浙江大学

《数值计算方法》第二周作业

姓名与学号 王德茂（3220105563）

指导教师 徐祖华

年级与专业 机器人 2202

所在学院 控制科学学院

第二周作业

一、问题提出：

工程师经常需要计算抛物的轨迹。假设坐标系如图所示，左边的球向右抛出后的轨迹可由如下公式计算：

$$\mathbf{y = tan(\theta)x - \frac{g}{2v^2cos^2(\theta)}x^2 + y_0}$$

假设：球抛出的初始速度为:30

抛出点的高度为:1.8

重力加速度为:9.81

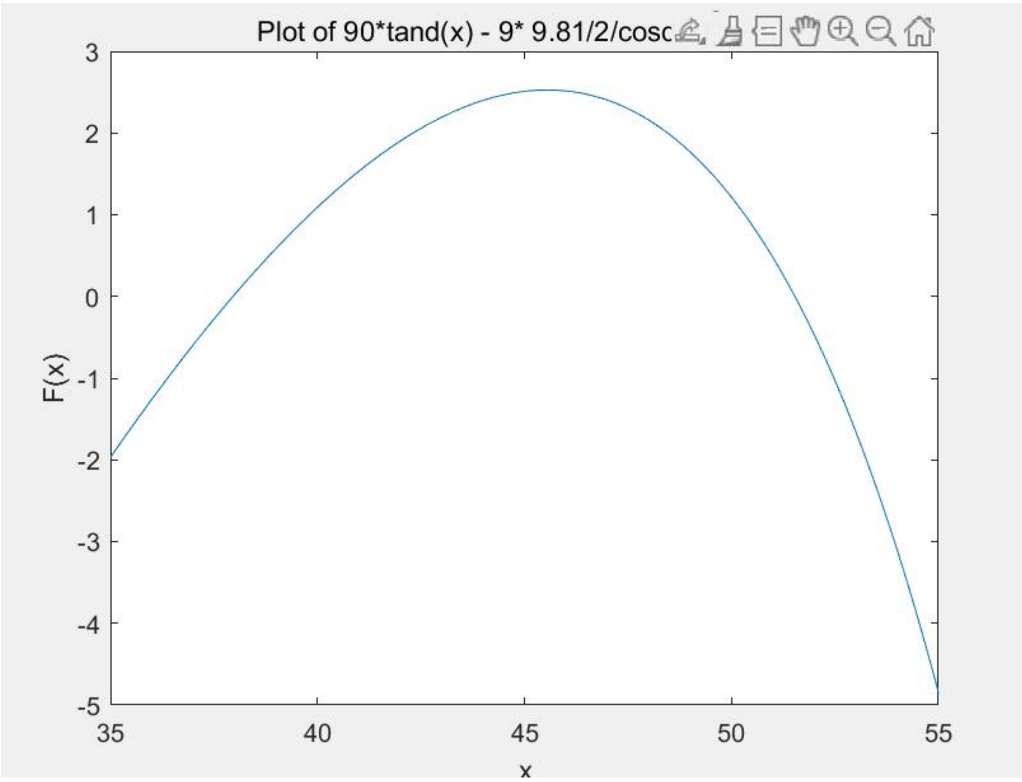
若球到达离抛出点水平距离处时 90，球的高度为 1

请：计算球的抛出角。要求分别用二分法、试位法、不动点迭代、Newton-Raphson 法和割线法求解，并对各种方法进行比较。（提示：存在两个根)

二、解决思路：

按照计算方程根的几种方法，分别执行。

在开始之前，由于我们已知表达式，所以我们可以通过图像进行直观的判断：



从中，我们可以看到根有两个，并且大约位于 35-40，50-55 之间。这为我们选择根的起始点有了依据。

三、二分法

在确定方程感兴趣的根值区间后，找到一个两端点函数值异号的子区间，并考察该子区间的中点的函数值，反复利用根的存在性定理，循环减半根估计区间，递归求得确定精度下的根的估计值。

在这里，我们确定当小数点后 7 位不再改变时，停止迭代。

程序实现如下：

```
format long;
F=@(x) 90* tand(x)- 9 * 9.81 / 2 / cosd(x)^2+ 0.8;
x1=35;
x2=40;
x3=50;
x4=52;
count1=0;
count2=0;
G=@(x) 90/cosd(x)^2 - 9 * 9.81 *sind(x)  / cosd(x)^3;
while count1 < 10
    x1 = x1 - F(x1)/G(x1);
    count1 = count1+1 ;
end
disp(x1)
while count2 < 10
    x4 = x4 - F(x4)/G(x4);
    count2 = count2 + 1;
end
disp(x4)
```

执行结果如下：

```
>> project_one
循环了:    26次      结果为:    37.95898192
循环了:    26次      结果为:    51.53173573
```

四、试位法

试位法是计算作为一个方程的根的未知量的一种方法，是先做出一个或者一些估计，再从这个或者这些估计出发并根据未知量的性质求出代求的未知量。

试位法类似于二分法，也是将含根区间逐渐缩小，但它并不是单一的二分区间，而是利用区间两个端点的线性插值来求一个近似根。

根据相似三角形，直线与x轴的交点估计值如下式：

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

解得

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} = \frac{x_u f(x_l) - x_l f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

在这里，我们确定当小数点后 7 位不再改变时，停止迭代。

程序实现如下：

```
format long;
F=@(x) 90* tand(x)- 9 * 9.81 / 2 / cosd(x)^2+ 0.8;
x1=35;
x2=40;
x3=50;
x4=55;
count1=0;
count2=0;
err = 1e-7;
help = 0;
xr1=1;
xr2=1;
while abs(help-xr1) > err
    xr1=x2-F(x2) * ( x1 - x2 ) / (F(x1) - F(x2));
    if (F(xr1) == 0)
        break;
    end
    if F(xr1)*F(x2)<0
        help = x1;
        x1 = xr1;
    else
        help = x2;
        x2 = xr1;
    end
    count1 = count1 + 1 ;
end
s1="循环了：  "+num2str(count1)+"次    结果为：  "+num2str(xr1,10);
disp(s1)
help=0;
while abs(help - xr2)>err
    xr2=x4-F(x4) * ( x3 - x4 ) / (F(x3) - F(x4));
    if (F(xr2) == 0)
        break;
    end
    if F(xr2)*F(x4)<0
```

```
            help = x3;
            x3 = xr2;
        else
            help = x4;
            x4 = xr2;
        end
        count2 = count2 + 1 ;
    end
    s2="循环了：   "+num2str(count2)+"次     结果为：   "+num2str(xr2,10);
    disp(s2)
```

输出结果：

```
>> project_two
循环了：    9次      结果为：    37.95898188
循环了：    16次      结果为：    51.5317357
```

从中可以看出，在该问题中，试位法较快的得到了结果，效果优于二分法。

五、不动点迭代

不动点迭代法是求单变量线性方程近似根的一种重要方法，首先确定一个方程根附近的近似初始值，采用逐次逼近的方法，使用迭代公式不断地更新这个初始值，使这个初始值不断趋近于准确值。

不动点迭代法的思想原理：将方程 f（x） 转换成一个等价的方程 ，以此构造一个迭代公式：

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad n = 0, 1, 2...$$

在这里，我们由于考虑到收敛性，构造了两个不同的迭代函数。

定理：如果 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的一阶导数，并且满足下列条件：

(1)、对任意 $x \in [a,b]$，总存有 $\varphi(x) \in [a,b]$

(2)、对任意 $x \in [a,b]$，总存在 $0 < L < 1$，使 $|\varphi'(x)| \le L < 1$

则方程 $f(x) = 0$ 在 $[a,b]$ 上有唯一的根 x^* ,且对任意初值 $x_0 \in [a,b]$ 时，迭代序列$\{x_n\}$收敛 x^*

重点：迭代函数只有满足上面的不动点迭代的收敛条件，才能使用不动点迭代法解方程。

代码实现如下：

```
    format long;
    F=@(x) 90* tand(x)- 9 * 9.81 / 2 / cosd(x)^2+ 0.8;
```

```
x1=35;
x2=40;
x3=52;
x4=55;
count1=0;
count2=0;
err= 1e-7;
G1=@(x) atand( (9 * 9.81 / 2 / cosd(x)^2 - 0.8) /90 );
G2=@(x) 90* tand(x)- 9 * 9.81 / 2 / cosd(x)^2+ 0.8 + x;
while abs( G1(x1) - x1 )>err
    x1 = G1(x1);
    count1 = count1 + 1 ;
end
s1="循环了：   "+num2str(count1)+"次    结果为：   "+num2str(G1(x1),10);
disp(s1)
while abs(G2(x4)-x4)>err
    x4 = G2(x4);
    count2 = count2 + 1 ;
end
s1="循环了：   "+num2str(count2)+"次    结果为：   "+num2str(G2(x4),10);
disp(s1)
```

结果如下：

```
>> project_three
循环了：   58次    结果为：   37.95898155
循环了：   8次    结果为：   51.53173572
```

从中我们很明显的看出，给定不同的迭代函数，其收敛速度不同。
当我们改变初始值时，（x1=40 , x4 =50）
结果如下：

```
>> project_three
循环了：   59次    结果为：   37.95898214
循环了：   7次    结果为：   51.53173572
```

可以看到，初值和迭代函数都对不动点法有影响。

不动点迭代的几何意义： 不动点迭代求解单变量非线性方程的几何意义就是求解方程 $y = x$ 与 $y = \varphi(x)$ 的几何曲线交点的横坐标 x^*。

六、Newton-Raphson 法

多数方程不存在求根公式，因此求精确根非常困难，甚至不可解，从而寻找方程的近似

根就显得特别重要。方法使用函数的泰勒级数的前面几项来寻找方程的根。牛顿迭代法是求方程根的重要方法之一，其最大优点是在方程的单根附近具有平方收敛，而且该法还可以用来求方程的重根、复根，此时线性收敛，但是可通过一些方法变成超线性收敛。另外该方法广泛用于计算机编程中。

代码实现如下：

```
format long;
F=@(x) 90* tand(x)- 9 * 9.81 / 2 / cosd(x)^2+ 0.8;
x1=35;
x2=40;
x3=50;
x4=52;
count1=0;
count2=0;
err = 1e-7 ;
G=@(x) 90/cosd(x)^2 - 9 * 9.81 *sind(x)  / cosd(x)^3;
help = 0;
while abs(help - x1) > err
    help = x1;
    x1 = x1 - F(x1)/G(x1);
    count1 = count1+1 ;
end
s1="循环了：   "+num2str(count1)+"次    结果为：   "+num2str(x1,10);
disp(s1)
help = 0;
while abs(help - x4) >err
    help = x4;
    x4 = x4 - F(x4)/G(x4);
    count2 = count2 + 1;
end
s2="循环了：   "+num2str(count2)+"次    结果为：   "+num2str(x4,11);
disp(s2)
```

其结果令人吃惊：

```
>> project_four
循环了：   755次    结果为：   37.95897626
循环了：   647次    结果为：   51.531741305
```

可以看到，此时的 Newton-Raphson 法效率极低。

我们来分析一下，输出每一步的导数值以及函数值。

代码如下：

```
format long;
F=@(x) 90* tand(x)- 9 * 9.81 / 2 / cosd(x)^2+ 0.8;
x1=35;
x2=40;
```

```
x3=50;
x4=52;
count1=0;
count2=0;
G=@(x) 90/cosd(x)^2 - 9 * 9.81 *sind(x)  / cosd(x)^3;

while count1<10

    x1 = x1 - F(x1)/G(x1);
    count1 = count1+1 ;
    s1="循环了：  "+num2str(count1)+"次    结果为：  "+num2str(x1,10)...
        +"F(x1)为：  "+num2str(F(x1)) +"   G(x1)为: "+ num2str(G(x1))   ;
    disp(s1)
end



while count2<10

    x4 = x4 - F(x4)/G(x4);
    count2 = count2 + 1;
    s2="循环了：  "+num2str(count2)+"次    结果为：  "+num2str(x4,11)...
            +"F(x4)为：  "+num2str(F(x4)) +"   G(x4)为: "+ num2str(G(x4)) ;
    disp(s2)
end
```

结果如下：

```
>> four_analysis
循环了：  1次    结果为：  35.04691576F(x1)为：  -1.9359   G(x1)为: 41.8818
循环了：  2次    结果为：  35.09313773F(x1)为：  -1.9021   G(x1)为: 41.7704
循环了：  3次    结果为：  35.13867513F(x1)为：  -1.869   G(x1)为: 41.6603
循环了：  4次    结果为：  35.18353705F(x1)为：  -1.8364   G(x1)为: 41.5515
循环了：  5次    结果为：  35.22773249F(x1)为：  -1.8044   G(x1)为: 41.4439
循环了：  6次    结果为：  35.27127034F(x1)为：  -1.7729   G(x1)为: 41.3375
循环了：  7次    结果为：  35.31415937F(x1)为：  -1.742   G(x1)为: 41.2323
循环了：  8次    结果为：  35.35640828F(x1)为：  -1.7117   G(x1)为: 41.1284
循环了：  9次    结果为：  35.39802565F(x1)为：  -1.6818   G(x1)为: 41.0256
循环了：  10次    结果为：  35.43901996F(x1)为：  -1.6525   G(x1)为: 40.9241
循环了：  1次    结果为：  51.992242862F(x4)为：  -0.46261   G(x4)为: -60.5915
循环了：  2次    结果为：  51.98460789F(x4)为：  -0.45455   G(x4)为: -60.4891
循环了：  3次    结果为：  51.977093355F(x4)为：  -0.44662   G(x4)为: -60.3883
循环了：  4次    结果为：  51.969697548F(x4)为：  -0.43883   G(x4)为: -60.2893
循环了：  5次    结果为：  51.962418776F(x4)为：  -0.43118   G(x4)为: -60.1919
循环了：  6次    结果为：  51.955255367F(x4)为：  -0.42366   G(x4)为: -60.0961
循环了：  7次    结果为：  51.948205668F(x4)为：  -0.41627   G(x4)为: -60.002
循环了：  8次    结果为：  51.941268041F(x4)为：  -0.40901   G(x4)为: -59.9094
循环了：  9次    结果为：  51.934440871F(x4)为：  -0.40188   G(x4)为: -59.8183
循环了：  10次    结果为：  51.927722557F(x4)为：  -0.39487   G(x4)为: -59.7288
```

从中我们可以明白，**导数值较大，而函数值大小，使得每一次变化很小，收敛很慢**。

七、割线法

割线法，又称弦割法、弦法，是基于牛顿法的一种改进，基本思想是用弦的斜率近似代替目标函数的切线斜率，并用割线与横轴交点的横坐标作为方程式的根的近似。 它是求解非线性方程的根的一种方法，属于逐点线性化方法。

代码实现：

```
format long;
F=@(x) 90* tand(x)- 9 * 9.81 / 2 / cosd(x)^2+ 0.8;
x1=35;
x2=40;
x3=50;
x4=55;
count1=0;
count2=0;
err= 1e-7;
help = 0;
while abs(x2-help) > err
    help=x2;
    x2 = x1 - F(x1) * (x1 - x2) /(F(x1) - F(x2));
    count1 = count1 + 1 ;
end
s1="循环了：   "+num2str(count1)+"次    结果为：   "+num2str(x2,10);
disp(s1)
help = 0 ;
while abs(x4 - help) > err
    help =x4;
    x4 = x3 - F(x3) * (x3 - x4) /(F(x3) - F(x4));
    count2 = count2 + 1 ;
end
s2="循环了：   "+num2str(count2)+"次    结果为：   "+num2str(x4,10);
disp(s2)
```

获得结果如下：

```
>> project_five
循环了：    9次      结果为：    37.95898188
循环了：    12次      结果为：    51.53173573
>>
```

可以看到，**割线法有较好的收敛速度**。

割线法收敛定理：

设 $f(x) \in C^2[a,b]$ ，$[a,b] \triangleq [x^* - \delta, x^* + \delta]$ ，δ 为足够小的正数，x^* 是 $f(x) = 0$ 的根，如果

$$q = \frac{M_2}{2m_1}\delta < 1$$

其中，$M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|, m_1 = \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)| > 0$，则由

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

确定的序列 $\{x_n\}$ 以 $p = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的速度收敛到 x^*

八、小结：

在这个问题中，我们通过二分法、试位法、不动点迭代、Newton-Raphson 法和割线法分别求解了球的抛出角，并对各种方法进行了比较。通过实际计算和结果分析，我们发现试位法和割线法在这个问题中表现较好，收敛速度较快，而 Newton-Raphson 法的效率较低。并且我们进行了分析出现这一情况的原因。

在不动点迭代法中，不同的迭代函数和初始值会影响结果，需要谨慎选择。综合来看，选择合适的方法和参数对于求解抛物轨迹问题至关重要。