3.

(1)

注意到在V中，$c=b^2$，$d=b=c=b^3$，$a=c^2=b^4$

故$\{a,b,c,d\}=\{b^i, i=1,2,4\}$

从而·是可结合的，V是半群

由运算表可以看出a是单位元，因此V是一独异点。

因为$b^1=b$，$b^2=c$，$b^3=c*b$，$b^4=d*b=a$，

所以V是一循环独异点。b是其生成元。

另外，由于$d^1=d$，$d^2=c$，$d^3=c*d=b$，

$d^4=b*d=a$

因此d也是V的生成元

(2)

注意到在 V 中，$c=b^2$，$d=b\cdot c=b^3$，$a=c^2=b^4$

故 $\{a,b,c,d\}=\{b^i, i=1,2,4\}$

所以 $b=g^1$，$c=g^2$，$d=g^3$，$a=g^4$

(3) ~~故~~

$a\cdot a=a$，$b\cdot b=c\neq b$，

$c\cdot c=a\neq c$，$d\cdot d=c\neq d$

∴幂等元为 a

(4) $a^1=a$，$b^4=a$，$c^2=a$，$d^4=c^2=a$

由于 a 为幂等元

所以 V 中每个元素的某次乘方是幂等的、

7、

设H是独异点$\langle S;*\rangle$中所有左可逆元的集合，e是$\langle S;*\rangle$的单位元，因为$e*e=e$，所以e是左可逆元，故$e\in H$且H非空。

设$a,b\in H$，则必存在元素a_l^{-1}，$b_l^{-1}\in S$，使得

$a_l^{-1}*a=e$，$b_l^{-1}*b=e$，

于是

$(b_l^{-1}*a_l^{-1})*(a*b)=b_l^{-1}*(a_l^{-1}*a)*b=b_l^{-1}*b=e$

因此元素$a*b$也存在左逆元$b_l^{-1}*a_l^{-1}$，有$a*b\in H$，

故$\langle H;*\rangle$是$\langle S;*\rangle$的子独异点

9、设$\langle S;*\rangle$是一独异点，H是S中所有可逆元素的集合。

单位元e是可逆元，所以$e\in H$，H非空

若$a,b\in H$，则存在a^{-1}，$b^{-1}\in S$，使得

$a^{-1}*a=a*a^{-1}=e$，$b^{-1}*b=b*b^{-1}=e$，

于是$(b^{-1}*a^{-1})*(a*b)=(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=e$，

因此$a*b$也是可逆元，故$a*b\in H$，$\langle H;*\rangle$是一代数系统。

因为H是S的子集，所以运算$*$在H上也是可结合的，e也是$\langle H;*\rangle$的单位元

对于任意$a\in H$，因为必有$a^{-1}\in S$，使$a^{-1}*a=a*a^{-1}=e$，所以a是a^{-1}的逆元，因此$a^{-1}\in H$

由上证得，$\langle H;*\rangle$是一个群，故原问题得证

13、因为对于任意 $a, b \in G$，有 $a^2 = e$，$b^2 = e$，
且 $(a*b)^2 = e$，所以 $(a*b)^2 = a^2 * b^2$

故 $(a*b)*(a*b) = (a*a)*(b*b)$
$a*(b*a)*b = a*(a*b)*b$
于是根据消去律 $b*a = a*b$，所以 $\langle G; *\rangle$ 是阿贝尔群

17、设 $\langle G; *\rangle$ 是一有限群，又设 $a \in G$ 是 G 中周期大于2的元素。于是 $a \neq e$ 且 $a^2 \neq e$，又由 $a*a^{-1} = e$ 可知 $a \neq a^{-1}$，而 a^{-1} 与 a 的周期是相同的，于是由群中逆元的唯一性，群 $\langle G; *\rangle$ 中周期大于2的元素必成对出现，因此其个数必然为偶数

23.

不能。

考虑 $G=\mathbb{R}^{2\times 2}$，$*$为矩阵乘法

$H_1=\left\{\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$，$H_2=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix} \middle| b\in\mathbb{R}\right\}$

$\langle G;*\rangle$的单位元为I，$I\in H_1$，$I\in H_2$

且 $\forall\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in H_1$，$\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in H_1$，

$\langle H_1;*\rangle$为$\langle G;*\rangle$的子群。同理，~~$\langle H_2;*$为~~

$\langle H_2;*\rangle$为$\langle G;*\rangle$的子群

但是，$H_1*H_2=\left\{\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\begin{bmatrix}ab+1 & a\\ b & 1\end{bmatrix} \middle| ab\in\mathbb{R}\right\}$

考虑 $a=b=1$，得 $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\in H_1*H_2$

而 $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\notin H_1*H_2$

故 ~~这~~ H_1*H_2不构成$\langle G;*\rangle$的子群

25、

设 $\langle G;*\rangle$ 是由 g 生成的循环群，$\langle H;*\rangle$ 是 $\langle G;*\rangle$ 的子群，若 $\langle H;*\rangle=\langle\{e\};*\rangle$，则 $\langle H;*\rangle$ 是循环群；若 $\langle H;*\rangle$ 不是单位元群，则由 $g^n\in H\ (n\neq 0)$，必有 $(g^n)^{-1}=g^{-n}\in H$，因此 H 中必有 g 的正指数幂，设 r 是使得

$g^r\in H$ 的最小正整数

对于任一 $g^s\in H$，令 $s=mr+i\ (0\leq i<r)$，

则 $\cancel{g^s}\ g^i=g^{s-mr}=g^s*(g^r)^{-m}\in H$

但由于 r 是最小正整数之假设，必有 $i=0$，于是 $s=mr$，即 $g^s=(g^r)^m$，故 $\langle H;*\rangle$ 是由 g^r 生成的循环群，原题得证．

29、

证

先证明结论：在一个群中，元素与子集的运算也是满足结合律的

设 $\langle G; * \rangle$ 是一个群，$\hat{G} \subseteq G$，于是对于任意的 $a, b \in G$，$(a*b)*\hat{G} = \{(a*b)*g \mid g \in \hat{G}\}$.

因为 $(a*b)*g = a*(b*g)$，所以

$$(a*b)*\hat{G} = \{a*(b*g) \mid g \in \hat{G}\}$$

$$= \{a*(b*g) \mid b*g \in b*\hat{G}\}$$

$$= a*(b*\hat{G}),$$

类似地也可证明 $\hat{G}*(a*b) = (\hat{G}*a)*b$,

$$(a*\hat{G})*b = a*(\hat{G}*b)$$

(1) $e*\hat{G} = \hat{G}*e$，所以 $e \in H$，H 非空

设 $a, b \in H$，则 $a*\hat{G} = \hat{G}*a$，$b*\hat{G} = \hat{G}*b$,

于是 $(a*b)*\hat{G} = a*(b*\hat{G}) = a*(\hat{G}*b)$

$$= (a*\hat{G})*b = (\hat{G}*a)*b = \hat{G}*(a*b)$$

因此 $a*b \in H$.

设 $a\in H$，则

$a^{-1}*\hat{h}=(a^{-1}*\hat{h})*(a*a^{-1})$

$=a^{-1}*(\hat{h}*a)*a^{-1}$

$=a^{-1}*(a*\hat{h})*a^{-1}$

$=(a^{-1}*a)*\hat{h}*a^{-1}=\hat{h}*a^{-1}$，

因此 $a^{-1}\in H$

由上证得，$\langle H;*\rangle$是$\langle h;*\rangle$的子群

(2) 因为 $e*\hat{h}=\hat{h}*e=\hat{h}$，所以$\hat{h}$是$\langle\hat{h};*\rangle$的一个左陪集，也是一个右陪集，

于是，对于任意的 $a\in\hat{h}$，

$a*\hat{h}=e*\hat{h}=\hat{h}*e=\hat{h}*a$，

因此 $\hat{h}\subseteq H$

~~因为$\langle\hat{h};*\rangle$是$\langle h;*\rangle$的子群，~~

下面先证明结论 ∥：设$\langle h;*\rangle$是一个群，H是h的非空子集，若$\langle H;*\rangle$是一个群，则$\langle H;*\rangle$是$\langle h;*\rangle$的子群。

设$\langle H;*\rangle$是群，则$\langle H;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子代数。

设e'是$\langle H;*\rangle$的单位元，则有$e'*e'=e'$。
由e是群$\langle G;*\rangle$的单位元，有$e*e'=e'$，
于是$e'*e'=e*e'$。由消去律知$e'=e$，因此
$e\in H$，对任意$a\in H$，设a'是a在群$\langle H;*\rangle$
中的逆元，于是有$a*a'=e$，另一方面，$a*a^{-1}=e$，
由消去律知$a'=a^{-1}$，因此$a^{-1}\in H$，
由此可得，$\langle H;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子群。

在本题中，$\langle \hat{G};*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子群，~~由於~~由
上述结论知，~~$\langle \hat{G}$~~ 由于$\langle \hat{G};*\rangle$是一个群，故$\langle H;*\rangle$
是群且$\hat{G}\subseteq H$，所以$\langle \hat{G};*\rangle$也是$\langle H;*\rangle$的
子群。
由H的定义，对于任意$a\in H$，都有$a*\hat{G}=\hat{G}*a$，
因此$\langle \hat{G};*\rangle$是$\langle H;*\rangle$的正规子群