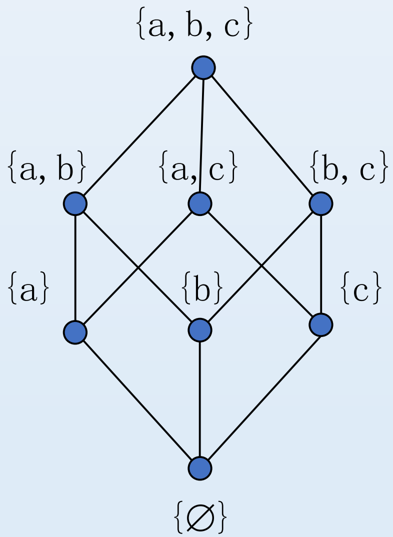
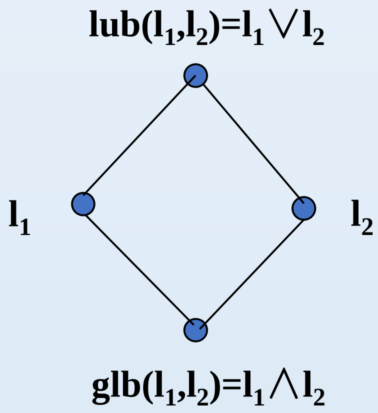
离 散 数 学

Discrete Mathematics

第7章 格和布尔代数



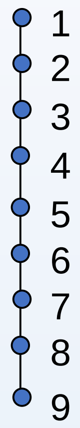


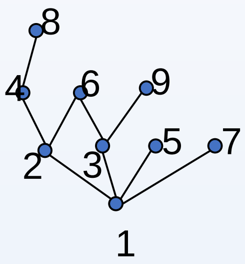
宋牟平 songmp@zju.edu.cn 玉泉校区 行政楼 325

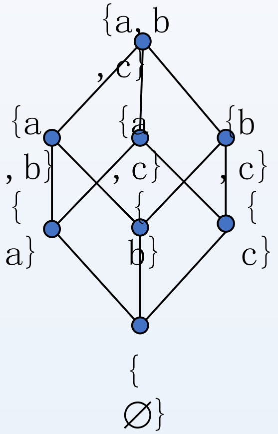
助教：张宇欣，崔恩雪 玉泉校区 行政楼 327

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

第7章 格和布尔代数







从逻辑的观点看，布尔代数是命题演算系统；

从抽象代数的观点看，布尔代数是一个代数系统；

从集合论的观点看，布尔代数是集合代数；

从工程技术的观点看，布尔代数是开关代数（二值逻辑）。

布尔代数有两种方式定义：由偏序关系定义，由抽象代数定义。我们书中是由偏序关系定义的。

7.1 偏序集

偏序集：在集合L上定义的偏序关系“≤”和集合L合称为**偏序集**，记$\langle L;\leqslant\rangle$。

这类似于代数系统的定义，对于偏序集$\langle L;\leqslant\rangle$有下列性质：

对任意的 $l_1, l_2, l_3 \in L$，有

$l_1 \leqslant l_1$	**自反**
若 $l_1 \leq l_2$, $l_2 \leq l_1$，则 $l_1 = l_2$	**反对称**
若 $l_1 \leq l_2$, $l_2 \leq l_3$，则 $l_1 \leq l_3$	**传递**

定义7-1 下界：设$l_1,l_2 \in L$，若存在元素$a \in L$，满足$a \le l_1$和$a \le l_2$，则称a为l_1和l_2的下界。

最大下界：glb=max{l_1和l_2的下界}，即设**glb**是l_1和l_2的下界，且对于任意的$a \in L$,若a是l_1和l_2的下界，则 $a \le glb$。

定义7-2 上界：设$l_1,l_2 \in L$，若存在元素$a \in L$，满足$l_1 \le a$和$l_2 \le a$，则称a为l_1和l_2的上界。

最小上界：lub=min{l_1和l_2的上界}，即设lub是l_1和l_2的上界，且对于任意的$a \in L$,若a是l_1和l_2的上界，则$lub \le a$。

定理7-1 下界和上界是不唯一的，但最大下界(glb)和最小上界(lub)是唯一的。

例　$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\rho_1=\{(a,b) \mid a \le b,\ a,b \in A\}$

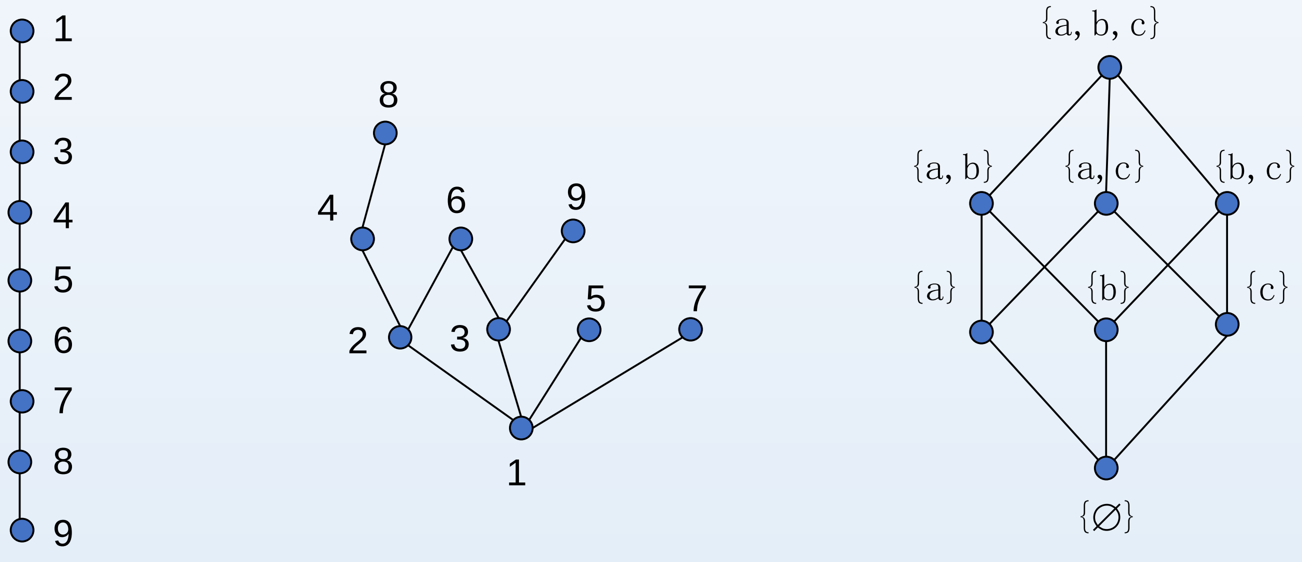
$\rho_2=\{(a,b) \mid a|b,\ a,b \in A\}$　a整除b

例　$B=\{a,b,c\}$

$\rho_3=\{(s_1,s_2) \mid s_1 \subseteq s_2,\ s_1,s_2 \in 2^B\}$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

次序图



(a) (b) (c)

由次序图很容易判定两个元素的上、下界和最大下界、最小上界。

最小元、最大元：设$<L;\leq>$是一个偏序集，若

（1）对于任意的元素$l\in L$，存在$a\in L$，使$a\leqq l$，称a为**最小元**；

（2）对于任意的元素$l\in L$，存在$b\in L$，使$l\leqq b$，称a为**最大元**；

定理7-2 最小元和最大元有可能存在，也可能不存在，若存在，则是唯一的。

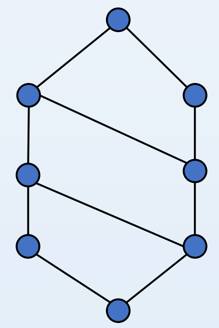
格及其性质

定义7-4 **格：<L;≤>是一个偏序集**，若对于任意两个元素$l_1,l_2 \in L$，**都存在最大下界和最小上界**，则称该偏序集为格。

为了方便，记

最大下界 $glb(l_1,l_2)=l_1 \wedge l_2$ 称为交运算

最小上界 $lub(l_1,l_2)=l_1 \vee l_2$ 称为并运算

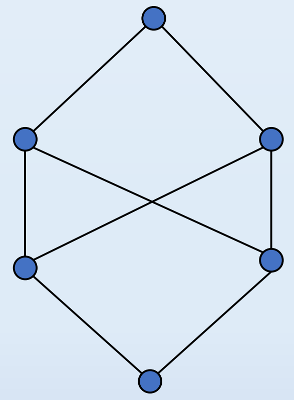


显然 $l_1 \wedge l_2 \leqq l_1$， $l_1 \wedge l_2 \leqq l_2$ 下界

若 $l_3 \leqq l_1$，$l_3 \leqq l_2$，则 $l_3 \leqq l_1 \wedge l_2$ 最大下界

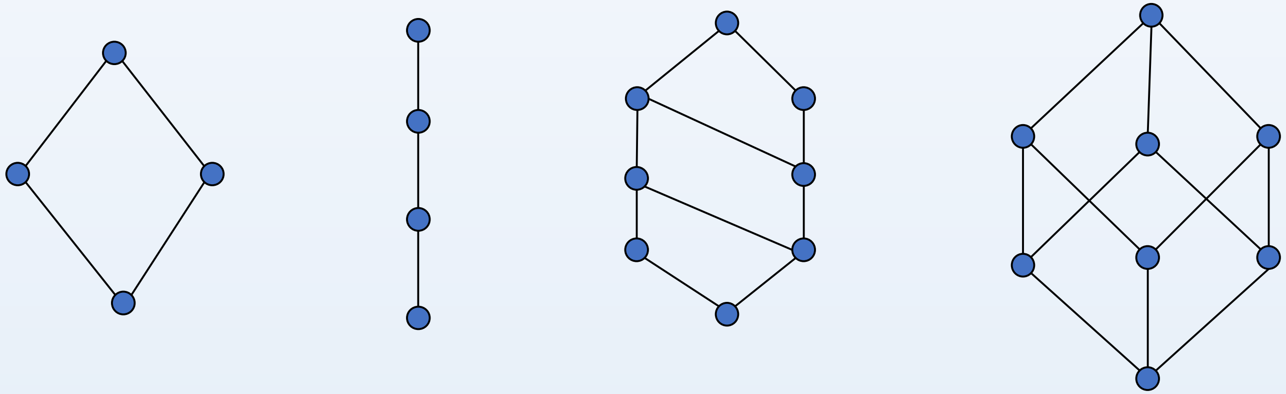
显然 $l_1 \leqq l_1 \vee l_2$， $l_2 \leqq l_1 \vee l_2$ 上界

若 $l_1 \leqq l_3$，$l_2 \leqq l_3$，则 $l_1 \vee l_2 \leqq l_3$ 最小上界

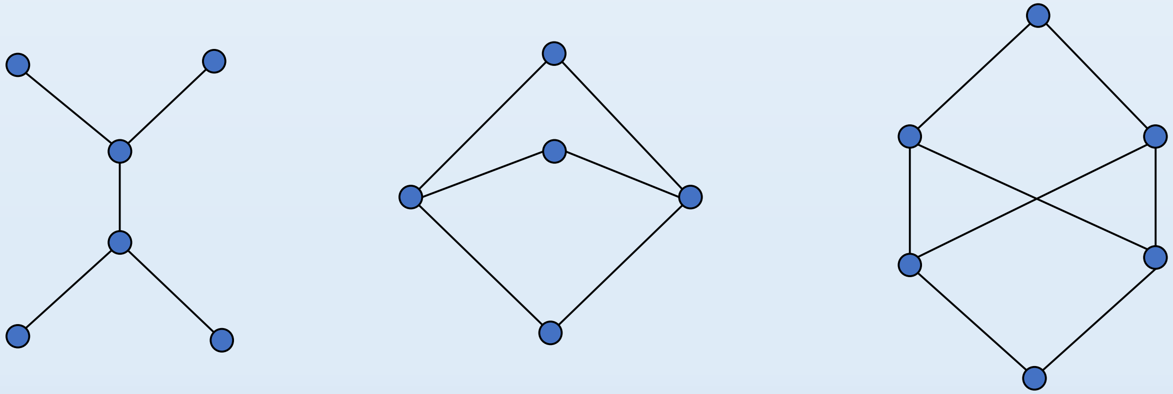


浙江大学信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

格



不是格



格的性质

（1）**定理7-3** $l_1 \vee l_2 = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad l_1 \wedge l_2 = l_1 \quad \Leftrightarrow \quad l_1 \leqq l_2$

（2）**定理7-4 交换律** $l_1 \vee l_2 = l_2 \vee l_1$，$l_1 \wedge l_2 = l_2 \wedge l_1$

（3）**定理7-5 结合律** $l_1 \vee (l_2 \vee l_3) = (l_1 \vee l_2) \vee l_3$

$l_1 \wedge (l_2 \wedge l_3) = (l_1 \wedge l_2) \wedge l_3$

（4）**定理7-7 吸收律** $l_1 \vee (l_1 \wedge l_2) = l_1$，$l_1 \wedge (l_1 \vee l_2) = l_1$

（5）**定理7-6 幂等律** $l \vee l = l$，$l \wedge l = l$

（6）**定理7-8 保序性** 对任意的$l_1, l_2, l_3, l_4 \in L$，

若 $l_1 \leqq l_3, l_2 \leqq l_4$

则 $l_1 \vee l_2 \leqq l_3 \vee l_4$，$l_1 \wedge l_2 \leqq l_3 \wedge l_4$

（7）**定理7-9 分配不等式** 对任意的$l_1, l_2, l_3 \in L$，

$l_1 \vee (l_2 \wedge l_3) \leqq (l_1 \vee l_2) \wedge (l_1 \vee l_3)$

$l_1 \wedge (l_2 \vee l_3) \geqq (l_1 \wedge l_2) \vee (l_1 \wedge l_3)$

*与集合的性质一样，前面的表达式都是成对出现，*若用对运算符做代换

$$\vee \Leftrightarrow \wedge, \qquad \leq \Leftrightarrow \geq$$

则可得到另一表达式，称**对偶性原理**。

交换性的证明：$l_1 \vee l_2 = l_2 \vee l_1$，$l_1 \wedge l_2 = l_2 \wedge l_1$

因 $l_2 \leq l_1 \vee l_2$， $l_1 \leq l_1 \vee l_2$

所以 $l_2 \vee l_1 \leq l_1 \vee l_2$

又 $l_1 \leq l_2 \vee l_1$， $l_2 \leq l_2 \vee l_1$

所以 $l_1 \vee l_2 \leq l_2 \vee l_1$

由反对称性：$l_1 \vee l_2 = l_2 \vee l_1$

结合律的证明：　$(l_1 \vee l_2) \vee l_3 = l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$

因　$l_1 \leqq l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$，$l_2 \vee l_3 \leqq l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$

又　$l_2 \leqq l_2 \vee l_3$，$l_3 \leqq l_2 \vee l_3$

由传递性　$l_2 \leqq l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$，$l_3 \leqq l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$

故　$l_1 \vee l_2 \leqq l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$，$l_3 \leqq l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$

因此　$(l_1 \vee l_2) \vee l_3 \leqq l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$

同理可证　$l_1 \vee (l_2 \vee l_3) \leqq (l_1 \vee l_2) \vee l_3$

再由反对称性　$(l_1 \vee l_2) \vee l_3 = l_1 \vee (l_2 \vee l_3)$

保序性的证明：若 $l_1 \leqq l_3, l_2 \leqq l_4$ 则 $l_1 \wedge l_2 \leqq l_3 \wedge l_4$ $\mathbf{l_1 \vee l_2 \leqq l_3 \vee l_4}$

若 $l_1 \leqq l_3, l_2 \leqq l_4$

则 $l_1 \wedge l_2 \leqq l_1 \leqq l_3$，$l_1 \wedge l_2 \leqq l_2 \leqq l_4$

故 $l_1 \wedge l_2 \leqq l_3 \wedge l_4$

又 $l_1 \leqq l_3 \leqq l_3 \vee l_4$，$l_2 \leqq l_4 \leqq l_3 \vee l_4$

因此 $l_1 \vee l_2 \leqq l_3 \vee l_4$

<u>格是代数系统</u>

格也可从代数系统的角度定义。

格的两个运算∧,∨满足多个性质，但**交换律**、**结合律**、**吸收律**是最基本的，其它的所有性质都可从这三个性质推出来。

<u>定义7-5</u>：设〈L;∧,∨〉是一个代数系统，∧和∨是L上的两个二元运算，若这两个运算满足

（1）***交换律***

（2）***结合律***

（3）***吸收律***

则称该代数系统为**格**。

<u>因此，偏序关系 ➔ 格(代数系统)，</u>

<u>反过来，由格（代数系统） ➔ 一个偏序关系，使之满足任意两个元素都存在最大下界和最小上界，</u>

<u>即两种定义是等价的</u>。

证明:

设〈L; $\wedge$, $\vee$〉是一个格(代数系统)，定义L上的关系≦：对于任意的$l_1, l_2 \in L$，当且仅当$l_1 \vee l_2 = l_2$时，有$l_1 \leq l_2$。

$$l_1 \vee l_2 = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad l_1 \leq l_2$$

1）由**等幂律**，对于任一$l \in L$，有$l \vee l = l$，所以$l \leq l$，关系≦**自反**。

2）设 $l_1 \leq l_2$且$l_2 \leq l_1$，

则 $l_1 \vee l_2 = l_2$且$l_1 \vee l_2 = l_1$。

由**交换律** $l_1 \vee l_2 = l_2 \vee l_1$，即$l_1 = l_2$，

故关系≦**反对称**。

3）设 $l_1 \leq l_2$且$l_2 \leq l_3$，

则 $l_1 \vee l_2 = l_2$且$l_2 \vee l_3 = l_3$。

由**结合律** $l_1 \vee l_3 = l_1 \vee (l_2 \vee l_3) = (l_1 \vee l_2) \vee l_3 = l_2 \vee l_3 = l_3$，

即 $l_1 \leq l_3$。

关系≦**传递**。

因此关系≦是偏序关系。

再看最大下界和最小上界。

由**交换律**、**结合律**和**等幂律**

$$l_1 \vee (l_1 \vee l_2) = (l_1 \vee l_1) \vee l_2 = l_1 \vee l_2$$

有 $l_1 \leq l_1 \vee l_2$

同理 $(l_1 \vee l_2) \vee l_2 = l_1 \vee (l_2 \vee l_2) = l_1 \vee l_2$

有 $l_2 \leq l_1 \vee l_2$

$l_1 \vee l_2$是l_1和l_2的**上界**。

若存在元素$l_3 \in L$，使

$$l_1 \leq l_3,\ l_2 \leq l_3$$

则 $l_1 \vee l_3 = l_3$，$l_2 \vee l_3 = l_3$。

因此 $(l_1 \vee l_2) \vee l_3 = l_1 \vee (l_2 \vee l_3) = l_1 \vee l_3 = l_3$

故 $l_1 \vee l_2 \leq l_3$

即 $lub(l_1, l_2) = l_1 \vee l_2$ 是**最小上界**。

由**吸收律** $l_1 \vee (l_1 \wedge l_2) = l_1$，$l_2 \vee (l_1 \wedge l_2) = l_2$

则 $l_1 \wedge l_2 \leqq l_1$，$l_1 \wedge l_2 \leqq l_2$

$l_1 \wedge l_2$是l_1和l_2的**下界**。

若存在元素$l_3 \in L$，使

$l_3 \leqq l_1$，$l_3 \leqq l_2$

则 $l_1 \wedge l_3 = l_3$，$l_2 \wedge l_3 = l_3$。

$$
\begin{aligned}
l_3 \wedge (l_1 \wedge l_2) &= (l_1 \wedge l_3) \wedge l_2 \\
&= l_3 \wedge l_2 \\
&= l_3
\end{aligned}
$$

故 $l_3 \leqq l_1 \wedge l_2$

即 $glb(l_1, l_2) = l_1 \wedge l_2$ **是最大下界**

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

验证： $l_1 \vee l_2 = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad l_1 \wedge l_2 = l_1$

若 $l_1 \vee l_2 = l_2$

则 $l_1 \wedge (l_1 \vee l_2) = l_1 \wedge l_2$

由吸收律 $l_1 \wedge (l_1 \vee l_2) = l_1$

故 $l_1 \wedge l_2 = l_1$

反之，若 $l_1 \wedge l_2 = l_1$

则 $l_1 \vee l_2 = (l_1 \wedge l_2) \vee l_2 = l_2$

因此有 $l_1 \vee l_2 = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad l_1 \wedge l_2 = l_1$

这样由运算∧同样可以定义偏序关系≤：

设〈L;∧,∨〉是一个格，定义L上的关系≤：对于任意的$l_1, l_2 \in L$，当且仅当$l_1 \wedge l_2 = l_1$时，有$l_1 \leq l_2$。

定义7-5 **子格**：设〈L;∧,∨>和〈A;∧,∨〉是**格**，若A⊆L，则称〈A;∧,∨〉是〈L;∧,∨>的子格。

由于A⊆L，∧,∨在L上满足交换律、结合律、吸收律，则在A上也同样满足。故**〈A;∧,∨〉是〈L;∧,∨>子格的条件可弱化为〈A;∧,∨〉是格〈L;∧,∨>的子代数**。

分配格和有补格

定义7-7 **分配格**：若格<L;∨,∧>满足对于任意的$l_1, l_2, l_3 \in L$，有

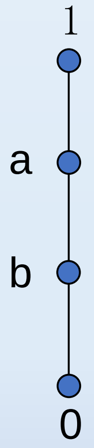
$$l_1 \wedge (l_2 \vee l_3) = (l_1 \wedge l_2) \vee (l_1 \wedge l_3)$$

$$l_1 \vee (l_2 \wedge l_3) = (l_1 \vee l_2) \wedge (l_1 \vee l_3)$$

则称为**分配格**。

例　$\langle 2^U; \cup, \cap \rangle$

例　图（a）是分配格，图（b）不是分配格，b, c, d不满足分配性。

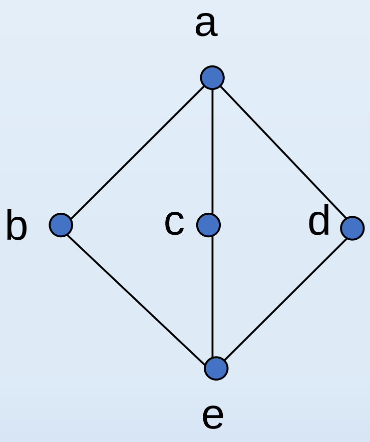


（a）

$b \wedge (c \vee d) = b \wedge a = b$

$(b \wedge c) \vee (b \wedge d)$

$= e \vee e = e$



（b）

定理7-11：设<L;∨,∧>是分配格，则对于任意的$l_1,l_2,l_3\in L$，有

$$l_1\vee l_2=l_1\vee l_3,\ l_1\wedge l_2=l_1\wedge l_3 \quad\Leftrightarrow\quad l_2=l_3$$

证明：设左边成立，则

$$l_2=l_2\vee(l_2\wedge l_1)=l_2\vee(l_3\wedge l_1)=(l_2\vee l_3)\wedge(l_2\vee l_1)$$

$$=(l_2\vee l_3)\wedge(l_3\vee l_1)=l_3\vee(l_2\wedge l_1)=l_3\vee(l_3\wedge l_1)$$

$$=l_3$$

若右边成立，则左边显然成立。

若格有**最大元1**和**最小元0**，则对任意的$l\in L$，有

$$l\vee 1=1;\ l\wedge 1=l$$

$$l\vee 0=l;\ l\wedge 0=0$$

对运算∨而言，0是单位元，1是零元；对运算∧而言，1是单位元，0是零元。

定义7-8 **补**：设<L;∨,∧>是一个有0和1的格，则对于$l\in L$，若存在$\bar{l}\in L$，使

$$l\vee\bar{l}=1,\quad l\wedge\bar{l}=0$$

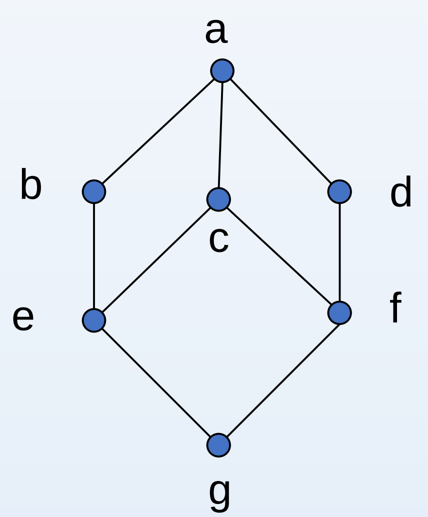
则称$\bar{l}$是l的**补元**。显然$\bar{l}$和l互为补元，而且补元不唯一。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例　b是d和f的补，d和f也是b的补。

e是d和f的补，d和f也是e的补。

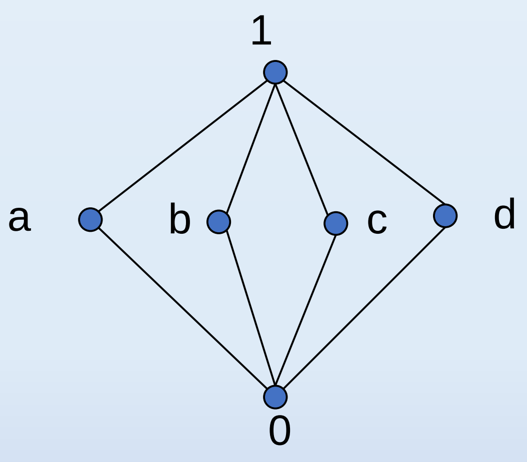
c没有补元。



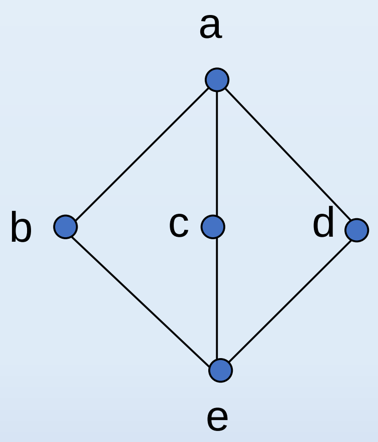
定义7-9 **有补格**：设⟨L; ∨, ∧⟩是一个有0和1的格，若L中的每一个元素都至少有一个补元存在，则称格是**有补格**。

例　⟨2^U; ∪, ∩⟩有补格。

例　图（a）和图（b）都是有补格。



（a）



（b）

有补分配格：若一个格既是分配格又是有补格，则称为有补分配格。

定理7-13 补元的唯一性：有补分配格任意元素的补元是唯一的。

证明；设元素l有两个补元l_1和l_2，则

$l \vee l_1=1$； $l \wedge l_1=0$

$l \vee l_2=1$； $l \wedge l_2=0$

由此 $l \vee l_1= l \vee l_2$； $l \wedge l_1= l \wedge l_2$

因此（分配格定理7-11） $l_1= l_2$

定理7-14 对合律：$\bar{\bar{l}}=l$

定理7-15 德摩根定律：设<L;∨,∧>是一个有补分配格，对于任意的$l_1,l_2 \in L$，有

1） $$\overline{l_1 \vee l_2}=\bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2$$

2） $$\overline{l_1 \wedge l_2}=\bar{l}_1 \vee \bar{l}_2$$

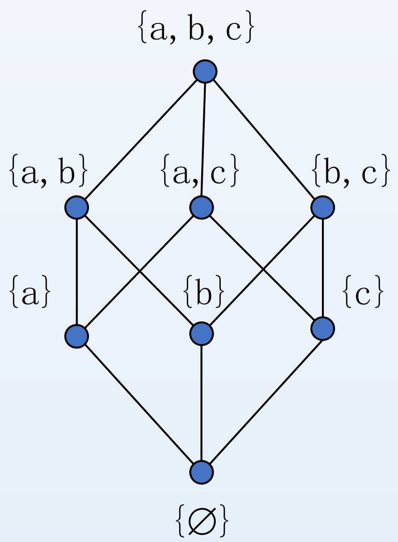
证明：方法同集合代数德摩根定律的证明

1） $$\begin{aligned}(l_1 \vee l_2)\vee(\bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) &= (l_1 \vee l_2 \vee \bar{l}_1)\wedge(l_1 \vee l_2 \vee \bar{l}_2)\\ &= (1 \vee l_2)\wedge(l_1 \vee 1)=1\wedge 1=1\end{aligned}$$

2） $$\begin{aligned}(l_1 \vee l_2)\wedge(\bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) &= (l_1 \wedge \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2)\vee(l_2 \wedge \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2)\\ &= (0 \wedge \bar{l}_2)\vee(0 \wedge \bar{l}_1)=0\vee 0=0\end{aligned}$$

由补元的唯一性 $\overline{l_1 \vee l_2}=\bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平



布尔代数

定义7-10 **布尔代数：有补分配格**，记<B; $\bar{}$, ∨, ∧>

性质：对于任意的x, y, z∈B，有

1）**交换律** $x \vee y = y \vee x$

$x \wedge y = y \wedge x$

2）**结合律** $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

3）**等幂律**　$x \vee x = x$

$x \wedge x = x$

4）**吸收律**　$x \vee (x \wedge y) = x$

$x \wedge (x \vee y) = x$

5）**分配律**　$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

6）**同一律**　$x \vee 0 = x$；　$x \wedge 1 = x$

7）**零一律**　$x \vee 1 = 1$；　$x \wedge 0 = 0$

8）**互补律**　$x \vee \bar{x} = 1$

$x \wedge \bar{x} = 0$

9）**对合律**　$\bar{\bar{x}} = x$

10）德**摩根定律**　$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$

$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

例　集合代数〈2^U; ∪, ∩〉是布尔代数，也有10条性质。

前面所列10条性质，**只有<u>交换</u>、<u>分配</u>、<u>同一</u>和<u>互补</u>是基本的**，因此

<u>可从代数系统的角度重新定义布尔代数</u>——

布尔代数：设B是任意集合，若在B上定义运算$\bar{\ }$,∨,∧满足下面的性质（**Hangtington公理**）

1）对任意的x,y∈B，有

$x\vee y\in B$，$x\wedge y\in B$ **封闭**

2）存在0∈B，对任意的x∈B，有

$x\vee 0=x$

存在1∈B，对任意的x∈B，有

$x\wedge 1=x$ **同一律**

3）对任意的x∈B，存在 $\bar{x}\in B$

$x\wedge\bar{x}=0$ $x\vee\bar{x}=1$ **互补律**

4）对任意x,y∈B，有$x\vee y=y\vee x$

$x\wedge y=y\wedge x$ **交换律**

5） $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$

$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$ **分配律**

<u>则称<B;$\bar{\ }$,∨,∧>为布尔代数</u>。

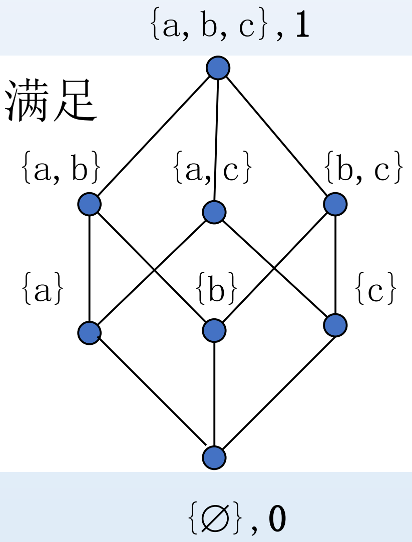
子布尔代数：设$<B;{}^{-},\wedge,\vee>$和$\langle A;{}^{-},\wedge,\vee\rangle$是**布尔代数**，若$\mathbf{A\subseteq L}$，则称$\langle A;{}^{-},\wedge,\vee\rangle$是$<B;{}^{-},\wedge,\vee>$的子布尔代数。

定理7-20 布尔代数的<u>任意子代数</u>都是它的子布尔代数。（这与子格的情况相同）

7.6 有限布尔代数的同构

布尔代数的构造

布尔代数存在着类似于半群生成子的一些元素，所有元素都可通过它们的运算表示出来，不同的是*它所有的元素都是幂等的*。



定义7-11 **原子**：设〈B;¯,∧,∨>是布尔代数，若存在元素a∈B，满足

（1）$a \neq 0$

（2）对于一切的x∈B，有

$x \wedge a = a$，或 $x \wedge a = 0$

称a为**原子**。

从偏序角度看

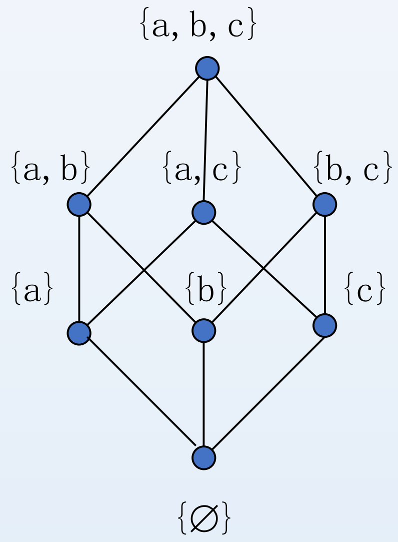
（1）**$a \neq 0$**

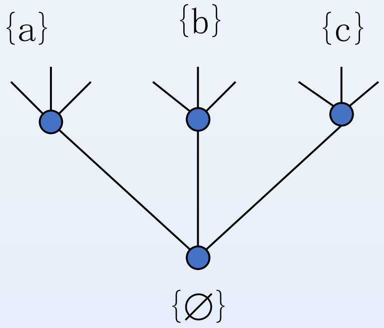
（2）$x \wedge a = a \Leftrightarrow \mathbf{a \leqq x}$；$x \wedge a = 0 \Leftrightarrow \mathbf{0 \leqq a}$，$0 \leqq x$

即$0 < a \leq x$

这表明**在0和原子之间无任何元素**，**或原子a是仅比0大的元素**。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平





<u>**问题**</u>：布尔代数是否一定存在原子？

定理7-22 <u>有限布尔代数的原子存在性定理</u>：设$\langle B;\bar{\ },\wedge,\vee\rangle$是<u>有限布尔代数</u>，则对于每一非零元素$x\in B$，一定存在原子$a$，使$x\wedge a=a$（或$a\leqq x$）。

证明：

（1）若x是原子，问题已证。

（2）若x不是原子，由于$x\neq 0$，必存在y，使

$$y\wedge x\neq x \text{ 且 } y\wedge x\neq 0$$

令$y\wedge x=x_1$，则

$$0<x_1<x$$

若x_1不是原子，则必存在x_2，使

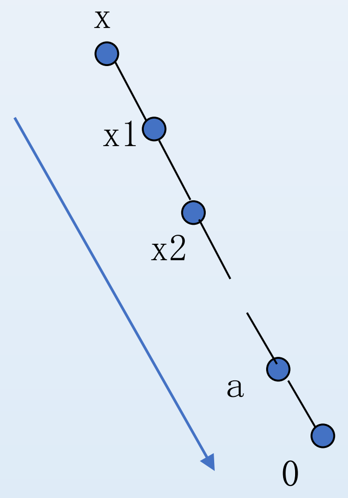
$$0<x_2<x_1<x$$

因此可以得到序列

$$0<\cdots<x_3<x_2<x_1<x$$

由于B有限，必存在原子$a\in B$，使序列在a中止

$$0<a<\cdots<x_3<x_2<x_1<x$$



定理7-23 如果a_1和a_2是布尔代数<B;¯,∧,∨>的两个原子，且$a_1 \wedge a_2 \neq 0$，则$a_1 = a_2$。

证明：因a_1是原子，若$a_1 \wedge a_2 \neq 0$，则

$$a_1 \wedge a_2 = a_1$$

因a_2是原子，若$a_1 \wedge a_2 \neq 0$，则

$$a_1 \wedge a_2 = a_2$$

所以，若$a_1 \wedge a_2 \neq 0$，　则，$a_1 = a_2$

定理7-24 布尔代数的原子表示定理：设<B;¯,∧,∨>是布尔代数，x是B的任意非零元素，

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$$

是B中满足$a_i \leq x$的所有原子，则x可表示为

$$x = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \cdots \vee a_n$$

证明：令　$y = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \cdots \vee a_n$

则　$y \leq x$

如能证明　$y \geq x$，　则　$x = y$。

若能证明 $x \wedge \bar{y} = 0$

则 $y = y \vee (x \wedge \bar{y})$

$= ((y \vee x) \wedge (y \vee \bar{y})) = y \vee x$

即 $y \geq x$

假定 $x \wedge \bar{y} \neq 0$

由原子存在性定理，必然存在原子$a \in B$，满足

$$a \leq x \wedge \bar{y}$$

因此有 $a \leq x,\quad a \leq \bar{y}$

然而 $a \leq x, \quad \Rightarrow \quad a = a_i \leq y$

故有 $a \leq y \wedge \bar{y} = 0$

即 $a=0$

原子不存在，与假设矛盾。

<u>**定理7-25**</u> **唯一性定理：** x的原子并表示方法是唯一的。

推论： 所有原子的并等于最大元（1）。

定理7-26：设$\langle B;\bar{\ },\wedge,\vee\rangle$是有限布尔代数，M代表B中所有原子的集合，则$\langle B;\bar{\ },\wedge,\vee\rangle$与$\langle 2^M;',\cap,\cup\rangle$同构。

证明：定义函数$h:B\to 2^M$

$$h(x)=\begin{cases}\varnothing & x=0\\ \{a\mid a\in M, a\le x\} & x\ne 0\end{cases}$$

h是一个双射。

对任意元素$x,y\in B$，设

$x=a_1\vee a_2\vee a_3\vee\cdots\vee a_m$， $y=b_1\vee b_2\vee b_3\vee\cdots\vee b_n$

则 $h(x)=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$， $h(y)=\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n\}$

$x\vee y=a_1\vee a_2\vee a_3\vee\cdots\vee a_m\vee b_1\vee b_2\vee b_3\vee\cdots\vee b_n$

$h(x\vee y)=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m;b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n\}=h(x)\cup h(y)$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

由分配律$x\wedge y=(a_1\vee a_2\vee a_3\vee\cdots\vee a_m)\wedge(b_1\vee b_2\vee b_3\vee\cdots\vee b_n)$

$$= \bigvee_{i}^{m}\bigvee_{j}^{n}(a_i \wedge b_j)$$

由原子的性质可知

$$a_i \wedge b_j = \begin{cases} a_i = b_j = c_k & a_i = b_j \\ 0 & a_i \neq b_j \end{cases}$$

故 $$x \wedge y = \bigvee_{k}^{l} c_k$$

$$h(x\wedge y)=\{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_l\}=h(x)\cap h(y)$$

因 $$x \vee \bar{x} = 1$$

所以 $$h(x \vee \bar{x}) = h(x) \cup h(\bar{x}) = M$$

又 $$x \wedge \bar{x} = 0$$

所以 $$h(x \wedge \bar{x}) = h(x) \cap h(\bar{x}) = \varnothing$$

即 $$h(\bar{x}) = (h(x))'$$

满足同态方程，$\langle B;\bar{}\,,\wedge,\vee\rangle$与$\langle 2^M;\,',\cap,\cup\rangle$同构。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

定理**7-27**：有限布尔代数域的基数是2的幂(#B=2^M)，域相同的布尔代数同构。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

7.8 布尔表达式和布尔函数

<u>布尔表达式</u>

<u>布尔表达式的递归定义</u>：设<B;¯,∧,∨>是布尔代数，则

（1）B中的**元素**都是布尔表达式；

（2）**变量**$x_1,x_2,\ldots,x_n$是布尔表达式；

（3）若e_1和e_2是布尔表达式，则$\mathbf{e_1\wedge e_2}$，$\mathbf{e_1\vee e_2}$，$\bar{e}_1$， $\bar{e}_2$也是布尔表达式；

（4）只有(1),(2),(3)定义的表达式才是布尔表达式。

也称为**n个变量的布尔函数**，记为$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,与一般函数的写法相同。

例 $<\{0,\alpha,\beta,1\};\bar{\ },\wedge,\vee>$ 是布尔代数，则

$0\wedge\alpha$，$1\vee(\alpha\wedge\bar{x}_1)\vee$ 是布尔函数。

相等：若两个具有n个变量的布尔函数$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$和$f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，对n个变量的任意赋值，有相同的值，称**两布尔函数相等**。

有了相等的定义后，布尔代数的所有性质都可用于布尔函数的等式变换。

例　下表定义了布尔代数

x	$\bar{x}$
0	1
α	β
β	α
1	0

∨	0	α	β	1
0	0	α	β	1
α	α	α	1	1
β	β	1	β	1
1	1	1	1	1

∧	0	α	β	1
0	0	0	0	0
α	0	α	0	α
β	0	0	β	β
1	0	α	β	1

布尔函数

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= (\beta\wedge\bar{x}\wedge y)\vee(\beta\wedge x\wedge\overline{(x\vee\bar{y})})\vee(\alpha\wedge(x\vee(\bar{x}\wedge y)))\\
&= (\beta\wedge\bar{x}\wedge y)\vee(\beta\wedge x\wedge\bar{x}\wedge y)\vee(\alpha\wedge x)\vee(\alpha\wedge(\bar{x}\wedge y)\\
&= ((\beta\vee\alpha)\wedge(\bar{x}\wedge y))\vee(\alpha\wedge x)\\
&= (\bar{x}\wedge y)\vee(\alpha\wedge x)
\end{aligned}
$$

等式变换运算。

最小项和最大项范式

定义7-13 **最小项**：布尔表达式 $\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_2 \wedge \cdots \wedge x_n$ 称为**n个变量产生的最小项**。其中

$\hat{x}_i = x_i$ 或 $\bar{x}_i$

通常记 $m_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \hat{x}_1 \wedge \hat{x}_2 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_n$ $\delta_1 \ldots \delta_2\delta_n$为二进制数，有$2^n$个最小项。

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \hat{x}_i = x_i \\ 0 & \hat{x}_i = \bar{x}_i \end{cases}$$

例

$$m_{1111} = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

$$m_{0101} = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4$$

例

$$x_1 \wedge x_2 = (x_1 \wedge x_2) \wedge 1 = (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$$

定义7-13 **最大项**：

$$\tilde{m}_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = \hat{x}_1 \vee \hat{x}_2 \vee \cdots \vee \hat{x}_n \qquad \delta_i = \begin{cases} 0 & \hat{x}_i = x_i \\ 1 & \hat{x}_i = \bar{x}_i \end{cases}$$

例 $\tilde{m}_{0000} = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$

$\tilde{m}_{0010} = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$

k相同的最小项和最大项满足摩根定律。如

$$m_{1111} = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4, \qquad \tilde{m}_{1111} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$$

定理7-29 布尔代数<B;¯,∧,∨>上由x1,x2,…, xn产生的每一个布尔表达式均能表示成：

最小项标准形式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigvee_{k=00\cdots0}^{11\cdots1} (c_k \wedge m_k)$

最大项标准形式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigwedge_{k=00\cdots0}^{11\cdots1} (c_k \vee \tilde{m}_k)$

系数 $c_{k=\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} = f(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$

（证明见书）

因系数c_k唯一，范式也是唯一的。有2^n个c_k，而$c_k \in B$，所以*有$(\#B)^{2^n}$个布尔函数*。

利用函数表，立即可写出布尔表达式的标准形式，再进行化简。

例如，假设 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是 $(B; -, \vee, \wedge)$ 上由 x_1, x_2, x_3 产生的一个布尔表达式，根据(7-15)式，它可以表示成如下形式：

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= [c_{000} \wedge m_{000}] \vee [c_{001} \wedge m_{001}] \vee \cdots \vee [c_{110} \wedge m_{110}] \\
&\quad \vee [c_{111} \wedge m_{111}] \\
&= [f(0,0,0) \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3] \vee [f(0,0,1) \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3] \vee \\
&\quad \cdots \vee [f(1,1,0) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3] \vee [f(1,1,1) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge x_3].
\end{aligned}
$$

例 2 对例 1 中的布尔表达式

$$f(x,y)=(\beta\wedge\bar{x}\wedge y)\vee(\beta\wedge x\wedge(\overline{x\vee\bar{y}}))\vee(\alpha\wedge(x\vee(\bar{x}\wedge y)))$$

运用表 7-7，可写出其最小项标准形式和最大项标准形式如下：

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	α	α
0	β	β
0	1	1
α	0	α
α	α	α
α	β	1
α	1	1
β	0	0
β	α	α
β	β	0
β	1	α
1	0	α
1	α	α
1	β	α
1	1	α

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(c_{00}\wedge m_{00})\vee(c_{01}\wedge m_{01})\vee(c_{10}\wedge m_{10})\vee(c_{11}\wedge m_{11})\\&=(f(0,0)\wedge\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(f(0,1)\wedge\bar{x}\wedge y)\vee(f(1,0)\wedge x\wedge\bar{y})\\&\quad\vee(f(1,1)\wedge x\wedge y)\\&=(0\wedge\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(1\wedge\bar{x}\wedge y)\vee(\alpha\wedge x\wedge\bar{y})\vee(\alpha\wedge x\wedge y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(c_{00}\vee\tilde{m}_{00})\wedge(c_{01}\vee\tilde{m}_{01})\wedge(c_{10}\vee\tilde{m}_{10})\wedge(c_{11}\vee\tilde{m}_{11})\\&=(f(0,0)\vee x\vee y)\wedge(f(0,1)\vee x\vee\bar{y})\wedge(f(1,0)\vee\bar{x}\vee y)\\&\quad\wedge(f(1,1)\vee\bar{x}\vee\bar{y})\\&=(0\vee x\vee y)\wedge(1\vee x\vee\bar{y})\wedge(\alpha\vee\bar{x}\vee y)\wedge(\alpha\vee\bar{x}\vee\bar{y}).\end{aligned}$$

还可运用布尔代数的10条基本性质得到：

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= (\beta \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\beta \wedge x \wedge (\overline{x \vee \bar{y}})) \vee (\alpha \wedge (x \vee (\bar{x} \wedge y))) \\
&= (\beta \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\beta \wedge x \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x) \vee (\alpha \wedge \bar{x} \wedge y) \\
&= (\bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x) \\
&= (\bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x \wedge y) \vee (\alpha \wedge x \wedge \bar{y}) \\
&= (0 \wedge \bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (1 \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x \wedge \bar{y}) \vee (\alpha \wedge x \wedge y).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= (\beta \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (\beta \wedge x \wedge (\overline{x \vee \bar{y}})) \vee (\alpha \wedge (x \vee (\bar{x} \wedge y))) \\
&= (\bar{x} \wedge y) \vee (\alpha \wedge x) \\
&= (\alpha \vee \bar{x}) \wedge (\alpha \vee y) \wedge (x \vee y) \\
&= (\alpha \vee \bar{x} \vee y) \wedge (\alpha \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\alpha \vee x \vee y) \wedge (x \vee y) \\
&= (0 \vee x \vee y) \wedge (\alpha \vee \bar{x} \vee y) \wedge (\alpha \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \\
&= (0 \vee x \vee y) \wedge (1 \vee x \vee \bar{y}) \wedge (\alpha \vee \bar{x} \vee y) \wedge (\alpha \vee \bar{x} \vee \bar{y}).
\end{aligned}
$$

作业

3，4，12，19，25，26，34，35

内容提要

1. 格的基本概念

- 偏序集、上界、下界、最大下界、最小上界、最小元素、最大元素；
- 最大下界、最小上界若存在，则唯一；
- 最小元素、最大元素若存在，则唯一；
- 格、子格.

2. 格的性质

- 格的十条基本性质；
- 格的对偶原理；
- 格中的运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足交换律、结合律、等幂律、吸收律；
- 格的保序性.

3. 特殊的格

- 分配格；

- 有补格；
- 有补分配格、布尔代数.

4. 布尔代数的性质

- 布尔代数中运算$\vee$，$\wedge$，$-$，满足十条基本性质，其中交换律、分配律、同一律和互补律独立；
- 原子；
- 有限布尔代数$\langle B;-,\vee,\wedge\rangle$同构于一集合代数$\langle 2^M;',\cup,\cap\rangle$.

5. 布尔表达式

例题讲

例 7-1 设 $L=\{1,2,\cdots,12\}$，在 L 上定义整除关系.

(1) $\langle L;|\rangle$是否是偏序集，若是，画出其 Hasse 图；

(2) 在 L 中找 8 与 12 的最大下界和最小上界，4 与 6 的最大下界和最小上界；

(3) 在 L 中找最小元素和最大元素.

解 (1) 因为在 L 上整除关系"|"满足自反性、反对称、传递性，所以$\langle L;|\rangle$是偏序集，其 Hasse 图如图 7-1 所示.

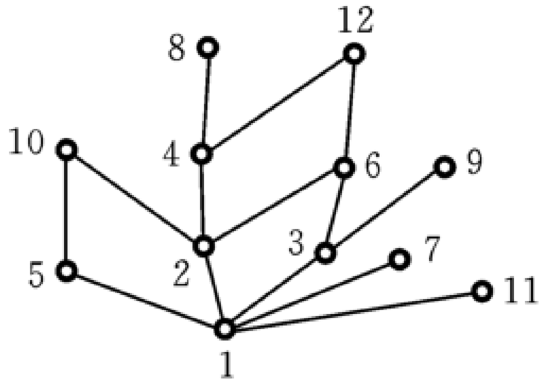


图 7-1

(2) 因为 $1|8,2|8,4|8,1|12,2|12,4|12$，所以 $1,2,4$ 均是 8 与 12 的下界，但由于 $1|4,2|4$，故 4 是最大下界.

在 L 中设有元素 a 能满足 $8|a$，且 $12|a$，故 8 与 12 无上界，从而无最小上界.

另一方面，因为 $1|4,2|4,1|6,2|6$，所以 1,2 均是 4 与 6 的下界，但由于 $1|2$，因此 2 是 4 与 6 的最大下界.

因为 $4|12,6|12$，所以 12 是 4 与 6 的上界，在 L 中设有元素 b 能满足 $4|b,6|b$，且 $b|12$，所以 12 是 4 与 6 的最小上界.

(3) 因为对任意的 $a\in L,1|a$，所以 1 是 L 的最小元素.

在 L 中没有元素 x 能满足，对任意 $l\in L,l|x$，所以 L 无最大元素.

例 7-2 由图 7-2 所示的偏序集⟨L;≤⟩,哪一个是格? 为什么?

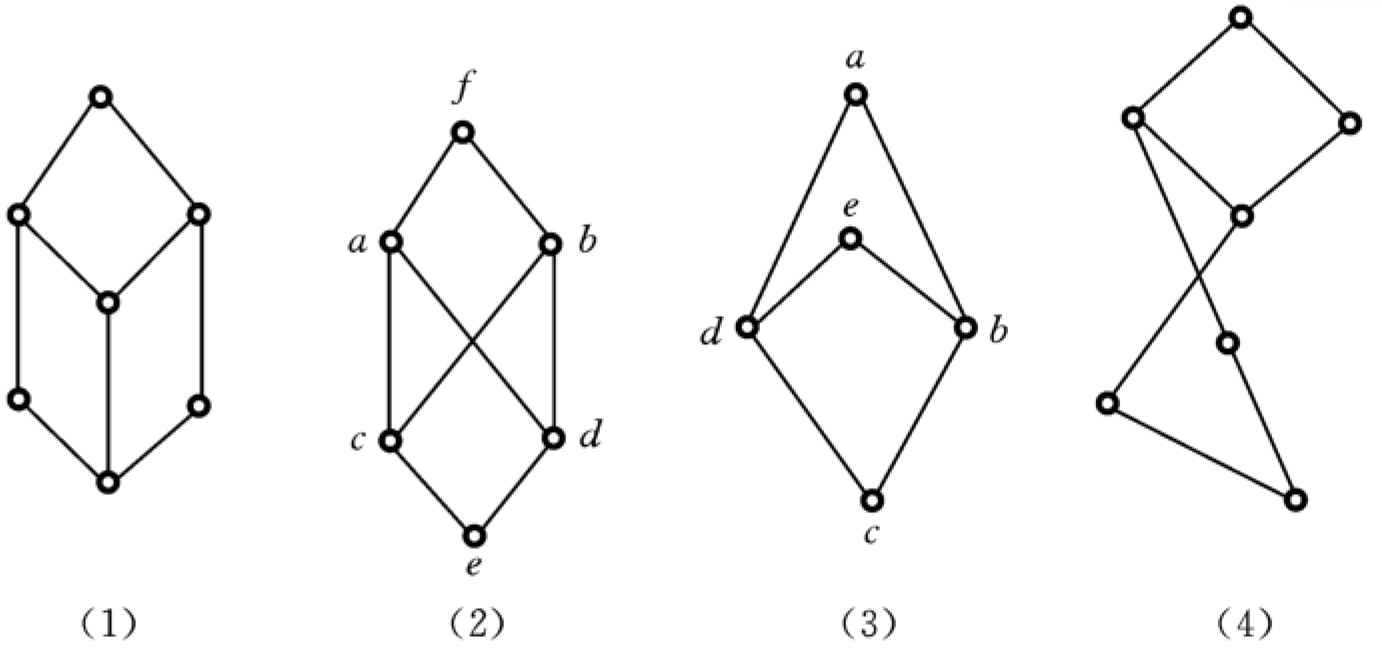


图 7-2

解 图 7-2(1)和图 7-2(4)所表示的偏序集是格,因为 L 中任意两元素均有最大下界和最小上界.

图 7-2(2)所表示的偏序集不是格,因为 c 与 d 有上界 a,b 和 f,但由于 a 与 b 不可比较(即 $a \not\leq b$,且 $b \not\leq a$),所以 c 与 d 无最小上界. 故不是格.

图 7-2(3)所表示的偏序集也不是格,因为 e 与 a 没有最大下界.

例 7-6 设 $B=\{0,1\}$，$B^3=\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_i\in B\}$，证明 $\langle B^3;\vee,\wedge\rangle$ 是一个格，其中，对任意的 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\in B^3$，有

$$(a_1,a_2,a_3)\vee(b_1,b_2,b_3)=(\max\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\},\max\{a_3,b_3\}),$$

$$(a_1,a_2,a_3)\wedge(b_1,b_2,b_3)=(\min\{a_1,b_1\},\min\{a_2,b_2\},\min\{a_3,b_3\}).$$

解 由定义知 $\vee,\wedge$ 是 B 上的二元运算. 因为对 $\forall a,b,c\in B$，有

$$\max\{a,b\}=\max\{b,a\},\quad \min\{a,b\}=\min\{b,a\},$$

$$\max\{a,\max\{b,c\}\}=\max\{\max\{a,b\},c\}=\max\{a,b,c\},$$

$$\min\{a,\min\{b,c\}\}=\min\{\min\{a,b\},c\}=\min\{a,b,c\},$$

所以运算 $\wedge,\vee$ 满足交换律和结合律.

又对任意的 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\in B^3$，有

$$(a_1,a_2,a_3)\wedge[(a_1,a_2,a_3)\vee(b_1,b_2,b_3)]$$

$$=(a_1,a_2,a_3)\wedge(\max\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\},\max\{a_3,b_3\})$$

$$=(\min\{a_1,\max\{a_1,b_1\}\},\min\{a_2,\max\{a_2,b_2\}\},\min\{a_3,\max\{a_3,b_3\}\}).$$

若 $a_1 \geqslant b_1$，则

$$\min\{a_1, \max\{a_1, b_1\}\} = \min\{a_1, a_1\} = a.$$

若 $a_1 < b_1$，则

$$\min\{a, \max\{a_1, b_1\}\} = \min\{a_1, b_1\} = a.$$

所以 $$(a_1, a_2, a_3) \wedge [(a_1, a_2, a_3) \vee (b_1, b_2, b_3)] = (a_1, a_2, a_3).$$

类似可证

$$(a_1, a_2, a_3) \vee [(a_1, a_2, a_3) \wedge (b_1, b_2, b_3)] = (a_1, a_2, a_3).$$

所以运算 $\wedge$，$\vee$ 满足吸收律，故 $\langle B^3; \vee, \wedge \rangle$ 是一个格.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

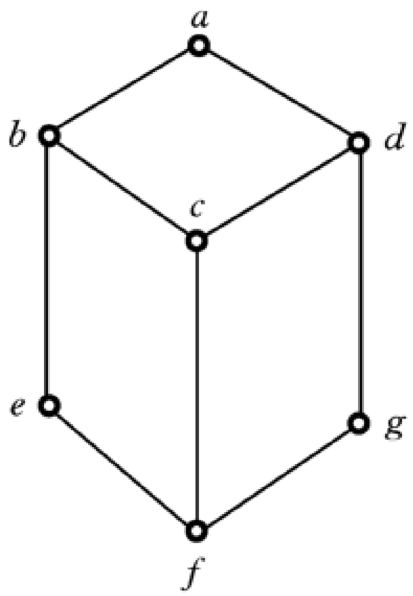


图 7-3

例 7-7 设$\langle L;\leqslant\rangle$是格，其 Hasse 图如图 7-3 所示，取 $S_1=\{a,b,c,d\}$，$S_2=\{a,b,d,f\}$，$S_3=\{b,c,d,f\}$，问$\langle S_1;\leqslant\rangle$，$\langle S_2;\leqslant\rangle$，$\langle S_3;\leqslant\rangle$中哪些是格？哪些是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格.

解 （1）对 $\forall x,y\in S_1$，由 Hasse 图知 $\mathrm{glb}(x,y)=x\wedge y\in S_1$，$\mathrm{lub}(x,y)=x\vee y\in S_1$.

所以，$\langle S_1;\leqslant\rangle$是格，且是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格.

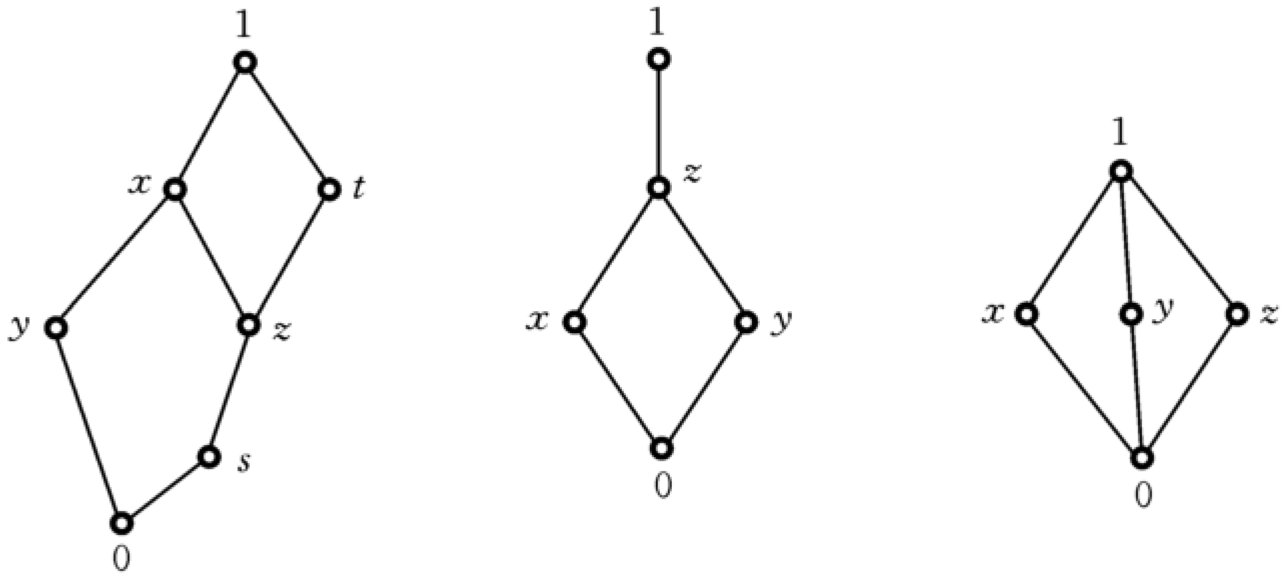
（2）$b,d\in S_2$，$\mathrm{glb}(b,d)=f\in S_2$，$\mathrm{lub}(b,d)=a\in S_2$ 可以验证 S_2 中，任意两元素的最大下界和最小上

$\wedge$ 在 S_2 中不封闭. 因此，$\langle S_2;\leqslant\rangle$不是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格.

（3）b,d 在 S_3 中无最小上界，故$\langle S_3;\leqslant\rangle$不是格.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 7-8　如图 7-4 所示的几个次序图均是格，哪个是分配格？哪个是有补格？



(a)　　(b)　　(c)

图 7-4

不是分配格 不是有补格	是分配格 不是有补格	不是分配格 是有补格

解　这三个格均是有界格.

(1) 因为图 7-4(a)中 x 无补元,故它不是有补格.

又因为

$$z\wedge(y\vee s)=z\wedge x=z,$$

$$(z\wedge y)\vee(z\wedge s)=0\vee s=s.$$

所以 $z\wedge(y\vee s)\neq(z\wedge y)\vee(z\wedge s)$,故图 7-4(a)也不是分配格.

(2) 因为图 7-4(b)中 z 无补元,故它不是有补格. 可以验证,图 7-4(b)中任意三元素满足分配等式,故是分配格.

(3) 图 7-4(c)中 0,1 互补,x,y,z 两两互补,故图 7-4(c)是一有补格. 又因为

$$x\wedge(y\vee z)=x\wedge 1=x,$$

$$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=0\vee 0=0,$$

所以

$$x\wedge(y\vee z)\neq(x\wedge y)\vee(x\wedge z),$$

故图 7-4(c)不是分配格.

例 7-10 设$\langle B;', \vee, \wedge\rangle$为布尔代数，$\# B \geqslant 2$，任取 $a \in B, a \neq 0, a \neq 1$，证明$\langle T;', \vee, \wedge\rangle$是 B 的一子代数，且是布尔代数，其中 $T=\{0, a, a', 1\}$.

解 对 T 中各元素的运算表如表 7-1 所示.

因 B 是布尔代数，且由运算表 7-1 知，T 对 $\vee, \wedge, '$封闭，故是 B 的子代数. 故根据定理 7.7.1 知，$\langle T; \vee, \wedge, '\rangle$也是一布尔代数.

表 7-1

$\vee$	0	a	a'	1
0	0	a	a'	1
a	a	a	1	a
a'	a'	1	a'	a
1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	a'	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
a'	0	0	a'	a'
1	0	a	a'	1

‘	
0	1
a	a'
a'	a
1	0

例 7-11 设 $S=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$,在 S 上定义整除关系"1",则 $\langle S;|\rangle$ 是一个有补分配格,即布尔代数,求其所有的原子,以及 $x=10$,$x=15$ 的原子表达式.

解 $\langle S;1\rangle$ 的 Hasse 图如图 7-5 所示.

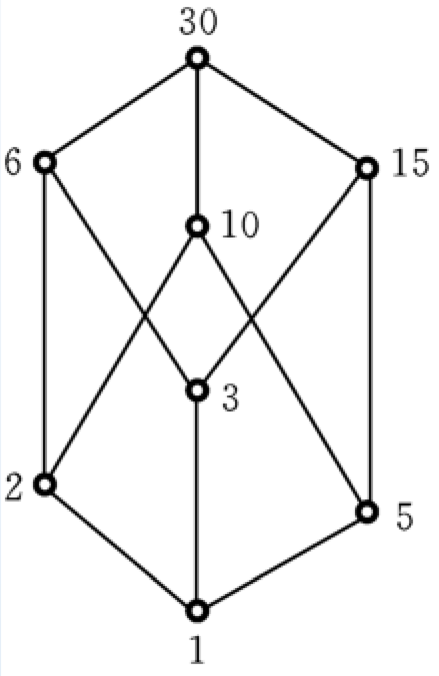


图 7-5

由 Hasse 图可验证 $\langle S;|\rangle$ 是一有补分配格,即布尔代数,最小元素是 1,最大元素是 30.

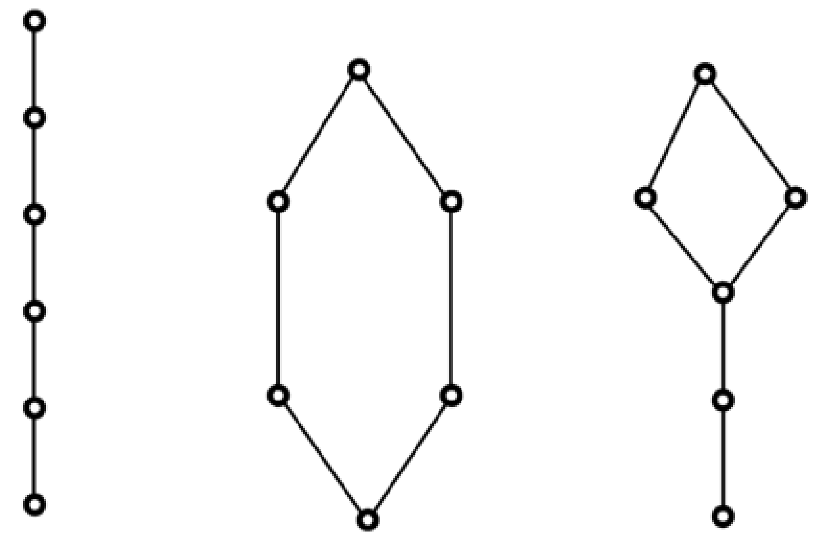
因为 $a=2\neq1$(最小元素,相当于 0),且对任意 $x\in B$,$x\wedge2=2$ 或 $x\wedge2=1$,所以 2 是原子. 类似可验证 3,5 也是原子,该布尔代数 $\langle S;',\vee,\wedge\rangle=\langle S;|\rangle$ 的所有原子为 2,3,5.

$x=10$ 和 $x=15$ 的原子表达式分别为 $10=2\vee5$,$15=3\vee5$.

例 7-13 作出满足下述要求的六元素格:(1) 全序;(2) 有补格;(3) 分配格.是否有六元素的布尔代数?

解 满足要求的各六元素格的 Hasse 图如图 7-6 所示.

由于 6 不是 2 的幂,所以没有六个元素的布尔代数.



(1) (2) (3)

图 7-6

例 7-17 设$\langle L;\leqslant\rangle$是一有界分配格，$L_1$ 是 L 中所有具有补元的元素组成的集合. 试证明$\langle L_1;\leqslant\rangle$是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格.

证 对任意 $l_1, l_2 \in L_1$，即 $\exists \bar{l}_1, \bar{l}_2 \in L$ 使 $l_1 \wedge \bar{l}_1 = 0, l_1 \vee \bar{l}_1 = 1, l_2 \wedge \bar{l}_2 = 0, l_2 \vee \bar{l}_2 = 1$.

$$(l_1 \vee l_2) \wedge (\bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) = (l_1 \wedge \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) \vee (l_2 \wedge \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) = 0 \vee 0 = 0,$$

$$(l_1 \vee l_2) \vee (\bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) = (l_1 \vee l_2 \vee \bar{l}_1) \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \bar{l}_2) = 1 \vee 1 = 1,$$

所以$\overline{l_1 \vee l_2} = \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2$， $l_1 \vee l_2 \in L_1$.

类似地，有

$$(l_1 \wedge l_2) \wedge (\bar{l}_1 \vee \bar{l}_2) = (l_1 \wedge l_2 \wedge \bar{l}_1) \vee (l_1 \wedge l_2 \wedge \bar{l}_2) = 0,$$

$$(l_1 \wedge l_2) \vee (\bar{l}_1 \vee \bar{l}_2) = (l_1 \vee \bar{l}_1 \vee \bar{l}_2) \wedge (l_2 \vee \bar{l}_1 \vee \bar{l}_2) = 1 \wedge 1 = 1.$$

所以
$$\overline{l_1 \wedge l_2} = \bar{l}_1 \vee \bar{l}_2, \quad l_1 \wedge l_2 \in L_1.$$

因此$\langle L_1;\leqslant\rangle$是$\langle L;\leqslant\rangle$的子代数，故$\langle L_1;\leqslant\rangle$是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格.

例 7-18 设$\langle L;\leqslant\rangle$是一个格，如果任意 $a,b,c\in L$，则

$$[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\wedge[(a\wedge b)\vee(b\wedge c)]=a\wedge b.$$

证 由式(7-4′)知

$$a\wedge b\leqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c),$$

$$a\wedge b\leqslant(a\wedge b)\vee(b\wedge c).$$

所以根据定理 7.4.1，有

$$(a\wedge b)\wedge(a\wedge b)\leqslant[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\wedge[(a\wedge b)\vee(b\wedge c)].$$

由幂等律得

$$a\wedge b\leqslant[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\wedge[(a\wedge b)\vee(b\wedge c)].$$

另一方面，由式(7-4)知

$$a\wedge c\leqslant a,\quad a\wedge b\leqslant a.$$

于是由定理 7.4.1 及幂等律得

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leqslant a\vee a=a,$$

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\leqslant b\vee b=b.$$

再根据定理 7.4.1 得

$$[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\wedge[(a\wedge b)\vee(b\wedge c)]\leqslant a\wedge b. \tag{2}$$

由式(1)、式(2)即得

$$[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\wedge[(a\wedge b)\vee(b\wedge c)]=a\wedge b.$$

例 7-19 已知 G 为群，$S(G)$ 为其子群的全体构成的集合，偏序关系是集合的包含关系 $\subseteq$，证明 $\langle S(G);\subseteq\rangle$ 是格。$\langle S(G);\subseteq\rangle$ 是否为 $\langle 2^G;\subseteq\rangle$ 的子格？

证 （1）对任意的 $H_1, H_2 \in S(G)$，易知 $H_1 \cap H_2$ 仍是 G 的子群，所以

$$H_1 \cap H_2 = \mathrm{glb}(H_1, H_2) \in S(G).$$

但 $H_1 \cup H_2$ 不一定仍是子群，故 $\mathrm{lub}(H_1, H_2) = H$，其中 $H_1 \cup H_2 \subseteq H$，H 是包含 $H_1 \cup H_2$ 的 G 中最小子群，最坏情况 $H = G$，故 $H \in S(G)$，因此，$\langle S(G);\subseteq\rangle$ 是格。

（2）$\langle S(G);\subseteq\rangle$ 不是 $\langle 2^G;\subseteq\rangle$ 的子格。

由于不能保证 $H_1 \cup H_2$ 仍是子群，所以，可能 H_1 与 H_2 在 $S(G)$ 中的最小上界 $\mathrm{lub}(H_1, H_2) = H$，但不等于 H_1 与 H_2 在 2^G 中的最小上界 $H_1 \cup H_2$。因此，$\langle S(G);\subseteq\rangle$ 不是 $\langle 2^G;\subseteq\rangle$ 的子格。

例 7-20 设有集合 A,B 和函数 $f:A\to B$，$S\subseteq 2^B$ 定义为 $S=\{y\mid y=f(x),x\in 2^A\}$，试证明 S 对于集合的运算 $\cup$ 和 $\cap$ 构成格 $\langle 2^B;\cup,\cap\rangle$ 的子格.

证 对任意的 $S_1,S_2\in S$，由 S 的定义知，存在 $A_1,A_2\in 2^A$，使 $f(A_1)=S_1$，$f(A_2)=S_2$，于是 $S_1\cup S_2=f(A_1)\cup f(A_2)$，容易证明 $f(A_1)\cup f(A_2)=f(A_1\cup A_2)$，而 $A_1,A_2\in 2^A$，所以 $A_1\cup A_2\in 2^A$.

由 S 的定义知 $f(A_1\cup A_2)\in S$，所以

$$S_1\cup S_2=f(A_1)\cup f(A_2)=f(A_1\cup A_2)\in S,$$

即 S 关于 $\cup$ 运算封闭.

又因 $S_1\subseteq B$，$S_2\subseteq B$，所以 $S_1\cap S_2\subseteq B$. 对任意 $b\in S_1\cap S_2$，有 $b\in S_1=f(A_1)$，即存在 $a\in A$，使 $f(a)=b$. 也就是说，对任意 $b\in S_1\cap S_2$，存在 $a\in A$，使 $f(a)=b$.

于是令集合 $A_3=\{a\mid a\in A,f(a)=b,b\in S_1\cap S_2\}$，显然 $A_3\in 2^A$，且 $S_1\cap S_2=f(A_3)$，从而 $S_1\cap S_2\in S$.

由上可知，S 关于 $\cup$，$\cap$ 封闭，故 $\langle S;\cup,\cap\rangle$ 是 $\langle 2^B;\cup,\cap\rangle$ 的子代数，因此 $\langle S;\cup,\cap\rangle$ 是 $\langle 2^B;\cup,\cap\rangle$ 的子格.

End of Chapter 7