离 散 数 学

Discrete Mathematics

第4章 代数系统

宋牟平 songmp@zju.edu.cn 玉泉校区 行政楼 325

浙江大学 信息与电子工程学院 电子 宋牟平

第4章 代数系统

代数论由法国数学家伽罗华创立。

代数论的建立解决了古典数学难题：高次方程求根、倍立方、化圆为方、三等分角和作正n边形。

集合、**数理逻辑**和**布尔代数**从代数论的角度看是同一个代数系统，三者在代数论的基础上统一了起来。

4.1 运算

定义4-1 运算：设有非空集合A，**函数**f：$A^n \to A$称为A上的一个**n元运算**，n称为**运算的阶**。

函数 f：$A^2 \to A$是A上的**二元运算**，函数 f：$A \to A$是A上的**一元运算**。

例 ∪、∩：$(2^U)^2 \to 2^U$，是2^U上的二元运算。

例 A={0,1,2,…,p-1]}　(p为正整数≥2)，则模p加法：x,y∈A，x+y(modp)，模p乘法x×y(modp)都是A上的运算。

实数域上的加、减、乘、除运算。

有时运算可以用表格来定义

+	a	b
a	a	a
b	b	a

●	a	b
a	a	a
b	a	b

*	奇	偶
奇	奇	奇
偶	奇	偶

前面都是二元运算的例子。

一元运算的例子：求集合的补集，关系的逆关系，数的绝对值，矩阵的转置和逆矩阵

定义4-2 封闭性：设运算*是集合A上的一个n元运算，$S\subseteq A$，如果对于每一个$(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in S^n$，都有$*(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in S$，称**运算*在S上封闭**。

封闭性：运算f：$A^n\rightarrow B$，若$B\subseteq A$，则称运算在A上是封闭的。

定义4-3 交换性：设*是集合A上的一个二元运算，如果对于任意的$a,b\in A$，有

$$a*b=b*a$$

则称**运算*在A上是可交换的**。

定义4-4 结合性：设*是集合A上的一个二元运算，如果对于任意的a,b,c∈A，有

$$a*(b*c)=(a*b)*c$$

则称**运算*在 A上是可结合的**。

定义4-5 分配性：设*和＊是集合A上的二元运算，如果对于任意的a,b,c∈A，有

$$a*(b＊c)=(a*b)＊(a*c)$$

$$(b＊c)*a=(b*a)＊(c*a)$$

则称**运算*在 A上对于＊是可分配的**。

例 *加法+和乘法**运算在自然数域N上是封闭的、可交换的、可结合的，乘法*对加法+是可分配的。

但*减法-和除法/运算在自然数域N上*是不封闭的，在实数R域上是封闭的，且除法对减法是可分配的。

例 任意集合A的幂集2^A上的∩和∪运算，是封闭的、可交换的、可结合的，∩对∪是可分配的，∪对∩也是可分配的。

当运算 * 可结合时，可表示为

$$a * (b * c)=a * b * c$$

并定义 $a^1=a$

$a^{n+1}=a^n * a$

则 $a^m * a^n=a^{m+n}$ $(a^m)^n=a^{mn}$

左单位元： * 是A上的二元运算，如果存在$e_l \in A$，使得对于所有的$a \in A$，有

$e_l * a=a$

称**e_l为A上关于运算 * 的左单位元**。

右单位元： * 是A上的二元运算，如果存在$e_r \in A$，使得对于所有的$a \in A$，有

$a * e_r=a$

称**e_r为A上关于运算 * 的右单位元**。

单位元： * 是A上的二元运算，如果存在$e \in A$，使得对于所有的$a \in A$，有

$e * a=a * e=a$ （既是左单位元又是右单位元）

称**e为A上关于运算 * 的单位元**。

定理4-2：如A上的运算 * 同时存在左单位元e_l和右单位元e_r，则

$$e_l=e_r=e$$

且e是A上关于 * 的唯一单位元。

证明：设存在左单位元和右单位元，即存在$e_l,e_r\in A$，则有

$$e_l=e_l * e_r=e_r=e$$

若e'也是单位元，$e'\in A$，则

$$e'=e' * e=e$$

单位元是唯一的。

定义4-7 **零元**： * 是A上的二元运算，如果存在$z_l\in A$，使得对于所有的$a\in A$，有

$$z_l * a=z_l$$

称z_l为A上关于运算 * 的左零元。

如果存在$z_r\in A$，使得对于所有的$a\in A$，有

$$a * z_r=z_r$$

称z_r为A上关于运算 * 的右零元。

如果存在$z \in A$，使得对于所有的$a \in A$，有

$$z * a = a * z = z$$ （既是左零元又是右零元）

称**z为A上关于运算 * 的零元**。

定理4-4：如A上的运算 * 同时存在左零元z_l和右零元z_r，则

$$z_l = z_r = z$$

且z是A上关于 * 的唯一零元。

证明：设存在左零元和右零元，即存在$z_l, z_r \in A$，则有

$$z_l = z_l * z_r = z_r = z$$

若z'也是零元，$z' \in A$，则

$$z' = z' * z = z$$

零元是唯一的。

例 〈Z;＋〉，0是单位元，不存在零元。

〈Z;×〉，1是单位元，0是零元。

∩的零元是∅，单位元是U。∪的零元是U，单位元是∅。

例

+	a	b
a	a	a
b	b	b

●	a	b
a	a	b
b	a	b

对运算+，a,b是左零元，也是右单位元。对运算●，a,b是左单位元，也是右零元。可以看到它们不唯一。

定义4-8 **幂等元**：* 是A上的二元运算，若有元素$a \in A$，满足

$$a * a = a$$

称**a为A上关于运算 * 的幂等元**。对幂等元，有

$$a^n = a$$

定义4-9 **逆元**：* 是A上具有单位元e的运算，对于$a \in A$，如存在$a_l^{-1} \in A$，使

$$\mathbf{a_l^{-1} * a = e}$$

则称称**a_l^{-1}为a的左逆元**。

如果存在$a_r^{-1} \in A$，使得

$$a * a_r^{-1} = e$$

称a_r^{-1}为a的右逆元。

如果存在$a^{-1} \in A$，使得

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$ （既是左逆元又是右逆元）

称a^{-1}为a的逆元。

定理4-4：设 * 是A上具有单位元e的运算，且是可结合的。如果对元素 $a \in A$，存在左逆元a_l^{-1}和右逆元a_r^{-1}，则

$$a_l^{-1} = a_r^{-1} = a^{-1}$$

且a^{-1}是a的唯一逆元。

证明：设元素a存在左逆元a_l^{-1}和右逆元a_r^{-1}，则有

$$a_l^{-1} = a_l^{-1} * e = a_l^{-1} * (a * a_r^{-1}) = (a_l^{-1} * a) * a_r^{-1} = e * a_r^{-1} = a_r^{-1}$$

若b也是逆元，则

$$b = b * e = b * (a * a^{-1}) = (b * a) * a^{-1} = e * a^{-1} = a^{-1}$$

逆元是唯一的。

零元是否可以和单位元相等？

定理4-5：设 * 是A上二元的运算，且#A>1，若运算 * 有单位元e和零元z，则e≠z。

证明：设e=z，因#A>1，所以至少还存在一元素x∈A，x≠e，但

$$x=e * x=z * x=z=e$$

与前设矛盾。

4.2 代数系统

代数系统

定义4-10 **代数系统**：**非空集合**和定义在该集合上的一个和多个**运算**所组成的系统称为**代数系统**，用记号$<S;O_1,O_2,\ldots,O_n>$表示。

其中S是非空集合，称为该代数系统的**域**，

$O_1,O_2,\ldots,O_n$为S上的**运算**。

例 $<2^U;\ ',\cup,\cap>$ 集合代数

例 $<N;+>$，$<N;\times>$

代数系统的基数：非空集合的基数。

若代数系统的基数有限，称**有限代数系统**。

子代数系统：$<S_1;\mathbf{O}>$,$<S_2;\mathbf{O}>$为两个代数系统，若$\mathbf{S_2 \subseteq S_1}$，则称$<S_2;O>$为$<S_1;O>$的子代数系统，简称子代数。若$\mathbf{S_2 \subset S_1}$，则称$<S_2;O>$为$<S_1;O>$的**真子代数系统**。

例 <N;＋>是<R;＋>的子代数。

定义4-11 **整环**：若代数系统<J; +, ·>满足

(1)交换律 对任意的$i,j \in J$，有

$i+j=j+i$，$i \cdot j=j \cdot I$

(2)结合律 对任意的$i,j,k \in J$，有

$i+(j+k)=(i+j)+k$，$i \cdot (j \cdot k)=(i \cdot j) \cdot k$

(3)分配律 对任意的$i,j,k \in J$，有

$i \cdot (j+k)=(i \cdot j)+(i \cdot k)$

(4)单位元 存在元素$0,1 \in J$，使对任意的$i \in J$

$i+0=0+i=i$，$i \cdot 1=1 \cdot i=i$

(5)+可逆　对任意的$i \in J$，存在元素$-i \in J$，

$$i+(-i)=(-i)+i=0$$

(6)削去律　若$i \neq 0$，则对于任意的$j,k \in J$,有

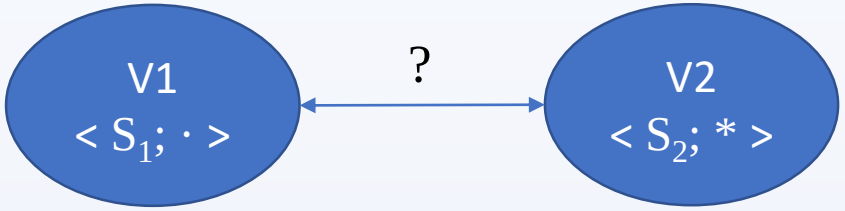
$$i \cdot j=i \cdot k \Rightarrow j=k$$

则称该代数系统为**整环**。

例　$<I;\ +, \times>$

例　$<Z_3;\ \oplus_3, \odot_3>$

4.3 同态和同构



同态与同构

同态：$V_1=<S_1;\cdot>, V_2=<S_2;*>$为两个代数系统，若存在$S_1$到$S_2$**函数h**，对任意的$x_1,x_2\in S_1$，满足方程

$$h(x_1\cdot x_2)=h(x_1)*h(x_2)$$

则称h为**V_1到V_2的同态，V_2称为V_1的同态像**。

例 代数系统 $V_1=<R;\times>$，$V_2=<R;+>$

函数 $y:R\to R,\ y=\log_{10}x$。

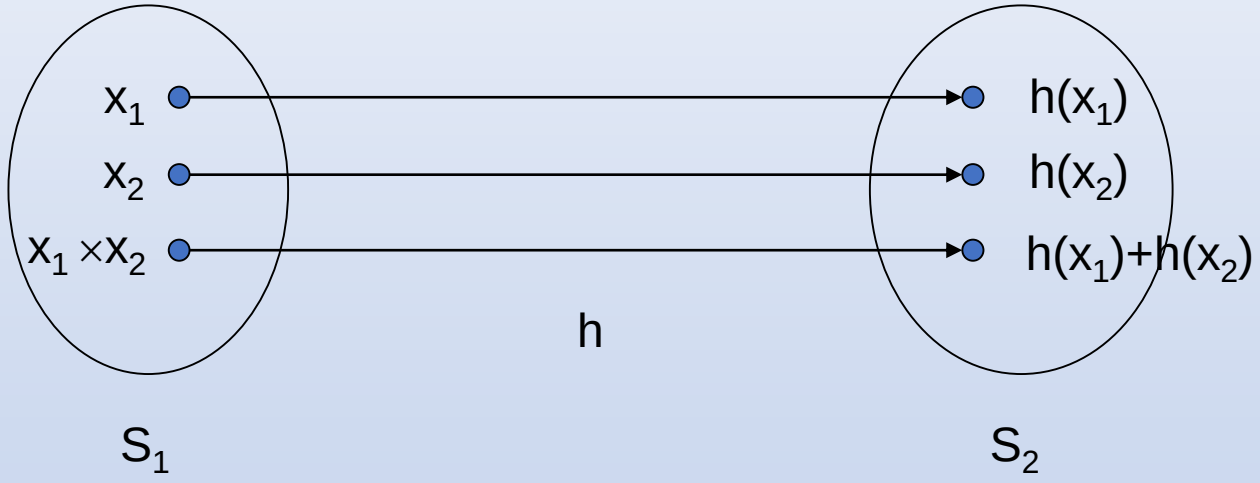
对于任意的$x_1,x_2\in R$，有

$$y(x_1\times x_2)=\log_{10}(x_1\times x_2)=\log_{10}(x_1)+\log_{10}(x_2)$$

满足同态方程，是V_1到V_2的同态。

从上例可以看出，**同态可看成一种变换，将一个代数系统变为另一个代数系统**，一个较复杂的问题转为较易解决的问题：对数尺，传输损耗，放大倍数等。

例 摩根定律 $(A\cap B)'=A'\cup B'$



例 $V_1=<Z;+>$，$V_2=<Z_6;\oplus_6>$，$Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$，$\oplus_6$是模6加。

定义函数**$h:Z\to Z_6$**, 对任意的$i\in Z$，有**$h(i)=res_6(i)$**。

证明 h是V_1到V_2的同态。

证明：对任意的$i,j\in Z$,设

$$i=6q_1+r_1,\quad 0\le r_1<6$$

$$j=6q_2+r_2,\quad 0\le r_2<6$$

则 $$i+j=6(q_1+q_2)+(r_1+r_2)$$

$$h(i+j)=res_6(i+j)=res_6(r_1+r_2)$$

$$res_6(i)\oplus_6 res_6(j)=r_1\oplus_6 r_2=res_6(r_1+r_2)$$

故 $$res_6(i+j)=res_6(i)\oplus_6 res_6(j)$$

即 $$h(i+j)=h(i)\oplus_6 h(j)$$

定义4-15 设h是V_1到V_2的同态，$V_1=<S_1;\cdot>$,$V_2=<S_2;*>$，如果

（1）h是单射，则称h为**单同态**；

（2）h是满射，则称h为**满同态**；

（3）h是双射，则称h为**同构**。

定理4-6 若存在代数系统$V_1=<S_1;+_1,*_1>$到$V_2=<S_2;+_2,*_2>$的**满同态h**，则V_1具有的许多性质可在V_2中保持：

（1）**交换** 若$+_1(*_1)$可交换，则$+_2(*_2)$可交换；

（2）**结合** 若$+_1(*_1)$可结合，则$+_2(*_2)$可结合；

（3）**分配** 若$+_1$对$*_1$可分配，则$+_2$对$*_2$可分配；

（4）**单位元** 若$+_1(*_1)$存在单位元，则$+_2(*_2)$也存在单位元；

（5）**零元** 若$+_1(*_1)$存在零元，则$+_2(*_2)$也存在零元；

（6）**逆元** 若对运算$+_1(*_1)$，元素x存在逆元x^{-1}，则对运算$+_2(*_2)$，元素h(x)也存在逆元$h(x^{-1})$；

推论：若**h是V_1到V_2的同构，则h的逆函数h^{-1}是V_2到V_1的同构，因此称V_1和V_2彼此同构**。

证明：**h是V_1到V_2的同构**，则h是V_1到V_2的**双射**，其逆函数h^{-1}则是V_2到V_1的**双射**。又

设$V_1=<S_1;\ *>, V_2=<S_2;\ \bullet>$，则对任意的$y_1, y_2\in S_2$，必存在$x_1, x_2\in S_1$，使

$$y_1=h(x_1),\ y_2=h(x_2)$$

故

$$\begin{aligned} h^{-1}(y_1 \bullet y_2) &= h^{-1}(h(x_1) \bullet h(x_2)) \\ &= h^{-1}(h(x_1 * x_2)) \\ &= h^{-1}h(x_1 * x_2) \\ &= x_1 * x_2 \\ &= h^{-1}(y_1) * h^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

逆函数h^{-1}也满足同态方程，是V_2到V_1的同构。

两代数系统在同构的情况下，它们的运算一一对应，满足的性质完全相同，元素一一对应，***从代数论的角度看，是同一个代数系统***，区别仅仅是运算符号和元素的名称不同，一个代数系统中的理论完全可用于同构的另一代数系统，一个代数系统的理论清楚了，所有和它同构的代数系统的问题也就清楚了。

例如**集合代数**、**布尔代数**、**逻辑代数**三者是同构的，在代数论的基础上统一了起来。

例 $V_1=<\{\varnothing, A, A', U\}; \cup>$， $V2=<\{U, A', A, \varnothing\}; \cap>$， h=′同构

∪	∅	A	A'	U
∅	∅	A	A'	U
A	A	A	U	U
A'	A'	U	A'	U
U	U	U	U	U

∩	U	A'	A	∅
U	U	A'	A	∅
A'	A'	A'	∅	∅
A	A	∅	A	∅
∅	∅	∅	∅	∅

作业

3(1)(4), 6, 7(1)(3)(5), 10, 12, 15, 16

内容提要

1. 集合 A 上的运算

- 集合 A 上的运算；
- 运算的封闭性；
- 二元运算的一些常见的性质；
- 集合中与二元运算相联系的一些特殊的元素：单位元、零元、幂等元、元素的逆元.

2. 代数系统

- 代数系统；
- 整环及其性质；
- 子代数.

3. 代数系统的同态与同构

- 同态；
- 满同态；
- 满同态的性质；
- 同构.

例题讲解

例 4-1 通常数的乘法运算是否可看做下列集合上的二元运算？请逐个回答，并说明理由.

(1) $A=\{1,2\}$;

(2) $B=\{x \mid x$ 是素数$\}$;

(3) $C=\{x \mid x$ 是偶数$\}$;

(4) $D=\{2^n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

解 (1) 乘法运算不是集合 A 上的二元运算. 因为 $2\times 2=4 \notin A$.

(2) 乘法运算不是集合 B 上的二元运算. 因为素数乘素数不再是素数. 例如 $3\times 5=15 \notin B$.

(3) 乘法运算是集合 C 上的运算. 因为偶数乘偶数仍为偶数.

(4) 乘法运算是集合 D 上的二元运算. 因为对于任意 $2^n, 2^m \in D$, $2^n \times 2^m = 2^{n+m} \in D$.

例 4-2 设有集合 A, $A^A=\{f \mid f: A \to A\}$ 是由 A 到 A 的所有函数组成的集合. 因为对于任意 $f_1, f_2 \in A^A$, f_1 与 f_2 的复合函数 $f_1 \cdot f_2$ 仍是一由 A 到 A 的函数，因此函数的复合运算可看做是集合 A^A 上的一个二元运算.

例 4-3 通常数的加法运算可看做是正整数集 **N** 上的一个二元运算. 下列集合均是 **N** 的子集,加法运算在这些子集上是封闭的吗? 说明理由.

(1) $S_1=\{n|n$ 是 15 的因子$\}$;

(2) $S_2=\{n|n$ 是 15 的倍数$\}$;

(3) $S_3=\{n|6$ 整除 n,而 24 整除 $n^2\}$.

解 (1) 加法运算在 S_1 上不封闭. 因为 $3\in S_1$,$5\in S_1$,但 $3+5=8\notin S_1$.

(2) 加法运算在 S_2 上是封闭的. 其证明如下.

对于任意 $n_1,n_2\in S_2$,设 $n_1=15k_1$,$n_2=15k_2(k_1,k_2\in\mathbf{N})$,则 $n_1+n_2=15k_1+15k_2=15(k_1+k_2)$,$(k_1+k_2\in\mathbf{N})$. 因此 $n_1+n_2\in S_2$.

(3) 加法运算在 S_3 上是封闭的. 其证明如下.

首先,对于任意 $n_1,n_2\in S_3$,设 $n_1=6k_1$,$n_2=6k_2(k_1,k_2\in\mathbf{N})$,则 $n_1+n_2=6k_1+6k_2=6(k_1+k_2)$,$n_1+n_2$ 能被 6 整除.

又 $(n_1+n_2)^2=n_1^2+2n_1\cdot n_2+n_2^2$,根据题意,$n_1^2$ 能被 24 整除,n_2^2 能被 24 整除,而

$$2n_1\cdot n_2=2\cdot 6k_1\cdot 6k_2=24\cdot(3k_1k_2)$$

也能被 24 整除,因此 $(n_1+n_2)^2$ 能被 24 整除. 由此知 $n_1+n_2\in S_3$.

例 4-4 设 W 是集合 A 上所有关系的集合，H_1 是 A 上所有自反关系的集合，H_2 是 A 上所有可传递关系的集合. 显然关系的复合运算是 W 上的一个二元运算，试问关系的复合运算在 H_1 和 H_2 上是封闭的吗？为什么？

解 关系的复合运算。在 H_1 上是封闭的，这是因为 A 上任意两个自反关系的复合关系仍是 A 上的自反关系；但。在 H_2 上不封闭，这是因为 A 上任意两个可传递关系的复合关系不一定是可传递的. 举例如下.

设 $A=\{1,2,3\}$，定义集合 A 上的关系

$$\rho_1=\{(1,2),(2,3),(1,3)\},$$

$$\rho_2=\{(2,3),(3,1),(2,1)\},$$

显然，ρ_1 和 ρ_2 均是可传递的. 又

$$\rho_1\cdot\rho_2=\{(1,3),(1,1),(2,1)\},$$

但 $\rho_1\cdot\rho_2$ 不可传递.

例 4-7 实数集 $\mathbf{R}$ 上的二元运算 $*$ 定义为

$$r_1 * r_2 = r_1 + \frac{1}{2} r_2$$

集合 $\mathbf{R}$ 中关于运算 $*$ 存在有单位元、零元和幂等元吗？

解 (1) 运算 $*$ 不可交换，因此我们分别考虑它是否有左单位元和右单位元.

若 r_1 是左单位元，则对于任意 $r \in \mathbf{R}$，应有

$$r_1 * r = r, \quad r_1 + \frac{r}{2} = r,$$

于是 $r_1 = \frac{r}{2}$.

由于 r 是任意的，因此不存在元素能成为运算 $*$ 的左单位元. 由此可知 $*$ 不存在单位元.

若 r_1 是右单位元，则对于任意 $r \in \mathbf{R}$，应有

$$r * r_1 = r, \quad r + \frac{r_1}{2} = r. \tag{1}$$

要使式(1)成立，只有 $r_1 = 0$，因此 0 是运算 $*$ 的右单位元.

(2) 若 r_1 是左零元，则对于任意的 $r\in\mathbf{R}$，应有

$$r_1 * r=r_1,\quad r_1+\frac{r}{2}=r_1. \tag{2}$$

要使式(2)成立，必须 $r=0$，但 r 是任意的，因此运算 $*$ 没有左零元. 由此可知运算 $*$ 不存在零元.

若 r_1 是右零元，则对于任意的 $r\in\mathbf{R}$，应有

$$r * r_1=r_1,\quad r+\frac{r_1}{2}=r_1,$$

于是

$$r=\frac{r_1}{2},\quad r_1=2r.$$

由于 r 是任意的，因此运算 $*$ 也没有右零元.

(3) 若 $r\in\mathbf{R}$ 是幂等元，则应有

$$r+\frac{r}{2}=r,\quad \frac{r}{2}=0. \tag{3}$$

要使式(3)成立，必须 $r=0$，因此 0 是幂等元.

例 4-8 设有集合 A,B，并设 $W=\{\rho|\rho$ 是由 A 到 B 的关系$\}$. 因为由 A 到 B 的任一关系均是 $A\times B$ 的一个子集，所以任意两个关系经过并运算和交运算后，其结果仍是 $A\times B$ 的一个子集，即仍是由 A 到 B 的一个关系. 若将 $A\times B$ 看做是全集合，则关系 ρ 的补 ρ' 也是 $A\times B$ 的一个子集，即也是由 A 到 B 的一个关系. 因此集合的并运算、交运算和补运算可分别看做是 W 上的二元运算和一元运算. 于是 $\langle W;\cup,\cap,'\rangle$ 是一代数系统.

例如 设 $A=\{0,1\}$, $B=\{a,b,c\}$,

则 $A\times B=\{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$.

设 A 到 B 的关系

$$\rho_1=\{(0,a),(0,c),(1,a)\},$$

$$\rho_2=\{(0,b),(0,c),(1,c)\},$$

则 $$\rho_1\cup\rho_2=\{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,c)\},$$

$$\rho_1\cap\rho_2=\{(0,c)\},$$

$$\rho_1'=\{(0,b),(1,b),(1,c)\}$$

也都是由 A 到 B 的关系.

例 4-9 设 $A=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \middle| a,b\in \mathbf{Z}\right\}$，试证明集合 A 与矩阵的加法和乘法运算构成一个整环(这里 $\mathbf{Z}$ 表示整数集).

证 对于任意的 $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix},\begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}\in A$，因为

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(b+d) & a+c \end{bmatrix}\in A,$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(bc+ad) & 2bd+ac \end{bmatrix}\in A,$$

所以$\langle A;+,\cdot\rangle$构成一个代数系统.

(1) 根据矩阵加法运算的定义，+满足交换律. 对于运算 $\cdot$，因为

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+2bd & bc+ad \\ 2(ad+bc) & 2bd+ac \end{bmatrix},$$

与前面计算的 $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}$ 相等，所以 $\cdot$ 也满足交换律.

(2) 矩阵的加法和乘法运算均满足结合律.

(3) 矩阵的乘法运算对加法运算是可分配的.

(4) 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是加法运算的单位元.

矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是乘法运算的单位元.

(5) 对任意$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \in A$，其加法逆元是矩阵$\begin{bmatrix} -a & -b \\ -2b & -a \end{bmatrix}$.

(6) 所谓运算·满足消去律是指，对于任意的矩阵 $x, y, z \in A$，若 $x \neq 0$，则由 $x \cdot y = x \cdot z$，可得 $y = z$. 这里 $x \neq 0$ 指 x 不是加法运算的单位元.

设$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ 2f & e \end{bmatrix} \in A$，其中 a, b 至少有一个不为 0. 并设

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ 2f & e \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{bmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(bc+ad) & 2bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+2bf & af+be \\ 2(be+af) & 2bf+ac \end{bmatrix},$$

因此

$$ac+2bd = ae+2bf, \tag{1}$$

$$ad+bc = af+be. \tag{2}$$

将式(1)两边同乘以 a，将式(2)两边同乘以 $2b$，分别得

$$a^2c+2abd=a^2e+2abf, \tag{3}$$

$$2abd+2b^2c=2abf+2b^2e, \tag{4}$$

式(3)－式(4)得

$$(a^2-2b^2)c=(a^2-2b^2)e,$$

$$(a^2-2b^2)(c-e)=0,$$

因此 $$a^2-2b^2=0 \quad 或 \quad c-e=0.$$

因为 a,b 均为整数，且 a,b 中至少一个不为 0，所以 $a^2-2b^2\neq 0$，因此必有 $c=e$.

类似地，可以证明 $d=f$，故

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 2d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e & f \\ 2f & e \end{bmatrix}.$$

由上可知$\langle A;+,\cdot\rangle$是一整环.

例 4-11 设 $V=\langle \mathbf{Z};+,\cdot\rangle$，其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，$+$ 和 $\cdot$ 分别表示通常数的加法和乘法运算. 对下面 $\mathbf{Z}$ 的每个子集，确定它是否能构成 V 的子代数？为什么？

(1) $H_1=\{2n+1 \mid n\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $H_2=\{-1,0,1\}$；

(3) $H_3=\{2n \mid n\in\mathbf{Z}\}$.

解 (1) H_1 不能构成 V 的子代数.

因为对于任意的 $2n_1+1, 2n_2+1\in H_1$，有

$$(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n_1+2n_2+2\notin H_1,$$

所以加法运算在 H_1 上不封闭.

(2) H_2 也不能构成 V 的子代数.

因为加法运算在 H_2 上也不封闭. 例如，$1+1=2\notin H_2$.

(3) H_3 能构成 V 的子代数.

因为对于任意的 $2n_1, 2n_2\in H_3$，有 $2n_1+2n_2=2(n_1+n_2)\in H_3$，且 $2n_1\cdot 2n_2=2(2n_1n_2)\in H_3$，所以加法运算和乘法运算在 H_3 上均是封闭的. 因此 $\langle H_3;+,\cdot\rangle$ 是 $\langle \mathbf{Z};+,\cdot\rangle$ 的子代数.

例 4-12 设 $V=\langle \mathbf{R};*\rangle$，其中 $\mathbf{R}$ 是实数集，运算 $*$ 定义为

$$x*y=[x,y].$$

符号 $[x,y]$ 表示不小于 x 和 y 的最小整数，又设

$$H_1=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 10,x\in\mathbf{R}\},$$

$$H_2=\{x\mid 0\leqslant x<10,x\in\mathbf{R}\},$$

试问 H_1 与 H_2 能否构成 V 的子代数？

解 正确理解符号 $[x,y]$ 的含义. 例如

$$[1.5,\sqrt{2}]=2,\quad [-3,-2.1]=-2.$$

因为运算 $*$ 在 H_1 上是封闭的，所以 $\langle H_1;*\rangle$ 是 $\langle \mathbf{R};*\rangle$ 的子代数. 但 H_2 与运算 $*$ 不能构成 V 的子代数，因为 $*$ 在 H_2 上不封闭. 例如 $\lceil 9.8,2\rceil=10$，但 $10\notin H_2$.

例 4-13 设有代数系统 $V_1=\langle \mathbf{R};+,\sim\rangle$ 和 $V_2=\langle \mathbf{R}_+;\cdot,'\rangle$，其中 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}_+$ 分别表示实数集和正实数集，$+$ 和 $\cdot$ 是通常数的加法和乘法，$\sim$ 表示求相反数的运算，$'$ 表示求倒数的运算.

设有函数 $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$，对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$h(x)=\mathrm{e}^x$. 于是对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$，

$$h(x+y)=\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^y=h(x)\cdot h(y).$$

对于任意 $x\in\mathbf{R}$，

$$h(\sim(x))=h(-x)=\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{\mathrm{e}^x}=(h(x))'.$$

因此 h 是由 V_1 到 V_2 的一个同态.

例 4-14 设 $V=\langle \mathbf{R}^*;\cdot\rangle$，其中 $\mathbf{R}^*$ 表示非零实数集，$\cdot$ 表示通常数的乘法运算. 试问下列两个函数是否由 V 到 V 的满同态?

(1) $h(x)=x^2$;

(2) $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

解 (1) 对任意 $x\in\mathbf{R}^*$，有 $x^2\in\mathbf{R}^*$，所以 h 是由 $\mathbf{R}^*$ 到 $\mathbf{R}^*$ 的函数. 又对于任意 $x,y\in\mathbf{R}^*$，有

$$h(x\cdot y)=(x\cdot y)^2=x^2\cdot y^2=h(x)\cdot h(y),$$

所以 h 是从 V 到 V 的同态.

但 h 不是从 V 到 V 的满同态. 因为 h 不是由 $\mathbf{R}^*$ 到 $\mathbf{R}^*$ 的满射，例如 $-5\in\mathbf{R}^*$，但不存在 $x\in\mathbf{R}^*$，使 $x^2=-5$.

（2）对任意 $x\in\mathbf{R}^*$，因为 $x\neq 0$，所以有 $\frac{1}{x}\in\mathbf{R}^*$，因此 g 是由 $\mathbf{R}^*$ 到 $\mathbf{R}^*$ 的函数.

又对于任意 $x,y\in\mathbf{R}^*$，

有
$$g(x\cdot y)=\frac{1}{x\cdot y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=g(x)\cdot g(y),$$

所以 g 是从 V 到 V 的同态.

对于任意 $x\in\mathbf{R}^*$，有 $\frac{1}{x}\in\mathbf{R}^*$，且 $\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$，因此 $g\left(\frac{1}{x}\right)=x$. 即 $\mathbf{R}^*$ 中任一元素在 $\mathbf{R}^*$ 中均有像源. 所以 g 是由 $\mathbf{R}^*$ 到 $\mathbf{R}^*$ 的满射，因此 g 是从 V 到 V 的满同态.

例 4-15 设 $A=\{a,b,c\}$，试问代数系统$\langle\{\varnothing,A\};\cup,\cap\rangle$和$\langle\{\{a,b\},A\};\cup,\cap\rangle$是否同构？

解 令 $S=\{\varnothing,A\}$，$H=\{\{a,b\},A\}$. 定义函数 $f:S\to H$，使得 $f(\varnothing)=\{a,b\}$，$f(A)=A$. 显然 f 是一双射.

对于任意 $x,y\in S$，若 $x=y$，则

$$f(x\cup y)=f(x),$$

$$f(x)\cup f(y)=f(x)\cup f(x)=f(x),$$

所以

$$f(x\cup y)=f(x)\cup f(y).$$

若 $x \neq y$，则

$$f(x \cup y) = f(A) = A,$$

$$f(x) \cup f(y) = \{a,b\} \cup A = A,$$

所以 $$f(x \cup y) = f(x) \cup f(y).$$

因此对于任意 $x,y \in S$，都有 $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$.

类似地，对于任意 $x,y \in S$，若 $x = y$，则

$$f(x \cap y) = f(x),$$

$$f(x) \cap f(y) = f(x) \cap f(x) = f(x),$$

所以 $$f(x \cap y) = f(x) \cap f(y).$$

若 $x \neq y$，则

$$f(x \cap y) = f(\varnothing) = \{a,b\},$$

$$f(x) \cap f(y) = \{a,b\} \cap A = \{a,b\},$$

所以 $$f(x \cap y) = f(x) \cap f(y).$$

因此对于任意的 $x,y \in S$，都有 $f(x \cap y) = f(x) \cap f(y)$.

由上证得 $\langle \{\varnothing, A\}; \cup, \cap \rangle$ 与 $\langle \{\{a,b\}, A\}, \cup, \cap \rangle$ 同构.

例 4-16 代数系统 $V_1=\langle \mathbf{Z};+\rangle$ 与 $V_2=\langle \mathbf{N};\cdot\rangle$ 是否同构？这里 **Z** 和 **N** 分别表示整数集和正整数集，+和·分别表示通常数的加法和乘法.

解 **Z** 和 **N** 都是可数集，因此 **Z** 和 **N** 之间存在有双射. 例如可以定义函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$，使得

$$f(i)=\begin{cases}1, & i=0,\\ 2i, & i>0,\\ 2|i|+1, & i<0.\end{cases}$$

因为 **Z** 和 **N** 均是无限集，因此由 **Z** 到 **N** 可以定义许多甚至无穷多个双射函数. 这些双射函数中是否有满足同态条件的呢？这里不可能对所有的双射函数去一一考察，为了回答这一问题，可以先来考察这两个代数系统所具有的性质.

$\langle \mathbf{Z};+\rangle$ 中运算+具有单位元 0；$\langle \mathbf{N};\cdot\rangle$ 中运算·也具有单位元 1.

$\langle \mathbf{Z};+\rangle$ 中每一整数 i 对于运算+均有逆元 $-i$，即 $i+(-i)=(-i)+i=0$；但 $\langle \mathbf{N};\cdot\rangle$ 中除单位元 1 对于运算·具有逆元 1 外，其他正整数对于运算·均不存在逆元. 这就是说，任何一个由 **Z** 到 **N** 的双射函数都不能使 V_2 中运算·具有 V_1 中运算+每一元素均有逆元的这一条性质. 而“保持运算的性质”是 f 为同构的必要条件，由此可知 V_1 与 V_2 不同构.

例 4-23 设有代数系统$\langle S;*,\circ\rangle$,其中$*$和$\circ$均是二元运算,并分别具有单位元e_1和e_2.已知运算$*$和$\circ$相互之间均是可分配的.试证明对于S中任意的元素x,有$x*x=x\circ x=x$.

证 因为e_1是$*$的单位元,e_2是$\circ$的单位元,所以

$$e_1=e_2\circ e_1=(e_2*e_1)\circ e_1=(e_2\circ e_1)*(e_1\circ e_1)=e_1*(e_1\circ e_1)=e_1\circ e_1,$$

$$e_2=e_1*e_2=(e_1\circ e_2)*e_2=(e_1*e_2)\circ(e_2*e_2)=e_2\circ(e_2*e_2)=e_2*e_2.$$

于是,对于任意的$x\in S$,有

$$x*x=(x\circ e_2)*(x\circ e_2)=x\circ(e_2*e_2)=x\circ e_2=x,$$

$$x\circ x=(x*e_1)\circ(x*e_1)=x*(e_1\circ e_1)=x*e_1=x.$$

故对于任意$x\in S$,有

$$x*x=x\circ x=x.$$

例 4-24 设 f_1 和 f_2 都是从代数系统$\langle S_1;*\rangle$到$\langle S_2;\circ\rangle$的同态，这里 $*$ 和$\circ$都是二元运算，且$\circ$是可交换和可结合的. 定义函数 $h:S_1\to S_2$，使得对于任意 $x\in S_1$，$h(x)=f_1(x)\circ f_2(x)$. 试证明 h 也是从$\langle S_1;*\rangle$到$\langle S_2;\circ\rangle$的同态.

证 对于任意 $x,y\in S_1$，因为 f_1 和 f_2 都是从$\langle S_1;*\rangle$到$\langle S_2;\circ\rangle$的同态，所以有

$$\begin{aligned}h(x*y)&=f_1(x*y)\circ f_2(x*y)\\&=(f_1(x)\circ f_1(y))\circ(f_2(x)\circ f_2(y)).\end{aligned}$$

又因为$\circ$是可交换和可结合的，所以

$$h(x*y)=(f_1(x)\circ f_2(x))\circ(f_1(y)\circ f_2(y))=h(x)\circ h(y).$$

由 x,y 的任意性，可知 h 也是从$\langle S_1;*\rangle$到$\langle S_2;\circ\rangle$的同态.

例 4-28 代数系统 $V_1=\langle \mathbf{R}-\{0\};\cdot\rangle$ 与 $V_2=\langle \mathbf{R};+\rangle$ 同构吗？其中 $\mathbf{R}$ 表示实数集，$\cdot$ 和 $+$ 分别表示通常数的乘法和加法运算.

分析 如果 V_1 与 V_2 同构，则这两个代数系统应具有完全相同的性质. 例如 V_1 中有单位元 1，V_2 中有单位元 0. 但是我们发现在 V_1 中元素 -1 满足等式 $(-1)\cdot(-1)=1$，而在 V_2 中却找不出除单位元 0 以外的元素 x，满足 $x+x=0$. 因此 V_1 与 V_2 不可能同构. 下面给出这一结论的证明.

证 用反证法证明之. 设存在函数 $h:\mathbf{R}-\{0\}\to\mathbf{R}$ 是从 V_1 到 V_2 的同构，则由单位元映射为单位元，有 $h(1)=0$.

又设 $h(-1)=b$，则

$$h(1)=h((-1)\cdot(-1))=h(-1)+h(-1)=b+b.$$

因此 $b+b=0$，即 $b=0$，由此导致 $h(1)=h(-1)$，这与 h 是双射相矛盾. 故 $\langle \mathbf{R}-\{0\};\cdot\rangle$ 与 $\langle \mathbf{R};+\rangle$ 不同构.

若代数系统 V_1 和 V_2 是同一个代数系统 V，则从 V_1 到 V_2 的同态称为 V 的自同态. 从 V_1 到 V_2 的同构称为 V 的自同构.

End of Chapter 4.