第四章，

1. (1) $N(3)-N(1)\sim\pi(2\lambda)$.

$\therefore P(N(3)-N(1)\geq 2)$

$=1-e^{-2\lambda}-\frac{e^{-2\lambda}\cdot(2\lambda)^1}{1}$

$=1-(2\lambda+1)e^{-2\lambda}$

(2) $P(N(3)\geq 2\mid N(1)=1)$

$=P(N(3)-N(1)\geq 1\mid N(1)=1)$

$=1-e^{-2\lambda}$

(3) $P(N(1)=1\mid N(3)\geq 2)$ $N(3)\sim\pi(3\lambda)$

$=\frac{P(N(1)=1,\ N(3)\geq 2)}{P(N(3)\geq 2)}$

$=\frac{\lambda e^{-\lambda}\cdot(1-e^{-2\lambda})}{1-e^{-3\lambda}(1+3\lambda)}$

2. $X(t)=N(t+1)-N(t)$

$N(t+1)\sim\pi(\lambda(t+1))$

$N(t)\sim\pi(\lambda t)$

$\therefore \mu_X(t)=\lambda t+\lambda-\lambda t=\lambda$.

$R_X(s,t)=E((N(t+1)-N(t))(N(s+1)-N(s)))$

$=R_N(t+1,s+1)-R_N(t+1,s)-R_N(t,s+1)+R_N(t,s)$

$=\begin{cases}\lambda\min\{t+1,s+1\}+\lambda\min\{s,t\}-\lambda t-\lambda s+\lambda^2[(s+1)(t+1)-s(t+1)-t(s+1)+ts] & =\lambda^2+\lambda+\lambda\cdot[2\min\{t,s\}-(t+s)] \\ & =\lambda^2+\lambda-\lambda\cdot|t-s|,\quad |t-s|\leq 1 \\ \lambda^2, & |t-s|>1\end{cases}$

3. $X(t)=N(t)-tN(1)$, $0\leq t\leq 1$, $0\leq s\leq 1$.

$\mu_X(t)=E(N(t))-tE(N(1))$

$=\lambda t-t\cdot\lambda\cdot 1=0$.

$R_X(t,s)=E[(N(t)-tN(1))(N(s)-sN(1))]$

$=E(N(t)N(s))-sE(N(1)N(t))-tE(N(1)N(s))+tsE(N(1)N(1))$

$=\lambda\min\{t,s\}+\lambda^2 ts-s\cdot(\lambda\min\{t,1\}+\lambda^2 t)-t\cdot(\lambda\min\{s,1\}+\lambda^2 s)+ts\cdot(\lambda\min\{1,1\}+\lambda^2)$

$=\lambda\min\{t,s\}-s\lambda\cdot t-\lambda ts+\lambda ts=\lambda\min\{s,t\}-\lambda st$.

4. 小 客 货
λ_1 λ_2 λ_3 泊松过程.
$X(t)$ $Y(t)$ $Z(t)$.

$X(t)+Y(t)\sim\pi((\lambda_1+\lambda_2)t)$

(1) $\therefore P(X(3)+Y(3)\geq 3)=1-e^{-3(\lambda_1+\lambda_2)}[1+3(\lambda_1+\lambda_2)+\frac{9}{2}(\lambda_1+\lambda_2)^2]$

(2) 记 $N(t)=\sum X(t)\sim\pi((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t)$

$\therefore N(7)-N(5)\sim\pi(2\sum\lambda_i)$

$\therefore P=1-e^{-2\sum\lambda_i}\cdot[1+2\sum\lambda_i]$

5. $X(t)$ 男，$Y(t)$ 女 独立.
λ μ.

即 $P(X(t)=k\mid X(t)+Y(t)=n)$

$=\frac{\frac{e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\mu t}\cdot(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}[(\lambda+\mu)t]^n}{n!}}$

$=C_n^k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$.

⑥ 八. 被记录: $\lambda p \to X(t)$
不被: $(1-p)\lambda$.

(1)
$P(X(t)=k)$

$= \dfrac{e^{-\lambda p t}(\lambda p t)^k}{k!}$

(2) $C_{XN}(s,t)$

$= Cov(X(s), N(t))$

$= Cov(X(s), X(t)+Y(t))$

$= C_X(s,t) + ($独立$=0)$

$= \lambda p \min\{s,t\}$

7. $0\le s<t$, $k\le n$.

(1) $P(N(s)=k \mid N(t)=n)$

$= C_n^k (\frac{s}{t})^k (1-\frac{s}{t})^{n-k}$.

k个, s, t, n个

结论, 可记住.
容易推, 用二项分布记忆.
(大推小)
小推大用独立增量性

(2)
$P(W_2 \le 3 \mid W_1=1)$

$= P(N(3)\ge 2 \mid N(1)=1)$

$= P(N(3)-N(1)\ge 1)$

1, 2, 3

$= 1-e^{-2\lambda}$

(3) $P(N(s)\ge k \mid N(t)=n)$

$= \sum\limits_{i=k}^{n} C_n^i (\frac{s}{t})^i (1-\frac{s}{t})^{n-i}$

(用(1)的性质作叠加)

8. (1) $P(N(2)=3)$

$= \dfrac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^3}{3!} = \frac{4}{3}\lambda^3 e^{-2\lambda}$

(2) 题述描述等价于 $N(1)\le 2, N(2)\ge 3$.
用全概率公式展开得

$P = P(N(1)=0, N(2)-N(1)\ge 3) + P(N(1)=1, N(2)-N(1)\ge 2)$
$+ P(N(1)=2, N(2)-N(1)\ge 1)$

$\overset{\text{独立增量性}}{=} e^{-\lambda}\cdot(1-e^{-\lambda}(1+\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2)) + \lambda e^{-\lambda}\cdot(1-e^{-\lambda}(1+\lambda)) + \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda}\cdot(1-e^{-\lambda})$

$= (1+\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2)e^{-\lambda} - (1+2\lambda+2\lambda^2)e^{-2\lambda}$.

9. 2个柜台. 十人. $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{6} \Rightarrow \lambda=6$.

(1) 一个柜台, 强度 $\lambda=6$ $N(t)\sim\pi(3)$

$P(N(\frac{1}{2})\ge 3) = \cancel{1-e^{-6}(1+}$

$= 1-e^{-3}(1+3+\frac{9}{2}) = 1-\frac{17}{2}e^{-3}$

(2) 两个柜台, 强度合成为12. $\Rightarrow N(\frac{1}{2})\sim\pi(6)$

$P(N(\frac{1}{2})\ge 6) = 1-e^{-6}(1+6+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}+\frac{6^4}{4!}+\frac{6^5}{5!})$

10. $\lambda=0.4$(条/h) t到少 2小时

(1) 到达时间 $F_X(x) = P\{X\le x\}$

$= \begin{cases} 0, & x<2 \\ P(N(x)\ge 1), & x\ge 2 \end{cases}$ $N(x)\sim\pi(0.4x)$

$= 1-e^{-0.4x}$.

(2) 鱼数目Y. 易知 $Y\ge 1$.

$P\{Y=1\} = P\{W_1\ge 2\} = P\{N(2)\le 1\}$

$= e^{-0.8}(1+0.8) = 1.8e^{-0.8}$.

~~$P\{Y\ge 2\} = P\{N(2)\ge 2\} =$~~

$P\{Y=k\} = P\{N(2)=k\} = \dfrac{e^{-0.8}(0.8)^k}{k!}$
$(k\ge 2)$

(3) $E(Y) = 1.8e^{-0.8} + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \dfrac{e^{-0.8}(0.8)^k}{(k-1)!}$

$= 1.8e^{-0.8} + 0.8e^{-0.8}(e^{0.8}-1) = 0.8+e^{-0.8}$

(4) 即 $P(W_1\ge 3.5 \mid N(2.5)=0)$ (因为至1h以上)

$= P(N(3.5)-N(2.5)=0 \mid N(2.5)=0)$

$= e^{-0.4}$

11. A及B邮箱.

$N_1(t)$ $N_2(t)$. 独立.

$\lambda_1=2$ $\lambda_2=3$

表格法

	垃圾	正常	总	
A	$A_1(t)$ 0.2	$A_2(t)$ 1.8	$N_1(t)$	2
B	$B_1(t)$ 0.3	$B_2(t)$ 2.7	$N_2(t)$	3

(1) $P(N_1(1)=0, N_2(1)=1)$

$= e^{-2}\times 3e^{-3} = 3e^{-5}$

(2) 总邮件由A与B合成，参数为5.

∴ $P(N_1(1)+N_2(1)=2)$, $\lambda=5$.

$= \frac{e^{-5}\times 5^2}{2!}$

$= \frac{25}{2}e^{-5}$

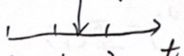
(3) $A_1(t)+B_1(t)$合成的参数为0.5 $\triangleq X(t)$

$A_2(t)+B_2(t)$合成的参数为4.5 $\triangleq Y(t)$

∴ $P\{X(2)=1, Y(2)=2\}$　　$X(2)\sim\pi(1)$, $Y(2)\sim\pi(9)$

独立 $= e^{-1}\times 1\times\frac{e^{-9}\times 9^2}{2!} = \frac{81}{2}e^{-10}$.

(4) W_2 → 表示第二封垃圾邮件的接收时刻



即求：

∴ $P(X(1)\le 1, X(2)\ge 2)$

全概率公式展开

$= P(X(1)=0, X(2)-X(1)\ge 2) + P(X(1)=1, X(2)-X(1)\ge 1)$

$= (e^{-0.5}\cdot(0.5)^0)[1-e^{-0.5}\cdot(1+0.5)] + (e^{-0.5}\cdot 0.5)\times(1-e^{-0.5})$

$= \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-1}$

注：该式只得出同8(2)是一个意思.

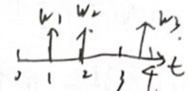
12. $N(t)$是顾客流，$\lambda=10$.

钱数独立且 $\sim U[1000, 10000]$

(1) $P(N(1)=1, N(4)>1)$

$= \frac{e^{-10}\times 10^1}{1}\times(1-e^{-30}) = 10e^{-10}-10e^{-40}$

(2) $P(3<W_3\le 4 \mid W_1=1, W_2=2)$



$= P(N(3)-N(2)=0, N(4)-N(3)\ge 1)$

$= e^{-10}(1-e^{-10}) = e^{-10}-e^{-20}$

(3) 理赔钱数超过5500元的概率

$p = \frac{10000-5500}{\cancel{4500}\ 9000} = \frac{1}{2}$

此类顾客到达强度服从$\lambda=\frac{1}{2}\times 10=5$的泊松过程

$\Rightarrow P(W_1\le t) = P(N(t)\ge 1)$

$= 1-e^{-5t}$

13. 寿命：$\frac{1}{\lambda}=30$天 $\Rightarrow \lambda=\frac{1}{30}$ (强度)

(1) $P(N(30)=1, N(90)=3)$

$= e^{-1}\times 1\times\frac{e^{-2}\times 2^2}{2!} = 2e^{-3}$

(2) $P(N(30)=0, N(60)-N(30)\ge 1)$

$= e^{-1}\times(1-e^{-30\times\frac{1}{30}}) = e^{-1}-e^{-2}$

(3) $P(30<W_2\le 60 \mid N(60)=4)$

$= P(N(30)\le 1, N(60)\ge 2 \mid N(60)=4)$

全概率公式展开

$\frac{P(N(30)=0)\cdot P(N(60)-N(30)=4) + P(N(30)=1)\cdot P(N(60)-N(30)=3)}{P(N(60)=4)}$

$= \frac{5}{16}$

14、$\boxed{\text{表格法}}$ 注意变量间独立性. 本题中 N_1 与 N_2 独立

N_1^* 与 N_2^* 独立

N_{11}、N_{12}、N_{21}、N_{22} 互相独立

	不足1kg	达1kg	总
鲫鱼	$N_{11}(t)$ 1	$N_{12}(t)$ 1	$N_1(t)$ 2
鳊鱼	$N_{21}(t)$ $\frac{1}{2}$	$N_{22}(t)$ $\frac{1}{2}$	$N_2(t)$ 1
总	$N_1^*(t)$ $\frac{3}{2}$	$N_2^*(t)$ $\frac{3}{2}$	$N(t)$ 3.

鱼的种类独立，质量独立同分布

(1) $P(N(1)=2) = \dfrac{e^{-3}\times 3^2}{2!} = \dfrac{9}{2}e^{-3}$

$N(1)\sim\pi(3)$

(2) $\cancel{P\left(N_1^*(1)=2 \mid N(1)=4\right) = \dfrac{P(N_1^*(1)=2,\ N_2^*(1)=2)}{P(N(1)=4)}}$ 这里打错了不是条件概率

$=$

(2) $P(N_1^*(1)=2,\ N(1)=4)$

$= P(N_1^*(1)=N_2^*(1)=2)$

$= \left(e^{-\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\Big/2\right)^2 = \dfrac{81}{64}e^{-3}$.

(3) $P(N_{12}(1)=1,\ N_{12}(2)-N_{12}(1)=1,\ N(1)=1,\ N(2)-N(1)=1)$

只有将事件$\boxed{\text{互斥}}$或独立的"基本事件"才方便计算，否则事件内部的复杂关系需要用条件概率公式或二项分布来刻画。$\boxed{\text{所以表格法会清晰}}$

写成 $P(N_{12}(1)=1,\ N_{11}(1)=N_{21}(1)=N_{22}(1)=0,$
$N_{12}(2)-N_{12}(1)=1,\ N_{11}(2)-N_{11}(1)=N_{21}(2)-N_{21}(1)=N_{22}(2)-N_{22}(1)=0)$

$=(e^{-1}\times e^{-1}\times e^{-\frac{1}{2}}\times e^{-\frac{1}{2}})\times(e^{-1}\times e^{-1}\times e^{-\frac{1}{2}}\times e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-3})^2 = e^{-6}$

(4) $P(N_{12}(2)=2 \mid N(2)=2)$

同样操作 $= \dfrac{P(N_{11}(2)=N_{21}(2)=N_{22}(2)=0,\ N_{12}(2)=2)}{P(N(2)=2)}$

$= \dfrac{e^{-2}\times e^{-1}\times e^{-1}\times\dfrac{e^{-2}\times 2^2}{2!}}{\dfrac{e^{-6}\times 6^2}{2!}} = \dfrac{1}{9}$.

15. $\lambda(t)=t$.

(1) $m(t)=\int_0^2 t\,dt = 2$

$\therefore P = \dfrac{e^{-2}\times 2^3}{3!} = \dfrac{4}{3}e^{-2}$.

(2) $m(1)=\int_0^1 t\,dt = \dfrac{1}{2}$.

$N(2)-N(1) \Rightarrow \int_1^2 t\,dt = \dfrac{3}{2}$.

$\therefore P = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}\times\dfrac{e^{-\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!} = \dfrac{9}{64}e^{-2}$

(3) 原式 $= \dfrac{\text{第(2)题结果}}{P(N(2)=4)} = \dfrac{\frac{9}{64}e^{-2}}{\frac{e^{-2}\times 2^4}{4!}}$

$= \dfrac{27}{128}$.

16. $B(1)\sim N(0,1)$

$B(2)\sim N(0,2)$

$E(B(1)+B(1))=0$.

$D(B(1)+B(2)) = 3+2C_B(1,2)$

$=5$

$\therefore \sim N(0,5)$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{5}}e^{\frac{-x^2}{10}},\ x\in R$.

17. (1) 原式 $P(B(3.6)-B(2.49))\le 1.1)$

$= \Phi\left(\dfrac{1.1-0}{1.1}\right) = \Phi(1)$

(2) $Cov(B(8)-B(4),\ B(6))$

$= C_B(8,6)-C_B(4,6)$

$= \min\{8,6\}-\min\{4,6\}$

$= 6-4 = 2$.

(3) $D(2B(1)+B(2))$

$= 4D(B(1))+D(B(2))+4C_B(1,2)$

$= 4\times 1+2+4\times 1$

$= 10$.

18. $X(t)=B(t+3)-B(t)$.

~~则易知 X(t) 也是~~

$\mu_X(t)=E(B(t+3))-E(B(t))$
$=0-0=0$

$R_X(1,2)$
$=E((B(4)-B(1))(B(5)-B(2))$
$=4-2-1+1=2$.

$F_X(3;t)=P\{X(t)\le 3\}$
$=P\{B(t+3)-B(t)\le 3\}$

而 $D(B(t+3)-B(t))=t+3+t-2t=3$

$\therefore \sim N(0,3)$

$\therefore F_X(3;t)=\Phi(\frac{3-0}{\sqrt{3}})=\Phi(\sqrt{3})$

重点是求出分布

19. $\lambda=1$. 独立.

$\mu_X(t)=t+2\times t\times 1+3\times 0=3t$

$C_X(s,t)=Cov[(s+2N(s)+3B(s))(t+2N(t)+3B(t))]$
$=4C_N(s,t)+9C_B(s,t)$
$=4\min\{s,t\}+9\min\{s,t\}=13\min\{s,t\}$

20.

~~$E_W(t)$~~ $\mu_W(t)$
$=E(e^{B(t)})$
$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}\times e^x\,dx$.
$=e^{\frac{t}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sqrt{t}}-1)^2}dx$
$=e^{\frac{t}{2}}$

同理 $E(e^{2B(t)})=e^{2t}$

$\therefore D_W(t)=e^{2t}-e^{t}$.

21. 令 $\tilde{B}(t)=tB(t)$. 则原概率等价

(1) $P(\tilde{B}(10)\ge 15\mid \tilde{B}(6)=12,\tilde{B}(4)=9.6)$
$=P(\tilde{B}(10)-\tilde{B}(6)\ge 3)=1-\Phi(1.5)$

(2) 考虑 $\tilde{B}(10)$.
$\tilde{B}(10)=(\tilde{B}(10)-\tilde{B}(6))+12$
$\sim N(12,4)$

从而 $B(\frac{1}{10})=\frac{1}{10}\tilde{B}(10)\sim N(1.2,0.04)$

22. $\{X(t)\}$ 是布朗桥过程.

$B(t)=(t+1)X(\frac{t}{t+1})$

证: 1° $X(t)$ 是布朗运动 $\Rightarrow$ $B(t)$ 也是布朗运动

2° $E_B(t)=0$

$R_B(s,t)=(t+1)(s+1)R_X(\frac{t}{t+1},\frac{s}{s+1})$

~~min{s,t}~~ 从而为 $\min\{s,t\}$

1) 当 $t<s$, $R_B(s,t)$
$=(t+1)(s+1)\cdot\frac{t}{t+1}(1-\frac{s}{s+1})=t$

2) 当 $s<t$, $R_B(s,t)$
$=(t+1)(s+1)\cdot\frac{s}{s+1}(1-\frac{t}{t+1})=s$

综合 1°, 2° $\Rightarrow$ $B(t)$ 是布朗运动

23. 设 $\{B(t)\}$ 是标准布朗运动, 对 $\forall t>0$, $x>0$. 求:

(1) $P(|B(t)|\le x)$
$=P(-x\le B(t)\le x)=\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})-(1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}))$
$=2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})-1$.

(2) $P(\max_{0\le s\le t}B(s)-B(t)\le x)$ 因为在此处相对s可视作常量,

故 $=P(\max_{0\le s\le t}(B(s)-B(t))\le x)$

考虑过程 $B(t-s)$. $E(B(t-s))=0$. $E(B(s)-B(t))=0$

~~$B(t-s)-B(t)$~~ $D(B(s)-B(t))=s+t-2\min\{s,t\}$
$=t-s$

$D(B(t-s))=t-s$

从而两者为一个过程. 从而原概率为 $P(\max_{0\le s\le t}B(t-s)\le x)$

$\underline{\underline{t-s=u}}$ $P(\max_{0\le u\le t}B(u)\le x)$ $=1-P(\max_{0\le u\le t}B(u)\ge x)=1-2(1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}))=2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})-1$

$=2P(B(t)\ge x)$ $=2-2P(B(t)$ ~~$=2-2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})$~~

要不等号方向