

离散数学

Discrete Mathematics

第3章 函数

宋牟平 songmp@zju.edu.cn 玉泉校区 行政楼 325

上午10时56分

第3章 函 数

函数是一种特殊的关系。

3.1 函数

定义3-1 函数：设有集合A、B，f是A到B的关系，如果对于每一个 $a \in A$ ，存在唯一的 $b \in B$ ，使得 $(a, b) \in f$ ，记

$$b = f(a)$$

则称关系f是A到B的一个**函数**，或**映射**（**变换**），记

$$f: A \rightarrow B$$

显然

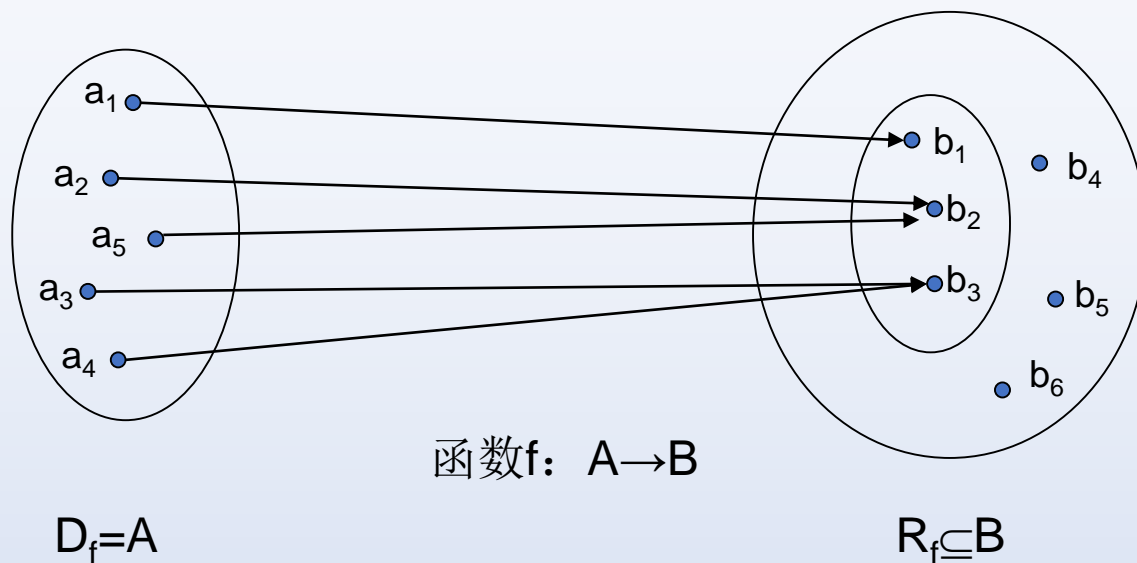
$$D_f = A, R_f \subseteq B$$

B称**值域包**。**值域** R_f 常表示为

$$f(A) = \{b | b \in B, \text{存在 } a \in A, \text{使 } f(a) = b\}$$

a也称**自变量**，b称函数f在a处的**值**。

另外，从映射的角度看， a 称为 b 的**源**， b 称为 a 的**像**。

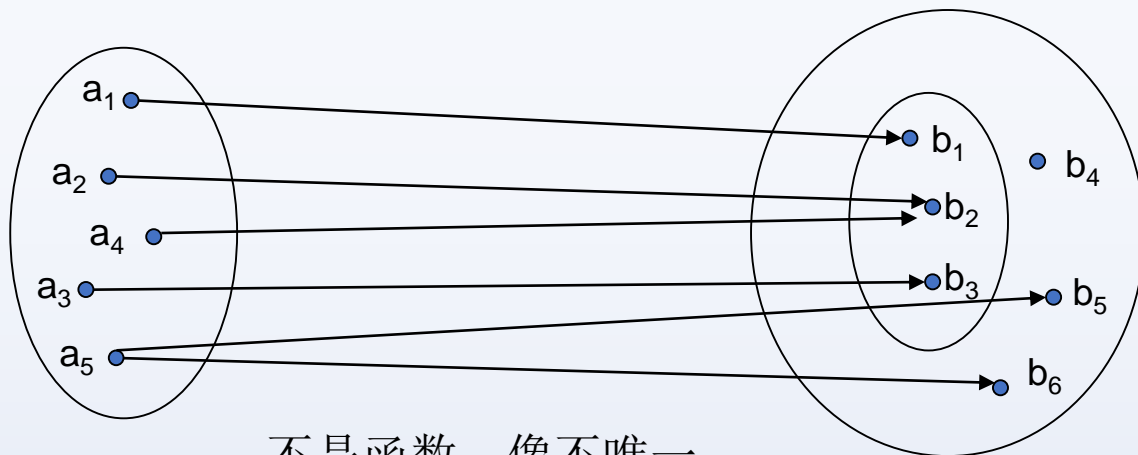


注意，函数的定义有三个要点：

- (1) 函数是关系。
- (2) 像的唯一性。一个像源不能对应两个像，但一个像可以对应两个像源。

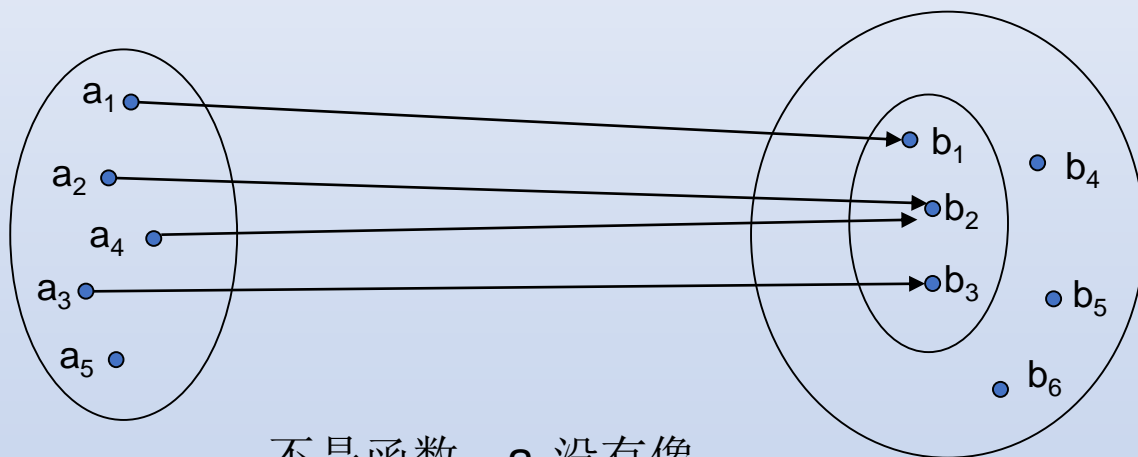
对于 $b_1, b_2 \in B$ ，若存在 $a_1, a_2 \in A$ ，使 $b_1 = f(a_1)$ ， $b_2 = f(a_2)$ ，

则 $b_1 \neq b_2$ 必有 $a_1 \neq a_2$ ，或 $a_1 = a_2$ 必有 $b_1 = b_2$ 。



不是函数，像不唯一。

(3) 定义域中任意一个像源都有像。



不是函数， a_5 没有像。

定义3-2 **函数相等**: 设有两个函数 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: C \rightarrow D$, 若 $A=C$, $B=D$, 且对一切的 $a \in A$, 都有 $f(a)=g(a)$, 则称 $f=g$ 。

定义3-3 **扩充与限制**: 设有函数 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: S \rightarrow B$, 如果 $S \subseteq A$, 且对一切的 $a \in S$, 都有 $g(a)=f(a)$, 称 g 是 f 在 S 上的限制, f 是 g 在 A 上的扩充。

例 函数 $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, 定义为 $g(z)=2z+1$

函数 $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{N}$, 定义为 $f(i)=2|i|+1$

则 g 是函数 f 在 \mathbb{Z} 上的限制, 而 f 是 g 在 \mathbb{I} 上的扩充。

A 到 B 的所有函数构成的集合, 即**函数族**,

$$B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$$

集合 A 到 B 能定义多少函数? 设 $\#A=m$, $\#B=n$, 则函数的数目为

$$\#(B^A) = (\#B)^{\#A} = n^m$$

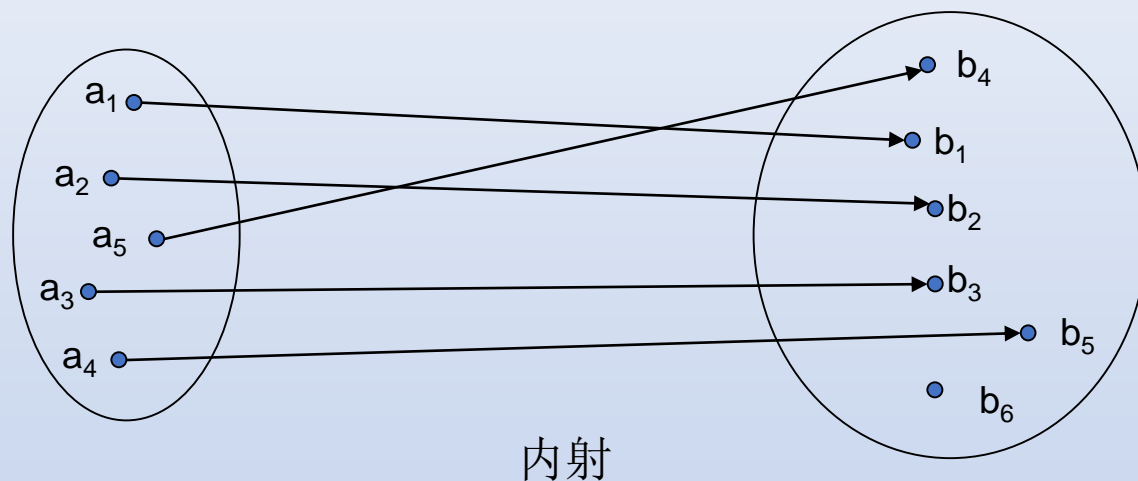
集合 A 到 B 能定义多少关系? $2^{\#A \times \#B} = 2^{m \times n}$ 个。

特殊性质的函数

定义3-4 设 $f: A \rightarrow B$

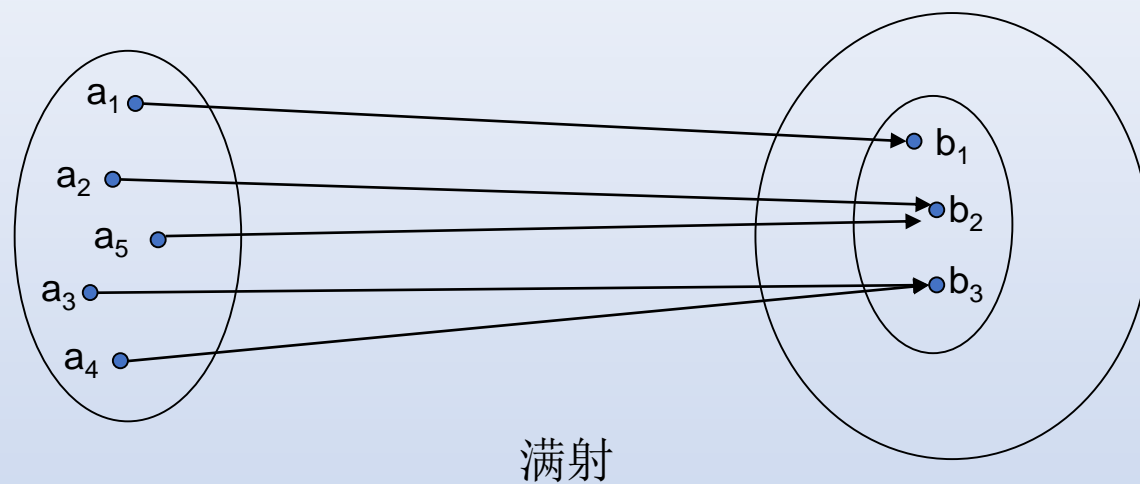
内射: 若 $a_i \neq a_j$ 时, 有 $f(a_i) \neq f(a_j)$, 即 $f(a_i) = f(a_j)$ 时, 有 $a_i = a_j$, 则称 f 是内射 (单射)。

内射要求一个像, 仅有唯一的像源与其对应。只有 $\#A \leq \#B$ 时, 才有内射存在。

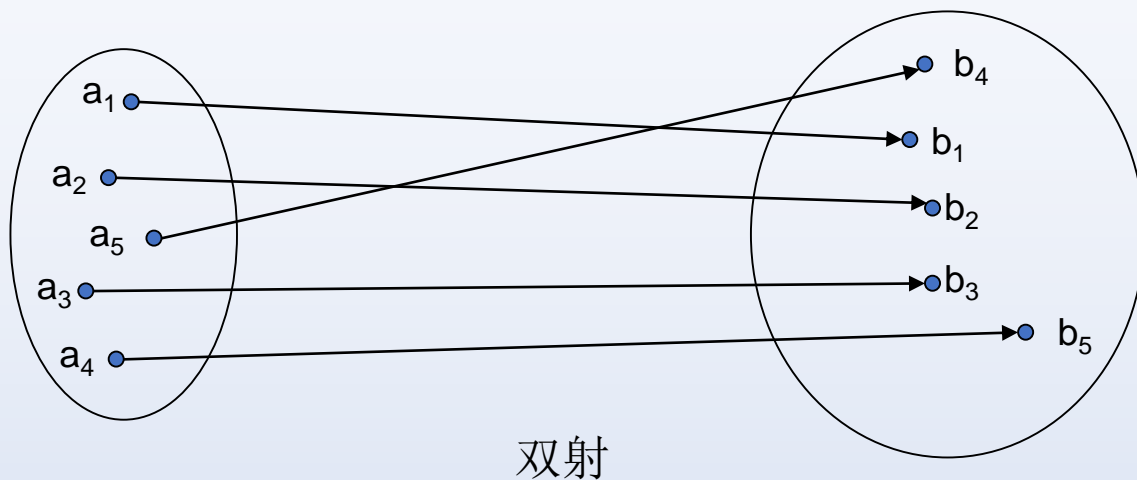


满射： 若 $f(A)=B$ ，则称 f 为满射。即对任意的 $b \in B$ ，存在 $a \in A$ ，使 $b=f(a)$ 。

只有 $\#A \geq \#B$ 时，才有满射存在。



双射： 若 f 既是满射又是单射，则称 f 为双射。只有 $\#A=\#B$ 时，才有双射存在。



例 I_A 是 A 到 A 的双射。

例 函数 $f: 2^U \rightarrow 2^U$, $f(s)=s'$, 是双射函数。

例 $f: (2^U)^2 \rightarrow (2^U)^2$, $f(s_1, s_2) = (s_1 \cup s_2, s_1 \cap s_2)$ 。

因 $f(s_1, s_2) = (s_1 \cup s_2, s_1 \cap s_2) = (s_2 \cup s_1, s_2 \cap s_1) = f(s_2, s_1)$, 故不是内射。

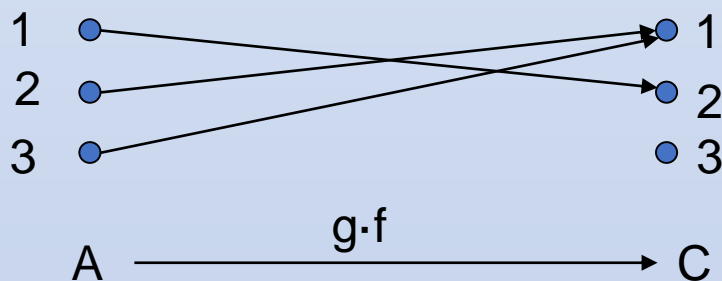
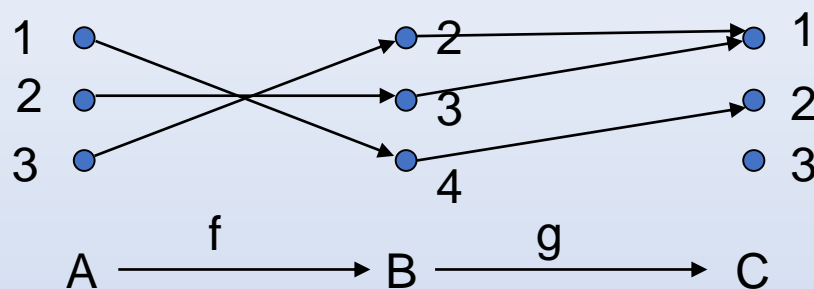
因不存在 $(s_1, s_2) \in (2^U)^2$, 使 $s_2 \cup s_1 = \emptyset$, $s_2 \cap s_1 = U$, 所以 (\emptyset, U) 不存在像源, f 不是满射。当然不是双射。

3.2 函数的复合

定义3-5 **复合函数**: 设有函数 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, 则复合关系 $f \cdot g$ 也是 A 到 C 的函数, 称为 **f 和 g 的复合函数**。为与一般的符合函数表示习惯一致, 记为 $g \cdot f$ (或 gf)。

同一般的复合函数 $gf(a)=g(f(a))=g(b)=c$

同复合关系 $(a,b) \in f, (b,c) \in g \Rightarrow (a,c) \in g \cdot f$



复合函数的性质

函数的复合也是关系的复合，因此关系复合的性质，对函数也是成立的，
例如结合律

$$h(gf)=(hg)f=hgf$$

定义3-6 幂等函数： $f: A \rightarrow A$ ，且 $f=f^2$

显然 $f=f^2 \Rightarrow f=f^n$

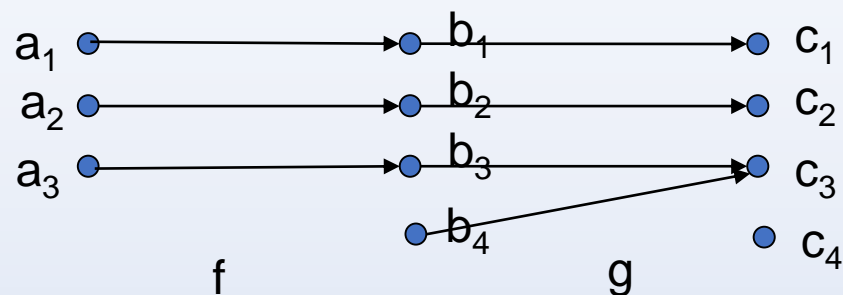
定理3-2 内射、满射、双射与复合

- (1) f 和 g 是内射，则 gf 也是内射；
- (2) f 和 g 是满射，则 gf 也是满射；
- (3) f 和 g 是双射，则 gf 也是双射。

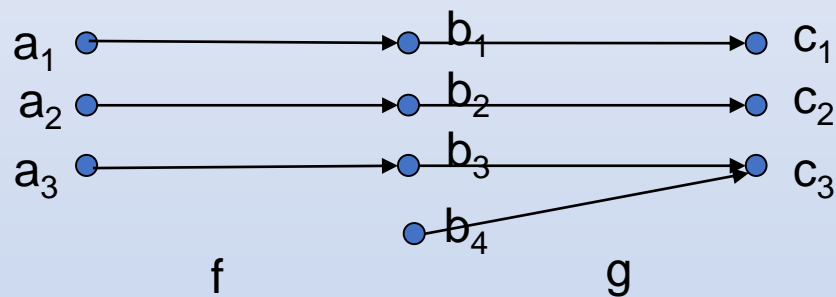
(2) 的证明：对任一 $c \in C$ ，由于 g 是满射，因此必存在某个 $b \in B$ ，使得 $g(b)=c$ 。
又由于 f 也是满射，必存在某个 $a \in A$ ，使得 $f(a)=b$ ，因此有 $gf(a)=g(f(a))=g(b)=c$ ，
即对任一 $c \in C$ ，有 $gf(a)=c$ ，故 gf 是满射。

定理3-3 设有函数 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow C$ ，那么：

(4) gf 是内射，则 f 是内射， g 可以不是。



(5) gf 是满射，则 g 是满射， f 可以不是。



(6) gf 是双射，则 f 是内射， g 是满射。上图就是例子。

(5)的证明: gf 是满射, 则 g 是满射, f 可以不是。

因 gf 是满射, 所以对任意的 $c \in C$, 存在 $a \in A$, 使 $gf(a)=c$ 。

又由复合函数的定义, 必存在 $b \in B$, 使得 $gf(a)=g(f(a))=g(b)=c$, 即对任意的 $c \in C$, 必存在 $b \in B$, 使 $g(b)=c$ 。

从关系看, 对 $(a,c) \in gf$, 必存在 $b \in B$, 使 $(a,b) \in f$, $(b,c) \in g$ 。

3.3 逆函数

定义3-7 逆函数：当函数 $f: A \rightarrow B$ 的逆关系同时满足函数的条件时，称为 f 的逆函数，记 f^{-1} 。逆函数是一个 B 到 A 的函数。逆函数存在称可逆的。

注意逆函数有两个条件：逆关系，函数。

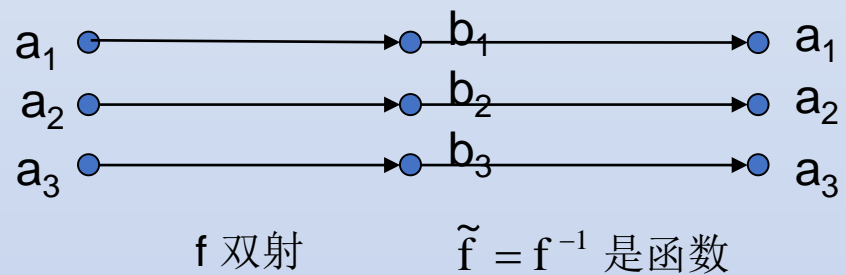
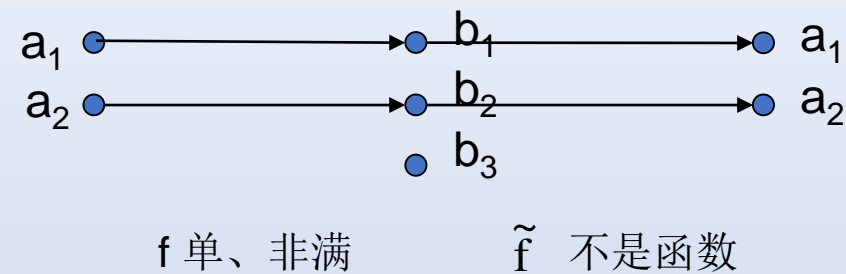
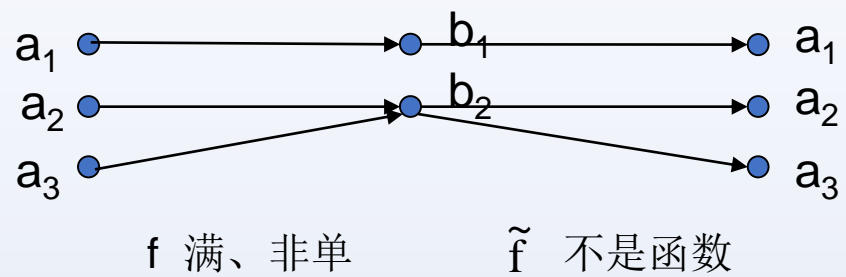
函数条件：对任意的 $b \in B$ ，存在唯一的 $a \in A$ ，使 $(b, a) \in f^{-1}$ ，即 $f^{-1}(b) = a$ 且使 $f(a) = b$ 。

要满足前述两个条件， f 必须是满射，否则必存在 $b_i \in B$ ，使 $b_i \notin f(A)$ ，逆关系不满足函数条件。 f 必须是内射，否则必存在 $a_i, a_j \in A$ ， $a_i \neq a_j$ ，使 $f(a_i) = f(a_j) = b$ ，逆关系不满足唯一性条件。

定理：当且仅当函数 $f: A \rightarrow B$ 是双射函数时，有唯一的逆函数 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 存在。

定理3-4 设函数 $f: A \rightarrow B$ 是双射，则逆函数 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 也是一个双射。

定理3-5 设函数 $f: A \rightarrow B$ 是一个双射，则 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。



显然， f 和 f^{-1} 都是双射函数，且互为逆函数。

对恒等函数有 $I_A=(I_A)^{-1}$ 。

逆函数性质

(1) 定理3-5 $(f^{-1})^{-1}=f$

(2) 定理3-6 $f^{-1}f=I_A$ ， $ff^{-1}=I_B$

(3) 定理3-7 设有函数 $f: A \rightarrow B$ ， $g: B \rightarrow A$ ，

当且仅当 $gf=I_A$ ， $fg=I_B$ 时，有 $g=f^{-1}$ ， $f=g^{-1}$

(4) 定理3-8 函数 $f: A \rightarrow B$ 可逆， $g: B \rightarrow A$ 可逆，则

$$(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$$

定义3-8 左逆函数和右逆函数：设有函数 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow A$ ，若 $gf = I_A$ ，即 $gf(a) = a$ ， $(a, a) \in gf$ ，则称 g 是 f 的**左逆函数**， f 是 g 的**右逆函数**。

定理3-9 (1) 左逆函数存在的条件：当且仅当 f 是内射时， f 有左逆函数。

(2) 右逆函数存在的条件：当且仅当 f 是满射时， f 有右逆函数。

证明：

设 f 是 A 到 B 的函数，若 f 是内射，则对于任意的 $a_i, a_j \in A$ ，如果 $a_i \neq a_j$ ，那么必有 $f(a_i) \neq f(a_j)$ 。即对任意的 $b \in B$ ，如果 $b \in f(A)$ ，则有唯一的元素 $a \in A$ ，使 $f(a) = b$ 。

定义函数 $g: B \rightarrow A$ ，使得对于任意的元素 $b \in B$ ，

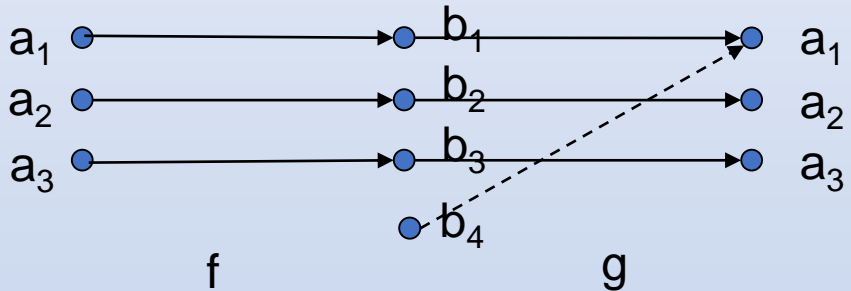
若 $b \in f(A)$ 且 $f(a) = b$ ，则 $g(b) = a$

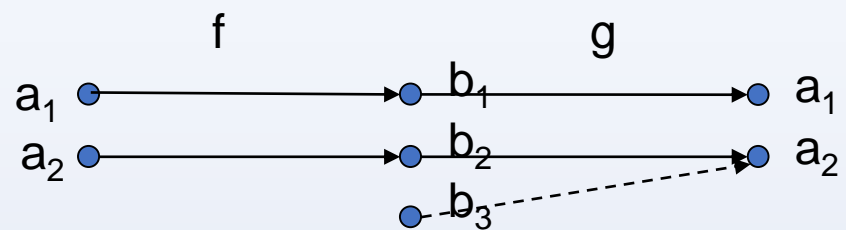
若 $b \notin f(A)$ ，则 $g(b) = a_1$ （对 $f(A)$ 进行扩充）

于是对于任意的 $a \in A$ ，若 $f(a) = b$ ，则

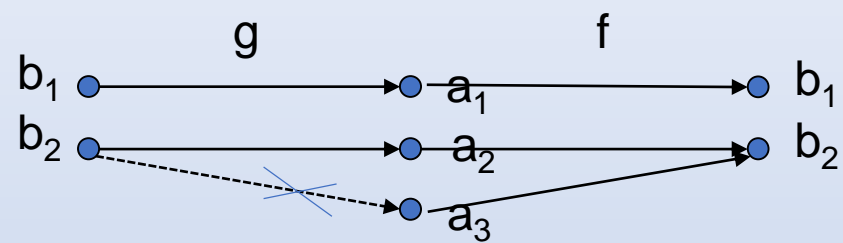
$gf(a) = g(f(a)) = g(b) = a$ ，即 $gf = I_A$ ， f 有左逆函数 g

反之，若 f 有左逆函数 $g: B \rightarrow A$ ，则 $gf = I_A$ 。因 I_A 是双射，故是内射。





f 是内射, $b_3 \notin f(A)$, 定义 $g(b_3) = a_2$



f 是满射

3.4 置换

置换

置换：设 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是有限集合，称 A 到 A 的双射函数 $p()$ 为集合 A 上的置换， n 称为置换的阶。

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ p(a_1) & p(a_2) & \cdots & p(a_n) \end{pmatrix}$$

置换是 A 中元素的一个排列， A 上不同置换的数目应为 $n!$ 。

恒等置换

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

逆置换

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} p(a_1) & p(a_2) & \cdots & p(a_n) \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

固体物理中的对称操作就是置换。

作业

3, 4, 6, 9, 11, 14, 19, 21

内容提要

1. 函数的概念

- 由集合 A 到集合 B 的函数;
- 函数的定义域和值域;
- 恒等函数;
- 复合函数;
- 逆函数.

2. 三种特殊的函数

- 由集合 A 到集合 B 的内射;
- 由集合 A 到集合 B 的满射;
- 由集合 A 到集合 B 的双射.

3. 函数的复合运算及其性质

- 函数复合运算的可结合性.

设有函数 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C, h:C \rightarrow D$, 则有

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f;$$

- 设 I_A 和 I_B 分别是集合 A, B 上的恒等函数, 则对于任一函数 $f:A \rightarrow B$, 有

$$f \cdot I_A = I_B \cdot f = f.$$

4. 复合函数的性质

- 设有函数 $f:A \rightarrow B$ 和 $g:B \rightarrow C$, 那么
 - (1) 如果 f 和 g 都是内射, 则 $g \cdot f$ 也是内射;
 - (2) 如果 f 和 g 都是满射, 则 $g \cdot f$ 也是满射;
 - (3) 如果 f 和 g 都是双射, 则 $g \cdot f$ 也是双射.
- 设有函数 $f:A \rightarrow B$ 和 $g:B \rightarrow C$, 那么
 - (1) 如果 $g \cdot f$ 是内射, 则 f 是内射;
 - (2) 如果 $g \cdot f$ 是满射, 则 g 是满射;
 - (3) 如果 $g \cdot f$ 是双射, 则 f 是内射, g 是满射.

5. 逆函数的有关性质

- 只有双射函数才有逆函数;
- f 的逆函数就是 f 的逆关系;
- f 的逆函数也是一个双射, 且 f 和 f^{-1} 互为逆函数;
- 如果函数 $f:A \rightarrow B$ 是可逆的, 则

$$f^{-1} \cdot f = I_A, \quad f \cdot f^{-1} = I_B;$$

- 如果函数 $f:A \rightarrow B$ 和 $g:B \rightarrow C$ 均是可逆的, 则

$$(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}.$$

例 3-1 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9,10\}$ 分别确定下列各式中的 f 是否为由 A 到 B 的函数.

$$f=\{(1,8),(3,9),(4,10),(2,6),(5,9)\}; \quad (1)$$

$$f=\{(1,9),(3,10),(2,6),(4,9)\}; \quad (2)$$

$$f=\{(1,7),(2,6),(4,5),(1,9),(5,10),(3,9)\}. \quad (3)$$

解 (1) 式中 f 是由 A 到 B 的函数. 因为对于 A 中的每一个元素, 在 B 中都有唯一一个元素与它对应.

(2) 式中 f 不是由 A 到 B 的函数. 因为 A 中的元素 5 在 B 中没有任何元素与它对应, 不满足像的存在性.

(3) 式中 f 不是由 A 到 B 的函数. 因为 A 中的元素 1 在 B 中有 7 和 9 两个元素与它对应, 不满足像的唯一性.

例 3-2 集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的下列关系,哪些是由 A 到 A 的函数?

$$f=\{(1,3),(2,3),(3,1)\}; \quad (1)$$

$$g=\{(1,2),(3,1)\}; \quad (2)$$

$$h=\{(1,3),(2,1),(2,2)\}. \quad (3)$$

解 f 是由 A 到 A 的函数,但 g 和 h 不是由 A 到 A 的函数. 其理由读者可参照例 3-1 分析得出.

例 3-3 设 $A=\{1,2,3,4\}$, 则 $I_A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ 既称为 A 上的恒等关系,又称为 A 上的恒等函数.

若 $\rho_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, 则 ρ_1 不是 A 上的恒等函数. 因为它缺少 $(4,4)$ 这一序偶.

若 $\rho_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(4,4)\}$, 则 ρ_2 也不是 A 上的恒等函数. 因为 $1 \neq 3$, 但序偶 $(1,3)$ 出现在 ρ_2 中.

例 3-4 设有函数 $f:A \rightarrow A$, 试证明:

(1) 若 $f \subseteq I_A$, 则 $f = I_A$;

(2) 若 $I_A \subseteq f$, 则 $f = I_A$.

说明 这里应注意函数 f 和恒等函数 I_A 既是由集合 A 到 A 的函数, 又可看做是集合 A 上的关系, 而它们自身又是一个以序偶为元素的集合.

证 (1) 由题设 $f \subseteq I_A$, 因此只要证明 $I_A \subseteq f$.

设 $(a, a) \in I_A$, 因为 f 是由 A 到 A 的函数, 所以对于元素 a , 必有唯一的元素 $b \in A$, 使得 $(a, b) \in f$, 因为 $f \subseteq I_A$, 所以 $(a, b) \in I_A$, 但 I_A 是恒等函数, 必有 $b = a$, 因此 $(a, a) \in f$. 由 a 的任意性, 有 $I_A \subseteq f$, 于是 $f = I_A$.

(2) 由题设 $I_A \subseteq f$, 因此只要证明 $f \subseteq I_A$.

设 $(a, b) \in f$, 则 $a \in A$, 因为 I_A 是恒等函数, 所以 $(a, a) \in I_A$, 由 $I_A \subseteq f$ 可知 $(a, a) \in f$, 由 $(a, b) \in f$ 和 $(a, a) \in f$ 且 f 是函数, 必有 $a = b$, 即 $(a, b) = (a, a)$, 所以 $(a, b) \in I_A$, 即 $f \subseteq I_A$. 于是 $f = I_A$.

例 3-6 设有函数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 和 $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ (\mathbf{R} 表示实数集), 且有 $f(x) = x + 5$, $g(x) = 3x + 1$, $h(x) = \frac{x}{2}$. 试求复合函数 $g \cdot f$, $f \cdot g$ 和 $f \cdot h$.

解 由复合函数的定义, 所求的复合函数均是由 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数.

$$g \cdot f(x) = g(f(x)) = g(x + 5) = 3(x + 5) + 1 = 3x + 16;$$

$$f \cdot g(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = 3x + 1 + 5 = 3x + 6;$$

$$f \cdot h(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + 5.$$

例 3-7 设有函数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 和 $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ (\mathbf{R} 表示实数集)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3; \\ -2 & x < 3, \end{cases} \quad g(x) = x + 2,$$

试求复合函数 $f \cdot g$ 和 $g \cdot f$.

解 复合函数 $f \cdot g$ 和 $g \cdot f$ 均是由 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数.

$$f \cdot g(x) = f(g(x)) = f(x+2) = \begin{cases} (x+2)^2, & x+2 \geq 3; \\ -2, & x+2 < 3, \end{cases}$$

即

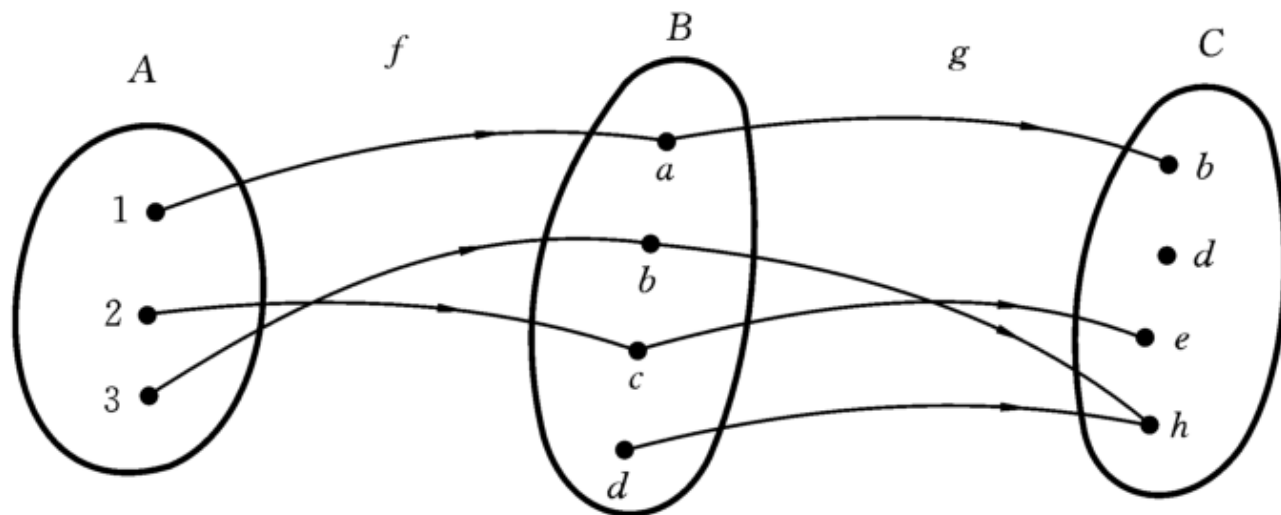
$$f \cdot g(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x \geq 1; \\ -2, & x < 1, \end{cases}$$

$$g \cdot f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(x^2), & x \geq 3 \\ g(-2), & x < 3 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 3; \\ 0, & x < 3. \end{cases}$$

例 3-10 设有函数 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow A$ 且 $g \cdot f$ 是 A 上的恒等函数, 试证明 f 是内射, g 是满射.

证 因为 $g \cdot f:A \rightarrow A$ 是恒等函数, 所以 $g \cdot f$ 是双射. 由复合函数的性质, f 必是内射而 g 必是满射.

要注意的是, 当复合函数 $g \cdot f:A \rightarrow C$ 是内射时, 虽然可推出 f 一定是内射, 但 g 可以不是内射. 图 3-1 给出了这种情形的一个例子. 但如果我们限定 f 是一个满射时, 则又是不同的结果了.



例 3-13 设有函数 $f:A \rightarrow A$, 若存在一正整数 n 使得 $f^n = I_A$, 试判断 f 是否内射、满射或双射?

解 若 $n=1$, 则 $f=I_A$. 因为恒等函数 I_A 是双射, 所以 f 是双射.

若 $n>1$, 则由复合函数的可结合性, 得

$$f^n = f^{n-1} \cdot f = f \cdot f^{n-1} = I_A.$$

由 $f^{n-1} \cdot f = I_A$ 和 I_A 是内射, 可知 f 是内射.

由 $f \cdot f^{n-1} = I_A$ 和 I_A 是满射, 可知 f 是满射, 故可判断 f 是一个双射.

例 3-16 下列四个函数是否存在逆函数? 若有, 则求出其逆函数(\mathbf{R} 表示实数集).

(1) $f_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x) = x^2$;

(2) $f_2: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_2(x) = 2^x$;

(3) $f_3: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_3(x) = x^2 - 2x - 3$;

(4) $f_4: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_4(x) = x^3$.

解 要判断上述函数是否存在逆函数, 实际上是要判断上述函数是否为双射.

(1) 因为 $f_1(2) = f_1(-2) = 4$, 且当 y 为负数时, 没有像源, 所以 f_1 既不是内射, 又不是满射. 因此 f_1 没有逆函数.

(2) 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f_2(x) > 0$, 因此 f_2 不是满射, 所以 f_2 没有逆函数.

(3) $f_3(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = (x-1)^2 - 4$, 显然 $f_3(-1) = f_3(3) = 0$, 因此 f_3 不是内射. 又对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f_3(x) \geq -4$, 因此 f_3 也不是满射, 故 f_3 没有逆函数.

(4) f_4 既是内射, 又是满射, 所以 f_4 是双射. 它有逆函数 $f_4^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_4^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

例 3-20 设 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{p,q\}$, 试问有多少个由 A 到 B 的函数? 有多少个由 A 到 B 的满射?

解 记由 A 到 B 的所有函数的集合为 B^A , 即

$$B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}.$$

由 $\#(B^A) = \#B^{\#A}$ 可知, 本例中由 A 到 B 的函数的个数 $\#B^{\#A} = 2^3 = 8$ (个).

由 $\#A > \#B$ 可知, 由 A 到 B 不存在双射, 也不存在内射, 但存在满射是可能的. 有多少个满射呢? 可分别用以下两种方法计算.

方法一 计算非满射的函数个数.

函数 $f: A \rightarrow B$ 若不是满射, 则只有两种情形, 或者 $f(a) = f(b) = f(c) = p$, 或者 $f(a) = f(b) = f(c) = q$, 因此非满射的函数仅 2 个, 故由 A 到 B 的满射为 6 个.

方法二 直接计算满射函数的个数.

函数 $f: A \rightarrow B$ 若为满射, 则必是 A 中两个元素对应于 B 中同一个元素, 而另一个元素对应于 B 中剩下的那个元素.

若是两个元素对应于 p , 则函数个数为 C_3^2 .

若是两个元素对应于 q , 则函数个数也为 C_3^2 . 因此满射函数个数为 $2C_3^2 = 2 \times 3 = 6$ (个).

浙江大学信息与电子工程学院电子系宋牟平

例 3-21 试证明若 $A \subseteq B$, 则 $A^C \subseteq B^C$.

分析 A^C 和 B^C 正如例 3-20 中所解释的, 它们分别表示由集合 C 到集合 A 的所有函数的集合和由集合 C 到集合 B 的所有函数的集合.

证 设 $f \in A^C$, 则 f 是一由 C 到 A 的函数, 于是对于任意 $c \in C$, 必有唯一的 $a \in A$, 使得 $f(c) = a$, 因为 $A \subseteq B$, 所以 $a \in B$, 因此, 对于任意 $c \in C$, 必有唯一的 $a \in B$, 使得 $f(c) = a$. 根据函数的定义, f 也是一由 C 到 B 的函数. 即 $f \in B^C$, 故 $A^C \subseteq B^C$.

例 3-25 设有函数 $f: A \rightarrow A, g: A \rightarrow A$ 和 $h: A \rightarrow A$, 使得复合函数 $h \cdot f = h \cdot g$. 试证明若 h 是一内射, 则 $f = g$.

证 用反证法证明之. 假设 $f \neq g$, 则必存在元素 $a \in A$, 使得 $f(a) \neq g(a)$, 因为 h 是内射, 所以 $h(f(a)) \neq h(g(a))$, 即 $h \cdot f(a) \neq h \cdot g(a)$. 这与题设 $h \cdot f = h \cdot g$ 相矛盾. 故 $f = g$.

例 3-27 设有集合 A, B , 其中 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 又设 $F = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$, 函数 $g: F \rightarrow B^n$ 定义为对于每一 $f \in F$, $g(f) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$, 试证明 g 是一个双射.

分析 注意记号 B^n 表示笛卡尔积,

$$\underbrace{B \times B \times \dots \times B}_{n \text{ 个}} = \{(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}) \mid b_{i_j} \in B, j = 1, 2, \dots, n\},$$

集合中的每一个元素是一个有序 n 元组.

证 对于任意的 $f_1, f_2 \in F$,

$$g(f_1) = (f_1(a_1), f_1(a_2), \dots, f_1(a_n)),$$

$$g(f_2) = (f_2(a_1), f_2(a_2), \dots, f_2(a_n)).$$

若 $f_1 \neq f_2$, 则至少存在一个整数 i ($1 \leq i \leq n$), 使得 $f_1(a_i) \neq f_2(a_i)$, 因此 $g(f_1) \neq g(f_2)$, 故 g 是内射.

对于任意的 $(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}) \in B^n$, 定义函数 $f: A \rightarrow B$, 使得 $f(a_1) = b_{i_1}, f(a_2) = b_{i_2}, \dots, f(a_n) = b_{i_n}$, 显然 $f \in F$, 且 $g(f) = (b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n})$, 因此 g 是一个满射.

由上证得 $g: F \rightarrow B^n$ 是一个双射.

例 3-33 设有函数 $f:A \rightarrow B$, 定义函数 $g:2^B \rightarrow 2^A$, 使得对于任一 $S \in 2^B$, 有

$$g(S) = \{a \mid a \in A \text{ 且 } f(a) \in S\},$$

试问(1) 当 f 是内射时, g 是否满射?

(2) 当 f 不是内射时, g 是否一定不是满射?

解 (1) 当 f 是内射时, g 是满射.

为了确定在题设条件下, g 是否满射, 可考察集合 2^A 中任一元素 H , 看它在 g 作用下是否一定有像源. 这里要注意的是 $H \in 2^A$, 即 $H \subseteq A$, 亦即 H 是 A 的任一子集.

另外, 符号 $g(S)$ 中的 $S \in 2^B$, 即 S 是 B 的子集, 根据 $g(S)$ 的定义, $g(S)$ 是 S 中所有元素在 f 作用下的像源的集合.

下面给出这一结论的证明.

证 对任一 $H \in 2^A$, 设 $H \neq \emptyset$, 并令

$$S = f(H) = \{b \mid b \in B, \text{存在 } a \in H \text{ 使得 } f(a) = b\},$$

即 S 是 H 中所有元素在 f 作用下的像的集合. 也就是说, 对于任一 $b \in S$, 必有 $a \in H$, 使 $f(a) = b$, 且因为 f 是内射, 所以对于 A 中任一元素 $a' \notin H$, 有 $f(a') \neq b$. 因此必有 $g(S) = H$, 即 S 是 H 在 g 作用下的像源.

因为 $g(\emptyset) = \emptyset$, 所以 2^A 中的元素 \emptyset 也有像源.

由上证得, g 是满射.

(2) 当 f 不是内射时, g 一定不是满射.

证 若 f 不是内射, 则必存在元素 $a_i, a_j \in A, a_i \neq a_j$, 但 $f(a_i) = f(a_j) = b$. 由 $g(S)$ 的定义知, $\{a_i\}$ 和 $\{a_j\}$ 在 g 作用下, 在 2^B 中均不存在像源. 故 g 不是满射.

End of Chapter 3