

偏微分方程

李奇睿

浙江大学数学科学学院

qi-rui.li@zju.edu.cn

第二章：行波法

本章概览

- ♠ 用特征线法求解无界弦自由振动的柯西问题：d'Alembert 公式；
- ♠ 用线性叠加和 Duhamel 齐次化求解无界弦强迫振动的柯西问题：Kirchhoff 公式；
- ♠ 用对称延拓法求解半无界弦振动问题；
- ♠ 介绍 3 维波动方程的球平均法和 2 维波动方程的降维法。

教学要求

- ♣ 会使用特征线法 (行波法)、齐次化方法求解一维波动方程的初值问题；
- ♣ 熟练掌握用对称延拓法求解一维波动方程的半无界问题；
- ☒ 二维、三维波动方程不作要求。

一维波动方程的初值问题

一维波动方程的初值问题：d'Alembert 公式

考虑无界弦的自由振动：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- 波动方程体现了弦的振动需要满足的物理定律，给出了弦上各质点的“加速度”。
- 为确定各质点的位置，我们还需要弦的初始状态的信息

初始位置 & 初始速度： $u(\cdot, 0)$ 和 $\partial_t u(\cdot, 0)$ 。

达朗贝尔公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

利用特征线法证明达朗倍尔公式

- 首先注意观察

$$\partial_t^2 u - a^2 \partial_x u = 0 \iff (\partial_t + a\partial_x)(\partial_t - a\partial_x)u = 0$$

若存在变量替换 $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$ 使得

$$(\star) \quad \partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta \text{ 和 } \partial_t = a\partial_\xi - a\partial_\eta,$$

那么 $\partial_t + a\partial_x = 2a\partial_\xi$ 且 $\partial_t - a\partial_x = -2a\partial_\eta$ 。波动方程在 (ξ, η) 坐标下形变为

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

- 用 (\star) 分别作用到 ξ 和 η 得,

$$\xi_x = 1, \quad \xi_t = a; \quad \eta_x = 1, \quad \eta_t = -a.$$

这样可以解出波动方程的 两族特征线

$$\xi = x + at \quad \text{和} \quad \eta = x - at.$$

利用特征线法证明达朗贝尔公式

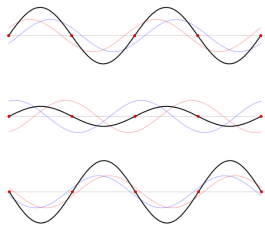
- 把牛顿-莱布尼茨法则应用到 $u_{\xi\eta} = 0$ 。首先观察到 $u_{\xi} = v(\xi)$ 。于是

$$u = \int_0^{\xi} u_{\xi}(s, \eta) ds + u(0, \eta) = \int_0^{\xi} v(s) ds + u(0, \eta) =: h(\xi) + g(\eta).$$

- 回忆特征线方程: $\xi = x + at$ 和 $\eta = x - at$ 。因此

$$u(x, t) = h(x + at) + g(x - at) \quad (\text{行波解}).$$

- $h(x + at)$ 的图像是 $h(x)$ 以 a 的速度向左平移: 左行波。
- $g(x - at)$ 的图像是 $g(x)$ 以 a 的速度向右平移: 右行波。



利用特征线法证明达朗倍尔公式

- 我们将利用初值条件确定函数 h 和 g :

$$\begin{cases} \phi(x) = u(x, 0) = h(x) + g(x), \\ \psi(x) = \partial_t u(x, 0) = ah'(x) - ag'(x). \end{cases}$$

积分得到

$$\begin{cases} h(x) + g(x) = \phi(x), \\ h(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds + C. \end{cases}$$

求出该线性方程组的解为

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi + \frac{1}{2}C, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi - \frac{1}{2}C. \end{aligned}$$

- 回忆已经知道 $u(x, t) = h(x + at) + g(x - at)$ 。于是可以得到达朗倍尔公式。

利用特征线法证明达朗倍尔公式

达朗倍尔公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

这个漂亮的公式是 d'Alembert 在 1746 年得到的。



Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783)

法国数学家、机械师、物理学家、哲学家和音乐理论家。

代数基本定理在法语中以 d'Alembert 命名。

练习 1

试用行波法 (特征线法) 求解下列初边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} - u_x - u_y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\ u(0, y) = f(y) \quad (y \geq 0), \quad u_y(x, 0) = e^{\frac{x}{4}} \quad (y \geq 0), \\ u(x, 0) = 0 \quad (x \geq 0). \end{cases}$$

- 解特征方程 $\Phi_x^2 - 2\Phi_x\Phi_y - 3\Phi_y^2 = 0$, 即 $(\Phi_x + \Phi_y)(\Phi_x - 3\Phi_y) = 0$, 得到特征线

$$\xi = x - y, \quad \eta = 3x + y.$$

令 $\bar{u}(\xi, \eta)$ 使得 $u(x, y) = \bar{u}(x - y, 3x + y)$ 。利用链式法则计算可知 \bar{u} 满足

$$4\bar{u}_{\xi\eta} = \bar{u}_{\eta}.$$

- 注意到 $v(\xi, \eta) := \bar{u}_{\eta}(\xi, \eta)$ 满足 ODE: $v_{\xi} = \frac{1}{4}v$. 解得

$$\bar{u}_{\eta} = \bar{u}_{\eta}(0, \eta)e^{\frac{1}{4}\xi}.$$

再利用牛顿-莱布尼茨法则可得: $\bar{u}(\xi, \eta) - \bar{u}(\xi, 0) = e^{\frac{1}{4}\xi}(\bar{u}(0, \eta) - \bar{u}(0, 0))$ 。即

$$\bar{u}(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{4}\xi}(F(\xi) + G(\eta)) \implies u(x, y) = e^{\frac{1}{4}(x-y)}(F(x-y) + G(3x+y)).$$

- 利用边值条件确定 F 和 G :

$$\begin{cases} f(y) = u(0, y) = e^{-\frac{y}{4}}(F(-y) + G(y)), & y \geq 0 \\ e^{\frac{x}{4}} = u_y(x, 0) = -\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}(F(x) + G(3x)) + e^{\frac{x}{4}}(-F'(x) + G'(3x)), & x \geq 0, \\ 0 = u(x, 0) = e^{\frac{1}{4}x}(F(x) + G(3x)), & x \geq 0. \end{cases}$$

观察可知 F 和 G 满足

$$\begin{cases} F(-s) + G(s) = e^{\frac{s}{4}}f(s), & s \geq 0, \\ -F'(s) + G'(3s) = 1, & s \geq 0, \\ F(s) + G(3s) = 1, & s \geq 0. \end{cases}$$

解得 $G(s) = \frac{3}{4}(\frac{s}{3} + C)$ ($s \geq 0$),

若 $s \geq 0$, 则 $F(s) = -\frac{3}{4}(s + C)$,

若 $s < 0$, 则 $F(s) = e^{-\frac{s}{4}}f(-s) - \frac{3}{4}(-\frac{s}{3} + C)$.

于是

$$u(x, y) = \begin{cases} ye^{\frac{1}{4}(x-y)}, & x \geq y \geq 0, \\ xe^{\frac{1}{4}(x-y)} + f(y-x), & y > x \geq 0. \end{cases}$$

练习 2

函数 $u(x, t)$ 满足线性偏微分方程

$$\begin{cases} u_t + xu_x = xt, & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t\infty), \\ u(x, 0) = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

由特征线方程 $\frac{dx}{dt} = x$ 解得特征线 $\Gamma: x = Ce^t$ 。考虑 $H(t) = u(Ce^t, t)$ 。

- (1). 试求函数 $H(t)$ 所满足的方程;
- (2). 利用函数 $H(t)$ 求解上述初值问题。

- (1). 直接计算得到

$$\frac{dH(t)}{dt} = u_t + u_x x_t = (u_t + xu_x)|_{x=Ce^t} = (xt)|_{x=Ce^t} = Cte^t.$$

另一方面, $H(t)$ 满足初值 $H(0) = u(C, 0) = C$ 。

- (2). 求解 $H(t)$ 满足的常微初值问题得到

$$u(Ce^t, t) = H(t) = C \int_0^t se^s ds + H(0) = C(te^t - e^t + 2).$$

回忆 $Ce^t = x$ 。即 $C = xe^{-t}$ 。所以

$$u(t, x) = x(t - 1 + 2e^{-t}).$$

练习 3

半无限长传输线的初始电压均为零。在其一端输入电压信号 $f(t)$ ，传输线上电压的变化 $u(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t + \frac{1}{4}u = 0, & 0 < x < +\infty, t > 0 \\ u(0, t) = f(t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

试用行波法（特征线法）求电压变化 $u(x, t)$ 。

- 计算判别式 $\mathcal{D} = 1$ ，方程是双曲型。
- 解特征方程 $\Phi_t^2 - \Phi_x^2 = 0$ ，即 $(\Phi_t - \Phi_x)(\Phi_t + \Phi_x) = 0$ ，得到特征线

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t.$$

- 取 $\bar{u}(\xi, \eta) = u(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2}(\xi - \eta))$ ，等价的 $u(x, t) = \bar{u}(x + t, x - t)$ 。计算知

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \bar{u}_\xi + \bar{u}_\eta, \quad u_t = \bar{u}_\xi - \bar{u}_\eta, \\ u_{tt} &= \bar{u}_{\xi\xi} - 2\bar{u}_{\xi\eta} + \bar{u}_{\eta\eta}, \\ u_{xx} &= \bar{u}_{\xi\xi} + 2\bar{u}_{\xi\eta} + \bar{u}_{\eta\eta}. \end{aligned} \right\} \implies 4\bar{u}_{\xi\eta} = \bar{u}_\xi - \bar{u}_\eta + \frac{1}{4}\bar{u}.$$

- 方程 $4\bar{u}_{\xi\eta} = \bar{u}_{\xi} - \bar{u}_{\eta} + \frac{1}{4}\bar{u}$ 等价于

$$(\star) \quad (4\bar{u}_{\xi} + \bar{u})_{\eta} = \frac{1}{4}(4\bar{u}_{\xi} + \bar{u}).$$

令 $v = 4\bar{u}_{\xi} + \bar{u}$ 。那么 (\star) 转换为常微分方程组

$$\begin{cases} v_{\eta} = \frac{1}{4}v, \\ 4\bar{u}_{\xi} + \bar{u} = v. \end{cases}$$

解第一个常微得到 $v(\xi, \eta) = w(\xi)e^{\frac{1}{4}\eta}$, w 是待定函数。第二个常微告诉我们

$$(e^{\frac{1}{4}\xi}\bar{u} + g(\eta))_{\xi} = e^{\frac{1}{4}\xi}(\bar{u}_{\xi} + \frac{1}{4}\bar{u}) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}\xi}v = h(\xi)e^{\frac{1}{4}\eta},$$

其中 h, g 是待定函数。关于 ξ 积分得到

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{\frac{1}{4}(\eta-\xi)} H(\xi) + e^{-\frac{1}{4}\xi} G(\eta) \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} H(x+t) + e^{-\frac{1}{4}(x+t)} G(x-t). \end{aligned}$$

- 下确定函数 H 和 G 。为此通过初值 $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ 和边值 $u(0, t) = f(t)$ 得到

$$(\spadesuit) \quad \begin{cases} H(x) + e^{-\frac{1}{4}x}G(x) = 0 & (x \geq 0), \\ H'(x) - \frac{1}{2}H(x) - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}G(x) - e^{-\frac{1}{4}x}G'(x) = 0 & (x \geq 0), \\ e^{-\frac{1}{2}t}H(t) + e^{-\frac{1}{4}t}G(-t) = f(t) & (t \geq 0). \end{cases}$$

通过 (\spadesuit) 中第一、二两式得到

$$H(x) = C \quad \text{且} \quad G(x) = -Ce^{\frac{1}{4}x}, \quad x \geq 0.$$

再利用 (\spadesuit) 中第三式可知

$$G(-t) = e^{\frac{1}{4}t}f(t) - e^{-\frac{1}{4}t}C, \quad t \geq 0.$$

因此

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \geq t \geq 0, \\ e^{-\frac{1}{2}x}f(t-x), & 0 \leq x < t. \end{cases}$$

□

一维波动方程的柯西问题：Kirchhoff 公式

考虑无界弦的强迫振动：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- 波动方程体现了弦的振动需要满足的物理定律，给出了弦上各质点的“加速度”。
- 为确定各质点的位置，我们还需要弦的初始状态的信息

初始位置 & 初始速度： $u(\cdot, 0)$ 和 $\partial_t u(\cdot, 0)$ 。

Kirchhoff 公式

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} [\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau. \end{aligned}$$

注. 当 $f = 0$ 时，这就是 d'Alembert 公式。

Kirchhoff 公式的证明: 线性叠加原理 + Duhamel 原理

利用线性性, 无界弦强迫振动问题的解满足分解 $u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t)$, 其中

- $u_0(x, t)$ 满足无界弦自由振动问题 ($f = 0$):

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_0 = a^2 \partial_x^2 u_0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u_0(x, 0) = \phi(x), \partial_t u_0(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

由 d'Alembert 公式,

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x+at) + \phi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

- $u_1(x, t)$ 满足齐次初值问题:

$$(\star) \begin{cases} \partial_t^2 u_1 = a^2 \partial_x^2 u_1 + f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u_1(x, 0) = 0, \partial_t u_1(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

用 Duhamel 原理求解

$$(\star) \begin{cases} \partial_t^2 u_1 = a^2 \partial_x^2 u_1 + f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u_1(x, 0) = 0, \partial_t u_1(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

假设 $w = w(x, t; \tau)$ (其中 τ 是参数) 满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 w = a^2 \partial_x^2 w, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ w(x, 0; \tau) = 0, \partial_t w(x, 0; \tau) = f(x, \tau), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

这样的 $w(x, t; \tau)$ 由 d'Alembert 公式决定。它们关于 τ 的叠加给出了 (\star) 的解 u_1 , 即

$$u_1(x, t) = \int_0^t w(x, t - \tau; \tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau.$$



Jean-Marie Constant Duhamel (1797 –1872)

法国数学家、物理学家。首先将齐次化原理应用于热方程：

系统 t 时刻的状态是 τ 时刻状态演化 $t - \tau$ 时间后产生的叠加。

下面验证 Duhamel 齐次化方法

$u_1(x, t) = \int_0^t w(x, t - \tau; \tau) d\tau$ 满足

$$(\star) \begin{cases} \partial_t^2 u_1 = a^2 \partial_x^2 u_1 + f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u_1(x, 0) = 0, \partial_t u_1(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- 首先回忆 $w = w(x, t; \tau)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 w = a^2 \partial_x^2 w, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ w(x, 0; \tau) = 0, \partial_t w(x, 0; \tau) = f(x, \tau), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- 不难看出 $u_1(x, 0) = \partial_t u_1(x, 0) = 0$ 。更进一步,

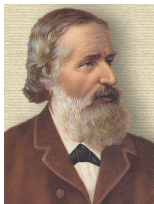
$$\begin{aligned} \partial_t u_1(x, t) &= w(x, 0; t) + \int_0^t \partial_t w(x, t - \tau; \tau) d\tau = \int_0^t \partial_t w(x, t - \tau; \tau) d\tau, \\ \partial_t^2 u_1(x, t) &= \partial_t w(x, 0; t) + \int_0^t \partial_t^2 w(x, t - \tau; \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + a^2 \int_0^t \partial_x^2 w(x, t - \tau; \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + a^2 \partial_x^2 u_1. \end{aligned}$$

Kirchhoff 公式的证明：线性叠加原理 + Duhamel 原理

- 无界弦强迫振动问题的解 $u = u_0 + u_1$ 。
- u_0 是自由振动问题的解，由 d'Alembert 公式决定。
- u_1 是零初值强迫振动问题的解，通过 Duhamel 齐次化原理解出。

Kirchhoff 公式

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} [\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau. \end{aligned}$$



Gustav Robert Kirchhoff (1824 –1887) 德国物理学家

对电路、光谱学和加热物体发射黑体辐射的基本理解做出了贡献。

他还为光学做出了贡献，为惠更斯原理奠定了坚实的基础。

Kirchhoff 公式的证明 II: 特征线法

- 考虑 $\xi = x + at$ 和 $\eta = x - at$, 以及函数 $\bar{u}(\xi, \eta) = u(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2a}(\xi - \eta))$ 。于是

$$\bar{u}_{\xi\eta} = -\frac{1}{4a^2}f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right).$$

- 两次运用牛顿-莱布尼茨公式,

$$u(x, t) = h(x + at) + g(x - at) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x+at} \int_0^{x-at} f\left(\frac{s+\tau}{2}, \frac{s-\tau}{2a}\right) d\tau ds.$$

- 通过初值条件 $u(x, 0) = \phi(x)$ 和 $\partial_t u(x, 0) = \psi(x)$ 去确定 h 和 g :

$$\phi(x) = h(x) + g(x) - \frac{1}{4a^2} \int_0^x \int_0^x f\left(\frac{s+\tau}{2}, \frac{s-\tau}{2a}\right) d\tau.$$

$$\psi(x) = ah'(x) - ag'(x) - \frac{1}{4a} \left[\int_0^x f\left(\frac{x+\tau}{2}, \frac{x-\tau}{2a}\right) d\tau - \int_0^x f\left(\frac{s+x}{2}, \frac{s-x}{2a}\right) ds \right].$$

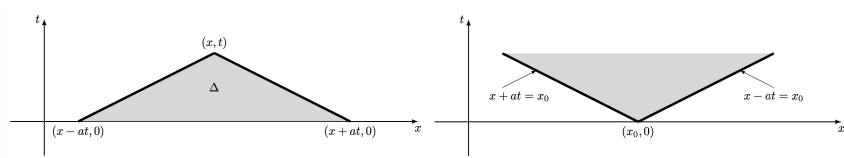
- 仔细观察, 从上面两个函数方程解出 h 和 g , 通过小心化简可以得到 Kirchhoff 公式。

课后作业 习题二, 34 页: 1, 2, 3, 4, 5, 6。

公式的物理意义：依赖区间、决定区域、影响区域

根据 d'Alembert/Kirchhoff 公式，讨论波动方程的依赖性。只考虑 $f = 0$,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$



♠ $I = [x - at, x + at]$ 是 (x, t) 的依赖区间。因为 $u(x, t)$ 由 I 上初值完全确定。

♠ $[x_1, x_2]$ 及过 x_1, x_2 的两条特征线 $x - at = x_1$ 和 $x + at = x_2$ 围成的三角形区域 Δ 是 $[x_1, x_2]$ 的决定区域。因为 u 在 Δ 上的值完全取决于 $[x_1, x_2]$ 上的初值。

♠ 区间 $[x_1, x_2]$ 及过 x_1, x_2 的特征线 $x + at = x_1$ 和 $x - at = x_2$ 围成的无界梯形区域 \mathcal{U} 是区间 $[x_1, x_2]$ 的影响区域。因为 u 在 \mathcal{U} 上的值被 $[x_1, x_2]$ 上的初值影响。

半无界弦振动问题：对称延拓法

半无界弦振动的初边值问题：对称延拓法

考虑半无界弦振动的第 I 边值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + f(x, t), & (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, \infty), \\ u(0, t) = \gamma(t), & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

相容性条件： $\gamma(0) = \phi(0), \gamma'(0) = \psi(0)$ 。

第一步：边值条件齐次化 考虑新函数 $v(x, t) = u(x, t) - \gamma(t)$ 。它满足方程

$$(\star) \begin{cases} \partial_t^2 v = a^2 \partial_x^2 v + f(x, t) - \gamma''(t), & (x, t) \in (0, \infty)^2, \\ v(x, 0) = \phi(x) - \gamma(0), \quad \partial_t v(x, 0) = \psi(x) - \gamma'(0), & x \in (0, \infty), \\ v(0, t) = 0, & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

这是端点固定的半无界弦振动。

第二步：端点固定的半无界弦的振动转化为无界弦的柯西问题 (通过对称延拓)

问题：当 $v(x, t)$ 是什么样的函数时，我们总有 $v(0, t) = 0$??

回答：一个充分条件是 $v(\cdot, t)$ 对所有 t 都是 **奇函数** !!

为此，我们把非齐次项和初值条件关于 x 作 **奇延拓**：

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \begin{cases} f(x, t) - \gamma''(t), & x > 0, \\ -f(-x, t) + \gamma''(t), & x < 0, \end{cases} \\ \Phi(x) &= \begin{cases} \phi(x) - \gamma(0), & x > 0, \\ -\phi(-x) + \gamma(0), & x < 0, \end{cases} \\ \Psi(x) &= \begin{cases} \psi(x) - \gamma'(0), & x > 0, \\ -\psi(-x) + \gamma'(0), & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

于是如下相应柯西问题的解 $V(x, t)$ 会是 **奇函数** (通过 Kirchhoff 公式验证)

$$\begin{cases} \partial_t^2 V = a^2 \partial_x^2 V + F(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ V(x, 0) = \Phi(x), \partial_t V(x, 0) = \Psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

第三步：完成求解

利用 Kirchhoff 公式可知

$$\begin{aligned} V(x, t) = & \frac{1}{2} [\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(s) ds \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau. \end{aligned}$$

由于 F , Φ 和 Ψ 关于 x 是奇函数, 对任何 t , $V(x, t)$ 总是 x 的奇函数, $V(0, t) = 0$ 。

所以

$v(x, t) := V(x, t)|_{x \geq 0}$ 满足(★)的初、边值条件.

于是 $u(x, t) = \gamma(t) + V(x, t)|_{x \geq 0}$ 为原方程的解。

半无界弦振动的初边值问题：对称延拓法

考虑半无界弦振动的第 II 边值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + f(x, t), & (x, t) \in (0, \infty)^2, \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, \infty), \\ u_x(0, t) = \gamma(t), & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

相容性条件： $\gamma(0) = \phi'(0), \gamma'(0) = \psi'(0)$ 。

第一步：边值条件齐次化

考虑新函数 $v(x, t) = u(x, t) - x\gamma(t)$ 。它满足方程

$$(\star) \begin{cases} \partial_t^2 v = a^2 \partial_x^2 v + f(x, t) - x\gamma''(t), & (x, t) \in (0, \infty)^2, \\ v(x, 0) = \phi(x) - x\gamma(0), \quad \partial_t v(x, 0) = \psi(x) - x\gamma'(0), & x \in (0, \infty), \\ v_x(0, t) = 0, & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

这是个自由端点的半无界弦的振动转方程。

第二步：自由端点的半无界弦的振动转化为无界弦的柯西问题 (通过对称延拓)

问题：当 $v(x, t)$ 是什么样的函数时，我们总有 $v_x(0, t) = 0$??

回答：一个充分条件是 $v(\cdot, t)$ 对所有 t 都是 偶函数 !!

为此，我们把非齐次项和初值条件关于 x 作 偶延拓：

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \begin{cases} f(x, t) - x\gamma''(t), & x > 0, \\ f(-x, t) + x\gamma''(t), & x < 0, \end{cases} \\ \Phi(x) &= \begin{cases} \phi(x) - x\gamma(0), & x > 0, \\ \phi(-x) + x\gamma(0), & x < 0, \end{cases} \\ \Psi(x) &= \begin{cases} \psi(x) - x\gamma'(0), & x > 0, \\ \psi(-x) + x\gamma'(0), & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

于是如下相应柯西问题的解 $V(x, t)$ 会是 偶函数 (通过 Kirchhoff 公式验证)

$$\begin{cases} \partial_t^2 V = a^2 \partial_x^2 V + F(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ V(x, 0) = \Phi(x), \partial_t V(x, 0) = \Psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

第三步：完成求解

利用 Kirchhoff 公式可知

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \frac{1}{2} [\Phi(x + at) + \Phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau. \end{aligned}$$

由于 F , Φ 和 Ψ 关于 x 是偶函数, 对任何 t ,

$V(x, t)$ 总是 x 的偶函数, $V_x(0, t) = 0$ 。

所以

$v(x, t) := V(x, t)|_{x \geq 0}$ 满足(★)的初、边值条件.

于是 $u(x, t) = x\gamma(t) + V(x, t)|_{x \geq 0}$ 为原方程的解。

练习 1

求解如下半无界一维波动方程：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u + x^2, & (x, t) \in (0, \infty)^2, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 2x, & x \in (0, \infty), \\ u_x(0, t) = t, & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

- 考虑函数 $v(x, t) = u(x, t) - xt$ 。该函数满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 v = \partial_x^2 v + x^2, & (x, t) \in (0, \infty)^2, \\ v(x, 0) = x, \quad \partial_t v(x, 0) = x, & x \in (0, \infty), \\ v_x(0, t) = 0, & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

- 做偶延拓 $F(x, t) = v(x, t)$, $\Phi(x) = |x|$, $\Psi(x) = |x|$, 并考虑如下方程的解

$$\begin{cases} \partial_t^2 V = \partial_x^2 V + x^2, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ V(x, 0) = |x|, \quad \partial_t V(x, 0) = |x|, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

- 应用 Kirchhoff 公式可得

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \frac{1}{2} [|x+t| + |x-t|] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} |s| ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} s^2 ds d\tau \\ &= \frac{1}{2} [|x+t| + |x-t|] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} |s| ds + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{12} t^4. \end{aligned}$$

- 我们最终得到原方程的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= xt + V(x, t)|_{x \geq 0} \\ &= \begin{cases} x + 2xt + \frac{1}{2}x^2t^2 + \frac{1}{12}t^4, & \text{如果 } x \geq t, \\ xt + t + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}x^2t^2 + \frac{1}{12}t^4, & \text{如果 } x < t. \end{cases} \end{aligned}$$

□

半无界方程的对称延拓法

半无界初边值问题是否能用对称延拓法来求解，与方程

$$F[u] = F(x, t, u, u_x, u_t, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}) = 0$$

的解是否具有某种对称性有关。

- 若 u 是 $F[u] = 0$ 的解时保证 $v(x, t) = -u(-x, t)$ 也是方程的解，

则可以用奇延拓法求边值条件为 $u_x(0, t) = 0$ 的半无界初边值问题。

- 若 u 是 $F[u] = 0$ 的解时保证 $v(x, t) = u(-x, t)$ 也是方程的解，

则可以用偶延拓法求边值条件为 $u_x(0, t) = 0$ 的半无界初边值问题。

注. 对称延拓法也可以用来处理半直线上的扩散方程。

课后作业 习题二, 34-35 页: 7, 8, 9。

接下来介绍二、三维波动方程柯西问题 (考试不要求)。

三维波动方程

三维波动方程的柯西问题：球平均法

考虑三维自由振动的柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u), & (X, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u(X, 0) = \phi(X), \quad \partial_t u(X, 0) = \psi(X), & X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

♠ 先考虑 球对称情况： $u(X, t) = \bar{u}(r, t)$, $r = r(X) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

相应的初值条件只是 r 的函数： $\phi(X) = \bar{\phi}(r)$, $\psi(X) = \bar{\psi}(r)$ 。

化为与 \bar{u} 有关的恰当函数的半无界波方程的初边值问题。用延拓法求解。

♠ 非对称情形用 球平均方法：给定 $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ，考虑

$$\bar{u}(r, t; X_0) = \oint_{S_r(X_0)} u(X, t) d\mu(X),$$

其中 $S_r(X_0) = \partial B_r(X_0)$, $B_r(X_0)$ 是中心在 X_0 半径为 r 的球。

解球对称函数 $\bar{u}(r, t; X_0)$ 。再利用 $u(X_0, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r, t; X_0)$ 得到 u 。

球对称情况: $u(X, t) = \bar{u}(r, t)$, $r = r(X) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

相应的初值条件也只是 r 的函数: $\phi(X) = \bar{\phi}(r)$, $\psi(X) = \bar{\psi}(r)$ 。

利用链式法则求导可知

$$u_x = \bar{u}_r \frac{x}{r}, \quad u_y = \bar{u}_r \frac{y}{r}, \quad u_{xx} = \bar{u}_{rr} \frac{x^2}{r^2} + \bar{u}_r \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right).$$

所以 $\bar{u}(r, t)$ 满足, $r \geq 0$, $t > 0$,

$$\begin{cases} \partial_t^2 \bar{u} = a^2 \left(\partial_r^2 \bar{u} + \frac{2\partial_r \bar{u}}{r} \right), \\ \bar{u}(r, 0) = \bar{\phi}(r), \quad \partial_t \bar{u}(r, 0) = \bar{\psi}(r). \end{cases}$$

取 $v(r, t) = r\bar{u}(r, t)$ 。该函数满足半无界波方程 (仅三维时) 的初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v = a^2 \partial_r^2 v, \\ v(r, 0) = r\bar{\phi}(r), \quad \partial_t v(r, 0) = r\bar{\psi}(r), \\ v(0, t) = 0. \end{cases}$$

通过奇延拓法并利用 d'Alembert 公式, 我们可以求解 v 。则 $\bar{u}(r, t) = v(r, t)/r$ 可知。

一般情形的球平均法:

任意固定 $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 考虑

$$\bar{u}(r, t; X_0) = \oint_{S_r(X_0)} u(X, t) d\mu(X) = \oint_{S_1(X_0)} u(rX, t) d\mu(X).$$

这里 $X = (x, y, z)$, $S_r(X_0) = \partial B_r(X_0)$, $d\mu$ 是勒贝格测度的限制。直接计算得到

$$\begin{aligned}\partial_r \bar{u}(r, t; X_0) &= \oint_{S_1(X_0)} \nabla u(rX, t) \cdot X d\mu(X) \\&= \oint_{S_r(X_0)} \nabla u(X, t) \cdot (X/r) d\mu(X) \\&= \frac{1}{|S_r|} \int_{B_r(X_0)} \Delta u(X, t) dX \\&= \frac{1}{a^2 |S_r|} \int_{B_r(X_0)} \partial_t^2 u(X, t) dX \\&= \frac{1}{a^2 |S_r|} \int_0^r \int_{S_1(X_0)} \partial_t^2 u(\tau X, t) \tau^2 d\mu(X) d\tau \\&= \frac{1}{a^2 r^2} \partial_t^2 \int_0^r \tau^2 \bar{u}(\tau, t; X_0) d\tau.\end{aligned}$$

两边乘上 $a^2 r^2$ 再关于 r 求导, 得到 $a^2 \partial_r [r^2 \partial_r \bar{u}(r, t; X_0)] = r^2 \partial_t^2 \bar{u}(r, t; X_0)$ 。

取 $v(r, t) = r\bar{u}(r, t; X_0)$, 其中 $r, t \geq 0$ 。该函数满足半无界波方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v = a^2 \partial_r^2 v, \\ v(r, 0) = r\bar{\phi}(r), \quad \partial_t v(r, 0) = r\bar{\psi}(r), \\ v(0, t) = 0, \end{cases}$$

其中

$$\bar{\phi}(r) = \int_{S_r(X_0)} \phi(X) d\mu, \quad \bar{\psi}(r) = \int_{S_r(X_0)} \psi(X) d\mu.$$

通过奇延拓法并利用 d'Alembert 公式可以求解 v 。当 $r < at$ 时

$$\bar{u}(r, t; X_0) = \frac{1}{2r} \left[(r+at)\bar{\phi}(r+at) - (at-r)\bar{\phi}(at-r) \right] + \frac{1}{2ar} \int_{at-r}^{r+at} s\bar{\psi}(s) ds.$$

令 $r \rightarrow 0$,

$$u(X_0, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r, t; X_0) = \bar{\phi}(at) + at\bar{\phi}_r(at) + t\bar{\psi}(at) = \partial_t [t\bar{\phi}(at)] + t\bar{\psi}(at).$$

(齐次) 三维波动方程柯西问题的 Poisson 公式

$$u(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} \phi d\mu \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} \psi d\mu.$$

(非齐次) 三维波动方程的柯西问题: Duhamel 原理

考虑三维强迫振动的柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) + f, & (X, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u(X, 0) = \phi(X), \quad \partial_t u(X, 0) = \psi(X), & X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

三维波动方程柯西问题的 **Poisson** 公式

$$\begin{aligned} u(X, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} \phi d\mu \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} \psi d\mu \\ & + \int_0^t \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int_{S_{a(t-\tau)}(X)} f(Z, \tau) d\mu(Z) d\tau. \end{aligned}$$

Poisson 公式的证明: 线性叠加原理 + Duhamel 原理

利用线性性, 迫振动柯西问题的解满足分解 $u(X, t) = u_0(X, t) + u_1(X, t)$, 其中

- $u_0(x, t)$ 满足自由振动的柯西问题 ($f = 0$):

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \Delta u, & (X, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u(X, 0) = \phi(X), \quad \partial_t u(X, 0) = \psi(X), & X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

由 Poisson 公式,

$$u(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} \phi d\mu \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} \psi d\mu.$$

- $u_1(x, t)$ 满足齐次初值问题:

$$(\star) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \Delta u + f(X, t), & (X, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u(X, 0) = 0, \quad \partial_t u(X, 0) = 0, & X \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

用 Duhamel 原理求解

$$(\star) \begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 \Delta u + f(X, t), & (X, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u(X, 0) = 0, \quad \partial_t u(X, 0) = 0, & X \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

假设 $w = w(x, t; \tau)$ (其中 τ 是参数) 满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 w = a^2 \Delta w, & (X, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ w(X, 0; \tau) = 0, \quad \partial_t w(X, 0; \tau) = f(X, \tau), & X \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

这样的 $w(X, t; \tau)$ 由 Poisson 公式决定

$$w(X, t; \tau) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} f(Z, \tau) d\mu(Z).$$

它们关于 τ 的叠加给出了 (\star) 的解 u_1 , 即

$$u_1(X, t) = \int_0^t w(X, t - \tau; \tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{4\pi a^2 (t - \tau)} \int_{S_{a(t-\tau)}(X)} f(Z, \tau) d\mu(Z) d\tau.$$

验证 Duhamel 齐次化 容易看到 $u_1(X, 0) = \partial_t u_1(X, 0) = 0$ 。更进一步

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_1(X, t) &= \partial_t \left(w(X, 0; t) + \int_0^t \partial_t w(X, t - \tau; \tau) d\tau \right) \\ &= f(X, t) + a^2 \int_0^t \Delta w(X, t - \tau; \tau) d\tau = f(X, t) + a^2 \Delta u_1(X, t). \end{aligned}$$

Poisson 公式的证明：线性叠加原理 + Duhamel 原理

- 三维强迫振动问题的解 $u = u_0 + u_1$ 。
- u_0 是自由振动问题的解，由球平均法得到。
- u_1 是零初值强迫振动问题的解，通过 Duhamel 齐次化原理解出。

三维波动方程柯西问题的 Poisson 公式

$$\begin{aligned} u(X, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} \phi d\mu \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} \psi d\mu \\ & + \int_0^t \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int_{S_{a(t-\tau)}(X)} f(Z, \tau) d\mu(Z) d\tau. \end{aligned}$$

二维波动方程

三维波动方程的柯西问题：降维法

考虑二维波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a^2 (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) + f, & (X, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ u(X, 0) = \phi(X), \quad \partial_t u(X, 0) = \psi(X), & X = (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

我们使用降维法：考虑函数 $\tilde{u}(X, z, t) = u(X, t)$ ，它满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u} = a^2 (\partial_x^2 \tilde{u} + \partial_y^2 \tilde{u} + \partial_z^2 \tilde{u}) + f(X, t), & (X, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ \tilde{u}(X, z, 0) = \phi(X), \quad \partial_t \tilde{u}(X, z, 0) = \psi(X), & (X, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

由三维波动方程的 Poisson 公式

$$\begin{aligned} u(X, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X, 0)} \phi(Z') d\mu(Z) \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X, 0)} \psi(Z') d\mu(Z) \\ &\quad + \int_0^t \left[\frac{1}{4\pi a^2 (t - \tau)} \int_{S_{a(t-\tau)}(X, 0)} f(Z', \tau) d\mu(Z) \right] d\tau, \end{aligned}$$

其中 $S_r(X, 0)$ 表示 \mathbb{R}^3 中以 $(X, 0)$ 为中心， r 为半径的球面， Z' 是 Z 在 xy -平面的投影。

把 u 表达式中的积分化到 \mathbb{R}^2 中的区域 (ϕ, ψ) 的定义域)。

把 $S_r(X, 0)$ 看做定义在 $\Sigma_r(X)$ 上的图, 即

$$\Sigma_r(X) \ni Y \mapsto Z = \left(Y, \pm \sqrt{r^2 - \|Y - X\|^2} \right) \in S_r(X, 0),$$

其中

$$\Sigma_r(X) = S_r(X, 0) \cap \{z = 0\} = \{Y \in \mathbb{R}^2 : \|Y - X\| \leq r\}.$$

直接计算表明

$$d\mu(Z) = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|Y - X\|^2}} dY.$$

二维波动方程柯西问题的 **Poisson** 公式

$$\begin{aligned} u(X, t) = & \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\Sigma_{at}(X)} \frac{\phi(Y)}{\sqrt{a^2 t^2 - \|Y - X\|^2}} dY \right] \\ & + \frac{1}{2\pi a} \int_{\Sigma_{at}(X)} \frac{\psi(Y)}{\sqrt{a^2 t^2 - \|Y - X\|^2}} dY \\ & + \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \left[\int_{\Sigma_{a(t-\tau)}(X)} \frac{f(Y, \tau)}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - \|Y - X\|^2}} dY \right] d\tau. \end{aligned}$$

泊松公式的物理意义

二维泊松公式的物理意义：波的弥散

根据 Poisson 方程，我们讨论波的初值依赖性。考虑 $f = 0$,

$$u(X, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\Sigma_{at}(X)} \frac{\phi(Y)}{\sqrt{a^2 t^2 - \|Y - X\|^2}} dY \right] + \frac{1}{2\pi a} \int_{\Sigma_{at}(X)} \frac{\psi(Y)}{\sqrt{a^2 t^2 - \|Y - X\|^2}} dY.$$

- 由该 Poisson 公式可知，在 t_0 时刻， $\Sigma_{at_0}(X_0)$ 内点处 u 受到 X_0 处的初值影响。
- 受到 X_0 处初值影响的圆盘的半径以速度 a 向外扩张。
- 考虑 X_1 处的波动。记 $d = \|X_1 - X_0\|$ 。
当 $t < d/a$ 时，在 X_0 处的初值不会影响 X_1 处的波动。

当 $t \geq d/a$ 时，在 X_0 处的初值会持续影响到 X_1 处的波动。

这种有明显的波前阵面但无波后阵面的现象称为波的弥散。

三维泊松公式的物理意义：惠更斯 (Huygens) 原理

根据 Poisson 方程，我们讨论波的初值依赖性。考虑 $f = 0$,

$$u(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} \phi d\mu \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(X)} \psi d\mu.$$

- 由该 Poisson 公式可知，在 t_0 时刻， $S_{at_0}(X_0)$ 上的点受到 X_0 处的初值影响。
- 受到 X_0 处初值影响的球面的半径以速度 a 向外扩张。
- 考虑 X_1 处的波动。记 $d = \|X_1 - X_0\|$ 。

当 $t < d/a$ 时，在 X_0 处的初值不会影响 X_1 处的波动。

当 $t = d/a$ 时，在 X_0 处的初值正好影响到 X_1 处的波动。

当 $t > d/a$ 时，在 X_0 处的初值不再影响 X_1 处的波动。

这种有明显的波前阵面和无波后阵面的现象称为波的惠更斯 (Huygens) 原理。