定义

第五章 二次型 § 5.1 二次型及其矩阵表示

A的二次型

f的秩: r(A)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$x^{\mathrm{T}}Ax$$

f的矩阵

注意$\sum a_{ij}x_ix_j$形式与x^TAx的转换

=

$$\boxed{f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j} = \boxed{x^{\mathrm{T}}Ax}$$

标准型：没有交叉项只有平方项

且x_i, x_j可以为n阶矩阵

合同

A与B**合同**(congruent):

$\exists$**可逆**矩阵P, 使得$P^{\mathrm{T}}AP = B$.

判断

正负惯性指数相同（或者正惯性指数相同，秩相同）

正惯性指数+负惯性指数=秩

定理

定理5.1. 实对称矩阵与对角矩阵合同.

且该矩阵对角线上元素为其特征值

将二次型转化为标准型

能配方优先配方
问求正交矩阵就是用正交变换
问求可逆线性变换就是用配方法

正交变换

1. 求A的特征值
2. 求A正交相似对角化对应的对称矩阵Q
3. x=Qy, $f(x_1,x_2,...,x_n)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$

配方法

1. x_1在平方项中但不在交叉项中
   将x_2与x_3配方，变成$(x_2+ax_3)^2+bx_3^2$
2. x_1在平方项和和多个交叉项中
   将x_1与(x_2-x_3)整体进行配方，剩下的部分配方
3. x_1,x_2,x_3在交叉项中但不在平方项中
   令$x_1=y_1+y_2, x_2=y_1-y_2, x_3=y_3$, 再进行二次配方

求x=Qy中Q的方法

1. 求出$\begin{cases} y_1=ax_1+bx_2 \\ y_2=cx_1+dx_2 \\ y_3=ex_1+fx_2 \end{cases}$
   再得到y=Px,求P的逆矩阵
2. $\begin{cases} y_1=ax_1+bx_2 \\ y_2=cx_1+dx_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$
   由下至上,得到$x_i=\sum y_i$,然后得到Q

正定二次型

定理5.3. 实二次型$f(x)=x^{T}Ax$总可以通过可逆线性变换将其化为标准形

$$f=k_1y_1^2+\ldots+k_ny_n^2$$

其中$k_1,\ldots,k_n$中非零的个数r=秩(f), 且正项的个数p与负项的个数q ($p+q=r$)都是在可逆线性变换下的不变量.

f(或A)的**正惯性指数** (positive index of inertia)

f(或A)的**负惯性指数** (negative index of inertia)

p=A特征值中正项数，q=A特征值中负项数

p-q=2p-r:符号差

推论a. 实二次型$f(x)=x^{T}Ax$总可以通过可逆线性变换将其化为**规范形**

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2+0y_{r+1}^2+\cdots+0y_n^2$$

且规范形(normalized form)是唯一的.

推论b. 设n实阶对称矩阵A的秩为r, 则存在可逆阵P, 使

$$P^{T}AP=\begin{bmatrix}E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O\end{bmatrix},\ \text{其中} p+q=r.$$

规范型正项在前负项在后，系数都为1/-1