mini-cheetah MPC 反作用力规划

理论部分

- 对于单输入单输出（SISO）系统，u 代表输入，e 代表误差，即有当 $\int e^2dt$ 越小时，表示跟踪效果越好；当 $\int u^2dt$ 越小时，表示能耗越低。可以写成代价函数形式，即：$J=\int qe^2dt+\int ru^2dt$ 通过调节参数 q、r 来获取想要的效果。
- 对于多输入多输出系统（MIMO），有系统的状态方程：

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=Ax+Bu\\&y=Cx\end{aligned}$$

此时， 代价函数 $J=\int(E^TQE+U^TRU)dt$，Q、R 也被称为权值矩阵。

- 模型预测控制（MPC）：通过模型来预测系统在某一段时间段内的表现来进行优化控制。当有系统的状态方程 $x_{k+1}=Ax_k+Bu_k$ ，**MPC** 共有以下三个步骤：

假设系统在第 k 时刻：

1. 估计/测量读取当前的系统状态
2. 基于 u_k , u_{k+1} , $\cdots$,u_{k+N} 来进行优化，$J=\sum_{k}^{N-1}E_k^TQE_k+U_K^TQU_K+E_N^TFE_N$
3. 只取 u_k

下面开始推导如何将 J 转化为二次规划 QP 形式：

设在第 k 时刻开始预测，预测区间为 N：

$$X_k=\begin{bmatrix}x(k)\\x(k+1|k)\\x(k+2|k)\\\vdots\\x(k+N|k)\end{bmatrix}\qquad U_k=\begin{bmatrix}u(k|k)\\u(k+1|k)\\\vdots\\u(k+N-1|k)\end{bmatrix}$$

括号后面的 k 表示在第 k 时刻进行预测，把预测的 $x(k+i|k)$ 和 $u(k+i|k)$ 写成向量的形式 X_k 和 U_k。设输出 $y=x$ ，参考 $R=0$ ，误差 $E=y-R=x-0=x$。此时，代价函数 J：

$$min\ J=\sum_{i=0}^{N}(x(k+i|k)^TQx(k+i|x))+(u(k+i|k)^TRu(k+i|k))+x(k+N|k)^TFx(k+N|k)$$

继续利用系统的状态方程：

$$\begin{aligned}&x(k|k)=x_k\\&x(k+1|k)=Ax(k|k)+Bu(k|k)=Ax_k+Bu_k\\&x(k+2|k)=Ax(k+1|k)+Bu(k+1|k)=A^2x_k+ABu_k+Bu(k+1|k)\\&\cdots\\&x(k+N|k)=A^Nx_k+A^{N-1}Bu(k|k)+\cdots+Bu(k|k)\end{aligned}$$

写成矩阵形式：

$$X_k=\begin{bmatrix}I\\A\\A^2\\\vdots\\A^N\end{bmatrix}x_k+\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\B&&&\\AB&B&&\\\vdots&&&\\A^{N-1}B&A^{N-2}B&\cdots&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(k|k)\\\vdots\\u(k+N-1|k)\end{bmatrix}$$

简化一下，请注意区分大小写：

$$X_k=Mx_k+CU_k$$

回过头来推导代价函数 J：

$$\begin{aligned}J&=\sum_{i=0}^{N}(x(k+i|k)^TQx(k+i|x))+(u(k+i|k)^TRu(k+i|k))+x(k+N|k)^TFx(k+N|k)\\&=x(k|k)^TQx(k|x)+x(k+1|k)^TQx(k+1|x)+\cdots+x(k+N|k)^TQx(k+N|x)+u(k|k)^TRu(k|k)+\cdots+u(k+N-1|k)^TRu(k+N\end{aligned}$$

写成矩阵形式：

$$J=\begin{bmatrix}x(k|k)\\x(k+1|k)\\\vdots\\x(k+N|k)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Q&&\\&Q&\\&&\ddots&\\&&&F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k|k)\\x(k+1|k)\\\vdots\\x(k+N|k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u(k|k)\\u(k+1|k)\\\vdots\\u(k+N-1|k)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}R&&\\&R&\\&&\ddots&\\&&&R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(k|k)\\u(k+1|k)\\\vdots\\u(k+N-1|k)\end{bmatrix}$$

简化一下：

$$
\begin{aligned}
J &= X_k^T \overline{Q} X_k + U_k \overline{R} U_k \\
&= (Mx_k + CU_k)^T \overline{Q} (Mx_k + CU_k) + U_k \overline{R} U_k \\
&= (x_k^T M^T + U_k^T C^T) \overline{Q} (Mx_k + CU_k) + U_k \overline{R} U_k \\
&= x_k^T M^T \overline{Q} M x_k + x_k^T M^T \overline{Q} C U_k + U_k^T C^T \overline{Q} M x_k + U_k^T C^T \overline{Q} C U_k + U_k \overline{R} U_k \\
&= x_k^T G x_k + 2 x_k^T E U_k + U_k^T H U_k
\end{aligned}
$$

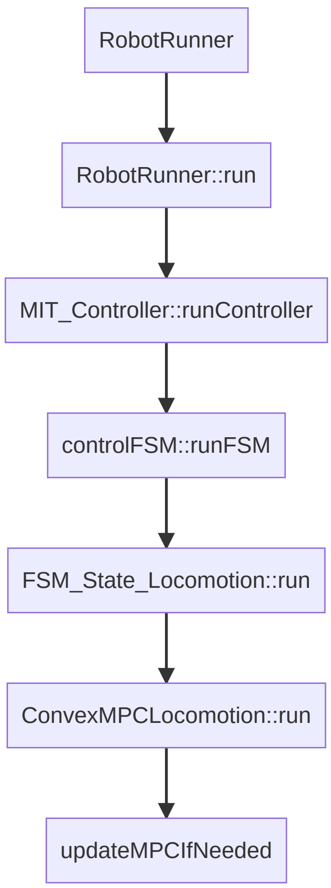
其中，$G = M^T \overline{Q} M$，$H = C^T \overline{Q} C + \overline{R}$，$M^T \overline{Q} C$。

至此我们把MPC的代价函数 J 转换成了**QP**问题。

$$
J = x_k^T G x_k + 2 x_k^T E U_k + U_k^T H U_k
$$

代码部分

- **ConvexMPCLocomotion** 类是进行MPC规划的核心类。从头来看，在 **RobotRunner** 的 **run** 中，经过条件判断进入机器人控制器对象的 **RobotController::runController()** ，由于继承关系，实际上进入的是 **MIT_Controller::runController()** 。重点关注 **controlFSM::runFSM** 。**controlFSM** 是一个有限状态机管理类，管理如MPC、视觉融合等众多控制器，这里不对**controlFSM** 中控制器的状态管理切换赘述。假设当前的状态是 **locomotion** ，对 **locomotion** 状态的处理类是 **FSM_State_Locomotion** 。从而进入了 **FSM_State_Locomotion::run()** ，最终进入了 **ConvexMPCLocomotion::run()** 。 在 **ConvexMPCLocomotion::run()** 中，并不是每次迭代都会进行MPC求解，这是由于此类中含有步态规划，在 **Minicheetah** 中，以trot步态为例，一个步态周期需要求解10次MPC，求解一次MPC前需要先进行13次迭代。之所以求解MPC与步态规划联系如此紧密，是因为MPC求解的是地面对足端的作用力，需要时刻清楚每条腿现在以及未来的触地情况。
- 在进行13次迭代之后，程序会顺利执行 **updateMPCIfNeeded** ，也就是 **MPC** 求解足端作用力。整个代码的进行流程如下图所示：



ConvexMPCLocomotion初始化

- 在此之前先来分析一下整个的初始化过程，在 **FSM_State_Locomotion** 的构造函数完成对 **ConvexMPCLocomotion** 对象的创建，在 **ConvexMPCLocomotion** 的构造函数中，代码如下：

```
{
  _parameters = parameters;
  dtMPC = dt * iterationsBetweenMPC;
  default_iterations_between_mpc = iterationsBetweenMPC;
  printf("[Convex MPC] dt: %.3f iterations: %d, dtMPC: %.3f\n", dt, iterationsBetweenMPC, dtMPC);
  setup_problem(dtMPC, horizonLength, 0.4, 120);
  //setup_problem(dtMPC, horizonLength, 0.4, 650); // DH
  rpy_comp[0] = 0;
  rpy_comp[1] = 0;
  rpy_comp[2] = 0;
  rpy_int[0] = 0;
  rpy_int[1] = 0;
```

```
  rpy_int[2] = 0;

  for(int i = 0; i < 4; i++)
    firstSwing[i] = true;

  initSparseMPC();

   pBody_des.setZero();
   vBody_des.setZero();
   aBody_des.setZero();
}
```

初始化主要是一些参数的赋值，和 **setup_problem** 、**initSparseMPC** 两个函数。其中 **setup_problem** 代码如下：

```
void setup_problem(double dt, int horizon, double mu, double f_max)
{
  //mu = 0.6;
  if(first_run)
  {
    first_run = false;
    //初始化互斥锁
    initialize_mpc();
  }

#ifdef K_DEBUG
  printf("[MPC] Got new problem configuration!\n");
    printf("[MPC] Prediction horizon length: %d\n      Force limit: %.3f, friction %.3f\n      dt: %.3f\n",
            horizon,f_max,mu,dt);
#endif

  //pthread_mutex_lock(&problem_cfg_mt);
  //QP问题的参数
  problem_configuration.horizon = horizon;
  problem_configuration.f_max = f_max;
  problem_configuration.mu = mu;
  problem_configuration.dt = dt;

  //pthread_mutex_unlock(&problem_cfg_mt);
  //根据预测长度horizon重新定义QP问题向量的大小和分配内存
  resize_qp_mats(horizon);
}
```

initSparseMPC 代码如下：

```
void ConvexMPCLocomotion::initSparseMPC() {
  Mat3<double> baseInertia;
  //机器人的惯性张量
  baseInertia << 0.07, 0, 0,
              0, 0.26, 0,
              0, 0, 0.242;
  //质量
  double mass = 9;
  //最大力
  double maxForce = 120;

  //dtTraj是预测未来10步中，每步的时间
  std::vector<double> dtTraj;
  for(int i = 0; i < horizonLength; i++) {
    dtTraj.push_back(dtMPC);
  }
  //权重参数，之后会重新传入
  Vec12<double> weights;
  weights << 0.25, 0.25, 10, 2, 2, 20, 0, 0, 0.3, 0.2, 0.2, 0.2;
  //weights << 0,0,0,1,1,10,0,0,0,0.2,0.2,0;
  //设置_sparseCMPC参数
  _sparseCMPC.setRobotParameters(baseInertia, mass, maxForce);
  _sparseCMPC.setFriction(0.4);
  _sparseCMPC.setWeights(weights, 4e-5);
  _sparseCMPC.setDtTrajectory(dtTraj);

  _sparseTrajectory.resize(horizonLength);
}
```

- 总结：在初始化中，主要有：

1. 对一些参数赋初值
2. 根据预测长度重新定义向量的大小和分配QP问题向量的内存

3. 设置QP问题的参数
4. 设置sparseCMPC参数

updateMPCIfNeeded

- 在进入 **updateMPCIfNeeded** 之前，先获取一张表，其实就是一个一维数组。其中包含了足端在预测范围内是否触地的状态。

```
int* mpcTable = gait->getMpcTable();
updateMPCIfNeeded(mpcTable, data, omniMode);
```

- 在 **updateMPCIfNeeded** 中，主要是对机器人期望的状态进行预测，包括站立和非站立两种情况。在前面理论部分提到状态向量 x_k，这里具体是

$$x_k = [\Theta^T \quad p^T \quad \omega^T \quad \dot{p}^T]^T$$

其中 Θ 表示机器人的欧拉角，p 表示机器人的位置，这二者描述机器人的自身运动状态；ω 表示机器人的角速度，$\dot{p}$ 表示机器人的线速度，这二者是对机器人的运动层面进行描述。

```
void ConvexMPCLocomotion::updateMPCIfNeeded(int *mpcTable, ControlFSMData<float> &data, bool omniMode) {
  //iterationsBetweenMPC = 30;
  if((iterationCounter % iterationsBetweenMPC) == 0)
  {
    //获取状态估计的结果
    auto seResult = data._stateEstimator->getResult();
    float* p = seResult.position.data();
    //机器人的速度
    Vec3<float> v_des_robot(_x_vel_des, _y_vel_des,0);
    //将机器人的速度转为世界坐标系
    Vec3<float> v_des_world = omniMode ? v_des_robot : seResult.rBody.transpose() * v_des_robot;
    //float trajInitial[12] = {0,0,0, 0,0,.25, 0,0,0,0,0,0};


    //printf("Position error: %.3f, integral %.3f\n", pxy_err[0], x_comp_integral);
    //站立状态下
    if(current_gait == 4)
    {
      //当前时刻的状态
      float trajInitial[12] = {
        _roll_des,
        _pitch_des /*-hw_i->state_estimator->se_ground_pitch*/,
        (float)stand_traj[5]/*+(float)stateCommand->data.stateDes[11]*/,
        (float)stand_traj[0]/*+(float)fsm->main_control_settings.p_des[0]*/,
        (float)stand_traj[1]/*+(float)fsm->main_control_settings.p_des[1]*/,
        (float)_body_height/*fsm->main_control_settings.p_des[2]*/,
        0,0,0,0,0,0};
      //由当前时刻估算未来时刻的状态，由于是站立，所以状态向量保持不变
      for(int i = 0; i < horizonLength; i++)
        for(int j = 0; j < 12; j++)
          trajAll[12*i+j] = trajInitial[j];
    }

    else
    {
      //非站立情况
      const float max_pos_error = .1;
      float xStart = world_position_desired[0];
      float yStart = world_position_desired[1];
      //机器人的期望位置与状态估计获取的位置相差不能太大
      if(xStart - p[0] > max_pos_error) xStart = p[0] + max_pos_error;
      if(p[0] - xStart > max_pos_error) xStart = p[0] - max_pos_error;

      if(yStart - p[1] > max_pos_error) yStart = p[1] + max_pos_error;
      if(p[1] - yStart > max_pos_error) yStart = p[1] - max_pos_error;

      world_position_desired[0] = xStart;
      world_position_desired[1] = yStart;
      //当前时刻的状态向量
      float trajInitial[12] = {(float)rpy_comp[0],  // 0 //含有补偿的roll和pitch
        (float)rpy_comp[1],    // 1
        _yaw_des,    // 2
        //yawStart,    // 2
        xStart,                                   // 3
        yStart,                                   // 4
        (float)_body_height,      // 5
        0,                                        // 6
        0,                                        // 7
        _yaw_turn_rate,  // 8
        v_des_world[0],                           // 9
```

```
        v_des_world[1],                           // 10
        0};                                       // 11
      //对状态的预测，长度是horizonLength
      for(int i = 0; i < horizonLength; i++)
      {
        for(int j = 0; j < 12; j++)
          trajAll[12*i+j] = trajInitial[j];

        if(i == 0) // start at current position  TODO consider not doing this
        {
          //trajAll[3] = hw_i->state_estimator->se_pBody[0];
          //trajAll[4] = hw_i->state_estimator->se_pBody[1];
          trajAll[2] = seResult.rpy[2];
        }
        else
        {
          //预测就是目标时刻的状态=上一时刻的状态+速度*时间
          trajAll[12*i + 3] = trajAll[12 * (i - 1) + 3] + dtMPC * v_des_world[0];
          trajAll[12*i + 4] = trajAll[12 * (i - 1) + 4] + dtMPC * v_des_world[1];
          trajAll[12*i + 2] = trajAll[12 * (i - 1) + 2] + dtMPC * _yaw_turn_rate;
        }
      }
    }

    Timer solveTimer;
    //根据参数选择求解mpc的方式
    if(_parameters->cmpc_use_sparse > 0.5) {
      solveSparseMPC(mpcTable, data);
    } else {
      solveDenseMPC(mpcTable, data);
    }
    //printf("TOTAL SOLVE TIME: %.3f\n", solveTimer.getMs());
  }

}
```

solveDenseMPC

- 这里以 **solveDenseMPC** 为例，在这之前，需要推导一些公式，因为在之前的理论部分存在系统的状态方程，而在这里需要具体的形式。模型预测控制模型是关键，MIT使用的是单刚体模型，其动力学方程如下：

$$\begin{aligned}\ddot{p} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{m} - g \\ \frac{d}{dt}(I\omega) &= \sum_{i=1}^{n} r_i \times f_i \\ \dot{R} &= [\omega]_\times R\end{aligned}$$

现在根据模型来推导机器人的状态方程：

1. 首先是 欧拉角 Θ，当 $pitch$ 和 $roll$ 接近 0 时：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\Theta) = \begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix}cos(\psi) & sin(\psi) & 0\\ -sin(\psi) & cos(\psi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\omega \\ &\approx R_z(\psi)\omega\end{aligned}$$

2. 对 ω 求导：

$$\begin{aligned}\text{此处第二项是因为求导操作是在非惯性系下进行的}\\ \frac{d}{dt}(I\omega) &= I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) \approx I\dot{\omega} \\ \text{机器人相对于世界坐标系的惯性表达式}: \\ I &= RI_BR^T \\ \hat{I} &= R_z(\psi)I_BR_z(\psi)^T \\ \text{所以有}: \\ \dot{\omega} &= I^{-1}\frac{d}{dt}(I\omega) \\ \text{又因为}: \\ \frac{d}{dt}(I\omega) &= \sum_{i=1}^{n} r_i \times f_i \\ \text{所以}: \\ \dot{\omega} &= I^{-1}\sum_{i=1}^{n} r_i \times f_i\end{aligned}$$

3. 对 p 求导就是 $\dot{p}$
4. 对 $\dot{p}$ 求导

$$\ddot{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{m}-g$$

把上述四者写成矩阵的形式有：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Theta\\ p\\ \omega\\ \dot{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0_{3\times3} & 0_{3\times3} & R_z(\psi) & 0_{3\times3}\\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & I_{3\times3}\\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3}\\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta\\ p\\ \omega\\ \dot{p}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3}\\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3}\\ I^{-1}[r_1]_\times & I^{-1}[r_2]_\times & I^{-1}[r_3]_\times & I^{-1}[r_4]_\times\\ \frac{I_3}{m} & \frac{I_3}{m} & \frac{I_3}{m} & \frac{I_3}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ g\end{bmatrix}$$

利用前向欧拉法将状态方程离散化：

$$x(k+1)=A_kx(k)+B_ku(k)$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}I_{3\times3} & 0_{3\times3} & R_z(\psi_k)\Delta T & 0_{3\times3}\\ 0_{3\times3} & I_{3\times3} & 0_{3\times3} & I_{3\times3}\Delta T\\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3}\\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3}\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3}\\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3}\\ I^{-1}[r_1]_\times\Delta T & I^{-1}[r_2]_\times\Delta T & I^{-1}[r_3]_\times\Delta T & I^{-1}[r_4]_\times\Delta T\\ \frac{I_3\Delta T}{m} & \frac{I_3\Delta T}{m} & \frac{I_3\Delta T}{m} & \frac{I_3\Delta T}{m}\end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ g\end{bmatrix}$$

在理论部分我们把代价函数 J 推导成 QP 问题的形式，具体在机器人上，代价函数的形式有所变化：

新的代价函数形式,原来误差e是x_i,现在是$x_i-x_{i,ref}$:

$$minJ=\sum_{i=0}^{N}||x_{i+1}-x_{i+1,ref}||_{Q_i}+||u_i||_{R_i}$$

同样地，把所有x_i写成一个X:

$$X=\begin{bmatrix}I\\ A\\ A^2\\ \vdots\\ A^N\end{bmatrix}x_k+\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ B & & & \\ AB & B & & \\ \vdots & & & \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \cdots & B\end{bmatrix}U$$

即:

$$X=A_{qp}x(k)+B_{qp}U$$

同理，代价函数有:

$$minJ=(X-X^{ref})^TQ(X-X^{ref})+U^TRU$$

把$X=A_{qp}x(k)+B_{qp}U$代入:

$$minJ=(A_{qp}x(k)+B_{qp}U-X^{ref})^TQ(A_{qp}x(k)+B_{qp}U-X^{ref})+U^TRU$$

把转置放进括号里:

$$\begin{aligned}minJ&=(x^T(k)A_{qp}^T+U^TB_{qp}^T-X^{ref^T})Q(A_{qp}x(k)+B_{qp}U-X^{ref})+U^TRU\\ &=x^T(k)A_{qp}^TQA_{qp}x(k)+x^T(k)A_{qp}^TQB_{qp}U-x^T(k)A_{qp}^TQX^{ref}\\ &+U^TB_{qp}^TQA_{qp}x(k)+U^TB_{qp}^TQB_{qp}U-U^TB_{qp}^TQX^{ref}\\ &-X^{ref^T}QA_{qp}x(k)-X^{ref^T}QB_{qp}U+X^{ref^T}QX^{ref}+U^TRU\\ &=U^TB_{qp}^TQB_{qp}U+U^TRU\\ &+U^TB_{qp}^TQA_{qp}x(k)-U^TB_{qp}^TQX^{ref}+x^T(k)A_{qp}^TQB_{qp}U-X^{ref^T}QB_{qp}U\\ &+x^T(k)A_{qp}^TQA_{qp}x(k)-x^T(k)A_{qp}^TQX^{ref}-X^{ref^T}QA_{qp}x(k)-+X^{ref^T}QX^{ref}\\ &=U^T(B_{qp}^TQB_{qp}+R)U+U^TB_{QP}^TQ(A_{qp}x(k)-X^{ref})\\ &+x^T(k)A_{qp}^TQA_{qp}x(k)-x^T(k)A_{qp}^TQX^{ref}-X^{ref^T}QA_{qp}x(k)-+X^{ref^T}QX^{ref}\end{aligned}$$

最后一排为常数项，可不管:

$$min\ J=U^T(B_{qp}^TQB_{qp}+R)U+U^TB_{QP}^TQ(A_{qp}x(k)-X^{ref})$$

上述代价函数有了QP的形式，我们还差一些约束，显然，具体到机器人上，就是每条腿所受反作用力的约束。这里使用摩擦锥模型来表示这些约束。每条腿所受反力 $f_i=[f_{ix}\ f_{iy}\ f_{iz}]$ ， 由于足底反力触地时时需要限制允许的最大反力，摆动时反力需为0。则有：

如果没触地:

$$f_i=0_{3\times1}$$

如果触地，对z方向的力作出限制:

$$f_{iz}\le f_{max}$$

除了对z方向的力作出限制，为保证足底与地面不发生相对滑动,
足底反力的水平分量不能大于其竖直分量与滑动摩擦系数μ的乘积，即满足摩擦锥条件:

$$\begin{aligned}&|f_{ix}|\le\mu f_{iz}\\ &|f_{iy}|\le\mu f_{iz}\\ &f_{iz}>0\end{aligned}$$

写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}-1 & 0 & \mu\\ 0 & -1 & \mu\\ 1 & 0 & \mu\\ 0 & 1 & \mu\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{ix}\\ f_{iy}\\ f_{iz}\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}+\infty\\ +\infty\\ +\infty\\ +\infty\\ f_{max}\end{bmatrix}$$

- 现在继续代码部分，这部分主要是获取状态估计结果，定义一些参数并通过 **update_problem_data_floats**将设置 **update** 对象,并进入 **solve_mpc** 中，开始构造qp问题并求解。

```
void ConvexMPCLocomotion::solveDenseMPC(int *mpcTable, ControlFSMData<float> &data) {
  //获取状态估计的结果
  auto seResult = data._stateEstimator->getResult();

  //float Q[12] = {0.25, 0.25, 10, 2, 2, 20, 0, 0, 0.3, 0.2, 0.2, 0.2};
  //定义权重矩阵
  float Q[12] = {0.25, 0.25, 10, 2, 2, 50, 0, 0, 0.3, 0.2, 0.2, 0.1};

  //float Q[12] = {0.25, 0.25, 10, 2, 2, 40, 0, 0, 0.3, 0.2, 0.2, 0.2};
  //获取参数和状态估计的结果
  float yaw = seResult.rpy[2];
  float* weights = Q;
  float alpha = 4e-5; // make setting eventually
  //float alpha = 4e-7; // make setting eventually: DH
  float* p = seResult.position.data();
  float* v = seResult.vWorld.data();
  float* w = seResult.omegaWorld.data();
  float* q = seResult.orientation.data();
  //计算 r
  float r[12];
  for(int i = 0; i < 12; i++)
    r[i] = pFoot[i%4][i/4]  - seResult.position[i/4];

  //printf("current posistion: %3.f %.3f %.3f\n", p[0], p[1], p[2]);

  if(alpha > 1e-4) {
    std::cout << "Alpha was set too high (" << alpha << ") adjust to 1e-5\n";
    alpha = 1e-5;
  }

  Vec3<float> pxy_act(p[0], p[1], 0);
  Vec3<float> pxy_des(world_position_desired[0], world_position_desired[1], 0);
  //Vec3<float> pxy_err = pxy_act - pxy_des;
  float pz_err = p[2] - _body_height;
  Vec3<float> vxy(seResult.vWorld[0], seResult.vWorld[1], 0);

  Timer t1;
  dtMPC = dt * iterationsBetweenMPC;
  //又设置了参数，之前在构造函数的时候设置了。
  setup_problem(dtMPC,horizonLength,0.4,120);
  //setup_problem(dtMPC,horizonLength,0.4,650); //DH
  update_x_drag(x_comp_integral);
  if(vxy[0] > 0.3 || vxy[0] < -0.3) {
    //x_comp_integral += _parameters->cmpc_x_drag * pxy_err[0] * dtMPC / vxy[0];
    x_comp_integral += _parameters->cmpc_x_drag * pz_err * dtMPC / vxy[0];
  }

  //printf("pz err: %.3f, pz int: %.3f\n", pz_err, x_comp_integral);
  //设置求解器参数
  update_solver_settings(_parameters->jcqp_max_iter, _parameters->jcqp_rho,
      _parameters->jcqp_sigma, _parameters->jcqp_alpha, _parameters->jcqp_terminate, _parameters->use_jcqp);
  //t1.stopPrint("Setup MPC");

  Timer t2;
  //cout << "dtMPC: " << dtMPC << "\n";

  update_problem_data_floats(p,v,q,w,r,yaw,weights,trajAll,alpha,mpcTable);
  //t2.stopPrint("Run MPC");
  //printf("MPC Solve time %f ms\n", t2.getMs());

  for(int leg = 0; leg < 4; leg++)
  {
    Vec3<float> f;
    for(int axis = 0; axis < 3; axis++)
      f[axis] = get_solution(leg*3 + axis);

    //printf("[%d] %7.3f %7.3f %7.3f\n", leg, f[0], f[1], f[2]);

    f_ff[leg] = -seResult.rBody * f;
    // Update for WBC
    Fr_des[leg] = f;
  }
}
```

solve_mpc

在 **solve_mpc** 中，根据状态估计的结果和传入的参数来构造 x_0 ，调用 ct_ss_mats 构造状态方程的 A 、B 矩阵，调用 c2qp 构造 A_{qp} 、B_{qp} ，构造权值矩阵、期望的状态向量，构造摩擦锥约束。

```
//通过update设置机器人状态对象
  rs.set(update->p, update->v, update->q, update->w, update->r, update->yaw);
#ifdef K_PRINT_EVERYTHING

  printf("-----------------\n");
    printf("   PROBLEM DATA  \n");
    printf("-----------------\n");
    print_problem_setup(setup);

    printf("-----------------\n");
    printf("    ROBOT DATA   \n");
    printf("-----------------\n");
    rs.print();
    print_update_data(update,setup->horizon);
#endif

  //roll pitch yaw
  Matrix<fpt,3,1> rpy;
  quat_to_rpy(rs.q,rpy);

  //initial state (13 state representation)
  //
  //构造x_0,相当于x(k),这里把重力放进了状态向量当中。
  x_0 << rpy(2), rpy(1), rpy(0), rs.p , rs.w, rs.v, -9.8f;

  //从机器人坐标系转到世界坐标系下
  I_world = rs.R_yaw * rs.I_body * rs.R_yaw.transpose(); //original
  //I_world = rs.R_yaw.transpose() * rs.I_body * rs.R_yaw;
  //cout<<rs.R_yaw<<endl;
  //构造状态方程A、B矩阵
  ct_ss_mats(I_world,rs.m,rs.r_feet,rs.R_yaw,A_ct,B_ct_r, update->x_drag);


#ifdef K_PRINT_EVERYTHING
  cout<<"Initial state: \n"<<x_0<<endl;
    cout<<"World Inertia: \n"<<I_world<<endl;
    cout<<"A CT: \n"<<A_ct<<endl;
    cout<<"B CT (simplified): \n"<<B_ct_r<<endl;
#endif
  //QP matrices
  //构造A_qp B_qp
  c2qp(A_ct,B_ct_r,setup->dt,setup->horizon);

  //weights
  //构造权值矩阵
  Matrix<fpt,13,1> full_weight;
  for(u8 i = 0; i < 12; i++)
    full_weight(i) = update->weights[i];
  full_weight(12) = 0.f;
  S.diagonal() = full_weight.replicate(setup->horizon,1);

  //trajectory
  //期望的状态向量
  for(s16 i = 0; i < setup->horizon; i++)
  {
    for(s16 j = 0; j < 12; j++)
      X_d(13*i+j,0) = update->traj[12*i+j];
  }
  //cout<<"XD:\n"<<X_d<<endl;



  //note - I'm not doing the shifting here.
  //约束上界
  s16 k = 0;
  for(s16 i = 0; i < setup->horizon; i++)
  {
    for(s16 j = 0; j < 4; j++)
    {
      U_b(5*k + 0) = BIG_NUMBER;
      U_b(5*k + 1) = BIG_NUMBER;
      U_b(5*k + 2) = BIG_NUMBER;
      U_b(5*k + 3) = BIG_NUMBER;
      //触地z方向最大反作用力为f_max,不触地设置为0
```

```
      U_b(5*k + 4) = update->gait[i*4 + j] * setup->f_max;
      k++;
    }
  }

  //构造摩擦锥约束

  fpt mu = 1.f/setup->mu;
  Matrix<fpt,5,3> f_block;

  //每条腿都有 5个约束

  f_block <<  mu, 0,  1.f,
    -mu, 0,  1.f,
    0,  mu, 1.f,
    0, -mu, 1.f,
    0,   0, 1.f;


  for(s16 i = 0; i < setup->horizon*4; i++)
  {
    fmat.block(i*5,i*3,5,3) = f_block;
  }



  //得到标准二次规划的H矩阵，G矩阵
  qH = 2*(B_qp.transpose()*S*B_qp + update->alpha*eye_12h);
  qg = 2*B_qp.transpose()*S*(A_qp*x_0 - X_d);

  QpProblem<double> jcqp(setup->horizon*12, setup->horizon*20);
  if(update->use_jcqp == 1) {
    jcqp.A = fmat.cast<double>();
    jcqp.P = qH.cast<double>();
    jcqp.q = qg.cast<double>();
    jcqp.u = U_b.cast<double>();
    for(s16 i = 0; i < 20*setup->horizon; i++)
      jcqp.l[i] = 0.;
    //设置求解器参数
    jcqp.settings.sigma = update->sigma;
    jcqp.settings.alpha = update->solver_alpha;
    jcqp.settings.terminate = update->terminate;
    jcqp.settings.rho = update->rho;
    jcqp.settings.maxIterations = update->max_iterations;
    jcqp.runFromDense(update->max_iterations, true, false);
  }

  //获取结果
  if(update->use_jcqp == 1) {
    for(int i = 0; i < 12 * setup->horizon; i++) {
      q_soln[i] = jcqp.getSolution()[i];
    }
  }
```

至此，MPC求反作用力已结束。最后，将结果保存在：

```
 //保存结果
  for(int leg = 0; leg < 4; leg++)
  {
    Vec3<float> f;
    for(int axis = 0; axis < 3; axis++)
      f[axis] = get_solution(leg*3 + axis);

    //printf("[%d] %7.3f %7.3f %7.3f\n", leg, f[0], f[1], f[2]);

    f_ff[leg] = -seResult.rBody * f;
    // Update for WBC
    Fr_des[leg] = f;
  }
```

参考资料

- MPC模型预测控制器
- Cheetah-Software方案分析
- MIT四足机器人Cheetah 3控制方案理解笔记
- Dynamic Locomotion in the MIT Cheetah 3 Through Convex Model-Predictive Control