



高等数学

Author: Kazure Zheng

Date: 2024/09/24

Version: 1.0

It's all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

目录

前言 以自己的视角尽量展现高等数学学习的逻辑链条. 补充学习的缺陷. 尝试让自己让大家爱上数学.

函数与极限

0.1 实数

0.1.1 有理数

众所周知, 实数分为有理数和无理数. 让我们先进入有理数的领域.

[有理数] 两个既约整数的比值.

整数的比值

既约: 已经约分过. 没有比 1 更大的公约数. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Definition 0.1 (数域)

对加减乘除四则运算封闭的数的集合. (本质还是集合)



0.1.2 无理数

如何证明无理数存在. (这里有一个关于毕达哥拉斯的故事), 直观在数轴上有理数之间总是有一个有理数, 似乎整个数轴上全是有理数. 稠密.

Proposition 0.1 (证明 $\sqrt{2}$)

$$\sqrt{2} = m/n (m, n \in \mathbb{Q}) (m, n) = 1$$

$$m^2 = 2 * n^2 (\sqrt{2},) m = 2n, .$$



0.1.3 实数集

Definition 0.2 (实数集的定义)

有理数和无理数的集合.



Definition 0.3 (实数性质)

是一个数域.

对加法乘法满足交换律, 分配率, 结合率.

是一个有序数域. (即每个数字之间都可以比较, 反例可参照地铁站点.)

具有完备性.



Definition 0.4 (实数的完备性)

实数布满数轴. 在实数域中, 每一个单调有界序列都存在极限. (相关的定义证明在后续提及)



证明 两个有理数之间必定存在有理数. 两个有理数之间必定存在无理数. 两个无理数之间必定存在有理数. (利用小数的直观推理, 借助有理数的性质去逼近) 两个无理数之间必定存在无理数.

0.2 变量与函数

Definition 0.5 (函数的定义)

自变量

定义域

对应关系



Definition 0.6 (映射)

映射: 一个集合中的元素和另一个集合中的元素的一种对应关系.

像点: 映射的集合中被映射了的元素.

像集合: 像点的集合.

单射: 被映射的集合中的元素对应的像点各不相同.

满射: 被映射的的集合中的元素都是像点.

双射: 映射的集合中的元素都有唯一的像点. (可以把两个集合交换单射的性质不会改变)



0.2.1 基本初等函数

Definition 0.7 (基本初等函数)

常数

幂函数

指数函数

对数函数

三角函数

反三角函数



读者必须了解熟悉基本初等函数的性质. 而通常研究函数的性质从一下几方面入手:

定义域

对应关系

值域

图像

奇偶性

周期性

单调性

对称性

有界性

最值, 极值

常用的相关公式

Definition 0.8 (其他应当熟悉的函数)

双曲函数

狄利克雷函数

取整函数

符号函数

绝对值函数

