偏微分方程

李奇睿

浙江大学数学科学学院

qi-rui.li@zju.edu.cn

第三章：边值问题的分离变量法和特殊函数 (II)

本章概览

♠ 线性常微分方程的幂级数解法。

♠ 介绍 Bessel 方程与 Bessel 函数；介绍 Legendre 方程与 Legendre 多项式。

♠ 介绍柱域中的分离变量法：Bessel 函数的应用。

♠ 介绍球域中的分离变量法：Legendre 多项式的应用。

教学要求

♣ 掌握二阶**常微分方程**的幂级数解法；

♣ 会使用幂级数解法求解 Bessel 方程和 Legendre 方程；

☒ 柱域、球域中分离变量法不作要求；

☒ Bessel 函数的应用和 Legendre 多项式的应用不做要求。

柱域上的分离变量法：Bessel 函数的引出 圆盘 $\Sigma_a = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|X\| < a\}$ 边缘的温度为零，内部不产生热量，初始温度为 $\phi(X)$。温度分布 $u(X, t)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u, & X \in \Sigma_a,\ \ t > 0, \\ u(X, 0) = \phi(X), & X \in \Sigma_a, \\ u(X, t) = 0, & X \in S_a := \partial\Sigma_a,\ \ t > 0. \end{cases}$$

分离变量法： 找解 $u(x, y, t) = \sum_{n,m} V_{nm}(x, y)\, T_{nm}(t)$。其中 V_{nm} 满足特征值问题

$$(\star) \begin{cases} \Delta V = -\lambda V, & X \in \Sigma_a, \\ V(X) = 0, & X \in S_a := \partial\Sigma_a. \end{cases}$$

记 $\bar{V}_{nm}$ 对应的特征值为 λ_{nm}。

- 特征值 $\lambda \geq 0$。这是因为

$$\lambda \int_{\Sigma_a} V^2 = -\int_{\Sigma_a} V \Delta V = \int_{\Sigma_a} |DV|^2 + \int_{S_a} V \partial_{\vec{n}} V = \int_{\Sigma_a} |DV|^2 \geq 0.$$

- 特征函数 $\{V_{nm}\}$ 是 $L^2(\Sigma_a)$ 正交的。若 (V, λ) 和 $(\widetilde{V}, \widetilde{\lambda})$ 是不同的特征值/函数，

$$\lambda \int_{\Sigma_a} V \widetilde{V} = -\int_{\Sigma_a} \widetilde{V} \Delta V = -\int_{\Sigma_a} V \Delta \widetilde{V} = \widetilde{\lambda} \int_{\Sigma_a} V \widetilde{V} \Longrightarrow \int_{\Sigma_a} V \widetilde{V} = 0.$$

将圆盘区域转换为矩形区域 考虑极坐标，$\bar{V}(r,\theta) = V(r\cos\theta, r\sin\theta)$满足

$$
\begin{aligned}
\bar{V}_r &= V_x\cos\theta + V_y\sin\theta,\\
\bar{V}_\theta &= -V_x r\sin\theta + V_y r\cos\theta,\\
\bar{V}_{rr} &= V_{xx}\cos^2\theta + V_{yy}\sin^2\theta + 2V_{xy}\sin\theta\cos\theta,\\
\bar{V}_{\theta\theta} &= r^2(V_{xx}\sin^2\theta + V_{yy}\cos^2\theta - 2V_{xy}\sin\theta\cos\theta) - r(V_x\cos\theta + V_y\sin\theta).
\end{aligned}
$$

因此找特征值和特征函数满足(★)等价于求解

$$
(\bar{\star})\begin{cases}
\frac{1}{r}\partial_r(r\bar{V}_r) + \frac{1}{r^2}\bar{V}_{\theta\theta} = -\lambda\bar{V}, & (r,\theta)\in[0,a)\times[0,2\pi),\\
\bar{V}(a,\theta) = 0, & \theta\in[0,2\pi),\\
\bar{V}(r,\theta) = \bar{V}(r,\theta+2\pi), & (r,\theta)\in[0,a)\times[0,2\pi).
\end{cases}
$$

♠ 对$(\bar{\star})$用分离变量法：$\bar{V}(\theta,r) = H(\theta)R(r)$。代入$(\bar{\star})$得到两组常微：

$$
(\bar{\star})_a\begin{cases}
H''(\theta) + \mu H(\theta) = 0,\\
H(\theta+2\pi) = H(\theta),
\end{cases}
\quad \text{和} \quad
(\bar{\star})_b\begin{cases}
r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0,\\
R(a) = 0,\\
|R(r)| < \infty\ (0\le r\le a).
\end{cases}
$$

问题$(\bar{\star})_a$的特征值与相应的特征函数为

$$
\mu_n = n^2,\quad H_n(x) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta,\quad n = 0,1,2,\ldots.
$$

♠ 讨论问题$(\bar{\bigstar})_b$的特征值与相应的特征函数。

- $\lambda = 0$。这是 Euler 方程。因为 $\mu_n = n^2$，可解得

$$R_{n0}(r) \quad = \quad \begin{cases} a_0 + b_0 \log r, \ n = 0, \\ a_n r^n + b_n r^{-n}, \ n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

由 $|R_{n0}(r)| < \infty$ 知：$b_n = 0$，$(n \geq 0)$。由 $R_{n0}(a) = 0$ 知，$R_{n0} \equiv 0$。

- $\lambda > 0$。考虑变换

$$x = \sqrt{\lambda} r, \quad y(x) = R(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}).$$

在该变换下，$(\bar{\bigstar})_b$转化为

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{y'(x)}{x} + (1 - \dfrac{n^2}{x^2})y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq a\sqrt{\lambda}, \\ y(a\sqrt{\lambda}) = 0, \quad |y| < \infty, \end{cases}$$

这是 n 阶 Bessel 方程 $(n \geq 0)$。

注记：$a\sqrt{\lambda}$ 是 Bessel 方程解的零点。找出可能的零点，就可以确定 λ 的取值。

问题：如何求解 Bessel 方程?

我们将用幂级数法求解 n 阶 Bessel 方程

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} + (1 - \dfrac{n^2}{x^2})y = 0, \quad (0 \le x \le \ell), \\ y(\ell) = 0, \quad |y| < \infty. \end{cases}$$

其中 ℓ 是 Bessel 方程解的零点 (于是$\lambda = \ell^2/a^2$)。 其解是如下 n 阶 Bessel 函数 :

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}.$$

♡ $J_n(x)$ 有零点: $0 < \xi_{n1} < \xi_{n2} < \xi_{n3} < \cdots$。所以

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\xi_{nm}}{a}\right)^2, \quad R_{nm}(r) = J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right), \quad (n \ge 0, m \ge 1).$$

- 给定 $\ell > 0$, $\{J_n(\alpha_m x)\}_{m \ge 1}$ (其中 $\alpha_m = \frac{\xi_{nm}}{\ell}$) 带权函数 x 正交 $[L_x^2([0,\ell])]$:

$$\int_0^\ell J_n(\alpha_m x) J_n(\alpha_{m'} x) x dx = 0, \quad \forall m \ne m', \ m, m' \ge 1.$$

- n 阶 Bessel 函数的模由 $n+1$ 阶 Bessel 函数的零点值决定:

$$\int_0^\ell J_n^2(\alpha_m x) x dx = \frac{\ell^2}{2} [J_n'(\xi_{nm})]^2 = \frac{\ell^2}{2} J_{n+1}^2(\xi_{nm}) =: \frac{\ell^2}{2} \beta_{nm}.$$

♠ 综合可知，问题(★)的特征值与相应的特征函数为

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\xi_{nm}}{a}\right)^2, \quad V_{nm} = (A_{nm}\cos n\theta + B_{nm}\sin n\theta)\, J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right), \ (n \geq 0, m \geq 1).$$

♠ 假设 $u = \sum_{n,m} V_{nm}(x,y)\, T_{nm}(t)$ 满足(★)，求 T_{nm}。由 $\{V_{nm}\}$ 的正交性，

$$T'_{nm}(t) + \lambda_{nm} T_{nm}(t) = 0.$$

回忆 $\lambda_{nm} = \left(\frac{\xi_{nm}}{a}\right)^2$。因此

$$T_{nm}(t) = e^{-\left(\frac{\xi_{nm}}{a}\right)^2 t}, \ (n \geq 0, m \geq 1).$$

于是

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm}\cos n\theta + B_{nm}\sin n\theta)\, e^{-\left(\frac{\xi_{nm}}{a}\right)^2 t} J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right).$$

♠ 下面利用初值条件确定 $\{A_{nm}\}$ 和 $\{B_{nm}\}$：

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right)\right]\cos n\theta + \left[\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right)\right]\sin n\theta\right\}.$$

- 利用 $\{\cos n\theta, \sin n\theta\}_{n\geq 0}$ 的 $L^2([0,2\pi])$ 正交性，

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \phi(r,\theta)\cos n\theta, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \phi(r,\theta)\sin n\theta, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

$$A_{0m} J_0\left(\frac{\xi_{0m}}{a} r\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(r,\theta), \qquad m \geq 1.$$

- 再利用 $\{J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right)\}$ 在 $[0,a]$ 上带权函数 r 的正交性，我们得到

$$A_{nm} = \frac{2}{a^2\pi\beta_{nm}}\int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \phi(r,\theta)\cos n\theta\, d\theta\right) J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right) r dr, \ \ n, m \geq 1,$$

$$B_{nm} = \frac{2}{a^2\pi\beta_{nm}}\int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \phi(r,\theta)\sin n\theta\, d\theta\right) J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right) r dr, \ \ n, m \geq 1,$$

$$A_{0m} = \frac{1}{a^2\beta_{0m}\pi}\int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \phi(r,\theta)\, d\theta\right) J_0\left(\frac{\xi_{0m}}{a} r\right) r dr, \qquad m \geq 1,$$

其中 $\beta_{nm} = [J_n'(\xi_{nm})]^2 = [J_{n+1}(\xi_{nm})]^2$。

$\square$

求解 n 阶 Bessel 方程：$n=0,1,2,\ldots$.

$$\begin{cases} y''+\dfrac{y'}{x}+(1-\dfrac{n^2}{x^2})y=0, \quad (0\le x\le \ell), \\ y(\ell)=0, \quad |y|<\infty. \end{cases}$$

其中 ℓ 是 Bessel 方程解的零点。

Bessel 方程的幂级数解法：

假设 $y(x)=x^{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \ (a_0\neq 0)$。代入方程，

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+\gamma)(k+\gamma-1)a_k x^{k+\gamma-2}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+\gamma)a_k x^{k+\gamma-2} \\ &\quad -n^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+\gamma-2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+\gamma} \\ &= (\gamma^2-n^2)a_0 x^{\gamma-2}+\left[(1+\gamma)^2-n^2\right]a_1 x^{\gamma-1} \\ &\quad +\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[(k+2+\gamma)^2-n^2\right]a_{k+2}+a_k\right\}x^{k+\gamma}. \end{aligned}$$

我们将利用比较系数确定参数 γ 和 $\{a_k\}$。

比较系数得到 $\gamma = \pm n$，$\left[(1+\gamma)^2 - n^2\right] a_1 = 0$，以及递推公式

$$\left[(k+2+\gamma)^2 - n^2\right] a_{k+2} + a_k = 0 \ (\forall k \geq 0).$$

由上述关系，并利用 $|y| < \infty$，我们容易得到： $\gamma = n$, $a_1 = 0$,

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2+\gamma)^2 - n^2} = -\frac{a_k}{(k+2)(k+2n+2)} \ (\forall k \geq 0).$$

进一步可以得到 $a_{2j+1} = 0 \ (\forall j \geq 0)$,

$$a_{2j} = -\frac{a_{2j-2}}{4j(j+n)} = \frac{(-1)^j a_0 \, n!}{2^{2j} j!(j+n)!} \ (\forall j \geq 0).$$

这样我们得到 n 阶 Bessel 方程的解：

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j a_0 \, n!}{2^{2j} j!(j+n)!} x^{2j+n}.$$

这称为 n 阶 Bessel 函数 。改变 a_0 不改变 $J_n(x)$ 的零点。为简化，取$a_0 = 1/(2^n n!)$,

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}.$$

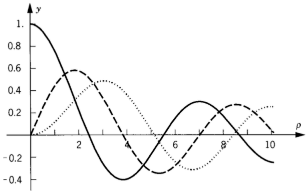
Bessel 函数的零点

n 阶 Bessel 函数是 n 阶 Bessel 方程的解

$$y'' + \frac{y'}{x} + (1 - \frac{n^2}{x^2})y = 0.$$

对任何固定的 $n \geq 0$，当 x 足够大时，方程的表现接近于 $y'' + y = 0$。事实上

$$J_n(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{4} - \frac{n}{2}\pi\right) + O(x^{-3/2}).$$



对任何固定的 $n \geq 0$，J_n 有无穷多个正零点：

$$0 < \xi_{n1} < \xi_{n2} < \xi_{n3} < \cdots.$$

Bessel 函数的正交性

给定 $\ell > 0$，$\{J_n(\alpha_i x)\}_{i\geq 0}$ (其中 $\alpha_i = \frac{\xi_{ni}}{\ell}$) 带权函数 x 正交:

$$\int_0^\ell J_n(\alpha_i x) J_n(\alpha_j x) x dx = 0, \quad \forall i \neq j, \ i,j \geq 1.$$

证明. 记 $f(x) = J_n(\alpha_i x)$，$g(x) = J_n(\alpha_j x)$。因为 $J_n(x)$ 是 n 阶 Bessel 方程的解，故

$$xf''(x) + f'(x) + \left(\alpha_i^2 x - \frac{n^2}{x}\right) f = 0,$$
$$xg''(x) + g'(x) + \left(\alpha_j^2 x - \frac{n^2}{x}\right) g = 0.$$

在第一式两边乘 g，第二式两边乘 f，相减后积分得到

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\ell \left[xf''g + f'g + \alpha_i^2 xfg - xfg'' - fg' - \alpha_j^2 xfg\right] dx \\
&= (\alpha_i^2 - \alpha_j^2) \int_0^\ell fgx dx + \int_0^\ell \left[xf''g - xfg'' + f'g - fg'\right] dx \\
&= (\alpha_i^2 - \alpha_j^2) \int_0^\ell fgx dx + \left[x(f'g - fg')\right]\Big|_0^\ell \\
&= (\alpha_i^2 - \alpha_j^2) \int_0^\ell fgx dx \qquad (\text{利用 } f(\ell) = g(\ell) = 0).
\end{aligned}$$

Bessel 函数的模

给定 $\ell > 0$，取 $\alpha_m = \frac{\xi_{nm}}{\ell}$，则有

$$\int_0^\ell J_n^2(\alpha_m x) x dx = \frac{\ell^2}{2}[J_n'(\xi_{nm})]^2 = \frac{\ell^2}{2} J_{n+1}^2(\xi_{nm}) =: \frac{\ell^2}{2}\beta_{nm}, \quad \forall m \geq 1.$$

在第二个等式中，我们使用了恒等式 (可通过 Bessel 函数的级数形式直接验证):

$$J_{n\pm 1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) \mp J_n'(x).$$

证明. 记 $f(x) = J_n(\alpha_m x)$，我们有 $xf''(x) + f'(x) + x^{-1}(\alpha_m^2 x^2 - n^2) f = 0$，故

$$0 = 2xf' \left[(xf')' + x^{-1}(\alpha_m^2 x^2 - n^2) f\right] = [(xf')^2 + (\alpha_m^2 x^2 - n^2) f^2]' - 2\alpha_m^2 x f^2.$$

对该等式积分，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell J_n^2(\alpha_m x) x dx &= \frac{1}{2\alpha_m^2} \int_0^\ell [(xf')^2 + (\alpha_m^2 x^2 - n^2) f^2]' \, dx \\
&= \frac{1}{2\alpha_m^2} [(xf')^2 + (\alpha_m^2 x^2 - n^2) f^2] \Big|_0^\ell \\
&= \frac{\ell^2}{2} [J_n'(\xi_{nm})]^2 \quad (\text{使用 } f'(x) = \alpha_m J_n'(\alpha_m x)).
\end{aligned}$$

一般情形 ν 阶 **Bessel** 函数是如下ν 阶 **Bessel** 方程的解

$$y'' + \frac{y'}{x} + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0.$$

这样的方程有两类解:

- 在 $x = 0$ 处奇异 (比如当 $\nu = n$ 时幂级数首项幂次 $\gamma = -n$);
- 在 $x = 0$ 处有限 (比如当 $\nu = n$ 时幂级数首项幂次 $\gamma = n$)。

同样可以研究 ν 阶 Bessel 函数的渐近公式、零点、正交性、模数等。

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

德国天文学家、数学家、物理学家和大地测量学家。

第一位通过视差法确定太阳到另一颗恒星的距离的天文学家。

Bessel 函数最初由 Daniel Bernoulli 发现，由 Bessel 推广。

柱域上的电位分布 圆住体 $\mathcal{C}=\{(x,y,z): x^2+y^2\le a^2,\ 0\le z\le h\}$ 内没有电荷，侧面和上底电势为零。下底 $z=0$ 上电位分布已知。电位函数满足

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0, \\ u|_{r=a} = u|_{z=h} = 0, \\ u|_{z=0} = \phi(r,\theta). \end{cases}$$

目标 找解 $u(x,y,t)=\sum_{n,m} V_{nm}(x,y)Z_{nm}(z)$。其中 V_{nm} 满足下列特征值问题

$$(\bigstar)\begin{cases} \Delta V = -\lambda V, & (x,y)\in\Sigma_a, \\ V(x,y)=0, & (x,y)\in S_a=\partial\Sigma_a. \end{cases}$$

记 V_{nm} 对应的特征值为 λ_{nm}。

♡ 回忆 $\lambda_{nm}\ge 0$，且 $\{V_{nm}\}$ 是 $L^2(\Sigma_a)$ 正交的。代入方程

$$\begin{aligned} 0=\Delta u &= \sum_{n,m} Z_{nm}\Delta V_{nm} + \sum_{n,m} V_{nm}Z_{nm}'' \\ &= -\sum_{n,m} Z_{nm}\lambda_{nm}V_{nm} + \sum_{n,m} V_{nm}Z_{nm}'' \\ \Longrightarrow \quad Z_{nm}'' &= \lambda_{nm}Z_{nm}. \end{aligned}$$

♠ 回忆：问题(★)的特征值与相应的特征函数为

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\xi_{nm}}{a}\right)^2, \quad V_{nm} = (A_{nm}\cos n\theta + B_{nm}\sin n\theta)\, J_n\!\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right), \ (n \geq 0, m \geq 1).$$

♠ 求解 $Z''_{nm} = \lambda_{nm} Z_{nm}$ 得到

$$Z_{nm}(z) = C_{nm} e^{-\frac{\xi_{nm}}{a} z} + D_{nm} e^{\frac{\xi_{nm}}{a} z} = C'_{nm}\cosh z + D'_{nm}\sinh z.$$

利用边值条件 $u(x, y, h) = 0$，即 $Z_{nm}(h) = 0$，得到 (相差一个常数乘子)

$$Z_{nm}(z) = \sinh\left(\frac{\xi_{nm}}{a}(z - h)\right), \ (n \geq 0, m \geq 1).$$

于是

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{nm}\cos n\theta + B_{nm}\sin n\theta)\sinh\left(\frac{\xi_{nm}}{a}(z - h)\right) J_n\!\left(\frac{\xi_{nm}}{a} r\right).$$

♠ 利用边值条件 $u|_{z=0}=\phi(r,\theta)$ 确定 $\{A_{nm}\}$ 和 $\{B_{nm}\}$：取$\gamma_{nm}=-\sinh\left(\frac{\xi_{nm}}{a}h\right)$，

$$\phi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\gamma_{nm}J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a}r\right)\right]\cos n\theta+\left[\sum_{m=1}^{\infty}B_{nm}\gamma_{nm}J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a}r\right)\right]\sin n\theta)\right\}.$$

利用 $\{\cos n\theta,\sin n\theta\}_{n\geq 0}$ 的 $L^2([0,2\pi])$ 正交性，以及 $\{J_n(\frac{\xi_{nm}}{a}x)\}_{m\geq 1}$ 带权函数 x 的 $L^2_x([0,a])$ 正交性：

$$\begin{aligned}
A_{nm}&=\frac{2}{a^2\pi\beta_{nm}\gamma_{nm}}\int_0^a\left(\int_0^{2\pi}\phi(r,\theta)\cos n\theta\,d\theta\right)J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a}r\right)rdr,\ \ (n,m\geq 1),\\
B_{nm}&=\frac{2}{a^2\pi\beta_{nm}\gamma_{nm}}\int_0^a\left(\int_0^{2\pi}\phi(r,\theta)\sin n\theta\,d\theta\right)J_n\left(\frac{\xi_{nm}}{a}r\right)rdr,\ \ (n,m\geq 1),\\
A_{0m}&=\frac{1}{a^2\beta_{0m}\gamma_{nm}\pi}\int_0^r\left(\int_0^{2\pi}\phi(r,\theta)\,d\theta\right)J_0\left(\frac{\xi_{0m}}{a}r\right)rdr,\qquad m\geq 1,
\end{aligned}$$

其中$\beta_{nm}=[J_n'(\xi_{nm})]^2=[J_{n+1}(\xi_{nm})]^2$。

课后作业 习题三，86-87 页：31，32，37，38。

柱域上的分离变量法：Legendre 多项式的引出

考虑半径为 a 的球 $B_a = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|X\| < a\}$ 上的 Laplace 方程：

$$\begin{cases} \Delta u(X) = 0, & X \in B_a, \\ u(X) = f(X), & X \in S_a := \partial B_a. \end{cases}$$

引入球坐标 $x = r\sin\phi\cos\theta$，$y = r\sin\phi\sin\theta$，$z = r\cos\phi$，以及

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, \theta, \phi) &= u(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi), \\ \bar{f}(\theta, \phi) &= f(a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi). \end{aligned}$$

球域上的调和方程在球坐标下可以写为：

$$\begin{cases} \left(r^2\bar{u}_r\right)_r + \dfrac{\bar{u}_{\theta\theta}}{\sin^2\phi} + \dfrac{\left(\sin\phi\,\bar{u}_\phi\right)_\phi}{\sin\phi} = 0, & (r, \theta, \phi) \in (0, a) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi), \\ \bar{u}(a, \theta, \phi) = \bar{f}(\theta, \phi), & (\theta, \phi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi), \\ \bar{u}(r, \theta, \phi) = \bar{u}(r, \theta + 2\pi, \phi), & (r, \theta, \phi) \in (0, a) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi). \end{cases}$$

如何在球坐标下计算 Laplace 算子

直接计算得到

$$
\begin{aligned}
X_\theta &= (x_\theta, y_\theta, z_\theta) = r(-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0),\\
X_\phi &= (x_\phi, y_\phi, z_\phi) = r(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi),\\
X_r &= (x_r, y_r, z_r) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).
\end{aligned}
$$

因此

$$
(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle X_\theta, X_\theta\rangle & \langle X_\theta, X_\phi\rangle & \langle X_\theta, X_r\rangle \\ \langle X_\phi, X_\theta\rangle & \langle X_\phi, X_\phi\rangle & \langle X_\phi, X_r\rangle \\ \langle X_r, X_\theta\rangle & \langle X_r, X_\phi\rangle & \langle X_r, X_r\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2\sin^2\phi & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

利用 Laplace 算子在一般坐标下的表达：(取 $\xi_1 = \theta$，$\xi_2 = \phi$，$\xi_3 = r$)

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\sqrt{\det g}\, g^{ij}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\bar{u}\right)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{u}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\bar{u}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}\right)\right]\\
&= \frac{\bar{u}_{\theta\theta}}{r^2\sin^2\phi} + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\bar{u}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}\right).
\end{aligned}
$$

分离变量法 找解 $\bar{u}(r,\theta,\phi)=\sum_{n,m} H_n(\theta)\,V_{nm}(r,\phi)$。其中 H_n 满足特征值问题

$$\begin{cases} H''+\mu H=0, \\ H(\theta)=H(\theta+2\pi). \end{cases}$$

回忆该特征值问题的解为

$$\mu_n=n^2,\quad H_n=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\ n=0,1,2,\ldots.$$

代入方程得到

$$\left(r^2\partial_r V_{nm}\right)_r H_n-\frac{\mu_n H_n V_{nm}}{\sin^2\phi}+\frac{\left(\sin\phi\partial_\phi V_{nm}\right)_\phi}{\sin\phi}H_n=0.$$

利用 $\{H_n\}_{n\geq 0}$ 的 L^2 正交性，V_{nm} 满足方程:

$$(\bigstar)\quad \left(r^2 V_r\right)_r+\frac{\left(\sin\phi V_\phi\right)_\phi}{\sin\phi}=\frac{n^2 V}{\sin^2\phi}.$$

我们仍然利用分离变量求上述方程。为此，假设 $V(r,\phi)=R(r)G(\phi)$。代入$(\bigstar)$可知

$$\frac{\left(r^2 R_r\right)_r}{R}=\frac{n^2}{\sin^2\phi}-\frac{\left(\sin\phi G_\phi\right)_\phi}{G\sin\phi}=\lambda.$$

因此(★)被分离为两个常微分方程

$$(\bigstar)_1 \quad \frac{(\sin\phi G')'}{\sin\phi} + \left(\lambda - \frac{n^2}{\sin^2\phi}\right)G = 0 \quad 和 \quad (\bigstar)_2 \quad (r^2R')' = \lambda R.$$

为研究$(\bigstar)_1$，引入变量 $s = \cos\phi$，并令 $\bar{G}(s) = G(\arccos s)$。利用 $ds = -\sin\phi d\phi$ 得

$$(\bar{\bigstar})_1 \begin{cases} \frac{d}{ds}\left[(1-s^2)\frac{d\bar{G}}{ds}\right] + \left(\lambda - \frac{n^2}{1-s^2}\right)\bar{G}(s) = 0, \quad s \in [-1,1], \\ |\bar{G}(s)| < \infty. \end{cases}$$

- **Legendre 方程**： $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad x \in [-1,1].$
- m **阶 Legendre 方程**： $(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0, \quad x \in [-1,1].$
- **伴随 Legendre 方程**： $(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(\lambda - \frac{n^2}{1-x^2}\right)y = 0, \quad x \in [-1,1].$

  容易验证，$(\bar{\bigstar})_1$是伴随 Legendre 方程。

问题：如何求解伴随 Legendre 方程？

我们将用**幂级数法**求解伴随 Legendre 方程

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \left(\lambda - \dfrac{n^2}{1-x^2}\right)y = 0, \quad x \in [-1,1], \\ |y(x)| < \infty. \end{cases}$$

其特征值是$\lambda = m(m+1)\ (m \geq n)$，解是 m 次 n 阶伴随 Legendre 多项式：

$$P_m^n(x) = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{dx^n} P_m(x),\ (m \geq n \geq 0),$$

其中 $P_m(x)$ 是如下 m 次 Legendre 多项式，它是 m 阶 Legendre 方程的解，

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m,\ (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

- 伴随 Legendre 多项式的 $L^2([-1,1])$ 正交性:

$$\int_{-1}^{1} P_m^n(x) P_{\bar{m}}^n(x)\, dx = 0, \quad \forall m \neq \bar{m},\ m, \bar{m}, n \geq 0.$$

- 伴随 Legendre 多项式的模:

$$\int_{-1}^{1} [P_m^n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2m+1} \frac{(m+n)!}{(m-n)!} =: p_m^n, \quad \forall m \geq n \geq 0.$$

♠ 通过求解 (伴随)Legendre 方程，问题$(\bar{\bigstar})_1$的特征值和特征函数为

$$\lambda_m = m(m+1), \quad G_{nm}(\phi) = P_n^m(\cos\phi),\ (n \geq 0, m \geq n).$$

♠ 求解$(\bigstar)_2$ $(r^2 R'_m)' = \lambda_m R_m$。容易看到 $R_m = C_1 r^{\alpha_m} + C_2 r^{-\beta_m}$。代入知

$$R_m = C_1 r^m + C_2 r^{-m-1}.$$

为使 $|R_m(r)| < \infty$，我们取

$$R_m(r) = r^m.$$

♠ 综上可知问题$(\bar{\bigstar})$的解为

$$V_{nm}(r,\phi) = C_{nm} P_n^m(\cos\phi) r^m,\ (n \geq 0,\ m \geq n).$$

这样，便得到了分离变量解的形式

$$\bar{u}(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} r^m (A_{nm} \cos n\theta + B_{nm} \sin n\theta) P_m^n(\cos\phi).$$

♠ 通过边值条件确定 A_{nm} 和 B_{nm}:

$$\bar{f}(\theta,\phi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}a^m(A_{nm}\cos n\theta+B_{nm}\sin n\theta)P_m^n(\cos\phi).$$

利用 $\{\cos n\theta,\sin n\theta\}_{n\geq 0}$ 的 $L^2([0,2\pi])$ 正交性:

$$\int_0^{2\pi}\bar{f}(\theta,\phi)\cos n\theta\,d\theta=\pi\sum_{m\geq n}a^mA_{nm}P_m^n(\cos\phi),$$

$$\int_0^{2\pi}\bar{f}(\theta,\phi)\sin n\theta\,d\theta=\pi\sum_{m\geq n}a^mB_{nm}P_m^n(\cos\phi).$$

再用 $\{G_{nm}(\phi)=P_m^n(\cos\phi)\}_{m\geq n\geq 0}$ 带权函数 $\sin\phi$ 的 $L^2_{\sin\phi}([0,\pi])$ 正交性:

$$\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}\bar{f}(\theta,\phi)\cos n\theta\,d\theta\right]P_m^n(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi=\pi a^m p_m^n A_{nm},$$

$$\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}\bar{f}(\theta,\phi)\sin n\theta\,d\theta\right]P_m^n(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi=\pi a^m p_m^n B_{nm}.$$

求解 m 阶 Legendre 方程 $(m = 0, 1, 2, \ldots)$

如下方程中取 $\lambda = m(m+1)$

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad x \in [-1, 1], \\ |y(x)| < \infty. \end{cases}$$

假设有幂级数解：$y_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$。代入方程得到

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty} a_k(k-1)kx^{k-2} - 2x\sum_{k=0}^{\infty} a_k kx^{k-1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)ka_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty}(k^2+k-\lambda)a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k^2+k-\lambda)a_k x^k. \end{aligned}$$

比较系数法得到

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+1)(k+2)}a_k = -\frac{(m-k)(k+m+1)}{(k+1)(k+2)}a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

其中a_0 和 a_1 任意给定。由上述递推公式可以确定所有的 a_k。

仔细观察递推公式

$$a_{k+2} = -\frac{(m-k)(m+1+k)}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

我们得到 $a_{m+2} = a_{m+4} = a_{m+6} = \cdots = 0$。更一般地，$a_{2k}$ 由 a_0 确定:

$$a_2 = -\frac{m(m+1)}{2!} a_0,$$

$$a_4 = \frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4!} a_0,$$

$$a_6 = -\frac{(m-4)(m-2)m(m+1)(m+3)(m+5)}{6!} a_0,$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{\prod_{l=1}^{k}(m-1+2l)\prod_{l=1}^{k}(m+2-2l)}{(2k)!} a_0 \ (k \geq 1).$$

另一方面，a_{2k+1} 由 a_1 确定:

$$a_3 = -\frac{(m-1)(m+2)}{3!} a_1,$$

$$a_5 = \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!} a_1,$$

$$a_7 = -\frac{(m-5)(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)(m+6)}{7!} a_1,$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{\prod_{l=1}^{k}(m+2l)\prod_{l=1}^{k}(m+1-2l)}{(2k+1)!} a_1 \ (k \geq 1).$$

幂级数解可写为 $y_m(x) = a_0 y_{m0}(x) + a_1 y_{m1}(x)$，其中

$$y_{m0}(x) = 1 + \sum_{k\geq 1}(-1)^k \frac{\prod_{l=1}^{k}(m-1+2l)\prod_{l=1}^{k}(m+2-2l)}{(2k)!}x^{2k},$$

$$y_{m1}(x) = x + \sum_{k\geq 1}(-1)^k \frac{\prod_{l=1}^{k}(m+2l)\prod_{l=1}^{k}(m+1-2l)}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

- 若 m 是奇数，则 $y_{m1}(x)$ 是 m 阶多项式。记 $P_m(x) = \frac{y_{m1}(x)}{y_{m1}(1)}$：

$$P_m(x) = \frac{1}{y_{m1}(1)}\left[x + \sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}}(-1)^k \frac{\prod_{l=1}^{k}(m+2l)\prod_{l=1}^{k}(m+1-2l)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right].$$

这称为 m **次 Legendre 多项式**(即取 $a_1 = \frac{1}{y_{m1}(1)}$，$a_0 = 0$)。此时 $|y_{m0}(\pm 1)| = \infty$。

- 若 m 是偶数，则 $y_{m0}(x)$ 是 m 阶多项式，记 $P_m(x) = \frac{y_{m0}(x)}{y_{m0}(1)}$

$$P_m(x) = \frac{1}{y_{m0}(1)}\left[1 + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}(-1)^k \frac{\prod_{l=1}^{k}(m-1+2l)\prod_{l=1}^{k}(m+2-2l)}{(2k)!}x^{2k}\right].$$

这称为 m **次 Legendre 多项式**(即取 $a_0 = \frac{1}{y_{m0}(1)}$，$a_1 = 0$)。此时 $|y_{m1}(\pm 1)| = \infty$。

考虑一般的 λ，我们也可以写下 Legendre 方程的幂级数解 $y_\lambda(x)$。

但如果 $\lambda \neq m(m+1)$ $(m \geq 0)$，则 y_λ 在 $x = \pm 1$ 处是发散的。

因此，Legendre 方程

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \ \ x \in [-1,1], \\ |y(x)| < \infty, \ \ x \in [-1,1], \end{cases}$$

的特征值和特征函数是

$$\lambda_m = m(m+1), \ \ m \text{ 次 Legendre 多项式 } P_m(x) \ (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Rodrigues 公式：Legendre 多项式的微分表达式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

证明. 记 $f_m(x) = (x^2-1)^m$。则 $f_m' = 2mx(x^2-1)^{m-1}$，于是

$$(x^2-1)f_m' = 2mxf_m.$$

两边对 x 求 $m+1$ 阶导数， 并利用 Leibniz 公式：$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$，

$$(x^2-1)f_m^{(m+2)} + 2(m+1)xf_m^{(m+1)} + m(m+1)f_m^{(m)} = 2mxf_m^{(m+1)} + 2m(m+1)f_m^{(m)}.$$

化简表明

$$(x^2-1)f_m^{(m+2)} + 2xf_m^{(m+1)} = m(m+1)f_m^{(m)}.$$

即 $f_m^{(m)}$ 是 Legendre 方程的解。另一个方面，幂级数解法告诉我们：

> Legendre 方程的 有界解 (即 Legendre 多项式) 与 $f_m^{(m)}$ 只相差一个 (常数) 乘数。

容易验证 $f_m^{(m)}(1) = 2^m m!$，所以 $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}f_m^{(m)}(x)$，证毕。 □

Legendre 多项式的递推关系

$$(m+1)P_{m+1}(x)-(2m+1)xP_m(x)+mP_{m-1}(x)=0.$$

证明. 利用 Rodrigues 公式，

$$\begin{aligned}
P_{m+1}(x) &= \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^{m+1}\\
&= \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}\left[x(x^2-1)^m\right]\\
&= \frac{1}{2^m m!}\left[x\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m+m\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m\right]\\
&= xP_m(x)+\frac{m}{2^m m!}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m \qquad (1).
\end{aligned}$$

两边关于 x 求一次导数:

$$P'_{m+1}(x)=xP'_m(x)+(m+1)P_m(x) \qquad (2).$$

另一方面，还是通过 Rodrigues 公式，

$$
\begin{aligned}
P_{m+1}(x) &= \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left[(x^2-1)^m(x^2-1)\right] \\
&= \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!}\Big[(x^2-1)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m \\
&\quad +2(m+1)x\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m+m(m+1)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m\Big] \\
&= \frac{(x^2-1)}{2(m+1)}P'_m(x)+xP_m(x)+\frac{m}{2^{m+1}m!}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m \qquad (3).
\end{aligned}
$$

$(3)\times 2-(1)$ 得

$$
P_{m+1}=\frac{x^2-1}{m+1}P'_m+xP_m \Longrightarrow P'_m=\frac{m+1}{x^2-1}P_{m+1}-\frac{m+1}{x^2-1}xP_m \qquad (4).
$$

把 (2) 中的 $m+1$ 换成 m，并利用 (4) 计算导数项，我们得到

$$
\begin{aligned}
mP_{m-1} &= P'_m-xP'_{m-1} \\
&= \frac{m+1}{x^2-1}P_{m+1}-\frac{(2m+1)x}{x^2-1}P_m+\frac{mx^2}{x^2-1}P_{m-1}.
\end{aligned}
$$

整理即得预期的递推关系式。 □

Legendre 多项式正交性

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_{\bar{m}}(x)\,dx = 0, \quad \forall m \neq \bar{m},\ m,\bar{m} \geq 0.$$

证明. Legendre 多项式 P_m 和 $P_{\bar{m}}$ 满足 Legendre 方程

$$\begin{aligned}\left[(1-x^2)P'_m\right]' + m(m+1)P_m &= 0,\\ \left[(1-x^2)P'_{\bar{m}}\right]' + \bar{m}(\bar{m}+1)P_{\bar{m}} &= 0.\end{aligned}$$

第一式 $\times P_{\bar{m}}$ 与第一式 $\times P_m$ 相减后积分:

$$\begin{aligned}(m-\bar{m})(m+\bar{m}+1)\int_{-1}^{1} P_m P_{\bar{m}} &= \int_{-1}^{1}\left[\left[(1-x^2)P'_{\bar{m}}\right]'P_m - \left[(1-x^2)P'_m\right]'P_{\bar{m}}\right]\\ &= \left[(1-x^2)P'_{\bar{m}}P_m\right]\Big|_{-1}^{1} - \left[(1-x^2)P'_m P_{\bar{m}}\right]\Big|_{-1}^{1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Legendre 多项式的模

$$\int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,dx = \frac{2}{2m+1} =: p_m, \quad \forall\ m \geq 0.$$

证明. 回忆递推公式

$$mP_m(x) - (2m-1)xP_{m-1}(x) + (m-1)P_{m-2}(x) = 0,$$
$$(m+1)P_{m+1}(x) - (2m+1)xP_m(x) + mP_{m-1}(x) = 0.$$

用 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ 表示 $[-1, 1]$ 上函数的 L^2 内积。两式分别与 P_m、P_{m-1} 做内积得

$$m\langle P_m, P_m\rangle_{L^2} = (2m-1)\langle P_m, xP_{m-1}\rangle_{L^2}$$
$$m\langle P_{m-1}, P_{m-1}\rangle_{L^2} = (2m+1)\langle xP_m, P_{m-1}\rangle_{L^2}.$$

我们于是得到递推公式

$$(2m+1)\langle P_m, P_m\rangle_{L^2} = (2m-1)\langle P_{m-1}, P_{m-1}\rangle_{L^2} = \cdots = \langle P_0, P_0\rangle_{L^2} = 2.$$

□

求解伴随 Legendre 方程

给定 $m \geq n \geq 0$，考虑伴随 Legendre 方程

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \left(m(m+1) - \dfrac{n^2}{1-x^2}\right)y = 0, \quad x \in [-1,1], \\ |y(x)| < \infty. \end{cases}$$

可验证，如下n **阶** m **次伴随 Legendre 多项式**是上述方程的解，

$$P_m^n(x) = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{dx^n} P_m(x), \quad (m \geq n \geq 0).$$

证明. 对 $(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0$ 求 n 阶导，并利用 Leibniz 公式

$$0 = (1-x^2)[P_m^{(n)}]'' - 2(n+1)x[P_m^{(n)}]' + [m(m+1) - n(n+1)]P_m^{(n)}.$$

把 $P_m^{(n)} = (1-x^2)^{-\frac{n}{2}} P_m^n$ 代入上式，可得

$$0 = (1-x^2)^{-\frac{n}{2}} \left[(1-x^2)[P_m^n]'' - 2x[P_m^n]' + \left(m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2}\right)P_m^n\right].$$

$\square$

伴随 Legendre 多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1} P_m^n(x) P_{\bar{m}}^n(x)\, dx = 0, \quad \forall m \neq \bar{m},\ \ m, \bar{m}, n \geq 0.$$

证明. P_m^n 和 $P_{\bar{m}}^n$ 满足伴随 Legendre 方程

$$\begin{aligned}
\big[(1-x^2)[P_m^n]'\big]' + \left(m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2}\right) P_m^n = 0, \\
\big[(1-x^2)[P_{\bar{m}}^n]'\big]' + \left(\bar{m}(\bar{m}+1) - \frac{n^2}{1-x^2}\right) P_{\bar{m}}^n = 0.
\end{aligned}$$

第一式 $\times P_{\bar{m}}^n$ 与第二式 $\times P_m^n$ 相减后积分:

$$\begin{aligned}
& (m-\bar{m})(m+\bar{m}+1) \int_{-1}^{1} P_m^n P_{\bar{m}}^n \\
= & \int_{-1}^{1} \Big[\big[(1-x^2)[P_{\bar{m}}^n]'\big]' P_m^n - \big[(1-x^2)[P_m^n]'\big]' P_{\bar{m}}^n \Big] \\
= & \big[(1-x^2)[P_{\bar{m}}^n]' P_m^n\big]\Big|_{-1}^{1} - \big[(1-x^2)[P_m^n]' P_{\bar{m}}^n\big]\Big|_{-1}^{1} \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

□

伴随 Legendre 多项式的模

$$\int_{-1}^{1} [P_m^n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2m+1} \frac{(m+n)!}{(m-n)!} =: p_m^n, \quad \forall m \geq n \geq 0.$$

证明. 对递推公式 $(m+1)P_{m+1}(x) - (2m+1)xP_m(x) + mP_{m-1}(x) = 0$ 求 n 阶导

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)^{\frac{n}{2}} \left[(m+1)P_{m+1}^{(n)} - (2m+1)xP_m^{(n)} - (2m+1)nP_m^{(n-1)} + mP_{m-1}^{(n)} \right] \\ &= (m+1)P_{m+1}^n - (2m+1)xP_m^n - (2m+1)n\sqrt{1-x^2}\,P_m^{(n-1)} + mP_{m-1}^n. \end{aligned}$$

另一方面，把 $\frac{1}{2^{m+1}(m+1)!} \frac{d^m}{dx^m}$ 作用到下面的恒等式

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^{m+1} &= 2(m+1)(x^2-1)^m + 4m(m+1)x^2(x^2-1)^{m-1} \\ &= 2(2m+1)(m+1)(x^2-1)^m + 4m(m+1)(x^2-1)^{m-1}. \end{aligned}$$

我们可以得到 $P'_{m+1} = (2m+1)P_m + P'_{m-1}$。作用 $(1-x^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$ 得

$$P_{m+1}^n = (2m+1)\ \sqrt{1-x^2}\,P_m^{(n-1)} + P_{m-1}^n.$$

消去红字项，我们得到伴随 Legendre 多项式的递推公式

$$0 = (m-n+1)P_{m+1}^n - (2m+1)xP_m^n + (m+n)P_{m-1}^n.$$

分别与 P_{m+1}^n 和 P_{m-1}^n 做 L^2-内积得到

$$0 = (m-n+1)\int_{-1}^{1}[P_{m+1}^n]^2 - (2m+1)\langle xP_m^n, P_{m+1}^n\rangle_{L^2},$$

$$0 = -(2m+1)\langle xP_m^n, P_{m-1}^n\rangle_{L^2} + (m+n)\int_{-1}^{1}[P_{m-1}^n]^2.$$

第一式的 m 用 $m-1$ 替换，再利用第二式消去 $\langle xP_m^n, P_{m-1}^n\rangle_{L^2}$，

$$(2m+1)\int_{-1}^{1}[P_m^n]^2 = \frac{m+n}{m-n}(2m-1)\int_{-1}^{1}[P_{m-1}^n]^2.$$

利用该递推公式可求得 P_m^n 的 L^2 模。 □

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) 法国数学家。

在椭圆函数、素数分布和解析数论等方面做了开创性工作；

证明了指数为 $n=5$ 的费马大定理。

常微分方程的幂级数解法 (考试要求)

练习 1

用幂级数方法解方程 $y'' = xy$。

假设 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 是方程的解。直接计算知

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

代入方程得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1} x^n, \text{ 其中} c_{-1} := 0.$$

比较系数给出$(n+2)(n+1)c_{n+2} = c_{n-1}\ (\forall n \geq 0)$。不难验证

$$\begin{aligned}
&\text{若} n = 0, 3, 6, \ldots : \text{则}\ c_{-1} = c_2 = c_5 = 0, \\
&\text{若} n = 1, 4, 7, \ldots : \text{则}\ c_3 = \frac{1}{3!} c_0, \ c_6 = \frac{4}{6!} c_0, \ c_9 = \frac{4 \times 7}{9!} c_0, \\
&\text{若} n = 2, 5, 8, \ldots : \text{则}\ c_4 = \frac{2}{4!} c_1, \ c_7 = \frac{2 \times 5}{7!} c_1, \ c_{10} = \frac{2 \times 5 \times 8}{10!} c_1.
\end{aligned}$$

若 c_0 和 c_1 给定，则由通项公式可确定所有 c_n $(n \geq 2)$。

用归纳法可以验证

$$c_{3k-1} = 0 \ (k \geq 0),$$
$$c_{3k} = \frac{\prod_{l=1}^{k}(3l-2)}{(3k)!} c_0 \ (k \geq 1),$$
$$c_{3k+1} = \frac{\prod_{l=1}^{k}(3l-1)}{(3k+1)!} c_1 \ (k \geq 1).$$

因此我们得到方程的幂级数解为

$$y(x) = c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{l=1}^{k}(3l-2)}{(3k)!} x^{3k}\right] + c_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{l=1}^{k}(3l-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}\right].$$

□

练习 2

用幂级数法求解

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 10y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

假设 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是方程的解。直接计算知

$$2xy' = 2x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

代入方程得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2n a_n + 10 a_n \right] x^n = 0.$$

比较系数给出

$$a_{n+2} = \frac{2n-10}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (\forall n \geq 0).$$

观察递推公式 $a_{n+2} = \frac{2n-10}{(n+2)(n+1)} a_n$，可以发现

$$a_7 = a_9 = a_{11} = \cdots = 0.$$

初值条件 $y(0) = 0$ 与 $y'(0) = 1$ 告诉我们

$$a_0 = 0, \ a_1 = 1.$$

再利用 a_n 的递推公式，我们可以确定

$$a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = \cdots = 0,$$

以及

$$a_1 = 1, \ a_3 = -\frac{4}{3}, \ a_5 = \frac{15}{4}.$$

所以多项式解为

$$y = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{15}{4}x^5.$$

□

练习 3

在 $x=0$ 的邻域内用幂级数法求解

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0.$$

假设 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的解。直接计算知

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

代入方程得到

$$\begin{aligned}0 &= (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)^2a_n]x^n.\end{aligned}$$

比较系数给出

$$a_{n+2}=\frac{(n-1)^2}{(n+2)(n+1)}a_n,\ (n\geq 0).$$

由递推公式得

$$a_3 = a_5 = \cdots = a_{2k+1} = 0, \ (k \geq 1),$$

以及

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(-1)^2}{2!} a_0, \\ a_4 &= \frac{1^2 \times (-1)^2}{4!} a_0, \\ a_6 &= \frac{3^2 \times 1^2 \times (-1)^2}{46!} a_0, \\ a_{2k} &= \frac{((2k-3)!!)^2}{(2k)!} a_0, \ (k \geq 1). \end{aligned}$$

方程的通解为

$$y = a_1 x + a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((2k-3)!!)^2}{(2k)!} x^{2k} \right].$$

$\square$