高等数学

作者：Kazure Zheng

时间：2024/09/24

版本：1.0

It’s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

前言 以自己的视角尽量展现高等数学学习的逻辑链条. 补充学习的缺陷. 尝试让自己让大家爱上数学.

目录

第一章 函数与极限

请你先熟悉一下 elegantbook 的使用.

1.1 实数

1.1.1 有理数

众所周知, 实数分为有理数和无理数. 让我们先进入有理数的领域.

定义 1.1 (有理数)

两个既约整数的比值.

- 整数的比值
- 既约: 已经约分过. 没有比 1 更大的公约数.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

♣

定义 1.2 (数域)

对加减乘除四则运算封闭的数的集合. (本质还是集合)

♣

1.1.2 无理数

如何证明无理数存在. (这里有一个关于毕达哥拉斯的故事), 直观在数轴上有理数之间总是有一个有理数, 似乎整个数轴上全是有理数. 稠密.

证明 [证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数] 假设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (其中 $m, n \in \mathbb{Q}$ 且 $(m, n) = 1$) $m^2 = 2n^2$ $\sqrt{2}$ 不知道是不是有理数, 先进行转化 $m = 2n$, 与题设矛盾.

1.1.3 实数集

定义 1.3 (实数集的定义)

有理数和无理数的集合.

♣

定义 1.4 (实数性质)

- 是一个数域.
- 对加法乘法满足交换律, 分配率, 结合率.
- 是一个有序数域. (即每个数字之间都可以比较, 反例可参照地铁站点.)
- 具有完备性.

♣

定义 1.5 (实数的完备性)

实数布满数轴. 在实数域中, 每一个单调有界序列都存在极限. (相关的定义证明在后续提及)

♣

证明 两个有理数之间必定存在有理数. 两个有理数之间必定存在无理数. 两个无理数之间制定存在有理数. (利用小数的直观推理, 借助有理数的性质去逼近) 两个无理数之间必定存在无理数.

1.2 变量与函数

定义 1.6 (函数的定义)

- 自变量
- 定义域
- 对应关系

♣

定义 1.7 (映射)

- 映射: 一个集合中的元素和另一个集合中的元素的一种对应关系.
- 像点: 映射的集合中被映射了的元素.
- 像集合: 像点的集合.
- 单射: 被映射的集合中的元素对应的像点各不相同.
- 满射: 被映射的的集合中的元素都是像点.
- 双射: 映射的集合中的元素都有唯一的像点. (可以把两个集合交换单射的性质不会改变)

♣

1.2.1 基本初等函数

定义 1.8 (基本初等函数)

- 常数
- 幂函数
- 指数函数
- 对数函数
- 三角函数
- 反三角函数

♣

读者必须了解熟悉基本初等函数的性质. 而通常研究函数的性质从一下几方面入手:

- 定义域
- 对应关系
- 值域
- 图像
- 奇偶性
- 周期性
- 单调性
- 对称性
- 有界性
- 最值, 极值
- 常用的相关公式

定义 1.9 (其他应当熟悉的函数)

- 双曲函数
- 狄利克雷函数
- 取整函数
- 符号函数
- 绝对值函数

♣