第七章：

3. 证明：$\because a\le b \quad a\wedge c\le a \quad \therefore a\wedge c\le b$ 同理：$a\wedge c\le d$

$\therefore a\wedge c$ 为 b 和 d 的下界 $\quad \therefore a\wedge c\le b\wedge d$

$\because b\le b\vee d$，$a\le b \quad \therefore a\le b\vee d$ 同理：$c\le b\vee d$

$\therefore b\vee d$ 为 a、c 的上界 $\quad \therefore a\vee c\le b\vee d$，得证

4. 证明：$\because a\wedge b\le a$，$a\le a\vee c \quad \therefore a\wedge b\le a\vee c$

同理：$c\wedge d\le a\vee c \quad \therefore a\vee c$ 为 $a\wedge b$ 和 $c\wedge d$ 的上界

$\therefore (a\wedge b)\vee(c\wedge d)\le a\vee c$ 同理 $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\le b\vee d$

$\therefore (a\wedge b)\vee(c\wedge d)$ 为 $a\vee c$ 和 $b\vee d$ 的下界

$\therefore (a\wedge b)\vee(c\wedge d)\le(a\vee c)\wedge(b\vee d)$，得证

12. 证明：用反证法

① 若格中只有两个元素，设 $a=\bar{a}$

$\because$ 补元存在 $\therefore$ 格有 0、1 $\therefore a=0$ 或 1，无论哪种情况 $a\ne\bar{a}$

② 若格中有更多元素，设 $a=\bar{a}$ 且 $a\ne 0$，$a\ne 1$

$a\vee a=1$，$a\wedge a=0$，由幂等律，$a=1$，$a=0$，矛盾

$\therefore$ 不会有元素是它自身的补

19. 证明：若 $a=b_i$，$(1\le i\le r)$

则必有 $a\le b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_r$，若 $a\le b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_r$

$\therefore a\wedge(b_1\vee b_2\vee\cdots b_r)=a$

由分配律，$(a\wedge b_1)\vee(a\wedge b_2)\vee\cdots\vee(a\wedge b_r)=a$

$\because a\ne 0 \quad \therefore a\wedge b_i\ (1\le i\le r)$ 不全为零

设 $a\wedge b_m\ne 0$，$\because b_m$ 为原子且 a 为原子 $\therefore a=b_m$，得证

25. 解：$f(x,y)=(x\wedge(0\vee y))\vee(\bar{x}\wedge\bar{y})$

$=[x\vee(\bar{x}\wedge\bar{y})]\wedge[(0\vee y)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y})]=[(x\vee\bar{x})\wedge(x\vee\bar{y})]\wedge[(0\vee y)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y})]$

$= (x\vee\bar{y})\wedge\{[(a\vee y)\vee\bar{x}]\wedge[(a\vee y)\vee\bar{y}]\} = (x\vee\bar{y})\wedge(x\vee\bar{y}\vee a)\wedge 1$

$= (x\vee\bar{y})\wedge(x\vee\bar{y}\vee a)$

y \ x	0	1	a	β
0	1	1	1	1
1	0	1	a	β
a	β	1	1	β
β	a	1	a	1

26. 解：最小项标准形式：

$f(x,y) = (f(0,0)\wedge\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(f(0,1)\wedge\bar{x}\wedge y)\vee(f(1,0)\wedge x\wedge\bar{y})\vee(f(1,1)\wedge x\wedge y)$

$= (1\wedge\bar{x}\wedge y)\vee(a\wedge x\wedge\bar{y})\vee(1\wedge x\wedge y)$

最大项标准形式

$f(x,y) = (f(0,0)\vee x\vee y)\wedge(f(0,1)\vee x\vee\bar{y})\wedge(f(1,0)\vee\bar{x}\vee y)\wedge(f(1,1)\vee\bar{x}\vee\bar{y})$

$= (1\vee x\vee y)\wedge(0\vee x\vee\bar{y})\wedge(0\vee\bar{x}\vee y)\wedge(1\vee\bar{x}\vee\bar{y})$

34. 证明：左边 $= (a\vee b)\wedge(c\vee\bar{b}) = [a\wedge(c\vee\bar{b})]\vee[b\wedge(c\vee\bar{b})]$

$= [(a\wedge\bar{b})\vee(a\wedge c)]\vee[(b\wedge c)\vee(b\wedge\bar{b})] = [(a\wedge\bar{b})\vee(a\wedge c)]\vee[b\wedge c]$

$= [a\wedge(c\vee\bar{b})]\vee(b\wedge c)$

右边 $: (a\wedge\bar{b})\vee(c\wedge b) = [(c\wedge b)\vee a]\wedge[(c\wedge b)\vee\bar{b}]$

$= [(c\wedge b)\vee a]\wedge(c\vee\bar{b}) = [(c\wedge b)\wedge(c\vee\bar{b})]\vee[a\wedge(c\vee\bar{b})]$

$= [a\wedge(c\vee\bar{b})]\vee[(c\wedge b\wedge c)\vee(c\wedge b\wedge\bar{b})] = [a\wedge(c\vee\bar{b})]\vee(b\wedge c) =$ 左边，得证

35. 由题意，对 $\forall x_1, x_2\in V_1$，有 $f(x_1\vee x_2) = f(x_1)\oplus f(x_2)$；$f(x_1\wedge x_2) = f(x_1)\otimes f(x_2)$

(1) 证明：$\because f(0\vee x) = f(0)\oplus f(x) = f(x)$，$f(0\wedge x) = f(0)\otimes f(x) = f(0)$

$\therefore f(0)$ 为 V_2 的最小元，$f(0) = a$ $\therefore 0\in J$

(2) 证明：由题意，$a\in B$，$f(a) = a$ $\therefore f(x\vee a) = f(x)\oplus f(a) = f(x)$

$f(x\wedge a) = f(x)\otimes f(a) = f(a)$ $\because x\le a$ $\therefore f(x\vee a) = f(a) = f(x)$

$\therefore x\in J$

(3) 证明：由(1)(2)，J不为空

若 $x_1, x_2 \in J$，则 $f(x_1 \vee x_2) = f(x_1) \oplus f(x_2) = \partial \vee \partial = \partial$

由 $\vee$ 的封闭性，$x_1, x_2 \in B$，则 $x_1 \vee x_2 \in B$，

$\therefore x_1 \vee x_2 \in J$

$f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1) \otimes f(x_2) = \partial \otimes \partial = \partial$ 同理，有 $x_1 \wedge x_2 \in J$

综上：$\langle J; \vee, \wedge \rangle$ 构成一代数系统