IA301 2019-2020 - Logique et IA symbolique

15 novembre 9h-11h30

Seul document autorisé : deux feuilles A4 recto-verso de notes

Only 2 A4 sheets of notes authorized

1 Logique propositionnelle - *Propositional logic*

On note p, q, r... les variables du langage propositionnel. *p, q, r denote propositional variables.*

1. Quelle est la table de vérité de la formule $p \to (q \to p)$? Qu'en déduit-on ?
   What is the truth table of the formula $p \to (q \to p)$? What can we conclude ?
2. Montrer que la formule $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ est une tautologie, en utilisant la méthode par tableau (indication : on peut montrer que la négation de cette formule n'est pas satisfiable).
   Show that the formula $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ is a tautology, by using the tableau method (indication : show that the negation of this formula is not satisfiable).
3. On rappelle la règle du modus ponens : des hypothèses p et $p \to q$, on déduit q. On note que cette règle ainsi que les deux propositions précédentes sont valables si on remplace les variables propositionnelles par des formules.
   Let remind the modus ponens rule : from hypotheses p and $p \to q$, derive q. Note that this rule as well as the two previous formulas are valid if propositional variables are replaced by formulas.
   L'hiver approche. S'il fait froid, alors je me couvre (qu'on peut représenter par $p \to q$). Si je me couvre, alors j'ai assez chaud ($q \to r$). Montrer que de ces deux hypothèses, on peut déduire $p \to r$, c'est-à-dire $\{p \to q, q \to r\} \vdash (p \to r)$.
   Winter is arriving. If it is cold, then I will use warmer clothes (represented by $p \to q$). If I use warmer clothes, then I will be warm enough ($q \to r$). Show that from this two hypotheses one can derive $p \to r$, i.e. $\{p \to q, q \to r\} \vdash (p \to r)$.

2 Logique du premier ordre - *First order logic*

1. Exprimer en logique du premier ordre (des prédicats) la phrase
   "personne ne fume dans les cafés ni les restaurants".
   Express in first order logic the following sentence
   "nobody smokes in coffeeshops nor restaurants".
2. Donner la négation de la formule obtenue, ainsi que son expression en langage naturel.
   Give the negation of the obtained formula, as well as its expression in natural language.
3. Même question pour la phrase "tous les amis d'Alice connaissent un de ses enfants".
   Same question for "all friends of Alice know one of her children".

3 Raisonnement spatial par RCC et logique modale - *RCC based spatial reasoning and modal logic*

Les relations RCC-8 sont données dans le tableau suivant en logique du premier ordre (x, y... désignent des régions de l'espace et C un prédicat de connexion). Ici P peut être interprété simplement comme l'inclusion ensembliste classique.
RCC-8 relations are given in the following table, in first order logic (x, y... are regions of space and C is a connection predicate). Here P can be simply interpreted as the classical set inclusion.

$DC(x, y)$	x is disconnected from y	$\neg C(x, y)$
$P(x, y)$	x is a part of y	$\forall z, C(z, x) \rightarrow C(z, y)$
$PP(x, y)$	x is a proper part of y	$P(x, y) \wedge \neg P(y, x)$
$EQ(x, y)$	x is identical with y	$P(x, y) \wedge P(y, x)$
$O(x, y)$	x overlaps y	$\exists z, P(z, x) \wedge P(z, y)$
$DR(x, y)$	x is discrete from y	$\neg O(x, y)$
$PO(x, y)$	x partially overlaps y	$O(x, y) \wedge \neg P(x, y) \wedge \neg P(y, x)$
$EC(x, y)$	x is externally connected to y	$C(x, y) \wedge \neg O(x, y)$
$TPP(x, y)$	x is a tangential proper part of y	$PP(x, y) \wedge \exists z[EC(z, x) \wedge EC(z, y)$
$NTPP(x, y)$	x is a non tangential proper part of y	$PP(x, y) \wedge \neg \exists z[EC(z, x) \wedge EC(z, y)]$

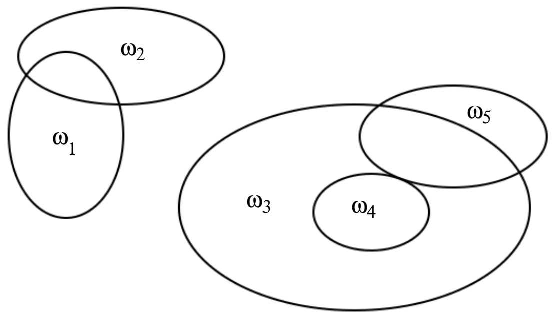
On considère une logique modale, dans laquelle les mondes possibles représentent des régions de l'espace. Leur ensemble est noté W. On définit une relation d'accessibilité R ayant la signification spatiale suivante :
We consider a modal logic in which the possible worlds are regions of space. Their set is denoted by W. An accessibility relation R is defined as follows :

$$\forall \omega \in W, \forall \omega' \in W,\ R(\omega, \omega') \text{ iff } P(\omega', \omega) \vee PO(\omega, \omega')$$

On rappelle les relations sémantiques suivantes pour un modèle $\mathcal{M}$:
Let us recall the following semantic relations, for a mode $\mathcal{M}$:

— $\mathcal{M} \models_\omega \Box A$ iff $\forall t \in W$, $R(\omega, t)$ implies $\mathcal{M} \models_t A$
— $\mathcal{M} \models_\omega \Diamond A$ iff $\exists t \in W$, such that $R(\omega, t)$ and $\mathcal{M} \models_t A$

1. La relation R est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?
   Is R reflexive ? symmetric ? transitive ?
2. Dans toute la suite, on considère la configuration spatiale de la figure ci-dessous, avec $W = \{\omega_1, ...\omega_5\}$.
   In the sequel, we consider the following spatial configuration, and $W = \{\omega_1, ...\omega_5\}$.
   Quelles sont les régions entre lesquelles la relation R est satisfaite ?
   What are the regions for which R holds ?



3. Quelles sont les relations RCC vérifiées entre ω_1 et ω_2 ? entre ω_1 et ω_3 ? entre ω_2 et ω_3 ?
   Which RCC relations do hold between ω_1 and ω_2 ? between ω_1 and ω_3 ? between ω_2 and ω_3 ?
4. On considère le modèle $\mathcal{M} = (W, R, V)$ pour lequel $V(p) = \{\omega_4, \omega_5\}$, où p est une variable propositionnelle. Les expressions suivantes sont-elles valides ?
   We consider the model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ in which $V(p) = \{\omega_4, \omega_5\}$, where p is a propositional variable. Are the following expressions valid ?
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_3} \Box p$
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_3} \Diamond p$
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_3} \Diamond(\neg p \vee \Diamond\Box p)$

4 Apprentissage symbolique - *Symbolic learning*

Des étudiants discutent de ce qu'ils vont faire samedi prochain. Chacun d'eux donne une liste des activités qu'il envisage, dans le tableau suivant. On note : c pour cinéma, d pour dîner avec des amis, e pour révision des examens, l pour lecture, s pour sieste, r pour randonnée.
Some students discuss about what they will be doing next Saturday. Each of them provides a list of items, in the following table. We note c for cinema, d for dinner with friends, e for studying for the exams, l for reading, s for nap, r for hiking.

Etudiant	Activités du samedi (items)
1	c, d
2	c, d, l, s, r
3	c, d, e, l
4	e, l, s
5	l, r, s
6	l, r, s
7	c, d, r
8	c, d, e

On note $G = \{1, ...8\}$ l'ensemble des étudiants, et $M = \{c, d, e, l, s, r\}$ l'ensemble de toutes les activités possibles (ou items). On cherche à trouver des règles d'association du type $Y_1 \Rightarrow Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont des sous-ensembles de M.

$G = \{1, ...8\}$ denotes the set of students, and $M = \{c, d, e, l, s, r\}$ the set of possible items. We want to find association rules in the form $Y_1 \Rightarrow Y_2$, where Y_1 and Y_2 are subsets of M.

On note $\sigma(Y)$ le nombre d'occurrences de l'ensemble d'items Y, et $S(Y)$ la proportion d'étudiants qui ont choisi Y ($S(Y) = \frac{\sigma(Y)}{|G|}$, où $|G|$ est le cardinal de G). Le support d'une règle $Y_1 \Rightarrow Y_2$ est la proportion d'étudiants ayant choisi à la fois Y_1 et Y_2, et la confiance dans la règle est la proportion d'étudiants ayant choisi à la fois Y_1 et Y_2 parmi ceux qui ont choisi Y_1.
$\sigma(Y)$ denotes the number of occurrences of the set of items Y, and $S(Y)$ the proportion of students who have chosen Y ($S(Y) = \frac{\sigma(Y)}{|G|}$, where $|G|$ is the cardinality of G). The support of a rule $Y_1 \Rightarrow Y_2$ is the proportion of students who have chosen both Y_1 and Y_2, and the confidence in the rule is the proportion of students who have chosen both Y_1 and Y_2 among those who have chosen Y_1.

1. Montrer que $\forall Y_1 \subseteq M, \forall Y_2 \subseteq M, Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow S(Y_1) \geq S(Y_2)$. Qu'en déduit-on pour calculer des ensembles fréquents d'items ?
   Prove that $\forall Y_1 \subseteq M, \forall Y_2 \subseteq M, Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow S(Y_1) \geq S(Y_2)$. What can we derive from this result to compute frequent itemsets ?
2. Déterminer tous les ensembles fréquents d'items, où Y est dit fréquent si $S(Y) \geq 3/8$.
   Establish all the frequent itemsets, Y being frequent if $S(Y) \geq 3/8$.
3. Soit la règle $\{c, d\} \Rightarrow \{l\}$. Quel est son support ? Quelle est la confiance dans cette règle ?
   Let us consider the rule $\{c, d\} \Rightarrow \{l\}$. What is its support ? What is the confidence in this rule ?

On interprète maintenant G comment un ensemble d'objets et M comme un ensemble d'attributs, et on définit la relation I par $I(g, m)$ si et seulement si l'étudiant g a choisi m parmi ses activités du samedi.
G is now interpreted as a set of objects and M as a set of attributes. Let I be the binary relation defined by $I(g, m)$ iff student g has chosen m among his Saturday activities.
On rappelle la définition des opérateurs de dérivation en analyse formelle de concepts :
Let us recall the definition of the derivation operators in formal concept analysis :

$$\alpha(X) = \{m \in M \mid \forall g \in X, (g, m) \in I\}$$

$$\beta(Y) = \{g \in G \mid \forall m \in Y, (g, m) \in I\}$$

et (X, Y) est un concept formel si et seulement si $\alpha(X) = Y$ et $\beta(Y) = X$.
and (X, Y) is a formal concept iff $\alpha(X) = Y$ and $\beta(Y) = X$.

4. Calculer tous les concepts formels du context (G, M, I). Tracer le treillis correspondant.
   Compute all the formal concepts of the context (G, M, I). Draw the corresponding concept lattice.
5. Les implications d'attributs suivantes sont elles valides ?
   Are the following attribute implications valid ?
   — $\{c, d\} \Rightarrow \{l\}$
   — $\{c\} \Rightarrow \{d\}$
6. Quelle est la différence entre les règles d'association et les implications d'attributs ?
   What is the difference between association rules and attribute implications ?