自然数系

ChangYu

2023 年 3 月 4 日

1 Peano 公理

定义 1.1. 运算 ++ 代表增量运算，意指为该元素的下一个元素。

定义 1.2. 我们定义 1 为 0++，意为 0 的下一个元素被我们定义为 1，如此定义 2 为 (0++)++

定理 1.1. 0 是一个自然数

定理 1.2. n 是一个自然数，那么我们有 $n++$ 也是一个自然数。

定理 1.3. 对任意自然数 n，我们都有 $n++ \neq 0$

定理 1.4. 如果自然数 $m \neq n$, 那么我们有 $m++ \neq n++$

定理 1.5. 假设 $P(n)$ 为关于自然数的一个性质，如果 $P(0)$ 为真且 $P(n)$ 为真时有 $P(n++)$ 也为真，那么我们有 $P(n)$ 为真

定理 1.1-定理 1.5 称为 Peano 公理，我们给出关于自然数的定义

定义 1.3. 我们称，满足 *Peano* 公理的数系为自然数系。

定义 1.4. 假设对任意自然数 n 都存在某个从自然数到自然数的函数 $f_n : N \to N$ 令 c 为某个固定的自然数，那么对任意 a_n，都能确定唯一的自然数 a_n 使得 $a_0 = c$ 以及 $a_{n++} = f_n(a_n)$

Peano 公理是为了通过公理化的方法，描绘出我们所熟知的自然数系，其特点是无限增长性，首元性，非循环性。自然数系的本质就是一个“数数”集。有了自然数系 N 我们便可以构造出序列和递归的概念。

2 自然数系上的运算

2.1 加法

定义 2.1. 我们定义 0 加上 m 为 $0+m := m$。我们归纳的假设并定义 $(n++)+m = (n+m)++$

引理 2.1. 对任意自然数 n，我们有 $n+0 = n$

由此，我们可以递归的定义出加法，并验证加法的结合律和交换律。

2.2 自然数的序

定义 2.2. 我们称 $n > m$ 当且仅当存在一个自然数 a 使得 $m + a = n$

自然数的序具有自反性，反对称性和可传递性。以及具有三歧性。

2.3 强归纳法

定理 2.2. 令 m_0 为一个自然数，$P(m)$ 表示与任意自然数 m 有关的性质。假设对任意满足 $m \geq m_0$ 的自然数 m，均有如下内容成立：若 $P(m')$ 对任意满足 $m_0 \leq m' \leq m$ 的自然数 m' 均为真，我们就能断定，对于任意的满足 $m \geq m_0$ 的自然数 m，$P(m)$ 为真

2.4 乘法与指数运算

定义 2.3. 我们定义 $m \times 0 := 0$，因此可以归纳的假设定义 $(n++) \times m := (n \times m) + m$

由此，我们可以证明乘法的交换性，结合律等。

定义 2.4. 我们定义 $m^0 := 1$，从而归纳的假设定义 $m^{n++} = m^n \times m$

至此，我们已经按照公理化的方式定义出了自然数系以及自然数上的运算。