【17-18 秋】f(z)在闭区域$\overline{\mathrm{D}}=\{\mathrm{z}||\mathrm{z}-z_0|\leq\mathrm{R}\}$上解析，且$|\mathrm{f}(z_0)|=\max|\mathrm{f}(\mathrm{z})|$，求证：在区域 D 内|f(z)|恒为常数.

证明：$\overline{\mathrm{D}}=\{\mathrm{z}||\mathrm{z}-z_0|\leq\mathrm{R}\}$的参数方程为$z(\theta)=z_0+Re^{i\theta}\quad(0\leq\theta\leq2\pi)$，$z'(\theta)=iRe^{i\theta}$.

由柯西积分公式有$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})d\theta$

又$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi}f(z_0)d\theta$，故$\frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi}[f(z_0+Re^{i\theta})-f(z_0)]d\theta=0$

又$|\mathrm{f}(z_0)|=\max|\mathrm{f}(\mathrm{z})|$，故$f(z)=f(z_0+Re^{i\theta})\leq f(z_0)$

（反证法）若$\exists z_1\epsilon D$，使$f(z_1)<f(z_0)$，则$\frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi}[f(z_0+Re^{i\theta})-f(z_0)]d\theta<0$与上式矛盾。

故$\forall z_1\epsilon D$，$f(z)=f(z_0)$，$|f(z)|=|f(z_0)|$恒为常数.

【16-17 秋】已知 f(z)在区域 D 内连续且积分与路径无关，证明：f(z)在区域 D 内解析。

证明：f(z)在区域 D 内积分与路径无关

→F(z)=∫f(z)dz 存在，其中 z_0 为 D 内一点

→F'(z)=f(z)，F(z)是解析函数

→解析函数的无穷可微性可知，F''(z)存在

【15-16 秋】若函数 f(z)是 D 内的解析函数，且$(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2=\mathrm{C}$（C 为常数），证明：f'(z)在 D 内恒为常数。

证明：$[f'(z)]^2=f'(z)\ \overline{f'(z)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2=C$

【09-10 秋】设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是整函数，且 $u(x,y)\geqslant c$，求证：f(z)是常数。

证明：令 $F(z)=\frac{1}{e^{f(z)}}$，$|F(z)|=e^{-u(x,y)}\leqslant e^{-c}$，根据刘维尔定理可知 F(z)是常数。

【附】设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是整函数，且 $x^2+y^2\to\infty$时 $u\to0$，证明：$u\equiv0$.

证明：$F(z)=e^{f(z)}$，当 $r\to\infty$时，$|F(z)|=e^{u(x,y)}\to1$，根据刘维尔定理可知 F(z)=1.

【07-08 春】设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$的收敛半径为 R，证明：幂级数在圆周|z|=R 上处处绝对收敛或者处处不绝对收敛。

证明：

【附】设级数$\sum_{n=0}^{\infty}C_n$收敛，而级数$\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|$发散，证明：$\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$的收敛半径是 1.

$|z|<1$时，存在δ使$|z|<\delta<1$，则$|a_nz^n|<|a_n|\delta^n$。

因为$\sum a_n$收敛，有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，对于$\varepsilon=1$，当$n$充分大时$|a_n|<\varepsilon=1$，则$|a_nz^n|<\delta^n$，

因为$\sum\delta^n$收敛，所以$\sum a_nz^n$绝对收敛。

$|z|>1$时，$|a_nz^n|>|a_n|$，因为$\sum|a_n|$发散，所以$\sum a_nz^n$发散。

【06-07 春重修】证明：$\lim\limits_{R\to\infty}\int_c e^{-z^2}dz=0$；其中 $c{:}z=Re^{i\theta}$，$0\le\theta\le\pi/4$。

证明：$\lim\limits_{R\to\infty}\int_c e^{-z^2}dz=\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^{\pi/4}e^{-(Re^{i\theta})^2}dRe^{i\theta}=\lim\limits_{R\to\infty}Re^{-R^2}\int_0^{\pi/4}e^{-e^{2i\theta}}de^{i\theta}$=0.

【02-03】设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内除点 z_0 外解析，在 z_0 点近旁有 $|f(z)|\le M|z-z_0|^{-\alpha}$，这里常数 $M>0,\ \alpha\in(0,1)$，证明：对于 D 内包含 z_0 的任何简单闭曲线 C，有 $\int_C f(z)dz=0$.

证明：