浙江工业大学 2023/2024 学年

第 1 学期试卷

一，填空题（20 分）

1，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}(z-2)^n$的收敛半径是_______，收敛区域是________________。

2，积分$\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2(z-2)}dz=$__________________。

3，求积分$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\delta(x-2)dx=$ ______________。

4，已知勒让德多项式$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，求连带勒让德多项式$P_2^1(x)=$____________。

5，泊松方程的表达式为______________________________。

二，简答题（20 分）

1，一半径R的金属圆球，其初始温度为零度。现在将其放入一温度为T_0的恒温液体中，即液体各处温度不受放入球体的影响，请写出描述球内温度变化的定解问题（包括自然边界条件）。（8 分）

2，请写出达朗贝尔公式，并解释其意义。(6 分）

3，波动方程在柱坐标下进行分离变量求解，请写出各变量对应的方程形式。（6 分）

三，计算题（60 分）

1，将函数$f(z)=\sin^2 z$以$z_0=0$为中心展开为幂级数。（6 分）

2，利用留数定理求积分$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+16}$。（6 分）

3，利用拉普拉斯变换求解方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=0,\quad y(0)=A, y'(0)=0$，其中$\gamma$是常数。（8 分）$\mathcal{L}[f^n(t)]=p^n\overline{f}(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-pf^{n-2}(0)-f^{n-1}(0)$

4，一根弦的波动由下述定解问题描述，请用**分离变量法**进行求解，并分析解的物理特征。（要求：详细的方程求解过程）(20 分)

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\quad (0<x<l,\ t>0)\\
&u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0\\
&u\big|_{t=0}=\sin\frac{\pi}{l}x\\
&u\big|_{t=0}=0
\end{aligned}
$$

5，在$x_0=0$的邻域上利用**级数法**求解常微分方程$y''-xy=0$（10 分）。

6，半径为a的球体，已知球面上的温度为$u(r,\theta)\big|_{r=a}=u_0\cos\theta$，请写出球内温度稳定分布满足的定解问题并求解。（10 分）