

几种基于 FFT 的频率估计方法精度分析^{*}

齐国清

(大连海事大学信息工程学院, 辽宁 大连 116026)

摘要: 介绍了噪声背景中正弦信号频率估计的方差下限, 对利用 FFT 主瓣内两条幅度最大谱线进行插值的频率估计方法(Rife-Jane 方法和 Quinn 方法)以及利用 FFT 相位进行频率插值的方法(分段 FFT 相位差法和重叠 FFT 相位差法)的方差进行了理论分析, 推导了 Quinn 方法的频率估计方差计算公式, 提出了通过滤波进一步提高分段 FFT 相位差法的频率估计精度的方法。通过计算机 Monte Carlo 模拟实验对上述各种方法的频率估计精度以及加窗函数的影响进行了分析与理论下限进行了比较, 指出了每种方法所能达到的估计精度。

关键词: 信号处理; 频率估计; 频谱分析

中图分类号: TN911.6

文献标识码: A

文章编号: 1004-4523(2006)01-0086-07

引言

利用 FFT 估计正弦信号频率的方法近年来在振动信号分析领域受到广泛的关注^[1~7]。由于 FFT 得到的是离散频谱, 若信号观测时间为 T , 则谱线之间间隔为 $\Delta f = 1/T$ 。因此直接利用 FFT 频谱最大值对应的频率估计正弦信号的频率精度受观测时间长度的限制, 其误差范围为 $\pm \Delta f/2$ 。增加观测时间不但因 FFT 点数太多带来实现上的困难, 而且在条件受限场合不可能随意增加观测时间。为了突破频率估计精度受到 FFT 频率分辨率的限制, 可以采用频率细化的方法^[2], 但需要增加较多的计算量。当信号频率不是 FFT 的频率分辨率 Δf 的整数倍时, 由于 FFT 的“栅栏”效应引起频谱泄漏, 此时信号的实际频率位于 FFT 主瓣内两条最大谱线之间, 可以借助第二谱线与最大谱线的幅度比值估计信号的实际频率在两条谱线之间的位置^[8](即基于 FFT 幅度比值的频率插值方法^[1,3,5,7,9,11,13])。为了抑制旁瓣通常在 FFT 之前对采样数据进行加窗处理, 加窗使主瓣变宽, 主瓣之内出现三条以上谱线。能量重心法就是利用了主瓣内的多条谱线来提高频率估计精度^[6]。不加窗情况下, 当信号实际频率接近 FFT 最大谱线对应的频率时, 由于确定第二大谱线容易发生错误从而造成频率插值方向错误, 因此限制了利用 FFT 幅度比值进行频率插值的精度。利用 FFT 主瓣内第二大值与最大值之比的实部代替幅值之比, 可以消除插值方向的错误造成的频率估计误差^[10]。FFT 最大

值处的相位与信号的实际频率和 FFT 幅度最大谱线对应的频率之间的偏差有关, 但通常信号的初相未知, 因此不能直接利用 FFT 最大谱线的相位估计频率。采用分段 FFT 的方法可以消除初相的影响, 从而实现利用 FFT 的相位提高频率估计精度^[4,12,14,15]。文献中对上述方法的原理进行了详细的讨论和分析, 但缺少对各种方法的频率估计性能的全面比较, 特别是在噪声背景中每种方法的频率估计方差的对比以及和理论方差下限的比较。本文通过理论分析和计算机 Monte Carlo 模拟实验对常用的基于 FFT 的频率估计方法的方差进行分析和比较, 以确定各种方法在不同信噪比及不同数据长度条件下的频率估计精度。

1 FFT 幅度比值法频率估计精度分析

1.1 实正弦信号频率估计方差下限

在 $0 \sim T$ 时间内对加性高斯白噪声(AWGN)背景中单一频率正弦信号按 $\Delta t = T/N$ 进行采样, 得到采样序列

$$s(n) = a \cos(2\pi f_0 T n / N + \theta) + z(n), \\ n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

式中 $z(n)$ 为零均值高斯白噪声, 方差为 σ^2 , 采样序列的信噪比为 $SNR = a^2 / (2\sigma^2)$ 。根据参数估计理论, 在给定数据长度和信噪比前提下, AWGN 背景中信号参数的任意无偏估计方差不会小于某一确定值,

即方差下限。方差下限有不同的确定方法,常用的为 Cramer Rao 下限(CR 下限)。复正弦信号参数估计的 Cramer Rao 方差下限在文[16]中给出,在信号频率不接近零或二分之一采样频率、初始相位未知情况下,实正弦信号频率估计方差下限为相同条件下复正弦信号的方差下限的 2 倍^[17]

$$\sigma_{CRB}^2 = \frac{3}{T^2 N \pi^2 \cdot SNR} \tag{2}$$

图 1 所示为 N 分别为 64, 128, 256, 512, 1 024 及 2 048, 信噪比从 -10 dB 到 40 dB 变化时, Cramer Rao 标准差下限 σ_{CRB} 的变化情况,图中给出的是 σ_{CRB} 与 FFT 的频率分辨率 Δf 的比值。当 $N = 2\,048$, 信噪比为 40 dB 时,标准差下限约为 $10^{-4} \Delta f$; 当 $N = 256$, 信噪比为 10 dB 时标准差下限约为 $10^{-2} \Delta f$ 。

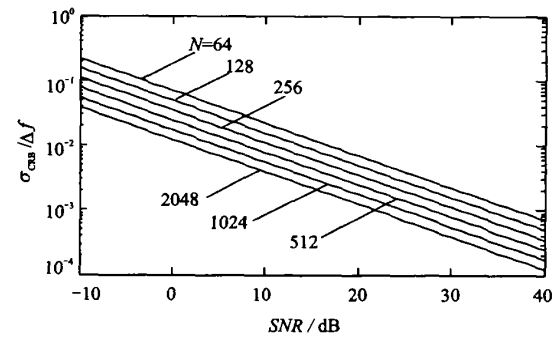


图 1 频率估计标准差下限随信噪比和 FFT 长度变化情况

1.2 Rife-Jane 频率估计方法

$s(n)$ 的 N 点 FFT 记为 $S(k)$, 鉴于实序列 FFT 的对称性,只考虑离散频谱的前 $N/2$ 点,在不加窗 (即加矩形窗) 情况下有

$$S(k) = \frac{\text{asin}[\pi(k - f_0 T)]}{2\text{sin}[\pi(k - f_0 T)/N]} \cdot e^{j\frac{N-1}{N}(k-f_0 T)\pi} + Z(k), \tag{3}$$
$$k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$$

$S(k)$ 幅度最大值处的离散频率索引值记做 m , $m = \text{int}[f_0 T], \text{int}[x]$ 表示取最接近 x 的整数。 $Z(k)$ 为 $z(n)$ 的 FFT。利用 m 可对信号的频率做粗估计 $\hat{f}_c = m \Delta f$ 。其中 $\Delta f = 1/T$ 为 FFT 的频率分辨率,即相邻谱线之间的间隔。在不加窗的情况下,当信号频率不是正好为 Δf 的整数倍时, $S(k)$ 在主瓣之内有两条谱线。最大谱线的幅度为 $S_1 = |S(m)|$, 次大谱线的位置记为 $m_2, m_2 = m \pm 1$, 次大谱线的幅度为 $S_2 = |S(m_2)|$, 则根据 $\alpha = S_2/S_1$, 可得到信号的实际频率与粗测频率 \hat{f}_c 之间的相对偏差 $\delta = (f_0 - m \Delta f) / \Delta f$ 的估计^[1,9,12]

$$\hat{\delta} = \pm \frac{\alpha}{1 + \alpha} \tag{4}$$

式(4)中的符号根据次大值是在最大值的左侧还是右侧来决定。利用不加窗频谱次大谱线与最大谱线的幅度之比进行频率插值的优点是插值公式简单。不考虑噪声影响,FFT 主瓣内的次大谱线的幅度永远大于旁瓣幅度,因此插值不会出现方向错误。但是在有噪声的情况下,当 δ 的绝对值较小时,可能出现位于 FFT 频谱最大值另一侧第一旁瓣的幅度超过主瓣内次大值的情况,从而造成频率插值方向相反,引起较大的频率估计误差。图 2(a) 所示为 $N =$

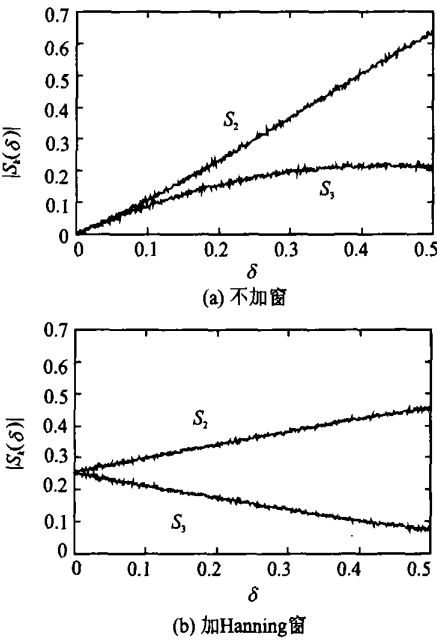


图 2 S_2 和 S_3 随 δ 变化情况模拟结果 ($N = 1\,024, SNR = 18$ dB)

1 024, 信噪比为 18 dB 时,第二大和第三大谱线的幅度随 δ 变化的情况,可见 $|\delta|$ 较小时很容易出现插值方向错误。这种频率估计方法的误差由两部分组成, $|\delta|$ 较小时误差主要由插值方向错误所致, $|\delta|$ 较大时频率误差主要由 FFT 幅度估计误差所造成。

Rife-Jane 方法的频率估计方差可表示为^[13]

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(1 - |\delta|)^2 [(1 - |\delta|)^2 + \delta]}{T^2 N \cdot SNR \text{sinc}^2(\delta)} + \frac{2\delta}{T^2} \text{erfc}\left[\frac{\delta \text{sin}(\pi\delta)}{\pi(1 - \delta)}\right] \frac{1}{N \cdot SNR} \tag{5}$$

式中 $\text{erfc}()$ 为补误差函数。 $|\delta|$ 较小时,不加窗 FFT 幅度比值法的频率估计方差远高于式(2)表示的 Cramer Rao 下限; $|\delta|$ 接近 0.5 时,上式第二项的影响可以忽略,频率估计方差可近似为 $\hat{\sigma}^2 \approx \pi^2 / (32T^2 N \cdot SNR) \approx 1.015 \sigma_{CRB}^2$, 非常接近 Cramer

Rao 下限。为了抑制旁瓣,通常在 FFT 之前对采样数据进行加(非矩形)窗处理。加窗使主瓣变宽,主瓣内出现多条谱线,同时也使得分别位于最大值两侧的第二大和第三大谱线更容易区分(图 2(b)所示为加 Hanning 窗后第二大和第三大谱线的幅度随 δ 变化的情况),因此基本避免了频率插值方向错误。

1.3 Quinn 频率估计方法

Quinn 提出了利用 FFT 主瓣内次大谱线与最大谱线 FFT 系数复数值之比的实部进行频率插值的方法^[10,11]。设 FFT 的最大值处的离散频率为 m ,则 $m-1$ 和 $m+1$ 分别位于最大值的两侧,且其中一个为次大值。定义 $\alpha = R\{S(m-1)/S(m)\}$ 及 $\alpha = R\{S(m+1)/S(m)\}$, 式中 $R\{x\}$ 表示 x 取的实部,分别计算 $\hat{\delta} = \alpha/(1-\alpha)$ 和 $\hat{\delta} = -\alpha/(1-\alpha)$, 则频率插值可表示为^[10]

$$\hat{\delta} = \begin{cases} \hat{\delta}, & \hat{\delta} > 0, \hat{\delta} > 0 \\ \hat{\delta}, & \text{其它} \end{cases} \quad (6)$$

研究 $S(k)$ 的相位,并注意式中幅度项符号的变化,用 ϕ , ϕ 和 ϕ 分别表示 $S(k)$ 在幅度最大值处、主瓣内第二大值处及主瓣另一侧第一旁瓣的相位,在不考虑噪声情况下,有 $\phi - \phi \approx \pi$, $\phi - \phi \approx 0$ 。因此,当信号实际频率大于 $m\Delta f$, 即次大值位于最大值右侧时, $\alpha < 0$, $\alpha > 0$, 于是 $\hat{\delta}$, $\hat{\delta}$ 都为正;反之,次大值位于最大值左侧时, $\alpha > 0$, $\alpha < 0$, 于是 $\hat{\delta}$ 和 $\hat{\delta}$ 都为负,因此式(6)可得到正确的频率插值。与 Rife-Jane 方法相比,Quinn 方法的突出优点是当 $|\delta|$ 很小时,由于 $|S(m-1)|/|S(m)|$ 与 $|S(m+1)|/|S(m)|$ 非常接近,所以 Rife-Jane 方法容易受噪声干扰出现插值方向错误,而 $S(m-1)$ 与 $S(m+1)$ 的相位因为相差 180° (见图 3), 所以不容易受噪声干扰相混,Quinn 方法取 $S(m-1)/S(m)$ 与 $S(m+1)/S(m)$ 的实部,正是利用了相位信息来判断插值方向,从而避免了 Rife-Jane 方法在 $|\delta|$ 较小时频率估计误差激增的问题。

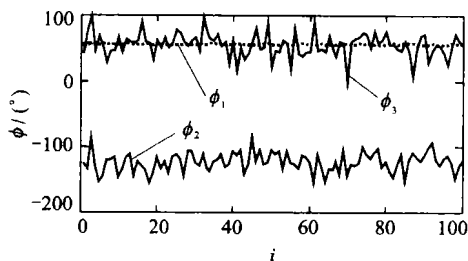


图 3 FFT 在幅度最大值处及两侧的相位测量结果

下面分析 Quinn 方法的频率估计方差。利用 α 和 α 估计频率的方差相同,下面仅分析其中之一并略去下标。由于正弦信号的 FFT 在主瓣内的两条谱线相位相差 π , $S(k)$ 在主瓣内最大值和次大值处的复数值可分别表示为 $S(m) = A_1 e^{j\phi} + Z_1$, $S(m_2) = -A_2 e^{j\phi} + Z_2$, 其中 A_1 和 A_2 分别为无噪声时 S_1 和 S_2 的幅度,且有 $A_1 = |S(m)| \approx Na |\sin(\pi\delta)|/(2\pi\delta)$ 及 $A_2 = |S(m_2)| \approx Na |\sin(\pi\delta)|/[2\pi(1-|\delta|)]$ 。则根据 Quinn 估计公式,有

$$\alpha = R\left\{\frac{-A_2 e^{j\phi} + Z_2}{A_1 e^{j\phi} + Z_1}\right\} \quad (7)$$

将 Z_1 和 Z_2 分别表示为 $Z_1 = X_1 + jY_1$ 和 $Z_2 = X_2 + jY_2$, 代入上式,得

$$\alpha = -R\left\{\frac{A_2 \cos \phi - X_2 + j[A_2 \sin \phi - Y_2]}{A_1 \cos \phi + X_1 + j[A_1 \sin \phi + Y_1]}\right\} = -\frac{A_1 A_2 + A_2 U_1 - A_1 U_2 - X_1 X_2 - Y_1 Y_2}{A_1^2 + |Z_1|^2 + 2A_1 U_1} \quad (8)$$

式中 $U_1 = X_1 \cos \phi + Y_1 \sin \phi$, $U_2 = X_2 \cos \phi + Y_2 \sin \phi$ 。考虑到主瓣内 FFT 系数的信噪比一般较高, $|Z_1|/A_1$ 及 $|Z_2|/A_2$ 大于或接近 1 的概率很小,分析估计误差时忽略这种小概率情况而假设 $|Z_1|/A_1 \ll 1$ 及 $|Z_2|/A_2 \ll 1$ 。上式可近似为

$$\alpha \approx -\frac{A_2}{A_1} \frac{1 + U_1/A_1 - U_2/A_2}{1 + 2U_1/A_1} \quad (9)$$

根据前述条件,可将上式展开成泰勒级数并略去高次项, α 可近似表示为

$$\alpha \approx -\frac{A_2}{A_1} \left(1 + \frac{U_1}{A_1} - \frac{U_2}{A_2}\right) \left(1 - \frac{2U_1}{A_1}\right) \approx -\frac{A_2}{A_1} \left(1 - \frac{U_2}{A_2} - \frac{U_1}{A_1}\right) \quad (10)$$

代入 Quinn 的频率估计公式,整理得

$$\hat{\delta} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = -\frac{A_2(1 - U_2/A_2 - U_1/A_1)}{A_1 + A_2 - U_2 - U_1 A_2/A_1} \quad (11)$$

同理将上式展开级数并略去高次项,整理得

$$\hat{\delta} \approx \frac{-A_2}{A_1 + A_2} - \frac{A_1 U_2 + A_2 U_1}{(A_1 + A_2)^2} \quad (12)$$

所以相对频率偏差估计的方差可表示为

$$\text{var}(\hat{\delta}) = \frac{A_1^2 \text{var}(U_2) + A_2^2 \text{var}(U_1)}{(A_1 + A_2)^4} \quad (13)$$

根据定义 $\text{var}(U_1) = \text{var}(U_2) = \sigma^2 \cos^2 \phi + \sigma^2 \sin^2 \phi$ 及 FFT 的性质有 $\sigma^2 = \sigma^2 = \sigma^2/2 = N \sigma^2/2$, 代入上式得

$$\text{var}(\hat{\delta}) = \frac{A_1^2 + A_2^2}{(A_1 + A_2)^4} \frac{N \sigma^2}{2} \quad (14)$$

代入 A_1, A_2 , 得

$$\text{var}(\hat{\delta}) = \frac{(1 - |\delta|)^2 [(1 - |\delta|)^2 + \delta]}{N \cdot \text{SNR} \cdot \text{sinc}^2(\delta)} \quad (15)$$

因此 Quinn 方法的频率估计方差为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{var}(\hat{\delta})}{T^2} = \frac{(1 - |\delta|)^2 [(1 - |\delta|)^2 + \delta]}{T^2 N \cdot \text{SNR} \cdot \text{sinc}^2(\delta)} \quad (16)$$

对比式 (5) 和式 (16) 可见, Quinn 方法的频率估计方差与 Rife-Jane 方法的频率估计方差的第一项相同。

2 FFT 相位差法频率估计精度分析

2.1 分段 FFT 相位差法

由式 (3), 在 FFT 幅度最大值处的相位可近似为 $\phi \approx \theta - (m - f_0 T) \pi = \theta + \delta \pi$ 可见 FFT 幅度最大谱线的相位中含有相对频率偏差 δ 的信息。但由于通常初相 θ 未知, 因此并不能直接利用 ϕ 估计 δ 。为了消除 θ 的影响, 可以将式 (1) 表示的采样序列分为两段长度各为 $N/2$ 的序列并分别进行 FFT。两个 FFT 在最大值处的相位分别为 ϕ 和 ϕ , 则利用 $\Delta\phi = \phi - \phi$ 可以得到 δ 的估计^[4,14,15]

$$\hat{\delta} = \frac{\Delta\phi}{2\pi\Delta f_2} = \frac{\Delta\phi}{\pi} \quad (17)$$

式中 $\Delta f_2 = 2/T$ 为 $N/2$ 点 FFT 的频率分辨率。为了区别幅度插值法的相对频偏, 此处的相对频率偏差记为 δ , $\delta = (f_0 - n\Delta f_2)/\Delta f_2$, n 为 $N/2$ 点 FFT 幅度最大值对应的离散频率。两段 FFT 相位差法频率估计方差为^[15]

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{4}{T^2 N \pi \cdot \text{SNR} \cdot \text{sinc}^2(\delta)} \quad (18)$$

可见分段 FFT 相位差估计频率的方差不仅与信噪比及 FFT 长度有关, 还与 δ 的值有关。当 $\delta = 0$ 时, $\hat{\sigma}^2 = (4/3) \hat{\sigma}_{RB}^2$, 略高于 CR 下限。而当 $\delta = \pm 0.5$ 时, 频率估计方差为 $\hat{\sigma}^2 = (\pi/3) \hat{\sigma}_{RB}^2 \approx 3.3 \hat{\sigma}_{RB}^2$, 约为 $\delta = 0$ 时的 2.5 倍。为了进一步降低频率估计方差, 可以利用第二大谱线的相位与最大谱线的相位的加权平均值来进行频率估计。两段 FFT 幅度第二大谱线的相位差记为 $\Delta\phi'$, 则利用 $\Delta\phi'$ 估计 δ 为

$$\hat{\delta}' = \frac{\Delta\phi'}{2\pi\Delta f_2} \quad (19)$$

由文献 [15] 可知 $\text{var}(\hat{\delta}')/\text{var}(\hat{\delta}) = \text{var}(\Delta\phi')/\text{var}(\Delta\phi) = (1 - |\delta|)^2/\delta$ 。根据维纳滤波理论, 对 $\hat{\delta}$ 和 $\hat{\delta}'$ 进行加权平均, 得到 δ 的估计值为

$$\hat{\delta} = \frac{(1 - |\delta|)^2 \hat{\delta} + \delta \hat{\delta}'}{(1 - |\delta|)^2 + \delta} \quad (20)$$

实际估计时可用 $\hat{\delta}$ 来代替上式中的 δ 。按式 (20) 估计频率的方差为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{4}{T^2 N \pi \text{SNR} [\delta + (1 - |\delta|)^2]} \cdot \left[\frac{(1 - |\delta|)^4}{\text{sinc}^2(\delta)} + \frac{\delta}{\text{sinc}^2(1 - |\delta|)} \right] \quad (21)$$

当 $\delta = \pm 0.5$ 时, 经滤波后 $\hat{\sigma}^2$ 为滤波前的一半。

利用 FFT 相位差估计频率应注意相位差的取值范围, 因为 ϕ 和 ϕ 本身的取值范围均为 $-\pi \sim \pi$ 所以直接按 $\Delta\phi = \phi - \phi$ 计算相位差的结果范围将在 $-2\pi \sim 2\pi$ 为了得到正确的频率估计值应先对 $\Delta\phi$ 进行折叠 (即将 $\Delta\phi$ 变换到主值范围)。但若直接在 $\pm \pi$ 处设一个门限进行折叠, 在有噪声时会出现错误。无噪声时, 当 δ 接近 0.5 时, $\Delta\phi$ 值接近 (小于) π 但受噪声影响 $\Delta\phi$ 可能超过 π 。简单的折叠方法将大于 π 的值都转换成负值, 从而造成频率插值方向相反, 带来很大的频率估计误差。 δ 接近 -0.5 时也会出现同样问题 (利用 $\Delta\phi = \arg\{S_2 S_1^*\}$ 来计算 S_2 与 S_1 相位差, 虽然直接将 $\Delta\phi$ 转换到 $-\pi \sim \pi$ 范围内, 但仍然存在上述问题)。为了避免上述情况的出现, 当 $\Delta\phi$ 接近 $\pm \pi$ 时可利用次大谱线位置 n_2 与最大谱线位置 n 之间的关系来判断是否需要将 $\phi - \phi$ 进行折叠。因为若 $n_2 > n$, 则 $f_0 > n\Delta f_2$, 应有 $\Delta\phi > 0$, 若 $n_2 < n$ 则 $f_0 < n\Delta f_2$, 应有 $\Delta\phi < 0$ 。因此可按下面方法对 $\phi - \phi$ 进行折叠:

- (1) 若 $\phi - \phi < -(\pi + \beta)$ 或 $-(\pi + \beta) < (\phi - \phi) < -(\pi - \beta)$ 且 $n_2 > n$, 则 $\Delta\phi = \phi - \phi + 2\pi$
- (2) 若 $\phi - \phi > (\pi + \beta)$ 或 $(\pi - \beta) < (\phi - \phi) < (\pi + \beta)$ 且 $n_2 < n$, 则 $\Delta\phi = \phi - \phi - 2\pi$
- (3) 其它情况, $\Delta\phi = \Delta\phi - \phi$ 。

式中 $\beta > 0$, 实验表明取 $\beta = \pi/3$ 效果较好。 $N = 512$ 时, 在信噪比大于 0 的条件下, 基本不出现频率插值方向错误。

2.2 重叠 FFT 相位差法

文献 [12] 提出了利用两个不同长度的 FFT 在最大值处的相位差估计频率的方法。设两个 FFT 的长度分别为 N 和 M ($M < N$), 与 2.1 节介绍的分段 FFT 相位差法不同的是, 这里两个序列是有重叠的, 第二个序列是第一个序列的一部分。两个 FFT 的幅度最大值分别出现在离散频率 m 和 n 处, 对应的相位分别记为 ϕ 和 ϕ , 则频率估计为^[12]

$$\hat{f} = \frac{N}{(N - M)T} \left[\frac{N - 1}{N} m - \frac{M - 1}{M} n - \frac{\phi - \phi}{\pi} \right] \quad (22)$$

由于两个 FFT 的长度不同, m 和 n 不在同一个位置发生变化, 很难消除 $\phi - \phi$ 的模糊。为了避免相位差出现模糊, 该方法只适用于 $|\delta|$ 较小的情况, 而 Rife-Jane 方法在 $|\delta|$ 较小时误差较大, 因此这两种

方法可以互补应用^[12]。

3 性能对比及计算机模拟结果

为了对各种估计方法的精度进行对比并验证前面给出的方差计算公式,进行了计算机 Monte Carlo 模拟试验。为了方便与 FFT 本身的频率分辨率 Δf 对比,下面在按公式计算和计算机模拟过程中均采用频率估计的标准差 σ_f 来进行分析,同时为了便于与估计误差的理论下限进行比较,下面给出的结果均为归一化频率估计标准差,即频率估计标准差与相应的标准差下限 σ_{RB} 的比值。图 4 中虚线所示为根据式(16),式(18)和式(21)计算的,用

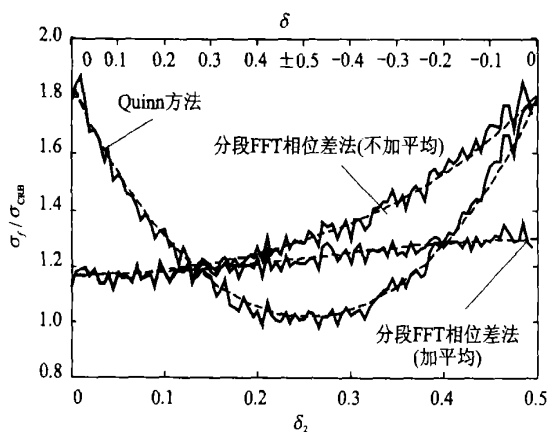


图 4 Quinn 插值方法和分段 FFT 相位差法规一化标准差
(虚线:理论计算结果;实线:模拟结果)
 $N=512, SNR=12\text{ dB}, f_0 T=128+\delta$

Quinn 插值方法和分段 FFT 相位差法未进行平均和加权平均之后的归一化频率估计标准差在一个 FFT 分辨单元内变化情况的对比。因为分段 FFT 相位差法的一个 FFT 分辨单元相当于 Quinn 方法的两个 FFT 分辨单元($\Delta f_2=2\Delta f$),所以图中 δ (分段 FFT 相位差法的相对频偏)从 0~0.5,而 δ (Quinn 方法的相对频偏)从 -0.5~0.5。可见 Quinn 方法在 δ 接近 ± 0.5 时,标准差接近理论下限,但 δ 接近零时,标准差达到下限的 1.8 倍。分段 FFT 相位差法经两点加权平均后,标准差随 δ 变化很小,约为 $1.2\sigma_{RB}$ 。Rife-Jane 插值法的归一化估计误差与数据长度及信噪比有关。图 4 实线所示为加矩形窗时 Quinn 插值方法和分段 FFT 相位差法的归一化频率估计标准差模拟实验结果。模拟是在 $N=512, SNR=12\text{ dB}, f_0 T=128+\delta$ 初始相位随机变化条件下进行的,模拟次数为 1 000。可见模拟结果与本文给出的公式计算结果很好地吻合。图 5 所

示为 $N=512$,信噪比为 0~30 dB, Rife-Jane 插值法加矩形窗时的归一化估计误差随 δ 的情况(图中所示为按式(5)计算结果。模拟结果与计算结果接近,图中未示出)。可见当信噪比较低时, Rife-Jane 方法的标准差在很大范围内都远高于 σ_{RB} ,即使信噪比较高时,该方法在 $|\delta|<0.1$ 时也很难得到满意的精

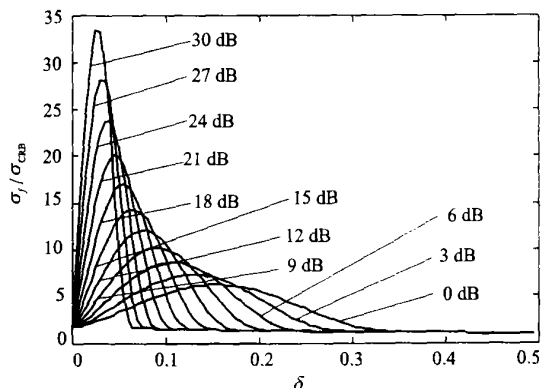


图 5 Rife-Jane 方法的归一化标准差理论值

度,因此这种方法只能用在 $|\delta|$ 较大的情况^[12]。图 6 为与图 4 相同条件下 Rife-Jane 方法和重叠 FFT 相位差法的归一化标准差模拟结果与 Quinn 方法和分段 FFT 相位差法的对比。模拟结果表明:不加窗(即矩形窗)且 $|\delta|$ 较小时, Rife-Jane 方法误差较大; $|\delta|$ 较大(接近 0.5)时, Rife-Jane 方法与 Quinn 方法误差相同。重叠 FFT 相位差法在 δ 接近 ± 0.5 时出现较大误差, $|\delta|$ 较小时误差略高于分段 FFT 相位差法。图 7 所示为加 Hanning 窗时的归一化标准差的模拟结果,模拟条件与图 4 和图 6 相同。因为 FFT 具有提高白噪声背景中正弦信号信噪比的作用,其信噪比增益与数据长度有关,加(非矩形)窗使得有效数据长度缩短,造成 FFT 频谱的信噪比增益损失约 3~5 dB。因此与不加窗相比,加 Hanning 窗

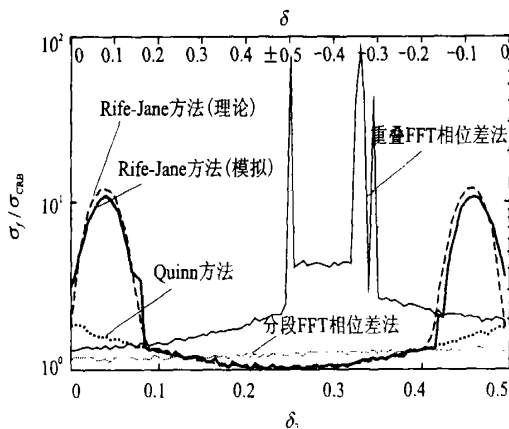


图 6 Rife-Jane 方法及重叠 FFT 相位差法的模拟结果

时的频率估计误差均略有增加(除 Rife-Jane 方法外,因为加窗避免了 Rife-Jane 方法插值方向错误,从而使得估计误差降低,加窗时 Rife-Jane 方法和 Quinn 方法的估计误差几乎相同,图中只给出了 Quinn 方法的模拟结果)。分段 FFT 相位差法受窗函数影响相对较小,加 Hanning 窗时分段 FFT 相位差法标准差约为 $1.5\sigma_{RB}$,而 Quinn 方法受加窗影响略大一些,加窗后对于所有 δ 标准差都大于分段 FFT 相位差法。图 7 中还示出了按文献[6]提出的能量重心法的频率估计模拟结果的归一化标准差(利用文献[6]的式(9)进行频率估计,取 $n=2$),可见能量重心法的频率估计误差略大于分段 FFT 相位差法,标准差约为 $2\sigma_{RB}$ 。

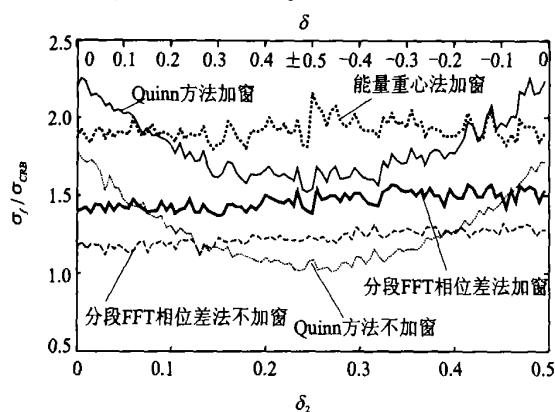


图 7 加 Hanning 窗时归一化标准差模拟结果

4 结论

利用 FFT 主瓣幅度最大值处的相位或邻近最大值的谱线的幅度可以提高基于 FFT 的频率估计方法的估计精度。在加性高斯白噪声背景下,不论哪种频率估计方法,只要是无偏估计,方差都存在理论下限。频率估计精度与信噪比及信号观测时间长度有关,还与信号实际频率和 FFT 最大谱线对应的频率的相对偏差有关。理论分析和计算机模拟结果表明,在加矩形窗的情况下,分段 FFT 相位差法和 Quinn 插值法的频率估计效果较好,方差接近 CR 下限。Rife-Jane 插值法在 δ 接近 ± 0.5 (信号实际频率靠近最大谱线与次大谱线中间)时与 Quinn 方法性能相同,当 δ 接近零时频率估计方差高出 CR 下限很多。重叠 FFT 相位差法在 δ 接近零时性能与分段 FFT 相位差法接近,但 $|\delta|$ 较大时,出现较大的误差。加 Hanning 窗(或其它非矩形窗函数)时,由于窗函数使得有效数据长度缩短,Quinn 方法和分段

FFT 相位差法的误差均略高于不加窗情况。加窗使得 FFT 主瓣变宽, Rife-Jane 插值法基本不再出现插值方向错误,频率估计误差大大降低,估计性能与 Quinn 方法相同。加 Hanning 窗时能量重心法的频率估计标准差约为 $2\sigma_{RB}$,略高于分段 FFT 相位差法,与 Quinn 方法接近。

参考文献:

- [1] 谢明,丁康. 频谱分析的校正方法[J]. 振动工程学报, 1994, 7(2): 172-179.
- [2] 刘进明,应怀樵. FFT 谱连续细化分析的富里叶变换法[J]. 振动工程学报, 1995, 8(2): 162-166.
- [3] 丁康,谢明,王志杰. 离散频谱的幅值、相位和频率的校正方法及误差分析[J]. 动态分析与测试技术, 1996, 14(1): 10-29.
- [4] 谢明,张晓飞,丁康. 频谱分析中用于相位和频率校正的相位差校正法[J]. 振动工程学报, 1999, 12(4): 454-459.
- [5] 丁康,张晓飞. 频谱校正理论的发展[J]. 振动工程学报, 2000, 13(1): 15-22.
- [6] 丁康,江利旗. 离散频谱的能量重心校正法[J]. 振动工程学报, 2001, 14(3): 354-359.
- [7] 朱小勇,丁康. 离散频谱校正方法的综合比较[J]. 信号处理, 2001, 17(1): 91-97.
- [8] Rife D C, Vincent G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones[J]. Bell. Sys. Tech. J., 1970, 49(2): 197-228.
- [9] Jane V K, Collins W L Jr, Davis D C. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT[J]. IEEE Trans. IM, 1979, 28(2): 113-122.
- [10] Quinn B G. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients[J]. IEEE Trans-SP, 1994, 42(5): 1264-1268.
- [11] Quinn B G. Estimation of frequency, amplitude and phase from the DFT of a time series[J]. IEEE Trans-SP, 1997, 45(3): 814-817.
- [12] 刘渝. 快速高精度正弦波频率估计综合算法[J]. 电子学报, 1999, 27(6): 126-128.
- [13] 齐国清,贾欣乐. 插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析[J]. 电子学报, 2004, 32(4): 625-629.
- [14] McMahon D R A, Barrett R F. An efficient method for the estimation of the frequency of single tone in noise from the phases of discrete Fourier transforms[J]. Signal Processing, 1986, 11(2): 169-177.
- [15] 齐国清,贾欣乐. 基于 DFT 相位的正弦波频率和初相的高精度估计方法[J]. 电子学报, 2001, 29(9):

1 164–1 167.

[16] Rife D C, Boorstyn R R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations [J]. IEEE Trans. on IT, 1974, 20(5) :591–598.

[17] 齐国清. 离散实正弦信号参数估计的 Cramer–Rao 方差下限[J]. 数据采集与处理, 2003, 18(2) :151–156.

Accuracy analysis and comparison of some FFT-based frequency estimators

QI Guo-qing

(Information Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China)

Abstract: Frequency estimation techniques based on FFT are widely used. This paper deals with the analysis of variance performances of some FFT based frequency estimators. Firstly, the lower bound of frequency estimation variance of single real sinusoid in additive white Gaussian noise is given. Then the variance performances of two frequency estimators based on the magnitude of FFT coefficients, Rife-Jane method and Quinn method, and two frequency estimators based on the phase of the FFT coefficients, segmented-FFT phase difference method and overlapped-FFT phase difference method, are analyzed. Formula for the evaluation of variance of Quinn method is derived next. The accuracy of segmented-FFT phase difference method is improved by applying smoothing filter to the two largest spectral lines inside the main lobe of the FFT spectrum. Finally, comparisons of variance performances among different estimators and between each estimator and the Cramer Rao lower bound are made by Monte Carlo simulations for situations without weighting window and with Hanning window, and the accuracy limits for each estimator are also pointed out.

Key words: signal processing; frequency estimation; spectral analysis

作者简介: 齐国清(1960–), 男, 工学博士, 教授, 博士生导师。电话: (0411) 84729564-604; E-mail: qgq@mail.edu.cn