离 散 数 学

Discrete Mathematics

第10章 谓词逻辑

所有的人都是会犯错误的。

张三是人，

所以张三是会犯错误的。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

第10章 谓词逻辑

在命题演算中，原子命题是基本研究单位，不能再进行分解，研究由原子命题和联结词所组成的复合命题。具有局限性，如：

所有的人都是要死的。

张三是人，

所以张三是要死的。

但用命题推理理论却得不出来。

又如，

李芳是大学生。

张岗是大学生。

在命题逻辑种只能用两个命题来表示，但这样不能表示出两个命题的联系。

在谓词逻辑中，将原子命题分解为谓词和个体；‘李芳’是个体，‘是大学生’为谓词。

10.1 谓词、个体和量词

定义 10-1 可以独立存在的物体称为**个体**（它可以是抽象的，也可以是具体的）。

在谓词逻辑中，<u>个体通常在一个命题里表示思维对象</u>。

定义 10-2 用来刻画个体的性质或关系的词称为**谓词**。刻画一个个体性质的词称为**一元谓词**；刻画n个个体之间关系的词称为**n元谓词**。

例如，“张三是人”，“是人”为一元谓词；

“张明和张亮是兄弟”，“…和…是兄弟”是二元谓词。

<u>用大写字母表示谓词</u>，<u>小写字母表示个体</u>。

例如，Q表示谓词“是大学生”，a和b分别表示“李芳”和“张岗”，则命题“李芳是大学生”和“张岗是大学生”分别可以写成Q(a)和Q(b)。

一般地，<u>一个由n个个体和n元谓词所组成的命题可表示为G(a1, a2, …, an)</u>，n个个体的排列次序有时是重要的。

以命题逻辑中引入的**联结词**，在这里仍然可以用来构成**复合命题**。

例如，用Q(a)表示“李芳是大学生”；G(b, c)表示“张琦比小红高”

则 $Q(a) \wedge G(b, c)$ 李芳是大学生 **且** 张琦比小红高

$Q(a) \vee G(b, c)$ 李芳是大学生 **或则** 张琦比小红高

$Q(a) \rightarrow G(b, c)$ **如果**李芳是大学生 **则** 张琦比小红高

$Q(a) \leftrightarrow G(b, c)$ 李芳是大学生 **当且仅当** 张琦比小红高

个体常元：具体的确定的个体。

个体变元：抽象的或泛指的（或者说取值不确定的）个体。

例如，Q(x)表示“x是大学生”。

定义10-3 由一个**谓词**和若干个**个体变元**组成的表达式称为**简单命题函数**。$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$。由一个或若干个**简单命题函数**以及**逻辑联结词**组成的命题形式称为**复合命题函数**。$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

简单命题函数和复合命题函数统称为**命题函数**。$Q(x) \wedge G(y, z)$

可将不带个体变元的谓词称为**0元谓词**。

例如，Q(a)，G(b, c)；当Q，G表示具体的性质或关系时，0元谓词为命题。

命题逻辑中的命题可表示为0元谓词，可看成特殊的谓词。

命题函数并不是一个命题，只有当其中所有的**个体变元**都分别代之以**确定的个体**才表示一个命题。

定义10-4 在**命题函数**中，**个体变元**的取值范围称为**个体域**。

实际上就是命题函数的定义域，命题函数一般需指明个体域。

例如，P(x)表示$x^2+1=0$，若x的个体域为实数集，则这是矛盾式；若x的个体域为复数集，则除了P(i)和P($-i$)是真值为真的命题外，其余情形均为真值为假的命题。

谓词也有谓词常元和谓词变元：

谓词常元——有确定意义的谓词；

谓词变元——未赋予确定意义的谓词。在下面的讨论中一般是谓词常元。

量词：在命题里表示数量的词。有**全称量词**、**存在量词**和**存在唯一量词**。

全称量词——表示对所有个体，用符号“$\forall x$”表示，用来表示“所有的”“对任一个”“凡是”“一切”；

例如，B(x)：x是圆的。

$\forall x$ B(x) （个体域为球的集合）

存在量词——表示对某些个体，用符号“$\exists x$”表示，用来表示“有某一个”“至少存在一个”“某些”；

例如，S(x)：x是红的。

$\exists x$ S(x)（个体域为苹果的集合）

存在唯一量词——表示对唯一个体，用符号“$\exists! x$”表示，用来表示“存在着唯一的一个”“恰有一个”；

例如，P(x)：x是素数；T(x)：x是偶数

$\exists! x\,(P(x) \land T(x))$ （个体域为整数集合）

含有量词的命题表达式的含义和真值与个体域的指定有关。

定义10-5 所有的个体聚集在一起所构成的集合，称为**全总个体域**。实际上就是一切事物构成的集合。

在下面的讨论中，均使用全总个体域。

而对于个体变化的真正取值范围，用**特性谓词**加以限制：

对于全称量词，特性谓词常作为蕴含的前件； $\forall x(\mathbf{A(x)} \rightarrow B(x))$

对于存在量词，此特性谓词常作为合取项。 $\exists x\ (\mathbf{A(x)} \wedge B(x))$

例如：(1) 人总要犯错误的。(2) 有的人用左手写字。

特性谓词M(x)：x是人；

F(x)：x犯错误；G(x)：x用左手写字。

则： (1) $\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$ (2) $\exists x\ (M(x) \wedge G(x))$

10.2 谓词逻辑公式及解释

为在谓词逻辑（也称一阶逻辑）中进行演算和推理，还必须给出谓词逻辑中公式的抽象定义及解释。为此，首先给出一阶语言的概念：用于一阶逻辑的形式语言。

定义10-6 **一阶语言F**的字母表定义如下：

(1) **个体变元**：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, \ldots, i\geq 1$.

(2) **个体常元**：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, \ldots, i\geq 1$.

(3) **函数**符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i\geq 1$.

(4) **谓词**符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i\geq 1$.

(5) **量词**符号： $\forall$ ， $\exists$ ，$\exists!$

(6) **连接词**符号： $\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$

(7) **逗号和圆括号**。，()

一个符号化的命题是由这些符号所组成的表达式，

但并不是任意一个由此类符号组成的表达式就是命题。

定义10-7 F的项的定义如下：

(1) 任何一个**个体变元**或**常元**是项.

(2) 若f是任意的**n元函数**，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的n个项，则$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是项。

(3) 所有的项都是有限次使用(1)(2)得到的。

例如，x，a，b，f(x, a), f(g(a, b), h(x))都是项。

其中，f，g是二元函数，h是一元函数；而h(x, a)不是二元函数。

定义10-8 设P是F的任意n元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是F的任意n个项，则$P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式，也称为谓词演算中的原子谓词公式。

一个命题或一个命题变元也称为谓词演算中的原子谓词公式。也就是说，原子谓词公式是不包含联结词和量词的命题函数。

n=0时，$P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$也称为原子命题P.

谓词公式（合式公式）的递归定义：

定义10-9

(1) 每个**原子谓词公式**都是谓词公式.

(2) 如果A是谓词公式，则$\neg$**A**也是谓词公式。

(3) 如果A和B是谓词公式，则**$(A \vee B)$**，**$(A \wedge B)$**，**$(A \rightarrow B)$**，**$(A \leftrightarrow B)$**也是谓词公式 。

(4) 如果A是谓词公式，x是A中的个体变元，则$\forall$**xA**和 $\exists$**xA**也是谓词。

(5) 只有由使用上述四条规则有限次而得到的才是**谓词公式**。

个体变元有自由变元和约束变元之分。

自由变元：**没有确定值的个体变元；**

约束变元：**被量词所约束的个体变元。**

例如，“x是整数”是一命题函数。

“x > y”也不是命题，而是一个命题函数。

$\forall$ x (如果x是苹果，则x是红的)

$\exists$ x (x是偶数 $\wedge$ x>101)

定义10-10 在谓词公式$\forall$xA(x)和$\exists$xA(x)中，x称为**量词的指导变元（作用元）**，而公式A(x)称为**量词的辖域（作用域）**。在$\forall$x和$\exists$x的辖域中，x的所有出现都称为**约束出现**，且x称为约束变元，A(x)中不是约束出现的其他变元的出现均称为**自由出现**，且称x为自由变元。

对于约束变元改名，须符合

换名规则：

(1) 约束变元换名时，该变元在量词及其辖域中的所有出现均须同时更改，公式的其余部分不变； e.g. $\forall x(x>y \land x<z) \lor A \rightarrow \forall m(m>y \land m<z) \lor A$

(2) 换名时一定要更改为该量词辖域中没有出现过的符号。最好是公式中未出现过的符号。

对于自由变元，

代入规则:

(1) 对于谓词公式中的自由变元，可以代入，代入时须对该自由变元的所有出现同时进行代入；

(2) 代入时所选用的变元符号与原公式中所有变元的符号不能相同。

e.g. $(x>y \land x<z) \lor A \quad \rightarrow \quad (m>y \land m<z) \lor A \qquad (A>y \land A<z) \lor A$ ×

在谓词公式中，如果没有自由变元出现，则该公式就成为一个命题。

定义10-11 设A是任意的公式，若A中不含自由变元，则A为**闭式**。

10.3 谓词演算的永真公式

定义10-13： 设A为一公式，若A在任何解释下的值总为真，则称A为**永真公式**（简称**永真式**）；若A在任何解释下的值总为假，则称A为**矛盾式（永假公式）**；如果至少存在一个解释使A的值为真，则称A为**可满足的公式**（简称**可满足式**）。

定义10-14 若$\mathbf{A(P_1, P_2, \ldots, P_n)}$是含命题变元$(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的命题公式， $\mathbf{B(M_1, M_2, \ldots, M_n)}$是以一阶公式$M_1, M_2, \ldots, M_n$分别代替$P_1, P_2, \ldots, P_n$在A中的所有出现后得到的谓词公式，则称B是A的一个代换实例。

定理10-2 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式。

定义10-15 设A和B是公式，若$\mathbf{A \leftrightarrow B \Leftrightarrow 1}$，则称A与B等值，记作$\mathbf{A \Leftrightarrow B}$， $A \Leftrightarrow B$称为等值（关系）式。

定义10-6 对于公式A和B，若$\mathbf{A \rightarrow B \Leftrightarrow 1}$，则称公式A蕴含公式B，记作**A=>B**， A=>B称为蕴含（关系）式。

当个体域是有限集合的时候，原则上来说，可以用真值表的方法来验证一个公式是否为永真公式，或者验证两个公式是否等值。

例如，设个体域 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则包含有全称量词的谓词公式 $\forall xA(x)$ 表示 a_1 有性质 A，a_2 有性质 A，…，a_n 有性质 A。因此

$$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n).$$

因为 $A(a_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 中都没有个体变元，也没有量词，所以上一合取式实际上是命题演算中的命题公式。

包含有存在量词的谓词公式 $\exists xA(x)$ 表示 a_1 有性质 A，或者 a_2 有性质 A，…，或者 a_n 有性质 A。因此

$$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\cdots\vee A(a_n).$$

同样地，这一析取式也是命题演算中的命题公式。

命题逻辑中的重言式的代换实例都是谓词逻辑中的永真公式，因此命题逻辑中的等值式和蕴含式，也是谓词逻辑的。

例如，在 $P\vee\neg P$ 和 $(P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$ 中，若用 $\forall xP(x)$ 代替 P，用 $\exists xQ(x)$ 代替 Q，就得到永真公式

$$\forall xP(x)\vee\neg\forall xP(x),$$

$$(\forall xP(x)\to\exists xQ(x))\leftrightarrow(\neg\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)).$$

若将每一命题变元分别代换为不包含联结词的原子谓词公式，则又可得到谓词演算中的一类永真公式。例如

$$(A(x)\to B(x,y))\leftrightarrow(\neg A(x)\vee B(x,y)),$$

$$(A(x)\vee B(x,y))\leftrightarrow(B(x,y)\vee A(x)),$$

$$\neg(\neg C(x,y))\leftrightarrow C(x,y).$$

公式中出现的全称量词和存在量词，可相互转换。

$$\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$
$$\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

量词转换律

还有一些常用的等价和蕴含关系式。

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$
$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

量词分配律

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$
$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

量词分配蕴含律

$$\forall x(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee \forall x B(x)$$
$$\exists x(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge \exists x B(x)$$
$$\forall x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B)$$
$$\exists x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B)$$
$$A \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \forall x(A \rightarrow B(x))$$
$$A \rightarrow \exists x B(x) \Leftrightarrow \exists x(A \rightarrow B(x))$$

量词辖域的扩张

和收缩律

定义10-17： 设A是不含联结词“→”和“↔”的谓词公式，则在其中以联结词∧、∨分别代换∨、∧，以量词∃、∀分别代换∀、∃，以常量0、1分别代换1、0后所得到的公式称为A的对偶公式，记作A^D。

定理10-3（对偶定理） 设A、B是两个不含联结词“→”和“↔”的谓词公式，若$A \Leftrightarrow B$，则$A^D \Leftrightarrow B^D$。

10.5 谓词演算的推理理论

利用谓词公式间的各种**等值关系和蕴含关系**，通过一些**推理规则**，从一些谓词公式推出另一些谓词公式，这就是**谓词演算中的推理。**

要进行正确的推理，也必须构造一个结构严谨的**形式证明**，依据一些相应的推理规则。命题演算中的推理规则，都可应用于谓词演算的推理。

还有与量词相关的推理规则：

1. **US**（**全称特定化规则**）

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

这里自由变元y也可写成个体常元c

2. **ES**（**存在特定化规则**）

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$$

但是，公式中有其他自由变元出现，且x是随其他自由个体变元的值而变，那么就不存在唯一的c使得A(c)对自由变元的任意值都是成立的，不能应用ES。

例如，∃ x (x = y)，x、y的个体域是实数。

3. UG（全称一般化规则）

$$A(x) \Rightarrow \forall y A(y)$$

这里要求x必须是自由变元，并且y不出现在A(x)中。

2. EG（存在一般化规则）

$$A(c) \Rightarrow \exists y A(y)$$

这里要求y不出现在A(c)中。

例 1 证明 $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge P(c) \Rightarrow Q(c)$

证明

(1)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	前提
(2)	$P(c) \to Q(c)$	(1)，US
(3)	$P(c)$	前提
(4)	$Q(c)$	(2)，(3)；I_{11}

这就是逻辑中的“三段论方法”。例如，“所有的人都是要死的，张三是人，所以张三是要死的”。

例 2 证明 $\exists x(P(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

证明

(1)	$\exists x(P(x)\wedge Q(x))$	前提
(2)	$P(c)\wedge Q(c)$	(1)， ES
(3)	$P(c)$	(2)； I_1
(4)	$Q(c)$	(2)； I_2
(5)	$\exists x P(x)$	(3)； EG
(6)	$\exists x Q(x)$	(4)； EG
(7)	$\exists x P(x)\wedge \exists x Q(x)$	(5)，(6)，I_9

在使用US、ES、UG、EG这四条规则时，要注意严格按照它们的规定去使用，并且，从整体上考虑个体变元和常元符号的选择，

尤其对EG和ES规则的应用，要

避免选择已在前面公式中出现过的符号进行取代。

例如，指出下面推理的错误之处：

例如　要求证明 $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

我们作如下推导：

(1)	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	前提
(2)	$\exists x P(x)$	(1)；I_1
(3)	$\exists x Q(x)$	(1)，I_2
(4)	$P(c)$	(2)，ES
(5)	$Q(c)$	(3)，ES
(6)	$P(c) \wedge Q(c)$	(4)，(5)；I_9
(7)	$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	(6)；EG

例 3　证明 $\forall x(P(x)\vee Q(x))$、$\forall x\neg P(x)\Rightarrow\exists xQ(x)$

证明　用反证法，假设 $\neg\exists xQ(x)$ 成立。

(1)	$\forall x\neg P(x)$	前提
(2)	$\neg P(y)$	(1)；US
(3)	$\neg\exists xQ(x)$	假设
(4)	$\forall x\neg Q(x)$	(3)；E_{20}
(5)	$\neg Q(y)$	(4)；US
(6)	$\neg P(y)\wedge\neg Q(y)$	(2)，(5)；I_9
(7)	$\neg(P(y)\vee Q(y))$	(6)；E_{10}
(8)	$\forall x(P(x)\vee Q(x))$	前提
(9)	$P(y)\vee Q(y)$	(8)；US
(10)	$(P(y)\vee Q(y))\wedge\neg(P(y)\vee Q(y))$	(7)，(9)；I_9

因为 $(P(y)\vee Q(y))\wedge\neg(P(y)\vee Q(y))$ 是永假公式，所以

$$\forall x(P(x)\vee Q(x))、\forall x\neg P(x)\Rightarrow\exists xQ(x)。$$

作 业

5(1)(2), 9(2)(3), 10(1)(4), 14(1), 15(1)(3), 16(1)

内容提要

1. 基本论述

- 个体、谓词、量词；
- 命题函数、个体域、全总个体域、特性谓词.

2. 谓词公式的有关概念

- 原子公式(原始公式)、谓词公式；
- 量词的辖域、约束变元、自由变元；
- 换名规则、代入规则；
- 谓词公式、谓词公式的指派；
- 永真公式、永假公式、可满足公式.

3. 谓词公式间的关系

- 谓词公式间的等值关系($A \Leftrightarrow B$);
- 谓词公式间的蕴涵关系($A \Rightarrow B$);
- 等值定律,即一些基本的等值式;
- 推理定律,即一些基本的蕴涵式.

4. 谓词演算的推理理论

在谓词演算中,命题演算的推理理论仍然成立,另外还用到与量词有关的推理规则.

- 全称特定化规则(US);
- 存在特定化规则(ES);
- 全称一般化规则(UG);
- 存在一般化规则(EG).

$E_{18}\quad \neg(\forall x A(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x))$；
$E_{19}\quad \neg(\exists x A(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x))$；
量词转换律

$E_{20}\quad \forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$；
$E_{21}\quad \forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$；
$E_{22}\quad \exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$；
$E_{23}\quad \exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$；
量词辖域的扩张与收缩律

$E_{24}\quad \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$；
$E_{25}\quad \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$；
量词分配律

$E_{26}\quad \exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$；
$E_{27}\quad \forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$；
$E_{28}\quad \exists x(A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \rightarrow \exists x B(x)$；
$E_{29}\quad \forall x(A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \rightarrow \forall x B(x)$；
$E_{30}\quad \exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$.

以上各式中的 B 表示任意一个不含有约束变元 x 的公式.

多个量词连续出现，它们之间无括号分隔时，后面的量词在前面量词的辖域之中，且量词对变元的约束与量词的次序有关，一般不能随意调动，但也有例外，两个量词间的排列次序有如下常用公式：

E_{31} $\forall x\,\forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y\,\forall x A(x,y)$；

E_{32} $\exists x\,\exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y\,\exists x A(x,y)$；

I_{18} $\forall x\,\forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y\,\forall x A(x,y)$；

I_{19} $\forall x\,\exists y A(x,y) \Rightarrow \exists y\,\exists x A(x,y)$；

I_{20} $\exists y\,\forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x\,\exists y A(x,y)$.

注意 由 E_{31} 和 E_{32} 知相同量词的次序可以任意调动.

例题讲解

例 10-1 用个体、谓词表示下列命题：

(1) 武汉位于重庆与上海之间；

(2) 如果王英坐在李红的后面，则王英比李红高.

解 (1) 个体 a,b,c 分别表示武汉、重庆和上海，谓词 $P(x,y,z)$ 表示 x 位于 y 与 z 之间，则命题(1)可表示为 $P(a,b,c)$.

(2) 令 a：王英；b：李红；$P(x,y)$：x 坐在 y 的后面；$G(x,y)$：x 比 y 高. 于是(2)可表示为 $P(a,b) \rightarrow G(a,b)$.

例 10-2 将下列命题符号化：

(1) 每个母亲都爱自己的孩子；

(2) 有某些实数是有理数；

(3) 对任何整数 x,y，若 $xy=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$.

解 (1) 令 $L(x)$：x 爱自己的孩子. x 的个体域为全体母亲组成的集合，于是(1)可表示为 $\forall \times L(x)$.

(2) 令 $Q(x)$：x 是有理数. x 的个体域为实数集，则(2)可表示为 $\exists x Q(x)$.

(3) 令 $Z(x)$：$x=0$；$E(x,y,z)$：$x \cdot y=z$，其中 x,y,z 的个体域为整数集. 这样(3)可表示为

$$\forall x \forall y(\exists z(E(x,y,z) \wedge Z(z)) \rightarrow (Z(x) \vee Z(y))).$$

对例 10-2 中命题使用全总个体域，引入相应的特性谓词 $M(x)$：x 是母亲；$R(x)$：x 是实数；$I(x)$：x 是整数. 于是前面的命题可表示为

(1) $\forall x(M(x) \rightarrow L(x))$；

(2) $\exists x(R(x) \wedge Q(x))$；

(3) $\forall x \forall y((I(x) \wedge I(y)) \rightarrow \exists z((I(z) \wedge E(x,y,z) \wedge Z(z)) \rightarrow (Z(x) \vee Z(y))))$.

例 10-5 设 x, y 的个体域为自然数集合，定义其中的原子公式如下：

$P(x)$：x 是素数；$E(x)$：x 是偶数；$O(x)$：x 是奇数；$D(x,y)$：x 可以整数 y.

试将下列各式译成自然语言：

（1）$\exists x(E(x) \wedge D(x,6))$；

（2）$\forall x(O(x) \rightarrow \forall y(P(x) \rightarrow \neg D(x,y)))$.

解 （1）有某个偶数能整除 6.

（2）任何奇数不能整除每个素数.

例 10-8　对公式 $\forall x(P(x,y) \land \exists y Q(y) \land M(x,y)) \land (\forall x R(x) \to Q(x))$ 中的约束变元进行换名，使每个变元在公式中只呈一种出现形式（即约束出现或自由出现）.

解　在该公式中，将 $P(x,y)$ 和 $M(x,y)$ 中的约束变元 x 换名为 z，$R(x)$ 中的 x 换名为 v，$Q(y)$ 中的 y 换名为 u，换名后为

$$\forall z(P(z,y) \land \exists u Q(u) \land M(z,y)) \land (\forall v R(v) \to Q(x)).$$

注意　若将公式换名为 $\forall z(P(z,y) \land \exists u Q(u) \land M(x,y)) \land (\forall v R(v) \to Q(x))$ 则是错误的，这是因为它未将 $\forall x$ 辖域 $(P(x,y) \land \exists y Q(y) \land M(x,y))$ 中 x 的所有出现同时换名.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 10-9 对公式 $(\exists y A(x,y) \to (\forall x B(x,z) \wedge C(x,y,z))) \wedge \exists x \forall z C(x,y,z)$ 中的自由变元进行代入，使每个变元在公式中只呈一种出现形式.

解 将该公式中的自由变元 x 用 t 代入，y 用 u 代入，z 用 v 代入，代入后变为

$$(\exists y A(t,y) \to (\forall x B(x,v) \wedge C(t,u,v))) \wedge \exists x \forall z C(x,u,z).$$

注意 (1) 若将公式代入成

$$(\exists y A(t,y) \to (\forall x B(x,z) \wedge C(x,u,v))) \wedge \exists x \forall z C(x,u,z)$$

则是错误的，这是因为这一代入过程未将公式中 x 和 z 的所有自由出现同时进行代入.

(2) 若将公式代入成

$$(\exists y A(t,y) \to (\forall x B(x,x) \wedge C(t,x,v))) \wedge \exists x \forall z C(x,x,z)$$

也是错误的，这是因为在代入过程中选用了公式中约束出现的变元符号，改变了原公式的含义.

例 10-14 证明下列等值式：

(1) $\forall x A(x) \wedge \forall x(\neg B(x)) \Leftrightarrow \neg \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$；

(2) $\forall x \forall y(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$.

分析 同证明命题演算中的等值式一样，证明两个公式等值时，可以从其中任一公式开始进行演算，一般从较复杂的公式开始. 另外，还可以对两个公式 F_1 和 F_2 分别进行等值演算，如果能将公式 F_1 和 F_2 都等值演算为同一公式 F_3，那么由等值关系的传递性，即可知 $F_1 \Leftrightarrow F_2$.

证 (1) 因 $\neg \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x \neg(A(x) \rightarrow B(x)) && E_{19}\\
&\Leftrightarrow \forall x \neg(\neg A(x) \vee B(x)) && E_{11}\\
&\Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge \neg B(x)) && E_{10}\\
&\Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x(\neg B(x)), && E_{24}
\end{aligned}$$

故 $\forall x A(x) \wedge \forall x(\neg B(x)) \Leftrightarrow \neg \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$.

(2) 因 $\forall x \forall y(P(x)\to Q(y))$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y)) \qquad E_{11}$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\forall y Q(y) \vee \neg P(x)) \qquad E_1, E_{21}$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x)) \vee \forall y Q(y) \qquad E_1, E_{21}$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x P(x) \vee \forall y Q(y) \qquad E_{19}$$

$$\Leftrightarrow \exists x P(x) \to \forall y Q(y), \qquad E_{11}$$

例 10-17 下列蕴涵关系是否成立？若成立，给出证明，否则给出反例.

(1) $\exists x A(x)\to B \Rightarrow \forall x A(x)\to B$；

(2) $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

解 (1) 假定后件假，即 $\forall xA(x)\to B$ 为假，则 $\forall xA(x)$ 为真，B 为假. 于是 $\exists xA(x)$ 也为真，从而 $\exists xA(x)\to B$ 为假，所以，$\exists xA(x)\to B\Rightarrow\forall xA(x)\to B$.

(2) 此蕴涵式不成立.

反例，设 x,y 的个体域均为自然数集 $\mathbf{N}$，$P(x,y)$：$x<y$. 因为对于任何 x，总有 $y=x+1$，使 $P(x,y)$ 为真，所以，$\forall x\exists yP(x,y)$ 为真. 但是在 $\mathbf{N}$ 中不存在一个 y_0，使得对任意的 x 均有 $x<y$(如 $x_1=y_0+1$，就不满足 $P(x_1,y_0)$)，从而 $\exists y\forall xP(x,y)$ 为假，因此蕴涵式不成立.

例 10-20 用形式证明的方法证明：

(1) $\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x))$；

(2) $\forall x (P(x) \to \neg Q(x)), \forall x (Q(x) \vee R(x)), \exists x \neg R(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x)$.

证 (1) 其推导过程如表 10-8 所示.

表 10-8

编号	公式	依据
(1)	$\exists x A(x) \to \forall x B(x)$	前提
(2)	$\neg \forall x (A(x) \to B(x))$	附加前提
(3)	$\exists x \neg (A(x) \to B(x))$	(2); E_{18}
(4)	$\neg (A(c) \to B(c))$	(3); ES
(5)	$A(c) \wedge \neg B(c)$	(4); E_{11}, E_{10}
(6)	$A(c)$	(5); I_1
(7)	$\exists x A(x)$	(6); EG
(8)	$\forall x B(x)$	(7), (1); I_{11}
(9)	$B(c)$	(8); US
(10)	$\neg B(c)$	(5); I_2
(11)	$B(c) \wedge \neg B(c)$	(9), (10); I_9 (矛盾)

(2) **方法一** 其推导过程如表 10-9 所示.

表 10-9

编号	公式	依据
(1)	$\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$	前提
(2)	$\neg\exists x\neg P(x)$	附加前提
(3)	$\forall xP(x)$	(1);E_{19}
(4)	$\forall x(Q(x)\vee R(x))$	前提
(5)	$\exists x\neg R(x)$	前提
(6)	$\neg R(c)$	(5);ES
(7)	$Q(c)\vee R(c)$	(4);US
(8)	$Q(c)$	(6),(7);I_{10}
(9)	$P(c)$	(3);US
(10)	$P(c)\rightarrow\neg Q(c)$	(1);US
(11)	$\neg Q(c)$	(9),(10);I_{11}
(12)	$Q(c)\wedge\neg Q(c)$	(8),(11);I_9(矛盾)

(2)

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

方法二 其推导过程如表 10-10 所示.

表 10-10

编号	公式	依据
(1)	$\forall x(Q(x)\vee R(x))$	前提
(2)	$\exists x\neg R(x)$	前提
(3)	$\neg R(c)$	(2);ES
(4)	$Q(c)\vee R(c)$	(1);US
(5)	$Q(c)$	(3),(4);I_{10}
(6)	$\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$	前提
(7)	$P(c)\rightarrow\neg Q(c)$	(6);US
(8)	$\neg P(c)$	(5),(7);I_{12}
(9)	$\exists x\neg P(x)$	(8);EG

例 10-24 下述推导是否正确，若不正确，请指出其推理过程中的错误.

(1) 其推导过程如表 10-11 所示.

因此，$\exists x(A(x)\to B(x))\Rightarrow \exists xA(x)\to \exists xB(x)$.

表 10-11

编　号	公　　式	依　　据
(1)	$\exists x(A(x)\to B(x))$	前提
(2)	$\exists xA(x)$	附加前提
(3)	$A(c)$	(2);ES
(4)	$A(c)\to B(c)$	(1);ES
(5)	$B(c)$	(3),(4);I_{11}
(6)	$\exists xB(x)$	(5);EG

(2) 其推导过程如表 10-12 所示.

表 10-12

编 号	公 式	依 据
(1)	$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$	前提
(2)	$\forall xA(x)\rightarrow \forall xB(x)$	(1); I_{17}
(3)	$A(c)\rightarrow \forall xB(x)$	(2); US
(4)	$\exists xA(x)\rightarrow \forall xB(x)$	(3); EG

因此, $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow \forall xB(x)$.

解 (1) 推理不正确.

若 x 的个体域为自然数集 $\mathbf{N}$,$A(x)$:x 是奇数;$B(x)$:$x<0$,则 $\exists x(A(x)\to B(x))$为真(如 $2\in\mathbf{N}$,$A(2)$假,$A(2)\to B(2)$为真),却推出了假命题 $\exists xA(x)\to\exists xB(x)$(其前件真,后件总假).其出错原因是在第(3)步已引入个体常元 c,而在第(4)步应用 ES 时,又引入个体常元 c,结果由真前件,推出了假命题.

(2) 推理不正确.

若 x 的个体域为实数集 $\mathbf{R}$,$A(x)$:x 是整数;$B(x)$:x 是有理数.那么,$\forall x(A(x)\to B(x))$为真,$\exists xA(x)$也为真,但 $\forall xB(x)$为假,于是 $\exists xA(x)\to\forall xB(x)$为假,即由真前件推出了假命题.其出错原因是在第(3),(4)步对部分公式错误地使用 US 和 EG.

例 10-25 证明下列各式：

(1) $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \forall x(Q(x) \to \neg R(x)) \Rightarrow \forall x R(x) \to \forall x P(x)$；

(2) $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to \exists y(R(y) \wedge S(x,y))) \Rightarrow \neg \exists y R(y) \to \neg \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

分析 由于命题演算中的推理理论在谓词演算中均成立，故此类结论为蕴涵形式表达式的形式证明，通常采用蕴涵规则，即 CP.

证　(1) 其推导过程如表 10-13 所示.

表 10-13

编号	公式	依据
(1)	$\forall x R(x)$	附加前提
(2)	$\forall x(Q(x) \to \neg R(x))$	前提
(3)	$R(c)$	(1);US
(4)	$Q(c) \to \neg R(c)$	(2);US
(5)	$\neg Q(c)$	(3),(4);I_{12}
(6)	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	前提
(7)	$P(c) \vee Q(c)$	(6);US
(8)	$P(c)$	(5),(7);I_{10}
(9)	$\forall x P(x)$	(8);UG
(10)	$\forall x R(x) \to \forall x P(x)$	(1),(9);CP

（2）**方法一**　其推导过程如表 10-14 所示.

说明　（1）不能直接对第（4）步中的公式使用 ES，因为那样是将对部分公式使用 ES.

（2）不是对任意的个体变元均能使用 UG，这里第（11）步中的 c 原本是在第（4）步用 US 得到的，即它对个体域中的每个个体均成立，所以在第（12）步可以使用 UG.

（3）若将此题的结论先作一等值变换，可使推理过程简化.

编　号	公　　式	依　　据
(1)	$\neg\exists yR(y)$	附加前提
(2)	$\forall y\neg R(y)$	(1);E_{19}
(3)	$\forall x((P(x)\wedge Q(x))\rightarrow\exists y(R(y)\wedge S(x,y)))$	前提
(4)	$(P(c)\wedge Q(c))\rightarrow\exists y(R(y)\wedge S(c,y))$	(3);US
(5)	$\neg(P(c)\wedge Q(c))\vee\exists y(R(y)\wedge S(c,y))$	(4);E_{11}
(6)	$\exists y(\neg(P(c)\wedge Q(c))\vee(R(y)\wedge S(c,y)))$	(5);E_{23}
(7)	$\neg(P(c)\wedge Q(c))\vee(R(d)\wedge S(c,d))$	(6);ES
(8)	$\neg R(d)$	(2);US
(9)	$\neg R(d)\vee\neg S(c,d)$	(8);I_3
(10)	$\neg(R(d)\wedge S(c,d))$	(9);E_{10}
(11)	$\neg(P(c)\wedge Q(c))$	(7),(10);I_{10}
(12)	$\forall x\neg(P(x)\wedge Q(x))$	(11);UG
(13)	$\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$	(12);E_{19}
(14)	$\neg\exists yR(y)\rightarrow\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$	(1),(13);CP

方法二

因
$$\neg\exists yR(y)\to\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$$
$$\Leftrightarrow\exists x(P(x)\wedge Q(x))\to\exists yR(y),$$
故原命题转化为证明
$$\forall x((P(x)\wedge Q(x))\to\exists y(R(y)\wedge S(x,y)))$$
$$\Rightarrow\exists x(P(x)\wedge Q(x))\to\exists yR(y).$$
其推导过程如表 10-15 所示.

编　号	公　　式	依　　据
(1)	$\exists x(P(x)\wedge Q(x))$	附加前提
(2)	$P(c)\wedge Q(c)$	(1);ES
(3)	$\forall x((P(x)\wedge Q(x))\to\exists y(R(y)\wedge S(x,y)))$	前提
(4)	$(P(c)\wedge Q(c))\to\exists y(R(y)\wedge S(c,y))$	(3);US
(5)	$\exists y(R(y)\wedge S(c,y))$	(2),(4);I_{11}
(6)	$\exists yR(y)\wedge\exists yS(c,y)$	(5);I_{15}
(7)	$\exists yR(y)$	(6);I_1
(8)	$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\to\exists yR(y)$	(1),(7);CP
(9)	$\neg\exists yR(y)\to\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$	(8);E_{15}

例 10-27 用构造推理过程的方法证明

$$\exists x F(x), \exists x(R(x) \wedge \neg T(x)), \forall z((F(z) \wedge \forall x \exists y Q(x,y)) \rightarrow \forall y(R(y) \rightarrow T(y))) \Rightarrow \forall y \exists x \neg Q(x,y).$$

证 其推导过程如表 10-20 所示.

编 号	公 式	依 据
(1)	$\exists x F(x)$	前提
(2)	$F(c)$	(1);ES
(3)	$\exists x(R(x) \wedge \neg T(x))$	前提
(4)	$R(d) \wedge \neg T(d)$	(3);ES
(5)	$\neg(\neg R(d) \vee T(d))$	(4);E_{10}
(6)	$\neg(R(d) \rightarrow T(d))$	(5);E_{11}
(7)	$\exists y \neg(R(y) \rightarrow T(y))$	(6);EG
(8)	$\neg \forall y(R(y) \rightarrow T(y))$	(7);E_{18}
(9)	$\forall z((F(z) \wedge \forall x \exists y Q(x,y)) \rightarrow \forall y(R(y) \rightarrow T(y)))$	前提
(10)	$(F(c) \wedge \forall x \exists y Q(x,y)) \rightarrow \forall y(R(y) \rightarrow T(y))$	(9);US

编　号	公　　式	依　　据
(1)	$\exists x F(x)$	前提
(2)	$F(c)$	(1);ES
(3)	$\exists x(R(x) \wedge \neg T(x))$	前提
(4)	$R(d) \wedge \neg T(d)$	(3);ES
(5)	$\neg(\neg R(d) \vee T(d))$	(4);E_{10}
(6)	$\neg(R(d) \rightarrow T(d))$	(5);E_{11}
(7)	$\exists y \neg(R(y) \rightarrow T(y))$	(6);EG
(8)	$\neg \forall y(R(y) \rightarrow T(y))$	(7);E_{18}
(9)	$\forall z((F(z) \wedge \forall x \exists y Q(x,y)) \rightarrow \forall y(R(y) \rightarrow T(y)))$	前提
(10)	$(F(c) \wedge \forall x \exists y Q(x,y)) \rightarrow \forall y(R(y) \rightarrow T(y))$	(9);US

(10)	$(F(c) \wedge \forall x \exists y Q(x,y)) \rightarrow \forall y(R(y) \rightarrow T(y))$	(9);US
(11)	$\neg(F(c) \wedge \forall x \exists y Q(x,y))$	(8),(10);I_{12}
(12)	$\neg F(c) \vee \neg \forall x \exists y Q(x,y)$	(11);E_{10}
(13)	$\neg \forall x \exists y Q(x,y)$	(2),(12);I_{10}
(14)	$\exists x \neg(\exists y Q(x,y))$	(13);E_{18}
(15)	$\neg \exists y Q(e,y)$	(14);ES
(16)	$\forall y \neg Q(e,y)$	(15);E_{19}
(17)	$\exists x \forall y \neg Q(x,y)$	(16);EG
(18)	$\forall y \exists x \neg Q(x,y)$	(17);I_{20}

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平