浙江大学

《数值计算方法》第五章作业

姓名与学号 王德茂（3220105563）

指导教师 徐祖华

年级与专业 机器人 2202

所在学院 控制科学学院

第五章作业

一、问题提出：

假设通过某电阻器的电流可以表示为函数：

$$i(t)=(60-t)^2+(60-t)\sin\left(\sqrt{t}\right)$$

并且电阻是电流的函数，

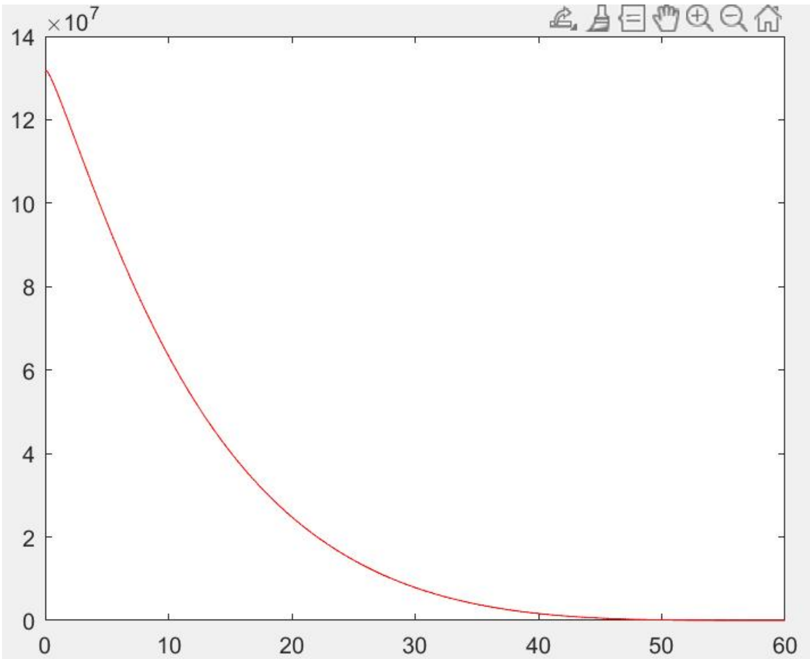
$$R(t)=10i(t)+2i(t)^{2/3}$$

采用不同的数值积分方法计算 t=0 到 60 之间的平均电压，并分析误差。

二、解决思路：

这个可以直接采用老师所讲授的 Newton-Cotes 积分、龙贝格（Romberg）积分以及高斯（Gauss）求积公式来计算。

在开始之前，我们画出函数的大致图像：



可以看出，函数的变化速度极快。

我们采用的主要脚本为:

```
I = @(x) (60 - x )^2 +(60 - x )*sin(sqrt(x));
R = @(x) 10*I(x) + 2* I(x)^(2/3) ;

count = 50;
x = 0 : 60/count :60 ;
y = (count+1) ;
for i = 1 : 1 : count +1
    y(i) = I(x(i))*R(x(i));
end
```

```
plot(x,y,"r-")
disp("当分割区间数为："+ count)
disp("trapezoid 的结果：")
disp(trapezoid(y , count ));


disp("simpson 的结果：")
disp(simpson(y , count ) );


disp("Romberg 的结果：")
Romberg();


for tar = [5 ,10 , 50 ,100 ]
    disp("Gauss 的结果：")
    disp("当分割区间数为："+ tar )
    disp(Gauss(tar))
end
```

三、Newton-Cotes 积分

1. 原理

在数值分析上，梯形法则和辛普森法则均是数值积分的方法。它们都是计算定积分的。

这两种方法都属于牛顿-柯特斯公式。它们以函数于等距 n+1 点的值，取得一个 n 次的多项式来近似原来的函数，再行求积。

2. 代码实现

（1）梯形公式

```
function [out] = trapezoid(y,count)
    sum = 0 ;
    for i = 2 : count
        sum = sum + 2 * y(i) ;
    end
    out = 60 *(sum + y(1) + y(count+1)) / 2 / count ;
end
```

（2）Simpson 公式

```
function [out] = simpson(y , count )
    h = 60 / count ;
    sum = 0;
    for i = 2 : 2 :count
        sum = sum + 4 * y(i) + 2* y(i+1);
    end
    sum = ( sum + y(1) - y(count+1) ) * h /3 ;
```

```
    out = sum ;
end
```

3. 结果

分割区间数	trapezoid 的结果：	误差：%	simpson 的结果：	误差：%
3	3.0696e+07	16.45	2.5973e+07	-1.46
5	2.7714e+07	5.14	2.6009e+07	-1.33
10	2.6614e+07	0.96	2.6247e+07	-0.42
50	2.6359e+07	0.00	2.6353e+07	0.00
100	2.6359e+07	0.00	2.6358e+07	0.00

4. 误差分析

为了保证精度，采用复合求积的方法：先将积分区间分成几个小区间，并在每个小区间上用低阶 Newton-Cotes 公式计算积分的近似值，然后对这些近似值求和，从而得到所求积分的近似值。

这里一开始我们将分割数取值较高，所以精度已经比较高。

我们知道，复合梯形公式的误差可由以下计算得到：

$$E_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

复合梯形公式具有二阶收敛性。

复合 simpson 公式具有四阶收敛性。

$$|E_T(f)| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \le E$$

四、Romberg 法

1. 原理

龙贝格求积公式也称为逐次分半加速法。它是在梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式之间的关系的基础上，构造出一种加速计算积分的方法。 作为一种外推算法，它在不增加计算量的前提下提高了误差的精度。

在等距基点的情况下，用计算机计算积分值通常都采用把区间逐次分半的方法进行。这样，前一次分割得到的函数值在分半以后仍可被利用,且易于编程。

2. 代码实现

```
I = @(x) (60 - x )^2 +(60 - x )*sin(sqrt(x));
R = @(x) 10*I(x) + 2* I(x)^(2/3) ;

T = (5) ;
S = (4) ;
```

```
C = (3) ;
r = (2) ;


j = 0;
for count = 2 : 2 : 10
    j = j + 1 ;
    x = 0 : 60/count :60 ;
    y = (count+1) ;
    for i = 1 : 1 : count +1
        y(i) = I(x(i))*R(x(i));
    end
    T(j) = trapezoid(y , count) ;
end


for i = 1 : 4
    S(i) = 4/3 * T(i+1) - 1/3 *T(i);
end


for i = 1 : 3
    C(i) = S(i+1) *16 /15 - S(i) /15 ;
end


for i = 1 : 2
    r(i) = 64/63 *C(i+1) - 1/63 *C(i);
end
disp(r(2))
```

3. 结果

```
Romberg的结果:
    2.6543e+07
```

4. 误差

我们对最后所得到的结果进行计算，可以得到：

$$e \approx 0.697\%$$

效果非常显著，而计算量，只需作少量的四则运算没有涉及到求函数值，可忽略不计。

```
1.0e+07 *

 3.6761    2.8626    2.7242    2.6802    2.6614

1.0e+07 *

 2.5914    2.6781    2.6655    2.6551

1.0e+07 *

 2.6838    2.6647    2.6544

1.0e+07 *

 2.6643    2.6543
```

五、高斯（Gauss）求积公式

1. 原理：

定理：n+1 个求积结点的数值积分公式，其代数精度至多为 2n+1

两点的求积公式为：$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

若限制等距节点，则	若不限制等距节点，则
1、x_0, x_1 固定，A_0, A_1 变量	1、 x_0, x_1, A_0, A_1 均为变量
2、确定 A_0, A_1 需两个方程	2、确定 x_0, x_1, A_0, A_1 需四个方程
3、从代数精度出发，需对 $f(x) = 1, x$ ，精确成立。	3、从代数精度出发，需对 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ ，精确成立。

定义：若形如 $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

的求积公式代数精度达到**2*n*+1**，则称它为**高斯求积公式**

，并称相应的求积节点$x_0, x_1, \dots, x_n$称为**高斯点**

构造

- 待定系数法
  - 令求积公式对函数$f(x)=1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$都精确成立，构造方程组确定高斯点$x_k$和求积系数$A_k$(要解一个包含**2*n*+2**个未知数的非线性方程组）
- 首先利用$[a,b]$上的$n+1$次正交多项式确定高斯点，再利用高斯点确定求积系数

2. 代码实现：

```
function [out] = Gauss(tar)
    I = @(x) (60 - x )^2 +(60 - x )*sin(sqrt(x));
    R = @(x) 10*I(x) + 2* I(x)^(2/3) ;

    x = 0 : 60 / tar : 60 ;


    sum = 0 ;


    for i  = 1 : 1 : tar
        temp = ( (x(i)+x(i+1) ) + (x(i+1)-x(i))*(-sqrt(3)/3))/2 ;
        sum = sum + I(temp)*R(temp) ;
        temp = ( (x(i)+x(i+1) ) + (x(i+1)-x(i))*(sqrt(3)/3))/2 ;
        sum = sum + I(temp)*R(temp) ;
    end


    out = sum /tar *30;
    out = out /60 ;
end
```

3. 结果

```
Gauss的结果：
当分割区间数为：5
   2.6398e+07

Gauss的结果：
当分割区间数为：10
   2.6371e+07

Gauss的结果：
当分割区间数为：50
   2.6362e+07

Gauss的结果：
当分割区间数为：100
   2.6361e+07
```

4. 误差分析：

我们知道，n+1 个求积结点的数值积分公式，其代数精度至多为 2n+1。

在这里，我们将积分区间分割成多个小区间，在每一个小区间内，我们采用了两点

Gauss-Legendre 公式。

分割区间数	结果	误差%
5	2.6398e+07	0.15
10	2.6371e+07	0.05
50	2.6362e+07	0.00
100	2.6361e+07	0.00

根据计算可得，GAUSS 法的结果在计算量较少时即可达较高的精度。

六. 小结

通过本次作业的实践，我们深入掌握了数值积分方法的应用，包括 Newton-Cotes 积分、Romberg 法和高斯求积公式。通过对比不同方法的结果和误差分析，我们更好地理解了数值积分的原理和应用场景。这次作业为我们提供了宝贵的实践经验，加深了对数值计算方法的理解和运用能力。