Statystyka Stosowana raport 2

Adam Wrzesiński, Joanna Kołaczek

18.07.2022

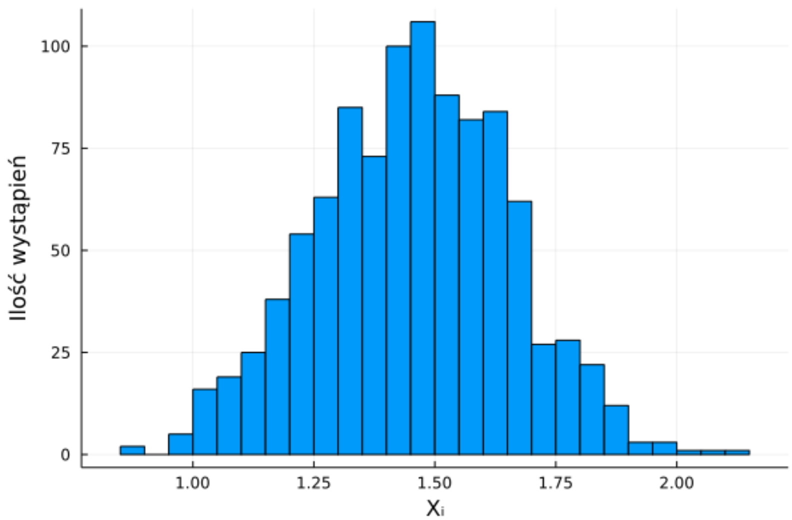
Spis treści

Wstęp

Niniejszy raport powstał na potrzeby realizacji laboratorium ze Statystyki Stosowanej, prowadzonych przez dr inż. Aleksandrę Grzesiek, do wykładu dr hab. inż. Krzysztofa Burneckiego. Będziemy testować hipotezy statystyczne dla wartości średniej i wariancji w rodzinie rozkładów normalnych. Zobrazujemy także obszary krytyczne, wyznaczymy p-wartości oraz prawdopodobieństwo wystąpienia błędów I i II rodzaju. Życzymy miłej lektury.

Zadanie 1

Dysponujemy próbą danych z rozkładu $N(\mu,0.2)$ [1].



Rysunek 1: Histogram

Nasza hipoteza zerowa to $H_0 : \mu_0 = 1.5$. Statystykę testową wyznaczamy ze wzoru :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

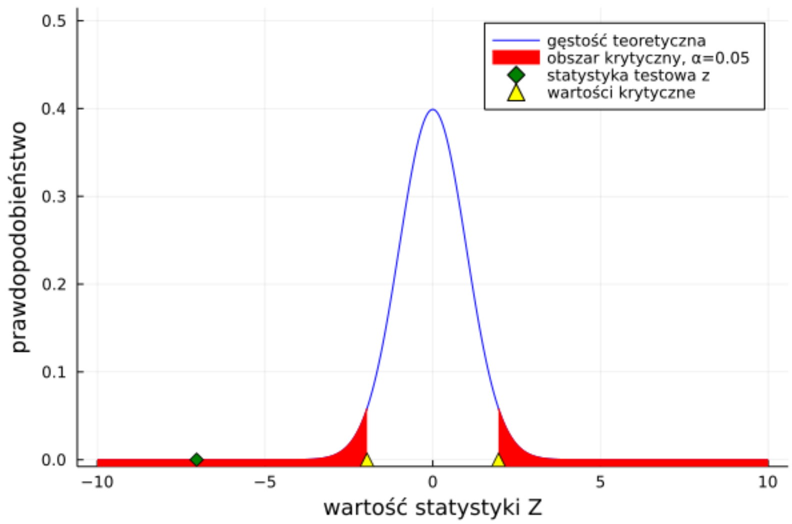
Jeśli H_0 jest prawdziwa to $Z \sim N(0,1)$. Aby obliczyć średnią $\bar{X}$ użyjemy wzoru:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

W naszym przypadku $\bar{X} = 1.455$, $z = -7.041$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ weryfikujemy kolejne hipotezy alternatywne H_1:

$\mu \neq 1.5$

- Obszar krytyczny $c = \{x : x \leq -z_{1-\alpha/2} \vee x \geq z_{1-\alpha/2}\}$.
- p-wartość $p = 2P_{H_0}(Z \geq |z|)$

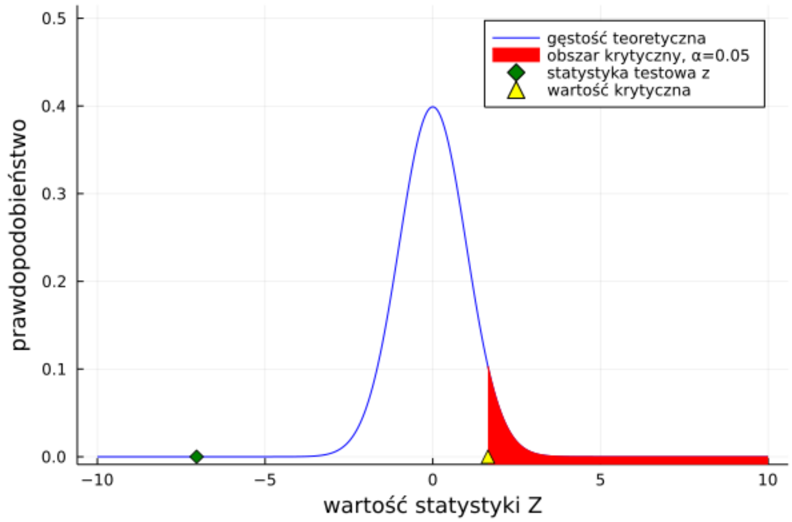


Rysunek 2

W naszym przypadku $c = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty)$ oraz $p = 1.9 \cdot 10^{-12}$.
Zaznaczamy na wykresie [2] c oraz statystykę z. Ponieważ statystyka z znalazła się w obszarze krytycznym możemy przyjąć naszą hipotezę alternatywną $H_1 : \mu \neq 1.5$. Ponadto p-wartość jest bardzo mała - prawie zawsze odrzucimy hipotezę zerową.

$\mu > 1.5$

- Obszar krytyczny $c = \{x : x \geq z_{1-\alpha}\}$.
- p-wartość $p = P_{H_0}(Z \geq z)$

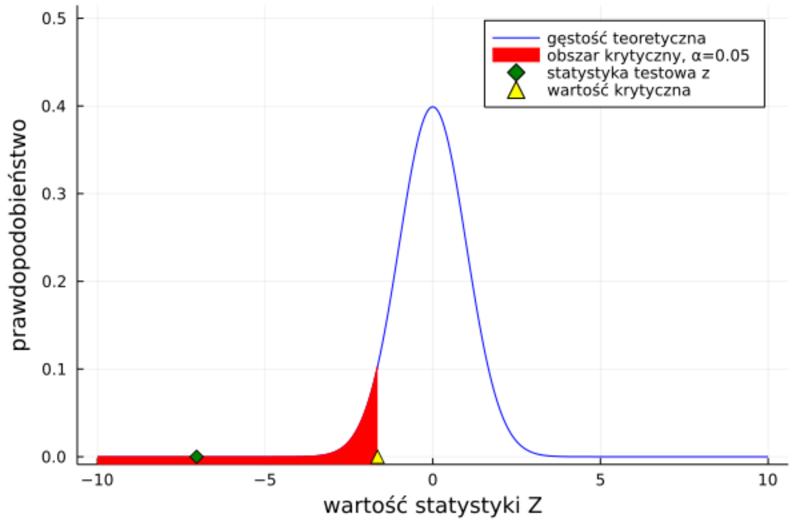


Rysunek 3

W naszym przypadku $c = (1.64,\infty)$ oraz $p = 0.999$.
Zaznaczamy na wykresie [3] c oraz statystykę z. Ponieważ statystyka z znalazła się poza obszarem krytycznym odrzucamy hipotezę alternatywną, duża p-wartość również wskazuje na to, że nie możemy odrzucić hipotezy zerowej.

$\mu < 1.5$

- Obszar krytyczny $c = \{x : x \leq -z_{1-\alpha}\}$.
- p-wartość $p = P_{H_0}(Z \leq z)$

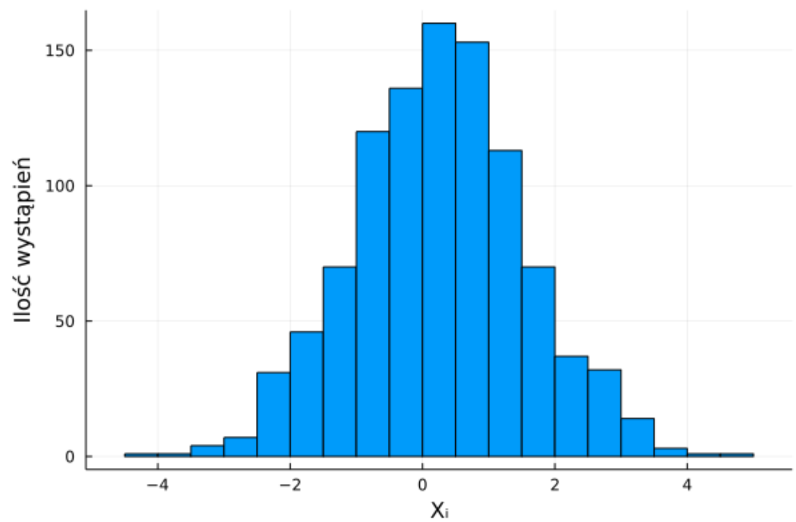


Rysunek 4

W naszym przypadku $c = (-\infty, -1.64)$ oraz $p = 9.51 \cdot 10^{-13}$.
Zaznaczamy na wykresie [4] c oraz statystykę z. Ponieważ statystyka z znalazła się w obszarze krytycznym możemy przyjąć naszą hipotezę alternatywną $H_1 : \mu < 1.5$. Ponadto p-wartość jest bardzo mała - prawie zawsze odrzucimy hipotezę zerową.

Zadanie 2

Dysponujemy próbą danych z rozkładu $N(0.2,\sigma^2)$ [5].



Rysunek 5: Histogram

Nasza hipoteza zerowa to $H_0 : \sigma_0^2 = 1.5$. Statystykę testową obliczamy ze wzoru:

$$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

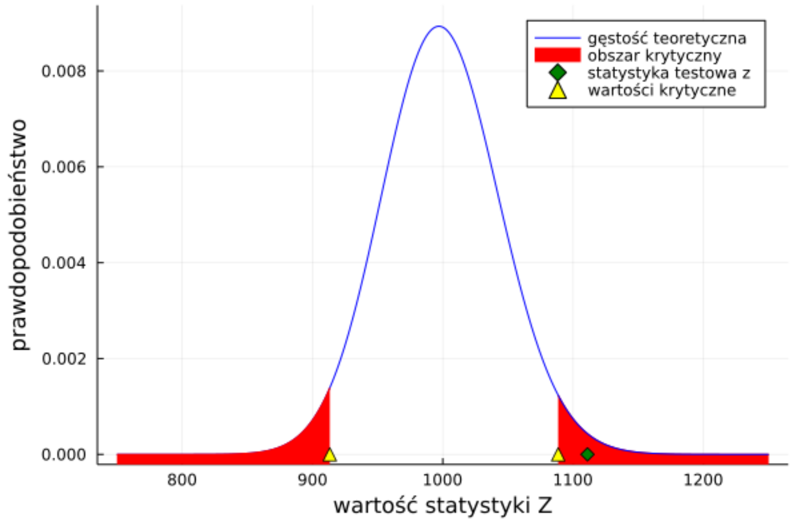
gdzie wariancja:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

W naszym przypadku $S^2 = 1.668$, $z = 1110.968$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ weryfikujemy kolejne hipotezy alternatywne H_1:

$\sigma^2 \neq 1.5$

- Obszar krytyczny $c = \{x : x^2 \leq \chi^2_{\alpha/2,n-1} \vee x^2 \geq \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\}$.
- p-wartość $p = 2min(P_{H_0}(Z \leq z), P_{H_0}(Z \geq z))$

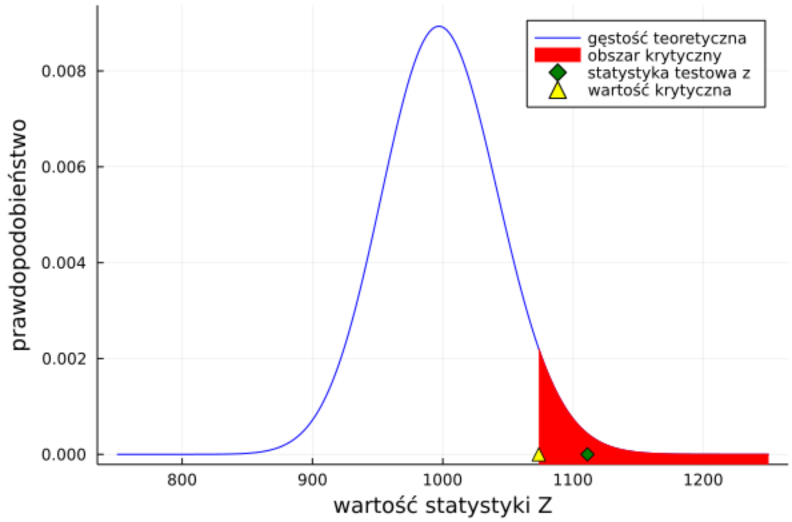


Rysunek 6

W naszym przypadku $c = [0, 913.3) \cup (1088.487, \infty)$ oraz $p = 0.015$.
Zaznaczamy na wykresie [6] c oraz statystykę z. Ponieważ statystyka z znalazła się w obszarze krytycznym możemy przyjąć naszą hipotezę alternatywną $H_1 : \mu \neq 1.5$. Ponadto p-wartość jest bardzo mała - prawie zawsze odrzucimy hipotezę zerową.

$\sigma^2 > 1.5$

- Obszar krytyczny $c = \{x : x^2 \geq \chi^2_{1-\alpha,n-1}\}$.
- p-wartość $p = P_{H_0}(Z \geq z)$

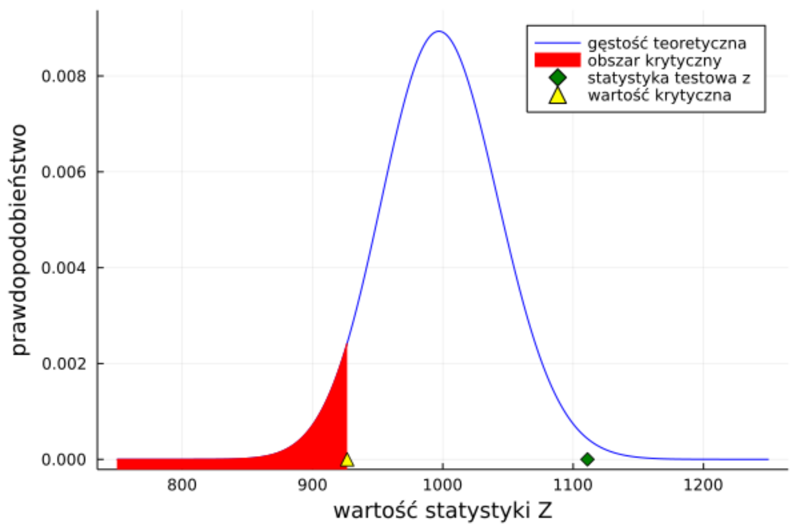


Rysunek 7

W naszym przypadku $c = [1073.643, \infty)$ oraz 0.008.
Zaznaczamy na wykresie [7] c oraz statystykę z. Ponieważ statystyka z znalazła się w obszarze krytycznym możemy przyjąć naszą hipotezę alternatywną $H_1 : \mu \neq 1.5$. Ponadto p-wartość jest bardzo mała - prawie zawsze odrzucimy hipotezę zerową.

$\sigma^2 < 1.5$

- Obszar krytyczny $c = \{x : x^2 \leq \chi^2_{\alpha,n-1}\}$.
- p-wartość $p = P_{H_0}(Z \leq z)$



Rysunek 8

W naszym przypadku $c = [0, 926.631)$ oraz $p = 0.992$.
Zaznaczamy na wykresie [8] c oraz statystykę z. Ponieważ statystyka z znalazła się poza obszarem krytycznym odrzucamy hipotezę alternatywną, duża p-wartość również wskazuje na to, że nie możemy odrzucić hipotezy zerowej.

Co stanie się kiedy zwiększymy bądź zmniejszymy poziom istotności?

W przypadku zwiększenia poziomu istotności α, zwiększy się nasz obszar krytyczny - test stanie się mniej wiarygodny. Zmniejszając poziom istotności, zmniejszamy obszar krytyczny - test jest bardziej wiarygodny. Można zatem powiedzieć, że najbardziej korzystne będzie wybieranie jak najmniejszych α tak aby uniknąć ryzyka odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej. Niestety w praktyce często możemy przeprowadzić tylko ograniczoną ilość badań, eksperymentów, pomiarów, dlatego wybór bardzo małego poziomu istotności nie jest opłacalny. Zwykle przyjmujemy $\alpha = 0.05$ (tzn. jesteśmy skłonni popełnić jeden błąd na 20 przypadków). P-wartość nie zależy od poziomu istotności.

Zadanie 3

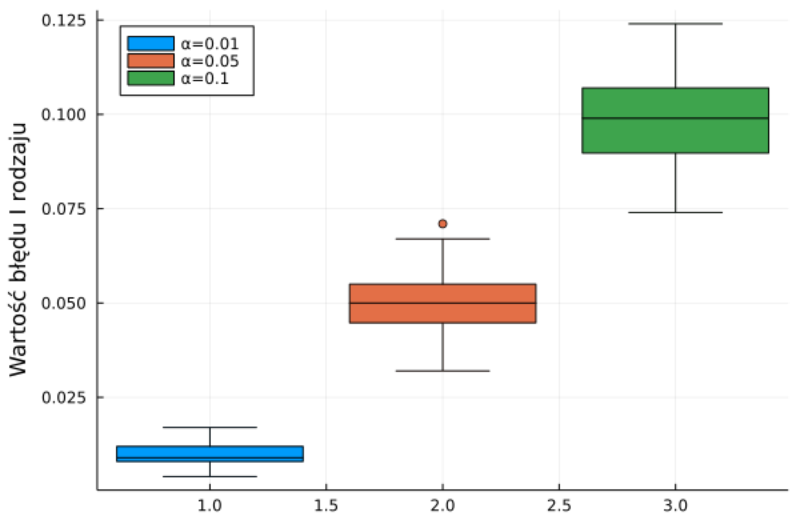
Błąd I rodzaju - prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy ta jest prawdziwa. Jego teoretyczna wartość jest równa pozimowi istotności alpha.

Błąd II rodzaju - prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej i odrzucenia prawdziwej hipotezy alternatywnej.

Moc testu - prawdopodobieństwo uniknięcia błędu drugiego rodzaju (1-błąd II rodzaju)

Przypadek dla nieznanej średniej

Błąd I rodzaju



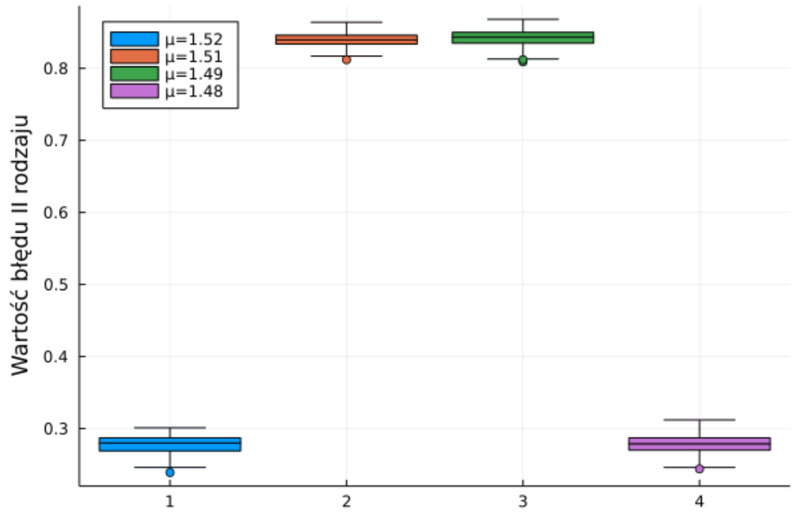
Rysunek 9: Błąd I rodzaju w zależności od poziomu istotności α

α	Błąd I rodzaju dla średniej
0.01	0.099
0.05	0.049
0.1	0.94

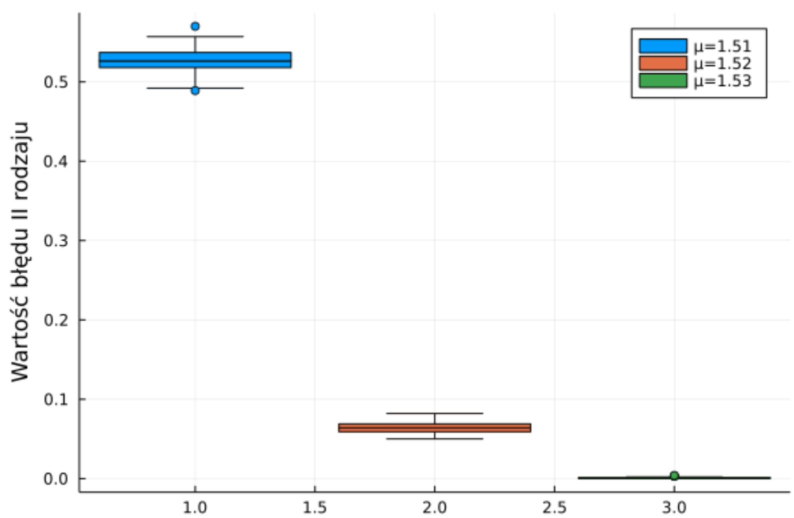
Tabela 1: Średnia błędu I rodzaju dla 100 symulacji

Przeprowadzając 100 symulacji dla prób z rozkładu $N(1.5,\ 0.2)$ ($H_0 : \mu_0 = 1.5$ jest prawdziwa) oraz obliczając średnią z otrzymanych wyników, widzimy że odrzucamy prawdziwą hipotezę zerową w liczbie przypadków bliskiej określonemu teoretycznie poziomowi istotności testu. Oznacza to, że algorytm wykorzystany do testowania hipotez działa poprawnie.

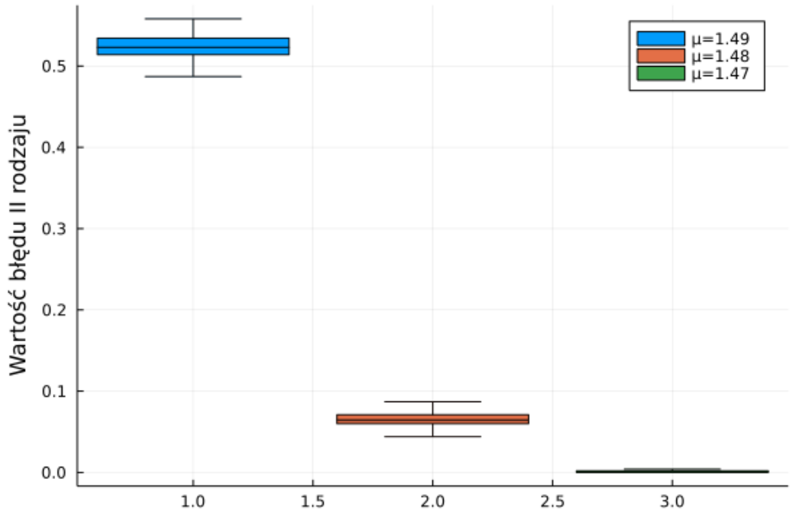
Błąd II rodzaju



Rysunek 10: $H_1 : \mu \neq 1.5$



Rysunek 11: $H_1 : \mu > 1.5$



Rysunek 12: $H_1 : \mu < 1.5$

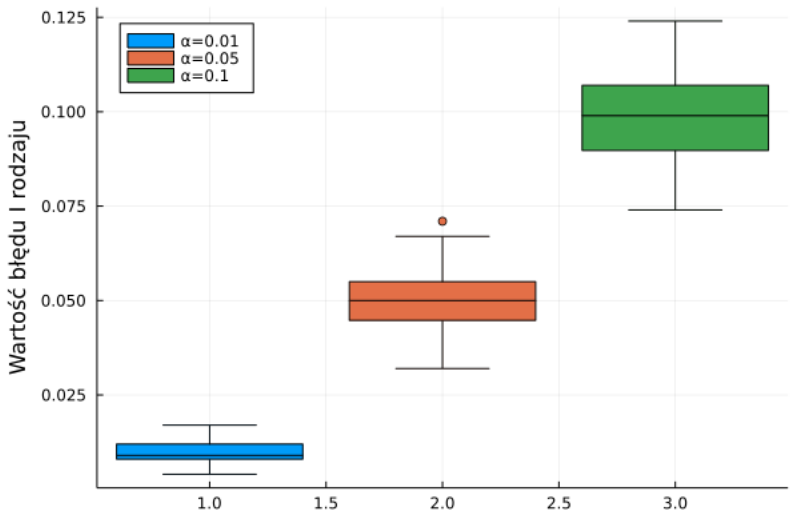
H_1	μ	Błąd II rodzaju dla średniej	Moc testu
$\mu \neq 1.5$	1.52	0.280	0.720
	1.51	0.839	0.161
	1.49	0.843	0.157
	1.48	0.279	0.721
$\mu > 1.5$	1.51	0.527	0.473
	1.52	0.064	0.936
	1.53	0.001	0.999
$\mu < 1.5$	1.49	0.523	0.477
	1.48	0.065	0.935
	1.47	0.001	0.999

Tabela 2: Średnia błędu II rodzaju dla 100 symulacji

Przeprowadziliśmy 100 symulacji dla prób z rozkładu $N(\mu,0.2)$ dla każdego omawianego μ, które spełnia założenia hipotezy alternatywnej H_1. Możemy zauważyć, że im bliżej μ_0 znajduje się μ tym większe prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju, co skutkuje mniejszą mocą testu. Dla naszych danych gdy $|\mu - \mu_0| \geq 0.02$ test zwraca wyniki, które możemy uznać za rzetelne.

Przypadek dla nieznanej wariancji

Błąd I rodzaju



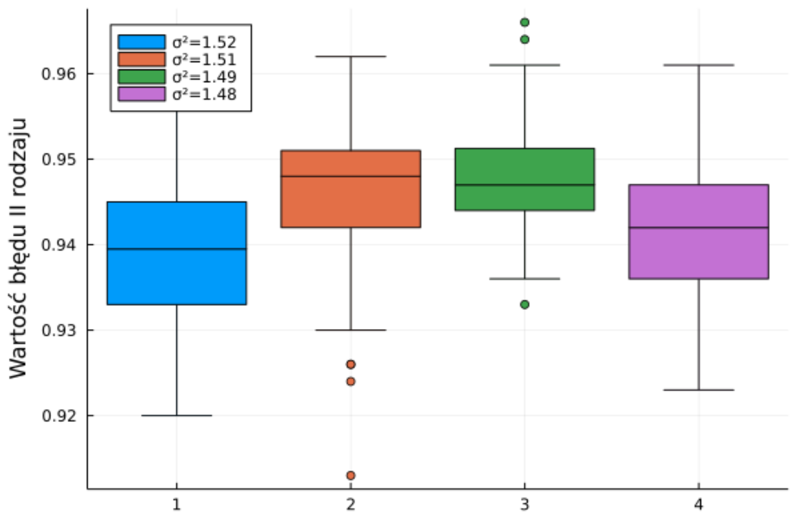
Rysunek 13: Błąd I rodzaju w zależności od poziomu ufności α

α	Błąd I rodzaju dla wariancji
0.01	0.01
0.05	0.049
0.1	0.094

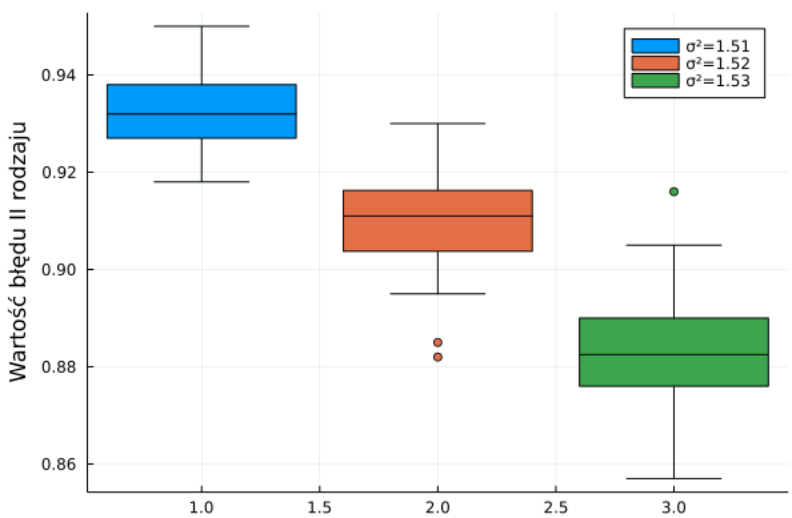
Tabela 3: Średnia błędu I rodzaju dla 100 symulacji

Przeprowadzając 100 symulacji dla prób z rozkładu $N(0.2, 1.5)$ (tzn $H_0 : \sigma_0^2 = 1.5$ jest prawdziwa) oraz obliczając średnią z otrzymanych wyników, widzimy że odrzucamy prawdziwą hipotezę zerową w liczbie przypadków bliskiej określonemu teoretycznie poziomowi istotności testu. Oznacza to, że algorytm wykorzystany do testowania hipotez działa poprawnie.

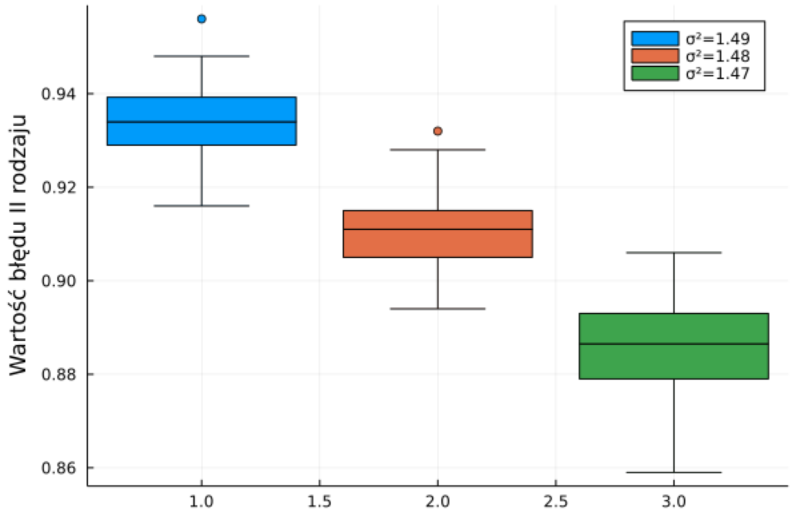
Błąd II rodzaju



Rysunek 14: $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$



Rysunek 15: $H_1 : \sigma^2 > 1.5$



Rysunek 16: $H_1 : \sigma^2 < 1.5$

H_1	σ	Błąd II rodzaju dla watiancji	moc
	1.52	0.939	0.061
	1.51	0.947	0.053
	1.49	0.947	0.053
$\sigma \neq 1.5$	1.48	0.942	0.058
	1.51	0.932	0.068
	1.52	0.911	0.089
$\sigma > 1.5$	1.53	0.883	0.117
	1.49	0.934	0.066
	1.48	0.911	0.089
$\sigma < 1.5$	1.47	0.887	0.113

Tabela 4: Mediana błędu II rodzaju dla 100 symulacji

Przeprowadziliśmy 100 symulacji dla prób z rozkładu $N(0.2,\sigma^2)$ dla każdego omawianego σ^2, które spełnia założenia hipotezy alternatywnej H_1. Możemy zauważyć, że im bliżej σ_0^2 znajduje się σ^2 tym większe prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju, co skutkuje mniejszą mocą testu. Dla naszych σ^2 moc testu jest bardzo mała - istnieje duża szansa, że odrzucimy prawdziwą hipotezę alternatywną na korzyść fałszywej hipotezy zerowej.