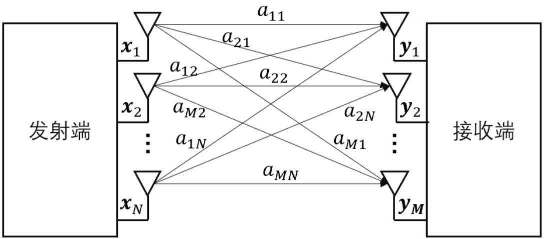
网络信息论 2

1. 多输入多输出（MIMO）信道
2. 广播信道
3. 广义图网络

网络信息论 2

1. 多输入多输出（MIMO）信道
2. 广播信道
3. 广义图网络

多输入多输出 (MIMO) 高斯信道



MIMO 高斯信道的数学模型可以写为:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}.$$

- $\boldsymbol{x}$: $M \times 1$ 的发射向量，$E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T] = \boldsymbol{K}_x$
- $\boldsymbol{n}$: 加性高斯白噪声 (AWGN) 向量，与 $\boldsymbol{x}$ 相互独立，$\boldsymbol{n} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{K}_n)$
- $\boldsymbol{y}$: $N \times 1$ 接收向量
- $\boldsymbol{H}$: $N \times M$ 信道矩阵（接收端已知）

MIMO 高斯信道容量

互信息:

$$
\begin{aligned}
I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) &= h(\boldsymbol{Y}) - h(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}) \\
&= h(\boldsymbol{Y}) - h(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{N}|\boldsymbol{X}) \\
&= h(\boldsymbol{Y}) - h(\boldsymbol{N})
\end{aligned}
$$

由于 $E[\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^T] = \boldsymbol{H}\boldsymbol{K_x}\boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{K_n}$，当 $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{K_x})$ 时互信息最大:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2}\log[\det(\boldsymbol{H}\boldsymbol{K_x}\boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{K_n})] - \frac{1}{2}\log[\det(\boldsymbol{K_n})] \\
&= \frac{1}{2}\log[\det((\boldsymbol{H}\boldsymbol{K_x}\boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{K_n})\boldsymbol{K_n}^{-1})] \\
&= \frac{1}{2}\log[\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K_n}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K_x}\boldsymbol{H}^T)] \quad (\text{比特/发送})
\end{aligned}
$$

MIMO 高斯信道容量—收端已知发端未知 $\boldsymbol{H}$

- 如果发端未知 $\boldsymbol{H}$，则无法优化 $\boldsymbol{K_x} \Rightarrow \boldsymbol{K_x} = \frac{P_{sum}}{M}\boldsymbol{I}$ 最优
- 当 $\boldsymbol{K_n} = \sigma^2\boldsymbol{I}, \boldsymbol{K_x} = \frac{P_{sum}}{M}\boldsymbol{I}$，可得

$$C = \frac{1}{2}\log\left[\det(\boldsymbol{I} + \tfrac{P_{sum}}{M\sigma^2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T)\right] \quad \text{(比特/发送)}$$

- 对大规模 MIMO 系统，通常 $\boldsymbol{H}$ 中元素独立高斯，$M, N \to \infty$，且 $M = N$，则 $\frac{1}{N}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T \to \boldsymbol{I}_N$ (大数定律)，因此，

$$C = \frac{N}{2}\log\left(1 + \frac{P_{sum}}{\sigma^2}\right) \quad \text{(比特/发送)}$$

MIMO 高斯信道容量—收发都已知 $\boldsymbol{H}$

- 收发都已知 $\boldsymbol{H}$，可在 $\mathrm{tr}\{\boldsymbol{K_x}\} = P_{sum}$ 约束下，优化 $\boldsymbol{K_x}$

- 设 $M = N$，令 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{V}$（奇异值分解），其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵，$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是酉矩阵

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{U} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{U} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{U} \boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{n}',$$

$$\Rightarrow y'_i = x'_i + n'_i, \quad \forall i = 1, \cdots, N,$$

其中 $n'_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2/\lambda_i^2), E\{x_i'^2\} \sim \mathcal{N}(0, P_i)$

- **功率注水**：当 $x'_i \sim \mathcal{N}(0, P_i^*)$ 时达到信道容量：

$$P_i^* = (v - \sigma_i^2/\lambda_i^2)^\dagger = \max(v - \sigma_i^2/\lambda_i^2, 0)$$

$$P_{sum} = \textstyle\sum_{i=1}^N P_i^*$$

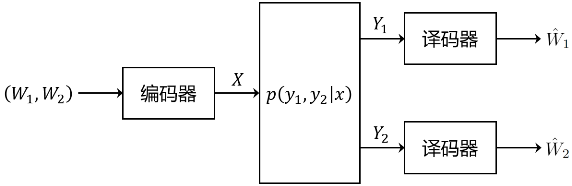
- **信道容量**：$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log(1 + \frac{P_i^*}{\sigma_i^2/\lambda_i^2})$

网络信息论 2

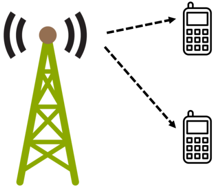
1. 多输入多输出（MIMO）信道
2. **广播信道**
3. 广义图网络

广播信道

广播信道由输入字母表 $\mathcal{X}$, 输出字母表 $\mathcal{Y}_1$ 与 $\mathcal{Y}_2$, 以及概率转移函数 $p(y_1, y_2|x)$ 组成



广播信道



下行链路

一般广播信道容量依旧是个开放问题

退化广播信道

定义: 广播信道是**物理退化的**，如果 $p(y_1, y_2|x) = p(y_1|x)p(y_2|y_1)$, 即, $X \to Y_1 \to Y_2$ 为马尔可夫链。(注: Y_1 的信道比 Y_2 好.)

定理 (退化广播信道容量区域): 在退化广播信道 $\underbrace{(X_1, X_2)}_{X} \to Y_1 \to Y_2$ 发送**相互独立**信息的容量区域为满足下列条件的 (R_1, R_2) 组成的凸闭包:

$$R_2 < I(X_2; Y_2)$$

$$R_1 < I(X_1; Y_1|X_2)$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[d] & \\
X_2 \arrow[r] & \mathrm{Y}_1 \arrow[r] & \mathrm{Y}_2
\end{tikzcd}$$

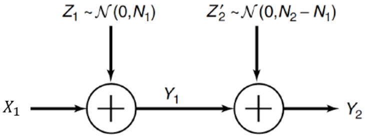
Y_2 **需要恢复** X_2; Y_1 **需要恢复** X_1 **不需要** X_2.

举例：高斯广播信道

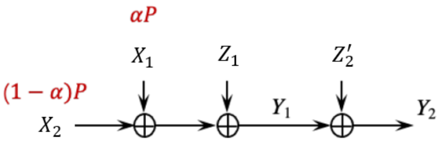
高斯广播信道为退化信道：

$$Y_1 = X + Z_1$$
$$Y_2 = X + Z_2 = Y_1 + Z_2'$$

其中 $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$，$Z_2' \sim \mathcal{N}(0, N_2 - N_1)$. (注：$N_2 > N_1$)



举例：高斯广播信道



Y_2 恢复需要 X_2；Y_1 恢复需要 X_1 不需要 X_2.

叠加编码 $X = X_1 + X_2$，$\alpha \in [0,1]$，Y_1 关心 X_1，Y_2 关心 X_2，X_1 和 X_2 独立

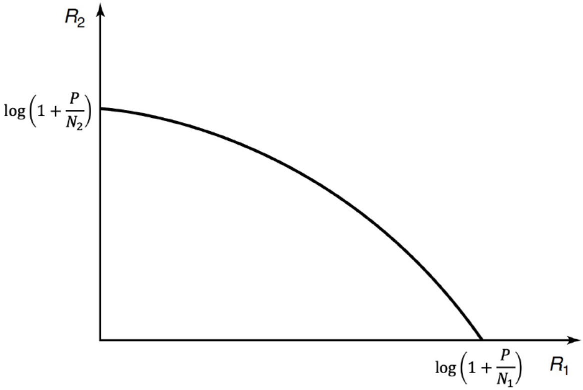
- 高斯广播信道的容量区域：

$$R_1 < I(X_1;Y_1|X_2) = I(X_1;X_1+Z_1) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\alpha P}{N_1}\right),$$

$$R_2 < I(X_2;Y_2) = I(X_2;X_2+\underbrace{X_1+Z_1+Z_2'}_{\text{power: }\alpha P+N_2}) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{(1-\alpha)P}{\alpha P+N_2}\right),$$

  - 好信道（$X_1 \to Y_1$）：先译 X_2，消除 X_2 的干扰，再译 X_1
  - 坏信道（$X_2 \to Y_2$）：把 X_1 当干扰，直接译 X_2

举例：高斯广播信道



退化广播信道：公共信息

广播信道的码率(R_0, R_1, R_2)，其中

- R_0: **公共信息码率**
- R_1: **用户 1 独立信息码率**
- R_2: **用户 2 独立信息码率**

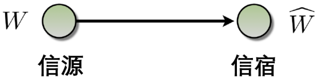
定理: 如果码率对 (R_1, R_2) 对于退化广播信道 $X \to Y_1 \to Y_2$ 是可达的且 $R_0 < R_2$, 则码率三元组 $(R_0, R_1, R_2 - R_0)$ 对具有公共信息的信道是可达的。

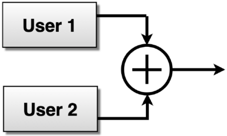
注：用户 2 的信息可被用户 1 恢复，可作为公共信息。

网络信息论 2

1. 多输入多输出（MIMO）信道
2. 广播信道
3. **广义图网络**

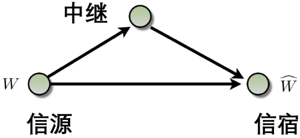
单跳 vs 多跳

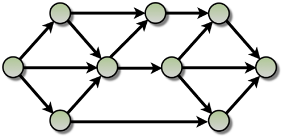




单跳网络

点对点信道
多接入信道
广播信道





多跳网络

节点都可以收和发
中继信道
图网络

单跳 vs 多跳

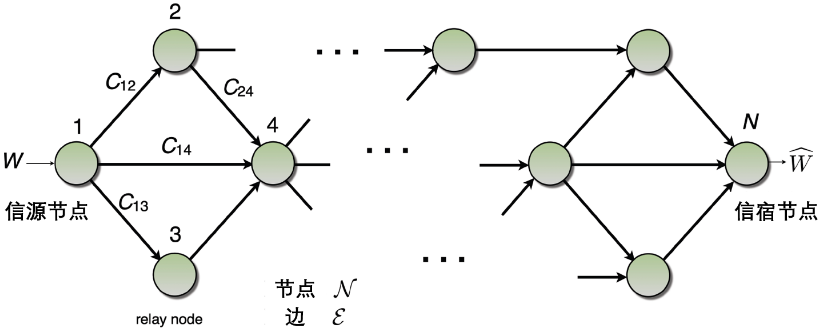
- **单跳网络**
  - 优美完整理论
  - 大多数模型容量已知
- **多跳网络**
  - 仍在探索中
  - 一般情况容量未知
    - 可以找到可达码率，即容量的上界
  - 渐近长序列 vs 网络编码

图网络：定义

图网络由以下部分构成:

- 节点集合 $\mathcal{N}$
- 连接每一对节点的边集合 $\mathcal{E}$: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$
- 节点 i 到节点 j 的直边的容量 $C_{i \to j}$
- 至少一个节点有信息
- 至少一个节点需要信息，接收终端集合为 $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$

图网络：定义



节点 $\mathcal{N}$
边 $\mathcal{E}$
容量 $\mathcal{C}_{i,j}$

有限域

有限域 $\mathbb{F}_q$ 是一个大小为 q 的有限集，其中可以进行加 $\oplus$、减 $\ominus$、乘 $\otimes$、除 $\oslash$:

$$\{0, 1, 2, \cdots, q-1\}$$

如果 p 是素数，则域只存在于大小为 p^m，$m > 1$ 的情况下。
特别的，存在大小为 2、4、8、16、32 等的有限域。

$$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

有限域举例

$\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$

模3操作

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\mathbb{F}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

不是模4操作

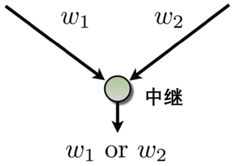
$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

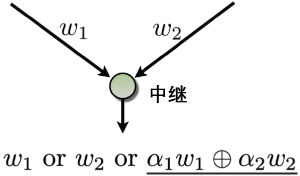
网络特征

- **无延迟**: 所有传输同时发生
- **无错误**: 接收符号与发送符号相同
- 信源产生比特流，并分割成消息 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \dots$
  - 一条容量为 $1, 2, \dots$ 的链路可以传输 $1, 2 \dots$ 个消息
- **单播 vs 组播**:
  - **单播**: 一个信源节点，一个信宿节点
  - **组播**: 一个信源节点，多个信宿节点
- **路由 vs 网络编码**

路由 vs 网络编码



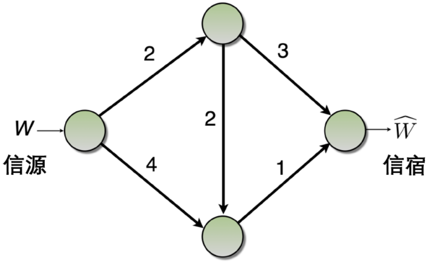
路由：节点只能向前传播一个输入消息



网络编码：节点可以向前传播所有输入信息

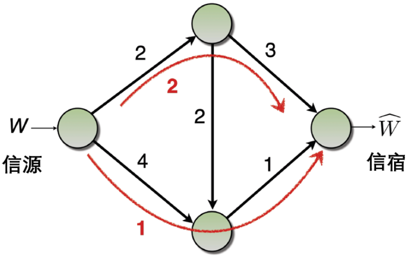
单播图网络

这个网络的容量是多少?



单播图网络

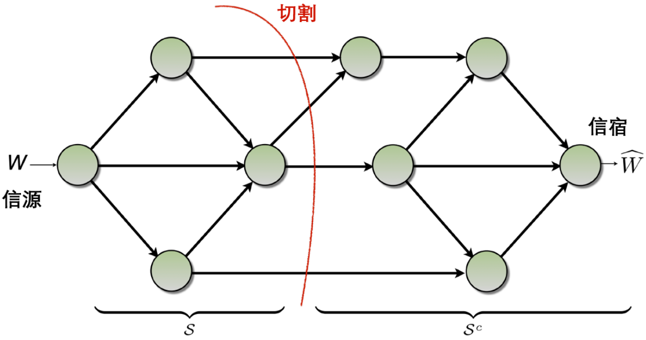
这个网络的容量是多少?



容量为 1+2=3

切割及容量

对于单播网络，一个切割 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}^c$ 将所有节点 $\mathcal{N}$ 分割成两部分，信源节点在 $\mathcal{S}$，信宿节点在 $\mathcal{S}^c$。

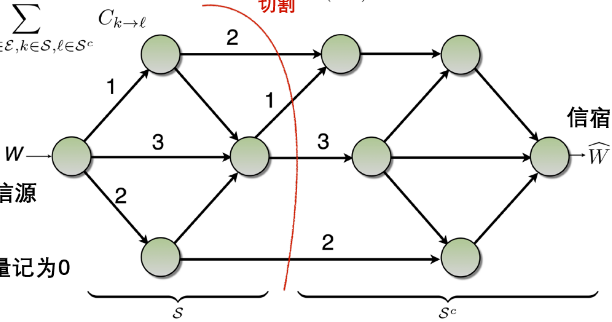


切割及容量

一次切割的容量为:

$$C(\mathcal{S}) = \sum_{(k,\ell)\in\mathcal{E},k\in\mathcal{S},\ell\in\mathcal{S}^c} C_{k\to\ell}$$

$$C(\text{cut}) = 2+1+3+2=8$$



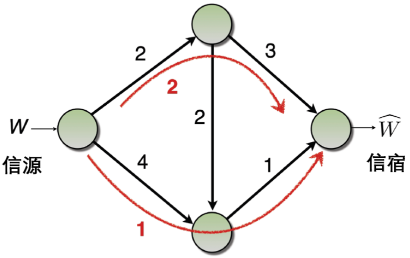
*反向的边容量记为0

最大流最小割理论：单播网络的容量

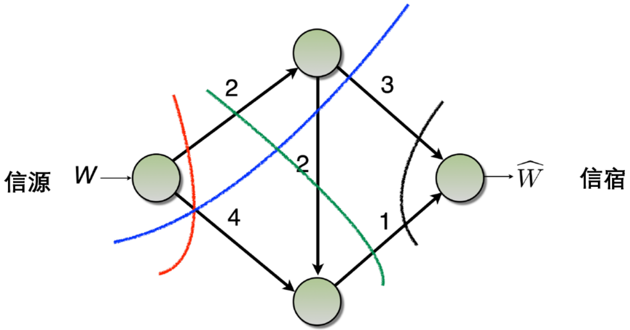
推论（最大流最小割）：具有一个信源节点 ($s \in \mathcal{S}$) 和一个信宿节点 ($d \in \mathcal{S}^c$) 的网络的容量 C 为

$$C = \min_{\mathcal{S} \subset \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}, d \in \mathcal{S}^c} C(\mathcal{S}).$$

可以通过路由达到这个容量。



最大流最小割举例



绿色线切割的边有一条是-2，将它视为 0。

组播图网络

- 消息来自一个固定的字母表 $\{1, 2, \ldots, M\}$
- **组播**: 一个信源节点, **多个信宿节点**
- 单一的信源节点为 s
- **所有信宿需要信息**
- 信宿集合为 $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$

组播网络容量的割集上界

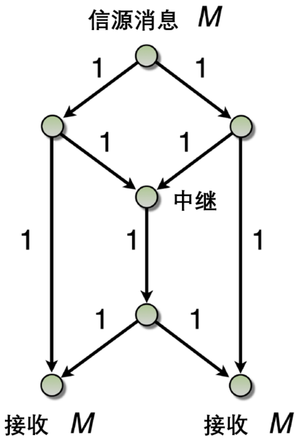
信源节点为 s，信宿节点集合为 $\mathcal{D}$

定理：一个具有单一信源 $(s \in \mathcal{S})$、信宿集合 $\mathcal{D}$ 的组播网络的容量 C 的上界为：

$$C \le \min_{j \in \mathcal{D}} \min_{\mathcal{S} \subset \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}, j \in \mathcal{S}^c} C(\mathcal{S}).$$

- 从信源到一个信宿 j 的容量由最大流最小割定理给出。
- 由于所有信宿都想要信息，容量被最坏的链路主导—对所有信宿取最小

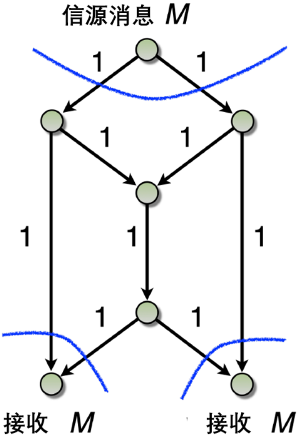
组播网络举例



蝶形网络

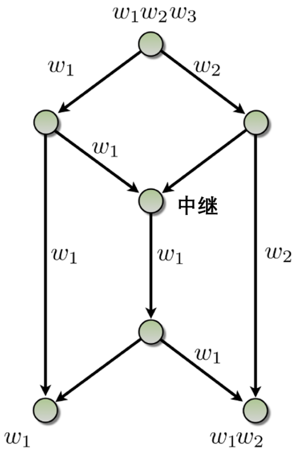
- 一个信源节点有消息 M
- 两个信宿节点想要获得 M
- 每条链路容量为 1

割集界限



由割集界限，$C = 2$

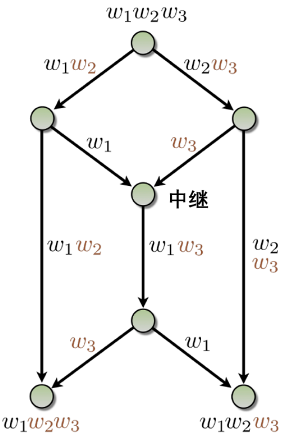
最优路由



假设有三个消息 w_1, w_2, w_3

- 使用两次网络
- 传输三个消息
- 吞吐 3/2 小于割集界限 2
- 组播网中路由无法达到割集极限

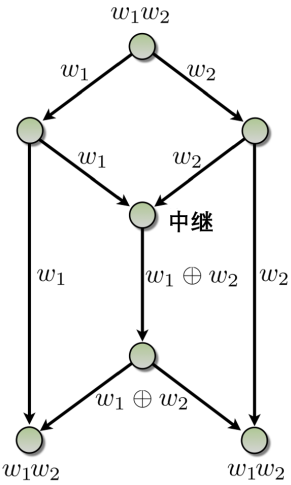
最优路由



假设有三个消息 w_1, w_2, w_3

- 使用两次网络
- 传输三个消息
- 吞吐 3/2 小于割集界限 2
- 组播网络中路由无法达到割集界限

网络编码



将 $M = w_1 w_2$ 分割成两个消息

- w_i 与操作 $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$ 组成一个有限域
- 信宿接收到 $w_1, w_1 \oplus w_2$
- 信宿解出 w_2:

$$w_2 = (w_1 \oplus w_2) \ominus w_1$$

- 传输两个消息只用一次网络
- 可达速率 $= 2$
- 网络编码可达容量!

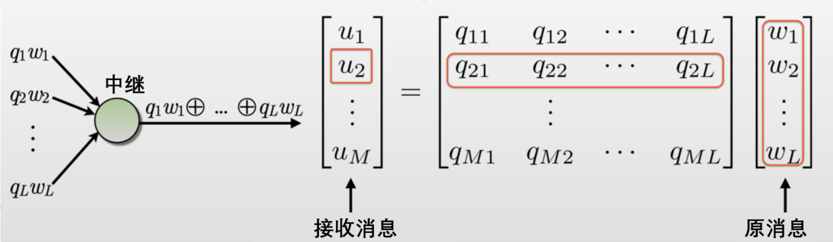
网络编码定理

网络编码定理: 一个具有单一信源 ($s \in \mathcal{S}$)、信宿集合 $\mathcal{D}$ 的组播网络的容量 C 的上界为:

$$C \leq \min_{j \in \mathcal{D}} \min_{\mathcal{S} \subset \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}, j \in \mathcal{S}^c} C(\mathcal{S}).$$

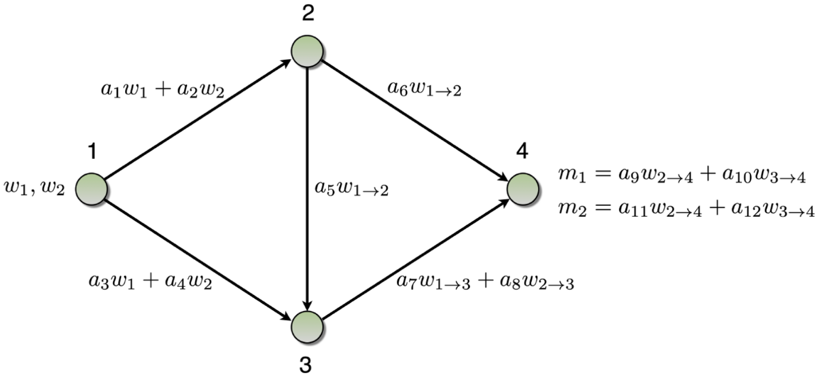
如果可以进行网络编码，割集界限就是容量。

网络编码的推广



q_1w_1
q_2w_2
$\vdots$
q_Lw_L
中继
$q_1w_1 \oplus \ldots \oplus q_Lw_L$
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1L} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2L} \\ & \vdots & & \\ q_{M1} & q_{M2} & \cdots & q_{ML} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_L \end{bmatrix}$$
接收消息
原消息

网络编码的矩阵表示



2
$a_1 w_1 + a_2 w_2$
$a_6 w_{1\to 2}$
1
4
w_1, w_2
$a_5 w_{1\to 2}$
$m_1 = a_9 w_{2\to 4} + a_{10} w_{3\to 4}$
$m_2 = a_{11} w_{2\to 4} + a_{12} w_{3\to 4}$
$a_3 w_1 + a_4 w_2$
$a_7 w_{1\to 3} + a_8 w_{2\to 3}$
3

有噪/干扰的网络

- 由 N 个节点组成的通用信息网络 $\mathcal{N}$。
- 在每次时间索引时，节点 i 有一个输入值 x_i 和输出值 y_i
- 信道由条件概率分布表示:

$$p_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y^{(1)}, \ldots, y^{(N)} | x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}),$$

  此函数允许网络中存在噪声和干扰。
- 从节点 i 发送到节点 j 的消息是 $w^{(ij)}$
- 信息速率为 $R^{(ij)}$，因此消息来自 $\{1, 2, \cdots, 2^{nR(i\,j)}\}$
- 对于解码，节点 i 使用所有输入来估计 $\hat{w}^{(i,j)}$，出错概率为:

$$P_e^{(ij)} = \Pr(w^{(ij)} \neq \widehat{w}^{(ij)})$$

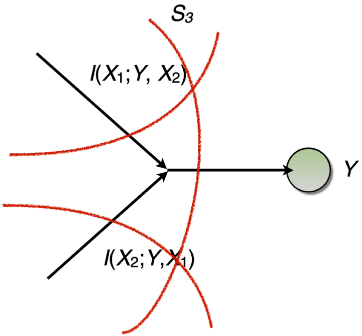
如果存在编码器和解码器，使得对所有 $i, j \in \mathcal{N}, P_e^{(ij)} \to 0$ 且 $n \to \infty$，则称一组速率 $R^{(i,j)}$ 是可以实现的。

信息流的割集界限

推论（信息流的割集界限）：如果码率 $R^{(ij)}$ 可达，那么一定存在联合概率分布 $p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ 满足

$$\sum_{i\in\mathcal{S},j\in\mathcal{S}^c} R^{(ij)} \leq I(X^{(\mathcal{S})};Y^{(\mathcal{S}^c)}|X^{(\mathcal{S}^c)}).$$

多址接入信道的最大流最小割

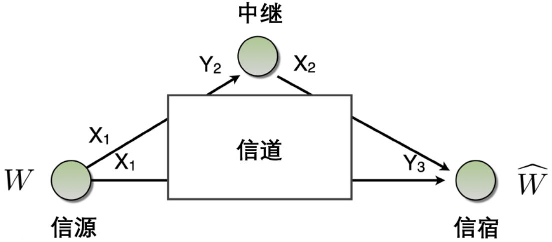


$$S_1 : R_1 < I(X_1; Y|X_2)$$

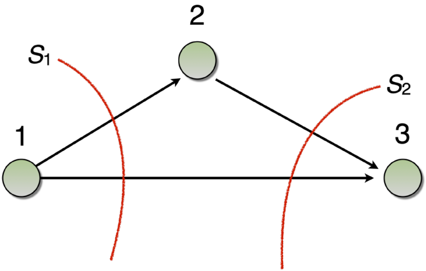
$$S_2 : R_2 < I(X_2; Y|X_1)$$

$$S_3 : R_1 + R_2 < I(X_1, X_2; Y)$$

中继信道



中继信道：最大流最小割



总结

- MIMO 信道
- **广播信道**
  - 退化广播信道
  - 重叠编码：好信道可以恢复差信道的信息
- **广义图网络**
  - **单播网络**: 一个信源，一个信宿
    - **路由** 达到容量
  - **组播网络**: 一个信源，多个信宿
    - 路由不能达到容量，网络编码达到容量
    - 必须使用足够大的域
  - **有噪/干扰的网络**:
    - 割集界限应用于**多接入** 信道和**中继**信道