

集合论

ChangYu

2023 年 3 月 4 日

1 集合基础

定义 1.1. 集合是一堆无次序的对象，如果元素 x 是对象中的一个，我们称 $x \in A$ 。**定义集合与运算 \in**

定义 1.2. 我们称集合 A 和集合 B 是相等的，当且仅当 A 中的每一个元素都是 B 中的元素，且 B 中的每一个元素都是 A 中的元素。**定义集合相等**

定理 1.1. 存在一个集合 \emptyset ，被称为空集，不包含任何元素。**空集存在性公理**

引理 1.2. 设 A 是一个非空的集合，那么存在一个对象 x 使得 $x \in A$ 。**单个选取公理**

定理 1.3. 存在一个集合，使得该集合中有唯一的元素 a 。**单元素集存在性公理**

定义 1.3. 定义子集，当 A 的元素都是 B 的元素时，称 $A \subseteq B$ ，并定义了真子集 $A \subset B$ 。

先考虑以上定理与定义，首先，我们给出了集合相等的定义，而显然对于运算 \in 而言，集合的相等是符合替换公理的，因此该运算与集合相等的概念是明确的定义。

2 集合的运算

定理 2.1. 存在一个集合，记 $\{x \in A : P(x) \text{ 为真} \}$ ，该集合由 A 中满足 $P(x)$ 为真的元素所构成。**分类公理**

定理 2.2. 给定集合 A 和集合 B ，存在二者的并集 $A \cup B$ 。**并集存在公理，以及并运算**

引理 2.3. 并运算具有交换性。

定义 2.1. 定义交运算， $S_1 \cap S_2$ 表示既属于集合 S_1 又属于 S_2 的元素的集合。

定义 2.2. 定义差运算，为 $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$

空集存在公理，单个选取公理，单元素集存在性公理给出了集合的存在性，构造了集合，而并集存在公理则可以构造出无穷多集合，并集存在公理与分类公理，分别导出了两种运算，并运算和交运算，交运算与差运算是由分类公理导出。

3 集合关系

定理 3.1. 设 A 是一个集合，对任意的 $x \in A$ 和任意的一个对象 y ，假设存在一个关于 x, y 的命题 $P(x, y)$ ，使得对任意的 $x \in A$ ，最多只能找到一个 y 使得命题 $P(x, y)$ 为真命题，那么存在集合 $\{y : P(x, y) \text{ 对某 } x \in A \text{ 为真}\}$ **替代公理**

该公理决定了集合的对应关系。

4 其他

定理 4.1. 存在一个集合 N ，它的元素被称为自然数。对象 0 在 N 中，且由每一个自然数 $n \in N$ 所制定的满足 *Peano* 公理的对象 $n++$ 也在该 N 中。**无穷大公理**

定理 4.2. 如果集合 A 是非空集合，那么 A 中至少存在一个元素 x ，满足， x 要么不是集合，要么与 A 不相交。