电势计算的两种基本类型：

①.对于电荷分布高度对称的带电体（电场强度易知），用电势的定义式计算

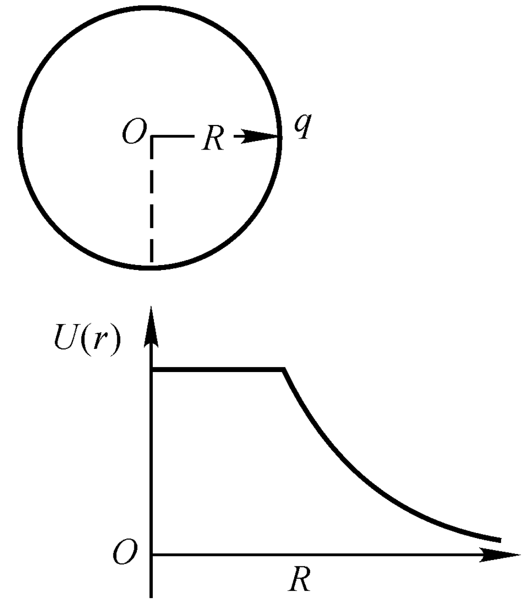
$$U_p = \int_p^{零点} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

②.对于电荷分布部分对称或一般的带电体（电场强度不易知），用电势的叠加式计算

$$U_p = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

例**1.** 求均匀带电球面的电场中的电势分布。

设球面半径为***R***，总带电量为***Q***



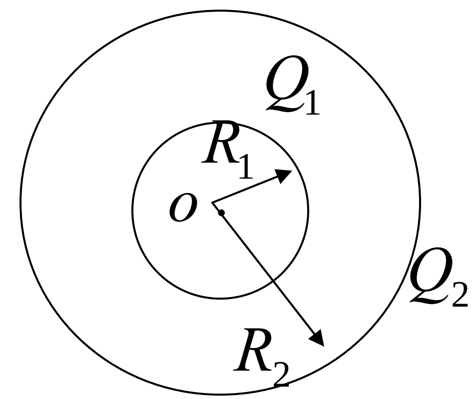
$$r > R \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r < R \qquad E = 0$$

$$r \geq R \qquad U(r) = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r \leq R \qquad U(r) = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^R E dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

【例2】如图所示，两个均匀带电球面，半径分别为R_1 、R_2, 带电量分别为Q_1、Q_2。求此带电系统在空间形成的电场的电势的分布。



解：先写出电场强度的分布

$$E_1 = 0 \qquad (0 < r < R_1)$$

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

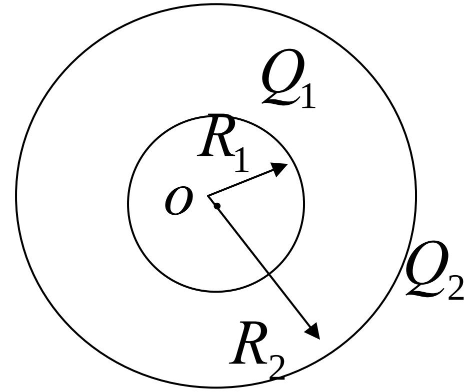
$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r > R_2)$$

再用电势的定义式计算电势

$$U_p = \int_p^{零点} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$U_1=\int_r^{R_1}E_1\cdot \mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}E_2\cdot \mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}E_3\cdot \mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2}\right)\qquad (0<\mathrm{r}<\mathrm{R}_1)$$



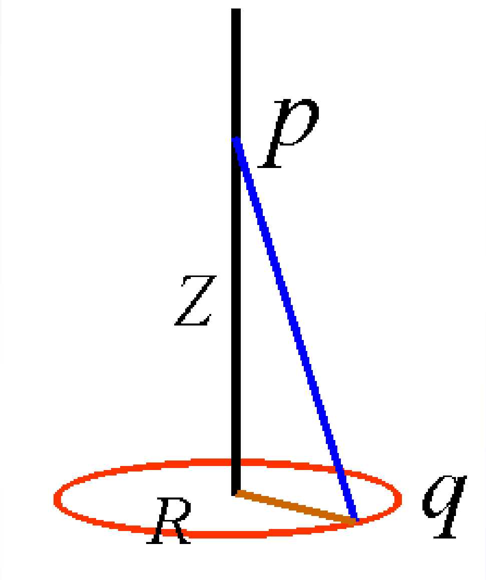
$$U_2=\int_r^{R_2}E_2\cdot \mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}E_3\cdot \mathrm{d}r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r}+\frac{Q_2}{R_2}\right)\qquad (\mathrm{R}_1<\mathrm{r}<\mathrm{R}_2)$$

$$U_3=\int_r^{\infty}E_3\cdot \mathrm{d}r=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\qquad (r>R_2)$$

本题也可用球面电势的叠加来解

例3. 试计算均匀带电圆环轴线上任一点P的电势。设已知带电量为 **q**

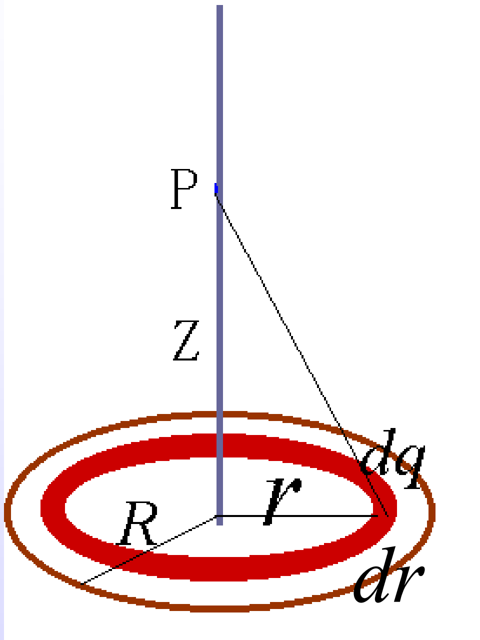
$$U(z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{1/2}}$$



半径为R圆盘 ,面电荷密度σ $dq=\sigma 2\pi r\cdot dr$

$$du_p=\frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{1/2}}$$

$$u_p=\int du_p=\int_0^R\frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0(z^2+r^2)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2+R^2}-z)$$



内外半径为R_1， R_2 的圆环

$$u_p=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0(z^2+r^2)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2+R_2^{\,2}}-\sqrt{z^2+R_1^{\,2}})$$

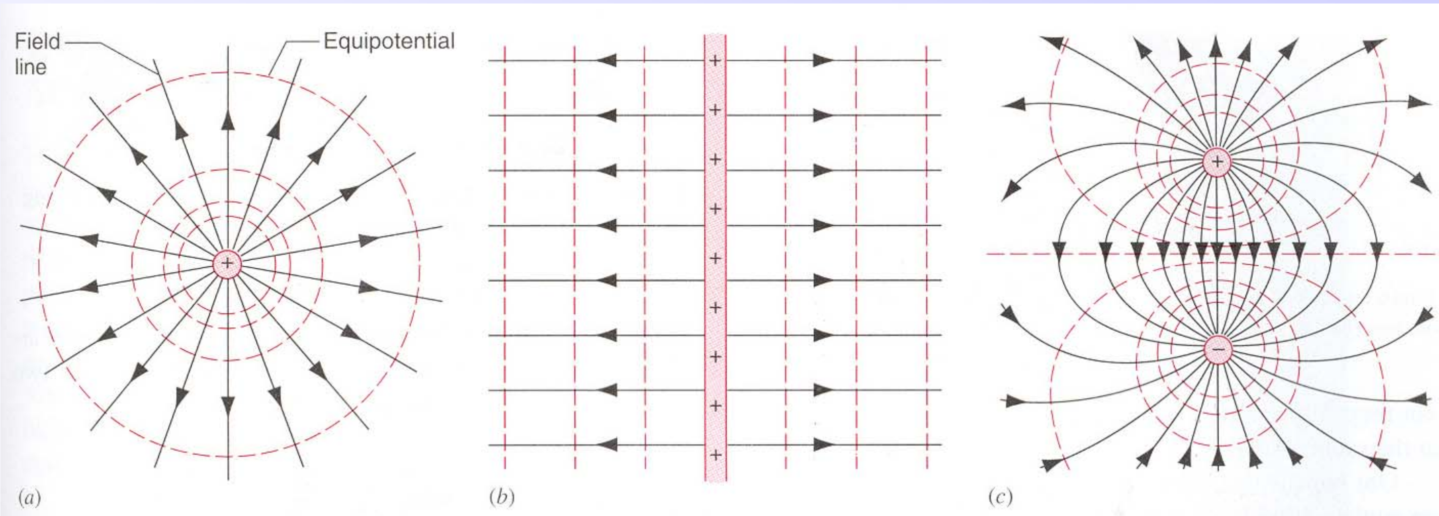
9-8 电场强度和电势的关系

一、等势面

定义：电势相等的各点所组成的面。

规定：任意相邻的两个等势面ΔU一定

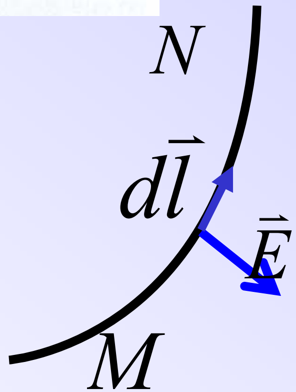
场强大处，等势面密；场强小处，等势面疏。



电场线和等势面的关系:

1.两者的疏密变化相一致;

2.等势面与电场线处处正交.



$$\because\ dA = \vec{E}\cdot d\vec{l} = Edl\cos\theta = 0 \qquad dl \neq 0 \ \therefore \theta = \pi/2$$

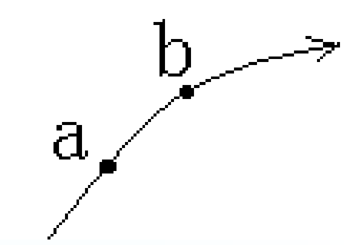
结论:

1.沿等势面移动电荷 **A=0**

证明： $A = q\Delta U = 0$

2.电场线的方向指向电势降落的方向。

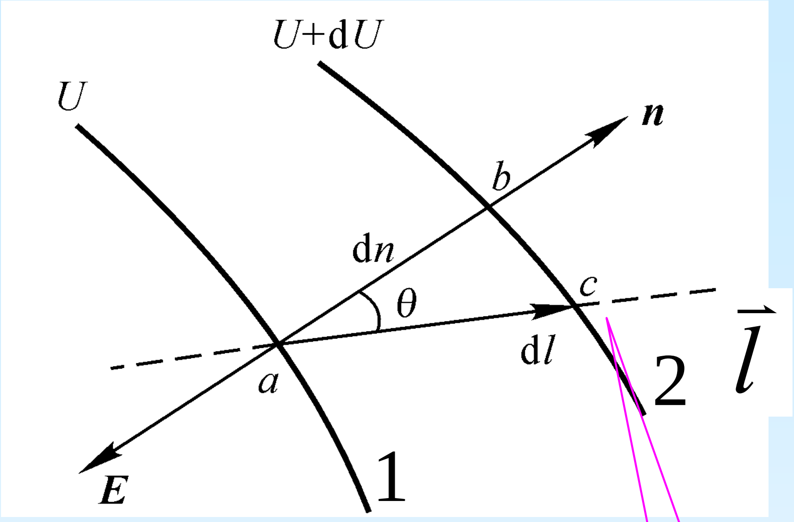
证明： $U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0 \quad \therefore U_a > U_b$



二、 电势梯度

$\dfrac{dU}{dn}$ 沿 $\vec{n}$ 方向的电势变化率

$\dfrac{dU}{dl}$ 沿 $\vec{l}$ 方向的电势变化率



$$\therefore \frac{dU}{dl} = \frac{dU}{dn}\cos\theta$$

$dU > 0$

dn：法向距离

$$dn = dl\cos\theta$$

考虑任一方向

可见：

U 沿 $\vec{n}$ 方向的电势变化率最大。

电势梯度定义：

$$gradU \overset{def}{\equiv} \frac{dU}{dn}\hat{n}$$

它的方向是该点附近电势变化率为最大的方向。

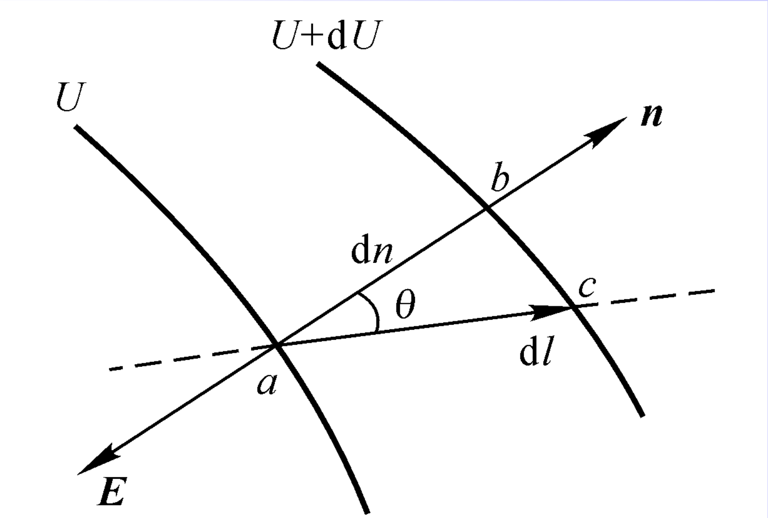
它的大小是该方向电势变化率

三、场强与电势的微分关系

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

利用场强和电势的积分关系可导出场强与电势的微分关系：

a→b $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_a - U_b$



$$\vec{E} \cdot d\vec{n} = E_n dn = -dU$$

$$\therefore E_n = -\frac{dU}{dn}$$

考虑到场强的方向 $$\vec{E} = -\frac{dU}{dn}\hat{n} = -gradU$$

同理： $$E_l = -\frac{\partial U}{\partial l}$$

在直角坐标系中

$$\therefore E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad \therefore E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad \therefore E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) = -gradU$$

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

由于电势是个标量，所以很多问题都可以先求电势再求电场强度。

试判断下列说法是否正确：

（1）场强大处，电势一定高； **---**不一定

（2）场强为零处，电势一定为零； **---**不一定

（3）电势为零处，场强一定为零； **---**不一定

（4）电势相等的区域，场强也处处相等。 **---**对

【例题】如图所示，已知一长为L，均匀带电Q 的细棒，求Z 轴上一点P的电势及电场强度在Z 轴上的分量。

解：$\lambda = \dfrac{Q}{L}$，在细棒取一电荷微元 $dq = \lambda dx$

$$dU_p = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}}$$

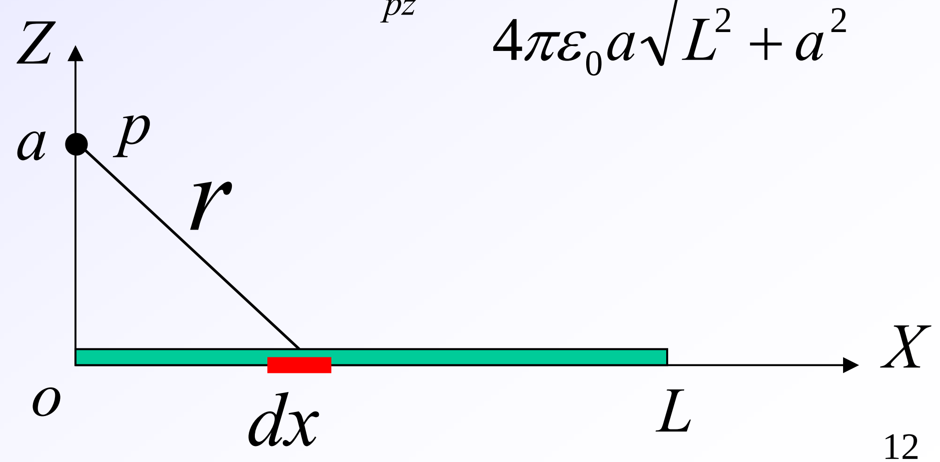
$$U_p = \int_0^L \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{L + \sqrt{L^2 + a^2}}{a}$$

在Z轴上任一点的电势应为：

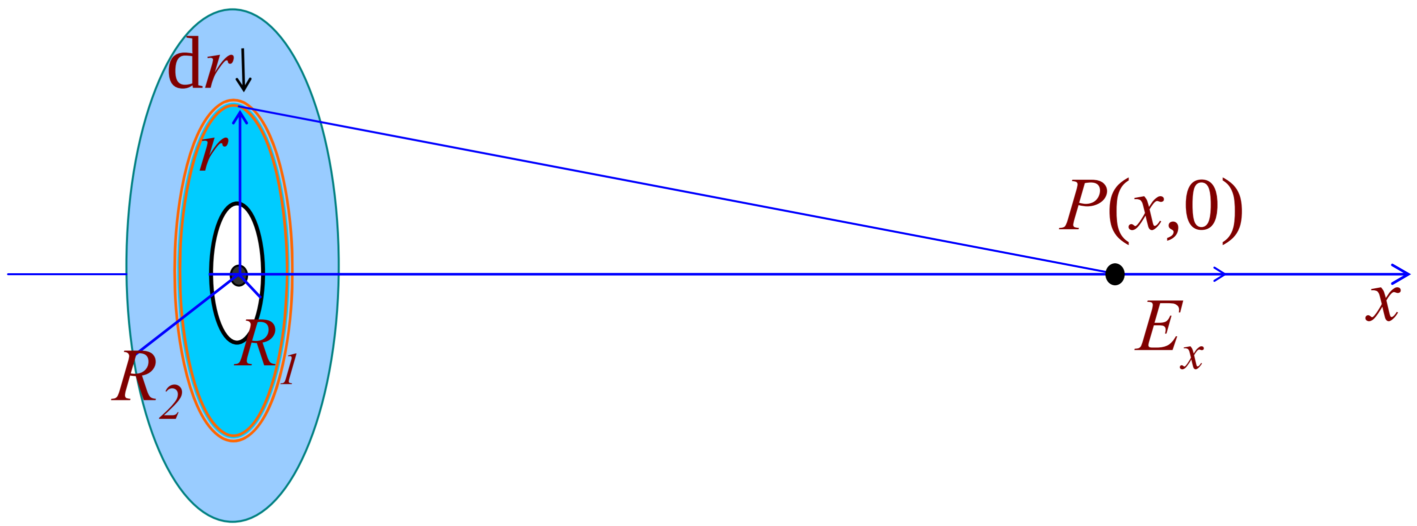
$$\therefore\ E_{pz} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{L^2 + a^2}}$$

$$U_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{\mathrm{L} + \sqrt{\mathrm{L}^2 + z^2}}{z}$$

$$\therefore\ E_z = -\frac{\partial U_z}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z\sqrt{L^2 + z^2}}$$



【例题】 将半径为R_2的圆盘，在盘心处挖去半径R_1的小孔，并使盘均匀带电，试用电势梯度求场强的方法，计算这个中空带电圆盘轴线上任一点P处的场强？



解： 设面电荷密度 σ，在盘面上取半径r，宽为dr的圆环，环上带电：

$$dq = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$$

dq在P点的电势为

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{1/2}}=\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(r^2+x^2)^{1/2}}$$

整个圆盘在P点的电势为：

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(r^2+x^2)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R_2^2+x^2}-\sqrt{R_1^2+x^2})$$

由对称性分析可知，场强方向沿x轴，其值为：

$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R_1^2+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{R_2^2+x^2}}\right)$$

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R_1^2+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{R_2^2+x^2}}\right)\vec{\mathrm{i}}$$

【小结】：

主要介绍了静电场的功的基本特性，并从静电场力的作功特点引入了电势能，电势的概念；给出了计算电势的基本方法;并得出了电场强度和电势的关系。

重点掌握电势的两种计算计算方法：

①.对于电荷分布高度对称的带电体（电场强度易知），用电势的定义式计算

$$U_p = \int_p^{\text{零点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

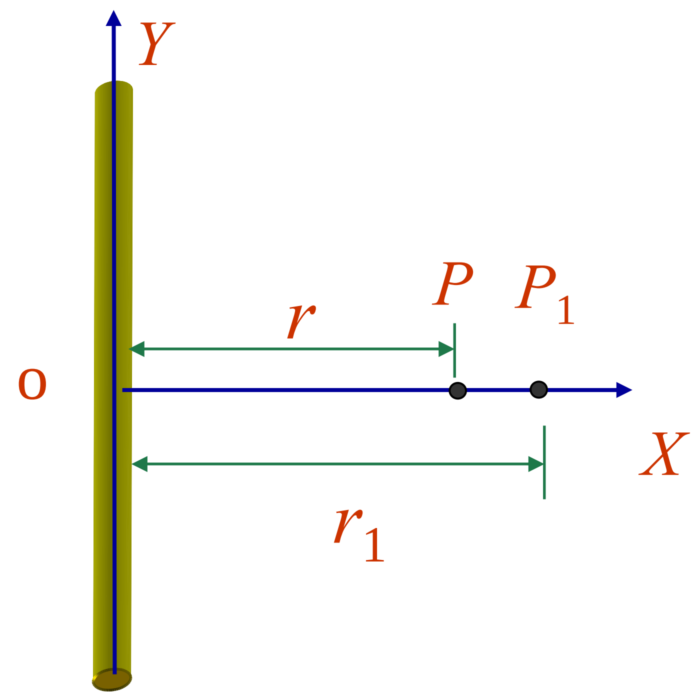
②.对于电荷分布部分对称或一般的带电体（电场强度不易知），用电势的叠加式计算

$$U_p = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

【例题】求无限长均匀带电直线的电场中的电势分布

解： 如图所示 带电直线电荷线密度为 λ，计算X 轴线上距直线为r的P点处的电势。

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



计算P与P_1点的电势差为：

$$U_P - U_{P_1} = \int_r^{r_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{r} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r}$$ 由于ln1=0 本题选

r_1=1m 处作为电势零点，则P点电势为：

$$U_P = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$$

上式中 r>1m,U_P为负，r<1m,U_P为正。

作业：

9-29

9-31

9-32

9-33