

离散数学

Discrete Mathematics

第4章 代数系统

宋牟平 songmp@zju.edu.cn 玉泉校区 行政楼 325

上午10时45分

第4章 代数系统

代数论由法国数学家伽罗华创立。

代数论的建立解决了古典数学难题：高次方程求根、倍立方、化圆为方、三等分角和作正 n 边形。

集合、数理逻辑和布尔代数从代数论的角度看是同一个代数系统，三者代数论的基础上统一了起来。

4.1 运算

定义4-1 运算：设有非空集合 A ，函数 $f: A^n \rightarrow A$ 称为 A 上的一个 **n 元运算**， n 称为运算的**阶**。

函数 $f: A^2 \rightarrow A$ 是 A 上的二元运算，函数 $f: A \rightarrow A$ 是 A 上的一元运算。

例 \cup 、 \cap : $(2^U)^2 \rightarrow 2^U$ ，是 2^U 上的二元运算。

例 $A = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ (p 为正整数 ≥ 2)，则模 p 加法: $x, y \in A$, $x+y(\text{mod } p)$ ，模 p 乘法 $x \times y(\text{mod } p)$ 都是 A 上的运算。

实数域上的加、减、乘、除运算。

有时运算可以用表格来定义

+	a	b
a	a	a
b	b	a

●	a	b
a	a	a
b	a	b

*	奇	偶
奇	奇	奇
偶	奇	偶

前面都是二元运算的例子。

一元运算的例子：求集合的补集，关系的逆关系，数的绝对值，矩阵的转置和逆矩阵

定义4-2 封闭性：设运算 $*$ 是集合 A 上的一个 n 元运算， $S \subseteq A$ ，如果对于每一个 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S^n$ ，都有 $*(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S$ ，称**运算 $*$ 在 S 上封闭**。

封闭性：运算 $f: A^n \rightarrow B$ ，若 $B \subseteq A$ ，则称运算在 A 上是封闭的。

定义4-3 交换性：设 $*$ 是集合 A 上的一个二元运算，如果对于任意的 $a, b \in A$ ，有

$$a*b=b*a$$

则称**运算 $*$ 在 A 上是可交换的**。

定义4-4 结合性： 设 $*$ 是集合 A 上的一个二元运算，如果对于任意的 $a,b,c \in A$ ，有

$$a*(b*c)=(a*b)*c$$

则称**运算 $*$ 在 A 上是可结合的**。

定义4-5 分配性： 设 $*$ 和 \star 是集合 A 上的二元运算，如果对于任意的 $a,b,c \in A$ ，有

$$a*(b \star c)=(a*b) \star (a*c)$$

$$(b \star c)*a=(b*a) \star (c*a)$$

则称**运算 $*$ 在 A 上对于 \star 是可分配的**。

例 加法 $+$ 和乘法 $*$ 运算在自然数域 N 上是封闭的、可交换的、可结合的，乘法 $*$ 对加法 $+$ 是可分配的。

但减法 $-$ 和除法 $/$ 运算在自然数域 N 上是不封闭的，在实数 R 域上是封闭的，且除法对减法是可分配的。

例 任意集合 A 的幂集 2^A 上的 \cap 和 \cup 运算，是封闭的、可交换的、可结合的， \cap 对 \cup 是可分配的， \cup 对 \cap 也是可分配的。

当运算 * 可结合时，可表示为

$$a * (b * c) = a * b * c$$

并定义 $a^1 = a$

$$a^{n+1} = a^n * a$$

则 $a^m * a^n = a^{m+n}$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

左单位元： * 是A上的二元运算，如果存在 $e_l \in A$ ，使得对于所有的 $a \in A$ ，有

$$e_l * a = a$$

称 e_l 为A上关于运算 * 的左单位元。

右单位元： * 是A上的二元运算，如果存在 $e_r \in A$ ，使得对于所有的 $a \in A$ ，有

$$a * e_r = a$$

称 e_r 为A上关于运算 * 的右单位元。

单位元： * 是A上的二元运算，如果存在 $e \in A$ ，使得对于所有的 $a \in A$ ，有

$$e * a = a * e = a \quad (\text{既是左单位元又是右单位元})$$

称 e 为A上关于运算 * 的单位元。

定理4-2: 如A上的运算 $*$ 同时存在左单位元 e_l 和右单位元 e_r , 则

$$e_l = e_r = e$$

且 e 是A上关于 $*$ 的唯一单位元。

证明: 设存在左单位元和右单位元, 即存在 $e_l, e_r \in A$, 则有

$$e_l = e_l * e_r = e_r = e$$

若 e' 也是单位元, $e' \in A$, 则

$$e' = e' * e = e$$

单位元是唯一的。

定义4-7 零元: $*$ 是A上的二元运算, 如果存在 $z_l \in A$, 使得对于所有的 $a \in A$, 有

$$z_l * a = z_l$$

称 z_l 为A上关于运算 $*$ 的 **左零元**。

如果存在 $z_r \in A$, 使得对于所有的 $a \in A$, 有

$$a * z_r = z_r$$

称 z_r 为A上关于运算 $*$ 的 **右零元**。

如果存在 $z \in A$ ，使得对于所有的 $a \in A$ ，有

$$z * a = a * z = z \quad (\text{既是左零元又是右零元})$$

称 z 为 A 上关于运算 $*$ 的零元。

定理4-4：如 A 上的运算 $*$ 同时存在左零元 z_l 和右零元 z_r ，则

$$z_l = z_r = z$$

且 z 是 A 上关于 $*$ 的唯一零元。

证明：设存在左零元和右零元，即存在 $z_l, z_r \in A$ ，则有

$$z_l = z_l * z_r = z_r$$

若 z' 也是零元， $z' \in A$ ，则

$$z' = z' * z = z$$

零元是唯一的。

例 $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$ ，0是单位元，不存在零元。

$\langle \mathbb{Z}; \times \rangle$ ，1是单位元，0是零元。

\cap 的零元是 \emptyset ，单位元是 U 。 \cup 的零元是 U ，单位元是 \emptyset 。

例

+	a	b
a	a	a
b	b	b

●	a	b
a	a	b
b	a	b

对运算 $+$ ， a, b 是左零元，也是右单位元。对运算 \bullet ， a, b 是左单位元，也是右零元。可以看到它们不唯一。

定义4-8 幂等元： $*$ 是 A 上的二元运算，若有元素 $a \in A$ ，满足

$$a * a = a$$

称 a 为 A 上关于运算 $*$ 的幂等元。对幂等元，有

$$a^n = a$$

定义4-9 逆元： $*$ 是 A 上具有单位元 e 的运算，对于 $a \in A$ ，如存在 $a_l^{-1} \in A$ ，使

$$a_l^{-1} * a = e$$

则称 a_l^{-1} 为 a 的左逆元。

如果存在 $a_r^{-1} \in A$, 使得

$$a * a_r^{-1} = e$$

称 a_r^{-1} 为 a 的右逆元。

如果存在 $a^{-1} \in A$, 使得

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e \quad (\text{既是左逆元又是右逆元})$$

称 a^{-1} 为 a 的逆元。

定理4-4: 设 $*$ 是 A 上具有单位元 e 的运算, 且是可结合的。如果对元素 $a \in A$, 存在左逆元 a_l^{-1} 和右逆元 a_r^{-1} , 则

$$a_l^{-1} = a_r^{-1} = a^{-1}$$

且 a^{-1} 是 a 的唯一逆元。

证明: 设元素 a 存在左逆元 a_l^{-1} 和右逆元 a_r^{-1} , 则有

$$a_l^{-1} = a_l^{-1} * e = a_l^{-1} * (a * a_r^{-1}) = (a_l^{-1} * a) * a_r^{-1} = e * a_r^{-1} = a_r^{-1}$$

若 b 也是逆元, 则

$$b = b * e = b * (a * a^{-1}) = (b * a) * a^{-1} = e * a^{-1} = a^{-1}$$

逆元是唯一的。

零元是否可以和单位元相等？

定理4-5： 设 $*$ 是 A 上二元的运算，且 $\#A > 1$ ，若运算 $*$ 有单位元 e 和零元 z ，则 $e \neq z$ 。

证明： 设 $e = z$ ，因 $\#A > 1$ ，所以至少还存在一元素 $x \in A$ ， $x \neq e$ ，但

$$x = e * x = z * x = z = e$$

与前设矛盾。

4.2 代数系统

代数系统

定义4-10 代数系统： 非空集合和定义在该集合上的一个和多个**运算**所组成的系统称为**代数系统**，用记号 **$\langle S; O_1, O_2, \dots, O_n \rangle$** 表示。

其中 S 是非空集合，称为该代数系统的**域**，

O_1, O_2, \dots, O_n 为 S 上的**运算**。

例 $\langle 2^U; ', \cup, \cap \rangle$ 集合代数

例 $\langle \mathbb{N}; + \rangle, \langle \mathbb{N}; \times \rangle$

代数系统的基数：非空集合的基数。

若代数系统的基数有限，称有限代数系统。

子代数系统： $\langle S_1; O \rangle, \langle S_2; O \rangle$ 为两个代数系统，若 $S_2 \subseteq S_1$ ，则称 $\langle S_2; O \rangle$ 为 $\langle S_1; O \rangle$ 的子代数系统，简称**子代数**。若 $S_2 \subset S_1$ ，则称 $\langle S_2; O \rangle$ 为 $\langle S_1; O \rangle$ 的**真子代数系统**。

例 $\langle \mathbb{N}; + \rangle$ 是 $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ 的子代数。

定义4-11 整环：若代数系统 $\langle J; +, \cdot \rangle$ 满足

(1)交换律 对任意的 $i, j \in J$ ，有

$$i+j=j+i, i \cdot j=j \cdot i$$

(2)结合律 对任意的 $i, j, k \in J$ ，有

$$i+(j+k)=(i+j)+k, i \cdot (j \cdot k)=(i \cdot j) \cdot k$$

(3)分配律 对任意的 $i, j, k \in J$ ，有

$$i \cdot (j+k)=(i \cdot j)+(i \cdot k)$$

(4)单位元 存在元素 $0, 1 \in J$ ，使对任意的 $i \in J$

$$i+0=0+i=i, i \cdot 1=1 \cdot i=i$$

(5)+可逆 对任意的 $i \in J$, 存在元素 $-i \in J$,

$$i + (-i) = (-i) + i = 0$$

(6)消去律 若 $i \neq 0$, 则对于任意的 $j, k \in J$,有

$$i \cdot j = i \cdot k \Rightarrow j = k$$

则称该代数系统为**整环**。

例 $\langle \mathbf{I}; +, \times \rangle$

例 $\langle \mathbf{Z}_3; \oplus_3, \odot_3 \rangle$

4.3 同态和同构

同态与同构

同态: $V_1=\langle S_1; \cdot \rangle, V_2=\langle S_2; * \rangle$ 为两个代数系统, 若存在 S_1 到 S_2 函数 h , 对任意的 $x_1, x_2 \in S_1$, 满足方程

$$h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) * h(x_2)$$

则称 h 为 V_1 到 V_2 的同态, V_2 称为 V_1 的同态像。

例 代数系统 $V_1=\langle R; \times \rangle, V_2=\langle R; + \rangle$

函数 $y: R \rightarrow R, y = \log_{10} x$ 。

对于任意的 $x_1, x_2 \in R$, 有

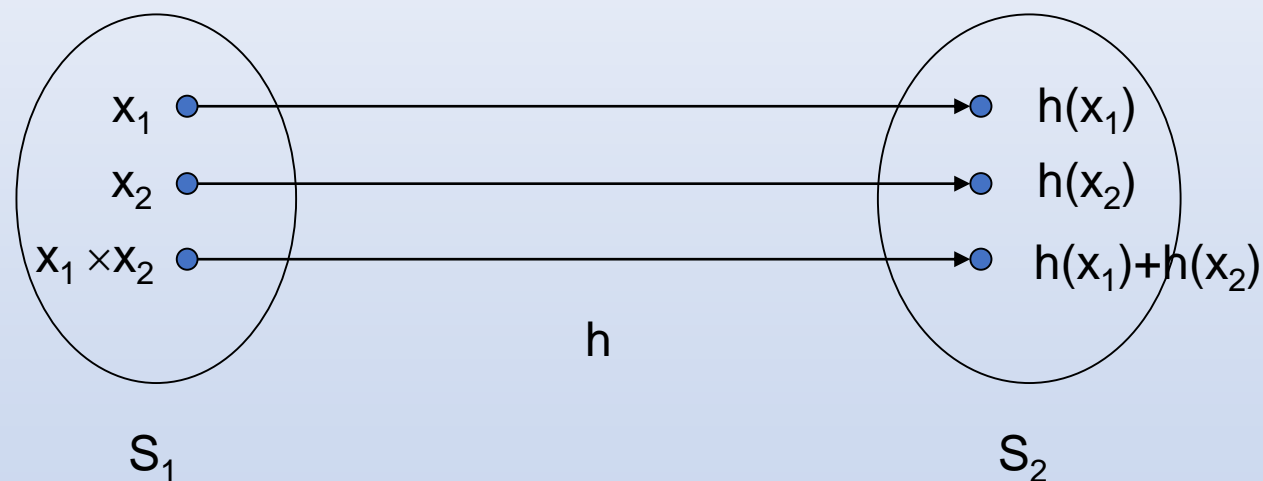
$$y(x_1 \times x_2) = \log_{10}(x_1 \times x_2) = \log_{10}(x_1) + \log_{10}(x_2)$$

满足同态方程, 是 V_1 到 V_2 的同态。

从上例可以看出，同态可看成一种变换，将一个代数系统变为另一个代数系统，一个较复杂的问题转为较易解决的问题：对数尺，传输损耗，放大倍数等。

例 摩根定律

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$



例 $V_1 = \langle \mathbb{Z}; + \rangle$, $V_2 = \langle \mathbb{Z}_6; \oplus_6 \rangle$, $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, \oplus_6 是模6加。

定义函数 $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$, 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 有 $h(i) = \text{res}_6(i)$ 。

证明 h 是 V_1 到 V_2 的同态。

证明：对任意的 $i, j \in \mathbb{Z}$, 设

$$i = 6q_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < 6$$

$$j = 6q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < 6$$

则
$$i + j = 6(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2)$$

$$h(i + j) = \text{res}_6(i + j) = \text{res}_6(r_1 + r_2)$$

$$\text{res}_6(i) \oplus_6 \text{res}_6(j) = r_1 \oplus_6 r_2 = \text{res}_6(r_1 + r_2)$$

故
$$\text{res}_6(i + j) = \text{res}_6(i) \oplus_6 \text{res}_6(j)$$

即
$$h(i + j) = h(i) \oplus_6 h(j)$$

定义4-15 设 h 是 V_1 到 V_2 的同态, $V_1=\langle S_1; \cdot \rangle, V_2=\langle S_2; * \rangle$, 如果

- (1) h 是单射, 则称 h 为**单同态**;
- (2) h 是满射, 则称 h 为**满同态**;
- (3) h 是双射, 则称 h 为**同构**。

定理4-6 若存在代数系统 $V_1=\langle S_1; +_1, * _1 \rangle$ 到 $V_2=\langle S_2; +_2, * _2 \rangle$ 的**满同态** h , 则 V_1 具有的许多性质可在 V_2 中保持:

- (1) **交换** 若 $+_1(* _1)$ 可交换, 则 $+_2(* _2)$ 可交换;
- (2) **结合** 若 $+_1(* _1)$ 可结合, 则 $+_2(* _2)$ 可结合;
- (3) **分配** 若 $+_1$ 对 $* _1$ 可分配, 则 $+_2$ 对 $* _2$ 可分配;
- (4) **单位元** 若 $+_1(* _1)$ 存在单位元, 则 $+_2(* _2)$ 也存在单位元;
- (5) **零元** 若 $+_1(* _1)$ 存在零元, 则 $+_2(* _2)$ 也存在零元;
- (6) **逆元** 若对运算 $+_1(* _1)$, 元素 x 存在逆元 x^{-1} , 则对运算 $+_2(* _2)$, 元素 $h(x)$ 也存在逆元 $h(x^{-1})$;

推论：若 h 是 V_1 到 V_2 的同构，则 h 的逆函数 h^{-1} 是 V_2 到 V_1 的同构，因此称 V_1 和 V_2 彼此同构。

证明： h 是 V_1 到 V_2 的同构，则 h 是 V_1 到 V_2 的双射，其逆函数 h^{-1} 则是 V_2 到 V_1 的双射。又

设 $V_1 = \langle S_1; * \rangle$, $V_2 = \langle S_2; \cdot \rangle$ ，则对任意的 $y_1, y_2 \in S_2$ ，必存在 $x_1, x_2 \in S_1$ ，使

$$y_1 = h(x_1), \quad y_2 = h(x_2)$$

故 $h^{-1}(y_1 \cdot y_2) = h^{-1}(h(x_1) \cdot h(x_2))$

$$= h^{-1}(h(x_1 * x_2))$$

$$= h^{-1}h(x_1 * x_2)$$

$$= x_1 * x_2$$

$$= h^{-1}(y_1) * h^{-1}(y_2)$$

逆函数 h^{-1} 也满足同态方程，是 V_2 到 V_1 的同构。

两代数系统在同构的情况下，它们的运算一一对应，满足的性质完全相同，元素一一对应，*从代数论的角度看，是同一个代数系统*，区别仅仅是运算符号和元素的名称不同，一个代数系统中的理论完全可用于同构的另一代数系统，一个代数系统的理论清楚了，所有和它同构的代数系统的问题也就清楚了。

例如集合代数、布尔代数、逻辑代数三者是同构的，在代数论的基础上统一了起来。

例 $V_1 = \langle \{\emptyset, A, A', U\}; \cup \rangle$, $V_2 = \langle \{U, A', A, \emptyset\}; \cap \rangle$, $h = \text{'同构'}$

\cup	\emptyset	A	A'	U
\emptyset	\emptyset	A	A'	U
A	A	A	U	U
A'	A'	U	A'	U
U	U	U	U	U

\cap	U	A'	A	\emptyset
U	U	A'	A	\emptyset
A'	A'	A'	\emptyset	\emptyset
A	A	\emptyset	A	\emptyset
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

作业

3(1)(4), 6, 7(1)(3)(5), 10, 12, 15, 16

内容提要

1. 集合 A 上的运算

- 集合 A 上的运算；
- 运算的封闭性；
- 二元运算的一些常见的性质；
- 集合中与二元运算相联系的一些特殊的元素：单位元、零元、幂等元、元素的逆元.

2. 代数系统

- 代数系统；
- ~~整环及其性质~~；
- 子代数.

3. 代数系统的同态与同构

- 同态；
- 满同态；
- 满同态的性质；
- 同构.

例题讲解

例 4-1 通常数的乘法运算是否可看做下列集合上的二元运算？请逐个回答，并说明理由.

- (1) $A = \{1, 2\}$;
- (2) $B = \{x \mid x \text{ 是素数}\}$;
- (3) $C = \{x \mid x \text{ 是偶数}\}$;
- (4) $D = \{2^n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

解 (1) 乘法运算不是集合 A 上的二元运算. 因为 $2 \times 2 = 4 \notin A$.

(2) 乘法运算不是集合 B 上的二元运算. 因为素数乘素数不再是素数. 例如 $3 \times 5 = 15 \notin B$.

(3) 乘法运算是集合 C 上的运算. 因为偶数乘偶数仍为偶数.

(4) 乘法运算是集合 D 上的二元运算. 因为对于任意 $2^n, 2^m \in D$, $2^n \times 2^m = 2^{n+m} \in D$.

例 4-2 设有集合 A , $A^A = \{f \mid f: A \rightarrow A\}$ 是由 A 到 A 的所有函数组成的集合. 因为对于任意 $f_1, f_2 \in A^A$, f_1 与 f_2 的复合函数 $f_1 \cdot f_2$ 仍是一由 A 到 A 的函数, 因此函数的复合运算可看做是集合 A^A 上的一个二元运算.

例 4-3 通常数的加法运算可看做是正整数集 \mathbf{N} 上的一个二元运算. 下列集合均是 \mathbf{N} 的子集, 加法运算在这些子集上是封闭的吗? 说明理由.

(1) $S_1 = \{n | n \text{ 是 } 15 \text{ 的因子}\};$

(2) $S_2 = \{n | n \text{ 是 } 15 \text{ 的倍数}\};$

(3) $S_3 = \{n | 6 \text{ 整除 } n, \text{ 而 } 24 \text{ 整除 } n^2\}.$

解 (1) 加法运算在 S_1 上不封闭. 因为 $3 \in S_1, 5 \in S_1$, 但 $3+5=8 \notin S_1$.

(2) 加法运算在 S_2 上是封闭的. 其证明如下.

对于任意 $n_1, n_2 \in S_2$, 设 $n_1 = 15k_1, n_2 = 15k_2 (k_1, k_2 \in \mathbf{N})$, 则 $n_1 + n_2 = 15k_1 + 15k_2 = 15(k_1 + k_2), (k_1 + k_2 \in \mathbf{N})$. 因此 $n_1 + n_2 \in S_2$.

(3) 加法运算在 S_3 上是封闭的. 其证明如下.

首先, 对于任意 $n_1, n_2 \in S_3$, 设 $n_1 = 6k_1, n_2 = 6k_2 (k_1, k_2 \in \mathbf{N})$, 则 $n_1 + n_2 = 6k_1 + 6k_2 = 6(k_1 + k_2), n_1 + n_2$ 能被 6 整除.

又 $(n_1 + n_2)^2 = n_1^2 + 2n_1 \cdot n_2 + n_2^2$, 根据题意, n_1^2 能被 24 整除, n_2^2 能被 24 整除, 而

$$2n_1 \cdot n_2 = 2 \cdot 6k_1 \cdot 6k_2 = 24 \cdot (3k_1 k_2)$$

也能被 24 整除, 因此 $(n_1 + n_2)^2$ 能被 24 整除. 由此知 $n_1 + n_2 \in S_3$.

例 4-4 设 W 是集合 A 上所有关系的集合, H_1 是 A 上所有自反关系的集合, H_2 是 A 上所有可传递关系的集合. 显然关系的复合运算是 W 上的一个二元运算, 试问关系的复合运算在 H_1 和 H_2 上是封闭的吗? 为什么?

解 关系的复合运算在 H_1 上是封闭的, 这是因为 A 上任意两个自反关系的复合关系仍是 A 上的自反关系; 但在 H_2 上不封闭, 这是因为 A 上任意两个可传递关系的复合关系不一定是可传递的. 举例如下.

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 定义集合 A 上的关系

$$\rho_1 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\},$$

$$\rho_2 = \{(2, 3), (3, 1), (2, 1)\},$$

显然, ρ_1 和 ρ_2 均是可传递的. 又

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{(1, 3), (1, 1), (2, 1)\},$$

但 $\rho_1 \cdot \rho_2$ 不可传递.

例 4-7 实数集 \mathbf{R} 上的二元运算 $*$ 定义为

$$r_1 * r_2 = r_1 + \frac{1}{2}r_2$$

集合 \mathbf{R} 中关于运算 $*$ 存在有单位元、零元和幂等元吗？

解 (1) 运算 $*$ 不可交换，因此我们分别考虑它是否有左单位元和右单位元。
若 r_1 是左单位元，则对于任意 $r \in \mathbf{R}$ ，应有

$$r_1 * r = r, \quad r_1 + \frac{r}{2} = r,$$

于是 $r_1 = \frac{r}{2}$ 。

由于 r 是任意的，因此不存在元素能成为运算 $*$ 的左单位元。由此可知 $*$ 不存在单位元。

若 r_1 是右单位元，则对于任意 $r \in \mathbf{R}$ ，应有

$$r * r_1 = r, \quad r + \frac{r_1}{2} = r. \quad (1)$$

要使式(1)成立，只有 $r_1 = 0$ ，因此 0 是运算 $*$ 的右单位元。

(2) 若 r_1 是左零元, 则对于任意的 $r \in \mathbf{R}$, 应有

$$r_1 * r = r_1, \quad r_1 + \frac{r}{2} = r_1. \quad (2)$$

要使式(2)成立, 必须 $r=0$, 但 r 是任意的, 因此运算 $*$ 没有左零元. 由此可知运算 $*$ 不存在零元.

若 r_1 是右零元, 则对于任意的 $r \in \mathbf{R}$, 应有

$$r * r_1 = r_1, \quad r + \frac{r_1}{2} = r_1,$$

于是

$$r = \frac{r_1}{2}, \quad r_1 = 2r.$$

由于 r 是任意的, 因此运算 $*$ 也没有右零元.

(3) 若 $r \in \mathbf{R}$ 是幂等元, 则应有

$$r + \frac{r}{2} = r, \quad \frac{r}{2} = 0. \quad (3)$$

要使式(3)成立, 必须 $r=0$, 因此 0 是幂等元.

例 4-8 设有集合 A, B , 并设 $W = \{\rho | \rho \text{ 是由 } A \text{ 到 } B \text{ 的关系}\}$. 因为由 A 到 B 的任一关系均是 $A \times B$ 的一个子集, 所以任意两个关系经过并运算和交运算后, 其结果仍是 $A \times B$ 的一个子集, 即仍是由 A 到 B 的一个关系. 若将 $A \times B$ 看做是全集, 则关系 ρ 的补 ρ' 也是 $A \times B$ 的一个子集, 即也是由 A 到 B 的一个关系. 因此集合的并运算、交运算和补运算可分别看做是 W 上的二元运算和一元运算. 于是 $\langle W; \cup, \cap, ' \rangle$ 是一代数系统.

例如 设 $A = \{0, 1\}, B = \{a, b, c\}$,
则 $A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$.
设 A 到 B 的关系
 $\rho_1 = \{(0, a), (0, c), (1, a)\},$
 $\rho_2 = \{(0, b), (0, c), (1, c)\},$
则 $\rho_1 \cup \rho_2 = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, c)\},$
 $\rho_1 \cap \rho_2 = \{(0, c)\},$
 $\rho_1' = \{(0, b), (1, b), (1, c)\}$
也都是由 A 到 B 的关系.

例 4-9 设 $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$, 试证明集合 A 与矩阵的加法和乘法运算

构成一个整环(这里 \mathbf{Z} 表示整数集).

证 对于任意的 $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} \in A$, 因为

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(b+d) & a+c \end{bmatrix} \in A,$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(bc+ad) & 2bd+ac \end{bmatrix} \in A,$$

所以 $\langle A; +, \cdot \rangle$ 构成一个代数系统.

(1) 根据矩阵加法运算的定义, + 满足交换律. 对于运算 \cdot , 因为

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac + 2bd & bc + ad \\ 2(ad + bc) & 2bd + ac \end{bmatrix},$$

与前面计算的 $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}$ 相等, 所以 \cdot 也满足交换律.

(2) 矩阵的加法和乘法运算均满足结合律.

(3) 矩阵的乘法运算对加法运算是可分配的.

(4) 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是加法运算的单位元.

矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是乘法运算的单位元.

(5) 对任意 $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \in A$, 其加法逆元是矩阵 $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -2b & -a \end{bmatrix}$.

(6) 所谓运算 \cdot 满足消去律是指, 对于任意的矩阵 $x, y, z \in A$, 若 $x \neq 0$, 则由 $x \cdot y = x \cdot z$, 可得 $y = z$. 这里 $x \neq 0$ 指 x 不是加法运算的单位元.

设 $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ 2f & e \end{bmatrix} \in A$, 其中 a, b 至少有一个不为 0. 并设

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ 2f & e \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{bmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(bc+ad) & 2bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+2bf & af+be \\ 2(be+af) & 2bf+ac \end{bmatrix},$$

因此

$$ac+2bd=ae+2bf, \quad (1)$$

$$ad+bc=af+be. \quad (2)$$

将式(1)两边同乘以 a , 将式(2)两边同乘以 $2b$, 分别得

$$a^2c + 2abd = a^2e + 2abf, \quad (3)$$

$$2abd + 2b^2c = 2abf + 2b^2e, \quad (4)$$

式(3) - 式(4)得

$$(a^2 - 2b^2)c = (a^2 - 2b^2)e,$$

$$(a^2 - 2b^2)(c - e) = 0,$$

因此

$$a^2 - 2b^2 = 0 \quad \text{或} \quad c - e = 0.$$

因为 a, b 均为整数, 且 a, b 中至少一个不为 0, 所以 $a^2 - 2b^2 \neq 0$, 因此必有 $c = e$.

类似地, 可以证明 $d = f$, 故

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ 2f & e \end{bmatrix}.$$

由上可知 $\langle A; +, \cdot \rangle$ 是一整环.

例 4-11 设 $V = \langle \mathbf{Z}; +, \cdot \rangle$, 其中 \mathbf{Z} 表示整数集, $+$ 和 \cdot 分别表示通常数的加法和乘法运算. 对下面 \mathbf{Z} 的每个子集, 确定它是否能构成 V 的子代数? 为什么?

(1) $H_1 = \{2n+1 \mid n \in \mathbf{Z}\};$

(2) $H_2 = \{-1, 0, 1\};$

(3) $H_3 = \{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}.$

解 (1) H_1 不能构成 V 的子代数.

因为对于任意的 $2n_1+1, 2n_2+1 \in H_1$, 有

$$(2n_1+1) + (2n_2+1) = 2n_1 + 2n_2 + 2 \notin H_1,$$

所以加法运算在 H_1 上不封闭.

(2) H_2 也不能构成 V 的子代数.

因为加法运算在 H_2 上也不封闭. 例如, $1+1=2 \notin H_2$.

(3) H_3 能构成 V 的子代数.

因为对于任意的 $2n_1, 2n_2 \in H_3$, 有 $2n_1 + 2n_2 = 2(n_1 + n_2) \in H_3$, 且 $2n_1 \cdot 2n_2 = 2(2n_1 n_2) \in H_3$, 所以加法运算和乘法运算在 H_3 上均是封闭的. 因此 $\langle H_3; +, \cdot \rangle$ 是 $\langle \mathbf{Z}; +, \cdot \rangle$ 的子代数.

例 4-12 设 $V = \langle \mathbf{R}; * \rangle$, 其中 \mathbf{R} 是实数集, 运算 $*$ 定义为

$$x * y = [x, y].$$

符号 $[x, y]$ 表示不小于 x 和 y 的最小整数, 又设

$$H_1 = \{x \mid 0 \leq x \leq 10, x \in \mathbf{R}\},$$

$$H_2 = \{x \mid 0 \leq x < 10, x \in \mathbf{R}\},$$

试问 H_1 与 H_2 能否构成 V 的子代数?

解 正确理解符号 $[x, y]$ 的含义. 例如

$$[1.5, \sqrt{2}] = 2, \quad [-3, -2.1] = -2.$$

因为运算 $*$ 在 H_1 上是封闭的, 所以 $\langle H_1; * \rangle$ 是 $\langle \mathbf{R}; * \rangle$ 的子代数. 但 H_2 与运算 $*$ 不能构成 V 的子代数, 因为 $*$ 在 H_2 上不封闭. 例如 $[9.8, 2] = 10$, 但 $10 \notin H_2$.

例 4-13 设有代数系统 $V_1 = \langle \mathbf{R}; +, \sim \rangle$ 和 $V_2 = \langle \mathbf{R}_+; \cdot, ' \rangle$, 其中 \mathbf{R} 和 \mathbf{R}_+ 分别表示实数集和正实数集, $+$ 和 \cdot 是通常数的加法和乘法, \sim 表示求相反数的运算, $'$ 表示求倒数的运算.

设有函数 $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$, 对于任意 $x \in \mathbf{R}, h(x) = e^x$. 于是对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$,

$$h(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = h(x) \cdot h(y).$$

对于任意 $x \in \mathbf{R}$,

$$h(\sim(x)) = h(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = (h(x))'.$$

因此 h 是由 V_1 到 V_2 的一个同态.

例 4-14 设 $V = \langle \mathbf{R}^* ; \cdot \rangle$, 其中 \mathbf{R}^* 表示非零实数集, \cdot 表示通常数的乘法运算. 试问下列两个函数是否由 V 到 V 的满同态?

(1) $h(x) = x^2$;

(2) $g(x) = \frac{1}{x}$.

解 (1) 对任意 $x \in \mathbf{R}^*$, 有 $x^2 \in \mathbf{R}^*$, 所以 h 是由 \mathbf{R}^* 到 \mathbf{R}^* 的函数. 又对于任意 $x, y \in \mathbf{R}^*$, 有

$$h(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = h(x) \cdot h(y),$$

所以 h 是从 V 到 V 的同态.

但 h 不是从 V 到 V 的满同态. 因为 h 不是由 \mathbf{R}^* 到 \mathbf{R}^* 的满射, 例如 $-5 \in \mathbf{R}^*$, 但不存在 $x \in \mathbf{R}^*$, 使 $x^2 = -5$.

(2) 对任意 $x \in \mathbf{R}^*$, 因为 $x \neq 0$, 所以有 $\frac{1}{x} \in \mathbf{R}^*$, 因此 g 是由 \mathbf{R}^* 到 \mathbf{R}^* 的函数.

又对于任意 $x, y \in \mathbf{R}^*$,

有
$$g(x \cdot y) = \frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = g(x) \cdot g(y),$$

所以 g 是从 V 到 V 的同态.

对于任意 $x \in \mathbf{R}^*$, 有 $\frac{1}{x} \in \mathbf{R}^*$, 且 $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$, 因此 $g\left(\frac{1}{x}\right) = x$. 即 \mathbf{R}^* 中任一元素在

\mathbf{R}^* 中均有像源. 所以 g 是由 \mathbf{R}^* 到 \mathbf{R}^* 的满射, 因此 g 是从 V 到 V 的满同态.

例 4-15 设 $A = \{a, b, c\}$, 试问代数系统 $\langle \{\emptyset, A\}; \cup, \cap \rangle$ 和 $\langle \{\{a, b\}, A\}; \cup, \cap \rangle$ 是否同构?

解 令 $S = \{\emptyset, A\}$, $H = \{\{a, b\}, A\}$. 定义函数 $f: S \rightarrow H$, 使得 $f(\emptyset) = \{a, b\}$, $f(A) = A$. 显然 f 是一双射.

对于任意 $x, y \in S$, 若 $x = y$, 则

$$f(x \cup y) = f(x),$$

$$f(x) \cup f(y) = f(x) \cup f(x) = f(x),$$

所以

$$f(x \cup y) = f(x) \cup f(y).$$

若 $x \neq y$, 则

$$f(x \cup y) = f(A) = A,$$

$$f(x) \cup f(y) = \{a, b\} \cup A = A,$$

所以

$$f(x \cup y) = f(x) \cup f(y).$$

因此对于任意 $x, y \in S$, 都有 $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$.

类似地, 对于任意 $x, y \in S$, 若 $x = y$, 则

$$f(x \cap y) = f(x),$$

$$f(x) \cap f(y) = f(x) \cap f(x) = f(x),$$

所以

$$f(x \cap y) = f(x) \cap f(y).$$

若 $x \neq y$, 则

$$f(x \cap y) = f(\emptyset) = \{a, b\},$$

$$f(x) \cap f(y) = \{a, b\} \cap A = \{a, b\},$$

所以

$$f(x \cap y) = f(x) \cap f(y).$$

因此对于任意的 $x, y \in S$, 都有 $f(x \cap y) = f(x) \cap f(y)$.

由上证得 $\langle \{\emptyset, A\}; \cup, \cap \rangle$ 与 $\langle \{\{a, b\}, A\}, \cup, \cap \rangle$ 同构.

例 4-16 代数系统 $V_1 = \langle \mathbf{Z}; + \rangle$ 与 $V_2 = \langle \mathbf{N}; \cdot \rangle$ 是否同构？这里 \mathbf{Z} 和 \mathbf{N} 分别表示整数集和正整数集， $+$ 和 \cdot 分别表示通常数的加法和乘法。

解 \mathbf{Z} 和 \mathbf{N} 都是可数集，因此 \mathbf{Z} 和 \mathbf{N} 之间存在有双射。例如可以定义函数 $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ ，使得

$$f(i) = \begin{cases} 1, & i=0, \\ 2i, & i>0, \\ 2|i|+1, & i<0. \end{cases}$$

因为 \mathbf{Z} 和 \mathbf{N} 均是无限集，因此由 \mathbf{Z} 到 \mathbf{N} 可以定义许多甚至无穷多个双射函数。这些双射函数中是否有满足同态条件的呢？这里不可能对所有的双射函数去一一考察，为了回答这一问题，可以先来考察这两个代数系统所具有的性质。

$\langle \mathbf{Z}; + \rangle$ 中运算 $+$ 具有单位元 0 ； $\langle \mathbf{N}; \cdot \rangle$ 中运算 \cdot 也具有单位元 1 。

$\langle \mathbf{Z}; + \rangle$ 中每一整数 i 对于运算 $+$ 均有逆元 $-i$ ，即 $i + (-i) = (-i) + i = 0$ ；但 $\langle \mathbf{N}; \cdot \rangle$ 中除单位元 1 对于运算 \cdot 具有逆元 1 外，其他正整数对于运算 \cdot 均不存在逆元。这就是说，任何一个由 \mathbf{Z} 到 \mathbf{N} 的双射函数都不能使 V_2 中运算 \cdot 具有 V_1 中运算 $+$ 每一元素均有逆元的这一条性质。而“保持运算的性质”是 f 为同构的必要条件，由此可知 V_1 与 V_2 不同构。

例 4-23 设有代数系统 $\langle S; *, \circ \rangle$, 其中 $*$ 和 \circ 均是二元运算, 并分别具有单位元 e_1 和 e_2 . 已知运算 $*$ 和 \circ 相互之间均是可分配的. 试证明对于 S 中任意的元素 x , 有 $x * x = x \circ x = x$.

证 因为 e_1 是 $*$ 的单位元, e_2 是 \circ 的单位元, 所以

$$e_1 = e_2 \circ e_1 = (e_2 * e_1) \circ e_1 = (e_2 \circ e_1) * (e_1 \circ e_1) = e_1 * (e_1 \circ e_1) = e_1 \circ e_1,$$

$$e_2 = e_1 * e_2 = (e_1 \circ e_2) * e_2 = (e_1 * e_2) \circ (e_2 * e_2) = e_2 \circ (e_2 * e_2) = e_2 * e_2.$$

于是, 对于任意的 $x \in S$, 有

$$x * x = (x \circ e_2) * (x \circ e_2) = x \circ (e_2 * e_2) = x \circ e_2 = x,$$

$$x \circ x = (x * e_1) \circ (x * e_1) = x * (e_1 \circ e_1) = x * e_1 = x.$$

故对于任意 $x \in S$, 有

$$x * x = x \circ x = x.$$

例 4-24 设 f_1 和 f_2 都是从代数系统 $\langle S_1; * \rangle$ 到 $\langle S_2; \circ \rangle$ 的同态, 这里 $*$ 和 \circ 都是二元运算, 且 \circ 是可交换和可结合的. 定义函数 $h: S_1 \rightarrow S_2$, 使得对于任意 $x \in S_1$, $h(x) = f_1(x) \circ f_2(x)$. 试证明 h 也是从 $\langle S_1; * \rangle$ 到 $\langle S_2; \circ \rangle$ 的同态.

证 对于任意 $x, y \in S_1$, 因为 f_1 和 f_2 都是从 $\langle S_1; * \rangle$ 到 $\langle S_2; \circ \rangle$ 的同态, 所以有

$$\begin{aligned} h(x * y) &= f_1(x * y) \circ f_2(x * y) \\ &= (f_1(x) \circ f_1(y)) \circ (f_2(x) \circ f_2(y)). \end{aligned}$$

又因为 \circ 是可交换和可结合的, 所以

$$h(x * y) = (f_1(x) \circ f_2(x)) \circ (f_1(y) \circ f_2(y)) = h(x) \circ h(y).$$

由 x, y 的任意性, 可知 h 也是从 $\langle S_1; * \rangle$ 到 $\langle S_2; \circ \rangle$ 的同态.

例 4-28 代数系统 $V_1 = \langle \mathbf{R} - \{0\}; \cdot \rangle$ 与 $V_2 = \langle \mathbf{R}; + \rangle$ 同构吗? 其中 \mathbf{R} 表示实数集, \cdot 和 $+$ 分别表示通常数的乘法和加法运算.

分析 如果 V_1 与 V_2 同构, 则这两个代数系统应具有完全相同的性质. 例如 V_1 中有单位元 1, V_2 中有单位元 0. 但是我们发现在 V_1 中元素 -1 满足等式 $(-1) \cdot (-1) = 1$, 而在 V_2 中却找不出除单位元 0 以外的元素 x , 满足 $x + x = 0$. 因此 V_1 与 V_2 不可能同构. 下面给出这一结论的证明.

证 用反证法证明之. 设存在函数 $h: \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ 是从 V_1 到 V_2 的同构, 则由单位元映射为单位元, 有 $h(1) = 0$.

又设 $h(-1) = b$, 则

$$h(1) = h((-1) \cdot (-1)) = h(-1) + h(-1) = b + b.$$

因此 $b + b = 0$, 即 $b = 0$, 由此导致 $h(1) = h(-1)$, 这与 h 是双射相矛盾. 故 $\langle \mathbf{R} - \{0\}; \cdot \rangle$ 与 $\langle \mathbf{R}; + \rangle$ 不同构.

若代数系统 V_1 和 V_2 是同一个代数系统 V , 则从 V_1 到 V_2 的同态称为 V 的自同态. 从 V_1 到 V_2 的同构称为 V 的自同构.

End of Chapter 4.