4.

(1) 含有一个结点的子图有 C_4 个

含有两个结点的子图有 $C_4^2 \times 2$ 个,

含有三个结点的子图有 $C_4^3 \times 8$ 个,

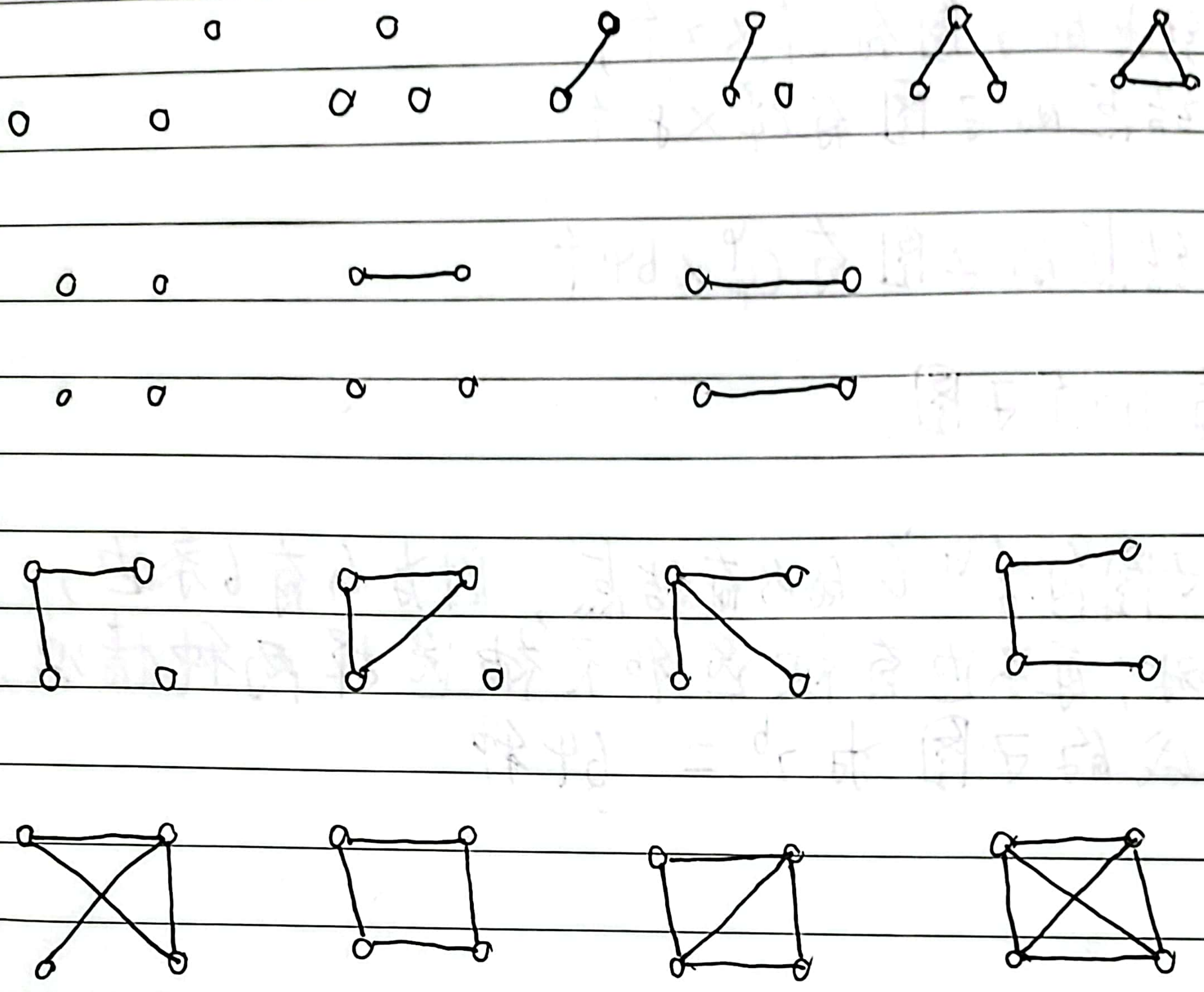
含有4个结点的子图有 $C_4^4 \times 64$ 个

所以共有112个子图.

(2)

G的生成子图包含G的所有结点，因为G有6条边，构成子图时，每条边有被选和不被选择两种情况，因此G生成的子图为 $2^6 = 64$ 种

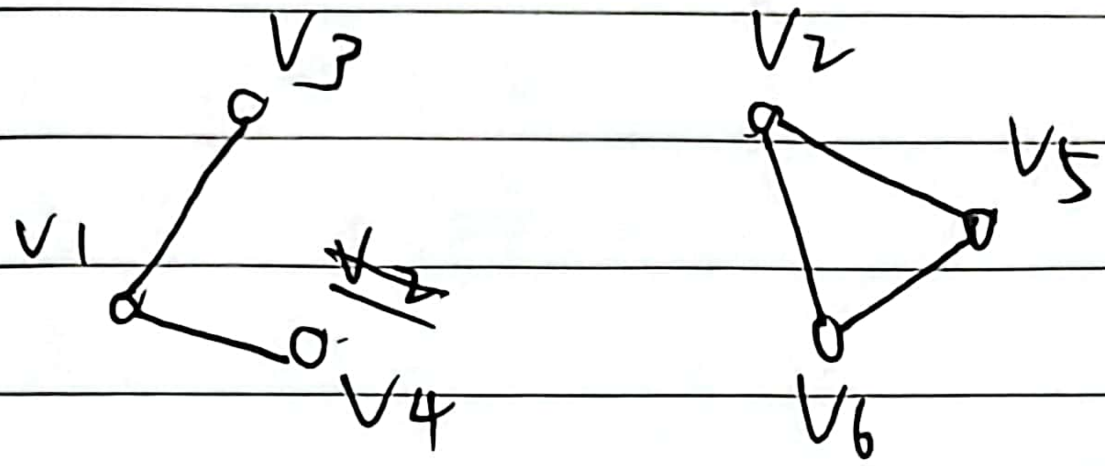
13、4的所有不同构的子图如下，共18个



6、

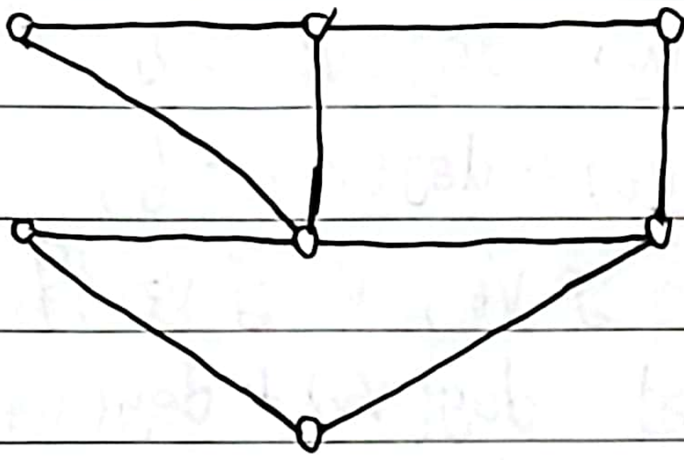
直接由邻接矩阵给出图G的一个图解，

如下图所示，所以G是不连通的



15、

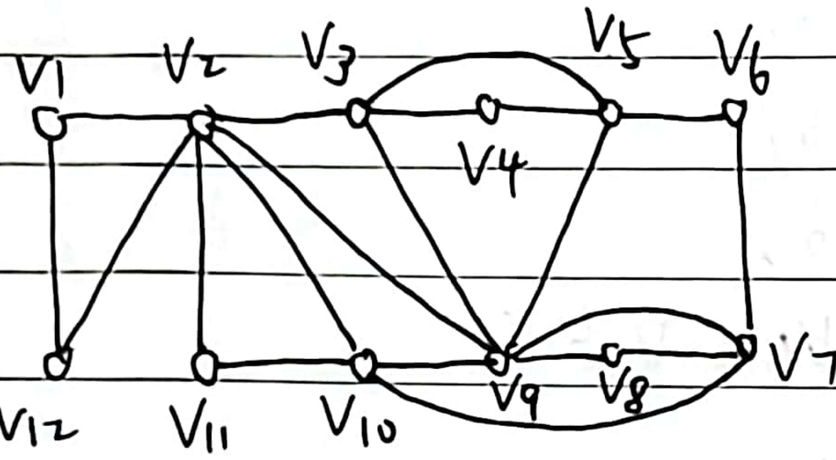
设7个人为7个结点，将两个懂同一语言的人连一条边（即他们能直接交谈），得到一简单图G，问题就转化为G是否连通，G如图所示



因为G中任意两个结点是连接的，所以G是连通图。

因此，上述7人中任意两个能交谈。

16、



欧拉回路 $\alpha = v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_5 v_3 v_9 v_7 v_{10} v_{11} v_2 v_{10} v_9 v_2 v_{12} v_1$

19、

图G是哈密顿图

先求图G的闭包

$n=6$ 因为

$deg(v_5)+deg(v_6)=6;$

$deg(v_2)+deg(v_3)=6,$

所以连接 v_5 与 v_6，v_2 与 v_3 得图 G_2，

在图 G_2 中，因 $deg(v_2)+deg(v_4)=6;$

$deg(v_1)+deg(v_5)=6;$

$deg(v_4)+deg(v_6)=6;$

$deg(v_1)+deg(v_3)=6,$

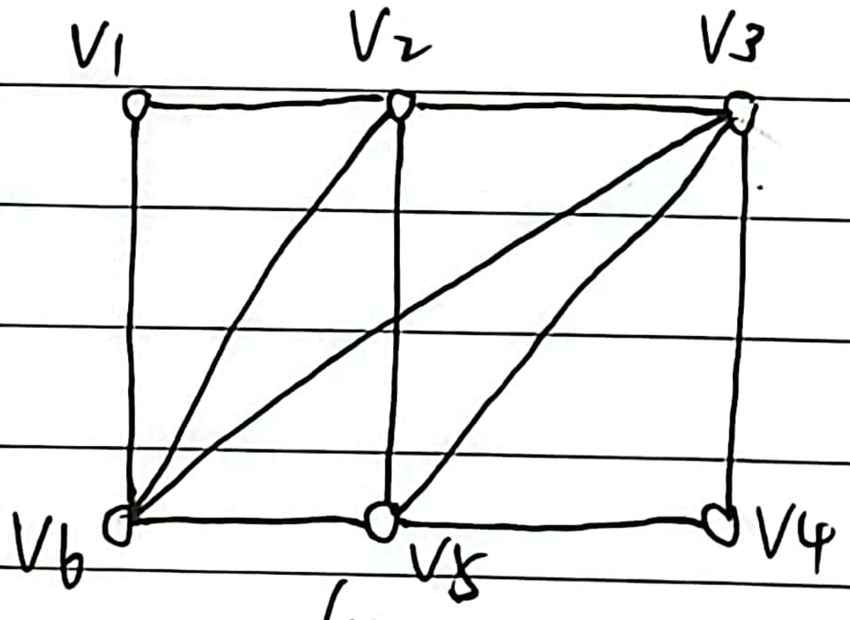
故连接 v_2 与 v_4，v_1 与 v_5，v_4 与 v_6，v_1 与 v_3

得图 G_3，在图 G_3 中，

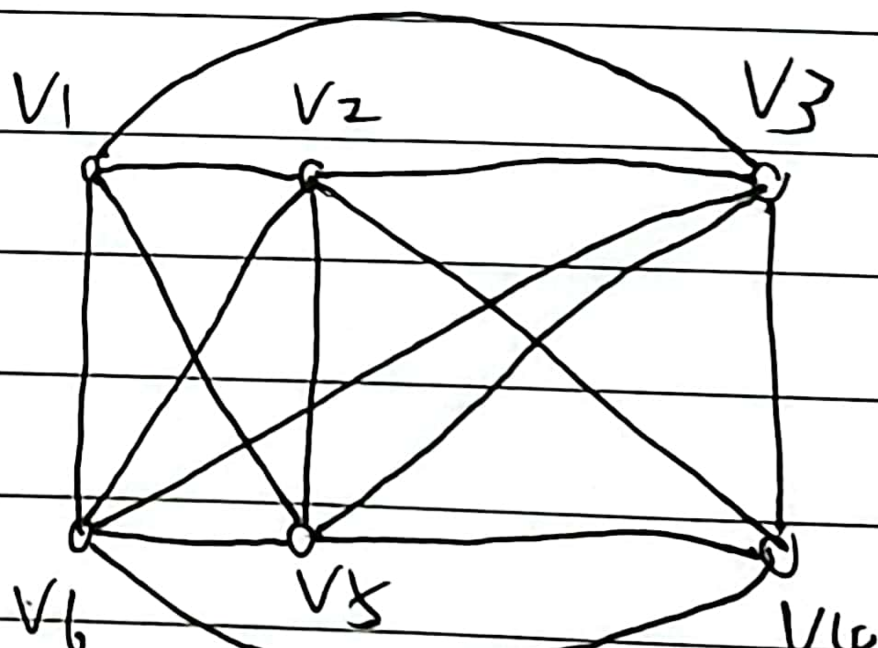
因 $deg(v_1)+deg(v_4)=8$

故连接 v_1 与 v_4 得 G_4，且 G_4 是G的闭包，

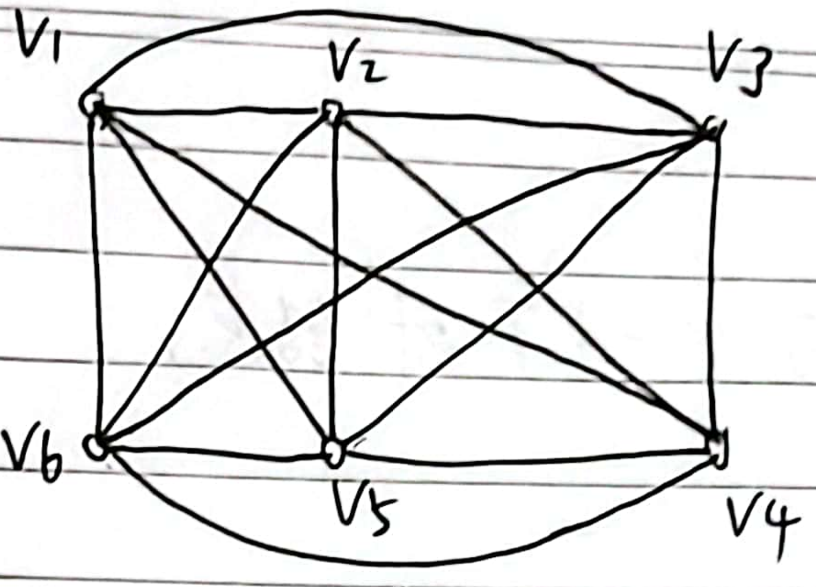
即 $G_c=G_4=K_6$



G_2



G_3



G_4

解：由推论"若图 G 的闭包 $G_C = K_n$，且 $n \geq 3$，则 G 是哈密顿图"知，G 是哈密顿图。

11、设 $G=(V,E)$，$\bar{G}=(V,\bar{E})$

若 G 是不连通的，对任意的 $u,v\in V$，若 $\{u,v\}\in\bar{E}$，则 u 与 v 在 $\bar{G}$ 中连接。
若 $\{u,v\}\notin\bar{E}$，则由补图的定义知 $\{u,v\}\in E$，于是 u,v 属于 G 的同一分图。
由 G 不连通，所以在 G 的另一分图中，存在 w，$w\in V$，使得 $\{u,w\}\notin E$，且 $\{v,w\}\notin E$。
因而 $\{u,w\}\in\bar{E}$，且 $\{v,w\}\in\bar{E}$，u,v 在 $\bar{G}$ 中由 uwv 连接，由 u,v 的任意性知 $\bar{G}$ 是连通的。

33、

设 (n,m) 图T是树

用反证法，假设T中至多有 $k-1$ 个叶结点，

则根据握手定理得

$$2m=\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) \geq (k-1)+k+2(n-k)$$

$$=2n-1$$

另一方面由T是树得 $m=n-1$，所以 $2n-2 \geq 2n-1$ 矛盾

提假设错误，结论成立，即T中至少有k个叶结点。

37、

先根：V_0 V_1 V_4 V_5 V_2 V_3 V_6 V_8 V_9 V_{10} V_7

中根：V_4 V_5 V_1 V_2 V_8 V_9 V_{10} V_6 V_7 V_3 V_0

后根：V_5 V_4 V_{10} V_9 V_8 V_7 V_6 V_3 V_2 V_1 V_0

45、设(n,m)图G

用反证法，设G中每个结点的度数≥ 6，即$\deg(v_i) \geq 6 (i=1,2,\cdots,n)$，则由握手定理知

$$2m = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) \geq 6n \quad 即\ n \leq \frac{1}{3}m \quad (1)$$

~~所~~

又G是连通平面图，且$\deg(v_i) \geq 6$，知$m \geq 2$

由推论"在有~~两~~两条或更多条边的任何连通的平面图G中，有$m \leq 3n-6$"知 $m \leq 3n-6$，

代入(1)，得 $n \leq n-2$，矛盾

~~所以~~于是，假设错误

所以G中至少有一结点v，满足$\deg(v) \leq 5$.