

控制理论

信息是控制过程中的决定性因素。正是控制信号中所包含的信息，才能以不大的质量和不大的能量控制大的质量和大的能量。

——维纳

目录

一、线性控制系统的状态空间表征

- 系统数学模型
- 系统的微分状态方程
- 控制系统的传递函数
- 状态空间模型

二、系统的能控性与能观性

- 引言-能控性与能观性的基本概念
- 能控性及其判据
- 能观测性及其判据

三、控制系统的稳定性

- 引言-稳定性的定义
- 李雅普诺夫第一法
- 李雅普诺夫第二法
- 李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

三、控制系统的稳定性

- 引言-稳定性的定义
- 李雅普诺夫第一法
- 李雅普诺夫第二法
- 李雅普诺夫方法在线性系统中的应用

引言

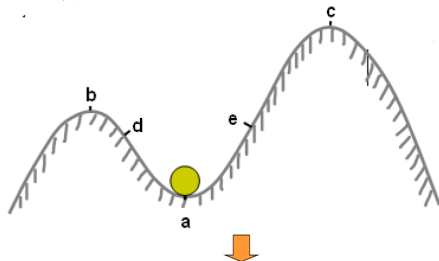
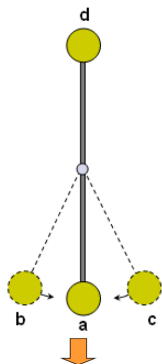
稳定性是系统性能研究的首要问题！

李雅普诺夫关于稳定性的定义：

控制系统本身处于平衡状态。受到扰动，产生偏差。扰动消失后，偏差逐渐变小，能恢复到原来的平衡状态，则**稳定**。偏差逐渐变大，不能恢复到原来的平衡状态，则**不稳定**。

——系统在初始偏差作用下，过渡过程的收敛性。

两个直观的例子

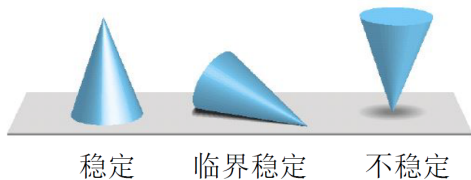


a点：稳定的（平衡点），有条件：要求起始偏差不出d、e区域。
b、c：不稳定的（平衡点）。

a：稳定的（平衡点）：在扰动力作用下，暂时偏离，扰动力消失后，经过一段有限时间，摆又回到这一平衡点。
d：不稳定的（平衡点）：在微小扰动下，一旦偏离平衡位置，则无论怎样，再也回不到原来位置。

引言

[例]



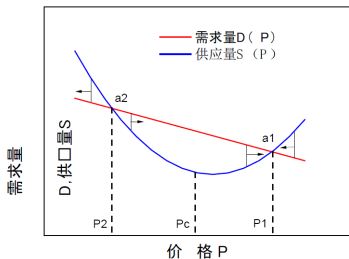
塔科马峡谷大桥：风吹开始晃动



大桥垮塌时

引言

[例] 生活中的稳定性问题：供需与价格的调节系统



a1: 正常价格
a2: 爆款

a1 点：价格升高需求减少，供应增大，供大于求，使价格降低；

稳定 价格降低需求增大，供应减少，求大于供，使价格升高；

a2 点：价格升高需求减少，供应减少，求大于供，使价格继续升高；

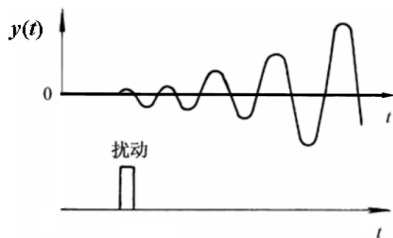
不稳定 价格降低需求增大，供应增大，供大于求，使价格继续降低；

系统稳定性定义

稳定性的另一种定义：

- 移, 逐渐衰减并趋于零, 具有恢复平衡状态的性能, 则称该系统为渐近稳定, 简称稳定。反之为不稳定。
- 控制理论中所讨论的稳定性都是指自由振荡下的稳定性, 也就是说, 输入为零, 系统仅存在初始偏差不为零时的稳定性。
- 线性系统的稳定性只取决于系统本身的结构参数, 而与外作用及初始条件无关, 是系统的固有特性。

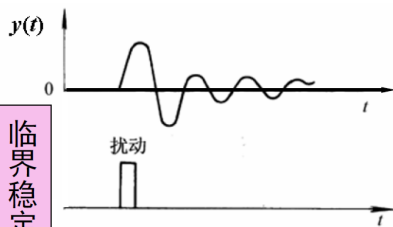
反馈控制系统



a)



不稳定的/发散的



b)

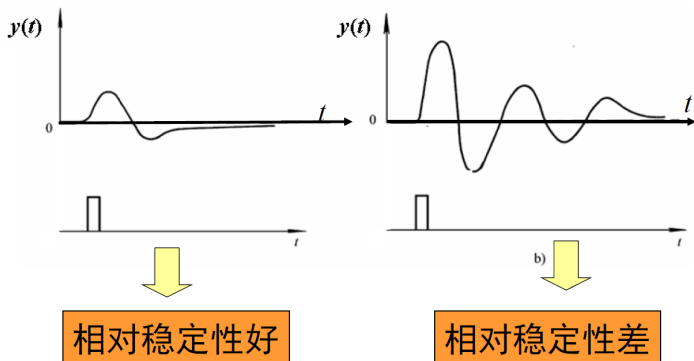


稳定的/收敛的

临界稳定——等幅振荡

绝对稳定性和相对稳定性

- 系统的绝对稳定性：系统是否满足稳定（或不稳定）的条件，即充要条件。
- 系统的相对稳定性：稳定系统的稳定程度。

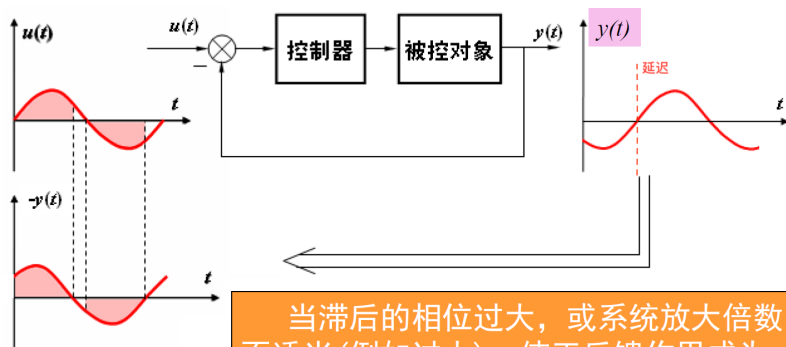


系统不稳定的物理原因

在自动控制系统中，造成系统不稳定的物理原因主要是：

- **系统中存在惯性或延迟环节**（例如机械惯性、电动机电路的电磁惯性、液压缸液压传递中的惯性、晶闸管开通的延迟，齿轮的间隙等），它们使系统中的输出信号在时间上较输入滞后了 τ 时间。
- 当系统有反馈环节时，又将这种在时间上滞后的信号反馈到输入端。

系统不稳定的物理原因



当滞后的相位过大，或系统放大倍数不适当(例如过大)，使正反馈作用成为主导作用时，系统便会形成振荡而不稳定了。

系统稳定的充要条件

- 如果我们分析了影响系统稳定性的物理原因，可以明确改善系统稳定性的方向。
- 但系统中的参数（或结构）究竟应取怎样的数值（或结构），才能满足系统稳定性的要求，仅用定性分析是解决不了的。**必须应用数学方法**来研究系统的稳定性。
- 在应用数学方法研究系统的稳定性时，首先要研究**稳定性和数学模型之间的关系**。

系统稳定性判别方法

- 经典控制理论对稳定性分析的局限性
 1. 局限于描述线性定常系统
 2. 局限于研究系统的外部稳定性
- 经典控制理论的稳定性判据
 1. 劳斯 (Routh) 判据
 2. 奈氏 (Nyquist) 判据

系统稳定性判别方法

- 现代控制理论对稳定性分析的特点
 1. 稳定性判据可用于线性/非线性，定常/时变系统；
 2. 研究系统的外部稳定性和内部稳定性；
 3. 能反映系统稳定的本质特征
- 现代控制理论的稳定性判据
 - 李雅普诺夫 (Lyapunov) 稳定性理论

Routh 稳定判据

不求解特征方程的根, 直接根据特征方程的系数, 判断系统的稳定性, 回避了求解高次方程根的困难。

- 系统稳定的**必要条件**: 特征方程中**所有项的系数均大于 0**, 只要有一项等于或小于 0, 则为不稳定系统。
- **充分必要条件**: **劳斯表中第一列元素全部大于 0**。若出现小于 0 的元素, 则系统不稳定。且第一列元素符号改变的次数等于系统正实部根的个数。

Routh 表的列写方法

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\dots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\dots
s^{n-2}	A_1	A_2	A_3	A_4	\dots
s^{n-3}	B_1	B_2	B_3	B_4	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
s^2	D_1	D_2			
s^1	E_1				
s^0	F_1				

$$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad A_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad A_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}} \dots \text{全零}$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1}, \quad B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1}, \quad B_3 = \frac{A_1 a_{n-7} - a_{n-1} A_4}{A_1} \dots \text{全零}$$

Routh 表的列写方法

【例】：特征方程： $a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

Routh 表如下：

s^5	a_5	a_3	a_1
s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	$\frac{a_4 a_3 - a_5 a_2}{a_4} = A_1$	$\frac{a_4 a_1 - a_5 a_0}{a_4} = A_2$	0
s^2	$\frac{A_1 a_2 - a_4 A_2}{A_1} = B_1$	a_0	
s^1	$\frac{B_1 A_2 - A_1 a_0}{B_1} = C_1$	0	
s^0	a_0		

Routh 表的列写方法

【例】: $D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$,

用 Routh 判据判断系统稳定性。

解: Routh 表如下:

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	$\frac{2 \times 3 - 1 \times 4}{2} = 1$	$\frac{2 \times 5 - 1 \times 0}{2} = 5$	
s^1	$\frac{1 \times 4 - 5 \times 2}{1} = -6$	0	
s^0	5		

Routh 表的列写方法

【例】: $D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$,

用 Routh 判据判断系统稳定性。

解: Routh 表如下:

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	$\frac{2 \times 3 - 1 \times 4}{2} = 1$	$\frac{2 \times 5 - 1 \times 0}{4} = 5$	
s^1	$\frac{1 \times 4 - 5 \times 2}{1} = -6$	0	
s^0	5		

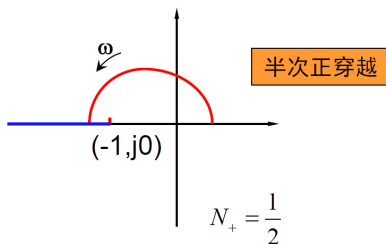
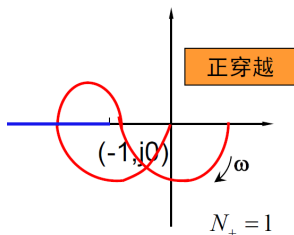
【结论】: 闭环系统不稳定, 有两个正实部的根。

Nyquist 稳定判据

- 反馈控制系统在 s 右半平面的闭环极点个数 $Z = P - 2N$ ，式中， P 为 s 右半平面开环极点个数， N 为开环 Nyquist 曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点的圈数，且有 $N = N_+ + N_-$
 - 其中 N_+ 为：正穿越与半次正穿越次数的和。
 - 其中 N_- 为：负穿越与半次负穿越次数的和。
- 数学依据：幅角原理
- 特点：由开环特性判断系统的闭环稳定性。

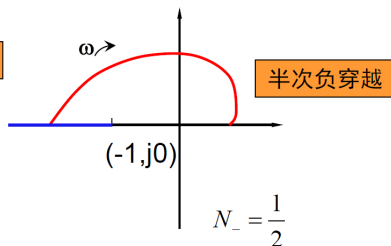
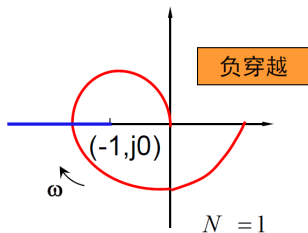
正穿越和半次正穿越

- **正穿越**: 随着 ω 的增大, 开环 Nyquist 曲线逆时针穿越实轴区间 $(-\infty, -1)$ 。
- **半次正穿越**: 逆时针方向离开 (或中止于) 实轴区间 $(-\infty, -1)$ 。



负穿越和半次负穿越

- **负穿越**: 随着 ω 的增大, 开环 Nyquist 曲线顺时针穿越实轴区间 $(-\infty, -1)$ 。
- **半次负穿越**: 顺时针方向离开 (或中止于) 实轴区间 $(-\infty, -1)$ 。



例 1

已知开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{10}{(5s+1)(10s+1)}$,

试用Nyquist判据判断系统的闭环稳定性。

【解】：开环频率特性

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10}{(5j\omega+1)(10j\omega+1)} = \frac{10[(1-50\omega)^2 - j15\omega]}{(25\omega^2+1)(100\omega^2+1)}$$

$$\omega = 0, \quad A(\omega) = 10, \quad \varphi(\omega) = 0$$

$$\omega = \infty, \quad A(\omega) = 0, \quad \varphi(\omega) = -180^\circ$$

由于 $\text{Im}[G_K(j\omega)] < 0, \forall \omega$, 故Nyquist曲线与负实轴没有交点。

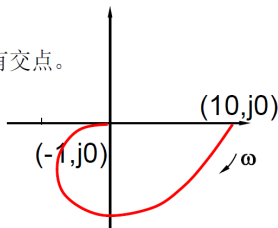
$\varphi(\omega)$ 从 0° 递减到 -180°

$$P = 0$$

$$N = N_+ - N_- = 0$$

$$Z = P - 2N = 0$$

⇒ 闭环系统稳定



例 2

已知开环传递函数为 $G_K(s) = \frac{10}{s(-0.2s^2 - 0.8s + 1)}$,

试用**Nyquist**判据判断系统的闭环稳定性。

【解】：开环频率特性

$$G_K(j\omega) = \frac{-10[0.8\omega - j(1 + 0.2\omega)^2]}{\omega(\omega^2 + 1)(0.04\omega^2 + 1)}$$

$$\omega = 0, A(\omega) = \infty, \varphi(\omega) = -270^\circ$$

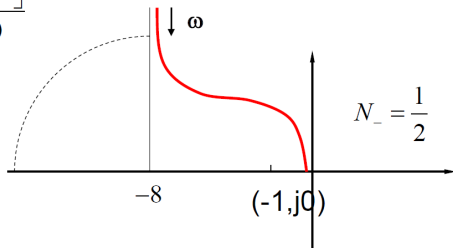
$$\omega = \infty, A(\omega) = 0, \varphi(\omega) = -270^\circ$$

$$\omega = 0, \operatorname{Re}[G_K(j\omega)] = -8$$

$$P = 1$$

$$N = N_+ - N_- = -\frac{1}{2}$$

$$Z = P - 2N = 2 \quad \Rightarrow$$



闭环系统不稳定，有两个右半平面根

Nyquist 稳定性判据

Nyquist 稳定性判据的特点：

- 开环频率响应容易通过计算或实验途径定出，所以它在应用上**非常方便和直观**；
- 能解决代数稳定性判据不能解决的比如含延迟环节的系统稳定性问题，但仍然**无法解决非线性**稳定问题；
- 能定量描述系统的稳定性裕量，即系统的相对稳定性定量指标，进一步提高和改善系统的**动态性能**。

李雅普诺夫第一法（间接法）

外部稳定性

零初始条件下，对于任意一个有界输入，若系统所产生的相应输出也是有界的，称该系统是外部稳定的。

外部稳定的充要条件：传递函数矩阵中所有元素的极点全部位于 s 的左半平面。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

李雅普诺夫第一法（间接法）

内部稳定性

线性定常系统: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $t \geq t_0$

渐近稳定



A的**所有**特征值: $\text{Re}(\lambda_k) < 0$

李雅普诺夫意义下
稳定



A的**所有**特征值: $\text{Re}(\lambda_k) \leq 0$
且 $\text{Re}(\lambda_k) = 0$ 的特征值无重根

不稳定



A有一个特征值: $\text{Re}(\lambda_k) > 0$
或 $\text{Re}(\lambda_k) = 0$ 的特征值有重根

与经典控制理论中的稳定性一致

$$(1) \quad W(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{s+2}$$

传函极点即A
的特征值

$$u(t) = \delta(t) \quad U(s) = 1 \quad C(s) = \frac{1}{s+2} \quad c(t) = e^{-2t}$$

渐近稳定

$$(2) \quad W(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{s-2}$$

$$u(t) = \delta(t) \quad U(s) = 1 \quad C(s) = \frac{1}{s-2} \quad c(t) = e^{2t}$$

不稳定

与经典控制理论中的稳定性一致

$$(3) \quad W(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$C(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} + \frac{-1/2}{s+2} \quad c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

李雅普诺夫意义下稳定

$$(4) \quad W(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{s^2(s+2)}$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{1/2}{s^2} + \frac{-1/4}{s} + \frac{1/4}{s+2} \quad c(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}$$

不稳定

示例

[例] 设系统方程为: $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u$, $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ 试确定其外部稳定性、内部稳定性。

[解]

(1) 系统的传递函数为:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -6 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{(s-2)}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{(s+3)} \end{aligned}$$

极点位于 s 左半平面, $s=2$ 的极点被对消掉了。系统是有界输入有界输出稳定的。

示例

(2) 求系统的特征方程:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

求得: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$

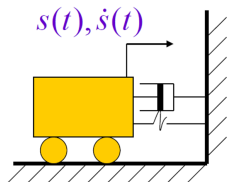
系统不是渐近稳定的。

李雅普诺夫第二法（直接法）

不必求解微分方程，直接判断系统稳定性。

- 系统运动需要能量。在非零初始状态作用下的运动过程中，若能量随时间衰减以致最终消失，则系统迟早会达到平衡状态，即系统渐近稳定。
- 反之，系统则不稳定。若能量在运动过程中不增不减，则称为李雅普诺夫意义下的稳定。

例：机械位移系统



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\mu}{m}x_2 \end{cases} \quad \boxed{m\ddot{s} = -ks - \mu\dot{s}} \quad \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系统能量 $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$

能量随时间变化率

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = kx_1\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2$$

$$= kx_1x_2 + mx_2\left(-\frac{k}{m}x_1 - \frac{\mu}{m}x_2\right)$$

$$= -\mu x_2^2 \quad x_2 \neq 0 \quad \dot{V}(\mathbf{x}) < 0$$

能量不断衰减 $\dot{V}(\mathbf{x}) \rightarrow 0$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_e$$

渐近稳定!

李雅普诺夫第二法的基本思想

- 求出系统的能量函数（李雅普诺夫函数） $V(\mathbf{x}, t)$ ——标量函数。
- 求出能量随时间变化率 $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$
- 依据系统的状态方程考察能量函数在运动过程中的变换规律。
- 利用 $V(\mathbf{x}, t)$ 和 $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 的符号特征，判断平衡状态稳定性。

标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$ 的定号性

在零平衡状态 $\mathbf{x}_e = 0$ 的邻域内

$$\begin{array}{ll} 1, & \mathbf{x} \neq 0, \quad V(\mathbf{x}) > 0 \\ & \mathbf{x} = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \Rightarrow V(\mathbf{x}) \text{ 正定}$$

$$\begin{array}{ll} 2, & \mathbf{x} \neq 0, \quad V(\mathbf{x}) < 0 \\ & \mathbf{x} = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \Rightarrow V(\mathbf{x}) \text{ 负定}$$

标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$ 的定号性

在零平衡状态 $\mathbf{x}_e = 0$ 的邻域内

$$\begin{aligned} 3, \quad & \mathbf{x} \neq 0, \quad V(\mathbf{x}) \geq 0 \\ & \mathbf{x} = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \Rightarrow V(\mathbf{x}) \text{ 半正定}$$

$$\begin{aligned} 4, \quad & \mathbf{x} \neq 0, \quad V(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \mathbf{x} = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \Rightarrow V(\mathbf{x}) \text{ 半负定}$$

$$V(\mathbf{x}) > 0$$

$$\begin{aligned} 5, \quad & \mathbf{x} \neq 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0 \\ & V(\mathbf{x}) < 0 \end{aligned} \Rightarrow V(\mathbf{x}) \text{ 不定}$$

例子

例：已知 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ ，确定标量函数的定号性。

$$(1) \quad V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^2 + x_3^2$$

解： $\mathbf{x} \neq 0, \quad V(\mathbf{x}) > 0$

$$\mathbf{x} = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0$$

$\Rightarrow V(\mathbf{x})$ 正定

$$(2) \quad V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_3^2$$

解： $\mathbf{x} = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0$

$$\therefore \mathbf{x} = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 \neq 0, x_3 = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \neq 0, \quad V(\mathbf{x}) \geq 0$$

其余 $V(\mathbf{x}) > 0$

$\Rightarrow V(\mathbf{x})$ 正半定

例子

例：已知 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ ，确定标量函数的定号性。

$$(3) \quad V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - (x_1 + 2x_2 + x_3)^2$$

$$\text{解：} \quad \mathbf{x} = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0 \qquad \therefore \mathbf{x} = 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0$$

$$x_1 = 0, x_3 = -2x_2 \neq 0, \quad V(\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \neq 0, \quad V(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$\text{其余 } V(\mathbf{x}) < 0 \qquad \Rightarrow V(\mathbf{x}) \text{ 负半定}$$

$$(4) \quad V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2$$

$$\text{解：} \quad x_1^2 + 2x_2^2 > x_3^2 \qquad V(\mathbf{x}) > 0 \qquad \Rightarrow V(\mathbf{x}) \text{ 不定}$$

$$x_1^2 + 2x_2^2 < x_3^2 \qquad V(\mathbf{x}) < 0$$

李雅普诺夫第二法主要定理

定理 1: (线性/非线性) 定常系统: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), t \geq 0$, 其中 $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 如果存在具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x})$, 满足:

(1) $V(\mathbf{x})$ 正定

(2) $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定

则系统原点平衡状态为 **大范围 (一致) 渐近稳定**。

李雅普诺夫第二法主要定理

定理 2: (线性/非线性) 定常系统: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), t \geq 0$, 其中 $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 如果存在具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x})$, 满足:

- (1) $V(\mathbf{x})$ 正定
- (2) $\dot{V}(\mathbf{x})$ 半负定
- (3) $\forall \mathbf{x} \in X, \dot{V}(\mathbf{x}) \neq 0$

则系统原点平衡状态为 **大范围 (一致) 渐近稳定**。

李雅普诺夫第二法主要定理

定理 3: (线性/非线性) 定常系统: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), t \geq 0$, 其中 $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 如果存在具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x})$, 满足:

(1) $V(\mathbf{x})$ 正定

(2) $\dot{V}(\mathbf{x})$ 半负定

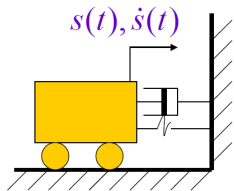
(3) $\forall \mathbf{x} \in X, \dot{V}(\mathbf{x}) \neq 0$ 能量不变!

则系统原点平衡状态为李雅普诺夫意义下的稳定。

系统保持稳定的等幅振荡, 非渐近稳定!

例：机械位移系统

例：机械位移系统



$$m\ddot{s} = -ks - \mu\dot{s}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\mu}{m}x_2 \end{cases} \quad \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{正定}$$

系统能量 $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$

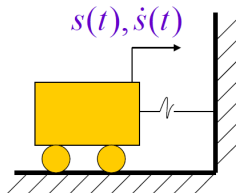
$$\dot{V}(\mathbf{x}) = kx_1\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2 = -\mu x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

负半定

$x_2 = 0 \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ 但不恒等于0 能量不断衰减
故渐近稳定

例：机械位移系统

例：机械位移系统



选 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix}$

状态方程

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

系统能量 $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$ 正定

$\dot{V}(\mathbf{x}) = kx_1\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2 = 0$ 恒等于0 能量不变

李雅普诺夫意义下的稳定