卷积的性质和计算讲义

一、连续卷积计算

1. $x(t)=e^{-bt}u(t)$ $\quad h(t)=e^{-at}u(t)$ 求 $x(t)*h(t)$ (P38 例2-1)

解：$y(t)=x(t)*h(t)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-b\tau}\underbrace{u(\tau)}_{\tau>0}\,e^{-a(t-\tau)}\overbrace{u(t-\tau)}^{\tau<t}\,d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}e^{-b\tau}\cdot e^{-at}\cdot e^{a\tau}\,d\tau \qquad (t>0)\ (否则为0)$$

$$=e^{-at}\int_{0}^{t}e^{(a-b)\tau}\,d\tau$$

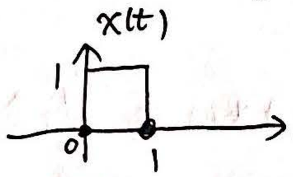
$$=e^{-at}\cdot\frac{1}{a-b}\,e^{(a-b)\tau}\Big|_{0}^{t}$$

$$=\frac{e^{-at}}{a-b}\left[e^{(a-b)t}-1\right]$$

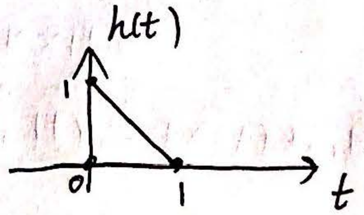
$$=\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}\qquad (t>0)$$

$$=\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}\,u(t)$$

② 求

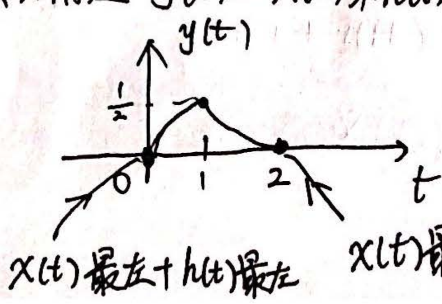


$*$

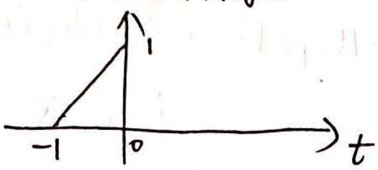


解：这类题用翻转、平移、相乘、积分来做。

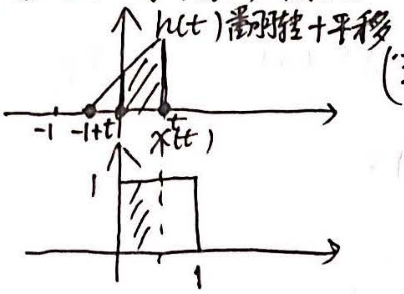
首先，确定 $y(t)=x(t)*h(t)$ 哪里有值。



接着 $h(-t)$ 翻转



然后平移 t，与 $x(t)$ 相交

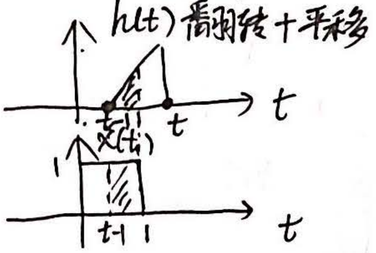


（这是 $0<t<1$ 情况）

此时是黑色区域，答案是梯形面积。

$$y(t)=\frac{[1+(1-t)]t}{2}=\frac{(2-t)t}{2}$$

另一种情况（$1<t<2$）



此时答案是上图三角形面积

$$y(t)=\frac{(2-t)^2}{2}$$

因此，
$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{(2-t)t}{2} & 0<t\leq 1\\[2mm] \dfrac{(2-t)^2}{2} & 1\leq t\leq 2\\[2mm] 0 & \text{其他}\end{cases}$$

请注意：这类题目不宜直接代公式，而应该建立直观图像移来移去解答。做完后可以在临界点上验算检查结果。如：

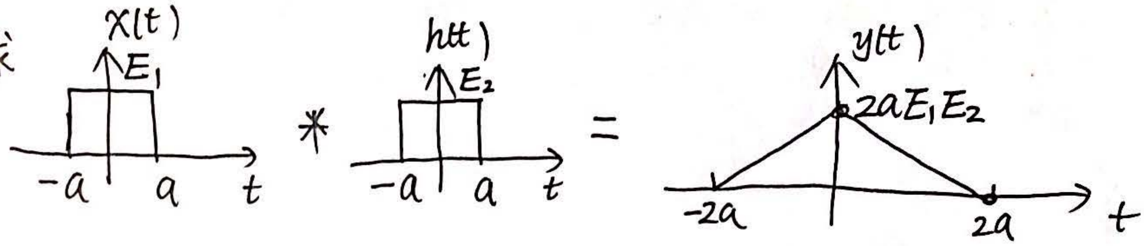
$$\left.\frac{(2-t)t}{2}\right|_{t=1}=\left.\frac{(2-t)^2}{2}\right|_{t=2}=\frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{(2-t)t}{2}\right|_{t=0}=0=\left.y(t)\right|_{t<0}$$

$$\left.\frac{(2-t)^2}{2}\right|_{t=2}=0=\left.y(t)\right|_{t>2}$$

如果不等，除非有 $\delta(t)$ 这样的奇异函数，否则一定是算错了。因为积分值不会突变。

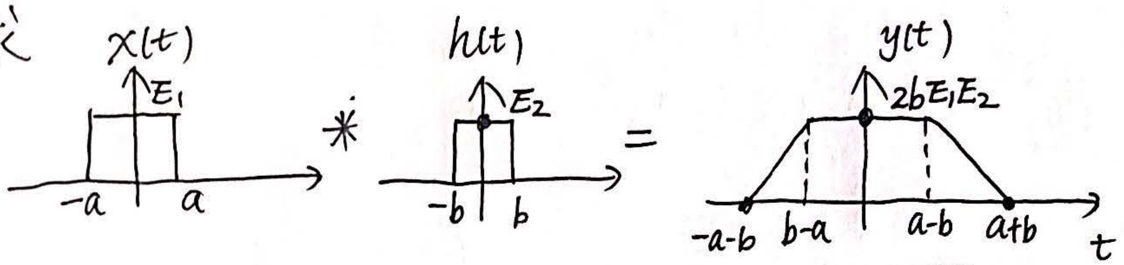
③ 求



（请记住！）

请记住：两个同样长方波卷积是三角波

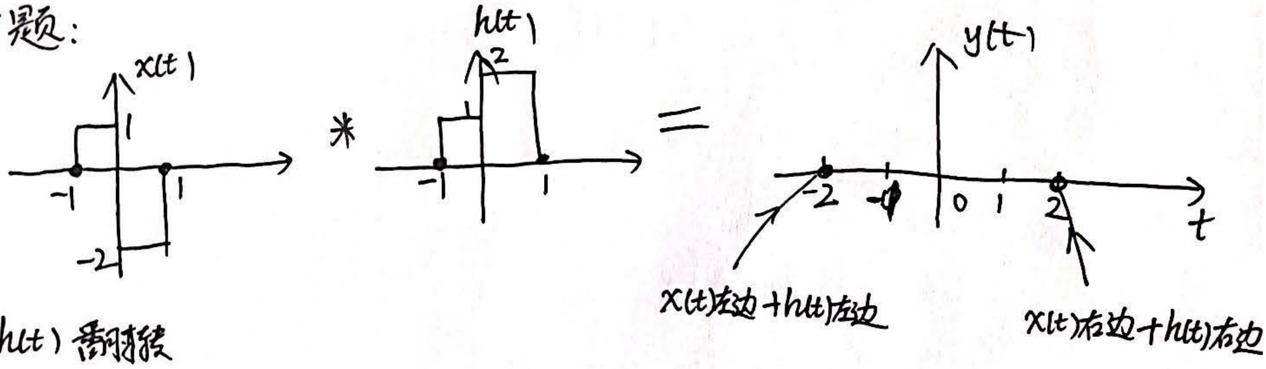
④ 求



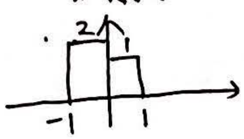
假设（a>b）

请记住：两个不同长度的方波卷积是梯形波。

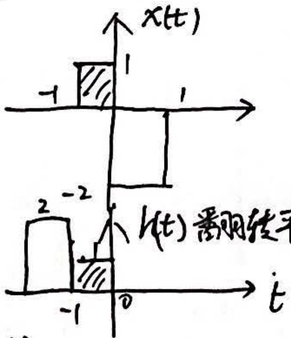
⑤ 考题：



h(t) 翻转

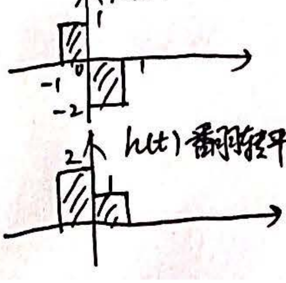


ⓐ 求 $y(t)$ 在 -1 处的值，即 $h(t)$ 平移1个单位与 $x(t)$ 相乘积分的值。



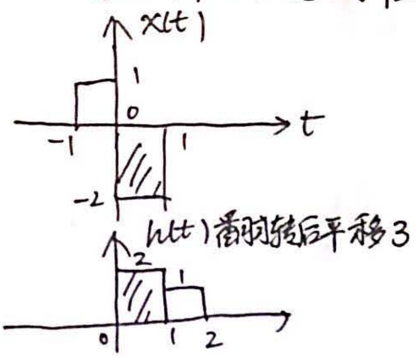
$$y(-1) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

ⓑ 求 $y(t)$ 在 0 处的值，即 $h(t)$ 平移2个单位后与 $x(t)$ 相乘积分值。



$$y(0) = 1 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times (-2) = 0$$

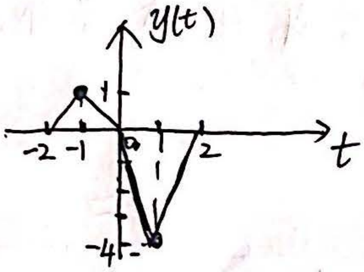
ⓒ 求 $y(t)$ 在 1 处的值，即 $h(t)$ 平移3个单位后与 $x(t)$ 相乘积分值。



$$y(1) = 1 \times (-2) \times 2 = -4$$

ⓓ 将 $y(-2)=0$ $y(-1)=1$，$y(0)=0$ $y(1)=-4$ $y(2)=0$

用直线连起来就是答案。(请思考这道题中为何是直线连起来？



二、卷积的性质

① 交换律：$x(t) \ast h(t) = h(t) \ast x(t)$

(离散也一样：$x[n] \ast h[n] = h[n] \ast x[n]$)

证明：$x(t) \ast h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$

(设 $\tau' = t-\tau$，有：)

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t-\tau') h(\tau')\, d\tau'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau)\, d\tau$$

$$= h(t) \ast x(t)$$

② 结合律 $x(t) \ast (h_1(t) \ast h_2(t)) = (x(t) \ast h_1(t)) \ast h_2(t)$

证明：两种证明方法

方法1：设 $u(t) = h_1(t) \ast h_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) h_2(t-\tau_1)\, d\tau_1$

左边 $= x(t) \ast u(t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau_2) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) h_2(t-\tau_2-\tau_1)\, d\tau_1 \right] d\tau_2$$

同样分析，

$$\text{左边} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau_2)h_1(\tau_1-\tau_2)d\tau_2\right]h_2(t-\tau_1)\,d\tau_1$$

换元： $\tau_1' = \tau_1 - \tau_2$

$\tau_2' = \tau_2$

$$\text{右边} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1'}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \tau_1'}{\partial \tau_2} \\ \frac{\partial \tau_2'}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \tau_2'}{\partial \tau_2} \end{vmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau_2')h_1(\tau_1')d\tau_2'\right]h_2(t-\tau_1'-\tau_2')\,d\tau_1'$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau_2)h_1(\tau_1)d\tau_2\right]h_2(t-\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1$$

$= \text{左边}$

方法2： 先证明：

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = [x(t) * h_2(t)] * h_1(t) \quad \text{(公式1)}$$

假设两个LTI系统

系统1： $x(t) \rightarrow \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{x(t)*h_1(t)} \boxed{h_2(t)} \rightarrow [x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$

系统2： $x(t) \rightarrow \boxed{h_2(t)} \xrightarrow{x(t)*h_2(t)} \boxed{h_1(t)} \rightarrow [x(t)*h_2(t)]*h_1(t)$

要证公式1，就要证这两个LTI等价，也就是要证两个LTI系统对$\delta(t)$的输出相等。（请思考为什么？）

系统1： $\delta(t) \rightarrow \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{h_1(t)} \boxed{h_2(t)} \rightarrow h_1(t)*h_2(t)$

系统2： $\delta(t) \rightarrow \boxed{h_2(t)} \xrightarrow{h_2(t)} \boxed{h_1(t)} \rightarrow h_2(t)*h_1(t)$

根据交换律，有 $h_1(t)*h_2(t) = h_2(t)*h_1(t)$，因此有：

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t) = [x(t)*h_2(t)]*h_1(t)$$

最后将 $x'(t)=h_2(t)$

$h_1'(t)=x(t)$ 代入上式得：

$h_2'(t)=h_1(t)$

$$[h_1'(t)*h_2'(t)]*x'(t)=[h_1'(t)*x'(t)]*h_2'(t)$$

再次应用交换律有：

$$x'(t)*[h_1'(t)*h_2'(t)]=[x'(t)*h_1'(t)]*h_2'(t)$$

去掉上式中的 ′，即得：

$$x(t)*(h_1(t)*h_2(t))=(x(t)*h_1(t))*h_2(t)$$

③ 分配律

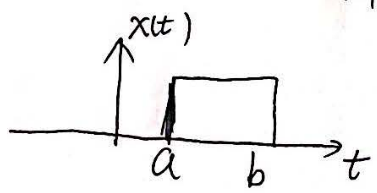
连续：$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$

离散：$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$

证明：积分分配律（略）

三、一些补充的知识和解题技巧

1.



$= u(t-a)-u(t-b)$

2. $$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t)*u(t)$$

3. $$\frac{d[x(t)*h(t)]}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)=x(t)*\frac{dh(t)}{dt}$$

因为 $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ 是LTI系统，应用分配律即得上式

4. $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ 的单位冲激响应为 $h(t)=\delta'(t)$，是冲激偶函数。

5. $x(t+t_0)*h(t-t_0)=x(t)*h(t)$

$x[n+n_0]*h[n-n_0]=x[n]*h[n]$

因为 $x(t+t_0)$ 是 $x(t)$ 左移 t_0，而 $h(t-t_0)$ 是 $h(t)$ 右移 t_0。卷积后 最左边+最左边，最右边+最右边 不变。

例： $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t+t_0)*\delta(t)=x(t+t_0)$

$x(t+3)*\delta(t-5)=x(t+8)*\delta(t-5)=x(t+8)$

四. LTI系统稳定性

定理：LTI系统稳定的充要条件为 $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau<+\infty$

（离散时：$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|<+\infty$）

证明：(充分性) 假设 $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|<+\infty$，我们要证若 $\forall t$，有 $|x(t)|<M$，则 $|y(t)|=|x(t)*h(t)|<+\infty$

~~证明~~ 证明：

$$|y(t)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right|$$

$$\leq\int_{-\infty}^{+\infty}|x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau$$

$$\leq M\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t-\tau)|d\tau}_{\text{这一项有限}}<+\infty$$

得证。

(必要性)：假设 $\forall x(t)$，其中 $|x(t)|<M$，有

$|y(t)|=|x(t)*h(t)|<+\infty$，那么有

$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau<+\infty$

由于 $x(t)$ 的任意性，设

$$x(t)=\begin{cases}+1, & 当\ h(-t)>0\ 时\\ -1, & 当\ h(-t)<0\ 时\end{cases},$$ 这个 $x(t)$ 满足 $|x(t)|<M$（可取 $M=1.5$）

此时，
$$\begin{aligned}y(0)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(0-\tau)d\tau<+\infty\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(-\tau)d\tau<+\infty\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}|h(-\tau)|d\tau<+\infty\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|d\tau<+\infty\end{aligned}$$

命题得证。

五、LTI系统的因果性

定理：LTI系统因果的充要条件是 $h(t)=0$ 当 $t<0$ 时，（离散时，$h[n]=0$ 当 $n<0$ 时）

证明：因为 $y(t)$ 有值的 t 是 $x(t)$ 的最左边 + $h(t)$ 的最左边 $x(t)$ 的最左边 + $h(t)$ 的最左边，所以要证 $y(t)$ 的最左边 $\geq x(t)$ 的最左边，只能让 $h(t)$ 的最左边至少从 0 开始。