偏微分方程

李奇睿

浙江大学数学科学学院

qi-rui.li@zju.edu.cn

第三章：分离变量法和特殊函数 (I)

本章概览

♠ 分离变量法求**有界区域**上的齐次方程的齐次边值问题。

♠ 按特征函数展开法求**有界区域**上的非齐次方程的齐次边值问题。

♠ 非齐次边值问题：周期条件和自然边界条件，边值条件齐次化。

♠ 矩形上波方程和热方程的分离变量。

教学要求

♣ 掌握分离变量法求解 (一维) 波动方程、(一维) 热传导方程的初边值问题；

♣ 掌握分离变量法求解 (二维) 泊松方程的边值问题；

♣ 掌握非齐次方程、非齐次边界条件的处理；

☒ 矩形上的波方程和热方程的分离变量法不作要求。

§3.1：齐次方程、齐次边值条件的定解问题

齐次边值的有界弦自由振动：分离变量法 考虑有界弦的自由振动

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u, & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), \partial_t u(x,0) = \psi(x), & x \in (0,\ell), \\ u(0,t) = 0, \ \ u(\ell,t) = 0 & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

什么是分离变量法？ 找形如 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 的解。

- **好消息**：偏微转换为常微。 代入方程得到

$$XT'' = a^2 X'' T \Longrightarrow \frac{X''}{X}(x) = \frac{T''}{a^2 T}(t) = -\lambda.$$

为满足**边值条件**，得到两组常微分方程

$$(\bigstar_1) \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases} \quad 与 \quad (\bigstar_2) \ T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

- **坏消息**：一般不满足初值条件： $X(x)T(0) \neq \phi(x)$， $X(x)T'(0) \neq \psi(x)$。
- **契机**：存在一列 $\lambda = \lambda_n$ 使$(\bigstar_1)$有解。 相应得到 $X_n(x)$ 和 $T_n(t)$，如下级数

$$u(x,t) = \sum X_n(x) T_n(t) \text{ 有机会满足初值。}$$

♠ **第一步.** 求特征值问题中容许的 λ (特征值) 和非零 X (特征函数)

$$(\star_1)\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad (0<x<\ell), \\ X(0)=X(\ell)=0. \end{cases}$$

- 在$(\star_1)$两边乘上 X，$\lambda X^2=-XX''$，并积分

$$\lambda\int_0^\ell X^2=-\int_0^\ell XX''=\int_0^\ell X'^2-XX'\big|_0^\ell=\int_0^\ell X'^2\geq 0.$$

于是 $\lambda\geq 0$。 **注**：$\lambda=0$ 舍弃，否则得到零解，对级数无贡献。

- 因为 $\lambda>0$，$(\star_1)$的通解为

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

利用边值条件 $X(0)=X(\ell)=0$：

$$C_1=0,\ \ C_2\sin\sqrt{\lambda}\ell=0.$$

由此解得特征值和特征函数

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{\ell^2},\qquad X_n=\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\qquad n=1,2,3,\ldots.$$

♠ **第二步.** 假设 $u(x,t)=\sum_n X_n(x)T_n(t)$，求 T_n。利用特征函数 $\{X_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$T_n''(t)+\lambda_n a^2 T_n(t)=0.$$

回忆 $\lambda_n=n^2\pi^2/\ell^2$，因此通解为

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{an\pi}{\ell}t+B_n\sin\frac{an\pi}{\ell}t,\ \ n=1,2,3,\ldots.$$

因此

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{\ell}t+B_n\sin\frac{an\pi}{\ell}t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x.$$

♠ **第三步.** 选取 A_n 和 B_n 使 $u(x,0)=\phi(x)$ 与 $\partial_t u(x,0)=\psi(x)$，即

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x \quad 和 \quad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{an\pi}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\ (0<x<\ell).$$

回忆特征函数 $X_n=\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ 的正交性：$\langle X_n,X_m\rangle_{L^2}=\frac{\ell}{2}\delta_{nm}$。所以

$$A_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\phi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx,\quad B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx.$$

固定端点的有界弦的自由振动问题的解是

$$(\heartsuit) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{\ell}\cos\frac{an\pi t}{\ell}\int_0^{\ell}\phi(s)\sin\frac{n\pi s}{\ell}ds + \frac{2}{an\pi}\sin\frac{an\pi t}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{n\pi s}{\ell}ds\Big)\sin\frac{n\pi}{\ell}x.$$

注记. 若 $\phi \in C^3[0,\ell]$，$\psi \in C^2[0,\ell]$，且满足如下相容性条件

$$\phi(0) = \phi(\ell) = \phi''(0) = \phi''(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0,$$

那么($\heartsuit$)给出的函数

$$u \in C^2((0,\ell)\times(0,\infty))$$

且满足方程和初边值。课程不讨论这个结论。

有兴趣的同学可以阅读：周蜀林《偏微分方程》，北京大学出版社 (2005)；章节 4.2.1。

特征值和特征函数

用分离变量法会遇到**特征值问题 (固有值问题)**：找寻 λ 使定解问题有解

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<\ell, \\ X \text{在 } x=0,\ell \text{ 满足\textbf{齐次}的第 } I、 II \text{ 边值条件；或者 } X \text{ 在 } [0,\ell] \text{ 上是\textbf{周期的}}. \end{cases}$$

- 若 λ 使得该特征值问题存在**非零解**，则这样的常数称为**特征值**；
- 相应于该特征值 λ 的方程的解称为**特征函数**。

特征函数 $L^2(0,\ell)$ 正交. 若 X_i 是 $\lambda=\lambda_i$ 的特征函数 $(i=1,2)$，则

$$\begin{aligned} \lambda_1\int_0^\ell X_1X_2 &= -\int_0^\ell X_1''X_2 = -(X_1'X_2)\big|_0^\ell + \int_0^\ell X_1'X_2' \\ &= (X_2'X_1 - X_1'X_2)\big|_0^\ell - \int_0^\ell X_1X_2'' \\ &= (X_2'X_1 - X_1'X_2)\big|_0^\ell + \lambda_2\int_0^\ell X_1X_2. \end{aligned}$$

利用齐次边值条件，我们得到

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\ell X_1X_2 = (X_2'X_1 - X_1'X_2)\big|_0^\ell = 0 \Longrightarrow \int_0^\ell X_1X_2 = 0 \quad (\text{如果 } \lambda_1\neq\lambda_2).$$

练习 1

考虑有界弦的自由振动

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = 4\partial_x^2 u, & (x,t) \in (0,2\pi)\times(0,\infty), \\ u(x,0) = -10\cos\dfrac{x}{4},\ \partial_t u(x,0) = 0, & x \in (0,\ell), \\ u_x(0,t) = u(2\pi,t) = 0 & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

♠ **第一步.** 确定特征值和特征函数。考虑特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (0 < x < 2\pi), \\ X'(0) = X(2\pi) = 0. \end{cases}$$

注意到 $\lambda \le 0$ 不是特征值:

$$\lambda \int_0^{2\pi} X^2 = -\int_0^{2\pi} X'' X = \int_0^{2\pi} X'^2 - XX'\Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} X'^2 \ge 0.$$

若 $\lambda = 0$，由边值条件知只有零解。

特征值必然满足 $\lambda > 0$。此时方程 $X'' + \lambda X = 0$ 的通解为

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

通过边值条件 $X'(0) = X(2\pi) = 0$ 得到:

$$C_2 = 0,\ \ C_1 \cos 2\pi\sqrt{\lambda} = 0.$$

由此解得特征值和特征函数

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{4}\right)^2, \quad X_n = \cos\frac{(2n-1)x}{4}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

♠ **第二步.** 假设 $u(x,t) = \sum_n X_n(x) T_n(t)$，求 T_n。利用特征函数 $\{X_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$T_n''(t) + 4\lambda_n T_n(t) = 0.$$

其通解为

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{(2n-1)t}{2} + B_n \sin\frac{(2n-1)t}{2},\ \ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

因此

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{(2n-1)t}{2} + B_n \sin\frac{(2n-1)t}{2}\right) \cos\frac{(2n-1)x}{4}.$$

♠ **第三步.** 选取 A_n 和 B_n 使 $u(x,0) = -10\cos x/4$ 与 $\partial_t u(x,0) = 0$，即

$$-10\cos\frac{x}{4} = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{(2n-1)x}{4}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

$$0 = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2} B_n \cos\frac{(2n-1)x}{4}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

利用特征函数 $X_n = \cos\frac{(2n-1)x}{4}$ 的正交性并比较系数可知

$$A_1 = -10, \; A_n = 0 \; (n \geq 2), \; B_n = 0 \; (n \geq 1).$$

于是

$$u(x,t) = -10\cos\frac{t}{2}\cos\frac{x}{4}.$$

□

齐次边值、无热源的有界杆热传导：分离变量法

长度为 ℓ，侧面绝热，一端温度为零另一端绝热的有界杆，它的温度分布状况为

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2 \partial_x^2 u, & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,\ell), \\ u(0,t) = 0, \ u_x(\ell,t) = 0, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

求解该定解问题。

♠ **第一步.** 确定特征值和特征函数。考虑特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (0 < x < \ell), \\ X(0) = X'(\ell) = 0. \end{cases}$$

注意到 $\lambda \le 0$ 不是特征值：

$$\lambda \int_0^\ell X^2 = -\int_0^\ell X'' X = \int_0^\ell X'^2 - XX'\Big|_0^\ell = \int_0^\ell X'^2 \ge 0.$$

若 $\lambda = 0$，由边值条件知只有零解。

特征值必然满足 $\lambda > 0$。此时方程 $X'' + \lambda X = 0$ 的通解为

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

通过边值条件 $X(0) = X'(\ell) = 0$ 得到:

$$C_1 = 0, \ \ C_2 \cos\sqrt{\lambda}\ell = 0.$$

由此解得特征值和特征函数

$$\lambda_n = \frac{(n-1/2)^2\pi^2}{\ell^2}, \quad X_n = \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

♠ **第二步.** 假设 $u(x,t) = \sum_n X_n(x)T_n(t)$，求 T_n。利用特征函数 $\{X_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0.$$

其通解为

$$T_n(t) = e^{-\frac{(n-1/2)^2\pi^2a^2}{\ell^2}t}, \ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

因此

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{(n-1/2)^2\pi^2a^2}{\ell^2}t} \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}.$$

♠ **第三步.** 选取 A_n 和 B_n 使 $u(x,0)=\phi(x)$，即

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}, \quad (0<x<\ell).$$

回忆特征函数 $X_n=\sin\frac{(n-1/2)\pi}{\ell}x$ 的正交性：$\langle X_n, X_m\rangle_{L^1([0,\ell])}=\frac{\ell}{2}\delta_{mn}$。所以

$$A_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\phi(x)\sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}dx, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

于是

$$u(x,t)=\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(n-1/2)^2\pi^2a^2}{\ell^2}t}\sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}\int_0^{\ell}\phi(s)\sin\frac{(n-1/2)\pi s}{\ell}ds.$$

□

课后作业 **习题三，84-85 页：1，2，4，6，8。**

矩形上拉普拉斯方程：分离变量法

考虑矩形区域上的拉普拉斯方程

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad (x,y)\in(0,\pi)^2, \\ u(0,y)=0, \\ u(\pi,y)=\cos^2 y, \\ u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0. \end{cases}$$

♠ **第一步.** 确定特征值和特征函数。考虑特征值问题

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \quad (0<y<\pi), \\ Y'(0)=Y'(\pi)=0. \end{cases}$$

注意到 $\lambda<0$ 不是特征值：

$$\lambda\int_0^\pi Y^2=-\int_0^\pi Y''Y=\int_0^\pi Y'^2-YY'|_0^\pi=\int_0^\pi Y'^2\geq 0.$$

若 $\lambda=0$，特征函数是 $Y=$ 常数。若 $\lambda>0$， $Y''+\lambda Y=0$ 的通解为

$$Y(y)=C_1\cos\sqrt{\lambda}y+C_2\sin\sqrt{\lambda}y.$$

通过边值条件 $Y'(0)=Y'(\pi)=0$ 可知

$$C_2=0,\ C_1\sin\pi\sqrt{\lambda}=0.$$

由此解得特征值和特征函数

$$\lambda_n=n^2,\quad Y_n=\cos ny,\quad n=0,1,2,3,\ldots.$$

♠ **第二步.** 假设 $u(x,t)=\sum_n X_n(x)Y_n(y)$，求 X_n。利用特征函数 $\{Y_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$X_n''(x)-\lambda_n X_n(x)=0.$$

其通解为

$$X_0(x)=A_0x+B_0;\ X_n(x)=A_ne^{-nx}+B_ne^{nx},\ n=1,2,3,\ldots.$$

因此

$$u(x,y)=A_0x+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_ne^{-nx}+B_ne^{nx}\right)\cos ny.$$

♠ **第三步.** 选取 A_n 和 B_n 使 $u(0,y)=0$ 且 $u(\pi,y)=\cos^2 y$，即

$$0 = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n + B_n\right)\cos ny,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2y = A_0\pi + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{-n\pi} + B_n e^{n\pi}\right)\cos ny.$$

利用特征函数 $\{Y_n\}$ 的正交性并比较系数

$$A_0 = \frac{1}{2\pi},\ A_2 = -B_2 = \frac{1}{2(e^{-2\pi}-e^{2\pi})},\ \text{其余为 } 0.$$

于是

$$u(x,y) = \frac{x}{2\pi} + \frac{e^{-2x}-e^{2x}}{2(e^{-2\pi}-e^{2\pi})}\cos 2y.$$

□

圆盘上周期性条件的拉普拉斯方程：分离变量法

半径为 a 的薄圆盘 $\Sigma_a = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|X\| < a\}$，两面绝热，边缘温度为 $\phi(X)$，内部没有热源。达到平衡时温度分布 $u(X)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & X \in \Sigma_a, \\ u(X) = \phi(X), & X \in S_a := \partial\Sigma_a. \end{cases}$$

将圆盘区域转换为矩形区域 考虑极坐标，$\bar{u}(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 满足

$$u_x = \bar{u}_r \frac{x}{r} - \frac{y}{r^2}\bar{u}_\theta,$$

$$u_y = \bar{u}_r \frac{y}{r} + \frac{x}{r^2}\bar{u}_\theta,$$

$$u_{xx} = \bar{u}_{rr}\frac{x^2}{r^2} + \frac{\bar{u}_r}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) + \frac{y^2}{r^4}\bar{u}_{\theta\theta} - \frac{2xy}{r^3}\bar{u}_{\theta r} + 2\frac{xy}{r^4}\bar{u}_\theta,$$

$$u_{yy} = \bar{u}_{rr}\frac{y^2}{r^2} + \frac{\bar{u}_r}{r}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right) + \frac{x^2}{r^4}\bar{u}_{\theta\theta} + \frac{2xy}{r^3}\bar{u}_{\theta r} - 2\frac{xy}{r^4}\bar{u}_\theta.$$

因此，$\bar{u}$ 满足如下方程

$$\begin{cases} r^2\bar{u}_{rr} + r\bar{u}_r + \bar{u}_{\theta\theta} = 0, & (r, \theta) \in [0, a) \times [0, 2\pi), \\ \bar{u}(a, \theta) = \bar{\phi}(\theta) := \phi(a\cos\theta, a\sin\theta), & \theta \in [0, 2\pi], \\ \bar{u}(r, \theta) = \bar{u}(r, \theta + 2\pi), & (r, \theta) \in [0, a) \times [0, 2\pi). \end{cases}$$

分离变量法求解方程

$$\begin{cases} r^2\bar{u}_{rr} + r\bar{u}_r + \bar{u}_{\theta\theta} = 0, & (r,\theta) \in [0,a) \times [0,2\pi), \\ \bar{u}(a,\theta) = \bar{\phi}(\theta), & \theta \in [0,2\pi], \\ \bar{u}(r,\theta) = \bar{u}(r,\theta+2\pi), & (r,\theta) \in [0,a) \times [0,2\pi). \end{cases}$$

♠ **第一步.** 求特征值和特征函数。考虑特征值问题:

$$\begin{cases} H''(\theta) + \lambda H(\theta) = 0, \\ H(\theta) = H(2\pi+\theta). \end{cases}$$

注意到 $\lambda < 0$ 不是特征值:

$$\lambda \int_0^{2\pi} H^2 = -\int_0^{2\pi} H''H = \int_0^{2\pi} H'^2 - HH'|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} H'^2 \geq 0.$$

若 $\lambda = 0$，特征函数是 $H =$ 常数。若 $\lambda > 0$，则通解为

$$H(\theta) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta.$$

由于 H 是周期为 2π 的函数，我们得到特征值和特征函数

$$\lambda_n = n^2, \quad H_n = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

♠ **第二步.** 假设 $\bar{u}(r,\theta)=\sum_n H_n(\theta)R_n(r)$，求 R_n. 利用 $\{H_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$r^2R_n''(r)+rR_n'(r)=\lambda_n R_n.$$

这种形式的常微称为 Euler 方程。考虑 $\widehat{R}_n(t)=R_n(r)$，$r=e^t$，则

$$\widehat{R}_n''=\lambda_n\widehat{R}_n.$$

回忆 $\lambda_n=n^2$。因此

$$\begin{aligned} R_n(r) &= \begin{cases} a_0+b_0t, & n=0, \\ a_ne^{nt}+b_ne^{-nt}, & n=1,2,3,\dots, \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_0+b_0\log r, & n=0, \\ a_nr^n+b_nr^{-n}, & n=1,2,3,\dots. \end{cases} \end{aligned}$$

我们需要 $|u|<\infty$，故 $b_n=0$，$n=0,1,2,\dots.$。

考察满足这样形式的解 $\bar{u}(r,\theta)=\sum_n H_n(\theta)R_n(r)$，即

$$\bar{u}(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\big(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\big).$$

♠ **第三步.** 选取 A_n 和 B_n 使 $\bar{u}(a,\theta)=\bar{\phi}(\theta)$，即

$$\bar{\phi}(\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}a^n\big(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\big).$$

利用 $\{\cos n\theta\}$ 和 $\{\sin n\theta\}$ 在 $L^2([0,2\pi])$ 中的正交性，

$$\begin{aligned}
A_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{\phi}(\theta)\,d\theta,\\
A_n&=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}\bar{\phi}(\theta)\cos n\theta\,d\theta,\quad n=1,2,3,\ldots,\\
B_n&=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}\bar{\phi}(\theta)\sin n\theta\,d\theta,\quad n=1,2,3,\ldots.
\end{aligned}$$

将 A_n 和 B_n 代入，我们得到

$$\begin{aligned}
\bar{u}(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{\phi}(\theta)\,d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\int_0^{2\pi}\bar{\phi}(\tau)\big(\cos n\tau\cos n\theta+\sin n\tau\sin n\theta\big)\,d\tau\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{\phi}(\theta)\,d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\int_0^{2\pi}\bar{\phi}(\tau)\cos n(\tau-\theta)\,d\tau\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos n(\tau-\theta)\right]\bar{\phi}(\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$
\begin{aligned}
1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos n(\tau-\theta) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\left(e^{in(\tau-\theta)}+e^{-in(\tau-\theta)}\right)\\
&= 1+\frac{(r/a)\,e^{i(\tau-\theta)}}{1-(r/a)\,e^{i(\tau-\theta)}}+\frac{(r/a)\,e^{-i(\tau-\theta)}}{1-(r/a)\,e^{-i(\tau-\theta)}}\\
&= \frac{1-(r/a)^2}{1-2(r/a)\cos(\tau-\theta)+(r/a)^2}.
\end{aligned}
$$

代入前述表达式

$$
\bar{u}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos n(\tau-\theta)\right]\bar{\phi}(\tau)\,d\tau,
$$

最终得到如下泊松公式

圆盘上调和函数的泊松公式

$$
u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-(r/a)^2}{1-2(r/a)\cos(\tau-\theta)+(r/a)^2}\right]\bar{\phi}(\tau)\,d\tau,
$$

其中 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。

更进一步

上述方法可以用来得到环形区域 Ω 上调和方程的解，其中

$$\Omega = \{X = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \alpha,\ a < r < b\},\ (a \geq 0,\ b \in (a, \infty]).$$

考虑如下调和方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & X \in \Omega, \\ u = 0, & \theta = 0, \alpha, \\ u = g, & r = a, \\ u = h, & r = b. \end{cases}$$

两个注记如下:

♡ 若 $a = 0$ 时，则删除条件 $u = g$。

♡ 若 $b = \infty$ 时，需要加上条件 u 是**有界函数**。因此，

在解 Euler 方程时，舍去 $\log r$ 和 r^n 这样的项。

留给有兴趣的同学练习。

练习 2

假设 $D=\{(x,y):x^2+y^2>1\}$，定义 D 上的函数 $u(x,y)$ 满足边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in D, \\ u(x,y)=2x^2+y, & (x,y)\in\partial D, \\ |u| \text{ 是有界函数.} \end{cases}$$

(1) 考虑函数 $v(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$。求函数 $v(r,\theta)$ 所满足的方程及条件。

(2) 用分离变量法求出 $u(x,y)$。

参考答案:

(1) 函数 $v(r,\theta)$ 满足

$$\begin{cases} v_{rr}+\dfrac{1}{r}v_r+\dfrac{1}{r^2}v_{\theta\theta}=0, & (r,\theta)\in[1,\infty)\times[0,2\pi), \\ |v(r,\theta)|<\infty, & (r,\theta)\in[1,\infty)\times[0,2\pi), \\ v(1,\theta)=2\cos^2\theta+\sin\theta, & \theta\in[0,2\pi), \\ v(r,\theta)=v(r,\theta+2\pi). \end{cases}$$

(2) 分离变量法求出

$$u(x,y)=1+\frac{\cos 2\theta}{r^2}+\frac{\sin\theta}{r}=1+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y}{x^2+y^2}.$$

练习 3

假设 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1,\ \ y \ge 0\}$。试用分离变量法求解

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in D, \\ u|_{x^2+y^2=1, y\ge 0} = 4xy, \quad u|_{y=0, |x|\ge 1} = 0, \\ |u| \text{ 是有界函数.} \end{cases}$$

参考答案:

(1) 函数 $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 满足

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0, \quad |v(r, \theta)| < \infty, \quad (r, \theta) \in [1, \infty) \times [0, \pi), \\ v(1, \theta) = 4\cos\theta\sin\theta, \quad \theta \in [0, \pi), \\ v(r, 0) = v(r, \pi) = 0. \end{cases}$$

(2) 分离变量法求出

$$u(x, y) = 2r^{-2}\sin 2\theta = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

分离变量法的一个注记

假设 $u(x,t)$ 定义在 $[0,\ell]\times(0,\infty)$ 上，满足**齐次边值条件**，且

(i) 满足波方程 $a(t)\partial_t^2 u + b(t)\partial_t u + c(t)u = \partial_x^2 u$;

或者

(ii) 满足热方程 $a(t)\partial_t u + b(t)u = \partial_x^2 u$,

其中 $a(t)>0$。仍然可以尝试利用分离变量法求初边值问题。

寻找分离变量解 $u(x,t)=\sum_n X_n T_n(t)$，利用特征是特征函数系 X_n 的正交性

$$a(t)\,T_n'' + b(t)\,T_n' + c(t)\,T_n = -\lambda_n T_n \quad \text{(波方程)}$$
$$a(t)\,T_n' + b(t)\,T_n = -\lambda_n T_n \quad \text{(热方程)}.$$

尝试解出 T_n。

利用该注记，我们可以处理该讲稿后面的练习 4。

课后作业 **习题三，85 页：7，12，13。**

矩形上的热传导：高维的分离变量 (考试不要求)

矩形薄板 $Q=(0,a)\times(0,b)$，上下两面绝热，边缘温度为零，初始温度为 $h(x)g(y)$，内部没有热源。这时温度分布 $u(x,y)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t u=\kappa^2\Delta u, & z\in Q,\ t>0, \\ u(x,y,0)=h(x)g(y), & (x,y)\in Q, \\ u(x,y,t)=0, & (x,y)\in\partial Q,\ t>0. \end{cases}$$

目标 找解 $u(x,y,t)=\sum_{n,m}V_{nm}(x,y)T_{nm}(t)$。其中 V_{nm} 满足下列特征值问题

$$(\bigstar)\begin{cases} \Delta V=-\lambda V, & (x,y)\in Q, \\ V(x,y)=0, & (x,y)\in\partial Q. \end{cases}$$

记 V_{nm} 对应的特征值为 λ_{nm}。

- 特征值 $\lambda>0$。这是因为

$$\lambda\int_Q V^2=-\int_Q V\Delta V=\int_Q|DV|^2+\int_{\partial Q}V\partial_{\vec{n}}V=\int_Q|DV|^2\ge 0.$$

- 特征函数 $\{V_{nm}\}$ 是 $L^2(Q)$ 正交的。若 (V,λ) 和 $(\widetilde{V},\widetilde{\lambda})$ 是不同的特征值/函数，

$$\lambda\int_Q V\widetilde{V}=-\int_Q\widetilde{V}\Delta V=-\int_Q V\Delta\widetilde{V}=\widetilde{\lambda}\int_Q V\widetilde{V}\Longrightarrow\int_Q V\widetilde{V}=0.$$

♠ 第一步. 对(★)用分离变量法: $V = X(x)\,Y(y)$。代入(★)得到

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu, & (0 < x < a,\ 0 < y < b), \\ X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

因此我们得到两组常微分方程:

$$(\bigstar)_a \begin{cases} X'' + \mu X = 0, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \quad \text{和} \quad (\bigstar)_b \begin{cases} Y'' + (\lambda - \mu)\,Y = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

问题$(\bigstar)_a$的特征值与相应的特征函数为

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

问题$(\bigstar)_b$的特征值与相应的特征函数为

$$\lambda_{nm} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi}{b}y, \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

综合可知，问题(★)的特征值与相应的特征函数为

$$\lambda_{nm} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad V_{nm}(x, y) = \sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y, \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots.$$

♠ **第二步.** 假设 $u = \sum_{n,m} V_{nm}(x,y)\, T_{nm}(t)$ 是解，求 T_{nm}。由 $\{V_{nm}\}$ 的正交性，

$$T'_{nm}(t) + \lambda_{nm}\kappa^2 T_{nm}(t) = 0.$$

回忆 $\lambda_{nm} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}$。因此

$$T_{nm}(t) = e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)\kappa^2 t}, \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots.$$

于是

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_n B_m e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)\kappa^2 t} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y.$$

♠ **第三步.** 选取 A_n 和 B_m 使 $u(x,y,0) = h(x)g(y)$，即

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \quad \text{以及} \quad g(y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi}{b}y.$$

利用 $\{\sin\frac{n\pi}{a}x\}_{n\geq 1}$ 和 $\{\sin\frac{m\pi}{b}y\}_{m\geq 1}$ 在 $L^2(0,a)$ 与 $L^2(0,b)$ 中的正交性:

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a h(x)\sin\frac{n\pi}{a}x dx \quad \text{和} \quad B_m = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{m\pi}{b}y dy.$$

§3.2：非齐次方程、齐次边值条件的定解问题

齐次边值的热传导方程：Duhamel 方法 考虑定解问题

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2 \partial_x^2 u + f(x,t), & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,\ell), \\ u(0,t) = 0,\ u(\ell,t) = 0, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

利用线性叠加原理，该问题的解满足分解

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

其中 $u_0(x,t)$ 是齐次方程、非齐初值问题的解：

$$\begin{cases} \partial_t u_0 = a^2 \partial_x^2 u_0, & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ u_0(x,0) = \phi(x), & x \in (0,\ell), \\ u_0(0,t) = 0,\ u_0(\ell,t) = 0, & t \in (0,\infty), \end{cases}$$

而 $u_1(x,t)$ 是非齐次方程、齐次初值问题的解：

$$(\bigstar) \quad \begin{cases} \partial_t u_1 = a^2 \partial_x^2 u_1 + f(x,t), & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ u_1(x,0) = 0, & x \in (0,\ell), \\ u_1(0,t) = 0,\ u_1(\ell,t) = 0, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

- 使用分离变量法可求出

$$u_0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(\frac{n\pi a}{\ell})^2 t}\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\quad A_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\phi(s)\sin\frac{n\pi}{\ell}s\,ds.$$

- 对(★)使用 Duhamel 原理：考虑 $w(x,t;\tau)$ 满足

$$\begin{cases}\partial_t w=a^2\partial_x^2 w, & (x,t)\in(0,\ell)\times(0,\infty),\\ w(x,0;\tau)=f(x,\tau), & x\in(0,\ell),\\ w(0,t;\tau)=0,\ \ w(\ell,t;\tau)=0, & t\in(0,\infty).\end{cases}$$

由分离变量法可以解出

$$w(x,t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\tau)e^{-(\frac{n\pi a}{\ell})^2 t}\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\quad B_n(\tau)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(s,\tau)\sin\frac{n\pi}{\ell}s\,ds.$$

可以验证 $u_1(x,t)=\int_0^t w(x,t-\tau;\tau)\,d\tau$ **(过程留作练习)。** 所以

$$u_1(x,t)=\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)\int_0^t\left[\int_0^{\ell}f(s,\tau)\sin\frac{n\pi}{\ell}s\,ds\right]e^{-(\frac{n\pi a}{\ell})^2(t-\tau)}\,d\tau.$$

□

注. Duhamel 方法可用于非齐次波动方程、非齐次热传导方程。

齐次边值的热传导方程：特征函数展开法 考虑定解问题

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2 \partial_x^2 u + f(x,t), & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,\ell), \\ u(0,t) = 0, \ u_x(\ell,t) = 0, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

♠ **第一步.** 找特征值和特征函数。我们有

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & (0 < x < \ell), \\ X(0) = X'(\ell) = 0. \end{cases}$$

我们知道其特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \frac{(n-1/2)^2\pi^2}{\ell^2} \text{ 与 } X_n = \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

♠ **第二步.** 假设 $u(x,t)=\sum_n X_n(x)T_n(t)$，求 T_n。利用特征函数 $\{X_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$(\star)\quad \begin{cases} T_n'(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=f_n(t), \\ T_n(0)=\phi_n, \end{cases}$$

其中 $f_n(t)$ 和 ϕ_n 是 $f(\cdot,t)$ 和 $\phi(\cdot)$ 关于 $\{X_n\}$ 的傅里叶系数:

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(s,t)\sin\frac{(n-1/2)\pi s}{\ell}\,ds,\quad n=1,2,3,\ldots,$$

$$\phi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \phi(s)\sin\frac{(n-1/2)\pi s}{\ell}\,ds,\qquad n=1,2,3,\ldots.$$

对$(\star)$利用 Duhamel 齐次化或常数变异法，可以求出

$$T_n(t)=e^{\frac{-(n-1/2)^2\pi^2a^2}{\ell^2}t}\left(\phi_n+\int_0^t e^{\frac{(n-1/2)^2\pi^2a^2}{\ell^2}\tau}f_n(\tau)\,d\tau\right).$$

因此

$$u=\sum_{n=1}^\infty \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{\ell}\,e^{\frac{-(n-1/2)^2\pi^2a^2}{\ell^2}t}\left(\phi_n+\int_0^t e^{\frac{(n-1/2)^2\pi^2a^2}{\ell^2}\tau}f_n(\tau)\,d\tau\right).$$

回忆：求解一阶线性 ODE

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \qquad (\bigstar)$$

考虑函数$w(x) = e^{\int_0^x p\,dx} y(x)$。通过计算，($\bigstar$) 意味着

$$w'(x) = e^{\int_0^x p\,dx} q(x).$$

积分得到

$$w(x) = \int_0^x e^{\int_0^s p\,ds} q(s)\,ds + C.$$

因此

$$y(x) = e^{-\int_0^x p\,dx}\Big(\int_0^x e^{\int_0^s p\,ds} q(s)\,ds + C\Big).$$

□

齐次边值的弦振动方程：特征函数展开法 考虑定解问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + f(x,t), & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x) & x \in (0,\ell), \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(\ell,t) = 0, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

♠ **第一步.** 找特征值和特征函数。我们有

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (0 < x < \ell), \\ X'(0) = X'(\ell) = 0. \end{cases}$$

我们知道其特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \text{ 与 } X_n = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

♠ **第二步.** 假设 $u(x,t)=\sum_n X_n(x)T_n(t)$，求 T_n。利用特征函数 $\{X_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$(\star)\qquad \begin{cases} T_n''(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=f_n(t), \\ T_n(0)=\phi_n, \quad T_n'(0)=\psi_n, \end{cases}$$

其中 $f_n(t)$ 和 ϕ_n 是 $f(\cdot,t)$ 和 $\phi(\cdot)$ 关于 $\{X_n\}$ 的傅里叶系数:

$$f_0(t)=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(s,t)\,ds,\ f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x,t)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx,\ \ n=1,2,3,\ldots,$$

$$\phi_0=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \phi(s)\,ds,\qquad \phi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \phi(x)\cos\frac{n\pi s}{\ell}\,ds,\quad n=1,2,3,\ldots,$$

$$\psi_0=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \psi(s)\,ds,\qquad \psi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \psi(s)\cos\frac{n\pi s}{\ell}\,ds,\quad n=1,2,3,\ldots.$$

对$(\star)$利用 Duhamel 齐次化原理或常数变异法可以求出

$$T_n(t)=\begin{cases} \phi_0+\psi_0 t+\displaystyle\int_0^t f_0(\tau)(t-\tau)\,d\tau & n=0, \\ \phi_n\cos\dfrac{n\pi a}{\ell}t+\psi_n\sin\dfrac{n\pi a}{\ell}t+\dfrac{\ell}{n\pi a}\displaystyle\int_0^t f_n(\tau)\sin\dfrac{n\pi a}{\ell}(t-\tau)\,d\tau, & n\geq 1. \end{cases}$$

代回 $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(t)$，我们得到

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi_0+\psi_0 t+\int_0^t f_0(\tau)(t-\tau)\,d\tau \\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big(\phi_n\cos\frac{n\pi a}{\ell}t+\psi_n\sin\frac{n\pi a}{\ell}t \\ &\quad+\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{\ell}(t-\tau)\,d\tau\Big), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &f_0(t)=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(s,t)\,ds,\quad f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x,t)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx,\quad n=1,2,3,\ldots, \\ &\phi_0=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \phi(s)\,ds,\qquad \phi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \phi(x)\cos\frac{n\pi s}{\ell}\,ds,\quad n=1,2,3,\ldots, \\ &\psi_0=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \psi(s)\,ds,\qquad \psi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell \psi(s)\cos\frac{n\pi s}{\ell}\,ds,\quad n=1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

$\square$

课后作业 **习题三，85 页：9，10。**

Duhamel 原理解非齐次常微分方程

$$\begin{cases} T''(t) + bT'(t) + cT(t) = f(t), \quad t > 0, \\ T(0) = \phi_0, \ \ T'(0) = \psi_0. \end{cases}$$

由线性性，$T(t) = y(t) + z(t)$，其中

$$\begin{cases} y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \\ y(0) = \phi_0, \quad y'(0) = \psi_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z''(t) + bz'(t) + cz(t) = f(t), \\ z(0) = 0, \quad z'(0) = 0. \end{cases}$$

第一个常微的解是是我们熟悉的。为求 z，考虑如下 $w(t;\tau)$ (τ 是参数)：

$$\begin{cases} w''(t;\tau) + bw'(t;\tau) + cw(t;\tau) = 0, \\ w(0;\tau) = 0, \ \ w'(0;\tau) = f(\tau). \end{cases}$$

Duhamel 原理断言

$$z(t) = \int_0^t w(t-\tau;\tau)\,d\tau.$$

事实上，可以验证

$$z'(t) = w(0;t) + \int_0^t w'(t-\tau;\tau)\,d\tau = \int_0^t w'(t-\tau;\tau)\,d\tau$$

$$z''(t) = w'(0;t) + \int_0^t w''(t-\tau;\tau)\,d\tau = f(t) - \int_0^t (bw' + cw)\,d\tau = f(t) - bz' - cz.$$

回忆：常数变易法解二阶常系数线性 ODE

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x). \qquad (\bigstar)$$

方程的解可用齐次方程的通解 y_h，以及非齐次方程的特解 y_p 表达

$$y = y_h + y_p.$$

齐次方程的通解 $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$\Delta = b^2 - 4c$	**特征方程** $\mu^2 + b\mu + c = 0$	**齐次通解**
$\Delta > 0$	μ_1, μ_2	$y_1 = e^{\mu_1 x}$, $y_2 = e^{\mu_2 x}$
$\Delta = 0$	μ（二重根）	$y_1 = e^{\mu x}$, $y_2 = xe^{\mu x}$
$\Delta < 0$	$\mu_1, \mu_2 = \alpha \pm i\beta$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x))$

非齐次方程的特解 (常数变异法)：假设$y_p = u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2$。求导可知

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' \ (\text{令 } u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0), \qquad y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'.$$

若 y_p 满足 ($\bigstar$)，则$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f$。求解红色方程组得

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f}{W}, \quad u_2 = \int \frac{y_1 f}{W},$$

其中

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 \quad (Wronskian).$$

矩形上泊松方程：特征函数展开法

考虑矩形区域上的泊松方程

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 1, & (x, y) \in (0, \pi)^2, \\ u(0, y) = 0, \\ u(\pi, y) = \cos^2 y, \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0. \end{cases}$$

♠ **第一步.** 确定特征值和特征函数。考虑特征值问题

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \quad (0 < y < \pi), \\ Y'(0) = Y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

解得特征值和特征函数

$$\lambda_n = n^2, \quad Y_n = \cos ny, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

♠ **第二步.** 假设 $u(x,t)=\sum_n X_n(x)Y_n(y)$，求 X_n。利用特征函数 $\{Y_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$(\bigstar)\quad \begin{cases} X_n''(x)-\lambda_n X_n(x)=f_n \quad (0<x<\pi), \\ X_n(0)=\phi_n, \quad X_n(\pi)=\psi_n, \end{cases}$$

其中 f_n, ϕ_n 和 ψ_n 分别为:

$$\begin{aligned} & f_0=1,\ f_n=0\ (n\geq 1), \\ & \phi_n=0\ (n\geq 0), \\ & \psi_0=\psi_2=\frac{1}{2},\ \psi_n=0\ (n\neq 0,2). \end{aligned}$$

解(★)得到

$$X_0(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1-\pi^2}{2\pi}x,\ X_2(x)=\frac{e^{-2x}-e^{2x}}{2(e^{-2\pi}-e^{2\pi})},\ \text{其它 } X_n=0.$$

于是

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{1-\pi^2}{2\pi}x+\frac{e^{-2x}-e^{2x}}{2(e^{-2\pi}-e^{2\pi})}\cos 2y.$$

□

练习 4

试用分离变量法求解 $u(x,t)$:

$$\begin{cases} (t+1)u_t = u_{xx} + x, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = \sin x, & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

♠ **第一步.** 确定特征值和特征函数。考虑特征值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \quad (0 < x < \pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

解得特征值和特征函数

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(x) = \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

♠ **第二步.** 假设 $u(x,t)=\sum_n X_n(x)T_n(t)$，求 T_n。利用特征函数 $\{X_n\}$ 的 L^2 正交性，

$$(\star)\quad \begin{cases}(1+t)T_n'+n^2T_n=f_n \quad (t>0),\\ T_n(0)=\phi_n,\end{cases}$$

其中 f_n 和 ϕ_n 分别为:

$$f_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx=(-1)^{n-1}\frac{2}{n},$$
$$\phi_1=1,\quad \phi_n=0\ (n>1).$$

解$(\star)$得到

$$T_1(t)=2-\frac{1}{t+1},\quad T_n(t)=\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\left[2-2(t+1)^{-n^2}\right]\ (n\geq 2).$$

于是

$$u(x,t)=\left(2-\frac{1}{t+1}\right)\sin x+\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\left[2-2(t+1)^{-n^2}\right]\sin nx.$$

□

§3.3：非齐次方程、非齐次边值条件的定解问题

第 I 类边值问题：边值齐次化 考虑定解问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + f(x,t), & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), & x \in (0,\ell), \\ u(0,t) = \gamma(t), \ \ u(\ell,t) = \mu(t), & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

取函数 $w(x,t) = \frac{\ell - x}{\ell}\gamma(t) + \frac{x}{\ell}\mu(t)$，其满足

$$w(0,t) = \gamma(t) \quad 和 \quad w(\ell,t) = \mu(t).$$

考虑函数 $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$。该函数满足齐次边值问题：

$$\begin{cases} \partial_t^2 v = a^2 \partial_x^2 v + f(x,t) - \partial_t^2 w, & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ v(x,0) = \phi(x) - w(x,0), & x \in (0,\ell), \\ \partial_t v(x,0) = \psi(x) - \partial_t w(x,0) & x \in (0,\ell), \\ v(0,t) = 0, \ \ v(\ell,t) = 0, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

可以用特征函数展开法求出 v，从而得到 u。

注：这样的函数 w 的取法很多。满足需要即可。

第 II 类边值问题：边值齐次化 考虑定解问题

$$\begin{cases} \partial_t u = a^2\partial_x^2 u + f(x,t), & (x,t)\in(0,\ell)\times(0,\infty), \\ u(x,0)=\phi(x), & x\in(0,\ell), \\ u_x(0,t)=\gamma(t),\ \ u_x(\ell,t)=\mu(t), & t\in(0,\infty). \end{cases}$$

取函数 $w(x,t)=(x-\frac{x^2}{2\ell})\gamma(t)+\frac{x^2}{2\ell}\mu(t)$，其满足

$$w_x(0,t)=\gamma(t) \quad \text{和} \quad w_x(\ell,t)=\mu(t).$$

考虑函数 $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$。该函数满足齐次边值问题：

$$\begin{cases} \partial_t v = a^2\partial_x^2 v + f(x,t) - \partial_t w + a^2\partial_x^2 w, & (x,t)\in(0,\ell)\times(0,\infty), \\ v(x,0)=\phi(x)-w(x,0), & x\in(0,\ell), \\ v_x(0,t)=0,\ \ v_x(\ell,t)=0, & t\in(0,\infty). \end{cases}$$

可以用特征函数展开法求出 v，从而得到 u。

注：若边值条件为$u(0,t)=\gamma(t)$，$u_x(\ell,t)=\mu(t)$，则取 $w(x,t)=\gamma(t)+\mu(t)x$。

若边值条件为$u_x(0,t)=\gamma(t)$，$u(\ell,t)=\mu(t)$，则取 $w(x,t)=\mu(t)-\gamma(t)(\ell-x)$。

(特殊) 第 I 类边值问题：边值齐次化 考虑有界弦的胁迫振动

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + f(x), & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), & x \in (0,\ell), \\ u(0,t) = A, \ u(\ell,t) = B, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

其中 A 和 B 是常数，f 仅依赖于 x。

考虑函数 $v(x,t) = u(x,t) - w(x)$ 。该函数满足：

$$\begin{cases} \partial_t^2 v = a^2 \partial_x^2 v + f(x) + a^2 w''(x), & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ v(x,0) = \phi(x) - w(x), & x \in (0,\ell), \\ \partial_t v(x,0) = \psi(x) & x \in (0,\ell), \\ v(0,t) = A - w(0), \ v(\ell,t) = B - w(\ell), & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

取 w 是如下常微的解，则 v 满足 齐次方程、齐次边值问题

$$\begin{cases} w''(x) = -f(x)/a^2, & x \in (0,\ell), \\ w(0) = A, \ w(\ell) = B. \end{cases}$$

解得

$$w(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x \int_0^\tau f(s)\,ds d\tau + A + \frac{x}{\ell}\left[B - A + \frac{1}{a^2} \int_0^\ell \int_0^\tau f(s)\,ds d\tau\right].$$

练习 5

考虑有界弦的胁迫振动

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + A, & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) = 0, & x \in (0,\ell), \\ u(0,t) = 0, \ \ u(\ell,t) = B, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

其中 A 和 B 是常数。

考虑函数 $v(x,t) = u(x,t) - w(x)$，其中

$$w(x) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + \left(\frac{B}{\ell} + \frac{A\ell}{2a^2}\right)x$$

则可以验证 v 满足如下齐次方程、齐次边值条件：

$$\begin{cases} \partial_t^2 v = a^2 \partial_x^2 v, & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty), \\ v(x,0) = w(x), & x \in (0,\ell), \\ \partial_t v(x,0) = 0 & x \in (0,\ell), \\ v(0,t) = 0, \ \ v(\ell,t) = 0, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

使用分离变量法：我们有

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < \ell, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases}$$

由此解出特征值和特征函数为：

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, \ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \ n = 1, 2, 3, \dots.$$

假设解为 $u(x,t) = \sum_n X_n(x) T_n(t)$。则

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0.$$

解出 $T_n(t)$，我们得到

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi a}{\ell} t + B_n \sin\frac{n\pi a}{\ell} t\right) \sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

利用 $v(x,0) = w(x)$ 和 $\partial_t v(x,0) = 0$，我们有$B_n = 0$以及

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \Longrightarrow A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} w(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

综上可得 $u(x,t) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + \left(\frac{B}{\ell} + \frac{A\ell}{2a^2}\right)x + \sum_{n\ge 1} A_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \cos\frac{n\pi a t}{\ell}$。

课后作业 **习题三，85 页：11。**