

1 subtask3

1.1 问题描述

1.1.1 问题分析

我国曾明确提出：构建北京、上海、广州、武汉、成都、沈阳、西安、郑州、天津、南京、深圳、合肥、贵阳、重庆、杭州、福州、南宁、昆明、乌鲁木齐等综合铁路枢纽。其中，北京、上海、武汉、成都、杭州人流量大，更具有分析价值。我们对于问题的求解，计划先建立数学模型，然后用这 5 座城市来验证模型。

1.1.2 模型假设

- 1) 我们假设换乘高铁在不同的城市有所差距, 但消耗的时间固定。
- 2) 假设火车准时到达、准时发车, 无异常情况发生。
- 3) 假设两个城市之间的所耗费的乘车时间在不同时刻是一致的。

1.1.3 符号说明

- G_{ij} : 表示使用 i 城市和 j 城市的高铁。
- S_i : 表示在 i 城市换乘高铁所消耗的时间。
- P_i : 表示各目标的优先级别。
- T_{ij} : 表示 i 城市和 j 城市间乘车所用的时间。
- M : 表示总共使用的列车数。

1.1.4 建立模型

由于我们要保证任意两站直接存在列车能在一个上限时间内到达, 并且要用尽可能少的车次实现, 我们要为目标设定优先级。考虑到现实情况, 我们将时间置为较高优先级。

对于 i 城市和 j 城市之间:

$$T_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} T_{k,k+1} + \sum_{k=i+1}^{j-1} S_k$$

目标函数:

$$Z = \min \{ P_1 \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i! = j}}^n T_{ij} + P_2 M \}$$

1.2 求解方法

1.2.1 原理

线性规划的目标是一个刚性的目标. 但实际应用中, 目标常常是模糊的。解决方法: 将目标化作一种软目标/软约束。

在建立模型的过程中, 要兼顾一定时间内到达, 并且要用尽可能少的车次实现。我们将原来要求寻找最优解的目标, 改为寻找满意解。

- 1) 将矛盾的普通约束改为目标约束, 即将硬约束改为软约束。
- 2) 将多个约束分为不同的优先级。

思想:

- 1) 将定量技术和定性技术结合
- 2) 承认矛盾、冲突的合理性
- 3) 强调通过协调, 达到总体和谐

在求解过程中, 我们可以将一些与其他城市均较远的城市先假设没有直达列车, 看能否减低目标函数。

1.2.2 算法以及具体实现

在具体求解中，我们将每个城市视为图中的一个节点，如果两个城市之间有直接的铁路连接，则在这些节点之间建立一条边，边的权重可以表示为旅行时间。由此，我们可以使用 Dijkstra 算法或者 Floyd-Warshall 算法来计算任意两个城市之间的最短路径。

在此，我们首先假设各个城市间都使用直达列车，之后舍去一些车次，来使得目标函数减小。对于不同城市，处理可能不同。在求解过程中，我们可以将一些与其他城市均较远的城市先假设没有直达列车，看能否减低目标函数。

1.3 案例分析

1.3.1 具体参数

由于各个大城市之间车次较多，我们选择其中较有代表性的时间作为参数。所有数据来自全国列车时刻表在线查询 (<https://qq.ip138.com/train/>)。

- 北京-上海：5 小时
- 北京-武汉：4 小时 30 分钟
- 北京-成都：8 小时
- 北京-杭州：6 小时
- 上海-武汉：5 小时 30 分钟
- 上海-成都：14 小时
- 上海-杭州：1 小时 15 分钟
- 成都-杭州：12 小时 30 分钟
- 成都-武汉：9 小时 30 分钟
- 杭州-武汉：5 小时

在这里，我们假设每增加一条线路，时间增加 4 小时，以此达成对铁路条数的约束。

算法实现时，我们设北京为 0，上海为 1，武汉为 2，杭州为 3，成都为 4。这样，我们写出其矩阵形式。

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 4.5 & 8 & 6 \\ 5 & 0 & 5.5 & 14 & 1.25 \\ 4.5 & 5.5 & 0 & 9.5 & 5 \\ 8 & 14 & 9.5 & 0 & 12.5 \\ 6 & 1.25 & 5 & 12.5 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.2 求解结果

python 求解结果:

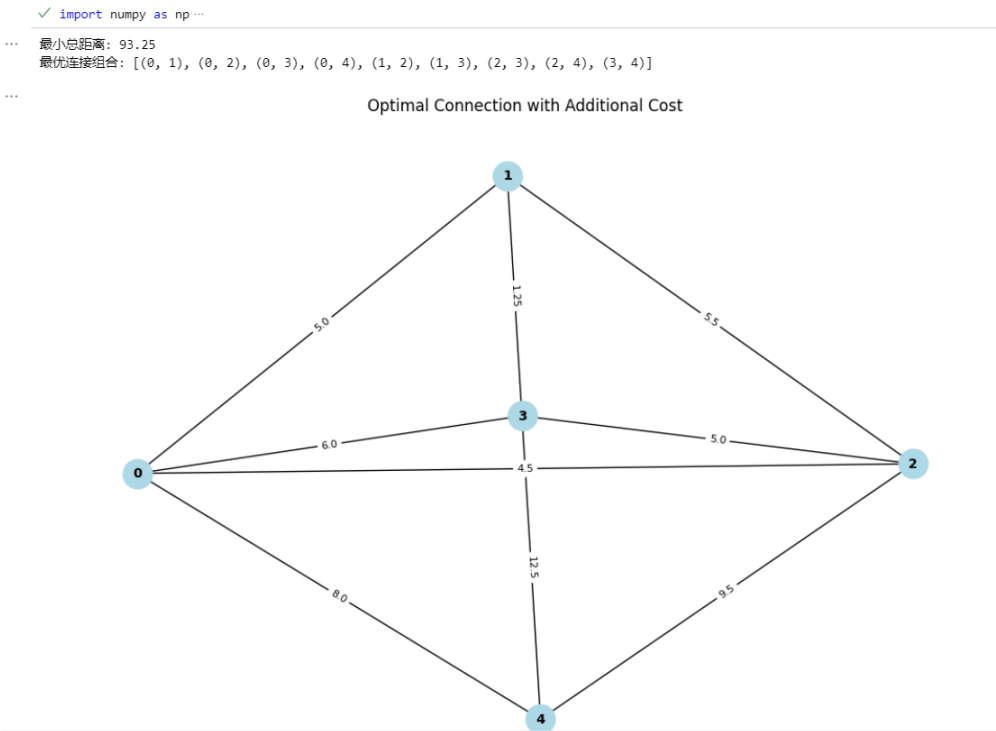


图 1: 结果以及图像展示

1 SUBTASK3

1.4 结论

通过分析和计算，我们找到了使五个城市间相互连接且距离最小的方案。每次连接两点的距离会增加 4 小时。在初始连接所有点的情况下，尝试移除不影响连通性的边，并重新计算总权重。通过迭代优化，最终得出总距离最小的连接方案。此方法保证了城市间的连通性，同时最小化了总距离。这个优化模型可以推广到其他交通网络设计中，为决策提供理论依据。

1.5 附录

车次	列车类型	始发站	终到站	出发时间	到达时间	耗时
G1919	高铁	杭州东	武汉	07:19 (12/1)	15:09 (12/1)	4:49:50 (10)
G1946	高铁	杭州东	武汉	07:56 (12/1)	15:36 (12/1)	4:49:50 (10)
G1948	高铁	杭州东	武汉	08:40 (12/1)	16:31 (12/1)	4:49:50 (10)
G1949	高铁	杭州东	武汉	14:52 (12/1)	18:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1947	高铁	杭州东	武汉	07:54 (12/1)	15:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1945	高铁	杭州东	武汉	08:40 (12/1)	16:31 (12/1)	4:49:50 (10)
G1943	高铁	杭州东	武汉	09:24 (12/1)	17:05 (12/1)	4:49:50 (10)
G1941	高铁	杭州东	武汉	14:52 (12/1)	18:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1939	高铁	杭州东	武汉	07:54 (12/1)	15:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1937	高铁	杭州东	武汉	08:40 (12/1)	16:31 (12/1)	4:49:50 (10)
G1935	高铁	杭州东	武汉	09:24 (12/1)	17:05 (12/1)	4:49:50 (10)
G1933	高铁	杭州东	武汉	14:52 (12/1)	18:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1931	高铁	杭州东	武汉	07:54 (12/1)	15:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1929	高铁	杭州东	武汉	08:40 (12/1)	16:31 (12/1)	4:49:50 (10)
G1927	高铁	杭州东	武汉	09:24 (12/1)	17:05 (12/1)	4:49:50 (10)
G1925	高铁	杭州东	武汉	14:52 (12/1)	18:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1923	高铁	杭州东	武汉	07:54 (12/1)	15:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1921	高铁	杭州东	武汉	08:40 (12/1)	16:31 (12/1)	4:49:50 (10)
G1919	高铁	杭州东	武汉	09:24 (12/1)	17:05 (12/1)	4:49:50 (10)
G1917	高铁	杭州东	武汉	14:52 (12/1)	18:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1915	高铁	杭州东	武汉	07:54 (12/1)	15:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1913	高铁	杭州东	武汉	08:40 (12/1)	16:31 (12/1)	4:49:50 (10)
G1911	高铁	杭州东	武汉	09:24 (12/1)	17:05 (12/1)	4:49:50 (10)
G1909	高铁	杭州东	武汉	14:52 (12/1)	18:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1907	高铁	杭州东	武汉	07:54 (12/1)	15:34 (12/1)	4:49:50 (10)
G1905	高铁	杭州东	武汉	08:40 (12/1)	16:31 (12/1)	4:49:50 (10)
G1903	高铁	杭州东	武汉	09:24 (12/1)	17:05 (12/1)	4:49:50 (10)
G1901	高铁	杭州东	武汉	14:52 (12/1)	18:34 (12/1)	4:49:50 (10)

(a) 杭州-武汉

车次	列车类型	始发站	终到站	出发时间	到达时间	耗时
G2003	高铁	北京	武汉	07:28 (12/1)	15:12 (12/1)	5:04:00 (10)
G2005	高铁	北京	武汉	08:12 (12/1)	15:56 (12/1)	5:04:00 (10)
G2007	高铁	北京	武汉	08:56 (12/1)	16:40 (12/1)	5:04:00 (10)
G2009	高铁	北京	武汉	09:40 (12/1)	17:24 (12/1)	5:04:00 (10)
G2011	高铁	北京	武汉	10:24 (12/1)	18:08 (12/1)	5:04:00 (10)
G2013	高铁	北京	武汉	11:08 (12/1)	18:52 (12/1)	5:04:00 (10)
G2015	高铁	北京	武汉	11:52 (12/1)	19:36 (12/1)	5:04:00 (10)
G2017	高铁	北京	武汉	12:36 (12/1)	20:20 (12/1)	5:04:00 (10)
G2019	高铁	北京	武汉	13:20 (12/1)	21:04 (12/1)	5:04:00 (10)
G2021	高铁	北京	武汉	14:04 (12/1)	21:48 (12/1)	5:04:00 (10)
G2023	高铁	北京	武汉	14:48 (12/1)	22:32 (12/1)	5:04:00 (10)
G2025	高铁	北京	武汉	15:32 (12/1)	23:16 (12/1)	5:04:00 (10)
G2027	高铁	北京	武汉	16:16 (12/1)	24:00 (12/1)	5:04:00 (10)
G2029	高铁	北京	武汉	17:00 (12/1)	24:44 (12/1)	5:04:00 (10)
G2031	高铁	北京	武汉	17:44 (12/1)	25:28 (12/1)	5:04:00 (10)
G2033	高铁	北京	武汉	18:28 (12/1)	26:12 (12/1)	5:04:00 (10)
G2035	高铁	北京	武汉	19:12 (12/1)	26:56 (12/1)	5:04:00 (10)
G2037	高铁	北京	武汉	19:56 (12/1)	27:40 (12/1)	5:04:00 (10)
G2039	高铁	北京	武汉	20:40 (12/1)	28:24 (12/1)	5:04:00 (10)
G2041	高铁	北京	武汉	21:24 (12/1)	29:08 (12/1)	5:04:00 (10)
G2043	高铁	北京	武汉	22:08 (12/1)	29:52 (12/1)	5:04:00 (10)
G2045	高铁	北京	武汉	22:52 (12/1)	30:36 (12/1)	5:04:00 (10)
G2047	高铁	北京	武汉	23:36 (12/1)	31:20 (12/1)	5:04:00 (10)
G2049	高铁	北京	武汉	24:20 (12/1)	32:04 (12/1)	5:04:00 (10)
G2051	高铁	北京	武汉	25:04 (12/1)	32:48 (12/1)	5:04:00 (10)
G2053	高铁	北京	武汉	25:48 (12/1)	33:32 (12/1)	5:04:00 (10)
G2055	高铁	北京	武汉	26:32 (12/1)	34:16 (12/1)	5:04:00 (10)
G2057	高铁	北京	武汉	27:16 (12/1)	35:00 (12/1)	5:04:00 (10)
G2059	高铁	北京	武汉	28:00 (12/1)	35:44 (12/1)	5:04:00 (10)
G2061	高铁	北京	武汉	28:44 (12/1)	36:28 (12/1)	5:04:00 (10)
G2063	高铁	北京	武汉	29:28 (12/1)	37:12 (12/1)	5:04:00 (10)
G2065	高铁	北京	武汉	30:12 (12/1)	37:56 (12/1)	5:04:00 (10)
G2067	高铁	北京	武汉	30:56 (12/1)	38:40 (12/1)	5:04:00 (10)
G2069	高铁	北京	武汉	31:40 (12/1)	39:24 (12/1)	5:04:00 (10)
G2071	高铁	北京	武汉	32:24 (12/1)	40:08 (12/1)	5:04:00 (10)
G2073	高铁	北京	武汉	33:08 (12/1)	40:52 (12/1)	5:04:00 (10)
G2075	高铁	北京	武汉	33:52 (12/1)	41:36 (12/1)	5:04:00 (10)
G2077	高铁	北京	武汉	34:36 (12/1)	42:20 (12/1)	5:04:00 (10)
G2079	高铁	北京	武汉	35:20 (12/1)	43:04 (12/1)	5:04:00 (10)
G2081	高铁	北京	武汉	36:04 (12/1)	43:48 (12/1)	5:04:00 (10)
G2083	高铁	北京	武汉	36:48 (12/1)	44:32 (12/1)	5:04:00 (10)
G2085	高铁	北京	武汉	37:32 (12/1)	45:16 (12/1)	5:04:00 (10)
G2087	高铁	北京	武汉	38:16 (12/1)	46:00 (12/1)	5:04:00 (10)
G2089	高铁	北京	武汉	39:00 (12/1)	46:44 (12/1)	5:04:00 (10)
G2091	高铁	北京	武汉	39:44 (12/1)	47:28 (12/1)	5:04:00 (10)
G2093	高铁	北京	武汉	40:28 (12/1)	48:12 (12/1)	5:04:00 (10)
G2095	高铁	北京	武汉	41:12 (12/1)	48:56 (12/1)	5:04:00 (10)
G2097	高铁	北京	武汉	41:56 (12/1)	49:40 (12/1)	5:04:00 (10)
G2099	高铁	北京	武汉	42:40 (12/1)	50:24 (12/1)	5:04:00 (10)
G2101	高铁	北京	武汉	43:24 (12/1)	51:08 (12/1)	5:04:00 (10)
G2103	高铁	北京	武汉	44:08 (12/1)	51:52 (12/1)	5:04:00 (10)
G2105	高铁	北京	武汉	44:52 (12/1)	52:36 (12/1)	5:04:00 (10)
G2107	高铁	北京	武汉	45:36 (12/1)	53:20 (12/1)	5:04:00 (10)
G2109	高铁	北京	武汉	46:20 (12/1)	54:04 (12/1)	5:04:00 (10)
G2111	高铁	北京	武汉	47:04 (12/1)	54:48 (12/1)	5:04:00 (10)
G2113	高铁	北京	武汉	47:48 (12/1)	55:32 (12/1)	5:04:00 (10)
G2115	高铁	北京	武汉	48:32 (12/1)	56:16 (12/1)	5:04:00 (10)
G2117	高铁	北京	武汉	49:16 (12/1)	57:00 (12/1)	5:04:00 (10)
G2119	高铁	北京	武汉	50:00 (12/1)	57:44 (12/1)	5:04:00 (10)
G2121	高铁	北京	武汉	50:44 (12/1)	58:28 (12/1)	5:04:00 (10)
G2123	高铁	北京	武汉	51:28 (12/1)	59:12 (12/1)	5:04:00 (10)
G2125	高铁	北京	武汉	52:12 (12/1)	59:56 (12/1)	5:04:00 (10)
G2127	高铁	北京	武汉	52:56 (12/1)	60:40 (12/1)	5:04:00 (10)
G2129	高铁	北京	武汉	53:40 (12/1)	61:24 (12/1)	5:04:00 (10)
G2131	高铁	北京	武汉	54:24 (12/1)	62:08 (12/1)	5:04:00 (10)
G2133	高铁	北京	武汉	55:08 (12/1)	62:52 (12/1)	5:04:00 (10)
G2135	高铁	北京	武汉	55:52 (12/1)	63:36 (12/1)	5:04:00 (10)
G2137	高铁	北京	武汉	56:36 (12/1)	64:20 (12/1)	5:04:00 (10)
G2139	高铁	北京	武汉	57:20 (12/1)	65:04 (12/1)	5:04:00 (10)
G2141	高铁	北京	武汉	58:04 (12/1)	65:48 (12/1)	5:04:00 (10)
G2143	高铁	北京	武汉	58:48 (12/1)	66:32 (12/1)	5:04:00 (10)
G2145	高铁	北京	武汉	59:32 (12/1)	67:16 (12/1)	5:04:00 (10)
G2147	高铁	北京	武汉	60:16 (12/1)	68:00 (12/1)	5:04:00 (10)
G2149	高铁	北京	武汉	61:00 (12/1)	68:44 (12/1)	5:04:00 (10)
G2151	高铁	北京	武汉	61:44 (12/1)	69:28 (12/1)	5:04:00 (10)
G2153	高铁	北京	武汉	62:28 (12/1)	70:12 (12/1)	5:04:00 (10)
G2155	高铁	北京	武汉	63:12 (12/1)	70:56 (12/1)	5:04:00 (10)
G2157	高铁	北京	武汉	63:56 (12/1)	71:40 (12/1)	5:04:00 (10)
G2159	高铁	北京	武汉	64:40 (12/1)	72:24 (12/1)	5:04:00 (10)
G2161	高铁	北京	武汉	65:24 (12/1)	73:08 (12/1)	5:04:00 (10)
G2163	高铁	北京	武汉	66:08 (12/1)	73:52 (12/1)	5:04:00 (10)
G2165	高铁	北京	武汉	66:52 (12/1)	74:36 (12/1)	5:04:00 (10)
G2167	高铁	北京	武汉	67:36 (12/1)	75:20 (12/1)	5:04:00 (10)
G2169	高铁	北京	武汉	68:20 (12/1)	76:04 (12/1)	5:04:00 (10)
G2171	高铁	北京	武汉	69:04 (12/1)	76:48 (12/1)	5:04:00 (10)
G2173	高铁	北京	武汉	69:48 (12/1)	77:32 (12/1)	5:04:00 (10)
G2175	高铁	北京	武汉	70:32 (12/1)	78:16 (12/1)	5:04:00 (10)
G2177	高铁	北京	武汉	71:16 (12/1)	79:00 (12/1)	5:04:00 (10)
G2179	高铁	北京	武汉	72:00 (12/1)	79:44 (12/1)	5:04:00 (10)
G2181	高铁	北京	武汉	72:44 (12/1)	80:28 (12/1)	5:04:00 (10)
G2183	高铁	北京	武汉	73:28 (12/1)	81:12 (12/1)	5:04:00 (10)
G2185	高铁	北京	武汉	74:12 (12/1)	81:56 (12/1)	5:04:00 (10)
G2187	高铁	北京	武汉	74:56 (12/1)	82:40 (12/1)	5:04:00 (10)
G2189	高铁	北京	武汉	75:40 (12/1)	83:24 (12/1)	5:04:00 (10)
G2191	高铁	北京	武汉	76:24 (12/1)	84:08 (12/1)	5:04:00 (10)
G2193	高铁	北京	武汉	77:08 (12/1)	84:52 (12/1)	5:04:00 (10)
G2195	高铁	北京	武汉	77:52 (12/1)	85:36 (12/1)	5:04:00 (10)
G2197	高铁	北京	武汉	78:36 (12/1)	86:20 (12/1)	5:04:00 (10)
G2199	高铁	北京	武汉	79:20 (12/1)	87:04 (12/1)	5:04:00 (10)
G2201	高铁	北京	武汉	80:04 (12/1)	87:48 (12/1)	5:04:00 (10)
G2203	高铁	北京	武汉	80:48 (12/1)	88:32 (12/1)	5:04:00 (10)
G2205	高铁	北京	武汉	81:32 (12/1)	89:16 (12/1)	5:04:00 (10)
G2207	高铁	北京	武汉	82:16 (12/1)	90:00 (12/1)	5:04:00 (10)
G2209	高铁	北京	武汉	83:00 (12/1)	90:44 (12/1)	5:04:00 (10)
G2211	高铁	北京	武汉	83:44 (12/1)	91:28 (12/1)	5:04:00 (10)
G2213	高铁	北京	武汉	84:28 (12/1)	92:12 (12/1)	5:04:00 (10)
G2215	高铁	北京	武汉	85:12 (12/1)	92:56 (12/1)	5:04:00 (10)
G2217	高铁	北京	武汉	85:56 (12/1)	93:40 (12/1)	5:04:00 (10)
G2219	高铁	北京	武汉	86:40 (12/1)	94:24 (12/1)	5:04:00 (10)
G2221	高铁	北京	武汉	87:24 (12/1)	95:08 (12/1)	5:04:00 (10)
G2223	高铁	北京	武汉	88:08 (12/1)	95:52 (12/1)	5:04:00 (10)
G2225	高铁	北京	武汉	88:52 (12/1)	96:36 (12/1)	5:04:00 (10)
G2227	高铁	北京	武汉	89:36 (12/1)	97:20 (12/1)	5:04:00 (10)
G2229	高铁	北京	武汉	90:20 (12/1)	98:04 (12/1)	5:04:00 (10)
G2231	高铁	北京	武汉	91:04 (12/1)	98:48 (12/1)	5:04:00 (10)
G2233	高铁	北京	武汉	91:48 (12/1)	99:32 (12/1)	5:04:00 (10)
G2235	高铁	北京	武汉	92:32 (12/1)	100:16 (12/1)	5:04:00 (10)
G2237	高铁	北京	武汉	93:16 (12/1)	101:00 (12/1)	5:04:00 (10)
G2239	高铁	北京	武汉	94:00 (12/1)	101:44 (12/1)	5:04:00 (10)
G2241	高铁	北京	武汉	94:44 (12/1)	102:28 (12/1)	5:04:00 (10)
G2243	高铁	北京	武汉	95:28 (12/1)	103:12 (12/1)	5:04:00 (10)
G2245	高铁	北京	武汉	96:12 (12/1)	103:56 (12/1)	5:04:00 (10)
G2247	高铁	北京	武汉	96:56 (12/1)	104:40 (12/1)	5:04:00 (10)
G2249	高铁	北京	武汉	97:40 (12/1)	105:24 (12/1)	5:04:00 (10)
G2251	高铁	北京	武汉	98:24 (12/1)	106:08 (12/1)	5:04:00 (10)
G2253	高铁	北京	武汉	99:08 (12/1)	106:52 (12/1)	5:04:00 (10)
G2255	高铁	北京	武汉	99:52 (12/1)	107:36 (12/1)	5:04:00 (10)
G2257	高铁	北京	武汉	100:36 (12/1)	108:20 (12/1)	5:04:00 (10)
G2						