Нормальное распределение: продвинутые методы

Метод Мамикона, Аксиома Эрмита–Максвелла, метод Кавальери, лемма Штейна

Свойства экспоненты

Определяющие свойства e^x:

1. $e^0 = 1$ (нормировка)
2. $(e^x)' = e^x$ (производная равна самой себе)
3. **Площадь под касательной всегда равна 1** (геометрическое свойство)

Вывод третьего свойства

Касательная к $y = e^x$ в точке (a, e^a):

$$y - e^a = e^a(x - a) \quad \Rightarrow \quad y = e^a(x - a + 1)$$

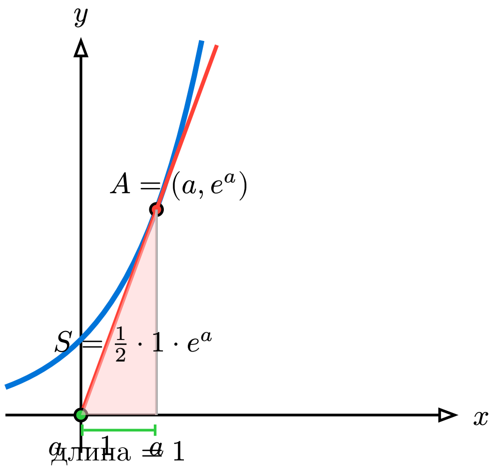
Точка пересечения с осью x:

$$0 = e^a(x - a + 1) \quad \Rightarrow \quad x = a - 1$$

Замечательный факт: Касательная **всегда** пересекает ось x ровно на 1 левее точки касания!

Проекция касательной на ось x: от $(a-1)$ до a = длина 1.

График экспоненты с касательной



Площадь треугольника под касательной:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{основание} \cdot \text{высота} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^a = \frac{e^a}{2}$$

Площадь **не** константа, но **проекция основания** всегда равна 1

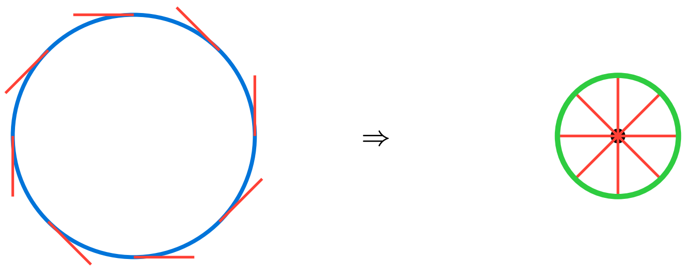
Метод Мамикона Мнацаканяна

Основная идея:

Если взять все касательные к кривой и **перенести их параллельно**, так чтобы они выходили из одной точки, то **площадь сохраняется**.

Ключевое наблюдение: при таком переносе важен только **угол** наклона и **длина** касательной, а не её положение.

Пример с окружностью



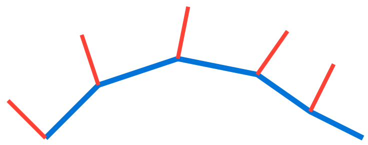
Оригинальная кривая

Собранные касательные
(образуют окружность)

Ключевой принцип: Если касательные к кривой имеют постоянную длину R, то при сборе в одну точку они образуют **окружность радиуса R**.

Площадь, «заметаемая» касательными $= \pi R^2$

Дискретизация: ломаная вместо кривой



Каждая «палка» параллельна следующему сегменту

Нюанс метода Мамикона:

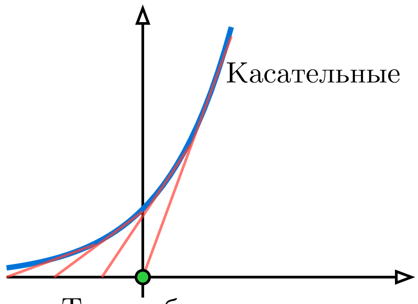
«Палка» (касательный отрезок) в каждой точке должна быть **параллельна кривой** в этой точке.

При переносе палок в одну точку мы **не двигаем**, а только **поворачиваем** — это сохраняет площадь!

Применение к экспоненте

Геометрия касательных к e^x

Если площадь под касательной к экспоненте в точке (a, e^a) равна S, то при сборе **всех касательных левее** в точку $(a-1, 0)$ (точку пересечения с осью x), площадь **сохраняется**.



Принцип сохранения площади

Утверждение:

Если площадь под касательной равна S, то площадь, образованная при сборе всех предыдущих касательных в одну точку, равна $\frac{S}{2}$.

Причина: При «сворачивании» касательных в веер из одной точки, площадь перераспределяется, и из-за свойств экспоненты получается коэффициент $\frac{1}{2}$.

Задача: площадь под параболой

Найти площадь под параболой $y = x^2$ от 0 до x_0 методом Мамикона.

Касательная к параболе

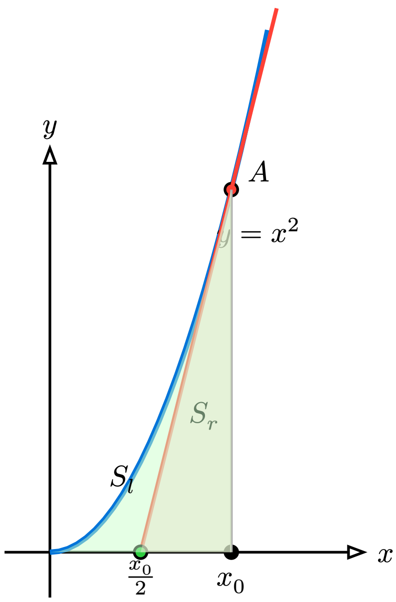
Касательная в точке $A = (x_0, x_0^2)$:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0 x - x_0^2$$

Точка пересечения с осью x:

$$0 = 2x_0 x - x_0^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_0}{2}$$

Важное свойство: Касательная делит отрезок $[0, x_0]$ **пополам** в точке $\frac{x_0}{2}$.



Вычисление площадей

Площадь правого треугольника S_r:

$$S_r = \frac{1}{2} \cdot \text{основание} \cdot \text{высота} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0}{2} \cdot x_0^2 = \frac{x_0^3}{4}$$

Метод Мамикона: соотношение площадей

При сборе касательных к параболе в одну точку, получается подобная фигура.

Касательная делит $[0, x_0]$ в отношении $1 : 1$.

Коэффициент подобия для площадей: $\left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1$... но с учётом «направления» получаем:

$$4S_l = S_l + S_r$$

Откуда: $3S_l = S_r$, то есть $S_l = \frac{S_r}{3}$

Система уравнений:

$$S_r = \frac{x_0^3}{4}$$

$$S_l = \frac{S_r}{3} = \frac{x_0^3}{12}$$

Полная площадь под параболой:

$$S_l + S_r = \frac{x_0^3}{12} + \frac{x_0^3}{4} = \frac{x_0^3}{12} + 3\frac{x_0^3}{12} = 4\frac{x_0^3}{12} = \frac{x_0^3}{3}$$

Результат:

$$\int_0^{x_0} x^2 dx = \frac{x_0^3}{3} \quad \checkmark$$

Обобщение: площадь под $y = x^n$

Касательная к $y = x^n$

В точке (x_0, x_0^n):

$$y = x_0^n + nx_0^{n-1}(x - x_0) = nx_0^{n-1}x - (n-1)x_0^n$$

Пересечение с осью x:

$$x = \frac{(n-1)x_0^n}{nx_0^{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)x_0$$

Точка пересечения делит отрезок $[0, x_0]$ в отношении $(n-1):1$

Пример: $y = x^5$

$$x_{\text{пересеч}} = \frac{4}{5}x_0$$

Отношение: $4\frac{x_0}{5} : \frac{x_0}{5} = 4 : 1$

Отношение площадей (квадрат отношения длин): $4^2 = 16$

Если увеличить «радиус палки» в методе Мамикона в a раз, площадь увеличится в a^2 раз.

Общая формула

Для $y = x^n$ касательная делит отрезок в отношении $(n-1):1$.

$$16S_l = S_l + S_r \quad (\text{для } n = 5)$$

Отсюда: $S_l = \frac{S_r}{15}$

В общем случае:

$$\int_0^{x_0} x^n dx = \frac{x_0^{n+1}}{n+1}$$

Аксиома Эрмита–Максвелла

Аксиома Эрмита–Максвелла:

Пусть (X, Y) — случайный вектор с совместной плотностью $f(x, y)$. Если выполнены два условия:

1. $f(x, y)$ **инвариантна относительно поворотов** вокруг начала координат
2. Проекции $(X, Y)^T$ на **любые ортогональные оси** независимы

То X и Y имеют **нормальное распределение**.

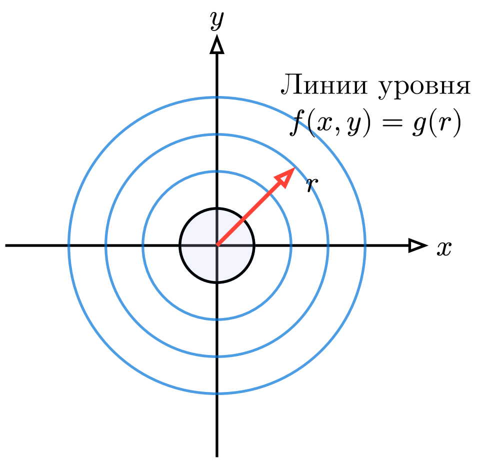
Условие 1: Инвариантность к поворотам

Геометрический смысл:

Плотность $f(x, y)$ зависит только от расстояния до начала координат:

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = g(r)$$

Линии уровня плотности — **концентрические окружности**.



Условие 2: Независимость проекций

Математически:

Для любого угла поворота θ, если

$$X' = X \cos\theta + Y \sin\theta, \quad Y' = -X \sin\theta + Y \cos\theta$$

то X' и Y' **независимы**.

Это возможно только если $f(x, y) = h(x) \cdot h(y)$ — разделяется на множители.

Вывод: почему именно нормальное распределение?

Объединение условий:

Из условия 1: $f(x,y) = g(x^2 + y^2)$

Из условия 2: $f(x,y) = h(x) \cdot h(y)$

Функциональное уравнение:

$$g(x^2 + y^2) = h(x) \cdot h(y)$$

Единственное решение (с точностью до констант):

$$h(x) = Ce^{-\alpha x^2}, \quad g(r^2) = C^2 e^{-\alpha r^2}$$

Из рассказа о нормальном распределении (метод Гаусса) мы получили:

$$f(x,y) = \frac{c^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Альтернативная формулировка

Для независимых одинаково распределённых случайных величин X и Y, если их совместное распределение зависит **только от расстояния** $\sqrt{X^2 + Y^2}$ до начала координат, то X и Y имеют **нормальное распределение**.

Метод Кавальери

Цель: Вычислить интеграл Гаусса $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ геометрически

Для простоты: Положим $\sigma^2 = 1$

Принцип Кавальери

Объём тела можно вычислить, интегрируя площади горизонтальных сечений

$$V = \int_0^H S(h) dh$$

где $S(h)$ — площадь сечения на высоте h.

Применение к гауссовой поверхности

Рассмотрим поверхность:

$$H(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

Высота h изменяется от 0 (на бесконечности) до 1 (в центре)

Сечение на высоте h:

$$h = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

$$\ln h = -\frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$x^2 + y^2 = -2 \ln h = R^2$$

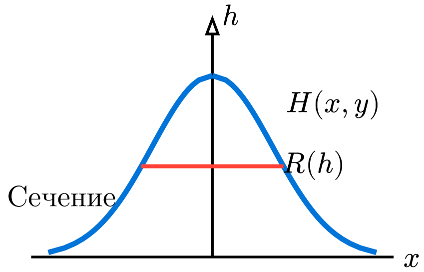
Сечение на высоте $\boldsymbol{h}$ — это **окружность** радиуса:

$$R(h) = \sqrt{-2 \ln h}$$

Площадь сечения:

$$S(h) = \pi R^2 = \pi(-2 \ln h) = -2\pi \ln h$$

Вычисление объёма



$$V = \int_0^1 S(h) dh = \int_0^1 (-2\pi \ln h) dh = -2\pi \int_0^1 \ln h \ dh$$

Вычисление интеграла:

$$\int_0^1 \ln h \; dh = [h \ln h - h]_0^1 = (1 \cdot 0 - 1) - \lim_{h \to 0^+} (h \ln h - h)$$

Используем $\lim_{h \to 0^+} h \ln h = 0$ (правило Лопиталя):

$$= (0 - 1) - (0 - 0) = -1$$

Объём:

$$V = -2\pi \cdot (-1) = 2\pi$$

Связь с интегралом Гаусса

Объём под гауссовой поверхностью:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dxdy$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = I^2 = 2\pi$$

Следовательно:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Нормировочная константа

Константа нормального распределения:

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Плотность стандартного нормального распределения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Лемма Штейна

Формулировка

Если $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ и g — дифференцируемая функция с $\mathbb{E}[\![g'(X)]\!] < \infty$, то:

$$\mathbb{E}[X \cdot g(X)] = \sigma^2 \mathbb{E}[g'(X)]$$

Доказательство через интегрирование

Левая часть:

$$\mathbb{E}[X \cdot g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot g(x) \cdot f(x) dx$$

где $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$

Ключевое соотношение (из вывода Гаусса):

$$xf(x) = -\sigma^2 f'(x)$$

Подстановка:

$$\mathbb{E}[X \cdot g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot (-\sigma^2 f'(x)) dx = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f'(x) dx$$

Интегрирование по частям:

$$= -\sigma^2 \left([g(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x) f(x) dx \right)$$

Граничный член: $[g(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ (экспоненциальное убывание f)

$$= -\sigma^2(0 - \mathbb{E}[g'(X)]) = \sigma^2 \mathbb{E}[g'(X)]$$

Лемма Штейна доказана:

$$\mathbb{E}[X \cdot g(X)] = \sigma^2 \mathbb{E}[g'(X)]$$

Частные случаи

При $g(x) = 1$:

$$\mathbb{E}[X \cdot 1] = \sigma^2 \mathbb{E}[0] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X] = 0 \quad \checkmark$$

При $g(x) = x$:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[1] = \sigma^2 \quad \checkmark$$

При $g(x) = x^{2k-1}$:

$$\mathbb{E}[X^{2k}] = \sigma^2 (2k-1) \mathbb{E}[X^{2k-2}]$$

Это **рекуррентная формула для моментов**!

Упражнения

Исходные соотношения

Для $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ с плотностью $f(x)$:

1. $f(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
2. $xf(x) = -\sigma^2 f'(x)$ (ключевое соотношение)
3. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$

Упражнение 1:

Задача: Найти $\mathbb{E}[Y]$, где $Y = |X|$ для $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Решение:

$$\mathbb{E}[\![X]\!] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\ f(x)dx$$

По симметрии $f(-x) = f(x)$:

$$= 2\int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$$

Используем $xf(x) = -\sigma^2 f'(x)$:

$$= 2\int_{0}^{+\infty} (-\sigma^2 f'(x))dx = -2\sigma^2 \int_{0}^{+\infty} f'(x)dx$$

$$= -2\sigma^2 [f(x)]_0^{+\infty} = -2\sigma^2(0 - f(0)) = 2\sigma^2 f(0)$$

Подставляем $f(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$:

$$\mathbb{E}[\![X]\!] = 2\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Ответ:

$$\mathbb{E}[\![X]\!] = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798\sigma$$

Проверка размерности: $[\mathbb{E}[\![X]\!]] = [\sigma]$ ✓

При $\boldsymbol{\sigma = 1}$: $\mathbb{E}[\![X]\!] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798$

Упражнение 2:

Задача: Найти точки перегиба функции плотности $f(x)$ для $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Решение:

Точки перегиба — это точки, где $f''(x) = 0$.

Найдём $f'(x)$

Из $xf(x) = -\sigma^2 f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sigma^2} f(x)$$

Найдём $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{d}{d}x\left(-\frac{x}{\sigma^2} f(x)\right) = -\frac{1}{\sigma^2} f(x) - \frac{x}{\sigma^2} f'(x)$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2} f(x) - \frac{x}{\sigma^2} \cdot \left(-\frac{x}{\sigma^2} f(x)\right)$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2} f(x) + \frac{x^2}{\sigma^4} f(x)$$

$$= f(x)\left(\frac{x^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{f(x)}{\sigma^4}(x^2 - \sigma^2)$$

Решаем $f''(x) = 0$

Поскольку $f(x) > 0$ всюду:

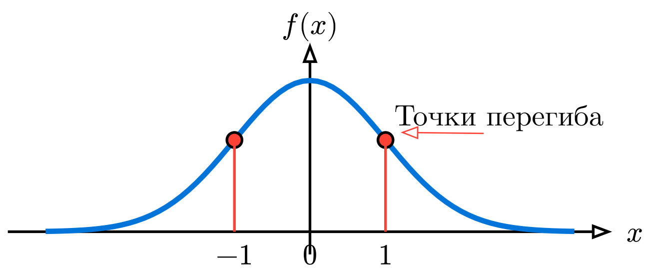
$$x^2 - \sigma^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sigma$$

Ответ:

Точки перегиба плотности нормального распределения:

$x = \pm\sigma$

То есть на расстоянии **одного стандартного отклонения** от среднего!



Геометрический смысл:

- При $|x| < \sigma$: кривая **выпукла вверх** (вогнутая)
- При $|x| > \sigma$: кривая **выпукла вниз** (выпуклая)

Точки $x = \pm\sigma$ — это границы «центральной части» колокола, где кривизна меняет знак.

Ключевая идея: Соотношение $xf(x) = -\sigma^2 f'(x)$ — это **фундаментальное свойство** нормального распределения, из которого выводятся все остальные результаты:

Интеграл Гаусса (метод Кавальери)	$\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$
Константа нормировки	$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
Лемма Штейна	$\mathbb{E}[Xg(X)] = \sigma^2 \mathbb{E}[g'(X)]$
$\mathbb{E}[\![X]\!]$ для $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$	$\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
Точки перегиба $f(x)$	$x = \pm\sigma$

Это соотношение — прямое следствие вывода Гаусса через метод максимального правдоподобия!