CHUỖI

CHUỖI SỐ.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

CÁC LOẠI BÀI TOÁN VỀ CHUỖI.

1.1 Tìm số hạng tổng quát.

Dựa vào các số hạng ban đầu, phân tích để tìm ra quy luật và từ đó tìm ra số hạng tổng quát của chuỗi.

Ví dụ 1: Tìm số hạng tổng quát của các chuỗi sau:

a, $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$

b, $\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{7}{8}+\frac{10}{16}+\cdots$

c, $\frac{3!}{2.4}+\frac{5!}{2.4.6}+\frac{7!}{2.4.6.8}+\cdots$

Giải.

a, Tử số là các số tự nhiên lẻ, mẫu số là các số tự nhiên chẵn, tử số kém mẫu số 1 nên phần tử tổng quát là: $u_n = \frac{2n-1}{2n}, với\ n = 1,2,3, \ldots$

b, Tử số lập thành cấp số cộng với công sai là d = 3, do đó số hạng tổng quát của nó là $a_n = a_1 + d(n-1) = 1 + 3(n-1) = 3n-2$, còn mẫu số lập thành cấp số nhân với công bội q = 2, $b_n = 2^n$. Vậy số hạng tổng quát là: $u_n = \frac{3n-2}{2^n}, với\ n = 1,2,3, \ldots$

c, Ta dễ dàng thấy:

$$u_n = \frac{(2n+1)!}{2.(n+1)!}, với\ n = 1,2,3, \ldots$$

1.2 Tìm tổng của chuỗi số hội tụ.

Cách giải.

Chuỗi số chỉ có tổng khi nó hội tụ.

Phương pháp thường dùng là xác định S_n sau đó tìm giới hạn: $\lim_{n\to\infty} S_n$

Ngoài ra có thể tìm bằng cách xác định thong qua tổng của chuỗi hàm (phần này ta sẽ đề cập ở mục chuỗi hàm).

Tìm tổng của các chuỗi sau:(nếu có)

Ví dụ 2:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$$

Giải.

Xét tổng riêng thứ n:

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(2i-3)(2i-1)} = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{2i-3} - \frac{1}{2i-1}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)$$

Suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

Vậy tổng của chuỗi đã cho là: $S = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3:

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Giải.

Xét tổng riêng thứ n:

$$S_n = \sum_{i=4}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=4}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1}$$

Nên

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

Vậy tổng của chuỗi đã cho là: $S = \frac{1}{4}$

Ví dụ 4:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n+2)(2n+4)}$$

Giải.

$$\frac{1}{2n(2n+2)(2n+4)} = \frac{1}{8}\left(\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}\right)$$

Đồng nhất hệ số ta tìm được: $= \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$. thay vào ta có:

$$\frac{1}{2n(2n+2)(2n+4)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{16}\left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i(2i+2)(2i+4)} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) - \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right)\right)$$

$$S_n = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) - \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

Vậy tổng của chuỗi đã cho là: $S = \frac{1}{32}$

Ví dụ 5:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3(n+1)^3}$$

Giải.
Bằng phương pháp phân tích như ví dụ 4 ta có thể tách u_n ra hoặc có thể thực hiện:

$$\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}=\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3}{n^3(n+1)^3}=\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}$$

Nên

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i^3}-\frac{1}{(i+1)^3}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=1$$

Xét sự hội tụ của chuỗi số:

Các chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} au_n$, $(a\neq 0)$ luôn cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Khi xét sự hội tụ của chuỗi số, ta cần lưu ý đến điều kiên cần để chuỗi số hội tụ, tức là từ điều kiện $\lim_{n\to\infty} u_n\neq 0$ thì kết luận chuỗi đã cho phân kỳ, còn nếu $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ thì ta phải tiếp tục xét bằng các tiêu chuẩn khác.

Khi áp dung tiêu chuẩn Cauchy để xét sự hôi tụ của chuỗi số, ta chú ý rằng nếu chỉ ra rằng $\lim_{n\to+\infty}|S_m-S_n|\neq 0$ thì có thể kết luận chuỗi đã cho phân kỳ, còn nếu$\lim_{n\to+\infty}|S_m-S_n|$ thì chuỗi đãcho hội tụ.

Đối với chuỗi số dương có 5 tiêu chuẩn để xét sự hội tụ

Tiêu chuẩn 1.

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$,$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.Nếu $u_n\leq v_n, \forall n\geq n_0$ thì:
Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ phân kỳ.
Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ.

Tiêu chuẩn 2.

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$,$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Đặt $k=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$, nếu $0<k<+\infty$ thì hai chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$,$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ luôn cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chú ý một số nhận xét:
Khi $x\to 0^+$ thì:

$$\mathrm{tg(x)}\sim\sin(x)\sim x;\ln(1+x)\sim x;(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x;e^x-1\sim x;1-\cos(x)\sim\frac{x^2}{2}$$

Khi $x\to+\infty$ thì:

$$\sin(x)\leq x;\ln(x)\leq x^\alpha,(\alpha>0);e^x-1\leq x$$

Nếu $u_n=\frac{Q(n)}{P(n)}$, với $P(n),Q(n)$ là các đa thức theo n thì ta đánh giá

$$u_n\sim\frac{1}{n^\alpha}$$

với $\alpha=\deg(P)-\deg(Q)$.
Có thể áp dụng khai triển Mac Laurin vào để dánh giá các số hạng. Đặc biệt chú ý các khai triển

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\cdots$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,\qquad -\infty<x<\infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Tiêu chuẩn 3 .

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, đặt $d = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, nếu :

$d < 1$ chuỗi đã cho hội tụ.

$d > 1$ chuỗi đã cho phân kỳ.

Tiêu chuẩn 4.

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, đặt $c = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$, nếu :

$c < 1$ chuỗi đã cho hội tụ.

$c > 1$ chuỗi đã cho phân kỳ.

Chú ý :

Nếu $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ($\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$) và $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \forall n \geq n_0$ ($\sqrt[n]{u_n} \geq 1$) thì chuỗi đã cho phân kỳ vì u_n tăng nên $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

Tiêu chuẩn 5.

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, nếu tồn tại hàm $f(x)$ sao cho $u_n = f(n), \forall n \geq n_0$ và $f(x)$ liên tục, đơn điệu giảm trên $(n_0, +\infty)$ thì $\int_{n_0}^{+\infty} \mathrm{f(x)dx}$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Khi ta xét sự hội tụ của một chuỗi có dấu bất kỳ $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, ta có thể xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ bằng các tiêu chuẩn của chuỗi số dương. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ hội tụ thì kết luận chuỗi đã cho $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ còn nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ phân kỳ thì ta chưa kết luận mà phải dùng các tiêu chuẩn khác.

Khi xét sự hội tụ của chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n$, ta xét tiêu chuẩn Leibnitz.

Tiêu chuẩn Leibnitz.

Chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n$ hội tụ nếu u_n đơn điệu giảm và $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Xét sự hội tụ của các chuỗi :

Ví dụ 6 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a} \quad , a > 0.$$

Giải.

Do $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \neq 0$ nên chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 7 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Giải.

Xét $|S_{2n} - S_n| = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \leq n \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |S_{2n} - S_n| \neq 0$, vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 8 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{lnn}{n^3 + n^2 + 2}$$

Giải.

Ta đánh giá: Do $lnn \leq n, \forall n \geq 1$ nên $\frac{lnn}{n^3+n^2+2} \leq \frac{n}{n^3+n^2+2} \leq \frac{1}{n^2}$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo chuẩn 1 thì chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 9:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nlnn}{n^2 - 1}$$

Giải.

Ta có: $\frac{nlnn}{n^2-1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ mà chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 10:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nsin(\frac{(-1)^n}{n^3})$$

Giải.

Đây không là chuỗi số dương nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |nsin\left(\frac{(-1)^n}{n^3}\right)|$ nên ta đánh giá:

Do $\left|sin\left(\frac{(-1)^n}{n^3}\right)\right| \sim \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3}$ nên $|nsin\left(\frac{(-1)^n}{n^3}\right)| \sim \frac{1}{n^2}$, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |nsin\left(\frac{(-1)^n}{n^3}\right)|$ hội tụ và suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} nsin(\frac{(-1)^n}{n^3})$ hội tụ.

Ví dụ 11:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Giải.

Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert ta xét:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 12:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} \frac{1}{2^n}$$

Giải.

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy ta xét:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n\frac{1}{2}=\frac{e}{2}>1$$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 13:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}e^n$$

Giải.

Xét chuỗi chuỗi dương : $\sum_{n=1}^{+\infty}|(-1)^n\frac{n!}{n^n}e^n|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}e^n=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$. Nếu áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert thì $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ chưa thể kết luận nhưng ta có thể dánh giá :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=e.(\frac{n}{n+1})^n=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

Nhưng do dãy $(1+\frac{1}{n})^n$ đơn điệu tăng dần đến e nên

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}\geq 1\Rightarrow u_{n+1}\geq u_n,\forall n$$

nên u_n tăng nên $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(-1)^nu_n\neq 0$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}e^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nu_n$ phân kỳ.

Ví dụ 14:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin(\frac{\pi}{3^n})$$

Giải.

Do $\sin(\frac{\pi}{3^n})\sim\frac{\pi}{3^n}$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{3^n}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}|(-1)^n\sin(\frac{\pi}{3^n})|$ suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Hơn thế do chuỗi trị tuyệt đối $\sum_{n=1}^{+\infty}|(-1)^n\sin(\frac{\pi}{3^n})|$ hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 15:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{lnn}{n}$$

Giải.

Xét hàm số $f(x)=\frac{lnx}{x},\Rightarrow f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2},\forall x\geq 3$ nên $f(x)$ đơn điệu giảm $,\forall x\geq 3$ suy ra $\frac{lnn}{n}$ đơn điệu giảm $\forall n\geq 3$ và $\lim_{n\to+\infty}\frac{lnn}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ (Áp dụng L'Hospitale)

Vậy theo tiêu chuẩn Leibnitz chuỗi đã cho hội tụ.

Do $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{lnn}{n}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{lnn}{n}>\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ nên chuỗi đã cho bán hội tụ.

CHUỖI HÀM

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Có tổng riêng thứ n.

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$$

2.1 Hội tụ đều.

Cách giải.

Sự hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ trên tập X chính là sự hội tụ của dãy hàm $\{S_n(x)\}$ trên tập X, do vậy ta có thể dùng định nghĩa sự hội tụ đều của dãy hàm để xét trực tiếp.

Định nghĩa sự hội tụ của dãy hàm.

Dãy hàm số $\{S_n(x)\}$ được gọi là *hội tụ đều trên X tới hàm số* $S(x)$ ($S_n(x) \rightrightarrows S(x)$) nếu với mọi số $\varepsilon > 0$, tìm được một số $n_0(\varepsilon) \in N, \forall n \geq n_0, \forall x \in X$ sao cho $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Điều kiện trên tương đương với điều kiện $\sup_X |S_n(x) - S(x)| \to 0, (n \to +\infty)$.

Chú ý: Phủ định của định nghĩa sự hội tụ đều của dãy hàm là:

Dãy hàm số $\{S_n(x)\}$ *không hội tụ đều trên X tới hàm số* $S(x)$ nếu với tồn tại $\varepsilon > 0$, tìm được $x_0 \in X$ $\forall n_0(\varepsilon, x_0) \in N, \exists n \geq n_0$ sao cho $|S_n(x_0) - S(x_0)| \geq \varepsilon$.

Hoặc ta có thể áp dụng sự hội tụ đều của chuỗi hàm liên tục là: nếu $u_n(x)$ liên tục trên X và $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ trên X thì $S(x)$ liên tục trên X.

Từ đó suy ra phủ định của tính chất trên là: nếu $u_n(x)$ liên tục trên X và $S_n(x) \to S(x)$ trên X và $S(x)$ không liên tục trên X thì $S_n(x)$ không hội tụ đề đến $S(x)$ trên X.

Khi ta chưa biết $S(x)$ thì có thể áp dụng định lý Cauchy hoặc định lý Weierstrass để đánh giá sự hội tụ đều của chuỗi hàm.

Định lý Cauchy.

Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên X* khi và chỉ khi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon): \forall m, n \geq n_0$ thì $|S_m(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon$. Điều kiện trên tương đương với $\sup_X |S_m(x) - S_n(x)| \to 0, (m, n \to +\infty)$

Vậy, nếu ta chỉ ra rằng $\exists x_0 \in X, \forall n_0 > 0, \exists m, n \geq 0$ sao cho $|S_m(x_0) - S_n(x_0)| \nrightarrow 0, , (m, n \to +\infty)$ thì chuỗi đã cho không hội tụ đều trên X.

Tiêu chuẩn Weierstrass:

Nếu $\exists n_0 >: \forall n \geq n_0$ thì $|u_n(x)| \leq a_n, \forall x \in X$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên X.

Ví dụ : Cho chuỗi hàm:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-x)x^n$$

Xét tính hội tụ đều trên [0,1]

Giải.

Ta xét tổng riêng thứ n: $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (1-x)x^i = (1-x)(1+x+\cdots+x^n)$

$$S_n(x) = \begin{cases} 1 - x^{n+1}, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$S_n(x) \to S(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, (n \to +\infty)$$

Do $u_n(x) = (1-x)x^n$ là các hàm liên tục và $S_n(x) \to S(x)$ và $S(x)$ không liên tục nên $S_n(x)$ không hội tụ đều đến $S(x)$ trên $[0,1]$ nên chuỗi đã cho hội tụ đều trên $[0,1]$.

Hoặc ta có thể lập luận như sau: Lấy $x = 1 - \frac{1}{n+1} \in [0,1]$, xét hiệu $|S_n(x) - S(x)| = (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} \to \frac{1}{e} \neq 0 (n \to \infty)$ nên chuỗi đã cho hội tụ đều.

Nếu $x \in [0,a], 0 < a < 1$ thì $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ vì $(1-x)x^n \le a^n$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi đã cho hội tụ đều trên $[0,1]$.

Hoặc ta có thể áp dụng phủ định của định lý Cauchy để đánh giá

Đặt $f(x) = S_{2n}(x) - S_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1}, x \in [0,1]$

$$f'(x) = (2n+1)x^{2n} - (n+1)x^n = x^n[(2n+1)x^n - (n+1)]$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}, f\left(\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = -\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \frac{n}{2n+1}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$		1
$f'(x)$			0		
$f(x)$	0	$\searrow$	$f\left(\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$	$\nearrow$	0

$$\sup_{[0,1]}|fx)| = \left|f\left(\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right| = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{4}, (n \to +\infty)$$

Ví dụ: Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm sau trên R.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Giải.

Do $u_n(x) = \frac{x^n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}, \forall x \in [-1,1]$, chuỗi Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ hội tụ đều trên $[-1,1]$.

Nếu $|x| \ge 1$ thì $\lim_{n\to+\infty} |u_n(x)| = \infty \neq 0$ chuỗi đã cho phân kỳ.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ đều trên $[-1,1]$.

Ví dụ: Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm sau trên R.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{nx}{2n^2+1}\right)$$

Giải.

Với mỗi x cố định, để chuỗi đang xét là chuỗi đan dấu thì $\sin\left(\frac{nx}{2n^2+1}\right) \ge 0$. Do vậy ta xét:

Với $x \in [0, A], A > 0$ thì đây là chuỗi đan dấu có $\sin\left(\frac{nx}{2n^2+1}\right)$ đơn điệu giảm (do $\frac{nx}{2n^2+1}$ đơn điệu giảm trong $(0, \frac{\pi}{2})$) và $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{nx}{2n^2+1}\right) = 0$ nên theo tiêu chuẩn Leibnitz chuỗi đã cho hội tụ. Gọi $S(x)$ là tổng, khi đó ta có:

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^i u_i\right| \le u_n = \sin\left(\frac{nx}{2n^2+1}\right) \le \frac{nx}{2n^2+1} \le \frac{nA}{2n^2} = \frac{A}{2n}$$

$$|S_n(x) - S(x)| \le \frac{A}{2n} \to 0, (n \to +\infty), \forall x \in [0, A]$$

Nên chuỗi đã cho hội tụ đều trên $[0, A], A > 0$.

Nếu $x > A > 0$ thì chuỗi đang xét không hội tụ đều vì:

$$|S_n(n\pi) - S_{n-1}(n\pi)| = \sin\left(\frac{n^2\pi}{2n^2+1}\right) \to 1 \ne 0, (n \to +\infty)$$

Với $x \in [-A, 0], A > 0$ thì ta biến đổi $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{nx}{2n^2+1}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{n|x|}{2n^2+1}\right)$, với $|x| \in [0, A], A > 0$ nên theo chứng minh thì chuỗi hội tụ đều.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ đều trên $[-A, A], A > 0$ hữu hạn.

2.2 Miền hội tụ của chuỗi hàm:

a, Miền hội tụ của chuỗi bất kỳ.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Cách giải.

- Trước tiên ta tìm miền xác định D của hàm $u_n(x)$
- Tìm $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |\varphi(x)| (\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = |\varphi(x)|)$
- Giải bất phương trình $|\varphi(x)| < 1$ ta tìm được tập nghiệm A
- Xét tính hội tụ của chuỗi số tại các điểm biên (Điểm biên là nghiệm của phương trình $u_n(x) = 0$)
- Miền hội tụ của chuỗi chính là các điểm thuộc giao của D, A và hợp với các điểm hội tụ trên biên.

b, Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

Cách giải.

Do các phần tử của chuỗi lũy thừa có tập xác định là R và miền xác định có tính "đối xứng" chuỗi nên:

- Trước hết ta tìm bán kính hội tụ R.

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & ,0 < \rho < +\infty \\ 0 & \rho = +\infty \\ +\infty & \rho = 0 \end{cases} \text{với } \rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, (\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|})$$

- Xét sự hội tụ của chuỗi tại 2 điểm biên $x = \pm R$
- Kết luận miền hội tụ chuỗi là khoảng $(-R, R)$ hợp với các điểm biên hội tụ.

Chú ý:

Nếu chuỗi hàm dạng $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n[f(x)]^n$ ta đặt $y = f(x)$ thì chuỗi đã cho đưa về được chuỗi lũy thừa. Giả sử tìm được miền hội tụ $y \in [a, b]$. Giải hệ bất phương trình : $a \le f(x) \le b$ ta tìm được tập nghiệm X chính là miền hội tụ của chuỗi ban đầu.

Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Ví dụ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(lnx)^n}$$

Giải.

Hàm $u_n(x) = \frac{1}{n(lnx)^n}$ xác định $\forall x \in (0, +\infty)$.

Ta xét $\lim_{n\to+\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \lim_{n\to+\infty} |\frac{1}{(n+1)(lnx)^{n+1}} \frac{n(lnx)^n}{1}| = \frac{1}{|lnx|} < 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > e \\ 0 < x < \frac{1}{e} \end{array}\right.$

Tại $x = e$ chuỗi đã cho là chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ nên phân kỳ.

Tại $x = \frac{1}{e}$ chuỗi đã cho là $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy miền hội tụ là: $\left(0, \frac{1}{e}\right] \cup (e, +\infty)$

Hoặc ta có thể đưa chuỗi đã cho về chuỗi lũy thừa bằng cách đặt: $y = \frac{1}{lnx}$. Khi đó, chuỗi đã cho có dạng:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} y^n$$

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to+\infty} |\frac{1}{n+1} \frac{n}{1}| = 1$$

Suy ra bán kính hội tụ của chuỗi là R = 1.

Xét với y = 1 ta có chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ nên phân kỳ.

Xét với y = -1 ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy chuỗi đã cho có miền hội tụ là $\forall y \in [-1, 1) \Rightarrow -1 \le \frac{1}{lnx} < 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > e \\ 0 < x \le \frac{1}{e} \end{array}\right.$

Vậy miền hội tụ của chuỗi là : $\left(0, \frac{1}{e}\right] \cup (e, +\infty)$

Ví dụ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n} x^{2n} \sin(x + n\pi)$$

Giải.

Với $x = k\pi$ thì $u_n(k\pi) = 0$ nên chuỗi đã cho hội tụ.

Với $x \ne k\pi$, chuỗi có dạng: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n} x^{2n} \sin(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} |\frac{4n}{n+1} x^2| = 4x^2 < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Tại $x = \pm\frac{1}{2}$ ta có chuỗi $\sin(\pm\frac{1}{2})\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, đây là chuỗi đan dấu hội tụ (do $\frac{1}{n}$ đơn điệu giảm và dần về 0).

Vậy chuỗi đã cho hội tụ trên đoạn [-1,1] và các điểm $x = k\pi, k \in Z$

2.3 Tìm tổng của một chuỗi hàm va áp dụng tìm tổng của một chuỗi số.

a, Tổng của một chuỗi hàm.

Tổng của chuỗi hàm chỉ có nghĩa trên miền hội tụ nên trước khi đi tìm tổng, ta phải xác định được miền hội tụ của chuỗi lũy thừa. Ta thường sử dụng các phương pháp sau:

- Phân tích thành những chuỗi dễ tìm tổng.

Chú ý về việc đổi chỉ số của chuỗi:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n-1} = \sum_{m=p}^{+\infty} u_{m-p}$$

Ví dụ: Tìm tổng chuỗi hàm:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{(2n)!!} x^{n+1}$$

Chú ý: $(2n)!! = 2.4.6 \ldots .2n$

Giải.

Do $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n-1}\frac{1}{4n}\right| = 0$ nên miền hội tụ của chuỗi đã cho là R.

$\forall x \in R$ đặt:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{(2n)!!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n n!} x^{n+1} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$$

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n + x$$

$$S(x) = \frac{x^2}{2}e^{\frac{x}{2}} - xe^{\frac{x}{2}} + x$$

- Dùng đạo hàm và tích phân để tìm tổng.

Chú ý: Khi tìm tổng của chuỗi hàm dạng:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(n)x^{Q(x)}$$

Ta biến đổi $Q(x) = P(x) - 1 + c$, chuỗi được biến đổi về dạng :

$$x^c\sum_{n=1}^{+\infty} P(n)x^{P(n)-1} = x^c\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{P(n)})' = x^c(\sum_{n=1} x^{P(n)})'$$

Khi tìm tổng của chuỗi hàm dạng:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{Q(x)}}{R(x)}$$

Ta biến đổi $Q(x) = R(x) + c$, chuỗi được biến đổi về dạng :

$$x^c\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{R(x)}}{R(x)} = x^c\sum_{n=1}^{+\infty}\int x^{R(x)}dx = x^c\int\sum_{n=1}^{+\infty} x^{R(x)}\,dx$$

Ví dụ: Tìm tổng chuỗi hàm:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+5}}{3^{2n}(2n+1)}$$

Giải.

Do $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1(x)}}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n+1}{9(2n+3)}x^2\right| = \frac{x^2}{9} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ và tại $x = \pm\frac{1}{3}$ chuỗi phân kỳ nên miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. $\forall x \in (-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ đặt:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+5}}{3^{2n}(2n+1)} = x^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3^{2n}(2n+1)} = x^4.f(x)$$

Khi đó, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{x^2}{9})^n = \frac{1}{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{9}{9-x^2}$ nên $f(x) = \int_0^x f'(t)dt = \frac{3}{2}\ln|\frac{3+x}{3-x}|$

Vậy tổng của chuỗi đã cho là:

$$S(x) = x^4.f(x) = \frac{3}{2}x^4\ln|\frac{3+x}{3-x}|$$

Ví dụ: Tìm tổng chuỗi hàm:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n+1)x^{n-2}$$

Giải.

Dễ thấy miền hội tụ của chuỗi đã cho lũy thừa là (-1,1)

Với $x \neq 0, x \in (-1,1)$ ta có:

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n+1)x^{n-2} = x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1} = x\sum_{n=2}^{+\infty}((n+1)x^n)' = x\sum_{n=2}^{+\infty}(x^{n+1})''$$

$$S(x) = x\left(\sum_{n=2}^{+\infty} x^{n+1}\right)'' = x\left(x^3\sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-1}\right)'' = x\left(\frac{x^3}{1-x}\right)''$$

$$S(x) = 2\frac{x^2-3x+3}{(1-x)^3}$$

Với $x = 0 \Rightarrow S(x) = 6$ vậy:

$$S(x) = \begin{cases} 2\dfrac{x^2-3x+3}{(1-x)^3}, & |x| < 0, x \neq 0 \\ 6, & x = 0 \end{cases}$$

Ví dụ: Tìm tổng chuỗi hàm:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1+2n}{n+n^2})x^n$$

Giải.

Miền hội tụ của chuỗi hàm là (-1, 1]

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1+2n}{n+n^2})x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})x^n$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}x^n$$

Với $x\neq 0, x\in(-1,1]$ ta có:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x x^{n-1}dx+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x x^n dx$$

$$S(x)=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}\,dx+\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^n\,dx$$

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{x}\int_0^x(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n-1)dx$$

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{x}\int_0^x(\frac{1}{1+x}-1)dx$$

$$S(x)=\ln(1+x)+\int_0^x(\frac{1}{1+x})dx$$

$$S(x)=\ln(1+x)+\ln(1+x)=2\ln(1+x)$$

Ví dụ: Tìm tổng chuỗi hàm:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$$

Giải.

Miền hội tụ của chuỗi hàm này là $(0,+\infty)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}-\int_0^x e^{-nx}dx=-\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}\,dx$$

$$S(x)=-\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n\,dx=-\int_0^x\frac{1}{1-e^{-x}}dx=\int_0^x\frac{1}{e^{-x}-1}dx$$

$$S(x)=-\int_0^x\frac{e^x}{e^x-1}dx=-\ln(e^x-1)$$

- Đưa về nghiệm của phương trình vi phân:

Ví dụ: Tìm tổng chuỗi hàm:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(2n)!!}$$

Giải.

Miền hội tụ của chuỗi hàm này là $(-\infty,+\infty)$

$$S(x)=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n n!}=xf(x)$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n(n-1)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = \frac{1}{2}f(x)$$

Vậy $f'(x) = \frac{1}{2}f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln\big(f(x)\big) = \frac{1}{2}x + C$

Do $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$ nên $f(0) = 1 \Rightarrow \ln\big(f(0)\big) = 0 = C$

Suy ra:

$$\ln\big(f(x)\big) = \frac{1}{2}x$$

Hay

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$S(x) = xe^{\frac{1}{2}x}$$

Ta cũng có thể thực hiện bằng cách:

$$S(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{x}{2})^n}{n!} = xe^{\frac{x}{2}}$$

Ví dụ: Tìm tổng chuỗi hàm:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n , \qquad với\ a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{n+1}$$

Giải.

$$a_n = (n+1)a_{n+1} - a_{n-1}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n$$

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1}x^{n+1})' - x\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1}$$

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1}x^{n+1} + a_0 + a_1x - a_0 - a_1x)' - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$S(x) = a_0 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' - a_1 - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$S(x) = S'(x) - xS(x) \Leftrightarrow S'(x) = (1+x)S(x) \Rightarrow \frac{S'(x)}{S(x)} = (1+x)$$

$$S(x) = Ce^{\int(1+x)dx} = Ce^{x+\frac{x^2}{2}}$$

Do $S(o) = a_0 = 1 = C$ nên:

$$S(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$$