四、研究方案

1. 算法综述

1.1 直接FFT谱峰检测法

对采集到的信号进行离散傅里叶变换（DFT），找到频谱中幅度最大的频率分量对应的谱线，将其频率作为信号的估计频率。

该算法实现简单，计算效率高。但存在“栅栏效应”（由于DFT是离散的，真实频率可能不精确落在某个谱线上）和“频谱泄漏”（由于信号截断导致频谱扩散）问题，使得估计精度受限，特别是当信号频率不与DFT的离散频率点重合时。此外，该算法的抗噪声性能也很一般。因此，该算法作为其他改进算法的基准参考。

1.2 基于 Chrip-Z 变换（CZT）的频率估计法

首先，对采集到的信号进行离散傅里叶变换（DFT），找到频谱中幅度最大的频率分量，确定其大致的频率位置。然后，以这个频率为中心，选择一个宽度适中的频率范围。在该范围内，对原始信号进行CZT，得到该范围内的精细频谱，并在频谱中找到幅值最大的点，其对应的频率即为更精确的频率估计值。

该算法可以在感兴趣的窄带频率范围内提供比 FFT 更高的频率分辨率，所以准确度相比直接FFT法有较大提升。但是，栅栏效应依旧存在，这使得估计频率和实际信号频率之间仍然存在误差，需要进一步优化。

具体公式推导如下：

单一频率复正弦信号可以表示为：

其中， 是正弦信号的振幅； 是信号的频率； 是信号的初相位。

对信号以 的频率进行采样，采样点数为 ，采样后的信号表示为，对于信号 进行 FFT 运算，信号的频谱表示为 。

对获得的频谱的幅值进行搜索，幅值最大处即为频率的估计值：

式中，是最大谱线的索引值； 是频率分辨率。

在 范围内使用CZT 得到更精准的频率估计，CZT 变换表示为：

式中，；；； 是起始采样角度； 整数用于控制细化频率区间的大小； 是两相邻采样点之间的角度； 是频率细化倍数。

当频率的细化倍数为 时，CZT 算法的频率分辨率 比 FFT 算法的频率分辨率 高了 倍，表示为：

对获得的CZT频谱的幅值进行搜索，幅值最大处即为频率的更精确估计值：

1.3 基于改进 CZT 的高精度频率估计算法

为解决栅栏效应对于频率估计精度的影响，提出在 CZT 算法的基础上，利用细化频谱最大谱线及其左右谱线对频率偏移值进行估计，从而提升频率估计的精度。

信号的真实频率与细化后频谱的采样点之间存在一定的偏差 ，真实信号频率 表示为：

使用细化频谱中最大谱线及其左右谱线的幅值求出误差 ，对频率估计值 进行修正。

对 CZT 变换后的频谱进行搜索，获得最大谱线的幅值 及其左右两根谱线的幅值 、。

经推导， 的表达式为：

其中：

最后，将计算得到的 带入上文的 表达式中，即可得到精确的频率估计值 。

1.4 三种算法计算复杂度对比

FFT-Peak算法具有最低的计算复杂度，核心操作仅为一次N点FFT变换和谱峰搜索。标准基-2 FFT实现需要约次复数乘法与加法，复杂度为 ，谱峰搜索仅需次比较。CZT算法复杂度显著升高：首先进行 的粗FFT；随后在窄带频率范围（点数M）执行CZT细化，通过Bluestein算法实现时需三次变换（两次Chirp乘法和一次填充至点的FFT），复杂度达。改进CZT算法在CZT基础上增加微量计算：提取细化频谱中三个相邻谱线的幅值（3次模运算），计算两个幅度比值 ​,（2次除法），求解频率偏移量（1次含余弦函数的四则运算），最后修正频率估计。这些附加操作仅需常数时间*O*(1)，故改进CZT的总复杂度与CZT相同，仍为。实际工程中，当时CZT类算法可近似为，但常数项远大于FFT-Peak。

1.5 三种算法的精确度与稳定性对比

FFT-Peak算法受限于栅栏效应与频谱泄漏，理论最大频率误差达 ，实际误差常接近此极限。其稳定性较差：噪声易导致谱峰随机偏移，频率估计方差较大；且精度对信号频率与DFT采样点的对准程度高度敏感。CZT算法通过窄带频率细化显著改善性能：误差限缩小至（通过增大细化倍数M可进一步压缩），抗噪性因频域聚焦而提升，频率敏感性也大幅降低。但仍存在残余栅栏效应，且频谱泄漏会扭曲细化频谱的主瓣形态。改进CZT算法在三者中精度最优：利用最大谱线及左右邻线的幅度比解析求解频率偏移量，突破细化分辨率的限制，使理论精度逼近克拉美罗界（CRB）。中高信噪比（）下稳定性卓越：三点插值机制有效抑制噪声引起的谱峰抖动，且完全消除栅栏效应。但存在临界短板：当SNR极低时（如），噪声会严重污染邻近谱线幅值，导致计算偏差甚至符号错误，此时频率估计均方根误差（RMSE）可能反超CZT；此外，算法依赖理想单频信号模型，实际频谱泄漏会降低 估计的准确性。因此工程应用中需设置SNR阈值，在极低噪环境下自动降级为CZT模式。

1.6 CZT的局限性

已知CZT（线性调频Z变换）的核心高效算法公式如下：

**a) 预加权输入序列：**

****b) 线性卷积：****

****c) 后加权输出序列：****

上述即是基于 Bluestein 分解的CZT计算公式，观察这些公式我们发现：

使用算法计算单位圆外的Z变换的一个局限性源于我们可能需要为大的计算。如果与 1相差很大，当变大时，，可能变得非常大或非常小。例如，如果，则。这远远超出了大多数计算机的单精度浮点能力。因此，函数的尾部可能存在很大误差，从而导致卷积的尾部（高频项）严重不准确。卷积的低频项也会有轻微误差，但这些误差通常可以忽略不计。

CZT 算法的另一个主要局限性源于这样一个事实：必须评估两个必须评估两个 L点和一个L/2点的 FFT其中L是大于N+M−1的最小方便整数。我们需要一个FFT和2L个存储位置用于的变换；一个FFT和L+2个存储位置用于的变换；以及一个 FFT 用于这两个变换乘积的逆变换。我们不知道递归方式或通过特定公式计算变换的方法，因此，我们必须计算这个变换并将其存储在额外的L+2个存储位置中。