01 함수

대응

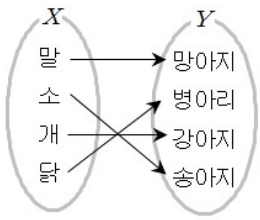
공집합이 아닌 두 집합 X, Y에서 어떤 주어진 관계에 의하여 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소가 짝 지어지는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라고 한다.

오른쪽 그림과 같이 동물들과 그들의 새끼를 나타내는 단어들을 짝지어 나타낼 수 있다.

$X=${말, 소, 개, 닭}

$Y=${망아지, 병아리, 강아지, 송아지}

에서 X의 동물을 나타내는 각 단어들이 Y의 새끼를 나타내는 단어들로 짝지어 진 것을 집합 X에서 집합 Y로의 **대응**이라고 한다.
X의 원소 x가 Y의 원소 y로 대응 되는 것을 $x \to y$로 나타낸다.



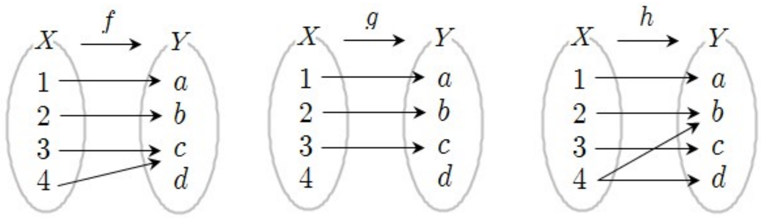
함수

공집합이 아닌 두 집합 X, Y 에 대하여 X의 모든 원소에 Y의 원소가 꼭 하나씩만 대응하는 관계를 X에서 Y로의 함수라 하고, 이것을 기호로 $f : X \to Y$로 나타낸다.

집합 X의 모든 원소를 활을 쏘는 궁사라고 생각하고, 집합 Y의 모든 원소를 과녁이라고 생각해보자. 모든 궁사는 화살을 한 발씩 가지고 있고, 반드시 한 발씩 쏘아야 한다. 두 발을 쏘아서도 안되고 화살을 쏘지 않아도 안된다. 그렇지만 과녁은 날아오는 화살을 맞는 수 밖에 없으므로 화살을 두 발 이상 맞을수도 있고, 화살을 맞지 않을 수도 있다. 이와 같이 생각한다면 함수인 것과 함수가 아닌 것을 쉽게 구별할 수 있다.

다음 중 함수인 것과 함수가 아닌 것을 구별하고 그 이유를 설명하시오.

(1) (2) (3)



(1) X에 남아 있는 원소가 없고 Y의 원소에 하나씩 대응하기 때문에 함수다.
(Y의 원소 c가 x의 원소 3과 4 두 개에 대응되는 것은 상관없다)

(2) X의 원소 4에 대응하는 Y의 원소가 없기 때문에 함수가 아니다.

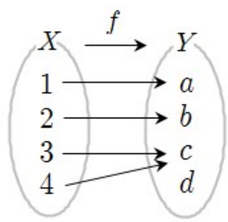
(3) X의 원소 4에 Y의 원소 b와 d 두 개가 대응하기 때문에 함수가 아니다.

정의역과 공역

함수 $f : X \to Y$ 에서 집합 X를 함수 f의 **정의역**, Y를 함수 f의 **공역**이라 한다.

함숫값과 치역

함수 f에 의하여 정의역 X의 원소 x가 공역 Y의 원소 y와 대응하는 것을 기호로 $y = f(x)$와 같이 나타내고 $f(x)$를 함수 f에 의한 x의 **함숫값**이라고 한다. 또한 함숫값 전체의 집합 $\{f(x) | x \in X\}$를 함수 f의 **치역**이라고 한다.



▷ 오른쪽 그림과 같은 함수 f의 정의역은 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, 공역은 $Y = \{a, b, c, d\}$, 치역은 $\{a,\ b,\ c\}$이다.

▷ 치역은 공역의 부분집합이다.

▷ 함수 f의 정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 = x_2$ 이면 $f(x_1) = f(x_2)$가 성립한다.

▷ 또한 $f(x_1) \neq f(x_2)$이면 $x_1 \neq x_2$가 성립한다.

▷ 함수에서 정의역 또는 공역이 명시되어 있지 않으면, 정의역은 함숫값이 정의될 수 있는 실수 x의 값 전체의 집합으로, 공역은 실수 전체의 집합으로 본다.

함수 $y = x^2 + 1$의 정의역과 치역을 구하시오.

정의역 : 실수 전체의 집합
치역 : $\{y | y \geq 1\}$

서로 같은 함수

두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: U \rightarrow V$ 에서 정의역, 공역 그리고 함숫값이 같을 때, 즉

(1) $X=U$, $Y=V$

(2) 정의역의 모든 원소에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.

일 때, 두 함수 f와 g는 같다고 하며 $f=g$로 나타낸다.

▷ 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$이고 공역이 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=|x|$ 는 서로 같은 함수이다.

▷ 마찬가지로 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$이고 공역이 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x)=x$와 $g(x)=x^3$도 서로 같은 함수이다.

▷ 두 함수의 함수식이 다르더라도 주어지는 정의역과 공역에 따라 같은 함수가 될 수 있음을 알아야 한다.

다음 두 함수는 서로 같은 함수인지 그렇지 않은지 판단하시오.

$$f(x)=x+1, \quad g(x)=\frac{x^2+x}{x}$$

함수 $f(x)=x+1$ 의 경우 정의역과 공역 모두 실수 전체의 집합이다. 그렇지만 $g(x)=\frac{x^2+x}{x}$ 의 경우 정의역은 $\{x \mid x$는 $x \neq 0$인 모든 실수$\}$, 공역은 실수 전체의 집합이다. 두 함수의 정의역이 서로 다르므로 두 함수는 서로 같은 함수가 될 수 없다.

02 함수의 그래프

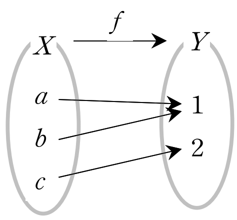
함수의 그래프

함수 $f : X \to Y$, $y = f(x)$에서 순서쌍 $(x,\ f(x))$의 전체의 집합, 즉
$G = \{(x,\ f(x))\ |\ x \in X\}$를 함수 $y = f(x)$의 그래프라고 한다.

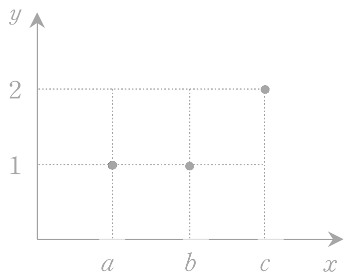
▷ 함수 $y = f(x)$ 의 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이면, 함수의 그래프는 좌표평면 위에 직선, 곡선으로 나타낼 수 있다.

▷ 함수의 그래프는 정의역의 임의의 원소 k에 대하여 직선 $x = k$ 의 그래프와 오직 한 점에서 만난다.

아래 그림과 같은 함수 $f : X \to Y$ 의 그래프를 나타내시오.

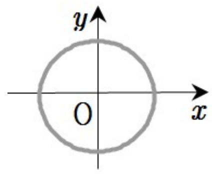


x와 그 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x,\ f(x))$들의 집합 $G = \{(a,\ 1),\ (b,\ 1),\ (c,\ 2)\}$가 되고, 이때 집합 G의 원소들을 좌표평면 위에 나타낸 것이 f의 그래프가 된다.

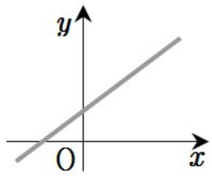


다음 그림에서 함수의 그래프를 모두 찾으시오.

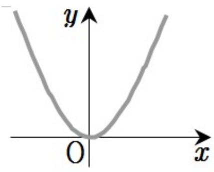
①



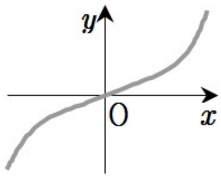
②



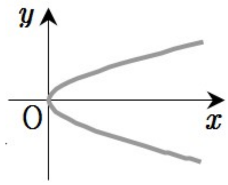
③



④



⑤



함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 정의역의 각 원소 k에 대하여 y 축에 평행한 직선 $x=k$와 오직 한 점에서 만난다. ①, ⑤ 같은 경우 y축에 평행한 직선을 그었을 때, 그래프와 두 점에서 만나므로 함수가 되지 않는다.

따라서 함수의 그래프는 ②, ③, ④ 가 된다.

03 여러 가지 함수

일대일함수

함수 $f : X \to Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 일 때, 함수 f를 **일대일함수**라고 한다.

▷ '$f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.' 가 성립해도 일대일함수이다.

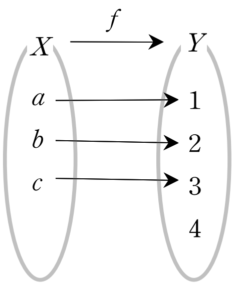
▷ 함수 f가 일대일함수일 때, 치역의 임의의 원소 k에 대하여 $y = k$의 그래프와 함수 $y = f(x)$의 그래프는 오직 한 점에서 만난다.

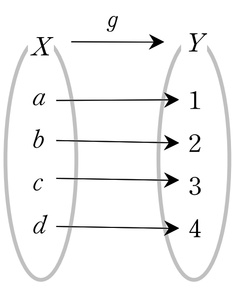
일대일대응

함수 $f : X \to Y$가 일대일함수이고 함수 f의 공역과 치역이 서로 같으면 함수 f를 **일대일대응**이라 한다.

▷ 일대일대응이면 일대일함수이지만, 일대일함수라고 해서 모두 일대일대응인 것은 아니다.

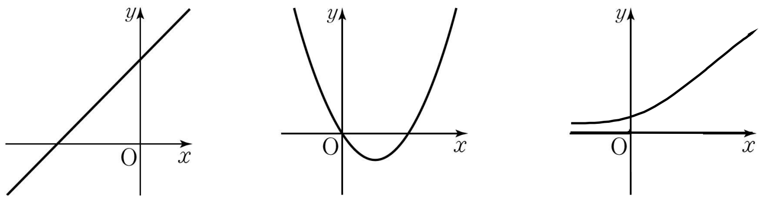
▷ 아래 그림에서 함수 f는 일대일함수이고, 함수 g는 일대일대응이다.





실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f, g, h의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 각 함수가 일대일함수 또는 일대일대응인지 판별하시오.

$y=f(x)$ $\quad$ $y=g(x)$ $\quad$ $y=h(x)$

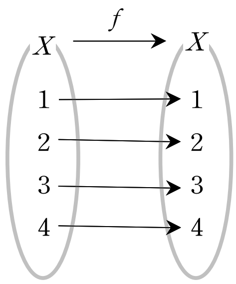


함수 f와 h는 치역의 임의의 원소 k에 대하여 $y=k$의 그래프와의 교점이 오직 하나만 존재하므로 일대일함수이다. 또한 함수 f는 R=공역=치역 이므로 일대일대응이다.
함수 g는 치역의 임의의 원소 k에 대하여 $y=k$의 그래프와의 교점이 두 개 존재하는 경우가 있으므로 일대일함수가 아니다.

항등함수

함수 $f : X \to X$에서 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x) = x$일 때, 함수 f를 **항등함수**라고 한다.

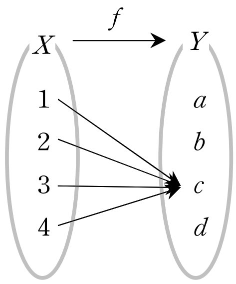
▷ 항등함수는 기호 I 로 나타낸다.
▷ 항등함수는 정의역과 공역이 같다.
▷ 항등함수는 일대일대응이다.



상수함수

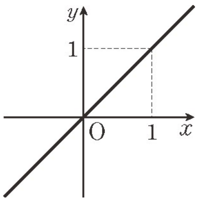
함수 $f : X \to Y$ 에서 X의 임의의 원소 x가 Y의 단 하나의 원소로만 대응될 때, 즉 $f(x) = c$ ($c \in Y$, c는 상수) 일 때, 함수 f를 **상수함수**라고 한다.

▷ 상수함수 치역의 원소의 개수는 1이다.

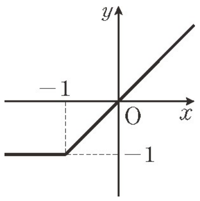


다음 중에서 항등함수, 상수함수의 그래프인 것을 각각 찾으시오.

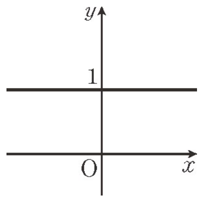
(1)



(2)



(3)

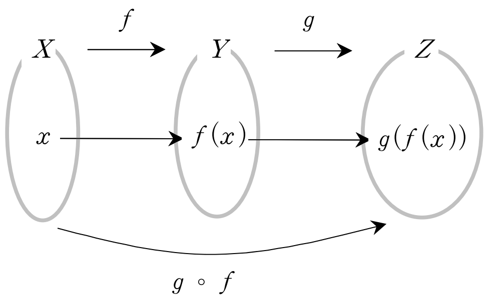


항등함수의 그래프는 (1), 상수함수의 그래프는 (3)이다.
(2)는 항등함수도 상수함수도 아니다.

04 합성함수

합성함수

두 함수 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ 가
주어졌을 때, X 의 임의의 원소 x에 대하여
f에 의한 Y의 원소 $f(x)$를 대응시키고,
다시 이 $f(x)$에 대해서 g에 의한 Z의 원소
$g(f(x))$를 대응시키는 X에서 Z로의 함수를
f와 g의 합성함수라고 하고, 기호로는
$g \circ f$와 같이 나타낸다.



$g \circ f : X$ (정의역) $\rightarrow Z$ (공역)

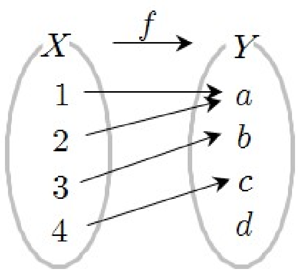
$g \circ f : x \rightarrow g(f(x))$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

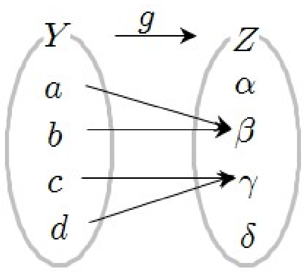
▷ f의 치역이 g의 정의역의 부분집합일 때에만 합성함수 $g \circ f$가 정의된다.

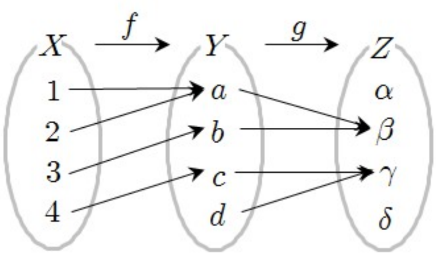
세 개의 집합

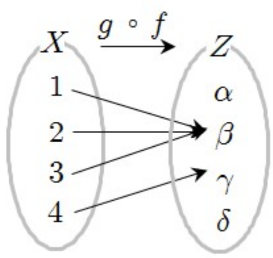
$$X = \{1, 2, 3, 4\},\ Y = \{a, b, c, d\},\ Z = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

사이에 두 함수 $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ 가 아래와 같이 정의되어 있다. 이 때, 합성함수 $g \circ f$ 를 구하시오.









두 함수 $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2-1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $(f \circ g)(1)$ (2) $(f \circ f)(2)$ (3) $(g \circ g)(3)$

(4) $(f \circ g)(x)$ (5) $(g \circ f)(x)$

(1) $(f \circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=-2$

(2) $(f \circ f)(2)=f(f(2))=f(4)=10$

(3) $(g \circ g)(3)=g(g(3))=g(8)=63$

(4) $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)=3(x^2-1)-2=3x^2-5$

(5) $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-2)=(3x-2)^2-1=9x^2-12x+3$

합성함수의 성질

세 함수 f, g, h에 대하여

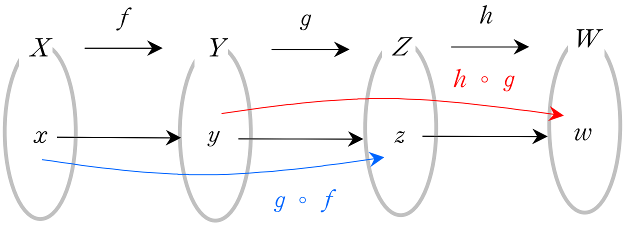
(1) $g \circ f \neq f \circ g$ (교환법칙이 성립하지 않는다)

(2) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (결합법칙이 성립한다)

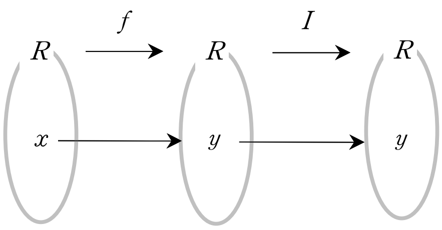
(3) $f \circ I = I \circ f = f$ (I 는 항등함수)

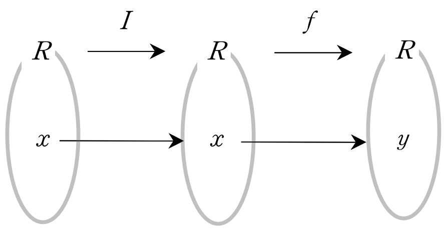
(1) 위 예제에서 볼 수 있듯이 $(f \circ g)(x)$ 와 $(g \circ f)(x)$ 는 서로 같지 않다.

(2) $h \circ g \circ f$는 아래 그림에서 보듯이 화살표를 세 번 따라가면서 함숫값이 결정된다. 이때, 두 개의 화살표를 하나로 엮는 것이 두 함수의 합성함수가 된다. 따라서 앞에 두 화살표를 한 번에 먼저 따라가고 남은 하나의 화살표를 나중에 따라가든 혹은 먼저 화살표 하나를 따라가고 나중에 두 개의 화살표를 한번에 따라가든 출발점과 도착점은 같은 것을 볼 수 있다.



(3) 실수전체의 집합 R에서 정의된 항등함수와 함수 $f : R \to R$ 의 합성은 아래 그림과 같기 때문에 함수의 합성에 항등함수가 포함되어 있다면 무시할 수 있다.





$f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x^2 + 1,\ h(x) = x - 3$ 일 때, 다음이 성립함을 보이시오.

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

$(f \circ g)(x) = 2(x^2+1) - 1 = 2x^2 + 1$

$((f \circ g) \circ h)(x) = 2(x-3)^2 + 1 = 2x^2 - 12x + 19$

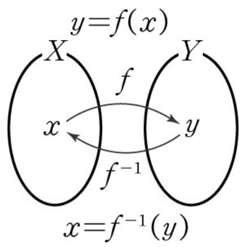
$(g \circ h)(x) = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$

$(f \circ (g \circ h))(x) = 2(x^2 - 6x + 10) - 1 = 2x^2 - 12x + 19$

05 역함수

역함수

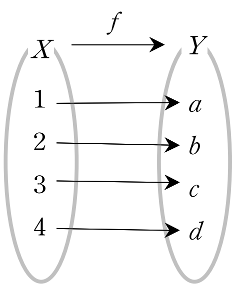
함수 $f : X \to Y$ 가 일대일대응이면 Y의 각 원소 y에 대하여 $y = f(x)$를 만족하는 X의 원소 x가 단 하나 존재한다. 따라서, Y의 각 원소 y에 $y = f(x)$를 만족하는 원소 x를 대응시키면 Y를 정의역, X를 치역(공역)으로 하는 새로운 함수를 얻는다. 이 함수를 주어진 함수 f의 역함수라 하고, f^{-1}로 나타낸다.

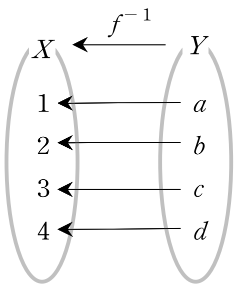


$$f^{-1} : Y(\text{정의역}) \to X(\text{공역}), \qquad x = f^{-1}(y)\ (y \in Y)$$

▷ 어떤 함수의 역함수가 존재하기 위한 필요충분조건은 그 함수가 일대일대응인 것이다.

▷ 아래 그림과 같은 함수 $f : X \to Y$에 대하여 그 역함수는 $f^{-1} : Y \to X$ 가 된다. 즉, f의 정의역과 치역이 각각 f^{-1}의 치역과 정의역이 된다.





$f(1) = a$, $\quad f^{-1}(a) = 1$

$f(2) = b$, $\quad f^{-1}(b) = 2$

$f(3) = c$, $\quad f^{-1}(c) = 3$

$f(4) = d$, $\quad f^{-1}(d) = 4$

역함수 구하기

(1) 주어진 함수가 일대일대응인가를 확인한다.

(2) $y = f(x)$를 x에 대하여 정리하여 $x = g(y)$ 꼴로 고친다.

(3) $x = g(y)$에서 x대신 y, y대신 x를 대입하여 $y = g(x)$ 로 만든다.

▷ 함수를 나타낼 때, 정의역은 X로, 공역(치역)은 Y로 나타내는 것이 관례다. 마지막 단계에서 x와 y를 바꾸는 것은 역함수에서 정의역이 치역으로, 치역이 정의역으로 바뀌기 때문이다.

다음 함수의 역함수를 구하시오.

(1) $y=2x+1$ (2) $y=x^2-2\,(x\geq 0)$

(1) $y=2x+1$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=2x+1$을 x에 대하여 풀면 $x=\frac{y-1}{2}$가 되고,

여기서 x와 y를 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$가 된다.

(2) $y=x^2-2\,(x\geq 0)$는 정의역이 $x\geq 0$인 모든 실수이고, 치역은 $y\geq -2$인 모든 실수가 되는 일대일대응이다.

$y=x^2-2$를 x에 대하여 풀면 $x^2=y+2$ $\therefore x=\sqrt{y+2}$ $(\because x\geq 0)$

x와 y를 바꾸면 $y=\sqrt{x+2}$

이때 원함수 $y=x^2-2\,(x\geq 0)$에서 $y\geq -2$ 이므로 $x\geq -2$ 로 바꿔준다.

따라서 구하는 역함수는 $y=\sqrt{x+2}$ $(x\geq -2)$가 된다.

역함수의 성질

(1) 일대일대응인 함수 $f: X \to Y$ 와 항등함수 I 에 대하여

i) $(f^{-1})^{-1} = f$

ii) $f^{-1} \circ f = I_X$, $f \circ f^{-1} = I_Y$

(2) 일대일대응인 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ 와 항등함수 I 에 대하여

$f \circ g = I \Leftrightarrow f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$

(3) 일대일대응인 세 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$ 에 대하여

i) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

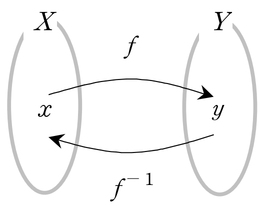
ii) $(h \circ g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

▷ 오른쪽 그림에서 볼 수 있듯이 역함수의 역함수는 원함수가 된다. 또한 원함수와 역함수를 합성하면 항등함수가 된다.

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad (x \in X)$

$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad (y \in Y)$

결국 합성하여 항등함수가 되는 두 함수는 서로 역함수 관계에 있음을 알 수 있다.

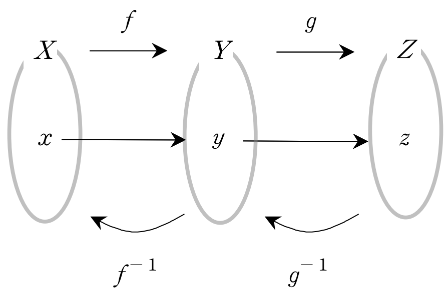


▷ 합성함수에서는 결합법칙이 성립한다.

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} = I_Z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ f = I_X\end{aligned}$$

합성하여 항등함수가 되므로 $g \circ f$의 역함수는 $f^{-1} \circ g^{-1}$ 이다.



두 함수 $f(x)=-3x+2$과 $g(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$가 서로 역함수 관계에 있음을 보이시오.

$(g \circ f)(x)=g(-3x+2)=-\frac{1}{3}(-3x+2)+\frac{2}{3}=x$

$(f \circ g)(x)=f\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)=-3\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}=x$

$(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$가 모두 항등함수이므로 두 함수 f와 g는 서로 역함수 관계에 있다.

함수 $f(x)=x-1$, $g(x)=2x+4$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)\\ &= (g^{-1} \circ f)(2)=g^{-1}(f(2))\\ &= g^{-1}(1)\end{aligned}$$

$g^{-1}(1)=a$ 라면 $g(a)=1$ 이므로 $2a+4=1$ 에서 $a=-\frac{3}{2}$

$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)=-\frac{3}{2}$

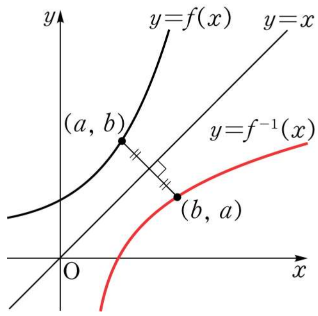
역함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점을 (a, b)라고 하면

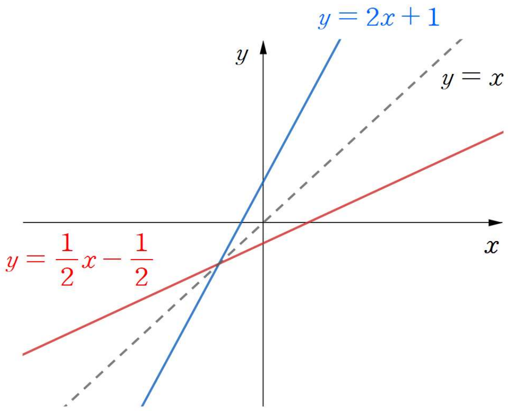
$$b=f(a) \quad \Leftrightarrow \quad a=f^{-1}(b)$$

가 성립한다. 따라서 점 (a, b)가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이면, 점 (b, a)는 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이다.
이때 점 (a, b)와 점 (b, a)는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



함수 $f(x)=2x+1$의 역함수를 구하고 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내시오.

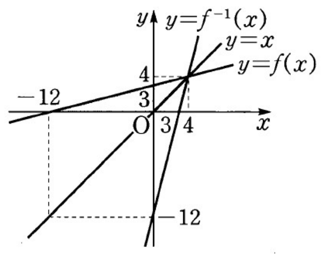
$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 이다. 두 함수의 그래프는 아래와 같다.



함수 $f(x)=\frac{1}{4}x+3$에 대하여 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점의 좌표를 구하시오.

$f^{-1}(x)=4x-12$이므로 연립방정식

$\begin{cases}\frac{1}{4}x-y=-3\\4x-y=12\end{cases}$ 를 풀어 두 직선의 교점의 좌표를 구하면 된다. 따라서 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$가 된다.



혹은 원함수와 역함수의 그래프가 $y=x$에 대칭이라는 사실과 원함수가 증가함수라는 사실을 이용하면 원함수와 역함수의 교점은 $y=x$ 위에 존재한다는 것을 알 수 있다. 따라서 $y=x$와 $y=\frac{1}{4}x+3$의 교점을 구해도 된다.

01 유리식의 계산

유리식

두 다항식 A, B에 대하여 $\dfrac{A}{B}$로 나타내어지는 식을 유리식이라고 한다. (단, $B \neq 0$)

이때 B가 0이 아닌 상수로만 이루어진 다항식이라면 $\dfrac{A}{B}$도 다항식이 되는 것을 알 수 있다. 따라서 다항식도 유리식에 포함된다.

▷ B가 일차 이상의 다항식인 경우의 유리식을 분수식이라고 부른다.

유리식의 성질

세 다항식 A, B, C (단, $B \neq 0$, $C \neq 0$) 에 대하여

(1) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A \times C}{B \times C}$ (2) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A \div C}{B \div C}$

▷ 유리식의 분자, 분모를 같은 식으로 나누어 간단히 하는 것을 약분한다고 한다. 더 이상 약분할 수 없는 분수식을 기약분수식이라고 한다.

유리식의 사칙연산

세 다항식 A, B, C, D 에 대하여

(1) $\dfrac{A}{C} \pm \dfrac{B}{C} = \dfrac{A \pm B}{C}$

(2) $\dfrac{A}{C} \pm \dfrac{B}{D} = \dfrac{AD \pm BC}{CD}$ (단, 복부호동순, $C \neq 0$, $D \neq 0$)

(3) $\dfrac{A}{B} \times \dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$ (단, $B \neq 0$, $D \neq 0$)

(4) $\dfrac{A}{B} \div \dfrac{C}{D} = \dfrac{A}{B} \times \dfrac{D}{C} = \dfrac{AD}{BC}$ (단, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$)

▷ 유리식의 성질을 이용하면 분자, 분모에 같은 식을 곱하여 통분할 수 있다.

다음 유리식을 계산하시오.

(1) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}$ (2) $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{x}$

(3) $\dfrac{2x-3}{x^2-x}\times\dfrac{x^2-1}{x}$ (4) $\dfrac{x^2-4}{x^2+x}\div\dfrac{x+2}{x+1}$

(1) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{3x+1}{x^2-1}$

(2) $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3x\times x-2(x-1)}{x(x-1)}=\dfrac{3x^2-2x+2}{x^2-x}$

(3) $\dfrac{2x-3}{x^2-x}\times\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(2x-3)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)}=\dfrac{(2x-3)(x+1)}{x^2}=\dfrac{2x^2-x-3}{x^2}$

(4) $\dfrac{x^2-4}{x^2+x}\div\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x^2-4}{x^2+x}\times\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{x-2}{x}$

부분분수

분모가 두 개 이상의 인수의 곱으로 되어 있는 경우, 이 분수식을 두 개 이상의 분수식의 합이나 차로 나타낼 수 있다. 이를 부분분수로 분해한다고 한다.

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$

▷ $\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{B-A}{AB}$ 로부터 위 식이 성립함을 알 수 있다.

$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$을 간단히 하시오.

부분분수 분해를 이용하면

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{3}{x(x+3)}$$

번분수식

분모 또는 분자가 분수식으로 된 분수식을 번분수식이라고 한다. 번분수식의 계산은 다음과 같이 한다.

(1) $\dfrac{\frac{A}{B}}{C}=\dfrac{\frac{A}{B}\times B}{C\times B}=\dfrac{A}{BC}$

(2) $\dfrac{A}{\frac{B}{C}}=\dfrac{A\times C}{\frac{B}{C}\times C}=\dfrac{AC}{B}$

(3) $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{\frac{A}{B}\times BD}{\frac{C}{D}\times BD}=\dfrac{AD}{BC}$

▷ 위 번분수식의 계산을 정리하면 오른쪽과 같이 번분수식의 안쪽의 곱은 분모가 되고, 바깥쪽의 곱은 분자가 됨을 알 수 있다.

$$\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{AD}{BC}$$

다음 번분수식을 간단히 하시오.

(1) $\dfrac{\frac{x}{x-1}}{x+\frac{1}{x}}$

(2) $\dfrac{x}{x-\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}}$

(1) $\dfrac{\frac{x}{x-1}}{x+\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x^2+1}{x}}=\dfrac{x^2}{(x-1)(x^2+1)}$

(2) 먼저 $\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\frac{x^2+1}{x}}=\dfrac{x}{x^2+1}$ 가 되므로

$x-\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}=x-\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ 이 된다.

따라서 (준식)$=\dfrac{x}{\frac{x^3}{x^2+1}}=\dfrac{x^2+1}{x^2}=1+\dfrac{1}{x^2}$ 이 된다.

02 유리함수

유리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때 이 함수를 유리함수라고 한다. 또한 유리함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때 이 함수를 다항함수라고 한다.

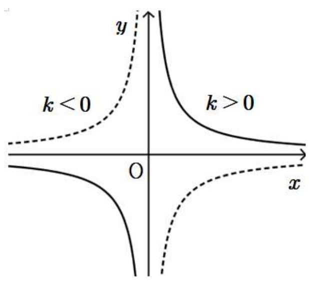
▷ 유리함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 분수식일 때는 이 함수를 분수함수라고도 부른다.
▷ 유리함수는 다항함수와 분수함수로 구성된다.
▷ 분수함수일 경우 정의역은 분모$\neq 0$ 인 실수 전체의 집합이 된다.

유리함수 $y=\frac{1}{x}$의 정의역은 $\{x \mid x\neq 0$인 실수$\}$ 이다.

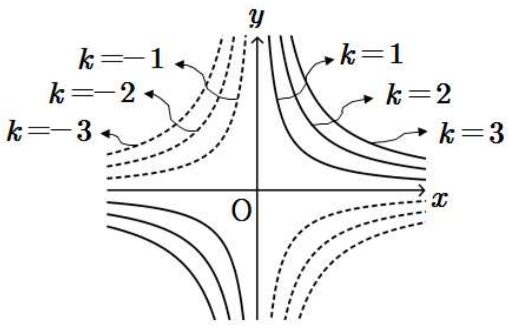
유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프

유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$은 다음과 같은 특징이 있다.

(1) 정의역과 치역은 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
(2) 그래프는 원점과 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이다. 따라서 역함수는 자기 자신이다.
(3) $k>0$일 때 그래프는 제1사분면과 제3사분면에 있고, $k<0$일 때 그래프는 제2사분면과 제4사분면에 있다.
(4) $|k|$의 값이 커질수록 그래프는 원점에서 멀어진다.
(5) x축과 y축을 점근선으로 한다.



▷ 오른쪽 그래프는 k 값에 따른 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프를 보여준다.
▷ 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 그 직선을 곡선의 점근선이라고 한다.



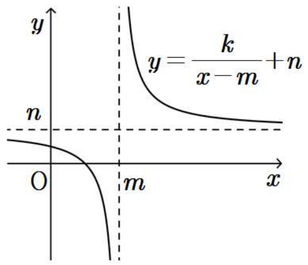
유리함수 $y=\dfrac{k}{x-m}+n\ (k\neq 0)$의 그래프

함수 $y=\dfrac{k}{x-m}+n\ (k\neq 0)$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축으로 m만큼, y축으로 n만큼 평행이동한 것이다.

(1) 정의역은 $\{x \mid x\neq m$인 실수$\}$,
치역은 $\{y \mid y\neq n$인 실수$\}$이다.

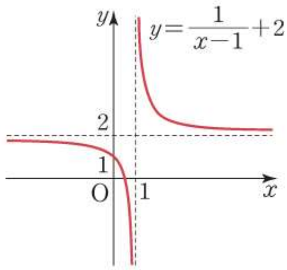
(2) 점근선은 두 직선 $x=m$, $y=n$이다.

(3) 점 $(m,\ n)$과 직선 $y=\pm(x-m)+n$에 대하여 대칭이다.



유리함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

유리함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선은 직선 $x=1$, $y=2$ 이다.



유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$의 그래프

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$ 는 $y=\dfrac{k}{x-m}+n$ $(k\neq 0)$의 꼴로 변형하여 그래프를 그릴 수 있다.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \quad \rightarrow \quad y=\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}+\frac{a}{c}$$

(1) 점근선은 $x=-\dfrac{d}{c}$와 $y=\dfrac{a}{c}$이다.

(2) 점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$에 대하여 대칭이다.

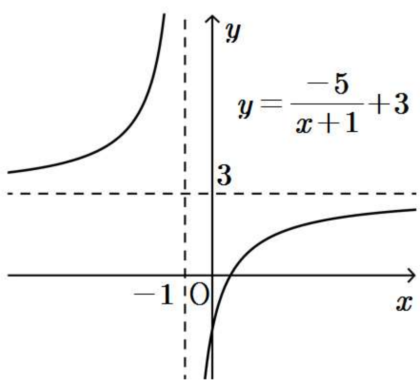
▷ $ad-bc=0,\ c\neq 0$이면 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}$ 인 상수함수가 된다.

▷ $c=0$이면 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$ 인 다항함수가 된다.

▷ 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$처럼 (분자의 차수)$\geq$(분모의 차수) 인 경우에는 $ax+b$를 $cx+d$로 나눈 몫과 나머지를 이용하여 $y=\dfrac{k}{x-m}+n$ $(k\neq 0)$의 꼴로 변형할 수 있다.

유리함수 $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ 의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

$y=\dfrac{3x-2}{x+1}=3-\dfrac{5}{x+1}$가 된다. 이 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시켜서 그릴 수 있다. 따라서 점근선은 $x=-1$, $y=3$이 된다. 또한 점 $(-1,\ 3)$에 대칭인 곡선이다.



유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$의 역함수

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$ 이다.

▷ 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수를 구하는 과정

(1) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$를 x에 관해 풀어준다.

$$y(cx+d)=ax+b$$

$$cxy+dy=ax+b$$

$$(cy-a)x=-dy+b$$

$$\therefore x=\frac{-dy+b}{cy-a}$$

이제 x와 y를 서로 바꿔주면 역함수 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$를 얻을 수 있다.

▷ 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 의 역함수는 분자의 x의 계수와 분모의 상수항이 서로 자리를 바꾸면서 부호를 바꾼 것과 같다.

유리함수 $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ 의 역함수를 구하시오.

유리함수 $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ 의 역함수는 $y=\dfrac{-x-2}{x-3}$ 이다.

01 무리식

무리식

근호 안에 문자를 포함하는 식 중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 무리식이라 한다.

$$\triangleright \ \text{식}\begin{cases}\text{유리식}\begin{cases}\text{다항식} : x+1,\ 2x^2-x+3,\ \cdots \\ \text{분수식} : \dfrac{1}{x},\ \dfrac{x+2}{x-3},\ \cdots\end{cases} \\ \text{무리식} : \sqrt{x-1},\ \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}},\ \cdots\end{cases}$$

▷ 무리함수 단원에서는 무리식의 값이 실수가 되는 경우만 다룬다.

▷ 무리식이 실수가 되기 위한 조건

(근호 안의 식의 값) ≥ 0, (무리식에 포함된 유리식의 분모) $\neq 0$

다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x의 값의 범위를 구하시오.

(1) $\sqrt{x-3}$ (2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x}$ (3) $\dfrac{2}{\sqrt{x+4}}$

(1) $x-3 \geq 0$ 에서 $x \geq 3$

(2) $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$ 에서 $-2 \leq x \leq 5$

(3) $x+4>0$ 에서 $x>-4$

분모의 유리화

분모에 근호를 포함한 수나 식이 있을 때, 식의 값에는 영향을 주지 않으면서 분모를 유리수나 유리식으로 변형하는 것을 분모의 유리화라고 한다. 분모의 유리화 방법을 정리하면 다음과 같다.

음이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여

(1) $\dfrac{b}{\sqrt{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$ (단, $a \neq 0$)

(2) $\dfrac{1}{a\pm\sqrt{b}}=\dfrac{a\mp\sqrt{b}}{(a\pm\sqrt{b})(a\mp\sqrt{b})}=\dfrac{a\mp\sqrt{b}}{a^2-b}$ (단, $a^2 \neq b$, 복부호동순)

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$ (단, $a \neq b$, 복부호동순)

▷ 분모의 유리화를 하는 이유는 계산을 더 쉽고 정확하게 하기 위함이다.

▷ 분모의 유리화에서는 곱셈공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 이 사용되었다.

다음식의 분모를 유리식으로 변형하시오.

(1) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ (2) $\dfrac{1}{x-\sqrt{x+1}}$ (3) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

(1) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}}=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x+1}$

(2) $\dfrac{1}{x-\sqrt{x+1}}=\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{(x-\sqrt{x+1})(x+\sqrt{x+1})}=\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x^2-x-1}$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}=\dfrac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{x+1-x+1}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$

02 무리함수

무리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 무리함수라고 한다.
무리함수에서 정의역이 주어져 있지 않을 때는 함숫값이 실수가 되도록 하는, 즉
(근호 안의 식의 값) ≥ 0 인 실수 전체의 집합을 정의역으로 본다.

다음 무리함수의 정의역을 구하시오.

(1) $y=\sqrt{x}$

(2) $y=\sqrt{2-x}$

(3) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

(4) $y=\sqrt{9-x^2}$

(1) $\{x|x \geq 0$인 실수$\}$

(2) $\{x \mid x \leq 2$인 실수$\}$

(3) $\{x \mid x \geq 1$인 실수$\}$

(4) $\{x \mid -3 \leq x \leq 3$인 실수$\}$

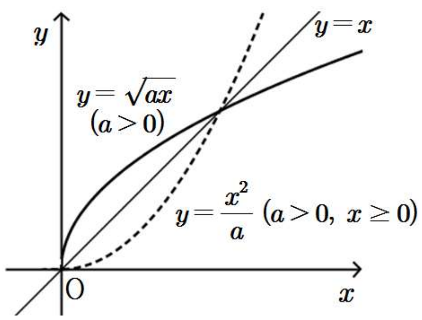
무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프

무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프는 다음과 같은 특징이 있다.

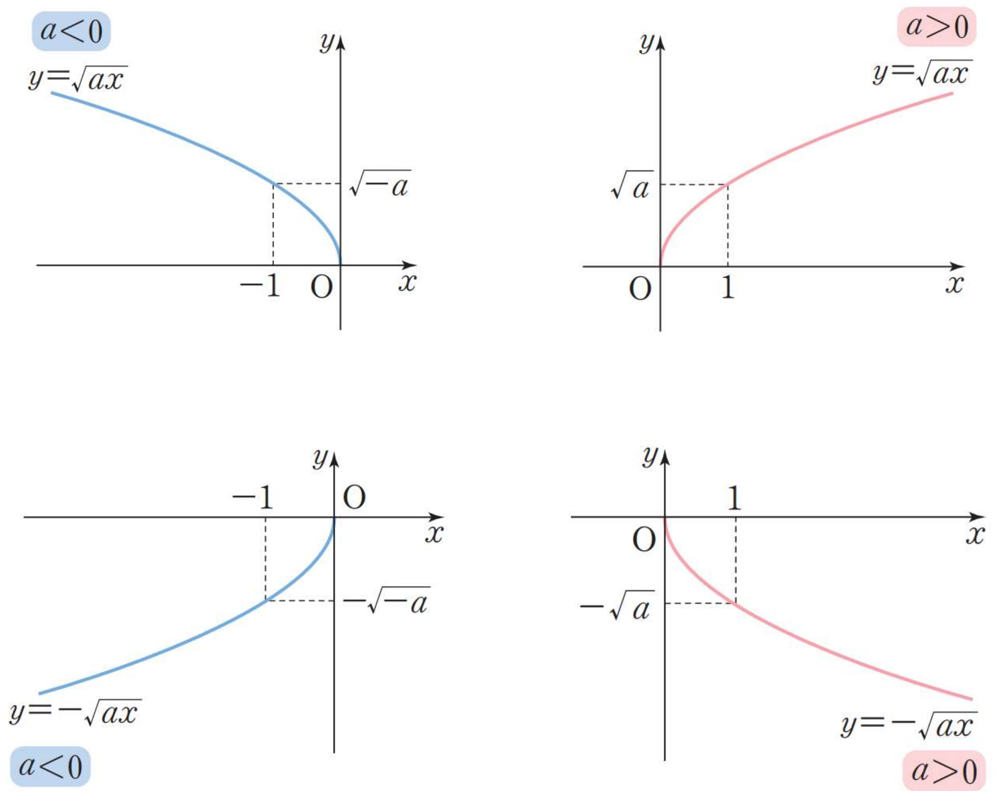
(1) 정의역 $\{x|x \geq 0\}$에서 치역 $\{y|y \geq 0\}$으로의 일대일대응이다.

(2) 함수 $y=\dfrac{1}{a}x^2$ $(x \geq 0)$의 역함수이다.

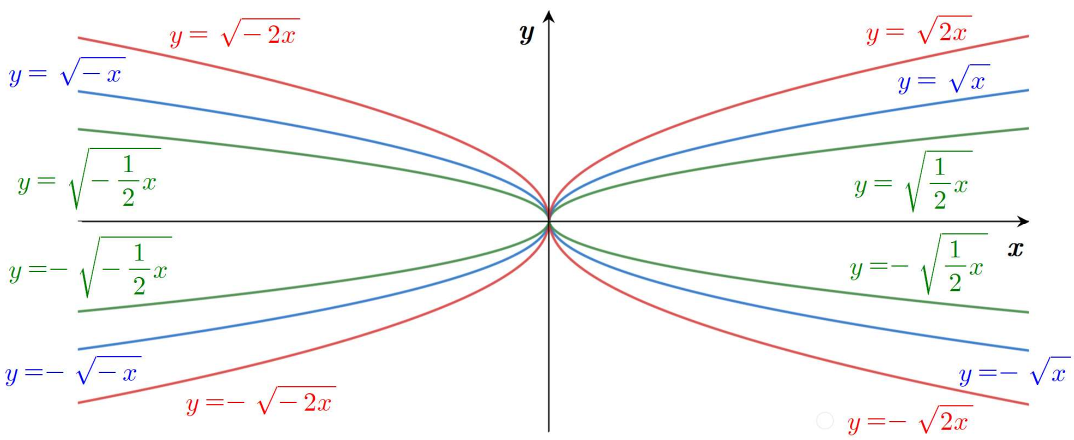
(3) 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{a}x^2$ $(x \geq 0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}\ (a\neq 0)$의 그래프



▷ 아래 그래프와 같이 $y=\pm\sqrt{ax}\ (a\neq 0)$의 그래프는 $|a|$의 값이 커질수록 x축에서 멀어진다.



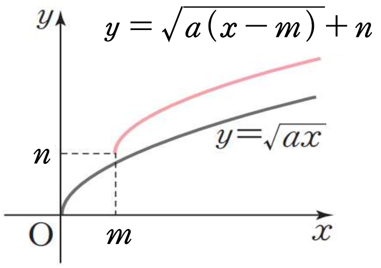
무리함수 $y=\sqrt{a(x-m)}+n\,(a\neq 0)$의 그래프

무리함수 $y=\sqrt{a(x-m)}+n$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

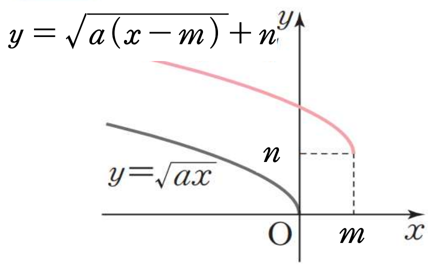
$a>0$일 때, 정의역은 $\{x|x\geq m\}$, 치역은 $\{y|y\geq n\}$이다.

$a<0$일 때, 정의역은 $\{x|x\leq m\}$, 치역은 $\{y|y\geq n\}$이다.

$a>0$



$a<0$

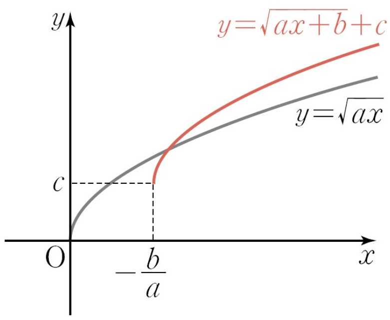


무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\,(a\neq 0)$의 그래프

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 다음과 같이 식을 변형하여 그래프를 그린다.

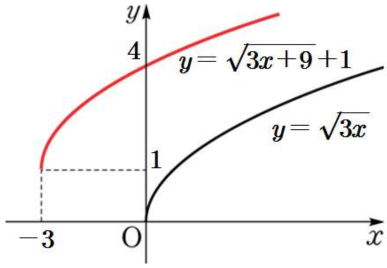
$$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.



무리함수 $y=\sqrt{3x+9}+1$의 그래프를 그리시오

정의역은 $\{x \mid x \geq -3\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq 1\}$인 오른쪽과 같은 그래프가 된다.



함수 $f(x)=\sqrt{x+2}-1$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

$y+1=\sqrt{x+2}$ 의 양변을 제곱하여 x에 대해서 정리하면 $x=(y+1)^2-2$가 되고, x와 y를 서로 바꾸면 $y=(x+1)^2-2$가 된다. 또한 역함수의 정의역은 원래 함수의 치역 $\{y|y \geq -1\}$ 과 같으므로 $f^{-1}(x)=(x+1)^2-2$ $(x \geq -1)$ 이 된다.