Univerzitet „Džemal Bijedić“ u Mostaru

Fakultet informacijskih tehnologija

Krive i površi drugog reda

Matematika III

Ime i prezime: Zaim Mehić

Broj indeksa: IB210011

Predmetni nastavnik: prof. dr. Nina Bijedić

Predmetni asistent: mr. sc. Sanja Kapetanović

Mostar,2022.

SADRŽAJ

1. UVOD

Kroz ovaj rad promatrati ćemo koncepte „Krivih drugog reda“ i „Površi drugog reda“, pa će rad biti na isti način podijeljen i obrađen.

Krive drugog reda ubrajaju se u jedne od prvih krivih koje su bile predmet proučavanja. Grčki matematičar Apolonije iz 3. stoljeća prije nove ere. prvi put je spomenuo elipsu, parabolu, hiperbolu i kružnicu kao presjek ravne i konusa pod određenim uglom.

U dijelu rada koji govori o krivima drugog reda navest ćemo njihove jednačine i njihove osnovne karakteristike. Na samom početku prikazat ćemo kako se od presjeka konusa dobijaju krivulje drugog reda, a nakon toga detaljnije razrađujemo svaku od njih pojedinačno.

Prva od krivulja, obrađena u drugom dijelu ovog poglavlja, je kružnica, opisana je njena definicija, srednja jednačina i jednačina translatirane kružnice.

Treći dio opisuje parabolu, njene dijelove i različite načine prikazivanja. Opisana je i njena srednja jednačina, kao i jednačina translatirane parabole.

U četvrtom dijelu ovog poglavlja obrađena je elipsa, njene jednačine i načini prikazivanja.

Predzadnji, peti dio poglavlja, bavi se krivom koja se naziva hiperbola, opisane su njena srednja i translatirana jednačina, a također su izdvojeni i načini prikazivanja hiperbole.

Drugo poglavlje bavi se površima drugog reda i podijeljeno je u više dijelova.

Prvi dio govori o elipsoidu i dotiče se sfere, te navodi karakteristike i jednačinu elipsoida.

Drugi dio fokusiran je na hiperboloid. Ovaj dio dijeli se na odjeljak o jednokrilnom hiperboloidu i dvokrilnom hiperboloidu, te navodi njihove jednačine i karakteristike za svaki od njih.

Treći dio se bavi površi drugog reda koju nazivamo čunj. Navedena je njegova jednačina i njegove karakteristike.

Fokus četvrtog dijela ovog poglavlja jeste paraboloid, tačnije eliptični paraboloid i hiperbolni paraboloid.

Peti, posljednji dio, govori o cilindrima i njihovim tipovima.

Cijeli rad potkrijepljen je jednačinama i slikama koje prikazuju obrađivanu temu.

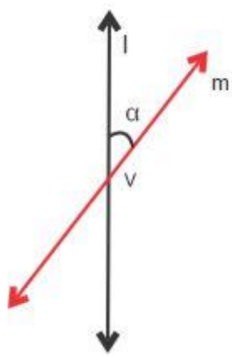
2. KRIVE DRUGOG REDA

2.1. Presjeci konusa

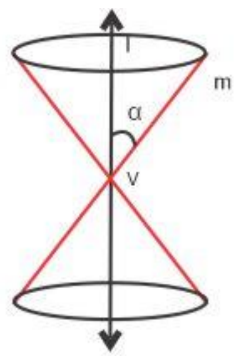
Neka *l* predstavlja nepomičnu vertikalnu pravu, a neka je *m* druga prava koja presjeca *r* u određenoj tački *V* i pod određenim uglom α. (*Slika 1.*)

Pretpostavimo da se prava *n* rotira oko prave *l* na takav način da ugao α ostaje nepromijenjen. Generirana površina predstavljena je rotacioni konus koji se prostire neodređeno u oba smjera (*Slika 2*.).

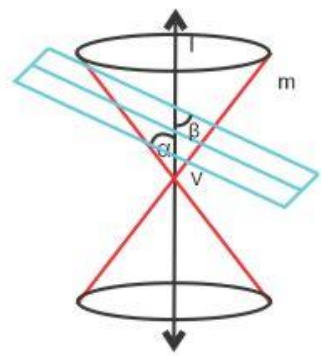
Presijecimo konus sa jednom ravni i dobit ćemo presjek konusa. Presjeci konusa su krive nastale presijecanjem rotacionog konusa sa jednom ravni (*Slika 3*.).



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

Vrsta krive koja se dobije presijecanjem konusa zavisi od pozicije ravni koja presijeca konus, a posmatra se u odnosu na vertikalnu pravu *l*, pa je β ugao koji pravi ravan koja presjeca vertikalnu pravu konusa. Presjek se može desiti na bilo kojem dijelu konusa, ispod ili iznad vrha *V*.

Kada ravan presijeca konus u bilo kojem dijelu osim u vrhu *V*, dobijamo sljedeće situacije:

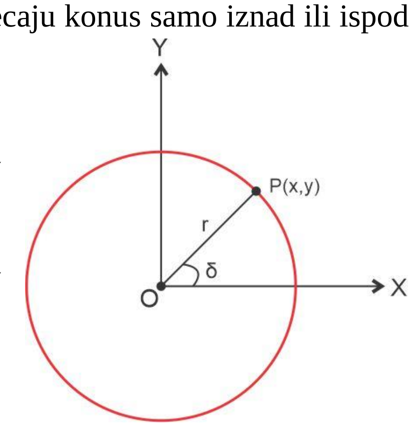
a) Ako je $\beta = 90°$, presjek je **kružnica**.
b) Ako je $\alpha < \beta < 90°$ presjek je **elipsa**.
c) Ako je $\beta = \alpha$, presjek je **parabola**.
d) Ako je $0 \leq \beta < \alpha$, presjek je **hiperbola**.

Navedene presjeke nazivamo krive drugog reda, a prve tri presijecaju konus samo iznad ili ispod vrha *V*, dok u posljednjem slučaju ravan presijeca cijeli konus.

2.2. Kružnica

Kružnica je specijalni slučaj elipse i predstavlja skup svih tačaka u ravni *R* koje imaju jednake udaljenosti od neke tačke u ravni. Tačka *O(Slika 4. ili C na Slici 5.)* u središtu kružnice naziva se centar kružnice, a udaljenost od centra do bilo koje tačke na kružnici naziva se radius te kružnice *r*.

Navedeno možemo zapisati kao: $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{M}: \boldsymbol{d}(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{r}\}$



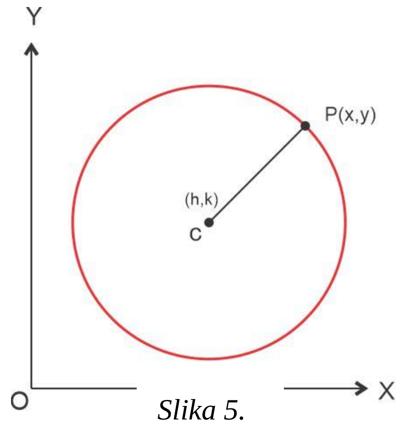
Slika 4.

2.2.1. Srednja jednačina kružnice

Recimo da je navedena kružnica postavljena u koordinatni početak pravouglog koordinatnog sistema (pa je $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})=(\mathbf{0},\mathbf{0})$), pa se jednačina piše kao $\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{y^2}=\boldsymbol{r^2}$ i to je jednačina centralne kružnice ili srednja jednačina kružnice.

2.2.2. Jednačina translatirane kružnice

Jednačina kružnice sa radijusom *r*, čiji se centar nalazi na poziciji (h,k) piše se kao: $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{r^2}$, *(Slika 5.)* a ova jednačina naziva se jednačina translatirane kružnice. Zaključujemo da za računanje radijusa koristimo jednačinu za računanje udaljenosti između dvije tačke.

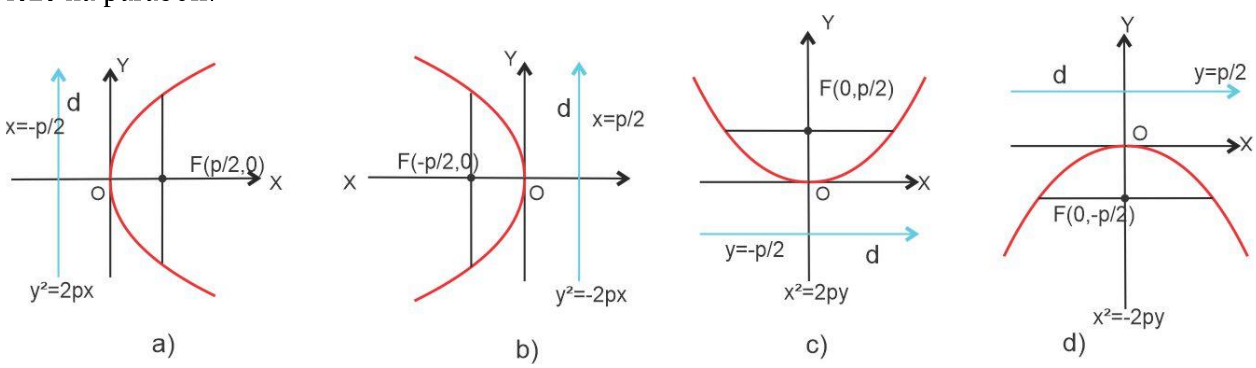


Slika 5.

2.3. Parabola

Parabola je skup tačaka čija je udaljenost od tačke *F* jednaka udaljenosti od prave *d*. Tačka *F* zove se fokus, a prava *d* je direktrisa parabole *(Slika 6.)*.To možemo pisati kao: $\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{T}\in\ \boldsymbol{\pi}\text{:}\frac{\boldsymbol{d(T,F)}}{\boldsymbol{d(T,d)}}=\mathbf{1}\}$

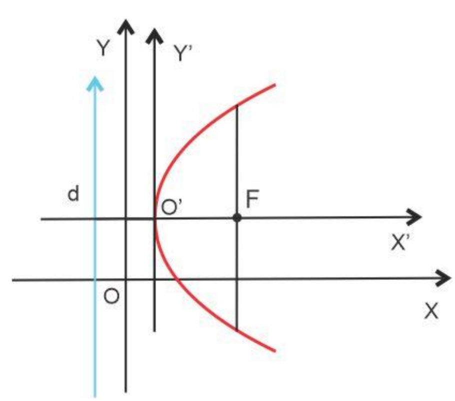
Konusni presjek parabole je segment okomit na x-osu parabole, prolazi kroz fokus *F* i čiji krajevi leže na paraboli.



Slika 6.

2.3.1. Srednja jednačina parabole

Neka je parabola postavljena u pravougli koordinatni sistem u položaj da jednačina direktrise glasi: $x+p=0, p\ >\ 0, p\ \in\ R$. Koordinate fokusa takve parabole su $F(\frac{p}{2},0)$. Prema već navedenoj definiciji zaključujemo da je udaljenost od fokusa *F* do bilo koje tačke na paraboli jednaka udaljenosti bilo koje tačke od direktrise, pa ukoliko kažemo da je *M* bilo koja tačka na paraboli, vrijedi : $d(M,F)=D(M,d)$. Korištenjem formule za udaljenost tačke *M* od fokusa *F* i izjednačavanjem sa formulom udaljenosti tačke *M* i direktrise *d* i dobit ćemo: $\boldsymbol{y^2}=\mathbf{2}\boldsymbol{px}$ što je srednja jednačina parabole. (ukoliko uzmemo drugačiju jednačinu direktrise, i ova jednačina će biti drugačija za parametar ispred *p*, npr. ako je $x+p=0$, slijedi da je $y^2=4px$).



Slika 7.

2.3.2. Jednačina translatirane parabole

Ukoliko O translatiramo u neku tačku $O'(a, b)(Slika\ 7.)$. Fokus parabole F ima koordinate $F(a + a_2, b)$, a pravac direktrise je $x = a_2 - a$ dok je njena os na pravcu $y - b = 0$. Jednačina translatirane parabole je:

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{4p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

2.4. Elipsa

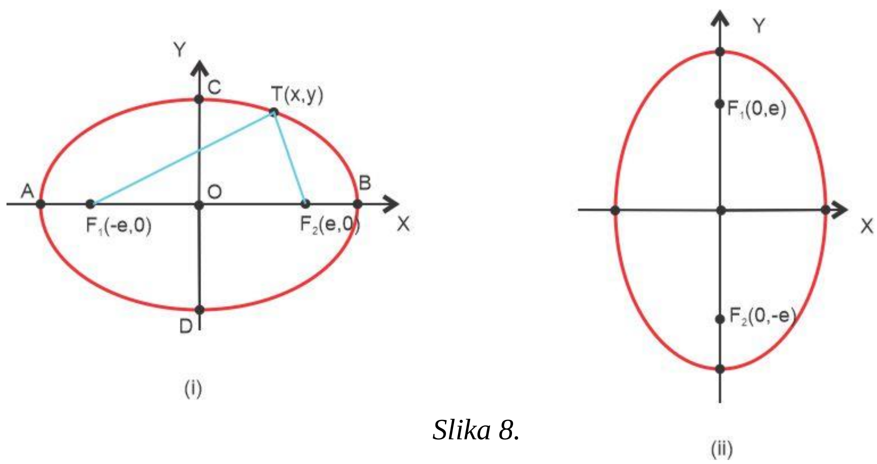
Elipsa je skup tačaka na ravni, za koje je suma udaljenosti od dvije fiksne tačke konstantna. Taj skup možemo pisati i kao, $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{d}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{F1}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{F2})\}$. Fokusi elipse predstavljeni su tačkama F_1 i F_2, dok radijus vektore predstavljaju duži $\overline{TF1}\ i\ \overline{TF2}$. Centar elipse nalazi se na pola puta od tačke T_1 do tačke T_2. Pravac koji prolazi kroz fokuse elipse siječe elipsu u tačkama A i B, pa duž koja spaja te tačke nazivamo velikom (glavnom) osi kružnice, a simetrala te duži siječe elipsu u tačkama C *i* D čija duž se naziva malom (sporednom) osi kružnice. *(Slika 8.)*

2.4.1. Srednja jednačina elipse

Postoje dvije standardne forme elipse i to:

(i) $\quad \dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \dfrac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \boldsymbol{1},$

(ii) $\quad \dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{b^2}} + \dfrac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{a^2}} = \boldsymbol{1},$



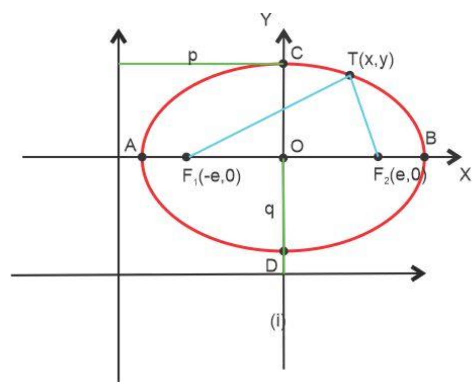
Slika 8.

U *(i)* glavna osa paralelna je sa x osom, a sporedna osa paralelna je sa y osom, dok je u *(ii)* glavna osa paralelna sa y osom, a sporedna osa paralelna sa x osom. *(Slika 8.)*

2.4.2. Jednačina translatirane elipse

Ukoliko elipsu pomjerimo duž x ose za dužinu p i duž y ose za dužinu q dobijamo novu jednačinu elipse, ovaj put za translatiranu elipsu *(Slika 9.)*, a ona glasi:

(i) $\quad \dfrac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})^2}{\boldsymbol{a^2}} + \dfrac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q})^2}{\boldsymbol{b^2}} = \boldsymbol{1}$



Slika 9.

2.5. Hiperbola

Hiperbola je skup svih tačaka na ravni kod kojih je razlika udaljenosti između dvije fiksne tačke konstantna. To možemo pisati kao $\boldsymbol{H = \{T \in \pi : |d(T, F1) - d(T, F2)|}\}$.

Fokusi hiperbole predstavljeni su tačkama F_1 i F_2, dok radijus vektore predstavljaju duži $\overline{TF1}$ i $\overline{TF2}$, a e predstavlja linearni ekscentricitet. Centar elipse nalazi se na pola puta od tačke F_1 do tačke F_2. Pravac koji prolazi kroz fokuse hiperbole siječe hiperbolu u tačkama A i B i te tačke su tjemena hiperbole, pa duž koja spaja te tačke nazivamo realnom osi, a dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ realnim poluosima. Asimptote hiperbole su određene kao granični položaj tangente kada se tangenta kreće prema beskonačnosti, primičući se grani hiperbole, ali je nikad ne dodirujući.

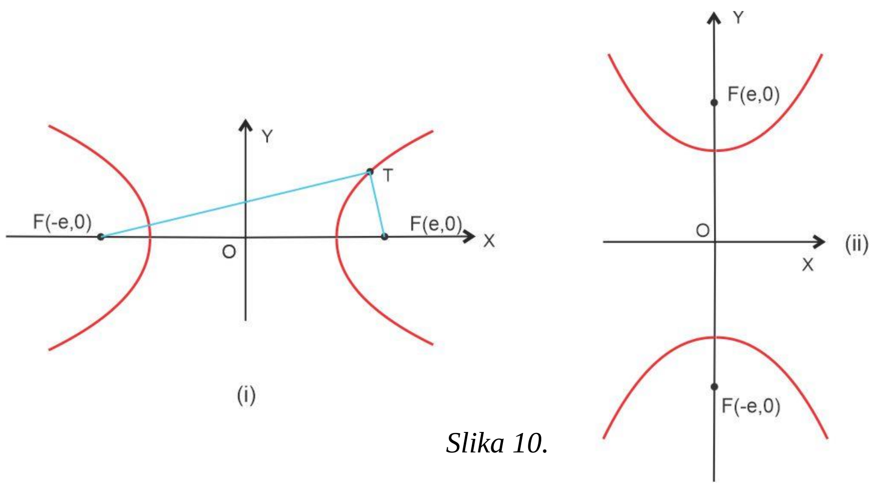
2.5.1. Srednja jednačina hiperbole

Postoje dvije standardne forme hiperbole*(Slika 10.)* i to:

(i) $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,}$

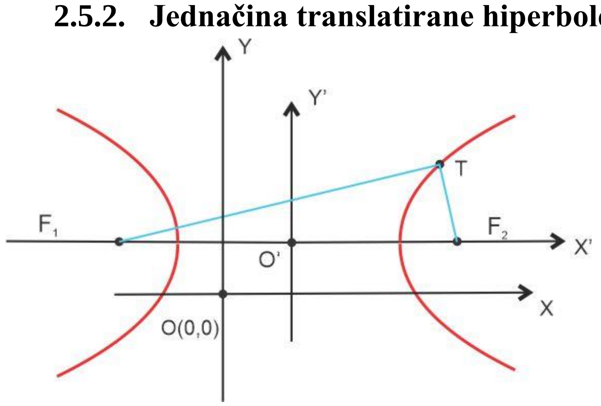
(ii) $\boldsymbol{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1},$

U *(i)* realna osa paralelna je sa x osom, a realne poluosi paralelne su sa y osom, dok je u *(ii)* realna osa paralelna sa y osom, a realne poluosi idu duž x ose.



Slika 10.

2.5.2. Jednačina translatirane hiperbole



Slika 11.

Ukoliko središte hiperbole translatiramo iz tačke $O(0,0)$ u neku tačku različitu od *(0,0)*, recimo $O'(p,q)(Slika\ 11.)$, pa jednačina poprima oblik:

(i) $\boldsymbol{\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-p)^2}{b^2} = 1},$

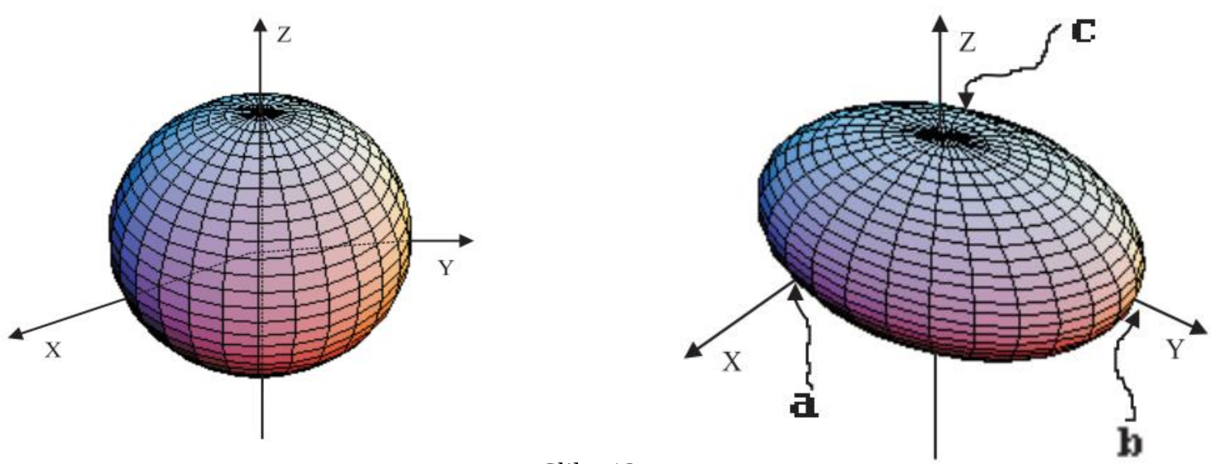
3. POVRŠI DRUGOG REDA

Kada govorimo o površima drugog reda, spominjat ćemo nekoliko grupa površi drugog reda koje se definišu jednačinom tipa : $\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Hx + Iy + Jz + K = 0}$, gdje su *A, B, C, D, E, F, H, I i J* konstante, a *x,y i z* varijable. Postoji nekoliko tipova površi koje je moguće dobiti pomoću navedene jednačine, a to su: **elipsoid, jednokrilni hiperboloid**, **dvokrilni hiperboloid**, **čunj**, **paraboloid** i **cilindar**.

3.1. Elipsoid

Kvadratna jednačina takva da su koeficijenti od x^2, y^2, z^2 međusobno različiti, ali pozitivni i pri tome ne postoje druge nepoznate osim navedenih opisuje površ drugog reda **elipsoid**.

Elipsoidi su površi drugog reda za koje vrijedi formula : $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$, gdje su a,b,i c polovi. Za vrijednosti $a = b = c = 1$ dobijemo jednačinu sfere čiji je centar na koordinatnom početku. Prema tome elipsoid je „deformacija“ sfere, takva da ukoliko imamo $a = b > c$, radi se o spljoštenom rotacionom elipsoidu, a ako je $a = b < c$ radi se o produženom rotacionom elipsoidu. Elipsoid presjeca x,y i z osu u tačkama $(\pm a, 0,0)$, $(0, \pm b, 0)$ i $(0,0, \pm c)$, a presjeci elipsoida su elipse. Važno je napomenuti da je elipsoid simetričan na sve koordinatne ravni i da je ograničen (*Slika 12*).



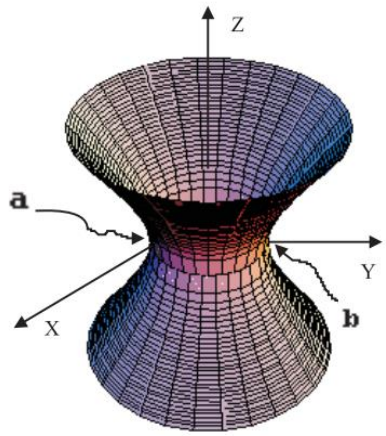
Slika 12.

3.2. Hiperboloid

Bilo koja površ drugog reda takva da su koeficijenti od x^2, y^2, z^2 različiti i da je jedan od koeficijenata negativan, a druga dva pozitivna i ne pojavljuje se niti jedna druga varijabla osim navedenih je **hiperboloid**. Dodatno ukoliko konstanta 1 ima negativan predznak radi se o dvokrilnom hiperboloidu, a ukoliko ima pozitivan predznak radi se o jednokrilnom hiperboloidu.

3.2.1. Jednokrilni hiperboloid

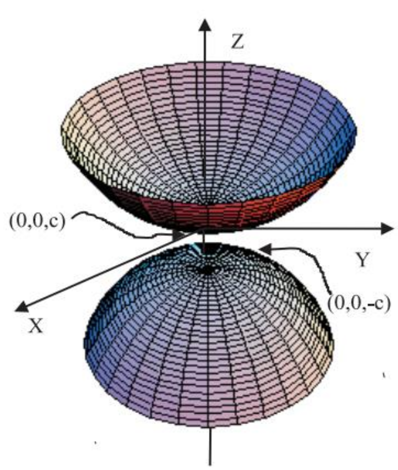
Jednokrilni hiperboloid je opisan jednačinom : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\mathbf{1}$. Ovaj hiperboloid x osu presjeca u tački $(\pm a, 0,0)$, a y osu presjeca u tački $(0, \pm b, 0)$. Hiperboloid ne presjeca z osu niti u jednoj tački. To vidimo ukoliko postavimo $x = y = 0$ u njegovu jednačinu dobijemo kao rezultat $z^2 = -c^2$ za što nemamo realnih rješenja. Presjeci jednokrilnog hiperboloida paralelni sa *xy* ravni su elipse, a paralelni sa *yz* i *xz* ravnima su hiperbole. Jednokrilni hiperboloid nije ograničen, a centar mu je na slici postavljen u središte koordinatnog sistema, a isti može biti pomjeran na x,y i z osi za konstantne vrijednosti. Ovaj hiperboloid je simetričan. (*Slika 13.*)



Slika 13.

3.2.2. Dvokrilni hiperboloid

Dvokrilni hiperboloid je opisan jednačinom $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\mathbf{1}$. Ovaj hiperboloid presjeca z osu u tački $(0,0, \pm c)$, a ne presjeca x i y osu. To vidimo ukoliko postavimo $z = x = 0$ u njegovu jednačinu dobijemo da je $y^2 = -b^2$ za što nemamo realnih rješenja. Analogno ukoliko postavimo $z = y = o$, dobijamo $x^2 = -a^2$ što također nema realnih rješenja. U ovom slučaju hiperboloid sastavljen je od dva „dijela“, a to zaključujemo iz njegove jednačine koja može biti riješena jedino ako $\frac{z^2}{c^2} - 1 \geq 0$, što implicira da je $|z| \geq c$. Presjeci dvokrilnog hiperboloida su hiperbole za bilo koju ravan paralelnu sa *xz* ili *yz* osom i elipse za ravan paralelnu sa *xy* osom gdje je $|z| \geq c$. Ovaj hiperboloid nije ograničen, a centar mu se nalazi u početku koordinatnog sistema i može biti pomjeran po x,y i z osi za konstantne vrijednosti, a sam hiperboloid je simetričan za sve koordinatne ravni. (*Slika 14.*)



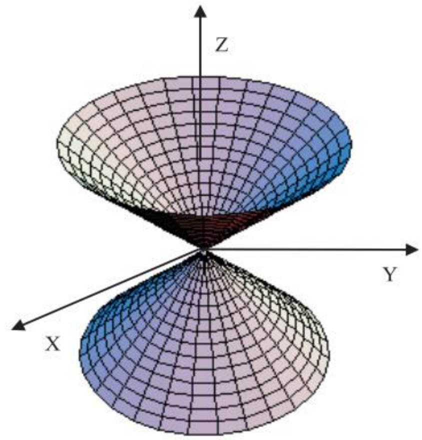
Slika 14.

3.3. Čunj

Bilo koja površ drugog reda takva da su koeficijenti x^2, y^2, z^2 različiti, a jedan od koeficijenata je negativan, dok su druga dva koeficijenta pozitivna , a pri tome nema drugih varijabli osim gore navedenih i ne postoji varijabla koja je konstanta naziva se čunj.

Čunj je opisan jednačinom $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} - \frac{\boldsymbol{z^2}}{\boldsymbol{c^2}} = \boldsymbol{0}$.

Jedina tačka presjeka sa x,y i z osama je početak koordinatnog sistema $(0,0,0)$. Sekcije čunja su prave za bilo koju ravan paralelnu sa *xz* ili *yz* ravnima i elipse (ili kružnice ako $a = b$) za ravni paralelne sa *xy* ravni. Čunj nije ograničen i simetričan je. (*Slika 15.)*



Slika 15.

3.4. Paraboloidi

3.4.1. Eliptični paraboloid

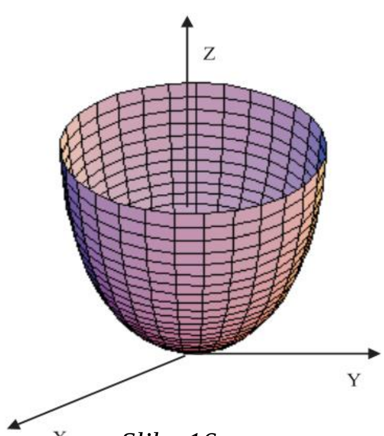
Bilo koja površ drugog reda koja ima jednu linearnu varijablu, a dvije kvadratne varijable i bez konstantne varijable naziva se eliptični paraboloid. (*Slika 16.)*

Eliptični paraboloid opisan je jednačinom $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \boldsymbol{z}$.

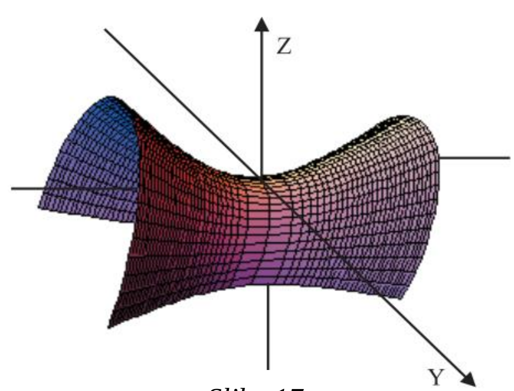
Eliptični paraboloid presjeca x,y i z ose samo u jednoj tački, a ta tačka je koordinatni početak sa koordinatama $(0,0,0)$. Presjeci paralelni sa ravni *xz* ili *yz* su parabole, a presjeci paralelni sa ravni *xy* su elipse(ili kružnice ako je $a = b$). Ovaj paraboloid nije ograničen sa jedne strane, a jest sa druge i simetričan je na *xz* i *yz* osama.

3.4.2. Hiperbolni paraboloid

Eliptični paraboloid opisan je jednačinom $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \boldsymbol{z}$. Ovaj paraboloid presjeca x,y, i z osu u koordinatnom početku u tački $(0,0,0)$. Presjeci hiperbolnog paraboloida paralelni sa ravni *xz* ili *yz* su parabole, a presjeci paralelni sa *xy* ravni su hiperbole. Hiperbolni paraboloid nije ograničen i simetričan je na *xz* i *yz* ravne. (*Slika 16.)*



Slika 16.

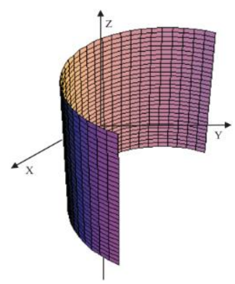


Slika 17.

3.5. Cilindri

3.5.1. Parabolni cilindar

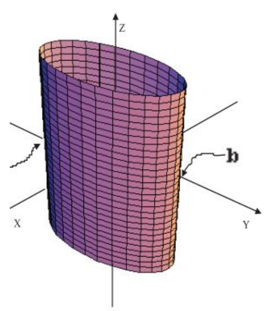
Površ drugog reda opisana jednačinom: $y^2 = 2px$ *(Slika 18.)*



Slika 18.

3.5.2. Eliptični cilindar

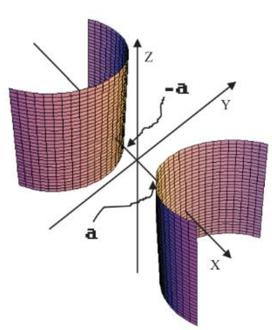
Površ drugog reda opisana jednačinom: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *(Slika 19)*



Slika 19.

3.5.3. Hiperbolni cilindar

Površ drugog reda opisana jednačinom $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *(Slika 20.)*



Slika 20.

4. SLIKE

5. LITERATURA

a) N. Elezović, B. Dak, Matematika 3, Analitilka geometrija, 1998, Zagreb
b) S. Kurepa, Uvod u linearnu algebru, 1928, Zagreb;
c) J.V. Narlikar, „Mathematics – Textbook for Class XI“ – 2006, National Council of Educational Research and Training
d) Salmon George, „A treatise on the analytic geometry of three dimensions“ , 1912, Cornell University Library;
e) R.A. Adams, Calculus;
f) N. Elezović, Linearna algebra, 2001, Zagreb;