

硕士研究生学位论文

新疆大学

论文题目 (中文): 基于最大似然法的正弦信号频率估计研究

论文题目 (英文): Study on Sinusoidal Frequency Estimation
Based on Maximum Likelihood Estimator

研究生姓名: 张海军

学科、专业: 通信与信息系统

研 究 方 向: 通信与网络系统

导师姓名职称: 苏国平 教授

论文答辩日期 2003 年 6 月 日

学位授予日期 年 月 日

内 容 提 要

正弦信号频率估计是指通过对信号采样值的计算和变换,估计出淹没于噪声中的信号的频率的过程。频率估计不仅在理论上,而且在实际应用中,都有着非常重要的研究价值。

最大似然频率估计法是该领域中的一种重要的研究方法;该方法具有估计结果准确,计算所要求的信噪比门限值低等特点。但是,由于最大似然方法需要求解一个高度非线性函数在取得最大值时的参数,使得该方法的计算量是十分巨大的。

本文即是从解决以上的问题入手,通过结合运用全局优化理论和 *Monte - Carlo* 技术,使多个正弦波的最大似然频率估计问题由多维格形搜索变成了一个闭合的表达式,从而可以通过优化计算来进行频率估计。

本文着重地讨论了在进行最大似然频率估计的计算方法和实现过程,并且对其中频率实现的算法进行了修正,提出了新的解决方案;对于目前尚未解决的正弦波数目的估计问题,给出了一个解决的方法。

最后,通过模拟实验,验证了我的方法的有效性和正确性。

关键词: 频率估计, 最大似然, 重点采样方法, 概率密度函数。

Study on Sinusoidal Frequency Estimation Based on Maximum Likelihood Estimator

Abstract

Sinusoidal frequency estimation is the procedure which can estimate the frequency of sinusoidal waves in additive white Gaussian noise through transform and calculation for signal's samples. Not only in theory, but also in practice, the sinusoidal frequency estimation has essential study merit.

The maximum likelihood estimator (MLE) approach is an important one in frequency estimation domain. This approach has the merit such as exhibiting best performance and requiring minimum threshold of signal noise ratio in calculation. However, as the MLE requires obtaining the parameters of the high order non-linear likelihood function when it reaches the global maximum, this makes the MLE approach has very huge calculation burden.

In this paper, when the global optimal theory and *Monte – Carlo* technique are applied, I transformed the maximum likelihood frequency estimation problem of sinusoidal waves from multidimensional grid search to a closed expression. This makes it easy to estimate the frequency through optimal calculation.

In my paper, I put emphasis on MLE frequency estimation approach and it's implementation procedure. Over and above, I put forth a new solution for frequency realization algorithm after mending it. I also give a new way to resolve the estimation problem of amount of sinusoidal waves that is an unresolved problem nowadays.

At the end of my paper, I tested my new algorithm and solution by simulation and proved them effectiveness and correctness.

Key words: frequency estimation, maximum likelihood, importance sampling method, probability density function.

目 录

第一章 引言.....	5
1.1 频率估计研究的发展概况.....	5
1.2 课题的意义.....	6
第二章 频率估计研究的基本现状	7
2.1 淹没于白噪声中正弦信号频率估计的研究现状	7
2.2 修正协方差 AR 谱估计法	7
2.3 特征分解频率估计	8
2.4 现状分析	9
第三章 基于最大似然法频率估计	10
3.1 最大似然函数.....	10
3.2 最大似然频率估计.....	10
3.3 多维空间搜索法	13
3.4 其它的求解方法.....	14
3.5 最大似然频率估计法的优缺点.....	15
第四章 基于重点采样技术的最大似然函数的优化计算	16
4.1 全局优化理论	16
4.2 Monte - Carlo 的重点采样技术.....	16
4.3 重点函数的选取	18
4.4 频率实现值的生成.....	19
4.5 频率实现值的生成方法.....	20
4.6 正弦信号的频率估计.....	21

第五章 对于最大似然频率估计算法的几点改进	23
5.1 关于频率实现值问题的讨论	23
5.2 随机概率的生成方法	23
5.3 频率实现值的搜索方法	26
5.4 对于频率估计算法的进一步完善	27
5.5 对于正弦波个数 P 的确定方法初探	28
第六章 实验结果	37
第七章 结论	38
参考文献	39
致 谢	44

第一章 引言

1.1 频率估计研究的发展概况

自从 20 世纪 30 年代,特别是第二次世界大战以来,由于在战争中雷达和声纳技术的广泛应用,使人们开始注意到以上两种技术中的关键技术——也就是淹没于噪声中的正弦信号频率估计问题的研究的重要性[1]。自此,这项技术开始真正的拓展成为一个相对独立的研究领域。

从上个世纪 60 年代初,为了满足通信技术及电子测量技术的大规模发展应用的要求,人们开始更广泛的关注这个领域的研究[1]。

1958 年由 Blackman 和 Turkey 提出的取样自相关法,是当时的一种流行的计算功率谱的方法,应用它进而可以估计正弦波的频率。

1965 年由 Cooley 和 Turkey 完善了著名的 FFT 算法,把离散傅立叶变换的计算量减少了两个数量级,并且产生了一种称为周期图的谱估计方法,这种方法使谱估计由理论走向实用。

1967 年, Burg 提出了最大熵谱估计方法。

1968 年, Parzen 提出了自回归谱估计方法。

1973 年,由 Pisarenko 提出的谐波分解方法提供了可靠的频率估计方法;而在 1981 年, Schmidt 提出了谱估计的多信号分类算法,对于正弦波分量频率估计很有效。自此以后,有关特征分解法的频率估计有了广泛的研究[2]。

自从上个世纪的 60 年代末,由费歇引进的极大似然技术[3][5],使最大似然法开始应用于频率估计领域。因为这个方法有以下的特点:

1. 估计结果准确;
2. 对信噪比门限要求低;
3. 无须关于噪声的先验知识,不用学习[4][5][6]。

所以这项技术在其后的十几年的时间里,人们对于最大似然频率估计方法的研究非常热烈,甚至于有人希望用特征分解方法去模拟最大似然技术[8]。但是由于求解最大似然频率估计的全局最大值要进行多维格形搜索,其

计算量是十分巨大的；加之还要受似然函数局部最大值的影响，因而容易造成计算的偏差[6][10]。

直到 *Monte - Carlo* 技术应用于这个领域[9][10]，最大似然频率估计技术才得到了较快的发展。在当今的最大似然频率估计研究领域，研究成果比较显著的是 Steven M. Key。他先后发表了《现代谱估计理论与实践》，《统计信号处理基础》，及《*Monte - Carlo* 的重点采样技术的线性序列设计》，《平均似然频率估计》等多篇文章，奠定了他在该领域的领先地位。

本文即是以最大似然法为基础，结合使用 *Monte - Carlo* 技术重点采样方法，提出了一种新的频率矢量实现方法以及新的正弦波数目的估计方法，使最大似然频率估计法的计算速度进一步提高，整个最大似然频率估计算法也得以进一步完善。

1.2 课题的意义

人们之所以投入大量的精力关注到频率估计的领域，是因为这个领域的研究具有非常重要的现实意义。

- 1、淹没于白噪声中的多正弦信号的频率估计问题，是现代信号处理领域中最有实际价值的技术，是测试所有谱估计性能的基础，也是信号处理技术的基础[2]。
- 2、该技术在雷达、通信、声纳及电子监测等领域有着广泛的应用，若该技术取得一定的突破，必然推动以上领域的飞跃式发展[7][17]。
- 3、在电子测量过程中，经常会有外加的周期性的误差的干扰，若能获得该周期误差的频率，就能采取针对性的措施来滤除干扰信号，来减小测量误差，提高测量的精度[1][7]。

随着现代通信及信息处理技术的迅猛发展，对这个领域的研究也必然会提出更高的要求。

第二章 频率估计研究的基本现状

2.1 淹没于白噪声中正弦信号频率估计的研究现状

关于频率估计的研究,对单个正弦波或用傅立叶分析能分辨其频率个数的多个正弦波,周期图法是进行频率估计的最佳方法。但对于用傅立叶分析无法进行频率分辨的多个正弦波,周期图法也是不适用的;实际上,在这种情况下不存在频率估计的最佳方法。为此,人们提出了许多次佳的方法,它们的基础是自相关矩阵特征矢量的某些性质和最大似然技术[2][7]。

运用自相关矩阵特征矢量的某些性质的方法是特征分解方法,它使用平稳随机过程模型来分析正弦信号,而待估频率是自相关矩阵中的未知参数。

而最大似然估计法,假定正弦信号是确定性的信号,首先确定信号的函数模型,通过寻找似然函数的最大值来确定函数的非线性参数。然后再通过非线性参数来确定线性参数[4][9][10][11]。这里的非线性参数一般是指待估计信号的频率,而相位和振幅为线性参数。本文所采用的研究方法即是采用最大似然法的函数模型作为参考模型。

基于自相关矩阵特征矢量的某些性质的具体研究方法,主要有修正协方差 AR 谱估计法,特征分解频率估计法(包括信号子空间频率估计法及噪声子空间频率估计)。现简要的介绍一下以上两种研究方法;对于最大似然频率估计将在后面的章节予以详细的介绍。

2.2 修正协方差 AR 谱估计法

当各正弦波的频率能用周期图法加以分辨时,根据周期图谱峰的位置来估计正弦波频率,是一种最简便的方法;但是,在各正弦波频率很接近的情况下,用周期图法无法分辨它们,用分辨率更高的 AR 谱估计法可以分辨它们[2][14][15]。

利用 AR 谱估计来估计频率有多种方法,其中修正协方差 AR 谱估计比较适合用于估计正弦波频率。在无噪的情况下,修正协方差 AR 谱估计的峰

的位置就是相应的正弦波的准确频率；在有噪的情况下，对于噪声引起的谱峰移动，用修正的协方差 AR 谱估计法比用其它的 AR 算法都要小，而且，修正的协方差法对正弦波的相位最不敏感。因此，修正的协方差法可以提供稳定的高分辨率的谱估计。

修正协方差 AR 谱估计法是以前向预测误差功率和后向预测误差功率估计的平均值最小为准则，来估计 AR 模型参数。

该方法一般的思路是：首先确定 AR 参数模型及误差准则，然后求解误差函数对 AR 参数的梯度，并且使梯度值为零；通过变换得到 AR 参数矩阵方程，对其求解得出 AR 谱估计的参数 A_p ，进而可确定输入数据的功率谱，最终估计出正弦波的频率值 [2][38][39]。

2.3 特征分解频率估计

在低信噪比的情况下，即使采用修正协方差法，AR 谱估计的频率分辨率也是不高的，因此在这种情况下，修正协方差法 AR 谱估计不适于用做频率估计，这时常采用特征分解技术。

特征分解技术的主要思想是：把自相关矩阵中的信息空间 R_x 分成两个子空间，即信号子空间 R_s 和噪声子空间 R_n ；这两个子空间中的矢量的函数在正弦波频率上有尖锐的峰，据此可以估计正弦波的频率。但是这些函数并不是功率谱，因为它们并不反映随机过程的功率，它们的傅立叶逆变换也不是自相关函数[1][2][7]。

在具体研究时，特征分解频率估计可进一步分为信号子空间频率估计法和噪声子空间频率估计法。信号子空间法是忽略噪声的影响，只保留信号子空间中的特征矢量的信息，或者说是用降秩矩阵 R_s 逼近 R_x ，这样可以提高信噪比。如果用数据自相关矩阵 R_x 的逼近值作为 Yule-Walker 方程的参数，可求得更为精确的 AR 模型参数，从而得到更为精确的频率估计。至于噪声子空间频率估计法，是根据信号矢量与噪声子空间中的所有矢量正交的这一性质，人们提出了多种算法来估计正弦波的频率[36][37]。比较有代表性的是

Pisarenko 谐波分解和 *Music* 算法。

2.4 现状分析

从以上的介绍中,我们可以看出,对于修正协方差 AR 谱估计法,信噪比对于它的频率估计结果有很大的影响。当信噪比很高时,采用修正协方差法 AR 谱估计得到的频率估计有很高的分辨率,是一个无偏估计,而且其估计值的方差也接近于极限值。但是对于低信噪比(低于 2dB),这种方法的性能很差,主要表现在出现了较大的偏倚和很大的方差。

这种情况的产生不是偶然的。因为在有噪情况下,根据已知自相关函数所估计的预测误差滤波器的零点的位置,并不是真的在正确的频率位置上。为了减轻信噪比对估计性能的影响,应增加 AR 模型的阶,这样可以得到比较准确的 AR 模型参数,从而减少谱估计的偏倚;但是,这同时也使方差有所增加,严重时会导致虚假谱峰,出现错误的频率估计[2][4]。

关于特征分解频率估计,这种方法是建立在大量关于噪声的信息的了解的基础之上的,因而需要大量的时间对信号的信息进行学习,因此,这种方法在实际应用领域受到很大的限制,另外,信号子空间及噪声子空间法对于确定正弦波的数目方面显得无能为力,而且应用它们是预先确定正弦波的数目,否则就会造成较大的估计误差[7][9]。比如对于噪声子空间频率估计,如果正弦波的数目不知道,计算时应小心,因为即使测量数据中正弦波的数目达不到 M 个,该方法计算出的结果也会在单位圆上产生 M 个零点,实际上也相当于产生了虚假谱峰,即产生了错误的频率估计。因而在实际应用中会出现许多的矛盾和困难[2]。

综上所述,以上几种方法在应用上受到诸多的限制,特别是信噪比及模型阶数的影响,而且比较容易产生虚假谱峰,使它们在实际应用上有很大的局限。因而我们需要将目光投向另一种研究方法,那就是最大似然频率估计法。因为从以上几方面比较,最大似然法显然有许多优点,关于这些内容我们将在下面的章节予以详细讨论。

第三章 基于最大似然法频率估计

3.1 最大似然函数

在随机过程的领域中,最大似然函数是研究待估计参数的重要方法。若总体 X 属于离散型,其分布率 $P\{X=x\}=P(x; \theta)$ $\theta \in \Theta$ 的形式为已知, θ 为待估计参数, Θ 是可能的取值范围,设 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 是来自总体的样本,则 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的联合分布为:

$$\prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$$

又设 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ 的一个样本值,易知样本 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ 取到观察值 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的概率,亦即 $\{X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n\}$ 发生的概率为:

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) \quad \theta \in \Theta$$

这一概率随 θ 的取值而变化,它是 θ 的函数, $L(\theta)$ 称为样本的似然函数。由费歇引进的极大似然估计法,就是固定样本观察值 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 在 θ 取值的可能范围 Θ 内挑选使概率 $L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \theta)$ 达到最大的参数值 $\hat{\theta}$, 作为参数 θ 的估计值,亦即 $\hat{\theta}$ 使

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \text{Max } L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \theta)$$

这样得到的 $\hat{\theta}$ 与样本值 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 有关,记为: $\hat{\theta}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, 称为参数 θ 的极大似然估计值,而相应的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ 称为参数 θ 的极大似然估计量[3]。

3.2 最大似然频率估计

让我们先来讨论复白噪声中存在单个复正弦信号的情况。设复高斯白噪声 $v(n)$ 中有一复正弦信号,为:

$$s(n) = A_1 \exp[j\omega_1 n + \varphi_1] \quad (3-1)$$

式中 A_1, ω_1, φ_1 分别是正弦波的振幅、频率和相位, 这里假设它们是待估计的未知常数。

设平稳随机过程 $x(n) = s(n) + v(n)$ 的一次实现的 N 个取样为:

$$x(n) = A_1 \exp(j\omega_1 n + \varphi_1) + v(n) \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-2)$$

$s(n)$ 和 $x(n)$ 用矢量分别表示为:

$$S = [s(0) \ s(1) \ \dots \ s(N-1)]^T$$

$$= A_1 \exp(j\varphi_1) [1 \ \exp(j\omega_1) \ \dots \ \exp(j(N-1)\omega_1)]^T \quad (3-3)$$

$$\text{和 } x = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1)]^T \quad (3-4)$$

$$\text{白噪声 } v(n) \text{ 的自相关矩阵为: } R_v = \sigma_v^2 I \quad (3-5)$$

这里, σ_v^2 是 $v(n)$ 的方差, I 是 N 阶单位矩阵。

$$\text{令 } A_{c1} \text{ 表示正弦波的复数振幅 } A_{c1} = A_1 \exp(j\varphi_1) \quad (3-6)$$

又令信号矢量 $e_1 = [1 \ \exp(j\omega_1) \ \dots \ \exp(j(N-1)\omega_1)]^T$ 于是, 式 (3-3) 的矢量可表示为: $S = A_{c1} e_1$ 。

由于已假设 $s(n)$ 是确定性信号, $v(n)$ 是复高斯白噪声, 所以数据矢量的概率密度函数为:

$$P(X-S) = \frac{1}{\pi^N \det(\sigma_v^2 I)} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_v^2} (X-S)^H (X-S)\right) \quad (3-7)$$

式中, H 表示共轭转置。

为求 A_1, ω_1 和 φ_1 的最大似然估计 (MLE), 需要求解 $P(X-S)$ 对该三参数的最大问题, 或求解

$$L = (X-S)^H (X-S) \quad (3-8)$$

的最小化问题, 将式 (3-6) 代入上式, 得到:

$$L(A_{c1}, \omega_1) = (X - A_{c1} e_1)^H (X - A_{c1} e_1) \quad (3-9)$$

这里特别标明 L 是 A_{c1} 和 ω_1 的函数, 如果已知 ω_1 , 则不难求出使上式最小化的解 A_{c1} :

$$A_{c1} = \frac{e_1^H R_v^{-1} X}{e_1^H R_v^{-1} e_1} = \frac{e_1^H X}{e_1^H e_1} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j\omega_1 n) \quad (3-10)$$

若式中 ω_1 用最大似然估计取代, 则 \hat{A}_{c1} 就是正弦波复振幅的最大似然估计。

再将 \hat{A}_{c1} 代入 (3-9) 中, 并对求最小化解, 得到:

$$L(\hat{A}_{c1}, \omega_1) = \left(X - \hat{A}_{c1} e_1 \right)^H \left(X - \hat{A}_{c1} e_1 \right) \\ = X^H \left(X - \hat{A}_{c1} e_1 \right) - \hat{A}_{c1}^* e_1^H \left(X - \hat{A}_{c1} e_1 \right)$$

应用式 (3-10), 易证: $L(\hat{A}_{c1}, \omega_1) = X^H X - \hat{A}_{c1} X^H e_1 = X^H X - \frac{1}{N} |e_1^H X|^2$ 求

解上式最小化解, 等效于求解上式右端的第二项的最大化解, 即:

$$\frac{1}{N} |e_1^H X|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j\omega_1 n) \right|^2 \quad (3-11)$$

可见, 此式即是 $x(n)$ 的周期图。由此得出一个结论: 在复白噪声中含有单个复正弦信号, 其频率的最大似然估计, 可根据数据的周期图的最大值所在的频率位置来确定 [2] [19]。

下面讨论复白噪声中存在多个复正弦信号的频率估计问题, 设矢量 S 由 M 个正弦波构成, 即: $S = \sum_{i=1}^M A_{ci} e_i$ (3-12)

与单个复正弦波的情况相似, 为求正弦波参数的最大似然估计, 需使以下函数最小化,

$$L = \left(x - \sum_{i=1}^M A_{ci} e_i \right)^H \left(x - \sum_{i=1}^M A_{ci} e_i \right) \quad (3-13)$$

其中 $A_{ci} = A_i \exp(j\phi_i)$

$$e_i = [1 \quad \exp(j\omega_i) \quad \cdots \quad \exp(j(N-1)\omega_i)]^T$$

我们令 $E = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_M]^T$

$$A_c = [A_{c1} \quad A_{c2} \quad \cdots \quad A_{cM}]^T$$

$$\Omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_M]^T$$

则式 (3-13) 可以写成以下的形式:

$$L(A_c, \Omega) = (X - E^T A_c)^H (X - E^T A_c) \quad (3-14)$$

在这里我们假设 E 是已知矩阵, 则上式的最小化问题实际是一个典型的线性最小二乘方问题, 解得到:

$$\hat{A}_c = (E^H E)^{-1} E^H X \quad (3-15)$$

若 E 用其最大似然估计取代, 或未知频率用其最大似然估计取代, 则上式中的 \hat{A}_c 是正弦波复振幅的最大似然估计。将式 (3-15) 代入到 (3-14)

$$\text{中得到: } L(A_c, \Omega) = X^H \left(X - E^T \hat{A}_c \right) = X^H X - X^H E (E^H E)^{-1} E^H X$$

为了求解频率的最大似然估计, 必须求解上式右端的第二项的最大化问题, 即: $L(X) = X^H E (E^H E)^{-1} E^H X = \text{MAX}$ (3-16)

在求解出频率的最大似然估计后, 就不难求解出正弦波的其余参数的最大似然估计。如果正弦波的频率能用周期图进行分解, 那么式 (3-16) 的最大化解将对应于周期图诸最大值所在的频率 [2] [9] [18]。对于式 (3-16) 的求解是十分困难的, 人们提出了许多解决方法。

3.3 多维空间搜索法

这种方法是根据公式 $L(x) = X^H E (E^H E)^{-1} E^H X = \text{MAX}$, 将在每个坐标轴上的频率分割成一定数目的频点, 然后将多维空间中各个频点的坐标值依次代入, 求取各个频点在函数 $L(x)$ 的值, 然后选取其中的使函数 $L(x)$ 的值达到最大值时各频点的值作为该函数的解 [9]。

比如要搜索两个正弦波, 就要进行二维格形搜索。具体方法是, 对于平面上已经分割好的各个频点进行搜索, 当函数 $L(x)$ 的值最大时, 这时该频点的坐标值就是我们所求解的正弦波的频率。若有多个频率, 则要进行类似的多维格形搜索, 并且从搜索的结果中选择使函数 $L(x)$ 的值最大的点的坐标作为

我们的频率估计值。

从以上的介绍可以看出，这个算法的思路很简单，也很容易实现，但它的缺点也是很明显的。

第一 虽然该算法的思路很简单，但是这个算法的计算量很大，它的计算总量约为 $M \times M \times M \cdots \times M = M^P$ ，其中 P 是频率的个数， M 是每一个频率搜索的点数。若有 $P=4$ ， $M=100$ ，则搜索的计算的总量为 $100^4=100000000$ 次，这里还不包括相关的比较运算的计算量。显而易见，这个算法的计算量是相当惊人的。

第二，这种算法可能会产生较大的计算误差，由于受到计算的点数的影响，若 M 过小，即使找到一个最大值，可能这个最大值只是一个局部的最大值，而不是全局的最大值，这样就会出现较大的计算误差，甚至可能会偏离实际值很远；而且在搜索完成时，某个最值的频率矢量的一个或几个分量可能会相等，这显然是不正确的，因为多个频率分量不相等是我们进行计算的前提和条件。可以这样认为，以上的问题，都是由于搜索的点数 M 过小所致。当然可以增加点数，提高分辨率，可是我们的计算量就会成几何级数的增长 [6][9][20]。

从以上的分析可见，这种方法比较适用于理论分析，而不适用于实际应用。

3.4 其它的求解方法

利用最大似然函数的某些性质，有人又提出了一些其它的方法来代替多维空间搜索法，比如减量粗搜索法[6]，限制单位圆根求解法[5][21]，以及迭代最佳化方法[20]等，这几种方法在一定程度上减少了计算量，但是却使最大似然法的性能有所下降，比如：所需的信噪比门限增高，估计过程中会产生奇异值等[9][23]；迭代最佳化方法由于受局部极大值的影响，不一定会收敛于全局最大值，因而可能会造成错误的估计。

3.5 最大似然频率估计法的优缺点

最大似然法频率估计是以似然函数为基础,通过求取似然函数的最大值来估计频率。同上一章所介绍的几种方法相比,是对信噪比门限值要求最低的一种方法(最低为 1dB);这种估计方法也是最为准确的频率估计方法;而且,最大似然频率估计法不需要事先知道关于噪声的特性,因此不需要对噪声进行学习,应用比较简便[9][10]。

但是,由于求解最大似然函数的最值必然要求涉及求解一个高度非线性化的方程的过程,要求进行多维空间的搜索,其计算量是非常巨大的。有时甚至是无法求解的;因此不适用于实时计算[9][10][22][24][30]。为此人们提出了许多求解最大似然函数的方法。下一章节所讨论的方法即是当前比较经典的研究方法。

第四章 基于重点采样技术的最大似然函数的优化计算

4.1 全局优化理论

由 M. PINCUS 提出的全局优化理论适用于获得具有全局唯一最大值函数在其取得最大值时的各参数的估值[10]。根据这一理论, 似然函数 $L(x)$ 的参数 x 的估计值为:

$$\left[\hat{x} \right]_i = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} [x]_i L(x) dx \quad \text{在这里, } \bar{L}(x) \text{ 是归一化的}$$

$$\text{似然函数: } \bar{L}(x) = \frac{\exp(\rho L(x))}{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\rho L(x)) dx} \quad \text{这里 } \left[\hat{x} \right]_i \text{ 是参数 } x \text{ 的}$$

第 i 个分量。

从上面的式子中我们也可以看出, 全局最优理论提供了一个获取函数最大值的参数的闭合表达式。而且, 需要进一步指出的是, 上式中的积分与概率论中计算随机变量的数学期望是类似的。这是因为归一化函数 $\bar{L}(x) \geq 0$, 并且具有联合概率密度的所有性质。但要在指出的是, 参数矢量并不是随机变化的矢量, 因此, 归一化函数 $\bar{L}(x)$ 被称为伪概率密度函数。

至此, 我们可以看出, 全局优化理论似乎为我们提供了一个很有诱惑力的前景, 因为使用这种方法, 可以使用最大似然法进行频率估计而不用进行全局搜索——通过积分即可以计算出全局最大值时的相关参数的估计值。但是, 现在应用这个理论还有一定的困难, 因为在这里要求解的是一个多维积分, 而众所周知, 求解一个高度非线性的函数的多维积分是相当困难的, 至少在实际应用过程中是不切实际的[25]。

4.2 Monte - Carlo 的重点采样技术

Monte - Carlo 技术是进行数值计算, 特别是数值积分计算的一个强有力的工具, 在工程计算、物理技术及经济学领域都有广泛的应用。

重点采样技术是 *Monte - Carlo* 技术中的一种很实用的计算方法。同时, 它也为复杂的非线性积分转换为可进行的数值计算提供了一种有效的途径。

重点采样技术的理论基础是: 形如 $\int h(x)\bar{L}(x)dx$ 的积分可以被表示为如下的形式:

$$\int h(x)\bar{L}(x)dx = \int h(x)\frac{\bar{L}(x)}{\bar{g}(x)}\bar{g}(x)dx \quad (4-1)$$

在这里的前提条件 $\bar{g}(x)$ 拥有概率密度函数的所有属性, 而且, 在选择时, $\bar{g}(x)$ 被选择为一个正定的函数 [26]。

根据概率论的相关理论, 式 (4-1) 可以被看做关于伪概率密度函数 $\bar{g}(x)$ 随机变量 $h(x)(\bar{L}(x)/\bar{g}(x))$ 的数学期望值。这里 $\bar{g}(x)$ 被称为归一化的重点函数, 这个函数不像 $L(X)$ 是一个关于 X 的高度非线性的函数, $\bar{g}(x)$ 可以选择一个关于 X 的简单的函数, 这样的好处是可以比较容易的根据 $\bar{g}(x)$ 的分布来生成 X 的实现值 [9]。

根据 *Monte - Carlo* 理论, 式 (4-1) 的值可以用 *Monte - Carlo* 估计来计算:

$$\int h(x)\bar{L}(x)dx = \int h(x)\frac{\bar{L}(x)}{\bar{g}(x)}\bar{g}(x)dx = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R h(x_k)\frac{\bar{L}(x_k)}{\bar{g}(x_k)} \quad (4-2)$$

在这里, x_k 是矢量 X 根据伪概率密度函数 $\bar{g}(x)$ 的分布规律生成的第 k 个实现值。 R 的值表示矢量 X 的实现值的个数。在此, R 的值需要根据实验结果来选择一个恰当的数值。

从以上我们可以看出, 求解上式的关键在于合理的选择一个 $\bar{g}(x)$ 函数, 以使根据 $\bar{g}(x)$ 的分布来生成 x_k 是很容易的。至于怎样生成一个合适的 $\bar{g}(x)$ 函数, 将在下面予以讨论。

当确定了关于该问题的归一化重点函数 $\bar{g}(x)$ 后, 我们可以根据式 (4-1) 及式 (4-2) 来计算和优化 X 的值。假定归一化重点函数为 $\bar{g}(x)$, 那么相应的矢量 X 的估计值表示为:

$$[\hat{x}]_i = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R [x_k]_i \frac{\bar{L}(x_k)}{\bar{g}(x_k)} \quad (4-3)$$

这里 $[\hat{x}]_i$ 即可以被看作是一个正弦信号的频率值。上式是估计淹没于白噪声中的多正弦信号的最大似然估计的计算方法。

正是由于 *Monte - Carlo* 技重点采样方法的使用, 既简化了多维积分计算,

又使频率的实现值的生成过程变得更加容易,因而将导致不用多维格形搜索的最大似然频率估计方法变得切实可行。

4.3 重点函数的选取

重点函数的选取要遵循以下的原则:

1. 由于 $L(x)$ 是我们前面所提到的估计频率所用的似然函数,为了在估算过程中减小误差,我们要选择 $\bar{g}(x)$ 的形式与 $\bar{L}(x)$ 的形式比较接近,这样才能使得到的 $\bar{g}(x)$ 是 $\bar{L}(x)$ 的比较精确的估计。
2. 归一化的重点函数的形式要比尽可能较简单,因为这样才可能使根据 $\bar{g}(x)$ 的分布而生成 x 的实现值更加方便和容易,从而简化计算。

按以上的原则,重点函数的选择是比较灵活的,但是也比较困难,而且可以有多种选择的可能。

由于 $L(x) = x^H E(x) [E^H(x) E(x)]^{-1} E^H(x) x$ 很显然 $L(x) = \exp(\rho L(x))$

是一个关于 x 的不可分离的函数。如果我们使 $E^H(x) E(x)$ 成为一个单位阵,这样函数 $L(x)$ 就成为一个关于 x 的可以分离的函数。

根据以上的思路,我们的重点函数通过使 $P \times P$ 矩阵 $E^H(x) E(x)$ 成为一个 N 阶单位阵来选取。为了使重点函数与 $L(x)$ 相似,我们选取重点函数为:

$$g(x) = \exp\left(\rho_1 x^H E(x) \frac{I}{N} E^H(x) x\right) \quad (4-4)$$

则 $g(x)$ 的归一化函数为:

$$\bar{g}(x) = \frac{g(x)}{\int g(u) du} \quad (4-5)$$

由于 $E(x) = [e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_p]^T$, 则 $g(x)$ 可以变形为:

$$g(x) = \exp\left[\rho \sum_{i=1}^P \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi\omega_i n) \right|^2\right] \quad (4-6)$$

或者 $g(x) = \prod_{i=1}^P \exp(\rho_i I(\omega_i))$ 这里: $I(\omega_i) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi\omega_i n) \right|^2$ (周

期图) 作为优化选择的结果, 归一化重点采样函数 $\bar{g}(x)$ 是对于随机矢量 x 是可以进行区分的, 表示如下:

$$\bar{g}(x) = \prod_{i=1}^P \bar{g}(x_i) \quad \text{在这里 } \bar{g}(x_i) \text{ 表示如下:}$$

$$\bar{g}(x_i) = \frac{\exp(\rho I(\omega_i))}{\int \exp(\rho I(x_i)) dx} \quad \text{可以看出, 归一化重点采样函数 } \bar{g}(x)$$

对于归一化似然函数 $\bar{L}(x)$ 是一个合适的估计。

从以上的分析可见, $E(x)$ 包含以矢量 x 作为其参数的列, 如果各列上的矢量 x 分离良好, 那么矩阵 $E^H(x)E(x)$ 在多维空间下将是一个渐近的单位阵。这也正是复指数函数在估计分离良好的正交参数所显示出的特性。

同时, 根据这样的联合概率密度函数 $\bar{g}(x)$ 所生成的 P 个独立的 x 的实现值是相互独立的, 它们之间是不相关联的, 因此在生成各个频率的实现值的时候可以独立的进行。但矩阵 $E^H(x)E(x)$ 的秩是一定的, 为了防止这个矩阵成为奇异矩阵, 确定一个合理的 P 值是十分必要的 (确定频率的个数)。因为若生成的矢量 x 的实现值的个数大于 $E^H(x)E(x)$ 的秩, 必然会导致某些矢量 x 是相关的, 这样会导致 $E^H(x)E(x)$ 成为奇异矩阵, 从而破坏各个频率分量的可区分性, 或者漏掉某些有用的分量 [9] [27]。

4.4 频率实现值的生成

到目前为止, 我们已经生成了归一化的重点函数 $\bar{g}(x)$ 。正如前面提到的, 我们应用重点采样函数的目的是为根据其分布规律来获得其相关参数的实现, 也就是确定我们前面提到的频率估计的实现值 x_k , 在产生了足够数量的 x_k 后, 我们就可以根据公式 (4-3) 确定各个频率分量 $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ x \end{bmatrix}_i$ 。

既然 $\bar{g}(x)$ 可以看作是 x_k 的伪概率密度函数, 就可以根据这个概率密度函数 $\bar{g}(x)$ 按照概率论的相关理论去求解各个实现值 x_k 。

在生成频率的各个实现值 x_k 之前, 有一个问题需要注意:

由于各个分量在 $\bar{g}(x)$ 分布函数中是可以相互分离的 (这一点我们在构造 $\bar{g}(x)$ 时已经加以了充分的考虑), 因此各个频率分量 x_k 的实现值可以被独立

的加以考虑,同时这也使得生成 x_k 变得非常容易。但这有一个前提:那就是被生成的任何两个频率实现值 x_i 和 x_j 必须是不同的两个值,或者说二者至少要保持一个可区分得差值,否则这就不能成为两个频率分量了。为了区分方便,我们先将各频率进行命名,并按顺序排列 $x_k, x_1 \cdots x_p$,下面我们就来研究如何生成频率分量的实现值 x_k 。

1. 根据 $g(x)$ 的形式我们可以看出,采样数据的周期图是 $g(x)$ 的组成成分,因此我们首先要确定数据矢量 $x(n)$ 的周期图 $I(\omega)$,其定义如下:

$$I(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi\omega n) \right|^2 \quad (4-7)$$

2. 根据前面的对于归一化重点采样函数 $\bar{g}(x)$ 的推导, $\bar{g}(x)$ 的计算如下:

$$\bar{g}(x) = \frac{\exp(\rho_1 I(x))}{\int \exp(\rho_1 I(x_i)) dx} \quad (4-8)$$

3. 根据 x_k 的伪概率密度函数 $\bar{g}(x)$,求得 x_k 的累积分布函数 $G(x)$:

$$G(x) = \int_0^x \bar{g}(\varepsilon) d\varepsilon \quad 0 \leq x < 1 \quad (4-9)$$

4. 根据 x_k 的分布函数 $G(x)$ 来生成 x_k [3] [9] [10]。

4.5 频率实现值的生成方法

根据概率论的相关理论,要依照分布函数 $G(x)$ 的分布规律来生成随机变量 x_k ,先要选定一个随机的概率 P ,然后即可根据 $x_k = G^{-1}(P_k)$ 来求得相应的 x_k 。为了保证 x_k 的随机性,概率 P 的选择也要随机的产生。在这里,概率 P 是在0和1之间均匀分布的,即: $P \sim U[0,1]$ 。

但是,为了防止产生前面提到的矩阵 $E^H(x)E(x)$ 成为奇异矩阵的问题,确定随机概率 P 及生成频率实现值的时候要按以下步骤:

首先要对频率进行离散化,即在频率的坐标轴上,根据频率分辨率的大小,对坐标轴从0到1进行 M 等分,间距为 $\frac{1}{M}$;这样初始频率的集合为

$S = \left\{ \frac{1}{M} \quad \frac{2}{M} \quad \frac{3}{M} \quad \cdots \quad 1 - \frac{1}{M} \right\}$; 然后根据均匀分布原理, 在 $(0, 1)$ 之间随机的生成一个概率值: $P_1 \sim U(0,1)$ 。 P_1 生成之后, 需要进行一维空间搜索以确定 $x_1 = G^{-1}(P_1)$ 。具体方法是: 在集合 S 中, 依次将其中的每个元素代入到函数 $Q = |G(X) - P_1|$ 中去, 然后比较 Q 值的大小, 选择使 Q 值为最小的集合 S 的元素作为 x_1 。

当 x_1 产生之后, 把频率集合 S 改变为: $S = \left\{ \frac{1}{M} \quad \frac{2}{M} \quad \frac{3}{M} \quad \cdots \quad 1 - \frac{1}{M} \right\} - \{x_1\}$, 重新生成 $P_2 \sim U(0,1)$, 然后在集合 S 中按照上一步的方法重新搜索, 生成 $x_2 = G^{-1}(P_2)$;

依次下去, 分别生成 $x_3, x_4, \cdots, x_{p-1}$, 当生成 x_p 的时候, 频点集合 $S = \left\{ \frac{1}{M} \quad \frac{2}{M} \quad \cdots \quad 1 - \frac{1}{M} \right\} - \{x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{p-1}\}$, 同样方法生成 $P_p \sim U(0,1)$, 然后在集合 S 中进行搜索, 生成频率 x_p ; 这样, 完成了频率矢量的一次实现 $\{x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_p\}$ [9][10]。

显而易见, 前面的算法中有一定的约束条件, 为了消除这些约束条件的影响, 使各个频率尽可能随机的生成, 应该多次生成频率矢量 $\{x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_p\}$, 以抵消以上约束的限制。但是, 实际要生成多少个频率矢量, 目前尚无理论上的结论, 需要实验来确定。

4.6 正弦信号的频率估计

通过以上的运算, 我们已经产生了频率矢量的多次实现值, 为了计算的方便, 我们假设生成了 R 组频率的实现值, 即产生了 R 个频率矢量。

根据公式 (4-3), 利用我们已经求得的 R 个频率矢量, 即可进行正弦信号的频率估计。公式 (4-3) 实际上是一种线性均值, 在实际应用过程中, 它的计算量和计算误差都比较大, 在此采用适用于周期性变量的周期均值来替代线性均值进行计算 [16][31]。

由于我们在设计信号模型可以看出, 正弦信号的频率 x 具有周期性, 且其周期为 1, 因此我们可以使用周期均值来计算其幅角, 并且通过幅角来确

定频率值，这样做的好处是用圆周均值来平均位置矢量，以减小误差。

圆周均值的定义如下：

$$\left[\hat{\mathbf{x}} \right]_i = \frac{1}{2\pi} \angle \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \exp(j2\pi [x_k]_i) \frac{\bar{L}(x_k)}{g(x_k)} \quad (4-10)$$

根据在角度矢量上乘以一个常量而其角度值不变性质，上式可变形为：

$$\left[\hat{\mathbf{x}} \right]_i = \frac{1}{2\pi} \angle \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \exp(j2\pi [x_k]_i) \frac{L(x_k)}{g(x_k)} \quad (4-11)$$

从上式中可以看出，这个式子较上式省去了两个归一化的积分运算过程，从而减少了计算的负担[9][10]。

第五章 对于最大似然频率估计算法的几点改进

通过对前面介绍的最大似然算法的讨论,我觉得这个算法目前还存在几个小的问题,需要进一步完善。就这几个问题,我提出了自己的一点改进方法,具体如下所述。

5.1 关于频率实现值问题的讨论

关于上一章中第五节的频率实现值的计算方法,这种算法具有简单,容易实现等特点;但是这种算法也存在着以下两个问题:

1. 计算量比较大 因为这种算法需要对 $0 \sim 1$ 之间的所有的频点进行运算,没有针对性,需要叠代运算次数较多,计算速度较慢。例如,若希望频率的分辨率为 $\frac{1}{1000}$,那么求解 x_1 就要进行 998 次迭代运算,进行大约 997 次比较运算;在求解 x_2 时要进行 997 次迭代运算,996 次比较运算;可见,随着频率数目较多,其计算量是很惊人的。
2. $G(x)=P$ 的精度难以控制 若分辨率选得过高,会造成不相关的运算成倍的增加;若分辨率选得过低时,会造成实现值的遗漏,而造成较大的估计误差。
3. 约束条件的限制 频率的实现值 x_k 并不一定是根据其分布函数 $G(x)$ 的分布规律来生成的,有时会有较大的估计误差。所以这种方法要求频率矢量的实现值的数目是很大的。这同样也增加了计算量[9][10]。

为此,我通过研究,对以上的算法进行了改进;具体的思路是:按照事先约定的分辨率,在不同的区域生成不同的随机概率 P ,然后根据 P ,通过一种搜索算法,生成不同的频率的实现值 x_k 。具体方法如下:

5.2 随机概率的生成方法

首先根据 $P \sim U[0,1]$ 来生成 P_1 ,然后根据 $x_1 = G^{-1}(P_1)$ 在生成 x_1 。之后,

根据事先定义的性能参量 δ ，也就是这个算法所能分辨的两个频率分量的最小差值，这个 δ 可用于调整算法的分辨率。具体使用时，我们根据 $P_2 \sim U[(0, G(x_1 - \delta))U(G(x_1 + \delta), 1)]$ 来产生 P_2 （见图 5-1），然后根据 $x_2 = G^{-1}(P_2)$ 来生成 x_2 ；在确定 x_3 之前，先要比较 x_1 和 x_2 的大小。假定 $x_1 < x_2$ ，则 P_3 要根据以下的方式来确定：

$P_3 \sim U[(0, G(x_1 - \delta))U(G(x_1 + \delta), G(x_2 - \delta))U(G(x_2 + \delta), 1)]$ （见图 5-2）。反之，若 $x_1 > x_2$ ，则将 x_1 和 x_2 在上式中的位置调换即可，然后再根据 $x_3 = G^{-1}(P_3)$ 生成 x_3 ；

同理，在生成 x_4 时，要先将 x_1 ， x_2 和 x_3 进行排序，假设 $x_1 < x_2 < x_3$ ，则 P_4 要根据以下的方式来确定： $P_4 \sim U[(0, G(x_1 - \delta))U(G(x_1 + \delta), G(x_2 - \delta))U(G(x_2 + \delta), G(x_3 - \delta))U(G(x_3 + \delta), 1)]$ 然后根据 $x_4 = G^{-1}(P_4)$ 生成 x_4 [3] [32]。

依次类推，可以依次生成 x_5 ， $x_6 \cdots \cdots x_p$ 。到目前为止，我们已经生成了各频率分量的一次实现值——频率矢量 $[x_1 \ x_2 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ x_p]$ ，但这还是远远不够的，我们还需要按照以上的方法去生成多个频率矢量。

这样做的原因是多方面的 [27] [34]：

首先，根据 *Monte - Carlo* 理论的重点采样技术，我们应该选取一个合适的频率矢量的个数 R ，这个“合适”是指尽可能大的一个数，但为了工程计算的考虑，也不可能无限大，但至少我们也应该满足其实验的下限值。

其次，我们为了保证各频率之间的可分辨性，在生成频率 x_k 的过程中加入了一定的限制并且影响了概率 P 的随机性，为此，我们也应该生成多个频率矢量 $[x_1 \ x_2 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ x_p]$ ，以尽可能的平抑约束条件的影响。只有这样，我们计算出的各频率分量才是使似然函数 $L(x)$ 达到最大值的最佳频率估计。

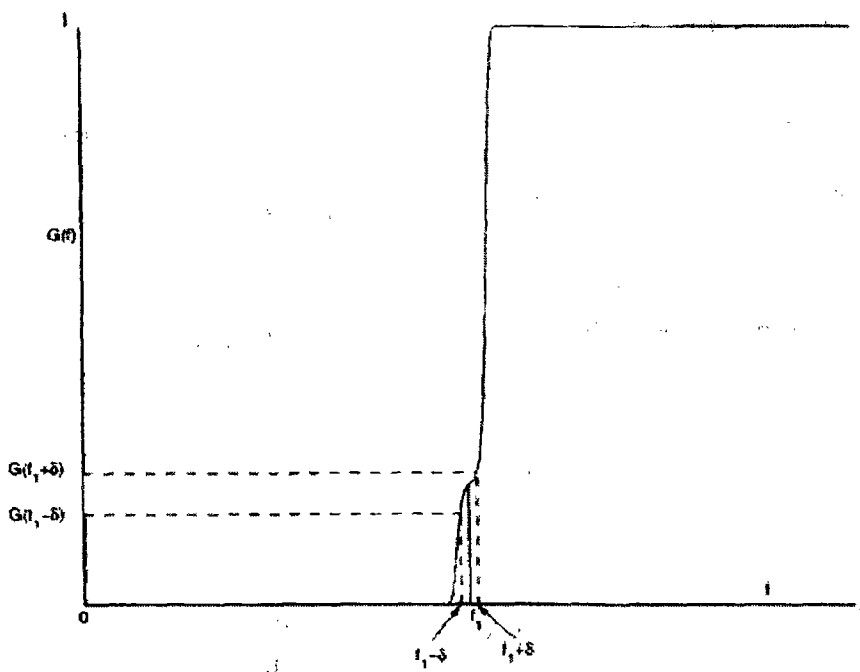


图 5-1

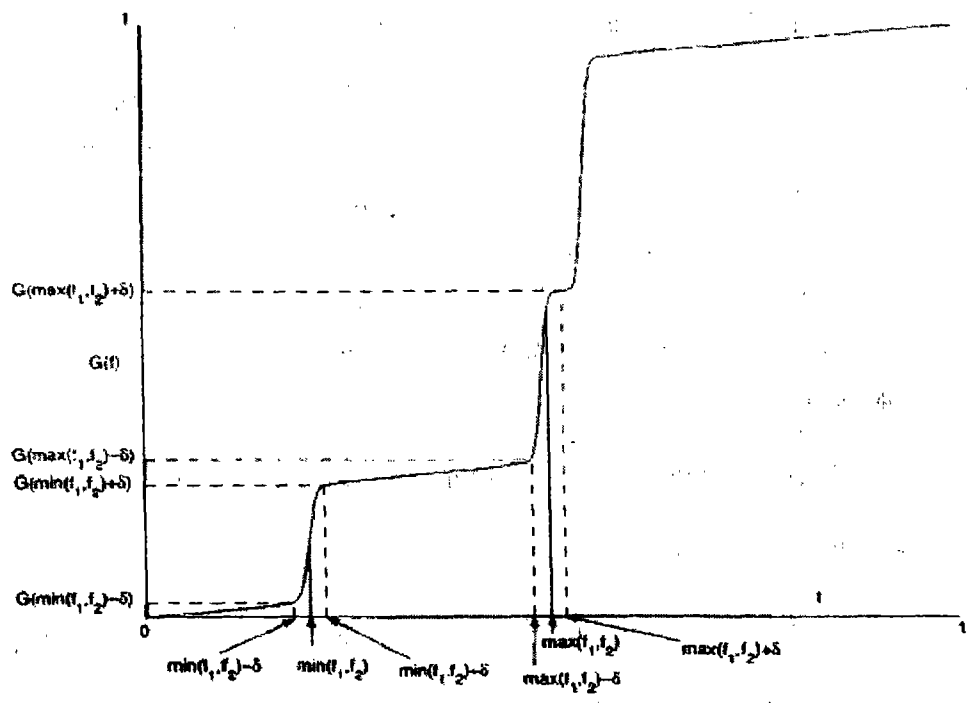


图 5-2

5.3 频率实现值的搜索方法

到目前为止, 我们已经产生了一种新的随机频率 P 的生成方法, 但是, 怎样根据给定的概率 P 并且根据 $x = G^{-1}(P)$ 来生成频率实现值 x_k 呢? 在这里我采用了一种新的搜索方法, 以减少运算量并提高精度。在使用这个算法之前, 我们首先需要证明以下的结论: 分布函数 $G(x)$ 是一个单调递增的函数。这是因为:

$$G(x) = \int \bar{g}(\varepsilon) d\varepsilon \quad 0 \leq x < 1 \quad (5-1)$$

的导数 $G'(x)$ 为:

$$G'(x) = \bar{g}(x) = \frac{\exp(\rho_1 I(x))}{\int \exp(\rho_1 I(x_i)) dx} \quad (5-2)$$

由于定积分 $\int \exp(\rho_1 I(x)) dx$ 的值是一个大于零的常数, 而对在 $[0, 1]$ 区间的任意 x 的值, $I(x)$ 的值都将大于或等于零, 这样 $\exp(\rho_1 I(x))$ 的值将大于或等于 1, 因此会有: $G'(x) > 0$, 可见在区间 $[0, 1]$ 内, 分布函数 $G(x)$ 是单调递增的。也就是说: 若 $x_1 > x_2$ 则会有 $G(x_1) > G(x_2)$, 反之亦然。根据这个前提, 我的搜索算法步骤如下:

1. 以 0.5 作为梯度, 首先选取 $x=0.5$, 计算 $\delta = P - G(x)$, 搜索起点定义为 $X_s=0$, 搜索终点定义为 $X_e=1$;
2. 判断 δ 绝对值的情况:

若 $|\delta| \leq 0.0001$, 则说明 x 的值即是我们所要求的 $x = G^{-1}(P)$, 是频率的一个实现值 x_k 。

若 $|\delta| > 0.0001$, 则说明对于随机选取的概率 P 来讲, x 的值不是我们所求的 $x = G^{-1}(P)$, 此时需要进一步搜索, 有以下两种情况:

A. 若 $\delta > 0.0001$ 时, 说明对于概率 P 来讲, 频率的实现值要比

我们选取的 x 值要大, 我们应该在 (x, X_e) 之间进行搜索, 定义 $X_s = x$, $X_e = X_e$, $x = X_s + 0.5 (X_e - X_s)$;

B. 若 $\delta < -0.0001$ 时, 说明对于概率 P 来讲, 频率的实现值要比我们选取的 x 值要小, 我们应该在 (X_s, x) 之间进行搜索, 定义 $X_s = X_s$, $X_e = x$, $x = X_s + 0.5 (X_e - X_s)$;

在计算产生了新的 x 之后, 应计算: $\delta = P - G(x)$ 。

3. 重复第二步的计算, 直至 $|\delta| \leq 0.0001$ 时终止计算, 此时产生的 x 值

即是我们所求的 $x = G^{-1}(P)$ 的值。

以上的这种搜索算法, 经过和原来的方法相比较, 效果比较好。经过实验, 在搜索精度为 0.0001 的情况下, 我的搜索方法的平均搜索次数为 12.23 次。

通过比较这两种算法, 我的算法即使在精度达到了 $\frac{1}{10000}$ 时, 搜索次数

也不过二十次, 比之原来的算法减少了很多的计算量; 但是, 我的概率的生成过程相对复杂, 正是这个复杂性, 使概率 P 与频率实现值之间是一种——对应的映射关系。

5.4 对于频率估计算法的进一步完善

对于 4.6 节中的关于正弦波的频率估计问题, 为了减少计算的偏差使用了圆周均值, 这使得计算更加准确; 同时也减少了计算量, 但是通过进一步分析, 这一部分的计算量还能进一步减少。

为了进一步的简化计算, 根据

$$\left[\hat{x} \right]_i = \frac{1}{2\pi} \angle \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \exp(j2\pi[x_k]_i) \frac{L(x_k)}{g(x_k)}$$

把前面推导的相关公式 $g(x)$ 及 $L(x)$ 代入上式, 得到:

$$\left[\hat{x} \right]_i = \frac{1}{2\pi} \angle \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \exp(j2\pi[x_k]_i) \frac{\exp(\rho L(x_k))}{\prod_{i=1}^p \exp(\rho I(x_i))} \quad (5-3)$$

按照复指数运算的性质, 可将两步复指数运算合并为一个:

$$\left[\hat{x} \right]_i = \frac{1}{2\pi} \angle \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \exp(j2\pi[x_k]_i) \exp\left(\rho L(x_k) - \sum_{i=1}^p \rho I(x_i)\right) \quad (5-4)$$

上式中, $L(x_k) = \exp\left[\rho x^H E (E^H E)^{-1} E^H x\right]$ 该式中的

$$E = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_p] \quad e_i \text{ 可参照}$$

$$e_i = [1 \quad \exp(j\omega_i) \quad \cdots \quad \exp(j(N-1)\omega_i)]^T \text{ 来求取。}$$

式中, $I(x_k) = \prod_{i=1}^p \exp(\rho I(x_i))$ 表示对第 K 个频率矢量进行计算。通过上面的

的进一步说明, 公式 (5-2) 可进一步化简整理为:

$$\left[\hat{x} \right]_i = \frac{1}{2\pi} \angle \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \exp\left(j2\pi[x_k]_i + \rho x^H E (E^H E)^{-1} E^H x - \sum_{i=1}^p (\rho I(x_i))\right) \quad (5-5)$$

这样, 通过简单的公式的代换, 使公式中的各成分更加明确, 使化简容易执行。原来公式中的三个对于 E 的指数运算就减少为一个, 同底指数公式之间的乘除运算化简为加减运算, 这样会对计算速度有一定的提高。

5.5 对于正弦波个数 P 的确定方法初探

正弦波数目的确定, 对于频率估计是至关重要的, 若这个数目确定得不好, 会直接影响频率估计的性能。比如在前面提到过的空间分解频率估计方法中, 若估计数目大于实际书目会造成虚假谱峰; 若小于实际数目会造成正弦波的遗漏[2][7]。

在以往的有关频率估计的各种算法当中, 没有一种算法能够给出怎样确定噪声中正弦波的个数, 甚至没有一种定性的思路。对于这个问题, 目前从理论上还没有可靠的方法, 一般只是根据经验进行估计 [40][42]。在这里, 我对这个问题进行了一个尝试性的探索, 希望对以后的研究有一定的启示作用。

对于累积分布函数 $G(x)$ 来讲, 这个函数可以看作正弦波频率的概率分布函数。因此, 根据对信号的采样计算而得到的累积分布函数 $G(x)$ 必然会反映频率的分布情况。

通过这个介绍, 我们对分布函数 $G(x)$ 的图形进行一下分析, 可以看出,

对于 $P=2$ (两个正弦波情况, $f_1=0.5$, $f_2=0.52$, 图 5-1), 分布函数在还没有到达第一个正弦波频率位置之前其概率值一直保持为 0; 在第一个正弦波频率值附近概率陡然地上升到某一个值 PP_1 , 然后斜率稍缓, 到第二个正弦波频率位置时概率值陡然上升到 1; 对于 $P=3$ (三个正弦波情况, $f_1=0.2$, $f_2=0.5$, $f_3=0.52$, 图 5-2), 分布函数 $G(x)$ 的概率值在第一个频率附近陡然的从 0 上升到某一个值 PP_1 , 在这很长的区间里由于没有新的正弦波存在, 所以概率保持 PP_1 不变, 直到第二个正弦波频率的位置才由 PP_1 陡然 PP_2 , 然后其斜率有稍缓, 到最后一个正弦波频率时其概率值陡然上升到 1; 对于多个正弦波的情况也类似, 这里就不一一列举了。

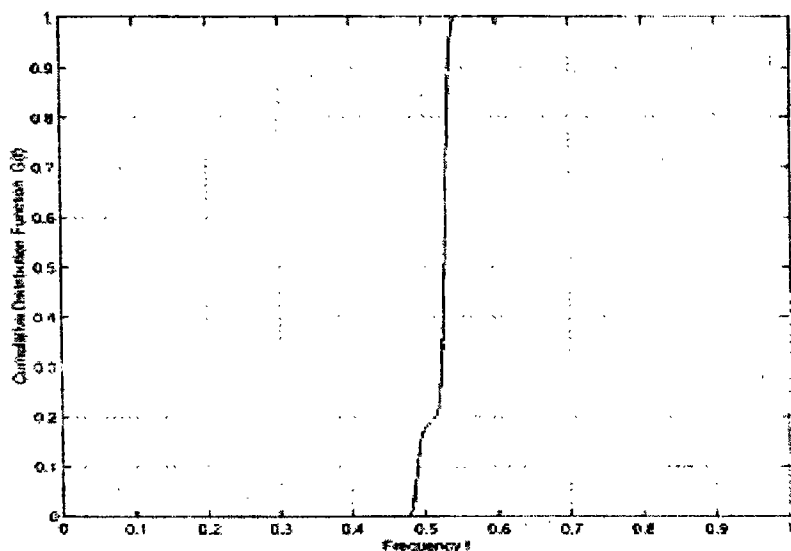


图 5-1

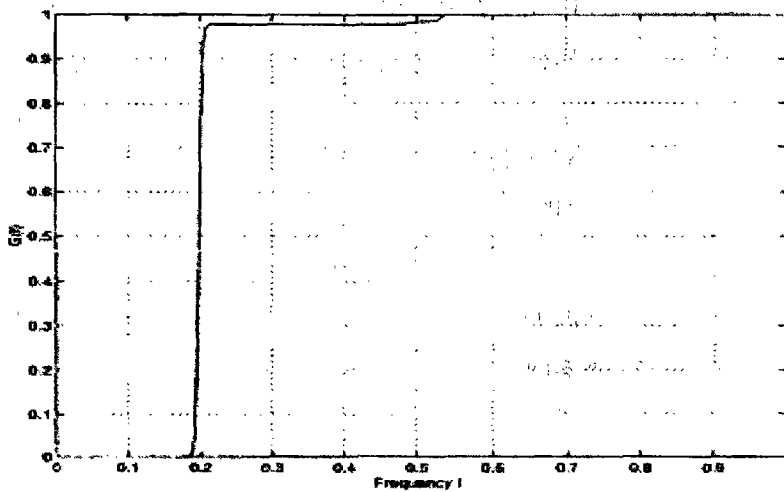


图 5-2

对于这种现象的出现并不是偶然的。因为，分布函数 $G(x)$ 的概率陡变的位置，对应于相应频点的位置正是某一正弦波频率成分所在的位置。也就是说：新的正弦波频率的到来，必然使相应的分布函数 $G(x)$ 的概率陡增；但是，只有所有的正弦波成分全部到来后，分布函数的概率值方可到达 1。例如在上图 5-1 和图 5-2 中可以看出，每一个新的正弦波频率的出现，都会使分布函数 $G(x)$ 的概率陡增；正弦波全部到来后， $G(x)$ 的概率值才上升为 1。

从以上的定性分析使我们认识到，应该从分布函数 $G(x)$ 着手进行研究。从分布函数 $G(x)$ 的来源来看，它是源于周期图函数 $I(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi\omega n) \right|^2$ ，分布函数 $G(x)$ 只是 $I(\omega)$ 的一种数学变换而已；从图中也可以清楚的看出二者的关系，周期图的有效谱峰的位置，必然对应分布函数 $G(x)$ 的概率陡增。因此，为了简化计算，我们还是从周期图函数 $I(\omega)$ 着手考虑。

前面已经讨论过，周期图法对于用傅立叶分析无法进行频率分辨的多个正弦波，是不适用的。实际上，通过多次实验以及对实验数据的分析，结果显示，在合适的的数据长度下，周期图法虽然不能正确地分辨每个正弦波的正确位置，虽然会出现谱峰的交迭现象，但通过对各频点数据的分析，该函数仍然是一个多峰函数，而且有效峰值的个数也恰恰体现了噪声中正弦波的数目。因此，我决定从输入数据在频域各点的功率值着手，对以上的数据进行

分析和处理。具体的步骤如下:

首先对信号的采样序列 $x(n)$ 进行快速傅立叶变换, 得到变换序列 $\text{fft}x$, 通过 $\text{fft}x$ 求得信号的功率谱数据序列 P_x 。

$$\text{则 } \text{fft}x = \text{fft}(x(n)); \quad (5-6)$$

$$P_x(i) = (\text{abs}(\text{fft}x(i)))^2 \quad (5-7)$$

这里假设序列 P_x 有 M 元素。

第二步我求出序列 P_x 的最大值 $\text{Max}P_x$, 并且以 $\delta = \delta_1 \times \text{Max}P_x$ 作为标准(这里 δ_1 是一个剔除无关数据的门限值, 是一个在 $(0, 1)$ 之间的实数), 对数据序列 P_x 的元素进行调整。若 $P_x(i) > \delta$, $P_x(i)$ 的值保持不变; 若 $P_x(i) \leq \delta$, $P_x(i)$ 的值变为 0。以上处理数据的目的是使周期图的谱峰更加显著, 而无关的数据将被剔除; 剔除无关数据的目的是为了防止无关谱峰的影响, 以免造成错误的估计。数据处理完成后, 通过搜索算法, 来确定正弦波的个数。下面是一组对比的数据(数据模型为 $x = \exp(j*0.52*2*\pi*[1:32]) + \exp(j*0.50*2*\pi*[1:32]) + \omega(n)$), 进行 512 点的快速傅立叶变换后进行逐项平方) [47]:

Columns 1 through 241 : 0

Columns 241 through 246

0	0	0	0	0.3587	0.4971
---	---	---	---	--------	--------

Columns 247 through 252

0.6502	0.8109	0.9715	1.1239	1.2610	1.3767
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 253 through 258

1.4668	1.5291	1.5641	1.5741	1.5636	1.5381
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 259 through 264

1.5042	1.4682	1.4356	1.4107	1.3960	1.3917
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 265 through 270

1.3962	1.4060	1.4160	1.4208	1.4143	1.3916
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 271 through 276

1.3485	1.2829	1.1946	1.0856	0.9598	0.8228
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 277 through 282

0.6810	0.5417	0.4115	0	0	0
--------	--------	--------	---	---	---

Columns 283 through 512: 0

以上是经过处理后的数据，下面的数据是处理前的数据（由于数据较多，为了对比方便，只显示前 282 个数据，余下略）：

Columns 1 through 6

0.1604	0.1565	0.1492	0.1388	0.1258	0.1108
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 7 through 12

0.0947	0.0781	0.0618	0.0465	0.0329	0.0213
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 13 through 18

0.0122	0.0057	0.0017	0.0001	0.0006	0.0026
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 19 through 24

0.0057	0.0093	0.0129	0.0160	0.0183	0.0196
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 25 through 30

0.0197	0.0187	0.0168	0.0143	0.0113	0.0082
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 31 through 36

0.0054	0.0031	0.0014	0.0003	0.0000	0.0003
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 37 through 42

0.0010	0.0019	0.0029	0.0038	0.0045	0.0049
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 43 through 48

0.0050	0.0047	0.0043	0.0038	0.0033	0.0030
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 49 through 54

0.0029	0.0030	0.0034	0.0039	0.0046	0.0052
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 55 through 60

0.0058	0.0061	0.0063	0.0062	0.0058	0.0052
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 61 through 66

0.0046	0.0039	0.0032	0.0027	0.0023	0.0022
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 67 through 72

0.0022	0.0023	0.0025	0.0026	0.0027	0.0026
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 73 through 78

0.0024	0.0020	0.0015	0.0011	0.0007	0.0005
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 79 through 84

0.0005	0.0009	0.0015	0.0025	0.0038	0.0051
--------	--------	--------	--------	--------	--------

Columns 85 through 90

0.0065	0.0077	0.0088	0.0095	0.0097	0.0096
Columns 91 through 96					
0.0091	0.0083	0.0072	0.0061	0.0049	0.0039
Columns 97 through 102					
0.0030	0.0024	0.0020	0.0019	0.0020	0.0022
Columns 103 through 108					
0.0025	0.0028	0.0030	0.0032	0.0033	0.0033
Columns 109 through 114					
0.0033	0.0032	0.0032	0.0032	0.0033	0.0033
Columns 115 through 120					
0.0034	0.0035	0.0035	0.0034	0.0031	0.0029
Columns 121 through 126					
0.0025	0.0021	0.0018	0.0015	0.0014	0.0014
Columns 127 through 132					
0.0017	0.0021	0.0025	0.0031	0.0035	0.0039
Columns 133 through 138					
0.0042	0.0042	0.0042	0.0040	0.0038	0.0038
Columns 139 through 144					
0.0040	0.0046	0.0056	0.0070	0.0087	0.0107
Columns 145 through 150					
0.0128	0.0148	0.0164	0.0174	0.0178	0.0174
Columns 151 through 156					
0.0162	0.0144	0.0122	0.0099	0.0079	0.0063
Columns 157 through 162					
0.0056	0.0059	0.0072	0.0095	0.0126	0.0161
Columns 163 through 168					
0.0197	0.0228	0.0252	0.0265	0.0265	0.0253
Columns 169 through 174					
0.0228	0.0194	0.0156	0.0118	0.0085	0.0061
Columns 175 through 180					
0.0049	0.0051	0.0065	0.0090	0.0122	0.0156

Columns 181 through 186	0.0186	0.0209	0.0220	0.0218	0.0202	0.0174
Columns 187 through 192	0.0139	0.0102	0.0067	0.0041	0.0028	0.0029
Columns 193 through 198	0.0046	0.0076	0.0116	0.0159	0.0199	0.0231
Columns 199 through 204	0.0249	0.0251	0.0236	0.0206	0.0168	0.0127
Columns 205 through 210	0.0092	0.0070	0.0066	0.0085	0.0127	0.0188
Columns 211 through 216	0.0261	0.0339	0.0410	0.0465	0.0496	0.0498
Columns 217 through 222	0.0469	0.0416	0.0347	0.0275	0.0216	0.0185
Columns 223 through 228	0.0196	0.0258	0.0374	0.0539	0.0740	0.0959
Columns 229 through 234	0.1171	0.1350	0.1470	0.1512	0.1464	0.1326
Columns 235 through 240	0.1110	0.0844	0.0566	0.0325	0.0176	0.0172
Columns 241 through 246	0.0363	0.0787	0.1467	0.2407	0.3587	0.4971
Columns 247 through 252	0.6502	0.8109	0.9715	1.1239	1.2610	1.3767
Columns 253 through 258	1.4668	1.5291	1.5641	1.5741	1.5636	1.5381
Columns 259 through 264	1.5042	1.4682	1.4356	1.4107	1.3960	1.3917
Columns 265 through 270	1.3962	1.4060	1.4160	1.4208	1.4143	1.3916
Columns 271 through 276						

1.3485 1.2829 1.1946 1.0856 0.9598 0.8228

Columns 277 through 282

0.6810 0.5417 0.4115 0.2964 0.2011 0.1281

通过对比上面的数据,可见,处理后的数据,在有用数据处没有变化,而无用数据却被剔除。既能体现峰值的个数,又避免了对无用数据搜索而导致效率的下降。

下面是以上数据的波形的对比(图 5-3 是处理后的数据的波形,图 5-4 是未经处理的数据的波形):

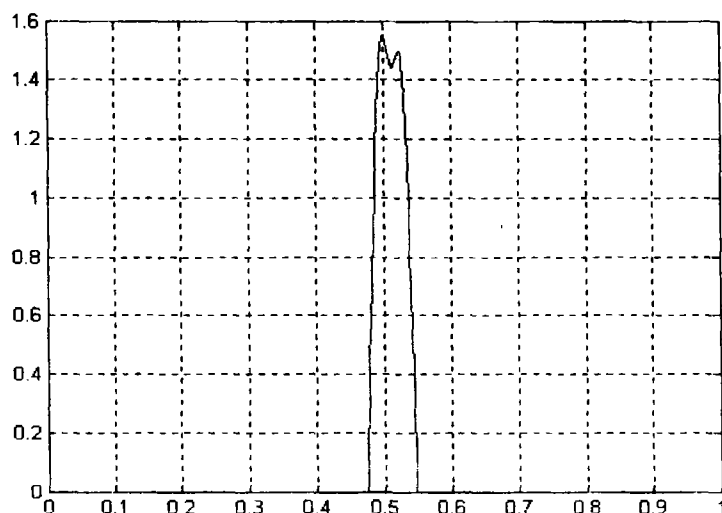


图 5-3

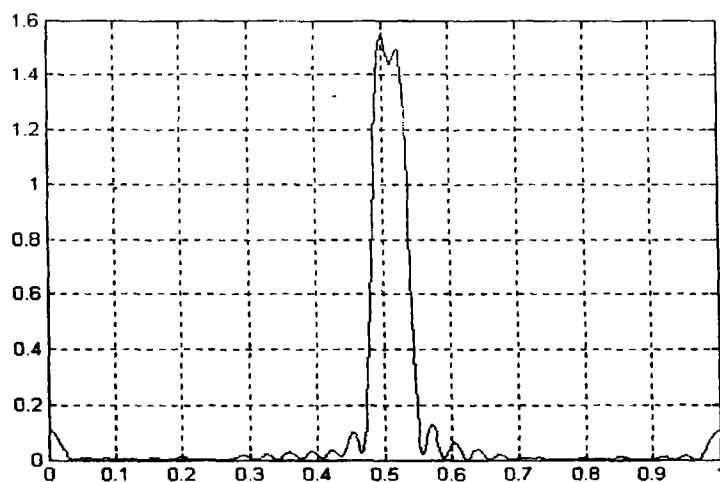


图 5-4

由图可见，处理后的数据在图形上更能体现数据的本质，有利于进行峰值搜索，可提高搜索的效率和质量。

搜索的具体思路是：若在某一区域内，功率数据的值随着频点值的增大先增大，然后减小，可以确定一个谱峰，当然，增大和减小的点数都要满足一定的数目才可确定一个正弦波；否则，可能会被认为是异常值而被重新赋以一个合适的值。通过这样的过程，即可以确定正弦波的个数。

第六章 实验结果

我以 MATLAB 和 DELPHI 作为我的模拟实验工具[47][48],对我的改进后的算法同原来的算法进行了比较,结果如下:

算法比较 计算时间	原算法	我的算法	性能比较
两个正弦波 $f_1=0.5$, $f_2=0.52$	195.30s	180.60s	速度提高了 7.53%
三个正弦波 $f_1=0.3$, $f_2=0.5$, $f_3=0.52$	401.70s	365.40s	速度提高了 9.04%

对于我提出的估计频率个数的方法,我的实验结果如下:

信号情况	搜索结果
两个正弦波 $f_1=0.5$, $f_2=0.52$	2
三个正弦波 $f_1=0.3$, $f_2=0.5$, $f_3=0.52$	3
四个正弦波 $f_1=0.3$, $f_2=0.5$, $f_3=0.7$, $f_4=0.85$	4

第七章 结论

通过以上的实验结果比较，我们可以看出，在相同的效果下，改进后的算法的计算速度有了一定的提高。因此可以认为我的改进方案在实践上基本是可行的。对于正弦波个数的估计，通过实验测试，也能估计出正确的结果。

但是，这个方案还有许多地方没有完善，有待于进一步的研究。比如：正弦波频率的个数 P 的估计还需要进一步的理论研究，对于我的估计方法，数据剔除门限值 δ_1 尚无理论范围；对于不同的信号模型（正弦波的个数不同），为了达到预期的效果，我们所必须产生的频率矢量的数目 R 还没有一个理论值，不同的正弦波的数目其实现值的数目是不同的，只能根据实验来确定。

参考文献

- [1] Sang Geun Oh and Rangasami L. kashyap "A Robust Approach for High Resolution Frequency Estimation" IEEE Transactions on signal processing, March 1991, VOL. 39, NO. 3, pp.627-643
- [2] 姚天任, 孙洪 "现代数字信号处理", 华中理工大学出版社, 1999.6
- [3] 盛骤, 谢式千, 潘承毅 "概率论与数理统计" 高等教育出版社, 1989.8
- [4] Mehmet Karan, Robert C. Williamson, and Rrain D.O. Anderson, "Performance of the Maximum Likelihood Constant Frequency Estimator for Frequency Tracking " IEEE Transactions on signal processing ,October 1994, VOL.42, NO.10, pp.2749-2757
- [5] Arnab k.Shaw "Maximum Likelihood estimation of multiple frequencies with constraint to gurantee unit circle roots" IEEE Transactions on signal processing ,March 1995, VOL.43, NO.3, pp.796-799
- [6] Hugo Van hamme "Maximum Likelihood Estimation of Superimposed Complex Sinusoids in White Guassian Noise by Reduced Effort Coarse search (RECS)" IEEE Transactions on signal processing ,February 1991, VOL.39, NO.2, pp536-538
- [7] Björn Völcker, student Member ,IEEE, and Peter Händel, Senior Member ,IEEE "Frequency Estimation From proper Sets of Correlations" IEEE Transactions on signal processing, April 2002, VOL.50, NO.4, pp.791-802
- [8] D.W .Tufts and R.Kumaresan. "Estimation of frequencies of multiple sinusoids: Making linear prediction perform like maximum likelihood" Proc.IEEE, Sept.1982, vol.70, no.9, pp.975-989
- [9] Supratim Saha and Steven M. Kay " Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Chirps Using Monte Carlo Importance Sampling" IEEE Transactions on signal processing, FEBRUARY 2002, VOL. 50, NO. 2.
- [10] Steven Kay and Supratim Saha "Mean Likelihood Frequency Estimation"

IEEE Transactions on signal processing, JULY 2000, VOL. 48, NO. 7, pp.1937-1946

[11] Mounir Ghogho, *Member, IEEE*, Asoke K. Nandi, *Senior Member, IEEE*, and Ananthram Swami, *Senior Member, IEEE* **"Cramér-Rao Bounds and Maximum Likelihood Estimation for Random Amplitude Phase-Modulated Signals "** 1 IEEE Transactions on signal processing, NOVEMBER 1999, VOL. 47, NO. 11, pp.2905-2916

[12] Ben James, Brian D.O. Anderson Fellow IEEE, and Robert C. Williamsom, member IEEE **"Characterization of Threshold for Single Tone Maximum Likelihood Frequency Estimation"** IEEE Transactions on signal processing, April 1995, VOL.43, NO.4, pp.817-821

[13] Barry G. Quinn and Peter J. Kootsookos **"Threshold Behavior of Maximum Likelihood Estimator of Frequency "** IEEE Transactions on signal processing, November 1991, VOL. 42, NO. 11, pp.3291-3294

[14] P. Händel, A. Eriksson, and T. Wigren, **"Performance analysis of a correlation based single tone frequency estimator"** *Signal Process*, June 1995., vol. 44, no. 2, pp. 223-231.

[15] S. M. Kay, **"Modern Spectral Estimation: Theory and Application"** Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988.

[16] S. M. Kay, **"Comments on frequency estimation by linear prediction,"** *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Apr. 1979, vol. ASSP-27, pp.198-199.

[17] Fulvio Gini*, Monica Montanari, Lucio Verrazzani, **"Maximum likelihood, ESPRIT, and periodogram frequency estimation of radar signals in K-distributed clutter"** *Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, University of Pisa, Via Diotisalvi 2, 56126 Pisa, Italy*, *Signal Processing*, 2000, VOL.80, pp.1115-1126

[18] Mounir Ghogho, Asoke K. Nandi, and Ananthram Swami **"Cramér-Rao Bounds and Maximum Likelihood Estimation for Random Amplitude Phase-Modulated Signals"** IEEE Transactions on signal processing, NOVEMBER 1999, VOL. 47, NO. 11, pp.2905-2916

[19] Steven M. Key **"Fundamentals of Statistical Signal Processing:**

Estimation Theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993

- [20] P. Stoica, L. Moses, B. Friedlander, and T. Soderstrom, "**Maximum likelihood estimation of parameters of multiple sinusoids from noisy measurements**" *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Processing*, Mar. 1989, vol. 37, pp.378–392.
- [21] H.Lante H *,M.Roche,O.Cuevas,C.Aime"**A general method to devise maximum-likelihood signal restoration multiplicative algorithms with non-negativity constraints**" *Signal Processing* 81 (2001),pp945-974
- [22] P. Stoica, A. Jakobsson, and J. Li, "**Cisoid parameter estimation in the colored noise case: asymptotic Cramér–Rao bound, maximum likeli-hood,and nonlinear least squares**" *IEEE Trans. Signal Processing*, Aug. 1997, vol.45, pp.
- [23] Mounir Ghogho, Ananthram Swami, Senior and Tariq S. Durrani, "**Frequency Estimation in the Presence of Doppler Spread: Performance Analysis**" *IEEE Transctions on signal processing*, APRIL 2001, VOL. 49, NO. 4,pp777-789
- [24] Malcolm D. Macleod "**Fast Nearly ML Estimation of the Parameters of Real or Complex Single Tones or Resolved Multiple Tones**" *IEEE Transctions on signal processing*, JANUARY 1998, VOL. 46, NO. 1,pp.141-148
- [25] M. Pincus, "**A closed form solution for certain programming problems**" *Oper. Res.*, 1962, pp. 690–694,.
- [26] John geweke "**Monte carlo simulation and numerical integration**" federal reserve bank of Minneapolis and university of minnesota May 1995
- [27] Steven M.Key, "**Design of sparse linear arrays by Monte Carlo importance sampling,**" in *Proc. Oceans MTS/IEEE*, Providence, RI, Sept. 2000.
- [28] Steven M.Key and Venkatesh Negasha "**Maximum Likelihood Estimation of Signals in AutoRegressive Noise**" *IEEE Transctions on signal processing*,January 1994, VOL. 42, NO. 1,p88-101
- [29] P. Stoica, "**List of references on spectral line analysis,**" *Signal Process.*,Apr. 1993, vol. 31, no. 3, pp. 329–340.
- [30] M. L. Fowler and J. A. Johnson, "**Extending the threshold and frequency range for phase-based frequency estimation,**" *IEEE Trans. Signal Pro-cessing*,

Oct. 1999, vol. 47, pp. 2857–2863.

[31] B. C. Lovell, P. J. Kootsookos, and R. C. Williamson, “**The circular nature of discrete-time frequency estimates**” in *Pro. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, & Signal Process.*, May 1991, pp. 3369–3372.

[32] J. M. Bernardo and A. F. M. Smith, “*Bayesian Theory*”. New York: Wiley, 1994. pp.2048–2059.

[33] L. Stewart, “**Bayesian analysis using Monte Carlo integration: A powerful methodology for handling some difficult problems**” *Amer. Stat.*, 1983, pp. 195–200.

[34] S. M. Kay, “**A fast and accurate single frequency estimator**” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Dec. 1989, vol. 37, pp. 1987–1990.

[35] P. M. Baggenstoss and S. M. Kay, “**On estimating the angle parameters of an exponential signal at high SNR,**” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, May 1991, vol. 39, pp. 1203–1205.

[36] C.F. Bischof and G.M.Shrott “**On updating subspaces**” *IEEE. Trans. Signal processing*, Jan.1992, Vol.40, No.1, pp96-105.

[37] R.D. Degroat “**Noniterative subspaces tracking**” *IEEE. Trans. Signal processing*, Mar.1992, Vol.40, No.3, pp571-577

[38] Steven M.Key “**Improvement of Autoregressive Spectral Estimates in the Presence of Noise.**” *Recor.1978 Int.Conf.Acounts,Speech and Signal Processing*: 357-360.

[39] Steven M.Key and Marple S L Jr. “**Spectrum Analysis -----A Modern Perspective**”. *Proceedings of the IEEE*, 1981, 69(11):1380~1419

[40] W. B. Bishop and P. M. Djuric, “**Model order selection of damped sinusoids in noise by predictive densities**” *IEEE Trans. Signal Processing*, Mar. 1996, vol. 44, pp. 611–619.

[41] Alexander Nazin and Vladimir Katkovnik “**Minimax Lower Bound for Time-Varying Frequency Estimation of Harmonic Signal**” *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING*, DECEMBER 1998, VOL.46, NO. 12, p3235-3245

- [42] R. M. Liang and K. S. Arun, "Parameter estimation for superimposed chirp signals" in *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, 1992, pp. 273-276
- [43] 程佩青 "数字信号处理教程", 清华大学出版社, 1995.8
- [44] 张宗橙, 张玲华, 曹雪虹 "数字信号处理与应用", 东南大学出版社, 1997.
- [45] 樊昌信, 詹道庸, 徐炳祥, 吴成柯 "通信原理", 第4版, 国防工业出版社, 1995.10
- [46] 王宝祥 "信号与系统", 哈尔滨工业大学出版社, 1996.5
- [47] 楼顺天, 于卫, 闫华梁 "MATLAB 程序设计语言", 西安电子科技大学出版社, 1997.8
- [48] 刘华, 肖永顺 "Delphi 5.0 专题开发指南", 清华大学出版社, 2000.8

致 谢

本文是在我的导师苏国平教授的悉心指导下独立完成的，在论文的整个写作过程中，苏老师给我提出了许多宝贵指导和改进意见；没有他的关心和指导，完成论文是不可能的。

苏国平教授思路开阔，学识渊博，工作勤勉，平易近人，在三年的学习生活中，苏老师不但在学术上给予我精心的指导，还在生活中给了我无微不至的关怀。从苏老师那里我不仅学到了严谨治学的态度，而且还学到了让我受用今生的做人道理。在此对苏老师表示深深感谢！

在论文的写作过程中，信息学院的贾振红和覃锡忠两位老师给我提出了一些宝贵意见，在此表示感谢。

在三年的学习和生活中，我的同学巩长义、罗恒洋、苏凌洁及师兄刘志军都给予了我许多无私的关心和帮助。这些关心和帮助，是我不断前进的动力。

在我的完成学业的过程中，信息学院的许静、刘晓杰和张敬文三位老师都给我提供了许多帮助和便利，在此一并致谢。

张海军

2003年5月于新疆大学