离 散 数 学

Discrete Mathematics

第2章 关系

宋牟平 songmp@zju.edu.cn **玉泉校区 行政楼 325**
助教： **贾宁 18888911516** **玉泉校区 行政楼 327**

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

第2章 关系

关系的概念也是最基本的。
自然界和日常生活中的事物常常是相互关联的，存在着各种各样的关系。如师生关系，同学关系，同事关系，亲戚关系，同乡关系。自然数集N中的数满足1<2，2<3，3<4，4<5，5<6….。

2.1 笛卡尔积

定义2-1 **有序n元组**：由n个具有给定次序的元素a_1，a_2，…，a_n组成的序列，记（a_1，a_2，…，a_n）。注意

1）$(a,b,c) \neq (b,a,c)$

2）$(a,a,a) \neq (a,a) \neq (a,a)$

定义2-2 **有序n元组相等**：设（a_1，a_2，…，a_n）和（b_1，b_2，…，b_n）是两个有序n元组，若$a_1=b_1$，$a_2=b_2$，…，$a_n=b_n$，则

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

定义2-3 **笛卡尔积**：设A_1，A_2，…，A_n是任意集合，所有有序n元组（a_1，a_2，…，a_n）的集合称为A_1，A_2，…，A_n的**笛卡尔积**，记

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n (\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i) = \{(a_1, a_2, \cdots a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1,2,\cdots n\}$$

也称**n阶笛卡积**。若A_i相同，可记为

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n} = A^n$$

<u>笛卡积元素的数目</u>

$$\#(\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i) = \coprod_{i=1}^{n} \# A_i$$

<u>例</u>　A_1={0，2}，A_2={2，3}，A_3={1，4}

A1×A2×A3={(0,2,1),(0,2,4),(0,3,1),(0,3,4),(2,2,1),(2,2,4),(2,3,1),(2,3,4)}

<u>例</u>　二维实数平面可以看作实数R构成的笛卡积

R×R={(x,y)|,x,y∈R}

(x,y)为平面上的一个点。

例　三维空间可以看作实数R构成的三阶笛卡积

$$R\times R\times R=\{(x,y,z)|,x,y,z\in R\}$$

(x,y,z)是空间中的一个点。

对二阶笛卡尔积可以证明有**分配律成立**

(1)　$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(2)　$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

(3)　$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

(4)　$A\subseteq C$，$B\subseteq D$　$\Leftrightarrow$　$A\times B\subseteq C\times D$

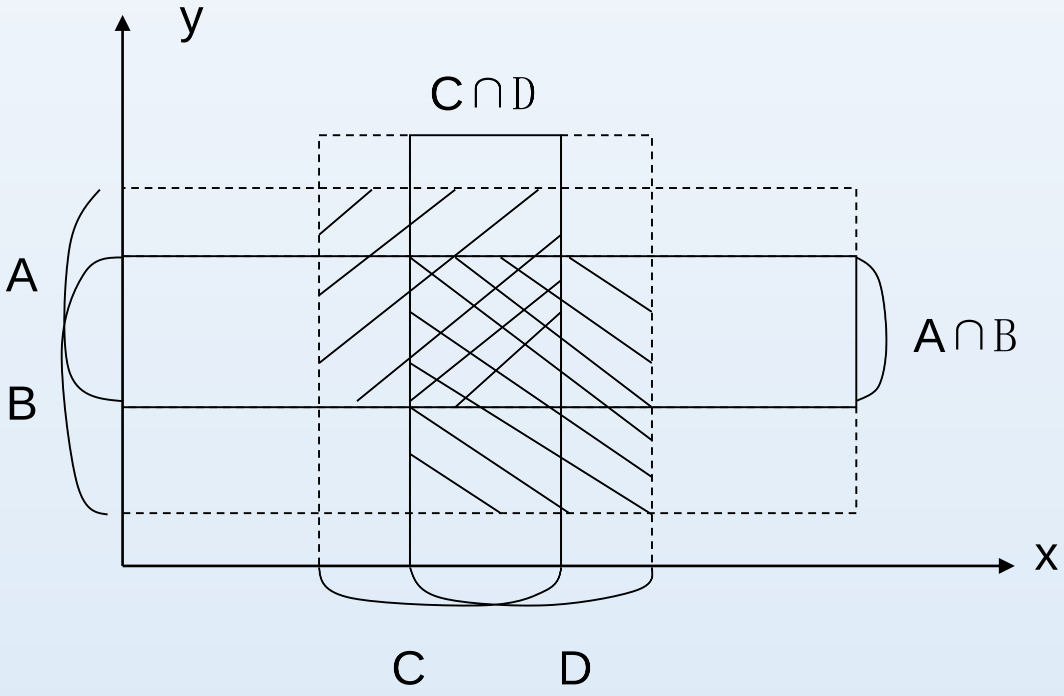
但**交换律不成立**

(5)　$A\times B\neq B\times A$

书中给出了(1)的证明，（2）和（3）的证明为书中的习题。

二阶笛卡积也可用文氏图表示

如　　$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$



浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

2.2 关系

自然界和日常生活中的事物存在着各种各样的关系。这些关系可以用集合来表示。（*最终要分解到0—1关系*）

定义2-4 **关系**：n阶笛卡尔积$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$的任一个子集ρ称为$A_1$，$A_2$，…，$A_n$上的一个**n元关系**。即，若

$$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

则ρ是A_1，A_2，…，A_n上的一个n元关系。特别地，若n=2，ρ称为A、B上的**二元关系**。

例 $\rho = \{(x,y) \mid x,y \in R，x^2+y^2=1\}$

$\rho \subseteq R \times R$，是R上的一个二元关系，是实数平面上半径为1的圆的点集。

例 设A={0,1,2,3,4,5,6,7}，定义

ρ={(x,y)|x,y$\in$A，(x-y)可被2 整除，且(x-y)$\in$A}

ρ={(2,0),(4,0),(6,0),(4,2),(6,2),(6,4),(3,1),(5,1),(5,3),(7,1),
(7,3),(7,5)}

<u>关系也常用表格</u>表示，如数据库中的数据。

部门	姓名	性别	部门电话
水产部	史文心	男	2786
石油部	罗林	男	2482
工业部	卢依人	女	3133
石油部	秦如	女	2482
石油部	李英	男	2482
工业部	王义	男	3133
电力部	王小英	女	3025

$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$

A_1={水产部，石油部，工业部，电力部}

A_2={史文心，罗林，卢依人，秦如，李英，王义，王小英}

A_3={男，女}

A_4={2786，2482，3133，3025}

特殊关系

空关系　　$\rho=\varnothing$；

满关系　　$\rho=A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$　　笛卡尔积

定义2-5 A，B上的二元关系也称为A到B的二元关系，对二元关系ρ有定义

定义域　　$D\rho=\{a|a \in A，存在b \in B，使得(a,b) \in \rho\}$

值域　　$R\rho=\{b|b \in B，存在a \in A，使得(a,b) \in \rho\}$

显然　　$D\rho \subseteq A$，$R\rho \subseteq B$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

逆关系

定义2-6 逆关系：若ρ是A到B的关系，则B到A的关系

$$\tilde{\rho}=\{(b,a)\mid(a,b)\in\rho\}$$

称为ρ的**逆关系**。

例 ρ={(2,2),(4,2),(6,2)}的逆关系为 $\tilde{\rho}=\{(2,2),(2,4),(2,6)\}$

例 工资单

成员	工资
张扬	3000
黎明	2500
王凡	5000

工资	成员
3000	张扬
2500	黎明
5000	王凡

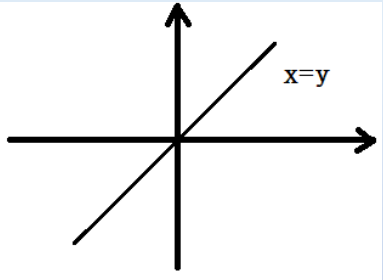
上面的表格互为逆关系。由左表查某成员的工资，由右表查拿某挡工资的成员。

特殊关系

A到A的二元关系称为**A上的二元关系**。对A上的二元关系，有**恒等关系**

$$I_A=\{(a_i,a_i)|a_i\in A\}$$

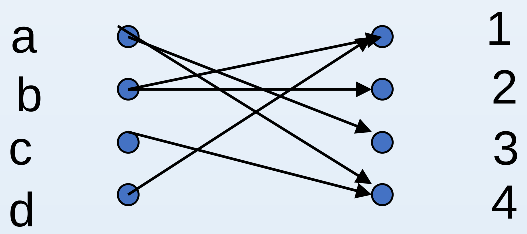
例 $I_R=\{(x,y)|x,y\in R，x=y\}$



关系的表示方法

关系除了用**集合的定义**表示外，还可用**表格**、**图示**和**矩阵**表示。表格在前面已提到，如工资单、成绩单、报名表等。关系图，如家谱、目录、地图、联络图等。矩阵，如计算机里存储数据。

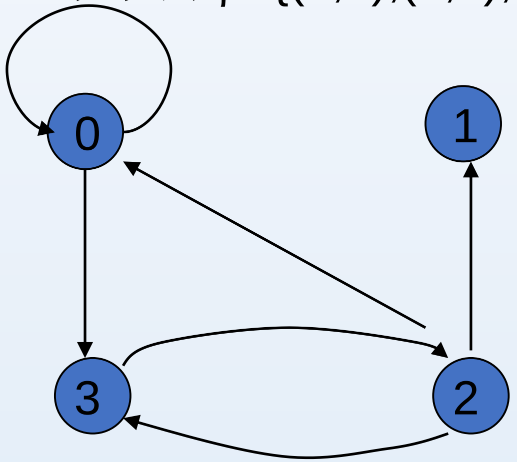
例　　A={a,b,c,d}，B={1,2,3,4}



$$M_\rho = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

A上二元**关系图**

例　A={0,1,2,3}, A上二元关系ρ={(0,0),(0,3),(2,3),(3,2),(2,1),(2,0)}



三种关系表示方法各有特点，用于不同场合。

集合A上的关系：由集合A到A自身的关系（是A^2的一个子集）。

特殊二元关系

普遍关系：若$\rho = A^2$，用$\mathbf{U_A}$表示， $U_A =\{(a_i, a_j) \mid a_i, a_j \in A\}$

恒等关系：A上的恒等关系用$\boldsymbol{I_A}$表示， $I_A =\{(a_i, a_i) \mid a_i \in A\}$

2.3 关系的复合

二元关系运算

设ρ_1和ρ_2都是A到B的关系

（1）$\rho_1 \cup \rho_2$；

（2）$\rho_1 \cap \rho_2$

（3）$\rho_1 - \rho_2$；

（4）$\rho' = (A \times B) - \rho$

（5）$\tilde{\rho}$

关系运算的性质

关系是集合，集合的运算定律都适用，下面是**逆运算(*不是补*)的性质**。

（1）$\tilde{\tilde{\rho}} = \rho$

（2）$\overline{(\rho_1 \cup \rho_2)} = \overline{\rho_1} \cup \overline{\rho_2}$

（3）$\overline{(\rho_1 \cap \rho_2)} = \overline{\rho_1} \cap \overline{\rho_2}$

（4）$\overline{(\rho_1 - \rho_2)} = \overline{\rho_1} - \overline{\rho_2}$

（5）$\widetilde{\mathrm{A} \times \mathrm{B}} = B \times A$

（6）$\rho_1 \subseteq \rho_2 \Leftrightarrow \tilde{\rho}_1 \subseteq \tilde{\rho}_2$

关系的复合运算

$A_1 \rightarrow \rho_1 \rightarrow A_2$; $A_2 \rightarrow \rho_2 \rightarrow A_3$ ➔ $A_1 \rightarrow \rho_1\rho_2 \rightarrow A_3$

定义2-7 **复合关系**：设ρ_1是一个A_1到A_2的关系，ρ_2是一个A_2到A_3的关系，则ρ_1和ρ_2的**复合关系$\rho_1 \cdot \rho_2$**是一个A_1到A_3的关系，定义为**当且仅当存在某个$a_k \in A_2$时，使得$a_i\rho_1 a_k$，$a_k\rho_2 a_j$时，有$a_i(\rho_1 \cdot \rho_2)a_j$**。

$$\rho_1 \cdot \rho_2=\{(a_i,a_j) \mid (a_i,a_k)\in\rho 1 \text{且} (a_k,a_j) \in\rho_2\}$$

例 $A_1=\{1,2,3,4,\}$, $A_2=\{2,3,4\}$, $A_3=\{1,2,3\}$

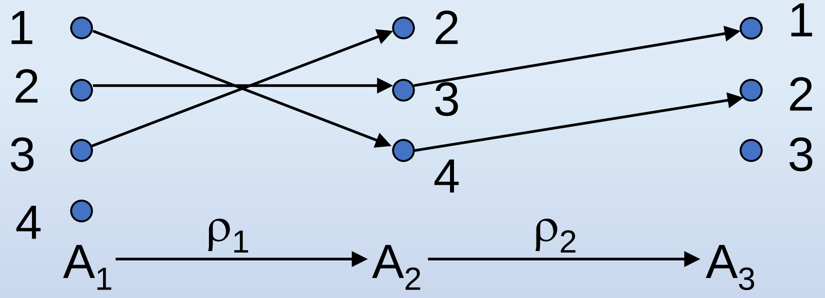
$\rho_1=\{(a_i,a_k)|a_i+a_k=5\}=\{(1,4),(2,3),(3,2)\}$

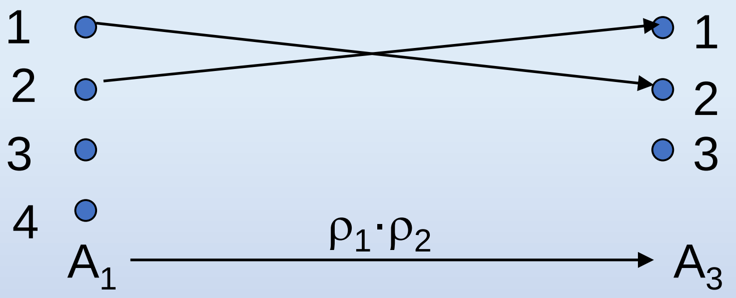
$\rho_2=\{(a_k,a_j)|a_k-a_j=2\}= \{(3,1),(4,2)\}$

$\rho_1 \cdot \rho_2=\{(1,2),(2,1)\}$

路径1→4→2，2→3→1。

4、3是中间结点。





浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 选课

A={张华a_1，王岳a_2，陈平a_3，李兰a_4} 学生

B={ 软件b_1,，硬件b_2，自动化b_3，遥感b_4} 专业

C={工程制图c_1，电子线路c_2，操作系统c_3，离散数学c_4} 课程

$\rho_1=\{(a_1,b_1),(a_1,b_3),(a_2,b_2),(a_2,b_4),(a_3,b_3),(a_3,b_4),(a_4,b_1),(a_4,b_4)\}$

学生选双学位专业的情况

$\rho_2=\{(b_1,c_3),(b_1,c_4),(b_2,c_2),(b_2,c_3),(b_2,c_4),(b_3,c_1),(b_3,c_2),(b_4,c_2),(b_4,c_4)\}$

本学期各专业的必修课

$\rho_3=\rho_1\cdot\rho_2$

$=\{(a_1,c_1), (a_1,c_2), (a_1,c_3), (a_1,c_4), (a_2,c_2), (a_2,c_3), (a_2,a_4), (a_3,c_1),$
$(a_3,c_2), (a_3,c_4), (a_4,c_2), (a_4,c_3), (a_4,a_4)\}$

学生本学期必修的课程

定理2-1 设ρ是集合A到B的关系，则$I_A\cdot\rho=\rho\cdot I_B=\rho$

定理2-2 设ρ_1是集合A_1到A_2的关系，ρ_2是集合A_2到A_3的关系，ρ_3是集合A_3到A_4的关系，则有$(\rho_1\cdot\rho_2)\cdot\rho_3=\rho_1\cdot(\rho_2\cdot\rho_3)$

证明 根据复合关系的定义，$(\rho_1\cdot\rho_2)\cdot\rho_3$ 和 $\rho_1\cdot(\rho_2\cdot\rho_3)$ 同是由 A_1 到 A_4 的关系。

下面证明 $(\rho_1\cdot\rho_2)\cdot\rho_3\subseteq\rho_1\cdot(\rho_2\cdot\rho_3)$。

设 $(a,d)\in(\rho_1\cdot\rho_2)\cdot\rho_3$，由复合关系的定义，必有 $c\in A_3$ 使得 $a(\rho_1\cdot\rho_2)c$，$c\rho_3d$，又由 $a(\rho_1\cdot\rho_2)c$，必有 $b\in A_2$ 使得 $a\rho_1b$，$b\rho_2c$。由 $b\rho_2c$，$c\rho_3d$，可得 $b(\rho_2\cdot\rho_3)d$，于是由 $a\rho_1b$，$b(\rho_2\cdot\rho_3)d$，可得 $a(\rho_1\cdot(\rho_2\cdot\rho_3))d$，即 $(a,d)\in\rho_1\cdot(\rho_2\cdot\rho_3)$，故有 $(\rho_1\cdot\rho_2)\cdot\rho_3\subseteq\rho_1\cdot(\rho_2\cdot\rho_3)$。

类似地可以证明 $\rho_1\cdot(\rho_2\cdot\rho_3)\subseteq(\rho_1\cdot\rho_2)\cdot\rho_2$。

由此 $(\rho_1\cdot\rho_2)\cdot\rho_3=\rho_1\cdot(\rho_2\cdot\rho_3)$ 得证。

下面证明

2.4 复合关系的关系矩阵和关系图

用上面的方法运算比较麻烦，也很难用计算机进行。

<u>关系矩阵与关系的运算</u>，引入*布尔运算*

逻辑加+：0 + 0=0，0 + 1=1，1 + 0=1，1 + 1=1

逻辑乘•：0 • 0=0，0 • 1=0，1 • 0=0，1 • 1=1

逻辑非 $\bar{\ }$：$\bar{0}=1,\quad \bar{1}=0$

设 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$

$\rho_1=(r_{ij}^{(1)})$和$\rho_2=(r_{ij}^{(2)})$是A到B的关系。

则 $\rho_1 \cup \rho_2 = (r_{ij}^{(1)}) + (r_{ij}^{(2)})$

$\rho_1 \cap \rho_2 = (r_{ij}^{(1)}) \bullet (r_{ij}^{(2)})$

$\rho_1' = (\bar{r}_{ij}^{(1)})$

$\rho_1 - \rho_2 = (r_{ij}^{(1)}) \bullet (\bar{r}_{ij}^{(2)})$

$$\rho_1 = \begin{array}{c|cccc} & & & & \\ a_1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ a_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & b1 & b2 & b3 & b4 \end{array}$$

$$\rho_2 = \begin{array}{c|cccc} & & & & \\ a_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & b1 & b2 & b3 & b4 \end{array}$$

$$\rho_1 \cup \rho_2 = \begin{array}{c|cccc} & & & & \\ a_1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & b1 & b2 & b3 & b4 \end{array}$$

<u>定义2-8</u> 关系矩阵与关系的复合运算

设 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$，$C=\{c_1, c_2, \ldots, c_l\}$

$\rho_1=(r_{ij}^{(1)})_{n\times m}$是A到B的关系，$\rho_2=(r_{ij}^{(2)})_{m\times l}$是B到C的关系。

则 $\rho_1\cdot\rho_2 = (r_{ij})_{n\times l} = \sum_{k=1}^{m}(r_{ik}^{(1)} \square r_{kj}^{(2)}) \quad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,l)$

<u>与普通矩阵乘法的公式一样，只是将普通加法改为布尔加，普通乘法改为布尔乘。</u>

<u>选课的例子</u>

$$\rho_1 = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} b1 & b2 & b3 & b4 \end{array}\end{array} \qquad \rho_2 = \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} c1 & c2 & c3 & c4 \end{array}\end{array}$$

$$\rho_3 = \rho_1 \circ \rho_2 = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} c1 & c2 & c3 & c4 \end{array}\end{array}$$

行标姓名，列标课程，或打印成两维表格。用计算机处理很方便。

定理2-3 设ρ_1是A到B的关系，ρ_2是B到C的关系（这里的A、B和C都是有限集），它们的关系矩阵分别为$M_{\rho 1}$、$M_{\rho 2}$，则**复合关系的关系矩阵**

$$M_{\rho 1\,\rho 2} = M_{\rho 1} \bullet M_{\rho 2}$$

定理2-4 设ρ_1是A_1到A_2的关系，ρ_2是A_2到A_3的关系，…，ρ_n是A_n到A_{n+1}的关系（这里的A_1，A_2，…，A_{n+1}都是有限集），它们的关系矩阵分别为$M_{\rho 1}$、$M_{\rho 2}$，…，$M_{\rho n}$则**复合关系$\rho_1\,\rho_2 \ldots \rho_n$的关系矩阵**

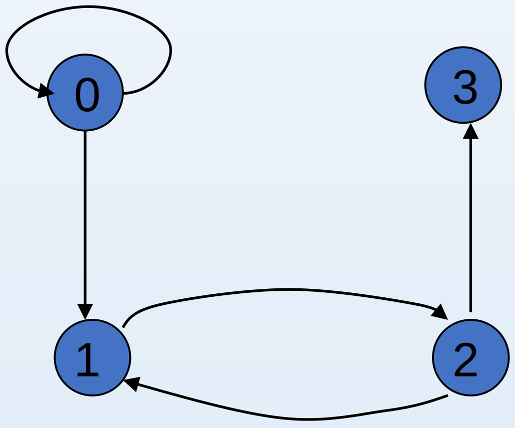
$$M_{\rho 1\,\rho 2\,\cdots\,\rho n} = M_{\rho 1} \bullet M_{\rho 2} \bullet \ldots \bullet M_{\rho n}$$

定理2-5 设ρ是有限集A上的一个具有关系矩阵M_ρ的关系，则复合关系ρ^n的关系矩阵

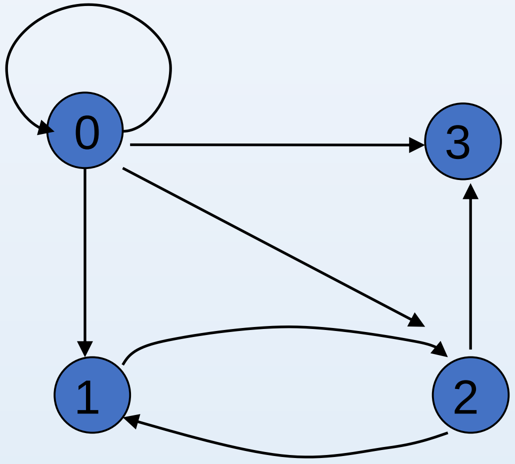
$$M_{\rho^n} = M_\rho^n$$

浙江大学信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

A上二元关系的关系图与复合运算



ρ



ρ^3

2.5 关系的性质与闭包运算

A上二元关系的性质

设ρ是集合A上的二元关系

（1）自反与反自反、非自反：

$\forall a \in A$，有$(a,a) \in \rho$，则称 ρ 是**自反的**，否则是**非自反的**。

$\forall a \in A$，有$(a,a) \notin \rho$，则称 ρ 是**反自反的**。

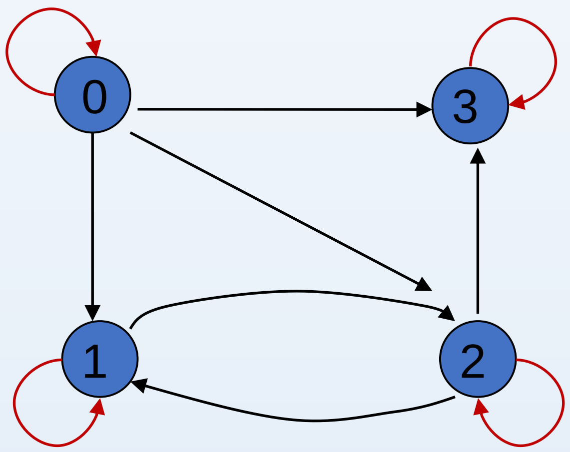
显然，ρ自反 $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq \rho$ $\Leftrightarrow$ $I_A \cup \rho = \rho$

ρ反自反 $\Leftrightarrow$ $\rho \cap I_A = \varnothing$

从关系矩阵看，其对角线元素均为1，例如

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从关系图上看所有点都有自环，例如



(2) 对称、反对称、非对称

若有 (a, b) ∈ρ，必有 (b, a) ∈ρ，则称ρ是**对称的**，否则是**非对称的**。

若有(a,b)∈ρ和(b,a)∈ρ，必有a=b，则称ρ是**反对称的**。

反对称的等价定义

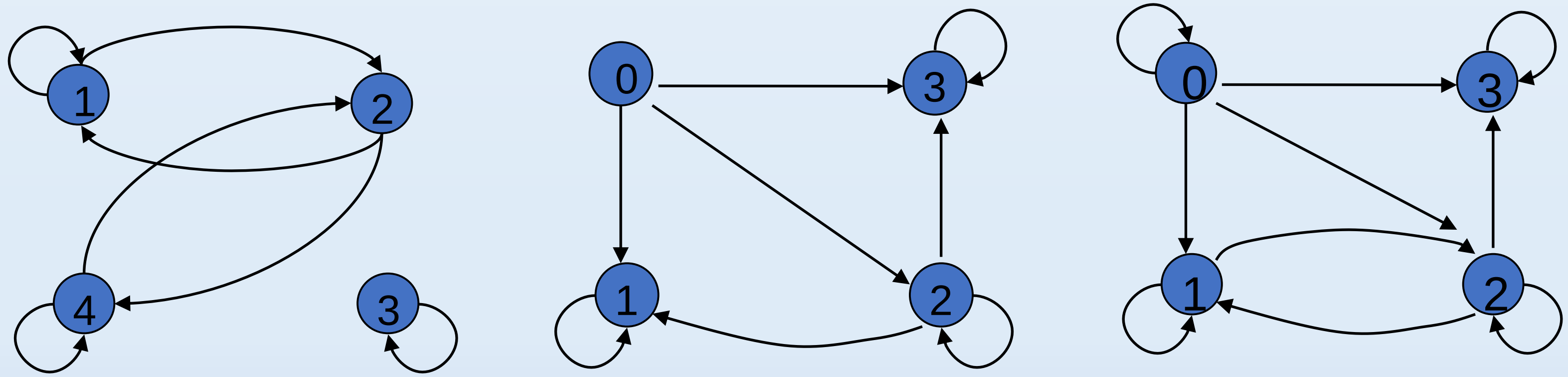
若a≠b，且(a,b)∈ρ，则必有(b,a)∉ρ，即(a,b)和(b,a)不能同时属于ρ。

ρ 对称 $\Leftrightarrow$ $\rho = \tilde{\rho} \Leftrightarrow \rho \cup \tilde{\rho} = \rho$

其**关系矩阵是对称矩阵**，例如ρ_s对称的，ρ_t是反对称

$$\rho_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rho_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关系图



对称　　　　反对称　　　　非对称

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所 宋牟平

ρ 反对称 $\Leftrightarrow \rho \cap \tilde{\rho} \subseteq I_A$

I_A既是对称的，又是反对称的。

若关系既是对称的，又是反对称的，必有对角线外的元素都为0。

(3)**传递性**

若(a, b), (b, c)∈ρ，则(a, c)∈ρ，称ρ是**可传递的**，否则是**不可传递的**。

注意：若(a,b)∈ρ，但(b,c) ∉ρ，则(a,c)∈ρ是否满足，都不影响传递性。

ρ_1={(a,b),(b,c),(a,c)}　可传递的

ρ_2={(a,b),(a,c)}　可传递的

ρ_3={(a,b),(b,c)}　不可传递的

ρ传递 $\Leftrightarrow \rho^2 \subseteq \rho$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例　A={a,b,c,d}，　ρ_1={(a,b),(c,d)},

可传递、反对称、反自反

例　ρ_2={(a,b)|a≤b, a,b∈N}　小于等于关系

对一切的a∈N，必有a=a，即(a,a)∈ρ_2，ρ_2自反；

对任意的a,b∈N，若(a,b)、(b,a)∈ρ_2，即a≤b，b≤a，则必有a=b，ρ_2反对称；

对任意的a,b,c∈N，若(a,b),(b,c)∈ρ_2，即a≤b，b≤c，则必有a≤c，故

(a,c)∈ρ_2，ρ_2可传递。

小于等于关系是自反的、反对称的、传递的

例　ρ_3={(a,b)| a|b, a,b∈N}　整除关系

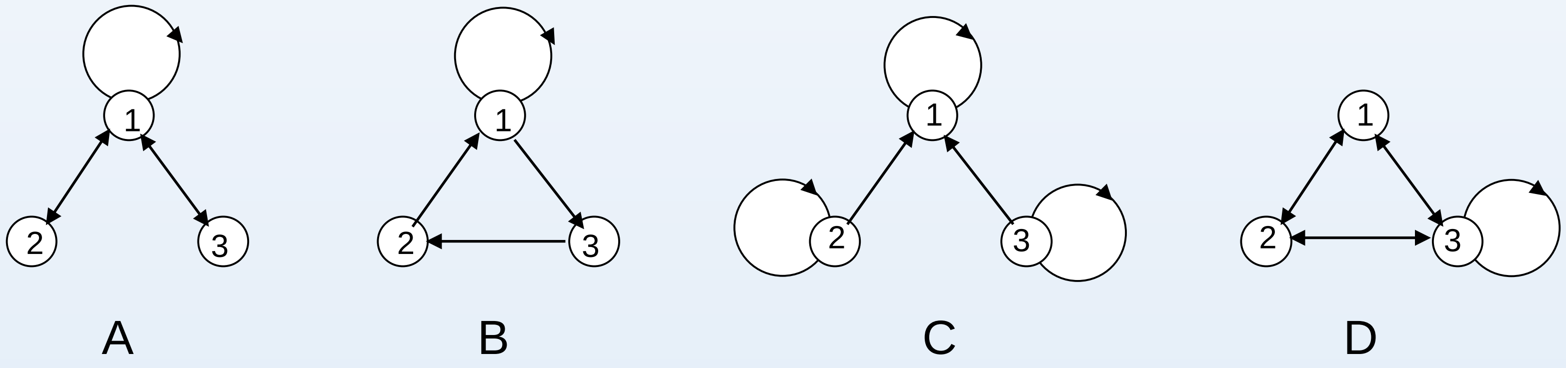
对一切的a∈N，必有a|a，即(a,a)∈ρ_3，自反；

对任意的a,b∈N，若a|b且b|a，则a=b，反对称；

对任意的a,b,c∈N，若a|b且b|c，则a|c，故(a,c)∈ρ_3，传递。

整除关系是自反、反对称、传递

例 判断下图的性质



对称的

反对称的

自反的
反对称的
可传递的

对称的

闭包运算

闭包

对某一个关系ρ，若它不具备自反、对称、传递性质中的某性质，我们可将它扩充，增加一些元素使它具备这一性质。则增加最少元素、使它具备这一性质的关系，称之为ρ的具有该性质的**闭包**。

定义2-10 **自反闭包** $r(\rho)=\rho\cup I_A$

对称闭包 $s(\rho)=\rho\cup\tilde{\rho}$

传递闭包 $t(\rho)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$

定理2-6 ρ是集合A上的一个关系，则ρ的自反闭包$r(\rho)=\rho\cup I_A$：

(1) $\rho\subseteq r(\rho)$

(2) $r(\rho)$是自反的

(3) 对于A上任何自反关系ρ_r，

若 $\rho\subseteq\rho_r$， 则 $r(\rho)\subseteq\rho_r$，

称$r(\rho)$是**自反闭包**。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

自反闭包$r(\rho)=\rho\cup I_A$的证明。

证明：

(1) 显然 $\rho\subseteq\rho\cup I_A$

(2) 因 $I_A\subseteq\rho\cup I_A$，所以$\rho\cup I_A$自反

(3) 对A上的任意自反关系ρ_r，有

$I_A\subseteq\rho_r$

若 $\rho\subseteq \rho_r$，

则 $\rho\cup I_A \subseteq\rho_r$

故$r(\rho)=\rho\cup I_A$是自反闭包

定理2-7 ρ是集合A上的一个关系，则ρ的**对称闭包s(ρ)**)$=\rho\cup\tilde{\rho}$：

(1) $\rho\subseteq s(\rho)$

(2) r(ρ)是是对称的

(3) 对于A上任何对称关系ρ_s，

若$\rho\subseteq \rho_s$， 则 $s(\rho)\subseteq \rho_s$，

称 s(ρ)是对称闭包。

定理2-8 ρ是集合A上的一个关系，则ρ的**传递反闭包t(ρ)=** $\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$：

(1) $\rho\subseteq t(\rho)$

(2) t(ρ)是传递的

(3) 对于A上任何传递关系ρ_t，

若 $\rho\subseteq\rho_t$，则 $t(\rho)\subseteq \rho_t$，

称t(ρ)是传递闭包

对称闭包$s(\rho)=\rho\cup\tilde{\rho}$的证明

证明：

(1) 显然 $\rho\subseteq\rho\cup\tilde{\rho}$

(2) $\overline{(\rho\cup\overline{\rho})}=\overline{\rho}\cup\overline{\overline{\rho}}=\rho\cup\overline{\rho}$ 对称

(3) 对A上的任意对称关系ρ_s，有

$$\rho_s=\tilde{\rho}_s$$

若 $\rho\subseteq\rho_s$，则 $\tilde{\rho}\subseteq\tilde{\rho}_s$

因此 $\rho\cup\tilde{\rho}\subseteq\rho_s\cup\tilde{\rho}_s=\rho_s$

故$s(\rho)=\rho\cup\tilde{\rho}$ 是对称闭包。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

传递闭包$t(\rho)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$证明

证明：

(1) 显然 $\rho\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$

(2) 设$(a,b),(b,c)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$ 则必存在h和k，使

$(a,b)\in\rho^h$，$(b,c)\in\rho^k$

因此， $(a,c)\in\rho^{h+k}\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$

(3) 设ρ_t是A上的任意一个传递关系，且$\rho\subseteq\rho_t$，

则对任意 $(a,b)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$ ，

必有 $(a,b)\in\rho^k$。

因此必存在元素 $b_1,b_2,\ldots,b_{k-1}\in A$，

使 $(a,b_1),(b_1,b_2),\ldots,(b_{k-1},b)\in\rho$

但$\rho\subseteq\rho_t$，所以

$$(a,b_1),(b_1,b_2),\ldots,(b_{k-1},b)\in\rho_t$$

而ρ_t是传递的，所以 $(a,b)\in\rho_t$，即

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i\subseteq\rho_t$$

对#A=n，则存在k≤n，使

$$t(\rho)=\bigcup_{i=1}^{n}\rho^i$$

2.6 等价关系

等价关系

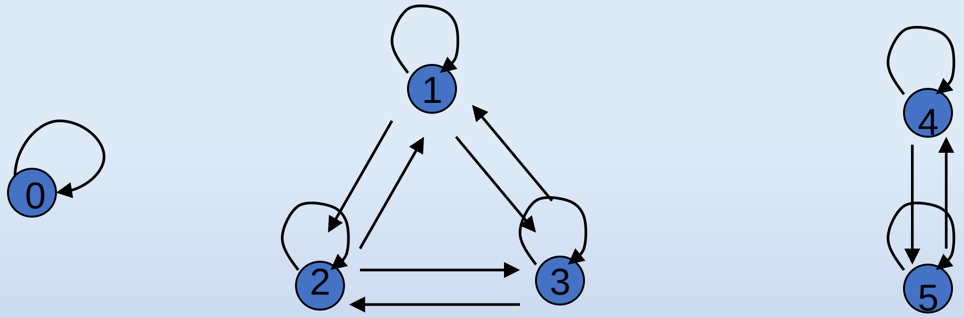
集合A上的关系ρ，如果它是**自反的**、**对称的**、**可传递的**，则称ρ为A上的等价关系。

三角形的相似关系，直线间的平行关系，在一个城市“住同一条街的居民”，都是等价关系的例子。

例 A是学生的集合，定义ρ为当且仅当a与b住同一寝室时，(a,b)∈ρ。

例 设A={0,1,2,3,4,5}，定义A上的关系

ρ={(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)}



$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}
$$

等价关系恰好把元素分成三部分：0；1、2、3；4、5。这使我们联想到分划，彼此有关联的元素构成分划的块，这个块称为**等价类**。

元素等价：设ρ是集合A上的等价关系，若(a,b)∈ρ，称a与b等价，记a=b。

等价类：设ρ是集合A上的等价关系，a是A中某个元素，则A中等价于a的所有元素的集合称为a所生成的等价类，记$[a]_\rho$。

$$[a]_\rho=\{b|b\in A, (a,b)\in\rho\}$$

从举的例子看出等价关系定义的等价类恰好构成A的一个分划。

$$\begin{array}{c}\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cccccc}0&1&2&3&4&5\end{array}\end{array}$$

定理2-11：**设ρ是集合A上的等价关系，则等价类的集合构成A的一个分划：**

$$\pi_\rho^A=\{[a]_\rho|a\in A\}$$

前例 $\pi_\rho^A=\{[0],[1],[4]\}=\{\{0\},\{1,2,3\},\{4,5\}\}$

<u>反之</u>，设$\pi=\{A_i\}_{i\in K}$**是集合A的一个分划，则存在A上的等价关系ρ，使π是A上由ρ导出的等价关系**。

证明：先（等价关系→分划）

(1) 对一切的$a\in A$，有$(a,a)\in\rho$，即$a\in[a]_\rho$，所以

$$A\subseteq\bigcup_{a\in A}[a]_\rho$$

而 $$\bigcup_{a\in A}[a]_\rho\subseteq A$$

所以 $$A=\bigcup_{a\in A}[a]_\rho$$

(2) 由(1)可知$[a]_\rho$非空，且

若 $$[a]_\rho\neq[b]_\rho$$

则 $[a]_\rho \cap [b]_\rho = \varnothing$

否则必存在一个元素x，使

$$x \in [a]_\rho \cap [b]_\rho$$

有等价类的定义可知

$$(a,x) \in \rho，\quad (b,x) \in \rho$$

由等价关系的对称性可知

$$(x,b) \in \rho$$

由传递性可知，有

$$(a,x) \in \rho，\quad (x,b) \in \rho$$

必有

$$(a,b) \in \rho$$

即

$$[a]_\rho = [b]_\rho$$

第二部分的证明（分划→等价关系）

设 $\pi = \{A_i\}_{i \in K}$

定义关系 $\rho = \{(a,b) | a,b \in A_i\}$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

(1) 对一切的$a\in A$，有$a,a\in A_i$，所以

$(a,a)\in \rho$ 自反

(2) 若$(a,b)\in\rho$，由ρ的定义

$a,b\in A_i$

当然

$b,a\in A_i$

因此

$(b,a)\in\rho$ 对称

(3) 若$(a,b),(b,c)\in\rho$，则

$a,b\in A_i$，$b,c\in A_i$

即

$a,b,c\in A_i$

所以

$(a,c)\in \rho$ 传递

定义2-11 **商集**：A上等价关系导出的分划$\pi_\rho{}^A$也称为**A关于ρ的商集**，记

$$A/\rho=\{[a]_\rho|a\in A\}$$

秩： A/ρ的基数。

显然恒等关系I_A和满关系U_A都是等价关系，I_A对应“最细” 分划，U_A对应最粗分划。

同余关系也是等价关系，如

$$\rho=\{(a,b)|a\equiv b(\mathrm{mod}3),\ a,b\in I\}$$ 模3同余

若ρ是等价关系，可以证明

$$\rho^n=\rho$$

相容关系：若ρ是自反的、对称的，称ρ是相容关系。显然等价关系是相容关系。

2.7 偏序

定义2-16 **偏序关系**：集合A上的一个关系ρ，若ρ是自反的、反对称的、可传递的，称ρ为**偏序关系**，常用符号“≤”表示。

(1) 对所有的a $\in$A，有a ρ a；

(2) 对所有的a，b $\in$A，若a ρ b且b ρ a，就必有a=b；

(3) 对所有的a，b，c$\in$A，若a ρ b且b ρ c，就必有a ρ c。

一个偏序的逆也是一个偏序，通常用符号“≥”表示。

例 A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

$\rho_1=\{(a,b) \mid a\leq b,\ a,b\in A\}$

$\rho_2=\{(a,b) \mid a|b,\ a,b\in A\}$ a整除b

例 B={a,b,c}

$\rho_3=\{(s_1,s_2) \mid s_1\subseteq s_2,\ s_1,s_2\in 2^B\}$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

定义2-17 **全序**：一个集合A上的偏序，若对于所有的a，b $\in$A，有a$\le$b或b$\le$a，则称它为A上的一个全序。

例，任意实数都是可比较大小，{R; $\le$}。但复数{C; $\le$}？

定义2-18 **良序**：一个集合A上的偏序，若对于A的每一个非空子集S $\subseteq$A，在S中存在一个元素a_s（称为S的**最小元素**），使得对于所有的s $\in$ S，有$a_s \le s$，则称它为A上的一个良序。

例，任意自然数集都有最小数{[n1, n2]; $\le$}。但实数{(r1, r2); $\le$}、复数？

例

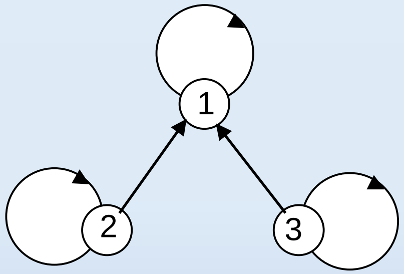
定义在实数集R上的“小于或等于”关系$\le$，是R上的偏序关系，也是一个全序，但它不是R上的良序。例如开区间(0, 1)是R的子集，但其没有最小元素。

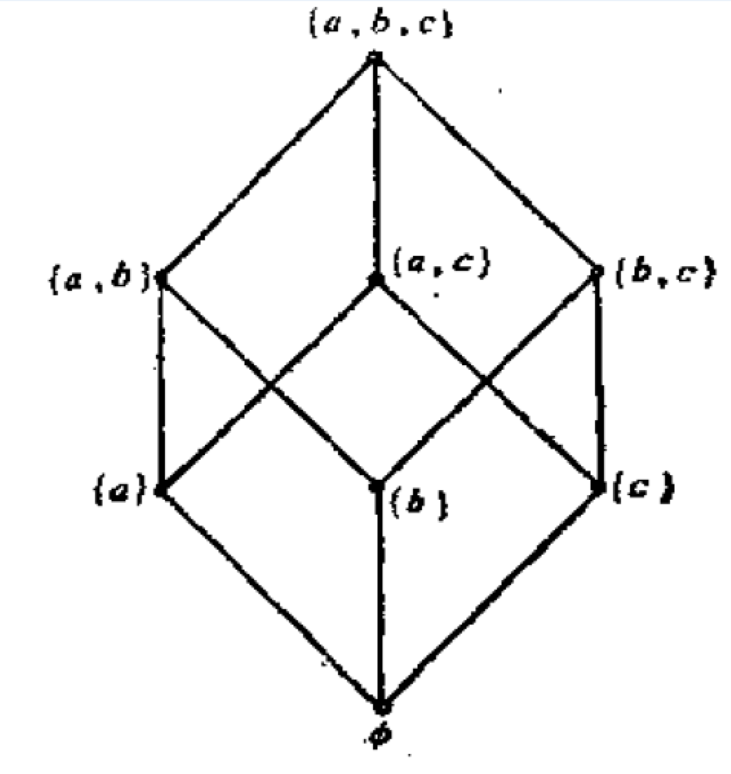
定义在正整数集N上的“小于或等于”关系$\le$，是N上的偏序关系，也是一个全序和良序。

实数集R上的小于关系“<”和大于关系“>”都不是偏序关系。

可以用前面讨论的关系图来表示有限集A上的偏序关系，但通常是使用**次序图（Hasse图）**

1. **有#A个结点，每个结点代表A的一个元素，画作一个带有元素标号的小圆圈；**
2. **若结点a≠b且a≤b，则结点a出现在结点b的下面；**
3. **边（线段）连接两个结点a和b： a≠b且a≤b，且不存在任何其它元素c，使得a≤c≤b；**
4. **所有边的方向都是从下朝上，略去边的方向。**





例 6　$J=\{2,3,4,6,8,12,36,60\}$ 上的整除关系 | 是一个偏序，图 2-6 给出了该偏序的次序图。

例 7　定义在全集合 U 的幂集上的包含关系 $\subseteq$ 是一个偏序。设 $U=\{a, b, c\}$，则该偏序的次序图由图 2-7 给出。

例 8　设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$\leqslant$ 是"小于或等于"关系，则 $\leqslant$ 是集合 A 上的一个全序。其次序图由图 2-8 给出。

显然，全序的次序图仅由一条竖直边上结点的序列组成。

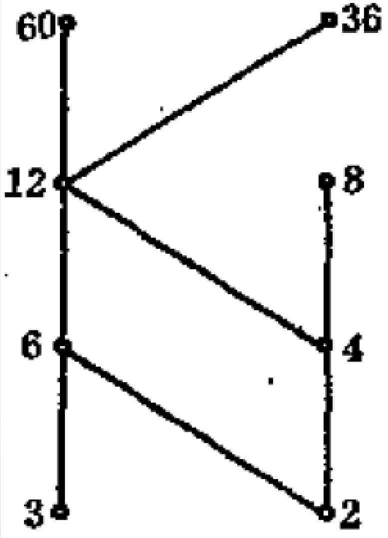


图 2-6

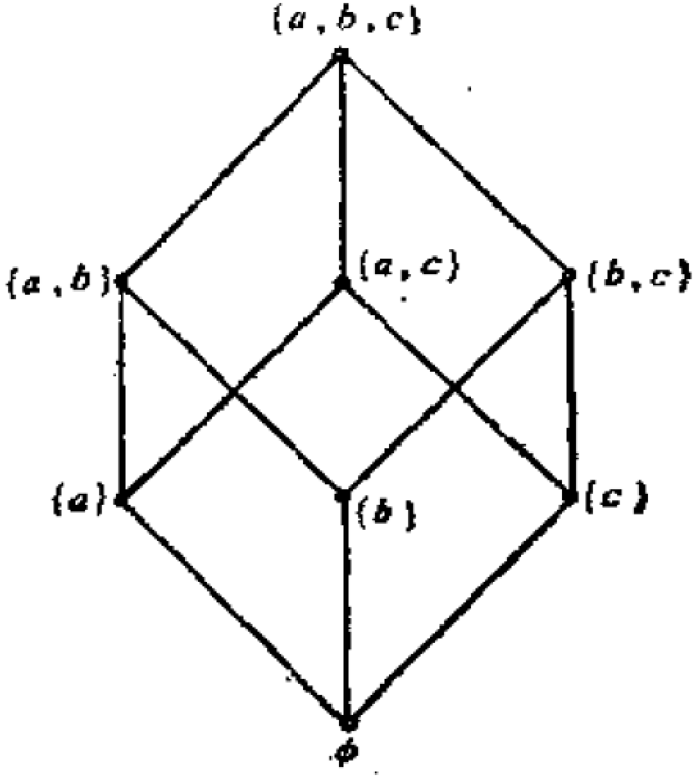


图 2-7

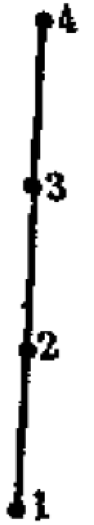


图 2-8

作业

- 1, 3(3), 6, 12, 15, 16, 19, 21, 34, 35, 40

小结

1. 集合的笛卡尔积

- 有序 n 元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$；
- 有序二元组 (a, b)，亦称为序偶；
- n 个集合的笛卡尔积

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n\};$$

- 两个集合的笛卡尔积

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

2. 关系

- 由集合 A 到集合 B 的关系；
- 集合 A 上的关系；
- 恒等关系和普遍关系；
- 关系的逆关系；
- 复合关系；
- 集合 A 上关系 ρ 的传递闭包、对称闭包和自反闭包.

3. 关系的表示方法

- 集合表示法——列举法和描述法；
- 矩阵表示法——用矩阵表示由有限集 A 到有限集 B 的关系；
- 关系图表示法——用有向图表示有限集 A 上的关系；
- 次序图——用无向图来特定地表示有限集 A 上的偏序关系.

4. 关系的复合运算和闭包运算

- 由给定的关系 ρ_1 和 ρ_2，求复合关系 $\rho_1 \cdot \rho_2$；
- 由给定的集合 A 上的关系 ρ，求复合关系 ρ^n；
- 由给定的集合 A 上的关系 ρ，求传递闭包 $t(\rho)$ 求对称闭包 $S(\rho)$、求自反闭包 $r(\rho)$.

$t(\rho)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$ $s(\rho)=\rho\cup\tilde{\rho}$ $r(\rho)=\rho\cup I_A$

5. 集合 A 上关系的性质

- 集合 A 上的自反关系；
- 集合 A 上的对称关系；
- 集合 A 上的反对称关系；
- 集合 A 上的可传递的关系.

上述这些具有特殊性质的关系的定义及判别.

6. 集合 A 上两类重要的关系

- 等价关系、等价类和等价分划；
- 偏序关系、全序和良序.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例题讲解

例 2-1 集合$\{1,3,5,9\}=\{3,9,5,1\}=\{9,5,1,3\}$，但有序四元组$(1,3,5,9)\neq(3,9,5,1)\neq(9,5,1,3)$.

n个集合的笛卡尔积是一个以有序n元组为元素的集合，因此两个集合的笛卡尔积就是一个以序偶为元素的集合.

例 2-2 设$A=\{1,3\}$，$B=\{1,2,4\}$，则

$$A\times B=\{(1,1),(1,2),(1,4),(3,1),(3,2),(3,4)\};$$

$$B\times A=\{(1,1),(2,1),(4,1),(1,3),(2,3),(4,3)\}.$$

注意到$(1,2)\neq(2,1)$，$(1,4)\neq(4,1)$，…，所以$A\times B\neq B\times A$，即笛卡尔积不满足交换律.

例 2-3　设 $A=\{1,2,4,7,8\}$，$B=\{2,3,5,7\}$，定义由 A 到 B 的关系

$$\rho=\left\{(a,b)\,\middle|\,\frac{a+b}{5}\text{是整数}\right\},$$

试问 ρ 由哪些序偶组成？

解　根据 ρ 的定义，ρ 中的序偶 (a,b) 应满足三个条件：$a\in A$；$b\in B$；$a+b$ 能被 5 整除. 于是

$$\rho=\{(2,3),(7,3),(8,2),(8,7)\}.$$

集合 A、B 的基数分别是 $\#A=5$，$\#B=4$，因此笛卡尔积 $A\times B$ 的基数 $\#(A\times B)=\#A\times\#B=20$. 即集合 $A\times B$ 由所有 20 个可能的序偶组成. 而 ρ 中的四个序偶只是其中的一部分，即 $\rho\subseteq A\times B$. $A\times B$ 还有许多其他的子集，如 $\{(1,3),(2,5),(4,7),(8,7)\}$、$\varnothing$、$A\times B$ 等均可看做是由 A 到 B 的关系.

例 2-7　例 2-3 中由集合 A 到 B 的关系 ρ 的逆关系

$$\tilde{\rho}=\{(3,2),(3,7),(2,8),(7,8)\},$$

它是一个由集合 B 到 A 的关系.

浙江大学信息学院信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 2-4 设有集合 A,B，$\# A=n$，$\# B=m$，试问由 A 到 B 有多少个不同的关系？

解 因为笛卡尔积 $A\times B$ 的任意一个子集都称为由 A 到 B 的一个关系，所以该问题等价于计算 $A\times B$ 有多少个子集. 由幂集的定义，该问题又等价于计算 $A\times B$ 的幂集的基数是多少.

$$\#(2^{A\times B})=2^{\#(A\times B)}=2^{\# A\times \# B}=2^{nm},$$

故由 A 到 B 有 2^{nm} 个不同的关系.

若集合 A 和 B 中至少有一个是无限集，则 $A\times B$ 是无限集. 因此 $A\times B$ 有无限多个子集，这也就意味着由 A 到 B 有无限多个不同的关系.

例 2-6 设 $\rho_1=\{(1,2),(2,4),(3,3)\}$，$\rho_2=\{(1,3),(2,4),(4,2)\}$，试求出 D_{ρ_1}，D_{ρ_2}，$D_{\rho_1\cup\rho_2}$，R_{ρ_1}，R_{ρ_2} 和 $R_{\rho_1\cap\rho_2}$.

解 虽然本题没有给出 ρ_1 和 ρ_2 是由什么集合到什么集合的关系，但是这对解答此题是无关紧要的. 事实上，不论 ρ_1 和 ρ_2 是定义在什么样的集合上的关系，根据 D_ρ 和 R_ρ 的定义，均有

$$D_{\rho_1}=\{1,2,3\},\quad R_{\rho_1}=\{2,3,4\};$$

$$D_{\rho_2}=\{1,2,4\},\quad R_{\rho_2}=\{2,4,3\}.$$

又因为

$$\rho_1\cup\rho_2=\{(1,2),(2,4),(3,3),(1,3),(4,2)\};$$

$$\rho_1\cap\rho_2=\{(2,4)\},$$

所以

$$D_{\rho_1\cup\rho_2}=\{1,2,3,4\};\quad R_{\rho_1\cap\rho_2}=\{4\}.$$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 2-8 设有集合 $A=\{4,5,8,15\}$，$B=\{3,4,5,9,11\}$，$C=\{1,6,8,13\}$，ρ_1 是由 A 到 B 的关系，ρ_2 是由 B 到 C 的关系，分别定义为

$$\rho_1=\{(a,b)\mid |b-a|=1\},$$

$$\rho_2=\{(b,c)\mid |b-c|=2 \text{ 或 } |b-c|=4\}.$$

试求复合关系 $\rho_1\cdot\rho_2$.

解 由题意知

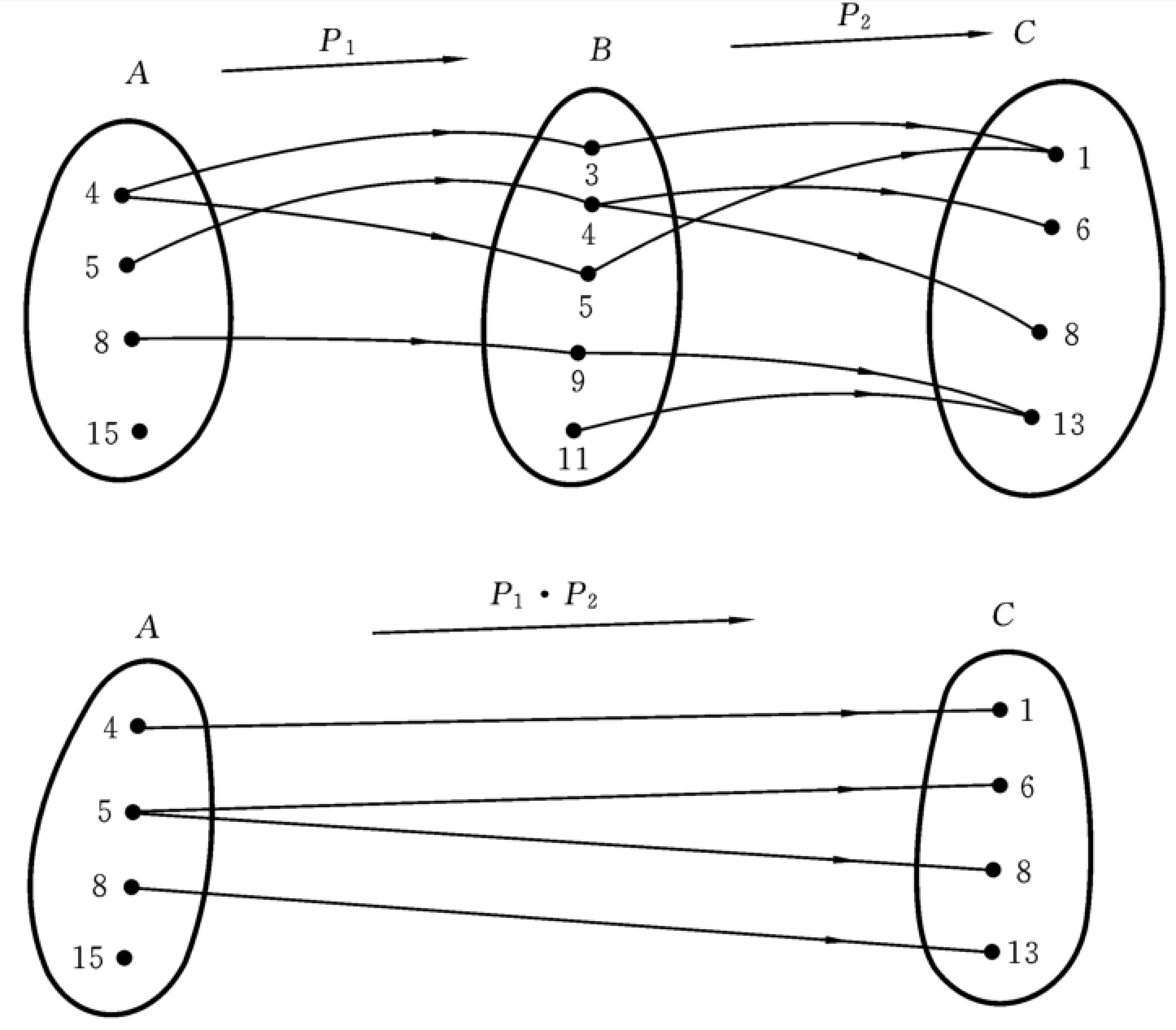
$$\rho_1=\{(4,3),(4,5),(5,4),(8,9)\},$$

$$\rho_2=\{(3,1),(4,6),(4,8),(5,1),(9,13),(11,13)\}.$$

根据复合关系的定义知

$$\rho_1\cdot\rho_2=\{(4,1),(5,6),(5,8),(8,13)\}.$$

关系 ρ_1，ρ_2 以及复合关系 $\rho_1\cdot\rho_2$ 如图 2-1 所示.


A
P_1
B
P_2
C
4
5
8
15
3
4
5
9
11
1
6
8
13
A
$P_1 \cdot P_2$
C
4
5
8
15
1
6
8
13

例 2-9 对于例 2-8 中的关系 ρ_1,ρ_2 和复合关系 $\rho_1\cdot\rho_2$，分别求出其逆关系 $\tilde{\rho}_1,\tilde{\rho}_2$ 和$\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$，再求出复合关系$\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$. 试问$\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$与 $\tilde{\rho}_2,\tilde{\rho}_1$ 有什么关系？

解 根据逆关系的定义，$\tilde{\rho}_1$ 是由 B 到 A 的关系，$\tilde{\rho}_2$ 是由 C 到 B 的关系，$\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$ 是由 C 到 A 的关系. 它们分别为

$$\tilde{\rho}_1=\{(3,4),(5,4),(4,5),(9,8)\},$$

$$\tilde{\rho}_2=\{(1,3),(6,4),(8,4),(1,5),(13,9),(13,11)\},$$

$$\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}=\{(1,4),(6,5),(8,5),(13,8)\}.$$

根据复合关系的定义，$\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$ 是由 C 到 A 的关系，且

$$\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1=\{(1,4),(6,5),(8,5),(13,8)\}.$$

$\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$与 $\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$ 都是由 C 到 A 的关系，且由完全相同的四个序偶所组成，因此$\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}=\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$. 即$\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$与 $\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$ 表示的是由 C 到 A 的同一个关系.

在一般情形下，等式$\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}=\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$ 也是成立的，将在后面给出其证明（参见本章例 2-26）.

例 2-10 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$，A 上的关系 ρ 定义为

$$\rho=\{(a,b),(b,a),(a,c),(c,e),(d,b)\},$$

试对所有的 $n\in\mathbf{N}$（$\mathbf{N}$ 表示正整数集），求出 ρ^n.

解 $\rho^2=\rho\cdot\rho=\{(a,a),(a,e),(b,b),(b,c),(d,a)\}$，

由于关系的复合运算满足结合律，因此 ρ^3 可以看做是 $\rho\cdot\rho^2$，也可看做是 $\rho^2\cdot\rho$，故

$$\rho^3=\rho\cdot\rho^2=\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,e),(d,b),(d,c)\}.$$

类似地，

$$\rho^4=\rho\cdot\rho^3=\rho^2\cdot\rho^2=\rho^3\cdot\rho$$
$$=\{(a,a),(a,e),(b,b),(b,c),(d,a),(d,e)\};$$
$$\rho^5=\rho\cdot\rho^4=\rho^2\cdot\rho^3=\rho^3\cdot\rho^2=\rho^4\cdot\rho$$
$$=\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,e),(d,b),(d,c)\}.$$

关系 ρ 由上可知，$\rho^5=\rho^3$. 根据复合关系的定义，则有

$$\rho^6=\rho^5\cdot\rho=\rho^3\cdot\rho=\rho^4,$$
$$\rho^7=\rho^6\cdot\rho=\rho^4\cdot\rho=\rho^5=\rho^3,$$
$$\rho^8=\rho^7\cdot\rho=\rho^5\cdot\rho=\rho^6=\rho^4,\cdots$$

于是有

$$\rho^3=\rho^5=\rho^7=\rho^9=\cdots$$
$$\rho^4=\rho^6=\rho^8=\rho^{10}=\cdots$$

即当 $n\geqslant 3$ 时，

$$\rho^{2n-1}=\rho^3,$$
$$\rho^{2n}=\rho^4.$$

例 2-11 试求出例 2-10 中关系 ρ 的传递闭包 ρ^{+}.

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6, \rho^7, \cdots$$

中，除 ρ、ρ^2、ρ^3 和 ρ^4 这四个关系互不相同外，其他关系均与关系 ρ^3 或 ρ^4 相同，由集合并运算的等幂律

$$\begin{aligned}\rho^{+} &= \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \rho^4 \\ &= \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,b),(b,c),(b,e),(c,e), \\ &\quad (d,a),(d,b),(d,c),(d,e)\}.\end{aligned}$$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 2-12 设 $A=\{5,4,35,49\}$，$B=\{8,15,7\}$，由 A 到 B 的关系 P 定义为

$$\rho=\{(a,b)\mid a \text{ 与 } b \text{ 互素}\},$$

试写出 ρ 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_\rho$.

解 由定义 $\rho=\{(5,8),(5,7),(4,15),(4,7),(35,8),(49,8),(49,15)\}$，所以关系矩阵

$$\boldsymbol{M}_\rho=\begin{array}{c} \\ 5 \\ 4 \\ 35 \\ 49 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 8 & 15 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

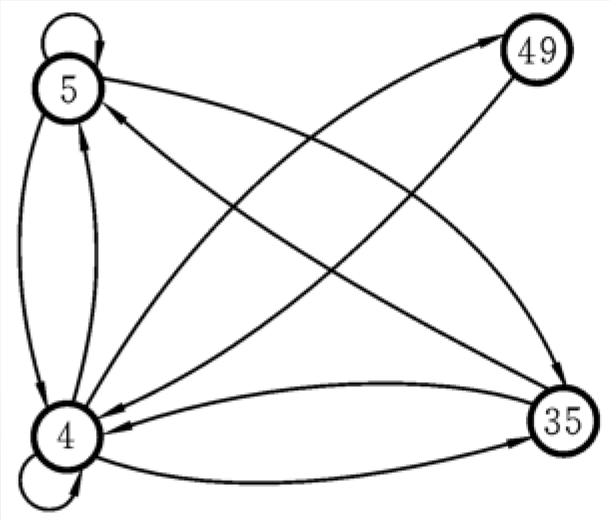
浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 2-13 设 $A=\{5,4,35,49\}$，定义 A 上的关系

$$\rho=\{(a_i,a_j)\mid a_i+a_j\leqslant 53\},$$

试画出 ρ 的关系图.

解 由定义 $\rho=\{(5,5),(5,4),(5,35),(4,5),(4,4),(4,35),(4,49),(35,5),(35,4),(49,4)\}$. 因此 ρ 的关系图如图 2-2 所示.



例 2-14 设 $A=\{4,6,9,10\}$，ρ_1 和 ρ_2 是 A 上的两个关系

$$\rho_1=\left\{(a,b)\,\middle|\,\frac{a-b}{2}\text{是正整数}\right\},$$

$$\rho_2=\left\{(a,b)\,\middle|\,\frac{a-b}{3}\text{是正整数}\right\},$$

试求 $\rho_1\cup\rho_2$，$\rho_1\cap\rho_2$，ρ_1'，$\rho_1-\rho_2$.

解 因

$$\rho_1=\{(6,4),(10,4),(10,6)\};$$

$$\rho_2=\{(9,6),(10,4)\};$$

因此

$$\rho_1\cup\rho_2=\{(6,4),(9,6),(10,4),(10,6)\};$$

$$\rho_1\cap\rho_2=\{(10,4)\};$$

$$\begin{aligned}\rho_1' &=(A\times A)-\rho_1\\ &=\{(4,4),(4,6),(4,9),(4,10),(6,6),(6,9),(6,10),\\ &\quad(9,4),(9,6),(9,9),(9,10),(10,9),(10,10)\};\end{aligned}$$

$$\rho_1-\rho_2=\{(6,4),(10,6)\}.$$

因为 ρ_1 和 ρ_2 都是 A 上的关系，$\rho_1\subseteq A\times A$，$\rho_2\subseteq A\times A$，所以 $\rho_1\cup\rho_2\subseteq A\times A$，$\rho_1\cap\rho_2\subseteq A\times A$，$\rho_1'\subseteq A\times A$，$\rho_1-\rho_2\subseteq A\times A$，即 $\rho_1\cup\rho_2$，$\rho_1\cap\rho_2$，ρ_1'，$\rho_1-\rho_2$ 也都是集合 A 上的关系. 对这些关系也可用描述法定义如下：

$$\rho_1 \cup \rho_2 = \left\{ (a,b) \,\middle|\, \frac{a-b}{2}\text{是正整数或者}\frac{a-b}{3}\text{是正整数} \right\};$$

$$\rho_1 \cap \rho_2 = \left\{ (a,b) \,\middle|\, \frac{a-b}{2}\text{和}\frac{a-b}{3}\text{均为正整数} \right\};$$

$$\rho_1' = \left\{ (a,b) \,\middle|\, \frac{a-b}{2}\text{不是正整数} \right\};$$

$$\rho_1 - \rho_2 = \left\{ (a,b) \,\middle|\, \frac{a-b}{2}\text{是正整数，但}\frac{a-b}{3}\text{不是正整数} \right\}.$$

例 2-15 设 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的关系

$$\rho=\{(a,a),(a,b),(b,d),(c,a),(d,c)\},$$

试求复合关系 ρ^2.

解法一 根据关系 ρ 中所列出的序偶，按复合关系的定义求出 ρ^2 中的序偶. 只要有 $(x,y)\in\rho$ 和 $(y,z)\in\rho$，便有 $(x,z)\in\rho^2$. 因此

$$\rho^2=\{(a,a),(a,b),(a,d),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a)\}.$$

这里特别要注意 $(a,a)\in\rho^2$ 不要遗漏，它是由 $(a,a)\in\rho$，$(a,a)\in\rho$ 而得来的.

解法二 构造出 ρ 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{\rho}$，利用 ρ^2 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{\rho^2}=\boldsymbol{M}_{\rho}\cdot\boldsymbol{M}_{\rho}$ 求出 $\boldsymbol{M}_{\rho^2}$，从而得到 ρ^2. 在进行关系矩阵的乘法运算时，矩阵中元素的相乘和相加均使用布尔运算.

$$\boldsymbol{M}_{\rho}=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a & b & c & d\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array},$$

$$\boldsymbol{M}_{\rho^2}=\boldsymbol{M}_{\rho}\cdot\boldsymbol{M}_{\rho}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a & b & c & d\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}.$$

解法三 构造出 ρ 的关系图，在图中从每一结点 x 出发，找出经过长为 2 的路径能够到达的所有结点 $y_1, y_2, \cdots, y_r$，于是在 ρ^2 的关系图中有 r 条边 $(x, y_1), (x, y_2), \cdots, (x, y_r)$.

本例 ρ 的关系图如图 2-3 所示. 从结点 a 出发，经过长为 2 的路径可以到达的结点分别是 a, b 和 d；从结点 b 出发，经过长为 2 的路径可以到达的结点仅有 c 一个；从结点 c 出发，经过长为 2 的路径可以到达的结点分别是 a 和 b；从结点 d 出发，经过长为 2 的路径仅可以到达结点 a. 于是 ρ^2 的关系图的构造如图 2-4 所示.

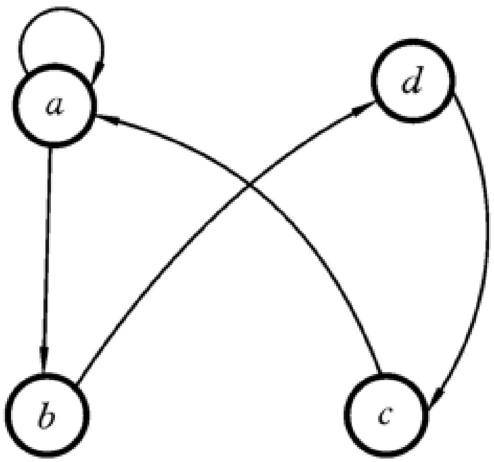


图 2-3 ρ 的关系图

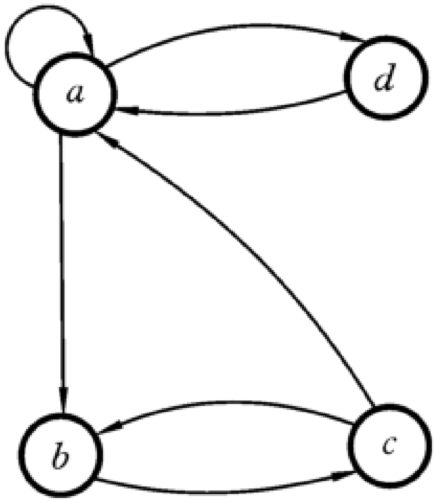


图 2-4 ρ^2 的关系图

例 2-16 设有集合 $A=\{2,3,4\}$，$B=\{4,6,7\}$，$C=\{8,9,12,14\}$，ρ_1 是由 A 到 B 的关系，ρ_2 是由 B 到 C 的关系，分别定义为

$$\rho_1=\{(a,b)\mid a\text{ 是素数且 }a\text{ 整除 }b\},$$

$$\rho_2=\{(b,c)\mid b\text{ 整除 }c\};$$

试用关系矩阵表示法求复合关系 $\rho_1\cdot\rho_2$.

解
$$\rho_1=\{(2,4),(2,6),(3,6)\};$$

$$\rho_2=\{(4,8),(4,12),(6,12),(7,14)\}.$$

因此

$$\boldsymbol{M}_{\rho_1}=\begin{array}{c c}& \begin{array}{ccc}4 & 6 & 7\end{array}\\ \begin{array}{c}2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array},\quad \boldsymbol{M}_{\rho_2}=\begin{array}{c c}& \begin{array}{cccc}8 & 9 & 12 & 14\end{array}\\ \begin{array}{c}4\\6\\7\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array},$$

$$\boldsymbol{M}_{\rho_1\cdot\rho_2}=\boldsymbol{M}_{\rho_1}\cdot\boldsymbol{M}_{\rho_2}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{array}{c c}& \begin{array}{cccc}8 & 9 & 12 & 14\end{array}\\ \begin{array}{c}2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array},$$

故
$$\rho_1\cdot\rho_2=\{(2,8),(2,12),(3,12)\}.$$

例 2-17 用构造 ρ^+ 的关系图的方法，求例 2-10 中关系 ρ 的传递闭包 ρ^+.

解 (1) 先构造出 ρ 的关系图(见图 2-5).

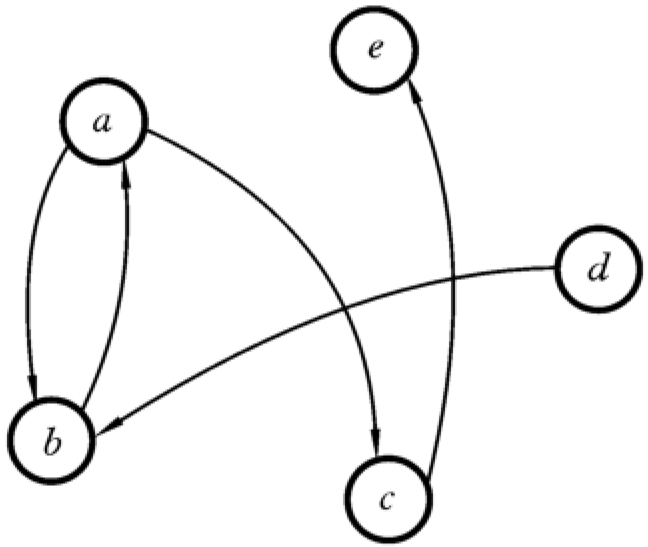


图 2-5 ρ 的关系图

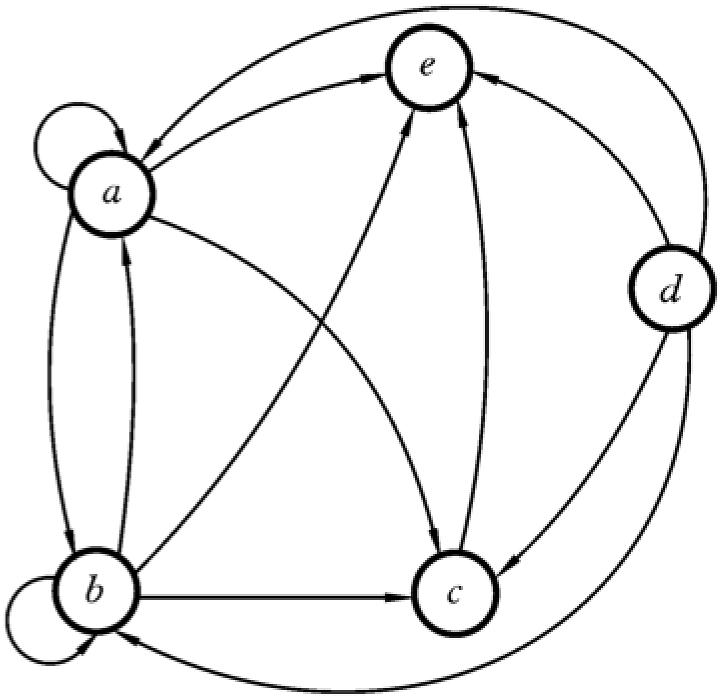


图 2-6 ρ^+ 的关系图

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

(2) 在 ρ 的关系图中，对每一结点 x，找出从 x 出发能到达的所有结点. 从结点 a 出发可分别到达 a,b,c,e，从结点 b 出发可分别到达结点 a,b,c,e，从结点 c 出发可到达结点 e，从结点 d 出发可分别到达 b,a,c,e.

(3) 构造 ρ^+ 的关系图(见图 2-6).

(4) 根据 ρ^+ 的关系图写出 ρ^+ 的相应序偶.

$$\rho^+=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,b),(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e)\}.$$

例 2-18 设 $A=\{a,b,c,d\}$.

(1) 判断下列关系是否自反关系.

$$\rho_1=\{(a,b),(b,c)\};$$

$$\rho_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,a)\};$$

$$\rho_3=\{(a,a),(a,b),(d,d),(c,c),(b,b)\};$$

$$\rho_4=\{(a,a),(b,b),(d,d),(c,c)\}.$$

(2) 判断下列关系是否对称关系或反对称关系.

$$\rho_5=\{(a,b),(a,a),(b,a),(b,c),(c,b)\};$$

$$\rho_6=\{(a,b),(a,a),(b,c),(d,c)\};$$

$$\rho_7=\{(c,b),(a,a),(d,c),(c,d)\};$$

$$\rho_8=\{(b,b),(d,d)\}.$$

(3) 判断下列关系是否可传递的关系.

$$\rho_9=\{(b,c),(c,c),(c,d),(b,d)\};$$

$$\rho_{10}=\{(b,c),(c,b),(b,b),(a,d)\};$$

$$\rho_{11}=\{(b,c),(d,a),(d,c)\}.$$

解 (1) ρ_1 不是自反关系，因为对于所有的 $x\in A$，(x,x)均不在 ρ_1 中.

ρ_2 不是自反关系，因为$(d,d)\notin\rho_2$.

ρ_3 是自反关系，但不是恒等关系.

ρ_4 是自反关系，也是恒等关系.

(2) ρ_5 是对称关系. 它不是反对称关系，因为 $a\neq b$，但(a,b)和(b,a)均出现在 ρ_5 中. 同样 $b\neq c$，但(b,c)和(c,b)均出现在 ρ_5 中.

ρ_6 不是对称关系，因为$(a,b)\in\rho_6$，但$(b,a)\notin\rho_6$. 同样$(b,c)\in\rho_6$，但$(c,b)\notin\rho_6$，$(d,c)\in\rho_6$ 但$(c,d)\notin\rho_6$. 而上述这几条原因正好说明 ρ_6 是反对称关系.

ρ_7 不是对称关系，因为$(c,b)\in\rho_7$ 但$(b,c)\notin\rho_7$. 它也不是反对称关系，因为 $c\neq d$，但(c,d)和(d,c)均在 ρ_7 中.

ρ_8 既是对称关系，也是反对称关系.

(3) ρ_9 是可传递的关系.

ρ_{10}不是可传递的关系. 因为$(c,b)\in\rho_{10}$，$(b,c)\in\rho_{10}$，但$(c,c)\notin\rho_{10}$.

ρ_{11}是可传递的关系. 在此例中没有出现$(x,y)\in\rho_{11}$同时$(y,z)\in\rho_{11}$的情形，因此也就无所谓$(x,z)\in\rho_{11}$的要求.

例 2-19 设 $A=\{a,b,c,d\}$，ρ_1 和 ρ_2 是 A 上的关系

$$\rho_1=\{(d,c),(c,a),(b,b),(d,a)\},$$

$$\rho_2=\{(b,c),(c,d),(c,b)\},$$

试求 ρ_1^+，ρ_2^+.

解 因为 $\rho_1\subseteq\rho_1$ 且 ρ_1 是可传递的，而 ρ_1 显然是满足(1)，(2)这两条件中最小的关系，所以 $\rho_1^+=\rho_1$.

ρ_2 不是可传递的，因为有 $(b,c)\in\rho_2$，$(c,d)\in\rho_2$，但 $(b,d)\notin\rho_2$. 所以必须添加 (b,d). 类似地道理，也必须添加 (b,b) 和 (c,c).

注意到序偶 (b,d)，(b,b) 和 (c,c) 是必须添加的，否则无法使 ρ_2 变成可传递关系. 而添加了这三个序偶后，ρ_2 变成可传递了，因此不能再添加其它的序偶，故

$$\rho_2^+=\{(b,c),(c,d),(c,b),(b,d),(b,b),(c,c)\}.$$

例 2-20 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$,A 上的关系

$$\rho_1=\{(a,a),(b,a),(b,b),(d,e),(a,b),(e,d),(d,d),(c,c),(e,e)\},$$

$$\rho_2=\{(b,b),(b,a),(a,b),(d,d),(d,e),(c,c)\},$$

试判断 ρ_1 和 ρ_2 是否是等价关系.

解 ρ_1 是等价关系.因为它具有自反性、对称性和可传递性.

ρ_2 不是等价关系.原因是:1)$(a,a)\notin\rho_2$,$(e,e)\notin\rho_2$,所以 ρ_2 不具有自反性;2)$(d,e)\in\rho_2$,但$(e,d)\notin\rho_2$,所以 ρ_2 不具有对称性;3)$(a,b)\in\rho_2$,$(b,a)\in\rho_2$,但$(a,a)\notin\rho_2$,所以 ρ_2 不具有可传递性.

虽然有以上三条原因,然而其中单独任何一条均可使得 ρ_2 不成为等价关系.例如

$$\rho_3=\{(b,a),(a,b),(b,e),(a,c),(b,b),(a,a),(e,b),(c,a),(c,c),(d,d),(e,e)\}$$

是 A 上的自反且对称的关系,但因 ρ_3 不是可传递的,所以 ρ_3 不是等价关系.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 2-21 试对例 2-20 中等价关系 ρ_1 写出集合 A 中每一个元素生成的等价类.

解 对于元素 a,因为 $(a,a)\in\rho_1$,$(b,a)\in\rho_1$,所以 a 生成的等价类 $[a]_{\rho_1}=\{a,b\}$.

对于元素 b,因为 $(b,b)\in\rho_1$,$(a,b)\in\rho_1$,所以 b 生成的等价类 $[b]_{\rho_1}=\{a,b\}$.

类似地,$[c]_{\rho_1}=\{c\}$,$[d]_{\rho_1}=\{e,d\}$,$[e]_{\rho_1}=\{e,d\}$.

由上看出 $[a]_{\rho_1}=[b]_{\rho_1}$,$[d]_{\rho_1}=[e]_{\rho_1}$,这说明不同的元素可能生成的等价类是相同的.

例如,上例中集合 A 上由 ρ_1 导出的等价分划是

$$\Pi_{\rho_1}^{A}=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}=\{[a]_{\rho_1},[c]_{\rho_1},[d]_{\rho_1}\}.$$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 2-22 设 $A=\{2,3,4,6,8\}$，ρ 是 A 上的关系，定义为

$$\rho=\{(a,b)\mid a \text{ 整除 } b\}.$$

试问 ρ 是偏序关系吗？

解 由 ρ 的定义，ρ 由以下序偶组成：

$$\rho=\{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6),(4,4),(4,8),(6,6),(8,8)\}.$$

因为$(2,2),(3,3),(4,4),(6,6),(8,8)$均在 ρ 中，所以 ρ 是自反的.

当 $a\neq b$ 时，序偶(a,b)和(b,a)至多只有一个在 ρ 中，所以 ρ 是反对称的.

检查每一对序偶可以看出，每当有$(a,b),(b,c)\in\rho$时，便有$(a,c)\in\rho$. 例如$(2,4)$，$(4,8)\in\rho$，也有$(2,8)\in\rho$. 所以 ρ 是可传递的.

由上可知，ρ 是 A 上的偏序关系.

事实上，只要 A 是由一些正整数组成的集合，则 A 上的整除关系一定是偏序关系.

例 2-23 分别用关系图和次序图表示例 2-22 中的偏序关系 ρ.

解 偏序关系 ρ 的关系图和次序图分别如图 2-7 和图 2-8 所示.

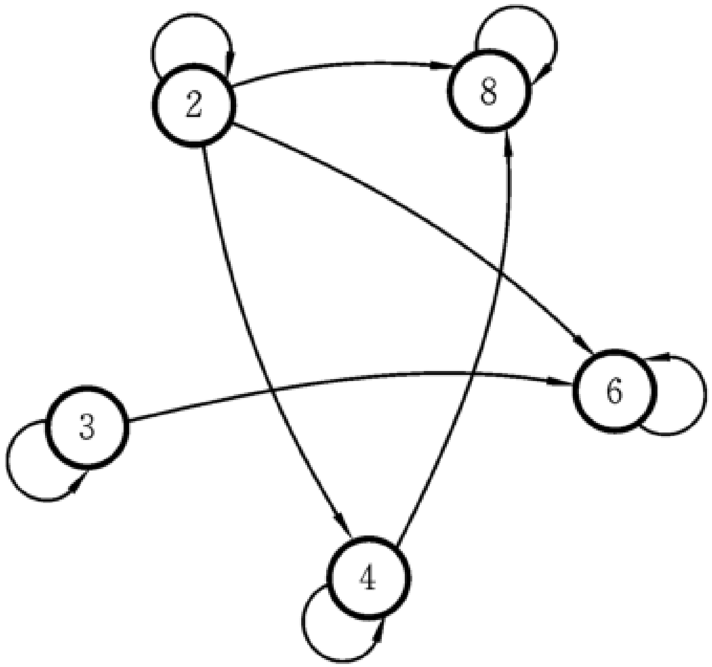


图 2-7 ρ 的关系图

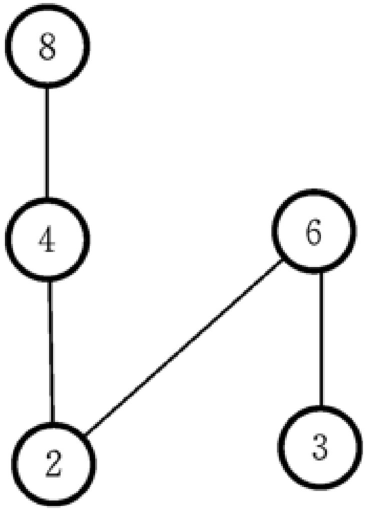


图 2-8 ρ 的次序图

偏序关系又称为部分序关系，它使得集合 A 中部分元素之间呈现一种次序关系. 这种次序关系在关系图中体现不出来，但在次序图中却表现得很清楚.

例 2-30 设 ρ_1 和 ρ_2 是集合 A 上的两个关系，试证明 $\rho_1^+ \cup \rho_2^+ \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+$. 又 $(\rho_1 \cup \rho_2)^+ \subseteq \rho_1^+ \cup \rho_2^+$ 成立吗？为什么？

证法一（根据 ρ^+ 的定义进行推理）

设 $(a,b) \in \rho_1^+ \cup \rho_2^+$，则 $(a,b) \in \rho_1^+$ 或 $(a,b) \in \rho_2^+$.

若 $(a,b) \in \rho_1^+$，则必存在正整数 k，使得 $(a,b) \in \rho_1^k$，于是存在元素 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{k-1}} \in A$，使得

$$a \rho_1 a_{i_1}, a_{i_1} \rho_1 a_{i_2}, \cdots, a_{i_{k-1}} \rho_1 b.$$

因为 $\rho_1 \subseteq \rho_1 \cup \rho_2$，所以又有

$$a(\rho_1 \cup \rho_2) a_{i_1}, a_{i_1} (\rho_1 \cup \rho_2) a_{i_2}, \cdots, a_{i_{k-1}} (\rho_1 \cup \rho_2) b,$$

于是 $a(\rho_1 \cup \rho_2)^k b$， 即 $(a,b) \in (\rho_1 \cup \rho_2)^k$.

由 $(\rho_1 \cup \rho_2)^k \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+$，因此

$$(a,b) \in (\rho_1 \cup \rho_2)^+.$$

若 $(a,b) \in \rho_2^+$，类似地可以证明 $(a,b) \in (\rho_1 \cup \rho_2)^+$. 由 (a,b) 的任意性，可得 $\rho_1^+ \cup \rho_2^+ \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+$.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

证法二(根据 ρ^+ 的性质进行推理)

由 ρ^+ 的定义知,$\rho^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \cdots$,因此

$$\rho_1 \subseteq \rho_1^+ \text{,又 } \rho_1 \subseteq \rho_1 \cup \rho_2 \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+,$$

根据传递闭包的性质,ρ_1^+ 包含于每一个包含 ρ_1 的可传递关系中,由于$(\rho_1 \cup \rho_2)^+$是 A 上包含 ρ_1 的可传递关系,所以 $\rho_1^+ \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+$.

类似地,可以证明 $\rho_2^+ \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+$.

因此 $$\rho_1^+ \cup \rho_2^+ \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+.$$

又$(\rho_1 \cup \rho_2)^+ \subseteq \rho_1^+ \cup \rho_2^+$ 不成立. 可举反例如下.

设 $A=\{1,2,3\}$,A 上的关系 $\rho_1=\{(1,2)\}$,$\rho_2=\{(2,3)\}$,则 $\rho_1^+=\{(1,2)\}$,$\rho_2^+=\{(2,3)\}$,于是

$$\rho_1^+ \cup \rho_2^+ = \{(1,2),(2,3)\}.$$

而$(\rho_1 \cup \rho_2)^+=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$,显然

$$(\rho_1 \cup \rho_2)^+ \not\subseteq \rho_1^+ \cup \rho_2^+.$$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

End of Chapter 2