浙江大学 2025–2026 学年秋冬 学期

《线性代数 (H)》课程期末考试试卷

课程号：12345678, 开课学院：数学科学学院

考试试卷：A 卷、B 卷（请在选定项上打✓）

考试形式：闭、开卷（请在选定项上打✓），允许带 无 入场

考试日期：_____年_____月_____日, 考试时间：120 分钟

诚信考试, 沉着应考, 杜绝违纪.

考生姓名：__________ 学号：__________ 所属院系：______________

任课教师：__________ 上课时间：__________ 序号：______________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
评卷人									

1. (15 分) **一**、设矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{if } i = j \\ (-1)^{|i-j|}, & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

求 $\det(A)$.

Solution: 按初等行变换正常计算即可, A 的阶数可能记错了.

2. (15 分) **二**、（本题有两小问）

(1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若 $Ax = c$ 对任意 c 都有至少两个解, 求 $\operatorname{rank}(A)$.

(2) 给出一个矩阵 A, 使得对于任意的向量 $c \in \mathbb{R}^m$, 方程 $Ax = c$ 都有至少两个解.

Solution: 第一问大概是这样, 我不太记清楚了

3. (15 分) **三、**设 A 是 4×2 矩阵, 且

$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} M & D \\ C & B \end{bmatrix}$$

B 是 2×2 矩阵. 求 A 的秩和 B 的所有元素.

Solution: M, D, C 都是给出元素的, 我忘记元素是多少了所以在这里使用这些矩阵来表示, 原题是直接给出元素值的. 对 AA^{T} 做初等行变换, 可以发现 AA^{T} 的秩至少是 2.

又因为 $r(AA^{\mathrm{T}}) = r(A^{\mathrm{T}}A) \le 2$（后者是 2×2 矩阵）, 所以 $r(AA^{\mathrm{T}}) = 2$, 从而 $r(A) = 2$.

由于 AA^{T} 的秩为 2, 初等行变换后后两行的元素应为 0, 据此可求出 B.

4. (15 分) **四、**给定含参二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = \dots$$

(1) 化二次型为标准型;

(2) 给出坐标变换矩阵;

(3) 求参数的取值范围使二次型正定.

Solution: 常规题目计算即可, 但是由于含参数所以非常难算

5. (10 分) **五、**（题目缺失）

6. (15 分) **六、**设 A 是 $m \times n$ 矩阵.

(1) $\text{rank}(A) = r$, 证明存在可逆矩阵 C 使得 $ACA = 0$;

(2) 设 A 是方阵, 证明若存在唯一矩阵 B 使得 $ABA = A$, 则 $BAB = B$.

7. (15 分) **七、**设 A 是 5 阶可逆矩阵, 且 A 与 A^{-1} 相似.

(1) 证明 $A - A^{-1}$ 和 $A^{-1} - A$ 相似;

(2) 证明 $A - A^{-1}$ 必有特征值 0;

(3) 证明 A 必有特征值 1 或 -1.

Solution: (1) 因为 A 与 A^{-1} 相似, 所以存在可逆矩阵 P 使得

$$A^{-1} = P^{-1}AP$$

两边同时取逆有

$$A = P^{-1}A^{-1}P$$

两式相减得

$$A^{-1} - A = P^{-1}AP - P^{-1}A^{-1}P = P^{-1}(A - A^{-1})P$$

所以 $A - A^{-1}$ 与 $A^{-1} - A$ 相似.

(2) 和 (3) 由于 A 和 A^{-1} 相似, 所以特征值完全相同, 而 A^{-1} 的特征值又是 A 的特征值的倒数, 所以若 A 的某个特征值 λ 满足 $\lambda = \dfrac{1}{\lambda}$, 即 $\lambda^2 = 1$, 则 $\lambda = \pm 1$, A 的特征值中必有 1 或-1,$A - A^{-1}$ 的特征值中必有 0.

而这样的特征值必存在. 如果不存在这样的特征值 λ, 那么对于 A 的每个特征值都有 $\lambda \neq \dfrac{1}{\lambda}$, λ 和 $\dfrac{1}{\lambda}$ 总是作为不同的特征值成对出现, 那么 A 的秩必然是偶数, 这与 A 是 5 阶可逆矩阵 (r(A)=5) 矛盾.

8. (15 分) **八、**定义映射 $\sigma_P(A) = PAP^{-1}$, 其中 P 和 A 均为 3 阶方阵. 记

$$W = \{\sigma_P \mid P \text{ 为三阶可逆矩阵}\}$$

(1) 证明 σ_P 是线性映射, 并求 $\dim L(M_3(F), M_3(F))$;

(2) W 是否为 $L(M_3(F), M_3(F))$ 的子空间? 说明理由;

(3) 定义 $\tau(A)=A^{\mathrm{T}}$, 证明 $\tau\notin W$.

Solution: (1) 对任意 $A,B\in M_3(F)$ 和 $k\in F$, 有

$$\sigma_P(A+B)=P(A+B)P^{-1}=PAP^{-1}+PBP^{-1}=\sigma_P(A)+\sigma_P(B)$$

$$\sigma_P(kA)=P(kA)P^{-1}=kPAP^{-1}=k\sigma_P(A)$$

故 σ_P 是线性映射.

$M_3(F)$ 的维数为 $3^2=9$, 所以 $L(M_3(F),M_3(F))$ 的维数为 $9\times 9=81$.

(2) W 不是 $L(M_3(F),M_3(F))$ 的子空间, 因为加法不封闭. 反例：考虑 $\sigma_1(A)=D_1$, $\sigma_2(A)=D_2$, 其中

$$D_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad D_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则 $\sigma_1(A)+\sigma_2(A)=D_1+D_2=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. D_1 和 D_2 的特征值都是 1, 但 D_1+D_2 的特征值是 2, 与 A 不相似, 故不存在 σ_3 使得 $\sigma_3=\sigma_1+\sigma_2$.

(3) 若 $\tau\in W$, 则对任意 A, A^{T} 与 A 相似. 但存在反例：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

A 的特征值为 $-1,\pm\sqrt{6}$, 而 A^{T} 的特征值为 $-1,\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, 不相等, 故不相似. 所以 $\tau\notin W$.

9. (20 分) **九、**判断下列命题正误, 并说明理由.

(1) 向量组 $\{\alpha_i\}$ 线性无关, 则向量组 $\{\beta_i\}$ 线性无关与两个向量组等价互为充要条件.

(2) 设 W_1,W_2,W_3 是子空间, 若 $W_1+W_2+W_3$ 是直和, 则 W_1+W_2, W_2+W_3, W_3+W_1 均为直和.

(3) $\mathbb{R}^3$ 中不存在线性映射 σ 使得 $\operatorname{im}\sigma=\ker\sigma$.

(4) 对于可逆矩阵 A, 有 $(A^*)^* = A$.

Solution: (1) 错误. 反例：$\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0)$ 线性无关, $\beta_1 = (1,0,0), \beta_2 = (0,0,1)$ 线性无关, 但两个向量组不等价.

(2) 错误. 反例：$W_1 = \mathrm{span}\{(1,0,0)\}$, $W_2 = \mathrm{span}\{(0,1,0)\}$, $W_3 = \mathrm{span}\{(2,0,0)\}$. 则 $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0\}$, $W_1 + W_2 + W_3$ 是直和, 但 $W_1 + W_3$ 不是直和.

(3) 正确. 设 σ 为线性映射, 由维数公式 $\dim(\mathrm{im}\,\sigma) + \dim(\ker\sigma) = 3$. 若 $\mathrm{im}\,\sigma = \ker\sigma$, 则 $\dim(\mathrm{im}\,\sigma) = \dim(\ker\sigma)$, 设其为 k, 则 $2k = 3$, 不可能.

(4) 错误. 由 $AA^* = |A|E$ 得 $A^* = |A|A^{-1}$, 且 $|A^*| = |A|^{n-1}$. 于是

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{n-2}A$$

当 $n \neq 2$ 时, $(A^*)^* \neq A$.