偏微分方程

李奇睿

浙江大学数学科学学院

qi-rui.li@zju.edu.cn

第五章：Green 函数法

本章概览

♠ Green 公式、基本解与基本积分公式。

♠ Green 函数及其意义。

♠ 特殊区域的 Green 函数。

教学要求

♣ 了解泊松方程的基本解、了解 Green 函数的定义、了解 Green 函数法。

♣ 会求半空间以及球域上的 Green 函数。

从散度定理到基本积分公式

我们不加证明地使用下面的 散度定理 :

散度定理

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 分段光滑。假设

$$\mathbf{F} = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X)) \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{U},$$

是定义在 Ω 的开邻域 $\mathscr{U}$ 上的向量值函数，其中 $f_i \in C^1(\mathscr{U})$，$1 \leq i \leq n$。那么

$$\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F}\, dX = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu \, d\sigma.$$

其中

- $\mathrm{div} F := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_i$ 称为 $\mathbf{F}$ 的散度，
- ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向，
- dX 和 $d\sigma$ 分别是 Ω 和 $\partial\Omega$ 上的“微元”
  (根据不同维数，也称为“体积元”、“面积元”、“线元”)。

一维散度公式 = 牛顿-莱布尼茨公式

若 维数 $n=1$，$\Omega=[a,b]$，则 $\partial\Omega=\{a,b\}$。记 x-轴的方向向量为 $\mathbf{e}$。则

$$\nu(a)=-\mathbf{e} \quad \nu(b)=\mathbf{e}, \quad \mathbf{F}(x)=f(x)\mathbf{e}$$

利用这些关系可以算出

$$\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F}\,dX=\int_{[a,b]} f'(x)\,dx,$$
$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\nu\,d\sigma=f(b)-f(a).$$

因此散度定理恰为微积分基本定理：即**Newton-Leibniz 公式**

$$\int_{[a,b]} f'(x)\,dx=f(b)-f(a).$$

二维散度公式 = 格林公式

若 维数 $n=2$，$\mathbf{F}=(Q(x,y),-P(x,y))$，其中 $P,Q\in C^1(\mathbb{R}^2)$，则

$$\int_\Omega \mathsf{div}\mathbf{F}\,dX=\int_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

另一方面，边界 $\partial\Omega$ 是一条曲线，其切向为 $(1,y'(x))$，故单位外法向

$$\nu=\frac{(y'(x),-1)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}.$$

在该坐标下，边界 $\partial\Omega$ 的线元为 $d\sigma=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$。因此 $\nu d\sigma=(dy,-dx)$，故

$$\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\nu\,d\sigma=\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy.$$

于是散度定理可写为

$$\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy=\int_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

这也称为**Green 公式**。

三维散度公式 = 高斯公式

若 维数 $n=3$，$\mathbf{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，其中 $P,Q,R\in C^1(\mathbb{R}^3)$，则

$$\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F}\,dX=\int_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

另一方面，曲面 $\partial\Omega$ 的单位外法向为 $\nu=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$。其中 α,β,γ 分别是 ν 与 x-轴，y-轴，z-轴的夹角。故

$$\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\nu\,d\sigma=\int_{\partial\Omega}\big(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\big)\,d\sigma.$$

于是散度定理可写为

$$\int_{\partial\Omega}\big(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\big)\,d\sigma=\int_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

这也称为**Gauss 公式**。若 $\partial\Omega$ 局部可表示为图 $(x,y,z(x,y))$，则

$$\nu=\frac{(z_x,z_y,-1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\qquad d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

所以**Gauss 公式**也可以写为

$$\int_{\partial\Omega}Pdzdy+Qdzdx+Rdxdy=\int_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Green 第一/第二公式

假设 Ω 的邻域 $\mathscr{U}$ 上有两个二阶可微函数 $u, v \in C^2(\mathscr{U})$。定义函数的梯度

$$\nabla v = (v_{x_1}, v_{x_2}, \ldots, v_{x_n}), \quad \nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}).$$

我们有 **Green 第一公式**

$$\int_\Omega u\Delta v dX = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dX,$$

以及 **Green 第二公式**

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dX = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma.$$

其中 $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nabla v \cdot \nu$，$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$，$\nu$ 是 $\partial\Omega$ 的外法向。

证明. 取向量值函数 $\mathbf{F} = u\nabla v$，则

$$\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F}\, dX = \int_\Omega (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dX, \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

由散度定理可得 **Green 第一公式**。交换 u, v 后两式相减可得 **Green 第二公式**。

拉普拉斯方程的基本解

任取 $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, 令 $r(X; X_0)$ 为 $X = (x_1, \dots, x_n)$ 到 X_0 的距离:

$$r(X; X_0) = \|X - X_0\| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2}$$

如下函数 $\Psi(X; X_0)$ 称为拉普拉斯方程的基本解

$$\Psi(X; X_0) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln r(X; X_0), & n = 2, \\ \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{r(X; X_0)}, & n = 3, \\ \dfrac{1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|} \dfrac{1}{r^{n-2}(X; X_0)}, & n \geq 3, \ (|\mathbb{S}^{n-1}| \text{ 是 } n\text{-维球的表面积}). \end{cases}$$

可以验证,

$$\Delta \Psi(X; X_0) = 0 \quad \forall X \neq X_0.$$

证明. 仅考虑 $X_0 = 0$，$n = 2, 3$。一般情况类同。

若 $n = 2$： 记 $X = (x, y)$，则

$$(\ln r)_x = \frac{x}{r^2}, \quad (\ln r)_y = \frac{y}{r^2}.$$

再求导得

$$\left.\begin{aligned} (\ln r)_{xx} &= \frac{1}{r^2} - 2\frac{x^2}{r^4} \\ (\ln r)_{yy} &= \frac{1}{r^2} - 2\frac{y^2}{r^4} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta \ln r = 0.$$

若 $n = 3$： 记 $X = (x, y, z)$，则

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = -\frac{x}{r^3}, \ \left(\frac{1}{r}\right)_y = -\frac{y}{r^3}, \ \left(\frac{1}{r}\right)_z = -\frac{z}{r^3}.$$

再求导得

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{r}\right)_{xx} &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5} \\ \left(\frac{1}{r}\right)_{yy} &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{y^2}{r^5} \\ \left(\frac{1}{r}\right)_{zz} &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{z^2}{r^5} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

基本积分公式

假设 Ω 的邻域 $\mathscr{U}$ 上有二阶可微函数 $u \in C^2(\mathscr{U})$。如下**基本积分公式**成立

$$u(X_0) = \int_{\partial\Omega} \left(\Psi(X;X_0) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(X;X_0) \right) d\sigma - \int_{\Omega} \Psi(X;X_0) \Delta u dX.$$

其中 $\Psi = \Psi(X;X_0)$ 是中心在 X_0 的基本解。

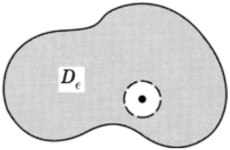
证明.

♠ 回忆 Green 第二公式

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dX = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

给定任何 $X_0 \in \Omega$。在上式中把 Ω 和 v 分别替换为 $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(X_0)$ 和 $\Psi(X;X_0)$，

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} \Psi \Delta u dX = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} - \Psi\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon(X_0)} \left(u\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} - \Psi\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma. \quad (\bigstar)$$



♠ 利用 $\Psi(X;X_0)$ 的定义可验证如下 3 个事实:

- $\partial_\nu \Psi\big|_{\partial B_\varepsilon(X_0)} = -\partial_r \Psi\big|_{\partial B_\varepsilon(X_0)} = \frac{\varepsilon^{1-n}}{|\mathbb{S}^{n-1}|}$，于是

$$\int_{\partial B_\varepsilon(X_0)} u\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\,d\sigma = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(X_0+\varepsilon\omega)\,d\sigma(\omega) \to u(X_0).$$

- $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{n-1}\Psi\big|_{\partial B_\varepsilon(X_0)} = 0$，于是

$$\int_{\partial B_\varepsilon(X_0)} \Psi\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma = C_n\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[\varepsilon^{n-1}\Psi\big|_{\partial B_\varepsilon(X_0)}\right]\frac{\partial u}{\partial \nu}(X_0+\varepsilon\omega)\,d\sigma(\omega) \to 0.$$

- $\Psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$。于是

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Psi\Delta u dX \to \int_{\Omega} \Psi\Delta u dX.$$

在(★)中令 $\varepsilon\to 0$ 可以得到基本积分公式。

Green 函数和 Green 函数法

回忆基本积分公式:

$$u(X_0)=\int_{\partial\Omega}\left(\Psi\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)d\sigma-\int_{\Omega}\Psi\Delta u dX.$$

若解边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f\\ u|_{\partial\Omega}=\phi.\end{cases}$$

根据基本积分公式有

$$u(X_0)=\int_{\partial\Omega}\left(\Psi\frac{\partial u}{\partial\nu}-\phi\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)d\sigma-\int_{\Omega}\Psi f dX.$$

存在的问题： 还需要知道函数 $\partial_\nu u|_{\partial\Omega}$，才能确定 $u(X_0)$。

解决的方案： 引入**Green 函数**：满足和基本解一样的性质，并且在 $\partial\Omega$ 上为零。

Green 函数的定义

给定区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 和区域内一点 $X_0 \in \Omega$。

称 $G(X) = G_\Omega(X; X_0)$ 是 Ω 上关于 X_0 的 Green 函数，如果 $G(X)$ 满足

- $G \in C^2(\Omega \setminus \{X_0\})$，且在 $\Omega \setminus \{X_0\}$ 内成立 $\Delta G = 0$;
- $G|_{\partial\Omega} = 0$;
- $H(X) := G_\Omega(X; X_0) - \Psi(X; X_0)$ 在 X_0 处有限，且 $H \in C^2(\Omega)$，在 Ω 上处处成立

$$\Delta H = 0.$$

为求得 Green 函数，由定义知等价于求如下方程的光滑解 $H(X) = H_\Omega(X; X_0)$:

$$\begin{cases} \Delta H(X) = 0, & X \in \Omega, \\ H(X) = -\Psi(X; X_0), & X \in \partial\Omega. \end{cases}$$

若求出，则 Green 函数为 $G_\Omega(X; X_0) = H_\Omega(X; X_0) + \Psi(X; X_0)$。

Green 函数法的基本思想是把泊松方程的第一边值问题转化为一个特殊的边值问题：

这个特殊边值问题的解就是上述 **Green 函数**。

定理. Poisson 方程第一边值问题的公式解

若 $G(X) = G_\Omega(X; X_0)$ 是 Ω 上关于 X_0 的 Green 函数。则如下边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(X) = f(X), & X \in \Omega, \\ u(X) = \phi(X), & X \in \partial\Omega, \end{cases}$$

的解由公式给出

$$u(X_0) = -\int_{\partial\Omega} \phi(X) \frac{\partial G}{\partial \nu}(X)\, d\sigma(X) - \int_\Omega f(X) G(X)\, dX.$$

证明. 回忆 Green 第二公式

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dX = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

- 把 Ω 和 v 分别替换为 $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(X_0)$ 和 $G(X) = G_\Omega(X; X_0)$，

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} G\Delta u dX = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial G}{\partial\nu} - G\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon(X_0)} \left(u\frac{\partial G}{\partial\nu} - G\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) d\sigma.$$

- 把 $\Delta u = f$，$u|_{\partial\Omega} = \phi$，$G|_{\partial\Omega} = 0$ 代入，得到

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} GfdX = \int_{\partial\Omega} \phi\frac{\partial G}{\partial\nu} d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon(X_0)} \left(u\frac{\partial G}{\partial\nu} - G\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) d\sigma. \quad (\bigstar)$$

- 利用 $G(X) - \Psi(X; X_0) = H(X)$ 是 C^2 光滑函数，$(\bigstar)$式尾项满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(X_0)} \left(u\frac{\partial G}{\partial\nu} - G\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) d\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(X_0)} \left(u\frac{\partial\Psi}{\partial\nu} - \Psi\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) d\sigma = u(X_0).$$

- 因此，在$(\bigstar)$式中令 $\varepsilon \to 0$ 得到

$$-\int_{\Omega} GfdX = \int_{\partial\Omega} \phi\frac{\partial G}{\partial\nu} d\sigma + u(X_0).$$

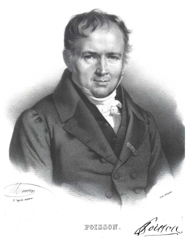
$\square$

特殊区域的 Green 函数：半空间上的 Green 函数

半空间上的 Green 函数和泊松方程第一边值条件的解

考虑半空间 $\mathbb{H}_+ = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$。

- 求 $\mathbb{H}_+$ 上的 Green 函数；
- 求 $\mathbb{H}_+$ 上 Possion 方程 $\Delta u = f$，$u|_{\partial\mathbb{H}_+} = \phi$ 的解。



Baron Siméon Denis Poisson (1781-1840)

法国数学家和物理学家，研究工作涉及：

统计学、复分析、偏微分方程、变分法、

分析力学、电学和磁学、热力学、弹性和流体力学。

给定 $X_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{H}_+$，我们断言 $\mathbb{H}_+$ 关于 X_0 的 Green 函数为

$$G_{\mathbb{H}_+}(X;X_0)=\frac{1}{4\pi\|X-X_0\|}-\frac{1}{4\pi\|X-X_0^\#\|}.$$

其中 $X_0^\#=(x_0,y_0,-z_0)$ 是 X_0 关于 $\partial\mathbb{H}_+=\{z=0\}$ 的对称点。

可逐条按定义验证 $G(X)=G_{\mathbb{H}_+}(X;X_0)$ 是 Green 函数，即 $G(X)$ 满足

- $G\in C^2(\mathbb{H}_+\setminus\{X_0\})$，且在 $\mathbb{H}_+\setminus\{X_0\}$ 内成立 $\Delta G=0$；
- $G|_{\partial\mathbb{H}_+}=0$；
- $H(X):=G(X)-\Psi(X;X_0)$ 在 X_0 处有限，且 $H\in C^2(\mathbb{H}_+)$，在 $\mathbb{H}_+$ 上处处成立

$$\Delta H=0.$$

容易验证

$$\begin{aligned}
\partial_\nu G(X)\big|_{\partial\mathbb{H}_+} &= \nabla G(X)\cdot\nu\big|_{\partial\mathbb{H}_+}=-\partial_z G(X)\big|_{\partial\mathbb{H}_+}\\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{z-z_0}{\|X-X_0\|^3}-\frac{1}{4\pi}\frac{z+z_0}{\|X-X_0^\#\|^3}\\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{\|X-X_0\|^3}\qquad(\text{利用 } \|X-X_0\|\big|_{\partial\mathbb{H}_+}=\|X-X_0^\#\|\big|_{\partial\mathbb{H}_+}).
\end{aligned}$$

代入公式解，我们得到 Poisson 方程解的表达式

$$
\begin{aligned}
u(x_0, y_0, z_0) &= -\int_{\partial\mathbb{H}_+} \phi(X)\frac{\partial G}{\partial \nu}(X)\,d\sigma(X) - \int_{\mathbb{H}_+} f(X)G(X)\,dX \\
&= \frac{z_0}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{H}_+} \frac{\phi(x,y)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}\,dxdy \\
&\quad -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{H}_+}\Big[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\Big] f(x,y,z)\,dxdydz.
\end{aligned}
$$

注: 容易验证半空间 $\mathbb{H}_+^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$(一般维数) 的 Green 函数总是

$$G_{\mathbb{H}_+^n}(X; X_0) = \Psi(X; X_0) - \Psi(X; X_0^{\#}).$$

半空间 Poisson 方程的 Dirichlet 问题总有公式解。

该 Poisson 公式在 $n = 2$ 时用 Fourier 变换法也可得到 (见讲稿 5)。

球体上的 Green 函数和 Laplace 方程第一边值条件的解

考虑球体 $B_a = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|X\| < a\}$。

- 求 B_a 上的 Green 函数；
- 求 B_a 上 Laplace 方程 $\Delta u = 0$，$u|_{\partial B_a} = \phi$ 的解。

Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749-1827) 。

法国数学家，对工程、统计、物理、天文和哲学有重要贡献。

提出了拉普拉斯方程，开创了拉普拉斯变换。

被称为法国牛顿，被描述为拥有非凡的自然数学能力。

给定 $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in B_a$，考虑其反演点

$$X_0^* = \left(\frac{a}{|X_0|}\right)^2 X_0.$$

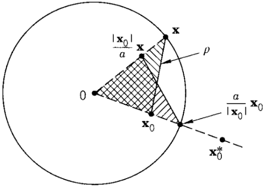
反演点可以等价地刻画为 (1) X_0^*，X_0 和球心在同一直线；(2) $\|X_0\|\|X_0^*\| = a^2$。

观察发现：若 $X \in \partial B_a$，则

$$\Delta(O, X_0, X) \simeq \Delta(O, \frac{|X_0|}{a}X, \frac{a}{|X_0|}X_0)$$

其中 $\Delta(A, B, C)$ 表示端点是 A, B, C 的三角形。于是

$$\|X - X_0\| = \left\|\frac{|X_0|}{a}X - \frac{a}{|X_0|}X_0\right\| = \frac{\|X_0\|}{a}\|X - X_0^*\|, \quad \forall X \in \partial B_a. \quad (\bigstar)$$



现在可以断言，B_a 上关于给定的 X_0 的 Green 函数是

$$G_{B_a}(X;X_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\|X-X_0\|} - \dfrac{1}{4\pi\left\|\frac{|X_0|}{a}X - \frac{a}{|X_0|}X_0\right\|}, & X_0 \neq 0, \\ \dfrac{1}{4\pi\|X-X_0\|} - \dfrac{1}{4\pi a}, & X_0 = 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\|X-X_0\|} - \dfrac{a}{\|X_0\|}\dfrac{1}{4\pi\|X-X_0^*\|}, & X_0 \neq 0, \\ \dfrac{1}{4\pi\|X\|} - \dfrac{1}{4\pi a}, & X_0 = 0. \end{cases}$$

可逐条按定义验证 $G(X) = G_{B_a}(X;X_0)$ 是 Green 函数，即 G 满足

- $G \in C^2(B_a \setminus \{X_0\})$，且在 $B_a \setminus \{X_0\}$ 内成立 $\Delta G = 0$；
- $G|_{\partial B_a} = 0$；
- $H(X) := G(X) - \Psi(X;X_0)$ 在 X_0 处有限，且 $H \in C^2(B_a)$，在 B_a 上处处成立

$$\Delta H = 0.$$

可以验证

$$\nabla G(X) = -\frac{1}{4\pi}\frac{X - X_0}{\|X - X_0\|^3} + \frac{a}{4\pi\|X_0\|}\frac{X - X_0^*}{\|X - X_0^*\|^3}.$$

若 $X \in \partial B_a$，利用($\bigstar$)，

$$\begin{aligned}
\nabla G(X)\Big|_{\partial B_a} &= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{X - X_0}{\|X - X_0\|^3} - \frac{a}{\|X_0\|}\frac{X - X_0^*}{\|X - X_0^*\|^3}\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{X - X_0}{\|X - X_0\|^3} - \frac{\|X_0\|^2}{a^2}\frac{X - X_0^*}{\|X - X_0\|^3}\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{X}{\|X - X_0\|^3} - \frac{\|X_0\|^2}{a^2}\frac{X}{\|X - X_0\|^3}\right] \\
&= -\frac{a^2 - \|X_0\|^2}{4a^2\pi\|X - X_0\|^3}X.
\end{aligned}$$

于是得到

$$\partial_\nu G(X)\Big|_{\partial B_a} = \frac{X}{\|X\|}\cdot\nabla G(X) = -\frac{a^2 - \|X_0\|^2}{4a\pi\|X - X_0\|^3}.$$

代入公式解可以得到

$$u(X_0) = \frac{a^2 - \|X_0\|^2}{4\pi a}\int_{\partial B_a}\frac{\phi(X)}{\|X - X_0\|^3}d\sigma(X).$$

注: 球体 $B_a = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|X\| < a\}$(一般维数 n) 上的 Green 函数总是

$$G_{B_a}(X; X_0) = \begin{cases} \Psi(X; X_0) - \Psi\left(\frac{|X_0|}{a} X; \frac{a}{|X_0|} X_0\right), & X_0 \neq 0, \\ \Psi(X; X_0) - \frac{1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|a^{n-2}}, & X_0 = 0. \end{cases}$$

球体上拉普拉斯方程的 Dirichlet 问题总有公式解:

$$u(X_0) = \frac{a^2 - \|X_0\|^2}{a|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial B_a} \frac{\phi(X)}{\|X - X_0\|^n} d\sigma(X).$$

特别地，$n = 2$ 时，该公式为

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{a^2 - \|X_0\|^2}{2\pi a} \int_{\partial B_a} \frac{\phi(X)}{\|X - X_0\|^2} d\sigma(X) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left[1 - (r_0/a)^2\right] \phi(a\cos\tau, a\sin\tau)}{1 - 2(r_0/a)\cos(\tau - \theta_0) + (r_0/a)^2} d\tau. \end{aligned}$$

这里 $x_0 = r_0 \cos\theta_0$，$y_0 = r_0 \sin\theta_0$。

该 Poisson 公式用分离变量也可得到 (见讲稿 3)。

其它有对称性的区域上的 Green 函数。

♠ 半球 $B_a^+ = \{X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|X\| < a, \ x_n > 0\}$ 上的 Green 函数

$$G_{B_a^+}(X; X_0) = G_{B_a}(X; X_0) - G_{B_a}(X; X_0^\#),$$

这里 $X_0^\#$ 是 X_0 关于 $\{x_n = 0\}$ 的镜像对称点，$G_{B_a}(X; X_0)$ 是 B_a 上 Green 函数。

♠ 第一象限 $\mathcal{Q} = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\}$ 上的 Green 函数

$$G_{\mathcal{Q}}(X; X_0) = G_{H_+}(X; X_0) - G_{H_+}(X; X_0'),$$

X_0' 是 X_0 关于 y-轴的对称点，$G_{H_+}(X; X_0)$ 是 $H_+ = \{(x, y) : y > 0\}$ 上 Green 函数。

♠ 类似地，通过反射法可求出这些区域上的 Green 函数

♡ $\frac{1}{8}$-球：$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < a^2, \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0\}$;

♡ 第一卦限：$\mathscr{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :, x > 0, \ y > 0, \ z > 0\}$。

♡ 半圆形外区：$D = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 > a^2, \ y > 0\}$。

课后作业 **习题五，113 页：3，4，5。**