迹

> tr:迹，方阵主对角线上数之和

$tr(A+B)=tr(A)+tr(B),tr(kA)=ktr(A)$
$tr(AB)=tr(BA)$
$tr(A^*)=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$

相似矩阵

> A,B是n阶方阵，若存在P，使$P^{-1}AP=B$,则称A与B相似，A~B

性质

1. A~B,则多项式f(A)~f(B)
2. 相似矩阵行列式相同
3. 相似矩阵秩相同
4. 相似矩阵迹相同
5. 相似矩阵特征多项式相同，特征值相同
   若A~对角矩阵，则称A可相似对角化,该相似矩阵为相似标准形

特征值与特征向量

> $A\xi=\lambda\xi,\lambda$为特征值，ξ为特征向量
> $|\lambda E-A|=0$是特征方程

1. 特征向量不能为0向量
2. 通过解特征方程可解得特征值
   可优先通过行列变换将某项变为0，且其同行/列的另外两项可提出关于λ的公因式
3. 特征值个数=A的阶数（计算重根） 问A的特征值是？有重根需要回答$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$
4. 特征向量通过求$(\lambda E-A)x=0$的基础解系而求出
5. $tr(A)=\sum\lambda$
6. $|A|=\prod\lambda$
7. 特征值用来判断秩（非0特征值个数=秩）
8. $f(A)=B$, 则$\lambda_B=f(\lambda_A)$
9. $\begin{cases}A:\lambda\\A^{-1}:\frac{1}{\lambda}\\A^*:\frac{|A|}{\lambda}\\A^T:\lambda\end{cases}$
   特征向量都相同
10. 单位列向量a, 则aa^T的特征值是1和$n-1$个0
    $(aa^T)^2=aa^Taa^T=aa^T$, 所以$\lambda^2=\lambda,\lambda=1/0$
    $\because \mathrm{tr}(aa^T)=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1 \therefore \lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$

对称矩阵的性质

1. 不同特征值对应的特征向量正交
2. 必可相似对角化，且能正交相似对角化
   求法：同一个特征值对应的特征向量施密特正交化，之后再单位化

特征多项式与最小多项式

特征多项式$f(\lambda)=|\lambda E-A|$
最小多项式：特征多项式中的各项组合能使$m(\lambda)=0$且次数最小的多项式，最高项系数为1

Jordan标准型

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

都是若当形(Jordan形)矩阵

定义5.4 如果A与某个Jordan形矩阵

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

相似， 则称J为A的Jordan标准形.

注1： J中不同的Jordan块的主对角元素可以相等.

注2： J的主对角元素就是A的特征值.

求解Jordan标准型：求特征值，列出所有可能的Jordan矩阵，再通过$r(\lambda E-A)=r(\lambda E-Jordan)$求出，其中不是所有λ都可算出结果

定理5.11 假设矩阵A的最小多项式是 $m(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{t_i}$, 则$t_i$是$A$的Jordan标准形中以$\lambda_i$为主对角元素的Jordan块的最高阶数.

注： A的Jordan标准形可以唯一决定A的最小多项式；反之不成立.

可相似对角化条件

1. 对称矩阵
2. 有n个线性无关的特征向量
   解题时可从$(\lambda E-A)x=0$, 基础解系中解的数量 $=n-r(\lambda E-A)$入手
3. 最小多项式无重根
4. $|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}(\lambda-\lambda_3)^{k_3}\cdots(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$，$\lambda_i$恰好有$k_i$个线性无关的特征向量