习题 6.3

1. (2) $z=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos y}$

定义域为 $\{(x,y)\mid x\neq k\pi,\ y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$

该函数为二元初等函数 故在 $\{(x,y)\mid x\neq k\pi,\ y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ 上连续

3. 不妨设 $f(x_1,y_1)\leq f(x_2,y_2)\leq\cdots\leq f(x_n,y_n)$

则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)=\frac{1}{n}\frac{2}{2}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)$

$=\frac{1}{n}\left\{\left[\frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)}{2}\right]+\left[\frac{f(x_2,y_2)+f(x_3,y_3)}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{f(x_{n-1},y_{n-1})+f(x_n,y_n)}{2}\right]+\left[\frac{f(x_n,y_n)+f(x_1,y_1)}{2}\right]\right\}$

$\therefore \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\in(f(x_1,y_1),f(x_n,y_n))$

由介值定理知 $\exists\ \xi,\delta$ s.t. $f(\xi,\delta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\in(f(x_1,y_1),f(x_n,y_n))$

证毕

4. 证：由题知当 $\exists\,\delta,\varepsilon$ 使若 $|x-x_0|\leq\delta$, $|y-y_0|\leq\delta$, 则有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leq\varepsilon$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$

$\therefore \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 即 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$

即 $\exists\,\delta,\varepsilon$ s.t. 若 $|y-y_0|\leq\delta$ 有 $|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|\leq\varepsilon$

即 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处连续，证毕

6. $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$

证：令 $g(x,y)=x^2+y^2$, $h(x)=\ln(1-x)$

即 $f(x,y)=h(1-g(x,y))$

$\because g(x,y)$ 为二元初等函数 $\therefore g(x,y)$ 在定义域内连续

又 $\because h(x)$ 在定义域内连续 $\therefore f(x,y)$ 在 $\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 上连续

$\lim\limits_{x\to1}h(x)=-\infty$ $\therefore \lim\limits_{g(x,y)\to1}h(1-g(x,y))=-\infty$ $\therefore$ 当 $x^2+y^2\to1$ 时 $f(x,y)=-\infty$ $\therefore$ 得证

证毕

It’ s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.