ТЕОРЕМА 4. *Непрерывное взаимно-однозначное отображение компакта является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть X - компакт, $X \subset \mathbf{R}^n$, и $f-$ его непрерывное взаимно-однозначное отображение в пространство $\mathbf{R}^m$. Докажем, что обратное ему отображение f^{-1} множества $f(X) \subset \mathbf{R}^m$ в пространство $\mathbf{R}^n$ также непрерывно.

Пусть $y^0, y^k \in f(X)$, тогда

$$x^{(0)} = f^{-1}(y^{(0)}) \in X, \qquad x^{(k)} = f^{-1}(y^{(k)}) \in X, \qquad k = 1, 2, ..., \tag{36.28}$$

и пусть

$$\lim_{k\to\infty} y^{(k)} = y^{(0)}. \tag{36.29}$$

Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}. \tag{36.30}$$

Если бы это было не так, то существовало бы такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального m нашлось бы натуральное

$$k_m > m, \tag{36.31}$$

для которого выполнялось бы неравенство

$$|x^{(k_m)} - x^{(0)}| \geqslant \varepsilon, \tag{36.32}$$

при этом из (36.31) следовало бы, что

$$\lim_{m\to\infty} k_m = \infty.$$

В силу компактности множества X из последовательности $x_{k_m} \in X, m = 1, 2, ...,$ можно выделить сходящуюся полпоследовательность $x^{(k_{m_j})}, j = 1, 2, ...,$ предел которой принадлежал бы X:

$$\lim_{j\to\infty} x^{(k_{m_j})} = x \in X. \tag{36.33}$$

Из неравенства (36.32) следует, в частности, что $|x^{(k_{m_j})} - x^{(0)}| \geqslant \varepsilon, j = 1, 2, ...$ Переходя к пределу при $j \to \infty$, получим $|x - x^{(0)}| \geqslant \varepsilon$. Следовательно, $x \neq x^{(0)}$, а это в силу взаимной однозначности отображения f означает, что

$$f(x) \neq f(x^{(0)}) = y^{(0)} \tag{36.34}$$

Однако последовательность $y^{k_{m_j}}$ является подпоследовательностью последовательности y^k, имеющиней своим пределом точку $y^{(0)}$ и поэтому

$$\lim_{j\to\infty} y^{(k_{m_j})} = \lim_{k\to\infty} y^{(k)} = y^{(0)}. \tag{36.35}$$

Но в силу непрерывности отображения f в точке x, согласно (36.33), имеем

$$\lim_{j\to\infty} y^{(k_{m_j})} = \lim_{j\to\infty} f(x^{(k_{m_j})}) = f(x) \underset{(36.34)}{\neq} y^{(0)},$$

что противоречит равенству (36.35). Таким образом, справедливо равенство (36.30), т.е.

$$\lim_{k\to\infty} f^{(-1)}(y^{(k)}) = f^{(-1)}(y^{(0)}).$$

Это и означает непрерывность отображения f^{-1} в любой точке $y^{(0)} \in f(X)$.□

Доказанная теорема является обобщением теоремы о непрерывности функции, обратной к непрерывной строго монотонной на отрезке функции

36.8. Равномерная непрерывность

В пункте 6.4 т. 1 было введено понятие равномерно непрерывной функции на отрезке. Это определение можно обобщить на случай отображений $f : X \to \mathbf{R}^m, X \subset \mathbf{R}^n$. Если отображение f непрерывно на множестве X, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любой точки $x \in X$ существует такое $\delta > 0$ (тем самым зависящее от ε и x), что для всех точек $x' \in X$, для которых $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

Как и в случае функций одной переменной, отказ от зависимости числа δ от точки множества приводит к понятию равномерной непрерывности.

Определение 6. *Отображение $f : X \to \boldsymbol{R}^m, x \subset \boldsymbol{R}^n$, называется равномерно непрерывным, если для любого $e > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x \in X$ и $x' \in X$, таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

В символической записи это определение выглдяит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in X, \ |x' - x| < \delta : \ |f(x') - f(x)| < \varepsilon \tag{36.36}$$

т.е. снова буквальное повторение записи определения равномерной непрерывности функции одной переменной (см. т. 1, п 6.4).

Вспомнив определение диаметра множества (см. определение 33 в п. 35.3), по аналогии со случаем числовых функций одной переменной легко убедиться, что определение равномерной непрерывности отображения можно сформулировать следующим образом.