矩阵论

2024年秋学期

第四讲
2024年9月18日

1）矩阵的性能指标
2）逆矩阵和伪逆矩阵
3）稀疏表示和压缩感知
4）特殊矩阵

矩阵的性能指标

矩阵的二次型

任意一个正方矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型定义为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}$ 可以是任意的非零复向量。

对于任何一个二次型函数

$$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}x_i^2+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j$$

存在许多矩阵 $\boldsymbol{A}$，它们的二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=f(x_1,\cdots,x_n)$ 相同。

只有实对称矩阵或复共轭矩阵满足唯一性

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=f\left(x_1,\cdots,x_n\right)$$

为保证唯一性，在讨论矩阵的二次型时，有必要假定矩阵为实对称矩阵或复共轭对称矩阵。

二次型函数一定是实值函数

矩阵的性能指标

矩阵的二次型

任意一个正方矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型定义为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}$ 可以是任意的非零复向量。

对于任何一个二次型函数

$$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}x_i^2+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j$$

存在许多矩阵 $\boldsymbol{A}$，它们的二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=f(x_1,\cdots,x_n)$ 相同。

只有实对称矩阵或复共轭矩阵满足唯一性

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=f\left(x_1,\cdots,x_n\right)$$

为保证唯一性，在讨论矩阵的二次型时，有必要假定矩阵为实对称矩阵或复共轭对称矩阵。

二次型函数一定是实值函数 $\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)^{*}=\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right)^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\underline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

矩阵的性能指标

矩阵的二次型

定义 1.6.1 一个复共轭对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为:

(1) 正定矩阵，记作 $\boldsymbol{A} \succ 0$，若 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$;

(2) 半正定矩阵，记作 $\boldsymbol{A} \succeq 0$，若 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (也称非负定的);

(3) 负定矩阵，记作 $\boldsymbol{A} \prec 0$，若 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$;

(4) 半负定矩阵，记作 $\boldsymbol{A} \preceq 0$，若 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (也称非正定的);

(5) 不定矩阵，若二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 既可能取正值，也可能取负值。

例:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 > 0$$

矩阵的二次型刻画矩阵的正定性：特征值分布

矩阵的性能指标

矩阵的特征值

定义 $$\boldsymbol{Au} = \lambda \boldsymbol{u}$$

第二定义公式 $$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

用特征值描述矩阵的正定性与非正定性

(1) 正定矩阵：所有特征值取正实数的矩阵。

(2) 半正定矩阵：各个特征值取非负实数的矩阵。

(3) 负定矩阵：全部特征值为负实数的矩阵。

(4) 半负定矩阵：每个特征值取非正实数的矩阵。

(5) 不定矩阵：特征值有些取正实数，另一些取负实数的矩阵。

矩阵的特征值可描述正定性、奇异性及对角元素的特殊结构

$$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \times \lambda_n$$

矩阵的性能指标

矩阵的迹

矩阵的迹反映所有特征值之和

矩阵的秩

矩阵中线性无关的行或列的数目

(1) 适定方程：若 $m = n$，并且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，则称矩阵方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 为适定 (well-determined) 方程。

(2) 欠定方程：若独立的方程个数小于独立的未知参数个数，则称矩阵方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 为欠定 (under-determined) 方程。

(3) 超定方程：若独立的方程个数大于独立的未知参数个数，则称矩阵方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 为超定 (over-determined) 方程。

矩阵的性能指标

表 1.6.1　矩阵的性能指标

性能指标	描述的矩阵性能
二次型	矩阵的正定性与负定性
行列式	矩阵的奇异性
特征值	矩阵的奇异性、正定性和对角元素的结构
迹	矩阵对角元素之和、特征值之和
秩	行 (或列) 之间的线性无关性；矩阵方程的适定性

逆矩阵和伪逆矩阵

若A和B均可逆，则 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

矩阵求逆定理 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\dfrac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}}$

$\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)$ 的更新

矩阵求逆公式 $(\lambda\mathbf{R}+\mathbf{x}\mathbf{x}^{H})^{-1}=\lambda^{-1}\mathbf{R}^{-1}-\dfrac{(\lambda^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x})(\lambda^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x})^{H}}{1+\lambda^{-1}\mathbf{x}^{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}}$

$$\hat{\mathbf{R}}(n)=\sum_{j=0}^{n}\lambda^{n-j}\mathbf{x}(j)\mathbf{x}^{H}(j)$$

$$\hat{\mathbf{R}}(n)=\lambda\hat{\mathbf{R}}(n-1)+\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{H}(n)$$

$\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n)=\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)-\mathbf{g}(n)\overline{\mathbf{g}}^{H}(n)$ ——更新公式

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{\mathbf{g}}(n)=\lambda^{-1}\hat{\mathbf{R}}^{-1}(n-1)\mathbf{x}(n) \quad \overline{\alpha}(n)=1+\overline{\mathbf{g}}^{H}(n)\mathbf{x}(n)\\ \mathbf{g}(n)=\overline{\mathbf{g}}(n)/\overline{\alpha}(n)\end{gathered}}$$

左逆矩阵和右逆矩阵

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

定义1.7.1：满足 $LA = I$，**但不满足** $AL = I$

$A \in C^{m\times n}$

左逆矩阵

满足 $AR = I$，**但不满足** $RA = I$

右逆矩阵

满列秩

超定方程最小二乘解

(1) **仅当** $m \geq n$ **时，矩阵** A **可能有左逆矩阵** $L = \left(A^{H}A\right)^{-1}A^{H}$

(2) **仅当** $m \leq n$ **时，矩阵** A **可能有右逆矩阵** $R = A^{H}\left(AA^{H}\right)^{-1}$

欠定方程最小范数解

满行秩

Moore-Penrose逆矩阵

△**定义 1.8.1**[402]　令 $\boldsymbol{A}$ 是任意 $m \times n$ 矩阵，称矩阵 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵，若 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 满足以下四个条件 (常称 Moore-Penrose 条件)：

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$；

(2) $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{\dagger}$；

(3) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 为 Hermitian 矩阵，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}$；

(4) $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}$ 为 Hermitian 矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}$。

矩阵的直和与Hadamard积

直和

定义 1.9.1 [203] $m \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的直和 (direct sum) 记作 $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$，它是一个 $(m+n) \times (m+n)$ 矩阵，定义为

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}_{m\times n} \\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

Hadamard积

$$(\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B})_{ij} = a_{ij} b_{ij}$$

矩阵的Kronecker积

Kronecker积

定义 1.10.1 (右 Kronecker 积)[36] $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ 和 $p \times q$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的右 Kronecker 积记作 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$，是一个 $mp \times nq$ 矩阵，定义为

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \cancel{[\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{a}_n \boldsymbol{B}]} = [a_{ij}\boldsymbol{B}]_{i=1,j=1}^{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

定义 1.10.2 (左 Kronecker 积)[203, 426] $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $p \times q$ 矩阵 $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_q]$ 的 (左) Kronecker 积 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ 是一个 $mp \times nq$ 矩阵，定义为

$$[\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}]_{\text{left}} = \cancel{[\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_q]} = [b_{ij}\boldsymbol{A}]_{i=1,j=1}^{p,q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}b_{11} & \boldsymbol{A}b_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}b_{1q} \\ \boldsymbol{A}b_{21} & \boldsymbol{A}b_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}b_{p1} & \boldsymbol{A}b_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}b_{pq} \end{bmatrix}$$

显然，无论左或右 Kronecker 积都是一映射：$\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{p \times q} \mapsto \mathbb{R}^{mp \times nq}$。

向量化与矩阵化

按列堆栈

$$\text{vec}(\boldsymbol{A}) = [a_{11}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{mn}]^{\mathrm{T}}$$

按行堆栈

$$\text{rvec}(\boldsymbol{A}) = [a_{11}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}]$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{vec}(\boldsymbol{A}) = [a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}]^{\mathrm{T}}, \quad \text{rvec}(\boldsymbol{A}) = [a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}]$$

稀疏表示和压缩感知

一个含有大多数零元素的向量或矩阵称为稀疏向量（sparse vector）或者稀疏矩阵（sparse matrix）

信号向量 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ 最多可分解为 m 个正交基 (向量) $\boldsymbol{g}_k \in \mathbb{R}^m, k = 1, \cdots, m$，这些正交基的集合称为完备正交基 (complete orthogonal basis)。此时，信号分解

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{g}_i$$

$\boldsymbol{c}$ **非稀疏**

字典或库

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i \quad (n > m)$$

x稀疏

则 $n(> m)$ 个向量 $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \cdots, n$ 不可能是正交基的集合。

$\boldsymbol{A}$ 的列称为原子（atom）或框架，组成的集合为过完备集合

稀疏表示和压缩感知

欠定方程

$$y = Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \quad (n > m)$$

1. 经典方法：求最小L_2范数解

$$\min \|x\|_2 \quad \text{subject to } Ax = y$$

最小能量解，具有唯一性，解不符合稀疏表示要求

2. 现代方法：求最小L_0范数解

$$\min \|x\|_0 \quad \text{subject to } Ax = y$$

非零元素个数

解符合稀疏表示要求，求解较复杂

存在观测误差/噪声（随机）情况下：求最小L_0范数解

$$\min \|x\|_0 \quad \text{subject to } \|Ax - y\|_2 \leqslant \varepsilon$$

估计 **信号**

稀疏表示和压缩感知

稀疏信号：大多数采样时刻取值等于零或者近似等于零（频域）

压缩感知：低维的采样数据向量恢复或重构高维数据向量

压缩+低速率采样

$$y = Ax$$

$$m < n$$

$m \times 1$ $m \times n$ $n \times 1$

低维感知波形　感知矩阵　待重构：高维信号向量

变换域 $x = \Phi\alpha$

***x*的K-稀疏表示**

1. **估计稀疏向量α仅含K个非零元素**
2. **重构*x***

Hermitian矩阵

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21}^* & r_{31}^* & r_{41}^* \\ r_{21} & r_{22} & r_{32}^* & r_{31}^* \\ r_{31} & r_{32} & r_{22} & r_{21}^* \\ r_{41} & r_{31} & r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}$$

复共轭对称矩阵 $\mathbf{R} = \mathbf{R}^H$

反Hermitian矩阵? $\mathbf{R} = -\mathbf{R}^H$

$\alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B}$

置换矩阵

定义 2.2.1 一个正方矩阵称为置换矩阵 (permutation matrix)，若它的每一行和每一列有一个且仅有一个非零元素 1。

置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 有下列性质 [61]：

(1) $(\boldsymbol{P}_{m\times n})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}_{n\times m}$。

(2) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$，这说明置换矩阵是正交矩阵。

(3) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{-1}$。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_5\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix},$$

对行进行重新排列

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_4 = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{14} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{24} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{34} & a_{31} \\ a_{43} & a_{42} & a_{44} & a_{41} \\ a_{53} & a_{52} & a_{54} & a_{51} \end{bmatrix}$$

对列进行重新排列

互换矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$$

左乘：矩阵的行顺序反转 $J_m A = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$

flipud

右乘：矩阵的列顺序反转 $AJ_n = \begin{bmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{mn} & \cdots & a_{m2} & a_{m1} \end{bmatrix}$

fliplr

广义置换矩阵

定义 2.2.2 一个正方矩阵称为广义置换矩阵 (generalized permutation matrix)，简称 g 矩阵，若其每行和每列有一个并且仅有一个非零元素。

$$
G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & & & & 0 \\ & \gamma & & & \\ & & \beta & & \\ & & & \lambda & \\ 0 & & & & \alpha \end{bmatrix}
$$

g矩阵 **置换矩阵** **非奇异对角阵**

观测数据模型 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i s_i(t)$

对信号进行恢复 $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{x}(t)$ $\boldsymbol{A}^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **广义逆矩阵**

两种不确定性：1）累加导致信号顺序不确定

2）信号幅度不确定 $\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{a}_i}{\alpha_i} \alpha_i s_i(t)$

这两种不确定性可以通过广义置换矩阵进行描述 ***x(t)=GAs(t)***

正交矩阵与酉矩阵

定理 2.3.2[238]　若 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则下列叙述等价：

(1) $\boldsymbol{U}$ 是酉矩阵；

(2) $\boldsymbol{U}$ 是非奇异的，并且 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}^{-1}$；

(3) $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$；

(4) $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$ 是酉矩阵；

(5) $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n]$ 的列组成标准正交组，即

$$\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_j = \delta(i-j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(6) $\boldsymbol{U}$ 的行组成标准正交组；

(7) 对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 而言，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$ 的 Euclidean 长度与 $\boldsymbol{x}$ 的 Euclidean 长度相同，即 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}$。

正交矩阵与酉矩阵

酉变换

(1) 向量内积在酉变换下是不变的，即

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \rangle$$

这是因为 $\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \rangle = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$。

(2) 向量范数在酉变换下是不变的，即

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

因为 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|^2$。

(3) 两个向量的夹角在酉变换下也是不变的，即

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$$

实向量/矩阵与复向量/矩阵的性质比较

表 2.3.1 实向量、实矩阵与复向量、复矩阵的性质比较

实向量、实矩阵	复向量、复矩阵
范数 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$	范数 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2}$
转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = [a_{ji}]$, $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	共轭转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = [a_{ji}^*]$, $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$
内积 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$	内积 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$
正交性 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$	正交性 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = 0$
对称矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$	Hermitian 矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$
正交矩阵 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}^{-1}$	酉矩阵 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}^{-1}$
特征值分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q\Sigma Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q\Sigma Q}^{-1}$	特征值分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U\Sigma U}^{-1}$
范数的正交不变性 $\|\boldsymbol{Qx}\| = \|\boldsymbol{x}\|$	范数的酉不变性 $\|\boldsymbol{Ux}\| = \|\boldsymbol{x}\|$
内积的正交不变性 $\langle \boldsymbol{Qx}, \boldsymbol{Qy} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$	内积的酉不变性 $\langle \boldsymbol{Ux}, \boldsymbol{Uy} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$

第一章习题

见学在浙大
作业版块
Homework1

9.28 交