向量空间

对于向量的线性运算（加法，数乘）封闭

基与维数

定理2.7. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$的一个极大无关组就是

$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$的一组基,

$$\dim L(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \mathrm{r}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s).$$

特别地, $A = (A_1, A_2, \ldots, A_s)$,

$L(A_1, A_2, \ldots, A_s)$——A的**列空间**(column space)

$\dim L(A_1, A_2, \ldots, A_s) =$ 秩(A).

计算基

例3. $V = \{(x, y, z)^T \mid x+2y-3z = 0\}$

$$= \{(\underline{-2y+3z, y, z})^T \mid y, z \in \mathrm{R}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} -2y+3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{线性无关} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{为}V\text{的一组基}, \dim V = 2.$$

坐标

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$——$V$ 的一组基,

由定义, 对$\forall\, \alpha\in V$, $\exists$唯一的一组有序实数 $k_1, k_2, \ldots, k_r$使得$\alpha = k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r$.

$(k_1, k_2, \ldots, k_r)^{\mathrm{T}}$——$\alpha$ 在$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 这组基下的坐标(coordinate).

$$例如\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3$$

即为线性组合的系数

坐标变换与过渡矩阵

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$是$V$ 的两组基, 则存在$r\times r$矩阵P使

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)P.$$

称P为从基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$到$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$的过渡矩阵(transition matrix).

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$是$V$ 的两组基, $\eta\in V$ 在这两组基下的坐标分别为x, y, 则

$$\boxed{x = Py, y = P^{-1}x.}$$