

算法设计与分析-课堂小测试

考试方式：在线闭卷 测试日期 2022 年 4 月 27 日 教师 张胜

系（专业） 年级 班级

学号 姓名 成绩

题号	一	二	三	四	五	六				
分数										

得分 1、（本题满分 15 分）

给定 2 张 5 分面值的邮票和充分多张 3 分面值的邮票。给定正整数邮资值 N 。

- 请设计一个算法将任意输入的邮资 N 兑换成邮票(或者判断不可能完成兑换)。
- 请用归纳法证明你所设计算法的正确性。

得分	
----	--

2、 (本题满分 20 分)

(a) 已知某序列满足如下条件: $F(0)=0; F(1)=1; F(2)=1$; 当 $n>2$ 时, 有 $F(n)=F(n-1)+F(n-2)+F(n-3)$ 。请证明: $F(n)$ 为偶数当且仅当 n 或者 $n+1$ 能被 4 整除。

(b) 考虑下述有限制约束的汉诺塔问题变形: 三个柱子编号为 A, B 和 C, 你的任务是将 N 个大小不同的圆盘从 A 移到 B 上, 且在移动过程中大圆盘不能够出现在小圆盘之上。一个额外的限制是, 圆盘不能在 A 和 B 之间直接移动, 也就是说, 任何一次圆盘的移动必须涉及到 C。请设计一个算法, 并给出复杂度分析。

得分	
----	--

3、(本题满分 15 分)

已知大小为 n 的数组 $A[1 \cdots n]$ 中至多有 2 个逆序对。(如果 $i < j$ 且 $A[i] > A[j]$, 则称 (i, j) 为一个逆序对。)

(a) 证明: 若 (i, j) 为逆序对, 则 $j - i \leq 2$ 。

(b) 设计一个算法将数组中的元素排序。复杂度要求: 该排序算法在最坏情况下的比较次数不超过 n 。请证明算法的正确性。

提示: 依据(a)中结论, 枚举并分析不超过 2 个逆序对的所有可能情况: 逆序对所涉及的元素个数及元素间的大小关系。

得分	
----	--

4、(本题满分 15 分)

如果一个数组 $A[1..2n+1]$ ，满足 $A[1] < A[2] > A[3] < A[4] > \dots A[2n] > A[2n+1]$ ，我们称之为“蛇形”的。给定数组 $B[1..2n+1]$ ，其中元素各不相同，现在需要将它变成蛇形的。你只能通过元素间的大小比较来调整数组的形态。

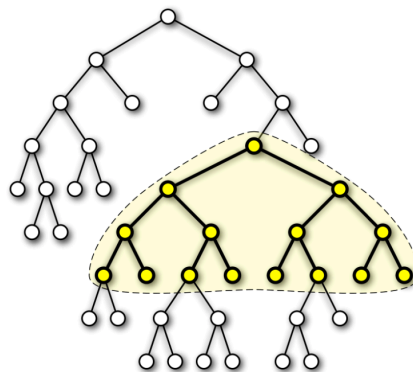
- 1) 请设计一个 $O(n \log n)$ 的算法。
- 2) 请设计一个 $O(n)$ 的算法。

得分	
----	--

5、(本题满分 15 分)

我们称一个二叉树是完美的，如果它的节点要么有 2 个子节点，要么没有子节点，并且所有叶节点具有相同的深度。给定一个 n 个节点的任意二叉树，请设计一个递归算法，求出它的最大完美子树，并分析算法的最坏情况时间复杂度。

(注：算法的输入是一个指向根节点的指针。你的算法应该返回最大完美子树根节点的指针，以及该完美子树的深度。如果最大完美子树不唯一，你只需要找出其中任意一个。)



得分	
----	--

6、(本题满分 20 分)

请设计一个数据结构以实现集合S用来存放若干个不同的整数，并且支持下面两个操作：

- INSERT(x,S): 将整数x插入到S中。
 - REMOVE-HALF(S): 将S中最小的 $\lfloor k/2 \rfloor$ 个元素从S中删除 (k为删除前S中元素的个数)。
- a) 请给出集合S及其操作的算法实现，并分别分析两个操作的最坏情况时间复杂度（你可以假设所有可能输入的元素均不会相同）。
- b) 假设开始S为空，后续对S执行了任意n个操作。请使用平摊分析计算这n个操作的总时间复杂度的一个上界。