3、

(1) 证 $a\vee b = b\wedge c$：

因为 $a\leq b$，所以 $a\vee b=b$，因为 $b\leq c$，所以 $b\wedge c=b$，

因此 $a\vee b = b\wedge c$

(2) 因为 $a\leq b$，所以 $a\wedge b=a$，$a\vee b=b$

又因为 $b\leq c$，所以 $b\wedge c=b$，$b\vee c=c$，

于是

$(a\wedge b)\vee(b\wedge c) = a\vee b = b$;

$(a\vee b)\wedge(b\vee c) = b\wedge c = b$;

所以 $(a\wedge b)\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(b\vee c)$

4、因为 $a\wedge b\leq a$，$c\wedge d\leq c$，所以由格的保序性得

$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leq a\vee c$。

因为 $a\wedge b\leq b$，$c\wedge d\leq d$，所以由格的保序性得

$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leq b\vee d$

因此，$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)$ 是 $a\vee c$ 和 $b\vee d$ 的下界，

所以 $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leq(a\vee c)\wedge(b\vee d)$

12.

设 $\langle L;\leq\rangle$ 是一个格，$\#L\geq 2$，

用反证法：假定存在 $l\in L$，使得 $l\wedge l=0$，$l\vee l=1$，

则由幂等律知 $l=0=1$，与 $\#\geq 2$ 矛盾，

所以，L 中必不存在元素是它自身的补。

19.

必要性：设存在 $i(1\leq i\leq r)$ 使 $a=b$，则 $b_i\leq b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_r$，

所以 $a=b_i\leq b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_r$

充分性：设 $a\leq b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_r$，

用反证法，若不存在 $i(1\leq i\leq r)$ 使得 $a=b_i$，则由于

$a, b_1, b_2, \cdots, b_r$ 均是原子，故 $a\wedge b_1=0$，$a\wedge b_2=0$，

$\cdots$，$a\wedge b_r=0$，所以

$a\wedge(b_1\vee b_2\vee\cdots\cancel{b_{r-1}}\vee b_r)=(a\wedge b_1)\vee(a\wedge b_2)\vee\cdots\vee(a\wedge b_r)=0$

又因为 $a\leq b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_r$，所以 $a\wedge(b_1\vee b_2\vee\cdots\cancel{b_{r-1}}\vee b_r)=a$

而 a 是原子，所以 $a\neq 0$，即 $a\wedge(b_1\vee b_2\cdots\vee b_r)\neq 0$

与上述结论矛盾，所以假设错误，故存在 $i(1\leq i\leq r)$

使 $a=b_i$。

25、布尔代数有补，故α和β互补，由分配律

$f(x,y) = (x\wedge\alpha)\vee(x\wedge y)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y})$

故 $f(0,1) = 0\vee 0\vee 0=0$，$f(0,\alpha)=0\vee 0\vee\beta=\beta$

$f(0,\beta)=0\vee 0\vee\alpha=\alpha$，$f(0,0)=0\vee 0\vee 1=1$

$f(\alpha,0)=\alpha\vee 0\vee\beta=1$，$f(\alpha,\alpha)=\alpha\vee\alpha\vee\beta=1$

$f(\alpha,\beta)=\alpha\vee 0\vee 0=\alpha$，$f(\alpha,1)=\alpha\vee\alpha\vee 0=\alpha$

$f(\beta,0)=0\vee 0\vee\alpha=\alpha$，$f(\beta,\alpha)=0\vee 0\vee 0=0$

$f(\beta,\beta)=0\vee\beta\vee\alpha=1$，$f(\beta,1)=0\vee\beta\vee 0=\beta$

$f(1,0)=0\vee 0\vee 0=0$，$f(1,\alpha)=\alpha\vee\alpha\vee 0=\alpha$

$f(1,\beta)=\alpha\vee\beta\vee 0=1$，$f(1,1)=\alpha\vee 1\vee 0=1$

列出对于所有自变量$(x,y)\in B^2$的$f(x,y)$之值的表：

x	0	0	0	0	α	α	α	α	β	β	β	β	1	1	1	1
y	0	α	β	1	0	α	β	1	0	α	β	1	0	α	β	1
$f(x,y)$	1	β	α	1	1	1	α	α	α	0	1	β	0	α	1	1

26.

$f(x,y)$ 的最小项标准形式

$f(x,y)=(f(0,0)\wedge\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(f(0,1)\wedge\bar{x}\wedge y)$

$\vee(f(1,0)\wedge x\wedge\bar{y})\vee(f(1,1)\wedge x\wedge y)$

$=(1\wedge\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(\alpha\wedge x\wedge\bar{y})\vee(1\wedge x\wedge y)$

$f(x,y)$ 的最~~小~~大项标准形式

$f(x,y)=(f(0,0)\vee x\vee y)\vee(f(0,1)\vee x\vee\bar{y})$

$\vee(f(1,0)\vee\bar{x}\vee y)\vee(f(1,1)\vee\bar{x}\vee\bar{y})$

$=(1\vee x\vee y)\vee(0\vee x\vee\bar{y})\vee(0\vee\bar{x}\vee y)\vee(1\vee\bar{x}\vee\bar{y})$

34、

因为 $\langle B; -, \vee, \wedge \rangle$ 是布尔代数，故十条基本定律在其上均成立，所以

$(a\vee b)\wedge(c\vee \bar{b}) = ((a\vee b)\wedge c)\vee((a\vee b)\wedge \bar{b})$（分配律）

$=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge \bar{b})\vee(b\wedge \bar{b})$

$=(a\wedge c)\vee[(b\wedge c)\vee(a\wedge \bar{b})]$

$=(a\wedge c\wedge(b\vee \bar{b}))\vee[(b\wedge c)\vee(a\wedge \bar{b})]$

$=(a\wedge c\wedge b)\vee(a\wedge c\wedge \bar{b})\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge \bar{b})$

$=[(a\wedge(c\wedge b))\vee(b\wedge c)]\vee[(a\wedge \bar{b})\wedge c]\vee(a\wedge \bar{b})$

$=(b\wedge c)\vee(a\wedge \bar{b}) = (a\wedge \bar{b})\vee(c\wedge b)$

即 $(a\vee b)\wedge(c\wedge \bar{b}) = (a\wedge \bar{b})\vee(c\wedge b)$

35、

(1)

对 $\forall a \in B_1$，有 $0 = a \wedge \bar{a} \in B_1$。由 f 是同态映射知

$f(0) = f(a \wedge \bar{a}) = f(a) \otimes f(\bar{a}) = f(a) \otimes f'(\bar{a}) = \alpha$，

所以 $0 \in J$

(2)

若 $a \in J$，则 $f(a) = \alpha$

对 $\forall x \in B_1$，当 $x \leq a$ 时，$x = x \wedge a$

于是 $f(x) = f(x \wedge a) = f(x) \otimes f(a) = f(x) \otimes \alpha = \alpha$，

所以 $x \in J$

(3)

对 $\forall a, b \in J$，有 $f(a) = \alpha$，$f(b) = \alpha$

于是 $f(a \wedge b) = f(a) \otimes f(b) = \alpha \otimes \alpha = \alpha$

所以 $a \wedge b \in J$

$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = \alpha \vee \alpha = \alpha$，所以 $a \vee b \in J$

故 $\langle J; \vee; \wedge \rangle$ 构成一代数系统