EDP : Analyse mathématique et principes de la méthode des éléments finis

Parcours: *HPC* & *Big Data* et *Multimédia*

Année universitaire 2022-2023

Auteur : Clément Royer, Université Paris Dauphine - PSL.

1 Equations aux dérivées partielles elliptiques

1.1 Position du problème

Nous nous proposons d'obtenir par la méthode des éléments finis une approximation de la solution d'un problème dit de Laplace en deux dimensions muni de conditions aux limites mixtes (Dirichlet et Neumann). Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$ et $\partial\Omega$ sa frontière partitionnée en deux sous-ensembles $\partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d = \partial\Omega$. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, $u_d \in H^1(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega_n)$, le problème de Laplace revient à déterminer u solution de:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u(x,y) & = & f(x,y) & \text{sur } \Omega, \\ u(x,y) & = & u_d(x,y) & \text{sur } \partial\Omega_d, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n} & = & g(x,y) & \text{sur } \partial\Omega_n, \end{array}\right. \tag{1}$$

Nous nous proposons de résoudre le problème (1) en le discrétisant par la méthode des éléments finis de Lagrange avec des élements finis de type P_1 (approximation polynômiale du premier degré sur un triangle).

1.2 Partie théorique

• Montrer que la formulation variationnelle du problème s'écrit :
Trouver $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla v.\nabla w \; dx = \int_\Omega f w \; dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \; dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w \; dx.$$

avec

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(w) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \right\}.$$

• Montrer que le problème admet alors une unique solution.
On admettra que la forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, définie par

$$\forall (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), < u, v >_{1,\Omega} = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \; dx$$

est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$, et qu'ainsi muni de ce produit scalaire, $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

• Montrer que la forme variationnelle discrète aboutit au système linéaire d'équations $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ tels que:

$$\begin{array}{lcl} A_{ij} & = & \int_\Omega \nabla\eta_i^\top \nabla\eta_j \; dx, \\ b_i & = & \int_\Omega f\eta_i \; dx + \int_{\partial\Omega_n} g\eta_i \; dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_\Omega \nabla\eta_i^\top \nabla\eta_k \; dx, \end{array} \tag{2}$$

où n désigne le nombre de degrés de liberté, η_k les fonctions de base des éléments finis et la décomposition nodale de la condition limite est $u_d = \sum_{k=1}^n U_k\eta_k$, avec $U_k = 0$ si $(x_k, y_k) \notin \partial\Omega_d$ et $U_k = u_d(x_k, y_k)$ sinon. Justifier l'existence et l'unicité de la solution discrète de ce système.

1.3 Mise en œuvre pratique

1.3.1 Maillages

Deux maillages seront employés pour le projet. Ils se basent tous les deux sur cinq matrices/tableaux au format suivant:

`coordinates` : points du maillage, au format :
abscisse   ordonnée

`elements3` : éléments triangle, donnés sous la forme :
\# noeud 1   # noeud 2   # noeud 3

`elements4` : éléments quadrangle, donnés sous la forme :
\# noeud 1   # noeud 2   # noeud 3   # noeud 4

`dirichlet` : sommets de la frontière de Dirichlet, donnés sous la forme :
\# Sommet

`neumann` : arêtes de la frontière de Neumann, données sous la forme :
\# Sommet arête 1   # Sommet arête 2

Dans chaque élément de type triangle ou quadrangle, les noeuds seront numérotés dans le sens contraire du sens des aiguilles d'une montre. La numérotation correspond à l'indice de ligne dans le tableau `coordinates`.

Pour générer ces tableaux, dans un premier temps, il suffira d'appeler la fonction maillage_carre. Celle-ci crée un maillage sans quadrilatère, ni conditions de Neumann (i.e. les tableaux correspondants sont des matrices vides). Dans un second temps, les informations relatives à un maillage mixte, ainsi que des conditions de Neumann vous seront fournies. Le second exemple comporte toutes les "difficultés" possibles (les deux types d'éléments + les deux genres de conditions). Il permettra de valider l'implémentation complète.

1.3.2 Assemblage

La phase d'assemblage consiste à calculer sur chaque élément de la triangulation du maillage les éléments de la matrice raideur A et du second membre b. Les formules d'intégration dépendent donc du type d'élément considéré. Nous détaillons synthétiquement en premier lieu l'assemblage sur des éléments de type triangle, **pour plus de détails se référer à la section 3.**

Triangle Nous considérons les fonctions de base sur le triangle de noeuds $(x_i, y_i), (i = 1, \cdots, 3)$ définies par:

$$\eta_j(x_k, y_k) = \delta_{jk} \quad j, k = 1, 2, 3.$$

La phase d'assemblage utilisera notamment les relations suivantes (les indices sont à comprendre modulo 3):

$$\eta_j(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$\nabla\eta_j(x,y) = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Si (x_G, y_G) désignent les coordonnées du centre de gravité du triangle T, l'approximation suivante sera utilisée pour la quadrature du second membre:

$$\int_T f\eta_j dx \approx \frac{\alpha}{6} f(x_G, y_G).$$

Quadrilatère Pour déduire la forme de la matrice raideur sur un élément de type quadrangle, il faut utiliser la fonction affine Φ_Q qui transforme le carré de côté unitaire $[0,1]^2$ $(\xi \in [0,1], \zeta \in [0,1])$ en un parallélogramme de sommets $(x_i, y_i), (i = 1, \cdots 4)$:

$$\begin{aligned} x &= (x_2 - x_1)\xi + (x_4 - x_1)\zeta + x_1 \\ y &= (y_2 - y_1)\xi + (y_4 - y_1)\zeta + y_1. \end{aligned} \tag{6}$$

puis utiliser la relation $\eta_j(x,y) = \phi_j(\Phi_Q^{-1}(x,y))$, où ϕ_j désignent les fonctions de base sur le carré unité définies par:

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi,\zeta) &= (1-\xi)(1-\zeta), \\ \phi_2(\xi,\zeta) &= \xi(1-\zeta), \\ \phi_3(\xi,\zeta) &= \xi\zeta, \\ \phi_4(\xi,\zeta) &= (1-\xi)\zeta. \end{aligned} \tag{7}$$

• Établir les formules donnant la matrice de raideur associée à un élément de type quadrangle.

Si (x_G, y_G) désignent les coordonnées du centre de gravité du quadrangle T, l'approximation suivante sera utilisée pour la quadrature du second membre:

$$\int_T f\eta_j dx \approx \frac{\alpha}{4} f(x_G, y_G).$$

1.3.3 Travail d'implémentation

Vous implanterez les différentes étapes de la discrétisation dans le notebook fourni. Il est fortement conseillé de suivre l'ordre ci-dessous :

Partie I : maillage triangulaire et conditions de Dirichlet

1. Construction de la matrice de raideur élementaire M_T^A relative à un élément triangle;
2. Assemblage de la matrice A dans le cas d'un maillage constitué uniquement d'éléments triangles;
3. Assemblage du second membre dans le cas de conditions de Dirichlet uniquement, puis tests sur le premier type de maillage (obtenu par appel à `maillage_carre`);

Partie II : Maillage mixte et ajoût des conditions de Neumann

1. Construction de la matrice de raideur élémentaire M_Q^A relative à un élément quadrangle, en utilisant les formules que vous aurez établies;
2. Inclusion du traitement de tels éléments de type Q1 et des conditions de Neumann,;
3. Validation sur le maillage mixte fourni en partie II du notebook.

1.4 Compléments : introduction d'un nouveau terme dans l'EDP

Les questions de cette partie sont à réaliser en utilisant le premier type de maillage, à taille variable, et devront figurer dans le rapport. Avec les notation précédentes, nous nous intéressons au problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u(x,y) + c_0 u(x,y) & = & f(x,y) & \text{sur } \Omega, \\ u(x,y) & = & u_d(x,y) & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{8}$$

avec $c_0 > 0$ une constante.

Nous nous proposons de résoudre le problème (8) en le discrétisant par la méthode des éléments finis de Lagrange avec des élements finis de type P_1, comme ce qui a été réalisé en Partie I.

• Montrer que la formulation variationnelle de se problème peut s'écrire :
Trouver $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla v . \nabla w \; dx + c_0 \int_\Omega vw \; dx = \int_\Omega fw \; dx - \int_\Omega \nabla u_d . \nabla w \; dx.$$

Montrer également que le problème admet une unique solution.

• Montrer que la forme variationnelle discrète aboutit au système linéaire d'équations $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ tels que:

$$\begin{array}{rcl} A_{ij} & = & \int_\Omega \nabla \eta_i^\top \nabla \eta_j \; dx + c_0 \int_\Omega \eta_i \eta_j \; dx, \\ b_i & = & \int_\Omega f \eta_i \; dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_\Omega \nabla \eta_i^\top \nabla \eta_k \; dx, \end{array} \tag{9}$$

où n désigne le nombre de degrés de liberté, η_k les fonctions de base des éléments finis et la décomposition nodale de la condition limite est $u_d = \sum_{k=1}^n U_k \eta_k$, avec $U_k = 0$ si $(x_k, y_k) \notin \partial\Omega_d$ et $U_k = u_d(x_k, y_k)$ sinon. Justifier l'existence et l'unicité de la solution discrète de ce système.

• Appliquer la stratégie de l'élément de référence pour le calcul de $\int_T c_0 \eta_i \eta_j \; dx$ afin d'assembler la matrice A du système.

• Résoudre numériquement la formulation variationnelle discrète.

2 Rédaction du compte rendu

Il vous est demandé de:

- rendre votre notebook python, implantant les différentes étapes de résolution du problème d'EDP sur les deux types de maillages, ainsi que les compléments.
- rédiger un compte-rendu succinct détaillant les réponses aux questions (précédées d'un • dans le texte). Vous pourrez inclure vos réponses directement dans le notebook si vous le souhaitez.

Date limite de rendu : Dimanche 16 avril 2022 (22h).

3 Annexe

Cette annexe détaille les étapes qui aboutissent aux formules des contributions relatives à des éléments triangulaires présentées en section 1.3.2.

3.1 Rappels des définitions et notations du problème

La formulation variationnelle discrète du problème (1) permet de le réduire à une résolution de système linéaire. On considère donc N points $\{A_k = (x_k, y_k)\}_k$ sur Ω et sa frontière, que l'on associe à N fonctions de base η_j par la relation:

$$\eta_j(x_k, y_k) = \delta_{jk}. \tag{10}$$

On considère un maillage du domaine Ω composé d'éléments triangulaires et on note $\mathcal{T}$ l'ensemble de ces éléments. Chaque triangle $T \in \mathcal{T}$ possède ainsi trois sommets qui correspondent à trois points de la discrétisation, et pour un triangle $T = A_i\, A_j\, A_k$, les fonctions η_i, η_j, η_k sont affines sur ce triangle. L'équation (10) permet même d'affirmer que pour tout i, le support de η_i est exactement l'ensemble des triangles auxquels appartient le point A_i.

Le système à résoudre est donc $A\,x = b$, avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par:

$$A_{ij} \;=\; \int_\Omega \nabla\eta_i(x,y)^\top\, \nabla\eta_j(x,y)\,dx\,dy \;=\; \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \nabla\eta_i(x,y)^\top\, \nabla\eta_j(x,y)\,dx\,dy.$$

Remarque : D'après la remarque précédente sur les supports des fonctions de base, la plupart de ces intégrales seront nulles. De fait, seules les intégrales sur les triangles contenant à la fois les points A_i et A_j auront une contribution non nulle à la valeur de A_{ij}.

3.2 Calcul des intégrales sur les éléments triangulaires

Considérons un triangle T du maillage. Pour simplifier les notations, on renomme les sommets de ce triangle A_1, A_2, A_3. Sur ce triangle, on va calculer la matrice M_T^A de taille 3×3 dont les coefficients sont donnés par :

$$\left[M_T^A\right]_{ij} \;=\; \int_T \nabla\eta_i(x,y)^\top \nabla\eta_j(x,y)\,dx\,dy.$$

On sait que les fonctions de base sont affines sur ce triangle et vérifient (10) pour $j,k \in 1,2,3$. Une manière simple de déterminer l'expression de ces fonctions pour tout couple $(x,y)\in T$ est de se ramener au triangle de référence U, de sommets $(u_1,v_1) = (0,0)$, $(u_2,v_2) = (1,0)$ et $(u_3,v_3) = (0,1)$.

En effet, sur ce triangle, les fonctions de base correspondant à ces sommets sont définies pour tout couple $(u, v) \in [0, 1]^2$ par :

$$\begin{array}{rcl} \phi_1(u,v) & = & 1-u-v, \\ \phi_2(u,v) & = & u, \\ \phi_3(u,v) & = & v. \end{array}$$

L'équivalent de la propriété (10) pour les fonctions ϕ_j est bien vérifié. Il reste donc à établir une relation entre les triangles U et T pour pouvoir relier les ϕ_j et les η_j.

3.3 Transformations affines

On veut donc définir une transformation bijective $\Phi_T : U \to T$ vérifiant :

$$\forall i \in 1, 2, 3, \quad (x_i, y_i) = \Phi_T(u_i, v_i).$$

Les conditions précédentes permettent d'obtenir le résultat pour tous couples $(u, v) \in U$ et $(x, y) \in T$ tels que $(x, y) = \Phi_T(u, v)$. On a ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & (x_2-x_1)u + (x_3-x_1)v + x_1 \\ y & = & (y_2-y_1)u + (y_3-y_1)v + y_1. \end{array} \right. \tag{11}$$

L'inversion du système (11) permet d'obtenir ce que l'on souhaite, à savoir une expression de $(u, v) = \Phi_T^{-1}(x, y)$ pour tout couple (x, y) :

$$\begin{array}{rcl} u & = & \dfrac{(y_3-y_1)(x-x_1)-(x_3-x_1)(y-y_1)}{(y_3-y_1)(x_2-x_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)}, \\ v & = & \dfrac{(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)}{(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(x_2-x_1)(y_3-y_1)}. \end{array}$$

Remarque : En posant $U = [u\ v]^T, X = [x\ y]^T, X_1 = [x_1\ y_1]^T$ et

$$J_T = \begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix},$$

on observe que les relations précédentes décrivent deux fonctions affines. En effet,

$$X = \Phi_T(U) = J_T\, U + X_1 \quad \text{et} \quad U = \Phi_T^{-1}(X) = J_T^{-1}\, X - J_T^{-1}\, X_1.$$

sont bien équivalentes

3.4 Formules finales

En utilisant ce qui précède, on passe des fonctions de base sur U aux fonctions de base sur T grâce à une formule de composition :

$$\forall (x, y) \in T, \quad \eta_j(x, y) = \phi_j(\Phi_T^{-1}(x, y)), \tag{12}$$

pour $j \in \{1, 2, 3\}$, et on retrouve bien la relation (3):

$$\eta_j(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix},$$

où les indices $j+1$ et $j+2$ sont à comprendre modulo 3. Par composition des dérivées, on obtient également la relation suivante sur les gradients des fonctions de base :

$$\nabla \eta_j(x,y) \;=\; (J_T^{-1})^T\, \nabla \phi_j(\Phi_T^{-1}(x,y)), \tag{13}$$

où J_T^{-1} est la matrice Jacobienne de Φ_T^{-1}, constante pour tout (x,y) puisque Φ_T^{-1} est affine.

Là encore, on retrouve la formule (4) (avec des indices à comprendre modulo 3), à savoir :

$$\begin{aligned} \nabla \eta_j(x,y) &= \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}, \\ \text{où } \alpha &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On s'aperçoit que les gradients ne dépendent pas de x ou y ; on peut donc les “sortir” de l'intégrale et on arrive à :

$$\left[M_T^A\right]_{ij} \;=\; \nabla \eta_i^\top \nabla \eta_j \int_T dx\,dy \;=\; |T|\, \nabla \eta_i^\top \nabla \eta_j, \tag{14}$$

où $|T|$ est l'aire du triangle T; par la formule du parallélogramme, on a $2\,|T| = \alpha$.

Addendum : Formules de changement de variables

On considère une fonction $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et une transformation Φ, $\mathcal{C}^1$ et bijective de U dans $T \subset \mathbb{R}^2$. On note $J_\Phi(u,v)$ la matrice Jacobienne de Φ et $|J_\Phi(u,v)|$ le déterminant de celle-ci au point (u,v). Dans ce cas, on a la formule de changement de variables suivante :

$$\int_T \phi(\Phi^{-1}(x,y))\,dx\,dy \;=\; \int_U \phi(u,v)\,|J_\Phi(u,v)|\,du\,dv.$$

On explicite ci-dessous un corollaire du résultat précédent, utile dans le cadre des éléments finis.

Soit une autre fonction ψ définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$. En plus des hypothèses précédentes, on suppose maintenant que Φ est affine, ce qui signifie que les matrices Jacobiennes de Φ et Φ^{-1} sont constantes; si on désigne par J_Φ et $J_{\Phi^{-1}}$ ces matrices, on a $J_{\Phi^{-1}} = (J_\Phi)^{-1}$.

Soit l'intégrale suivante :

$$\mathcal{I} \;=\; \int_T \nabla(\phi \circ \Phi^{-1})(x,y)^T \nabla(\psi \circ \Phi^{-1})(x,y)\,dx\,dy.$$

Par application de la formule de changement de variables, on obtient l'expression suivante pour $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} \;=\; \int_U \nabla \phi(u,v)^T\,(J_\Phi^T J_\Phi)^{-1}\,\nabla \psi(u,v)\,|J_\Phi|\,du\,dv.$$