Кубик до первой единицы

Условие задачи

Кубик подбрасывают до первого выпадения единицы. Обозначим: N — количество бросков (включая финальный), R — количество чётных результатов (2, 4 или 6)

Найти:

- а) $\mathbb{E}[N \mid R = 0]$
- б) $\mathbb{E}[N \mid R]$ (как функция от R)

Граф переходов

Событие	Результат	Вероятность	Изменение R	Символ
Выпала 1	**Конец** ✓	$\frac{1}{6}$	—	**1**
Выпало 3 или 5	Продолжаем	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	+0	odd
Выпало 2, 4 или 6	Продолжаем	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	+1	even

---

Метод 1: Индикаторы и первый шаг

Пункт а): $\mathbb{E}[N \mid R = 0]$

Формула через индикатор:

$$\mathbb{E}[N \mid R = 0] = \frac{\mathbb{E}[N \cdot \mathbb{I}(R = 0)]}{P(R = 0)}$$

где $\mathbb{I}(R = 0) = \begin{cases} 1 \text{ если все броски нечётные} \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$

Обозначим $p = P(R = 0)$ — вероятность, что все броски нечётные.

Метод первого шага:

$$p = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{выпала 1}} \cdot 1 + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{выпало 3,5}} \cdot p + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{выпало чётное}} \cdot 0$$

$$p = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}p \implies p\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \implies p = \frac{1}{4}$$

$$P(R = 0) = \frac{1}{4}$$

Вычисление $f = \mathbb{E}[N \cdot \mathbb{I}(R=0)]$

Метод первого шага для f:

После первого броска:

- С вер. $\frac{1}{6}$: выпала 1, $N=1$, $\mathbb{I}(R=0)=1 \to$ вклад $=1$
- С вер. $\frac{1}{3}$: выпало 3 или 5, $N = 1+N'$, $\mathbb{I}(R=0)=\mathbb{I}(R'=0)$
- С вер. $\frac{1}{2}$: выпало чётное, $\mathbb{I}(R=0)=0 \to$ вклад $=0$

$$f = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot \mathbb{E}[(1+N')\cdot \mathbb{I}(R'=0)] + \frac{1}{2}\cdot 0$$

$$f = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}(P(R=0) + \mathbb{E}[N'\cdot \mathbb{I}(R'=0)]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + f\right)$$

$$f = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3}f \implies f\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \implies f = \frac{3}{8}$$

Тогда

$$\mathbb{E}[N \mid R=0] = \frac{f}{p} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

Пункт б): $\mathbb{E}[N \mid R=r]$

Анализ структуры

$$N = \underbrace{N_{\text{odd}}}_{\text{кол-во } 3,5} + \underbrace{R}_{\text{кол-во чётных}} + \underbrace{1}_{\text{финальная } 1}$$

$$\mathbb{E}[N \mid R=r] = \mathbb{E}[N_{\text{odd}} \mid R=r] + r + 1$$

Совместное распределение (N_{odd}, R)

$$P(N_{\text{odd}}=m, R=r) = C(m+r, r)\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$

Интерпретация: $m+r$ бросков до финала, из них r чётных (порядок выбирается $C(m+r,r)$ способами), затем выпадает 1.

Маргинальное распределение R

$$\begin{aligned} P(R=r) &= \sum_{m=0}^{\infty} C(m+r,r)\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} C(m+r,r)\left(\frac{1}{3}\right)^m}_{=\left(\frac{3}{2}\right)^{r+1}} = \left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{r+1} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^r \end{aligned}$$

Распределение R - геометрическое

$$R \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{4}\right): \quad P(R=r) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^r, \quad r = 0,1,2,...$$

Условное распределение $N_{\text{odd}} \mid R = r$

$$P(N_{\text{odd}} = m \mid R = r) = \frac{P(N_{\text{odd}} = m, R = r)}{P(R = r)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{r+1} \cdot C(m+r, r) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{m}$$

Это **отрицательное биномиальное** распределение

Условное ожидание $\mathbb{E}[N_{\text{odd}} \mid R = r]$

$$\mathbb{E}[N_{\text{odd}} \mid R = r] = \left(\frac{2}{3}\right)^{r+1} \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot C(m+r, r) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{m}$$

Используем формулу: $\sum_{m=0}^{\infty} m \cdot C(m+r, r) x^m = \frac{(r+1)x}{(1-x)^{r+2}}$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{r+1} \cdot \frac{(r+1) \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{r+2}} = \frac{r+1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{r+1}{2}$$

Итоговая формула

$$\mathbb{E}[N \mid R = r] = \frac{r+1}{2} + r + 1 = \frac{r+1+2r+2}{2} = \frac{3r+3}{2}$$

Ответ а): $\quad \mathbb{E}[N \mid R = 0] = \frac{3}{2}$

Ответ б): $\quad \mathbb{E}[N \mid R = r] = \frac{3}{2}(r+1)$

В общем виде: $\mathbb{E}[N \mid R] = \frac{3}{2}(R+1)$

Метод 2: Производящие функции (Traj)

Множество всех траекторий:

$$\text{Traj} = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{odd} + \text{even})^k \cdot \mathbf{1} = \frac{\mathbf{1}}{1 - \text{odd} - \text{even}}$$

где $\text{odd} = \frac{1}{3}$, $\text{even} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{1} = \frac{1}{6}$ Для удобства обозначим $\text{Traj} = \omega$

Производящая функция для (N, R)

Введём переменные: z для подсчёта шагов, w для подсчёта чётных. Траектория: $(n-1)$ бросков с результатами $\in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, затем выпадает 1.

- Выпало чётное (2, 4, 6): вероятность $\frac{1}{2}$, вклад zw
- Выпало нечётное $\neq 1$ (3, 5): вероятность $\frac{1}{3}$, вклад z
- Выпала 1: вероятность $\frac{1}{6}$, вклад z

$$G(z, w) = \sum_{n,r} z^n w^r P(N = n, R = r) = z \cdot \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (z \cdot \text{odd} + zw \cdot \text{even})^k$$

$$G(z, w) = z \cdot \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(z \cdot \frac{1}{3} + zw \cdot \frac{1}{2}\right)^k = \frac{z/6}{1 - \frac{z}{3} - z\frac{w}{2}}$$

$$G(z, w) = \frac{z}{6\left(1 - \frac{z}{3} - z\frac{w}{2}\right)}$$

Формула для условного ожидания

Формула через коэффициенты:

$$\mathbb{E}[N \mid R = r] = \frac{[w^r] z\frac{\partial G}{\partial z} \mid_{z=1}}{[w^r] G(1, w)}$$

Почему $z\frac{\partial G}{\partial z}$?

Оператор $z\frac{\partial}{\partial z}$ умножает коэффициент при z^n на n:

$$z\frac{\partial}{\partial z}\sum a_n z^n = \sum n \cdot a_n z^n$$

Вычисление производной

Обозначим $D(z, w) = 1 - \frac{z}{3} - z\frac{w}{2} = 1 - z\left(\frac{1}{3} + \frac{w}{2}\right)$.

$$G = \frac{z}{6D}$$

По правилу частного:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1 \cdot 6D - z \cdot 6 \cdot \left(-\left(\frac{1}{3} + \frac{w}{2}\right)\right)}{36D^2} = \frac{D + z\left(\frac{1}{3} + \frac{w}{2}\right)}{6D^2}$$

Упростим числитель

$$D + z\left(\frac{1}{3} + \frac{w}{2}\right) = 1 - \frac{z}{3} - z\frac{w}{2} + \frac{z}{3} + z\frac{w}{2} = 1$$

Получаем:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{6D^2} = \frac{1}{6\left(1 - \frac{z}{3} - z\frac{w}{2}\right)^2}$$

Тогда

$$z\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{z}{6D^2} = \frac{z}{6\left(1 - \frac{z}{3} - z\frac{w}{2}\right)^2}$$

Подстановка $z = 1$, тогда вычисляем $D(1, w)$

$$D(1, w) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{w}{2} = \frac{2}{3} - \frac{w}{2}$$

Числитель: $[w^r]$ от $z\frac{\partial G}{\partial z}|_{z=1}$

$$z\frac{\partial G}{\partial z} \mid_{z=1} = \frac{1}{6\left(\frac{2}{3} - \frac{w}{2}\right)^2}$$

Преобразуем:

$$= \frac{1}{6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{3w}{4}\right)^2} = \frac{1}{6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(1 - \frac{3w}{4}\right)^2} = \frac{9}{24\left(1 - \frac{3w}{4}\right)^2} = \frac{3}{8\left(1 - \frac{3w}{4}\right)^2}$$

Используем разложение в ряд:

Известный ряд:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)x^r$$

$$\frac{3}{8\left(1-\frac{3w}{4}\right)^2} = \frac{3}{8}\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\left(\frac{3w}{4}\right)^r = \frac{3}{8}\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\cdot\frac{3^r}{4^r}w^r$$

$$[w^r]z\frac{\partial G}{\partial z}\;|_{z=1} = \frac{3(r+1)}{8}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^r = \frac{(r+1)\cdot 3^{r+1}}{8\cdot 4^r}$$

Знаменатель: $[w^r]$ от $G(1,w)$

$$G(1,w) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{w}{2}} = \frac{1}{6\left(\frac{2}{3}-\frac{w}{2}\right)} = \frac{1}{4-3w} = \frac{1}{4\left(1-\frac{3w}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{3w}{4}\right)^r = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^r w^r$$

$$[w^r]G(1,w) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^r = \frac{3^r}{4^{r+1}}$$

Собираем все вместе

$$\mathbb{E}[N \mid R=r] = \frac{\frac{(r+1)\cdot 3^{r+1}}{8\cdot 4^r}}{\frac{3^r}{4^{r+1}}} = \frac{(r+1)\cdot 3^{r+1}}{8\cdot 4^r}\cdot\frac{4^{r+1}}{3^r}$$

$$= \frac{(r+1)\cdot 3\cdot 4}{8} = \frac{12(r+1)}{8} = \frac{3(r+1)}{2}$$

Ответ (Метод 2): $\mathbb{E}[N \mid R=r] = \frac{3}{2}(r+1)$

В частности $\mathbb{E}[N \mid R=0] = \frac{3}{2}$

Совпадает с Методом 1!

Альтернативная форма через MGF

Производящая функция моментов:

$$M(t,w) = G(e^t,w) = \mathbb{E}[e^{tN}w^R] = \frac{e^t/6}{1-\frac{e^t}{3}-e^t\frac{w}{2}}$$

Формула:

$$\mathbb{E}[N \mid R=r] = \frac{[w^r]\frac{\partial M}{\partial t}|_{t=0}}{[w^r]M(0,w)}$$

Вычисление даёт тот же результат, поскольку $e^t|_{t=0} = 1$ и $\frac{\partial e^t}{\partial t}|_{t=0} = 1$

Метод 3: Разложение N и башенное свойство

Этого не было на лекции, но было предложено найти альтернативное решение задачи, кроме метода первого шага и слов

Ключевая идея

Количество бросков до финала: $K = N - 1 \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{6}\right)$

При условии $K = k$: количество чётных $R \mid K \sim \text{Binomial}\left(k, \frac{3}{5}\right)$

(Среди продолжений: $P(\text{чётное}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}$)

Условное ожидание через K

$$\mathbb{E}[N \mid R = r] = \mathbb{E}[K + 1 \mid R = r] = \mathbb{E}[K \mid R = r] + 1$$

Распределение $K \mid R = r$

$$P(K = k \mid R = r) = \frac{P(R = r \mid K = k) \cdot P(K = k)}{P(R = r)}$$

$$= \frac{C(k,r)\left(\frac{3}{5}\right)^r\left(\frac{2}{5}\right)^{k-r} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^r}$$

После упрощений:

$$P(K = k \mid R = r) = C(k,r) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-r} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^r \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^r \cdot \frac{4}{6} \cdot \ldots$$

Это **отрицательное биномиальное** распределение

$$K - r \mid (R = r) \sim \text{NegBin}\left(r + 1, \frac{2}{3}\right)$$

Среднее

$$\mathbb{E}[K - r \mid R = r] = (r + 1) \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{r + 1}{2}$$

$$\mathbb{E}[K \mid R = r] = r + \frac{r + 1}{2} = \frac{3r + 1}{2}$$

Итог:

$$\mathbb{E}[N \mid R = r] = \frac{3r + 1}{2} + 1 = \frac{3r + 3}{2} = \frac{3}{2}(r + 1) \quad \checkmark$$

Совпадает с Методом 1!