

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HỒ CHÍ MINH

NGUYỄN PHƯƠNG NAM

MSHV: KHMT-17-004

Bài tập cá nhân
HÀM SINH XÁC SUẤT

Chuyên ngành: **Khoa học máy tính**

Môn học: **Phương pháp toán trong tin học**

Người hướng dẫn: **TS. HUỖNH VĂN ĐỨC**

Tp. Hồ Chí Minh, ngày 21 tháng 8 năm 2018

MỤC LỤC

MỤC LỤC	i
Tóm tắt nội dung:	ii
Keywords:	ii
Kết cấu tiểu luận:	ii
Lời mở đầu	1
Chương 1. TỔNG QUAN HÀM SINH.....	1
1.1 Hàm sinh.....	1
1.2 Các phép toán trên hàm sinh	2
1.2.1 Nhân với hằng số	3
1.2.2 Cộng.....	3
1.2.3 Dịch chuyển sang phải.....	4
1.2.4 Đạo hàm.....	4
1.3 Các hàm sinh thường gặp.....	5
1.3.1 Định lý nhị thức mở rộng	5
1.3.2 Bảng các hàm sinh thường gặp.....	7
Chương 2. HÀM SINH XÁC SUẤT	7
2.1 Định nghĩa và thuộc tính	8
2.2 Tổng của các biến ngẫu nhiên độc lập	10
2.3 Tổng của số ngẫu nhiên độc lập	11
2.4 Quá trình phân nhánh	12
2.4.1 Định nghĩa.....	12
2.4.2 Sự phát triển của quần thể.....	13
2.4.3 Xác suất tuyệt chủng.....	15
2.5 Ứng dụng.....	16
2.5.1 Dùng hàm sinh để giải quyết quan hệ tái phát sinh.....	16
2.5.2 Đếm bằng hàm sinh	17
2.5.3 Ứng dụng phân tích thuật toán sắp xếp Quicksort.....	22
KẾT LUẬN	24
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	26

Tóm tắt nội dung:

1. Giới thiệu tổng quan về hàm sinh: định nghĩa, các phép toán và các hàm sinh thường gặp.
2. Phân tích về hàm sinh xác suất và những ứng dụng.
3. Ví dụ áp dụng hàm sinh xác suất vào bài toán cụ thể tính toán độ phức tạp của thuật toán Quicksort.

Keywords:

Generating functions, probability generating functions, quicksort, hàm sinh, hàm sinh xác suất.

Kết cấu tiểu luận:

Ngoài phần lời mở đầu và kết luận, nội dung tiểu luận chia thành hai chương:

- Chương 1: Tổng quan về hàm sinh.
- Chương 2: Hàm sinh xác suất.

Lời mở đầu

Hàm sinh được dùng để biểu diễn với hiệu suất cao nhất các dãy bằng cách mã hóa các số hạng của dãy dưới dạng các hệ số của lũy thừa của biến x trong một chuỗi lũy thừa quy ước. Có thể dùng hàm sinh để giải nhiều loại bài toán đếm, như đếm các cách để chọn hoặc để phân bố các đối tượng thuộc nhiều loại theo nhiều luật hạn chế khác nhau. Các hàm sinh cũng có thể dùng để giải các hệ thức truy hồi bằng cách diễn dịch hệ thức truy hồi đối với các số hạng của một dãy thành một phương trình liên quan đến một hàm sinh nào đó. Sau đó giải phương trình này để tìm một dạng gần phù hợp với hàm sinh. Từ dạng gần đúng này có thể tìm được các hệ số của các lũy thừa trong hàm sinh và giải được hệ thức truy hồi ban đầu. Hàm sinh còn có thể được dùng để chứng minh các đẳng thức tổ hợp bằng cách khai thác ưu điểm của các quan hệ tương đối đơn giản giữa các hàm có thể diễn dịch được thành các đẳng thức liên quan đến các số hạng của dãy. Hàm sinh là công cụ rất tiện lợi để nghiên cứu nhiều thuộc tính của các dãy, như khả năng dùng chúng để thiết lập các công thức tiệm cận đối với các số hạng trong một dãy chẳng hạn.

Hàm sinh là một trong những sáng tạo, nhiều ứng dụng của toán rời rạc. Nói một cách nôm na, hàm sinh chuyển những bài toán về dãy số thành những bài toán về hàm số. Nhờ vào hàm sinh, ta có thể áp dụng vào các bài toán dãy số. Bằng cách này, có thể sử dụng hàm sinh trong việc giải tất cả các dạng toán về phép đếm. Có cả một ngành toán học lớn nghiên cứu về hàm sinh, vì thế, trong khuôn khổ bài viết chỉ tìm hiểu những vấn đề căn bản nhất về chủ đề này.

Trong bài viết này, các dãy số sẽ được để trong ngoặc $\langle \rangle$ để phân biệt với các đối tượng toán học khác.

Chương 1. TỔNG QUAN HÀM SINH

1.1 Hàm sinh

Hàm sinh thường của dãy số vô hạn $\langle g_0, g_1, g_2, g_3, \dots \rangle$ là chuỗi lũy thừa hình thức

$$G(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 \dots$$

Ta gọi hàm sinh là chuỗi hình thức bởi vì thông thường ta sẽ chỉ coi x là một ký hiệu thay thế thay vì một số. Chỉ trong một vài trường hợp ta sẽ cho x nhận các giá trị thực, vì thế ta gần như cũng không để ý đến sự hội tụ của các chuỗi. Có một số loại hàm sinh khác nhưng trong bài này, ta sẽ chỉ xét đến hàm sinh thường.

Trong bài này, ta sẽ ký hiệu sự tương ứng giữa một dãy số và hàm sinh bằng dấu mũi tên hai chiều như sau

$$\langle g_0, g_1, g_2, g_3, \dots \rangle \leftrightarrow g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \dots$$

Ví dụ, dưới đây là một số dãy số và hàm sinh của chúng

$$\langle 0, 0, 0, 0, \dots \rangle \leftrightarrow 0 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 + \dots = 0$$

$$\langle 1, 0, 0, 0, \dots \rangle \leftrightarrow 1 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 + \dots = 1$$

$$\langle 3, 2, 1, 0, \dots \rangle \leftrightarrow 3 + 2x + x^2 + 0.x^3 + \dots = x^2 + 2x + 3$$

Quy tắc ở đây rất đơn giản: Số hạng thứ i của dãy số (đánh số từ 0) là hệ số của x^i trong hàm sinh.

Nhắc lại công thức tính tổng của các số nhân lùi vô hạn là

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z}.$$

Đẳng thức này không đúng với $|z| \geq 1$, nhưng một lần nữa ta không quan tâm đến vấn đề hội tụ. Công thức này cho chúng ta công thức tường minh cho hàm sinh của hàng loạt các dãy số

$$\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1/(1-x)$$

$$\langle 1, -1, 1, -1, \dots \rangle \leftrightarrow 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = 1/(1+x)$$

$$\langle 1, a, a^2, a^3, \dots \rangle \leftrightarrow 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \dots = 1/(1-ax)$$

$$\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle \leftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + \dots = 1/(1-x^2)$$

1.2 Các phép toán trên hàm sinh

Phép màu của hàm sinh nằm ở chỗ ta có thể chuyển các phép toán thực hiện trên dãy số thành các phép toán thực hiện trên các hàm sinh tương ứng của chúng. Chúng ta cùng xem xét các phép toán và các tác động của chúng trong thuật ngữ dãy số.

1.2.1 Nhân với hằng số

Khi nhân hàm sinh với một hằng số thì trong dãy số tương ứng, các số hạng sẽ được nhân với hằng số đó. Ví dụ

$$\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle \leftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + \dots = 1/(1-x^2)$$

Nhân hàm sinh với 2, ta được

$$2/(1-x^2) = 2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots$$

là hàm sinh của dãy số

$$\langle 2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots \rangle$$

Quy tắc 1. (Quy tắc nhân với hằng số)

$$\text{Nếu } \langle f_0, f_1, f_2, f_3, \dots \rangle \leftrightarrow F(x) \text{ thì } \langle cf_0, cf_1, cf_2, cf_3, \dots \rangle \leftrightarrow cF(x)$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} \langle cf_0, cf_1, cf_2, cf_3, \dots \rangle &\leftrightarrow cf_0 + (cf_1)x + (cf_2)x^2 + (cf_3)x^3 + \dots \\ &= c(f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots) \\ &= cF(x). \end{aligned}$$

1.2.2 Cộng

Cộng hai hàm sinh tương ứng với việc cộng các số hạng của dãy số theo đúng chỉ số. Ví dụ, ta cộng hai dãy số trước đó

$$\begin{aligned} \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle &\leftrightarrow 1/(1-x) \\ + \langle 1, -1, 1, -1, \dots \rangle &\leftrightarrow 1/(1+x) \\ \hline \langle 2, 0, 2, 0, \dots \rangle &\leftrightarrow 1/(1-x) + 1/(1+x) \end{aligned}$$

Bây giờ ta thu được hai biểu thức khác nhau cùng sinh ra dãy $(2, 0, 2, 0, \dots)$.

Nhưng điều này không có gì ngạc nhiên vì thực ra chúng bằng nhau:

$$1/(1-x) + 1/(1+x) = [(1+x) + (1-x)]/(1-x)(1+x) = 2/(1-x^2)$$

Quy tắc 2. (Quy tắc cộng)

$$\text{Nếu } \langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \leftrightarrow F(x), \langle g_0, g_1, g_2, \dots \rangle \leftrightarrow G(x)$$

$$\text{thì } \langle f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, \dots \rangle \leftrightarrow F(x) + G(x)$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} \langle f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, \dots \rangle &\leftrightarrow f_0+g_0 + (f_1+g_1)x + (f_2+g_2)x^2 + \dots \\ &= (f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots) + (g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots) \end{aligned}$$

$$= F(x) + G(x)$$

1.2.3 Dịch chuyển sang phải

Ta bắt đầu từ một dãy số đơn giản và hàm sinh của nó

$$\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \leftrightarrow 1/(1-x)$$

Bây giờ ta *dịch chuyển* dãy số *sang phải* bằng cách thêm k số 0 vào đầu

$$\begin{aligned} \langle 0, 0, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots \rangle &\leftrightarrow x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \dots \\ &= x^k(1+x+x^2 + \dots) \\ &= x^k/(1-x) \end{aligned}$$

Như vậy, thêm k số 0 vào đầu dãy số tương ứng với việc nhân hàm sinh với x^k . Điều này cũng đúng trong trường hợp tổng quát.

Quy tắc 3. (Quy tắc dịch chuyển phải)

$$\text{Nếu } \langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \leftrightarrow F(x)$$

$$\text{thì } \langle 0, \dots, 0, f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \leftrightarrow x^k.F(x) \quad (\text{có } k \text{ số } 0)$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} \langle 0, \dots, 0, f_0, f_1, f_2, \dots \rangle &\leftrightarrow f_0x^k + f_1x^{k+1} + f_2x^{k+2} + \dots \\ &= x^k(f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots) \\ &= x^kF(x) \end{aligned}$$

1.2.4 Đạo hàm

Điều gì sẽ xảy ra nếu ta lấy đạo hàm của hàm sinh? Chúng ta hãy bắt đầu từ việc lấy đạo hàm của một hàm sinh đã trở nên quen thuộc của dãy số toàn 1:

$$\text{Ta tìm được hàm sinh cho dãy số } \langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

Tổng quát, việc lấy đạo hàm của hàm sinh có hai tác động lên dãy số tương ứng: các số hạng được nhân với chỉ số và toàn bộ dãy số được dịch chuyển trái sang 1 vị trí.

$$\langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle \leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}$$

Quy tắc 4. (Quy tắc đạo hàm)

$$\text{Nếu } \langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \leftrightarrow F(x)$$

$$\text{thì } \langle f_1, 2f_2, 3f_3, \dots \rangle \leftrightarrow dF(x)/dx$$

Chứng minh.

$$\langle f_1, 2f_2, 3f_3, \dots \rangle \leftrightarrow f_1 + 2f_2x + 3f_3x^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= (d/dx)(f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots) \\
&= dF(x)/dx
\end{aligned}$$

Quy tắc đạo hàm là một quy tắc rất hữu hiệu. Trong thực tế, ta thường xuyên cần đến một trong hai tác động của phép đạo hàm, nhân số hạng với chỉ số và dịch chuyển sang trái. Một cách điển hình, ta chỉ muốn có một tác động và tìm cách “vô hiệu hoá” tác động còn lại. Ví dụ, ta thử tìm hàm sinh cho dãy số $\langle 0, 1, 4, 9, 16, \dots \rangle$. Nếu ta có thể bắt đầu từ dãy $\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$ thì bằng cách nhân với chỉ số 2 lần, ta sẽ được kết quả mong muốn

$$\langle 0.0, 1.1, 2.2, 3.3, \dots \rangle = \langle 0, 1, 4, 9, \dots \rangle$$

Vấn đề là ở chỗ phép đạo hàm không chỉ nhân số hạng dãy số với chỉ số mà còn dịch chuyển sang trái 1 vị trí. Thế nhưng, quy tắc 3 dịch chuyển phải cho chúng ta cách để vô hiệu hoá tác động này: nhân hàm sinh thu được cho x .

Như vậy cách làm của chúng ta là bắt đầu từ dãy số $\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle$, lấy đạo hàm, nhân với x , lấy đạo hàm rồi lại nhân với x .

$$\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \leftrightarrow 1/(1-x)$$

$$\langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle \leftrightarrow (d/dx)(1/(1-x)) = 1/(1-x)^2$$

$$\langle 0, 1, 2, 3, 4, \dots \rangle \leftrightarrow x/(1-x)^2$$

$$\langle 1, 4, 9, 16, \dots \rangle \leftrightarrow (d/dx)(x/(1-x)^2) = (1+x)/(1-x)^3$$

$$\langle 0, 1, 4, 9, 16, \dots \rangle \leftrightarrow x(1+x)/(1-x)^3$$

Như vậy hàm sinh cho dãy các bình phương là $x(1+x)/(1-x)^3$.

1.3 Các hàm sinh thường gặp

1.3.1 Định lý nhị thức mở rộng

Với u là một số thực và k là số nguyên không âm. Lúc đó hệ số nhị thức mở rộng $\binom{u}{k}$ được định nghĩa như sau

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} u(u-1)\dots(u-k+1)/k!, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Định lý 2. Cho x là số thực với $|x| < 1$ và u là một số thực. Lúc đó

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k.$$

Định lý này có thể được chứng minh khá dễ dàng bằng cách sử dụng định lý Taylor.

Ví dụ. Tìm khai triển lũy thừa của các hàm sinh $(1+x)^{-n}$ và $(1-x)^{-n}$

Giải: Theo định lý nhị thức mở rộng, có thể suy ra

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k.$$

Theo định nghĩa

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k C_{n+k-1}^k$$

Từ đó

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+k-1}^k x^k.$$

Thay x bằng $-x$, ta được

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k.$$

Ví dụ. Tìm khai triển lũy thừa của $(1-x)^{-1/2}$

Giải: Theo định lý nhị thức mở rộng, ta có

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k.$$

Theo định nghĩa

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{-1}{2}-k+1\right)}{k!} = \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = (-1)^k \frac{C_{2k}^k}{4^k}$$

Từ đó

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{C_{2k}^k}{4^k} x^k.$$

Thay x bằng $-x$, ta được

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k}^k}{4^k} x^k.$$

1.3.2 Bảng các hàm sinh thường gặp

Hàm số	Khai triển lũy thừa	a_k
$1/(1-x)$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	1
$1/(1+x)$	$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$	$(-1)^k$
$1/(1-ax)$	$1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \dots$	a^k
$(1-x^{n+1})/(1-x)$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n$	1 nếu $k \leq n$, 0 nếu $k > n$
$(1+x)^n$	$1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n$	C_n^k
$1/(1-x)^n$	$1 + nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots$	C_{n+k-1}^k
$1/(1-x)^2$	$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$	$k+1$
$1/(1-ax)^2$	$1 + 2ax + 3a^2x^2 + 4a^3x^3 + \dots$	$(k+1)a^k$
$1/(1-x^r)$	$1 + x^r + x^{2r} + x^{3r} + \dots$	1 nếu $r \mid k$ và 0 trong trường hợp ngược lại
$1/(1+x^r)$	$1 - x^r + x^{2r} - x^{3r} + \dots$	$(-1)^s$ nếu $k=sr$ và 0 trong trường hợp ngược lại
$\ln(1+x)$	$x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$	0 khi $k = 0$ và $(-1)^k/k$
$\ln(1-x)$	$-x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - \dots$	0 khi $k = 0$ và $-1/k$
$\arctg x$	$x - x^3/3 + x^5/5 - \dots$	0 với k chẵn và $1/k$ với k lẻ

Chương 2. HÀM SINH XÁC SUẤT

Hàm sinh được sử dụng phổ biến trong toán học, và đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết xác suất. Xét chuỗi $\{a_i; i = 0; 1; 2; \dots\}$ thuộc tập số thực: là một trong những dãy số đã được phân tích trong một vài hàm sinh. Hàm sinh phổ dụng của chuỗi được định nghĩa như sau :

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$$

với những giá trị của các tham số s mà tổng hội tụ. Đối với một chuỗi được xét, tồn tại một bán kính hội tụ $R (\geq 0)$ như tổng hội tụ tuyệt đối nếu $|s| < R$ và phân kỳ nếu $|s| > R$.

Với nhiều chuỗi được định nghĩa hoàn chỉnh, $G(s)$ có thể được viết trong hình thức kín, và những số cá nhân trong chuỗi có thể được phục hồi hoặc mở rộng bằng cách dẫn xuất.

2.1 Định nghĩa và thuộc tính

Xem xét một số X riêng biệt lấy giá trị không âm. Ta viết

$$p_k = P(X=k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(nếu X là một số hữu hạn, ta chỉ cần thêm vào những xác suất bằng không ứng với các giá trị không xảy ra). Hàm sinh xác suất (PGF) của X được định nghĩa như sau:

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = E(s^X)$$

Chú ý rằng $G_X(1) = 1$, vì vậy dãy số hội tụ hoàn toàn cho $|s| \leq 1$. Cũng như $G_X(0) = p_0$. Đối với một số phân phối phổ biến hơn, hàm sinh xác suất như sau :

(i) **Hằng số** – nếu $p_c = 1, p_k = 0, k \neq c$, ta có

$$G_X(s) = E(s^X) = s^c$$

(ii) **Dãy Bernoulli** – nếu $p_1 = p, p_0 = 1 - p = q, p_k = 0, k \neq 0$ hoặc 1 , ta có

$$G_X(s) = E(s^X) = q + ps$$

(iii) **Geometric** – nếu $p_k = pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots; q = 1-p$, ta có

$$G_X(s) = \frac{ps}{1-qs} \text{ nếu } |s| < q^{-1}$$

(iv) **Binomial** – nếu $X \sim \text{Bin}(n, p)$, ta có

$$G_X(s) = (q + ps)^n, (q = 1 - p)$$

(v) **Poisson** – nếu $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, ta có

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} s^k = e^{\lambda(s-1)}$$

(vi) **Negative binomial** – nếu $X \sim \text{NegBin}(n, p)$, ta có

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} s^k = \left(\frac{ps}{1-qs} \right)^n \text{ nếu } |s| < q^{-1} \text{ và } p + q = 1$$

Định lý khẳng định :

Nếu X và Y có hàm sinh xác suất tương ứng G_X và G_Y , ta có

$$G_X(s) = G_Y(s) \quad \text{với mọi } s \quad (a)$$

$$\text{Nếu và chỉ nếu } P(X = k) = P(Y = k) \quad \text{với } k = 0, 1, \dots \quad (b)$$

Chú ý : nếu và chỉ nếu X và Y có cùng phân phối xác suất.

Chứng minh : Ta cần chứng minh rằng (a) ứng dụng cho (b). Bán kính hội tụ của G_X và G_Y thì ≥ 1 , do đó, chúng có thể mở rộng chuỗi về gốc

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X = k)$$

$$G_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k)$$

Nếu $G_X = G_Y$, có 2 dãy số có hệ số giống nhau.

Ví dụ : Nếu X có hàm sinh xác suất $\frac{ps}{(1-qs)}$ với $q = 1 - p$, ta có thể kết luận

rằng :

$$X \sim \text{Geometric}(p)$$

Cho hàm $A(s)$ với một hàm sinh xác suất của một số X , ta có thể được $p_k = P(X = k)$

bằng cách triển khai $A(s)$ trong chuỗi số trong s và đặt

$p_k =$ hệ số của s^k ;

hoặc cách khác $A(s)$ k lần có liên quan đến s và đặt $s = 0$

Chúng ta có thể mở rộng định nghĩa của hàm sinh xác suất với hàm của X .

Hàm sinh xác suất của $Y = H(X)$ là

$$G_Y(s) = G_{H(X)}(s) = E(s^{H(X)}) = \sum_k P(X = k) s^{H(k)}$$

Nếu H khá đơn giản, nó thể hiện $G_Y(s)$ trong điều kiện của $G_X(s)$.

Ví dụ : Đặt $Y = a + bX$ thì

$$\begin{aligned} G_Y(s) &= E(s^Y) = E(s^{a+bX}) \\ &= s^a E[(s^b)^X] = s^a G_X(s^b) \end{aligned}$$

Tóm lược:

Lý thuyết

Lấy X là số đếm và $G_X^{(r)}$ số thứ r phát sinh của chính hàm sinh xác suất $G_X(s)$ khi $s = 1$, thì

$$G_X^{(r)} = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$$

Chúng minh

$$\begin{aligned} G_X^{(r)}(s) &= \frac{d^r}{ds^r} [G_X(s)] \\ &= \frac{d^r}{ds^r} [\sum_k p_k s^k] \\ &= \sum_k p_k k(k-1) \dots (k-r+1) s^{k-r} \end{aligned}$$

(giả sử không mâu thuẫn khi đổi chỗ $\frac{d^r}{ds^r}$ và \sum_k). Chuỗi hội tụ với $|s| \leq 1$,

vì thế :

$$G_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)], \quad r \geq 1$$

Ngoài ra :

$$G_X^{(1)}(1) \text{ (hoặc } G_X^{(1)}(1)) = E(X)$$

Và

$$\begin{aligned} G_X^{(2)}(1) \text{ (hoặc } G_X^{(2)}(1)) &= E[X(X-1)] \\ &= E(X^2) - E(X) \\ &= \text{Var}(X) + [E(X)]^2 - E(X) \end{aligned}$$

Vì thế

$$\text{Var}(X) = G_X^{(2)}(1) - [G_X^{(1)}(1)]^2 + G_X^{(1)}(1).$$

Ví dụ : Nếu $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, thì

$$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)};$$

$$G_X^{(1)}(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$$

$$E(X) = G_X^{(1)}(1) = \lambda e^0 = \lambda.$$

$$G_X^{(2)}(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$$

$$\text{Var}(X) = \lambda^2 - \lambda^2 + \lambda = \lambda$$

2.2 Tổng của các biến ngẫu nhiên độc lập

Lý thuyết

Đặt X và Y là biến đếm độc lập, hàm sinh xác suất tương ứng với $G_X(s)$ và $G_Y(s)$ và cho $Z = X + Y$.

$$G_Z(s) = G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

Chúng minh

$$\begin{aligned}
G_Z(s) &= E(s^Z) = E(s^{X+Y}) \\
&= E(s^X)E(s^Y) \quad (\text{độc lập}) \\
&= G_X(s)G_Y(s)
\end{aligned}$$

Hệ quả

Nếu X_1, \dots, X_n là các biến đếm độc lập, tương ứng với các hàm sinh xác suất $G_{X1}(s), \dots, G_{Xn}(s)$ (và n là số nguyên cho trước),

$$G_{X1 + \dots + Xn}(s) = G_{X1}(s) \dots G_{Xn}(s)$$

Ví dụ 1:

Tìm phân phối của n số độc lập $X_i, i = 1, \dots, n$, khi $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$

Giải

$$\begin{aligned}
G_{X_i}(s) &= e^{\lambda_i(s-1)} \\
G_{X1 + X2 + \dots + Xn}(s) &= \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(s-1)} \\
&= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(s-1)}
\end{aligned}$$

Đây là hàm sinh xác suất Poisson

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$$

Ví dụ 2:

Trong chuỗi số độc lập n Bernoulli

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{nếu số thử thứ } i \text{ đúng (xác suất } p) \\ 0, & \text{nếu số thử thứ } i \text{ sai (xác suất } q = 1 - p). \end{cases}$$

Đặt $X = \sum_{i=1}^n I_i =$ số lượng đúng trong n lần. Tìm phân phối xác suất của X ?

Giải: Từ những lần thử độc lập nhau, I_1, \dots, I_n độc lập.

$$G_X(s) = G_{I1}, G_{I2}, \dots, G_{In}(s).$$

Nhưng $G_{I_i}(s) = q + ps, i = 1, \dots, n$.

$$G_X(s) = (q + ps)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (ps)^x q^{n-x}$$

$P(X=x)$ = hệ số của s^x trong $G_X(s)$

$$= \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, \dots, n$$

$X \sim \text{Bin}(n, p)$.

2.3 Tổng của số ngẫu nhiên độc lập

Lý thuyết

Cho N, X_1, X_2, \dots là các số đếm độc lập. Nếu tập $\{X_i\}$ có phân phối giống nhau, với mỗi hàm sinh xác suất G_X .

Có hàm sinh xác suất

$$S_N = X_1 + \dots + X_N$$

$$G_{S_N} = G_N(G_X(s))$$

Chứng minh : Ta có

$$\begin{aligned} G_{S_N}(s) &= E(s^{S_N}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_n} | N = n) P(N = n) \quad (\text{điều kiện với } N) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_n}) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{X_1 + \dots + X_n}(s) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [G_X(s)]^n P(N = n) \quad (\text{hệ quả đã chứng minh trước đó}) \\ &= G_N(G_X(s)) \quad (\text{theo định nghĩa của } G_N) \end{aligned}$$

Hệ quả

$$1) E(S_N) = E(N) \cdot E(X)$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[G_{S_N}(s)] &= \frac{d}{dx}[G_N(G_X(s))] \\ &= \frac{dG_N(u)}{du} \cdot \frac{du}{ds} \quad \text{khi } u = G_X(s) \end{aligned}$$

Đặt $s = 1$, (vì vậy $u = G_X(1) = 1$), ta có

$$E(S_N) = [G_N^{(1)}(1)] \cdot [G_X^{(1)}(1)] = E(N) \cdot E(X)$$

Tương tự ta có thể suy luận rằng

$$\text{Var}(S_N) = E(N)\text{Var}(X) + \text{Var}(N) [E(X)]^2 \quad (3.19)$$

2.4 Quá trình phân nhánh

2.4.1 Định nghĩa

Xét giả thuyết một cá thể sinh ra trong một điểm thời gian và chết đi trong quá trình sinh ra các cá thể mới. Ta cho rằng

i) Kích thước của quần thể là độc lập, mỗi cá thể mang giá trị $0, 1, 2, \dots$

ii) Kích thước của quần thể được mô tả, các cá thể con trong quần thể, C , được xây dựng

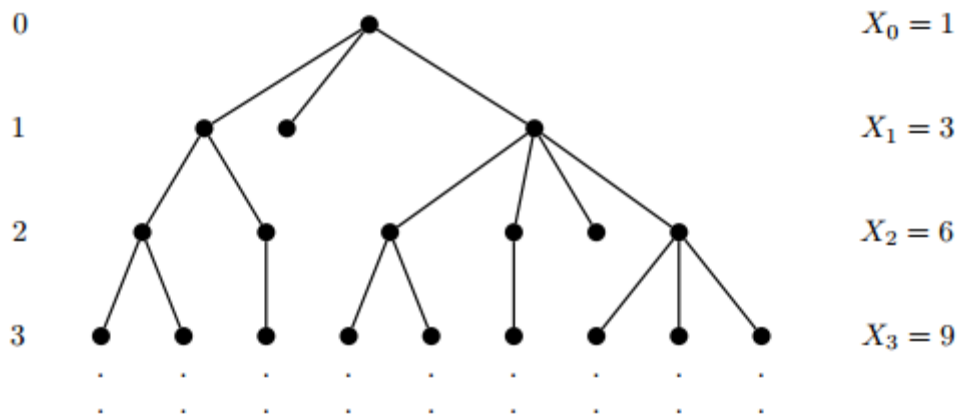
$$P(C = k) = p_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

Sự phát triển cộng đồng quần thể trong quá trình thời gian, được gọi là quá trình phân nhánh : cung cấp một mô hình phát triển đơn giản, tạo ra mối quan hệ của các quần thể.

Đặt X_n = số cá thể sinh ra trong thời gian n

Sự phát triển của quần thể được mô tả bằng chuỗi X_0, X_1, X_2, \dots Ta cho $X_0 = 1$, bắt đầu với một cá thể xác định

Cây quần thể được thể hiện như sau :



Ta có thể dùng hàm sinh xác suất để duyệt quá trình này

2.4.2 Sự phát triển của quần thể

Đặt $G(s)$ là hàm sinh xác suất của C

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(C = k) s^k,$$

Và $G_n(s)$ là hàm sinh xác suất của X_n

$$G_n(s) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X_n = x) s^x.$$

$$G_0(s) = s, P(X_0 = 1) = 1; P(X_0 = x) = 0 \text{ với } x \neq 1 \text{ và } G_1(s) = G(s)$$

$$X_n = C_1 + C_2 + \dots + C_{X_{n-1}}$$

Những điểm C_i là kích thước của quần thể được sản sinh bởi thế hệ thứ i thành viên của thế hệ thứ $(n - 1)$

Vì thế, X_n là tổng của số ngẫu nhiên không phụ thuộc và được xây dựng giống nhau, ta có

$$G_n(s) = G_{n-1}(G(s)) \quad \text{với } n = 2, 3, \dots$$

Và điều này cũng đúng cho $n = 1$. Lặp lại kết quả này, ta có

$$\begin{aligned} G_n(s) &= G_{n-1}(G(s)) \\ &= G_{n-2}(G(G(s))) \\ &= \dots \\ &= G_1(G(G(\dots(s)\dots))) \\ &= G(G(G(\dots(s)\dots))), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

G_n là quần thể thứ n của G

$$\begin{aligned} E(X_n) &= G'_n(1) \\ &= G'_{n-1}(G(1))G'(1) \\ &= G'_{n-1}(1)G'(1) \quad [\text{since } G(1) = 1] \end{aligned}$$

$$E(X_n) = E(X_{n-1})\eta$$

$\eta = E(C)$ là ý nghĩa kích thước quần thể. Do đó

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \mu E(X_{n-1}) \\ &= \mu^2 E(X_{n-2}) \\ &= \dots \\ &= \mu^n E(X_0) = \mu^n. \end{aligned}$$

Có các suy luận

$$E(X_n) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{if } \mu < 1 \\ 1, & \text{if } \mu = 1 \text{ (critical value)} \\ \infty, & \text{if } \mu > 1. \end{cases}$$

Tương tự

$$\text{Var}(X_n) = \begin{cases} n\sigma^2, & \text{if } \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}, & \text{if } \mu \neq 1. \end{cases}$$

Ví dụ 1 :

Kiểm tra một phân nhánh C được định nghĩa phân phối hình học

$$p_k = pq^k, k = 0, 1, 2, \dots; 0 < p - 1 < 1, \text{ với } p \neq q$$

Giải: hàm sinh xác suất của C là

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k s^k = \frac{p}{1 - qs} \quad \text{if } |s| < q^{-1}.$$

Ta cần giải quyết hàm $G_n(s) = G_{n-1}(G(s))$

Đầu tiên, nếu $|s| \leq 1$,

$$G_1(s) = G(s) = \frac{p}{1 - qs} = p \frac{(q - p)}{(q^2 - p^2) - qs(q - p)}$$

Sau đó

$$\begin{aligned} G_2(s) = G(G(s)) &= \frac{p}{1 - \frac{qp}{1 - qs}} \\ &= \frac{p(1 - qs)}{1 - qp - qs} \\ &= p \frac{(q^2 - p^2) - qs(q - p)}{(q^3 - p^3) - qs(q^2 - p^2)}. \end{aligned}$$

Ta phỏng đoán rằng

$$G_n(s) = p \frac{(q^n - p^n) - qs(q^{n-1} - p^{n-1})}{(q^{n+1} - p^{n+1}) - qs(q^n - p^n)} \quad \text{for } n = 1, 2, \dots \text{ and } |s| \leq 1,$$

Và đây là kết quả phát triển từ n

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) = G_n(0) &= p \frac{q^n - p^n}{q^{n+1} - p^{n+1}} \\ &= \frac{\mu^n - 1}{\mu^{n+1} - 1}, \end{aligned}$$

2.4.3 Xác suất tuyệt chủng

Xác suất tiến trình tuyệt chủng thứ n được mô tả

$$E_n = P(X_n = 0)$$

$e_n \leq 1$ và $e_n \leq e_{n+1}$. $\{e_n\}$ là một dãy đơn điệu

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$$

Gọi là xác suất tuyệt chủng cuối cùng

Định lý 1

e là gốc không âm nhỏ nhất của công thức $x = G(x)$

Định lý 2

$e = 1$ nếu và chỉ nếu $\eta \leq 1$

2.5 Ứng dụng

2.5.1 Dùng hàm sinh để giải quyết quan hệ tái phát sinh (recurrence)

Thay vì sử dụng lý thuyết của quan hệ từ khi giải quyết các mối quan hệ tái phát sinh trong quá trình giải quyết bằng các điều kiện, người ta thường chuyển đổi các mối quan hệ trong phương trình cho hàm sinh, để được giải quyết mục tiêu theo các điều kiện ràng buộc thích hợp.

Ví dụ 1:

$$p_n = \frac{n-1}{n}p_{n-1} + \frac{1}{n}p_{n-2}, \quad n \geq 3$$

Bắt đầu với xác suất p_n . Giải quyết vấn đề này bằng hàm sinh xác suất

Giải

Bằng ns^{n-1} và cộng tất cả các giá trị của n ta có được

$$\sum_{n=3}^{\infty} ns^{n-1}p_n = s \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)s^{n-2}p_{n-1} + s \sum_{n=3}^{\infty} s^{n-2}p_{n-2}.$$

Hàm sinh

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n$$

(đây không là hàm sinh xác suất, khi $\{p_n : n \geq 1\}$ không tạo ra một xác suất)
đó là

$$\begin{aligned} G'(s) - p_1 - 2p_2s &= s[G'(s) - p_1] + sG(s) \\ (1-s)G'(s) &= sG(s) + s \quad (\text{since } p_1 = 0, p_2 = \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Bây giờ phương trình này được giải quyết theo các điều kiện ràng buộc

$$G(0) = 0$$

Kết quả là

$$G(s) = (1 - s)^{-1}e^{-s} - 1.$$

Giải $G(s)$ theo chuỗi số trong s , và phân rã của s^n

$$p_n = 1 + \frac{(-1)}{1!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \geq 1$$

2.5.2 Đếm bằng hàm sinh

Hàm sinh có thể được áp dụng trong các bài toán đếm. Nói riêng, các bài toán chọn các phần tử từ một tập hợp thông thường sẽ dẫn đến các hàm sinh. Khi hàm sinh được áp dụng theo cách này, hệ số của x^n chính là số cách chọn n phần tử.

2.5.2.1 Chọn các phần tử khác nhau

Hàm sinh cho dãy các hệ số nhị thức được suy ra trực tiếp từ định lý nhị thức

$$\langle C_k^0, C_k^1, C_k^2, \dots, C_k^k, 0, 0, \dots \rangle \leftrightarrow C_k^0 + C_k^1 x + \dots + C_k^k x^k = (1+x)^k$$

Như vậy hệ số của x^n trong $(1+x)^k$ bằng số cách chọn n phần tử phân biệt từ một tập hợp gồm k phần tử. Ví dụ, hệ số của x_2 là C_k^2 , số cách chọn 2 phần tử từ tập hợp k phần tử. Tương tự, hệ số của x^{k+1} là số cách chọn $k+1$ phần tử từ tập hợp k phần tử và như thế, bằng 0.

2.5.2.2 Xây dựng các hàm sinh để đếm

Thông thường ta có thể dịch mô tả của bài toán đếm thẳng sang ngôn ngữ hàm sinh để giải. Ví dụ, ta có thể chứng tỏ rằng $(1+x)^k$ sẽ sinh ra số các cách chọn n phần tử phân biệt từ tập hợp k phần tử mà không cần dùng đến định lý nhị thức hay các hệ số nhị thức!

Ta làm như sau. Đầu tiên, ta hãy xét tập hợp có một phần tử $\{a_1\}$. Hàm sinh cho số cách chọn n phần tử từ tập hợp này đơn giản là $1 + x$. Ta có 1 cách chọn không phần tử nào, 1 cách chọn 1 phần tử và 0 cách chọn hai phần tử trở lên. Tương tự, số cách chọn n phần tử từ tập hợp $\{a_2\}$ cũng cho bởi hàm sinh $1 + x$. Sự khác biệt của các phần tử trong hai trường hợp trên là không quan trọng.

Và bây giờ là ý tưởng chính: hàm sinh cho số cách chọn các phần tử từ hợp của hai tập hợp bằng tích các hàm sinh cho số cách chọn các phần tử từ mỗi tập

hợp. Chúng ta sẽ giải thích chặt chẽ điều này, nhưng trước hết, hãy xem xét một ví dụ. Theo nguyên lý này, hàm sinh cho số cách chọn các phần tử từ tập hợp $\{a_1, a_2\}$ là:

$$(1+x).(1+x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

Có thể kiểm chứng rằng đối với tập hợp $\{a_1, a_2\}$ ta có 1 cách chọn 0 phần tử, 2 cách chọn 1 phần tử, 1 cách chọn 2 phần tử và 0 cách chọn 3 phần tử trở lên.

Tiếp tục áp dụng quy tắc này, ta sẽ được hàm sinh cho số cách chọn n phần tử từ tập hợp k phần tử

$$(1+x).(1+x) \dots (1+x) = (1+x)^k$$

Đây chính là công thức hàm sinh mà ta đã nhận được bằng cách sử dụng định lý nhị thức. Nhưng lần này, chúng ta đã đi thẳng từ bài toán đếm đến hàm sinh.

Chúng ta có thể mở rộng điều này thành một nguyên lý tổng quát.

Quy tắc 5 (Quy tắc xoắn). Gọi $A(x)$ là hàm sinh cho cách chọn các phần tử từ tập hợp A và $B(x)$ là hàm sinh cho cách chọn các phần tử từ tập hợp B . Nếu A và B là rời nhau thì hàm sinh cho cách chọn các phần tử từ $A \cup B$ là $A(x).B(x)$.

Quy tắc này là khá đa nghĩa, vì cần hiểu chính xác cách chọn các phần tử từ một tập hợp có nghĩa là thế nào? Rất đáng chú ý là Quy tắc xoắn vẫn đúng cho nhiều cách hiểu khác nhau của từ *cách chọn*. Ví dụ, ta có thể đòi hỏi chọn các phần tử phân biệt, cũng có thể cho phép được chọn một số lần có giới hạn nào đó, hoặc cho chọn lặp lại tùy ý. Một cách nôm na, giới hạn duy nhất là (1) thứ tự chọn các phần tử không quan trọng (2) những giới hạn áp dụng cho việc chọn các phần tử của A và B cũng áp dụng cho việc chọn các phần tử của $A \cup B$ (Chặt chẽ hơn, cần có một song ánh giữa các cách chọn n phần tử từ $A \cup B$ với bộ sắp thứ tự các cách chọn từ A và B chứa tổng thể n phần tử)

Chứng minh. Định nghĩa

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad C(x) = A(x).B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Đầu tiên ta hãy tính tích $A(x).B(x)$ và biểu diễn hệ số c_n thông qua các hệ số a và b . Ta có thể sắp xếp các số hạng này thành dạng bảng

	b_0	b_1x	b_2x^2	b_3x^3	\dots	
a_0	a_0b_0	a_0b_1x	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$	\dots	
a_1x	a_1b_0x	$a_1b_1x^2$	$a_1b_2x^3$			
a_2x^2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$				
a_3x^3	$a_3b_0x^3$					
\dots						

Chú ý rằng các số hạng có cùng lũy thừa của x xếp trên các đường chéo /. Nhóm tất cả các số hạng này lại, ta thấy rằng hệ số của x^n trong tích bằng

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$$

Bây giờ ta chứng minh rằng đây cũng chính là số cách chọn n phần tử từ $A \cup B$. Một cách tổng quát, ta có thể chọn n phần tử từ $A \cup B$ bằng cách chọn j phần tử từ A và $n-j$ phần tử từ B , trong đó j là một số từ 0 đến n . Điều này có thể được thực hiện bằng a_jb_{n-j} cách. Lấy tổng từ 0 đến n , ta có

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$$

cách chọn n phần tử từ $A \cup B$. Đó chính xác là giá trị c_n đã được tính ở trên.

Biểu thức $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$ đã được biết đến trong môn xử lý tín hiệu số; dãy $\langle c_0, c_1, c_2, c_3, \dots \rangle$ là *xoắn* (convolution) của hai dãy $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ và $\langle b_0, b_1, b_2, b_3, \dots \rangle$.

2.5.2.3 Chọn các phần tử có lặp

Xét bài toán: Có bao nhiêu cách chọn 12 cây kẹo từ 5 loại kẹo? Bài toán này có thể tổng quát hoá như sau: Có bao nhiêu cách chọn ra k phần tử từ tập hợp có n phần tử, trong đó ta cho phép một phần tử có thể được chọn nhiều lần? Trong thuật ngữ này, bài toán chọn kẹo có thể phát biểu có bao nhiêu cách chọn 12 cây kẹo từ tập hợp

$\{\text{kẹo sữa, kẹo sô-cô-la, kẹo chanh, kẹo dâu, kẹo cà-phê}\}$

nếu ta cho phép lấy nhiều viên kẹo cùng loại. Ta sẽ tiếp cận lời giải bài toán này từ góc nhìn của hàm sinh.

Giả sử ta chọn n phần tử (có lặp) từ tập hợp chỉ có duy nhất một phần tử. Khi đó có 1 cách chọn 0 phần tử, 1 cách chọn 1 phần tử, 1 cách chọn 2 phần tử ... Như thế, hàm sinh của cách chọn có lặp từ tập hợp có 1 phần tử bằng

$$\langle 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1/(1-x)$$

Quy tắc xoắn nói rằng hàm sinh của cách chọn các phần tử từ hợp của các tập hợp rời nhau bằng tích của các hàm sinh của cách chọn các phần tử từ mỗi tập hợp:

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} \cdots \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Như thế, hàm sinh của cách chọn các phần tử từ tập hợp n phần tử có lặp là $1/(1-x)^n$.

Bây giờ ta cần tính các hệ số của hàm sinh này. Để làm điều này, ta sử dụng công thức Taylor:

Định lý 1 (Định lý Taylor)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots$$

Định lý này nói rằng hệ số của x^k trong $1/(1-x)^n$ bằng đạo hàm bậc k của nó tại điểm 0 chia cho $k!$. Tính đạo hàm bậc k của hàm số này không khó. Đặt

$$g(x) = 1/(1-x)^n = (1-x)^{-n}$$

Ta có

$$g'(x) = n(1-x)^{-n-1}$$

$$g''(x) = n(n+1)(1-x)^{-n-2}$$

$$g'''(x) = n(n+1)(n+2)(1-x)^{-n-3}$$

...

$$g^{(k)}(x) = n(n+1)\dots(n+k-1)(1-x)^{-n-k}$$

Từ đó, hệ số của x^k trong hàm sinh bằng

$$\frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$$

Như vậy số cách chọn k phần tử có lặp từ n phần tử bằng C_{n+k-1}^k .

2.5.2.4 Một bài toán đếm “bất khả thi”

Từ đầu bài đến giờ ta đã thấy những ứng dụng của hàm sinh. Tuy nhiên, những điều này ta cũng có thể làm được bằng những cách khác. Bây giờ ta xét một bài toán đếm rất khó chịu. Có bao nhiêu nhiều cách sắp một giỏ n trái cây thoả mãn các điều kiện ràng buộc sau:

Số táo phải chẵn

Số chuối phải chia hết cho 5

Chỉ có thể có nhiều nhất 4 quả cam

Chỉ có thể có nhiều nhất 1 quả đào

Ví dụ, ta có 7 cách sắp giỏ trái cây có 6 trái:

Táo	6	4	4	2	2	0	0
Chuối	0	0	0	0	0	5	5
Cam	0	2	1	4	3	1	0
Đào	0	0	1	0	1	0	1

Các điều kiện ràng buộc này quá phức tạp và có cảm giác như việc đi tìm lời giải là vô vọng. Nhưng ta hãy xem hàm sinh sẽ xử lý bài toán này thế nào.

Trước hết, ta đi tìm hàm sinh cho số cách chọn táo. Có 1 cách chọn 0 quả táo, có 0 cách chọn 1 quả táo (vì số táo phải chẵn), có 1 cách chọn 2 quả táo, có 0 cách chọn 3 quả táo ... Như thế ta có

$$A(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = 1/(1-x^2)$$

Tương tự, hàm sinh cho số cách chọn chuối là

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + \dots = 1/(1-x^5)$$

Bây giờ, ta có thể chọn 0 quả cam bằng 1 cách, 1 quả cam bằng 1 cách, ... Nhưng ta không thể chọn hơn 4 quả cam, vì thế ta có

$$C(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = (1-x^5)/(1-x)$$

Và tương tự, hàm sinh cho số cách chọn đào là

$$D(x) = 1 + x = (1-x^2)/(1-x)$$

Theo quy tắc xoắn, hàm sinh cho cách chọn từ cả 4 loại trái cây bằng

$$A(x).B(x).C(x).D(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Gần như tất cả được giản ước với nhau! Chỉ còn lại $1/(1-x)^2$ mà ta đã tìm được chuỗi lũy thừa từ trước đó. Như thế số cách sắp giỏ trái cây gồm n trái cây đơn giản bằng $n+1$. Điều này phù hợp với kết quả mà ta đã tìm ra trước đó, vì có 7 cách sắp cho giỏ 6 trái cây.

2.5.3 Ứng dụng phân tích thuật toán sắp xếp Quicksort

Sự cải tiến của thuật toán S (sắp xếp bằng cách chèn trực tiếp - Insertion Sort) so với thuật toán C (sắp xếp bằng cách đếm - Countingsort) không lớn lắm do ở mỗi bước lặp, số nghịch thế chỉ giảm được một đơn vị. Do đó độ phức tạp có cùng cỡ với số nghịch thế của phép toán hoán vị cấp N mà giá trị trung bình đã được chứng minh là $O(N^2)$.

Để cải tiến hơn, ở mỗi bước cần làm giảm số nghịch thế càng nhiều càng tốt. Gọi K là giá trị khoá ở giữa, cần tìm cách chia mảng M ban đầu thành 2 mảng con M_1, M_2 , trong đó M_1 là mảng con bên trái gồm các mẫu tin có khoá $\leq K$ và M_2 là mảng con bên phải gồm các mẫu tin có khoá $> K$. Phép chia này cần N phép so sánh và tối đa N phép dời chỗ. Sau khi chia, một cặp $(K[i], K[j])$, $i < j$, chỉ có thể là một nghịch thế nếu 2 mẫu tin tương ứng cùng thuộc M_1 hay cùng thuộc M_2 . Như thế số nghịch thế tối đa có thể có sẽ được giảm từ $\frac{N(N-1)}{2}$ xuống còn:

$$2 \times \frac{1}{2} \times \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} - 1 \right) = \frac{N(N-2)}{4}$$

nghĩa là đã giảm được hơn một nửa. Ở bước tiếp theo, hai mảng con M_1, M_2 lại tiếp tục được chia đôi và số nghịch thế tối đa có thể có lại được giảm hơn một nửa. Như thế chỉ cần tối đa $\log_2 \left(\frac{N(N-1)}{2} \right) \approx 2 \log_2 N$ bước, mảng sẽ không chứa nghịch thế. Nói cách khác mảng đã được sắp thứ tự. Số phép so sánh tối đa sẽ là $2N \log_2 N$ và số phép dời chỗ còn ít hơn nữa.

Để trình bày thuật toán Q, ta sẽ sử dụng một stack có chiều dài $\log_2 N$ mà mỗi phần tử của ... là một cặp (l, r) để trỏ tới phần tử đầu tiên và phần tử cuối cùng của mảng con tương ứng. Ngoài ra để giảm bớt bookkeeping, ta ... thêm một mẫu tin giả $R[N+1]$ có khóa là $+\infty$ (lớn hơn mọi giá trị khóa trong mảng). Để đơn

giản hóa thuật toán, ngoài hai thủ tục Push và Pop có sẵn của stack ta cũng đưa vào thủ tục giả cho hoán vị hai phần tử trong mảng, cũng như các ... chiều dài và so sánh để trả về chiều dài r hay so sánh chiều dài hai mảng. Hàm so sánh trả về một cặp giá trị: giá trị đầu là các con trỏ chỉ đến mảng dài hơn và giá trị sau là các con trỏ chỉ đến mảng ngắn hơn trong ... mảng đem so sánh.

- Thuật toán Quick sort:

Bước 1: Push (1,N) vào stack;

Bước 2:

```

While stack <>  $\phi$  do

    (l,r) := Pop stack;

    i:=l+1; j:=r;

    K:=K[r]; R:=R[l];

    Repeat

        While K[i]  $\leq$  K do i:=i+1 end do;

        While K[i] > K do j:=j-1 end do;

        If j  $\leq$  i then hoán vị R[l] và R[j]

        Else hoán vị R[i] và R[j]

        End if;

    until j  $\leq$  i ;

    (M1, M2):= so sánh ((l,j-1),(j+1,r))

    If chiều dài (M1) > 1 then Push M1 vào stack end if

    If chiều dài (M2) > 1 then Push M2 vào stack end if

End do

```

- Phân tích độ phức tạp trung bình:

Đặt T(n) số trung bình các phép so sánh để sắp dãy có độ dài n.

Ta có:

$$T(0) = T(1) = 0, \quad T(2) = 1,$$

Dựa trên tính đệ quy của thuật toán với giả định việc chọn phần tử phân hoạch có xác suất đều nhau ta cũng có:

$$T(n) = n-1 + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (T(r-1) + T(n-r))$$

Đặt

$$x_n = \sum_{r=1}^{n-1} T(r)$$

$$\text{Thì } T(n) = x_n - x_{n-1}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = n-1 + (2/n) x_n.$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - \frac{n+2}{n} x_n = n-1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)} x_{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} x_n = \frac{n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n+2} - \frac{2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)} x_n = x_1/2 + \sum_{r=2}^n \left(\frac{3}{r+1} - \frac{2}{r} \right) = x_1/2 + \frac{3}{n+1} - 1 + \sum_{r=3}^n \frac{1}{r}$$

Từ đó suy ra

$$T(n) = -4n + 2(n+1) \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} = -4n + 2(n+1).H_n$$

Vậy độ phức tạp trung bình của thuật toán Quick sort là $O(n \ln(n))$.

Trường hợp xấu nhất:

Khi mảng đã được xếp thứ tự tăng thì ở mỗi bước phân chia, phần tử bé nhất được giữ nguyên chỗ và ta được một mảng con với 1 phần tử ít hơn trước. Do đó cần đến N bước mới chấm dứt thuật toán. Suy ra số phép so sánh là $N(N+1)/2 = O(N^2)$. Đó chính là trường hợp xấu nhất đối với phép so sánh trong khi số phép dời chỗ lại ít nhất và bằng N .

KẾT LUẬN

Qua nội dung tìm hiểu trên đây, bài tiểu luận đạt được mục tiêu đề ra là mở rộng sự hiểu biết về hàm sinh và hàm sinh xác suất cũng như cách ứng dụng vào giải một số bài toán phổ biến bằng các ví dụ. Cùng với một số thuật toán tìm

kiểm, cách phân tích đánh giá độ phức tạp cho ta sự lựa chọn giải pháp tốt nhất cho bài toán ta cần giải quyết.

Do khả năng trong quá trình trao đổi kiến thức còn hạn chế nên bài viết vẫn còn một số thiếu sót nhất định. Hướng nghiên cứu cần mở rộng của bài tìm hiểu là sử dụng ngôn ngữ R để biểu diễn trực quan hơn về phương pháp hàm sinh, hàm sinh xác suất và cài đặt các thuật toán tìm kiếm, sắp xếp sử dụng hàm sinh vì R là ngôn ngữ lập trình hiện đại, được sử dụng rộng rãi trong lĩnh vực xác suất-thống kê, khai phá-phân tích dữ liệu và nhiều lĩnh vực khác./.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, Mc Graw-Hill, 2000.
- [2] Kenneth H. Rosen. *Toán học rời rạc và Ứng dụng trong tin học*, Nhà xuất bản lao động 2010, người dịch Bùi Xuân Toại.
- [3] Mark Allen Weiss, *Data structures and algorithm analysis in Java*, 3rd Edition, Addison-Wesley 2012.
- [4] Srini Devadas and Eric Lehman, *Generating Functions*, Lectures Notes, April 2005.
- [5] Wikipedia: Generating Functions, Probability Generating Functions
- [6] Robert Sedgewick and Kevin Wayne, *Algorithms*, 4th Edition,
- [7] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein, *Introduction to Algorithms*, third edition, The MIT Press 2009.
- [8] Robert Sedgewick, Philippe Flajolet, *An introduction to the analysis of algorithms*, Addison-Wesley 2013.