第六章 多元函数微分学

§ 多元函数

符号: 记 $R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in R,\ i=1,2,\cdots,n\}$

定义: $\forall (x_1,x_2,\cdots x_n)\in D\subset R^n$, $f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 存在且唯一

则 $f(D)$ 为 D 的n元函数, 定义域 ——

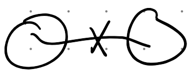
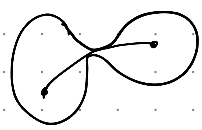
值域 ——

$R^n\longrightarrow R^1$

距离: $d=\sqrt{\sum(x-x_i)^2}$ 二元范数 $\sqrt{\sum|x-x_i|}$ 一元范数

点:
- 内点, $\exists\, U_r(P)\subset E$ 则 P为E内点 E°
- 外点, $\exists\, U_r(P)\cap E=\phi$ $(E^c)^\circ$
- 边界点 既非外又非内 ∂E

集合
- 开集 $\Leftrightarrow E^\circ=E$ (没有边界点)
- 闭集 $\Leftrightarrow$ 包含所有边界点,

不连通:  连通 

(开)区域: 连通的开集

闭区域

有界: 每个点到原点距离有界

It's all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

§多元函数的极限

定义：定义域的点趋向某个点时，函数值趋向的值

对于 $f(x,y)$ 设其在 (x_0,y_0) 的邻域内有定义

若有一个常数 A，对于任意 ε，$\exists\,\delta$ 等价于 $|x-x_0|\le\delta$，$|y-y_0|\le\delta$

使得当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le\delta$ 时有 $|f(x,y)-A|\le\varepsilon$

称 A 为 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的极限 记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

极限存在：以不同方式趋近某点时，极限值相同

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ 令 $y=kx$ 原式 $=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ 随 k 值变化极限变化

y 的极限应仍为 0 $\begin{cases} y=x^2 & \checkmark \\ y=1+x & \times \end{cases}$

多元函数极限
- 运算法则
- 复合函数
- 通夹定理

累次极限：$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ $\qquad$ $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ $\qquad$ 不止一个 即以特定方式逼近

全面极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

求极限：判断是否存在
- 累次极限 或其他 证伪
- 可能有
  - 无穷小量代换
  - 提前分出因子
  - 通夹
  - 不等式

It’ s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

It’ s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

It’ s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.