基于 Quinn 算法和相位差法的正弦波频率估计综合算法

谢 胜^{1,2} 陈 航¹ 于 平² 林少兴² (1. 西北工业大学航海学院, 陕西 西安, 710072; 2. 广东湛江市91388 部队, 广东 湛江, 524022)

摘 要: Quinn 算法是正弦波频率估计中应用广泛、计算量小且稳定性较好的算法,但是在低信噪比时当信号频率靠近离散傅立叶变换(DFT)的量化频率时,Quinn 算法估计误差较大;而改变窗长相位差法在这种情况下具有较高的估计精度,但当信号频率位于两相邻离散傅立叶变换(DFT)的量化频率中心区域时,其估计误差很大。根据这两者特点,本文提出了一种基于 Quinn 算法和改进的改变窗长相位差法的正弦波频率估计综合算法,给出理论计算过程及相关误差公式。计算机蒙特卡罗模拟仿真实验和性能分析表明了本文算法在计算量增加不大的情况下,在设定频率范围内能够提高频率估计的精确度和稳定性,其均方误差接近克拉美罗限且具有较低信噪比门限,整体估计性能优于 Quinn 算法和改变窗长相位差法,具有工程实用价值。

关键词: 频率估计; Quinn 算法; 改变窗长相位差法; 克拉美罗限 中图分类号: TN911 文献标识码: A 文章编号: 1003-0530(2011)05-0771-05

Sinusoid wave frequency estimation combined algorithm based On Quinn algorithm and phase difference correction algorithm

XIE Sheng^{1,2} CHEN Hang¹ YU Ping² LIN Shao-xing²
(1. College of Marine, Northwestern Polytechnical University, Shanxi, Xi'an, 710072, China;
2. Unit 91388, PLA, Guangdong, Zhanjiang, 524022, China)

Abstract: Quinn algorithm is a low computational complexity and steady method which is widely used in frequency estimation of single real sinusoid in additive white Gaussian noise is given, But it has a problem of large variance of frequency estimation when the signal frequency is closed to the DFT (Discrete Fourier Transform) discrete frequency in low SNR (Signal Noise Ratio); However, compared to Quinn algorithm, the window-length changing phase difference correction algorithm has good frequency estimation precision in this case. But it also has a problem of large variance when the signal frequency is closed to the midpoint areas of two neighboring DFT discrete frequencies; Aimed at the characteristic, this paper proposes an conjoint algorithm which is a Quinn algorithm as well as a window-length changing phase difference correction algorithm. The theoretical calculation process and related error formula are given out. From the result of computer Monte-Carlo simulation experiment and calculation amount analysis. We can see that the new algorithm has higher accuracy and stability in the frequency estimation as well as low SNR threshold in the setting frequency range without increasing the calculation amount obviously. Its RMSE (Root Mean Square Error) is close to CRLB(Cramer-Rao Lower Bound) in the whole frequency range. The performance of the new algorithm is better than Quinn algorithm and window-length changing phase difference correction algorithm, So it has some practical value for engineering.

Key words: frequency estimation; Quinn Algorithm; window-length changing phase difference correction algorithm; Cramer-Rao Lower Bound

1 引言

由于水声环境复杂性以及水中可利用的信号频带有

限,对被噪声污染的单频正弦信号进行实时、准确地频率估计变得十分重要。这不仅在水下信号的编码与调制解调,水声通信中多普勒补偿等扮演了极其重要的角色,而

收稿日期: 2010年11月19日; 修回日期: 2011年2月25日

基金项目: 武器装备预研基金资助项目(9140A05030409HK0337)资助课题

且在雷达、通信和振动工程等领域得到了广泛应用。

国内外学者提出了多种频率算法。基于参数模型 的谱估计、MLE[1]、迭代滤波及 PHD[2] 等子空间法具有 频率分辨率高日不依赖于数据长度等优点,但存在对模 型误差敏感,运算量大的问题。基于时域相位的方法:如 Fitz 算法改进^[3]、线性预测频率估计器^[4]、So 等提出的通 用带权线性预测估计器(GWLP)[5]等,计算量小但信噪 比要求高,频率估计范围小而且估计性能不一致等问题。 基于 DFT 的谱分析方法,实时性好(利用 FFT 算法),对 正弦信号具有较高的信噪比增益和对算法参数不敏感 等优点,特别适合于实时信号处理,但 DFT 在样本数据 较长条件下才具有较好的频率估计精度和频率分辨率, 而在小样本下误差很大。针对这个问题,人们在 FFT 基 础上相继提出了多种插值算法。常用基于 FFT 的插值 算法有:相位差法、Rife 算法[6] 和 Quinn 法[7] 等。基于 FFT 插值频率估计方法具有速度快、实时性高、利于硬件 实现等特点,并且提高了频率估计精度,但仍存在不足: 如当信号频率靠近离散傅立叶变换(DFT)量化频率时, Rife 算法和 Quinn 算法估计误差较大,特别在低信噪比 情况下估计误差甚至可能比 DFT 法大。Rife 算法的改 进[8~10]在信噪比在 0dB 以上时,估计精度很高,均方误 差十分接近克拉美罗限(Cramer-Rao Lower Bound,下面 简称为 CRLB),但在低信噪比情况下其估计性能下降较 多,需要进行二次修正。以上这些算法都不能够较好地 满足水下脉冲信号在脉宽窄、低信噪比的情况下进行快 速、精确的频率估计。

本文在插值 FFT 频率估计方法的基础上提出了一种基于 Quinn 算法和改变窗长相位差法的综合算法。理论分析和计算机蒙特卡罗实验仿真表明本文算法准确有效,能够在设定窄带频率范围内提高单频信号的频率估计精度,估计均方根误差接近 CRLB,计算量小且信噪比门限低,能较好适合于水声背景下实时精确的频率估计。

2 正弦波频率估计算法

2.1 Quinn 算法

假设估计的信号为: $x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) + r(t)$, A_0 、 ϕ_0 分别为正弦信号振幅和初相, f_0 为待估计的频率。r(t) 为实随机高斯白噪声、方差为 σ_r^2 。信噪比 $SNR = A_0/(2 \cdot \sigma_r^2)$ 。按等间隔 $\Delta t = T/N$ 对 x(t) 在 $0 \sim T$ 区间内进行采样得到长度为 N 的正弦采样序列:

$$x(n) = A_0 \cos(2\pi f_0 n + \phi_0) + r(n) \tag{1}$$

当 N>>1,矩形窗条件下正弦采样序列载频附近正 半部分的频谱可表示为:

$$WX(f) = \frac{A_0}{2} N \frac{\sin\left[\pi(f - f_0)T\right]}{\pi(f - f_0)T} e^{i[\phi_0 - \pi(f - f_0)T]} + WR(f)$$
 (2)

式中 $T = N/f_s$ 为采样时长, f_s 为采样频率, WR(f) 是 r [n]的 DTFT 谱。设 DFT 幅度谱的最大值处离散频率 为 k_0 , 则频率粗估计值为 $k_0 \cdot \Delta f$, $\Delta f = f_s/N$ 为 FFT 的频率分辨率。则以 k_0 为中心, 正弦信号的线谱模型为:

$$WX(k) = \frac{A_0}{2} N \frac{\sin\left[\pi(k-\delta)\right]}{\pi(k-\delta)} e^{j\left[\phi_0 - \pi(k-\delta)\right]} + WR(k)$$
 (3)

其中 k 代表偏离 k₀ 谱线的序号值,可正可负,δ 为正弦信号真实频率与频率粗估计值的差值关于频率分辨率 Δf 的倍数,δ \in (-0.5,0.5)。WR(k) 为 r[n] 的 DFT 谱,也是高斯白噪声过程,方差为 $N \cdot \sigma_r^2$ 。显然正弦信号频率可由下式估计出:

$$f_0 = (k_0 + \delta) \cdot \Delta f \tag{4}$$

Quinn 算法利用 FFT 主瓣内的次大谱线与最大谱线系数复数值之比的实部进行频率插值的方法来求出δ。由于 Quinn 算法利用了相位信息来判断插值方向,从而避免在 |δ|较小时因插值方向错误导致频率估计误差激增的问题。文献[11]给出了 Quinn 算法的频率估计方差:

$$\sigma_{j}^{2} = \frac{\operatorname{var}(\hat{\delta})}{T^{2}} = \frac{(1 - |\delta|^{2})[(1 - |\delta|)^{2} + \delta^{2}]}{T^{2}N \cdot SNR \cdot \sin c^{2}(\delta)}$$
 (5)

当 δ 接近±0.5 时, Quinn 算法频率估计精度很高,标准差接近 CRLB;但 δ 接近零时,标准差较大,达到 CRLB 的 1.8 倍^[11]。

2.2 改变窗长相位差法

由式(3)的正弦采样序列线谱模型可知相位 $\phi = \phi_0 - \pi (k - \delta)$ 含有相对频率偏差 δ 的信息,但由于通常初相 ϕ_0 未知,故不能直接利用 ϕ 估计。为了消除 ϕ_0 的影响,可将式(1)表示的采样序列分别加长度为 N 和 $b \cdot N$ (0 < b < 1) 的时移对称窗,并分别作 FFT 分析,利用这两段序列的 FFT 离散频谱对应峰值谱线的相位差消除 ϕ_0 ,并估计出频率偏差 δ 。文献[12]给出了采用矩形窗作为时移对称窗条件下改变窗长相位差校正法的频率估计方差为:

$$\operatorname{var}(f) \approx \frac{4}{\pi^{2}(N \cdot SNR)}$$

$$\left[\frac{1}{\sin c^{2}(\delta)} + \frac{2}{\sin c^{2}(\delta/2)} - \frac{2\cos(\pi\delta/2)}{\sin c(\delta)\sin c(\delta/2)} \right]$$
(6)

改变窗长相位差法的频率估计均方根误差随 δ 增大 而增大,当 δ 接近 0.5 时,出现较大频率估计误差,达到 CRLB 的 3 倍多;反之,当 δ <0.2 时,估计误差接近 CRLB。

2.3 综合算法

根据前面的分析: 当 δ 接近零时, Quinn 算法标准 差较大, 达到 CRLB 的 1.8 倍, 而改变窗长相位差法的 估计误差小,接近 CRLB; 而当 δ 接近 0.5 时, Quinn 算 法频率估计精度很高, 标准差接近 CRLB, 而改变窗长

相位差法频率估计误差却很大。可见 Quinn 算法和改变窗长相位差法各有利弊,然而它们各自的缺陷却可以互相弥补。因此可以充分利用这两种算法的优点。通过判断,在不同的频段采用不同的频率估计算法以使整体估计性能得到提高。首先在 FFT 基础上采用 Quinn 算法估计出偏移量 δ ,若估计结果 $|\delta| \in [0.25,0.5]$,则以 Quinn 算法估计结果作为最终估计值。否则,用改变窗长相位差法进行估计。

以往用改变窗长相位差法来估计频率的做法是首先对长度为 N 的序列 x_1 [n]做 FFT,计算出幅值最大值谱线对应的相位 Φ_1 后,接着对同一段序列 x_2 [n] 做长度为 b·N(0
b<1)的 FFT,再求出其幅值最大值谱线对应的相位 Φ_2 。这种方法由于序列 x_2 [n]的 FFT 点数相对较少,当频率分辨率较低并且信噪比较小时,余弦信号实际对应的谱线受噪声的影响较大,容易出现因FFT 最大幅值处的谱线找不准而造成较大频率估计误差的现象。由于做的是 FFT,因此要求样本长度 b·N为 2 的整数次幂。为了克服这些缺点,采用改进的方法,即利用第一段序列 x_1 [n] 得到的实际峰值谱线号 k_2 max 十算其对应第二段序列 x_2 [n] 的实际峰值谱线号: k_2 max $= b \cdot k_1$ max , 再对 x_2 [n] 做单点的 DFT:

$$X_{2}(k_{2\max}) = \sum_{n=0}^{bN-1} x_{2}(n) \exp(-j2\pi k_{1\max} n/N),$$

$$n = 0, 1, \dots, bN-1$$
(7)

于是得到第二段序列的相位: $\phi_2 = \arg(X_2[k_{2max}])$ 相位差为:

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 \approx (1 - b) \pi (k_{\text{lmax}} - \nu)$$
 (8)
$$\nu \text{ 为归—化频率估计值, 整理得:}$$

$$\hat{\nu} = k_{1\text{max}} - \frac{\Delta\phi}{(1-b)\pi} \tag{9}$$

由 $\hat{f}_0 = \hat{\nu} \cdot f_i / N$ 得到最终估计频率值。

改进的改变窗长相位差校正法只需做一次快速傅立叶变换 FFT 和一次单点离散傅立叶变换 DFT,提高了算法运算速度和频率估计精度。分析 Quinn 算法和改变窗长相位差校正法的误差估计公式发现:当信号频率位于 FFT 两相邻的量化频率中心区域,通过加权平均处理的方法,可进一步提高频率估计精度。综上,综合算法的具体实现过程如下:

步骤 1:对式(1)定义正弦信号采样序列作 N 点 FFT,得到 FFT 最大谱线位置 k_0 并由 Quinn 算法公式 计算频偏估计值 $\hat{\delta}$;

步骤2:定义中心区域为(μ , λ)和(- λ ,- μ),其中 μ , λ 满足0 $\leq \mu \leq \lambda \leq 1/2$,根据 $\hat{\delta}$ 判断是否满足 $\lambda \geq |\hat{\delta}| \geq \mu$,若 $\lambda \geq |\hat{\delta}| \geq \mu$ 则直接将 k_0 、 $\hat{\delta}$ 代入式(4)得到的最终频率估计值;否则转步骤3;

步骤 3:根据 Quinn 算法估计结果,利用改进的改变窗长相位差法按公式(7)~(9)计算出 v̂。

步骤 4:对 Quinn 法与改变窗长相位差法的频率修正项 $\hat{\delta}$ 和 $\hat{\nu}$ 进行加权处理: $\beta = \tau \cdot |\hat{\delta}| + \varsigma \cdot \hat{\nu}$,其中 $\tau \ge 0$, $\varsigma \ge 0$,且 $\tau + \varsigma = 1$ 。然后将 β 代入式 $\hat{f}_0 = \beta \cdot f_s / N$ 得到的最终频率估计值。

3 综合算法性能分析

在水声信号处理应用中,为实时确定声纳与目标的相对运动速度以进行后续信号处理,需要快速高精度地估算目标回波信号的多普勒频率。下面在 MAT-LAB 中对综合算法性能进行分析。仿真参数取 μ = 0. 25、 λ =0.5,b=1/2(即取第二段序列长度为第一段序列长度的一半,时移对称窗采用矩形窗), τ = ς =0.5。

3.1 不同信号频率的估计性能

图 1 为主动声纳检测目标示意图:声纳与目标多谱 勒频移:f_d=2f₀·V/C,其中 V 为声纳与目标连线方向相 对速度,C为海水的声速,f。为发射信号的载频。取脱靶 量 d=4m, 声纳平台速度 $V_{rs}=25m/s$, C=1500m/s, 信噪 比SNR=3dB。声纳发射高频 CW 信号,载波频率 f₀= 350kHz, 采样频率 f = 1.4MHz, 样本长度 N = 1024, 则 FFT 频率分辨率为 Δf=1376.2Hz。设声纳与目标在水平方向 的初始距离为 $x_0 = 30$ m,取仿真步长h = 0.5m,假定点目 标固定不动,则声纳从距离目标水平方向 30m 处接近、 通过和远离目标 30m 的整个过程中的多谱勒频移变化 范围为[-15000Hz, 15000Hz]。每个仿真点做 1000 次 Monte-Carlo 仿真。图 2 是由综合算法估计的目标回波 信号的多普勒频移图,其中图 2(b)、(c)分别为对图 2 (a)左右两半部分曲线进行局部放大的效果图。从图 2 可看出,综合算法在整个频段范围内频率估计误差很小, 估计均值非常接近真实值,估计的多普勒频移曲线与真 实多普勒频移曲线非常吻合。

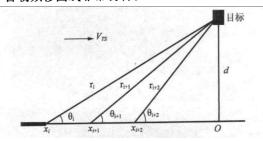


Fig. 1 the sketch map of active sonar detecting target

表 1 给出了上述仿真条件下声纳距离目标的水平 距离分别为 6m.5m....0m 时,综合算法的估计均方根 误差。从表 1 可知,综合算法的估计均方根误差最大 值约为 FFT 频率分辨率 Δf = 1376.2Hz 的 1.5%。

图 1 主动声纳检测目标示意图

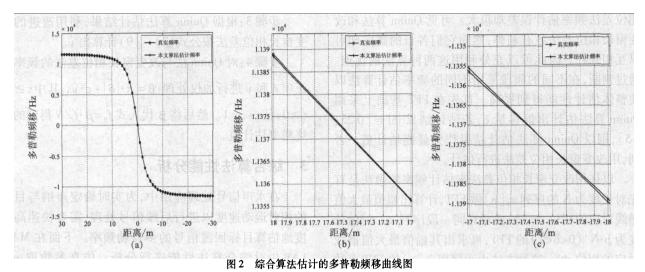


Fig. 2 Doppler frequency shift curve estimated by combined algorithm

表 1 SNR=3dB,N=1024,X=6m、5m、…0m 条件下 综合算法估计均方根误差

Tab. 1 root mean square error of combined algorithm at SNR=3dB,N=1024 and X=6m,5m,...0m

水平距离(m) 6.00 5.00 4.00 3.00 2.00 1.00 0.00 均方根误差(Hz) 17.23 12.46 20.02 16.63 15.06 18.77 21.52

3.2 与 Quinn 算法和改变窗长相位差法的性能比较

仿真参数如下:脉冲信号宽度 B=3ms,采样频率 f_s = 800kHz,样本数 N=1024,则 $\Delta f=f_s/N=781.25$ Hz,取载波频率 $f_0=f_s/4=200$ kHz,令 $f_1=f_0+\delta\cdot\Delta f$,δ 在区间 [0,0.5] 均匀分成 50 频率点,对每个分点 δ 作 1000 次 Monte Carlo 仿真。相位服从 0 ~ 2π 均匀分布。实正弦信号 频率 估 计 方 差 下 限 即 CRLB [11] 为: CRLB =

$$\frac{6\sqrt{2}}{(2\pi)^2 \cdot \text{SNR} \cdot (\Delta t)^2 \text{N} (\text{N-1})^2}^{\circ}$$

信噪比 SNR 分别为-6dB、0dB、6dB 条件下 Quinn 算法、改变窗长相位差法和综合算法的估计均方根误差如图 3(a)~(c)所示(为了图示简洁,图中的横坐标用量化频率表示,即 f_t=(N/4+8)·Δf)。从图 3 可看出,当 δ 接近零时,Quinn 算法均方根误差几乎达到 CRLB 的 1.8 倍;而当 |δ|接近 0.5 时,改变窗长相位差法的均方根误差急剧增大,仿真结果与前面根据误差公式分析的结果基本一致。从图 3 还可看到,在较宽信噪比条件下,综合算法在整个量化区间估计均方根误差接近 CRLB。可见不管是从估计精度还是从估计稳定性来看,综合算法都要明显优于 Quinn 算法和改变窗长相位差法。

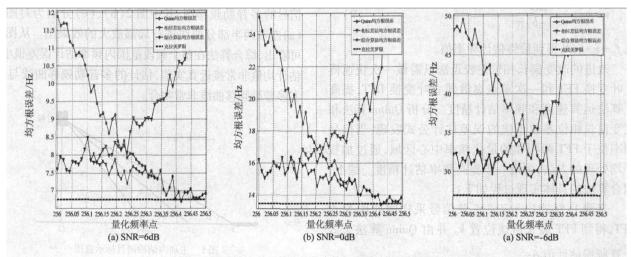


图 3 改变窗长相位差法、Quinn 算法和综合算法在不同信噪比的估计均方根误差

Fig. 3 root mean square error of window-length changing phase difference correction algorithm, Quinn algorithm and combined algorithm in different SNR

3.3 计算量分析

Quinn 算法需要 $N/2+N/2\cdot\log_2^N$ 次复数乘法和 $N\cdot\log_2^N$ 次复数加法,对于改变窗长相位差法,在 Quinn 算

法基础上仅需再做一次单点 DFT,这需要 N 次复数乘法和 N-1 次复数加法。考虑到真实频率落在量化频率间隔内的概率是均匀分布的,当 μ =0.25、 λ =0.5 时,从

统计的角度看,这种几率只占 50%。因此综合算法计算量为 $N+N/2\cdot\log_2^N$ 次复数乘法和 $N\cdot\log_2^N+(N-1)/2$ 次复数加法。在 DSP 中,算法的计算量主要体现为乘法运算的计算量。以 AD 公司的高性能浮点 DSP TS201 为例,当 TS201 工作于 500MHz 时,利用其双核进行并行运算,执行一次复数乘法只需 2 个周期即可以完成,用综合算法对 1024 点的正弦波序列进行频率估计需 20.35 μ s 就可以完成。

4 结论

Quinn 算法和改变窗长相位差法是基于 FFT 插值的 频率估计方法,具有速度快、实时性好、利于硬件实现等特点,在工程领域得到了广泛的应用。本文在 Quinn 算法和改变窗长相位差法基础上提出了一种正弦波频率估计的综合算法。仿真结果表明本算法准确有效,能够在设定窄带频率范围内有效提高单频信号的频率估计精度和稳定性,估计均方根误差接近 CRLB;而且算法简单、计算量小、能较好解决传统频率估计算法在估计精度和计算量上的矛盾,具有工程应用价值。

参考文献

- [1] D C Rife, R R Boorstyn. Single tone parameter estimation from discrete time observation [J]. IEEE Trans inform Theory, 1974, 20(5):591-598.
- [2] H C So, K W Chan. Reformulation of Pisarenko harmonic decomposition method for single-tone frequency estimation. IEEE Trans. on Signal Processing, 2004,52(4):1128-1135.
- [3] Y C Xiao, P Wei, X C Xiao, H M Tai. Fast and accurate single frequency estimator. IEEE Electronics Letters, 2004, 40(14):1-2.
- [4] S Kay. A fast and accurate single frequency estimator. IEEE Trans. on Acoust, Speech, Signal Process, 1989, 37 (12): 1987-1990.
- [5] H C So and K W Chan. A generalized weighted linear predictor frequency estimation approach for a complex sinusoid. IEEE Trans on Signal Processing, 2006, 54(4):1304-1315.
- [6] D C Rife, G A Vincent. Use of the Discrete Fourier Transform in the Measurement of Frequencies and Levels of Tone. Bell Sys Tech J. Feb. 1970, 49(2): 197-228.
- [7] B G Quinn. Estimation of frequency, amplitude and phase from the DFT of a time series. IEEE Trans. on SP. 1997, 45(3):814-817.
- [8] 邓振森,刘渝,王志忠. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. 数据采集与处理. 2006, 21(4): 473-477.

 Deng Zhenmiao, Liu Yu, Wang Zhizhong. Modified Rife Algorithm for Frequency Estimation of Sinusoid Wave[J]. Journal of Data Acquisition&Processing. 2006,21(4):473-477.

 (in Chinese)
- [9] 胥嘉佳,刘渝. 邓振森. 任意点正弦波信号频率估计的快速 算法[J]. 南京航空航天大学学报. 2008, 40(6):794-798. Xu Jiajia, Liu Yu, Deng Zhenmiao. Quick Algorithm for

- Frequency Estimation of Sinusoid Signal of Any Length [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics. 2008 40(6): 794-798. (in Chinese)
- [10] 胥嘉佳, 刘渝,邓振淼, 陈役涛. 正弦波信号频率估计 快速高精度递推算法的研究[J]. 电子与信息学报. 2009, 31(4):865-869.
 - Xu Jiajia, Liu Yu, Deng Zhenmiao, Chen Yitao. A Research of Fast and Accurate Recursive Algorithm for Frequency Estimation of Sinusoid Signal [J]. Journal of Electronics & Information Technology. 2009, 31(4):865-869. (in Chinese)
- [11] 齐国清. 几种基于 FFT 的频率估计方法精度分析[J]. 振动工程学报. 2006, 19(1):86-92.
 Qi Guoqing. Accuracy analysis and comparison of some FFT-based frequency estimators [J]. Journal of Vibration Engineering. 2006, 19(1):86-92. (in Chinese)
- [12] 丁康,杨志坚. 改变窗长相位差校正法的改进与抗噪性能分析[J]. 华南理工大学学报(自然科学版). 2007, 35(10):210-213.

 Ding Kang, Yang Zhijian. Improvement and Anti-Noise Performance Analysis of Window-Length Changing Phase Difference Correction [J]. Journal of South China Univer-

(10):210-213. (in Chinese)

sity of Technology (Natural Science Edition). 2007, 35

作者简介



谢 胜(1976-),男,广东阳春,西北 工业大学航海学院,硕士,研究方向为水 下信号与信息处理。

E-mail:xshing2010gogo@yeah.net



陈 航(1955-),男,江苏仪征,西北 工业大学航海学院,博士生导师,研究方 向为水声换能器与基阵,水声工程。 E-mail:chenhang@nwpu.edu.cn



于 平(1977-),女,山东莱州,91388 部队,学士,研究方向为水声测控技术。 E-mail:yuping2010good@126.com



林少兴(1976-),男,91388 部队,学士,研究方向为水声测控技术。 E-mail:linshx@tom.com