率失真理论

1. 率失真编码
2. 率失真编码定理
3. 率失真函数的计算

无损信源编码

$$\mathbf{X} \to \boxed{\text{编码器} \quad f} \to f(\mathbf{X}) \to \boxed{\text{解码器} \quad g} \to \hat{\mathbf{X}} = g\big(f(\mathbf{X})\big)$$

- $\boldsymbol{X}$: 信源序列
- $f(\boldsymbol{X})$: 压缩序列
- $\overset{\wedge}{\boldsymbol{X}} = g(f(\boldsymbol{X}))$: 解压序列 (重建序列)

无损信源编码: $\overset{\wedge}{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}$

- **最优**无损编码满足:

$$H(X) \leq L < H(X) + \frac{1}{n}$$

- 无损信源编码只适用于离散随机变量

有损信源编码

$$\mathbf{X} \rightarrow \boxed{\text{编码器} \quad f} \rightarrow f(\mathbf{X}) \rightarrow \boxed{\text{解码器} \quad g} \rightarrow \hat{\mathbf{X}} = g\big(f(\mathbf{X})\big)$$

有损信源编码: $\hat{X} \neq X$

- 重建的 $\hat{X}$ 不需要和原信号 X 相同
- $\hat{X}$ 要与 X 尽量相似

有损信源编码的意义:

- 完美描述一个任意实数需要无穷比特
  - 连续随机变量有无穷熵，不可能做到无损编码
- 因此，对连续随机变量采用有损编码

动机

问题:

- 码率和失真度的最优折中?
- 或，给定失真度，最小码率是多少?

答案:

- 率失真函数 $\Leftarrow$ 最小化互信息

率失真理论

1. 率失真编码
2. 率失真编码定理
3. 率失真函数的计算

率失真编码

$$\mathbf{X} \rightarrow \boxed{\text{编码器} \quad f} \rightarrow f(\mathbf{X}) \rightarrow \boxed{\text{解码器} \quad g} \rightarrow \widehat{\mathbf{X}} = g\big(f(\mathbf{X})\big)$$

定义: $(2^{nR}, n)$ 率失真编码 包含一个编码函数 f_n:

$$f_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$$

和一个解码函数 g_n:

$$g_n : \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}^n$$

定义：失真

定义: 两个序列 $\boldsymbol{x}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的失真为:

$$d(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, \hat{x}_i)$$

- 离散 X 的汉明失真（Hamming distortion）：

$$d(x_i, \hat{x}_i) = \begin{cases} 0, & x_i = \hat{x}_i \\ 1, & x_i \neq \hat{x}_i \end{cases}$$

- 连续 X 的方差失真（square-error distortion）：

$$d(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}}) = (x_i - \hat{x}_i)^2$$

期望失真

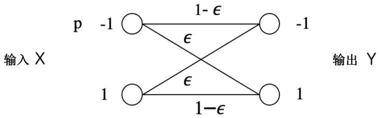
定义： $(2^{nR}, n)$ 码的**期望失真**为 D:

$$D = \mathrm{E}\{d\Big(\boldsymbol{X}, g\big(f(\boldsymbol{X})\big)\Big)\} = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}^n} p(\boldsymbol{x})\, d\Big(\boldsymbol{x}, g\big(f(\boldsymbol{x})\big)\Big)$$

举例

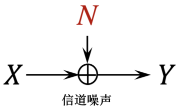
- **二元对称信道**: $p = 0.5$, $\epsilon < 0.5$，最优估计为 $\hat{X} = Y$。期望汉明失真为

$$D = \sum_{x \in \{-1,+1\}} p(x) d(x, \hat{x}) = 0.5 * \epsilon * 1 + 0.5 * \epsilon * 1 = \epsilon.$$



- AWGN 信道: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ 且 $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$，则最优估计为 $\hat{X} = \frac{1}{1+\sigma^2} Y$，其期望方差失真为

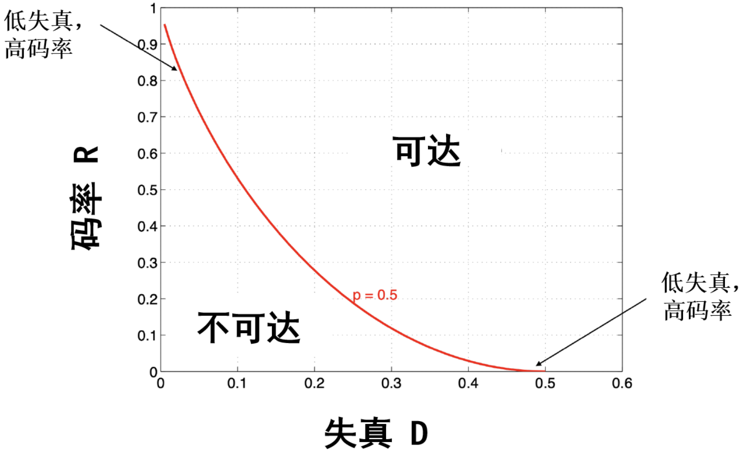
$$D = \mathrm{E}_X\{(X - \hat{X})^2\} = \mathrm{E}_X\{(\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} X - \frac{1}{1+\sigma^2} N)^2\} = \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}.$$



率失真理论

1. 率失真编码
2. **率失真编码定理**
3. 率失真函数的计算

可达率失真点和率失真函数



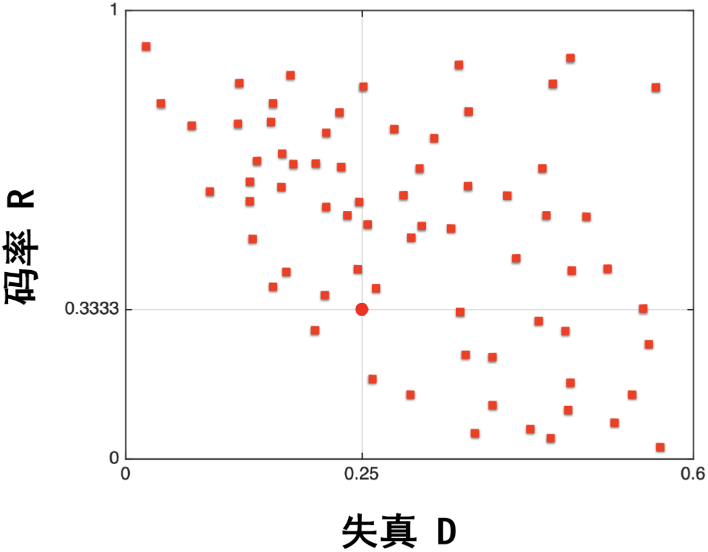
率失真区域

定义（率失真区域）：如果存在一个 $(2^{nR}, n)$ 码本及编码函数、解码函数 f_n, g_n，满足:

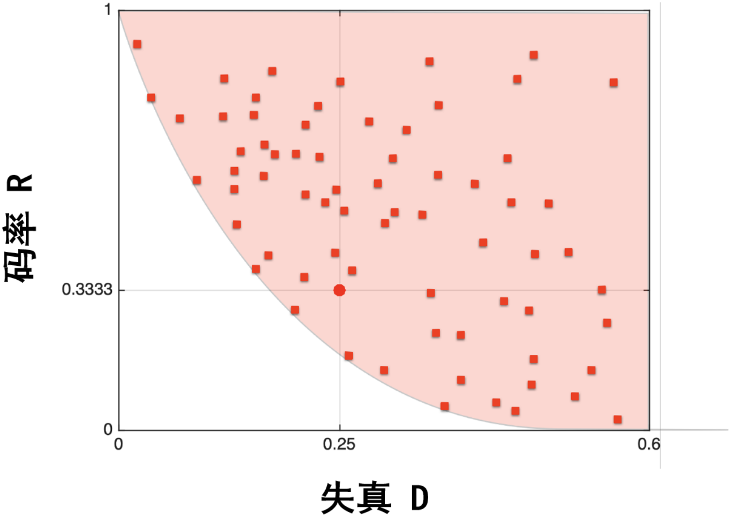
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big\{d\Big(\boldsymbol{X}, g_n\big(f_n(\boldsymbol{X})\big)\Big)\Big\} \leq D,$$

则称**率失真点** (R, D) **可达**，**率失真区域**为所有可达率失真点 (R, D) 构成的集合。

可达率失真点举例



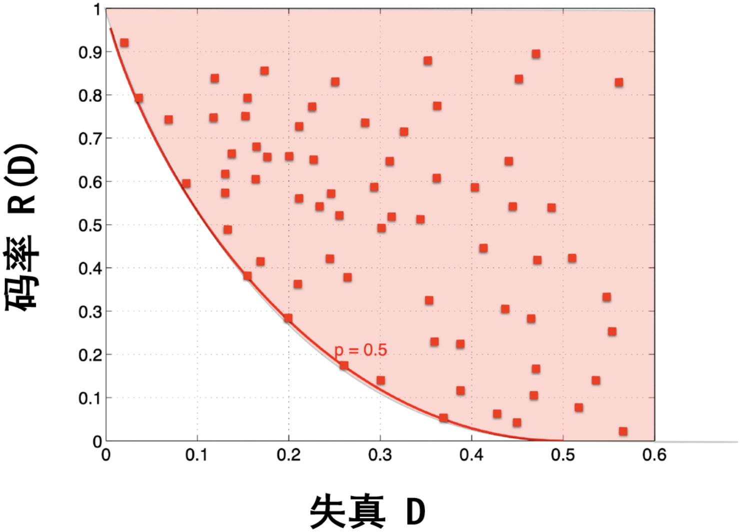
率失真区域举例



率失真函数

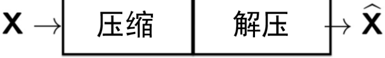
定义（率失真函数）：给定失真 D，率失真区域 (R, D) 中 R 的下确界为**率失真函数**。

率失真区域举例：率失真函数



互信息就是比特流

互信息 $I(X;Y)$ 就是 X 和 Y“比特流的速率”。



信道编码

最大化传输速率

$C = \max I(X;Y)$

有损信源编码

最小化压缩率

$R = \min I(X;\hat{X})$

率失真编码定理

率失真编码定理: 对于分布为 $p(x)$ 的独立同分布信源 X 和失真函数 $d(\cdot,\cdot)$，率失真函数 $R(D)$ 就等于 D 保真度下的最小互信息，即

$$R(D) = \min_{p(\hat{x}|x):\mathrm{E}\{d(X,\hat{X})\}\le D} I(X;\hat{X})$$

其中

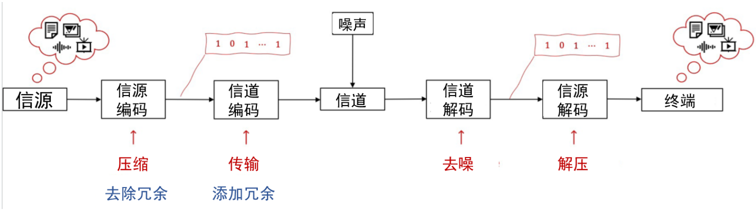
$$\mathrm{E}\{d(X,\hat{X})\} = \sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{\hat{x}\in\hat{\mathcal{X}}} p(x,\hat{x})d(x,\hat{x})$$

注:

- 约束条件：对所有满足失真约束的 $p(\hat{x}|x)$
- 优化目标：最小化互信息!

率失真编码定理

- **信道编码**: 最大化互信息
  - 给定信道 $p(y|x)$, 优化输入分布 $p^*(x)$
  - 最优编码满足 $p^*(x)$
- **有损信源编码**: 最小化互信息
  - 给定信源 $p(x)$, 优化条件概率 $p^*(\hat{x}|x)$
  - 最优编码满足 $p^*(\hat{x}|x)$

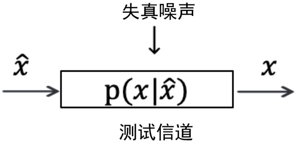


率失真理论

1. 率失真编码
2. 率失真编码定理
3. 率失真函数的计算

率失真函数的计算——测试信道

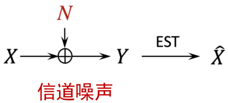
测试信道:



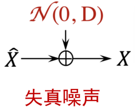
- 用 $p(x|\hat{x})$ 分析比用 $p(\hat{x}|x)$ 更简单
- “噪声”导致了失真 D
- 直觉: 最优恢复 $\hat{x}$ 为 x 的后验估计，可用测试信道建模:

$$\text{“}X = \hat{X} + N\text{”}$$

举例： 测试信道



真实信道



测试信道

- AWGN 信道: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $N \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, 最优估计为

$$\hat{X} = \frac{1}{1+\sigma^2} Y$$

- 期望失真 (方差):

$$D = \mathrm{E}_X\{(X - \hat{X})^2\} = \sigma^2/(1+\sigma^2)$$

$$\hat{X} = Y/(1+\sigma^2) = X + N/(1+\sigma^2)$$

$$X = (1+\sigma^2)\hat{X} - N = \hat{X} + \sigma^2\hat{X} - N = \hat{X} + Z$$

其中 $Z \sim \mathcal{N}(0, D)$ ， $E\{\hat{X}Z\} = 0$ (Z 和 $\hat{X}$ 独立)

求率失真函数的一般方法

给定 $p(x)$ 和 D:

1. 写出测试信道 $p(x|\hat{x})$，尝试找到对称性
2. 写出测试信道的输入分布 $p(\hat{x})$
3. 解出未知参数，使其满足
   - $D = \mathrm{E}\{d(X, \hat{X})\}$
   - $p(x) = \sum_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{X}}} p(\hat{x}) p(x|\hat{x})$
4. **优化测试信道**：$\max H(X|\hat{X})$，从而

$$R(D) = \min I(X; \hat{X}) = H(X) - \max H(X|\hat{X})$$

二元信源的率失真函数

推论: $X \in \{0,1\}$, $p(x) = [1-p, p]$，采用汉明失真，二元信源的率失真函数$R(D)$ 为:

$$R(D) = \begin{cases} h(p) - h(D), & 0 \le D \le \min(p, 1-p) \\ 0, & D > \min(p, 1-p) \end{cases}$$

- 当 $D > \min(p, 1-p)$: $R(D) = 0$。(注: X 最多可失真 p 或 $1-p$)

$$\hat{X} = \begin{cases} 0, & p \le 0.5 \\ 1, & p > 0.5 \end{cases}$$

- 只需研究 $D \le \min(p, 1-p)$ 的情况

证明第一部分：下界

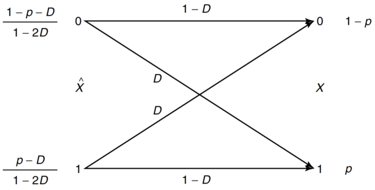
不失一般性，假设 $D \le p \le 1/2$.

$$\begin{aligned} I(X;\hat{X}) &= H(X) - H(X|\hat{X}) \\ &= h(p) - H(X \oplus \hat{X}|\hat{X}) \\ &\ge h(p) - H(X \oplus \hat{X}) \\ &\ge h(p) - h(D) \end{aligned}$$

注: $E = X \oplus \hat{X} \in \{0,1\}$, $p(E=1) = D$, $p(E=0) = 1-D$.

证明第二部分：可达性

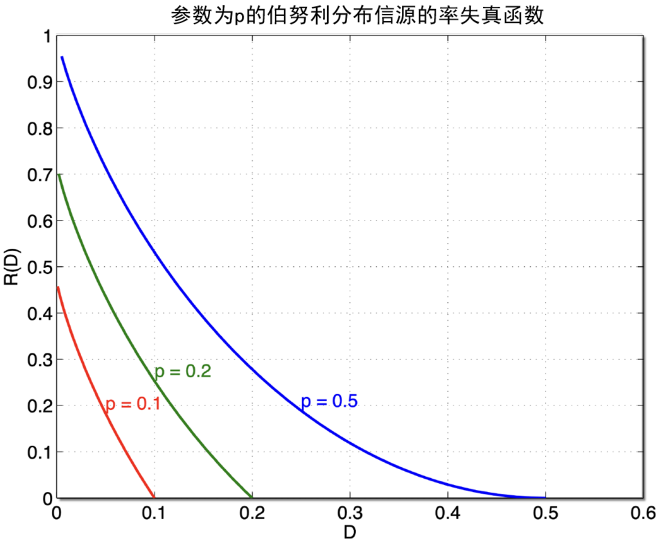
假设 $D \le p \le 1/2$.



$$I(X;\hat{X}) = H(X) - H(X|\hat{X}) = h(p) - h(D)$$

注: $X \in \{0,1\}$ ，概率为 $[p, 1-p]$ ，且 $p(X|\hat{X}) = [1-D\ D; D\ 1-D]$

二元信源的率失真函数



参数为p的伯努利分布信源的率失真函数
R(D)
D
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
p = 0.1
p = 0.2
p = 0.5

高斯信源的率失真函数

推论：对高斯信号 $X \in \{0, \sigma^2\}$，采用均方误差失真度量，**率失真函数**$R(D)$ 为:

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}, & 0 \le D \le \sigma^2 \\ 0, & D > \sigma^2 \end{cases}$$

- 当 $D > \sigma^2$, 令 $\hat{X} = 0$，$D = \sigma^2$，因此 $R(D) = 0$。(注：X 最多可失真 σ^2)
- 只需研究 $D \le \sigma^2$ 的情况

证明第一部分：下界

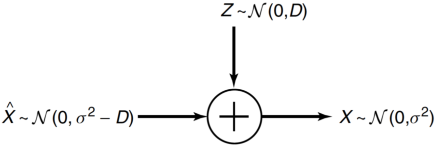
不失一般性，令 $D \le \sigma^2$，

$$
\begin{aligned}
I(X;\hat{X}) &= h(X) - h(X|\hat{X}) \\
&= h(X) - h(X-\hat{X}|\hat{X}) \\
&\ge h(X) - h(X-\hat{X}) \\
&\ge h(X) - h\big(\mathcal{N}(0, \mathrm{E}(X-\hat{X})^2\big) \\
&\ge \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) - \frac{1}{2}\log(2\pi eD) \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}
\end{aligned}
$$

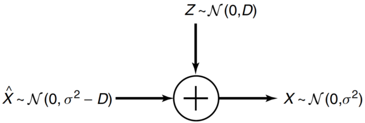
- 同方差下，高斯分布微分熵最大
- $\mathrm{E}(X-\hat{X})^2 \le D$

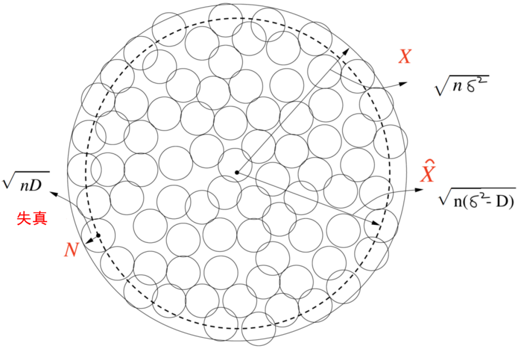
证明第二部分：可达性

假设 $D \le \sigma^2$.



$$
\begin{aligned}
I(X;\hat{X}) &= H(X) - H(X|\hat{X}) \\
&= H(X) - H(Z) \\
&= h\big(\mathcal{N}(0,\sigma^2)\big) - h\big(\mathcal{N}(0,D)\big) \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}
\end{aligned}
$$

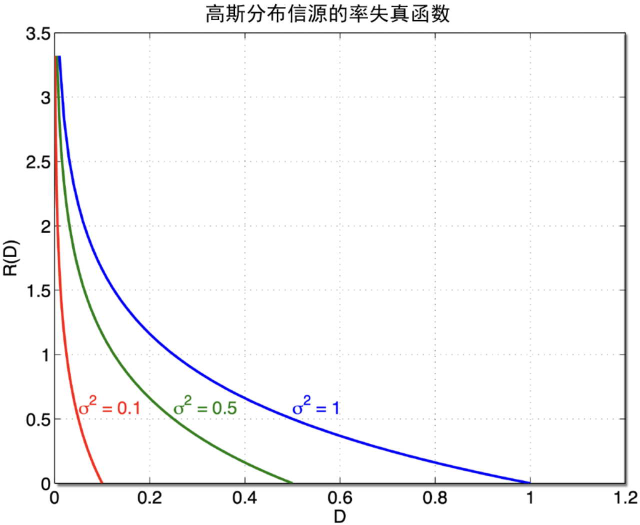




$$M = \mathrm{vol}(X)/\mathrm{vol}(N) = \left(\sqrt{n\sigma^2}\right)^n / \left(\sqrt{nD}\right)^n = \left(\sigma^2/D\right)^{n/2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{n}\log M = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{D}\right)$$

高斯信源的率失真函数



高斯分布信源的率失真函数
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
R(D)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
D
σ2 = 0.1
σ2 = 0.5
σ2 = 1

并行高斯信源的率失真函数

推论：考虑独立高斯变量$X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2), i = 1, \ldots, m$，均方误差失真度量

$$R(D) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2}{D_i}$$

其中

$$D_i = \begin{cases} \lambda, & \text{if } \lambda < \sigma_i^2 \\ \sigma_i^2, & \text{if } \lambda \geq \sigma_i^2 \end{cases}$$

其中 λ 使其满足 $\sum_{i=1}^{m} D_i = D$

直观解释

- 当 $D \geq \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2$，令 $\hat{X}_i = 0$，$D_i = \sigma_i^2$，则 $R(D) = 0$
- 只需研究 $D < \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2$ 的情况
- **问题**: 如何分配失真? 设 X_i 的失真为 D_i，其失真增加Δ，码率下降

$$R_\Delta = \frac{1}{2}\log\frac{\sigma_i^2}{D_i} - \frac{1}{2}\log\frac{\sigma_i^2}{D_i+\Delta} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\Delta}{D_i}\right)$$

R_Δ **关于** D_i **递增**!

- 希望 R_Δ 尽可能大（码率尽可能小）$\Rightarrow$ 希望给更小的 D_i 分配失真
- 最大失真约束: $D_i \leq \sigma_i^2 \Rightarrow$ **反注水**

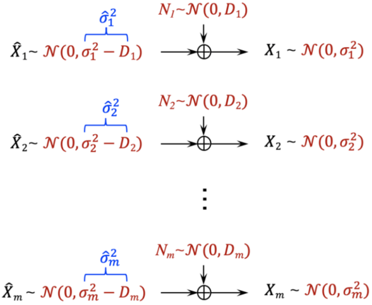
测试信道和反注水

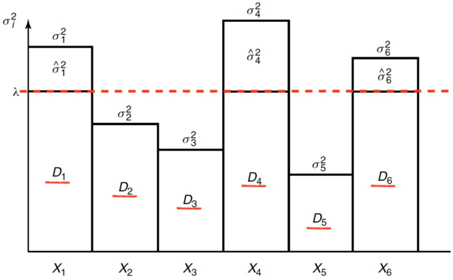
命题：通过**反注水**方式对独立高斯信号进行失真分配，$N_i \sim \mathcal{N}(0, D_i^*)$ 最优，其中

$$D_i^* = \min(\sigma_i^2, \lambda), \qquad \sum D_i^* = D$$

率失真函数为

$$R(D) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2}{D_i} \quad (\text{比特/符号})$$





总结

- 率失真理论研究**有损信源编码**
- **压缩率**R 和**失真**D 互相折中
- 临界线称为率失真函数 $R(D)$
- 率失真函数通过**最小化互信息**计算
- **二元信道**和**高斯信道**有解析的率失真函数 $R(D)$

作业

- 复习授课内容
- 预习网络信息论 1
- 独立完成习题
  - 5.2
  - 5.3
  - 5.6
  - 5.9