偏微分方程

李奇睿

浙江大学数学科学学院

qi-rui.li@zju.edu.cn

试卷 A

题目 A1 (15 分)

用特征线方法 (行波法) 求解下列初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - 3u_{xt} - 4u_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \cos x, & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x,0) = 2x+1, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

♠ 特征线方程是

$$(dx)^2 + 3dxdt - 4(dt)^2 = 0,$$

即

$$(dx - dt)(dx + 4dt) = 0.$$

特征线是

$$x - t = C_1, \quad x + 4t = C_2.$$

♠ 引进新的自变量

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + 4t.$$

函数 $\bar{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$ 作为 (ξ,η) 的函数满足方程

$$\bar{u}_{\xi\eta} = 0.$$

两次积分可知：存在函数 f 和 g 使得

$$u(x,t) = \bar{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) = f(x-t) + g(x+4t).$$

♠ 由初值条件得

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = u(x,0) = \cos x, \\ -f'(x) + 4g'(x) = u_t(x,0) = 2x+1. \end{cases}$$

积分得

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \cos x, \\ -f(x) + 4g(x) = x^2 + x + C_0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{5}(4\cos x - x^2 - x) - \dfrac{1}{5}C_0, \\ g(x) = \dfrac{1}{5}(\cos x + x^2 + x) + \dfrac{1}{5}C_0. \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-t) + g(x+4t) \\ &= \frac{1}{5}\left[4\cos(x-t) + \cos(x+4t)\right] + 2xt + 3t^2 + t. \end{aligned}$$

$\square$

题目 A2 (20 分)

求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \sin 2x, & 0 < x < 2\pi, t > 0, \\ u(0,t) = 1, u(2\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 1 - \frac{x}{2\pi} + 3\sin x, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

♠ 方程右端项仅依赖于空间变量 x，边值条件于 t 无关。

我们可以引入函数 $w(x)$ 使的 $v = u(x,t) - w(x)$ 满足齐次方程和齐次边值。

为此需要 $w = w(x)$ 满足常微分方程

$$\begin{cases} 4w_{xx}(x) = -\sin 2x, & (0 < x < 2\pi), \\ w(0) = 1, w(2\pi) = 0. \end{cases}$$

解得

$$w(x) = 1 - \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{16}\sin 2x.$$

♠ $v=u-w$ 满足齐次方程

$$\begin{cases} v_{tt}-4v_{xx}=0, & 0<x<2\pi, t>0, \\ v(0,t)=0, v(2\pi,t)=0, & t\geq 0, \\ v(x,0)=3\sin x-\frac{1}{16}\sin 2x, & 0\leq x\leq 2\pi, \\ v_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq 2\pi. \end{cases}$$

下面用分离变量法求出函数 v。特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad (0<x<2\pi), \\ X(0)=0, X(2\pi)=0. \end{cases}$$

解得特征值和特征函数:

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n}{2}x\right), \quad \lambda_n=\left(\frac{n}{2}\right)^2, \quad n=1,2,\cdots.$$

假设 $v(x,t)=\sum_{n\geq 1}X_n(x)T_n(t)$。则 T_n 满足方程

$$T_n''+4\lambda_n T_n=0.$$

因此 $T_n(t)=A_n\cos nt+B_n\sin nt$。所以

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nt+B_n\sin nt\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right).$$

由初值条件 $v(x,0)=3\sin x-\frac{1}{16}\sin 2x$ 和 $v_t(x,0)=0$ 有

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n}{2}x\right)=3\sin x-\frac{1}{16}\sin 2x,\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\sin\left(\frac{n}{2}x\right)=0.\end{cases}$$

因此在所有系数 A_n, B_n 中, 非零的只有

$$A_2=3,\quad A_4=-\frac{1}{16}.$$

于是

$$v(x,t)=3\cos 2t\sin x-\frac{1}{16}\cos 4t\sin 2x.$$

最终

$$u(x,t)=1-\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{16}(1-\cos 4t)\sin 2x+3\cos 2t\sin x.$$

□

题目 A3 (20 分)

求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} + 3u = te^{-3t}\sin 3x, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

用**特征函数展开法**。

♠ 特征值问题是

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad (0 < x < \pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

解出特征值和特征函数

$$X_n = \sin nx, \quad \lambda = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

♠ 假设 $u = \sum_{n\geq 1} X_n(x) T_n(t)$ 是方程的解，则

$$\begin{cases} \sum_{n\geq 1} \big(T_n'(t) + (4n^2+3) T_n(t)\big) \sin nx = te^{-3t}\sin 3x, \\ \sum_{n\geq 1} T_n(0) \sin nx = 0. \end{cases}$$

利用 $\{X_n\}$ 的 L^2 正交性

$$T_n = 0 \ (\forall n \neq 3), \quad 且 \quad \begin{cases} T_3'(t) + 39\,T_3(t) = te^{-3t}, \\ T_3(0) = 0. \end{cases}$$

♠ 利用常数变异法 $T_3 = C(t)e^{-39t}$，其中 $C(t)$ 满足

$$\begin{cases} C'(t) = te^{36t}, \\ C(0) = 0. \end{cases}$$

积分得到

$$C(t) = \int_0^t se^{36s}\,ds = \frac{1}{36}te^{36t} - \frac{1}{36^2}\left(e^{36t} - 1\right).$$

所以

$$T_3 = e^{-3t}\left[\frac{1}{36}t - \frac{1}{36^2}\left(1 - e^{-36t}\right)\right]$$

最终

$$u(x,t) = e^{-3t}\left[\frac{t}{36} + \left(\frac{1}{36}\right)^2\left(e^{-36t} - 1\right)\right]\sin 3x.$$

$\square$

题目 A4 (20 分)

已知 $\exp(-x^2)$ 的 Fourier 变换是 $\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)$. 求解

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} + u = f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

♠ 对方程关于 x 作 Fourier 变换，得到 $\widehat{u}(\lambda,t) = \mathscr{F}_x[u(x,t)](\lambda)$ 关于 t 的常微

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{u}}{dt} + (9\lambda^2+1)\widehat{u} = \widehat{f}(\lambda,t), \\ \widehat{u}(\lambda,0) = 0. \end{cases}$$

使用常数变异法或者 Duhamel 原理，可以求出

$$\widehat{u}(\lambda,t) = \int_0^t \widehat{f}(\lambda,\tau)e^{-(9\lambda^2+1)(t-\tau)}\,d\tau.$$

♠ 题目告诉我们 $\exp(-x^2)$ 的 Fourier 变换是 $\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)$。因此

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}e^{\mathrm{i}\lambda x}\,d\lambda = e^{-x^2}.$$

由此可以计算

$$\begin{aligned}\left[e^{-(9\lambda^2+1)t}\right]^{\vee}(x) &= \frac{e^{-t}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-9t\lambda^2} e^{\mathbf{i}\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{e^{-t}}{6\pi\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2} e^{\mathbf{i}\frac{\xi}{3\sqrt{t}}x} d\xi \\ &= \frac{e^{-t}}{12\pi\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\lambda^2} e^{\mathbf{i}\lambda\frac{x}{6\sqrt{t}}} d\lambda \\ &= \frac{e^{-t}}{6\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{36t}}.\end{aligned}$$

因此

$$\widehat{f}(\lambda,\tau)e^{-(9\lambda^2+1)(t-\tau)} = \widehat{f}(\lambda,\tau)\left[\frac{e^{-(t-\tau)}}{6\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{36(t-\tau)}}\right]^{\wedge}.$$

♠ 利用 Fourier 变换的卷积性质，最终得到

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \int_0^t \left[\widehat{f}(\lambda,\tau)e^{-(9\lambda^2+1)(t-\tau)}\right]^{\vee} d\tau \\ &= \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)\frac{e^{-(t-\tau)}}{6\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{36(t-\tau)}} d\xi\, d\tau.\end{aligned}$$

题目 A5 (15 分)

求解下列半无界定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 2t, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \cos x, \ u_t(x, 0) = 2x, & x \geq 0. \end{cases}$$

反射法 (对称延拓法).

♠ 取 $w = u - 2t$。则 w 满足

$$\begin{cases} w_{tt} - 4w_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ w(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ w(x, 0) = \cos x, \ w_t(x, 0) = 2x - 2, & x \geq 0. \end{cases}$$

♠ 作奇延拓:

$$\phi(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\cos x, & x < 0, \end{cases} \quad \text{以及} \quad \psi(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 2x + 2, & x < 0. \end{cases}$$

考虑柯西问题

$$\begin{cases} v_{tt} - 4v_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ v(x,0) = \phi(x),\ v_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

由 d'Alembert 公式

$$v(x,t) = \frac{\phi(x+2t) + \phi(x-2t)}{2} + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \psi(s)\,ds$$

♠ 由 $u(x,t) = v(x,t)\big|_{x>0} + 2t$ 可知

$$u(x,t) = \begin{cases} 2xt + \dfrac{1}{2}\Big[\cos(x+2t) + \cos(x-2t)\Big], & x > 2t > 0, \\ \dfrac{1}{4}(x+2t)^2 + \dfrac{1}{2}\cos(x+2t), & x = 2t > 0 \\ 2xt - x + 2t + \dfrac{1}{2}\Big[\cos(x+2t) - \cos(x-2t)\Big], & 0 \le x < 2t. \end{cases}$$

□

题目 A6 (10 分)

证明存在一个函数 $\phi(x)$，使得定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \pi^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = x, u_t(x,0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

有满足 $u(x,\sqrt{3}) = 0$ 的解，且求出函数 $\phi(x)$.

♠ 特征值问题是

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

解出特征值和特征函数

$$X_n = \sin nx, \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

假设 $u = \sum_{n\geq 1} X_n(x) T_n(T)$。利用 $\{X_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$T_n'' = -\lambda_n \pi^2 T_n.$$

因此 $T_n(t) = A_n \sin n\pi t + B_n \cos n\pi t$。故

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin n\pi t + B_n \cos n\pi t \right) \sin nx.$$

♠ 利用 $u(x,0)=x$ 得到 $x=\sum_{n=1}^{n} B_n \sin nx$。因此

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx=-\frac{2}{n\pi}(x\cos nx)\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

现在得到

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin n\pi t+(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\cos n\pi t\right)\sin nx.$$

♠ 利用 $u(x,\sqrt{3})=0$ 可以发现

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin\sqrt{3}n\pi+(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\cos\sqrt{3}n\pi\right)\sin nx \Longrightarrow A_n=(-1)^n\frac{2}{n}\cot\left(\sqrt{3}n\pi\right).$$

于是

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{n}\left(\cot(\sqrt{3}n\pi)\sin(\pi nt)-\cos(\pi nt)\right)\sin(nx).$$

计算可知

$$\phi(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2\pi\cot(\sqrt{3}n\pi)\sin(nx).$$

□

试卷 B

题目 B1 (15 分)

利用幂级数解法求二阶线性微分方程

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 10y = 0, \\ y(0) = 0, \frac{dy}{dx}(0) = 1. \end{cases}$$

♠ 假设幂级数形式为

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

直接计算得到

$$2x\frac{dy}{dx} = 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n,$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \end{aligned}$$

带入常微得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n+10a_n\right]x^n=0.$$

♠ 因此有递推公式

$$a_{n+2}=\frac{2n-10}{(n+2)(n+1)}a_n,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

- 对所有 $n\geq 5$ 都有 $a_{n+2}=0$。
- 代入定解条件 $a_0=0, a_1=1$ 解得

$$a_1=1, a_3=-\frac{4}{3}, a_5=\frac{4}{15},$$

- 其它系数为零。

♠ 合并上述讨论得到

$$y=x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5.$$

□

题目 B2 (15 分)

定义函数 $f(t), -\infty < t < +\infty$ 的 Fourier 变换为

$$\mathscr{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt.$$

(1) 求证: $\mathscr{F}[f(t+t_0)](\omega) = e^{i\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)](\omega)$;

(2) 利用 Fourier 变换求解一阶偏微分方程初值问题

$$\begin{cases} u_x + u_y = f(x,y), & x \geq 0, -\infty < y < +\infty, \\ u(0,y) = \varphi(y), & -\infty < y < +\infty. \end{cases}$$

(1). 直接计算有

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[f(t+t_0)](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_0)\, e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt \\ &= e^{\mathrm{i}\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_0)\, e^{-\mathrm{i}\omega (t+t_0)}\, dt \\ &= e^{\mathrm{i}\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt \\ &= e^{\mathrm{i}\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)](\omega). \end{aligned}$$

(2). 对方程关于 y 作 Fourier 变换，得到 $\widehat{u}(x,\omega)=\mathscr{F}_y[u(x,y)](\omega)$ 关于 x 的常微

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\widehat{u}+\mathbf{i}\omega\widehat{u}=\widehat{f}(x,\omega), \quad x\geq 0, \\ \widehat{u}(0,\omega)=\widehat{\varphi}(\omega), \end{cases}$$

其中

$$\widehat{u}(x,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)\,e^{-\mathbf{i}\omega y}\,dy,$$

$$\widehat{f}(x,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,e^{-\mathbf{i}\omega y}\,dy,$$

$$\widehat{\varphi}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,e^{-\mathbf{i}\omega y}\,dy.$$

用常数变异法求解得到

$$\widehat{u}(x,\omega)=e^{-\mathbf{i}\omega x}\widehat{\varphi}(\omega)+\int_0^x e^{-\mathbf{i}\omega(x-\xi)}\widehat{f}(\xi,\omega)\,d\xi.$$

利用第 (1) 问结果, 两边关于 ω 作 Fourier 逆变换, 得到

$$u(x,y)=\varphi(y-x)+\int_0^x f(\xi,y-x+\xi)\,d\xi.$$

□

题目 B3 (15 分)

半无限长弦一端固定在 $x = 0$ 处，受区间 $[10, 20]$ 上与时间无关的未知外力作用 (外力密度为 $f(x)$)，振幅记为 $u(x, t)$，(规范化后) 可表示为

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x), & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

现在希望通过观察 $x = 0$ 处弦的张力的变化 (可表示为 $u_x(0, t) = g(t)$，其中 $g(t)$ 表示观察到的张力．观察时间段为 $0 \leq t \leq T$) 来确定未知力 $f(x)$．问:

- 能够完整确定出未知力 $f(x)$ 所需要的最少观察时间 T 是多少?
- 给出通过张力 $g(t)$ 得出未知力 $f(x)$ 的公式.

方法： 反射法 (对称延拓法)。

记 F 是 f 的奇延拓。考虑柯西问题

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = F, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ v(x,0) = 0,\ \ v_t(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

由 Kirchhoff 公式得

$$v(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(s)\, ds d\tau.$$

利用 $g(t) = u_x(0,t) = v_x(0,t)$ 得到

$$g(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left[F(t-\tau) - F(\tau - t) \right] d\tau.$$

由于 F 是 f 的奇延拓，因此

$$g(t) = \int_0^t F(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

两边关于 t 求导，

$$f(t) = g'(t).$$

因为未知力 $f(x)$ 作用在区间 $[10,20]$ 上，所以 $T \geq 20$.

□

题目 B4 (15 分)

用分离变量法求解

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = -24x, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 3\pi^2, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x^3 + \sin\frac{3x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

♠ 取 $v = u - x^3$。则 v 满足方程

$$\begin{cases} v_t - 4v_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(0,t) = 0, v_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = \sin\frac{3x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

特征值问题是

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

解出特征值和特征函数

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2, \quad X_n = \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

♠ 利用 $\{X_n\}$ 的 L^2 正交性 $T_n(t)$ 满足

$$T_n' = -4\lambda_n T_n.$$

解出

$$T_n = A_n e^{-4\lambda_n t} = A_n e^{-(2n-1)^2 t}.$$

于是

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(2n-1)^2 t} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) x.$$

♠ 利用初值条件 $v(x,0) = \sin\frac{3x}{2}$ 知

$$\sin\frac{3x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) x.$$

因此得到 $A_2 = 1$，以及 $A_n = 0$ $(n \neq 2)$。所以 $v = e^{-9t}\sin\frac{3x}{2}$。于是

$$u(x,t) = x^3 + e^{-9t}\sin\frac{3x}{2}.$$

□

题目 B5 (20 分)

考虑半圆形外区域上非齐次泊松方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, & y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1, \\ u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, \\ u(x, y) = 0, & y = 0, |x| \geq 1, \\ \sup_{y\geq 0, x^2+y^2\geq 1} |u(x, y)| < \infty. & \end{cases}$$

(1) 引进极坐标 (r, θ), 记 $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. 已知

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}.$$

写出 $v(r, \theta)$ 满足的方程和边值条件.

(2) 用分离变量法求出 $u(x, y)$.

(1). 非齐次项 $\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^4} = \frac{\sin 2\theta}{r^2}$. 所以

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = \frac{\sin 2\theta}{r^2}, & r > 1, 0 < \theta < \pi, \\ v = 0, & r = 1, 0 \leq \theta \leq \pi, \\ v = 0, & r \geq 1, \theta = 0 \text{ 或 } \pi, \\ \sup_{r>1, 0<\theta<\pi} |v(r, \theta)| < \infty. & \end{cases}$$

(2). 用按特征函数展开法求 $v(r,\theta)$。特征值问题为

$$\begin{cases} H''+\lambda H=0, & 0<\theta<\pi, \\ H(0)=H(\pi)=0, \end{cases}$$

解出特征值和特征函数

$$\lambda_n=n^2,\quad H_n=\sin n\theta,\quad n=1,2,\cdots.$$

假设 $v(r,\theta)=\sum_{n\geq 1}R_n(r)H_n(\theta)$。代入 v 满足的偏微得到

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{n^2}{r^2}R_n\right)\sin n\theta=\frac{\sin 2\theta}{r^2}, & 1<r<+\infty, 0<\theta<\pi, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}R_n(1)\sin n\theta=0, & 0\leq\theta\leq\pi, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\sin n\theta \text{ 有界}, & 1<r<+\infty, 0<\theta<\pi. \end{cases}$$

利用 $\{\sin n\theta\}_{n\geq 1}$ 的 L^2 正交性得到

$$\begin{cases} R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{n^2}{r^2}R_n=f_n, & 1<r<+\infty, \\ R_n(1)=0,\quad |R_n(r)|<\infty, \end{cases}$$

其中

$$f_2=\frac{1}{r^2},\quad \text{其它 } f_n=0.$$

容易得到 $R_n = 0\ (n \neq 2)$。令 $y(s) = R_2(e^s)$，$r = e^s$。则

$$y''(s) = r^2 R_2'' + R_2' r = r^2\Big(\frac{1}{r^2} + \frac{4}{r^2} R_2\Big) = 1 + 4y(s).$$

再令 $z(s) = y + \frac{1}{4}$。因为 $y(0) = 0$ 以及 $|y|$ 有界，我们有

$$z''(s) = 4z(s), \quad z(0) = \frac{1}{4}, \quad z \text{ 是有界函数}.$$

解出

$$z(s) = \frac{1}{4} e^{-2s}.$$

于是

$$y(s) = \frac{1}{4}\big(e^{-2s} - 1\big).$$

这表明

$$R_2 = \frac{1}{4r^2}(1 - r^2).$$

所以

$$u = R_2 \sin 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{4r^2}(1 - r^2) = \frac{xy\big(1 - (x^2 + y^2)\big)}{2(x^2 + y^2)^2}.$$

$\square$

题目 B6 (20 分)

判别二阶线性偏微分方程

$$u_{xx} + 2\cos x \cdot u_{xy} - \sin^2 x \cdot u_{yy} - \sin x \cdot u_y = 2(1+\cos^2 x)$$

是椭圆型，抛物型，还是双曲型方程？并用行波法求解

$$\begin{cases} u_{xx} + 2\cos x \cdot u_{xy} - \sin^2 x \cdot u_{yy} - \sin x \cdot u_y = 2(1+\cos^2 x), & x, y \in \mathbb{R}, \\ u|_{y=\sin x} = x + x^2,\ u_y|_{y=\sin x} = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

♠ 判别式 $\mathscr{D} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 > 0$. 所以是双曲型.

♠ 该偏微的特征线方程是

$$0 = (dy)^2 - 2\cos x dx dy - \sin^2 x (dx)^2 = \left[dy - (\cos x + 1)dx\right]\left[dy - (\cos x - 1)dx\right].$$

因此通积分为 $x - \sin x + y = C_1$, $x + \sin x - y = C_2$. 做变量替换

$$\xi = x - \sin x + y, \quad \eta = x + \sin x - y.$$

考虑函数 $\bar{u}(\xi, \eta)$, 该函数由下式决定

$$u(x, y) = \bar{u}(x - \sin x + y, x + \sin x - y)$$

直接计算有

$$
\begin{aligned}
&u_x = (1-\cos x)\bar{u}_\xi + (1+\cos x)\bar{u}_\eta,\\
&u_y = \bar{u}_\xi - \bar{u}_\eta,\\
&u_{xx} = (1-\cos x)^2\bar{u}_{\xi\xi} + 2\sin^2 x\cdot \bar{u}_{\xi\eta} + (1+\cos x)^2 u_{\eta\eta} + \sin x\cdot \bar{u}_\xi - \sin x\cdot \bar{u}_\eta,\\
&u_{yy} = \bar{u}_{\xi\xi} + \bar{u}_{\eta\eta} - 2\bar{u}_{\xi\eta},\\
&u_{xy} = (1-\cos x)\bar{u}_{\xi\xi} + 2\cos x\cdot \bar{u}_{\xi\eta} - (1+\cos x)\bar{u}_{\eta\eta}.
\end{aligned}
$$

代入 u 满足的偏微得到

$$
\begin{aligned}
2(1+\cos^2 x) &= u_{xx} + 2\cos x\cdot u_{xy} - \sin^2 x\cdot u_{yy} - \sin x\cdot u_y\\
&= 4\bar{u}_{\xi\eta}.
\end{aligned}
$$

上式左端项为

$$2(1+\cos^2 x) = 3+\cos 2x = 3+\cos(\xi+\eta).$$

于是得到

$$\bar{u}_{\xi\eta} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(\xi+\eta).$$

♠ 上式两端关于 ξ 和 η 做积分得到

$$\bar{u}(\xi,\eta) = \frac{3}{4}\xi\eta - \frac{1}{4}\cos(\xi+\eta) + F(\xi) + G(\eta),$$

其中 F, G 是可导的一元函数.

利用 $u(x,y)$ 和 $\bar{u}(\xi,\eta)$ 的关系，

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{3}{4}(x-\sin x+y)(x+\sin x-y)-\frac{1}{4}\cos(2x) \\ &\quad +F(x-\sin x+y)+G(x+\sin x-y). \end{aligned}$$

♠ 代入定解条件 $u|_{y=\sin x}=x+x^2$ 得到

$$F(x)+G(x)=x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\cos 2x.$$

再利用 $u_y|_{y=\sin x}=0$ 得到

$$F'(x)-G'(x)=0 \Longrightarrow F(x)-G(x)=C.$$

解出

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{2}C, \\ G(x) &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}C. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &F(x-\sin x+y)+G(x+\sin x-y) \\ &= x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}(\sin x-y)^2+\frac{1}{4}\cos(2x)\cos\left[2(y-\sin x)\right] \end{aligned}$$

最终得到

$$u(x,y)=x+x^2-\frac{1}{2}(y-\sin x)^2-\frac{1}{2}\cos(2x)\sin^2(y-\sin x).$$

其它题目

讲稿 2：练习 1，练习 2，练习 3.

讲稿 3：练习 2，练习 3，练习 4.

讲稿 4：练习 2，练习 3.

讲稿 5：练习 7，练习 8.

题目 1 (20 分)

(1) 设 $w(x,t)$ 是热方程 $w_t - w_{xx} = 0$ 的解，证明 $u(x,t) = -2w_x/w$ 满足

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0.$$

(2) 求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t + uu_x - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \dfrac{4\sin 2x}{2+\cos 2x}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(1). 注意到 $w_t = w_{xx}$ 意味着

$$\partial_t \log w = \frac{w_t}{w} = \frac{w_{xx}}{w} = \partial_x^2 \log w + (\partial_x \log w)^2.$$

对该式两边关于 x 求导

$$\partial_t[(\log w)_x] = \partial_x^2[(\log w)_x] + 2(\log w)_x \partial_x[(\log w)_x] \quad (III.1.1).$$

注意到 $u = -2(\log w)_x$。据此有

$$\partial_t[(\log w)_x] = -\frac{1}{2}u_t, \quad \partial_x^2[(\log w)_x] + 2(\log w)_x\partial_x[(\log w)_x] = -\frac{1}{2}u_{xx} + \frac{1}{2}uu_x.$$

代入 (III.1.1) 得到 $u_t + uu_x - u_{xx} = 0$。

(2). 利用 (1)，我们仅需求 $w(x,t)$。因为 $u(x,t)=-2(\log w)_x$，故

$$-2\log w(x,t)+2\log w(0,t)=\int_0^x u(s,t)\,ds.$$

因为 u 由 w 的导数决定，不妨假 $w(0,t)=1$。于是上式等价于

$$w(x,t)=e^{-\frac{1}{2}\int_0^x u(s,t)\,ds}.$$

通过 $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ 得到边值条件

$$w_x(0,t)=0,\quad w_x(\pi,t)=0.$$

由 $u(x,0)=\frac{4\sin 2x}{2+\cos 2x}$ 得到初值条件

$$w(0,x)=e^{-2\int_0^x \frac{\sin 2s}{2+\cos 2s}\,ds}=\frac{2+\cos 2x}{3}.$$

上述讨论表明 w 满足如下 PDE

$$(III.1.2)\quad \begin{cases} w_t-w_{xx}=0, & 0<x<\pi, t>0,\\ w_x(t,0)=w_x(t,\pi)=0, & t\geq 0,\\ w(0,x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\cos 2x, & 0\leq x\leq \pi. \end{cases}$$

下面用分离变量法求解 (III.1.2)。特征值问题是

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

解得特征值和特征函数

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n = \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

假设解为 $w = \sum_{n \geq 0} X_n(x) T_n(t)$。利用 $\{X_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$T_n' = -\lambda_n T_n \Longrightarrow T_n = e^{-n^2 t}.$$

因此

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \cos nx.$$

代入初值条件 $w(0, x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos 2x$，得到

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_2 = \frac{1}{3}, \quad \text{其它 } A_n = 0.$$

于是 $w(x, t) = \frac{1}{3}(2 + e^{-4t} \cos 2x)$。最终得到

$$u(x, t) = -2(\log w)_x = \frac{4 \sin 2x}{2e^{4t} + \cos 2x}.$$

题目 2 (15 分)

(1) 已知函数 e^{-x^2} 的 Fourier 变换是

$$\mathscr{F}[e^{-x^2}](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-\mathrm{i}\lambda x} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\lambda^2}.$$

设 $a > 0$ 为常数. 试求函数 $e^{-a\lambda^2}$ 的 Fourier 逆变换:

$$\mathscr{F}^{-1}[e^{-a\lambda^2}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\lambda^2} e^{\mathrm{i}\lambda x} d\lambda.$$

(2) 用 Fourier 变换法求解初值问题:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2tu = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

的 Green 函数 $G(x,t,\xi)$; 即求函数 $G(x,t,\xi)$ 使得

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t,\xi)\varphi(\xi) d\xi.$$

(1). 直接计算有

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}[e^{-a\lambda^2}](x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}\lambda)^2} e^{\mathrm{i}(\sqrt{a}\lambda)\frac{x}{\sqrt{a}}} d(\sqrt{a}\lambda) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} e^{\mathrm{i}\mu\frac{x}{\sqrt{a}}} d\mu \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}. \quad (\text{利用已知} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-\mathrm{i}\lambda x} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\lambda^2})
\end{aligned}
$$

(2). 对方程关于 x 作 Fourier 变换, 得到 $\widehat{u}(\lambda, t) = \mathscr{F}_x[u(x, t)](\lambda)$ 关于 t 的常微

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}\widehat{u} + (\lambda^2 - 2t)\widehat{u} = 0, \\
\widehat{u}(\lambda, 0) = \widehat{\varphi}(\lambda).
\end{cases}
$$

该常微的解为

$$
\widehat{u}(\lambda, t) = \widehat{\varphi}(\lambda) e^{-\lambda^2 t} e^{t^2} = \frac{e^{t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \widehat{\varphi}(\lambda)[e^{-\frac{x^2}{4t}}]^{\wedge}.
$$

第二个等式使用了 (1) 的结论. 利用 Fourier 变换的卷积性质

$$
u(x, t) = \frac{e^{t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \varphi(x) * [e^{-\frac{x^2}{4t}}] = \frac{e^{t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi.
$$

所以

$$
G(x, t, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{t^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}.
$$