第四章

3.(1) 解：$\because r_1*r_2=|r_1-r_2|=|r_2-r_1|=r_2*r_1$ $\therefore *$是可交换的

$(r_1*r_2)*r_3=||r_1-r_2|-r_3|$

$r_1*(r_2*r_3)=|r_1-|r_2-r_3||$

若 $r_1=-1, r_2=0, r_3=1$，则 $(r_1*r_2)*r_3=0\neq-2=r_1*(r_2*r_3)$

$\therefore *$不是可结合的

R对$*$不存在单位元

(2) 解：$r_1*r_2=\frac{1}{2}(r_1+r_2)=\frac{1}{2}(r_2+r_1)=r_2*r_1$ $\therefore *$是可交换的

$(r_1*r_2)*r_3=\left[\frac{1}{2}(r_1+r_2)+r_3\right]\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(r_1+r_2)+\frac{1}{2}r_3$

$r_1*(r_2*r_3)=\left[r_1+\frac{1}{2}(r_2+r_3)\right]\frac{1}{2}=\frac{1}{2}r_1+\frac{1}{4}(r_2+r_3)$

$\therefore *$是不可结合的

R对$*$不存在单位元

6. 证明：假设 $a*a=b\neq a$

则 $a*(a*a)=a*b$ $\because *$是可结合的

$\therefore a*(a*a)=(a*a)*a=b*a=a*b$ 由该代数系统性质，若$a*b=b*a$，则

$a=b$，与假设矛盾 $\therefore a*a=a$

7. (1) 证明：$\because \langle J;+,\cdot\rangle$为整环 $\therefore$若$i\neq0$，则对$\forall j,k\in J$，若 $i+j=i+k$，

则$j=k$ 若$i=0$，则 $i+j=j=i+k=k$，也正立 $\therefore$(1)成立

(3) 由整环的交换律，$i\cdot0=0\cdot i=0$

(5) $\because$由整环的性质，$i+(-i)=0$ 根据(1)，只需证 $-(-i)+(-i)=0$ 即

可证得(5) 又$-(-i)+(-i)=(-i)-(-i)=0$ ，$\therefore$(5)成立

10. 证明：对于$\forall x_1,x_2\in N$，分4种情况讨论

① $x_1=2^{k_1}, x_2=2^{k_2}$ $(k_1,k_2\geq0)$

则 $h(x_1\cdot x_2)=h(2^{k_1+k_2})=1=1\cdot1=h(x_1)\cdot h(x_2)$，此时 h为$\langle N;\cdot\rangle$到$\langle\{0,1\};\cdot\rangle$的同态

② $x_1=2^{k_1}$, $x_2=0$或$2^{k_2}+r$ $(0<r<2^{k_2})$

则 $h(x_1\cdot x_2)=0$，$h(x_2)=0$　$\therefore h(x_1\cdot x_2)=h(x_1)\cdot h(x_2)$

$\therefore h$ 为同态

③ $x_1=2^{k_1}+r$ 或 0 $(0<r<2^{k_1})$，$x_2=2^{k_2}$，与②同理

④ $x_1=2^{k_1}+r_1$ 或 0，$x_2=2^{k_2}+r_2$ 或 0

则 $x_1\cdot x_2=0$ 或 $(2^{k_1}+r_1)(2^{k_2}+r_2)$，无法表示为 2^k 的形式

$\therefore h(x_1\cdot x_2)=h(x_1)\cdot h(x_2)=0$

综上：$h: N\to\{0,1\}$ 为一个从 $\langle N;\cdot\rangle$ 到 $\langle\{0,1\};\cdot\rangle$ 的同态

12. 证明：定义函数 $h: C\to H$ 满足

$$h(r_1+jr_2)=\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ -r_2 & r_1\end{bmatrix}\quad (r_1,r_2\in R)$$

设 $z_1,z_2\in C$，且 $z_1=a_1+ib_1$，$z_2=a_2+ib_2$

$$h(z_1)=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1\end{bmatrix},\quad h(z_2)=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2\end{bmatrix}$$

$$z_1\cdot z_2=a_1a_2-b_1b_2+i(b_2a_1+b_1a_2)$$

$$\therefore h(z_1\cdot z_2)=\begin{bmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & a_1b_2+a_2b_1 \\ -(a_1b_2+a_2b_1) & a_1a_2-b_1b_2\end{bmatrix}$$

$$h(z_1)\cdot h(z_2)=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2\end{bmatrix}=h(z_1\cdot z_2)$$

$$h(z_1+z_2)=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2\end{bmatrix}=h(z_1)+h(z_2)$$

$\therefore h$ 为 V_1 到 V_2 的同态　易知 h 为双射 $\therefore$ 这两个代数系统同构

15. 证明：$\because f: X\to Y$ 是 $V_1=\langle X;\circ\rangle$ 到 $V_2=\langle Y;*\rangle$ 的同态

$\therefore$ 对 $\forall x_1,x_2\in X$，有 $f(x_1\circ x_2)=f(x_1)*f(x_2)$

记 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$

$\because g: Y\to Z$ 是 V_2 到 $V_3=\langle Z;\times\rangle$ 的同态　$\therefore$ 对 y_1,y_2，有

$g(y_1*y_2)=g(y_1)\times g(y_2)$，即 $g(f(x_1)*f(x_2))=gf(x_1\circ x_2)=gf(x_1)\times gf(x_2)$

综上：$gf: X\to Z$ 为 V_1 到 V_3 的同态

16. 证明：欲证 $\langle h(S_1);o_{21},o_{22},\dots,o_{2n}\rangle$ 为 V_2 的子代数，只需证明

$h(S_1) \subseteq S_2$　∵ h 是 $S_1 \to S_2$ 的一个函数　∴ $h(S_1) \subseteq S_2$

∴ $\langle h(S_1); o_{21}, o_{22}, \ldots, o_{2m} \rangle$ 为 V_2 的子代数