第三章 行列式

§行列式介绍

前文提及 矩阵A可逆,当且仅当A的行列式不为零

$\begin{bmatrix}2&4\\3&5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}2&4\\0&5-\frac{3}{2}\times4\end{bmatrix}$ $\quad \det A = 2\times5-3\times4$

注意到行列式即为简化行阶梯形矩阵主元之积

行列式即为简化阶梯形矩阵的主元之积,

$$\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\0&b_2-\frac{a_2}{a_1}b_1&c_2-\frac{a_2}{a_1}c_1\\0&b_3-\frac{a_3}{a_1}b_1&c_3-\frac{a_3}{a_1}c_1\end{bmatrix} \sim \text{——} \text{——}$$

注意到对 $n\times n$ 的矩阵求行列式 $\begin{vmatrix}a_{1}&\text{——}\\0&[\quad]\end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix}a_1&&\text{——}\\ \vdots&b_2&\text{——}\\ \vdots&\vdots&[\quad]\end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix}a_1&&&\\&b_2&&\\&&\ddots&\\&&&z_n\ [2\times2]\end{vmatrix}$

行列式的递归定义 $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}C_{ik} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}C_{kj}$

A的第k列余子展开式 A的第k行

C_{ij} 余因子 $= \begin{vmatrix}\ddots&&\\&a_{ij}&\\&&\ddots\end{vmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$ $C_{22} = \begin{vmatrix}1&\cancel{4}&7\\\cancel{2}&\cancel{5}&\cancel{8}\\3&\cancel{6}&9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&7\\3&9\end{vmatrix}$

§行列式的性质

行变换: 1° $\det(kA) = k\det A$

2° 任意交换2行 $\det A = -\det B$

3° 倍加变换 $\det A = \det B$ 易证

转置: 对于 $n\times n$ 矩阵A $\det A = \det A^T$

综上列变换的行列式性质与行变换相同

乘法： $\det AB = \det A \cdot \det B$ 化为上三角矩阵后易证得

线代性质：把行列式看为对各向量的函数 $R^n \mapsto R$ $\det A = T(u)$

显然有 $\begin{cases} kT(u) = T(ku) \\ T(u) + T(v) = T(u+v) \end{cases}$ 注：与 $\det A + \det B = \det(A+B)$ 不等

证明： 令 $A = EU$ $B = E'U'$

$$\det A + \det B = \det EU + \det E'U'$$
$$= \det E \det U + \det E' \det U'$$

显然要令 $\det A + \det B = \det(A+B)$

即要求 $\det E = \det E'$ 且 U 与 U' 仅有1个向量不等.

通常情况

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b \\ a_{12} & a_{22} & b \\ a_{13} & a_{23} & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & c \\ a_{12} & a_{22} & c \\ a_{13} & a_{23} & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b+c \\ a_{12} & a_{22} & b+c \\ a_{13} & a_{23} & b+c \end{vmatrix}$$

§克莱默法则

对 $Ax = b$ $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$ $x_i = \dfrac{\det(A_i(b))}{\det A}$ $A_i(b)$ 即 $\begin{array}{c} b \\ \begin{bmatrix} \quad & \vert & \quad \end{bmatrix} \end{array}$ A的第i列

证明： $A \cdot I_i(x) = A[e_1\ e_2 \cdots x \cdots e_n]$

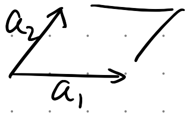
$$= [a_1\ a_2 \cdots \underbrace{Ax}_{=b} \cdots a_n]$$
$$= A_i(b)$$ 证毕

求矩阵的逆 $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$ 易知 $\det \operatorname{adj} A = 1$

伴随矩阵 $\operatorname{adj} A$ $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$

证明：取 $A x_i = e_i$ $x_i \det A = \begin{bmatrix} \det(A_1(e_i)) \\ \vdots \\ \det(A_n(e_i)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{i1} \\ \vdots \\ C_{in} \end{bmatrix}$

行列式与面积,体积



$S = \det[a_1 \ \ a_2]$

对于 R^2 取一组基 $[e_1 \ e_2]$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 \\ a_2 = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 \end{cases}$ 即 $[a_1, a_2] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$

显然 $S = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \det A$

It’ s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

It’s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.