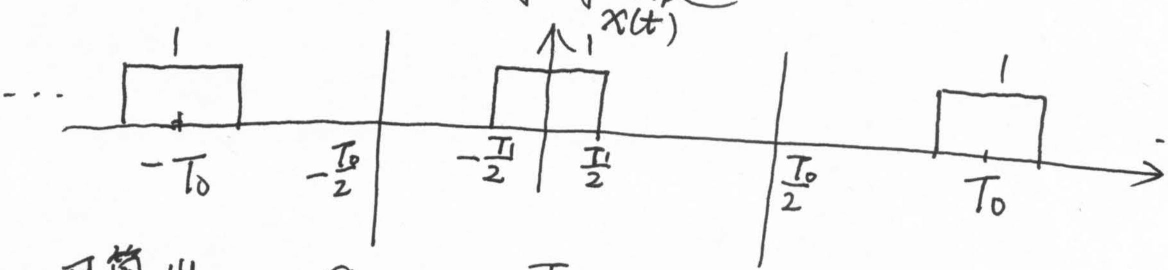
吉布斯现象讲义

1898年美国物理学家米切尔森发现，当用傅里叶级数前N次谐波分量的有限项$x_N(t)$去近似周期方波，在信号间断点、两侧存在起伏和高频上冲超量（9%上冲）。1899年数学物理学家吉布斯解释了这一现象，因此被称做吉布斯现象。

一、吉布斯现象描述。

考查如下以T_0为周期方波



可算出
$$a_k = \frac{T_1}{T_0} Sa\left(k\frac{T_1}{T_0}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{T_1}{T_0}k\pi\right)}{k\pi}$$

因此
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \left(\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}\right)$$
$$= \frac{T_1}{T_0} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{T_1}{T_0}k\pi\right)}{k\pi}\cos(k\omega_0 t)$$

设
$$x_N(t)=\frac{T_1}{T_0} + 2\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin\left(\frac{T_1}{T_0}k\pi\right)}{k\pi}\cos(k\omega_0 t)$$

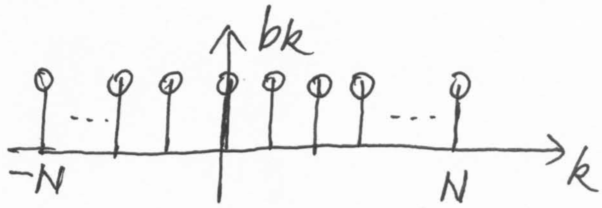
在图1中，我们画出了当$T_0=4$，$T_1=2$，$N=10, 100, 1000$时$x_N(t)$的图像。

可见，无论N取多大，$x_N(t)$在边界上始终都是不平的，有一个较强振荡，且最高振幅为边界差值的9%，这就是吉布斯现象。

二、吉布斯现象分析

设 $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$

又设 $b_k = \begin{cases} 1 & -N \le k \le N \text{ 时} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$



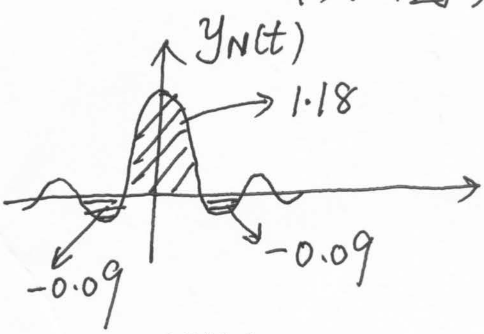
设 $y_N(t) \xrightarrow{FS} b_k$

则 $y_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{jk\omega_0 t} = \dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})\omega_0 t}{\sin(\frac{1}{2}\omega_0 t)}$

由于 $x_N(t) \xrightarrow{FS} a_k b_k$

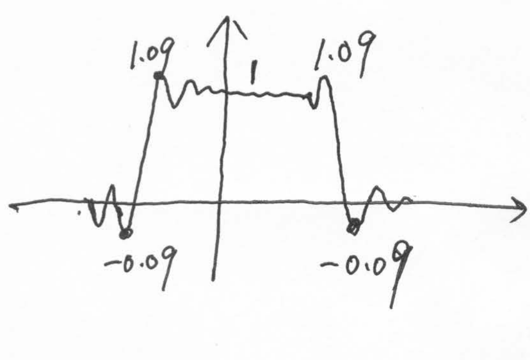
则有：$x_N(t) = \frac{1}{T_0} x(t) \circledast y_N(t)$

图2给出了 $N=10, 100, 1000$ 时 $y_N(t)$ 的图像（$T_0=4$
$T_1=2$），可见 $y_N(t)$ 是类似于 $\frac{\sin t}{t}$ 的函数。而
且 $y_N(t)$ 各部分面积比例大致如下：

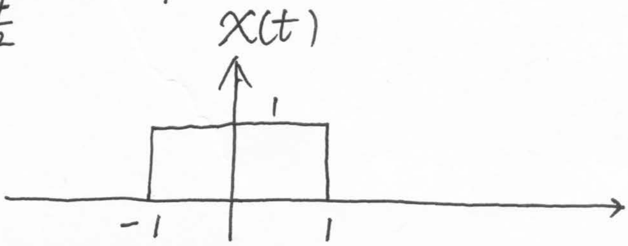


则

$x_N(t) = x(t) \circledast y_N(t)$

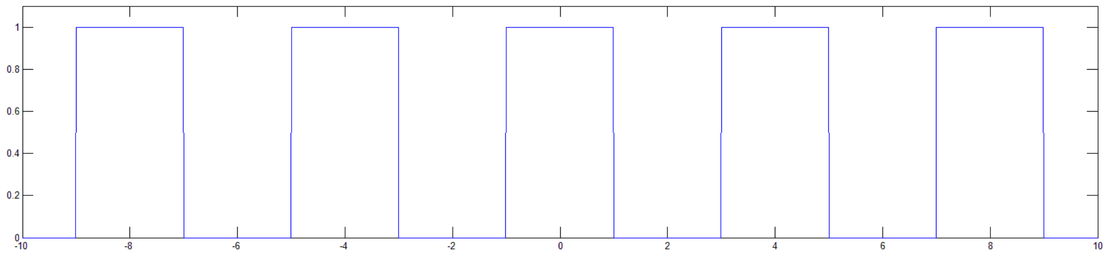


若

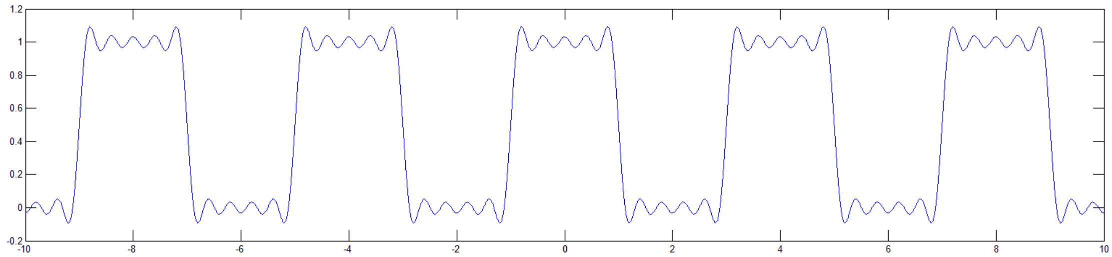


~~则有 $x_N(t)$~~

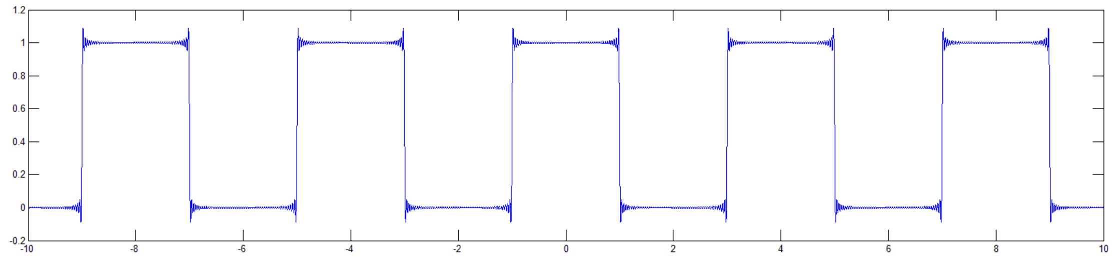
这就是吉布斯现象的解释



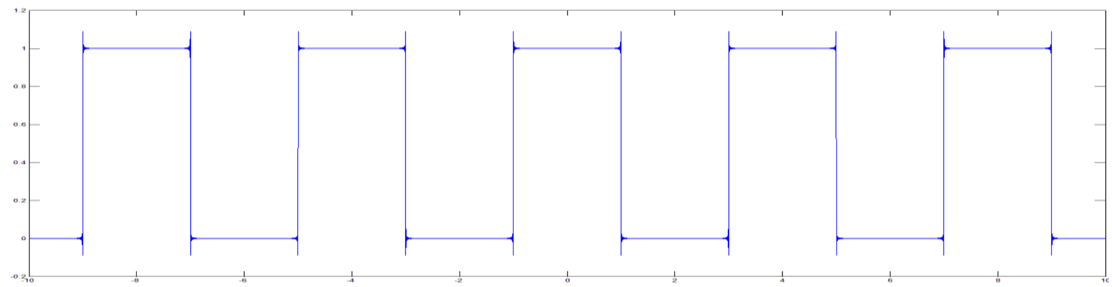
(a) 方波信号（T0=4, T1=2）



(b) $N=10$



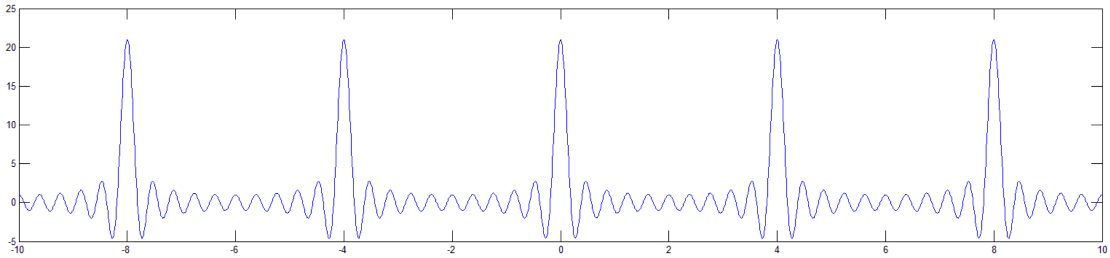
(c) $N=100$



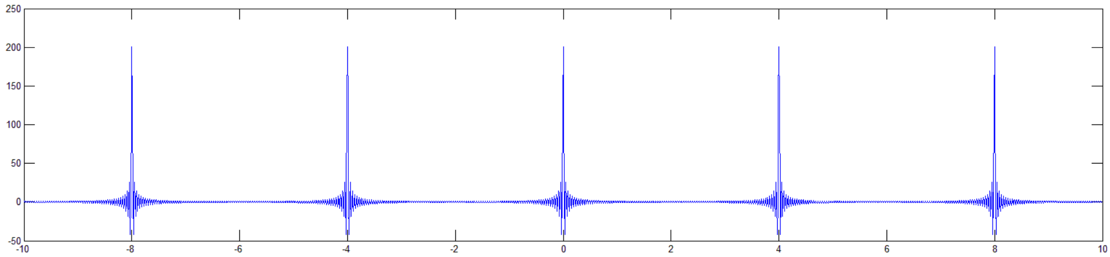
(d) N=1000

图 1. (a)方波信号（$T_0=4, T_1=2$）; (b) $N=10$时的$x_N(t)$; (c) $N=100$时的$x_N(t)$;

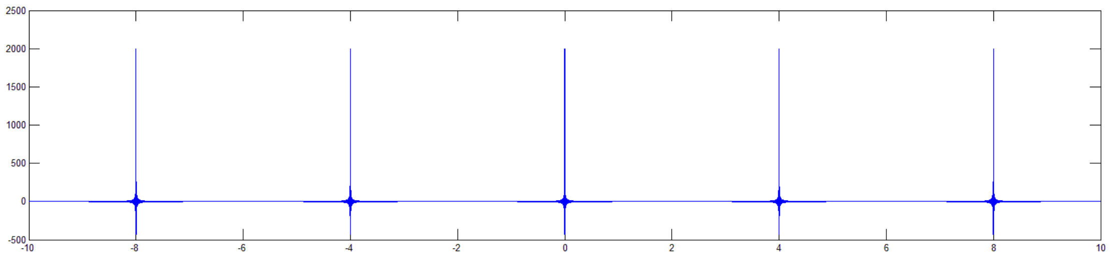
(d) N=1000 时的$x_N(t)$;



(a) $N=10$



(b) $N=100$



(c) $N=1000$

图 2. $T_0=4, T_1=2$ 的 $y_N(t)$。(a) $N=10$ 时的 $y_N(t)$; (b) $N=100$ 时的 $y_N(t)$;

(c) $N=1000$ 时的 $y_N(t)$;