



高等数学

作者: Kazure Zheng

时间: 2024/09/24

版本: 1.0

It's all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

前言 以自己的视角尽量展现高等数学学习的逻辑链条, 补充学习的缺陷, 尝试让自己让大家爱上数学.

目录

第一章 函数与极限

内容提要

hahaha

1.1 实数

1.1.1 有理数

众所周知, 实数分为有理数和无理数. 让我们先进入有理数的领域.
一个既约整数的比值.

整数的比值

既约: 已经约分过. 没有比 1 更大的公约数. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
加减乘除四则运算封闭的数的集合. (本质还是集合)

1.1.2 无理数

如何证明无理数存在. (这里有一个关于毕达哥拉斯的故事), 直观在数轴上有理数之间总是有一个有理数, 似乎整个数轴上全是有理数. 稠密.

命题 1.1 (证明 $\sqrt{2}$)

$$\sqrt{2} = m/n (m, n \in \mathbb{Q}) (m, n) = 1$$
$$m^2 = 2 * n^2 (\sqrt{2},) m = 2n, .$$

1.1.3 实数集

理数和无理数的集合.
是一个数域.

对加法乘法满足交换律, 分配率, 结合率.

是一个有序数域. (即每个数字之间都可以比较, 反例可参照地铁站点.)

具有完备性.

数布满数轴. 在实数域中, 每一个单调有界序列都存在极限. (相关的定义证明在后续提及)

证明 两个有理数之间必定存在有理数. 两个有理数之间必定存在无理数. 两个无理数之间必定存在有理数. (利用小数的直观推理, 借助有理数的性质去逼近) 两个无理数之间必定存在无理数.

1.2 变量与函数

自变量

定义域

对应关系

映射: 一个集合中的元素和另一个集合中的元素的一种对应关系.

像点: 映射的集合中被映射了的元素.

像集合: 像点的集合.

单射: 被映射的集合中的元素对应的像点各不相同.

满射: 被映射的集合中的元素都是像点.

双射: 映射的集合中的元素都有唯一的像点. (可以把两个集合交换单射的性质不会改变)

1.2.1 基本初等函数

常数

幂函数

指数函数

对数函数

三角函数

反三角函数

读者必须了解熟悉基本初等函数的性质. 而通常研究函数的性质从一下几方面入手:

定义域

对应关系

值域

图像

奇偶性

周期性

单调性

对称性

有界性

最值, 极值

常用的相关公式

双曲函数

狄利克雷函数

取整函数

符号函数

绝对值函数