为何不用罗尔中值证
洛必达推前

3 柯西中值定理与洛必达法则

柯西中值定理：若 $f(x)、g(x)$ 在 在 $[a,b]$ 上连续 (a,b) 上可导且 $g'(x)\neq 0$

则有 $c\in(a,b)$，$\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

即证 $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}g'(c)-f'(c)=0$
$=F(x)$

证明：若 $f(x)、g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 (a,b) 上可导，且 $g'(x)\neq 0$

类似于罗尔中值

令 $F(x)=\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}g(x)-f(x)$

即判定 $F(a)\overset{?}{=}F(b)$
检验可知

$$F(a)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(a)-g(b)}=F(b)$$

由罗尔中值定理可知 $\exists c\in(a,b)$，$F'(c)=0$

原命题成立

未定式：极限不确定的式子

例 $x\in U(a)$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x-a}\to\dfrac{0}{0}$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{\sin(x-a)}}\to\dfrac{\infty}{\infty}$

洛必达法则：若 $f(x),g(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 上有定义且可导，$g'(x)\neq 0$ 若 $g'(x)=0$，须 $f'(x)=0$ 再次使用洛必达

若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在 确定了 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，才能确定 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

且有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 即 $\exists n$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ 存在且确定，才能 $\Rightarrow$

对 $x\to\infty$ 同样成立

证明：补充 $f(a)=g(a)$ 则 $f(x)、g(x)$ 在 $U(a)$ 上连续 补充柯西中值的条件

在 (a,x) 上 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$，$b\in(a,x)$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$ $x\to a$ 时 $b\to a$

证毕

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型洛必达证明太长省去。（太难了，别看了）

It’s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

It’ s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

It’ s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

It’ s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.

It’s all one ghetto, man, giant gutter in outer space.