实验名称：五点差分格式

一、实验目的及要求

实验目的和要求	1.应用Matlab编写求解椭圆型偏微分方程的五点差分格式程序。 2.能够应用五点差分格式处理给定的实际问题，并对实验结果给出合理解释。

二、实验描述及实验过程

<table>
<tr>
<td>实验描述</td>
<td>
1.PC 机；
2.计算软件 Matlab R2016a；
3.问题：用差分格式计算如下定解问题
$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6(x+y),\qquad (x,y)\in(0,1)\times(0,1),$$
$$u(x,0)=x^3,\ \ u(x,1)=1+x^3,\ \ x\in[0,1]$$
$$u(0,y)=y^3,\ \ u(1,y)=1+y^3,\ \ y\in[0,1]$$
已知该问题的精确解为$u(x,y)=x^3+y^3$.
实验要求：(1) 对于两个变量选取相同的步长对求解区域进行正方形网格剖分。写出用五点差分格式求解上述问题的差分方程组，并用对称矩阵与向量表示。
(2) 利用 Maltab 编程，选取步长 $\boldsymbol{h}=\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32}$，算出其对应的数值解，填充数据表 1。
(3) 画出两个步长对应的精确解曲面图、数值解曲面图和误差曲面图。
</td>
</tr>
</table>

实
验
过
程
与
步
骤
	clc
	clear
	close all
	
	M = 4;
	N = 4;
	
	xa = 0; xb = 1; hx = (xb-xa)/M; x = xa:hx:xb;
	ya = 0; yb = 1; hy = (yb-ya)/N; y = ya:hy:yb;
	
	%% Define the numerical solution
	u_num = zeros(M+1,N+1);
	%% Boundary conditions
	for i=1:M+1
	    u_num(i,1) = x(i)^3; %下边界
	end
	for i=1 : M+1
	    u_num(i,N+1) = 1+x(i)^3; %上边界
	end
	for i=1 : N+1
	    u_num(1,i) = y(i)^3; %左边界
	end
	for i=1 : N+1
	    u_num(M+1,1:i) = 1+y(i)^3;%右边界
	end
	%% Coefficient matrix
	c1 = 2*(1/hx^2+1/hy^2);
	c2 = -1/hx^2;
	c3 = -1/hy^2;
	C = spdiags([c2*ones(M-1,1),c1*ones(M-1,1),c2*ones(M-1,1)],-1:1,M-1,M-1); %稀疏三对角阵
	D = speye(M-1)*c3; % 稀疏单位阵
	A = kron(diag(ones(1,N-2),1),D) + kron(diag(ones(1,N-2),-1),D)+ kron(diag(ones(1,N-1)),C);

```
% 矩阵的 kronecker 乘法：kron(A,B)表示 A 的所有元素与 B 之间的乘积组合而成的较大矩阵


%% Righthand-side function
F = zeros(M-1,N-1);
for j = 1:N-1
    F(1,j) = Rfun(x(2),y(j+1)) - c2*u_num(1,j+1);
    for i = 2:M-2
        F(i,j) = Rfun(x(i+1),y(j+1));
    end
    F(M-1,j) = Rfun(x(M),y(j+1)) - c2*u_num(M+1,j+1);
end
F(:,1) = F(:,1) - D*u_num(2:M,1);
F(:,N-1) = F(:,N-1) - D*u_num(2:M,N+1);
F1 = reshape(F,(M-1)*(N-1),1); % 将矩阵 F 重构 (M-1)*(N-1)行 1 列的矩阵


%% Main solve
A1 = A\F1;
A2 = reshape(A1,M-1,N-1); %矩阵 A1 重构为 (M-1)行 (N-1)列的矩阵
u_num(2:M,2:N) = A2;


%% Exact solution and Error
u_exa = x .^3 + y'.^3;
error = abs(u_exa - u_num);
MaxErr = max(max(error));


%% Surfaces for numerical solution
figure(1)
mesh(x,y,u_num');
```

```
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('numerical solution')
title('（h1 = h2 = 1/32）');

%% Surfaces for exact solution
figure(2)
mesh(x,y,u_exa');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('exact solution')

%% Surfaces for error
figure(3)
mesh(x,y,error');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('Error')
```

三、实验结果与解释

实验结果与解释

(1). 五点差分格式及其矩阵向量形式

将其代入结点 $(\boldsymbol{xi}, \boldsymbol{yj})$ 处方程，略去小量项，并用 $\boldsymbol{uij}$ 代替 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{xi}, \boldsymbol{yj})$，得到五点差分 格式

$$-\left[\frac{1}{h_x^2}\left(u_{i-1}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}\right)+\frac{1}{h_y^2}\left(u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j}+u_{i,j+1}\right)\right]=f_{ij}$$

$$i=2,\ldots\ldots,M, j=2,\ldots\ldots,\ N$$

$$u_{1,j}=\ y_j^3, u_{M+1,j}=1+y_j^3, j=1,\ldots\ldots,N+1$$

$$u_{i,1}=x_i^3, u_{N+1}=1+x_i^3, i=2,\ldots\ldots,M$$

$$\begin{bmatrix} C & D & \cdots & & \\ D & C & D & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & D & C & D \\ & & \cdots & D & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N-DU_{N+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_2-DU_1 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N-DU_{N+1} \end{bmatrix}$$

(2). 计算结果数据表

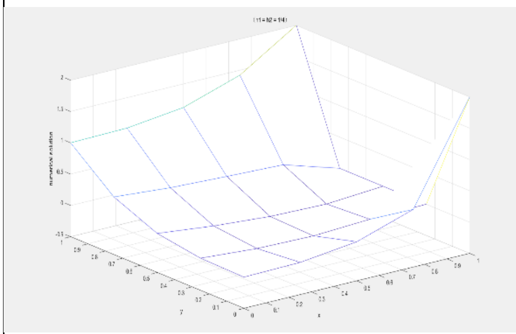
表 1 部分结点处的精确解和取不同步长时所得的数值解

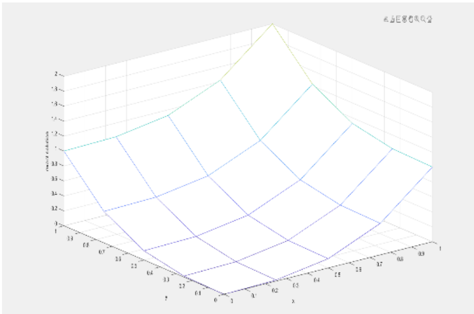
$h\backslash(x,y)$	$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$
1/4	**0.049665178571429**	**0.025111607142857**	**0.349330357142857**	**-0.0212053571428571**	**-0.0641741071428571**	**0.276227678571429**
1/8	**-0.0483514085298475**	**0.0260238179696534**	**0.352484100787079**	**-0.0279781265223737**	**-0.0819751047343595**	**0.268365195294553**
1/16	**-0.0479378012877580**	**0.0264396363205534**	**0.353472013959324**	**-0.0298939495963631**	**-0.0878692846267080**	**0.266097379897042**

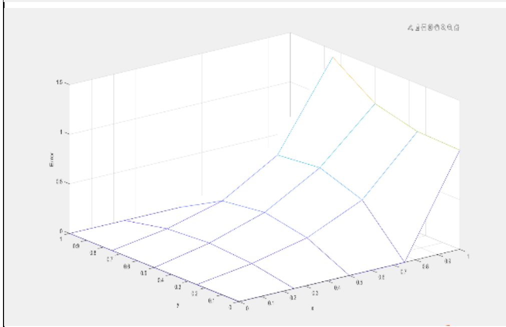
1/32	**-0.0478305746007490**	**0.0265604830720270**	**0.35372898478815 4**	**-0.0303838590138470**	**-0.0894745356858280**	**0.26550853790796 0**
精确解	**0.0313**	**0.1406**	**0.4375**	**0.4375**	**0.5469**	**0.8438**

(3). 数值解曲线图、精确解曲线图和误差曲线图。

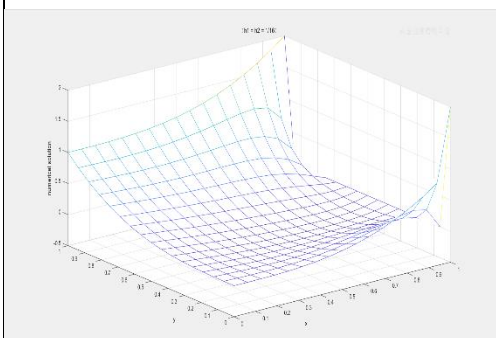
h=1/4 时

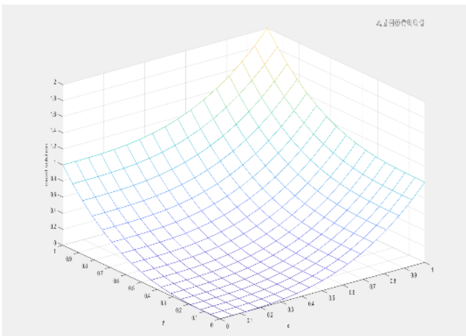


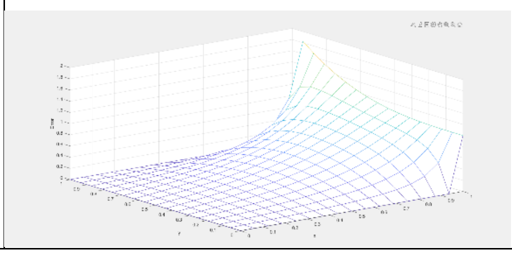




h=1/16 时







四、总结及评阅

实验总结及心得体会
本次实验主要是围绕五点差分格式展开的，通过这一实验，我对五点差分格式有了更深入的了解。五点差分格式具有较高的精度和稳定性，能够在保证计算效率的同时，得到较为准确的解。