1. Problem Description

Given a rope whose length is n, please cut the rope to m parts to get the maximum product of the length of each part $\prod_{l_1+l_2+......+l_m=n} l_1 * l_2 * .....l_m$.

For example, if a rope with length 8, when we cut it to 2, 3, 3, we can get the maximum product 18.

2. pseudo-code

Function MaxSplit(n)

    if (n==1)

        return 1

    else if (n%3==1)

        t=n/3

        return $3^{t-1}2^{\left\lfloor \frac{n-3(t-1)}{2} \right\rfloor}$

    else

        t=n/3

        return $3^{t}2^{\left\lfloor \frac{n-3t}{2} \right\rfloor}$

    end if

end Function

3.Prove

通过分析，可以得到如下结论：

（1）当$\prod_{i=1}^{m} L(i)$最大时，$L(i)$一定为 1,2 或 3。

证明：假设存在$L(i)=t(t\geq 4)$，则此时，$2(t-2)=2t-4\geq t$恒成立，即：此时一定能够将$L(i)$再次切分为$t',t''(t'+t''==t)$，使得$t'\times t''\geq t$。

（2）当$n\geq 2$时，设 t=$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

①当 n%3==1 时（即：$n-3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor=1$时），最大值为：

$$Max(\prod_{i=1}^{n} L(i))=3^{t-1}2^{\left\lfloor \frac{n-3(t-1)}{2} \right\rfloor} \quad \text{...(1)}$$

②否则，

$$Max(\prod_{i=1}^{n} L(i)) = 3^{t} 2^{\left\lfloor \frac{n-3t}{2} \right\rfloor} \text{..} (2)$$

证明：

首先，不妨设一个基本值，即：

$BaseLine(\prod_{i=1}^{n} L(i)) = 3^{t} 2^{\left\lfloor \frac{n-3t}{2} \right\rfloor}$；此时，3 的个数已经达到最大，因此，不可能让 t 再增加；于是，下面我们试图找出一个正整数 m，使得:

$$BaseLine(\prod_{i=1}^{n} L(i)) < 3^{t-m} 2^{\left\lfloor \frac{n-3(t-m)}{2} \right\rfloor}$$

由于 $3^{t-m} 2^{\left\lfloor \frac{n-3(t-m)}{2} \right\rfloor} = 3^{t-m} 2^{\left\lfloor \frac{n-3t}{2} + \frac{3m}{2} \right\rfloor}$，接下来开始分类讨论：

①当 $n-3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \neq 1$ 时：

$$3^{t-m} 2^{\left\lfloor \frac{n-3(t-m)}{2} \right\rfloor} = 3^{t-m} 2^{\left\lfloor \frac{n-3t}{2} + \frac{3m}{2} \right\rfloor}$$

$$= \text{Baseline}*(\frac{2^{\left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor}}{3^{m}}) \le \text{Baseline}*(\frac{2^{\frac{3m}{2}}}{3^{m}}) = \text{Baseline}*(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3})^{m}$$

由于 $(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3})^{m} \approx (0.9344)^{m} < 1$，此时，$BaseLine(\prod_{i=1}^{n} L(i))$ 就是最大值。

②当 $n-3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = 1$ 时：

必定存在一个奇数 m（比如 m=1），使得

$$3^{t-m} 2^{\left\lfloor \frac{n-3(t-m)}{2} \right\rfloor} = 3^{t-m} 2^{\left\lfloor \frac{n-3t}{2} + \frac{3m}{2} \right\rfloor}$$

$$= \text{Baseline}*(\frac{2^{\left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor + 1}}{3^{m}}) = \text{Baseline}*(\frac{2^{\frac{3m+1}{2}}}{3^{m}}) \ge \text{Baseline}$$

于是，此时，Baseline 改成：

$$BaseLine(\prod_{i=1}^{n} L(i)) = 3^{t-1} 2^{\left\lfloor \frac{n-3(t-1)}{2} \right\rfloor}$$

现在，我们试图寻找一个整数 m,使得

$$BaseLine(\prod_{i=1}^{n} L(i)) < 3^{t-1-m} 2^{\left\lfloor \frac{n-3(t-1-m)}{2} \right\rfloor}$$

由于 $n-3t+3=4$，于是：

$$3^{\text{t-m-1}}2^{\left\lfloor \frac{n-3(t-m\text{-}1)}{2} \right\rfloor}=3^{\text{t-m}}2^{\left\lfloor \frac{n-3t+3}{2}+\frac{3m}{2} \right\rfloor}$$

$$=\text{Baseline*}(\frac{2^{\left\lfloor \frac{3m}{2} \right\rfloor}}{3^m}) \le \text{Baseline*}(\frac{2^{\frac{3m}{2}}}{3^m}) = \text{Baseline*}(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3})^m$$

于是，可得此时 $B\text{ase}Line(\prod_{i=1}^{n} L(i)) = 3^{\text{t-1}}2^{\left\lfloor \frac{n-3(t-1)}{2} \right\rfloor}$ 就是最大值。

综上，结论（2）得证。