特殊矩阵

零矩阵

不止为方阵

对角矩阵

通常用 ∧表示，可记为∧=diag($a_{11}, a_{12}, ...$)

数量矩阵

对角矩阵主对角线上元素相等

单位矩阵

只能方阵

三角矩阵

上三角下三角，主要应用于求分列式及方阵的LU分解

行阶梯型矩阵

主要用于求秩

行最简型矩阵

暂时未知

对称矩阵

A^T=A或$A_{ij} = A_{ji}$

反对称矩阵

$A_{ij} = -A_{ji}$
故主对角线元素都为*0*

线性运算

$$\begin{cases} \text{加法} \\ \text{数乘：} kA = O \to k = 0 \text{或} A = O \end{cases}$$

矩阵的乘法

运算法则

结合律：(AB)C=A(BC)
分配律:A(B+C)=AB+AC 注意左乘右乘
~~交换律~~：AB≠BA 同阶对角矩阵及逆矩阵满足交换律
~~消去律~~：A=O,AB=AC⇒B=C 未必成立

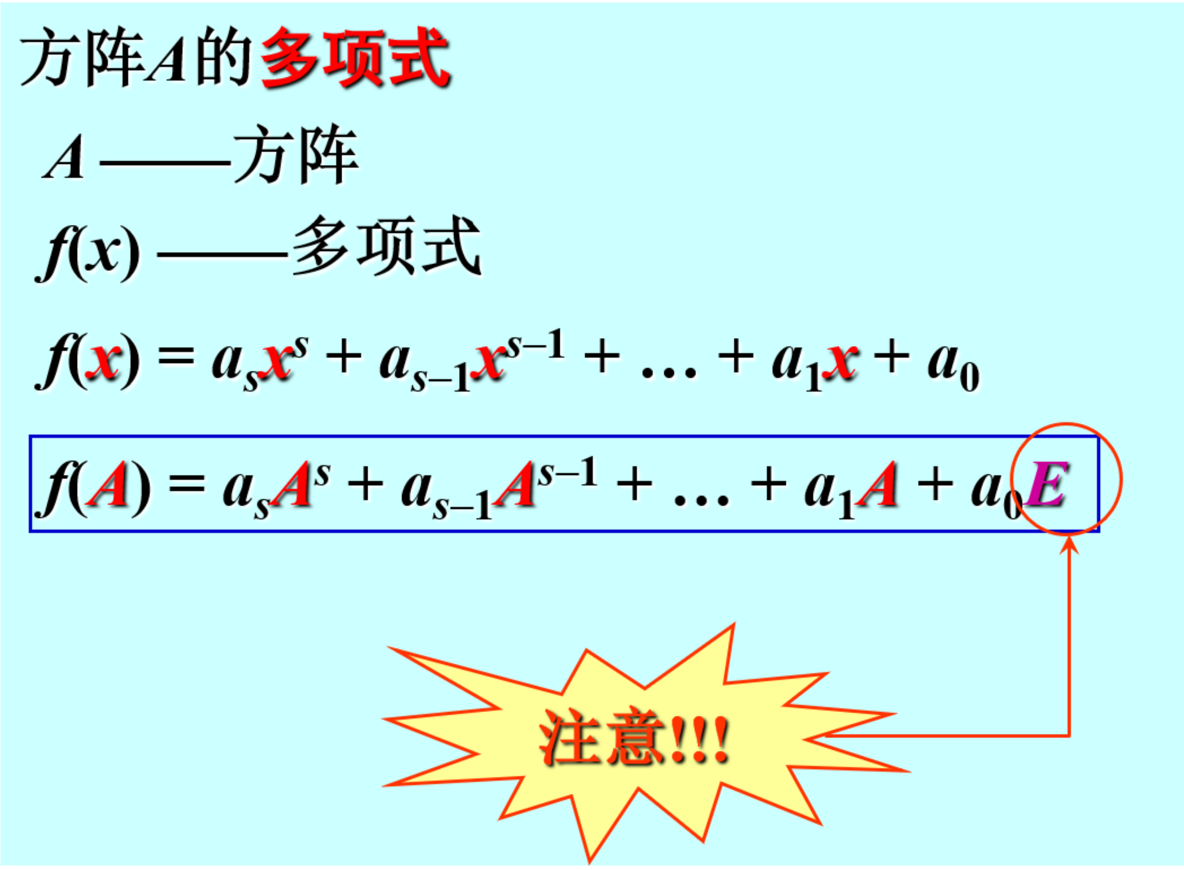
$(A+B)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iA^iB^{n-1}$ 当A=B时成立**

特殊矩阵的幂

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\ A^k=A$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},B^k=B$$

多项式



注意点

$$(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA$$

$(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$

矩阵的转置

矩阵的转置运算满足如下性质

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$,

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$,

(3) $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$,

(4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

分块矩阵

按列分块 $\rightarrow$ 行向量
按行分块 $\rightarrow$ 列向量
分块对角矩阵

$$\text{设矩阵} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

$$\text{则} A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s2}^{\mathrm{T}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & A_{2r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

初等变换

1. 对换变换
2. 倍乘变换
3. 倍加变换

   若矩阵A经过有限次初等变换化为B, 则称A与B等价(equivalent). 记作$A \cong B$

$E_{m\times n}^{(r)}$为$A_{m\times n}$的等价标准形
任何一个矩阵都可以经过有限次初等变换化为标准形.
变换技巧：按从第一列到最后一列的顺序，先将*A*变换为行最简形再变为等价标准形

初等矩阵

> 对换矩阵 倍乘矩阵 倍加矩阵

初等矩阵左乘：行变换
初等矩阵右乘：列变换

逆矩阵

初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵

性质

1. 唯一性
2. $(A^{-1})^{-1}=A$
3. $(A^T)^{-1}=((A^{-1})^T$
4. $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$
5. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
6. A可逆$\longrightarrow$A可写成初等矩阵的乘积.
7. $A_{m\times n}=P_m\begin{bmatrix}E^r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q_n$
   称为A的标准分解
8. 行列式$\neq 0$
9. 分块对角矩阵$A^{-1}=\mathrm{diag}(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1})$

求逆矩阵

1. 合并矩阵再行/列变换
2. $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^*$
3. ~~待定系数~~
4. 已知等式再因式分解（见此）

行列式

定义

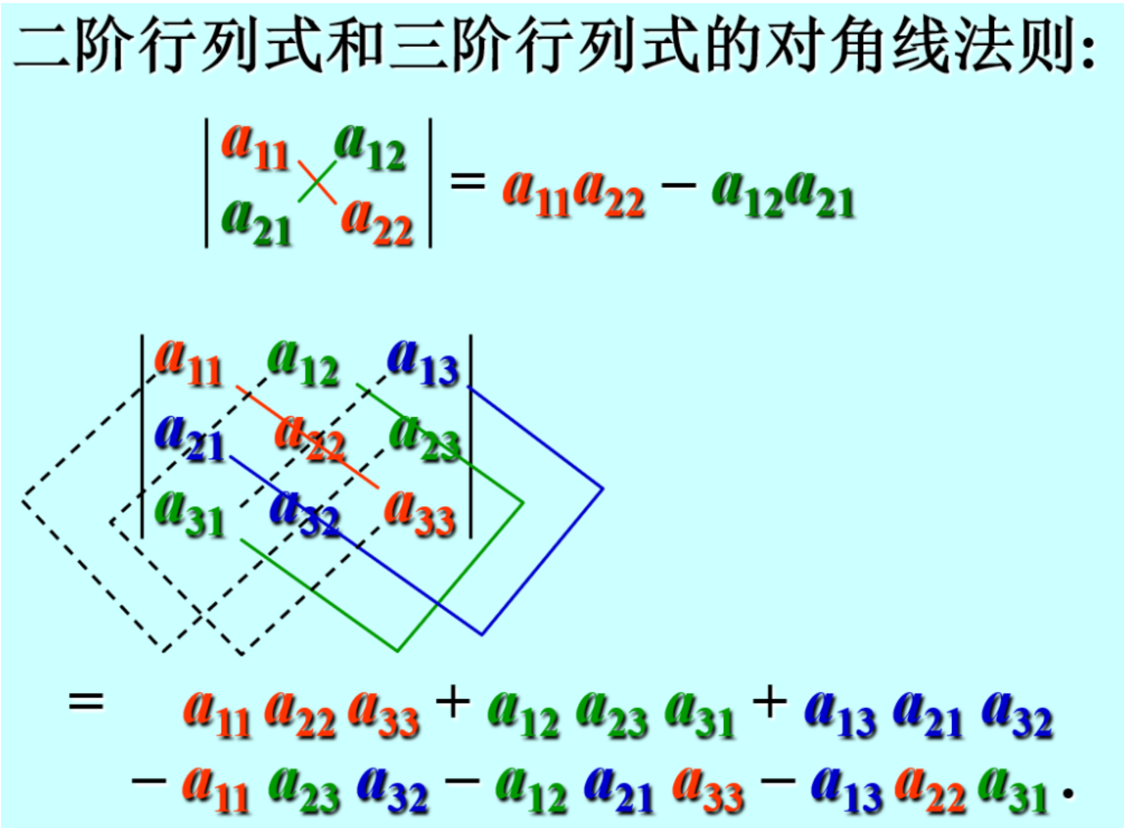
> $$\text{在}n\text{阶行列式中, 把元素}a_{ij}\text{所在的第}i\text{行和第}j\text{列划去}\\ \text{留下来的阶行列式叫做元素}aij\text{的余子式, 记作}Mij,\\ \text{令}Aij=(-1)^{i+j}M_{ij}\text{并称之为}aij\text{的代数余子式}(cofactor).$$

$|A|=\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij},A=(a_{ij})_{n\times n}$

性质

1. $\left|A^T\right| = |A|$
2. $A \xrightarrow{\text{一次对换变换}} B, |A| = -|B|$
3. 若行列式 D 中有两列完全相同，则 D = 0⟶若行列式 D 中有两列元素成比例,则D=0.
4. 某一列/行×k,则行列式×k
   故$|A_{n\times n}| = a$, 则 $|kA_{n\times n}| = k^n a$
5. **倍加变换不改变行列式的值**
6. n阶方阵A B，$|AB| = |A|\,|B|$
7. $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j$
   即不同行的代数余子式与某行元素乘积之和为0
8. $|A|\left|A^{-1}\right| = \left|AA^{-1}\right| = |E| = 1$

行列式计算

1. 对角线法则
   

2. **!!!初等变换为三角矩阵**
3. 按含0较多的行/列展开
4. 分块对角矩阵$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}, D = |AC|$

伴随矩阵

$$A_{n\times n}\text{已知，则}A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

(顺序类比A^T，交换行列)

特殊

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

性质

1. $AA^*=A^*A=|A|E$
2. $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$
3. $|A^*|=|A|^{n-1}$
4. $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$

克拉默法则

对于n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

$$\text{记}D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

定理1.11. 设A为n阶方阵, $|A|\neq 0$, 则方程组

$$Ax=b$$

有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \dots,\ x_n=\frac{D_n}{D}.$$

矩阵的秩

$r(A)=r\begin{cases} A\text{中至少有一个}r\text{阶子式}D\text{不为零} \\ A\text{的所有}r+1\text{阶子式都等于零} \end{cases}$

零矩阵的秩规定为0

基本性质

1. 初等变换不改变秩
2. $r(A^T)= r(A)$
3. r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ),P Q为可逆矩阵

重要关系

1. $\max_{r(A),r(B)} \leq r(A,B) \leq r(A)+r(B)$
2. $r(A)+r(B)-n \leq r(AB) \leq \min_{r(A),r(B)}$, 对于$A_{m\times n}, B_{n\times t}$
3. r$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A)+r(B)$
4. $A_{s\times n}B_{n\times r}=0$, 则$r(A)+r(B) \leq n$（由2.推出）
5. $r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$
6. $A_{m\times n}=P_{m\times m}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} Q_{n\times n}$
7. 设A为$s\times n$矩阵, 证明$r(A)=1$的充要条件是存在非零s维列向量ξ和非零n维列向量η, 使得$A=\xi\eta^T$

求秩

将矩阵初等变换为行阶梯型，阶梯数（非零行数目）即为秩