电磁场与电磁波笔记

ZLL

August 06, 2024

目录

1. 矢量分析

> 笔者注: 严格的来讲, 矢量符号应该都是粗体, 但为了方便, 本文中部分矢量符号没有加粗

1.1. 矢量表达

1.1.1. 三维直角坐标系

此坐标系中任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z \\ &= \sum_i A_i \boldsymbol{e}_i \quad (i = 1, 2, 3 \text{ 表示 } x, y, z) \\ &= A_i \boldsymbol{e}_i \quad (\text{爱因斯坦求和约定})\end{aligned} \tag{1}$$

单位矢量 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ 满足:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \tag{2}$$

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k \tag{3}$$

其中 δ_{ij} 叫做克罗内克 δ 函数

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ , \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases} \tag{4}$$

ε_{ijk} 为列维-奇维塔符号

$$
\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (\text{当} i, j, k \text{ 是偶排列, 即}(1,2,3) \text{ 的循环排列}) \\ -1 & (\text{当} i, j, k \text{ 是奇排列, 即}(1,2,3) \text{ 的反循环排列}) \\ 0 & (\text{当} i = j, \text{或} i = k, \text{或} j = k) \end{cases} \tag{5}
$$

例: $e_z \times e_y = \varepsilon_{zyx} e_x + \varepsilon_{zyy} e_y + \varepsilon_{zyz} e_z = -e_x$

- 矢量点乘

$$
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (A_i e_i) \cdot \left(B_j e_j\right) = A_i B_j \left(e_i \cdot e_j\right) = A_i B_i \delta_{ij} = A_i B_i \tag{6}
$$

- 矢量叉乘

$$
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_i e_i) \times \left(B_j e_j\right) = A_i B_j \left(e_i \times e_j\right) = A_i B_j \varepsilon_{ijk} e_k \tag{7}
$$

例: 当 k 为 x 时, 上式为 $A_y B_z \varepsilon_{yzx} e_x + A_z B_y \varepsilon_{zyx} e_x = e_x \left(A_y B_z - A_z B_y\right)$, 此即为叉乘结果的 x 分量

叉乘结果也可写为

$$
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{8}
$$

一个列维-奇维塔符号的性质:

$$
\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \tag{9}
$$

由此可证明 $A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = B \cdot (C \times A)$, 过程如下

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{A}_{k} \cdot \left(\underbrace{B}_{i} \times \underbrace{C}_{j} \right) \\
&= A_k e_k \cdot \left(e_m B_i C_j \varepsilon_{ijm} \right) \\
&= \delta_{km} \varepsilon_{ijm} A_k B_i C_j = \varepsilon_{ijk} A_k B_i C_j \\
&= \varepsilon_{jki} A_k B_i C_j \quad (B \cdot (C \times A)) \\
&= \varepsilon_{kij} A_k B_i C_j \quad (C \cdot (A \times B))
\end{aligned} \tag{10}
$$

1.2. ∇ 算符运算

∇算符 读作 “nabla” 或 “del”, 其既有矢量性, 也有微分性

$$
\begin{aligned}
\nabla &= \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\
&= \boldsymbol{e}_i \partial_i
\end{aligned} \tag{11}
$$

- 标量场的梯度

$$
\nabla U(\boldsymbol{r}) = e_i \partial_i U(\boldsymbol{r}) \tag{12}
$$

- 矢量场的散度

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = e_i \partial_i \cdot A_j e_j = \delta_{ij} \partial_i A_j = \partial_i A_i \tag{13}
$$

- 矢量场的旋度

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= e_i\partial_i \times e_jA_j = \varepsilon_{ijk}e_k\partial_iA_j \\
&= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{14}
$$

几个典型性质:

1. 假设f, g都是标量, 则

$$\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g) \tag{15}$$

证明:

$$\nabla(fg) = e_i\partial_i(fg) = e_i(g(\partial_i f) + f(\partial_i g)) = g(\nabla f) + f(\nabla g) \tag{16}$$

2. 假设$\boldsymbol{A}$是矢量, 则

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{17}$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times A) &= \nabla \times (e_k \varepsilon_{mnk} \partial_m A_n) \\
&= \left(e_j \partial_j\right) \times (e_k \varepsilon_{mnk} \partial_m A_n) \\
&= e_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} \partial_j \partial_m A_n \\
&= e_i \left(\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}\right) \partial_j \partial_m A_n \\
&= e_i \partial_j \partial_i A_j - e_i \partial_j \partial_j A_i \\
&= e_i \partial_i \left(\partial_j A_j\right) - \partial_j^2 e_i A_i \\
&= \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla u) &= \nabla \times (e_i \partial_i u) \\
&= e_k \varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i u \\
&= -e_k \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j u \\
&= -\nabla \times \left(\partial_j e_j u\right) \\
&= -\nabla \times (\nabla u) = 0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{F} \cdot \nabla) \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G} (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) \tag{20}
$$

1.3. 矢量分析意义

1.3.1. 微元

- 线元

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{r} = x e_x + y e_y + z e_z = u_i e_i \\
\boldsymbol{r}' = (u_i + \mathrm{d} u_i) e_i
\end{gathered}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \\
&= e_x \,\mathrm{d} x + e_y \,\mathrm{d} y + e_z \,\mathrm{d} z = e_i \,\mathrm{d} u_i
\end{aligned}
\tag{22}
$$

- 面元

1. 一定是一个平面
2. 有方向(法向方向)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= e_x \,\mathrm{d}S_x + e_y \,\mathrm{d}S_y + e_z \,\mathrm{d}S_z \\
\mathrm{d}S_x &= \mathrm{d}y \,\mathrm{d}z e_x \\
\mathrm{d}S_y &= \mathrm{d}x \,\mathrm{d}z e_y \\
\mathrm{d}S_z &= \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y e_z
\end{aligned} \tag{23}
$$

- 体积元

$$
\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \tag{24}
$$

1.3.2. 标量函数 (场) 的方向导数及梯度

标量场 $T(x, yz)$

等值面 $T(x, y, z) = C$

方向导数:

$$
\frac{\partial T(M_0)}{\partial l}\Big|_{e_l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{T(M) - T(M_0)}{\Delta l} \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \mathrm{d}l e_l = e_i \,\mathrm{d}u_i \\
&\Rightarrow e_l = e_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}l}
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial l} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l} \\
&= \left(\frac{\partial T}{\partial u_j} e_j\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}l} e_i\right) \\
&= \nabla T \cdot \boldsymbol{e}_l
\end{aligned} \tag{27}
$$

这说明:
1. 标量场沿任意方向的方向导数等于其梯度在该方向上的投影
2. 标量场的梯度是一个矢量, 方向是标量场变化最快的方向, 垂直于等值面

1.3.3. 矢量场的通量和散度

- 矢量线

  矢量线上任一点的切线方向与矢量场的在该点的方向相同, 即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 平行 $\boldsymbol{F}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_x} = \frac{\mathrm{d}y}{F_y} = \frac{\mathrm{d}z}{F_z} \tag{28}$$

- 通量

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{29}$$

- 散度

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} \tag{30}$$

- 散度定理

  将散度的定义式稍作变换即得散度定理: **矢量场的散度在体积上的积分等于矢量场在该体积的闭合面上的面积分**

$$\int_V \nabla \cdot F \,\mathrm{d}V = \oint_S F \cdot \mathrm{d}S \tag{31}$$

1.3.4. 矢量场的环流与旋度

- 环流

矢量场沿一条**闭合**路径的线积分

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{32}$$

- 环流面密度

$$\mathrm{rot}_{\mathrm{n}} \boldsymbol{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{33}$$

- 旋度

  取不同的面元 ΔS, 环流面密度的值不同, 但是在某个特定方向下, 环流密度有最大值, 为解决这个问题, 引入旋度的概念

  旋度定义为一个矢量, 方向是使环流密度取得最大值的面元法线方向, 大小为该最大环流密度的值

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{n} \lim_{\Delta S \to 0} \left. \frac{\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \right|_{\max} = \nabla \times \boldsymbol{F} \tag{34}$$

- 斯托克斯定理

  矢量场的旋度在曲面上的积分等于矢量场在限定曲面的闭合曲线上的线积分

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{35}$$

1.4. 无旋场与无散场

1.4.1. 无旋场

若一个矢量场的旋度处处为 0, 即

$$\nabla \times F \equiv 0 \tag{36}$$

则称其为无旋场, 是由散度源产生的 (如静电场)

由斯托克斯定理, 无旋场的曲线积分与路径无关, 只与起点和终点有关

- 一个结论: 标量场的梯度的旋度恒等于 0

$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0 \tag{37}$$

由此得到: 一个无旋场总可以表示成某个标量场的梯度.

1.4.2. 无散场

类似的, 无散场满足任一点散度为 0

$$\nabla \cdot F \equiv 0 \tag{38}$$

它是由漩涡源产生的 (如静磁场)

由高斯定理, 无散场通过任何闭合曲面的通量恒等于 0

- 一个结论: 矢量场的旋度的散度等于 0

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0 \tag{39}$$

由此得到: 无散场总可以表示为一个矢量场的旋度

1.5. 拉普拉斯运算与格林定理

1.5.1. 拉普拉斯运算

对标量的梯度再求散度, 称为对标量的拉普拉斯运算, 记作

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla u) &= \nabla^2 u \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
&= \partial_i^2 u
\end{aligned}
\tag{40}
$$

对矢量场的拉普拉斯运算定义为

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 F &= \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times (\nabla \times F) \\
&= e_x \nabla^2 F_x + e_y \nabla^2 F_y + e_z \nabla^2 F_z \\
&= e_i \nabla^2 F_i = e_i \left(\partial_j^2 F_i\right)
\end{aligned}
\tag{41}
$$

1.5.2. 格林定理

格林第二恒等式: ψ, φ 是两个任意标量函数, 则

$$
\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) \,\mathrm{d}V = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \mathrm{d}S \tag{42}
$$

1.6. 亥姆霍兹定理

在有限的区域中, 任一矢量场由它的散度, 旋度和边界条件唯一地确定, 且可表示为一个无散场和一个无旋场的叠加