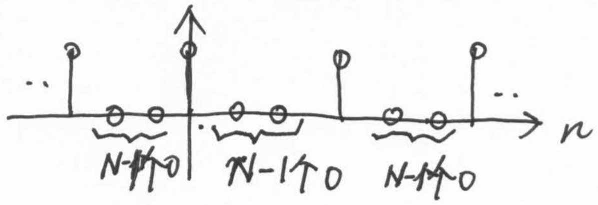
## 5.3. 离散时间信号时域采样

### 5.3.1. 脉冲串采样

$$p[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$$




$$P(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$$

推导： $p[n]$ 是 $x[n]\equiv 1$ 以 $N$ 为底的时域扩展而成

P152 4.4.6.

因此：

$$x[n]\equiv 1 \xrightarrow{F} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)$$

$$\begin{aligned}P(e^{j\omega})=X(e^{j\omega N})&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega N-2k\pi)\\&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(N\left(\omega-\frac{2k\pi}{N}\right)\right)\\&=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2k\pi}{N}\right)\end{aligned}$$

设 $\omega_s=\frac{2\pi}{N}$，则有

$$P(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$$

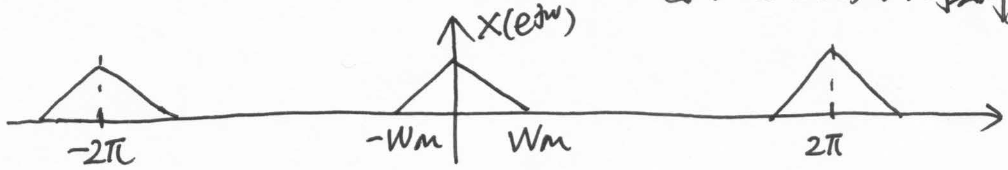
设 $x_p[n]=x[n]p[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[kN]\delta[n-kN]$

则 $X_p(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})\circledast P(e^{j\omega})$ （调制性质）

$$=\frac{1}{\cancel{2\pi}}X(e^{j\omega})\circledast\frac{\cancel{2\pi}}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$$

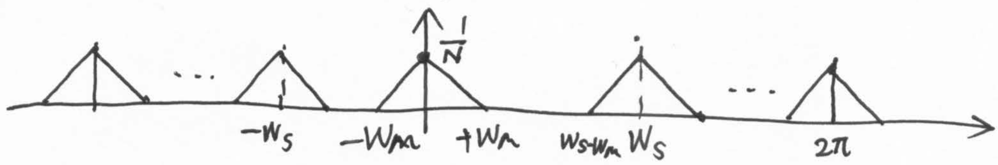
$$= \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \circledast \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

回忆圆卷积概念：两个2π为周期的信号，各取一个周期，正常卷积后，将超过2π周期的部分~~叠~~加或减2π后与卷积信号叠加，然后再将所得信号以2π为周期延拓。



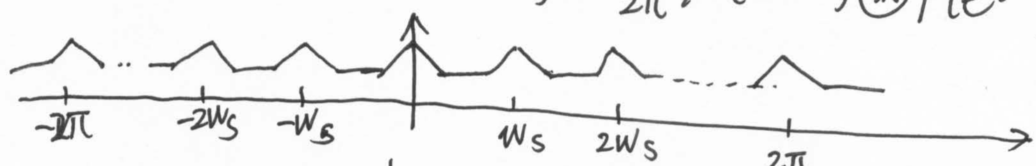


$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast P(e^{j\omega})$$



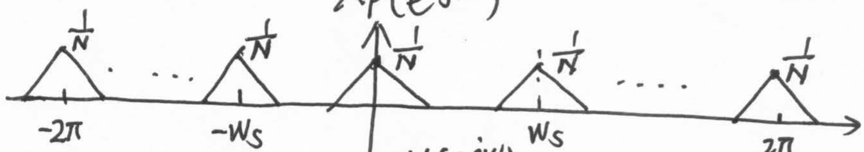

当 $2W_m < W_s$ 时

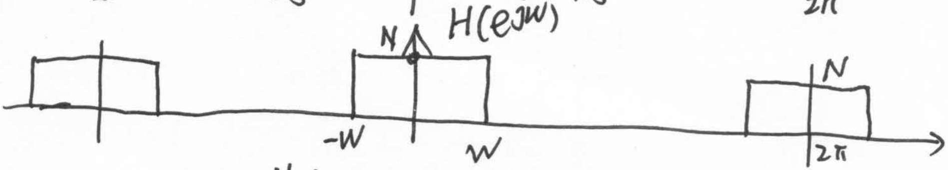
$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast P(e^{j\omega})$$




当 $2W_m > W_s$ 时。

在 $2W_m < W_s$ 时，可以由低通滤波器恢复原信号




则有： ~~其中 W < Ws - Wm~~ 其中 $W_m < W < W_s - W_m$

$$X(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

$$x[n] = x_p[n] * h[n]$$

$$h[n]=\frac{N\sin wn}{\pi n}$$

则 $$x[n]=x_p[n]*\frac{N\sin wn}{\pi n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_p[k]\frac{N\sin w(n-k)}{\pi(n-k)}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[kN]\frac{N\sin w(n-kN)}{\pi(n-kN)} \qquad (5\text{-}29)$$

5.3.2、离散时间信号的抽取与内插

① 信号的抽取

$\cancel{x_s[n]=\left\{x\left[\frac{n}{N}\right]\right.}$ ~~当n为~~

$x_s[n]=x[nN]$，即 $x[n]$ 每隔N采一个值。

若 $$x_p[n]=\begin{cases}x[n] & n\text{为}N\text{倍数}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则有： $$x_s[n]=x_p[nN]$$

$$X_s(e^{jw})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_s[k]e^{-jwk}$$

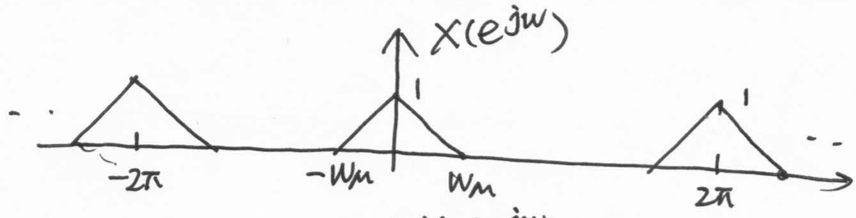
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_p[kN]e^{-jwk}$$

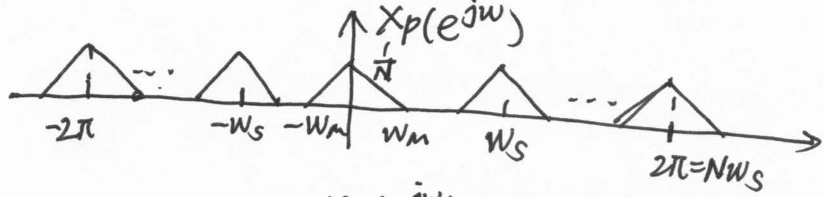
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_p[kN]e^{-jw\frac{kN}{N}}$$

$$=\sum_{n=kN}x_p[n]e^{-jw\frac{n}{N}}$$

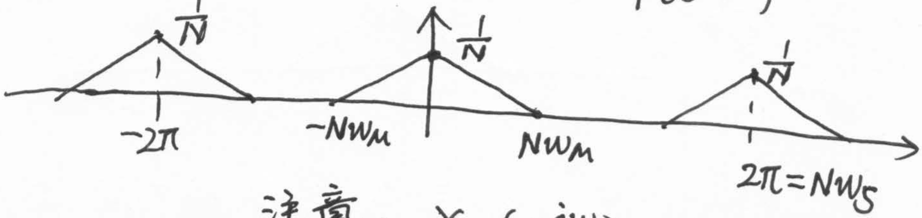
$$=X_p(e^{j\frac{w}{N}})$$

$X(e^{jw})$，$X_p(e^{jw})$ 与 $X_s(e^{jw})$ 关系可由下图表示。



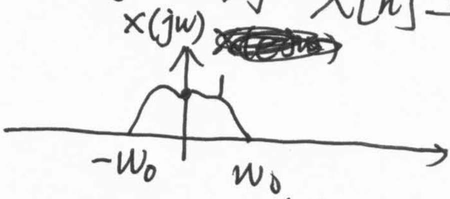

$x_s(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\frac{\omega}{N}})$

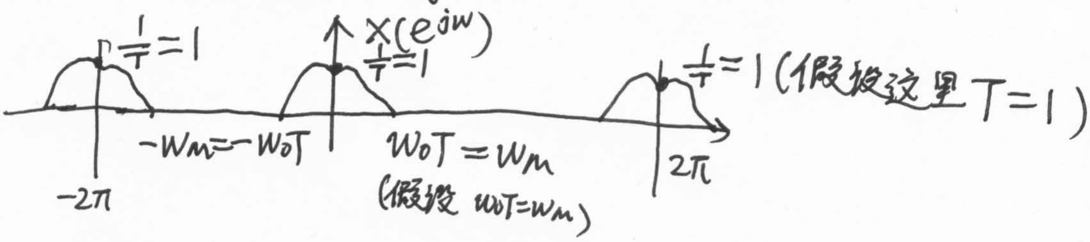



注意：$X_s(e^{j\omega})$可能混叠！

另一种观点看待 $X_s(e^{j\omega})$

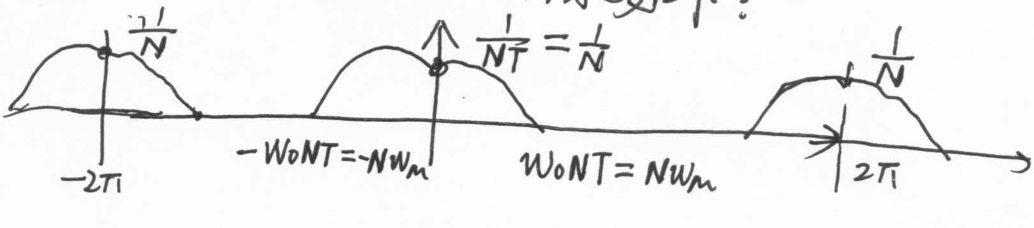
假设 $x[n]$是某连续信号$x(t)$以T为周期进行采样获得的样值序列，即 $x[n]=x(nT)$，根据第一节，$x(t)\xrightarrow{F}X(j\omega)$ 与 $x[n]\xrightarrow{F}X(e^{j\omega})$ 关系如下：



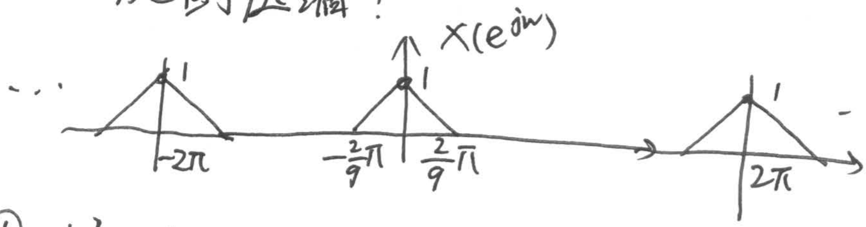




那么 ~~$X_s[n]$~~ $x_s[n]=x[nN]$ 可以看成是信号$x(t)$以NT为周期进行采样获得的样值序列，$x_s[n]=x[nN]$

则 $X_s(e^{j\omega})$图像如下：



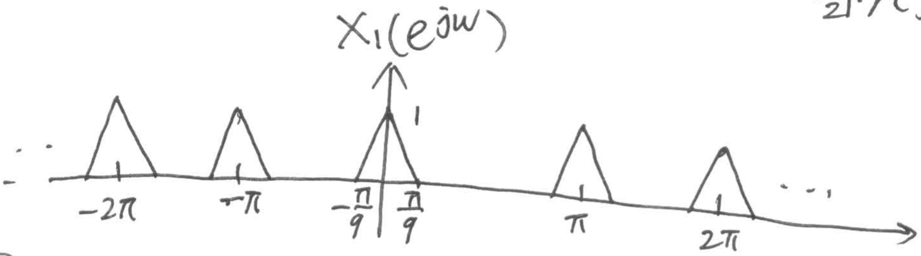
例5-1：若 $x[n]$ 的截止频率 $w_m=\frac{2}{9}\pi$，问如何将 $x[n]$ 进行最大程度的压缩？



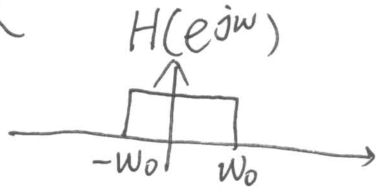

① 以 $N=2$ 进行内插，即获得

$$x_1[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{2}] & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ 0 & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

则有：

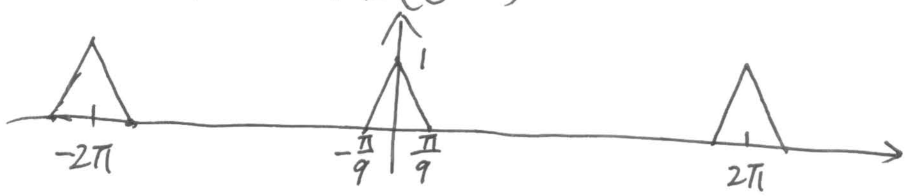



② 以

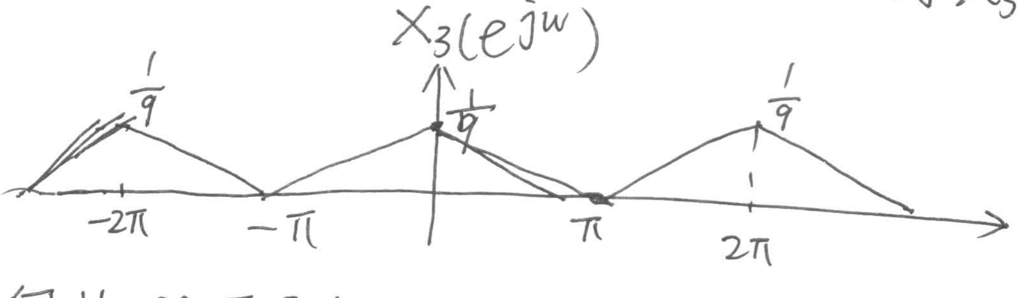



对 $X_1(e^{jw})$ 进行低通滤波，获得 $(\frac{\pi}{9}<w_0<\frac{8}{9}\pi)$

$x_2[n]$，则 $X_2(e^{jw})$




③ 以 $N=9$ 对 $x_2[n]$ 进行抽取，获得 $x_3[n]$，则有

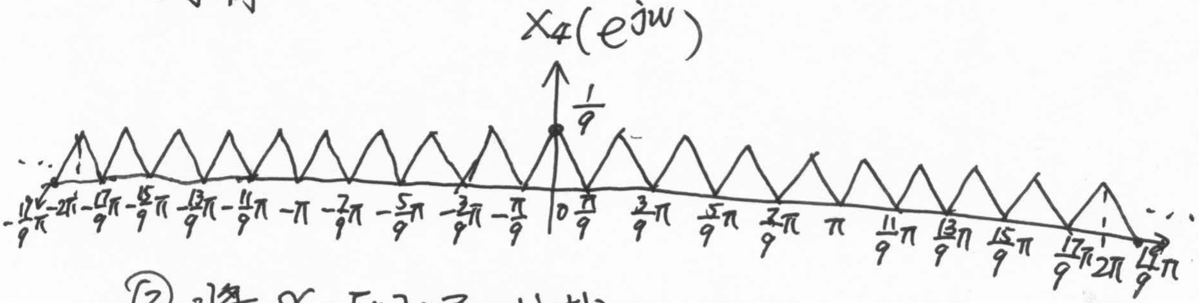



如何从 $x_3[n]$ 恢复 $x_1[n]$ 呢？

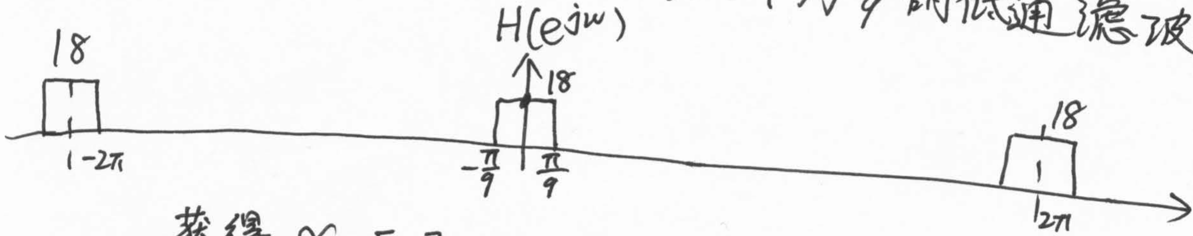
① 以 $N=9$ 进行内插，即获得

$$x_4[n]=\begin{cases} x_3[\frac{n}{9}], & n\text{为9的倍数时} \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

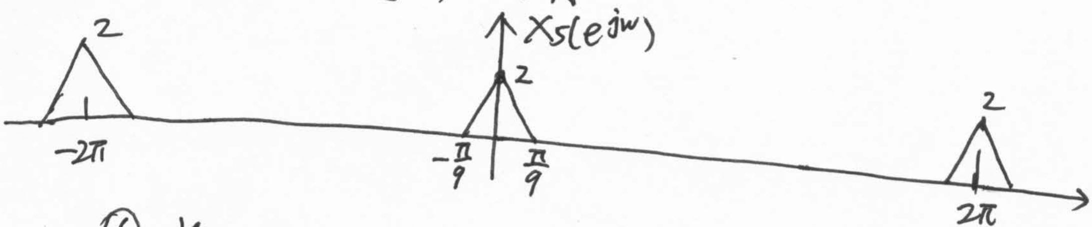
则有



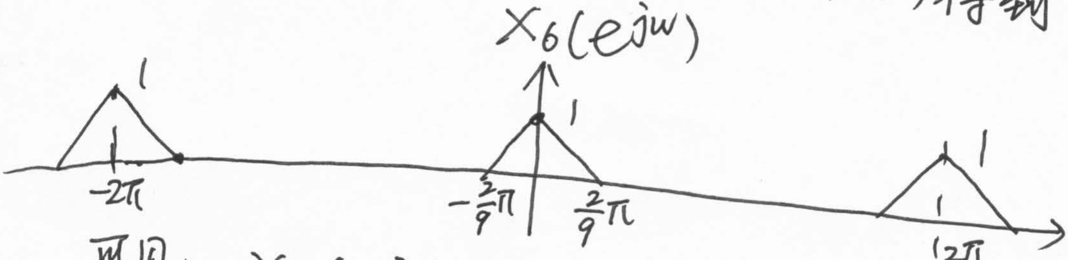

② 将 $x_4[n]$ 通过截止频率为 $\frac{\pi}{9}$ 的低通滤波器




获得 $x_5[n]$，则有




⑥ 将 $x_5[n]$ 以 $N=2$ 进行抽取，得到 $x_6[n]$，则




可见 $X_6(e^{jw})=X(e^{jw})$，即 $x[n]=x_6[n]$

因此我们恢复了 $x[n]$

内插与抽取题目:

5-13. 考虑图5-51所示系统，输入为 $x[n]$，输出为 $y[n]$，零值插入系统在每一序列 $x[n]$ 值之间插入两个零值，抽取系统定义为

$$y[n]=w[5n]$$

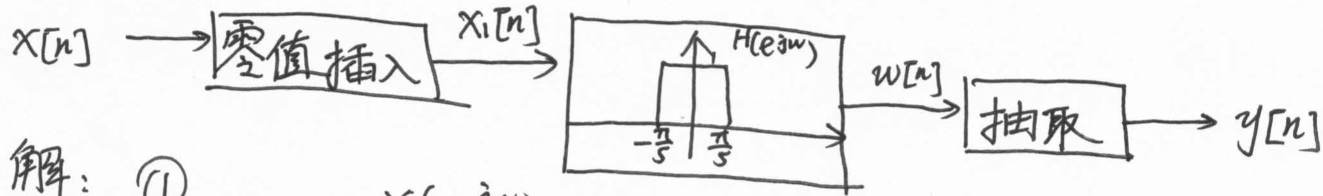
其中 $w[n]$ 是抽取系统的输入序列。若输入

$$x[n]=\frac{\sin(w_1 n)}{\pi n},$$

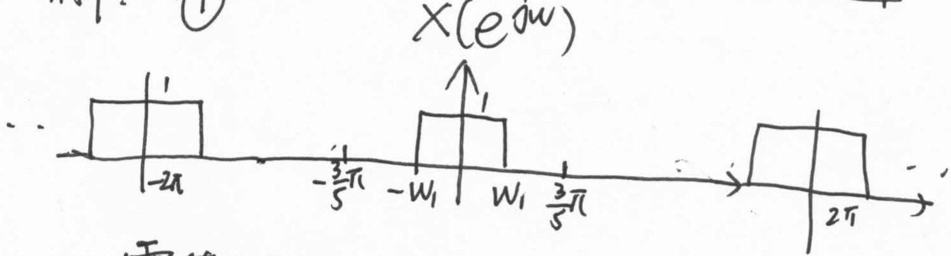
试确定下列 $w_1$ 值时的输出 $y[n]$

① $w_1 \le \frac{3}{5}\pi$

② $\frac{3}{5}\pi < w_1 < \pi$

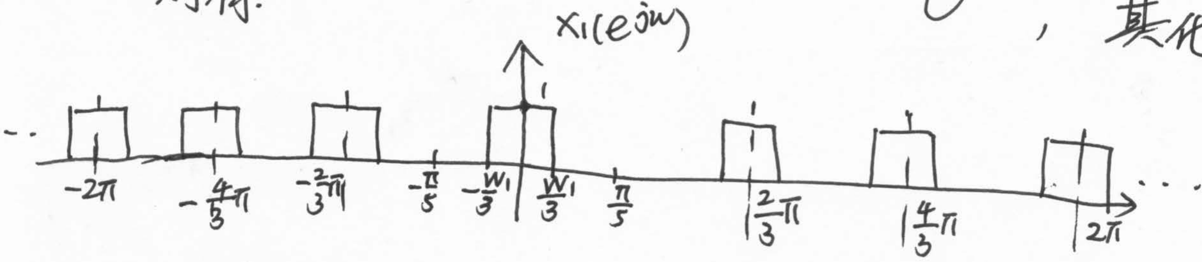



解: ①

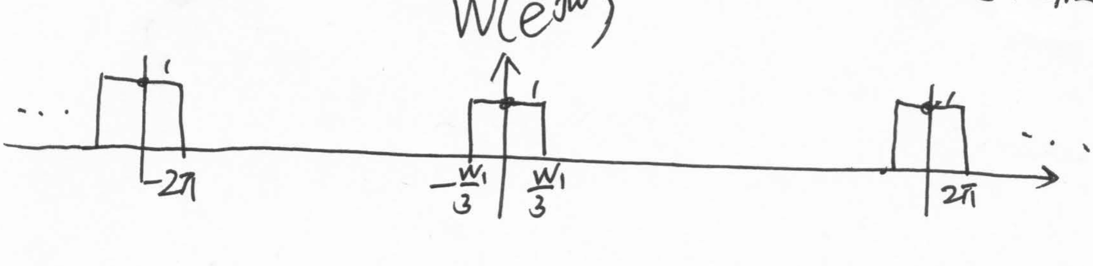



零值插入后得到 $x_1[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{3}], & n为3的倍数 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

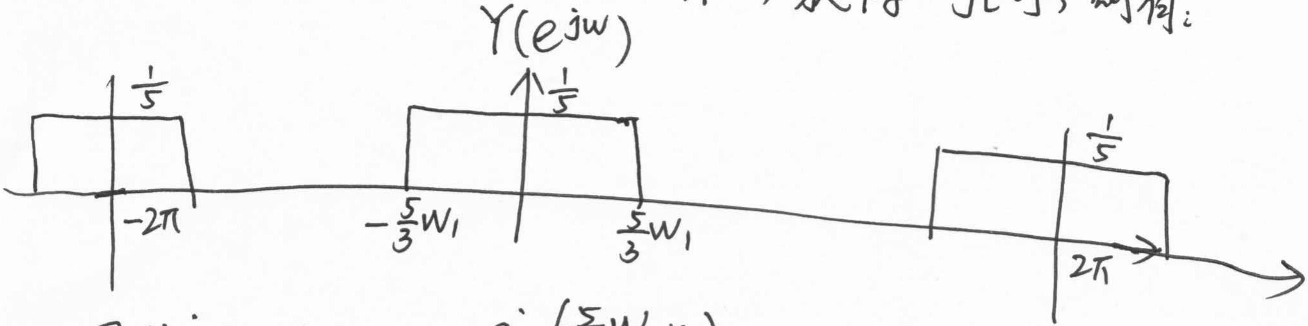
则有:




$w[n]$ 是 $x_1[n]$ 经过 $H(e^{jw})$ 低通滤波后的序列，则有:

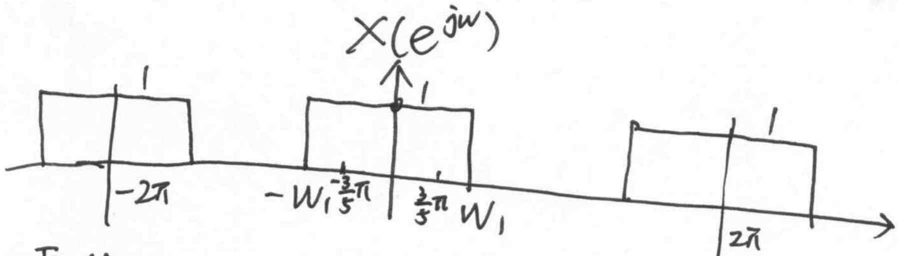


再对 $w[n]$ 以 $N=5$ 进行抽取，获得 $y[n]$，则有：



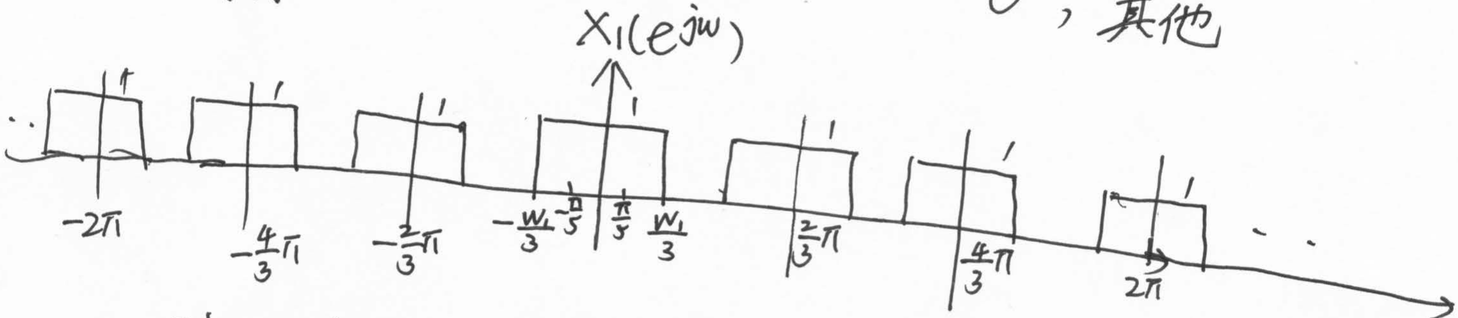

因此 $y[n]=\dfrac{\sin(\frac{5}{3}w_1 n)}{5\pi n}$

② 当 $\frac{3}{5}\pi < w_1 < \pi$ 时，

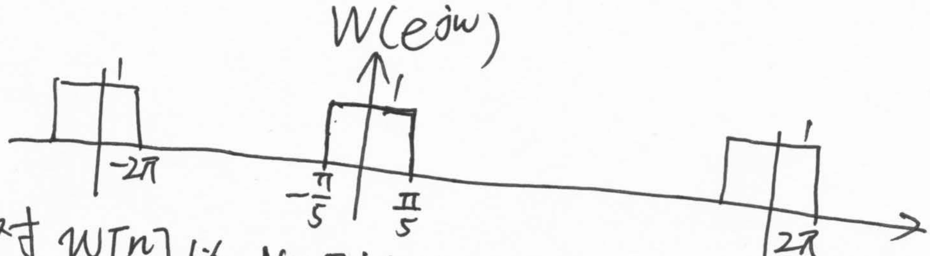



零值插入后得到 $x_1[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{3}], & n为3的倍数 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

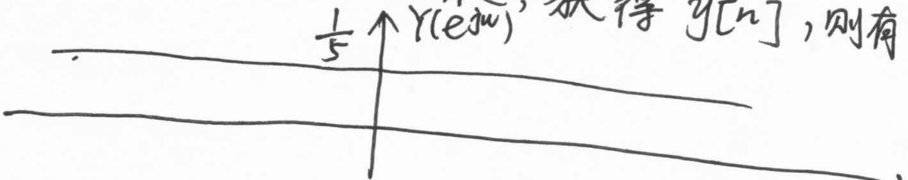
则有：




对 $X_1(e^{jw})$ 用 $H(e^{jw})$ 滤波，得到 $w[n]$，$w[n]$ 的傅里叶变换为：




再对 $w[n]$ 以 $N=5$ 抽取，获得 $y[n]$，则有




因此 $y[n]=\frac{1}{5}\delta[n]$

实际情况是：

$$w[n]=\frac{\sin\frac{\pi}{5}n}{\pi n}$$

$$y[n]=w[5n]=\frac{\sin(\pi n)}{5\pi n}=\begin{cases}\frac{1}{5} & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}=\frac{1}{5}\delta[n]$$

不矛盾。