

信号与系统实验报告 (五) ----复数与傅里叶级数

姓名: 杨承翰 学号 210210226 班级: 通信 2 班

实验日期: 4.22 实验台号: K405-21 原始数据审核:

一、实验预习

(1) 证明欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ 。

$e^{j\theta}$ 的泰勒级数展开为 $e^{j\theta} = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!} \theta^n + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} j(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!} \theta^n$

$\cos(\theta)$ 的泰勒级数展开为 $\cos(\theta) = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!} \theta^n$

$j\sin(\theta)$ 的泰勒级数展开为 $j\sin(\theta) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} j(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!} \theta^n$

所以 $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

(2) 傅里叶级数展开的条件是什么?

满足狄利克雷条件, 即:

- (1) 在一周期内, 连续或只有有限个第一类间断点;
- (2) 在一周期内, 极大值和极小值的数目应是有限个;
- (3) 在一周期内, 信号是绝对可积的。

(3) 写出周期 T 、占空比为 τ 、幅值为 1 的双极性方波展开的傅里叶级数。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\tau T} 1 dt + \int_{\tau T}^T (-1) dt \right) = 2\tau - 1$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \sin 2\pi n \tau \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos 2\pi n \tau) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

二、实验记录与思考题

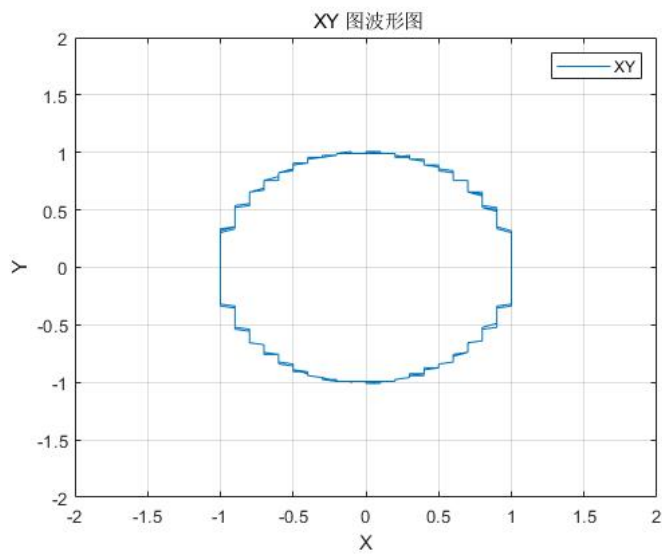
问题 1

画出 XY 图波形图, 并说明 XY 图呈圆形的原因。

因为 $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

所以 x 坐标和 y 坐标的平方和始终为 1

所以 XY 图呈现圆形

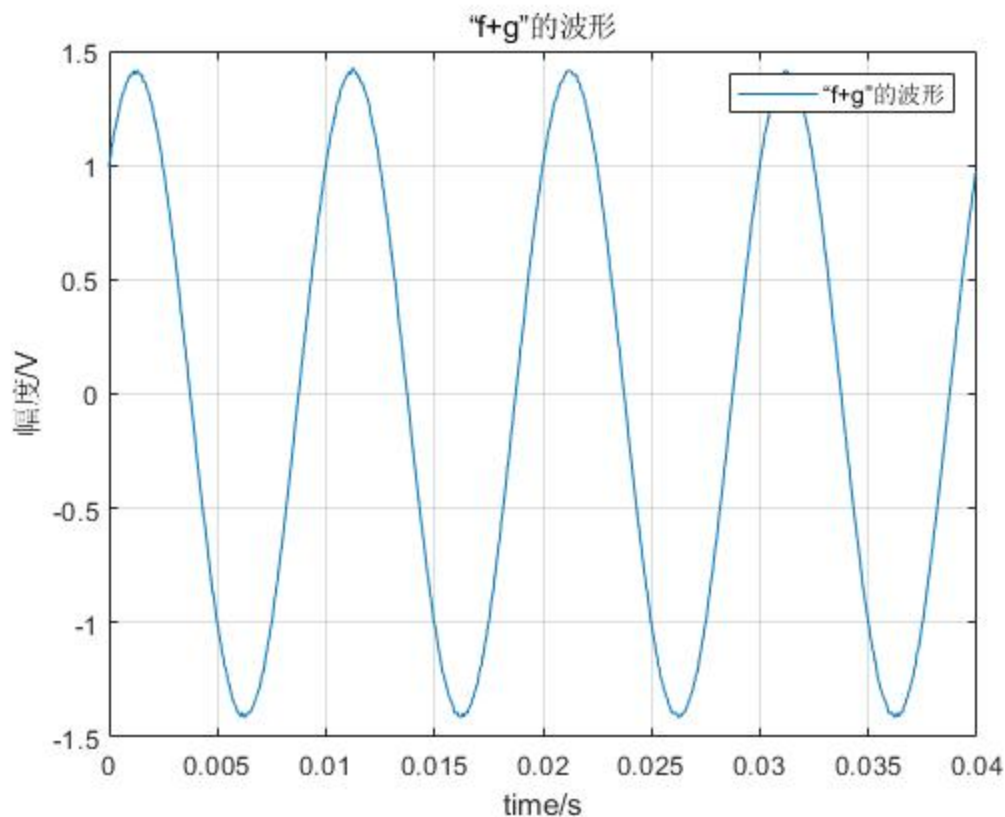


问题 2

以函数 $A\cos(\omega t + \theta)$ 的形式写出“f+g”的方程表达式。用示波器测量并画出“f+g”的波形，其是否与计算值相符？

因为和差化积公式 $\cos\omega t + \cos(\omega t + 90) = \sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4)$

所以幅值大概是 1.414，测量值符合计算值



问题 3

保持接线不变，将相位设置为 0 度和 180 度，再设置为 0 度和 -180 度。这些设置下，求和的输出信号是什么？为什么？

都是 0

因为 $\cos\omega t + \cos(\omega t + 180) = \cos\omega t - \cos\omega t = 0$

$\cos\omega t + \cos(\omega t - 180) = \cos\omega t - \cos\omega t = 0$

表 5.1 合成幅值读数

相位 (度)	合成信号的幅值 (V_{pk})	相位 (度)	合成信号的幅值 (V_{pk})
0	2.0180	210	-1.7592
30	1.7592	240	-0.9975
60	0.9976	270	0.0000
90	0.0000	300	0.9975
120	-0.9976	330	1.7592

150	-1.7592	360	2.0180
180	-2.0180		

问题 4

观察表 5.1 中 V_{pk} 的规律, 结合欧拉公式, 推导合成信号“f+g”的方程。

$$V_{pk}=2\cos(\omega t+\phi)$$

ϕ 即 DAC 信号相位

欧拉公式 $e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$

$$V_{pk}=\cos(\omega t+\phi)+\sin(\omega t+\phi+90)=2\cos(\omega t+\phi)$$

问题 5

余弦波的十个谐波都设置为 1 后, 它的峰值振幅是多少? 基波是奇函数还是偶函数? 合成波是奇函数还是偶函数?

最大振幅 10V

偶函数

偶函数

问题 6

正弦波的十个谐波都设置为 1 后, 它的峰值振幅是多少? 基波是奇函数还是偶函数? 合成波是奇函数还是偶函数?

7.42V

奇函数

奇函数

问题 7

上述两个观察到的平均值是多少? 你是如何测量的?

第一个测出是 0, 第二个是 0, 把 fc 旋转到最左边测直流分量

$$f(t)=U\sin(\omega t)*\cos(\omega t)=U*1/2*\sin(2\omega t)$$

$$\text{第一个平均值} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

$$f(t)=U\sin(3\omega t)*\cos(\omega t)$$

$$\text{因为 } \sin a \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(a+\beta) + \sin(a-\beta)]$$

$$f(t)=U*1/2*[\sin 4\omega t + \sin 2\omega t]$$

$$\text{第二个平均值} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

问题 8

上述两个观察到的平均值是多少？你是如何测量的？

第一个测出是 2.03V，第二个是 0，把 fc 旋转到最左边测直流分量

$$f(t) = U \cos(wt) * \cos(wt) = U * 1/2 * [\cos(2wt) + 1]$$

$$\text{第一个平均值} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0.5U \quad U=4V \text{ 时, 符合平均值 } 2V$$

$$f(t) = U \cos(3wt) * \cos(wt)$$

$$\text{因为 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$f(t) = U * 1/2 * [\cos 4wt + \cos 2wt]$$

$$\text{第二个平均值} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

问题 9

在乘法器系统功能定义的基础上，推导问题 7 或问题 8 中任意一次平均值的计算过程。

$$f(t) = U \sin(wt) * \cos(wt) = U * 1/2 * \sin(2wt)$$

$$\text{第一个平均值} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

$$f(t) = U \sin(3wt) * \cos(wt)$$

$$\text{因为 } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$f(t) = U * 1/2 * [\sin 4wt + \sin 2wt]$$

$$\text{第二个平均值} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

$$f(t) = U \cos(wt) * \cos(wt) = U * 1/2 * [\cos(2wt) + 1]$$

$$\text{第一个平均值} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0.5U$$

$$f(t) = U \cos(3wt) * \cos(wt)$$

$$\text{因为 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$f(t) = U * 1/2 * [\cos 4wt + \cos 2wt]$$

$$\text{第二个平均值} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

表 5.2 傅里叶级数数据表

sine harmonic (谐波次数)	直流幅值 (输入正弦波) (V)	直流幅值 (输入余弦波) (V)
1	0	0.93
2	0.27	0
3	0.93	0.45
4	0	0
5	0	0
6	0	0.95
7	1.94	0

问题 10

表 5.2 中测量值与计算值是否相符，举例说明。

相符

比如输出正弦波只有 2、3、7 次谐波存在直流分量，且基本符合 0.3、1、2V，其余均为 0V

输入余弦波只有 1、3、6 次谐波存在直流分量，且基本符合 1、0.5、1V，其余均为 0V

表 5.3 手动扫频仪数据表格

输入频率 (Hz)	可调低通滤波器 峰峰值 (V_{pp})	直流分量 即：峰峰值 的一半 (V)	输入值 (谐波求和器cos; sin)	理论计算结果 (V)
1000	2.02	1.01	1, 0	1
2000	0.60	0.30	0, 0.3	0.3
3000	2.20	1.10	0.5, 1	1.118
4000	0	0	0, 0	0
5000	0	0	0, 0	0
6000	1.80	0.90	1, 0	1
7000	3.98	1.99	0, 2	2
直流输入	2.06	1.03		0.5

问题 11

举例说明 (3000Hz) 直流分量的计算公式。

$$0.5\cos\omega T + \sin\omega T = 1.118\cos(\omega T + \theta)$$

所以 3000HZ 直流分量的幅值理论上是 1.118V

表 5.4 方波信号测量数据表 (选做)

输入频率 (Hz)	直流分量 (V)	归一化值 (V)	理论计算 (V)
1000	1.55	1	1
2000	0.00	0	0
3000	0.51	0.329	0.333
4000	0.00	0	0
5000	0.25	0.161	0.2
6000	0.00	0	0
7000	0.19	0.123	0.143
直流输入	2.499		2.499

问题 12 (选做)

将表 5.4 的测得的傅里叶级数系数与理论值相比较, 是否测量与理论相符合。写出奇次谐波的系数的计算公式?

基本符合

对于奇次谐波, 按照公式计算

$$b_n = 2E/n\pi (n=1,3,5,\dots)$$

测量出的值与理论计算值基本符合

问题 13 (选做)

解释表 5.4 中有些谐波分量几乎为 0 的原因?

对于偶次谐波

根据公式计算 $b_n = 0$ ($n=2,4,6,\dots$)

所以偶次谐波分量几乎为零

问题 14 (选做)

能在占空比为 20% 的方波中检测到偶次谐波吗?

能, 对于占空比 20% 的方波

$$a_n = \sin 2\pi n\tau (n=1,2,3,\dots)$$

$$b_n = (1 - \cos 2\pi n\tau) (n=1,2,3,\dots)$$

当 n 为偶数时, a_n 和 b_n 不恒为 0

三、实验过程与数据分析

(可以写实验中遇到的问题及解决方式, 以及叙述具体实验过程, 记录实验数据在原始数据表格, 如需要)

引用原始数据表格，请标注出表头，如“实验记录见表 2-”）

1. 欧拉公式

打开 SIGEx 程序，使用 Lab7 选项卡进行实验，如图 5.2。在这个选项卡中，示波器（Scope）和 XY 图（XY Graph）中波形是根据示波器探头的实测信号显示的，相量图是根据 DAC-1、DAC-0 的信号输出绘制的极坐标图。相量图

（PHASOR DIAGRAM）可以计算输出信号（f+g）的向量和幅度信息，跟输入信号 DAC1 和 DAC0 的幅度和相位（Reference Amplitude、Phase）有关。

Lab7 选项卡中，Reference Amplitude 表示 DAC 输入信号的幅值（Vpk），范围：0~10，phase 表示 DAC 输入信号初相位，范围：0~360。

Phase follow 按钮表示相位跟随，当按钮上绿灯亮起时表示相位跟随开启。

打开“Phase follow”模式之后，DAC-0 信号的相对相位将自动设置为 DAC-1 信号相位的负值。即，这两个信号将变成“共轭”信号，两个相量关于实轴对称。

改变 DAC-1 的相位设置，观察相量图所示的相量相对运动，这两个矢量的和将落在实轴上。

按照图 5.3 接线，将 CH1 示波器引线连至 DAC-1 输出，将 CH0 连至 DAC-0 输出，各项参数的设置如下：

- ①DAC1：参考幅值 = 1；相位 = 0 度；
- ②DAC0：参考幅值 = 1；相位 = -90 度。

更改设置如下：

- ①参考幅值 DAC1 = 1；相位 = 0 度；
- ②参考幅值 DAC0 = 1；相位 = 90 度。

保持 CH1 示波器引线与 DAC1 输出相连，将 CH0 示波器引线移至加法器“f+g”的输出。观察两个正弦波的和。

已知正弦波是两个互为共轭的复指数函数之和，可以用实验板显示这些共轭信号，设置如下：

- ①将 phase-DAC1 下面的相位跟随按钮“Phase follow”开关打开（绿灯亮）；
- ②参考幅值 DAC1 = 1，参考幅值 DAC0 = 1。

将示波器引线 CH1 连至 DAC1，将示波器引线 CH0 连至加法器输出“f+g”。

改变相位（phase-DAC1）的设置，从 0 开始，以 30 度为步进，逐渐增大至 360 度，观察并记录合成信号“f+g”的幅值（V_{pk}）。注意：请观察相量图（PHASOR DIAGRAM），当所得到的信号落在负平面（即左半平面）的时候，将幅值记为负值。将测量数据记录在表 5.1 中。

2. 用正弦波和余弦波构造波形

一个简单的相位为零的余弦波形可以表示成：

$$f(t) = \cos(\omega t)$$

频率为 n 倍的余弦波形可以简单地表示成：

$$f(t) = \cos(n\omega t)$$

周期信号可以进行傅里叶级数展开，具有谐波性。利用 Lab8 选项卡中的“谐波求和器”（HARMONICS SUMMER）来观察并求基频信号（即 n=1 的情况）的多路谐波，如图 5.4。

Lab8 选项卡中，左侧 SCOPE-X8 为示波器，示波器下面的 sine harmonic（正弦谐波）表示谐波次数，sine phase（相位）表示初始相位。

Lab8 选项卡中, 右侧是仿真的“谐波求和器”(HARMONICS SUMMER), 显示的是谐波叠加后的波形, 只与参数设置相关, 与示波器探头的测量值无关。波形显示窗口的下面两行参数, 设置的分别是正弦波、余弦波的基波和九个谐波的振幅, 可以在数值输入控件输入每个正弦曲线的振幅, 范围: 0~10。“谐波求和器”(HARMONICS SUMMER) 左下角, 有一个“to DAC-0”按钮开关, 按钮上绿灯亮起时表示该波形通过 DAC-0 通道输出。

使用 Lab8 选项卡进行实验, 把选项卡右侧所有正弦波的幅值设置成 0, 将余弦组基波 ($n=1$) 的幅值设成 1, 其它的谐波全都设置成 0。然后, 依次从余弦波二次谐波到十次谐波, 将其幅值设置改成 1。在改变设置的过程中, 请注意合成信号是如何变化的。

改变参数, 把所有余弦波的幅值设置成 0, 同时把正弦波的幅值从一次谐波 6 到十次谐波依次设置成 1。在改变设置的过程中, 请注意合成信号是如何变化的。

3.傅里叶级数

(1) 乘法器系统。

利用实验板构建一个乘法器系统: 假设图 5.5 中乘法器及可调低通滤波器

(Tunable LPF) 两个模块共同组成了这个乘法器系统。系统输入是 X、Y 两路信号, 系统输出是 XY, 系统功能是对输入信号进行乘法计算。通过调节 Tunable LPF 的 Gain (增益) 来调节上述乘法器系统的增益, 使得 X、Y 经过系统后得到的是没有损耗或放大的 XY。具体方式是:

使用 Lab8 选项卡进行实验, 按照图 5.5 接线, 将 sine harmonic 值设置成 1, sine phase 设置成 0, “to DAC-0”按钮开关关闭。

分别通过 CH0 通道观察 DAC-1, CH1 通道观察 Tunable LPF 的输出端 (out), 将 Tunable LPF 的 f_c (中心频率) 顺时针旋到最右, 调节 Tunable LPF 的 Gain (增益) 使 Tunable LPF 的输出等于 DAC-1 的输出幅值, 即 CH1 与 CH0 的峰峰幅值保持一致均为 $V_{pp}=4V$ 。

此时, DAC-1 输出的是一个正弦波, DAC-0 输出的是一个余弦波。此时 Tunable LPF 的输出平均值是多少? 将 sine harmonic 设置成 2, 再观察 Tunable LPF 的输出, 此时平均值是多少?

将 sine harmonic 值设置成 1, sine phase 设置成 90。此时, DAC-1 和 DAC-0 的输出都是余弦波, 接线如图 5.5 不变。此时, Tunable LPF 的输出平均值是多少? 将 sine harmonic 设置成 2, 再观察 Tunable LPF 的输出, 此时平均值是多少?

(2) 加入直流分量。

经过上述实验, 可以观察到乘法器系统的输出尽管有奇函数或偶函数, 但是输出波形均关于 X 轴对称。于是, 在接下来的实验中, 将加入一个直流偏置, 即将 sine phase 设置成 0, sine harmonic 值保持不变仍然为 1, 并将“to DAC-0”按钮打开, 其他谐波幅值参数设置如下:

①余弦幅值: 1, 0, 0.5, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0;

②正弦幅值: 0, 0.3, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0;

③直流电平 (DC LEVEL): 0.5。

此时, DAC-0 输出的波形公式可用

来表示, 其中 $N=10$, a_n 表示余弦幅值, b_n 表示正弦幅值, n 为 1~10 的自然数。

用示波器 CH0 接地 (GND)，CH1 观察 Tunable LPF 的输出信号，将 Tunable LPF 的 f_c (中心频率) 逆时针旋到最左，以此来模拟滤除高频谐波留下直流分量的过程。从 1 开始设置 sine harmonic 的值，记录乘法器系统输出波形的直流幅值 (此时输入为正弦波)，并填入表 5.2。每次观察时有可能须根据实际测量值调节示波器的参数。

然后，sine phase 设置成 90，这样就将正弦波改成了余弦波 ($\sin(\omega t + 90) = \cos(\omega t)$)，保持其他设置不变。从 1 开始设置 sine harmonic 的值，记录乘法器系统输出波形的直流幅值 (此时输入为余弦波)，并填入表 5.2。

(3) 手动扫频信号分析仪。

在接线图 5.5 的基础上，将乘法器系统 X 输入端连到信号发生器输出端 (FUNC OUT)。利用 Lab8 中的谐波求和器构建任意的波形，同时，启动函数信号发生器，设置如下：

①余弦幅值：1, 0, 0.5, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0;

②正弦幅值：0, 0.3, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0;

③直流电压：0.5;

④打开“to DAC-0”开关;

⑤函数信号发生器：频率设为 1000Hz，幅值设为 $4V_{pp}$ ，选择正弦波。

两个输入信号本身就是相对漂移的，那么其乘积也会缓慢的变化。由于乘积曲线在不断变化，那么它总会穿过感兴趣的测量点。这些点是乘积曲线上持续出现的极大值点和极小值点，每个周期出现两次。将这些极值取平均，就能得到直流分量。

改变函数信号发生器的频率，从 1000Hz 到 7000Hz，步进量为 1000Hz。记录直流输出的值，填入表 5.3。测量方式是测量极大值和极小值 (即峰峰值)，然后除以 2 得到直流分量。

四、实验体会与建议

本实验让我收获很大，动手能力增强的同时理论基础更加扎实。