信道编码 2：信道编码定理

1. 联合典型集和联合渐近均分性
2. 信道编码定理
3. 信道编码定理的直接证明
4. 信道编码定理逆定理证明
5. 信源信道联合编码定理

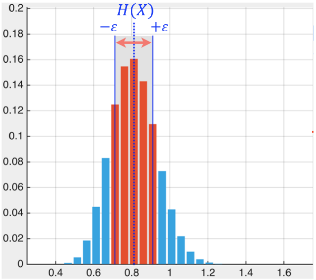
信道编码 2：信道编码定理

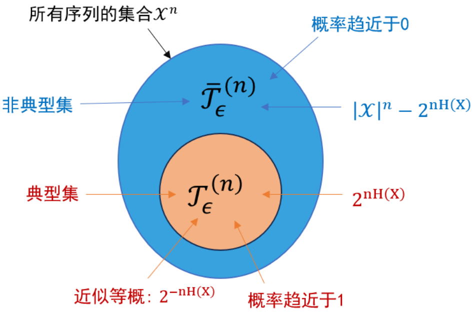
1. 联合典型集和联合渐近均分性
2. 信道编码定理
3. 信道编码定理的直接证明
4. 信道编码定理逆定理证明
5. 信源信道联合编码定理

回顾：单变量典型集 (Typical Set)

定义：令 $\mathcal{X}^n$ 为一个离散无记忆信源，ϵ 为任意正数，则典型集 $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$ 是所有样本熵与真实熵 “ϵ 接近” 的随机序列 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}^n$ 组成的集合，即

$$\mathcal{T}_\epsilon^{(n)} = \{\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}^n : |\bar{H}(\boldsymbol{X}) - H(X)| < \epsilon\}.$$





离散无记忆信道

令 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 为联合概率分布为 $p_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的随机向量:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \big((x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\big)$$

离散无记忆信道:

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i)$$

联合典型集的定义

定义（联合典型集）: 两个随机向量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的联合典型集 $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$ 定义如下:

$$\mathcal{T}_\epsilon^{(n)} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n :$$

联合典型集的定义

定义（联合典型集）：两个随机向量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的联合典型集 $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\epsilon^{(n)} = &\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \\ &\quad | -\tfrac{1}{n} \log p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) - H(X)| < \epsilon,\end{aligned}$$

联合典型集的定义

定义（联合典型集）：两个随机向量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的联合典型集 $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\epsilon^{(n)} =& \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \\ & |-\frac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) - H(X)| < \epsilon, \quad \Rightarrow \boldsymbol{x}\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(X)\end{aligned}$$

联合典型集的定义

定义（联合典型集）：两个随机向量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的联合典型集 $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_\epsilon^{(n)} = & \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \\
& \quad |-\tfrac{1}{n} \log p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) - H(X)| < \epsilon, \qquad \Rightarrow \boldsymbol{x}\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(X) \\
& \quad |-\tfrac{1}{n} \log p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) - H(Y)| < \epsilon,
\end{aligned}
$$

联合典型集的定义

定义（联合典型集）：两个随机向量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的联合典型集 $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_\epsilon^{(n)} = \{ & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \\
& |-\tfrac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) - H(X)| < \epsilon, \quad \Rightarrow \boldsymbol{x}\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(X) \\
& |-\tfrac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) - H(Y)| < \epsilon, \quad \Rightarrow \boldsymbol{y}\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(Y)
\end{aligned}
$$

联合典型集的定义

定义（联合典型集）：两个随机向量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的联合典型集 $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_\epsilon^{(n)} = \{ & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \\
& |-\tfrac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) - H(X)| < \epsilon, \quad \Rightarrow \boldsymbol{x}\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(X) \\
& |-\tfrac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) - H(Y)| < \epsilon, \quad \Rightarrow \boldsymbol{y}\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(Y) \\
& |-\tfrac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - H(X, Y)| < \epsilon \}.
\end{aligned}
$$

联合典型集的定义

定义（联合典型集）：两个随机向量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的联合典型集 $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_\epsilon^{(n)} = \Big\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \\
& |-\frac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) - H(X)| < \epsilon, \quad \Rightarrow \boldsymbol{x}\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(X) \\
& |-\frac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) - H(Y)| < \epsilon, \quad \Rightarrow \boldsymbol{y}\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(Y) \\
& |-\frac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{XY}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - H(X, Y)| < \epsilon \Big\}. \quad \Rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(X, Y)
\end{aligned}
$$

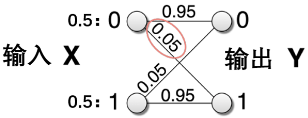
联合典型集的定义

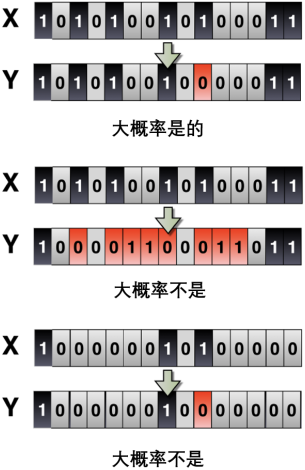
定义（联合典型集）：两个随机向量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的联合典型集 $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_\epsilon^{(n)} = \Big\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \\
& |-\tfrac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) - H(X)| < \epsilon, && \Rightarrow \boldsymbol{x}\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(X) \\
& |-\tfrac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) - H(Y)| < \epsilon, && \Rightarrow \boldsymbol{y}\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(Y) \\
& |-\tfrac{1}{n}\log p_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - H(X, Y)| < \epsilon \Big\}. && \Rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\text{样本熵} \xrightarrow{\epsilon} H(X, Y)
\end{aligned}
$$

为什么这样定义？

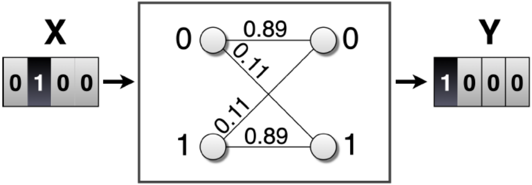
联合典型集：(X, Y) 是由这个系统生成的吗？





(X, Y) 是由这个系统生成的吗？$\Leftrightarrow$ X 和 Y 是联合典型吗？

联合典型集举例



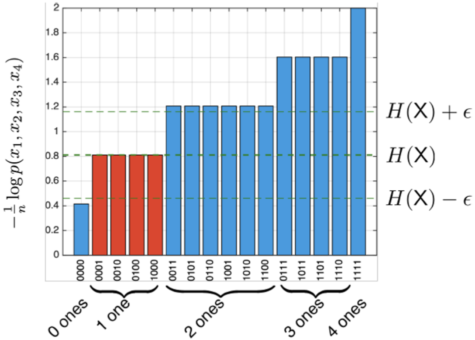
- 错误概率 $p = 0.11$ 的二元对称信道
- 输入概率分布 $p(x) = [0.75, 0.25] \overset{p_{Y|X}}{\Longrightarrow} Y \sim p(y) = [0.695, 0.305]$

问：**对于** $n = 4, \epsilon = 0.35$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (0100, 1000)$ **是否属于典型集** $\mathcal{T}_{0.35}^{(4)}$？

X 的典型集

$$X \sim p(x) = [0.75, 0.25], H(X) = 0.8113, n = 4, \epsilon = 0.35$$

x_1, x_2, x_3, x_4	$-\frac{1}{n}\log p(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0 0 0 0	0.4150
1 0 0 0	0.8113
0 1 0 0	0.8113
0 0 1 0	0.8113
0 0 0 1	0.8113
1 1 0 0	1.2075
1 0 1 0	1.2075
0 1 1 0	1.2075
1 0 0 1	1.2075
0 1 0 1	1.2075
0 0 1 1	1.2075
1 1 1 0	1.6038
1 1 0 1	1.6038
1 0 1 1	1.6038
0 1 1 1	1.6038
1 1 1 1	2.0000
......	......



X 的典型集

$$X \sim p(x) = [0.75, 0.25], H(X) = 0.8113, n = 4, \epsilon = 0.35$$

- 典型的 $\boldsymbol{x}$:
  $\{0001, 0010, 0100, 1000\}$
- $\boldsymbol{x} = 0100$ 是典型的吗？

X 的典型集

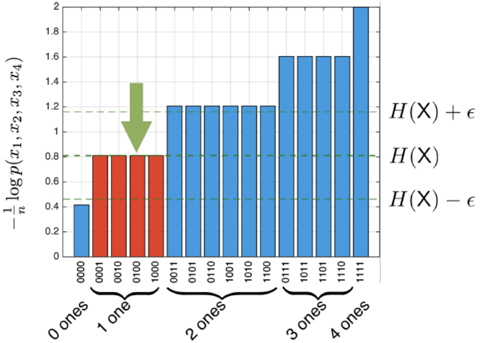
$$X \sim p(x) = [0.75, 0.25], H(X) = 0.8113, n = 4, \epsilon = 0.35$$

- 典型的 $\boldsymbol{x}$:

  $\{0001, 0010, \color{red}{0100}, 1000\}$

- $\boldsymbol{x} = \color{red}{0100}$ 是典型的吗？

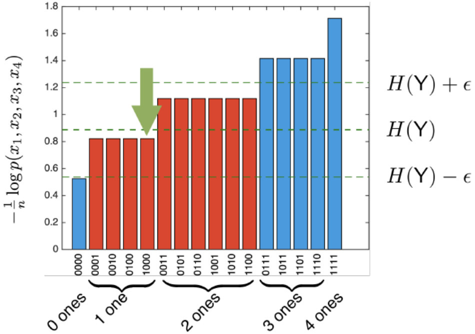
  $\Rightarrow$ 是



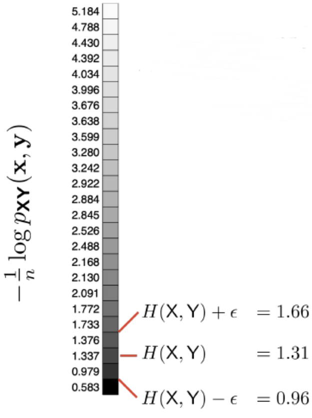
Y 的典型集

$$Y \sim p(y) = [0.695, 0.305], H(Y) = 0.8873, n = 4, \epsilon = 0.35$$

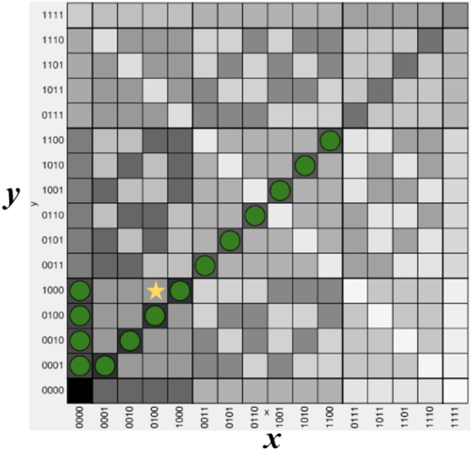
- 典型的 $\boldsymbol{y}$:
  $\{0001, 0010, 0100, 1000,$
  $1100, 1010, 1001, 0110,$
  $0101, 0011\}$
- $\boldsymbol{y} = 1000$ 是典型的吗？
  $\Rightarrow$ 是



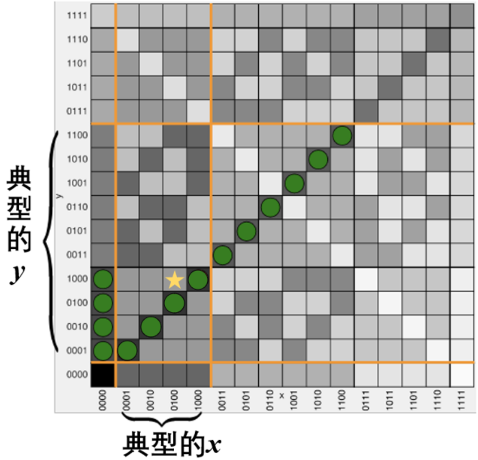
联合样本熵



[0.9612, HXY=1.3112, 1.6612]



联合典型集

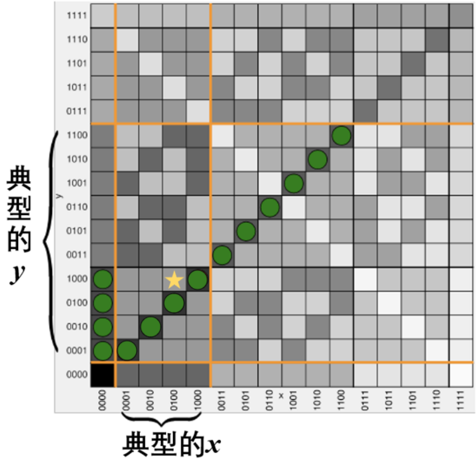


(0100, 1000) 是联合典型的吗？

必须满足下列三个条件：

✓ $\bar{H}(\boldsymbol{x})$ 与 $H(X)$ “ϵ 接近”

联合典型集



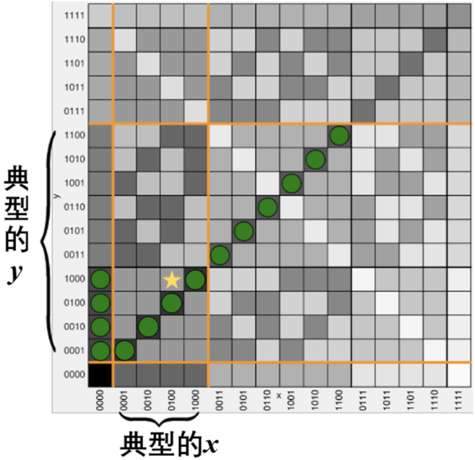
$(0100, 1000)$ 是联合典型的吗？

必须满足下列三个条件：

✓ $\bar{H}(\boldsymbol{x})$ 与 $H(X)$ “ϵ 接近”

✓ $\bar{H}(\boldsymbol{y})$ 与 $H(Y)$ “ϵ 接近”

联合典型集



$(0100, 1000)$ 是联合典型的吗？

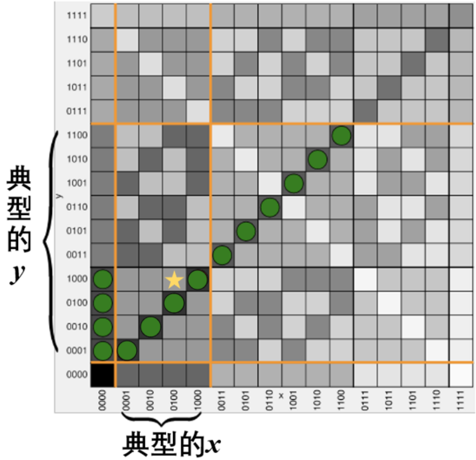
必须满足下列三个条件：

✓ $\bar{H}(\boldsymbol{x})$ 与 $H(X)$ “ϵ 接近”

✓ $\bar{H}(\boldsymbol{y})$ 与 $H(Y)$ “ϵ 接近”

× $\bar{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 与 $H(X, Y)$ “ϵ 接近”

联合典型集



$(0100, 1000)$ 是联合典型的吗？

必须满足下列三个条件：

✓ $\bar{H}(\boldsymbol{x})$ 与 $H(X)$ "ϵ 接近"

✓ $\bar{H}(\boldsymbol{y})$ 与 $H(Y)$ "ϵ 接近"

× $\bar{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 与 $H(X, Y)$ "ϵ 接近"

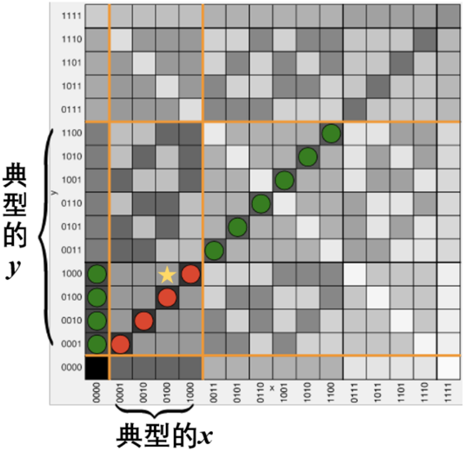
$\Rightarrow$ **不是联合典型！**

联合典型集

联合典型集:

$\{(0001, 0001), (0010, 0010),$
$(0100, 0100), (1000, 1000)\}$

如右图红色圆点所示。



联合渐近均分性

性质：令 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是由 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i)$ 生成的 n 长 IID 序列。当 $n \to \infty, \epsilon \to 0$ 时，

1. **近似等概**：若 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_{\epsilon}^{(n)}$，则 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to 2^{-nH(X,Y)}$,

联合渐近均分性

性质：令 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是由 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i)$ 生成的 n 长 IID 序列。当 $n \to \infty, \epsilon \to 0$ 时，

1. **近似等概**：若 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$，则 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to 2^{-nH(X,Y)}$,
2. **高概率**：$\Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \to 1$,

联合渐近均分性

性质：令 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是由 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i)$ 生成的 n 长 IID 序列。当 $n \to \infty, \epsilon \to 0$ 时，

1. **近似等概**：若 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$，则 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to 2^{-nH(X,Y)}$,
2. **高概率**：$\Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \to 1$,
3. **个数少**：$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \to 2^{nH(X,Y)}$,

联合渐近均分性

性质：令 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是由 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i)$ 生成的 n 长 IID 序列。当 $n \to \infty, \epsilon \to 0$ 时，

1. **近似等概**：若 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$，则 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to 2^{-nH(X,Y)}$，
2. **高概率**：$\Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \to 1$，
3. **个数少**：$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \to 2^{nH(X,Y)}$，
4. 若 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ 相互独立，且分别与 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 同分布（即 $\widetilde{\boldsymbol{X}} \sim p(\boldsymbol{x}), \widetilde{\boldsymbol{Y}} \sim p(\boldsymbol{y}), (\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{\boldsymbol{Y}}) \sim p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$），那么
$$\Pr[(\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \xrightarrow[\epsilon \to 0]{n \to \infty} 2^{-nI(X;Y)}.$$

联合渐近均分性

性质：令 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是由 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i)$ 生成的 n 长 IID 序列。当 $n \to \infty, \epsilon \to 0$ 时，

1. **近似等概**：若 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$，则 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to 2^{-nH(X,Y)}$，
2. **高概率**：$\Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \to 1$，
3. **个数少**：$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \to 2^{nH(X,Y)}$，
4. 若 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 相互独立，且分别与 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 同分布（即 $\tilde{\boldsymbol{X}} \sim p(\boldsymbol{x}), \tilde{\boldsymbol{Y}} \sim p(\boldsymbol{y}), (\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \sim p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$)，那么

$$\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \xrightarrow[\epsilon \to 0]{n \to \infty} 2^{-nI(X;Y)}.$$

注：性质 1（近似等概）直接由联合典型集定义得到

$$\bar{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{n} \log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{n \to \infty} H(X, Y).$$

性质 2（高概率）：以 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 生成的样本高概率是典型

2. $\lim_{n\to\infty} \Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = 1$

证明：根据弱大数定律，

性质 2（高概率）：以 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 生成的样本高概率是典型

2. $\lim_{n\to\infty} \Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = 1$

证明：根据弱大数定律，

$$\bar{H}(\boldsymbol{X}) \equiv -\frac{1}{n} \log p(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{n\to\infty}$$

性质 2（高概率）：以 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 生成的样本高概率是典型

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = 1$

证明：根据弱大数定律，

$$\bar{H}(\boldsymbol{X}) \equiv -\frac{1}{n}\log p(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(X)] = H(X),$$

性质 2（高概率）：以 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 生成的样本高概率是典型

2. $\lim_{n\to\infty} \Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = 1$

证明：根据弱大数定律，

$$\bar{H}(\boldsymbol{X}) \equiv -\frac{1}{n}\log p(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(X)] = H(X),$$
$$\bar{H}(\boldsymbol{Y}) \equiv -\frac{1}{n}\log p(\boldsymbol{y}) \xrightarrow{n\to\infty}$$

性质 2（高概率）：以 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 生成的样本高概率是典型

2. $\lim_{n\to\infty} \Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = 1$

证明：根据弱大数定律，

$$\bar{H}(\boldsymbol{X}) \equiv -\frac{1}{n}\log p(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(X)] = H(X),$$
$$\bar{H}(\boldsymbol{Y}) \equiv -\frac{1}{n}\log p(\boldsymbol{y}) \xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(Y)] = H(Y),$$

性质 2（高概率）：以 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 生成的样本高概率是典型

2. $\lim_{n\to\infty} \Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = 1$

证明：根据弱大数定律，

$$\begin{aligned}
\bar{H}(\boldsymbol{X}) \equiv -\tfrac{1}{n}\log p(\boldsymbol{x}) &\xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(X)] = H(X),\\
\bar{H}(\boldsymbol{Y}) \equiv -\tfrac{1}{n}\log p(\boldsymbol{y}) &\xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(Y)] = H(Y),\\
\bar{H}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \equiv -\tfrac{1}{n}\log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\xrightarrow{n\to\infty}
\end{aligned}$$

性质 2（高概率）：以 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 生成的样本高概率是典型

2. $\lim_{n\to\infty} \Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = 1$

证明：根据弱大数定律，

$$\bar{H}(\boldsymbol{X}) \equiv -\frac{1}{n}\log p(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(X)] = H(X),$$
$$\bar{H}(\boldsymbol{Y}) \equiv -\frac{1}{n}\log p(\boldsymbol{y}) \xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(Y)] = H(Y),$$
$$\bar{H}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \equiv -\frac{1}{n}\log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(X, Y)] = H(X, Y).$$

性质 2（高概率）：以 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 生成的样本高概率是典型

2. $\lim_{n\to\infty} \Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = 1$

证明：根据弱大数定律，

$$\begin{aligned}
\bar{H}(\boldsymbol{X}) \equiv -\tfrac{1}{n}\log p(\boldsymbol{x}) &\xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(X)] = H(X), \\
\bar{H}(\boldsymbol{Y}) \equiv -\tfrac{1}{n}\log p(\boldsymbol{y}) &\xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(Y)] = H(Y), \\
\bar{H}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \equiv -\tfrac{1}{n}\log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\xrightarrow{n\to\infty} -\mathrm{E}[\log p(X, Y)] = H(X, Y).
\end{aligned}$$

因此，$\lim_{n\to\infty} \Pr[(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = 1$.

性质 3（个数少）：典型集元素个数很少

3. $|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} 2^{nH(X,Y)}$.

证明：当 $n \to \infty$ 时，

$$1 = \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

性质 3（个数少）：典型集元素个数很少

3. $|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} 2^{nH(X,Y)}$.

证明：当 $n \to \infty$ 时，

$$1 = \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

性质 3（个数少）：典型集元素个数很少

3. $|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} 2^{nH(X,Y)}$.

证明：当 $n \to \infty$ 时，

$$1 = \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to |\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| 2^{-nH(X,Y)}.$$

性质 3（个数少）：典型集元素个数很少

3. $|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} 2^{nH(X,Y)}$.

证明：当 $n \to \infty$ 时，

$$1 = \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to |\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| 2^{-nH(X,Y)}.$$

即，$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \to 2^{nH(X,Y)}$.

性质 3（个数少）：典型集元素个数很少

3. $|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} 2^{nH(X,Y)}$.

证明：当 $n \to \infty$ 时，

$$1 = \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to |\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| 2^{-nH(X,Y)}.$$

即，$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \to 2^{nH(X,Y)}$.

- **典型集占比趋于 0**：

性质 3（个数少）：典型集元素个数很少

3. $|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} 2^{nH(X,Y)}$.

证明：当 $n\to\infty$ 时，

$$1 = \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to |\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}|2^{-nH(X,Y)}.$$

即，$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \to 2^{nH(X,Y)}$.

- **典型集占比趋于 0**：

$$\frac{2^{nH(X,Y)}}{2^{n(\log|\mathcal{X}|+\log|\mathcal{Y}|)}}$$

性质 3（个数少）：典型集元素个数很少

3. $|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} 2^{nH(X,Y)}$.

证明：当 $n \to \infty$ 时，

$$1 = \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to |\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| 2^{-nH(X,Y)}.$$

即，$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \to 2^{nH(X,Y)}$.

- **典型集占比趋于 0**：

$$\frac{2^{nH(X,Y)}}{2^{n(\log|\mathcal{X}|+\log|\mathcal{Y}|)}} = 2^{n(H(X,Y)-\log|\mathcal{X}|-\log|\mathcal{Y}|)}$$

性质 3（个数少）：典型集元素个数很少

3. $|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} 2^{nH(X,Y)}$.

证明：当 $n \to \infty$ 时，

$$1 = \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to |\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| 2^{-nH(X,Y)}.$$

即，$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}| \to 2^{nH(X,Y)}$.

- **典型集占比趋于** 0：

$$\frac{2^{nH(X,Y)}}{2^{n(\log|\mathcal{X}|+\log|\mathcal{Y}|)}} = 2^{n(H(X,Y)-\log|\mathcal{X}|-\log|\mathcal{Y}|)} \xrightarrow[n\to\infty]{H(X,Y)<\log|\mathcal{X}|+\log|\mathcal{Y}|} 0.$$

性质 4：独立随机样本典型概率极低

4. 若 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 相互独立，且分别与 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 同分布（即 $\tilde{\boldsymbol{X}} \sim p(\boldsymbol{x}), \tilde{\boldsymbol{Y}} \sim p(\boldsymbol{y}), (\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \sim p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$），那么

$$\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \xrightarrow[\epsilon\to 0]{n\to\infty} 2^{-nI(X;Y)}.$$

性质 4：独立随机样本典型概率极低

4. 若 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ 相互独立，且分别与 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 同分布（即 $\widetilde{\boldsymbol{X}} \sim p(\boldsymbol{x}), \widetilde{\boldsymbol{Y}} \sim p(\boldsymbol{y}), (\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{\boldsymbol{Y}}) \sim p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$），那么

$$\Pr[(\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \xrightarrow[\epsilon\to 0]{n\to\infty} 2^{-nI(X;Y)}.$$

证明：

$$\Pr[(\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$$

性质 4：独立随机样本典型概率极低

4. 若 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 相互独立，且分别与 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 同分布（即 $\tilde{\boldsymbol{X}} \sim p(\boldsymbol{x}), \tilde{\boldsymbol{Y}} \sim p(\boldsymbol{y}), (\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \sim p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$），那么

$$\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \xrightarrow[\epsilon\to 0]{n\to\infty} 2^{-nI(X;Y)}.$$

证明:

$$\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] = \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$$
$$\to 2^{nH(X,Y)}2^{-nH(X)}2^{-nH(Y)}$$

性质 4：独立随机样本典型概率极低

4. 若 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 相互独立，且分别与 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 同分布（即 $\tilde{\boldsymbol{X}} \sim p(\boldsymbol{x}), \tilde{\boldsymbol{Y}} \sim p(\boldsymbol{y}), (\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \sim p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$），那么

$$\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \xrightarrow[\epsilon \to 0]{n \to \infty} 2^{-nI(X;Y)}.$$

证明：

$$\begin{aligned}
\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] &= \sum_{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y}) \\
&\to 2^{nH(X,Y)} 2^{-nH(X)} 2^{-nH(Y)} \\
&= 2^{-n[H(X)+H(Y)-H(X,Y)]}
\end{aligned}$$

性质 4：独立随机样本典型概率极低

4. 若 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 相互独立，且分别与 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 同分布（即 $\tilde{\boldsymbol{X}} \sim p(\boldsymbol{x}), \tilde{\boldsymbol{Y}} \sim p(\boldsymbol{y}), (\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \sim p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$），那么

$$\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \xrightarrow[\epsilon\to 0]{n\to\infty} 2^{-nI(X;Y)}.$$

证明：

$$\begin{aligned}
\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] &= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y}) \\
&\to 2^{nH(X,Y)}2^{-nH(X)}2^{-nH(Y)} \\
&= 2^{-n[H(X)+H(Y)-H(X,Y)]} \\
&= 2^{-nI(X;Y)}.
\end{aligned}$$

性质 4：独立随机样本典型概率极低

4. 若 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 相互独立，且分别与 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 同分布（即 $\tilde{\boldsymbol{X}} \sim p(\boldsymbol{x}), \tilde{\boldsymbol{Y}} \sim p(\boldsymbol{y}), (\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \sim p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$），那么

$$\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \xrightarrow[\epsilon\to 0]{n\to\infty} 2^{-nI(X;Y)}.$$

证明：

$$\begin{aligned}
\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] &= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y}) \\
&\to 2^{nH(X,Y)} 2^{-nH(X)} 2^{-nH(Y)} \\
&= 2^{-n[H(X)+H(Y)-H(X,Y)]} \\
&= 2^{-nI(X;Y)}.
\end{aligned}$$

- $(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}})$ 是典型的概率趋于 0：

性质 4：独立随机样本典型概率极低

4. 若 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 相互独立，且分别与 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 同分布（即 $\tilde{\boldsymbol{X}} \sim p(\boldsymbol{x}), \tilde{\boldsymbol{Y}} \sim p(\boldsymbol{y}), (\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \sim p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$），那么

$$\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \xrightarrow[\epsilon\to 0]{n\to\infty} 2^{-nI(X;Y)}.$$

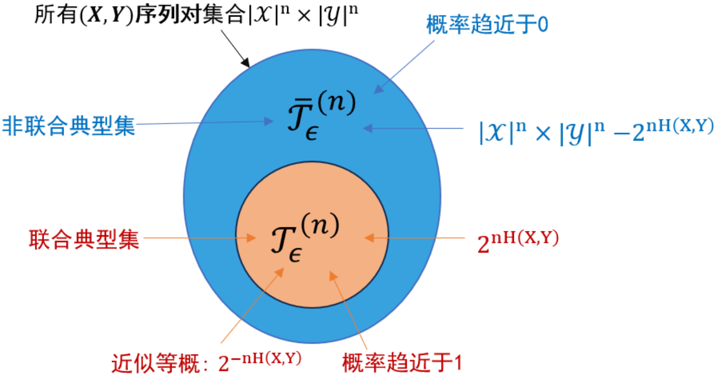
证明：

$$\begin{aligned}\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] &= \sum_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}} p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y}) \\ &\to 2^{nH(X,Y)}2^{-nH(X)}2^{-nH(Y)} \\ &= 2^{-n[H(X)+H(Y)-H(X,Y)]} \\ &= 2^{-nI(X;Y)}.\end{aligned}$$

- $(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}})$ 是典型的概率趋于 0：

$$\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{Y}}) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}] \to 2^{-nI(X;Y)} \xrightarrow[n\to\infty]{I(X;Y)>0} 0.$$

联合渐近均分性图示



所有$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$序列对集合$|\mathcal{X}|^n \times |\mathcal{Y}|^n$
概率趋近于0
非联合典型集
$\bar{\mathcal{T}}_\epsilon^{(n)}$
$|\mathcal{X}|^n \times |\mathcal{Y}|^n - 2^{nH(X,Y)}$
联合典型集
$\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$
$2^{nH(X,Y)}$
近似等概：$2^{-nH(X,Y)}$
概率趋近于1

信道编码 2： 信道编码定理

1. 联合典型集和联合渐近均分性
2. 信道编码定理
3. 信道编码定理的直接证明
4. 信道编码定理逆定理证明
5. 信源信道联合编码定理

信道编码定理

信道编码定理:

- **可达性**: 对任意码率 $R < C$, 存在一种编码 $(2^{nR}, n)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{(n)} = 0,$$

其中 $\lambda^{(n)}$ 为最大码字错误概率。

信道编码定理

信道编码定理:

- **可达性**: 对任意码率 $R < C$, 存在一种编码 $(2^{nR}, n)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{(n)} = 0,$$

其中 $\lambda^{(n)}$ 为最大码字错误概率。

- **逆定理**: 对任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^{(n)} = 0$ 的编码 $(2^{nR}, n)$ 一定有

$$R < C$$

信道编码定理理解

- **可达性**: 存在一种可靠的信道编码，码率 $R < C$

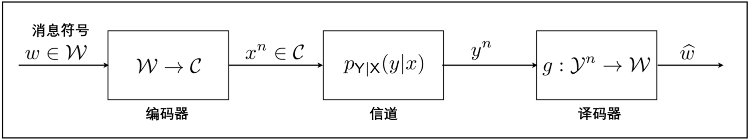
信道编码定理理解

- **可达性**: 存在一种可靠的信道编码，码率 $R < C$
- **逆定理**: 为实现无差错通信，不存在一种码率 $R \geq C$ 的编码

信道编码定理理解

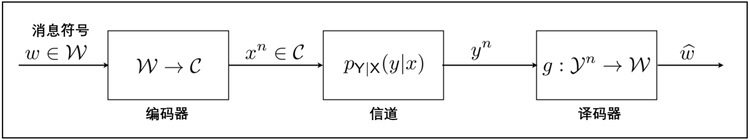
- **可达性**: 存在一种可靠的信道编码，码率 $R < C$
- **逆定理**: 为实现无差错通信，不存在一种码率 $R \geq C$ 的编码
- **结论**: 当且仅当 $R < C$ 时，能实现可靠通信

随机编码框架



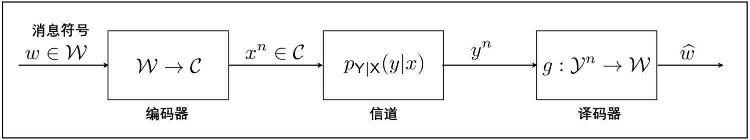
- **编码器**: 随机生成一个码本

随机编码框架



- **编码器**: 随机生成一个码本
- **信道**: 离散无记忆信道（DMC）

随机编码框架



- **编码器**: 随机生成一个码本
- **信道**: 离散无记忆信道（DMC）
- **译码器**: 联合典型译码方法

随机码本构造

随机生成码字 x^n 产生一种 $(2^{nR}, n)$ 码:

$$p_{\boldsymbol{X}_n}(x^n) = \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i).$$

码本 $\mathcal{C}$ 为:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & & & \\ x_1(2^{nR}) & x_2(2^{nR}) & \cdots & x_n(2^{nR}) \end{bmatrix}.$$

码本 $\mathcal{C}$ 需要已知信道输入分布 $p_X(x)$.

随机码本构造

随机生成码字 x^n 产生一种 $(2^{nR}, n)$ 码:

$$p_{\boldsymbol{X}_n}(x^n) = \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i).$$

码本 $\mathcal{C}$ 为:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & & & \\ x_1(2^{nR}) & x_2(2^{nR}) & \cdots & x_n(2^{nR}) \end{bmatrix}.$$

码本 $\mathcal{C}$ 需要已知信道输入分布 $p_X(x)$.

注:

- 码本和信道具有相同字符集合 $\mathcal{X}$

随机码本构造

随机生成码字 x^n 产生一种 $(2^{nR}, n)$ 码:

$$p_{\boldsymbol{X}_n}(x^n) = \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i).$$

码本 $\mathcal{C}$ 为:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & & & \\ x_1(2^{nR}) & x_2(2^{nR}) & \cdots & x_n(2^{nR}) \end{bmatrix}.$$

码本 $\mathcal{C}$ 需要已知信道输入分布 $p_X(x)$.

注:

- 码本和信道具有相同字符集合 $\mathcal{X}$
- 码本分布 $p_X(x)$ 为容量可达分布

随机码本构造

随机生成码字 x^n 产生一种 $(2^{nR}, n)$ 码:

$$p_{\boldsymbol{X}_n}(x^n) = \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i).$$

码本 $\mathcal{C}$ 为:

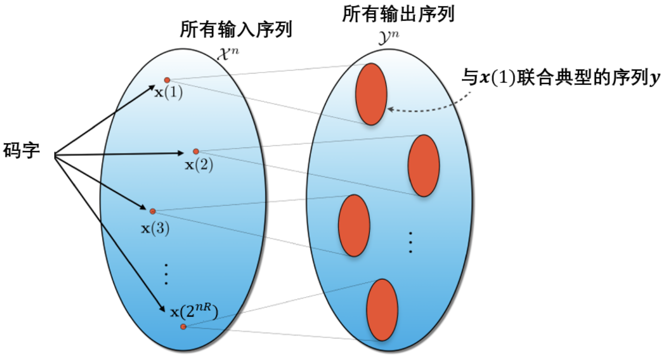
$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & & & \\ x_1(2^{nR}) & x_2(2^{nR}) & \cdots & x_n(2^{nR}) \end{bmatrix}.$$

码本 $\mathcal{C}$ 需要已知信道输入分布 $p_X(x)$.

注:

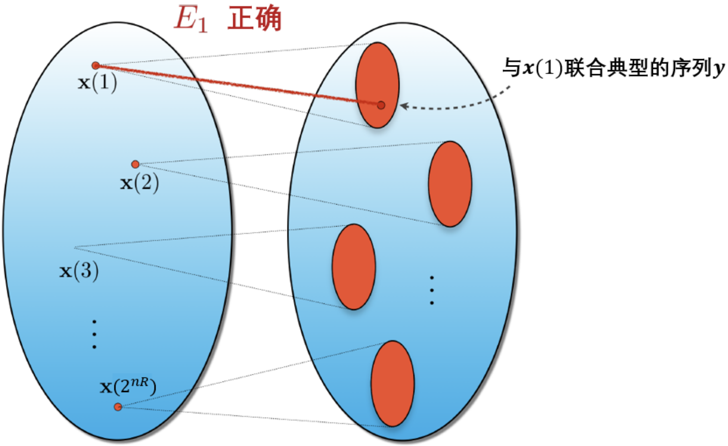
- 码本和信道具有相同字符集合 $\mathcal{X}$
- 码本分布 $p_X(x)$ 为容量可达分布
- 码本是随机的，一旦生成，编码器和译码器都已知码本

联合典型译码



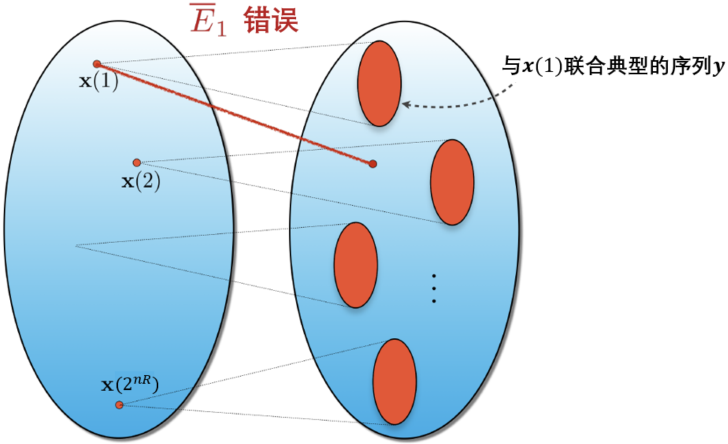
联合典型译码：只有 $\hat{w}$ 索引的码字 $\boldsymbol{x}(\hat{w})$ 和 $\boldsymbol{y}$ 联合典型，则译码为 $\hat{w}$

联合典型译码



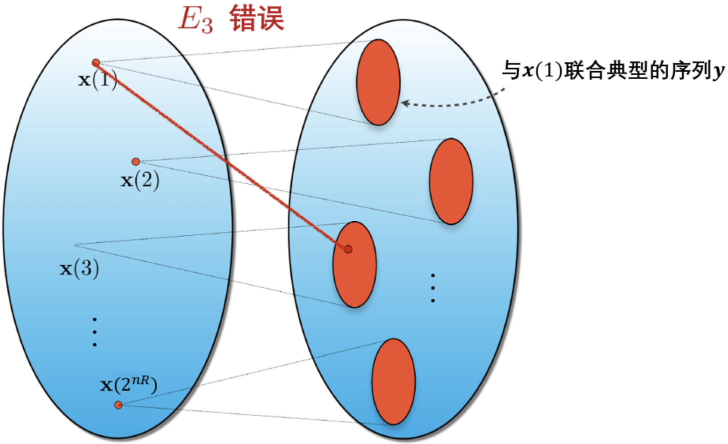
正确译码: 发射 $x(1)$，接收 y 只和 $x(1)$ 联合典型。

联合典型译码



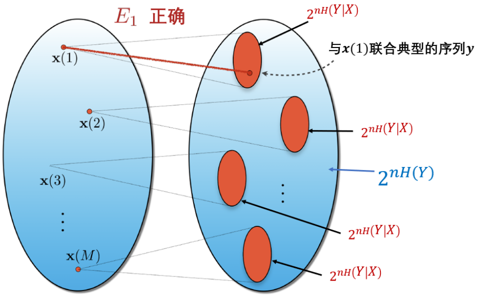
错误译码：发射 $x(1)$，接收 y 和 $x(1)$ 不是联合典型。

联合典型译码



错误译码：发射 $x(1)$ 信号，但 $(x(3), y)$ 是联合典型。

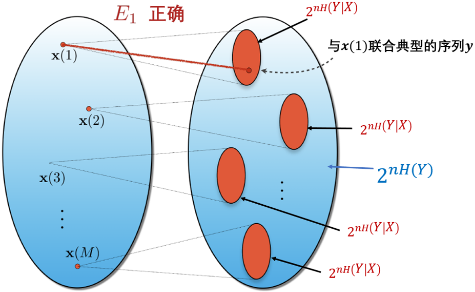
联合典型译码



直觉:

- Y 的典型序列数为$2^{nH(Y)}$

联合典型译码

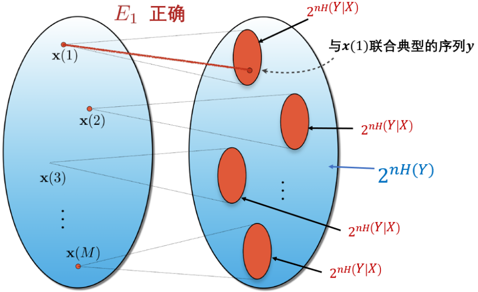


直觉:

- $\boldsymbol{Y}$ 的典型序列数为$2^{nH(Y)}$
- $\boldsymbol{x}(i)$ 对应 $2^{nH(Y|X)}$个联合典型的 $\boldsymbol{y}$（红色圈）

  注： $2^{nH(X,Y|X)} = 2^{nH(Y|X)}$

联合典型译码

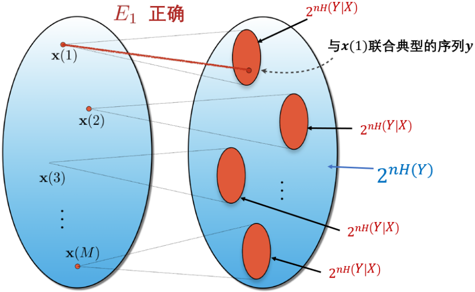


直觉:

- $\boldsymbol{Y}$ 的典型序列数为$2^{nH(Y)}$
- $\boldsymbol{x}(i)$ 对应 $2^{nH(Y|X)}$个联合典型的 $\boldsymbol{y}$ (红色圈)

  注: $2^{nH(X,Y|X)} = 2^{nH(Y|X)}$
- 正确译码 $\Leftrightarrow$ 红色圈没有重叠

联合典型译码



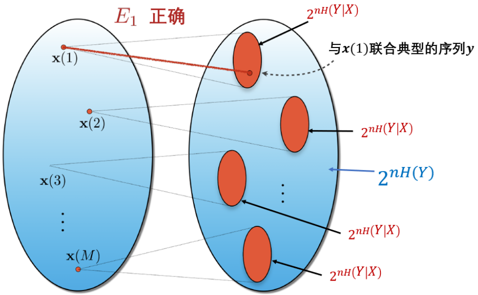
直觉:

- $\boldsymbol{Y}$ 的典型序列数为$2^{nH(Y)}$
- $\boldsymbol{x}(i)$ 对应 $2^{nH(Y|X)}$个联合典型的 $\boldsymbol{y}$（红色圈）

  注：$2^{nH(X,Y|X)} = 2^{nH(Y|X)}$
- 正确译码 $\Leftrightarrow$ 红色圈没有重叠

$$2^{nR} \to 2^{nH(Y)}/2^{nH(Y|X)} = 2^{nI(X;Y)}$$

联合典型译码



直觉:

- $\boldsymbol{Y}$ 的典型序列数为$2^{nH(Y)}$
- $\boldsymbol{x}(i)$ 对应 $2^{nH(Y|X)}$个联合典型的 $\boldsymbol{y}$ (红色圈)

  注: $2^{nH(X,Y|X)} = 2^{nH(Y|X)}$
- 正确译码 $\Leftrightarrow$ 红色圈没有重叠

$$2^{nR} \to 2^{nH(Y)}/2^{nH(Y|X)} = 2^{nI(X;Y)} \Rightarrow R \to I(X;Y)$$

可达性

- 译码器错误概率:
  - λ_w：第 w 个码字的错误概率
  - $\lambda^{(n)}$: 最大码字错误概率
  - P_e：平均码字错误概率

  其中, $\lambda^{(n)}$ 最难满足
- **可达性**：当 n 足够大时，错误概率趋近于 0

对香农信道编码定理的理解

1. 使用随机码本和平均码字错误概率：说明至少存在一种好的编码

对香农信道编码定理的理解

1. 使用随机码本和平均码字错误概率：说明至少存在一种好的编码
2. 证明没有给出可行编译码方案：随机编码和联合典型译码不高效

对香农信道编码定理的理解

1. 使用**随机码本**和**平均码字错误概率**：说明**至少存在一种好的编码**
2. 证明**没有**给出**可行编译码**方案：**随机编码和联合典型译码不高效**
3. **问**: “给定离散无记忆信道，是否存在码字错误概率为 λ 的编码?”

对香农信道编码定理的理解

1. 使用**随机码本**和**平均码字错误概率**：说明**至少存在一种好的编码**

2. 证明**没有**给出**可行编译码**方案：**随机编码和联合典型译码不高效**

3. **问**: "给定离散无记忆信道, 是否存在码字错误概率为 λ 的编码?"

   答案: 是的, 只要 $R < C$, n 足够大

信道编码 2：信道编码定理

1. 联合典型集和联合渐近均分性
2. 信道编码定理
3. 信道编码定理的直接证明
4. 信道编码定理逆定理证明
5. 信源信道联合编码定理

信道编码定理的证明

证明: 对于任意码率 $R < C$, 存在一种 $\lambda^{(n)} \to 0$ 的 $(2^{nR}, n)$ 编码。

证明大纲:

1. 采用随机码本和联合典型译码

信道编码定理的证明

证明: 对于任意码率 $R < C$, 存在一种 $\lambda^{(n)} \to 0$ 的 $(2^{nR}, n)$ 编码。

证明大纲:

1. 采用随机码本和联合典型译码
2. 如果 $\boldsymbol{y}$ 仅与发射码字 $\boldsymbol{x}$ 联合典型，则译码正确，否则译码错误

信道编码定理的证明

证明: 对于任意码率 $R < C$, 存在一种 $\lambda^{(n)} \to 0$ 的 $(2^{nR}, n)$ 编码。

证明大纲:

1. 采用随机码本和联合典型译码
2. 如果 $\boldsymbol{y}$ 仅与发射码字 $\boldsymbol{x}$ 联合典型，则译码正确，否则译码错误
3. 平均码字错误概率上界 $\Rightarrow$ 最大码字错误概率上界

回顾：联合渐近均分性

性质：令 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是由 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,y_i)$ 生成的 n 长 IID 序列。当 $n\to\infty,\epsilon\to 0$ 时，

1. **近似等概**：若 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}$，则 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to 2^{-nH(X,Y)}$
2. **高概率**：$\Pr[(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}]\to 1$
3. **个数少**：$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}|\to 2^{nH(X,Y)}$
4. 若 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 相互独立，且分别与 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 同分布（即 $\tilde{\boldsymbol{X}}\sim p(\boldsymbol{x}),\tilde{\boldsymbol{Y}}\sim p(\boldsymbol{y}),(\tilde{\boldsymbol{X}},\tilde{\boldsymbol{Y}})\sim p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{y})$），那么
$$\Pr[(\tilde{\boldsymbol{X}},\tilde{\boldsymbol{Y}})\in\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}]\xrightarrow[\epsilon\to 0]{n\to\infty}2^{-nI(X;Y)}.$$

译码错误

- 对**特定码本**$\mathcal{C}$，平均码字错误概率:

$$P_e(\mathcal{C}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \lambda_w(\mathcal{C}).$$

译码错误

- 对**特定码本**$\mathcal{C}$，平均码字错误概率:

$$P_e(\mathcal{C}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \lambda_w(\mathcal{C}).$$

- 对**所有码集**，平均码字错误概率:

$$\Pr(\mathrm{E}) = \sum_{\mathcal{C}} P_e(\mathcal{C}) \Pr(\mathcal{C}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{\mathcal{C}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \lambda_w(\mathcal{C}) \Pr(\mathcal{C}).$$

译码错误

- 对**特定码本**$\mathcal{C}$，平均码字错误概率:

$$P_e(\mathcal{C}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \lambda_w(\mathcal{C}).$$

- 对**所有码集**，平均码字错误概率:

$$\Pr(\mathrm{E}) = \sum_{\mathcal{C}} P_e(\mathcal{C})\Pr(\mathcal{C}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{\mathcal{C}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \lambda_w(\mathcal{C})\Pr(\mathcal{C}).$$

$P_e(\mathcal{C})$ **很难计算** $\Rightarrow$ **计算** $\Pr(\mathrm{E})$, **表明至少存在一个好码本**

平均译码错误

$$\Pr(\mathrm{E}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \sum_{\mathcal{C}} \Pr(\mathcal{C}) \lambda_w(\mathcal{C}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \Pr(\mathrm{E}|w).$$

- 由随机编码的对称性，在码本 $\mathcal{C}$ 上求平均和所传消息 w 无关（**固定码本不对称**），因此

平均译码错误

$$\Pr(\mathrm{E}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \sum_{\mathcal{C}} \Pr(\mathcal{C}) \lambda_w(\mathcal{C}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \Pr(\mathrm{E}|w).$$

- 由随机编码的对称性，在码本 $\mathcal{C}$ 上求平均和所传消息 w 无关（**固定码本不对称**），因此

$$\Pr(\mathrm{E}) = \Pr(\mathrm{E}|w = 1)$$

其中

$$\mathrm{E} = \bar{\mathrm{E}}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cdots \mathrm{E}_{2^{nR}}$$

平均译码错误

$$\Pr(\mathrm{E}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \sum_{\mathcal{C}} \Pr(\mathcal{C}) \lambda_w(\mathcal{C}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \Pr(\mathrm{E}|w).$$

- 由随机编码的对称性，在码本 $\mathcal{C}$ 上求平均和所传消息 w 无关（**固定码本不对称**），因此

$$\Pr(\mathrm{E}) = \Pr(\mathrm{E}|w=1)$$

其中

$$\mathrm{E} = \bar{\mathrm{E}}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cdots \mathrm{E}_{2^{nR}}$$

- $\bar{\mathrm{E}}_1$: $(\boldsymbol{x}(1), \boldsymbol{y})$ 不联合典型。由性质 2,

$$\Pr(\bar{\mathrm{E}}_1) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

平均译码错误

$$\Pr(\mathrm{E}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \sum_{\mathcal{C}} \Pr(\mathcal{C}) \lambda_w(\mathcal{C}) = \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w=1}^{2^{nR}} \Pr(\mathrm{E}|w).$$

- 由随机编码的对称性，在码本 $\mathcal{C}$ 上求平均和所传消息 w 无关（**固定码本不对称**），因此

$$\Pr(\mathrm{E}) = \Pr(\mathrm{E}|w=1)$$

其中

$$\mathrm{E} = \bar{\mathrm{E}}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cdots \mathrm{E}_{2^{nR}}$$

- $\bar{\mathrm{E}}_1$: $(\boldsymbol{x}(1), \boldsymbol{y})$ 不联合典型。由性质 2,

$$\Pr(\bar{\mathrm{E}}_1) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

- E_i: $(\boldsymbol{x}(i), \boldsymbol{y})$ 联合典型，当 $i \neq 1$, $\boldsymbol{x}(i)$ 和 $\boldsymbol{y}$ 相互独立（**固定码本不随机，不满足独立条件**）。由性质 4,

$$\Pr(\mathrm{E}_i) \xrightarrow{n\to\infty} 2^{-nI(X;Y)}, \quad i \neq 1$$

平均译码错误

如果 $R < I(X;Y)$ 且 n 足够大，

$$\Pr(\mathrm{E}) = \Pr(\bar{\mathrm{E}}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cdots \mathrm{E}_{2^{nR}})$$

平均译码错误

如果 $R < I(X;Y)$ 且 n 足够大，

$$
\begin{aligned}
\Pr(\mathrm{E}) &= \Pr(\bar{\mathrm{E}}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cdots \mathrm{E}_{2^{nR}}) \\
&\le \Pr(\bar{\mathrm{E}}_1) + \sum_{i=2}^{2^{nR}} \Pr(\mathrm{E}_i)
\end{aligned}
$$

平均译码错误

如果 $R < I(X;Y)$ 且 n 足够大，

$$
\begin{aligned}
\Pr(\mathrm{E}) &= \Pr(\bar{\mathrm{E}}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cdots \mathrm{E}_{2^{nR}}) \\
&\le \Pr(\bar{\mathrm{E}}_1) + \sum_{i=2}^{2^{nR}} \Pr(\mathrm{E}_i) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 2^{nR} 2^{-nI(X;Y)}
\end{aligned}
$$

平均译码错误

如果 $R < I(X;Y)$ 且 n 足够大，

$$
\begin{aligned}
\Pr(\mathrm{E}) &= \Pr(\bar{\mathrm{E}}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cdots \mathrm{E}_{2^{nR}}) \\
&\leq \Pr(\bar{\mathrm{E}}_1) + \sum_{i=2}^{2^{nR}} \Pr(\mathrm{E}_i) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 2^{nR} 2^{-nI(X;Y)} \\
&= 2^{-n[I(X;Y)-R]}
\end{aligned}
$$

平均译码错误

如果 $R < I(X;Y)$ 且 n 足够大，

$$\begin{aligned}
\Pr(\mathrm{E}) &= \Pr(\bar{\mathrm{E}}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cdots \mathrm{E}_{2^{nR}}) \\
&\leq \Pr(\bar{\mathrm{E}}_1) + \sum_{i=2}^{2^{nR}} \Pr(\mathrm{E}_i) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 2^{nR} 2^{-nI(X;Y)} \\
&= 2^{-n[I(X;Y)-R]} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

存在一种编码,$\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

存在一种编码,$\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率**$P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

存在一种编码,$\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率**$P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

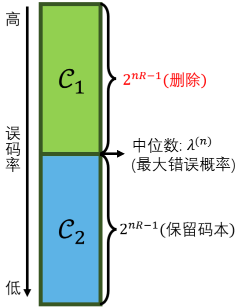
$\Rightarrow$ 存在一种编码，**最大码字错误概率**$\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （证明）

存在一种编码,$\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率** $P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**最大码字错误概率** $\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （证明）

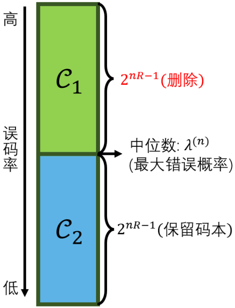


存在一种编码, $\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率** $P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**最大码字错误概率** $\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （证明）



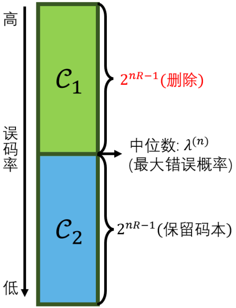
删除错误概率高的一半码字（$\mathcal{C}_1$），保留 $\mathcal{C}_2$，原误码率中位数为新码本最大错误概率 $\lambda^{(n)}$，则

存在一种编码,$\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率**$P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**最大码字错误概率**$\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （证明）



删除错误概率高的一半码字（$\mathcal{C}_1$），保留 $\mathcal{C}_2$，原误码率中位数为新码本最大错误概率 $\lambda^{(n)}$，则

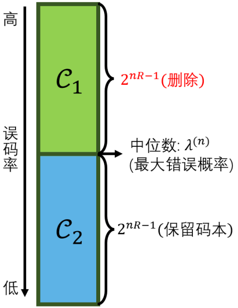
$$0 \xleftarrow{n\to\infty} P_e$$

存在一种编码,$\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率**$P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**最大码字错误概率**$\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （证明）



删除错误概率高的一半码字（$\mathcal{C}_1$），保留 $\mathcal{C}_2$，原误码率中位数为新码本最大错误概率 $\lambda^{(n)}$，则

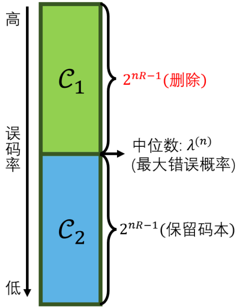
$$0 \xleftarrow{n\to\infty} P_e \geq \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w\in\mathcal{C}_1} \lambda_w$$

存在一种编码,$\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率**$P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**最大码字错误概率**$\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （证明）



删除错误概率高的一半码字（$\mathcal{C}_1$），保留 $\mathcal{C}_2$，原误码率中位数为新码本最大错误概率 $\lambda^{(n)}$，则

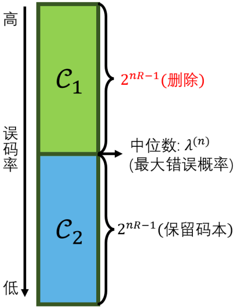
$$0 \xleftarrow{n\to\infty} P_e \geq \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w\in\mathcal{C}_1} \lambda_w \geq \frac{2^{nR-1}\lambda^{(n)}}{2^{nR}}$$

存在一种编码,$\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率**$P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**最大码字错误概率**$\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （证明）



删除错误概率高的一半码字（$\mathcal{C}_1$），保留 $\mathcal{C}_2$，原误码率中位数为新码本最大错误概率 $\lambda^{(n)}$，则

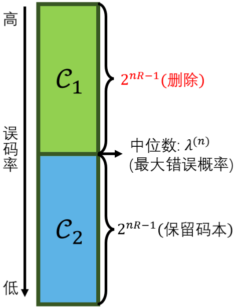
$$0 \xleftarrow{n\to\infty} P_e \geq \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w\in\mathcal{C}_1} \lambda_w \geq \frac{2^{nR-1}\lambda^{(n)}}{2^{nR}} = \frac{\lambda^{(n)}}{2}.$$

存在一种编码,$\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率** $P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**最大码字错误概率** $\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （证明）



删除错误概率高的一半码字（$\mathcal{C}_1$），保留 $\mathcal{C}_2$，原误码率中位数为新码本最大错误概率 $\lambda^{(n)}$，则

$$0 \xleftarrow{n\to\infty} P_e \geq \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w\in\mathcal{C}_1} \lambda_w \geq \frac{2^{nR-1}\lambda^{(n)}}{2^{nR}} = \frac{\lambda^{(n)}}{2}.$$

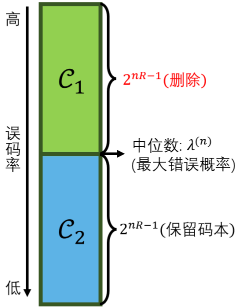
因此，$\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

存在一种编码,$\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率**$P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**最大码字错误概率**$\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （证明）



删除错误概率高的一半码字（$\mathcal{C}_1$），保留 $\mathcal{C}_2$，原误码率中位数为新码本最大错误概率 $\lambda^{(n)}$，则

$$0 \xleftarrow{n\to\infty} P_e \geq \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w\in\mathcal{C}_1} \lambda_w \geq \frac{2^{nR-1}\lambda^{(n)}}{2^{nR}} = \frac{\lambda^{(n)}}{2}.$$

因此，$\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

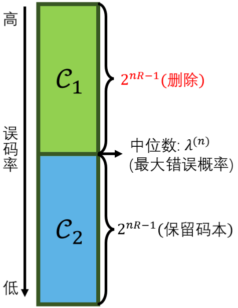
码率 $R' = \frac{1}{n}\log 2^{nR-1} = R - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} R.$

存在一种编码, $\lambda^{(n)} \to 0$

所有码本的**平均码字错误概率**上界 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**平均码字错误概率** $P_e \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (显然)

$\Rightarrow$ 存在一种编码，**最大码字错误概率** $\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ （证明）



删除错误概率高的一半码字（$\mathcal{C}_1$），保留 $\mathcal{C}_2$，原误码率中位数为新码本最大错误概率 $\lambda^{(n)}$，则

$$0 \xleftarrow{n\to\infty} P_e \geq \frac{1}{2^{nR}} \sum_{w\in\mathcal{C}_1} \lambda_w \geq \frac{2^{nR-1}\lambda^{(n)}}{2^{nR}} = \frac{\lambda^{(n)}}{2}.$$

因此，$\lambda^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

码率 $R' = \frac{1}{n}\log 2^{nR-1} = R - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} R.$

这证明了：信道容量定理的可达性

信道编码 2：信道编码定理

1. 联合典型集和联合渐近均分性
2. 信道编码定理
3. 信道编码定理的直接证明
4. 信道编码定理逆定理证明
5. 信源信道联合编码定理

信道编码逆定理：费诺不等式

费诺不等式：离散无记忆信道，考虑长度为 n、码率为 R 的码本 $\mathcal{C}$，输入信息 W，译码信息 $\hat{W}$，则：

$$H(W|\hat{W}) \leq 1 + P_e nR$$

证明：由链式法则，

$$\begin{aligned} H(E, W|\hat{W}) &= H(W|\hat{W}) + \underbrace{H(E|\hat{W}, W)}_{=0} \\ &= \underbrace{H(E|\hat{W})}_{\leq h(P_e) \leq 1} + \underbrace{H(W|\hat{W}, E)}_{\leq P_e H(W) \leq P_e nR} \\ &\leq 1 + P_e nR. \end{aligned}$$

注：$H(W|\hat{W}, E) = P_e H(W|\hat{W}, E = 1) \leq P_e H(W) \leq P_e nR$

信道复用不增加容量

假设 $\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 经过一个容量为 C 的离散无记忆信道输出的结果，那么:

$$I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \le nC, \quad \forall p(\boldsymbol{x}).$$

信道复用不增加容量

假设 $\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 经过一个容量为 C 的离散无记忆信道输出的结果，那么:

$$I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \leq nC, \quad \forall p(\boldsymbol{x}).$$

证明:

$$I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) = H(\boldsymbol{Y}) - \sum_i H(Y_i|X_i)$$

信道复用不增加容量

假设 $\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 经过一个容量为 C 的离散无记忆信道输出的结果，那么：

$$I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \le nC, \quad \forall p(\boldsymbol{x}).$$

证明:

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) &= H(\boldsymbol{Y}) - \sum_i H(Y_i|X_i) \\ &\le \sum_i H(Y_i) - \sum_i H(Y_i|X_i) \end{aligned}$$

信道复用不增加容量

假设 $\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 经过一个容量为 C 的离散无记忆信道输出的结果，那么:

$$I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \leq nC, \quad \forall p(\boldsymbol{x}).$$

证明:

$$\begin{aligned}
I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) &= H(\boldsymbol{Y}) - \sum_i H(Y_i|X_i) \\
&\leq \sum_i H(Y_i) - \sum_i H(Y_i|X_i) \\
&\leq \sum_i I(X_i;Y_i)
\end{aligned}$$

信道复用不增加容量

假设 $\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 经过一个容量为 C 的离散无记忆信道输出的结果，那么:

$$I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \leq nC, \quad \forall p(\boldsymbol{x}).$$

证明:

$$\begin{aligned}
I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) &= H(\boldsymbol{Y}) - \sum_i H(Y_i|X_i) \\
&\leq \sum_i H(Y_i) - \sum_i H(Y_i|X_i) \\
&\leq \sum_i I(X_i;Y_i) \\
&\leq nC.
\end{aligned}$$

信道编码逆定理：证明

定理: 对于任意 $\lambda^{(n)} \to 0$ 的编码 $(2^{nR}, n)$，一定有 $R < C$.

信道编码逆定理：证明

定理: 对于任意 $\lambda^{(n)} \to 0$ 的编码 $(2^{nR}, n)$，一定有 $R < C.$

证明: $\lambda^{(n)} \to 0 \Rightarrow P_e \to 0.$ 那么

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{n} H(W) \\
&= \frac{1}{n} \underbrace{H(W \mid \hat{W})}_{\leq 1 + P_e nR} + \frac{1}{n} \underbrace{I(W; \hat{W})}_{\leq I(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}) \leq nC}
\end{aligned}
$$

信道编码逆定理：证明

定理: 对于任意 $\lambda^{(n)} \to 0$ 的编码 $(2^{nR}, n)$，一定有 $R < C$.

证明: $\lambda^{(n)} \to 0 \Rightarrow P_e \to 0$. 那么

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{n} H(W) \\
&= \frac{1}{n} \underbrace{H(W|\hat{W})}_{\leq 1+P_e nR} + \frac{1}{n} \underbrace{I(W;\hat{W})}_{\leq I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \leq nC} \\
&\leq \frac{1}{n} + P_e R + C \qquad \text{费诺不等式} + \text{数据处理不等式}
\end{aligned}
$$

信道编码逆定理：证明

定理: 对于任意 $\lambda^{(n)} \to 0$ 的编码 $(2^{nR}, n)$，一定有 $R < C$.

证明: $\lambda^{(n)} \to 0 \Rightarrow P_e \to 0$. 那么

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{n} H(W) \\
&= \frac{1}{n} \underbrace{H(W|\hat{W})}_{\leq 1+P_e nR} + \frac{1}{n} \underbrace{I(W;\hat{W})}_{\leq I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \leq nC} \\
&\leq \frac{1}{n} + P_e R + C \qquad \text{费诺不等式} + \text{数据处理不等式}
\end{aligned}
$$

因此，R < C.

信道编码 2：信道编码定理

1. 联合典型集和联合渐近均分性
2. 信道编码定理
3. 信道编码定理的直接证明
4. 信道编码定理逆定理证明
5. 信源信道联合编码定理

信源信道分离编码与联合编码

- **信源信道分离编码**:

  如果 $H < R_S \leq R_C < C \quad \Rightarrow P_e \to 0$

信源信道分离编码与联合编码

- **信源信道分离编码**:

  如果 $H < R_S \leq R_C < C \quad \Rightarrow P_e \to 0$

- **信源信道联合编码**:

  离散信源 $\mathcal{V}$ 的熵率为 $H(\mathcal{V})$:

  - 若 $H(\mathcal{V}) < C$，则存在信源信道联合编码，使得 $P_e \to 0$

信源信道分离编码与联合编码

- **信源信道分离编码**:

  如果 $H < R_S \leq R_C < C \quad \Rightarrow P_e \to 0$

- **信源信道联合编码**:

  离散信源 $\mathcal{V}$ 的熵率为 $H(\mathcal{V})$:

  - 若 $H(\mathcal{V}) < C$，则存在信源信道联合编码，使得 $P_e \to 0$
  - 反之，若 $H(\mathcal{V}) \geq C$，则无法以任意小的错误概率传输信源

信源信道联合编码定理的证明 (I)

证明 (可达性):

- $H(\mathcal{V}) < C \Rightarrow \exists \varepsilon, H(\mathcal{V}) + \varepsilon < C$
- **联合典型信源 + 信道编码**: 该源的 ε-典型集合 $\left|A_{\varepsilon}^{(n)}\right| < 2^{n(H(\mathcal{V})+\varepsilon)} < 2^{nC}$
- 可用 $< 2^{nC}$ 个不同码字即可表达典型列集合 (信源表现)
    - 对非典型列不予编码，由此引起的错误趋于 0
- 编码速率 $R < \frac{\log(2^{nC})}{n} = C$，故可达 (信道表现，典型译码)
    - 译码错误趋于 0

其实，信源信道分离编码就是一种可达方案

信源信道联合编码定理的证明 (II)

证明（逆定理，必要性）:

信源信道联合编码为： $V^n \to X^n \to Y^n \to \hat{V}^n$

信源信道联合编码定理的证明 (II)

证明（逆定理，必要性）:

信源信道联合编码为： $V^n \to X^n \to Y^n \to \hat{V}^n$

由费诺不等式： $H(V^n \mid \hat{V}^n) \leq 1 + P_e \log \mid \mathcal{V}^n \mid = 1 + nP_e \log \mid \mathcal{V} \mid$

信源信道联合编码定理的证明 (II)

证明（逆定理，必要性）:

信源信道联合编码为：$V^n \to X^n \to Y^n \to \hat{V}^n$

由费诺不等式：$H(V^n \mid \hat{V}^n) \leq 1 + P_e \log \mid \mathcal{V}^n \mid = 1 + nP_e \log \mid \mathcal{V} \mid$

$$H(\mathcal{V}) \leq \frac{H(V^n)}{n} \qquad \text{熵率不等式}$$

信源信道联合编码定理的证明 (II)

证明（逆定理，必要性）:

信源信道联合编码为： $V^n \to X^n \to Y^n \to \hat{V}^n$

由费诺不等式： $H(V^n \mid \hat{V}^n) \leq 1 + P_e \log \mid \mathcal{V}^n \mid = 1 + nP_e \log \mid \mathcal{V} \mid$

$$\begin{aligned} H(\mathcal{V}) &\leq \frac{H(V^n)}{n} && \text{熵率不等式} \\ &\leq \frac{1}{n} H(V^n \mid \hat{V}^n) + \frac{1}{n} I(V^n; \hat{V}^n) && \text{互信息定义} \end{aligned}$$

信源信道联合编码定理的证明 (II)

证明（逆定理，必要性）:

信源信道联合编码为：$V^n \to X^n \to Y^n \to \hat{V}^n$

由费诺不等式：$H(V^n \mid \hat{V}^n) \leq 1 + P_e \log \mid \mathcal{V}^n \mid = 1 + nP_e \log \mid \mathcal{V} \mid$

$$
\begin{aligned}
H(\mathcal{V}) &\leq \frac{H(V^n)}{n} \qquad \text{熵率不等式} \\
&\leq \frac{1}{n} H(V^n \mid \hat{V}^n) + \frac{1}{n} I(V^n; \hat{V}^n) \qquad \text{互信息定义} \\
&\leq \frac{1}{n}(1 + nP_e \log |\mathcal{V}|) + \frac{1}{n} I(X^n; Y^n) \qquad \text{数据处理不等式}
\end{aligned}
$$

信源信道联合编码定理的证明 (II)

证明（逆定理，必要性）:

信源信道联合编码为：$V^n \to X^n \to Y^n \to \hat{V}^n$

由费诺不等式：$H(V^n \mid \hat{V}^n) \leq 1 + P_e \log \mid \mathcal{V}^n \mid = 1 + nP_e \log \mid \mathcal{V} \mid$

$$
\begin{aligned}
H(\mathcal{V}) &\leq \frac{H(V^n)}{n} && \text{熵率不等式} \\
&\leq \frac{1}{n} H(V^n \mid \hat{V}^n) + \frac{1}{n} I(V^n; \hat{V}^n) && \text{互信息定义} \\
&\leq \frac{1}{n}(1 + nP_e \log |\mathcal{V}|) + \frac{1}{n} I(X^n; Y^n) && \text{数据处理不等式} \\
&\leq \frac{1}{n} + P_e \log |\mathcal{V}| + C && \text{容量定义}
\end{aligned}
$$

信源信道联合编码定理的证明 (II)

证明（逆定理，必要性）:

信源信道联合编码为：$V^n \to X^n \to Y^n \to \hat{V}^n$

由费诺不等式：$H(V^n \mid \hat{V}^n) \leq 1 + P_e \log \mid \mathcal{V}^n \mid = 1 + nP_e \log \mid \mathcal{V} \mid$

$$
\begin{aligned}
H(\mathcal{V}) &\leq \frac{H(V^n)}{n} && \text{熵率不等式} \\
&\leq \frac{1}{n}H(V^n \mid \hat{V}^n) + \frac{1}{n}I(V^n; \hat{V}^n) && \text{互信息定义} \\
&\leq \frac{1}{n}(1 + nP_e \log|\mathcal{V}|) + \frac{1}{n}I(X^n; Y^n) && \text{数据处理不等式} \\
&\leq \frac{1}{n} + P_e \log|\mathcal{V}| + C && \text{容量定义}
\end{aligned}
$$

$\therefore P_e \to 0 \Rightarrow H(\mathcal{V}) < C$

信源信道分离编码与联合编码

- 只要 $H < C$, 总可以找到可行的信源信道联合编码
- 也可以分别构造最优的信源编码和信道编码，使信息传输可达
- 信源信道联合编码不能使得可行速率极限增加，但可以简化编码

作业

- 复习授课内容
- 预习微分熵和 AWGN 信道