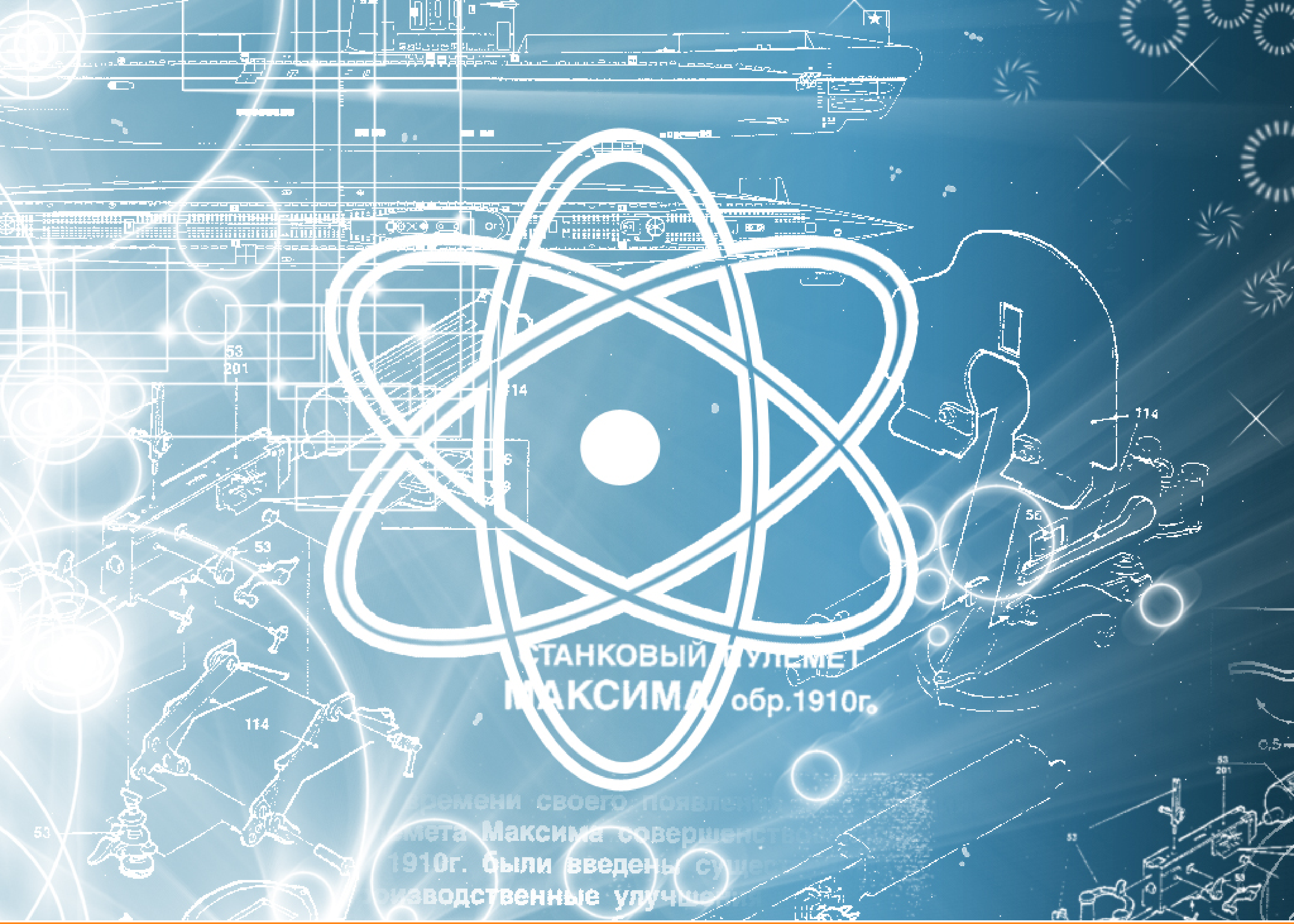

数学分析笔记

作者：Reichtum

组织：ZheJiang University

时间：September 20, 2022

版本：0.1

There is nothing in the understanding which has not come from the senses, except the understanding itself, or the one who understands ———Gottfried Wilhelm Leibniz

目录

第 1 章 数学基础

1.1 三角函数

1.1.1 和差公式、万能公式、倍角公式、半角公式

一、$\sin x, \cos x$ 和差公式

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

二、$\tan x, \cot x$ 和差公式

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \\
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\
\cot(\alpha+\beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha} \\
\cot(\alpha-\beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}
\end{aligned}
$$

三、万能公式

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \\
\cos\alpha &= \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \\
\tan\alpha &= \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

四、倍角公式

$$
\begin{gathered}
\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \\
\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{gathered}
$$

五、半角公式

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \\
\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \\
\tan\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \\
\cot\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}
\end{aligned}
$$

1.1.2 和差化积与积化和差

一、和差化积

$$
\begin{aligned}
&\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
&\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
&\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
&\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
&\tan\alpha+\tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}
\end{aligned}
$$

二、积化和差：异 sin 同 cos

$$
\begin{aligned}
&\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \\
&\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)] \\
&\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \\
&\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]
\end{aligned}
$$

1.1.3 交替三角函数

1. $(-1)^n\sin nx = \sin(x+\pi)n$
2. $(-1)^n\cos nx = \cos(x+\pi)n$

1.1.4 重要的三角恒等式

1. $\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$
2. $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$
3. $\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}$
4. $\arctan\frac{1}{2k^2} = \arctan\frac{k}{k+1}-\arctan\frac{k-1}{k}$

证明 (1) 将右侧分母乘到左侧去，用二倍角即可。

(2) 左边乘 $\sin\frac{x}{2}$，得到

$$\sin\frac{x}{2}I=\sum_{k=1}^{n}\sin kx\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[\cos(k+\frac{1}{2})x-\cos(k-\frac{1}{2})x]=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x\right]$$

(3) 和 (2) 类似

1.1.5 反三角函数

定理 1.1 (反三角函数倒数关系)

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{arccot}x+\operatorname{arccot}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

证明 画一个直角三角形，角 θ_1 对着边长 1，$\theta_2=\frac{\pi}{2}-\theta_1$ 对着边长 x，$\tan\theta_1=\frac{1}{x},\tan\theta_2=x$，而两角互补。

1.1.6 三角不等式

定理 1.2 ($\sin x$ 不等式)

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\frac{2x}{\pi}<\sin x<x<\tan x$

定理 1.3 (反三角不等式)

$\arcsin x>x>\arctan x$，当 x 为小正数时。

1.2 恒等式

1.2.1 立方和、四次方和

定理 1.4 (立方和公式)

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

定理 1.5 (四次方和差公式)

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=(a^2+b^2-\sqrt{2}ab)(a^2+b^2-\sqrt{2}ab)$

1.2.2 最大值、最小值

$$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|),\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

1.2.3 次方和

$$\begin{cases} 1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n-1)}{2} \\ 1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{cases}$$

1.3 不等式

1.3.1 基本不等式

一、均值不等式：

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \le \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}$$

二、对数不等式

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$$

1.3.2 Jensen 不等式

定理 1.6 (Jensen 不等式)

若 $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$，$f$ 是 (下) 凸函数，则

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \ge f(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i)$$

♡

✍ **练习 1.1Jensen 不等式的应用** (1)ZJU2021：若 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$，$p_i \in (0,1)$，$x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}$，证明 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i - \ln p_i) \le \ln(\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i})$

证明 (1) 根据 $x_i = \ln(e^{x_i})$，因此即证明 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(\ln \dfrac{e^{x_i}}{p_i}) \le \ln(\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i})$，设 $t_i = \dfrac{e^{x_i}}{p_i}$，不等式变为 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln(t_i) \le \ln(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i p_i)$，由于 $\ln x$ 是凹函数，因此得证。

1.3.3 调和级数不等式

定理 1.7 (调和级数不等式)

$\ln(n+1) < 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n} < 1+\ln n$，进一步地，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$(即 Euler 常数)

♡

证明 由于 $\dfrac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$，因此 $\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} < \ln(1+\dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$，即 $\dfrac{1}{n+1} < \ln\dfrac{n+1}{n} < \dfrac{1}{n}$，求和得到：

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\ln\frac{2}{1}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1} = 1+\ln n$$

另一侧同理

1.4 几何学基础

1.4.1 常见立体几何体积

定理 1.8 (椭球面积)

$ax^2+by^2+cz^2\leq r^2$ 的体积为 $\dfrac{4\pi r^3}{3\sqrt{abc}}$

证明 做仿射变换 $x'=\sqrt{a}x, y'=\sqrt{b}y, z'=\sqrt{c}z$，而 $S'=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，因此

$$S=\frac{S'}{\sqrt{abc}}=\frac{4\pi r^3}{3\sqrt{abc}}$$

第 2 章 数列极限

2.1 数列极限的概念与性质

2.1.1 数列极限的概念

定义 2.1 (数列极限)

a_n 是实数列，$A \in \mathbb{R}$，若 $\forall \epsilon, \exists N, \forall n > N$ 有 $|a_n - A| < \epsilon$，则称 a_n 收敛到 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

定理 2.1 (极限的四则运算)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在 (不存在时不能拆！)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \odot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \odot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$，这里 $\odot$ 指任意运算 (除法额外要求 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$)。

定理 2.2 (cauchy 收敛准则)

数列 a_n 收敛当且仅当 $\forall \epsilon, \exists N, \forall m, n > N$ 有 $|a_n - a_m| < \epsilon$

练习 2.1 几个经典极限 (1) 证明 $\sin n$ 发散

(2) 证明 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 发散

证明 (1) 显然区间 $[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}]$ 长度大于 1，一定包含一个整数，可以取 $n \in [2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}]$，取 $m \in [2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi]$，则 n, m 可取无穷大，$|\sin n - \sin m| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$，因此根据 Cauchy 收敛准则知道发散。

(2)$\forall N$，取 $n = N, m = 2N$，则 $|a_n - a_m| = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} \geq \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$，因此根据 Cauchy 收敛准则逆否命题可知发散

2.1.2 收敛数列的性质

定理 2.3 (收敛数列的性质)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则

- 有界性：a_n 有界
- 保号性：若 $A > a$，则 $n \to \infty$ 时 $a_n > a$
- 收敛当且仅当 a_n 所有子列都收敛到 A

定理 2.4 (奇偶子列收敛)

a_n 收敛到 A 当且仅当 a_{2k}, a_{2k+1} 收敛到 A

证明 只右推左：根据偶数列可知 $\forall \epsilon, \exists K, \forall 2k > K$ 满足 $|a_{2k} - A| < \epsilon$，而对上面的 $\epsilon, \exists K', \forall 2k+1 > k'$ 满足 $|a_{2k+1} - A| < \epsilon$，因此取 $N = \max\{K, K'\}$ 即可。

2.2 一些重要极限结论

2.2.1 几个基本极限

定理 2.5 (常用基本极限)

设 $a>0, b>1$，则基本极限的关系为：$\log n < n^a < b^n < n! < n^n$，更具体地

- 根式：(1)$a>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$
- 比式：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(2)a>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$
- 对数：(1)$\forall k$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}=0(2)\forall k$, $\lim\limits_{x\to 0^+}x^k\ln x=0$
- 指数：$\forall k$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0$

证明 (1) 根式第一个设 $a_n=\sqrt[n]{a}=1+h_n$，得到 $a=(1+h_n)^n\geq 1+nh_n$，故 $h_n\leq\dfrac{a-1}{n}\to 0$。

第二个设 $a_n=\sqrt[n]{n}=1+h_n$，则 $n=(1+h_n)^n\geq\dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2$，得到 $0<h_n<\dfrac{2}{n-1}$，夹逼准则即可。

第三个用 Stirling 公式，等价于 $\dfrac{n}{e}$

定理 2.6 (重要极限)

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$，$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n=\dfrac{1}{e}$。$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e-\dfrac{e}{2n}+o(\dfrac{1}{n})$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^1=e$

练习 2.2 相关练习 (1) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

解 (1) 等价于 $e^{\frac{\ln(1+x+x^2)}{x}}=e^{\frac{2x+1}{1+x+x^2}}=e$

2.2.2 Stirling 公式与 Wallis 公式

定理 2.7 (Stirling 公式)

当 $n\to\infty$ 时，$n!\approx\sqrt{2\pi n}(\dfrac{n}{e})^n$，进一步地 $\sqrt[n]{n!}\sim\dfrac{n}{e}$

定理 2.8 (Wallis 公式)

当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{n\pi}$，更具体地，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{\pi}{2}$

证明 根据 $\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x$ 得到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x$，根据 Wallis 积分公式下面不等式，并构造 A_n, B_n

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\Rightarrow A_n:=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}:=B_n$$

此时 $B_n-A_n=\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\dfrac{1}{2n(2n-1)}=A_n\cdot\dfrac{1}{2n}<\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{2n}\to 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}B_n=\dfrac{\pi}{2}$

2.2.3 Euler 常数

定理 2.9 (Euler 常数)

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\ln n\right]$ 存在且为常数 γ，记作 Euler 常数。

推论 2.1 (Euler 常数的应用)

当 $n\to\infty$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma=\ln n+o(n)$

2.3 夹逼准则

定理 2.10 (夹逼准则)

a_n,b_n,c_n 为三个序列，若 $\exists N$ 使得 $n\geq N$ 时 $a_n\leq b_n\leq c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$。

练习 2.3 两道经典夹逼准则 求极限 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$

解 (1) 可用 Wallis 公式，或者夹逼准则。记 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}, b_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$，则 $a_n<b_n, a_nb_n=\frac{1}{2n+1}$，得到 $a_n^2<a_nb_n=\frac{1}{2n+1}\to 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(2) 用 $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\frac{1}{n}$，从而求和后得到 $\frac{2n+2}{n+1}\leq\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\frac{2n+2}{n}$，取极限得到 2。

练习 2.4 整体放缩 or 局部放缩 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解 (1) 如果是 $\frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}$ 形式则是用定积分，这里看上去就是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1$，因此放缩为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq I\leq\frac{n}{\sqrt{n^2}}$ 即可知结果为 1。

2.4 平均值定理

2.4.1 有限项幂次根号平均

定理 2.11 (根号平均)

$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 m 个正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,\cdots,a_m\}$(注意这里不是 $\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_n^n}$，与平均值定理不同)

证明 设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，因此 $\sqrt[n]{A^n}\leq\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leq\sqrt[n]{mA^n}$，两侧都趋于 A，因此极限为 A。

练习 2.5 根号平均的两个经典推广 (1) 正数列 a_n 收敛到 $a>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$

(2)a_n 非负且有界 (可能是可数个)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}=\sup\limits_{n\geq1}a_n$

证明 (1) 根据保号性，$\exists N, n > N$ 时 $\frac{1}{2}a \le a_n \le \frac{3}{2}a$，因此 $n > N$ 时 $\sqrt[n]{\frac{1}{2}a} \le \sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{\frac{3}{2}a}$，由夹逼准则得到结果为 1。

(2) 记 $a = \sup\limits_{n\ge1} a_n$，则 $a_n \le a$ 且 $\forall \epsilon, \exists k, a_k > a - \epsilon$。当 $n \ge k$ 时，$a_k^n \le a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \le na^n$，两侧开 n 次根号得到 $a - \epsilon < \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n} \le a\sqrt[n]{n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt[n]{n} = a$，对上述 ϵ，$\exists N, \forall n > N$ 有 $a\sqrt[n]{n} < a + \epsilon$，根据夹逼准则可证。

2.4.2 平均值定理：无穷项算术平均与几何平均

定理 2.12 (平均值定理)

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$(有限数或正负无穷)，则

1. 算术平均：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$
2. 几何平均：若 $a_n > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$

证明 (1) 只证 a 为有限数的情况。$\forall \epsilon, \exists N, n > N$ 时 $|a_n - a| < \epsilon$，因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| &= \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_N - a) + (a_{N+1} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \\ &\le \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|}{n} + \frac{|a_{N+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \le 2\epsilon\end{aligned}$$

(2) 取对数则转换为 (1)

练习 2.6 奇偶子列推广 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = b$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a+b}{2}$

证明 分为奇偶数项进行讨论：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}}{2n} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{n} + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n} = \frac{a+b}{n}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n+1}}{2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n+1}}{n} \cdot \frac{n}{2n-1} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{2n-1} = \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

因此得到结论成立。

练习 2.7 倒乘推广 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，因此 a_n 有界，即 $\exists M$ 使得 $|a_n| < M$，故：

$$|a_k b_{n-k+1} - ab| < |a_k| \cdot |b_{n-k+1} - b| + |b| \cdot |a_k - a| \le M|b_{n-k+1} - b| + |b| \cdot |a_k - a|$$

因此得到：

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} - ab\right| \\ &\le \frac{|a_1 b_n - ab| + \cdots + |a_n b_1 - ab|}{n} \\ &\le M \cdot \frac{|b_n - b| + \cdot + |b_1 - b|}{n} + |b| \cdot \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}\end{aligned}$$

有平均值定理可知右侧极限为 0，因此 $\left|\frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} - ab\right| \le 0$，得到目标极限为 0。

2.4.3 技巧：一招解决 n 次根号与除以 n

定理 2.13 (n 次根号与除以 n)

a_n 为数列，则

- 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$
- 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$

证明 (1) 由于 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})}{n}$，根据平均值定理即 a

(2) 根据 $a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$，根据平均值定理即 a

练习 2.8n 次根号 计算极限 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$

解 (1)$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$，因此极限为 1。

(2)$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}\to1$，极限为 1

(3)$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=n\to\infty$，因此不收敛

练习 2.9 除以 n 重点：计算极限 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}$

解 (1)$a_n=\dfrac{n!}{n^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}}=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{n})^{n-1}}=\dfrac{1}{[(1-\frac{1}{n})^n]^{\frac{n-1}{n}}}=\dfrac{1}{e}$，因此极限为 $\dfrac{1}{e}$

(2)$a_n=\dfrac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{n^n}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n-1)(n-1)^{n-1}}{n^n}=(4-\frac{2}{n})\left((1-\frac{1}{n})^n\right)^{\frac{n-1}{n}}=\frac{4}{e}$$

因此极限为 $\dfrac{4}{e}$

2.5 使用定积分定义

2.5.1 使用定积分计算极限

定理 2.14 (用定积分定义计算极限)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+\frac{2(b-a)}{n}\right)+\cdots+f\left(a+\frac{n(b-a)}{n}\right)\right]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

笔记 如果是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+a}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$，则可以加一项得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+a}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ 再转换为定积分。

练习 2.10 直接判断积分 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{nk}}$

解 (1) 等价于 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

(2) 等价于 $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

(3) 等价于 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln(1+\sqrt{2})$

(4) 转换为 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}$，即 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，极限为 2

练习 2.11 对数 + 积分 重点：取对数 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}$

解 等价于 $\exp\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{n^n}\right)\right]$，指数积分即 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = [(1+x)\ln(1+x)-x]\Big|_0^1 = \ln 4-1$，因此极限为 $\frac{4}{e}$

或者本题也在 n 次根号部分出现了 (更推荐 n 次根号的做法)

练习 2.12 改变有限项 (1) 重点：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+(n-1)}\right)$

解 (1) 可改变有限项不影响极限，变为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}$，因此极限为 $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2$

练习 2.13 经典夹逼 + 积分 (1) 重点：$I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1}\right)$

(2) 重点：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

(3) 重点：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1^2}+\frac{2}{n^2+n+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n^2}\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{n+1}+\frac{2\sin\frac{2}{n}x}{2n+1}+\cdots+\frac{n\sin\frac{n}{n}x}{n^2+1}\right), x\in(0,\pi)$

解 (1)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{1+\frac{2}{n^2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{1+\frac{n}{n^2}}\right)$，进行 $\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+1}\le\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}\le\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}$ 放缩：

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{i}{n}\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{2}{\pi}\end{cases}$$

因此根据夹逼可知极限为 $\frac{2}{\pi}$

(2) 进行放缩：$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le I\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}$(或者 $\frac{i}{n^2+n+n}\le\frac{i}{n^2+n+i}\le\frac{i}{n^2}$ 也行)。左右侧分别写为

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+2n}=\frac{1}{n+2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{n}{n+2}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\\ \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\end{cases}$$

因此两侧均等于积分 $\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

(3) 一方面 $\frac{i}{n^2+n+i^2}\le\frac{i}{n^2+i^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}$，另一方面 $\frac{i}{n^2+n+i}\ge\frac{i}{(n+1)^2+i^2}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\frac{i}{n+1}}{1+\left(\frac{i}{n+1}\right)^2}$，结果等价于 $\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2$

(4) 看上去等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\sin\frac{x}{n}}{kn}=\int_0^1\sin tx\mathrm{d}t=\frac{1-\cos x}{x}$，放缩为 $\frac{k\sin\frac{k}{n}x}{kn+k}\le\frac{k\sin\frac{k}{n}x}{kn+1}\le\frac{k\sin\frac{k}{n}x}{kn}$ 再求和即可。

笔记 一般不能直接写成积分形式的都需要进行放缩。

2.5.2 利用定积分定义构造等价无穷小

定理 2.15 (利用积分构造等价无穷小)

对于正整数 k，$1^k+2^k+\cdots+n^k\sim\frac{1}{k+1}n^{k+1}$

证明 考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\left(1^k+\cdots+n^k\right)=\int_0^1 x^k\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}$ 即可。

练习 2.14 利用积分构造等价无穷小 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(1^{2022}+2^{2022}+\cdots+n^{2022})}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2023}}\left(1^{2022}+2^{2022}+\cdots+n^{2022}\right)=\int_0^1 x^{2022}\mathrm{d}x=\frac{1}{2023}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(1^{2022}+2^{2022}+\cdots+n^{2022})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2023\ln n+\ln\frac{1}{n^{2023}}(1^{2022}+2^{2022}+\cdots+n^{2022})}=\frac{1}{2023}$$

定理 2.16 (已知极限计算求和极限)

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_{n+k}}{n+k}=A\ln 2$

证明 首先显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{A}{n+k}=A\ln 2$，根据 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\forall\epsilon,\exists N,\forall n>N,|a_n-A|<\epsilon$，因此 $n>N$ 时：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n+k}}{n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{A}{n+k}\right|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{n+k}-A|}{n+k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\epsilon}{n}=\epsilon$$

2.6 单调有界定理

2.6.1 单调有界定理及其推广

定理 2.17 (单调有界定理)

若数列 a_n 单调且有界，则其必收敛。

练习 2.15 单调有界定理理论推广 (1)a_n 单增，b_n 单减，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在且相等

(2)a_n 为有界数列，记 $\overline{a}=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$，$\underline{a}_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a}_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a}_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在的充要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a}_n=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a}_n$

证明 (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，$\exists N,\forall n>N$ 使得 $|b_n-a_n|<1$，即 $a_n<b_n+1$，于是 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n<b_n+1\le b_{n-1}+1\le\cdots\le b_1+1$，根据单调有界定理可知均收敛，根据极限四则运算可知极限相等。

(2) 显然 $\overline{a}_n$ 单减，$\underline{a}_n$ 单增，且 $\overline{a}_1\ge\overline{a}_n\ge a_n\ge\underline{a}_n\ge\underline{a}_1$，因此均单调有界，收敛。记 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a}_n=\overline{a}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a}_n=\underline{a}$，根据夹逼准则 $\underline{a}_n\le a_n\le\overline{a}_n$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\forall\epsilon,\exists N,\forall n>N$ 有

$$a-\epsilon<\underline{a}_n\le\overline{a}_n<a+\epsilon$$

取极限可知极限均为 a.

练习 2.16 两道经典循环根式 (1) 重点：$a_1=\sqrt{c}$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) 重点：$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$，证明 a_n 收敛

解 (1) 由于 $a_n=\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}$，根据该通项的形式，每次 a_{n+1} 在 a_n 基础上往最里层加入一个 $\sqrt{c}$，因此整体单增。若极限存在，则显然极限为 $a=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$，由于 $a=\sqrt{a+c}$，因此若 $a_n<a$，则 $a_{n+1}<a$，而根据 $a_1<a$ 得到 $a_n<a$，因此有界，根据单调有界定理可知收敛。

(2) 显然 a_n 单增，下证其有界。由于 $n<2^{2^n}$，于是

$$a_n<\sqrt{2^{2^1}+\sqrt{2^{2^2}+\cdots+\sqrt{2^{2^n}}}}<2\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$$

根据 (1) 可知 $\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$ 有界，故根据单调有界定理收敛。

笔记 不动点迭代一般有界性都和不动点本身去比。

2.6.2 相减法

练习 2.17Euler 常数 重点：证明 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛

证明 由于 $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n>\ln(n+1)-\ln(n)>0$(调和级数不等式)，且根据 $\ln(1+x)\geq\dfrac{x}{1+x}$ 得到

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})$$

于是 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln(1+\dfrac{1}{n})<0$，这说明单减有下界，故收敛。

练习 2.18 交替级数 $S_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

解 由 Leibniz 定理可知收敛。只需要考虑偶数项

$$S_{2n}=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n})=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})\to\ln 2$$

由于收敛数列的奇偶子列收敛到同一极限，因此极限为 $\ln 2$

练习 2.19 经典相减法 (1) 重点：$A>0,a_1>0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{A}{a_n})$，证明 a_n 收敛，并求极限

解 (1) 首先 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{A}{a_n})>\sqrt{A}$，因此 $n\geq 2$ 时，$a_n>\sqrt{A}$，而前后项相减得到

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(\frac{A}{a_n}-a_n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{A-a_n^2}{a_n}$$

结合 $n\geq 2$ 时 $a_n>\sqrt{A}$ 得到 $a_{n+1}-a_n<0$，因此单减，显然 $a_n>0$，因此收敛。两侧取极限得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{A}$

2.6.3 相除法

练习 2.20 两道经典相除法 (1) 重点：$a_1=1,a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) 重点：$c>0,0<x_1<\dfrac{1}{c}$，$x_{n+1}=x_n(2-cx_n)$，证明：x_n 收敛并求其极限

解 (1)$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{\dfrac{2}{a_n}}$，当 $a_n<2$ 时，$a_{n+1}>a_n$。根据 $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$，当 $a_n<2$ 时，$a_{n+1}<2$，单调有界故收敛，两侧同取极限得到极限为 $A=2$。

(2)$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2-cx_n$，当 $x_n<\dfrac{1}{c}$ 时，$x_{n+1}>x_n$。设 $f(x)=2x-cx^2,f'(x)=2-2cx$，$f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{c}$ 取最大，因此 $x_n<\dfrac{1}{c}$ 时 $x_{n+1}<\dfrac{1}{c}$ 有界，根据单调有界收敛，两侧取极限得到极限为 $\dfrac{1}{c}$。

2.6.4 不等式放缩

练习 2.21 两道经典双数列 + 不等式放缩 (1) 重点：$a_1 > b_1 > 0$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在且相等。

(2) 重点：$a_1 > b_1 > 0$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，并求其值

解 (1) 根据均值不等式 $a_{n+1} \geq b_{n+1}$，根据 $a_1 > b_1$ 可知 $\forall n, a_n > b_n$，从而

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n$$

因此 a_n 单减，b_n 单增，即 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq b_n \geq b_{n-1} \cdots \geq b_1$，这说明 a_n, b_n 均单调有界，故均收敛。$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ 两侧取极限可知极限相等。

(2) 根据均值不等式可知 $a_n \geq b_n$，由于 $a_1 > b_1$，因此 $\forall n, a_n \geq b_n$，因此

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n, b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} \geq \frac{2}{\frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_n}} = b_n$$

a_n 单减，b_n 单增，且 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_n \geq b_n \geq \cdots \geq b_1$，单调有界故均收敛。$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ 两侧取极限可知极限满足 $a = \dfrac{a+b}{2}$，故相等。而

$$a_{n+1} b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \cdot \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n b_n$$

因此 $ab = a_1 b_1$，即极限为 $a = b = \sqrt{a_1 b_1}$

练习 2.22 前后项不等式放缩 (1) 重点：$0 < a_n < 2$，$(2 - a_n)a_{n+1} \geq 1$，证明 a_n 收敛，并求其极限

(2) 重点：$x_n > 0$，$x_{n+1} + \dfrac{4}{x_n} < 4$，证明 x_n 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解 (1) 显然 $a_n(2 - a_n) \leq \left[\dfrac{a_n + (2 - a_n)}{2}\right]^2 = 1 \leq a_{n+1}(2 - a_n)$，因此 $a_n \leq a_{n+1}$，根据单调有界定理可知收敛，两侧取极限得到极限为 1

(2) 显然 $x_n + \dfrac{4}{x_n} \geq 2\sqrt{x_n \cdot \dfrac{4}{x_n}} = 4 > x_{n+1} + \dfrac{4}{x_n}$，因此 $x_n > x_{n+1}$，单减。另外有 $0 < x_{n+1} < x_{n+1} + \dfrac{4}{x_n} < 4$ 可知 x_n 有界，故收敛，两侧取极限得到极限为 2。

笔记 前后项不等式先用同项进行放缩，可得出单调性结论

2.7 递推问题

2.7.1 极限压缩定理

定理 2.18 (极限压缩定理)

$A \in \mathbb{R}$，若 $\exists r \in (0, 1)$ 使得 $|a_n - A| < r|a_{n-1} - A|$，则数列 a_n 收敛到 A。

练习 2.23 经典极限压缩定理题 (1) 设 $x_{n+1} = \cos x_n, x_1 \in [0, \frac{\pi}{3}]$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在且极限为 $\cos x - x = 0$ 的根

解 (1) 考虑 $f(x) = \cos x - x$，$f'(x) = \sin x - 1 \leq 0$ 单减，因此有唯一解，设 $\cos a = a$。由于

$$|x_{n+1} - a| = |\cos x_n - a| = |\cos x_n - \cos a| = |\sin \xi| \cdot |x_n - a|$$

而由于 $\xi \in [0, \frac{\pi}{3}]$，$|\sin \xi| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此 $|x_n - a| \to 0$

2.7.2 压缩映射定理

定理 2.19 (压缩映射定理)

若存在 $r\in(0,1)$ 使得 $|a_n-a_{n-1}|\le r|a_n-a_{n-1}|$，则数列 a_n 收敛。

推论 2.2 (导数判断压缩映射)

若 $a_{n+1}=f(a_n)$，f 可导，且 $\exists r\in(0,1)$ 使得 $|f'(x)|\le r<1$，则 a_n 收敛。

练习 2.24 两个经典循环式 证明收敛并求极限：

$(1)x_1=2,x_2=2+\dfrac{1}{2},\cdots,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{a_n}$

$(2)x_1=1,x_2=\sqrt{2},\cdots,x_{n+1}=\sqrt{2\sqrt{x_n}}$

解 (1)$|x_{n+1}-x_n|=|\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}}|=\dfrac{|x_{n-1}-x_n|}{|x_nx_{n-1}|}\le\dfrac{1}{4}|x_n-x_{n-1}|$，因此收敛，取极限得到极限为 $1+\sqrt{2}$

(2) 设 $f(x)=\sqrt{2x}$，$|f'(x)|=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$。

2.8 Stolz 定理

定理 2.20 (Stolz 定理)

Stolz 定理分为以下两种，下面的 A 可以为无穷。

- $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型：b_n 严格单增趋于 ∞，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$
- $\dfrac{0}{0}$ 型：b_n 严格单减趋于 0，a_n 也收敛到 0，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$

练习 2.25 直接使用 用 Stolz 定理证明平均值定理

证明 设 $a_n=x_1+x_2+\cdots+x_n,b_n=n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=x_n\to a$，则 $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\to a$

笔记 由于 Stolz 定理可以证出平均值定理，在使用平均值定理时就不需要使用放缩法了。

练习 2.26 几道经典题目 (1)ZJU2022.2：$x_0>0,x_n=\arctan x_{n-1}$，证明：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(b)$\sqrt{n}x_n$ 收敛，并求极限

解 (1)(a) 由于 $x_n=\arctan x_{n-1}<x_{n-1}$ 因此单减，根据单调有界定理则极限存在，且两侧取极限得到零

(b) 考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2$，由于 $nx_n^2=\dfrac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$，根据 Stolz 定理即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2x_n^2}{x_{n-1}^2-x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\arctan^2x_{n-1}}{x_{n-1}^2-\arctan^2x_{n-1}}=\frac{x_{n-1}^2(x_{n-1}^2+\frac{2}{3}x_{n-1}^4+\frac{1}{9}x_{n-1}^6)}{-\frac{2}{3}x_{n-1}^4-\frac{1}{9}x_{n-1}^6}\frac{3}{2}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

2.9 积分形式极限：分段法

2.9.1 定积分形极限

练习 2.27 基础拆分法 求下列极限：

$$(1)\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\quad(2)\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n\mathrm{d}x\quad(3)\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x\quad(4)\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}\mathrm{d}x$$

解 (1) 显然 $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x=0$，但 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x=1$，因此做以下拆分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

前者 $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\mathrm{d}x\le\frac{\pi}{2}\sin^n(\frac{\pi}{2}-\delta)\to 0$，后者 $\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\le\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\delta$，因此积分极限等于 0。

(2)(3) 同理都是 0

(4) 可以考虑 $\int_0^1 e^{x^n}-1\mathrm{d}x$，结果为 1.

练习 2.28 用分段法证明命题 (1)$f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\mathrm{d}x=f(1)$

2.9.2 反常积分形极限

定理 2.21 (函数形式平均值定理)

$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义且在任意有限区间可积，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A$$

♡

证明 先斩后奏，已知 $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_a^x A\mathrm{d}t$，因此只需证

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_a^x A\mathrm{d}t\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_a^x\left(f(t)-A\right)\mathrm{d}t=0$$

$\forall\epsilon,\exists M,x\ge M$ 时 $|f(x)-A|<\epsilon$，因此可有 $N,x>N$ 时 $\frac{1}{x}\int_a^M|f(t)-A|\mathrm{d}t<\epsilon$，得到

$$\left|\frac{1}{x}\int_a^x(f(t)-A)\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{x}\int_a^M|f(t)-A|\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_M^x|f(t)-A|\mathrm{d}t<\epsilon+\frac{x-M}{x}\cdot\epsilon<2\epsilon$$

因此结论成立

笔记 如果有说明 $f(x)$ 连续，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，可用洛必达法则证明。

练习 2.29 相关练习 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 非负，对 $\forall A>0$，$xf(x)$ 在 $[0,A]$ 可积，且 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 可积，证明：$\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_0^A xf(x)\mathrm{d}x=0$

证明 由于 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，因此 $\forall\epsilon,\exists M,\forall A''\ge A'\ge M$ 都有 $0\le\int_{A'}^{A''}f(x)\mathrm{d}x<\epsilon$，固定上面的 M，$\exists N,\forall A>N$ 有 $0<\frac{1}{A}\int_0^M xf(x)\mathrm{d}x<\epsilon$，进而 $A>N$ 时

$$0<\frac{1}{A}\int_0^A xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{A}\int_0^M xf(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{A}\int_M^A xf(x)\mathrm{d}x<\epsilon+\frac{1}{A}\int_M^A Af(x)\mathrm{d}x<2\epsilon$$

2.9.3 周期函数积分极限

✍ **练习 2.30** $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 T 的可积函数，证明：$\forall a\in\mathbb{R}, \int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$

证明 令 $x=T+u$，则 $\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(T+u)\mathrm{d}(T+u)=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$，因此

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{T+a} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

✍ **练习 2.31** $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$

证明 对 $\forall x>0$，都 $\exists n_x\in\mathbb{N}$ 使得 $x-n_xT\in[0,T)$，此时 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n_x}{x}=\frac{1}{T}$。根据周期性可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{n_xT} f(t)\mathrm{d}t=\frac{n_x}{x}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

由于 $||f(x)|-|f(y)||\le|f(x)-f(y)|$，从振幅角度来看，若 $f(x)$ 可积，则 $|f(x)|$ 也可积，且显然 $|f(x)|$ 也是周期函数。因此 $\int_0^T|f(x)|\mathrm{d}x$ 有界，此时：

$$\int_{n_xT}^x f(t)\mathrm{d}t\le\int_{n_xT}^{(n_x+1)T} f(x)\mathrm{d}x\le\int_0^T|f(x)|\mathrm{d}x\le M$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{n_xT}^x f(x)\mathrm{d}x=0$。

✍ **练习 2.32 进阶难度** $f(x)\ge 0$，周期为 T，且连续，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_n^{+\infty}\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

证明

第 3 章 函数极限与连续性

3.1 函数的极限

3.1.1 函数极限定义

定义 3.1 (函数极限)

$x_0 \in \mathbb{R}$，f 在 x_0 邻域有定义 (x_0 处可以没有)，$\forall \epsilon, \exists \delta$, $s.t. \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]-\{x_0\}$ 有 $|f(x)-A|<\epsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处极限。

♣

练习 3.1Riemann 函数 Riemann 函数定义如下，证明对 $\forall x_0 \in [0,1]$，有 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}(\frac{p}{q}\text{是既约真分数}) \\ 0, & x\text{是 (0,1) 中的无理数或者 0,1 本身} \end{cases}$$

证明 $\forall \epsilon$，满足 $\frac{1}{q} \geq \epsilon$ 的正整数 q 只有有限个，从而 $\frac{p}{q}$ 有限，令这些数为 $x_1, \cdots, x_k$，取

$$\delta = \min\{|x_i - x_0| : i = 1, 2, \cdots, k\}$$

当 x 属于 x_0 的 δ 邻域时，显然 $R(x) < \epsilon$，因此 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$

笔记 上述练习说明 Riemann 函数在每个点极限为 0，在 $(0,1)$ 的无理点和 $0,1$ 连续，在 $(0,1)$ 有理点间断。这说明 Riemann 函数是几乎处处连续的，根据实变可知其 Riemann 可积。

定理 3.1 (极限的唯一性)

若函数的极限存在，则它是唯一的。

♡

证明 反设有两个极限，取 ϵ 为差距的一半，根据定义可证。

3.1.2 函数极限的性质

定理 3.2 (函数极限四则运算)

若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处极限存在，$f+g, f-g, f\times g, \frac{f}{g}$ 极限存在且极限为对应极限的运算 (除法要求分母极限非 0)。

♡

练习 3.2 函数绝对值的极限 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |A|$，反之不一定成立。

证明 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\forall \epsilon, \exists \delta, \forall x \in U(x_0, \delta)$ 有 $|f(x)-A|<\epsilon$，而 $||f(x)|-|A|| \leq |f(x)-A|$，因此极限存在。反之有反例 $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

定理 3.3 (归结原则)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 当且仅当任意收敛到 x_0 的数列 x_n，有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$。

♡

证明 (1) 左推右：$\forall \epsilon, \exists \delta, |x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-A|<\epsilon$，对于 x_n，由于 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$，$\exists N, \forall n > N, |x_n - x_0| < \delta$，因此 $|f(x_n)-A|<\epsilon$

(2) 右推左：反设 $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq A$，则 $\exists\epsilon_0,\forall\delta,\exists x\in U(x_0,\delta)$ 满足 $|f(x)-A|>\epsilon_0$，每次取 $\delta'=\delta,\frac{\delta}{2},\cdots,\frac{\delta}{n}$，每个 δ' 邻域对应一个 x_n，但是总有 $|f(x_n)-A|>\epsilon_0$，这与 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 矛盾。

练习 3.3 用归结原则证明不收敛 证明：$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在。

证明 令 $x_n=\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi},x_n'=\frac{1}{2n\pi}$，两者均收敛至 0，但是 $f(x_n)\to 1$，$f(x_n')\to 0$，从而无极限。

3.1.3 无穷大与无穷小

定义 3.2 (O 与 o)

f,g 在 x_0 附近有定义，$g(x)\neq 0$，若 $\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}\leq M$，则记 $f(x)=O(g(x))$；若 $\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=0$，则记 $f(x)=o(g(x))$ ♣

定义 3.3 (Ω)

f,g 是两个算法，若 $\exists C\in\mathbb{R}^+$ 使得 $n>n_0$ 时 $0\leq Cg(n)\leq f(n)$，则记 $f(n)=\Omega(g(n))$ ♣

定义 3.4 (Θ)

若 $f(n)$ 是 $\Omega(g(n))$ 且 $O(g(n))$ 的，则记 $f(n)=\Theta(g(n))$ ♣

笔记 记忆方法：全以多项式为例，O 表示阶数 (次数) 大于等于，o 表示阶数大于，Ω 表示阶数小于等于，Θ 表示阶数等于。

3.1.4 使用定义直接计算

练习 3.4 几个经典函数极限 (1) 计算 $\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{[xf(x)]}{x}$，其中 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=a$

解 (1)$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n)=\sin^2(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n})$，极限为 $\sin^2(\frac{\pi}{2})=1$

(2) 由于 $xf(x)-1<[xf(x)]\leq xf(x)$，因此 $f(x)-\frac{1}{x}<\frac{[xf(x)]}{x}\leq f(x)$，显然 $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=a$，因此由夹逼准则，极限为 a

练习 3.5 几个经典递推问题 (1)$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增，$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$，证明 $\forall a>0$ 有 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1$

证明

3.2 函数极限的计算

3.2.1 等价无穷小公式

三角：	$\sin x\sim x$	$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$	$\tan x\sim x$
反三角：	$\arcsin x\sim x$	$\arctan x\sim x$	
指数、对数：	$\ln(1+x)\sim x$	$e^x-1\sim x$	$a^x-1\sim x\ln a$
其他：	$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$		

3.2.2 Taylor 展开公式

指数、对数： $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

三角： $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

反三角： $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ $\qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

分式： $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $\qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

其他： $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$ $\qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$

3.3 函数的连续性

3.3.1 函数连续的定义

定义 3.5 (单点连续)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$x_0\in[a,b]$ 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。♣

笔记 有时也可以展开用 $\forall\epsilon,\exists\delta$ 使得 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 满足 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ 证明。例如证明 Riemann 函数在无理点连续。

定义 3.6 (单点左右连续)

若 $f(x_0^+) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 右连续。左连续同理。♣

笔记 注意右连续是指右极限等于当前点的函数值，而非左侧极限靠过来等于当前点的函数值！

练习 3.6Dirichlet 函数的连续性 判断下面 Dirichlet 函数的连续性、单调性、周期性

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数} \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}$$

解 (1) 周期：任意有理数 (显然)

(2) 连续性：处处不连续，因为根据有理数和无理数的稠密性，总能在小邻域中找到相差 1 的点，因此不连续。

练习 3.7Riemann 函数的连续性 证明 Riemann 函数在无理点连续，在有理点间断。

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}\text{为既约分数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

证明 (1) 有理点：设 $x_0 = \frac{p}{q}$ 为有理点，$R(x_0) = \frac{1}{q}$，无理点列趋于 x_0 时，极限为 0，与函数值不同。

(2) 无理点：x_0 是无理点，$\forall\epsilon, \frac{1}{q} > \epsilon$ 的个数有限，设这些点为 $x_1,\cdots,x_n$，取 $\delta < \min\{|x_0-x_i| : i = 1\sim n\}$，$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}$ 时 $|f(x_0)-f(x)|<\epsilon$

练习 3.8 初等函数的连续性 f,g,h 连续，证明：$\max\{f(x),g(x)\},\min\{f(x),g(x)\},|f(x)|$ 连续

证明 (1) 最大、最小：根据 $\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$

(2) 绝对值：$|f(x)|=\sqrt{|f(x)|^2}$ 连续

3.3.2 间断点的概念

定义 3.7 (第一类间断点)

跳跃点与可去间断点统称为 $f(x)$ 的第一类间断点

- 跳跃点：若 $f(x)$ 在 x_0 处左右极限 $f(x_0^-),f(x_0^+)$ 存在但不相等，
- 可去间断点：若 $f(x)$ 在 x_0 处左右极限存在且相等，即 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$ ♣

练习 3.9 第一类间断点的性质 (1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 至多有第一类间断点，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界

证明 (1) 若没有间断点，则连续，显然有界。否则反设无界，则对 $M=1$，存在 $x_1\in[a,b]$ 使得 $|f(x_1)|>1$，$M=2$ 存在 $x_2\in[a,b]$ 使得 $|f(x_2)|>2$，以此类推构造 x_n。由于 $x_n\in[a,b]$，根据致密性定理，存在收敛子列 x_{n_k}，而由于 $f(x)$ 只有第一类间断点，因此 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_{n_k})$ 存在，但其趋于无穷，矛盾。

定义 3.8 (第二类间断点)

若 $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 至少一个不存在或者不是有限的数，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点。♣

练习 3.10 判断间断点类型 (1) 已知 $f(x)=\operatorname{sgn}(x),g(x)=x-[x]$，讨论 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 的间断点类型

解 (1)$f(g(x))$ 在 x 为整数时等于 0，在 x 非整数时大于 0，因此在整数处取可去间断点。$g(f(x))=0$，因此连续

练习 3.11 单调函数的间断点 $f(x)$ 在 x_0 邻域单增，$f(x_0^-),f(x_0^+)$ 均存在，证明如下性质，即单调函数的间断点都是跳跃间断点

$$f(x_0^-)=\sup_{x\in U_-^o(x_0)}f(x),f(x_0^+)=\inf_{x\in U_+^o(x_0)}f(x)$$

证明 取 $x_1\in U_+^o(x_0)$，则 $\forall x\in U_-^o(x_0)$ 有 $f(x)\le f(x_1)$，从而根据确界原理有上确界 A，从而 $f(x)\le A$ 且 $\forall\epsilon,\exists x'$ 满足 $f(x')>A-\epsilon$，从而 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ 有 $|f(x)-A|<\epsilon$

笔记 单调函数左右极限均存在是一个会在考题中使用的结论。

练习 3.12 单调函数右连续 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上单调函数，定义 $g(x)=f(x+0)$，证明 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 每一点右连续

证明 只需要证明 $\forall\epsilon,\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，满足

$$|g(x)-g(x_0)|<\epsilon$$

根据 $g(x_0)=\lim\limits_{y\to x_0^+}f(y)$ 得到 $y\in(x_0,x_0+\delta)$ 时有 $|f(y)-g(x_0)|<\epsilon$，令 $y\to x^+$ 即可得到

$$|g(x)-g(x_0)|<\epsilon$$

练习 3.13 极限的连续性 $f(x)$ 只有可去间断点，$g(x)=\lim\limits_{y\to x}f(y)$，证明 $g(x)$ 是连续函数

证明 可去间断点说明极限存在，$g(x_0)=\lim\limits_{y\to x_0}f(y)$，即对 $\forall\epsilon,\exists\delta,y\in U^o(x_0,\delta)$ 时：

$$g(x_0)-\epsilon<f(y)<g(x_0)+\epsilon$$

根据 $g(x)=\lim\limits_{y\to x}f(y)$ 和保不等式性得到

$$g(x_0)-\epsilon\le g(x)\le g(x_0)+\epsilon$$

因此 $g(x)$ 在 x_0 连续，由 x_0 任意性可知结论成立。

练习 3.14 第一类间断点的经典题目 $f(x)$ 在 (a,b) 至多只有第一类间断点，且对 $\forall x,y\in(a,b)$ 有 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\le\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 连续

证明 $\forall x_0\in(a,b),\forall h$ 满足 $x_0\pm h\in(a,b)$ 时，根据条件可知：

$$f(x_0)\le\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2}\quad f(x_0+\frac{h}{2})\le\frac{f(x_0)+f(x_0+h)}{2}$$

前者取 $h\to0^+$，后者分别取 $h\to0^+,h\to0^-$ 则

$$\begin{cases}f(x_0)\le\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\\ f(x_0+0)\le\dfrac{f(x_0)+f(x_0+0)}{2}\\ f(x_0-0)\le\dfrac{f(x_0)+f(x_0-0)}{2}\end{cases}$$

综合得到 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$，因此在任意点连续。

3.3.3 介值性定理

定理 3.4 (零点存在定理)

$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数，$f(a)f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$

♡

证明 (1) 使用闭区间套定理进行证明：取 $a_1=a,b_1=b,c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，根据 $f(c_1)$ 正负性选取 a_2,b_2，以此类推，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$，$f(a_n)f(b_n)<0$，根据闭区间套 $\exists\xi$ 使得 $f^2(\xi)\le0$，因此得出 $f(\xi)=0$

(2) 使用有限覆盖定理证明：根据连续函数局部保号性，$\forall x\in[a,b],\exists\delta_x$ 使得 $f(x)$ 在 $(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap[a,b]$ 中保号，取遍 $[a,b]$ 显然是一族开覆盖，根据有限覆盖定理可找到有限覆盖，不妨设这有限覆盖相互有重叠，则全部等号，这与 $f(a)f(b)<0$ 矛盾。

定理 3.5 (介值性定理)

$f(x)$ 是 $[a,b]$ 中的连续函数，$a\le x_1<x_2\le b$，$f(x_1)\ne f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可取遍 $f(x_1),f(x_2)$ 间任意值。

♡

练习 3.15 构造辅助函数 (1)$f(x),g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且在 $[0,1]$ 有相同最大值，证明 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=g(\xi)$

(2) 重点：$f(x)$ 是 $[0,2a]$ 连续函数，且 $f(0)=f(2a)$，证明 $\exists\xi\in[0,a]$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$

(3) 重点：$f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续函数，$f(0)=f(1)=0$，证明 $\forall n\in\mathbb{N}^+,\exists\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi+\dfrac{1}{n})=f(\xi)$

(4) 重点：$f(x)$ 是 $[0,1]$ 上非负连续函数，$f(0)=f(1)=0$，证明：对 $\forall a\in(0,1),\exists\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$

证明 (1) 问题在于最大值取值点不一定一样：若最大值对应 $f(x_1),g(x_2)$，若 $x_1=x_2$，则显然成立。若 $x_1\ne x_2$，则取 $F(x)=f(x)-g(x)$，$F(x_1)\ge0,F(x_2)\le0$，从而由零点存在定理成立。

(2) 取 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，$F(0)=f(0)-f(a),F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$，因此 $F(0)=-F(a)$，显然成立。

(3) 取 $F(x)=f(x+\dfrac{1}{n})-f(x)$，$F(0)=f(\dfrac{1}{n})-f(0),F(\dfrac{1}{n})=f(\dfrac{2}{n})-f(\dfrac{1}{n}),\cdots,F(\dfrac{n-1}{n})=f(1)-f(\dfrac{n-1}{n})$，得到 $F(0)+F(\dfrac{1}{n})+\cdots+F(\dfrac{n-1}{n})=f(1)-f(0)=0$，要么这些全部为零，要么有正有负，根据定理可知。

(4) 取 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，$F(0)=f(0)-f(a)=-f(a),F(1-a)=f(1-a)-f(1)=f(1-a)$，由于 f 非负，因此 $F(0)F(1-a)\le0$。

定理 3.6 (连续函数平均值定理)
$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$，证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]$$

证明 不妨设 $f(x_1),\cdots,f(x_n)$ 中最大值为 $f(x_n)$，最小值为 $f(x_1)$，则

$$f(x_1)\le\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]\le f(x_n)$$

若 $f(x_1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ 或 $f(x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$，则取 $\xi=x_1,x_n$。否则由连续函数介值性定理可证。

3.3.4 介值性定理的无连续推广

有时没有连续的条件却能推出介值性定理的结论，常见的条件如单调。

练习 3.16 单调介值定理 核心：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单增，$f(0)>0,f(1)<1$，$k\in\mathbb{N}^+$，证明 $\exists x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=x_0^k$

证明 取 $F(x)=f(x)-x^k$，显然 $F(0)=f(0)>0,F(1)=f(1)-1<0$，不停地二分取闭区间套，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$，$F(a_n)<0,F(b_n)>0\Rightarrow f(a_n)>a_n^k,f(b_n)<b_n^k$，由于 $f(x)$ 单增，$a_n^k<f(a_n)\le f(x_0)\le f(b_n)<b_n^k$，因此取极限可知 $x_0^k\le f(x_0)\le x_0^k$ 得证。

笔记 单调介值性定理不能将极限取进函数，但是用了两侧夹逼的方式。

练习 3.17 证明：闭区间连续函数一定有界

证明 根据局部有界性以及有限开覆盖可证。

3.4 连续性的应用

练习 3.18 几道经典题目 (1)$f(x)$ 在 $x=0$ 连续，$f(2x)=f(x)$，证明 $f(x)$ 是常值函数

(2)$f(x)$ 在 $x=0,1$ 连续，$f(x^2)=f(x)$，证明 $f(x)$ 是常值函数

(3)$f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且在每个有理点有 $f(x)=g(x)$，证明 $f(x)$ 恒等于 $g(x)$

(4) 容易被吓到：$f(x)\in C[a,b]$，且对 $\forall x\in[a,b]$ 都有 $y\in[a,b]$ 使得 $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 存在零点

证明 (1)$f(x)=f(\frac{x}{2})=\cdots=f(\frac{x}{2^n})=f(0)$，因此为常值

(2)x 为正直接 $f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$，$x$ 为负平方一下转换为正，$x=0$ 根据连续性可知等于附近，因此整体常数

(3) 根据有理点稠密性 + 连续性

(4) 假设无零点，根据闭区间连续函数有最小值，这与 $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$ 矛盾

练习 3.19 几道经典最值问题 (1) 重点：设 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$，这里 A 可以有限，也可以为 $\pm\infty$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上有最大或最小值

(2) 重点：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，这里 A 可以有限，也可以为 $\pm\infty$，证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有最大或最小值

(3) 重点：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，这里 A 为有限数，证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 存在最大值或最小值

证明 (1) 对 A 进行分类讨论：

(a) 先考虑 A 为有限值。如果 $f(x)\equiv A$，则显然。若 $\exists x_0, f(x_0)>A$，则 $\exists\delta,\forall x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$ 满足 $f(x)<f(x_0)$，由于 $f(x)$ 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上连续，因此 $\exists\xi$ 使得 $f(\xi)$ 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 最大，而 $\forall x\in(a,a+\delta]\cup[b-\delta,b)$，自然也有 $f(\xi)\geq f(x_0)\geq f(x)$，因此 $f(\xi)$ 在 (a,b) 最大。若 $f(x_0)<A$ 也同理有最小值。

(b) 若 $A=+\infty$，则对 $\forall x_0\in(a,b)$，$f(x_0)$ 为有限数，$\exists\delta,\forall x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$ 有 $f(x)>f(x_0)$，由于 $f(x)$ 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 连续，因此有最小值，且最小值比 $f(x_0)$ 还小，因此在 (a,b) 上取最小值。

(2) 和 (1) 同理，只是把 $\exists\delta$ 换成 $\exists N$

(3) 若 $f(x)\equiv A$，则显然。若 $\exists x_0, f(x_0)>A$，则 $\exists M,\forall x>M$ 有 $f(x_0)\geq f(x)$，由于在 $[a,M]$ 连续，有最大值 $f(\xi)$，且 $\forall x>M, f(\xi)>f(x_0)>f(x)$，因此有最大值。最小值同理

3.5 一致连续

3.5.1 一致连续的概念

定义 3.9 (一致连续)

I 是任意区间 (任意开闭，有界无界)，$f:I\to\mathbb{R}$，$\forall\epsilon,\exists\delta$ 对 $\forall x_1,x_2\in I$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$，则称 f 在 I 一致连续 ♣

定理 3.7 (常用充要条件)

$f(x)$ 在区间 I 上有定义，则 $f(x)$ 在 I 一致连续当且仅当任意数列 x_n', x_n''，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'-x_n''=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]=0$ ♡

证明 (1) 左推右：显然

(2) 右推左：反设不一致连续，$\exists\epsilon_0,\forall\delta,\exists x',x''$，虽然 $|x'-x''|<\delta$，但是 $|f(x')-f(x'')|\geq\epsilon_0$。取 $\delta=1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$，$\exists x_n',x_n''$，$|x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n},|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\epsilon_0$，这与条件矛盾。

笔记 证明不一致连续绝大多数情况都用上述定理。

练习 3.20 连续但不一致连续的例子：(1)$x^2,(0,+\infty)$ (2)$\sin x^2,[0,+\infty)$ (3)$\dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x},(0,1)$ (4)$\dfrac{1}{x},x\in(0,1)$

证明 (1)$x_n=\sqrt{n},y_n=\sqrt{n+1},\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0,\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=-1$

(2) 取 $x_n=\sqrt{2n\pi},y_n=\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$

(3) 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi},y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

(4) 取 $x_n=\dfrac{1}{n},y_n=\dfrac{1}{n+1}$

练习 3.21 一致连续的证明 (1) 证明 $f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续

(2) 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续

(3) 证明 $f(x)=\sin x$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续

证明 (1) 方法 1：不妨设 $x_1>x_2$，则

$$\begin{aligned}
|f(x_1)-f(x_2)|&=|\cos\sqrt{x_1}-\cos\sqrt{x_2}|=2\left|\sin\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\right|\\
&\leq 2\left|\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\right|\leq|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\\
&=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{(x_1-x_2)+x_2}+\sqrt{x_2}}\leq\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1-x_2}}=\sqrt{x_1-x_2}
\end{aligned}$$

当 $\delta=\epsilon^2$ 时，$|x_1-x_2|<\delta$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$，因此一致连续

方法 2：$(\cos\sqrt{x})' = \sin\sqrt{x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $[1,+\infty)$ 有界，而 $[0,1]$ 用 Cantor 定理，因此 Lip 连续推出一致连续

(2) 分段 +Lip 连续

3.5.2 Cantor 定理及其推广

定理 3.8 (Cantor 定理)

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则其在 $[a,b]$ 上一致连续。

证明 反设在 $[a,b]$ 不一致连续，根据一致连续充要条件，$\exists\epsilon_0,\exists x_n,y_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但 $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon_0$。由于 x_n 有界，根据致密性定理可知 x_n 有收敛子列，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$，从而 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}[(y_{n_k}-x_{n_k})+x_{n_k}]=x_0$，因此推出 $\epsilon_0\leq\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|=|f(x_0)-f(x_0)|=0$(这一步用了连续条件)，矛盾。

笔记 Cantor 定理的其他证明方式：

- 有限覆盖定理：$\forall\epsilon,\exists\delta_{x_0},\forall x\in B(x_0,\delta_{x_0})$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$，取遍闭区间，有有限覆盖，上述 ϵ 不变，当取 $\delta=\min\{\delta_x\}$ 时，即有 $\forall a,b$ 满足 $|a-b|<\delta$ 都有 $|f(a)-f(b)|<\epsilon$
- 闭区间套：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 不一致连续，则一定在 $[a,\dfrac{a+b}{2}],[\dfrac{a+b}{2},b]$ 中有一个区间中不一致连续，不断取区间套，最后套住 ξ，由于 f 在 ξ 连续，$\forall\epsilon,\exists\delta,\forall x,|x-\xi|<\delta$ 有 $|f(\xi)-f(x)|<\dfrac{\epsilon}{2}$，同理取 y，得到 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$，而存在 a_n,b_n 满足 $[a_n,b_n]\subseteq[\xi-\delta,\xi+\delta]$，这与不一致连续矛盾
- 单调有界定理：和闭区间套一种构造方式

定理 3.9 (开区间一致连续充要条件)

$f(x)$ 在 (a,b) 连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在 (有限)

证明 (1) 左推右：根据 $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续，$\forall\epsilon,\exists\delta,\forall x',x'',|x'-x''|<\delta$，有 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$。取 $x',x''\in(a,a+\delta)$，显然 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$，即右极限的 Cauchy 准则，另一侧同理。

(2) 右推左：补充定义两个端点，根据 Cantor 定理可知。

练习 3.22 开区间一致连续应用 (1)(东北师大) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界

证明 (1) 由于一致连续，因此 $f(x)$ 在 a,b 的分别存在右、左极限，补充定义为 $F(x)$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续有界，且 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在 (a,b) 相等，因此 $f(x)$ 在 (a,b) 有界。

定理 3.10 (无穷区间一致连续)

$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(有限)，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续

证明 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，根据 Cauchy 收敛准则，$\forall\epsilon,\exists M,\forall x',x''>M$ 有 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$。根据 Cantor 定理，$f(x)$ 在 $[a,M+1]$ 一致连续，对 $\forall\epsilon,\exists\delta\in(0,1)$，只要 $|x'-x''|<\delta$ 时，两点要么同时落在 $[a,M+1]$，要么同时落在 $[M,+\infty)$，根据上面的命题可知一致连续。

笔记 $[a,+\infty)$ 一致连续并不代表无穷处 $f(x)$ 极限一定存在，只是一个充分条件，例如 $f(x)=x$ 极限不存在，但一致连续。

练习 3.23 开区间一致连续 证明：(1)$x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 一致连续 (2)$\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不一致连续

证明 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$，因此一致连续

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故不一致连续。

3.5.3 Lip 连续与一致连续

定理 3.11 (Lip 连续与一致连续)

$f(x)$ 在区间 I 上满足 Lip 条件，则 $f(x)$ 在 I 上一致连续

♡

证明 Lip 条件即 $\forall x', x''$ 有 $|f(x') - f(x'')| \le L|x' - x''|$，取 $\forall \epsilon, \delta = \dfrac{\epsilon}{L}$ 即可。

推论 3.1 (导数有界一定一致连续)

若 $f'(x)$ 在 I 上有界，则根据 Lagrange 中值定理可知 Lip 连续，从而一致连续

♡

推论 3.2 (导数在无穷处趋于无穷则不一致连续)

若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \infty$，则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 不一致连续

♡

证明 根据 $\lim\limits_{x \to +\infty} |f'(x)| = \infty$ 可知 $|x' - x''|$ 控制不住导数的增长。

笔记 注意上述两个推论都是充分条件。前者例如 $\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 一致连续，其导数 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 却不有界。后者例如 x^2 在无穷处导数趋于无穷，则一定不一致连续。

练习 3.24 基础练习 判断一致连续性：(1)$\sin x, x \in \mathbb{R}$ (2)$x^k, x \in (1, +\infty)$ (3)$\cos \sqrt{x}, x \in (1, +\infty)$ (4)$x \ln x, x \in (0, +\infty)$

解 (1) 一致连续，因为导数有界

(2) 若 $k \le 0$，则 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在，补充定义 $x = 1$，根据 Cantor 定理的无穷推广可知一致连续。若 $0 < k \le 1$，则导数有界，因此一致连续。若 $k > 1$，因为导数在无穷处趋于无穷，则不一致连续

(3) 导数有界，一致连续

(4) 导数在无穷处趋于无穷，则不一致连续。

3.5.4 区间合并问题

定理 3.12 (一致连续区间合并定理)

设区间 I_1 右端点为 $c \in I_1$(闭)，I_2 左端点为 $c \in I_2$(闭)，$f(x)$ 在 I_1, I_2 均一致连续，则其在 $I_1 \cup I_2$ 也一致连续

♡

证明 由于 $f(x)$ 在 I_1, I_2，对 $\forall \epsilon$，存在公共 δ_1，当 x', x'' 同时落于 I_1 或 I_2 时，若 $|x' - x''| < \delta_1$，则 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$。若 x', x'' 分别落于 I_1, I_2 中，则 $\exists \delta_2, |x' - c| < \delta_2$ 时，$|f(x') - f(c)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ 且 $|x'' - c| < \delta_2$ 时 $|f(x'') - f(c)| < \dfrac{\epsilon}{2}$，取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，得出 $\forall x', x'' \in I_1 \cup I_2$，当 $|x' - x''| < \delta$ 时 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$

笔记 如果边界点为开区间点，则可以补上定义。

练习 3.25 区间合并练习 (1) 考虑 $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 上是否一致连续

证明 (1) 由于 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$，$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$，$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ 显然存在，因此 $f(x)$ 在 $(-1, 0), (0, 1)$ 显然一致连续。但是由于 0 处左右极限不相同，取 x_n 单减趋于 0，y_n 单增趋于 0，则 $|x_n - y_n| \to 0$，而 $|f(x_n) - f(y_n)| \to 2$，因此不一致连续。

3.5.5 四则运算、复合的一致连续性

定理 3.13 (四则运算的一致连续性)

设 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上一致连续，则

- 数乘、加减：$\forall k \in \mathbb{R}$，$kf(x), f(x) \pm g(x)$ 在 I 一致连续
- 乘法：I 为有限区间时，$f(x)g(x)$ 在 I 一致连续。I 为无穷区间时，$f(x)g(x)$ 在 I 不一定一致连续
- 除法：$f(x) \neq 0$，$\dfrac{1}{f(x)}, \dfrac{g(x)}{f(x)}$ 不一定一致连续

♡

证明 (1) 直接三角不等式放缩

(2)$|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')| \leq |f(x')g'(x)-f(x')g(x'')|+|f(x')g(x'')-f(x'')g(x'')| \leq |f(x')||g(x')-g(x'')|+|g(x'')||f(x')-f(x'')| < 2M\epsilon$，因此若 M 有限显然成立，M 不有限时不一定。

例题 3.1 四则运算反例 (1) 乘法：x 在 $(1,+\infty)$ 一致连续，但是 x^2 在 $(1,+\infty)$ 不一致连续 (2) 倒数：x 在 $(0,1)$ 一致连续，但是 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不一致连续

练习 3.26 四则运算练习 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$，证明:$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续

证明 由于 $f(x)-g(x)$ 在无穷远处极限存在，其一致连续。$g(x)$ 一致连续，根据四则运算可知 $f(x)=[f(x)-g(x)]+g(x)$ 一致连续。

笔记 上述练习本身也是一个重要的结论。

定理 3.14 (复合的一致连续性)

$f(x)$ 在 I_1 一致连续，$g(x)$ 在 I_2 一致连续，$f(x)$ 值域在 I_2 中，则 $g(f(x))$ 在 I_1 一致连续

♡

证明 根据定义套即可。外层取 ϵ, δ，内层取 δ, δ'。

练习 3.27 复合一致连续性 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 满足 Lip 条件，$\alpha \in (0,1)$，证明：$f(x^\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续

证明 $\alpha \in (0,1)$ 时，x^α 在 $[0,+\infty)$ 一致连续，而 f 满足 Lip 条件也一致连续，根据复合一致连续即可。

3.6 一致连续的经典问题

练习 3.28 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，证明 $\exists a, b > 0$ 使得 $|f(x)| \leq a|x|+b$

证明 由于 $f(x)$ 一致连续，对 $\epsilon = 1, \exists\delta$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时 $|f(x')-f(x'')| \leq 1$，不妨设

$$|f(x)| \leq M, x \in [-\delta, \delta]$$

对 $\forall x > \delta, \exists n_x$ 使得 $x - n_x\delta = x_0 \in [0,\delta)$，此时 $n_x = \dfrac{x-x_0}{\delta} \leq \dfrac{|x|}{\delta}$，因此

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n-1}|f(x-k\delta)-f(x-(k+1)\delta)| + |f(x-n_x\delta)| \leq n_x + M \leq \frac{|x|}{\delta} + M$$

同理 $\forall x < -\delta$ 也有 $|f(x)| < \dfrac{|x|}{\delta} + M$，综上，取 $a = \dfrac{1}{\delta}, b = M$ 即可。

第 4 章 一元微分学

4.1 导数与微分

4.1.1 导数概念与可导性

定义 4.1 (导数、左右导数)

导数定义为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，左右导数定义为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ♣

笔记 $f(x)$ 在 x_0 处可导当且仅当其在 x_0 处左右导数存在且相等。

练习 4.1 用定义求导函数 设 $g(0)=g'(0)=0$，$f(x)$ 定义如下，求 $f'(0)$

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

解 根据定义可知 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(\Delta x)\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x-0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}=0$

练习 4.2 可导概念推广 (1) 重点：$f(x)$ 在 $x=0$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$，证明 $f'(0)$ 存在且 $f'(0)=A$

(2) 重点：若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$，并不能推出 x_0 处导数存在，例如 $|x|$。但反命题成立

证明 (1) 根据极限存在可知 $\forall\epsilon,\exists\delta,|x|<\delta$ 时 $A-\dfrac{\epsilon}{2}<\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}<A+\dfrac{\epsilon}{2}$，同理可以得到：

$$A-\frac{\epsilon}{2}<\frac{f(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})}{x/2^k}<A+\frac{\epsilon}{2}\Rightarrow\frac{1}{2^k}(A-\frac{\epsilon}{2})<\frac{f(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})}{x}<\frac{1}{2^k}(A+\frac{\epsilon}{2})$$

取 $x_k=\dfrac{x}{2^k}$，将 $k=1,2,\cdots,n$ 全部相加得到 $(1-\dfrac{1}{2^n})(A-\dfrac{\epsilon}{2})<\dfrac{f(x)-f(x_n)}{x}<(1-\dfrac{1}{2^n})(A+\dfrac{\epsilon}{2})$，令 $n\to\infty$ 得到 $A-\dfrac{\epsilon}{2}<\dfrac{f(x)-f(0)}{x}<A+\dfrac{\epsilon}{2}$，因此 $f'(0)$ 存在且等于 A。

练习 4.3Dirichlet 函数的可微性 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数，判断

(1)$f(x)=x^2D(x)$

(2)$f(x)=xD(x)$ 的可导性：

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\text{为无理数}\\ 1, & x\text{为有理数}\end{cases}$$

解 (1) 先考察连续性：根据有理、无理数的稠密性，只有 $x=0$ 处连续。考察可导性时根据定义不管沿着无理数或有理数逼近，极限都为 0，因此可导

(2) 在 $x=0$ 连续，但不可导，因为沿着无理数逼近和沿着有理数逼近极限不一样。

笔记 不存在仅在一点可导且二阶可导的函数，原因在于二阶可导要求导数在一个小区间内存在。

练习 4.4Riemann 函数的不可微性 重点：证明 Riemann 函数 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 处处不可微。

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(\text{既约真分数})\\ 0, & x\text{为无理数或 }0,1\end{cases}$$

证明 (1) 有理点：甚至不连续，因此一定不可微 (具体见函数连续一节)

(2) 无理数：设 $x_0 = 0.a_1a_2\cdots$ 为无理数，若无理序列逼近，$\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=0$ 极限存在。有理序列逼近，取 $y_n = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$，$R(y_n)=\dfrac{1}{q}\geq\dfrac{1}{10^n}$，$|y_n-x_0|\leq\dfrac{1}{10^n}$，从而 $|\dfrac{R(y_n)-R(x_0)}{y_n-x_0}|\geq 1$，这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R(y_n)}{y_n-x_0}\neq 0$

笔记 Riemann 函数性质总结：

- 在 $(0,1)$ 每个点极限为 0(见函数极限)
- 在无理点连续，有理点间断
- 在 $[0,1]$ 黎曼可积 (因为几乎处处连续)
- 在 $[0,1]$ 处处不可微 (见上面例子)

练习 4.5 利用导数概念 $f(x)$ 对 $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，若 $f'(0)=1$，证明：$\forall x\in\mathbb{R}$ 有 $f'(x)=f(x)$

证明 $f(x)=f(x)\cdot f(0)$，因此 $f(x)[1-f(0)]=0$，要么 $f(0)=1$，要么 $f(x)\equiv 0$，后者显然和 $f'(0)=1$ 矛盾，因此 $f(0)=1$。因此

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)\cdot f'(0)=f(x)$$

4.1.2 微分的概念

定义 4.2 (可微)

$f(x)$ 在 x_0 邻域 $U(x_0)$ 中有定义，且增量可写为 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$，此时称 $f(x)$ 在 x_0 可微，记

$$\mathrm{d}x:=\Delta x,\quad \mathrm{d}y:=A\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x$$

♣

练习 4.6 可导性与可微性 证明：$f(x)$ 在 x_0 可导当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 邻域可写为 $f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0)$，其中 $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续

证明 (1) 右推左：根据 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$ 即可

(2) 左推右：构造 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0\\ f(x_0)\end{cases}$

4.1.3 常用的导数公式

三角	$(\tan x)'=\sec^2 x$	$(\cot x)'=-\csc^2 x$
	$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
	$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
反三角	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arccot}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
对数三角	$(\ln\lvert\cos x\rvert)'=-\tan x$	$(\ln\lvert\sin x\rvert)'=\cot x$
	$(\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert)'=\sec x$	$(\ln\lvert\csc x-\cot x\rvert)'=\csc x$
对数根式	$(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}))'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$(\ln(x-\sqrt{x^2+a^2}))'=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$
	$(\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}))'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$(\ln(x-\sqrt{x^2-a^2}))'=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

4.1.4 隐函数、反函数求导

定理 4.1 (隐函数求导)

等式两侧同时对同一个自变量求导。

定理 4.2 (反函数求导)

$y=y(x)$ 的反函数为 $x=x(y(x))$，则

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}$$

证明 若 $x=g(y)$，对 x 求导得到 $1=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，因此得到 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{g'(y)}$

笔记 一般都不是直接用结论，而是取 $x=g(y)$ 后两侧对 x 求导进行计算的。

练习 4.7 具体反函数求导练习 求 (1)$\arcsin x$(2)$\arccos x$(3)$\arctan x$ 的导数

解 (1)$y=\arcsin x$，因此 $x=\sin y$，两侧求导 $1=\cos y\cdot y'$，因此 $y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，这里 $\cos y$ 是通过画直角三角形，三条边分别为 $x,\sqrt{1-x^2},1$ 得到的。

练习 4.8 反函数高阶求导 $y=f(x)$ 有三阶导数，$y'=f'(x)\neq 0$，若 $f(x)$ 有反函数 $x=f^{-1}(y)$，证明：

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{y'},\quad (f^{-1})''(y)=-\frac{y''}{(y')^3},\quad (f^{-1})'''(y)=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$$

证明 建议采用隐函数求导。根据 $y=f(x)$，两侧对 y 求导得到 $1=f'(x)x'$，因此得到 $x'=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{y'}$。$0=f''(x)(x')^2+f'(x)x''$，因此推出 $x''=-\frac{y''}{(y')^3}$

笔记 这种题目一定要搞清楚导数的一撇代表的意思。例如 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，而 $x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，两者的求导对象不同。

定理 4.3 (指数求导)

对于 $y=u(x)^{v(x)}$，取对数得到 $\ln y=v(x)\ln u(x)$，两侧求导可以得到

$$\frac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\Rightarrow y'=u(x)^{v(x)}[v(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}]$$

练习 4.9 指数求导练习 求导：(1)$x^{\frac{1}{x}}$(2)x^x(3)x^{x^x}

解 (1)$\ln f(x)=\frac{\ln x}{x}$，因此 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，得出 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$

练习 4.10 多项式连乘求导 $p(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_s)^{k_s}$，$k_1+\cdots+k_s=n$，证明：

(1)$x\neq x_i$ 时，$p'(x)=p(x)\sum_{i=1}^{s}\frac{k_i}{x-x_i}$ (2)$\forall x\in\mathbb{R}$，$[p'(x)]^2\geq p(x)p''(x)$

解 注意多项式连乘形式上两侧取对数后求导可以得到正确的结果，但是如果多项式为负，则取对数没有意义！因此一般不能两侧求导

(1)$p'(x)=p(x)(\frac{k_1}{x-x_1}+\cdots+\frac{k_2}{x-x_s})=p(x)\sum_{i=1}^{s}\frac{k_i}{x-x_i}$

(2) 根据 $p''(x)$ 表达式，两侧同乘 $p(x)$ 可得

4.1.5 高阶导数

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad [\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad [\ln(1-x)]^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

$$(\frac{1}{x})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \qquad (\frac{1}{1+x})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \qquad (\frac{1}{1-x})^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

✍ **练习 4.11 三角函数与高阶导数** 求 n 阶导数：

(1)$y = \sin^6 x + \cos^6 x$

(2)$y = \sin ax \cos bx$

解 (1) 这种形式在高阶导数、不定积分等中很常见！先用立方和公式：

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$
$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

因此 $y^{(n)} = \frac{3\cdot 4^n}{8}\cos(4x + \frac{n\pi}{2})$

(2) 积化和差即可

✍ **练习 4.12 反三角函数高阶导数** (1) 重点：$f(x) = \arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$

(2) 重点：$g(x) = \arcsin x$，求 $g^{(n)}(0)$

证明 (1)$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$，根据 Taylor 展开可知

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^m x^{2m} + \cdots$$

因此 $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^m}{2m+1}x^{2m+1} + \cdots$，根据系数可知 $f^{(2m)}(x) = 0, f^{(2m+1)} = (-1)^m(2m)!$

(2)$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，根据 Taylor 展开得到 ($(1-x)^\alpha$ 的展开式)：

$$g'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-m+1)}{m!}(-x^2)^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}x^{2m}$$

得到 $g(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!(2m+1)}x^{2m+1}$，因此得到 $g^{(2m)}(0) = 0, g^{(2m+1)} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}(2m+1)!$

定理 4.4 (Leibniz 公式)

$f(x), g(x)$ 为 n 阶可导函数，则 $f(x)g(x)$ 也 n 阶可导，且 $[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$ ♡

✍ **练习 4.13Leibniz 公式练习** 求 n 阶导数：(1)$y = \frac{2x}{1-x^2}$ (2)$y = x^n\ln x$ (3)$y = e^{ax}\sin x$

4.1.6 使用导数证明恒等式

✍ **练习 4.14 使用导数构造** 求 (1)$I_1 = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

(2)$I_2 = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$

(3) 推论：$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

解 (1) 由于 $x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{x-x^{n+1}}{1-x}$，两边求导 $I_1=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$

(2) 根据 (1) 可知 $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$，同时乘 x 再求导即可得到结果 $\dfrac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}$

(3) 为 (2) 的推论

4.2 微分中值定理

4.2.1 三大中值定理

定理 4.5 (费马定理)

若 x_0 为 $f(x)$ 极值点，且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$

证明 不妨设 x_0 为极小值点，先看右导数 $f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$，同理看左导数 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$，由于导数存在，则左右导数相等，故导数 $f'(x_0)$ 只能为 0

定理 4.6 (Rolle 中值定理)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得：

$$f'(\xi)=0$$

证明 设 M,m 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 最大、最小值。若 $M=m$，则 $f(x)=c$。若 $m<M$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 至少有个最值点 (最大 or 最小)，则内部的最值点是极值点，因此由费马定理可知结论成立。

笔记 广义的 Rolle 中值定理：开区间或无穷区间 (a,b)，若 $f(x)$ 在 $x\to a^+,b^-$ 存在且相等，则 Rolle 中值定理结论成立。

推论 4.1 (研究导函数零点情况)

$f(x)$ 在区间 I 上 k 阶可导，若 $f(x)$ 在 I 上有 $n+1$ 个互异的实根，则 $f^{(k)}(x)$ 有 $n-k$ 个互异实根。

练习 4.15 广义 Rolle 的应用 $f(x)$ 可微，且有 $0\leq f(x)\leq \ln(\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}})$，证明：$\exists\xi\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{2}{2\xi+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$

证明 取 $F(x)=f(x)-\ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$，根据 $F(0)=F(+\infty)=0$ 和广义 Rolle 可知结论成立。

定理 4.7 (Lagrange 中值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明 通过积分法构造 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，则 $F(b)-F(a)=[f(b)-f(a)]-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0$，因此 $F(b)=F(a)$，根据 Rolle 中值定理可知结论成立。

练习 4.16Lagrange 中值定理基本应用 (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$f(b)\neq f(a)$，证明：若 $f(x)$ 非线性函数，则 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(\eta)$

证明 (1) 取 $F(x)=xf(x)$ 即可，用 Lagrange 中值定理

(2) 只说明左侧：要证明 $f'(\xi)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，反设不成立，即 $\forall x$ 有 $f'(x)\geq\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，可构造 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，且 $F'(x)\geq 0$，而 $F(a)=F(b)=0$ 这说明 $F'(x)=c$，这与 $f(x)$ 非线性矛盾。

定理 4.8 (Cauchy 中值定理)

f,g 满足 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$f'(x),g'(x)$ 不同时为 0，$g(a)\neq g(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

♡

证明 考虑 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=f'(\xi)$，采用积分法构造辅助函数，$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$，$F(b)-F(a)=[f(b)-f(a)]-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(a)]=0$，因此 $F(a)=F(b)$，根据 Rolle 中值定理可知结论成立。

笔记 一般而言条件都是 $g'(x)\neq 0$，$g'(x)$ 与 $f'(x)$ 不同时为零相对更广泛一点，避开了特殊的情况。

练习 4.17Cauchy 中值定理基本应用 (1) 重点：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$ab>0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

(2) 实例：$0<a<b<\infty$，证明 $\exists\theta\in(a,b)$ 使得 $ae^b-be^a=(1-\theta)e^\theta(a-b)$

证明 (1) 由于左侧有交叉项，考虑分子分母同除以 ab，凑 Cauchy 中值定理形式即 $\dfrac{(\frac{f(x)}{x})'}{(\frac{1}{x})'}$ 在 ξ 处取值，因此即证明：

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{(\frac{f(x)}{x})'}{(\frac{1}{x})'}$$

根据 Cauchy 中值定理即可证明。

(2) 等价于 $\dfrac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=e^\theta-\theta e^\theta$

4.2.2 中值问题：构造辅助函数

定理 4.9 (直接积分法)

要构造 $f'(\xi)=g(\xi)$，则构造 $F(x)=f(x)-\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 即可

♡

定理 4.10 (常用中值定理辅助函数)

看到 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)$，需要构造 $f(x)e^{\int g(x)dx}$，因为 $[f(x)e^{\int g(x)dx}]'=[f'(x)+f(x)g(x)]e^{\int g(x)dx}$，具体有下面这些技巧：

- $mf(\xi)+nf'(\xi)$：$f(x)e^{\frac{m}{n}x}$
- $mf(\xi)+n\xi f'(\xi)$：$x^mf^n(x)$(注意不是 $x^{\frac{m}{n}}f(x)$！)
- $mf(\xi)-n\xi f'(\xi)$：$\dfrac{f^n(x)}{x^m}$ 或者 $\dfrac{x^m}{f^n(x)}$，但此时一般要配上 $g(x)=\dfrac{1}{x^m}$，用 Cauchy 中值定理消去分母

$$\left[\frac{f^n(x)}{x^m}\right]'=\frac{f^{n-1}(x)}{x^{m+1}}[nxf'(x)-mf(x)],\quad\left[\frac{x^m}{f^n(x)}\right]'=\frac{x^{m-1}}{f^{n+1}(x)}[mf(x)-nxf'(x)]$$

- $nf'(\xi)f(1-\xi)-mf(\xi)f'(1-\xi)$：$f^n(x)f^m(1-x)$

- $mf'(x)g(x)+nf(x)g'(x)$：$f^m(x)g^n(x)$
- $mf'(x)g(x)-nf(x)g'(x)$：$\dfrac{f^m(x)}{g^n(x)}$

$$\left[\frac{f^m(x)}{g^n(x)}\right]'=\frac{f^{m-1}(x)}{g^{n+1}(x)}[mf'(x)g(x)-nf(x)g'(x)]$$

- $f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)$：$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$

笔记 主要看高阶导数项的系数是啥，是常数的话肯定是 $e^{ax}f(x)$，是 ξ 的话是 $x^af(x)$，是 $-\xi$ 的话是 $\dfrac{f(x)}{x^a}$，是 $(1-\xi)$ 的话是 $(1-x)^af(x)$

练习 4.18 行列式求导 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 下面等式成立。若 $h(x)=1$ 则为 Cauchy 中值定理，若 $h(x)=1,g(x)=x$ 则为 Lagrange 中值定理。

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0$$

证明 构造下面的 $F(x)$，注意到 $F(a)=F(b)=0$ 以及行列式求导即对一行求导即可。

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$$

练习 4.19 直接积分法 (1) 重点：$f(x)$ 在 $[1,2]$ 连续，$(1,2)$ 可微，证明 $\exists\xi\in(1,2)$ 使得 $f(2)-f(1)=\dfrac{1}{2}\xi^2f'(\xi)$

(2) 重点：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

证明 (1) 由于只有单项，只需要直接用积分法：所求等价于 $f'(\xi)=\dfrac{2}{\xi^2}[f(2)-f(1)]$，构造 $F(x)=f(x)+\dfrac{2}{x}[f(2)-f(1)]$，此时 $F(1)=F(2)=2f(2)-f(1)$，因此根据 Rolle 中值定理可知 $\exists\xi\in(1,2),F'(\xi)=0$

(2) 直接用积分法：$F(x)=(b^2-a^2)f(x)-x^2[f(b)-f(a)]$，根据 $F(b)=F(a)$ 以及 Rolle 中值定理可知。

练习 4.20 简单的辅助函数法 (1)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$f(a)<0,f(b)<0$，$\exists c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$，证明：$\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

(2) 重点：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 n 阶连续可微，在 (a,b) 上存在 $n+1$ 阶导数，$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b),k=0,1,\cdots,n$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$

(3) 重点：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$f(0)=f(1)=0,f(\frac{1}{2})=1$，证明：$\forall\lambda>0,\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

(4) 重点：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 可微，$f(0)=0$，对 $\forall x\in(0,1),f(x)\neq0$，证明：$\forall n,\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $n\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

证明 (1) 构造 $F(x)=e^xf(x)$，则 $F(a)<0,F(b)<0,F(c)>0$，根据连续函数零点存在定理可知有两个零点，再根据 Rolle 中值定理可知。

(2) 构造 $F(x)=[f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)]e^{-x}$，$F(a)=F(b)=0$，根据 $F'(\xi)=0$ 可以得到结论

(3) 考虑配为 $[f'(\xi)-1]-\lambda[f(\xi)-\xi]=0$，故构造 $F(x)=[f(x)-x]e^{-\lambda x}$，此时 $F(0)=0,F(\frac{1}{2})>0,F(1)<0$，在 $[\frac{1}{2},1]$ 中 $F(x)$ 有一个零点，根据 Rolle 可知。

(4) 即 $nf'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0$，因此构造 $F(x)=f^n(x)f(1-x)$

练习 4.21 进阶难度的辅助函数法 (1)(上交 2021)$f(x)$ 在 $[a,c]$ 可导，$f'_-(c)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,c)$ 使得 $f'(\xi)=2(f(\xi)-f(a))$

(2)$f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-\xi}$

证明 (1) 首先显然最终等式可写为 $[f(x)-f(a)]'-2(f(x)-f(a))=0$，因此构造 $F(x)=(f(x)-f(a))e^{-2x}$，$F'(x)=[f'(x)-2(f(x)-f(a))]e^{-2x}$，显然 $F(a)=0$，但另一侧信息不足。根据条件可知 $F'_-(c)=-2[f(c)-f(a)]e^{-2c}$，下面对 $F(c)$ 情况进行讨论。(a) 若 $F(c)=0$ 则显然成立 (b) 若 $F(c)\neq 0$，不妨设 $F(c)>0$，根据 $F(c)=-2F'_-(c)$(根据表达式) 可看出 $F'_-(c)<0$，根据 Lagrange 中值定理：

$$0<F(c)=F(c)-F(a)=F'(\eta)(c-a)\Rightarrow F'(\eta)>0$$

根据导数介值性定理可知结论成立。

(2) 等价于 $(1-\xi)f''(\xi)-3f'(\xi)=0$，因此构造 $F(x)=(1-x)^3f'(x)$，根据 $f(0)=f(1)=0$，根据 Rolle 可知 $\exists\eta$ 使得 $f'(\eta)=0$，因此 $F(\eta)=0$，再根据 $F(1)=0$ 可知 $\exists\xi$ 使得 $F'(\xi)=0$

4.2.3 带积分的微分中值问题

由于变限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的导数为 $f(x)$，该性质常常会应用于微分中值定理。

练习 4.22 基础问题 (1) 重点：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=f(1)$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$

(2)ZJU2021：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 连续，$g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 单减，证明 $f(x)$ 恒为 0

(3) 重点：$f(x)$ 是 $(0,1)$ 上连续函数，证明：$\exists c\in(0,1)$ 使得 $\int_0^c f(x)\mathrm{d}x=(1-c)f(c)$

证明 (1) 所证形式即 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$，因此 $F(x)=xf(x)$，根据积分第一中值定理可知

$$\int_0^1 xf(x)dx=\eta f(\eta)\cdot 1=F(\eta)=f(1)$$

而 $F(1)=f(1)$，因此根据 Rolle 中值定理可知。

(2)$F(x)=\frac{1}{2}(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)^2$，根据条件 $F'(x)$ 单减，$F'(0)=0$，根据 $F(0)=0$ 得出 $F(x)\leq 0$，但 $F(x)\geq 0$，因此 $F(x)$ 恒为 0，推出 $f(x)$ 恒为 0。

(3) 所求即 $\int_0^c f(x)\mathrm{d}x-(1-c)f(c)=0$，构造 $F(x)=(1-x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，显然 $F(0)=F(1)=0$，根据 Rolle 可知。

练习 4.23 进阶问题 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 可导，$(0,2)$ 上三阶可导，$f(0)=f'(0)=0$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，证明：$\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $f'''(\xi)=0$

证明 构造 $F(x)=\int_0^{2x}f(t)dt-8\int_0^x f(t)dt$，得到 $F(0)=F(1)=0$，故 $\exists\xi_1,F'(\xi_1)=0$，根据 $F'(x)=2f(2x)-8f(x)$，因此 $F'(0)=0$，得到 $\exists\xi_2$ 使得 $F''(\xi_2)=0$。再根据 $F''(x)=4f'(2x)-8f'(x)$，$F''(0)=0$，得到 $\exists\xi_3$ 使得 $F'''(\xi_3)=0$. 而 $F'''(x)=8f''(2x)-8f''(x)$，代入 ξ_3 得到 $f''(2\xi_3)=f''(\xi_3)$，因此 $\exists\xi$ 使得 $f'''(\xi)=0$

4.2.4 多个中值点的中值问题

练习 4.24 经典两个中值点的问题 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$f(0)=0,f(1)=1$，证明：

(1)$\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$

(2) 存在互异的 $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2)=1$

(3) 存在互异的 $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta_1)(f'(\eta_2)+1)=2$

证明 (1) 构造 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=-1,F(1)=1$，根据连续零点存在定理可得

(2) 对 (1) 中的 ξ，在 $[0,\xi],[\xi,1]$ 上用 Lagrange 中值定理，得到 η_1,η_2 满足

$$f'(\eta_1)=\frac{f(\xi)-0}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi},\quad f'(\eta_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

因此 $f'(\eta_1)f'(\eta_2)=1$

(3) 提示：先找 ξ 满足 $f(\xi)=2(1-\xi)$，再用两次 Lagrange 中值定理。

4.2.5 中值等式问题

中值等式问题本质很像多项式插值中 Cauchy 常数的构造方法，根据目标等式的形式，将某个常数换成 x，以此得出辅助函数在某些位置相等或等于 0。

练习 4.25 利用等式构造辅助函数 (1) 重点：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明对 $\forall x\in(a,b)$，都存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$

(2) 变形：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$a<c<b$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{1}{2}f''(\xi)(b-c)$$

证明 (1) 固定 x，记常数 $k=\dfrac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$，构造 $F(t)=f(t)-\dfrac{k}{2}(t-a)(t-b)$，满足 $F(x)=F(a)=F(b)=0$，$\exists\xi_1\in(a,x),\xi_2\in(x,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，根据 Rolle 定理可知 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 满足 $F''(\xi)=0$，因此 $f''(\xi)=k$，结论成立。

(2) 构造常数 $k=\dfrac{(c-a)[f(b)-f(a)]-(b-a)[f(c)-f(a)]}{\frac{1}{2}(b-c)(b-a)(c-a)}$，辅助函数将 c 用 x 代替

$$F(x)=(x-a)[f(b)-f(a)]-(b-a)[f(x)-f(a)]-\frac{k}{2}(b-x)(b-a)(x-a)$$

得到 $F(a)=F(b)=F(c)=0$，因此根据两次 Rolle 得到 $F''(\xi)=0$，从而得到结论。

练习 4.26 另外几道经典题 (1)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 三阶可导，证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$$

(2) 配合拉格朗日插值或拉格朗日余项的 Taylor 展开：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi)$$

(3) 需配合 Taylor 展开：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$$

证明 (3) 设 $k=\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{24}(b-a)^3}$，构造

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f\left(\frac{x+a}{2}\right)+\frac{1}{24}(x-a)^3k$$

$F(a)=F(b)=0$，根据 Rolle 得到 $\exists\eta\in(a,b)$ 使得 $F'(\eta)=0$，即

$$f(\eta)-f\left(\frac{a+\eta}{2}\right)-f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)\frac{\eta-a}{2}-\frac{k}{8}(\eta-a)^2=0$$

而根据 η 在 $\dfrac{a+\eta}{2}$ 的 Taylor 展开，$\exists\xi\in\left(\dfrac{a+\eta}{2},\eta\right)$

$$f(\eta)=f\left(\frac{a+\eta}{2}\right)+f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)\frac{\eta-a}{2}+\frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2$$

因此对比得到 $k=f''(\xi)$

4.2.6 中值不等式

练习 4.27 基于 Taylor 展开 (1)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$|f(x)|\le A,|f''(x)|\le B$，证明 $|f'(x)|\le\dfrac{2A}{b-a}+\dfrac{B}{2}(b-a)$

(3) 特例 1：区间 $[0,2]$，$|f(x)|\le1,|f''(x)|\le2$ 证明 $|f'(x)|\le3$

(4) 特例 2：区间 $[0,1]$，$|f(x)| \le A, |f''(x)| \le B$，证明 $|f'(x)| \le 2A + \frac{1}{2}B$

(5) 推论：将 $|f(x)| \le A$ 的条件改为 $f(a) = f(b)$，则得到 $|f'(x)| \le \frac{B}{2}(b-a)$

(6) 推论特例 1：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0) = f(1) = f(\frac{1}{2}) = 0$，$|f''(x)| \le M$，证明 $|f'(x)| \le \frac{M}{2}$

证明 注意这里是已知点在 x 处展开，并使用 Lagrange 余项！不要写成 x 在 a,b 展开，或用 Peano 余项。

(1) 根据 Taylor 展开得到 $\exists \xi \in (a,x), \eta \in (x,b)$ 使得

$$\begin{cases} f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \dfrac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2 \\ f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \dfrac{f''(\eta)}{2}(b-x)^2 \end{cases}$$

两式相减得到 $f(b) - f(a) = f'(x)(b-a) + \frac{f''(\eta)}{2}(b-x)^2 - \frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2$，结合 A, B 得到

$$|f'(x)| \le \frac{2A}{b-a} + \frac{B}{2(b-a)}[(a-x)^2 + (b-x)^2]$$

而 $(a-x)^2 + (b-x)^2 < (b-a)^2$(用二次函数最值)，因此得到 $|f'(x)| < \frac{2A}{b-a} + \frac{B}{2}(b-a)$

(5) 由于 $f(b) - f(a) = f'(x)(b-a) + \frac{f''(\eta)}{2}(b-x)^2 - \frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2 = 0$，因此 $f(x)$ 项被消除，后面同理。

练习 4.28 几道经典配凑放缩 (1)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$f(a) = f(b), |f'(x)| \le 1$，证明：$\forall x_1, x_2$ 满足 $|f(x_1) - f(x_2)| \le \frac{b-a}{2}$

证明 (1) 首先根据 Lagrange 中值定理得到 $|f(x_1) - f(x_2)| \le x_2 - x_1$，再根据

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(a) + f(b) - f(x_2)| \le (x_1 - a) + (b - x_2)$$

因此相加得到 $|f(x_1) - f(x_2)| \le \frac{b-a}{2}$

4.2.7 导数极限定理与导数介值定理

定理 4.11 (导数介值定理：达布定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，$f'_+(a) \ne f'_-(b)$，k 介于 $f'_+(a), f'_-(b)$ 之间，则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = k$

证明 构造 $F(x) = f(x) - kx$，则 $F'(x) = f'(x) - k$，由于 k 介于 $f'_+(a), f'_-(b)$ 之间，因此 $F'_+(a)F'_-(b) < 0$，不妨设 $F'_+(a) > 0, F'_-(b) < 0$，则

$$\lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} > 0, \lim_{x \to a^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} < 0$$

根据极限保号性得到 $\exists x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ 使得 $\frac{F(x_1) - F(a)}{x_1 - a} > 0, \frac{F(x_2) - F(b)}{x_2 - b} < 0$,即 $F(x_1) > F(a), F(x_2) > F(b)$，由于 $F(x)$ 连续，存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $F(\xi)$ 最大值，根据费马定理得到 $F'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) = k$

笔记 导数介值定理在 ZJU2020 中出现过

4.3 洛必达法则与 Taylor 公式

4.3.1 洛必达法则

定理 4.12 (洛必达法则)

f,g 满足 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ 或者 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ (2)x_0 空心邻域中 $f'(x),g'(x)$ 有定义 (非常重要的条件！) 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

笔记 x_0 空心邻域中 $f(x),g(x)$ 有定义且可导条件非常重要！

练习 4.29 空心邻域中没定义则只能用定义 已知 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=3$，求 $f'(0)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

证明 可以直接用 Peano 余项的 Taylor 展开。但这里展现其证明过程，先代入并用一次洛必达，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}$$

注意后面不能继续用洛必达了，原因在于 $g'(x)$ 在 x_0 空心邻域中不一定有定义，极限 $\lim\limits_{x\to 0} g''(x)$ 没有意义。因此需要用导数定义：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} g''(x)=\dfrac{3}{2}$

笔记 该证明过程是 Peano 余项的 Taylor 公式的证明思路，极度重要，保证最后一次不能用洛必达法则。

4.3.2 Taylor 公式

定理 4.13 (Peano 余项 Taylor 公式)

若 f 在 x_0 存在直至 n 阶导数 (只需要单点导数，比 Lagrange 要求低很多)，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

证明 设 $T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$，$Q_n(x)=(x-x_0)^n$，先做 $n-1$ 次洛必达，再用一次导数定义可以得到：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_n(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{Q_n^{(n-1)}(x)}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]=0$$

定理 4.14 (Lagrange 余项 Taylor 公式)

若 f 在 $[a,b]$ 存在直至 $n+1$ 阶导数，且在 (a,b) 满足 n 阶连续可导 (条件比 Peano 强得多)，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

证明 设 $T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，构造 $F(t)=f(t)-T_n(t), G(t)=(x-t)^{n+1}$，即证明 $\dfrac{F(x_0)}{G(x_0)}=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，因为 $F(x)=G(x)=0$，$F'(t)=-\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n, G'(t)=-(n+1)(x-t)^n$，因此根据 Cauchy 中值定理可知

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

4.4 凸函数

4.4.1 函数的凹凸性

定义 4.3 (凸函数)

f 是区间 I 上的函数，若对 $\forall x_1, x_2 \in I$ 和 $\forall \lambda \in (0,1)$ 满足以下条件，则称 $f(x)$ 为凸函数

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

♣

引理 4.1 (定比分点公式)

对于一点 $x \in [x_1, x_2]$，则 x 可由其与 x_1, x_2 的距离唯一表出：

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2$$

记忆方式：首先保证分子都是正的，而且 x_1 对应的权重是 x 到 x_2 的距离

♡

定理 4.15 (凸函数的等价条件)

f 是 I 上的凸函数与下面条件等价：

- 一阶可导最常用：$\forall x_0 \in I$，有 $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$。
- 若不可导，上述命题等价于：$f(x) \ge f(x_0) + k(x - x_0)$
- 若 $f(x)$ 可导，则等价于 $f'(x)$ 单增
- 二阶可导：若 $f(x)$ 二阶可导，则等价于 $f''(x) \ge 0$

♡

练习 4.30 不二阶可导凸性质的应用 (1) 重点：函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$，$f'(x)$ 单增，证明：$F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 单增

证明 (1)$f'(x)$ 单增等价于可导，而没说二阶可导，因此取 $y > x > 0$，只能用 $f(y) \ge f(x) + f'(x)(y - x)$。此时

$$\begin{aligned}
F(y) - F(x) = \frac{xf(y) - yf(x)}{xy} &\ge \frac{xf(x) + xf'(x)(y-x) - (y-x)f(x) - xf(x)}{xy} \\
&= \frac{(y-x)(xf'(x) - f(x))}{xy} = \frac{(y-x)(f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x-0})}{y} \\
&= \frac{(y-x)(f'(x) - f'(\xi))}{y} \ge 0
\end{aligned}$$

练习 4.31 凸函数等价条件应用 (1)$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 二阶连续可导，证明 $f''(x) \ge 0$ 当且仅当 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h, f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \ge 0$

(2)$f(x)$ 为 I 上凸函数当且仅当 $\forall x_1, x_2 \in I$ 满足 $\varphi(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ 为 $[0,1]$ 上的凸函数

证明 (1)$f''(x) \ge 0$ 等价于凸函数，等价于 $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \ge \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$，即得到结论。

(2.1) 右推左：要证 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$，等价于 $\varphi(\lambda) \le \lambda\varphi(1) + (1-\lambda)\varphi(0)$，而 $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 0)$，根据 φ 的凸性可直接得出。

(2.2) 左推右：要证 $\varphi(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \le \alpha\varphi(t_1) + (1-\alpha)\varphi(t_2)$，等价于

$$f\left((\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)x_1 + (1 - \alpha t_1 - (1-\alpha)t_2)x_2\right) \le \alpha f(t_1 x_1 + (1-t_1)x_2) + (1-\alpha) f(t_2 x_1 + (1-t_2)x_2)$$

根据 $f(x)$ 的凸性，右侧大于等于左侧 (可能有点麻烦)。

定理 4.16 (凸性质的保持)

考虑凸函数的四则运算、复合、最值：

- 凸函数的数乘和加法保持凸性质，差、积、商不一定
- 复合：若 $f(x)$ 为凸函数，$g(x)$ 为凸增函数，则 $g(f(x))$ 为凸函数，去掉增性质则不一定
- 最值：若 $f(x), g(x)$ 均为 I 上凸函数，则 $\max\{f(x), g(x)\}$ 为凸函数

♡

证明 (3) 最值：$F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) = \max\{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2), g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\} \le \max\{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)\}$，进行放缩 $F \ge f, g$ 得到

$$F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \le \lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)$$

定义 4.4 (拐点)

$y=f(x)$ 在 x_0 两侧分别为严格凸和严格凹的，则称 x_0 为 $f(x)$ 的拐点。若 f 在 x_0 二阶可导，则 x_0 是拐点的必要条件为 $f''(x_0)=0$

♣

4.4.2 凸函数的基本性质

定理 4.17 (凸函数基本性质)

设 $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数，则

- $f(x)$ 在 I 中任意一点有左右导函数
- $f(x)$ 在 I 区间内部连续，端点未知，若是开区间，则在整个区间连续

♡

证明 (1) 只证右导数：$F(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 为增函数，根据有界的单调函数有左右极限可知左右导数存在。

(2) 根据左右导数的存在性可知左右连续 (否则导数定义中分母趋于 0，分子不趋于 0，显然无极限)，因此在内部点连续，端点单边连续。

定理 4.18 (凸函数的最值)

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数，则 $f(x) \le \max\{f(a), f(b)\}$，即凸函数的最值只在端点取到。

♡

证明 $\forall x \in [a,b]$，设 $x = \lambda a + (1-\lambda)b$，根据 $f(x)$ 为凸函数可知：

$$f(x) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \le \max\{f(a), f(b)\}$$

定理 4.19 (Jensen 不等式)

$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数，则对 $\forall x_i \in [a,b], \lambda_i > 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

♡

✍ **练习 4.32Jensen 不等式经典题** 正数 $p_1,\cdots,p_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$，对 $\forall x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-\ln p_i)\le\ln\left(\sum_{i=1}^{n}e^{x_i}\right)$$

证明 即证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\ln\dfrac{e^{x_i}}{p_i}\le\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n}e^{x_i}\right)$，视 $e^{x_i}=t_i$，根据 $\ln t$ 的凹性即可得到结论。

4.4.3 利用凹凸性证明不等式

✍ **练习 4.33 对中点位置的估计** (1) 经典：设 $\varphi(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续凸函数，证明 $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)\le\displaystyle\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x\le\dfrac{\varphi(0)+\varphi(1)}{2}$

(2) 太经典：$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续凸函数，证明 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

证明 (1) 由于 $x=x\cdot1+(1-x)\cdot0$，因此

$$\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x\le\int_0^1[(1-x)\varphi(0)+x\varphi(1)]=\frac{\varphi(0)+\varphi(1)}{2}$$

另一方面做变量替换 $x=1-t$，则 $\displaystyle\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\varphi(1-x)\mathrm{d}x$(区间再现)，得到

$$\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\varphi(1-x)\mathrm{d}x\ge\int_0^1\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{1-x}{2}\right)\mathrm{d}x=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$$

(2) 作替换 $x=\lambda a+(1-\lambda)b=b-(b-a)\lambda$，则 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda$，转换为 (1)

4.5 一元极值与导数零点问题

4.5.1 一元极值的概念与判定

定理 4.20 (一元极值三大充分条件)

$f(x)$ 可导，且满足必要条件 $f'(x_0)=0$，则有三大充分条件：

1. $f(x)$ 在 x_0 连续，$U^o(x_0,\delta)$ 可导，若左邻域 $f'(x)\le0$，右邻域 $f'(x)\ge0$，则为极小值。反之为极大值
2. 若在 $U(x_0,\delta)$ 二阶可导 $f''(x_0)\ne0$，则 $f''(x_0)<0$ 时取极大值，$f''(x_0)>0$ 时取极小值
3. 若在 $U(x_0,\delta)$ 存在 n 阶导数，且 $f'(x_0),\cdots,f^{(n-1)}(x_0)=0,f^{(n)}(x_0)\ne0$。则 n 为偶时，x_0 为极值点，$f^{(n)}(x_0)<0$ 极大，$f^{(n)}(x_0)>0$ 时极小，n 为奇时不取极值。

♡

证明 只证明第三充分条件。用 Peano 余项的 Taylor 展开，根据前面导数为 0 得到 $f(x)-f(x_0)=\left[\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right](x-x_0)^n$。若 n 为偶且导数大于 0，则显然为极小值，极大值同理。若 n 为奇数，则 $(x-x_0)^n$ 符号不定，因此无法确定。

4.5.2 导数零点问题

要善于取出区间中的极值点或最值点，利用 $f'(x_0)=0$ 的性质加上中值定理或 Taylor 展开研究更高阶的导数。

✍ **练习 4.34 几道经典导数零点问题** (1) 经典：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$\exists c\in(a,b)$ 满足 $f(c)>0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$

证明 由于 $f(a)=f(b)=0$，$f(c)>0$，由于 $f(x)$ 连续，总能找到最大值 $f(x_0)$，由于是最值点，$f'(x_0)=0$，考虑 $f(a)$ 在 x_0 处 Lagrange 余项的 Taylor 展开：

$$f(a)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2$$

由于 $f(a)=0$，得到 $f''(\xi)<0$

第 5 章 不定积分

5.1 常用不定积分公式

必背部分：

普通三角：$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + c$ $\quad \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + c$

sec、csc：$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + c$ $\quad \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + c$

$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|$ $\quad \int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan x\sec x + \frac{1}{2}\ln|\tan x + \sec x|$

乘积三角：$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + c$ $\quad \int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + c$

分式：$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$ $\quad \int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}| + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + c$

对数：$\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + c$ $\quad \int \ln(1+x)\mathrm{d}x = (1+x)\ln(1+x) - x + c$

会算部分：

三角：$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c$ $\quad \int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c$

平方三角：$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$ $\quad \int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$

$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \tan x - x + c$ $\quad \int \cot^2 x\mathrm{d}x = -\cot x - x + c$

复合三角：$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$

$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$

$\int x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{x}{n}\sin nx + c$

$\int x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx + c$

根式：$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|\right] + c$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right] + c$

5.2 不定积分基本方法

定理 5.1 (分部积分公式)

函数 u, v 的积分满足：

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

定理 5.2 (表格法)

函数 u,v 的积分 $\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$，具体操作时可列以下表格：

u 的各阶导数	u	u'	u''	u'''	$\cdots$	$u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$ 的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	$v^{(n-1)}$	$v^{(n-2)}$	$\cdots$	v

计算方法：以 u 为起点，左上右下相乘，符号先正后负交替，最后一项为最后一列两个的积分 $(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$

笔记 $\int P_n(x)e^{kx}\mathrm{d}x, \int P_n(x)\sin ax\mathrm{d}x, \int P_n(x)\cos ax\mathrm{d}x$ 都可以使用表格法快速算出

练习 5.1 $P_n(x)e^{kx}$ **型** 计算 $\int (x^3+2x+6)e^{2x}\mathrm{d}x$

解 先列表格：

x^3+2x+6	$3x^2+2$	$6x$	6	0
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$\frac{1}{4}e^{2x}$	$\frac{1}{8}e^{2x}$	$\frac{1}{16}e^{2x}$

得到结果为 $(x^3+2x+6)\frac{1}{2}e^{2x} - (3x^2+2)\frac{1}{4}e^{2x} + 6x(\frac{1}{8}e^{2x}) - 6(\frac{1}{16}e^{2x}) + \int 0\cdot(\frac{1}{16}e^{2x})\mathrm{d}x$

定理 5.3 (积分有理分解)

若被积函数为 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$，且 $Q(x)$ 的次数大于等于 3，若 $Q(x)=(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_k)^{\lambda_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l}$，对于 $(x-a_1)^{\lambda_1}$ 和 $(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}$ 项，对应展开式为：

$$\begin{cases} \dfrac{A_1}{x-a_1}+\dfrac{A_2}{(x-a_1)^2}+\cdots+\dfrac{A_{\lambda_1}}{(x-a)^{\lambda_1}} \\ \dfrac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots+\dfrac{B_{\mu_1}x+C_{\mu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}} \end{cases}$$

其中 $\frac{A_{\lambda_l}}{(x-a)^{\lambda_l}}$ 的积分好算，而 $\frac{B_{\mu_l}x+C_{\mu_l}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_l}}$ 可配方化为 $\int\frac{Lu+N}{(u^2+r^2)^j}\mathrm{d}u$(因为判别式一定小于 0)，第一部分 $L\int\frac{u}{(u^2+r^2)^j}\mathrm{d}u$ 好算，第二部分 $N\int\frac{1}{(u^2+r^2)^j}\mathrm{d}u$ 用 $u=r\tan v$ 替换，变为形如 $\int\cos^k v\mathrm{d}v$ 的不定积分，有递推公式辅助求解。

定理 5.4 (三角有理式转化为有理式)

若 $R(\sin x,\cos x)$ 为关于 $\sin x,\cos x$ 的有理式，记 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan t, \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，以及万能公式

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

因此

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

定理 5.5 (两类无理根式的不定积分)

对于 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$，只需要令 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 即可化为有理函数。对于 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$，要么进行配方，要么用 Euler 变换。

5.3 不定积分表选例

下面假设必背部分都会背，且不做计算证明

5.3.1 三角函数：重点

练习 5.2 核心会算

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|+c \qquad \int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x|+c$$
$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x+\tan x|+c \qquad \int \csc x\mathrm{d}x = -\ln|\csc x+\cot x|+c$$

解 $\int \tan x\mathrm{d}x = -\int \dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}$，$\int \cot x\mathrm{d}x$ 同理。另外两个要记住

$$\int \sec x\mathrm{d}x = \int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x} = \ln|\sec x+\tan x|+c$$

练习 5.3 简单平方 (1) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$ (2) 重点：$\int \tan^2 x\mathrm{d}x$ (3) 超重点：$\int \sec^3 x\mathrm{d}x$

解 (1) 直接用半角公式

(2) 这个要记住，$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int \sec^2 x - 1\mathrm{d}x = \tan x - x + c$

(3) 这个经常会用到！

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\mathrm{d}x &= \int \sec x\mathrm{d}\tan x = \sec x\tan x - \int \tan^2 x\sec x\mathrm{d}x \\ &= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \int \sec x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此 $I = \dfrac{1}{2}\sec x\tan x + \ln|\sec x+\tan x|+c$

练习 5.4 $\sin x, \cos x$ 加常数分式积分 (1) 重点：$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1\pm\cos x}$ (2) 重点：$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1\pm\sin x}$

(3) 极度重点，含参积分大量用到：$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}, |a|\le 1$

解 (1) 根据 $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}, 1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$，因此

$$\begin{cases}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \tan\frac{x}{2}+c \\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = \frac{1}{2}\int \csc^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = -\cot\frac{x}{2}+c\end{cases}$$

(2) 根据诱导公式 $\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

$$\begin{cases}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+c \\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+c\end{cases}$$

(3)$a=\pm 1$ 时即 (1)。用万能公式，令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，因此

$$I=\int\frac{1}{1+a\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{(1+t^2)+a(1-t^2)}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{(1-a)t^2+(1+a)}\mathrm{d}t=\frac{2}{1-a}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}t\right)+c$$

得到结果为 $I=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{x}{2}\right)+c$

定理 5.6 ($\frac{1}{a\sin^2x+b\cos^2x}$ 积分)

形如 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin^2x+b\cos^2x}$ 的积分都采用上下同除以 $\cos^2x$，转换为

$$\int\frac{\sec^2x\mathrm{d}x}{a\tan^2x+b}$$

直接用 $\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2x\mathrm{d}x$ 即可。

定理 5.7 ($\frac{1}{a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x+d}$ 积分)

形如 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x+d}$ 的积分首先上下同除以 $\cos^2x$，得到

$$\int\frac{\sec^2x\mathrm{d}x}{a\tan^2x+b\tan x+c+d\sec^2x}$$

再利用 $\sec^2x=\tan^2x+1$，全部转换为 $\tan x$，再分母配方即可

练习 5.5 $\sin x,\cos x$ 无常数、无分子分式 (1) 重点：$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x+2\cos^2x}$ (2)$\int\frac{1}{\sin^2x\cos x}\mathrm{d}x$ (3)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^2x}$

解 (1) 同除以 $\cos^2x$，得到 $\int\frac{\sec^2x\mathrm{d}x}{2+\tan^2x}$，易算

(2) 同乘 $\cos x$，得到 $I=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2x(1-\sin^2x)}$，即 $\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}(\sin x)+\int\frac{1}{1-\sin^2x}\mathrm{d}x$，前者直接算，后者用 $\int\frac{1}{x^2-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$。

(3) 与 (2) 同理

练习 5.6 $\sin x,\cos x$ 的高次 (1)$\int(\sin^4x+\cos^4x)\mathrm{d}x$ (2) 重点：$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4x+\cos^4x}\mathrm{d}x$ (3) 重点：$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4x+\cos^4x}$

(4)$\int\sin^6x+\cos^6x\mathrm{d}x$ (5)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^6x+\cos^6x}$

解 (1) 降到一次：$\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x=1-\frac{1}{4}(1-\cos4x)$

(2) 降到二次，并切换 $\sin x,\cos x$：$\int\frac{\frac{1}{2}\sin2x}{1-\frac{1}{2}\sin^22x}$，要善于切换正余弦：

$$\int\frac{\sin2x}{2-\sin^22x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\cos2x)}{1+\cos^22x}=-\frac{1}{2}\arctan(\cos2x)+c$$

(3) 直接降到二次，并转换为 $\tan x,\sec x$：使用 $\sec^2x=1+\tan^2x$

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\frac{1}{2}\sin^22x}=\int\frac{\sec^22x}{\sec^22x-\frac{1}{2}\tan^22x}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\tan2x)}{1+\frac{1}{2}\tan^22x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan2x}{\sqrt{2}}+c$$

(4)$\sin^6x+\cos^6x=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^4-\sin^2\cos^2x+\cos^4x)$ 转化为四次，再配方：

$$(\sin^2x+\cos^2x)^2-3\sin^2x\cos^2x=1-\frac{3}{4}\sin^22x=1-\frac{3}{8}(1-\cos4x)$$

结果为 $\frac{5}{8}x+\frac{3}{32}\sin 4x+c$

$$(5)I=\int\frac{1}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2 x}{\sec^2 2x-\frac{3}{4}\tan^2 2x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{\tan^2 2x+4}$$

笔记 高次问题，如果分母为 1 则降到一次直接积分，分子为 1 则降到二次转换为 $\sec,\tan$，均不为 1 则降到齐次转化为有理式。降次要么用立方和公式，要么用配方。

定理 5.8 ($\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ 型计算技巧)

$\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ 型的积分把分子写为 A 倍分母加上 B 倍分母导数的形式，用待定系数法进行计算 ♡

推论 5.1 ($\tan x,\cot x$ 分式型)

类似于 $\int\frac{a\mathrm{d}x}{b+c\tan x},\int\frac{a\mathrm{d}x}{b+c\cot x}$ 都可以转换回 $\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ 型积分进行计算 ♡

练习 5.7 $\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ **型计算** (1) 重点：$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ (2) 重点：$\int\frac{\mathrm{d}x}{3+5\tan x}$

解 (1) 设 $\sin x=A(\sin x+\cos x)+B(\cos x-\sin x)$，得到 $A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2}$，因此

$$I=\int\frac{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+c$$

(2) 由于 $\frac{1}{3+5\tan x}=\frac{\cos x}{5\sin x+3\cos x}$，设 $\cos x=A(5\sin x+3\cos x)+B(5\cos x-3\sin x)$，则 $5A=3B,3A+5B=1$，得到 $A=\frac{3}{34},B=\frac{5}{34}$，得到

$$I=\frac{3}{34}x+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|+c$$

定理 5.9 ($\frac{1}{a\sin x+b\cos x+c}$ 积分)

类似于 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}$ 的积分采用二倍角公式转换为二次，得到

$$\int\frac{1}{2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b(2\cos^2\frac{x}{2}-1)+c}\mathrm{d}x$$

使用前面的积分方法，上下同时除以 $\cos^2\frac{x}{2}$，再根据 $\sec^2 x=\tan^2 x+1$ 进行配方即可。 ♡

练习 5.8 相关训练 (1)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+2\cos x+3}$

解 (1)$\sin x+2\cos x+3=1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}$，因此

$$I=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{4+2\tan\frac{x}{2}+\sec^2 x}=2\int\frac{d(\tan\frac{x}{2}+1)}{(\tan\frac{x}{2}+1)^2+4}=\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{2}+c$$

推论 5.2 ($\frac{p\sin x+q\cos x+s}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x$)

这类积分可以将分子写为 A 倍分母加 B 倍分母导数加 C 常数，其中常数项用前一个定理进行计算。 ♡

✍ **练习 5.9 三角根号** (1) $\int \sin x \cos x \sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$

解 (1) 写为 $\frac{1}{2}\int \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x + b^2}\mathrm{d}(\sin^2 x)$ 即可

5.3.2 对数与指数

✍ **练习 5.10 几道经典指数积分** (1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$ (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ (3) $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

解 (1) 本质是 e^x 的有理函数，故 $I=\int \frac{\mathrm{d}(e^x)}{e^{2x}+1}=\arctan(e^x)+c$

(2) 同乘 e^{-x}，故 $I=-\int \frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}}=-\ln|e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}|+c$

(3)$I=\int \frac{e^x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int \frac{e^x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}(x^2+1)$,第一项实在是没法处理,只能期待第二项,第二项等于 $\int e^x\mathrm{d}(\frac{1}{1+x^2})$,因此用分部积分得到

$$\int \frac{e^x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int e^x\mathrm{d}(\frac{1}{1+x^2})=\frac{e^x}{1+x^2}+c$$

✍ **练习 5.11 几道经典对数积分** (1) $\int x^n\ln x\mathrm{d}x$ (2) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ (3) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$ (4) 特殊：$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$

解 (1) 列表法得到：$I=\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}-\int \frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{1+n}(\ln x-\frac{1}{n+1})+c$

$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

(2) 无法直接列表，因为中间项会交叉，因此可以用表格法一步一步列，

$$I=-\frac{\ln^2 x}{x}+\int \frac{2\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}+\int \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+c$$

(3) 同理用表格法一步一步列，

$$I=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{4}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\ln x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\ln x x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)$$

(4) 一看就是特殊配凑的，要注意到 $\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$

5.3.3 分式问题

✍ **练习 5.12 几个基础型** (1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}(a>0)$ (2) 重点：$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^2}$ (3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^n}$

(4) 重点：$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$ (5) 重点：$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$

解 (1) 原式 $=\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\frac{b}{a}}$，需要分类讨论：$b>0$ 时变为 $\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+(\sqrt{\frac{b}{a}})^2}=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\arctan(\sqrt{\frac{a}{b}}x)$。$b<0$ 时变为 $\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+(\sqrt{-\frac{b}{a}})^2}$，后面同理

(2) 原式 $=-\int \frac{1}{2ax}\mathrm{d}\frac{1}{ax^2+b}=-\frac{1}{2ax}\cdot\frac{1}{ax^2+b}+\int \frac{1}{ax^2+b}\mathrm{d}\frac{1}{2ax}=-\frac{1}{2ax}\cdot\frac{1}{ax^2+b}-\int \frac{1}{ax^2+b}\cdot\frac{1}{2ax^2}\mathrm{d}x$，再对 $\frac{1}{2ax^2(ax^2+b)}=\frac{\frac{1}{b}}{2ax^2}+\frac{-\frac{1}{2b}}{ax^2+b}$ 有理分解，代入后全变为基础型 1。

(3) 同理转化为 $\int \frac{1}{2ax(1-n)}\mathrm{d}(\frac{1}{(ax^2+b)^{n-1}})$，再用分部积分去做。

(4) 原式 $=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}=\dfrac{1}{a}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}$，将 $\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2}$ 看作整体，变为 (1)

(5) 原式 $=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\dfrac{2ax}{ax^2+bx+c}=\dfrac{1}{2a}\int\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}-\dfrac{b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}(\int\dfrac{\mathrm{d}(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}-\int\dfrac{b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x)$，变为 (4).

✍ **练习 5.13 次方和差** 尽量记住下面的分解方法：

(1)$\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ (2)$\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$

(3)$\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$ (4) 重点：$\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$(一定要记住！)

(5)$\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^6-1}$ (6)$\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$

解 (1) 写为 $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$，后者给分母配方即可

(2) 用立方差即可

(3) 用 $\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

(4) 构造 $M=\displaystyle\int\dfrac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x, N=\int\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$，得到

$$\begin{cases} M=\displaystyle\int\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\int\dfrac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2} \\ N=\displaystyle\int\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} \end{cases}$$

因此所求即 $\dfrac{1}{2}(N-M)$

(5) 用平方差 (不要用立方差)：$\dfrac{1}{x^6-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x^3-1}+\dfrac{1}{x^3+1})$，转换为 (1)(2)

(6) 类似四次方的讨论 + 立方和

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int\frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^4-1}{x^6+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+(x^4-x^2+1)}{x^6+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2+3}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

✍ **练习 5.14 几个经典题** (1)$\displaystyle\int\dfrac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x$ (2)$\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2(x+b)^2}$

解 (1) 显然待定系数法有理分解不可行，因此用技巧 $x^2=[(1-x)-1]^2$ 得到 $\dfrac{x^2}{(1-x)^{100}}=\dfrac{(1-x)^2-2(1-x)+1}{(1-x)^{100}}$，做换元即可

(2) 这种有理分解比较常见，最好记下来，

$$\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2}=\frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)^2=\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(x+b)^2}-\frac{2}{(x+a)(x+b)}\right]$$

5.3.4 根式问题

✍ **练习 5.15 三个基础公式的证明** (1)$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ (2) 重点：$\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ (3) 重点：$\displaystyle\int\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x$

解 (1) 设 $x=a\sin t$，则 $I=\displaystyle\int a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=\dfrac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\dfrac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$。画一个三角形做

辅助，角 t 对着 x，斜边为 a，因此 $\sin t=\frac{x}{a},\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，带回得到：

$$I=\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a})+C$$

(2)$x=a\tan t$，$I=\int a^2\sec^3 x\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(\sec x\tan x)+\frac{a^2}{2}\ln|\tan x+\sec x|$(一定要记住 $\sec x,\sec^3 x$ 的积分，如果一次方都没记住，就死翘翘了。。)，因此得到结果为

$$\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|)+C$$

(3) 设 $x=a\sec t$，得到 $I=a^2\int\tan^2 t\sec t\mathrm{d}t=a^2\int\sec^3 t-\sec t\mathrm{d}t$，背公式以及画三角形得到：

$$I=\frac{a^2}{2}(\sec t\tan t-\ln|\tan t+\sec t|)+C=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|)+C$$

练习 5.16$(x-a)(b-x)$ **型** (1)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$ (2)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ (3)$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$

解 (1) 设 $x=\sin^2 t$，则 $I=\int\frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}\mathrm{d}t=2t+C$，直接带回得到 $I=2\arcsin\sqrt{x}+C$

(2) 令 $t=x-a$，则变为 $\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(b-a-t)}}$，令 $t=(b-a)\sin^2 s$ 即可，故

$$I=\int\frac{2(b-a)\sin s\cos s\mathrm{d}s}{(b-a)\sin s\cos s}=2s=2\arcsin\sqrt{\frac{t}{(b-a)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$$

(3) 同理得到 $I=\int 2(b-a)^2\sin^2 s\cos^2 s\mathrm{d}s=\frac{(b-a)^2}{4}\int(1-\cos 4t)\mathrm{d}t$，后续略

练习 5.17 其他特别经典的根式积分问题 (1)$\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x$

(2)$\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x}+1)(x+3)}$

(3)$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2x-3}}$

(4)$I=\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

解 (1) 让分母一样：$\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$，直接转换为了 $\arcsin x$ 的积分

(2) 令 $t=\sqrt{x}$，则 $I=\int\frac{2t}{(t+1)(t^2+3)}\mathrm{d}t=\int\frac{A}{t+1}\mathrm{d}t+\int\frac{Bt+C}{t^2+3}\mathrm{d}t$，解出 $A=-\frac{1}{2},B=\frac{1}{2},C=\frac{3}{2}$，从而

$$I=-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\int\frac{1}{4}\ln|t^2+3|+\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C$$

(3.1) 方法 1：使用 Euler 变换。设 $\sqrt{x^2-2x+3}=x-t$，则得到 $x=\frac{t^2+3}{2(t-1)}$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{t^2-2t+3}{2(t-1)^2}\mathrm{d}t$，此时积分变为

$$I=-\int\frac{2}{t^2+3}\mathrm{d}t=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C$$

(3.2) 方法 2：配方 + 三角函数 (一般还是推荐三角函数)。$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\left[(x-1)^2-4\right]^{\frac{1}{2}}}$，做换元 $x-1=2\sec t$，因此

$$I=\int\frac{2\sec t\tan t}{(2\sec t+1)2\tan t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$$

背公式即 $\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$，代入 $a=\frac{1}{2}$。注意带回时需要用半角公式，$\tan\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1+\cos t}$，再画个三角形进行辅助。

(4) 可以用 Euler 变换或者配方三角替换。

5.3.5 配对积分法

练习 5.18 经典配对积分法 (1) 计算 $I_1=\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x, I_2=\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$ (2) 计算 $I_1=\sin(\ln x)\mathrm{d}x, I_2=\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$

解 (1) 用分部积分得到 $I_1=\frac{1}{a}(e^{ax}\cos bx+bI_2)$，同理 $I_2=\frac{1}{a}(e^{ax}\sin x-bI_1)$，列出线性方程组：

$$\begin{cases}aI_1-bI_2=e^{ax}\cos bx\\ bI_1+aI_2=e^{ax}\sin bx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I_1=\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C\\ I_2=\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C\end{cases}$$

(2) 直接用分部积分：$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$，同理 $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$

5.3.6 递推问题

练习 5.19 几个最常见递推 $(1)I_n=\int\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x$ $(2)I_n=\int\sec^n x\mathrm{d}x$ $(3)I_n=\int e^{ax}\sin^n x\mathrm{d}x$

解 (1) 首先根据和差公式和积化和差：

$$\sin nx=\sin[(n-1)x+x]=\sin(n-1)x\cos x+\cos(n-1)x\sin x=\frac{1}{2}[\sin nx+\sin(n-2)x]+\cos(n-1)x\sin x$$

因此

$$I_n=\frac{1}{2}(I_n+I_{n-2})+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\Rightarrow I_n=\frac{2}{n-1}\sin(n-1)x+I_{n-2}$$

(2) 先凑出 $\mathrm{d}\tan x$ 并使用分部积分：

$$\int\sec^n x\mathrm{d}x=\int\sec^{n-2}x\mathrm{d}(\tan x)=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)\int\tan^2 x\sec^{n-2}x\mathrm{d}x$$

再代入 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$：

$$I_n=\tan x\sec^{n-2}x-(n-2)(I_n-I_{n-2})\Rightarrow I_n=\frac{\tan x\sec^{n-2}x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

(3)

笔记 $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\tan x+\sec x|$ 和 $\int\sec^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan x\sec x+\frac{1}{2}\ln|\tan x+\sec x|$ 在根式中经常用到，要记住，具体证明过程见前面部分。

第 6 章 定积分

6.1 定积分理论

6.1.1 可积性

定义 6.1 (Riemann 积分)

$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数，将 $[a,b]$ 划分为 n 等份 T，若 $\lim\limits_{||T||\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = J$，这里 J 为常数，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且记 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = J$ ♣

定义 6.2 (Darboux 上下和)

在每个区间上取 $M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x), m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$，记振幅 $\omega_i = M_i - m_i$，定义 Darboux 上下和为

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i, s(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

定义 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上下积分为：

$$S = \inf_T S(T), s = \sup_T s(T)$$

♣

定理 6.1 (可积函数的性质)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则：

- 有界性：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界 (反之不正确，有界不一定可积，例如 Dirichlet 函数)

♡

证明 反设 f 无界，则存在某个小区间 Δ_k，使得 Δ_k 上 f 无界，假设其他区间都有界，此时 Riemann 和

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| \geq |f(\xi_k)\Delta x_k| - |\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i|$$

对 $\forall M > 0$，无论如何分割，Riemann 和都能大于 M，因此无界不可积。

定理 6.2 (可积性充要条件)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积当且仅当

- 上下积分角度：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上积分 s 等于下积分 S
- 上下和角度 (最常用！)：$\forall\epsilon$，存在分割 T 使得 $S(T) - s(T) = \sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i < \epsilon$
- 振幅角度：对 $\forall\epsilon,\eta$，总存在分割 T，使得振幅 $\omega_{k'} \geq \epsilon$ 的那些小区间总长 $\sum \omega_{k'} < \eta$
- 实变角度：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 几乎处处连续

♡

✍ **练习 6.1Dirichlet 函数的不可积性** 证明 Dirichlet 函数在 $[a,b]$ 不可积

证明 由于任意分割 T，振幅 $\omega = 1$，因此 $S(T) - s(T) = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i = b - a$，因此不可积。

定理 6.3 (Riemann 可积函数类)

$f(x)$ 定义于 $[a,b]$，常见的有三个 Riemann 可积函数类：

- $[a,b]$ 连续函数
- 在 $[a,b]$ 只有有限个间断点的有界函数
- $[a,b]$ 上单调函数

♡

证明 (1) 根据一致连续性，每个 ω_i 都可以足够小，因此 $\sum \omega_i \Delta x_i$ 足够小

(2) 将间断点处的 Δx_i 设置得足够小，控制住间断点差距

(3)$\omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$，只需要 ω_i 取得足够小

练习 6.2 可积性判断 (1) 证明 Riemann 函数 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，且 $\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x = 0$

(2) 证明下面的 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right], & x \in (0,1] \end{cases}$$

证明 (1) 只需证 $\sum \omega_i \Delta x_i < \epsilon$，给定 $\forall \epsilon$，满足 $\frac{1}{q} > \frac{\epsilon}{2}$ 的只有有限个，且它们的函数值均小于等于 $\frac{1}{2}$。把这有限个全部列出 $x_1, \cdots, x_k$，这些点每个最多落入两个小区间中，取 $||T|| < \frac{\epsilon}{2k}$ 即可，则该部分 $\sum \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2}$。另一侧直接 $\sum \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2} \sum \Delta x_i \le \frac{\epsilon}{2}$ 就行。

(2)$f(x)$ 振幅小于等于 1，不连续点为 $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$。对 $\forall \epsilon$，$\exists \delta_1$，当 $|\Delta x_i| < \delta_1$ 时，$(\epsilon, 1)$ 分割满足 $\sum \omega_i \Delta x_i < \epsilon$。而 $(0,\epsilon)$ 的任意分割也满足 $\sum \omega_i \Delta x_i < \epsilon$，因此取 $\delta = \min\{\delta_1, \epsilon\}$ 时，整体的分割满足：

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \epsilon$$

练习 6.3 可积性相关证明 (1)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 有定义，$\forall \epsilon$，存在 $[a,b]$ 上可积函数 $g(x)$，使得 $\forall x \in [a,b], |f(x) - g(x)| < \epsilon$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积

证明 (1) 由于 $g(x)$ 可以，存在分割 T 使得 $\sum\limits_T \omega_i^g \Delta x_i < \epsilon$，而 $\omega_i^f \le \omega_i^{f-g} + \omega_i^g$，以及 $\omega_i^{f-g} \le 2\epsilon$(因为 g 本身可能 ϵ 震荡，$|f(x) - g(x)|$ 又可能 ϵ 震荡)，得到

$$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i \le \sum_T \omega_i^{f-g} \Delta x_i + \sum_T \omega_i^g \Delta x_i < 2\epsilon(b-a) + \epsilon$$

6.1.2 Newton-Leibniz 公式

定理 6.4 (Newton-Leibniz 公式)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且除有限个点外，$F'(x) = f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

♡

笔记 Newton-Leibniz 公式的意义在于将定积分的计算转换为了原函数的计算，不过可积与存在原函数也没有直接关系，具体见下面题目。

练习 6.4 可积与原函数 举例说明可积未必有原函数，有原函数未必可积

解 (1) 例如 $[-1,1]$ 上的 $\mathrm{sgn}(x)$，其可积但无原函数

(2) 例如原函数如下，其在 $[0,1]$ 可导，但是 $F'(x)$ 无界

$$F(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1]\end{cases}$$

✍ **练习 6.5 使用 Nowton-Leibniz 公式** (1) 已知 $f(x)=\begin{cases}2022, & x=0\\ 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1]\end{cases}$，证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，求 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

解 (1)$f(x)$ 在 0 处为跳跃间断点，只有一处，而 $[0,1]$ 上 $f(x)$ 有界，故可积。构造 $F(x)$：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1]\end{cases}$$

$F(x)$ 除了 0 处外满足 $F'(x)=f(x)$，因此 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\sin 1$

定理 6.5 (微积分基本定理)

$f(x)$ 为 $[a,b]$ 可积函数，定义 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$，则

- $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数
- 若 $x_0\in[a,b]$ 为 $f(x)$ 连续点，则 $F(x)$ 在 x_0 可导，且 $F'(x_0)=f(x_0)$
- 若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数，则 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续可微函数，且 $F'(x)=f(x)$

♡

✍ **练习 6.6 使用微积分基本定理** (1) 重点：$f(x)$ 在 $[A,B]$ 上可积，$a,b\in(A,B)$ 是 $f(x)$ 的两个连续点，证明

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$$

证明 (1) 对左侧做如下化简：

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x&=\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

令 $F(x)=\displaystyle\int_A^x f(t)\mathrm{d}t$，则显然 $F'(b)=\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{F(b+h)-F(b)}{h}=f(b)$，$F'(a)=f(a)$ 同理。

6.1.3 四则运算与复合

定理 6.6 (四则运算的可积性)

若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $kf(x),f(x)\pm g(x),f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，但 $g(x)\neq 0$ 时 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也不一定可积

♡

证明 (1) 数乘、加减显然

(2) 乘法：根据可积可知有界，设 $|f(x)|\le M,|g(x)|\le N$，$\displaystyle\sum_T\omega_i^{fg}\Delta x_i<M\sum_T\omega_i^g\Delta x_i+N\sum_T\omega_i^f\Delta x_i$ 即可

(3) 除法：例如 $f(x)=1, g(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1] \\ 1, & x=0 \end{cases}$，$\dfrac{1}{g(x)}$ 因为无界而不可积

练习 6.7 除法增加条件可积 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上函数，证明

(1) 若 $f(x)$ 可积，且 $|f(x)|\geq m>0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 可积

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且恒不为零，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 可积

证明 (1) 考虑振幅放缩：

$$\left|\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}\right|=\left|\frac{f(x'')-f(x')}{f(x')f(x'')}\right|\leq\frac{1}{m^2}\omega_i^f$$

(2) 由于连续，能找到最小值，可转换为 (1)

定理 6.7 (复合 (较难，重点！))

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积，且 $a\leq\varphi(t)\leq b, t\in[\alpha,\beta]$，则 $f(\varphi(t))$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，因此有界且一致连续。设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，$\forall\epsilon,\exists\delta,\forall x',x''\in[a,b]$，若 $|x'-x''|<\delta$ 就有 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$。由于 φ 可积，存在分割 T，使得 $\sum\limits_{\omega_i^\varphi\geq\delta}\Delta t_i<\epsilon$，因此

$$\begin{aligned}\sum_T\omega_i^{f\circ\varphi}\Delta t_i&=\sum_{\omega_i^\varphi\geq\delta}\omega_i^{f\circ\varphi}\Delta t_i+\sum_{\omega_i^\varphi<\delta}\omega_i^{f\circ\varphi}\Delta t_i\\&\leq 2M\sum_{\omega_i^\varphi\geq\delta}\Delta t_i+\epsilon\sum_{\omega_i^\varphi<\delta}\Delta t_i\\&<2M\epsilon+(\beta-\alpha)\epsilon=\epsilon'\end{aligned}$$

6.1.4 定积分的保号性

定理 6.8 (定积分保号性)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(x)\geq 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 当且仅当 $f(x)\equiv 0$

练习 6.8 等于 0 的推广 (1) 重点:$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,且对任意满足 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$ 的连续函数 $g(x)$ 有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$f(x)$ 为常值函数

(2) 重点 (ZJU2020)：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，$f(a)=0$，对 $\forall x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\geq|f'(x)|$，证明：$f(x)\equiv 0$

证明 (1) 取 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，显然 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$ 满足条件，此时

$$\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\left(f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)=0$$

(2) 可证明 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=0,\forall x\in[a,b]$，则考虑 $g(x)=\int_a^x|f(t)|\mathrm{d}t$，有

$$g(x)\geq\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t\geq\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|=|f(x)|=g'(x)$$

因此得到 $(e^{-x}g(x))'=e^{-x}(g'(x)-g(x))\leq 0$，即 $e^{-x}g(x)$ 单调减，而 $e^{-a}g(a)=0$，且 $e^{-x}g(x)\geq 0$，综上得到 $g(x)\equiv 0$

练习 6.9 零点问题 (1)$f(x)$ 为 $[0,\pi]$ 上连续函数，且 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，证明 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上至少有两个零点。

(2)$f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\cdots=\int_a^b x^nf(x)\mathrm{d}x=0$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上至少有 $n+1$ 个零点

证明 (1) 反设无零点，则 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 不变号，而 $\sin x$ 也不变号，因此与 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$ 矛盾，因此至少有一个零点。若 $f(x)$ 只有一个零点 ξ，则 $f(x)$ 在 $(0,\xi),(\xi,\pi)$ 内不变号，由于 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$，因此在上述两个区间符号相反，而 $\sin(x-\xi)$ 也仅在 ξ 为 0，$(0,\xi),(\xi,\pi)$ 符号相反，因此

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-\xi)\mathrm{d}x=\cos\xi\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x-\sin\xi\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$$

这与 $f(x)\sin(x-\xi)$ 非零矛盾，因此 $f(x)$ 至少有两个零点

(2) 反设 $f(x)$ 在 (a,b) 上至多 n 个零点，则其最多改变 n 次符号。由于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，得到 $f(x)$ 在 (a,b) 至少改变一次符号，一定有能从 n 个零点中找出 k 个零点 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 满足 $f(x)$ 在 $(a,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_k,b)$ 上不变号，且在相邻区间变号，而 $g(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$ 有同样的性质，于是 $f(x)g(x)$ 不变号，但 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，这显然矛盾。

6.1.5 积分中值定理

定理 6.9 (积分第一中值定理)

$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 不变号，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

证明 不妨设 $g(x)\geq 0$，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，设 M,m 分别是最大值和最小值，则 $mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$，因此得到 $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，根据介值性可知 (具体讨论略去)。

推论 6.1 (第一中值定理的推广)

若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积 (有上下确界但不一定连续)，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 不变号，M,m 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上下确界，则 $\exists\eta\in[m,M]$(不一定能为函数值 $f(\xi)$) 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\eta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

练习 6.10 第一中值定理 (技巧较强) $f(x)$ 是 $[0,1]$ 连续函数，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0$

证明 考虑 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，想使用积分第一中值定理可证 $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=0$，则可推出 $F(\xi)=0$。考虑 $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，交换积分顺序得到 $\int_0^1\mathrm{d}t\int_t^1 f(t)\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)f(t)\mathrm{d}t=0$

定理 6.10 (积分第二中值定理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 单调，则：(记忆方式：非负情况取最大)

- 若 $g(x)$ 单增非负：$\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$
- 若 $g(x)$ 单减非负：$\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$

- 若 $g(x)$ 单调：$\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$

♡

证明 只证明 (3) 的特殊情况：设 $f(x)$ 连续，$g(x)$ 连续可微且单调

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b g(x)\mathrm{d}(F(x)) = g(x)F(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x \\ &= g(b)F(b) - g(a)F(a) - F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x \\ &= g(a)[F(\xi) - F(a)] + g(b)[F(b) - F(\xi)] \\ &= g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

笔记 第二中值定理证明过于繁琐，这里不给出全部，只给出最后一种特殊情况的证明。其最大的应用是证明反常积分的 Abel 和 Dirichlet 判别法。

6.2 三角函数定积分计算

6.2.1 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上三角函数积分公式

定理 6.11 ($[0,\frac{\pi}{2}]$ 三角函数积分)

设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$

♡

证明 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则左侧为 $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t, \sin t)(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t, \sin t)\mathrm{d}t$

练习 6.11 重要练习结论 (1) 证明：$\forall k$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^k x}{\sin^k x + \cos^k x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^k x}{\sin^k x + \cos^k x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\tan^k x} = \frac{\pi}{4}$

(2) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\tan x\mathrm{d}x$

(3) 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2022})}$

(4) 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{4+x^2}\mathrm{d}x$

证明 (1) 根据对称性可知 $2S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$，因此 $S = \frac{\pi}{4}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x = 0$

(3) 设 $x = \tan t$，得到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{2022} x}\mathrm{d}t$，用 (1) 结论可知为 $\frac{\pi}{4}$

(4) 令 $x = 2\tan t$，得到 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(2\tan t)}{4\sec^2 t} 2\sec^2 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\ln 2$

定理 6.12 (Wallis 推广)

$I(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$，则 $I(m,n)=I(n,m)$，且

$$I(m,n)=\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)=\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & m,n\text{不全为偶数}\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\dfrac{\pi}{2}, & m,n\text{均为偶数}\end{cases}$$

练习 6.12 基础练习 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin^2 x\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\cos^5 x\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$

解 (1)$I(3,2)=\dfrac{2!!\cdot 1!!}{5!!}=\dfrac{2\cdot 1}{5\cdot 3\cdot 1}=\dfrac{2}{15}$

(2)$I(4,3)=\dfrac{3\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}=\dfrac{2}{35}$

(3)$I(3,5)=\dfrac{2\cdot 4\cdot 2}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}=\dfrac{1}{24}$

(4)$I(2,4)=\dfrac{1\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{32}$

6.2.2 $[0,\pi],[0,2\pi]$ 上三角函数积分

定理 6.13 (对称性的积分)

若 $f(x)$ 关于 $(x_0,0)$ 中心对称，则 $\int_{x_0-a}^{x_0+a}f(x)\mathrm{d}x=0$。若 $f(x)$ 关于 $x=x_0$ 轴对称，则 $\int_{x_0-a}^{x_0+a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{x_0-a}^{x_0}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{x_0}^{x_0+a}f(x)\mathrm{d}x$

笔记 若 $f(x),g(x)$ 都关于 $x=x_0$ 轴对称，则 $f(x)g(x)$ 也关于 $x=x_0$ 轴对称。$f(x)$ 轴对称，$g(x)$ 中心对称，则 $f(x)g(x)$ 中心对称。$f(x),g(x)$ 都中心对称，则 $f(x)g(x)$ 轴对称。

定理 6.14 ($[0,\pi]$ 上 Wallis 公式推广)

对任意非负整数 m,n，有

$$J(m,n)=\int_0^{\pi}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ 2I(m,n), & n\text{为偶数}\end{cases}$$

注意这里 $J(m,n)\neq J(n,m)$

证明 根据 $\sin^m x\cos^n x$ 在 n 为偶关于 $\dfrac{\pi}{2}$ 轴对称，n 为奇时中心对称。

定理 6.15 ($[0,2\pi]$ 上 Wallis 公式推广)

对任意非负 m,n，有

$$K(m,n)=\int_0^{2\pi}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m,n\text{不全为偶数}\\ 4I(m,n), & m,n\text{均为偶数}\end{cases}$$

这里 $K(m,n)=K(n,m)$

练习 6.13$(0\sim\pi)$ **上的计算** (1)$\int_0^\pi \cos^3 x\sin^2 x\mathrm{d}x$ (2)$\int_0^\pi \cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x$ (3)$\int_0^\pi \sin^3 x\cos^5 x\mathrm{d}x$ (4)$\int_0^\pi \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$

解 (1)$\cos x$ 是奇数幂，因此为 0

(2) 偶数幂，因此 $2I(4,3)=2\dfrac{3\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}=\dfrac{4}{35}$

(3) 奇数，为 0

(4) 偶数幂，但 m,n 均为偶数，因此结果为 $\dfrac{\pi}{16}$

练习 6.14$(0\sim 2\pi)$ **上的计算** (1)$\int_0^{2\pi}\cos^3 x\sin^2 x\mathrm{d}x$ (2)$\int_0^{2\pi}\cos^2 x\sin^3 x\mathrm{d}x$ (3)$\int_0^{2\pi}\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$

解 (1) 不全为偶，因此为 0 (2)0 (3) 均为偶数，结果为 $\dfrac{\pi}{8}$

笔记 周期函数的积分区域可以转换至任意周期区间，因此其他区间也可计算。

练习 6.15 非标准区间 (1)$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^4 x\sin^4 x\mathrm{d}x$ (2)$\int_{-\pi}^{3\pi}\sin^5 x\cos^6 x\mathrm{d}x$ (3)$\int_{-\pi}^{0}\cos^3 x\sin^2 x\mathrm{d}x$ (4)$\int_{-\pi}^{0}\cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x$ (5)$\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$ (6)$\int_0^{\pi}|\cos^5 x|\mathrm{d}x$

解 (1)$2J(4,4)=4I(4,4)=\dfrac{3}{64}\pi$

(2) 先转换到 $[0,4\pi]$，再变成 2 倍的 $[0,2\pi]$，非全为偶，因此结果为 0

(3) 偶函数，转换为 $\int_0^\pi \cos^3 x\sin^2 x\mathrm{d}x=0$

(4) 奇函数，转换为 $-\int_0^\pi \cos^4 x\sin^2 x dx=-2I(4,3)=-\dfrac{4}{35}$

(5) 要看 sin 在 $x=\pi$ 的对称性，其是中心对称，因此等价于 $\int_0^\pi \sin^2 x\cos^4 x dx=\dfrac{\pi}{16}$

(6) 绝对值肯定轴对称，因此 $2I(5,0)=\dfrac{16}{15}$

练习 6.16 其他题目 证明：$\int_0^{2\pi} f(a\sin x+b\cos x)\mathrm{d}x=2\int_0^\pi f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x$

证明 根据 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi)$，这里 $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。因此

$$\int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+y))\mathrm{d}x=\int_y^{2\pi+y} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\mathrm{d}x$$

6.2.3 区间再现公式

定理 6.16 (区间再现)

$f(x)$ 为连续函数，$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

证明 令 $x=\pi-t$，得到 $I=\int_\pi^0(\pi-t)f(\sin t)(-\mathrm{d}t)=\pi\int_0^\pi f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^\pi tf(\sin t)\mathrm{d}t$，因此得到 $I=\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin t)\mathrm{d}t$

练习 6.17 区间再现公式的应用 (1)$\int_0^\pi x\ln\sin x\mathrm{d}x$ (2)$\int_0^\pi \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ (3)$\int_0^\pi \dfrac{x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

解 (1) 变为 $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x dx=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$

(2)$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos x|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$

(3)$I=\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+1}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\tan x)}{\tan^2 x+2}=\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

(4) 本题区间比较麻烦，不能用区间再现。可尝试用三角变换：$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}xd(\tan x)$，用分部积分得到

$$\frac{1}{2}x\tan x\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\ln\cos x\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

笔记 上面几个虽然并非严格的 $xf(\sin x)$ 形式，但是也可以使用区间再现。

6.2.4 Euler 积分

练习 6.18Euler 积分 (1)Euler 积分:$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2$ (2) 推论:$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2,\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan x\mathrm{d}x=0,\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\pi\ln 2$

解 (1) 该积分是瑕积分, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x+\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\cos x\mathrm{d}x$,根据倍角公式得到

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{2}\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\ln 2=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{4}\ln 2=\frac{1}{2}I-\frac{\pi}{4}\ln 2$$

因此得到 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

笔记 要证明 Euler 积分收敛，只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln\sin x=0$

练习 6.19Euler 积分的应用 (1)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot x\mathrm{d}x$ (2)$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ (3)$\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x$ (4)$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x$

解 (1)$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}(\ln\sin x)=x\ln\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2$

(2) 令 $x=\sin t$，得到 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

(3) 令 $x=\sin t$，得到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin t}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cot t\mathrm{d}t$，即 (1)

(4) 注意 $\cot\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$(或者可以当场对 $1-\cos x$ 展开)，因此 $I=\int_0^{\pi}x\cot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cot(t)\mathrm{d}t$，变为 (1)

6.2.5 Dirichlet 积分

定理 6.17 (Dirichlet 积分)

Dirichlet 积分 $\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x$。

推论：$\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\pi,\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n)x}{\sin x}\mathrm{d}x=0,\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi$ ♡

证明 (1)Dirichlet：关键在于 $\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2}$，从而得到：

$$\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos kx\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

(2) 推论：第一个就是把分母 2 拿走，第二个 (分子奇数情况) 取 $t=2x$，第四个用对称性

(3) 第三个设 $I_n=\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned}I_n-I_{n-1}&=\int_0^\pi \frac{\sin 2nx-\sin(2n-2)x}{\sin x}dx=\int_0^\pi \frac{2}{\sin x}(\cos\frac{4n-2}{2}x\cdot\sin\frac{2n-(2n-2)}{2}x)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^\pi \cos(2n-1)x\mathrm{d}x=\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)x\Big|_0^\pi=0\end{aligned}$$

而 $I_1=0$，因此 $I_n=0$

6.2.6 其他几个常见三角积分

练习 6.20 几个常见三角分数积分 (1)$\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}dx$ (2)$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}$, $(-1<a<1)$

解 (1) 上下同乘 $\sec^2 x$，得到 $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+\tan^2 x}dx=\int \frac{d(\tan x)}{2\tan^2 x+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+c$，注意 $\tan x$ 在 $\dfrac{\pi}{2}$ 是间断的！根据对称性转换为 $I=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x)|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}(\frac{\pi}{2}-0)=2\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(2) 具体的不定积分计算见不定积分一节,是非常经典的积分。$I=2\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x}=\frac{4}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{x}{2}|_0^\pi$，显然 $x=\pi$ 为间断点，使用对称性非常正确！因此结果为 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$

笔记 一定要注意函数的连续性，用对称性转换。因此能用对称性的一定要优先用对称性。上面两个题目也是重要的结论。

6.3 积分 (不) 等式

6.3.1 整体放缩

练习 6.21 几个简单积分放缩 证明 (1)$1<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}$ (2)$\dfrac{2}{9}\pi^2<\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x}{\sin x}\mathrm{d}x<\frac{1}{3}\pi^2$ (3)$3\sqrt{e}<\displaystyle\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}<6$

证明 (1) 根据 $f'(x)=\dfrac{x-\tan x}{x^2\sec x}$ 可知函数单减，因此

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}<f(0)=1$$

(2) 根据导数可知单调增，因此

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}\pi\le\frac{2x}{\sin x}\le f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

(3)$f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$，因此 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}=f(e)\le f(x)\le f(e^2)=\dfrac{2}{e}$

6.3.2 同区域单调性放缩

练习 6.22 几道经典同区域相减 (1)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格增的连续函数，证明：$\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x>\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(2) 证明 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ (3) 证明 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x>0$

证明 (1) 等价于证明 $\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\mathrm{d}x>0$，进行有目的性的换元，分为两段，用 t 表示 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间的距离：

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{b-a}{2}}^0 (-t) f(\frac{a+b}{2}-t)(-\mathrm{d}t)+\int_0^{\frac{b-a}{2}} t f(t+\frac{a+b}{2})\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{b-a}{2}} t\left[f(t+\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2}-t)\right]\mathrm{d}t>0
\end{aligned}$$

(2) 等价于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x<0$，而 $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 关于 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 中心对称，且 $\frac{1}{1+x^2}$ 单减。因此令 $u=x-\frac{\pi}{4}$：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin u}{1+(\frac{\pi}{4}+u)^2}\mathrm{d}u \\
&= \sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+(\frac{\pi}{4}+x)^2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+(\frac{\pi}{4}-x)^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{(\frac{\pi}{4}+x)^2}-\frac{1}{(\frac{\pi}{4}-x)^2}\right)\sin x\mathrm{d}x<0
\end{aligned}$$

练习 6.23 一道特殊题 (1) 证明 $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x>\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

6.3.3 利用 Newton-Leibniz 公式

定理 6.18 (Newton-Leibniz 放缩)

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续可微函数，则对 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ 有 $f(x_2)=f(x_1)+\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\mathrm{d}x$，因此

$$|f(x_2)|\le|f(x_1)|+\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$$

练习 6.24 几道经典题 下面均假设 $f(x)$ 在区间上连续可微

(1) 证明 $|f(0)|\le\frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x$

(2) 经典：证明 $|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$

(3) 证明 $|f(x)|\le\int_0^1 (|f(x)|+|f'(x)|)\mathrm{d}x$

(4) 重点：证明 $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\le\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$

证明 (1) 用积分第一中值定理可知 $\frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x=|f(\xi)|$，因此得证

(2)(3) 同理

(4) 设 $|f(x_0)|=\min\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]}|f(x)|$，则 $|f(x_0)|=2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x_0)|\mathrm{d}x\le 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x$，因此

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|f(x_0)+\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f'(x)\mathrm{d}x\right|\le 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|\mathrm{d}x$$

同理取 $[\frac{1}{2},1]$ 的部分可得到

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f'(x)|\mathrm{d}x$$

因此两式相加除以 2 即得到结果。

6.3.4 利用 Cauchy-Schwarz 不等式

定理 6.19 (Cauchy-Schwarz 不等式)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

推论 6.2

若 $f(x),g(x)$ 非负可积，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ge \left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

练习 6.25 一些经典题目 (1)$f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可微，$f(1)=f(0)=1$，证明 $\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x \ge 1$

证明 (1) 直接根据 Cauchy-Schwarz 不等式得到 $\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x \ge \left[\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 \ge \frac{1}{4}$

6.3.5 利用微分中值定理

练习 6.26 几道具体分段题 (1) 一阶导：$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导，$f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\le 1$，证明 $1<\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x<3$

(2) 二阶导：

证明 (1) 左侧：进行分段处理，对于 $[0,1],[1,2]$ 分别有

$$\begin{cases} f(x)=f(0)+f'(\xi)x \ge 1-x, & x\in[0,1] \\ f(x)=f(2)+f'(\eta)(x-2) \ge x-1, & x\in[1,2] \end{cases}$$

因此 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \ge \int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=1$，且等号取到时在 1 处不可导，故严格。同理可证明 $f(x)\ge h(x)$，其中 $h(x)$ 为

$$h(x)=\begin{cases} 1+x, & x\in[0,1] \\ 3-x, & x\in[1,2] \end{cases}$$

因此 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \le 3$

练习 6.27 利用一阶导数研究积分 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续可微，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$，证明

(1) 若 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$，则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{M}{2}(b-a)^2$

(2) 若 $f(a)=f(b)=0$，则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{M}{4}(b-a)^2$

(3) 若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$

证明 (1) 设 $f(a)=0$，则 $f(x)=f'(\xi)(x-a)$，因此 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\le M\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2$

(2) 若 $f(a)=f(b)=0$，则分两段在 a,b 展开

$$\begin{cases}\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}\\ \displaystyle\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}\end{cases}$$

(3) 若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则分两段在 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 展开，和 (2) 类似可得到结果

练习 6.28 利用二阶导数研究积分 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可微，$|f''(x)|\le M$，证明

(1) 若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{24}(b-a)^3$

(2) 若 $f(a)=f(b)=0$，则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{12}(b-a)^3$

证明 (1) 在 $\frac{a+b}{2}$ 处展开：

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

显然一阶导数项中心对称，故消去，二阶导数项用积分第一中值定理可以得到：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$，经过放缩即结论。

第 7 章 反常积分

一般的定积分都定义于闭区间中，但很多实际问题中的积分可能区间无穷或者某点不连续，这就需要引出无穷积分和瑕积分的概念。

7.1 反常积分理论

7.1.1 无穷积分与瑕积分概念

定义 7.1 (无穷积分与瑕积分)

- 无穷积分：设 f 在 $[a,+\infty)$ 有定义，若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则记其为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。
- 瑕积分：f 在 $(a,b]$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，若 $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则记其为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，

笔记 如果 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq\infty$，则不能称 a 为 $f(x)$ 的瑕点，比如 $\int_0^1 \frac{x}{1-e^x}\mathrm{d}x$，0 不是其瑕点，其就是个定积分。

定理 7.1 (反常积分 Leibniz 公式)

- 无穷积分：设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，且 f 有原函数 F，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty)-F(a)$
- 瑕积分：若 F 是 f 在 $(a,b]$ 的一个原函数，a 是瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a+0)$

定理 7.2 (定义判敛)

- 无穷积分：$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\forall\epsilon,\exists A,\forall u\geq A$，$|\int_u^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x|<\epsilon$
- 瑕积分：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\forall\epsilon,\exists\delta,\forall u\in(a,a+\delta)$ 有 $|\int_a^u f(x)\mathrm{d}x|<\epsilon$

证明 根据收敛的定义可知。

定理 7.3 ($\frac{1}{x^p}$ 的反常积分)

$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 在 $p<1$ 时收敛，$p\geq 1$ 时发散。$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，$p\leq 1$ 时发散

证明 只讨论 $[1,+\infty)$ 上的，直接积分：

$$\int_1^u \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{1-p}(u^{1-p}-1), & p\neq 1\\ \ln u, & p=1\end{cases} \Rightarrow \lim_{u\to+\infty}\int_1^u\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ +\infty, & p\leq 1\end{cases}$$

7.1.2 反常积分比较判别法

定理 7.4 (Cauchy 收敛准则)

- 无穷积分：$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\forall \epsilon, \exists G \geq a, \forall u_1, u_2 > G$，满足
$$|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x| < \epsilon$$
- 瑕积分：$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 的瑕点为 a，则其收敛当且仅当 $\forall \epsilon, \exists \delta, \forall u_1, u_2 \in (a, a+\delta)$ 满足
$$|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x| < \epsilon$$

♡

定义 7.2 (绝对收敛与条件收敛)

若 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛 (b 可以为 ∞)，则称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛；若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛但不绝对收敛，则称其条件收敛。

♣

定理 7.5 (绝对收敛)

- 无穷积分：若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，且有下述等式
$$|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$$
- 瑕积分：设 f 瑕点为 a，f 在 $(a,b]$ 任一内闭区间上可积，则当 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，且
$$|\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x| \leq \int_a^{b} |f(x)|\mathrm{d}x$$

♡

证明 用 Cauchy 收敛准则转换至有限区间，再根据积分绝对值放缩可得到结论。

定理 7.6 (比较判别法)

下面考虑 $f(x)$ 非负，则有

- 无穷积分：f, g 在任意有限区间可积，且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$，当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛
- 瑕积分：f, g 在内包有限闭区间可积，且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$，当 $\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛

♡

推论 7.1 (等价无穷小判别)

- 无穷积分：f 在任意有限闭区间可积，且 $x \to \infty$ 时 $f(x) \sim \frac{\lambda}{x^p}$，若 $p > 1$ 则收敛，$p \leq 1$ 则发散
- 瑕积分：f 在任意闭区间可积，$x \to a$ 时 $f(x) \sim \frac{\lambda}{(x-a)^p}$，若 $p < 1$ 则收敛，$p \geq 1$ 则发散

♡

✍ **练习 7.1 基础训练** 判断 (1) $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^p}\mathrm{d}x$ (2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q}\mathrm{d}x$ (3) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\mathrm{d}x$

解 (1) 0 不是瑕点，只需考虑 ∞。若 $p > 0$，$\frac{x \arctan x}{1+x^p} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{p-1}}$，因此要求 $p > 2$，此时 x 不是瑕点。若 $p = 0$，显然发散。若 $p < 0$，∞ 显然发散。

(2)$0,+\infty$ 均有可能是瑕点。先考虑 $p=q$，此时 $\frac{1}{x^p+x^q}=\frac{1}{2x^p}$，$\infty$ 处要求 $p>1$，但是 0 处要求 $p<1$，因此不可能成立。若 $p<q$，则 $x\to 0$ 时 $\frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^p}$，要求 $p<1$，同理 $x\to\infty$ 时要求 $q>1$

(3)$\frac{x^p}{1+x^q}=\frac{1}{x^{-p}+x^{q-p}}$，当 $-p<1<q-p$ 或者 $q-p<1<-p$ 时收敛，其余情况发散。

推论 7.2 (对数、指数比较判别法)

对 $\forall\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha\ln x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-x}=0$:

- $x\to\infty$ 时，等价视为 $\ln x\sim x^\epsilon, e^x\sim x^{+\infty}$
- $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x, e^x-1\sim x, \ln x\sim\frac{1}{x^\epsilon}, e^x\sim 1$

练习 7.2 对数、指数比较判别训练 判断收敛性：(1)$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1-e^x}\mathrm{d}x$ (2)$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$ (3)$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\mathrm{d}x$(重点！)

解 (1) 由于 0 处极限为 1，不是瑕点。∞ 处 $e^x\sim x^\infty$，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\frac{x}{1-e^x}=0$，根据比较判别法可知收敛

(2)0 处等价于 $\frac{1}{x^{p-1}}$，要求 $p<2$，$+\infty$ 处等价于 $\frac{1}{x^p}$，要求 $p>1$，因此 $1<p<2$ 时收敛

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x\cdot x^{1/2}}{e^x}=0$，因此 0 处收敛。$\infty$ 处 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\frac{\ln x}{e^x}=0$，因此 ∞ 处也收敛。

练习 7.3 对数比较判别进阶 判断 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 的敛散性

解 $p>1$ 肯定收敛，$p<1$ 肯定发散。若 $p=1$，则积分变为 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$，要求 $q>1$。若 $p=q=1$，则同理要求 $r>1$。

练习 7.4 变号情况：绝对收敛 + 比较判别法 判断敛散性：(1)$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x$

解 (1)$\left|\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x}\right|\sim\frac{1}{x^2}$，因此绝对收敛

练习 7.5 三角双瑕点训练 重点：$|q|<1$，判断 $\int_0^\pi\frac{\sin^{p-1}x}{|1+q\cos x|^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性

解 0 处 $\frac{\sin^{p-1}x}{|1+q\cos x|^p}\sim\frac{x^{p-1}}{|1+q|^p}$，要求 $p-1<1$。π 处 $\frac{\sin^{p-1}x}{|1+q\cos x|^p}=\frac{\sin^{p-1}(\pi-x)}{|1+q\cos x|^p}\sim\frac{(\pi-x)^{p-1}}{|1+q|^p}$，要求 $p-1<1$

7.1.3 Dirichlet 与 Abel 判别法

定理 7.7 (Dirichlet 与 Abel 判别法)

- Dirichlet 判别法：若 (1)$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,+\infty)$ 有界 (2)$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to\infty$ 时单调趋于 0，则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。
- Abel 判别法：若 (1)$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 (2)$g(x)$ 单调有界，则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

练习 7.6 在 $\sin x$ 反常积分判敛的应用 判断以下带三角函数的反常积分的绝对收敛性与条件收敛性：

1. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$：$p>0$ 就收敛，$p>1$ 绝对收敛，$0<p\le 1$ 条件收敛
2. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$：$1<p<2$ 时绝对收敛，$0<p\le 1$ 时条件收敛，其余发散

3. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$：$1<p<2$ 时绝对收敛，$0<p\le 1$ 时条件收敛，其余发散
4. 换元：$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty}x\sin x^4\mathrm{d}x, \int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$
5. $\int_0^{+\infty}x^p\sin x^q\mathrm{d}x$
6. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$

证明 (1)$p>1$ 时 $|\frac{\sin x}{x^p}|\le\frac{1}{x^p}$ 因此绝对收敛。$0<p\le 1$ 时根据 Dirichlet 判别法可知收敛，下证不绝对收敛，根据 $|\sin x|\ge\sin^2 x$，得到

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^p}-\frac{\cos 2x}{x^p}\right)$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 不收敛，故 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|$ 在 $0<p\le 1$ 时不收敛。$p\le 0$ 时，取 $u_1=2k\pi, u_2=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，则

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\right|\ge\int_{u_1}^{u_2}\sin x\mathrm{d}x=1$$

显然发散。

(2) 分两段，这里考虑 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$，当 $x\to 0$ 时 $\frac{\sin x}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}$，因此 $p<2$ 时收敛且绝对收敛，$p\ge 2$ 时发散。结合 (1) 得到 $1<p<2$ 时绝对收敛，$0<p\le 1$ 时条件收敛，其余发散

(3)$\frac{\cos x}{x^p}\sim\frac{1}{x^p}$，结合 (1) 得到 $0<p<1$ 时条件收敛，其余发散。

(4) 前三个做 $t=x^2$ 换元，第一个变成 $\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$，因此条件收敛。第二个 $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$ 同理条件收敛。第三个换元得到 $\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\sin t^2\mathrm{d}t$，变成第一个，故条件收敛。第四个做 $t=\frac{1}{x}$ 换元得到 $\int_{+\infty}^1 -t^{p-2}\sin t\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t$，$2-p>1$ 时绝对收敛，$0<2-p\le 1$ 条件收敛。

(5)$q=0$ 时显然无法保证 $0,+\infty$ 同时收敛，原因在于 0 要求 $p<1$，∞ 要求 $p>1$。$q>0$ 时，令 $t=x^q$，得到

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin x^q\mathrm{d}x=\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\mathrm{d}t$$

转换为前面的问题。

笔记 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛情况要当作结论背下来。

练习 7.7 三角有理式敛散性判别 判断如下几道三角函数有理式的敛散性 (难度较高):

(1) 判断 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{2x+3\sin x}\mathrm{d}x$ 的敛散性

(2) 判断 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x$ 的敛散性

(3) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin x^2}\mathrm{d}x$ 发散

解 (1) 该积分没有瑕点，只需要考虑 ∞，其敛散性等价于 $\int_2^{\infty}\frac{\sin x}{2x+3\sin x}\mathrm{d}x$。这里必须拆项 (不能直接放缩原因在于分母阶数不够)

$$\frac{\sin x}{2x+3\sin x}=\frac{2x\sin x}{2x(2x+3\sin x)}=\frac{(2x+3\sin x)\sin x-3\sin^2 x}{2x(2x+3\sin x)}=\frac{\sin x}{2x}-\frac{3\sin^2 x}{2x(2x+3\sin x)}$$

考虑前者，显然 $\frac{1}{2x}$ 单调递减趋于 0，而

$$\left|\int_2^u\sin\mathrm{d}x\right|=|\cos 2-\cos u|\le 2$$

根据 Dirichlet 判别法知前者收敛。后者先进行放缩

$$0 \le \frac{3\sin^2 x}{2x(2x+3\sin x)} \le \frac{3}{2x(2x-3)}$$

在无穷处等价于 $\frac{1}{x^2}$，根据比较原则得到收敛。综上收敛

7.1.4 函数在无穷远处的性质

一、若极限存在，则必为 0

练习 7.8 $f(x)$ 在 $[a,u]$ 可积，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $A=0$

证明 若 $A\neq 0$，不妨设 $A>0$，则 $\exists M\ge a, \forall x\ge M, f(x)\ge \frac{A}{2}$，而 $\int_a^{+\infty}\frac{A}{2}\mathrm{d}x$ 发散，根据比较判别法可知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散

练习 7.9 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续可微，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

证明 由于 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，因此 $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f'(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to+\infty} f(u)-f(a)$ 存在，根据极限存在可知极限为 0(前一题结论)。

练习 7.10 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则存在递增趋于 $+\infty$ 的数列 x_n，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$

证明 根据 Cauchy 收敛准则，取 $\epsilon_1=1, \exists A_1', A_1''=A_1'+1$，使得 $|\int_{A_1'}^{A_1''} f(x)\mathrm{d}x|<\epsilon_1=1$。同理对 $\epsilon_2=\frac{1}{2}, \exists A_2'\ge A_1'', A_2''=A_2'+1$，使得 $|\int_{A_2'}^{A_2''} f(x)\mathrm{d}x|<\epsilon_2=\frac{1}{2}$。以此类推，根据积分第一中值定理 $\exists x_i\in[A_i', A_i'']$ 使得 $|f(x_n)|=|\int_{A_n'}^{A_n''} f(x)\mathrm{d}x|$，显然 x_n 单增，$|f(x_n)|<\frac{1}{n}\to 0$。

二、极限不一定存在：光满足非负、连续、可导等并不能说明极限存在，甚至不一定有界

练习 7.11 举例说明 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a,u]$ 非负可积，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $f(x)$ 不一定有界。

解 $f(x)=\begin{cases} x, & x\text{为整数} \\ 0, & x\text{不为整数} \end{cases}$，如果要求恒正则取 $g(x)=f(x)+e^{-x}$

练习 7.12 举例说明 $f(x)$ 为 $[a,+\infty)$ 上连续函数，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

解 例如 $\int_1^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$，令 $t=x^2$ 以及 Dirichlet 判别法可知收敛，但是极限不为 0。

练习 7.13 举例说明 $[a,+\infty)$ 恒正的连续可微函数，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $f(x)$ 不一定有界

解 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$

三、获得极限存在：虽然非负、连续、可导不能推出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，但一致连续和单调可以推出该性质。

练习 7.14 经典老题：一致连续 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

证明 反设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$，则 $\exists\epsilon_0$ 以及趋于无穷的 x_n 使得 $|f(x_n)|\geq\epsilon_0$，对上述 ϵ_0，根据一致连续 $\exists\delta,\forall x',x''\in[a,+\infty)$ 只要 $|x'-x''|\leq\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\epsilon_0}{2}$。对每个 x_n，当 $x\in[x_n,x_n+\delta]$ 时，$|f(x)-f(x_n)|<\frac{\epsilon_0}{2}$，从而 $f(x)$ 在 $[x_n,x_n+\delta]$ 不变号，且

$$|f(x)|\geq|f(x_n)|-|f(x)-f(x_n)|>\frac{\epsilon_0}{2}$$

对 $\forall M>a,\exists N,x_N>M$ 满足 $|\int_{x_N}^{x_N+\delta} f(x)\mathrm{d}x|=\int_{x_N}^{x_N+\delta}|f(x)|\mathrm{d}x\geq\int_{x_N}^{x_N+\delta}\frac{\epsilon_0}{2}\mathrm{d}x=\frac{\epsilon_0\delta}{2}$ 不趋于 0，根据 Cauchy 收敛准则逆否命题可知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，矛盾。

练习 7.15 单调 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$。

笔记 反之不一定，即使有 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$，也不一定有 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，例如 $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

7.2 反常积分的计算

7.2.1 两个常用的基础反常积分

练习 7.16 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x,\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$，其中 $a>0$

解 直接写不定积分即可 (具体计算见配对积分法一节)，$I_1=\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)\Big|_0^{+\infty}=\frac{a}{a^2+b^2}$，同理得到 $I_2=\frac{b}{a^2+b^2}$

练习 7.17 对数配对积分 (1) 计算 $I_n=\int_0^1(\ln x)^n\mathrm{d}x$ (2) 计算 $I(m,n)=\int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x$

解 (1) 做一次分部积分得到 $I_n=x(\ln x)^n\Big|_0^1-\int_0^1 n(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x=-nI_{n-1}$，而 $I_1=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_0^1-x\Big|_0^1=-1$，综上得到 $I_n=(-1)^n n!$

(2)$I(m,n)=-\frac{n}{m+1}I(m,n-1)$，结合 $I(m,0)=\frac{1}{m+1}$ 可得 $I(m,n)=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$

7.2.2 富如兰尼积分

定理 7.8 (两侧极限存在则无穷积分收敛)

重点：$f(x)$ 在任意有限区间可积，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A,\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$，给定 $a\in\mathbb{R}$，则下面积分收敛，且值为 $a(A-B)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(a+x)-f(x)]\mathrm{d}x$$

♡

证明 根据定义，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{M\to+\infty}\lim\limits_{m\to-\infty}\int_m^M[f(a+x)-f(x)]\mathrm{d}x$，对有限区域积分做如下变换：

$$I=\int_m^M[f(a+x)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_{m+a}^{M+a} f(x)\mathrm{d}x-\int_m^M f(x)\mathrm{d}x=\int_M^{M+a} f(x)\mathrm{d}x-\int_m^{m+a} f(x)\mathrm{d}x$$

代入 A,B，得到 $I=\int_M^{M+a}[f(x)-A]\mathrm{d}x-\int_m^{m+a}[f(x)-B]\mathrm{d}x+a(A-B)$，根据极限 $\lim\limits_{M\to+\infty}[f(x)-A]\mathrm{d}x=0$，同理 $\lim\limits_{N\to+\infty}[f(x)-B]\mathrm{d}x=0$，因此取极限得到收敛，且值为 $a(A-B)$

定理 7.9 (富如兰尼积分)

$f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 连续函数，$a,b>0$，则

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则
$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$$
2. 若 $\exists A>0$，使得 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，则
$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

证明 下面对 $I=\int_m^M\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$ 进行化简：
$$I=\int_m^M\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_m^M\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{am}^{aM}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{bm}^{bM}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{am}^{bm}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{aM}^{bM}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$
(1) 根据积分第一中值定理得到
$$\begin{cases}\displaystyle\int_{am}^{bm}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{am}^{bm}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\\ \displaystyle\int_{aM}^{bM}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(\eta)\int_{aM}^{bM}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=f(\eta)\ln\frac{b}{a}\end{cases}$$
当 $m\to0^+,M\to+\infty$ 时可代入极限，因此结果为 $[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$

(2) 由于 $\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，因此第二项 $\lim\limits_{M\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=0$，同时第一项用积分中值定理取极限得到 $f(0)\ln\frac{b}{a}$

练习 7.18 富如兰尼积分的应用 计算以下反常积分

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x$ (2) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$ (3) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x$

解 (1)$\arctan 0=0,\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$，因此积分为 $-\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$

(2)$e^0=1,e^{-\infty}=0$，因此积分为 $\ln\frac{b}{a}$

(3)$\cos 0=1$，$\int_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，因此积分为 $\ln\frac{b}{a}$

7.2.3 Dirichlet 积分

引理 7.1

设 $p>0$，则含参积分 $\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}$

证明 首先 $\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xy\mathrm{d}y$，因此
$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b e^{-px}\cos xy\mathrm{d}y$$
由于 $|e^{-px}\cos xy|\le e^{-px}$，显然 $\int_0^{+\infty}e^{-px}\mathrm{d}x$ 绝对收敛，因此 $\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos xy\mathrm{d}x,y\in[a,b]$ 一致收敛，交换积

分顺序得到

$$I=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos xy\mathrm{d}x$$

根据表格法得到：

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos xy\mathrm{d}x=-\frac{1}{p}e^{-px}\cos xy\bigg|_0^{+\infty}+\frac{y}{p^2}e^{-px}\sin xy\bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{p^2}e^{-px}\cos xy\mathrm{d}x$$

因此得到 $\dfrac{y^2+p^2}{p^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos xy\mathrm{d}y=\frac{1}{p}$

$$I=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}\mathrm{d}y=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}$$

定理 7.10 (Dirichlet 积分)

积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，进一步地，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin px}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(p)$

证明 令引理中 $a=0$，将 p 看成参数，$G(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx}{x}\mathrm{d}x=\arctan\frac{b}{p}$，由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛，e^{-px} 在固定 x 时关于 p 单调，且一致有界，根据 Abel 判别法可知 $G(p)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，从而

$$G(0)=\lim_{p\to0^+}G(p)=\lim_{p\to0^+}\arctan\frac{b}{p}=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(b)$$

特别地，$b=1$ 得到 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$

练习 7.19Dirichlet 积分的应用 计算以下反常积分：(1) 重点：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x}\mathrm{d}x$ (2) 重点：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$

(3)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x$ (4)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}\mathrm{d}x$ (5)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\mathrm{d}x$

解 (1) 做 $t=x^2$，得到 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$

(2)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$，用分部积分得到

$$I=-\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}2x=\frac{\pi}{2}$$

(3) 先分部积分得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\sin^4 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

根据 $4\sin^3 x\cos x=\sin 2x(1-\cos 2x)=\sin 2x-\dfrac{1}{2}\sin 4x$ 得到

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}(2x)-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{4x}\mathrm{d}(4x)=\frac{\pi}{4}$$

第 8 章 数项级数

8.1 数项级数基本理论

定义 8.1 (数项级数收敛)

给定数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，定义 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$ 为部分和函数，若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，否则称数项级数发散。

定理 8.1 (数项级数收敛的各种条件)

给定数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其收敛的条件：

- 必要条件 (一定能推出)：$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
- 充要条件 (Cauchy 准则)：$\forall \epsilon, \exists N, \forall m, m+p > N$ 有 $|u_{m+1} + \cdots + u_{m+p}| < \epsilon$

笔记 一般证明发散要么不满足必要条件，要么用 Cauchy 准则逆否命题

练习 8.1Cauchy 收敛准则 (1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 (2) 用 Cauchy 收敛准则证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

证明 (1)$\exists \epsilon_0 = 0, \forall N, m = N+1, m+p = 2N$，则 $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \geq \frac{1}{2} = \epsilon_0$，根据 Cauchy 逆否命题可证 (也可以用积分判别法证明)

(2) 用 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$，直接求和或者用 Cauchy 收敛准则都行

定理 8.2 (子列问题)

对于数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 有一个子列 S_{np}(p 为固定整数) 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

练习 8.2 交错子列 证明 $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} - 1) + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + (\frac{1}{6} - \frac{1}{2}) + \cdots = \ln 3$

证明 $S_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} u_k = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{3n}) - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$，配合 Euler 常数可知 $S_{3n} = \ln 3n + \gamma - \ln n - \gamma = \ln 3$

定理 8.3 (去除有限项)

去掉、增加、改变级数的有限项并不改变数项级数的收敛性。

8.2 正项级数

8.2.1 比较原则

定理 8.4 (比较原则)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，

- 非极限形式：若 $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N$ 满足 $u_n \le v_n$，则根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散
- 极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda$。当 $0<\lambda<\infty$，同敛散。$\lambda=0$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 敛推 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛。$\lambda=\infty$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散推 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

笔记 比较原则极限形式的 $0<\lambda<\infty$ 情况即可以使用等价无穷小。但在一些特殊情况下也需要用 $\lambda=0, \lambda=\infty$ 的形式。

例题 8.1 常用比较对象 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，在 $p\le 1$ 时发散

证明 用积分判别法

练习 8.3 使用等价无穷小 判断敛散性：(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$

(3) 重点：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1)$ (4) 重点：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)(a>1)$

解 (1)$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n}$，发散

(2) 和等比级数比，等价于 $(\frac{2}{3})^n\pi$，收敛

(3) 根据 $2^{\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{n}\ln 2$，发散 (注意这里用的是 $a^x \sim x\ln a - 1$)

(4) 根据 $a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2 = (a^{\frac{1}{2n}}-a^{-\frac{1}{2n}})^2 = a^{-\frac{1}{n}}(a^{\frac{1}{n}}-1)^2 \sim \frac{\ln^2 a}{n^2}$ 收敛

练习 8.4 含对数与指数 (1) 重点：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$ (2) 重点：$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ (3)$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ (4) 特殊：$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

(5) 重点：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ (6) 重点：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{e^n}$ (7)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n})$

解 对数需要用到恒等式 $a^{\ln b}=b^{\ln a}$(两侧取对数即可证明)

(1)$\frac{1}{3^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln 3}}$ 收敛

(2)$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} < \frac{1}{n^2}$ 收敛

(3)$\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}} < \frac{1}{n^2}$，收敛

(4)$\frac{1}{(\ln n)^n} < \frac{1}{2^n}$，收敛

(5)$\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，因此收敛。

(6) $\lim_{n\to\infty} n^2\frac{\ln(n+1)}{e^n}\to 0$

(7)Taylor 展开：$e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}=1+\frac{1}{n^2}-1+\frac{\pi^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})=(1+\frac{\pi^2}{2})\frac{1}{n^2}$ 收敛

笔记 要灵活使用比较判别法。有时用等价无穷小，有时直接放缩，有时乘上 n^2(一般在分母极大)，有时 Taylor 展开

练习 8.5 等价无穷小的进一步应用 (1)$a_n>0$，证明 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 敛散性相同

(2)$a_n=(1-\frac{p\ln n}{n})^n$，讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的敛散性

(3)$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 二阶连续可微，且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛

证明 (1) 取对数即 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$，故同敛散。若 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，显然 $\lim_{n\to\infty}\ln(1+a_n)\neq0$，故也发散。

(2)$a_n=e^{n\ln(1-\frac{p\ln n}{n})}=e^{n[-\frac{p\ln n}{n}+o(\frac{1}{n})]}=e^{-p\ln n}\sim\frac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时收敛，$p\le1$ 时发散。

(3) 根据 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 得到 $f'(0)=0$，根据 Lagrange 余项得到 $f(\frac{1}{n})=f'(\xi)\frac{1}{n^2}$，因此收敛

定理 8.5 (比式比较判别法)

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 为正项级数，$\exists N,\forall n\ge N$ 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛可推出 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散可推出 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散

证明 根据 $\frac{u_n}{u_N}=\frac{u_{N+1}}{u_N}\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}\le\frac{v_{N+1}}{v_N}\frac{v_{N+2}}{v_{N+1}}\cdots\frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{v_n}{v_N}$，由此推出 $u_n\le\frac{u_N}{v_N}v_n$ 只相差一个常数，因此根据一般的比较判别法可得到结论。

练习 8.6 比式比较判别法基本应用 $a_n>0,0<\alpha\le1,\beta>1$，证明：(1) 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge(1-\frac{1}{n})^\alpha$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散 (2) 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le(1-\frac{1}{n})^\beta$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

证明 (1) 根据 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge(\frac{n-1}{n})^\alpha=\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n-1)^\alpha}}$，因此根据结论发散 (2) 同理

8.2.2 比式判别法与根式判别法

前面比较判别法常用的比较对象是 $\frac{1}{n^p}$，而根式判别法与比式判别法的比较对象是等比级数。

定理 8.6 (比式判别法与根式判别法)

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，则

- 比式判别法：若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，若 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ 则发散。

- 根式判别法：若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l<1$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}>1$ 则发散。(双上极限)

证明 (1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$，则对 $\forall r\in(q,1)$，$\exists N,\forall n>N$ 有 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<r=\dfrac{r^{n+1}}{r^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 收敛，根据比式比较判别法可知。另一侧同理。

(2.1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l<1$，则 $\forall r\in(l,1)$，$\exists N,\forall n>N$ 有 $\sqrt[n]{u_n}<r$，即 $u_n<r^n$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

(2.2) 另一侧若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l>1$，则 $\forall r\in(1,l)$，存在子列 $\sqrt[n_k]{u_{n_k}}\geq r$，$u_{n_k}\geq r^{n_k}\to\infty$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

笔记 理论上根式判别法证明发散只需要证上极限，比比式条件更弱，因此更好用。而且由于 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}\leq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}\leq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 可知能用比式的一定能用根式，一定要记住 $\sqrt[n]{n!}\sim\dfrac{n}{e}$

练习 8.7 使用根式判别法 用根式判别法法证明 (1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$ (2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ (3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!3^n}{n^n}$

(4) 重点：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ (5) 重点：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}$ (6) 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n n!}{n^n}$ 的收敛性，$x\geq 0$

解 (1) 极限为 $\dfrac{1}{2}$，收敛

(2) 极限为 $\dfrac{n/e}{n}=\dfrac{1}{e}$，收敛

(3) 极限为 $\dfrac{3}{e}>1$，发散

(4) 极限为 $\sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}=\dfrac{(\frac{n}{e})^2}{\sqrt[2n]{(\frac{2n}{e})^2}}\sim\dfrac{1}{4}$

(5)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{n!(2n)!!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{n!2^n n!}$，因此根据根式判别法等价于 $2>1$。

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{x^n n!}{n^n}}=\dfrac{x}{e}$，$x\in(0,e)$ 收敛，$x\in(e,+\infty)$ 发散。当 $x=e$ 则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$，极限不趋于 0。

练习 8.8 仅能用根式判别法 (1) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛

(2) 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ 的敛散性

证明 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^{n+(-1)^n}}}=\dfrac{1}{2}<1$ 因此收敛

(2) 分母 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}=\max\{1,x^2\}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{x}{\max\{1,x^2\}}=\begin{cases}<1, & x\neq 1\\ =1, & x=1\end{cases}$$

因此 $x\neq 1$ 时收敛，$x=1$ 时发散。

练习 8.9 根式判别法上下极限 (1) 判断 $b+c+b^2+c^2+\cdots+b^n+c^n+\cdots$ 的敛散性，这里 $0<b<c<1$

解 (1) $\sqrt[n]{u_n}$ 在偶数项为 $\sqrt{c}$，奇数项为 $\sqrt{b}$，因此上极限为 $\sqrt{c}$，故收敛

8.2.3 积分判别法和拉贝判别法

定理 8.7 (积分判别法与拉贝判别法)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛最本质的充要条件为部分和函数 S_n 有界，其推论为

- 拉贝判别法 (常用于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$)：$\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}) = r > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。若 $r<1$ 则发散，$r=1$ 需要具体判定
- 积分判别法：f 是 $[1,+\infty)$ 上非负减函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛与发散

♡

证明 (1) 拉贝判别法：

收敛情况：根据条件，$\exists N, \forall n > N$ 使得 $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > r$ 得到 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \frac{r}{n}$，根据伯努利不等式：

$$(1+x)^r \geq 1 + rx, x > -1, r > 1 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)^r \geq 1 - \frac{r}{n}$$

因此 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^r = \left(\frac{n-1}{n}\right)^r = \frac{\frac{1}{n^r}}{\frac{1}{(n-1)^r}}$，显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

发散情况：$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，因此发散。

笔记 拉贝判别法更多地用于比式和根式判别法都失效的情况下。

练习 8.10 拉贝判别法 判断敛散性 (1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^n n!}$

解 (1) 显然根式判别法失效。因此设 $u_n = \frac{n^n}{e^n n!}$，使用拉贝判别法以及 $(1+\frac{1}{n})^n = e - \frac{e}{2n}$(用 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 0 处 Taylor 展开) 得到

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right] = \frac{1}{2} < 1$$

根据拉贝判别法可知发散。

8.2.4 放缩证明敛散性

练习 8.11 两个简单放缩 (1)$a_n \geq 0$，讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛性的关系

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 均收敛

证明 (1)$\sqrt{a_n+b_n} \leq \frac{1}{2}(a_n+b_n)$，根据比较定理可知

(2) 根据 Cauchy 不等式，$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2\right)$，因此收敛。$\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_n)^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2$ 即可

8.3 任意项级数

8.3.1 交错项级数

定理 8.8 (Leibniz 判别法)

若 a_n 单减趋于 0，那么交替项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

证明 设 a_n 单减趋于 0，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$，下面考虑奇偶部分和：

$$\begin{cases} S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n}) \\ S_{2n+1}=(a_1)-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n}-a_{2n+1}) \end{cases}$$

显然 S_{2n} 单增，S_{2n+1} 单减，$a_1-a_2\le S_{2n}\le S_{2n}+a_{2n+1}=S_{2n+1}\le a_1$，因此 S_{2n},S_{2n+1} 均有界，根据单调有界定理可知收敛，而奇偶子列均收敛说明 S_n 收敛。

练习 8.12 讨论下面级数的条件收敛与绝对收敛性：

(1) 重点：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ (2)$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p\ln^q n}$ (3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{x}{n}$

(4)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\arctan n}{n^x}$ (5) 重点：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi+\dfrac{1}{n^p})$ (6) 重点：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+p^2})$

解 (1)$\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}\sim\dfrac{1}{n^p}$ 因此 $p>1$ 时绝对收敛。条件收敛性只需要看是否单调，考虑 $1\ge p>0$，$f(x)=x^{p+\frac{1}{x}}$，$f'(x)=px^{p-1}x^{\frac{1}{x}}+x^px^{\frac{1}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}=x^{p-1}x^{\frac{1}{x}}(p+\dfrac{1-\ln x}{x})>0$($x$ 足够大时)，因此整体单减趋于 0。$p\le 0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\ne 0$，因此发散。

(2) 加绝对值后可以用积分判别法，在 $p>1$ 时绝对收敛，$p=1,q>1$ 绝对收敛。$p>0$，构造 $g(x)=x^p\ln^q x$，得到 $g'(x)=x^{p-1}\ln^{q-1}x(p\ln x+q)>0$($x$ 足够大)，从而 $p=1,q\le 1$ 时，$0<p<1$ 条件收敛 $p=0$ 时 $q>0$ 条件收敛，$q\le 0$ 发散。$p<0$ 发散。

(3)$x=0$ 则绝对收敛。$x\ne 0$ 时 $|(-1)^n\sin\dfrac{x}{n}|\sim\dfrac{|x|}{n}$ 发散。而 $\sin\dfrac{x}{n}$ 在 n 足够大时单调，因此条件收敛

(4) 加绝对值时等价于 $\dfrac{1}{n^x}$，因此 $x>1$ 时绝对收敛。不加绝对值时，$x<0$ 一定发散，$x>0$ 时，取 $g(y)=\dfrac{\arctan y}{y^x}$，求导发现小于 0，因此收敛

(5) 等于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^p}$，$p>1$ 绝对收敛，$0<p\le 1$ 条件收敛，$p\le 0$ 发散。

(6) 等于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+p^2}-n\pi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{p^2\pi}{\sqrt{n^2+p^2}+n}$，因此 $p=0$ 时绝对收敛，$p\ne 0$ 条件收敛。

笔记 单调性常常使用求导辅助。

8.3.2 Dirichlet 与 Abel 判别法

定理 8.9 (Dirichlet 判别法)

a_k, b_k 为两个数列，且满足 (1)$\sum_{i=1}^{k} a_i$ 有界 (2)b_k 单调趋于 0，则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛

定理 8.10 (Abel 判别法)

a_k, b_k 满足 (1)$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 收敛 (2)b_k 单调有界，则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛

笔记 Leibniz 判别法本质只是 Dirichlet 和 Abel 判别法的一个特例

练习 8.13 常用三角结论 (1) 重点：a_n 单减趋于 0，$x \neq 2k\pi$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛

(2) 重点：$x \neq k\pi$，讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ 的条件收敛和绝对收敛性

(3) 重点：讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 的条件收敛与绝对收敛性

证明 (1) 根据 $|\sum_{k=1}^{n} \cos kx| = |\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$，同理 $|\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx| = |\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$，根据 Dirichlet 判别法可知。

(2)$p > 1$ 时 $|\frac{\cos nx}{n^p}| \leq \frac{1}{n^p}$，因此绝对收敛。$p > 0$ 时根据 Dirichlet 可知条件收敛，$p \leq 0$ 时 $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos nx}{n^p} \neq 0$ 发散。

下面证明 $0 < p \leq 1$ 时不绝对收敛：

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right| \geq \left|\frac{\cos^2 nx}{n^p}\right| \geq \left|\frac{1-\sin^2 x}{n^p}\right|$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散，因此发散。

(3) 这种双交错要把 $(-1)^n$ 吸收进三角。$\sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin x, \cos(n+n\pi) = (-1)^n \cos x$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1+\pi)n}{n}$ 条件收敛 (根据 (1) 结论)。第二个转换为 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2+\pi)n}{n}$ 条件收敛。绝对值发散的原因是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$

练习 8.14 具体例子 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 的收敛性

解 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}$ 根据前面结论收敛，$(1+\frac{1}{n})^n \to e$ 单调有界，因此由 Abel 可知收敛

8.4 数项级数理论

8.4.1 级数的加括号

级数的加括号本质是数列收敛及其子列收敛的关系

定理 8.11 (加括号收敛)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中任意加括号得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$(即加括号既不改变收敛性，又不改变和)

证明 显然 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 收敛，从而 $S'_k = \sum_{k=1}^{m} v_k$ 是 S_n 子列，从而收敛且极限相同。

笔记 若级数发散，则加括号得到的新级数可能收敛，例如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$。若级数加括号以后发散，则原级数一定收敛。

定理 8.12 (加括号收敛反推级数收敛)

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 加括号后 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，

- 若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 且每个括号里项个数小于固定值 L，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
- 若每个括号里符号相同，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

8.4.2 级数的重排

定义 8.2 (重排)

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，f 是 $[n] \to [n]$ 的映射，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{f(n)}$$

为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一个重排

定理 8.13 (正项级数的重排)

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则其任意重排 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{f(n)}$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{f(n)}$$

证明 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, S'_n = \sum_{k=1}^{n} u_{f(k)}$，记 $M = \max\{f(1), \cdots, f(n)\}$，则显然 $S'_n \le S_M$，根据 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在可知 $\lim_{n\to\infty} S'_n$ 存在，且

$$\lim_{n\to\infty} S'_n \le \lim_{n\to\infty} S'_n$$

反之也可以将 S_n 看作 S'_n 的重排，因此也满足 $\lim_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty} S'_n$

定理 8.14 (一般项级数的重排)

f 是重排映射，若 $\exists M \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $|f(n)-n| \leq M$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{f(n)}$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{f(n)}$$

♡

定理 8.15 (绝对收敛级数的重排)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则其任意重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{f(n)}$ 绝对收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{f(n)}$$

♡

证明 正负部分开即可

定理 8.16 (Riemann 定理：条件收敛级数的重排)

设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则对 $\forall S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$，存在重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛到 S

♡

8.4.3 正部与负部

对于任意数列 u_n，考虑非负数列 $p_n = \dfrac{|u_n|+u_n}{2}, q_n = \dfrac{|u_n|-u_n}{2}$，分别为 u_n 的正部与负部，下面研究它们之间的关系。

定理 8.17 (正负部)

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 均收敛。若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k, \sum\limits_{k=1}^{n} q_k$ 发散到正无穷，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} q_k} = 1$$

♡

证明 (1)$0 \leq p_n, q_n \leq |u_n|$，因此根据比较原则可发现 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n, q_n$ 都收敛，且极限可拆开

(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(p_n - q_n)$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(p_n + q_n) = +\infty$，假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 收敛，这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(p_n + q_n)$ 发散矛盾。

✍ **练习 8.15** a_n 单减，$a_n \geq 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} = 1$

证明 极限小于等于 1 显然。而 $\dfrac{a_2 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + \cdots + a_{2n-1}} \geq \dfrac{a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} = 1 - \dfrac{a_1}{a_1 + \cdots + a_{2n-1}}$，根据单减以及发散可知 $2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} \to \infty$，因此大于等于 1。

8.4.4 级数的乘积

8.4.5 级数的相互控制

定理 8.18 (级数相互控制)

设 $a_n \le c_n \le b_n$ 则

- 数列 a_n, b_n 收敛不能得出 c_n 收敛
- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可得出 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛

证明 (1) 例如：$a_n = -2 - \frac{1}{n}, b_n = 2 + \frac{1}{n}, c_n = (-1)^n$

(2) 此时 $0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$，显然 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n$ 收敛，根据比较原则得到 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n - a_n$ 收敛，因此得到 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛。

推论 8.1 (控制是相互的)

若 $a_n \le b_n \le a_{n+1}$，则显然推出 $b_{n-1} \le a_n \le b_n$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散。

练习 8.16 相互控制练习 (1) 重点：a_n 每一项都非零，$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ne 0$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|, \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|$ 敛散性相同

(2)a_n 是单调减的正数列，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{m=1}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ 同敛散

证明 (1) 根据极限保号性，$\exists N, \forall n > N$ 有 $\frac{1}{2}a \le a_n \le \frac{3}{2}a$，而 $\left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}}\right|$ 因此

$$\frac{4}{9a^2}|a_{n+1} - a_n| \le \frac{|a_{n+1} - a_n|}{|a_n a_{n+1}|} \le \frac{4}{a^2}|a_{n+1} - a_n|$$

从而相互控制，同敛散

(2) 根据 a_n 单调减可得

$$2^{k-1}a_{2^k} \le a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k} \le 2^{k-1}a_{2^{k-1}}$$

对 k 求和得到

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \le a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \le a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k}$$

这说明两者部分和等价，因此同敛散。

练习 8.17 比较原则对于一般项级数不成立的反例 (1)a_n, b_n 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$，此时显然 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 敛散性相同，但举例说明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 敛散性可以不同。

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$，根据 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，举例 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛推不出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(3) 举例说明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 不一定收敛

解 (1) 例如 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$，但 a_n 收敛，b_n 发散

(2) 比如 $a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(3) 例如 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

第 9 章 函数列与函数项级数

9.1 函数列的一致收敛

9.1.1 一致收敛的概念

定义 9.1 (一致收敛)

f_n 是 I 上的函数列，若对 $\forall \epsilon, \exists N, \forall x, \forall n > N$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$，则称 f_n 一致收敛至 f

笔记 一致收敛与点态收敛的区别：一致收敛的 N 不受 x 影响，因此当 $n > N$ 时，所有 x 都会在 $f(x) \pm \epsilon$ 带中。

练习 9.1 定义说明不一致收敛 (1)$\frac{x}{n}$ 在 $(0,a]$ 一致收敛到 0，但在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛 (2) 说明 x^n 在 $(0,1)$ 上收敛但不一致收敛

证明 (1)$\exists \epsilon_0 = \frac{1}{2}, \forall N, \exists n_0 = N+1, \exists x_0 = n_0$ 使得 $|\frac{x_0}{n_0} - 0| = 1 > \epsilon_0$，因此不一致收敛

(2) 点态收敛显然。不一致收敛的原因在 1 处，因此考虑 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n^n - 0| = \lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1} \neq 0$

笔记 $\frac{x}{n}, x^n$ 是极度重要的不一致收敛反例，在很多反例里都会用到它

定理 9.1 (Cauchy 收敛准则)

f_n 是 I 上的函数列，f_n 在 I 上一致收敛于 f 的充要条件为 $\forall \epsilon, \exists N, \forall n, m > N$ 满足 $\sup\limits_{x\in I} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$

笔记 Cauchy 判别法一般用于证明其他判别法，本身对于证明具体一致收敛用处较少 (因为具体函数列的极限一般容易算出)

定义 9.2 (内闭一致收敛)

若函数列 $f_n(x)$ 在区间 D 任意一个闭区间都一致收敛，则称 $f_n(x)$ 在 D 上内闭一致收敛。

笔记 内闭一致收敛的意义在于大部分不一致收敛都是在区间端点出现了问题，因此内闭一致收敛反应了区间整体的性质，不受个别端点影响。

9.1.2 一致收敛的基本判别法

定理 9.2 (Weiestrass 判别法)

若存在 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的正项数列 a_n，使得 I 上有 $|f(x) - f_n(x)| \leq a_n$，则 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$

证明 根本原因是 a_n 收敛的 N 与 x 无关，用 Cauchy 收敛准则易证。

练习 9.2M 判别法的使用 (1) 重点：证明 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ 在任意区间 I 上一致收敛

(2) 重点：$f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，$f_0(x) = f(x)$，$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$，证明 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛

证明 (1)$\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{1}{n} \to 0$

(2) 由于连续，因此 $|f(x)| \le M$，因此 $|f_1(x)| \le \int_0^x |f_1(t)|\mathrm{d}t \le M(x-a)$(暂时不要进一步放缩)，同理得到 $|f_2(x)| \le \int_a^x M(t-a)\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^2}{2!}M$，因此 $|f_n(x)| \le \frac{(x-a)^n}{n!}M \le \frac{(b-a)^n}{n!}M \to 0$(最后再放缩)

定理 9.3 (确界判别法)

f_n 为 I 上函数列，则

- $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$ 的充要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$。
- $f_n(x)$ 不一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是存在 x_n，使得 $f_n(x_n)-f(x_n)$ 不收敛到 0(极度重要)

证明 左推右：对 $\forall\epsilon,\exists N,\forall x,\forall n>N$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$，根据上确界定义可知 $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\le\epsilon$

右推左：$\forall\epsilon,\exists N,\forall n>N$ 有 $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$，而对 $\forall x\in I$ 有 $|f_n(x)-f(x)|\le\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$，因此 $\forall x,|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$，即一致收敛。

笔记 一般一致收敛用 Weiestrass 判别法判定，不一致收敛用确界判别法第二条判定

9.1.3 一致收敛判别练习

练习 9.3 三角相关 求下列函数列的收敛区间、极限函数与一致收敛区间：

$(1)f_n(x)=\frac{\sin x}{n}$ $(2)f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$ $(3)f_n(x)=\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n}$ $(4)f_n(x)=n\sin\frac{x}{n}$

解 (1) 根据 $|f_n(x)|\le\frac{1}{n}\to0$，显然

(2) 先求极限函数，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，因此点态收敛到 0。取 $x_n=n$，则 $\sin\frac{x_n}{n}=\sin1$ 不趋于 0，因此在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛。但是任意 $[a,b]\subseteq(-\infty,+\infty)$，显然 $|x|\le M$，$|\sin\frac{x}{n}|\le|\frac{x}{n}|\le\frac{M}{n}\to0$，因此内闭一致收敛

(3) 点态收敛到 $f(x)=0$，取 $x_n=n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=\sin1\ne0$。取 $[a,b]\subseteq(-\infty,+\infty)$，则 $|f_n(x)-0|\le|\frac{x}{n}|\to0$ 因此内闭一致收敛。

(4) 极限函数为 1，考虑 $x_n=n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_n)-x_n|=|n\sin1-n|\ne0$，因此在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛。取 $[a,b]\subseteq(-\infty,+\infty)$，则 $|f_n(x)-x|\le|n(\sin\frac{x}{n}-\frac{x}{n})|\le n(\frac{x}{n})^2\le\frac{M^2}{n}\to0$，中间的不等式使用了 Taylor 展开，因此内闭一致收敛。

练习 9.4 分式相关 判断在 $[0,+\infty)$ 的一致收敛性

$(1)f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ $(2)f_n(x)=\frac{x}{1+nx}$ $(3)f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$ $(4)f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$

解 $(1)f_n(x)\le\frac{x}{2nx}=\frac{1}{2n}(x\ne0)\to0$，而 $x=0$ 时 $f_n(0)=0$，因此一致收敛

$(2)x=0$ 显然，$x\ne0$ 时 $f_n(x)\le\frac{1}{n}\to0$，一致收敛

(3) 先考虑极限函数 $x=0$ 时，极限函数为 $1,x\ne0$ 时，极限函数为 0。考虑 $(0,+\infty)$，取 $x_n=\frac{1}{n}$，$f_n(x)-f(x)=\frac{1}{2}\ne0$，因此不一致收敛。在 $[a,+\infty)$ 有 $f_n(x)-0=\frac{1}{1+nx}\le\frac{1}{1+na}\to0$ 一致。

(4) 极限函数为 0。取 $x_n=\frac{1}{n}$，显然 $f_n(x)-0=\frac{1}{2}$ 不趋于 0，因此不一致收敛。在 $[a,+\infty)$ 时 $f_n(x)\le\frac{nx}{n^2x^2}\le\frac{1}{nx}\le\frac{1}{na}\to0$

练习 9.5 导数与积分一致收敛 (1)$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续导函数，a_n 为单调趋于 $+\infty$ 的正数列，证明 $f_n(x)=a_n\left[f\left(x+\frac{1}{a_n}\right)-f(x)\right]$ 在任意有限闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f'(x)$

(2) 特例：证明 $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$ 在任意有限闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛到 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(3)$f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续函数，记 $f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$，证明 $f_n(x)$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $F(x)=\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t$

(4) 特例：证明 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(x+\frac{k}{n}\right)$ 在任意有限区域 $[a,b]$ 上一致收敛到 $\sin(x+1)-\sin x$

证明 (1) 给定 n，根据 Lagrange 中值定理，$f_n(x)=f'(x+\xi_n)$，这里 $\xi_n<\frac{1}{a_n}$。由于 $f'(x)$ 在 $[a,b+1]$ 连续，因此一致连续，$\forall\epsilon,\exists\delta\in(0,1)$ 当 $|x_1-x_2|<\delta$，$|f'(x_1)-f'(x_2)|<\epsilon$，而 $\exists N,\forall n>N,\xi_n<\frac{1}{a_n}<\delta$，此时

$$|f_n(x)-f'(x)|=|f'(x_n+\xi_n)-f'(x)|<\epsilon$$

因此一致收敛

(2) 即 (1) 的特例

(3)$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x+t)\mathrm{d}t$，因此

$$|f_n(x)-F(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f\left(x+\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x+t)\mathrm{d}t\right|\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right|\mathrm{d}t$$

显然 $f(x)$ 在 $[a,b+1]$ 一致连续，$\forall\epsilon,\exists\delta,|x_1-x_2|<\delta$ 时 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$。而 $\exists N,\forall n>N,\frac{1}{n}<\delta$，对于 $\forall x\in[a,b],t\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$，有

$$\left|\left(x+\frac{k}{n}\right)-(x+t)\right|=\left|\frac{k}{n}-t\right|\le\frac{1}{n}<\delta$$

综上得到

$$\forall x\in[a,b],|f_n(x)-F(x)|<\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\epsilon\mathrm{d}t=\epsilon$$

9.1.4 四则运算、复合极限的一致收敛性

定义 9.3 (一致有界)

$\exists M,\forall n,\forall x\in I$ 有 $|f_n(x)|\le M$

引理 9.1 (极限的有界性)

设 $f_n(x)$ 在区间 I 上点态收敛到 $f(x)$，则

- 若一致收敛，且每个 $f_n(x)$ 有界，则 $f(x)$ 有界，$f_n(x)$ 一致有界
- 若一致收敛，且 $f(x)$ 有界，则 $f_n(x)$ 除去至多有限项外一致有界
- 若 $f_n(x)$ 一致有界，则 $f(x)$ 有界

证明 (1) 设 $|f_n(x)|\le M_n$。根据一致收敛，取 $\epsilon=1,\exists N,\forall n>N,\forall x\in I$ 有 $|f_n(x)-f(x)|\le 1$。因此得到 $|f(x)|\le M_N+1:=M$。而 $n\ge N$ 时，$\forall x\in I$ 有 $|f_n(x)|\le|f(x)|+1=M+1$，前面有限项取最大即可，因此一致有界

(2) 包含于 (1) 的推导过程中

(3) 若 $\exists M,\forall n,|f_n(x)|\le M$，根据 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，则 $\forall x\in I,\exists\epsilon_0=1,\exists N,n\ge N$ 有 $|f(x)-f_n(x)|\le 1$，因此 $|f(x)|\le|f_n(x)|+1\le M+1$，因此有界。

定理 9.4 (四则运算)

f_n, g_n 在 I 上分别一致收敛到 $f(x), g(x)$，则

- 数乘：$kf_n(x)$ 一致收敛到 $kf(x)$
- 加法：$f_n(x)+g_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)+g(x)$
- 乘法：若每个 $f_n(x), g_n(x)$ 均有界，则 $f_n(x)g_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)g(x)$
- 乘法推论：若 $f_n(x), g_n(x)$ 为连续函数列且 I 为闭区间，则 $f_n(x)g_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)g(x)$
- 除法：若 $\exists M$ 使得 $|f(x)| \geq M$，则 $\exists N, n > N$ 时 $f_n(x)$ 在 I 上无零点，且 $\dfrac{1}{f_n(x)}$ 一致收敛到 $\dfrac{1}{f(x)}$ ♡

证明 (1,2) 显然

(3) 用 $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)|$

(4) 取 $\epsilon = \dfrac{M}{2}, \exists N, \forall n > N, \forall x$ 有 $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{M}{2}$，因此 $|f_n(x)| \geq |f(x)| - \dfrac{M}{2} \geq \dfrac{M}{2}$，因此无零点。第二个结论用 $|\dfrac{1}{f_n(x)} - \dfrac{1}{f(x)}| = |\dfrac{f_n(x)-f(x)}{f_n(x)f(x)}| \leq \dfrac{|f_n(x)-f(x)|}{M\cdot\frac{M}{2}} < \epsilon$

练习 9.6 反例 (1) 举例说明 $f_n(x), g_n(x)$ 分别一致收敛到 $f(x), g(x)$，但 $f_n(x)g_n(x)$ 不一致收敛到 $f(x)g(x)$

解 (1) 根据定理函数列要无界，取 $f_n(x) = \dfrac{1}{n}, g_n(x) = \dfrac{1}{x}$，显然 $f_n(x)$ 一致收敛到 0，$g_n(x)$ 一致收敛到 $\dfrac{1}{x}$，但 $f_n(x)g_n(x) = \dfrac{1}{nx}$ 不一致收敛到 0，因为取 $x_n = \dfrac{1}{n}$ 即可。

定理 9.5 (复合)

$f_n(x)$ 在 I 上一致收敛到 $f(x)$，且每个 $f_n(x)$ 均有界，$g(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续函数，则 $g(f_n(x))$ 一致收敛到 $g(f(x))$ ♡

证明 根据一致收敛以及个个有界得到 $f_n(x)$ 一致有界，不妨设对 $\forall n, \forall x \in I$ 有

$$|f_n(x)| \leq M$$

由于 $g(x)$ 在 $[-M, M]$ 上一致连续，$\forall \epsilon, \exists \delta, |x_1 - x_2| < \delta$ 时，$|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon$，对上述 δ，由于 $f_n(x)$ 一致收敛，$\exists N, \forall n > N$ 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta, \forall x \in I$$

从而 $n > N$ 时，$\forall x \in I$ 满足 $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \epsilon$

9.2 函数列极限的性质

9.2.1 极限函数的连续性

定理 9.6 (极限顺序交换)

$f_n(x)$ 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 上一致收敛于 $f(x)$，且 $\forall n$，极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

♡

证明 由于 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$，则对 $\forall \epsilon, \exists N, \forall m, n > N, \forall x \in (a, b)$ 有 $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$，让 $x \to x_0$，则 $|a_n - a_m| < \epsilon$，因此 a_n 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。下证右侧 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，根据

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - A| < 3\epsilon$$

第一个要求 N 足够大，第二个要求 δ 足够小，第三个要求 N 足够大。

推论 9.1 (局部连续性)

若 $f_n(x)$ 在 x_0 邻域 $U(x_0,\delta)$ 内一致收敛，$f_n(x)$ 在 x_0 处连续，则极限函数 $f(x)$ 也在 x_0 处连续

证明 根据 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=f(x_0)$

推论 9.2 (整体连续性)

若连续函数列在 I 上内闭一致收敛于 f，则 f 在 I 上连续

证明 原因在于单点的连续性仅与小邻域有关 (甚至可以只有半边)，因此内闭的一致收敛即可推出极限函数的连续

例题 9.1 例如 x^n 在 $(0,1)$ 内闭一致收敛，因此极限函数 0 在 $(0,1)$ 连续。

定理 9.7 (一致连续性)

若 $f_n(x)$ 在 I 中一致收敛，每一项都一致连续，则极限函数 $f(x)$ 在 I 上也一致连续

证明 思路：$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f_n(x_2)|+|f_n(x_2)-f(x_2)|<3\epsilon$，中间一项用 $f_n(x)$ 的一致连续性，左右两项用一致收敛性。

练习 9.7 函数列连续性练习 (1)$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $f(x)$，数列 $x_n\in[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x_0)$

(2)$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 收敛到连续 $f(x)$，证明 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $f(x)$ 的充要条件为任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 的数列，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x_0)$

证明 (1) 注意与定理的区别，这里有双重 n。思路为 $|f_n(x_n)-f(x_0)|\le|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)|$，前者用一致收敛，后者用连续性。

根据一致收敛性，$\forall\epsilon,\exists N_1,\forall n>N_1,\forall x\in[a,b]$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$，根据 $f(x)$ 在 x_0 连续以及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 可知 $\exists N_2,\forall n>N_2,|f(x_n)-f(x)|<\epsilon$，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，$\forall n>N$ 有

$$|f_n(x_n)-f(x_0)|\le|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)|<2\epsilon$$

(2) 左推右：思路：$|f_n(x_n)-f(x_0)|\le|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)|$，注意不要写成 $|f_n(x_n)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$！原因在于 $f_n(x)$ 不一定连续。

右推左：反设不一致收敛，则 $\exists\epsilon_0,\forall N,\exists n>N,\exists x_n\in[a,b]$ 满足 $|f_n(x_n)-f(x_n)|\ge\epsilon_0$，由于 x_n 有界，因此存在收敛子列，不妨就设 $x_n\to x_0\in[a,b]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_0)|\ge\epsilon_0$，与所给条件矛盾。

笔记 反设法下不一致收敛常用的讨论即存在 x_n，使得 $|f_n(x_n)-f(x_n)|\ge\epsilon_0$

9.2.2 极限函数的可积性

定理 9.8 (可积性)

$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$，$f_n(x)$ 均在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$$

证明 (1) 先说明可积：$\forall\epsilon,\exists N$ 使得 $\forall x,|f(x)-f_N(x)|<\dfrac{\epsilon}{b-a}$，做划分 T，取 x_1,x_2 于同一区间，考虑振幅：

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f_N(x_1)|+|f_N(x_1)-f_N(x_2)|+|f_N(x_2)-f(x_2)|\le\frac{\epsilon}{b-a}+\omega_i^{f_N}+\frac{\epsilon}{b-a}$$

得到 $f(x)$ 的振幅 $\omega_i^f \le \frac{2\epsilon}{b-a} + \omega_i^{f_N}$，因此

$$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i \le \sum_T \frac{2\epsilon}{b-a}\Delta x_i + \sum_T \omega_i^{f_N}\Delta x_i < 3\epsilon$$

(2) 求积分值：考虑 $|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\mathrm{d}x = \epsilon$

笔记 该定理在 ZJU2020 中出现过。

练习 9.8 不可积反例 举例连续函数列 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 收敛到连续函数 $f(x)$，但无 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

解 $f_n(x) = nx^n(1-x^n), x\in[0,1]$，极限函数为 $f(x)=0$，此时 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，但是 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$。

练习 9.9 可积性的应用 $f_n(x)$ 每项都在 $[a,b]$ 连续可微，$g(x)$ 为 $[a,b]$ 连续函数，若存在 $M>0$，使得 $\forall n\in\mathbb{N}^+$，$x',x''\in[a,b]$ 有 $|f_n(x')-f_n(x'')| \le \frac{M}{n}|x'-x''|$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n'(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$

证明 根据条件得到 $|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}| \le \frac{M}{n}$，令 $y\to x$ 得到 $|f_n'(x)| \le \frac{M}{n} \to 0$。由于 $g(x)$ 有界，因此 $f_n'(x)g(x)$ 一致收敛到 0，根据一致收敛性质可将极限和积分互换位置，从而结论成立。

推论 9.3 (可积性推广)

$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $f(x)$，且 $f_n(x)$ 均可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且对任意可积 $g(x)$ 和 $x_0\in[a,b]$，$\int_{x_0}^x f_n(t)g(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $\int_{x_0}^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$

证明 考虑 $\left|\int_{x_0}^x f_n(t)g(t)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_{x_0}^x |f_n(t)-f(t)||g(t)|\mathrm{d}t\right| \le M\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x < \epsilon$

笔记 上述推论常用的特例：$\int_{x_0}^x f_n(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$

9.2.3 极限函数的可微性

定理 9.9 (可微性)

$f_n(x)$ 的每项在 $[a,b]$ 有连续导函数，$f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $g(x)$，若 $\exists x_0\in[a,b]$ 使得 $f_n(x_0)$ 收敛，则 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于一个连续可微函数 $f(x)$，且 $f'(x)=g(x)$，即

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

证明 (1) 极限函数存在：根据 Newton-Leibniz 公式可知 $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)\mathrm{d}t$，根据条件 $f_n(x_0)$ 收敛且与 x 无关。根据前面可积性推论可知 $\int_{x_0}^x f_n'(t)\mathrm{d}t$ 一致收敛到 $\int_{x_0}^x g(t)\mathrm{d}t$，根据一致收敛的四则运算可知 $f_n(x)$ 本身也一致收敛至 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)\mathrm{d}t$

(2) 导数：由于 $f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$g(x)$ 连续，从而 $f(x)$ 可导且 $f'(x)=g(x)$。

笔记 定理中 $f_n(x)$ 存在 x_0 这个收敛点的条件必不可少，这为使用 Leibniz 公式奠定了基础。在实际使用中，往往可以直接看出 $f_n(x), f_n'(x)$ 都一致收敛，则可直接得出 $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ 的结论，不用管 x_0。

练习 9.10 具体计算 (1) 已知 $u_n(x) = \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$，判定其在 $(0,2\pi)$ 上是否逐项可导，若可导则求出 $S'(x)$

解 (1) 考虑 $u_n'(x)=-\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$，根据 Dirichlet 判别法可知一致收敛，因此逐项可导，$S'(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$

9.2.4 连续 + 单调：推出一致收敛

定理 9.10 (关于 x 单调)

函数列 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 收敛到连续函数 $f(x)$，且每个 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 x 单调增，则 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$

♡

证明

定理 9.11 (Dini 定理：关于 n 单调)

连续函数列 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 收敛于连续函数 $f(x)$，若固定 x，每个 $f_n(x)$ 关于 n 单调，则 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$

♡

证明 (1) 先证明在小区间成立：固定 $x_0\in[a,b]$，$f_n(x_0)-f(x_0)$ 单调趋于 0，$\forall\epsilon,\exists N$ 有 $|f_N(x_0)-f(x_0)|<\epsilon$。固定 N，由于 $f_N(x)-f(x)$ 连续，因此根据保号性 $\exists\delta,\forall x\in U(x_0,\delta)$ 有 $|f_N(x)-f(x)|<\epsilon$。重新根据单调性得到 $\forall n>N,\forall x\in U(x_0,\delta)$ 有

$$|f_n(x)-f(x)|\le|f_N(x)-f(x)|<\epsilon$$

(2) 再证明在整个区间成立：显然区间集 $\{U(x_0,\delta):x_0\in[a,b]\}$ 是 $[a,b]$ 的开覆盖，根据有限覆盖定理得到存在有限个点 $x_1,\cdots,x_k$ 的邻域覆盖 $[a,b]$，每个对应着 N_i,δ_i 使得

$$\forall n>N_i,\forall x\in U(x_i,\delta_i),|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$$

因此取 $N=\max\{N_1,\cdots,N_k\}$，$\forall n>N$ 时，对 $\forall x\in[a,b]$，总能找到 x_i 使得 $x\in U(x_i,\delta_i)$，且 $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$

笔记 ZJU2020 默写了 Dini 定理的证明

9.3 函数项级数的一致收敛性

9.3.1 一致收敛的基本性质与判别

定理 9.12 (一致收敛性质)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛，则 $u_n(x)$ 在 D 上一致收敛到 0。

♡

练习 9.11 收敛但不一致收敛的级数 说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^3x}$ 在 $(0,1)$ 收敛但不一致收敛

证明 (1) 收敛：根据 $\frac{n}{1+n^3x}\sim\frac{1}{n^2x}$，若 x 固定，则作为数项级数收敛，因此函数项级数收敛

(2) 不一致收敛：$x_n=\frac{1}{n^3}$，则 $\frac{n}{1+n^3x_n}=\frac{n}{2}$ 不趋于 0，因此不一致收敛

定理 9.13 (一致收敛充要条件)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛到 $S(x)$ 的充要条件为：

- Cauchy 收敛准则：$\forall\epsilon,\exists N,\forall n>m>N,\forall x\in D$ 有 $|\sum\limits_{k=m+1}^{n}u_k(x)|<\epsilon$
- 确界：$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)|=0$

练习 9.12 I 上函数列 $u_n(x)$ 满足 $u_i(x)u_j(x)=0,i\neq j,\forall x\in I$，若存在正数列 a_n 满足 $|u_n(x)|\leq a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 一致收敛

证明 根据条件 $\forall x\in I$，$u_1(x),\cdots,u_n(x),\cdots$ 中至多只有一个非零，因此根据确界条件 $\sup\limits_{x\in I}|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)|\leq\sup\limits_{n}\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}\to 0$。

定理 9.14 (M 判别法)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为 D 上的函数项级数，若存在收敛的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 满足 $\forall x\in D$，$|u_n(x)|\leq M_n$，则得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛

练习 9.13 讨论一致收敛性：(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{2x}{x^2+n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ (2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$ 在 $x\geq 0$

解 (1)$|\arctan\dfrac{2x}{x^2+n^3}|\leq|\dfrac{2x}{x^2+n^3}|\leq\dfrac{|2x|}{2|x|n^{3/2}}=\dfrac{1}{n^{3/2}}$，因此一致收敛

(2)$x\geq 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}=\dfrac{1}{x}$，发散。$0\leq 1<1$ 时根据 $\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}\leq x^{2n}$ 点态收敛，但是感觉出 1 处会导致一致收敛出问题，因此取 $x_n=1-\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{x_n^{2n}}{1+x_n^{2n+1}}\to\dfrac{e^{-2}}{1+e^{-2}}\neq 0$，因此不一致收敛。

练习 9.14 积分格式 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续函数，$f_0(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=\displaystyle\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛。

证明 同前面，$|f_n(x)|\leq\dfrac{(b-a)^n}{n!}M$，根据根式或者比式判别法易知。

9.3.2 Dirichlet 与 Abel 判别法

定理 9.15 (Dirichlet 与 Abel 判别法)

对于 I 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$，若满足下面任意一条，则一致收敛

- Dirichlet：(1)$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ 在 I 上一致有界 (2)$v_n(x)$ 固定 $x\in I$ 关于 n 单调，且在 I 上一致收敛到 0
- Abel：(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛 (2)$v_n(x)$ 固定 $x\in I$ 关于 n 单调，且在 I 上一致有界

笔记 单调都是关于 n，一致都是关于 x

练习 9.15 经典一致收敛题 (1)a_n 单调收敛于 0，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$ 在 $[\alpha,2\pi-\alpha]$ 上一致收敛

证明 (1) 首先判断一致有界性：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+1$$

因此 $\sum\cos nx$ 一致有界，而 a_n 固定 x 时单调趋于 0，因此根据 Dirichlet 判别法可知一致收敛。

9.4 函数项级数极限函数的性质

定理 9.16 (端点法)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛，且每个 $u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 连续，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 一致收敛，特别的，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 收敛

笔记 开区间一致收敛的函数列往往能延拓到闭区间，因此题目中开区间的函数列往往是不一致收敛的 (除非无定义)。

定理 9.17 (逐项单向极限)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛，$\lim_{x\to a^+} u_n(x)=a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则

$$\lim_{x\to a^+}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a^+} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

定理 9.18 (连续性)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内一致收敛到 $S(x)$，且每个 $u_n(x)$ 均在 x_0 处连续，则 $S(x)$ 也在 x_0 处连续，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lim_{x\to x_0} u_n(x))=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

定理 9.19 (逐项积分)

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $S(x)$，且每个 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 可积，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$$

定理 9.20 (逐项可微)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每个 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续偏导数，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $g(x)$，若存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，和函数 $S(x)$ 可导，$S'(x)=g(x)$，即

$$(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))'=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$$

第 10 章 幂级数

10.1 幂级数概念及其收敛区间

定义 10.1 (幂级数)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 称为幂级数，但一般只研究 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

10.1.1 收敛区间与收敛半径

定理 10.1 (Abel 定理)

若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 收敛，则对 $\forall x, |x| < |x_0|$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；若 x_0 处发散，则 $\forall x, |x| > |x_0|$ 均发散。

证明 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则 $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot |\frac{x}{x_0}|^n \leq M r^n$，这里 $r = |\frac{x}{x_0}| \in [0,1)$。另一侧同理

定义 10.2 (收敛半径)

根据 Abel 定理可知 $\exists R \in \mathbb{R}$，使得 $|x| < R$ 时幂级数绝对收敛 (若 $R = 0$ 则仅在 $x = 0$ 处收敛)，对一切 $|x| > R$ 均发散，称 R 为幂级数收敛半径，$(-R, R)$ 为收敛区间。

定理 10.2 (收敛半径的计算)

幂级数收敛半径 R(可以为 $0, \infty$) 的计算有以下几种方式：

- 根式 (柯西-阿达马)：$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$(可以为 $0, \infty$)
- 比式 (一般用得少)：若 $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}$，也能推出 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{R}$

证明 (1) 根式：只需要考虑 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$，用数项级数的根式判别法为 $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$，因此若记 $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，则 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 则收敛，$\frac{1}{\rho}$ 为收敛半径。

练习 10.1 计算收敛半径 计算收敛半径与收敛域 (1)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (2)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (3)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$

解 (1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$，收敛半径 1，收敛域 $[-1,1]$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$，收敛半径 1，收敛域 $[-1,1)$

(3)$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，用 Wallis+ 根式或者比式 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$ 得到收敛半径为 1。而 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$，因此发散。$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n$ 根据 Leibniz 可知收敛。故收敛域为 $[-1,1)$

笔记 上述题目也说明在逐项求导后，端点处收敛域可能发生变换

✍ **练习 10.2 常规格式幂级数** (1) 求收敛域：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$

(2)$0<a<b$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^n+b^n)x^n$ 收敛域

(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n-3^{2n}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$ 收敛域

(4)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$

解 (1) 要么根据 Euler 常数得到 $\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\sim\sqrt[n]{\ln n}=1$，要么用 $1\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leq n$ 得到收敛半径为 $R=1$，显然收敛域为 $(-1,1)$ 第二个同理得到收敛域为 $[-1,1]$

(2) 第一个 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n+b^n}}=\frac{1}{b}$，收敛半径为 b，$x=\pm b$ 都震荡发散。第二个 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=b$，收敛半径 b，$x=\pm b$ 震荡发散

(3) 由于不是 x^n 因此开 $2n$ 次根号，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|\frac{1}{n-3^{2n}}|}=\frac{1}{3}$，半径为 3，$x=\pm 3$ 时通项不趋于 0，因此发散。$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{1}{2^n}}=1$，而 $x=\pm 1$ 均收敛

(4) 将 $x+1$ 视为 y 即可，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}=3$，收敛半径为 $\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$ 时为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}(-\frac{2}{3})^n)$ 前者发散，后者收敛，因此整体发散。$y=-\frac{1}{3}$ 时为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n)$ 收敛，因此收敛域为 $[-\frac{1}{3}-1,\frac{1}{3}-1)$ 即 $x\in[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$

✍ **练习 10.3 非常规格式幂级数** (1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{3n}$ 的收敛域 (2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^{n^2}$ (3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+2022^n}{n^{2022}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

解 (1) 设 $y=x^2+x+1$，考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3n}}=1$，$R=1$，而 $y=1$ 发散，$y=-1$ 收敛，计算 $x^2+x+1\in[-1,1)$，即 $x^2+x\in[-2,0)$，注意最终得到 $x\in(-1,0)$ 两侧都是开的！

(2) 考虑 $y=\frac{x-1}{2x+1}$，计算得到 y 的收敛域为 $[-1,1]$，计算 $-1\leq\frac{x-1}{2x+1}\leq 1$，直接讨论分母容易出错，因此这里看成两个不等式。$\frac{x-1}{2x+1}+1=\frac{3x}{2x+1}\geq 0$ 以及 $\frac{x-1}{2x+1}-1=\frac{-x-2}{2x+1}\leq 0$，第一个要求 $x\geq 0$ 或者 $x<-\frac{1}{2}$，第二个要求 $x\leq -2$ 或者 $x\geq-\frac{1}{2}$，求交得到 $x\in(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$

(3)$y=\frac{1-x}{1+x}$ 得到收敛半径为 $\frac{1}{2022}$ 且端点收敛，考虑 $-\frac{1}{2022}\leq\frac{1-x}{1+x}\leq\frac{1}{2022}$，分为两部分，得到 $\frac{2023-2021x}{1+x}\geq 0$ 以及 $\frac{2021-2023x}{1+x}\leq 0$，前者解出 $-1<x\leq\frac{2023}{2021}$，后者解出 $x<-1$ 或者 $x\geq\frac{2021}{2023}$，得出结果为 $x\in[\frac{2021}{2023},\frac{2023}{2021}]$

10.1.2 幂级数的一致收敛性

下面考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的一致收敛性，假设其收敛半径为 R，收敛域在端点处需要讨论，下面开始分析。

定理 10.3 (Abel 第二定理)

若幂级数收敛半径为 R，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $\langle -R,R\rangle$ 内闭一致收敛 (端点未确定)

证明 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，(1) 若 $x_0 > 0$，则 $\forall x \in [0, x_0]$ 有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$，根据 Abel 判别法可证。(2) 若 $x_0 < 0$，则 $\forall x \in [x_0, 0]$ 有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$，根据 Abel 可证。进而任选闭区间都一致收敛。

定理 10.4 (连续性)

幂级数的和函数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛域 $\langle -R, R\rangle$ 是连续的。

定理 10.5 (区间不变性)

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则其逐项求导和逐项积分后得到的幂级数的收敛半径仍为 R，不过端点处的一致收敛情况可能改变！

证明 考虑 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的逐项求导与逐项积分，得到 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$，根据 $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|n a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|\frac{a_n}{n+1}|}$ 可知收敛半径相同

笔记 端点处一致收敛性不保证，例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 收敛域为 $[-1, 1)$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ 收敛域为 $(-1, 1)$

定理 10.6 (求导与求积)

设 $(-R, R)$ 上 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则对 $\forall x \in (-R, R)$ 有：

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

笔记 幂级数的逐项求导和逐项积分要注意其只能保证在收敛区间成立，但不保证在收敛域上成立！

10.1.3 缺项幂级数的收敛区域

练习 10.4 缺项幂级数的收敛范围 (1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{n^2} x^{n^3}$ 的收敛范围

解 令 $a_k = \begin{cases} n^{n^2}, & k = n^3 \\ 0, & k \neq n^3 \end{cases}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{n^2} x^{n^3} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$，此时

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^3]{n^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (n^{n^2})^{\frac{1}{n^3}} = 1$$

10.2 幂级数展开式求和

定理 10.7 (必备幂级数展开)

以下的幂级数展开会经常使用，基本上是分母较为简单的 Taylor 展开式

1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
3. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$
4. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

笔记 具体用哪个主要看 (-1) 的指数次和分母的关系。

10.2.1 等比级数

定理 10.8 (等比级数)

根据 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 可以推出：

1. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$，方法为对 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 求导，再同乘 x
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$，方法为对 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 求导，再乘 x

练习 10.5 等比级数 (1)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{2^n}$ (2)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

解 (1) 这里展示正推，进行公式推导：

$$\begin{cases} f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow f_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \\ f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{cases}$$

因此 $I = f_3(\frac{1}{2}) + 3f_2(\frac{1}{2}) = 6 + 6 = 12$

(2) 这里展示反推：

$$\begin{cases} f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \\ f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \Rightarrow f_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Rightarrow f_2''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \end{cases}$$

因此推出 $f_2'(x) = -\ln(1-x), f_2(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$，因此 $f_1(x) = \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1$

10.2.2 $\arctan x$ 级数

练习 10.6$\arctan x$ (1) 重点：求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$

解 (1) 相差较大，选择裂项：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n}-\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\right)$，两者均收敛，且

$$\begin{cases}\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\\ \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\end{cases}$$

因此结果为 $\ln 2+\frac{\pi}{2}-2$

10.2.3 e^x 级数

练习 10.7e^x (1) 计算 $\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{(2n)!}\right]$

解 (1) 由于 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，因此 $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$，故

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

取 $x=1$，得到 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\frac{e+e^{-1}}{2}$

10.3 幂级数求和式展开

10.3.1 基本理论与直接展开

定理 10.9 (幂级数展开)

若 $f(x)$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上存在任意阶导数，且 $\exists M,N>0$，当 $n>N$ 时，$\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$，均有 $|f^{(n)}(x_0)|\le M$，则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$$

练习 10.8 幂级数直接展开 (1)$\frac{ax+b}{cx+d}$ 型：$f(x)=\frac{x-3}{x+1}$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开

(2)$f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ 在 $x=1$ 处幂级数展开

(3)$f(x)=\frac{1}{1-3x+2x^2}$ 在 $x=0$ 处展开

(4)$f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}$ 在 $x=0$ 处展开

解 (1) 首先 $f(x)=1-\frac{4}{1+x}$，设 $t=x-1$，则 $f(x)=g(t)=1-\frac{4}{2+t}$，因此 $f(x)=1-2\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{2}}=1-2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-t}{2})^n$，因此得到

$$f(x)=1-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-t}{2}\right)^n$$

(2) 设 $t=x-1$，可以得到 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n$

10.3.2 求导与求积

✍ **练习 10.9 几个经典的积分与求导法** (1) 计算 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开

(2) 计算 $f(x)=\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开

(3) 计算 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}t$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开

解 (1) 积分得到 $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{1+t}\Big|_0^x=1-\frac{1}{1+x}=1-\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$,因此 $f(x)=\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}$

(2)$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，而

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

因此 $f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$

✍ **练习 10.10arctan 经典题目** 求幂级数展开：

(1)$f(x)=\arctan x$

(2) 重点 (ZJU2021)：$g(x)=\arctan\dfrac{1-kx}{1+kx}$

(3) 重点：$h(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$，求导结果很简单

解 (1)$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$，因此

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(2)$\arctan\dfrac{1-kx}{1+kx}=\arctan 1-\arctan kx$，因此

$$g(x)=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n k^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$$

(3)$h'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$(别怕求导！)，因此 $h'(x)=2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$，积分得到

$$h(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

第 11 章 傅里叶级数

11.1 以 2π 为周期的傅里叶级数

定义 11.1 (2π 周期傅里叶展开)

对于 2π 周期函数 $f(x)$，定义其傅里叶展开为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，其中

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x & n = 0, 1, 2, \cdots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

♣

笔记 计算时一定要注意第一项是 $\frac{a_0}{2}$！

定理 11.1 (收敛定理)

若以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上按段光滑，则对 $\forall x \in [-\pi, \pi]$，傅里叶级数收敛于 f 在 x 左右极限的算术平均值。

♡

推论 11.1 (连续特殊情况)

若 f 是以 2π 为周期的连续函数，且在 $[-\pi, \pi]$ 上按段光滑，则 f 的傅里叶级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛于 f ♡

练习 11.1 几个经典展开 (1) 求 $f(x) = x^2$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上的傅里叶级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

解 (1) 计算得到 $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$，$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{4}{n^2}$，因此得到

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}$$

令 $x = \pi$ 得到

$$\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

笔记 注意 $\cos n\pi = (-1)^n$。

11.2 以 $2l$ 为周期的傅里叶级数

定义 11.2 ($2l$ 周期的傅里叶级数)

$f(x)$ 以 $2l$ 为周期，则其傅里叶级数为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$，其中

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, & n = 0, 1, 2, \cdots \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

♣

11.3 Parseval 等式

定理 11.2 (Parseval 等式)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

♡

✍ **练习 11.2 计算数项级数** (1) 对 $f(x) = x^2$ 展开，并证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

第 12 章 多元极限与连续

12.1 累次极限与重极限

12.1.1 基本概念

定义 12.1 (重极限)

$a \in \mathbb{R}^n$，$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在 a 的去心邻域中有定义，若 $\exists A, \forall \epsilon, \exists \delta$ 当 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|\mathbf{x}-a| < \delta$ 时，有 $|f(\mathbf{x})-A| < \epsilon$，则称 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to a} f(\mathbf{x}) = A$

笔记 计算重极限的方法：

- 放缩 + 迫敛：例如 $\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \le |x+y| = 0$
- 极坐标变换：例如 $\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| = r|\cos^3\theta+\sin^3\theta| \le 2r \to 0$

笔记 证明重极限不存在的常用方法：

- 两个累次极限存在但不相等
- 找特殊的趋近方式，如 $y = kx$，使得获得的重极限不同

练习 12.1 重极限的计算 (1) 已知 $f(x,y)$ 如下，计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

解 (1) 设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$|f(x,y)| = \left|\frac{r^2\sin\theta\cos\theta(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)}{r^2}\right| = \frac{1}{4}r^2|\sin 4\theta| \le \frac{1}{4}r^2 \to 0$$

因此极限为 0

定义 12.2 (累次极限)

设 $f(x,y)$ 在 x_0, y_0 的某去心邻域中有定义，则称 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 称为累次极限。

笔记 重极限是多个分量同时趋近于 $\mathbf{x}_0$，而累次极限相当于依次取极限的极限。

定理 12.1 (重极限与累次极限的关系)

若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 存在，且累次极限存在 (累次极限可能不存在)，则累次极限的值为 A

证明 $\forall \epsilon, \exists \delta, |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| < \delta$ 时，$|f(x,y)-A| < \epsilon$，两侧取极限 $x \to x_0$，得到 $|\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) - A| < \epsilon$，当 $|y-y_0| < \delta$ 时显然结论成立。

定理 12.2 (重极限的任意性)

设 (x,y) 沿着任意路径趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y) \to A$，则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

证明 反设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\neq A$，则 $\exists\epsilon_0$ 和 $\{\mathbf{x}_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{x}_n=(x_0,y_0)$，但 $|f(\mathbf{x}_n)-A|\geq\epsilon_0$，将 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n,\cdots$ 连接成折线，折线趋近于 (x_0,y_0)，但 $f(x,y)$ 不趋于 A，这与已知矛盾。

练习 12.2 常用反例 讨论 $(0,0)$ 处的重极限与累次极限

(1) 重点：$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(2)$f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

(3)$f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$

(4)$f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$

(5) 重点：$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,-\infty<x<+\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

解 (1) 累次都是 0。重极限若选择 $y=kx$，则得到 $f(x,y)=\dfrac{kx^2}{(k^2+1)x^2}=\dfrac{k}{k^2+1}$，重极限不存在。

(2) 累次为 ±1。重极限考虑 $y=kx$，则 $f(x,y)=\dfrac{x-kx}{x+kx}=\dfrac{1-k}{1+k}$，不存在

(3) 先 x 后 y 极限为 0，先 y 后 x 不存在。重极限 $x\sin\dfrac{1}{y}<|x|\to0$，因此重极限为 0

(4) 累次极限不存在。而 $|f(x,y)|\leq|x|+|y|\to0$，重极限为 0。

(5) 画出图像，发现沿着直线逼近都是 0，沿着抛物线 $y=kx^2(0<k<1)$ 时趋于 1，因此极限不存在。

练习 12.3 反例应用 上述反例可作为以下问题的解答：

1. 累次极限存在但不相等：$\dfrac{x-y}{x+y}$
2. 累次极限存在且相等，但重极限不存在：$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$
3. 累次极限不存在，但重极限存在：$x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$
4. 重极限与双累次极限都不存在：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

12.1.2 重极限的计算

练习 12.4 多元分式 讨论 $(0,0)$ 处的重极限：(1)$f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ (2)$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ (3)$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ (4)$f(x,y)=\dfrac{x^6y^8}{(x^2+y^4)^5}$ (5)$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ (6)$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$

解 (1) 不齐次，一方面将分子次数升高，$y=x$ 得到极限为 0。另一方面常数消去公因式，将分母变简单，例如 $y=x^2-x$ 化简为 $x-1\to-1$，因此重极限不存在

(2) 齐次，$y=kx$，不存在

(3) 齐次，$y=kx$，不存在

(4) 尝试将分母变齐次，$x=ky^2$，得到 $\dfrac{k^6y^{20}}{(k^2+1)^5y^{20}}$，不存在

(5) 尝试化简 $x=y$ 得到 1，其他想不到办法，尝试取零，$x=0$ 得到极限为 0。不存在

(6) 分子次数高：$y=x$ 显然极限为 0。另一方面化简分母，设 $y^3=x^4-x^3$，得到 $\dfrac{x^2(x^4x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^4}$，极限不是 0。

练习 12.5 指数形式 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} x^y$

解 (1) 用累次极限看出一个 0，一个 1，显然重极限不存在

12.2 多元函数连续性

12.2.1 多元函数连续性

定义 12.3 (多元函数连续)

若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续。♣

例题 12.1 关于 x,y 连续，不多元连续 举例说明 $f(x,y)$ 关于 x,y 均连续，但不多元连续。

解 不一定，例如：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f(x,y)$ 关于 x,y 均连续，但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在。

✍ **练习 12.6 加强条件** 若 $f(x,y)$ 在 D 中关于 x,y 连续，且增加任意条件可证明 $f(x,y)$ 连续：

1. 一致连续条件：y 的连续是关于 x 一致的
2. Lip 条件：$f(x,y)$ 关于 x 满足 Lip 条件，则 $f(x,y)$ 连续
3. 单调条件：关于 x 或 y 单调

证明 (1)(2) 用 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<2\epsilon$ 即可，注意第一个绝对值放缩要求 y 的连续关于 x 一致！

(3) 设关于 y 单调增。考虑一点 (x_0,y_0)，用 (x,y) 逼近，设 $y_0-\delta_1<y<y_0+\delta_1$，首先根据 y 的单调性可知 $f(x,y)\le f(x,y_0+\delta_1)$ 根据 y 的连续性可知 $f(x,y_0+\delta_1)\le f(x,y_0)+\epsilon$。进一步地根据 x 的连续性可知

$$f(x,y)\le f(x,y_0)+\epsilon\le f(x_0,y_0)+2\epsilon$$

同理可证得 $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)-2\epsilon$，综上可证 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le 2\epsilon$。

12.2.2 多元函数的一致连续性

引理 12.1 (多元三角不等式)

对 $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，有 $||\mathbf{x}|-|\mathbf{y}||\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ ♡

证明 $|\mathbf{x}|=|(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|$，因此移项得到 $|\mathbf{x}|-|\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$。同理可得 $|\mathbf{y}|-|\mathbf{x}|\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$

✍ **练习 12.7 多元一致连续** (1)$f(\mathbf{x})=|\mathbf{x}|$，证明 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续 (2)$f(x,y)=\sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的一致连续性 (3)$f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy}$ 在 $(0,1)\times(0,1)$ 的一致连续性

证明 (1)$\forall\epsilon,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，若 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\epsilon$，则根据三角不等式可知 $|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})|=||\mathbf{x}|-|\mathbf{y}||\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\epsilon$，因此取 $\delta=\epsilon$ 即可。

(2) 选 $a_n=(\sqrt{2n\pi},\sqrt{2n\pi}),b_n=(\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}})$，得到 $|b_n-a_n|\to 0$，但 $|f(b_n)-f(a_n)|\not\to 0$，因此不一致连续

(3) 由于是在 $(1,1)$ 处出问题，可以考虑 $a_n=(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}),b_n=(1-\frac{1}{n+1},1-\frac{1}{n+1})$，显然 $|a_n-b_n|\to 0$，$|f(a_n)-f(b_n)|=\left|\dfrac{n^2-3n^2+o(n^2)}{4n^2-1}\right|\to\dfrac{1}{2}$，因此不一致连续。

定理 12.3 (多元 Lip 连续与一致连续)

$f(x,y)$ 是二元函数，若对 $\forall (x_1,y),(x_2,y),(x,y_1),(x,y_2)\in\mathbb{R}^2$ 有

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|\leq L|x_1-x_2|,\quad |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$$

则 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续

♡

证明 考虑 $|f(x',y')-f(x'',y'')|\leq|f(x',y')-f(x',y'')|+|f(x',y'')-f(x'',y'')|$，用 Lip 条件放缩即可。

第 13 章 多元微分学

13.1 多变量导数与微分

13.1.1 全微分与偏导数

定义 13.1 (偏导数)

f 在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 的偏导数定义为 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} := \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$

笔记 计算偏导 $f_x(x_0, y_0)$ 时，预先将 $y = y_0$ 代入，得到 $f(x, y_0)$，再对 x 求导更加方便。

定义 13.2 (可微)

若 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 邻域 $U(P_0)$ 中有定义，且对于 $U(P_0)$ 中任意点 (x, y)，$\exists A, B$ 使得

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$

则称 $f(x, y)$ 在 P_0 可微。可知这里 $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}, B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$，因此记 $\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathrm{d}y$

笔记 可微定义中的范数可以更改，例如 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$，在 $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ 时 $\alpha, \beta \to 0$，该条件也等价于可微。

推论 13.1 (偏导与可微)

若 f 在 (x_0, y_0) 可微，则 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 一定存在

笔记 判断是否可微分两步：

1. 看看 f_x, f_y 是否都存在，不存在则不可微
2. 计算 $\dfrac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) - f_x\Delta x - f_y\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ 是否极限为 0，是则可微

练习 13.1 计算全微分 (1) 求 $u = xe^{yz} + e^{-z} + y$ 在原点处的全微分

解 (1) 原点处 $u_x = 1, u_y = 1, u_z = -1$，因此原点处 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y - \mathrm{d}z$

练习 13.2 判断可微性 判断 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在原点的可微性

解 首先计算偏导，计算 x 偏导时将 y 固定为 0(而不是固定为一个很小的值！)

$$f_x(0, 0) = \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

同理可知 $f_y(0, 0) = 0$，再考虑极限

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - 0\Delta x - 0\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

极限不存在，因此不可微。

13.1.2 可微性的证明

练习 13.3 判断可微性 (1) 讨论 $f(x, y) = \begin{cases} y\ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在原点的可微性

(2)$\alpha>0$，讨论 $f(x,y)=|xy|^\alpha$ 在原点的可微性

(3)$\alpha>0$，讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点处的可微性

解 (1) 先看看偏导数，$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\dfrac{0}{x}=0$，$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\ln(y^2)-0}{y}=-\infty$，因此不可微

(2) 先看看偏导数 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$，$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y}=0$，考虑：

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

考察上述分式是否趋于 0，用极坐标变换即可得出若 $\alpha>\frac{1}{2}$，则可微，若 $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$，则不可微

(3)$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，而 $\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{|x|^\alpha y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，使用极坐标变换得到 $r^{\alpha-2}|\cos\theta|^\alpha\sin\theta$。因此 $\alpha>2$ 时可微，$0<\alpha\leq 2$ 时不可微 (例如取 $\theta=\frac{\pi}{4}$)。

13.1.3 梯度与方向导数

定义 13.3 (梯度)

对于 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，定义梯度 $\nabla f:=[\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}]^T$ ♣

定义 13.4 (方向导数)

开集 $D\subset\mathbb{R}^n, f:D\to\mathbb{R}$，$\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ 为单位向量，$\mathbf{x}_0\in D$，定义 $\dfrac{\partial f}{\partial\mathbf{u}}:=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)}{t}$ ♣

笔记 要计算方向导数，则可取方向为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$。原因在于 $\dfrac{(x-x_0,y-y_0)}{|(x-x_0,y-y_0)|}=\dfrac{1}{r}(x-x_0,y-y_0)=(\cos\alpha,\cos\beta)$

练习 13.4 常用反例 (1) 证明 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ 在原点连续，但不存在任意方向导数和偏导数

证明 (1) 考虑方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则 $f_l(0,0)=\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{f(r\cos\alpha,r\cos\beta)-f(0,0)}{r}=\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{r^{1/3}}=\infty$

定理 13.1 (可微函数方向导数的梯度表达)

若 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则 $f(x,y)$ 在 P_0 沿任一方向 l 的方向导数存在，且

$$f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta=\nabla f\cdot\mathbf{n}$$

这里 $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是 l 方向的单位向量 ♡

证明 考虑方向导数 $f_l(P_0)=\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{f(x_0+r\cos\alpha,y_0+r\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{r}$，可化简为：

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{f_x(x_0,y_0)r\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)r\cos\beta+o(r)}{r}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

笔记 设 θ 是 ∇f 与 l 的夹角，则 $f_l(\mathbf{x}_0)=|\nabla f||\mathbf{n}|\cos\theta=|\nabla f|\cos\theta$。可知梯度方向是增长最快的方向。

练习 13.5 梯度与方向导数计算 (1) 计算 $u=xyz$ 在 $A(5,1,2)$ 朝向 $B(9,4,14)$ 的方向导数

(2)$u(x,y,z)=xy^2z^3$，求 $u(x,y,z)$ 在 $(1,1,1)$ 处函数值增长最快的方向

解 (1) 可微函数具体计算方向导数时一般用 $\nabla f \cdot \mathbf{n}$ 计算。$\overrightarrow{AB} = (4,3,12)$，因此 $\mathbf{n} = \frac{1}{13}(4,3,12)$，$A$ 处梯度为 $(2,10,5)$，因此 $\nabla f \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{13}(8+30+60) = \frac{98}{13}$

(2) 即梯度方向，$u_x = y^2z^3, u_y = 2xyz^3, u_z = 3xy^2z^2$，因此梯度为 $(1,2,3)$

练习 13.6 方向导数的应用 已知 $f(x,y)$ 可微，若 l_1, l_2 是 $\mathbb{R}^2$ 上一组线性无关的向量，若 $f_{l_1}(x,y) = f_{l_2}(x,y) \equiv 0$，证明 $f(x,y)$ 为常值函数。

证明 不妨设 $n_{l_1} = (\cos\alpha, \sin\alpha), n_{l_2} = (\cos\beta, \sin\beta)$，此时根据条件

$$\begin{cases} f_{l_1} = f_x \cos\alpha + f_y \sin\alpha \equiv 0 \\ f_{l_2} = f_x \cos\beta + f_y \sin\beta \equiv 0 \end{cases}$$

根据线性无关条件可解出 $f_x \equiv f_y \equiv 0$，因此为常值函数。

13.1.4 可微、偏导、方向导数、连续关系总结

定理 13.2 (可微的性质)

若 f 在 $\mathbf{x}_0$ 可微，则

- f 在 $\mathbf{x}_0$ 处连续
- f 在 $\mathbf{x}_0$ 处存在偏导数和任意方向导数

证明 (1) 根据定义显然 $||\mathbf{h}|| \to 0$ 时，$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \to 0$，因此连续

定理 13.3 (可微充分条件)

若 $f(x,y)$ 偏导数 f_x, f_y 在 (x_0,y_0) 连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微

证明 首先写为 $\Delta z = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)]$，根据 Lagrange 中值定理得到

$$\Delta z = f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

根据偏导连续，$\exists \alpha, \beta$ 在 $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ 时 $\alpha, \beta \to 0$，满足

$$\begin{cases} f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = f_x(x_0,y_0) + \alpha \\ f_y(x_0, y_0+\Delta y) = f_y(x_0,y_0) + \beta \end{cases}$$

得到 $\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$，即可微。

笔记 若 f_x, f_y 连续，则一般称 $f(x,y)$ 连续可微。

定理 13.4 (偏导与方向导的性质)

偏导与方向导数相关性质：

- 若 f 偏导数在 (x_0,y_0) 邻域有界，则 f 在 (x_0,y_0) 连续
- f 的偏导数存在或任意方向导数存在并不能推出连续或可微

证明 (1) 首先 $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0)$，根据 Lagrange 中值定理得到

$$f(x,y) - f(x_0,y) = f_x(\xi,y)(x-x_0), \quad f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = f_y(x_0,\eta)(y-y_0)$$

根据偏导有界条件，因此 $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \to 0$，因此连续。

(2) 均见下面的重要反例

练习 13.7 方向导数、偏导数存在，但不可微，不连续例子 证明下面的 $f(x,y)$ 在原点不连续，但是 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，任何方向 l 满足 $f_l(0,0)=0$，

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,-\infty<x<\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

证明 不连续的原因是可以选择 0 趋近，也可以选择 1 趋近。但方向导数都为 0 的原因是 $y=x^2$ 在原点处切线是水平的，无论原点处切线取什么，都会经过 0 区域。

13.1.5 复合求导：链式法则

定理 13.5 (链式法则)

若 $x=\varphi(x,t),y=\psi(s,t)$ 在 $(s,t)\in D$ 可微，$z=f(x,y)$ 在 $(x,y)=(\varphi(s,t),\varphi(s,t))$ 可微，则复合函数 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 在 (s,t) 可微，且

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial z}{\partial s}\right|_{(s,t)}=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\dfrac{\partial x}{\partial s}\right|_{(s,t)}+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\dfrac{\partial y}{\partial s}\right|_{(s,t)}\\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial t}\right|_{(s,t)}=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\dfrac{\partial x}{\partial t}\right|_{(s,t)}+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_{(s,t)}\end{cases}$$

♡

练习 13.8 链式法则练习 (1) 设 $z=uv+\sin t$，其中 $u=e^t,v=\cos t$，计算 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

(2) 计算 x^x 的导数

解 (1) 展开后如下：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial t}\\&=ve^t+u(-\sin t)+\cos t=e^t(\cos t-\sin t)+\cos t\end{aligned}$$

(2) 可以两边取对数隐函数求导。或者令 $y=u^v$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u^v\ln u+v(u^{v-1})=x^x(1+\ln x)$

练习 13.9 高阶偏导 (1) 设 $z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 把每个位置当作一层参数即可，注意偏导的参数仍保持一致

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1(x,\dfrac{x}{y})+f_2(x,\dfrac{x}{y})\dfrac{1}{y}$，因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}+f_{12}\frac{1}{y}+\left[f_{21}+f_{22}\frac{1}{y}\right]\frac{1}{y}=f_{11}+\frac{2}{y}f_{12}+\frac{1}{y^2}f_{22}$$

13.1.6 混合偏导

定理 13.6 (混合偏导定理)

若 $f_{xy}(x,y),f_{yx}(x,y)$ 均在 x_0,y_0 邻域连续，则

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

♡

证明 定义 $F(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)$，则

$$F(\Delta x,\Delta y)=\begin{cases}[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x\\ [f_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)-f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)]\Delta y\end{cases}$$

再根据 Lagrange 中值定理：

$$F(\Delta x,\Delta y)=\begin{cases} f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y \\ f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y \end{cases}$$

因此 $\dfrac{F(\Delta x,\Delta y)}{\Delta x\Delta y}=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)$，令 $\Delta x,\Delta y\to 0$ 即可得到结果。

✍ **练习 13.10 混合偏导不相同的例子** 对于下面的函数，$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$：

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

解 直接计算可以得到 $f_{xy}(0,0)=-1,f_{yx}(0,0)=1$

✍ **练习 13.11 混合偏导相关练习** (1) 设 f_x,f_y,f_{yx} 在 (x_0,y_0) 邻域存在，f_{yx} 在 (x_0,y_0) 连续，证明 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 也存在，且 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

(2) 设 f_x,f_y 在 (x_0,y_0) 某邻域存在且在 (x_0,y_0) 可微，证明：$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

13.2 多元中值定理与泰勒展开

13.2.1 多元中值定理

定义 13.5 (凸区域)

区域 $D\subset\mathbb{R}^2$，若 $\forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$ 和 $\forall\lambda\in[0,1]$ 满足

$$(x_1+\lambda(x_2-x_1),y_1+\lambda(y_2-y_1))\in D$$

即任意两点的连线都含于 D，则称 D 为凸区域。♣

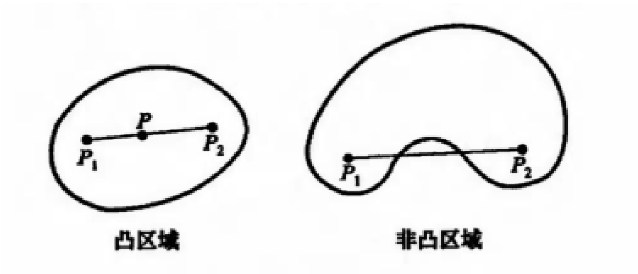

图 13.1: 凸区域

定理 13.7 (多元中值定理)

二元函数 $f(x,y)$ 在凸开域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 连续，在 D 内点均可微，则对 $\forall P(a,b),Q(a+h,b+k)\in D$，$\exists\theta\in(0,1)$ 满足

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k$$

♡

证明 令 $\Phi(t)=f(a+th,b+tk)$，根据 Lagrange 中值定理得到 $\exists\theta\in(0,1)$ 使得 $\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi'(\theta)$，而

$$\Phi'(\theta)=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k$$

由于 D 是凸区域，因此 $(a+\theta h,b+\theta k)\in D$，从而结论成立。

13.2.2 多元 Taylor 展开

定理 13.8 (多元 Taylor 展开)

多元泰勒 $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 展开的公式如下：

$$f(x,y)+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l!}\left(\binom{l}{0}\frac{\partial^l f}{\partial y^l}(x,y)\Delta y^l+\binom{l}{1}\frac{\partial^l f}{\partial x\partial y^{l-1}}(x,y)\Delta x\Delta y^{l-1}+\cdots+\binom{l}{l}\frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x,y)\Delta x^l\right)+R(\Delta x,\Delta y)$$

♡

证明 设 $\Phi(t)=f(x_0+th, y_0+tk)$，用一元 Taylor 公式证明。

13.3 隐函数定理

13.3.1 隐函数存在定理与可微定理

隐函数研究的问题是给定一个二维曲线表达式 $F(x,y)=0$，希望研究 $y=y(x)$ 的存在性，并计算 $y'(x)$，而计算 $y'(x)$ 其实不需要得到 $y(x)$ 的具体表达式，因此隐函数求导大幅度简化了求导过程，因此作为多元微分学的一部分。

定义 13.6 (隐函数)

$E\subset\mathbb{R}^2$，$F:E\to\mathbb{R}$，对于方程 $F(x,y)=0$，若存在集合 $I,J\subset\mathbb{R}$ 使得 $\forall x\in I$ 存在唯一 $y\in\mathbb{R}$，满足 $F(x,y)=0$，则称 $F(x,y)=0$ 定义了隐函数。

♣

定理 13.9 (隐函数存在唯一性定理)

若 $F(x,y)$ 满足

1. F 在 $P_0(x_0,y_0)$ 为内点的某一区域 D 存在 x,y 连续偏导
2. $F(x_0,y_0)=0$，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

则：

1. $F(x,y)=0$ 唯一定义了 $\forall x\in U(x_0,\delta)$ 上的连续函数 $y=f(x)$
2. $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 上连续可微，且 $f'(x)=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$(这里 F_x 求导时把 y 当作常数而非函数！)
3. 特别地，对于 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$，$y=f(x_1,\cdots,x_n)$，得到 $f_{x_i}(x_1,\cdots,x_n)=-\dfrac{F_{x_i}}{F_y}$

♡

证明 (2)$F(x,y)=0$ 两侧对 x 求导得到 $F_x(x,y)+F_y(x,y)y'=0$，因此 $y'=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

笔记 如果只希望得到 $f(x)$ 连续，则条件可减弱为 $F(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域连续，$F(x_0,y_0)=0$，固定 x 时 $F(x,y)$ 关于 y 严格单调。

笔记 若要求高阶导，则可以对 $y'=-\dfrac{F_x}{F_y}$ 两边求导，再将 $y'(x)$ 表达式带进去，或者实际计算时可以 $F(x,y)=0$ 直接两边求两次导。

练习 13.12 隐函数求导 (1)$y=y(x)$ 由 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(2)$z=z(x,y)$ 由 $F(x-y,y-z)=0$ 所确定的隐函数，求 z_x,z_y,z_{xy}

(3)$F(x,y,z)=0$ 可以确定 $z=z(x,y),y=y(z,x),x=x(y,z)$，证明：$\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$

解 (1) 可以用隐函数求导公式，此时 F 对 x,y 求导时，将它们视为彼此无关的：

$$\begin{cases}F_x=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\\ F_y=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}$$

或者直接两侧求导，此时视 $y=y(x)$ 与 x 有关：

$$\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\cdot y'+\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot y'=0$$

(2) 比较难用隐函数求导公式，只能两边求导。视 $z=z(x,y)$，x,y 彼此无关，则两侧分别对 x,y 求导得到：

$$\begin{cases} F_1+F_2(-z_x)=0\Rightarrow z_x=\dfrac{F_1}{F_2} \\ -F_1+F_2(1-z_y)=0\Rightarrow z_y=1-\dfrac{F_1}{F_2} \end{cases}$$

要求 z_{xy}，可以对 $F_1(x-y,y-z)-z_xF_2(x-y,y-z)=0$ 两侧对 y 求导，得到

$$(-F_{11}+F_{12}(1-z_y))-(F_{21}(-1)+F_{22}(1-z_y))\,z_x-F_2z_{xy}=0\Rightarrow z_{xy}=\frac{2F_1F_2F_{12}-F_{11}F_2^2-F_{22}F_1^2}{F_2^3}$$

(3) 注意这里的符号含义，不能简简单单乘起来变成 1。例如 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ 的含义为 $\dfrac{\partial x(y,z)}{y}$，因此根据隐函数定理即

$$-\frac{F_y}{F_x}\cdot-\frac{F_z}{F_y}\cdot-\frac{F_x}{F_z}=-1$$

13.3.2 隐函数组存在定理与微分定理

定理 13.10 (隐函数组定理)

若 $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 满足：

- 在 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 邻域中对所有变量有连续偏导
- $F(P_0)=G(P_0)=0$，$J=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}\neq 0$

则方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

在 P_0 邻域中唯一确定了两个二元连续隐函数 $u=f(x,y),v=g(x,y)$，设 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$，则

$$u_x=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},u_y=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},v_x=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},v_y=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

记忆口诀为求什么就换什么，例如求 u_x 就把 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 中的 u 换成 x，得到 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$ ♡

证明 求导结论使用了 Cramer 法则

笔记 一般而言有几个方程就有几个因变量，其余的为自变量。

练习 13.13 容易分不清的题 (1) 错过：已知 $x=\varphi(t),y=\phi(x)$，$\varphi'(t)=e^t+1,\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=e^t+2t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}$

解 (1) 直接求：

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{e^t+2}{e^t+1}$$

练习 13.14 隐函数组求导 (1) 证明

$$\begin{cases} x^2+y^2+u^2-v^2=2 \\ x+y+u+v=0 \end{cases}$$

在 $P_0(1,1,-1,-1)$ 的某邻域中能确定隐函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，并求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$

(2) 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 由方程组

$$\begin{cases}u=f(ux,v+y)\\v=g(u-x,v^2y)\end{cases}$$

给出的隐函数，求 u_x,v_x

(3) 已知如下方程组，求 z_x：

$$\begin{cases}x=u+v\\y=u^2+v^2\\z=u^3+v^3\end{cases}$$

(4) 令 $u=f(x-ut,y-ut,z-ut),g(x,y,z)=0$，求 u_x,u_y

解 (1)$F=x^2+y^2+u^2-v^2-2,G=x+y+u+v$，则显然 F,G 对每个分量都有连续偏导数，$F(P_0)=G(P_0)=0$，方便起见，直接求出所有偏导：

$$\begin{bmatrix}F_x&F_y&F_u&F_v\\G_x&G_y&G_u&G_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x&2y&2u&-2v\\1&1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}2u&-2v\\1&1\end{vmatrix}=2v+2u$$

因此 $J(P_0)\neq0$，隐函数组存在，根据隐函数组求导：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{2u+2v}\cdot(2x+2v)=-\frac{x+v}{u+v},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{y-u}{u+v}$$

(2) 直接两侧求导，得到

$$\begin{cases}u_x=f_1\cdot(u_xx+u)+f_2v_x\Rightarrow(1-xf_1)u_x-f_2v_x=uf_1\\v_x=g_1\cdot(u_x-1)+g_22vv_xy\Rightarrow g_1u_x+(2vyg_2-1)v_x=g_1\end{cases}$$

解线性方程组得到

$$u_x=\frac{(2vyg_2-1)uf_1+f_2g_1}{(1-xf_1)(2vyg_2-1)+f_2g_1},v_x=\frac{(1-xf_1)g_1-uf_1g_1}{(1-xf_1)(2vyg_2-1)+f_2g_1}$$

(3) 令 x,y 为自变量，u,v,z 为因变量，则

$$z_x=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,v)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(z,u,v)}}$$

13.4 多元无条件极值问题

定义 13.7 (极值与极值点)

开集 $D\subset\mathbb{R}^n$，函数 $f:D\to\mathbb{R}$，$x_0\in D$，若存在球 $B_r(x_0)\subset D$ 使得 $\forall x\in B_r(x_0)$ 有 $f(x)\geq f(x_0)$，则称 x_0 为 f 的一个极小值点。 ♣

定义 13.8 (驻点、稳定点)

若 $P_0(x_0,y_0)$ 满足 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，则称其为 $f(x,y)$ 的驻点/稳定点。 ♣

定义 13.9 (Hesse 矩阵)

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，则其 Hesse 矩阵为：

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

♣

定义 13.10 (正定、负定、不定)

矩阵 A 是对称矩阵，考虑 $Q(x) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$，分为以下三种情况：

- 正 (负) 定：对 $\forall \mathbf{x}, Q(\mathbf{x}) \geq (\leq) 0$
- 不定：$\exists \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$，$Q(\mathbf{p}) \leq 0 \leq Q(\mathbf{p})$

♣

定理 13.11 (正定的判别法)

A 为对称矩阵，则 A 严格正定当且仅当其各阶顺序主子式均大于 0

♡

13.4.1 无条件极值

定理 13.12 (极值点必要条件)

若 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 存在偏导数，且在 P_0 取到极值，则 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

♡

证明 用反证法即可。

定理 13.13 (极值点充分条件)

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$(x_0, y_0)$ 为其驻点，且 f 在 (x_0, y_0) 某一邻域中有二阶连续导数，

- 若 Hesse 矩阵 H 是严格正 (负) 定矩阵，则 $\mathbf{x}_0$ 是 f 的严格极小 (大) 值点
- 若 Hesse 矩阵 H 可逆但为不定方阵，则 $\mathbf{x}_0$ 不是 f 的极值点
- 若 Hesse 矩阵 H 不可逆，则不能判别

♡

证明 根据 Taylor 公式：

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{xy}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)$$

因此如果黑塞矩阵为正定，则 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$，若负定则 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$，若不定则不取极值，若黑塞矩阵行列式为 0，则不能判别

推论 13.2 (二元极值判别法)

(x_0, y_0) 是 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的驻点，f 在 (x_0, y_0) 某个邻域中有连续二阶偏导，记

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

- $ac - b^2 > 0$ 且 $a > 0$：极小值
- $ac - b^2 > 0$ 且 $a < 0$：极大值
- $ac - b^2 < 0$：无极值
- $ac - b^2 = 0$：不确定

♡

证明 极小值即顺序主子式大于 0;极大值需要负定,而负定等价于所有元素取负号后为正定,因此注意 $ac-b^2>0$。$ac-b^2<0$ 等价于不负定也不正定，而 $ac-b^2=0$ 等价于不可逆。

✍ **练习 13.15 无穷极大、无极小** 证明 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷个极大值点，但无极小值点。

证明 (1) 先计算驻点：$f_x=-(1+e^y)\sin x=0, f_y=e^y\cos x-e^y-ye^y=0$，需要 $\sin x=0, y=\cos x-1$，即 $x=n\pi, y=(-1)^n-1$

(2) 判断极值类型:$f_{xx}=-(1+e^y)\cos x, f_{xy}=-e^y\sin x, f_{yy}=e^y(\cos x-2-y)$,考虑 $n=2m$ 时,$P_m(2m\pi,0)$,$f_{xx}(P_m)=-2, f_{xy}=0, f_{yy}=-1$,$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2>0$,因此为极大值点。考虑 $n=2m+1$,$P_m((2m+1)\pi,-2)$,$f_{xx}(P_m)=1+e^{-2}>0$，$f_{xy}=0$，$f_{yy}=-e^{-2}$，$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-e^{-2}(1+e^{-2})<0$ 不取极值。

当无法直接使用 Hesse 矩阵进行判断时，可以先求出驻点，再使用配方等方法判断驻点是否最小，下面的题目便有用到

✍ **练习 13.16 计算极值点与极值** (1) 求 $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2-2x-2y+5$ 的全部极值点与极值

(2) 求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xz-yz-3x+y+4z+7$ 的极值点与极值

解 (1) 先算驻点：$f_x=f_y=x+y-2$，因此 $x+y=2$ 的点为驻点。再判断极值性：$f_{xx}=1, f_{xy}=1, f_{yy}=1$，因此 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$，无法判断用 Hesse 矩阵判断。而 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)^2-2(x+y)+5=\frac{1}{2}[(x+y)-2]^2+3$，因此 $x+y=2$ 时不仅是极值点，而且是最值点。

(2) 先算驻点：$f_x=2x-z-3, f_y=2y-z+1, f_z=2z-x-y+4$，解线性方程组得到 $x=0, y=-2, z=-3$。先尝试用 Hesse 矩阵：$f_{xx}=2, f_{xy}=0, f_{xz}=-1, f_{yy}=2, f_{yz}=-1, f_{zz}=2$，即

$$H=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$$

顺序主子式都大于 0，因此为极小值点。

13.4.2 最值问题：极值点 + 边界

要求某区域内函数的最值，只需要考虑区域内部的极值点以及边界即可。

13.4.3 多元极值理论证明

✍ **练习 13.17** $f(x,y)$ 在 D 上连续且有连续偏导，若 $f_x+f_y=f$，$f\Big|_{\partial D}=0$，证明 $f(x,y)$ 在 D 上恒等于 0

证明 反证：若 $f(x,y)$ 不恒为 0，则 $\exists(x_0,y_0)\in D^o$ 满足 $f(x_0,y_0)\neq 0$，不妨设 $f(x_0,y_0)>0$，设 f 在 (x_0,y_0) 处取正最大值，由于在区域内部，最大值一定是极值点，即 $f_x(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=0$，则与 $f(x_0,y_0)>0$ 矛盾。

✍ **练习 13.18 构造辅助函数** 设 $f(x,y)$ 在单位圆盘 $D:\{x^2+y^2\leq 1\}$ 内具有连续一阶偏导，且对 $\forall(x,y)\in D$，有 $|f(x,y)|\leq 1$，证明：$\exists(x_0,y_0)\in D^o$ 使得 $f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)<16$

证明 构造 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$，$g(0,0)=f(0,0)\leq 1$，而在边界上 $g(x,y)=f(x,y)+2\geq 1$，因此要么 $g(x,y)$ 在 D 上恒等于 1，要么在 D^o 某点取极小值，总 $\exists(x_0,y_0)$ 使得 $g_x(x_0,y_0)=g_y(x_0,y_0)=0$，即 $f_x(x_0,y_0)=-4x_0, f_y(x_0,y_0)=-4y_0$，进而 $f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)\leq 16(x_0^2+y_0^2)\leq 16$

13.5 条件极值

13.5.1 Lagrange 乘数法

下面考虑目标函数为 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，条件组 $\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,k=1,2,\cdots,m(m<n)$

定义 13.11 (Lagrange 函数)

针对上述目标函数与条件组，定义 Lagrange 函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

♣

定理 13.14 (Lagrange 乘数法)

若 f,φ_i 在 D 上有一阶连续偏导，$P_0(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 是 f 极值点，Jacobi 矩阵 $\left(\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}(P_0)\right)_{m\times n}$ 秩为 m，则存在 $\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_m^{(0)}$，使得 $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)})$ 是 Lagrange 函数的稳定点：

$$\begin{cases}L_{x_1}=L_{x_2}=\cdots=L_{x_n}=0\\ L_{\lambda_1}=L_{\lambda_2}=\cdots=L_{\lambda_m}=0\end{cases}$$

♡

练习 13.19Lagrange 乘数法的直接使用 (1) 讨论 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x+y+z=0$ 条件下的最值。

练习 13.20Lagrange 乘数法证明不等式 (1) 用 Lagrange 乘数法证明 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$

(2)$x,y>0$，证明 $\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$

证明 (1) 设 $x_1+\cdots+x_n=a$，目标即求 $f=x_1\cdots x_n$ 在 $x_1+\cdots+x_n=a$ 条件下的最值。则构造 $L=x_1x_2\cdots x_n+\lambda(x_1+\cdots+x_n-a)$，解方程组：

$$\begin{cases}L_{x_1}=\dfrac{x_1\cdots x_n}{x_1}+\lambda=0\\ \quad\vdots\\ L_{x_n}=\dfrac{x_1\cdots x_n}{x_n}+\lambda=0\\ L_\lambda=x_1+x_2+\cdots+x_n-a=0\end{cases}$$

解得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{a}{n}$。$f$ 在区域边界上取到最小值，在极值点取到最大值，因此

$$x_1\cdots x_n\le\left(\frac{a}{n}\right)^n=\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n$$

练习 13.21Lagrange 乘数法的应用 (1) 抛物面 $x^2+y^2=z$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一个椭圆，求椭圆到原点的最近和最远距离

解 (1) 目标函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，条件为 $x^2+y^2-z=0$ 与 $x+y+z-1=0$。根据 Lagrange 乘数法，令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$$

对 L 求一阶偏导数，且令它们都为零，则有

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2x\lambda + \mu = 0 \\ L_y = 2y + 2y\lambda + \mu = 0 \\ L_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ L_\mu = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

首先前两个方程有对称性，因此相减得到 $2(x-y) + 2(x-y)\lambda = (x-y)(1+\lambda) = 0$，要求 $x = y$ 或者 $\lambda = -1$。若 $\lambda = -1$，代入第一个式子得到 $\mu = 0$，代入第三个式子得到 $z = -\dfrac{1}{2}$，而第四个式子要求 $x^2 + y^2 = z$，因此无解。若 $x = y$，则 $z = 2x^2, z = -2x + 1$，解出 $x = y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$，$z = 2 \mp \sqrt{3}$，而

$$f\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, 2 \mp \sqrt{3}\right) = 9 \mp 5\sqrt{3}$$

最大值为 $9 + 5\sqrt{3}$，最小值为 $9 - 5\sqrt{3}$

第 14 章 含参积分

14.1 含参正常积分

14.1.1 含参正常积分基本概念与定理

定义 14.1 (含参正常积分)

$f(x,t)$ 是定义于 $G=\{\alpha(t)\le x\le \beta(t), a\le t\le b\}$ 区域的二元函数，当对 x 积分时，该积分为 t 的函数：

$$F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\mathrm{d}x, t\in[a,b]$$

定理 14.1 (规则区域含参正常积分性质)

若 $f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续，则

- 连续性：含参积分连续，即对 $\forall t_0\in[c,d]$ 有 $\lim\limits_{t\to t_0}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,t_0)\mathrm{d}x$
- 积分交换：$\int_c^d \mathrm{d}t\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}x$
- 可导：若 $f_t(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 也连续，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right)=\int_a^b f_t(x,t)\mathrm{d}x$

定理 14.2 (不规则区域的连续与可微性)

若 $f(x,t)$ 在 $[\alpha(t),\beta(t)]\times[c,d]$ 连续，$\alpha(t),\beta(t)$ 在 $[c,d]$ 上连续，则

- 连续性：$\varphi(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上连续，即
$$\forall t_0\in[c,d], \lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x,t_0)\mathrm{d}x$$
- 可微性：若 $f_t(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，$\alpha(t),\beta(t)$ 在 $[c,d]$ 上可导，则 (将被积分变量用上下限代替)
$$\varphi'(t)=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x,t)\mathrm{d}x$$

练习 14.1 含参积分求导 (1) 重点：已知 $f(x)\in C[a,b]$，$F(y)=\int_a^b f(x)|y-x|\mathrm{d}x, y\in[a,b]$，计算 $F''(y)$

解 (1) 首先得改写为不规则区域积分：$F(y)=\int_a^y f(x)(y-x)\mathrm{d}x+\int_y^b f(x)(x-y)\mathrm{d}x$，因此

$$F'(y)=f(y)(y-y)\cdot 1+\int_a^y f(x)\mathrm{d}x-f(y)(y-y)-\int_y^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^y f(x)\mathrm{d}x-\int_y^b f(x)\mathrm{d}x$$

进而得到 $F''(y)=f(y)+f(y)=2f(y)$

练习 14.2 含参积分求导的应用 (1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t}{e^x\sin x-\sin x}$

解 (1) 方法一：使用含参积分求导，分母等价于 $(1+x)x-x=x^2$，使用洛必达法则得到 (注意分子是含参积分求导)：

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sqrt{1+x^4}}{2x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^4}=1$$

方法二：Taylor 展开 + 直接积分：分母等价于 x^2，分子用 $\sqrt{1+t^2}=1+\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)$ 得到：

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^6}{6}+o(x^6)}{x^2}=1$$

14.1.2 常用含参正常积分的计算

引理 14.1

$|a|<1$ 时，$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$，特别地，$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$ ♡

证明 使用万能公式，在前面三角函数不定积分中涉及过。

✍ **练习 14.3 积分：涉及 $\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}$ 型** (1) 计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x,0<a<b$

(2) 计算 $\displaystyle\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$

(3) 计算 $\displaystyle F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$，这里 $a\in(-1,1)$

解 (1) 由于 $\displaystyle\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\left.\frac{x^y}{\ln x}\right|_a^b=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$，因此根据交换积分顺序得到

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x=\ln\frac{1+b}{1+a}$$

(2) 由于 $\displaystyle\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$，而 $x=0$ 为瑕点，考虑 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y=0$，因此可视为连续。从而

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x$$

令 $u=\ln\dfrac{1}{x}$ 即可转化为 $\displaystyle\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\sin ue^{-(y+1)u}\mathrm{d}u$，结果为 $\arctan(b+1)-\arctan(a+1)$

(3) 注意到

$$\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\ln(1+a\cos x)-\ln(1-a\cos x)}{\cos x}=\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}y}{1+y\cos x}$$

而 $\dfrac{y}{1+y\cos x}$ 连续，因此

$$F(a)=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+y\cos x}\mathrm{d}x$$

最终积分结果为 $\pi\arcsin a$

14.2 含参反常积分与一致收敛

14.2.1 基本概念

定义 14.2 (含参反常积分)

$f(x,t)$ 在 $[c,+\infty)\times I$ 上有定义，对 $\forall t\in I$，反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 收敛，则记 $\Phi(t)=\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$，称其为含参反常积分。♣

定义 14.3 (含参反常积分一致收敛)

若对 $\forall\epsilon,\exists N>c,\forall M>N,\forall t\in I$ 有 $|\int_M^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x|<\epsilon$，则称 $\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 一致收敛于 $\Phi(t)$ ♣

定理 14.3 (一致收敛基本充要条件)

含参反常积分一致收敛有以下两个基本充要条件：

- Cauchy 收敛准则：$\forall\epsilon,\exists M>c,\forall A_1,A_2>M,\forall t\in I$ 满足 $|\int_{A_1}^{A_2} f(x,t)\mathrm{d}x|<\epsilon$
- 上确界判别法：$\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{t\in I}|\int_A^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x|=0$。

♡

笔记 证明不一致收敛一般用上确界判别法，具体见下面的例子

练习 14.4 重要例子：确界判别 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛

证明 (1) 一致收敛：做变量替换 $u=xy$ 得到 $\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y=\int_{Ax}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$，根据反常积分 Dirichlet 判别法可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ 收敛，因此 $\forall\epsilon,\exists M,\forall A'>M$ 时，有

$$\left|\int_{A'}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|<\epsilon$$

对题中的 δ，取 $A>\frac{M}{\delta}$，当 $x\geq\delta$ 时有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y\right|<\epsilon$$

因此根据确界判别法可知一致收敛。

(2) 不一致收敛：因为

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y\right|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\int_{Ax}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|\geq\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|=\frac{\pi}{2}$$

当 $A\to+\infty$ 时，极限不趋于 0，因此根据上确界准则可知不一致收敛。

笔记 本题在 $[\delta,+\infty)$ 上也可以用 Dirichlet 判别法，在 $(0,+\infty)$ 无法用的原因在于 $\int_0^N\sin xy\mathrm{d}y=\left.\frac{\cos xy}{x}\right|_0^N$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 不一致有界。

练习 14.5 不一致收敛例子 (1) 讨论 $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}xe^{-xy}\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性

解 (1)$\varphi(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xy}d(xy)=e^{-xy}|_{+\infty}^0=1$,但是其不一致收敛,原因是 $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|\int_M^{+\infty}xe^{-xy}\mathrm{d}y|=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}e^{-Mx}=1$ 不趋于 0。(如果 $x\in(a,+\infty),a>0$ 则一致收敛)

定理 14.4 (M 判别法)

若 $g(x)$ 满足 $|f(x,t)|\le g(x), x\in[c,+\infty), t\in I$，且 $\int_c^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛。

定理 14.5 (比较判别法)

$f(x,t)$ 在 $[c,+\infty)\times I$ 上连续，$|f(x,t)|\le F(x,t)$，若 $\int_c^{+\infty} F(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛，则 $\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上绝对一致收敛

证明 根据 Cauchy 收敛准则可知 $\forall\epsilon, \exists M, \forall A_1, A_2>M, \forall t, |\int_{A_1}^{A_2} F(x,t)\mathrm{d}x|<\epsilon$，因此推出 $\int_{A_1}^{A_2}|f(x,t)|\mathrm{d}x<\epsilon$。

练习 14.6M 判别法 (1) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛

(2) 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2y}\mathrm{d}y$ 在 $x\in[a,b]$ 一致收敛

证明 (1) 对任意 y 有 $\left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 收敛，因此由 M 判别法可知一致收敛。

(2) 由于 $e^{-x^2y}\le e^{-a^2y}$，且根据比较原则 $\int_0^{+\infty} e^{-a^2y}\mathrm{d}y$ 收敛

笔记 即使含参反常积分是常数，也不代表其一致收敛。

14.2.2 Dirichlet 与 Abel 判别法

定理 14.6 (Dirichlet 与 Abel 判别法)

对于 $\int_c^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\mathrm{d}x$，满足下面的条件则一致收敛

- Dirichlet 判别法：(1)$\forall N>c, \int_c^N f(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 一致有界 (2) 固定 $t\in I$，$g(x,t)$ 关于 x 单调，且 $x\to\infty$ 时关于 t 一致收敛 (即与 t 的选取无关) 到 0
- Abel 判别法：(1)$\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛 (2) 固定 $t\in I$，$g(x,t)$ 关于 x 单调，$g(x,t)$ 关于 $t\in I$ 一致有界

笔记 注意这里单调都是关于 x 的，一致都是关于 t 的。

练习 14.7Dirichlet 判别法 (1) 证明 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{1+xe^y}\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛

(2) 证明 $\int_1^{+\infty}\frac{y\sin xy}{1+y^2}\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛

证明 (1) $\left|\int_1^N \sin x\mathrm{d}x\right|$ 关于 y 一致有界。$\frac{1}{1+xe^y}$，一旦固定 y，肯定关于 x 单调。由于 $0<\frac{1}{1+xe^y}\le\frac{1}{1+x}\to 0$，因此一致收敛到 0。由 Dirichlet 判别法可知。

(2) 对于 $[a,b]\subset(0,+\infty)$，对 $\forall x\in[a,b]$，有

$$\left|\int_1^N \sin xy\mathrm{d}y\right|=\left|-\frac{\cos xy}{x}\right|_1^N\le\frac{2}{a}$$

而 $\left|\frac{y}{1+y^2}\right|\le\frac{1}{2}$ 一致有界，且

$$\left(\frac{y}{1+y^2}\right)'=\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}\le 0$$

因此 $\dfrac{y}{1+y^2}$ 单调减，$y\to+\infty$ 时，$\dfrac{y}{1+y^2}\to 0$，根据 Dirichlet 判别法可知

✍ **练习 14.8Abel 判别法** (1) 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

(2)$\displaystyle\varphi(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛

证明 (1)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 关于 y 一致收敛。e^{-xy} 关于 x 单调，且 $0<e^{-xy}\le 1$ 一致有界，由 Abel 判别法可知

(2) 用 Abel

14.3 含参反常积分的性质

14.3.1 含参反常积分的极限与连续性

定理 14.7 (连续性)

设 $f(x,t)$ 在 $I\times[c,+\infty)$ 上连续，若 $\Phi(t)=\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛，则 $\Phi(t)$ 在 I 上连续，即

$$\lim_{t\to t_0}\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty} f(x,t_0)\mathrm{d}x$$

♡

14.3.2 含参反常积分的可微性与可积性

定理 14.8 (可微性)

若 $f(x,t)$ 与 $f_t(x,t)$ 在 $[c,+\infty)\times I$ 上连续，$\Phi(t)=\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上收敛，$\displaystyle\int_c^{+\infty} f_t(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x,t)\mathrm{d}x$$

♡

证明 取任意单增趋于 $+\infty$ 的序列 A_n，令 $u_n(t)=\displaystyle\int_{A_n}^{A_{n+1}} f_t(x,t)\mathrm{d}x$，转化为函数列的逐项求导问题。

定理 14.9 (可积性)

$f(x,t)$ 在 $[c,+\infty)\times[a,b]$ 上连续，$\Phi(t)=\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\int_a^b\mathrm{d}t\int_c^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$$

♡

定理 14.10 (常用的积分公式)

设 $p>0$，则含参积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}$

♡

证明 首先 $\dfrac{\sin bx-\sin ax}{x}=\displaystyle\int_a^b\cos xy\mathrm{d}y$，因此

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b e^{-px}\cos xy\mathrm{d}y$$

由于 $|e^{-px}\cos xy|\le e^{-px}$，显然 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\mathrm{d}x$ 绝对收敛，因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos xy\mathrm{d}x, y\in[a,b]$ 一致收敛，交换积

分顺序得到

$$I=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos xy\mathrm{d}x$$

根据表格法得到：

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos xy\mathrm{d}x=-\frac{1}{p}e^{-px}\cos xy\Big|_0^{+\infty}+\frac{y}{p^2}e^{-px}\sin xy\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{p^2}e^{-px}\cos xy\mathrm{d}x$$

因此得到 $\dfrac{y^2+p^2}{p^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos xy\mathrm{d}y=\frac{1}{p}$

$$I=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}\mathrm{d}y=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}$$

定理 14.11 (Dirichlet 积分)

积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，进一步地，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(a)$

♡

定理 14.12 (正态积分公式)

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

♡

练习 14.9 相关练习 (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^e}\mathrm{d}x$

14.3.3 含参反常积分与函数项级数的关系

定理 14.13 (一致收敛级数表示法 (ZJU 考研考过))

$\displaystyle\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 I 上一致收敛的充要条件为对任一趋于无穷的递增数列 A_n(其中 $A_1=c$)，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 作为函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛

♡

证明 (1) 左推右：由于一致收敛，因此 $\forall\epsilon,\exists M>c$ 使得 $A''>A'>M$ 时，$\forall x$ 有 $|\displaystyle\int_{A'}^{A''}f(x,y)\mathrm{d}y|<\epsilon$，由于 A_n 趋于无穷，$\exists N,\forall m>n>N$ 有 $A_m>A_n>M$，对 $\forall x\in I$ 有 $|u_n(x)+\cdots+u_m(x)|=|\displaystyle\int_{A_n}^{A_{m+1}}f(x,y)\mathrm{d}y|<\epsilon$，即右侧级数一致收敛

(2) 右推左：反设含参积分不一致收敛，$\exists\epsilon_0,\forall M>c,\exists A''>A'>M,x'\in I$ 使得

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x',y)\mathrm{d}y\right|\geq\epsilon_0$$

先取 $M_1=\max\{1,c\}$，则 $\exists A_2,A_1$ 满足 $A_2>A_1>M_1$，以及 $x_1\in I$ 使得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x_1,y)\mathrm{d}y\right|\geq\epsilon_0$$

同理取 $M_n=\max\{n,A_{2n-2}\}$，有 $A_{2n}>A_{2n-1}>M_n,x_n\in I$ 使得

$$\left|\int_{A_{2n-1}}^{A_{2n}}f(x_n,y)\mathrm{d}y\right|\geq\epsilon_0$$

此时 $\exists\epsilon_0,\forall N,\exists n>N,\exists x_n\in I$ 使得 $|u_{2n}(x_n)|=|\displaystyle\int_{A_{2n}}^{A_{2n+1}}f(x_n,y)\mathrm{d}y|\geq\epsilon_0$，这与函数项级数一致收敛条件矛盾

(因为一致收敛要求所有 x 都趋于 0)。

第 15 章 多重积分

15.1 二重积分

15.1.1 二重积分的概念与计算

定义 15.1 (二重积分)

$D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界集，对 D 做分割 $T=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$，则二重积分定义为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{||T||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)s(\sigma_i)$$

♣

定理 15.1 (二重积分与累次积分)

对于 $D=[a,b]\times[c,d]$ 或者 $D=[a,b]\times[f_1(x),f_2(x)]$，方形边界二重积分可随意转换为累次积分，函数边界先积分函数边界

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,\quad \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

♡

笔记 二重积分的直接计算要特别关注其区域的对称性。而累次积分的顺序一般看函数，那边容易积就先积(也得靠经验觉得哪个好积)。

练习 15.1 对称性计算 (1) 计算 $\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:|x|+|y|\le 1$

解 (1) 由于 D 关于 x 轴对称，且 $f(x,y)=x^2y$ 关于 y 为奇函数，因此 $\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

练习 15.2 转换为累次积分 (1) 计算 $I=\iint_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是 $y=x$ 与 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 围成的区域

(2) 计算 $I=\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是 $y=x$ 与 $y=x^2$ 围成的区域

(3) 圆周边界：计算 $I=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}$，其中 D 为 $x=0,y=0$ 与 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ 所围成的区域

解 (1) 注意要先积 x，因为 e^{-y^2} 先积 x 比较方便，答案为 $\frac{1}{e}$

(2) 注意要先积 y，因为显然 $\frac{\sin x}{x}$ 不好积，答案为 $1-\sin 1$

(3) 这里 $\int \frac{1}{\sqrt{2a-x}}\mathrm{d}x$ 看成 $\int(2a-x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 就是个幂函数，不要被吓到。先积 y，得到

$$I=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}\frac{1}{\sqrt{2a-x}}\mathrm{d}y=\int_0^a\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{2a-x}}\mathrm{d}x=(2\sqrt{2}-\frac{8}{3})a^{\frac{3}{2}}$$

练习 15.3 几个进阶题 (1) 计算 $I=\iint_D |xy-\frac{1}{4}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:[0,1]\times[0,1]$(补区域技巧)

(2) 计算 $I=\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:-1\le x\le 1, 0\le y\le 2$(对称性)

解 (1) 要画出 $xy=\frac{1}{4}$ 线，分成上下两个部分，记上面的为 D_1，下面的是 D_2，但是 D_2 过于不规则，可以为 D_2 补上 D_1 的部分，这样算起来就方便不少。即 $I=\iint_{D_1}(xy-\frac{1}{4})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}(xy-\frac{1}{4})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}(xy-\frac{1}{4})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D(xy-\frac{1}{4})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，最终答案为 $\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\ln 2$

(2) 画出 $y=x^2$，根据关于 x 为偶，只需要考虑 $x>0$，关于 $y=x^2$ 分为两个区域，上面记 D_1，下面记 D_2，D_1,D_2 都算规则，直接计算即可。要注意 $(x^2)^{\frac{2}{3}}=|x|^3$！

15.1.2 二重积分可积性

练习 15.4 两道经典题 (1)$D=[0,1]\times[0,1]$，对 $x\in\mathbb{R}$，q_x 表示 x 化成既约分数后的分母，证明下面 $f(x,y)$ 在 D 上二重积分存在但两个累次积分不存在

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & (x,y)\text{为有理点}\\ 0, & (x,y)\text{非有理点}\end{cases}$$

(2)$D=[0,1]\times[0,1]$，证明下面 $f(x,y)$ 在 D 上二重积分不存在但两个累次积分存在

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{为有理点且}q_x=q_y\\ 0, & \text{其他情形}\end{cases}$$

证明 (1)$\forall\epsilon$，仅有有限个点满足 $f(x,y)>\epsilon$，因此存在分割 T 使得 $S(T)-s(T)<\epsilon$，二重积分存在且等于 0。下证先 y 后 x 不存在：y 取无理时，$f(x,y)\equiv 0$，$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=0$ 积分存在。若 y 取有理，则在 x 无理处 $f(x,y)=0$，x 有理处 $f(x,y)=\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}$，因此 $f(x,y)$ 在任意区间上振幅总大于 $\dfrac{1}{q_y}$，因此积分不存在。同理可证先 x 后 y 不存在

(2)D 中任意部分均有振幅为 1，因此二重积分不存在。若固定 y，若 y 无理，则 $f(x,y)=0$，显然关于 x 可积，若 y 无理，则 $f(x,y)>\epsilon$ 对于 x 而言只有有限处，因此也关于 x 可积，所以先 y 后 x 可积。另一侧同理。

15.1.3 二重积分换元法

定理 15.2 (二重积分换元法)

原二重积分坐标轴 x,y，定义于 R 上，令 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 反解出 $x=x(u,v),y=y(u,v)$，变换后的区域为 $(u,v)\in\Omega$，则

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

定义 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

笔记 一、注意 Jacobi 行列式外面的是绝对值！二、可以先计算 $I=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$，计算 $|J|$ 时只需要取倒数加绝对值，即 $|J|=|\frac{1}{I}|$。三、计算变换后的范围可以尝试将原本的各个边界转化到新变量，即代入原边界，计算新边界各个变量需要满足的关系。

练习 15.5 一般换元计算题 (1) 计算 $I=\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$，其中 D 是由 $x=0,y=0$ 与 $x+y=a(a>0)$ 围成的区域

(2) 计算 $I=\iint_D\dfrac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=0,y=0,x+y=1$ 围成的区域

(3) 计算 $I=\iint_D\dfrac{3x}{y^2+xy^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $xy=1,xy=3,y^2=x,y^2=3x$ 围成的区域

证明 (1) 设 $x+y=u,x-y=v$，即 $x=\dfrac{u+v}{2},y=\dfrac{u-v}{2}$，考虑边界转化，$x=0,y=0$ 等价于 $u=-v,u=v$，而 $y=-x+a$ 等价于：

$$u=a,v=2x+a$$

此时 $u=a$，而 v 任意。

因此区域变为 $u+v=0,u-v=0,u=a$ 围成的区域，即 $0\leq u\leq a,-u\leq v\leq u$，$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$，得到最终结果为 $\dfrac{a^2}{4}(e-e^{-1})$

(2) 设 $x+y=u,x=v$，即 $x=v,y=u-v$ 即可，区域变为 $v=0,u=v,u=1$ 围成的区域，答案为 $\dfrac{16}{15}$

(3) 做 $xy=u,\dfrac{y^2}{x}=v$

15.1.4 极坐标换元

定理 15.3 (二重积分极坐标换元)

对于二重积分 $\iint_S f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，做极坐标换元 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，此时 $J(r,\theta)=r$；极坐标换元 $x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta$ 时 $J(r,\theta)=abr$。积分时先 $\mathrm{d}r$ 后 $\mathrm{d}\theta$，具体如下图所示

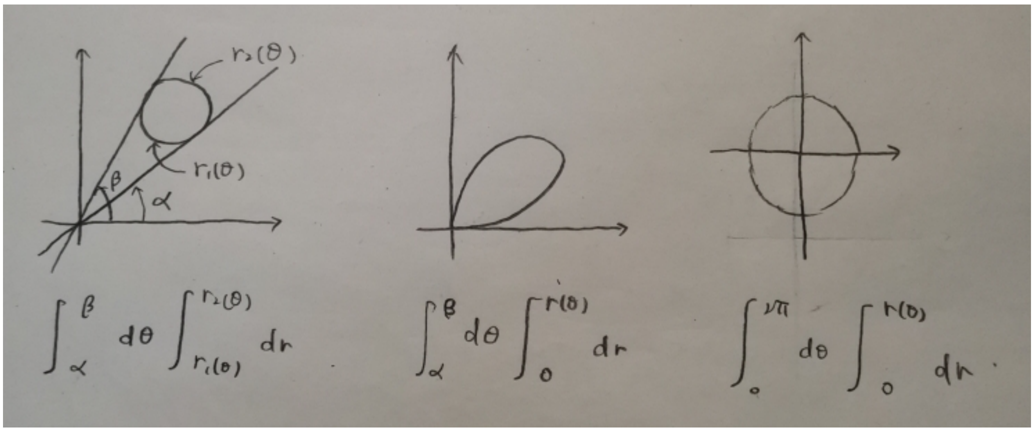

图 15.1: 二重积分极坐标换元

练习 15.6 规则极坐标与广义极坐标 (1) 计算 $I=\iint_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，$D$ 为 $x^2+y^2\leq 1$

(2) 广义极坐标：计算 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$ 的体积

解 (1) 答案 2π

(2) 是 8 倍第一卦限积分，该区域顶面为 $z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$，底面为

$$D=\left\{(x,y):0\leq y\leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},0\leq x\leq a\right\}$$

因此 $V=8\iint_D c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，利用广义极坐标变换得到 $z=c\sqrt{1-r^2}$，故

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}abr\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}abc$$

练习 15.7 几道非规则边界 (1)f 为连续函数，将 $I=\iint_D f(\frac{y}{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化为定积分，其中 $D:\dfrac{1}{4}\leq x^2+y^2\leq x$。

(2) 将 $I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式，其中 $D:[0,1]\times[0,1]$

解 (1) 考虑 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则 $\dfrac{1}{4}\leq r^2\leq r\cos\theta$，即 $\dfrac{1}{2}\leq r\leq\cos\theta$，因此 $-\dfrac{\pi}{3}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{3}$。即 $I=$

$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2}}^{\cos\theta}f(\tan\theta)r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}f(\tan\theta)(\cos^2\theta-\frac{1}{4})\mathrm{d}\theta$

(2) 一般都是先 r 后 θ，将 D 分为左上，右下两个三角形，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

先 θ 后 r 会比较麻烦

三类特殊的圆

定理 15.4 (三类特殊圆极坐标)

设 $a>0$，极坐标 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，以下特殊圆的极坐标公式：

- $(x-a)^2+y^2=a^2$，即 $x^2+y^2=2ax$，则 $r=2a\cos\theta,\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
- $x^2+(y-a)^2=a^2$，即 $x^2+y^2=2ay$，则 $r=2a\sin\theta,\theta\in[0,\pi]$
- $(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2$，即 $x^2+y^2=2a(x+y)$，则 $r=2a(\cos\theta+\sin\theta),\theta\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$

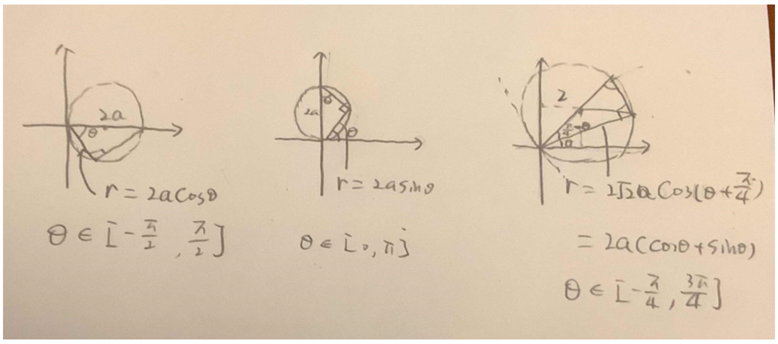

图 15.2: 三个特殊的圆

15.2 三重积分

15.2.1 投影法

将三重积分转换为累次积分进行计算，常用的方法有投影法与截面法

定理 15.5 (投影法)

积分区域 $V\subset\mathbb{R}^3$，对应 x,y 坐标平面投影区域 D，且 $V=\{(x,y,z):(x,y)\in D,z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$，则：

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

笔记 一般而言投影法比截面法更常用一点

练习 15.8 投影法 (1) 计算 $I=\iiint_V(x+y+z)\mathrm{d}V$，其中 V 是 $x+y+z=1$ 与坐标面围成的区域

(2) 计算 $\iiint_V(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V$，其中 V 是 $\begin{cases}z=y\\x=0\end{cases}$ 绕着 z 轴旋转一圈而成的曲面与 $z=1$ 围成的区域

解 (1) 用投影法 $I=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}x+y+z\mathrm{d}z=\frac{1}{8}$

(2) 旋转面为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$(画个图就看得出来)，投影为 $x^2+y^2\le 1$，因此积分为

$$\begin{aligned}
I&=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2+y^2+z)\mathrm{d}z\\
&=\iint_D (x^2+y^2)(1-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\iint_D[1-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3(1-r)\mathrm{d}r+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r\\
&=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{20}
\end{aligned}$$

15.2.2 截面法

定理 15.6 (截面法)

积分区域 $V\subset\mathbb{R}^3$，V 被垂直于 z 轴平面截取的平面为 D_z，则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

♡

15.2.3 三重积分换元法

定理 15.7 (三重积分换元)

若坐标替换 $x=x(u,v,w),y=y(u,v,w),z=z(u,v,w)$，则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V'} f(x,y,z)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

♡

笔记 一方面还是注意 Jacobi 行列式外面的是绝对值。另一方面可以先算 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$，再取倒数和绝对值计算 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$

15.2.4 柱面坐标变换与球坐标变换

定理 15.8 (柱面变换)

做 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$ 变换时，$J(u,v,w)=r$。往往确定区域：

$$V'=\{a\le r\le b,c\le\theta\le d,\alpha(r,\theta)\le z\le\beta(r,\theta)\}$$

因此用投影法 $\iint_D \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_{\alpha(r,\theta)}^{\beta(r,\theta)} z\mathrm{d}z$，即一般积分顺序按照 $\mathrm{d}z,\mathrm{d}r,\mathrm{d}\theta$

♡

练习 15.9 柱坐标变换 (1) 计算 $I=\iiint_V (x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 V 是由曲面 $2(x^2+y^2)=z$ 与 $z=4$ 为界面的区域。

解 (1) 为抛物面与平面围成的区域，令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$ 得到区域为

$$V'=\{(r,\theta,z):0\le r\le 2,0\le\theta\le 2\pi,2r^2\le z\le 4\}$$

对应积分 $\iiint_{V'} r^2 \cdot r\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_{2r^2}^{4} r^3 \mathrm{d}z = \frac{8\pi}{3}$

定理 15.9 (球坐标变换)

做 $x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$ 时 $J = r^2\sin\varphi$。积分时先按照 $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\theta$ 顺序积分

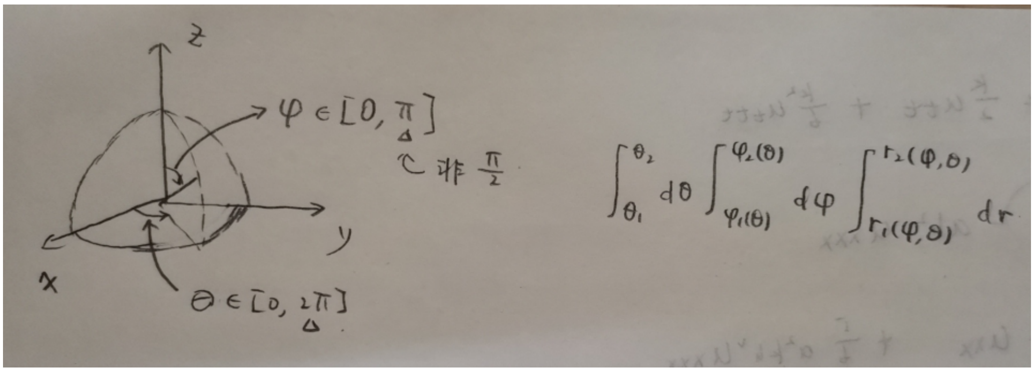

图 15.3: 三重积分球坐标换元

笔记 使用球坐标变换的原则：(1) 被积函数为 $f(x^2+y^2+z^2), f(x^2+y^2)$(2) 积分区域为球、锥或者其一部分

定理 15.10 (广义球坐标变换)

对于以 (x_0, y_0, z_0)，以 a, b, c 为半轴长的椭球面所围成的区域 V，做如下广义球坐标变换：

$$T: \begin{cases} x = x_0 + ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = y_0 + br\sin\varphi\sin\theta \\ z = z_0 + cr\cos\varphi \end{cases}, \quad r \geq 0, \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]$$

得到

$$|J| = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = abcr^2\sin\varphi$$

练习 15.10 广义球坐标变换 (1) 计算 $I = \iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 与 $z \geq 0$ 围成的区域

解 (1) 做球坐标变换，积分变为：

$$\iiint_{V'} cr\cos\varphi \cdot abcr^2\sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}abc^2$$

第 16 章 曲线积分

16.1 曲线的参数化

16.2 第一型曲线积分

16.2.1 第一型曲线积分的基本概念

定义 16.1 (第一型曲线积分)

Γ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的可求长曲线，$f:\Gamma\to\mathbb{R}$，将 Γ 划分为分段 $s_1,\cdots,s_n$，每段的弧长为 Δs_i，$\xi_i=(x_i,y_i,z_i)\in s_i$，定义

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

♣

定理 16.1 (第一型曲线积分的计算)

Γ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲线，且曲线可表示为 $\mathbf{r}=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},t\in[a,b]$，则曲线积分为

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

♡

证明 设 Γ 上的分点对应 $\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_n$，对应 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$。首先根据弧长公式得到 $\Delta s_i=\displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$，根据积分中值定理得到 $\Delta s_i=\sqrt{x'^2(\zeta_i)+y'^2(\zeta_i)+z'^2(\zeta_i)}\Delta t_i,\zeta_i\in[t_{i-1},t_i]$，代入第一型曲线积分的定义得到 $\displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{||T||\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i,z_i)\sqrt{x'^2(\zeta_i)+y'^2(\zeta_i)+z'^2(\zeta_i)}\Delta t_i$，当 $\Delta t_i\to 0$ 时即 Riemann 积分，因此得到结论。

推论 16.1 (二维第一型曲线积分的计算)

对于 $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$，若平面曲线 Γ 可表示为 $y=\varphi(x)$，φ 在 $[a,b]$ 连续，则

$$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\mathrm{d}x$$

♡

笔记 第一型曲线积分没有方向一说，例如 A,B 曲线上参数 $t\in[a,b]$，那么积分时 AB 和 BA 的积分都是 $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}t$，不能写为 $\displaystyle\int_b^a f(x,y)\mathrm{d}t$

练习 16.1 极坐标格式 (1)$L:x^2+y^2=1$，求 $\displaystyle\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s,\int_L(x^2+2y^2)\mathrm{d}s$

(2)$\displaystyle\int_L\sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 相交的圆周

(3)$\displaystyle\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，这里 L 是螺旋线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$，$t\in[0,2\pi]$ 的一段

(4) 积分较难算：$\displaystyle\int_L xy\mathrm{d}s$，其中 L 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限的部分

解 (1)$\displaystyle\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_L 1\mathrm{d}s=2\pi$。记 $x=\cos\theta,y=\sin\theta$，此时 $(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2=1$，因此 $\displaystyle\int_L(x^2+2y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(1+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi$

(2) 显然 $2y^2+z^2=a^2$，因此 $\displaystyle\int_L\sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s=a\cdot 2a\pi=2\pi a^2$

(3)$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2t^2$，$(x')^2+(y')^2+(z')^2=a^2+b^2$，因此 $I=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}(2\pi a^2+\frac{8}{3}\pi^3b^2)$

(4) 令 $x=a\cos t,y=b\sin t$，则 $\int_L xy\mathrm{d}s=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$，可化简为：

$$\frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta+b^2}\mathrm{d}[(a^2-b^2)\sin^2\theta]=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$$

练习 16.2 折线形式 (1) 计算 $\int_L y\mathrm{d}s$，这里 L 为 $y^2=4x$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,2)$ 的一段

(2) 计算 $\int_L(x+y)\mathrm{d}s$，这里 L 是以 $O(0,0),A(1,0),B(0,1)$ 为顶点的三角形

解 (1)$x=\frac{1}{4}y^2,y\in[0,2]$，因此 $\int_L y\mathrm{d}s=\int_0^2 y\sqrt{1+\frac{1}{4}y^2}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$

(2) 分三段进行考虑。$\int_{OA}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，$\int_{OB}(x+y)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}$。$AB$ 上 $y=1-x,x\in[0,1]$，因此 $\int_{AB}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1 1\sqrt{1+1}\mathrm{d}x=\sqrt{2}$，结果为 $1+\sqrt{2}$

16.2.2 使用对称性

练习 16.3 镜面对称性 (1) 计算 $\int_L xy\mathrm{d}s$，其中 L 为上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geq 0)$

(2) 重要：计算 $\int_L|y|\mathrm{d}s$，其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

(3) 计算 $\oint_L|x|^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}s$，这里 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

解 (1) 由于 L 关于 y 轴对称，而 xy 关于 y 轴对称，因此 $\int_L xy\mathrm{d}s=0$

(2) 显然 L 关于 x,y 轴均对称，因此将 L 分为四段，设 L_1 是第一象限的部分，因此 $\int_L|y|\mathrm{d}s=4\int_{L_1}y\mathrm{d}s$，考虑 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则 L 极坐标方程为 $r^2=a^2\cos2\theta$，L_1 方程为 $r=a\sqrt{\cos2\theta}$，且 $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$，即：

$$4\int_{L_1}y\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos2\theta}\sin\theta\sqrt{a^2\cos2\theta+a^2\frac{\sin^2 2\theta}{\cos2\theta}}\mathrm{d}\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=(4-2\sqrt{2})a^2$$

(3) 显然关于 x,y 轴对称，因此 $\int_L|x|^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}s=4\int_{L_1}x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}s$。设 $x=a\cos^3\theta,y=a\sin^3\theta,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，此时 $x'^2y'^2=9a^2\sin^2\cos^2\theta$，结果为：

$$I=4\int_{L_1}x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}s=12a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=4a^{\frac{4}{3}}$$

练习 16.4 轮换对称性 (1)L 是 $x+y+z=0,x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，计算 $\int_L x\mathrm{d}s,\int_L x^2\mathrm{d}s,\int_L yz\mathrm{d}s$ 的值

(2)L 是 $x+y+z=0,x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，计算 $\int_L x^2+yz\mathrm{d}s$

解 (1) 考虑轮换对称性，查看交线，发现 x,y,z 轴都等价，因此变量可以随意轮换

$$\begin{cases}\int_L x\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L x+y+z\mathrm{d}s=0\\ \int_L x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L x^2+y^2+z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\cdot2\pi=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

第三个：由于 $(x+y+z)=0$，因此 $(x+y+z)^2=0$，得到 $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+yz+xz)=-1$，

即 $xy+yz+xz=-\frac{1}{2}$，因此：

$$\int_L yz\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L xy+yz+xz\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\cdot-\frac{1}{6}\cdot 2\pi=-\frac{\pi}{3}$$

(2) 和第一题本质一样

16.2.3 曲线积分中值问题

定理 16.2 (曲线积分中值定理)

$f(x,y)$ 是光滑曲线 $L:x=x(t),y=y(t),t\in[a,b]$ 上的连续函数,设 ΔL 是曲线 L 的弧长,则 $\exists(x_0,y_0)\in L$,使得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=f(x_0,y_0)\Delta L$$

♡

证明 根据计算公式得到 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t$，根据积分第一中值定理得到等于 $f(x(t_0),y(t_0))\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t=f(x_0,y_0)\Delta L$，这里 $(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$

练习 16.5 积分第一中值定理的曲线推广 $f(x,y,z),g(x,y,z)$ 在可求长连续曲线 $L:x=x(t),y=y(t),z=z(t),t\in[a,b]$(曲线不一定光滑！)，上连续，且 $g(x,y,z)$ 非负，证明：$\exists(\xi,\eta,\zeta)\in L$ 使得

$$\int_L f(x,y,z)g(x,y,z)\mathrm{d}s=f(\xi,\eta,\zeta)\int_L g(x,y,z)\mathrm{d}s$$

证明 由于不一定光滑，因此不能用含参形式计算。由于 $f(x,y,z)$ 连续，设在 L 上 $m\le f(x(t),y(t),z(t))\le M$，由于 g 非负，因此 $mg(x,y,z)\le f(x,y,z)g(x,y,z)\le Mg(x,y,z)$，两侧积分得到：

$$m\int_L g(x,y,z)\mathrm{d}s\le\int_L f(x,y,z)g(x,y,z)\mathrm{d}s\le M\int_L g(x,y,z)\mathrm{d}s$$

若 $\int_L g(x,y,z)\mathrm{d}s=0$,则全部为零,$(\xi,\eta,\zeta)$ 任选。若不为 0,则同除以 $\int_L g(x,y,z)\mathrm{d}s$,得到 $m\le\frac{\int_L f(x,y,z)g(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s}\le M$，根据连续性介值性定理可证。

16.3 第二型曲线积分

16.3.1 基本概念与参数计算

定义 16.2 (第二型曲线积分)

Γ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有向曲线，其端点为 $A,B\in\mathbb{R}^3$，$F(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$，将 Γ 划分为 $A=\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_{n-1}\to\mathbf{r}_n=B$，第二型曲线积分定义为：

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\lim_{||T||\to 0}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i$$

♣

定理 16.3 (第二型曲线积分的计算)

若曲线 Γ 由 $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},t\in[a,b]$ 给出，则

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_a^b[Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)]\mathrm{d}t$$

♡

练习 16.6 折线积分 (1) 计算 $\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$，其中 L 为三角形 $O(0,0),A(1,0),B(1,2)$ 为顶点的三角形逆时针曲线

(2) 计算 $\int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$，其中 L 是 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,4)$ 的直线段

解 (1) 分三段计算：$\int_{OA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$。$\int_{AB} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ 以 y 为参数，即 $\int_0^2 1\mathrm{d}y - y\cdot 0 = 2$。$\int_{BO} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$，以 x 为参数，$y=2x$，即 $\int_1^0 x\cdot 2 - 2x\mathrm{d}x = 0$，最终结果为 2。

(2) 以 x 为参数，$y=2x-1, z=3x-2$，因此结果为 $\int_1^2 x + 2(2x-1) + 3(3x-2)\mathrm{d}x = 13$

练习 16.7 椭圆、圆周积分 (1) 计算 $\int_L (x^2+2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geq 0)$ 方向逆时针

(2) 计算 $I = \oint_L \frac{-x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，方向逆时针

解 (1) 设 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta, \theta\in[0,\pi]$。则 $\int_L (x^2+2xy)\mathrm{d}y = \int_0^\pi a^2\cos^3\theta + 2ab^2\sin\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}ab^2$

(2) 设 $x=\cos\theta, y=\sin\theta, \theta\in[0,2\pi]$，则 $I = \int_0^{2\pi}(\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta = 0$

练习 16.8 交线积分：化为单变量 (1) 计算 $I = \oint_L (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x^2+y^2=1, x+z=1$，从 z 轴正无穷看为顺时针

(2) 重要：计算 $\oint_L xyz\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=z$ 相交的圆，方向为 1, 2, 7, 8 卦限。

解 (1) 设 $x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=1-\cos\theta$，则 $\theta\in[2\pi,0]$(不是 $[0,2\pi]$！)。则

$$I = \int_{2\pi}^0 [(\sin\theta+\cos\theta-1)(-\sin\theta) + (1-2\cos\theta)\cos\theta + (\cos\theta-\sin\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta = 4\pi$$

(2) 由于 $x^2+2y^2=1$，设 $x=\cos\theta, y=z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$，由于从第一卦限出发，$x,y,z$ 均为正，而 θ 为小正数时，位于第一卦限，因此 $\theta\in[0,2\pi]$。因此：

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos\theta\sin^2\theta\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}$$

笔记 第二题虽然是球面的一部分，但是曲线积分都要化成一个变量的，因此不能用球坐标变换！

练习 16.9 二次曲面交线 计算 $\int_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，其中 L 为椭球与柱面交线：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1, x,y,z\geq 0$$

方向从 $(a,0,0)$ 到 $(0,0,c)$

解 (1) 直接用极坐标极度不方便，先令 $x=a\overline{x}, y=b\overline{y}, z=c\overline{z}$，得到 $\overline{x}^2+\overline{y}^2+\overline{z}^2=1, \overline{x}+\overline{z}=1$。将前者配凑为 $(\overline{x}+\overline{z})^2+(\overline{x}-\overline{z})^2+2\overline{y}^2=2$，因此 $(\overline{x}-\overline{z})^2+2\overline{y}^2=1$，因此设 $\overline{x}-\overline{z}=\cos\theta, \sqrt{2}\overline{y}=\sin\theta$，得出 $\overline{x}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta), \overline{y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \overline{z}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$，根据方向以及端点可判断 $\theta\in[0,\pi]$(具体含义难以判断)。因此代入计算可知结果为 $\frac{ac}{2}-\frac{\pi b}{4\sqrt{2}}(a+c)$

16.3.2 使用对称性

和第一型曲线积分一样，下面考虑镜像对称以及轮换对称性

- 镜像对称：如 $\int_S f(x,y,z)\mathrm{d}x$，要同时考虑 $f(x,y,z)$ 和 $\mathrm{d}x$ 在 S 上的符号
- 轮换对称：要保证积分区域和积分表达式均轮换对称。轮换有两种使用方法：(1) 保持积分区域不变，积分表达式轮换 (2) 保持积分表达式不变，积分区域轮换 (具体见轮换对称练习)

定理 16.4 ($\mathrm{d}x$ 的符号)

若沿着给定方向，x 由大变小，则 $\mathrm{d}x$ 为负，同理若变大则 $\mathrm{d}x$ 为正，以此判断对称性。如果不容易直接判断，则画出投影曲线，再在平面曲线上判断方向。

练习 16.10 镜像对称性 (1) 证明 $I=\oint_L \frac{-x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，方向逆时针。

(2) 计算 $I=\int_L(-2xe^{-x^2}\sin y)\mathrm{d}x+(e^{-x^2}\cos y+x^4)\mathrm{d}y$，其中 L 为 $(1,0)$ 到 $(-1,0)$ 的半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$

解 (1)$I=-\int_L x\mathrm{d}x+\int_L y\mathrm{d}y$，前者分为 x 轴上下两部分，上下 x 符号大小均相等，由于上方 x 从大变小，下方从小变大，因此 $\mathrm{d}x$ 符号相反，得到 $-\int_L x\mathrm{d}x=0$。后者同理根据 x 轴上下两部分得到结果为 0。

(2) 关于 y 轴对称。第一项 $\mathrm{d}x$ 同号，$-2xe^{-x^2}\sin y$ 异号，因此第一个积分为 0。第二个 $\mathrm{d}y$ 异号，$e^{-x^2}\cos y+x^4$ 同号等值，因此第二个积分也为 0。综上整个积分为 0。

练习 16.11 轮换对称性 (1) 计算 $\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=0$ 相交圆周，L 从第一卦限来看是逆时针的。

(2) 计算 $\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限的边界曲线，方向为 xy 平面，yz 平面，zx 平面

解 (1) 由于 x,y,z 可以随便互换，I 可以写出 $3\int_L x\mathrm{d}x$ 或 y,z 对应积分，要选择一个好算的。考虑 $z=-(x+y)$，则 $x^2+y^2+(x+y)^2=1$，得到 $(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2=\frac{1}{2}$。因此令 $x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$，因此得到参数方程为：

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta,y=\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta,z=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta,\theta\in[0,2\pi]$$

可以算 $\int_L y\mathrm{d}y$ 比较简单，因此最终结果为 0。

(2) 设三个部分曲线分别为 L_1,L_2,L_3，由于 x,y,z 可以随便互换，若 $(x,y,z)\to(z,x,y)$，则积分表达式不变，而 L_1 部分在该变换下变为 L_2，因此 L_1,L_2,L_3 积分值相等。因此 $I=3\int_{L_1}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z=$，对于 L_1 而言，虽然积分表达式轮换对称，但是积分区域不轮换对称，因此只能硬算了。取 $x=\cos\theta,y=\sin\theta,z=0,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，得到结果为 -4。

练习 16.12 双曲面交线 + 对称性 重点：计算 $I=\int_L y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，其中 L 是维维安尼曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2=ax(z\geq 0,a>0)$，从 x 轴 $+\infty$ 看去，L 方向为逆时针

解 注意 $x^2+y^2=ax$ 即 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 是圆柱面，且过原点。考虑关于 xz 平面对称，积分表达式显然不变，$\mathrm{d}x$ 相反，$\mathrm{d}y$ 相同 (需要把投影的圆画出来看看)，$\mathrm{d}z$ 相反，因此只需要计算 $I=\int_L z^2\mathrm{d}y=2\int_{L_1}z^2\mathrm{d}y$，这里 L_1 是 L 在 $y\geq 0$ 的部分，设 $x=a\sin\varphi\cos\theta,y=a\sin\varphi\sin\theta,z=a\cos\varphi,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$($\theta$ 的范围具体见三重积分球坐标变换)，代入柱面公式得到 $\sin\varphi=\cos\theta$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$，综上 L_1 的参数方程为：

$$x=a\sin^2\varphi,y=a\sin\varphi\cos\varphi,z=a\cos\varphi,\varphi\in[\frac{\pi}{2},0]$$

得到最终结果为 $-\frac{\pi}{4}a^3$

16.3.3 两类曲线积分的关系

定理 16.5 (光滑曲线切向量)

考虑光滑曲线 $\mathbf{r}(s)=(x(s),y(s)),s\in[0,l]$，满足 $(x'(s))^2+(y'(x))^2=1$。则其单位切向量为 $\mathbf{t}=(x'(s),y'(s))=(\cos(\mathbf{t},x),\cos(\mathbf{t},y))$，即

$$\mathrm{d}x=\cos(\mathbf{t},x)\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}y=\cos(\mathbf{t},y)\mathrm{d}s$$

♡

定理 16.6 (两类曲线积分的关系)

根据光滑曲线切向量的结论，可知：

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)\cos(\mathbf{t},x)+Q(x,y)\cos(\mathbf{t},y)]\,\mathrm{d}s$$

♡

16.4 Green 公式

16.4.1 Green 公式及其基本应用

定理 16.7 (Green 公式)

$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是有限条分段光滑曲线连接成的闭曲线，$P(x,y),Q(x,y)$ 在 Ω 上连续，且有连续偏导 $\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial P}{\partial y}$，沿着 $\partial\Omega$ 的方向，Ω 一直在左侧，则

$$\int_{\partial\Omega}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_\Omega(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

♡

笔记 使用 Green 公式的基本条件是曲线光滑和偏导存在，一般在 P,Q 本身复杂，但 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 简单时使用。记忆时可记忆为：

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}$$

练习 16.13Green 公式基本应用 (1)a,b 为正数，L 为从 $(2a,0)$ 到 $(0,0)$ 的半圆 $y=\sqrt{2ax-x^2}$，计算

$$I=\int_L[e^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(e^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$$

(2)L 为 $\sin x$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段，计算：

$$I=\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y$$

(3)L 为曲线 $y=\sin x$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段，计算

$$I=\int_L e^x\left[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y\right]$$

解 (1) 显然积分本身很麻烦，考虑 $P=e^x\sin y-b(x+y),Q=e^x\cos y-ax$，则 $Q_x-P_y=b-a$ 很方便，因此考虑用 Green 公式把圆周补上，记 L_1 为 $(0,0)\to(2a,0)$ 直线。则 $I=\displaystyle\int_{L+L_1}-\int_{L_1}=\iint_D b-a\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{L_1}-bx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi a^2(b-a)+2a^2b$

(2) 考虑 $Q_x-P_y=y^2+\dfrac{y+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=y^2$，记 L_1 是 $(\pi,0)$ 到 $(0,0)$ 的直线段，则 $\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=$

$\int_{\pi}^{0} x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi^2$，因此：

$$I = \int_{L+L_1} - \int_{L_1} = -\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\pi^2 = -\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} y^2\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\pi^2 = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{4}{9}$$

(3) 首先 $Q_x - P_y = -ye^x$，记 L_1 为 $(\pi,0)\to(0,0)$ 的直线，最终结果为 $\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$。中间 $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} e^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4}\frac{e^x}{4+1}(\cos 2x + 2\sin 2x)\Big|_0^{\pi}$

练习 16.14 一道经典题 (1) 计算 $I = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 为任一不包含原点区域的边界 (包含原点情况在后面讨论)。

解 (1) 结果为 0

定理 16.8 (区域面积转换为曲线积分)

平面区域 D 的面积为：

$$S_D = \iint_D \mathrm{d}S = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

♡

练习 16.15 曲面面积应用 计算抛物线 $(x+y)^2 = ax(a>0)$ 与 x 轴围成的面积

解 结果：$\frac{1}{6}a^2$，见华东师大课本

16.4.2 内部有瑕点

定理 16.9 (瑕点 Green 公式)

若 $P(x,y), Q(x,y)$ 除瑕点外满足 $Q_x - P_y = 0$，边界 L 围成的区域 D 包含瑕点 x_0，则可作包含 x_0 的小区域 D_1，其边界 L_1，方向逆时针，根据 $\int_L - \int_{L_1} = \iint_{D-D_1} = 0$ 得出：

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

保证 L_1 曲线表达式的特殊性即可快速计算出结果。

♡

练习 16.16 最经典题目 重点：L 为简单封闭光滑曲线，且不经过原点，$a,b>0$，计算 $I = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{ax^2+by^2}$。

解 显然 P,Q 在不包含原点的区域上有连续偏导数，$P_y = \frac{-(ax^2+by^2)+y\cdot 2by}{(ax^2+by^2)^2}, Q_x = \frac{by^2-ax^2}{(ax^2+by^2)^2}$，若 L 围成的区域不包含原点，则根据 $Q_x - P_y = 0$ 得到积分为 0。若 D 包含原点，考虑挖去原点的小区域，其边界 L_1 为 $ax^2+by^2=r^2$，方向逆时针。则 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \frac{1}{r^2}\int_{L_1} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$，再次使用 Green 公式得到结果为 $\frac{1}{r^2}\iint_{D_1} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$。

推论 16.2 (常用函数 1)

若 $P_0(x_0,y_0)$ 则：

$$\oint_L \frac{(x-x_0)\mathrm{d}y - (y-y_0)\mathrm{d}x}{a(x-x_0)^2+b(y-y_0)^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{ab}}, & L\text{围成的区域包含}P_0 \\ 0, & L\text{围成的区域不包含}P_0 \end{cases}$$

♡

练习 16.17 推广题 1 计算 $I=\oint_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，其中 L 为 $x^2+y^2=1$，方向逆时针

解 $P_y=Q_x=\frac{-x^2-8xy+4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$，记 L_1 为 $x^2+4y^2=r^2$，则 $I=\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{1}{r^2}\int_{L_1}(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y$，再用 Green 公式得到 $I=\frac{1}{r^2}\iint_{D_1} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\pi r^2}{2}=\pi$

推论 16.3 (常用函数 2)

$c_1,c_2>0$ 时，$a_2=-b_1,\frac{a_1}{c_1}=\frac{b_2}{c_2}$ 有：

$$\oint_L \frac{(a_1x+a_2y)\mathrm{d}x+(b_1x+b_2y)\mathrm{d}y}{c_1x^2+c_2y^2}=\begin{cases}\frac{2b_1\pi}{\sqrt{c_1c_2}}, & L\text{围成区域包含原点}\\ 0, & L\text{围成区域不包含原点}\end{cases}$$

引理 16.1 (推广椭圆面积)

设 $a,c>0,ac-b^2>0$，考虑 $ax^2+2bxy+cy^2=1$，则该曲线为椭圆，围成的面积为 $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$

证明 写为 $a(x+\frac{b}{a}y)^2+(c-\frac{b^2}{a})y^2=1$，等价于 $\frac{x^2}{1/a}+\frac{y^2}{a/(ac-b^2)}=1$，根据椭圆面积公式 $(\pi\cdot ab)$ 得到 $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$

练习 16.18 推广题 2 重点：计算 $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+xy+y^2}$，$L$ 是圆周 $x^2+y^2=1$，逆时针方向。

解 分母即 $(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2=0$，若分母为 0，则 $x=y=0$。$P_y=Q_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$，取 L_1 为 $x^2+xy+y^2=r^2$，该图形为椭圆，面积为 $\frac{2\pi r^2}{\sqrt{3}}$，使用 Green 公式得到结果为 $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$

推论 16.4 (常用函数 3)

若 a,b,c 满足 $a,c>0,ac-b^2>0$，则

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{ax^2+2bxy+cy^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$$

练习 16.19 其他形式 L 为不过原点的简单光滑封闭曲线，计算：

$$I=\oint_L \frac{e^y}{x^2+y^2}[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y]$$

16.4.3 曲线积分与路径无关性

定理 16.10 (路径无关性)

D 为单连通区域，若 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 连续且有一阶连续偏导，L 为 D 内任意按段光滑曲线则 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关当且仅当：

- D 内处处有 $P_y=Q_x$
- D 内任意按段光滑闭合曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$
- D 内存在原函数 $u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

第 17 章 曲面积分

17.1 曲面的面积

定理 17.1 (曲面面积公式)

D 是可求面积平面有界区域，$z=f(x,y)$ 在 D 上有连续一阶偏导，则曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的面积为：

$$\Delta S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

♡

定理 17.2 (参数方程曲面面积)

D 为可求面积平面有界区域，$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 在 D 上有连续一阶偏导，则曲面 $\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 的面积公式为：

$$\Delta S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\begin{cases}E=x_u^2+y_u^2+z_u^2\\F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v\\G=x_v^2+y_v^2+z_v^2\end{cases}$$

♡

练习 17.1 曲面面积计算 (1) 证明 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的表面积为 $4\pi R^2$

解 (1) 考虑上半平面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，D 为 $x^2+y^2\le R^2$，则 $z_x=-\dfrac{x}{z},z_y=-\dfrac{y}{z}$，因此 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{R}{z}$。得到球面面积为

$$S=2\iint_D\frac{R}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^R\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta=4\pi R\sqrt{R^2-r^2}\Big|_R^0=4\pi R^2$$

笔记 对于 $x^2+y^2+z^2=a^2$，有 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{a}{z}$，这个结论在计算球面曲面积分时经常用到！

17.2 第一型曲面积分

17.2.1 基本概念与计算公式

定义 17.1 (第一型曲面积分)

S 为光滑曲面片，对 S 做分割 $S=\{\Delta S_1,\cdots,\Delta S_n\}$，记 $||\Delta||=\max\{s(\Delta S_i)\}$，则定义

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{||\Delta||\to0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$$

♣

定理 17.3 (投影法)

若 S 可表示为 $z=z(x,y),(x,y)\in D$，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

♡

定理 17.4 (球坐标变换结论)

对于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，令 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则得到

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{z}$$

证明 直接计算可验证

笔记 球面可以使用投影法或极坐标，本质上两者都可以用，而且相差不大。

练习 17.2 投影法 (1) 计算 $\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{z}$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ 所截的顶部。

(2) 计算 $A=\int_S (x+y+z)\mathrm{d}S$，这里 S 表示 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0)$，即球上表面

解 (1) 做投影法 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，积分变为 $\iint_D \frac{a}{z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{a}{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，做极坐标变换得到

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-r^2}r\mathrm{d}r=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

(2) 根据对称性只剩一项，即 $A=\iint_S z\mathrm{d}S$，因此根据 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 代入计算得到：

$$A=\iint_{x^2+y^2\leq a^2} z\cdot\frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leq a^2} a\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^3\pi$$

定理 17.5 (参数方程法)

若 S 由参数方程 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 给出，$(u,v)\in D$，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\text{其中：}\begin{cases}E=x_u^2+y_u^2+z_u^2\\F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v\\G=x_v^2+y_v^2+z_v^2\end{cases}$$

定理 17.6 (球坐标极坐标变换)

对于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，令 $x=a\sin\varphi\cos\theta,y=a\sin\varphi\sin\theta,z=a\cos\varphi$，则

$$\begin{cases}E=a^2\sin^2\varphi\\F=0\\G=a^2\end{cases}\Rightarrow\sqrt{EG-F^2}=a^2\sin\varphi$$

练习 17.3 参数方程法 (1) 重点：计算 $I=\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}$，其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0)$

解 (1) 采用球坐标变换，积分变为 $I=\iint_{S'}\frac{a^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+a^2(\cos\varphi+1)^2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，区域为 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}],\theta\in[0,2\pi]$，进一步化简得到：

$$I=\iint_{S'}\frac{-a\sin\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=-\sqrt{2}\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\cos\varphi)}{\sqrt{1+\cos\varphi}}=4\pi a-2\sqrt{2}\pi a$$

17.2.2 使用对称性

练习 17.4 积分曲面对称 (1) 计算 $\iint_S (x+\sin yz)\mathrm{d}S$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$

(2) $\iint_S (x+y+z)^3 \mathrm{d}S$，其中 S 为 $|x|+|y|+|z|=1$

解 (1) 根据 S 关于 yz 平面对称得到 $\iint_S x\mathrm{d}s=0$，根据 S 关于 xz 平面对称得到 $\iint_S \sin yz\mathrm{d}s=0$

(2) 根据关于原点中心对称性得到为 0。

练习 17.5 轮换对称性 (1) 计算 $I=\iint_S x^2\mathrm{d}S$ 与 $J=\iint xy\mathrm{d}S$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$

解 (1) 由于 S 有轮换对称性，得到 $I=\dfrac{1}{3}\iint_S x^2+y^2+z^2\mathrm{d}S=\dfrac{4}{3}\pi a^4$。$J$ 没必要考虑轮换对称性，由于 S 关于 yz 平面对称，因此 $J=0$。

17.3 第二型曲面积分

17.3.1 基本概念、投影法、参数方程法

定义 17.2 (第二型曲面积分)

对于向量场 $F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，其通过曲面 S 的通量定义为第二型曲面积分 (向外为正)：

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

♣

定理 17.7 (投影法)

若曲面 S 的方程为 $z=z(x,y)$，在 xy 平面投影区域为 D_{xy}，则

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

正负取决于 S 的法向量与 z 轴正向的夹角，若锐角则取正，钝角取负，直角积分为 0。

♡

笔记 若曲面 S 为 $z=a$ 的一部分，则 $\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D R(x,y,a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。若计算 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，则需要考虑在 yz,zx 平面的投影

练习 17.6 投影法练习 (1) 计算 $\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\geq 0,y\geq 0$ 部分，且取球面外侧

(2) 考虑 S 为 $x=y=z=0,x=y=z=a$ 六个平面所围成的立方体表面，外侧为正，计算：

$$\iint_S (xy-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 (1) 积分等于 $2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r=\dfrac{2}{15}$

(2) 可以用 Gauss 公式，也可以一个一个考虑。例如考虑 $z=a$ 平面 S_1，即 $\iint_{S_1}(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D (y^2+ax)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{5}{6}a^4$，其余同理。

定理 17.8 (参数方程法)

若 S 可表示为参数方程 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D$，记 $A=\left|\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|,B=\left|\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|,C=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$，则

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D (PA+QB+RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

若向量 (A,B,C) 与 S 法向量方向一致则取正，否则取负。

练习 17.7 参数方程法 (1)S 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上半部并取外侧，计算 $\displaystyle\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解

17.3.2 利用对称性

以 $\displaystyle\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为例，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的正负取决于对称点处 S 外法向量与 z 轴正向的夹角，结合 $R(x,y,z)$ 关于 xy 平面或者原点的对称性可分解 S 上的曲面积分，$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 与 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 同理。

练习 17.8 方向判断训练 设 $S:|x|+|y|+|z|=1$，方向朝外，判断下面哪些积分值为 0：

$$(1)\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(2)\iint_S x^2\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(3)\iint_S y^2\sin z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(4)\iint_S \sin x\sin^2 y\sin^3 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 (1) 关于 xy 平面对称，z 相反，由于法向量与 z 轴正向夹角相反，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也为负，因此非零

(2) 关于 xz 平面对称，$\sin y$ 相反，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为正，因此积分为 0

(3) 无论怎么考虑都非零

(4) 考虑 yz，$\sin x$ 相反，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为正，因此积分为 0。

练习 17.9 基本计算 (1) 计算 $I_1=\displaystyle\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，方向取外侧

解 (1)I_2 考虑关于 xy 平面对称，z^2 相等，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 相反，因此积分为 0。I_1 可转换为两倍的上半球面，$I_1=2\displaystyle\iint_{S_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由于 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$D:x^2+y^2\le a^2$，因此

$$I_1=\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^a\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}\theta=\frac{4\pi a^3}{3}$$

17.3.3 两类曲面积分的联系

定理 17.9 (两类曲面积分的联系)

S 为光滑曲面，正侧单位法向量 $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则 $\cos\alpha\mathrm{d}S=\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\cos\beta\mathrm{d}S=\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\cos\gamma\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

笔记 对一般曲面 $F(x,y,z)=0$，其梯度 (F_x,F_y,F_z) 就是曲面法向量，因此单位法向量的计算方式为：

$$\mathbf{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}(F_x,F_y,F_z)$$

练习 17.10 重新计算第二型曲面积分 (1) 重新计算 $\displaystyle\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\ge 0,y\ge 0$ 部分，方向朝外

解 (1) 法向量 $\mathbf{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，因此可以转换为第一型曲面积分：

$$\iint_S xyz\cdot x\cdot\frac{a}{z}\mathrm{d}S=2\iint_D r^4\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{2}{15}$$

这里乘上 2 的原因是关于 z 正负有两块。

练习 17.11 用曲面积分联系计算第二型曲面积分 S 为 $x+y+z=1$ 在 $x^2+y^2+z^2=4x$ 内部的部分，取上侧为正，计算：

$$I=\iint_S y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 (1) 已知 $F(x,y,z)=x+y+z-1$，则梯度为 $\nabla F=(1,1,1)$，单位法向量 $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，因此 $I=\iint_S\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)dS=\frac{1}{\sqrt{3}}S$，计算截面圆面积即可，结果为 $\frac{11}{3\sqrt{3}}\pi$

17.4 Gauss 公式

17.4.1 Gauss 公式与基本使用

定理 17.10 (Gauss 公式)

$V\subset\mathbb{R}^3$ 是有界闭区域，V 边界是分片光滑的曲面 S，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 V 内有连续偏导，则

$$\oiint_{S_外}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

笔记 使用 Gauss 公式需要保证 V 内任意位置，P,Q,R 都有连续偏导。

练习 17.12 补面计算 (1) 东南大学 2022：计算 $I=\iint_S\frac{(z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 为 $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ 曲面，取下侧

解 (1) 补面 $S_1=\{z=0,x^2+y^2\le 9\}$，方向朝上，则 $I=\frac{1}{9}I_1-\frac{1}{9}I_2=\frac{1}{9}\iint_{S+S_1}-\frac{1}{9}\iint_{S_1}$，根据 Gauss 公式计算 I_1：

$$I_1=-\iiint_V(0+1+0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-18\pi$$

计算 I_2，由于在平面上，曲面积分直接变为二重积分，且 $\mathrm{d}z=0$，：

$$I_2=\iint_{x^2+y^2\le 9}(x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3 r^2\cos+r\mathrm{d}r=9\pi$$

因此结果为 $I=\frac{1}{9}(-18\pi-9\pi)=-3\pi$

练习 17.13 菱形区域：变量替换！ (1) 重点：S 为封闭曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$，方向朝外，计算 $I=\iint_S(x+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2y+\sin(z+x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z+e^{x+y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(2)(东北师大) 求 $I=\iint_S(x+\cos(y-z))\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y+e^{x+z})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z+\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，这里 S 为封闭曲面，方向取外侧

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$$

解 (1) 使用 Gauss 公式即 $I=\iiint_V(1+2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，考虑坐标变换 $u=x-y+z,v=y-z+x,w=z-x+y$，即 $|u|+|v|+|w|\le 1$，而 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=4$，因此 $J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{4}$，因此 $I=\iint_{V'}\frac{3}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=2$，这里 $V'=\frac{4}{3}$ 是个锥体。

(2) 使用 Gauss 公式即 $I=\iiint_V 6\mathrm{d}V$，使用坐标变换

$$u=x+z-y,v=y+x-z,w=y+z-x$$

得到 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=4$，即 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{4}$，积分区域为 $|u|+|v|+|w|\le 1$，分为 8 个小锥体，每个锥体体积 $\frac{1}{6}$，因

此最终结果为：

$$I=\frac{3}{2}\times 8\times\frac{1}{6}=2$$

17.4.2 内部有瑕点

练习 17.14 经典题目 S 为不经过原点的光滑封闭曲面，计算

$$I=\iint_S \frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 记 $r^2=ax^2+by^2+cz^2$，则两侧对 x 求导可以得到

$$r_x=\frac{ax}{r}$$

同理可以得到 r_y,r_z。同时 $P=\frac{x}{r^3},Q=\frac{y}{r^3},R=\frac{z}{r^3}$，因此可以计算得到

$$P_x+Q_y+R_z=0$$

如果 S 围成的区域不包含原点，则积分为 0。如果包含原点，则挖掉 $V_1: ax^2+by^2+cz^2\le\epsilon^2$，$S_1$ 面方向定义为 $V-V_1$ 朝向 V_1，则 $\iint_{S+S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{V-V_1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，因此 $I=-\iint_{S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，用 Gauss 公式得到

$$I=\iiint_{V_1}\frac{3}{\epsilon^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{\epsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi\epsilon^3}{\sqrt{abc}}=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

笔记 最常见的形式为：$\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\begin{cases}4\pi, & S\text{围成区域包含原点}\\ 0, & S\text{围成区域不包含原点}\end{cases}$

练习 17.15 推广形式 S 为上半椭球面 $2021x^2+2022y^2+2023z^2=1(z\ge 0)$，方向取向上，计算

$$I=\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

解 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，显然除原点外 $P_x+Q_y+R_z=0$，记 $V: 2021x^2+2022y^2+2023z^2\le 1(z\ge 0)$，$V_1: x^2+y^2+z^2\le\epsilon^2(z\ge 0)$，则 $V-V_1$ 的表面分为三个部分 $S+S_1+S_2$，其中 S_1 是小椭球体表面，S_2 为 $z=0$ 内两个直底面，S_1,S_2 方向朝下。根据 Gauss 公式得到 $\iint_{S+S_1+S_2}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，即

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{S_1}-\iint_{S_2}$$

$\iint_{S_2}$ 由于 $z=0$ 得到积分为 0，$\iint_{S_1}$ 得到 $r=\epsilon$，即 $P=\frac{x}{\epsilon^3},Q=\frac{y}{\epsilon^3},R=\frac{z}{\epsilon^3}$，再补上 V_1 下面的小平面 S_3，用 Gauss 公式得到 $I=\frac{1}{\epsilon^3}\iint_{-S_1+S_3}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，最终结果为 2π

笔记 最后一步也可以用两类曲面积分的关系进行计算，当第二型不方便算时，要善于转化为第一型进行计算

17.5 Stokes 公式

17.5.1 Stokes 公式与基本使用

定理 17.11 (Stokes 公式)

设曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线，若 P,Q,R 在 S 上连续，且有一阶偏导，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

即将空间第二型曲线积分转换为第二或第一型曲面积分，这里 $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 S 正侧的外单位法向量。注意求法向的曲面 S 和最终积分的 S 要是同一个曲面。

笔记 Stokes 公式一般用在三维第一型曲线积分，且积分曲线是两个曲面的交线，往往转换为第一型曲面积分更好算：外法向量能用平面就用平面 (为常数)，圆面则为圆心到 (x,y,z) 的单位向量。

笔记 确定单位法向量的方向：若积分曲线方向是正向 (区域在左)，则单位法向朝曲面朝外，否则朝内。

练习 17.16 一次项 Stokes 公式 利用 Stokes 公式计算下面的第一型曲线积分：

(1) 平面与球面：计算 $I=\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴 $+\infty$ 看为逆时针。

(2) 球面与柱面：计算 $\oint_L (x-1)\mathrm{d}y-(y+1)\mathrm{d}x+z\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 上半球与柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线，从 z 轴正向来看为逆时针方向。

解 (1) 记 S 为 $x+y+z=0$ 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内的部分，取上侧 $\mathbf{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，则根据 Stokes 公式：

$$I=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S(-1-1-1)\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2$$

(2)$\mathbf{n}=(x,y,z)$，因此根据 Stokes 公式得到

$$I=\iint_S\begin{vmatrix}x & y & z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y-1 & x-1 & z\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_S 2z\mathrm{d}S=\iint_D 2\mathrm{d}S=\frac{\pi}{2}$$

练习 17.17 二次项 Stokes 公式 经典：L 是 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与 $x^2+y^2=2x$ 的交线在 $z\geq 0$ 的部分，方向为原点进入第一卦限，计算：

$$I=\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

解 曲面 S 是 $(x-2)^2+y^2+z^2=4$ 的一部分，注意原点进第一卦限时区域在右侧，因此方向朝内。单位法向量为 $\mathbf{n}=-\dfrac{1}{2}(x-2,y,z)$，因此根据 Stokes 公式：

$$\begin{aligned}I&=\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z\\&=-\iint_S[(x-2)(y-z)+y(z-x)+z(x-y)]\mathrm{d}S=2\iint_S(y-z)\mathrm{d}S\end{aligned}$$

由于 S 关于 xz 平面对称，因此 $\iint_S y\mathrm{d}S=0$，此时

$$I=-2\iint_S z\mathrm{d}S$$

而 S 方程为 $z=\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}$，投影为 $D=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\leq 1\}$，且 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{2}{z}$，得到

$$I=-2\iint_S z\mathrm{d}S=-2\iint_D z\cdot\frac{2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi$$

17.5.2 空间第二型曲线积分与路径无关性

定理 17.12 (空间第二型曲线积分与路径无关性)

$V \subseteq \mathbb{R}^3$ 是单连通区域，P, Q, R 在 V 上连续，且有一阶偏导数，L 为 V 内任意光滑曲线，则 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 与路径无关与下面条件等价：

- 任意 V 内光滑封闭曲线 L，满足 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$
- V 内处处成立：$P_y = Q_x, Q_z = R_y, R_x = P_z$

♡

第 18 章 实数完备性定理

定义 18.1 (聚点)

若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\} \subseteq S$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$，则 ξ 称为 S 的一个聚点。

定理 18.1 (实数七大定理)

七大定理如下：

- 确界定理：S 是非空实数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界
- 单调有界定理
- Cauchy 收敛准则
- 闭区间套定理
- 有限开覆盖定理：S 是实数子集，H 为开区间族，若 $\forall x \in S$ 都含于 H 至少一个开区间中，则称 H 是 S 开覆盖。若 H 是 $[a,b]$ 的开覆盖，则可从 H 中选出有限个区间覆盖 $[a,b]$
- 聚点定理：实轴上任一有界无限点集 S 至少有一个聚点
- 致密性定理：有界数列必有收敛子列

下面采取确界原理-单调有界定理-闭区间套定理-有限覆盖定理-聚点定理/致密性定理-Cauchy 收敛准则的形式循环证明其等价性：

1. 确界证明单调有界定理：设 a_n 单增有上界，根据确界原理有上确界，取 $a = \sup\{a_n\}$，只需证明 a 是 a_n 极限。根据上确界定义有 $\exists N, a - \epsilon < a_N$，再由单增和极限定义显然。
2. 单调有界证明闭区间套：a_n, b_n 都单调有极限，所以夹住的点存在。唯一性用 $|\xi - \xi'| \le \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 证明
3. 闭区间套证明有限覆盖：反设不成立，则 $[a, \dfrac{a+b}{2}], [\dfrac{a+b}{2}, b]$ 中至少有一个没有有限覆盖，不停分下去，根据闭区间套有 $\xi \in [a_n, b_n]$。当 n 足够大时，一定存在开覆盖集中的区间包含它，因此与假设矛盾。
4. 有限覆盖证明致密性定理：设 x_n 有界，若无穷项相等，则显然。若相等的只有有限项，可知 $\exists x_0 \in [a,b]$ 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中有无限项，否则根据有限开覆盖，总共 x_n 只有有限项，矛盾。因此在 $(x_0 - \dfrac{1}{k}, x_0 + \dfrac{1}{k})$ 中取 x_k 即有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$
5. 聚点定理证明 Cauchy 收敛准则：设 x_n 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\exists N, \forall n, m > N$ 有 $|x_n - a| < \epsilon, |x_m - a| < \epsilon$，因此 $|a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a - a_m| = 2\epsilon$
6. Cauchy 收敛准则证明确界原理：b 为上界，$a \in S$，不断二分，构造 a_n, b_n，最后 $|a_{n+p} - a_n| \le |b_n - a_n| < \epsilon$，因此有极限 a，满足 $\exists N, a_N + \epsilon > a$。