工科pde常用公式汇总

ode常用公式铺垫总结

初等积分法

一阶线性非齐次微分方程

对于形如

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

的一阶非齐次方程，其解的形式为

$$y=e^{\int -p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

> ⚠ **Warning**
>
> n阶伯努利方程的方法与之类似，可以在**等式两边消去y的n次幂后进行微分形式改变**

全微分方程

$$d[u(x,y)]=u_x'dx+u_y'dy=Mdx+Ndy$$

线性微分方程组

常系数齐次线性微分方程

特征方程(2.21)的根	微分方程(2.20)通解中对应的项
① 单重实根 λ	对应一项 $ce^{\lambda x}$
② k 重实根 λ	对应 k 项 $(c_1+c_2x+\cdots+c_kx^{k-1})e^{\lambda x}$
③ 单重复数根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\beta>0$	对应两项 $e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$
④ k 重复数根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\beta>0$	对应 $2k$ 项 $e^{\alpha x}[(a_1+a_2x+\cdots+a_kx^{k-1})\cos\beta x+(b_1+b_2x+\cdots+b_kx^{k-1})\sin\beta x]$

欧拉方程

对于二阶常系数微分方程

$$a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=f(x)$$

可以通过变换

$$x=e^t$$

将上述方程转化为

$$a_0y_t''+(a_0-a_1)y_t'+a_2y=f(e^t)$$

幂级数定理

设有微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

且**p(x)与q(x)都可以在相应关于x的邻域内展开成幂级数形式**，，则该方程的解也可以写成幂级数形式，即

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

化简后再用待定系数法进行求解

pde新增重要公式

方程的导出和定解问题

波动方程

$$u_{tt} = u_{xx} + f$$

热传导方程

$$u_t = u_{xx} + f$$

调节方程

$$u_{xx} + u_{tt} = f$$

一般方程与特征方程的转换

对于方程

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + qu + f = 0$$

经过计算后转换为对应的特征方程

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0$$

判别式与解

判别式形式

$$\triangle = b^2 - ac$$

解的形式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 - ac)}}{a}$$

不同类型方程的一般形式与对应关系

双曲型

$$\triangle > 0 \quad u_{tt} - u_{xx} = H$$

椭圆型

$$\triangle < 0 \quad u_{tt} + u_{xx} = H$$

抛物型

$$\triangle = 0 \quad u_{xt} = H$$

行波法

普通行波法

$$u(x,y) = \frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2} + \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha$$

延拓行波法及其延拓条件

奇延拓

当边界条件满足

$$0 < x < \infty \quad u|_{x=0} = 0$$

则可对原函数进行奇数延拓，形式解化为

$$u(x,y) = \frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2} + \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha \quad x-at > 0$$

$$u(x,y) = \frac{\phi(x+at)-\phi(-x+at)}{2} + \int_{-x+at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha \quad x-at < 0$$

偶延拓

当边界条件满足

$$0 < x < \infty \quad u_x|_{x=0} = 0$$

则可对原函数进行偶延拓，形式解化为

$$u(x,y) = \frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2} + \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha \quad x-at > 0$$

$$u(x,y) = \frac{\phi(x+at)+\phi(-x+at)}{2} + \int_{0}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha + \int_{0}^{at-x} \psi(\alpha)d\alpha \quad x-at < 0$$

非齐次行波法与齐次化解法

$$u_2: \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (-\infty < x < +\infty,\ t > 0) \\ u|_{t=0} = 0, & (-\infty < x < +\infty) \\ u_t|_{t=0} = 0, & (-\infty < x < +\infty) \end{cases} \qquad (*)$$

设 $w=w(x,t,\tau)$ （τ 参数） 满足

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx}, & (-\infty<x<+\infty,\ t>\tau) \\ w|_{t=\tau}=0, & (-\infty<x<+\infty) \\ w_t|_{t=\tau}=f(x,\tau), & (-\infty<x<+\infty) \end{cases} \qquad (**)$$

则 $u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$ 满足（*）。

分离变量法

普通分离变量法

$$u(x,t)=X(x)T(t)\text{，仅需设一个本征值}\lambda$$

多元分离变量法

$$u(x,\theta,t)=X(x)T(t)M(\theta)\text{，需要设两个本征值}\lambda,\mu$$

分离变量法中的齐次化

先求 $w(x,t,\tau)$:

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx}, & (0<x<l,\ t>\tau) \\ w|_{x=0}=w|_{x=l}=0 \\ w|_{t=\tau}=0, \quad w_t|_{t=\tau}=f(x,\tau). \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}+f(x,t), & (0<x<l,\ t>0) \\ v|_{x=0}=0, \quad v|_{x=l}=0 \\ v|_{t=0}=0, \quad v_t|_{t=0}=0. \end{cases} \qquad (3.1.18)$$

则：$u(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)d\tau$ 满足方程 (3.1.8).

齐次化原理适合常系数非齐次方程, 齐次边界条件，零初值情况。

周期性条件与自然边界条件

基本变换

$$x=rcos\theta\text{，}y=rsin\theta$$

形式转换

该变换可将原方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

转化为

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$$

具体限制条件

$$M(\theta)=M(\theta+2\pi)$$

$$|R(0)|<\infty$$

积分变换法

傅里叶变换及其逆变换

傅里叶变换

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx\overset{\text{记}}{=}F[f],\quad \lambda\in(-\infty,+\infty)$$

傅里叶逆变换

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\overset{\text{记}}{=}F^{-1}[g]$$

傅里叶变换相关性质

线性性质

$$F[\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2]=\alpha_1 F[f_1]+\alpha_2 F[f_2],\quad \alpha_1,\alpha_2\in C$$

微分性质

$$F[f^{(m)}(x)]=(i\lambda)^m F[f(x)].$$

卷积性质

$$F[f_1*f_2(x)]=F[f_1]\cdot F[f_2]$$

$$F[f_1\cdot f_2(x)]=\frac{1}{2\pi}F[f_1]*F[f_2]$$

平移性质

$$F[f(x-a)]=e^{-i\lambda a}F[f] \qquad a \in R$$

$$F[e^{iax}f(x)]=F[f](\lambda-a)$$

伸缩性质

$$F[f(kx)]=\frac{1}{|k|}F[f](\frac{\lambda}{k}), \quad k \neq 0, k \in R.$$

乘子性质

$$F[xf(x)]=i(F[f])'$$

$$F[x^m f(x)]=i^m(F[f(x)])^{(m)}.$$

对称性

$$F^{-1}[f(x)](\lambda)=\frac{1}{2\pi}F[f(x)](-\lambda)$$

$$F[f(x)](\lambda)=2\pi F^{-1}[f(x)](-\lambda).$$

傅里叶变换中的重要结论

$$F[e^{-Ax^2}]=F[e^{-(\sqrt{A}x)^2}] \qquad (A>0)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}}F[e^{-x^2}](\frac{\lambda}{\sqrt{A}})=\sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{\lambda^2}{4A}}.$$

$$F[1]=2\pi\delta.$$

$$F[\delta(x)] = 1.$$

例1： $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le A \\ 0, & |x| > A \end{cases}$

求 $F[f(x)]$.

解： $F[f(x)] = \int_{-A}^{A} e^{-i\lambda x} dx$

$$= -(i\lambda)^{-1}[e^{-i\lambda A} - e^{i\lambda A}]$$

$$= \frac{2\sin \lambda A}{\lambda}$$