偏微分方程

李奇睿

浙江大学数学科学学院

qi-rui.li@zju.edu.cn

第四章：积分变换法

本章概览

♠ 介绍 Fourier 变换的定义及其性质。

♠ 介绍 Fourier 变换在求解偏微分方程中的应用。

♠ 介绍 Laplace 变换的性质极其应用。

教学要求

♣ 熟练掌握 Fourier 变换的性质；

♣ 会计算一些简单函数的 Fourier 变换；

♣ 熟练掌握用 Fourier 变换求解线性偏微分方程。

☒ Laplace 变换及应用不要求。

Fourier 变换的来源

周期为 T 的函数 f 可以展开成 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin\frac{2n\pi x}{T} + B_n \cos\frac{2n\pi x}{T}\right).$$

注：若 f 定义在有限区间 $[a, b]$ 上，可被认为是周期的 (通过延拓)，周期为 $T = b - a$。

利用 Euler 公式

$$\sin\frac{2n\pi x}{T} = \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\frac{2\pi nx}{T}\mathbf{i}} - e^{-\frac{2\pi nx}{T}\mathbf{i}}\right), \quad \cos\frac{2n\pi x}{T} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi nx}{T}\mathbf{i}} + e^{-\frac{2\pi nx}{T}\mathbf{i}}\right),$$

我们得到

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi nx}{T}\mathbf{i}}, \quad C_n \in \mathbb{C}.$$

利用 $\{e^{\frac{2\pi nx}{T}\mathbf{i}}\}$ 的正交性：

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{2\pi(n-m)x}{T}\mathbf{i}}dx = \delta_{nm},$$

可以算出

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)e^{-\frac{2\pi ny}{T}\mathbf{i}}dy.$$

把 C_n 的表达式代入到 f 的 Fourier 级数中，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\, e^{-\frac{2\pi n y}{T}\mathrm{i}}\, dy\right) e^{\frac{2\pi n x}{T}\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\, e^{-\lambda_n y\mathrm{i}}\, dy\right) e^{\lambda_n x\mathrm{i}} \quad (\lambda_n = \frac{2\pi}{T} n).
\end{aligned}
$$

这是$\lambda \mapsto e^{\lambda x\mathrm{i}} F_T(\lambda)$关于分划 $\{\Delta_n\}_{n=0,\pm1,\cdots}$，$\Delta_n = [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ 的 Darboux 和，其中

$$
F_T(\lambda) := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\, e^{-\lambda y\mathrm{i}}\, dy.
$$

当 $T \to \infty$ 时，可以看到

$$
F_T(\lambda) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\, e^{-\lambda y\mathrm{i}}\, dy \;\to\; \widehat{f}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-\lambda y\mathrm{i}}\, dy,
$$

$$
\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \to \int_{\mathbb{R}} d\lambda.
$$

若 f 是 $\mathbb{R}$ 上的任何函数，可以认为其周期 $T=\infty$。在 Fourier 级数中令 $T\to\infty$，

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\lambda)e^{\lambda x\mathrm{i}}d\lambda.$$

定义：Fourier 变换及其逆变换

- 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ (即绝对可积)，其 Fourier 变换 为

$$\mathscr{F}[f](\lambda)=\widehat{f}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-\lambda\cdot x\mathrm{i}}dx,\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}^n.$$

- 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ (即绝对可积)，其 Fourier 逆变换 为

$$\mathscr{F}^{-1}[f](x)=f^{\vee}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n}f(\lambda)e^{\lambda\cdot x\mathrm{i}}d\lambda,\quad\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

注：课程仅考虑 $n=1$ 的情况，这时 $\lambda\cdot x=x\lambda$。

Fourier 反演公式 若 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap C^1(\mathbb{R})$ (或分段 C^1)，则 $f=\mathscr{F}^{-1}\circ\mathscr{F}[f]$.

练习 1

求如下函数 f 的 Fourier 变换:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-\beta x} \text{ (其中 } \beta > 0), & x > 0. \end{cases}$$

按定义计算

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\mathbf{i}\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\beta+\mathbf{i}\lambda)x} dx \\ &= -\frac{1}{\beta+\mathbf{i}\lambda} e^{-(\beta+\mathbf{i}\lambda)x}\Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\beta+\mathbf{i}\lambda}. \end{aligned}$$

□

练习 2

求如下函数 f 的 Fourier 变换:

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

按定义计算

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\mathbf{i}\lambda x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|-\mathbf{i}\lambda x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-\mathbf{i}\lambda)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+\mathbf{i}\lambda)x} dx \\
&= \frac{1}{1-\mathbf{i}\lambda} e^{(1-\mathbf{i}\lambda)x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+\mathbf{i}\lambda} e^{-(1+\mathbf{i}\lambda)x}\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{1-\mathbf{i}\lambda} + \frac{1}{1+\mathbf{i}\lambda} \\
&= \frac{2}{1+\lambda^2}.
\end{aligned}$$

□

练习 3

求如下函数 f 的 Fourier 变换:

$$f(x) = \frac{\sin ax}{x}, \text{ (其中 } a > 0).$$

按定义计算

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\mathrm{i}\lambda x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin ax}{x} \cos(\lambda x) dx - \mathbf{i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin ax}{x} \sin(\lambda x) dx \\
&= 2 \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cos(\lambda x) dx \quad \text{(利用被积函数的奇偶性)} \\
&= \int_0^\infty \frac{\sin(a+\lambda)x + \sin(a-\lambda)x}{x} dx.
\end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

简单的变量代换告诉我们

$$\widehat{f}(\lambda) = \begin{cases} \pi, & |\lambda| < a, \\ 0, & |\lambda| > a, \\ \frac{\pi}{2}, & |\lambda| = a. \end{cases}$$

我们验证

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

对任何 $(x,t)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$，考虑 $f(x,t)=\frac{\sin x}{x}e^{-tx}$，以及 $F(t)=\int_0^\infty f(x,t)\,dt$。

$$F'(t) = -\int_0^\infty \sin x e^{-tx}\,dx.$$

利用分部积分，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin x e^{-tx}dx &= -[e^{-tx}\cos x]\Big|_0^\infty - t\int_0^\infty e^{-tx}\cos x dx\\ &= 1 - t\Big([\sin x e^{-tx}]\Big|_0^\infty + t\int_0^\infty \sin x e^{-tx}dx\Big)\\ &= 1 - t^2\int_0^\infty \sin x e^{-tx}dx.\end{aligned}$$

因此得到 $F'(t) = -(1+t^2)^{-1} = -(\arctan t)'$。所以

$$\int_{[0,\infty)} \frac{\sin x}{x}\,dx = F(0) = F(\infty) + F(0) - F(\infty) = -\int_0^\infty F'(t)\,dt = \arctan x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Fourier 变换的基本性质

如下性质可通过定义直接验证 (自由练习)。记 $f^\wedge = \widehat{f} = \mathscr{F}[f]$，$f^\vee = \mathscr{F}^{-1}[f]$。

♠ 线性性：$(f+\mu g)^\wedge = \widehat{f} + \mu \widehat{g}$，$(f+\mu g)^\vee = f^\vee + \mu g^\vee$ $(\mu \in \mathbb{C})$。

♠ 平移性：$[f(x-h)]^\wedge(\lambda) = e^{-\mathbf{i}h\lambda}\widehat{f}(\lambda)$，$[f(x)e^{\mathbf{i}hx}]^\wedge(\lambda) = \widehat{f}(\lambda - h)$ $(h \in \mathbb{R})$。

♠ 伸缩性：$[f(ax)]^\wedge(\lambda) = a^{-1}\widehat{f}\big(a^{-1}\lambda\big)$，$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。

♠ 乘子性质：$[xf(x)]^\wedge(\lambda) = \mathbf{i}\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}(\lambda)$，一般的 $[x^m f(x)]^\wedge(\lambda) = \mathbf{i}^m \frac{d^m}{d\lambda^m}\widehat{f}(\lambda)$ $(m \geq \mathbb{N})$。

♠ 对称性质：$\widehat{f}(-\lambda) = 2\pi f^\vee(\lambda)$.

记 $f^{\wedge} = \widehat{f} = \mathscr{F}[f]$，$f^{\vee} = \mathscr{F}^{-1}[f]$。

♠ 伴随性质：$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,g(x)\,dx$。

证明. 按定义计算

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\,e^{-\mathbf{i}\lambda x}d\lambda\right]dx = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\left[\int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-\mathbf{i}\lambda x}dx\right]d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,g(x)\,dx$$

♠ 微分性质：若 $f \in C^m(\mathbb{R})$，$\lim_{|x|\to\infty} f^{(k)}(x) = 0\ (k = 1, \ldots, m-1)$，

$$[f^{(m)}]^{\wedge}(\lambda) = (\mathbf{i}\lambda)^m f^{\wedge}(\lambda).$$

证明. 反复利用分部积分

$$[f^{(m)}]^{\wedge}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f^{(m)}\,e^{-\mathbf{i}\lambda x}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathbf{i}\lambda x}df^{(m-1)} = \mathbf{i}\lambda \int_{\mathbb{R}} f^{(m-1)}\,e^{-\mathbf{i}\lambda x}dx = \cdots = (\mathbf{i}\lambda)^m f^{\wedge}(\lambda).$$

记 $f^\wedge = \widehat{f} = \mathscr{F}[f]$，$f^\vee = \mathscr{F}^{-1}[f]$。

♠ 积分性质 若 $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \in L^1(\mathbb{R})$，则 $\widehat{g}(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\widehat{f}(\lambda)$。

证明. 因为 $f = g'$，利用 Fourier 变换的微分性质，$\widehat{f}(\lambda) = [g']^\wedge(\lambda) = \mathrm{i}\lambda\widehat{g}(\lambda)$。

♠ Parseval 等式：若 $f, \widehat{f} \in L^1$ 且 $[\widehat{f}]^\vee = f$，则 $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2$.

证明. 利用 Fourier 变换的卷积性质，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f^2 &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)\,e^{\mathrm{i}\lambda x}\,d\lambda\Big]\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{\mathrm{i}\lambda x}\,dx\Big]\,d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}[f]\cdot\overline{\mathscr{F}[f]} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2.\end{aligned}$$

卷积定义及其运算

定义：函数的卷积. 若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$，二者的卷积 (convolution) 定义为

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

注 1. 卷积是对称的，即 $(f * g)(x) = (g * f)(x)$。事实上

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)g(-y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz = (g * f)(x).
\end{aligned}$$

注 2.: 课程仅考虑 $n = 1$ 的情况，这时

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy.$$

练习 4

计算如下两个函数的卷积

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ e^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

按定义计算

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{y\leq x\}}\cdot \mathbf{1}_{\{y\geq 0\}}\,e^{-y}\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{0\leq y\leq x\}}\,e^{-y}\,dy\\ &= \begin{cases}0, & x\leq 0,\\ \int_0^x e^{-y}\,dy, & x>0,\end{cases}\\ &= \begin{cases}0, & x\leq 0,\\ 1-e^{-x}, & x>0.\end{cases}\end{aligned}$$

□

Fourier 变换的卷积性质：若 $f, g \in L^1$，则 $\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F}[f]\,\mathscr{F}[g]$。

证明. 按定义计算，并在计算中交换积分顺序

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f * g](\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \right] e^{-\mathrm{i}\lambda x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, e^{-\mathrm{i}\lambda x}\, dx \right] g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, e^{-\mathrm{i}\lambda (x-y)}\, dx \right] e^{-\mathrm{i}\lambda y}\, g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(z)\, e^{-\mathrm{i}\lambda z}\, dz \right] e^{-\mathrm{i}\lambda y}\, g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)\, e^{-\mathrm{i}\lambda y}\, g(y)\, dy \\
&= \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda).
\end{aligned}
$$

推论： $\mathscr{F}^{-1}[fg] = \mathscr{F}^{-1}[f] * \mathscr{F}^{-1}[g]$ （在应用中常用）。

练习 5

求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的 Fourier 变换。

直接计算表明

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-\mathrm{i}\lambda x} dx = \frac{\mathrm{i}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} de^{-\mathrm{i}\lambda x} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\lambda} \left[e^{-x^2} e^{-\mathrm{i}\lambda x} \right] \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{2\mathrm{i}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2} e^{-\mathrm{i}\lambda x} dx \\
&= \frac{2\mathrm{i}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2} e^{-\mathrm{i}\lambda x} dx \\
&= \frac{2\mathrm{i}}{\lambda} [x f(x)]^{\wedge}(\lambda) \\
&= \frac{2\mathrm{i}}{\lambda} \cdot \mathrm{i} \frac{d}{d\lambda} \widehat{f}(\lambda).
\end{aligned}
$$

这表明 $\widehat{f}(\lambda)$ 满足

$$
\frac{d}{d\lambda} \widehat{f}(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} \widehat{f}(\lambda) \Longrightarrow \widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(0) e^{-\frac{1}{4}\lambda^2} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\lambda^2}.
$$

这里我们利用了

$$
\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy} = \sqrt{2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr} = \sqrt{\pi \int_0^\infty e^{-t} dt} = \sqrt{\pi}.
$$

练习 6

求函数 $f(x)=e^{-3(x^2+4x-2)}$ 的 Fourier 变换。

依次利用 Fourier 变换的线性性、平移性和伸缩性，我们计算

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\lambda) &= [e^{-3(x+2)^2+18}]^\wedge(\lambda) \\
&= e^{18}\int_{\mathbb{R}} e^{-3(x+2)^2}\, e^{-\mathrm{i}x\lambda}\, dx \\
&= e^{18}\, e^{2\mathrm{i}\lambda}\int_{\mathbb{R}} e^{-[\sqrt{3}(x+2)]^2}\, e^{-\mathrm{i}[\sqrt{3}(x+2)]\frac{\lambda}{\sqrt{3}}}\, dx \\
&= \frac{e^{18+2\mathrm{i}\lambda}}{\sqrt{3}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, e^{-\mathrm{i}x\frac{\lambda}{\sqrt{3}}}\, dx \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{18+2\mathrm{i}\lambda}\, e^{-\frac{\lambda^2}{12}}.
\end{aligned}
$$

最后一步利用上一例中的结论

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, e^{-\mathrm{i}x\lambda}\, dx = [e^{-x^2}]^\wedge(\lambda) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

课后作业 **习题四，103-104 页：1，2，3，5。**

Fourier 变换在求解偏微分方程初值问题中的应用

回忆 Fourier 变换的重要性质：

$$[f^{(m)}]^\wedge(\lambda) = (i\lambda)^m f^\wedge(\lambda).$$

利用这个性质可以把常微化为代数方程，把偏微化为常微。 在偏微中的应用：

♡ 一维热传导方程的初值问题；

♡ 一维波动方程的初值问题；

♡ 半空间上拉普拉斯方程的第一边值问题。

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

法国数学家和物理学家，发起傅里叶级数的研究。

发展为傅里叶分析和调和分析，应用在热传导和弦振动问题。

傅立叶变换和傅立叶传导定律也以他的名字命名。

傅里叶也被普遍认为是温室效应的发现者。

Fourier 变换解偏微 (I)：一维热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2 \partial_x^2 u = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

关于 x 做 Fourier 变换，记 $\widehat{u}(\lambda,t) = \mathscr{F}_x[u(x,t)](\lambda)$，用如下事实 (把 t 视为参数!!)

$$\mathscr{F}_x[\partial_t u(x,t)](\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x,t)\, e^{-\mathrm{i}\lambda x}\, dx = \partial_t \Big[\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, e^{-\mathrm{i}\lambda x}\, dx \Big] = \frac{d}{dt}\widehat{u}(\lambda,t),$$

$$\mathscr{F}_x[\partial_x^2 u(x,t)](\lambda) = (\mathrm{i}\lambda)^2 \widehat{u}(\lambda,t) = -\lambda^2 \widehat{u}(\lambda,t),$$

$$\mathscr{F}_x[f(x,t)](\lambda) = \widehat{f}(\lambda,t),$$

我们把 $u(x,t)$ 的偏微转化为 $\widehat{u}(\lambda,\cdot)$ 关于 t 的如下常微 (把 λ 视为参数!!)

$$(\bigstar) \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widehat{u} + a^2\lambda^2 \widehat{u} = \widehat{f}, & t > 0, \\ \widehat{u}\big|_{t=0} = \widehat{\phi}(\lambda). \end{cases}$$

这个常微可以使用常数变易法或者 Duhamel 原理求解。

利用常数变易法或者 Duhamel 原理求得(★) 的解为

$$\widehat{u}(\lambda,t)=\widehat{\phi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}+\int_0^t \widehat{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\,d\tau.$$

为求出原偏微的解，我们做 Fourier 逆变换

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathscr{F}_\lambda^{-1}[\widehat{u}(\lambda,t)](x) \\ &= \mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\widehat{\phi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}\right]+\int_0^t \mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\widehat{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\right]d\tau. \end{aligned}$$

为进一步计算，回忆如下有用事实:

$$[e^{-x^2}]^\wedge(\lambda)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}e^{\mathrm{i}\lambda x}d\lambda=e^{-x^2}.$$

因此

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\lambda^2 t}e^{\mathrm{i}\lambda x}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(2a\sqrt{t}\lambda)^2}{4}}e^{\mathrm{i}(2a\sqrt{t}\lambda)\frac{x}{2a\sqrt{t}}}\,d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

这称为**热方程的基本解**。

我们继续计算 $\widehat{u}$ 的 Fourier 逆变换。利用 Fourier 变换的卷积性质 $(fg)^\vee = f^\vee * g^\vee$，

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\widehat{\phi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}\right](x) &= \mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\widehat{\phi}\right] * \mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right] \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \phi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\,dy,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\widehat{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\right](x) &= \mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\widehat{f}(\lambda,\tau)\right] * \mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\right] \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{\mathbb{R}} f(y,\tau)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,dy.\end{aligned}$$

合并上述计算，热方程的柯西问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \phi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\,dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\int_{\mathbb{R}} f(y,\tau)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,dyd\tau.$$

注 1: 上述方法可以平凡地推广到一般维数 n。

注 2: 同一维波动方程一样，求解半直线上的热方程可以用反射原理。

注 3: 该公式表明解在任何点处的值瞬时受到初值影响。这和波动方程不同 (初值的影响需要时间传播)。

Fourier 变换解偏微 (II)：上半平面上的调和函数

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ |u(x,y)| \text{ 有界}, & (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

关于 x 做 Fourier 变换，记 $\widehat{u}(\lambda, y) = \mathscr{F}_x[u(x,y)](\lambda)$，用如下事实（把 y 视为参数!!）

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_x[\partial_x^2 u(x,y)](\lambda) &= (\mathrm{i}\lambda)^2 \widehat{u}(\lambda, y), \\ \mathscr{F}_x[\partial_y^2 u(x,y)](\lambda) &= \frac{d^2}{dy^2}\widehat{u}(\lambda, y), \\ \mathscr{F}_x[u(x,0)](\lambda) &= \widehat{f}(\lambda), \end{aligned}$$

我们把 $u(x,y)$ 的偏微转化为 $\widehat{u}(\lambda,\cdot)$ 关于 y 的如下常微（把 λ 视为参数!!）

$$(\star) \begin{cases} \dfrac{d^2}{dy^2}\widehat{u} - \lambda^2 \widehat{u} = 0, & y > 0, \\ \widehat{u}\big|_{y=0} = \widehat{f}(\lambda). \end{cases}$$

容易得到$(\star)$的通解为 $\widehat{u}(\lambda, y) = Ae^{-\lambda y} + Be^{\lambda y}$。利用有界性和常微初值，

$$\widehat{u}(\lambda, y) = \widehat{f}(\lambda) e^{-|\lambda| y}.$$

为求 $\hat{u}$ 的 Fourier 逆变换，我们首先计算

$$
\begin{aligned}
2\pi \mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[e^{-|\lambda| y}\right](x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|\lambda| y+\mathrm{i}\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{0} e^{(y+\mathrm{i}x)\lambda} d\lambda + \int_0^\infty e^{(-y+\mathrm{i}x)\lambda} d\lambda \\
&= \frac{1}{y+\mathrm{i}x} e^{(y+\mathrm{i}x)\lambda}\Big|_{\lambda=-\infty}^{\lambda=0} + \frac{1}{-y+\mathrm{i}x} e^{(-y+\mathrm{i}x)\lambda}\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \\
&= \frac{1}{y+\mathrm{i}x} + \frac{1}{y-\mathrm{i}x} = \frac{2y}{x^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

该函数称为半平面上拉普拉斯方程的**格林函数**。利用 Fourier 变换的卷积性质，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\widehat{f}(\lambda) e^{-|\lambda| y}\right](x) &= \mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\widehat{f}(\lambda)\right] * \mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[e^{-|\lambda| y}\right](x) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(z) y}{(x-z)^2+y^2} dz.
\end{aligned}
$$

合并以上讨论，

$$
u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(z) y}{(x-z)^2+y^2} dz.
$$

注：上述方法可以平凡地推广到一般维数 n 的上半空间 $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$。

该 Poisson 公式也可由 Green 函数法得到，见讲稿 6。

Fourier 变换解偏微 (III)：一维波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x),\ \partial_t u(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

关于 x 做 Fourier 变换，记 $\widehat{u}(\lambda, t) = \mathscr{F}_x[u(x,t)](\lambda)$，用如下事实 (把 t 视为参数!!)

$$\mathscr{F}_x[\partial_t^2 u(x,t)](\lambda) = \frac{d^2}{dt^2}\widehat{u}(\lambda, t),$$

$$\mathscr{F}_x[\partial_x^2 u(x,t)](\lambda) = (\mathbf{i}\lambda)^2 \widehat{u}(\lambda, t),$$

$$\mathscr{F}_x[u(x,0)](\lambda) = \widehat{\phi}(\lambda), \quad \mathscr{F}_x[\partial_t u(x,t)](\lambda) = \frac{d}{dt}\widehat{u}(\lambda, 0) = \widehat{\psi}(\lambda),$$

我们把 $u(x,t)$ 的偏微转化为 $\widehat{u}(\lambda, \cdot)$ 关于 t 的如下常微 (把 λ 视为参数!!)

$$(\bigstar) \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\widehat{u} + a^2\lambda^2 \widehat{u} = 0, & t > 0, \\ \widehat{u}\Big|_{t=0} = \widehat{\phi}(\lambda),\ \dfrac{d}{dt}\widehat{u}\Big|_{t=0} = \widehat{\psi}(\lambda). \end{cases}$$

容易得到($\bigstar$)的通解为 $\widehat{u}(\lambda, t) = A\cos a\lambda t + B\sin a\lambda t$ 。利用常微初值，

$$\widehat{u}(\lambda, t) = \widehat{\phi}(\lambda)\cos a\lambda t + \frac{\widehat{\psi}(\lambda)}{a\lambda}\sin a\lambda t.$$

为求 $\widehat{u}$ 的 Fourier 逆变换，我们计算

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\lambda^{-1}[\widehat{\phi}(\lambda)\cos a\lambda t](x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\lambda)\left[e^{a\lambda t\mathbf{i}} + e^{-a\lambda t\mathbf{i}}\right] e^{\mathbf{i}\lambda x} d\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\lambda) e^{\mathbf{i}\lambda(x+at)} d\lambda + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\lambda) e^{\mathbf{i}\lambda(x-at)} d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\Big(\phi(x+at) + \phi(x-at)\Big).
\end{aligned}$$

另一方面，类似可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\frac{\widehat{\psi}(\lambda)}{a\lambda}\sin a\lambda t\right](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\psi}(\lambda)}{2a\lambda\mathbf{i}}\left[e^{a\lambda t\mathbf{i}} - e^{-a\lambda t\mathbf{i}}\right] e^{\mathbf{i}\lambda x} d\lambda \\
&= \frac{1}{4a\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\psi}(\lambda)}{\lambda\mathbf{i}} \int_{x-at}^{x+at} \frac{d}{d\tau} e^{\lambda\mathbf{i}\tau}\, d\tau\, d\lambda \\
&= \frac{1}{4a\pi}\int_{x-at}^{x+at}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\lambda) e^{\lambda\mathbf{i}\tau}\, d\lambda d\tau = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

合并上述结果，我们再次得到 d'Alembert 公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\phi(x+at) + \phi(x-at)\Big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\, d\tau.$$

练习 7

已知 $\mathscr{F}[e^{-x^2}](\lambda)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$，$\int_{\mathbb{R}} f^2=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}|^2$。假设 $\phi,\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$。证明

$$\begin{cases}\partial_t^2 u-\partial_x^4 u=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\phi(x),\ \partial_t u(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

存在有限能量解 u (即 $\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}}|u(x,t)|^2\,dx<\infty$) 的充要条件是

$$\psi(x)=\phi_{xx}(x).$$

在上述条件下，求出满足初值问题的有限能量解 $u(x,t)$。

对方程关于 x 做 Fourier 变换，得到 $\widehat{u}(\lambda,t)=\mathscr{F}_x[u(x,t)](\lambda)$ 满足常微 (把 λ 视为参数)

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}\widehat{u}-\lambda^4\widehat{u}=0, \quad t>0,\\ \widehat{u}\big|_{t=0}=\widehat{\phi}, \quad \dfrac{d}{dt}\widehat{u}\big|_{t=0}=\widehat{\psi}.\end{cases}$$

该常微的解为 $\widehat{u}(\lambda,t)=A(\lambda)e^{\lambda^2 t}+B(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$，其中

$$A(\lambda)=\frac{1}{2}\Big(\widehat{\phi}(\lambda)+\lambda^{-2}\widehat{\psi}(\lambda)\Big),\quad B(\lambda)=\frac{1}{2}\Big(\widehat{\phi}(\lambda)-\lambda^{-2}\widehat{\psi}(\lambda)\Big).$$

利用 Parseval 等式，

$$
\begin{aligned}
C \geq \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\lambda, t)|^2 d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} |A|^2 e^{2\lambda^2 t} d\lambda + \int_{\mathbb{R}} |B|^2 e^{-2\lambda^2 t} d\lambda + \int_{\mathbb{R}} (A\bar{B} + \bar{A}B) \\
&\geq \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} |A|^2 e^{2\lambda^2 t} d\lambda - C' \\
&\geq e^{2\varepsilon^2 t} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} |A|^2 d\lambda - C'.
\end{aligned}
$$

因为 $e^{\varepsilon^2 t}$ 关于时间无界，并利用 ε 的任意性，我们得到 $A(\lambda) \equiv 0$。所以

$$
0 = 2\lambda^2 A(\lambda) = \lambda^2 \widehat{\phi}(\lambda) + \widehat{\psi}(\lambda) = \mathscr{F}\left[\psi - \phi_{xx}\right](\lambda), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.
$$

由 Fourier 逆变换，存在有限能量解的必要条件是

$$
\psi = \phi_{xx}.
$$

以下假设 $\psi = \phi_{xx}$ 成立。则 $A(\lambda) = 0$，从而 $B(\lambda) = \widehat{\phi}(\lambda)$。于是

$$
\widehat{u}(\lambda, t) = \widehat{\phi}(\lambda) e^{-\lambda^2 t}.
$$

利用 Parseval 等式可以得到

$$
\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}(\lambda)|^2 e^{-2\lambda^2 t} d\lambda \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \phi^2(x) dx < \infty.
$$

这表明 $\psi = \phi_{xx}$ 也是存在有限能量解的充分条件。

为计算 $\hat{u}$ 的 Fourier 逆变换，我们通过 $\mathscr{F}[e^{-x^2}](\lambda)=\sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4}$ 得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}[e^{-\lambda^2 t}](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2 t}e^{\mathbf{i}\lambda x}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{t}\lambda)^2}e^{-\mathbf{i}(\sqrt{t}\lambda)\frac{-x}{\sqrt{t}}}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}e^{-\mathbf{i}y\frac{-x}{\sqrt{t}}}dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\mathscr{F}[e^{-y^2}](-\frac{x}{\sqrt{t}}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\widehat{\phi}(\lambda)\cdot[e^{-\frac{x^2}{4t}}]^\wedge(\lambda)\right](x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathscr{F}_\lambda^{-1}\left[\widehat{\phi}(\lambda)\right]*\mathscr{F}^{-1}\left[[e^{-\frac{x^2}{4t}}]^\wedge(\lambda)\right](x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\phi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy.
\end{aligned}$$

练习 8

定义函数 $f(x)$ 的傅立叶变换及傅立叶逆变换分别为

$$F[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}\lambda x}f(x)\,dx,\quad F^{-1}[f](\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{i}\lambda x}f(x)\,dx.$$

已知函数 e^{-x^2} 的傅立叶变换为 $\sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4}$，试用傅立叶变换法求解

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}+xu_x=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty),\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

对方程关于 x 做 Fourier 变换，得到 $\widehat{u}(\lambda,t)=\mathscr{F}_x[u(x,t)](\lambda)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\widehat{u}}{\partial t}+\lambda^2\widehat{u}-\dfrac{\partial(\lambda\widehat{u})}{\partial\lambda}=0,\\ \widehat{u}|_{t=0}=\widehat{\varphi}(\lambda).\end{cases}$$

取 $v(\lambda,t)=\lambda\widehat{u}(t,\lambda)$，

$$\begin{cases}\partial_t v-\lambda\partial_\lambda v+\lambda^2 v=0,\\ v|_{t=0}=\lambda\widehat{\varphi}(\lambda).\end{cases}$$

这是一阶偏微分方程，其特征线 $\gamma(s)=(\lambda(s),t(s))$ 满足

$$\lambda_s=-\lambda,\ \ t_s=1.\ \text{即}\ \gamma(t)=(\lambda_0 e^{-t},t).$$

考虑 $\bar{v}(t)=v\circ\gamma(t)$。由 v 满足的方程可知

$$\bar{v}_t=-\lambda^2(t)\bar{v}\Longrightarrow \bar{v}(t)=\bar{v}(0)\,e^{\frac{1}{2}\lambda_0^2(e^{-2t}-1)}.$$

回忆初值条件 $\bar{v}(0)=v(\lambda_0,0)=\lambda_0\widehat{\varphi}(\lambda_0)$。再利用 $\lambda=\lambda_0 e^{-t}$，得到

$$v(\lambda,t)=\lambda e^t\widehat{\varphi}(\lambda e^t)e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(e^{2t}-1)}\Longrightarrow \widehat{u}(\lambda,t)=e^t\widehat{\varphi}(\lambda e^t)e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(e^{2t}-1)}.$$

利用

$$\mathscr{F}^{-1}[\widehat{\varphi}(\lambda e^t)](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{\mathrm{i}\lambda x}\widehat{\varphi}(\lambda e^t)\,d\lambda=\frac{e^{-t}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{\mathrm{i}se^{-t}x}\widehat{\varphi}(s)\,ds=e^{-t}\varphi(xe^{-t}),$$

和

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(e^{2t}-1)}](x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{\mathrm{i}\lambda x}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(e^{2t}-1)}\,d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi\sqrt{2(e^{2t}-1)}}\int_{\mathbb{R}}e^{\mathrm{i}s\frac{x}{\sqrt{2(e^{2t}-1)}}}e^{-\frac{1}{4}s^2}\,ds=\frac{e^{-\frac{x^2}{2(e^{2t}-1)}}}{\sqrt{2\pi(e^{2t}-1)}},\end{aligned}$$

以及傅立叶变换的卷积性质

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(e^{2t}-1)}}\int_{\mathbb{R}}\varphi(ye^{-t})\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2(e^{2t}-1)}}\,dy.$$

课后作业 **习题四，104-105 页：7，8，9。**

Laplace 变换及其应用 (不讲、不要求)

Fourier 变换要求函数在全空间上有定义。若研究半无界问题，我们引入 Laplace 变换 。

Laplace 变换

若 $f(t)$ 定义在 $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ 上。任取充分大的 $r>0$，考虑函数 $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，

$$f_r(t) = \begin{cases} e^{-rt} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

对 $f_r(t)$ 做 Fourier 变换

$$\widehat{f_r}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f_r(t) e^{-\mathrm{i}\lambda t} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(r+\mathrm{i}\lambda)t} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt,$$

其中$s = r + \mathbf{i}\lambda$。定义上式的**右端项**为:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

由 Fourier 逆变换，并利用 $ds = \mathbf{i} d\lambda$，我们得到

$$f_r(t) = [\widehat{f_r}]^{\vee}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(r+\mathbf{i}\lambda) e^{\mathrm{i}\lambda t} d\lambda = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\{r+\mathbf{i}\mathbb{R}\}} F(s) e^{(s-r)t} ds$$

$$\Longrightarrow \qquad f(t) = f_r(t) e^{rt} = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\{r+\mathbf{i}\mathbb{R}\}} F(s) e^{st} ds.$$

定义：Laplace 变换及其逆变换

- 若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$，其 Laplace 变换 为

$$\mathscr{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

注：我们仅考虑使得该积分有定义的 $s \in \mathbb{C}$。

- 若 $F(s)$ 是函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换，则称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换，记为

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)](t).$$

存在性定理

- 若 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上分段连续，且 $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$ $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$，则

$$\mathscr{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad \text{在半平面 } Re\, s > s_0 \text{ 上存在.}$$

- 假设 f 同上述条件，$F(s) = \mathscr{L}[f](s)$。如果 $t > 0$ 为 f 的连续点，则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\{r+\mathbf{i}\mathbb{R}\}} F(s)e^{st}ds, \quad \forall\ r > s_0.$$

Laplace 变换的基本性质

假设下面涉及的所有函数均满足 $Me^{s_0 t}$ 的增长控制；且其 Laplace 变换和逆变换均存在。

- 线性性：$\mathscr{L}[f+\lambda g]=\mathscr{L}[f]+\lambda\mathscr{L}[g]$，$\mathscr{L}^{-1}[f+\lambda g]=\mathscr{L}^{-1}[f]+\lambda\mathscr{L}^{-1}[g]$ $(\lambda\in\mathbb{C})$。
- 平移性：对任何 $h>0$，$\mathscr{L}[f(t-h)](s)=e^{-hs}\mathscr{L}[f](s)$。
- 位移性质：对任何 $a\in\mathbb{R}$，$\mathscr{L}[e^{at}f(t)](s)=\mathscr{L}[f](s-a)$。
- 微分性质：若 $f^{(m)}\in C(\mathbb{R}_+)$ 且 $\lim_{t\to\infty}f^{(k)}(t)=0$ $(k=0,1,2\ldots,m-1)$，则

$$\mathscr{L}[f^{(m)}](s)=s^m\Big(\mathscr{L}[f](s)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{s^{k+1}}f^{(k)}(0)\Big).$$

证明. 反复利用分部积分

$$\mathscr{L}[f^{(m)}]=\int_{\mathbb{R}}f^{(m)}e^{-st}dt=\int_{\mathbb{R}}e^{-st}df^{(m-1)}=f^{(m-1)}(0)+s\int_{\mathbb{R}}f^{(m-1)}e^{-st}dt=\cdots.$$

Laplace 变换的卷积性质： $\mathscr{L}[f*g]=\mathscr{L}[f]\,\mathscr{L}[g]$。

证明. 按定义计算，并在计算中交换积分顺序

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[f*g](s) &= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right]e^{-st}\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)e^{-st}\,dt\right]g(\tau)\,d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\,dt\right]e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau \\
&= \mathscr{L}[f]\int_{\mathbb{R}} e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau = \mathscr{L}[f]\,\mathscr{L}[g].
\end{aligned}
$$

Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749-1827)

法国数学家，对工程、统计、物理、天文和哲学有重要贡献。

提出了 Laplace 方程，开创了 Laplace 变换。

被称为法国牛顿，被描述为拥有非凡的自然数学能力。

Laplace 变换解偏微 (I)：有界杆上的热传导

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u, & x \in (0, \ell), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 1 + \sin \dfrac{\pi x}{\ell}, & \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 1 & t > 0. \end{cases}$$

对方程两边关于 t 做 Laplace 变换 (把 x 视为参数!!)。则

$$U(x, s) = \mathscr{L}[u(x, t)](s)$$

满足关于 x 的如下常微 (把 s 视为参数!!)

$$(\bigstar) \begin{cases} sU(s, x) - u(x, 0) = U_{xx}(x, s), & t > 0, \\ U(0, s) = U(\ell, s) = \mathscr{L}[1](s) = \dfrac{1}{s}. & \end{cases}$$

其解满足 $U(x, s) = A(s, x)e^{x\sqrt{s}} + B(s, x)e^{-x\sqrt{s}}$。用常数变易法得

$$U(x, s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s + \pi^2/\ell^2} \sin \frac{\pi x}{\ell}.$$

对上式做 Laplace 逆变换，并记 $a = -\pi^2/\ell^2$，我们有

$$u(x, t) = \mathscr{L}^{-1}[s^{-1}] + \sin \frac{\pi x}{\ell} \mathscr{L}^{-1}\left[(s - a)^{-1}\right].$$

Laplace 变换解偏微 (II)：半无界杆上的热传导

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u, & x \in (0,\infty),\ t>0, \\ u(x,0)=0, & x\in(0,\infty), \\ u(0,t)=f(t),\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t)=0, & t>0. \end{cases}$$

对方程两边关于 t 做 Laplace 变换（把 x 视为参数!!）。则

$$U(x,s) = \mathscr{L}[u(x,t)](s)$$

满足关于 x 的如下 ODE（把 s 视为参数!!）

$$(\bigstar)\ \begin{cases} sU(s,x) = U_{xx}(x,s), & t>0, \\ U(0,s)=\mathscr{L}[f](s),\ U(\infty,s)=0. \end{cases}$$

其通解为 $U(x,s)=A(s)e^{-x\sqrt{s}}+B(s)e^{x\sqrt{s}}$。利用边值条件

$$U(x,s)=\mathscr{L}[f](s)e^{-x\sqrt{s}}=\mathscr{L}[f](s)\mathscr{L}\left[\frac{x}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right].$$

对上式做 Laplace 逆变换，并利用 Laplace 变换的卷积性质，

$$u(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\,d\tau.$$

Laplace 变换解偏微 (III)：半无界弦振动

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u, & x \in (0, \infty),\ \ t > 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, \infty), \\ u(0, t) = f(t),\ \ \lim\limits_{x \to \infty} u(x, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

对方程两边关于 t 做 Laplace 变换 (把 x 视为参数!!)。则

$$U(x, s) = \mathscr{L}[u(x, t)](s)$$

满足关于 x 的如下常微 (把 s 视为参数!!)

$$(\star) \begin{cases} s^2 U(s, x) = U_{xx}(x, s), \quad t > 0, \\ U(0, s) = \mathscr{L}[f](s),\ \ U(\infty, s) = 0. \end{cases}$$

其通解为 $U(x, s) = A(s)e^{-sx} + B(s)e^{sx}$。再由边值条件得

$$U(x, s) = \mathscr{L}[f](s)e^{-sx}.$$

对上式做 Laplace 逆变换，并利用 Laplace 变换的卷积性质，

$$u(x, t) = \mathbf{1}_{\{t > x\}} f(t - x).$$

Laplace 变换解偏微 (IV)：第一卦限的双曲方程

$$\begin{cases} \partial_{xy}^2 u = 1, & (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \\ u(x, 0) = 1, & x \in \mathbb{R}_+, \\ u(0, y) = y + 1, & y \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

对方程两边关于 x 做 Laplace 变换（把 y 视为参数!!）。则

$$U(s, y) = \mathscr{L}_x[u(x, y)](s)$$

满足关于 y 的如下 ODE（把 s 视为参数!!）

$$(\star) \begin{cases} \dfrac{d}{dy}\left[sU(s, y) - u(0, y)\right] = \dfrac{1}{s}, & y > 0, \\ U(s, 0) = \dfrac{1}{s}. \end{cases}$$

两边关于 y 积分，得到$(\star)$的解为

$$U(s, y) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) y + \frac{1}{s}$$

对上式做 Laplace 逆变换，并利用 $\mathscr{L}_x[1] = \frac{1}{s}$ 和 $\mathscr{L}_x[x] = \frac{1}{s^2}$，

$$u(x, y) = (1 + x)y + 1.$$