

文章编号:1004-9037(2006)04-0473-05

正弦波频率估计的修正 Rife 算法

邓振淼 刘 渝 王志忠

(南京航空航天大学信息科学与技术学院,南京,210016)

摘要:分析了 Rife 算法的性能,指出当信号频率位于离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT) 两个相邻量化频率点的中心区域时, Rife 算法精度很高,其均方根误差接近克拉美-罗限(Cramer-Rao Lower Bound, CRLB),但当信号频率位于量化频率点附近时, Rife 算法精度降低。本文提出了一种修正 Rife(M-Rife) 算法,通过对信号进行频移,使新信号的频率位于两个相邻量化频率点的中心区域,然后再利用 Rife 算法进行频率估计。仿真结果表明本算法性能不随被估计信号的频率分布而产生波动,整体性能优于牛顿迭代法(一次迭代),接近二次迭代,在低信噪比条件下不存在发散问题,性能比牛顿迭代稳定。本算法易于硬件实现。

关键词:频率估计;牛顿迭代算法;离散傅里叶变换;克拉美-罗限

中图分类号: TN911.6 **文献标识码:** A

Modified Rife Algorithm for Frequency Estimation of Sinusoid Wave

Deng Zhenmiao, Liu Yu, Wang Zhizhong

(College of Information Science and Technology,

Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: The performance of the Rife algorithm is analyzed. When the signal frequency locates in the area near the midpoint of two neighboring discrete frequencies, RMSE (root mean square error) of the frequency estimation is close to CRLB(Cramer-Rao lower bound), but the performance is poor when the signal frequency is near the discrete frequency. A modified Rife (M-Rife) algorithm is presented by moving the signal frequency to the midpoint of two neighboring discrete frequencies and then the frequency is estimated by Rife algorithm. Simulation results show that the performance of M-Rife is better than that of Rife algorithm, RMSE is less than that of one iteration of Newton method, and close to that of two iterations. Under the condition of low SNR, M-Rife has not divergence problem and is more stable than Newton method. Furthermore, the algorithm is easy to be implemented by the hardware.

Key words: frequency estimation; Newton iteration algorithm; discrete Fourier transform; Cramer-Rao lower bound

对淹没在噪声中的正弦波信号进行频率估计是信号处理的一个经典课题,在雷达和通信等领域有广泛应用。关于正弦波频率估计的文章很多。文献[1]给出在高斯白噪声中对正弦波信号进行频率估计的最大似然估计(ML) 算法,该算法估计误差达到克拉美-罗限(CRLB),因此是最优估计。但是 ML 算法需要进行一维搜索,计算量太大,无法进行实时处理。文献[2]提出相位平均算法,速度很快,但仅在高信噪比条件下才有较好的性能。文献[3]利用牛顿迭代方法给出一个近似最大似然估计

算法,性能接近 CRLB,计算量也较小,但在较低信噪比时存在不收敛情况。文献[4]提出将采样数据分段,对较少数据点作快速傅里叶变换(FFT),积累其幅度谱,通过脉冲积累的方法提高信噪比,可以改善相位加权算法的性能,但在某些频段存在相位模糊,导致估计精度下降,其总体性能不如牛顿迭代算法。

文献[5]利用信号频谱的最大两根谱线进行插值对频率进行估计,即 Rife 算法。当信号频率位于离散傅里叶变换(DFT) 两个相邻量化频率点的中

心区域时,Rife 算法精度很高,均方根误差接近 CRLB,但当信号频率位于量化频率点附近时,Rife 算法精度降低。本文分析了该算法的特点,并以此为基础,通过频谱的搬移,对Rife 算法进行修正,得到一个快速、高精度的正弦波频率估计(M-Rife) 算法,估计误差接近 CRLB,性能比牛顿迭代稳定,计算量也小于牛顿迭代。

1 Rife 算法

加性高斯白噪声污染的正弦波信号表示为 $x(n) = ae^{j\Phi}e^{j2\pi f_c n\Delta} + w(n) \quad n=0,1,\cdots,N-1$ (1) 式中: a, f_c, Φ 分别为振幅、频率和初相; Δ 为采样间隔; N 为样本数; $w(t)$ 为实部和虚部相互独立的、方差为 $2\sigma^2$ 的零均值复高斯白噪声。

对 $x(n)$ 作FFT, 取其中的最大谱线值 $|X(k_0)|$ 。文献[5]给出利用两根谱线进行正弦波频率估计的计算公式(即 Rife 算法)

$$\hat{f}_c = \frac{1}{T} \left[k_0 + r \frac{|X(k_0 + r)|}{|X(k_0)| + |X(k_0 + r)|} \right] \quad (2)$$
 式中:当 $|X(k_0 + 1)| \leq |X(k_0 - 1)|$ 时, $r = -1$; 当 $|X(k_0 + 1)| \geq |X(k_0 - 1)|$ 时, $r = 1, T = N\Delta$ 。

计算机模拟的结果表明,在适度的信噪比条件下,当 f_c 位于两个离散频率的中心区域时,由式(2)定义的 \hat{f}_c 性能很好,频率估计的误差远小于 DFT 算法。反之,当信噪比较低而且 f_c 十分接近 $\frac{k_0}{N}f_s$ 时(f_s 为采样频率),估计的误差将可能大于 DFT 算法。Rife 算法的这一特点也可以这样分析:

如果 f_c 很接近两相邻离散频率的中点 $\frac{(k_0 + r) \cdot \frac{1}{2}}{N} \cdot f_s$, 则 $|X(k_0 + r)|$ 的幅度与 $|X(k_0)|$ 很接近,这时采样内插公式具有较高的精度。反之若 f_c 很接近于 $\frac{k_0}{N}f_s$, 则 $|X(k_0 + r)|$ 很小,在有噪声存在的情况下,噪声对 $|X(k_0 + r)|$ 的影响比较大,这将影响内插的精度。

2 M-Rife 算法

利用当 f_c 位于两个离散采样频率的中心区域时 Rife 算法性能很好的特点,本文定义 $(k + \frac{1}{3}, k + \frac{2}{3})$ 为离散频率点 k 与 $k + 1$ 之间的中心区域。本算法的基本思想是:先用Rife 算法进行频率估计得 \hat{f}_c , 然后判断 \hat{f}_c 是否位于两相邻量化频率点中心

区域;如果是,则将 \hat{f}_c 作为最后的频率估计值;否则对原信号进行适当的频移,使新信号的频率位于两个相邻离散频率点的中心区域,再用Rife 算法进行频率估计,这样就可以保证较高的估计精度。具体算法如下。

假设 $x(n)$ 经过FFT 以后的频谱为 $X(k)$, 即
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k=0,1,2,\cdots,N-1 \quad (3)$$
 求得最大谱线位置 k_0 , 根据式(2)得到 f_c 的估计值 \hat{f}_c 。由于 $|X(k_0)| \geq |X(k_0 + r)|$, \hat{f}_c 满足 $\left| \hat{f}_c - \frac{k_0}{N}f_s \right| \leq \frac{1}{2}\Delta f$ (式中 Δf 为 DFT 量化频率间隔)。如果满足

$$\frac{1}{3}\Delta f < \left| \hat{f}_c - \frac{k_0}{N}f_s \right| < \frac{1}{2}\Delta f \quad (4)$$

则认为 \hat{f}_c 位于量化频率中心区域,作为最终估计值。反之,需要进行修正。

估计值 \hat{f}_c 除可能满足式(4)外,可能还有两种情况:(a) $0 \leq \hat{f}_c - \frac{k_0}{N}f_s \leq \frac{1}{3}\Delta f$; (b) $0 \geq \hat{f}_c - \frac{k_0}{N}f_s \geq -\frac{1}{3}\Delta f$ 。

为了使被估计信号频率尽量接近量化频率中点,将信号 $x(n)$ 向左或向右频移 δ 量化频率单位, δ 可以按式(5)确定

$$\delta = \frac{1}{2} - \frac{|X(k_0 + r)|}{|X(k_0)| + |X(k_0 + r)|} \quad (5)$$

平移之后的信号为

$$x_1(n) = x(n) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}n\delta} \quad (6)$$

频谱为

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-r\delta)n} \quad k=0,1,2,\cdots,N-1 \quad (7)$$

当 $|X_{k_0+1}| > |X_{k_0-1}|$ 时, $r = 1$, 对应于(a), 谱线右移;反之对应于(b), $r = -1$, 谱线左移。

下面以 $r = 1$ 为例来说明。假设 \hat{f}_c 的位置如图1所示。平移后的信号 $x_1(n)$ 的频率位于两相邻量化频率中点附近。利用Rife 算法求得 $x_1(n)$ 的频率估计值 \hat{f}_{1c} , 将 \hat{f}_{1c} 减去 $\delta\Delta f$ 就可以得到一个比较精确的原信号的频率估计值。

Rife 算法仅利用 $x_1(n)$ 的最大两根谱线值。将原始信号的频谱平移 $\delta\Delta f$ 后,当 $r = 1$ 时, $X_1(k)$ 的最大两根谱线一定位于 k_0 和 $(k_0 + 1)$ 处,而当 $r = -1$ 时,最大两根谱线一定位于 $(k_0 - 1)$ 和 k_0 处,于是仅需计算出相应的两根谱线,再作简单的判断就可以确定 $X_1(k)$ 的最大值,最后再用式(2)估计频

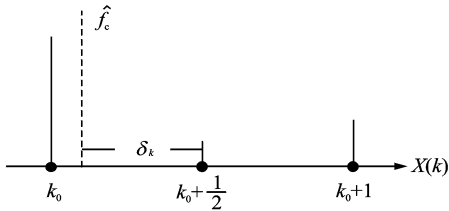


图1 谱线示意图

率。因此不需要对 $x_1(n)$ 作FFT, 仅需计算 k_0 和 $(k_0 + r)$ 两点的DFT 即可。

式(6)中的频移因子 δ 是一个不确定的值, 与初始估计值 \hat{f}_c 有关。因此上述方法需要计算复指数 $e^{j\frac{2\pi}{N}\delta}$, 计算量较大。为了避免每次进行频率估计都要计算复指数, 考虑取一个固定值 $\delta = \frac{1}{3}$, 通过频移, 新信号的频率将位于两个相邻量化频率点的中心区域, 仍然可以保证得到较高的精度。对于固定的 δ , 可以预先将 $e^{j\frac{2\pi}{N}\delta}$ 计算好存放在RAM 里, 极大地减少了计算量。

由于受噪声的影响, 可能出现图2所示情况, \hat{f}_c 与真实频率 f_c 不在 k_0 的同一侧, 不能保证一次频移就将新信号的频率移到离散频率的中心区域。此时可以对原始信号作二次频移, 然后再用Rife 算法进行估计, 得到最终估计值。整个算法的流程如图3所示。

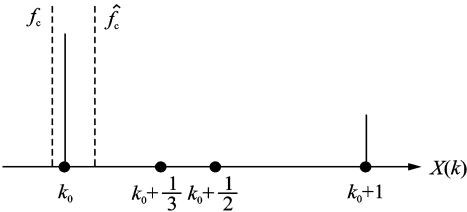


图2 f_c 与 \hat{f}_c 不在 k_0 同一侧时的谱线示意图

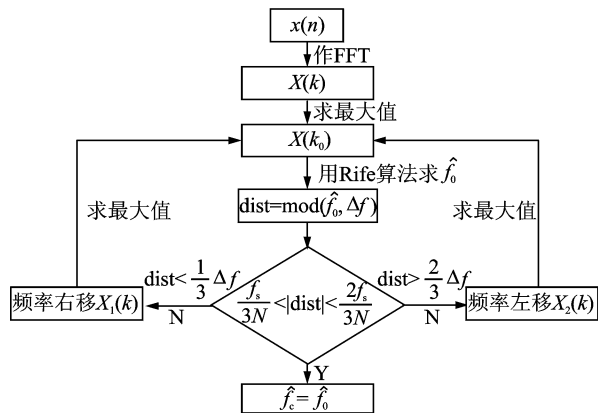


图3 修正 Rife 算法流程图

3 计算量与性能分析

3.1 计算量分析

Rife 算法需要作一次FFT, 在所有复数指数 W_N^{kn} 全部算好的前提下, 作一次 N 点FFT 需要 $\frac{1}{2}N \cdot \log_2 N$ 次复数乘法和 $N \cdot \log_2 N$ 次复数加法。

用M-Rife 算法估计频率, 求 $x_1(n)$ 需 N 次复数乘法, 求 $x_1(n)$ 的最大两根谱线需 $2N$ 次复数乘法和 $2(N - 1)$ 次复数加法。假设被估计频率在整个频带上呈均匀分布, 用Rife 算法估计频率, 结果不需要进行修正的概率为 $\frac{1}{3}$, 需要通过左移或右移频谱进行修正的概率均为 $\frac{1}{3}$ 。当Rife 算法估计频率值 \hat{f}_c 与真实频率 f_c 分布在量化频率点两侧时, 才需要作二次修正, 这种概率很小, 现以 p_2 表示。从统计的角度看, 一次M-Rife 算法附加的计算量为:

(1) 复数乘法: $\frac{2}{3}(N + 2N) = 2N$; (2) 复数加法: $\frac{2}{3} \times 2(N - 1) = \frac{4}{3}(N - 1)$ 。几种算法的计算量见表1。

表1 各种算法计算量比较

算 法	复数乘法次数	复数加法次数
Rife 算法	$\frac{1}{2}N \cdot \log_2 N$	$N \cdot \log_2 N$
M-Rife 算法 (一次修正)	$\frac{1}{2}N \cdot \log_2 N + 2N$	$N \cdot \log_2 N + \frac{4}{3}N$
M-Rife 算法 (两次修正)	$\frac{1}{2}N \cdot \log_2 N + 2N(1 + p_2)$	$N \cdot \log_2 N + \frac{4}{3}N(1 + p_2)$
牛顿迭代算法 (一次迭代)	$\frac{1}{2}N \cdot \log_2 N + 3N + 1$	$N \cdot \log_2 N + 2N - 2$
牛顿迭代算法 (两次迭代)	$\frac{1}{2}N \cdot \log_2 N + 6N + 2$	$N \cdot \log_2 N + 4N - 4$

可以看出, 由于 p_2 小于0.5, M-Rife 算法的计算量小于牛顿一次迭代, 并且牛顿迭代需要计算复指数 $e^{-2j\pi n \hat{f}}$, 表1中没有列出这部分附加计算量。

3.2 性能分析

信噪比定义为: $SNR = \frac{\sigma^2}{2\sigma_n^2}$ 。在仿真中, 采样间隔 $\Delta t = 5 \times 10^{-9}$ s, 样本数为 $N = 256$, 因此DFT 的量化频率 $\Delta f = \frac{1}{N \Delta t} = 782$ kHz。

对于非随机的被估计量 θ 若存在无偏估计 $\hat{\theta}$ 它的方差一定大于等于克拉美-罗限, 对复正弦波信号, 在相位、幅度和频率三个参数均不知道的情况下, 方差下限为^[1]

$$\text{var}\{\hat{\omega}\}=\frac{12\hat{\sigma}}{a^2T^2N(N^2-1)}$$

(8)

设 f_1 为某个量化频率, 现取 $f_1=\frac{f_s}{4}=50\text{ MHz}$, 从 f_1 到 $f_1+\frac{\Delta f}{2}$ 取 11 个离散的频率 $f_i=f_1+\frac{i-1}{20}\Delta f$ ($i=$

$1, 2, \dots, 11$), 对频率为 f_i 的正弦波分别用上述的方法进行频率估计。Monte Carlo 仿真次数为1 000 次模拟, 计算均方根误差 (RMSE) 和平均绝对误差 (MAE) (单位: kHz)。仿真结果列于表 2~4。

从上面的仿真结果可以看出, 本算法在整个频

表 2 仿真结果 1(SNR=6 dB,CRLB=9.54 kHz)

被估 频率/ MHz	Rife 算法		M-Rife 算法 (δ 固定为 $\frac{1}{3}$)		牛顿迭代算法 (一次迭代)		牛顿迭代算法 (两次迭代)	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
50.000	28.9	27.2	10.6	8.5	9.9	7.9	9.8	7.8
50.039	57.5	43.4	10.2	8.3	10.1	8.1	9.3	7.5
50.078	82.2	49.8	9.5	7.6	12.6	9.7	9.5	7.7
50.117	61.5	25.0	9.6	7.6	13.7	9.2	9.3	7.5
50.156	27.1	11.1	9.7	7.7	13.2	8.3	9.3	7.5
50.195	11.4	8.9	10.0	8.0	9.3	7.4	9.8	7.7
50.234	10.8	8.6	9.9	8.0	9.5	7.5	9.4	7.5
50.273	10.2	8.1	10.3	8.1	9.4	7.5	9.8	7.8
50.312	9.8	7.8	10.2	8.2	9.3	7.3	9.6	7.6
50.351	10.0	8.0	9.9	7.9	9.9	7.8	9.8	7.8
50.391	9.6	7.7	9.5	7.6	9.6	7.6	9.5	7.6
平均值	29.0	18.7	9.9	8.0	10.6	8.0	9.6	7.6

表 3 仿真结果 2(SNR=0 dB,CRLB=19.0 kHz)

被估 频率/ MHz	Rife 算法		M-Rife 算法 (δ 固定为 $\frac{1}{3}$)		牛顿迭代算法 (一次迭代)				牛顿迭代算法 (两次迭代)					
					不去除不 收敛仿真点		去除不收敛 仿真点		不去除不 收敛仿真点		去除不收敛 仿真点			
					RMSE	MAE	RMSE	MAE	次数	RMSE	MAE	RMSE	MAE	次数
50.000	53.9	50.9	21.3	17.3	19.6	15.4	0	19.6	15.4	19.1	15.1	0	19.1	15.1
50.039	78.4	66.0	19.2	15.2	21.1	16.7	0	21.1	16.7	18.1	14.5	0	18.1	14.5
50.078	109.5	80.7	18.6	14.7	26.6	20.1	0	26.6	20.1	18.2	14.6	0	18.2	14.6
50.117	119.4	72.5	19.3	15.4	39.3	25.3	0	39.3	25.3	18.9	15.0	0	18.9	15.0
50.156	101.5	48.4	20.5	16.4	51.0	26.8	2	55.7	29.1	21.6	16.5	0	21.6	16.5
50.195	67.3	28.6	19.6	15.9	58.1	23.3	7	41.3	20.4	170.7	29.4	8	27.8	17.6
50.234	32.0	18.1	20.9	16.6	47.8	18.0	5	24.7	16.0	66.9	19.4	5	23.8	16.0
50.273	21.1	17.1	21.1	16.9	18.4	14.5	0	18.4	14.5	19.3	15.4	0	19.3	15.4
50.312	19.5	15.7	19.1	15.3	19.7	15.8	0	19.7	15.8	19.5	15.7	0	19.5	15.7
50.351	19.0	15.1	19.7	15.7	18.2	14.5	0	18.2	14.5	19.5	15.4	0	19.5	15.4
50.391	18.9	15.0	19.1	15.2	18.8	14.9	0	18.8	14.9	19.0	15.0	0	19.0	15.0
平均值	58.2	38.9	19.9	15.9	30.8	18.7		27.6	18.4	37.3	16.9		20.4	15.5

表 4 仿真结果 3(SNR=-3 dB,CRLB=26.9 kHz)

被估 频率/ MHz	M-Rife				牛顿迭代算法				牛顿迭代算法					
	Rife 算法		算法 (δ 固定为 $\frac{1}{3}$)		(一次迭代)				(两次迭代)					
					不去除不 收敛仿真点		去除不收敛 仿真点		不去除不 收敛仿真点		去除不收敛 仿真点			
RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	次数	RMSE	MAE	RMSE	MAE	次数	RMS	MAE	
50.000	76.1	72.0	40.3	24.7	29.3	23.2	0	29.3	23.2	27.7	22.1	0	27.7	22.1
50.039	93.5	81.3	37.9	24.3	31.7	24.3	0	31.7	24.3	25.0	19.8	0	25.0	19.8
50.078	118.6	91.4	27.1	21.4	37.4	28.2	0	37.4	28.2	26.3	21.0	0	26.3	21.0
50.117	145.4	101.1	26.9	21.6	59.9	37.8	1	56.4	37.2	59.9	23.1	0	59.9	23.1
50.156	142.6	82.3	25.6	20.1	98.1	47.2	7	74.3	43.0	348.7	45.9	7	34.0	24.8
50.195	121.3	58.0	28.5	22.7	700.6	67.3	33	66.5	35.5	1640.7	145.9	34	43.3	28.4
50.234	80.2	35.5	42.9	24.7	467.4	55.9	25	36.6	23.6	1978.6	187.9	28	32.6	23.1
50.273	41.3	24.3	36.5	24.1	65.7	23.2	7	25.5	20.3	299.4	40.6	7	25.5	20.3
50.312	28.3	22.4	36.9	23.3	27.2	21.9	2	27.1	20.2	27.0	21.4	2	26.9	21.2
50.351	27.6	22.5	27.4	21.9	26.5	21.2	0	26.5	21.2	27.8	22.0	0	27.8	22.0
50.391	27.2	21.7	26.2	20.7	26.8	21.4	0	26.8	21.4	27.5	21.8	0	27.5	21.8
平均值	82.0	55.7	32.4	22.7	142.8	33.8		39.8	27.1	408.1	52.0		32.4	22.5

段上均保持较高的精度,与牛顿迭代法相比,在较高的信噪比条件下,性能优于一次迭代,略次于二次迭代。在较低信噪比条件下,本算法性能稳定,而牛顿迭代法在某些频段性能不稳定,误差较大,甚至可能出现不收敛的情况。表3,4给出了1 000次仿真中出现的不收敛次数(如果估计出的频率和真实频率偏差大于 $\frac{1}{2}\Delta f$ 就认为不收敛)。可以看出,如果把这些不收敛仿真点去除,则牛顿二次迭代的性能与本算法接近。

4 结束语

本文提出的M-Rife算法,性能比Rife算法好,接近克拉美-罗限。在常规信噪比条件下性能与牛顿二次迭代接近,在低信噪比条件下与牛顿迭代相比具有较稳定的性能。并且本算法的计算量小于牛顿迭代,便于硬件实现,具有应用价值。

参考文献:

[1] Rife D C, Boorstyn R R. Single-tone parameter es-

timation from discrete-time observation [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1974, IT-20(5):591-598.

[2] Kay S. A fast and accurate single frequency estimator [J]. IEEE Trans Acoust Speech Signal Process, 1989, 37(12):1987-1990.

[3] Abatzoglou T J. A fast maximum likelihood algorithm for the frequency estimation of a sinusoid based on Newton's method [J]. IEEE Trans ASSP 1985, 33(1):77-89.

[4] 贾朝文.实时高精度频率估计算法[J].电子对抗技术,2000,(15):11-14.

[5] Rife D C, Vincent G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones [J]. Bell Syst Tech J, 1970, 49:197-228.

作者简介:邓振淼(1977-),男,博士研究生,研究方向:信号处理,E-mail:dzm-ddb@hotmail.com;刘渝(1945-),男,教授,博士生导师,研究方向:信号处理;王志忠(1977-),男,工程师,研究方向:通信信号处理。