正弦波频率估计的改进 Rife 算法

王宏伟 赵国庆
(西安电子科技大学，电子对抗研究所，陕西，西安，710071)

摘 要：根据 Rife 算法在被估计频率接近量化频率时的估计精度较差，但接近两相邻量化频率中心区域时估计精度接近克拉美—罗限的特点，本文提出改进 Rife（I-Rife）算法。I-Rife 算法利用频移技术和频谱细化技术使信号频率总是位于两相邻量化频率中心区域后，然后再利用 Rife 算法便可以获得较高的频率估计精度。I-Rife 算法改进了判据，降低了频率修正方向的误判概率，使 I-Rife 算法在低信噪比下仍能保持较高的频率估计精度。仿真结果表明，在信噪比达到-13dB 时，I-Rife 算法仍保持较高的频率估计精度，而且整个频段上性能稳定。I-Rife 算法计算量小，易于硬件实现，可以实时精确的进行正弦波频率估计。

关键词：频率估计；频谱细化；频谱搬移；克拉美—罗限
中图分类号：TN971.6 **文献标识码**：A **文章编号**：1003-0530(2010)10-1573-04

Improved Rife Algorithm for Frequency Estimation of Sinusoid Wave

WANG Hong-wei ZHAO Guo-qing
(Research Inst. of Electronic Countermeasure, Xidian Univ., Xi'an, 710071, China)

Abstract: Because the frequency estimate precision of Rife algorithm has a great deviation when the signal real frequency is near to the discrete frequency, but the frequency estimate precision can reach Cramer-Rao lower bound when the signal frequency is near to the midpoint of two neighboring discrete frequencies. An improved Rife(I-Rife) algorithm is presented by moving the signal frequency to the midpoint area of two neighboring discrete frequencies and then the frequency is estimated by Rife algorithm. The ill-judged probability of correctional frequency direction can decrease sharply after using improved criterion. The I-Rife algorithm holds on higher precision even when the SNR reaches to -13dB, but it need lower workload owing to using spectrum subdivision technique. The simulation results indicate that I-Rife algorithm not only has good frequency estimation precision, but also has a good stability in all frequency domains. Frequency estimation of sinusoid wave based on the I-Rife algorithm can be achieved in real-time. It can be implemented easily by the hardware.

Key words: frequency estimation; spectrum subdivision; spectrum shift; Cramer-Rao lower bound

1 引言

在雷达和通信等领域，关于正弦信号频率估计的文章很多，文献[1]利用最大似然估计(ML)算法估计正弦信号频率，估计误差逼近克拉美-罗限(CRLB)，为最优估计，但算法计算量大，难以实时处理。采用 DFT 直接谱估计法[2]进行正弦波信号频率估计，计算量小(借助 FFT)，工程上得到了广泛应用，但 DFT 算法精度在很大程度上依赖于采样长度 N。为了对短时宽、强干扰正弦信号实时、精确的进行频率估计，国内外学者对基于 DFT 的估计算法进行了改进，如 Kay 提出的 Rife 法[3]。Rife 法在被估计频率位于两相邻量化频率的中心区域时精度很高，但位于量化频率点附近时误差可能比 DFT 还大。文献[4-7]为 Rife 法的改进，一般需要将频段划分为几个小频段后进行频率估计，估计效果受分段算法影响。文献[6]利用频移技术使频率估计

收稿日期：2009 年 11 月 19 日；修回日期：2010 年 4 月 22 日
基金项目：十一五武器装备预研基金（9140A07020806DZ01）

精度提高,但频移量为固定值1/3,有时需要两次频移;文献[7]利用频谱细化技术降低了频率修正方向的误判概率,但仍需分段估计。本文利用频移技术,总能将信号频率一次性的移至两相邻量化频率中心区域后,再利用 Rife 算法估计,在整个频段上得到了精度高且稳定的频率估计性能;利用频谱细化技术增强了算法的噪声免疫力。I-Rife 算法计算量小,适合对信号进行实时处理。

2 正弦信号的 DTFT 和 DFT

设加性高斯白噪声污染的正弦信号为:

$$x(n) = Ae^{i(2\pi f_0 n\Delta T+\phi_0)} + \nu(n),(0 \le n \le N-1) \quad (1)$$

式中 A, f_0, ϕ_0 分别表示信号的振幅、频率、初相,ΔT 为采样间隔,N 为样本数,$\nu(n)$ 是方差为 σ^2 的复高斯白噪声。信号的离散时间傅立叶变换(DTFT)和离散傅立叶变换(DFT)分别为

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\omega n}\ ,\ \omega \text{ 为连续频率} \quad (2)$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad (k = 0,1,\cdots,N-1) \quad (3)$$

由 DTFT 和 DFT 可见,如果(3)式中 k 取[0,$N-1$]上的任意实数值,则 DFT 也可以像 DTFT 一样取到任意连续频率的信息。正弦信号的频率对应于连续频谱的最大值。频谱的相邻谱线间隔 $\Delta\omega = 2\pi/N$,频谱的主瓣宽度为 $4\pi/N$,当信号频率 $2\pi f_0$ 不是 $\Delta\omega$ 的整数倍时,经 FFT 变换后,频谱主瓣中存在两个采样点,而且最大值位于这两个采样点之间。利用 DFT 求取某些实数点(式(3)中 k 取实数值)频谱的技术称为频谱细化技术。

3 双线幅度法(Rife 法)特点

若 k_0 是$\{x(n)\}$经 FFT 变换后最大值谱线 X_{k_0} 对应的量化频率点,DFT 直接谱估计法[2]的频率估计公式:

$$\hat{f}_0 = \frac{f_s}{N}\cdot k_0 \quad (4)$$

式中 f_s 为采样频率,$f_s = 1/\Delta T$。DFT 法可对信号实时处理,工程中得到了广泛重视和应用。DFT 法的频率估计平均精度[4]为 $\frac{1}{4}\cdot(f_s/N)$,估计精度在很大程度上依赖于采样长度 N。为了对短时宽信号实时、精确的进行频率估计,需要对基于 DFT 的估计算法进行了内插改进[3-7]。

Rife 法[3]给出的频率估计公式:

$$\hat{f}_0 = \frac{f_s}{N}\cdot\left(k_0 + \frac{\alpha\cdot|X_{k_0+\alpha}|}{|X_{k_0+\alpha}| + |X_{k_0}|}\right) \quad (5)$$

其中修正方向 $\alpha = \pm 1$,当 $|X_{k_0+1}| > |X_{k_0-1}|$ 时,$\alpha = 1$;当 $|X_{k_0+1}| \le |X_{k_0-1}|$ 时 $\alpha = -1$。修正因子 $0 \le \Delta_k = \frac{|X_{k_0+\alpha}|}{|X_{k_0+\alpha}| + |X_{k_0}|} \le 1/2$,被估计频率 $\hat{f}_0$ 实质上介于 $k_0 f_s/N$ 与 $(k_0 + \frac{1}{2}\alpha)f_s/N$ 之间。Rife 法利用了两根相邻谱线 $|X_{k_0}|$(最大幅度)和 $|X_{k_0+\alpha}|$(次大幅度),又称双线幅度法。

计算机模拟结果表明,在适度的信噪比条件下,当 f_0 接近最大谱线 $f_s k_0/N$ 和次大谱线 $f_s(k_0+\alpha)/N$ 中间区域时,Rife 法的估计性能很好,频率估计的误差远小于 DFT 算法;当信噪比较低且 f_0 十分靠近最大谱线 $f_s k_0/N$ 时,估计误差将可能大于 DFT 算法。

Rife 法的上述特点可以这样分析:当 f_0 很接近两相邻谱线中点 $f_s(k_0+\alpha/2)/N$ 时,$|X_{k_0}|$ 与 $|X_{k_0+\alpha}|$ 幅度较大(意味着噪声免疫力强)且很接近,这时采用式(5)内插公式具有较高估计精度;反之若 f_0 很接近 $f_s k_0/N$ 时,$|X_{k_n+\alpha}|$ 很小,有噪声存在时,噪声对 $|X_{k_0+\alpha}|$ 的影响大,导致估计误差较大。

另外,假定 $k_0 f_s/N \le f_0 \le (k_0 + 1/2)f_s/N$ 时,本应该有 $|X_{k_0+1}| > |X_{k_0-1}|$,即修正方向 $\alpha = 1$,但由于噪声的影响,可能出现 $|X_{k_0+1}| \le |X_{k_0-1}|$ 的误判情况(误判 $\alpha = -1$),那么由式(5)定义的 $\hat{f}_0$ 将被错误的认为位于 $f_s k_0/N$ 的左边,即 $(k_0 - 1/2)f_s/N \le f_0 \le k_0 f_s/N$,造成的误差比仅用 DFT 的粗略估计还要大。当 f_0 很接近 $f_s k_0/N$ 时,$|X_{k_0-1}|$ 与 $|X_{k_0+1}|$ 幅度小,噪声影响大,误判的概率就大;当 f_0 接近两相邻谱线中点时,$|X_{k_0-1}|$ 与 $|X_{k_0+1}|$ 幅度较大,噪声影响小,误判概率就小。低信噪比下,误判现象严重。

4 改进 Rife 法(I-Rife 法)

由于被估计频率 f_0 实质上是以 $|X_{k_0-0.5}|$ 和 $|X_{k_0+0.5}|$ 两谱线为界,且 $X_{k_0\pm0.5}$ 的幅度相比 $X_{k\pm1}$ 的幅度大,噪声免疫力更强,因此选取 $|X_{k_0\pm0.5}|$ 代替 $|X_{k_0\pm1}|$ 作为修正方向 $\alpha = \pm 1$ 的判据更为合理[7]。

针对 f_0 接近两相邻谱线中点时,Rife 法具有估计误差小和误判概率小的特点,利用频移技术将信号 $x(n)$ 的频谱向左或向右移动 δ_k 量化单位,使被估计频

率尽量接近两相邻谱线中点,然后再估计,便可以在全频段取得良好的频率估计性能。频移因子 δ_k 与修正因子 Δk 满足关系[6] $\Delta_k+\delta_k=1/2$,那么频移因子

$$\delta_k=\frac{1}{2}-\Delta_k=\frac{1}{2}-\frac{|X_{k_0+\alpha}|}{|X_{k_0}|+|X_{k_0+\alpha}|} \tag{6}$$

频移后的新信号 $x'(n)$ 为

$$x'(n)=x(n)\cdot\exp(j2\pi n\cdot\alpha\delta_k/N) \tag{7}$$

其频谱为

$$X_k'=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi n}{N}(k-\alpha\delta_k)}=X_{k-\alpha\delta_k}\quad(k=0,1,\cdots,N-1) \tag{8}$$

本文利用频移技术和频谱细化技术,提出改进 Rife 法(I-Rife 法)的频率估计公式:

$$\hat{f}_0=\frac{f_s}{N}\cdot\left(k_0-\alpha\delta_k+\frac{\alpha\cdot|X_{k_0-\alpha\delta_k+\alpha}|}{|X_{k_0-\alpha\delta_k+\alpha}|+|X_{k_0-\alpha\delta_k}|}\right) \tag{9}$$

其中 $\alpha=\pm1$,当 $|X_{k_0+0.5}|>|X_{k_0-0.5}|$ 时,$\alpha=1$;当 $|X_{k_0+0.5}|\le|X_{k_0-0.5}|$ 时 $\alpha=-1$。式(9)中谱线 $X_{k_0+0.5}$、$X_{k_0-0.5}$、$X_{k_0-\alpha\delta_k}$ 和 $X_{k_0-\alpha\delta_k+\alpha}$ 由频谱细化技术得到,将 $k_0+0.5$、$k_0-0.5$、$k_0-\alpha\delta_k$ 和 $k_0-\alpha\delta_k+\alpha$ 代入式(3) 计算四个实数点的 DFT 即可。I-Rife 算法流程如下:

步骤 1 对 $\{x(n)\}$ 进行 FFT 分析,求频谱最大值位置 k_0 及左右相邻位置 k_0+1、k_0-1,并记录其各自谱值 $|X_{k_0}|$,$|X_{k_0+1}|$ 和 $|X_{k_0-1}|$。

步骤 2 利用频谱细化技术计算 $|X_{k_0\pm0.5}|$ 及频移方向 α。

步骤 3 利用(6)式估计频移因子 δ_k。

步骤 4 利用频谱细化技术计算频移后的两谱线 $|X_{k_0-\alpha\delta_k}|$ 和 $|X_{k_0-\alpha\delta_k+\alpha}|$。

步骤 5 利用(9)式计算信号频率。

5 计算量及性能分析

5.1 计算量分析

I-Rife 算法除需要作一次 N 点 FFT 运算外,还要作四个实数点的 DFT 运算。作一次 N 点 FFT 需要 $N/2\cdot\log_2^N$ 次复数乘法和 $N\cdot\log_2^N$ 次复数加法,四个实数点 DFT 需 $4N$ 次复数乘法和 $4(N-1)$ 次复数加法。I-Rife 算法计算量小,可以满足实时信号处理。

5.2 计算机仿真及性能分析

信噪比定义为 $SNR=A^2/2\sigma^2$。对复正弦波信号,在相位、幅度和频率三个参数均未知的情况下频率估计方差的克拉美-罗限(CRLB)为[3]:

$$Var\{\hat{\omega}\}=12\sigma^2/[A^2\cdot\Delta T^2N(N^2-1)] \tag{10}$$

仿真时采样间隔 $\Delta T=1\times10^{-6}$s,采样点数 $N=4096$,频率分辨率 $\Delta f=\frac{1}{N\cdot\Delta T}=244.26$Hz。DFT 估计的均方根误差[4]为 $\Delta f/2\sqrt{3}=70.51$ Hz。

设 f_1 为 DFT 的某个量化频率,现取 $f_1=300\cdot f_s/N=73242$Hz,从 f_1 到 $f_1+\Delta f/2$ 取 11 个离散的频率 $f_i=f_1+\Delta f\cdot i/20$,$(i=0,1,\cdots,10)$,对频率为 f_i 的正弦波按 Rife 法[3]、M-Rife 法[6]($\delta_k=1/3$)、综合算法[7]及本文的 I-Rife 法进行 500 次 Monte-Carlo 模拟试验。图 1 给出了四种算法在不同信噪比下的方差平均值与克拉美—罗限(CRLB)比较效果图,从图 1 中可以看出 I-Rife 算法频率估计精度逼近克拉美—罗限。

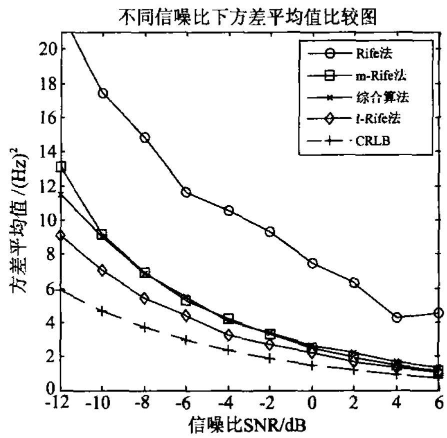


图 1　四种算法方差平均值与 CRLB 比较图

表 1、2、3 列出了 $i=0,2,4,6,8,10$ 六个离散频率点上频率估计的方差(VAR)、均方根误差(RMSE),比较表 1、2、3 中的数据,可以看出 I-Rife 算法具有良好的频率估计精度和所有频率点性能稳定的特点。I-Rife 算法的平均均方根误差不超过相应 DFT 估计的 5%,接近克拉美—罗限。

表 1　仿真结果(SNR=0dB,CRLB=1.49Hz,N=4096)

被测频率(Hz)	Rife 算法[3]		M-Rife 算法[6]		综合算法[7]		I-Rife 算法	
	VAR	RMSE	VAR	RMSE	VAR	RMSE	VAR	RMSE
73242	2.13	1.48	2.30	1.52	1.89	1.38	1.64	1.28
73267	9.23	13.65	2.04	1.72	1.95	1.72	1.56	1.27
73291	4.34	4.57	1.67	1.38	1.59	1.52	1.55	1.27
73315	1.72	2.44	1.63	1.93	1.63	1.93	1.47	1.23
73340	1.68	1.46	1.68	1.46	1.68	1.46	1.55	1.26
73364	1.51	1.24	1.51	1.24	1.54	1.24	1.45	1.21
平均值	3.44	4.14	1.81	1.54	1.71	1.51	1.54	1.25

表2 仿真结果(SNR=-6dB,CRLB=2.97Hz,N=4096)

被测频率(Hz)	Rife算法[3]		M_Rife算法[6]		综合算法[7]		I-Rife算法	
	VAR	RMSE	VAR	RMSE	VAR	RMSE	VAR	RMSE
73242	3.97	2.02	4.19	2.05	3.21	1.86	3.02	1.75
73267	10.53	18.6	4.21	4.09	3.46	3.09	3.11	1.9
73291	13.66	15.5	4.0	3.13	3.48	2.75	3.12	1.89
73315	4.57	5.24	3.19	3.13	2.91	2.93	2.78	1.71
73340	3.37	2.75	3.13	2.48	2.88	2.38	2.95	1.74
73364	3.13	1.82	3.13	1.82	2.87	1.89	2.85	1.73
平均值	6.54	7.65	3.64	2.78	3.15	2.59	2.98	1.79

表3 仿真结果(SNR=-13dB,CRLB=6.64Hz,N=4096)

被测频率(Hz)	Rife算法[3]		M_Rife算法[6]		综合算法[7]		I-Rife算法	
	VAR	RMSE	VAR	RMSE	VAR	RMSE	VAR	RMSE
73242	9.35	3.06	11.26	3.45	8.56	3.41	7.69	2.84
73267	13.1	22.91	11.17	9.1	8.61	6.21	7.62	3.27
73291	19.5	31.15	10.26	9.43	8.47	6.17	7.45	3.45
73315	21.6	24.65	10.57	5.35	7.85	6.48	6.85	3.88
73340	15.5	9.13	10.68	3.47	7.87	5.44	6.47	3.14
73364	10.9	3.57	10.75	3.5	7.48	3.26	6.37	2.56
平均值	15.0	15.75	10.78	5.72	7.81	5.19	7.08	3.19

6 结束语

以$X_{k_0\pm0.5}$两谱线为判据,降低了频率修正方向的误判概率,使I-Rife算法在低信噪比下仍能保持较高的频率估计精度。利用频移技术,总能一次性的将被估计频率移至两相邻量化频率中心点,利用Rife算法当被估计频率位于两相邻量化频率中心点时频率估计精度最好的特点,获得全频段稳定良好的频率估计性能。该算法计算量小,易于硬件实现,能对信号进行实时处理,已成功的应用于某线性调频连续波雷达频率估计的实践中,效果良好。

参考文献

[1] Abatzoglou T J. A fast maximum likelihood algorithm for the frequency estimation of a sinusoid based on Newtons method [J]. IEEE TransASSP,1985,33(1):pp77-89.

[2] L. C. Palmer. Coarse frequency estimation using the discrete Fourier transform [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1974, IT 20(1):pp104-109.

[3] Rife D C. Boorstyn R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observation [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1974, IT20(5): p591-598.

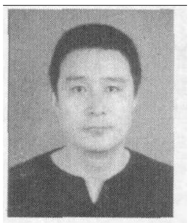
[4] 刘渝,快速高精度正弦波频率估计综合算法[J],电子学报,1999,27(6);pp126-128.

[5] 李小捷 许录平 周雪松. 低信噪比下的高精度复正弦频率估计算法[J]. 西安电子科技大学学报 2009. 10, Vol. 36, No. 6; pp1010-1014.

[6] 邓振森 刘渝 王志忠等. 正弦波频率估计的修正Rife算法[J],数据采集与处理,2006. 12, Vol. 21 No. 4; pp473-477.

[7] 王宏伟 赵国庆 齐飞林. 一种实时精确的正弦波频率估计算法[J]. 数据采集与处理,2009. 2, Vol. 24 No. 2; pp208-211.

作者简介



王宏伟(1972-)男,陕西凤翔。西安电子科技大学博士,讲师/工程师,研究方向为信号处理、电子信息对抗。

E_mail:xdwanghongwei@163.com

赵国庆(1953-)男,教授,西安电子科技大学博导,从事电子对抗、信号处理等方面的研究。