Université Paris Diderot **Apprentissage statistique**
Master M2MO: 2019/2020 **Stéphan Clémençon - Emilie Chautru**

Travaux dirigés n° 4 : Convexification du risque

Stéphan Clémençon <stephan.clemencon@telecom-paristech.fr>
Emilie Chautru <emilie.chautru@mines-paristech.fr>

Exercice 1. On se place dans le cadre de la classification binaire : on considère un descripteur aléatoire X de loi P_X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) muni de sa tribu des Boréliens, et un label aléatoire Y valant -1 ou 1.

La fonction de régression (probabilité a posteriori) est notée $\eta : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = x) \in [0, 1]$. On suppose que $0 < \eta(X) < 1$ presque-sûrement.

Soit $\mathbb{G} := \left\{g : \mathbb{R}^d \to \{-1, 1\}\right\}$ l'ensemble des classifieurs adaptés à ce contexte. L'erreur de classification est définie comme l'application $L : g \in \mathbb{G} \mapsto \mathbb{P}\left(Y \neq g(X)\right) \in [0, 1]$ et on note $L^* := \inf_{g \in \mathbb{G}} L(g)$ le risque de Bayes.

On pose $\mathcal{F} := \left\{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\right\}$ puis $\operatorname{sgn} : a \in \mathbb{R} \mapsto 2\,\mathbb{1}_{\{a>0\}} - 1 \in \{-1, 1\}$. Dans cet exercice on s'intéresse spécifiquement à l'ensemble de classifieurs $\mathcal{G} := \left\{\operatorname{sgn} \circ f : f \in \mathcal{F}\right\}$.

Soit enfin $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable, strictement convexe, croissante, satisfaisant $\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$ et $\phi(0) = 1$. Pour tout $f \in \mathcal{F}$ (et donc tout classifieur de $\mathcal{G}$) on considère la version convexifiée du risque de classification :

$$A(f) := \mathbb{E}\left[\phi\left(-Yf(X)\right)\right].$$

1) Pour tout $u \in [0, 1]$ on définit $h_u : a \in \mathbb{R} \mapsto u\,\phi(-a) + (1 - u)\,\phi(a)$. Montrer que $\min_{f \in \mathcal{F}} A(f)$ est atteint en
$$f^* : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \arg\min_{a \in \mathbb{R}} h_{\eta(x)}(a). \tag{1}$$
Cette fonction est-elle bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$?
2) Dériver la fonction $h_{\eta(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque, puis vérifier que $\operatorname{sgn} \circ f^*$ coïncide avec classifieur de Bayes.
3) (Lemme de Zhang) On pose $H : u \in]0, 1[\mapsto \min_{a \in \mathbb{R}} h_u(a)$ et on suppose qu'il existe des réels $s > 1$ et $c > 0$ tels que
$$\forall u \in]0, 1[, \quad \left|\frac{1}{2} - u\right|^s \leq c^s(1 - H(u)). \tag{2}$$
   a) Soit $f \in \mathcal{F}$. Montrer que $L(\operatorname{sgn} \circ f) - L^* \leq 2\left(\mathbb{E}\left[\left|\eta(X) - \frac{1}{2}\right|^s \mathbb{1}_{\left\{(2\eta(X)-1)\,f(X) \leq 0\right\}}\right]\right)^{1/s}$.
   b) On pose $A^* := \inf_{f \in \mathcal{F}} A(f)$. Déduire de la question précédente que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$,
   $$L(\operatorname{sgn} \circ f) - L^* \leq 2\,c\,\left(A(f) - A^*\right)^{1/s}. \tag{3}$$
   c) Que vaut H dans le cas où $\phi = \exp$? Pour quelles constantes s et c la condition (2) est-elle vérifiée ?