矩阵论

2024年秋学期

第二讲
2024年9月11日

1）第一讲复习
2）矩阵代数基础

矩阵代数基础

矩阵的基本运算

包括矩阵的转置、共轭、共轭转置、加法和乘法。

共轭转置（Hermitian转置/ Hermitian伴随/ Hermitian共轭）

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{m1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{m2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$$

加法 $[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

乘法 $[\alpha \boldsymbol{A}]_{ij} = \alpha a_{ij}$ $\qquad [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \cdots, m$

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \cdots, m; \ j = 1, \cdots, s$$

矩阵代数基础

运算法则

加法

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

乘法

$$A(BC) = (AB)C$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

共轭、转置、共轭转置和逆矩阵性质

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}, \quad (A + B)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}} + B^{\mathrm{H}}$$

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}, \quad (AB)^{\mathrm{H}} = B^{\mathrm{H}} A^{\mathrm{H}}$$

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad (A, B \text{ 为可逆的正方矩阵})}$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*, \quad (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}, \quad (A^{\mathrm{H}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{H}}$$

对于任意矩阵 A，矩阵 $B = A^{\mathrm{H}} A$ 都是 Hermitian 矩阵

矩阵代数基础

运算法则

导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{12}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{1n}}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}a_{21}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{22}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{2n}}{\mathrm{d}t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\mathrm{d}a_{m1}}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{m2}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{mn}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$$

Eq. (1.1.21)

矩阵函数：Eq. 1.1.17~22

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$$

积分

$$\int \boldsymbol{A}\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}\int a_{11}\mathrm{d}t & \int a_{12}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{1n}\mathrm{d}t\\ \int a_{21}\mathrm{d}t & \int a_{22}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{2n}\mathrm{d}t\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \int a_{m1}\mathrm{d}t & \int a_{m2}\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{mn}\mathrm{d}t\end{bmatrix}$$

矩阵的基本运算

工程和科学计算中常见的方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

矩阵代数基础

向量的线性无关与非奇异性

线性方程组

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

向量组线性无关：只有零解

向量组线性相关：有非零解

$n \times n$ 矩阵方程组

$$Uc = 0$$

只有零解：c是非奇异的

存在非零解：c 是奇异的

矩阵的初等变换

初等行变换

(1) 互换矩阵的任意两行，如 $\boldsymbol{r}_p \leftrightarrow \boldsymbol{r}_q$，称为 I 型初等行变换。

(2) 一行元素同乘一个非零常数 α，如 $\alpha \boldsymbol{r}_p \to \boldsymbol{r}_p$，称为 II 型初等行变换。

(3) 将第 p 行元素同乘一个非零常数 β 后，加给第 q 行，即 $\beta \boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_q \to \boldsymbol{r}_q$，称为 III 型初等行变换。

经过初等行变换得到的矩阵等价于原矩阵，行等价矩阵

应用I：方程组求解

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

高斯消去法

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}]$$

初等列变换?

矩阵的初等变换

初等行变换

应用II：矩阵求逆

$$AX = I \xrightarrow{\text{初等行变换}} X = A^{-1}$$

高斯消去法

$$[A, I] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [I, A^{-1}]$$

复矩阵方程求解 $(A_r + \mathrm{j}\, A_i)(x_r + \mathrm{j}\, x_i) = b_r + \mathrm{j}\, b_i$

$$\begin{bmatrix} A_r & -A_i \\ A_i & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_r \\ b_i \end{bmatrix}$$

复矩阵方程求解 $Ax = b \xrightarrow{\text{初等行变换}} x = A^{-1}b$

实增广矩阵 $\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} A_r & -A_i \\ A_i & A_r \end{matrix}} & \begin{matrix} b_r \\ b_i \end{matrix} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} I_n & O_n & x_r \\ O_n & I_n & x_i \end{bmatrix}$

向量空间与线性映射

集合的基本概念

元素的集体表示

常用的数学符号 **R, C**

$\forall$ 表示“对所有 $\cdots$”；

$x \in A$ 读作“x 属于集合 A”，意即 x 是集合 A 的一个元素；

$x \notin A$ 表示 x 不是集合 A 的元素；

$\ni$ 代表“使得”；

$\exists$ 意即“存在”；

$A \Rightarrow B$ 表示“若有条件 A，则有结果 B”或“A 意味着 B”。

向量空间

以向量为元素的集合

向量空间与线性映射

线性映射

子空间V到子空间W的映射

$$T : V \mapsto W$$

线性映射/线性变换

叠加性 $T(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{w})$

齐次性 $T(c\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{v})$

线性映射/线性变换（也可写成）

$T(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v} + 3$ **线性?**

$$T(c_1\boldsymbol{v} + c_2\boldsymbol{w}) = c_1T(\boldsymbol{v}) + c_2T(\boldsymbol{w})$$

更一般形式

$$T(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{u}_p) = c_1T(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + c_pT(\boldsymbol{u}_p)$$

向量空间与线性映射

线性映射

三维到二维的变换 $T:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$T_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix},\quad 其中，\ \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$$

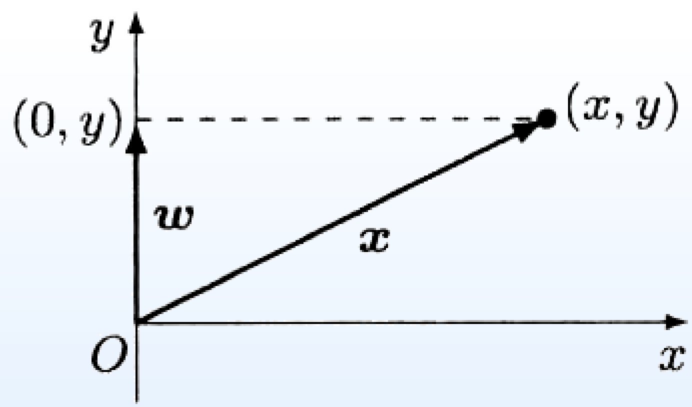
非线性

$$T_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix},\quad 其中，\ \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$$

线性

正交投影算子 $\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{x})$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



向量的内积

典范内积 $$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

几何意义

从几何角度看，两个向量的内积与它们夹角的余弦有关。具体来说，两个向量 $\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的内积可以表示为：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \cos(\theta)$$

其中，$\|\boldsymbol{x}\|$和 $\|\boldsymbol{y}\|$分别是向量$\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{y}$ 的模长（或称为长度），θ是这两个向量的夹角，$\cos(\theta)$是夹角的余弦值。

内积性质

1. 交换律：$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$
2. 分配律：$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$
3. 结合律：$c\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y} \rangle$
4. 若$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$，且$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$都不是零向量，则$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$正交（即夹角为90度）

向量的内积

输入时间序列

内积举例：DTFT（离散时间傅里叶变换）变换

$$X(f)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nf}=\boldsymbol{e}_{N-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}=\langle\boldsymbol{e}_{N-1},\boldsymbol{x}\rangle$$

其中 $$\boldsymbol{e}_{N-1}=\left[1,\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}f},\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}2f},\ldots,\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)f}\right]$$ 傅里叶变换基向量

加权内积 $$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}$$

Hermitian, positive definite（正定，二次型大于0）

向量的范数

常用的向量范数

(1) L_0 范数（也称0范数），在稀疏表示中常用

$$\|\boldsymbol{x}\|_0 \overset{\text{def}}{=} \text{非零元素的个数}$$

(2) L_1 范数（也称1范数），将0范数松弛为1范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} |x_i| = |x_1| + \cdots + |x_m|$$

(3) L_2 范数（常称Euclidean范数，有时也称Frobenius范数）

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2} = \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_m|^2 \right)^{1/2}$$

也可缩写为 $\|\boldsymbol{x}\|$

向量的范数

常用的向量范数

(4) L_∞ 范数（也称无穷0范数）或极大范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\left\{|x_1|, \cdots, |x_m|\right\}$$

(5) L_p 范数（也称Hölder范数）

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p\right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

向量的内积与范数

两个连续函数内积

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_a^b x^*(t)y(t)\mathrm{d}t$$

两个函数向量的内积

$$\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{y}(t)\mathrm{d}t$$

两个函数向量的夹角定义

$$\cos\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}\sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle}} = \frac{\int_a^b \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{y}(t)\mathrm{d}t}{\|\boldsymbol{x}(t)\|\,\|\boldsymbol{y}(t)\|}$$

函数向量的范数 $\|\boldsymbol{x}(t)\| \overset{\text{def}}{=} \left(\int_a^b \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2}$

机器学习中向量的相似比较

距离衡量：未知模式向量x与样本模式向量s_1更相似

$$D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}_1) \le D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}_2)$$

一种比较的方法：Euclidean距离

$$D_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}_i) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}_i\|_2 = \sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}_i)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}_i)}$$

$$D_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$$

$$D_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}_i) = \min_k D_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}_k), \quad k=1,2,\cdots,M$$ **最近的邻居**

- K最近邻(k-Nearest Neighbor，KNN)
- K均值聚类（clustering）：不同于分类（classification），将无标签的数据点按照某种相似度来进行归类

随机向量

随机向量的内积与范数

随机向量的内积涉及到概率论和统计学中的概念，特别是在处理具有随机性的向量时。随机向量是由随机变量构成的向量，其内积的计算和理解，对于数据分析、信号处理、机器学习等领域非常重要

内积 $$\langle \boldsymbol{x}(\xi), \boldsymbol{y}(\xi) \rangle \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left\{ \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(\xi) \boldsymbol{y}(\xi) \right\}$$

范数 $$\left\| \boldsymbol{x}(\xi) \right\|^2 \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left\{ \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(\xi) \boldsymbol{x}(\xi) \right\}$$

正交性：两个向量之间在统计意义上正交（随机向量的统计特性描述）

$$\mathrm{E}\left\{ \boldsymbol{x}(\xi) \boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(\xi) \right\} = \boldsymbol{O}_{m \times n}$$

随机向量

概率密度函数

随机向量 $\boldsymbol{x}(\xi)=\left[x_1(\xi),\cdots,x_m(\xi)\right]^{\mathrm{T}}$

ξ **：时间，频率，位置信息等（空、时、频）**

可由联合累积分布函数（CDF: Culmulative Distribution Function）完全描述

$$F(\boldsymbol{x})\overset{\text{def}}{=}P\left\{\xi:x_1(\xi)\leqslant x_1,\cdots,x_m(\xi)\leqslant x_m\right\}$$

也可以由概率密度函数（PDF: Probability Density Function）完全描述

$$f(\boldsymbol{x})\overset{\text{def}}{=}\lim_{\Delta x_1\to0,\cdots,\Delta x_m\to0}\frac{P\left\{\xi:x_1<x_1(\xi)\leqslant x_1+\Delta x_1,\cdots,x_m<x_m(\xi)\leqslant x_m+\Delta x_m\right\}}{\Delta x_1\cdots\Delta x_m}$$

$$=\frac{\partial^m}{\partial x_1\cdots\partial x_m}F_x\left(x_1,\cdots,x_m\right)$$

随机向量

概率密度函数

复随机向量

$$\boldsymbol{x}(\xi)=\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}(\xi)+\mathrm{j}\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}(\xi)=\begin{bmatrix} x_{\mathrm{R}1}(\xi) \\ \vdots \\ x_{\mathrm{R}m}(\xi) \end{bmatrix}+\mathrm{j}\begin{bmatrix} x_{\mathrm{I}1}(\xi) \\ \vdots \\ x_{\mathrm{I}m}(\xi) \end{bmatrix}$$

可由联合累积分布函数完全描述

$$F(\boldsymbol{x})\overset{\text{def}}{=}P\{\boldsymbol{x}(\xi)\leqslant\boldsymbol{x}\}\overset{\text{def}}{=}P\left\{\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}(\xi)\leqslant\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}},\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}(\xi)\leqslant\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}\right\}$$

也可以由概率密度函数完全描述

$$f(\boldsymbol{x})\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial^{2m}F(\boldsymbol{x})}{\partial x_{\mathrm{R}1}\partial x_{\mathrm{I}1}\cdots\partial x_{\mathrm{R}m}\partial x_{\mathrm{I}m}}$$

随机向量

随机向量的统计描述

均值向量

$$\boldsymbol{\mu}_x = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(\xi)\} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}\{x_1(\xi)\} \\ \vdots \\ \mathrm{E}\{x_m(\xi)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}$$

随机变量的期望

连续随机变量 $\mathrm{E}\{x(\xi)\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ $f(x)$ 为概率密度函数

离散随机变量 $E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

对于一个离散随机变量 X ，其可能的取值为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$

与这些取值相对应的概率分别为 $P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots, P(X = x_n)$

随机向量

随机向量的统计描述

相关矩阵

$$\boldsymbol{R}_x \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left\{\boldsymbol{x}(\xi)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(\xi)\right\} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix}$$

对角：自相关函数 $r_{ii} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left\{\left|x_i(\xi)\right|^2\right\}, \quad i = 1,\cdots,m$

非对角：互相关函数 $r_{ij} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left\{x_i(\xi)x_j^*(\xi)\right\}, \quad i,j = 1,\cdots,m, i \neq j$

$\boldsymbol{R}_x$ **：复共轭对称矩阵，即Hermitian矩阵**

随机向量

随机向量的统计描述

自协方差矩阵

$$\boldsymbol{C}_x = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left\{\left[\boldsymbol{x}(\xi)-\boldsymbol{\mu}_x\right]\left[\boldsymbol{x}(\xi)-\boldsymbol{\mu}_x\right]^{\mathrm{H}}\right\} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

自相关矩阵与自协方差矩阵之间的关系

$$\boldsymbol{C}_x = \boldsymbol{R}_x - \boldsymbol{\mu}_x\boldsymbol{\mu}_x^{\mathrm{H}}$$

推广：互相关矩阵

$$\boldsymbol{R}_{xy} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left\{\boldsymbol{x}(\xi)\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(\xi)\right\} = \begin{bmatrix} r_{x_1,y_1} & \cdots & r_{x_1,y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{x_m,y_1} & \cdots & r_{x_m,y_m} \end{bmatrix}$$

互协方差矩阵

$$\boldsymbol{C}_{xy} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left\{\left[\boldsymbol{x}(\xi)-\boldsymbol{\mu}_x\right]\left[\boldsymbol{y}(\xi)-\boldsymbol{\mu}_y\right]^{\mathrm{H}}\right\} = \begin{bmatrix} c_{x_1,y_1} & \cdots & c_{x_1,y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{x_m,y_1} & \cdots & c_{x_m,y_m} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{xy} = \boldsymbol{R}_{xy} - \boldsymbol{\mu}_x\boldsymbol{\mu}_y^{\mathrm{H}}$$

随机向量

两个随机变量之间的相关系数定义

$$\rho_{xy} \overset{\text{def}}{=} \frac{c_{xy}}{\sqrt{\mathrm{E}\left\{|x(\xi)-\mu_x|^2\right\}\mathrm{E}\left\{|y(\xi)-\mu_y|^2\right\}}} = \frac{c_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

由Cauchy-Schwartz $0 \leqslant \left|\rho_{xy}\right| \leqslant 1$

统计特性可由均值和协方差矩阵表征

实高斯白噪声向量 各个元素独立同分布

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(t)\} = \boldsymbol{0} \qquad \mathrm{E}\left\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\right\} = \sigma^2 \boldsymbol{I}$$

复高斯白噪声向量 $\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(t)\} = \boldsymbol{0}$

$$\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(t)\right\} = \sigma^2 \boldsymbol{I}$$

$$\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\right\} = \boldsymbol{O}$$