

离散数学

Discrete Mathematics

宋牟平 songmp@zju.edu.cn
玉泉校区 行政楼 325

助教：贾宁 18888911516 玉泉校区 行政楼 327

成绩构成:

✦ 上课 20

✦ 作业 30

✦ 期末考试 50

知识结构

学习内容：离散对象及相互关系的数学表述。

事物之间的关系(逻辑) → 用符号表示(数理逻辑) → 算符运算(离散数学) →
数字信号处理（相关专业技术）

人接触事物的逻辑关系
及数字符号表示

集合、关系、函数；
命题、谓词逻辑

(离散) 数字信号
及系统(eg.计算机)

图形

图（点、边、路）；
欧拉图、哈密顿图；
树、有向树；
平面图

布尔代数系统

运算、代数系统；
半群、群；格
布尔代数

第一部分 第1章 集合

1. 集合及有关概念、集合的表示法

- 集合、元素、集合的基数；
- 集合的两种表示方法——列举法和描述法；
- 两个特殊的集合——全集和空集；
- 子集、包含集和幂集；
- 分划和细分；
- 集合的最小集标准形式和最大集标准形式.

概念

2. 集合间的关系

- 集合间的包含关系 $B \subseteq A$ ；
- 集合间的真包含关系 $B \subset A$ ；
- 集合间的相等关系 $A = B$ ；
- 集合间的互补关系 $B' = A$.

概念

3. 集合的运算

- 集合的并运算 $A \cup B$;
- 集合的交运算 $A \cap B$;
- 集合的补运算——相对补运算 ($B - A$)、绝对补运算 ($A' = U - A$), A' 简称为 A 的补集;
- 集合运算的定律.

概念

4. 对集合间的关系和运算进行分析和论证的工具

- 文氏图——直观、形象,可作为描述和分析的工具;
- 成员表——根据运算的定义严格构造出来的,可作为证明的工具.

了解

第2章 关系

1. 集合的笛卡尔积

- 有序 n 元组 (a_1, a_2, \dots, a_n) ;
- 有序二元组 (a, b) , 亦称为序偶;
- n 个集合的笛卡尔积

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, \quad i=1, 2, \dots, n\};$$

- 两个集合的笛卡尔积

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

定义

2. 关系

- 由集合 A 到集合 B 的关系;
- 集合 A 上的关系;
- 恒等关系和普遍关系;
- 关系的逆关系;
- 复合关系;

概念

3. 关系的表示方法

- 集合表示法——列举法和描述法；
- 矩阵表示法——用矩阵表示由有限集 A 到有限集 B 的关系；
- 关系图表示法——用有向图表示有限集 A 上的关系；
- 次序图——用无向图来特定地表示有限集 A 上的偏序关系.

运用

4. 关系的复合运算和闭包运算

- 由给定的关系 ρ_1 和 ρ_2 , 求复合关系 $\rho_1 \cdot \rho_2$;
- 由给定的集合 A 上的关系 ρ , 求复合关系 ρ^n ;
- 由给定的集合 A 上的关系 ρ , 求传递闭包 ρ^+ 、求对称闭包 $S(\rho)$ 、求自反闭包 $r(\rho)$.

概念

5. 集合 A 上关系的性质

- 集合 A 上的自反关系；
- 集合 A 上的对称关系；
- 集合 A 上的反对称关系；
- 集合 A 上的可传递的关系。

上述这些具有特殊性质的关系的定义及判别。

理解

6. 集合 A 上两类重要的关系

- 等价关系、等价类和等价分划；
- 偏序关系、全序和良序。

理解

第3章 函数

1. 函数的概念

- 由集合 A 到集合 B 的函数;
- 函数的定义域和值域;
- 恒等函数;
- 复合函数;
- 逆函数.

要求: 函数是多对一的一种特殊关系

2. 三种特殊的函数

- 由集合 A 到集合 B 的内射;
- 由集合 A 到集合 B 的满射;
- 由集合 A 到集合 B 的双射.

3. 函数的复合运算及其性质

- 函数复合运算的可结合性.

设有函数 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C, h:C \rightarrow D$, 则有

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f;$$

- 设 I_A 和 I_B 分别是集合 A, B 上的恒等函数, 则对于任一函数 $f:A \rightarrow B$, 有

$$f \cdot I_A = I_B \cdot f = f.$$

4. 复合函数的性质

• 设有函数 $f:A \rightarrow B$ 和 $g:B \rightarrow C$, 那么

- (1) 如果 f 和 g 都是内射, 则 $g \cdot f$ 也是内射;
- (2) 如果 f 和 g 都是满射, 则 $g \cdot f$ 也是满射;
- (3) 如果 f 和 g 都是双射, 则 $g \cdot f$ 也是双射.

• 设有函数 $f:A \rightarrow B$ 和 $g:B \rightarrow C$, 那么

- (1) 如果 $g \cdot f$ 是内射, 则 f 是内射;
- (2) 如果 $g \cdot f$ 是满射, 则 g 是满射;
- (3) 如果 $g \cdot f$ 是双射, 则 f 是内射, g 是满射.

5. 逆函数的有关性质

- 只有双射函数才有逆函数;
- f 的逆函数就是 f 的逆关系;
- f 的逆函数也是一个双射, 且 f 和 f^{-1} 互为逆函数;
- 如果函数 $f:A \rightarrow B$ 是可逆的, 则

$$f^{-1} \cdot f = I_A, \quad f \cdot f^{-1} = I_B;$$

- 如果函数 $f:A \rightarrow B$ 和 $g:B \rightarrow C$ 均是可逆的, 则

$$(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}.$$

第二部分——第4章 代数系统

1. 集合 A 上的运算

- 集合 A 上的运算；
- 运算的封闭性；
- 二元运算的一些常见的性质；
- 集合中与二元运算相联系的一些特殊的元素：单位元、零元、幂等元、元素的逆元.

定义

2. 代数系统

- 代数系统；
- 整环及其性质；
- 子代数.

概念

3. 代数系统的同态与同构

- 同态；
- 满同态；
- 满同态的性质；
- 同构.

理解、运用

第5章 群

1. 半群和独异点

- 半群;
- 独异点;
- 循环独异点;
- 子半群和子独异点.

2. 群

- 群;
- 循环群;
- 元素的周期与群的阶.

3. 群的基本性质

- 群的消去律;
- 元素运算后求逆元;
- 元素的周期.

4. 子群及其陪集

- 子群及其判别;
- 子群的陪集;
- 正规子群及其判别;
- 群中与子群相关的左(右)陪集分划;
- 拉格朗日定理.

定义、概念

理解、运用

第7章 格和布尔代数

1. 格的基本概念

- 偏序集、上界、下界、最大下界、最小上界、最小元素、最大元素；
- 最大下界、最小上界若存在，则唯一；
- 最小元素、最大元素若存在，则唯一；
- 格、子格.

定义

2. 格的性质

- 格的十条基本性质；
- 格的对偶原理；
- 格中的运算 \vee 和 \wedge 满足交换律、结合律、等幂律、吸收律；
- 格的保序性.

理解、运用

3. 特殊的格

- 分配格；
- 有界格；
- 有补格；
- 有补分配格、布尔代数.

概念

4. 布尔代数的性质

- 布尔代数中运算 \vee , \wedge , $-$, 满足 十条基本性质, 其中交换律、分配律、同一律和互补律独立；
- 原子；
- 有限布尔代数 $\langle B; -, \vee, \wedge \rangle$ 同构于一集合代数 $\langle 2^M; ', \cup, \cap \rangle$.

理解、运用

5. 布尔表达式

第三部分 第8章 图论

1. 图的基本概念

- 图、 n 阶图、 (n, m) 图、无向图、有向图、伪图、多重图、简单图；
- 边关联结点、结点关联边、结点的邻接、边的邻接、孤立点、孤立边；
- 完全图、补图、结点的度数、正则图；
- 子图、真子图、生成子图、图的同构.

定义

2. 图中的边数分别与结点度数、结点个数间的关系

- 握手定理——在 (n, m) 图中, $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m$;
- n 阶完全图 K_n 中, $m = \frac{1}{2}n(n-1)$.

理解、运用

3. 路

- 开路、回路、真路、环路、~~链、闭链~~；
- 结点间的连接、连通图、连通子图、分图；
- 短程、距离(n 阶图中, $d(v_i, v_j) \leq (n-1)$)；
- ~~有向图的弱连通、单向连通、强连通.~~

概念

4. 图的矩阵表示

- 邻接矩阵 A ；
- 连接矩阵 C .

理解

6. 欧拉图和哈密顿图

- 欧拉图、欧拉回路、欧拉路；
- 欧拉定理；
- 哈密顿环、哈密顿图、哈密顿路、闭图、闭包；
- 哈密顿图的判定条件、最邻接方法.

概念、运用

7. 树

- 树、树林、树叶；
- 树的性质及判定条件；
- 生成树、最小生成树.

概念、运用

8. 有向树

- 根、分支结点、叶结点、级、子树；
- m 元树、完全 m 元树、二元树、完全二元树；
- 树的扫描.

理解、简单运用

10. 平面图

- 平面图、面、边界、有限面、无限面、面的相邻；
- 欧拉公式；
- Kuratowski 定理.

理解、简单运用

第四部分 第9章 命题逻辑

1. 命题及其联结词

- 命题、命题的真值；
- 原子命题和复合命题；
- 命题联结词：否定(\neg)、合取(\wedge)、析取(\vee)、异或(\oplus)、蕴涵(\rightarrow)、等值(\leftrightarrow)，以及分别由这些联结词构成的复合命题的真值表。

定义

2. 命题公式的有关概念

- 命题常元、命题变元、命题公式(或称公式)；
- 命题公式 F 关于命题变元 P_1, P_2, \dots, P_n 的一组真值指派，以及公式的真值表；
- 重言式(或永真式)、矛盾式(或永假式)和可满足公式；
- ~~公式的析取范式和合取范式，以及主析取范式和主合取范式。~~

概念、运用

3. 命题公式间的关系

- 命题公式间的等值关系 ($A \Leftrightarrow B$);
- 命题公式间的蕴涵关系 ($A \Rightarrow B$);
- 等值定律, 即一些基本的等值式;
- 推理定律, 即一些基本的蕴涵式.

理解、运用

4. 命题演算的推理理论

- 形式证明、有效证明、有效结论、合理证明、合理结论;
- 前提引入规则、结论引入规则、置换规则、代入规则、蕴涵证明规则.

理解、运用

编号	公 式
E_1	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
E'_1	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
E_2	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
E'_2	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
E_3	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
E'_3	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
E_4	$P \vee Q \Leftrightarrow P$
E'_4	$P \wedge 1 \Leftrightarrow P$
E_5	$P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$
E'_5	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0$
E_6	$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
E_7	$P \vee P \Leftrightarrow P$
E'_7	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
E_8	$P \vee 1 \Leftrightarrow 1$
E'_8	$P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

交换律

结合律

分配律

同一律

互否律

双重否定律

等幂律

零一律

E_9	$\left. \begin{aligned} P \vee (P \wedge Q) &\Leftrightarrow P \\ P \wedge (P \vee Q) &\Leftrightarrow P \end{aligned} \right\} \text{吸收律}$
E'_9	
E_{10}	$\left. \begin{aligned} \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \\ \neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \end{aligned} \right\} \text{德·摩根定律}$
E'_{10}	
E_{11}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
E_{12}	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
E_{13}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
E_{14}	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
E_{15}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
E_{16}	$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$
E_{17}	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

编 号	公 式
I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_7	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$
I_8	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
I_{10}	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$

第10章 谓词逻辑

1. 基本论述

- 个体、谓词、量词；
- 命题函数、个体域、全总个体域、特性谓词.

定义

2. 谓词公式的有关概念

- 原子公式(原始公式)、谓词公式；
- 量词的辖域、约束变元、自由变元；
- 换名规则、代入规则；
- 谓词公式、谓词公式的指派；
- 永真公式、永假公式、可满足公式.

理解、运用

3. 谓词公式间的关系

- 谓词公式间的等值关系 ($A \Leftrightarrow B$);
- 谓词公式间的蕴涵关系 ($A \Rightarrow B$);
- 等值定律, 即一些基本的等值式;
- 推理定律, 即一些基本的蕴涵式.

概念、理解

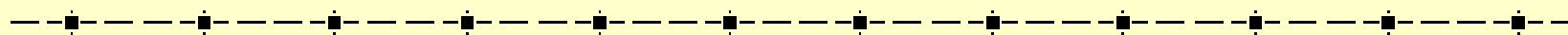
4. 谓词演算的推理理论

在谓词演算中, 命题演算的推理理论仍然成立, 另外还用到与量词有关的推理规则.

- 全称特定化规则(US);
- 存在特定化规则(ES);
- 全称一般化规则(UG);
- 存在一般化规则(EG).

理解、运用

考试题型



1. 是非判断题（10小题，20分）

e.g. 半群的每一子代数仍是半群。

2. 单选题（5小题，10分）

e.g. 命题逻辑研究的最小对象是_____，

A: 命题； B: 个体； C: 谓词； D: 个体和谓词。

2. 7道证明、绘图、推理题（70分）

题型：以作业和书本习题为类似，难度小于作业。

考试相关

考试时间/地点:

2023年06月26日(14:00-16:00)

紫金港东1B-204

答疑时间地点:

06月25日下午1: 00~5: 00

或者06月26日上午8: 00~12: 00

紫金港 西2 2楼教师休息室