

长三角工程教育联盟高校高等数学 A 联考试卷二（闭卷）

2024-2025 学年第 1 学期

（满分 100 分，考试时间 120 分钟）

***答案、解题过程必须写在答题纸上，写在试卷上的内容不予计分！**

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1、下列命题中，正确的有（ ）个

(1) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处函数值等于极限值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处极限值一定存在.

(3) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处可微.

(4) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(A) 一个 (B) 两个 (C) 三个 (D) 四个

2、方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内 ()

(A) 无实根 (B) 有唯一实根

(C) 有两个实根 (D) 有三个实根

3、下列反常积分收敛的是 ()

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ (B) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$ (C) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ (D) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$

4、如果 $\int du(x) = \int dv(x)$ ，则下列各式中一定成立的是 ()

① $u(x) = v(x)$ ② $du(x) = dv(x)$ ③ $u'(x) = v'(x)$ ④ $d \int u'(x) dx = d \int v'(x) dx$

(A) ①②③ (B) ①②④ (C) ①③④ (D) ②③④

5、函数 $f(x) = \frac{\frac{1}{e^x + e} \tan x}{x(e^x - e)}$ 的第一类间断点的个数是 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6、函数 $f(x) = \frac{\sin x}{\frac{1}{e^{x-1}} - 2}$ 的间断点是_____.

7、若函数 $y = x^2 \sin 2x$ ，则导数 $y^{(5)}(0) =$ _____.

8、设函数 $y = f(x)$ 是由方程 $e^{xy} + \tan(xy) = y$ 所确定，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $x = 0$

处的切线方程是_____.

9、三叶线 $r = a \sin 3\theta$, $a > 0$ 所围成的平面图形的面积是_____.

10、曲线 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$ 的弧长是_____.

三、解答题 (共 70 分)

11、(7 分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

12、(7 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^4} - 1}$

13、(7 分) 设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{3t} - 1) \end{cases}$, 其中 f 可导, 且 $f'(0) = 2, f''(0) = -1$.

求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0}$.

14、(7 分) 计算不定积分 $\int \sin(\ln x) dx$

15、(7 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & |x| > 1 \end{cases}$, 计算 $\int_0^3 xf(x-1) dx$.

16、(7 分) 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

(1) 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

(2) 求导函数 $f'(x)$.

17、(9 分) 求函数 $f(x) = \ln(1+x^2)$ 的单调区间、极值点、凹凸区间和拐点.

18、(5 分) 设函数 $f(x) = \int_0^x (x-1)e^{t+1} dt$, 求 $f'(x)$.

19、(7 分) 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 求图形 A 绕直线 $x=1$ 所得旋转体的体积.

20、(7 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上具有连续导数, $f(a) = 0$, $\max_{x \in [0, a]} |f'(x)| = M$,

证明: $\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq Ma^2$.