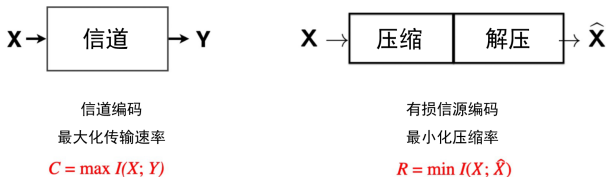


网络信息论 1

- ① 分布式信源编码和码率区域
- ② 多址接入信道及其容量区域

点对点信道编码和信源编码

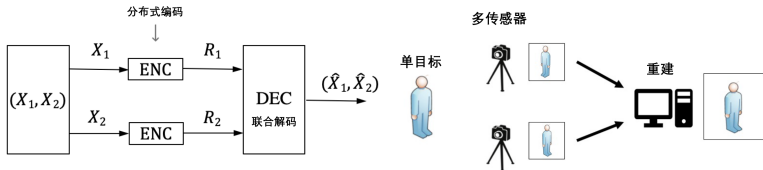


注: 无损信源编码: $\hat{X} = X$, 即, $R = H(X)$.

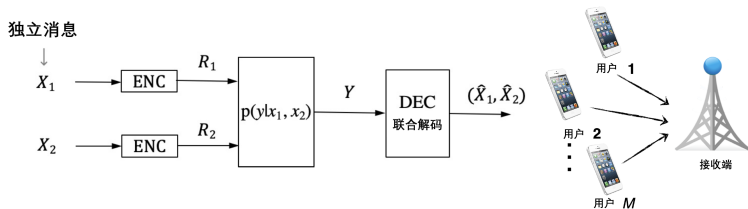
- 目前为止, 只考虑了单发单收的情况
- 问题: 多个信号源? 多个接收端?

分布式信源编码和多址接入信道

- 分布式信源编码:



- 多址接入信道编码:

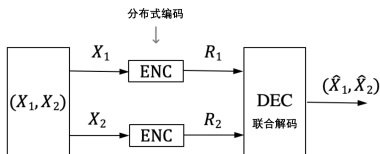


网络信息论 1

- ① 分布式信源编码和码率区域
- ② 多址接入信道及其容量区域

分布式信源编码

- 联合译码器能正确恢复 (X_1, X_2) 的最小码率 (R_1, R_2) 是多少？



- 简单方案: 忽略 X_1 和 X_2 的相关性, 点对点 (P2P) 信源编码:

$$R_1 \geq H(X_1)$$

$$R_2 \geq H(X_2)$$

分布式信源编码

- 分布式信源编码 (distributed source coding, DSC) 的关键是什么?
 - 信源的相关性有助于降低信源速率
 - 信源独立编码
- 如何利用相关性, 最小化信源速率?

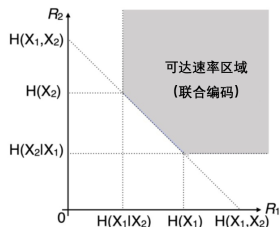
联合编码

联合编码的可达速率区域:

$$R_1 \geq H(X_1|X_2)$$

$$R_2 \geq H(X_2|X_1)$$

$$R_1 + R_2 \geq H(X_1, X_2)$$



利用相关性, 进一步降低码率

- R_1 最小为 X_2 条件下 X_1 的熵, 其中 X_2 减少了 X_1 的不确定性
- R_2 最小为 X_1 条件下 X_2 的熵, 其中 X_1 减少了 X_2 的不确定性
- $R_1 + R_2$ 最小为联合熵 $H(X_1, X_2)$, 将 (X_1, X_2) 视为单变量

分布式信源编码

Slepian-Wolf 定理: 可达码率区域 (R_1, R_2) 满足以下不等式:

$$R_1 \geq H(X_1|X_2)$$

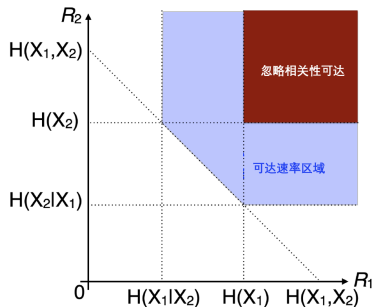
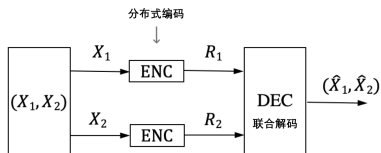
$$R_2 \geq H(X_2|X_1)$$

$$R_1 + R_2 \geq H(X_1, X_2)$$

- 下界: 联合编码 (不可能比它更好)
- 可达性: 典型集随机编码 (Omitted)

分布式信源编码的可达码率区域与联合编码相同!!!

分布式信源编码

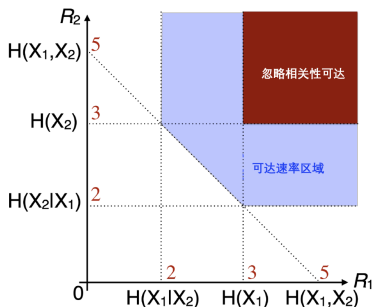


举例——Slepian-Wolf 定理

考虑信源编码：

- $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in [0, 1]^3$ (均匀分布), 即, $H(\mathbf{X}_1) = H(\mathbf{X}_2) = 3$;
- \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 最多有一位不同: $d_H(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \leq 1$, 即,

$$\mathbf{X}_1 \oplus \mathbf{X}_2 = \{000, 100, 010, 001\}.$$



举例——Slepian-Wolf 定理

考虑信源编码：

1. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in [0, 1]^3$ (均匀分布), 即, $H(\mathbf{X}_1) = H(\mathbf{X}_2) = 3$;
2. \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 最多有一位不同: $d_H(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \leq 1$, 即,

$$\mathbf{X}_1 \oplus \mathbf{X}_2 = \{000, 100, 010, 001\}.$$

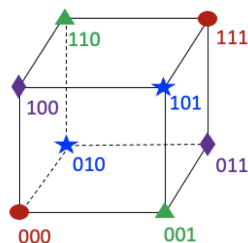
- 独立编码: 忽略 X_1 和 X_2 的相关性, $R_1 = R_2 = 3$, 共 6 比特
- 联合编码: 3 比特编码 \mathbf{X}_1 , 2 比特编码 \mathbf{X}_2 和 \mathbf{X}_1 的不同, 共 5 比特

Slepian-Wolf 编码

分布式信源编码:

- 3 比特编码 X_1 , $R_1 = 3$ 比特
- 2 比特编码 X_2 作为陪集索引, $R_2 = 2$ 比特。每个陪集中的最小汉明距离为 $d = 2d_H(X_1, X_2) + 1 = 3$

例: $x_1 = 001, x_2 = 101 \Rightarrow \{c_1 = 001, c_2 = 10\}$



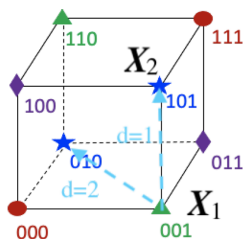
X_2 属于哪一个陪集?



只需 $3 + 2 = 5$ 比特, 与联合编码相同!

Slepian-Wolf 编码

编码: $x_1 = 001, x_2 = 101 \Rightarrow \{c_1 = 001, c_2 = 10\}$



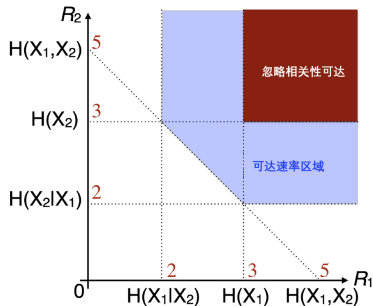
x_2 属于哪一个陪集?



译码:

- 先译码 x_1 ; ($x_1 = c_1 = 001$)
- 在 x_2 的陪集中找离 x_1 最近的码字。
 - $c_2 = 10 \Rightarrow$ 陪集是 {010, 101}
 - $x_2 = 101$ 因为它离 $x_1 = 001$ 最近

Slepian-Wolf 编码



- 如上，码率区域 A 点可达
- 类似，可达 B 点：
 - 3 比特编码 X_2
 - 2 比特编码 X_1 陪集索引
- A 和 B 时分复用达到 AB 线段

注：可达码率区域由 AB 线段决定，如果 AB 可达，所围区域可达

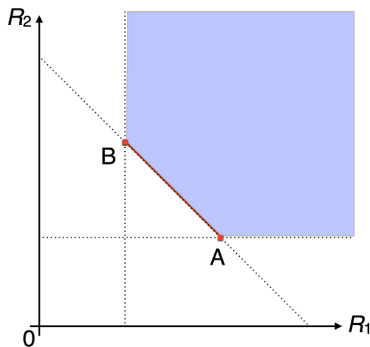
时分复用 (也称码率分割)

- 若 $A = (R_1^1, R_2^1)$ 、 $B = (R_1^2, R_2^2)$ 可达，则 A、B 时分复用也可达

$$(R_1, R_2) = \alpha A + (1 - \alpha)B$$

其中 $0 \leq \alpha \leq 1$ ，即 α 比例使用 A, $1 - \alpha$ 比例使用 B

- 这也表明可达码率区域是凸的



一般情况

信源编码:

- $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in [0, 1]^n$ (均匀分布), 即, $H(\mathbf{X}_1) = H(\mathbf{X}_2) = n$
- \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 最多有 d 位不同: $d_H(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \leq d$

Slepian-wolf 编码:

1. 使用 n 比特编码 \mathbf{X}_1 , $R_1 = n$
2. 使用 m 比特编码 \mathbf{X}_2 作为陪集索引, $R_2 = m$

\Rightarrow 每个陪集中码字的最小距离为 $2d + 1$

注: 令 \mathcal{C} 为最小码距为 $d_{\min} = 2d + 1$ 、校验矩阵为 \mathbf{H} 的线性码, 那么 \mathbf{X}_2 可以通过校验矩阵编码:

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{H}\mathbf{x}_2$$

也就是 \mathbf{x}_2 的陪集索引

三个用户分布式信源编码的码率区域

三个用户信源编码的码率区域：

$$R_1 \geq H(X_1|X_2, X_3),$$

$$R_2 \geq H(X_2|X_1, X_3),$$

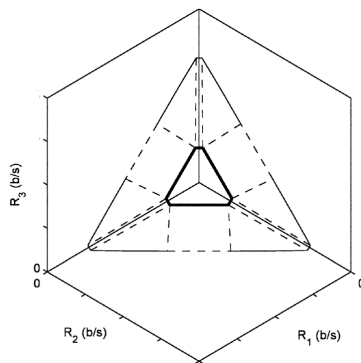
$$R_3 \geq H(X_3|X_1, X_2),$$

$$R_1 + R_2 \geq H(X_1, X_2|X_3),$$

$$R_1 + R_3 \geq H(X_1, X_3|X_2),$$

$$R_2 + R_3 \geq H(X_2, X_3|X_1),$$

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq H(X_1, X_2, X_3).$$



多源编码的码率区域

M 源码率区域:

$$R_S \geq H(X_S; Y|X_{S^c}), \quad \forall S \subseteq \mathcal{M}, S^c = \mathcal{K}/S,$$

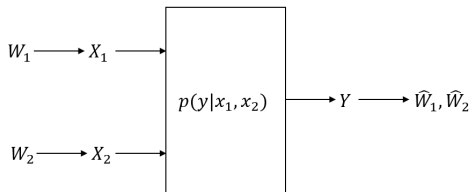
其中 $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$.

网络信息论 1

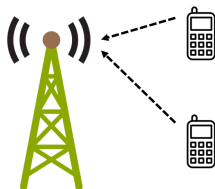
- ① 分布式信源编码和码率区域
- ② 多址接入信道及其容量区域

多址接入信道

定义（多址接入信道）：离散无记忆多址接入信道由字母表 $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ 与 \mathcal{Y} ，及概率转移矩阵 $p(y|x_1, x_2)$ 刻画



多址接入信道



上行链路

- 两个（或更多）发送器向一个接收器发送消息
- 噪声 + 信号干扰

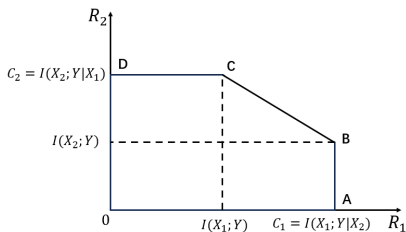
多址接入信道的容量区域

定理 (多址接入信道的容量区域): 多址接入信道 $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y|x_1, x_2), \mathcal{Y})$ 的容量区域为满足下列条件的 (R_1, R_2) 所成的凸闭包:

$$R_1 < I(X_1; Y|X_2)$$

$$R_2 < I(X_2; Y|X_1)$$

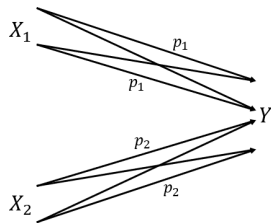
$$R_1 + R_2 < I(X_1, X_2; Y)$$



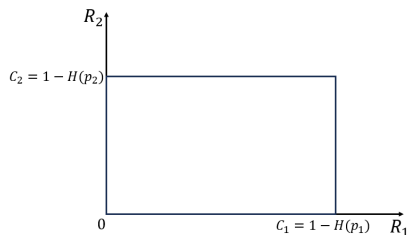
上界显然, 可达方案 (串行干扰消除):

- B: 先译 X_2 ; 已知 X_2 , 再译 X_1
- C: 先译 X_1 ; 已知 X_1 , 再译 X_2
- B-C: B 和 C 时分复用

举例：独立二元对称信道



独立二元对称信道



独立 BSC 的容量区域

$$I(X_1; Y|X_2) = I(X_1; Y) = 1 - h(p_1)$$

$$I(X_2; Y|X_1) = I(X_2; Y) = 1 - h(p_2)$$

$$I(X_1, X_2; Y) = I(X_1; Y) + I(X_2; Y) = 2 - h(p_1) - h(p_2)$$

举例：二元乘法信道

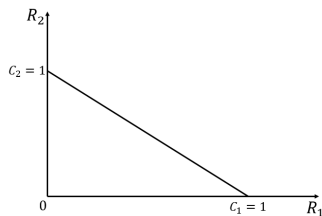
二元乘法信道：

$$Y = X_1 X_2$$

则：

- $I(X_1; Y|X_2) = H(X_1) \leq 1$
- $I(X_2; Y|X_1) = H(X_2) \leq 1$
- $I(X_1, X_2; Y) \leq H(Y) \leq 1$

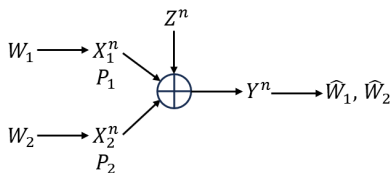
可达方案：只发一路信号 + 时分复用



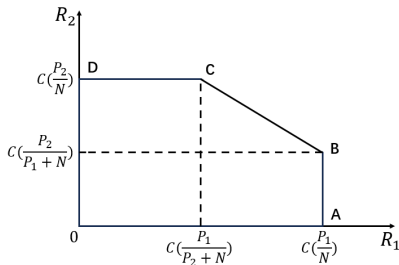
二元乘法信道的容量区域

举例：高斯多址接入信道

- 数学模型： $Y = X_1 + X_2 + Z$, 其中 $Z \sim \mathcal{N}(0, N)$ 。



高斯多址接入信道



高斯多址接入信道的容量区域

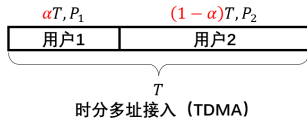
- $I(X_1; Y|X_2) = I(X_1; X_1 + Z) = \frac{1}{2} \log(1 + \frac{P_1}{N})$
- $I(X_2; Y|X_1) = I(X_2; X_2 + Z) = \frac{1}{2} \log(1 + \frac{P_2}{N})$
- $I(X_1, X_2; Y) = I(X_1, X_2; X_1 + X_2 + Z) = \frac{1}{2} \log(1 + \frac{P_1+P_2}{N})$

多址技术对比

- 时分多址接入 (TDMA):

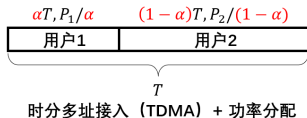
$$R_{\text{TDMA}} = \alpha I(X_1; X_1 + N) + (1 - \alpha) I(X_2; X_2 + N)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \log \left(1 + \frac{P_1}{N} \right) + \frac{1 - \alpha}{2} \log \left(1 + \frac{P_2}{N} \right)$$



- 功率分配 TDMA:

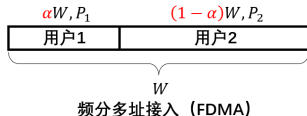
$$R_{\text{TDMA}}^{\text{PA}} = \frac{\alpha}{2} \log \left(1 + \frac{P_1/\alpha}{N} \right) + \frac{1 - \alpha}{2} \log \left(1 + \frac{P_2/(1 - \alpha)}{N} \right)$$



- 频分多址接入 (FDMA): $N_0 W = N$

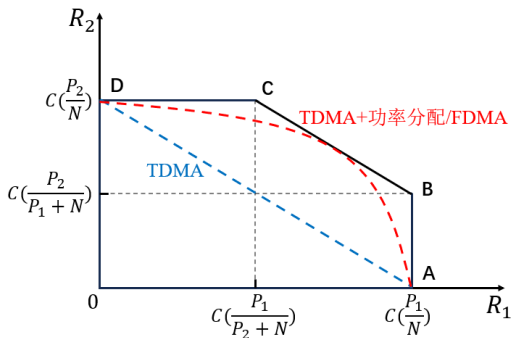
$$R_{\text{FDMA}} = \frac{\alpha}{2} \log \left(1 + \frac{P_1}{N_0 \alpha W} \right) + \frac{1 - \alpha}{2} \log \left(1 + \frac{P_2}{N_0 (1 - \alpha) W} \right)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \log \left(1 + \frac{P_1}{N \alpha} \right) + \frac{1 - \alpha}{2} \log \left(1 + \frac{P_2}{N (1 - \alpha)} \right)$$



最优 α 时, 功率分配 TDMA 和 FDMA 可达速率 = 和容量

多址技术对比



高斯多址接入信道中各种多址技术的容量曲线

- 最优 α^* 可达到和容量（切点）

总结

- 网络信息论：多发多收
- 优于单发单收方案
- 分布式信源编码：Slepian-Wolf 编码
 - 分布式信源编码与联合编码码率相同
 - Slepian-Wolf 编码/陪集编码
- 多址接入信道
 - 独立用户具有与联合编码相同的码率
 - 优于 TDMA/FDMA，关键在于干扰消除