离 散 数 学

Discrete Mathematics

第一章 集合

宋牟平 songmp@zju.edu.cn　玉泉校区 行政楼 325
助教：贾宁 18888911516 玉泉校区 行政楼 327

第一章 集合

集合及其表示方法

集合的概念是现代数学中最基本的概念之一。

集合创始人G.Cantor——凡是在我们的感觉或思维中可以明确区分的对象物，把它们看成一个整体，这个整体，我门就称它是**集合**，其中的”物”就称为该集合的”成员”或”元素”。

集合与元素：一些**确定的**、**可区分的**事物构成的整体称为**集合**，其中所含的事物称为**元素**。

集合一般用大写字母命名（A B C），元素用小写字母(a b c)。

数学中常见的集合

N 自然数的集合 **Z** 非负整数的集合

I 整数的集合 **Q** 有理数的集合

R 实数的集合 **C** 复数的集合

在日常生活中，也经常遇到的集合的概念

浙江大学的全体教师
26英文字母
选离散数学课的学生

<u>元素和集合的关系</u>用符号”∈“表示（意大利数学家Peanc引入，是希腊文∈σι（esti)的首字母，意为是），当元素在集合A中时，记

$$a \in A$$

读作“<u>a属于A</u>”。当元素不在A时，记

$$a \notin A$$

读作“<u>a不属于A</u>”。

例 **n∈N** **i∈I** **x∈R** **a+jb∈C**

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

集合有穷举法和描述法两种表示方法

穷举法：列出集合中的所有元素

例 A={a，b，c，d}

例 选离散数学课学生名单={张三，…………}

例 中文字符集={一，二，……，王，…… …}

常用于必须列出所有元素的场合。

描述法：用集合中所有元素的共同性质来描述其元素，而不列出其元素

例 S={s|s是不大于10的正偶数}

例 $M=\{m|m=2^i，i\in Z\}$

例 $\rho=\{(x,y)|\ x,y\in R，x^2+y^2=1\}$

描述法的优点是不必列出所有元素，元素可根据条件生成。在很多情形下没有必要，也没有可能列出所有元素。

注意点：

<u>集合中的元素是**可区别的**</u>，如离散数学书中的所有汉字，相同的汉字虽然多次出现，但在集合中认为是同一个元素。

<u>集合中的元素必须是**确定的**</u>，例

百货商店里好看的花布

<u>元素在集合中的次序是**随意的**</u>，如

$$\{a, b, c, d\}=\{b, a, d, c\}$$

<u>任何确定的、可区别的事物都可以作为元素</u>，因此**某个集合也完全可以是另一个集合的元素**。

例 $A=\{a, b, c\}$；$B=\{\{a, b, c\}, d\}$

A有4个元素，B有两个元素。

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

悖论

对“包罗一切的集合”或“由一切集合组成的集合”等类似的术语，会导致集合论中的悖论。如理发师悖论：

某理发师跟且只跟城里所有不能给自己理发的人理发。

空集

定义1-1 不含有任何元素的集合，称为**空集**，记作：

$$\varnothing = \{\ \}$$

例　平面上两条平行线的“交点”的集合。

空集合在集合的运算和证明中有重要的作用。空集是唯一的。

基数

集合基数：集合中元素的数目。

例　A={a, b, c, d, e}　　　　#A=5

有限集：基数有限；

无限集：基数无限

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

1.2 集合的包含和相等

定义1-2 设有集合A和B，**若有A的每一个元素都是B的元素（即若$a\in A$，必有$a\in B$）**，则称A是B的**子集**，或说A被包含于B中(或B包含A)，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

反之，则称A不是B的子集，则记作

$$A\nsubseteq B \text{ 或 } B\nsupseteq A$$

例 $A=\{a,b,c\}, B=\{a,b,c,d\}, C=\{\{a\},b,c,d\}$

$$A\subseteq B， \text{ 但 } A\not\subset C$$

例 $N\subseteq I\subseteq Q\subseteq R$

定义1-4 **真子集**：设A是B的子集，若B中至少有一个元素不属于A，则A是B的真子集，记

$$A\subset B$$

<u>定义1-3</u> 集合相等：集合A与B的所有元素相同，则

$$A=B$$

等价定义：设 A和B是两个集合，**若A⊆B，且B ⊆ A，则A=B**。

等价定义也可描述为：**A=B的充要条件是A⊆B，且B ⊆ A。**

等价定义在集合的证明中非常方便。

<u>推论</u>：

(1) 对于任意集合A，有**∅⊆A**

(2) 对于任意集合A，有**A⊆A**

<u>∅和A称为A的**平凡子集**</u>。

(3)对于任意集合A、B、C，若A⊆B，且B ⊆ C，则A⊆C

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

证明(1)对于任意集合A，有$\varnothing \subseteq A$

反证法：

设空集$\varnothing$不是某集合A的子集，即$\varnothing \subseteq A$，

则必存在元素$x \in \varnothing$ 而$x \notin A$，这与空集的定义矛盾，

因此，$\varnothing \subseteq A$

定理1-1 空集合是唯一的。

证明：假设有两个空集合$\varnothing 1$和$\varnothing 2$，因为空集被包含于每一个集合中，因此有，$\varnothing 1 \subseteq \varnothing 2$，$\varnothing 2 \subseteq \varnothing 1$，$\varnothing 1 = \varnothing 2$

1.3 幂集

定义1-5 **幂集**：由集合A的所有子集作为元素构成的集合称为A的**幂集**，记作2^A

$$2^A=\{s|s\subseteq A\}$$

例　　$A=\{a,b,c\}$

$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

例　　$2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$

例　　若$2^A\in 2^B$，则$A\in B$。

证明：$\because 2^A\in 2^B$，

$\therefore 2^A\subseteq B$。又$A\in 2^A$，

$\therefore A\in B$。

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

定理1-2 设A是具有基数#A的有限集#$(2^A)=2^{\#A}$。

幂集的基数：　设#A=n，则$\#2^A=2^{\#A}=2^n$

证明　设 $\#A=n$，从 n 个元素中选取 i 个不同元素的方法共有 C_n^i 种，这里

$$C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

所以 A 的不同子集的数目（包括 ϕ）为

$$\#(2^A)=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n.$$

由二项式定理可知：

$$(x+y)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^ny^n.$$

令 $x=y=1$，便有

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n.$$

所以 $\#(2^A)=2^n$。因为 $\#A=n$，故有 $\#(2^A)=2^{\#A}$。证完。

子集的一种表示法

当集合A的元素个数较多时，要毫无遗漏地列出集合A的所有子集是一件相当困难的事情。现在我们引进一种表示法，按照这种表示法，我们能够毫无遗漏地列出一个有限集合的每一个子集。为此，我们对所给集合的元素规定某种次序，使得某个元素可以称为第一个元素，另一个元素为第二个元素，等等（虽然在

集合A={a,b,c}，令a是第一个元素，b是第二个元素，c是第三个元素。则A的各个子集可以表示为：

B_{000}=Φ，B_{001}={c}，B_{010}={b}，B_{011}={b，c}，B_{100}={a}

B_{101}={a，c}，B_{110}={a，b}，B_{111}={a，b，c}

2^A={B_{000}，B_{001}，B_{010}，B_{011}，…，B_{110}，B_{111}}

下午5时51分

1.4 集合的运算

定义1-6 **全集**：若一个集合包含了某个问题中所讨论的一切集合，则称它为该问题的全域集合，或简称为**全集合**，记*U*。

全集合***U***不是唯一的，可取一个较为方便的集合为***U***。

定义1-7 **并集**：设有集合A、B，则由集合A和B中的所有元素构成的集合称为A与B的并集

$$A \cup B=\{u \mid u \in A \text{ 或 } u \in B\}$$

定义1-8 **交集**：设有集合A、B，则由既属于A又属于B的所有元素构成的集合，称为A与B的交集

$$A \cap B=\{u \mid u \in A \text{ 且 } u \in B\}$$

例　$A=\{1,2,3,4,5\}$,　$B=\{4,5,6,7,8\}$

$A \cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$；　$A \cap B=\{4,5\}$

例　$\{1，2\} \cap \{3，4\}=\varnothing$

定义1-9 **差集**（**相对补集**）：由属于集合B而不属于集合A的所有元素构成的集合，称为B与A的差集（A关于B的相对补集）

$$B-A=\{u|u\in B 且 u\notin A\}$$

例　$A=\{1,2,3,4,5\}$,　$B=\{4,5,6,7,8\}$

$A-B=\{1,2,3\}$,　$B-A=\{6,7,8\}$

定义1-10 **补集**：集合A关于全集合U的相对补集，称为A的**绝对补集**，简称A的**补集**，记作

$$A'=U-A=\{u \mid u \in U，u\notin A\}=\{u \mid u\notin A\}$$

$U'=\varnothing$,　$\varnothing'=U$

$A-B=A\cap B'$

*定义1-11 **对称差**：设有集合A、B，由属于A但不属于B，以及属于B但不属于A的所有元素组成的集合，称为A与B的**对称差**，记作

$$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)$$

例 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7,8\}$

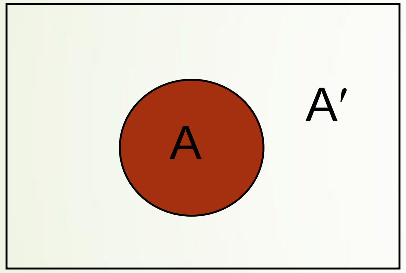
$A-B=\{1,2,3\}$, $B-A=\{6,7,8\}$

$A \oplus B=\{1,2,3\} \cup \{6,7,8\}=\{1,2,3,6,7,8\}$

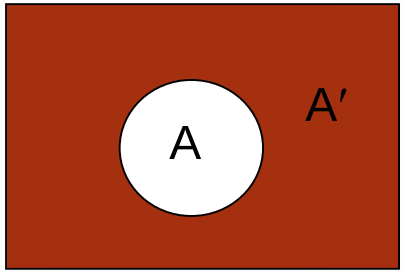
浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

1.5 文氏图

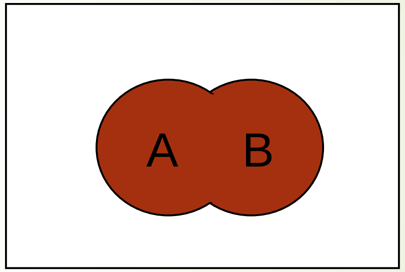
用英国数学家John Venn的名字命名，可以直观形象地表示集合间的关系，对集合证明和运算提供帮助。



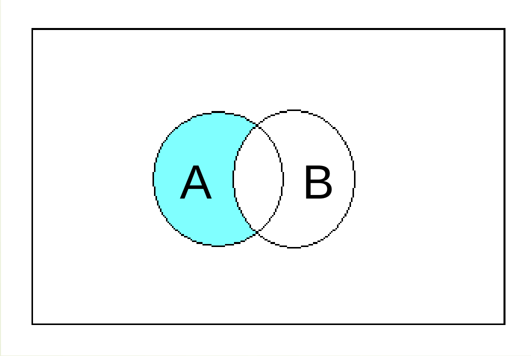
A



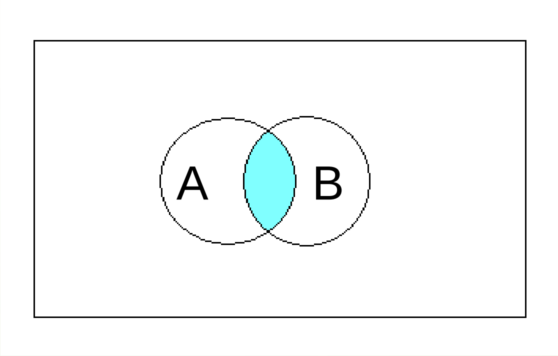
A′



A∪B



A–B



A∩B

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

例 在一个170人的班级里，120个学生会西班牙语，80个学生会法语，60个学生会英语，50个学生既会西班牙语又会法语；25个学生既会西班牙语又会英语，30个学生既会法语又会英语；10个学生三种语言全都会，问有多少学生对这三种语言一种也不会？

解 分别用 S, F, E 表示会西班牙语，法语，英语的学生的集合，于是

$$\#S = 120,$$
$$\#F = 80,$$
$$\#E = 60,$$
$$\#(S \cap F) = 50,$$
$$\#(S \cap E) = 25,$$
$$\#(F \cap E) = 30,$$
$$\#(S \cap F \cap E) = 10.$$

由这些数据，我们可以计算出图 1-4 的文氏图各个区域中的元素个数，

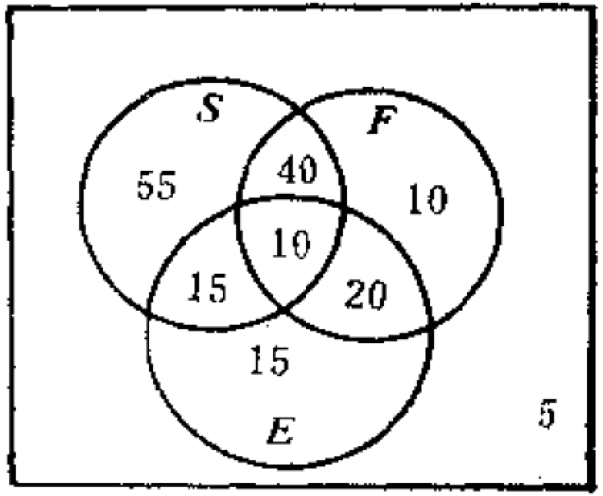


图 1-4

因而得出对三种语言一种也不会的学生人数为 5 。

1.6 集合成员表

成员表是用表格的方式描述集合的并、交、补运算的定义. 表 1-1 中任一集合 S 所标记的列中, 0 表示全集合中的元素 $u \notin A$, 1 表示 $u \in A$. 利用上述三个基本的成员表可以进而构造出全集合 U 的其他子集的成员表.

A' 的成员表

A	A'
0	1
1	0

$A \cup B$ 的成员表

A	B	$A \cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A \cap B$ 的成员表

A	B	$A \cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1-11 试构造集合$(A\cup B)\cap(B\cup C)'$和集合$A\cap B'$的成员表，通过其成员表判断这两个集合之间是否有相等关系或包含关系.

解 构造两个集合的成员表，如表 1-2 所示.

表 1-2

A	B	C	$A\cup B$	$B\cup C$	$(B\cup C)'$	$(A\cup B)\cap(B\cup C)'$	B'	$A\cap B'$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0

集合$(A\cup B)\cap(B\cup C)'$所标记的列中，仅在第五行为 1，这意味着当元素$u\in A$，$u\notin B$且$u\notin C$时，$u\in(A\cup B)\cap(B\cup C)'$，而在其他情形下，元素$u\notin(A\cup B)\cap(B\cup C)'$.

集合$A\cap B'$所标记的列中，第五行与第六行均为 1，这意味着当元素$u\in A$，$u\notin B$且$u\notin C$时，$u\in A\cap B'$，当元素$u\in A$，$u\in C$但$u\notin B$时，也有$u\in A\cap B'$.

由上可以看出，当元素$u\in(A\cup B)\cap(B\cup C)'$时，也有$u\in A\cap B'$，但当$u\in A\cap B'$时，不一定有$u\in(A\cup B)\cap(B\cup C)'$，所以可以得出结论$(A\cup B)\cap(B\cup C)'\subseteq A\cap B'$.

1.7 集合运算的定律

交换律 $A\cup B=B\cup A$； $A\cap B=B\cap A$

结合律 $A\cup(B\cup C)=A\cup(B\cup C)$； $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

同一律 $A\cup\varnothing=A$； $A\cap U=A$

互补律 $A\cup A'=U$； $A\cap A'=\varnothing$

对合律 $(A')'=A$

幂等律 $A\cup A=A$； $A\cap A=A$

零一律 $A\cup U=U$； $A\cap\varnothing=\varnothing$

吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$； $A\cap(A\cup B)=A$

德•摩根定律 $(A\cup B)'=A'\cap B'$； $(A\cap B)'=A'\cup B'$

集合的证明方法

文氏图、定义直接证明、利用集合运算的定律和性质证明

例　摩根定律 $(A\cup B)'=A'\cap B'$ 的证明

1）依据定义直接证明

对任意 $u\in(A\cup B)'$，根据补集的定义有 $u\notin A\cup B$，即 $u\notin A$ 且 $u\notin B$，于是有 $u\in A'$ 且 $u\in B'$，即 $u\in A'\cap B'$。由子集的定义可知 $(A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$。

反之，设 $u\in A'\cap B'$，则 $u\in A'$ 且 $u\in B'$，由补集的定义有 $u\notin A$ 且 $u\notin B$，即 $u\notin A\cup B$，再由补集的定义可知 $u\in(A\cup B)'$。故有 $A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$。

由集合相等的定义可知 $(A\cup B)'=A'\cap B'$

2）利用集合运算的定律和性质证明

利用互补律只需证

$$(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing,\quad (A\cup B)\cup(A'\cap B')=U$$

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

$$(A\cup B)\cap(A'\cap B')=(A\cap(A'\cap B'))\cup(B\cap(A'\cap B'))$$

$$=((A\cap A')\cap B')\cup((B\cap B')\cap A')$$

$$=(\varnothing\cap B')\cup(\varnothing\cap A')$$

$$=\varnothing$$

$$(A\cup B)\cup(A'\cap B')=(A\cup B\cup A')\cap(A\cup B\cup B')$$

$$=((A\cup A')\cup B)\cap(A\cup(B\cup B'))$$

$$=(U\cup B)\cap(A\cup U)$$

$$=U\cap U$$

证毕

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

其它一些有用的性质

1） **$A \subseteq C$，$B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$**

2) **$A \subseteq C$，$A \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$**

3) **$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B=B \Leftrightarrow A \cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$**

证明：

a) 设$A \subseteq B$，因$B \subseteq B$，故$A \cup B \subseteq B$；又$B \subseteq A \cup B$，所以有$A \cup B=B$.

设$A \cup B=B$，则$A \cup B \subseteq B$，而$A \subseteq A \cup B$，故$A \subseteq B$。

b) 设$A \subseteq B$，因$A \subseteq A$，故$A \subseteq A \cap B$；又$A \cap B \subseteq A$，所以有$A \cap B=A$

设$A \cap B=A$，则$A \subseteq A \cap B \subseteq B$，故$A \subseteq B$

4） **$A-B=A \Leftrightarrow A \cap B=\varnothing$**

设$A-B=A$，则$A \cap B=(A-B) \cap B=(A \cap B') \cap B= A \cap (B' \cap B)=A \cap \varnothing=\varnothing$

设$A \cap B=\varnothing$，则

$$A=A \cap (B \cup B')=(A \cap B) \cup (A \cap B')=\varnothing \cup (A \cap B')=A \cap B'=A-B$$

1.8 分划

在日常生活常中，人们常遇到对人员分组、对物品分类等问题，这些分组和分类的问题在集合中抽象为分划问题。

定义1-12 **分划**：设$\pi=\{A_i\}_{i\in K}$是集合A的某些非空子集的集合，如果集合A的每一个元素**在且在**其中某一个子集A_i中，则称集合π是集合A的一个**分划**，A_i称为该分划的一个**分划块**。即

$\pi=\{A_i\}_{i\in K}$

（1）$(A_i \cap A_j)=\varnothing$

（2）$\bigcup_{i=K} A_i = A$

例 设A={1，2，3}，则

π_1={{1}，{2}，{3}}，π_2={{1}，{2，3}}，π_3={{1，2}，{3}}，

π_4={{1，3}，{2}}，π_5={{1，3，2}} 都是A的分划。

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

显然分划不唯一，如何分，根据需要和条件。

细分的概念：对集合A进行了一次分划后，还可以再进行二次分划，将一次分划块细分为更小的块。例如图书馆对书籍的分类。

定义1-13：设 $\bar{\pi}=\{\bar{A}_i\}_{i\in K}$ 和 $\pi=\{A_j\}_{j\in K}$是集合的两个分划，如果 $\bar{\pi}$ 的每一个 $\bar{A}_i$ 都是π中的某个A_j的子集，则称分划$\bar{\pi}$ 是分划π的一个细分。若$\bar{\pi}$中至少有一个 $\bar{A}_i$ 为π中某个A_j的真子集，则称 $\bar{\pi}$ 是π的一个真细分。

例 设A={1，2，3}，则

π_1={{1}，{2}，{3}}，π_2={{1}，{2，3}}，π_3={{1，2}，{3}}，

π_4={{1，3}，{2}}，π_5={{1，3，2}} 都是A的分划。

例子中的π_1、π_2、π_3、π_4都是π_5的真细分，π_1是π_2、π_3是π_4的真细分。 π_1无法在细分，称为**最细分**，π_5称为**最粗分**，即不进行分划。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 是全集合 U 的一组子集，对 $\varnothing, U, A_1, A_2, \cdots, A_r$ 有限次地施加“$'$”、“$\cup$”、“$\cap$”运算，所得到的集合称为是由 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 所产生的集合.

由 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 所产生的集合，可以利用集合的运算定律将其变形化为标准形式.

(A∩B∩C)∪(A’ ∩B∩C)

集合的标准形式可分为最小集标准形式和最大集标准形式. 最小集标准形式是将集合表示成 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 的不同最小集的并；最大集标准形式是将集合表示成 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 的不同最大集的交.

(A∪B∪C) ∩(A’ ∪B∪C)

例 1-13 利用集合运算的定律求出集合 $(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$ 的最小集和最大集标准形式.

解 (1) 求最小集标准形式.

$$
\begin{aligned}
&(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))\\
&=(A\cap B')\cup(A'\cap B)\cup(A'\cap C')\\
&=(A\cap B'\cap(C\cup C'))\cup((A'\cap B)\cap(C\cup C'))\cup((A'\cap C')\cap(B\cup B'))\\
&=(A\cap B'\cap C)\cup(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C)\cup(A'\cap B\cap C')\\
&\quad\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C')\\
&=(A\cap B'\cap C)\cup(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C)\cup(A'\cap B\cap C')\\
&\quad\cup(A'\cap B'\cap C').
\end{aligned}
$$

(2) 求最大集标准形式.

$$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$$
$$=((A\cap B')\cup A')\cap((A\cap B')\cup(B\cup C'))$$
$$=\underline{(A\cup A')}\cap(B'\cup A')\cap(A\cup B\cup C')\cap(\underline{B'\cup B}\cup C')$$
$$=(A'\cup B')\cap(A\cup B\cup C')$$
$$=\underline{(A'\cup B')\cup(C\cap C')}\cap(A\cup B\cup C')$$
$$=(A'\cup B'\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C')\cap(A\cup B\cup C').$$

例 1-14 利用集合的成员表求出例 1-13 中集合的标准形式.

解 (1) 构造集合$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$的成员表,见表 1-3.

表 1-3

A	B	C	B'	$A\cap B'$	A'	C'	$B\cup C'$	$A'\cap(B\cup C')$	$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

(2) 分别找出$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$所标记的列中 1 所有的行和 0 所在的行.

1 所在的行是 000,010,011,100,101;

0 所在的行是 001,110,111.

(3) 根据$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$所标记的列中 1 所在的行,直接写出该集合的最小集标准形式.

$$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$$
$$=M_{000}\cup M_{010}\cup M_{011}\cup M_{100}\cup M_{101}$$
$$=(A'\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C')\cup(A\cap B'\cap C).$$

根据$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$所标记的列中 0 所在的行,直接写出该集合的最大集标准形式.

$$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$$
$$=\overline{M}_{001}\cap\overline{M}_{110}\cap\overline{M}_{111}$$
$$=(A\cup B\cup C')\cap(A'\cup B'\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C').$$

作业

2，6，14(2)(4), 16(1)(2), 20, 22(2), 24, 25

第一章 小结

1. 集合及有关概念、集合的表示法

- 集合、元素、集合的基数；
- 集合的两种表示方法——列举法和描述法；
- 两个特殊的集合——全集合和空集；
- 子集、包含集和幂集；
- 分划和细分；
- 集合的最小集标准形式和最大集标准形式.

2. 集合间的关系

- 集合间的包含关系 $B\subseteq A$；
- 集合间的真包含关系 $B\subset A$；
- 集合间的相等关系 $A=B$；
- 集合间的互补关系 $B'=A$.

3. 集合的运算

- 集合的并运算 $A \cup B$；
- 集合的交运算 $A \cap B$；
- 集合的补运算——相对补运算（$B-A$）、绝对补运算（$A'=U-A$），A'简称为 A 的补集；
- 集合运算的定律.

4. 对集合间的关系和运算进行分析和论证的工具

- 文氏图——直观、形象，可作为描述和分析的工具；
- 成员表——根据运算的定义严格构造出来的，可作为证明的工具.

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

例题讲解

例 1-1 设全集合是整数集 **Z**，试用列举法表示下列集合.

(1) $A=\{x \mid x^2-16=0$ 或 $x^4=1\}$；

(2) $B=\{x \mid x^2-10x-24<0$ 且 $-5\leqslant x\leqslant 6\}$.

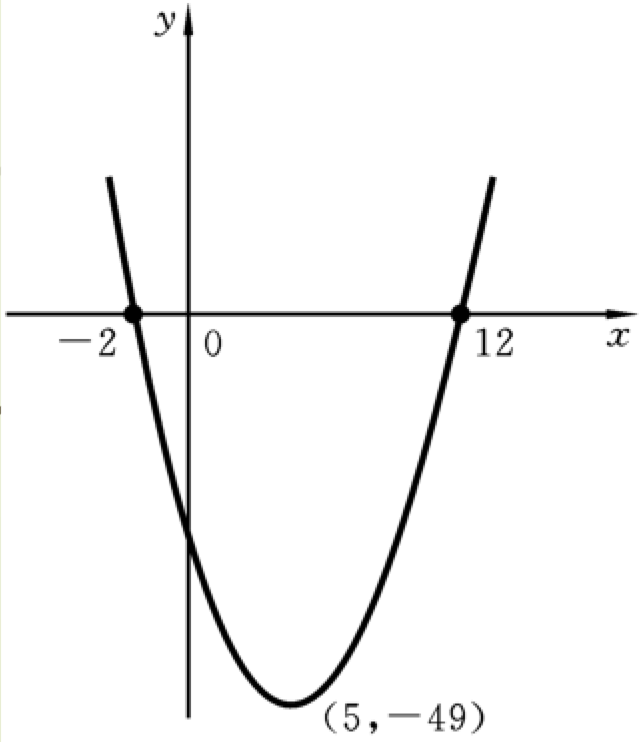


图 1-1

解 (1) 满足 $x^2-16=0$ 即 $x^2=16$ 的 x 有两个整数 $x_1=4$ 和 $x_2=-4$. 满足 $x^4=1$ 的 x 也有两个整数 $x_3=1$ 和 $x_4=-1$. 因此

$$A=\{4,-4,1,-1\}.$$

(2) 令 $y=x^2-10x-24=(x-5)^2-49$，显然，当 $x=-2$ 和 $x=12$ 时，$y=0$，当 $x=5$ 时，y 有极小值 -49. 函数图形如图 1-1 所示. 因为 B 是全集合 **Z** 的子集，所以当

$$x=-1,0,1,2,\cdots,11 \text{ 时}, y<0.$$

但 x 的这些取值中，只有 8 个数满足不等式 $-5\leqslant x\leqslant 6$，因此

$$B=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}.$$

例 1-2 设 $A=\{a,b,\{c\},\{a\},\{a,b\}\}$，试指出下列论断是否正确.

(1) $a\in A$；

(2) $\{a\}\in A$；

(3) $\{a\}\subseteq A$；

(4) $\varnothing\in A$；

(5) $\varnothing\subseteq A$；

(6) $b\in A$；

(7) $\{b\}\in A$；

(8) $\{b\}\subseteq A$；

(9) $\{a,b\}\in A$；

(10) $\{a,b\}\subseteq A$；

(11) $c\in A$；

(12) $\{c\}\in A$；

(13) $\{c\}\subseteq A$；

(14) $\{a,b,c\}\subseteq A$.

解 (1)、(2)、(3)、(5)、(6)、(8)、(9)、(10)、(12)正确；(4)、(7)、(11)、(13)、(14)错误.

例 1-3 对于任意集合 A,B 和 C，下述论断是否正确？请说明理由.

(1) 若 $A\in B, B\subseteq C$，则 $A\in C$； (2) 若 $A\in B, B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

(3) 若 $A\subseteq B, B\in C$，则 $A\in C$； (4) 若 $A\subseteq B, B\in C$，则 $A\subseteq C$.

解 (1)正确.

因为 $B\subseteq C$，所以集合 B 的每一个元素也是集合 C 的元素，由 $A\in B$ 知 A 是 B 的一个元素，因此 A 也是 C 的一个元素，故 $A\in C$.

(2)错误.

举反例如下：设 $A=\{a\}, B=\{\{a\},b\}, C=\{\{a\},b,\{d\}\}$. 显然 $A\in B, B\subseteq C$，但 $A\nsubseteq C$. 因为 $a\in A$，但 $a\notin C$.

(3)和(4)都是错误的.

举反例如下：设 $A=\{a\}, B=\{a,b\}, C=\{\{a,b\},d\}$. 显然 $A\subseteq B, B\in C$，但 $A\notin C$. 因为集合 C 中没有元素 $\{a\}$. 又 $A\nsubseteq C$，因为集合 A 中的元素 a 不是集合 C 的元素.

例 1-4 列出下列集合的全部子集.

(1) $A=\{a,\{b\}\}$;

(2) $B=\{\varnothing\}$;

(3) $C=\varnothing$.

中只有两个元素,故 A 再没有其他的子集.

由上可知,A 有四个子集:$\varnothing$,$\{a\}$,$\{\{b\}\}$和$\{a,\{b\}\}$.

(2) 与上同样的道理,$\varnothing$是 B 的子集,此外由于 B 中仅有一个元素$\varnothing$,因此 B 仅有的另一个子集是$\{\varnothing\}$,即 B 自己.

由上可知,B 有两个子集:$\varnothing$和$\{\varnothing\}$.

(3) $\varnothing$是任何集合的子集,因此$\varnothing$也是$\varnothing$的子集,即$\varnothing$是 C 的子集. 因为 C 中没有元素,所以 C 不可能有其他的子集,故 C 只有一个子集:$\varnothing$.

由真子集的定义,对于任意集合 A,除了 A 自身不是 A 的真子集外,其他子集均是 A 的真子集. 因此以下结论成立.

A 有三个真子集:$\varnothing$,$\{a\}$和$\{\{b\}\}$.

B 有一个真子集:$\varnothing$.

C 没有真子集.

集合 A 的幂集是以 A 的所有子集为元素组成的集合. 因此只要子集的概念清楚,将 A 的所有子集列出来,便可得到 A 的幂集,A 的幂集记作 2^A 或 $P(A)$.

例 1-5 求下列集合的幂集.

(1) $A=\{a,\{b\},\{a,b\}\}$;

(2) $B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

解 (1) $2^A=\{\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{\{a,b\}\},\{a,\{b\}\},\{a,\{a,b\}\},\{\{b\},\{a,b\}\},\{a,\{b\},\{a,b\}\}\}$;

(2) $2^B=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

例 1-6 设 $A=\{i\mid i=2k,k\in N\}$,$B=\{i\mid i=2^k,k\in N\}$,$C=\{2,4,6,8,\cdots\}$,试用符号“$\subseteq$”、“$\subset$”和“$=$”恰当地连结这些集合. 这里 N 表示正整数集.

解 由集合 A 中元素的定义条件可知,$A=\{i\mid i$ 是正偶数$\}$,所以 $A=C$. 由集合 B 中元素的定义条件,$B=\{2,4,8,16,32,\cdots\}$是部分正偶数的集合,所以 $B\subseteq A$. 因为 $6\notin B$,$10\notin B$,$\cdots$,所以 B 是 A 的真子集,因此又有 $B\subset A$. 于是也有 $B\subseteq C$,$B\subset C$.

例 1-7 设 $A=\{2,3,\{2,3\},\varnothing\}$，求下列集合.

(1) $A-\{2,3\}$；

(2) $\{\{2,3\}\}-A$；

(3) $A-\varnothing$；

(4) $A-\{\varnothing\}$.

解 (1) $A-\{2,3\}=\{\{2,3\},\varnothing\}$；

(2) $\{\{2,3\}\}-A=\varnothing$；

(3) $A-\varnothing=A$；

(4) $A-\{\varnothing\}=\{2,3,\{2,3\}\}$.

集合的差运算可转化为集合的交运算和补运算来表达.

例 1-8 设 A、B 是任意两个集合，试证明

$$A-B=A\cap B'. \tag{1-1}$$

分析 根据两集合相等的定义，若能证明 $A-B\subseteq A\cap B'$ 且 $A\cap B'\subseteq A-B$，则 $A-B=A\cap B'$ 便成立.

证 设 $u\in A-B$，则 $u\in A$ 且 $u\notin B$，即 $u\in A$ 且 $u\in B'$，因此 $u\in A\cap B'$，故 $A-B\subseteq A\cap B'$.

反之，设 $u\in A\cap B'$，则 $u\in A$ 且 $u\in B'$，即 $u\in A$ 且 $u\notin B$，由差集的定义 $u\in A-B$，因此 $A\cap B'\subseteq A-B$.

由上证得 $A-B=A\cap B'$.

例 1-9 设 A,B,C 为任意集合,试证明

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C).$$

证
$$A\cap(B-C)=A\cap(B\cap C') \qquad (1\text{-}1)$$
$$=A\cap B\cap C', \qquad \text{结合律}$$

又
$$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)' \qquad (1\text{-}2)$$
$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C') \qquad \text{德摩根定律}$$
$$=(A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap C') \qquad \text{分配律}$$
$$=\varnothing\cup(A\cap B\cap C') \qquad \text{交换律、结合律、互补律}$$
$$=A\cap B\cap C', \qquad \text{同一律}$$

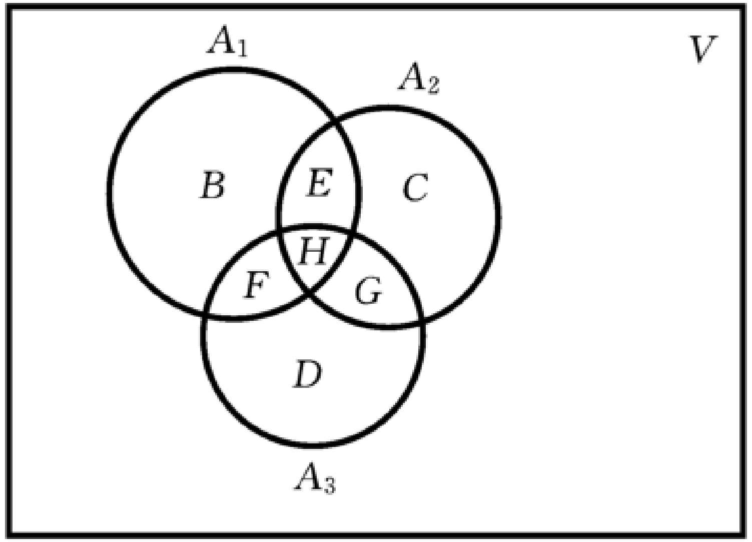
因此
$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C).$$

例 1-10 某学校举行运动会，有 100 m 短跑、掷铅球和跳高三个项目. 二年级 170 人，已知有 25 人三个项目都参加了，有 62 人至少参加了两个项目. 若该年级参加比赛的总人次是 200 人次，试问有多少人没有参加任何项目？

解 (1) 用集合的概念描述上述问题.

设全集合 U 为二年级 170 人的集合，A_1 为参加 100 m 短跑的学生集合，A_2 为参加掷铅球的学生集合，A_3 为参加跳高的学生集合.

(2) 用文氏图(图 1-2)表示各个集合.



由题设条件和文氏图可知有关集合的基数：

$$\# U = 170(\text{人}),$$
$$\# H = \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 25(\text{人}),$$
$$\#(E \cup H \cup F \cup G) = 62(\text{人}).$$

(3) 计算.

$$\#(E \cup F \cup G) = \#(E \cup H \cup F \cup G) - \# H = 62 - 25 = 37(\text{人}),$$
$$25 \times 3 = 75(\text{人次}),$$
$$37 \times 2 = 74(\text{人次}),$$
$$200 - (75 + 74) = 51(\text{人次}),$$

因此 $\# B + \# C + \# D = 51(\text{人})$，

于是
$$\#((A_1 \cup A_2 \cup A_3)') = \# U - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= 170 - (51 + 62) = 57(\text{人}),$$

故该年级有 57 人没有参加任何项目.

例 1-12 设 $A=\{2,3,5,8,9,16,22,25,27,35\}$，按照 A 中元素是奇数或偶数来区分，可将 A 中元素分划为两块：

$$B_1=\{3,5,9,25,27,35\};$$

$$B_2=\{2,8,16,22\}.$$

因此 $\Pi_1=\{B_1,B_2\}$ 是集合 A 的一个分划.

按照 A 中元素能被 2 整除、被 3 整除或被 5 整除来区分，又可将 A 中元素分划为三块：

$$A_2=\{2,8,16,22\};$$

$$A_3=\{3,9,27\};$$

$$A_5=\{5,25,35\}.$$

因此 $\Pi_2=\{A_2,A_3,A_5\}$ 也是集合 A 的一个分划.

若按照 A 中元素能被 2 整除、被 3 整除或被 4 整除来区分，可得到 A 的如下几个非空子集：

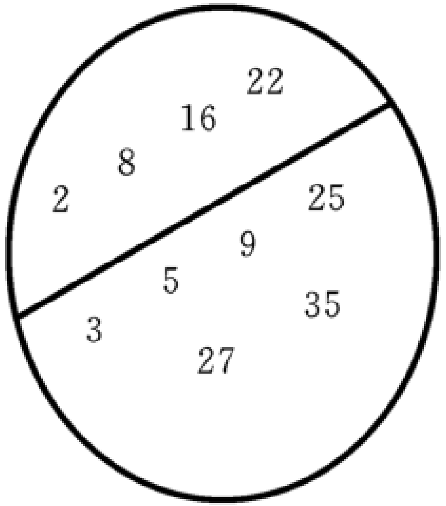
$$A_2=\{2,8,16,22\};$$

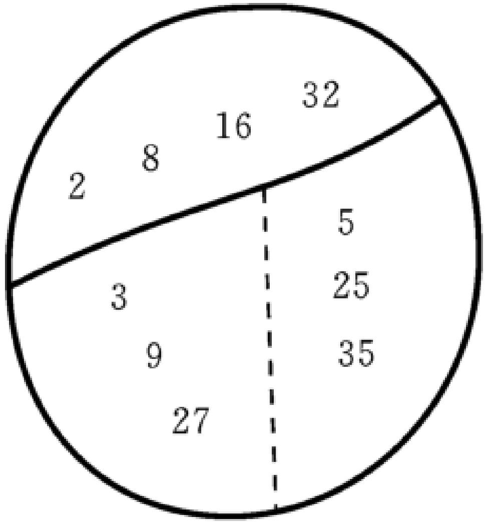
$$A_3=\{3,9,27\};$$

$$A_4=\{8,16\}.$$

可令 $S=\{A_2,A_3,A_4\}$，但 S 不是 A 的分划. 原因之一是 A_2 与 A_4 有公共元素；原因之二是有些元素，如 5,25,35 不在任何子集中.

分划 Π_1 有两个分划块,分划 Π_2 有三个分划块. 容易发现 $A_2 \subseteq B_2$, $A_3 \subseteq B_1$, $A_5 \subseteq B_1$, 即 Π_2 的每一个分划块都是 Π_1 的某一个分划块的子集. 因此 Π_2 是 Π_1 的细分. 如图所示,图 1-3 表示 Π_1 将 A 分划成两块,图 1-4 表示 Π_2 将 A 分划成三块. 图 1-4 可由在图 1-3 的基础上加一根分划线(图中用虚线表示)的方法,将 Π_1 中的一个分划块分成两个分划块而得到.





例 1-15 给定正整数集 **N** 的下列子集：

$$A=\{2,5,8,9,11\};$$

$$B=\{i \mid i^3<100\};$$

$$C=\{i \mid i \text{ 可被 } 3 \text{ 整除且 } i\leqslant 30\}.$$

求下列集合.

(1) $(A\cup B)\cap C$；　(2) $A\cup(B\cap C)$；

(3) $B-(A\cup C)$；　(4) $(A'\cap B)\cup C$.

解 因为

$$A=\{2,5,8,9,11\};$$

$$B=\{1,2,3,4\};$$

$$C=\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\},$$

所以

(1) $(A\cup B)\cap C=\{1,2,3,4,5,8,9,11\}\cap C=\{3,9\}$；

(2) $A\cup(B\cap C)=A\cup\{3\}=\{2,3,5,8,9,11\}$；

(3) $B-(A\cup C)=B-\{2,3,5,6,8,9,11,12,15,18,21,24,27,30\}=\{1,4\}$.

(4) 因为 $A'=\{1,3,4,6,7,10\}\cup\{12,13,14,\cdots\}$，所以

$$(A'\cap B)\cup C=\{1,3,4\}\cup C=\{1,3,4,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}.$$

例 1-16 试定义两个集合 A,B，使得 $A\in B$ 且 $A\subseteq B$.

解 定义 $A=\{a\}$，$B=\{\{a\},a\}$，则有 $A\in B$ 且 $A\subseteq B$.

例 1-19 设 A,B 是任意的集合，试证明当且仅当 $A\subseteq B$ 时，$2^A\subseteq 2^B$.

证 设 $A\subseteq B$ 且 $S\in 2^A$，则 $S\subseteq A$，因为 $A\subseteq B$，所以 $S\subseteq B$，因此 $S\in 2^B$，故 $2^A\subseteq 2^B$.

反之，设 $2^A\subseteq 2^B$ 且 $u\in A$，则 $\{u\}\subseteq A$，因此 $\{u\}\in 2^A$，由 $2^A\subseteq 2^B$，所以 $\{u\}\in 2^B$，因此 $\{u\}\subseteq B$，于是 $u\in B$. 故 $A\subseteq B$.

例 1-21 试证明对任意集合 A,B,C,等式 $(A-B)\cup(A-C)=A$ 成立的充要条件是 $A\cap B\cap C=\varnothing$.

证 先证必要性.

设 $(A-B)\cup(A-C)=A$,因为

$$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B')\cup(A\cap C')=A\cap(B'\cup C')$$
$$=A\cap(B\cap C)'=A-(B\cap C),$$

所以

$$A-(B\cap C)=A.$$

于是对任意的 $x\in A$,必有 $x\in A-(B\cap C)$,因而必有 $x\notin B\cap C$. 故 $A\cap(B\cap C)=\varnothing$.

再证充分性.

设 $A\cap B\cap C=\varnothing$,则对任意 $x\in A$,必有 $x\notin B\cap C$,即 $x\in(B\cap C)'$,因此 $A\subseteq(B\cap C)'$. 于是

$$(A-B)\cup(A-C)=A\cap(B\cap C)'=A.$$

例 1-23 设有集合 A,B,且 $A\cap B=A$,求联合方程组

$$\begin{cases} x\cup A=B; \\ x\cap A=\varnothing \end{cases}$$

的解,并证明此解是唯一的.

解 由 $A\cap B=A$ 可知 $A\cup B=B$. 令 $x=B-A$,因为

$$\begin{aligned}(B-A)\cup A&=(B\cap A')\cup A=(B\cup A)\cap(A'\cup A)\\&=(B\cup A)\cap U=A\cup B=B,\end{aligned}$$

$$(B-A)\cap A=(B\cap A')\cap A=\varnothing,$$

所以集合 $B-A$ 是联立方程组的解.

假设 x_1 和 x_2 均是联立方程组的解,则

$$x_1\cup A=x_2\cup A,\quad x_1\cap A=x_2\cap A.$$

于是

$$\begin{aligned}x_1&=x_1\cap(x_1\cup A)=x_1\cap(x_2\cup A)=(x_1\cap x_2)\cup(x_1\cap A)\\&=(x_1\cap x_2)\cup(x_2\cap A)=x_2\cap(x_1\cup A)=x_2\cap(x_2\cup A)=x_2.\end{aligned}$$

故 $B-A$ 是联立方程组唯一的解.