浙江工业大学2024/2025学年《分析力学》期末考试试卷(补考)

一、简答题(共3题，每题5分，共15分)

1. 请写出直角坐标(r, y, z)与球坐标(ρ, θ, Φ)之间的变换关系，并据此导出球坐标中粒子的动能表达式

1. 直角坐标与球坐标的变换关系

标准记号:

- 直角坐标：(x, y, z)
- 球坐标：(ρ, θ, Φ)，其中
  ρ：径向距离（$\rho \geq 0$）
  θ：极角（与 z 轴夹角，$0 \leq \theta \leq \pi$）
  Φ：方位角（在 xy 平面内从 x 轴测量，$0 \leq \Phi < 2\pi$）

变换关系:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\Phi \\ y = \rho \sin\theta \sin\Phi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

逆变换:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \Phi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

---

2. 球坐标中粒子动能的推导

利用正交曲线坐标系中的**弧长公式**（线元）可以最简便地得到动能表达式，无需逐个对坐标分量求导。

在球坐标系 (ρ, θ, Φ) 中，空间线元平方 ds^2 为：

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta \, d\Phi^2$$

速度的模平方 v^2 即为线元对时间的导数：

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2\theta \, \dot{\Phi}^2$$

因此，粒子的动能 $T = \frac{1}{2}mv^2$ 直接得到：

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2\theta \, \dot{\Phi}^2\right)}$$

---

3. 物理意义解释

- $\dot{\rho}^2$：径向运动的动能（远离或靠近原点）
- $\rho^2\dot{\theta}^2$：极角方向（南北向）的转动动能
- $\rho^2\sin^2\theta\,\dot{\Phi}^2$：方位角方向（东西向）的转动动能，因子 $\sin\theta$ 反映纬度越小（靠近赤道），相同角速度 $\dot{\Phi}$ 对应的线速度越大

例子：地球表面粒子

- $\rho \approx R$（地球半径，近似常数）
- $\dot{\rho} \approx 0$
- 若有纬度变化（$\dot{\theta} \neq 0$）和自转（$\dot{\Phi} = \omega$），动能即为两项转动贡献。

此表达式是分析力学中处理中心力场、陀螺运动、天体轨道等问题的起点。

2. 试写出达朗贝尔原理和虚功原理

虚功原理（Principle of Virtual Work）

适用范围：完整约束下的**静力学平衡**系统。

核心表述：对于处于平衡状态的力学系统，所有主动力在任意虚位移上所做的虚功之和为零。

数学表达式：

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

符号说明：

- $\mathbf{F}_i$：作用在第 i 个质点上的**主动力**（不包括约束力）
- $\delta \mathbf{r}_i$：第 i 个质点的**虚位移**（满足约束条件的任意无穷小位移）
- 求和对所有质点进行

广义坐标形式（对完整约束）：

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k = 0$$

其中 Q_k 是广义力，q_k 是广义坐标。

适用条件：**理想约束**（约束力在虚位移上不做功）。

达朗贝尔原理（D'Alembert's Principle）

适用范围：完整约束下的**动力学**系统。

核心表述：将动力学问题转化为静力学形式，引入惯性力后，系统在虚位移上的总虚功为零。

数学表达式：

$$\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$$

符号说明：

- $\mathbf{F}_i$：主动力
- $m_i\mathbf{a}_i$：惯性力（m_i 为质量，$\mathbf{a}_i$ 为加速度）
- $\delta\mathbf{r}_i$：虚位移

物理意义：惯性力 $-m_i\mathbf{a}_i$ 被视为主动力，系统满足"静力学平衡"条件。

广义坐标形式：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(Q_k - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k = 0$$

其中 T 是动能。

与拉格朗日方程的关系：对完整约束和理想约束，达朗贝尔原理可导出**拉格朗日方程**：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

两者关系

原理	**适用范围**	**核心思想**	**数学形式**
虚功原理	静力学	主动力虚功为零	$\sum \mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$
达朗贝尔原理	动力学	主动力 + 惯性力虚功为零	$\sum(\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$

联系：达朗贝尔原理 = 虚功原理 + 惯性力项，是虚功原理在动力学中的推广。

3. 在电磁场中带电粒子的拉格朗日量满足 $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q\phi(t,\vec{r}) + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})$ 写出其广义动量 $\vec{p}$,$\vec{p}$ 是否为守恒量？为什么

广义动量的表达式

对于拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q\phi(t,\vec{r}) + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(t,\vec{r})$$

广义动量（正则动量）定义为：

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}$$

是否为守恒量？

一般情况下，$\vec{p}$ 不是守恒量。

原因：根据欧拉-拉格朗日方程和诺特定理，广义动量守恒的条件是拉格朗日量**不显含**对应的广义坐标。

守恒性分析

1. 从运动方程出发

由欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -q\nabla\phi + q\nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$$

利用矢量恒等式展开：

$$\nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla)\vec{A}$$

因此：

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q\nabla\phi + q\dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}) + q(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla)\vec{A}$$

另一方面，直接对 $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}$ 求导：

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla)\vec{A}$$

联立两式并消去 $q(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla)\vec{A}$ 项，得到：

$$m\ddot{\vec{r}} + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -q\nabla\phi + q\dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A})$$

代入电磁场定义 $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 和 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$，最终得到：

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

2. 守恒条件

$\vec{p}$ 守恒当且仅当：

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B} = 0$$

这要求**洛伦兹力为零**，即：

- 无电场（$\vec{E} = 0$）
- 无磁场（$\vec{B} = 0$）或粒子静止（$\dot{\vec{r}} = 0$）

结论：在任意非零电磁场中，$\vec{p}$ 一般不守恒。

特殊情况：分量守恒

若电磁势具有**空间对称性**，则**某些分量**可能守恒。

例：均匀磁场 $\vec{B} = B\hat{z}$，选对称规范 $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$，$\phi = 0$。

- $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}$
- $p_z = m\dot{z}$（因 $A_z = 0$ 且 $\vec{B}$ 不依赖 z）
- p_z **守恒**：因为系统沿 z 轴平移对称，洛伦兹力在 z 方向无分量。

总结

动量类型	表达式	守恒条件	物理意义
正则动量 $\vec{p}$	$m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}$	电磁场为零或势场有特定对称性	哈密顿量共轭量，对称性生成元
机械动量 $m\dot{\vec{r}}$	$\vec{p} - q\vec{A}$	无电磁力（$\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B} = 0$）	牛顿力学动量

核心结论：电磁场中带电粒子的正则动量 $\vec{p}$ **一般不是守恒量**，其变化率等于洛伦兹力。守恒性取决于电磁场的时空对称性，需具体分析。

二、证明题(共3题，每题10分，共30分)

1. 写出哈密顿量的定义，并从欧拉-拉格朗日方程推导哈密顿正则方程

1. 哈密顿量的定义

哈密顿量 H 通过**勒让德变换**从拉格朗日量 $L(q, \dot{q}, t)$ 导出：

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$$

其中：

- **正则动量**：$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
- **自变量**：从 $(q, \dot{q}, t)$ 变为 (q, p, t)
- **物理意义**：在保守系统中，H 代表**总能量**（动能+势能）。

---

2. 从欧拉-拉格朗日方程推导哈密顿正则方程

步骤 1：从欧拉-拉格朗日方程出发

欧拉-拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

定义正则动量：

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

代入上式得到：

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \cdots\cdots (1)$$

步骤 2：写出拉格朗日量的全微分

对 $L(q,\dot{q},t)$ 求全微分：

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

利用动量定义和式(1)：

$$dL = \sum_{i=1}^{n} (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \cdots\cdots (2)$$

步骤 3：对哈密顿量定义式求全微分

对 $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$ 求微分：

$$dH = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - dL$$

将式(2)代入：

$$dH = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^{n} (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

消去 $p_i d\dot{q}_i$ 项：

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \cdots\cdots (3)$$

步骤 4：将 H 视为 (q,p,t) 的函数

将 $H(q,p,t)$ 展开为全微分形式：

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad \cdots\cdots (4)$$

步骤 5：比较式(3)与式(4)

对比式(3)和式(4)，由于 dq_i、dp_i、dt 独立，对应系数相等：

$$\left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \right.$$

整理得**哈密顿正则方程**：

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

3. 物理意义总结

方程	物理意义
$\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$	正则动量决定运动速度（类似 $\dot{q} = \partial H/\partial p$）
$\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$	广义力（势场梯度）改变正则动量（类似 $F = -\partial V/\partial q$）
$\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$	若 L 不显含时间，则 H 守恒（能量守恒）

关键点：哈密顿方程是一阶微分方程组，而欧拉-拉格朗日方程是二阶的。哈密顿框架更便于处理守恒量、对称性和正则变换。

2. 对于含二阶导数的作用量$I = \int_{t2}^{t1} L(q_\alpha, \dot{q_\alpha}, \ddot{q_\alpha}, t)$ 证明:最小作用量原理给出如下拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q_\alpha}} = 0$$

证明：

考虑作用量

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \ddot{q}_\alpha, t)\, dt$$

其中 α 标记自由度。设实际路径为 $q_\alpha(t)$，变分路径为 $q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t)$，其中 $\delta q_\alpha(t)$ 是无穷小变分，满足**固定端点条件**：

$$\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0, \quad \delta\dot{q}_\alpha(t_1) = \delta\dot{q}_\alpha(t_2) = 0$$

（由于被积函数含 $\ddot{q}_\alpha$，需固定端点处的函数值和一阶导数值）。

步骤 1：计算作用量的一阶变分

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt$$

展开 δL：

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha}\delta \ddot{q}_\alpha$$

步骤 2：分部积分处理速度项

对第二项分部积分：

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d}{dt}(\delta q_\alpha)\, dt$$
$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\, dt$$

由于 $\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$，边界项为零，得：

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \delta q_\alpha \, dt$$

步骤 3：分部积分处理加速度项

对第三项进行**两次**分部积分：

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha} \delta \ddot{q}_\alpha \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha} \frac{d^2}{dt^2}(\delta q_\alpha) \, dt$$

第一次分部积分：

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha} \frac{d}{dt}(\delta q_\alpha)\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha}\right) \frac{d}{dt}(\delta q_\alpha) \, dt$$

由于 $\delta \dot{q}_\alpha(t_1) = \delta \dot{q}_\alpha(t_2) = 0$，边界项为零。

第二次分部积分：

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha}\right) \frac{d}{dt}(\delta q_\alpha) \, dt$$

$$= -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha}\right) \delta q_\alpha\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha}\right) \delta q_\alpha \, dt$$

由于 $\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$，边界项为零。

因此：

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha} \delta \ddot{q}_\alpha \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha}\right) \delta q_\alpha \, dt$$

步骤 4：合并所有项

将结果代回 δI：

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha}\right)\right] \delta q_\alpha \, dt$$

步骤 5：应用最小作用量原理

最小作用量原理要求 $\delta I = 0$ 对**任意**满足端点条件的 δq_α 成立。根据**变分法基本引理**，被积函数必须为零：

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha}\right) = 0$$

QED 证毕。

物理意义

此方程是**高阶拉格朗日方程**的标准形式，适用于拉格朗日量显含二阶导数的系统（如弹性体、高阶场论）。它表明：

- 每个广义坐标 α 对应一个四阶微分方程
- 需要**四个**初始条件（$q, \dot{q}, \ddot{q}, \frac{d^3q}{dt^3}$ 在 t_1 的值）才能确定唯一解
- 广义动量定义仍为 $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}_\alpha$，但运动方程更复杂

3. 已知哈密顿量为$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1p_1 - q_2p_2 - aq_1^2 + bq_2^2$，其中$a, b$都是常数。判断 $F_1 \equiv \dfrac{p_2 - bq_2}{q_1}, \quad F_2 \equiv q_1q_2, \quad F_3 \equiv q_1e^{-t}$ 是否为守恒量并证明

判断与证明:

给定哈密顿量

$$H = q_1p_1 - q_2p_2 - aq_1^2 + bq_2^2,$$

其中 a, b 为常数。一个量 $F(q_i, p_i, t)$ 是守恒量当且仅当其对时间的全导数为零：

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0,$$

其中泊松括号定义为

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

---

1. 判断 $F_1 = \dfrac{p_2 - bq_2}{q_1}$

偏导数：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial q_1} = -\frac{p_2 - bq_2}{q_1^2}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial q_2} = -\frac{b}{q_1}, \\ &\frac{\partial F_1}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = \frac{1}{q_1}. \end{aligned}$$

H 的偏导数：

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = q_1, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = -q_2, \quad \frac{\partial H}{\partial q_1} = p_1 - 2aq_1, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} = -p_2 + 2bq_2.$$

泊松括号：

$$\begin{aligned} \{F_1, H\} &= \frac{\partial F_1}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial F_1}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\partial F_1}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} \\ &= \left(-\frac{p_2 - bq_2}{q_1^2}\right) q_1 + \left(-\frac{b}{q_1}\right)(-q_2) - 0 - \left(\frac{1}{q_1}\right)(-p_2 + 2bq_2) \\ &= -\frac{p_2 - bq_2}{q_1} + \frac{bq_2}{q_1} + \frac{p_2 - 2bq_2}{q_1} \\ &= \frac{-(p_2 - bq_2) + bq_2 + (p_2 - 2bq_2)}{q_1} \\ &= \frac{-p_2 + bq_2 + bq_2 + p_2 - 2bq_2}{q_1} = 0. \end{aligned}$$

由于 F_1 不显含时间，$\partial F_1/\partial t = 0$，因此

$$\frac{dF_1}{dt} = 0 + \{F_1, H\} = 0.$$

结论：F_1 是守恒量。

---

2. 判断 $F_2 = q_1 q_2$

偏导数：

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_1} = q_2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = q_1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial p_2} = 0.$$

泊松括号：

$$\{F_2, H\} = q_2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p_1} + q_1 \cdot \frac{\partial H}{\partial p_2} = q_2 \cdot q_1 + q_1 \cdot (-q_2) = q_1 q_2 - q_1 q_2 = 0.$$

F_2 不显含时间，故

$$\frac{dF_2}{dt} = 0.$$

结论：F_2 是守恒量。

---

3. 判断 $F_3 = q_1 e^{-t}$

显含时间，需计算全导数：

$$\frac{dF_3}{dt} = \frac{\partial F_3}{\partial t} + \{F_3, H\}.$$

- 时间偏导数：$\dfrac{\partial F_3}{\partial t} = -q_1 e^{-t} = -F_3$.
- 空间偏导数：$\dfrac{\partial F_3}{\partial q_1} = e^{-t}$，其余为零。

泊松括号：

$$\{F_3, H\} = e^{-t} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_1} = e^{-t} \cdot q_1 = F_3.$$

因此

$$\frac{dF_3}{dt} = -F_3 + F_3 = 0.$$

结论：F_3 是守恒量。

最终结论

量	守恒性	原因
$F_1 = \dfrac{p_2 - b q_2}{q_1}$	**守恒**	$\{F_1, H\} = 0$，且无显含时间

量	守恒性	原因
$F_2 = q_1 q_2$	**守恒**	$\{F_2, H\} = 0$，且无显含时间
$F_3 = q_1 e^{-t}$	**守恒**	$\{F_3, H\} = F_3$ 与 $\partial F_3/\partial t = -F_3$ 抵消

因此，F_1, F_2, F_3 全部是守恒量。

三、计算题（共四题，共55分）

1. 质量为M的质点只在竖直方向上运动，质量为m的质点作平面摆动，两质点通过滑轮和轻绳相连。利用图中所标广义坐标(r, θ), 写出系统的拉氏量,并求运动方程

t1

系统描述与坐标系设定

配置:

- 滑轮固定在支点 O，轻绳跨过滑轮连接两质点
- 质量为 M 的质点沿竖直方向运动（向下为正）
- 质量为 m 的质点在竖直平面内摆动
- 广义坐标 (r, θ)：
  - r：滑轮 O 到 m 的绳长
  - θ：摆线偏离竖直方向的角度（$\theta = 0$ 为竖直向下）

约束：绳长恒定，设 M 的竖直位移 $y_M = r + C$（C 为常数，由初始条件确定）

拉氏量

动能：

- M 质点：$T_M = \frac{1}{2} M \dot{y}_M^2 = \frac{1}{2} M \dot{r}^2$
- m 质点：$T_m = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$
- 总动能：$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$

势能（以支点 O 为零势能面，竖直向上为正方向）：

- M 质点：位置 $h_M = -(L - r)$（L 为绳长），$V_M = Mgh_M = -MgL + Mgr$。
- m 质点：位置 $h_m = -r\cos\theta$（$\theta = 0$ 为竖直向下），$V_m = mgh_m = -mgr\cos\theta$。
- 总势能（忽略常数Constants）：$V = Mgr - mgr\cos\theta$。

拉氏量：

$$\boxed{L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - Mgr + mgr\cos\theta}$$

运动方程

利用拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$:

1. 径向坐标 r 的方程:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (M+m)\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (M+m)\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - Mg + mg\cos\theta$$

$$\boxed{(M+m)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Mg - mg\cos\theta = 0}$$

2. 角向坐标 θ 的方程:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta$$

$$\boxed{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

物理意义

- **径向方程**: 描述 r 方向的运动，包含惯性项、离心力项 $(-mr\dot{\theta}^2)$ 和重力耦合项
- **角向方程**: 描述摆动运动，包含科里奥利项 $(2\dot{r}\dot{\theta})$ 和重力恢复项 $(g\sin\theta)$

两个方程耦合，表明 M 的升降与 m 的摆动相互影响。若绳长不可伸长 $(\dot{r}=0)$，系统退化为约束摆动。

2. 考虑了摩擦效应的一维谐振子的拉氏量为

$$L = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2\right)$$

其中γ, m, k都是正常数

1. 写出此系统的拉格朗日方程，观察是否存在守恒量并写出
2. 若采用另外一个广义坐标$s \equiv e^{\gamma t/2}$ 重新写出拉氏量及运动方程，观察是否存在守恒量并写出。

第一部分

给定拉氏量:

$$L = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2\right)$$

其中 γ, m, k 均为正常数。

拉格朗日方程

拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

计算偏导数：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{\gamma t} m\dot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = e^{\gamma t}(-kq)$$

代入方程：

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t} m\dot{q}\right) + e^{\gamma t} kq = 0$$

展开导数：

$$e^{\gamma t} m(\gamma \dot{q} + \ddot{q}) + e^{\gamma t} kq = 0$$

除以 $e^{\gamma t}$（因为 $e^{\gamma t} \neq 0$）：

$$m\ddot{q} + m\gamma\dot{q} + kq = 0$$

这是阻尼谐振子的运动方程，其中阻尼系数为 $m\gamma$。

守恒量

由于拉氏量显含时间 t（通过因子 $e^{\gamma t}$），广义能量不守恒。广义能量定义为：

$$h = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2\right)$$

计算其时间导数：

$$\frac{dh}{dt} = \gamma e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2\right) + e^{\gamma t}(m\dot{q}\ddot{q} + kq\dot{q})$$

代入运动方程 $m\ddot{q} = -m\gamma\dot{q} - kq$，得：

$$\frac{dh}{dt} = \gamma e^{\gamma t}\left(-\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2\right) \neq 0$$

因此，系统没有守恒量。摩擦效应导致能量耗散，无守恒量。

总结：

- 拉格朗日方程：$m\ddot{q} + m\gamma\dot{q} + kq = 0$
- 守恒量：无

第二部分

引入新广义坐标 $s \equiv e^{\gamma t/2}$。首先，将原拉氏量用 s 和 q 表示。

新拉氏量

由 $s = e^{\gamma t/2}$，得：

$$t = \frac{2}{\gamma}\ln s, \quad e^{\gamma t} = s^2$$

速度变换：

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{ds}\frac{ds}{dt} = q' \cdot \frac{\gamma}{2}s$$

其中 $q' = \frac{dq}{ds}$。代入原拉氏量：

$$L = s^2\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{\gamma}{2}sq'\right)^2 - \frac{1}{2}kq^2\right) = s^2\left(\frac{m\gamma^2}{8}s^2(q')^2 - \frac{1}{2}kq^2\right)$$

$$= \frac{m\gamma^2}{8}s^4(q')^2 - \frac{1}{2}ks^2q^2$$

因此，新拉氏量（以 s 为自变量）为：

$$\tilde{L} = \frac{m\gamma^2}{8}s^4\left(\frac{dq}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2}ks^2q^2$$

运动方程

使用欧拉-拉格朗日方程（自变量为 s）：

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q'}\right) - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q} = 0$$

计算偏导数：

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q'} = \frac{m\gamma^2}{4}s^4q', \quad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q} = -ks^2q$$

代入方程：

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{m\gamma^2}{4}s^4q'\right) + ks^2q = 0$$

展开导数：

$$\frac{m\gamma^2}{4}\left(4s^3q' + s^4q''\right) + ks^2q = 0$$

$$\frac{m\gamma^2}{4}s^4q'' + m\gamma^2s^3q' + ks^2q = 0$$

除以 s^2（$s > 0$）：

$$\frac{m\gamma^2}{4}s^2q'' + m\gamma^2sq' + kq = 0$$

其中 $q'' = \frac{d^2q}{ds^2}$。

守恒量

新拉氏量 $\tilde{L}$ 显含自变量 s，因此广义能量不守恒。然而，通过坐标变换，系统存在一个守恒量，对应于原始系统的能量（考虑摩擦效应）。

定义变换 $u = qs$（即 $q = s^{-1}u$），则原始阻尼谐振子方程可化为无阻尼形式。守恒量为：

$$E=\frac{1}{2}m\left(\dot{u}\right)^2+\frac{1}{2}\left(k-\frac{m\gamma^2}{4}\right)u^2$$

用 s 和 q 表示：由于 $u=qs$ 和 $\dot{u}=\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}(qs)=s\dot{q}+q\dot{s}$，且 $\dot{s}=\frac{\gamma}{2}s$，得：

$$\dot{u}=s\dot{q}+q\cdot\frac{\gamma}{2}s=s\left(\dot{q}+\frac{\gamma}{2}q\right)$$

代入 E：

$$E=\frac{1}{2}m\left[s\left(\dot{q}+\frac{\gamma}{2}q\right)\right]^2+\frac{1}{2}\left(k-\frac{m\gamma^2}{4}\right)(qs)^2$$

$$=\frac{1}{2}ms^2\left(\dot{q}+\frac{\gamma}{2}q\right)^2+\frac{1}{2}\left(k-\frac{m\gamma^2}{4}\right)s^2q^2$$

用 $q'=\frac{dq}{ds}$ 表示：$\dot{q}=\frac{\gamma}{2}sq'$，所以：

$$\dot{q}+\frac{\gamma}{2}q=\frac{\gamma}{2}sq'+\frac{\gamma}{2}q=\frac{\gamma}{2}(sq'+q)$$

代入：

$$E=\frac{1}{2}ms^2\left[\frac{\gamma}{2}(sq'+q)\right]^2+\frac{1}{2}\left(k-\frac{m\gamma^2}{4}\right)s^2q^2$$

$$=\frac{m\gamma^2}{8}s^2(sq'+q)^2+\frac{1}{2}ks^2q^2-\frac{m\gamma^2}{8}s^2q^2$$

$$=\frac{m\gamma^2}{8}s^2\left(s^2(q')^2+2sqq'+q^2\right)+\frac{1}{2}ks^2q^2-\frac{m\gamma^2}{8}s^2q^2$$

$$=\frac{m\gamma^2}{8}s^4(q')^2+\frac{m\gamma^2}{4}s^3qq'+\frac{m\gamma^2}{8}s^2q^2+\frac{1}{2}ks^2q^2-\frac{m\gamma^2}{8}s^2q^2$$

$$=\frac{m\gamma^2}{8}s^4\left(\frac{dq}{ds}\right)^2+\frac{m\gamma^2}{4}s^3q\frac{dq}{ds}+\frac{1}{2}ks^2q^2$$

此量 E 恒定（守恒），对应于变换后系统的能量。

总结：

- 新拉氏量：$\tilde{L}=\frac{m\gamma^2}{8}s^4\left(\frac{dq}{ds}\right)^2-\frac{1}{2}ks^2q^2$
- 运动方程：$\frac{m\gamma^2}{4}s^2\frac{d^2q}{ds^2}+m\gamma^2s\frac{dq}{ds}+kq=0$
- 守恒量：$E=\frac{m\gamma^2}{8}s^4\left(\frac{dq}{ds}\right)^2+\frac{m\gamma^2}{4}s^3q\frac{dq}{ds}+\frac{1}{2}ks^2q^2$（或等价形式）

3. 如图所示，二氧化碳是一个线性分子，中间是碳原子(质量为m)，两端是氧原子(质量为M)。当它们在平衡位形附近振荡时，相邻两个原子之间的相互作用势能可以近似等效为弹性势能，劲度系数为k。求系统小振动的本征频率，描述并画出相应的振动模式

问题分析与建模

将CO_2分子简化为三个质点（O-C-O）沿直线排列，质量分别为M（氧原子）和m（碳原子），通过两个劲度系数均为k的弹簧连接。定义偏离平衡位置的位移为：

- 左氧原子：q_1
- 碳原子：q_2

- **右氧原子**：q_3

势能（小振动近似）：

$$V = \frac{1}{2}k(q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2}k(q_3 - q_2)^2$$

动能：

$$T = \frac{1}{2}M\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}_3^2$$

运动方程

由拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ 得：

$$\begin{cases} M\ddot{q}_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ m\ddot{q}_2 + k(2q_2 - q_1 - q_3) = 0 \\ M\ddot{q}_3 + k(q_3 - q_2) = 0 \end{cases}$$

本征频率求解

设简正模式解 $q_i = A_i \cos(\omega t + \phi)$，代入得特征方程：

$$\begin{vmatrix} k - M\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

展开行列式：

$$(k - M\omega^2)\left[(2k - m\omega^2)(k - M\omega^2) - 2k^2\right] = 0$$

解得三个本征频率：

1. **平动模式**：$\omega_1 = 0$
2. **对称伸缩**（Symmetric Stretch）：$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}$
3. **反对称伸缩**（Antisymmetric Stretch）：$\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{M} + \frac{2k}{m}}$

振动模式描述与图示

模式一：平动 ($\omega_1 = 0$)

- **描述**：整个分子作为刚体沿轴向平移，原子间无相对位移。

模式二：对称伸缩 ($\omega_2 = \sqrt{(k/M)}$)

- **描述**：两端氧原子沿相反方向运动（同时向内或向外），碳原子保持静止。
- **位移关系**：$q_1 = -q_3$，$q_2 = 0$
- **图示**：

```
O  <--  C  -->  O
```

模式三：反对称伸缩 ($\omega_3 = \sqrt{(k/M + 2k/m)}$)

- **描述**：两端氧原子沿相同方向运动，碳原子沿相反方向运动。
- **位移关系**：$q_1 = q_3$。
- **图示**：

```
O  -->  C  <--  O  -->
```

讨论说明

1. **修正**：已更正原解中对称/反对称模式的命名混淆及 ω_3 本征频率公式的错误。
2. **频率验证**：代入方程验证 ω_3：$M\ddot{q}_1 = -k(q_1 - q_2)$，且 $q_2 = -\frac{2M}{m}q_1$，则 $M(-\omega^2) = -k(1 + \frac{2M}{m})$，即 $\omega^2 = \frac{k}{M} + \frac{2k}{m}$。

4. 已知两自由度系统的拉氏量为

$$L = \dot{q_1}^2 + \alpha\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}q_2^2$$

其中 q_1, q_2 为广义坐标，α, β 为常数。求哈密顿量及哈密顿正则方程

哈密顿-雅可比方程解法

给定拉氏量：

$$L = \dot{q_1}^2 + \alpha\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}q_2^2$$

1. 哈密顿量

广义动量：

$$p_1 = 2\dot{q}_1 + \alpha\dot{q}_2, \quad p_2 = \alpha\dot{q}_1$$

解得速度：

$$\dot{q}_1 = \frac{p_2}{\alpha}, \quad \dot{q}_2 = \frac{p_1}{\alpha} - \frac{2p_2}{\alpha^2}$$

哈密顿量（Legendre变换）：

$$H = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L = \frac{p_1p_2}{\alpha} - \frac{p_2^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{2}q_2^2$$

2. 哈密顿-雅可比方程

设作用量函数 $S(q_1, q_2, t) = W(q_1, q_2) - Et$，代入得：

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial W}{\partial q_2}-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2-\frac{\beta}{2}q_2^2=E$$

由于 H 不显含 q_1，可分离变量：

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}=a \quad (\text{积分常数})$$

则 $W=aq_1+W_2(q_2)$，代入得：

$$\frac{a}{\alpha}\frac{dW_2}{dq_2}-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2-\frac{\beta}{2}q_2^2=E$$

整理为关于 $p_2=dW_2/dq_2$ 的二次方程：

$$p_2^2-\alpha a p_2+\alpha^2\left(\frac{\beta}{2}q_2^2+E\right)=0$$

解得（判别式 $\Delta=\alpha^2a^2-4\alpha^2(\frac{\beta}{2}q_2^2+E)=\alpha^2(a^2-4E-2\beta q_2^2)$）：

$$p_2=\frac{\alpha a}{2}\pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{a^2-4E-2\beta q_2^2}$$

令 $K=a^2-4E$，则：

$$\frac{dW_2}{dq_2}=\frac{\alpha a}{2}\pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{K-2\beta q_2^2}$$

3. 作用量函数与运动方程

积分得特征函数（无需积出具体形式，只需对参数微分）：

$$W(q_1,q_2)=aq_1+\int\left(\frac{\alpha a}{2}\pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{K-2\beta q_2^2}\right)dq_2$$

作用量函数：

$$S(q_1,q_2,t)=W(q_1,q_2)-Et$$

正则变换：取新动量 $P_1=E$, $P_2=a$，则新坐标 $Q_1=\partial S/\partial E$, $Q_2=\partial S/\partial a$ 均为常数。我们关注 Q_1 方程来求 $q_2(t)$：

$$Q_1=\frac{\partial S}{\partial E}=-t+\frac{\partial}{\partial E}\int\left(\pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{K-2\beta q_2^2}\right)dq_2$$

由于 $K=a^2-4E$，有 $\frac{\partial K}{\partial E}=-4$。交换积分与微分顺序：

$$\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{K-2\beta q_2^2}\right)=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{K-2\beta q_2^2}}\cdot(-4)=-\frac{\alpha}{\sqrt{K-2\beta q_2^2}}$$

因此运动方程为：

$$-t-\alpha\int\frac{dq_2}{\sqrt{K-2\beta q_2^2}}=\text{常数}$$

积分 $\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-mx^2}}=\frac{1}{\sqrt{m}}\arcsin(\frac{\sqrt{m}x}{A})$，这里 $m=2\beta$：

$$-t-\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2\beta}q_2}{\sqrt{K}}\right)=C$$

整理得：

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2\beta}q_2}{\sqrt{K}}\right) = -\frac{\sqrt{2\beta}}{\alpha}(t+C)$$

$$q_2(t) = \sqrt{\frac{K}{2\beta}}\sin\left[\frac{\sqrt{2\beta}}{\alpha}(t+C')\right]$$

4. 本征频率与振动模式

从 $q_2(t)$ 的解可知，系统以角频率 ω 作简谐振动：

$$\omega = \frac{\sqrt{2\beta}}{\alpha}$$

结论验证：从拉格朗日方程也可导出 $\ddot{q}_2 + \frac{2\beta}{\alpha^2}q_2 = 0$，两者频率完全一致。原解答中出现的系数差异源于对 p_2 解的判别式系数处理失误。

5. 总结

- **哈密顿量**：$H = \frac{p_1 p_2}{\alpha} - \frac{p_2^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{2}q_2^2$
- **哈密顿-雅可比方程**：$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) = 0$
- **本征频率**：$\omega = \frac{\sqrt{2\beta}}{\alpha}$
- **振动模式**：q_2 振动，q_1 随动（p_1 守恒）。

四、附加题（共一题，20分）

质点在中心势$V(r) = -\frac{k}{r}e^{-\alpha r}$中运动，其中，$k, \alpha$都是证常数

1. 求出中心力的表达式$f(r)$,并对质点可能的运动轨道类型作定性分析
2. 求质点做圆周运动的周期，及在圆周运动附近作径向小振动的周期。

1. 中心力表达式与轨道类型定性分析

中心力表达式
由 $f(r) = -\frac{dV}{dr}$，对 $V(r) = -\frac{k}{r}e^{-\alpha r}$ 求导：

$$f(r) = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{k}{r}e^{-\alpha r}\right) = -\frac{ke^{-\alpha r}(\alpha r + 1)}{r^2}$$

由于 $k > 0$，$f(r) < 0$，表明这是一个**指向原点的吸引力**，其大小随 r 先增后减（在 $r = 1/\alpha$ 处有极值）。（Yukawa 势对应的力（或屏蔽库仑力））

轨道类型定性分析
有效势能（含离心项）：

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{k}{r}e^{-\alpha r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

- **短程行为**：$r \to 0$ 时，$V_{\text{eff}}(r) \sim \frac{L^2}{2mr^2} \to +\infty$，粒子无法到达原点。

- **长程行为**：$r \to \infty$ 时，$V_{\text{eff}}(r) \sim \frac{L^2}{2mr^2} \to 0^+$，有效势趋于零。

因此，$V_{\text{eff}}(r)$ 必存在**一个极小值**（对应稳定圆周运动）和**一个势垒**（在较小 r 处）。

轨道分类：

- **束缚轨道**（$E < 0$）：粒子被限制在势阱中，形成**闭合或进动的椭圆轨道**。由于势场偏离平方反比律，轨道一般不闭合，会发生进动。
- **非束缚轨道**（$E > 0$）：粒子可逃逸至无穷远，形成**双曲线轨道**。
- **圆轨道**（$E = V_{\text{eff}}(r_{\min})$）：稳定圆周运动，半径 r_0 由 $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$ 确定。

---

2. 圆周运动周期与径向小振动周期

圆周运动条件
由 $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$：

$$\frac{ke^{-\alpha r_0}(\alpha r_0 + 1)}{r_0^2} = \frac{L^2}{mr_0^3} \quad \Rightarrow \quad L^2 = mkr_0 e^{-\alpha r_0}(\alpha r_0 + 1)$$

圆周运动周期 T
角速度 $\dot{\theta} = \frac{L}{mr_0^2} = \sqrt{\frac{ke^{-\alpha r_0}(\alpha r_0 + 1)}{mr_0^3}}$，故：

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{mr_0^3}{ke^{-\alpha r_0}(\alpha r_0 + 1)}}}$$

径向小振动周期 T_r
在 r_0 附近展开 V_{eff} 到二阶，径向振动角频率为：

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r_0}}$$

计算二阶导数并代入 L^2 表达式，得：

$$\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r_0} = \frac{ke^{-\alpha r_0}}{r_0^3}\left(1 + \alpha r_0 - \alpha^2 r_0^2\right)$$

因此径向振动周期为：

$$\boxed{T_r = 2\pi\sqrt{\frac{mr_0^3}{ke^{-\alpha r_0}(1 + \alpha r_0 - \alpha^2 r_0^2)}}}$$

稳定性条件：为使圆轨道稳定（$\omega_r^2 > 0$），需 $1 + \alpha r_0 - \alpha^2 r_0^2 > 0$，即 $\alpha r_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$。若 αr_0 过大，圆轨道将不稳定。

总结：系统存在稳定的圆轨道，其周期由势场参数决定；在圆轨道附近的径向振动周期略长于圆轨道周期，且稳定性依赖于 αr_0 的大小。