

## 正弦波频率估计的改进 Quinn 算法

严 静<sup>1</sup>, 周胜文<sup>2</sup>, 周云生<sup>2</sup>, 詹 磊<sup>2</sup>

(1 北京航天长征飞行器研究所 北京 100076 2 北京遥测技术研究所 北京 100076)

**摘 要:** 针对 Quinn 算法在信号频率接近量化频率时估计误差较大的问题, 提出一种改进的 Quinn (I-Quinn) 算法。改进算法首先对信号进行频移, 使信号频率始终位于相邻量化频率中心区域, 然后再用 Quinn 算法估计信号频率, 便可以获得较高的估计精度。I-Quinn 算法改进了判据, 在较低的信噪比 (SNR) 下仍能保持较高的频率估计精度。仿真结果表明: 在低信噪比条件下改进算法估计性能不随被估计信号的频率分布而产生波动, 在整个频段内估计均方根误差 (RMSE) 接近克拉美-罗下界 (CRLB), 精度和稳定性优于同类算法。

**关键词:** 频率估计; Quinn 算法; 频谱搬移; 克拉美-罗限

中图分类号: TN974

文献标志码: A

文章编号: CN11-1780(2017)02-0007-06

DOI:10.13435/j.cnki.ttc.002830

### Improved Quinn Algorithm for Frequency Estimation of Sinusoid Wave

Yan Jing<sup>1</sup>, Zhou Shengwen<sup>2</sup>, Zhou Yunsheng<sup>2</sup>, Zhan Lei<sup>2</sup>

(1 Beijing Research of Space Long March Vehicle, Beijing 100076, China

2 Beijing Research Institute of Telemetry, Beijing 100076, China)

**Abstract:** Because the frequency estimation precision of Quinn algorithm has a great deviation when the signal frequency is near to the discrete frequency, an improved Quinn(I-Quinn) algorithm is presented, which moves the signal frequency to the midpoint area of two neighboring discrete frequencies before the frequency estimation by Quinn algorithm. I-Quinn algorithm holds on high precision by using improved criterion even on the condition that the Signal to Noise Ratio(SNR) is low. The simulation results indicate that the performance of I-Quinn algorithm doesn't fluctuate with the distribution of signal frequency, its Root Mean Square Error(RMSE) approaches to Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) throughout the whole frequency range, and its precision and stability are better than related algorithms under low SNR conditions.

**Key words:** Frequency estimation; Quinn algorithm; Spectrum shift; CRLB

## 引 言

在通信、雷达、电子对抗等领域, 对淹没在噪声中的正弦波信号频率进行快速估计是参数估计中的经典问题, 目前国内外已有学者提出了不少方法。针对正弦波频率的快速估计, 最常用的是基于离散傅里叶变换 (DFT) 的各类频率估计算法。

文献[1]采用快速离散傅里叶变换 (FFT) 直接谱估计法进行正弦波频率估计, 计算量小, 工程上得到了广泛的应用, 但 FFT 算法精度依赖于采样长度。文献[2-3]提出了 Rife 算法, 但是当被估计频率位于量化频率附近时估计误差较大。文献[4]提出了 Quinn 算法, 利用相位信息进行插值, 相比 Rife 算法提高了估计精度, 但在低信噪比条件下对量化频率点附近的估计仍出现波动。文献[5]提出了修正 Rife 算法 (M-Rife 算法), 在粗测频后先根据频偏区间对不同频率信号进行不同频移, 使新信号的频率位于两个相邻离散频率点的中心区域, 再利用 Rife 算法进行频率估计。文献[6]提出了改进的 Rife 算法 (I-Rife 算法), 它利用频移技术和频谱细化技术一次性将信号频率移动到相邻量化频率的中心区域, 然后利用 Rife 算法获得较高的估计精度。文献[7]提出利用 Rife 算法进行频率粗略估计之后再利用自相关函数进行精细估计的方法。文献[8]提出利用 Quinn 算法进行频率粗估计, 频移之后利用 Rife 判据进行频率估计的方法。文献[9]提出了频移修正 Quinn 算法 (M-Quinn 算法), 将满足一定频偏估

收稿日期: 2016-12-19 收修改稿日期: 2017-02-28

计的信号进行固定频移之后, 再运用 Quinn 算法估计信号频率。上述几种算法在信噪比较高时估计均方根误差接近克拉美-罗下界 (CRLB), 但在信噪比较低时估计方差随着频率的分布出现不同程度的波动, 即它们不适用于信噪比较低的估计场合。

## 1 Rife 和 Quinn 算法

### 1.1 信号模型

设观测的单频复正弦信号为

$$x(n) = A \exp(j2\pi f_0 n / f_s + \phi_0) + \omega(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

式 (1) 中,  $A$  为振幅,  $f_0$  为信号频率,  $f_s$  为采样频率,  $\phi_0$  为初相,  $N$  为采样点数,  $\omega(n)$  是均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的复高斯白噪声, 信号噪声功率比  $SNR = A^2 / (2\sigma^2)$ 。

信号  $x(n)$  的离散傅里叶变换 (DFT) 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn), k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2)$$

设  $k=k_0$  时  $X(k)$  幅度最大, 即  $\max\{|X(k)|\} = |X(k_0)|$ , 则对应相邻的谱线幅度分别为  $|X(k_0+1)|$  和  $|X(k_0-1)|$ ,  $|X(k_0+1)|$  和  $|X(k_0-1)|$  中一个为次大值, 一个为第三大值。DFT 运算得到的是离散频谱, 谱线的间隔为  $\Delta f = f_s / N$ , 若直接利用 DFT 进行频率估计, 则估计精度受到观测时间长度的限制, 误差范围为  $\pm \Delta f / 2$ 。当信号真实频率不是频谱间隔的整数倍时, 真实频率位于两条幅度最大谱线之间, 借助次大幅度谱线与最大幅度谱线的比值就可以估计出信号的实际频率。

### 1.2 Rife 算法

Rife 算法<sup>[3]</sup>给出的频率估计公式为

$$\tilde{f}_0 = \Delta f(k_0 + \delta) = \Delta f(k_0 + \alpha \frac{|X_{k_0+\alpha}|}{|X_{k_0+\alpha}| + |X_{k_0}|}) \quad (3)$$

其中,  $\delta$  为信号频率与量化频率的频差, 修正方向  $\alpha = \pm 1$ , 当  $|X_{k_0+1}| > |X_{k_0-1}|$  时  $\alpha = 1$ ; 当  $|X_{k_0+1}| \leq |X_{k_0-1}|$  时  $\alpha = -1$ ; 修正因子  $\Delta k = |X_{k_0+\alpha}| / (|X_{k_0+\alpha}| + |X_{k_0}|)$ ,  $\Delta k$  满足  $0 \leq \Delta k \leq 0.5$ 。因此, 被估计频率位于  $k_0 \Delta f$  与  $(k_0 + 0.5\alpha) \Delta f$  之间。Rife 算法利用两根相邻谱线  $|X_{k_0}|$  和  $|X_{k_0+\alpha}|$ , 故又称为双线幅度法。

文献[10]给出 Rife 算法频率估计方差的计算公式为

$$\text{Var}(\tilde{f}_0) = (f_s / N)^2 \left\{ \frac{(1-|\delta|)^2 [(1-|\delta|)^2 + \delta^2]}{N(SNR) \text{sinc}^2(\delta)} + 2\delta^2 \text{erfc}\left[\frac{\delta |\sin(\pi\delta)|}{\pi(1-\delta^2)}\right] \sqrt{N(SNR)} \right\} \quad (4)$$

在适度信噪比条件下, 当  $|\delta| = 0.5$  时, 即信号真实频率  $f_0$  接近最大谱线和次大谱线中间区域时, Rife 算法的估计性能很好, 然而当信噪比较低且  $|\delta| = 0.1$  即  $f_0$  接近最大谱线时, 估计误差很大。

### 1.3 Quinn 算法

Quinn 算法<sup>[4]</sup>给出的频率估计为

$$\tilde{f}_0 = \Delta f(k_0 + \delta) \quad (5)$$

其中,  $\delta$  为频率修正项, 表示为

$$\delta = \begin{cases} \delta_2, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0 \\ \delta_1, \text{others} \end{cases} \quad (6)$$

式 (6) 中  $\delta_1$  和  $\delta_2$  表示为

$$\begin{cases} \delta_1 = \beta_1 / (1 - \beta_1) \\ \delta_2 = \beta_2 / (\beta_2 - 1) \end{cases} \quad (7)$$

$\beta_1$  和  $\beta_2$  表示为

$$\begin{cases} \beta_1 = \text{Re}\{X(k_0 - 1) / X(k_0)\} \\ \beta_2 = \text{Re}\{X(k_0 + 1) / X(k_0)\} \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\text{Re}\{\cdot\}$  表示取实部。

文献[9]给出了 Quinn 算法的频率估计方差为

$$\text{Var}(\tilde{f}_0) = (f_s / N)^2 \frac{(1 - |\delta|)^2 [(1 - |\delta|)^2 + \delta^2]}{N(\text{SNR}) \text{sinc}^2(\delta)} \quad (9)$$

由式(9)可知, 当  $\delta$  接近  $\pm 0.5$  时, Quinn 算法的频率估计精度很高, 但是当  $\delta$  接近零时, Quinn 算法的估计误差较大。

## 2 I-Quinn 算法

从上一节可以看出, Rife 算法在  $|\delta|$  较小时, DFT 最大谱线左右两侧谱线的幅度受噪声影响较大, 估计误差较大; Quinn 算法则充分利用了最大谱线左右两侧谱线的相位值来判断插值方向, 从而避免了 Rife 算法在  $|\delta|$  较小时频率估计误差激增的现象。同样, 相关文献提出的 M-Rife<sup>[5]</sup>、I-Rife<sup>[6]</sup>、M-Quinn<sup>[9]</sup> 等算法相比 Rife 和 Quinn 算法也在一定程度上提高了频率估计的性能, 然而低信噪比条件下, 这几种算法在全频率范围都有不同程度的波动。本文结合上述几种算法的特点提出改进的 Quinn (I-Quinn) 算法, 其整体性能优于现有的同类算法。

I-Quinn 算法的基本处理思路是: 首先对观测信号运用 Quinn 算法估计频率偏差, 判断其是否位于中心区域, 如果频偏位于中心区域, 则直接将其用于信号频率估计; 如果频率偏差位于中心区域之外, 则对观测信号进行频移, 频移量根据频偏估计值确定, 之后再使用 Quinn 算法进行频率估计。I-Quinn 算法具体流程如下:

- ①对观测信号  $x(n)$  作 DFT, 求 DFT 幅度谱线最大值位置  $k_0$ , 根据式(6)~式(8), 计算频偏估计值  $\delta_1$ 、 $\delta_2$  和  $\delta$ 。
- ②根据式(9)选定中心区域为  $(\mu, \lambda)$ , 实际中选取  $\mu=0.375$ ,  $\lambda=0.5$ , 判断  $\delta$  是否满足  $\mu \leq |\delta| \leq \lambda$ , 如果满足, 则将  $k_0$ 、 $\delta$  代入式(5)得到最终的频率估计值; 否则, 转到步骤③。
- ③根据  $\delta$  选择频移因子  $\delta_k$  及频移方向  $\alpha_k$ , 频移因子  $\delta_k = 0.5 - |\delta|$ , 频移方向  $\alpha_k = \text{sign}(\delta)$ 。
- ④对观测信号  $x(n)$  作频移, 频移后新信号表示为  $x_s(n) = x(n) \exp(j2\pi n \delta_k \alpha_k / N)$ 。
- ⑤对  $x_s(n)$  作 DFT, 求 DFT 幅度谱线最大值位置  $k_s$ , 根据式(6)~式(8), 计算新的频偏估计值  $\delta_s$ , 最终频率估计值为  $\Delta f(k_s + \delta_s - \alpha_k \delta_k)$ 。

综上可知, I-Quinn 算法结合现有基于频移的几种算法的优点, 改进了 M-Quinn 算法中的频移判据, 使得全频段范围内被估计信号的频率总能位于相邻量化频率中心点, 保证了全频段范围的估计精度和稳定性。

## 3 性能仿真及计算量分析

对正弦波信号, 在相位、幅度和频率三个参数均未知的情况下, 频率估计方差的克拉美-罗下界 (CRLB) 为

$$\text{Var}\{\tilde{f}\} = \frac{6f_s^2}{4\pi^2(\text{SNR})N(N^2 - 1)} \quad (10)$$

在不同信号频率和不同信噪比条件下, 利用 Matlab 软件对 I-Quinn 算法进行蒙特卡洛仿真, 并与 Rife、Quinn、M-Rife、I-Rife、M-Quinn 五种同类算法的估计性能进行对比。

仿真时采样频率  $f_s = 200\text{MHz}$ , 采样点数  $N = 512$ ,  $\Delta f = f_s / N = 390.6\text{kHz}$ , 蒙特卡洛仿真次数为 2000 次。

### 3.1 不同信号频率时的估计误差

设信号的真实频率在 FFT 量化频率间隔内的概率是均匀分布的, 选取量化频率点  $f_0 = 50\text{MHz}$ , 在

$[f_0 - \Delta f / 2, f_0 + \Delta f / 2]$  区间内等间隔选取 40 个频点。I-Quinn 算法及其他 5 种同类算法在信噪比 SNR=3dB、-3dB、-6dB 时频率估计的均方根误差如图 1 所示。从图 1 的 (a2) (b2) (c2) 三张局部放大图可以看出, I-Quinn 算法在不同信噪比条件下, 在整个频段内的均方根估计误差稳定, 性能优于同类算法。

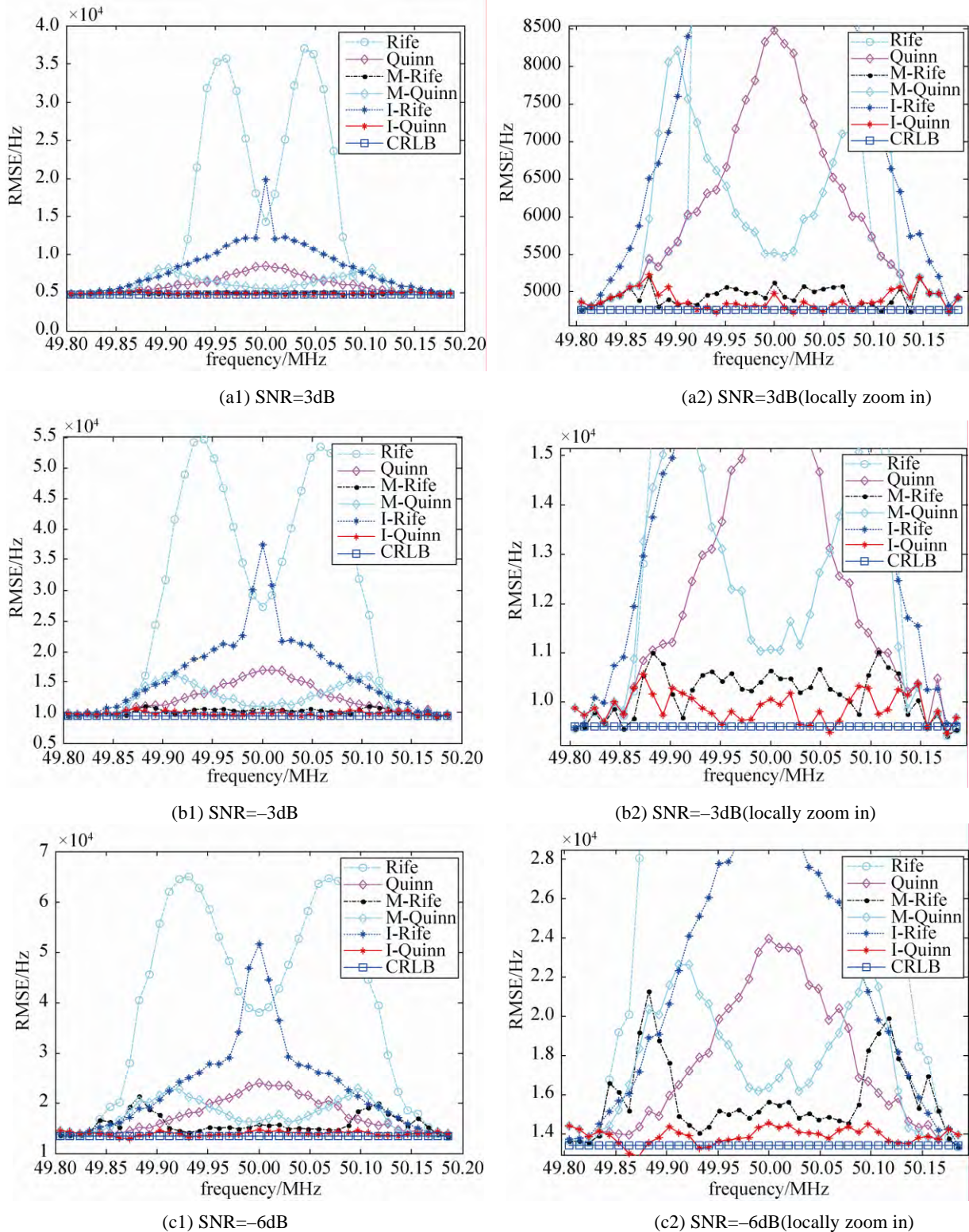


图 1 I-Quinn 算法和同类算法在不同频率下的均方根误差

Fig. 1 RMSE of I-Quinn and related algorithms at different frequencies



### 3.2 不同信噪比时的估计误差

为检验 I-Quinn 算法在不同信噪比条件下的估计性能, 信噪比区间取  $[-10\text{dB}, 10\text{dB}]$ , 间隔为  $1\text{dB}$ , 在每个信噪比条件下进行 2000 次蒙特卡洛仿真, 真实信号频率在量化频率点  $f_0$  附近, 分别选取  $f_0 + 0.05\Delta f$ 、 $f_0 + 0.25\Delta f$  和  $f_0 + 0.45\Delta f$  三种不同情况, I-Quinn 算法及其他五种同类算法的频率估计均方根误差如图 2 所示。从图 2 可以看出, 随着信噪比的提高, I-Quinn 算法的均方根误差很快地接近 CRLB, 而且相比于同类其他算法, 其在低信噪比条件下的均方根误差更接近于 CRLB。

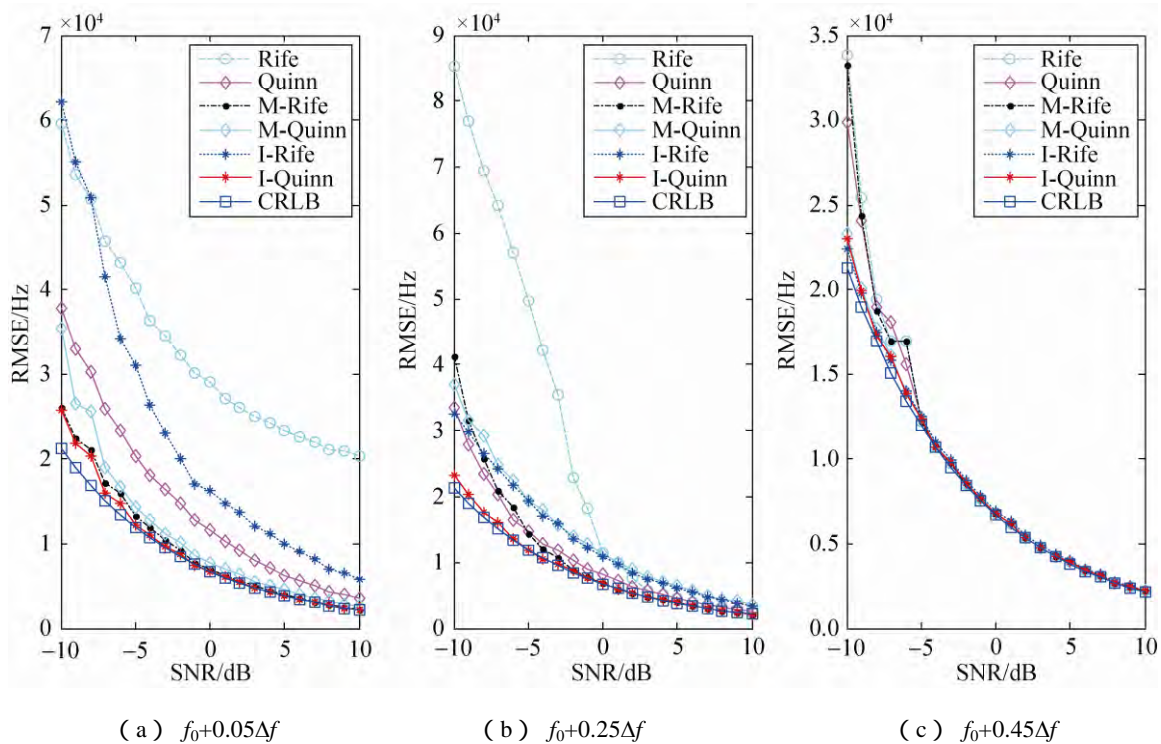


图 2 I-Quinn 算法和同类算法在不同信噪比下的均方根误差

Fig. 2 RMSE of I-Quinn and related algorithms with different SNR

### 3.3 计算量分析

I-Quinn 算法需要做  $N$  点 DFT 运算, 当  $\log_2 N$  为整数时可采用 FFT 算法, 需要  $0.5N \log_2 N$  次复数乘法和  $N \log_2 N$  次复数加法。I-Quinn 算法中求  $x_s(n)$  需要  $N$  次复数乘法, 求  $x_s(n)$  的两个最大谱线需要  $2N$  次复数乘法和  $2(N-1)$  次复数加法。若信号频率在整个频段呈均匀分布, 则根据选择的中心区域  $(\mu, \lambda)$  可知, 需要进行频移修正的概率为  $2\mu$ 。从统计学角度看, I-Quinn 算法的总计算量为①复数乘法:  $0.5N \log_2 N + 6\mu N$ , ②复数加法:  $N \log_2 N + 4\mu(N-1)$ 。可见, I-Quinn 算法计算量与 M-Quinn、M-Rife 等同类基于频移的算法相当, 计算量较小, 可以满足实时信号处理的要求。

## 4 结束语

I-Quinn 算法利用频移技术, 改进了 M-Quinn 算法中的频移判据, 总能一次性将被估计频率移动到两相邻量化频率中心点, 利用 Quinn 算法在被估计频率位于相邻量化频率中心点时频率估计精度高的特点, 获得全频段稳定良好的频率估计性能。特别是在低信噪比条件下, I-Quinn 算法全频段频率估计的均方根误差波动很小, 相比同类其他算法有更好的精度和稳定性能。I-Quinn 算法计算量不大, 易于硬件实现, 具有一定的工程应用价值。

## 参考文献

- [1] Palmer L C. Coarse Frequency Estimation Using the Discrete Fourier Transform[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1974, IT 20(1): 104–109 .
- [2] Rife D C, Vincent G A. Use of Discrete Fourier Transform in the Measurement of Frequencies and Levels of Tones[J]. Bell System Technical Journal, 1970, 49(2): 197–228.
- [3] Rife D C, Boorstyn R R. Single-tone Parameter Estimation from Discrete-time Observation[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1974, IT 20(5): 591–598.
- [4] Quinn B G. Estimating Frequency by Interpolation Using Fourier Coefficients[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(5): 1264–1268.
- [5] 邓振森, 刘渝, 王志忠. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. 数据采集与处理, 2006, 21(4): 473–477.  
Deng Zhenmiao, Liu Yu, Wang Zhizhong. Modified Rife Algorithm for Frequency Estimation of Sinusoid Wave[J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2006, 21(4): 473–477.
- [6] 王宏伟, 赵国庆. 正弦波频率估计的改进 Rife 算法[J]. 信号处理, 2010, 26(10): 1573–1576.  
Wang Hongwei, Zhao Guoqing. Improved Rife Algorithm for Frequency Estimation of Sinusoid Wave[J]. Signal Processing, 2010, 26(10): 1573–1576.
- [7] 龚岳洲, 周新力, 孙小东, 等. 一种高精度的 Rife 算法[J]. 无线电工程, 2013, 43(2): 30–33.  
Gong Yuezhou, Zhou Xinli, Sun Xiaodong, et al. A High-precision Rife Algorithm[J]. Radio Engineering, 2013, 43(2): 30–33.
- [8] 李夏, 郭英, 张坤峰, 等. 基于频移修正的线性方程频率估计算法[J]. 探测与控制学报, 2015, 37(4): 66–71.  
Li Xia, Guo Ying, Zhang Kunfeng, et al. Modified Linear Equation Frequency Estimator Based on Frequency Shift[J]. Journal of Detection & Control, 2015, 37(4): 66–71.
- [9] 谢胜, 于平, 林少兴, 等. 基于频移修正的奎因频率估计算法[J]. 探测与控制学报, 2012, 34(1): 50–54 .  
Xie Sheng, Yu Ping, Lin Shaoxing, et al. Modified Quinn Frequency Estimation Algorithm Based on Frequency Shift[J]. Journal of Detection & Control, 2012, 34(1): 50–54 .
- [10] 齐国清, 贾欣乐. 插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析[J]. 电子学报, 2004, 32(4): 625–629.  
Qi Guoqing, Jia Xinle. Accuracy Analysis of Frequency Estimation of Sinusoid Based on Interpolated FFT[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(4): 625–629.

## [作者简介]

严 静 1969 年生, 学士, 高级工程师, 主要研究方向为电子对抗。

周胜文 1987 年生, 硕士, 工程师, 主要研究方向为电子对抗。

周云生 1963 年生, 博士, 研究员, 硕士生导师, 主要研究方向为电子侦察与对抗。

詹 磊 1977 年生, 博士, 研究员, 主要研究方向为电子侦察与对抗。