离散数学

第一部分 集合论

第一章 集合

1.集合及有关概念、集合的表示法

- 集合（确定、唯一、无序）、元素、集合的基数（#）；
- 集合的两种表示方法——列举法和描述法；
- 两个特殊的集合——全集合和空集；
- 子集、包含集和幂集2^A；
- 分划和细分（任意两个子集的交集为空集、全部子集的并集等于原集合）；
- 集合的最小集标准形式和最大集标准形式；

2.集合间的关系

- 集合间的包含关系（证明集合相等）；
- 集合间的真包含关系；
- 集合间的相等关系；
- 集合间的互补关系；

3.集合的运算

- 集合的并运算；
- 集合的交运算；
- 集合的补运算——相对补运算（差集）、绝对补运算（补集）；
- 集合运算的定律；

4.对集合间的关系和运算进行分析和论证的工具

- 文氏图——直观、形象，可作为描述和分析的工具；
- 成员表——根据运算的定义严格构造出来，可作为证明的工具；

5.典型例题

1. 集合的证明方法：文氏图、定义、运算定律；

第二章 关系

1.集合的笛卡尔积

- 有序n元组；
- 有序二元组，也称为序偶；
- n个集合的笛卡尔积；
- 两个集合的笛卡尔积；

2.关系

- 由集合A到集合B的关系；
- 集合A上的关系；
- 恒等关系和普遍关系；
- 关系的逆关系（注意与补运算相区分）；

- 复合关系;

3.关系的表示方法

- 集合表示方法——列举法和描述法;
- 矩阵表示法——用矩阵表示由有限集A到有限集B的关系;
- 关系图表示法——用有向图表示有限集A上的关系;
- 次序图——用无向图来特定地表示有限集A上的偏序关系;

4.关系的复合运算和闭包运算

- 由给定的关系ρ_1和ρ_2，求复合关系$\rho_1 \cdot \rho_2$;
- 由给定的集合A上的关系ρ，求复合关系ρ^n;
- 由给定的集合A上的关系ρ，求传递闭包（即可达）$\rho^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$、对称闭包$s(\rho) = \rho \bigcup \tilde{\rho}$、自反闭包$r(\rho) = \rho \bigcup I_A$;

5.集合A上关系的性质

- 自反关系（自反、非自反、反自反）;
- 对称关系（对称、非对称、反对称）;
- 可传递的关系;

6.集合A上两类重要的关系

- 等价关系（自反、对称、可传递）、等价类和等价分划;
- 偏序关系（自反、反对称、可传递）、全序和良序（存在最小元素）;

7.典型例题

1. 根据题目描述写出关系，注意关系是有序组的**集合**，掌握个数、定义域、值域、逆关系即各类运算;
2. 计算复合关系：定义、关系矩阵、关系图，注意寻找循环的复合关系;
3. 判断集合A上的关系性质的定义;
4. 计算传递闭包，掌握其性质;
5. 掌握等价关系的定义，能写出等价分划，注意分划是等价元素集合的**集合**；掌握偏序关系的定义，能画出关系图和次序图;

第三章 函数

1.函数的概念

- 由集合A到集合B的函数;
- 函数的定义域和值域;
- 恒等函数;
- 复合函数;
- 逆函数;

2.三种特殊的函数

- 内射：像源唯一;
- 满射：每一个像均存在像源;
- 双射：既是内射，又是满射，即一一对应;

3.函数的复合运算及其性质

- 复合运算的可结合性；
- 恒等函数的不改变性；

4.复合函数的性质

- 如果f和g都是内射，则gf也是内射；

  如果f和g都是满射，则gf也是满射；

  如果f和g都是双射，则gf也是双射；

- 如果gf是内射，则f是内射；

  如果gf是满射，则g是满射；

  如果gf是双射，则f是内射，g是满射；

5.逆函数的性质

- 只有双射函数才有逆函数，逆函数也是一个双射，两者互为逆函数；
- 逆函数的逆函数即为逆函数；
- 原函数与逆函数的复合函数为恒等函数，反之仍然成立；
- $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$；
- 左逆函数（内射）、右逆函数（满射）；

6.置换

- 恒等置换；
- 逆置换；

7.典型例题

1. 复合函数的运算；
2. 复合函数性质的证明，常使用反证法；

第二部分 代数系统

第四章 代数系统

1.集合A上的运算

- 集合A上的运算；
- 运算的封闭性；
- 二元运算的常见性质：交换性、结合性、分配性；
- 二元运算中的特殊元素：单位元、零元（和单位元不能相等）、幂等元、逆元（存在单位元）；

2.代数系统

- 代数系统：域（非空集合）和定义在该集合上的运算；
- 整环：代数系统+交换律、结合律、分配律（乘法对加法）、单位元（乘法、加法）、逆元（加法）、消去律（乘法）；
- 子代数：代数系统+域包含；

3.代数系统的同态与同构

- 同态：二元运算$h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) * h(x_2)$一元运算$h(\sim x) = (h(x))'$；
- 单同态（h为单射）；
- 满同态（h为满射）：交换性、结合性、分配性、单位元、零元、逆元的性质仍然保持；
- 同构（h为双射），实际上为一个代数系统，通常寻找特例使用反证法；

第五章 群

1.半群和独异点

- 半群：可结合的代数系统；
  - 子半群：T是半群S的子代数；
- 独异点：存在单位元的半群；
  - 交换独异点：可交换的独异点；
    - S上所有幂等元形成S的一个子独异点；
  - 循环独异点：存在生存元的独异点，即$a = g^i$；
    - 可交换；
    - 有限循环独异点：$g^n = g^m$；
    - 有限循环独异点：至少存在一个除单位元以外的幂等元；
  - 有限独异点：存在$a^j * a^j = a^j$；
  - 子独异点：T是独异点，T包含于S，且有相同的单位元；
- 生成子：S中的所有元素均可以由T中的元素表示出来；
- 半群和独异点的性质可由满同态继承；

2.群

- 群：存在逆元的独异点；
  - 交换群（阿贝尔群）：可交换的群；
  - 循环群：存在生成元的群，即$a = g^i$；
    - 生成元的周期等于群的阶；
  - 有限群；
- 元素的周期：$a^r = e$，单位元的周期为1；
- 若群的阶大于1，则没有零元；
- 除单位元外，群没有幂等元；

3.群的基本性质

- 可解性：存在唯一x，使$x * a = b$；存在唯一y，使$a * y = b$；
- 消去律：若$a * b = a * c$，则$b = c$；若$b * a = c * a$，则$b = c$；
- 元素的周期；
  - 当且仅当k为元素周期的整数倍时，$a^k = e$；
  - 任一元素与其逆元拥有相同周期；
  - 有限群的任一元素具有有限周期性，且不大于群的阶；

4.子群及其陪集

- 子群及其判别；
  - 定义：群+非空子集+单位元相同；
  - 判别1：非空子代数+逆元；
  - 判别2：非空子集+当且仅当$a,b \in H$，可推得$a*b^{-1} \in H$；
  - 判别3：非空子代数+G有限；
  - 判别4：非空子代数+H有限；
- 子群的陪集：a是G的任意元素，H是G的子群，左陪集为$a*H$，右陪集为$H*a$；
- 正规子群及其判别；
  - 定义：$a*H=H*a$；
  - 判别1：交换群；
  - 判别2：$a*H*a^{-1}=H$；
  - 判别3：$a*H*a^{-1} \subseteq H$；
- 子群关于正规子群的性质；
  - 当且仅当$b*a^{-1} \in H$时，$b \in H*a$；当且仅当$a^{-1}*b \in H$时，$b \in a*H$；
  - $H*a=H*b$或$(H*a)\bigcap(H*b)=\varnothing$；$a*H=b*H$或$(a*H)\bigcap(b*H)=\varnothing$；
- 左陪集分划、右陪集分划、陪集分划：#(a * H)=#(H * a)=#H；
- 拉格朗日定理：#G=#(∪a * H)=d#(a * H)=d#H；
  - 推论1：素数阶的群只有平凡子群；
  - 推论2：#H是#G的因子；
  - 推论3：G中每个元素的阶都是#G的因子；
  - 推论4：素数阶的群必为循环群，且每个元素都是生成元；

第七章 格和布尔代数

1.格的基本概念

- 偏序集：自反、反对称、传递；
- 下界、上界、最大下界glb、最小上界lub、最小元、最大元；
- 格：任意两个元素都存在最大下界和最小上界的偏序集；满足交换律、结合律、吸收律的代数系统；
- 子格：A是L的子代数；

2.格的性质

- 格的基本性质：$l_1 \vee l_2=l_1, l_1 \wedge l_2=l_2, l_1 \geq l_2$，交换律、结合律、吸收律、幂等律、保序性、分配不等式；
- 格的对偶原理；

3.特殊的格

- 分配格：分配律；满足消去律；
- 有补格；
- 有补分配格：补元唯一、对合律、德摩根律；

4.布尔代数的性质

- 十条基本性质：交换律、结合律、吸收律、幂等律、分配律、同一律、零一律、互补律、对合律、德摩根律；
- 定义：封闭、同一律、互补律、交换律、分配律；
- 子布尔代数：A是L的子代数；

- 原子：有限即存在、原子表示定理、唯一性定理；
- 有限布尔代数的同构：原子集合的幂集；域的基数是2的幂，域相同的布尔代数同构；

5.布尔表达式

- 最小项和最大项

第三部分 图论

第八章 图论

1.图的基本概念

- 图、(n,m)图、无向图、有向图、伪图、多重图、简单图、有权图；
- 边关联结点、结点关联边、结点的邻接、边的邻接、孤立点、孤立边；
- 完全图K_n、补图G'、结点的度数、正则图（所有结点的度相同）；
- 子图、真子图、生成子图、图的同构；

2.边数、度数、个数的关系

- 握手定理：$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$；
- K_n中，$m=\frac{1}{2}n(n-1)$；

3.路

- 开路、回路、真路、环路、简单道路、短程；
- 结点间的连接、连通图、连通子图、分图；

4.矩阵表示

- 邻接矩阵
- 连接矩阵

5.欧拉图和哈密顿图

- 欧拉回路：所有的路都出现在回路上，且只经过一次；欧拉定理：每个结点的度均为偶数；
- 欧拉路：所有的路都出现在路上，且只经过一次（开路）；仅有两个奇数结点，一个为起点，一个为终点；
- 哈密顿环：经过所有的点，且只经过一次；
- 哈密顿图的判定条件
  - 必要条件：$W(G-S)\leq \#S$；
  - 若$deg(u)+deg(v)\geq n$，则当且仅当$G+\{u,v\}$是哈密顿图时；
  - 当且仅当闭包是哈密顿图；
  - 判定方法
    - 闭包是K_n且$n\geq 3$；
    - $\#V\geq 3$，且$deg(v_i)\geq n/2$；
    - $\#V\geq 3$，且$deg(v)+deg(u)\geq n$；
- 最邻近算法；

6.树：不含回路、连通

- 树、树林、树叶；
- 树的性质及判定条件：$m=n-1$；
- 生成树、最小生成树；

7.有向树

- 根、叶、枝点、级、子树；
- m元树、完全m元树、二元搜索树；

8.平面图

- 欧拉定理：$n-m+k=2$；
- $m\leq 3n-6$；
- 库氏定理：没有在度2结点内与库式图同构的图；
- 一封闭折线是一封闭折线图；

第1章 集合

1.1 集合

集合与元素

- 一些确定的、可区分的事物构成的整体称为**集合**，其中所含的事物称为**元素**；
- 元素和集合的关系：$a\in A$ or $a\notin A$；
- 集合的表示方法：穷举法，描述法；
- *注意点*：集合中的元素是可区别的；集合中的元素是确定的；元素在集合中的次序是随意的；任何确定的、可区别的事物都可以作为元素；

定义1-1 不含有任何元素的集合，称为**空集**，记作$\varnothing$；

集合基数

- 集合**基数**：集合中元素的数目，记作$\#A$
- 基数有限为**有限集**，基数无限为**无限集**；

1.2 集合的包含和相等

定义1-2 若集合A的每一个元素都是B的元素，则A是B的**子集**，记作$A\subseteq B$；

- 对于任意集合A，有$\varnothing\subseteq A$；
- 对于任意集合A，有$A\subseteq A$；
- 对于任意集合A、B、C，若$A\subseteq B$，且$B\subseteq C$，有$A\subseteq C$；

定义1-3 集合A和B的所有元素相同，则集合**相等**，记作$A=B$；

- 等价定义：$A\subseteq B$且$B\subseteq A$；

定义1-4 若$A\subseteq B$且$A\neq B$，则A是B的**真子集**，记作$A\subset B$；

定理1-1 空集合是唯一的；

1.3 幂集

定义1-5 由集合A的所有子集作为元素构成的集合称为A的**幂集**，记作2^A，即$2^A = \{S|S \subseteq A\}$；

定理1-2 $\#2^A = 2^{\#A}$

1.4 集合的运算

第8章 图论

8.4 欧拉图和哈密顿图

欧拉图

欧拉回路 所有边都出现在回路上，且仅出现一次；

定理8-6 一个连通图G为欧拉图的充要条件为G的每一结点的度均为偶数；

定理8-7 连通图G具有一条连接结点v_i和v_j的欧拉路的充要条件是，v_i和v_j是G中仅有的具有奇数度的结点；

哈密顿图

哈密顿环 经过图中所有的点，且经过一次的环；

定理 8-8 若图$G=(V,E)$是哈密顿图，则对于V的任意一个非空子集S，有$W(G-S) \leq \#S$，这里$W(G-S)$表示$G-S$中分图的数目；

定理8-9 设G是具有n个结点的图，若有结点u和v不相邻接，且$\mathrm{dge}(u)+\mathrm{dge}(v) \geq n$，则当且仅当图$G+\{u,v\}$是哈密顿图时，图$G$是哈密顿图；

定义8-18 设G是具有n个结点的图，若对$\mathrm{dge}(u)+\mathrm{dge}(v) \geq n$的每一对结点$u$和$v$，均有$u$和$v$相邻接，则称$G$是**闭图**；

定义8-20 图G的**闭包**是包含图G的最小的闭图G_c；

定理8-12 当且仅当G_c是哈密顿图时，图G是哈密顿图；