

# 与极值问题与凹凸性

极值与极值点:  $f(x)$  在  $U(x_0)$  上有定义

如果  $f(x_0) \geq f(x)$  则称  $f(x_0)$  为极大值,  $x_0$  为极大值点

$\leq$  小  $\neq$

费马定理: 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上有定义, 若  $x_0 \in (a, b)$  为  $f(x)$  极值点  
且  $f(x)$  在  $x=x_0$  处可导, 则  $f'(x_0) = 0$

证明: 若  $x_0$  为  $f(x)$  极大值点,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$   $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

于是  $f'(x_0) = 0$  证毕

驻点 (稳定点, 临界点): 导数为 0 的点,  $\supset$  极值点,

定理 2: 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上有定义且可导,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f'(x_0) = 0$   
若  $f''(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小值点

证明: 在  $U(x_0)$  上:  $f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$

若  $f''(x_0) > 0$  则有  $f(x) \geq f(x_0)$   $\therefore x_0$  为极小值点, 证毕

证明: 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上有定义,  $x_0 \in (a, b)$  为  $f(x)$  上的稳定点

$f(x)$  在  $x_0$  处有  $2n$  阶导数, 且  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$

若  $f^{(2n)}(x_0) > 0$  则  $x_0$  为极小值点

想想为什么不讨论前  $2n$  阶导都为 0 的情况呢?

在本题的情况下, 奇次导  $\rightarrow$  单调性  
偶 极值点

凹凸性:  $f(x)$  在  $(a, b)$  上有定义,  $x_0 \in (a, b)$

若  $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$  则  $f(x)$  为上凸函数

$>$  下

证明 若  $f'(x) < 0$  则  $f(x)$  为上凸函数 根据定义求二阶导后显然可证

定理 3: 若  $f''(x) > 0$  则  $f(x)$  为下凸函数

拐点: 函数凹凸性变化的点

定理 4:  $f(x)$  在  $(a, b)$  上有定义且有连续二阶导, 若  $x_0 \in (a, b)$  是  $f(x)$  拐点, 则  $f''(x_0) = 0$  易证

证明: 设  $f(x)$  在  $(a,b)$  上有连续二阶导函数,  $c \in (a,b)$ ,  $f'(c)=0$

若  $f''(c) \neq 0$  则  $c$  为拐点,

$$\text{不妨设 } f''(c) > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(c) - f(c-x)}{x-c} > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(c) - f(c+x)}{c-x} > 0$$

即在  $x \in (a,c)$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $x \in (c,b)$ ,  $f'(x) > 0$

证毕

渐近线: 设  $f(x)$  在  $(c, +\infty)$  有定义且连续可导

若  $g(x) = ax+b$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$ , 则称  $g(x)$  为  $f(x)$  渐近线

若  $f(x)$  存在渐近线求该渐近线

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{即 } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - ax}{x} = 0 \quad \therefore a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

函数作图需注意:

1. 定义域, 是否连续是否可导
2. 极限, 间断点的性状
3.  $f'(x)$  单调性 稳定点 极值
4.  $f''(x)$  凹凸性 拐点
5. 渐近线

It's all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

It's all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

It's all one ghetto, man, giant gutter in outer space.