

5.11)

$\forall x$ 的辖域为 $P(x) \wedge \exists x Q(x)$, $\exists x$ 的辖域为 $Q(x)$,
第二个 $\forall x$ 的辖域为 $P(x)$,
 x 是约束变元, y 是自由变元。

(2) $\exists x$ 和 $\forall y$ 的辖域为 $(P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \forall z R(z)$,
 $\forall z$ 的辖域为 $R(z)$, 其中 x 和 y 和 z 都是约束变元。

9.

(2) 此公式不是永真式, 若假定 x 的个体域是实数集 R .

~~定义~~ $P(x)$: x 是有理数

~~定义~~ $Q(x)$: x 是整数

则 $\forall x P(x)$ 和 $\forall x Q(x)$ 均为假,

于是 $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$ 为真,

又因为 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 为假 (因为有理数不一定为整数)

因此 $(\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 为假



(3) 是永真式

$$(\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$(=) (\forall x \neg P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow (\exists x \neg P(x) \vee \forall x Q(x))$$

$$(=) \neg (\forall x \neg P(x) \vee \forall x Q(x)) \vee (\exists x \neg P(x) \vee \forall x Q(x))$$

$$(=) (\exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \vee (\exists x \neg P(x) \vee \forall x Q(x))$$

$$(=) \exists x P(x) \vee \exists x \neg P(x) \vee \forall x Q(x) \wedge \exists x \neg Q(x) \vee \forall x Q(x)$$

$$\vee \exists x \neg P(x)$$

$$(=) 1 \vee \neg \forall x Q(x) \vee \forall x Q(x) \vee \neg \forall x P(x)$$

$$(=) 1 \vee (1 \vee \neg \forall x P(x))$$

$$(=) 1 \vee 1$$

$$(=) 1$$

10.

(1)

$$\text{因为 } \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \exists y Q(y)) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)) \vee \exists x P(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x P(x) \vee \neg \exists y Q(y) \vee \exists x P(x)$$

$$\Leftrightarrow (\neg \exists x P(x) \vee \exists x P(x)) \vee \neg \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

$$\text{因此有 } \exists x \exists y (P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow \exists x P(x)$$

(4)

$$\because \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y))$$

E_{11}

$$\Leftrightarrow \forall x (\forall y Q(y) \vee \neg P(x))$$

E_1, E_2

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \forall y Q(y))$$

E_1, E_2

$$\Leftrightarrow \neg \exists x P(x) \vee \forall y Q(y)$$

E_9

$$\Leftrightarrow \exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$$

E_{11}

$$\therefore \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \Rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$$



14、

(a)

当 x, y 的个体域为整数集时, $\forall x \exists y (x > y)$ 为真,
却推出了假命题 $\forall x (x > x)$,
出错原因是在 (3) 步不能使用 ES 规则,
因为 $A(y)$ 中 $(x > y)$ 中 y 随自由变化 x 而变化,
不满足 ES 要求的条件 (3), 所以造成推导过程出错。

15. (1)

编号	公式	依据
(1)	$\neg \exists x (P(x) \wedge Q(a))$	前提
(2)	$\forall x (\neg (P(x) \wedge Q(a)))$	(1); E_9
(3)	$\exists x P(x)$	前提
(4)	$P(c)$	(3); E_5
(5)	$\neg (P(c) \wedge Q(a))$	(2); U_5
(6)	$\neg P(c) \vee \neg Q(a)$	(5); E_{10}
(7)	$\neg Q(a)$	(4); (6); I_{10}



13) 编号	公式	依据
(1)	$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(y) \wedge R(x)))$	前提
(2)	$\exists x P(x)$	前提
(3)	$P(c)$	(2); ES
(4)	$P(c) \rightarrow (Q(y) \wedge R(c))$	(1); US
(5)	$Q(y) \wedge R(c)$	(3), (4); I_{11}
(6)	$Q(y)$	(5); I_1
(7)	$R(c)$	(5); I_2
(8)	$P(c) \wedge R(c)$	(3), (7); I_9
(9)	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	(8); EG
(10)	$Q(y) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x))$	(6), (9); I_9



16、

(1)

编号	公式	依据
①	$\forall x P(x)$	前提
②	$P(a)$	US
③	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	前提
④	$P(a) \rightarrow Q(a)$	US
⑤	$Q(a)$	②④; I ₁₁
⑥	$\forall x Q(x)$	UG

