Picture-Writing и производящие функции

Часть I: Random Walk

Рассматриваем симметричное случайное блуждание на $\mathbb{Z}$:

$$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n, \quad S_0 = 0$$

где x_i — независимые одинаково распределённые случайные величины:

$$P(x_i = +1) = P(x_i = -1) = \frac{1}{2}$$

Символьное представление

Введём символы для шагов:

- $\uparrow$ — шаг вверх ($x_i = +1$)
- $\downarrow$ — шаг вниз ($x_i = -1$)

Траектория длины n — это слово из символов $\uparrow$ и $\downarrow$.

Пример: $\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow$ означает путь $0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1 \to 0$

Множество траекторий как производящая функция

Определим операции:

Сложение (+): выбор альтернативы (дизъюнкция)

$\uparrow + \downarrow$ означает «либо вверх, либо вниз»

Умножение ($\cdot$): последовательное выполнение (конкатенация)

$\uparrow \cdot \downarrow$ означает «сначала вверх, потом вниз»

Множество всех траекторий длины n:

$$Q_n = \{\uparrow, \downarrow\}^n$$

Производящая функция:

$$f(\uparrow, \downarrow) = (\uparrow + \downarrow) \cdot (\uparrow + \downarrow) \cdot ... \cdot (\uparrow + \downarrow) = (\uparrow + \downarrow)^n$$

При раскрытии скобок **каждый моном соответствует одной траектории**.

Пример для $n = 2$:

$$(\uparrow + \downarrow)^2 = \uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow + \downarrow\downarrow$$

Четыре траектории: $\{\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow\}$

Подсчёт количества

Для подсчёта числа траекторий подставляем $\uparrow = \downarrow = 1$:

$$f(1, 1) = (1 + 1)^n = 2^n$$

Принцип: Подстановка единиц даёт количество элементов множества.

Задача: Первое достижение уровня

Определим **момент первого достижения** уровня $+1$:

$$\tau = \min\{n \geq 1 : S_n = 1\}$$

с соглашением $\tau = \infty$, если уровень никогда не достигается.

Вопросы:
1. $P(\tau < \infty) = ?$ (вероятность когда-либо достичь)
2. $P(\tau = n) = ?$ (вероятность достичь впервые на шаге n)

Производящая функция для вероятности достижения

Обозначим:

$$g(\uparrow, \downarrow) = P(\text{траектория достигает уровня} + 1)$$

Ключевая идея Пойа: Вместо перебора всех траекторий выведем **рекуррентное соотношение** для g.

Выведем рекуррентное соотношение методом первого шага

Случай 1: Первый шаг вверх $(\uparrow)$

Мы сразу оказываемся на уровне $+1$ — цель достигнута!

Вклад: $\uparrow$

Случай 2: Первый шаг вниз $(\downarrow)$

Мы оказываемся на уровне -1. Чтобы достичь $+1$, нужно:
1. Сначала вернуться с -1 на 0 (вероятность g, по симметрии)
2. Затем подняться с 0 на $+1$ (снова вероятность g)

Вклад: $\downarrow \cdot g \cdot g = \downarrow g^2$

Функциональное уравнение

$$g(\uparrow, \downarrow) = \uparrow + \downarrow \cdot g(\uparrow, \downarrow) \cdot g(\uparrow, \downarrow)$$

или короче:

$$g = \uparrow + \downarrow g^2$$

Коммутативная подстановка

Для получения числовых результатов подставляем **одинаковые** значения:

$$\uparrow = \downarrow = z$$

Это делает операцию умножения **коммутативной** и превращает символьную функцию в обычную функцию одной переменной.

Обозначим $G(z) = g(z, z)$. Тогда:

$$G(z) = z + z \cdot G^2(z)$$

Получаем квадратное уравнение:

$$zG^2 - G + z = 0$$

$$G = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z^2}}{2z}$$

Выбор корня: При $z \to 0$ должно быть $G(z) \to 0$.

Проверяем:

$$\frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z} \underset{z\to 0}{\to} \frac{1-(1-2z^2+...)}{2z} \to 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{1+\sqrt{1-4z^2}}{2z} \underset{z\to 0}{\to} \infty \quad \times$$

Производящая функция:

$$G(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z}$$

Разложение в ряд Тейлора

Используем известный биномиальный ряд:

$$\sqrt{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-x)^k = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - ...$$

где обобщённый биномиальный коэффициент:

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot ... \cdot \left(\frac{3}{2}-k\right)}{k!}$$

Подставляем $x = 4z^2$:

$$\sqrt{1-4z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(-4z^2\right)^k$$

$$1 - \sqrt{1-4z^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4)^k z^{2k}$$

Связь с числами Каталана

После упрощений получаем:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{2n+1}$$

где C_n — $\boldsymbol{n}$**-е число Каталана**:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Разложение:

$$G(z) = z + z^3 + 2z^5 + 5z^7 + 14z^9 + 42z^{11} + ...$$

Коэффициенты: $1, 1, 2, 5, 14, 42, ...$ — числа Каталана

Извлечение вероятностей

Метод 1: Коэффициенты ряда

Коэффициент при z^n в $G(z)$ связан с вероятностью $P(\tau = n)$.

При подстановке **вероятностей** $\uparrow = \downarrow = \frac{1}{2}$:

$$P(\tau = 2k+1) = C_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \frac{C_k}{2^{2k+1}}$$

Метод 2: Дифференцирование

Для нахождения $[z^n]G(z)$ используем:

$$[z^n]G(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^nG}{dz^n}\ |_{z=0}$$

Алгоритм:

1. Вычислить n-ю производную $G^{(n)}(z)$
2. Подставить $z = 0$
3. Поделить на $n!$

Результат: коэффициент при z^n, связанный с $P(\tau = n)$

1) Вероятность достижения за конечное время

Подставляем $z = \frac{1}{2}$:

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{4}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1-0}{1} = 1$$

Результат:

$$P(\tau < \infty) = 1$$

Симметричное случайное блуждание **почти наверное** достигает любого уровня!

2) Вычисление $P(\tau = n = 33)$

Ключевое наблюдение

Чётность: Достичь уровня +1 можно только за **нечётное** число шагов!

Причина: Начинаем с $S_0 = 0$ (чётное). Каждый шаг меняет чётность позиции. Уровень +1 — нечётный, поэтому нужно нечётное число шагов.

Производящая функция

Из разложения:

$$G(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z}$$

Используем биномиальный ряд для $\sqrt{1-x}$:

$$\sqrt{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-x)^k$$

Обобщённый биномиальный коэффициент

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \quad = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3-2k}{2}\right)}{k!}$$

Для $k = 17$:

$$\binom{\frac{1}{2}}{17} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{31}{2}\right)}{17!}$$

Упрощение числителя

Числитель содержит 17 множителей:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(-\frac{31}{2}\right) = \frac{1}{2^{17}} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot \cdots \cdot (-31)$$

Отрицательных членов 16 (от -1 до -31):

$$= \frac{(-1)^{16}}{2^{17}} \cdot (1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 31) = \frac{31!!}{2^{17}}$$

Итоговая формула

$$\binom{\frac{1}{2}}{17} = \frac{31!!}{2^{17} \cdot 17!}$$

Формула для чисел Каталана

Для нечётного $n = 2k + 1$:

$$P(\tau = 2k+1) = C_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \frac{C_k}{2^{2k+1}}$$

Для чётного n: $P(\tau = n) = 0$

Известно, что:

$$C_n = \frac{2^n (2n-1)!!}{(n+1)!} \quad \rightarrow \quad C_{16} = \frac{2^{16} \cdot 31!!}{17!}$$

Обе формулы эквивалентны:

$$P(\tau = 33) = \frac{C_{16}}{2^{33}} = \frac{2^{16} \cdot 31!!}{17! \cdot 2^{33}} = \frac{31!!}{2^{17} \cdot 17!}$$

$$P(\tau = 33) = \binom{\frac{1}{2}}{17} = \frac{31!!}{2^{17} \cdot 17!} = \frac{C_{16}}{2^{33}}$$

Итоговая вероятность

$$P(\tau = 33) = \frac{C_{16}}{2^{33}} = \frac{35357670}{8589934592} \approx 0.004116 \approx 0.41\%$$

Метод 2: дифференцирование

Коэффициент при z^n в производящей функции:

$$[z^n]G(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^nG}{dz^n}|_{z=0}$$

Применение к $G(z)$

Для $G(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z}$ нужно вычислить 33-ю производную в нуле.

Используем разложение:

$$\sqrt{1-4z^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4z^2)^k$$

$$= 1 - 2z^2 - 2z^4 - 4z^6 - 10z^8 - ...$$

где коэффициенты связаны с числами Каталана.

После дифференцирования и подстановки получаем тот же результат:

$$[z^{33}]G(z) = C_{16}$$

При подстановке вероятностей $z = \frac{1}{2}$:

$$P(\tau = 33) = C_{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{33}$$

Общая формула для произвольного нечётного $n = 2k + 1$

$$P(\tau = 2k+1) = \binom{\frac{1}{2}}{k+1} = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1} \cdot (k+1)!} = \frac{C_k}{2^{2k+1}}$$

Красота формулы

Вероятность первого достижения уровня $+1$ на шаге $n = 2k+1$ в случайном блуждании выражается через **обобщённый биномиальный коэффициент** с полуцелым верхним индексом:

$$P(\tau = 2k+1) = \binom{\frac{1}{2}}{k+1}$$

Это прямое следствие разложения $\sqrt{1-x}$ в биномиальный ряд!

Часть II: Числа Фибоначчи

Модель кроликов

Типы кроликов:

- S — **Семейные** (взрослые пары, способные к размножению)
- M — **Молодые** (новорождённые пары)

Правила эволюции (за один месяц):

- $S \to S + M$ (семейная пара производит молодую и остаётся)
- $M \to S$ (молодая пара взрослеет)

Начальное условие: В месяце 0 имеем одну молодую пару: M

Эволюция системы

Месяц n	S (семейных)	M (молодых)	Всего F_n	Состояние	Переход
0	0	1	1	M	—
1	1	0	1	S	$M \to S$
2	1	1	2	$S + M$	$S \to S + M$
3	2	1	3	$2S + M$	$S \to S + M, M \to S$
4	3	2	5	$3S + 2M$	...
5	5	3	8	$5S + 3M$	...
6	8	5	13	$8S + 5M$	...

Наблюдение: $F_n = s_n + m_n$ образует последовательность **Фибоначчи**!

Производящая функция для кроликов

Состояние в месяце n:

$$G_n(S, M) = s_n \cdot S + m_n \cdot M$$

где s_n — количество семейных, m_n — количество молодых пар.

Из правил эволюции:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + m_n \quad && \text{(семейные остаются + молодые взрослеют)} \\ m_{n+1} &= s_n && \text{(семейные рожают)} \end{aligned}$$

Обозначим $F_n = s_n + m_n$ — общее количество пар.

$$F_{n+1} = s_{n+1} + m_{n+1} = (s_n + m_n) + s_n = F_n + s_n$$

Но $s_n = m_{n+1} = s_{n-1} + m_{n-1} = F_{n-1}$ (из предыдущего шага).

Рекуррентная формула Фибоначчи:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = 1,\ F_1 = 1$$

Рекуррентное соотношение для производящей функции

Функциональное уравнение

Рассмотрим производящую функцию состояния $F(S, M)$:

$$F(S, M) = S + M$$

означает: текущее состояние — это либо семейная, либо молодая пара.

Правило перехода за один шаг:

- $S \to S + M$ (семейная производит молодую)
- $M \to S$ (молодая взрослеет)

Производящая функция «эволюции»:

После одного шага:

$$T(S, M) = S \cdot (S + M) + M \cdot S = S^2 + SM + MS = S^2 + 2SM$$

Но это для одного шага. Для бесконечной эволюции нужен другой подход.

Производящая функция для последовательности

Определим:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$$

Из рекуррентности $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n z^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} z^{n+1}$$

$$G(z) - F_0 - F_1 z = z(G(z) - F_0) + z^2 G(z)$$

С $F_0 = F_1 = 1$:

$$G(z) - 1 - z = zG(z) - z + z^2 G(z)$$

$$G(z)(1 - z - z^2) = 1$$

Производящая функция Фибоначчи:

$$G(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

Нахождение корней знаменателя

$$1 - z - z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 + z - 1 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Обозначим:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad \text{(золотое сечение)}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

Тогда корни: $z_1 = \frac{1}{\varphi}$, $z_2 = \frac{1}{\hat{\varphi}}$

Разложение на простейшие дроби

$$1 - z - z^2 = -\left(z - \frac{1}{\varphi}\right)\left(z - \frac{1}{\hat{\varphi}}\right)$$

Используя $\varphi \cdot \hat{\varphi} = -1$:

$$G(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{A}{1-\varphi z} + \frac{B}{1-\hat{\varphi} z}$$

Находим коэффициенты:

$$A = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}, \quad B = -\frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{5}}$$

Разложение в геометрический ряд

$$\frac{1}{1-\varphi z} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n z^n$$

$$\frac{1}{1-\hat{\varphi} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}^n z^n$$

Собираем:

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi^{n+1} - \hat{\varphi}^{n+1}) z^n$$

Формула Бине (коэффициент при z^n):

$$F_n = \frac{\varphi^n - \hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$$

где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Нахождение F_{2025}, примененив формулу Бине

$$F_{2025} = \frac{\varphi^{2025} - \hat{\varphi}^{2025}}{\sqrt{5}}$$

Так как $|\hat{\varphi}| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 < 1$:

$$|\hat{\varphi}^{2025}| \approx 0.618^{2025} \approx 0$$

Точная формула:

$$F_{2025} = \mathrm{round}\left(\frac{\varphi^{2025}}{\sqrt{5}}\right)$$

Метод 2: дифференцирования (альтернатива)

n-й коэффициент можно найти через производную:

$$F_n = [z^n]G(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n G}{dz^n}|_{z=0}$$

Для $G(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ это требует n дифференцирований.

Практически для $n = 2025$ используют:

- Рекуррентную формулу $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (итеративно)
- Матричное возведение в степень (за $O(\log n)$)

Численная оценка

$$\log_{10} F_{2025} \approx 2025 \cdot \log_{10}\varphi - \frac{1}{2}\log_{10} 5$$

$$\log_{10}\varphi \approx 0.20898$$

$$\log_{10} F_{2025} \approx 2025 \times 0.20898 - 0.35 \approx 422.83$$

Результат:

$$F_{2025} \approx 6.76 \times 10^{422}$$

Это число с **423 десятичными цифрами**!

Общая схема метода

Шаг 1: Символьное представление

Кодируем объекты/траектории символами ($\uparrow$, $\downarrow$ или S, M)

Множество объектов = производящая функция символов

$\downarrow$

Шаг 2: Рекуррентное соотношение

Анализ «первого шага» или правил эволюции

$g = \uparrow + \downarrow g^2$ или $F(S, M) = \ldots$

$\downarrow$

Шаг 3: Коммутативная подстановка

$\uparrow = \downarrow = z$ (или переход к одной переменной)

Получаем алгебраическое уравнение

$\downarrow$

Шаг 4: Решение уравнения

Находим $G(z)$ в замкнутой форме

$\downarrow$

Шаг 5: Разложение в ряд Тейлора

Используем известные ряды (геометрический, биномиальный, ...)

$G(z) = \sum a_n z^n$

$\downarrow$

Шаг 6: Извлечение коэффициентов

Метод 1: Непосредственно из ряда $a_n = [z^n]G(z)$

Метод 2: Дифференцирование $a_n = \frac{1}{n!}G^{(n)}(0)$

$\downarrow$

Шаг 7: Подстановка вероятностей

$z = \frac{1}{2}$ для вероятностей, $z = 1$ для подсчёта, и т.д.