第五章：采样与调制

① 钟的例子

问题：一个钟的时针以 w_c rad/s 匀速旋转，我们观察它以 w_s rad/s 进行采样的图像，希望获得 w_c。

结论：我们只知道 w_c 为下面 w 中的一个

$$w = w_c(\text{真实值}) + k w_s \quad (k \in Z)$$

但无法分辨是哪一个。

② cos 与 sin 例子

对 $x(t) = \cos(w_c t)$ 采样，获得

$x[n] = \cos(w_c n T_s)$ 其中 T_s 为采样周期

如何从样点中获得 w_c？

结论；我们只知道 w_c 为下面 w 中的一个

$$w = w_c(\text{真实值}) + k w_s \quad \left(w_s = \frac{2\pi}{T}\right)$$

但无法分辨是哪一个。

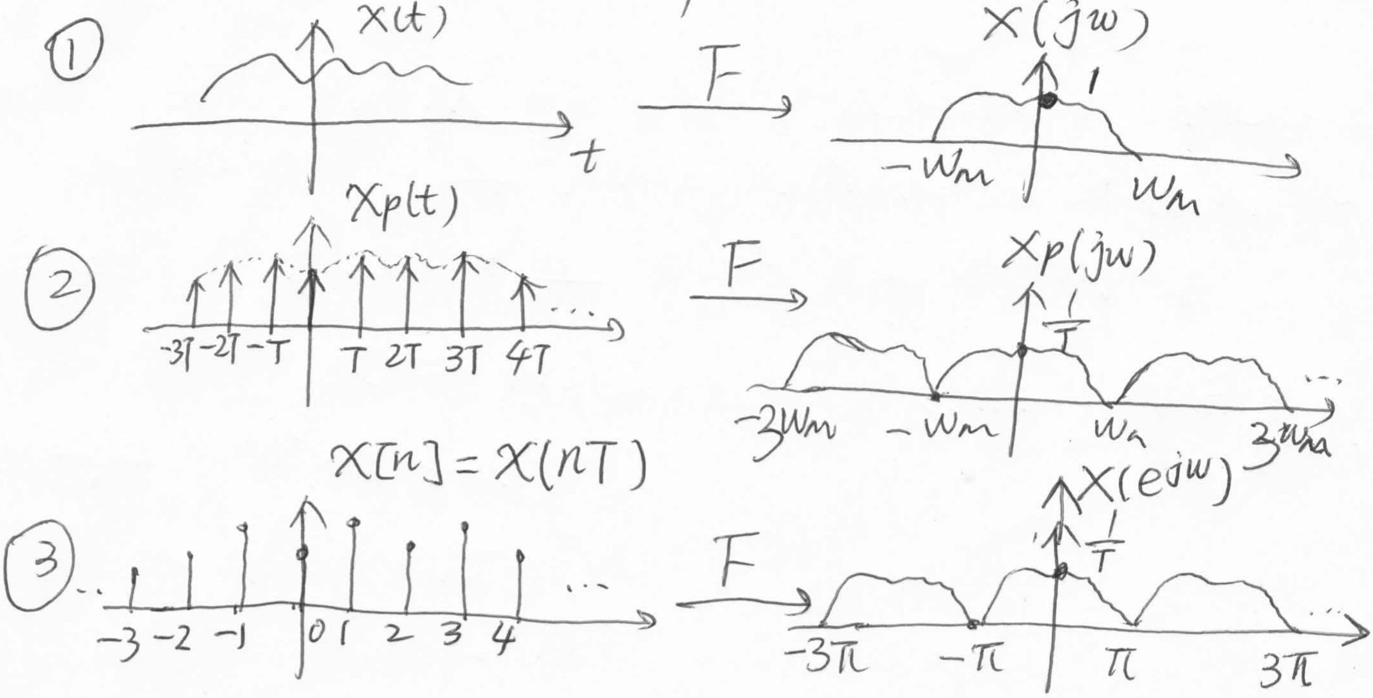
③ 采样定理

$$w = w_c(\text{真实值}) + k w_s$$

若我们限定 $w \in [-\frac{w_s}{2}, \frac{w_s}{2})$ 内，则 w 有唯一解。

采样定理：设 $x(t)$ 为带限信号，即 $X(jw)=0$ $|w|>w_m$ 时，如果 $w_s > 2w_m$，其中 $w_s = \frac{2\pi}{T}$，那么 $x(t)$ 能唯一由 $x[n] = x[nT]$ 确定。

~~证明~~ 首先定义下面三个函数



证明:

① $$X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$

$$\cancel{X_p(j\omega)=X(j\omega)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}}$$

$$x_p(t)=x(t)\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)}_{p(t)}$$

$$=x(t)p(t)$$

$$X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*P(j\omega)$$

$p(t)$是一个T为周期函数，则

$$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_s t}\qquad \omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T p(t)e^{-jk\omega_s t}=\frac{1}{T}$$

$$p(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jk\omega_s t}$$

则

$$P(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$$

$$X_p(w) = \frac{1}{2\pi} X(jw) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(w - kw_s)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(w - kw_s))$$

② $X(e^{jw}) = X_p(j\frac{w}{T})$

证明:

$$X_p(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right) e^{-jwt} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-jw \cdot nT}$$

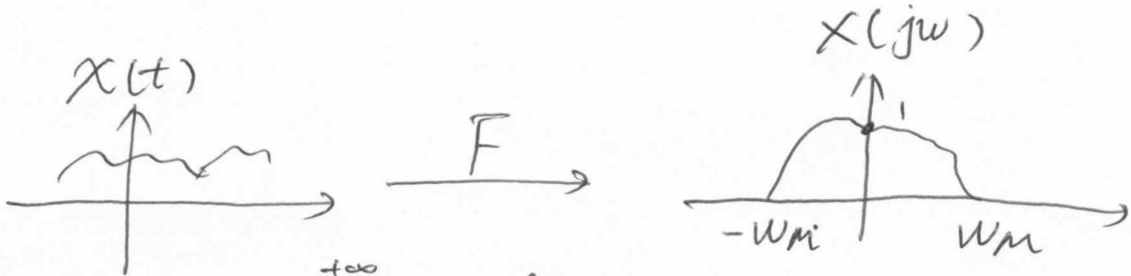
$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-jwn}$$

所以 $X(e^{jw}) = X_p(j\frac{w}{T})$

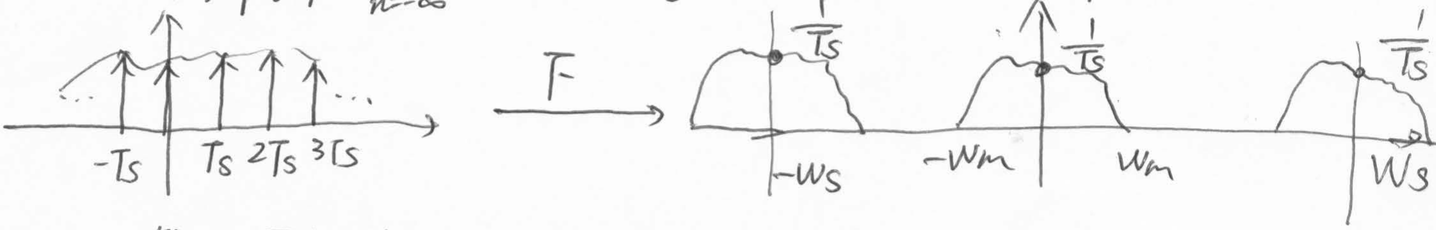
③ $$X(e^{jw}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(j\frac{w}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(j\frac{w - 2k\pi}{T}\right)$$

④ 带限内插公式

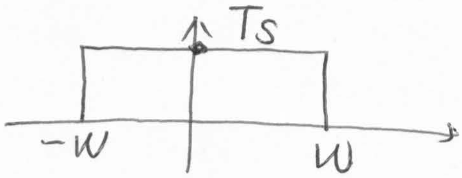


$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$



比较上面两个图，则有：

$$X(jw) = X_p(jw)\cdot$$



其中 $w_M < w < w_s - w_M$

因此

$$x(t) = x_p(t) * \frac{T_s\sin(wt)}{\pi t}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)}_{\delta(t-nT_s)} * \frac{T_s\sin(wt)}{\pi t}$$

$$= T_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\frac{\sin[w(t-nT_s)]}{\pi(t-nT_s)}$$

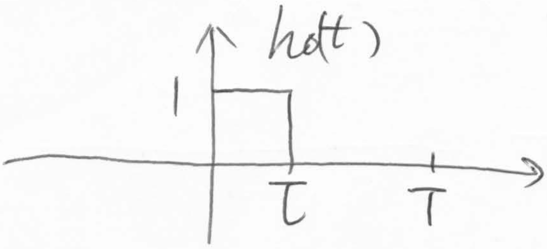
P182 (5-12)

程序演示 P182

⑤ 零阶保持

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

但实际上，$\delta(t-nT_s)$很难获得。我们通常用以下方式采样。



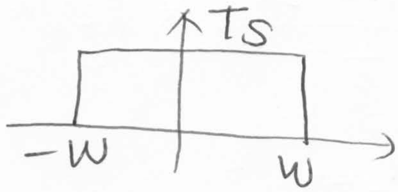
$$x_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)h_0(t-nT_s)$$

$$x_0(t)=x_p(t) * h_0(t) \Rightarrow X_0(j\omega)=X_p(j\omega)H_0(j\omega)$$

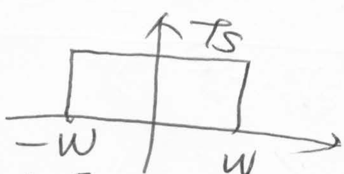
则有:

$$x(t)=x_p(t) * \frac{T_s\sin(\omega t)}{\pi t}$$

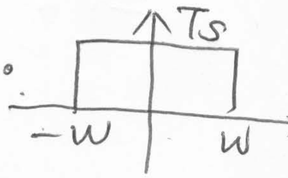
$$X(j\omega)=X_p(j\omega)\cdot$$



$$X(j\omega)=\frac{X_0(j\omega)}{H_0(j\omega)}\cdot$$



$$=X_0(j\omega)\frac{\omega e^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}\cdot$$



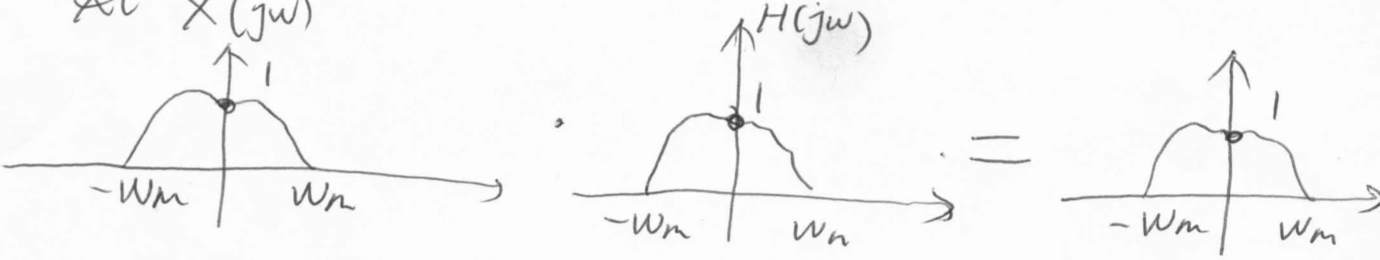
⑥ 连续时间系统的离散实现

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H_c(j\omega)} \longrightarrow y(t)$$

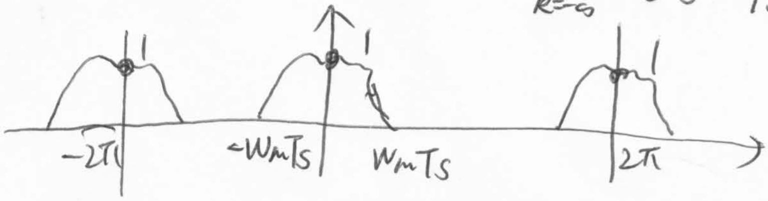
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{采样}} \xrightarrow{x[n]=x(nT_s)} \boxed{H_d(e^{j\omega})} \xrightarrow{y[n]} = y(nT_s)$$

问 $H_c(j\omega)$ 与 $H_d(e^{j\omega})$ 关系

~~例~~



因此： $H_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c\left(j\frac{\omega-2k\pi}{T_s}\right)$



$$h_d[n] = T_s h_c(nT_s)$$

⑦ 信号的内插与抽取

ⓐ 信号的内插 = 信号的时域扩展

$$x[n] \xrightarrow{\text{内插}} x_{(k)}[n]$$

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & n\text{为}k\text{倍数} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega k})$$

ⓑ 信号的抽取

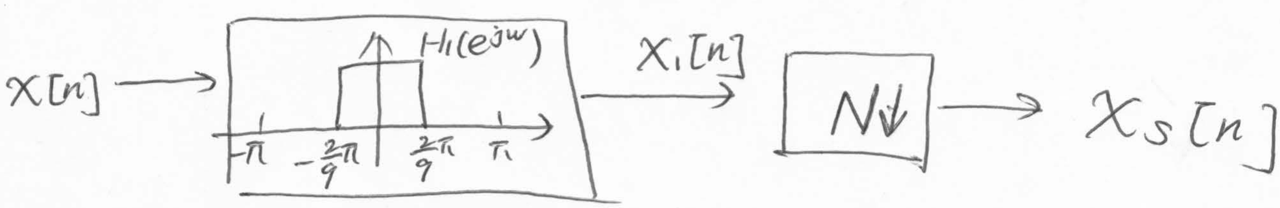
$$x[n] \xrightarrow{\text{抽取}} x_p[n]$$

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n] & n\text{为}N\text{的倍数} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

~~$X_p(\;)$~~

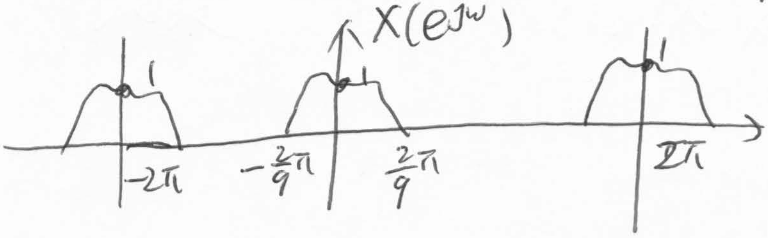
$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} X(e^{j\frac{\omega}{N}})$$，将混叠部分加到一起

例 5-1.

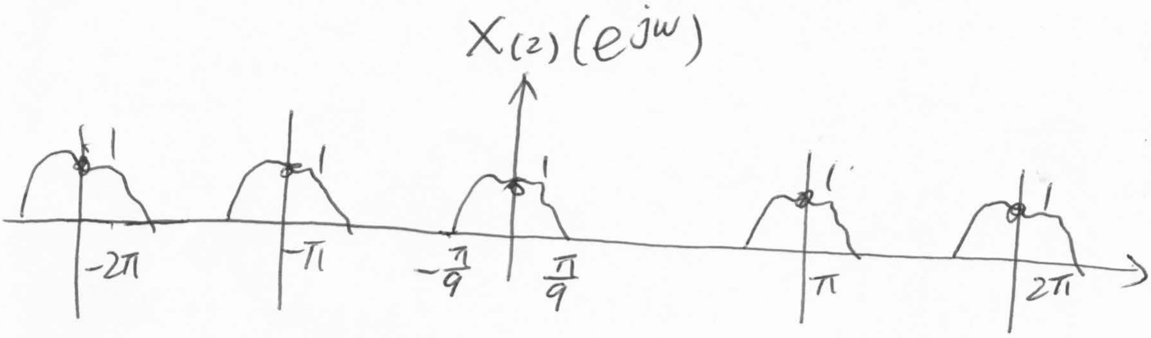


图中 $H_1(e^{j\omega})$ 为一抗混叠滤波器，求最大抽取 N

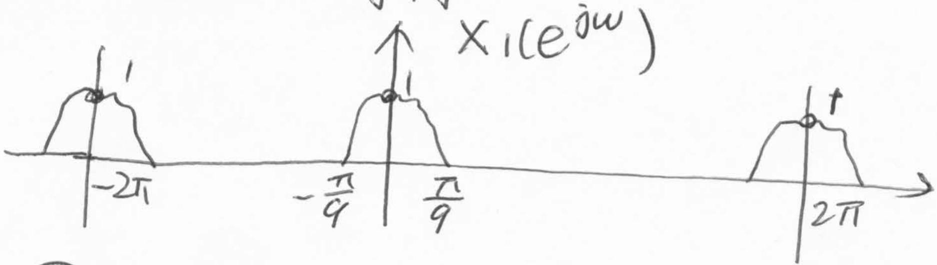
假设 $x[n]$ 带限为 $W_m=\frac{2}{9}\pi$



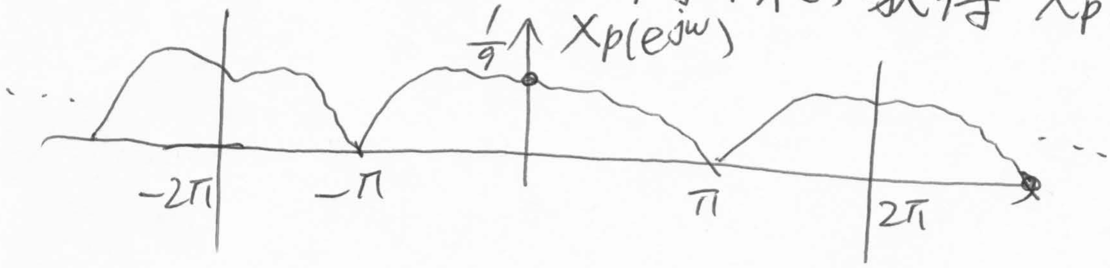
① 以 $k=2$ 内插得 $x_{(2)}[n]$



② $x_{(2)}[n]$ 通过低通 $H_1(e^{j\omega})$，获得 $x_1[n]$，则有



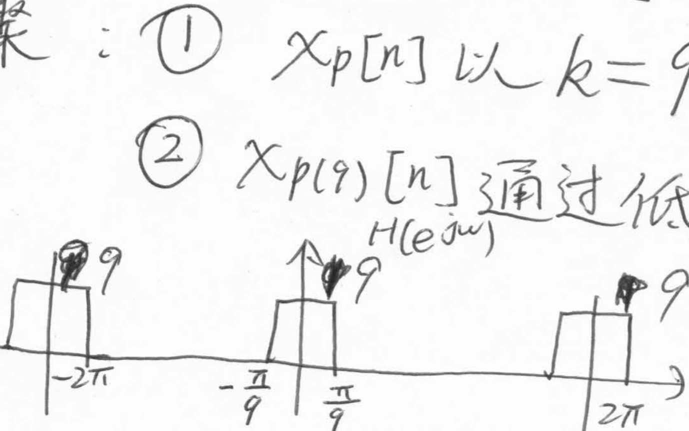
③ 将 $x_1[n]$ 以 $N=9$ 抽取，获得 $x_p[n]$，则有，



由 $x_p[n]$ 如何获得 $x[n]$

步骤：① $x_p[n]$ 以 $k=9$ 内插得 $x_{p(9)}[n]$

② $x_{p(9)}[n]$ 通过低通滤波器，



得到 $x_1[n]$

③ $x_1[n]$以 $N=2$ 抽取，得到 $\frac{1}{2}x[n]$，再扩大2倍即可。