向量

概念

本质：n个数构成的有序数组
表现形式：行向量/列向量

向量的长度和角度

对于n维实向量α, 称 $\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ 为α的**长度**(length)**模**(modulus), 记为$\|\alpha\|$, 即

$$\boxed{\|\alpha\| = \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

设$\alpha, \beta \in \mathrm{R}^n$, 若$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, 则定义α, β的**夹角**(the angle between α and β)为

$$\varphi = \arccos \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}, \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

若$\langle\alpha,\beta\rangle = 0$, 即$\varphi = \pi/2$, 则称$\alpha$与$\beta$**正交**(orthogonal).

线性组合和线性表示

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$是$n$维向量，$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$是数
则称向量$\eta = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n$可以由$a_1, a_2, \ldots, a_n$线性表示
若两个向量组能互相线性表示，则称它们等价

向量组的秩

$r(a_1,a_2,...,a_s) \le s$
$r(a_1,a_2,...,a_s) < s$:线性相关
$r(a_1,a_2,...,a_s) = s$:线性无关

定理2.1. 若向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性表示, 则
$$r(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t) \le r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s).$$

线性相关的性质

1. 等价刻画

   定理2.2. 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_s$, 使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = 0$.

2. **定理2.3.** 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$至少有一个可以由其余$s-1$个向量线性表示.

线性无关的性质

1. **推论2.5.** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关 $\Leftrightarrow$ 由$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = 0$可推出 $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = 0$.

极大线性无关组

如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$的部分组

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$$

满足以下列条件:

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$中任一向量都可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性表示,

则称$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$的一个**极大线性无关组**.

极大线性无关组向量个数=向量组的秩

- $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} B=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

  对任意的$1 \le i_1, i_2, \ldots, i_s \le n$, A 的列向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_s}$ 是A的极大无关组当且仅当B的列向量组$\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_s}$ 是B的列向量的极大无关组

$A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} B=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

A 的列向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_s}$ 是A的极大无关组，对于α_j，数$k_1, \ldots k_s$满足:

$$\alpha_j = k_1 \alpha_{i_1} + \ldots + k_s \alpha_{i_s}$$

当且仅当

$$\beta_j = k_1 \beta_{i_1} + \ldots + k_s \beta_{i_s}。$$