2015~2016《矩阵论》回忆卷

By Laughing 哥

一．设 λ_i 为矩阵 A 的特征值，证明：

1. $\operatorname{tr}(A^k) = \sum_i^n \lambda_i^k$
2. $\det(A^{-k}) = \prod_i^n \lambda_i^{-k}$

二．当 α 为何值时，线性方程组：

$$(\alpha+3)x_1 + x_2 + x_2 = \alpha$$
$$3(\alpha+1)x_1 + \alpha x_2 + (\alpha+3)x_3 = 3$$
$$\alpha x_1 + (\alpha-1)x_2 + x_3 = \alpha$$

有唯一解、无解和无穷多解（《矩阵论》课本 P90-1.37 原题）

三．考虑方程$y = Ac + e$，其中 e 为误差向量，定义加权误差平方和

$$E_w = e^H W e$$

其中 W 为一 Hermitian 正定矩阵，且有约束条件$c^T y = 1$

求最优化滤波器$\tilde{c}$

四．对于混合约束优化问题：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x)\ \ subject\ to.\quad f_i(x)\geq 0, i=1,\dots,I\quad h_j(x)=0, j=1,\dots,\mathrm{J}$$

(1). 使用混合外罚函数法，请写出代价函数；
(2). 使用混合内罚函数法，请写出两种代价函数；
(3). 使用增广 Lagrangian 乘子法，请写出对应的代价函数

五．给定三个数据点，分别使用总体最小二乘法以及一般最小二乘法进行拟合，分别求得各自的距离平方和并比较。

六． 设$\frac{\sqrt{2}}{2}[j,1]^T$是矩阵$\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 1\end{bmatrix}$的特征向量，求解：

(1). a 的值
(2). A^HA的奇异值
(3). A 的左奇异矩阵 U。

七．A, B 均为 Hermitian 矩阵

(1) Rayleigh 商如下，当 x 取何值时，取得极大值，极大值为多少？

$$R(x) = \frac{x^H A x}{x^H x}$$

(2) 广义 Rayleigh 商如下，当 x 取何值时，取得极大值，极大值为多少？

$$R(x) = \frac{x^H A x}{x^H B x}$$

八．设 x 为一随机向量，且$x \in \mathbb{R}^{m\text{x}1}$，其均值向量为 m_x，协方差矩阵为 C_x。求对 x 进行迷向圆变换。

九．简单题

(1). 请简述内罚函数与外罚函数的特点。

(2). 请简述条件数 cond(A)的物理意义。

(3). 请简述 Tikhonov 正则化与反正则化的意义。

16~17 矩阵论回忆卷

-By Wzh

一、已知 $(A+B)x$ 存在非零解，且 A，B 都可逆，证明

（1）$\lambda=-1$ 是 $A^{-1}B$ 的特征值

（2）$\lambda=-1$ 是 AB^{-1} 的特征值

二、若 $(A+B)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ，证明 $A+ABA^{-1}=B+BAB^{-1}$

三、（1）若$\left|B\right| \neq 0$，求证$A = B^H B$ 是正定矩阵

（2）已知 A 是反对称矩阵，即$A^T = -A$，求$I - A$是非奇异

四、已知$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，求 A 的奇异值以及 A 的右奇异向量

五．考虑方程$y = Ac + e$，其中 e 为误差向量，定义加权误差平方和

$$E_w = e^H W e$$

其中 W 为一 Hermitian 正定矩阵，且有约束条件$c^T y = 1$

求最优化滤波器$\tilde{c}$

六、已知数据点（2，4），（2，1）（5，1），请求出总体最小二乘和一般最小二乘（点到直线的水平距离）的拟合直线，并分析它们D_{TLS}和D_{LS}。

七．A, B 均为 Hermitian 矩阵

(1) Rayleigh 商如下，当 x 取何值时，取得极大值，极大值为多少？

$$R(x)=\frac{x^H A x}{x^H x}$$

(2) 广义 Rayleigh 商如下，当 x 取何值时，取得极大值，极大值为多少？

$$R(x)=\frac{x^H A x}{x^H B x}$$

八．设 x 为一随机向量，且$x\in\mathbb{R}^{m\times 1}$，其均值向量为 m_x，协方差矩阵为 C_x。求对 x 进行正交变换。

九．对于混合约束优化问题：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x)\ \ subject\ to.\ \ f_i(x)\geq 0, i=1,\dots,I \quad h_j(x)=0, j=1,\dots,J$$

(1). 使用混合外罚函数法，请写出代价函数；

(2). 使用混合内罚函数法，请写出两种代价函数；

(3). 使用增广 Lagrangian 乘子法，请写出对应的代价函数

十、简答题部分

(1) 试分析无约束优化中，步长对收敛性的影响。

(2). 请简述条件数 cond(A)的物理意义。

(3). 请简述 Tikhonov 正则化与反正则化的意义。

2018 年矩阵论

一、证明以下变换是否为线性变换

1、x=[$x_1, x_2, x_3,$], T(x)=[$x_1^2, x_1 + x_2, x_3$]

2、X 是矩阵，T(X) = BXC, B 和 C 是给定矩阵

（利用叠加性和齐次性）

二、正则化的最小二乘解

证明 $J(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{x}\|_2^2\right)$ 的最优解为 $\boxed{\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Tik}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b}}$

三、

1、证明

三、（1）若 $|B| \neq 0$，求证 $A = B^H B$ 是正定矩阵

将其中的$\mathrm{B}^{\mathrm{H}}\mathrm{B}$改为$\mathrm{BB}^{H}$，证明方法应该是一样的

2、证明反对称矩阵的特征值为 0 或者纯虚数

四、

四、已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，求 A 的奇异值以及 A 的右奇异向量

（注意不是右奇异矩阵哦）

五、

1、证明 $\frac{\mathrm{dtr(BX)}}{dX} = \frac{\mathrm{dtr}(X^T B^T)}{dX} = B^T$

例 3.1.3 考查目标函数 $f(\boldsymbol{X}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{XB})$，其中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 实矩阵。首先，矩阵乘积的元素为 $[\boldsymbol{XB}]_{kl} = \sum_{p=1}^{n} x_{kp}b_{pl}$，故矩阵乘积的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{XB}) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} x_{lp}b_{pl}$。于是，利用式 (3.1.27)，易求得

$$\left[\frac{\partial\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{XB})}{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\right]_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ji}}\left(\sum_{p=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} x_{lp}b_{pl}\right) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial x_{lp}}{\partial x_{ji}} b_{pl} = b_{ij}$$

即有 $\frac{\partial\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{XB})}{\partial \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}} = \boldsymbol{B}$。又由于 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{XB})$，故 $n \times m$ Jacobian 矩阵和 $m \times n$ 梯度矩阵分别为

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{X}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{XB}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{X}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX}) = \boldsymbol{B} \quad 和 \quad \nabla_{\boldsymbol{X}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{XB}) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX}) = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \qquad (3.1.2$$

2、

求实值函数 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的 Jacobian 矩阵。

$\mathrm{D}f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 和

六、

八．设 x 为一随机向量，且$x \in \mathbb{R}^{mx1}$，其均值向量为 m_x，协方差矩阵为 C_x。求对 x 进行迷向圆变换。

七、

六、已知数据点（2，4），（2，1）（5，1），请求出总体最小二乘和一般最小二乘（点到直线的水平距离）的拟合直线，并分析它们 D_{TLS} 和 D_{LS} 。

这次考的是把一般最小二乘点到直线水平的距离改成点到垂直的举例（其实我觉得说是竖直举例更合理），记得分清楚 m 写在 x 前还是 y 前面

八、没想到竟然会考作业题哇~~可怕

4.3 考虑方程$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A\theta} + \boldsymbol{e}$，其中$\boldsymbol{e}$为误差向量。定义加权误差平方和 $E_w = \boldsymbol{e}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{e}$，其中$\boldsymbol{W}$为一Hermitian正定矩阵，它对误差起加权作用。

（1）求使E_w最小化的参数向量$\boldsymbol{\theta}$的解。这一解称为$\boldsymbol{\theta}$的加权最小二乘估计。

$$E_w = \boldsymbol{e}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A\theta})^H\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A\theta})$$

对 $\boldsymbol{\theta}^*$ 求梯度：

$$\frac{\partial E_w}{\partial \boldsymbol{\theta}^*} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^*}(\boldsymbol{y}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{A\theta} - \boldsymbol{\theta}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\theta}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{A\theta})$$
$$= \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{A\theta} - \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

令共轭梯度为0，求得$\boldsymbol{\theta}$的加权最小二乘估计为：

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}_{LS}} = (\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$$

（2）利用$\mathbf{LDL^H}$分解$\mathbf{W}=\mathbf{LDL^H}$，证明加权最小二乘准则相当于使误差或数据向量进行预白化。

令 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{LDL^H}=\boldsymbol{LD^{1/2}D^{1/2}L^H}$

将上式带入（1）中$\boldsymbol{\theta}$的加权最小二乘估计解可得：

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\theta}_{LS}} &= (\boldsymbol{A^HWA})^{-1}\boldsymbol{A^HWy}=(\boldsymbol{A^HLDL^HA})^{-1}(\boldsymbol{A^HLDL^Hy}) \\
&= [(\boldsymbol{D^{1/2}L^HA})^H\boldsymbol{D^{1/2}L^HA}]^{-1}(\boldsymbol{D^{1/2}L^HA})^H\boldsymbol{D^{1/2}L^Hy} \\
&= (\boldsymbol{B^HB})^{-1}\boldsymbol{B^HD^{1/2}L^Hy}
\end{aligned}
$$

对$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A\theta}+\boldsymbol{e}$两边同时左乘$\boldsymbol{D^{1/2}L^H}$，可得：

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{D^{1/2}L^H}\mathbf{y}=\boldsymbol{D^{1/2}L^HA\theta}+\boldsymbol{D^{1/2}L^He}=\boldsymbol{B\theta}+\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon^H}\}=\boldsymbol{D^{1/2}L^H}E\{\boldsymbol{ee^H}\}\boldsymbol{LD^{1/2}}$$

设$E\{\boldsymbol{ee^H}\}=\boldsymbol{R_e}$，当$\boldsymbol{R_e}=\boldsymbol{L_eD_eL_e^H}$且$\boldsymbol{L_e}=\boldsymbol{L^{-H}}$　$\boldsymbol{D_e}=\boldsymbol{D^{-1}}$时：

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon^H}\}=\boldsymbol{D^{1/2}L^H}E\{\boldsymbol{ee^H}\}\boldsymbol{LD^{1/2}}=\boldsymbol{I}$$

所以证明成立。

九、概念题

1、举例写出不等式约束下的外罚函数法和内罚函数法的目标函数

2、条件数表征的意义和改善条件数的方法

3、广义 rayleign 商取到最大值和最小值的条件

2019-2020 秋学期矩阵论

by seven

一、矩阵 A、B 的特征值为λ_i 、σ_i(i=1, 2, ⋯, n)

(1) $\det(AB)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\,\sigma_i$

(2)若 A=B，则$tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sigma_i$

(3)若 A 可逆，则$\lambda_i\geq\frac{1}{||A^{-1}||_2}$

二、对$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$奇异值分解，写出其奇异矩阵

三、设$A=\begin{bmatrix}-13 & 8 & -4\\ -20 & 13 & -6\\ 8 & -4 & 3\end{bmatrix}$, 求$h(A)=A^5-3A^4-A^3+3A^2-A+5I$（其中$I$为三阶单位矩阵）

四、证明：

(1)若 A 为 Hermitian 矩阵，且$A^2=A$，$rank(A)=r<n$，试证明存在$n\times n$的酉矩阵 V 使得：

$$V^HAV=diag(I_r,\mathbf{0})$$

(2)若 A 为 Hermitian 矩阵，试证明 A 为正定矩阵的充分必要条件为，存在可逆矩阵 Q 使得$A=Q^HQ$（证明充分性和必要性）

五、求微分

(1)$f(\boldsymbol{x}) = x^T A x + bx + c$（其中 c 为常数，B 为向量），求 f(x)的梯度

(2) 设 $f(\boldsymbol{x}) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$ ， $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \delta_i$ ，， $\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]^T$(每一项为常数)，求$\frac{df(x)}{dx}$

六、最小二乘

已知三个数据点(2,1),(2,4),(2,5)，求其总体最小二乘拟合和一般最小二乘拟合（写出拟合直线和距离平方和）

七、作业题

令代价函数为$f(w) = w^H R_e w$，并且给滤波器加约束条件$Re(w^H x) = b$，*其中*b为一常数。试求最优滤波器w。（R_e可逆）

八、概念题

(1)在混合约束条件下，写出混合内罚函数与混合外罚函数

(2)写出超定矩阵最小二乘解的形式（假设$A^H A$可逆），若$A^H A$可逆，写出一种解超定方程的最小二乘解的方法

(3)标准正交标换和迷向圆变换的区别和联系，举例说明其作用

浙江大学 20 20 －20 21 学年 秋 学期

《矩阵论》课程期末考试试卷

课程号： 67190080（本科生），开课学院： 信电学院

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带 一张手写 A4 纸 入场

考试日期： 2020 年 11 月 18 日,考试时间： 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪

考生姓名：__________学号：__________所属院系（专业）：__________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、（14 分）线性方程组

$$\alpha x_1 + \alpha x_3 = 3 - 2\alpha$$

$$2x_1 + x_2 + (\alpha + 3)x_3 = \alpha$$

$$3x_1 + \alpha x_2 + (2\alpha + 3)x_3 = 2\alpha$$

（1）是否存在唯一解的情况？若存在，则 α 取何值？

（2）是否存在无解的情况？若存在，则 α 为何值？

（3）是否存在无穷多解的情况？若存在，则 α 为何值？

二、（16 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零奇异值；（提示：利用奇异值分解与特征分解的关联性）

（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右奇异向量；

（3）试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零奇异值对应的左奇异向量。

三、（8 分）已知矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$均为方阵，证明$\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{AB}\right)^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{BA}\right)^{-1}$，设所有逆矩阵均存在。

四、（12 分）在 ¡ ^{4} 中，已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,1,-4,-5]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[1,-3,6,7]^{\mathrm{T}}$，

（1）设 $W=\mathrm{span}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，求 W 的一组基；

（2）$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，求 $\ker(\boldsymbol{A})$或者 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{A})$的一组基；

（3）求 $\mathrm{Range}(\boldsymbol{A})$的一组基。

五、（12 分）矩阵求导

（1）设 $f\left(\boldsymbol{A}\right)=\left\|\boldsymbol{A}\right\|_F^2$，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是矩阵变量，求 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}}$；

（2）设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是矩阵变量，且 $\det\left(\boldsymbol{A}\right)\neq 0$，令 $f\left(\boldsymbol{A}\right)=\det\left(\boldsymbol{A}\right)$，证明：$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}}=\det\left(\boldsymbol{A}\right)\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$。

六、（12 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（1）试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式；

（2）利用 Caley –Hamilton 定理计算 $e^{\boldsymbol{A}}$。

七、（14 分）考虑线性方程$\boldsymbol{Ac}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{y}$，其中$\boldsymbol{e}$为零均值加性有色噪声向量。使用加权误差二次函数$Q(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{e}^H\boldsymbol{We}$作为向量$\boldsymbol{c}$最优估计$\hat{\boldsymbol{c}}_o$的代价函数，其中矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{W}$均为 Hermitian 正定矩阵。

（1）求上述无约束优化问题的最优解$\hat{\boldsymbol{c}}_o$。

（2）若向量$\boldsymbol{c}$须满足约束条件$\boldsymbol{c}^H\boldsymbol{y}=1$，求该约束优化问题的最优解。

八、简答题（12 分）

（1）简述外罚函数法和内罚函数法的区别。（3 分）

（2）请给出普通最小二乘、数据最小二乘、总体最小二乘的目标函数表达式，并简要说明总体最小二乘的最优解如何得到。（5 分）

（3）对于线性方程，简述条件数的物理意义及与矩阵奇异值的关系。（4 分）

浙江大学 20 21 －20 22 学年 秋 学期

《矩阵论》课程期末考试试卷

课程号： 67190080（本科生），开课学院： 信电学院

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带 一张手写 A4 纸 入场

考试日期： 2021 年 11 月 14 日,考试时间： 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪

考生姓名：______________学号：______________所属院系（专业）：_____________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、（14 分）

（1）设 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵， $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，

证明：a) $tr(\boldsymbol{AB})=tr(\boldsymbol{BA})$；b) 若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $tr(\boldsymbol{A})=tr(\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 为实反对称矩阵（ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ ），则 $e^{\boldsymbol{A}}$ 为酉矩阵.

二、（12 分）设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$， $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^{m}$， 且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解，令

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{V}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b},$$

证明：对于 $\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{n}$， $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|_2\le\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2$.

三、（12 分）考虑约束优化问题

$$\min_{x \in R^n} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{subject to} \quad g_i(\boldsymbol{x}) \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, I; \quad h_j(\boldsymbol{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

（1）利用混合**外罚**函数法将约束优化问题转化为无约束优化问题，写出一种转化后的无约束优化目标函数形式。

（2）利用混合**内罚**函数法将约束优化问题转化为无约束优化问题，写出**两种**转化后的无约束优化目标函数形式。

（3）利用混合约束优化的增广 Lagrangian 乘子法将约束优化问题转化为无约束优化问题，写出一种转化后的无约束优化目标函数形式。

四、（10 分）下列 Rayleigh 商问题，其中 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$， $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 Hermitian 正定矩阵。

（1）已知 Rayleigh 商 $R(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}}$，求 $R(\boldsymbol{x})$ 的极大值及相应的 $\boldsymbol{x}$ 向量。

（2）已知广义 Rayleigh 商 $R(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}$，求 $R(\boldsymbol{x})$ 的极大值及相应的 $\boldsymbol{x}$ 向量。

注：可用矩阵的特征值及特征向量表示求解量。

五、（14 分）

（1）证明$\mathrm{d}\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\right]=2\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{X})$， $\boldsymbol{X}$ 为实矩阵；

（2）求实标量函数 $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 和 $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的 Hessian 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 、$\boldsymbol{a}$ 为实向量，$\boldsymbol{A}$ 为实矩阵。

六、（14 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（1）试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式；

（2）利用 Caley–Hamilton 定理计算 $\sin\boldsymbol{A}$。提示：

$$\sin\boldsymbol{A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\boldsymbol{A}^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5-\mathrm{L}$$

七、（12 分）令观测数据向量由线性回归模型

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon},\quad E\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\boldsymbol{0},\quad E\left\{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}^{\mathrm{T}}\right\}=\sigma^2\boldsymbol{I}$$

产生。现在希望设计一个滤波器矩阵 $\boldsymbol{A}$，其输出向量 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{Ay}$ 满足 $E\{\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\varepsilon}\}=\boldsymbol{0}$，并且可以使得 $E\left\{(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\varepsilon})\right\}$ 最小化。证明这个最优化问题等效为

$$\min\left[\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)-2\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{A}\right)\right]$$

约束条件为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$，其中，$\boldsymbol{O}$ 为零矩阵（假定数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}$ 无关）。

八、简答题（12 分）

（1）对于线性方程，简述条件数的物理意义及与矩阵奇异值的关系。（3 分）

（2）请简述标准正交变换的过程，并简要说明它和噪声白化间关系。（5 分）

（3）简述 Tikhonov 正则化与反正则化的目的。（4 分）

浙江大学 20_22_－20_23_学年_秋_学期

《矩阵论》课程期末考试试卷

课程号：_67190080（本科生），开课学院：__信电学院___

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带__一张手写 A4 纸__入场

考试日期：__2022_年_11_月_13_日,考试时间：___120___分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪

考生姓名：______________学号：______________所属院系（专业）：_____________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、（10 分）

（1）已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 维可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的绝对值是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值之积；

（2）设 $\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}$，$\boldsymbol{U}\in C^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{V}\in C^{n\times n}$ 为酉矩阵，证明 $\|\boldsymbol{UA}\|_2=\|\boldsymbol{AV}\|_2=\|\boldsymbol{UAV}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_2$（其中下标 2 代表诱导 2 范数/谱范数）。

二、（12 分）已知矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in R^{n\times n}$均为可逆矩阵，且齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解，分别证明：

（1）$\lambda=-\boldsymbol{1}$为矩阵$\boldsymbol{AB}^{-1}$的特征值。

（2）$\lambda=-\boldsymbol{1}$为矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$的特征值。

三、（14 分）给定目标函数$\min_{x \in R^n} f(\boldsymbol{x})$， $\boldsymbol{x}$为待求解的n维实向量。

（1）给出目标函数关于$\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$的泰勒级数展开式（写到二阶）。

（2）根据问题（1），论证函数$f(\boldsymbol{x})$极小点存在的充分必要条件。

（3）分别写出最陡下降法和牛顿法的迭代更新步骤。

四、（12 分）下列 Rayleigh 商问题，其中 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$， $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 Hermitian 正定矩阵。

（1）已知 Rayleigh 商 $R(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{x}}$，写出 $R(\boldsymbol{x})$ 的极大值及相应的 $\boldsymbol{x}$ 向量。

（2）举例说明 Rayleigh 商在实际案例中（任选）的应用，要求简要描述问题模型和物理意义。

注：可用矩阵的特征值及特征向量表示求解量。

五、（10 分）

（1）设 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{b}=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right)^{\mathrm{T}}$是 n 维实数常向量，c 为常数，$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$），求 $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+c$关于变量$\boldsymbol{x}$的梯度向量；

（2）求实标量函数$f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$和$f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的 Hessian 矩阵，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{a}$为实向量，$\boldsymbol{A}$为实矩阵。

六、（14 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解；

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的伪逆 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$；

（3）求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解。

七、（14 分）考虑线性方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{y}$，其中$\boldsymbol{e}$为零均值加性有色噪声向量。使用加权误差二次函数$Q(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{e}^H\boldsymbol{W}\boldsymbol{e}$作为向量$\boldsymbol{c}$最优估计$\hat{\boldsymbol{c}}_o$的代价函数，其中矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{W}$均为 Hermitian 正定矩阵。

（1）求上述无约束优化问题的最优解$\hat{\boldsymbol{c}}_o$。

（2）若向量$\boldsymbol{c}$须满足约束条件$\boldsymbol{c}^H\boldsymbol{y}=1$，求该约束优化问题的最优解。

八、简答题（14 分）

（1）考虑约束优化问题 $\min\ f_0(\boldsymbol{x})\quad \text{subject to}\ f_i(\boldsymbol{x}) \le 0, i=1,\cdots q; h_j(\boldsymbol{x})=0,\ j=1,\cdots m$，分别给出混合外罚函数和混合内罚函数（对数障碍）的目标函数表达式。（4 分）

（2）已知 $\boldsymbol{u}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与特征值 λ 对应的一个特征向量，给出矩阵 $\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}$ 对应的特征值。（4 分）

（3）对于线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，简述条件数 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$ 的物理意义，并给出两种当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 奇异或者接近奇异时的解决方法。（6 分）

浙江大学 20__23__－20__24__学年__秋__学期

《矩阵论》课程期末考试试卷

课程号：__67190080（本科生)__，开课学院：__信电学院___

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带__一张手写 A4 纸__入场

考试日期：__2023__年__11__月__19__日,考试时间：__120__分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪

考生姓名：________________学号：________________所属院系（专业）：______________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、（12 分）分别证明下列 2 题。

（1）若矩阵$\boldsymbol{B}$的行列式$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，证明$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^H$为正定矩阵。

（2）若$\boldsymbol{A}$为实反对称矩阵，即$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{I}$为单位矩阵，证明$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$非奇异。

二、（14 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解；

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$；

（3）求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的普通最小二乘解。

三、（8 分）已知矩阵$\mathbf{A} \in R^{n\times p}$，$p < n$ ，它的投影矩阵定义为

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T,$$

记矩阵$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$。

（1）证明 $\mathbf{QA} = \mathbf{0}$；

（2）如果矩阵$\mathbf{A} \in R^{n\times p}$ 的秩是p，请计算矩阵$\mathbf{Q}$的迹和秩。

四、（14 分）

线性方程组

$$\alpha x_1 + \alpha x_3 = 3 - 2\alpha$$
$$2x_1 + x_2 + (\alpha + 3)x_3 = \alpha$$
$$3x_1 + \alpha x_2 + (2\alpha + 3)x_3 = 2\alpha$$

（1）**是否存在唯一解的情况**？**若存在**，则α**取何**值？

（2）**是否存在无解的情况**？**若存在**，则α为何值？

（3）**是否存在无**穷多解的情况？**若存在**，则α为何值？

五、（12 分）

（1）设 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{n\times 1}$ ，$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ ，$\boldsymbol{b}=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{n\times 1}$ ，c 为常实数，$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，试求 $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+c$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 的梯度向量和 Hessian 矩阵。

（2）设 $\boldsymbol{X}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 常数矩阵，求函数 $f\left(\boldsymbol{X}\right)=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\right)$ 关于 $\boldsymbol{X}$ 的 Jacobian 矩阵

六、（14 分）

（1）已知数据点（2,4），（5,1），（2,1），求总体最小二乘的拟合直线，要求给出直线方程表达式以及点到直线距离平方和。

（2）除总体最小二乘外，请给出至少一种其他准则下的拟合方法（无需计算，说明原理即可），并说明其与总体最小二乘方法的区别。

七、（12 **分**）

令代价函数为 $f(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{w}$ ，**并且**给滤波器加约束条件 $\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{w}^H\boldsymbol{x}\right)=b$ ，**其中** b 为**一常数**， $\boldsymbol{R}_e$ 为加性零均值**高斯白噪声随机向量** $\boldsymbol{e}$ **的**协方差矩阵

（1）证明代价函数为实函数。

（2）**假定** $\boldsymbol{R}_e$ **可逆**，试求最优滤波器 $\boldsymbol{w}$ 。

八、简答题（14 分）

（1）考虑约束优化问题：

$\min f_0(\boldsymbol{x})$ subject to $f_i(\boldsymbol{x}) \ge 0, i = 1, \cdots m; h_j(\boldsymbol{x}) = 0, j = 1, \cdots q$ ，分别给出混合外罚函数和混合内罚函数（对数障碍）的目标函数表达式。（3 分）

（2）超定矩阵方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的普通最小二乘目标函数是否为凸函数，并给出说明。（3 分）

（3）考虑 Tikhonov 正则化最小二乘问题：

$$\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2^2 + \lambda ||\mathbf{x}||_2^2 ,$$

（a）请举例说明其能建模的物理问题，要求：阐明矩阵$\mathbf{A}$，向量$\mathbf{x}$，向量$\mathbf{b}$，以及λ物理含义（2 分）。

（b）请说明引入 Tikhonov 正则项的作用（2 分）。

（c）请设计一个迭代算法求解该问题，要求：写清迭代算法的起始点、迭代过程，以及终止条件（4 分）。