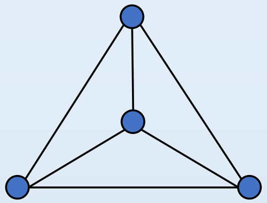
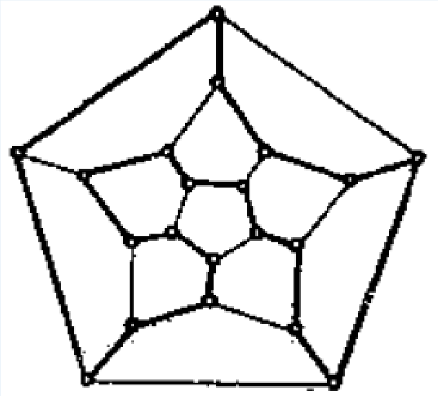
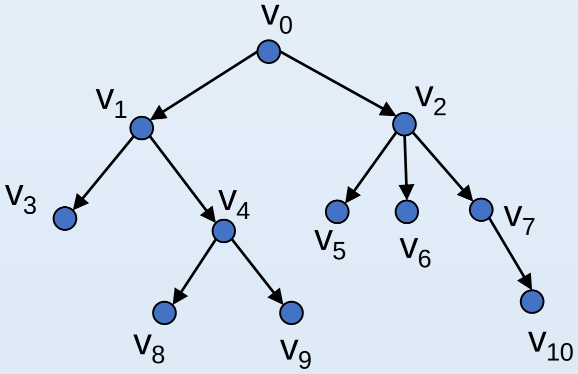
离 散 数 学

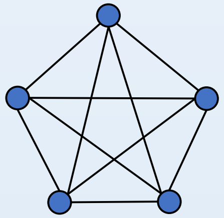
Discrete Mathematics

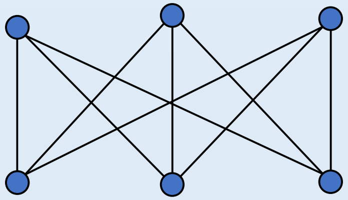
第八章 图 论







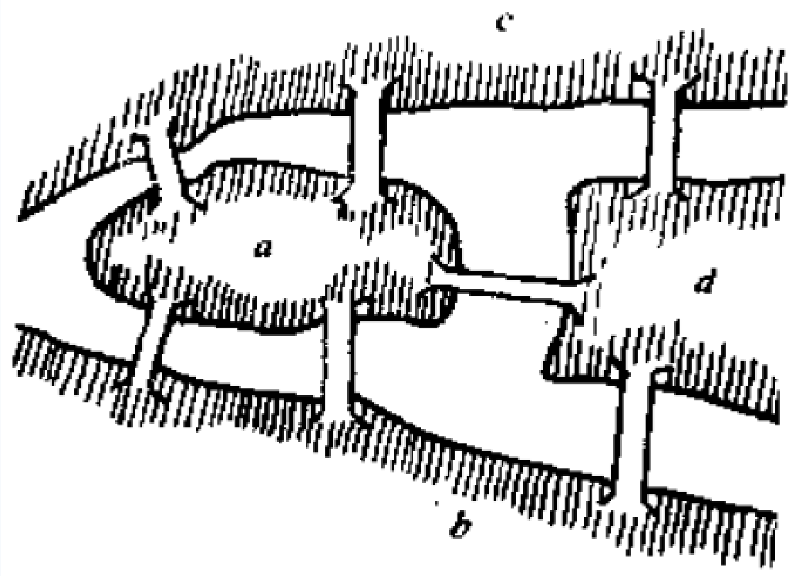


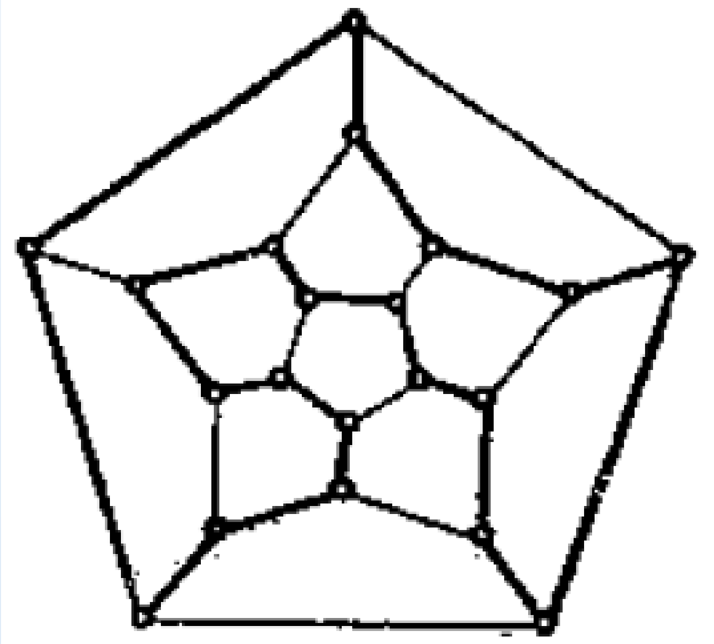


浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

第八章 图 论

图论是一个古老的数学学科，有许多著名的古典问题：**欧拉的七桥问题**，邮递员问题，一笔画问题，**旅行商问题**，四色定理（地图染色），加权图中的最短道路等。印刷电路的布线，电子地图寻找最短道路。



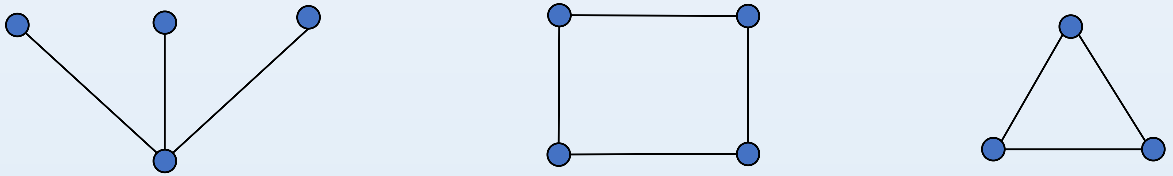


第八章 图 论

8.1 基本概念

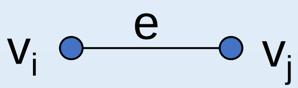
图由点和边构成，<u>**点**和**边**是图的两个要素</u>。

定义8-1 图：设V是一个非空有限集合，E是V上的一个二元关系，则有序二元组(V,E)，记G=(V,E)，称为图。其中V称为**结点集**，E称为**边集**。



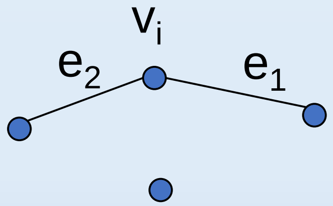
(n,m)图：#V=n，#E=m。(n,0)**零图**，(1,0)**平凡图**。

<u>**邻接点**</u>：点v_i与点v_j邻接



关联：边e与点v_i及v_j关联

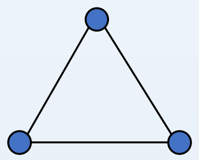
<u>**邻接边**</u>：两条边关联同一个点

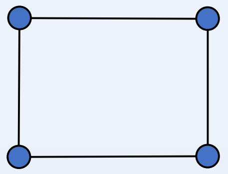


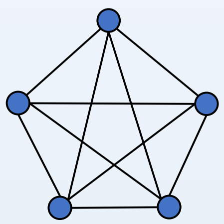
孤立点：没有点与之邻接，或没有边与之关联。

孤立边：没有边与之邻接。

<u>定义8-2</u> ***完全图***：任意两点都是邻接的（任意两点都有边相连）。N个结点的**完全图**记为**K_n**。

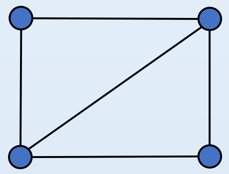


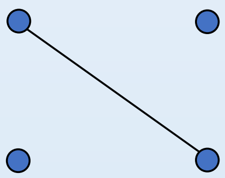




<u>完全图的边数结点数关系</u>　　$m=C_n^2=n(n-1)/2$

<u>定义8-3</u> ***补图***：由图G的***所有结点***和为了使图G成为完全图所需***添加的所有边***构成的图，记 $\overline{G}$ 。





<u>图与补图互为补图</u>。

若将完全图的边集看作全集的话，<u>图与补图的边集互为补集</u>。

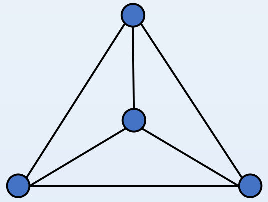
$$K_n=(V,E),\quad G=(V,E_1),\quad \overline{G}=(V,E_2)\quad\Rightarrow\quad E_1'=E_2$$

结点度：与一个点相关联的边数。

对(n,m)图，有

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$$

定义8-4 ***正则图***：所有的结点的度相同，称**正则图**。若度为d，称**d次正则图**。如完全图。

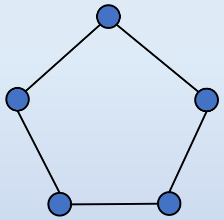


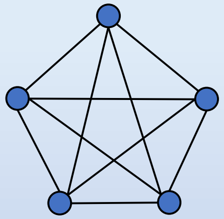
定义8-6子图：$G_1=(V_1,E_1)$， $G_2=(V_2,E_2)$，若$\mathbf{V_2\subseteq V_1}$，$\mathbf{E_2\subseteq E_1}$，则称$G_2$是$G_1$的**子图**，

记 $G_2\subseteq G_1$。

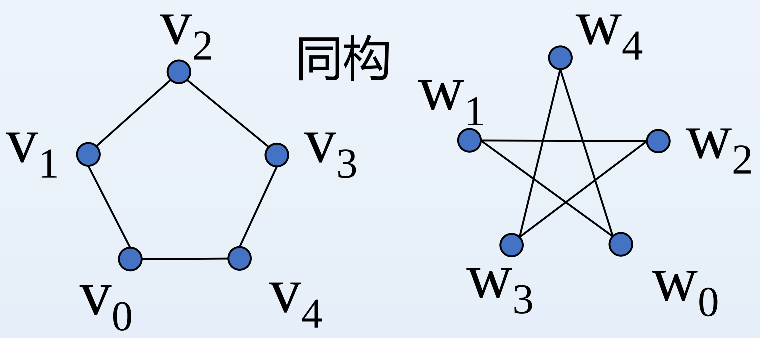
真子图：若$\mathbf{V_2\subseteq V_1}$，$\mathbf{E_2\subset E_1}$，则称$G_2$是$G_1$的**真子图**。

生成子图：若$\mathbf{V_2=V_1}$，$\mathbf{E_2\subseteq E_1}$，则称$G_2$是$G_1$的**生成子图**。





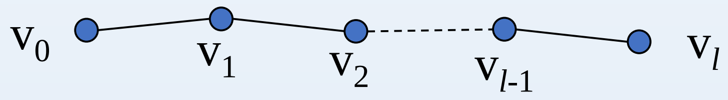
<u>定义8-5</u> 两图同构：$G_1=(V_1,E_1)$， $G_2=(V_2,E_2)$，若存在一个双射$h:V_1\to V_2$，使得当且仅当$\{v_i,v_j\}$***是G_1中的边时***，$\{h(v_i),h(v_j)\}$***是G_2中的边***，则称$\mathbf{G_2}$**同构与**$\mathbf{G_1}$。



浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

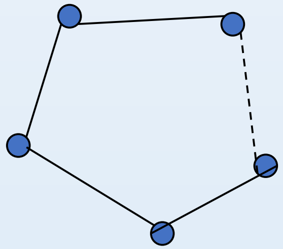
路：图G中相邻边的序列$\{v_0,v_1\},\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{l-1},v_l\}$称为**$v_0$到$v_l$的路**，边的数目$l$称为**路的长度**。

路也可表示为：$v_0,v_1,v_2,\ldots,v_{l-1},v_l$

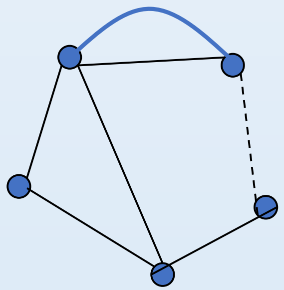


开路：$v_0 \neq v_l$

回路：$v_0 = v_l$



真路：路上没有相同的结点。真路必为开路。



环：回路上除了起点和终点外，没有相同的结点。

简单道路：路上无相同的边。

短程：两点间最短的道路。短程的长度称**距离$d(v_i,v_j)$**。

定理8-1：n个结点的图G中，若v_i到v_j有路，则其短程是一条长度l≤n-1的真路。

证明：设v_i到v_j的路为

$$v_i, v_{i1}, v_{i2}, \ldots, \mathbf{v_{ir}}, v_{r+1}, \ldots, \mathbf{v_{ik}}, v_{ik+1}, \ldots, v_{il-1}, v_j$$

若有相同的结点，即$v_{ir}=v_{ik}$，则去掉回路

$$v_{r+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{ik}$$

后，路

$$v_i, v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ir}, v_{ik+1}, \ldots, v_{il-1}, v_j$$

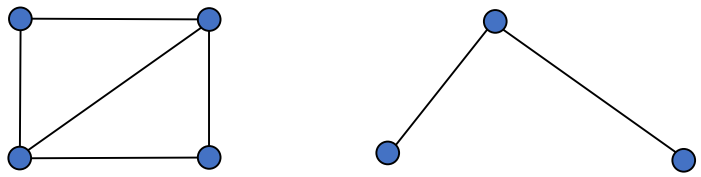
仍为v_i到v_j的路，只是长度较短。因此，去掉所有回路后，路上没有相同的结点，为真路，而真路的长度必不大于n-1。若l≧n，则路上结点的数目为l+1≧n+1，但不同的结点数只有n个，因此必有两个是相同的，与真路矛盾。

推论：n个结点的图G中，环的长度不大于n。

连接性（可达的）：若v_i到v_j有路，称v_i与v_j是连通的（可达的）。

<u>定义8-7</u> 连通图与不连通图：图中任意两点都是连通的，或任意两点有路相连，称图是连通的，否则，称不连通的。

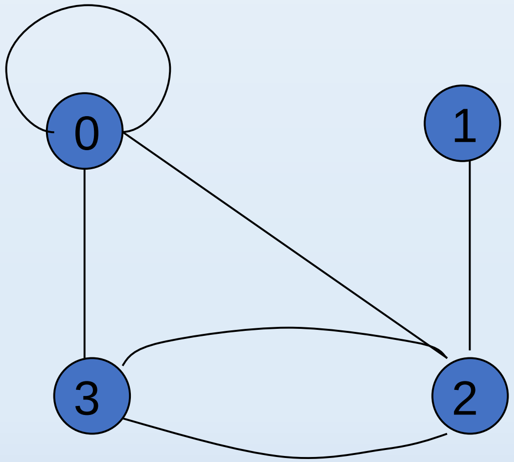
分图：



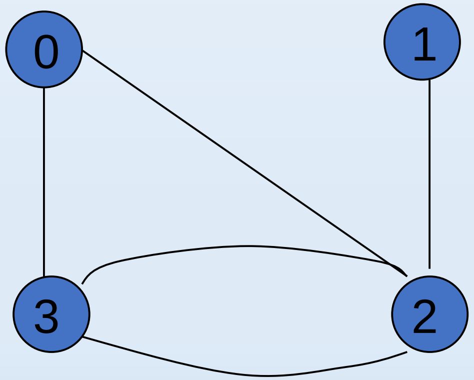
伪图：G=(V,E)，V有限，**<u>E是多重集</u>**。即有自回路，多重边(两点间有多条边)。

多重图：无自回路，有多重边。

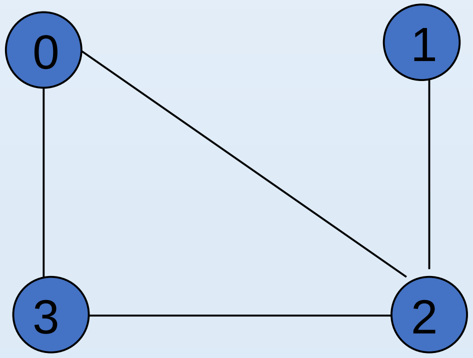
简单图：无自回路，无多重边。



伪图



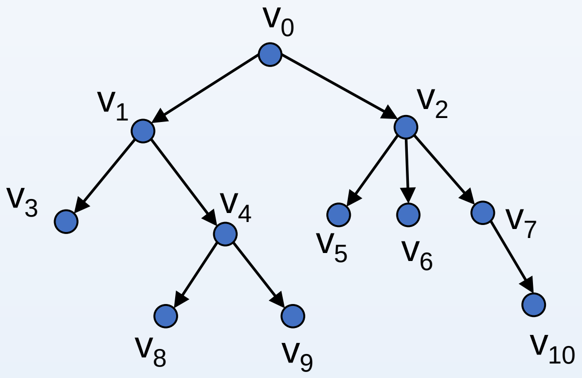
多重图



简单图

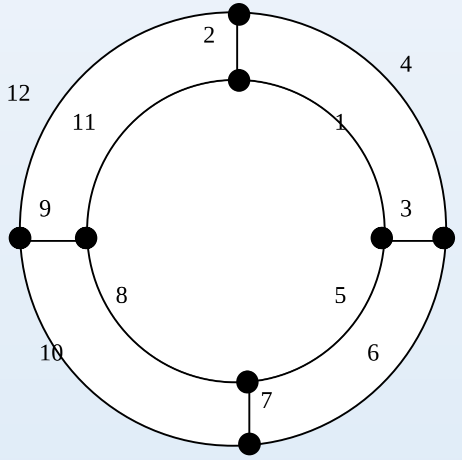
有向图：**<u>边是有向边</u>**，即$\{v_i, v_j\}$是有序对，$\{v_i, v_j\} \neq \{v_j, v_i\}$。

A上的关系图就是一个有向图。



有权图：**<u>每一条边都指定了权</u>**。

如交通图，计算机网络，自来水管网。



<u>有权图也可用三元有序组表示</u>：G=(V, E, f)。

f是权的集合，f=f(E)。

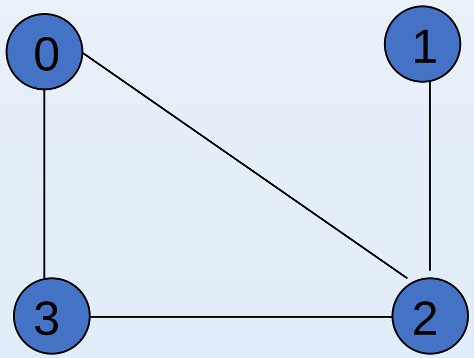
浙江大学信息学院信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

8.2 图的矩阵表示

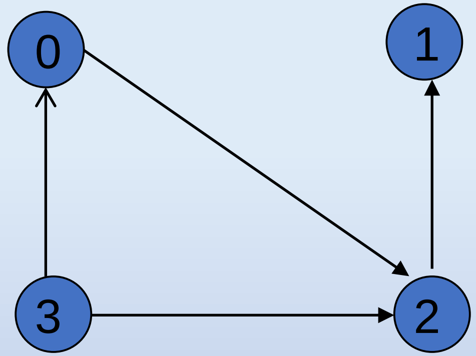
定义8-8 **邻接矩阵**：同关系矩阵。G=(V,E)，V={$v_1,v_2,\ldots,v_n$}。定义邻接矩阵

$$A=(a_{ij})_{n\times n} \qquad a_{ij}=\begin{cases}1 & \{v_i,v_j\}\in E\\ 0 & \{v_i,v_j\}\notin E\end{cases}$$

<u>若不是有向图，则矩阵必然对称</u>。



$$A=\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}0&1&2&3\end{matrix}\end{array}$$



$$A=\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}0&1&2&3\end{matrix}\end{array}$$

矩阵相乘 $A^l = A \times A \times \cdots \times A = (a_{ij}^{(l)})$

定理8-2 元素$(a_{ij}^{(l)})$**是连接v_i到v_j、长度为l的路的总数**。**使**$(a_{ij}^{(l)}) \neq 0$**的最小l为距离。**

矩阵 $\tilde{A} = A^1 + A^2 + \cdots + A^{n-1} = (\tilde{a}_{ij})$

的元素 $\tilde{a}_{ij}$ 为连接v_i到v_j的路的总数，若 $\tilde{a}_{ij}$ 为0，则无路相通。

<u>定义8-9</u> **连接矩阵** $C = A [+] A^{(2)} [+] \cdots [+] A^{(n)}$

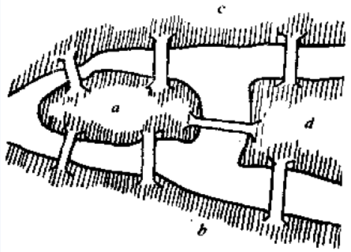
矩阵运算为布尔运算，同关系矩阵的运算。

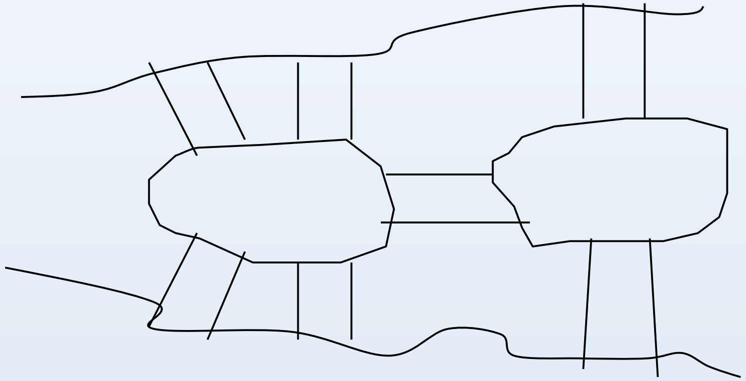
连接矩阵可用于<u>判断两点间的连通性和图的连通性</u>。<u>连接矩阵就是求传递闭包</u>。

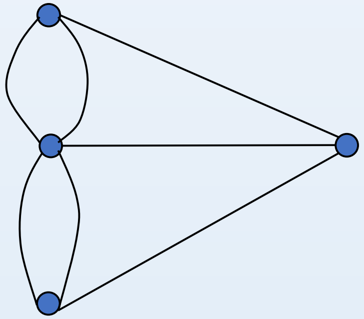
8.4 欧拉图和哈密顿图

<u>欧拉图</u>

七桥问题：





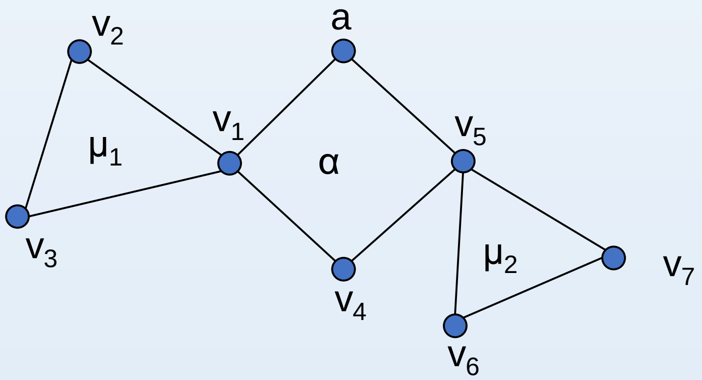


欧拉回路：所有的边都在出现回路上，且出现一次。或从一点出发经过所有的边，且只经过一次，然后回到起点。

欧拉图：**具有欧拉回路的图**。

考察一个回路，<u>回路上所有的点都和两条边关联</u>，即一个点的度为2，考虑到回路上有相同的点，一个点的度应为偶数。

定理8-6 欧拉定理：一个连通图G为欧拉图的充要条件是G的每一个结点的度均为偶数。



$$av_1v_2v_3v_1v_4v_5v_6v_7v_5a=av_1v_4v_5a+v_1v_2v_3v_1+v_5v_6v_7v_5$$

$$=\alpha\,[a, v_1]+\mu_1+\alpha\,[v_1, v_5]+\mu_2+\alpha\,[v_5, a]$$

v_1和v_5是回路的公共结点。

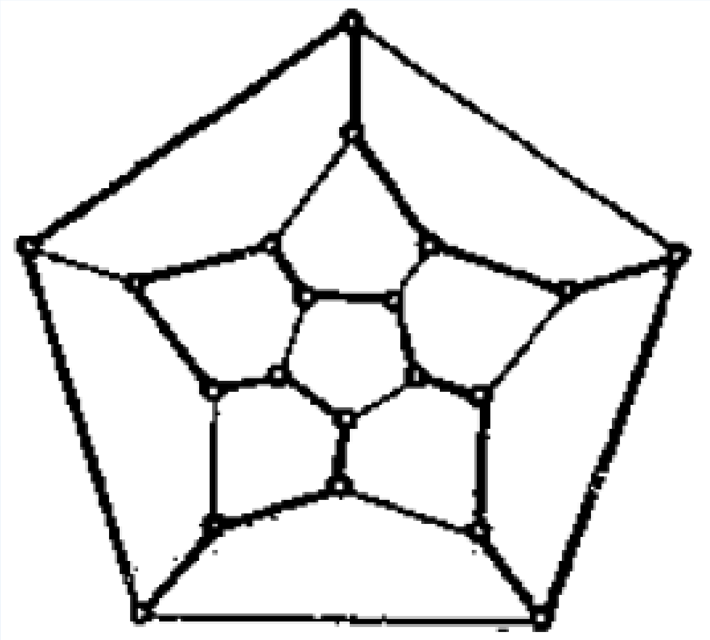
浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

欧拉路：通过所有边，且只通过一次的开路。

定理8-7：**连通图具有欧拉路的条件充要条件是仅有两个奇数结点，其中一个奇数结点为起点，另一个奇数结点为终点。**

<u>证明</u>：将两奇数结点用一条边连接起来，图的所有结点的度都成为偶数，该图必然有一欧拉回路，再将回路中增加上去、连接两奇数结点的边去掉，回路成为一条经过所有边的开路，即欧拉路。

周游世界问题：将一个正十二面体看成地球，它的二十个结点看成地球上的城市，能否找到一条旅行线路，从一个城市出发，经过每一个城市，且只经过一次，最后回到原城市。答案是存在的。



哈密顿环：经过图中所有的点，且经过一次的回路，该回路上所有的点都不相同，也是环。

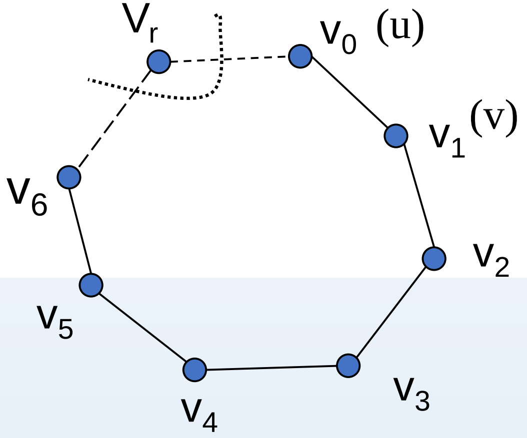
哈密顿图：存在哈密顿环的图。

哈密顿图是否有欧拉图那样的充分必要条件？答案是不存在。

定理8-8（必要条件）：若图G=(V,E)是哈密顿图，则对于V的任意一个非空子集S，有

$$W(G-S) \leqq \#S$$

W(G-S)是G-S中分图的数目。



证明：设

$$\alpha=v_0v_1v_2\ldots v_{n-1}v_0$$

是图G的哈密顿环，在α中删去S中的任意一个节点u_1，则$\alpha- u_1$是一条开路，所以$W(\alpha- u_1)=1$,若再删去S中的一个结点u_2，则$W(\alpha- \{u_1, u_2\}) \le 2$, …，当删去S中的第r个结点时，$\mathbf{W(\alpha- \{u_1, u_2 \ldots, u_r\}) \le r}$，

因此当删去S中所有的结点后，$\mathbf{W(\alpha- S) \le \#S}$，而α- S是G-S的一个生成子图，必有$\mathbf{W(G-S) \le W(\alpha- S)}$，于是得到$W(G-S) \leqq \#S$

定理8-9：设G是有n个结点的图，若对于图中任意不相邻的结点u和v，有

$$\deg(u)+\deg(v)\geqq n$$

则当且仅当图G+{u,v}是哈密顿图时，图G是哈密顿图。

证明：

必要性：设G是哈密顿图，则增加一条边，不影响哈密顿环，G+{u,v}显然是哈密顿图。

充分性：设G+{u,v}是哈密顿图，则存在哈密顿环

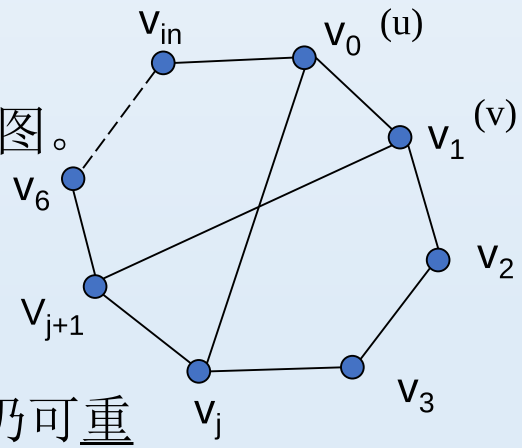
$$\alpha=v_0v_1v_2\ldots v_{n-1}v_0$$

（1）若边{u,v}不在环α上，则α也是图G的哈密顿环，图G是哈密顿图。

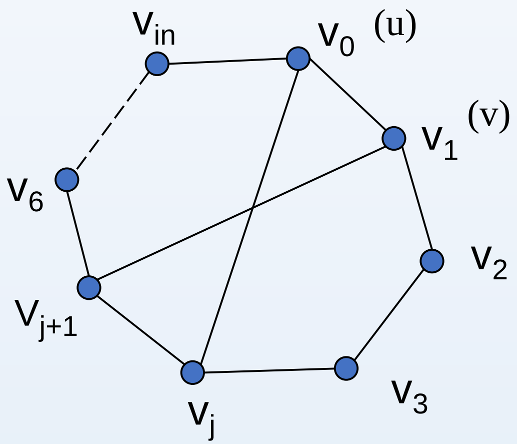
（2）若边{u,v}在哈密顿环上，设v_0=u，v_1=v，哈密顿环可写为

$$\alpha=uvv_2\ldots v_{n-1}u$$

此时**若存在j，使得u与v_j相邻，v与v_{j+1}相邻**，使得去掉边{u,v}后，仍可重构哈密顿环



$$\beta=uv_jv_{j-1}\ldots v_2vv_{j+1}v_{j+2}\ldots v_{n-1}u$$



即图G是哈密顿图。

若不存在，因u与deg(u)个结点相邻，则v与deg(u)个结点不相邻，故

$$\deg(v) \leqq n-1-\deg(u)$$

$$\deg(v)+\deg(u) \leqq n-1$$

与前提 $\deg(u)+\deg(v) \geqq n$

矛盾。

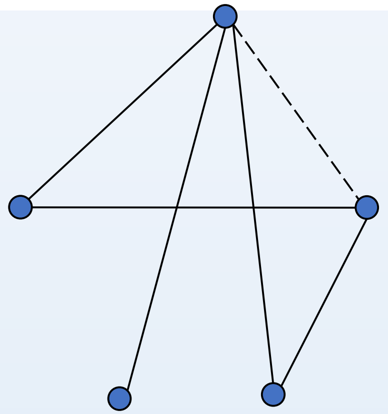
定义8-8 闭图：设G是具有n个结点的图，若对于$deg(u)+deg(v)\geqq n$的每一对结点，均有u与v相邻接，称图G是**闭图**。

定义8-10 闭包：包含图G，且边最少的闭图G_c。

（1）图G是G_c的生成子图；

（2）G_c是闭图；

（3）若存在闭图图H，满足$G\subseteq H$，则$G\subseteq G_c\subseteq H$。



定理8-12 当且仅当图G的闭包G_c是哈密顿图时，图G是哈密顿图。

由于完全图是哈密顿图，因此有

推论1：若图的闭包是完全图K_n，且$n\geqq 3$，则该图一定是哈密顿图。

推论2：图$G=(V,E)$，$\#V\geqq 3$，若对于任意的$v\in V$，有$deg(v)\geqq n/2$，G是哈密顿图。

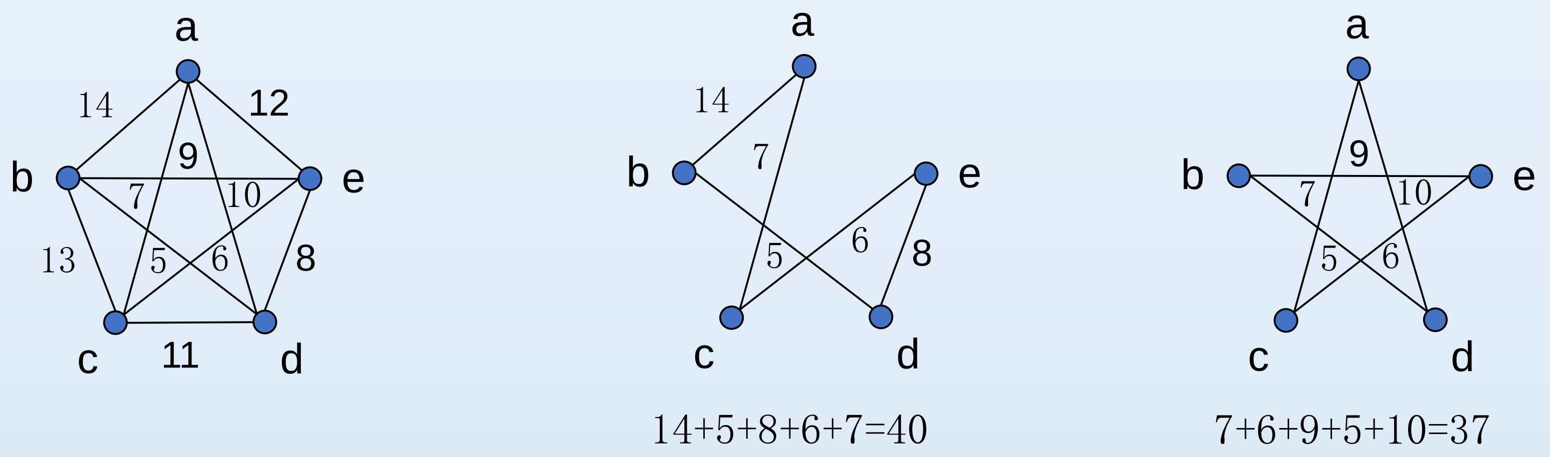
推论3：图$G=(V,E)$，$\#V\geqq 3$，若对于任意不相邻结点u和v，均有

$$deg(u)+deg(v)\geqq n$$

则G是哈密顿图。

<u>流动售货员问题</u>：找一条最短道路，走遍公司附近所有城镇，返回公司。假定任意两城镇之间有路相通，则问题为<u>在加权完全图中找权最小的哈密顿环</u>。

最近邻算法：在没有经过的城镇中找最邻近的作为下一个要经过的城市。



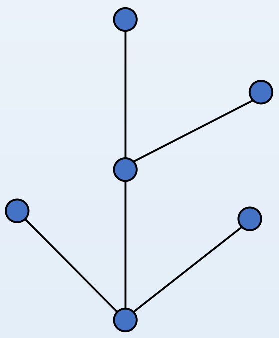
<u>最近邻算法给出的哈密顿环不一定是最短的，但它的运算量较小</u>。

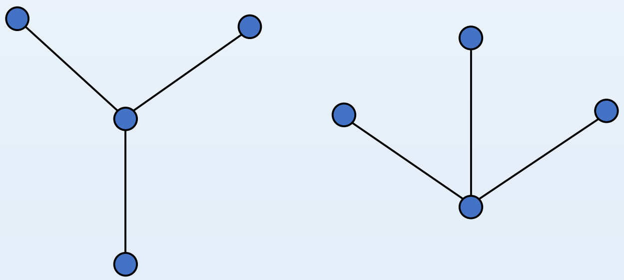
浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

8.5 树

定义8-21 树：不含回路的连通图（n，m）。要点：不含回路，连通。

树林：不含回路的图。　要点：不含回路。





树叶：度为1的结点。

枝点：度大于1的结点。

边和点的关系：**m=n-1**。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

树的等价定义（性质）：

（1）**定理8-13： 任意两点间有唯一一条真路相连的图。**

（2）m=n-1的连通图。

（3）**定理8-14： m=n-1、且无环的图。**

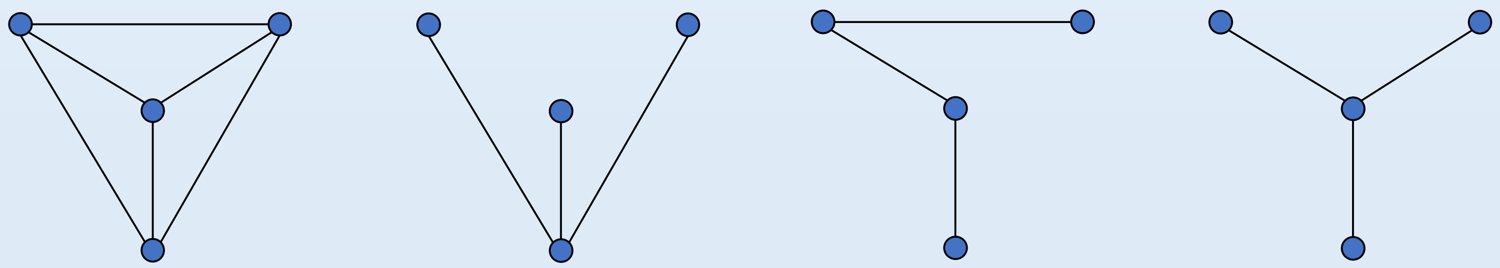
（4）图连通，但删除任意一条边，图不连通。

（5）图中无回路，但在任意不相邻结点间增加一条边，产生回路。

生成树：若连通图G=(V,E)的生成子图T_G是树，则T_G称为**生成树**。

枝：生成树T_G中的边。

弦：图G中不在T_G中的边。



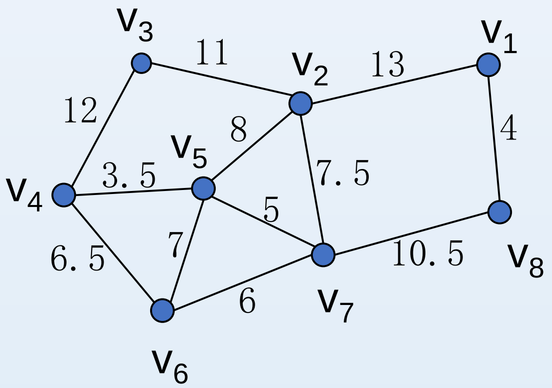
一个连通图的生成树可能有多棵。

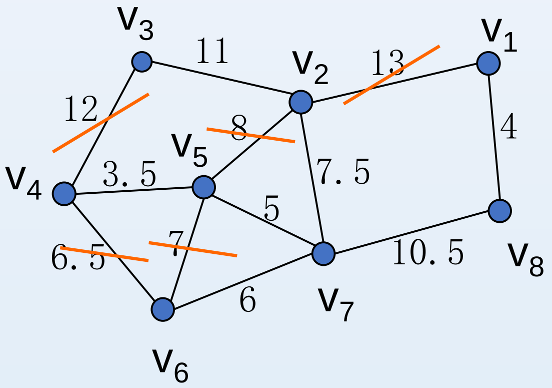
最小生成树：加权连通图的所有生成树中，权最小的。

城市的煤气管网，自来水管网等。

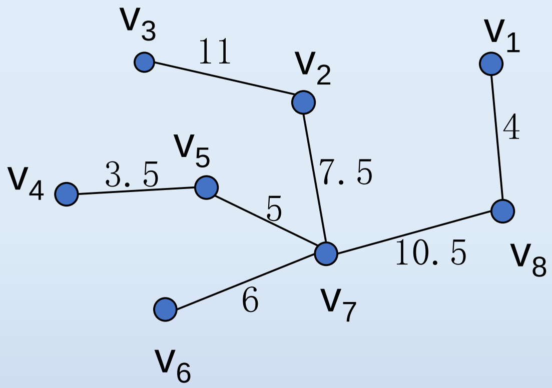
最小生成树的求法（算法8-3）

（1）将边按权从大到小逐次删除，每删除一条边，判断一下图是否连通，若连通则删去，若不连通则保留。



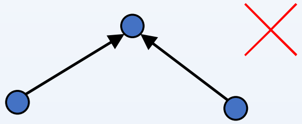


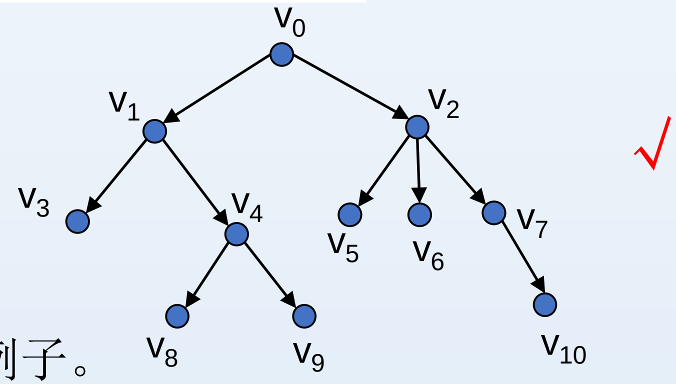
（2）将边按权从小到大排列，然后逐次选取，增加到图中。若增加后，图产生回路则不选取。



8.6 有向树

定义8-22 有向树：若有向图对应的无向图为树，且只有一个结点的进度为0，其余结点的进度为1，称为**有向树**。



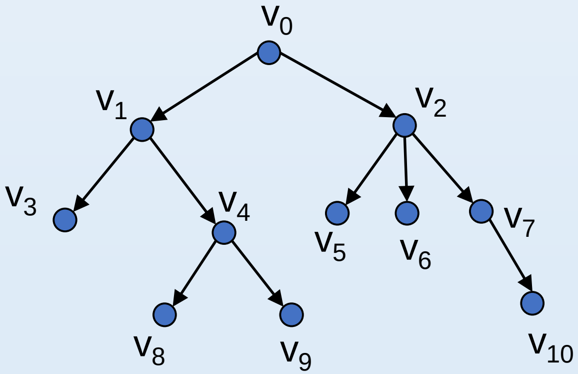


根：有向树中进度为0的结点称为**根**。

叶：有向树中出度为0的结点称为**叶**。

枝点：除叶以外的所有结点。

家谱、目录、通信的前缀码、计算机网的树形结构都是有向树的例子。



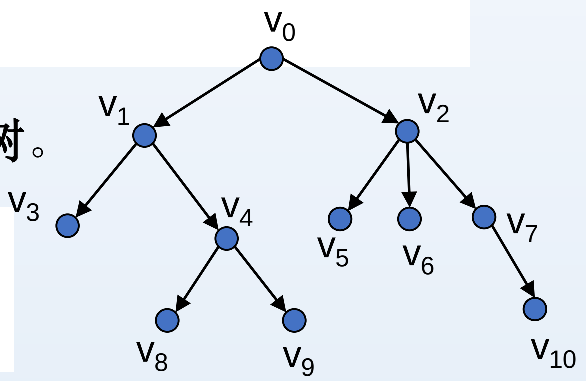
v_0**树根**，v_1,v_2称**一级结点**，v_3,v_4,v_5,v_6,v_7称**二级结点**，v_8,v_9v_{10}称**三级结点**。

父亲结点，儿子结点，孙子结点，兄弟，祖先，后裔。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

子树：有向树T的枝点v和它的所有后裔构成的结点集V′，和v以下的所有边集E′构成的子图T′=(V′,E′)，称为**以v为根的子树**。

右图v_0有两棵子树，以v_1为根的**左子树**和以v_2为根的**右子树**。



定义8-23 m元树：每一个结点的出度都小于或等于m的树。

完全m元树：每一个枝点的出度都等于m的树。

二元搜索树：通过二元树的每一个结点，且只通过一次。例如搜索目录。

（1）<u>先根通过</u>：根→左子树→右子树

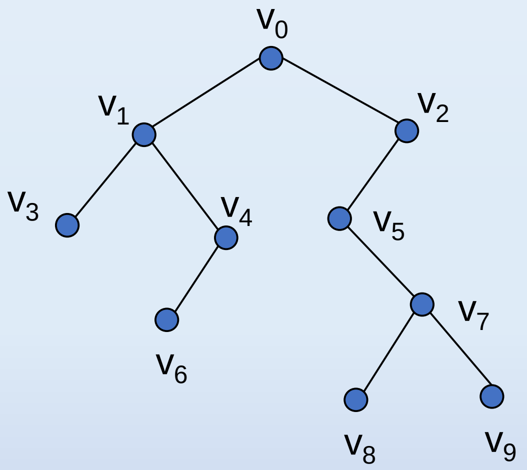
（2）<u>中根通过</u>：左子树→根→右子树

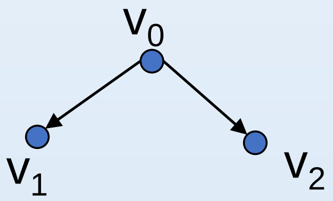
（3）<u>后根通过</u>：左子树→右子树→根

先根：$v_0v_1v_3v_4v_6v_2v_5v_7v_8v_9$

中跟：$v_3v_1v_6v_4v_0v_5v_8v_7v_9v_2$

后跟：$v_3v_6v_4v_1v_8v_9v_7v_5v_2v_0$



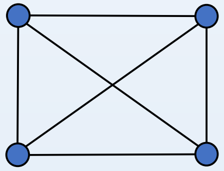


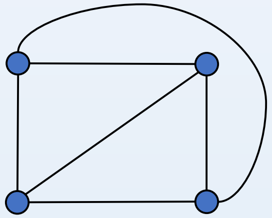
8.8 平面图

<u>**平面图**</u>

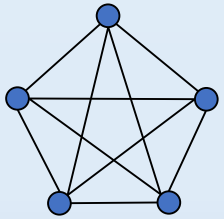
定义8-28 **平面图**：能画在一个平面上，而边无任何交叉的图。

例　印刷电路、四结点完全图是平面图。

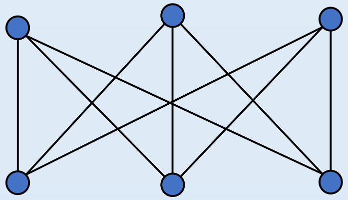




五结点完全图、三管道图是典型的非平面图。



五结点完全图



三管道图

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

定理8-26 **欧拉定理**：若G是一连通的平面图，则

$$\mathbf{n-m+k=2}$$

n, *m*, *k*分别是结点数、边数、面数。

欧拉定理反映了结点数、边数和面数之间的关系。

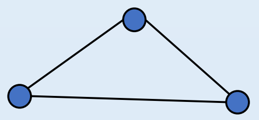
推论 定理8-27 在有两条或更多条边的平面图中，有

$$\mathbf{m \leqq 3n-6}$$

证明：m=2时，n=3，不等式成立。

m≧3时，因每个面至少有3条边围成，而每条边属于相邻的两个面，所以

$m/3 \geqq k/2 \quad \rightarrow \quad 2m \geqq 3k$



有欧拉公式可得　　$k=2-n+m$

代入不等式　　$2m \geqq 6-3n+3m$

移项得　　$m \leqq 3n-6$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

若每个面至少有*l*条边围成，则

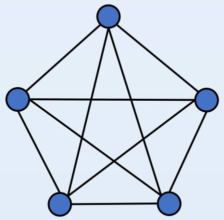
$$2m \geqq lk$$

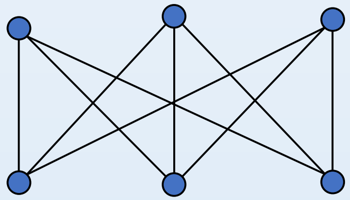
由欧拉公式得　　$2m \geqq l(2-n+m)= l(2-n)+lm$

$$l(n-2) \geqq (l-2)m$$

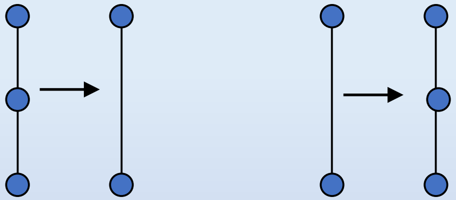
$$m \leqq l(n-2)/(l-2)$$

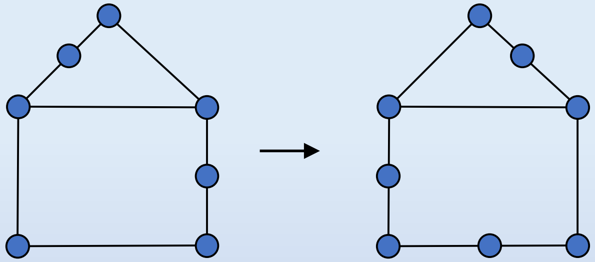
欧拉定理和推论都是**必要条件**，可用于判定一个图**是非平面图**。例如五结点完全图（n=5, m=10, 10<=3*5-6=9✕）和三管道图（n=6, m=9,*l*=4; 9<=4(6-2)/(4-2)=8 ✕ ）。



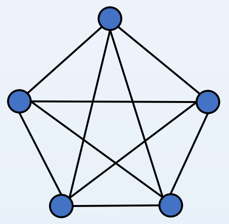


在度2结点内同构：插入或删除度为2的结点，两图能成为同构的图。

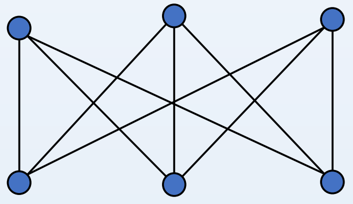


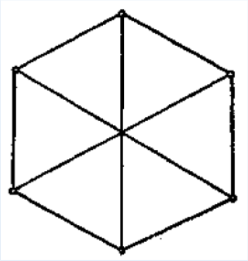


定理8-28 库氏定理：一个图是平面图的<u>充分必要条件</u>是没有在度2结点内与库氏图同构的子图。库氏图是五结点完全图和三管道图。



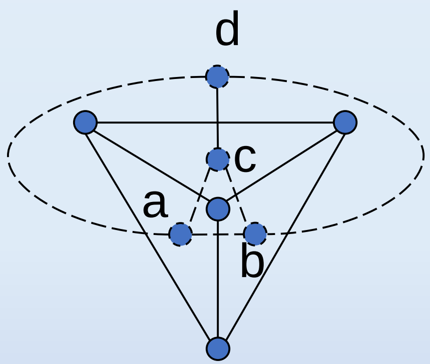
五结点完全图





三管道图

<u>对偶图</u>：平面的面作为点，相邻两个面用横跨边界的边连接起来，得到图称**对偶图**。可将面的染色问题转化为结点的染色问题。四色问题。



浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

构成一单个环的图称为**封闭折线**。**一封闭折线图**是一平面图，可归纳地定义如下：

（基础）一封闭折线是一封闭折线图。

（归纳步）设 $G=(V,E)$ 是一封闭折线图，又设 $\alpha=v_i v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_{l-1}} v_j$ 为不与 G 交叉的任一真路（长 $l \geq 1$），其中 $v_i, v_j \in V$，但 $v_{i_r} \notin V\ (r=1,2,\cdots,l-1)$，那么由 G 和 α 组成的图，即图 $(\bar{V},\bar{E})$，其中

$$\bar{V}=V \cup \{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{l-1}}\},$$

$$\bar{E}=E \cup \{\{v_i, v_{i_1}\}, \{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \cdots, \{v_{i_{l-1}}, v_j\}\},$$

也是一封闭折线图。

由封闭折线图的定义可知，它是一平面图（可能为多重图，因为长为2的环是允许的）。图8-47是一封闭折线图的例。

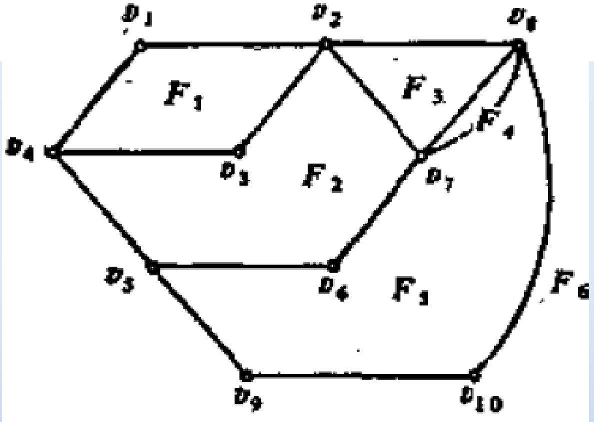


图8-47

与封闭折线图有关的一著名问题是“4 色猜想”问题，即每一封闭折线图能用 4 种不同的颜色来着色，使任何两个相邻的面（包括无限面）具有不同的颜色。这个问题提出于上一世纪中期，经过许多数学家的努力，终于在 1976 年为爱普尔 (K. I. Appel)，黑肯 (W. Haken) 和考西 (J. Koch) 利用电子计算机的帮助得到了证明。在探求这一问题证明的漫长过程中，获得了图论和有关领域中许多重要的成果。

作 业

4，6，15，16，19，31，33，37，45

内容提要

1. 图的基本概念

- 图、n 阶图、(n,m) 图、无向图、有向图、伪图、多重图、简单图；
- 边关联结点、结点关联边、结点的邻接、边的邻接、孤立点、孤立边；
- 完全图、补图、结点的度数、正则图；
- 子图、真子图、生成子图、图的同构.

3. 路

- 开路、回路、真路、环路、链、闭链；
- 结点间的连接、连通图、连通子图、分图；
- 短程、距离（n 阶图中，$d(v_i, v_j) \leqslant (n-1)$）；
- ~~有向图的弱连通、单向连通、强连通.~~

4. 图的矩阵表示

- 邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$；
- 连接矩阵 $\boldsymbol{C}$.

6. 欧拉图和哈密顿图

- 欧拉图、欧拉回路、欧拉路；
- 欧拉定理；
- 哈密顿环、哈密顿图、哈密顿路、闭图、闭包；
- 哈密顿图的判定条件、最邻接方法.

7. 树

- 树、树林、树叶；
- 树的性质及判定条件；
- 生成树、最小生成树.

8. 有向树

- 根、分支结点、叶结点、级、子树；
- m 元树、完全 m 元树、二元树、完全二元树；
- 树的扫描.

例题讲解

例 8-1 设 $G=(V,E)$ 是一无向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_8\}$，$E=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_1\},\{v_1,v_5\},\{v_5,v_4\},\{v_4,v_3\},\{v_7,v_8\}\}$.

(1) 画出 G 的图解；

(2) 指出与 v_3 邻接的结点，以及和 V_3 关联的边；

(3) 指出与 e_1 邻接的边和与 e_1 关联的结点；

(4) 该图是否有孤立结点和孤立边？

(5) 求出各结点的度数，并判断是否是完全图和正则图；

(6) 该(n,m)图中，$n=?$，$m=?$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

解 (1) 所给图 G 的一个图解如图 8-1 所示.

(2) v_1, v_2, v_4 均与 v_3 邻接, v_3 关联边 e_1, e_2, e_3.

(3) 边 e_2, e_3, e_4 均与 e_1 邻接, e_1 关联结点 v_2, v_3.

(4) v_6 是孤立结点, e_5 是孤立边.

(5) $\deg(v_1)=3, \deg(v_2)=2, \deg(v_3)=3, \deg(v_4)=2, \deg(v_5)=2, \deg(v_6)=0, \deg(v_7)=1, \deg(v_8)=1$.

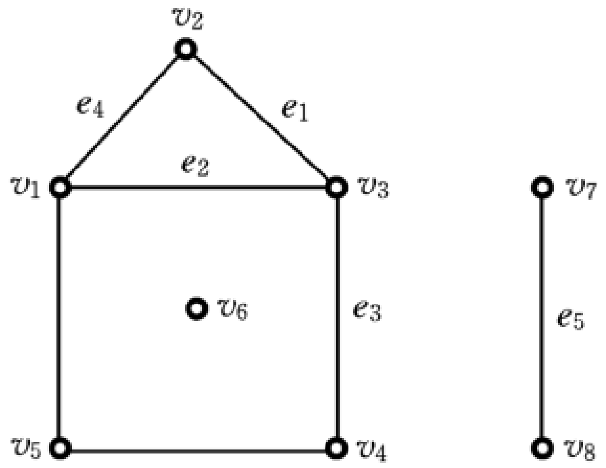
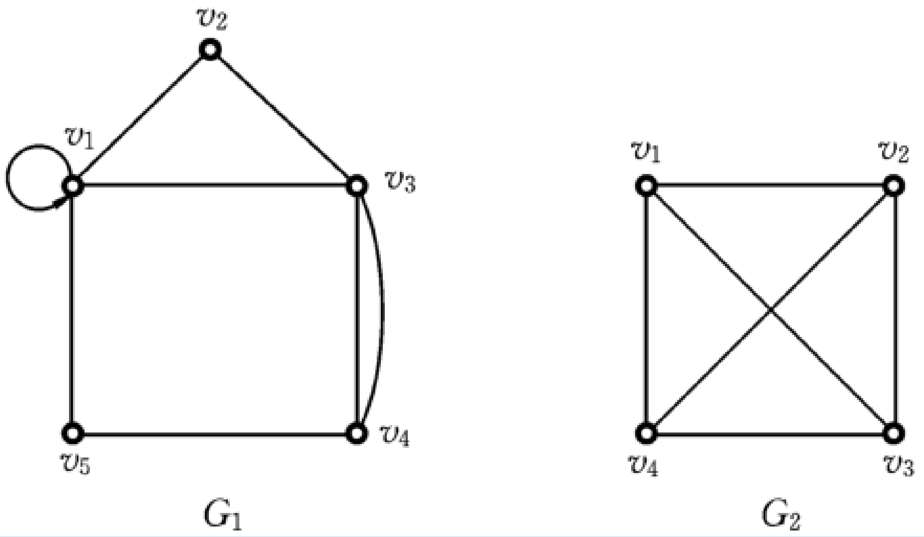


图 8-1

因为不是所有结点的度数均相等，故不是正则图，又 v_6 不与任何结点邻接，因此 G 也不是完全图.

(6) G 是(8,7)图或 8 阶图, $n=8$ 个结点, $m=7$ 条边.

例 8-2 图 8-2 给出了无向图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$，它们各是什么类型的图，求出 G_1 的最大度数 $\Delta(G_1)$ 和最小度数 $\delta(G_1)$，并指出 G_1 中重数大于 1 的边.



解 G_1 是一个伪图，有自环 $\{v_1,v_1\}$ 和平行边 $\{v_3,v_4\}$，$\{v_3,v_4\}$. G_2 是一个简单图，且 G_2 中任意两个结点均邻接，故是完全图，又每个结点的度数为 3，因此 G_2 是 3 次正则图.

G_1 中关联于 v_1 的结点的边有一个是自环，在计算 v_1 的度数时，此边使 v_1 的度增加 2，于是 $\deg(v_1)=5$，因此 $\Delta(G_1)=\max\{\deg(v)\mid v\in V_1\}=5$，$\delta(G_1)=\min\{\deg(v)\mid v\in V_1\}=2$.

G_1 中结点 v_3 与 v_4 间有两条平行边，边的重数为 2.

例 8-3 求图 G(见图 8-3)的补图 $\overline{G}$.

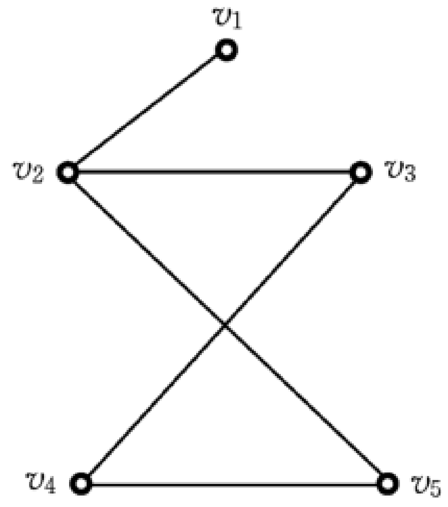


图 8-3

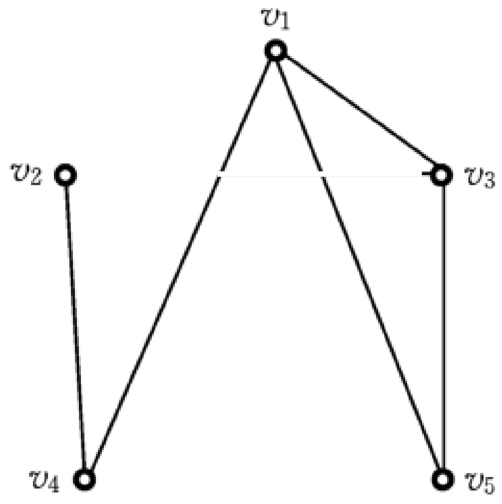
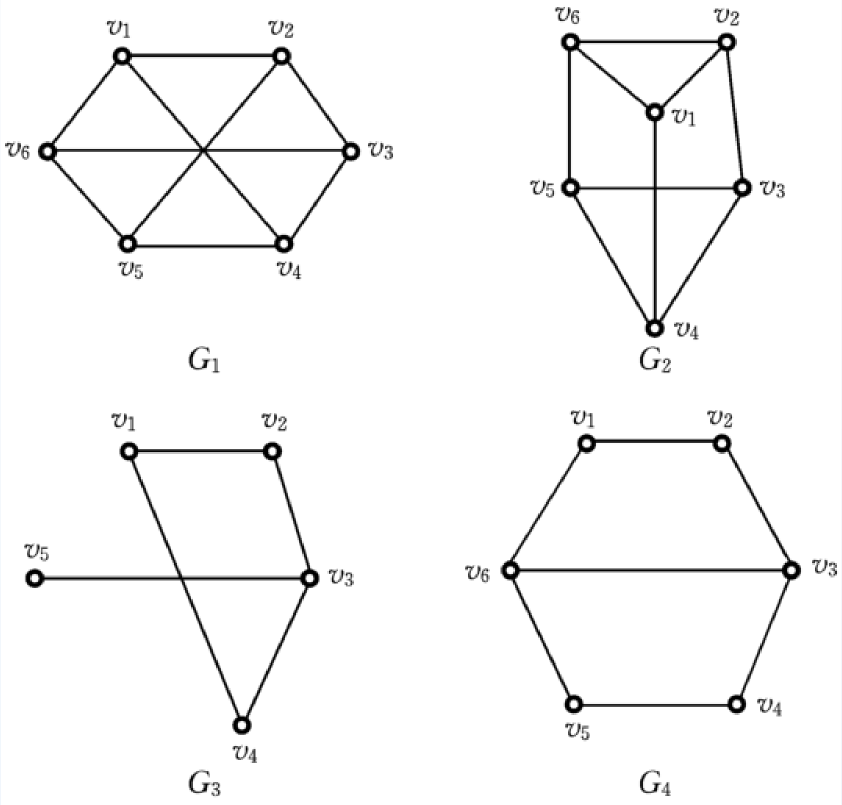


图 8-4

解 G 的补图 $\overline{G}$,是由 G 的所有结点和为了使 G 成为完全图所需要添加那些边组成的图,如图 8-4 所示.

例 8-4 图 8-5 给出了图 G_1, G_2, G_3, G_4，问它们之间有何关系？



解 $G_1=(V_1, E_1)$是一个3次正则图；因为 $V_3 \subseteq V_1$ 且 $E_3 \subset E_1$，所以 $G_3=(V_3, E_3)$是 G_1 的一个真子图；

又因为 $V_4=V_1$ 且 $E_4 \subseteq E_1$，所以 $G_4=(V_4, E_4)$是 G_1 的一个生成子图.

设 $G_2=(V_2, E_2)$，因为$\{v_3, v_5\} \in E_2$，但$\{v_3, v_5\} \notin E_1$，所以 $E_2 \nsubseteq E_1$.

另一方向$\{v_3, v_6\} \in E_1$，但$\{v_3, v_4\} \notin E_2$，故 $E_1 \nsubseteq E_2$. 因此 G_2 不是 G_1 的子图，G_1 也不是 G_2 的子图，同理，G_3, G_4 与 G_2 也没有子图关系.

例 8-5 设 G 是具有 3 个结点的完全图，试问：

(1) G 有多少个子图？

(2) G 有多少个生成子图？

(3) 如果没有任何两个子图是同构的，则 G 的子图个数是多少？将这些构造出来.

解 (1) 因含有一个结点的子图有 $C_3^1=3$ 个；

含二个结点的子图有 $C_3^2\times 2=6$；

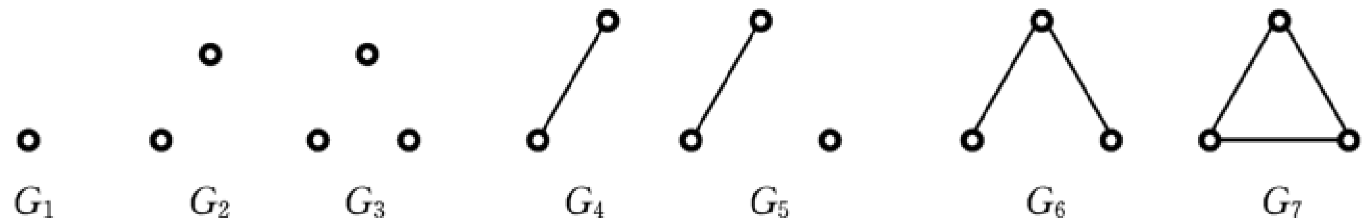
含三个结点的子图有 $C_3^3\times 2^3=8$；

所以 G 共有 $3+6+8=17$ 个子图.

(2) G 的生成子图，含 G 的全部结点，因为 G 有三条边，构成子图时，每条边有被选和不选两种情况.

所以 G 的生成子图的个数为 $2^3=8$.

(3) G 的所有不同构的子图如图 8-6 所示.



浙江大学信息学院信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 8-9 给定图 $G=(V,E)$，如图 8-8 所示.

(1) 在 G 中找一条长为 7 的开路且不是真路；

(2) 在 G 中找一条长为 6 的回路且不是环路；

(3) 在 G 中找一条长为 7 的真路；

(4) 在 G 中找一个长为 5 的环路；

~~(5) 在 G 中找一条长为 5 的链，且不是真路；~~

~~(6) 在 G 中找一个长为 6 的闭链，且不是环路；~~

(7) 求出 v_2 与 v_3 的距离 $d(v_2,v_3)$.

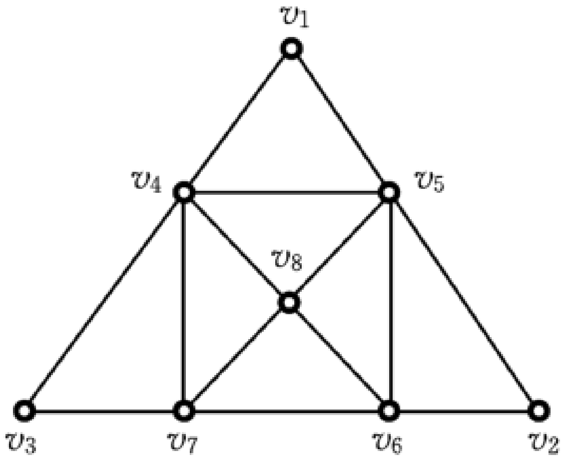


图 8-8

解 (1) $L_1: v_4v_3v_7v_4v_1v_5v_6v_8$（因 v_4 出现两次，故不是真路）；

(2) $L_2: v_4v_5v_2v_6v_5v_8v_4$（因为 v_5 出现两次，所以不是环路）；

(3) $L_3: v_1v_5v_2v_6v_8v_4v_3v_7$；

(4) $L_4: v_4v_5v_6v_8v_7v_4$；

(5) $L_5: v_4v_3v_7v_4v_1v_5$（因 v_4 出现两次，故不是真路，但边未重复，故是链）；

(6) $L_6: v_4v_5v_2v_6v_5v_8v_4$（因 v_5 出现两次，故不是环路）；

(7) v_2 到 v_3 的路很多，其中长度最短的真路称为 v_2 到 v_3 的短程 L，其长度称为 v_2 到 v_3 的距离. 如 $L_7: v_2v_5v_4v_3$，$L_8: v_2v_6v_7v_3$ 均是 v_2 到 v_3 的短程，$d(v_2,v_3)=3$.

注 两个结点间的短程不唯一，但距离唯一.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 8-10 给定图 $G=(V,E)$（见图 8-9），问 $H_1=(V_1,E_1)$，$H_2=(V_2,E_2)$，$H_3=(V_3,E_3)$是否是 G 的分图？其中

$$V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_6\};$$

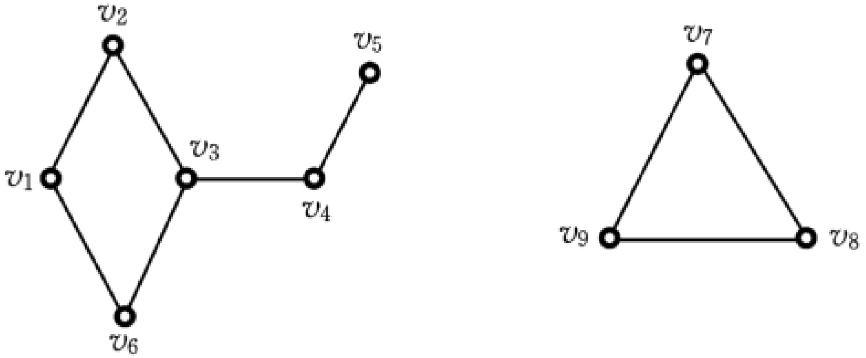
$$E_1=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_6\},\{v_6,v_1\}\};$$

$$V_2=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\};$$

$$E_2=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_6\},\{v_6,v_1\},\{v_3,v_4\},\{v_4,v_5\},\{v_7,v_8\}\};$$

$$V_3=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\};$$

$$E_3=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_6\},\{v_6,v_1\},\{v_3,v_4\},\{v_4,v_5\}\}.$$



解 H_1 是 G 的连通子图，但 $H_1'=(V_1',E_1')$包含 H_1 且也是 G 的连通子图. 所以 H_1 不是 G 的极大连通子图，故 H_1 不是 G 的分图. 其中 $V'_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6\}$，$E_1'=E_1\cup\{v_3,v_4\}$.

H_2 是 G 的子图，但不是连通子图，故不是 G 的分图.

H_3 是 G 的极大连通子图，因为 G 中包含 H_3 的其他任何子图都将包含 v_7，v_8，v_9 中一个结点，这样这个包含 H_3 的子图必将不连通. 所以 H_3 是 G 的分图.

例 8-14 图 G 由邻接矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$给出，$G$ 是否连通？

解法一 直接由邻接矩阵给出 G 的一个图解，如图 8-13 所示，显然，G 不连通.

解法二 求 G 的连接矩阵

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}[+]\boldsymbol{A}^{(2)}[+]\boldsymbol{A}^{(3)}[+]\boldsymbol{A}^{(4)}[+]\boldsymbol{A}^{(5)}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}[+]\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

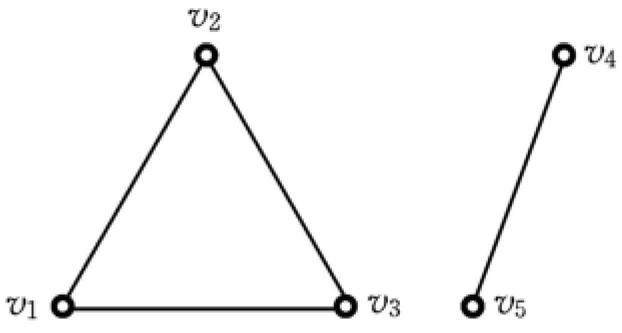


图 8-13

$$
[+]\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}[+]\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}[+]\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}
$$

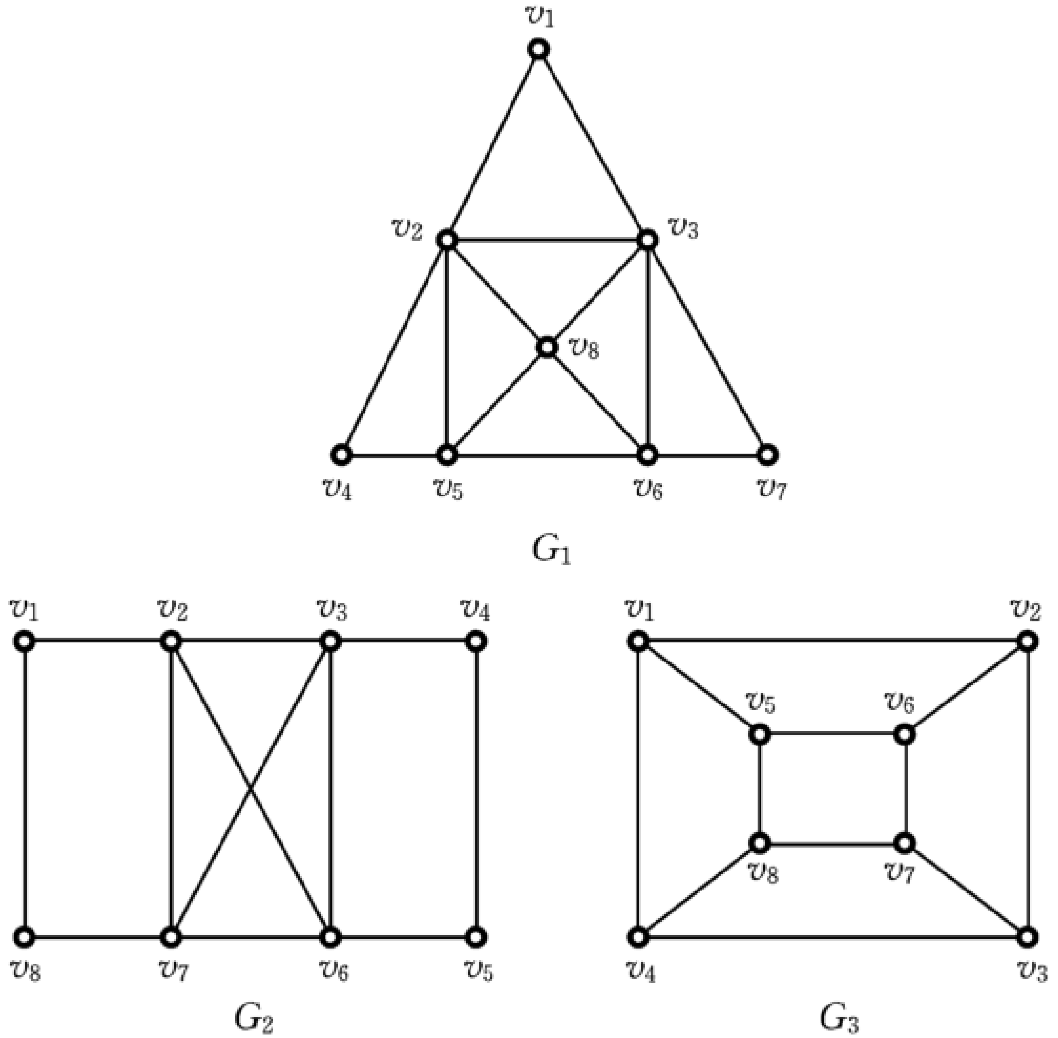
$$
=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}.
$$

因为 $\boldsymbol{C}$ 中含有 0 元素，所以 G 不连通.

例 8-21 确定 n 取怎样的值，n 阶完全图 K_n 为欧拉图.

解 n 阶完全图 K_n 有 n 个结点，每个结点的度数为 $n-1$，故当 n 为奇数，$n-1$ 为偶数时，K_n 是一欧拉图.

例 8-23 图 8-18 给出了三个图，试判定哪个是欧拉图，哪个是哈密顿图，哪个图有欧拉路.

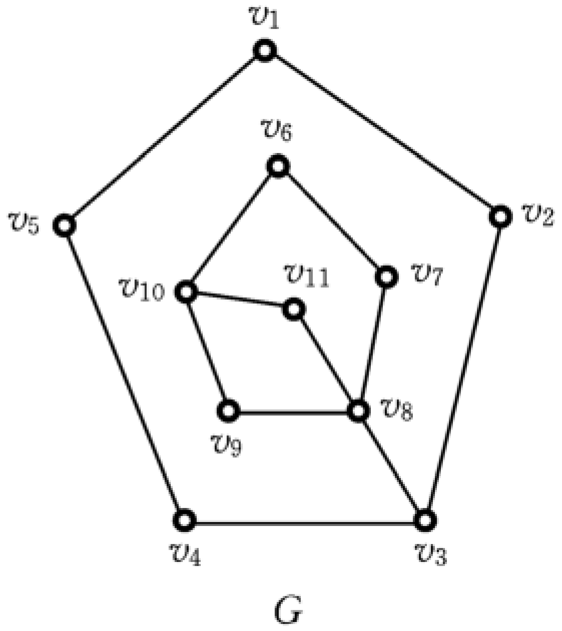


解　(1) G_1 中除 v_2, v_3 度数为奇数外，其余结点均是偶数. 故 G_1 中有欧拉路 $v_2v_1v_3v_2v_4v_5v_8v_2v_5v_6v_8v_3v_6v_7v_3$，又 $v_1v_3v_7v_6v_8v_5v_4v_2v_1$ 是 G_1 的哈密顿环，所以 G_1 是哈密顿图.

(2) G_2 中每个结点的度数为偶数，故 G_2 是欧拉图，其一个欧拉回路为 $v_1v_2v_7v_3v_2v_6v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_1$ 且 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_1$ 是 G_2 的一个哈密顿环，所以 G_2 也是哈密顿图.

(3) 因为 G_3 中每个结点的度数均是奇数，所以 G_3 既不是欧拉图，也没有欧拉路，但 G_3 中有 $v_1v_2v_3v_4v_8v_7v_6v_5v_1$ 哈密顿环，因此 G_3 是哈密顿图.

例 8-24 判断图 8-19 是否为哈密顿图.



解 取 $S=\{v_8\}$，则 $\# S=1$，有 $W(G-S)=2>\# S$.

因此，G 不是哈密顿图.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 8-26　判定下面各类图是否为树.

(1) 有 n 个结点、$n-1$ 条边的连通图；

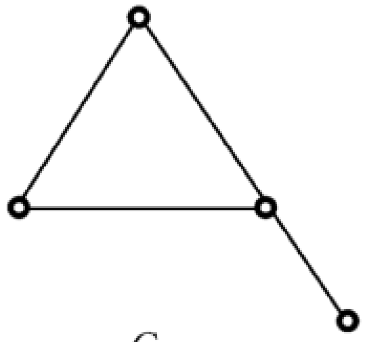
(2) 每对结点间都有路的图；

(3) 有 n 个结点、$n-1$ 条边的图.

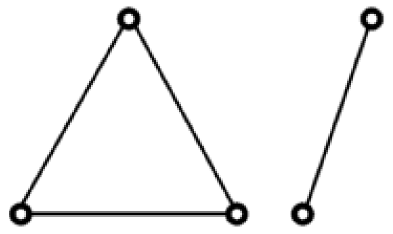
解　(1) 由定理 8.14.1(1)知，此类图为树.

(2) 该类图不一定是树，其条件只能保证图是连通图. 如图 8-22 中 G_1 满足条件，但不是树.

(3) 该类图不一定是树，条件只能保证 $m=n-1$. 如图 8-22 中，G_2 满足条件，但不是树，因为 G_2 不连通.



G_1



G_2

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 8-28 一棵树 T 有两个结点度数为 2，一个结点度数为 3，三个结点度数为 4，问它有几个叶结点.

解 设 T 有 n 个结点，m 条边，x 个叶结点，则 $n=2+1+3+x=6+x$. 由定理 8.14.1 知 $m=n-1=5+x$，又由握手定理知

$$2m=2\times 2+3\times 1+4\times 3+1\times x=19+x,$$

故

$$2\times(5+x)=19+x, \quad 即 \quad x=9.$$

因此，T 有 9 个叶结点.

例 8-29 图 8-23 给出了一个连通图 G,求 G 的一棵生成树 T_G,并指出 T_G 的二条枝和二条弦.

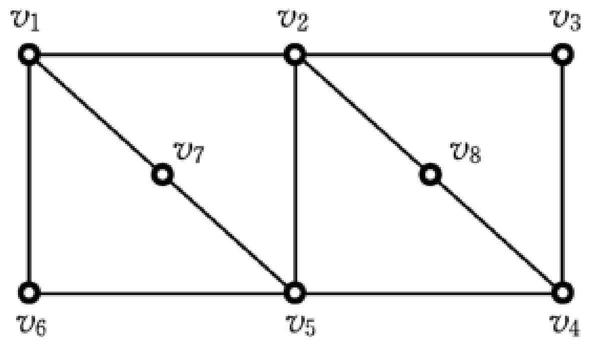


图 8-23

解 $G_1=G$ 中有环 $\sigma_1=v_1v_2v_5v_7v_1$,删去边 $\{v_1,v_2\}$得 $G_2=G_1-\{v_1,v_2\}$,见图 8-24.

G_2 中有环 $\sigma_2=v_2v_3v_4v_8v_2$,删去边$\{v_2,v_3\}$得 $G_3=G_2-\{v_2,v_3\}$;

G_3 中有环 $\sigma_3=v_1v_7v_5v_6v_1$,删去边$\{v_1,v_6\}$得 $G_4=G_3-\{v_1,v_6\}$;

G_4 中有环 $\sigma_4=v_2v_8v_4v_5v_2$,删去边$\{v_4,v_5\}$得 $G_5=G_4-\{v_4,v_5\}$,G_5 无环,故 $T_G=G_5$ 是 G 的一棵生成树.$\{v_1,v_7\}\{v_6,v_5\}$是 T_G 的二条枝,$\{v_1,v_2\}$,$\{v_2,v_3\}$是 T_G 是二条弦.

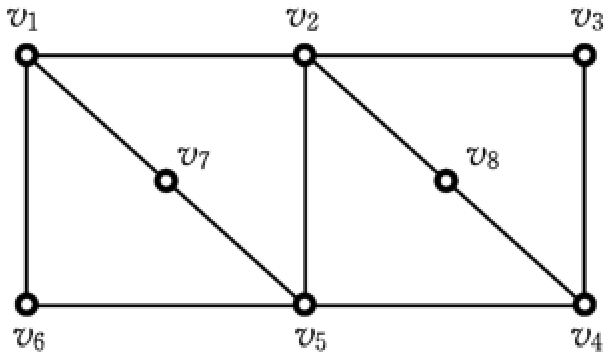
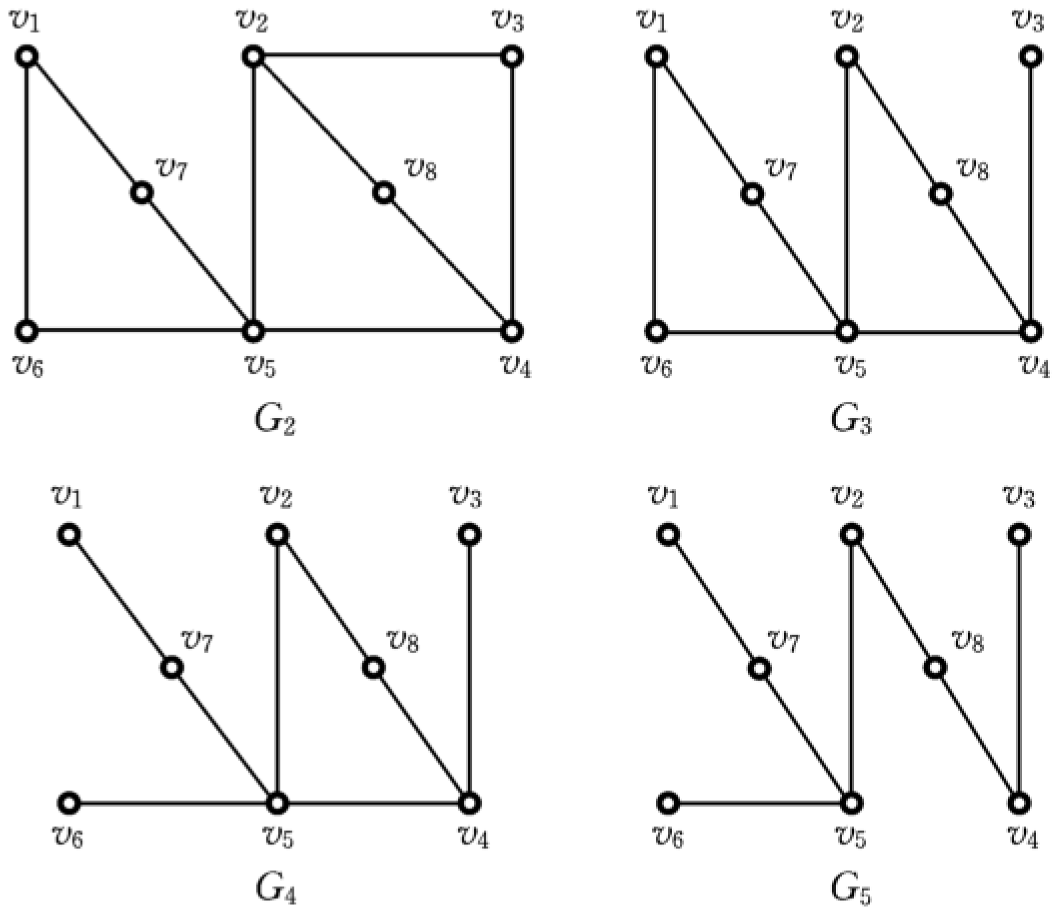
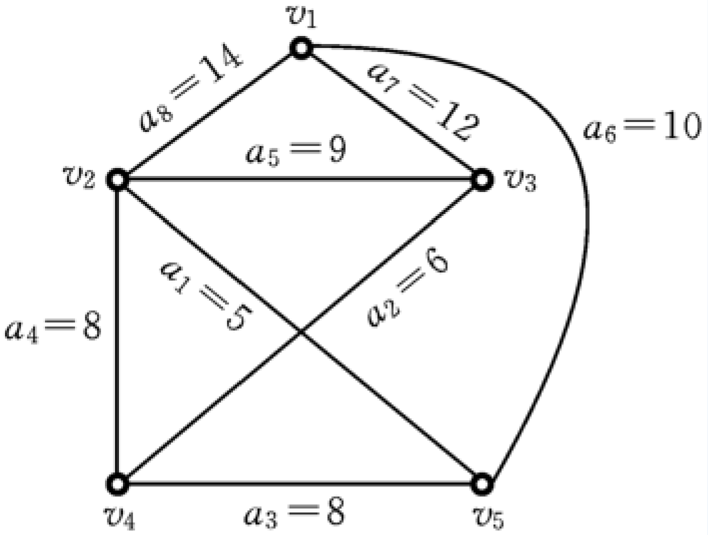


图 8-23



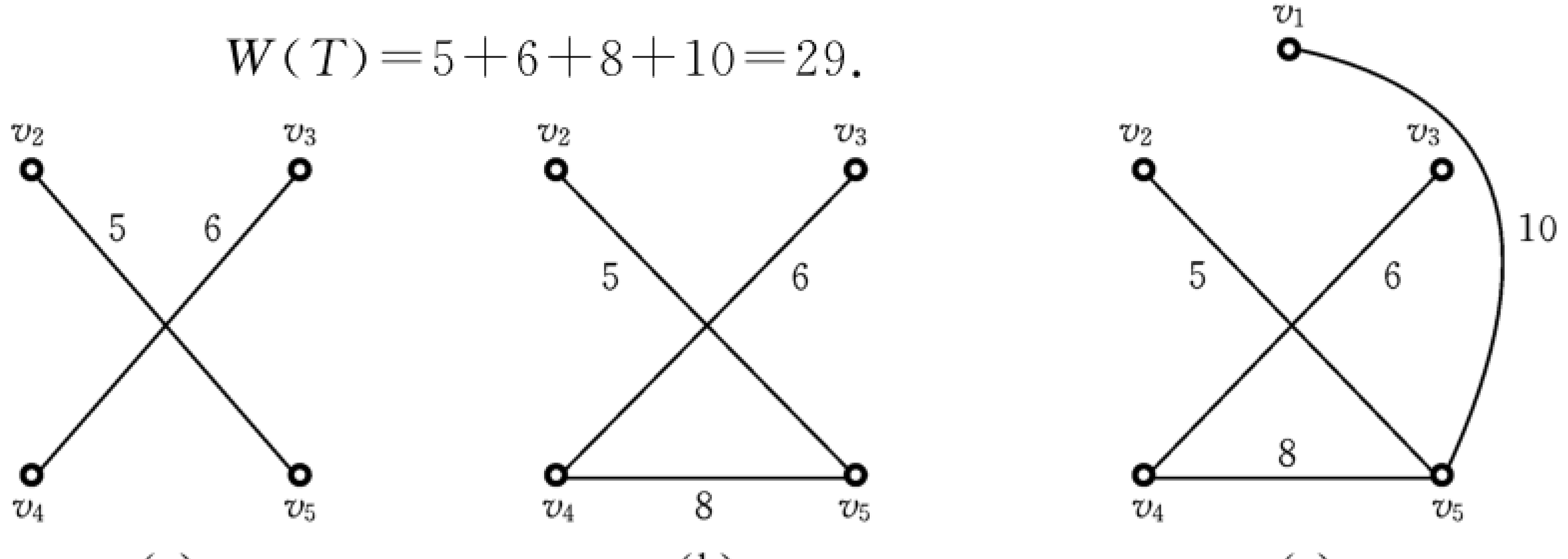
例 8-30 在图 8-25 所示的有权图 G 中,求一棵最小生成树 T,并计算其权.



解 $f(a_1)=5, f(a_2)=6, f(a_3)=8, f(a_4)=8, f(a_5)=9, f(a_6)=10, f(a_7)=12, f(a_8)=14$.

取 $e_1=a_1=\{v_2,v_5\}, e_2=a_2=\{v_3,v_4\}$,由于 $\{v_4,v_5\}=a_3$ 与 e_1,e_2 不构成环路,所以取 $e_3=\{v_4,v_5\}$,而 $a_4=\{v_2,v_4\}$和 $a_5=\{v_2,v_3\}$均与$\{e_1,e_2,e_3\}$构成环路,故选 $e_4=a_6=\{v_1,v_5\}$即 $T=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$,如图 8-26 所示.

$$W(T)=5+6+8+10=29.$$



浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

定理 8.17.1 设 T 是一棵(n,m)有向树，则 $m=n-1$.

例 8-31 试证完全二元树有奇数个结点.

证 设 T 是一棵完全二元树，T 为(n,m)图，T 有 n_0 片树叶，则 T 有 $n-n_0$ 个分支结点. 于是 $m=2(n-n_0)$，又 $m=n-1$，所以 $n-1=2n-2n_0$，因此，$n=2n_0-1$ 为奇数.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

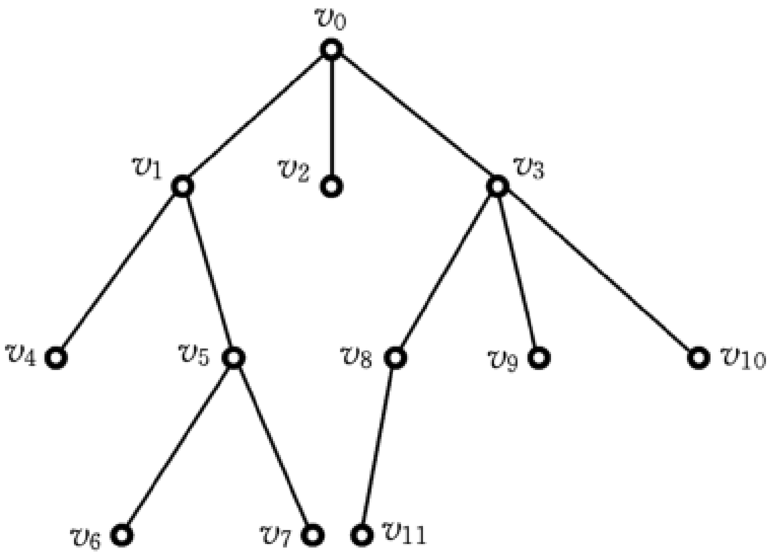


图 8-27

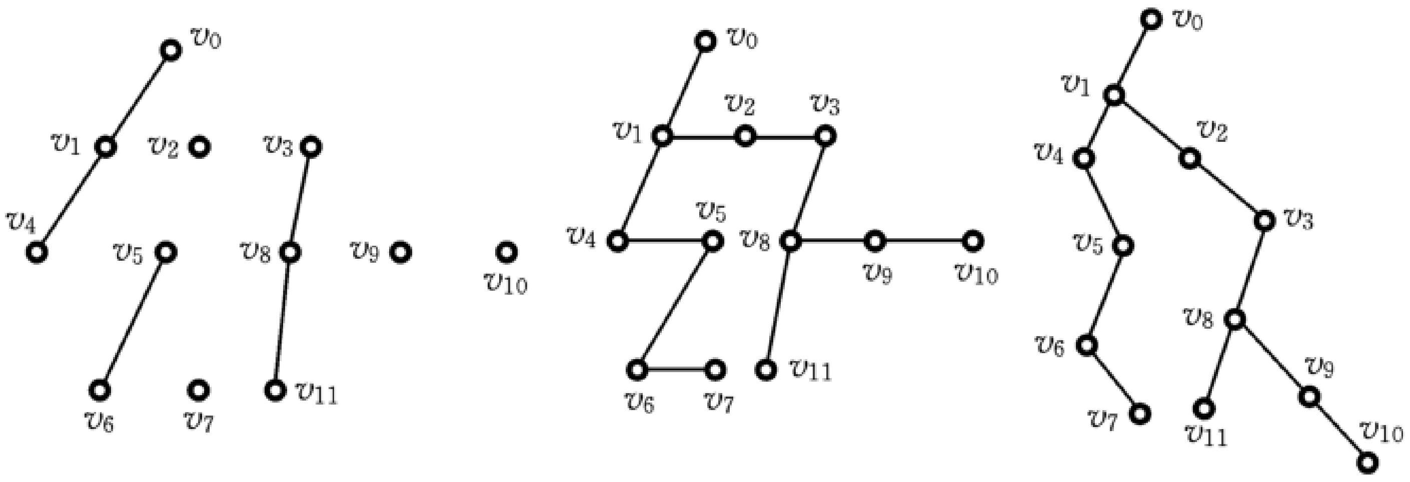
例 8-32 将图 8-27 给出的三元树转化为二元树.

解 （1）对每一结点只保留它的最左分支,删去其余分支,如图 8-28(1)所示.

（2）在同一级上的结点从左到右用边连接起来,如图 8-28(2)所示.

（3）对任一结点选定在该结点下的结点为它的左儿子,在该结点右边的为它的右儿子.

（4）将结点的左儿子画在结点的左下方,右儿子画在结点的右下方,如图 8-28(3)所示.



(1)　　(2)　　(3)

例 8-33 分别用先根通过、中根通过和后根通过的算法扫描图 8-28(3)所示的二元树 T 的所有结点.

解 (1) 先根通过. 先访问根结点，然后在根结点的左子树上执行先根通过算法(即在以根结点的左儿子为根的子树上执行该算法)，最后在根结点的右子树上执行先根通过算法.

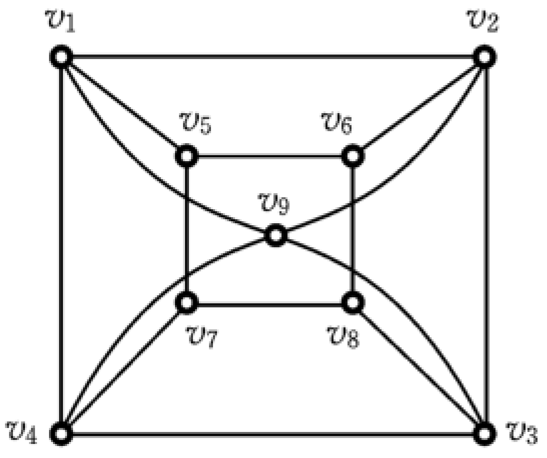
先根通过 T 扫描结果为 $v_0 v_1 v_4 v_5 v_6 v_7 v_2 v_3 v_8 v_{11} v_9 v_{10}$.

(2) 中根通过. 先在根结点的左子树上执行中根通过算法，然后访问根结点，最后在根结点的右子树上执行中根通过算法.

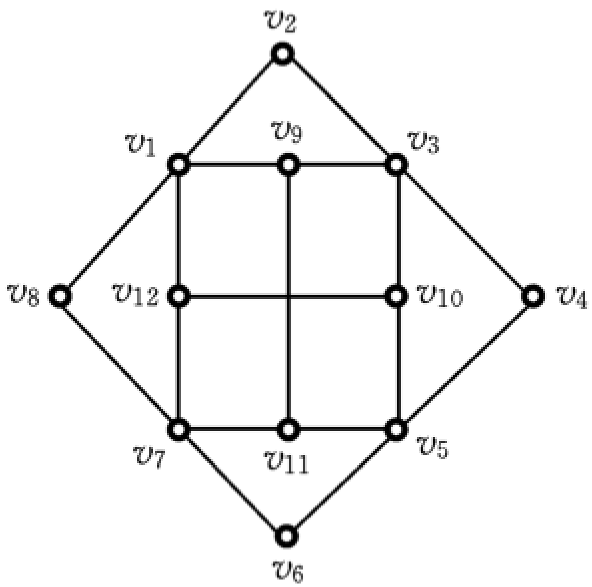
在 v_0 的左子树上执行中根通过，v_0 的左子树以 v_1 为根，由于 v_1 有左子树，以 v_4 为根，所以再在以 v_4 为根的子树上执行中根通过. 因为 v_4 无左子树，故扫描 v_4，然后再在 v_4 的右子树，即以 v_5 为根的子树上执行中根通过，继续这一过程……最后扫描结果为 $v_4 v_6 v_7 v_5 v_1 v_2 v_{11} v_8 v_9 v_{10} v_3 v_0$.

(3) 后根通过. 先在根的左子树上执行后根通过算法，然后在根的右子树上执行后根通过算法，最后访问根结点扫描结果为 $v_7 v_6 v_5 v_4 v_{11} v_{10} v_9 v_8 v_3 v_2 v_1 v_0$.

例 8-38 说明图 8-34 所示的两个图为平面图.

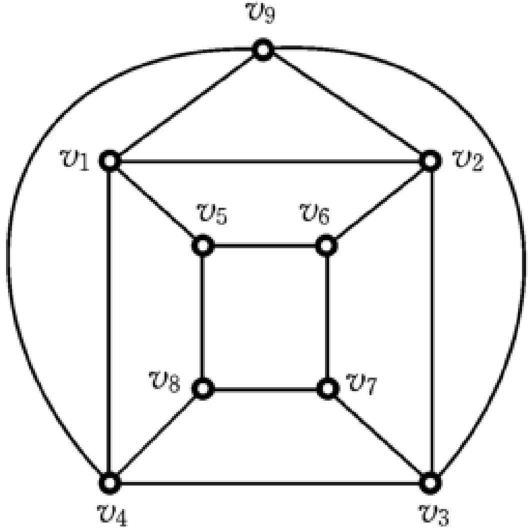


G_1

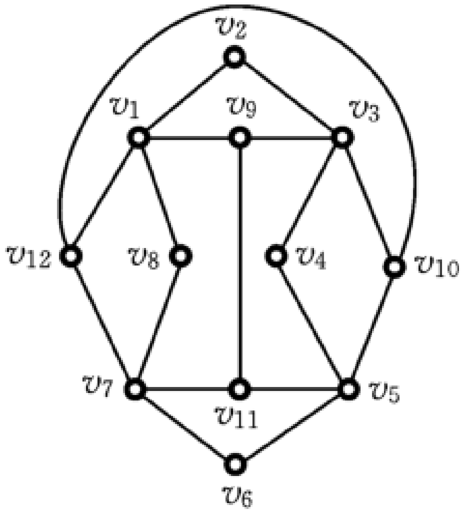


G_2

解 G_1,G_2 分别能画成如图 8-35(1),(2)所示的图解,故均是平面图.

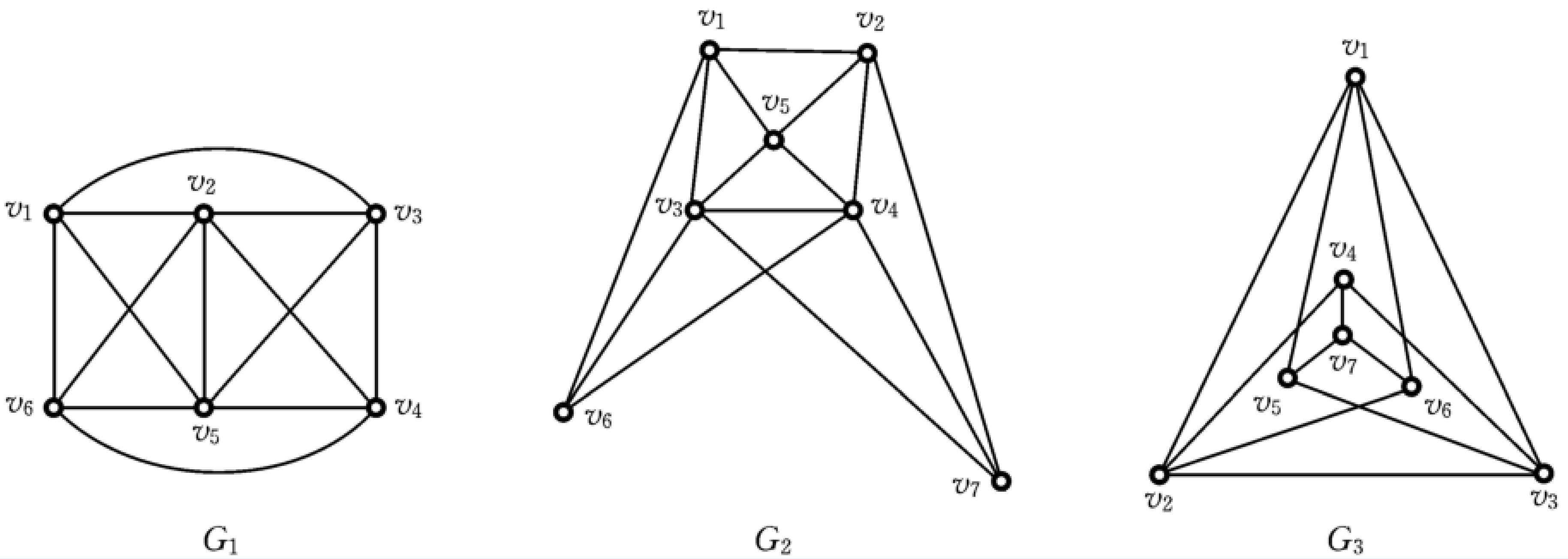


(1)



(2)

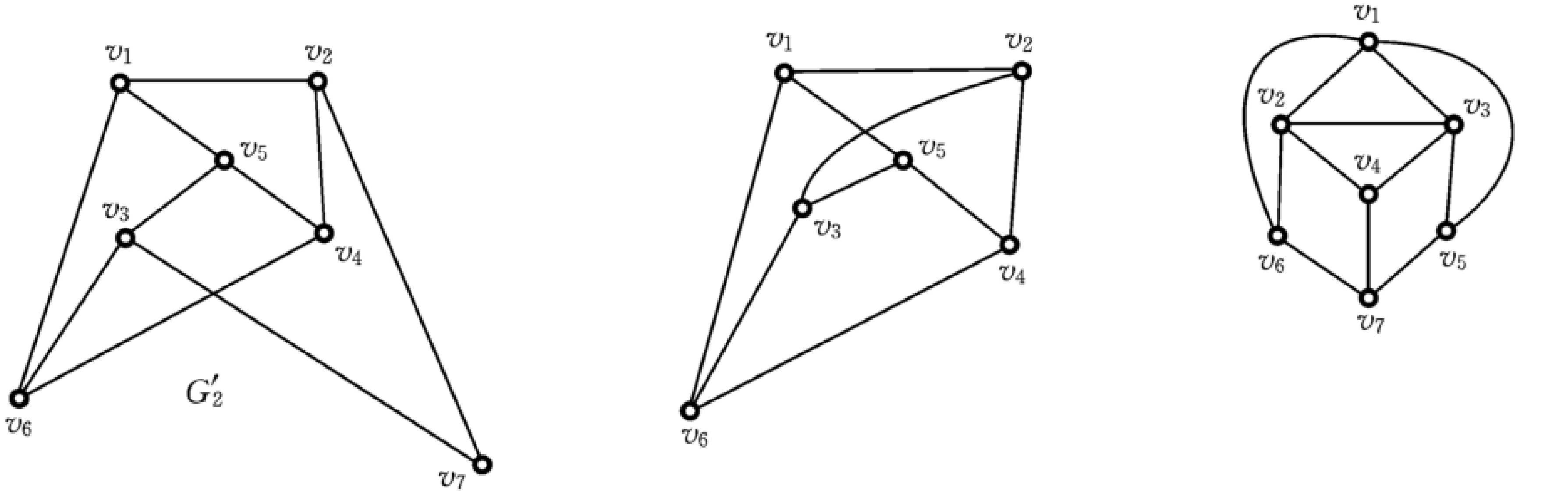
例 8-39 判定如图 8-36 所示的三个图是否为平面图.



解　(1) G_1 的结点数 $n=6$，边数 $m=13$，G_1 连通. 若 G_1 是平面图，则 $m=13\leqslant 3n-6=18-6=12$ 矛盾，所以 G_1 是非平面图.

(2) 取 G_2 的子图 G_2'，如图 8-37(1)所示. G_2' 在度为 2 的结点内与 $K_{3,3}$ 同构，如图 8-37(2)所示. 由 Kuratowski 定理知 G_2 是非平面图.

(3) G_3 能画出如图 8-37(3)所示的平面图解，故是平面图.



(1)　　(2)　　(3)

例 8-42 若(n,m)图 G 是有 r 个分图的树林，则 $m=n-r$.

证 因为树林的每个分图是树，即 G 的 r 个分图 $G_1,G_2,\cdots,G_r$ 均是树. 设 G_i 有 n_i 个结点，$m_i(i=1,2,\cdots,r)$条边，则由定理 8.14.1 知 $m_i=n_i-1$ $(i=1,2,\cdots,r)$，所以

$$
\begin{aligned}
m &= m_1+m_2+\cdots+m_r=(n_1-1)+\cdots+(n_r-1) \\
&= (n_1+\cdots+n_r)-r=n-r.
\end{aligned}
$$

例 8-43 试证明若图 G 的每一结点的度为 2，则 G 的每一分图均将包含一环.

证 假设 G 的某一分图 G_k 不含环，且 G_k 为(n_k,m_k)图，由条件知 G_k 的每一结点的度数为 2，于是

$$2m_k=\sum_{i=1}^{n_k}\deg(v_i)=2n_k,\quad m_k=n_k.$$

又 G_k 连通且无环，故是树. 由定理 8.14.1 知 $m_k=n_k-1$ 与 $m_k=n_k$ 矛盾，因此，G 中每个分图必含环.

例 8-48 试证明 n 阶图 G 中奇次度结点的个数与 $\overline{G}$ 中奇次度结点的个数相等，其中 n 为奇数(度数为奇数的结点，称为奇次度结点).

证 因为 n 为奇数，所以 n 阶完全图 K_n 的每个结点的度数 $n-1$ 为偶数.

设 v 是 G 中任一奇次度结点，$\deg(v)=k$.

在 $\overline{G}$ 中记 $\deg(v)=k'$，则 $k+k'=n-1$，于是 k' 为奇数.

由 v 的任意性知 G 中任一奇次度结点，一定也是 $\overline{G}$ 中奇次度结点. 又 G 与 $\overline{G}$ 互补. 因此，结论成立.

例 8-52　证明恰有 2 片树叶的树为一条真路.

证　设 T 为恰有 2 片树叶的 (n,m) 树，则由握手定理知

$$2m = \sum_{i=1}^{n}\deg(v_i) = 2 + \sum_{i=1}^{n-2}\deg(v_i),$$

其中 v_n, v_{n-1} 为树叶.

另一方面，T 是树，所以 $m=n-1$，于是

$$2n-2=2+\sum_{i=1}^{n-2}\deg(v_i)\,,\quad \text{即}\quad \sum_{i=1}^{n-2}\deg(v_i)=2(n-2).$$

由条件知，T 中除 2 个叶结点外，其余 $n-2$ 个分支结点度数均大于等于 2.

因此，这 $n-2$ 个分支结点的度数只能都为 2，故 T 有一条欧拉路. 所以 T 为一条真路.

例 8-54 若 G 是一个平面图，有 r 个分图，证明 $n-m+k=r+1$，其中 n,m,k 分别为 G 的结点数、边数和面数.

证 设 G 的 r 个分图为 $G_1,G_2,\cdots,G_r$，由于 G 是平面图，所以 G_i 是平面连通图，记 G_i 的结点数、边数、面数分别为 $n_i,m_i,k_i(i=1,2,\cdots,r)$，于是由欧拉公式得

$$n_i-m_i+k_i=2 \quad (i=1,2,\cdots,r). \tag{1}$$

而 $n=\sum_{i=1}^{r}n_i, m=\sum_{i=1}^{r}n_i, k=\sum_{i=1}^{r}k_i-(r-1)$（因为每个分图均将无限面记数一次）.

对式(1) 两边求和得

$$n-m+k+(r-1)=2r,\quad n-m+k=r+1.$$

注意 该式是对欧拉公式的推广.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 8-55 设(n,m)图 G 是有 r 个分图的平面图，G 的每个面至少由 $l(\geqslant 3)$条边围成，则

$$m \leqslant \frac{l(n-r-1)}{l-2}.$$

证 设 G 有 k 个面，k 个面的各边界长度之和为 S，则 $S \geqslant l \cdot k$.

另一方面，每条边至多在两个面的边界中，所以 $S \leqslant 2m$，于是 $2m \geqslant l \cdot k$，即

$$k \leqslant \frac{2m}{l}. \tag{1}$$

根据欧拉公式的推广(例 8-53)得

$$n-m+k=r+1. \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)得 $$n-m+\frac{2m}{l} \geqslant r+1.$$

经整理后为 $$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-r-1).$$

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平