Производящие функции: от алгебры к вероятности

Алгебраический подход через операции на символах

Алгебра символов

Рассмотрим два символа (буквы):

- H — орёл (heads)
- T — решка (tails)

Определим на множестве символов две операции:

Операция сложения (+): Дизъюнктное объединение (выбор одного из вариантов)

$H + T$ означает «либо H, либо T»

Операция умножения (·): Конкатенация (последовательное присоединение)

$H \cdot T$ означает «сначала H, потом T» (слово HT)

Свойства операций

Коммутативность сложения:

$$H + T = T + H$$

Ассоциативность:

$$(H + T) + H = H + (T + H)$$

Некоммутативность умножения (если различаем порядок):

$$H \cdot T \neq T \cdot H \quad \text{(слова } HT \text{ и } TH \text{ различны)}$$

Но для **подсчёта количества** порядок в умножении можно игнорировать, если нас интересует только комбинаторика.

Примеры выражений

Один бросок:

$$f_1(H, T) = H + T$$

Это множество $\{H, T\}$ — два возможных исхода.

Два броска:

$$f_2(H, T) = (H + T) \cdot (H + T) = (H + T)^2$$

Раскрывая:

$$(H + T)^2 = HH + HT + TH + TT$$

Множество исходов: $\{HH, HT, TH, TT\}$ — четыре элемента.

Десять бросков:

$$f_{10}(H, T) = (H + T)^{10}$$

Подсчёт количества элементов

Чтобы узнать, **сколько элементов** в множестве исходов, подставим $H = 1$ и $T = 1$:

$$|\Omega| = f(1,1) = (1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$$

Общий случай: n символов

Если есть k различных символов $s_1, s_2, ..., s_k$ и делаем n выборов:

$$f(s_1, ..., s_k) = (s_1 + ... + s_k)^n$$

Количество исходов:

$$f(1, ..., 1) = k^n$$

Запись множества исходов через производящую функцию

Полное множество исходов для 10 бросков

Множество всех последовательностей:

$$\Omega = \{HHHHHHHHHH, HHHHHHHHHT, ..., TTTTTTTTTT\}$$

Вместо явного перечисления 1024 элементов запишем компактно:

Производящая функция множества исходов:

$$f(H,T) = (H+T)^{10}$$

При раскрытии скобок каждый моном соответствует одному исходу.

$$(H+T)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} H^k T^{10-k}$$

Интерпретация члена $\binom{10}{k} H^k T^{10-k}$: Ровно k орлов и $(10-k)$ решек и таких исходов $\binom{10}{k}$ штук

Примеры с ограничениями

Пример 1: В 3-м и 4-м бросках выпали **разные** стороны.

Ограничение: (3-й бросок $= H$ И 4-й $= T$) ИЛИ (3-й $= T$ И 4-й $= H$)

$$b(H,T) = (H+T) \cdot (H+T) \cdot (H \cdot T + T \cdot H) \cdot (H+T)^6$$

Упрощаем:

$$b(H,T) = (H+T)^2 \cdot (HT + TH) \cdot (H+T)^6$$

Количество таких исходов:

$$b(1,1) = 2^2 \cdot (1+1) \cdot 2^6 = 4 \cdot 2 \cdot 64 = 512$$

Пример 2: Первые три броска дали HTH.

$$g(H,T) = H \cdot T \cdot H \cdot (H+T)^7$$

Количество исходов:

$$g(1,1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2^7 = 128$$

Пример 3: Ровно 5 орлов.

Нужен коэффициент при H^5T^5 в $(H+T)^{10}$:

$$[H^5T^5](H+T)^{10} = \binom{10}{5} = 252$$

Введение вероятностей

Пусть монетка **несимметричная**:

- $P(H) = p = \frac{1}{3}$
- $P(T) = q = 1 - p = \frac{2}{3}$

Теперь **интерпретируем операции вероятностно:**

Вероятностная интерпретация:

Сложение $(+)$ $\to$ сложение вероятностей (несовместные события)

Умножение $(\cdot)$ $\to$ умножение вероятностей (независимые события)

Вероятность конкретного исхода

Исход $HHTHTTTHTT$:

Вероятность этого конкретного исхода:

$$P(HHTHTTTHTT) = p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q$$

$$= p^4q^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

Общая формула: Любой исход с k орлами и $(10-k)$ решками:

$$P(\text{конкретный исход с } k \text{ орлами}) = p^k q^{10-k}$$

Вероятность события через производящую функцию

Вероятность хотя бы одного исхода:

Подставим $H = p$, $T = q$ в производящую функцию:

$$f(p,q) = (p+q)^{10} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{10} = 1^{10} = 1$$

Это проверка: сумма вероятностей всех исходов $= 1$ ✓

Вероятность ровно k орлов:

$$P(X = k) = \binom{10}{k} p^k q^{10-k}$$

Это коэффициент при «H^kT^{10-k}» после подстановки $H \to p$, $T \to q$.

Вероятностная производящая функция:

$$f(p,q) = (p+q)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} p^k q^{10-k}$$

При $p+q=1$ получаем $f(p,q)=1$

Примеры вычислений

Вероятность ровно 5 орлов:

$$P(X=5) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 252 \cdot \frac{1}{243} \cdot \frac{32}{243} = 252 \cdot \frac{32}{59049} \approx 0.136$$

Вероятность, что в 3-м и 4-м бросках разные стороны:

$$b(p,q) = (p+q)^2(pq+qp)(p+q)^6 = 1 \cdot 2pq \cdot 1 = 2pq$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \approx 0.444$$

Переход к числовым характеристикам

До этого работали с **вероятностями событий**. Теперь хотим найти числовые характеристики случайной величины $N_H = X$ — количества выпавших орлов H, то есть ищем $E[X]$ и $Var(X)$

Введение переменной для подсчёта

Вместо простой записи H и T введём **веса**:

- H имеет вес 1 (даёт вклад в счётчик орлов)
- T имеет вес 0 (не даёт вклад)

Но для производящих функций удобнее:

- Заменим $H \to z$ (формальная переменная)
- Заменим $T \to 1$ (нейтральный элемент)

Получим **производящую функцию для подсчёта орлов**.

Set Generating Function (комбинаторная ПФ)

Определение: Set Generating Function (SGF) кодирует количество способов получить k орлов.

$$G(z) = (z+1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} z^k$$

Коэффициент $[z^k]G(z) = \binom{10}{k}$ — число способов получить k орлов.

Пример: Коэффициент при z^5:

$$[z^5](z+1)^{10} = \binom{10}{5} = 252$$

Подсчёт всех исходов:

$$G(1) = (1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$$

Probability Generating Function (вероятностная ПФ)

Теперь совместим вероятности и подсчёт:

- Заменим $H \to pz$ (вероятность p и вклад в счётчик z)
- Заменим $T \to q \cdot 1$ (вероятность q, вклад 0)

Определение: Probability Generating Function (PGF)

$$G_X(z) = (pz+q)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} p^k q^{10-k} z^k$$

Коэффициент $[z^k]G_X(z) = P(X = k)$

Также: $G_X(z) = \mathbb{E}(z^X)$

Для нашего примера ($p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$):

$$G_X(z) = \left(\frac{z}{3} + \frac{2}{3}\right)^{10} = \left(\frac{z+2}{3}\right)^{10}$$

Проверка нормировки:

$$G_X(1) = \left(\frac{1+2}{3}\right)^{10} = 1^{10} = 1 \quad \checkmark$$

Связь с математическим ожиданием

Первая производная PGF:

$$G'_X(z) = \sum_{k=0}^{10} k \cdot P(X = k) z^{k-1}$$

При $z = 1$:

$$G'_X(1) = \sum_{k=0}^{10} k \cdot P(X = k) = \mathbb{E}(X)$$

Вычисление для нашего примера:

$$G_X(z) = \left(\frac{z+2}{3}\right)^{10}$$

$$G'_X(z) = 10\left(\frac{z+2}{3}\right)^{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}\left(\frac{z+2}{3}\right)^{9}$$

$$G'_X(1) = \frac{10}{3} \cdot 1^9 = \frac{10}{3}$$

Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{10}{3} \approx 3.33$$

Проверка: $\mathbb{E}(X) = np = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ ✓

Вторая производная для дисперсии:

$$G''_X(z) = \frac{10}{3} \cdot 9\left(\frac{z+2}{3}\right)^{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{30}{9}\left(\frac{z+2}{3}\right)^{8} = \frac{10}{3}\left(\frac{z+2}{3}\right)^{8}$$

$$G''_X(1) = \frac{10}{3} \cdot 1^8 = \frac{10}{3}$$

Но $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{20}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{20}{3} - \frac{100}{9} = \frac{60}{9} - \frac{100}{9} = -\frac{40}{9}$$

Ошибка! Пересчитаем:

$$G''_X(z) = \frac{d}{d}z\left[\frac{10}{3}\left(\frac{z+2}{3}\right)^{9}\right] = \frac{10}{3} \cdot 9\left(\frac{z+2}{3}\right)^{8} \cdot \frac{1}{3} = 10\left(\frac{z+2}{3}\right)^{8}$$

$$G''_X(1) = 10 \cdot 1 = 10$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 10 + \frac{10}{3} = \frac{40}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{40}{3} - \frac{100}{9} = \frac{120}{9} - \frac{100}{9} = \frac{20}{9} \approx 2.22$$

Проверка: $\mathrm{Var}(X) = npq = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$ ✓

Moment Generating Function

Переход от дискретной к непрерывной переменной

PGF работает только для **целочисленных** неотрицательных случайных величин. Для более общего подхода заменим z на e^t:

Определение: Moment Generating Function (MGF)

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = G_X(e^t)$$

Для нашего случая:

$$M_X(t) = (pe^t + q)^{10} = \left(\frac{e^t}{3} + \frac{2}{3}\right)^{10} = \left(\frac{e^t + 2}{3}\right)^{10}$$

Извлечение моментов через производные

Разложение в ряд:

$$e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!}$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)$$

При дифференцировании:

$$\frac{d^n M_X}{dt^n} \ |_{t=0} = \mathbb{E}(X^n)$$

Главное свойство MGF:

n-я производная в нуле = n-й момент:

$$\mathbb{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0)$$

Вычисление моментов

Первый момент:

$$M_X(t) = \left(\frac{e^t + 2}{3}\right)^{10}$$

$$M'_X(t) = 10\left(\frac{e^t + 2}{3}\right)^9 \cdot \frac{e^t}{3}$$

$$M'_X(0) = 10\left(\frac{1 + 2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} = 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{10}{3} \quad ✓$$

Второй момент:

$$M_X''(t) = \frac{10}{3}\left[9\left(\frac{e^t+2}{3}\right)^8 \cdot \frac{e^t}{3} \cdot e^t + \left(\frac{e^t+2}{3}\right)^9 \cdot e^t\right]$$

$$M_X''(0) = \frac{10}{3}\left[9 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1\right] = \frac{10}{3}[3+1] = \frac{40}{3}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{40}{3} \quad \checkmark$$

Третий момент:

Аналогично можно найти $\mathbb{E}(X^3) = M_X'''(0)$.

Преимущество MGF

1. Работает для **любых** случайных величин (не только целочисленных)
2. Прямое вычисление всех моментов через производные
3. Для **суммы независимых** с.в.: $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

Пример: Если $X_1, ..., X_{10}$ — независимые броски, $X = X_1 + ... + X_{10}$:

$$M_X(t) = \prod_{i=1}^{10} M_{X_i}(t) = \left(M_{X_1}(t)\right)^{10}$$

где $M_{X_i}(t) = pe^t + q$ (MGF одного броска Бернулли).

$$M_X(t) = (pe^t + q)^{10} \quad \checkmark$$

Характеристическая функция

Проблема существования MGF

MGF может **не существовать** для некоторых распределений!

Пример: Распределение Коши не имеет конечных моментов, и $\mathbb{E}(e^{tX}) = \infty$ для $t \neq 0$.

Решение: Заменим e^t на e^{it}, где $i = \sqrt{-1}$.

Определение характеристической функции

Определение: Характеристическая функция (ХФ)

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = M_X(it)$$

Для нашего случая:

$$\varphi_X(t) = (pe^{it} + q)^{10} = \left(\frac{e^{it}}{3} + \frac{2}{3}\right)^{10} = \left(\frac{e^{it}+2}{3}\right)^{10}$$

Всегда существует!

$$|\varphi_X(t)| = |\mathbb{E}(e^{itX})| \leq \mathbb{E}(|e^{itX}|) = \mathbb{E}(1) = 1$$

Важнейшее свойство: ХФ существует для **любого** распределения!

$$|\varphi_X(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t$$

Извлечение моментов

Если $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$:

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{1}{i^n} \frac{d^n \varphi_X}{dt^n} \Big|_{t=0}$$

Первый момент:

$$\varphi'_X(t) = 10 \left(\frac{e^{it} + 2}{3} \right)^9 \cdot \frac{ie^{it}}{3}$$

$$\varphi'_X(0) = 10 \cdot 1 \cdot \frac{i}{3} = \frac{10i}{3}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i} \cdot \frac{10i}{3} = \frac{10}{3} \quad \checkmark$$

Второй момент:

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{i^2} \varphi''_X(0) = -\varphi''_X(0)$$

После вычислений:

$$\varphi''_X(0) = -\frac{40}{3}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = -\left(-\frac{40}{3} \right) = \frac{40}{3} \quad \checkmark$$

Формула Эйлера и геометрическая интерпретация

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\cos(t) + i \sin(t) + 2}{3} \right)^{10}$$

Можно переписать:

$$e^{it} + 2 = 2 + \cos(t) + i \sin(t)$$

Модуль:

$$|e^{it} + 2| = \sqrt{(2 + \cos(t))^2 + \sin^2(t)}$$

При $t = 0$:

$$\varphi_X(0) = \left(\frac{1 + 2}{3} \right)^{10} = 1$$

График: ХФ — комплекснозначная функция, её можно изобразить на комплексной плоскости.

Взаимосвязь всех производящих функций

Функция	Аргумент	Определение	Для 10 бросков
SGF	z	$\sum_k \binom{n}{k} z^k$	$(z+1)^{10}$
PGF	z	$\sum_k P(X=k) z^k = \mathbb{E}(z^X)$	$(pz+q)^{10}$
MGF	t	$\mathbb{E}(e^{tX})$	$(pe^t+q)^{10}$
ХФ	t	$\mathbb{E}(e^{itX})$	$(pe^{it}+q)^{10}$

Связи между функциями:

$$G_X(z) = \text{PGF}$$
$$M_X(t) = G_X(e^t) = \text{MGF}$$
$$\varphi_X(t) = M_X(it) = G_X(e^{it}) = \text{ХФ}$$

Цепочка обобщений:

$$\text{Комбинаторика} \overset{\text{вероятности}}{\to} \text{PGF} \overset{z \to e^t}{\to} \text{MGF} \overset{t \to it}{\to} \text{ХФ}$$

Каждый следующий шаг расширяет область применимости, но сохраняет структуру.

Ключевые свойства и теоремы

Свойство 1: Однозначность

Теорема (Леви): Характеристическая функция **однозначно определяет** распределение.

Если $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ для всех t, то X и Y имеют одинаковое распределение.

Это не всегда верно для MGF (может не существовать), но ХФ всегда работает!

Свойство 2: Сумма независимых случайных величин

Для независимых X и Y:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

Доказательство:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\big(e^{it(X+Y)}\big) = \mathbb{E}(e^{itX} e^{itY}) = \mathbb{E}(e^{itX}) \cdot \mathbb{E}(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

Применение: Если $X = X_1 + ... + X_n$, где X_i независимы и одинаково распределены:

$$\varphi_X(t) = \left[\varphi_{X_1}(t)\right]^n$$

Для биномиального распределения:

$$\varphi_{X_1}(t) = pe^{it} + q$$

$$\varphi_X(t) = (pe^{it} + q)^n$$

Свойство 3: Формула обращения

Можно **восстановить** распределение по ХФ!

Для дискретной с.в.:

$$P(X=k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)dt$$

Проверка для нашего примера ($k=5$, $p=\frac{1}{3}$):

$$P(X=5) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-5it}\left(\frac{e^{it}+2}{3}\right)^{10} dt$$

Это интегрирование даёт:

$$P(X=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

Применение к Центральной предельной теореме

Формулировка

Пусть $X_1, X_2, ...$ — независимые одинаково распределённые с.в. с $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$.

Стандартизованная сумма:

$$Z_n = \frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

ЦПТ: Z_n сходится по распределению к $\mathcal{N}(0,1)$.

Доказательство через характеристические функции

ХФ стандартного нормального распределения:

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Нужно показать:

$$\varphi_{Z_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{при } n \to \infty$$

Для нашего примера: $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, $\mu = p$, $\sigma^2 = pq$.

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$$

ХФ одного броска:

$$\varphi_{X_i-p}(t) = e^{-ipt}(pe^{it}+q) = e^{-ipt}(pe^{it}+1-p)$$

Для стандартизованной:

$$\varphi_{\frac{X_i-p}{\sqrt{pq}}}(t) = e^{-ip\frac{t}{\sqrt{pq}}}\left(pe^{i\frac{t}{\sqrt{pq}}}+q\right)$$

При больших n и малых аргументах ($\frac{t}{\sqrt{n}}$):

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left[\varphi_{\frac{X_1-p}{\sqrt{pq}}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Вывод ЦПТ: Сходимость ХФ $\Leftrightarrow$ сходимость распределений

Это мощный инструмент для доказательства предельных теорем!

Заключение

Вместо прямой работы с вероятностями, мы кодируем информацию в производящих функциях. Алгебраические операции над символами становятся операциями над функциями. Дифференцирование функций даёт нам моменты распределения. Предельный переход функций соответствует предельным теоремам для распределений.

Производящие функции — это **язык**, на котором теория вероятности говорит с математическим анализом.