# Производящие функции и комплексные числа

На примере обобщённых чисел Фибоначчи

---

## Часть 1: Рекуррентность $H_n = 2H_{n-1} + 3H_{n-2}$

---

## Постановка задачи

**Рекуррентное соотношение:**

$$H_n = 2H_{n-1} + 3H_{n-2}, \quad n \geq 2$$

**Начальные условия:** $H_0 = H_1 = 1$

**Задача:** Найти $H_{2026}$

## Комбинаторная интерпретация

### Модель: слова с весами

**Алфавит:** 5 букв — $a, b$ (вес 1) и $c, d, e$ (вес 2)

**Определение:** $H_n$ = количество слов суммарного веса $n$

**Проверка рекуррентности:**

- Слово веса $n$, оканчивающееся на букву веса 1: ($a$ или $b$) + слово веса $(n-1) \to 2H_{n-1}$
- Слово веса $n$, оканчивающееся на букву веса 2: ($c, d$ или $e$) + слово веса $(n-2) \to 3H_{n-2}$

### Таблица переходов

| Из | Буква | Вес | В состояние | Вклад в $H_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $S$ | $a$ | 1 | $S$ | $H_{n-1}$ |
| $S$ | $b$ | 1 | $S$ | $H_{n-1}$ |
| $S$ | $c$ | 2 | $S$ | $H_{n-2}$ |
| $S$ | $d$ | 2 | $S$ | $H_{n-2}$ |
| $S$ | $e$ | 2 | $S$ | $H_{n-2}$ |

**Итого:** $H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 3 \cdot H_{n-2}$ ✓

# Производящая функция: стандартный вывод

## Определение

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n t^n = H_0 + H_1 t + H_2 t^2 + \ldots$$

## Вывод замкнутой формы

Из рекуррентности для $n \geq 2$:

$$H_n - 2H_{n-1} - 3H_{n-2} = 0$$

Умножаем на $t^n$ и суммируем по $n \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} H_n t^n - 2\sum_{n=2}^{\infty} H_{n-1} t^n - 3\sum_{n=2}^{\infty} H_{n-2} t^n = 0$$

**Преобразуем каждую сумму:**

$$\sum_{n=2}^{\infty} H_n t^n = g(t) - H_0 - H_1 t = g(t) - 1 - t$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} H_{n-1} t^n = t\sum_{n=2}^{\infty} H_{n-1} t^{n-1} = t(g(t) - H_0) = t(g(t) - 1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} H_{n-2} t^n = t^2 \sum_{n=2}^{\infty} H_{n-2} t^{n-2} = t^2 g(t)$$

**Подставляем:**

$$[g(t) - 1 - t] - 2t[g(t) - 1] - 3t^2 g(t) = 0$$

$$g(t) - 1 - t - 2tg(t) + 2t - 3t^2 g(t) = 0$$

$$g(t)\left(1 - 2t - 3t^2\right) = 1 + t - 2t = 1 - t$$

**Производящая функция:**

$$g(t) = \frac{1 - t}{1 - 2t - 3t^2}$$

## Корни знаменателя

$$1 - 2t - 3t^2 = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = -1$$

## Факторизация

$$1 - 2t - 3t^2 = (1 - 3t)(1 + t)$$

### Разложение на простейшие дроби

$$g(t) = \frac{1-t}{(1-3t)(1+t)} = \frac{A}{1-3t} + \frac{B}{1+t}$$

$$1 - t = A(1+t) + B(1-3t)$$

**При $t = -1$:** $\quad 2 = 4B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$

**При $t = \frac{1}{3}$:** $\quad \frac{2}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$

$$g(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-3t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t}$$

## Разложение в ряд Тейлора

### Геометрические ряды

$$\frac{1}{1-3t} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n$$

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

### Итоговое разложение

$$g(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n t^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{2} t^n$$

**Явная формула:**

$$H_n = [t^n]g(t) = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$$

## Ответ: $H_{2026}$

$$H_{2026} = \frac{3^{2026} + (-1)^{2026}}{2} = \frac{3^{2026} + 1}{2}$$

**Ответ:**

$$H_{2026} = \frac{3^{2026} + 1}{2}$$

**Порядок величины:** $\log_{10} H_{2026} \approx 2026 \cdot \log_{10} 3 \approx 967$

Это число с примерно **967 цифрами**.

---

## Часть 2: Комплексные числа в производящих функциях

---

# Мотивация

### Задача:

**Дано:** Слова длины $n$ из букв $H$ и $T$.

**Найти:** Количество слов, в которых число букв $H$ делится на 3:

$$Q_3 = \sum_{k \equiv 0 (\bmod 3)} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$$

### Проблема

Обычная производящая функция $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ даёт **все** коэффициенты.

**Как выделить только те, где $k \equiv 0 (\bmod 3)$?**

# Ключевая идея

**Корень 3-й степени из единицы:**

$$\omega = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Свойства:**

- $\omega^3 = 1$
- $1 + \omega + \omega^2 = 0$
- $\omega^2 = \overline{\omega} = e^{-2\pi i/3}$

### Фильтрующее свойство

**Лемма:** Для любого целого $k$:

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} = \begin{cases} 3 \text{ если } k \equiv 0 (\bmod 3) \\ 0 \text{ если } k \not\equiv 0 (\bmod 3) \end{cases}$$

**Доказательство:**

- Если $k \equiv 0$: $\omega^k = 1$, поэтому $1 + 1 + 1 = 3$
- Если $k \equiv 1$: $1 + \omega + \omega^2 = 0$ (по свойству)
- Если $k \equiv 2$: $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$

# Вывод формулы

### Три подстановки

Запишем $(1+x)^n$ для трёх значений $x$:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$(1+\omega)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k \qquad (1+\omega^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^{2k}$$

### Суммирование

$$2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1 + \omega^k + \omega^{2k}\right)$$

По фильтрующему свойству, ненулевой вклад дают только $k \equiv 0 \pmod 3$:

$$= \sum_{k \equiv 0 \pmod 3} \binom{n}{k} \cdot 3 = 3Q_3$$

**Формула:**

$$Q_3 = \frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n}{3}$$

## Упрощение комплексных слагаемых

### Вычисление $1+\omega$

$$1+\omega = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

В полярной форме:

$$|1+\omega| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\arg(1+\omega) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$1+\omega = e^{i\pi/3}$$

### Аналогично для $1+\omega^2$

$$1+\omega^2 = \overline{1+\omega} = e^{-i\pi/3}$$

### Степени

$$(1+\omega)^n = e^{in\pi/3} \qquad (1+\omega^2)^n = e^{-in\pi/3}$$

$$(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n = e^{in\pi/3} + e^{-in\pi/3} = 2\cos(n\pi/3)$$

**Итоговая формула:**

$$Q_3 = \frac{2^n + 2\cos(n\pi/3)}{3}$$

## Проверка

### Для $n = 3$

$$Q_3 = \frac{2^3 + 2\cos(\pi)}{3} = \frac{8 + 2 \cdot (-1)}{3} = \frac{8-2}{3} = 2$$

**Проверка перебором:** Слова длины 3 с числом $H$ кратным 3:

- 0 букв $H$: $TTT$ (1 слово)
- 3 буквы $H$: $HHH$ (1 слово)

### Для $n = 6$

$$\cos(2\pi) = 1$$

$$Q_3 = \frac{64+2}{3} = 22$$

**Проверка:** $\binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6} = 1 + 20 + 1 = 22$

## Как выделить $k \equiv r \pmod m$

**Общая формула:**

Пусть $\omega_m = e^{2\pi i/m}$ — примитивный корень $m$-й степени.

$$\sum_{k \equiv r \pmod m} \binom{n}{k} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \omega_m^{-rj} (1 + \omega_m^j)^n$$

## Визуализация на комплексной плоскости

```
                 Im
                  |
          ω       |
                  |
        ●         |
          \       |    1+ω = e^(iπ/3)
           \      |   ●
            \     |  /
             \|  / π/3
   ───────────┼────────●──────── Re
             /|        1
            / |
           /  |
          /   |
        ●     |
        ω²    |
              |

Корни третьей степени из 1: {1, ω, ω²}

Точки 1+ω и 1+ω² лежат на единичной окружности
под углами π/3 и -π/3 соответственно.
```

**Красота метода:**

Комплексные числа — не просто формальный трюк, а **естественный инструмент** для работы с периодическими структурами. Корни из единицы образуют «фильтр», пропускающий только нужные частоты (индексы), — это та же идея, что и в преобразовании Фурье!