ТЕОРЕМА 4. *Непрерывное взаимно-однозначное отображение компакта является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть X — компакт, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, и f — его непрерывное взаимно-однозначное отображение в пространство $\boldsymbol{R}^m$. Докажем, что обратное ему отображение f^{-1} множества $f(X) \subset \boldsymbol{R}^m$ в пространство $\boldsymbol{R}^n$ также непрерывно.

Пусть $y^{(0)}$, $y^{(k)} \in f(X)$, тогда

$$x^{(0)} = f^{-1}(y^{(0)}) \in X, \quad x^{(k)} = f^{-1}(y^{(k)}) \in X, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{36.28}$$

и пусть

$$\lim_{k \to \infty} y^{(k)} = y^{(0)}. \tag{36.29}$$

Покажем, что

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}. \tag{36.30}$$

Если бы это было не так, то существовало бы такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального m нашлось бы натуральное

$$k_m > m, \tag{36.31}$$

для которого выполнялось бы неравенство

$$|x^{(k_m)} - x^{(0)}| \geqslant \varepsilon, \tag{36.32}$$

при этом из (36.31) следовало бы, что

$$\lim_{m \to \infty} k_m = \infty.$$

В силу компактности множества X из последовательности $x_{k_m} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x^{(k_{m_j})}$, $j = 1, 2, \ldots$, предел которой принадлежал бы X:

$$\lim_{j \to \infty} x^{(k_{m_j})} = x \in X. \tag{36.33}$$

Из неравенства (36.32) следует, в частности, что $|x^{(k_{m_j})} - x^{(0)}| \geqslant \varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots$. Переходя к пределу при $j \to \infty$, получим $|x - x^{(0)}| \geqslant \varepsilon$. Следовательно, $x \neq x^{(0)}$, а это в силу взаимной однозначности отображения f означает, что

$$f(x) \neq f(x^{(0)}) = y^{(0)}. \tag{36.34}$$

Однако последовательность $\{y^{(k_{m_j})}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{y^{(k)}\}$, имеющей своим пределом точку $y^{(0)}$ и поэтому

$$\lim_{j \to \infty} y^{(k_{m_j})} = \lim_{k \to \infty} y^{(k)} = y^{(0)}. \tag{36.35}$$

Но в силу непрерывности отображения f в точке x, согласно (36.33), имеем

$$\lim_{j \to \infty} y^{(k_{m_j})} = \lim_{j \to \infty} f(x^{(k_{m_j})}) = f(x) \underset{(36.34)}{\neq} y^{(0)},$$

что противоречит равенству (36.35). Таким образом, справедливо равенство (36.30), т. е.

$$\lim_{k \to \infty} f^{-1}(y^{(k)}) = f^{-1}(y^{(0)}).$$

Это и означает непрерывность отображения f^{-1} в любой точке $y^{(0)} \in f(X)$. □

Доказанная теорема является обобщением теоремы о непрерывности функции, обратной к непрерывной строго монотонной на отрезке функции.

36.8. Равномерная непрерывность

В пункте 6.4 т. 1 было введено понятие равномерно непрерывной функции на отрезке. Это определение можно обобщить на случай отображений $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$. Если отображение f непрерывно на множестве X, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любой точки $x \in X$ существует такое $\delta > 0$ (тем самым зависящее от ε и x), что для всех точек $x' \in X$, для которых $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

Как и в случае функций одной переменной, отказ от зависимости числа δ от точки множества приводит к понятию равномерной непрерывности.

Определение 6. *Отображение $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, называется равномерно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x \in X$ и $x' \in X$ таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

В символической записи это определение выглядит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x,\, x' \in X,\ |x' - x| < \delta\colon \ |f(x') - f(x)| < \varepsilon, \qquad (36.36)$$

т. е. снова буквальное повторение записи определения равномерной непрерывности функции одной переменной (см. т. 1, п. 6.4).

Вспомнив определение диаметра множества (см. определение 33 в п. 35.3), по аналогии со случаем числовых функций одной переменной легко убедиться, что определение рав-