离 散 数 学

Discrete Mathematics

第九章 命题逻辑

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

语句：如果你走路时看书，你一定会成为近视眼。

令 P：你走路，Q：你看书，R：你成为近视眼

1. 题符号化为 $(P \wedge Q) \rightarrow R$

计算机：1000 (P) 1100($\wedge$) 1001(Q) 1101($\rightarrow$) 1010(R)

2. 逻辑运算（语句的逻辑意思）

（科幻小说）机器人三（逻辑）定律：

1. 机器人不得伤害人类，或坐视人类受到伤害；
2. 除非违背第一定律，否则机器人必须服从人类命令；
3. 除非违背第一或第二定律，否则机器人必须保护自己。

9.1 命题和命题联结词

命题：**能判断真假的陈述句**。要点：能判断真假，陈述句。

命题一般用大写字母表示：A、B、C …。

例

（1）我正在说谎。

（2）本命题是假的。

（3）1+1=2。

（4）$2+2\geq5$。

（5）太阳系外有宇宙人。

（6）$x+y\geq7$。

原子命题：能判断真假的**简单陈述句**。

为了进行逻辑判断和推理，常常需要将若干简单陈述句用联结词构成复合句，例如：

A：他既会跳舞，又会唱歌。

不仅…，而且…；既… ，又…。

B：如果图中任意两点间有唯一一条真路相连，那么它是树。

如果…，那么…。若…，则…。

C：　x∈A或x∈B。

或者…，或者…。

D：当且仅当一个图没有在度2结点内与库氏图同构的子图时，它是平面图。

当且仅当…。

这些词称**逻辑联结词**，复合句为**复合命题**。

复合命题：由若干原子命题通过逻辑联结词构成的新命题。

常用的**逻辑联结词**

（1）否定¬：P为命题时，P的否定为新命题，记¬P，读作“非P”。表示“没有”、“不”、“非”等否定词。

Q: 你看书；　¬Q: 你没有看书

（2）合取∧：当且仅当命题P和Q为真时，新命题P∧Q为真。读作“P且Q”。

表示“不仅…，而且…”、“既…，又…”等。

P：你走路，Q：你看书; P∧Q:**你走路时看书**

（3）析取∨：当且仅当命题P和Q中一个为真时，新命题P∨Q为真。读作“P或Q”。

表示“或者…，或者…”。

P：我去图书馆，Q：我去体育馆; P∨Q:**我去图书馆或去体育馆**

常用的**逻辑联结词**

（4）**蕴含→**：当且仅当命题P为真和Q为假时，新命题P→Q为假。读作“如果P，则Q”。

表示“如果…，那么…”、“若…，则…”，P可看作Q成立的充分条件，Q可看作P成立的必要条件。

P：今天下雨，Q：我去体育馆; P → Q:如果今天下雨，我去体育馆

（5）**等值↔**：当且仅当命题P和Q同为真或同为假时，新命题P↔Q为真。读作“P当且仅当Q”。

表示“当且仅当…”、“…和…一样”，P和Q互为充分必要条件。

P：今天下雨，Q：我去体育馆; P ↔ Q:今天下雨，我就去体育馆，否则不去。

逻辑联结词从代数系统角度看，就是运算，称**逻辑运算**。

真值表：五种联结词为五种运算，命题有两个值真和假，用1和0表示，则运算表就是大家非常熟悉的真值表

P	Q	¬P	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

除前述五种运算外，还有“异或”、“或非”、“与非”等。实际上，在域B={0,1}上可定义16种运算：

P	Q	¬P	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q	P∀Q	¬Q	Q→P	T	F	P	Q	P↛Q	Q↛P	P↑Q	P↑Q
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

有了命题和逻辑联结词，可将**逻辑问题符号化，变为数学问题**，

<u>**本章的中心内容**就是如何将逻辑问题变为数学问题，**逻辑推理变为数学运算**</u>。

<u>**例**</u> 如果你走路时看书，你一定会成为近视眼。

令 P：你走路，Q：你看书，R：你成为近视眼

<u>命题符号化为</u>　$(P \wedge Q) \rightarrow R$

9.2 命题公式

命题常元：**具有确定真值的命题**。

命题变元：**真值不确定的、表示任意命题的标示符**。

命题变元不是命题，只有赋值以后才是命题。

命题公式（逻辑表达式）：

（1）B中的元素**0**、**1**是命题公式；

（2）**命题变元**是命题公式；

（3）若P是命题公式，则$\neg$**P**是命题公式；

（4）若P和Q是命题公式，则**(P$\wedge$Q)**、**(P$\vee$Q)**、**(P$\rightarrow$Q)**、**(P$\leftrightarrow$Q)**也是命题公式；

（5）只有有限次使用(1),(2),(3),(4)定义的字符串才是命题公式。

命题公式的定义与布尔表达式的定义完全一样。

命题公式不是命题，只有赋值以后能确定真假，即有确定的真值，才是命题。

定义9-7 真值指派：对命题公式中的每一个命题变元都赋一确定的值。

真值表：命题公式在所有真值指派下的取值表。

例 $\neg(P\to Q)\wedge Q$

P	Q	$P\to Q$	$\neg(P\to Q)$	$\neg(P\to Q)\wedge Q$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

例 $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$

P	Q	$\neg P$	$P\rightarrow Q$	$\neg P\vee Q$	$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

定义9-8 **永真式**（重言式）：命题公式在任意的真值指派下，取值恒为真，称**永真式**。

永假式（矛盾式）：命题公式在任意的真值指派下，取值恒为假，称**永假式**。

定理9-1 若A和B为重言式，则A $\wedge$B和A $\vee$B仍是重言式。

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所宋牟平

9.3 命题公式的等值关系和蕴含关系

<u>等值关系和蕴含关系</u>

定义9-9 **等值公式**（相等）：若P和Q两公式对任意的真值指派具有相同的值，即两公式的真值表相同，称**P和Q等值，记P⇔Q**。

定理（等价定义）：当且仅当P↔Q是永真式时，P和Q等值。

当且仅当P↔Q ⇔1，P⇔Q

判断两公式P和Q是否等值，(1)可用真值表，(2)也可证明P↔Q是永真式。

显然<u>公式间的等值关系是等价关系</u>，即满足如下三条性质：

(1) **自反性**：对任意的公式A，有A⇔A

(2) **对称性**：对任意的公式A、B，若A⇔B，则B⇔A

(3) **可传递性**：对任意的公式A、B、C，若A⇔B， B⇔C，则A⇔C

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所 宋牟平

重要的等值关系

1 2	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	交换律
3 4	$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	结合律
5 6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	分配律
7 8	$P \vee 0 \Leftrightarrow P$ $P \wedge 1 \Leftrightarrow P$	同一律
9 10	$P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$ $P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0$	互否律

11 12	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$	**等幂律**
13 14	$P \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	**零一律**
15 16	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	**吸收律**
17	$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$	**双重否定**
18 19	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	**摩根定律**
20	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	**蕴含等值**
21	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	**等价等值**
22	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	逆否命题
23	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \leftrightarrow \neg Q$	等价否定

有了前述基本等式，不用真值表法就可以推出更多的等值关系式。

等值演算：根据已知等值关系式推出另外一些等值关系式的过程称**等值演算**。

$$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(P\wedge\neg Q)$$

定义9-10 设A是一个命题公式，P_1，P_2，…，Pn是其中出现的所有命题变元。

(1) 用某些公式代换A中的某些命题变元；

(2) 若用公式Qi代换Pi，则必须用Qi代换A中所有的Pi，

那么，由此得到的新公式B称为公司A的一个代换实例。

例如，公式A1=**P** → （R ∧ **P**）用**Q↔S**代换其中P，

可得公式B1=(Q↔S) → （R ∧ (Q↔S) ），公式B1是A1的一个代换实例；

而B3= (Q↔S) → （R ∧ **P**）不是A1的代换实例。

定理9-2 代换规则：对重言式中的任意命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，得到的仍然是重言式。

等值公式在代换规则下仍然是等值公式。 $(P \wedge R) \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge R) \vee Q$

---------------子公式、置换规则-----------------------

定义9-11 如果C是公式A的一部分（即C是公式A中连续的几个符号），而C本身也是一个公式，则称C为A的子公式。

例如，设公式A为

$$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee (R \wedge P)),$$

则 $(P \vee Q)$、$(R \wedge P)$、$(Q \vee (R \wedge P))$ 都是A的子公式。而 $(P \vee Q) \rightarrow$、$(Q \vee (R \wedge$、$(R \wedge P))$ 都不是A的子公式。因为它们本身不是公式。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

定理9-3 置换规则：设C是等值公式A的一个子公式，C⇔D。将公式A中的子公式C置换成公式D后得到的公式B与A等值，即A⇔B。

证明　设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是公式 A 和公式 B 中出现的全部命题变元。因为 C 和 D 分别是 A 和 B 的子公式，所以 C 和 D 中所出现的命题变元都包含在 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 之中。由于 $C \Leftrightarrow D$，因此对于命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的任意一组指派，C 与 D 的取值均相同，于是 A 与 B 的取值也必然相同。按照公式等值的定义，有 $A \Leftrightarrow B$。

证完。

由于等值关系具有传递性，因此，公式 A 按照置换规则进行任意多次置换后，所得到的公式仍与公式 A 等值。

例如，$P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$　　　　$P\wedge(\neg P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P$

等值演算实际就是布尔函数（表达式）的演算。

例 $(P\wedge(Q\wedge S))\vee(\neg P\wedge(Q\wedge S))\Leftrightarrow Q\wedge S$

证明：$(P\wedge(Q\wedge S))\vee(\neg P\wedge(Q\wedge S))\Leftrightarrow(P\vee\neg P)\wedge(Q\wedge S))\Leftrightarrow 1\wedge(Q\wedge S)\Leftrightarrow Q\wedge S$

例 3　证明 $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$ 是一个重言式。

证明　$Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$

$\Leftrightarrow Q \vee (\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P)$	由 E_{10}'
$\Leftrightarrow Q \vee ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P)$	由 E_{10}
$\Leftrightarrow Q \vee ((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P))$	由 E_1, E_3'
$\Leftrightarrow Q \vee (1 \wedge (\neg Q \vee \neg P))$	由 E_5
$\Leftrightarrow Q \vee (\neg Q \vee \neg P)$	由 E_1', E_4'
$\Leftrightarrow (Q \vee \neg Q) \vee \neg P$	由 E_2
$\Leftrightarrow 1 \vee \neg P$	由 E_5
$\Leftrightarrow 1$	由 E_1, E_8

因为公式 $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$ 与重言式等值，所以公式 $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$ 是重言式。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

命题公式中的联结词→和↔可以用联结词¬、∧和∨来代替：

$\mathbf{P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q}$ E11

$\mathbf{P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)}$ E12

所以，¬、∧和∨是三种基本的联结词。

由德.摩根定律可说明，{¬和∨}或{¬和∧}就是功能完备的联结词。

例 4 证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$ E_{13}

证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$ 由 E_{11}

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R$ 由 E_{2}

$\Leftrightarrow \neg (P \wedge Q) \vee R$ 由 E_{10}'

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$ 由 E_{11}

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 5 证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ $\quad E_{14}$

证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ 由 E_{11}

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$ 由 E_3

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee 0 \vee 0$ 由 E_1, E_5'

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 由 E_4

$\Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$ 由 E_{12}

蕴含关系

命题公式之间的另一个重要关系是蕴含关系。

定义9-12 设A、B是两个公式，若 公式A→B是重言式，即**A→B ⇔1**，则称**公式A蕴含公式B**，记为**A=>B**

蕴含关系是偏序关系，满足：

(1) **自反性**：对任意的公式A，有A=>A

(2) **反对称性**：对任意的公式A、B，若A => B，B => A，则A⇔B

(3) **可传递性**：对任意的公式A、B、C，若A => B， B => C，则A => C

定理9-4 设A、B是两个命题公式，A ⇔ B当且仅当A=>B且B=>A

证明：设A ⇔ B，则A ↔ B是 重言式，

由于A ↔ B ⇔ (A→B) ∧ (B→A)

所以， A→B和B→A是重言式，即A=>B且B=>A

反之，设A=>B且B=>A，则A→B和B→A是重言式，因此A ↔ B是 重言式，即有A ⇔ B。

定理9-5 设A、B、C是命题公式，若A=>B，且B=>C，则A=>C

证明：因为A=>B，且B=>C，那么按定义， A→B和B→C是重言式，即

$$\neg A \vee B \Leftrightarrow \neg B \vee C \Leftrightarrow 1$$

因此， $\neg A \vee C \Leftrightarrow (\neg A \vee C) \vee 0$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \vee (B \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$

$\Leftrightarrow (1 \vee C) \wedge (\neg A \vee 1)$

$\Leftrightarrow 1 \wedge 1$

$\Leftrightarrow 1$

所以， A→C是重言式，因此A=>C

<u>一些重要的蕴含关系</u>：这些关系可按照定义直接证明。

[1] $P \land Q \Rightarrow P$

[2] $P \land Q \Rightarrow Q$

[3] $P \Rightarrow P \lor Q$

[4] $Q \Rightarrow P \lor Q$

[5] $\neg P \Rightarrow P \to Q$

[6] $Q \Rightarrow P \to Q$

[7] $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$

[8] $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$

[9] $P \land (P \to Q) \Rightarrow Q$ 三段论

[10] $\neg Q \land (P \to Q) \Rightarrow \neg P$

[11] $\neg P \land (P \lor Q) \Rightarrow Q$

[12] $(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$

[13] $(P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to R) \Rightarrow R$

(1) 为了证明给定的蕴含关系，可以假定相应的蕴含式命题的前件为真，检查在此情况下，其后件是否也为真，如果后件也为真，则说明此蕴含式命题公式是重言式，因而也就证明了该蕴含关系成立。例如在蕴含关系式[11]中，若假定$\neg P \wedge (P \vee Q)$的值为真，则$\neg P$和$P \vee Q$的值皆为真，于是P的值为假，从而Q的值为真。因此蕴含关系式[11]成立。

(2) 证明蕴含关系的另一种方法是，假定其后件为假，检查在此情况下，其前件是否有可能为真，如果前件不可能为真，则该蕴含关系成立。例如在蕴含关系式[10]中，假定$\neg P$的值为假，则P的值为真。若Q的值为真，则$\neg Q$的值为假，从而$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$的值为假；若$Q$的值为假，则$P \rightarrow Q$的值为假，也得到$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$的值为假，因此说明蕴含关系式[10]成立。

定理9-6 设A、B、C是命题公式，若A=>B，且A=>C，那么A=>(B ∧ C)

证明：由假设知，A→B和A→C是重言式，因此，若A的真值为真，则B和C的真值均为真，所以**B ∧ C** 的真值为真，故**A=>(B ∧ C)**

定理9-7 设A、B为公式，若A=>B且A是重言式，则B一定也是重言式

证明：由假设知，A→B是重言式，因此，若A的真值为真，则B真值必为真，所以**B**一定是重言式。

定义9-13 在给定的公式A中，若用联结词∨代换∧，用∧代换∨，用0代换1，用1代换0，则所得的公式称为A的**对偶**，记作A^D

显然，A和A^D互为对偶。

$$((P \vee \neg Q) \wedge R) \vee (S \wedge P)$$

$$((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (S \vee P)$$

定理 9-8 A和A^D互为对偶的两个公式，P1，P2，…，Pn是其命题变元，则

$$\neg A(P1, P2, \ldots, Pn) \Leftrightarrow A^D(\neg P1, \neg P2, \ldots, \neg Pn) \qquad (*)$$

(证明请见书)。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

定理 9-9 (对偶原理) 设A(P1，P2，…，Pn)和B(P1，P2，…，Pn)是两个公式，

若$A \Leftrightarrow B$，则$A^D \Leftrightarrow B^D$

证明 因为 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n)$，

所以 $\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow \neg B(P_1, P_2, \cdots, P_n)$。

由定理 9-1 $\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^D(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$，

$\neg B(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow B^D(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$。

于是 $A^D(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow B^D(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$。

从而 $A^D(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow B^D(P_1, P_2, \cdots, P_n)$。证完。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

9.5 命题演算的推理理论

考虑所有命题的集合S，显然，这个集合和三个运算构成一个代数系统

（**S；¬，∨，∧**）

由于这些运算满足**交换律、分配率、同一律和互否律**，因此代数系统（S；¬，∨，∧）是一个布尔代数，称为**命题代数**。

定义9-21 设A、B是两个命题公式，如果A=>B，即如果命题公式A →B为重言式，则称**B是前提A的结论或从A推出结论B。**

一般地，设H1，H2，…，Hn和C是一些命题公式，如果

H1 ∧ H2 ∧ … ∧ Hn =>C

则称**从前提H1，H2，…，Hn推出结论C**，有时也记为H1，H2，…，Hn =>C，并称**{H1，H2，…，Hn}** 为C的**前提集合**。

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 1 确定结论 C 是否可以从前提 H_1 及 H_2 推出。

(1) H_1: $P \to Q$, H_2: P, C: Q

(2) H_1: $P \to Q$, H_2: Q, C: P

解 构造上述命题公式的真值表

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge P$	$(P \to Q) \wedge Q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

例如，将某些具体的命题代入命题变元 P 和 Q，根据 (1) 我们得到下述两个断言：

(1) 如果今天出太阳，他就进城，
今天出了太阳，
所以他进城了。

(2) 如果狗有翅膀，则狗会飞上天，
狗有翅膀，
所以狗飞上天了。

(3) 如果 n 是素数，则 n 一定是整数，
n 是整数，
所以 n 是素数。

判断$H1 \wedge H2 \wedge \ldots \wedge Hn \rightarrow C$是否为重言式，可利用已知的一些等值式推导出等值式（$H1 \wedge H2 \wedge \ldots \wedge Hn \rightarrow C$）$\Leftrightarrow 1$，从而证明C是前提H1，H2，…，Hn 的结论。

例 2 证明 C：$\neg P$ 是前提 H_1：$P \rightarrow Q$ 和 H_2：$\neg(P \wedge Q)$ 的结论。

证明

$$
\begin{aligned}
H_1 \wedge H_2 \rightarrow C &\Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \wedge Q)) \rightarrow \neg P \\
&\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow \neg P \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q)) \rightarrow \neg P \\
&\Leftrightarrow \neg P \rightarrow \neg P \\
&\Leftrightarrow P \vee \neg P \\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

由定义可知，C 是前提 H_1 和 H_2 的结论。

为了证明C是前提$H_1, H_2, \cdots, H_n$的结论，我们需要证明$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \rightarrow C$是一个重言式，也就是要证明当前提$H_1, H_2, \cdots, H_n$均为真时，$C$必为真。为了描述这样一个推理过程，我们可以构造一个命题序列，其中每个命题或者是已知的命题，或者是由某些前提所推得的结论，序列中最后一个命题就是所要求的结论。这样一个描述推理过程的命题序列称为是**形式证明**。要想进行正确的推理，就必须构造一个逻辑结构严谨的形式证明，这就需要使用一些推理规则。

证明

编号	公式	依据
(1)	$\neg R \vee S$	前提
(2)	$\neg S$	前提
(3)	$\neg R$	(1),(2); I_{10}
(4)	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	前提
(5)	$\neg(P \wedge Q)$	(3),(4); I_{12}
(6)	$\neg P \vee \neg Q$	(5); E_{10}
(7)	P	假设
(8)	$\neg Q$	(6),(7); I_{10}, E_6

定义9-22 <u>一个描述推理过程的命题序列</u>，其中**每个命题**或者是**<u>已知的命题</u>**，或者是由**<u>某些前提所推得的结论</u>**，序列中**<u>最后一个命题</u>**就是所要求的**结论**，这样的命题序列称为**形式证明**。

编号	公式	依据
(1)	$\neg R \vee S$	前提
(2)	$\neg S$	前提
(3)	$\neg R$	(1),(2); I_{10}
(4)	$(P \wedge Q) \to R$	前提
(5)	$\neg(P \wedge Q)$	(3),(4); I_{12}
(6)	$\neg P \vee \neg Q$	(5); E'_{10}
(7)	P	假设
(8)	$\neg Q$	(6),(7); I_{10}, E_6

<u>进行正确的推理，必须构造一个逻辑结构严谨的形式证明，这需要使用一些推理规则</u>：

(1) 前提引入规则：在证明的任何步骤上都可以引用前提。

(2) **结论引用规则**：在证明的任何步骤上所得到的**结论**都可以**<u>在其后</u>**的证明中引用。

(3) **置换规则**：在证明的任何步骤上，命题公式的**子公式**都可以用之等值的其他命题公式置换。

(4) **代换规则**：在证明的任何步骤上，重言式的任一**命题变元**都可以用一命题公式代入，得到的仍是重言式。

在 §9.2 中列出的 E_1—E_{14} 以及

E_{15} $\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$

E_{16} $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$

E_{17} $\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow\neg Q$

都是在推理过程中经常使用的一些等值关系式。

在推理过程中经常使用的蕴含关系式有：

I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$

I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$

I_3 $P \Rightarrow P \vee Q$

I_4 $Q \Rightarrow P \vee Q$

I_5 $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_6 $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_7 $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

I_8 $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

I_9 P、$Q \Rightarrow P \wedge Q$

I_{10} $\neg P$、$P \vee Q \Rightarrow Q$

I_{11} P、$P \rightarrow Q \Rightarrow Q$

I_{12} $\neg Q$、$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$

I_{13} $P \rightarrow Q$，$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$

I_{14} $P \vee Q$，$P \rightarrow R$、$Q \rightarrow R \Rightarrow R$

这些蕴含式也被称为推理定律，因为它们给出了正确的推理形式。

蕴含关系式 I_{11} 称为假言推理，它表示：若两个命题为真，其中一个是蕴含式命题，而另一个是这个蕴含式命题的前件，那么这个蕴含式命题的后件一定也是真命题。在证明过程中，如果出现了某个推理定律的前件，则根据 I_{11}，立刻可得到由这个前件所推出的后件。因此，I_{11} 也被称为是**分离规则**。

有效的结论：如果证明过程中的每一步所得到的结论都是根据推理规则得到的，则这样的证明称为是**有效的**。通过有效的证明而得到的结论，称为是**有效的结论**。

合理的结论：如果所有的前提都是真的，那么通过有效的证明所得到结论也是真的，这样的证明称为是**合理的**。通过合理的证明而得到的结论称为是**合理的结论**。

在形式证明中，为了得到一组给定前提的有效结论，一般采用两类基本方法，即**直接证法**和**间接证法**。

1. 直接证明法

由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的蕴含式和等值式推导出有效结论的方法称为**直接证法**。

例 3 证明 $\neg P$ 是前提 $\neg(P\wedge\neg Q)$、$\neg Q\vee R$、$\neg R$ 的结论。

证明

编号	公式	依据
(1)	$\neg Q\vee R$	前提
(2)	$\neg R$	前提
(3)	$\neg Q$	(1),(2);I_{10}
(4)	$\neg(P\wedge\neg Q)$	前提
(5)	$\neg P\vee Q$	(4);E'_{10}, E_6
(6)	$\neg P$	(3),(5);I_{10}

表格中间一列是依次推导出来的命题公式，最后一行的命题公式 $\neg P$ 是要证明的结论。左边一列是推导出来的命题公式的编号，右边一列是推导的依据。

例 4 证明 $P \vee Q$ 是 $S \rightarrow Q$、$R \rightarrow P$、$S \vee R$ 的结论。

证明

编号	公式	依据
(1)	$S \vee R$	前提
(2)	$\neg S \rightarrow R$	(1); E_6, E_{11}
(3)	$R \rightarrow P$	前提
(4)	$\neg S \rightarrow P$	(2), (3); I_{13}
(5)	$\neg P \rightarrow S$	(4); E_{16}, E_6
(6)	$S \rightarrow Q$	前提
(7)	$\neg P \rightarrow Q$	(5), (6); I_{13}
(8)	$P \vee Q$	(7); E_{11}, E_6

例 6　“如果电影已开演，那么大门关着；如果他们八点钟以前到达，那么大门开着；他们八点钟以前到达。所以，电影没有开演”。证明这些语句构成一个正确的推理。

令　P：电影已开演。

Q：大门关着。

R：他们八点钟以前到达。

我们只需证明从前提 $P \rightarrow Q$、$R \rightarrow \neg Q$、R 可以推出结论 $\neg P$（请读者自己完成这一证明）。

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所宋牟平

<u>蕴含证明规则</u>：如果能够从（**假设**）**Q**和**前提P**中推导出R来，则就能够从P中推导出Q →R来。

$$Q, P \Rightarrow R \quad \Leftrightarrow \quad P \Rightarrow Q \to R$$

例 5 证明 $(P\wedge Q)\to R$、$\neg R\vee S$、$\neg S \Rightarrow P\to\neg Q$。

证明

编号	公式	依据
(1)	$\neg R\vee S$	前提
(2)	$\neg S$	前提
(3)	$\neg R$	(1),(2); I_{10}
(4)	$(P\wedge Q)\to R$	前提
(5)	$\neg(P\wedge Q)$	(3),(4); I_{12}
(6)	$\neg P\vee\neg Q$	(5); E'_{10}
(7)	P	假设
(8)	$\neg Q$	(6),(7); I_{10}, E_6

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

2. **间接证明法**：就是**反证法**，把结论的否定作为附加前提与给定前提一起推证，若能推导出矛盾，则说明结论是有效的。

定义9-23 如果对于出现在公式H1，H2， …，Hn中的命题变元的任何一组真值指派，公式H1，H2， …，Hn中至少有一个为假，即它们的合取式$H1 \wedge H2 \wedge \ldots \wedge Hn \Leftrightarrow 0$是矛盾式，则称公式H1，H2， …，Hn是**不相容的**。否则H1，H2， …，Hn是相容的。

当且仅当存在着一个命题R，使得$\mathbf{H1 \wedge H2 \wedge \ldots \wedge Hn \Rightarrow R \wedge \neg R \Leftrightarrow 0}$时， H1，H2， …，Hn是不相容的，这里R是任一公式。

不相容的概念用在称为反证法或间接证明法的证明过程中。为了证明结论 C 可以从前提 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 推出，我们把 $\neg C$ 添加到这组前提中去，如果有某个公式 R 使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow R \wedge \neg R$，则这组新的前提是不相容的。于是，当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ 为真时，$\neg C$ 必为假，也就是当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ 为真时，C 必为真。于是，C 可以由前提 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 推出。

例 7 证明 $P\to\neg Q$、$Q\vee\neg R$、$R\wedge\neg S\Rightarrow\neg P$

证明 用反证法．把 $\neg(\neg P)$ 作为添加的前提加入到前提的集合中去，证明由此导致矛盾．

编号	公式	依据
(1)	$\neg(\neg P)$	假设
(2)	P	(1)；E_6
(3)	$P\to\neg Q$	前提
(4)	$\neg Q$	(2)，(3)；I_{11}
(5)	$Q\vee\neg R$	前提
(6)	$\neg R$	(4)，(5)；I_{10}
(7)	$R\wedge\neg S$	前提
(8)	R	(7)；I_1
(9)	$R\wedge\neg R$	(6)，(8)；I_9

所以从前提 $P\to\neg Q$、$Q\vee\neg R$、$R\wedge\neg S$ 可以推出结论 $\neg P$．

作 业

2，4(5), 7(1)(2)(3), 8(1), 11(1)(4), 12(1)

内容提要

1. 命题及其联结词

• 命题、命题的真值；

• 原子命题和复合命题；

• 命题联结词：否定（$\neg$）、合取（$\wedge$）、析取（$\vee$）、异或（$\veebar$）、蕴涵（$\rightarrow$）、等值（$\leftrightarrow$），以及分别由这些联结词构成的复合命题的真值表.

2. 命题公式的有关概念

• 命题常元、命题变元、命题公式（或称公式）；

• 命题公式 F 关于命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的一组真值指派，以及公式的真值表；

• 重言式（或永真式）、矛盾式（或永假式）和可满足公式；

• 公式的析取范式和合取范式，以及主析取范式和主合取范式.

3. 命题公式间的关系

- 命题公式间的等值关系($A \Leftrightarrow B$);
- 命题公式间的蕴涵关系($A \Rightarrow B$);
- 等值定律,即一些基本的等值式;
- 推理定律,即一些基本的蕴涵式.

4. 命题演算的推理理论

- 形式证明、有效证明、有效结论、合理证明、合理结论;
- 前提引入规则、结论引入规则、置换规则、代入规则、蕴涵证明规则.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

编号	公　　式	
E_1	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
E_1'	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	
E_2	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	结合律
E_2'	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	
E_3	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	分配律
E_3'	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
E_4	$P \vee Q \Leftrightarrow P$	同一律
E_4'	$P \wedge 1 \Leftrightarrow P$	
E_5	$P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$	互否律
E_5'	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0$	
E_6	$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ 双重否定律	
E_7	$P \vee P \Leftrightarrow P$	等幂律
E_7'	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	
E_8	$P \vee 1 \Leftrightarrow 1$	零一律
E_8'	$P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	

E_9	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	吸收律
E_9'	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	
E_{10}	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	德·摩根定律
E_{10}'	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	
E_{11}	$\underline{P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q}$	
E_{12}	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	
E_{13}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$	
E_{14}	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	
E_{15}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	
E_{16}	$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$	
E_{17}	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$	

编　号	公　　式
I_1	$P\wedge Q\Rightarrow P$
I_2	$P\wedge Q\Rightarrow Q$
I_3	$P\Rightarrow P\vee Q$
I_4	$Q\Rightarrow P\vee Q$
I_5	$\neg P\Rightarrow P\rightarrow Q$
I_6	$Q\Rightarrow P\rightarrow Q$
I_7	$\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow P$
I_8	$\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg Q$
I_9	$P,Q\Rightarrow P\wedge Q$
I_{10}	$\neg P,P\vee Q\Rightarrow Q$
I_{11}	$\underline{P,P\rightarrow Q\Rightarrow Q}$
I_{12}	$\neg Q,P\rightarrow Q\Rightarrow\neg P$
I_{13}	$P\rightarrow Q,Q\rightarrow R\Rightarrow P\rightarrow R$
I_{14}	$P\vee Q,P\rightarrow R,Q\rightarrow R\Rightarrow R$

例题讲解

例 9-1　判断下列语句是否为命题：

(1) 北京是中国的首都；

(2) 所有的树木都是植物；

(3) 雪是黑色的；

(4) 请勿吸烟；

(5) 明天开会吗？

(6) 这朵花多好看呀！

解　(1),(2),(3)是命题,其中(1),(2)是真命题,(3)是假命题;(4)是祈使句,(5)是疑问句,(6)是感叹句,它们都无真假可言,因此,它们都不是命题.

一个语句本身是否能分辨真假与我们是否知道它的真假是两回事.也就是说,对于一个句子,有时可能无法判定它的真假,但它本身却是有真假的,那么这个语句是命题,否则就不是命题.

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所宋牟平

例 9-2 判断下列语句是否为命题：

(1) 地球外的星球上也有人；

(2) 小王是我的同学，也是我的好朋友；

(3) 11+1=100；

(4) 我正在说谎.

解 (1)，(2)，(3)是命题. 对于(1)，目前还无法确定其真假，但就事物的本质而论，句子本身是可以分辨真假的. 随着科学技术的发展，其真值会知道的.

(2) 真假取决于“我”与“小王”的关系，若“我”与“小王”是同学，且关系很好，则(2)是真的，否则就是假的. 但一般来说，这句话总是出现在某一具体情况下，总可根据当时的情况来确定它的真假.

(3) 真假取决于采用哪一种进制，若是二进制，则是真的，否则就是假的.

(4) “我”是在说谎还是在说真话呢？如果“我”是说谎，那么“我”说的是假话；因为“我”承认他是说谎，所以他实际上是在说真话，易得出结论：如果“我”是说谎，那么他是讲真话. 另一方面，如果“我”讲真话，那么“我”所说的是真话，也就是他在说谎. 易得出结论：如果“我”讲真话，那么他是在说谎. 因此，我们不能分辨这个语句的真假，它不是命题. 这种产生自相矛盾的语句叫悖论.

例 9-3 将下列命题符号化：

(1) 小李虽然聪明，但不用功；

(2) 派小王或小李出差；

(3) 小王现在在宿舍或在图书馆里；

(4) 我既不看电视也不外出，我睡觉；

(5) 他钓了 20 或 30 条鱼；

(6) 如果天下大雨，他就乘公共汽车上班；

(7) 只有天下大雨，他才乘公共汽车上班；

(8) n 是偶数当且仅当它能被 2 整除；

(9) 我们不能既走路又划船.

解 (1) 令 P：小李聪明；Q：小李用功.

命题可表示为 $P \wedge \neg Q$.

(2) 令 P：派小王出差；Q：派小李出差.

命题符号化为 $P \vee Q$.

(3) 令 P：小王在宿舍；Q：小王在图书馆里.

由于小王不可能既在宿舍又在图书馆，所以这里的“或”是不可兼或，于是命题

可表示为 $P \overline{\vee} Q$，或者为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.

(4) 令 P：我看电视；Q：我外出；R：我睡觉.

命题可表示为 $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$.

(5) 中的"或"是"或许"、"大概"的意思，表示"他大概钓了二三十条鱼". 此命题不能再分解，故可表示为 P，其中 P：他钓了 20 或 30 条鱼.

(6) 令 P：天下大雨；Q：他乘公共汽车上班.

命题可表示为 $P \rightarrow Q$.

(7) 令 P：天下大雨；Q：他乘公共汽车上班.

"他乘公共汽车上班"的前提条件是天下大雨. 命题符号化为 $Q \rightarrow P$.

(8) 令 P：n 是偶数；Q：n 能被 2 整除.

该命题符号化为 $P \leftrightarrow Q$.

(9) 令 P：我们走路；Q：我们划船.

命题可表示为 $\neg(P \wedge Q)$.

浙江大学信息学院信电系电子信息技术与系统研究所宋牟平

例 9-6 下列符号串是否为命题公式，若是，给出其真值表.

(1) $P \rightarrow (Q \wedge PR)$；

(2) $(P \vee Q) \rightarrow (\neg(Q \wedge R))$.

解 (1) 不是命题公式.

(2) 是公式，该公式含三个命题变元，其真值表如表 9-1 所示.

表 9-1

$P\ Q\ R$	$P \vee Q$	$Q \wedge R$	$\neg(Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \rightarrow (\neg(Q \wedge R))$
0 0 0	0	0	1	1
0 0 1	0	0	1	1
0 1 0	1	0	1	1
0 1 1	1	1	0	0
1 0 0	1	0	1	1
1 0 1	1	0	1	1
1 1 0	1	0	1	1
1 1 1	1	1	0	0

例 9-8 判断下列等值式是否成立：

(1) $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)$；

(2) $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$.

解 (1) 构造公式 $A = P \to Q$ 与 $B = \neg P \to \neg Q$ 以及 $A \leftrightarrow B$ 的真值表，如表 9-4 所示. 由表 9-4 知 $A \leftrightarrow B$ 不是重言式，所以 A 与 B 不等值.

表 9-4

P Q	$P \to Q$	$\neg P \to \neg Q$	$A \leftrightarrow B$
0 0	1	1	1
0 1	1	0	0
1 0	0	1	0
1 1	1	1	1

(2) 构造公式 $A = P \to (Q \to R)$ 与 $B = (P \wedge Q) \to R$ 以及 $A \leftrightarrow B$ 的真值表，如表 9-5 所示. 由于 $A \leftrightarrow B$ 所标记列全为 1，故 $A \leftrightarrow B$ 为重言式，所以 $A \Leftrightarrow B$.

表 9-5

P	Q	R	$Q \to R$	$P \wedge Q$	A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

例 9-10 化简公式$((\neg P \to \neg P) \to Q) \to ((\neg P \to \neg P) \to R)$.

解 原式$\Leftrightarrow (\neg(\neg(\neg P) \vee \neg P) \vee Q) \to (\neg(\neg(\neg P) \vee \neg P) \vee R)$ $\quad E_{11}$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee \neg P) \vee Q) \vee (\neg(P \vee \neg P) \vee R)$ $\quad E_6, E_{11}$

$\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \wedge \neg Q) \vee (\neg(P \vee \neg P) \vee R)$ $\quad E_{10}, E_6$

$\Leftrightarrow (1 \wedge \neg Q) \vee (0 \vee R)$ $\quad E_5$

$\Leftrightarrow \neg Q \vee R.$ $\quad E_4, E_4'$

另外,用等值演算的方法可以判别命题公式的类型.

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 9-11 判别下列公式的类型：

(1) $Q \wedge \neg(\neg P \to (\neg P \wedge Q))$；

(2) $(P \to Q) \wedge \neg P$.

解 (1) 因 $Q \wedge \neg(\neg P \to (\neg P \wedge Q))$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow Q \wedge \neg(P \vee (\neg P \wedge Q)) && E_{11}, E_6 \\
&\Leftrightarrow Q \wedge \neg((P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)) && E'_3 \\
&\Leftrightarrow Q \wedge \neg(1 \wedge (P \vee Q)) && E_5 \\
&\Leftrightarrow Q \wedge \neg P \wedge \neg Q && E'_4, E_{10} \\
&\Leftrightarrow \neg P \wedge (Q \wedge \neg Q) && E'_1, E'_2 \\
&\Leftrightarrow 0. && E'_5, E'_8
\end{aligned}$$

(2) 因 $(P \to Q) \wedge \neg P$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge \neg P && E_{11} \\
&\Leftrightarrow \neg P, && E'_9\text{（吸收律）}
\end{aligned}$$

而 $(0,1)$ 是使公式 $(P \to Q) \wedge \neg P$ 取值为真的真值指派（其中 $(0,1)$ 表示 P,Q 的取值分别为 0 和 1）. 于是该公式是可满足式.

例 9-12 证明 $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \Rightarrow R$.

证法一 列公式 $F_1 = ((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow R$ 的真值表，如表 9-8 所示.

表 9-8

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \rightarrow R$	$Q \rightarrow R$	$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$	F_1
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

由表 9-8 知，公式 F_1 对任意的一组真值指派取值均为 1，故 F_1 是重言式.

证法二 因$((P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to R))\to R$

$$\Leftrightarrow\neg((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R))\vee R \qquad E_{11}$$

$$\Leftrightarrow\neg((P\vee Q)\wedge((\neg P\wedge\neg Q)\vee R))\vee R \qquad E'_3$$

$$\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\vee\neg(\neg(P\vee Q)\vee R))\vee R \qquad E_{10},E'_{10}$$

$$\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\vee((P\vee Q)\wedge\neg R))\vee R \qquad E_6,E_{10}$$

$$\Leftrightarrow((\neg(P\vee Q)\vee(P\vee Q))\wedge(\neg(P\vee Q)\vee\neg R))\vee R \qquad E'_3$$

$$\Leftrightarrow(1\wedge(\neg(P\vee Q)\vee\neg R))\vee R \qquad E_5$$

$$\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)\vee(\neg R\vee R) \qquad E'_4,E_2$$

$$\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)\vee 1 \qquad E_5$$

$$\Leftrightarrow 1, \qquad E_8$$

所以$(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to R)\Rightarrow R$.

证法三 假定蕴涵式的前件$(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to R)$为真，则$(P\vee Q)$，$(P\to R)$，$(Q\to R)$分别为真. 由$P\vee Q$真，可得$P$真或$Q$为真，分以下情况讨论：

(1) 若P为真，则由$P\to R$为真，得R为真；

(2) 若Q为真，则由$Q\to R$为真，得R为真.

因此，假定前件$(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to R)$为真时，可推断出后件$R$也为真，故$(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to R)\Rightarrow R$.

用真值表和等值演算的方法证明蕴涵式有时较繁，但使用前面介绍的方法(3)和方法(4)时，要根据具体的公式选择用方法(3)或方法(4)，如下例中用方法(4)比方法(3)简单.

例 9-14 对任意的公式 A,B,判断下述结论.

(1) 如果 $A\Leftrightarrow B$,是否有 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$?

(2) 如果 $A\Rightarrow B$,是否有 $\neg A\Rightarrow\neg B$?

解 (1) 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是公式 A 和 B 中出现的全部命题变元,显然,$\neg A$,$\neg B$ 中所出现的全部命题变元也包含在 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 中. 由于 $A\Leftrightarrow B$,所以对于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的任意一组真值指派,A 与 B 的取值均相同,于是 $\neg A$ 与 $\neg B$ 的取值也必然相同. 因此,由定义知 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$.

(2) 不一定有 $\neg A\Rightarrow\neg B$ 成立. 例如令 $A=P\wedge Q$,$B=P$,可以验证 $P\wedge Q\to P$ 为重言式,则 $P\wedge Q\Rightarrow P$,但 $\neg(P\wedge Q)\to\neg P$ 不是重言. 因为当 P 为真,Q 为假时,$\neg(P\wedge Q)$ 为真,而 $\neg P$ 为假,所以 $\neg(P\wedge Q)\not\Rightarrow\neg P$,即 $\neg A\Rightarrow\neg B$ 不成立.

例 9-17 形式证明 $S\to\neg Q$ 是 $\neg P\vee\neg Q$，$\neg P\to R$，$R\to\neg S$ 的有效结论.

分析 要证的结论是一个含蕴涵联结词的公式，因此，很容易想到采用蕴涵证明规则证.

证 证明过程如表 9-12 所示.

表 9-12

编号	公式	依据
(1)	$\neg P\to R$	前提
(2)	$R\to\neg S$	前提
(3)	$\neg P\to\neg S$	(1),(2);I_{13}
(4)	$S\to P$	(3);E_{15} E16
(5)	S	附加前提
(6)	P	(4),(5);I_{11}
(7)	$\neg P\vee\neg Q$	前提
(8)	$\neg Q$	(6),(7);I_{10}
(9)	$S\to\neg Q$	(5),(8);CP 规则

例 9-17 的另一证明方法如表 9-13 所示.

表 9-13

编　号	公　　式	依　　据
(1)	$\neg P \rightarrow R$	前提
(2)	$R \rightarrow \neg S$	前提
(3)	$\neg P \rightarrow \neg S$	(1),(2);I_{13}
(4)	$\neg P \vee \neg Q$	前提
(5)	$Q \rightarrow \neg P$	(4);E_1,E_{11}
(6)	$Q \rightarrow \neg S$	(3),(5);I_{13}
(7)	$S \rightarrow \neg Q$	(6);E_{15}

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 9-18 试证 $\neg S$ 是 $P\to(\neg Q\to R)$, $Q\to\neg P$, $S\to\neg R$, P 的有效结论.

分析 用反证法证明. 将 $\neg(\neg S)$ 作为附加前提，添加到前提集合中，然后推导出矛盾.

证 证明过程如表 9-14 所示.

表 9-14

编号	公式	依据
(1)	$\neg(\neg S)$	附加前提
(2)	S	(1);E
(3)	$S\to\neg R$	前提
(4)	$\neg R$	(2),(3);I_{11}
(5)	$P\to(\neg Q\to R)$	前提
(6)	P	前提
(7)	$\neg Q\to R$	(5),(6);I_{11}
(8)	Q	(4),(7);I_{12},E_6
(9)	$Q\to\neg P$	前提
(10)	$\neg P$	(8),(9);I_{11}
(11)	$P\wedge\neg P$	(4),(10);I_9

例 9-18 的另一证明方法如表 9-15 所示.

表 9-15

编　号	公　　式	依　　据
(1)	$P\rightarrow(\neg Q\rightarrow R)$	前提
(2)	P	前提
(3)	$\neg Q\rightarrow R$	(1),(2);I_{11}
(4)	$Q\rightarrow\neg P$	前提
(5)	$\neg Q$	(2);E_6,I_{12}
(6)	R	(5),(3);I_{11}
(7)	$S\rightarrow\neg R$	前提
(8)	$\neg(\neg R)$	(6);E_6
(9)	$\neg S$	(8),(7);I_{12}

例 9-21 试证 $\neg B$ 是 $\neg B \vee D, (E \to \neg F) \to \neg D, \neg E$ 的有效结论.

分析 $\neg B$ 是前提公式 $\neg B \vee D$ 的一析取项，又 $\neg E$ 既不是公式 $(E \to \neg F) \to \neg D$ 的前件，也不是其后件的非，因此，用直接证法不易着手推导，故采用间接证法.

编　号	公　　式	依　　据
(1)	$\neg(\neg B)$	附加前提
(2)	$\neg B \vee D$	前提
(3)	D	(1),(2);I_{10}
(4)	$(E \to \neg F) \to \neg D$	前提
(5)	$\neg(E \to \neg F)$	(3),(4);E_6,I_{12}
(6)	$\neg(\neg E \vee \neg F)$	(5);E_{11}
(7)	$E \wedge F$	(6);E_{10}
(8)	E	(7);I_1
(9)	$\neg E$	前提
(10)	$E \wedge \neg E$	(8),(9);I_9

例 9-22 用两种以上方法证明

$$(P\to Q)\to R \Rightarrow (R\to P)\to(S\to P).$$

证法一 $((P\to Q)\to R)\to((R\to P)\to(S\to P))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg P\vee Q)\vee R)\vee(\neg(\neg R\vee P)\vee(\neg S\vee P))$	E_{11}
$\Leftrightarrow ((\neg P\vee Q)\wedge \neg R)\vee(R\wedge\neg P)\vee(\neg S\vee P)$	E_6, E_{10}
$\Leftrightarrow [((\neg P\vee Q)\vee(R\wedge\neg P))\wedge(\neg R\vee(R\wedge\neg P))]\vee(\neg S\vee P)$	E_3'
$\Leftrightarrow [(Q\vee(\neg P\vee(R\wedge\neg P)))\wedge(\neg R\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg P)]$	
$\quad \vee(\neg S\vee P)$	E_1, E_2, E_3'
$\Leftrightarrow [(Q\vee\neg P)\wedge(\neg R\vee\neg P)]\vee(\neg S\vee P)$	E_9, E_5, E_4'
$\Leftrightarrow (Q\wedge\neg R)\vee\neg P\vee(\neg S\vee P)$	E_3'
$\Leftrightarrow (Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\vee P)\vee\neg S$	E_1, E_2
$\Leftrightarrow 1.$	E_5, E_8

证法二　假定后件$(R\rightarrow P)\rightarrow(S\rightarrow P)$为假，则$(R\rightarrow P)$为真且$(S\rightarrow P)$为假. 由$S\rightarrow P$为假可得$S$为真，$P$为假；再根据$R\rightarrow P$为真可得$R$为假，于是$P\rightarrow Q$为真，$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$为假，因此，$(P\rightarrow Q)\rightarrow R\Rightarrow(R\rightarrow P)\rightarrow(S\rightarrow P)$.

证法三　用形式证明如表 9-17 所示.

编　号	公　　式	依　　据
(1)	$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$	前提
(2)	$R\rightarrow P$	附加前提
(3)	$(P\rightarrow Q)\rightarrow P$	(1),(2);I_{13}
(4)	$\neg(\neg P\vee Q)\vee P$	(3);E_{11}
(5)	$(P\wedge\neg Q)\vee P$	(4);E_{10},E_6
(6)	P	(5);E_9
(7)	$S\rightarrow P$	(6);I_6
(8)	$(R\rightarrow P)\rightarrow(S\rightarrow P)$	(2),(7);CP

浙江大学 信息学院 信电系 电子信息技术与系统研究所 宋牟平

例 9-26 形式证明 $P\to(Q\to R), S\to Q \Rightarrow P\to(S\to R)$.

证 其推导过程如表 9-18 所示.

表 9-18

编 号	公 式	依 据
(1)	$P\to(Q\to R)$	前提
(2)	P	附加前提
(3)	$Q\to R$	(1),(2);I_{11}
(4)	$S\to Q$	前提
(5)	$S\to R$	(3),(4);I_{13}
(6)	$P\to(S\to R)$	(2),(5);CP 规则

END