№1

1) для $\forall \vec{x} \in X$: $\vec{x} = P_A \cdot \vec{x} + P_{A\perp} \vec{x}$, где $P_A, P_{A\perp}$ - проекторы на подпр-во $A \subset X$ и ортогональное ему дополнение $A\perp$ =>

$$\Rightarrow (P_A\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (P_A\vec{x}_1, P_A\vec{x}_2 + P_{A\perp}\vec{x}_2) = (P_A\vec{x}_1, P_A\vec{x}_2) + \underset{0}{\underbrace{(P_A\vec{x}_1, P_{A\perp}\vec{x}_2)}} = \underset{0}{\underbrace{(P_{A\perp}\vec{x}_1, P_A\vec{x}_2)}} + (P_A\vec{x}_1, P_A\vec{x}_2) = (\vec{x}_1, P_A\vec{x}_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P_A\vec{x}_1, x_2) = (\vec{x}_1, P_A\vec{x}_2) \Rightarrow \underline{P_A = P_A^T}$$ (т.к. в общем случае ~~(для …)~~ $(A\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, A^T\vec{x}_2)$) ■

2) $$(I - 2P)\cdot(I-2P)^+ = I\cancel{I^+} - 2PI^+ - 2P^+I + 4PP^+ = I - 2PI - 2PI + 4P^2 = I - 4P + 4P = I$$ (рассмотрели случай поля $\mathbb{R}$)

либо: $$(I-2P)(I-2P)^+ = I\cdot I^+ - 2PI^+ - 2P^+I + 4PP^+ =$$

$$= I - 2P - 2P^+ + 4PP^+ \quad \left\{ \begin{array}{l} PP^+ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \dots \\ \overline{a_{12}} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots & \\ \vdots & \\ \vdots & \end{pmatrix} \Rightarrow \\ P + P^+ = 2\,\mathrm{Re}\,P \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow I - 4\,\mathrm{Re}\,P + 4|\overset{P}{\overset{\shortparallel}{P}}|^2 = I - 4P + 4P = \underline{\underline{I}}$$ ■

т.к. $(I - 2P)$ унитарна, то её действие эквивалентно замене одного ортонормального базиса на другой ортонормальный;

пусть P - проектор на подпр-во, натянутое на базисн. вектор $\vec{e}_1$,

тогда $(I-2P): \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, .. \vec{e}_N\} \to \{-\vec{e}_1, \vec{e}_2, .., \vec{e}_N\}$ (все компоненты вектора, кроме одной, сохраняются, одна мен-ся на противоположную по знаку)