电势、静电场中的导体和介质习题课

一、电势

静电场是保守力场 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ $\qquad U_p=\int_p^{零点}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

1.求电势的三种方法：

①.对于电荷分布高度对称的带电体（电场强度易知），用电势的定义式计算

$$U_p=\int_p^{零点}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

②.对于电荷分布部分对称或一般的带电体（电场强度不易知），用电势的叠加式计算

$$U_p=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

③.典型电荷分布的电势迭加

2.电势差

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

3.电场力的功

$$A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 (U_a - U_b)$$

4.$\vec{E}$和U的微分关系

$$\vec{E} = -gradU$$

$$E_l = -\frac{\partial U}{\partial l}$$

$$= -\{\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k})$$

二、静电场中的导体

1.导体的静电平衡特点

(1). $\vec{E}_{内} = 0$　　(2). $\vec{E}_{表} \perp 表面$

(3).导体是等势体，表面是等势面

2.导体静电平衡的性质

(1). $\sum q_{内} = 0$　　(2). $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

(3).孤立导体电荷分布与表面曲率有关**-----**尖端放电现象

3.空腔导体静电平衡的性质

4.静电屏蔽

接地的空腔导体是一个很好的静电屏蔽装置。

5.计算有导体存在时,静电场分布的基本依据

(1) 导体静电平衡时的基本性质.

(2) 电荷守恒

(3) 高斯定理

6.电容　电容器

孤立导体的电容： $C=\dfrac{q}{U}$

电容器的电容： $C=\dfrac{q}{U_A-U_B}$

计算电容的基本步骤：

1.先假设两极板分别带电**+q、-q**；

2.求两极板间电场强度的分布；

3.求两极板间的电势差；

4.

$$C=\frac{q}{U_A-U_B}$$

三、静电场中的介质

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

1.介质极化的微观机理

2.$\vec{P}$和σ'的关系　　$\sigma' = P_n$

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

3.电位移　　$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$$

4. $\vec{P}$、$\vec{D}$、$\vec{E}$ 之间的关系

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

5.高斯定理　　$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_0$

高斯定理 $\rightarrow \vec{D} \xrightarrow{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}} \vec{E} \xrightarrow{\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}} \vec{P} \xrightarrow{\sigma'=P_n} \sigma'$

四、静电场的能量

1.电容器储能公式

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2$$

2.求带电体系静电能的三种方法

（1）定义　$W_e=A=\int Udq$

（2）点电荷系的静电能

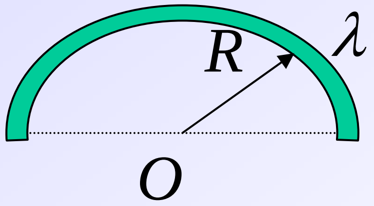
$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i \qquad W_e=\frac{1}{2}\int Udq$$

（3）电场的能量

$$w_e=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E^2}{2} \qquad W_e=\int w_e dV=\int\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E^2}{2}dV$$

【讨论题一】有一半径为**R**，电荷线密度为λ的均匀带电圆环，有一同学先求圆心处的电场强度$E_0=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$，再用

$$U_0=\int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_0^{\pi R}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\cdot\mathrm{d}l=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\cdot\pi R=\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$$



这种做法对不对？为什么？

【解答】上述做法有两个错误，一是用圆心的电场强度代替了整个电场分布，二是积分路径应是圆心到无限远处，正确的应用叠加的方法

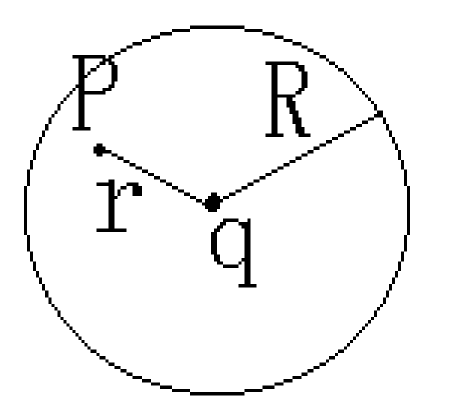
$$U_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

【讨论题二】***Q***、***R***相同的均匀带电球面和非均匀带电球面，二者球内外的电场强度和电势分布是否相同？球心处的电势是否相同？（设无限远处的电势为零）

【提示】二者球内外的电场强度和电势分布均不相同,球心处的电势相同.

【讨论题三】有一半径为**R**的带电导体薄球壳，壳中心有点电荷***q***，***已知球壳电势U***U_a,有人求出壳内任一点***P***的电势为：

$$U_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + U_a$$



这种做法对不对？为什么？

解1：设球壳带电量Q

$$U_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad U_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = U_a - \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R} \qquad U_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + U_a - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

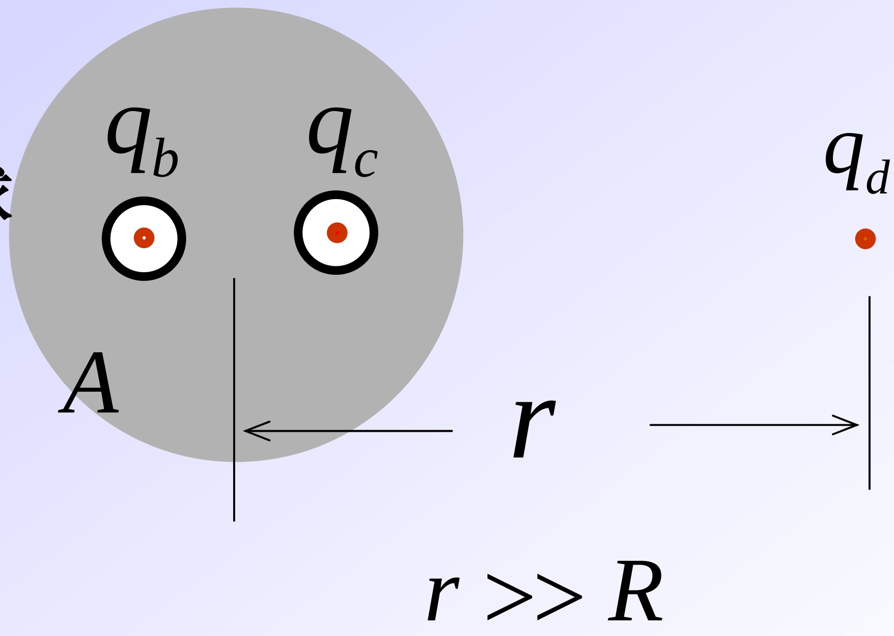
解二： $$U_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + U_a$$

解三：

$$U_P - U_a = \int_r^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

【讨论题四】半径为R的导体球A含有两个空腔，在腔中心分别有q_b、q_c，导体球本身不带电。在距 A中心 r 远处有另一电荷q_d。问q_b、q_c、q_d各受多大力？



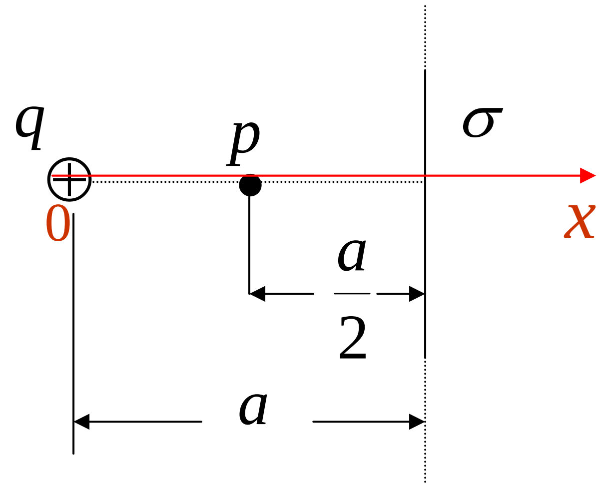
两空腔内的电场都不受外界影响；内表面感应电荷均匀分布，因此，q_b、q_c受力为零。

根据电荷守恒，导体外表面感应电量 $q_b + q_c$ 且电荷均匀分布，因此，导体外场强分布类似于点电荷的场，电荷q_d 受力为 $\dfrac{(q_b + q_c)q_d}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 这个答案是近似的。

【讨论题五】有一无限大均匀带电平面，电荷面密度为σ，在它的附近有点电荷q，如图所示。有人求出P的电势为

$$U_p=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a/2}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot a/2=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}-\frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}$$

这种做法对不对？为什么？



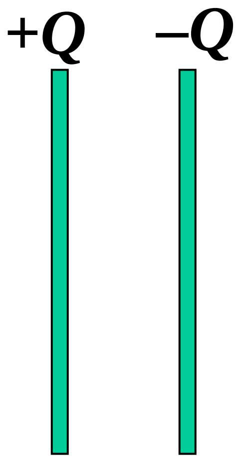
$$\text{取}x=a\text{处为}U(a)=0$$

$$E_x=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$U_P=\int_P^{\text{零点}}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{a/2}^{a}E_x dx$$

$$U_p=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}-\frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}$$

【讨论题六】如图:真空中有两个相对的平行板,相距为**d**,板面积为**s**,分别带等量异号的电荷,求两板间的作用力。



解(1):

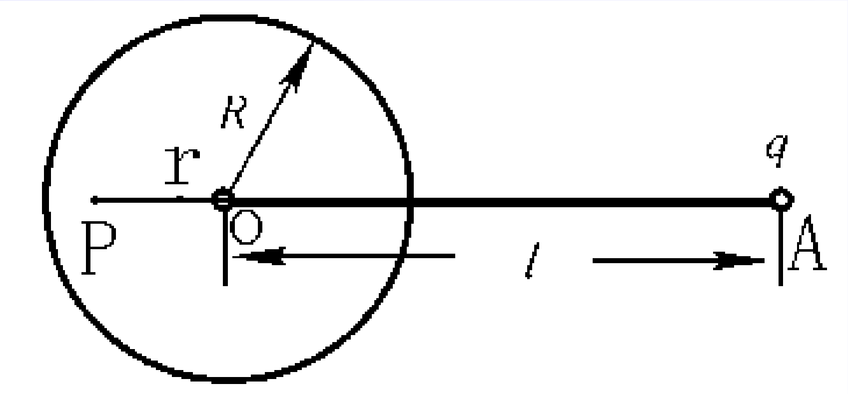
$$f=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

解(2):

$$f=\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}$$

$$f=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

【例题一】半径为R的中性金属球壳离地很远，在与球心O相距为l的A点放一带电量为q的点电荷。求：（1）金属壳内与O相距为r的P电势；（2）感应电荷在P点产生的电势。



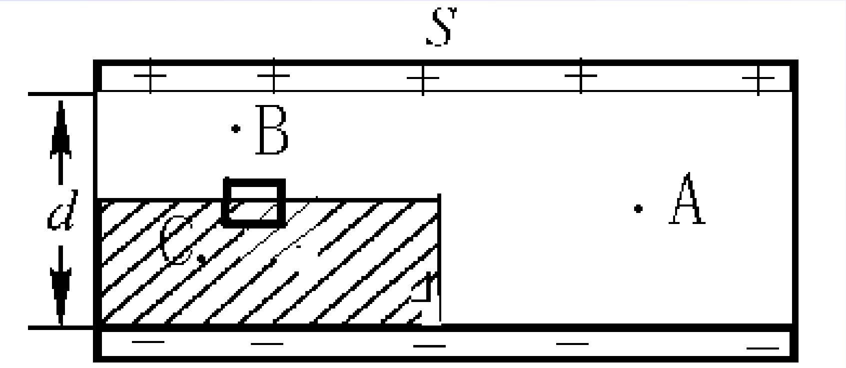
解：

（1）$$U_P = U_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

（2）$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (l+r)} + U_P'$$

$$U_P' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (l+r)}$$

【例题二】极板间距为d的平板电容器，在充电后，再插入如图所示电介质（ε_r），求如图所示A, B两处的场强之比。



解：$$E_A d = E_B \frac{d}{2} + E_C \frac{d}{2}$$

$$2E_A = E_B + E_C$$

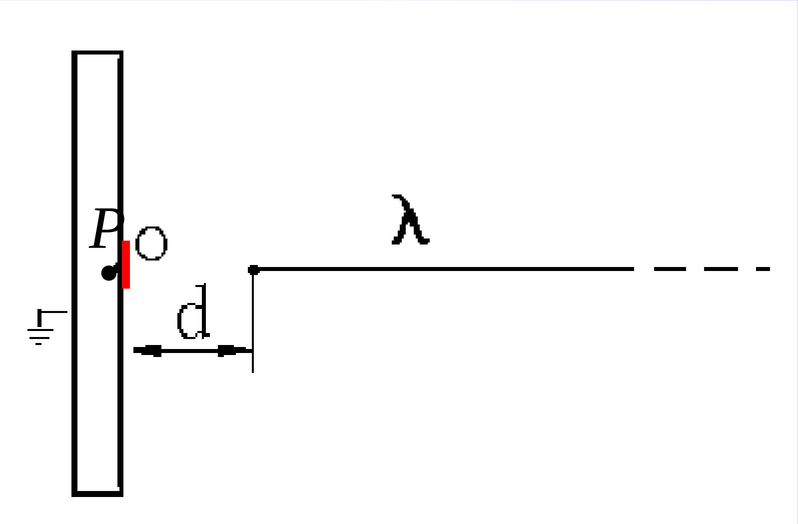
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = -D_B \Delta S + D_C \Delta S = 0$$

$$D_B = D_C$$

$$D_B = \varepsilon_0 E_B \qquad D_C = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_C \qquad E_B = \varepsilon_r E_C$$

$$2E_A = E_B + \frac{E_B}{\varepsilon_r} \qquad \frac{E_A}{E_B} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r}$$

【例题三】如图所示，一无限大接地导体板的右侧有一无限长均匀带电直导线垂直与导体板放置，导线的一端距板距离为d，已知导线上线电荷密度为λ。求0点处的感应电荷面密度。



解：在O点附近取一小面元 ΔS

考虑导体内接近△S的P点

$$\because \vec{E}_P = 0 \qquad \therefore E_{Pn} = 0$$

$$E_{Pn} = E_{\Delta S} + E_l$$

$$E_{\Delta S} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \qquad E_l = \int_d^\infty \frac{-\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon d}$$

$$\therefore -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon d} = 0 \qquad \sigma_0 = -\frac{\lambda}{2\pi d}$$

【例题四】看书P_{92}10.27题

解：　电容器的极板距离拉大一倍　$C' = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2d} = \dfrac{C}{2}$

（1） Q保持不变　$Q = CU_0$

$$A = \Delta W = \frac{Q^2}{2C'} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU_0^2$$

（2） U_0保持不变　$A \overset{?}{=} \Delta W = \dfrac{1}{2}C'U_0^2 - \dfrac{1}{2}CU_0^2 = -\dfrac{1}{4}CU_0^2$

$$A + A_{电} = \Delta W = \frac{1}{2}C'U_0^2 - \frac{1}{2}CU_0^2 = -\frac{1}{4}CU_0^2$$

$$A_{电} = U_0 \Delta Q = U_0(Q' - Q) = U_0(C'U_0 - CU_0) = -\frac{1}{2}CU_0^2$$

$$A = \frac{1}{4}CU_0^2$$

【例题五】一种同轴电缆的中心为一半径R_1的金属导线，它外围包一层ε_r的固体介质，最外面是金属圆柱面。当在此电缆上加上一电压后，介质内紧靠其内表面处的场强E_1为紧靠外表面处的场强E_2的2.5倍。若介质的击穿场强E^*，求此电缆能承受的最大电压。

解：设加上电压后，内外导线单位长度所带电量为±λ

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \qquad E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1} \qquad E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2}$$

$$\because E_1 = 2.5E_2 \qquad \therefore R_2 = 2.5R_1$$

E_1最大，U上升时，E_1处将先被击穿 $E_1 = E^* = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1}$

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 E^*$$

电缆能承受的最大电压

$$U_1 - U_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = R_1 E^* \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = R_1 E^* \ln\frac{R_2}{R_1}$$

作业

10-5

10-9

10-17

10-29