学霸助手
www.xuebazhushou.com
课后答案 | 课件 | 期末试卷
最专业的学习资料分享APP

第 1 章　集合

1、列举下列集合的元素

(1) 小于 20 的素数的集合

(2) 小于 5 的非负整数的集合

(3) $\{i \mid i \in I, i^2 - 10i - 24 < 0且5 \le i \le 15\}$

答：(1) $\{1,3,5,7,11,13,17,19\}$

(2) $\{0,1,2,3,4\}$

(3) $\{5,6,7,8,9,10,11\}$

2、用描述法表示下列集合

(1) $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

答：$\{a_i \mid i \in I, 1 \le i \le 5\}$

(2) $\{2, 4, 8, \cdots\}$

答：$\{2^i \mid i \in N\}$

(3) $\{0, 2, 4, \cdots 100\}$

答：$\{2i \mid i \in Z, 0 \le i \le 50\}$

3、下面哪些式子是错误的？

(1) $\{a\} \in \{\{a\}\}$　答：正确

(2) $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$　答：错误

(3) $\{a\} \in \{\{a\}, a\}$　答：正确

(4) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, a\}$　答：正确

4、已给 $S = \{2, a, \{3\}, 4\}$ 和 $R = \{\{a\}, 3, 4, 1\}$，指出下面哪些论断是正确的？哪些是错误的？

(1) $\{a\} \in S$　错误

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2) $\{a\} \in R$ 正确

(3) $\{a, 4, \{3\}\} \subseteq S$ 正确

(4) $\{\{a\}, 1, 3, 4\} \subseteq R$ 正确

(5) $R = S$ 错误

(6) $\{a\} \subseteq S$ 正确

(7) $\{a\} \subseteq R$ 错误

(8) $\phi \subseteq R$ 正确

(9) $\phi \subseteq \{\{a\}\} \subseteq R$ 正确

(10) $\{\phi\} \subseteq S$ 错误

(11) $\phi \in R$ 错误

(12) $\phi \subseteq \{\{3\}, 4\}$ 正确

5、 列举出集合 A, B, C 的例子，使其满足 $A \in B$， $B \in C$ 且 $A \notin C$

答： $A = \{a\}$， $B = \{\{a\}\}$，显然 $A \in B$， $C = \{\{\{a\}\}\}$，显然 $B \in C$，但是 $A \notin C$。

6、 给出下列集合的幂集

(1) $\{a, \{b\}\}$

答：幂集 $\{\phi, \{a\}, \{\{b\}\}, \{a, \{b\}\}$

(2) $\{\phi, a, \{a\}\}$

答：幂集 $\{\phi, \{\phi\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\phi, a\}, \{\phi, \{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{\phi, a, \{a\}\}\}$

7、设 $A = \{a\}$，给出 A 和 2^A 的幂集

答： $2^A = \{\phi, \{a\}\}$ $\quad 2^{2^A} = \{\phi, \{\{\phi\}\}, \{\{a\}\}, \{\phi, \{a\}\}\}$

8、 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_8\}$ 由 B_{17} 和 B_{31} 所表示的 A 的子集各是什么？应如何表示子集 $\{a_{2,} a_6, a_7\}$ 和 $\{a_1, a_3\}$

答： $B_{17} = B_{00010001} = \{a_4, a_8\}$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$B_{31} = B_{00011111} = \{a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$

$\{a_{2,} a_6, a_7\} = B_{01000110} = B_{70}$， $\{a_1, a_3\} = B_{10100000} = B_{160}$

9、 设$U = \{1,2,3,4,5\}$， $A = \{1,4\}$， $B = \{1,2,5\}$， $C = \{2,4\}$，确定集合：

(1) $A \cap B'$ (2) $(A \cap B) \cup C'$ (3) $A \cup (B \cap C)$ (4) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

(5) $(A \cap B)'$ (6) $A' \cup B'$ (7) $(B \cup C)'$ (8) $B' \cap C'$ (9) $2^A - 2^C$ (10) $2^A \cap 2^C$

答：(1) $B' = \{3,4\}$， $A \cap B' = \{4\}$

(2) $A \cap B = \{1\}$， $C' = \{1,3,5\}$， $(A \cap B) \cup C' = \{1,3,5\}$

(3) $B \cap C = \{2\}$， $A \cup (B \cap C) = \{1,2,4\}$

(4) $A \cup B = \{1,2,4,5\}$， $A \cup C = \{1,2,4\}$， $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,4\}$

(5) $(A \cap B)' = \{2,3,4,5\}$ (6) $A' = \{2,3,5\}$， $A' \cup B' = \{2,3,4,5\}$

(7) $B \cup C = \{1,2,4,5\}$， $(B \cup C)' = \{3\}$

(8) $B' = \{3,4\}$， $C' = \{1,3,5\}$， $B' \cap C' = \{3\}$

(9) $2^A = \{\phi, \{1\}, \{4\}, \{1,4\}\}$， $2^C = \{\phi, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}\}$， $2^A - 2^C = \{\{1\}, \{1,4\}\}$

(10) $2^A \cap 2^C = \{\phi, \{4\}\}$

10、 给定自然数集 N 的下列子集：

$A = \{1,2,7,8\}$， $B = \{i \mid i^2 < 50\}$， $C = \{i \mid i\text{可被3整数，} 0 \le i \le 30\}$

$D = \{i \mid i = 2^k, k \in Z, 0 \le k \le 6\}$

求下列集合：

(1) $A \cup (B \cup (C \cup D))$

答： $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$，

$C = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$， $D = \{1,2,4,8,16,32,64\}$

$A \cup (B \cup (C \cup D)) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16,18,21,24,27,30,32,64\}$

(2) $A \cap (B \cap (C \cap D)) = \phi$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(3) $B-(A\cup C)$

解：$A\cup C=\{0,1,2,3,6,7,8,9,12,15,18,21,24,27,30\}$，$B-(A\cup C)=\{4,5\}$

(4) $(A'\cap B)\cup D$

解：$A'\cap B=B-A=\{3,4,5,6\}$，$(A'\cap B)\cup D=\{1,2,3,4,5,6,8,16,32,64\}$

11、 给定自然数集 N 的下列子集

$A=\{n\mid n<12\}$，$B=\{n\mid n\le 8\}$，$C=\{n\mid n=2k,k\in N\}$，$D=\{n\mid n=3k,k\in N\}$

$E=\{n\mid n=2k-1,k\in N\}$

将下列集合表示为由 A,B,C,D,E 产生的集合：

(1) $\{2,4,6,8\}$ (2) $\{3,6,9\}$ (3) $\{10\}$ (4) $\{n\mid n=3\text{或}n=6\text{或}n\ge 9\}$

(5) $\{n\mid n\text{是偶数且}n\le 10\text{或}n\text{是奇数且}n>9\}$

(6) $\{n\mid n\text{是6的倍数}\}$

答：$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$C=\{2,4,6,8,\cdots\}$，$D=\{3,6,9,12,\cdots\}$，$E=\{1,3,5,7,\cdots\}$

$\{2,4,6,8\}=B\cap C$

$\{3,6,9\}=A\cap D$

$\{10\}=((A-B)-D)-E$

(4) $\{n\mid n=3\text{或}n=6\text{或}n\ge 9\}=\{3\}\cup\{6\}\cup\{9,10,11,12,\cdots\}$

$=\{3,6,9,10,11,12,\cdots\}=(A\cap D)\cup B'$

(5) $\{2,4,6,8,10,11,13,15,\cdots\}=((A-E)\cup(E-B))-((A\cap D)-B)$

(6) $\{n\mid n\text{是6的倍数}\}=\{6,12,18,24,30\cdots\}=C\cap D$

12、 判断以下哪些论断是正确的，哪些论断是错误的，并说明理由。

(1) 若 $a\in A$，则 $a\in A\cup B$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

答：正确，根据集合并的定义

(2) 若$a \in A$，则$a \in A \cap B$

答：显然不正确，因为根据集合交运算的定义，必须a同时属于A和B

(3) 若$a \in A \cap B$，则$a \in B$

答：正确

(4) 若$A \subseteq B$，则$A \cap B = B$

答：错误

(5) 若$A \subseteq B$，则$A \cap B = A$

答：正确

(6) 若$a \notin A$，则$a \notin A \cup B$

答：错误

(7) 若$a \notin A$，则$a \notin A \cap B$

答：正确

13、 设A,B,C是任意的集合，下述论断哪些是正确的？哪些是错误的？说明理由

(1) 若$A \cap B = A \cap C$，则$B = C$

答：不正确，反例，设$A = \phi$，则不论B,C是什么集合，都有$A \cap B = A \cap C = \phi$，但显然$B,C$不一定相等。

(2) 当且仅当$A \cup B = B$，有$A \subseteq B$；

答：正确，证明如下：若$A \cup B = B$，则对$\forall a \in A$，有$a \in A \cup B = B$，则有$a \in B$，因此有$A \subseteq B$。反之，若$A \subseteq B$，则$A \cup B = B$显然成立。

(3) 当且仅当$A \cap B = A$，有$A \subseteq B$

答：正确，证明如下：若$A \cap B = A$，则对$\forall a \in A$，因此$a \in A \cap B$，则$a \in B$，则有$A \subseteq B$。若$A \subseteq B$，则$\forall a \in A$，有$a \in B$，因此由$a \in A$，可以得出$a \in A \cap B$，因此$A \subseteq A \cap B$，又$A \cap B \subseteq A$，有$A \cap B = A$。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(4) 当且仅当 $A \subseteq C$，有 $A \cap (B-C) = \phi$

答：不正确，因为 $A \cap (B-C) = A \cap B \cap C'$，因此不一定需要满足 $A \subseteq C$，而若 $A \cap B = \phi$ 也可以满足。例如：$A = \{a,b,c\}$，$B = \{d,e\}$，$C = \{a,b\}$，$A \cap (B-C) = \phi$ 成立，而 $A \subseteq C$ 不成立。

(5) 当且仅当 $B \subseteq C$，有 $(A-B) \cup C = A$

答：不正确，因为若 $B \subseteq C$，有 $(A-B) \cup C = A$ 成立，但是反之不成立，反例如下: $A = \{1,2,3,4,5\}$， $B = \{1,6\}$， $C = \{1,2\}$，而 $A - B = \{2,3,4,5\}$，

$(A-B) \cup C = \{1,2,3,4,5\}$，但是 $B \subseteq C$ 不成立。

14、 设 A,B,C,D 是集合，下述哪些论断是正确的？哪些是错误的？说明理由。

(1) 若 $A \subseteq B, C \subseteq D$，则 $A \cup C \subseteq (B \cup D)$

答：正确，证明：对 $\forall a \in A \cup C$，则 $a \in A$ 或 $a \in C$，因为 $A \subseteq B, C \subseteq D$，因此 $a \in B$ 或 $a \in D$，因此 $a \in B \cup D$，即 $A \cup C \subseteq (B \cup D)$ 成立。

(2) 若 $A \subseteq B, C \subseteq D$，则 $A \cap C \subseteq (B \cap D)$

答：正确

(3)若 $A \subset B$， $C \subset D$，则 $A \cup C \subset (B \cup D)$

答：正确

(4) 若 $A \subset B, C \subset D$，则 $A \cap C \subset (B \cap D)$

答：不正确。例如若 $A \subset B, C \subset D$，但是 $A \cap C = \phi$， $B \cap D = \phi$，则

$\phi = A \cap C \subseteq (B \cap D) = \phi$ 。

15、 设 A,B 是两个集合，问：

(1)如果 $A - B = B$，那么 A 和 B 有什么关系？

答：因为 $A - B = B$，而 $A - B = A \cap B' = B$， 即对 $\forall a \in B$ 有 $a \in A, a \in B'$，因此

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$A = B = \phi$ 。

(2) 如果 $A - B = B - A$，那么 A 和 B 有什么关系？

答：充要条件是 $A = B$ 。证明：因为 $A - B = B - A$ 的 $(A - B) \cup A = (B - A) \cup A$，从而有 $A = A \cup B$，即 $A \subseteq B$，同理可证明 $B \subseteq A$，因此 $A = B$ 。

16、 设 A, B 是任意集合，下述论断哪些是正确的？哪些是错误的？说明理由。

(1) $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$

答：不正确。例如 $A = \{a, b\}$， $B = \{b, c\}$，则 $A \cup B = \{a, b, c\}$

$2^{A \cup B} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$2^A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$， $2^B = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$

显然 $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ 不成立。

(2) $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$

答：成立。证明：对 $\forall C \in 2^A \cap 2^B$，则 $C \in 2^A$ 且 $C \in 2^B$，则 $C \subseteq A, C \subseteq B$，则 $C \subseteq A \cap B$，因此 $C \in 2^{A \cap B}$。反之，若 $\forall C \in 2^{A \cap B}$，则 $C \subseteq A \cap B$，则 $C \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$，因此 $C \in 2^A$，且 $C \in 2^B$，因此 $C \in 2^A \cap 2^B$，即 $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ 。

(3) $2^{A'} = (2^A)'$

答：显然不成立，因为左边集合肯定含有 ϕ，而右边不含有。

17、 在一个班级的 50 个学生中，有 26 人在离散数学的考试中取得了优秀的成绩；21 人在程序设计的考试中取得了优秀的成绩。假如有 17 人在两次考试中都没有取得优秀成绩，问有多少人在两次考试中都取得了优秀成绩?

答：分别用 A, B 表示在离散和程序设计的考试中取得优秀成绩的学生集合，U 表示全体学生集合：则 $\#(A) = 26$， $\#(B) = 21$， $\#(A \cup B) = 50 - 17 = 33$，则两次考试中都取得了优秀成绩的学生人数为 26+21-33=14 人。

18、 设 A, B, C 是任意集合，运用成员表证明：

(1) $(A \cup B) \cap (A' \cup C) = (A \cap C) \cup (A' \cap B)$

证明：

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

A	B	C	A'	$A'\cup C$	$A\cup B$	$A\cap C$	$A'\cap B$	左边	右边
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1

(3) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证明：

A	B	C	$A-B$	$A-C$	$(A-B)\cap(A-C)$	$B\cup C$	$A-(B\cup C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0

由上得证左右两边相等。

19、由 S 和 T 的成员表如何判断 $S\subseteq T$？应用成员表证明或否定

$$(A\cup B)\cap(B\cup C)'\subseteq A\cap B'$$

答：先分别给出集合 $(A\cup B)\cap(B\cup C)'$ 和 $A\cap B'$ 的成员表如下：

A	B	C	$A\cup B$	$B\cup C$	$(B\cup C)'$	$(A\cup B)\cap(B\cup C)'$	B'	$A\cap B'$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

1	1	1	1	1	0	0	0	0

观察上述表格，我们发现$(A\cup B)\cap(B\cup C)'$所标记的列中，仅在第五列为 1，这意味着当元素$u\in A,u\notin B$且$u\notin C$时，$u\in(A\cup B)\cap(B\cup C)'$，而在其他情形下，元素$u\notin(A\cup B)\cap(B\cup C)'$。而集合$A\cap B'$所标记的列中，第五和第六行均为 1，这意味着$u\in A,u\notin B$且$u\notin C$时，$u\in A\cap B'$，当$u\in A,u\notin B$，且$u\in C$时，也有$u\in A\cap B'$。所以当元素$u\in(A\cup B)\cap(B\cup C)'$时也有$u\in A\cap B'$，反之不然，因此$(A\cup B)\cap(B\cup C)'\subseteq A\cap B'$成立。

20、$A_1,A_2,\cdots,A_r$为U的子集，$A_1,A_2,\cdots,A_r$至多能产生多少不同的子集？

答：构造由$A_1,A_2,\cdots,A_r$所产生的集合的成员表，显然该成员表由2^r个行所组成。在该成员表中不同的列可由2^r为的二进制数 $000\cdots0$~$1111\cdots1$ 分别表示，而不同的列所标记的集合 不相同的，因此由$A_1,A_2,\cdots,A_r$至多可以产生2^{2^r}个不同的集合。

21、证明分配律、等幂律和吸收律$9'$

1 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

证明：对$\forall a\in A\cap(B\cup C)$，则有$a\in A$且$a\in B\cup C$，即有$a\in A$，且$a\in B$或$a\in C$，也即有$a\in A\cap B$或$a\in A\cap C$，即$a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，因此左边$\subseteq$右边。

对$\forall a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则$a\in A\cap B$或$a\in A\cap C$，即$a\in A$且$a\in B$，或$a\in A$且$a\in C$，即有$a\in A$或$a\in B\cup C$，因此$a\in A\cap(B\cup C)$，因此右边$\subseteq$左边。

2 吸收律 $A\cap(A\cup B)=A$

证明：$A\cap(A\cup B)\subseteq A$显然成立，对$\forall a\in A$，则显然有$a\in A\cup B$，因此有$a\in A\cap(A\cup B)$，因此有$A\subseteq A\cap(A\cup B)$成立。

22、设A,B,C是任意集合，运用集合运算定律证明：

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(1) $B\cup((A'\cup B)\cap A)'=U$

证明：
$$\begin{aligned}&\text{左边}=B\cup(A'\cup B)'\cup A'\\&=B\cup(A\cap B')\cup A'=B\cup((A'\cup A)\cap(A'\cup B))\\&=B\cup(U\cap(A'\cup B))=B\cup(A'\cup B)=U=\text{右边}\end{aligned}$$

(2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

证明：
$$\begin{aligned}\text{左边}&=(B\cup(A\cap C))\cap(C\cup A)\\&=((C\cup A)\cap B)\cup((C\cup A)\cap(A\cap C))\\&=(C\cap B)\cup(B\cap A)\cup((A\cap C\cap A)\cup(A\cap C\cap C)\\&=(C\cap B)\cup(B\cap A)\cup(A\cap C)\cup(A\cap C)=\text{右边}\end{aligned}$$

(3) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(A\cup C)=(A\cap B)\cup(A'\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C)$

证明：
$$\begin{aligned}\text{右边}&=(B\cap((A'\cap C)\cup A))\cup(A\cap B'\cap C)\\&=(B\cap(A'\cup A)\cap(A\cup C))\cup(A\cap B'\cap C)\\&=(B\cap(A\cup C))\cup(A\cap B'\cap C)\\&=(B\cap A)\cup(B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C)\\&=(B\cap C)\cup(A\cap((B'\cap C)\cup B))\\&=(B\cap C)\cup(A\cap(B'\cup B)\cap(B\cup C))\\&=(B\cap C)\cup(A\cap(B\cup C))\\&=(B\cap C)\cup(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{aligned}$$

由上题的证明可知左边=右边，得证。

23、用得摩根定律证明$(A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C'))$补集是

$(A'\cup B)\cap(A\cup B')\cap(A\cup C)$。

证明：
$$\begin{aligned}&((A\cap B')\cup(A'\cap(B\cup C')))'\\&=((A\cap B')')\cap(A'\cap(B\cup C'))'\\&=(A'\cup B)\cap(A\cup(B\cup C')')\\&=(A'\cup B)\cap(A\cup(B'\cap C))\\&=(A'\cup B)\cap(A\cup B')\cap(A\cup C)\end{aligned}$$

24、设A_i为某些实数的集合，定义为

$$A_0=\{a\mid a<1\}$$
$$A_i=\{a\mid a\le 1-\frac{1}{i}\}\ (i=1,2,\cdots)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

试证明：$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_0$

证明：设 $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，则比存在整数 k，使得 $a \in A_k$，因此有 $a \le 1-\frac{1}{k}$，于是 $a<1$，因此 $a \in A_0$。另一方面，设 $a \in A_0$，则有 $a<1$，若 $a \le 0$，则有 $a \in A_1$，因此 $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$。若 $0<a<1$，则令 $b=1-a$，$a=1-b=1-\frac{1}{1/b}$，令 $k=\left[\frac{1}{b}\right]+1$，其中表示 $\frac{1}{b}$ 的整数部分，则有 $\frac{1}{1/b}>\frac{1}{k}$，因此 $a=1-\frac{1}{1/b}<1-\frac{1}{k}$，即 $a \in A_k$，于是 $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，因此得证。

25、设 $\{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$ 是集合 A 的一个分划，试证明 $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \cdots, A_r \cap B$ 中所有非空集合构成 $A \cap B$ 的一个分划。

证明：因为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$ 是集合 A 的一个分划，因此由分划的定义，可得 $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = A$，且 $A_i \cap A_j = \phi, i \ne j$，而 $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \phi, i \ne j$，且

$\bigcup_{i=1}^{r}(A_i \cap B) = (\bigcup_{i=1}^{r} A_i) \cap B$(分配律)$= A \cap B$，因此 $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \cdots, A_r \cap B$ 中所有非空集合构成 $A \cap B$ 的一个分划。

26、n 个元素的集合，有多少中不同的方法可以分划成两块？

答：当 n 奇数时有 $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{\frac{n+1}{2}-1}$ 种不同的方法，当 n 为偶数时有 $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n/2}$ 种不同的方法。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 2 章　　关系

1、若 $A=\{0,1\}, B=\{1,2\}$，确定集合：

(1) $A\times\{1\}\times B$　　　(2) $A^2\times B$　　　(3) $(B\times A)^2$

解：$A\times\{1\}\times B=\{(0,1,1),(0,1,2),(1,1,1),(1,1,2)\}$

$A^2\times B=\{((0,0),1),((0,1),1),((1,0),1),((1,1),1),((0,0),2),((0,1),2),((1,0),2),((1,1),2)\}$

$$(B\times A)^2=\{((0,1),(0,1)),((0,1),(0,2),((0,1),(1,1)),((0,1),(1,2))$$
$$((0,2),(0,1)),((0,2),(0,2),((0,2),(1,1)),((0,2),(1,2))$$
$$((1,1),(0,1)),((1,1),(0,2),((1,1),(1,1)),((1,1),(1,2))$$
$$((1,2),(0,1)),((1,2),(0,2),((1,2),(1,1)),((1,2),(1,2))\}$$

2、在通常的具有 X 轴和 Y 轴的笛卡尔坐标系中，若有

$$X=\{x\mid x\in R,-3\le x\le 2\}$$
$$Y=\{y\mid y\in R,-2\le y\le 0\}$$

试给出笛卡尔积 $X\times Y$ 的几何解释

解：表示横坐标 x 的范围在 $-3\le x\le 2$，纵坐标 y 的范围在 $-2\le y\le 0$ 的二维点集所构成的集合。

3、设 A，B，C 和 D 是任意的集合，证明

(1) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(2) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

(3) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\cap D)$

证明：(3) 首先，因为 $A\cap B\subseteq A$，$C\cap D\subseteq C$，所以

$$(A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq A\times C$$

类似地，$(A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq B\times D$，所以有：

$$(A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq(A\times C)\cap(B\times D)$$

反之，若 $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，则 $(x,y)\in(A\times C)$，$(x,y)\in(B\times D)$

则 $x\in A, y\in C$，且 $x\in B, y\in D$，即 $x\in A\cap B$，$y\in C\cap D$

所以，$(x,y)\in(A\cap B)\cap(C\times D)$

所以 $(A\times C)\cap(B\times D)\subseteq(A\cap B)\cap(C\times D)$

所以 $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\cap D)$

4、对下列每种情形，列出由 A 到 B 的关系 ρ 的元素，确定 ρ 的定义域和值域，

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

构造ρ的关系矩阵：

(1) $A=\{0,1,2\},B=\{0,2,4\},\rho=\{(a,b)\mid ab\in A\cap B\}$

解：$A\cap B=\{0,2\}$， $\rho=\{(0,0),(0,2),(0,4),(1,0),(2,0),(1,2)\}$

关系矩阵$M_\rho=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

(2) $A=\{1,2,3,4,5\},B=\{1,2,3\},\rho=\{(a,b)\mid a=b^2\}$

解：$\rho=\{(1,1),(4,2)\}$

关系矩阵$M_\rho=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

5、设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，对下列每一种情形，构造 A 上的关系图，并确定ρ的定义域和值域

(1) $\rho=\{(i,j)\mid i=j\}$

解：图略

$\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

定义域$D\rho=A$， $R_\rho=A$

(2) $\rho=\{(i,j)\mid i\text{整除}j\}$

解：$\rho=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

定义域$D\rho=A$， $R_\rho=A$

(3) $\rho=\{(i,j)\mid i\text{是}j\text{的倍数}\}$

解：$\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,1),(3,1)$

$(4,1),(5,1),(6,1),(4,2),(6,2),(6,3)\}$

定义域$D\rho=A$， $R_\rho=A$

(4) $\rho=\{(i,j)\mid i>j\}$

解：$\rho=\{(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)$

$(5,4),(5,3),(5,2),(5,1)$

$(4,3),(4,2),(4,1)$

$(3,2),(3,1)$

$(2,1)\}$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

定义域 $D\rho=\{6,5,4,3,2\}$， $R_\rho=\{5,4,3,2,1\}$

(5) $\rho=\{(i,j)\mid i<j\}$

解：定义域 $D\rho=\{5,4,3,2,1\}$， $R_\rho=\{6,5,4,3,2\}$

$$\rho=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\ (3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$$

(6) $\rho=\{(i,j)\mid i\neq j, ij<10\}$

解： $$\rho=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3)\\ (2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1),(6,1)\}$$

定义域 $D\rho=\{6,5,4,3,2,1\}$， $R_\rho=\{6,5,4,3,2,1\}$

(7) $\rho=\{(i,j)\mid i\neq j,(i-j)^2\in A\}$

解： $$\rho=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1)\\ (3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5)\\ (4,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

定义域 $D\rho=A$， $R_\rho=A$

(8) $\rho=\{(i,j)\mid i/j\text{是素数}\}$

解： $\rho=\{(2,1),(3,1),(5,1),(4,2),(6,3),(6,2)\}$

定义域 $D\rho=\{2,3,4,5,6\}$， $R_\rho=\{1,2,3\}$

6、设 $\rho_1=\{(1,2),(2,4),(3,3)\}$ 和 $\rho_2=\{(1,3),(2,4),(4,2)\}$，试求出 $\rho_1\cup\rho_2,\rho_1\cap\rho_2$，$D_{\rho_2}$ D_{ρ_1}， $D_{(\rho_1\cup\rho_2)}$ ，R_{ρ_1} ，R_{ρ_2} 和 $R_{(\rho_1\cap\rho_2)}$， 并证明：$D_{(\rho_1\cup\rho_2)}=D_{\rho_1}\cup D\rho_2$

$R_{(\rho_1\cap\rho_2)}\subseteq R_{\rho_1}\cap R_{\rho_2}$

解： $\rho_1\cup\rho_2=\{(1,2),(2,4),(3,3),(1,3),(4,2)\}$

$\rho_1\cap\rho_2=\{(2,4)\}$

$D_{\rho_1}=\{1,2,3\}$， $D_{\rho_2}=\{1,2,4\}$， $R_{\rho_1}=\{2,4,3\}$， $R_{\rho_2}=\{3,4,2\}$

$D_{(\rho_1\cup\rho_2)}=\{1,2,3,4\}$

$R_{(\rho_1\cap\rho_2)}=\{4\}$

证明： $D_{(\rho_1\cup\rho_2)}=D_{\rho_1}\cup D\rho_2$

设 $x\in D_{(\rho_1\cup\rho_2)}$， 则必存在 y， 使得 $(x,y)\in\rho_1\cup\rho_2$， 所以 $(x,y)\in\rho_1$ 或者

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$(x,y)\in\rho_2$，因此，$x\in D_{\rho_1}$ 或者 $x\in D_{\rho_2}$，即 $x\in D_{\rho_1}\cup D_{\rho_2}$，所以 $D_{(\rho_1\cup\rho_2)}\subseteq D_{\rho_1}\cup D\rho_2$；

反之，设 $x\in D_{\rho_1}\cup D\rho_2$，则 $x\in D_{\rho_1}$ 或者 $x\in D_{\rho_2}$，所以存在 y_1，使得 $(x,y_1)\in\rho_1$，或者存在 y_2，使得 $(x,y_2)\in\rho_2$，由并集的定义知，$(x,y_1)\in\rho_1\cup\rho_2$，或者 $(x,y_2)\in\rho_1\cup\rho_2$，总之有 $x\in D_{\rho_1\cup\rho_2}$，故 $D_{\rho_1}\cup D_{\rho_2}\subseteq D_{(\rho_1\cup\rho_2)}$。

证明：$R_{(\rho_1\cap\rho_2)}\subseteq R_{\rho_1}\cap R_{\rho_2}$

设 $y\in R_{\rho_1\cap\rho_2}$，则必存在 x，使得 $(x,y)\in\rho_1$，$(x,y)\in\rho_2$，因此 $b\in R_{\rho_1}$ 且 $b\in R_{\rho_2}$，由交集的定义 $b\in R_{\rho_1}\cap R_{\rho_1}$，故 $R_{(\rho_1\cap\rho_2)}\subseteq R_{\rho_1}\cap R_{\rho_2}$。

7、A_1 和 A_2 是分别具有基数 n_1 和 n_2 的有限集，试问有多少个 A_1 到 A_2 的不同关系？

答：$A_1\times A_2$ 的所有子集都是 A_1 到 A_2 的一个关系，所以共有 $2^{\#(A_1\times A_2)}$ 个不同的关系。

8、找出集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 上普遍关系和恒等关系的关系矩阵和关系图的特征。

答：A 上的普遍关系 $\rho=A^2$ 的关系矩阵是全 1 矩阵，而恒等关系的关系矩阵是单位矩阵。

9、下列是集合 $A=\{0,1,2,3\}$ 上的关系：$\rho_1=\{(i,j)\mid j=i+1或者j=i/2\}$，$\rho_2=\{(i,j)\mid i=j+2\}$，试确定如下的复合关系：

（1）$\rho_1\cdot\rho_2$　（2）$\rho_2\cdot\rho_1$　（3）$\rho_1\cdot\rho_2\cdot\rho_1$　（4）ρ_1^3

解：（1）$\rho_1=\{(0,1),(1,2),(2,3),(0,0),(2,1)\}$，$\rho_2=\{(2,0),(3,1)\}$

$\rho_1\cdot\rho_2=\{(1,0),(2,1)\}$

（2）$\rho_2\cdot\rho_1=\{(2,1),(2,0),(3,1)\}$

（3）$\rho_1\cdot\rho_2\cdot\rho_1=\{(1,1),(1,0),(2,2)\}$

（4）$\rho_1^2=\{(0,2),(1,3),(1,1),(0,1),(0,0),(2,2)\}$

$\rho_1^3=\{(0,3),(0,1),(1,2),(0,2),(0,0),(0,1),(2,3),(2,1)\}$

10、设 ρ_1,ρ_2,ρ_3 是集合 A 上的关系，试证明：如果 $\rho_1\subseteq\rho_2$，则有：

（1）$\rho_1\cdot\rho_3\subseteq\rho_2\cdot\rho_3$　（2）$\rho_3\cdot\rho_1\subseteq\rho_3\cdot\rho_2$　（3）$\tilde{\rho}_1\subseteq\tilde{\rho}_2$

证明：（1）对 $\forall(x,y)\in\rho_1\cdot\rho_3$，由复合关系的定义，$\exists\, z\in A$，使得，$(x,z)\in\rho_1$，$(z,y)\in\rho_3$，因为 $\rho_1\subseteq\rho_2$，所以 $(x,z)\in\rho_2$，所以 $(x,y)\in\rho_2\cdot\rho_3$，所以 $\rho_1\cdot\rho_3\subseteq\rho_2\cdot\rho_3$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

（2）对$\forall(x,y)\in\rho_3\cdot\rho_1$，由复合关系的定义，$\exists z\in A$，使得，$(x,z)\in\rho_3$，$(z,y)\in\rho_1$，因为$\rho_1\subseteq\rho_2$，所以$(z,y)\in\rho_2$，所以$(x,y)\in\rho_3\cdot\rho_2$，所以$\rho_3\cdot\rho_1\subseteq\rho_3\cdot\rho_2$。

（3）对$\forall(x,y)\in\tilde{\rho_1}$，有$(y,x)\in\rho_1$，因为$\rho_1\subseteq\rho_2$，所以$(y,x)\in\rho_2$，所以$(x,y)\in\tilde{\rho_2}$，也即$\tilde{\rho_1}\subseteq\tilde{\rho_2}$。

11、给定$\rho_1=\{(0,1),(1,2),(3,4)\}$，$\rho_1\cdot\rho_2=\{(1,3),(1,4),(3,3)\}$求一个基数最小的关系，使满足$\rho_2$的条件。一般地说，若给定$\rho_1$和$\rho_1\cdot\rho_2$，$\rho_2$能被唯一的确定吗？基数最小的$\rho_2$能被唯一确定吗？

答：$\rho_2=\{(2,3),(2,4),(4,3)\}$。一般地说，若给定$\rho_1$和$\rho_1\cdot\rho_2$，$\rho_2$不能被唯一的确定。基数最小的$\rho_2$也不能被唯一确定。

12、给定集合A_1,A_2,A_3，设ρ_1是由A_1到A_2得关系，ρ_2和ρ_3是由A_2到A_3得关系，试证明：

（1）$\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)=(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)$

证明：根据并集和复合关系的定义，$\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)$和$(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)$都是$A_1$到$A_3$上的关系，下只需要证明它们由完全相同的序偶组成。

设$(a,c)\in\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)$，必存在$b\in A_2$，使得$(a,b)\in\rho_1$，$(b,c)\in\rho_2\cup\rho_3$，所以有$(b,c)\in\rho_2$或者$(b,c)\in\rho_3$，所以有$(a,c)\in\rho_1\cdot\rho_2$或者$(a,c)\in\rho_1\cdot\rho_3$，也即$(a,c)\in(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)$，也即$\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)\subseteq(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)$；反之，若$(a,c)\in(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)$，也即$(a,c)\in(\rho_1\cdot\rho_2)$或者$(a,c)\in(\rho_1\cdot\rho_3)$，若$(a,c)\in(\rho_1\cdot\rho_2)$，则存在$b\in A_2$，使得$(a,b)\in\rho_1$，$(b,c)\in\rho_2$，则$(a,b)\in\rho_1$，$(b,c)\in\rho_2\cup\rho_3$，则$(a,c)\in\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)$，若$(a,c)\in(\rho_1\cdot\rho_3)$同理可得，因此有$(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)\subseteq\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)$。则$\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)=(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)$。

（2）$\rho_1\cdot(\rho_2\cap\rho_3)\subseteq(\rho_1\cdot\rho_2)\cap(\rho_1\cap\rho_3)$

证明：设$(a,c)\in\rho_1\cdot(\rho_2\cap\rho_3)$，则存在$b\in A_2$，使得，$(a,b)\in\rho_1$，$(b,c)\in\rho_2\cap\rho_3$，则$(b,c)\in\rho_2$，且$(b,c)\in\rho_3$，所以$(a,c)\in\rho_1\cdot\rho_2$，且$(a,c)\in\rho_1\cdot\rho_3$，即$(a,c)\in(\rho_1\cdot\rho_2)\cap(\rho_1\cdot\rho_3)$，所以$\rho_1\cdot(\rho_2\cap\rho_3)\subseteq(\rho_1\cdot\rho_2)\cap(\rho_1\cap\rho_3)$。

13、给定$\rho=\{(i,j)\mid i,j\in I,j-i=1\},\rho^n$是什么？

答：$I=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$，$\rho=\{\cdots,(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\cdots\}$

$\rho^2=\{\cdots,(-3,-1),(-2,0),(0,2),(1,3),(2,4),(3,5),\cdots\}$，则$\rho^n=\{(i,j)\mid i,j\in I,j-i=n\}$

14、对第9题中的关系，构造关系矩阵

（1）M_{ρ_1}　　（2）M_{ρ_1}

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解： $\rho_1=\{(0,1),(1,2),(2,3),(0,0),(2,1)\}$ $\rho_2=\{(2,0),(3,1)\}$

$$M_{\rho_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\qquad M_{\rho_1}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(3) $M_{\rho_2\cdot\rho_1}$

解： $\rho_2\cdot\rho_1=\{(2,1),(2,0),(3,1)\}$

$$M_{\rho_2\cdot\rho_1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

15、设 A 是有 n 个元素的有限集，ρ 是 A 上的关系，试证明必存在两个正整数 k,t，使得 $\rho^k=\rho^t$。

证明：因为 ρ 是 A 上的关系，所以对于任意正整数 r，ρ^r 也是 A 上的关系，另一方面，因为 $\#(A)=n$，所以 $\#(A\times A)=n^2$，$\#(2^{A\times A})=2^{\#(A\times A)}=2^{n^2}$，也即 A 上只有 2^{n^2} 个不同的关系，因此在关系 $\rho,\rho^2,\rho^3,\cdots,\rho^{2^{n^2}},\rho^{2^{n^2}+1}$ 中必有两个是相同的，也即存在两个正整数 k,t，使得 $\rho^k=\rho^t$，其中 $1\le k<t\le 2^{n^2}+1$。

16、设 ρ_1 是由 A 到 B 的关系，ρ_2 是由 B 到 C 的关系，试证明 $\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}=\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$。

证明：由题设知道 $\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$ 和 $\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$ 都是由 C 到 A 的关系，因此只要证明它们由完全相同的序偶组成。设 $(c,a)\in\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$，则 $(a,c)\in\rho_1\cdot\rho_2$，因此必存在元素 $b\in B$，使得 $(a,b)\in\rho_1$，$(b,c)\in\rho_2$，所以 $(b,a)\in\tilde{\rho}_1$，$(c,b)\in\tilde{\rho}_2$，所以 $(c,a)\in\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$。反之，设 $(c,a)\in\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$，则必存在元素 $b'\in B$，使得 $(c,b')\in\tilde{\rho}_2$，$(b',a)\in\tilde{\rho}_1$，所以 $(a,b')\in\rho_1$，$(b',c)\in\rho_2$，所以 $(a,c)\in\rho_1\cdot\rho_2$，所以 $(c,a)\in\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$，所以 $\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}=\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$。

17、（1）设 ρ_1 和 ρ_2 是由 A 到 B 的关系，问 $\widetilde{\rho_1\cup\rho_2}=\tilde{\rho}_1\cup\tilde{\rho}_2$ 成立吗？

答：成立

（2）设 ρ 是集合 A 上的关系，如果 ρ 是自反的，则 $\tilde{\rho}$ 一定是自反的吗？

答：是的。证明：若 ρ 是自反的，则对所有的 $a\in A$，有 $(a,a)\in\rho$，则一定有 $(a,a)\in\tilde{\rho}$，则 $\tilde{\rho}$ 也是自反的。

（3）若 ρ 是对称的，则 $\tilde{\rho}$ 也是对称的吗？　答：是的。

（4）若 ρ 是可传递的，则 $\tilde{\rho}$ 也是可传递的吗？答：是的

证明：若 ρ 是可传递的，由定义可知，若 $(x,y)\in\rho$，$(y,z)\in\rho$，则一定有 $(x,z)\in\rho$，由逆关系的定义，也即，若 $(y,x)\in\tilde{\rho}$，$(z,y)\in\tilde{\rho}$，一定有 $(z,x)\in\tilde{\rho}$,，则 $\tilde{\rho}$ 也是可传递的。

18、图 2-9 给出了集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系 ρ 的关系图，试画出关系 ρ^5 和 ρ^8 的

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

图，并利用关系图求出

解：

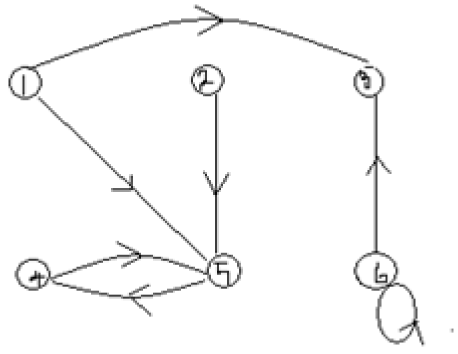


图 2-9

关系 $\rho=\{(1,3),(1,5),(2,5),(4,5),(5,4),(6,3),(6,6)\}$

$\rho^2=\{(1,4),(2,4),(4,4),(5,5),(6,3),(6,6)\}$

$\rho^3=\{(1,5),(2,5),(4,5),(5,4),(6,3),(6,6)\}$

$\rho^4=\{(1,4),(2,4),(4,4),(5,5),(6,3),(6,6)\}$

因为 $\rho^4=\rho^2$，所以 $\rho^5=\rho^3$， $\rho^8=\rho^2$

传递闭包 $\rho^+=\rho\cup\rho^2\cup\rho^3$

19、试证明：若 ρ 是基数为 n 的集合 A 上的一个关系，则 ρ 的传递闭包为 $\rho^+=\bigcup_{i=1}^{n}\rho^i$

证明：由定义 $\rho^+=\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$，要证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i=\bigcup_{i=1}^{n}\rho^i$，因为 $\bigcup_{i=1}^{n}\rho^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$，所以只要证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\rho^i$ 即可。设 $(a,b)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$，则必存在正整数 k，使得 $(a,b)\in\rho^k$，若 $k\le n$，则 $(a,b)\in\bigcup_{i=1}^{n}\rho^i$，若 $k>n$，则在 A 中必存在 $k-1$ 个元素 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{k-1}}$，使得：

$$a\rho a_{i_1},a_{i_1}\rho a_{i_2},\cdots,a_{i_{k-1}}\rho b$$

因为 $k>n$，所以在 $a,a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{k-1}},b$ 这 $k+1$ 个元素中必有两个元素 $a_{i_r}=a_{i_t}$（$0\le r<t\le k$，记 a 为 a_{i_0}，记 b 为 a_{i_k}），因此下述关系

$$a\rho a_{i_1},\cdots,a_{i_{r-1}}\rho a_{i_r},a_{i_t}\rho a_{i_{t+1}},\cdots,a_{i_{k-1}}\rho b$$

成立，这表明 $a\rho^k b$， $k_1=k-(t-r),k_1<k$。若 $k_1>n$，用类似的方法又可找到 $k_2<k_1$，使 $a\rho^{k_2}b,\cdots$，最后必可找到一正整 h，使 $a\rho^h b$ 且 $h\le n$，因此 $(a,b)\in\bigcup_{i=1}^{n}\rho^i$，故 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\rho^i$。

20、下列关系中哪一个是自反的、对称的、反对称的或者可传递的？

（1）当且仅当 $|i_1-i_2|\le 10(i_1,i_2\in I)$ 时，有 $i_1\rho i_2$；

答：是自反的，对称的，非可传递的，例如 $13\rho 9$， $9\rho 1$，但 $13\rho 1$ 不成立。

（2）当且仅当 $n_1n_2>8(n_1,n_2\in N)$ 时，有 $n_1\rho n_2$；

答：非自反的，因为 $1\rho 1$ 不成立，但 $1\in N$。对称的，非可传递的，因为 $1\rho 10$，$10\rho 2$，

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

但是$1\rho 2$不成立。

（3）当且仅当$r_1 \le |r_2| (r_1, r_2 \in R)$时，有$r_1 \rho r_2$。

答：自反的，非对称的，非可传递的，因为$5\rho(-8)$，$-8\rho 1$，但是$5\rho 1$不成立。

21、设ρ_1和ρ_2是集合A上的任意两个关系，判断下列命题是否正确，并说明理由：

（1）若ρ_1和ρ_2是自反的，则$\rho_1 \cdot \rho_2$也是自反的；

答：正确。因为ρ_1和ρ_2是自反的，因此对任意$a \in A$，有$a\rho_1 a, a\rho_2 a$，因此$a\rho_1\rho_2 a$，所以$\rho_1 \cdot \rho_2$也是自反的。

（2）若ρ_1和ρ_2是非自反的，则$\rho_1 \cdot \rho_2$也是非自反的；

答：错误；例如$A=\{a,b,c\}$，$\rho_1=\{(a,a),(b,b),(c,a)\}$，$\rho_2=\{(a,a),(b,b),(a,c)\}$，$\rho_1$和$\rho_2$都是非自反的，但是$\rho_1 \cdot \rho_2=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$是自反的。

（3）若ρ_1和ρ_2是对称的，则$\rho_1 \cdot \rho_2$也是对称的；

答：错误，设$A=\{a,b,c\}$，$\rho_1=\{(a,b),(b,a)\}$，$\rho_2=\{(a,c),(c,a)\}$，显然ρ_1和ρ_2是对称的，但是$\rho_1 \cdot \rho_2=\{(b,c)\}$是非对称的。

（4）若ρ_1和ρ_2是反对称的，则$\rho_1 \cdot \rho_2$也是反对称的；

答：错误，设$A=\{a,b,c\}$，$\rho_1=\{(a,b),(c,c)\}$，$\rho_2=\{(b,c),(c,a)\}$，显然ρ_1和ρ_2是反对称的，但是$\rho_1 \cdot \rho_2=\{(a,c),(c,a)\}$不是对称的。

（5）若ρ_1和ρ_2是可传递的，则$\rho_1 \cdot \rho_2$也是可传递的；

答：错误，设$A=\{a,b,c\}$，$\rho_1=\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$，$\rho_2=\{(b,c),(c,a),(b,a)\}$，显然$\rho_1$ ρ_2是可传递的，但是$\rho_1 \cdot \rho_2=\{(a,c),(a,a),(b,a)\}$却是不可传递的。

22、证明若ρ是对称的，则对任何整数$k \ge 1$，ρ^k也是对称的。

证明：数学归纳法，当$k=2$时，若$(a,b)\in\rho^2$，则根据复合关系的定义，存在元素c，使得$(a,c)\in\rho,(c,b)\in\rho$，因为$\rho$是对称的，所以$(c,a)\in\rho,(b,c)\in\rho$，所以$(b,a)\in\rho^2$，因此$\rho^2$是对称的，假设当$n=k$时成立，则当$n=k+1$时，若$(a,b)\in\rho^{k+1}$，则存在元素$c_1$，使得$(a,c_1)\in\rho^k,(c_1,b)\in\rho$，因为$\rho$和$\rho^k$是对称的，因此$(c_1,a)\in\rho^k,(b,c_1)\in\rho$，所以$(b,a)\in\rho^{k+1}$，因此：

$n=k+1$ 时成立，即得证。

23、已知$A=\{1,2,3,4\}$和定义在A上的关系$\rho=\{(1,2),(4,3),(2,2),(2,1),(3,1)\}$，试证明$\rho$不是可传递的。求出一个关系$\rho_1 \supseteq \rho$，使得$\rho_1$是可传递的，你能求出另一个关系$\rho_2 \supseteq \rho$也是可传递的嘛？

答：证明：ρ显然不是可传递的，因为$(1,2)\in\rho$，$(2,1)\in\rho$，但是$(1,1)\notin\rho$。

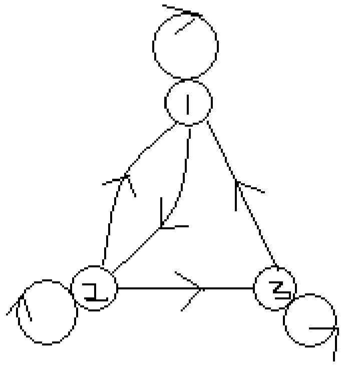
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$\rho_1 = \{(1,2),(4,3),(2,2),(2,1),(3,1),(1,1),(4,1),(4,2)\}$，能找出另一个关系。

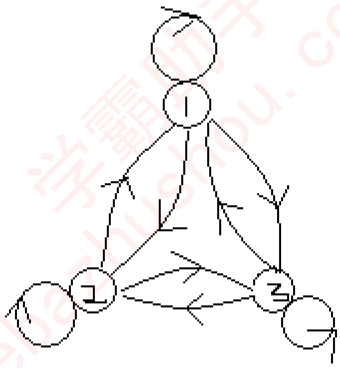
$\rho_1 = \{(1,2),(4,3),(2,2),(2,1),(3,1),(1,1),(4,1),(4,2),(3,3)\}$。

24、图 2-10 表示在 $\{1,2,3\}$ 上的 12 个关系的关系图。试对每一个这样的图，确定其表示的关系是自反的还是非自反的；是对称，非对称还是反对称；是可传递的还是不可传递的？

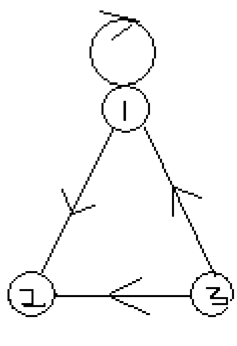
答：



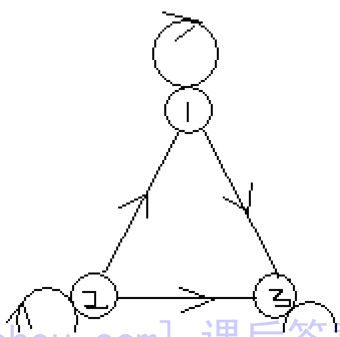
自反的、非对称的、非反对称的，非可传递的



自反的、对称的，非反对称的、可传递的



非自反的、非对称的、反对称的、可传递的

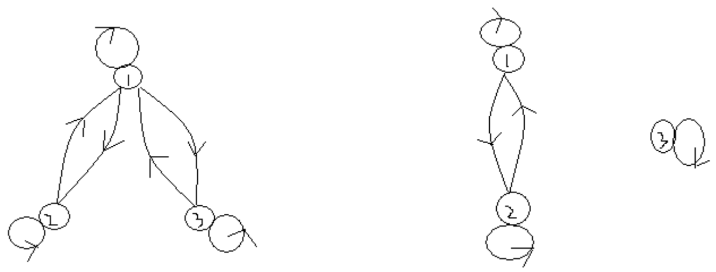


学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

自反的、非对称的、反对称的、可传递的

25、图 2-11 给出了 $\{1,2,3\}$ 上的两个关系的关系图，这些关系是等价的吗？

答：



(a) (b)

答：图(a)表示的关系 $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$ 具有自反性，对称性，但是不具有传递性，因为有 $(2,1),(1,3)\in\rho$，但是 $(2,3)\notin\rho$，因此不是等价关系。

图(b)表示的关系 $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$，具有自反性，对称性，传递性，因此是等价关系。

26、在 N 上的关系 ρ 定义为当且仅当 n_i/n_j 可以用形式 2^m 表示时，有 $n_i\rho n_j$，这里 m 是任意整数：

(1)证明 ρ 是等价关系

证明：对 $\forall n\in N$， $n/n=1=2^0$，因此 $n\rho n$，所以关系 ρ 具有自反性。

对 $i,j\in N$，若 $i\rho j$，即存在 m，使得 $i/j=2^m$，则有 $j/i=2^{-m}$，因此有 $j\rho i$。所以关系 ρ 具有对称性。

对 $i,j,k\in N$，若 $i\rho j$，且 $j\rho k$，即存在 m_1,m_2，使得 $i/j=2^{m_1}$， $j/k=2^{m_2}$，则 $i/k=2^{m_1+m_2}$，因此有 $i\rho k$，所以关系 ρ 具有传递性。

综上可得关系 ρ 是等价关系。

(2) 找出 ρ 的所有等价类

答：

$[1]_\rho=\{1,2,4,8,16,\cdots\}=\{2^k,k=0,1,2,3,4,\cdots\}$

……

$[3]_\rho=\{3,6,12,24,\cdots\}=\{3\cdot 2^k,k=0,1,2,3,4,\cdots\}$

$[5]_\rho=\{5,10,20,40,\cdots\}=\{5\cdot 2^k,k=0,1,2,3,4,\cdots\}$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$\pi_{\rho}^{N}=\{[1]_{\rho},[3]_{\rho},[5]_{\rho},\cdots,[2k+1]_{\rho}\cdots\}$

27、有人说，集合 A 上的关系 ρ，如果是对称的且可传递的，则它也是自反的，其理由是，从 $a_i\rho a_j$，由对称性得 $a_j\rho a_i$，再由可传递性便得 $a_i\rho a_i$。

答：这种说法是错误的。例如，$A=\{1,2,3\}$，$\rho=\{(1,2),(2,1),(1,1)\}$，显然 ρ 是对称的，且 ρ 是可传递的，但是它不是自反的。

28、设有集合 A 和 A 上的关系 ρ，对于所有的 $a_i,a_j,a_k\in A$，若由 $a_i\rho a_j$ 和 $a_j\rho a_k$ 可推得 $a_k\rho a_i$，则称关系 ρ 是循环的，试证明当且仅当 ρ 是等价关系时，ρ 是自反且循环的。

证明：先证充分性

若 ρ 是等价关系，则 ρ 是自反的，对称的，可传递的。对于所有的 $a_i,a_j,a_k\in A$，若 $a_i\rho a_j$ 且 $a_j\rho a_k$，则 $a_i\rho a_k$，由对称性则有 $a_k\rho a_i$，因此关系 ρ 是循环的。

再证必要性

若对于所有的 $a_i,a_j,a_k\in A$，若有 $a_i\rho a_j$，又由自反性，有 $a_j\rho a_j$，则由 ρ 是循环的，可得 $a_j\rho a_i$ 成立，即 ρ 具有对称性。

若对于所有的 $a_i,a_j,a_k\in A$，若由 $a_i\rho a_j$ 和 $a_j\rho a_k$，由 ρ 是循环的有 $a_k\rho a_i$，由对称性可得 $a_i\rho a_k$，因此 ρ 具有可传递性。

又由 ρ 是自反的，则 ρ 是等价的。

29、设 ρ_1 和 ρ_2 是 A 上的等价关系，试证明：当且仅当 $\pi_{\rho_1}^{A}$ 中的每一等价类都包含于 $\pi_{\rho_2}^{A}$ 的某一等价类中时，有 $\rho_1\subseteq\rho_2$。

证明：先证充分性

设 $\pi_{\rho_1}^{A}$ 中的每一个等价类都包含于 $\pi_{\rho_2}^{A}$ 的某一个等价类中，对任一 $(a_i,a_j)\in\rho_1$，有 $a_i\rho_1 a_j$，因此 $a_i\in[a_i]_{\rho_1},a_j\in[a_i]_{\rho_1}$。又由假设必有某元素 $b\in A$ 存在，使得 $[a_i]_{\rho_1}\subseteq[b]_{\rho_2}$，因此有 $a_i\in[b]_{\rho_2}$，$a_j\in[b]_{\rho_2}$，所以 $(a_i,a_j)\in\rho_2$，故有 $\rho_1\subseteq\rho_2$。

再证必要性：

设 $\rho_1\subseteq\rho_2$，并设 $[a_i]_{\rho_1}$ 是 $\pi_{\rho_1}^{A}$ 中任一等价类，对任一 $x\in[a_i]_{\rho_1}$，有 $a_i\rho_1 x$，即 $(a_i,x)\in\rho_1$，由假设 $(a_i,x)\in\rho_2$，即 $x\in[a_i]_{\rho_2}$，故有 $[a_i]_{\rho_1}\subseteq[a_i]_{\rho_2}$。

30、已知 ρ_1 和 ρ_2 是集合 A 上分别有秩 r_1 和 r_2 的等价关系，试证明 $\rho_1\cap\rho_2$ 也是 A 上的等价关系，它的秩最多为 r_1r_2，再证明 $\rho_1\cup\rho_2$ 不一定是 A 上的等价关系。

证明：由交集的定义 $\rho_1\cap\rho_2=\{(a,b)\,|\,(a,b)\in\rho_1\text{且}(a,b)\in\rho_2\}$

对于 $\forall a\in A$，因为 ρ_1,ρ_2 都是自反的，所以 $(a,a)\in\rho_1$，且 $(a,a)\in\rho_2$，因为

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$(a,a)\in\rho_1\cap\rho_2$，所以 $\rho_1\cap\rho_2$ 是自反的。

对于 $\forall a,b\in A$，若 $(a,b)\in\rho_1\cap\rho_2$，则 $(a,b)\in\rho_1$，$(a,b)\in\rho_2$，由 ρ_1 和 ρ_2 的对称性知 $(b,a)\in\rho_1$，且 $(b,a)\in\rho_2$，因而有 $(b,a)\in\rho_1\cap\rho_2$，故 $\rho_1\cap\rho_2$ 是对称的。

对于 $\forall a,b,c\in A$，若 $(a,b)\in\rho_1\cap\rho_2$，$(b,c)\in\rho_1\cap\rho_2$，则有 $(a,b)\in\rho_1$，$(b,c)\in\rho_1$，$(a,b)\in\rho_2$，$(b,c)\in\rho_2$，由 ρ_1,ρ_2 的传递性知 $(a,c)\in\rho_1$，$(a,c)\in\rho_2$，因而 $(a,c)\in\rho_1\cap\rho_2$，故 $\rho_1\cap\rho_2$ 是可传递的。所以 $\rho_1\cap\rho_2$ 也是 A 上的等价关系。

对于 $\rho_1\cup\rho_2$，由并集的定义知 $\rho_1\cup\rho_2=\{(a,b)\mid(a,b)\in\rho_1\text{或者}(a,b)\in\rho_2\}$

对于 $\forall a\in A$，因为 ρ_1 是自反的，所以 $(a,a)\in\rho_1$，因而 $(a,a)\in\rho_1\cup\rho_2$，所以 $\rho_1\cup\rho_2$ 是自反的。对于 $\forall a,b\in A$，若 $(a,b)\in\rho_1\cup\rho_2$，则 $(a,b)\in\rho_1$ 或者 $(a,b)\in\rho_2$，由于 ρ_1 和 ρ_2 都是对称的，因此有 $(b,a)\in\rho_1$ 或者 $(b,a)\in\rho_2$，因而有 $(b,a)\in\rho_1\cup\rho_2$，故 $\rho_1\cup\rho_2$ 也是对称的。

对于任意的 $a,b,c\in A$，若 $(a,b)\in\rho_1\cup\rho_2$，$(b,c)\in\rho_1\cup\rho_2$，则 $(a,b)\in\rho_1$ 或者 $(a,b)\in\rho_2$；$(b,c)\in\rho_1$ 或者 $(b,c)\in\rho_2$，因为 (a,b) 和 (b,c) 不一定能同时属于 ρ_1，也不一定能同时属于 ρ_2，所以无法推出 $(a,c)\in\rho_1$ 或者 $(a,c)\in\rho_2$，因而也就无法推出 $(a,c)\in\rho_1\cup\rho_2$，这说明 $\rho_1\cup\rho_2$ 的可传递性不一定能成立，因此推不出 $\rho_1\cup\rho_2$ 是 A 上的等价关系。

反例：设 $A=\{1,2,3\}$，A 上的关系 $\rho_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$，$\rho_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$，显然 ρ_1 和 ρ_2 均是等价关系。$\rho_1\cup\rho_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1),(1,2),(2,1)\}$，这里 $\rho_1\cup\rho_2$ 是自反的，对称的，但是不可传递的。

31、设 ρ_1 是集合 A 上的一个关系，$\rho_2=\{(a,b)\mid\text{存在}c,\text{使}(a,c)\in\rho_1\text{且}(c,b)\in\rho_1\}$。试证明：若 ρ_1 是一个等价关系，则 ρ_2 也是一个等价关系。

证明：因为 ρ_1 是自反的，因此对 $\forall a\in A$，有 $(a,a)\in\rho_1$，由 $(a,a)\in\rho_1$，因此有 $(a,a)\in\rho_2$，故 ρ_2 是自反的。

对于任意的 $a,b\in A$，若 $(a,b)\in\rho_2$，则必有元素 $c\in A$，使得 $(a,c)\in\rho_1$ 且 $(c,b)\in\rho_1$，由 ρ_1 的对称性又有 $(b,c)\in\rho_1$ 且 $(c,a)\in\rho_1$，因而有 $(b,a)\in\rho_2$，故 ρ_2 是对称的。

对任意的 $a,b,c\in A$，若 $(a,b)\in\rho_2$，$(b,c)\in\rho_2$，则必有元素 $d,e\in A$，使得：

$$(a,d)\in\rho_1,(d,b)\in\rho_1$$

$$(b,e)\in\rho_1,(e,c)\in\rho_1$$

由 ρ_1 的可传递性，又有 $(a,b)\in\rho_1$，$(b,c)\in\rho_2$，于是又有 $(a,c)\in\rho_2$，故 ρ_2 是可传递的。

由上得证 ρ_2 是一个等价关系。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

32、设 A 是由 4 个元素组成的集合，试问在 A 上可以定义多少个不同的等价关系？

答：根据等价关系与分划一一对应，将 A 分划为一块：有一种方法，将 A 分划为两块：2+2 方式有 $1/2\,C_4^2$ 种，1+3 方式有 C_4^1 种

将 A 分划为三块：只能是 1+1+2 方式，有 C_4^2 种

将 A 分划为四块：有一种方法

因此集合 A 上不同等价关系的个数为 15 种。

33、设 ρ_1 和 ρ_2 是集合 A 上的等价关系，下列各式哪些是 A 上的等价关系？为什么？

(1) $(A\times A)-\rho_1$

答：不是等价关系，因为不具有自反性

(2) $\rho_1-\rho_2$

答：不是等价关系，因为不具有自反性

(3) ρ_1^2

答：是等价关系，证明如下：ρ_1 是自反的，ρ_1^2 显然也是自反的。若 $(a,b)\in\rho_1^2$，则有复合关系的定义，存在 $c\in A$，使得 $(a,c)\in\rho_1$，$(c,b)\in\rho_1$，由 ρ_1 的对称性有 $(c,a)\in\rho_1$，$(b,c)\in\rho_1$，由复合关系的定义有 $(b,a)\in\rho_1^2$，因此 ρ_1^2 是对称的。若 $(a,b),(b,c)\in\rho_1^2$，由复合关系的定义，

$$\exists d\in A,(a,d)\in\rho_1,(d,b)\in\rho_1$$
$$\exists e\in A,(b,e)\in\rho_1,(e,c)\in\rho_1$$

由对称性，$(d,a)\in\rho_1,(b,d)\in\rho_1\Rightarrow(b,a)\in\rho_1$，

$(e,b)\in\rho_1,(c,e)\in\rho_1\Rightarrow(c,b)\in\rho_1$

所以 $(c,a)\in\rho_1^2$，由 ρ_1^2 的对称性，$(a,c)\in\rho_1^2$，因此 ρ_1^2 具有传递性。因此 ρ_1^2 是 A 上的等价关系。

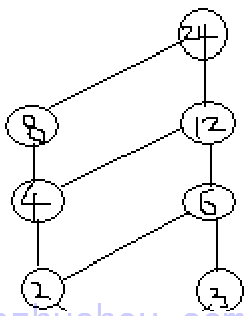
(4) $r(\rho_1-\rho_2)$

答：不一定是 A 上的等价关系。例如 $A=\{1,2,3\}$，$\rho_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$，$\rho_1$ 为 A 上的普遍关系，则 $r(\rho_1-\rho_2)=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$ 不具有传递性，因为 $(2,1),(1,3)\in r(\rho_1-\rho_2)$，但是 $(2,3)\notin r(\rho_1-\rho_2)$。

34、对于下列集合中的'整除'关系，画出次序图：

(1) $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

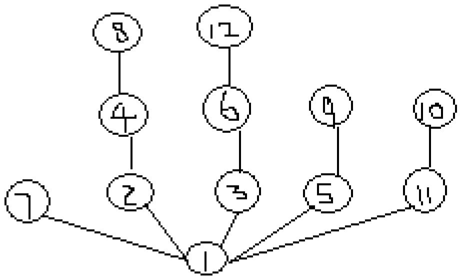
答：



学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2) {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

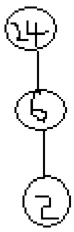
答：



35、对于下列集合，画出偏序关系'整除'的次序图，并指出哪些是全序

(1) {2,6,24}

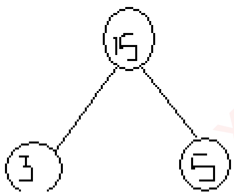
答：



是全序

(2) {3,5,15}

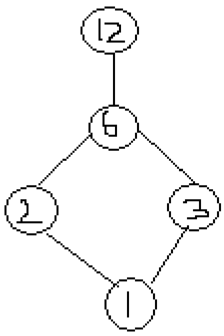
答：



非全序

(3) {1,

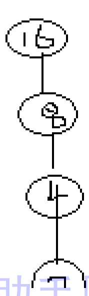
答：



非全序

(4) {2,4,8,16}

答：

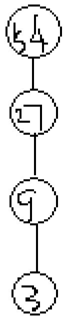


学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

是全序

(5) $\{3,9,27,54\}$

答：



是全序

36、如果 ρ 是集合 A 中的偏序关系，且 $B \subseteq A$，试证明：$\rho \cap (B \times B)$ 是 B 上的偏序关系。

证明：对任意的 $a \in B$，必有 $(a,a) \in B \times B$，又因为 $a \in A$ 及 ρ 的自反性，所以 $(a,a) \in \rho$，因此 $(a,a) \in \rho \cap (B \times B)$，故 $\rho \cap (B \times B)$ 是自反的。

对任意的 $a,b \in B$，若 $(a,b) \in \rho \cap (B \times B)$，且 $(b,a) \in \rho \cap (B \times B)$，则有 $(a,b) \in \rho$，且 $(b,a) \in \rho$，由 ρ 的反对称性，有 $a = b$，因此 $\rho \cap (B \times B)$ 是反对称的。

对任意的 $a,b,c \in B$，若 $(a,b) \in \rho \cap (B \times B)$，$(b,c) \in \rho \cap (B \times B)$，则 $(a,b) \in \rho$，且 $(b,c) \in \rho$，由 ρ 的可传递性必有 $(a,c) \in \rho$，由 $B \times B$ 的定义，$(a,c) \in B \times B$，于是 $(a,c) \in \rho \cap (B \times B)$，因此 $\rho \cap (B \times B)$ 是可传递的，由上得证 $\rho \cap (B \times B)$ 是 B 上的偏序关系。

37、 给出一个集合 A 的例子，使得包含关系 $\subseteq$ 是幂集 2^A 上的一个全序。

答：$A = \{1,2,3\}$，$2^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

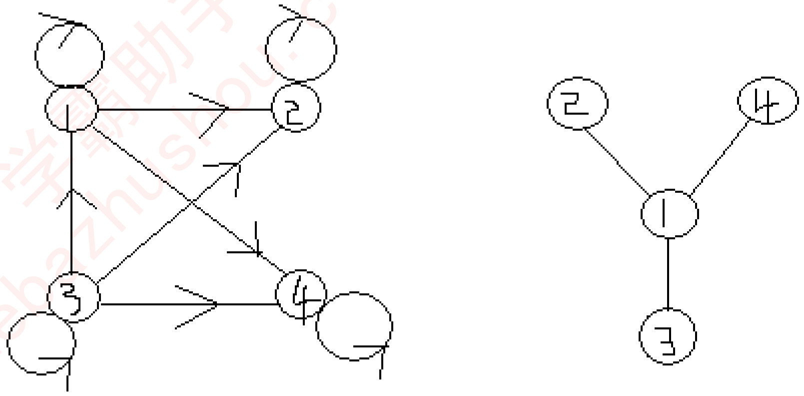
2^A 上的关系 $\rho = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$。

38、给出一个关系，使它既是某一集合上的偏序关系又是等价关系

答：$A = \{1,2,3\}$，$\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$，显然 ρ 具有自反性，对称性，可传递性，还具有反对称性，因此既是 A 上的；偏序关系，也是等价关系。

39、图 2-12 表示 $\{1,2,3,4\}$ 上的四个偏序关系图。画出每一个的次序图，并指出其中哪些是全序，哪些是良序

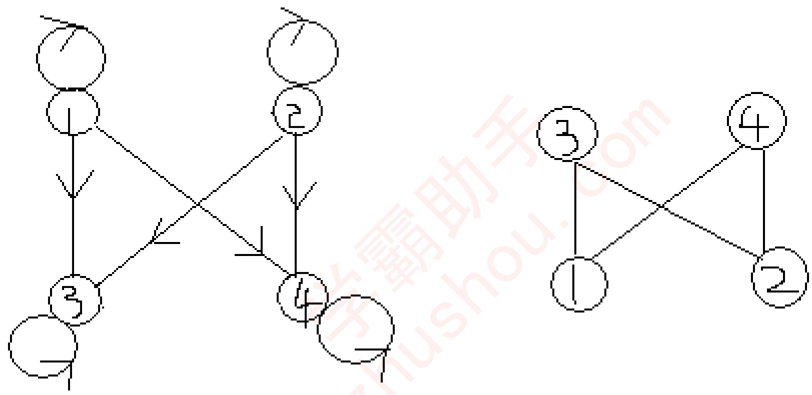
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲



(a)

$\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(3,2),(3,1),(3,4),(1,4)\}$

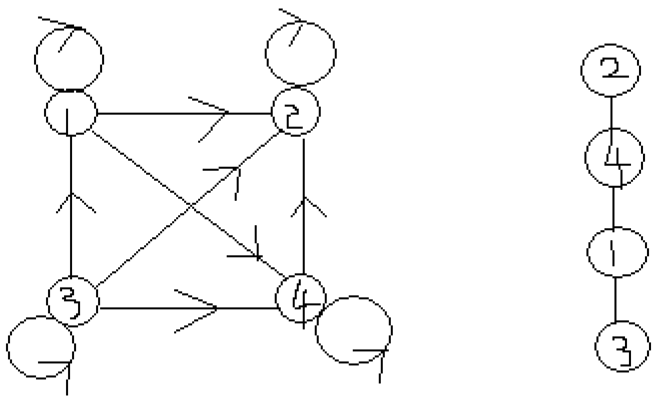
不是全序，也不是良序



(b)

$\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(2,3),(1,4),(2,4)\}$

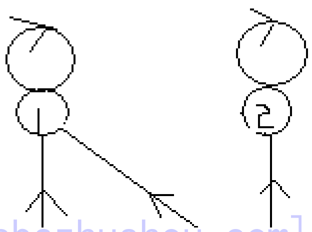
不是全序也不是良序



(c)

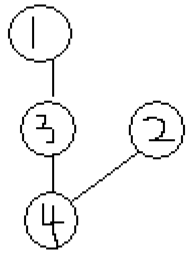
$\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,1),(1,2),(3,2),(1,4),(3,4),(4,2)\}$

是全序也是良序



学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(d)

$\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,1),(4,3),(4,1),(4,2)\}$ 非全  。

40、 一个集合上的自反和对称关的关系称为相容关系

(1) 设 A 是人的集合，ρ 是集合 A 上的关系，定义为当且仅当 a 是 b 的朋友时，有 $a\rho b$，试证明 ρ 是 A 上的相容关系。

证明：对 $\forall a\in A$，因为任何的人都是自己的朋友，也就是有 $a\rho a$，因此 ρ 具有自反性，若 $a\rho b$，也就是 a 是 b 的朋友，那么一定有 b 是 a 的朋友，则有 $b\rho a$，因此 ρ 是对称的，因此 ρ 是 A 上的相容关系。

(2) ρ 是正整数集 N 上的关系，当且仅当两个正整数 n_1 和 n_2 中有相同的数字时，$n_1\rho n_2$ ，试证明 ρ 是一个相容关系；

证明：显然，对 $\forall n\in N$，有 $n\rho n$，因此 ρ 具有自反性；若 $n_1\rho n_2$，则表示 n_1 和 n_2 中有相同的数字，因此 n_2 和 n_1 也有相同的数字，因此 $n_2\rho n_1$。所以 ρ 具有对称性，所以 ρ 是 N 上的一个相容关系。

(3) 再举出一个相容关系的例子

答：等价关系都是相容关系，反之则不成立。

(4) 设 ρ_1 和 ρ_2 是 A 上的两个相容关系，$\rho_1\cap\rho_2$ 是相容关系吗？$\rho_1\cup\rho_2$ 是相容关系吗？

答：$\rho_1\cap\rho_2$ 和 $\rho_1\cup\rho_2$ 都是相容关系，前题 30 中证明了若 ρ_1 和 ρ_2 是 A 上的等价关系，则 $\rho_1\cap\rho_2$ 也是等价关系，而 $\rho_1\cup\rho_2$ 具有自反性和对称性。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 3 章　函数

1. 以下关系中哪一个构成函数？

(1) $\{(n_1,n_2)\mid n_1,n_2\in N, n_1+n_2<10\}$

答：不构成函数。象的唯一性不能满足，因为 $(1,2),(1,3)$ 都属于这个集合。而 $12,13$ 等这样的数在 N 中无像，所以象的存在性也不能满足。

(2) $\{(n_1,n_2)\mid n_1,n_2\in N, n_2=\text{小于}n_1\text{的素数的个数}\}$

答：是函数，象的唯一性和存在性都能满足。

2. 设 $A=2^U\times 2^U$，$B=2^U$，给定由 A 到 B 的关系：

$$f=\{((S_1,S_2),S_1\cap S_2)\mid S_1,S_2\subseteq U\}$$

f 是函数吗？若是的话，f 的值域 $R_f=2^U$ 吗？为什么？

答：f 是函数。f 的值域 $R_f=2^U$。因为对 $\forall C\in 2^U$，则 $C\subseteq U$，则对 (C,C)，$C\cap C=C$，因此象 C 的像源为 (C,C)。

3. 下列集合能够定义函数吗？如果能，试指出它们的定义域和值域？

(1) $\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(3,(1,4)),(4,(1,4))\}$

答：能定义函数。$D_f=\{1,2,3,4\}$，$R_f=\{(2,3),(3,4),(1,4)\}$

(2) $\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(3,(3,2))\}$

答：能定义函数。$D_f=\{1,2,3\}$，$R_f=\{(2,3),(3,4),(3,2)\}$

(3) $\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(1,(2,4))\}$

答：不能定义函数。因为有一对多的情况。

(4) $\{(1,(2,3)),(2,(2,3)),(3,(2,3))\}$

答：能定义函数。$D_f=\{1,2,3\}$，$R_f=\{(2,3)\}$

4. 设函数 $f:A\to B, S\subseteq A$，等式 $f(A)-f(S)=f(A-S)$ 成立吗？为什么？

答：不成立。因为 $f(A)-f(S)\subseteq f(A-S)$ 成立，但是 $f(A-S)\subseteq f(A)-f(S)$ 不成立。下面证明 $f(A)-f(S)\subseteq f(A-S)$。

设 $b\in f(A)-f(S)$，则 $b\in f(A)$ 且 $b\notin f(S)$，所以必存在 $a\in A$ 使 $f(a)=b$。由于 $b\notin f(S)$，所以 $a\notin S$，于是 $a\in A-S$，因此 $b\in f(A-S)$，故 $f(A)-f(S)\subseteq f(A-S)$。

$f(A-S)\subseteq f(A)-f(S)$ 不成立，反例如下：

设 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$S=\{a_2,a_3\}$，则 $A-S=\{a_1,a_4\}$，函数 $f:A\to B$ 的定义为：

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$f=\{(a_1,b_1),(a_2,b_1),(a_3,b_2),(a_4,b_3)\}$。显然 $f(A)=\{b_1,b_2,b_3\}$，$f(S)=\{b_1,b_2\}$，$f(A-S)=\{b_1,b_3\}$，$f(A)-f(S)=\{b_3\}$，$f(A-S)\not\subset f(A)-f(S)$。由上可知 $f(A)-f(S)=f(A-S)$ 不成立。

5 设有函数 $f:A\cup B\to C$，试证明等式 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$，等式 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ 成立吗？为什么？

证明：设 $c\in f(A)\cup f(B)$，则 $c\in f(A)$ 或者 $c\in f(B)$。若 $c\in f(A)$，则存在 $a\in A$ 使得 $f(a)=c$，因此有 $a\in A\cup B$，所以 $c\in f(A\cup B)$。若 $c\in f(B)$，类似地，有 $c\in f(A\cup B)$，故 $f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$。

反之，若 $c\in f(A\cup B)$，则存在 $b\in A\cup B$，使得 $f(b)=c$。由并集的定义 $b\in A$ 或者 $b\in B$，因此 $c\in f(A)$ 或者 $c\in f(B)$，于是 $c\in f(A)\cup f(B)$，故 $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$。由上得证 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$。

$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ 不成立，因为 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$，反之不成立。

证明：设 $c\in f(A\cap B)$，则存在 $a\in A\cap B$ 使得 $f(a)=c$。因为 $a\in A$ 且 $a\in B$，所以 $c\in f(A)$ 且 $c\in f(B)$，因此 $c\in f(A)\cap f(B)$，故 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$。

反例如下：

设 $A\cup B=\{a,b,e,d\}$，其中 $A=\{a,e,d\}$，$B=\{b,e\}$，$C=\{c_1,c_2,c_3\}$，函数 $f:A\cup B\to C$ 定义为 $f(a)=f(b)=c_1$，$f(e)=c_2$，$f(d)=c_3$，于是：$A\cap B=\{e\}$，$f(A\cap B)=\{c_2\}$，$f(A)=\{c_1,c_2,c_3\}$，$f(B)=\{c_1,c_2\}$，$f(A)\cap f(B)=\{c_1,c_2\}$，这里元素 $c_1\in f(A)\cap f(B)$，但是 $c_1\in f(A\cap B)$。

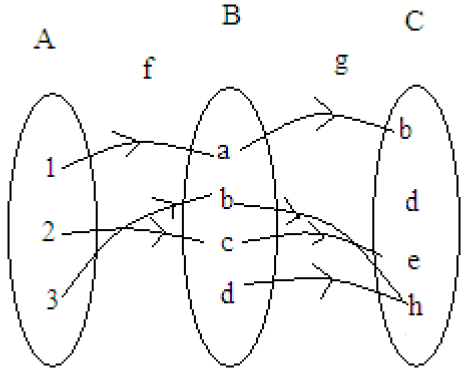
6. 设有函数 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$，使得 $g\cdot f$ 是一个内射，且 f 是满射。证明 g 是一个内射。举出一个例子说明，若 f 不是满射，则 g 不一定是内射。

证明：任取 $b_1,b_2\in B$，并设 $b_1\neq b_2$。因为 f 是满射，所以必有 $a_1,a_2\in A$，使得 $f(a_1)=b_1$，$f(a_2)=b_2$，根据函数象的唯一性的条件，由 $b_1\neq b_2$ 可得 $a_1\neq a_2$。又因为 g 是由 B 到 C 的函数，所以有 $c_1,c_2\in C$，使得 $g(b_1)=c_1$，。于是根据复合函数的定义，得：

$$g\cdot f(a_1)=g(b_1)=c_1,\quad g\cdot f(a_2)=g(b_2)=c_2$$

因为 $g\cdot f$ 是内射，所以由 $a_1\neq a_2$，可知 $c_1\neq c_2$。此即 $g(b_1)\neq g(b_2)$，故 g 是内射。

例子：



学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

图 3-1

图 3-1 中的例子可说明当 f 不是满射时，g 不一定是内射。

7. 在下列函数中，确定哪些是内射，哪些是满射，哪些是双射。

(1) $f_1: N \to Z, f_1(n) =$ 小于 n 的完全平方数的个数；

答：$f_1(2)=1, f_2(3)=1$，因此 f_1 不是内射，是满射，因此不是双射。

(2) $f_2: R \to R, f_2(r) = 2r-15$；

答：是内射，是满射，因此是双射

(3) $f_3: R \to R, f_3(r) = r^2+2r-15$

答：因为 $f_3(-5)=f_3(3)=0$，所以不是内射，$f_3(r)=(r+1)^2-16$。显然对于任意的 $r \in R$，$f_3(r) \ge -16$。因此不是满射，因此不是双射。

(4) $f_4: N^2 \to N, f_4(n_1,n_2) = n_1^{n_2}$

答：因为 $f_4(4,1)=f_4(2,2)=4^1=2^2=4$，所以 f_4 不是内射。

对于任意的 $n \in N$，有 $f_4(n,1)=n^1=n$。即对于任意的 $n \in N$，n 有像源 $(n,1)$，所以 f_4 是满射，但是不是双射。

(5) $f_5: N \to R, f_5(n) = \log_{10} n$

答：因为 $n \in N$，所以 $n \ge 1$，因此 $\log_{10} n \ge 0$，因此不是满射。是内射(函数的单调性)。因此不是双射。

(6) $f_6: N \to Z, f_6(n) =$ 等于或大于 $\log_{10} n$ 的最小整数；

答：因为 $f_6(3)=1, f_6(4)=1$，因此不是内射是满射。因此不是双射。(Z 是非负整数集合)

(7) $f_7: (2^U)^2 \to (2^U)^2$，$f(S_1,S_2)=(S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2)$

答：对任意 $S_1,S_2 \in 2^U, S_1 \ne S_2$，$(S_1,S_2) \ne (S_2,S_1)$，但是 $f(S_1,S_2)=f(S_2,S_1)$，因此不是内射。又 $(\phi,U) \in (2^U)^2$，但是找不到 $S_1 \in 2^U, S_2 \in 2^U$，使得 $S_1 \cup S_2 = \phi$，$S_1 \cap S_2 = U$。

因此不是满射，因此也不是双射。

8. 设 A,B 都是有限集，$\# A = n, \# B = m$，问存在着多少个不同的内射 $f: A \to B$？存在多少个不同的双射？

答：若要使得函数 $f: A \to B$ 成为内射，必须满足 $\# A \le \# B$，即 $n \le m$，否则由 A 到 B 不可能存在内射。当 $n \le m$ 时，由 A 到 B 可定义 $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ 个不同的内射。此即为从 B 的 m 个元素中取出 n 个元素的排列数。要使函数 $f: A \to B$ 成为双射，

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

必须满足$\# A=\# B$，即$n=m$。否则，由$A\to B$不可能存在双射。当$n=m$时，由A到B可定义$A_m^m=m!$个不同的双射。

9. 下列函数中，确定哪些是内射，哪些是满射，哪些是双射。

(1) $f_1:I\to I$，$f_1(i)=\begin{cases}\frac{i}{2} & i\text{是偶数}\\ (i-1)/2 & i\text{是奇数}\end{cases}$

答：因为$f_1(2)=1, f_1(3)=1$，因此不是内射。是满射，因此不是双射。

(2) $f_2:Z_7\to Z_7, f_2(x)=res_7(3x)$

答：$res_7(3x)$表示$3x$被 7 除后的非负余数，于是按照函数f_2的定义，得：

$f_2(0)=0, f_2(1)=3, f_2(2)=6, f_2(3)=2, f_2(3)=5, f_2(4)=5, f_2(5)=1, f_2(6)=4$

显然f_2又是内射，又是满射，因此是双射。

(3) $f_3:Z_6\to Z_6, f_3(x)=res_6(3x)$

答：$f_3(0)=res_6(0)=0$，$f_3(1)=res_6(3)=3$，$f_3(2)=res_6(6)=0$，$f_3(3)=res_6(9)=3$，$f_3(4)=res_6(12)=0$， $f_3(5)=res_6(15)=3$。因此f_3不是内射不是满射，因此也不是双射。

10. 设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，试证明任何从A到A的函数，如果它是内射，则它必是满射，反之亦真。

答：反证法。已知$f:A\to A$是内射，假设f不是满射，则在A中至少有一个元素没有像源，即集合A中的元素至多只有$n-1$个像。但是$\#(A)=n$，因此A中至少有两个元素对应同一个像，这与f是内射相矛盾。

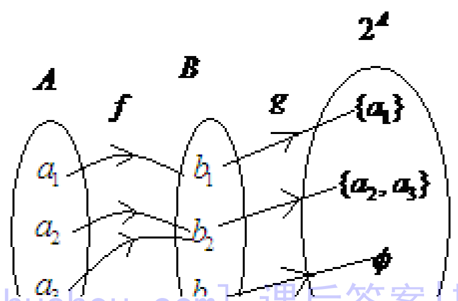
反之，已知$f:A\to A$是满射，假设f不是内射，则A中至少有两个元素对应同一个像，即A在A中至多有$n-1$个像，这与f是满射矛盾，所以f是内射。

11. 设有函数$f:A\to B$，定义函数$g:B\to 2^A$，使得：

$$g(b)=\{x\mid x\in A, f(x)=b\}$$

试证明如果f是满射，则g是内射；其逆成立吗？

答：设$b_1,b_2\in B$，$b_1\neq b_2$，因为f是满射，存在$x\in A$，使得$f(x)=b_1\neq b_2$，因此$x\in g(b_1)$，$x\notin g(b_2)$，因此$g(b_1)\neq g(b_2)$，因此g是内射。其逆不成立。因为当g是内射时，可能有一个元素b，使$g(b)=\phi$，这意味着元素$b\in B$在A中没有像源，因此f不是满射。举例如下：$A=\{a_1,a_2,a_3\},B=\{b_1,b_2,b_3\}$，函数$f$和$g$的定义如下，此时$g$是内射，但是$f$不是满射。



学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

图 3-2

12. 设函数 $f:Z\times Z\to Z$，$g:Z\times Z\to Z$。这里 $f(x,y)=x+y$，$g(x,y)=xy$。试证明 f 和 g 是满射，但是都不是内射。

答：$(x,y)\neq(y,x)$，但是 $f(x,y)=f(y,x)=x+y$，因此 f 不是内射。但是对 $\forall z\in Z$，有 $f(z,0)=z+0=z$，因此 f 是满射。同理，$(x,y)\neq(y,x)$，但是 $g(x,y)=g(y,x)=xy$，因此 g 不是内射，但是对 $\forall z\in Z$，$g(z,1)=z\cdot 1=z$，因此 g 是满射。

13. 设有函数 $f:R\to R$ 和 $g:R\to R$，这里 $f(x)=x^2-2$ 和 $g(x)=x+4$。求出 $f\cdot g$ 和 $g\cdot f$。并说明这些函数是否是内射，满射或双射。

答：$f\cdot g=f(g(x))=f(x+4)=(x+4)^2-2=x^2+8x+14$

$g\cdot f=g(f(x))=g(x^2-2)=x^2+2$

因为 $(f\cdot g)(0)=(f\cdot g)(-8)$，因此 $f\cdot g$ 不是内射，又因为 $(x+4)^2-2\geq -2$，因此也不是满射。因此不是双射。$g\cdot f$ 也不是内射，也不是满射，也不是双射。但是 $g(x)=x+4$ 是内射是满射，因此也是双射。$f(x)=x^2-2$ 不是内射，不是满射，因此也不是双射。

14. 设有函数 $f,g,h:R\to R$，给定为 $f(x)=x+2$，$g(x)=x-2$，$h(x)=3x$。试求出 $g\cdot f$，$f\cdot g$，$f\cdot f$，$f\cdot h$，$h\cdot g$，$f\cdot h\cdot g$。

答：$g\cdot f=g(f(x))=g(x+2)=x+2-2=x$

$f\cdot g=f(g(x))=x-2+2=x$

$f\cdot f=f(f(x))=f(x+2)=x+4$，$f\cdot h=f(h(x))=f(3x)=3x+2$

$h\cdot g=h(g(x))=h(x-2)=3x-6$，

$f\cdot h\cdot g=f(h(g(x)))=f(h(x-2))=f(3x-6)=3x-4$

15. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，定义一个函数 $f:A\to A$，使得 $f\neq I_A$，而且是双射，求 f^2,f^3,f^{-1}，以及 $f\cdot f^{-1}$。能否找到一个双射 $g:A\to A$，使得 $g\neq I_A$，但是 $g^2=I_A$？

答：定义函数 $f:A\to A$，使得 $f(1)=2$，$f(2)=3$，$f(3)=4$，$f(4)=1$，显然 f 是双射且 $f\neq I_A$。函数 $f^2:A\to A, f^2(1)=3, f^2(2)=4, f^2(3)=1, f^2(4)=2$；函数 $f^3:A\to A$，$f^3(1)=f^2(f(1))=f^2(2)=4$，类似地 $f^3(2)=1$，$f^3(3)=2, f^3(4)=3$。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

可定义函数$g:A\to A$，使得$g(1)=2$， $g(2)=1$， $g(3)=4,g(4)=3$。显然$g\neq I_A$，但$g^2=I_A$。

16. 设$f:R\to R$， $f(x)=x^3-2$，试求f^{-1}。
答： $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+2}$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

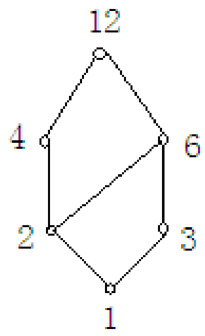
第 7 章　格和布尔代数

1、下列各集合对于整除关系|都构成偏序集。在每个集合中对存在有最大下界和最小上界的元素对，找出它们的最大下界和最小上界；指出各集合中是否有最小元素和最大元素。

(1) $L=\{1,2,3,4,6,12\}$　　　(2) $L=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

(3) $L=\{1,2,3,\cdots,12\}$

解：(1)偏序集的次序图如下：



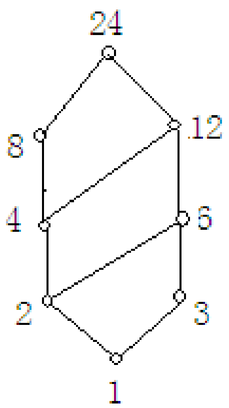
4 和 6 的最大下界为 1，最小上界为 12；

2 和 3 的最大下界为 1，最小上界为 6；

3 和 6 的最大下界为 3，最小上界为 6；

该集合的最大元素为 12，最小元素为 1。

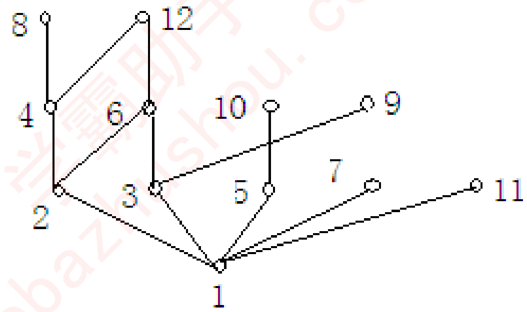
(2)偏序集的次序图如下：



该集合最小元素为 1，最大元素为 24。任何两个元素的最小上界为它们的最小公倍数，最大下界为它们的最大公约数。

(3)偏序集的次序图如下：

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲



该集合没有最大元，有最小元素为 1。

2、 试证明在格中若$a \le b \le c$，则有

$$a \vee b = b \wedge c$$

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$$

证明：(1)因为 $a \le b$，所以 $a \vee b = b$，又因为 $b \le c$，所以 $b \wedge c = b$，所以有 $a \vee b = b \wedge c$ 成立。

(2)因为$a \le b$，所以$a \wedge b = a$，$a \vee b = b$；又因为$b \le c$，所以$b \wedge c = b$，$b \vee c = c$，所以$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = a \vee b = b$，$(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b \wedge c = b$，所以有：$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$成立。

3、试证明在格中对于任意元素a,b,c,d有$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \le (a \vee c) \wedge (b \vee d)$

证明：因为$a \wedge b \le a$，$c \wedge d \le c$，所以由格的保号性$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \le a \vee c$

因为$a \wedge b \le b$，$c \wedge d \le d$，所以由格的保号性$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \le b \vee d$

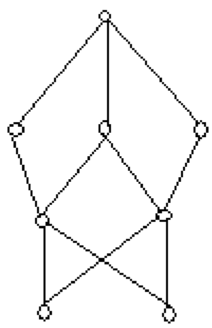
因此，$(a \wedge b) \vee (c \wedge d)$是$a \vee c$和$b \vee d$的下界，所以：

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \le (a \vee c) \wedge (b \vee d)$$

4、在第一题中，哪一个偏序集构成格？

答：第 1 和第 2 个偏序集构成了格，因为该集合中任何两个元素都存在最大下界和最小上界。但是第 3 个集合中的元素则不满足这个条件。

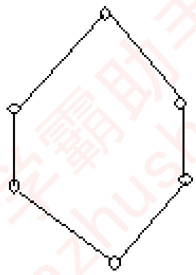
5、下图给出了三个偏序集的次序图，其中哪些构成格？



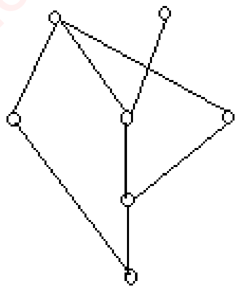
不是格，因为最下层两个元素没有下确界。

(a)

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲



(b)　　是格，因为任何两个元素都有下确界和上确界。



不是格，因为最上层两个元素没有上确界。

6、设$<L,\vee,\wedge>$是格，试证明对于所有的$a,b,c\in L$，则有：

$$(a\le b)\Rightarrow(a\vee(b\wedge c))\le b\wedge(a\vee c))$$

证明：根据格的分配律，我们有

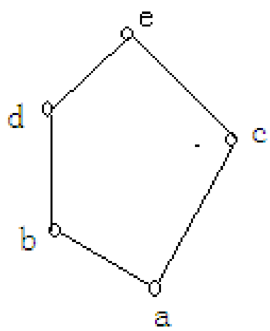
$$a\vee(b\wedge c)\le(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

因为$a\le b$，所以$a\vee b=b$，所以$(a\vee(b\wedge c))\le b\wedge(a\vee c))$。

7、 设$<L,\wedge,\vee>$是一个格，如果对于所有的$a,b,c\in L$，有

$$(a\le b)\Rightarrow(a\vee(b\wedge c))=b\wedge(a\vee c))$$

则称$<L,\wedge,\vee>$是模式格，下图所给出的格是模式格吗？证明你的结论。



解：不是模式格，因为对于b,d,c这三个元素，$b\le d$，但是$b\vee(d\wedge c)=b\vee a=b$，而$d\wedge(b\vee c)=d\wedge e=d$，并不满足模式格的要求，因此不是模式格。

8、证明具有两个或更多个元素的格中，不会有元素是它自身的补。

证明：因在格中求补元，此格必为有界格，设$<L,\le>$为有界格，若$\#(L)=2$，则$L=\{0,1\}$。因为$0\vee0=0,0\wedge0=0,1\vee1=1,1\wedge1=1,0\wedge1=0,0\vee1=1$，因此 0 和

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

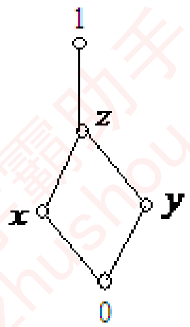
1 互为补元，即具有两个元素的格中不存在以自身为补元的元素。若$\#(L)>2$，设存在$l\in L$，$l\neq 0$且$l\neq 1$，若l以自身为补元，则由补元的定义：$l\wedge l=0=l=l\vee l=1$，可得$l=0=1$，与假设矛盾。因此不存在以自身为补元的元素。

9、设$<L;\vee,\wedge>$是一个格，$\#(L)>1$，试证明如果$<L;\vee,\wedge>$有元素 1 和元素 0，则这两个元素必定是不相同的。

证明：反证，假设这两个元素是相同的，并记$l=0=1$，则根据最大元素和最小元素的定义，我们有对$\forall l_1\in L$，$0=l\leq l_1\leq l=1$，则$l=l_1$，因此$\#(L)=1$，这与条件矛盾。

10、举例说明并非每一有补格都是分配格；并非每个分配格都是有补格。

解：由下图(a)表示的格由于元素z无补元，因此不是有补格；但是对任意三个元素都满足分配等式，因此是分配格。

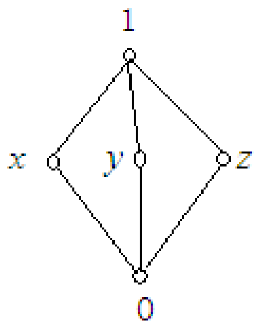


(a)

下图(b)表示的格中，0 和 1 互为补元， x,y两两互补，因此是有补格。又因为$x\wedge(y\vee z)=x\wedge 1=x$，$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=0\vee 0=0$，即

$$x\wedge(y\vee z)\neq(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$

所以不是分配格。



(b)

11、 设$<L,\leq>$是一个格，$a,b\in L$，且$a<b$(即$a\leq b$，但是$a\neq b$)，令集合

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$$B=\{x \mid x\in L且a\le x\le b\}$$

证明$<B,\le>$也是一个格。

证明：因为$<L,\le>$是格，所以对任意$l_1,l_2\in L$，有$l_1\wedge l_2=\mathrm{glb}(l_1,l_2)$，$l_1\vee l_2=\mathrm{lub}(l_1,l_2)$。

由B的定义知$B\subseteq L$，$a\in B$，所以$B\ne\phi$。对任意$x,y\in B$，由于$<L,\le>$是格，所以$x\wedge y$和$x\vee y$在L中存在且唯一。

下证$x\wedge y\in B, x\vee y\in B$。

由B的定义知$a\le x\le b$，$a\le y\le b$。所以$a\le x$且$a\le y$，根据格的保号性及等幂性有$a=a\wedge a\le x\wedge y$，所以$a\le x\wedge y$。类似地，$x\le b, y\le b$得$x\wedge y\le b$，所以

$a\le x\wedge y\le b$，即$x\wedge y\in B$。类似地可证明$a\le x\vee y\le b$，即$x\vee y\in B$。

12、设$<L;\le>$是一个格，试证明对于任意的元素$a,b,c\in L$，有下列命题成立：

(1) 若$a\wedge b=a\vee b$，则$a=b$

(2) 若$a\wedge b\wedge c=a\vee b\vee c$，则$a=b=c$

(3) $a\vee[(a\vee b)\wedge(a\vee c)]=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

证明：(1) 因为$a\le a\vee b=a\wedge b\le a$，所以$a=a\wedge b$，同理有$b=a\wedge b$，因此$a=b$。

$a\le a\vee b\vee c\le a\wedge b\wedge c\le a$

(2) 因为$b\le a\vee b\vee c\le a\wedge b\wedge c\le b$，所以$a=b=c=a\wedge b\wedge c=a\vee b\vee c$。

$c\le a\vee b\vee c\le a\wedge b\wedge c\le c$

(3) 由格的分配律

$a\vee[(a\vee b)\wedge(a\vee c)]\le(a\vee(a\vee b))\wedge(a\vee(a\vee c))=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

又因为$a\vee[(a\vee b)\wedge(a\vee c)]$为$(a\vee b)\wedge(a\vee c)$和$a$的上确界，因此

$a\vee[(a\vee b)\wedge(a\vee c)]\ge(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

因此得证。

13、设a和b是格$<L;\le>$中的两个元素，试证明当且仅当a,b不可比时，$a\wedge b<a, a\wedge b<b$。

证明：必要性：(反证)已知 a,b不可比，因为一定有$a\wedge b\le a$，所以若$a\wedge b=a$，则$a\le b$，因此a,b可比，因此矛盾。

充分性：(反证)假设a,b可比，则由格的性质，$a\wedge b\le a$且$a\wedge b\le b$，矛盾。

14、设集合$A=\{a,b,c\}$，集合A上所有分划所构成的集合为$P(A)$，你能否适当定义$P(A)$上一个偏序关系$\le$,使得$<P(A);\le>$成为一个格？

解：记$P(A)=\{\pi_i\}$，其中π_i为A的一种分划，定义$P(A)$上的偏序关系为，若分

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

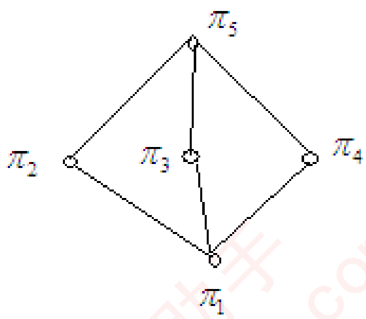
划π_i是π_j的一个细分，则$\pi_i \le \pi_j$。显然有，对任意$\pi_i \in P(A)$，$\pi_i \le \pi_i$因此具有自反性；若$\pi_i \le \pi_j, \pi_j \le \pi_i$，则$\pi_i = \pi_j$因此具有反对称性；若$\pi_i \le \pi_j, \pi_j \le \pi_k$，则$\pi_i \le \pi_k$(根据细分的定义很容易得出)，所以具有可传递性，因此是偏序关系。$A = \{a,b,c\}$中 3 个元素，共 5 种：

$$\pi_1 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}, \pi_2 = \{\{a,b\},\{c\}\}$$
$$\pi_3 = \{\{a\},\{b,c\}\}, \pi_4 = \{\{a,c\},\{b\}\}$$
$$\pi_5 = \{\{a,b,c\}\}$$

则对定义二元运算$\pi_i \wedge \pi_j = \pi_i$(若$\pi_i \le \pi_j$)，$\pi_i \wedge \pi_j = \pi_1$(若$\pi_i$和$\pi_j$不可比)

$\pi_i \vee \pi_j = \pi_j$(若$\pi_i \le \pi_j$)，$\pi_i \vee \pi_j = \pi_5$(若π_i和π_j不可比)

可以画出该偏序关系的次序图如下：



显然定义的偏序关系是格。

15、试证明在格中对任意元素a,b,c，有

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \le (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

证明:因为$a \wedge b \le a$，$b \wedge c \le b$，$c \wedge a \le a$，所以$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \le a \vee b$，

$((a \wedge b) \vee (b \wedge c)) \vee (c \wedge a) \le (a \vee b) \vee a = a \vee b$，所以可得：

$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \le a \vee b$，同理有：

$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \le b \vee c$，和$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \le a \vee c$

所以$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \le (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee c)$成立。

16、试证明在格中对于任意元素$a,b,c \in L$，有：

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

时，格$< L, \le >$是分配格。

证明：必要性：设$< L, \le >$是分配格，则对于任意$a,b,c \in L$有：

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) &= [(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee c)] \wedge [(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee a] \\ &= [(a \wedge b) \vee c] \wedge [(b \wedge c) \vee a] \\ &= (a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee a) \wedge (c \vee a) \\ &= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)\end{aligned}$$

充分性：对于任意$a,b,c \in L$，令$a' = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$，$b' = b \vee c$，$c' = a$，则

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$a',b',c' \in L$ 满足等式：

$$(a' \wedge b') \vee (b' \wedge c') \vee (c' \wedge a') = (a' \vee b') \wedge (b' \vee c') \wedge (c' \vee a') \quad (1)$$

于是式(1)的左边

$$
\text{左边}
\begin{aligned}
&= [((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \wedge (b \vee c)] \vee [(b \vee c) \wedge a] \vee a \\
&= [(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)] \vee a \\
&= [(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)] \vee a \\
&= (b \wedge c) \vee a
\end{aligned}
$$

因为 $a \le a \vee b$， $a \le a \vee c$， 故 $a \le (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

所以 $a \vee [(a \vee b) \wedge (a \vee c)] = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$。

将 a',b',c' 带入(1)的右边得

$$
\text{右边}
\begin{aligned}
&= [((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \vee (b \vee c)] \wedge [(b \vee c) \vee a] \wedge [a \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee c))] \\
&= ([((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \vee (b \vee c)] \wedge [(a \vee b) \wedge (a \vee c)]) \wedge [(b \vee c) \vee a] \\
&= [(a \vee b) \wedge (a \vee c)] \wedge [(a \vee c) \vee b] \\
&= (a \vee b) \wedge [(a \vee c) \wedge ((a \vee c) \vee b] \\
&= (a \vee b) \wedge (a \vee c)
\end{aligned}
$$

所以有 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$。因此是分配格。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 8 章 图论

1、图 1 所示之图是否同构于图 2

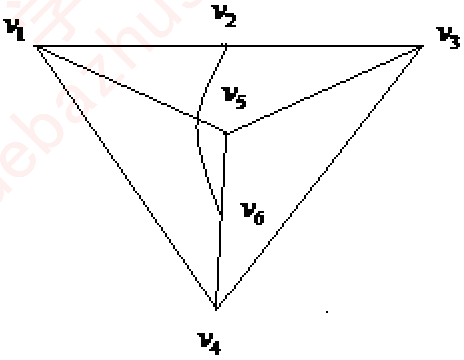


图 1

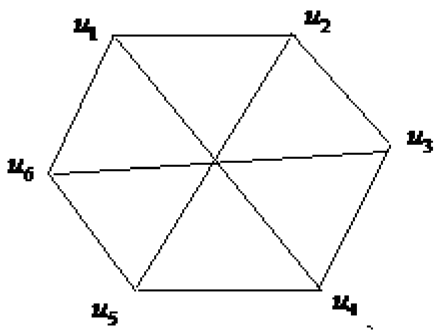


图 2

答：根据点和边的关联关系，构造 $h:V_1 \to V_2, h(v_i)=u_i, i=1,2,3,4$，$h(v_5)=u_6, h(v_6)=u_5$，显然 h 是双射且满足同构的定义。

2、图 3 中所给出的两个 8 结点图是否同构？证明你的回答

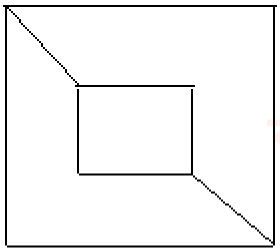


图 3(a)

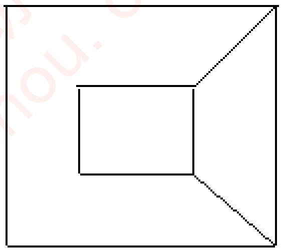


图 3(b)

答：上述两个图不同构。

证明：因为图 3(b)中 4 个度数为 3 的结点中每一个均与另外两个度数为 3 的结点相邻，而图 3(a)中的每个度数为 3 的结点只与另外一个度数为 3 的结点相邻，所以不同构。

3、证明在任何图中奇次度结点的个数是偶数。

证明：反证，假设图 G 中存在奇数个奇次度结点，则图中不论偶次度结点的个数是奇数还是偶数，该图的结点总度数为偶数，但是任何图的所有结点度的总和又为边数的两倍，因此必为偶数，矛盾！

4、设 G 是具有 4 个结点的完全图，试问：

(1)G 有多少个子图？

(2)G 有多少个生成子图？

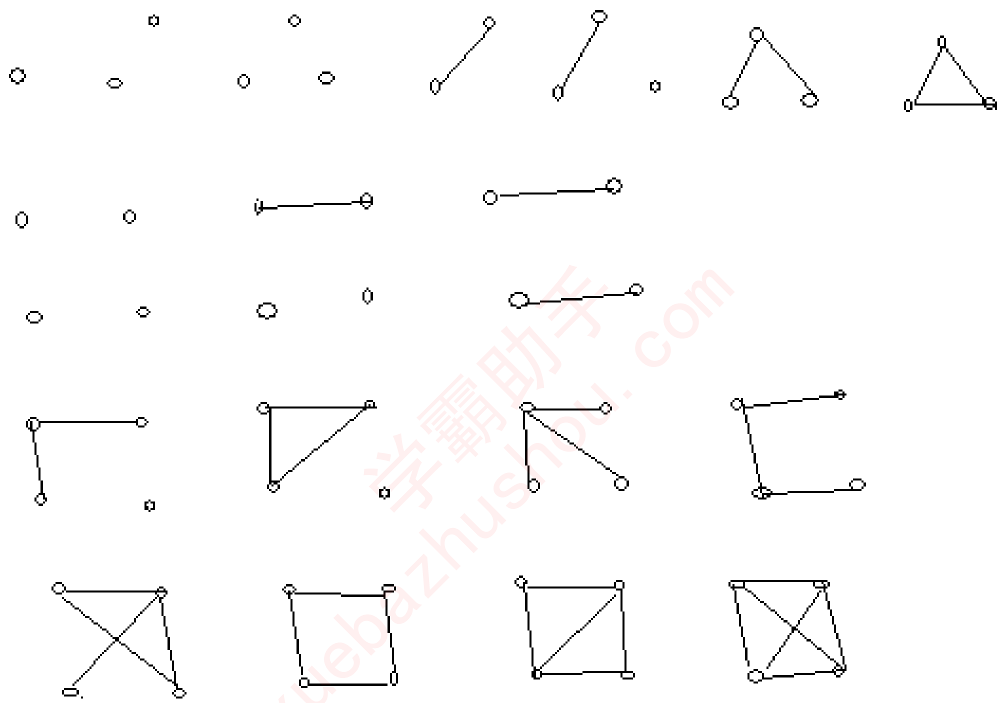
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(3)如果没有任何两个子图是同构的，则 G 的子图个数是多少？请将这些子图构造出来？

答：(1)含有一个结点的子图有 C_4^1 个，含有两个结点的子图有 $C_4^2 \times 2$ 个，含有三个结点的子图有 $C_4^3 \times 8$ 个，含有 4 个结点的子图有 $C_4^4 \times 64$ 个，所以共有 112 个子图。

(2) G 的生成子图包含 G 的所有结点，因为 G 有 6 条边，构成子图时，每条边有被选和不被选择两种情况，因此 G 生成的子图为 2^6 =64 种。

(3)G 的所有不同构的子图如下：共 18 个。



5、在图 4 中找出其所有的真路和环，该图是否包含有割边？

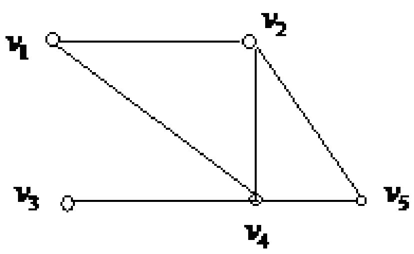


图 4

解：真路：$v_1v_2v_5cv_3v_6$ 等。环：$v_1v_2v_5v_4v_1$ 等。其中 $\{v_3, v_4\}$ 是割边，因为该条边不在 G 的任何环中出现。

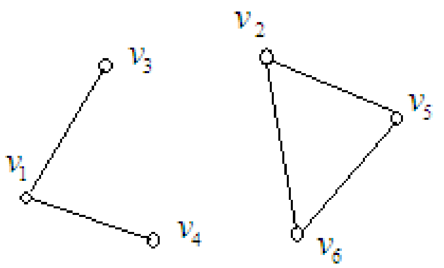
6、图 G 的邻接矩阵为：

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

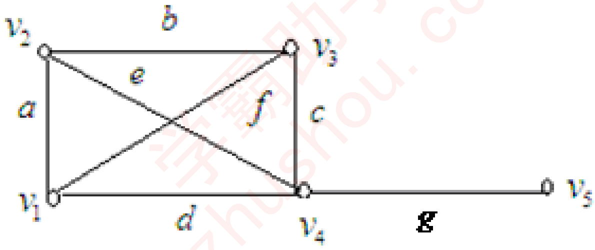
$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

给出，G 是否是连通的？

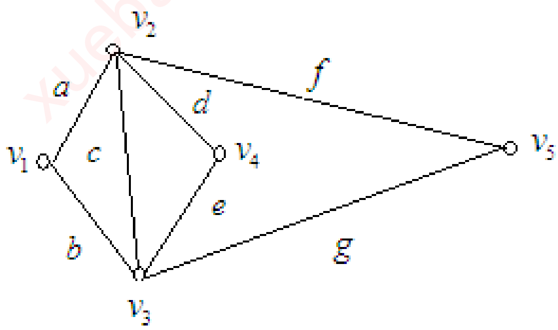
解：直接由邻接矩阵给出图 G 的一个图解，如下图所示，显然 G 是不连通的。



7、求下图中图(a)和图(b)的全部断集：



(a)



(b)

解：对于图(a) $S_1=\{a,f,d\}$，$S_2=\{a,e,b\}$，$S_3=\{b,c,f\}$，$S_4=\{c,f,d\}$，$S_5=\{g\}$，$S_6=\{a,e,f,c\}$，$S_7=\{b,d,e,f\}$ 都是边割集。

对于图(b) $S_1=\{a,b\}$，$S_2=\{f,g\}$，$S_3=\{c,d,e\}$，$S_4=\{a,c,d,f\}$ 都是边割集。

8、证明图 G 的任一生成树和任一边割集至少有一条公共边。

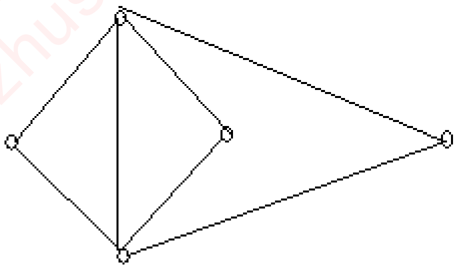
证明：设图 G 中若有一个边割 S 与 G 的一棵生成树 T 没有公共边，那么删去 S 后所得子图 $G-S$ 必包含 T，这意味着 $G-S$ 仍连通，与 S 是边割集矛盾，所以一定

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

有 S 与 T 至少有一条公共边，

9、试作出一个连通图 G，使之满足等式 $K(G)=\lambda(G)=\delta(G)$。

解：



上图中由定义可得 $K(G)=\lambda(G)=\delta(G)=2$

10、设图 G 中各结点的度都是 3，且结点数 n 与边数 m 间有如下关系

$$2n-3=m$$

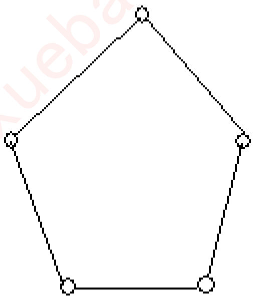
问(1) G 中结点数与边数各为多少？

(2) 在同构的意义下 G 是唯一的吗？

解：(1) 由题知该图的总度数为 $3n$，由握手定理知边数与度数的关系为 $2m=3n$，又由 $2n-3=m$，可以解出边数 $m=9$，结点数 $n=6$。

(2) 在同构的意义下图 G 不唯一，见第一节的例 8 中图(b)和图(c)。

11、若图 G 的补图同构于 G，则称 G 为自补图。试证明下图所示的图是自补图。你能否找到其他 5 结点的自补图。



证明：上图的补图为

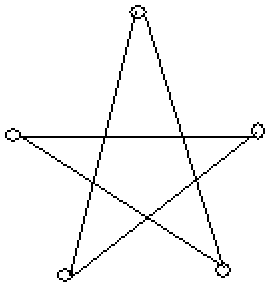
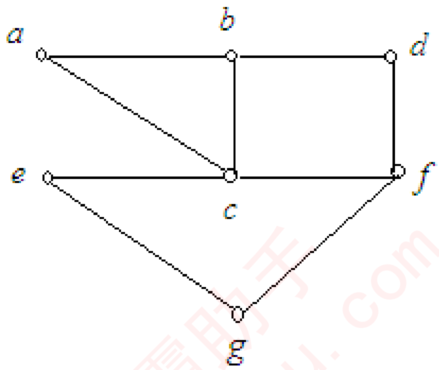


图 G 与其补图的结点集合之间可以建立一一对应关系，因此两个图是同构的。

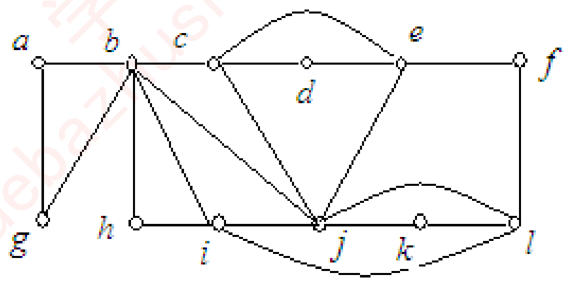
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

12、已知关于人员 a,b,c,d,e,f,g 的下述事实：
a 说英语；b 说英语和西班牙语；c 说英语、意大利语和俄语；d 说日语和西班牙语；e 说德语和意大利语；f 说法语、日语和俄语；g 说法语和德语，试问上述 7 人中是否任意两个人都能交谈？如有必要，可由其余 5 人中所组成的译员链帮忙？

解：设 7 个人为 7 个结点，将两个懂同一种语言的人之间连成一条边，即表示他们能直接交谈。这样就得到一个简单图 G，问题就转化为 G 是否连通，G 如下图所示，因为 G 中任意两个结点是连接的，所以 G 是连通图。因此，上述 7 个人中任意两个能交谈。

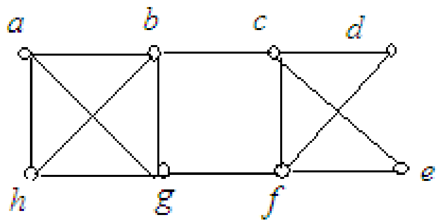


13、试从下图中找出一条欧拉回路：



解：*agbhiljklfejcdecba*

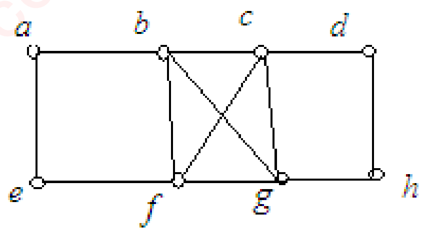
14、试在下图中找出一条欧拉路：



解：*haghbgfecdfcbah*。

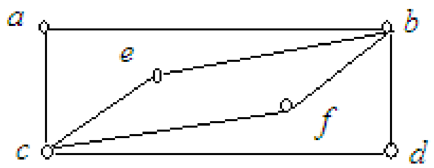
15、判断下面 4 个图哪个是欧拉图，哪个是哈密顿图，在各适当情况下指出欧拉回路和哈密顿环。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲



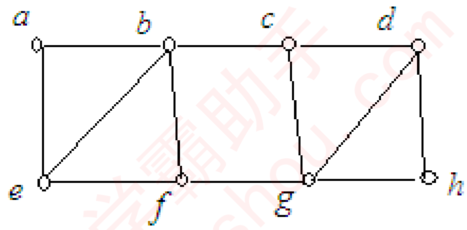
(a)

解：图(a)是欧拉图，存在一条欧拉回路为 $abfcbgcdhgfea$；图(a)是哈密顿图，存在一个哈密顿环 $abcdhgfea$。



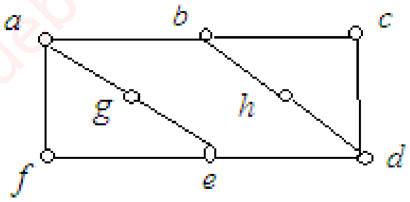
(b)

解：图(b)是欧拉图，具有一条欧拉回路 $abecfbdca$，不是哈密顿图。



(c)

解：图(c)不是欧拉图，是哈密顿图，存在一个哈密顿环 $abcdhgfea$。

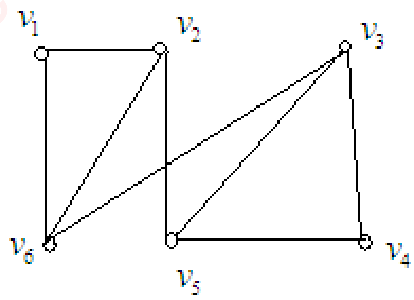


(d)

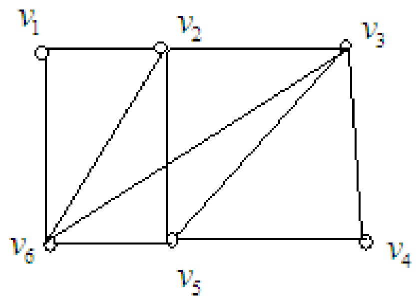
解：图(d)不是欧拉图，也不是哈密顿图。

16、构造下图中图 G 的闭包，并判断 G 是否为哈密顿图？如果不用观察的方法，你能说出你判别的根据嘛？

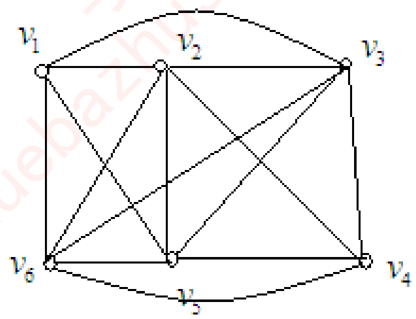
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲



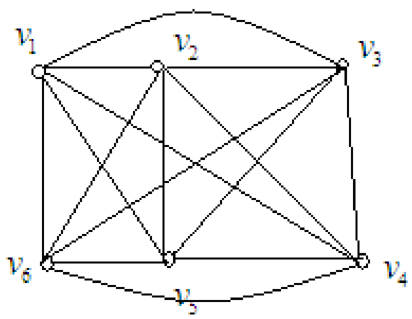
解：先求图 G 的闭包 n=6。因为 $\deg(v_5)+\deg(v_6)=6$； $\deg(v_2)+\deg(v_3)=6$，所以连接 v_5 与 v_6， v_2 与 v_3 得图 G1：



在图 G1 中，因为 $\begin{array}{l}\deg(v_2)+\deg(v_4)=6,\\ \deg(v_1)+\deg(v_5)=6,\\ \deg(v_4)+\deg(v_6)=6,\\ \deg(v_1)+\deg(v_3)=6,\end{array}$ 因此，连接 v_2 与 v_4， v_1 与 v_5， v_4 与 v_6， v_1 与 v_3 的图 G2：



在图 G2 中，因为 $\deg(v_1)+\deg(v_4)=8$，因此连接 v_1 与 v_4 得图 G3：

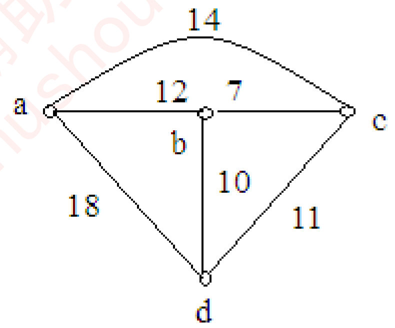


且 G3 是 G 的闭包，因此 G 是哈密顿图。

17、某流动售货员居住在 a 城，打算走销 b,c,d 城后返回 a 城。若该四城间的距

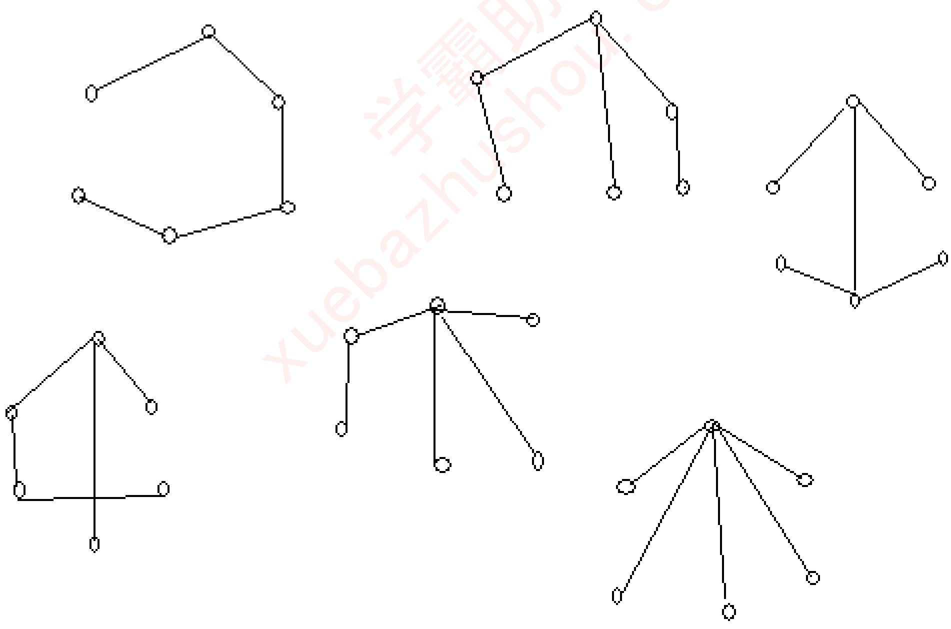
学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

离如下图所示，试找出完成该旅行的最短路线。



解：本题要求售货员将 4 个城市走且仅走一次，形成一个哈密顿环，并使得所走的路线最短。因此满足条件的走法应该是$a-b-d-c-a$。

18、构造互不同构的所有 6 结点的树。
解：先画出 6 个顶点，然后分别考虑顶点的度数最大为 2,3,4,5 的情况，不同构的树有 5 个，如下图所示：



19、试证明当且仅当图G中得每一条边均为割边时，图G是树林。
证明：设连通图G的每条边都是割边，则去掉任一条边后得到的子图不连通，这说明G中没有回路，根据树的定义知，G是一棵树。反之，若G是一棵树，根据树的性质，去掉任一条边后就不连通了，所以G的每条边都是割边。

20、证明或反驳下一结论：连通图G的任一边为G的某一生成树的弦。

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解：若连通图G含有割边，则e为任何生成树的弦；

若G不含割边，那么对G的任一边e'，e'一定在某个环路σ上，用破圈法构成生成树T_G时，可在σ中删去e'，相对生成树T_G，e'一定是弦。

因此该结论当G不含割边时才成立。

21、试证明具有m条边的连通图最多具有$m+1$个结点。

证明：数学归纳法 当$m=1$时，显然一条边且连通，则只能有两个点，即$n=2$；假设当$m=k$时，点数$n\le k+1$，则当$m=k+1$时，增加的一条边由于连通所以一定去某点相邻接的，因此最多增加一个点，所以点数$n\le k+2$，所以由数学归纳法结论成立。

22、n个结点的完全图的环秩是多少？

解：n个结点的完全图的边数为$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$，因此其环秩为$C_n^2-(n-1)$。

23、一棵树有 5 个度为 2 的结点，3 个度为 3 的结点，4 个度为 4 的结点，2 个度为 5 的结点，其余均为度为 1 的结点，问它有几个度为 1 的结点？

解：设有n个度为 1 的结点，则总的度数为n+10+9+16+10=n+45

根据树的定义，一棵树的边数等于点数减去 1，而总度数又等于边数的两倍，因此有

$$(n+45)/2=5+3+4+2+n-1=13+n$$

解得： $n=19$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 9 章　　命题逻辑

1、判断下列语句哪些才是命题，若是命题，则指出其真值

(1) 只有小孩才爱哭

(2) $x+6=y$

(3) 请勿随地吐痰

(4) 你明天有空吗？

(5) 3 是素数

(6) 银是白色的

(7) 起来吧，我的朋友

答：(1)是假命题，(5)是真命题，(6)是真命题，其它都不是命题

2、将下列命题符号化

(1) 昨天下雨并且打雷

答：令 P:昨天下雨，令 Q:昨天打雷

命题可表示为：$P \wedge Q$

(2) 我看见的既不是小张也不是老李

答：令 P:我看见的是小张，令 Q:我看见的是老李

命题可表示为：$\neg P \wedge \neg Q$

(3) 当他心情好的时候，他一定会唱歌，当他在唱歌的时候，就说明他心情一定很好

答：令 P:他心情好，令 Q:他在唱歌

命题可表示为：$P \Leftrightarrow Q$

(4)人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人

答：令 P:人犯我，令 Q:我犯人

命题可表示为：$P \Leftrightarrow Q$

(5)如果晚上做完了作业并且没有其它的事情，他就会看电视或者听音乐

答：令 P:晚上做完作业，Q:晚上有其它事情，R:看电视，S:听音乐

命题可表示为：$(P \wedge \neg Q) \to (R \vee S)$

3、设 P 表示命题’小王乘坐公交车’，Q 表示’小王在看书’，R 表示’小王在唱歌’。试用日常生活语言重复下列命题的内容

(1) $P \wedge Q \wedge \neg R$

答：小王一边乘公交车一边看书但是没有唱歌

(2) $(P \vee Q) \wedge \neg R$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

答：小王在乘公交车或者看书，但是他肯定没有唱歌

(3) $P \to (Q \vee R)$

答：如果小王在乘公交，那么他不是看书就是唱歌

(4) $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$

答：小王没有乘公交也没有看书，他只是在唱歌

4、构造下列命题公式的真值表

(1) $\neg P \vee (Q \wedge \neg R)$

P	Q	R	$\neg P$	$\neg R$	$Q \wedge \neg R$	$\neg P \vee (Q \wedge \neg R)$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

(2) $(P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge Q)$

P	Q	R	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$R \wedge Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge Q)$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

(4) $(Q \wedge (P \to Q)) \to P$

P	Q	$P \to Q$	$Q \wedge (P \to Q)$	$(Q \wedge (P \to Q)) \to P$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

5、下列命题公式中哪些是重言式？哪些是矛盾式？

(1) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$

答：先给出命题公式的真值表如下

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg Q \to \neg P$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0

因此上式是可满足式

(2) $(Q \wedge (P \to Q)) \to (P \to Q)$

答：真值表如下

P	Q	$P \to Q$	$Q \wedge (P \to Q)$	$(Q \wedge (P \to Q)) \to (P \to Q)$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

因此上式是永真式或者重言式

(3) $(\neg Q \to P) \to (P \to Q)$

答：真值表如下

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg Q \to P$	$(\neg Q \to P) \to (P \to Q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1

因此上式是可满足式

6、对于给定的代换产生下列公式的代换实例

(1) $((P \to Q) \to P) \to P$；用 $P \to Q$ 代换 P，用 $(P \to Q) \to R$ 代换 Q

答：$(((P \to Q) \to ((P \to Q) \to R)) \to (P \to Q)) \to (P \to Q)$

(2) $(P \to Q) \to (Q \to P)$，用 Q 代换 P，用 $P \wedge \neg P$ 代换 Q

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

答：$(Q \to (P \wedge \neg P)) \to ((P \wedge \neg P) \to Q)$

7、证明下列命题公式的等值关系

(1) $(P \to Q) \wedge (R \to Q) \Leftrightarrow (P \vee R) \to Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee Q)$

证明：左边 $\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee Q \Leftrightarrow \neg(P \vee R) \vee Q$ 得证

$\Leftrightarrow (P \vee R) \to Q$

(2) $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$

证明：左边 $\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P)$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \wedge (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$

(3) $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$

证明：显然由(2)已经证明

(4) $((Q \wedge R) \to S) \wedge (R \to (P \vee S)) \Leftrightarrow (R \wedge (P \to Q)) \to S$

$(R \wedge (P \to Q)) \to S$

$\Leftrightarrow (R \wedge (\neg P \vee Q)) \to S$

$\Leftrightarrow ((R \wedge \neg P) \vee (R \wedge Q)) \to S$

证明：右边 $\Leftrightarrow \neg((R \wedge \neg P) \vee (R \wedge Q)) \vee S$

$\Leftrightarrow ((\neg R \vee P)) \wedge (\neg R \vee \neg Q)) \vee S$

$\Leftrightarrow ((\neg R \vee P) \vee S) \wedge ((\neg R \vee \neg Q) \vee S)$

$\Leftrightarrow ((Q \wedge R) \to S) \wedge (R \to (P \vee S))$

(5) $(P \to (Q \to R)) \Leftrightarrow (P \to \neg Q) \vee (P \to R)$

证明：$(P \to (Q \to R)) \Leftrightarrow (P \to (\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$(P \to \neg Q) \vee (P \to R) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

得证。

8、证明下列命题公式的蕴含关系

(1) $P \to (Q \to R) \Rightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

证明：左边 $\Leftrightarrow P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \to (\neg Q \vee R)$
$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \to (\neg P \vee R)$
$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$
右边 $\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R)$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee R \vee P) \wedge (\neg P \vee R \vee \neg Q)$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee R \vee \neg Q)$
因此有左边 $\Leftrightarrow$ 右边，得证。

(2) $((P \vee \neg P) \to Q) \to ((P \vee \neg P) \to R) \Rightarrow (Q \to R)$
证明：假设后件为假，即 $Q \to R$ 为假，又因为若 Q 为假，则 $Q \to R$ 一定为真，因此 Q 为真，而 R 为假，由此看前件，因为 $P \vee \neg P$ 恒为真，因此 $(P \vee \neg P) \to Q$ 为真，$(P \vee \neg P) \to R$ 为假，因此前件为假，所以当后件为假的时候，前件一定为假，因此得证。

(3) $(Q \to (P \wedge \neg P)) \to (R \to (P \wedge \neg P)) \Rightarrow (R \to Q)$
证明：假设后件为假，则一定有 R 为真，而 Q 为假。因为 $P \wedge \neg P$ 恒为假，有 $R \to (P \wedge \neg P)$ 为假，$Q \to (P \wedge \neg P)$ 为真，因此前件为假，因此得证。

9、求下列公式的析、合取范式

(1) $((P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)) \wedge R$

$$((P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)) \wedge R$$
$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee \neg P)) \wedge R$$
证明：$\Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee \neg P)) \wedge (\neg(Q \vee \neg P) \vee (\neg P \vee Q)) \wedge R$
$$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \wedge P) \vee (\neg P \vee Q)) \wedge R$$
$$\Leftrightarrow (Q \vee \neg P \vee P) \wedge (Q \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q \vee P) \wedge R$$
上式是合取范式。

(2) $P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q))$

$$P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q)) \Leftrightarrow P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$$
证明：$\Leftrightarrow (P \vee (\neg P \vee Q)) \wedge (P \vee (\neg P \vee \neg Q))$
$$\Leftrightarrow (P \vee \neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P \vee \neg Q)$$
上式是合取范式

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q)) \Leftrightarrow P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$

$\Leftrightarrow P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge Q)$

上式是析取范式

(3) $(P \wedge (Q \wedge S)) \vee (\neg P \wedge (Q \wedge S))$

证明：原式 $\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge S)$ 析取范式

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge S)$

$\Leftrightarrow ((P \wedge Q \wedge S) \vee \neg P) \wedge ((P \wedge Q \wedge S) \vee Q) \wedge ((P \wedge Q \wedge S) \vee S)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee S) \wedge (Q \vee P) \wedge (Q \vee Q) \wedge (Q \vee S) \wedge (S \vee P) \wedge (S \vee Q) \wedge (S \vee S)$

上式是合取范式

10、求下列命题公式的主合取范式和主析取范式，并判断公式是否为重言式或矛盾式

(1) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$

方法一：真值表方法

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \leftrightarrow \neg Q$	$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1

主析取范式为：$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

主合取范式为：$P \vee Q$

该公式是可满足式

方法二：等值法

$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \wedge P) \vee ((\neg P \vee \neg Q) \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$

(2) $\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

证明：原式 $\Leftrightarrow (\neg(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg Q))$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

上式是主析取范式

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee P) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee P) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg Q)$

原式 $\Leftrightarrow P \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

上式是主合取范式

(3) $(\neg R \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee R))$

证明：原式

$\Leftrightarrow (\neg R \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee R))$

$\Leftrightarrow (\neg R \wedge (\neg Q \vee P)) \rightarrow (\neg P \vee (Q \vee R))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg R \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg P \vee (Q \vee R))$

$\Leftrightarrow (R \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (R \vee (Q \wedge \neg P)) \vee (\neg P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow ((R \vee Q) \wedge (R \vee \neg P)) \vee (\neg P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q \vee R) \vee (R \vee Q)) \wedge ((\neg P \vee Q \vee R) \vee (R \vee \neg P))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R)$

上式是主合取范式

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P) \vee (R \wedge (Q \vee \neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (R \wedge Q) \vee (R \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee (P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee (R \wedge Q \wedge (P \vee \neg P))$
$\vee (R \wedge \neg Q \wedge (P \vee \neg P))$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$
$\vee (Q \wedge P \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg Q)$

真值表如下：

P	Q	R	$Q \rightarrow P$	$\neg R$	$\neg R \wedge (Q \rightarrow P)$	$Q \vee R$	$P \rightarrow (Q \vee R)$	原式
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1

主合取范式 $\neg P \vee Q \vee R$

11、证明

(1) $\neg S$ 是前提 $P \to Q$，$(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$，$\neg(\neg P \wedge S)$ 的结论

证明：

编号	公式	依据
(1)	$(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$	前提
(2)	$\neg Q \wedge \neg R$	(1)
(3)	$\neg(\neg P \wedge S)$	前提
(4)	$P \vee \neg S$	(3)
(5)	$P \to Q$	前提
(6)	$\neg P \vee Q$	(5)
(7)	$\neg Q$	(2)
(8)	$\neg P$	(6)
(9)	$\neg S$	(4)

(2) $\neg P \vee \neg Q$ 是前提 $(P \wedge Q) \to R$，$\neg R \vee S$，$\neg S$ 的结论

证明：

编号	公式	依据
(1)	$\neg S$	前提
(2)	$\neg R \vee S$	前提
(3)	$\neg R$	(1)，(2)
(4)	$(P \wedge Q) \to R$	前提
(5)	$\neg(P \wedge Q) \vee R$	(4)

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(6)	$\neg P\vee\neg Q\vee R$	(5)
(7)	$\neg P\vee\neg Q$	(6)

(3) $R\vee S$是前提$P\wedge Q$，$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow(R\vee S)$的结论

证明：

编号	公式	依据
(1)	$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow(R\vee S)$	前提
(2)	$\neg(P\leftrightarrow Q)\vee(R\vee S)$	(1)
(3)	$\neg((\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q))\vee(R\vee S)$	(2)
(4)	$\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg(P\vee\neg Q)\vee(R\vee S)$	(3)
(5)	$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(R\vee S)$	(4)
(6)	$P\wedge Q$	前提
(7)	P,Q	(6)
(8)	$R\vee S$	(5)，(6)，(7)

(4) $P\rightarrow S$是前提$\neg P\vee Q$，$\neg Q\vee R$，$R\rightarrow S$的结论

证明：

编号	公式	依据
(1)	P	假设
(2)	$\neg P\vee Q$	前提
(3)	Q	(2)
(4)	$\neg Q\vee R$	前提
(5)	R	(4)
(6)	$R\rightarrow S$	前提
(7)	$\neg R\vee S$	(6)
(8)	S	(5)，(7)

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(5) $P \to (Q \to F)$是前提$P \to (Q \to R)$，$R \to (S \to E)$，$\neg F \to (S \wedge \neg E)$的结论

证明：

编号	公式	依据
(1)	P	假设
(2)	$P \to (Q \to R)$	前提
(3)	$Q \to R$	(1)，(2)
(4)	$R \to (S \to E)$	前提
(5)	$\neg R \vee (\neg S \vee E)$	(4)
(6)	$\neg F \to (S \wedge \neg E)$	前提
(7)	$F \vee (S \wedge \neg E)$	(6)
(8)	$F \vee \neg(\neg S \vee E)$	(7)
(9)	$\neg Q \vee R$	(3)
(10)	$\neg R \vee F$	(4)，(7)
(11)	$\neg Q \vee F$	(9)，(10)
(12)	$Q \to F$	(11)

12、证明下列各式的有效性(如有必要，可用间接证明法)

(1) $(R \to \neg Q), R \vee S, S \to \neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

证明：

编号	公式	依据
(1)	$\neg(\neg P)$	假设
(2)	P	(1)
(3)	$P \to Q$	前提
(4)	$\neg P \vee Q$	(3)
(5)	Q	(1)，(4)
(6)	$S \to \neg Q$	前提

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(7)	$\neg S \vee \neg Q$	(6)
(8)	$\neg S$	(5)，(7)
(9)	$R \to \neg Q$	前提
(10)	$\neg R \vee \neg Q$	(9)
(11)	$R \vee S$	前提
(12)	R	(8)，(11)
(13)	$\neg Q$	(10)，(12)
(14)	$Q \wedge \neg Q$	(5)，(13)

(2) $S \to \neg Q$， $S \vee R$， $\neg R$， $\neg P \to Q \Rightarrow P$

证明：

编号	公式	依据
(1)	$\neg R$	前提
(2)	$S \vee R$	前提
(3)	S	(1)，(2)
(4)	$S \to \neg Q$	前提
(5)	$\neg S \vee \neg Q$	(4)
(6)	$\neg Q$	(4)，(5)
(7)	$\neg P \to Q$	前提
(8)	$P \vee Q$	(7)
(9)	P	(6)，(8)

(3) $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S)$， $(Q \to P) \vee \neg R$， $R \Rightarrow P \leftrightarrow Q$

证明：

编号	公式	依据
(1)	R	前提
(2)	$(Q \to P) \vee \neg R$	前提
(3)	$Q \to P$	(1)，(3)

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(4)	$\neg(P\to Q)\to\neg(R\vee S)$	前提
(5)	$(P\to Q)\vee(\neg R\wedge\neg S)$	(4)
(6)	$P\to Q$	(5)
(7)	$P\leftrightarrow Q$	(3)，(6)

13、判断下列推理是否正确

(1) 如果太阳从西边出来，则地球停止转动，太阳从西边出来了，所以地球停止了转动。

答：令 P:太阳从西边出来，Q:地球停止转动。即证：$P\to Q$，$P\Rightarrow Q$

$((P\to Q)\wedge P)\to Q$

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge P)\vee Q$

证明：$\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee Q$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\vee Q$

$\Leftrightarrow 1$

(2) 如果我是小孩，我会喜欢孙悟空。我不是小孩，所以我不喜欢孙悟空

证明：令 P:我是小孩，Q:我喜欢孙悟空，即证：$P\to Q$，$\neg P\Rightarrow\neg Q$

P	Q	$P\to Q$	$\neg P$	$(P\to Q)\wedge\neg P$	$\neg Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0

当前件为真时，后件可能为假，因此不成立。

(3) 如果这里有球赛，则通行是困难的。如果他们按指定的时间到达，则通行是不困难的。他们按指定时间到达了，所以这里没有球赛。

证明：令 P:这里有球赛，Q:通行是困难的，R:他们按指定时间到达

即证明：$P\to Q$，$R\to\neg Q$，$R\Rightarrow\neg P$

编号	公式	依据
(1)	R	前提
(2)	$R\to\neg Q$	前提

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(3)	$\neg R \vee \neg Q$	(2)
(4)	$\neg Q$	(1)，(3)
(5)	$P \to Q$	前提
(6)	$\neg P \vee Q$	(5)
(7)	$\neg P$	(4)，(6)

因此推理是正确的。

14、张三说李四在说谎，李四说王五在说谎，王五说张三张四都在说谎，问张三、李四、王五三人，到底谁说真话，谁说假话？

答：设 P:张三在说谎；Q：李四在说谎；R:王五在说谎

若张三说真话，则李四说谎，则王五说真话，则张三李四都说谎，矛盾，因此张三说假话

若李四说真话，则张三说谎，且王五说谎，则张三和李四至少一个人说谎，不矛盾

若王五说真话，则张三李四都在说谎，而张三说谎可以推出李四说真话，则矛盾因此李四说真话。

若 $\neg P \to Q$，而若 $Q \to \neg R$，而 $\neg R \to P \wedge Q$，即根据蕴含的定义有若 $\neg P \to P \wedge Q$ 矛盾。

P:张三说真话；Q：李四说真话；R：王五说真话，前提为：$P \to \neg Q$，$\neg P \to Q$，$Q \to \neg R$，$\neg Q \to R$，$R \to \neg P \wedge \neg Q$，$\neg R \to P \vee Q$

编号	公式	依据
(1)	$P \to \neg Q$	前提
(2)	$\neg Q \to R$	前提
(3)	$P \to R$	(1)(2)
(4)	$R \to (\neg P \wedge \neg Q)$	前提
(5)	$P \to (\neg P \wedge \neg Q)$	(3)(4)
(6)	$\neg P \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	(5)
(7)	$\neg P$	(6)

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(8)	$\neg P \to Q$	前提
(9)	Q	(7)(8)
(10)	$Q \to \neg R$	前提
(11)	$\neg R$	(9)(10)
(12)	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	(7)(9)(11)

所以张三说假话，王五说假话，只有李四说真话。

15、两位同学同住在一间宿舍，寝室照明电路按下述要求设计：宿舍门口装一个开关 A，两位同学床头各自装一个开关 B、C，当晚上回宿舍时，按一下开关 A，室内灯点亮；上床后按一下开关 B 或者 C，室内灯熄灭；这样以后，按一下 A、B、C 三个开关中的任何一个，室内灯亮。如果室内灯 G 亮和灭分别用 1 和 0 表示，试求出 G 用 A、B、C 表示主析取范式和主合取范式。

解：A、B、C 分别表示三个开关，当按钮按下时，令其真值为 1，不按按钮时，真值为 0，根据题意开关和灯之间的关系如下表：

A	B	C	G
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

因此，G 可由主析取范式的 形式表示，即

$$G \Leftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

G 的主合取范式的形式为：

$$G \Leftrightarrow (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

第 10 章 谓词逻辑

1、将下列命题符号化：

(1)凡是实数均能比较大小

解：令 $P(x): x$ 是实数，$Q(x,y): x$ 与 y 可比较，则有：

$$\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x,y))$$

(2)一切人不是一样高；不是一切人都一样高

解：令 $P(x): x$ 是人，$H(x,y): x$ 与 y 一样高，则有：

$$\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \to \neg H(x,y)) \wedge \neg \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \to H(x,y))$$

(3) 发光的不都是金子

解：令 $P(x): x$ 是金子，$Q(x): x$ 发光，则有：

$$\neg \forall x (Q(x) \to P(x))$$

(4) 只有一个中国

解：令 $P(x): x$ 是国家，$Q(x): x$ 是中国，则有：

$$\exists ! x (P(x) \wedge Q(x))$$

(5) 通过两个不同的点有且仅有一条直线

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解：令 $P(x):x$ 是一个点，$G(x,y):x$ 与 y 不同，$H(x,y):x$ 与 y 构成一条直线，则有：

$$\forall x\forall y(P(x)\wedge P(y)\wedge G(x,y)\to\exists!H(x,y))$$

(6) 在上海高校学习的学生，未必都是上海籍的学生

解：令 $P(x):x$ 是学生，$Q(x):x$ 在上海高校学习，$R(x):x$ 是上海籍，则有

$$\neg(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)\to P(x)\wedge R(x))$$

(7) 没有一位女同志既是国家选手又是家庭妇女

解：令 $W(x):x$ 是一位女同志，$Q(x):x$ 是国家选手，$H(x):x$ 是家庭妇女则有

$$\neg\exists x(W(x)\wedge Q(x)\wedge H(x))$$

(8) 所有运动员都钦佩某些教练

解：令 $P(x):x$ 是运动员，$Q(x):x$ 是教练，$G(x,y):x$ 钦佩 y，则有：

$$\forall x(P(x)\to\exists y(Q(y)\wedge G(x,y)))$$

(9) 对于每一个实数 x，存在一个更大的实数 y

解：令 $R(x):x$ 是实数；$G(x,y):x$ 比 y 大，则有：

$$\forall x(R(x)\to\exists y(R(y)\wedge G(x,y)))$$

(10)某些汽车比所有的火车都慢，但是至少有一列火车比每辆汽车都快。

解：令 $P(x):x$ 是汽车，$Q(x):x$ 是火车，$G(x,y):x$ 比 y 慢，则有

$$\exists x\forall y(P(x)\wedge Q(y)\wedge G(x,y))\wedge\exists y\forall x(P(x)\wedge Q(y)\wedge G(y,x))$$

2、令 $S(x,y,z)$ 表示 $x+y=z$，$P(x,y,z)$ 表示 $x.y=z$，$L(x,y)$ 表示 $x<y$，个体域为非负整数集。用以上所设的原子谓词公式及量词表示下列命题并判断各命题的真值

(1) 没有 x 小于 0

解：符号化为：

$$\neg\exists xL(x,0)\text{ 或 }\forall x(\neg L(x,0))$$

是真命题。

(2) 对于所有的 x，有 $x+0=x$

解：符号化为 $\forall xS(x,0,0)$，因为个体域为负整数集，因此是命题且是真命题。

(3) 存在着 x，使得 $x.y=y$ 对所有的 y 成立

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

解：符号化为：$\exists x \forall y P(x,y,y)$，显然取 $x=1$ 时成立，因此是命题且是真命题。

(4) 存在着唯一的 x，使得 $x+y=y$ 对所有的 y 都成立

解：$\exists! x \forall y S(x,y,y)$，显然存在唯一的 $x=0$ 时上式成立，因此是命题且是真命题。

3、令个体域为 $\{0,1\}$，试将下列命题转换成不含量词的形式

(1) $\forall x F(0,x)$

解：$F(0,0) \wedge F(0,1)$

(2) $\forall x \forall y F(x,y)$

解：$F(0,0) \wedge F(0,1) \wedge F(1,0) \wedge F(1,1)$

(3) $\exists x F(x) \to \forall y G(y)$

解：$((F(0) \to G(0)) \wedge (F(0) \to G(1))) \vee ((F(1) \to G(0)) \wedge (F(1) \to G(1)))$

4、令个体域为谓词公式集合，定义其中的原子命题如下：$P(x): x$ 是可以证明的，$S(x): x$ 是可以满足的，$H(x): x$ 是真的，试将下列各式翻译成自然语言：

(1) $\forall x (P(x) \to H(x))$

解：如果一个谓词公式是可以证明的，那么它一定是真的。

(2) $\forall x (H(x) \vee \neg S(x))$

解：一个谓词公式要么是真的要么就是非可满足式

(3) $\exists x (H(x) \wedge \neg P(x))$

解：存在不可证明的永真的谓词公式

5、指出下列表达式中的自由变元和约束变元，并指明量词的辖域：

(1) $\forall x (P(x) \wedge \exists x Q(x)) \vee (\forall x P(x) \to Q(y))$

答：$\forall x$ 的辖域为 $P(x) \wedge \exists x Q(x)$，$\exists x$ 的辖域为 $Q(x)$，第二个 $\forall x$ 的辖域为 $P(x)$，x 是约束变元，y 是自由变元。

(2) $\exists x \forall y ((P(x) \wedge Q(y)) \to \forall z R(z))$

答：$\exists x$ 和 $\forall y$ 的辖域为 $(P(x) \wedge Q(y)) \to \forall z R(z)$，$\forall z$ 的辖域为 $R(z)$，其中 x 和 y 和

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

z 都是约束变元。

(3) $A(z) \to (\neg \forall x \forall y B(x,y,a))$

答：$\forall x$ 和 $\forall y$ 的辖域都是 $B(x,y,a)$， x 和 y 都是约束变元，而 z,a 是自由变元。

6、对下列谓词公式中的约束变元进行改名

(1) $\forall x \exists y (P(x,z) \to Q(y)) \leftrightarrow S(x,y)$

答：其中 $(P(x,z) \to Q(y))$ 中的 x,y 是约束变元，而 $S(x,y)$ 中的 x,y 是自由变元。因此有：

$$\forall u \exists v (P(u,z) \wedge Q(v)) \to S(x,y)$$

(2) $(\forall x(P(x) \to (R(x) \vee Q(x))) \wedge \exists x R(x)) \to \exists z S(x,z)$

答：$(P(x) \to (R(x) \vee Q(x))$ 为第一个 $\forall x$ 的辖域，$\exists x$ 的辖域为 $R(x)$，$\exists z$ 的辖域为 $S(x,z)$，其中 $S(x,z)$ 里的 x 是自由变元，其余的 x 全是约束变元，因此有：

$$(\forall u(P(u) \to (R(u) \vee Q(u))) \wedge \exists v R(v)) \to \exists t S(x,t)$$

7、将下列谓词公式中的自由变元进行代换

(1) $(\exists y A(x,y) \to \forall x B(x,z)) \wedge \exists x \forall z C(x,y,z)$ (2) $(\forall y P(x,y) \wedge \exists z Q(x,z)) \vee \forall x R(x,y)$

答：$(\forall y P(u,y) \wedge \exists z Q(u,z)) \vee \forall x R(x,v)$

9 证明下列关系式：

(1) $\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow \exists x P(x)$

证明：因为

$$\begin{aligned}
& \exists x \exists y (P(x) \wedge P(y)) \to \exists x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x (P(x) \wedge \exists y Q(y)) \to \exists x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)) \vee \exists x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & \neg \exists x P(x) \vee \neg \exists y Q(y) \vee \exists x P(x) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg \exists P(x) \vee \exists x P(x)) \vee \neg \exists y Q(y) \\
\Leftrightarrow\ & 1
\end{aligned}$$

因此有 $\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow \exists x P(x)$

(2) $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$

证明：假设前件为真即 $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$ 为真，则 $\forall x \forall y\ P(x)$ 为真，或者

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

$\forall x\forall yQ(y)$ 为真，$\forall x\forall y\ P(x)$ 中 y 为自由变元，$\forall x\forall yQ(y)$ 中 x 为自由变元，因此有 $\forall xP(x)$ 或 $\forall yQ(y)$ 为真，因此 $\forall x\forall y(P(x)\vee Q(y))\Rightarrow(\forall xP(x)\vee\forall yQ(y))$，反之亦然，因此得证。

(3) $\exists x\exists y(P(x)\to P(y))\Leftrightarrow(\forall xP(x)\to\exists yP(y))$

证明：
$$\begin{aligned}&\exists x\exists y(P(x)\to P(y))\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg P(x)\vee P(y))\\&\Leftrightarrow\exists x\exists y(P(y)\vee\neg P(x))\\&\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x)\vee\exists yP(y))\\&\Leftrightarrow(\exists x\neg P(x))\vee\exists yP(y)\\&\Leftrightarrow\neg(\forall xP(x))\vee\exists yP(y)\\&\Leftrightarrow\forall xP(x)\to\exists yP(y)\end{aligned}$$

(4) $\forall x\forall y(P(x)\to Q(y))\Leftrightarrow(\exists xP(x)\to\forall yQ(y))$

证明：
$$\begin{aligned}&\forall x\forall y(P(x)\to Q(y))\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg P(x)\vee Q(y))\\&\Leftrightarrow\forall x(\neg P(x)\vee\forall yQ(y))\Leftrightarrow\forall x(\neg P(x))\vee\forall yQ(y)\\&\Leftrightarrow\neg(\exists xP(x))\vee\forall yQ(y)\\&\Leftrightarrow\exists xP(x)\to\forall yQ(y)\end{aligned}$$

10、求下列各式等值的前束范式

(1) $\forall xP(x)\to\forall yQ(x,y)$

解：
$$\begin{aligned}&\forall xP(x)\to\forall yQ(x,y)\Leftrightarrow\neg(\forall xP(x))\vee\forall yQ(x,y)\\&\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x))\wedge\exists y(\neg Q(x,y))\\&\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x))\wedge\exists y(\neg Q(x,y))\\&\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg P(x)\wedge\neg Q(x,y))\end{aligned}$$

(2) $\forall x(A(x,y)\to\forall yB(x,y))$

解：
$$\begin{aligned}&\forall x(A(x,y)\to\forall yB(x,y))\Leftrightarrow\forall x(\neg A(x,y)\vee\forall yB(x,y))\\&\Leftrightarrow\forall x(\neg A(x,z)\vee\forall yB(x,y))\\&\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg A(x,z)\vee B(x,y))\end{aligned}$$

16、符号化下列命题并推证其结论

(3)没有不守信用的人是可以信赖的。有些可以信赖的人是受过教育的人。因此，有些受过教育的人是守信用的。

解：令 $M(x):x$ 是守信用的；$J(x):x$ 受过教育；$D(x):x$ 可以信赖

前提：$\neg\exists x(\neg M(x)\wedge D(x))$，$(\exists x(D(x)\wedge J(x)))$

有效结论：$\exists x(J(x)\wedge M(x))$

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

编号	公式	依据
(1)	$\neg\exists x(\neg M(x)\wedge D(x))$	前提
(2)	$\forall x\neg(\neg M(x)\wedge D(x))$	(1)
(3)	$\exists x(D(x)\wedge J(x))$	前提
(4)	$D(c)\wedge J(c)$	(3)ES
(5)	$\neg(\neg M(c)\wedge D(c))$	(2)US
(6)	$M(c)\vee\neg D(c))$	(5)
(7)	$D(c)$	(4)
(8)	$M(c)$	(6)(7)
(9)	$J(c)$	(4)
(10)	$J(c)\wedge M(c)$	(8)(9)
(11)	$\exists x(J(x)\wedge M(x))$	(10)EG

(5) 每一个买到门票的人，都能得到座位。因此，如果这里已经没有座位，那么就没有任何人去买门票

解：设个体域为全总个体域

令 $M(x):x$ 是人，$K(x):x$ 买到门票；$E(y):y$ 是座位，$S(x,y):x$ 能得到 y，命题符号化为：

$\forall x((M(x)\wedge K(x)\rightarrow\exists y(E(y)\wedge S(x,y))\Rightarrow\neg\exists yE(y)\rightarrow\neg\exists x(M(x)\wedge K(x))$

证：因 $\neg\exists yE(y)\rightarrow\neg\exists x(M(x)\wedge K(x))$
$\Leftrightarrow\exists x(M(x)\wedge K(x))\rightarrow\exists yE(y)$

故利用等值替换转化为证明：

$\forall x((M(x)\wedge K(x)\rightarrow\exists y(E(y)\wedge S(x,y))\Rightarrow\exists x(M(x)\wedge K(x))\rightarrow\exists yE(y)$

编号	公式	依据
(1)	$\exists x(M(x)\wedge K(x))$	附加前提

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲

(2)	$M(c) \wedge K(c)$	(1)ES
(3)	$\forall x((M(x) \wedge K(x) \to \exists y(E(y) \wedge S(x,y))$	前提
(4)	$(M(c) \wedge K(c)) \to \exists y(E(y) \wedge S(c,y))$	(3)US
(5)	$\exists y(E(y) \wedge S(c,y))$	(2)(4)
(6)	$\exists yE(y) \wedge \exists yS(c,y)$	(5)
(7)	$\exists yE(y)$	(6)
(8)	$\exists x(M(x) \wedge K(x)) \to \exists yE(y)$	(1)(7)
(9)	$\neg\exists yE(y) \to \neg\exists x(M(x) \wedge K(x))$	(8)

学霸助手[xuebazhushou.com]-课后答案|期末试卷|复习提纲