Метод первого шага и цена позиции

Задача 1: Игра с кубиком и шляпой

Условие задачи

Мы играем в игру с правильным кубиком, который можно бросать неограниченное количество раз, и шляпой. Рубли могут находиться в шляпе (**шр**) и в кармане (**кр**).

При каждом броске кубика происходит следующее:

Результат броска	Действие
1	+1 шр, играем дальше
2	+2 кр, играем дальше
3	+3 шр, играем дальше
4	Игра закончилась и берём шляпу
5	Деньги сгорают и играем дальше
6	Деньги сгорают и конец игры

Требуется найти: $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$, где случайная величина X — это выигрыш в данной игре.

Решение

Для решения данной задачи необходимы две ключевые концепции:

1. **Метод первого шага** — анализируем, что произойдёт после первого броска кубика
2. **Цена позиции** — каждому состоянию игры сопоставляем ожидаемый выигрыш
3. **Индикатор** - иногда удобно что-то записать как индикатор, $Rin\{0, 1\}$

Цена позиции

Пусть s — количество денег в шляпе. Это наша **позиция в игре**.

Определим $v(s)$ — **цену позиции** s, то есть математическое ожидание выигрыша, если в шляпе сейчас s рублей.

Наша цель: найти $v(0)$, так как игра начинается с пустой шляпы.

Уравнение для цены позиции

Рассмотрим, что может произойти после **первого** броска кубика из позиции s:

Выпало	Что происходит	Вероятность
1	В шляпе становится $s + 1$ рубль, игра продолжается $\to$ выигрыш $v(s + 1)$	$\frac{1}{6}$
2	Получаем 2 рубля в карман + продолжаем с позиции s $\to$ выигрыш $v(s) + 2$	$\frac{1}{6}$

3	В шляпе становится $s+3$ рубля, игра продолжается $\to$ выигрыш $v(s+3)$	$\frac{1}{6}$
4	Забираем шляпу $\to$ выигрыш s	$\frac{1}{6}$
5	Всё сгорает, продолжаем с 0 $\to$ выигрыш $v(0)$	$\frac{1}{6}$
6	Всё сгорает, игра заканчивается $\to$ выигрыш 0	$\frac{1}{6}$

По формуле полной вероятности:

$$v(s) = \frac{1}{6}v(s+1) + \frac{1}{6}(v(s)+2) + \frac{1}{6}v(s+3) + \frac{1}{6}s + \frac{1}{6}v(0) + \frac{1}{6}\cdot 0$$

Упростим:

$$6v(s) = v(s+1) + v(s) + 2 + v(s+3) + s + v(0) + 0$$

$$5v(s) = v(s+1) + v(s+3) + s + 2 + v(0)$$

Это **рекуррентное соотношение** для функции $v(s)$.

Поиск явного вида функции $v(s)$

Функция $v(s)$ должна быть **аддитивной** по рублям в шляпе. Каждый дополнительный рубль в шляпе добавляет одинаковую ценность независимо от того, сколько там уже денег.

На старте $s_0 = 0$	На старте $s_0 \neq 0$
Выпадает последовательность $3, 4$	Выпадает последовательность $3, 4$
X	$X' + s_0 R$
$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{E}(X') + s\mathbb{E}(R)$

Это наводит на мысль, что $v(s)$ — **линейная функция**: $v(s) = \alpha s + \beta$

Подставим $v(s) = \alpha s + \beta$ в уравнение:

$$5(\alpha s + \beta) = \alpha(s+1) + \beta + \alpha(s+3) + \beta + s + 2 + (\alpha \cdot 0 + \beta)$$

Раскроем скобки:

$$5\alpha s + 5\beta = \alpha s + \alpha + \beta + \alpha s + 3\alpha + \beta + s + 2 + \beta$$

$$5\alpha s + 5\beta = 2\alpha s + 4\alpha + s + 2 + 3\beta$$

Определим коэффициенты, сравнивая их при одинаковых степенях s:
Коэффициент при s:

$$5\alpha = 2\alpha + 1 \Longrightarrow 3\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

Свободный член:

$$5\beta = 4\alpha + 2 + 3\beta = 4\cdot\frac{1}{3} + 2 + 3\beta = \frac{4}{3} + 2 + 3\beta$$

$$2\beta = \frac{4}{3} + \frac{6}{3} = \frac{10}{3} \Longrightarrow \beta = \frac{5}{3}$$

Итоговая формула для цены позиции

$$v(s) = \frac{1}{3}s + \frac{5}{3} = \frac{s+5}{3}$$

Здесь α является платой за начало игры с 0 монет в шляпе,а β в свою очередь выступает в роли обменного курса, то есть 1 рубль в шляпе приравнивается к $\frac{1}{3}$ рубля в карман. Это связано с вероятностью $\frac{1}{6}$ забрать шляпу (выпадение 4) и вероятностью $\frac{2}{6}$ всё потерять (выпадение 5 или 6).

Ответ для математического ожидания:

$$\mathbb{E}(X) = v(0) = \frac{0+5}{3} = \frac{5}{3} \approx 1.67 \text{ рублей}$$

Чтобы убедиться, что в расчетах нет ошибки, можем проверить подставив в формулу полной вероятности $s = 0$:

$$\begin{aligned} 5v(0) &= v(1) + v(3) + 0 + 2 + v(0) \\ 5 \cdot \frac{5}{3} &= \frac{6}{3} + \frac{8}{3} + 2 + \frac{5}{3} \\ \frac{25}{3} &= \frac{6+8+5}{3} + 2 = \frac{19}{3} + \frac{6}{3} = \frac{25}{3} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Нахождение дисперсии

Уравнение для второго момента

Для вычисления дисперсии нам нужен второй момент: $\mathbb{E}(X^2)$.

Определим $w(s) = \mathbb{E}(X^2 \mid \text{начинаем с } s \text{ рублей в шляпе})$.

Рассмотрим, что происходит с X^2 после первого броска:

Выпало	Вклад в $\mathbb{E}(X^2)$	Вероятность
1	$w(s+1)$	$\frac{1}{6}$
2	$(X+2)^2 = X^2 + 4X + 4$, то есть $w(s) + 4v(s) + 4$	$\frac{1}{6}$
3	$w(s+3)$	$\frac{1}{6}$
4	s^2	$\frac{1}{6}$
5	$w(0)$	$\frac{1}{6}$
6	0	$\frac{1}{6}$

Получаем уравнение:

$$w(s) = \frac{1}{6}w(s+1) + \frac{1}{6}(w(s) + 4v(s) + 4) + \frac{1}{6}w(s+3) + \frac{1}{6}s^2 + \frac{1}{6}w(0) + 0$$

Упрощаем:

$$6w(s) = w(s+1) + w(s) + 4v(s) + 4 + w(s+3) + s^2 + w(0)$$

$$5w(s) = w(s+1) + w(s+3) + 4v(s) + 4 + s^2 + w(0)$$

Подставляем $v(s) = \frac{s+5}{3}$:

$$5w(s) = w(s+1) + w(s+3) + \frac{4s+20}{3} + 4 + s^2 + w(0)$$

$$5w(s) = w(s+1) + w(s+3) + \frac{4s+32}{3} + s^2 + w(0)$$

Найдем квадратичную функцию

Предположим $w(s) = as^2 + bs + c$, где $w(0) = c$

Подставляем:

$$5\big(as^2 + bs + c\big) = a(s+1)^2 + b(s+1) + c + a(s+3)^2 + b(s+3) + c + \frac{4s+32}{3} + s^2 + c$$

Раскрываем:

$$5as^2 + 5bs + 5c = as^2 + 2as + a + bs + b + as^2 + 6as + 9a + bs + 3b + \frac{4s}{3} + \frac{32}{3} + s^2 + 3c$$

$$5as^2 + 5bs + 5c = (2a+1)s^2 + \left(8a + 2b + \frac{4}{3}\right)s + \left(10a + 4b + \frac{32}{3} + 3c\right)$$

Коэффициент при s^2:

$$5a = 2a + 1 \Longrightarrow 3a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Коэффициент при s:

$$5b = 8a + 2b + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} + 2b + \frac{4}{3} = 4 + 2b \Longrightarrow 3b = 4 \Longrightarrow b = \frac{4}{3}$$

Свободный член:

$$5c = 10a + 4b + \frac{32}{3} + 3c = \frac{10}{3} + \frac{16}{3} + \frac{32}{3} + 3c = \frac{58}{3} + 3c$$

$$2c = \frac{58}{3} \Longrightarrow c = \frac{29}{3}$$

Итоговая формула для второго момента

$$w(s) = \frac{1}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{29}{3} = \frac{s^2 + 4s + 29}{3}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = w(0) = \frac{29}{3}$$

Вычисление дисперсии

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{29}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{29}{3} - \frac{25}{9}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{87}{9} - \frac{25}{9} = \frac{62}{9} \approx 6.89$$

Итоговый ответ

Математическое ожидание выигрыша:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{5}{3} \approx 1.67 \text{ рублей}$$

Дисперсия выигрыша:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{62}{9} \approx 6.89\text{рублей}^2$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{62}{9}} = \frac{\sqrt{62}}{3} \approx 2.62 \text{ рубля}$$

Метод первого шага позволяет свести сложную задачу к системе рекуррентных уравнений. Предположение о виде решения (линейная или квадратичная функция) позволяет найти явные формулы для всех характеристик случайной величины.

Задача 2: Лучшее пари для простаков

Условие задачи

Правильную монетку подбрасывают бесконечное число раз. Обозначим:

- H — орёл (heads)
- T — решка (tails)

Два игрока A и B ожидают появления своих комбинаций:

- Игрок A ждёт последовательность HTT
- Игрок B ждёт последовательность TTH

Игра заканчивается, когда один из игроков дожидается своей комбинации.

Обозначим:

- $X_{\{HTT\}}$ — момент времени, когда впервые выпала последовательность HTT
- $X_{\{TTH\}}$ — момент времени, когда впервые выпала последовательность TTH

Требуется найти:

1. $P\left(X_{\{HTT\}} < X_{\{TTH\}}\right)$ — вероятность выигрыша игрока A
2. $\mathbb{E}\left(X_{\{HTT\}}\right)$, $\mathbb{E}\left(X_{\{TTH\}}\right)$, $\mathbb{E}\left(X_{\{HTH\}}\right)$ — математические ожидания времён появления последовательностей

Ключевое наблюдение: Позиция в игре определяется не более чем **двумя последними символами** в последовательности бросков. Это позволяет построить конечное дерево состояний.

Часть 1: Вероятность $P\left(X_{\{HTT\}} < X_{\{TTH\}}\right)$

Дерево состояний для соревнования HTT vs TTH

```
              ⌀ (начало)
             / \
           /      \
      (H) H        T (T)
        / \       / \
      /     \   /     \
    HH      HT TH      TT
    |      / |  |      | \
    |     /  |[цикл]   |   \
[цикл]  HTT HTH -> H [цикл] TTH
-> H    (A) ->TH     ->T    (B)

Легенда:
• HTT – игрок A выигрывает
• TTH – игрок B выигрывает
• [цикл] – состояние может вернуться в себя
• Вероятность каждого перехода = 1/2
```

Асимметрия циклов для H создаёт преимущество для последовательности HTT

Диаграмма переходов

Пусть p_s — вероятность того, что игрок A выиграет, начиная из состояния s

Переходы между состояниями при бросках монеты (каждый с вероятностью $\frac{1}{2}$):

Из состояния	Выпало H	Выпало T	Примечание	p состояния
$\emptyset$	H	T	Начало	$p_\emptyset = \frac{1}{2}p_H + \frac{1}{2}p_T$
H	HH	HT		$p_H = \frac{1}{2}p_{\{HH\}} + \frac{1}{2}p_{\{HT\}}$
T	TH	TT		$p_T = \frac{1}{2}p_{\{TH\}} + \frac{1}{2}p_{\{TT\}}$
HH	HH	HT	После $HH + H$ снова HH	$p_{\{HH\}} = \frac{1}{2}p_{\{HH\}} + \frac{1}{2}p_{\{HT\}}$
HT	TH	$\boldsymbol{HTT}$	**A выиграл!**	$p_{\{HT\}} = \frac{1}{2}p_{\{TH\}} + \frac{1}{2} \cdot 1$
TH	HH	TT		$p_{\{TH\}} = \frac{1}{2}p_{\{HH\}} + \frac{1}{2}p_{\{TT\}}$
TT	$\boldsymbol{TTH}$	TT	**B выиграл!**	$p_{\{TT\}} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}p_{\{TT\}}$

Система уравнений для вероятности выигрыша A

Граничные условия:

$$p_{\{HTT\}} = 1, \quad p_{\{TTH\}} = 0$$

Решение системы

$$p_{\{TT\}} = \frac{1}{2}p_{\{TT\}} \implies p_{\{TT\}} = 0 \qquad p_{\{TH\}} = \frac{1}{2}p_{\{HH\}} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}p_{\{HH\}}$$

$$p_{\{HT\}} = \frac{1}{2}p_{\{TH\}} + \frac{1}{2} \qquad p_{\{HH\}} = \frac{1}{2}p_{\{HH\}} + \frac{1}{2}p_{\{HT\}}$$

$$\frac{1}{2}p_{\{HH\}} = \frac{1}{2}p_{\{HT\}} \implies p_{\{HH\}} = p_{\{HT\}}$$

Подставим:

$$p_{\{HT\}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p_{\{HH\}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}p_{\{HT\}} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}p_{\{HT\}} = \frac{1}{2} \implies p_{\{HT\}} = \frac{2}{3}$$

Следовательно:

$$p_{\{HH\}} = \frac{2}{3}, \quad p_{\{TH\}} = \frac{1}{3}, \quad p_{\{TT\}} = 0$$

Находим p_H и p_T:

$$p_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \qquad p_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{6}$$

Итоговая вероятность:

$$p_\emptyset = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

Ответ:

$$P\Big(X_{\{HTT\}} < X_{\{TTH\}}\Big) = \frac{5}{12} \approx 0.417$$

Игрок A (ожидающий HTT) выигрывает с вероятностью примерно **41.7%**

Игрок B (ожидающий TTH) выигрывает с вероятностью $\frac{7}{12} \approx$ **58.3%**

Часть 2: Математические ожидания времён появления

Задача 2.1: Нахождение $\mathbb{E}\Big(X_{\{HTT\}}\Big)$

Пусть v_s — математическое ожидание времени до появления HTT, если мы начинаем из состояния s.

Метод первого шага:

На каждом шаге тратится 1 бросок, затем переходим в новое состояние:

$$v_\emptyset = 1 + \frac{1}{2}v_H + \frac{1}{2}v_T$$

$$v_H = 1 + \frac{1}{2}v_{\{HH\}} + \frac{1}{2}v_{\{HT\}}$$

$$v_T = 1 + \frac{1}{2}v_{\{TH\}} + \frac{1}{2}v_{\{TT\}}$$

$$v_{\{HH\}} = 1 + \frac{1}{2}v_{\{HH\}} + \frac{1}{2}v_{\{HT\}}$$

$$v_{\{HT\}} = 1 + \frac{1}{2}v_{\{TH\}} + \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$v_{\{TH\}} = 1 + \frac{1}{2}v_{\{HH\}} + \frac{1}{2}v_{\{TT\}}$$

$$v_{\{TT\}} = 1 + \frac{1}{2}v_{\{TH\}} + \frac{1}{2}v_{\{TT\}}$$

Решение:

Из $v_{\{HT\}}$:

$$v_{\{HT\}} = 1 + \frac{1}{2}v_{\{TH\}}$$

Из $v_{\{HH\}}$:

$$v_{\{HH\}} = 1 + \frac{1}{2}v_{\{HH\}} + \frac{1}{2}v_{\{HT\}}$$

$$\frac{1}{2}v_{\{HH\}} = 1 + \frac{1}{2}v_{\{HT\}} \implies v_{\{HH\}} = 2 + v_{\{HT\}}$$

Из $v_{\{TT\}}$:

$$v_{\{TT\}} = 1 + \frac{1}{2}v_{\{TH\}} + \frac{1}{2}v_{\{TT\}}$$

$$\frac{1}{2}v_{\{TT\}} = 1 + \frac{1}{2}v_{\{TH\}} \implies v_{\{TT\}} = 2 + v_{\{TH\}}$$

Из $v_{\{TH\}}$:

$$v_{\{TH\}} = 1 + \frac{1}{2}v_{\{HH\}} + \frac{1}{2}v_{\{TT\}}$$

$$v_{\{TH\}} = 1 + \frac{1}{2}\Big(2 + v_{\{HT\}}\Big) + \frac{1}{2}\Big(2 + v_{\{TH\}}\Big)$$

$$v_{\{TH\}} = 1 + 1 + \frac{1}{2}v_{\{HT\}} + 1 + \frac{1}{2}v_{\{TH\}}$$

$$\frac{1}{2}v_{\{TH\}} = 3 + \frac{1}{2}v_{\{HT\}} \quad \Longrightarrow \quad v_{\{TH\}} = 6 + v_{\{HT\}}$$

Подставляем в $v_{\{HT\}}$:

$$v_{\{HT\}} = 1 + \frac{1}{2}\Big(6 + v_{\{HT\}}\Big) = 1 + 3 + \frac{1}{2}v_{\{HT\}}$$

$$\frac{1}{2}v_{\{HT\}} = 4 \quad \Longrightarrow \quad v_{\{HT\}} = 8$$

Обратная подстановка:

$$v_{\{TH\}} = 6 + 8 = 14$$
$$v_{\{HH\}} = 2 + 8 = 10$$
$$v_{\{TT\}} = 2 + 14 = 16$$

$$v_H = 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 1 + 5 + 4 = 10$$

$$v_T = 1 + \frac{1}{2} \cdot 14 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 1 + 7 + 8 = 16$$

$$v_\emptyset = 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 1 + 5 + 8 = 14$$

Математическое ожидание времени появления HTT:

$$\mathbb{E}\Big(X_{\{HTT\}}\Big) = 14 \text{ бросков}$$

Задача 2.2: Нахождение $\mathbb{E}\Big(X_{\{TTH\}}\Big)$

Пусть w_s — математическое ожидание времени до появления TTH из состояния s.

Система уравнений:

$$w_\emptyset = 1 + \frac{1}{2}w_H + \frac{1}{2}w_T$$

$$w_H = 1 + \frac{1}{2}w_{\{HH\}} + \frac{1}{2}w_{\{HT\}}$$

$$w_T = 1 + \frac{1}{2}w_{\{TH\}} + \frac{1}{2}w_{\{TT\}}$$

$$w_{\{HH\}} = 1 + \frac{1}{2}w_{\{HH\}} + \frac{1}{2}w_{\{HT\}}$$

$$w_{\{HT\}} = 1 + \frac{1}{2}w_{\{TH\}} + \frac{1}{2}w_{\{TT\}}$$

$$w_{\{TH\}} = 1 + \frac{1}{2}w_{\{HH\}} + \frac{1}{2}w_{\{TT\}}$$

$$w_{\{TT\}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}w_{\{TT\}}$$

Решение:

Из $w_{\{TT\}}$:

$$w_{\{TT\}} = 1 + \frac{1}{2}w_{\{TT\}} \implies w_{\{TT\}} = 2$$

Из $w_{\{HH\}}$:

$$w_{\{HH\}} = 1 + \frac{1}{2}w_{\{HH\}} + \frac{1}{2}w_{\{HT\}} \implies w_{\{HH\}} = 2 + w_{\{HT\}}$$

Из $w_{\{HT\}}$:

$$w_{\{HT\}} = 1 + \frac{1}{2}w_{\{TH\}} + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 + \frac{1}{2}w_{\{TH\}}$$

Из $w_{\{TH\}}$:

$$w_{\{TH\}} = 1 + \frac{1}{2}w_{\{HH\}} + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 + \frac{1}{2}w_{\{HH\}}$$

Подставляем:

$$w_{\{HT\}} = 2 + \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}w_{\{HH\}}\right) = 2 + 1 + \frac{1}{4}w_{\{HH\}} = 3 + \frac{1}{4}w_{\{HH\}}$$

$$w_{\{HH\}} = 2 + w_{\{HT\}} = 2 + 3 + \frac{1}{4}w_{\{HH\}} = 5 + \frac{1}{4}w_{\{HH\}}$$

$$\frac{3}{4}w_{\{HH\}} = 5 \implies w_{\{HH\}} = \frac{20}{3}$$

Обратная подстановка:

$$w_{\{HT\}} = 3 + \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{3} = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3}$$

$$w_{\{TH\}} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} = 2 + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}$$

$$w_H = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} = 1 + \frac{10}{3} + \frac{7}{3} = 1 + \frac{17}{3} = \frac{20}{3}$$

$$w_T = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 + \frac{8}{3} + 1 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$w_\emptyset = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} = 1 + \frac{10}{3} + \frac{7}{3} = \frac{20}{3}$$

Математическое ожидание времени появления TTH:

$$\mathbb{E}\left(X_{\{TTH\}}\right) = \frac{20}{3} \approx 6.67 \text{ бросков}$$

Задача 2.3: Нахождение $\mathbb{E}\left(X_{\{HTH\}}\right)$

Для последовательности HTH построим аналогичную систему.

Переходы:

- $HT + H \to HTH$ (конец)
- $HT + T \to TT$ (последние два символа)

Система уравнений:

$$u_\emptyset = 1 + \frac{1}{2}u_H + \frac{1}{2}u_T$$

$$u_H = 1 + \frac{1}{2}u_{\{HH\}} + \frac{1}{2}u_{\{HT\}}$$

$$u_T = 1 + \frac{1}{2}u_{\{TH\}} + \frac{1}{2}u_{\{TT\}}$$

$$u_{\{HH\}} = 1 + \frac{1}{2}u_{\{HH\}} + \frac{1}{2}u_{\{HT\}}$$

$$u_{\{HT\}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}u_{\{TT\}}$$

$$u_{\{TH\}} = 1 + \frac{1}{2}u_{\{HH\}} + \frac{1}{2}u_{\{TT\}}$$

$$u_{\{TT\}} = 1 + \frac{1}{2}u_{\{TH\}} + \frac{1}{2}u_{\{TT\}}$$

Решение:

Из $u_{\{HT\}}$:

$$u_{\{HT\}} = 1 + \frac{1}{2}u_{\{TT\}}$$

Из $u_{\{HH\}}$:

$$u_{\{HH\}} = 2 + u_{\{HT\}} = 2 + 1 + \frac{1}{2}u_{\{TT\}} = 3 + \frac{1}{2}u_{\{TT\}}$$

Из $u_{\{TT\}}$:

$$u_{\{TT\}} = 1 + \frac{1}{2}u_{\{TH\}} + \frac{1}{2}u_{\{TT\}} \quad \Longrightarrow \quad u_{\{TT\}} = 2 + u_{\{TH\}}$$

Из $u_{\{TH\}}$:

$$u_{\{TH\}} = 1 + \frac{1}{2}u_{\{HH\}} + \frac{1}{2}u_{\{TT\}}$$

$$u_{\{TH\}} = 1 + \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{2}u_{\{TT\}}\right) + \frac{1}{2}u_{\{TT\}}$$

$$u_{\{TH\}} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}u_{\{TT\}} + \frac{1}{2}u_{\{TT\}} = \frac{5}{2} + \frac{3}{4}u_{\{TT\}}$$

Подставляем в $u_{\{TT\}}$:

$$u_{\{TT\}} = 2 + \frac{5}{2} + \frac{3}{4}u_{\{TT\}}$$

$$\frac{1}{4}u_{\{TT\}} = \frac{9}{2} \implies u_{\{TT\}} = 18$$

Обратная подстановка:

$$u_{\{TH\}} = \frac{5}{2} + \frac{3}{4} \cdot 18 = \frac{5}{2} + \frac{27}{2} = 16$$
$$u_{\{HT\}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 10$$
$$u_{\{HH\}} = 3 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 12$$

$$u_H = 1 + \frac{1}{2} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 1 + 6 + 5 = 12$$

$$u_T = 1 + \frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 1 + 8 + 9 = 18$$

$$u_\emptyset = 1 + \frac{1}{2} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 1 + 6 + 9 = 16$$

Математическое ожидание времени появления HTH:

$$\mathbb{E}\left(X_{\{HTH\}}\right) = 16 \text{ бросков}$$

Практический вывод: В пари на появление последовательностей выбор правильной комбинации критически важен! Последовательности с повторяющимися символами (TTH) имеют преимущество над последовательностями без повторений в начале (HTT), так как они могут «перезапускаться» эффективнее при неудачных бросках.

Это классический пример **нетранзитивности** в вероятностных играх: даже «равные» последовательности могут иметь разные шансы на победу в соревновании!