

5. (1) $\forall x$ 的辖域为 $P(x) \wedge \exists x Q(x)$

$\exists x$ 的辖域为 $Q(x)$, 第二个 $\forall x$ 的辖域为 $P(x)$

x 是约束变元, y 是自由变元

(2) $\exists x$ 和 $\forall y$ 的辖域为 $(P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \forall z R(z)$

$\forall z$ 的辖域为 $R(z)$, 其中 x 和 y 都是约束变元

9. (1) 不是永真式. 设 x 的个体域为实数集 R

$P(x)$: x 是有理数 $Q(x)$: x 是整数

则 $\forall x P(x)$ 和 $\forall x Q(x)$ 均为假

$\therefore \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 为真

又 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 为假 \therefore 原命题不是永真式

(2) 是永真式

$$(\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \neg P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow (\exists x \neg P(x) \vee \forall x Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x \neg P(x) \vee \forall x Q(x)) \vee (\exists x \neg P(x) \vee \forall x Q(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \vee (\exists x \neg P(x) \vee \forall x Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x \neg Q(x) \vee \forall x Q(x) \vee \exists x \neg P(x) \vee \forall x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow 1 \vee \neg \forall x Q(x) \vee \forall x Q(x) \vee \neg \exists x P(x) \Leftrightarrow 1 \vee (1 \vee \neg \forall x P(x)) \Leftrightarrow 1$$

$$10. (1) \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \exists y Q(y)) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)) \vee \exists x P(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x P(x) \vee \neg \exists y Q(y) \vee \exists x P(x) \Leftrightarrow (\neg \exists x P(x) \vee \exists x P(x)) \vee \neg \exists y Q(y) \Leftrightarrow 1$$

\therefore 关系式成立

$$14. \therefore \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y)) \quad E_1$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\forall y Q(y) \vee \neg P(x)) \quad E_1, E_2$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \forall y Q(y)) \quad E_1, E_2$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x P(x) \vee \forall y Q(y) \quad E_9$$

$$\Leftrightarrow \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y) \quad E_{11}$$

$$\therefore \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \Rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$$

14 (1) (3)处不能使用ES规则, 因为 $A(y) \Rightarrow y$ 中 y 随 x 变化而变化, 不满足ES要求的条件;

15 (1)

编号	公式	依据
(1)	$\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$	前提
(2)	$\forall x (\neg(P(x) \wedge Q(x)))$	(1); E_1
(3)	$\exists x P(x)$	前提
(4)	$P(c)$	(3); ES
(5)	$\neg (P(c) \wedge Q(c))$	(2); US
(6)	$\neg P(c) \vee \neg Q(c)$	(5); E_1
(7)	$\neg Q(c)$	(2); (6); I_{10}

13, 编号

编号	公式	依据
(1)	$\forall x (P(x) \rightarrow (Q(y) \wedge R(x)))$	前提
(2)	$\exists x P(x)$	前提
(3)	$P(c)$	(2); ES
(4)	$P(c) \rightarrow (Q(y) \wedge R(c))$	(1); US
(5)	$Q(y) \wedge R(c)$	(2); (4); I_{11}
(6)	$Q(y)$	(5); I_1
(7)	$R(c)$	(5); I_2
(8)	$P(c) \wedge R(c)$	(3); (7); I_9
(9)	$\exists x (P(x) \wedge R(x))$	(8); EG
(10)	$Q(y) \wedge \exists x (P(x) \wedge R(x))$	(6); (9); I_9

16 (1)	编号	公式	依据
	(1)	$\forall x P(x)$	前提
	(2)	$P(a)$	US

(3) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 前提

(4) $P(a) \rightarrow Q(a)$ US

(5) $Q(a)$ ①④ I₁

(6) $\forall x Q(x)$ UG