第三章：

3 (1) 能定义，$D_f=\{1,2,3,4\}$，$R_f=\{(2,3),(3,4),(1,4)\}$

(2) 能定义，$D_f=\{1,2,3\}$，$R_f=\{(2,3),(3,4),(3,2)\}$

(3) 不能定义，有一对多的现象

(4) 能定义，$D_f=\{1,2,3\}$，$R_f=\{(2,3)\}$

4. 不成立. 设 $A=\{a,b\}$. $S=\{b\}$

函数 $f: A\to B$ 定义为 $f=\{(a,1),(b,1)\}$，则 $f(A-S)=\{1\}$

$f(A)-f(S)=\emptyset$ ∴ $f(A)-f(S)=f(A-S)$ 不成立

6. 证明：设 $b_1\in B$, $b_2\in B$ 且 $b_1\neq b_2$. ∵ f 为满射 ∴ 有 $a_1, a_2\in A$, s.t.

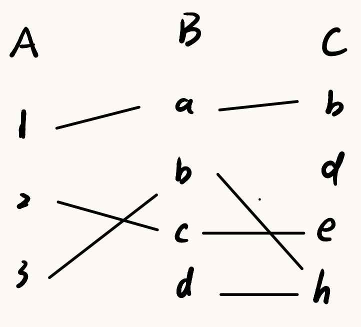
$f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$，且 $a_1\neq a_2$ 又 g 为 $B\to C$ 的函数

∴ 有 $c_1, c_2\in C$, s.t. $g(b_1)=c_1$, $g(b_2)=c_2$

∴ $gf(a_1)=c_1$, $gf(a_2)=c_2$ 又 $g\cdot f$ 为内射 ∴ 由 $a_1\neq a_2$ 可得 $c_1\neq c_2$

即 $g(b_1)\neq g(b_2)$，故 g 是内射.

反例：



9. 解：若 $f: A\to B$ 为内射，则 $\#A\le\#B$，即 $n\le m$

故共可定义 $A_m^n=\dfrac{m!}{(m-n)!}$ 个内射

若 $f: A\to B$ 为双射，则 $m=n$ ∴ 共可定义 $m!$ 个不同双射

11. 证明：若 f 不是满射，则至少 A 中有 1 个元素无像源，即 A 中元素至多只有 $n-1$ 个像. 又 $\#A=n$，故 A 中至少两个元素对应同一个像，与 f 为内射矛盾

14. 解：$f\cdot g = f(x+4) = x^2+8x+14$

$g\cdot f = g(x^2-2) = x^2+2$

$\because (f\cdot g)(0) = (f\cdot g)(-8)$ $\therefore f\cdot g$不是内射

易知$f\cdot g$不是满射 $\therefore f\cdot g$也不是双射

同理：$g\cdot f$不是满射，不是内射也不是双射

g是内射，是满射，是双射

f不是内射，不是满射也不是双射

19. 证明：①若f和g都为双射

设 $a_1, a_2 \in A$，$c_1, c_2 \in C$

$h(a_1, c_1) = (f(a_1), g(c_1))$，$h(a_2, c_2) = (f(a_2), g(c_2))$

若 $h(a_1, c_1) = h(a_2, c_2)$，即 $f(a_1) = f(a_2)$，$g(c_1) = g(c_2)$

则 $a_1 = a_2$，$c_1 = c_2$ $\therefore h$为内射

若 $\exists\, a_0, c_0$，s.t. $h(a_0, c_0) \notin B\times D$，则 $f(a_0) \notin B$ 或 $g(c_0) \notin D$，矛盾

$\therefore h$为满射，故h为双射

②若h为双射，设 $a_1, a_2 \in A$，$c_1, c_2 \in A$

若 $h(a_1, c_1) = h(a_2, c_2)$，即 $f(a_1) = f(a_2)$，$g(c_1) = g(c_2)$

必有 $a_1 = a_2$，$c_1 = c_2$ $\therefore f\cdot g$为内射

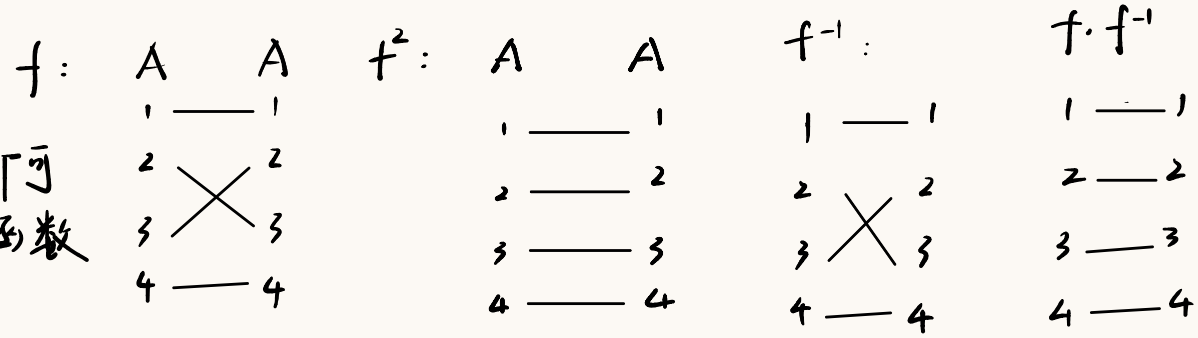
易知 $h(A\times C) = B\times D$，即对 $\forall\, b\in B, d\in D$，$\exists\, a\in A, c\in C$

s.t. $h(a, c) = (b, d)$，即 $f(a) = b$，$g(c) = d$

$\therefore f(A) = B$，$g(C) = D$ $\therefore f\cdot g$为满射 $\therefore f\cdot g$为双射

综上：结论成立

21. 解：



该f函数即可为所求g函数