第四章 微分中值定理与泰勒公式

§微分中值定理

罗尔中值定理：若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且可导
且 $f(a)=f(b)$
则必 $\exists\ c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=0$

函数在某2点值相等，在这两点区间内至少有一点切线平行 x 轴

上抛运动内必有某一瞬间 $v=0$

若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且可导，且 $f(a)=f(b)$

下证：1° 存在一个区间为 (a,b) 的子区间使得 $f(x)$ 在该区间内为常函数
此时定理显然成立

① 写证明勿忘在证明中写上证明的必要条件

② 证普遍性命题
可尝试先证显然成立情况
（分类讨论）

2° $f(x)$ 在 (a,b) 的任意子区间内都不是常函数
则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在 1 个最值
不妨设 $c\in(a,b)$ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 的最大值点
则有
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to c^+} f'(x)\leq 0\\ \lim\limits_{x\to c^-} f'(x)\geq 0\end{cases}$$
由费马定理知 $f'(c)=0$

综上，原命题得证

微分中值定理（拉格朗日）　若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且可导
则 $\exists\ c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

两点间存在切线//割线
平均速度＝某点瞬时 v
（$\bar{v}\neq 0$）

下证：$f(x)$ 在 (a,b) 上连续且可导

令 $g(x)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-b)-f(x)$，
显然、$g(x)$ 在 (a,b) 上连续且可导
有 $g(a)=g(b)$　$\therefore\ \exists\ c\in(a,b)$，$g'(c)=0$
即 $f'(c)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

原命题得证

用罗尔中值证明
$$\begin{cases}g(a)=g(b) & ①\\ g'(c)=0 & ②\end{cases}$$

$\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}-f'(c)=0=g'(c)$　② 先凑最关键的结论

$\downarrow\int$ 勿漏常数项，仅保留结构不同的 t_1、t_2

$\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(x+t_1)-f(x)+t_2=g(c)$ ~~$+t_2$~~ 逆向思维初步构造 $g(x)$

$\downarrow$ 想令①成立，可尽量让一边的结构变简单 $g(a)$ 或 $g(b)$

$g(x)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(x+t_1)-f(x)$

$=0$　$(a-a)$　$\Rightarrow g(x)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)-f(x)$

$\downarrow$

$g(x)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-b)-f(x)$　①

原命题知两端，找中间
略加修改找端点!!
修改已知量

$f(x)=f'(c)(x-b)+f(b)$
$\downarrow$
c：(x_0,x) 间某点，
$f(x)=f(x_0)+f'(c)(x-x_0)$

关注公式中每个式子的本质、特征
对其他式子进行同义替换

或 $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$　$(0\leq\theta\leq 1)$　已知某点与两点横坐标距离

若 $f(x)$ 在 $(A,\ )$ 内可导，且 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 为常函数　$a,c\in(A,B)$，$f(x)=f(a)\pm f'(c)(x-a)$
$=f(a)$
$\begin{cases}c\in[a,x]\\ c\in[x,a]\end{cases}$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导
$$\begin{cases}f'(x)>0 & \text{严格递增}\\ f'(x)<0 & \text{严格递减}\end{cases}$$

证明：$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

在$[0,x]$区间上 $\ln(1+x)$ 连续且可导

根据微分中值得 $\ln(1+x) = \frac{1}{1+c}x$，$c \in (0,x)$

对c代入不等得 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

微分中值本为等式的性质

利用不可取的 0,x 转化为不等式

$$\begin{cases} x > c & \frac{1}{1+c}x > \frac{x}{1+x} \\ 0 < c & \frac{1}{1+c}x < x \end{cases}$$

It’ s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.