Сделай первый шаг!

Задачи на метод первого шага

Задача 2.1: Саша и Маша моют посуду

Условие

Саша и Маша по очереди подбрасывают кубик до первой шестёрки. Посуду будет мыть тот, кто первым выбросит шестерку. Маша бросает кубик первой.

Найти:

- Вероятность того, что посуду будет мыть Маша
- Среднее количество бросков кубика

Решение

Обозначим $p = \frac{1}{6}$ — вероятность выбросить шестёрку, $q = \frac{5}{6}$ — вероятность не выбросить.

Пусть P_M — вероятность того, что выиграет Маша (она бросает первой).

Метод первого шага:

При первом броске Маши:

- С вероятностью $p = \frac{1}{6}$ она выбрасывает 6 и выигрывает
- С вероятностью $q = \frac{5}{6}$ она не выбрасывает 6, и ход переходит к Саше

Если Саша бросает:

- С вероятностью $p = \frac{1}{6}$ он выигрывает
- С вероятностью $q = \frac{5}{6}$ ход возвращается к Маше (ситуация повторяется)

Составим уравнение:

$$P_M = p + q \cdot (q \cdot P_M)$$

Объяснение: Маша выигрывает, если она выбросит 6 сразу (p), либо она не выбросит (q), Саша не выбросит (q), и тогда мы возвращаемся к исходной ситуации (P_M).

$$P_M = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot P_M = \frac{1}{6} + \frac{25}{36} P_M$$

$$36 P_M = 6 + 25 P_M$$

$$11 P_M = 6 \implies P_M = \frac{6}{11}$$

Вероятность того, что Маша будет мыть посуду:

$$P_M = \frac{6}{11} \approx 0.545$$

Среднее количество бросков

Каждый **раунд** состоит из броска Маши и, возможно, броска Саши.

Вероятность окончания игры в течение раунда:

- Маша выбрасывает 6: вероятность $\frac{1}{6}$
- Маша не выбрасывает, Саша выбрасывает: вероятность $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$$P(\text{конец раунда}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

Среднее количество раундов:

$$\mathbb{E}(\text{число раундов}) = \frac{1}{\frac{11}{36}} = \frac{36}{11}$$

Среднее количество бросков в одном раунде:

- Один бросок (Маша выиграла): вероятность $\frac{1}{6}$, условное среднее $= 1$
- Два броска (Саша выиграл или оба не выбросили): вероятность $\frac{5}{6}$, условное среднее $= 2$

$$\mathbb{E}(\text{бросков в раунде}) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{1}{6} + \frac{10}{6} = \frac{11}{6}$$

Общее среднее количество бросков:

$$\mathbb{E}(\text{всего бросков}) = \frac{36}{11} \cdot \frac{11}{6} = 6$$

Среднее количество бросков кубика:

$$\mathbb{E}(N) = 6$$

Задача 2.5: Оптимальная стратегия Васи

Условие

Вася подкидывает кубик до тех пор, пока не выпадет единица, или пока он сам не скажет «Стоп». Вася получает столько рублей, сколько выпало на кубике при последнем броске.

Найти: а) Оптимальную стратегию и ожидаемый выигрыш б) Среднюю продолжительность игры в) Оптимальную стратегию и выигрыш, если каждый бросок стоит 35 копеек

Решение части (а)

Обозначим v — ожидаемый выигрыш при оптимальной стратегии.

Принцип оптимальности: Когда выпадает число k (где $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$), Вася выбирает:

$$\max(k, v)$$

Если $k \geq v$, он останавливается и берёт k. Если $k < v$, он продолжает (получит в среднем v).

При выпадении 1 игра заканчивается автоматически.

Уравнение для v:

$$v = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \max(2, v) + \frac{1}{6} \max(3, v) + \frac{1}{6} \max(4, v) + \frac{1}{6} \max(5, v) + \frac{1}{6} \max(6, v)$$

Предположим, что порог остановки — это некоторое число k_0. При $k \geq k_0$ останавливаемся, при $k < k_0$ продолжаем.

Попробуем $k_0 = 4$:

$$v = \frac{1}{6}(1 + v + v + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6}(16 + 2v)$$

$$6v = 16 + 2v \implies 4v = 16 \implies v = 4$$

Проверка: если $v = 4$, то

- При 1: получаем 1 (вынуждены)
- При 2: $\max(2, 4) = 4 \to$ продолжаем
- При 3: $\max(3, 4) = 4 \to$ продолжаем
- При 4: $\max(4, 4) = 4 \to$ всё равно (можно остановиться)
- При 5: $\max(5, 4) = 5 \to$ останавливаемся
- При 6: $\max(6, 4) = 6 \to$ останавливаемся

$$v = \frac{1}{6}(1 + 4 + 4 + 4 + 5 + 6) = \frac{24}{6} = 4 \quad \checkmark$$

Оптимальная стратегия: Продолжать игру, пока не выпадет 1, 5 или 6. При 5 или 6 — остановиться.

Ожидаемый выигрыш: $v = 4$ рубля

Решение части (б)

При оптимальной стратегии игра заканчивается, когда выпадает 1, 5 или 6.

Вероятность окончания игры на каждом броске:

$$p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Среднее количество бросков:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Средняя продолжительность игры: $\mathbb{E}(T) = 2$ броска

Решение части (в)

Теперь каждый бросок стоит 0.35 рубля.

Пусть v — чистый ожидаемый выигрыш при оптимальной стратегии.

Когда выпал результат k (уже заплатили 0.35 за этот бросок):
- Остановиться: получить k (чистый выигрыш $= k$)
- Продолжить: заплатить 0.35 за следующий бросок и получить v (чистый выигрыш $= v - 0.35$)

Выбираем $\max(k, v - 0.35)$.

Попробуем порог $k_0 = 4$:

$$v = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6}(v - 0.35) + \frac{1}{6}(v - 0.35) + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6$$

$$v = \frac{1}{6}(1 + v - 0.35 + v - 0.35 + 4 + 5 + 6)$$

$$v = \frac{1}{6}(15.3 + 2v)$$

$$6v = 15.3 + 2v \implies 4v = 15.3 \implies v = 3.825$$

Проверка: $v - 0.35 = 3.475$
- При 4: $\max(4, 3.475) = 4 \to$ останавливаемся ✓
- При 3: $\max(3, 3.475) = 3.475 \to$ продолжаем ✓
- При 5: $\max(5, 3.475) = 5 \to$ останавливаемся ✓

Попробуем порог $k_0 = 5$:

$$v = \frac{1}{6}(1 + v - 0.35 + v - 0.35 + v - 0.35 + 5 + 6)$$

$$6v = 10.95 + 3v \implies v = 3.65$$

Но тогда $v - 0.35 = 3.3 < 4$, значит при 4 выгоднее остановиться — противоречие!

Порог 4 правильный.

Оптимальная стратегия с оплатой: Продолжать, пока не выпадет 1, 4, 5 или 6.

Чистый ожидаемый выигрыш: $v = 3.825$ рубля $= 3$ рубля 82.5 копейки

Задача 2.7: Три ёжика на треугольнике

Условие

В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту каждый ёжик независимо движется по часовой стрелке с вероятностью 0.5 или против часовой с вероятностью 0.5.

T — время до встречи всех ёжиков в одной вершине.

Найти: а) $P(T=1)$, $P(T=2)$, $P(T=3)$, $\mathbb{E}(T)$ б) Как изменятся ответы при вероятности движения по часовой p?

Решение части (а)

Обозначим вершины треугольника: A, B, C (по часовой стрелке).

Изначально: по одному ёжику в каждой вершине.

Вероятность $P(T=1)$

Для встречи за один шаг все три ёжика должны оказаться в одной вершине.

Но если все начинают в разных вершинах и каждый обязан двигаться, они не могут встретиться за один шаг!

$P(T=1)=0$

Анализ первого шага

Всего $2^3=8$ равновероятных исходов.

Обозначим $+$ — движение по часовой, $-$ — против часовой.

Исход	Позиции	Конфигурация	Вероятность
(+,+,+)	(B,C,A)	Все в разных	1/8
(-,-,-)	(C,A,B)	Все в разных	1/8
(+,+,-)	(B,C,B)	2 в B, 1 в C	1/8
(+,-,+)	(B,A,A)	2 в A, 1 в B	1/8
(+,-,-)	(B,A,B)	2 в B, 1 в A	1/8
(-,+,+)	(C,C,A)	2 в C, 1 в A	1/8
(-,+,-)	(C,C,B)	2 в C, 1 в B	1/8
(-,-,+)	(C,A,A)	2 в A, 1 в C	1/8

Итог после первого шага:

- Все в разных вершинах: $P=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$
- Два в одной, один в другой: $P=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

Вероятность $P(T=2)$

Для $T=2$ нужно:

1. После первого шага два в одной вершине (вероятность $\frac{3}{4}$)
2. На втором шаге все встретились

Рассмотрим конфигурацию «2 в A, 1 в B»:

Для встречи все должны попасть в одну вершину.

- Все в C: оба из A идут против часовой ($A \to C$), один из B идёт по часовой ($B \to C$). Вероятность: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Других вариантов встречи нет (из A нельзя остаться в A, в B из A попадёт только по часовой, но тогда ёжик из B не может остаться).

$$P(\text{встреча} \mid 2 \text{ в одной}) = \frac{1}{8}$$

$$P(T = 2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$$

$$P(T = 2) = \frac{3}{32} \approx 0.094$$

Вероятность $P(T = 3)$

Анализ переходов из конфигурации «2 в одной»:

Из 8 возможных исходов движения:

- Все встретились: 1 исход (вероятность $\frac{1}{8}$)
- Все в разных: 4 исхода (вероятность $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$)
- Два в одной: 3 исхода (вероятность $\frac{3}{8}$)

После двух шагов:

$$P(2 \text{ в одной после 2 шагов}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16} + \frac{9}{32} = \frac{15}{32}$$

$$P(T = 3) = \frac{15}{32} \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{256} \approx 0.059$$

$$P(T = 3) = \frac{15}{256} \approx 0.059$$

Математическое ожидание $\mathbb{E}(T)$

Обозначим:

- $v_1 = \mathbb{E}(T \mid \text{все в разных вершинах})$
- $v_2 = \mathbb{E}(T \mid \text{два в одной, один в другой})$

Изначально все в разных, поэтому $\mathbb{E}(T) = v_1$.

Уравнения:

Из состояния «все в разных»:

$$v_1 = 1 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot v_1 + \frac{3}{4} \cdot v_2 = 1 + \frac{1}{4}v_1 + \frac{3}{4}v_2$$

Из состояния «два в одной»:

$$v_2 = 1 + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot v_1 + \frac{3}{8} \cdot v_2 = 1 + \frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{8}v_2$$

Из второго уравнения:

$$\frac{5}{8}v_2 = 1 + \frac{1}{2}v_1 \implies v_2 = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}v_1$$

Подставляем в первое:

$$v_1 = 1 + \frac{1}{4}v_1 + \frac{3}{4}\left(\frac{8}{5} + \frac{4}{5}v_1\right) = 1 + \frac{1}{4}v_1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{5}v_1$$

$$v_1 = \frac{11}{5} + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right)v_1 = \frac{11}{5} + \left(\frac{5}{20} + \frac{12}{20}\right)v_1 = \frac{11}{5} + \frac{17}{20}v_1$$

$$\left(1 - \frac{17}{20}\right)v_1 = \frac{11}{5} \implies \frac{3}{20}v_1 = \frac{11}{5}$$

$$v_1 = \frac{11}{5} \cdot \frac{20}{3} = \frac{220}{15} = \frac{44}{3}$$

Математическое ожидание времени встречи:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{44}{3} \approx 14.67 \text{ минут}$$

Решение части (б)

При вероятности движения по часовой p (и против часовой $q = 1 - p$):

После первого шага:

- Все по часовой: вероятность p^3
- Все против часовой: вероятность q^3
- Всего «все в разных»: $p^3 + q^3$

Вероятность «два в одной»: $1 - p^3 - q^3$

Из конфигурации «2 в A, 1 в B»: $\mathrm{P}(\text{все в } C) = q^2 p$

По симметрии, из любой конфигурации «2 в одной»: $\mathrm{P}(\text{встреча}) = pq^2$ (если одинокий должен идти по часовой) или $p^2 q$ (против часовой).

В общем случае анализ становится сложнее, но принцип тот же.

При произвольном p:

$$P(\text{все в разных после 1 шага}) = p^3 + (1-p)^3$$

$$P(\text{два в одной после 1 шага}) = 1 - p^3 - (1-p)^3$$

Для полного анализа требуется рассмотреть все переходы с учётом p.

Задача 2.8: Колония амёб

Условие

Изначально одна амёба. С вероятностью $\frac{3}{4}$ амёба делится на две, с вероятностью $\frac{1}{4}$ погибает.

X — количество поколений до гибели всей колонии.

Найти: $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = \infty)$

Решение

Вероятность полного вымирания

Пусть q — вероятность того, что колония, начавшаяся с одной амёбы, когда-либо вымрет.

Метод первого шага:

$$q = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot q^2$$

Объяснение:

- С вероятностью $\frac{1}{4}$ амёба погибает сразу → колония вымерла
- С вероятностью $\frac{3}{4}$ амёба делится на две, и для вымирания обе ветви должны вымереть независимо (вероятность $q \cdot q$)

Уравнение:

$$\frac{3}{4}q^2 - q + \frac{1}{4} = 0$$

Умножим на 4:

$$3q^2 - 4q + 1 = 0$$

По формуле корней квадратного уравнения:

$$q = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$q_1 = \frac{6}{6} = 1, \quad q_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Какой корень правильный?

При $q = 1$: колония вымирает с вероятностью 1 (почти наверное). При $q = \frac{1}{3}$: колония вымирает с вероятностью $\frac{1}{3}$.

Физическая интерпретация: в среднем одна амёба производит $\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{2}$ потомков. Это больше 1, значит колония растёт в среднем. Однако из-за случайности она может вымереть.

Критическое значение: если среднее число потомков $= 1$, то $q = 1$. При среднем > 1: есть ненулевая вероятность бесконечного роста.

Среднее число потомков: $m = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2} > 1$.

Если $q = 1$, то колония вымирает почти наверное. Но тогда $P(X < \infty) = 1$, откуда $P(X = \infty) = 0$.

При $m = \frac{3}{2} > 1$ это **надкритический** ветвящийся процесс. В этом случае $q < 1$

Тогда правильным решением будет $q = \frac{1}{3}$ (меньший корень, так как q — вероятность)

Проверим:

$$q = \frac{1}{3}: \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{4} + \frac{3}{36} = \frac{9}{36} + \frac{3}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

Вероятность вымирания: $q = \frac{1}{3}$

Вероятность бесконечного существования:

$$P(X = \infty) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Вероятности $P(X = 2)$ и $P(X = 3)$

Обозначим $f_n = P(X = n)$ — вероятность вымирания ровно за n поколений.

Для $n = 1$:

$$f_1 = P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

Для $n = 2$:

Первая амёба делится ($\frac{3}{4}$), обе дочерние погибают на первом поколении ($\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$):

$$f_2 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{64}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{64} \approx 0.047$$

Для $n = 3$:

Первая амёба делится ($\frac{3}{4}$). Обе ветви должны вымереть за ≤ 2 поколения, причём хотя бы одна — ровно за 2.

Вероятность вымирания за $\leq k$ поколений: $F_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

$F_1 = \frac{1}{4}$, $F_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{64} = \frac{19}{64}$

$$f_3 = \frac{3}{4} \cdot [F_2^2 - F_1^2] = \frac{3}{4} \cdot \left[\left(\frac{19}{64}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left[\left(\frac{19}{64}\right)^2 - \left(\frac{16}{64}\right)^2\right] = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{361}{4096} - \frac{256}{4096}\right]$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{105}{4096} = \frac{315}{16384} \approx 0.0192$$

$$P(X = 3) = \frac{315}{16384} \approx 0.019$$

Задача 2.13: Илья Муромец и Змеи Горынычи

Илья Муромец идёт к камню. От каждого камня отходят **три** дороги, каждая ведёт к новому камню, от которого снова три дороги, и так до бесконечности (бесконечное тернарное дерево).

На каждой дороге живёт Змей Горыныч. Каждый Змей **независимо**:
- Бодрствует (блокирует дорогу) с вероятностью α
- Спит (дорога открыта) с вероятностью $1 - \alpha$

Требуется найти: Вероятность $p(\alpha)$ существования бесконечного пути, проходящего только мимо спящих Змеев.

В оригинальной задаче: $\alpha = \frac{1}{3}$ (вероятность бодрствования).

Решение методом первого шага

Вывод уравнения

Пусть p — искомая вероятность существования бесконечного пути от произвольного камня.

Анализ первого шага:

От камня отходят 3 дороги. Рассмотрим, что может произойти:

1. Все три Змея бодрствуют (вероятность α^3) $\to$ пути нет

2. Хотя бы один Змей спит $\to$ можем выбрать открытую дорогу
   - Вероятность: $1 - \alpha^3$
   - Но от следующего камня тоже должен существовать путь (вероятность p)

Однако, это не полная картина. Правильное уравнение учитывает структуру дерева иначе.

Авторское уравнение:

$$p = \alpha\big(1 - (1 - p)^3\big)$$

Интерпретация:
- $(1 - p)$ — вероятность отсутствия пути от одного следующего камня
- $(1 - p)^3$ — вероятность отсутствия пути от всех трёх следующих камней
- $1 - (1 - p)^3$ — вероятность что хотя бы от одного камня путь существует
- Множитель α связан со структурой условной вероятности

Преобразование к алгебраическому виду

$$p = \alpha\big(1 - (1 - p)^3\big) \Rightarrow p = \alpha - \alpha(1 - p)^3 \Rightarrow \alpha(1 - p)^3 = \alpha - p$$

Обозначим $q = 1 - p$ (вероятность отсутствия пути):

$$\alpha q^3 = \alpha - (1 - q) = \alpha - 1 + q$$

Кубическое уравнение:

$$\alpha q^3 - q + (1 - \alpha) = 0$$

Решение кубического уравнения

Поиск корней

Очевидный корень: $q = 1$ (то есть $p = 0$)

Проверка:

$$\alpha \cdot 1 - 1 + 1 - \alpha = 0 \quad \checkmark$$

Разложение:

Поделим на $(q-1)$:

$$\alpha q^3 - q + (1-\alpha) = (q-1)\big(\alpha q^2 + \alpha q + (\alpha - 1)\big)$$

Проверим раскрытием:

$$(q-1)\big(\alpha q^2 + \alpha q + \alpha - 1\big) = \alpha q^3 + \alpha q^2 + (\alpha-1)q - \alpha q^2 - \alpha q - (\alpha - 1)$$

$$= \alpha q^3 + (\alpha - 1 - \alpha)q - (\alpha - 1) = \alpha q^3 - q + (1-\alpha) \quad \checkmark$$

Квадратное уравнение

Решаем $\alpha q^2 + \alpha q + (\alpha - 1) = 0$:

$$q^2 + q + \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 0 \Rightarrow q^2 + q + 1 - \frac{1}{\alpha} = 0$$

Дискриминант:

$$D = 1 - 4\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = 1 - 4 + \frac{4}{\alpha} = \frac{4}{\alpha} - 3$$

Корни:

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{4}{\alpha} - 3}}{2}$$

Для действительных корней: $\frac{4}{\alpha} - 3 \geq 0$, то есть $\alpha \leq \frac{4}{3}$.

Так как $\alpha \in [0, 1]$, условие всегда выполнено.

Переход к p

Так как $p = 1 - q$:

$$p = 1 - q = 1 - \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{4}{\alpha} - 3}}{2} = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{\frac{4}{\alpha} - 3}}{2}$$

$$p = \frac{2 + 1 \pm \sqrt{\frac{4}{\alpha} - 3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{\frac{4}{\alpha} - 3}}{2}$$

Два кандидата:

$$p_1 = \frac{3 - \sqrt{\frac{4}{\alpha} - 3}}{2}$$

$$p_2 = \frac{3 + \sqrt{\frac{4}{\alpha} - 3}}{2}$$

Упростим, домножив на $\sqrt{\alpha}$:

$$p_1 = \frac{3 - \sqrt{\frac{4-3\alpha}{\alpha}}}{2} = \frac{3\alpha - \sqrt{\alpha(4-3\alpha)}}{2\alpha}$$

$$= \frac{3\alpha - \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}}{2\alpha}$$

Формула для корня:

$$p = \frac{3\alpha - \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}}{2\alpha}, \quad \alpha \neq 0$$

Критическая точка

Найдём, когда $p = 0$:

$$0 = \frac{3\alpha - \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}}{2\alpha}$$

$$3\alpha = \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}$$

$$9\alpha^2 = 4\alpha - 3\alpha^2$$

$$12\alpha^2 = 4\alpha$$

$$3\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

Итоговая формула

Вероятность существования бесконечного пути:

$$p(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \in \left[0;\ \frac{1}{3}\right] \\ \frac{3\alpha - \sqrt{4\alpha - 3\alpha^2}}{2\alpha} & \text{при } \alpha \in \left(\frac{1}{3};\ 1\right] \end{cases}$$

Проверка для конкретных значений

Исходная задача: $\alpha = \frac{1}{3}$

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

При критическом значении путь не существует (граница фазового перехода).

Случай $\alpha = \frac{2}{3}$

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{2}{3} - \sqrt{4 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{4}{9}}}{2 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{\frac{8}{3} - \frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2 - \sqrt{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$$

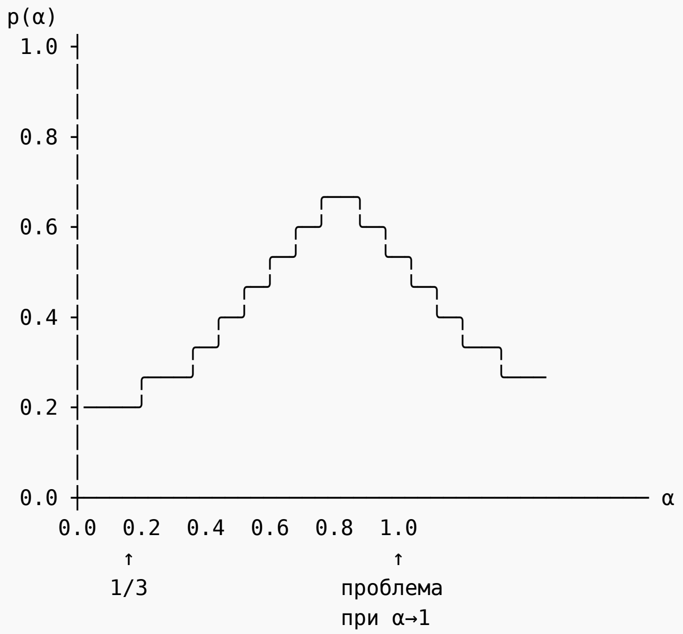
$$= \frac{2 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \cdot 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

При $\alpha = \frac{2}{3}$:

$$p = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0.634$$

График зависимости $p(\alpha)$



Ключевые точки:

α	$p(\alpha)$
0	1 (все спят)
$\frac{1}{3}$	0 (критическая точка)
$\frac{1}{2}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$
$\frac{2}{3}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{2} \approx 0.634$
1	0 (все бодрствуют)