长三角工程教育联盟高校**高等数学 A** 联考试卷二（**答案和评分标准**）

2024-2025 学年第 1 学期

一、单选题(每题 3 分，共 15 分)

1—5　B B C D B

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

6. $x=\dfrac{1}{\ln 2}+1$ 和 $x=1$ (对1个给1.5分)

7. -160

8. $y=2x+1$

9. $\dfrac{\pi a^2}{4}$

10. 4

三、解答题

11. $\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1+2+\cdots+n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}})<\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1+2+\cdots+n}{\sqrt{n^2+1}}$ --(2 分)

即 $\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}})<\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}$ -------（2 分）

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{\sqrt{n^2+n}}=\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}$ ----------------------------（2 分）

由夹逼准则：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}})=\dfrac{1}{2}$ --------------（1 分）

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{\frac{1}{2}x^4}$ -----------------------（2 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{2x^3}$ -----------------（2 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot 2x\cdot\cos x}{2x^3}$ -----------------------------（2 分）

$=1$ --（1 分）

13. $\frac{dy}{dt}=f'(e^{3t}-1)\cdot 3e^{3t}$， $\frac{dx}{dt}=f'(t)$ ------------------------------（2 分）

所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{f'(e^{3t}-1)\cdot 3e^{3t}}{f'(t)}$ --（1 分）

当 $t=0$ 时， $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{3f'(0)}{f'(0)}=3$ -----------------------------------（1 分）

$$d(\frac{dy}{dx})\Big/dt=\frac{[f''(e^{3t}-1)(3e^{3t})^2+f'(e^{3t}-1)9e^{3t}]f'(t)-f'(e^{3t}-1)3e^{3t}f''(t)}{[f'(t)]^2}$$ ----（1 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})\Big/dt}{dx/dt}$$ --------（1 分）

$$=\frac{[f''(e^{3t}-1)(3e^{3t})^2+f'(e^{3t}-1)9e^{3t}]f'(t)-f'(e^{3t}-1)3e^{3t}f''(t)}{[f'(t)]^3}$$

因此 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=\frac{[f''(0)9+f'(0)9]f'(0)-f'(0)3f''(0)}{[f'(0)]^3}=3$ ----------------（1 分）

14. $\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int x(\sin(\ln x))'dx$ ------------------------（2 分）

$=x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$ ------------------------（2 分）

$=x\sin(\ln x)-[x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx]$ ----------------（2 分）

$\xrightarrow{\text{移项得到}}\int\sin(\ln x)dx=\frac{1}{2}[x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)]+C$ ---------------（1 分）

（没有+C 扣 1 分）

15. 令 $x-1=t$, 则 $x=t+1$

$\int_0^3 xf(x-1)dx=\int_{-1}^2(t+1)f(t)dt$ -----------------------------------（2 分）

$=\int_1^2(t+1)\frac{1}{t^2}dt$ --（2 分）

$=\int_1^2\frac{1}{t}dt+\int_1^2\frac{1}{t^2}dt=(\ln t-\frac{1}{t})\Big|_1^2$ ------------------------（2 分）

$=\ln 2+\frac{1}{2}$ --（1 分）

16. （1） $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{2x}$ ---（1 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{2}=0=f(0)$ ---------------------------（1 分）

因此，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. ---------------------------------（1 分）

有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\sin x}=\frac{2}{3}$ ------（1 分）

因此，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. ---------------------------------（1 分）

（2）

$(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{x})'=-\csc x\cot x+\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$ -----------------------（1 分）

$$f'(x)=\begin{cases}-\csc x\cot x+\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}, & x\neq0\\ \frac{2}{3}, & x=0\end{cases}$$ -----------------------（1 分）

17. 函数定义域 $(-\infty,+\infty)$ --（1 分）

$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ --（1 分）

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，无不可导点--------------------------------（1 分）

$f''(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ --（1 分）

令 $f''(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=1$ ----------------------------------（1 分）

$f(x)$ 的单调区间：$(-\infty,0)$ 单调减少；$[0,+\infty)$ 单调增加-------------（1 分）

极值点：$f_{极小}(0)=0$ ---（1 分）

$f(x)$ 的凹凸区间：$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 凸区间；$(-1,1)$ 凹区间----------（1 分）

$f(-1)=f(1)=\ln 2$ 拐点：$(-1,\ln 2)$ 和 $(1,\ln 2)$ -------------------------（1 分）

18. $f(x)=\int_0^x xe^{t+1}dt-\int_0^x e^{t+1}dt=x\int_0^x e^{t+1}dt-\int_0^x e^{t+1}dt$ ---------------------（1 分）

因此

$$f'(x)=(x\int_0^x e^{t+1}dt)'-(\int_0^x e^{t+1}dt)'$$
$$=\int_0^x e^{t+1}dt+xe^{x+1}-e^{x+1}$$ ——————————————————————————（2 分）

$$=e^{t+1}\Big|_0^x+xe^{x+1}-e^{x+1}$$ ————————————————————————————————（1 分）

$$=e^{x+1}-e+xe^{x+1}-e^{x+1}=xe^{x+1}-e$$ ——————————————————————（2 分）

19. 左曲线 $x_1=1-\sqrt{1-y^2}$，右曲线 $x_2=y$ ——————————————————————（2 分）

选 $y\in[0,1]$ 为积分变量，$V=V_1-V_2$

$dV_1=\pi(1-(1-\sqrt{1-y^2}))^2dy$ ————————————————————————————————（2 分）

$dV_2=\pi(1-y)^2dy$ ——（2 分）

$$V=V_1-V_2=\int_0^1[\pi(\sqrt{1-y^2})^2-\pi(1-y)^2]dy$$
$$=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$ ——————————————————————（1 分）

20. **（方法一）**因为 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上具有连续导数，由定积分的积分中值定理，可得，在区间 $[0,a]$ 内至少存在一点 ξ，使得：

$\left|\int_0^a f(x)dx\right|=|f(\xi)\cdot(a-0)|$ ——————————————————————————————（2 分）

$=|(f(\xi)-f(a))\cdot a|$ ——————————————————————————————（1 分）

由拉格朗日中值定理可得，在 (ξ,a) 内至少存在一点 ξ_1，使得

$\left|\int_0^a f(x)dx\right|=|(f(\xi)-f(a))\cdot a|=|f'(\xi_1)(a-\xi)\cdot a|$ ——————————（2 分）

$\le|f'(\xi_1)a^2|\le Ma^2$ ——————————————————————————（2 分）

（方法二） $\left|\int_0^a f(x)dx\right|=\left|xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a xf'(x)dx\right|$ ————————————————（2 分）

$=\left|-\int_0^a xf'(x)dx\right|$ ————————————————————————————————————（1 分）

由积分中值定理可得，在区间 $(0,a)$ 内至少存在一点 ξ，使得：

$\left|\int_0^a f(x)dx\right|=|\xi f'(\xi)\cdot a|$ ————————————————————————————————（3 分）

$\le Ma^2$ ——（1 分）