一阶线性微分方程

$y' + P(x)y = Q(x)$

齐次方程通解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

非齐次方程通解 $y = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]$

由常数变易法推出

=

1^0 先求出对应齐次方程的通解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$；

2^0 常数变易 $C \to C(x)$；

3^0 将 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入非齐次方程，求 $C(x)$；

4^0 写出非齐次方程的通解.

一阶微分方程常见模型

1. 形如 $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

2. **2.** 形如 $y' = f(ax + by + c)$ 的方程

令 $u = ax + by + c$，则 $\dfrac{du}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{du}{dx} = a + bf(u)$

3. $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 型方程

2^0 c_1, c_2 不全为零，而 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ 时，

说明 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda \Rightarrow a_1 = \lambda a_2,\quad b_1 = \lambda b_2$.

令 $v = a_2x + b_2y$，则

$$\frac{dv}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{\lambda v + c_1}{v + c_2}\right).$$

3^0 c_1, c_2 不全为零，而 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，即 $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ 时，

可令 $\begin{cases} x = u + k \\ y = v + h \end{cases}$，取常数 k, h，使 $\begin{cases} a_1k + b_1h + c_1 = 0 \\ a_2k + b_2h + c_2 = 0 \end{cases}$.

$\therefore$ 由 $\begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = f\left(\dfrac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$. 已为齐次方程

4. 以y作为自变量
5. 伯努利方程

形如 $\boxed{\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,\ 1)}$ 的方程

其中 $P(x)$、$Q(x)$为 x 的连续函数.

用 y^n 除方程两端，得到 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$，

$\because \dfrac{d(y^{1-n})}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$，

$$\boxed{z' + P(x)z = Q(x)}$$

$\therefore$ 有 $\dfrac{1}{1-n}\cdot\dfrac{d(y^{1-n})}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$，

令 $z = y^{1-n}$，得 $\boxed{\dfrac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)}$，

可降阶高阶微分方程

1. 多次积分

2. $\boxed{y''=f(x,y')}$ **型**

2.

令 $y'=z$，则 $y''=z'=\dfrac{dz}{dx}$，

3. $y''=f(y,y')$型

令 $y'=z$，则 $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}=z\dfrac{dz}{dy}$，

二阶线性微分方程解法（仅含y'',y',y）

线性相关与线性无关

Def.6.5.1 设函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使对任意的 $x\in I$，都有 $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_my_m(x)\equiv 0$，则称函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 在区间 I 上线性相关.

否则就称 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 在区间 I 上线性无关.

由于是存在，故0与任何函数线性相关

判断是否线性无关

=

Def.2 称
$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_m'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(m-1)}{}_1(x) & y^{(m-1)}{}_2(x) & \cdots & y^{(m-1)}{}_m(x) \end{vmatrix}$$
为函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 的 **Wronski**（朗斯基）行列式.

结论:

1^0 若 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 在区间 I 上线性相关，则
$$W(x)\equiv 0\,,\quad \forall\, x\in I\,;$$

充分不必要条件

1. 2^0 若 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 为 m 阶线性齐次微分方程
$$a_\circ(x)y^{(m)}+a_1(x)y^{(m-1)}+\cdots+a_{m-1}(x)y'+a_m(x)y=0$$
的 m 个解，则 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 在区间 I 上线性相关的充要条件是 $W(x)\equiv 0\,,\quad \forall\, x\in I\,.$
2. 两个函数的线性关系可由除数是否为常数判断

特征方程求解齐次通解

特征方程 $ar^2+br+c=0$	方程 $ay''+by'+cy=0$ 的通解
有两个不相等实根 r_1，r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
有两个相等实根 $r=r_1=r_2$	$y=e^{rx}(C_1+C_2x)$
有一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

高阶特征方程：

单实根 r	给出一项 Ce^{rx}
k 重实根 r	给出 k 项 $e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出两项 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出 $2k$ 项 $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

非齐次特解求法

$ay''+by'+cy=P_m(x)e^{ax}$

具有如下形式的特解：

$$\boxed{y^*=x^kQ_m(x)e^{\alpha x}}\ .$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次但系数待定的多项式，

$$k=\begin{cases}0, & \alpha\text{不是特征方程的根}\\ 1, & \alpha\text{是特征方程的根（单根）}\\ 2, & \alpha\text{是特征方程的二重根}\end{cases}$$

$ay'' + by' + cy = P_m(x)e^{ax}\cos\beta x$或$P_m(x)e^{ax}\sin\beta x$

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + \mathrm{Q}_n(x)\sin\beta x]$$

具有如下形式的特解：

$$\boxed{y^* = x^k e^{\alpha x}[\mathrm{U}_L^{(1)}(x)\cos\beta x + \mathrm{U}_L^{(2)}(x)\sin\beta x]}$$

其中，$L = \max\{m,\ n\}$，$k = \begin{cases} 0, & \alpha \pm i\beta\text{不是特征方程的根} \\ 1, & \alpha \pm i\beta\text{是特征方程的根} \end{cases}$