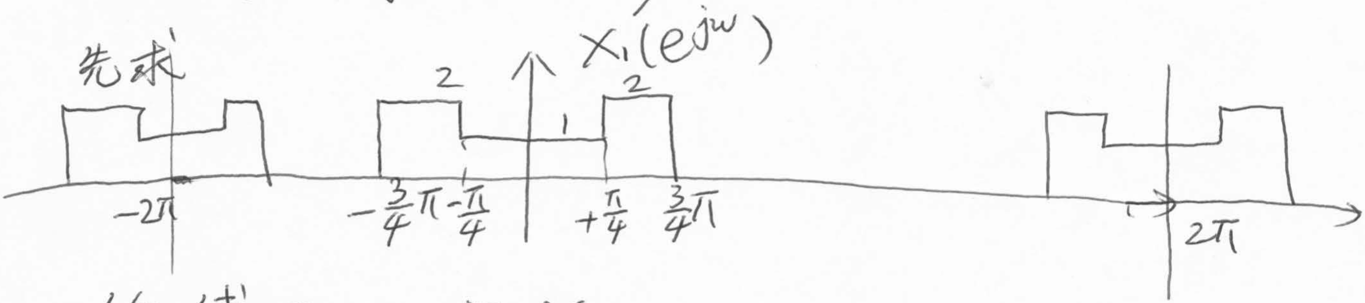
第一题：

求

的傅里叶反变换。

方法①（课上方法）

先求



的傅里叶反变换

$$x_1[n] = \frac{2\sin(\frac{3}{4}\pi n)}{\pi n} - \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}$$

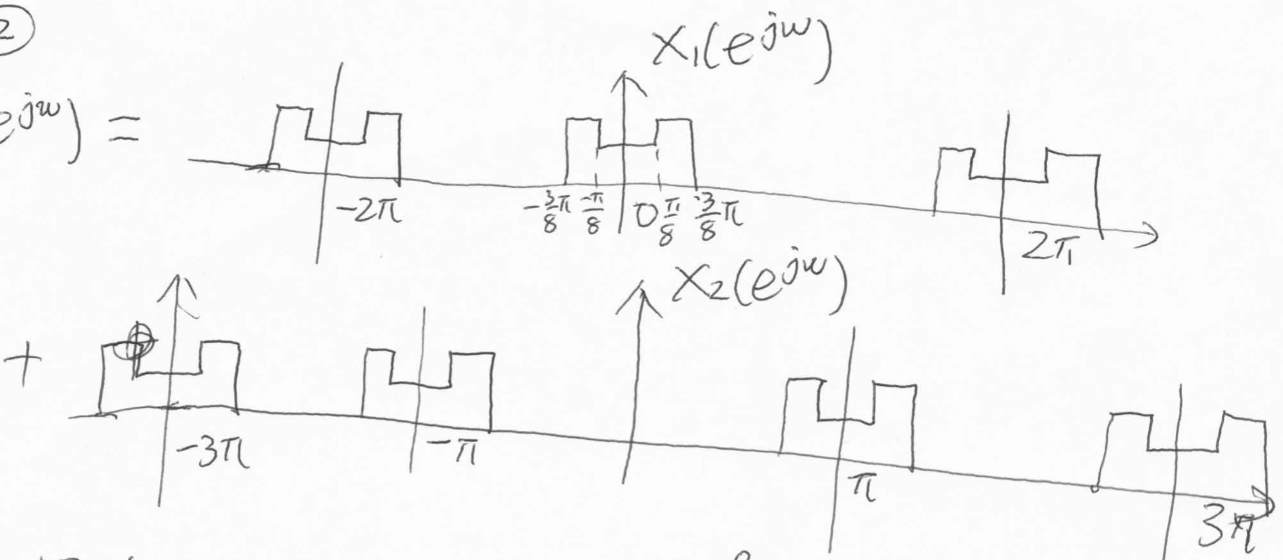
用时域扩展性质，由于 $X(e^{jw}) = X_1(e^{j2w})$

所以 $x[n] = x_{1(2)}[n]$

$$= \begin{cases} \frac{4\sin(\frac{3}{8}\pi n)}{\pi n} - \frac{2\sin(\frac{\pi}{8}n)}{\pi n} & (n\text{为偶数}) \\ 0 & (n\text{为奇数}) \end{cases}$$

方法②

$X(e^{j\omega}) =$



因此：

$$x_1[n] = \frac{2\sin\left(\frac{3}{8}\pi n\right)}{\pi n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n}$$

$$x_2[n] = \left(\frac{2\sin\left(\frac{3}{8}\pi n\right)}{\pi n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n}\right) e^{j\pi n}$$

（频移性质）

所以

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$= \left[\frac{2\sin\left(\frac{3}{8}\pi n\right)}{\pi n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n}\right]\left(1 + e^{j\pi n}\right)$$

$$= \left[\frac{2\sin\left(\frac{3}{8}\pi n\right)}{\pi n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n}\right]\left(1 + (-1)^n\right)$$

方法①与方法②答案一致。

第二题：

$$x[n]=\frac{\sin\left(\frac{3}{5}\pi n\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$$

求 $x[n]$ 的傅里叶变换

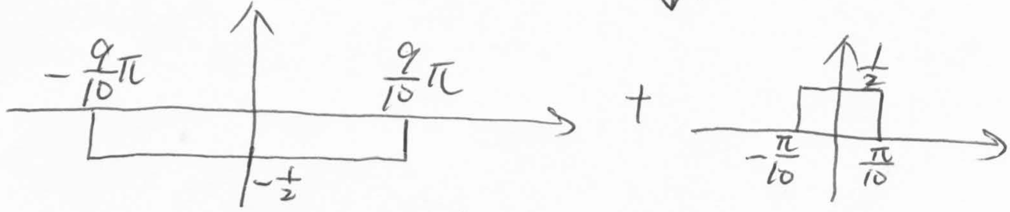
方法① （课上方法）

$$\frac{\sin\left(\frac{3}{5}\pi n\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$$

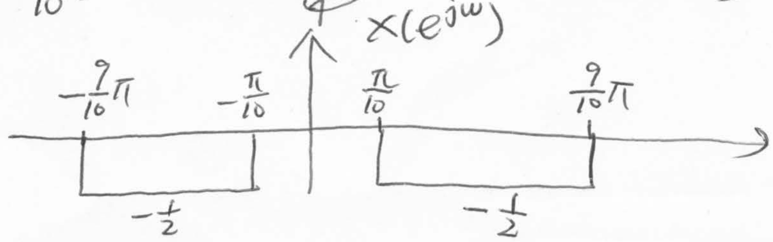
$$=\frac{\sin\left(\frac{11}{10}\pi n\right)+\sin\left(\frac{1}{10}\pi n\right)}{2\pi n}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\sin\frac{9}{10}\pi n}{\pi n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{10}(\pi n)}{\pi n}$$

$\downarrow F$ $\qquad\qquad$ $\downarrow F$



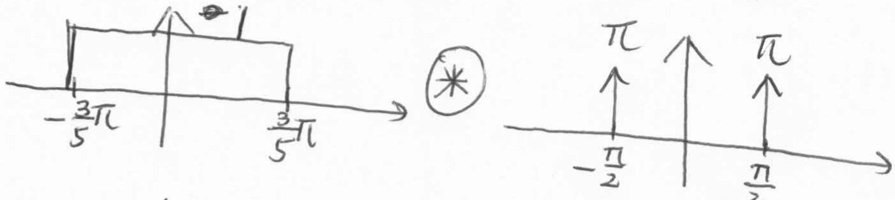
=



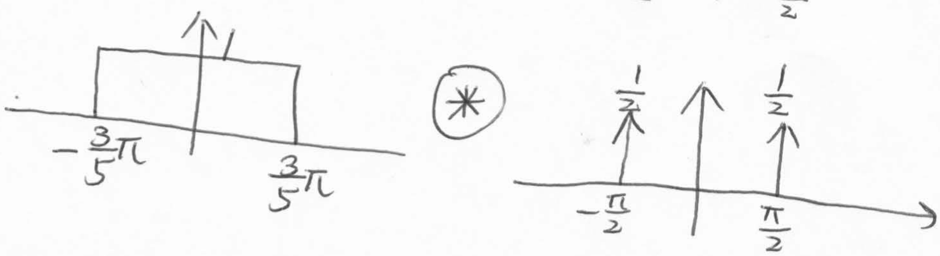
方法② 圆卷积

$$F[x[n]]=\frac{1}{2\pi}F\left[\frac{\sin\frac{3}{5}\pi n}{\pi n}\right] ⊛ F\left[\cos\frac{1}{2}(\pi n)\right]$$

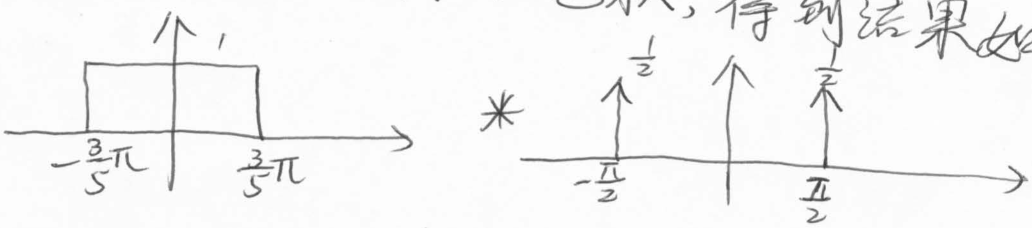
$=\frac{1}{2\pi}$

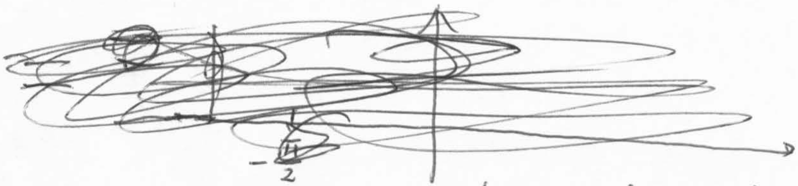


$=$

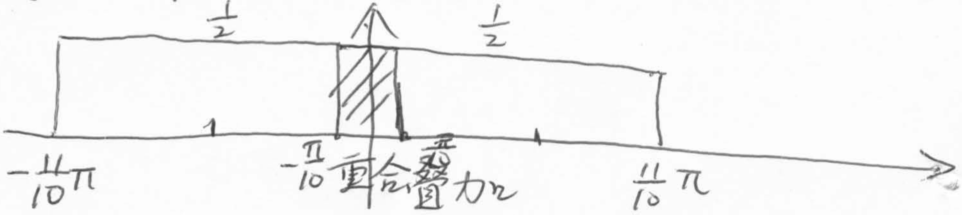


首先将上式做标准卷积，得到结果如下

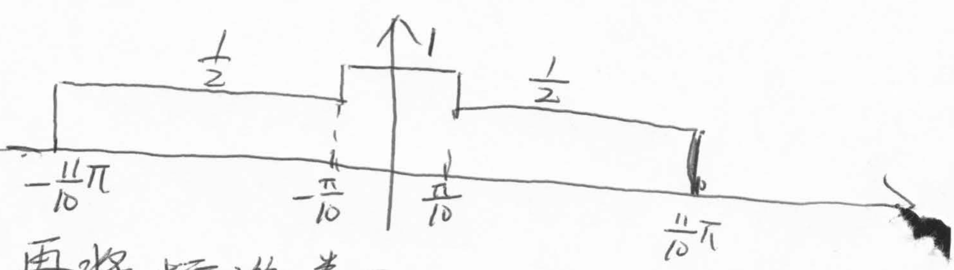




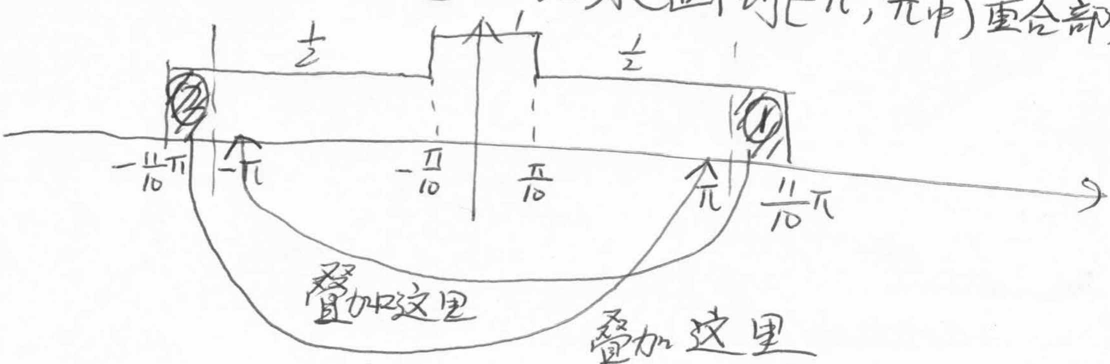
$=$



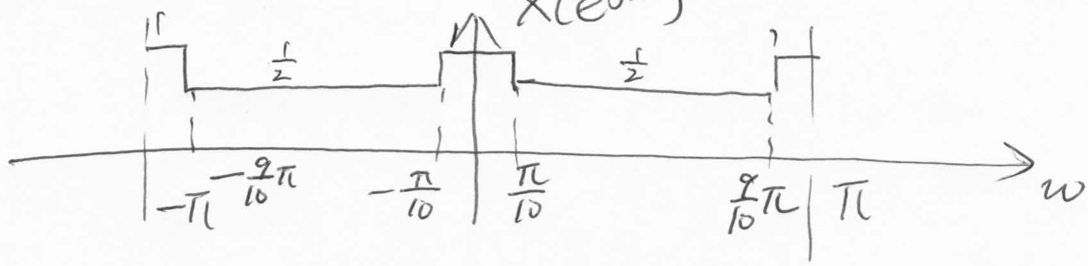
$=$



然后再将标准卷积结果画到[-π, π)中) 重合部分叠加



最后结果



方法①与方法②答案不一致，哪个对？

方法②对！

其原因在于

$$x[n]=\frac{\sin\left(\frac{3}{5}\pi n\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$$

当 $n=0$ 时分母为 0，所以 $x[n]$ 严格定义是：

$$x[n]=\begin{cases}\frac{3}{5} & n=0\\ \frac{\sin\left(\frac{3}{5}\pi n\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) & n\neq 0\end{cases}$$

但方法①将 $x[n]$ 变为了

$$x_1[n]=\frac{-\sin\left(\frac{9}{10}\pi n\right)+\sin\left(\frac{\pi}{10}n\right)}{2\pi n}$$，其严格定义是：

$$x_1[n]=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(-\frac{9}{10}+\frac{1}{10}\right)=-\frac{2}{5} & (n=0)\\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{10}n\right)-\sin\left(\frac{9}{10}\pi n\right)}{2\pi n}=\frac{\sin\left(\frac{3}{5}\pi n\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) & (n\neq 0)\end{cases}$$

可见： $x[n]=x_1[n]+\delta[n]$

因此

$$\begin{array}{ccccc} x[n] & = & x_1[n] & + & \delta[n]\\ \downarrow F & & \downarrow F & & \downarrow F\\ X(e^{j\omega}) & = & X_1(e^{j\omega}) & + & 1\end{array}$$

{方法②答案正好是方法①答案加1