

用于正弦波频率估计的修正 I-Rife 算法

王哲文¹, 许 晖^{2,3}, 易辉跃², 黄 浩¹, 杨 柳¹, 邓鹤鸣¹, 张武雄^{2,3}, 顾豪爽¹, 胡永明¹

(1. 湖北大学微电子学院, 武汉 430062; 2. 中国科学院上海微系统与信息技术研究所, 上海 200050; 3. 中科水研(江西)科技股份有限公司, 南昌 330006)

摘 要: 对正弦波信号的频率估计是雷达领域常见的问题。当真实频率接近量化频点时, I-Rife 算法的频率因子的计算会产生较大误差, 为提高频率估计的精度, 本文通过分析 Rife 及 I-Rife 算法的性能及误差产生的原因, 利用频谱细化的方法, 提出了一种修正 I-Rife 算法, 即用峰值频点左右各 0.5 点处的频谱幅值来替代频谱峰值点的幅值和次大值频点处的幅值进行插值计算, 对频率偏移值进行更为准确的估计, 在计算量与 I-Rife 算法几乎相同的情况下, 有效地提高了频率的估计精度。仿真结果表明, 改进后的 I-Rife 算法整体性能优于 I-Rife 算法, 且估计的均方根误差更接近于克拉美-罗下界。

关键词: Rife 算法; 频率估计; 频谱细化; 快速傅里叶变换; 克拉美-罗下界

中图分类号: TN957.51 **文献标志码:** A

Modified I-Rife Algorithm for Frequency Estimation of Sinusoid Wave

WANG Zhewen¹, XU Hui^{2,3}, YI Huiyue², HUANG Hao¹, YANG Liu¹, DENG Heming¹,
ZHANG Wuxiong^{2,3}, GU Haoshuang¹, HU Yongming¹

(1. School of Microelectronics, Hubei University, Wuhan 430062, China; 2. Shanghai Institute of Microsystem and Information Technology, Chinese Academy of Science, Shanghai 200050, China; 3. Zhongke WaterTech Research(Jiangxi) Technology Co. Ltd., Nanchang 330006, China)

Abstract: Frequency estimation of sine wave signals is a common problem in the radar field. When the true frequency approaches the quantization frequency points, the calculation of the frequency shift factor in the I-Rife algorithm can introduce significant errors. In order to improve the accuracy of frequency estimation, this paper analyzes the performance and error sources of the Rife and I-Rife algorithms. By utilizing a spectral refinement method, a modified I-Rife algorithm is proposed. It replaces the amplitude of the spectral peak point with the amplitudes at 0.5 points to the left and right of the peak point, and interpolates the amplitude using the second highest frequency point. This approach allows for a more accurate estimation of the frequency offset. The proposed algorithm effectively enhances the estimation accuracy of frequency while maintaining a similar computational complexity to the original I-Rife algorithm. Simulation results demonstrate that the improved I-Rife algorithm outperforms the original I-Rife algorithm in overall performance and achieves an estimated root mean square error closer to the Cramér-Rao lower bound.

Key words: Rife algorithm; frequency estimation; spectrum subdivision; fast Fourier transform(FFT); Cramér-Rao lower bound(CRLB)

基金项目: 国家自然科学基金(U21A20500)。
收稿日期: 2023-01-11; 修订日期: 2023-06-06

引言

在传感器、通信和雷达等领域中,对正弦波信号的频率估计是经常遇到的问题。例如,调频连续波(Frequency modulation continuous wave, FMCW)雷达通过估计发射信号与接收信号混频后的中频信号频率来测量目标的距离和速度^[1],频率估计的精度和速度直接关系着雷达测速、测距的精度和实时性^[2]。

为提升正弦波信号的频率估计精度,国内外学者从不同角度提出了多种算法。例如,Abatzoglou提出了最大似然估计(Maximum likelihood, ML)算法^[3],估计误差逼近克拉美-罗下界(Cramér-Rao low bound, CRLB)。虽然 ML 算法估计性能较好,但由于其算法复杂度高,计算量大,不利于实现实时处理,限制了其在实际中的应用^[4]。相比而言,利用离散傅里叶变换(Discrete Fourier transform, DFT)进行正弦信号的频率估计是一种更为有效的方法,其特点是计算量小,能够达到实时性的要求^[5-6]。但 DFT 算法实现时多用其快速算法(即快速傅里叶变换(Fast Fourier transform, FFT)),存在着频谱泄露和栅栏效应的问题,且当信噪比很低时存在较大的误差。对此,研究者提出了基于异频相位处理^[7]、全相位时移相位差频率估计^[8]、能量重心矫正法^[9]、相位差分算法^[10]、基于 FFT 的插值算法^[11](如三谱线插值法^[12]、迭代插值法^[13]、抛物线内插法、双线性对称频率内插、Rife 算法等^[14]),其中 Rife 算法简单、计算量小且易于实现,获得了更多关注。此外,基于频谱细化方法的 Zoom-FFT 算法和线性调频变换(Chirp-Z transform, CZT)算法^[15]由于其出色的性能也获得了广泛的关注,但相比 Rife 算法计算量较大,限制了其在对于信号处理的实时性较为敏感的场景下的应用。

Rife 算法最早是由 Rife 等^[16]于 1970 年提出的,主要是利用正弦信号频谱的最大值谱线和相邻的次大值谱线进行插值运算来确定其真实频率位置。当信噪比过低或其真实频率接近量化频率时,易出现插值方向的错误从而引起较大的误差。Quinn^[17]提出利用最大值谱线和次大值谱线之比的实部来代替幅值之比的方法,从而消除插值方向错误导致的频率估计误差,后续也有多种 Quinn 改进算法提出^[18-21]。邓振森等^[22]提出了 M-Rife 算法,利用频移的原理将估计的频率移动到两个量化频率中心再进行插值计算,其频移量为固定值的 1/3,降低了当真实频率接近量化频率时插值方向错误的概率,但有时需进行二次频移^[23]。王宏伟等^[24]提出了 I-Rife 算法,利用频谱细化和频移的方法进一步降低插值方向错误的概率,频率估计精度相比 M-Rife 获得进一步提升。孙宏军等^[14]提出了基于相角判据的改进 Rife 算法(P-Rife),利用 DFT 变换结果的相角对插值方向进行判断,降低了方向判断错误的概率,整体性能优于 Rife 算法。后进行改进,提出了基于幅值-相角判据的改进 Rife 算法(A-P-Rife)^[25],通过设定频移门限值来确定是否使用相角判据,得到了精度更高的估计性能。叶茂等^[1]通过分析 A-P-Rife 算法频谱幅值和相角之间关系的规律,提出了 Z-Rife 算法。Nian 等^[26]提出了基于预测的 Rife 算法(A-Rife),其使用了假设的方法,根据频移后离散频率值的变化来判断频移方向是否正确,当信号频率接近离散频点时能够更准确地判断插值方向。

Rife 算法容易出现插值方向的错误,过去提出的 Rife 改进算法大多是通过降低插值方向错误的概率来提高其精度,而文献[24]通过频谱细化的方法降低误判率,提升了计算量,但误判率极低。针对当真实频率接近量化频点时, I-Rife 算法频移因子的计算会产生较大误差的问题,本文提出了一种用频谱细化后的两频点来替代频谱峰值和次大值频点进行插值计算的修正 I-Rife 算法,对频率偏移值进行更为准确的估计,有效地提高了频率的估计精度。此外,该算法在没有提升计算量的情况下,降低了因噪声产生的插值误差。结果表明,该方法在信号真实频率接近量化频点时有效提升了频率估计的精度,且在整个频段内估计均方根误差更接近克拉美-罗下界,具有稳定且高精度的估计性能。

1 基于改进插值方法的修正 I-Rife 算法

本文首先描述 Rife 算法和 I-Rife 算法的特点及其不足之处,然后介绍基于改进插值方法的修正

I-Rife算法。

1.1 Rife算法

设添加高斯噪声的单频正弦信号为

$$x(n) = A \cdot e^{j(2\pi f_0 n \Delta t + \varphi_0)} + \omega(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

式中: Δt 为采样周期; A 、 f_0 和 φ_0 分别为信号的幅值、频率和初相位; N 为样本数; $\omega(n)$ 为方差为 σ^2 的高斯噪声。

设信号的频谱为 $X(k)$, 频谱幅值最大处对应的点为 k_0 , 则与其相邻的频谱幅值次大值处对应的点为 $k_0 + 1$ 或 $k_0 - 1$ 。Rife 算法的基本思想就是利用最大值谱线和相邻的次大值谱线进行插值计算, 从而估计正弦波频率, 其公式可以表示为^[16]

$$\hat{f}_0 = \frac{f_s}{N} \cdot \left(k_0 + a \cdot \frac{|X(k_0 + a)|}{|X(k_0 + a)| + |X(k_0)|} \right) \quad (2)$$

式中: f_s 为采样频率; a 为修正方向。当 $|X(k_0 + 1)| > |X(k_0 - 1)|$ 时, 向谱峰右边修正, $a = 1$; 当 $|X(k_0 + 1)| < |X(k_0 - 1)|$ 时, 向谱峰左边修正, $a = -1$ 。其修正因子为

$$\Delta k = \frac{|X(k_0 + a)|}{|X(k_0 + a)| + |X(k_0)|} \quad (3)$$

用 Matlab 对 Rife 算法进行仿真测试, 信号模型为式 (1) 表示的单频正弦信号, 采样频率 f_s 取 200 MHz; 采样点数 N 取 1 024, 则 FFT 频率分辨率为 $\Delta f = f_s/N$; 信噪比 SNR 取 -3 dB, 以 50 MHz 作为中心频率, 在一个频率分辨率内平均取 41 点, 模拟次数为 5 000 次, 计算 Rife 的均方根误差 (Root mean square error, RMSE), 结果如图 1 所示。

模拟结果表明, 在适度的信噪比条件下, 当真实频率接近最大值谱线和相邻的次大值谱线中间区域, 即修正因子 Δk 接近 0.5 时, 估计精度较高; 当真实频率接近最大值谱线, 即修正因子 Δk 接近 0 时, 估计性能较差, 误差有可能大于 DFT 算法, 且误差趋势呈现抛物线状。

基于上述结论对 Rife 算法误差产生原因进行分析, 当真实频率接近最大值谱线和相邻的次大值谱线中间区域时, 此时的最大值谱线和次大值谱线幅值都较大, 噪声对估计结果的影响较小, 故式 (2) 的插值计算较为准确, 具有较高的估计精度; 反之, 当真实频率接近最大值谱线时, 次大值谱线幅值较小, 且噪声对插值计算的结果影响较大, 从而导致频率估计误差较大。

另外, Rife 算法通过比较最大值谱线左右两条谱线幅值大小来确定修正方向, 由于噪声的影响, 会出现修正方向错误, 此时的误差较大。当真实频率接近最大值谱线时, 此时相邻的两条谱线幅值即 $|X(k_0 + 1)|$ 和 $|X(k_0 - 1)|$ 都较小, 噪声对估计结果影响较大, 导致误判概率和误差很大, 而当真实频率继续靠近量化频点时, 虽然更容易产生误判, 但此时修正因子 Δk 接近于 0, 误差会产生一定程度的下降; 当真实频率接近两相邻谱线中间区域时, $|X(k_0 + 1)|$ 和 $|X(k_0 - 1)|$ 较大, 噪声免疫力强, 误判概率较小。

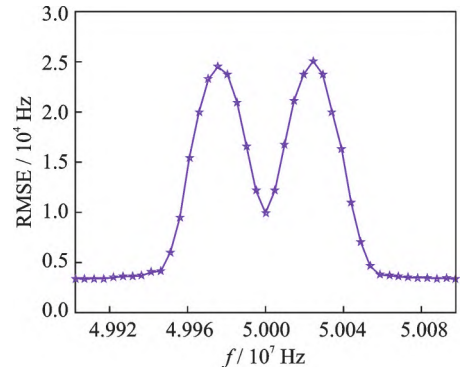


图1 Rife算法的均方根误差与频率之间的关系
Fig.1 Root mean square error and frequency relation of Rife algorithm

1.2 I-Rife 算法

针对上述 Rife 算法问题,文献[24]提出用频谱细化的方式获取 $k_0 + 0.5$ 和 $k_0 - 0.5$ 处的谱线幅值,分别代替 $k_0 + 1$ 和 $k_0 - 1$ 处的频谱幅值来修正方向 a 的判断。由于真实谱线位置实际上在 $k_0 + 0.5$ 和 $k_0 - 0.5$ 两点中间,故 $k_0 + 0.5$ 和 $k_0 - 0.5$ 两点相比 $k_0 + 1$ 和 $k_0 - 1$ 两点更接近真实频率,即 $|X(k_0 \pm 0.5)|$ 相比 $|X(k_0 \pm 1)|$ 更大,噪声免疫力更强,故选取 $|X(k_0 \pm 0.5)|$ 来代替 $|X(k_0 \pm 1)|$ 作为修正方向 a 的判断更合理。

在利用频谱细化的方式获取更加精确的修正方向后,利用式(3)获取修正因子 Δk 的粗估计,再利用 M-Rife 算法中用到的频移技术,将信号 $x(n)$ 的频谱向修正方向移动 δ_k 量化单位,使被测频率位于两量化频点中心位置,此时再利用 Rife 算法进行估计,可以有效地减弱噪声的影响,在全频段得到良好的估计性能。频移因子和修正因子满足 $\delta_k + \Delta k = 1/2^{[22]}$,频移因子可以表示为

$$\delta_k = \frac{1}{2} - \Delta k = \frac{1}{2} - \frac{|X(k_0 + a)|}{|X(k_0 + a)| + |X(k_0)|} \quad (4)$$

I-Rife 算法的频率估计公式为

$$\hat{f}_0 = \frac{f_s}{N} \cdot \left(k_0 - a\delta_k + a \cdot \frac{|X(k_0 - a\delta_k + a)|}{|X(k_0 - a\delta_k + a)| + |X(k_0 - a\delta_k)|} \right) \quad (5)$$

式中: $a = \pm 1$ 。当 $|X(k_0 + 0.5)| > |X(k_0 - 0.5)|$ 时, $a = 1$; 当 $|X(k_0 + 0.5)| \leq |X(k_0 - 0.5)|$ 时, $a = -1$ 。

1.3 修正 I-Rife 算法 (A-I-Rife)

通过分析 Rife 算法可知,其产生误差的主要原因有两个:(1) 修正方向判断错误;(2) 噪声对插值结果的影响。I-Rife 算法在计算频移因子 δ_k 时,用频谱细化的方式大幅降低了修正方向判断错误的概率,但因噪声对插值结果的影响导致的误差依然存在。故当真实谱线接近最大值谱线时,频移因子 δ_k 会出现较大误差,从而导致估计误差较大。

I-Rife 算法通过频谱细化的方式得到了 $k_0 \pm 0.5$ 两点的谱线幅值 $|X(k_0 \pm 0.5)|$,并用其比较大小来确定修正方向,在计算频移因子 δ_k 时,则使用 Rife 插值方法,用最大值谱线幅值 $|X(k_0)|$ 和相邻的次大值谱线幅值 $|X(k_0 + 1)|$ 或 $|X(k_0 - 1)|$ 进行插值计算。因为真实谱线的范围实际上在 $k_0 \pm 0.5$ 两点谱线范围内,所以计算频移因子 δ_k 也可以用 $k_0 \pm 0.5$ 两点插值。不考虑修正方向错误,当真实谱线接近峰值谱线时,用 Rife 插值方法计算的频移因子 δ_k 仍会出现较大误差;而此时真实谱线正好位于 $k_0 \pm 0.5$ 两点中间,用 $k_0 \pm 0.5$ 两点谱线幅值进行插值计算有效降低了噪声对频移因子 δ_k 的影响;相反,若真实谱线接近细化谱线时,则 Rife 插值方法计算的频移因子误差更小,算法性能更好。

为使噪声对估计结果的影响最小,修正 I-Rife 算法使用 $|X(k_0)|$ 和 $|X(k_0 + 0.5a)|$ 进行比较来判断真实谱线位置,当 $|X(k_0)| > |X(k_0 + 0.5a)|$ 时,真实谱线更接近峰值谱线,此时用 $|X(k_0 \pm 0.5)|$ 进行插值计算;当 $|X(k_0)| \leq |X(k_0 + 0.5a)|$,真实谱线更接近细化谱线,此时用 $|X(k_0)|$ 和 $|X(k_0 + a)|$ 进行插值计算。修正因子 Δk 可以表示为

$$\Delta k = \begin{cases} \frac{|X(k_0 + a)|}{|X(k_0 + a)| + |X(k_0)|} & |X(k_0)| \leq |X(k_0 + 0.5a)| \\ \frac{1}{2} - \frac{|X(k_0 - 0.5a)|}{|X(k_0 - 0.5a)| + |X(k_0 + 0.5a)|} & |X(k_0)| > |X(k_0 + 0.5a)| \end{cases} \quad (6)$$

频移因子和修正因子满足 $\delta_k + \Delta k = 1/2$, 频移因子可以表示为

$$\delta_k = \frac{1}{2} - \Delta k = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{|X(k_0 + a)|}{|X(k_0 + a)| + |X(k_0)|} & |X(k_0)| \leq |X(k_0 + 0.5a)| \\ \frac{|X(k_0 - 0.5a)|}{|X(k_0 - 0.5a)| + |X(k_0 + 0.5a)|} & |X(k_0)| > |X(k_0 + 0.5a)| \end{cases} \quad (7)$$

式中: $a = \pm 1$ 。当 $|X(k_0 + 0.5)| > |X(k_0 - 0.5)|$ 时, $a = 1$; 当 $|X(k_0 + 0.5)| \leq |X(k_0 - 0.5)|$ 时, $a = -1$ 。

计算出新的频移因子 δ_k 后, 再利用频谱细化的原理计算频移后的两谱线 $|X(k_0 - a\delta_k)|$ 和 $|X(k_0 - a\delta_k + a)|$, 并使用 I-Rife 算法的频率估计式(5)计算信号频率。

综上所述, A-I-Rife 算法流程如下:

- (1) 对信号 $x(n)$ 进行 FFT 变换, 并求其频谱幅值最大值位置 k_0 , 记录最大值点及其左右相邻两点的频谱幅值 $|X(k_0)|$ 和 $|X(k_0 \pm 1)|$ 。
- (2) 利用频谱细化技术计算 $|X(k_0 \pm 0.5)|$, 并通过比较其大小判断修正方向 a 。
- (3) 比较 $|X(k_0)|$ 和 $|X(k_0 + 0.5a)|$ 大小, 判断真实谱线位置, 当 $|X(k_0)| > |X(k_0 + 0.5a)|$, 继续步骤(4), 当 $|X(k_0)| \leq |X(k_0 + 0.5a)|$, 转向步骤(5)。
- (4) 用式(7)计算频移因子 δ_k , 转向步骤(6)。
- (5) 用式(4)计算频移因子 δ_k 。
- (6) 用频谱细化技术计算频移后的两谱线 $|X(k_0 - a\delta_k)|$ 和 $|X(k_0 - a\delta_k + a)|$ 。
- (7) 用式(5)计算信号频率 \hat{f}_0 。

2 复杂度及性能分析

2.1 复杂度分析

A-I-Rife 算法需要对信号 $x(n)$ 进行一次 N 点 FFT 变换, 并通过频谱细化的方式计算 4 点的频谱幅值, 即需要进行 4 次单点的 DFT 运算, 其他运算相比 FFT 和 DFT 而言可忽略不计。FFT 运算的时间复杂度为 $O(N \cdot \log_2 N)$, 空间复杂度为 $O(N)$; 单点 DFT 运算的时间复杂度为 $O(N)$, 空间复杂度为 $O(1)$, 所以 A-I-Rife 算法的时间复杂度为 $O(N \cdot \log_2 N + 4N) = O(N \cdot \log_2 N)$, 空间复杂度为 $O(N + 4) = O(N)$ 。而 I-Rife 算法同样也需进行一次 N 点 FFT 运算和 4 次单点的 DFT 运算, 即时间复杂度为 $O(N \cdot \log_2 N)$, 空间复杂度为 $O(N)$ 。故 A-I-Rife 算法复杂度和 I-Rife 算法一致, 说明两者计算量和空间占用基本一致。

2.2 计算机仿真及性能分析

用 Matlab 对 A-I-Rife 算法进行仿真和验证。仿真参数如下: 采样频率 $f_s = 200$ MHz, 采样点数 $N = 1\,024$, 频率分辨率 $\Delta f = f_s/N = 0.195$ MHz, 信噪比 $\text{SNR} = A^2/2\sigma^2$, 蒙特卡洛模拟次数为 5 000 次。在相位、幅度和频率 3 个参数都未知的情况下, 频率估计方差的克拉美-罗下界(Cramér-Rao lower bound, CRLB)为

$$\text{CRLB} = \frac{6f_s^2}{4\pi^2 \cdot \text{SNR} \cdot N(N^2 - 1)} \quad (8)$$

设 f_0 为一量化频率, 取 $f_0 = 50$ MHz, 在 $f_0 - \Delta f$ 和 $f_0 + \Delta f$ 之间取 40 个离散频点, 作为信号的频率, 取

信噪比 $\text{SNR} = 3 \text{ dB}$, 计算 I-Rife 算法和 A-I-Rife 算法中频移因子 δ_k 的均方根误差并进行蒙特卡洛模拟, 结果如图 2 所示。可以看出, 当信号频率接近量化频点 f_0 时, I-Rife 频移因子 δ_k 的均方根误差明显增大, 而 A-I-Rife 则有效地减少了此时的频移因子 δ_k 的误差。

在信噪比 $\text{SNR} = -10 \text{ dB}$ 和 10 dB 之间取 21 个点, 取信号频率分别为 f_0 、 $f_0 + 0.15\Delta f$ 、 $f_0 + 0.35\Delta f$, 计算 I-Rife、A-I-Rife 与现有的 Rife 改进算法 A-Rife 的均方根误差与信噪比的关系, 进行蒙特卡洛模拟后结果如图 3 所示。可以看出, 当信号频率取 f_0 时, A-I-Rife 算法的估计性能明显优于 I-Rife, 非常接近克拉美-罗下界, 且噪声越大, 优势越明显; 当信号频率取 $f_0 + 0.15\Delta f$ 时, A-I-Rife 略优于 I-Rife 算法; 当信号频率取 $f_0 + 0.35\Delta f$ 时, A-I-Rife 和 I-Rife 算法极为接近。且 A-I-Rife 和 I-Rife 算法估计性能都明显优于 A-Rife 算法, 接近克拉美-罗下界。

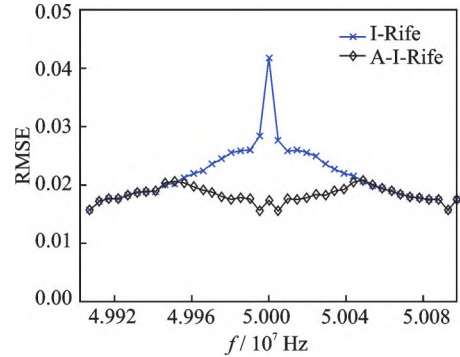


图 2 频移因子的均方根误差和频率关系

Fig.2 Root mean square error and frequency relation of frequency shift factor

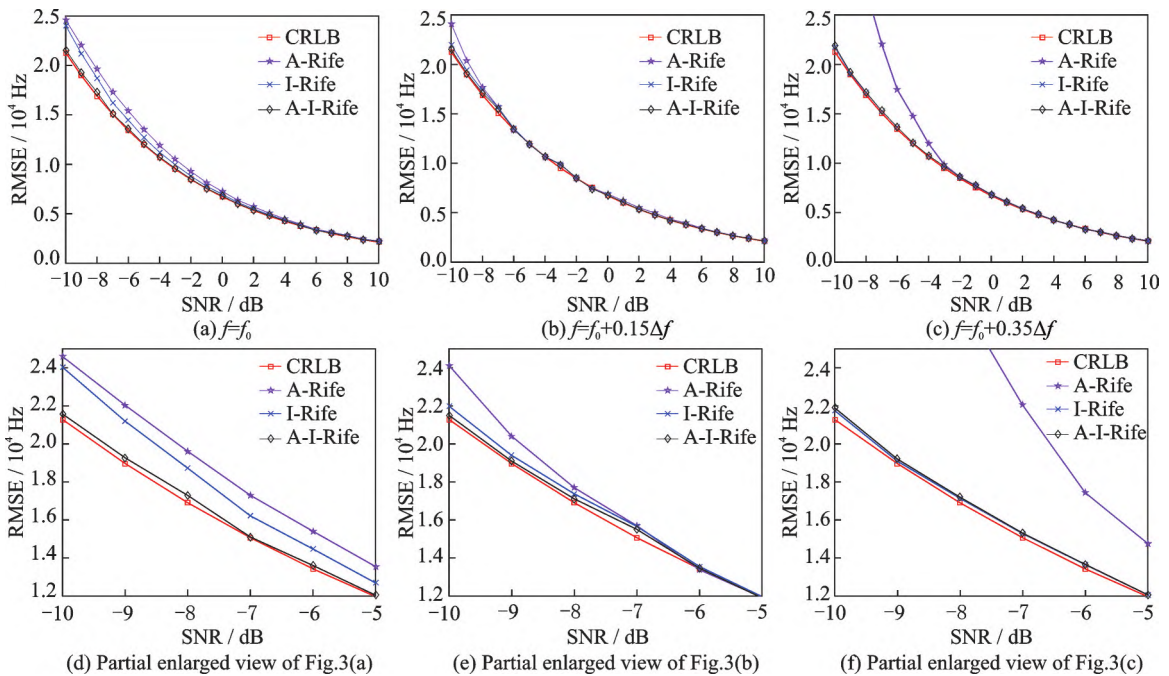


图 3 各个算法的均方根误差与信噪比关系

Fig. 3 Relationship between root mean square error and SNR of each algorithm

在 f_0 和 $f_0 + \Delta f/2$ 之间取 11 个离散频点作为信号的频率, 编号为 i ($i = 1, 2, \dots, 11$), 即信号频率为 $f_0 + ((i-1)/10) \cdot \Delta f$, 分别取信噪比 $\text{SNR} = 3, 0, -3 \text{ dB}$ 时, 将 A-I-Rife、I-Rife 与现有的 Rife 改进算法 A-Rife、A-P-Rife、Z-Rife 进行对比, 计算其平均绝对误差 (Mean absolute error, MAE) 和 RMSE, 蒙特卡洛模拟结果如表 1~3 所示。可以看出, 在 3 种信噪比条件下, A-I-Rife 算法在全频段都能保持较高的估计精度和稳定性, 并且非常接近克拉美-罗下界, 且 I-Rife 和 A-I-Rife 的平均绝对误差和均方根

误差明显小于 A-Rife、A-P-Rife 和 Z-Rife。当信号频率在 f_0 和 $f_0 + \Delta f/4$ 之间时, A-I-Rife 性能优于 I-Rife, 且越接近量化频点 f_0 效果越明显, 并随着信噪比降低, 性能优势会越来越明显。即当真实频率接近量化频点时, A-I-Rife 估计性能明显强于 I-Rife。但信号频率正好位于两量化频点中心时, A-I-Rife 平均绝对误差和均方根误差略高于 I-Rife。不过, 从平均值可以看出, 改进算法 A-I-Rife 的平均性能优于 I-Rife 算法。

表 1 仿真结果 I (SNR=3 dB, CRLB=1 684. 52)

Table 1 Simulation results I (SNR=3 dB, CRLB=1 684. 52)

编号 i	A-Rife		A-P-Rife		Z-Rife		I-Rife		A-I-Rife	
	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
1	1 390.1	1 736.7	3 743.0	4 203.2	3 762.9	4 223.1	1 360.7	1 699.3	1 343.9	1 681.0
2	1 405.7	1 768.9	2 175.3	2 723.5	2 175.3	2 723.5	1 356.6	1 706.4	1 353.4	1 703.1
3	1 395.9	1 772.0	2 022.1	2 535.0	2 022.1	2 535.0	1 340.7	1 692.6	1 340.3	1 691.5
4	1 381.3	1 735.1	1 859.2	2 332.0	1 859.2	2 332.0	1 365.1	1 712.6	1 363.6	1 709.7
5	1 337.3	1 691.9	1 681.8	2 118.3	1 681.8	2 118.3	1 337.3	1 691.9	1 336.5	1 691.2
6	1 382.7	1 728.1	1 619.0	2 031.8	1 619.0	2 031.8	1 382.7	1 728.1	1 401.9	1 744.5
7	1 360.9	1 705.8	1 500.4	1 895.8	1 500.4	1 895.8	1 360.9	1 705.8	1 360.9	1 705.8
8	1 341.5	1 680.9	1 421.3	1 784.7	1 421.3	1 784.7	1 341.5	1 680.9	1 341.5	1 680.9
9	1 375.1	1 717.3	1 407.0	1 759.8	1 407.0	1 759.8	1 375.1	1 717.3	1 375.1	1 717.3
10	1 348.4	1 698.7	1 359.6	1 711.9	1 359.6	1 711.9	1 348.4	1 698.7	1 348.4	1 698.7
11	1 346.6	1 685.2	1 346.5	1 684.8	1 346.5	1 684.8	1 346.6	1 685.2	1 346.6	1 685.2
平均值	1 369.6	1 720.0	1 830.5	2 252.8	1 832.3	2 254.6	1 356.0	1 701.7	1 355.6	1 700.8

表 2 仿真结果 II (SNR=0 dB, CRLB=2 379. 45)

Table 2 Simulation results II (SNR=0 dB, CRLB=2 379. 45)

编号 i	A-Rife		A-P-Rife		Z-Rife		I-Rife		A-I-Rife	
	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
1	1 972.5	2 472.7	5 300.3	5 942.9	5 286.6	5 931.2	1 917.7	2 402.9	1 881.2	2 361.1
2	1 980.4	2 491.7	3 150.2	3 971.6	3 111.6	3 865.8	1 909.8	2 394.7	1 903.0	2 384.2
3	2 019.6	2 547.0	2 838.3	3 557.9	2 838.3	3 557.9	1 906.6	2 394.7	1 905.9	2 391.5
4	1 967.2	2 472.2	2 593.1	3 261.5	2 593.1	3 261.5	1 919.2	2 406.2	1 918.8	2 406.2
5	1 933.7	2 416.5	2 430.8	3 045.3	2 430.8	3 045.3	1 934.4	2 418.0	1 932.0	2 415.8
6	1 911.1	2 406.1	2 291.6	2 875.7	2 291.6	2 875.7	1 911.1	2 406.1	1 945.8	2 435.1
7	1 915.7	2 398.5	2 168.9	2 716.7	2 168.9	2 716.7	1 915.7	2 398.5	1 915.7	2 398.5
8	1 938.3	2 433.0	2 078.1	2 598.6	2 078.1	2 598.6	1 938.3	2 433.0	1 938.3	2 433.0
9	1 936.7	2 423.0	1 983.2	2 481.2	1 983.2	2 481.2	1 936.7	2 423.0	1 936.7	2 423.0
10	1 919.9	2 432.3	1 938.7	2 449.7	1 938.7	2 449.7	1 919.9	2 432.3	1 919.9	2 432.3
11	1 942.9	2 420.7	1 942.7	2 421.7	1 942.7	2 421.7	1 942.9	2 420.7	1 942.9	2 420.7
平均值	1 948.9	2 446.7	2 610.5	3 211.2	2 605.8	3 200.5	1 923.0	2 411.8	1 921.8	2 409.2

表 3 仿真结果Ⅲ (SNR=-3 dB,CRLB=3 361. 06)
Table 3 Simulation results Ⅲ (SNR=-3 dB,CRLB=3 361. 06)

编号 <i>i</i>	A-Rife		A-P-Rife		Z-Rife		I-Rife		A-I-Rife		Hz
	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	
1	2 904.1	3 629.0	7 172.5	8 055.6	7 250.8	8 125.3	2 792.5	3 483.2	2 712.0	3 395.1	
2	2 863.7	3 596.4	4 367.4	5 674.0	4 243.2	5 388.4	2 729.2	3 415.8	2 702.6	3 381.8	
3	2 913.2	3 629.7	3 980.6	4 971.7	3 980.6	4 971.7	2 729.3	3 394.5	2 721.4	3 385.5	
4	2 789.4	3 491.4	3 732.6	4 670.3	3 732.6	4 670.3	2 768.6	3 456.4	2 764.4	3 453.5	
5	2 674.8	3 346.7	3 420.3	4 285.6	3 420.3	4 285.6	2 680.9	3 355.6	2 678.9	3 355.0	
6	2 720.0	3 420.2	3 217.3	4 047.2	3 217.3	4 047.2	2 711.9	3 399.0	2 787.1	3 461.8	
7	2 697.5	3 379.0	3 017.8	3 766.6	3 017.8	3 766.6	2 697.5	3 379.0	2 697.7	3 379.8	
8	2 762.8	3 457.6	2 937.3	3 691.1	2 937.3	3 691.1	2 762.8	3 457.6	2 762.8	3 457.6	
9	2 684.9	3 368.5	2 769.0	3 474.2	2 769.0	3 474.2	2 684.9	3 368.5	2 684.9	3 368.5	
10	2 674.0	3 364.2	2 702.2	3 386.5	2 702.2	3 386.5	2 674.0	3 364.2	2 674.0	3 364.2	
11	2 684.5	3 366.7	2 683.0	3 365.9	2 683.0	3 365.9	2 684.5	3 366.7	2 684.5	3 366.7	
平均值	2 760.8	3 459.0	3 636.4	4 489.9	3 632.2	4 470.3	2 719.7	3 403.7	2 715.5	3 397.2	

3 结束语

本文采用 I-Rife 频谱细化后的两频点来替代频谱峰值和次大值频点进行插值计算,提出了改进的 I-Rife 算法,有效降低了 I-Rife 算法中频移因子的计算误差,提高了频率估计的精度。当真实频率接近量化频点时,改进的 I-Rife 算法明显降低了 I-Rife 算法的频率估计误差,当真实频率位于两量化频点中心位置时,估计性能会略低于 I-Rife 算法,但从平均性能来看优于 I-Rife 算法,且计算量和 I-Rife 算法几乎相同。可见,本文提出的 A-I-Rife 算法估计性能优于 I-Rife 算法、A-Rife 算法、A-P-Rife 算法和 Z-Rife 算法,均方根误差接近克拉美-罗下界,且稳定性强、计算量小、易于实现。

参考文献:

[1] 叶茂,刘恒泉,赵毅强,等. 面向 FMCW 激光雷达的修正 Rife 算法设计与硬件实现[J]. 红外与激光工程, 2022, 51(12): 138-144.
YE Mao, LIU Hengquan, ZHAO Yiqiang, et al. Design and hardware implementation of modified Rife algorithm for FMCW LiDAR[J]. Infrared and Laser Engineering, 2022, 51(12): 138-144.

[2] HAMSAPRIYE C K, LAKSHMEESHA V K. Analysis of pisarenko harmonic decomposition-based subNyquist rate spectrum sensing for broadband cognitive radio[J]. Defence Science Journal, 2017, 67(1): 80-87.

[3] ABATZOGLOU T J. A fast maximum likelihood algorithm for the frequency estimation of a sinusoid based on Newton methods [J]. IEEE Transactions on Acouatics, Speech and Signal Proceedings, 1985, 33(1): 77-89.

[4] 王宏伟,赵国庆,齐飞林. 一种实时精确的正弦波频率估计算法[J]. 数据采集与处理, 2009, 24(2): 208-211.
WANG Hongwei, ZHAO Guoqing, QI Feilin. Real-time and accurate single frequency estimation approach[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2009, 24(2): 208-211.

[5] 郑威,陈德昶,刘红星. 改进的 DFT 插值频率估计算法及其 DSP 实现[J]. 数据采集与处理, 2017, 32(3): 588-594.
ZHENG Wei, CHEN Dechang, LIU Hongxing. Improved DFT interpolation frequency estimation algorithm and its DSP im-
plementation[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2017, 32(3): 588-594.

[6] 柏果,程郁凡,唐万斌,等. 利用 DFT 和迭代校正的正弦信号频率估计算法[J]. 信号处理, 2017, 33(12): 1536-1541.
BAI Guo, CHENG Yufan, TANG Wanbin, et al. Sinusoidal signal frequency estimation algorithm using DFT and iterative

- correction[J]. Signal Processing, 2017, 33(12): 1536-1541.
- [7] 杜保强,周渭. 基于异频相位处理的高精度频率测量系统[J]. 天津大学学报, 2010, 43(3): 262-266.
DU Baoqiang, ZHOU Wei. High precision frequency measurement system based on different frequency phase processing[J]. Journal of Tianjin University, 2010, 43(3): 262-266.
- [8] 黄翔东,白瑞朋,靳旭康. 基于频移补偿的全相位时移相位差频率估计[J]. 天津大学学报:自然科学与工程技术版, 2017, 50(6): 649-655.
HUANG Xiangdong, BAI Ruipeng, JIN Xukang. Frequency estimation of all phase time shifted phase difference based on frequency shift compensation[J]. Journal of Tianjin University: Science and Technology, 2017, 50(6): 649-655.
- [9] 丁康,江利旗. 离散频谱的能量重心校正法[J]. 振动工程学报, 2001, 14(3): 354-358.
DING Kang, JIANG Liqi. Energy centrobaric correction method for discrete spectrum[J]. Journal of Vibration Engineering, 2001, 14(3): 354-358.
- [10] GENG M, LIANG H, WANG J. Research on methods of higher-order statistic for phase difference detection and frequency estimation[C]//Proceedings of 4th International Congress on Image and Signal Processing. Shanghai: [s.n.], 2011: 2189-2193.
- [11] 许珉,刘凌波. 基于三次样条函数的加 Blackmanharris 窗插值 FFT 算法[J]. 电力自动化设备, 2009, 29(2): 59-63.
XU Min, LIU Lingbo. Add blackman-harris window interpolation FFT algorithm based on cubic spline function[J]. Electric Power Automation Equipment, 2009, 29(2): 59-63.
- [12] 吴会豪,樊磊,宋焕焕,等. 基于 DFT 和 DTFT 插值的正弦信号频率估计[J]. 大连工业大学学报, 2022, 41(6): 462-468.
WU Huihao, FAN Lei, SONG Huanhuan, et al. Frequency estimation of sinusoidal signal based on DFT and DTFT interpolation[J]. Journal of Dalian Polytechnic University, 2022, 41(6): 462-468.
- [13] 李心一. 迭代插值频率估计方法的研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2021.
LI Xinyi. Research on frequency estimation method based on iterative interpolation[D]. Chongqing: Chongqing University, 2021.
- [14] 孙宏军,徐冠群. 基于相角判据的 Rife 算法的涡街信号处理方法[J]. 仪器仪表学报, 2013, 34(12): 2860-2866.
SUN Hongjun, XU Guanqun. Modified Rife frequency estimation algorithm based on phase criterion for vortex signal processing[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2013, 34(12): 2860-2866.
- [15] 邓磊磊. ZFFT 和 CZT 频谱细化方法在频率估计中的应用[C]//中国声学学会水声学会 2021—2022 年学术会议论文集. 中国青岛: [s.n.], 2022: 83-86.
DENG Leilei. Application of ZOOM-FFT and CZT spectrum zooming methods in frequency estimation[C]//Proceedings of 2021—2022 Academic Conference of underwater acoustics Branch of Chinese Acoustics Society. Qingdao, China: [s.n.], 2022: 83-86.
- [16] RIFE D C, BOORSTYN R R. Single tone parameter estimation from discrete-time observation[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 1974, 20(5): 591-598.
- [17] QUINN B G. Estimation of frequency, amplitude and phase from the DFT of a time series[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1997, 45(3): 814-817.
- [18] 谢胜,陈航,于平,等. 基于 Quinn 算法和相位差法的正弦波频率估计综合算法[J]. 信号处理, 2011, 27(5): 771-775.
XIE Sheng, CHEN Hang, YU Ping, et al. Sinusoid wave frequency estimation combined algorithm based on Quinn algorithm and phase difference correction algorithm[J]. Signal Processing, 2011, 27(5): 771-775.
- [19] 姚帅,方世良,王晓燕. 一种 IQuinn-Rife 综合 CW 脉冲信号频率精确估计方法[J]. 声学技术, 2016, 35(6): 285-288.
YAO Shuai, FANG Shiliang, WANG Xiaoyan. Frequency-estimation of CW signal based on combined IQuinn-Rife interpolation method[J]. Technical Acoustics, 2016, 35(6): 285-288.
- [20] 李玲霞,贾帅,谢良波,等. 基于改进 Quinn 算法的 LFMCW 雷达高精度测距[J]. 雷达科学与技术, 2018, 16(5): 465-470.
LI Lingxia, JIA Shuai, XIE Liangbo, et al. An improved Quinn algorithm for improving the LFMCW radar ranging accuracy[J]. Radar Science and Technology, 2018, 16(5): 465-470.
- [21] 夏文杰,陆代强,郭晓明,等. 一种修正 I-Quinn 的 CW 脉冲信号频率精确估计方法[J]. 舰船电子工程, 2021, 41(3): 153-156.
XIA Wenjie, LU Daiqiang, GUO Xiaoming, et al. An accurate estimation method of frequency of CW pulse signal by modified I-Quinn[J]. Ship Electronic Engineering, 2021, 41(3): 153-156.

- [22] 邓振森, 刘渝, 王志忠. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. 数据采集与处理, 2006, 21(4): 473-477.
DENG Zhenmiao, LIU Yu, WANG Zhizhong. Modified Rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2006, 21(4): 473-477.
- [23] 谢胜, 陈航, 于平. 基于 FFT 并二次修正的 Rife 频率估计算法[J]. 探测与控制学报, 2010, 32(4): 48-53.
XIE Sheng, CHEN Hang, YU Ping. Rife frequency estimation algorithm based on FFT and twice modifying[J]. Journal of Detection and Control, 2010, 32(4): 48-53.
- [24] 王宏伟, 赵国庆. 正弦波频率估计的改进 Rife 算法[J]. 信号处理, 2010, 26(10): 1573-1576.
WANG Hongwei, ZHAO Guoqing. Improved Rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave[J]. Signal Processing, 2010, 26(10): 1573-1576.
- [25] 孙宏军, 王小威. 基于幅值-相角判据的修正 Rife 正弦波频率估计算法[J]. 天津大学学报: 自然科学与工程技术版, 2018, 51(8): 810-816.
SUN Hongjun, WANG Xiaowei. Modified Rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave based on amplitude and phase criterion[J]. Journal of Tianjin University: Science and Technology, 2018, 51(8): 810-816.
- [26] NIAN P, LIU R. Anticipated Rife interpolation algorithm for frequency estimation of sinusoid signal[C]//Proceedings of 2019 IEEE International Conference on Power, Intelligent Computing and Systems (ICPICS). Shenyang, China: IEEE, 2019: 287-291.

作者简介:



王哲文(1998-), 男, 硕士研究生, 研究方向: 信号处理, E-mail: 447399427@qq.com。



许晖(1976-), 男, 高级工程师, 研究方向: 无线通信技术、智能传感器应用, E-mail: hui.xu@mail.sim.ac.cn。



易辉跃(1970-), 男, 副研究员, 硕士生导师, 研究方向: 4G/5G/6G 无线通信、信号处理, E-mail: Huiyue.yi@mail.sim.ac.cn。



黄浩(1988-), 男, 副教授, 硕士生导师, 研究方向: 非线性信号处理、机器视觉算法, E-mail: haohuang@hubu.edu.cn。



杨柳(1989-), 男, 副教授, 硕士生导师, 研究方向: 光纤传感与通信, E-mail: liuyang89@hubu.edu.cn。



邓鹤鸣(1979-), 男, 教授, 正高级工程师, 研究方向: 极端环境量测技术, E-mail: dengheming@hubu.edu.cn。



张武雄(1985-), 男, 研究员, 硕士生导师, 研究方向: 智能传感器、信息处理、无线通信, E-mail: wuxiong.zhang@mail.sim.ac.cn。



顾豪爽(1958-), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向: 传感器、压电材料与器件, E-mail: guhushan@hubu.edu.cn。



胡永明(1978-), 通信作者, 男, 教授, 博士生导师, 研究方向: 传感器、介质储能, E-mail: huym@hubu.edu.cn。

(编辑: 陈璐)