3、

(1) 能定义函数，定义域 $D_f=\{1,2,3,4\}$，值域 $R_f=\{(2,3),(3,4),(1,4)\}$

(2) 能定义函数，定义域 $D_f=\{1,2,3\}$，值域 $R_f=\{(2,3),(3,4),(3,2)\}$

(3) 不能定义函数，因为有一对多的情况

(4) 能定义函数，定义域 $D_f=\{1,2,3\}$，值域 $R_f=\{(2,3)\}$

4、不成立。因为 $f(A)-f(S)\subseteq f(A-S)$ 成立，但是 $f(A-S)\subseteq f(A)-f(S)$ 不成立。下面证明 $f(A)-f(S)\subseteq f(A-S)$

设 $b\in f(A)-f(S)$，则 $b\in f(A)$ 且 $b\notin f(S)$，所以必存在 $a\in A$ 使 $f(a)=b$。由于 $b\notin f(S)$，所以 $a\notin S$，于是 $a\in A-S$，因此 $b\in f(A-S)$，故 $f(A)-f(S)\subseteq f(A-S)$。

再证 $f(A-S)\subseteq f(A)-f(S)$ 不成立，反例如下：

设 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$S=\{a_2,a_3\}$，则 $A-S=\{a_1,a_4\}$，

函数 $f:A\to B$ 的定义为 $f=\{(a_1,b_1),(a_2,b_1),(a_3,b_2),(a_4,b_3)\}$

显然 $f(A)=\{b_1,b_2,b_3\}$，$f(S)=\{b_1,b_2\}$，

$f(A-S)=\{b_1,b_3\}$，$f(A)-f(S)=\{b_3\}$，

则 $f(A-S)\not\subseteq f(A)-f(S)$.

综上，$f(A)-f(S)=f(A-S)$ 不成立

6. 证明：任取 $b_1, b_2 \in B$，并设 $b_1 \neq b_2$，因为 f 是满射，所以必有 $a_1, a_2 \in A$，使得 $f(a_1)=b_1$，$f(a_2)=b_2$，根据函数像的唯一性条件，由 $b_1 \neq b_2$ 可得 $a_1 \neq a_2$。

又因为 g 是由 B 到 C 的函数，所以有 $c_1, c_2 \in C$，使得 $g(b_1)=c_1$，$g(b_2)=c_2$

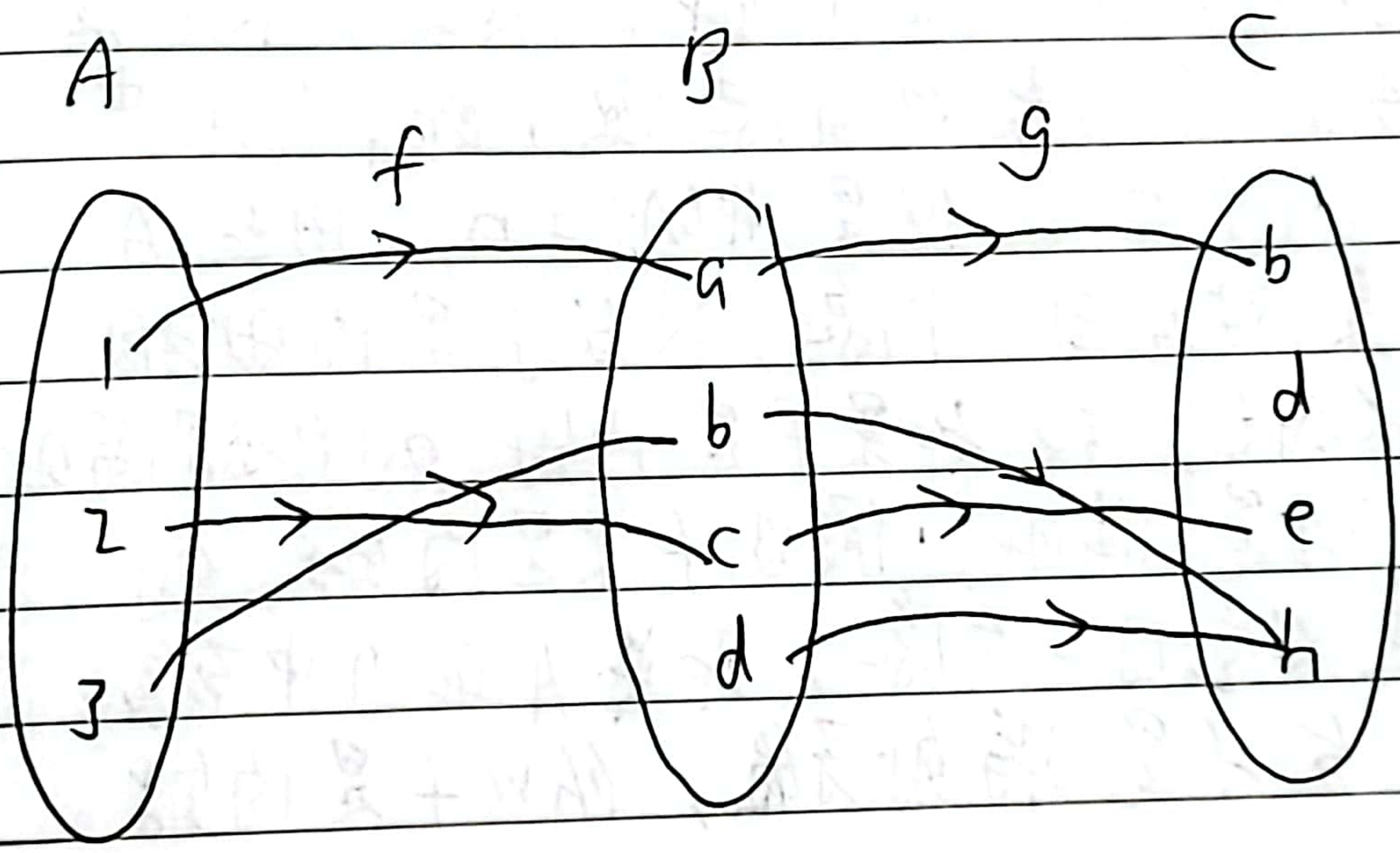
再根据复合函数的定义，得：

$g \cdot f(a_1) = g(b_1) = c_1$，　$g \cdot f(a_2) = g(b_2) = c_2$

因为 $g \cdot f$ 是内射，所以由 $a_1 \neq a_2$，可知 $c_1 \neq c_2$，

即 $g(b_1) \neq g(b_2)$　故 g 是内射.

下图中的例子可说明当 f 不是满射时，g 不一定是内射.



19、

~~阶~~

若要使函数 $f: A\to B$ 成为内射，必须满足 $\#A \le \#B$，即 $n\le m$，否则由A到B不可能存在内射。

当 $n\le m$ 时，由A到B可定义 $A_m^n=\frac{m!}{(m-n)!}$ 个不同的内射。即为从B的m个元素中取出n个元素的排列数。

要使函数 $f: A\to B$ 成为双射，必须满足 $\#A=\#B$，即 $n=m$。否则，由 $A\to B$ 不可能存在双射。

当 $n=m$ 时，由A到B可定义 $A_m^m=m!$ 个不同的双射。

11、反证法。已知 $f: A\to A$ 是内射。假设f不是满射，则在A中至少有一个元素没有像源，即集合A中的元素至多只有 $n-1$ 个像。但是 $\#(A)=n$，因此A中至少有两个元素对应同一个像，这与f是内射相矛盾，所以假设不成立，故如果f是内射，则它必是满射。

反之，已知 $f: A\to A$ 是满射，假设f不是内射，则A中至少有两个元素对应同一个像，即~~集~~A在A中至多有 $n-1$ 个像，这与f是满射矛盾，所以f是内射。

14、

$f\cdot g = f(g(x)) = f(x+4) = (x+4)^2 - 2 = x^2+8x+14$

$g\cdot f = g(f(x)) = g(x^2-2) = x^2+2$

因为 $(f\cdot g)(0) = (f\cdot g)(-8)$，因此 $f\cdot g$ 不是内射。

又因为 $(x+4)^2-2 \geq -2$，因此也不是满射。因此不是双射。

$g\cdot f$ 也不是内射，也不是满射，也不是双射。

但是 $g(x)=x+4$ 是内射也是满射，~~内~~因此~~也~~也是双射。

$f(x)=x^2-2$ 不是内射，不是满射，~~也不是~~也不是双射。

19.

证：当 f 和 g 都是双射时，h 是双射

任取 $b_1, b_2 \in B$，且 $b_1 \neq b_2$，因为 f 是满射，所以必
存在 $a_1, a_2 \in A$，使得 $f(a_1) = b_1$，$f(a_2) = b_2$，且 $a_1 \neq a_2$
任取 $d_1, d_2 \in D$，且 $d_1 \neq d_2$，因为 g 是满射，所以必
存在 $c_1, c_2 \in C$，使得 ~~$f(c_1) =$~~ $g(c_1) = d_1$，$g(c_2) = d_2$

由于 $f(a_1) \neq f(a_2)$，$g(c_1) \neq g(c_2)$
则 $(f(a_1), g(c_1)) \neq (f(a_2), g(c_2))$
又因为 $h(a_1, c_1) = (f(a_1), g(c_1))$，$h(a_2, c_2) = (f(a_2), g(c_2))$
所以 $h(a_1, c_1) \neq h(a_2, c_2)$
即当 $(a_1, c_1) \neq (a_2, c_2)$ 时，有 $h(a_1, c_1) \neq h(a_2, c_2)$
故 h 是内射.

任取 $b \in B$，$d \in D$，则 $(b, d) \in B \times D$
因为 f 是满射，所以必存在 $a \in A$，使得 $f(a) = b$
因为 g 是满射，所以必存在 ~~$b \in$~~ $c \in C$，使得 ~~$f(c)$~~ $g(c) = d$
所以 $(b, d) = (f(a), g(c))$
又因为 $(f(a), g(c)) = h(a, c)$
所以 $(b, d) = h(a, c)$
即 $B \times D$ 中每一个元素都是 $A \times C$ 中的一个元素的像
所以 h 为满射。因为 h 既为内射，又为满射，
所以 h 为双射.

再证：当h是双射时，f和g都是双射

反证法。假设f和g不都是~~双~~内射，即f和g至少有一个不是~~双~~内射，不妨设f不是~~双~~内射.

任取 $a_1, a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$

取 $c_1, c_2 \in C$ 且 $c_1 = c_2$

则 $(a_1, c_1) \neq (a_2, c_2)$

因为h为双射，所以 $h(a_1, c_1) \neq h(a_2, c_2)$

即 $(f(a_1), g(c_1)) \neq (f(a_2), g(c_2))$ ①

因为f不是内射，所以 $f(a_1) = f(a_2)$

又因为 $c_1 = c_2$，所以 $g(c_1) = g(c_2)$

所以 $(f(a_1), g(c_1)) = (f(a_2), g(c_2))$ ②

①、②矛盾，所以假设不成立

故f和g都是内射.

$\forall b \in B, d \in D$，则 $(b,d) \in B\times D$，由于 h 为满射，则必存在 $(a,c) \in A\times C$，使得 ~~$h(a,c)$~~ $h(a,c) = (b,d)$

由于 $h(a,c) = (f(a), g(c))$，则 $f(a) = b$，$g(c) = d$

即 $\forall b \in B$，必存在 $a \in A$，使得 $f(a) = b$，故 f 为满射

同理，$\forall d \in D$，必存在 $c \in C$，使得 $g(c) = d$，故 g 为满射

所以当 h 是双射时，f 和 g 都是双射

综上，当且仅当 h 是双射时 f 和 g 都是双射.

21.
定义函数 $f: A \to A$，使得 $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4, f(4)=1$，
显然 f 是双射且 $f \neq I_A$。

函数 $f^2: A \to A$，$f^2(1)=3, f^2(2)=4, f^2(3)=1, f^2(4)=2$；

函数 $f^3: A \to A$，$f^3(1)=f^2(f(1))=f^2(2)=4$
类似地，$f^3(2)=1$，$f^3(3)=2$，$f^3(4)=3$

可定义函数 $g: A \to A$，使得 $g(1)=2, g(2)=1$，
$g(3)=4$，$g(4)=3$
显然 $g \neq I_A$，但 $g^2 = I_A$.