

[引用格式] 谢胜. 基于 Rife 算法和相位差法的频率估计算法[J]. 水下无人系统学报, 2018, 26(3): 263-266.

基于 Rife 算法和相位差法的频率估计算法

谢 胜

(中国人民解放军 91388 部队, 广东 湛江, 524022)

摘 要: 针对 Rife 算法在低信噪比条件下被估计频率接近 FFT 量化频率时估计误差较大, 而改变窗长相位差法具有较高的估计精度的特点, 文中利用频谱细化技术对 Rife 算法进行了改进, 提出了基于改进 Rife 算法和改变窗长相位差法正弦波频率估计综合算法, 给出了理论计算过程及相关推导公式。仿真结果表明, 即使信噪比为-15dB, 改进算法仍然具有较高的估计精度而且在整个频段上性能稳定, 均方根误差接近克拉美-罗限, 且改进算法计算量小, 易于硬件实现。

关键词: 频率估计; Rife 算法; 改变窗长相位差法; 克拉美-罗限

中图分类号: TJ6; TN929.3

文献标识码: A

文章编号: 2096-3920(2018)03-0263-04

DOI: 10.11993/j.issn.2096-3920.2018.03.013

Frequency Estimation Algorithm Based on Rife Algorithm and Phase Difference Correction Method

XIE Sheng

(91388th Unit, The Liberation Army of China, Zhanjiang 524022, China)

Abstract: In view of the fact that the Rife algorithm has large estimation error when the estimated frequency is close to the fast Fourier transform(FFT) quantization frequency under low signal to noise ratio(SNR), but the window-length changing phase difference correction method is of high estimation accuracy, the spectrum subdivision technique is used to improve the Rife algorithm, and a synthesis algorithm of sinusoidal frequency estimation based on the improved Rife algorithm and the window-length changing phase difference correction method is proposed. The theoretical calculation process and related formulas derivation are given. Simulation results show that even if the SNR is as low as -15 dB, the improved algorithm still gains high estimation accuracy and stable performance in the whole frequency band, and the root mean square error(RMSE) is close to the Cramer-Rao lower bound(CRLB). The improved algorithm needs small calculation amount and is easy for hardware implementation.

Keywords: frequency estimation ; Rife algorithm ; window-length changing phase difference correction algorithm ; Cramer-Rao lower bound(CRLB)

0 引言

国内外学者从估计精度和运算量等角度提出了许多不同频率估计算法。子空间算法^[1-2]分辨率高, 但运算量较大。实时性好的 Fit 等算法^[3-5]要求

信噪比高。基于离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT)的谱分析法运算量小, 但小样本下估计精度差。Rife 算法^[6-7]部分克服了 DFT 估计误差大的问题, 且 Rife 改进算法^[8-9]在较高信噪比时估计误差接近克拉美-罗限(Cramer-Rao

收稿日期: 2017-05-09; 修回日期: 2018-03-11.

作者简介: 谢 胜(1976-), 男, 硕士, 工程师, 主要研究方向为信号处理.

lower bound, CRLB)。以上这些算法都不能较好地满足低信噪比单频信号快速精确频率估计。

基于此,文中提出了一种基于 Rife 算法和改变窗长相位差法的频率估计算法,较好地满足了低信噪比信号快速精确频率估计,可广泛应用于声呐、振动测试和通信工程领域中。理论分析和仿真表明,该算法计算量小,信噪比门限低而且在整个频段上性能接近 CRLB,在低信噪比条件下也能完成实时精确频率估计。

1 正弦波频率估计算法

加性高斯白噪声污染的正弦信号可表示为

$$X(n) = y(n) + w(n) = Ae^{j(2\pi f_c n \Delta t + \phi_0)} + w(n) \quad (1)$$

$$n = 0, 1, 2 \dots N-1$$

式中: Δt 为采样间隔; N 为样本数; A, f_c, ϕ_0 分别为振幅、频率和初相; $w(n)$ 是方差为 2^{-2} 的零均值复高斯白噪声。

1.1 Rife 算法

Rife 算法^[6]公式

$$\hat{f} = \frac{1}{T} \left(k_0 + r \frac{|X(k_0 + r)|}{|X(k_0 + r)| + |X(k_0)|} \right) \quad (2)$$

令 Rife 算法频率修正项为

$$\delta = \frac{|X(k_0 + r)|}{|X(k_0)| + |X(k_0 + r)|} \quad (3)$$

式中: $|\delta| < 0.5$; $T = N \cdot \Delta t$; k_0 为快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)最大谱线位置; $|X(k_0)|$ 为 $X(n)$ 的 FFT 最大谱线幅值; $|X(k_0 + r)|$ 为 FFT 次大谱线幅值。当 $|X(k_0 + 1)| < |(X(k_0 - 1))|$, $r = -1$; 而当 $|X(k_0 + 1)| \geq |(X(k_0 - 1))|$ 时, $r = 1$; 当 δ 接近 0.5 时, Rife 算法频率估计误差接近 CRLB; 而当 $|\delta|$ 较小时, Rife 算法易受噪声影响, 估计误差比 DFT 算法要大^[10]。

1.2 改变窗长相位差法

文献^[11]针对频率分辨率和信噪比较低条件下 FFT 最大值处的谱线找不准造成较大估计误差的问题,提出了改进的改变窗长相位差法。其思想是: 首先对长度为 N 的序列 $x_1[n]$ 做 FFT, 得到实际峰值谱线号 $k_{1\max}$ 及其相位 ϕ_1 , 然后利用 $k_{1\max}$ 计算其对应第 2 段序列 $x_2[n]$ ($x_2[n]$ 长度为 $b \cdot N$ ($0 < b < 1$)) 的峰值谱线号: $k_{2\max} = b \cdot k_{1\max}$, 再对 $x_2[n]$ 做单点的 DFT, 得

$$X_2(k_{2\max}) = \sum_{n=0}^{bN-1} x_2(n) \exp(-j2\pi k_{1\max} n / N) \quad (4)$$

其中, $n = 0, 1, \dots, bN-1$, 于是求得第 2 段序列的相位 $\phi_2 = \arg(X_2[k_{2\max}])$ 。

相位差为

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \approx (1-b)\pi(k_{1\max} - v) \quad (5)$$

v 为归一化频率估计值

$$\hat{v} = k_{1\max} - \Delta\phi / [(1-b)\pi] \quad (6)$$

上式中, 令

$$\beta = \Delta\phi / [(1-b)\pi] \quad (7)$$

式中, β 为改变窗长相位差法的频率修正项, $|\beta| < 0.5$ 。由 $\hat{f}_0 = \hat{v} \cdot f_s / N$ 得到最终频率估计值, 其中 f_s 为采样频率。

改变窗长相位差法估计误差^[11]与频率修正项 $|\beta|$ 有关, 当 $|\beta|$ 接近 0.5 时, 估计误差大; 而当 $|\beta| < 0.2$ 时, 估计误差小。该算法只需做一次 FFT 和一次单点 DFT, 运算量小。

1.3 综合算法

分析 Rife 算法和改变窗长相位差法可看出: 当 $|\delta|$ 接近零时, 改变窗长相位差法估计精度高, 而 Rife 算法频率估计误差较大; 当 $|\delta|$ 接近 0.5 时, Rife 算法频率估计精度高, 接近 CRLB, 而改变窗长相位差法频率估计误差大。这 2 种算法各有利弊可互相弥补, 充分利用这 2 种算法优点, 在不同频段采用不同估计算法可使整体估计性能得到提高。

从文献^[10]中可看出, Rife 算法对噪声比较敏感, 当信噪比较低时噪声干扰使插值方向发生错误导致较大估计误差, 文中采用频谱细化技术可较好克服这个问题。

正弦信号 $x(n)$ 离散时间傅里叶变换(discrete-time Fourier transform, DTFT)和 DFT 为

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{j(2\pi f_c n \Delta t + \phi_0)} e^{-jwn} \quad (8)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{j(2\pi f_c n \Delta t + \phi_0)} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

式中, w 为连续角频率。如果 k 取 $[0, N-1]$ 区间任意连续实数值, 可得到任意连续频率的频谱值, 正弦信号频率对应于连续频谱的最大值。

由 DFT 频谱可知, $X_{k0 \pm 1}$ 幅度值比 $X_{k0 \pm 0.5}$ 幅度值小, 因此噪声对 $X_{k0 \pm 1}$ 的影响比对 $X_{k0 \pm 0.5}$ 要大, 用 $X_{k0 \pm 0.5}$ 来确定 Rife 算法插值方向有利于降低 Rife 算法估计误差。改进 Rife 算法如下

$$\begin{cases} \hat{f} = (k_0 + \delta)/T & X_{k_0+0.5} \geq X_{k_0-0.5} \\ \hat{f} = (k_0 - \delta)/T & X_{k_0+0.5} < X_{k_0-0.5} \end{cases} \quad (9)$$

当信号频率位于量化频率中心区域^[8]时, 改变窗长相位差法和 Rife 算法的频率估计误差相当。文中通过综合利用 FFT 幅度和相位信息即对两者频率修正项进行加权处理后, 可进一步降低估计误差。

其算法过程如下:

步骤 1: 对式(1)正弦序列作 N 点 FFT, 得到最大谱线位置 k_0 , 并由 Rife 公式(3)计算频偏估计值 $\hat{\delta}$, 利用改进的改变窗长相位差法按式(5)~式(7)计算出 $\hat{\nu}$ 和频率修正项;

步骤 2: 定义区域为 $(-\lambda, -\mu)$ 和 (μ, λ) , 其中 μ, λ 满足 $0 < \mu < \lambda < 1/2$, 若 $|\hat{\delta}| < \mu$ 且 $|\beta| < \mu$, 直接使用公式 $\hat{f}_0 = \hat{\nu} \cdot f_s / N$ 得到最终频率估计值; 否则转步骤 3;

步骤 3: 采用频谱细化式(8)求取 $X_{k_0 \pm 0.5}$;

步骤 4: 对频率修正项 $\hat{\delta}$ 和 $\hat{\nu}$ 进行加权处理得到 $\delta = \tau |\hat{\delta}| + \varsigma |\hat{\nu}|$, 其中 $\tau > 0, \varsigma > 0$, 且 $\tau + \varsigma = 1$ 。然后将 $X_{k_0 \pm 0.5}$ 、 k_0 和 δ 代入式(9)得到最终频率估计值。

2 改进算法性能分析

在 MATLAB 中对文中算法性能进行研究。取 $\mu=0.2, \lambda=0.5, b=0.5, \tau=\varsigma=0.5$ 。时移对称窗采用矩形窗。

2.1 改进算法与 Rife 算法和改变窗长相位差法性能对比

仿真参数如下: 取 $N=1024, f_s=800$ kHz, 则 $\Delta f=f_s/N=781.25$ Hz, 载波频率 $f_0=f_s/4=200$ kHz, 令 $f_i=f_0+\delta \cdot \Delta f$, δ 在区间 $[-0.5, 0.5]$ 均匀分成 60 频率点, 对每个频率点 δ 作 1000 次 Monte-Carlo 仿真。定义信噪比为 $SNR=A^2/\sigma^2$ 。对复正弦波信号, 在相位、幅度和频率 3 个参数均未知的情况下, 估计方差克拉美罗限为 $CRLB=12 \cdot \sigma^2 [A^2 \cdot \Delta t^2 \cdot N(N^2-1)]$ 。

信噪比分别为 -15 dB 和 -10 dB 条件下改进算法与 Rife 算法和改变窗长相位差法的估计均方根误差如图 1 所示(为图示简洁, 横坐标采用频率比值 $f_i/\Delta f = N/4 + \delta$ 来表示)。

从图 1 可看出, 当 $|\delta| > 0.2$ 时, Rife 算法估计

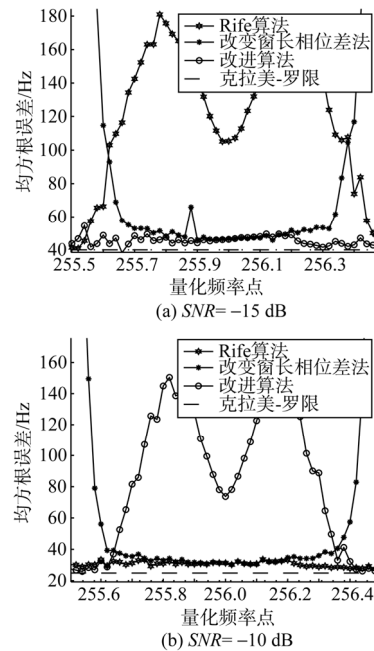


图 1 Rife 算法、改变窗长相位差法和改进算法在 $SNR=-15$ dB、 -10 dB 的估计均方根误差(RMSE)
Fig. 1 RMSE of the Rife algorithm, window-length changing phase difference correction algorithm and improved algorithm when SNR is respective -15 and -10 dB

误差接近 CRLB 4 倍, 而改变窗长相位差法估计误差小且稳定, 表现较强抗噪声性能。而当 $|\delta| > 0.2$ 时, 改变窗长相位差法估计误差逐渐增大, 而 Rife 算法误差则逐渐减小, 仿真结果与理论分析结果一致。由于 3 种算法估计误差在敏感频段即量化频率中心区域内交叠在一起, 为便于清楚了解此频段内 3 种算法的估计误差, 对图 1(a)敏感频段左半部分(也可取右半部分)进行了局部放大, 得到了图 2。从图 2 可看到, 在量化频率中心区域利用 Rife 算法与改变窗长相位差法的频率修正项进行加权处理, 综合利用 FFT 幅度和相位信息来修正插值项, 进一步提高了估计精度。

从图 1 和图 2 可看出, 文中的改进算法在整个频段内具有较高估计精度和稳定性, 而且估计误差接近 CRLB, 总体性能明显优于改变窗长相位差法和 Rife 算法。

图 3 给出了敏感频段即量化频率中心区域信号频率为 $f_i=f_0+0.3 \cdot \Delta f$ 时, 3 种算法在不同信噪比条件下的均方根误差。从图 3 可看出, 改进算法估计误差在较宽信噪比范围内均接近 CRLB。这表明文

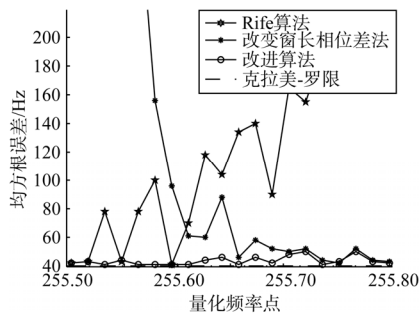


图 2 图 1(a)左半区域局部放大图

Fig. 2 Partially enlarged view of left part of Fig.1(a)

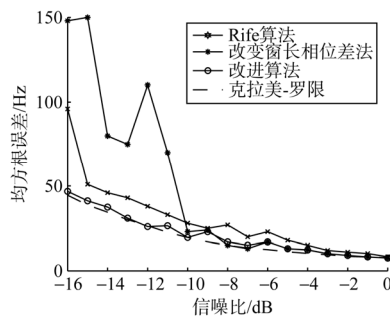


图 3 Rife 算法、改变窗长相位差法和改进算法在不同信噪比估计误差

Fig. 3 RMSE of the Rife algorithm, the window-length changing phase difference correction algorithm and the improved algorithm for different SNR

中算法能有效克服频率估计误差随信噪比变化而波动大的问题,表明该算法抗噪声性能好。

2.2 计算量分析

Rife 算法需做一次 N 点 FFT 运算并求出最大和次大 FFT 谱线,共需要 $N/2 \times \log_2 N + N/2$ 复数乘法和 $N \times \log_2 N$ 复数加法。改变窗长相位差法需做一次 N 点 FFT 和一次单点 DFT。做一次 N 点 FFT 需要 $N/2 \times \log_2 N$ 复数乘法和 $N \times \log_2 N$ 复数加法,作一次单点 DFT 需 N 次复数乘法和 $N-1$ 复数加法。改变窗长相位差法共需 $N/2 \times \log_2 N + N$ 复数乘法和 $N \times \log_2 N + N-1$ 复数加法。

改进算法在作一次 N 点 FFT 运算基础上,还需计算频率修正项 δ 和 λ ,共需 $N/2 \times \log_2 N + 3N/2$ 复数乘法和 $N \times \log_2 N + N-1$ 复数加法。若 $|\delta| \leq \mu$ 时,必须结合频谱细化公式作 3 点 DFT,这需要进行 $3N$ 次复数乘法和 $3(N-1)$ 次复数加法,此时改进算法共需 $N/2 \times \log_2 N + 9N/2$ 复数乘法和 $N \times \log_2 N + 4(N-1)$ 复数加法。由于真实频率落在量化频率区间内概率是均匀分布的,当 $\mu=0.2, \lambda=0.5$ 时,从统计角度看,这种概率只占 60%。文中改进算法运

算量比文献[12]所提方法小。

3 结束语

文中在 Rife 算法和改变窗长相位差法基础上提出了一种正弦频率估计的改进算法。理论分析和仿真结果均表明,文中算法具有较好抗噪声性能,估计精度高且计算量小,能在较低信噪比条件下完成实时精确频率估计,具有工程应用价值。

参考文献:

- [1] Rife D C, Boorstyn R R. Single tone parameter estimation from discrete time observation[J]. IEEE Transinform Theory, 1974, 20(5): 591-598.
- [2] So H C, Chan K W. Reformulation of Pisarenko Harmonic Decomposition Method for Single-tone Frequency Estimation[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2004, 52(4): 1128-1135.
- [3] Xiao Y C, Wei P, Xiao X C, et al. Fast and Accurate Single Frequency Estimator [J]. IEEE Electronics Letters, 2004, 40(14): 1-2.
- [4] Kay S. A Fast and Accurate Single Frequency Estimator [J]. IEEE Trans. on Acoust, Speech, Signal Process, 1989, 37(12): 1987-1990.
- [5] So H C, Chan K W. A Generalized Weighted Linear Predictor Frequency Estimation Approach for a Complex Sinusoid[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2006, 54(4): 1304-1315.
- [6] Rife D C, Vincent G A. Use of the Discrete Fourier Transform in the Measurement of Frequencies and Levels of Tone[J]. Bell Sys Tech J, 1970, 49(2): 197-228.
- [7] Quinn B G. Estimation of Frequency, Amplitude and Phase from the DFT of a Time Series[J]. IEEE Trans. on SP, 1997, 45(3): 814-817.
- [8] 邓振森, 刘渝, 王志忠. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. 数据采集与处理, 2006, 21(4): 473-477.
- [9] 胥嘉佳, 刘渝, 邓振森. 任意点正弦波信号频率估计的快速算法[J]. 南京航空航天大学学报, 2008, 40(6): 794-798.
- [10] 齐国清. 几种基于 FFT 的频率估计方法精度分析[J]. 振动工程学报, 2006, 19(1): 86-92.
- [11] 丁康, 杨志坚. 改变窗长相位差校正法的改进与抗噪性能分析[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2007, 35(10): 210-213.
- [12] 王宏伟, 赵国庆. 正弦波频率估计的改进 Rife 算法[J]. 信号处理, 2010, 26(10): 1573-1576.

(责任编辑: 许妍)