矩阵论

2024年秋学期

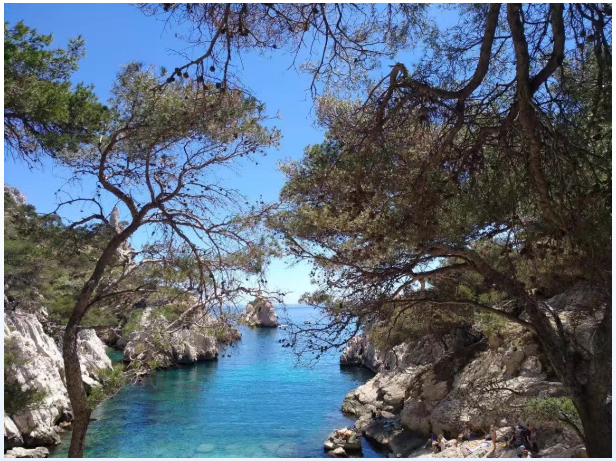
第一讲
2024年9月9日

1）课程概述
2）矩阵代数基础

张婷，信电学院，信息与通信工程系，副教授

邮箱：zhang_ting@zju.edu.cn
办公室：信电楼432
研究方向：物理场重建、成像和信号处理
个人主页：
https://person.zju.edu.cn/tzhang





助教：徐若彭（2024级直博生）
邮箱：ruopengxu@zju.edu.cn
电话：19550226784

2024~2025学年秋学期

周一	第9~10节	玉泉校区教7-304
周三	第9~10节	玉泉校区教7-304

课程网站：

学在浙大（下载课件、提交电子版作业）

http://course.zju.edu.cn/

课程群：

钉钉群（日常交流、资源分享）

概述

- 开课目的（文献阅读/研究创新）

物理问题数学化 数学问题物理化

工具：向量与矩阵；结果：矩阵方程

典型物理模型（多个信号的观测方程）

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \boldsymbol{\upsilon}(n)$$

其中

信道传输矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times p}$

$$\mathbf{s}(n) = \begin{bmatrix} s_1(n) & \cdots & s_p(n) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) & \cdots & x_M(n) \end{bmatrix}^T$$

问题1

估计信号$\mathbf{s}(n)$ 或信号参量

目标函数-最优化分析-梯度法等

概述

问题2

估计信号个数

数据相关矩阵的特征分析/观测矩阵的奇异性分析

问题3

估计信号传输系统/信道特征

数据相关矩阵的特征分析/观测矩阵的奇异性分析

问题4（若存在干扰）

加性干扰背景下信号干扰的分离

子空间分析以及矩阵投影

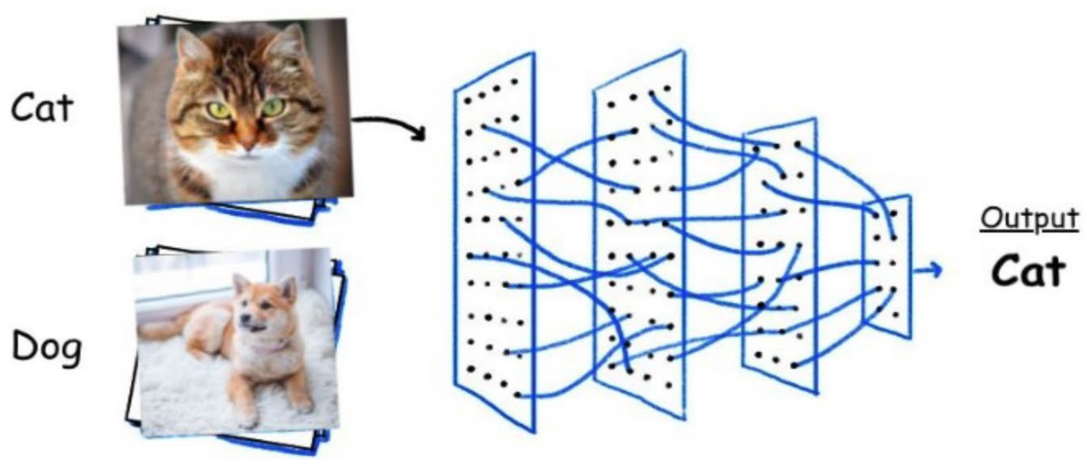
概述

典型AI模型研发过程

物理问题/业务问题/数据问题：

Dog or Cat ?

物理问题数学化：



标签/决策

图片　　**AI 模型**

概述

物理问题数学化：

图片	AI 模型		标签/决策
⇩	⇩	待学习的模型参数：向量/矩阵	⇩
向量/矩阵 $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{X}$	$f_{\boxed{\theta}}(\boldsymbol{x})$		标量： y

AI模型训练： 训练集 $\{\boldsymbol{x}_n, y_n\}_{\{n=1\}}^{N}$

问题建模： $\min\limits_{\boldsymbol{\theta}} \text{cost}\left(y_n, f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}_n)\right)$

问题结构分析： 凸优化问题 or 非凸？ 可分 or 不可分？

How? 计算梯度向量等

算法设计： 随机梯度下降（SGD）+各种加速

概述

- **教学目的**

在线性代数的基本知识基础上，系统地掌握矩阵的基本理论、基本方法以及算法的执行，进一步深化和提高矩阵的理论知识，掌握各种矩阵分解的计算方法，了解矩阵理论的各种应用，尤其在信号处理、阵处理、电子、通信、模式识别、图像处理等学科中的应用。

注重基本概念、基本理论及方法的正确理解与灵活运用。

概述

课程内容及进度安排（32学时）

矩阵代数基础	6学时	建模
特殊矩阵	2学时	
矩阵微分	4学时	计算
梯度分析与最优化	4学时	
奇异值分析	4学时	分析
矩阵方程求解	2学时	
特征分析	4学时	
子空间分析	2学时	
习题	4学时	

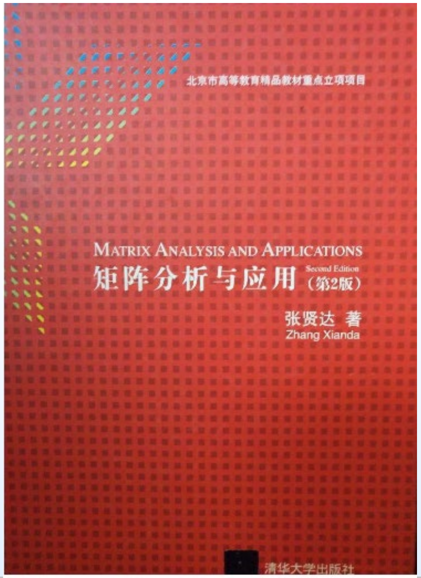
概述

课程学习的主线

- 物理问题数学化，数学问题物理化。
- 注重基本概念/方法的理解，重实际应用，淡化理论推导。

参考书

张贤达著, 矩阵分析与应用, 清华大学出版社, 2013年11月

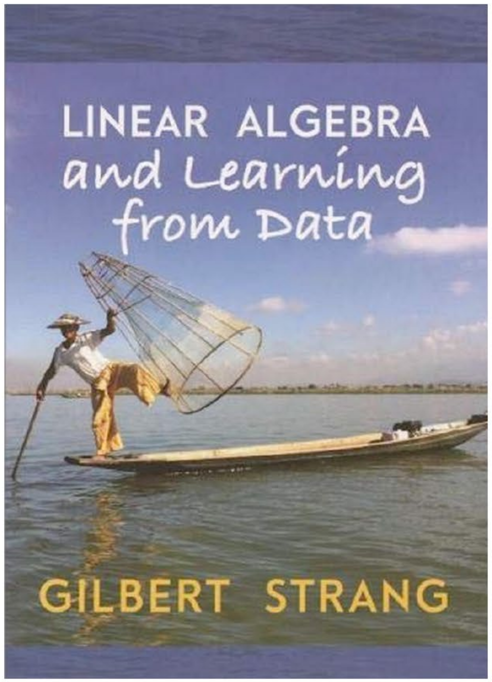


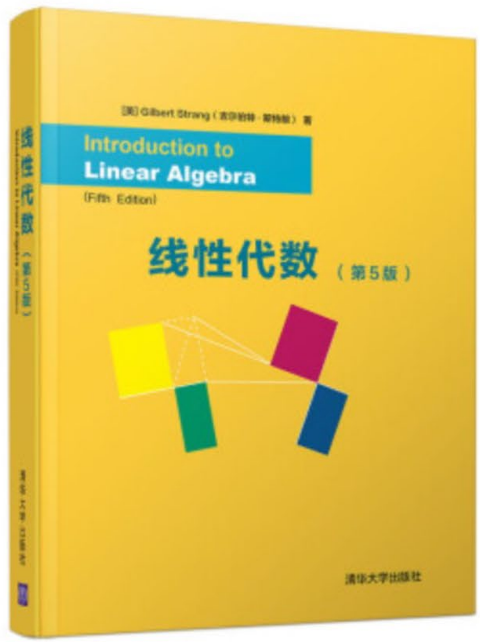
考核方式

平时40%（作业25%+实验10%+课堂表现5%）
考试60%（半开卷考），1张A4纸（手写正反面）
课堂讲解习题/例题一次，平时分加4分

概述

拓展阅读：





https://www.bilibili.com/video/BV1b4411j7V3?p=1&vd_source=343f1f1a61a1e77760123a4ac644c97f

矩阵的基本运算

包括矩阵的转置、共轭、共轭转置、加法和乘法。

共轭转置（Hermitian转置/ Hermitian伴随/ Hermitian共轭）

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{m1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{m2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$$

加法 $[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}]_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

乘法 $[\alpha\boldsymbol{A}]_{ij}=\alpha a_{ij}$ $\quad [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}]_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=1,\cdots,m$

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,s$$

矩阵代数基础

运算法则

加法

$$A+B=B+A$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

乘法

$$A(BC)=(AB)C$$

$$(A+B)C=AC+BC$$

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

共轭、转置、共轭转置和逆矩阵性质

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*,\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\quad (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\text{ 为可逆的正方矩阵})}$$

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*,\quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}},\quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{H}}$$

对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 都是 Hermitian 矩阵

矩阵代数基础

运算法则

导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{12}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{1n}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}a_{21}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{22}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{2n}}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}a_{m1}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{m2}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{mn}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$$

Eq. (1.1.21)

矩阵函数：Eq. 1.1.17~22

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{AB}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$$

积分

$$\int \boldsymbol{A}\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \int a_{11}\mathrm{d}t & \int a_{12}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{1n}\mathrm{d}t \\ \int a_{21}\mathrm{d}t & \int a_{22}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{2n}\mathrm{d}t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int a_{m1}\mathrm{d}t & \int a_{m2}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{mn}\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

矩阵的基本运算

工程和科学计算中常见的方程组

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

矩阵代数基础

向量的线性无关与非奇异性

线性方程组

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$$

向量组线性无关：只有零解

向量组线性相关：有非零解

$n \times n$ 矩阵方程组

$$Cu = 0$$

只有零解：C是非奇异的

存在非零解：C 是奇异的

矩阵的初等变换

初等行变换

(1) 互换矩阵的任意两行，如 $\boldsymbol{r}_p \leftrightarrow \boldsymbol{r}_q$，称为 I 型初等行变换。

(2) 一行元素同乘一个非零常数 α，如 $\alpha\boldsymbol{r}_p \to \boldsymbol{r}_p$，称为 II 型初等行变换。

(3) 将第 p 行元素同乘一个非零常数 β 后，加给第 q 行，即 $\beta\boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_q \to \boldsymbol{r}_q$，称为 III 型初等行变换。

经过初等行变换得到的矩阵等价于原矩阵，行等价矩阵

应用I：方程组求解

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

高斯消去法

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}]$$

初等列变换?

矩阵的初等变换

初等行变换

应用II：矩阵求逆

$$AX = I \xrightarrow{\text{初等行变换}} X = A^{-1}$$

高斯消去法

$$[A, I] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [I, A^{-1}]$$

复矩阵方程求解 $(A_r + j A_i)(x_r + j x_i) = b_r + j b_i$

$$\begin{bmatrix} A_r & -A_i \\ A_i & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_r \\ b_i \end{bmatrix}$$

复矩阵方程求解 $Ax = b \xrightarrow{\text{初等行变换}} x = A^{-1}b$

实增广矩阵 $\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} A_r & -A_i \\ A_i & A_r \end{matrix}} & \begin{matrix} b_r \\ b_i \end{matrix} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} I_n & O_n & x_r \\ O_n & I_n & x_i \end{bmatrix}$