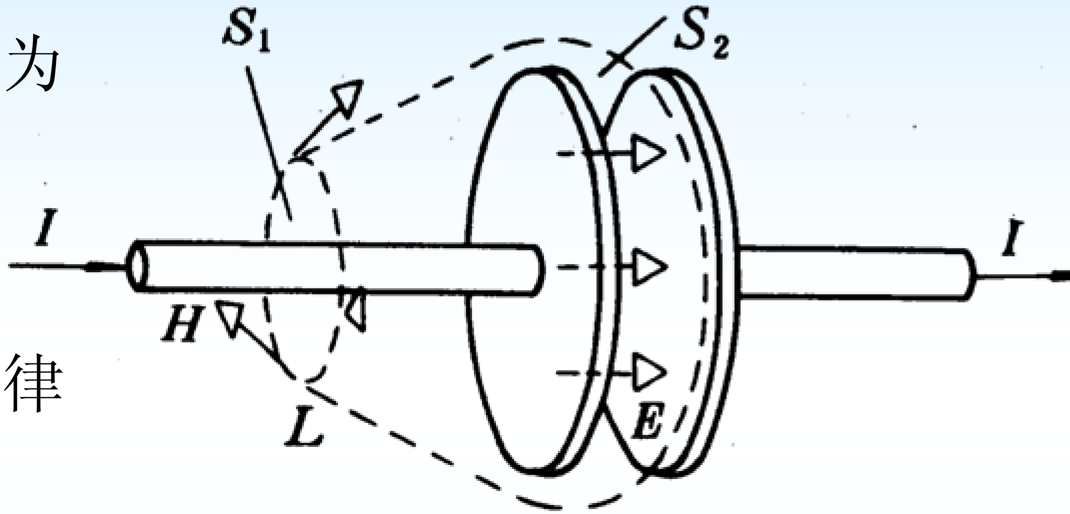
第十五章　电磁场与电磁波

15-1　位移电流

一、位移电流的引进

对于稳恒电流，安培环路定律为

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_L I$$



对于非稳恒电流，安培环路定律还成立吗？

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I \qquad \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$$

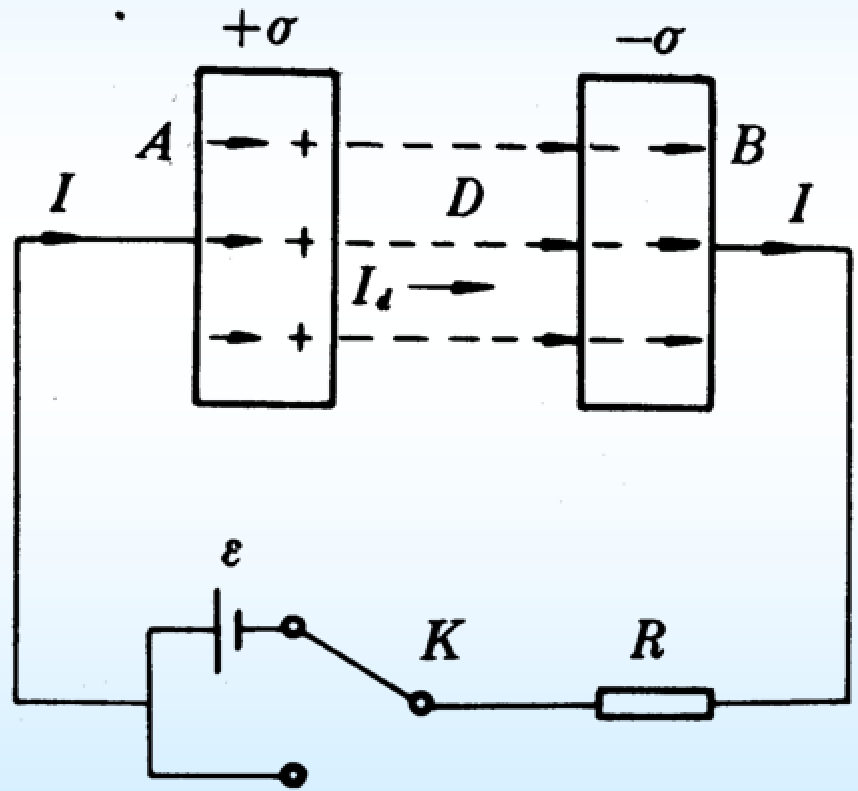
为什么对同一个回路会有不同的结果？

显然，上述矛盾的出现是由于穿过 S_1 的传导电流没有穿过 S_2，即由传导电流不连续引起的，因此可从研究电流的连续性入手。

传导电流 $$I=\frac{dq}{dt}=S\frac{d\sigma}{dt}$$ 电位移 $D=\sigma$

电通量 $$\boldsymbol{\Phi_D=SD=S\sigma}$$ $$\frac{d\Phi_D}{dt}=S\frac{d\sigma}{dt}$$

电通量的变化率在数值上等于传导电流I



位移电流 $$I_d=\frac{d\Phi_D}{dt}$$

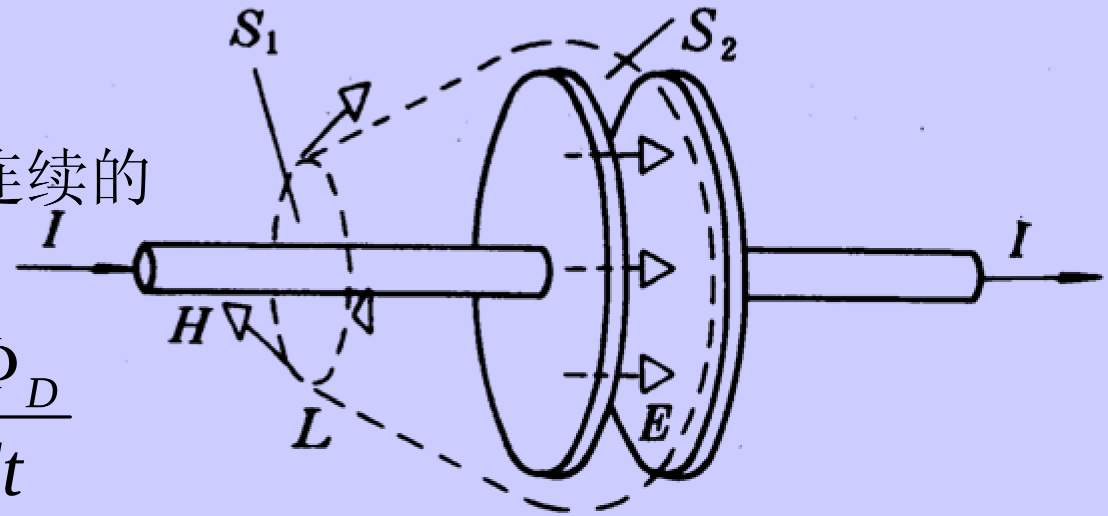
$$\boldsymbol{\Phi_D=\int\vec{D}\cdot d\vec{S}}$$

$$I_d=\frac{d\Phi_D}{dt}=\int\frac{d\vec{D}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

位移电流密度 $$\vec{j}_d=\frac{d\vec{D}}{dt}$$

二、全电流　全电流 安培环路定理

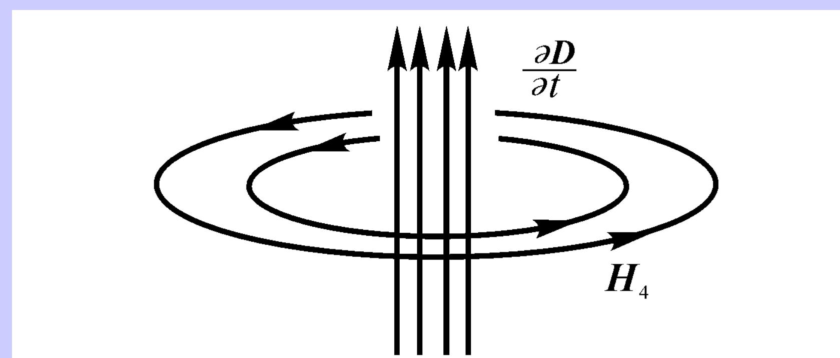
$$I_{全}=I+I_d$$



全电流在任何情况下总是连续的

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=I+I_d=I+\frac{d\Phi_D}{dt}$$

三、位移电流和传导电流的异同点

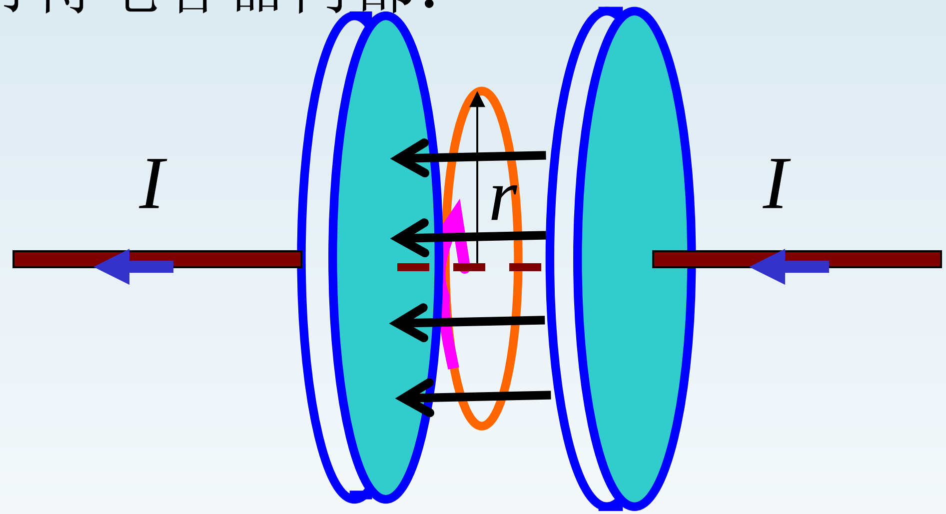


相同处：　激发磁场

不相同处：产生原因不同，性质不同

例题：一板面半径为$R=0.2m$的圆形平板电容器，正以$I=10A$的电流充电。求在板间距轴线$r_1=0.1m$处和$r_2=0.3m$ 处的磁场。

解：根据全电流的连续性，可得电容器内部：



$$j_d=\frac{I}{S}=\frac{I}{\pi R^2}$$

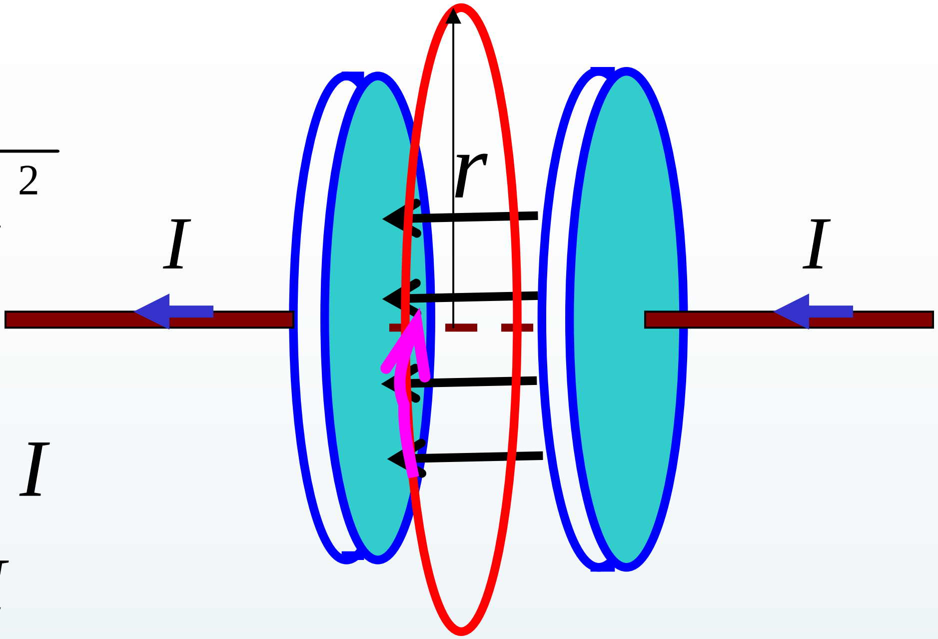
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=I+I_d$$

$$r \le R$$

在平行板间取一半径为r 的圆为回路

$$\therefore\ 2\pi rH = j_d\pi r^2=\frac{\pi r^2 I}{\pi R^2}$$

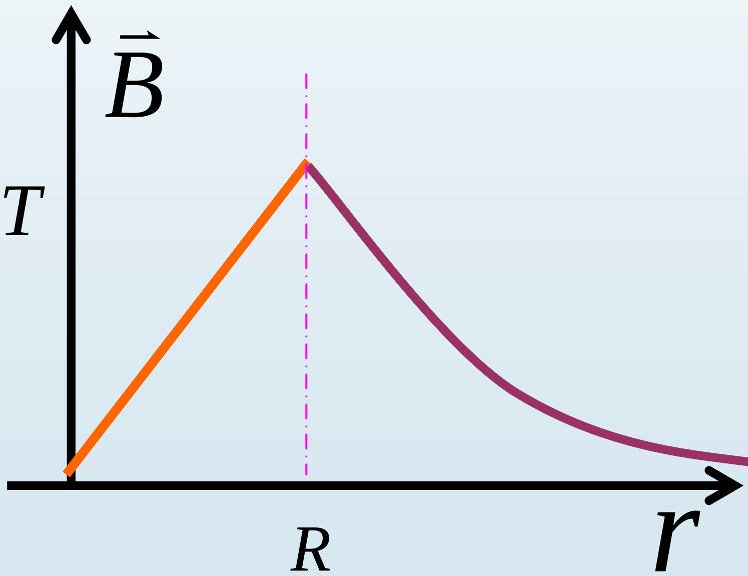
$$H = \frac{rI}{2\pi R^2} \qquad B = \mu_o \frac{rI}{2\pi R^2}$$



$r > R$

$$\therefore \ 2\pi r H = j_d \pi R^2 = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



$\boldsymbol{r_1}$**=0.1m** $\quad B = \mu_o \frac{r_1 I}{2\pi R^2} = 5 \times 10^{-6} T$

$\boldsymbol{r_2}$**=0.3m** $\quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = 6.67 \times 10^{-6} T$

15-2　麦克斯韦方程组

对电场：　$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$　　$\vec{D}=\vec{D}_1+\vec{D}_2$

$\vec{E}_1$和$\vec{D}_1$代表静电场　　$\vec{E}_2$和$\vec{D}_2$代表涡旋电场

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=\oint \vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\oint \vec{E}_2\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\iint \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\oiint \vec{D}_1\cdot d\vec{S}+\oiint \vec{D}_2\cdot d\vec{S}=\sum q=\iiint \rho dV$$

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q=\iiint \rho dV$$

对磁场 $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \qquad \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$

$\vec{B}_1$和$\vec{H}_1$代表传导电流激发的磁场　$\vec{B}_2$和$\vec{H}_2$代表位移电流激发的磁场

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

综上所述，列出麦克斯韦方程组的积分形式

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q = \iiint \rho dV$$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

其微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (4)$$

∇ 梯度

$\nabla \cdot$ 散度　算符

$\nabla \times$ 旋度

直角坐标系

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

方程组在任何惯性系中形式相同

各物理量之间的关系

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

15-3 电磁波

一、电磁波的波动方程

$$\vec{E}=\vec{E}(x,t) \qquad \vec{B}=\vec{B}(x,t)$$

$$\vec{E}=E(x,t)\vec{j} \qquad \vec{B}=B(x,t)\vec{k}$$

与平面波动方程比较

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

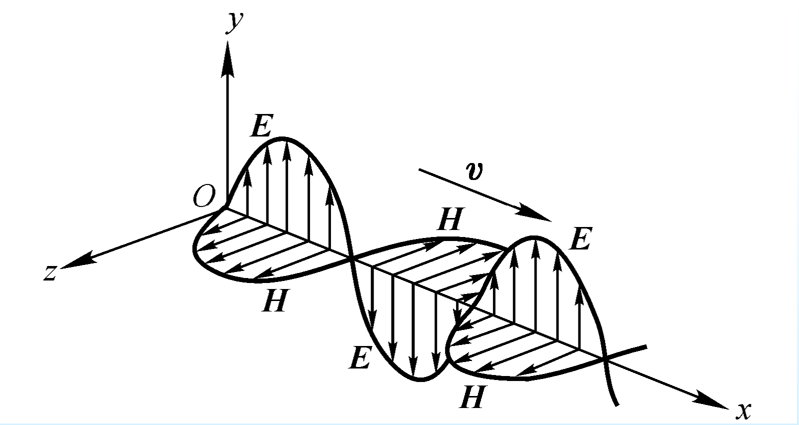
$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

特解：

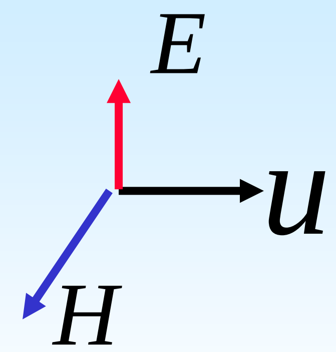
$$E=E_0\cos\omega(t-\frac{x}{v})$$

$$H=H_0\cos\omega(t-\frac{x}{v})$$



平面简谐电磁波

二、电磁波的性质



(1)电磁波的电场和磁场都垂直于波的传播方向，三者相互垂直，电磁波是横波。

(2)沿给定方向的电磁波，$\vec{E}$和 $\vec{H}$ 分别在各自的平面内振动，这种特性称为偏振。

（3）$\vec{E}$和$\vec{H}$ 都在作周期性的变化，而且相位相同，即两者变化的步调是一致的。

（4）任一时刻，在空间任一点，$\vec{E}$和$\vec{H}$ 在量值上的关系为

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$$

（5）电磁波的传播速度为 $\upsilon=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

真空中:

$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}(\text{库仑}^2/(\text{牛顿}\cdot\text{米}^2))$ $\mu_0=4\pi\times10^{-7}(N/A^2)$

$$\boldsymbol{\upsilon}=2.9979\times10^8\ \text{米}/\text{秒}$$

实验值： $\boldsymbol{c}=2.99792458\times10^8\ \text{米}/\text{秒}$

可以断言光就是电磁波！

三、电磁波的能量

电场和磁场的能量密度分别为

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$$

电磁场的总能量的总能量密度为

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

能流密度(辐射强度) $\vec{S}$

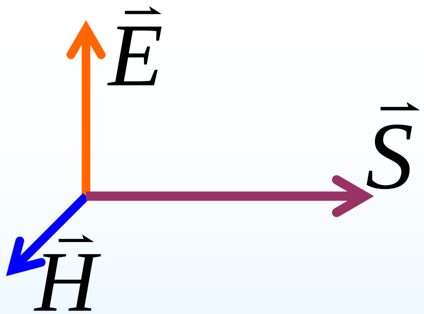
单位时间内通过与传播方向垂直的单位面积的能量

根据能流密度(辐射强度)的定义

$$S = wu = \frac{u}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \qquad \sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H$$

$$S = EH \qquad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$



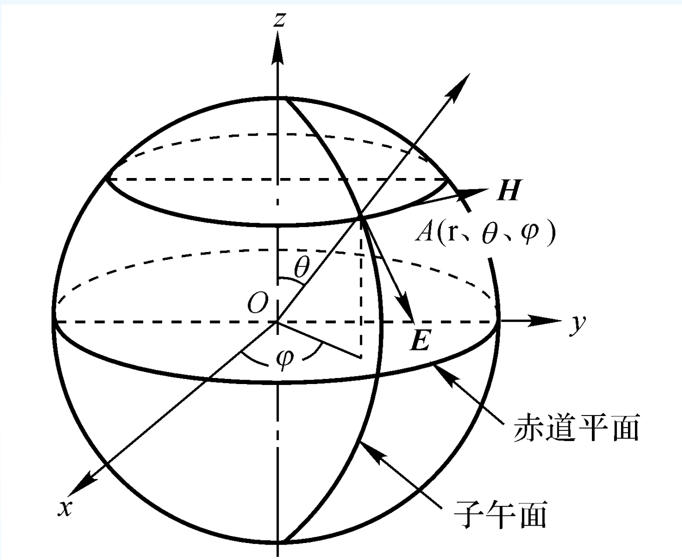
$$\overline{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

波印亭矢量

15-4 电磁波的辐射

一、振荡电偶极子辐射的电磁波

$$\vec{p} = q\vec{l}$$



$$l = l_0 \cos\omega t$$

$$p = p_0 \cos\omega t = q l_0 \cos\omega t$$

$$E = \frac{\omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon v^2 r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}$$

$$H = \frac{\omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi r v}\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

$$\overline{S}=\frac{\mu\omega^4 p_0^2\sin^2\theta}{32\pi^2 r^2 v}$$

总结： **(1)** 偶极子发射的平均能流密度**S**与频率的四次方成正比。

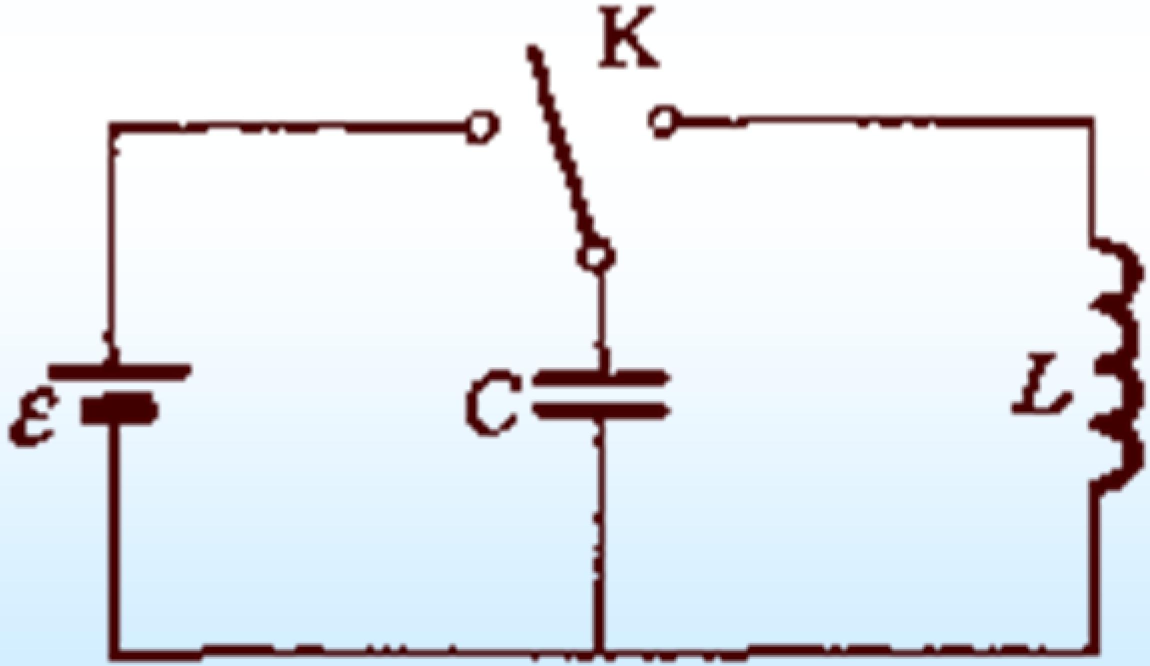
$$\overline{\boldsymbol{S}}\propto\boldsymbol{\omega}^4$$

(2) 平均能流密度与方向因子**sin²θ**成正比。

$$\overline{\boldsymbol{S}}\propto\sin^2\boldsymbol{\theta}$$

二、电磁振荡

电路中电压和电流的周期性变化称为电磁振荡，电磁振荡与机械振动有类似的运动形式. 产生电磁振荡的电路称为振荡电路. 最简单的振荡电路是由一个电容器与一个自感线圈串联而成的，称为LC电路。



设在某一时刻，电容器极板上的电荷量为q，电路中的电流为i，线圈两端的电势差应和电容器两极板之间的电势差相等，即

$$-L\frac{di}{dt}=\frac{q}{C}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}=-\frac{1}{LC}q$$

令 $\omega^2=\frac{1}{LC}$，得

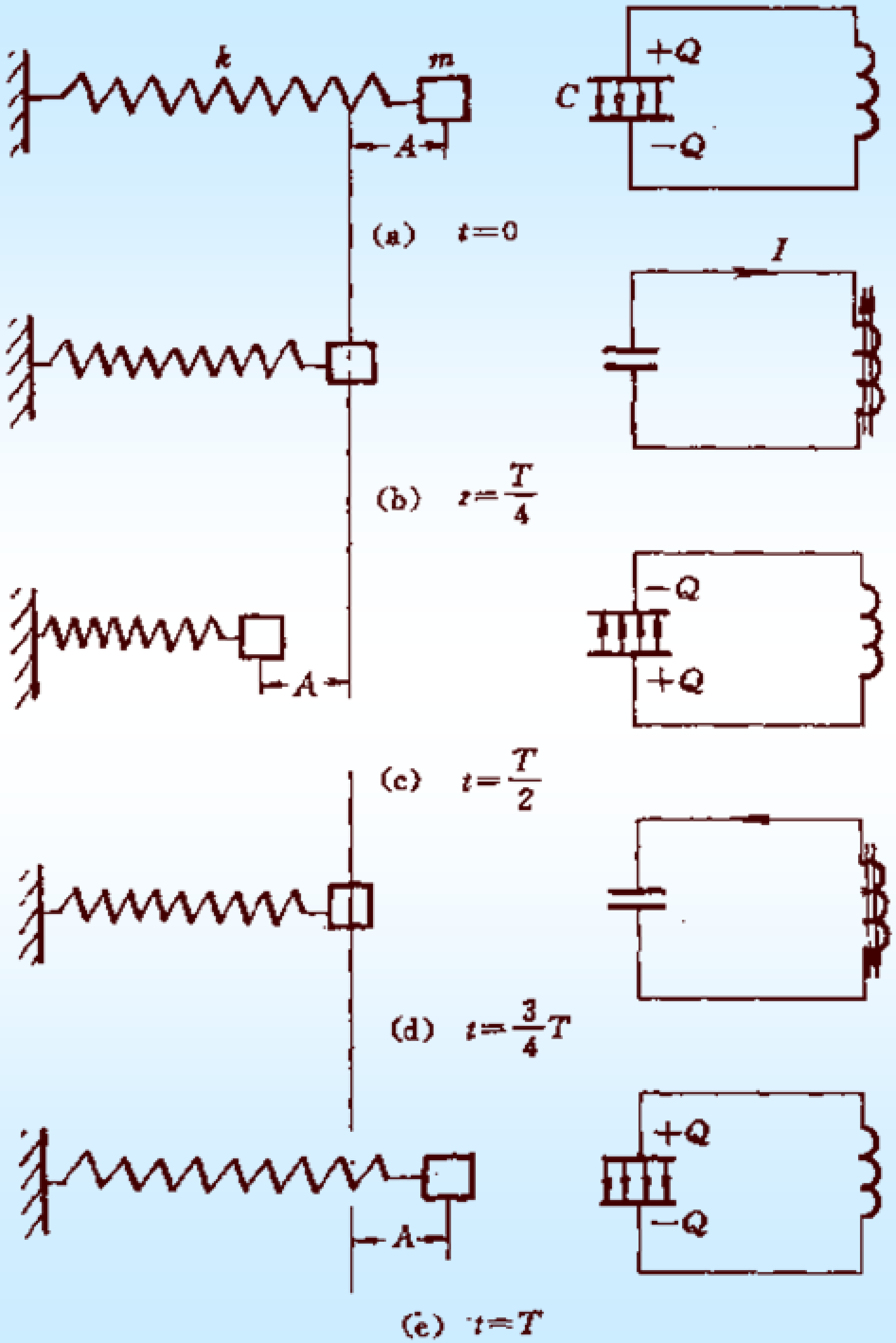
$$\frac{d^2q}{dt^2}=-\omega^2q$$

此微分方程的解为

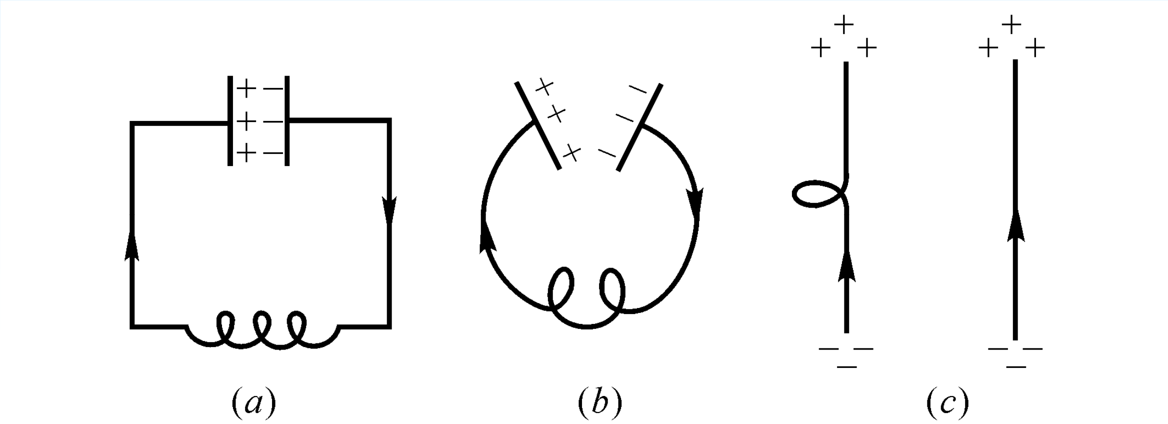
$$q=Q_0\cos(\omega t+\varphi)$$

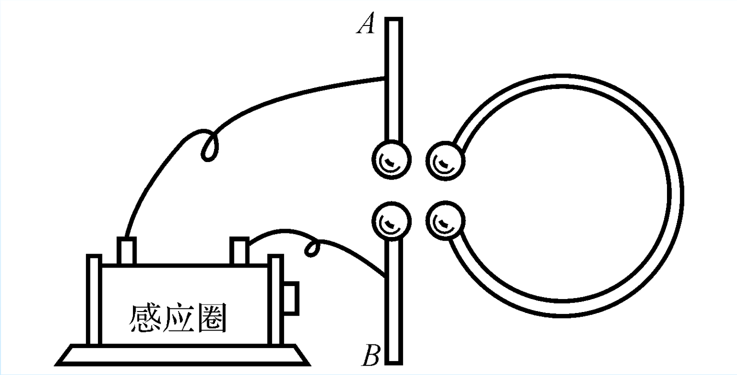
$$i=\frac{dq}{dt}=Q_0\omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

无阻尼自由振荡



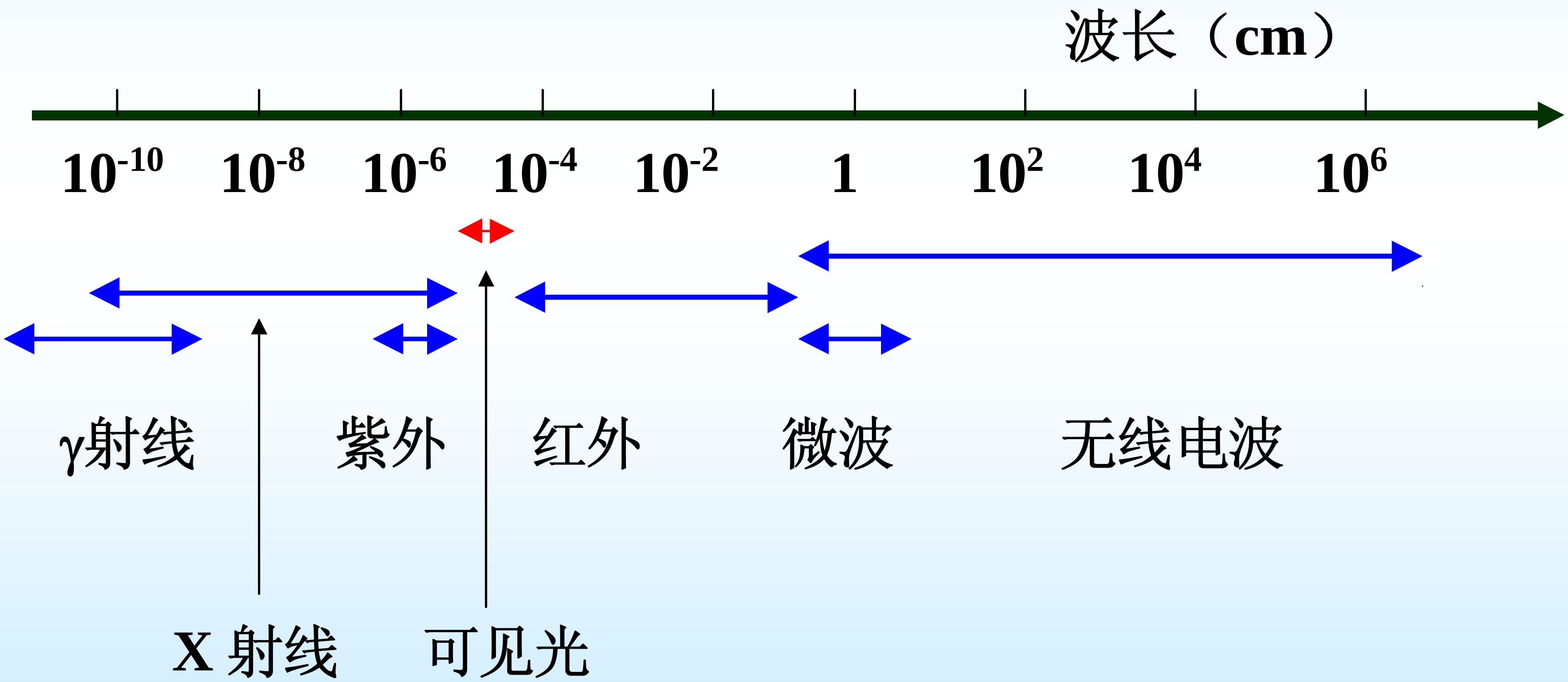
为了增强电磁波的辐射，把电路作如图的改造





赫兹实验

电磁波谱



例题：导体中传导电流与位移电流的比值

设在横截面积为S的导体中通一简谐电流 $i = I_0 \cos\omega t$

且电流沿横截面均匀分布，根据欧姆定律有：

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{i}{\sigma S} = \rho \frac{i}{S}$$ 得位移电流的瞬时值

$$i_d = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d\Phi_e}{dt} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{dE}{dt} S = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{di}{dt} \frac{\rho}{S} S$$

$$i_d = \varepsilon_0 \varepsilon_r \rho \omega I_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

于是，导体中位移电流和传导电流的振幅比：

$$\frac{I_d}{I_0} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \rho \omega$$

一般良导体 $\rho \approx 10^{-8} \Omega \cdot m,$

$\varepsilon_r = 1$

一般良导体 $\rho \approx 10^{-8}\Omega\cdot m,\ \ \varepsilon_r = 1$

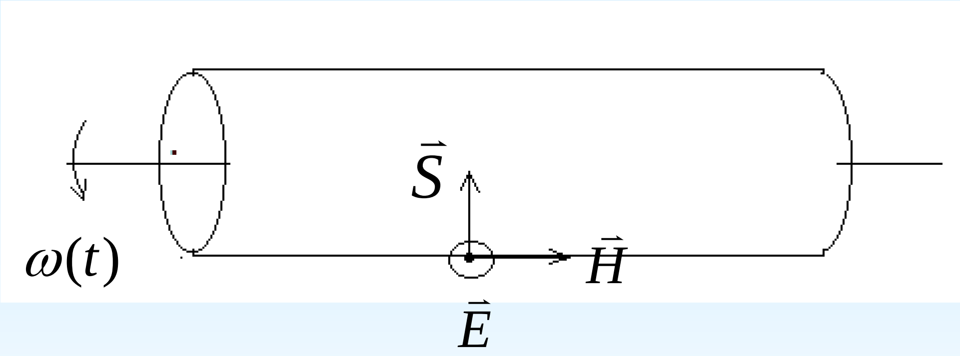
$$\therefore \frac{I_d}{I_0} = 9.0\times10^{-12}\times10^{-8}\times2\pi f$$

只要电流变化频率 $f \ll 10^{18}\,Hz$ $\qquad \dfrac{I_d}{I_0} \ll 1$

结论

虽然，只要有电位移通量的变化就有位移电流存在，但实际上当电场变化的频率不是非常高时，在导体内位移电流与传导电流相比是微不足道的。如，当频率 ***f=50Hz*** 时，导体内该比值为：$I_d / I_0 \approx 10^{-17}$

例题:看书P_{278}的15-14题



解:根据 $B = \mu_0 nI$

$$nI = \frac{2\pi R\sigma}{\frac{2\pi}{\omega}} = R\omega\sigma$$

(1) $B = \mu_0 R\omega\sigma = \mu_0 R\sigma\alpha t$ $\qquad H = \dfrac{B}{\mu_0} = R\sigma\alpha t$

(2) $E = \dfrac{r}{2}\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{\mu_0\sigma\alpha R^2}{2}$

(3) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ $\qquad S = EH = \dfrac{\mu_0 R^3\alpha^2\sigma^2}{2}t$

(4) $\int \vec{S}\cdot d\vec{A} = S\,2\pi RL = \pi\mu_0 R^4\sigma^2\alpha^2 Lt = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{B^2}{2\mu_0}\pi R^2 L\right)$

作业：

15-3

15-5

15-8

15-11

15-14