

第三次上机作业

一、问题提出：

1.编写求解线性代数方程组的原始高斯消去算法程序：

2.验证程序正确后，利用此程序完成以下任务：

(1) 已知函数通过点(2, 8), (3, 27), (4, 64), (5, 125)，则函数可通过求解以下方程组得到

(2) 求解此方程组；

(3) 将系数矩阵中的 125 改为 124.8，求出结果；

(4) 分析你的结果。

二、问题解决：

1.思路

我们采用老师所讲授的原始高斯消去算法，编程实现。

2. 代码实现：

```
A = [1 2 4 8 8; 1 3 9 27 27; 1 4 16 64 64; 1 5 25 125 125];
X = [0 0 0 0];

size = 4 ;
last = 5;
for k = 2 : size
    for j = k:size
        A(j , :) = A(j, :) - A(k-1, :) * (A(j, k-1) / A(k-1, k-1));
        %Y(j) = Y(j) - A(j, k-1) * Y(k-1) / A(k-1, k-1);
    end
end
s="原始高斯消去算法程序将矩阵变为： ";
disp(s);
disp(A);

X(size) = A(size,last) / A(size,size);
for i = size : -1 : 1
    sum = 0;
    for j = i+1 : size
        sum = sum + A(i,j) * X(j);
    end
    A(i,last) = A(i,last) - sum;
    X(i) = A(i,last) / A(i,i);
end
```

```
s="得到的解向量为：";
disp(s);
disp(X);
```

3. 实验结果：

(1) 当我们输入 125 时，结果如下：

原始高斯消去算法程序将矩阵变为：

1	2	4	8	8
0	1	5	19	19
0	0	2	18	18
0	0	0	6	6

得到的解向量为：

0	0	0	1
---	---	---	---

(2) 当我们输入 124.8 时，结果如下：

原始高斯消去算法程序将矩阵变为：

1.0000	2.0000	4.0000	8.0000	8.0000
0	1.0000	5.0000	19.0000	19.0000
0	0	2.0000	18.0000	18.0000
0	0	0	5.8000	6.0000

得到的解向量为：

-0.8276	0.8966	-0.3103	1.0345
---------	--------	---------	--------

可以看到，这个扰动使得结果有一定变化。

三、结果分析：

在这个问题中，系数矩阵有扰动。

我们知道：线性方程组 $Ax=b$ 解的相对误差直接与 A 的条件数相关。

A 的条件数 $\text{Cond}(A)$ 相对大 ($\gg 1$)，称 $Ax=b$ 是病态方程组/坏条件，或 A 是病态的；当 A 的条件数 $\text{Cond}(A)$ 相对小，称 $Ax=b$ 是良态方程组/好条件，或 A 是良态的。

A 的扰动

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b \Rightarrow \Delta x = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x) \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

这里，我们进行计算：

我们可以得到如下结果：

原始高斯消去算法程序将矩阵变为:

1.0000	2.0000	4.0000	8.0000	8.0000
0	1.0000	5.0000	19.0000	19.0000
0	0	2.0000	18.0000	18.0000
0	0	0	5.8000	6.0000

得到的解向量为:

-0.8276 0.8966 -0.3103 1.0345

得到的 $\text{cond}(A)$ 为:

5.7745e+03

A^{-1} 的范数 $\text{norm}(A^{-1})$:

39.4102

b 的范数 $\text{norm}(B)$:

143.2271

误差的范数

1.2594

这里, $\text{cond}(A)$ 较大, 我们计算绝对误差上限, 大约为:

49.2625

由公式:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r(\tilde{x})\|}{\|b\|}$$

所得的相对误差更大:

约为 184.51

所以, 我们估计其误差还是比较大的。

四、小结:

通过本次上机作业, 我们成功编写了求解线性代数方程组的原始高斯消去算法程序, 并利用该程序完成了已知函数通过点求解方程组的任务。我们还对系数矩阵中的 125 进行了微小扰动, 观察到结果的变化。通过分析条件数和误差估计, 我们认为这个扰动对结果的影响并较大。在实践中, 我们需要注意方程组的条件数, 以确保结果的准确性。通过这次实验, 我们加深了对线性代数方程组求解算法的理解, 提高了编程实践能力。希望在以后的学习和工作中能够更加熟练地运用这些知识和技能。