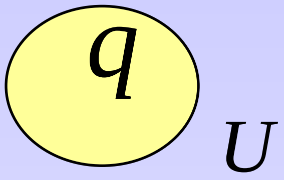
10-2　电容　电容器

一、孤立导体的电容

$$C=\frac{q}{U}$$



升高单位电压所需的电量为该导体的电容。

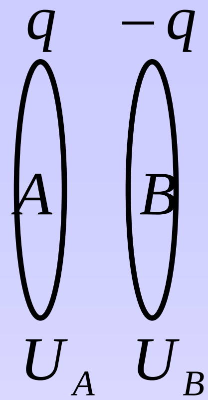
考虑半径为**R**的孤立导体球，若带电量为**q**，
则该球的电势为：

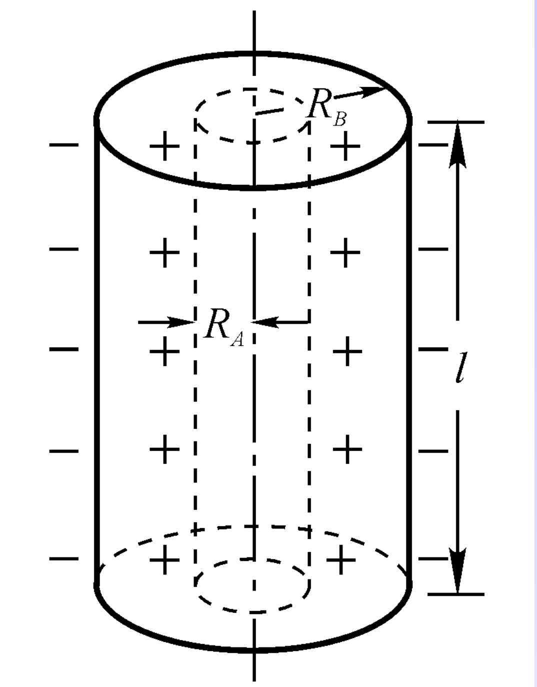
$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\qquad C=\frac{q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R$$

孤立导体的电容与导体的形状有关，
与其带电量和电位无关。

二、电容器的电容

$$C=\frac{q}{U_A-U_B}$$





圆柱形电容器:

设内外圆柱面单位长度的带电量为+λ和- λ，则两圆柱面离轴线r处的场强为:

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad l>>(R_B-R_A)$$

$$U_A-U_B=\int_{R_A}^{R_B}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

$$C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{\lambda l}{U_A-U_B}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_B}{R_A}}$$

计算电容的基本步骤：

1.先假设两极板分别带电**+q**、**-q**；

2.用高斯定理求电场强度的分布；

3.求两极板间的电势差；

4. $$C = \frac{q}{U_A - U_B}$$

有介质后电容增大 $C = \varepsilon_r C_0$

三、电容器的串联和并联

并联电容器的电容等于各个电容器电容的和。

$$C = \sum_i C_i$$

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

串联电容器总电容的倒数等于各串联电容倒数之和。

当电容器的耐压能力不被满足时，常用串并联使用来改善。如串联使用可用在稍高的电压中，从而提高耐压能力。并联使用可以提高容量。

10-3 静电场中的电介质

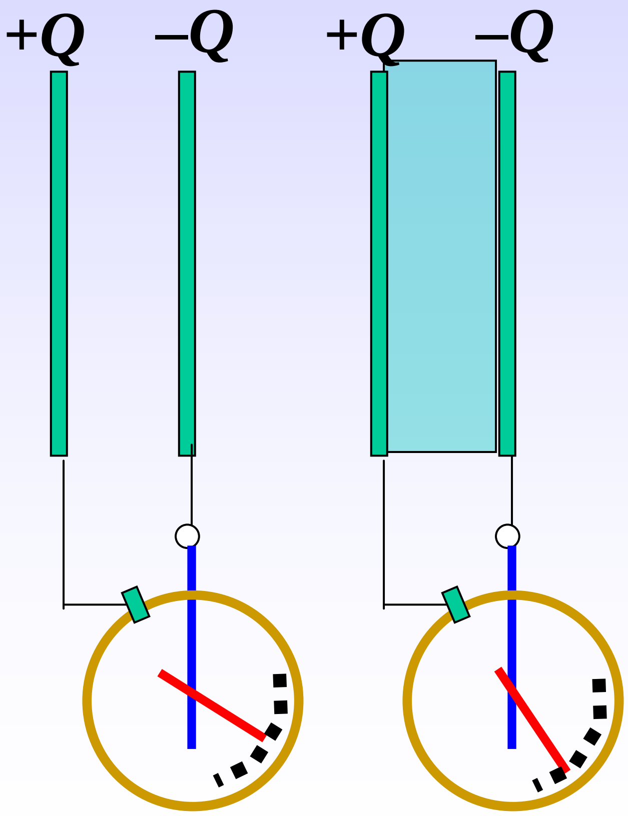
本节只限于讨论各向同性的均匀的电介质。

电介质：电介质就是通常所说的绝缘体。

特点：分子中的正负电荷束缚的很紧，电介质内几乎没有可以自由移动的电子。

在外电场中电介质要受到电场的影响，同时也影响外电场。

在以平行板电容器有电介质与无电介质时，极板上电压的变化为例说明



插入电介质前后两极板间的电压分别用V_0、V表示，它们的关系：

$$V = \frac{1}{\varepsilon_r} V_0$$

ε_r是一个大于 **1** 的常数，其大小随电介质的种类和状态的不同而不同，是电介质的特征常数称为电介质的相对介电常数

上述实验表明：插入电介质后两极板间电压减少，说明其间电场减弱了。

$$E = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0$$

电场减弱的原因可用电介质与外电场的相互影响，从微观结构上来解释。

一、电介质的极化

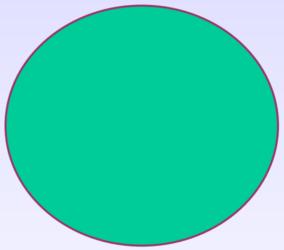
分两大类：无极分子电介质与有极分子电介质

什么叫有极分子，什么叫无极分子？

①无极分子（*Nonpolar molecule*）

在无外场作用下整个分子无电矩。

例如，CO_2 H_2 N_2 O_2 H_e

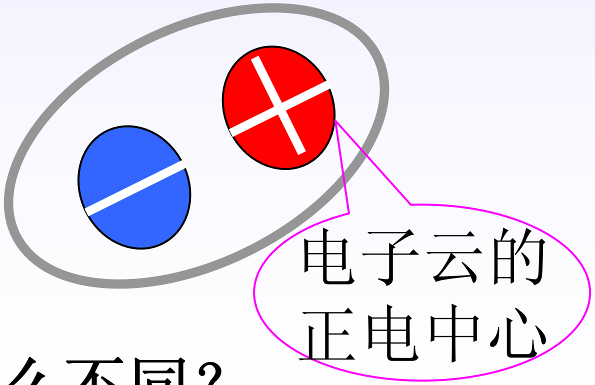


②有极分子（*Polar molecule*）

在无外场作用下存在固有电矩

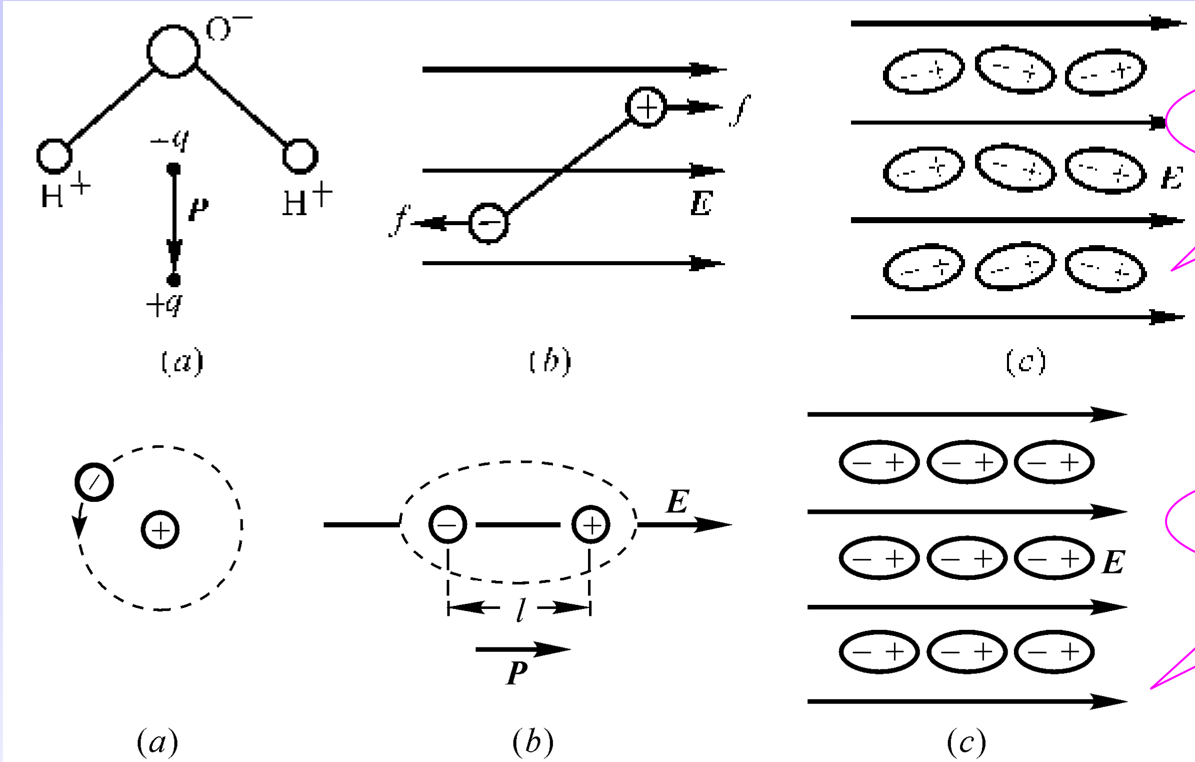
例如，H_2O Hcl CO SO_2

因无序排列对外不呈现电性



在外电场中，两种电介质的极化机理有什么不同？

有极分子



取向极化

无极分子

位移极化

介质表面要出现电荷，这种电荷不能离开电介质到其它带电体，也不能在电介质内部自由移动。我们称它为束缚电荷或极化电荷。

在外电场中，出现束缚电荷的现象叫做电介质的极化。

$$\sum \vec{p}_i \neq 0 \qquad \text{极化电荷面密度} \quad \sigma' \neq 0$$

二、电极化强度矢量

定义： $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$

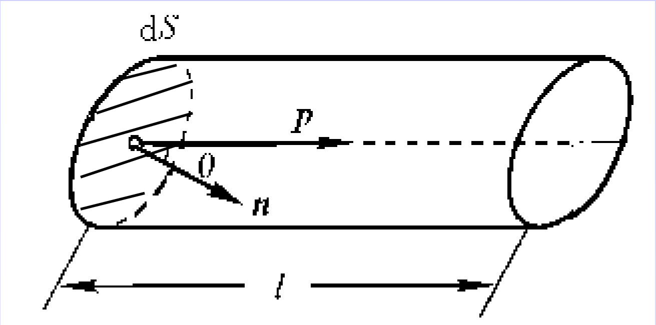
实验证明：在各向同性的电介质中

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

χ_e 称为电极化率或极化率 *polarizability*
在各向同性线性电介质中它是一个纯数。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

三、电极化强度矢量和极化电荷的关系



$$q\vec{l} = \vec{p} \qquad \vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} = n\vec{p}$$

$$\Delta V = d\vec{S} \cdot \vec{l}$$

n —单位体积内的粒子数

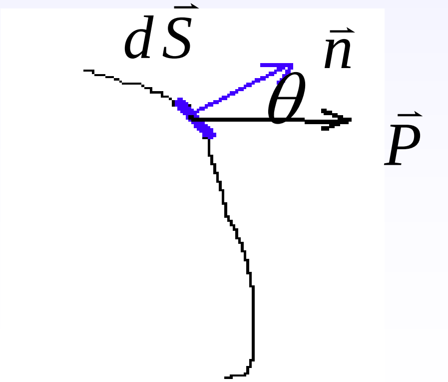
△V内束缚电荷总量： $dq' = nq \cdot \Delta V = nq\vec{l} \cdot d\vec{s} = \vec{P} \cdot d\vec{s}$

任取一闭合面： $\oint\!\!\oint \vec{P} \cdot d\vec{s} = -\sum_{s内} q'$

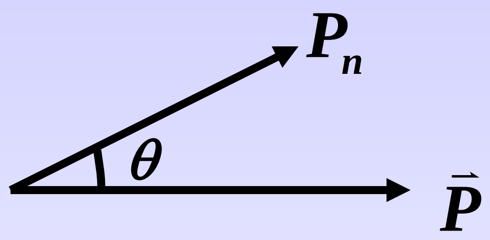
在任一曲面内极化电荷的负值等于极化强度的通量。

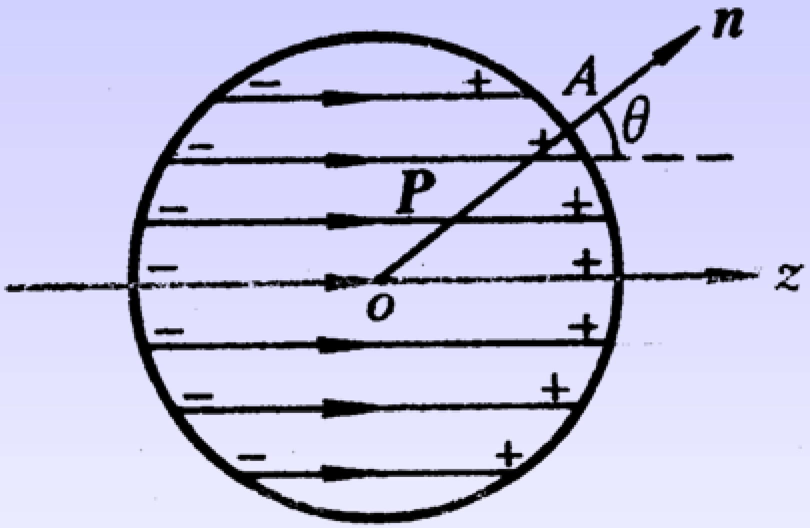
在介质表面处： $dq' = \vec{P} \cdot d\vec{S} = PdS\cos\theta$

$$\sigma' = \frac{dq'}{ds} = P\cos\theta = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n$$



例：一均匀极化的电介质球，已知极化强度为**P**(如图)，求表面上的极化 电荷密度分布。



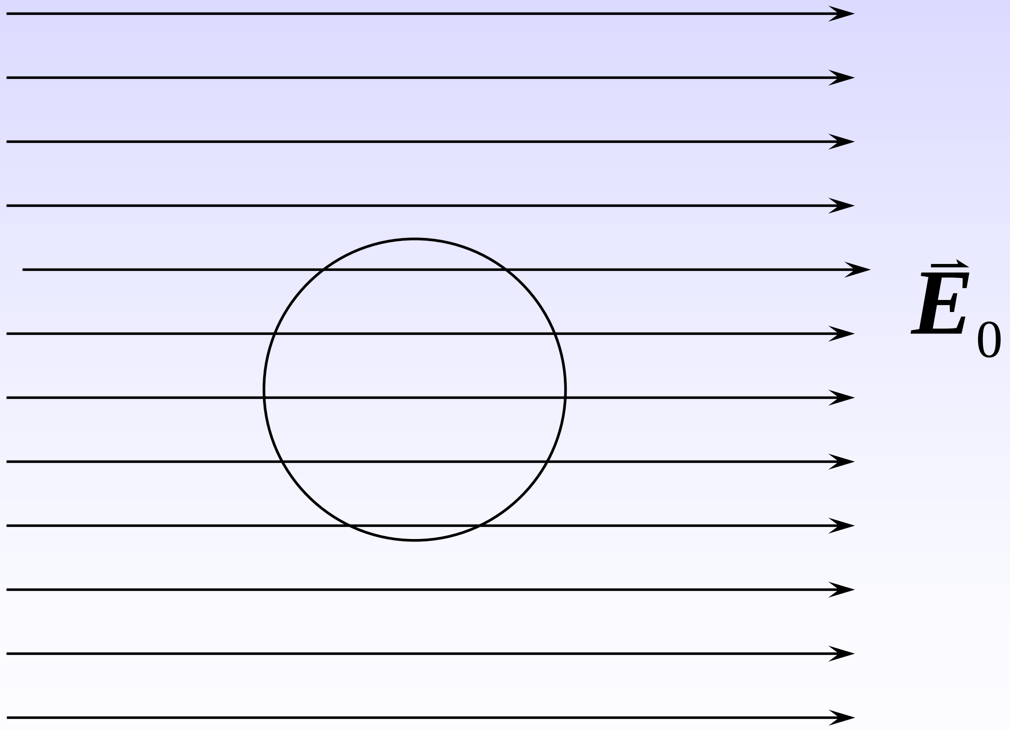


$$\sigma' = P_n = P\cos\theta$$

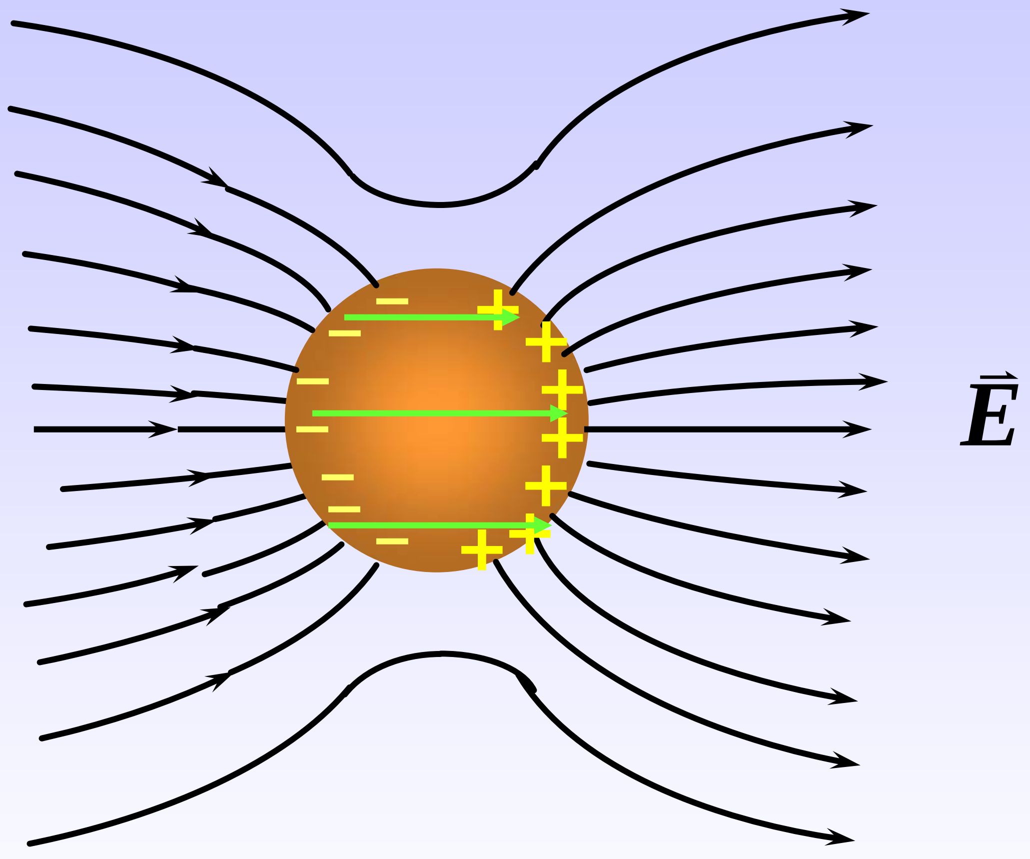
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \sigma' > 0 \qquad\qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \qquad \sigma' < 0$$

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \sigma' = 0$$

介质球放入前电场为一均匀场

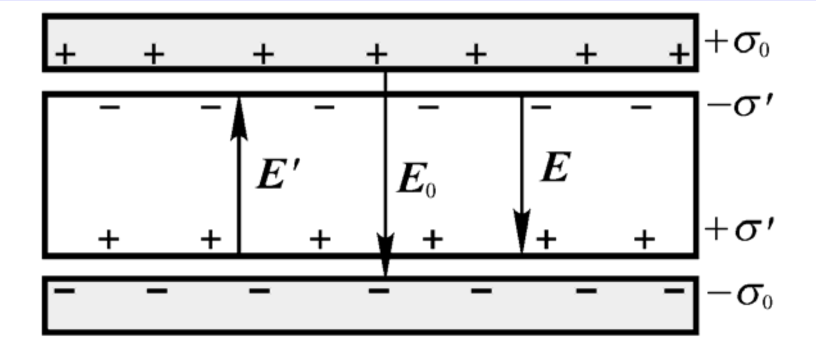


介质球放入后电力线发生弯曲



四、电介质中的电场强度

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$



E和E_0的关系：$E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$ $\quad \sigma' = P \quad P = \varepsilon_0 \chi_e E$

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi_e E$$

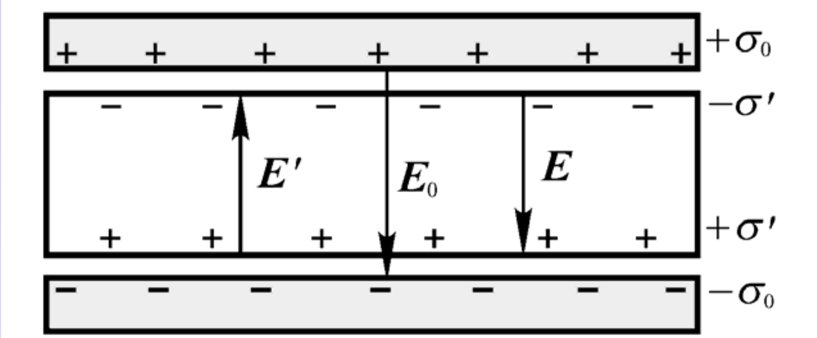
$$E = \frac{E_0}{1+\chi_e} \qquad 1 + \chi_e = \varepsilon_r$$

则 $\quad E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$

当均匀电介质充满电场的全部空间时，

或当均匀电介质的表面正好是等势面时成立

有介质时的电容:

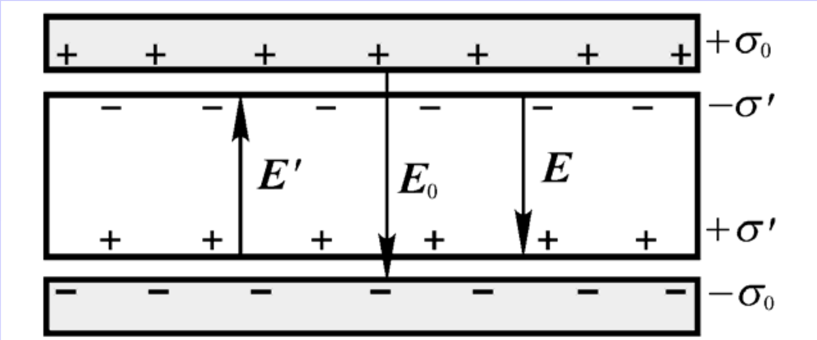


$$C=\frac{Q}{U_1-U_2} \qquad U_1-U_2=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=E\cdot d$$

$$Q=\sigma_0 S \qquad E=\frac{E_0}{\varepsilon_r}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \qquad C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d} \qquad \therefore C=\varepsilon_r C_0$$

电介质的绝缘性能遭到破坏，称为击穿 (*breakdown*)，

所能承受的不被击穿的最大场强叫做击穿场强(*breakdown field strength*)，或介电强度(*dielectric strength*)。



σ'和σ_0的关系:

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

$$\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0$$

$$\because \varepsilon_r > 1 \qquad \therefore \sigma' < \sigma_0$$

五、电位移矢量　电介质中的高斯定理

当电场中有电介质时，静电场中的两个基本定理是否仍然成立？

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0} = \frac{\sum q_0 + \sum q'}{\varepsilon_0} \qquad \oiint \vec{P}\cdot d\vec{s} = -\sum_{s内} q'$$

$$\oiint (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{s} = \sum q_0$$

定义物理量　$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$　电位移

$$\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_0$$

物理意义

通过任一闭合曲面的电位移通量，等于该曲面内所包围的自由电荷的代数和。

- $\vec{P}$、$\vec{D}$、$\vec{E}$ 之间的关系：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

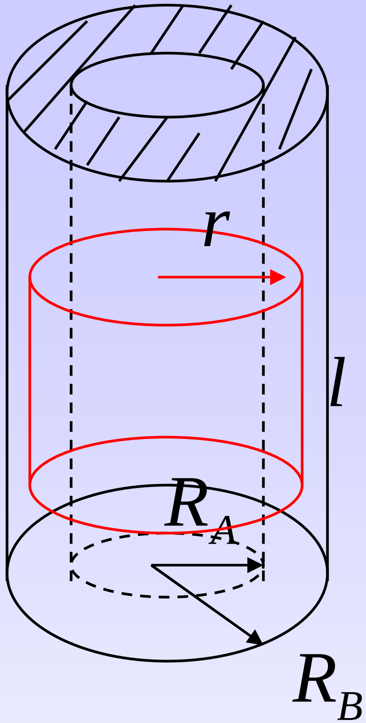
$$\vec{D} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \vec{E} \qquad \varepsilon_r = (1 + \chi_e)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \qquad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

ε 称为介电常量*dielectric constant*。

$$\text{高斯定理} \rightarrow \vec{D} \xrightarrow{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}} \vec{E} \xrightarrow{\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}} \vec{P} \xrightarrow{\sigma'=P_n} \sigma'$$

例：在半径为R_A 的长直导线外，套有半径为R_B 的薄园筒。导线和园筒的电荷线密度分别为λ和$-\lambda$，中间充满相对介电常数 ε_r 的电介质。



求：（1）在介质中的$\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$

（2）介质表面的σ'

解：取如图所示的高斯面

$$\because \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0 \qquad D\cdot 2\pi r l = \lambda l \qquad D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E = \frac{(\varepsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\varepsilon_r r}$$

$$\sigma'_{内} = P_n = -P\big|_{r=R_A} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_A}$$

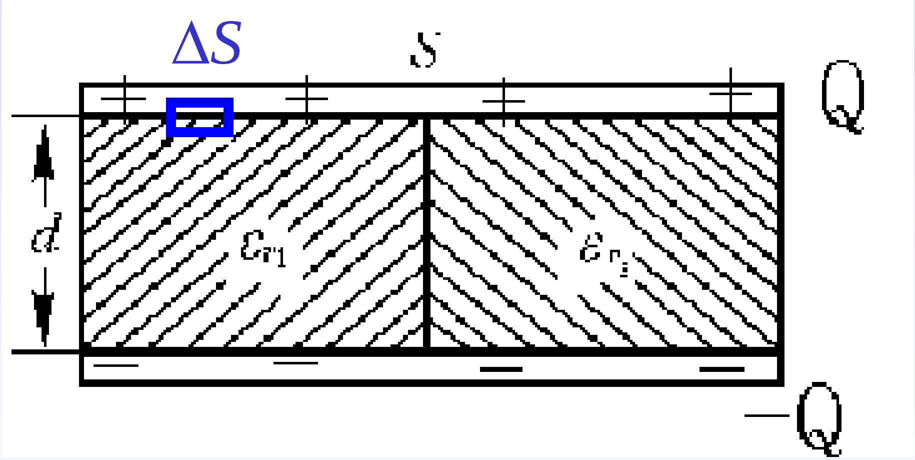
$$\sigma'_{外} = P_n = P\big|_{r=R_B} = \frac{(\varepsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_B}$$

例：一个极板面积S，极板间距d的平板电容器，带电量为Q。在两极板左右各半地充有相对介电常数分别为ε_{r1}，ε_{r2}两种各向同性介质。

求：（1）电容器左右极板上自由电荷面密度σ_1，σ_2

（2）在介质中的 $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}, \sigma'$

(3) 该电容器的电容



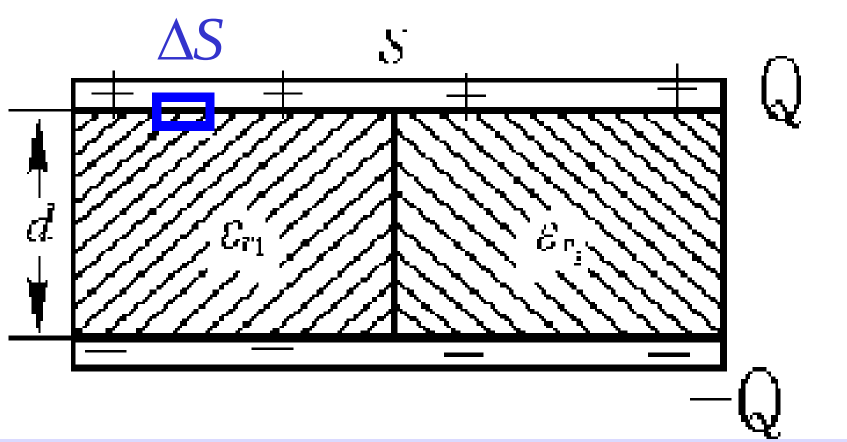
解（1） $$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$$

$$\sigma_1\frac{S}{2} + \sigma_2\frac{S}{2} = Q$$

$$\sigma_1 = \frac{2\varepsilon_{r1}Q}{S(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})} \qquad \sigma_2 = \frac{2\varepsilon_{r2}Q}{S(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})}$$

（2） $$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = D_1\Delta S = \sigma_1\Delta S$$

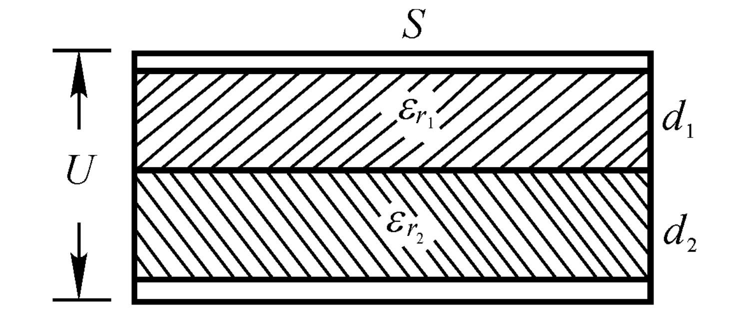
$$D_1=\sigma_1=\frac{2\varepsilon_{r1}Q}{S(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})}$$



$$E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_1}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}=\frac{2Q}{S\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})}$$

$$P_1=(\varepsilon_{r1}-1)\varepsilon_0E_1=\frac{2(\varepsilon_{r1}-1)Q}{S(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})}$$

$$\sigma'=P_{1n}=\frac{2(\varepsilon_{r1}-1)Q}{S(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})}$$



同理可求： $D_2\rightarrow E_2\rightarrow P_2\rightarrow\sigma'_2$

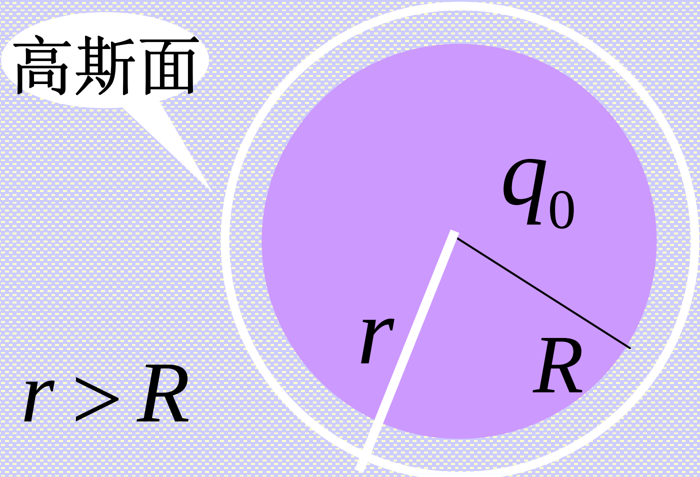
$E_1=E_2\qquad D_1\neq D_2\qquad \sigma_1\neq\sigma_2\qquad P_1\neq P_2\qquad \sigma'_1\neq\sigma'_2$

（3） $C=\dfrac{Q}{U_1-U_2}\qquad U_1-U_2=E_1d\qquad C=\dfrac{S\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})}{2d}$

例：一个金属球半径为R，带电量q_0，放在均匀的介电常数为ε 电介质中。求任一点场强及界面处 σ'？

解：导体内场强为零。

q_0均匀地分布在球表面上，
球外的场具有球对称性



$$\because \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0 \qquad \therefore D = \frac{q_0}{4\pi r^2} \qquad r > R$$

因为 $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ $\qquad \therefore E = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \qquad r > R$

$$P = \chi_e\varepsilon_0 E = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q_0}{4\pi r^2}$$

$$\sigma' = P_n = -P\Big|_{r=R} = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q_0}{4\pi R^2}$$

作业

10-11

10-13

10-14

10-15

10-18

10-19

10-20