21.(1) 证明：未相遇时，$\{X_n\}$、$\{Y_n\}$都是时齐马尔可夫链，且二者相互独立

∴可知 $Z_n=(X_n,Y_n)$ 也是时齐马尔可夫链

(2) 解：Z的一步转移矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设从状态i出发到(0,0)相遇的概率为$k_i$，记(0,0)状态1，(0,1)状态2，(1,0)状态3，(1,1)状态4

则 $\begin{cases} k_1=1,\ k_4=0 \\ k_2=0.1k_1+0.4k_4+0.1k_3+0.4k_4 \\ k_3=0.2k_1+0.3k_2+0.2k_3+0.3k_4 \end{cases}$ 可得 $k_2=\frac{2}{9}$

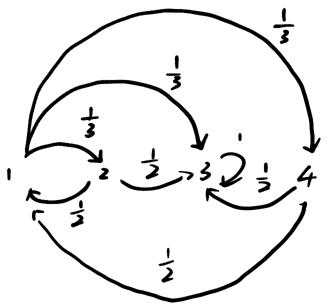
$\therefore P=k_2=\frac{2}{9}$

(2) 解：记4个状态的平均步数分别为$a_1, a_2, a_3, a_4$

则 $\begin{cases} a_1=0 \\ a_2=1+0.1a_1+0.4a_2+0.1a_3 \\ a_3=1+0.2a_1+0.3a_2+0.2a_3 \end{cases}$ 解得 $a_2=a_3=2$

∴平均需要2步

23 解：




(1) 解：$P\{X_1=4, X_3=2\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

(2) 解：$P\{X_2=1|X_3=3\}=P\{X_3=3|X_2=1\}\cdot\frac{P\{X_2=1\}}{P\{X_3=3\}}=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 2)}=\frac{1}{7}$

(3) 解：$P=\begin{cases} (\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{6})^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$

(4) 解：$\begin{cases} h_1=\frac{1}{3}h_2+\frac{1}{3}h_3+\frac{1}{3}h_4 \\ h_2=1,\ h_3=0 \\ h_4=\frac{1}{2}h_1+\frac{1}{2}h_3 \end{cases}$

解得 $h_1=\frac{2}{5}$ $\therefore P(T_2<T_3|X_0=1)=h_1=\frac{2}{5}$

(5) 解：$\begin{cases} a_1=1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{3}a_3+\frac{1}{3}a_4 \\ a_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_3+1 \\ a_3=0 \\ a_4=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_3 \end{cases}$ 解得 $a_1=2.5$

∴平均步数为2.5步

3. (1) 解：$N(3)-N(1)\sim\pi(2\lambda)$

$\therefore P\{N(3)-N(1)\geq 2\}=1-e^{-2\lambda}-\frac{e^{-2\lambda}\cdot 2\lambda}{1}=1-(2\lambda+1)e^{-2\lambda}$

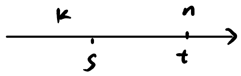
(2) 解：$P\{N(3)\geq 2|N(1)=1\}=P\{N(3)-N(1)\geq 1\}=1-e^{-2\lambda}$

(3) 解：$P\{N(1)=1|N(3)\geq 2\}=\frac{P(N(1)=1, N(3)\geq 2)}{P\{N(3)\geq 2\}}=\frac{\lambda e^{-\lambda}(1-e^{-2\lambda})}{1-e^{-3\lambda}(1+3\lambda)}$

5. 解：$u_X(t)=E[N(t)]-tE[N(1)]=\lambda t-t\cdot\lambda\cdot 1=0$

$R_X(t,s)=E[(N(t)-tN(1))(N(s)-sN(1))]=E[N(t)N(s)]-sE[N(t)N(1)]-tE[N(s)N(1)]+$

$+tsE[N(1)^2]=\lambda\min\{t,s\}-s\lambda t-s\lambda t+ts\lambda=\lambda\min\{t,s\}-\lambda st$

10 (1) 解:  $P(N(s)=k|N(t)=n)=C_n^k(\frac{s}{t})^k(1-\frac{s}{t})^{n-k}$

(2) 解: $P(W_2\le 3|W_1=1)=P(N(3)\ge 2|N(1)=1)=1-e^{-2\lambda}$

(3) 解: $P(W_k\le s|N(t)=n)=P(N(s)\ge k|N(t)=n)=\sum_{i=k}^{n} C_n^i(\frac{s}{t})^i(1-\frac{s}{t})^{n-i}$

12. 解: $\frac{1}{\lambda}=\frac{10min}{60min}$ ∴ $\lambda=6$

(1) 只有一个柜台, $N(\frac{1}{2})\sim\pi(3)$

$P(N(\frac{1}{2})\ge 3)=1-e^{-3}(1+3+\frac{9}{2})=1-\frac{17}{2}e^{-3}$

(2) 有两个柜台,强度合成为2 ∴ $N(\frac{1}{2})\sim\pi(6)$

∴ $P(N(\frac{1}{2})\ge 6)=1-e^{-6}(1+6+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}+\frac{6^4}{4!}+\frac{6^5}{5!})=1-179.8e^{-6}$

14. (1) 解: $P(N(1)=0,N(2)=1)=e^{-2}\cdot 3e^{-3}=3e^{-5}$

(2) 解: 总邮件由A与B合成,参数为5

$P(N_1(1)+N_2(1)=2)=\frac{e^{-5}\cdot 5^2}{2!}=\frac{25}{2}e^{-5}$

(3) 解: 设 $A_1(t)$, $B_1(t)$ 表示收到垃圾邮件

$A_2(t)$, $B_2(t)$ 表示收到正常邮件

$A_1(t)+B_1(t)$ 合成为参数为0.5 $X(t)$, $X(2)\sim\pi(1)$

$A_2(t)+B_2(t)$ 合成为参数为4.5 $Y(t)$, $Y(2)\sim\pi(9)$

$P(X(2)=1,Y(2)=2)=e^{-1}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}e^{-9}\cdot 9^2=\frac{81}{2}e^{-10}$

(4) 解: 所求为 $P(X(1)\le 1, X(2)\ge 2)$

$=P(X(1)=0,X(2)-X(1)\ge 2)+P(X_1=1,X(2)-X(1)\ge 1)$

$=e^{-0.5}\times[e^{-0.5}(1+0.5)]+(e^{-0.5}\cdot 0.5)(1-e^{-0.5})=\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}-2e^{-1}$