

Lect 02 逻辑化简

刘 鹏

浙江大学 信息与电子工程学院



复习

- 逻辑公式和表达
 - 公式法

本节内容

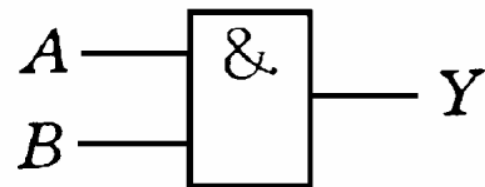
- 公式法化简
- 卡诺图化简

与-AND

- 条件同时具备，结果发生
 - $Y = A \text{ AND } B = A \& B = A \cdot B = AB$
 - 真值表/truth table
- 图形符号

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

国标



与

国际



复习

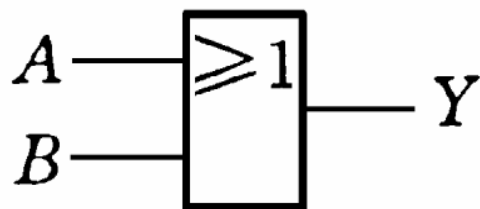
或-OR

复习

- 条件之一具备，结果发生
- $Y = A \text{ OR } B = A + B$
- 真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

图形符号



或



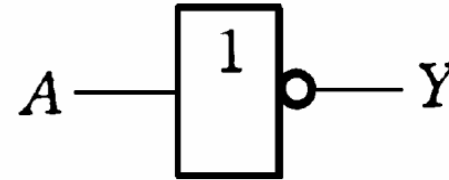
非-NOT(反相器)

复习

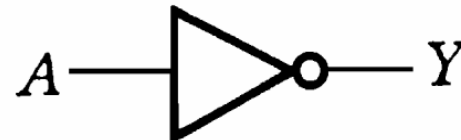
- 条件不具备，结果发生
- $Y = A' = NOT\ A$
- 真值表

A	Y
0	1
1	0

图形符号



非



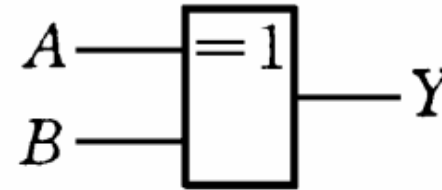
常用的复合逻辑运算异或

复习

□ 异或-EXCLUSIVE OR

□ $Y = A \oplus B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



异或



$$Y = A \oplus B$$

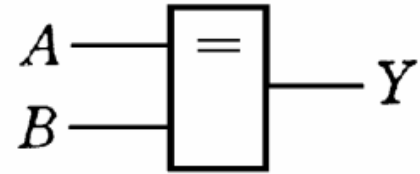
常用的复合逻辑运算同或

复习

□ 同或-EXCLUSIVE NOR

□ $Y = A \odot B$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



同或



$$Y = A \odot B$$

基本公式

证明方法：推演 真值表

□ 根据与、或、非的定义，得布尔恒等式

复习

序号	公 式	序号	公 式
		10	$1' = 0; 0' = 1$
1	$0 A = 0$	11	$1 + A = 1$
2	$1 A = A$	12	$0 + A = A$
3	$A A = A$	13	$A + A = A$
4	$A A' = 0$	14	$A + A' = 1$
5	$A B = B A$	15	$A + B = B + A$
6	$A (B C) = (A B) C$	16	$A + (B + C) = (A + B) + C$
7	$A (B + C) = A B + A C$	17	$A + B C = (A + B)(A + C)$
8	$(A B)' = A' + B'$	18	$(A + B)' = A' B'$
9	$(A')' = A$		

若干常用公式

序 号	公 式
21	$A + A B = A$
22	$A + A' B = A + B$
23	$A B + A B' = A$
24	$A (A + B) = A$
25	$A B + A' C + B C = A B + A' C$ $A B + A' C + B C D = A B + A' C$
26	$A (A B)' = A B' ; A' (A B)' = A'$

逻辑代数的基本定理


□ 代入定理

-----在任何一个包含**A**的逻辑等式中，若以另外一个逻辑式代入式中**A**的位置，则等式依然成立

代入定理1

□ 应用举例：

式 (17) $A+BC = (A+B)(A+C)$

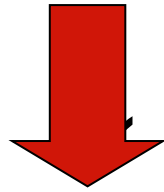

$$\begin{aligned} A+B(CD) &= (A+B)(A+CD) \\ &= (A+B)(A+C)(A+D) \end{aligned}$$

代入定理2

□应用举例：
式 (8)

$$(A \cdot B)' = A' + B'$$

以 $B \cdot C$ 代入 B



$$(A \cdot B \cdot C)' = A' + (BC)'$$
$$A' + B' + C'$$

逻辑代数的基本定理-2

□ 反演定理 $Y \Rightarrow Y'$

-----对任一逻辑式

• $\Rightarrow +$, $+\Rightarrow \bullet$, $0 \Rightarrow 1$, $1 \Rightarrow 0$,

原变量 \Rightarrow 反变量

反变量 \Rightarrow 原变量

变换顺序先括号,
然后乘, 最后加

不属于单个变量的
上的反号保留不变

反演定理

□ 应用举例：

$$Y = A(B + C) + CD$$

$$Y' = (A' + B'C')(C' + D')$$

$$= A'C' + B'C' + A'D' + \cancel{B'C'D'}$$

逻辑函数及其表示方法

□ 逻辑函数Logic function

□ $Y = F(A, B, C, \dots)$

-----若以逻辑变量为输入，运算结果为输出，则输入变量值确定以后，输出的取值也随之而定。输入/输出之间是一种函数关系

注：在二值逻辑中，输入/输出都只有两种取值0/1

逻辑函数的表示方法

- 真值表
- 逻辑式
- 逻辑图logic diagram
- 波形图waveform/timing diagram
- 卡诺图
- 计算机软件中的描述方式-Verilog HDL/VHDL

各种表示方法之间可以相互转换

逻辑真值表

输入变量 $A \ B \ C \dots$	输出 $Y_1 \ Y_2 \dots$
遍历所有可能的输入变量的取值组合	输出对应的取值

□ 逻辑式

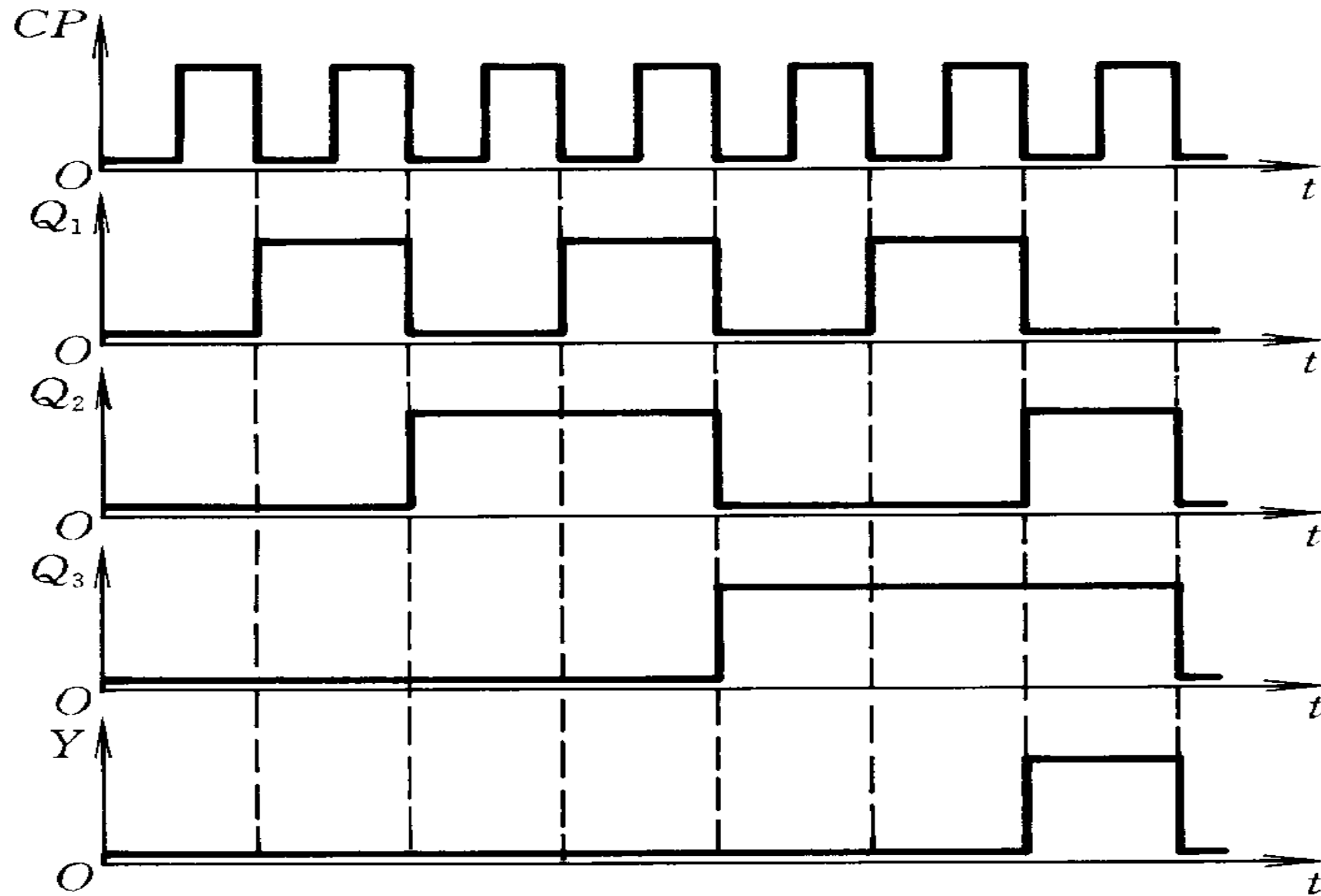
将输入/输出之间的逻辑关系用与/或/非的运算式表示
就得到逻辑式

□ 逻辑图

用逻辑图形符号表示逻辑运算关系，与逻辑电路的实现
相对应

□ 波形图

将输入变量所有取值可能与对应输出按时间顺序排列起
来画成时间波形



□ 卡诺图

□ EDA中的描述方式

HDL (Hardware Description Language)

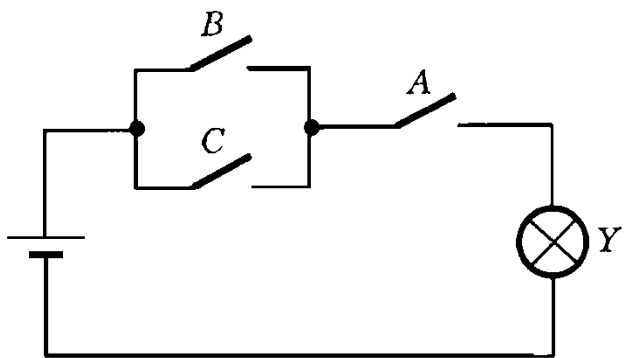
VHDL (Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language)

Verilog HDL

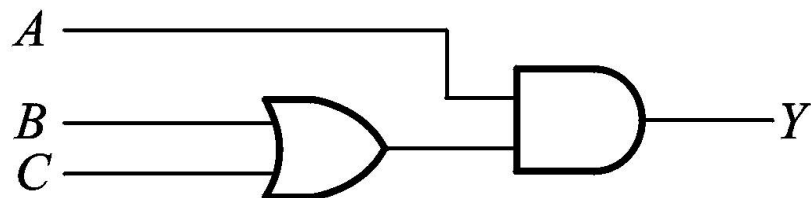
EDIF(Electronic Design Interchange Format)

...

举例：举重裁判电路



$$Y = A \cdot (B + C)$$



<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Y</i>
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A:主裁判
B/C:副裁判

各种表现形式的相互转换

□ 真值表 \longleftrightarrow 逻辑式

例：奇偶判别函数的真值表

- $A=0, B=1, C=1$ 使 $A'BC=1$
- $A=1, B=0, C=1$ 使 $AB'C=1$
- $A=1, B=1, C=0$ 使 $ABC'=1$

这三种取值的任何一种都使 $Y=1$,
所以 $Y= ?$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

□ 真值表 \longleftrightarrow 逻辑式

1. 找出真值表中使 $Y=1$ 的输入变量取值组合
2. 每组输入变量取值对应一个乘积项，其中取值为1的写原变量，取值为0的写反变量
3. 将这些变量相加即得 Y

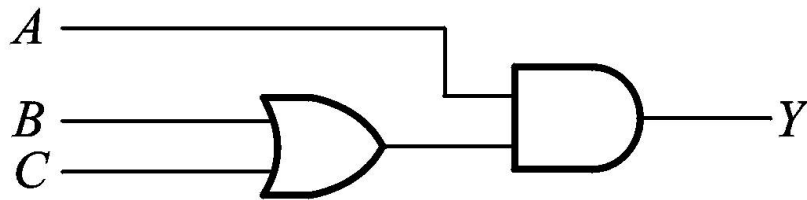


4. 把输入变量取值的所有组合逐个代入逻辑式中求出 Y ，列表

□ 逻辑式 \longleftrightarrow 逻辑图

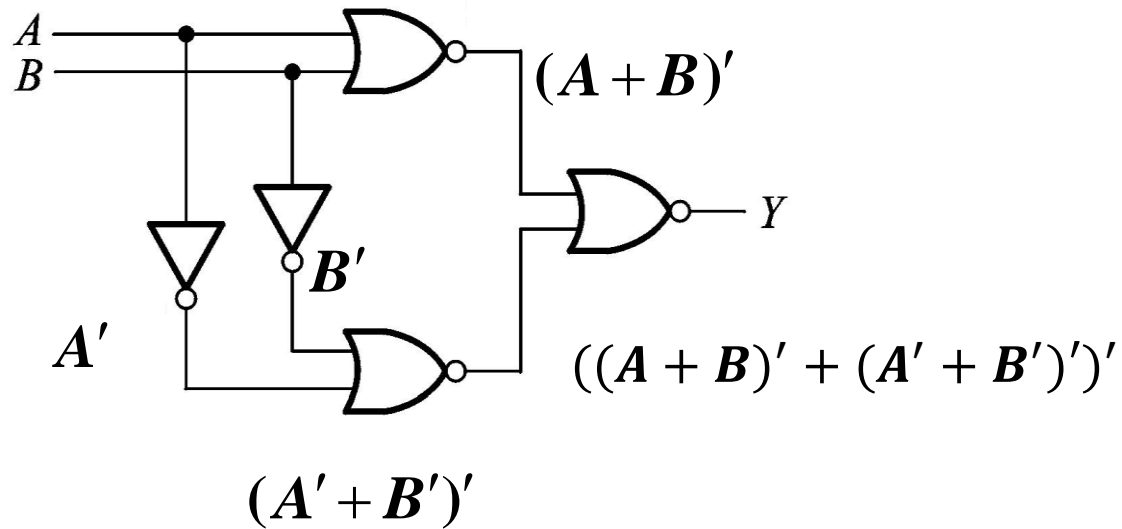
1. 用图形符号代替逻辑式中的逻辑运算符

$$Y = A \cdot (B + C)$$



□ 逻辑式 \longleftrightarrow 逻辑图

1. 用图形符号代替逻辑式中的逻辑运算符
2. 从输入到输出逐级写出每个图形符号对应的逻辑运算式



$$\begin{aligned} & ((A + B)' + (A' + B'))' \\ &= (A + B)(A' + B') \\ &= AB' + A'B \\ &= A \oplus B \end{aligned}$$

□ 波形图 ↔ 真值表

- 思考：怎么转换？

逻辑函数的两种标准形式

最小项之和

最大项之积

最小项 m :

- m 是乘积项
- 包含 n 个因子
- n 个变量均以原变量和反变量的形式在 m 中出现一次
- 编号

对于 n 变量函数
有 2^n 个最小项

最小项的编号

最小项	取值	对应	编号
	$A \ B \ C$	十进制数	
$A'B'C'$	0 0 0	0	m_0
$A'B'C$	0 0 1	1	m_1
$A'BC'$	0 1 0	2	m_2
$A'BC$	0 1 1	3	m_3
$AB'C'$	1 0 0	4	m_4
$AB'C$	1 0 1	5	m_5
ABC'	1 1 0	6	m_6
ABC	1 1 1	7	m_7

最小项的性质

- 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最小项的值为1
- 全体最小项之和为1
- 任何两个最小项之积为0
- 两个相邻的最小项之和可以合并，消去一对因子，只留下公共因子

-----相邻：仅一个变量不同的最小项

如 $A'BC'$ 与 $A'BC$

$$A'BC' + A'BC = A'B(C' + C) = A'B$$

逻辑函数最小项之和的形式

利用公式 $A + A' = 1$
可将任何一个函数化为 $\sum m_i$

□ 例: $Y(A, B, C) = ABC' + BC$

逻辑函数最小项之和的形式

利用公式 $A + A' = 1$
可将任何一个函数化为 Σm_i

□ 例:
$$\begin{aligned} Y(A, B, C) &= ABC' + BC \\ &= ABC' + BC(A + A') \\ &= ABC' + ABC + A'BC \end{aligned}$$

逻辑函数最小项之和的形式

利用公式 $A + A' = 1$
可将任何一个函数化为 $\sum m_i$

□ 例:
$$\begin{aligned} Y(A, B, C) &= ABC' + BC \\ &= ABC' + BC(A + A') \\ &= ABC' + ABC + A'BC \\ &= \sum m(3, 6, 7) \end{aligned}$$

逻辑函数最小项之和的形式

□ 例:

$$Y(A,B,C,D) = AB'C'D + BCD' + B'C$$

逻辑函数最小项之和的形式

□ 例:

$$\begin{aligned} Y(A, B, C, D) &= AB'C'D + BCD' + B'C \\ &= AB'C'D + (A + A')BCD' + B'C(D + D') \end{aligned}$$

逻辑函数最小项之和的形式

□ 例:

$$\begin{aligned} Y(A,B,C,D) &= AB'C'D + BCD' + B'C \\ &= AB'C'D + (A + A')BCD' + B'C(D + D') \\ &= \dots\dots\dots + B'CD + B'CD' \end{aligned}$$

逻辑函数最小项之和的形式

□ 例:

$$\begin{aligned} Y(A,B,C,D) &= AB'C'D + BCD' + B'C \\ &= AB'C'D + (A + A')BCD' + B'C(D + D') \\ &= \dots\dots\dots + B'CD + B'CD' \\ &= \dots\dots\dots + (A + A')B'CD + (A + A')B'CD' \end{aligned}$$

最大项

对于 n 变量函数
 2^n 个

- M 是相加项
- 包含 n 个因子
- n 个变量均以原变量和反变量的形式在 M 中出现一次
- 如：两变量 A, B 的最大项

$$A' + B', A' + B, A + B', A + B \quad (2^2 = 4 \text{ 个})$$

最大项的性质

- 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最大项的值为0
- 全体最大项之积为0
- 任何两个最大项之和为1
- 只有一个变量不同的最大项的乘积等于各相同变量之和

最大项的编号

最大项	取值	对应	编号
	$A \ B \ C$	十进制数	
$A' + B' + C'$	1 1 1	7	M_7
$A' + B' + C$	1 1 0	6	M_6
$A' + B + C'$	1 0 1	5	M_5
$A' + B + C$	1 0 0	4	M_4
$A + B' + C'$	0 1 1	3	M_3
$A + B' + C$	0 1 0	2	M_2
$A + B + C'$	0 0 1	1	M_1
$A + B + C$	0 0 0	0	M_0

$$Y = \sum m_i$$



$$Y' = \sum_{k \neq i} m_k$$



$$Y = \left(\sum_{k \neq i} m_k \right)'$$



$$Y = \prod_{i \neq k} m_k' = \prod_{i \neq k} M_k$$

逻辑函数的化简法

□ 逻辑函数的最简形式

最简与或

-----包含的乘积项已经最少，每个乘积项的因子也最少，称为最简的**与-或逻辑式**

$$Y_1 = ABC + B'C + ACD$$

$$Y_2 = AC + B'C$$

公式化简法

- 反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子

例：

$$\begin{aligned} Y &= AC + B'C + BD' + \textcolor{red}{CD'} + A(B + C') + \textcolor{red}{A'BCD'} + AB'DE \\ &\quad \textcolor{blue}{A((B + C')')'} \\ &= AC + B'C + BD' + \textcolor{red}{CD'} + A(B'C)' + AB'DE \end{aligned}$$

公式化简法

- 反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子

例：

$$\begin{aligned} Y &= AC + B'C + BD' + CD' + A(B + C') + A'BCD' + AB'DE \\ &\quad A((B + C'))' \\ &= AC + B'C + BD' + CD' + A(B'C)' + AB'DE \\ &= AC + B'C + BD' + CD' + A + AB'DE \end{aligned}$$

公式化简法

- 反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子

例：

$$Y = AC + B'C + BD' + CD' + A(B + C') + A'BCD' + AB'DE$$

$$A((B + C')')$$

$$= AC + B'C + BD' + CD' + A(B'C)' + AB'DE$$

$$= AC + B'C + BD' + CD' + A + AB'DE$$

$$= A + B'C + BD' + CD'$$

公式化简法

- 反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子

例：

$$Y = AC + B'C + BD' + CD' + A(B + C') + A'BCD' + AB'DE$$

$$A((B + C')')$$

$$= AC + B'C + BD' + CD' + A(B'C)' + AB'DE$$

$$= AC + B'C + BD' + CD' + A + AB'DE$$

$$= A + B'C + BD' + CD'$$

$$= A + B'C + BD'$$

卡诺图化简法

逻辑函数的卡诺图表示法

- 实质：将逻辑函数的最小项之和以图形的方式表示出来
- 以 2^n 个小方块分别代表 n 变量的所有最小项，并将它们排列成矩阵，而且使**几何位置相邻**的两个最小项在**逻辑上也是相邻的**（只有一个变量不同），就得到表示 n 变量全部最小项的卡诺图

表示最小项的卡诺图

□ 2变量卡诺图

$A \backslash B$		0	1
		0	1
0	$A'B'$ m_0	$A'B$ m_1	
1	AB' m_2	AB m_3	

表示最小项的卡诺图

□ 2变量卡诺图

		<i>B</i>	
		0	1
<i>A</i>	0	$A'B'$ m_0	$A'B$ m_1
	1	AB' m_2	AB m_3

3变量的卡诺图

		<i>BC</i>			
		00	01	11	10
<i>A</i>	0	m_0	m_1	m_3	m_2
	1	m_4	m_5	m_7	m_6

表示最小项的卡诺图

□ 2变量卡诺图

		<i>B</i>	
		0	1
<i>A</i>	0	$A'B'$ m_0	$A'B$ m_1
	1	AB' m_2	AB m_3

3变量的卡诺图

		<i>BC</i>			
		00	01	11	10
<i>A</i>	0	m_0	m_1	m_3	m_2
	1	m_4	m_5	m_7	m_6

□ 4变量的卡诺图

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

表示最小项的卡诺图

□ 5变量的卡诺图

$AB \backslash CDE$									
		000	001	011	010	110	111	101	100
00		m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01		m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11		m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10		m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

用卡诺图表示逻辑函数

1. 将函数表示为最小项之和的形式 $\sum m_i$
2. 在卡诺图上与这些最小项对应的位置上填入1, 其余地方填0

用卡诺图表示逻辑函数

例：

$$\begin{aligned} Y(A, B, C, D) &= A'B'C'D + A'BD' + ACD + AB' \\ &= A'B'C'D + (C + C')A'BD' + A(B + B')CD + AB'(C'D' + C'D + CD' + CD) \\ &= \sum m(1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 15) \end{aligned}$$

用卡诺图表示逻辑函数

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	0	1	0	0
	01	1	0	0	1
	11	0	0	1	0
	10	1	1	1	1

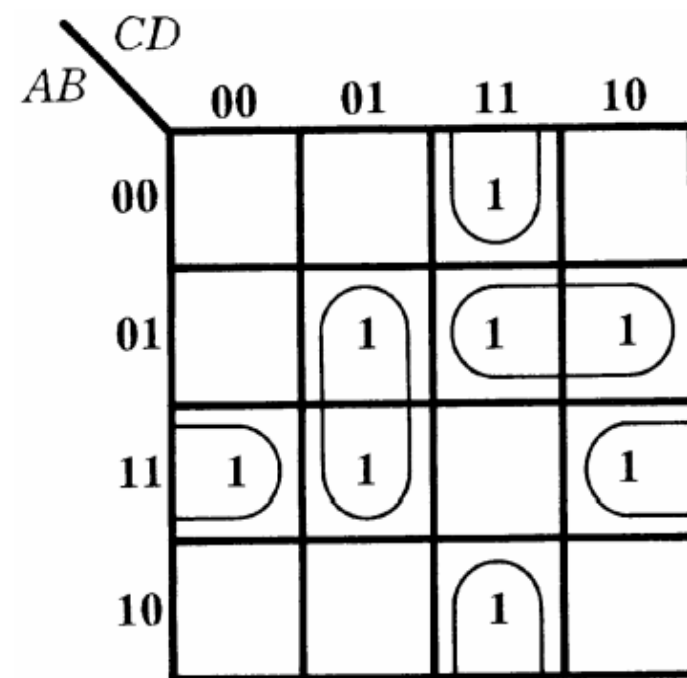
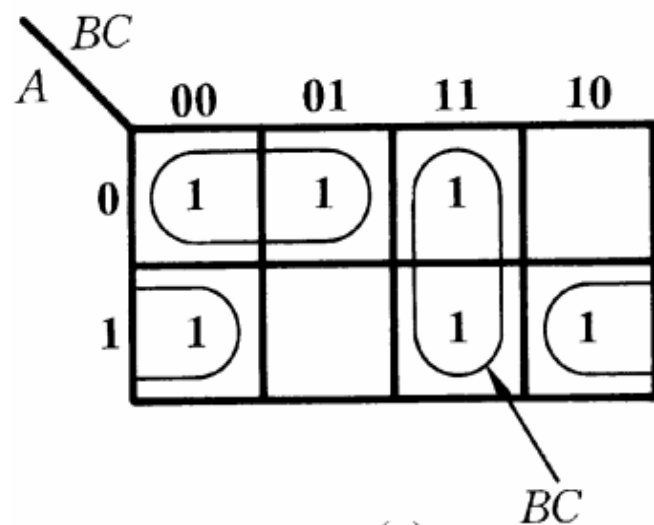
用卡诺图化简函数

- 依据：具有相邻性的最小项可合并，消去不同因子
- 在卡诺图中，最小项的相邻性可以从图形中直观地反映出来

□合并最小项的原则

- 两个相邻最小项可合并为一项，消去一对因子
- 四个排成矩形的相邻最小项可合并为一项，消去两对因子
- 八个相邻最小项可合并为一项，消去三对因子

两个相邻最小项可合并为一项， 消去一对因子



用卡诺图化简函数

□ 化简步骤：

-----用卡诺图表示逻辑函数

-----找出可合并的最小项

-----化简后的乘积项相加

(项数最少，每项因子最少)

卡诺图化简的原则

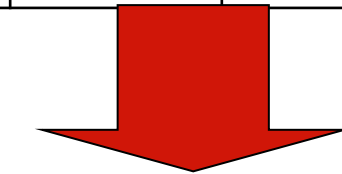
- 化简后的乘积项应包含函数式的所有最小项，
即覆盖图中所有的1
- 乘积项的数目最少，**即圈成的矩形最少**
- 每个乘积项因子最少，**即圈成的矩形最大**

例: $Y(A,B,C) = AC' + A'C + B'C + BC'$

A \ BC				
	00	01	1 1	1 0
0				
1				

例: $Y(A,B,C) = AC' + A'C + B'C + BC'$

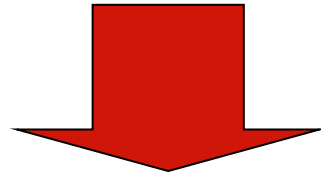
A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1



$$AB' + A'C + BC'$$

例: $Y(A,B,C) = AC' + A'C + B'C + BC'$

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	1	1	1
	1	1	1	0	1



$$AC' + A'B + B'C$$

例: $Y(A,B,C) = AC' + A'C + B'C + BC'$

		<i>BC</i>			
<i>A</i>		00	01	11	10
	0	0	1	1	1
	1	1	1	0	1

$AB' + A'C + BC'$

		<i>BC</i>			
<i>A</i>		00	01	11	10
	0	0	1	1	1
	1	1	1	0	1

$AC' + A'B + B'C$

化简结果不唯一

例: $Y = ABC + ABD + AC'D + C' \cdot D' + AB'C + A'CD'$

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

例: $Y = ABC + ABD + AC'D + C' \cdot D' + AB'C + A'CD'$

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$A + D'$$

具有无关项的逻辑函数及其化简

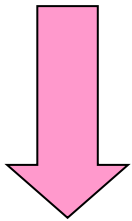
约束项、任意项和逻辑函数式中的无关项

- 约束项

在逻辑函数中，对输入变量取值的限制，在这些取值下为1的最小项称为约束项

- 任意项

在输入变量某些取值下，函数值为1或为0不影响逻辑电路的功能，在这些取值下为1的最小项称为任意项



- 逻辑函数中的无关项：约束项和任意项可以写入函数式，也可不包含在函数式中，因此统称为无关项

无关项在化简逻辑函数中的应用

- 合理地利用无关项，可得更简单的化简结果
- 加入（或去掉）无关项，应使化简后的项数最少，每项因子最少……
从卡诺图上直观地看，加入无关项的目的是为矩形圈最大，矩形组合数最少

例: $Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C' \cdot D'$

给定约束条件为:

$$A'B'CD + A'BC'D + ABC' \cdot D' + AB' \cdot C'D + ABCD + ABCD' + AB'CD' = 0$$

CD \ AB		00	01	11	10
AB	00		1		
	01			1	
	11				
	10	1			

例: $Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C' \cdot D'$

给定约束条件为:

$$A'B'CD + A'BC'D + ABC' \cdot D' + AB' \cdot C'D + ABCD + ABCD' + AB'CD' = 0$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	x	0
	01	0	x	1	0
	11	x	0	x	x
	10	1	x	0	x

例: $Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C' \cdot D'$

给定约束条件为:

$$A'B'CD + A'BC'D + ABC' \cdot D' + AB' \cdot C'D + ABCD + ABCD' + AB'CD' = 0$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	x	0
	01	0	x	1	0
	11	x	0	x	x
	10	1	x	0	x

AD'

例： $Y(A, B, C, D) = \sum m(2, 4, 6, 8)$

约束条项： $m_5 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15} = 0$

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	x	0	1
11	x	x	x	x
10	1	0	x	x

$$Y = AD' + BD' + CD'$$

作业

□ 学在浙大

- 3月5日截止

