

偏微分方程

李奇睿

浙江大学数学科学学院

qi-rui.li@zju.edu.cn

课程缩略

基本信息

课程类别：专业基础课程；学分：2.0；面向对象：理、工科相关专业本科生。

内容概述

- (1) 了解波动方程、热传导方程和拉普拉斯方程等 3 类典型偏微分方程的导出。
- (2) 掌握二阶线性偏微分方程的分类。
- (3) 掌握用特征线法、分离变量法、傅里叶变换法、格林函数求解特定方程。
- (4) 了解拉普拉斯变换法、格林公式、特殊函数等在偏微分方程中的应用。

参考书籍

- (1) 李胜宏等，《数学物理方程》，浙江大学出版社，2008.
- (2) 周蜀林，《偏微分方程》，北京大学出版社，2005.
- (3) W. Strauss; 《偏微分方程导论》；J. Wiley&Sons (2007).



考核与评分

考核 (包括阶段测试、期末考试)

(1) 期末考试

统一命题，由学校安排考场，统一标准阅卷。采用 100 分制记录成绩。

(2) 阶段测试

时间/形式：第四或第五周随堂进行。

成绩评定：采用相对评分办法：按分数段。由课程组统一制订标准。

总评成绩

作业周一 10pm 前上传“学在浙大” 30% + 阶段测试 20%+ 期末考试 50%。

第一章：方程的导出和定解问题

本章概览

♠ 从物理模型出发，推导出三类典型偏微分方程

- 波动方程
- 扩散方程/热传导方程
- 泊松方程。

♠ 介绍偏微分方程的一些基本概念，定解条件：初值条件和边值条件。

♠ 给出二阶线性偏微分方程的分类与化简。

教学要求

♣ 了解三类典型方程的背景及推导；

♣ 熟练掌握三类典型方程的定解条件；

♣ 熟练掌握（两个自变量的）二阶线性方程的分类，并化为标准型。

弦的振动 触碰吉他上一条拉紧的琴弦。由于弦的各小段之间有张力作用，一处的振动会引起邻近小段的振动，从而开始传播。这种振动的传播现象称为波。



- 假设弦只受到张力的作用，和一个竖直方向的胁迫力 $F(x, t)$ 。
- 假设平衡位置是 $\{y = 0\}$ ，振动保持在 xy 平面上，没有水平位移。

用 $u(x, t)$ 表示 t 时刻弦在 x 处离开平衡位置的位移，即弦的微小振动。

一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

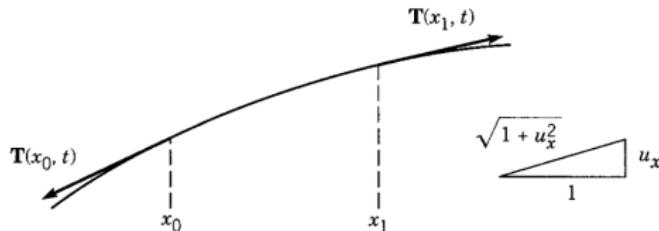
注：

- a 由张力水平方向大小 T_0 (为常数) 与弦的质量线密度 ρ_0 决定，
- f 由 F 和 ρ_0 决定。

英国数学家、物理学家牛顿 (1643 –1727) 提出了描述质点运动的基本定律

牛顿运动定律：物体所受力 = 物体质量 × 加速度。

将牛顿定律应用到极小的一段弦 $\delta\ell$: $\{x_0 \leq x \leq x_1\}$ 。



水平方向运动方程

- 水平受力：记 $\theta(x, t)$ 为 t 时刻弦在 x 处的切线与水平方向夹角，则

$$\delta\ell \text{ 所受水平力} = |\vec{T}| \cos \theta \Big|_{x_0}^{x_1}.$$

- $\delta\ell$ 的水平加速度为 0。由水平方向的运动方程： $|\vec{T}| \cos \theta = T_0$ 为常值。

竖直方向运动方程

- 竖直受力：利用 $\tan \theta(x, t) = u_x(x, t)$, 可以发现

$$\begin{aligned}\delta\ell \text{ 所受竖直力} &= |\vec{T}| \sin \theta \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} F \\ &= T_0 u_x \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} F \quad (\because |\vec{T}| \cos \theta = T_0).\end{aligned}$$

- 竖直加速度： $\partial_t^2 u$ 。由竖直方向的运动方程得到

$$\int_{x_0}^{x_1} \partial_t^2 u \cdot \rho_0 dx = \int_{x_0}^{x_1} [T_0 u_x]_x dx + \int_{x_0}^{x_1} F = T_0 \int_{x_0}^{x_1} u_{xx} dx + \int_{x_0}^{x_1} F .$$

对该积分方程两边求微分，可知 u 满足所期待的一维波动方程。

一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad \text{其中 } a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho_0}.$$

薄膜振动

弦乐的二维版本是柔韧、均匀的鼓面，即框架上拉伸的薄膜。

- 假设框架位于 xy -平面。
- 假设膜只受到张力的作用，和一个竖直方向的胁迫力 $F(x, y, t)$ 。
- 假设膜没有水平运动，所受张力在 xy 平面分量为常数 T_0 。

用 $u(x, y, t)$ 表示 t 时刻膜在 (x, y) 处的竖直位移，即膜的微小振动。

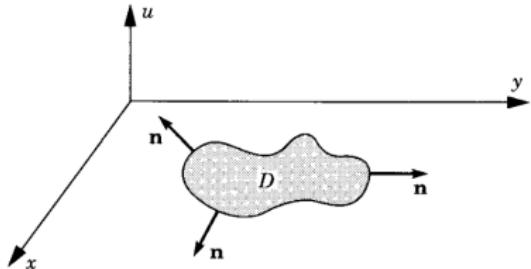
二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f, \quad \text{其中 } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

注：

- a 由张力水平方向大小 T_0 (为常数) 与薄膜的质量面密度 ρ_0 决定，
- f 由 F 和 ρ_0 决定。

考虑微区域 D 上薄膜的运动方程



- 竖直受力：记 $\theta(\cdot, t)$ 为张力 $\vec{T}(\cdot, t)$ 与 xy -平面的夹角，利用 $\tan \theta = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 有

$$D \text{ 所受竖直力} = \int_{\partial D} T_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma + \int_D F dX = T_0 \int_D \Delta u dX + \int_D F dX.$$

- 竖直加速度： $\partial_t^2 u(\cdot, t)$ ，由牛顿运动定律得到

$$\int_D \partial_t^2 u \cdot \rho_0 dX = T_0 \int_D \Delta u dX + \int_D F dX.$$

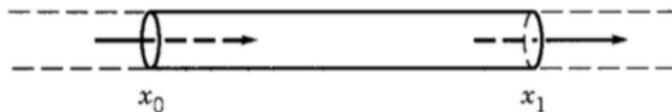
利用 D 的任意性，上述积分方程化为偏微分方程

二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f, \quad \text{其中 } a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}, \quad f(\cdot, t) = \frac{F(\cdot, t)}{\rho_0}.$$

扩散现象

将某液体装入细管中，然后滴入染料。考虑染料在该液体中的扩散。



用 $u(x, t)$ 表示 t 时刻细管中 x 处染料的浓度 (即单位长度液体所含染料的质量)。

一维扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

注： $k > 0$ 表示扩散系数



Adolf Eugen Fick (1829-1901) 德国出生的医生和生理学家。

1855 年引入扩散定律，该定律控制气体穿过流体膜的扩散。

他的工作导致了测量心输出量的直接菲克法的发展。

- 细管介于 $\{x_0 \leq x \leq x_1\}$ 的部分所含染料质量

$$m(t) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx.$$

质量守恒原理告诉我们：

$\{x_0 \leq x \leq x_1\}$ 的部分所含染料质量的变化速率 $= x_0$ 与 x_1 处扩散速率的差。

- 德国物理学家 Adolf Eugen Fick (1829-1901) 提出扩散定律：

扩散速率 (单位时间通过单位截面的质量) 与物质浓度的梯度成正比，方向相反。

联合扩散定律与质量守恒原理

$$\int_{x_0}^{x_1} \partial_t u(x, t) dx = \frac{dm(t)}{dt} = -k \partial_x u(x_0) + k \partial_x u(x_1) = k \int_{x_0}^{x_1} \partial_x^2 u(x, t) dx.$$

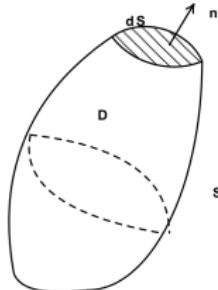
由 x_0, x_1 的任意性得到

一维扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

热传导现象 区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 中有一均匀的导热体。

- 质量密度为 ρ ; 比热为 μ ; 热传导系数为 κ 。
- t 时刻在 $X = (x, y, z)$ 处的热源密度为 $F(X, t)$ 。



用 $u(X, t)$ 表示 t 时刻导热体在 X 处的温度。

热传导方程

$$\partial_t u = a^2 \Delta u + f \quad \text{其中 } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

注. $a = a(\kappa, \mu, \rho)$, f 由 F, μ, ρ 决定。



Joseph Fourier (1768-1830) 法国数学家和物理学家。

发展傅里叶分析和调和分析，应用在热传导和弦振动问题。

傅立叶变换和傅立叶传导定律也以他的名字命名。

法国数学家、物理学家 Joseph Fourier (1768-1830) 提出了描述热传导的 **Fourier 定律**:

热流的大小与温度梯度的大小成比例，方向相反。

- 包含在小区域 D 中导热体的总热量 $H(t)$ 和热量的变化率 $\frac{d}{dt}H$ 为

$$H(t) = \int_D \mu \rho u(X, t) dX \implies \frac{dH}{dt} = \int_D \mu \rho \partial_t u dX.$$

- 热量守恒 热量变化率 = 热流沿 ∂D 的积分 + 热源贡献。结合 **Fourier 定律**,

$$\begin{aligned} \int_D \mu \rho \partial_t u dX &= \frac{d}{dt} H = \int_{\partial D} \kappa \vec{n} \cdot \nabla u(X, t) ds(X) + \int_D F(X, t) dX \\ &= \int_D (\kappa \Delta u + F). \end{aligned}$$

由 D 的任意性得到

热传导方程

$$\partial_t u = a^2 \Delta u + f, \quad \text{其中 } a^2 = \frac{\kappa}{\mu \rho}, \quad f(X, t) = \frac{1}{\mu \rho} F(X, t).$$

波传播现象、热传导现象的稳态

若经过很长时间后，波传播、热传导趋于稳态（不再随时间变化）： $\partial_t^2 u = \partial_t u = 0$ 。则

泊松 (Poisson) 方程

$$\Delta u = \phi.$$

调和方程、或拉普拉斯 (Laplace) 方程

$$\Delta u = 0.$$



Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749-1827)。

法国数学家，对工程、统计、物理、天文和哲学有重要贡献。

提出了拉普拉斯方程，开创了拉普拉斯变换。

被称为法国牛顿，被描述为拥有非凡的自然数学能力。

偏微分方程基本概念

- 把含有未知函数及其偏导数的函数方程称为偏微分方程，其一般形式为：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0,$$

其中 $u = u(x_1, \dots, x_n)$ 是未知函数， F 是关于其变元的已知函数。

- 未知函数的最高阶偏导数的阶数称为偏微分方程的阶。
- 线性偏微分方程： F 对未知函数及其各阶偏导数都是一次的，其系数仅依赖于自变量。

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_n} A_\alpha(x) \partial_{x^\alpha} u = 0,$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathcal{I}_n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}\}$, $\partial_{x^\alpha} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ 。

- 不是线性的偏微分方程称为非线性偏微分方程。

偏微分方程基本概念

- 二阶线性偏微分方程的一般形式:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x}) u = f(\vec{x}).$$

其中 a_{ij}, b_i, c, f 均为区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中的已知函数。

- 当 $f \equiv 0$ 时, 称为齐次的二阶线性偏微分方程。
- 当 $f \not\equiv 0$ 时, 称为非齐次的二阶线性偏微分方程。
- 若 a_{ij}, b_i, c, f 均为常数, 则称为常系数二阶线性偏微分方程。
- 如果函数 u 使得 $F = 0$ 在区域 Ω 中成立, 则称 u 是方程在 Ω 上的一个解。

偏微分方程基本概念

◆ 二阶线性偏微分方程的例子：

- 波动方程 $\partial_t^2 u = a^2 \Delta u + f.$
- 热传导方程 $\partial_t u = a^2 \Delta u + f$
- 泊松方程 $\Delta u = f.$

◆ 二阶非线性偏微分方程的例子：

- 极小曲面的拟线性方程

$$(1 + |\nabla u|^2) \Delta u - \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} = 0.$$

- 最优传输中的完全非线性方程

$$\det(\nabla^2 u) = f.$$

► 方程系统例子：爱因斯坦方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

定解条件和定解问题

- **定解条件**: 初值条件 (含时间变量的方程)、边值条件 (有界或半有界区域)。
- **定解问题**: 微分方程 + 定解条件。

一维热传导方程

考虑金属细杆的热传导。细杆位于水平轴 $\{0 \leq x \leq \ell\}$ 。

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in (0, \ell) \times [0, \infty).$$

初值条件

$u(x, 0) = \phi(x)$, 表示细杆的初始温度。

边值条件

细杆两端 $x = 0, \ell$ 可能受不同的物理环境影响。需要考虑相应的边界条件。

边值条件通常可以有如下 3 类 (以 $x = \ell$ 处为例)

- 第 I 类边值条件 (Dirichlet 条件): 已知细杆端点的温度 $g(t)$,

$$u(\ell, t) = g(t).$$

- 第 II 类边值条件 (Neumann 条件): 已知细杆端点与外界热量交换的强度。热流的大小与温度梯度的大小成比例 (Fourier 定律), 则

$$u_x(\ell, t) = h(t).$$

- 第 III 类边值条件 (Robin 条件): 已知端点处环境温度为 $m(t)$, 细杆自由冷却。牛顿冷却定律

流经界面的热流强度与界面和导热体的温度差成正比。

利用 Fourier 定律计算热流强度, 并结合牛顿冷却定律,

$$-\mu u_x(\ell, t) = u(\ell, t) - m(t).$$

也就是

$$u(\ell, t) + \mu u_x(\ell, t) = m(t).$$

有界区间上的一维热传导方程

初值条件 + 每个端点处的边值条件。例如

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2 \partial_x^2 u + f(x, t), & (x, t) \in (0, \ell) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = g(t), \quad u_x(\ell, t) = h(t) & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

半无界区间上的一维热传导方程

初值条件 + 一个端点处的边值条件。例如

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2 \partial_x^2 u + f(x, t), & (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in (0, \infty), \\ u(0, t) + \mu u_x(0, t) = m(t), & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

无界区间上的一维热传导方程

只有初值条件。即

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2 \partial_x^2 u + f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

称为初值问题或柯西 (Cauchy) 问题。

定解条件和定解问题

一维波动方程

考虑振动过程中弦离开平衡位置的位移函数 u 满足的方程

$$\partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + f(x, t), \quad (x, t) \in (0, \ell) \times [0, \infty).$$

初值条件

$u(x, 0) = \phi(x)$, 表示弦的初始位置。

$\partial_t u(x, 0) = \psi(x)$, 表示弦的初始速度。

边值条件

: 在弦的两端 $x = 0, \ell$ 可加上与热传导方程类同的边值条件。

有界区间上的一维波动方程

初值条件 + 每个端点处的边值条件。例如

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + f(x, t), & (x, t) \in (0, \ell) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = g(t), \quad u_x(\ell, t) = h(t), & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

半无界区间上的一维波动方程

初值条件 + 一个端点处的边值条件。例如

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + f(x, t), & (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, \infty), \\ u(0, t) + \mu u_x(0, t) = m(t), & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

无界区间上的一维波动方程

只有初值条件。即

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2 \partial_x^2 u + f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

称为初值问题或柯西 (Cauchy) 问题。

定解条件和定解问题

泊松方程

$$\Delta u = f(X), \quad X \in \Omega.$$

泊松方程描述稳定的物理状态，不随时间改变。因此没有初值条件。

对于有界区域 Ω ，可以考虑如下边值条件（之一）

- 第 I 类边值条件 (Dirichlet 条件): $u|_{\partial\Omega}(X) = g(X)$ 。
- 第 II 类边值条件 (Neumann 条件): $\partial_{\vec{n}}u|_{\partial\Omega}(X) = h(X)$ 。
- 第 III 类边值条件 (Robin 条件): $(u + \mu\partial_{\vec{n}}u)|_{\partial\Omega}(X) = m(X)$ 。

对于无界区域 Ω ，还可以考虑无穷远处的渐近条件。

课后作业 习题一，17 页：2, 5, 6, 8。

线性方程的叠加原理

考虑二阶线性算子

$$\mathcal{L}u := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x})u, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

一般的二阶线性偏微分方程为 $\mathcal{L}u = f$ 。

线性方程的叠加原理

- 若 u_i 是线性方程 $\mathcal{L}u_i = f_i$ 的解 ($i = 1, 2$), 则 $u = u_1 + u_2$ 满足

$$\mathcal{L}u = f, \quad \text{其中 } f = f_1 + f_2.$$

- 若 u 是线性方程 $\mathcal{L}u = f$ 的解, $\lambda \in \mathbb{R}$, 则 $u_\lambda = \lambda u$ 满足

$$\mathcal{L}u_\lambda = \lambda f.$$

(含两个变量的) 二阶线性方程的分类

考虑偏微分方程 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + H(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (*)$

其中 $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$ 为已知系数函数。考虑判别式 $\mathcal{D} = b^2 - ac$ 。

- 若 $\mathcal{D} > 0$, 则存在变换 $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$, 使 $\bar{u}(\xi, \eta) = u(x, y)$ 满足

$$\bar{u}_{\xi\xi} - \bar{u}_{\eta\eta} = \bar{H}(\xi, \eta, \bar{u}, \bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta).$$

称(*)是 Ω 上的**双曲型**方程。 例如波动方程 $u_{tt} = u_{xx} + f$ 。

- 若 $\mathcal{D} = 0$, 则存在变换 $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$, 使 $\bar{u}(\xi, \eta) = u(x, y)$ 满足

$$\bar{u}_{\eta\eta} = \bar{H}(\xi, \eta, \bar{u}, \bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta).$$

称(*)是 Ω 上的**抛物型**方程。 例如热传导方程 $u_t = u_{xx} + f$ 。

- 若 $\mathcal{D} < 0$, 则存在变换 $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$, 使 $\bar{u}(\xi, \eta) = u(x, y)$ 满足

$$\bar{u}_{\xi\xi} + \bar{u}_{\eta\eta} = \bar{H}(\xi, \eta, \bar{u}, \bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta).$$

称(*)是 Ω 上的**椭圆型**方程。 例如泊松方程 $\Delta u = f$ 。

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + H(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (\star)$$

我们讨论如何引入恰当的变量替换，把该方程化简，得到标准型和分类。

- 考虑坐标替换 $(x, y) \mapsto (\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$ 。由隐函数定理，

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \text{ 非退化 } \iff 0 \neq \det \mathcal{J} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x.$$

- $\bar{u}(\xi, \eta) = u(x, y)$ 。链式法则： (\star) 的二阶导数项 $= \bar{a}\bar{u}_{\xi\xi} + 2\bar{b}\bar{u}_{\xi\eta} + \bar{c}\bar{u}_{\eta\eta} + l.o.t,$

$$\begin{cases} \bar{a} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \\ \bar{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y, \\ \bar{c} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \end{cases}$$

注意 $\bar{\mathcal{D}} = (\det \mathcal{J})^2 \mathcal{D}$ 。即判别式的符号是不变量。

- 观察括号中 1、3 两行。为化简 (\star) ，考虑如下特征方程

$$a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + c\Phi_y^2 = 0 \quad (\#)$$

若特征方程有两个特解，取做 $\xi(x, y)$ 和 $\eta(x, y)$ ，则 $\bar{a} = \bar{c} = 0$ 。

如何求解特征方程 $a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + c\Phi_y^2 = 0$ (#)?

定理. 假设 $\Phi_x^2 + \Phi_y^2 \neq 0$ 。 $\Phi(x, y)$ 为 (#) 的解当且仅当它是如下常微的通积分

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0 \quad (\#').$$

证明

- 假设 Φ 是 (#) 的解。若 $\Phi_y|_{(x_0, y_0)} \neq 0$, 则由隐函数定理存在 $y(x)$ 使得

$$\Phi(x, y(x)) = \Phi(x_0, y_0).$$

求导得到: $\Phi_x + \Phi_y y_x = 0$ 。因为 Φ 满足 (#),

$$(ay_x^2 - 2by_x + c)\Phi_y^2 = 0 \implies y(x) \text{ 满足 } (\#').$$

- 假设 Φ 是 (#') 的通积分, 即对 (#') 的解 $y(x)$ 有

$$\Phi(x, y(x)) = \text{常数}.$$

求导得到 $\Phi_x + \Phi_y y_x = 0$ 。因为 $\Phi_y \neq 0$,

$$y_x = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y} \implies \text{带入 } (\#') \text{ 计算可知 } \Phi \text{ 是 } (\#) \text{ 的解.}$$

当 $\mathcal{D} = b^2 - ac > 0$ 时

- 由因式分解, (#')化为两个常微分方程

$$ady - (b + \sqrt{\mathcal{D}})dx = 0 \quad \text{与} \quad ady - (b - \sqrt{\mathcal{D}})dx = 0.$$

求解得到两组通积分

$$\Phi_1(x, y) = \text{常数}, \quad \Phi_2(x, y) = \text{常数}.$$

- 取 $\xi = \Phi_1(x, y)$ 和 $\eta = \Phi_2(x, y)$ 就有 $\bar{a} = \bar{b} = 0$ 。 (这样的 ξ, η 满足 $\det \mathcal{J} \neq 0$)。 故

$$\bar{u}_{\xi\eta} = \bar{H}(\xi, \eta, \bar{u}, \bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta).$$

- 再做坐标变换 $(\xi, \eta) \mapsto (s, t)$ 和函数变换

$$s = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad t = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \hat{u}(s, t) = \bar{u}(\xi, \eta).$$

可验证 \hat{u} 满足方程

$$\hat{u}_{tt} - \hat{u}_{ss} = \hat{H}(s, t, \hat{u}, \hat{u}_t, \hat{u}_s) \quad \text{双曲型方程标准型.}$$

当 $\mathcal{D} = b^2 - ac = 0$ 时

- 解($\#'$)可得到一个通积分 $\Phi(x, y) = \text{常数}$ 。

取 $\xi = \Phi(x, y)$, 再任取 η (比如 $\eta = x$ 或 $\eta = y$) 使得

$$\det \mathcal{J} \neq 0.$$

那么 $\bar{a} = 0$ 。

- 注意 $0 = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = (\sqrt{a}\xi_x + (\text{sgn } b)\sqrt{c}\xi_y)^2$ (不妨设 $a, c \geq 0$)。故

$$\begin{aligned}\bar{b} &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\ &= (\sqrt{a}\xi_x + (\text{sgn } b)\sqrt{c}\xi_y)(\sqrt{a}\eta_x + (\text{sgn } b)\sqrt{c}\eta_y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

于是 $\bar{a} = \bar{b} = 0$ 。所以 \bar{u} 满足

$$\bar{u}_{\eta\eta} = \bar{H}(\xi, \eta, \bar{u}, \bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta) \quad \text{抛物型方程标准型.}$$

当 $\mathcal{D} = b^2 - ac < 0$ 时

特征方程(#)或(#{})无实函数解。

我们希望引入坐标变换 $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ 使得复值函数

$$\Phi(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$$

满足特征方程(#), 即

$$0 = a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + c\Phi_y^2.$$

比较实部和虚部可知

$$\begin{cases} a(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2b(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + c(\xi_y^2 - \eta_y^2) = 0, \\ a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y = 0. \end{cases}$$

即 $\bar{a} = \bar{c}$ 且 $\bar{b} = 0$ 。这意味着 \bar{u} 满足

$$\bar{u}_{\xi\xi} + \bar{u}_{\eta\eta} = \bar{H}(\xi, \eta, \bar{u}, \bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta) \quad \text{椭圆型方程标准型.}$$

通过因式分解

$$a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + c\Phi_y^2 = \frac{1}{a} \left[a\Phi_x - (-b + i\sqrt{-\mathcal{D}})\Phi_y \right] \left[a\Phi_x - (-b - i\sqrt{-\mathcal{D}})\Phi_y \right].$$

因此

$$a\Phi_x - \left(-b + i\sqrt{-\mathcal{D}} \right) \Phi_y = 0.$$

比较实部和虚部，我们得到 ξ 和 η 满足的一阶线性偏微分方程组

$$\begin{cases} a\xi_x + b\xi_y = -\sqrt{-\mathcal{D}}\eta_y, \\ a\eta_x + b\eta_y = \sqrt{-\mathcal{D}}\xi_y. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{-\mathcal{D}}}\xi_x + \frac{b}{\sqrt{-\mathcal{D}}}\xi_y = -\eta_y, \\ \frac{b}{\sqrt{-\mathcal{D}}}\xi_x + \frac{c}{\sqrt{-\mathcal{D}}}\xi_y = \eta_x. \end{cases} \quad (\&)$$

这也称为 Beltrami 方程。由其可知 $\det \mathcal{J} = -(a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)/\sqrt{-\mathcal{D}} \neq 0$ ，且

$$\partial_x \left(\frac{a}{\sqrt{-\mathcal{D}}}\xi_x + \frac{b}{\sqrt{-\mathcal{D}}}\xi_y \right) + \partial_y \left(\frac{b}{\sqrt{-\mathcal{D}}}\xi_x + \frac{c}{\sqrt{-\mathcal{D}}}\xi_y \right) = 0. \quad (\&')$$

偏微分方程理论已经建立了这个椭圆型方程($\&'$) 的局部可解性 (若 a, b, c 恰当光滑)。

多变量情形: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x})u = f.$

考虑正交变换 $x \mapsto \xi = Bx$, 其中 $\xi^T = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $x^T = (x_1, \dots, x_n)$, $B = (b_{ij})$ 。

链式法则告诉我们 $\bar{u}(\xi) = u(B^T \xi)$ (等价的 $u(x) = \bar{u}(Bx)$) 满足 $u_{x_i x_j} = b_{ik} \bar{u}_{\xi_k \xi_l} b_{lj}$ 。故

$$\text{Trace}(AU) = \text{Trace}(AB\bar{U}B^T) = \text{Trace}(\bar{A}\bar{U}),$$

其中 $U = (u_{x_i x_j})$, $\bar{U} = (\bar{u}_{\xi_i \xi_j})$, $A = (a_{ij})$, $\bar{A} = B^T AB$ 。

线性代数: 存在正交矩阵 B 使得 $\bar{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 。

固定义域内的任意一点 p_0 , 存在正交变换 B 使得

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j}(p_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{\xi_i \xi_i}(Bp_0).$$

- 若 $\lambda_i \neq 0$, 同号: 椭圆型;
- 若 $\lambda_i \neq 0$, 仅 1 个异号: 双曲型; ≥ 2 个异号: 超双曲;
- 若存在 1 个 $\lambda_i = 0$, 其它非零且同号, 抛物型。

练习 1. 将方程 $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$ 化为标准型。

计算可知 判别式 $\mathcal{D} = b^2 - ac = x^2 y^2$ 。

- 若 $x = 0$ 或 $y = 0$, $\mathcal{D} = 0$, 方程是抛物的。这时标准型是明显的。
- 若 $xy \neq 0$, $\mathcal{D} > 0$, 方程是双曲的。我们在第一象限将方程化为标准型。
 - 特征方程 $y^2 y_x^2 - x^2 = 0$ 。
 - 通积分 $x^2 + y^2 = \text{常数}$ 与 $x^2 - y^2 = \text{常数}$ 。
 - 取 $\xi = x^2 + y^2$ 和 $\eta = x^2 - y^2$, 再考虑变换

$$s = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = x^2 \text{ 和 } t = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = y^2.$$

于是 $\bar{u}(s, t) = u(\sqrt{s}, \sqrt{t})$ 满足

$$\bar{u}_{ss} - \bar{u}_{tt} = \frac{\bar{u}_t}{2t} - \frac{\bar{u}_s}{2s}.$$

练习 2. 将方程 $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ 化为标准型。

计算可知 判别式 $\mathcal{D} = b^2 - ac = 0$ 方程是抛物的。

- 特征方程 $0 = x^2 y_x^2 - 2xyy_x + y^2 = (xy_x - y)^2$ 。

- 通积分 $y/x = \text{常数}$ 。假设 $x \neq 0$, 取 $\xi = y/x$ 与 $\eta = x$ 。

于是 $\bar{u}(\xi, \eta) = u(\eta, \xi\eta)$ 满足

$$\bar{u}_{\eta\eta} = 0.$$



练习 3. 将方程 $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ 化为标准型。

计算可知 判别式 $\mathcal{D} = b^2 - ac = -y$ 。

- 若 $y = 0$, $\mathcal{D} = 0$, 方程是抛物的。这时标准型是明显的。
- 若 $y < 0$, $\mathcal{D} > 0$, 方程是双曲的。
 - 特征方程 $yy_x^2 + 1 = 0$ 。
 - 通积分 $\frac{3}{2}x + (-y)^{\frac{3}{2}} = \text{常数}$ 和 $\frac{3}{2}x - (-y)^{\frac{3}{2}} = \text{常数}$ 。
 - 取 $\xi = \frac{3}{2}x + (-y)^{\frac{3}{2}}$ 和 $\eta = \frac{3}{2}x - (-y)^{\frac{3}{2}}$, 再考虑变换

$$s = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \frac{3}{2}x, \quad t = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = (-y)^{\frac{3}{2}}.$$

于是 $\bar{u}(s, t) = u\left(\frac{2}{3}s, -t^{\frac{2}{3}}\right)$ 满足

$$\bar{u}_{tt} - \bar{u}_{ss} = \frac{\bar{u}_t}{3t}.$$

- 若 $y > 0$, $\mathcal{D} < 0$, 方程是椭圆的。考虑满足下述方程的 $\Phi = \xi + i\eta$:

$$\begin{aligned} 0 &= a\Phi_x - \left(-b + i\sqrt{-\mathcal{D}} \right) \Phi_y \\ &= y\Phi_x - i\sqrt{y}\Phi_y \\ &= y\xi_x + \sqrt{y}\eta_y + i(y\eta_x - \sqrt{y}\xi_y). \end{aligned}$$

比较实部和虚部得到

$$\begin{cases} \sqrt{y}\xi_x = -\eta_y, \\ \frac{1}{\sqrt{y}}\xi_y = \eta_x. \end{cases}$$

取 $\xi = -\frac{3}{2}x$, $\eta = y^{\frac{3}{2}}$ 。故 $\bar{u}(\xi, \eta) = u(-\frac{2}{3}\xi, \eta^{\frac{2}{3}})$ 满足

$$\bar{u}_{\xi\xi} + \bar{u}_{\eta\eta} = -\frac{\bar{u}_\eta}{3\eta}.$$

□

课后作业 习题一, 17 页: 9, 10, 11, 12。