特殊矩阵

零矩阵

不止为方阵

对角矩阵

通常用 ∧表示，可记为∧=diag($a_{11},a_{12},...$)

数量矩阵

对角矩阵主对角线上元素相等

单位矩阵

只能方阵

三角矩阵

上三角下三角，主要应用于求分列式及方阵的LU分解

行阶梯型矩阵

主要用于求秩

行最简型矩阵

暂时未知

对称矩阵

A^T=A或$A_{ij}=A_{ji}$

反对称矩阵

$A_{ij}=-A_{ji}$
故主对角线元素都为0

线性运算

$$\begin{cases}\text{加法}\\ \text{数乘：}kA=O\longrightarrow k=0\text{或}A=O\end{cases}$$

矩阵的乘法

运算法则

结合律：(AB)C=A(BC)
分配律:A(B+C)=AB+AC *注意左乘右乘*
~~交换律~~：AB≠BA *同阶对角矩阵及逆矩阵满足交换律*
~~消去律~~：A=O,AB=AC⇒B=C 未必成立

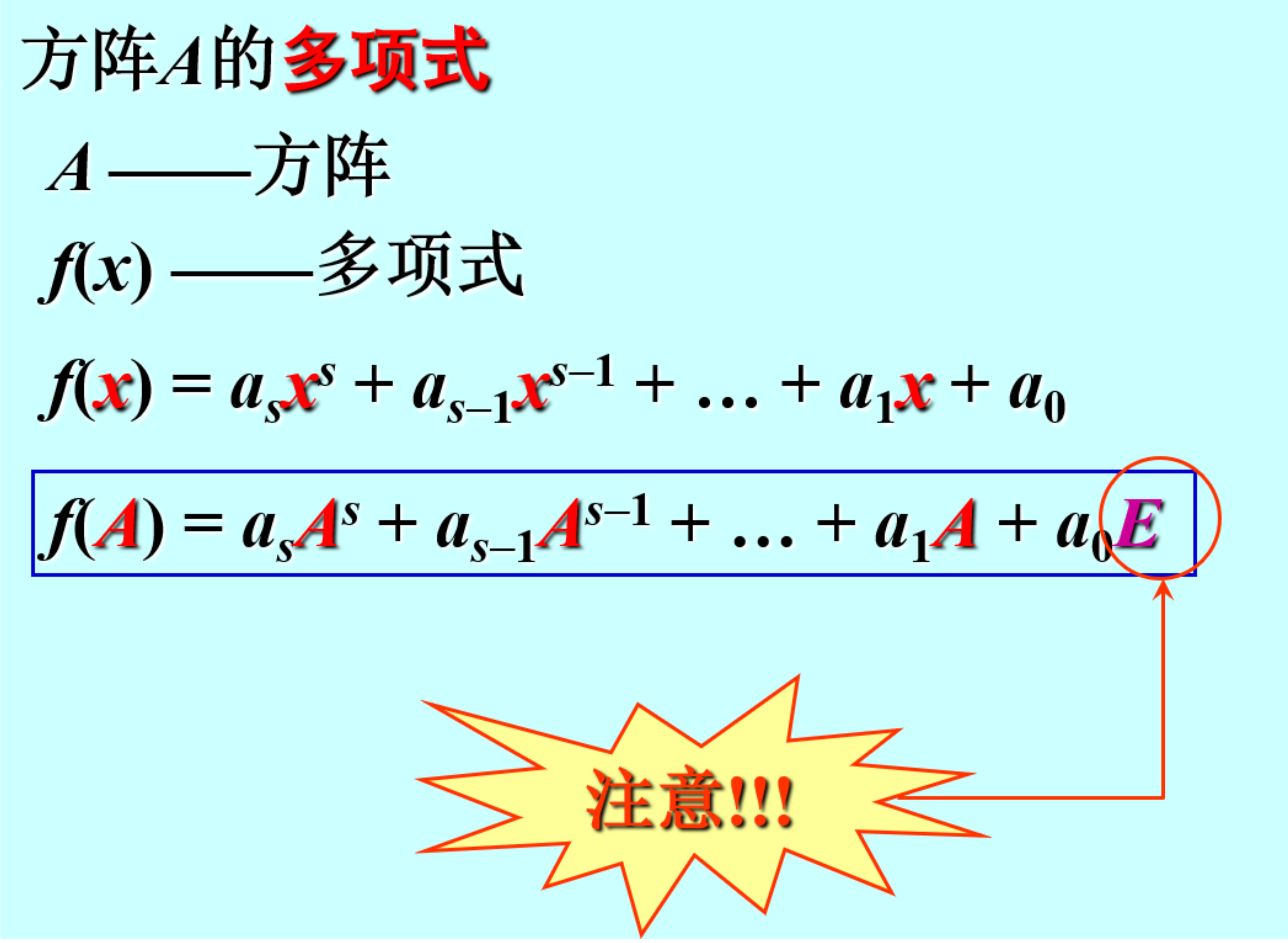
$(A+B)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iA^iB^{n-1}$ 当A=B时成立**

特殊矩阵的幂

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}，\ A^k=A$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},B^k=B$$

多项式



注意点

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$$

矩阵的转置

矩阵的转置运算满足如下性质

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$,

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$,

(3) $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$,

(4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

分块矩阵

按列分块 $\rightarrow$ 行向量
按行分块 $\rightarrow$ 列向量

分块对角矩阵

$$\text{设矩阵}A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

$$\text{则}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s2}^{\mathrm{T}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & A_{2r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

初等变换

1. 对换变换
2. 倍乘变换
3. 倍加变换
   若矩阵A经过有限次初等变换化为B, 则称A与B等价(equivalent). 记作$A \cong B$

$E_{m\times n}^{(r)}$为$A_{m\times n}$的等价标准形
任何一个矩阵都可以经过有限次初等变换化为标准形.
变换技巧：按从第一列到最后一列的顺序，先将A变换为行最简形再变为等价标准形

初等矩阵

$$(1)\ E \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E(i,j) \qquad E \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} E(i,j)$$

$$(2)\ E \xrightarrow{r_i \times k} E(i(k)) \qquad E \xrightarrow{c_i \times k} E(i(k))$$

$$(3)\ E \xrightarrow{r_i + k r_j} E(i,j(k)) \qquad E \xrightarrow{c_i + k c_j} E(j,i(k))$$

初等矩阵左乘：行变换
初等矩阵右乘：列变换

逆矩阵

初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵

性质

1. 唯一性
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^T)^{-1} = ((A^{-1})^T$
4. $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
6. A可逆→A可写成初等矩阵的乘积.
7. $A_{m\times n} = P_m \begin{bmatrix} E^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_n$

   称为A的标准分解
8. 行列式$\neq$ 0
9. 分块对角矩阵$A^{-1} = \mathrm{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \cdots, A_s^{-1})$

求逆矩阵

1. 合并矩阵再行/列变换
2. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*$
3. ~~待定系数~~
4. 已知等式

例11. 设方阵A满足$2A^3-A^2+E=O$，
证明$A+E$可逆，并求$(A+E)^{-1}$.

证明: $2A^3-A^2+E=O$

$$\Rightarrow (A+E)(2A^2-3A+3E)-2E=O$$

$$\begin{array}{rl} & 2A^2-3A+3E \\ A+E & \overline{\big)\,2A^3-A^2+O+E} \\ & \underline{2A^3+2A^2\qquad\qquad\quad} \\ & -3A^2+O\qquad \\ & \underline{-3A^2-3A\qquad} \\ & 3A+E \\ & \underline{3A+3E} \\ & -2E \end{array}$$

例11. 设方阵A满足$2A^3-A^2+E=O$，
证明$A+E$可逆，并求$(A+E)^{-1}$.

证明: $2A^3-A^2+E=O$

$$\Rightarrow (A+E)(2A^2-3A+3E)-2E=O$$

$$\Rightarrow (A+E)(2A^2-3A+3E)=2E$$

$$\Rightarrow (A+E)\frac{1}{2}(2A^2-3A+3E)=E$$

$$\Rightarrow (A+E)^{-1}=\frac{1}{2}(2A^2-3A+3E).$$

行列式

定义

> $$\text{在}n\text{阶行列式中,把元素}a_{ij}\text{所在的第}i\text{行和第}j\text{列划去}$$
> $$\text{留下来的阶行列式叫做元素}aij\text{的余子式,记作}Mij,$$
> $$\text{令}Aij=(-1)^{i+j}M_{ij}\text{并称之为}aij\text{的代数余子式}(cofactor).$$

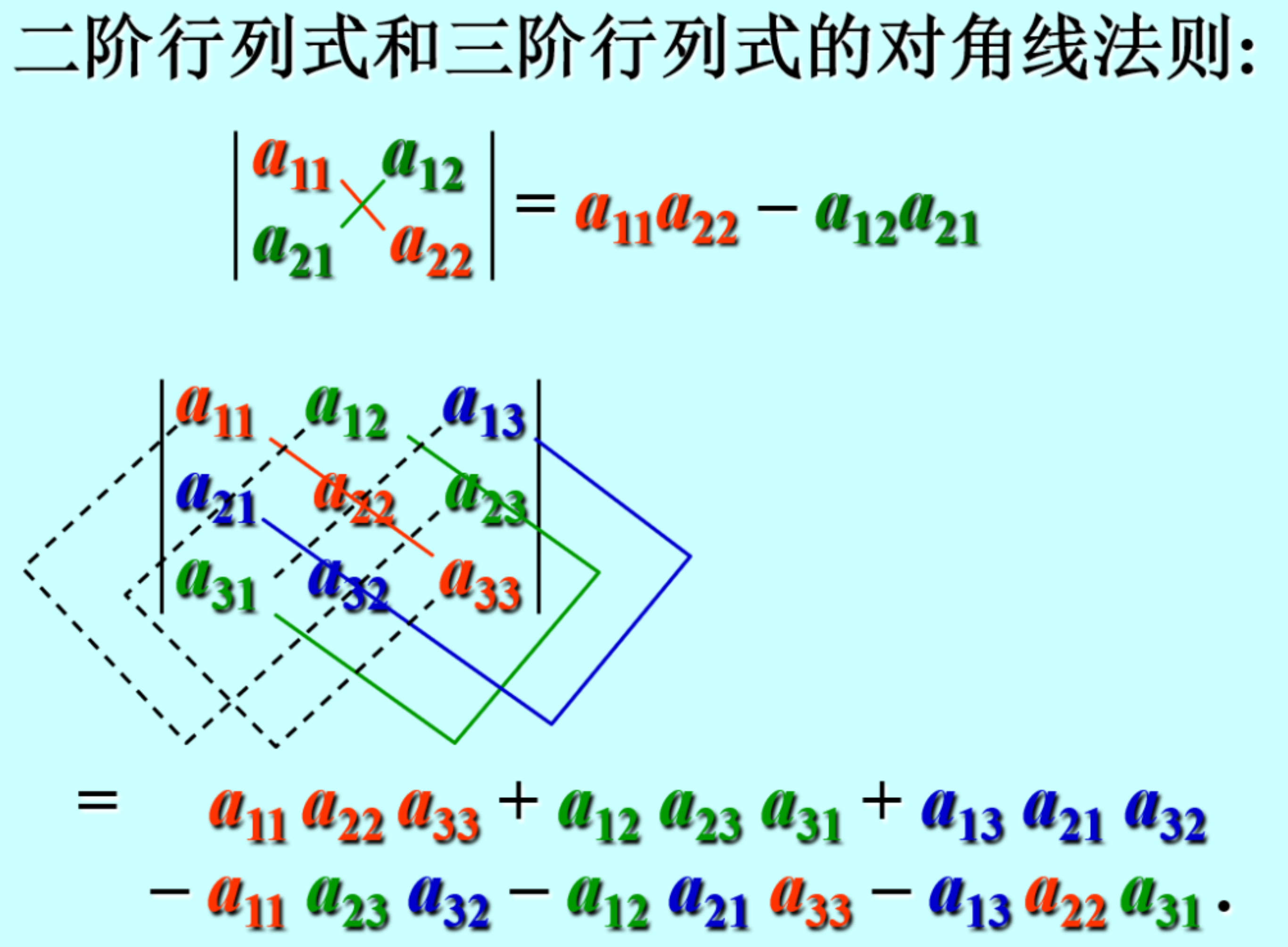
$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, A=(a_{ij})_{n\times n}$

性质

1. $\left|A^T\right|=|A|$
2. $A\xrightarrow{\text{一次对换变换}}B, |A|=-|B|$
3. 若行列式 D 中有两列完全相同, 则 D = 0.⟶若行列式 D 中有两列元素成比例, 则 D = 0.
4. (线性性质)
   (1) $\det(\alpha_1, \ldots, k\alpha_j, \ldots, \alpha_n) = k\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)$;
   (2) $\det(\alpha_1, \ldots, \beta_j+\gamma_j, \ldots, \alpha_n) = \det(\alpha_1, \ldots, \beta_j, \ldots, \alpha_n) + \det(\alpha_1, \ldots, \gamma_j, \ldots, \alpha_n)$.
5. **倍加变换不改变行列式的值**
6. n阶方阵A B，$|AB|=|A||B|$
7. $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, i\neq j$
   即不同行的代数余子式与某行元素乘积之和为0

行列式计算

1. 对角线法则



2. 初等变换为三角矩阵
3. 按含0较多的行/列展开
4. 分块对角矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}, D = |AC|$

常见模型

范德蒙德行列式

例7. 证明n阶级($n\geq 2$)范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geq i>j\geq 1}(a_i-a_j).$$

Alexandre-Théophile Vandermonde

Born: 28 Feb 1735 in Paris, France

Died: 1 Jan 1796 in Paris, France

证明: 当$n=2$时, $D_2=(a_2-a_1)$.

现设等式对于($n-1$)阶范德蒙行列式成立, 则

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-a_1) \\ \times(-a_1) \\ \cdots \\ \\ \times(-a_1) \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n^2(a_n-a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n^2(a_n-a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1) \prod_{n \geq i > j \geq 2} (a_i - a_j)$$

$$= \prod_{n \geq i > j \geq 1} (a_i - a_j).$$

每行/列元素之和相等

例5. 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

(其中$n \geq 2, x \neq a$).

解: $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \dots & a \\ x+(n-1)a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & & \dots \\ x+(n-1)a & a & \dots & x \end{vmatrix} \times(-1)$

$$=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \dots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

递推/归纳

例6. 计算$2n$阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$$

(未写出的元素都是0).

解: $$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & b\\ 0 & a & \cdots & & & \cdots & b & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & c & \cdots & & & \cdots & d & 0\\ c & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & d\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0\\ & \ddots & & & \iddots & & \vdots\\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \vdots\\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & 0\\ 0 & & \cdots & & & 0 & d\end{vmatrix}+(-1)^{2n+1}b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b\\ \vdots & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ \vdots & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d\\ c & 0 & & & \cdots & & 0\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0\\ & \ddots & & & \iddots & & \vdots\\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \vdots\\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & 0\\ 0 & & \cdots & & & 0 & d\end{vmatrix}+(-1)^{2n+1}b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b\\ \vdots & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ \vdots & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d\\ c & 0 & & & \cdots & & 0\end{vmatrix}$$

$$= ad\, D_{2(n-1)} - bc\, D_{2(n-1)}$$
$$= (ad-bc)\, D_{2(n-1)}$$
$$= (ad-bc)^2 D_{2(n-2)}$$
$$= (ad-bc)^3 D_{2(n-3)}$$
$$= \ldots = (ad-bc)^{n-1} D_2$$
$$= (ad-bc)^n.$$

伴随矩阵

$$A_{n\times n}\text{已知，则}A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

特殊

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

性质

1. $AA^* = A^*A = |A|\,E$
2. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

克拉默法则

对于n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\text{记}D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

定理1.11. 设A为n阶方阵, $|A| \neq 0$, 则方程组

$$Ax = b$$

有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D}.$$