

# 长三角工程教育联盟高校高等数学 A 联考试卷二（闭卷）

2024-2025 学年第 1 学期

(满分 100 分, 考试时间 120 分钟)

\*答案、解题过程必须写在答题纸上, 写在试卷上的内容不予计分!

## 一、单选题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、下列命题中, 正确的有 ( ) 个

(1) 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处极限存在, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处函数值等于极限值.

(2) 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处极限值一定存在.

(3) 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处可微.

(4) 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可微, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处连续.

(A) 一个 (B) 两个 (C) 三个 (D) 四个

2、方程  $x^3 - 3x + 1 = 0$  在  $(0,1)$  内 ( )

(A) 无实根 (B) 有唯一实根

(C) 有两个实根 (D) 有三个实根

3、下列反常积分收敛的是 ( )

(A)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  (B)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$  (C)  $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$  (D)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$

4、如果  $\int du(x) = \int dv(x)$ , 则下列各式中一定成立的是 ( )

①  $u(x) = v(x)$  ②  $du(x) = dv(x)$  ③  $u'(x) = v'(x)$  ④  $d \int u'(x) dx = d \int v'(x) dx$

(A) ①②③ (B) ①②④ (C) ①③④ (D) ②③④

5、函数  $f(x) = \frac{(e^x + e)^{\frac{1}{x}}}{x(e^x - e)}$  的第一类间断点的个数是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

## 二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6、函数  $f(x) = \frac{\sin x}{e^{\frac{1}{x-1}} - 2}$  的间断点是 \_\_\_\_\_ .

7、若函数  $y = x^2 \sin 2x$ , 则导数  $y^{(5)}(0) =$  \_\_\_\_\_ .

8、设函数  $y = f(x)$  是由方程  $e^{xy} + \tan(xy) = y$  所确定, 则曲线  $y = f(x)$  在点  $x = 0$

处的切线方程是\_\_\_\_\_.

9、三叶线  $r = a \sin 3\theta$ ,  $a > 0$  所围成的平面图形的面积是\_\_\_\_\_.

10、曲线  $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$  的弧长是\_\_\_\_\_.

### 三、解答题 (共 70 分)

11、(7 分) 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \right).$

12、(7 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$

13、(7 分) 设  $\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{3t} - 1) \end{cases}$ , 其中  $f$  可导, 且  $f'(0) = 2, f''(0) = -1$ .

求  $\frac{dy}{dx}|_{t=0}, \frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$ .

14、(7 分) 计算不定积分  $\int \sin(\ln x) dx$

15、(7 分) 设  $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & |x| > 1 \end{cases}$ , 计算  $\int_0^3 xf(x-1) dx$ .

16、(7 分) 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

(1) 在  $x=0$  处的连续性和可导性.

(2) 求导函数  $f'(x)$ .

17、(9 分) 求函数  $f(x) = \ln(1+x^2)$  的单调区间、极值点、凹凸区间和拐点.

18、(5 分) 设函数  $f(x) = \int_0^x (x-t)e^{t+1} dt$ , 求  $f'(x)$ .

19、(7 分) 设平面图形 A 由  $x^2 + y^2 \leq 2x$  与  $y \geq x$  所确定, 求图形 A 绕直线  $x=1$  所得旋转体的体积.

20、(7 分) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, a]$  上具有连续导数,  $f(a) = 0$ ,  $\max_{x \in [0, a]} |f'(x)| = M$ ,

证明:  $\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq Ma^2$ .