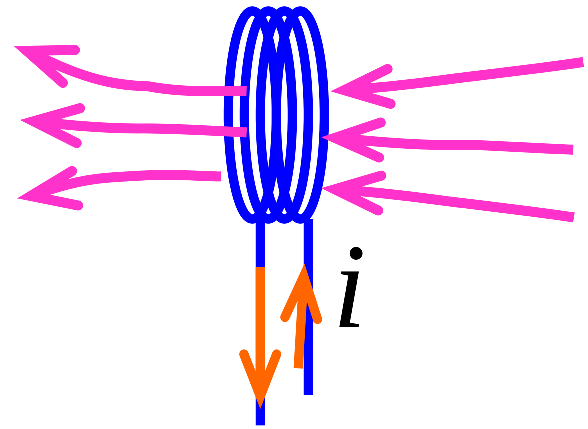
14-4 自感应现象

- 实验现象：

当线圈中电流变化时，它所激发的磁场通过线圈自身的磁通量也在变化，使线圈自身产生感应电动势，叫自感现象.该电动势叫自感电动势.



- 自感系数L:

磁通与回路的电流成正比： $\Psi = Li$

物理意义：一个线圈中通有单位电流时，通过线圈自身的磁通，等于该线圈的自感系数。

单位：亨利H

由电磁感应定律，自感电动势

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

自感电动势的方向总是要使它阻碍回路本身电流的变化。

电流强度变化率为一个单位时，在这个线圈中产生的感应电动势等于该线圈的自感系数。

自感 **L**有维持原电路状态的能力，**L**就是这种能力大小的量度，它表征回路电磁惯性的大小。

实验上，常用测电流强度 i 和磁通链数Ψ来计算自感系数**L**。

例：求一充满磁导率μ 的长直螺线管的自感系数L

半径为**R**，总长度**L**，总匝数为**N**,单位长度上的匝数为 **n**

解：设长直螺线管通有电流I

$$B = \mu\, nI$$

$$\Phi_m = NBS = N\mu nIS = \mu n^2 VI$$

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \mu n^2 V$$

计算自感系数的基本步骤:

1.假设线圈通有电流$\boldsymbol{I}$;

2.求出磁场分布;

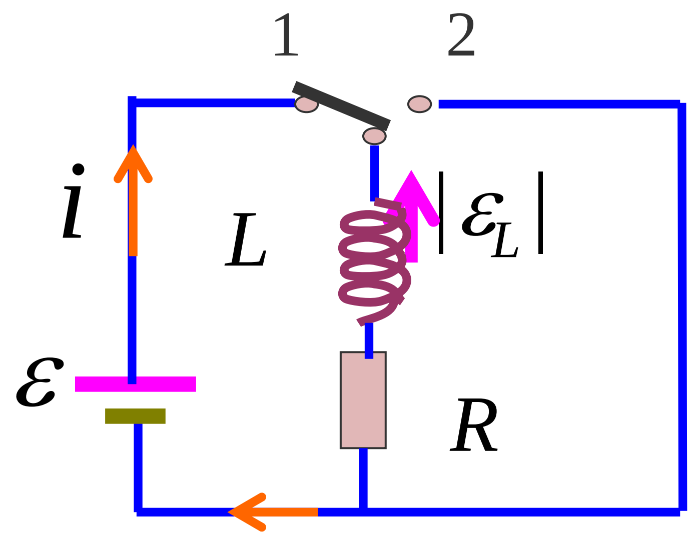
3.计算相应的磁通量;

4.根据$L=\dfrac{\Phi}{I}$求出$\boldsymbol{L}$（$\boldsymbol{I}$一定消去）。

● RL电路的暂态过程

当开关倒向1时， $\because \varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt}$

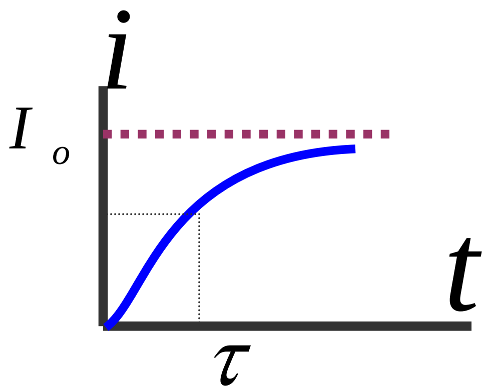
$$\therefore \varepsilon - L\frac{di}{dt} = iR$$



利用初始条件 $t = 0 \qquad i = 0$

$$\int_0^i \frac{di}{i - \dfrac{\varepsilon}{R}} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt$$

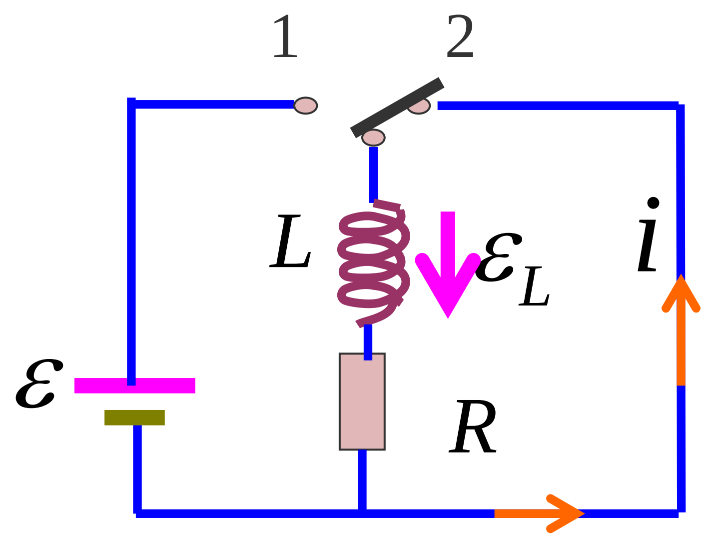
$$\therefore i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



令 $I_o = \dfrac{\varepsilon}{R}$ 定义 $\tau = \dfrac{L}{R}$ 为时间常数

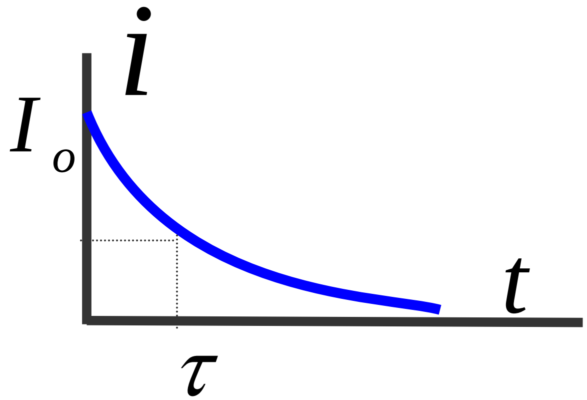
当 $t = \tau = \dfrac{L}{R}$ $\qquad i = 0.632\, I_o$

当开关倒向2时: $\varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt}$



$$-L\frac{di}{dt} = iR \qquad t = 0 \qquad I_o = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$\int_{I_0}^{i}\frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt \qquad i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

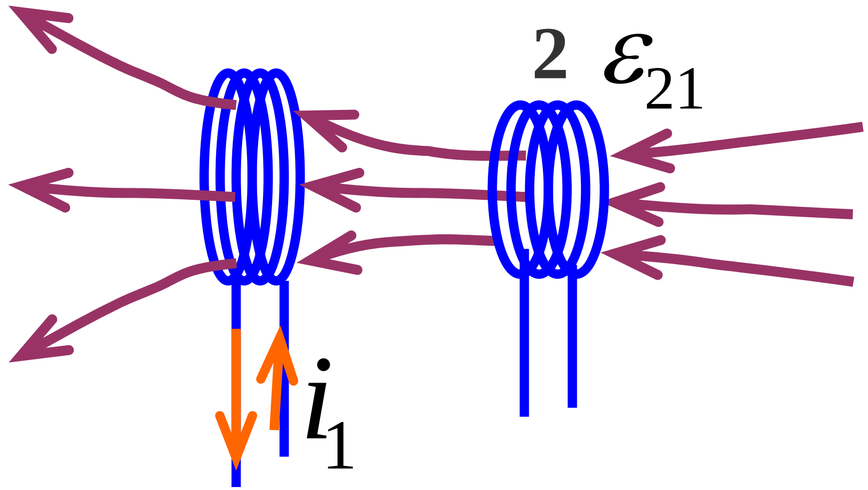


当 $t = \tau = \dfrac{L}{R}$ $\qquad i = 0.368\, I_o$

自感的作用将使电路中的电流不会瞬间突变。从开始变化到趋于恒定状态的过程叫暂态过程。时间常数 τ 表征该过程的快慢。

14-5 互感应现象

当线圈 1中的电流变化时,所激发的磁场会在它邻近的另一个线圈 2 中产生感应电动势;这种现象称为互感现象。该电动势叫互感电动势。



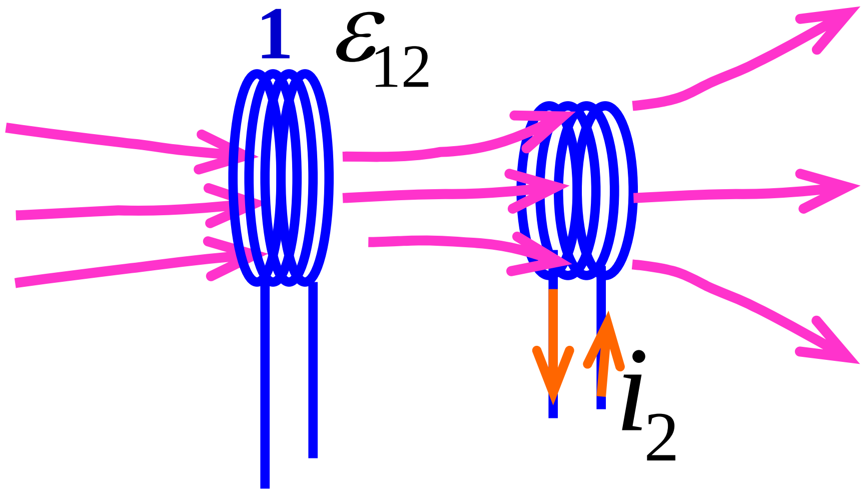
线圈 1所激发的磁场通过线圈 2的磁通链数 $\Psi_{21} = M_{21} i_1$

互感电动势 $$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

线圈2所激发的磁场通过线圈1的磁通链数和互感电动势为

$$\Psi_{12} = M_{12} i_2$$

$$\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$



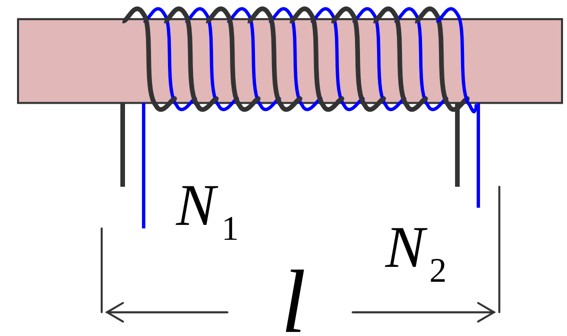
从能量观点可以证明两个给定的线圈有：

$$M_{21} = M_{12} = M$$

M 就叫做这两个线圈的互感系数，简称为互感。

它的单位：亨利（**H**）

例题一：计算同轴螺旋管的互感



两个共轴螺旋管长为 **l**，匝数分别为**N_1**、**N_2**，管内充满磁导率为 **μ** 的磁介质

解：设长直螺线管(**N_1**)通有电流**I_1**　$\because B_1 = n_1 \mu I_1$

线圈**1**产生的磁场通过线圈**2**的磁通链数　$\Psi_{21} = \mu \dfrac{N_1}{l} I_1 S N_2$

由互感定义

$$\therefore M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l} = \mu n_1 n_2 V$$

同理可求出：

$$\therefore M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu N_2 N_1 S}{l} = \mu n_2 n_1 V$$

$$\therefore M = M_{21} = M_{12}$$

计算互感系数的基本步骤:

1先假设某一线圈通有电流$\boldsymbol{I}$;

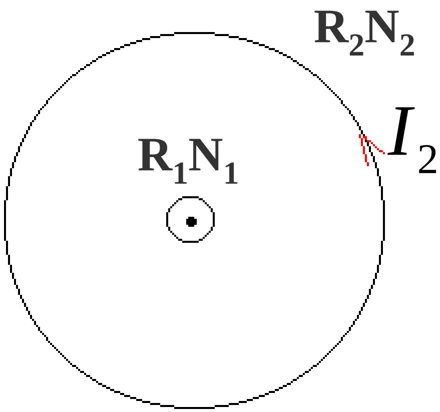
2. 求出在另一线圈所在处的磁场分布;

3.计算出通过另一线圈的磁通量;

4.用$M=\dfrac{\Phi_m}{I}$求出$\boldsymbol{M}$（$\boldsymbol{I}$一定消去）。

例题二:已知两圆形线圈 $R_1\ N_1$, $R_2\ N_2$,求以下三种情况的互感系数($R_1 << R_2$)

(1)

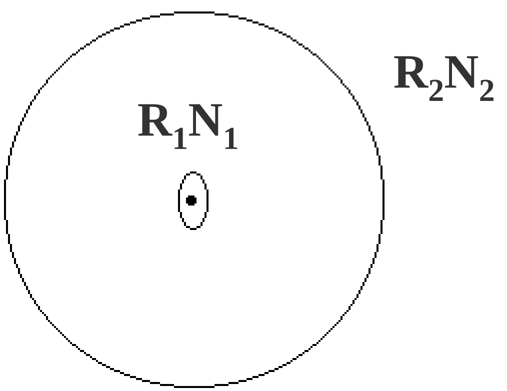


$$B_1 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2R_2}$$

$$\Phi_{12} = N_1 B_1 \pi R_1^2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_1^2}{2R_2} I_2$$

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_1^2}{2R_2}$$

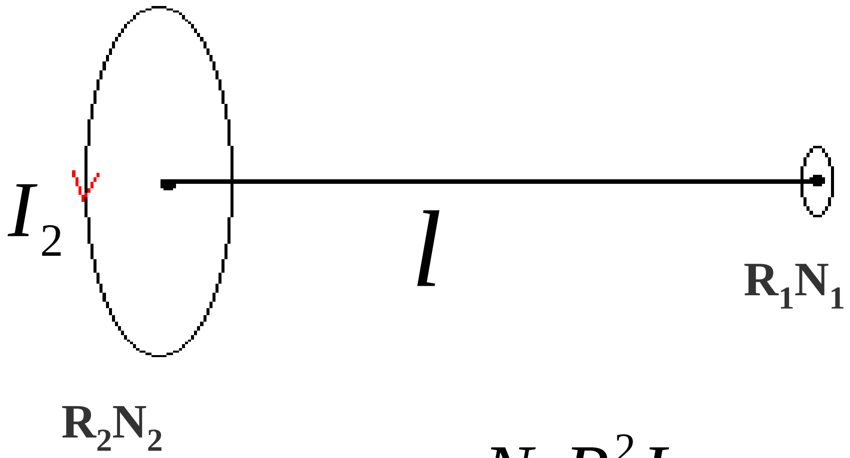
(2)



$$\Phi_{12} = 0$$

$$M = 0$$

(3)



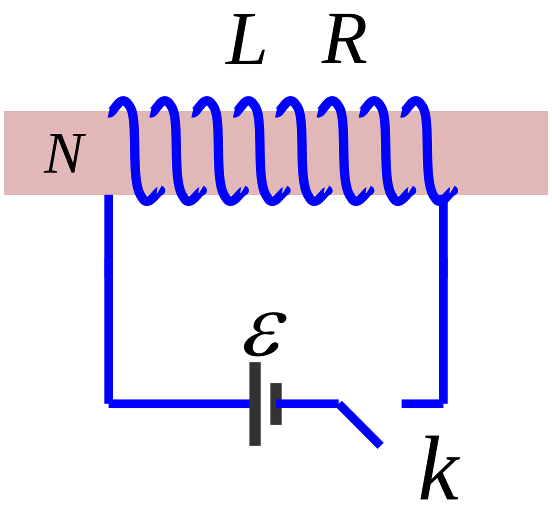
$$B_1 = \frac{\mu_0 N_2 R_2^2 I_2}{2(R_2^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\Phi_{12} = N_1 B_1 \pi R_1^2 = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R_1^2 R_2^2 I_2}{2(R_2^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$M = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 + l^2)^{3/2}}$$

14-6 磁场的能量

同样考虑线圈，当它通有电流时，在其周围建立了磁场，所储存的磁能等于建立磁场过程中，电源反抗自感电动势所做的功。



设在t时刻 i $\varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt}$

$$\therefore \varepsilon - L\frac{di}{dt} = iR \qquad \varepsilon i dt - Lidi = Ri^2 dt$$

$$\int_0^t \varepsilon i dt = \int_0^I Lidi + \int_0^t Ri^2 dt$$

$$\int_0^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2 = W_m$$

长直螺线管的自感 $L=\mu n^2 V$

磁能：$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu n^2 VI^2$

$\because B=\mu nI$

所以得螺线管内的磁场能量：$W_m=\frac{B^2}{2\mu}V$

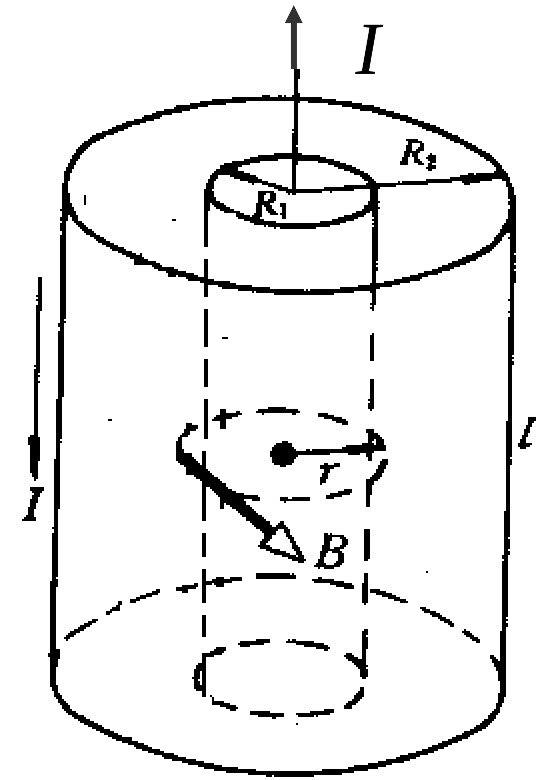
定义磁场的能量密度：$w_m=\frac{B^2}{2\mu}=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

$$dW_m=w_m dV$$

磁场所储存的总能量：$W_m=\int w_m dV=\int\frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2}dV$

积分应遍及磁场存在的全空间。

例 14.11 同轴电缆由半径为 R_1 的铜芯线和半径 R_2 的同轴圆筒所组成(见图),其间充满磁导率为 μ 的绝缘介质。电流 I 从芯线的一端流出经外层圆筒返回,且电流在芯线内均匀分布。求"无限长"同轴电缆上为 l 的一段的磁场能量和自感系数。



解 根据安培环路定理

$$r < R_1 \qquad H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2} \qquad B_1 = \frac{\mu' Ir}{2\pi R_1^2}$$

$$R_1 < r < R_2 \qquad H_2 = \frac{I}{2\pi r} \qquad B_2 = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

取半径 r,厚为 dr,长为 l 的圆柱壳 $\mathrm{d}V$ 作为体积元

$$dV = 2\pi r l dr \qquad dW_m = w_m dV$$

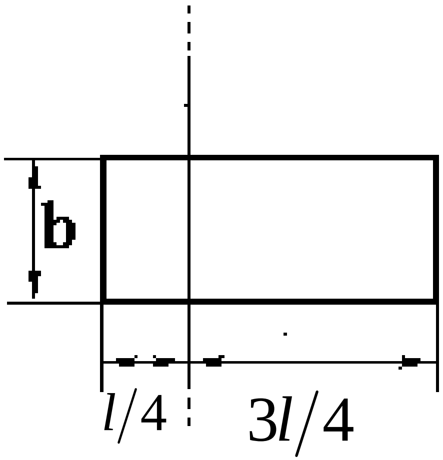
$$W_m = \int \frac{1}{2} BH dV = \int_0^{R_1} \frac{1}{2} B_1 H_1 \cdot 2\pi r l dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} B_2 H_2 \cdot 2\pi r l dr$$

$$= \frac{I^2 l}{4\pi} \left(\frac{\mu'}{4} + \mu \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$\because \quad W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L = \frac{l}{2\pi} \left(\frac{\mu'}{4} + \mu \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

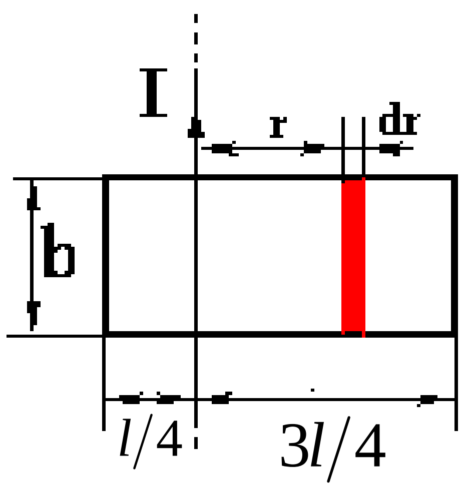
例题：如图，线框内通有电流 $I_2 = I_0 \sin \omega t$



求：直导线的感应电动势 $\varepsilon_i = ?$

解：设长直导线通有电流**I**

$$d\Phi = Bbdr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} bdr$$

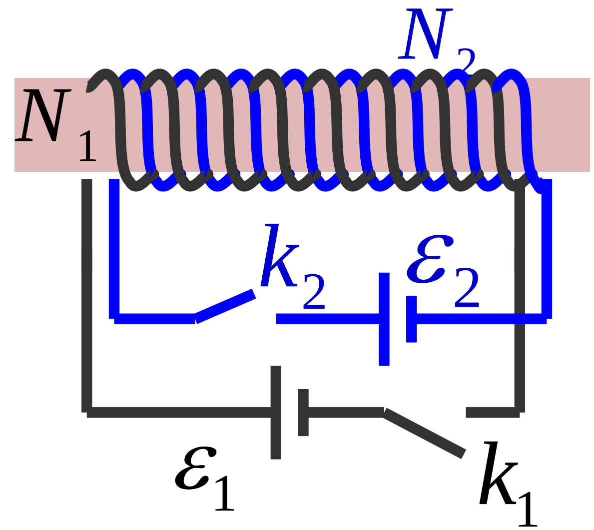


$$\Phi = \int_{l/4}^{3l/4} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} bdr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln 3$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln 3$$

$$\varepsilon_i = M \frac{dI_2}{dt} = \frac{\mu_0 b I_0 \omega \ln 3}{2\pi} \cos \omega t$$

- 互感磁能



先使线圈1电流从0到 I_1 ,电源 ε_1 做功，储存为线圈1的自感磁能

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

合上开关 k_2 电流 i_2 增大时，在回路1中的互感电动势：

$$\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

线圈1的电源维持 I_1，反抗互感电动势的功,转化为磁场的能量

$$W_{12} = \int \varepsilon_{12} I_1 \cdot dt = \int_o^{I_2} M_{12} I_1 di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

线圈2的电流从0到 I_2 ,电源 ε_2 做功，储存为线圈2的自感磁能

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

经过上述步骤电流分别为I_1和I_2的状态，

储存在磁场中的总磁能：

$$W_m = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

同理，先合开关 k_2使线圈 **2**充电至 I_2，然后再合开关k_1保持 I_2 不变，给线圈 **1** 充电，得到储存在磁场中的总能量为：

$$W_m' = W_2 + W_1 + W_{21} = \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + M_{21} I_2 I_1$$

这两种通电方式的最后状态相同，所以 $W_m = W_m'$

$$\therefore M_{12} = M_{21} = M$$

称$MI_1 I_2$为互感磁能

M为互感系数

作业:

14-21

14-23

14-25

14-26