ISEE

通信原理习题讲解

- Chapter 1~2

1-1 某个信源输出取A、B、C和D这4个值，设每个符号独立取值，相应概率分别为1/2，1/4，1/8，1/8。求每个输出符号的平均信息量。

知识点：不确定性与信息量 P4~P6

熵（平均不确定性）： $H(X)=-\sum_{i=1}^{M} p\,(x_i)log_a p(x_i)$ (1.2.2)

解： $$H(X)=-\sum_{i=1}^{4}p(x_i)log_2p(x_i)$$
$$=-(\frac{1}{2}log_2\frac{1}{2}+\frac{1}{4}log_2\frac{1}{4}+\frac{1}{8}log_2\frac{1}{8}+\frac{1}{8}log_2\frac{1}{8})$$
$$=1.75(bit)$$

1-4 A村有一半人说真话，3/10人说假话，2/10人拒绝回答；B村有3/10人说真话，一半人说假话,2/10人拒绝回答。现随机地从A村和B村抽取人，抽到A村人的概率为0.5，抽到B村人的概率也为0.5，问通过测试某人说话的状态平均能获得多少关于该人属于哪个村的信息？

知识点：互信息 P6~P7

$$H(X|Y=y_j) = -\sum_i p(x_i|y_j) log_a p(x_i|y_j) \quad (1.2.3)$$

$$H(X|Y) = \sum_j p(y_j) H(X|Y=y_j) = -\sum_j \sum_i p(x_i, y_j) log_a p(x_i|y_j) \quad (1.2.4)$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (1.2.5)$$

1-4 A村有一半人说真话，3/10人说假话，2/10人拒绝回答；B村有3/10人说真话，一半人说假话,2/10人拒绝回答。现随机地从A村和B村抽取人，抽到A村人的概率为0.5，抽到B村人的概率也为0.5，问通过测试某人说话的状态平均能获得多少关于该人属于哪个村的信息？

解：用随机变量 X 表示某人属于哪个村，用随机变量 Y 表示某人的说话状态。

$$p(X=A)=p(X=B)=0.5$$

$$p(Y=\text{真}|X=A)=0.5 \quad p(Y=\text{假}|X=A)=0.3 \quad p(Y=\text{拒}|X=A)=0.2$$

$$p(Y=\text{真}|X=B)=0.3 \quad p(Y=\text{假}|X=B)=0.5 \quad p(Y=\text{拒}|X=B)=0.2$$

要求的是 $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$

根据互信息对称性: $I(X;Y)=I(Y;X)=H(Y)-H(Y|X)$

$$\begin{aligned} p(Y=\text{真}) &= p(Y=\text{真}|X=A)p(X=A)+p(Y=\text{真}|X=B)p(X=B) \\ &= 0.5\times0.5+0.3\times0.5 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

同理 $p(Y=\text{假})=0.4 \quad p(Y=\text{拒})=0.2$

则 $$\begin{aligned} H(Y) &= -(0.4log_2 0.4+0.4log_2 0.4+0.2log_2 0.2) \\ &= log_2 5-0.8 \end{aligned}$$

1-4 A村有一半人说真话，3/10人说假话，2/10人拒绝回答；B村有3/10人说真话，一半人说假话,2/10人拒绝回答。现随机地从A村和B村抽取人，抽到A村人的概率为0.5，抽到B村人的概率也为0.5，问通过测试某人说话的状态平均能获得多少关于该人属于哪个村的信息?

解:

$$p(X=A)=p(X=B)=0.5$$

$$p(Y=\text{真}\,|X=A)=0.5 \quad p(Y=\text{假}\,|X=A)=0.3 \quad p(Y=\text{拒}\,|X=A)=0.2$$

$$p(Y=\text{真}\,|X=B)=0.3 \quad p(Y=\text{假}\,|X=B)=0.5 \quad p(Y=\text{拒}\,|X=B)=0.2$$

$$H(Y|X=A)=-(0.5log_2 0.5+0.3log_2 0.3+0.2log_2 0.2)=0.5log_2 5-0.3log_2 3+0.8$$

$$H(Y|X=B)=-(0.3log_2 0.3+0.5log_2 0.5+0.2log_2 0.2)=0.5log_2 5-0.3log_2 3+0.8$$

$$H(Y|X)=H(Y|X=A)p(X=A)+H(Y|X=B)p(X=B)=0.5log_2 5-0.3log_2 3+0.8$$

$$I(X;Y)=I(Y;X)=H(Y)-H(Y|X)=0.5log_2 5+0.3log_2 3-1.6\approx 0.03645(bit)$$

1-5 设一个信源输出四进制等概率符号，其码元宽度为125ms，求其码元速率和信息速率。

知识点：数字通信系统的传输速率 P11

$$R_b = R_B log_2 M(bit/s) \quad (1.3.2)$$

解：码元速率 $R_B = \dfrac{1}{125 \times 10^{-3} s} = 8(Baud)$

比特速率 $R_b = R_B log_2 4 = 16(bit/s)$

2-3 一个带宽为50Hz的低通信号$x(t)$以奈奎斯特速率抽样，抽样值如下：

$$x(nT_s)=\begin{cases}-1, & -4\le n<0\\ 1, & 0<n\le 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）确定$x(0.005)$

（2）此信号是功率型信号还是能量型信号？确定其功率或能量值。

知识点1：带限信号采样定理 P53 (5.1.1小节低通信号的抽样)

$$X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(kT_s)\,\mathrm{sinc}(2W(t-kT_s)) \qquad (2.3.45)$$

解：采样间隔：$T_s=\frac{1}{2W}=0.01s$

$$x(t)=-\sum_{n=-4}^{-1}sinc[2W(t-nT_s)]+\sum_{n=1}^{4}sinc[2W(t-nT_s)]$$

$$x(0.005)=-\sum_{n=-4}^{-1}sinc(0.5-n)+\sum_{n=1}^{4}sinc(0.5-n)=0.566$$

2-3

知识点2：能量信号和功率信号的定义 P22

能量型信号 (能量有限) : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$　　功率型信号 (功率有限) : $0 \le \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$

知识点3：帕塞瓦尔等式 P22

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$sinc[2W(t-nT_s)] \overset{F}{\longleftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{2W} e^{-j2\pi fnT_s}, & |f| < W \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$x(t) = -\sum_{n=-4}^{-1} sinc[2W(t-nT_s)] + \sum_{n=1}^{4} sinc[2W(t-nT_s)]$$

$$X(f) = \begin{cases} -\sum_{n=-4}^{-1} \frac{1}{2W} e^{-j2\pi fnT_S} + \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{2W} e^{-j2\pi fnT_s}, & |f| < W \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\int_{-W}^{W} e^{-j2\pi fn_1T_s} e^{j2\pi fn_2T_s} df = \begin{cases} 2W, & n_1 = n_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(f) df = 8 \cdot \left(\frac{1}{2W}\right)^2 \cdot 2W = \frac{4}{W} = 0.08$$

所以x(t)是能量信号

2-9 假设$x(t)$表示一个低通信号，试确定$x(t)\cos(2\pi f_0 t)$的希尔伯特变换，其中f_0远大于$x(t)$的带宽。

知识点：希尔伯特变换在频域上的操作 P27

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi t}\right)=-jsgn(f)=\begin{cases}-j, & f>0\\ 0, & f=0\\ j, & f<0\end{cases} \quad (2.1.63)$$

解：记 $x(t)\xleftrightarrow{F}X(jw)$ $\quad cos(w_0t)\xleftrightarrow{F}\pi\delta(w+w_0)+\pi\delta(w-w_0)$ $\qquad w_0=2\pi f_0$

$$x(t)cos(w_0t)\xleftrightarrow{F}\pi X(j(w+w_0))+\pi X(j(w-w_0))$$

经过希尔伯特变换，频域变为 $j\pi X(j(w+w_0))-j\pi X(j(w-w_0))$

$$j\pi X(j(w+w_0))-j\pi X(j(w-w_0))\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}x(t)sin(w_0t)$$

所以 $x(t)cos(2\pi f_0t)$ 的希尔伯特变换为 $x(t)sin(2\pi f_0t)$

2-13 随机过程X的概率分布为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}x, & 0\le x<1\\ K, & x\ge 1\end{cases}$$

（1）求K的值

（2）该随机变量是离散的、连续的还是混合的？

（3）$1/2 < X \le 1$的概率是多少？

（4）$1/2 < X < 1$的概率是多少？

（5）$X > 2$的概率是多少？

知识点：随机变量与分布函数 P30

2-13 随机过程X的概率分布为

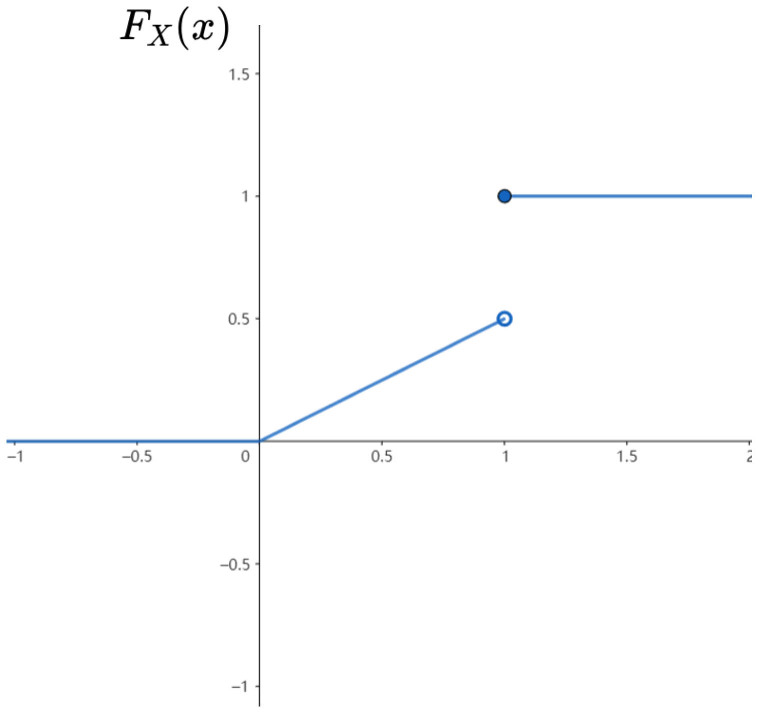
$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}x, & 0\le x<1\\ K, & x\ge 1\end{cases}$$

（1）求K的值

解：$\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x)=1 \Rightarrow K=1$

（2）该随机变量是离散的、连续的还是混合的？

解：该随机变量即有连续的取值也有离散的取值，因此是混合的。



2-13 随机过程X的概率分布为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}x, & 0\le x<1\\ K, & x\ge 1\end{cases}$$

（3）$1/2 < X \le 1$的概率是多少？

（4）$1/2 < X < 1$的概率是多少？

（5）$X > 2$的概率是多少？

$$\boxed{p(X=a)=F_X(a)-F_X(a^-)}$$

（3）解：$p(\frac{1}{2}<X\le 1)=p(X\le 1)-p(X\le\frac{1}{2})=F_X(1)-F_X(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{4}=0.75$

（4）解：$p(\frac{1}{2}<X<1)=p(\frac{1}{2}<X\le 1)-p(X=1)=0.75-0.5=0.25$

（5）解：$p(X>2)=1-p(X\le 2)=1-F_X(2)=1-1=0$

2-19 设随机过程$\xi(t)$可表示成

$$\xi(t)=2cos(2\pi t+\theta)$$

式中θ是一个随机变量，且$P(\theta=0)=P(\theta=\pi/2)=1/2$。试求$E[\xi(1)]$和$R_\xi(0,1)$。

知识点1：随机过程的定义 P42

知识点2：随机过程的自相关函数的定义 P43

$$R_X(t_1,t_2)=E(X(t_1)X(t_2))\quad(2.3.8a)$$

解：$\xi(1)=2cos(2\pi+\theta)=2cos(\theta)$

$$E[\xi(1)]=2cos(0)\cdot P(\theta=0)+2cos(\frac{\pi}{2})\cdot P(\theta=\frac{\pi}{2})=1$$

$$R_\xi(0,1)=E[\xi(0)\xi(1)]=E[2cos(\theta)\cdot 2cos(\theta)]=4E[cos^2(\theta)]$$

$$E[cos^2(\theta)]=cos^2(0)\cdot P(\theta=0)+cos^2(\frac{\pi}{2})\cdot P(\theta=\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow R_\xi(0,1)=2$$

2-23 已知噪声$n(t)$的自相关函数$R_n(\tau)=\frac{a}{2}e^{-a|\tau|}$，$a$为正常数；

（1）求功率谱密度$P_n(f)$和总功率P

（2）绘出$R_n(\tau)$及$P_n(f)$的图形。

知识点：自相关函数与功率谱 P46

$$R_X(\tau) \overset{F}{\Longleftrightarrow} P_X(f) \qquad (2.3.23)$$

解：
$$P_n(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{2}e^{-a|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$
$$=\frac{a}{2}[\int_{-\infty}^{0}e^{(a-j2\pi f)\tau}d\tau+\int_{0}^{+\infty}e^{-(a+j2\pi f)\tau}d\tau]$$
$$=\frac{a}{2}(\frac{1}{a-j2\pi f}+\frac{1}{a+j2\pi f})$$
$$=\frac{a^2}{a^2+(2\pi f)^2}$$

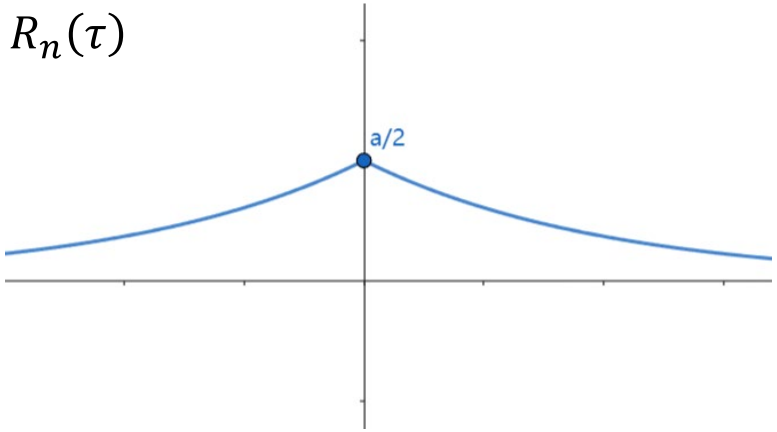
$$P=\int_{-\infty}^{+\infty}P_n(f)df=\int_{-\infty}^{+\infty}P_n(f)e^{j2\pi f0}df=R_n(0)=\frac{a}{2}$$

2-23 已知噪声$n(t)$的自相关函数$R_n(\tau)=\frac{a}{2}e^{-a|\tau|}$, a为正常数；

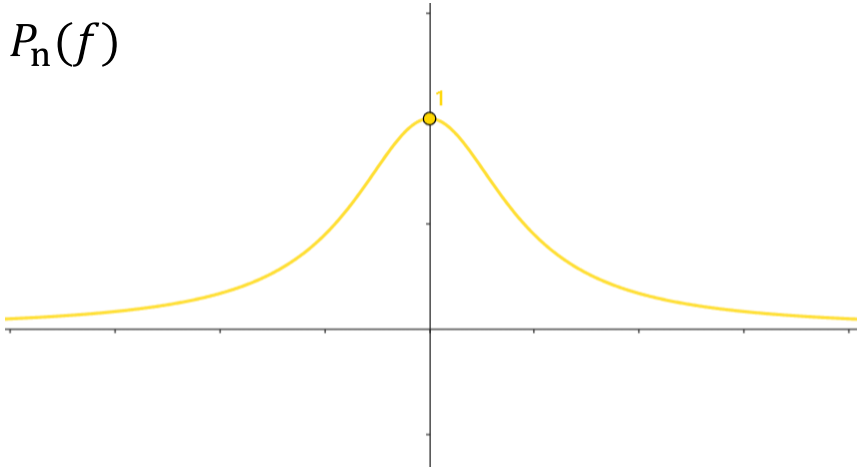
（1）求功率谱密度$P_n(f)$和总功率P

（2）绘出$R_n(\tau)$及$P_n(f)$的图形。

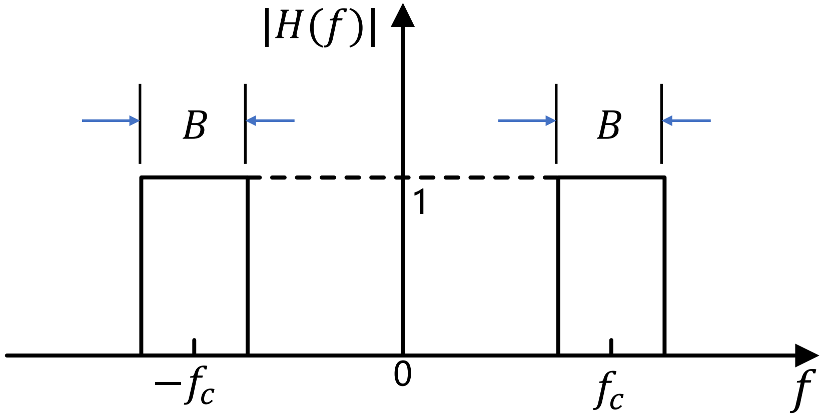
$R_n(\tau)$



$P_n(f)$



2-25 将一个均值为零、功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声加到一个中心频率为f_c、带宽为B 的理想滤波器上，如题2-25图所示。



题2-25图

(1) 求滤波器输出噪声的自相关函数；

(2) 写出输出噪声的一维概率密度函数。

2-25 (1) 求滤波器输出噪声的自相关函数；

知识点1：自相关函数与功率谱 P46

$$R_X(\tau) \overset{F}{\Longleftrightarrow} P_X(f) \quad (2.3.23)$$

知识点2：平稳随机过程通过线性系统 P49

$$P_Y(f) = P_X(f)|H(f)|^2 \quad (2.3.32)$$

解： $P_{N_i}(f) = \frac{N_0}{2}$

$$P_{N_o}(f) = P_{N_i}(f)|H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & |f \pm f_c| < \frac{B}{2} \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$R_{N_o}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{N_o}(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df$$

$$= N_0 \frac{sin(\pi B\tau)}{\pi\tau} cos(2\pi f_c \tau)$$

$$= N_0 B sinc(B\tau) cos(2\pi f_c \tau)$$

2-25 (2) 写出输出噪声的一维概率密度函数。

知识点3：高斯过程通过线性系统的输出也是高斯过程 P51-52

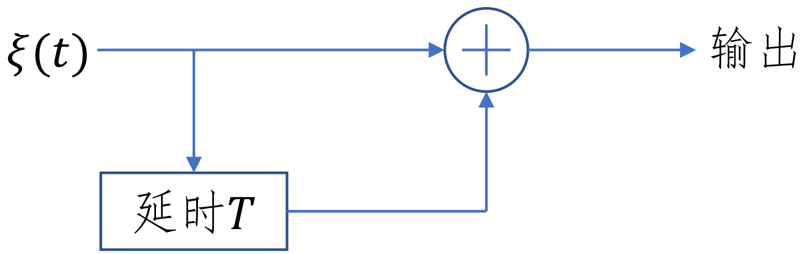
解：$R_{N_o}(\tau) = N_0 B sinc(B\tau) cos(2\pi f_c \tau)$

$E^2[Y(t)] = R_{N_0}(\infty) = 0, \quad \therefore \ \mu = 0$

${\sigma_{N_o}}^2 = R_{N_o}(0) - R_{N_o}(\infty) = N_0 B$

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 B}} exp(\frac{-x^2}{2N_0 B})$$

2-30 若$\xi(t)$是平稳随机过程，自相关函数为$R_\xi(\tau)$，试求它通过题2-30图所示系统后的自相关函数及功率谱密度。



题2-30图

知识点1：自相关函数与功率谱　P46

$$R_X(\tau) \overset{F}{\Longleftrightarrow} P_X(f) \qquad (2.3.23)$$

知识点2：平稳随机过程通过线性系统　P49

$$P_Y(f) = P_X(f)|H(f)|^2 \qquad (2.3.32)$$

解：$H(f) = 1 + e^{-j2\pi fT}$

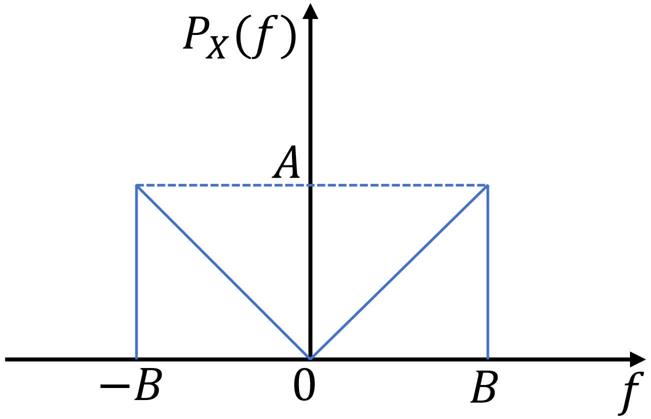
$$
\begin{aligned}
P_Y(f) &= P_\xi(f)H(f)H^*(f) \\
&= P_\xi(f)\cdot(1+e^{-j2\pi fT})\cdot(1+e^{j2\pi fT}) \\
&= P_\xi(f)\cdot[2+e^{-j2\pi fT}+e^{j2\pi fT}] \\
&= P_\xi(f)\cdot[2+2cos(2\pi fT)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= F^{-1}[P_Y(f)] \\
&= 2R_\xi(\tau) + R_\xi(\tau - T) + R_\xi(\tau + T)
\end{aligned}
$$

2-35 设两个平稳过程X(t)和Y(t)之间有以下关系：

$$Y(t) = X(t)cos(2\pi f_0 t + \Theta) - \hat{X}(t)sin(2\pi f_0 t + \Theta)$$

其中f_0为常数，Θ是$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量，Θ与$X(t)$统计独立。若已知$X(t)$的功率谱密度如题2-35图所示，试求$Y(t)$的功率谱密度，并画出图形。



题2-35图

2-35

解：$Y(t)=X(t)cos(2\pi f_0 t+\Theta)-\hat{X}(t)sin(2\pi f_0 t+\Theta)$

$$\begin{aligned}Y(t+\tau)Y(t)&=[X(t+\tau)cos(2\pi f_0(t+\tau)+\Theta)-\hat{X}(t+\tau)sin(2\pi f_0(t+\tau)+\Theta)]\cdot[X(t)cos(2\pi f_0 t+\Theta)-\hat{X}(t)sin(2\pi f_0 t+\Theta)]\\&=\frac{1}{2}X(t+\tau)X(t)[cos(2\pi f_0\tau)+\boxed{cos(4\pi f_0 t-2\pi f_0\tau+2\Theta)}]-\frac{1}{2}\hat{X}(t+\tau)X(t)[sin(2\pi f_0\tau)+\boxed{sin(4\pi f_0 t-2\pi f_0\tau+2\Theta)}]\\&\quad-\frac{1}{2}X(t+\tau)\hat{X}(t)[-sin(2\pi f_0\tau)+\boxed{sin(4\pi f_0 t-2\pi f_0\tau+2\Theta)}]+\frac{1}{2}\hat{X}(t+\tau)\hat{X}(t)[cos(2\pi f_0\tau)-\boxed{cos(4\pi f_0 t-2\pi f_0\tau+2\Theta)}]\end{aligned}$$

$\because E[cos(4\pi f_0 t+2\pi f_0\tau+2\Theta)]=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(4\pi f_0 t+2\pi f_0\tau+2\Theta)\,d\Theta=0$ 同理，$E[sin(4\pi f_0 t+2\pi f_0\tau+2\Theta)]=0$

$$\begin{aligned}\therefore R_Y(\tau)&=E[Y(t+\tau)Y(t)]\\&=E[\frac{1}{2}X(t+\tau)X(t)cos(2\pi f_0\tau)-\frac{1}{2}\hat{X}(t+\tau)X(t)sin(2\pi f_0\tau)+\frac{1}{2}X(t+\tau)\hat{X}(t)sin(2\pi f_0\tau)+\frac{1}{2}\hat{X}(t+\tau)\hat{X}(t)cos(2\pi f_0\tau)]\\&=\frac{1}{2}R_X(\tau)cos(2\pi f_0\tau)-\frac{1}{2}R_{\hat{X}X}(\tau)sin(2\pi f_0\tau)+\frac{1}{2}R_{X\hat{X}}(\tau)sin(2\pi f_0\tau)+\frac{1}{2}R_{\hat{X}}(\tau)cos(2\pi f_0\tau)\end{aligned}$$

2-35

解：$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)cos(2\pi f_0\tau)-\frac{1}{2}R_{\hat{X}X}(\tau)sin(2\pi f_0\tau)+\frac{1}{2}R_{X\hat{X}}(\tau)sin(2\pi f_0\tau)+\frac{1}{2}R_{\hat{X}}(\tau)cos(2\pi f_0\tau)$

$Hilbert$滤波器$h(t)=\frac{1}{\pi t}$

(1) $R_{\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)=-R_X(\tau)*h(\tau)*h(\tau)=R_X(\tau)$

(2) $R_{X\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)=-\hat{R}_X(\tau)$

(3) $R_{\hat{X}X}(\tau)=-R_{\hat{X}}(\tau)*h(-\tau)=-R_X(\tau)*h(-\tau)=\hat{R}_X(\tau)$

知识点1：平稳随机过程通过线性系统 P49-51

(1) 输出随机过程的自相关函数

$$R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)\qquad(2.3.31)$$

(2) 输入与输出随机过程的互相关函数

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_X(\tau)*h(-\tau)\qquad(\tau=t_1-t_2)\qquad(2.3.36)$$

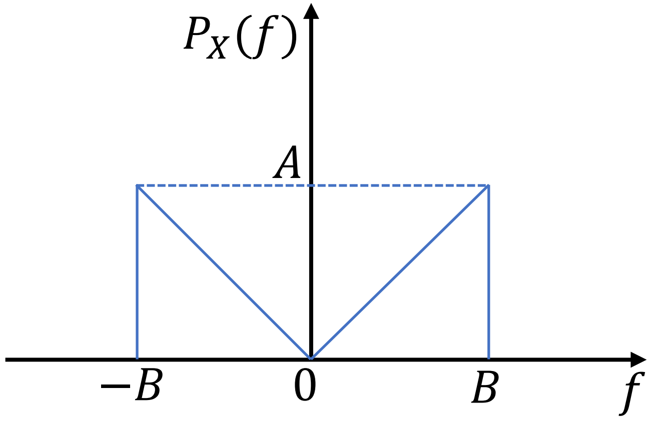
因此 $R_Y(\tau)=R_X(\tau)cos(2\pi f_0\tau)-\hat{R}_X(\tau)sin(2\pi f_0\tau)$

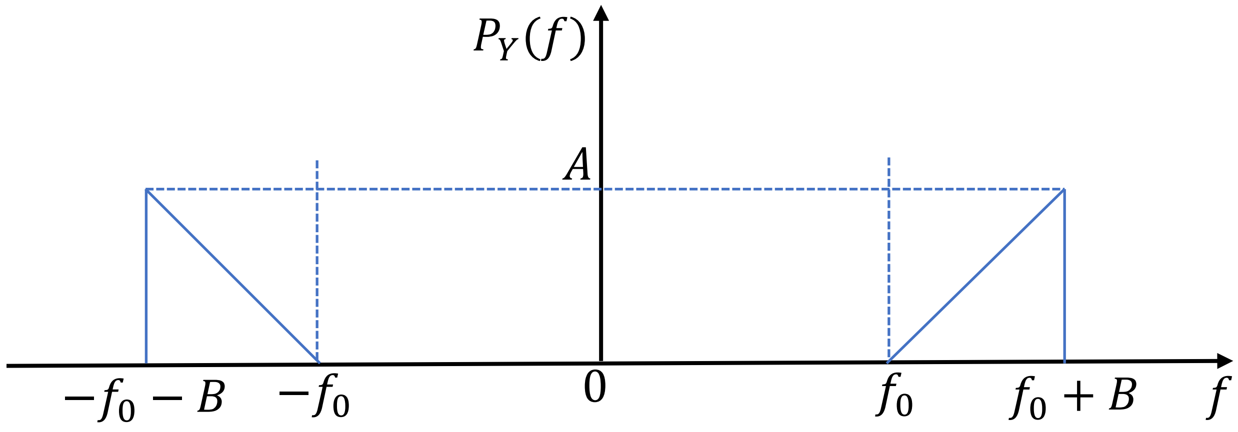
$$\begin{aligned}P_Y(f)&=\mathcal{F}[R_X(\tau)cos(2\pi f_0\tau)-\hat{R}_X(\tau)sin(2\pi f_0\tau)]\\&=P_X(f)*\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]+jsgn(f)P_X(f)*\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]\\&=\begin{cases}P_X(f-f_0), & f_0\le f\le f_0+B\\ P_X(f+f_0), & -f_0-B\le f\le -f_0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\end{aligned}$$

2-35

解:

$$P_Y(f)=\begin{cases}P_X(f-f_0), & f_0\le f\le f_0+B\\ P_X(f+f_0), & -f_0-B\le f\le -f_0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$





2-37 定义随机过程$X(t) = A + Bt$，其中A,B是相互独立的随机变量，并且在$[-1,1]$上服从均匀分布。求$m_X(t)$与$R_X(t_1,t_2)$。

知识点：随机过程的数字特征 P42-P43

均值函数： $E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)dx = m_X(t) \quad (2.3.5)$

自相关函数: $R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (2.3.8a)$

解： $m_X(t) = E[X(t)] = E[A] + t \cdot E[B] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} A dA + t \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} B dB = 0$

$$
\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\
&= E[A^2 + AB(t_1+t_2) + B^2 t_1 t_2] \\
&= E[A^2] + (t_1+t_2) \cdot E[A] \cdot E[B] + t_1 t_2 \cdot E[B^2] \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} A^2 dA + 0 + t_1 t_2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} B^2 dB \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} t_1 t_2
\end{aligned}
$$