\ ;\ |z|>a$$

(4) 因为 $Z[(-1)^nu[n]]=\dfrac{1}{1+z^{-1}}$，$|z|>1$

由累加性质：$Z\{\sum_{i=-\infty}^{k} x[k]\}=\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$

故 $Z\{\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\}=\frac{1}{1-z^{-1}}\cdot\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{z^2}{z^2-1}$ ；$ROC:\quad |z|>1$

（5） $(n+1)[u[n]-u[n-3]]*[u[n]-u[n-4]]$

设：$x_1[n]=(n+1)[u[n]-u[n-3]]$ ；$x_2[n]=u[n]-u[n-4]$

则：$X_1(z)=Z\{x_1[n]\}=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}-\frac{3z-2}{(z-1)^2z^2}-\frac{1}{(z-1)z^2}=\frac{z^3+z^2-1}{(z-1)^2z^2}$

$$X_2(z)=Z\{x_2[n]\}=\frac{z-z^{-3}}{z-1}=\frac{(z^2+1)(z+1)}{z^3}$$

根据时域卷积性质：$X(z)=X_1(z)X_1(z)=\frac{(z^3+z^2-1)(z^2+1)(z+1)}{(z-1)z^5}$ ；$ROC:\quad |z|>1$

7.4 用长除法、留数定理、部分分式法求以下 X(z)的 Z 反变换。

(1) $\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}},\quad |z|>\frac{1}{2}$ ；(2) $\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},\quad |z|<\frac{1}{4}$

(3) $\frac{z-a}{1-az},\quad |z|>\left|\frac{1}{a}\right|$。

解：(1) 由收敛域知，原序列为左边序列，因 $\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

法一：长除法：因为 $\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}+\frac{1}{16}z^{-4}-\cdots$

$$x[n]=\{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},+\frac{1}{16}-\cdots\cdots\}=(-\frac{1}{2})^n u[n]$$

法二：留数定理：

$$x[n]=\{\mathrm{Res}\{X(z)z^{n-1}\}_{z=-\frac{1}{2}}u[n]=\{(z+\frac{1}{2})\frac{z\cdot z^{n-1}}{z+\frac{1}{2}}\}_{z=-\frac{1}{2}}=(-\frac{1}{2})^n u[n]$$

法三：部分分式法：因 $\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$

查表直接可得 $x[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n]$

（2）由收敛域知，原序列为右边序列。因 $X(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=1+\dfrac{7}{1-4z}$

法一：长除法：因为 $\dfrac{7}{1-4z}=7+7\cdot 4z+7\cdot 4^2z^2+7\cdot 4^3z^3+7\cdot 4^4z^4+\cdots$

$$X(z)=1+\frac{7}{1-4z}=8+7\cdot 4z+7\cdot 4^2z^2+7\cdot 4^3z^3+7\cdot 4^4z^4+\cdots$$

故：$x[n]=\{8,7\cdot 4,7\cdot 4^2,7\cdot 4^3,7\cdot 4^4,\cdots 7\cdot 4^n\cdots\}u[-n-1]$

法二：留数定理：

$$x[n]=\{-\mathrm{Res}\{X(z)z^{n-1}\ |_{z=\frac{1}{4}}-\mathrm{Res}\{X(z)z^{-1}\ |_{z=0}\}u[-n-1]$$

$$=\{-(z-\frac{1}{4})\frac{z^{n-1}(z-2)}{z-\frac{1}{4}}\ |_{z=\frac{1}{4}}\}u[-n-1]-\frac{z(z-2)}{z(z-\frac{1}{4})}\ |_{z=0}$$

$$=8\delta[n]+7(\frac{1}{4})^n u[-n-1]$$

法三：部分分式法：$X(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=\dfrac{4z-8}{4z-1}=\dfrac{8-4z}{1-4Z}=8+\dfrac{28z}{1-4Z}$

因此可得：

$$x[n]=Z^{-1}\{8+\frac{28z}{1-4z}\}=Z^{-1}\{8-\frac{7}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\}=8\delta[n]+7(\frac{1}{4})^n]u[-n-1]$$

（3）由收敛域知，原序列为右边序列。因 $X(z)=\dfrac{z-a}{1-az}=\dfrac{z}{1-az}-\dfrac{a}{1-az}$

法一：长除法：$X_1(z)=\dfrac{z}{1-az}=-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}z^{-1}-\dfrac{1}{a^3}z^{-2}-\dfrac{1}{a^4}z^{-3}-\cdots\cdots=-(\dfrac{1}{a})^{n+1}z^{-n}$

$$X_2(z)=-\frac{a}{1-az}=z^{-1}+\frac{1}{a}z^{-2}+\frac{1}{a^2}z^{-3}+\frac{1}{a^3}z^{-4}+\cdots\cdots=(\frac{1}{a})^{n-1}z^{-n}$$

故：$x[n]==(\frac{1}{a})^{n-1}u[n-1]-(\frac{1}{a})^{n+1}u[n]$

法二：留数定理：

$$x[n]=\{\mathrm{Res}\{X(z)z^{n-1}\}_{z=\frac{1}{a}}=\{(z-\frac{1}{a})\frac{(a-z)\cdot z^{n-1}}{a(z-\frac{1}{a})}\}_{z=\frac{1}{a}}$$

$$=\frac{1}{a}(a-\frac{1}{a})(\frac{1}{a})^{n-1}=(\frac{1}{a})^{n-1}u[n-1]-(\frac{1}{a})^{n+1}u[n]$$

法三：部分分式法：因为 $X(z)=\dfrac{z-a}{1-az}=\dfrac{z}{1-az}-\dfrac{a}{1-az}=-\dfrac{1}{a}(\dfrac{z}{z-a^{-1}})+(\dfrac{z^{-1}}{z-a^{-1}})$

故查表可得：$x[n]=Z^{-1}\{(\frac{z^{-1}}{z-a^{-1}})-\frac{1}{a}(\frac{z}{z-a^{-1}})\}=(\frac{1}{a})^{n-1}u[n-1]-(\frac{1}{a})^{n+1}u[n]$

7.5．先对 X(z)微分，并使用 Z 变换的适当性质，确定下列每一个 Z 变换的序列。

（1） $X(z)=\lg(1-2z),\quad |z|<\frac{1}{2}$；（2） $X(z)=\lg(1-\frac{1}{2}z^{-1}),\quad |z|>\frac{1}{2}$

解：（1） 由收敛域知，X(z)所对应的 Z 变换序列为左边序列，且$|z|<\frac{1}{2},|2z|<1$

$$\frac{d}{dz}[X(z)]=\frac{-2}{1-2z}\ ;\ -z\frac{d}{dz}[X(z)]=\frac{2z}{1-2z}=-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

由线性加权性质：$nx[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}-z\frac{d}{dz}X(z)=-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

由 P272 表 7-2：$nx[n]=(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$

故：$x[n]=\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$

法二：因
$$X(z)=\lg(1-2z)=-(2z+\frac{(2z)^2}{2}+\frac{(2z)^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{(2z)^n}{n}+\cdots\cdots)$$
$$=-\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(2^{-1}z^{-1})^{-k}}{(-k)}=\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(z^{-1})^{-k}}{k\cdot 2^k}$$

$$-z\frac{d}{dz}X(z)=-z\frac{d}{dz}[\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(z^{-1})^{-k}}{k\cdot 2^k}]=-\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-k}(z^{-1})^{-k}\ ;\ |z|<\frac{1}{2},|2z|<1$$

由线性加权性质：$nx[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}-z\frac{d}{dz}X(z)=-\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-k}(z^{-1})^{-k}$

故：$x[n]=\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$

（2） 由收敛域知，X(z)所对应的 Z 变换序列为右边序列

法一：$\frac{d}{dz}[X(z)]=\frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ;\ -z\frac{d}{dz}[X(z)]=-\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ;\ |z|>\frac{1}{2}$

因为：$(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^n u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ;\ |z|>\frac{1}{2}$

结合时移性质：$(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \dfrac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$；$|z|>\frac{1}{2}$

故：$x[n]=-\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^{n}u[n-1]$

法二：对原式进行泰勒展开：$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$

$$X(z)=\lg(1-\frac{1}{2}z^{-1})=-\{\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z^{-1})^{2}+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}z^{-1})^{3}+\cdots+\frac{1}{n}(\frac{1}{2}z^{-1})^{n}+\cdots\}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\frac{1}{2}z^{-1})^{k}$$

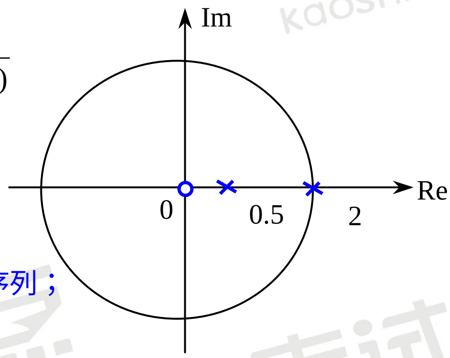
$-z\frac{d}{dz}X(z)=-z\frac{d}{dz}[\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2z)^{-k}}{k}]=-\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{k}z^{-k}$；（注意到下式 n=0 处无定义）

$x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}-\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^{n}u[n-1]$

7.6 画出 $X(z)=\dfrac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$ 的零极点图，在下列三种收敛域下，哪种情况对应左边序列？右边序列？双边序列？并求各对应序列。

（1）$|z|>2$；　（2）$|z|<0.5$；　（3）$0.5<|z|<2$。

解：因为 $X(z)=\dfrac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}=-\dfrac{3}{2}\dfrac{z}{(z-2)(z-0.5)}$



故可画出其零极点图如右图所示

进一步还可画出题目所给出的三种收敛域

由已知的收敛域，可知：

（1）$|z|>2$ 为右边序列；（2）$|z|<0.5$ 为左边序列；

（3）$0.5<|z|<2$ 为双边序列。

（1）$|z|>2$ 对应的右边序列：

因为 $\dfrac{X(z)}{z}=-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(z-2)(z-0.5)}=\dfrac{1}{z-0.5}-\dfrac{1}{z-2}$；$X(z)=\dfrac{z}{z-0.5}-\dfrac{z}{z-2}$；

故：$x[n]=Z^{-1}[X(z)]=Z^{-1}\{\dfrac{z}{z-0.5}-\dfrac{z}{z-2}\}=[(0.5)^{n}-2^{n}]u[n]$

（2）$|z|<0.5$ 对应的左边序列

$$x[n]=Z^{-1}\{\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z-2}\}=[-0.5^{n}+2^{n}]u[-n-1]$$

（3） $0.5<|z|<2$ 对应的双边序列，X(z)可以看成是一个右边序列和一个左边序列的叠加，其反变换 x[n]在 $0.5<|z|$ 收敛域内是右边序列，在 $|z|<2$ 收敛域是左边序列

$$x[n]=Z^{-1}\{\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z-2}\}=(0.5)^n u[n]+2^n u[-n-1]$$

7.7　已知因果序列的 Z 变换 X(z)，求序列的初 x[0]与终值 x[∞]。

（1） $X(z)=\dfrac{1+z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$ ；　（2） $X(z)=\dfrac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$ ；

（3） $X(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2})}$。

解：先求初值，由初值定理：

（1） $x[0]=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1+z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}=1$

（2） $x[0]=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})}=1$

（3） $x[0]=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2})}=0$

再求终值

（1）由于 X(z)有 2 个极点：z=1,z=2（已经在单位圆外），故其终值不存在；

（2）由于 X(z)的 2 个极点：z=0.5,z=－0.5 均在单位圆内，采用终值定理，得

$$x[\infty]=\lim_{z\to1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})}=0\text{ ；}$$

（3）由于 X(z)有 2 个极点：z=0.5 和 z=1（一阶极点），可用终值定理

$$x[\infty]=\lim_{z\to1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to1}\frac{(1-z)z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2})}=2$$

7.8 试研究一个具有 Z 变换 $X_1(z)$的序列 $x_1[n]$和一个具有 Z 变换 $X_2(z)$的序列 $x_2[n]$，其中 $x_1[n]$和 $x_2[n]$具有下面关系： $x_2[n]=x_1[-n]$

证明 $X_2(z)=X_1(1/z)$，并由此证明，如果 $X_1(z)$有一个极点在 $z=z_0$ 处，则 $X_2(z)$ 有一个极点（或零点）在 $z=1/z_0$ 处。

证明：（1）由 Z 变换的定义： $X_1(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n]z^{-n}$

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n]z^{-n}==\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[-n]z^{-n}=\sum_{m=\infty}^{-\infty}x_1[m]z^{m}==\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n](z^{-1})^{-n}=X_1(1/z)$$

因此原题得证。

（2）设 $X_1(z)$可表示成有理分式 $X_1(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$，且不失一般性，设分子 z 的次数 M 小于分母 z 的次数 N，且分母无重根（即其根点各不相同），则

$$X_1(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-z_k z^{-1}}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k z}{z-z_k}$$ （z_k 为 $X_1(z)$的单极点）

当 $X_1(z)$有一个极点在 $z=z_0$ 处（令 k=0 即可）时

由（1）证明的结果：$X_2(z)=X_1(1/z)$，有

$$X_2(z)=X_1(1/z)=\frac{N(1/z)}{D(1/z)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k z^{-1}}{z^{-1}-z_k}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k z_k^{-1}}{z_k^{-1}-z}$$

可见，$X_2(z)$ 有一个极点在 $z=1/z_0$ 处。

同理，可证明零点的情况。

7.9 求下列 Z 变换对应的离散函数 f[n]：

（1） $F(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}$；　（2） $F(z)=\frac{z+1}{(z-1)^2}$；

（3） $F(z)=\frac{1}{z^3(z+1)(z^2+1)}$；　（4） $F(z)=\frac{z^2}{z^2+3z+2}$；

（5） $F(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}$；　（6） $F(z)=\frac{z^2+z+1}{z^2+z-2}$。

解：设下列 Z 变换对应的离散函数 f[n]均为右边序列。

（1） 因为 $F(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}$；$\frac{F(z)}{z}=\frac{z-1}{(z-2)(z+1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{(z-2)}+\frac{2}{3}\frac{1}{(z+1)}$

$F(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{(z-2)}+\frac{2}{3}\frac{z}{(z+1)}$；$|z|>2$

因此，$f[n]=Z^{-1}\{\frac{1}{3}\frac{z}{z-2}+\frac{2}{3}\frac{z}{z+1}\}=\frac{1}{3}(2)^n u[n]+\frac{2}{3}(-1)^n u[n]$

（2） 因为 $F(z)=\frac{z+1}{(z-1)^2}=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^2}$；$|z|>1$

由 7.3（2） $nu[n-1]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{z}{(z-1)^2}$；$(n-1)u[n-1]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{(z-1)^2}$

故：$f[n]=Z^{-1}\{\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^2}\}=(2n-1)u[n-1]$

(3) $F(z)=\dfrac{1}{z^3(z+1)(z^2+1)}$ ——似乎题目有误？！

(4) $F(z)=\dfrac{z^2}{z^2+3z+2}$ ； $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z}{(z+2)(z+1)}=\dfrac{2}{(z+2)}-\dfrac{1}{(z+1)}$

故： $f[n]=Z^{-1}\{\dfrac{z}{z+2}-\dfrac{z}{z+1}=(-2)^n u[n]-(-1)^n u[n]$

(5) $F(z)=\dfrac{1-0.5z^{-1}}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}$ ； $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z-0.5}{(z+0.5)(z+0.25)}=\dfrac{4}{z+0.5}-\dfrac{3}{z+0.25}$

故： $f[n]=Z^{-1}\{\dfrac{4z}{z+0.5}-\dfrac{3z}{z+0.25}=4(-0.5)^n u[n]-3(-0.25)^n u[n]$

(6) 法一： $F(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^2+z-2}$ ； $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z^2+z+1}{z(z+2)(z-1)}=-\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(z+2)}+\dfrac{1}{z-1}$

故： $f[n]=Z^{-1}\{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{z}{2(z+2)}+\dfrac{z}{z-1}\}=(-\dfrac{1}{2})\delta[n]+\dfrac{1}{2}(-2)^n u[n]+u[n]$

法二： $F(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^2+z-2}=1+\dfrac{3}{z^2+z-2}=1+\dfrac{3}{(z+2)(z-1)}=1-\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{1}{z-1}$

故： $f[n]=Z^{-1}\{1-\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{1}{z-1}\}=\delta[n]-(-2)^n u[n-1]+u[n-1]$

7.10 如果 $\tilde{X}(z)$ 表示 x[n]的单边 Z 变换，试求用 $\tilde{X}(z)$ 表示的下列单边 Z 变换：

(1) $x[n+1]$ ； (2) $x[n-3]$ ； (3) $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$。

解：由单边 Z 变换的移位性质得（1）和（2）：

(1) $Z[x[n+1]]=\sum_{n=0}^{+\infty} x[n+1]z^{-n}=z\tilde{X}(z)-zx[0]$ ；

(2) $Z[x[n-3]]=z^{-3}\{\tilde{X}(z)+\sum_{k=-3}^{-1} x[k]z^{-k}\}$ ；

(3) 由累加性质： $Z\{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\}=Z\{\sum_{k=0}^{n} x[k]\}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}\tilde{X}(z)$ 。

于慧敏主编<信号与系统>(P288-291)第七章 7.11-7.22 题解答

7.11 已知用下列差分方程描述的一个线性时不变因果系统：

$$y[n]=y[n-1]+y[n-2]+x[n-1]$$

（1）求这个系统的系统函数 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$，画出 H(z)的零极点图并指出其收敛区域；

（2）求此系统的单位脉冲响应；

（3）此系统是一个不稳定系统，请找出一个满足上述差分方程的稳定的（非因果）系统的单位抽样响应（——即为单位脉冲响应？有的书称为样响应）

解：(1) 在零状态条件下，对差分方程两边求 Z 变换：

$$Y(z)=z^{-1}Y(z)+z^{-2}Y(z)+z^{-1}X(z)$$

故：系统函数 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}$；$ROC:|z|>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2) 系统的单位脉冲响应：$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=Z^{-1}\{\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}\}$

因为 $\dfrac{H(z)}{z}=\dfrac{1}{z^2-z-1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2})}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2})}$

故：$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n u[n]-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n u[n]$

(3) 因为系统的极点为：$p_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，即 $p_{1,2}=1.618,0.618$。若是考虑系统要为一个稳定系统（即 ROC 包含单位圆），而可以不是因果序列，则 h[n]为双边序列即可，此时 $ROC:0.618=p_1<|z|<p_2=1.618$，可见已经包含单位圆,故系统是稳定的。

则：$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n u[-n-1]-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n u[n]$

7.12 已知描述某线性非时变因果系统的差分方程为：

$$y[n]-y[n-1]+\frac{1}{2}y[n-2]=x[n-1]$$

试求：(1) 系统函数 H(z)，并画出其零极点图；

(2) 求单位脉冲响应 h[n]；

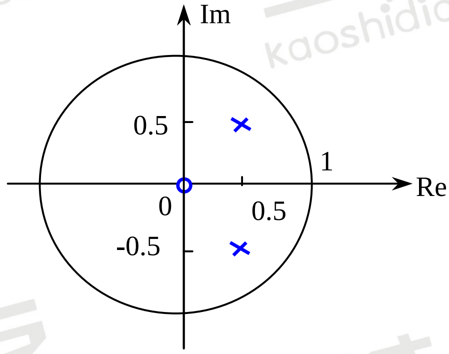
(3) 若已知激励 $x[n]=5\cos(n\pi)$，求系统的响应。

解：(1) 在零状态条件下，对差分方程两边求 Z 变换：

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)+\frac{1}{2}z^{-2}Y(z)=z^{-1}X(z)$$

故：系统函数 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$；

$$ROC:|z|>\left|\frac{1+j}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



其零极点图如图所示。

(2) 从零极点图可知，H(z)有一对在单位圆内的共轭极点和 1 个在原点的零点

其中共轭极点： $p_{1,2}=re^{\pm j\vartheta}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$

方法一：采用直接查 P272 表 7-2 的方法：

因为： $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$；而 $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\dfrac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$

由已知极点，可知： $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\omega_0=\dfrac{\pi}{4}$

故： $h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=[r^n\sin\omega_0 n]u[n]=(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^n\sin(n\cdot\dfrac{\pi}{4})u[n]$

方法二：(注——关于存在共轭极点这部分内容及其下面的反变换的内容教材上无，参

。

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{z^{-1}}{(1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

若将 H(z)展开为部分分式：

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{(1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}=-j\{\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}\}$$

对 H(z)进行 Z 反变换，得到单位脉冲响应 h[n]

$$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=-j\{(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})^n u[n]-(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})^n u[n]$$

$$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\sin(n\cdot\frac{\pi}{4})u[n]$$

(3) 若已知激励 $x[n]=5\cos(n\pi)$，求系统的响应

$$X(z)=Z[5\cos n\pi]=5\cdot\frac{1-[\cos\pi]z^{-1}}{1-[2\cos\pi]z^{-1}+z^{-2}}=\frac{5(1+z^{-1})}{1+2z^{-1}+z^{-2}}$$

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}\cdot\frac{5(1+z^{-1})}{1+2z^{-1}+z^{-2}}=\frac{5z^2}{(z^2-z+\frac{1}{2})(z+1)}$$

欲求的系统响应为 Y(z)的反 Z 变换。

因为：$Y(z)=\dfrac{5z^2}{(z^2-z+\frac{1}{2})(z+1)}=\dfrac{2z}{z+1}-2\cdot\dfrac{z^2-\frac{1}{2}z}{(z^2-z+\frac{1}{2})}-3\cdot\dfrac{\frac{1}{2}z}{(z^2-z+\frac{1}{2})}$

直接查 P272 表 7-2，得

$$y[n]=2\cdot(-1)^n u[n]+\{(\frac{1}{\sqrt{2}})^n[2\cos\frac{1}{4}n\pi-3\cdot\sin\frac{1}{4}n\pi]\}u[n]$$

7.13 求下列差分方程的离散系统函数 H(z)和单位脉冲响应 h[n]：

（1） $y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=x[n]-3x[n-2]$

（2） $8y[n+2]-2y[n+1]-3y[n]=x[n+1]+2x[n]$

解：(1) 在零状态条件下，对差分方程两边求 Z 变换：

$$Y(z)-5z^{-1}Y(z)+6z^{-2}Y(z)=X(z)-3z^{-2}X(z)$$

故：系统函数 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1-3z^{-2}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\dfrac{z^2-3}{(z-3)(z-2)}=\dfrac{6}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$；

根据收敛域的不同，分三种情况讨论：

当 $ROC:|z|>3$，h[n]为右边序列： $h[n]=2\cdot3^n u[n]-\dfrac{1}{2}2^n u[n]$

当 $ROC:|z|<2$，h[n]为左边序列： $h[n]=-2\cdot3^n u[-n-1]+\dfrac{1}{2}2^n u[-n-1]$

当 $ROC:2<|z|<3$，h[n]为双边序列：$h[n]=-2\cdot3^n u[-n-1]-\dfrac{1}{2}2^n u[-n-1]$

（2）对差分方程两边取 Z 变换（零状态下）

$$8z^2Y(z)+2zY(z)-3Y(z)=zX(z)+2X(z)$$

系统函数: $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z+2}{8z^2+2z-3}=\dfrac{z+2}{8(z+\frac{1}{2})(z-\frac{3}{4})}=-\dfrac{3}{20}\cdot\dfrac{6}{(z+\frac{1}{2})}+\dfrac{11}{40}\dfrac{1}{(z-\frac{3}{4})}$

根据收敛域的不同，分三种情况讨论：

当 $ROC:|z|>3/4$，h[n]为右边序列： $h[n]=\dfrac{3}{10}\cdot(-\dfrac{1}{2})^n u[n]+\dfrac{11}{30}\cdot(\dfrac{3}{4})^n u[n]$

当 $ROC:|z|<1/2$，h[n]为左边序列：$h[n]=-\dfrac{3}{10}\cdot(-\dfrac{1}{2})^n u[-n-1]-\dfrac{11}{30}\cdot(\dfrac{3}{4})^n u[-n-1]$

当 $ROC:\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{4}$，h[n]为双边序列：$h[n]=\dfrac{3}{10}\cdot(-\dfrac{1}{2})^n u[n]-\dfrac{11}{30}\cdot(\dfrac{3}{4})^n u[-n-1]$

7.14 对下列每一个差分方程（因果）和相应的输入及起始条件，试确定响应 y[n]。

（1） $y[n]+3y[n-1]=x[n]$；$x[n]=(\dfrac{1}{2})^n u[n]$，y[-1]=1；

（2） $y[n]-\dfrac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\dfrac{1}{2}x[n-1]$；$x[n]=u[n]$，y[-1]=0；

(3) $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$；$x[n]=u[n]$，y[-1]=1。

解：(1) 对方程取 Z 变换：$Y(z)+3(z^{-1}Y(z)+y[-1])=X(z)$，

代入：y[-1]=1，整理得：

$$Y(z)=\frac{-3+X(z)}{1+3z^{-1}}=\frac{-3}{1+3z^{-1}}+\frac{1}{1+3z^{-1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{-2z^2+\frac{3}{2}z}{(z+3)(z-\frac{1}{2})}$$

求 Y(z) 反 Z 变换，得响应 y[n]：$y[n]=\frac{1}{7}\cdot(\frac{1}{2})^n u[n]-\frac{15}{7}\cdot(-3)^n u[n]$

(2) 对方程取 Z 变换：$Y(z)-\frac{1}{2}(z^{-1}Y(z)+y[-1])=X(z)-\frac{1}{2}(z^{-1}X(z)+x[-1])$

代入：$x[n]=u[n]$，y[-1]=0，整理得：$Y(z)=\dfrac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})X(z)}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}=X(z)$

故：易知：$y[n]=x[n]=u[n]$

(3) 对方程取 Z 变换：$Y(z)-\frac{1}{2}(z^{-1}Y(z)+y[-1])=X(z)-\frac{1}{2}(z^{-1}X(z)+x[-1])$

代入：$x[n]=u[n]$，y[-1]=1，整理得：

$$Y(z)=\frac{\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{2}z^{-1})X(z)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+X(z)$$

求 Y(z) 反 Z 变换，得响应 y[n]：$y[n]=\{1+(\frac{1}{2})^{n+1}\}u[n]$

7.15 用 Z 变换法求解下列差分方程（因果）：

(1) $y[n]-0.9y[n-1]=0.05u[n]$，y[-1]=1；

(2) $y[n]-y[n-1]-2y[n-2]=u[n-2]$，y[0]=1，y[1]=1；

(3) $y[n+2]+3y[n+1]+2y[n]=3^n u[n]$， y[0]= 0，y[1]=0；

(4) $y[n]+2y[n-1]=(n-2]u[n]$，y[0]=1；

(5) $y[n+2]+y[n+1]+y[n]=u[n]$， y[0]= 1，y[1]=1。

解：(1) 对方程取 Z 变换：$Y(z)-0.9\{z^{-1}Y(z)+y[-1]\}=0.05X(z)$

代入：$x[n]=u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-z^{-1}}$，y[-1]=1，整理得：

$$Y(z)=\frac{0.9+0.05X(z)}{1-0.9z^{-1}}=\frac{0.9}{1-0.9z^{-1}}+\frac{1}{2}\{\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{0.45}{1-0.9z^{-1}}\}$$

求 Y(z) 反 Z 变换，得响应 y[n]：$y[n]=\frac{1}{2}u[n]+0.45(0.9)^n u[n]$

(2) 因为初始条件未知，将 y[0]=1，y[1]=1 代入原方程

可求得：y[－1]=0，y[－2]=1/2

对方程取 Z 变换并整理得：

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)-y[-1]-2\{z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]\}=\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}-2z^{-2}}(1+\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}})=\frac{-\frac{1}{2}}{1-z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

求 Y(z) 反 Z 变换，得响应 y[n]： $y[n]=-\frac{1}{2}u[n]+\frac{1}{2}(-1)^n u[n]+2^n u[n]$

（3）对方程取 Z 变换并代入初始条件整理得：

$z^2Y(z)+3zY(z)+2Y(z)=\frac{z}{z-3}$ ；

$$Y(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}\cdot(\frac{z}{z-3})=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+z^{-1}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+2z^{-1}}+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{1-3z^{-1}}$$

求 Y(z) 反 Z 变换，得： $y[n]=-\frac{1}{4}(-1)^n u[n]+\frac{1}{5}(-2)^n u[n]+\frac{1}{20}\cdot 3^n u[n]$

（4）因为初始条件未知，将 y[0]=1 代入原方程可求得：y[－1]=－3/2

对方程取 Z 变换并代入初始条件整理得：

$$Y(z)=\frac{z}{z+2}\cdot(3+\frac{-2z^2+3z}{(z-1)^2})=\frac{13}{9}\cdot\frac{1}{1+2z^{-1}}-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

求 Y(z) 反 Z 变换，得： $y[n]=\frac{13}{9}(-2)^n u[n]-\frac{4}{9}u[n]+\frac{1}{3}nu[n]$

（5）对方程取 Z 变换

$z^2Y(z)-z^2y[0]-zy[1]+zY(z)-zy[0]+Y(z)=\frac{z}{z-1}$ ；代入初始条件整理得：

$$Y(z)=\frac{1}{z^2+z+1}\cdot(z^2+2z+\frac{z}{z-1})=\frac{z^3+z^2-z}{(z^2+z+1)(z-1)}$$ ；

法一：直接查表 7-2；先进行部分分式分解

$$Y(z)=\frac{z^3+z^2-z}{(z^2+z+1)(z-1)}=\frac{az}{z-1}+\frac{bz^2+cz+d}{z^2+z+1}$$

可求出： $a=\frac{1}{3},b=\frac{2}{3},c=\frac{4}{3},d=0$ ；即 $Y(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z-1}+\frac{2}{3}\frac{z^2+z}{z^2+z+1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z^2+z+1}$

由表 7-2 知： $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{[1-r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$

$$[r^n\sin\omega_0 n]u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

这里 r = 1

求 Y(z) 反 Z 变换，得：$y[n]=(\frac{1}{3})u[n]+\{\frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}n\pi+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2}{3}n\pi\}u[n]$

法二：可见，Y(z)有 3 个极点，除 z=1 外，还有一对共轭极点：$p_{1,2}=re^{\pm j\vartheta}=e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z^2+z-1}{(z^2+z+1)(z-1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1-j\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{z-e^{j\frac{2\pi}{3}}}+\frac{1+j\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{z-e^{-j\frac{2\pi}{3}}}$$

$$Y(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{1-e^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1}}+\frac{2}{3}e^{j\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{3}}z^{-1}}$$

求 Y(z) 反 Z 变换，得：

$$y[n]=\frac{1}{3}u[n]+\frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}(e^{j\frac{2\pi}{3}})^n u[n]+\frac{2}{3}e^{j\frac{\pi}{3}}(e^{-j\frac{2\pi}{3}})^n u[n]$$

7.16 有一用以下差分方程表示的线性时不变因果系统

$$y[n]-2ry[n-1]\cos\vartheta+r^2y[n-2]=x[n]$$

当激励 $x[n]=a^n u[n]$ 时，求系统的响应。请用 Z 变换法来求解。

7.17 若一离散系统，当输入 x[n]=u[n]时，其零状态响应 $y_{zs}[n]=2[1-(0.5)^n]u[n]$，求当输入为 $x[n]=(0.5)^n u[n]$ 时的零状态响应。

解：第一步：根据已知条件求出系统函数

因为 $X_1(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$ ；$Y_{1zs}(z)=\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$

故 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

第二步：求当输入为 $x[n]=(0.5)^n u[n]$ 时的零状态响应

$X_2(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ ；因：$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

故：$Y_{2zs}=H(z)X(z)=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$ ；$|z|<\frac{1}{2}$

$$y_{2zs}[n]=Z[Y_{2zs}(z)=2n[(0.5)^n]u[n]$$

7.18 某离散系统，当输入 x[n]=u[n]时，其零状态响应为

$$y_{zs}[n] = 2u[n] - (0.5)^n u[n] + (-1.5)^n u[n]$$

试求其离散系统函数 H(z)和描述系统的差分方程。

解：第一步：求系统函数 H(z)

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \ ;$$

$$Y_{1zs}(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1}} \ ;$$

故 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{3}{2}z^{-1}} = \frac{2 + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}}$

第二步：描述系统的差分方程：

因为： $Y(z)(1 + z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}) = X(z)(2 + \frac{1}{2}z^{-2})$

由移位性质： $y[n] - y[n-1] - \frac{3}{4}y[n-2] = 2x[n] + \frac{1}{2}x[n-2]$

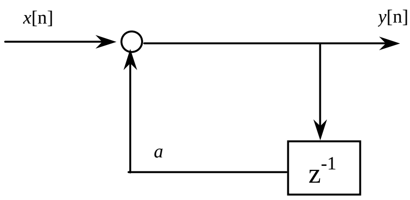
7.19 某离散系统的差分方程为： $y[n] - ay[n-1] = x[n]$， $0 < a < 1$

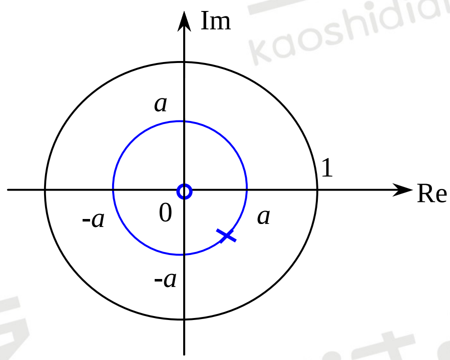
(1) 画出 Z 域模拟框图；

(2) 求 H(z)，画出零、极点图；

(3) 若系统是稳定的，求频率响应 $H(e^{j\omega})$ 和 h[n]。

解：(1) Z 域模拟框图





H(z)的零极点图

(2) 零极点图如图所示：

零点 z=0；极点 $p=a$, $0 < a < 1$

即有可能在图中 $|z| = a$ 圆上的任一点。

系统函数 H(z)： $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ ；

(3) 频率响应 $H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} = \frac{1}{(1 - a\cos\omega) + ja\sin\omega}$$

单位脉冲响应： $h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = a^n u[n]$

7.20 一线性时不变离散时间系统的单位脉冲响应为：$h[n]=(1+0.3^n+0.6^n)u[n]$

（1） 求该系统的系统函数 H(z)，并画出其零、极点图；

（2） 写出该系统的差分方程；

（3） 画出该系统的直接实现、并联实现和级联实现的 Z 域框图。

解：（1） 求系统的系统函数 H(z)：直接对 h[n]求 Z 变换即可

$$H(z)=Z[h[n]]=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1-0.3z^{-1}}+\frac{1}{1-0.6z^{-1}}$$

$$=\frac{3-3.8z^{-1}+1.08z^{-2}}{1-1.9z^{-1}+1.08z^{-2}-0.18z^{-3}}$$

H(z)共有 3 个实极点：$p_1=1, p_2=0.3, p_3=0.6$；另有 3 个实零点。其零极点略。

（2） 由 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$ 可写出系统的差分方程：

$$y[n]-1.9y[n-1]+1.08y[n-2]-0.18y[n-3]=3x[n]-3.8x[n-1]+1.08x[n-2]$$

（3） Z 域框图图此略。

7.21 某因果线性非时变离散时间系统，其输入 x[n]和输出 y[n]由下列差分方程描述：

$$y[n-1]+2y[n]=x[n]$$

（1） 若 y[-1]=2，求系统的零输入响应 $y_{zi}[n]$；

（2） 若 $x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$，求系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$；

（3） 若 y[-1]=1， $x[n]=3(\frac{1}{4})^n u[n]$，求 $n\ge 0$ 时的系统的输出。

解：（1） 对差分方程两边求 Z 变换：

$$Y(z)(2+z^{-1})+y[-1]=X(z)\text{；}\ Y(z)=\frac{1}{2+z^{-1}}\{-y[-1]+X(z)\}$$

代入 y[-1]=2，并注意零输入条件下：$Y_{zi}(z)=\dfrac{-2}{2+z^{-1}}=\dfrac{-1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

对 $Y_{zi}(z)$求反 Z 变换即可得零输入响应： $y_{zi}[n]=-(-\frac{1}{2})^n u[n]$

（2） 当输入为： $x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$ 时： $X(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ ；注意零状态：y[-1]=0

$$Y_{zs}(z)=\frac{1}{2+z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

故系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$： $y_{zs}[n]=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

（3）若 y[-1]=1， $x[n]=3(\frac{1}{4})^n u[n]$， $X(z)=\frac{3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ 求 $n\geq 0$ 时的系统的输出

$$Y(z)=\frac{1}{2+z^{-1}}\{-1+\frac{3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\}=\frac{2+\frac{1}{4}z^{-1}}{(2+z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{8}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}=\frac{1}{2}\{\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\}$$

当 $n\geq 0$ 时的系统的输出： $y[n]=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}u[n]$

7.22 某因果线性非时变离散时间系统，其输入 x[n]和输出 y[n]由下列差分方程描述：

$$y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]+ax[n-1]$$

（1） 若输入 $x[n]=(-1)^n$，输出 $y[n]=2(-1)^n$，求系统函数；

（2） 若 $x[n]=u[n]$，求系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$。

解：（1） 对差分方程两边求 Z 变换：注意：系统函数与输入与输出的具体函数无关！

$$Y(z)(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2})=X(z)(1+az^{-1})$$

易得，系统函数： $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+az^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$

（2） 当 $x[n]=u[n]$ 时， $X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$ ；

系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 的 Z 变换为（下设 a= -3）：

$$Y_{zs}(z)=H(z)\cdot X(z)=\frac{1-3z^{-1}}{(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2})(1-z^{-1})}=\frac{-8}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{15}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-6}{1-z^{-1}}$$

对 $Y_{zs}(z)$求反 Z 变换即可得系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$:

$$y_{zs}[n]=-8\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+15\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-6u[n]$$