TP1

18 octobre 2020

1 Question 1

Biais de $\hat{I}_n(f)$:

B = E$[\hat{I}_n(f)] - I(f)$
On a : B = E$[\hat{I}_n(f)] - I(f)$
Or $\hat{I}n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$
Donc E$[\hat{I}n(f)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[f(X_i)] = E[f(X)]$ *(idd et linéarité de l'espérance)*
Finalement B = E[f(X)] - E[f(X)] = 0

Variance de $\hat{I}_n(f)$:

On a : Var$[\hat{I}_n(f)] = Var[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)]$
Or Var$[\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\frac{1}{n}] = \frac{1}{n^2}Var[\sum_{i=1}^{n} f(X_i)] = \frac{1}{n^2}nVar[f(X_1)]$
Finalement, Var$[\hat{I}_n(f)] = \frac{1}{n}Var[f(X_1)]$

2 Question 4

Interval de confiance IC à 95 de $\hat{I}_n(f)$:

On pose : S$_n = f(X_1) + ... + f(X_n)$
On a : E[S$_n$] $= n\mu \quad Var(S_n) = n\sigma^2 \quad \mu = E[f(X_1)] \quad \sigma^2 = Var[f(X_1)]$
D'après le théorème centrale limite, on a : $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)$
Z$_n = \frac{I_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$
Soit q la fonction quantile. Pour un intervalle de confiance à 0.95, on q(0.95) = 1.96
Finalement, on obtient $I(f) - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \leq I_n(f) \leq I(f) + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$

3 Question 5

Biais de $\hat{I}_n(f,\beta)$:

B = E$[\hat{I}_n(f) - \beta^T\bar{h}] - I(f) = E[\hat{I}_n(f)] - I(f) - E[\beta^T\bar{h}]$
On a -d'après la question1- : E$[\hat{I}_n(f)] - I(f) = 0$
Donc B = E$[\hat{I}_n(f)] - I(f) - E[\beta^T\bar{h}] = -E[\beta^T\bar{h}]$
E$[\beta^T\bar{h}] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_j E[h_j(X_i)]$
Or E[h$_j(X_i)] = 0$ *par hypothèse*
Finalement B = E$[\hat{I}_n(f) - \beta^T\bar{h}] - I(f) = 0$