机械类专业教材补充讲义

前言：

根据教学大纲的教学内容调整需要，对机械类各专业的投影原理内容进行了教学增强。新编讲义内容供教师同学学习参考。

浙江工业大学工程图学教学团队

2024 年 9 月 20 日

（一）直线段的实长和对投影面的倾角

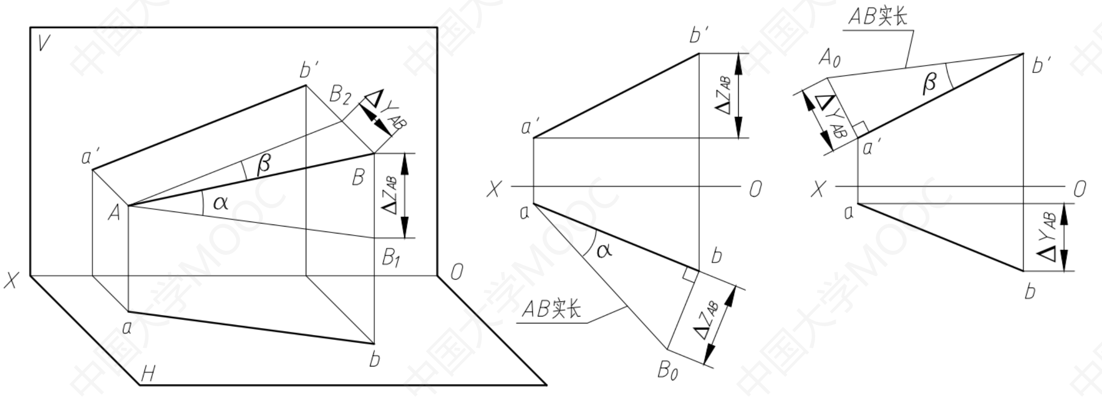
2.3.1 直线的投影特性

1.*xxx*

2.*xxx*

3.直线段的实长和对投影面的倾角

一般位置直线的三面投影既不反映线段实长又不反映对投影面的倾角，但它们可以通过作图构建直角三角形的方法获得。在轴测图上（图 2.15（a）），*AB* 为一般位置直线，过 *A* 点做 $AB_1 /\!/ ab$，可得一直角三角形 ABB_1，*AB* 为实长，α 为 *AB* 与水平面的夹角。直角三角形 ABB_1 的两直角边分别为 AB_1 和 BB_1，而 AB_1 为水平投影 *ab* 的长度，BB_1 为 *A*、*B* 两点 *Z* 轴坐标之差（$\triangle Z_{AB}$）。在投影图 2.15（b）上，利用 *AB* 的正面投影得到（$\triangle Z_{AB}$），再在水平投影上过 *b* 点作垂线 $B_0b=\triangle Z_{AB}$，连接 aB_0 即为 *AB* 的实长，*ab* 与 aB_0 的夹角 α 就是所求的倾角。同理可以求得 *AB* 与正面的夹角 β，如图 2.15（a）和（c）所示，在投影面内构建直角三角形 ABB_2 即可求得。上述求线段实长及倾角方法称为直角三角形法。



（*a*）　　（b）　　（c）

图 2.15　直角三角形法求线段实长及倾角

(二)两直线垂直

2.3.3 两直线的相对位置

1.*xxx*

2.*xx*

3.*xxxx*

4.两直线垂直相交

若空间两个直线垂直，且其中一条直线为投影面的平行线，则两条直线在该投影面上投影必定垂直。此投影特性称为直角投影定理。如图 2.27 所示，*BC*∥*H* 面，*AB*⊥*BC*，则其 *H* 面投影 *ab*⊥*bc*。

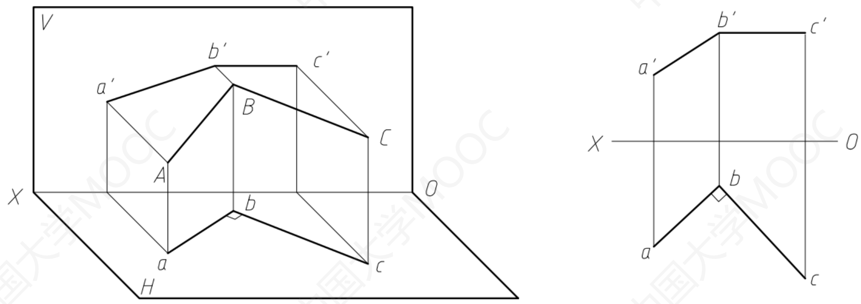
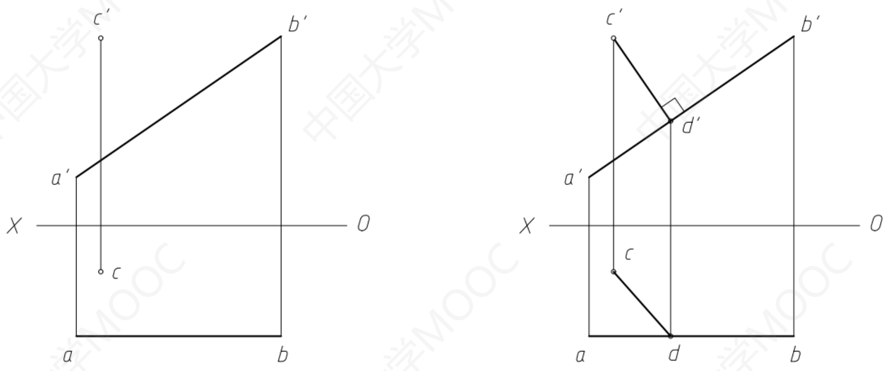


图 2.27 两直线垂直

反之，如果两直线在某一投影面的投影垂直，且其中有一条直线与该投影面平行，则这两条直线在空间也必定垂直。

【例 2.13】如图 2.28（a）所示，已知直线 *AB* 与 *CD* 垂直相交，求直线 *CD* 的投影。



（a）　　　　（b）

图 2.28 求直线 *CD* 的投影

分析：由图 2.28（a）可以发现 *AB* 是一条正平线，*AB*⊥*CD*，则 *AB*、*CD* 的正面投影 *a'b'*和 *c'd'*必垂直。

作图（图 2.28（b））：

（1）在正面投影过 *c'*作 *a'b'*的垂线交于 *d'*，得到 *CD* 的正面投影 *c'd'*。

（2）过 *d'*作 *OX* 轴垂线，并交 *ab* 于 *d*，连接 *cd* 即得 *CD* 的水平投影。

（三）平面上的最大斜度线

2.4.2 平面上的点和直线

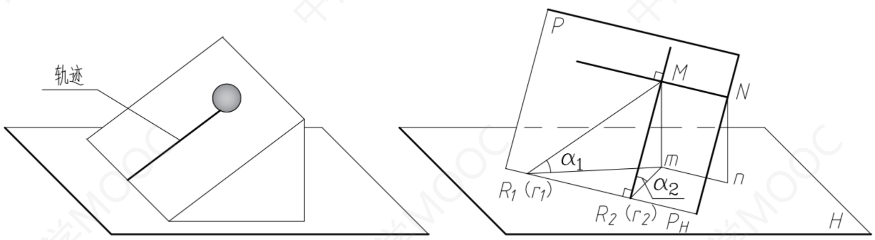
1.*xxxx*

2.*xxxx*

3.*xxx*

4.平面上的最大斜度线

如图 2.35（a）所示，初始静止状态的球从斜面某点自由滚落时，它的运动轨迹就是斜面对地面的最大斜度线。



（a）　　　　　　　　　　　　（b）

图 2.35 平面上的最大斜度线

平面内对某投影面倾斜角度最大的直线称为对该投影面的最大斜度线。如图 2.35（b）所示，平面 P 上有各种不同位置的直线，如 MN、MR_1、MR_2，它们对投影面 H 的倾角各不相同。其中 MN 为 P 平面上的水平线，MR_1、MR_2 对投影面 H 的倾角分别为 α_1、α_2。M 点向 H 面的投射线 Mm 分别与点 R_1 和 R_2 形成了等高直角△MmR_1 和直角△MmR_2。由等高直角三角形中斜边最短则倾角最大的原理，只要求出斜边 MR_1、MR_2、……中最短的一条即为最大斜度线。令 $MR_2 \perp MN$，且垂直于 P 面与 H 面的交线 P_H，可见 MR_2 为最短的斜边，它的倾角 α_2 最大，即 MR_2 为 P 面上过点 M 对 H 面的最大斜度线。根据垂直相交两直线的投影特性，当 MN 为水平线时，投影 $mr_2 \perp mn$。

由此可知，平面上对投影面的最大斜度线必定垂直于平面上该投影面的平行线，最大斜度线在该投影面上的投影必定垂直于平面上该投影面平行线的同面投影。

由 $MR_2 \perp P_H$、$mR_2 \perp P_H$，则△MmR_2 与交线 P_H 垂直，因此∠mR_2M 即为 P 面和 H 面的倾角。所以平面 P 对投影面 H 的倾角就是平面 P 对投影面 H 的最大斜度线对投影面 H 的倾角。该倾角可以通过直角三角形法求得。同样，平面 P 还可以分别作出对 V 面、W 面的最大斜度线，求出 P 面与 V 面、H 面的倾角。

【例 2.16】如图 2.36（a）所示，求△ABC 对 H 面的倾角。

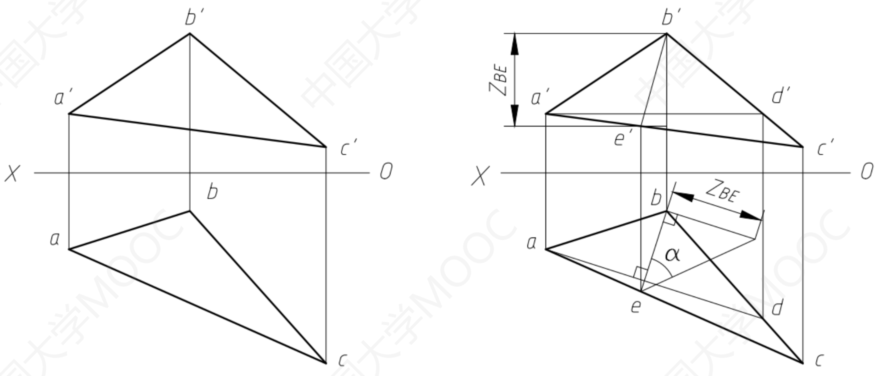
分析：求平面对 H 面的倾角，就是求平面内最大斜度线对 H 面的倾角。先在平面内作一条水平线，再作出该水平线的垂线，最后利用直角三角形法求出所作垂线对 H 面的倾角。

作图（图 2.36（b））：

(1)过△ABC 上任一点，如 A 点，作平面上的水平线 $AD(ad, a'd')$。

(2)作平面对 H 面的最大斜度线 BE：过 B 点的水平投影 b 作 be 上 ad，再作出 $b'e'$。

(3)用直角三角形法求出 BE 对 H 面的倾角即为平面对 H 面的倾角 α。



（*a*）　　　　　　　　　　　　　　（*b*）

图 2.36 求△*ABC* 对 *H* 面的倾角

(四)一般位置直线与一般位置平面相交

2.5.2 相交问题

1.直线与平面相交

1）*xxxx*

2）*xxxx*

3）一般位置直线与一般位置平面相交

当直线和平面相交但它们的三面投影都不积聚时，可通过添加辅助平面的方法来求交点。如图 2.42，直线 *MN* 与平面△*ABC* 相交，交点为 *K*。通过直线 *MN* 任作一辅助平面 *P*（与 H 面垂直）与△*ABC* 相交，交线 *EF* 必与 *MN* 相交，其交点 *K* 是直线 *MN* 与△*ABC* 的共有点，即为直线 *MN* 与△*ABC* 的交点。

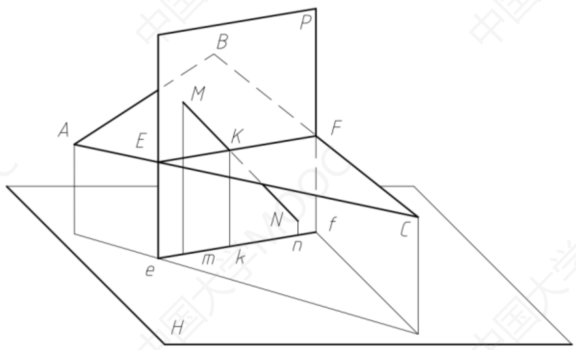


图 2.42 用辅助平面法求交点

由此可得辅助平面法求直线与平面的交点的步骤为：

（1）过已知直线投影作与投影面垂直的辅助平面；

（2）作出辅助平面与已知平面的交线；

（3）求该交线与已知直线的交点，即为所求的交点；

（4）判断投影图中的可见性。

【例 2.21】如图 2.43（a）所示，求直线 *MN* 与△*ABC* 的交点 *K*。

分析：一般位置直线和平面相交，用辅助平面法求交点。

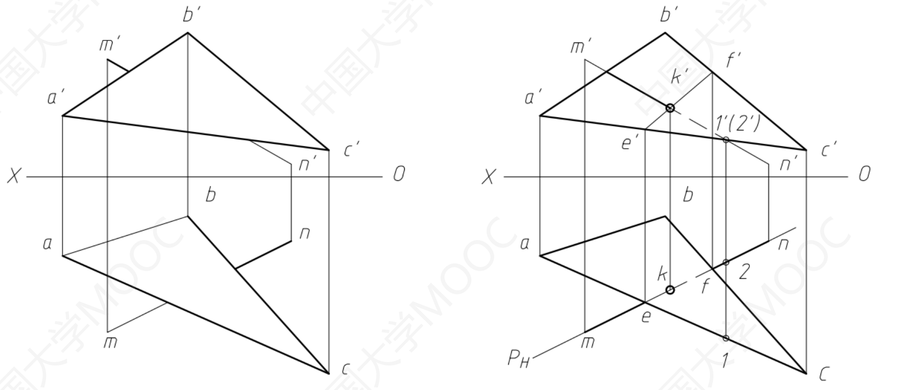
作图（图 2.43（b））：

（1）过直线 *MN* 作一铅垂面 *P*，与直线水平投影 *mn* 重合。

（2）作出平面 *P* 与△*ABC* 的交线 *EF*，*EF* 的 *H* 面投影为 *ef*，*V* 面投影为 *e'f'*。

（3）作出交线 *EF* 与直线 *MN* 的交点 *K*，即先求 *e'f'* 与 *m'n'* 的交点 *k'*，然后投射到 *ef* 上得到它的 *H* 面投影 *k*。

（4）判断可见性，利用直线与平面边界的重影点特性判定。由图 2.43（b）可以看出，*AC* 上的点 I(1，1')和 *MN* 上的点□(2，2')在 *V* 面投影中重影，*H* 面投影点 1 在 2 之前，故在 *V* 面投影中，1'是可见的，2'是不可见的，因此 *k'*2'用虚线表示。同理，可判断 *H* 面投影，*kf* 用虚线表示。



（a）　　　　　　　　　　　　　　（b）

图 2.43 求直线与平面的交点

(五)两个一般位置平面相交

2.5.2 相交问题

1.直线与平面相交

2.平面与平面相交

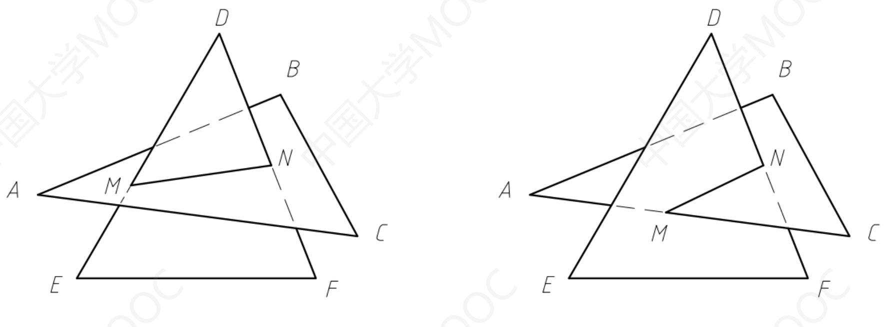
1）

2）

3）两个一般位置平面相交

空间两个一般位置平面相交，只要求得两平面的任意两个共有点即可确定交线的位置。如图 2.44（*a*）所示，平面△*ABC* 与△*DEF* 相交，交线为 *MN*，只要求得交线上两个点 *M*、*N* 即可作出两平面的交线。

如图 2.44 所示，两个平面相交会出现两种情况，一种是一个平面完全贯穿过另一个平面的全交情形，另一种是两个平面的棱线互相穿过的互交情形。两种相交情况的实质是相同的，只是相交的范围略有不同，都可以采用辅助平面法求交点得到。



（*a*）　　　　　　　　　　　　　　（*b*）

图 2.44 两个平面相交的两种情况

【例 2.23】求△*ABC* 与△*DEF* 的交线 *MN*，如图 2.45（a）所示。

分析：选取△*DEF* 的两条边 *DE* 和 *DF*，分别作出它们与△*ABC* 的交点 *M* 和 *N*，直线 *MN* 即为所求的交线。

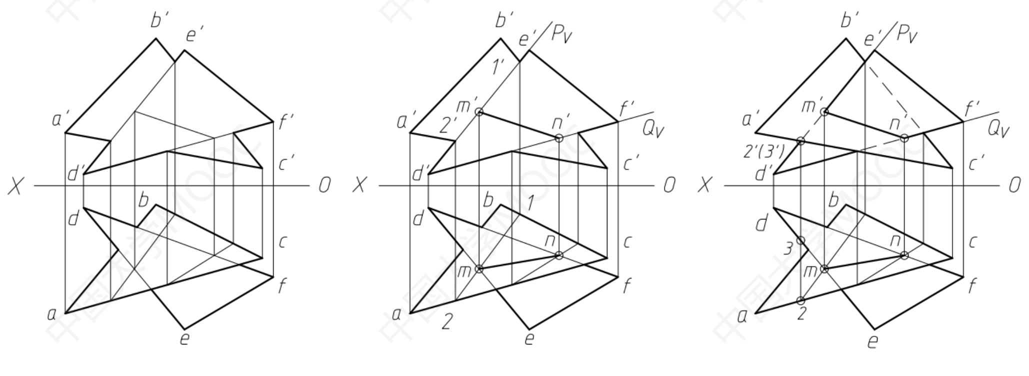
作图：

（1）如图 2.45（b），过直线 *DE* 作一正垂面 *P*，求出 *DE* 与△*ABC* 的交点 *M*（*m*，*m′*）。先求出 P 面与△*ABC* 的交线 12，再作出交线 12 与 *de* 的交点 *m* 和 *m′*。

（2）如图 2.45（b），过直线 *DF* 作一正垂面 *Q*，求出 *DF* 与△*ABC* 的交点 *N*（*n*，*n′*）。

（3）如图 2.45（b），连线 *mn* 和 *m′n′*即为所求交线 *MN* 的两面投影。

（4）如图 2.45（c），利用交叉直线的重影点分别判别 *V*、*H* 面投影中的可见性，完成作图。



（a）　　　　　　　　（b）　　　　　　　　（c）

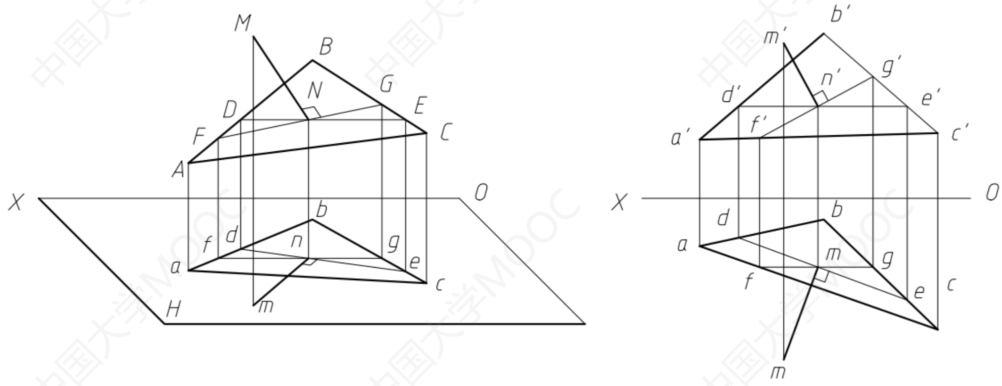
图 2.45 求两个一般位置平面的交线

(六)线面与面面垂直问题

2.5.3 垂直问题

1. 直线与平面垂直

若直线与平面垂直，则直线垂直平面上的任意直线。反之，若直线垂直平面上的任意两条相交直线，则直线垂直该平面。如图 2.46（a）所示，直线 *MN* 垂直于△*ABC*，其垂足为 *N*，在△*ABC* 上，过 *N* 点作一水平线 *DE*，则 *MN*⊥*DE*，根据直角投影定理，则 *mn*⊥*de*。再过 *N* 点作一正平线 *FG*，则 *MN*⊥*FG*，同理 *m'n'*⊥*f'g'*，如图 2.46（b）。



（a）　　　　　　　　　　　　　　　　　（b）

图 2.46 直线与平面垂直

【例 2.24】求 *D* 与△*ABC* 距离，如图 2.47（a）所示。

分析：由 *M* 向△*ABC* 作垂线，垂线的实长即点到平面的距离。

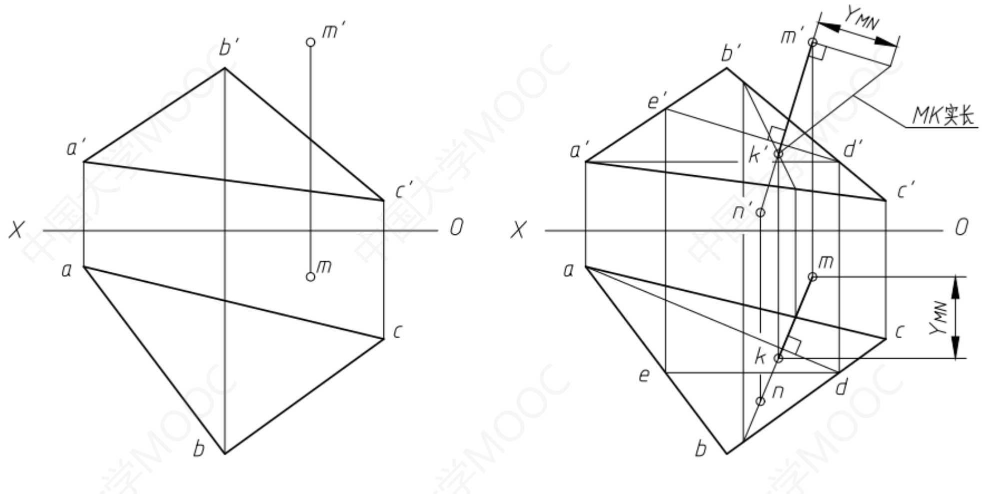
作图（图 2.47（b））：

（1）在平面△*ABC* 上作水平线 *AD* 和正平线 *DE* 的两面投影。

（2）过 *m* 作 *mn*⊥*ad* 的垂线，过 *m'*作 *m'n'*⊥*d'e'*，即 *MN*⊥△*ABC*。

（3）用求一般位置直线与一般位置平面交点的方法（辅助平面法），求出垂足 *K*（*k*，*k'*）。

（4）用直角三角形法求出 *MK* 的实长。



（a）　　　　　　　　　　　　　　　（b）

图 2.47 求点到平面的距离

2. 两平面垂直

若直线垂直一平面，则包含这直线的所有平面都垂直于该平面。反之，如两平面互相垂直，

则从第一平面上的任意一点向第二平面所作的垂线必定在第一平面内。

如图 2.48 所示，直线 MN 垂直 H 面，则包含 MN 的 P 面和 Q 面都垂直 H 面。若在 P 面上取一点 A 向 H 面作垂线 AB，则 AB 一定在 P 面内。

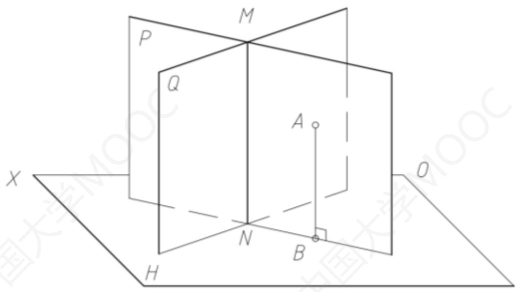


图 2.48 两平面垂直

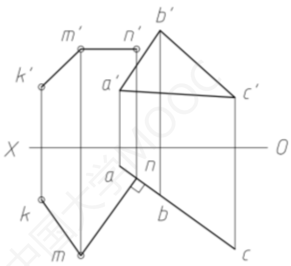


图 2.49 过已知点求平面垂直面

【例 2.25】如图 2.49，已知铅垂面△ABC 和 M 点，求过 M 点作一平面垂直△ABC。

分析：只要过 M 作一直线垂直于△ABC，则包含该直线的所有平面都垂直△ABC。

作图：

（1）过 M 点作直线 MN⊥△ABC，即在水平投影面作 mn⊥abc，因△ABC 为铅垂面，则 MN 为水平线，再作出 $m'n'$。

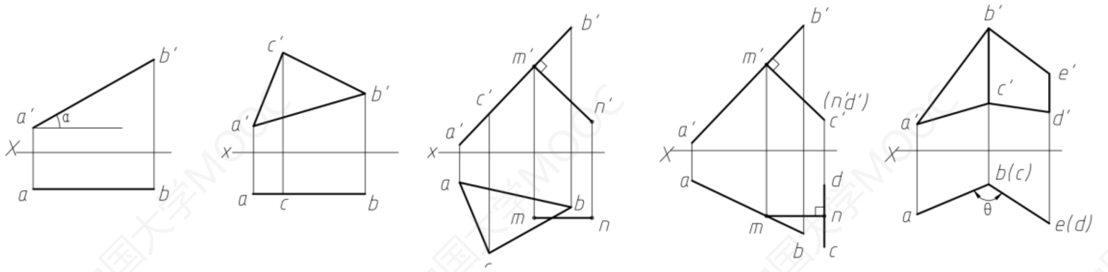
（2）过 M 点任作一条直线 KM。由直线 MN 和 KM 两相交直线构成的平面必定垂直△ABC，由于 KM 是任作的，因此过过 M 点可作无数个垂直于△ABC 的平面。

(七)变换投影面法

2.6 变换投影面法

当直线或平面相对于投影面处于特殊（平行或垂直）位置时，它们的投影反映线段的实长、平面的实形及其与投影面的倾角，根据这一特性就能较容易地解决定位问题（如求交点、交线等）和度量问题（如求直线实长、平面实形和倾角等），如图2.50所示。

保持几何位置不变用一个新的投影面代替原投影面，使原几何元素相对于新的投影面处于有利于解题位置（平行或垂直），然后向新投影面投影，这种方法称为变换投影面法，简称换面法。



(a)　　(b)　　(c)　　(d)　　(e)

图2.50 几何元素处于有利于解题位置

如图5.51所示为一处于铅垂位置的三角形平面，它在V/H体系中不能反映实形。现作一与H面垂直的新投影面V_1，平行于三角形平面，组成新的投影面体系V_1/H，再将三角形平面向V_1面进行投影，这时三角形在V_1面上的投影反映该平面的实形。

由此可知，新投影面的选择应符合以下两个条件：

（1）新投影面必须处于有利于解题位置。

（2）新投影面必须垂直于某一保留的投影面，以构成一个相互垂直新的两投影面体系。

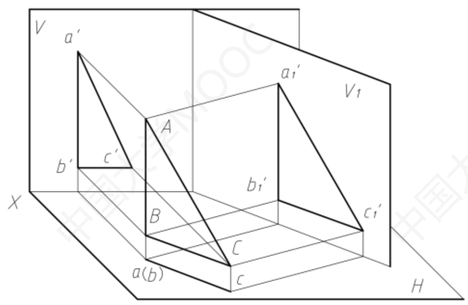


图2.51 换面法

2.6.1 点的投影变换

点是最基本的几何元素，因此首先研究点的变换规律。

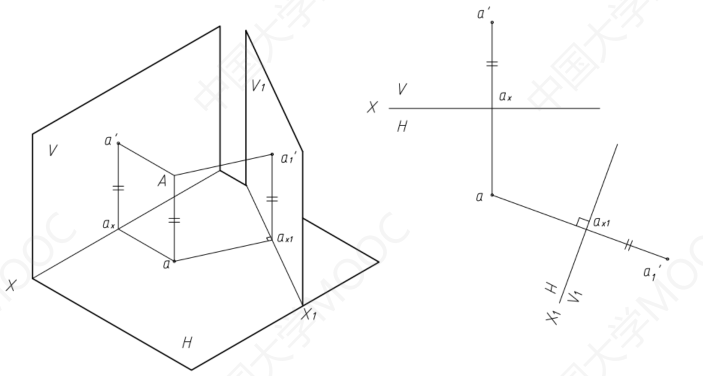
1. 点的一次变换

如图2.52（a）中，点A在V/H投影体系中，正面投影为a'，水平投影为a。令H面保持不变，取一新投影面V_1垂直H面，形成新投影面体系V_1/H，V_1面与H面的交线称为新投影轴，以X_1表示。H面为不变投影面，所以点A的水平投影a的位置不变，称之为不变投影。将点A

向V_1投影面投射，在新投影面V_1上得到新投影a_1'。由图可以看出，点A的各个投影a，a'，a_1'之间的关系为：

（1）在新投影体系中，新投影a_1'和不变投影a的连线垂直于新投影轴X_1，即$aa_1' \perp X_1$轴，如图2.52（*b*）所示。

（2）新投影a_1'到新投影轴X_1的距离，等于旧投影a'到旧投影轴X的距离。即点A的Z坐标在变换V面时是不变的，$a_1'a_{x1}=a'a_x=Aa=Z$。



(a)　　　　（b）

图2.52　点在V_1/H投影体系中的投影

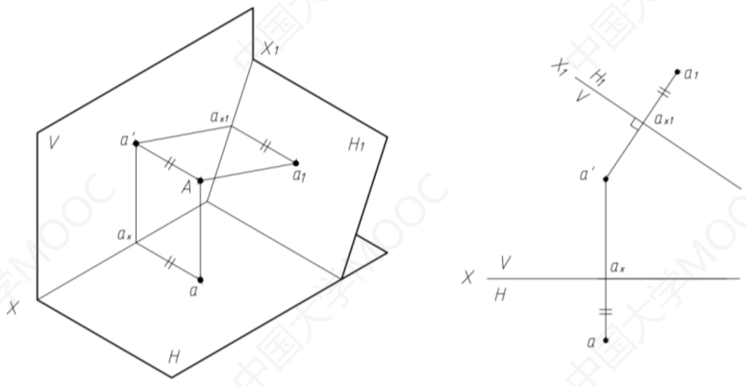
根据以上分析，可以得出点的投影变换规律。

（1）点的新投影和不变投影的连线必垂直于新投影轴。

（2）点的新投影到新投影轴的距离等于点的旧投影到旧投影轴的距离。

图2.52（*b*）所示为由V/H投影体系中的投影（a，a'）求出V_1/H投影体系中的投影（a，a_1'）的作图法。首先画出新投影轴X_1，这样就确定了新投影面在原投影体系中的位置；然后过点a作X_1的垂线并延伸，在延伸线上截取$a_{x1}a_1'=a'a_x$，则a_1'即为所求的新投影。水平投影a为新、旧两投影面体系所共有投影。

图2.53表示变换水平投影的方法。取水平面H_1面和V面构成新投影体系V/H_1，求出其新投影a_1。因新、旧两体系具有公共的V面，因此$a_1a_{x1}=Aa'=aa_x$。



(*a*)　　　　(*b*)

图2.53　点在V/H_1投影体系中的投影

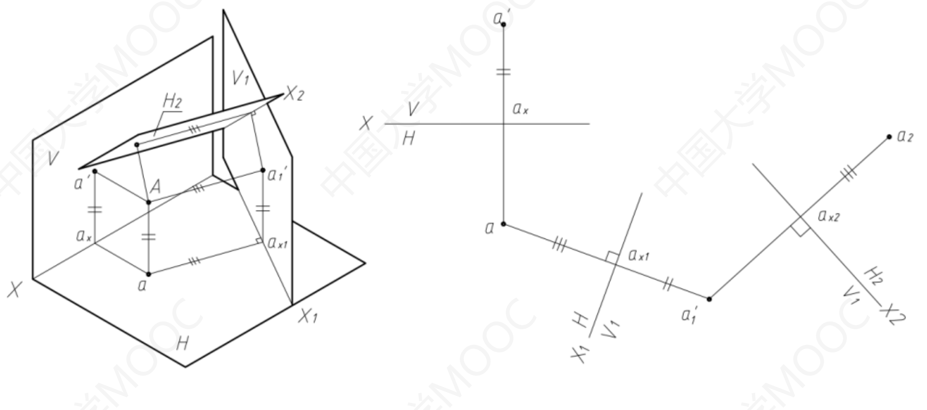
其作图步骤与变换V面相类似。由点的不变投影向新投影轴作垂线，并在垂线延伸线上量取一段距离，使这段距离等于旧投影到旧投影轴的距离。

2.点的两次变换

由于新的投影面必须垂直于原来体系中的一个投影面，因此在解题时，有时变换一次还不能解决问题，而必须变换二次或多次。这种变换二次或多次投影面的方法称为二次变换或多次变换。

在进行二次或多次变换时，由于新投影面的选择必须符合上述两个条件，因此不能同时变换两个投影面，而必须变换一个投影面后，在新的两投影面体系中再变换另一个还未被代替的那个投影面。

二次变换的作图方法与一次变换的完全相同，只是将作图过程重复一次而已。图2.54为点的二次变换求新投影的方法，其原理和作图方法与更换一次投影面的方法相同。



(a) (b)

图 2.54 点的两次变换

更换次序：首先把V面换成平面V_1，得到中间新投影体系V_1/H；然后再把H面换成平面H_2，得到新投影体系V_1/H_2…，即交替更换。

二次变换投影面时，也可先变换H面，再变换V面，即由V/H体系先变换成V/H_1体系，再变换成V_2/H_1体系。变换投影面的先后次序应根据图中情况和实际需要而定。同理，点还可以进行多次变换投影面，作图方法同上。

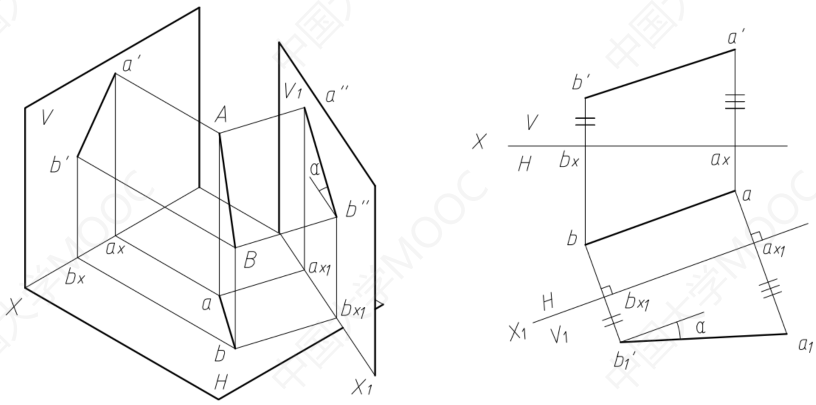
2.6.3 换面法中的6个基本问题

1.一般位置直线变换成投影面平行线

如图2.55（a）所示，求一般位置直线AB的实长及其与H面的夹角。取V_1面代替V面，使V_1面平行于直线AB且垂直于H面。这样，AB在新体系V_1/H中成为新投影面的平行线。求出AB在V_1面上的投影$a_1'b_1'$，则$a_1'b_1'$反映线段AB的实长，并且$a_1'b_1'$和X_1轴的夹角α即为直线AB和H面的夹角。

把一般位置直线变为投影面平行线投影图的作图方法如图2.55（b）所示。首先画出新投影轴X_1，X_1必须平行于ab，但和ab间的距离可以任取；然后分别求出线段AB两端点的新投影a_1'和b_1'，连接$a_1'b_1'$即为线段的新投影，它反映了AB的实长和α角。同样可以通过更换水

平投影面得到AB的实长和β角。

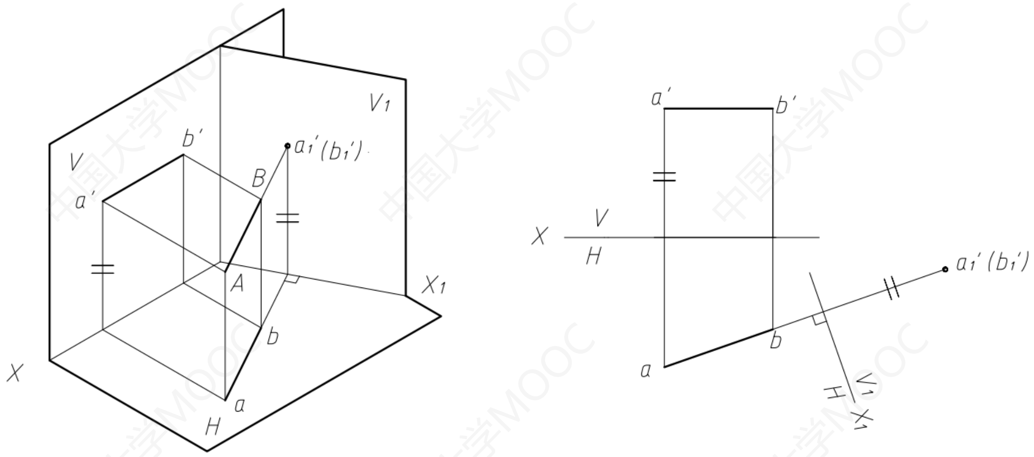


(*a*) (*b*)

图2.55 一般位置直线变换成投影面平行线

2.投影面平行线变换成投影面垂直线

如图2.56(a)所示，AB为水平线，要变为投影面垂直线，只需更换一次投影面即可。作垂直于直线AB的新投影面V_1，V_1必垂直于原体系中的H面，这样AB在V_1/H投影体系中变为投影面垂直线，如图2.56(b)所示。根据投影面垂直线的投影特性，取$X_1 \perp ab$，然后求出AB在V_1面上的新投影$a_1'\ b_1'$即可。在V_1/H体系中AB即为正垂线。



(*a*) (*b*)

图2.56 投影面平行线一次变换成垂直线

3.一般位置直线变换成投影面垂直线

要把一般位置直线变为投影面垂直线，必须更换两次投影面，第一次将投影面的倾斜线变成投影面的平行线，第二次将投影面的平行线变成投影面的垂直线。如图2.57所示，AB为一般位置直线，如先变换V面，使V_1面//AB，则AB在V_1/H投影体系中为新投影面V_1的平行线，再变换H面，作H_2面$\perp AB$，则AB在V_1/H_2投影体系中为新投影面H_2的垂直线。具体作图步骤如下：

（1）先作X_1轴//ab，求得AB在V_1面上的新投影$a_1'\ b_1'$。

（2）再作X_2轴$\perp a_1'\ b_1'$，得出AB在H_2面上的投影a_2（b_2），这时a_2b_2积聚为一点。

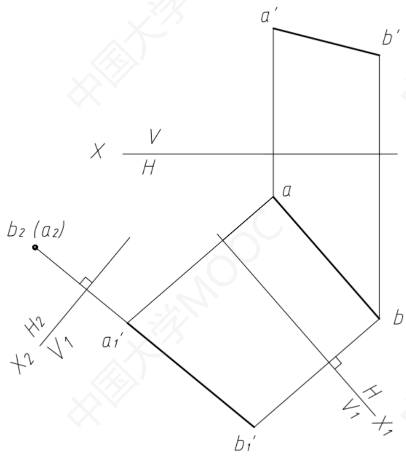
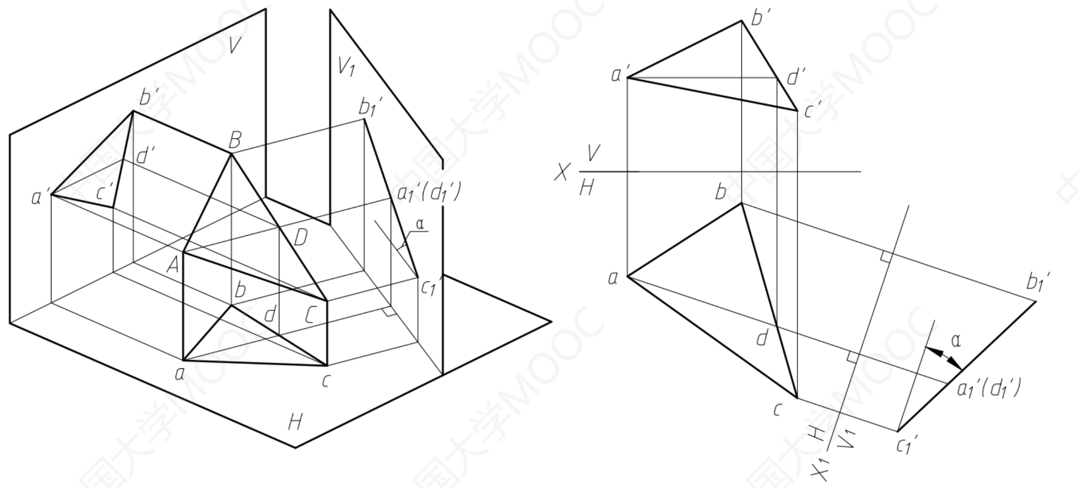


图2.57 一般位置直线两次换面变成投影面垂直线

4.一般位置平面变换成投影面垂直面

将投影面的倾斜面（一般位置平面）变换成投影面的垂直面时，新投影面既要垂直于一般位置平面，又要垂直于基本投影面。为了满足上述条件，只要把一般位置平面内一条投影面的平行线变成新投影面的垂直线即可。如图2.58（a）所示，△*ABC*为投影面倾斜面，在平面*ABC*内取一条投影面平行线（水平线*AD*），经一次换面后变换成新投影面V_1的垂直线，则平面*ABC*变成新投影面V_1的垂直面。



(a)　　　　　　　　　　　　　　(b)

图2.58 一般位置平面一次变换为投影面垂直面

△*ABC*变换成投影面垂直面的作图过程如图2.58（b）所示。首先在平面内取一条水平线*AD*作出其两面投影$a'd'$和*ad*，然后使新投影轴$X_1 \perp ad$，这样就将*AD*变换成新投影面的垂直线。求出*A*、*B*、*C*三点在新投影面V_1上的投影a_1'、b_1'、c_1'，则它们必在同一条线上，即△*ABC*变换成了V_1面的垂直面，并且直线$a_1'\ b_1'\ c_1'$与X_1轴的夹角α即为△*ABC*对*H*面的夹角。

5. 投影面垂直面变换成投影面平行面

将投影面的垂直面变换成投影面的平行面，只要取新投影面平行于垂直面即可，如图2.59所示，平面△*ABC*为一铅垂面，要求变换成投影面的平行面。根据投影面平行面的投影特性，积聚

为一条直线的投影必定为不变投影，因此必须变换V面，使新投影面V_1平行于△ABC，作图时取X_1轴∥ab，作出新投影a_1'、 b_1'、c_1'，则△ABC在V_1面上的投影△$a_1'b_1'c_1'$反映实形。

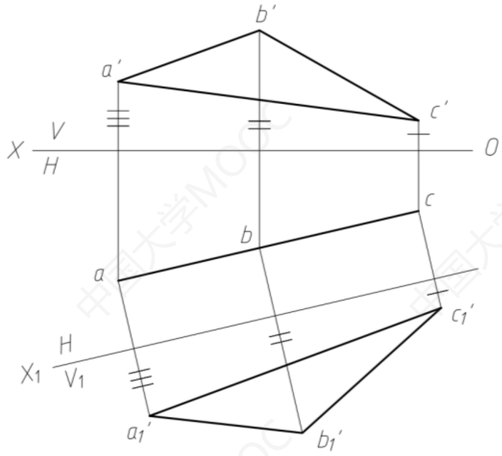


图2.59 投影面垂直面变换成投影面平行面

6.一般位置平面变换成投影面平行面

由前面两种变换可知，将一般位置面变换成投影面的平行面必须经过二次变换，即第一次将一般位置面变换成投影面的垂直面，第二次将投影面的垂直面变换成投影面的平行面。如图2.60所示，△ABC平面是一般位置平面，要将其变换成投影面的平行面，先将△ABC变换成垂直于H_1面，然后再变换使△ABC平行于V_2面。具体作图步骤如下：

（1）在△ABC上取水平线AD，作新投影面H_1垂直AD，即作X_1轴⊥$a'd'$，然后作出△ABC在H_1面上的新投影△$a_1b_1c_1$，它积聚成一条直线。

（2）作新投影面V_2平行于△ABC，即作X_2轴∥△$a_1b_1c_1$，然后作出△ABC在V_2面上的新投影△$a_2'b_2'c_2'$，△$a_2'b_2'c_2'$反映△ABC的实形。

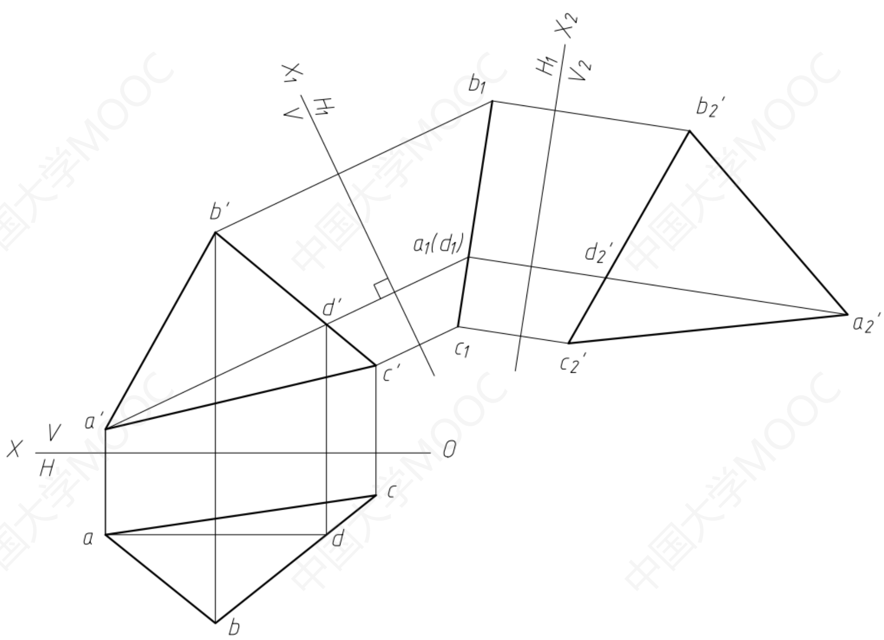


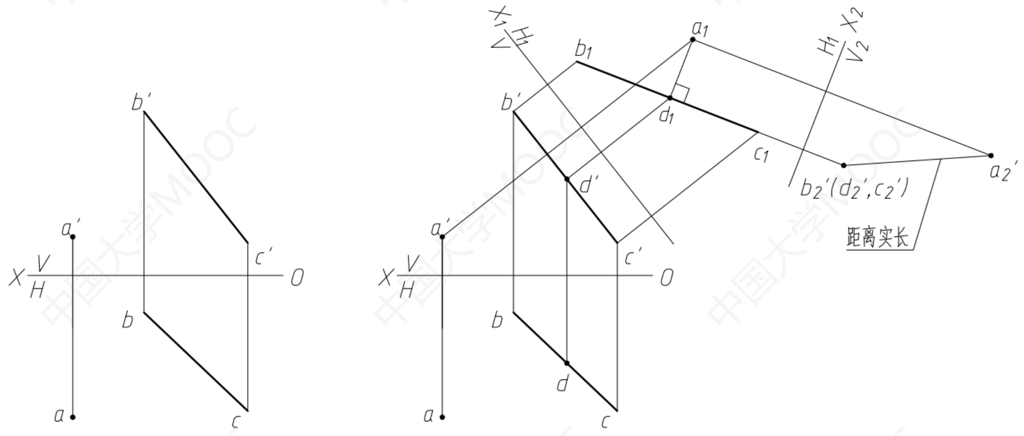
图2.60 一般位置平面变换成投影面平行面

2.6.3换面法的应用

在实际解决问题时，经常需要求点到直线或到平面的距离、两平行线或交叉直线间的距离、平面与平面间的夹角等，这些问题可以用几何作图的方法求解，也可以通过换面法求解，但换面法更加简单方便。

【例2.26】图2.61（a）所示，求点A到直线BC的距离，并求垂足D。

分析：求点A到直线BC的距离，就是求垂线AD的实长。可先将直线BC变换成投影面平行线，然后利用直角投影定理从点A向BC作垂线，得垂足D，再求出AD实长。也可以将直线BC变换成投影面垂直线，则AD为该投影面的平行线，其投影反映实长。



(a) (b)

图2.61 求点A到直线BC的距离

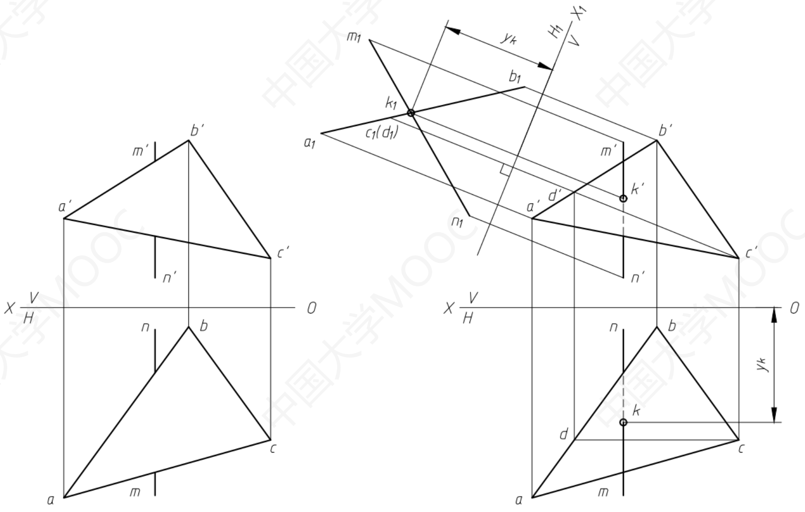
作图步骤如下（如图2.61（b））：

（1）将BC变换为H_1面的平行线。作$X_1 /\!/ b'c'$，将a、b和c变换到H_1为a_1、b_1和c_1，b_1c_1即为H_1面的平行线，过a_1作$a_1d_1 \perp b_1c_1$，得到垂线AD在H_1面的投影。

（2）再将直线BC变换成V_2面的垂直线。作$X_2 \perp b_1c_1$，BC及其上的D在V_2面的投影重影为一点，A点在V2面上的投影为a_2'，连接a_2'和d_2'得AD在V_2面的投影$a_2'd_2'$，则$a_2'd_2'$为V_2的平行线，反映实长，即为点A到直线BC的距离。

（3）根据投影规律，求出$d_1 \rightarrow d' \rightarrow d$。

【例 2.27】求侧平线 MN 与 ABC 的交点 K（图 2.62（a））。



(a)　　　　　　　　　　　　　　　(b)

图 2.62 求侧平线 MN 与 ABC 的交点

分析：首先将△ABC 变换为投影面垂直面，然后利用重影性即可求出其交点。

作图（如图 2.62（b））：

(1)将△ABC 变换为 H_1 面的垂直面，它在 H_1 面上的投影积聚为直线 $a_1b_1c_1$。先作△ABC 内正平线 CD 的两面投影（cd 和 $c'd'$），再作 $X_1 \perp c'd'$，并在 H_1 面上作出△ABC 积聚的投影 $a_1b_1c_1$。

(2)将 MN 同时进行变换，它在 H_1 面上的投影为 m_1n_1。

(3)$a_1b_1c_1$ 与 m_1n_1 的交点为 k_1，即为 MN 与△ABC 的交点 K 在 H_1 面上的投影。

(4)由 k_1 求出正面投影 k'，再利用坐标 y_k 求出水平投影 k。k'、k 即为交点 K 的投影。

(5)判断可见性。

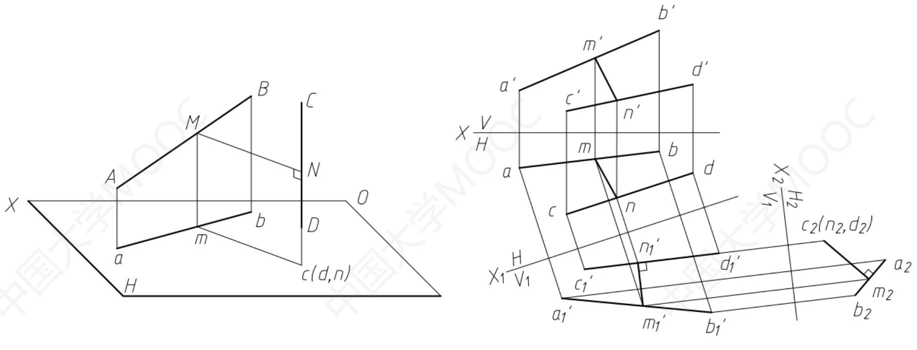
【例2.28】求两交叉直线AB和CD间的距离。

分析两交叉直线间的距离即为两直线之间公垂线的长度。若将交叉两直线之一变换成投影面的垂直线，则公垂线MN必平行于新投影面，且在该投影面上的投影反映实长。

作图（图2.63b）：

（1）将直线CD经过二次变换成为投影面H_2的垂直线，在投影面上积聚为一点c_2（d_2），直线AB在H_2上的投影为a_2b_2。

（2）过点c_2（d_2）作$m_2n_2 \perp a_2b_2$，m_2n_2即为公垂线MN在H_2面上的投影，即交叉直线AB与CD的距离实长。

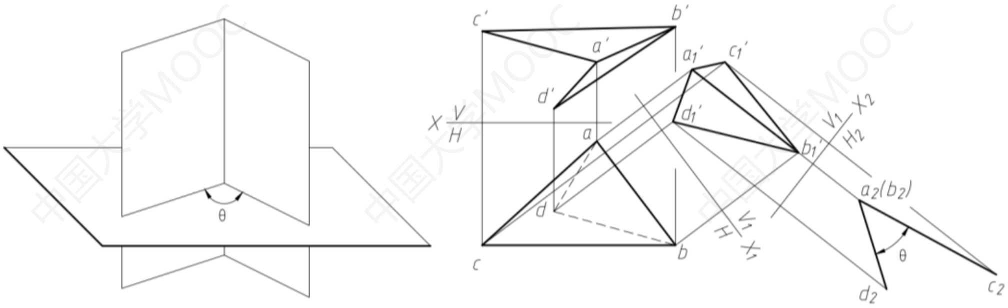


(*a*)　　　　　　　　　　　　　　　(*b*)

图2.63 求交叉两直线的公垂线

【例2.29】求△ABC和△ABD的两面角。

分析：两平面的夹角是用二面角的平面角来度量的。平面角为两平面同时与第三平面垂直相交时两交线所夹的角度，即图2.64（a）中的θ角。要使两平面同时垂直于投影面，必须使它们的交线成为投影面垂直线，两平面的投影积聚成两条相交直线，相交直线间的夹角即为所求。



(a) (b)

图2.64 求两平面之间的夹角

作图（图2.64（b））：

（1）作$X_1 // ab$，使交线AB在V_1/H投影体系中变为投影面平行线，在V_1面上作出△ABC和△ABD的投影△$a_1'b_1'c_1'$和△$a_1'b_1'd_1'$。

（2）作$X_2 \perp a_1'b_1'$，使交线AB在V_1/H_2投影体系中变为投影面垂直线，这时两三角形的投影积聚为一对相交线a_2c_2和a_2d_2，则$\angle c_2a_2d_2$即为所求两平面间的夹角。