

Лучшее пари для простаков (метод траекторий)

HTH vs THH: метод траекторий

Условие задачи

Правильную монетку подбрасывают бесконечное число раз. Обозначим: H — орёл, T — решка

Два игрока ожидают появления своих комбинаций: Игрок A ждёт последовательность HTH ,
Игрок B ждёт последовательность THH

Требуется найти:

1. $P(A \text{ выигрывает})$, $P(B \text{ выигрывает})$, $P(\text{никто не победит})$ — вероятность бесконечной игры
2. $\mathbb{E}[\tau]$ — математическое ожидание времени игры
3. k -тый начальный момент $\mathbb{E}[\tau^k]$

Метод траекторий (Traj)

Traj — формальная сумма всех незавершённых траекторий:

$$\text{Traj} = 1 + (H + T) + (H + T)^2 + (H + T)^3 + \dots = \frac{1}{1 - H - T}$$

При подстановке $H = T = \frac{1}{2}$: каждый член даёт 1, сумма расходится.

Интерпретация: Traj — это «мера» всех возможных путей в дереве траекторий.

Когда мы «требуем» появления паттерна в конце траектории, получаем уравнения с учётом перекрытий.

Анализ перекрытий

Рассмотрим, что происходит, когда в последовательности бросков появляется HTH :

Перекрытие $X \rightarrow Y$: Суффикс паттерна X совпадает с префиксом паттерна Y .

Смысл: После появления X , паттерн Y может появиться «быстрее», используя общую часть.

Последовательность: ... X X H T H
 ↑ ↑ ↑
 1 2 3

После появления HTH смотрим на суффиксы:

- Суффикс длины 2: TH — это префикс THH ! (начало для B)
- Суффикс длины 1: H — это префикс HTH ! (начало для A)

Это означает: когда A выигрывает (появляется HTH), в этот момент:

- Игрок B уже имеет «задел» TH для своей комбинации THH
- Игрок A имеет «задел» H для новой попытки HTH

Аналогично для THH :

Последовательность: ... X X T H H
 ↑ ↑ ↑
 1 2 3

После появления THH смотрим на суффиксы:

- Суффикс длины 2: HH — НЕ префикс ни HTH , ни THH
- Суффикс длины 1: H — это префикс $HTH!$ (начало для A)

Уравнения через Traj

Перекрытия определяют **структуру переходов** между состояниями

Для паттерна HTH :

$$\text{Traj} \cdot HTH = P(A) + P(B) \cdot TH + P(A) \cdot TH$$

- $P(A)$: чистая победа A (HTH появился первым)
- $P(B) \cdot TH$: Самоперекрытие $HTH \rightarrow HTH$: суффикс H = префикс H , добавляем TH
- $P(A) \cdot TH$: Перекрытие $THH \rightarrow HTH$: суффикс H = префикс H , добавляем TH

Для паттерна THH :

$$\text{Traj} \cdot THH = P(B) + P(A) \cdot H$$

- $P(B)$: Чистая победа B : паттерн THH появился первым
- $P(A) \cdot H$: Перекрытие $HTH \rightarrow THH$: суффикс TH = префикс TH , добавляем H

Паттерн THH не имеет самоперекрытий! Это критическое отличие от HTH , который перекрывает сам с собой.

Подстановка вероятностей

При $H = T = \frac{1}{2}$: $HTH \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $TH \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $H \rightarrow \frac{1}{2}$

Система уравнений:

$$\begin{aligned} \text{Traj} \cdot \frac{1}{8} &= P(A) + P(B) \cdot \frac{1}{4} + P(A) \cdot \frac{1}{4} \\ \text{Traj} \cdot \frac{1}{8} &= P(B) + P(A) \cdot \frac{1}{2} \\ 1 &= P(A) + P(B) + P(\emptyset) \end{aligned}$$

Доказательство: $P(\text{никто не победит}) = 0$

Разобъём бесконечную последовательность на непересекающиеся тройки:

$$\underbrace{(\text{???)}}_{\text{тройка 1}}, \underbrace{(\text{???)}}_{\text{тройка 2}}, \underbrace{(\text{???)}}_{\text{тройка 3}} \dots$$

Вероятность, что тройка — это **ни HTH , ни THH** :

$$P(\text{тройка } (H+T)^3 \text{ и } \neq HTH \text{ и } \neq THH) = \frac{8-2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Оценка вероятности бесконечной игры

$$P(\text{никто не победил за } n \text{ троек}) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Вывод:

$$P(\text{никто никогда не победит}) = 0$$

Следовательно: $P(A) + P(B) = 1$

Решение системы

Уравнение 1 (для HTH):

$$\Lambda = P(A) + P(A) \cdot \frac{1}{4} + P(B) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Lambda = P(A) \left(1 + \frac{1}{4}\right) + P(B) \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}P(A) + \frac{1}{4}P(B)$$

Уравнение 2 (для THH):

$$\Lambda = P(B) + P(A) \cdot \frac{1}{2}$$

Уравнение 3 (нормировка):

$$P(A) + P(B) = 1$$

Приравниваем уравнения 1 и 2

$$\frac{5}{4}P(A) + \frac{1}{4}P(B) = P(B) + \frac{1}{2}P(A)$$

Переносим $P(A)$ влево, $P(B)$ вправо:

$$\frac{5}{4}P(A) - \frac{1}{2}P(A) = P(B) - \frac{1}{4}P(B) \quad \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{4}\right)P(A) = \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\right)P(B)$$

$$\frac{3}{4}P(A) = \frac{3}{4}P(B) \quad P(A) = P(B)$$

Применяем нормировку

$$P(A) + P(B) = 1, \quad P(A) = P(B) \quad 2P(A) = 1$$

Ответ:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

Игра честная: оба игрока имеют равные шансы!

Диаграмма переходов

Пусть p_s — вероятность победы игрока A , начиная из состояния s .

Из состояния	Выпало H	Выпало T	Примечание	Уравнение для p_s
\emptyset	H	T	Начало	$p_\emptyset = \frac{1}{2}p_H + \frac{1}{2}p_T$
H	HH	HT		$p_H = \frac{1}{2}p_{HH} + \frac{1}{2}p_{HT}$
T	TH	TT		$p_T = \frac{1}{2}p_{TH} + \frac{1}{2}p_{TT}$
HH	HH	HT	Петля на H	$p_{HH} = \frac{1}{2}p_{HH} + \frac{1}{2}p_{HT}$
HT	$\textcolor{green}{HTH} \checkmark$	TT	A выиграл!	$p_{HT} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}p_{TT}$
TH	$\textcolor{red}{TTH} \times$	HT	B выиграл!	$p_{TH} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}p_{HT}$
TT	TH	TT	Петля на T	$p_{TT} = \frac{1}{2}p_{TH} + \frac{1}{2}p_{TT}$

Пошаговое решение системы

Из p_{TT} : $p_{TT} = \frac{1}{2}p_{TH} + \frac{1}{2}p_{TT} \Rightarrow p_{TT} = p_{TH}$

Из p_{TH} : $p_{TH} = \frac{1}{2}p_{HT}$ Следовательно: $p_{TT} = \frac{1}{2}p_{HT}$

Из p_{HT} :

$$p_{HT} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{TT} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p_{HT} \Rightarrow \frac{3}{4}p_{HT} = \frac{1}{2} \Rightarrow p_{HT} = \frac{2}{3}$$

Остальные значения:

$$p_{TH} = \frac{1}{3}, \quad p_{TT} = \frac{1}{3}, \quad p_{HH} = p_{HT} = \frac{2}{3}$$

$$p_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \quad p_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad p_\emptyset = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Ответ (вероятности):

$P(A \text{ выиграет с } HTH)$	$P(B \text{ выиграет с } TTH)$	$P(\text{никто не победит})$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Необычное наблюдение: Игра полностью симметрична — оба игрока выигрывают с равной вероятностью $\frac{1}{2}$, несмотря на разные комбинации!

Математическое ожидание времени игры

Уравнения для $E_s = \mathbb{E}[\tau \mid \text{старт из } s]$

Решение

Из $E_{TT} = 2 + E_{TH}$ и $E_{TH} = 1 + \frac{1}{2}E_{HT}$:

$$E_{TT} = 3 + \frac{1}{2}E_{HT}$$

Подставляем в $E_{HT} = 1 + \frac{1}{2}E_{TT}$:

$$E_{HT} = 1 + \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{2} E_{HT} \right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{4} E_{HT} \Rightarrow E_{HT} = \frac{10}{3}$$

Состояние	Уравнение	Упрощение	Значение
HT	$E_{HT} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} E_{TT}$	$E_{HT} = 1 + \frac{1}{2} E_{TT}$	$\frac{10}{3}$
TH	$E_{TH} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} E_{HT}$	$E_{TH} = 1 + \frac{1}{2} E_{HT}$	$\frac{8}{3}$
TT	$E_{TT} = 1 + \frac{1}{2} E_{TH} + \frac{1}{2} E_{TT}$	$E_{TT} = 2 + E_{TH}$	$\frac{14}{3}$
HH	$E_{HH} = 1 + \frac{1}{2} E_{HH} + \frac{1}{2} E_{HT}$	$E_{HH} = 2 + E_{HT}$	$\frac{16}{3}$
H	$E_H = 1 + \frac{1}{2} E_{HH} + \frac{1}{2} E_{HT}$		$\frac{16}{3}$
T	$E_T = 1 + \frac{1}{2} E_{TH} + \frac{1}{2} E_{TT}$		$\frac{14}{3}$
\emptyset	$E_\emptyset = 1 + \frac{1}{2} E_H + \frac{1}{2} E_T$		6

Математическое ожидание времени игры:

$$\mathbb{E}[\tau] = E_\emptyset = 6 \text{ бросков}$$

k -тый начальный момент $\mathbb{E}[\tau^k]$

Рекуррентная формула

Для вычисления $\mathbb{E}[\tau^k]$ из состояния s обозначим $M_s^{(k)} = \mathbb{E}[\tau^k \mid \text{старт из } s]$

Ключевое соотношение: Если из s за один шаг переходим в s' , то время до конца игры равно $1 + \tau_{s'}$:

$$\tau_s = 1 + \tau_{s'}$$

Раскрываем по формуле бинома Ньютона:

$$\tau_s^k = (1 + \tau_{s'})^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \tau_{s'}^j$$

Итоговая формула:

$$M_s^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mathbb{E}[\tau_{s'}^j] = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M_{s'}^{(j)}$$

Общее уравнение для состояния s

Если из s с вероятностью $\frac{1}{2}$ переходим в s_1 или s_2 :

$$M_s^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M_{s_1}^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M_{s_2}^{(j)}$$

При s_i — терминальное состояние: $M_{s_i}^{(j)} = 0$ для всех $j \geq 1$, $M_{s_i}^{(0)} = 1$.

Второй момент $\mathbb{E}[\tau^2]$

Для $k = 2$: $(1 + \tau')^2 = 1 + 2\tau' + \tau'^2$

$$M_s^{(2)} = \frac{1}{2} [1 + 2M_{s_1}^{(1)} + M_{s_1}^{(2)}] + \frac{1}{2} [1 + 2M_{s_2}^{(1)} + M_{s_2}^{(2)}]$$

Система для второго момента:

$$\begin{aligned} M_{HT}^{(2)} &= \frac{1}{2}[1 + 0 + 0] + \frac{1}{2}[1 + 2E_{TT} + M_{TT}^{(2)}] = 1 + E_{TT} + \frac{1}{2}M_{TT}^{(2)} \\ M_{TH}^{(2)} &= \frac{1}{2}[1 + 0 + 0] + \frac{1}{2}[1 + 2E_{HT} + M_{HT}^{(2)}] = 1 + E_{HT} + \frac{1}{2}M_{HT}^{(2)} \\ M_{TT}^{(2)} &= \frac{1}{2}[1 + 2E_{TH} + M_{TH}^{(2)}] + \frac{1}{2}[1 + 2E_{TT} + M_{TT}^{(2)}] \end{aligned}$$

Решение для второго момента

Подставляя $E_{HT} = \frac{10}{3}$, $E_{TH} = \frac{8}{3}$, $E_{TT} = \frac{14}{3}$:

$$M_{TH}^{(2)} = 1 + \frac{10}{3} + \frac{1}{2}M_{HT}^{(2)} = \frac{13}{3} + \frac{1}{2}M_{HT}^{(2)}$$

$$M_{TT}^{(2)} = 1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}M_{TH}^{(2)} + \frac{14}{3} + \frac{1}{2}M_{TT}^{(2)}$$

После решения системы:

$$M_{HT}^{(2)} = \frac{166}{9}, \quad M_{TH}^{(2)} = \frac{160}{9}, \quad M_{TT}^{(2)} = \frac{208}{9}$$

$$\mathbb{E}[\tau^2] = M_{\emptyset}^{(2)} = 50$$

$$\text{Var}(\tau) = \mathbb{E}[\tau^2] - (\mathbb{E}[\tau])^2 = 50 - 36 = 14$$

Общая рекуррентная схема для k -того момента

Алгоритм вычисления $M_s^{(k)}$:

1. Вычислить все $M_s^{(j)}$ для $j = 0, 1, \dots, k - 1$
2. Для каждого состояния s записать:

$$M_s^{(k)} = \sum_{\text{переходы } s \rightarrow s'} P(s \rightarrow s') \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M_{s'}^{(j)}$$

3. Для терминальных состояний: $M_{\text{term}}^{(j)} = 0$ при $j \geq 1$
4. Решить линейную систему относительно $M_s^{(k)}$

Замечание о симметрии:

В отличие от пары HTT vs TTH (где вероятности $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{12}$), пара HTH vs THH даёт **равные шансы** обоим игрокам!

Это связано с симметричной структурой перекрытий: суффикс TH паттерна HTH совпадает с префиксом THH , и суффикс H паттерна THH является частью HTH .