电磁场与电磁波笔记

ZLL

August 06, 2024

目录

1. 矢量分析

笔者注: 严格的来讲, 矢量符号应该都是粗体, 但为了方便, 本文中部分矢量符号没有加粗

1.1. 矢量表达

1.1.1. 三维直角坐标系

此坐标系中任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z \\ &= \sum_i A_i \boldsymbol{e}_i \quad (i = 1, 2, 3 \text{ 表示 } x, y, z) \\ &= A_i \boldsymbol{e}_i \quad (\text{爱因斯坦求和约定}) \end{aligned} \tag{1}$$

单位矢量 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ 满足:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \tag{2}$$

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k \tag{3}$$

其中 δ_{ij} 叫做克罗内克 δ 函数

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\ , & i = j \\ 0\ , & i \neq j \end{cases} \tag{4}$$

ε_{ijk} 为列维-奇维塔符号

$$
\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (\text{当} i, j, k \text{ 是偶排列, 即}(1,2,3) \text{ 的循环排列}) \\ -1 & (\text{当} i, j, k \text{ 是奇排列, 即}(1,2,3) \text{ 的反循环排列}) \\ 0 & (\text{当} i = j, \text{或} i = k, \text{或} j = k) \end{cases} \tag{5}
$$

例: $e_z \times e_y = \varepsilon_{zyx} e_x + \varepsilon_{zyy} e_y + \varepsilon_{zyz} e_z = -e_x$

- 矢量点乘

$$
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (A_i e_i) \cdot \left(B_j e_j\right) = A_i B_j \left(e_i \cdot e_j\right) = A_i B_i \delta_{ij} = A_i B_i \tag{6}
$$

- 矢量叉乘

$$
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_i e_i) \times \left(B_j e_j\right) = A_i B_j \left(e_i \times e_j\right) = A_i B_j \varepsilon_{ijk} e_k \tag{7}
$$

例: 当 k 为 x 时, 上式为 $A_y B_z \varepsilon_{yzx} e_x + A_z B_y \varepsilon_{zyx} e_x = e_x \left(A_y B_z - A_z B_y\right)$, 此即为叉乘结果的 x 分量

叉乘结果也可写为

$$
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{8}
$$

一个列维-奇维塔符号的性质:

$$
\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \tag{9}
$$

由此可证明 $A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = B \cdot (C \times A)$, 过程如下

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{A}_{k} \cdot \left(\underbrace{B}_{i} \times \underbrace{C}_{j}\right) \\
&= A_k e_k \cdot \left(e_m B_i C_j \varepsilon_{ijm}\right) \\
&= \delta_{km} \varepsilon_{ijm} A_k B_i C_j = \varepsilon_{ijk} A_k B_i C_j \\
&= \varepsilon_{jki} A_k B_i C_j \quad (B \cdot (C \times A)) \\
&= \varepsilon_{kij} A_k B_i C_j \quad (C \cdot (A \times B))
\end{aligned}
\tag{10}
$$

1.2. ∇ 算符运算

∇算符 读作 “nabla” 或 “del”, 其既有矢量性, 也有微分性

$$
\begin{aligned}
\nabla &= \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\
&= \boldsymbol{e}_i \partial_i
\end{aligned}
\tag{11}
$$

- 标量场的梯度

$$
\nabla U(\boldsymbol{r}) = e_i \partial_i U(\boldsymbol{r}) \tag{12}
$$

- 矢量场的散度

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = e_i \partial_i \cdot A_j e_j = \delta_{ij} \partial_i A_j = \partial_i A_i \tag{13}
$$

- 矢量场的旋度

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= e_i \partial_i \times e_j A_j = \varepsilon_{ijk} e_k \partial_i A_j \\
&= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{14}
$$

几个典型性质:

1. 假设f, g都是标量, 则

$$\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g) \tag{15}$$

证明:

$$\nabla(fg) = e_i \partial_i (fg) = e_i (g(\partial_i f) + f(\partial_i g)) = g(\nabla f) + f(\nabla g) \tag{16}$$

2. 假设$\boldsymbol{A}$是矢量, 则

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{17}$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times A) &= \nabla \times (e_k \varepsilon_{mnk} \partial_m A_n) \\
&= \left(e_j \partial_j\right) \times (e_k \varepsilon_{mnk} \partial_m A_n) \\
&= e_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} \partial_j \partial_m A_n \\
&= e_i \left(\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}\right) \partial_j \partial_m A_n \\
&= e_i \partial_j \partial_i A_j - e_i \partial_j \partial_j A_i \\
&= e_i \partial_i \left(\partial_j A_j\right) - \partial_j^2 e_i A_i \\
&= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla u) &= \nabla \times (e_i \partial_i u) \\
&= e_k \varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i u \\
&= -e_k \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j u \\
&= -\nabla \times \left(\partial_j e_j u\right) \\
&= -\nabla \times (\nabla u) = 0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{F} \cdot \nabla) \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G} (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) \tag{20}
$$

1.3. 矢量分析意义

1.3.1. 微元

- 线元

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= x e_x + y e_y + z e_z = u_i e_i \\
\boldsymbol{r}' &= (u_i + \mathrm{d} u_i) e_i
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \\
&= e_x \,\mathrm{d}x + e_y \,\mathrm{d}y + e_z \,\mathrm{d}z = e_i \,\mathrm{d}u_i
\end{aligned}
\tag{22}
$$

- 面元
  1. 一定是一个平面
  2. 有方向(法向方向)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= e_x \,\mathrm{d}S_x + e_y \,\mathrm{d}S_y + e_z \,\mathrm{d}S_z \\
\mathrm{d}S_x &= \mathrm{d}y \,\mathrm{d}z e_x \\
\mathrm{d}S_y &= \mathrm{d}x \,\mathrm{d}z e_y \\
\mathrm{d}S_z &= \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y e_z
\end{aligned} \tag{23}
$$

- 体积元

$$
\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \tag{24}
$$

1.3.2. 标量函数 (场) 的方向导数及梯度

标量场 $T(x, yz)$

等值面 $T(x, y, z) = C$

方向导数:

$$
\frac{\partial T(M_0)}{\partial l}|_{e_l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{T(M) - T(M_0)}{\Delta l} \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}l e_l &= e_i \,\mathrm{d}u_i \\
\Rightarrow e_l &= e_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}l}
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial l} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l} \\
&= \left(\frac{\partial T}{\partial u_j} e_j\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}l} e_i\right) \\
&= \nabla T \cdot \boldsymbol{e}_l
\end{aligned}
\tag{27}
$$

这说明:
1. 标量场沿任意方向的方向导数等于其梯度在该方向上的投影
2. 标量场的梯度是一个矢量, 方向是标量场变化最快的方向, 垂直于等值面

1.3.3. 矢量场的通量和散度

- 矢量线

  矢量线上任一点的切线方向与矢量场的在该点的方向相同, 即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 平行 $\boldsymbol{F}$

$$
\frac{\mathrm{d}x}{F_x} = \frac{\mathrm{d}y}{F_y} = \frac{\mathrm{d}z}{F_z} \tag{28}
$$

- 通量

$$
\Psi = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{29}
$$

- 散度

$$
\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} \tag{30}
$$

- 散度定理

  将散度的定义式稍作变换即得散度定理: **矢量场的散度在体积上的积分等于矢量场在该体积的闭合面上的面积分**

$$\int_V \nabla \cdot F \, \mathrm{d}V = \oint_S F \cdot \mathrm{d}S \tag{31}$$

1.3.4. 矢量场的环流与旋度

- 环流

  矢量场沿一条**闭合**路径的线积分

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{32}$$

  - 环流面密度

$$\mathrm{rot_n} \boldsymbol{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{33}$$

- 旋度

  取不同的面元 ΔS, 环流面密度的值不同, 但是在某个特定方向下, 环流密度有最大值, 为解决这个问题, 引入旋度的概念

  旋度定义为一个矢量, 方向是使环流密度取得最大值的面元法线方向, 大小为该最大环流密度的值

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{n} \lim_{\Delta S \to 0} \left. \frac{\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \right|_{\max} = \nabla \times \boldsymbol{F} \tag{34}$$

- 斯托克斯定理

  矢量场的旋度在曲面上的积分等于矢量场在限定曲面的闭合曲线上的线积分

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{35}$$

1.4. 无旋场与无散场

1.4.1. 无旋场

若一个矢量场的旋度处处为 0, 即

$$\nabla \times F \equiv 0 \tag{36}$$

则称其为无旋场, 是由散度源产生的 (如静电场)

由斯托克斯定理, 无旋场的曲线积分与路径无关, 只与起点和终点有关

- 一个结论: 标量场的梯度的旋度恒等于 0

$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0 \tag{37}$$

由此得到: 一个无旋场总可以表示成某个标量场的梯度.

1.4.2. 无散场

类似的, 无散场满足任一点散度为 0

$$\nabla \cdot F \equiv 0 \tag{38}$$

它是由漩涡源产生的 (如静磁场)

由高斯定理, 无散场通过任何闭合曲面的通量恒等于 0

- 一个结论: 矢量场的旋度的散度等于 0

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0 \tag{39}$$

由此得到: 无散场总可以表示为一个矢量场的旋度

1.5. 拉普拉斯运算与格林定理

1.5.1. 拉普拉斯运算

对标量的梯度再求散度, 称为对标量的拉普拉斯运算, 记作

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla u) &= \nabla^2 u \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \partial_i^2 u \end{aligned} \tag{40}$$

对矢量场的拉普拉斯运算定义为

$$\begin{aligned} \nabla^2 F &= \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times (\nabla \times F) \\ &= e_x \nabla^2 F_x + e_y \nabla^2 F_y + e_z \nabla^2 F_z \\ &= e_i \nabla^2 F_i = e_i \left(\partial_j^2 F_i\right) \end{aligned} \tag{41}$$

1.5.2. 格林定理

格林第二恒等式: ψ, φ 是两个任意标量函数, 则

$$\int_V \left(\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi\right) \mathrm{d}V = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) \mathrm{d}S \tag{42}$$

1.6. 亥姆霍兹定理

在有限的区域中, 任一矢量场由它的散度, 旋度和边界条件唯一地确定, 且可表示为一个无散场和一个无旋场的叠加

2. 电磁场的基本规律

2.1. 媒质的电磁特性

2.1.1. 电介质的极化 电位移矢量

1. 电介质内部的电场强度可视为自由电荷产生的外电场和极化电荷产生的附加电场的叠加

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}' \tag{43}$$

2. 极化强度

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V} \tag{44}$$

   - 对于线性和各向同性介质，极化强度和电解质中的合成电场强度成正比

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{45}$$

   其中 χ_e 为电极化密度

3. 极化电荷
   - 极化电荷体密度

$$\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{46}$$

   - 电介质表面极化电荷面密度

$$\rho_{SP} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}_n \tag{47}$$

4. 电介质的本构关系
   - 电位移矢量

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \\
&= (1+\chi_e)\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \\
&= \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{48}
$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ 为介电常数，$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ 为相对介电常数

2.1.2. 磁介质的磁化 磁场强度

1. 和电介质类似, 磁介质中的磁感应强度是真空中传导电流产生的磁感应强度和磁化电流产生的磁感应强度的叠加，即

$$
\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}' \tag{49}
$$

2. 磁化强度

$$
\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \boldsymbol{p}_{mi}}{\Delta V} \tag{50}
$$

- 对于线性和各向同性介质，磁化强度和电介质中的磁场强度成正比，即

$$
\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{51}
$$

其中 χ_m 称为磁化率，磁场强度的定义为

$$
\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{52}
$$

3. 磁化电流
   - 磁介质内磁化电流体密度

$$\boldsymbol{J}_M = \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{53}$$

- 表面

$$\boldsymbol{J}_{SM} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{e}_n \tag{54}$$

4. 磁介质的本构关系

$$\boldsymbol{B} = (1 + \chi_m)\mu_0 \boldsymbol{H} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \tag{55}$$

μ_r — 相对磁导率，μ — 磁导率

2.2. 媒质的传导特性

1. 欧姆定理的微分形式

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{56}$$

2. 电场在导电媒质做功为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \rho \,\mathrm{d}V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{E} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}V \,\mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \,\mathrm{d}V \,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{57}$$

可以看出，电场对单位体积提供的功率为 $p = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$

2.3. 麦克斯韦方程组

2.3.1. 积分形式

$$
\begin{aligned}
&\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \\
&\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \, \mathrm{d}V
\end{aligned}
\tag{58}
$$

2.3.2. 微分形式

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho
\end{aligned}
\tag{59}
$$

对于线性，各向同性媒质，代入媒质本构关系 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，得到关于$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 的方程

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{60}
$$

如果是**时谐电磁场**，则可将方程组改写为复数形式

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D} \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{B} \\
\nabla \times \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{D} &= \rho
\end{aligned} \tag{61}
$$

2.3.3. 电磁场的边界条件

- $\boldsymbol{E}$ 的切向分量一定连续
- $\boldsymbol{D}$ 的法向分量可能不连续，其不连续分量由自由面电荷密度决定，具体为

$$\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{62}$$

- $\boldsymbol{B}$ 的法向分量一定连续
- $\boldsymbol{H}$ 的切向分量可能不连续，其不连续分量由自由面电流密度决定，具体为

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_S \tag{63}$$

其中，单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 由媒质 2 指向媒质 1

两种特殊情况：一边的媒质为导体，一边的媒质为理想介质；两边是不同的理想介质

2.4. 电磁场的位函数

- 矢量位与标量位

  令 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ ，称 $\boldsymbol{A}$ 为电磁场的矢量位，则

$$
\begin{gathered}
\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A}) \\
\Rightarrow \nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0
\end{gathered} \tag{64}
$$

  这说明 $\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ 可以用一个标量函数的梯度来表示（将该标量函数称为电磁场的标量位），即

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \tag{65}$$

  通过规定 $\boldsymbol{A}$ 的散度，可以得到唯一的 $\boldsymbol{A}$ 和 φ，一般规定（洛仑兹条件）

$$\nabla \cdot A = -\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{66}$$

2.5. 电磁场的能量

- 在线性、各向同性的媒质中, 电场能量密度, 磁场能量密度, 电磁场能量密度为

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} \\ w_m &= \frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \\ w &= w_e + w_m \end{aligned} \tag{67}$$

- 坡印廷矢量（能流密度矢量）

  表示穿过与能量流动方向相垂直的单位面积的功率

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{68}$$

- 坡印廷定理

$$\begin{gathered} \nabla\cdot\boldsymbol{S} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right) + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} = 0 \\ \text{进入的电磁能量功率} + \text{电磁场能量增加功率} + \text{损耗功率} = 0 \end{gathered} \tag{69}$$

2.6. 时谐电磁场

2.6.1. 复数表示

设 $u(\boldsymbol{r},t)$ 是一个以角频率 ω 变化的标量函数，表达式为:

$$u(\boldsymbol{r},t) = u_m(\boldsymbol{r})\cos[\omega t + \phi(\boldsymbol{r})] \tag{70}$$

可以通过复数取实部的方式表示为

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r},t) &= \mathrm{Re}\left\{u_m(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\phi(\boldsymbol{r})}e^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\dot{u}(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \end{aligned} \tag{71}$$

其中 $\dot{u}(\boldsymbol{r}) = u_m(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\phi(\boldsymbol{r})}$，称为 u 的复数表示，复矢量只与空间有关，与时间无关，因为默认我们知道了其角频率

2.6.2. 复电容率和复磁导率

电导率为有限值的导电媒质存在欧姆损耗；电介质、磁介质中存在极化损耗和磁化损耗

在时谐场中，有

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} = \mathrm{j}\omega\left(\varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_c\boldsymbol{E} \tag{72}$$

其中 ε_c 称为等效复电容率

$$\varepsilon_c = \varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega} \tag{73}$$

2.6.3. 平均坡印廷矢量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_{av} &= \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{S}\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \boldsymbol{S}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*] \end{aligned} \tag{74}$$

3. 均匀平面波的传播

平面波：等相位面为无穷大平面的电磁波

均匀平面波：等相位面上电场和磁场的方向、振幅都保持不变的平面波

3.1. 理想介质中的的均匀平面波

假设在无限大的无源空间中，充满线性、各向同性的均匀介质。时谐电磁场满足亥姆霍兹方程（这里暂时仅研究电场）

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \quad (k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}) \tag{75}$$

假设沿 z 轴传播，则 $\boldsymbol{E}$ 不是 x 或 y 的函数，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} = 0 \tag{76}$$

则原矢量方程可化为以下的分量式

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 E_x}{\mathrm{d}z^2} + k^2 E_x = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}z^2} + k^2 E_y = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 E_z}{\mathrm{d}z^2} + k^2 E_z = 0 \end{cases} \tag{77}$$

由于

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \Rightarrow E_z = 0 \end{gathered} \tag{78}$$

所以又可化为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 E_x}{\mathrm{d}z^2} + k^2 E_x = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}z^2} + k^2 E_y = 0 \end{cases} \tag{79}$$

类似的，磁场也可化简

结论：均匀平面波的电场强度和磁场强度都垂直于波的传播方向 —— 横电磁波（TEM 波）

解此方程（x 分量），得

3.2. 导电媒质中的均匀平面波

3.3. 电磁波的极化

3.4. 均匀平面波的反射与透射

4. 导行电磁波

5. 电磁辐射