

基于自适应陷波滤波器的频率和幅值估计

储昭碧¹ 张崇巍¹ 冯小英¹

摘要 估计正弦信号的频率和幅值以实现准确信号跟随具有广泛的应用. 本文采用三维自适应陷波滤波器分析正弦信号, 提出了非归一化和归一化两种频率估计方法, 两种算法都具有圆形周期轨道, 能够获得信号的频率和幅值的准确估计以及正弦跟踪. 用 Lyapunov 定理和平均方法证明积分流形的存在性和一致渐近稳定性. 归一化算法改进了非归一化的收敛速度受制于信号幅值的缺点. 分析了估计器的带宽参数和频率自适应增益参数对频率跟踪暂态速度和稳态精度以及噪声特性的影响. 通过仿真证实了算法的有效性.

关键词 自适应陷波滤波器, 频率估计, 归一化频率估计, 稳定性分析, 积分流形

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.00060

Adaptive Notch Filter-based Frequency and Amplitude Estimation

CHU Zhao-Bi¹ ZHANG Chong-Wei¹ FENG Xiao-Ying¹

Abstract Estimation of frequency and amplitude is widely used to accurately trace an unknown sinusoid. Two algorithms, the non-normalized and the normalized frequency estimators, for analysis of sinusoid using 3-dimension adaptive notch filter are presented in this paper. Both of them can achieve accurate estimates of the frequency and the amplitude as well as the tracing of input sinusoid and have circular periodic orbits. The existence and the uniformly asymptotical stability of the integral manifold are verified by Lyapunov stability theorem and the averaging method. The drawback of the non-normalized estimator that the convergence speed is strongly dependent on signal amplitude is amended in the normalized estimator. The effects of the bandwidth parameter and the adaptive gain of estimators on the transient speed and the steady state accuracy as well as the noise characteristics of the algorithms are investigated. The validity of the proposed estimators is verified by simulation results.

Key words Adaptive notch filter, frequency estimation, normalized frequency estimation, stability analysis, integral manifold

分析频率未知的周期信号广泛应用于谐波检测、噪声抑制、振动研究中, 估计正弦信号的频率和幅值是其核心内容. 考虑单个正弦信号

$$u(t) = U \sin(\omega_0 t + \delta_0) \quad (1)$$

其幅值 U 、频率 ω_0 和初相角 δ_0 为未知的恒值. 近年来广泛讨论用自适应陷波滤波器 (Adaptive notch filter, ANF) 估计频率^[1-9], 它自动使其陷波频率跟随输入信号的频率变化, 抑制噪声或提取信号. 采用文献 [1-2] 的梯度下降方法, 文献 [3-4] 直接以幅值、频率、相位为状态变量, 得到时变动力系统模型 (Amplitude frequency phase model, AFPM), 为三维非线性 ANF.

$$\dot{a} = \mu_1 (u(t) - a \sin \phi) \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \mu_2 (u(t) - a \sin \phi) \cos \phi \\ \dot{\phi} &= \omega + \mu_3 \dot{\omega} \end{aligned} \quad (2)$$

其中, μ_1 、 μ_2 、 μ_3 是正实参数, a 、 ω 、 ϕ 分别作为幅值 U 、频率 ω_0 和初相角 δ_0 的估计值. 但该算法的最佳参数与输入信号的幅值 U 的大小有关, 系统的鲁棒性较差.

由于正弦信号的幅值与频率是相互高度耦合的, 常使得频率估计的暂态响应速度显著地受幅值大小的影响, 如文献 [3-6] 的算法, 文献 [7] 称之为非归一化估计器 (Non-normalized estimator), 而将暂态收敛速度几乎不受幅值影响的算法称为归一化估计器 (Normalized estimator). 文献 [7] 提出一种复杂的全局收敛的归一化频率估计器, 如下式.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\varsigma\theta\dot{x} + \theta^2 x &= \theta^2 u(t) \\ \dot{\theta} &= -\gamma x (\theta^2 u(t) - 2\varsigma\theta\dot{x}) \\ \gamma &= \frac{\varepsilon}{(1 + N(x^2 + \theta^{-2}\dot{x}^2))(1 + \mu|\theta|^\alpha)} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\alpha \geq 1$, N , μ , ε 与 ς 都是正实数. 以 θ 作为频率 ω_0 的估计值, ς 是阻尼系数, γ 称为自适应增益.

收稿日期 2008-08-04 录用日期 2009-03-24
Manuscript received August 4, 2008; accepted form March 24, 2009

国家自然科学基金 (60974022) 和合肥工业大学科学研究发展基金 (2009HGXXJ0178) 资助

Supported by National Nature Science Foundation of China (60974022) and Science and Research Development Fund of Hefei University of Technology (2009HGXXJ0178)

1. 合肥工业大学电气与自动化工程学院 合肥 230009

1. School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009

对式 (1) 的输入信号, 得到以下轨道

$$\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \dot{\bar{x}} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2\zeta)^{-1}U_0 \cos(\omega_0 t + \delta_0) \\ (2\zeta)^{-1}\omega_0 U_0 \sin(\omega_0 t + \delta_0) \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

算法的参数较多, 物理意义不明确, 轨道 \mathcal{O}_1 与参数 ζ 有关, 计算 γ 的复杂算式使得稳定性保证复杂化, 这些使得参数整定较为困难.

文献 [8] 采用固定自适应增益 γ , 并把二阶微分方程改进为

$$\ddot{x} + 2\zeta\theta\dot{x} + \theta^2 x = 2\zeta\theta^2 u(t) \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = \gamma x (\theta^2 u(t) - \theta\dot{x})$$

若输入信号为式 (1), 得到以下轨道

$$\mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \dot{\bar{x}} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_0 \cos(\omega_0 t + \delta_0) \\ \omega_0 U_0 \sin(\omega_0 t + \delta_0) \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

轨道 \mathcal{O}_2 改进了轨道 \mathcal{O}_1 受参数 ζ 影响的缺点, 减少了计算量. 文献 [9] 指出轨道 \mathcal{O}_1 与 \mathcal{O}_2 的两个状态变量都不等于输入信号 $u(t)$, 不利于信号的提取与跟随, 故进一步改进后得到以下的轨道

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \dot{\bar{x}} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_0^{-1}U_0 \cos(\omega_0 t + \delta_0) \\ U_0 \sin(\omega_0 t + \delta_0) \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

文献 [9] 提出直接把 $\dot{\bar{x}}$ 作为 $u(t)$ 的估计值, 以提高信号跟随性能. 另外, 文献 [8–9] 的收敛速度都受输入幅值大小影响, 属于非归一化算法.

文献 [5–9] 都没有讨论正弦信号幅值估计问题. 由于 \mathcal{O}_1 、 \mathcal{O}_2 和 \mathcal{O}_3 都是椭圆形轨道, 不能直接通过 $\sqrt{x^2 + \dot{x}^2}$ 获得幅值估计量.

本文先提出改进的具有圆形周期轨道的非归一化频率和幅值估计算法, 再讨论一种简单的归一化算法, 最后通过仿真验证频率估计、幅值检测和信号跟随性能.

1 非归一化频率估计算法

取二维状态变量为 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$, 为分析频率已知的式 (1) 的正弦输入信号 $u(t)$, 采用文献 [1–4] 的梯度下降方法, 经旋转变换得以下算法^[10]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (5)$$

其中 a 作为输入幅值 U 的估计值. 用估计频率 θ 替换指定频率 ω_0 , 参考文献 [8–9] 的频率更新法则, 可得下述非归一化频率估计算法

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\theta)\mathbf{x} + Bu(t) \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = \gamma x_2(u(t) - x_1) \quad (7)$$

其中

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -\mu & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix}$$

参数 μ 称为状态方程 (6) 的带宽参数, 参数 γ 是频率更新法则 (7) 的自适应增益.

命题 1. 存在 $\gamma_0 > 0$, 对于任意 $\gamma \in [0, \gamma_0]$, 估计器 (6) 和 (7) 存在 γ -族缓慢积分流形 \mathcal{M}_γ , 它任意趋近所对应的积分流形 \mathcal{M}_0 , 它可表示为

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (t, \theta, \mathbf{x}) : \theta^2 x_1^2 + \omega_0^2 x_2^2 = \frac{\mu^2 \omega_0^2 \theta^2 U^2}{\mu^2 \omega_0^2 + (\theta^2 - \omega_0^2)^2} \right\}$$

证明. 当 $\gamma = 0$ 时, θ 固定, 此时状态方程 (6) 简化为线性时不变系统, 其状态矩阵 $A(\theta)$ 的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -0.5\mu \pm 0.5\sqrt{\mu^2 - 4\theta^2} \quad (8)$$

由于 $\mu > 0$, $\lambda_{1,2}$ 是两个负实数或具有负实部的一对共轭复数, 依据 Lyapunov 定理知状态方程是全局一致指数稳定的, 收敛速度主要决定于参数 μ .

可以验证, 对于式 (1) 的输入, 稳态响应为

$$\mathbf{x}^0(t, \theta) = U \cos \varphi^0 \begin{bmatrix} \sin(\omega_0 t + \delta_0 + \varphi^0) \\ \omega_0^{-1} \theta \cos(\omega_0 t + \delta_0 + \varphi^0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\varphi^0 = \arctan \left(\frac{\theta^2 - \omega_0^2}{\mu \omega_0} \right) \quad (10)$$

把式 (9) 和式 (10) 代入 \mathcal{M}_0 可验证等式成立.

考虑 $\gamma > 0$ 即 θ 变化时情况, 依据文献 [10] 的缓慢积分流形思想, 将其作为许多个固定 θ 所对应的稳态响应系列. 为分析在每个响应 $\mathbf{x}^0(t, \theta)$ 附近的系统性能, 引入状态 \mathbf{x} 与 $\mathbf{x}^0(t, \theta)$ 之差作为新变量.

$$\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0(t, \theta) \quad (11)$$

将式 (6) 和 (7) 改写为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= A(\theta)\mathbf{z} + \gamma \mathbf{x}_\theta^0(t, \theta) F_1(t, \theta, \mathbf{z}) \\ \dot{\theta} &= \gamma F_1(t, \theta, \mathbf{z}) = \\ &\gamma (z_2 + x_2^0(t, \theta))(u - z_1 - x_1^0(t, \theta)) \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\mathbf{x}_\theta^0(t, \theta) = \frac{\partial \mathbf{x}^0(t, \theta)}{\partial \theta}$ 是关于 θ 灵敏度函数向量.

考虑 $\mathbf{x}^0(t, \theta)$ 和 $\mathbf{x}_\theta^0(t, \theta)$ 关于 t 和 θ 都是有界的和连续的, 从而 $\mathbf{x}_\theta^0(t, \theta)$ 关于 θ 满足 Lipschitz 条件,

$F_1(t, \theta, \mathbf{z})$ 是连续函数, 故在紧集上有界并且关于 θ 和 \mathbf{z} 满足 Lipschitz 条件, 由文献 [10] 证得 γ_0 和 \mathcal{M}_γ 的存在性. 即:

$$\text{若 } \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \theta(t_0) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_\gamma, \text{ 则 } \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_\gamma, \quad \forall t > t_0$$

如文献 [10] 所述, 若积分流形表示为

$$\mathcal{M}_\gamma = \{(t, \theta, \mathbf{x}) : \mathbf{x} = \mathbf{h}_\gamma(t, \theta)\}$$

则可展开为级数形式

$$\mathbf{h}_\gamma(t, \theta) = \mathbf{x}^0(t, \theta) + \gamma \mathbf{h}_1(t, \theta) + \gamma^2 \mathbf{h}_2(t, \theta) + \dots$$

注意式中有 $\mathbf{h}_0(t, \theta) = \mathbf{x}^0(t, \theta)$, 于是随着 $\gamma \rightarrow 0$, 有 $\mathcal{M}_\gamma \rightarrow \mathcal{M}_0$. \square

命题 2. 存在 γ_a , 使得对于任意 $\gamma \in (0, \gamma_a]$, 在积分流形 \mathcal{M}_γ 上, 估计频率 θ 是一致渐近稳定的, 即随着 $t \rightarrow +\infty$ 有 $\theta \rightarrow \omega_0$, 估计器 (5) ~ (7) 具有唯一的圆形周期轨道

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ U \sin(\omega_0 t + \delta_0) \\ U \cos(\omega_0 t + \delta_0) \\ U \end{bmatrix} \quad (13)$$

证明. 对于式 (12), 由于 u 关于 t 是周期 $T = 2\pi/\omega_0$ 的, 则 $\mathbf{h}_\gamma(t, \theta), \mathbf{z}, F_1(t, \theta, \mathbf{z})$ 关于 t 也是周期 T 的^[11]. 注意到 $\gamma = 0$ 包含 $\mathbf{z} = 0$, 此时频率更新法则简化为

$$\dot{\theta} = \gamma F_1(t, \theta, 0) = \gamma x_2^0(t, \theta) (u - x_1^0(t, \theta)) \quad (14)$$

对式 (14) 运用平均方法^[12] 得到其平均方程为

$$\dot{\theta}_a = -\gamma \cdot \bar{F}_1(\theta_a) \quad (15)$$

其中

$$\bar{F}_1(\theta_a) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t, \theta_a, 0) dt = \frac{0.5\mu U^2 \theta_a (\theta_a^2 - \omega_0^2)}{\mu^2 \omega_0^2 + (\theta_a^2 - \omega_0^2)^2} \quad (16)$$

考虑 $\theta_a \neq 0$, 则 $\theta_a = \pm \omega_0$ 是 $\bar{F}_1(\theta_a)$ 的孤立奇点.

$$\left. \frac{\partial \bar{F}_1(\theta_a)}{\partial \theta_a} \right|_{\theta_a = \omega_0} = \frac{U^2}{\mu} > 0$$

根据文献 [10] 中定理 4.1 可证 γ_a 的存在性以及 θ 的一致渐近稳定性. 此时其线性化系统可写为

$$\dot{\theta}_a = -\frac{\gamma}{\mu} U^2 (\theta_a - \omega_0) \quad (17)$$

在平均意义下估计频率 θ 按照 $\exp(-\gamma U^2/\mu)$ 指数收敛到 ω_0 . 把 $\theta = \omega_0$ 代入式 (5)、(9) 和 (10) 即得式 (13). \square

新算法只有两个参数, 比式 (2) 少一个, 并且不需要计算正弦和余弦函数. 文献 [3] 的引理 1 表明, 新算法相当于式 (2) 最佳参数匹配下的系统. 由于 \mathcal{O} 为圆形轨道, 可用式 (5) 估计幅值 U . 把式 (6) 改写为

$$\ddot{x}_2 + \mu \dot{x}_2 + \theta^2 x_2 = -\mu \theta \cdot u(t)$$

可见式 (6) 的 μ 相当于式 (4) 的 $2\varsigma\theta$, 对于给定的 μ , 新算法相当于式 (4) 的 ς 跟随 θ 而变化, 暂态性能更加平稳, 除获得信号频率 $\bar{\theta}$ 、输入信号的直接跟随 \bar{x}_1 以外, 还获得 $u(t)$ 的幅值相等但相位超前 $\pi/2$ 的正交输出 \bar{x}_2 .

2 归一化频率估计算法

为消除式 (16) 中幅值 U^2 , 采用下述归一化频率更新法则

$$\dot{\theta} = \gamma x_2 \frac{u - x_1}{a^2} \quad (18)$$

其与式 (5) 和 (6) 一起构成归一化频率估计算法. 参考命题 1 可直接证得归一化算法的积分流形的存在性. 命题 2 同样适用于归一化算法, 下面给出其证明.

证明. 利用式 (11) 参考式 (12), 将式 (18) 改写为

$$\dot{\theta} = \gamma F_2(t, \theta, \mathbf{z}) = \gamma \frac{(z_2 + x_2^0(t, \theta))(u - z_1 - x_1^0(t, \theta))}{(z_1 + x_1^0(t, \theta))^2 + (z_2 + x_2^0(t, \theta))^2} \quad (19)$$

参考式 (14), 将式 (19) 简化为

$$\dot{\theta} = \gamma F_2(t, \theta, 0) = \frac{\gamma x_2^0(t, \theta)(u - x_1^0(t, \theta))}{(x_1^0(t, \theta))^2 + (x_2^0(t, \theta))^2} \quad (20)$$

对式 (20) 运用平均方法^[12]

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(\theta_a) &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{x_2^0(t, \theta_a)(u - x_1^0(t, \theta_a))}{(x_1^0(t, \theta_a))^2 + (x_2^0(t, \theta_a))^2} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{x_2^0(t, \theta_a)u}{(x_1^0(t, \theta_a))^2 + (x_2^0(t, \theta_a))^2} dt = \\ &= -\theta_a(\theta_a^2 - \omega_0^2) \bar{F}_2(\theta_a) \end{aligned}$$

推导过程中依据定积分中值定理有

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_0 + \varphi_1}^{2\pi + \delta_0 + \varphi_1} \frac{\cos^2 x}{\omega_0^2 \sin^2 x + \theta^2 \cos^2 x} dx = \\ &= \frac{\cos^2 \xi}{\omega_0^2 \sin^2 \xi + \theta^2 \cos^2 \xi} > 0 \end{aligned}$$

其中 ξ 是关于 $(\theta, \mu, \omega_0, \delta_0)$ 的函数, 且

$$\delta_0 + \varphi_1 \leq \xi \leq 2\pi + \delta_0 + \varphi_1$$

故 $\tilde{F}_2(\theta)$ 与信号幅值无关, $\tilde{F}_2(\omega_0) = 1/(2\mu\omega_0^2)$. 从而得到平均方程

$$\dot{\theta}_a = -\gamma\tilde{F}_2(\theta_a) = -\gamma\theta_a(\theta_a^2 - \omega_0^2)\tilde{F}_2(\theta_a) \quad (21)$$

显然 $\theta_a = \pm\omega_0$ 是式 (21) 的孤立平衡点, 而且

$$\frac{\partial\tilde{F}_2(\theta_a)}{\partial\theta_a} = 2\theta_a^2\tilde{F}_2(\theta_a) + (\theta_a^2 - \omega_0^2) \left(\tilde{F}_2(\theta_a) + \theta_a \frac{\partial\tilde{F}_2(\theta_a)}{\partial\theta_a} \right)$$

当 $\theta_a = \omega_0$ 时,

$$\left. \frac{\partial\tilde{F}_2(\theta_a)}{\partial\theta_a} \right|_{\theta_a=\omega_0} = 2\omega_0^2\tilde{F}_2(\omega_0) = \frac{1}{\mu}$$

此时其线性化系统可写为

$$\dot{\theta}_a = -\frac{\gamma}{\mu}(\theta_a - \omega_0) \quad (22)$$

根据文献 [10] 中定理 4.1, 命题得证. \square

与非归一化算法 [5-6, 8-9] 相比, 归一化算法频率更新法则与输入信号幅值无关. 这适于在幅值大范围变化情况下准确快速估计频率. 与式 (3) 相比, 本算法结构简单, 参数少, 周期轨道与 ANF 的参数 μ, γ 无关. 因此滤波器的设计和参数调整相对简单.

由式 (5) 得到幅值估计 a 对时间 t 的导数为

$$\dot{a} = \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \mu \frac{x_1(u(t) - x_1)}{a} \quad (23)$$

这表明幅值的收敛速度主要决定于带宽参数 μ , 受参数 γ 的影响相对较小. 这使得在设置参数时, 可先按照幅值收敛性能要求选择 μ , 然后再根据频率收敛要求选择 γ .

本算法缺点是采用了除法, 为避免出现除数为 0 的错误, 必须保证对任意时刻 t 总有

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) > 0$$

在渐近稳定系统中, 初值不影响系统的稳态输出, 可将初值设定为最大上限值, 其次通过设置 a 的小阈值对 a^2 进行限幅处理. 暂态过程中限幅处理不改变系统的稳定性, 最多只对暂态响应速度产生较小影响. 由于受数据字长和量化误差限制, 实际系统都存在事实上的上下限阈值, 这不影响算法的工程应用.

3 算法性能评价

状态方程 (6) 分别与非归一化频率估计式 (7)、归一化频率估计式 (18) 组成非线性微分方程组, 所提算法属于微分方程初值问题. 工程上解这类问题的常用的单步方法主要有 Euler 法、梯形积分法以及 Runge-Kutta 方法. 状态方程和频率更新法则都满足 Lipschitz 条件, 采用四阶 Runge-Kutta 方法能够保证收敛性与相容性, 且具有 4 阶精度^[13]. 因此在 Matlab 7.0 环境下, 采用 ODE45 解析器进行仿真, 以讨论估计器的动态响应速度和稳态响应精度及其与参数 μ, γ 大小之间的关系. 为方便讨论, 令 $\theta(t) = 2\pi \cdot f(t)$, $f(t)$ 为频率, 单位为 Hz, 初值为 $f(0) = 50$ Hz, 输入信号初相角为 $\delta_0 = 0.4\pi$ rad, 采样频率取 10 kHz.

3.1 跟随特性

考虑输入信号的幅值保持为 1.0 V, 初始频率为 40 Hz, 在 $t = 1.0$ s 时跳变到 60 Hz. 在式 (5) ~ (7) 中设定 $\mu = 100\pi, \gamma = 10$, 得到结果如图 1 所示. 在式 (2) 的 APFM 算法中设定 $\mu_1 = \mu_2 = 100\pi, \mu_3 = 10$, 所得曲线如图 2 所示.

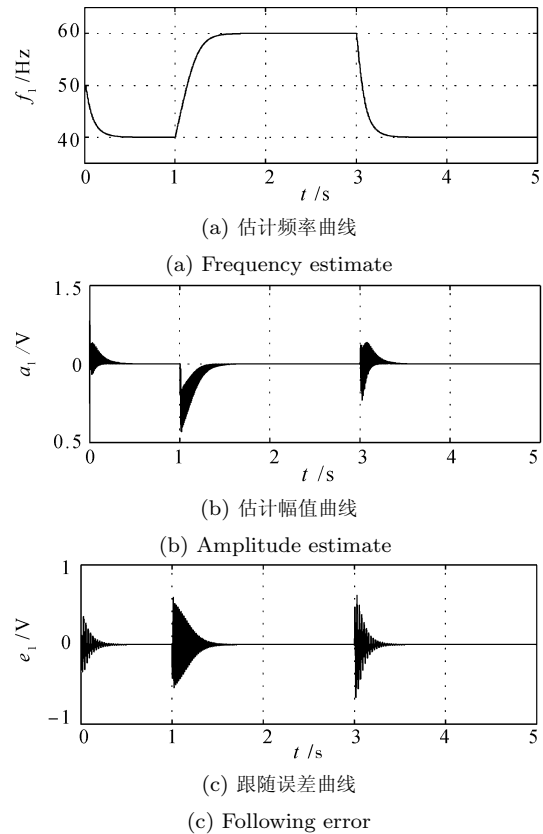


图 1 本文非归一化算法跟随性能

Fig. 1 The tracing performance of the proposed non-normalized estimator

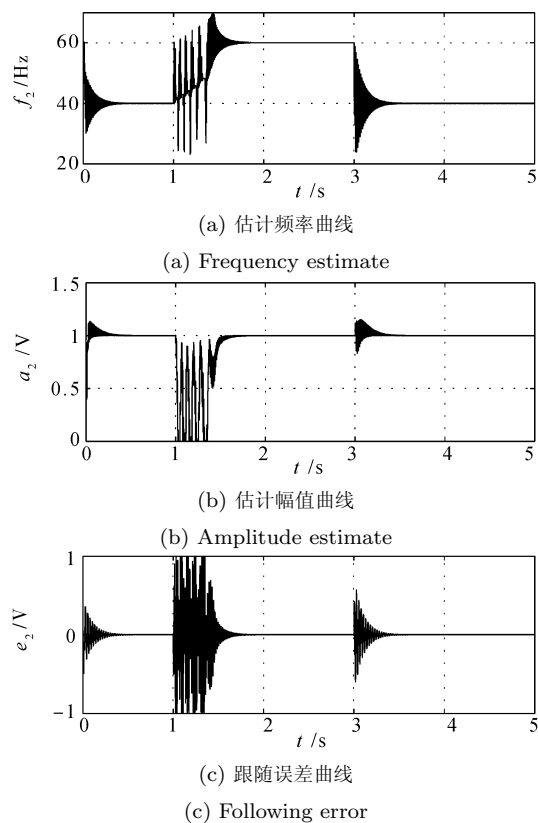


图2 AFPM 算法跟随性能

Fig. 2 The tracing performance of AFPM

比较图 1 和图 2, 在 $t = 1.0\text{s}$ 后, 显然 f_1 、 a_1 的暂态过程比 f_2 、 a_2 的平稳得多, f_1 近似指数变化, 而 f_2 近似斜波变化; a_1 变化范围 0.5V , a_2 变化量达到 1.0V ; e_1 变化 $\pm 0.5\text{V}$, e_2 变化 $\pm 1.0\text{V}$.

设估计器参数为 $\gamma = \mu = 100\pi$, 输入频率起始为 40Hz , 在 15s 跃变 60Hz , 在 30s 再跃变回 40Hz , 信号幅值分别为 0.1V 、 0.5V 和 1.0V . 在上述相同参数和初值条件下, 非归一化和归一化算法所估计的频率分别如图 3、图 4 所示.

从图 3 知非归一化算法的频率跟随特性极大地受制于输入信号的幅值, 在小幅值 (如 $U = 0.1\text{V}$) 条件下动态响应太慢, 不能实现正确的频率跟随, 故此算法只用于幅值较大的情况, 以充分展示其计算简单的优点.

图 4 中归一化算法的三条频率曲线基本重合, 体现了该算法不受信号幅值影响的优点, 当然这是以增加计算量为代价的. 从图 3 与图 4、式 (17) 与式 (22) 知, 当信号幅值等于 1.0 时, 非归一化算法与归一化算法的频率特性曲线是一致的.

在幅值 $U = 0.5\text{V}$ 时, 保持 $\gamma = \mu$, 让 μ 分别为 20π 、 200π 进行仿真, 结果频率曲线与图 4 的对应于 $\gamma = \mu = 100\pi$ 的曲线基本重合, 显示频率跟踪曲线主要决定于参数之比 γ/μ , 而单个参数的大小

基本无关, 这符合式 (21) 和 (22) 的结果. 图 5 保持 $\mu = 100\pi$, 显示当 γ 越大时, 频率跟踪的暂态响应速度则越快.

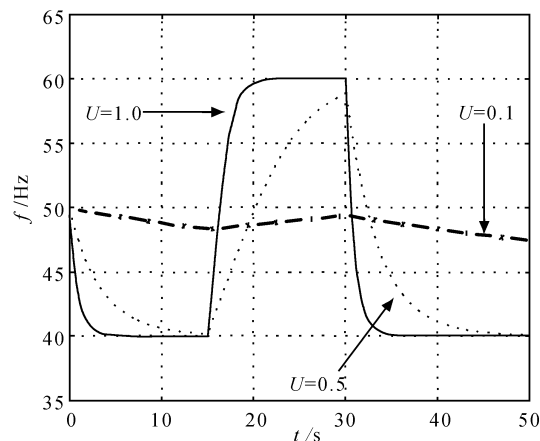


图3 不同幅值下非归一化估计频率

Fig. 3 Frequency estimates of non-normalized estimator with different amplitudes

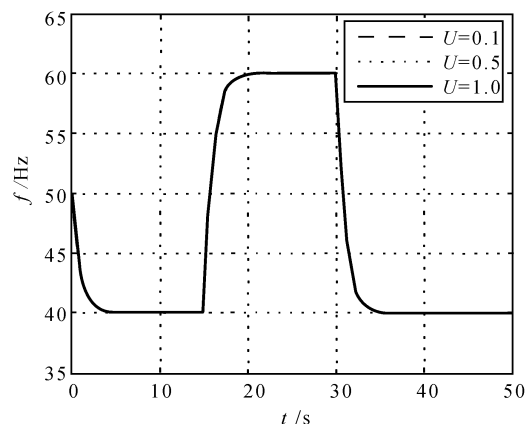


图4 不同幅值下归一化估计频率

Fig. 4 Frequency estimates of normalized estimator with different amplitudes

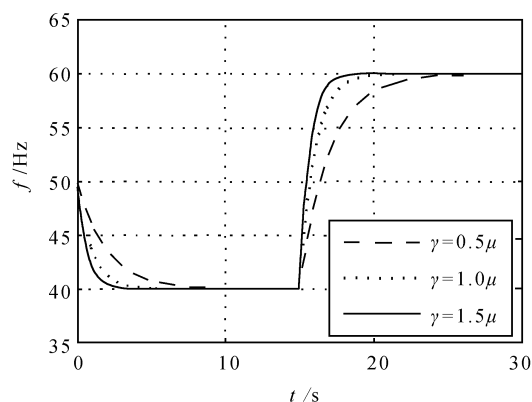
图5 γ 改变时归一化估计频率 ($\mu = 100\pi$)Fig. 5 Frequency estimates of non-normalized estimators of different γ with $\mu = 100\pi$

图 6 是在频率保持 50 Hz 不变, 估计器已达稳态后, 在 $t = 10\text{ s}$ 处信号幅值从 1.0 V 跌落到 0.2 V, 图中应有 4 条曲线, 2 条实线 (对应 $\mu = 2\pi$)、2 条虚线 (对应 $\mu = 20\pi$) 分别重合, 这表示此时幅值估计响应速度基本决定于参数 μ , 而与 γ 值基本无关. 这符合式 (23) 的结论.

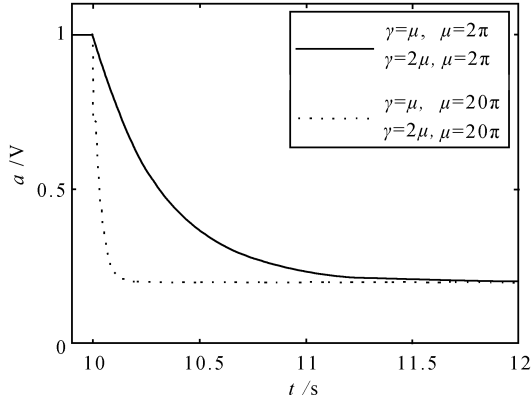


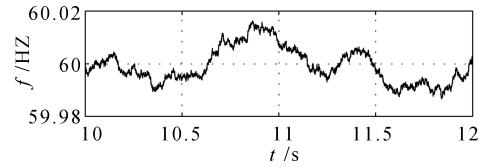
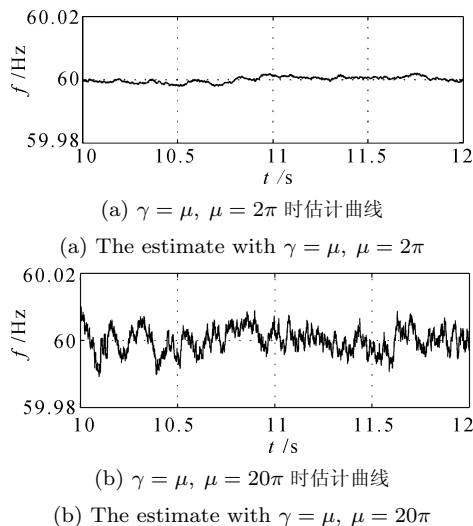
图 6 不同参数下归一化估计幅值

Fig. 6 Amplitude estimates of normalized estimators of different parameters

3.2 噪声特性

在输入信号中添加均值等于 0、方差为 0.2 V 的随机噪声. 设输入信号幅值为 1.0 V, 频率为 60 Hz, 采用归一化算法, 稳态频率局部放大后如图 7 所示. 参数 γ 、 μ 变化对频率估计精度都有影响, γ 的影响更大, 减小 γ 能提高频率估计抗干扰性能. 结合图 5, 频率估计的暂态速度与稳态精度对 γ 的要求相互矛盾.

图 8 给出参数 γ 、 μ 变化对噪声条件下幅值的估计. 幅值估计抗干扰特性主要取决于 μ , 显然 μ 越小, 则抗噪声性能越好. 结合图 6, 幅值响应的暂态速度与稳态精度对 μ 的要求是相互矛盾的.

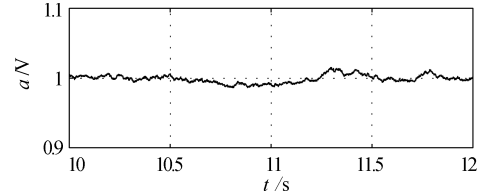


(c) $\gamma = 5\mu$, $\mu = 2\pi$ 时估计曲线

(c) The estimate with $\gamma = 5\mu$, $\mu = 2\pi$

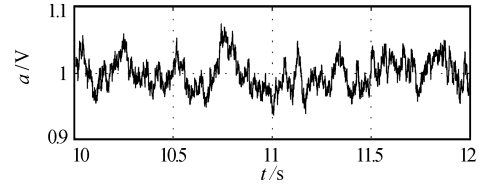
图 7 归一化估计频率噪声特性

Fig. 7 Noise characteristics of frequency estimates of the non-normalized estimator



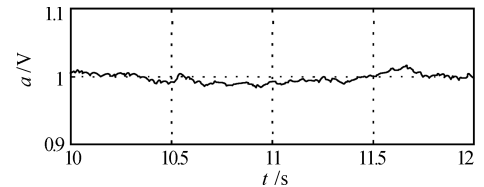
(a) $\gamma = \mu$, $\mu = 2\pi$ 时估计曲线

(a) The estimate with $\gamma = \mu$, $\mu = 2\pi$



(b) $\gamma = \mu$, $\mu = 20\pi$ 时估计曲线

(b) The estimate with $\gamma = \mu$, $\mu = 20\pi$



(c) $\gamma = 5\mu$, $\mu = 2\pi$ 时估计曲线

(c) The estimate with $\gamma = 5\mu$, $\mu = 2\pi$

图 8 归一化估计幅值噪声特性

Fig. 8 Noise characteristics of amplitude estimates of the non-normalized estimator

4 结论

本文提出两种 ANF 实现频率估计, 都可获得圆形周期轨道, 方便检测输入正弦信号幅值. 非归一化算法计算简单, 但暂态响应速度极大地受限于输入信号的幅值大小, 这使得参数设定较为困难, 主要应用于幅值大小改变不大的场合. 归一化算法虽然增加了计算量, 但其性能不受输入信号的幅值大小的制约, 应用范围广. 采用缓慢积分流形思想, 说明两种算法的渐近稳定性, 分析了算法性能与参数大小的关系, 说明减小参数可提高抗干扰性能, 但会降低暂态响应速度. 本文算法是基于单个正弦输入信号展开讨论, 对于更一般的多正弦输入叠加的周期信号的分析还需进一步研究.

References

- 1 Xiao Y, Tadokoro Y, Kobayashi Y. A new memoryless nonlinear gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter and its performance analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1998, **45**(4): 462–472
- 2 Xiao Y, Takeshita Y, Shida K. Steady-state analysis of a plain gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter with constrained poles and zeros. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 2001, **48**(7): 733–740
- 3 Karimi-Ghartemani M, Ziarani A K. Performance characterization of a nonlinear system as both an adaptive notch filter and a phase-locked loop. *International Journal of Adaptive Control Signal Process*, 2004, **18**(1): 23–53
- 4 McNamara D M, Ziarani A K, Ortmeyer T H. A new technique of measurement of nonstationary harmonics. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2007, **22**(1): 387–395
- 5 Regalia P A. An improved lattice-based adaptive IIR notch filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, **39**(9): 2124–2128
- 6 Bodson M, Douglas S C. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency. *Automatica*, 1997, **33**(12): 2213–2221
- 7 Hsu L, Ortega R, Damm G. A globally convergent frequency estimator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(4): 698–713
- 8 Mojiri M, Bakhshai A R. An adaptive notch filter for frequency estimation of a periodic signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(2): 314–318
- 9 Mojiri M, Karimi-Ghartemani M, Bakhshai A. Time-domain signal analysis using adaptive notch filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(1): 85–93
- 10 Chu Zhao-Bi, Zhang Chong-Wei, Feng Xiao-Ying. A new linear band-adjustable algorithm for real-time signal analysis in power system. *Proceedings of the CSEE*, 2009, **29**(1): 94–99
(储昭碧, 张崇巍, 冯小英. 一种可调带宽的线性电力信号实时分析新算法. 中国电机工程学报, 2009, **29**(1): 94–99)
- 11 Riedle B, Kokotovic P. Integral manifolds of slow adaptation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(4): 316–324
- 12 Lin Zhen-Sheng. *Almost Periodic Differential Equations and Integral Manifolds*. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1982. 166–219
(林振声. 概周期微分方程与积分流形. 上海: 上海科学技术出版社, 1982. 166–219)
- 13 Hu Jian-Wei, Tang Huai-Min. *The Numerical Methods of Differential Equation*. Beijing: Science Press, 2006. 3–21
(胡健伟, 汤怀民. 微分方程数值方法. 北京: 科学出版社, 2006. 3–21)



储昭碧 合肥工业大学讲师, 博士研究生. 主要研究方向为电能质量. 本文通信作者. E-mail: chuzhaobi@126.com
(**CHU Zhao-Bi** Lecturer and Ph.D. candidate at Hefei University of Technology. His main research interest is power quality. Corresponding author of this paper.)



张崇巍 合肥工业大学教授. 主要研究方向为电力电子技术. E-mail: cwzhang@hfut.edu.cn
(**ZHANG Chong-Wei** Professor at Hefei University of Technology. His main research interest is power electron technology.)



冯小英 合肥工业大学高级实验师. 主要研究方向为检测技术与自动化. E-mail: czbfxy@126.com
(**FENG Xiao-Ying** Senior laboratory engineer at Hefei University of Technology. Her main research interest is measurement and automation.)