1.2 Considerações sobre a conversão analógico-digital

Os conversores A/D utilizados são de 16 bits. Assim, os valores discretizados variam de 0000h até 0FFFFh.

Supondo que o sinal de entrada de um módulo varia de Vo a Vf **[V]** então podemos estabelecer a seguinte relação:

Vf_________65535d (ou 0FFFFh)

V__________d

Vo_________0d (ou 0000h)

Claramente, verificamos que podemos relacionar um sinal de tensão de entrada *v* com um valor digital correspondente *d* através da relação;

v = (d(vf-vo)+65553vo)/65535 **(2)**

Assim se d = 1:

v = SPAN/65535 + vo

Se SPAN = (25 - 1) V = 24 V
e vo = 1 V

v = 3.6E-4+1=1.0003662 V

Se d = 2:

v=24*2/65535+1= 1.0007324 V

A diferença entre ambos é de £ = 3.66 x 10^{-4}.

Logo, a cada nível digital correspondem 3.66 x 10^{-4} V. Ou seja, está é a resolução do conversor para o SPAN citado.

1.3 Consideração sobre a discretização

Se uma função f(x), definida no intervalo [xo,xf], é representada por pares de pontos (x_n, y_n) podemos definir o espaçamento entre as amostras ou cada par (x_n, y_n) como *e.*

De modo que :

i	Valor
0	xo
1	xo+e
2	xo+2e
3	xo+3e
4	xo+4e
.	.
.	.
.	.
n	xo+ne

Claramente observamos que:

xf = xo+ne **(3)**

Logo o valor ***e*** não pode ser inferior à £. Pois neste caso, a resolução do conversor A/D seria desrespeitada.

1.4 Definindo as funções básicas

Neste artigo iremos tabalhar com um número reduzido de equações. Porém estas funções podem ser alteradas conforme sua necessidade.

$$f(x) = \sin(ax + b) \qquad (4)$$

$$f(x) = \cos(ax + b) \qquad (5)$$

$$f(x) = ao + a1x + a2x^2 + ...anx^n \qquad (6)$$

$$f(x) = ao\exp(box) + a1\exp(b1x) + ...an\exp(bnx) \qquad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^n + a} \qquad (8)$$

Com n = 0,1,2........

Ainda:

$x \in R$ tal que $x \geq 0$.

1.5 Convenções utilizadas

Neste artigo quando nos referirmos às derivadas de uma função f(x) utilizaremos a convenção:

$$F^n(x) = df(x)/d^n x \quad (9)$$

Assim, f'(x) = df(x)/dx.

2 Ferramentas Matemáticas

2.1 Máximos e mínimos de funções

Uma função f(x) é crescente se [SIMMONS]:

$$x1<x2 \Leftrightarrow f(x1)<f(x2) \qquad (10)$$

E ainda, f(x) é crescente nos intervalos em que f'(x)>0 e decrescente nos intervalos em que f'(x)<0. Logo nos pontos críticos, isto é, os pontos que satisfazem f'(x) = 0 podemos avaliar a existência ou não de máximos ou mínimos.[SIMMONS].

Para nosso trabalho, basta que tenhamos alguns métodos para determinar pontos críticos e assim simular mais corretamente o comportamento da função f(x).

Assim para encontrarmos os valores dos pontos críticos precisamos apenas calcular:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \qquad (11)$$

Os pontos críticos serão dados pelo resultado da equação (11). Os respectivos valores de máximo e mínimo serão dados pela substituição dos pontos críticos em f(x).

Podemos calcular a derivada discreta de f(x) utilizando uma aproximação mostrada abaixo.

Seja,

$$f_n = \{(x_o,f(x_o)),(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),\ldots (x_{k-1},f(x_{k-1})),\ (x_k,f(x_k))\}$$

a derivada discreta de f_n pode ser aproximada por:

$$f'(xk) = \frac{f(xk) - f(xk-1)}{xk - xk - 1} \qquad (12)$$

Igualando (12) a zero obteremos os pontos críticos de f(x). Obtendo um conjunto de valores (xco,xc1,xc2…..xcn) que satisfaçam esta igualdade podemos substituí-los na função original f(x) e obtermos os pontos de máximo ou mínimo.

Computacionalmente porém é mais simples calcular os máximos e mínimos da função discreta e em seguida verificar cada um destes pontos através de (12).

Se um ponto xk é um máximo ou mínimo de f_n no intervalo [xo,xf] então basta verificar os valores de $f'(x_{k-1})$ e $f'(x_{k+1})$.

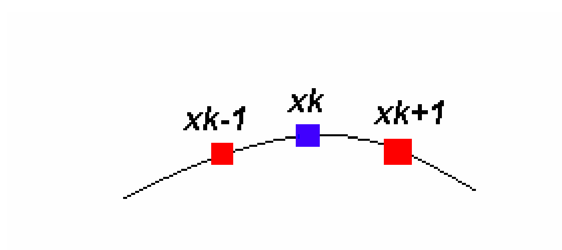

Fig 2.1- Máximo de uma função discreta

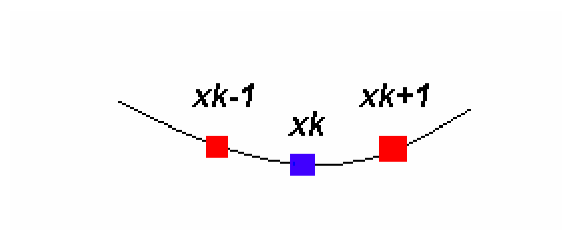

Fig 2.2- Mínimo de uma função discreta

Se f'(xk-1) > 0 e f'(xk+1) < 0 então podemos dizer que f(xk) é um máximo dentro do intervalo [xo,xf].

De modo semelhante, se f'(xk-1) < 0 e f'(xk+1) > 0 então f(xk) é um mínimo dentro do intervalo [xo,xf].

Ou ainda, precisamos verificar o sinal das seguintes expressões:

$$tg(\Theta_{k-1}) = (f(x_k)-f(x_{k-1}))/(x_k-x_{k-1}) \quad \textbf{(13)}$$

e

$$tg(\Theta_{k+1}) = (f(x_{k+1})-f(x_k))/(x_{k+1}-x_k) \quad \textbf{(14)}$$

Se os sinais das derivadas forem iguais então o ponto x_k não é um máximo ou mínimo local.

2.2 Derivadas primeiras das funções analisadas

Podemos calcular manualmente as derivadas das funções sugeridas por (4) até (8).

2.2.1 f(x) = sen(ax+b)

$$\frac{df(x)}{dx} = a\cos(ax+b) \qquad \textbf{(15)}$$

2.2.2 f(x) = cos(ax+b)

$$\frac{df(x)}{dx} = -a\sin(ax+b) \qquad \textbf{(16)}$$

2.2.3 f(x) = $a_n x^n$+ $a_{n-1} x^{n-1}$+........a_1x+ao

$$\frac{df(x)}{dx} = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \ldots.. + 2a_2 x + a_1 \qquad \textbf{(17)}$$

2.2.4 f(x) = a_nEXP(b_nx)+ a_{n-1}EXP(b_{n-1}x)......$a_o$exp(b_ox) (18)

$$\frac{df(x)}{dx} = a_n * b_n EXP(b_n * x) + \ldots\ldots a_o b_o EXP(b_o x) \qquad \textbf{(19)}$$

2.2.5 f(x) = (1/(x^n+a)

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{(x^n+a)^2} \qquad \textbf{(20)}$$

2.3 Análise das funções

2.3.1 f(x) = sen(ax+b)

Igualando (15) a zero, obteremos uma igualdade verdadeira apenas quando cos(ax+b)=0. A função cosseno é zero para os valores de π/2 e 3π/2 (considerando o intervalo [0,2 π]).

Assim obtemos as igualdades:

ax+b= π/2
e
ax+b= 3π/2

Portanto os máximos ou mínimos das funções serão dados por:

x1= (π/2-b)/(a)
e
x2= (3π/2-b)/(a) **(21)**

Por exemplo, se a = 1 e b = 0, x1= π/2 e x2 = 3π/2. E ainda, sen(x1)= 1 e sen(x2)=-1. Logo x1 é um máximo e x2 é um mínimo.

Assim dado a e b podemos calcular o máximo e mínimo da função f(x)=sen(ax+b). Um cálculo semelhante poderá ser feito para f(x)= cos(ax+b).

2.3.2 f(x)= f(x) = anxn+ an-1xn-1+........a1x+ao

Precisamos igualar (17) a zero. Assim obteremos:

$$a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \ldots.. + 2a_2 x + a = 0 \qquad \textbf{(22)}$$

Logo o problema se resolve a encontrar as raízes do polinômio acima. Para ordens muito grandes, sugerimos algoritmos numéricos para calcular estas raízes.

Neste caso, calcular numéricamente os máximos é mínimos pode ser mais simples.

2.3.3 $f(x) = a_nEXP(b_nx)+ a_{n-1}EXP(b_{n-1}x)......a_oexp(b_ox)$

A solução matemática para a equação resultante de igualdade de (18) por zero não é nada trivial. Porém podemos notar que quando x tende a infinito f(x) tende a zero, se os valores de an e bn são todos negativos. Vamos obter um caso particular de (7):

$$f(x)= aoEXP(box)+a1EXP(b1x) \quad (23)$$

Derivando a função acima:

f'(x)= aoboEXP(box)+a1b1EXP(b1x)

Igualando a zero:

aoboEXP(box)=a1b1EXP(b1x)

EXP(box)/EXP(b1x)=(a1b1)/(aobo)

Ou ainda EXP(box)/EXP(b1x)= k

Ou:

$$x = \frac{\ln(k)}{bo - b1} \quad (24)$$

Onde k = (a1b1)/(aobo).

Analisando (23):

- ✓ I- O limite de (23) quando x tende a zero será sempre ao+a1. Se bo e b1 forem maiores do que zero.
- ✓ II- O limite de (23) quando x tende a infinito depende do sinal de bo e b1. Se o sinais de bo e b1 forem ambos negativos a função tende a zero. Caso contrário o limite sempre será infinito.

Assim, além do cálculo numérico desta função, devemos estar atentos para estes pontos dados por (24), I e II. Deste modo a interpolação dos dados resultará em maior precisão da aproximação da função real f(x).

Ou seja:

bo (SINAL)	b1 (SINAL)	Limite para x tendendo a infinito
-	-	Zero
-	+	Infinito
+	-	Infinito
+	+	Infinito

Portanto, existe um número xL para o qual o valor de f(x) é tão grande que não há sentido em continuar o cálculo de f(x) além deste valor. Quando o limite tender a zero, basta buscar um número bem próximo de zero (por exemplo, 10^{-5}). Quando o limite tender a infinito, basta procurar um número bem grande (por exemplo 10^5). Logo podemos definir um valor limite para o cálculo: **ξ.**

2.3.4 $f(x) = (1/(x^n+a)$

Como:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{(x^n + a)^2}$$

Podemos igualar a expressão acima a zero. Deste modo:

Um máximo sempre ocorrerá para x igual a zero. Substituindo este valor em (8):

$$f(0) = 1/a \quad (25)$$

Vamos agora calcular o limite de f(x) para quando x tende a infinito.

$$\lim_{x->\infty} \frac{1}{x^n + a} = L$$

L será sempre infinito, pois a parcela x^n é sempre muito maior do que o valor de a. Assim L= oo.

Logo a equação (25) nos fornecerá sempre um mínimo para a função f(x). Logo podemos definir um valor x=**ξ** para o qual os valores de f(x) começam a ser muito grandes. Vamos analisar as descontinuidades quando x^n+a = 0. Isto faz com que a função f(x) tender a infinito.

Se a > 0:

se n é par :

$x^n = -a$

$\therefore$ Não existe um x que satisfaça a igualdade acima

se n é impar :

$x = \sqrt[n]{-a}$

Se a < 0, uma assíntota existe em x igual a raíz quadrada de a.

Exemplos:

i) f(x)= 1/(x^2-1). X deve ser diferente de +1 ou -1 porque isso resulta em um denominador igual a zero. Logo temos uma assíntota em x = 1 e x = -1.

ii) f(x)= 1/(x^3-1). X deve ser diferente de 1 pois isto anula o denominador.

iii) f(x) = 1/(x^3+27). X deve ser diferente de -3.

2.4 Um método discreto para máximos e mínimos

Dado uma função discreta Fn definida no intervalo [xo,fxf] cujos valores são dados por (1) podemos calcular os máximos e mínimos do vetor:

Y = (yo,y1,y2,y3,.........................yn) **(26)**

Logo possíveis máximos e mínimos de Fn são dados por:

Ymax= MAX(Y) **(27)**

Ymin = MIN(Y) **(28)**

Precisamos apenas verificar os valores das derivadas de F nos pontos Xmax e Xmin. Para isso, podemos utilizar as equações (12) até (14) para verificar estes valores.

2.5 Interpolação Polinomial Discreta

A interpolação discreto é apresentado. Vamos apresentar aqui um resumo comentado da teoria exposta neste livro.

Seja uma função dada por (1), queremos encontrar o polinômio:

$$Pm=a_o+a_1x+a_2x^2+.......a_nx^n \qquad (29)$$

Onde m é o grau do polinômio Pm.

Vamos definir o produto interno:

$$(f,g)=\sum_{k=0}^{n} f(xk)g(xk) \qquad (30)$$

O problema se resume a calcular os coeficientes ao,a1,a2,….an.

Definindo:

$$y=\begin{pmatrix} yo \\ y1 \\ y2 \\ . \\ . \\ yn \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p=\begin{pmatrix} Pm(xo) \\ Pm(x1) \\ Pm(x2) \\ . \\ . \\ Pm(xn) \end{pmatrix} \qquad (31)$$

Substituindo (31) em (29):

$$p=a_0\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots \\1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\ \vdots \\x_n\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}x_0^2\\x_1^2\\ \vdots \\x_n^2\end{pmatrix}+\ldots+a_m\begin{pmatrix}x_0^m\\x_1^m\\ \vdots \\x_n^m\end{pmatrix}.$$

Podemos então reescrever:

$$u_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_i = \begin{pmatrix} xo^i \\ x1^i \\ . \\ . \\ xn^i \end{pmatrix} \text{para i} = 1,2,....\text{m} \qquad \textbf{(32)}$$

Logo (29) se torna:

Pm = $a_o u_o + a_1 u_1 + \ldots\ldots\ldots a_m u_m$.

Os coeficientes ao,a1,a2….am são determinados através do sistema:

$$\begin{pmatrix} (uo,uo) & (u1,uo) & . & (um,uo) \\ (uo,u1) & (u1,u1) & . & (um,u1) \\ . & . & . & . \\ (uo,um) & (u1,um) & . & (um,um) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ao \\ a1 \\ . \\ am \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y,uo) \\ (y,u1) \\ . \\ (y,um \end{pmatrix} \quad \textbf{(33)}$$

Neste caso utilizamos uma base ortonormal :

B = $(1,x,x^2,x^3\ldots\ldots x^m)$.