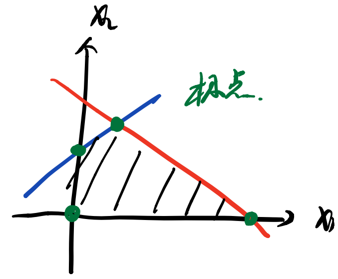
Polyhedron:

对 min c^TX

s.t. $Ax\geq b$.(m个约束) $x\in R^n$

active: 约束取到等号.

基可行解: 至少有n个约束active, 且为可行解.



Extreme point: 极点.

极点 ⇔ 多面体的几何顶点 ⇔ 基可行解.

lemma 1: 任意有限数量的线性不等式构成的polyhedron, 其极点数量有限.

单纯形法 ⇐

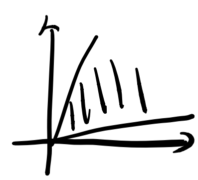
lemma 2: 在polyhedron中求最小化问题, 如果存在极点且问题存在最优解, 则必定存在一个最优解是极点.

Extreme ray: 极射线

对无界的LP, 对可行域内任意点, 存在一个方向, 使这条射线上所有点都存在于可行域内.

锥 Cone:

存在 $C\subset R^n$, 对 $\forall \vec{x}\in C$, $\lambda\geq 0$, $\lambda\vec{x}\in C$.



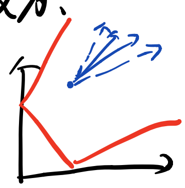
$P=\{\vec{x}\in R^n \mid A\vec{x}\geq 0\}$ 称为多面体锥. ⇒ 超平面围成的锥

若 $\vec{0}$ 为 cone 的 extreme point, 则称为尖锥 pointed cone.

recession cone 回收锥:

给定 $P=\{x\in R^n \mid Ax\geq b\}$ 和 $y\in P$. y处的回收锥定义为:

$\{d\in R^n \mid A(y+\lambda d)\geq b, \forall\lambda\geq 0\} = \{d\in R^n \mid Ad\geq 0\}$.



定理：给定 $\overset{\min}{obj} = c^T x$，s.t. 尖锥 $C = \{x \in R^n \mid a_i^T x \geq 0\}$ 的LP.
当且仅当存在极射线 d 使 $c^T d < 0$ 时，$obj = -\infty$.

理解：由 d 的定义，存在 $y \in C$，对 $\forall \lambda$ 有 $y + \lambda d \in C$.
则 $\lim_{\lambda \to +\infty} c^T (y + \lambda d) = -\infty$.

拓展：上述定理对 $Ax \geq b$ 也成立.

Benders.

$$\min f^T y + c^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ay = b$$
$$By + Dx = d$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0, \text{ Integer.}$$

$\Rightarrow$

① $\min f^T y + g(y)$
$Ay = b.$
$y \geq 0$, Integer.

② (PS) $\min c^T x$
$Dx = d - B\bar{y}$
$x \geq 0$

PS对偶 DS：$\max \lambda^T (d - B\bar{y})$
$\lambda^T \cdot D \leq c$

$F = \{\lambda \mid \lambda^T D \leq c\}$ 为多面体，与 $\bar{y}$ 无关.

给定 $y = \bar{y}$，若 F 非空，则有界、有可行解，或无界、有可行解

具有有限个极点和极射线.

记极射线集合为 λ_w，$w \in \Omega r$. 极点为 λ_w，$w \in \Omega p$.

若存在 $w \in \Omega r$ 使 $\lambda_w^T (d - B\bar{y}) > 0$，则DS有无界解，
PS无解，原问题在对应的 $\bar{y}$ 下无可行解.
添加 feasibility cut：$\lambda_w^T (d - B\bar{y}) \leq 0$，排除 $\bar{y}$.

若对 $\forall w \in \Omega r$，$\lambda_w^T (d - B\bar{y}) \leq 0$，则DS有有界解.
极点 $\arg \max_{w \in \Omega p} \lambda_w^T (d - B\bar{y})$ 可能会改进目标值.

添加 optimal cut: $\lambda_w^T(d-B\bar{y})\le \eta$.

MP: $\min f^T y+\eta$.

$$Ay=b$$
$$\lambda_w^T(d-B\bar{y})\le 0 \quad (\forall w\in\Omega_r)$$
$$\lambda_w^T(d-B\bar{y})\le \eta \quad (\forall w\in\Omega_p)$$
$$y\ge 0,\ \text{Integer}.$$

通过判断 $g(y)$ 与 η 的关系看是否终止. 若 $g(y)\ge\eta$. 得到最优解.

L-Shaped.

$$\min\ c^T x+\sum_{k=1}^{K} p_k\cdot q_k^T\cdot y_k$$
$$\text{s.t.}\quad Ax=b$$
$$T_k x+W y_k=h_k\ ,\quad \forall k$$
$$x\ge 0,\ y_k\ge 0\ ,\quad \forall k$$

Step 0. 设 $r=s=v=0$

Step 1. $v=v+1$.

解主问题 $\min\ z=c^T x+\theta$
$$\text{s.t.}\quad Ax=b$$
$$x\ge 0.$$

设最优解为 (x^v, θ^v).

Step 2. 判断 x^v 是否有可行解. 同 Benders. 根据极射线和极点判断.

对 $k=1,\dots,K$ 求解:

$$\min \quad w' = e^T v^+ + e^T v^-$$
$$\text{s.t.} \quad W \cdot y + I v^+ - I v^- = h_k - T_k x^v \qquad (\sigma^v)$$
$$y \geq 0, \; v^+ \geq 0, \; v^- \geq 0.$$

$e^T = (1, \cdots, 1)$. 若存在k，使$w' > 0$，则令σ^v为对偶变量，

$$D_{r+1} = (\sigma^v)^T T_k,$$
$$d_{r+1} = (\sigma^v)^T h_k$$

添加 feasibility cut：$D_{r+1} \cdot x \geq d_{r+1}$.

Step 3. 对$k = 1, 2, \cdots, K$，求解子问题：

$$\min \quad w = q_k^T y$$
$$\text{s.t.} \quad W y = h_k - T_k \cdot x^v. \quad (\pi_k^v)$$
$$y \geq 0.$$

(PS：其实，这一步与Benders没有区别，求解的应该是：

$$\min \quad \sum_{k=1}^{K} p_k \cdot q_k^T \cdot y_k$$
$$\text{s.t.} \quad T_k x + W y_k = h_k \quad , \forall k$$
$$y_k \geq 0 \quad , \forall k$$

但由于不同scenarioes之间相互独立，所以可以拆分成多个LP.)

令 π_k^v 为对偶变量 (simplex multiplier).

对偶问题为：
$$\max \quad (\pi_k^v)^T (h_k - T_k \cdot x^v)$$
$$(\pi_k^v)^T \cdot W \leq w$$

定义
$$E_{s+1} = \sum_{k=1}^{K} p_k (\pi_k^v)^T \cdot T_k$$
$$e_{s+1} = \sum_{k=1}^{K} p_k \cdot (\pi_k^v)^T \cdot h_k$$

$$w^{\nu} = e_{s+1} - E_{s+1} \cdot x^{\nu} = \sum_{k=1}^{K} (\pi_k^{\nu}) \cdot (h_k - T_k \cdot x^{\nu})$$

若 $w^{\nu} \geq \theta_{\nu}$, 则 x^{ν} 为最优解.

否则, 添加 optimality cut $E_{s+1} \underbrace{x + \theta}_{\text{变量}} \geq e_{s+1}$