

答案详解与名师点拨

86. 考点1 裂项相消

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{10 \times 12} \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{11} + \frac{5}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{175}{132} \\
 &= \frac{175}{264}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) \\
 &= 1 \times (1+1) + 2 \times (2+1) + 3 \times (3+1) + \cdots + n \times (n+1) \\
 &= 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + \cdots + n^2 + n \\
 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \div 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \div 3} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \div 3} \\
 &\quad + \cdots + \frac{1}{10 \times 11 \times 12 \div 3} \\
 &= 3 \times \left[\left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) + \cdots + \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{1}{10 \times 11} - \frac{1}{11 \times 12} \right) \right] \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2} \times \left[\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{11 \times 12} \right] \\
 &= \frac{3}{2} \times \frac{65}{132} \\
 &= \frac{65}{88}
 \end{aligned}$$

【点拨】先把分母根据乘法的分配律变形,然后根据拆项公式拆项后,通过加减相互抵消即可简算。

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \frac{7}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{17}{8 \times 9 \times 10} + \frac{19}{9 \times 10 \times 11} \\
 &= \left(\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 4} \right) + \left(\frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} \right) + \left(\frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{4 \times 6} \right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{8 \times 10} \right) + \left(\frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{9 \times 11} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{10 \times 11} \right) + \left(\frac{1}{2 \times 4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \frac{1}{8 \times 10} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{2} \times \\
 &\quad \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) \\
 &= \frac{8}{33} + \frac{1}{5} + \frac{4}{33} \\
 &= \frac{31}{55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \text{原式} &= \frac{50}{48} + \frac{82}{80} + \frac{122}{120} + \cdots + \frac{9802}{9800} \\
 &= (1 + 1 + 1 + \cdots + 1) + \left(\frac{2}{6 \times 8} + \frac{2}{8 \times 10} + \frac{2}{10 \times 12} + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{98 \times 100} \right) \\
 &= 47 + 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{98} - \frac{1}{100} \right) \\
 &= 47 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{100} \right) \\
 &= 47 + \frac{47}{300} \\
 &= 47 \frac{47}{300}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad \text{原式} &= 1949 \times 2012 \times \left(\frac{1}{1949 \times 1950} + \frac{1}{1950 \times 1951} + \cdots + \frac{1}{2011 \times 2012} \right) \\
 &= 1949 \times 2012 \times \left(\frac{1}{1949} - \frac{1}{2012} \right) \\
 &= 2012 - 1949 \\
 &= 63
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & \frac{1^2 + 2^2}{1 \times 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \times 3} + \cdots + \frac{18^2 + 19^2}{18 \times 19} + \frac{19^2 + 20^2}{19 \times 20} \\
 &= 2 + \frac{1}{1 \times 2} + 2 + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + 2 + \frac{1}{19 \times 20} \\
 &= 38 + \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20} \right) \\
 &= 38 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \\
 &= 38 + \left(1 - \frac{1}{20} \right) \\
 &= 38 + \frac{19}{20} \\
 &= 38 \frac{19}{20}
 \end{aligned}$$

87. 考点2 字母代换

$$1. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2021} \right) \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2020} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2021} \right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2020} \right)$$

$$\text{设 } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2021} = a$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2020} = b$$

$$a - b = \frac{1}{2021}$$

$$\text{原式} = a \times (1 + b) - (1 + a) \times b$$

$$= a + ab - b - ab$$

$$= a - b$$

$$= \frac{1}{2021}$$

$$2. \text{ 设 } a = \frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41}$$

$$b = \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41}$$

$$\text{原式} = a \times \left(b + \frac{1}{51} \right) - \left(a + \frac{1}{51} \right) \times b$$

$$= ab + \frac{a}{51} - ab - \frac{b}{51}$$

$$= \frac{1}{51}(a - b)$$

$$= \frac{1}{51} \times \frac{1}{11}$$

$$= \frac{1}{561}$$

$$3. \text{ 设 } a = 1 + \frac{1}{213} + \frac{1}{214} + \frac{1}{215}$$

$$b = \frac{1}{213} + \frac{1}{214} + \frac{1}{215}$$

$$\text{原式} = a \times \left(b + \frac{1}{216} \right) - \left(a + \frac{1}{216} \right) \times b$$

$$= ab + \frac{1}{216}a - ab - \frac{1}{216}b$$

$$= \frac{1}{216} \times (a - b)$$

$$= \frac{1}{216} \times 1$$

$$= \frac{1}{216}$$

$$4. \text{ 设 } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2017} \text{ 为 } A, \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2018} \text{ 为 } B。$$

$$\text{则原式} = (1 + A) \times B - A \times (1 + B)$$

$$= B + AB - A - AB$$

$$= B - A$$

$$= \frac{1}{2018}$$

【点拨】数字较多,且有部分相同时,先设数,后化简,再计算。

88. 考点3 借一还一

$$1. \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} - \frac{1}{64}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{64}$$

$$= 1 - \frac{1}{64}$$

$$= \frac{63}{64}$$

$$2. \text{ 原式} = 200000 + 20000 + 2000 + 200 + 20 - 5$$

$$= 222220 - 5$$

$$= 222215$$

$$3. \text{ 原式} = 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 - \frac{1}{5} \times 5$$

$$= 11110$$

$$4. \text{ 原式} = 7 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{128} - \frac{1}{128} \right)$$

$$= 7 + 1 - \frac{1}{128}$$

$$= 7 \frac{127}{128}$$

89. 考点4 灵活分组

$$1. \text{ 原式} = \frac{1949}{43} - \frac{1949}{1992} + \frac{43}{1949} - \frac{43}{1992} - \frac{1992}{1949} - \frac{1992}{43} + 103$$

$$= 103 - \frac{1949 + 43}{1992} - \frac{1992 - 43}{1949} - \frac{1992 - 1949}{43}$$

$$= 103 - \frac{1992}{1992} - \frac{1949}{1949} - \frac{43}{43}$$

$$= 103 - 1 - 1 - 1$$

$$= 100$$

$$2. \quad 8 \frac{3}{4} - 5 \frac{4}{11} + 16 \frac{1}{4} - 3 \frac{1}{4} - 6 \frac{7}{11} + 1 \frac{1}{4}$$

$$= \left(8 \frac{3}{4} + 1 \frac{1}{4} \right) - \left(5 \frac{4}{11} + 6 \frac{7}{11} \right) + \left(16 \frac{1}{4} - 3 \frac{1}{4} \right)$$

$$= 10 - 12 + 13$$

$$= 11$$

$$3. \text{ 原式} = (1000 + 999 - 998 - 997) + (996 + 995 - 994 - 993) + \cdots + (104 + 103 - 102 - 101)$$

$$= 4 + 4 + \cdots + 4$$

$$= 4 \times [(1000 - 101 + 1) \div 4]$$

$$= 4 \times 225$$

$$= 900$$

【点拨】4个数分为一组,每组的结果是4,共有225组,算式结果是900。

$$\begin{aligned}
4. \text{ 原式} &= (2015 - 2014) + (2013 - 2012) + \cdots + (5 - 4) \\
&\quad + (3 - 2) + 1 \\
&= 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 + 1 \\
&= 1 \times [(2015 + 1) \div 2] \\
&= 1 \times 1008 \\
&= 1008
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \text{ 原式} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

90. 考点5 巧用公式

$$\begin{aligned}
1. \text{ 原式} &= \left(\frac{3 \times 3}{1} - \frac{3 \times 4}{2} + \frac{3 \times 5}{3} - \frac{3 \times 6}{4} + \cdots + \frac{3 \times 11}{9} - \frac{3 \times 12}{10} \right) \div \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\
&= 3 \times \left(\frac{3}{1} - \frac{4}{2} + \frac{5}{3} - \frac{6}{4} + \cdots + \frac{11}{9} - \frac{12}{10} \right) \div \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\
&= 3 \times \left[\left(1 + \frac{2}{1} \right) - \left(1 + \frac{2}{2} \right) + \left(1 + \frac{2}{3} \right) - \left(1 + \frac{2}{4} \right) + \cdots + \left(1 + \frac{2}{9} \right) - \left(1 + \frac{2}{10} \right) \right] \div \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\
&= 3 \times \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2}{9} - \frac{2}{10} \right) \div \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\
&= 3 \times \left[2 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \right] \div \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\
&= 6 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \div \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\
&= 6
\end{aligned}$$

【点拨】3个连续自然数相加等于3乘中间数,然后根据乘法分配律提取公因数,再将假分数写成1加分数,然后再提取公因数,最后整体约分。

$$\begin{aligned}
2. \quad & \left(20 - \frac{2}{21} \times 1 \right) + \left(19 - \frac{2}{21} \times 2 \right) + \left(18 - \frac{2}{21} \times 3 \right) + \cdots \\
& \quad + \left(1 - \frac{2}{21} \times 20 \right) \\
&= (20 + 19 + 18 + \cdots + 1) - \frac{2}{21} \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 20) \\
&= (20 + 19 + 18 + \cdots + 1) \times \left(1 - \frac{2}{21} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (20 + 1) \times 10 \times \frac{19}{21} \\
&= 21 \times 10 \times \frac{19}{21} \\
&= 190
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \text{ 原式} &= (20 \times 20 - 19 \times 19) + (18 \times 18 - 17 \times 17) + \cdots \\
&\quad + (2 \times 2 - 1 \times 1) \\
&= (20 - 19) \times (20 + 19) + (18 - 17) \times (18 + 17) \\
&\quad + \cdots + (2 - 1) \times (2 + 1) \\
&= 20 + 19 + 18 + 17 + \cdots + 2 + 1 \\
&= \frac{(20 + 1) \times 20}{2} \\
&= 210
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \text{ 原式} &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \cdots + \frac{11}{12} \right) \\
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{11}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{11}{2} \right) \times 11 \div 2 \\
&= 33
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \text{ 原式} &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + 504 \\
&= \left(\frac{1}{2} + 504 \right) \times (2016 \div 2) \div 2 \\
&= 504 \times \frac{1}{2} \times 504 \\
&= 254268
\end{aligned}$$

【点拨】每组的和是一个首项是 $\frac{1}{2}$,末项是504,公差是 $\frac{1}{2}$,项数是1008的等差数列。

$$\begin{aligned}
6. \text{ 原式} &= \frac{\frac{18 \times 19 \times 20 \times \cdots \times 35 \times 36}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 18 \times 19}}{\frac{20 \times 21 \times 22 \times \cdots \times 35 \times 36}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 16 \times 17}} \\
&= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times 16 \times 17}{1 \times 2 \times \cdots \times 18 \times 19} \times \frac{18 \times 19 \times \cdots \times 35 \times 36}{20 \times 21 \times \cdots \times 35 \times 36} \\
&= 1
\end{aligned}$$

【点拨】先把所有小括号内的数写成假分数,然后将分子中所有分数的分母和分子整体连乘,分母部分也一样,然后整体约分。

$$\begin{aligned}
7. \text{ 原式} &= \frac{1.2^3 \times (1 \times 3 \times 9) + 2^3 \times (1 \times 3 \times 9) + \left(\frac{1}{13} \right)^3 \times (1 \times 3 \times 9)}{1.2^3 \times (1 \times 2 \times 4) + 2^3 \times (1 \times 2 \times 4) + \left(\frac{1}{13} \right)^3 \times (1 \times 2 \times 4)} \\
&= \frac{(1 \times 3 \times 9) \times \left[1.2^3 + 2^3 + \left(\frac{1}{13} \right)^3 \right]}{(1 \times 2 \times 4) \times \left[1.2^3 + 2^3 + \left(\frac{1}{13} \right)^3 \right]} \\
&= \frac{1 \times 3 \times 9}{1 \times 2 \times 4} \\
&= \frac{27}{8}
\end{aligned}$$

91. 考点6 定义新运算

1. 501 400

【解析】1~100中,含1的数有:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{个位: } 1, 11, 21 \cdots 91 \text{ 共 } 10 \text{ 个} \\ \text{十位: } 10, 11 \cdots 19 \text{ 共 } 10 \text{ 个} \\ \text{百位: } 100 \text{ 共 } 1 \text{ 个} \end{array} \right\}$ 共 21 个

含2的数有:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{个位: } 2, 12, 22 \cdots 92 \text{ 共 } 10 \text{ 个} \\ \text{十位: } 20, 21 \cdots 29 \text{ 共 } 10 \text{ 个} \end{array} \right\}$ 共 20 个

含3的数有: $\left\{ \begin{array}{l} 3, 13 \cdots 93 \text{ 共 } 10 \text{ 个} \\ 30, 31 \cdots 39 \text{ 共 } 10 \text{ 个} \end{array} \right\}$ 共 20 个,

发现2开始,含2、含3……一直到含9的数都有20个
 则 $S(1) + S(2) + S(3) + \cdots + S(100) = 1 \times 21 + 3 \times 20 + 5 \times 20 + 7 \times 20 + 9 \times 20 = (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times 20 + 1 = 25 \times 20 + 1 = 501$

$E(1) + E(2) + \cdots + E(100) = (2 + 4 + 6 + 8) \times 20 = 20 \times 20 = 400$

【点拨】先分别找出1~100中,1,2,3...9每个数字出现的个数,然后用对应数字乘个数求和,计算时可依据乘法分配律简算。

2. 50

【解析】前2项: $1 \odot 2 = 2 - 1 = 1$, 前3项: $1 \odot 3 = 3 - 1 = 2$, 前4项: $2 \odot 4 = 4 - 2 = 2$, 前5项: $2 \odot 5 = 5 - 2 = 3$, 前6项: $3 \odot 6 = 6 - 3 = 3$, 前7项: $3 \odot 7 = 7 - 3 = 4$, 前8项: $4 \odot 8 = 8 - 4 = 4$, ..., 发现规律,项数为奇数时,前 n 项结果为 $\frac{n+1}{2}$, 项数为偶数时,前 n 项的结果为

$\frac{n}{2}$ 。则前100项的结果为 $100 \div 2 = 50$ 。

3. $\frac{10}{3}$ 【解析】 $\frac{5!}{3!(5-2)!} = \frac{5!}{3!3!} = \frac{120}{3 \times 2 \times 3 \times 2} = \frac{10}{3}$

4. 【解析】原式 = $\frac{0.625 \times \frac{155}{384}}{\frac{1}{3} + 2.25}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{5}{8} \times \frac{155}{384}}{\frac{1}{3} + \frac{9}{4}} \\
 &= \frac{5}{8} \times \frac{155}{384} \times \frac{12}{31} \\
 &= \frac{25}{256}
 \end{aligned}$$

92. 考点7 倒算法

1. 6

【解析】12的因数有1,2,3,4,6,12,因为式子 $\frac{12}{x-1}$ 为整数, x 为正整数,所以 $x-1=1; x-1=2; x-1=3; x-1=4; x-1=6; x-1=12$,即 $x=2$ 或 3 或 4 或 5 或 7 或 13 ,正整数 x 有6种取值。

【点拨】因为 $x-1$ 为分数的分母,要使分数为整数,则正整数 $x-1$ 一定是12的因数,于是将问题转化为求12的因数,进而求出 x 的取值。

2. 131 或 26 或 5

【解析】 $(656-1) \div 5 = 655 \div 5 = 131$

$(131-1) \div 5 = 130 \div 5 = 26$

$(26-1) \div 5 = 25 \div 5 = 5$

$(5-1) \div 5 = \frac{4}{5}$ 〈输入的值是正整数,舍去〉

【点拨】倒推还原法。

3. 【解析】 $(2.26 + 1.04) \div 2 = 1.65$ (米)

【点拨】现在的身高加上1.04米后,是10岁时身高的2倍。

93. 考点8 估值

1. 7

【解析】原式 $= 0.9 + 0.99 + 0.999 + \cdots + 0.99999999$
 $= (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) - (0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots + 0.00000001)$
 $= 8 - 0.11111111$
 $= 7.88888889$

可以看出算式结果的整数部分是7。

2. 111

【解析】 $2016 - 1999 + 1 = 18$ (个) 〈分母中有18个分数〉

$(1999 + 2016) \div 2 = 2007.5 \quad \frac{1}{2007.5} \times 18 = \frac{36}{4015}$

〈分母的和估值为 $\frac{36}{4015}$ 〉

$1 \div \frac{36}{4015} = 111 \frac{19}{36}$ 〈 x 的整数部分是111〉

【点拨】中间估值法。

3. 7

【解析】设最少共要运 n 次, $\frac{3}{5} < \frac{5}{n} < \frac{3}{4}$ 。

$\frac{3}{5} < \frac{5}{n}, 3n < 25, n < 8 \frac{1}{3};$

$\frac{5}{n} < \frac{3}{4}, 20 < 3n, n > 6 \frac{2}{3};$

$n=7$ 或 $8, n$ 最小是7。

4. 1799.68 万 1800 万

【解析】改写成以“万”为单位的数,先找到万位,然后在万位的右下角点上小数点,去掉小数末尾的0,加上单位“万”字,即1799.68万平方千米;省略“万”位后面的尾数求近似数,根据要保留的下一位即千位上数字的大小来确定用“四舍”还是用“五入”,即1800万平方千米。

94. 考点9 数的倍数特征

1. 4

【解析】因为27是3的倍数,所以要想 $86\square$ 能够被27整除,那么 $86\square$ 就能够被3整除,根据3的倍数特征,其各个位上的数字和为3的倍数,而 $8+6=14$,所以 \square 可以是1、4、7,分别代入可得4符合,所以 \square 表示的数字是4。

2. 83910

【解析】根据题意,一个数是2与5的倍数,则个位上的数字应为0,这个数又是3的倍数,则各个数位上的

数字之和应是3的倍数, $8+3+9=20$, 要想这个数是最小的五位数, 则十位上的数应该最小, 故十位上的数字为1, 故这个五位数是83910。

【点拨】此题考查了2, 3, 5的倍数的特征。2的倍数的特征: 个位上是0, 2, 4, 6, 8的数; 3的倍数的特征: 各个数位上的数的和能被3整除; 5的倍数的特征: 个位上的数为0或5。根据2和5的倍数的特征, 可知, 个位上的数一定是0, 这个数又是3的倍数, 则各个数位上数的和能被3整除, 已知数的和为: $8+3+9=20$, 则十位上的数可以为: 1, 4, 7, 要想这个数最小, 则十位应选最小的1, 即这个五位数为: 83910。

3. 14, 10, 35

【解析】 $[5, 7, 2] = 70$,

甲: $70 \div 5 = 14$ (齿),

乙: $70 \div 7 = 10$ (齿),

丙: $70 \div 2 = 35$ (齿)

【点拨】要求三个齿轮最少齿数, 应先求出三个齿轮所转圈数5, 7, 2的最小公倍数, 然后用最小公倍数除以各自圈数就是每个齿轮的齿数。

4. 4

【解析】每6个3和每6个8一定能被7整除, 由于3和8各有20个, 则原数可缩小为 $33\square88$ 能被7整除, 则 $\square55$ 是7的倍数, 试数可知, \square 为4。

【点拨】六位数若每位数字都相同, 则一定是7的倍数。能被7整除的数的特征是后三位与前面的数的差是7的倍数。

95. 考点 10 奇数与偶数

1. 100

【解析】 $2499 = 3 \times 7 \times 7 \times 17 = (7 \times 7) \times (3 \times 17) = 49 \times 51$

$49 + 51 = 100$

【点拨】先将2499分解质因数, 再将质因数组合成两个连续奇数的积。

2. 4200

【解析】设第一个数为 n , 则 $\frac{(n+n+99) \times 100}{2} = 8450$,

所以 $n=35$, 这100个自然数中, 第2个比第1个大1, 第4个比第3个大1……, 第100个比第99个大1, 即每个偶数项的数比前一个奇数项的数大1, 所以偶数项数的和比奇数项数的和多50, 故奇数项的和是: $(8450 - 50) \div 2 = 4200$ 。

3. 不能

【解析】每一页上面会有两个数字, 一个是奇数, 一个是偶数, 所以每一页上面的两个数字之和是奇数, 那么25页上面一共有50个数字, 即25组(奇数+偶数), 那么这25组的和是25个奇数, 而1994为偶数, 所以小丽所得的和不能为1994。

4. 18

【解析】 $3960 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$, 因为书的总和为偶数, 则分两种情况: ①三偶数和; ②两奇数加一偶数。①三偶数: 因数中有一奇数11, 可扩大2倍为22; 三个数中求一个数最大, 那么小的数应该最小, 两位数中10最小, 则第二个两位数是10。那么第三个两

位数就是18, 按此情况乙买18本书; ②两奇一偶: 因数中有一奇数11, 则另一奇数为15, 偶数则为24, 按此种情况乙买书15本。综上所述, 乙最多买18本书。

96. 考点 11 质数与合数

1. 36

【解析】 $4 \times 9 = 36$

【点拨】合数从小到大是: 4, 6, 8, 9, 10……, 和为质数的最小是 $4 + 9 = 13$ 。

2. 40

【解析】题中27是奇数, 12和6是偶数, 要使这三个数和它们对面的质数的和相等, 质数中只有2是偶数, 所以其和为 $27 + 2 = 29$; 那么就有 $29 = 12 + 17$, $29 = 6 + 23$ 。故12和6两面的对面的质数和是: $17 + 23 = 40$ 。

3. **【解析】** $901 = 13 \times 69 + 4$

(1) 分母加9后是13的倍数, 此时分子为,

$7 \times (69 + 1) - 9 = 490 - 9 = 481$

$481 = 13 \times 37$ 481不是质数 舍去

(2) 分母减4后是13的倍数, 此时分子为,

$7 \times 69 + 4 = 487$ 487是质数

答: 原分数分子是487。

97. 考点 12 分解质因数

1. B

【解析】 $4 = 2 \times 2$, $2 + 2 = 4$, 4是史密斯数。

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, $2 + 2 + 2 + 2 + 2 \neq 3 + 2$, 32不是史密斯数。

$58 = 2 \times 29$, $2 + 2 + 9 = 5 + 8$, 58是史密斯数。

$65 = 5 \times 13$, $5 + 1 + 3 \neq 6 + 5$, 65不是史密斯数。

$94 = 2 \times 47$, $2 + 4 + 7 = 9 + 4$, 94是史密斯数。

2. 13

【解析】因为最小公倍数 = 公约数 \times 独有因数, a 和 b 的公约数是 $5 \times m$, 而 a 的独有因数是2和7, b 的独有因数是3, 所以 $5 \times m \times 2 \times 7 \times 3 = 2730$, 解得: $m = 13$ 。

3. **【解析】** $3024 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{8} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{6} \times \underbrace{2 \times 2}_{9}$

即 $3024 = 6 \times 7 \times 8 \times 9$

4个孩子的年龄分别是6岁、7岁、8岁、9岁。

【点拨】遇到若干个数的乘积时, 先分解质因数, 再根据已知条件求解。

4. **【解析】**每次射箭的环数是0~10以内的自然数, 而5箭环数的积是1764, 故不可能有0、5、10环。而 $1764 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$, 可以推知两人都有两个7环, 而其他3环环数是5个数: 1, 2, 2, 3, 3。经过分组相乘而得到5种情形: (1) 1, 4, 9; (2) 1, 6, 6; (3) 2, 2, 9; (4) 2, 3, 6; (5) 3, 3, 4, 因此两人5箭的环数就有5种情形:

7, 7, 1, 4, 9 和是28;

7, 7, 1, 6, 6 和是27;

7, 7, 2, 2, 9 和是27;

7, 7, 2, 3, 6 和是25;

7, 7, 3, 3, 4 和是24

而甲比乙少4环, 所以只能是第一种和第五种情形,

即甲 24 环,乙 28 环。

答:甲的总环数是 24,乙的总环数是 28。

【点拨】本题考查将 1764 分解质因数,再根据 5 箭环数可能性进行排除。

98. 考点 13 数的整除

1. 18

【解析】 $0+1+4+7=12$ $12\div3=4$

$3\times3\times2\times1=18$ (个)

【点拨】一个数各个数位上的数字之和是 3 的倍数,则这个数就是 3 的倍数。

2. 76

【解析】数的整除。令最后两位数为 00,则 $200300\div99=2023\cdots23$,即余数是 23,若 $2003\square\square$ 能被 99 整除,则 $\square\square+23$ 的和必须是 99 的倍数, $99-23=76$,所以这个数的最后两位数是 76。

3. 2448

【解析】 $954+873+621=2448$

【点拨】9 的倍数特征,各个数字之和是 9 的倍数,这个数是 9 的倍数。

4. 6540

【解析】 $(2,3,5)=30$,数末尾肯定为 0,前 3 位组成的数一定是 3 的倍数。

【点拨】3 的倍数:各个数位之和一定能被 3 整除。

99. 考点 14 分数小数互化

1. $1\frac{7}{8}>185\%>1.83>1\frac{3}{4}>1\frac{1}{2}$

【解析】 $1\frac{7}{8}=1.875$, $1\frac{3}{4}=1.75$, $185\%=1.85$, $1\frac{1}{2}=1.5$,故从大到小排列为: $1\frac{7}{8}>185\%>1.83>1\frac{3}{4}>1\frac{1}{2}$ 。

2. $1.06<\frac{8}{5}<166\%<1\frac{2}{3}$

【解析】 $166\%=1.66$, $1\frac{2}{3}\approx1.667$, $\frac{8}{5}=1.6$ 。因为 $1.06<1.6<1.66<1.667$,所以这四个数按从小到大的顺序排列是 $1.06<\frac{8}{5}<166\%<1\frac{2}{3}$ 。

3. 0.43

【解析】 $0.43>\frac{3}{7}>42.7\%>0.42$ 。

4. $\frac{7}{8}$ $0.7\dot{2}\dot{5}$

【解析】 $73.5\%=0.735$,

$\frac{7}{8}=0.875$,

$0.7\dot{2}\dot{5}=0.7252525\cdots$

因为 $0.875>0.735>0.7255>0.7252525\cdots$

所以 $\frac{7}{8}>73.5\%>0.7255>0.7\dot{2}\dot{5}$

所以最大的数是 $\frac{7}{8}$,最小的数是 $0.7\dot{2}\dot{5}$ 。

【点拨】将各数都化为小数形式,再依据小数大小的比较方法比较大数即可。

100. 考点 15 方阵问题

1. 136 或 904

【解析】设原来每一列中有 n 人,则 8 列一共有 $8n$ 人,增加 120 人后组成一个正方形队列,总人数为 $8n+120=a^2$;减少 120 人后组成一个正方形队列,总人数为 $8n-120=b^2$,故 $a^2-b^2=240$ 。

所以 $(a+b)(a-b)=240$, $240=2\times2\times2\times2\times3\times5=60\times4=20\times12$

①当 $a=32$, $b=28$ 时,满足 $(32+28)\times(32-28)=240$

则 $8n=32^2-120=1024-120=904$ (人)

②当 $a=16$, $b=4$ 时,满足 $(16+4)\times(16-4)=240$

则 $8n=16^2-120=256-120=136$ (人)

所以原有学生 136 人或 904 人。

2. 【解析】 $120\div3=40$ (人)

$40+8=48$ (人)

$(48+4)\div4=13$ (人)

【点拨】空心方阵每相邻层的人数相差 8 人,每层人数等于每条边人数乘 4 减去 4 个角重复计算的 4 人。

101. 考点 16 数字与数位

1. C

【解析】A. $89^{102}+47^{63}\rightarrow9^{102}+7^{63}\rightarrow9^2+7^3\rightarrow1+3\rightarrow4$

B. $59^{163}+2^{98}\rightarrow9^{163}+2^{98}\rightarrow9^1+2^2\rightarrow9+4\rightarrow3$

C. $78^{87}+87^{78}\rightarrow8^{87}+7^{78}\rightarrow8^3+7^2\rightarrow2+9\rightarrow1$

D. $2^{105}+3^{57}+7^{49}\rightarrow2^1+3^1+7^1\rightarrow2+3+7\rightarrow2$

【点拨】 a^n 尾数规律。

① 尾数不变: a 为 0,1,5,6

② 两个为一个周期: $a=4$ (4,6)

$a=9$ (9,1)

③ 四个为一个周期: $a=2$ (2,4,8,6)

$a=3$ (3,9,7,1)

$a=7$ (7,9,3,1)

$a=8$ (8,4,2,6)

2. B

【解析】 $a=\frac{1515\cdots15}{1004\text{个}15}\times\frac{333\cdots3}{2008\text{个}3}$

$=\frac{505050\cdots5}{1004\text{个}5\text{和}1003\text{个}0}\times\frac{999\cdots9}{2008\text{个}9}$

$=\frac{505050\cdots5}{1004\text{个}5\text{和}1003\text{个}0}\times\frac{1000\cdots0}{2008\text{个}0}-\frac{505050\cdots5}{1004\text{个}5\text{和}1003\text{个}0}$

$=\frac{505050\cdots50}{1003\text{个}50}-\frac{494949\cdots495}{1004\text{个}49}$

$(5+0)\times1003+(4+9)\times1004+5=18072$

3. 2039

【解析】设这四个数字分别为 $a, b, c, d, a>b>c>d$ 。则最大数应以 9 开头,即 a 为 9,最小数字 d 应为 0。

最大数为 $9bc0$,最小数为 $c0b9$ 。

则 $9009+100b+10c+1000c+10c=11359$

$110b+1010c=11359-9009$

$10(11b+101c)=2350$

$11b+101c=235$

则 c 只能为 2, $b = (235 - 101 \times 2) \div 11 = 3$ 。

最小的四位数为 2039。

【点拨】先设数,然后极限思考,要使四位数最大和最小,则最大数字应为 9,最小数字应为 0,再根据位值原理列出等式,进而求出每个字母的取值。

4. 【解析】设原三位数个位数字为 x ,则十位数字为 $x + 1$,百位数字为 $20 - x - (x + 1) = 19 - 2x$ 。
 $(19 - 2x) \times 100 + 10 \times (x + 1) + x + 198 = 100x + 10 \times (x + 1) + (19 - 2x)$
 $1900 - 200x + 10x + 10 + x + 198 = 100x + 10x + 10 + 19 - 2x$
 $2108 - 189x = 108x + 29$
 $2108 - 29 = 108x + 189x$
 $297x = 2079$
 $x = 7$

$7 + 1 = 8$ $19 - 2 \times 7 = 5$
故原数为 587。

102. 考点 17 页码问题

1. C

【解析】 $10 + 10 - 1 = 19$ (个)

【点拨】个位有 6 的数有 10 个:6,16,26,...,96

十位有 6 的数有 10 个:60,61,62,...,69

66 重复计算了两次

所以有 6 的数有 19 个

2. 192 901

【解析】①一位数有 1~9 共 9 个数,用 $1 \times 9 = 9$ (个)数字;两位数有 10~99 共 90 个数,用 $2 \times 90 = 180$ (个)数字;三位数有 100 共 1 个数,用 $3 \times 1 = 3$ (个)数字。共用了 $9 + 180 + 3 = 192$ (个)数字。

②1 至 9 数字和为 $(1 + 9) \times 9 \div 2 = 45$

10 至 19 数字和为 $1 \times 10 + 45 = 55$

20 至 29 数字和为 $2 \times 10 + 45 = 65$

.....

90 至 99 数字和为 $9 \times 10 + 45 = 135$

1 至 99 数字和为 $45 + 55 + 65 + \cdots + 135 = (45 + 135) \times 10 \div 2 = 900$

1 至 100 数字和为 $900 + 1 + 0 + 0 = 901$

3. 248

【解析】页码数字

1~9 页:9 个

10~99 页: $90 \times 2 = 180$ (个)

$(636 - 180 - 9) \div 3 + 99 = 248$ (页)

【点拨】页码问题,分类计算。

4. 300

【解析】1~100 { 个位:10,20,...,100,共 10 个 0
十位:100,共 1 个 0

即 1~100 共 11 个 0,比 51 个 0 小得多。

1~200 { 个位:10,20,...,200,共 20 个 0
十位:100~109,200,共 11 个 0

即 1~200 共 31 个 0,还比 51 个 0 小。

1~300 { 个位:10,20,...,300,共 30 个 0
十位:100~109,200~209,300,共 21 个 0 } 共 51 个 0。

所以至少为 300 页。

103. 考点 18 错中求解

1. B

【解析】 $131 - 113 = 18$ $18 \div 3 = 6$ (除数)

$113 \div 6 = 18 \cdots 5$

检验: $131 \div 6 = 21 \cdots 5$ $21 - 18 = 3$ $5 = 5$

【点拨】商比原来多 3,余数相同,则被除数多算 3 个除数。

2. A

【解析】 $(42 - 24) \div 24 = 18 \div 24 = \frac{3}{4}$

【点拨】两数相乘,一个因数不变,另一个因数增加或减少几分之几,积对应也增加或减少几分之几(0 除外)。

3. $\frac{4}{15}$

【解析】 $\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{15}$, $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$, $\frac{13}{8} - \frac{8}{13} = \frac{105}{104}$, $\frac{8}{5} - \frac{5}{8} = \frac{39}{40}$, $\frac{16}{15} - 1 = \frac{1}{15}$, $\frac{105}{104} - 1 = \frac{1}{104}$, 因为 $\frac{1}{15} > \frac{1}{104}$, 所以 $\frac{5}{3}$ 的分子和分母抄颠倒后,四个数之和相差最大是 $\frac{5}{3}$

$-\frac{3}{5} = \frac{16}{15}$, 所以抄颠倒后的平均值和正确的答案最大

相差: $\frac{16}{15} \div 4 = \frac{4}{15}$ 。

4. 【解析】 $9 - 8 = 1$ $80 - 30 = 50$ $243 - 1 + 50 = 292$

正确答案应该是 292。

104. 考点 19 等差数列

1. B 【解析】 $44 \times 44 = 1936$ $45 \times 45 = 2025$ $2025 - 1998 = 27$

【点拨】 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \frac{[1 + (2n - 1)] \times n}{2}$
 $= \frac{2n \times n}{2} = n^2$, 即从 1 开始连续 n 个奇数的和等于 n^2 。

2. 【解析】方法一:第 8 排的座位数: $12 + (8 - 1) \times 2 = 12 + 14 = 26$ (个)

座位总数是: $(12 + 26) \times 8 \div 2$

$= 38 \times 8 \div 2$

$= 152$ (个)

方法二: $12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 = 152$ (个)

【点拨】由题意可知,8 排座位总数是首项为 12,公差为 2,项数为 8 的等差数列,根据“首项 + 公差 \times (项数 - 1) = 末项”可求得末项,再根据“(首项 + 末项) \times 项数 $\div 2$ = 数列和”列式解答即可。

105. 考点 20 142857 的应用

1. A

【解析】 $\frac{1}{7} = 0.142857$, 它每 6 个数字为一个循环:1, 4, 2, 8, 5, 7, 而 $2013 \div 6 = 335 \cdots 3$, 所以小数点后第 2013 位上的数是 2。

【点拨】本题考查的是探索规律的知识,运用循环小数的知识可解答,先把分数 $\frac{1}{7}$ 化成小数是 0.142857 , 它

每6个数字一个循环,用2013除以6,再根据它的商和余数确定小数点后第2013位上的数。

$$2. 314\% < 3.\dot{1}4 < 3.14159\cdots < \frac{22}{7}$$

【解析】 $\frac{22}{7} = 3.142857\cdots$

$$314\% = 3.14$$

$$3.\dot{1}4 = 3.1414\cdots$$

$$3.14 < 3.1414\cdots < 3.14159\cdots < 3.142857\cdots$$

$$\text{即 } 314\% < 3.\dot{1}4 < 3.14159\cdots < \frac{22}{7}$$

【点拨】转化成小数再比较。

$$3. 0.\dot{7}1428\dot{5} \quad 446$$

【解析】 $\frac{5}{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5} \quad 100 \div 6 = 16\cdots 4$

即这个数的前100位小数部分由16个循环节和一个循环节的前4位数字组成

$$\begin{aligned} & (7+1+4+2+8+5) \times 16 + (7+1+4+2) \\ &= 27 \times 16 + 14 \\ &= 432 + 14 \\ &= 446 \end{aligned}$$

$$4. 2$$

【解析】 $\frac{3}{7} = 0.428571428571\cdots$, 它的循环节是428571, 是6位数, $2018 \div 6 = 336\cdots 2$, 所以小数部分第2018位数字是循环节第2位的数字2。

106. 考点 21 正方体展开图

$$1. B$$

【解析】直观操作,然后判断发现只有B可以折叠而成。

【点拨】根据正方体展开图判断立体图时,先找出相对的面,然后看能否判断出立体图,此题可根据相对面不相邻得到□和□为对面,则C、D不符合,但A、B不好确定,所以较复杂的题应先动手操作,再直观判断,这样简便又直观。

$$2. B$$

【解析】观察图形特征或动手操作一下。

$$3. D$$

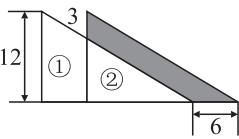
【解析】由立体图形可知ABC三个面共顶点,排除选项A和C,选项B展开图折叠后不符合题意,所以选D。

$$4. 7 \text{ 和 } 11$$

【解析】将展开图折叠成正方体,1和7、11重合。

107. 考点 22 面积计算技巧

1. 【解析】如图,由题可知,是两个相同的三角形叠放在一起,则 $S_{\text{阴影}} + S_{\text{②}} = S_{\text{①}} + S_{\text{②}}$, 故 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{①}} = [(12-3)+12] \times 6 \times \frac{1}{2} =$



第1题图

63(平方厘米)。

阴影部分的面积为63平方厘米。

2. 【解析】将半圆中的空白部分标为丙。

$$S_{\text{甲}} + S_{\text{丙}} = \pi \times \left(\frac{1}{2}OB\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \times \pi \times OB^2$$

$$S_{\text{乙}} + S_{\text{丙}} = \pi \times OB^2 \times \frac{90 \div 2}{360} = \frac{1}{8} \times \pi \times OB^2$$

$$S_{\text{甲}} + S_{\text{丙}} = S_{\text{乙}} + S_{\text{丙}}$$

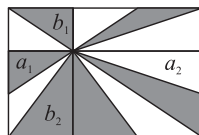
$$S_{\text{甲}} = S_{\text{乙}} = 16 \text{ 平方厘米}$$

阴影部分乙的面积是16平方厘米。

【点拨】 $S_{\text{半圆}} = \pi r^2 \times \frac{1}{2}$,

$$\text{圆心角为 } n \text{ 度的扇形面积} = \pi r^2 \times \frac{n}{360}。$$

3. 【解析】如图,过三角形的公共顶点分别作长方形四条边的垂线,分别记为 a_1, b_1, a_2, b_2 , 则阴影三角形的面积分



第3题图

$$\begin{aligned} & \text{别是 } \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times 9\right) a_1 \text{ 平方厘米}; \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times 9\right) a_2 \text{ 平方厘米}; \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times 15\right) b_1 \text{ 平方厘米}; \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times 15\right) b_2 \text{ 平方厘米, 所以阴影部分的面积} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 9 \times (a_1 + a_2) + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 15 \times (b_1 + b_2) = \frac{3}{2} \times 15 + 5 \times 9 = 67.5 \text{ (平方厘米)} \end{aligned}$$

图中阴影部分的面积为67.5平方厘米。

108. 考点 23 图形找规律

$$1. \times$$

【解析】 $2019 \times 4 + 2 = 8076 + 2 = 8078$ (块)

【点拨】第 n 个图案中有 n 块黑砖, $(4n+2)$ 块白砖。

$$2. 19:7$$

【解析】 $S_1 = \frac{5}{6} S_{\text{圆}} \times 3 = 2.5 S_{\text{圆}}, S_2 = 2.5 S_{\text{圆}} + 1.5 S_{\text{圆}} = 4 S_{\text{圆}}。$

$$S_3 = 2.5 S_{\text{圆}} + 3 S_{\text{圆}} = 5.5 S_{\text{圆}}, S_4 = 2.5 S_{\text{圆}} + 4.5 S_{\text{圆}} = 7 S_{\text{圆}} \cdots$$

$$S_n = 2.5 S_{\text{圆}} + (n-1) \times 1.5 S_{\text{圆}} = 1.5 n S_{\text{圆}} + S_{\text{圆}} = (1.5n + 1) S_{\text{圆}}。$$

$$S_{12} = (1.5 \times 12 + 1) S_{\text{圆}} = 19 S_{\text{圆}}, S_{12}: S_4 = 19:7。$$

【点拨】简单入手,发现规律,每个图中阴影由三个角的3个 $\frac{5}{6}$ 圆加上中间若干半圆组成,然后整体思考, S_1

$= 2.5 S_{\text{圆}}, S_2 = 4 S_{\text{圆}} \cdots$ 则 $S_n = (1.5n + 1) S_{\text{圆}}$, 然后应用此规律求对应图形阴影面积并化简。

$$3. 26$$

【解析】① $3 \times 1 + 2 = 5$ ② $3 \times 2 + 2 = 8$

③ $3 \times 3 + 2 = 11 \cdots \cdots$ ⑧ $3 \times 8 + 2 = 26$

【点拨】找规律: $3n + 2$ 。

$$4. 64$$

【解析】 $(1+5+21) + (12+18+7) = 27+37=64$

【点拨】每次把这幅图绕最中间方格(13)逆时针旋转90度。

$$5. 54$$

【解析】 $4+6=10 \quad 10+8=18 \quad 18+10=28$

$$28 + 12 = 40 \quad 40 + 14 = 54$$

【点拨】相邻两个数的差是从6开始的连续偶数。

6. (1)

图	顶点数	边数	区域数
①	4	6	3
②	8	12	5
③	6	9	4
④	10	15	6

(2) 顶点数 + 区域数 = 边数 + 1

【解析】 $4 + 3 = 6 + 1$ $8 + 5 = 12 + 1$ $6 + 4 = 9 + 1$

$$10 + 6 = 15 + 1$$

(3) $999 + 999 - 1 = 1997$ (条)

109. 考点 24 质数判断方法

1. D

【解析】 $1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$

1155 共有 4 个质因数: 3, 5, 7, 11。

【点拨】分解质因数, 把一个合数写成几个质数相乘的形式。

2. 7

【点拨】由于 $3a + 7b = 41$, 且 a, b 均为质数, 所以 a, b 中有一个质数 2, 试值 $a = 2$ 时, $b = 5$, $3 \times 2 + 7 \times 5 = 41$, 所以 $a + b = 2 + 5 = 7$ 。

3. 191

【解析】 $190 + 2 = 192$ $192 \div 2 = 96$ 96 不是质数

$190 \times 2 + 2 = 382$ $382 \div 2 = 191$ 191 是质数

【点拨】设较大质数是 a , 较小质数是 b 。

$$2a - b = 190b$$

偶数的倍数是偶数, $2a$ 和 $190b$ 都是偶数, 则 b 也是偶数, b 只能是质数中唯一的偶数 2。

4. 19 102

【解析】20 以内最大的质数是: 19; 含有因数 2, 3 的最小三位数是: 102。

【点拨】此题考查合数与质数。质数是只含有 1 和它本身两个因数的数, 据此找出 20 以内的最大质数, 根据 2 和 3 的倍数特征, 这个三位数要想最小, 百位应为 1, 十位应该为 0, 个位要满足是 2 的倍数的特征和 3 的倍数特征, 先满足 3 的倍数特征, 各个数位上的和是 3 的倍数, 即个位上应为 2, 5, 6, 8, 满足是 2 的倍数是 2, 4, 6, 8, 所以最小的数应该是 2, 由此解答。

110. 考点 25 偶质数 2

1. 2

【解析】 $\left. \begin{array}{l} 6 \text{ 奇 } 1 \text{ 偶和为偶, 符合题意} \\ 7 \text{ 奇和为奇, 不符合题意} \end{array} \right\}$ 则必有 1 偶, 只能为 2。

【点拨】奇数个质数和为偶数, 必有 2。

2. 5

【解析】 $(7 + 3) \div 2 = 5$, $(7 + 2) \div 3 = 3$, $7 + 6 = 13$, 13

$+ 6 = 19$, $19 + 6 = 25$, 25 不是质数, $25 + 6 = 31$, $31 + 6 = 37$, 所以在 40 以内符合条件的质数共有 5 个, 分别是 7, 13, 19, 31, 37。

【点拨】经列举, 符合条件的最小质数是 7, 7 加上 3 得 10 能被 2 整除, 7 加上 2 得 9 能被 3 整除; 2 和 3 的最小公倍数是 6, 7 增加 6 的倍数才能符合条件。

3. 2

【点拨】如果两个质数相加的和为奇数的话, 那么这两个质数中有一个一定是 2。

111. 考点 26 最不利原则

1. 51

【解析】最差情况是取出小球中全是末尾数是 1, 2, 3, 4, 5 (或 6, 7, 8, 9, 0), 假设取的球的末尾数是 1, 2, 3, 4, 5, 这样可以取出 50 个球, 它们之间任意两个标号的差都不是 5, 剩下的是末尾为 6, 7, 8, 9, 0 的小球, 如果再从剩下的小球中任取一个, 那么会发现之前取出的 50 个小球中, 肯定至少有一个小球与这个小球的标号差为 5; 答案为 51。

2. 11

【解析】 $6 + 4 + 1 = 11$ (个)

【点拨】最不利原理。

3. 15

【解析】 $8 + 6 + 1 = 15$ (个)

【点拨】最不利原则, 先取 8 个红球, 再取 6 个白球, 再取一个球就有 3 种不同颜色的球了。

4. 4

【解析】 $3 + 1 = 4$ (个)

【点拨】最不利原则: 3 种颜色的球各摸一个, 再摸一个肯定有 2 个是同色的。

112. 考点 27 加法原理

1. C

【解析】 $4 + 6 + 4 + 1 = 15$

【点拨】此题考查了组合问题, 4 个砝码中选 1 个的有 4 种情况: 1 克、2 克、4 克、8 克; 选 2 个的有 6 种: 3 克、5 克、9 克、6 克、10 克、12 克; 选 3 个有 4 种: 7 克、11 克、14 克、13 克; 4 个都选的只有 1 种: $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ (克); 将 4 种情况加起来即可。

2. 8

【解析】当分子取 3 时, 分母只能取 4, 5, 10; 当分子取 4 时, 分母只能取 5, 21; 当分子取 5 时, 分母只能取 12, 21; 当分子取 10 时, 分母只能取 21; 其余的则不能组成最简真分数, 故共有 $3 + 2 + 2 + 1 = 8$ (个)。

3. 6

【解析】10 个相同的橘子放在 3 个不同的盘子里, 要每个盘子里放的橘子不少于 1 个, 同时还不能多于 4 个, 那么这 10 个橘子只能分成 3, 3, 4 和 2, 4, 4 两种情况。3, 3, 4 是从 3 个盘子中选 1 个放 4 个有 3 种放法, 而 2, 4, 4 同样有 3 种放法, 所以一共有 $3 + 3 = 6$ (种) 不同的放法。

113. 考点 28 乘法原理

1. 24

【解析】 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (种)

【点拨】乘法原理: 小红有 4 种站法, 则小明有 3 种站法, 小华有 2 种站法, 小军有 1 种站法, 共有 24 种站法。

2. 29

【解析】 $(5+1) \times (4+1) - 1 = 6 \times 5 - 1 = 30 - 1 = 29$ (种)

【点拨】分步用乘法: 第一步 1 元邮票有 6 种取法 (可以不取)

第二步 1.60 元邮票有 5 种取法 (可以不取)

共有 $6 \times 5 = 30$ (种) 不同取法

去掉两种邮票都不取的情况, 共可组成 29 种不同的邮资。

3. 27

【解析】 $3 \times 3 \times 3 = 27$ (个)

【点拨】①个位是 1, 3, 5, 7, 9 的数是奇数;

②分步用乘法: 个位有 1, 3, 5 共三种可能, 百位不能为 0, 共有 $5 - 2 = 3$ (种) 可能; 十位有 $5 - 2 = 3$ (种) 可能, 所以共可组成 27 个不同的三位奇数。

4. 120

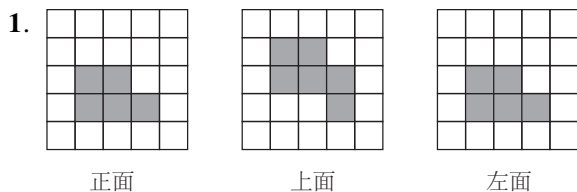
【解析】把小明和小红看作一个人, 相当于 5 个人站成一列, 第一个空有 5 种站法, 第二个空有 4 种站法, 第三个空有 3 种站法, 第四个空有 2 种站法, 第五个空有 1 种站法, 五个空都站好相当于完成这件事, 所以根据乘法原理, 共有: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ (种) 不同的站法。

5. 18

【解析】 $3 \times 3 \times 2 = 18$ (个)

【点拨】分步用乘法: 百位有 3 种可能 (0 不能作百位), 十位有 3 种可能 (百位已用 1 个数字), 个位有 2 种可能 (百位、十位已用 2 个数字), 共可组成 18 个不同的三位数。

114. 考点 29 三视图



正面

上面

左面

第 1 题图

2. D

3. B

【解析】从左面看只有 1 层两列, 从上面看有 2 行, 第 1 行 1 个正方形, 第 2 行 3 个正方形, 所以可以判断从正面看 B 选项符合。

115. 考点 30 三视图定个数

1. C

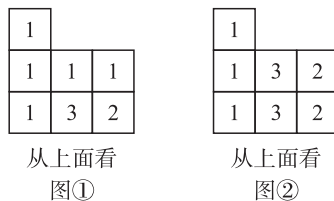
【解析】由①②得, 从正面看, 左列至少有一行是 4 层,

右列至少有 1 行是 3 层; 由①③得, 从正面看至少有 1 列是 4 层, 所以正方体木块至少有 $3 \times 4 + 3 + 1 = 16$ (块)。故选 C。

【点拨】本题考查从不同方向观察几何体。

2. 10 13

【解析】如图①, 搭成这样一个几何体至少需要 $3 + 4 + 3 = 10$ (个) 小立方体; 如图②, 最多需要 $3 + 6 + 4 = 13$ (个) 小立方体。



从上面看
图①

从上面看
图②

第 2 题图

3. 7

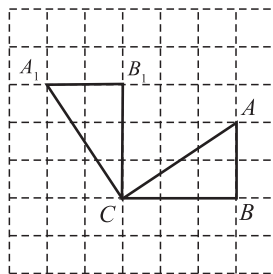
【解析】由主视图可得这个几何体共有 3 层, 由俯视图可得第一层正方体的个数为 4, 由主视图可得第二层最少为 2 块, 第三层只有 1 块, 故最少为 $2 + 4 + 1 = 7$ (个) 小立方体。

116. 考点 31 图形变换

1. D

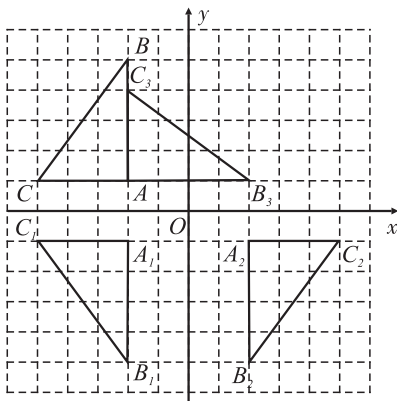
【解析】立方体绕它的对角线 AC_1 旋转, 上面是个圆锥, 下面是个倒圆锥, 中间部分所形成的是通风塔形状 (也就是图 D 中间部分)。

2. 【解析】 $\triangle A_1B_1C$ 如图所示。



第 2 题图

3. 【解析】(1)(2) 如图所示:

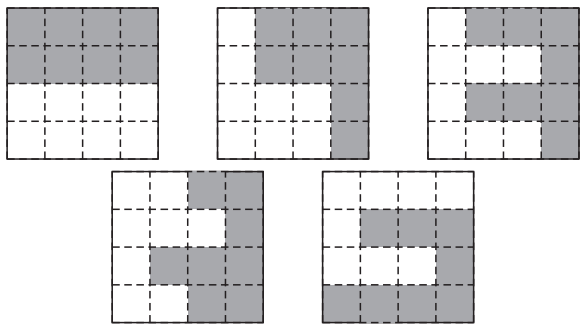


第 3 题图

(3) $\triangle AB_3C_3$ 如图所示, 点 B 走过的路径长:

$$3. 14 \times 4 \times 2 \times \frac{1}{4} = 6.28.$$

4. 【解析】如图所示。



第4题图

5. (1) A (2) $\frac{2686}{3}\pi$ (3) $\frac{2686}{3}$

【解析】(1) $2016 \div 3 = 672$, 2016 处对应点应为 A。

(2) C 点运动规律为: $0, \frac{1}{3}C_{\text{圆}}, \frac{1}{3}C_{\text{圆}}, 0, \frac{1}{3}C_{\text{圆}}, \frac{1}{3}C_{\text{圆}}, \dots$ 即 3 次 1 周期, $x = 2016$ 时, 滚 2015 次。

$2015 \div 3 = 671(\text{周期}) \dots 2$

$$\begin{aligned} \text{则 } C \text{ 点走过路程为: } & 671 \times \frac{1}{3} \times 2 \times (1 \times 2 \times \pi) + \frac{1}{3} \times \\ & (1 \times 2 \times \pi) \\ & = 671 \times \frac{4}{3} \pi + \frac{2}{3} \pi \\ & = \frac{2686}{3} \pi \end{aligned}$$

(3) $\frac{2686\pi}{3} \div \pi = \frac{2686}{3}$

【点拨】先按周期求出 2016 对应为第 672 周期最后一个点, 为 A 点, 然后根据滚到 2016 时, 滚 2015 次, 每 3 次 1 周期, 求出 2015 次所走路程为 $671 \times \frac{2}{3}C_{\text{圆}} + \frac{1}{3}C_{\text{圆}}$, 圆的半径为三角形边长, 求出 C 点路程后除以 π 就是圆的直径。

117. 考点 32 可能性

1. $\frac{3}{5} \quad \frac{2}{5}$

【解析】 $3 \div (3+2) = \frac{3}{5} \quad 2 \div (3+2) = \frac{2}{5}$

2. 4

【解析】 $12 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 4(\text{个})$

【点拨】共有 12 个球, 白球占总数的 $\frac{2}{3}$, 则黑球占总数的 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, 即有黑球 $12 \times \frac{1}{3} = 4(\text{个})$ 。

3. 50 33.3 16.7

【解析】A 朝上: $3 \div 6 \times 100\% = 50\%$

B 朝上: $2 \div 6 \times 100\% \approx 33.3\%$

C 朝上: $1 \div 6 \times 100\% \approx 16.7\%$

4. $\frac{1}{17}$

【解析】 $\frac{1}{7} \times 50\% = \frac{1}{14}$

$$\frac{1}{14} \div \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}\right) = \frac{1}{14} \div \frac{17}{14} = \frac{1}{17}$$

【点拨】将白色珠子的数量看作单位“1”量, 黑色珠子占三种珠子总数的 $\frac{1}{17}$, 所以摸出黑色珠子的可能性是 $\frac{1}{17}$ 。

118. 考点 33 植树问题

1. 3

【解析】因为线路长 $= 40 \times (13 - 1) = 480(\text{m})$, 40 和 30 的最小公倍数为 120, $480 \div 120 - 1 = 3(\text{根})$ 。

2. 80

【解析】 $64 \div (5 - 1) = 64 \div 4 = 16(\text{秒})$, $16 \times (10 - 5) = 16 \times 5 = 80(\text{秒})$

【点拨】根据题意知: 从第一层到第五层, 实际上走了 4 层, 又因为第一层到第五层总共用的时间, 可以求出走每层花的时间, 以同样的速度从第五层走到第十层, 实际上走了 5 层, 用走的层数 \times 每层花的时间 = 总共所需时间, 即: $16 \times (10 - 5)$, 解答即可。

3. 14

【解析】A、B 两地之间距离: $36 \times (61 - 1) = 2160(\text{米})$

而 $[36, 48] = 144$, 即每隔 144 米电线杆不必移动。

$2160 \div 144 = 15$, 去掉一端的 1 根, $15 - 1 = 14(\text{根})$ 不必移动。

即除了两端的两根电线杆外, A、B 两地之间还有 14 根不必移动。

4. 8

【解析】120 和 40 的最大公因数是 40。

$(120 + 40) \times 2 \div 40 = 320 \div 40 = 8(\text{棵})$

【点拨】①两棵树之间的距离最大是长和宽的最大公因数。②在封闭图形中, 棵数 = 间隔数。

5. 20

【解析】 $[10, 12] = 60$, $60 \div 10 = 6$, $60 \div 12 = 5$

$[5, 6] = 30$, 重复段数: $60 \div 30 = 2(\text{段})$

$10 + 12 - 2 = 20(\text{段})$

【点拨】先设全长为最小公倍数, 再求出两次等分时每段的长度, 然后用总长除以两次长度的最小公倍数求出重复段数, 最后用两次等分的段数和减去重复段数就是总段数。

6. 【解析】需要拉的次数: $12 \div 4 = 3(\text{次})$;

10.15 千米 = 10150 米;

第一次来回行:

$$\begin{aligned} & [10150 + 50 \times (4 - 1)] \times 2 \\ & = [10150 + 50 \times 3] \times 2 \\ & = [10150 + 150] \times 2 \\ & = 10300 \times 2 \\ & = 20600(\text{米}) \end{aligned}$$

第二次来回行:

$$\begin{aligned} & [10150 + 50 \times (8 - 1)] \times 2 \\ & = [10150 + 50 \times 7] \times 2 \\ & = [10150 + 350] \times 2 \\ & = 10500 \times 2 \end{aligned}$$

$$=21000(\text{米})$$

第三次来回行:

$$[10150 + 50 \times (12 - 1)] \times 2$$

$$= [10150 + 50 \times 11] \times 2$$

$$= [10150 + 550] \times 2$$

$$= 10700 \times 2$$

$$= 21400(\text{米})$$

共行:

$$20600 + 21000 + 21400 = 63000(\text{米})$$

$$63000 \text{ 米} = 63 \text{ 千米};$$

汽车至少耗油:

$$63 \div 10 \times 2 = 6.3 \times 2 = 12.6(\text{千克})$$

答:汽车至少耗油 12.6 千克。

【点拨】每次运 4 棵,一共需要运 3 次。第一次运到离园林较近的 4 个。单程:先行驶 10.15 千米,到第一棵树,然后再行驶 50 米到第二棵树,再行驶 50 米到第三棵树,再行驶 50 米到第四棵树,一共行驶了 $(4-1)$ 个 50 米,求出单程行驶的路程再乘 2 就是第一次来回的路程;同理求出第二次和第三次行驶的路程,然后求出行驶的总路程,再求出总路程里面有几个 10 千米,最后再乘 2 千克就是需要的汽油重量。

119. 考点 34 平均数问题

1. 3800

$$\text{【解析】} 285 \div \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) = 285 \div \frac{3}{40} = 3800(\text{元})$$

$$\text{检验: } 3800 \div 5 = 760(\text{元})$$

$$3800 \div 8 = 475(\text{元})$$

$$760 - 475 = 285(\text{元})$$

【点拨】每人费用由 $\frac{1}{5}$ 减少到 $\frac{1}{8}$, 减少了 $\frac{3}{40}$, 减少了 285 元, 则电脑价格的 $\frac{3}{40}$ 是 285 元。

2. 158

【解析】因为该班女生人数是男生人数的 $\frac{2}{3}$, 可设女生人数与男生人数分别是 $2x$ 和 $3x$, 则全班学生的平均身高是 $(2x \times 155 + 3x \times 160) \div (2x + 3x) = 158$, 即该班学生的平均身高是 158 厘米。

3. 94

【解析】由题意知:语 + 数 = 96×2

$$\text{数} + \text{英} = 90 \times 2 \quad \text{英} + \text{语} = 88 \times 2$$

$$\text{所以语文成绩} = (96 \times 2 + 90 \times 2 + 88 \times 2) \div 2 - 90 \times 2 = 274 - 180 = 94(\text{分})$$

4. **【解析】** $100 - 10 = 90(\text{分})$ (总分少算 90 分)

$$92.58 - 90.58 = 2(\text{分}) \quad (\text{平均分少算 2 分})$$

$$90 \div 2 = 45(\text{名}) \quad (\text{有 45 人参加考试})$$

答:这个班有 45 名学生参加了此次考试。

【点拨】人数 = 总分 \div 平均分。

120. 考点 35 和差倍问题

1. **【解析】**甲书架有: $(360 + 45 \times 2) \div 2 = 225(\text{本})$,
乙书架有: $(360 - 45 \times 2) \div 2 = 135(\text{本})$ 。

甲书架原来有 225 本书,乙书架原来有 135 本书。

2. **【解析】** $(57 + 35) \div (1 + 3) = 23(\text{人})$,
 $35 - 23 = 12(\text{人})$ 。

从 B 队调出 12 人到 A 队。

3. **【解析】**设甲筐装满 x 个,则乙筐装满 $2.5x$ 个。

$$2.5x - 10 = x + 20$$

$$1.5x = 30$$

$$x = 20$$

$$20 + 20 = 40(\text{个})$$

$$\text{检验: } 20 \times 2.5 - 10 = 50 - 10 = 40(\text{个})$$

答:这批苹果共有 40 个。

4. **【解析】**设八年级收到的征文有 x 篇,则七年级有

$$\left(\frac{1}{2}x - 3 \right) \text{ 篇}。$$

$$\frac{1}{2}x - 3 + x = 150$$

$$\frac{3}{2}x = 153$$

$$x = 102$$

$$102 \times \frac{1}{2} - 3 = 51 - 3 = 48(\text{篇})$$

答:七年级收到征文 48 篇。

5. **【解析】**这是一道假设问题,首先假设 10 个回合小红都赢了,这时小红的得分应该是: $3 \times 10 = 30(\text{分})$

但实际上小红的得分是: $40 - 20 = 20(\text{分})$

所以小红有输的回合。

全部假设为赢,则输一次会丢分: $3 + 2 = 5(\text{分})$

一共丢分: $30 - 20 = 10(\text{分})$

即输了: $10 \div 5 = 2(\text{个})$

那么小红一共扣分: $2 \times 2 = 4(\text{分})$

答:小红扣了 4 分。

【点拨】通过分析:假设 10 个回合小红都赢了,这时小红的得分应该是 $3 \times 10 = 30(\text{分})$,但实际上小红的得分是 $40 - 20 = 20(\text{分})$,所以小红有输的回合。假设全部为赢,则输一次会丢分 $3 + 2 = 5(\text{分})$,一共丢分 $30 - 20 = 10(\text{分})$,即输了 $10 \div 5 = 2(\text{个})$ 回合,那么小红一共扣了 $2 \times 2 = 4(\text{分})$,据此解答即可。

121. 考点 36 年龄问题

1. 7

【解析】设 2020 年孙子 x 岁,则 2020 年爷爷 $10x$ 岁。则 $10x + 12 = 4(x + 12)$, 解得 $x = 6$, 故 2021 年孙子的年龄是 $6 + 1 = 7(\text{岁})$ 。

2. 15

【解析】设 10 年前小明 x 岁,则妈妈 $6x$ 岁。根据题意可列方程: $6x + 20 = 2(x + 20)$, 解得: $x = 5$, 故小明现在 $10 + 5 = 15(\text{岁})$ 。

3. 12

【解析】设淘气今年 x 岁,笑笑今年 $(20 - x)$ 岁,则当笑笑的年龄为 x 岁时,淘气的年龄为 $x \div 75\% = \frac{4}{3}x$ 岁,

根据年龄差不变可列方程 $x - (20 - x) = \frac{4}{3}x - x$, 解得

$x=12$,所以淘气今年12岁。

4. 10

【解析】假设5年后乐乐的年龄是 x 岁,则妈妈的年龄是 $(4x+1)$ 岁,根据题意可得 $x+4x+1=36+5\times 2$,解得: $x=9$,所以今年乐乐的年龄是 $9-5=4$ (岁),妈妈今年的年龄是 $36-4=32$ (岁),故当妈妈38岁时,乐乐的年龄是 $4+38-32=10$ (岁)。

5. 【解析】4年前他们全家的年龄和是60岁,则今年他们全家的年龄和: $60+4\times 4=76$ (岁);
那么儿子今年的年龄是: $4-(76-75)=3$ (岁);
女儿今年的年龄是: $2+3=5$ (岁);
父亲和母亲今年的年龄和是: $75-3-5=67$ (岁),母亲今年的年龄: $(67-1)\div 2=33$ (岁)。

【点拨】4年前他们全家的年龄和是60岁,则今年他们全家的年龄和应是76岁,但是今年全家的年龄和才75岁,说明儿子4年前还未出生,儿子应该是3年前出生的,也就是儿子现在是3岁;接着可求出父亲和母亲今年的年龄和,从而可求出母亲今年的年龄。

6. 【解析】弟:哥:年龄差

现在: $1:2:1=4:8:4$

9年前: $1:5:4=1:5:4$

1份: $9\div(4-1)=3$ (岁)

现哥哥: $3\times 8=24$ (岁)

答:哥哥现在的年龄是24岁。

【点拨】年龄差不变,统一不变量。

122. 考点 37 鸡兔同笼

1. D 【解析】假设全是大船: $6\times 5=30$ (人)

小船: $(30-28)\div(6-4)=1$ (只)。

【点拨】鸡兔同笼。

2. 【解析】假设全是鸡,

$35\times 2=70$ (条)

$94-70=24$ (条)

$24\div 2=12$ (只)

$35-12=23$ (只)

【点拨】此题考查了鸡兔同笼问题。用假设法,假设笼子里全是鸡,则一共有 $35\times 2=70$ (条)腿,实际上有94条腿,多了 $94-70=24$ (条),多的腿都是兔的腿,一只兔子比一只鸡多 $4-2=2$ (条)腿,则兔子有: $24\div 2=12$ (只),则鸡有 $35-12=23$ (只)。

3. 【解析】方法一,用方程解。

设跳绳 x 组,踢毽子 $(22-x)$ 组。

$6x+3(22-x)=108$

$x=14$

踢毽子: $22-14=8$ (组)

方法二,假设法解。

踢毽子: $(6\times 22-108)\div(6-3)=8$ (组),

跳绳: $22-8=14$ (组)。

123. 考点 38 盈亏问题

1. 56

【解析】盈亏问题,每人分3本,多30本,

每人分4本,少26本。

故有学生: $(30+26)\div(4-3)=56$ (人)

2. 48

【解析】若6人1间,多2个房间,即不足 $6\times 2=12$ (人),若4人1间,又少2个房间,即盈 $4\times 2=8$ (人),两次分配的差为 $6-4=2$ (人),根据盈亏问题公式可知共有房间 $(12+8)\div 2=10$ (间),则旅游团共有 $6\times(10-2)=48$ (人)。

3. 【解析】盈亏问题,已知每条船坐6人,多6人,

每条船坐9人,少9人,

故 $(6+9)\div(9-6)=5$ (条)

这个班共有: $6\times 5+6=36$ (人)

4. 【解析】每人多发1包,需要 $8+7=15$ (包)。

男+女: $15\div 1=15$ (人)

男: $(15+1)\div 2=8$ (人)

女: $8-1=7$ (人)

共: $3\times 8+7\times 4+8=60$ (包)

或 $4\times 8+7\times 5-7=60$ (包)

共有60包洗衣粉。

5. 【解析】设共有 x 名少先队员。

$(3x+2)\times 2=7x-6$

$6x+4=7x-6$

$x=10$

苹果树苗: $7\times 10-6=64$ (棵)

梨树苗: $3\times 10+2=32$ (棵)

故共有10名少先队员,苹果树苗有64棵,梨树苗有32棵。

124. 考点 39 还原法解题

1. 20

【解析】设现在各有1份。

第一袋原有:1份少1个,第二袋原有:1份多2个,第

三袋原有: $\frac{1}{2}$ 份,第四袋原有:2份。

$(46+1-2)\div\left(1+1+\frac{1}{2}+2\right)=10$ (个)

第四袋原有: $10\times 2=20$ (个)

【点拨】①还原问题;②和倍问题。

2. 一

【解析】 $120\div 3=40$ (kg) (最后三筐都重40 kg)

$40+2-8=42-8=34$ (kg) (第三筐原来重量)

$40+8-15=48-15=33$ (kg) (第二筐原来重量)

$40+15-2=55-2=53$ (kg) (第一筐原来重量)

$53>34>33$,所以原来最重的是第一筐。

3. 【解析】倒推回去可知:

$1\div\left(1-\frac{3}{4}\right)=4$ (米)

$(4+1)\div\left(1-\frac{2}{3}\right)=15$ (米)

$(15+1)\div\left(1-\frac{1}{2}\right)=32$ (米)

这条绳子原长: $32+1=33$ (米)

125. 考点 40 牛吃草问题

- 【解析】将一根抽水管 1 小时抽水量看作 1 份。
 $(21 \times 8 - 24 \times 6) \div (8 - 6) = 24 \div 2 = 12$ 〈进水管每小时进水量〉
 $21 \times 8 - 12 \times 8 = 168 - 96 = 72$ 〈水池中原有水量〉
 $72 \div (16 - 12) = 72 \div 4 = 18$ (小时) 〈12 根抽水管专抽进水量,其余 4 根抽完原有水量需 18 小时〉
 若用 16 根抽水管,18 小时可抽干。
- 【解析】每匹马的食量: $280 \div 7 \div 20 = 2$ (千克/天)
 $450 \div [(20 + 5) \times 2] = 9$ (天)
 增加了 5 匹马,450 千克能喂 9 天。
- 【解析】 $10 \times 4 \times 20 = 800$ (人)
 $(800 - 400) \div 20 = 400 \div 20 = 20$ (人) 〈每分钟新来 20 人〉
 $400 \div (6 \times 10 - 20) = 400 \div 40 = 10$ (分钟) 〈10 分钟后没有人排队〉
 开门 10 分钟后没有人排队。
 【点拨】6 个入口每分钟共进 60 人,每分钟新来 20 人,则每分钟排队人数减少 40 人。
- 【解析】设一只羊一天吃草量为 1 份,则 1 头牛一天吃草量为 4 份。
 $4 \times 15 \times 30 = 1800$
 $80 \times 15 = 1200$
 $(1800 - 1200) \div (30 - 15) = 600 \div 15 = 40$ 〈每天新长草量〉
 $1800 - 40 \times 30 = 1800 - 1200 = 600$
 或 $1200 - 40 \times 15 = 1200 - 600 = 600$ 〈原有草量〉
 $10 \times 4 + 30 \times 1 = 70$
 $600 \div (70 - 40) = 600 \div 30 = 20$ (天) 〈每天吃 70 份,其中 40 份为新长草量,其余 30 份是消耗原有草量,原有草量 20 天吃完〉
 可以吃 20 天。
- 【解析】设每台抽水机每小时抽水量为 1 份,则:
 $5 \times 2.5 = 12.5$ (份) $8 \times 1.5 = 12$ (份)
 两次相差: $12.5 - 12 = 0.5$ (份),时间相差 1 小时。
 又已知每小时有 40 立方米泉水注入,则每份为:
 $40 \div 0.5 = 80$ (立方米);
 则池中原有水量为: $12 \times 80 - 40 \times 1.5 = 900$ (立方米)
 每小时注水量: $0.5 \div 1 = 0.5$ (份)
 池中原有水量: $12 - 1.5 \times 0.5 = 11.25$ (份)
 13 台抽水机中,0.5 台用来抽新注入的水,余下的抽原有的水,则需要: $11.25 \div (13 - 0.5) = 0.9$ (小时)
 0.9 小时可以把这池水抽完。

126. 考点 41 周期问题

- 452
 【解析】这串珠子的规律是:第一颗是白珠,后面就是一黑三白,四个一循环: $(603 - 1) \div 4 = 150$ (组)……2 (颗),剩余的 2 颗一黑一白,故白珠有: $150 \times 3 + 1 + 1 = 452$ (颗)。
- 4
 【解析】 $\frac{22}{7} = 3.142857$, $2018 \div 6 = 336$ ……2,所以 $\frac{22}{7}$ 小

数点后第 2018 位上的数字是 4。

【点拨】考查分数与小数的互化及循环小数。

3. 7

【解析】把珠子编上号码,将第 2 粒黑珠记为 0,以后依次并循环地将珠子记为 1,2,3,……,39,40,41,42,……其中编号 0,9,10,19,20,29,30,39,40,49,50,……的珠子是黑色;因为每次跳过 6 个珠子落在下一个,所以蟋蟀跳到的珠子号码依次是 0,7,14,21,28,35,42,49,56,……故第一次蟋蟀落在黑珠子的编号为 49,而 $49 \div 7 = 7$,即这只蟋蟀至少要跳 7 次,才能落在黑珠子上。

4. (1) ① 6

【解析】 $20 \div 3 = 6$ (组)……2 (人)

② 5

【解析】 $20 \div 4 = 5$ (组)

(2) ① 4

【解析】 $3 \times 4 = 12$, $50 \div 12 = 4$ (组)……2 (人)

【点拨】从头到尾 12 人为一组报数情况重复出现,每组第 3 个人两次都报 3。

② 4

【解析】 $50 \div 3 = 16$ (组)……2 (人), $50 \div 4 = 12$ (组)……2 (人)

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	...	⑤①
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	...	2
2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	...	1

[3,4] = 12,每 12 人为一组报数情况重复一次,每组中第 12 人两次都报 3。

$50 \div 12 = 4$ (组)……2 (人),所以共有 4 人两次都报 3。

(3) 【解析】 $2015 \div 4 = 503$ (组)……3 (人)

$2015 \div 6 = 335$ (组)……5 (人)

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	...	②①⑤
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	...	3
5	4	3	2	1	6	5	4	3	2	1	6	5	...	1

[4,6] = 12,每 12 人为一组报数情况重复一次,每组中第 3 人两次都报 3。

$2015 \div 12 = 167$ (组)……11 (人), $167 + 1 = 168$ (人),共有 168 人两次都报 3。

127. 考点 42 浓度问题

1. 【解析】设需互换 x kg。

$$\frac{60 \times 40\% - 40\%x + 20\%x}{60} = \frac{40 \times 20\% - 20\%x + 40\%x}{40}$$

$$\frac{24 - 0.4x + 0.2x}{60} = \frac{8 - 0.2x + 0.4x}{40}$$

$$(24 - 0.2x) \times 40 = (8 + 0.2x) \times 60$$

$$960 - 8x = 480 + 12x$$

$$20x = 480$$

$$x = 24$$

需把两桶的糖水相互交换 24 kg。

【点拨】①含糖率 = 糖质量 ÷ 糖水质量 × 100%。

②互换后两桶糖水质量不变。

2. 【解析】采用倒推还原法,乙容器倒入丙容器 20 克,丙容器浓度为 3%,则此时丙容器中的盐的质量为 $(80 +$

$20) \times 3\% = 3$ (克), 这 3 克盐来自乙容器倒出的 20 克盐水, 所以乙容器中溶液的浓度为 $3 \div 20 \times 100\% = 15\%$, 乙容器中盐的质量为 $(80 + 20) \times 15\% = 15$ (克), 这 15 克盐来自甲容器倒出的 20 克盐水, 所以甲容器中盐水浓度为 $15 \div 20 \times 100\% = 75\%$ 。

3. 【解析】所需浓度 30% 与 20% 的糖水质量比为:

$$(30 - 24) : (24 - 20) = 6 : 4 = 3 : 2$$

$$\text{配出糖水的浓度是: } (3 \times 30\% + 2 \times 20\%) \div (3 + 2) = 1.3 \div 5 = 26\%$$

【点拨】溶液的质量 = 溶质的质量 + 溶剂的质量

$$\text{溶液的浓度} = \frac{\text{溶质的质量}}{\text{溶液的质量}} \times 100\%$$

4. 【解析】 $100 \div 2 = 50$ (千克)

设丙有 x 千克, 则乙有 $(50 - x)$ 千克。

$$50 \times 48\% + (50 - x) \times 62.5\% + \frac{2}{3}x = 100 \times 56\%$$

$$x = 18$$

$$50 - 18 = 32 \text{ (千克)}$$

乙瓶中有 32 千克溶液, 丙瓶中有 18 千克溶液。

【点拨】纯酒精质量不变, 纯酒精质量 = 酒精溶液质量 \times 浓度。

5. 【解析】设 B 种溶液浓度是 x , 则 A 种溶液浓度是 $2x$ 。

$$1000 \times 20\% + 200 \times 2x + 400 \times x = (1000 + 200 + 400) \times 15\%$$

$$200 + 400x + 400x = 1600 \times 15\%$$

$$200 + 800x = 240$$

$$800x = 40$$

$$x = 5\%$$

$$\text{检验: } 1000 \times 20\% + 200 \times 2 \times 5\% + 400 \times 5\% = 200 + 20 + 20 = 240 \text{ (g)}$$

$$(1000 + 200 + 400) \times 15\% = 1600 \times 15\% = 240 \text{ (g)}$$

B 种酒精溶液的浓度是 5%。

128. 考点 43 比例尺

1. C

$$\text{【解析】} 12 \div \frac{1}{500000} = 6000000 \text{ (cm)}$$

$$6000000 \text{ cm} = 60 \text{ km}$$

【点拨】实际距离 = 图上距离 \div 比例尺。

2. D

$$\text{【解析】} A、B \text{ 两地相距: } 9 \times 4000000 = 36000000 \text{ (厘米)} \\ = 360 \text{ 千米}$$

$$\text{用时: } 360 \div 30 = 12 \text{ (小时)}$$

$$\text{到达 } B \text{ 地的时间: } 8 + 12 = 20 \text{ (点)}$$

3. 35200

$$\text{【解析】实际底为 } 8 \div \frac{1}{4000} = 32000 \text{ (厘米)} = 320 \text{ (米)}, \text{ 实际}$$

$$\text{高为 } 5.5 \div \frac{1}{4000} = 22000 \text{ (厘米)} = 220 \text{ (米)}, \text{ 故实际面积为}$$

$$320 \times 220 \div 2 = 35200 \text{ (平方米)}。$$

129. 考点 44 按比例分配

1. 50

$$\text{【解析】} 10 \div (3 + 3 - 4) = 10 \div 2 = 5 \text{ (cm)}$$

$$5 \times (3 + 3 + 4) = 5 \times 10 = 50 \text{ (cm)}$$

2. 【解析】三个班植树的总棵数: $200 \div \frac{2}{7} = 700$ (棵), 乙、

$$\text{丙两班植树的总棵数: } 700 \times (1 - 40\%) = 420 \text{ (棵)},$$

$$\text{丙班植树的棵数: } 420 \times \frac{3}{4+3} = 180 \text{ (棵)}。$$

【点拨】分数、百分数问题, 按比例分配。把三个班植树的总棵数看成单位“1”, 先求出三个班的总棵数; 甲班要植三个班总数的 40%, 那么乙班和丙班共占总数的 $(1 - 40\%)$; 由此可求出乙班和丙班植树的总棵数, 再根据乙、丙两班植树的棵数比, 按比例分配即可求出丙班植树的棵数。

3. 【解析】丙村应派人数: $(60 + 40) \times \frac{5}{8+7+5} = 25$ (人)

$$\text{每人钱数: } 13500 \div 25 = 540 \text{ (元)}$$

$$\text{甲村应分: } \left[60 - (60 + 40) \times \frac{8}{8+7+5} \right] \times 540 = 10800$$

$$\text{(元)}$$

$$\text{乙村应分: } 13500 - 10800 = 2700 \text{ (元)}$$

【点拨】三个村所修的长度比等于三个村应派出的人数比, 则丙村应派出总人数的 $\frac{5}{8+7+5}$, 即 $\frac{1}{4}$, 为 25 人,

但丙村没有出人, 而是出了 13500 元钱, 说明每人钱数应为 $13500 \div 25 = 540$ (元), 甲村只需派出总人数的

$$\frac{8}{8+7+5}, \text{ 即 } \frac{2}{5}, \text{ 为 40 人, 多出的 20 人就是替丙村修}$$

的, 则丙村应付给甲村: $20 \times 540 = 10800$ (元), 用 13500 元减去给甲村的 10800 元就是乙村分的钱数。

130. 考点 45 商品问题

1. 【解析】设此商品的定价为 x 元。

$$(1 - 10\%)x - 215 = (1 - 20\%)x + 125$$

$$0.9x - 215 = 0.8x + 125$$

$$0.9x - 0.8x = 125 + 215$$

$$0.1x = 340$$

$$x = 3400$$

$$\text{购入价: } (1 - 10\%) \times 3400 - 215 = 2845 \text{ (元)}$$

【点拨】本题考查利润问题, 售价 - 盈利 = 购入价, 售价 + 亏损 = 购入价, 设此商品的定价为 x 元, 找到等量关系, 即此商品两次减价出售的购入价是相等, 即: $(1 - 10\%) \times \text{定价} - 215 = (1 - 20\%) \times \text{定价} + 125$, 解方程可求出此商品的定价, 进而求出购入价即可。

2. 【解析】设每个的进价是 x 元, 则定价为 $(x + 80)$ 元。

$$[(x + 80) \times 75\% - x] \times 10 = [(x + 80) - 45 - x] \times 12$$

$$[0.75x + 60 - x] \times 10 = [x + 35 - x] \times 12$$

$$600 - 2.5x = 420$$

$$180 = 2.5x$$

$$x = 72$$

$$\text{检验: } 72 + 80 = 152 \text{ (元)}$$

$$(152 \times 75\% - 72) \times 10$$

$$= (114 - 72) \times 10$$

$$= 42 \times 10$$

$$= 420 \text{ (元)}$$

$$(152 - 45 - 72) \times 12 = 35 \times 12 = 420 \text{ (元)}$$

这种商品每个的进价是 72 元。

3. 【解析】设水果的进价为 x 元/千克。

$$\begin{aligned} 1. 4x \times 180 + (250 - 180) \times 0.4 \times 1.4x - 250x &= 618 \\ 252x + 39.2x - 250x &= 618 \\ 41.2x &= 618 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

$$(250 - 180) \times 0.4 \times 1.4 \times 15 = 588 (\text{元})$$

$$(250 - 180) \times 15 = 1050 (\text{元})$$

$$1050 - 588 = 462 (\text{元})$$

商家打折卖出的该种剩余水果亏了 462 元。

131. 考点 46 工程问题

1. 【解析】合作时间： $\left[1 - \frac{1}{10} \times 8 - \frac{1}{30} \times 2\right] \div \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30}\right) = 1$ (天)，总共用的时间： $2 + 8 + 1 = 11$ (天)。从开始到完工共用了 11 天。

2. 【解析】甲、乙合作每小时做 $\frac{1}{4}$ ，乙、丙合作每小时做 $\frac{1}{5}$ 。

$$\begin{aligned} \text{甲、丙合作 2 小时，乙做 4 小时，共做了} &\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times 2 \\ &= \frac{9}{10}, \end{aligned}$$

乙做余下的 $1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ ，还需要 2 小时，因此乙的工作效率为 $\frac{1}{10} \div 2 = \frac{1}{20}$ ，乙单独做需 20 小时

$$\text{甲的工作效率} \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$$

因此甲单独做需 5 小时

答：甲单独做需 5 小时，乙单独做需 20 小时。

【点拨】甲、乙合作的工作效率为 $\frac{1}{4}$ ，乙、丙合作的工作效率为 $\frac{1}{5}$ 。

3. 【解析】设 A 工程的工作量为“1”，则 B 工程的工作量为：

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \text{甲队的工作效率为:} &\frac{1}{40}, \text{乙队的工作效率} \\ \text{为:} &\frac{5}{4} \div 60 = \frac{1}{48}, \text{丙队的工作效率:} \frac{5}{4} \div 75 = \frac{1}{60} \end{aligned}$$

两项工程由甲、乙、丙三人共同完成需要的天数：

$$\left(1 + \frac{5}{4}\right) \div \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{48} + \frac{1}{60}\right) = 36 (\text{天})$$

乙队完成 B 工程的工作量：

$$\frac{1}{48} \times 36 = \frac{3}{4}$$

丙队完成 B 工程的工作量：

$$\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

丙队与乙队合作的天数：

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{60} = 30 (\text{天})$$

答：丙队与乙队合作了 30 天。

【点拨】注意 A、B 工程的总量不同，另外三个队均未休息，可看作甲、乙、丙三队共同合作完成了 A、B 两项工程。求出总共需要的天数，再根据各队完成相应工程

的分率，求出合作天数。

4. 【解析】甲休息 2 天，2 天的工作量为 $\frac{2}{15}$ ，乙 4 天的工作

量为 $\frac{4}{30}$ ，丙 9 天的工作量为 $\frac{9}{45}$ ，因此总工作量变为： $1 +$

$$\frac{2}{15} + \frac{4}{30} + \frac{9}{45}.$$

完成这项工程共需天数：

$$\left(1 + \frac{2}{15} + \frac{4}{30} + \frac{9}{45}\right) \div \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}\right) = 12 (\text{天})$$

132. 考点 47 周期工程

1. 【解析】甲、乙、甲、乙…… | 甲
乙、甲、乙、甲…… | 乙、 $\frac{1}{2}$ 甲

$$\text{甲} = \text{乙} + \frac{1}{2}\text{甲}, \text{即} \text{甲} = \frac{1}{20} + \frac{1}{2}\text{甲}$$

$$\frac{1}{2}\text{甲} = \frac{1}{20}$$

$$\text{甲} = \frac{1}{10}$$

$$\text{甲单独做用时:} 1 \div \frac{1}{10} = 10 (\text{天})$$

【点拨】交替完成的工程问题时，不可能以整周期结束，若以整周期结束，后面会比整周期用时多半天，而两个整周期完成的总量都为 1，多用半天则总量超过了 1，不成立，所以甲、乙交替，只能以甲结束，之后乙、甲交替，最后应为乙加 $\frac{1}{2}$ 甲，这样甲做 1 天等于乙做 1

天加上甲做 $\frac{1}{2}$ 天，再根据乙效为 $\frac{1}{20}$ 求出甲效，用 1 除以甲效就是甲单独做所用时间。

2. 【解析】假设蓄水池的容积即工作量为“1”，甲： $\frac{1}{3}$ ，乙：

$$\frac{1}{4}, \text{丙:} \frac{1}{5}, \text{丁:} \frac{1}{6}.$$

四根水管合开一个周期的工效为

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{60}, \text{甲管灌完水之后乙、丙、丁总体}$$

来说相当于放水，所以一个周期如果甲在注水结束还未

溢出，则该周期不可能溢出。 $\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) \div \frac{7}{60} = \frac{30}{7}$ ，所

以前 5 个周期水不可能溢出。 $\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{7}{60} \times 5\right) \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

(小时)，水开始溢出水池共需 $4 \times 5 + \frac{3}{4} = 20 \frac{3}{4}$ (小时)。

3. 【解析】(1) $1 \div \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8}\right) = 1 \div \frac{7}{24} = \frac{24}{7}$ (小时)

$$(2) 1 \div \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8}\right) = 3 \frac{3}{7} (\text{周期})$$

3 周期用时： $3 \times (1 + 1 + 1) = 9$ (小时)

$$\frac{3}{7} \text{周期总量:} \frac{3}{7} \times \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} > \frac{1}{15}$$

$$\text{甲做 1 小时还余:} \frac{1}{8} - \frac{1}{15} = \frac{7}{120}$$

$$\frac{7}{120} < \frac{1}{10}$$

$$\text{乙还要: } \frac{7}{120} \div \frac{1}{10} = \frac{7}{12} (\text{小时})$$

$$\text{共用: } 9 + 1 + \frac{7}{12} = 10 \frac{7}{12} (\text{小时})$$

(3) 按丙、甲、乙、丙、甲、乙……这样做用时最短为:

$$9 + \frac{1}{8} \div \frac{1}{8} = 10 (\text{小时}),$$

$$\text{少用 } 10 \frac{7}{12} - 10 = \frac{7}{12} (\text{小时})$$

$$\frac{7}{12} > \frac{1}{2}, \text{则正好符合题意。}$$

由于余下 $\frac{1}{8}$ 丙 1 小时可做完, 则按丙、乙、甲依次完成和丙、甲、乙依次完成都可比第(2)题的结果至少提前半小时。

【点拨】周期工程问题, 先算出整个周期时间, 用余下周期个数和工效和求出余下总量, 再按顺序推算, 要使周期工程用时最短, 应让快的先独做, 再让慢的独做。

133. 考点 48 相遇行程

1. 【解析】 $960 \div 6 = 160$ (米/分) ($v_{\text{甲}} + v_{\text{乙}}$)

$$960 \div 80 = 12 (\text{米/分}) \quad (v_{\text{甲}} - v_{\text{乙}})$$

$$(160 + 12) \div 2 = 172 \div 2 = 86 (\text{米/分}) \quad (v_{\text{甲}})$$

$$160 - 86 = 74 (\text{米/分}) \quad (v_{\text{乙}})$$

答: 甲每分钟行 86 米, 乙每分钟行 74 米。

2. 【解析】 $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $60 \div \frac{1}{3} = 180$ (千米)

$$180 \div 2 = 90 (\text{千米/时})$$

$$90 \times \frac{3}{3+2} = 54 (\text{千米/时})$$

$$90 \times \frac{2}{3+2} = 36 (\text{千米/时})$$

答: 甲车速度是 54 千米/时, 乙车速度是 36 千米/时。

【点拨】甲、乙两车在相同时间所行路程比是 3:2, 当甲车行完全程, 乙车行全程的 $\frac{2}{3}$, 离 A 地还有 $\frac{1}{3}$ 。

3. 【解析】 $80 \times 2 \div (90 + 60) = \frac{16}{15}$ (小时)

这次相遇是在出发后 $\frac{16}{15}$ 小时。

134. 考点 49 追及行程

1. D

$$\text{【解析】} 270 \div (72 - 65) = \frac{270}{7} (\text{分})$$

$$\frac{270}{7} \times 65 \div (90 \times 4) = 6 \frac{27}{28}, \frac{3}{4} < \frac{27}{28} < 1, \text{所以在 AD 边。}$$

【点拨】追及问题, 追及时间 = 路程差 \div 速度差, 路程差为 3 条正方形边长之和, 算出追及时间, 再算出甲从 A 点开始行走的路程。

2. 【解析】 $7.5 \times 2 = 15$ (千米/时) 〈丙速〉

$$(15 + 7.5) \times (3 \div 15) = 22.5 \times \frac{1}{5} = 4.5 (\text{千米})$$

〈丙追上甲时与乙的距离〉

$$7.5 \times (12 \div 60) = 1.5 (\text{千米}) \quad \langle \text{丙出发时落后乙的距离} \rangle$$

$$4.5 + 1.5 = 6 (\text{千米}) \quad \langle \text{丙追上甲时比乙多行的路程} \rangle$$

$$6 \div (15 - 7.5) = 6 \div 7.5 = 0.8 (\text{小时}) \quad \langle \text{丙追上甲用的时间} \rangle$$

$$15 \times 0.8 = 12 (\text{千米}) \quad \langle \text{丙追上甲时, 丙和甲都行 12 千米} \rangle$$

$$0.8 + 12 \div 60 = 0.8 + 0.2 = 1 (\text{小时}) \quad \langle \text{甲共用 1 小时} \rangle$$

$$12 \div 1 = 12 (\text{千米/时}) \quad \langle \text{甲速} \rangle$$

甲的速度是 12 千米/时。

3. 【解析】设乙行驶的时间为 x h, 则甲行驶的时间为

$$\left(x - \frac{1}{10}\right) \text{h},$$

则可得甲追上乙时乙所行路程为 $10x$ km,

$$\text{甲所行路程为 } \left[36 \times \left(x - \frac{1}{10}\right)\right] \text{km},$$

$$\text{则: } 36 \times \left(x - \frac{1}{10}\right) + 3 = 3 \times (10x + 3),$$

$$\text{解得: } x = 1.6,$$

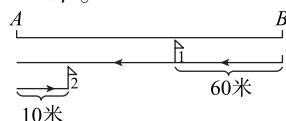
$$1.6 \times 10 + 3 = 19 (\text{km}), A、B \text{ 两地的距离: } 19 \times 2 = 38 (\text{km}).$$

A、B 两地的距离为 38 km。

135. 考点 50 相遇问题

1. 【解析】 $60 \times 3 = 180$ (米) $180 - 10 = 170$ (米)

A、B 两地相距 170 米。



第 1 题图

【点拨】从出发到第一次相遇, 两人共行 1 个全程, 乙行 60 米。

从出发到第二次相遇, 两人共行 3 个全程, 乙行 180 米。

$$180 \text{ 米} = \text{全程} + 10 \text{ 米}, \text{则全程} = 180 \text{ 米} - 10 \text{ 米} = 170 \text{ 米}.$$

2. 【解析】 $(54 + 48) \times [216 \div (54 - 48)] \div 3$

$$= 102 \times (216 \div 6) \div 3$$

$$= 102 \times 36 \div 3$$

$$= 1224 (\text{千米})$$

甲、乙两站间的路程是 1224 千米。

3. 【解析】令 A、B 两地的距离为“1”, 甲的速度: 乙的速度 = 3:2, 行相同的时间, 甲行的路程: 乙行的路程 = 3:2, 从出发到第一次相遇, 两人合走一个单程, 甲行的路程: $\frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$, 两人从出发到第二次相遇, 合走 3

$$\text{个单程, 甲行的路程: } \frac{3}{5} \times 3 = \frac{9}{5}, \text{距 A 地: } 2 - \frac{9}{5} = \frac{1}{5};$$

$$A、B \text{ 两地的距离: } 2000 \div \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right) = 5000 (\text{米}) = 5 (\text{千米}).$$

4. 【解析】两人相遇时间: $300 \div (80 + 70) = 2$ (分钟)

两人相遇时, 小狗跑了: $400 \times 2 = 800$ (米)

5. 【解析】根据甲乙的方向速度间的关系可得出甲乙第一次相遇在 CD 边上,第二次相遇在 AD 边上,第三次相遇在 AB 边上,第四次相遇在 BC 边上,由此可得出甲乙相遇位置每四次循环一次,再根据 $2018 = 504 \times 4 + 2$,可得出甲乙第 2018 次相遇在边 AD 上。

【点拨】设正方形的边长为 a ,因为甲的速度是乙的速度的 3 倍,所以时间相同,甲、乙的路程比为 3:1,所以第一次相遇,甲乙的路程之和为 $2a$,此时甲走了 $\frac{3}{2}a$,

乙走了 $\frac{1}{2}a$,在 CD 边相遇;第二次相遇,甲乙的路程和是 $4a$,此时甲走了 $3a$,乙走了 a ,在 AD 边相遇;第三次相遇,甲乙的路程和是 $4a$,此时甲走了 $3a$,乙走了 a ,在 AB 边相遇;第四次相遇,甲乙的路程和是 $4a$,此时甲走了 $3a$,乙走了 a ,在 BC 边相遇;第五次相遇,甲乙的路程和是 $4a$,此时甲走了 $3a$,乙走了 a ,在 CD 边相遇;...所以 $2018 = 504 \times 4 + 2$,故甲乙第 2018 次相遇在 AD 边上。

6. 【解析】设 A 、 B 两地之间的距离为 1。

$$1 \div 60 = \frac{1}{60} \quad \langle v_{\text{王}} + v_{\text{张}} \rangle$$

$$1 \div 70 = \frac{1}{70} \quad \langle v_{\text{张}} - v_{\text{王}} \rangle$$

$$\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{70} \right) \div 2 = \frac{13}{420} \div 2 = \frac{13}{840} \quad \langle v_{\text{张}} \rangle$$

$$\frac{1}{60} - \frac{13}{840} = \frac{1}{840} \quad \langle v_{\text{王}} \rangle$$

$$1 \div \frac{1}{840} = 840 \text{ (分钟)} \quad \langle \text{小王从 } A \text{ 地到达 } B \text{ 地用 } 840 \text{ 分钟} \rangle$$

$$\frac{13}{840} \times 840 = 13 \quad \langle \text{小张行 } 13 \text{ 个全程} \rangle$$

小张行 13 个全程,则小王和小张迎面相遇过 7 次

小张和小王迎面相遇过 7 次。

【点拨】两人从两地相对出发,迎面相遇 n 次,共行 $(2n-1)$ 个全程。

136. 考点 51 流水行船

1. 25 【解析】设水速为 x ,则静水速度是 $6x$,顺流速度是 $x+6x=7x$,逆流速度是 $6x-x=5x$,落水物品速度是 x 。

$$\begin{aligned} (x+5x)t &= 60 \\ t &= 60 \div 6x \\ t &= \frac{10}{x} \end{aligned}$$

$$\text{这时乙航行: } \frac{10}{x} \times 5x = 50 \text{ (千米)}$$

$$\text{掉落物品漂流: } 60 - 50 = 10 \text{ (千米)}$$

$$\text{甲行 } 10 \text{ 千米的顺流时间: } 10 \div 7x = \frac{10}{7x}$$

$$\text{所以甲船航行到某地的时间是 } \left(\frac{10}{x} - \frac{10}{7x} \right) \times \frac{7}{7+5} = \frac{5}{x}$$

$$\text{当甲船调头时,甲船已航行 } 5x \times \frac{5}{x} = 25 \text{ (千米)}。$$

【点拨】甲船逆流而上与顺流而下的速度比是 $5x:7x =$

$5:7$,所以甲船航行到某地时调头往返所走的时间比为 $7:5$ 。

2. 【解析】设 A 、 B 相距“1”。

$$\text{船速: } \frac{1}{3} \div 4 = \frac{1}{12} \quad \text{顺水速度: } \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9}$$

$$\text{水速: } \frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1}{36}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) \div \frac{1}{36} = 12 \text{ (小时)}$$

船顺水流行至 B 地还需 12 小时。

3. 【解析】乙船逆流从 A 港到 B 港用时: $48 \div (20 - 4) = 3$ (小时)

$$\text{乙到 } B \text{ 时,甲逆行: } 3 \times (10 - 4) = 18 \text{ (千米)}$$

$$\text{乙调头时甲、乙距离: } 48 - 18 = 30 \text{ (千米)}$$

调头后到相遇用时:

$$\begin{aligned} 30 \div [(10 - 4) + (20 + 4)] \\ = 30 \div 30 \\ = 1 \text{ (小时)} \end{aligned}$$

$$\text{共用时: } 3 + 1 = 4 \text{ (小时)}$$

【点拨】流水问题,顺流速度等于船速加水速,逆流速度等于船速减水速,先求乙逆流用时以及当乙到 B 港时甲走的路程,然后用此时二船之间的距离除以甲逆流速度与乙顺流速度的和,再加上之前乙走全长的时间就是总时间。

4. 【解析】设轮船在静水中的速度为每小时 x 千米。

$$\frac{40}{x+2} + \frac{40}{x-2} = 4.5$$

$$40(x-2) + 40(x+2) = 4.5 \times (x+2)(x-2)$$

$$40x - 80 + 40x + 80 = 4.5 \times (x^2 - 4)$$

$$80x = 4.5x^2 - 18$$

$$4.5x^2 - 80x - 18 = 0$$

$$x_1 = -\frac{2}{9} \text{ (舍)}, x_2 = 18。$$

轮船在静水中的速度为每小时 18 千米。

5. 【解析】 $100 \div 3 = \frac{100}{3}$ (千米/时) $\langle v_{\text{和}} \rangle$

$$\frac{100}{3} - (15 + 2) = \frac{100}{3} - 17 = \frac{49}{3} \text{ (千米/时)} \quad \langle \text{快船逆流速度} \rangle$$

$$\frac{49}{3} + 2 = \frac{55}{3} \text{ (千米/时)} \quad \langle \text{快船静水速度} \rangle$$

$$2 + 1 + 1 = 4 \text{ (千米/时)} \quad \langle \text{后天水速} \rangle$$

$$100 \div \left[\left(\frac{55}{3} - 4 \right) - (15 - 4) \right] = 100 \div \frac{10}{3} = 30 \text{ (小时)}$$

$\langle 30$ 小时追上

经过 30 小时能追上。

【点拨】 $v_{\text{顺}} = v_{\text{船}} + v_{\text{水}}, v_{\text{逆}} = v_{\text{船}} - v_{\text{水}}。$

137. 考点 52 火车过桥

1. 【解析】 $(1000 - 730) \div (65 - 50) = 270 \div 15 = 18$ (米/秒)

$$18 \times 65 - 1000 = 1170 - 1000 = 170 \text{ (米)}$$

这列火车前进的速度是 18 米/秒,火车车长为 170 米。

【点拨】①“列车过桥”行驶路程:车长+桥长。

②第一次比第二次多行 15 秒,多行 270 米,则列车速度为 $270 \div 15 = 18$ (米/秒)。

2. 【解析】1 分钟 = 60 秒

火车全通过: $s_1 = L_{\text{隧道}} + L, t_1 = 60 \text{ s}$

在隧道中: $s_2 = L_{\text{隧道}} - L, t_2 = 40 \text{ s}$

设火车的速度为 v 米/秒, 火车的长度为 L 米, 则有

$$60 \times v = 1000 + L \quad ①$$

$$40 \times v = 1000 - L \quad ②$$

由①+②可得, $v = 20 \text{ m/s}$

再把 $v = 20 \text{ m/s}$ 代入①可得: $L = 200 \text{ m}$

火车的速度为 20 m/s , 长度为 200 m 。

【点拨】此题考查火车过隧道问题。通过题意可以找到两个等量关系:

整列火车过隧道通过的路程 = 隧道的长度 + 火车的长度, 整列火车在隧道中通过的路程 = 隧道的长度 - 火车的长度, 由此可解答。

3. 【解析】 $(342 - 288) \div (23 - 20) = 18$ (米/秒)

$$18 \times 23 - 342 = 72 \text{ (米)}$$

$$(128 + 72) \div (22 + 18) = 5 \text{ (秒)}$$

需要 5 秒。

138. 考点 53 钟面行程

1. A 【解析】 $(180 - 90) \div (6 - 0.5) = 90 \div 5.5 = \frac{180}{11} = 16 \frac{4}{11}$ (分)

【点拨】时针和分针从在一条直线到两针垂直, 分针要比时针多转 90° , 每分钟分针比时针多转 5.5° , 所以需要 $16 \frac{4}{11}$ 分。

2. $10 \frac{10}{11}$ 【解析】 $360^\circ \div 60 = 6^\circ$ $30^\circ \div 60 = 0.5^\circ$

$$60^\circ \div (6^\circ - 0.5^\circ) = 60^\circ \div 5.5^\circ = 10 \frac{10}{11} \text{ (分)}$$

【点拨】追及问题。2 点整两针夹角是 60° , 每分钟分针比时针多转 5.5 度, 经过 $10 \frac{10}{11}$ 分后, 分针和时针第一次相遇。

3. 12.5 【解析】 $30 \div 60 = 0.5$ (度) $25 \times 0.5 = 12.5$ (度)

【点拨】时针每小时走 1 大格 30 度, 每分钟走 0.5 度。

4. $18 \frac{6}{13}$ 【解析】从 8:00 开始计算, 时针离“6”有 $30 \times 2 = 60$ (度); 分针离“6”有 180 度。

设经过 x 分后, 两针离“6”的距离相等。

$$60 + 0.5x = 180 - 6x$$

$$x = 18 \frac{6}{13}$$

【点拨】时针每分走 0.5 度; 分针每分走 6 度。时针逐渐远离“6”; 分针逐渐靠近“6”。

5. 40 【解析】 $(110 + 110) \div (6 - 0.5) = 220 \div 5.5 = 40$ (分钟)

【点拨】外出时, 时针在前分针在后, 两针夹角是 110° ; 回家时, 时针在后分针在前, 两针夹角是 110° 。外出过程中, 分针比时针多转 220° , 每分钟分针比时针多转 5.5° , 所以外出 40 分钟。

139. 考点 54 环形问题

1. $\frac{8}{3}$ 【解析】相遇时, 甲比乙多跑了一圈, 即 240 米, 看

成是追及问题, 则甲追上乙所用的时间: $240 \div (8 - 5) = 80$ (秒)

甲跑的路程: $8 \times 80 = 640$ (米)

甲跑的圈数: $640 \div 240 = \frac{8}{3}$ (圈)

【点拨】将问题转化为甲超过乙一圈, 按追及问题进行思考解答。

2. 90 【解析】将环形公路的长度看作单位“1”, 则甲的速度为 $\frac{1}{60}$, 两人速度和是 $\frac{1}{45}$, 所以乙的速度是 $\frac{1}{45} - \frac{1}{60}$

$= \frac{1}{180}$, 相遇后, 甲反向而行即与乙同向而行, 又变成了一个追及问题, 甲、乙再次相遇时, 甲比乙多行了环形公路一周的距离, 所以追及时间为 $1 \div \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{180} \right) = 90$ (分钟)。

3. 【解析】甲、乙两人的速度和是 $1 \div 1 = 1$,

两人的速度差是 $1 \div 4 = \frac{1}{4}$,

$$\text{甲速度} = \left(1 + \frac{1}{4} \right) \div 2 = \frac{5}{8},$$

甲跑完全程所用的时间是 $1 \div \frac{5}{8} = \frac{8}{5}$ (分钟)

$$\text{乙的速度} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

乙跑完全程所用的时间是 $1 \div \frac{3}{8} = \frac{8}{3}$ (分钟)

甲跑完一圈需要 $\frac{8}{5}$ 分钟, 乙跑完一圈需要 $\frac{8}{3}$ 分钟。

【点拨】把这个环形跑道的路程看作“1”, 甲、乙两人的速度和是 $1 \div 1 = 1$, 速度差是 $1 \div 4 = \frac{1}{4}$; 和差问题: (和 + 差) $\div 2$ = 大数。

4. 【解析】 $400 \div 5 = 80$ (千米/时) (甲、乙两车速度和)
 $400 \div (80 + 10 \times 2) = 400 \div 100 = 4$ (小时) (变速后两车经过 4 小时相遇)

设甲车原来每小时行 x 千米, 则变速后行 $(x + 10)$ 千米。

$$4(x + 10) - 5x = 3$$

$$4x + 40 - 5x = 3$$

$$x = 37$$

甲车原来每小时行 37 千米。

【点拨】甲、乙两车速度差不变, 变速前行 5 小时, 变速后行 4 小时, 两车行程差距减少即甲车多行 3 千米, 乙车少行 3 千米。

5. 【解析】 $1080 \div 54 = 20$ (米/分) ($v_{\text{甲}} - v_{\text{乙}}$)

$$1080 \div 3 = 360 \text{ (米/分)}$$

$$360 + 50 - 30 = 380 \text{ (米/分)} \quad (v_{\text{甲}} + v_{\text{乙}})$$

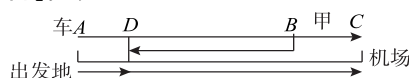
$$(380 + 20) \div 2 = 200 \text{ (米/分)} \quad (v_{\text{甲}})$$

$$380 - 200 = 180 \text{ (米/分)} \quad (v_{\text{乙}})$$

原来甲每分钟行 200 米, 乙每分钟行 180 米。

140. 考点 55 接送问题

1. 4.8 【解析】如图:



第 1 题图

让甲班先坐车行至 B 处,然后让车返回接乙班,此时甲班步行去机场,甲班坐车的时间让乙班先步行往机场方向走,直到遇到返回接乙班的汽车再坐车去机场,由于甲、乙两班步行速度相同,坐车速度也相同,则甲班步行路程 BC 与乙班步行路程 AD 同样长,设 AD 为 1 份,则 BC 也为 1 份。 $AB+BD$ 的长应是 AD 的 7 倍,即 7 份,则 AB 长度为 $(7+1) \div 2 = 4$ (份), BC 占全长的 $\frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$,即两队步行路程为: $24 \times \frac{1}{5} = 4.8$ (km),而这 4.8 km 也就是汽车返回接乙班时与机场的距离。

【点拨】由于汽车走 $AB+BD$ 与乙班步行走 AD 用时相同,且汽车速度是步行速度的 7 倍,所以 AD 为 1 份, $AB+BD$ 为 7 份, AB 就为 4 份,全长为 5 份, BC 就占全长的 $\frac{1}{5}$,即汽车应在距机场 4.8 km 处返回接乙班。

2. 【解析】



第 2 题图

$$v_{\text{车}}:v_{\text{乙}}=48:3=16:1$$

$$v_{\text{车}}:v_{\text{甲}}=48:4=12:1$$

设乙班共走的路程 AC 为 1 份,则汽车走的路程为 $AB+BC=16$ (份), $BC=(16-1) \div 2 = \frac{15}{2}$ (份),汽车调

头走 $\frac{15}{2}$ 份时,甲班走: $\frac{15}{2} \div 12 \times 1 = \frac{5}{8}$ (份),即当汽车接到乙时,与甲班差: $BC+BE = \frac{15}{2} + \frac{5}{8} = \frac{65}{8}$ (份)。

要用时最短,则车与甲班同时到达,则汽车走余下路程与甲班走余下路程用时相同,此时 $CD:ED=12:1$,根据 $CD-ED=\frac{65}{8}$ (份),得到 $ED=\frac{65}{8} \div (12-1) \times 1 = \frac{65}{88}$ (份)。

此时甲班与乙班坐的车同时到,甲班共步行的路程与乙班共步行的路程比为 $BD:AC = \left(\frac{5}{8} + \frac{65}{88}\right):1 = 15:11$ 。

【点拨】要使用时间最少,则让汽车和乙班学生同时出发,汽车先拉甲班到图中 B 点然后让甲班步行到达,汽车返回接乙班,由于乙班和汽车同时出发且汽车速度是乙班的 16 倍,则当汽车接到乙班时,乙班走 1 份,汽车走 16 份,即图中 AC 为 1 份, $AB+BC$ 为 16 份,则 BC 为 $(16-1) \div 2 = \frac{15}{2}$ (份),由于汽车调头到接到乙走 $\frac{15}{2}$ 份,这段时间甲班也在继续往前走,且汽车速度是甲班的 12 倍,汽车调头走 $\frac{15}{2}$ 份时,甲班走它的 $\frac{1}{12}$,为 $\frac{5}{8}$ 份,此时当汽车刚好接到乙班时,与甲班相距 $\frac{15}{2} + \frac{5}{8} = \frac{65}{8}$ (份),即追及路程为 $\frac{65}{8}$ 份,由于同时到达,则 $CD=12ED$, $11ED$ 为 $\frac{65}{8}$ 份, ED 为 $\frac{65}{8} \div 11 = \frac{65}{88}$ (份),即

甲班共走: $\frac{5}{8} + \frac{65}{88} = \frac{15}{11}$ (份),而乙班共走 1 份,所以甲、乙两班步行距离比为 15:11。

3. **【解析】**因为汽车速度与步行速度的比是 $60:4=15:1$,假设 A 处与出发点距离为 x 千米,则甲组乘车距离为 x 千米,乘车所用时间为 $\frac{x}{60}$,下车后到达楼观台需要的时间为 $\frac{27-x}{4}$;乙组此时共步行了 $\frac{4x}{60}$,距 A 点距离为 $x - \frac{4x}{60} = \frac{14x}{15}$,车从 A 点返回接乙组再到与乙组相遇所需的时间为 $\frac{14x}{15} \div (60+4) = \frac{7x}{480}$,此时乙组又步行了 $4 \times \frac{7x}{480} = \frac{7x}{120}$ 千米,距离楼观台的距离为 $27 - \frac{4x}{60} - \frac{7x}{120}$,然后乙组同学上车到达楼观台需要的时间为 $\left(27 - \frac{4x}{60} - \frac{7x}{120}\right) \div 60$;因为同时到达,车从 A 点返回接乙组再到终点所用时间等于甲组步行时间。则有

$$\frac{27-x}{4} = \frac{7x}{480} + \left(27 - \frac{4x}{60} - \frac{7x}{120}\right) \div 60$$

$$\frac{27-x}{4} = \frac{7x}{480} + \frac{27}{60} - \frac{15x}{120} \div 60$$

$$\frac{27-x}{4} = \frac{7x}{480} + \frac{9}{20} - \frac{x}{480}$$

$$\frac{27}{4} - \frac{9}{20} = \frac{x}{4} + \frac{6x}{480}$$

$$\frac{63}{10} = \frac{63x}{240}$$

$$x = 24$$

所以花费时间为 $24 \div 60 + (27-24) \div 4 = 1.15$ (小时),

1.15 小时 = 1 小时 9 分,

8 时经过 1 小时 9 分是 9 时 9 分。

9 时 9 分到达。

4. **【解析】** $60 \div 60 = 1$ (小时) (汽车用 1 小时到达目的地)
 $1+1=2$ (小时) $5 \times 2 = 10$ (千米) (步行者已出发 2 小时行 10 千米)

$(60-10) \div (5+60) = 50 \div 65 = \frac{10}{13}$ (小时) (再用 $\frac{10}{13}$ 小时相遇)

$2 + \frac{10}{13} = 2\frac{10}{13}$ (小时) (共用 $2\frac{10}{13}$ 小时相遇)

步行者在出发后 $2\frac{10}{13}$ 小时与回头接他们的汽车相遇。

【点拨】相遇时间 = 总路程 \div 速度和。

141. 考点 56 上下坡问题

1. C

【解析】设从 A 到 B 下坡有 x 千米,则上坡有 $(24-x)$ 千米。

$$x \div 4 + (24-x) \div 3 = 7\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4}x + 8 - \frac{1}{3}x = 7\frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{12}x$$

$$x = 10$$

$$(24 - 10) \div 4 + 10 \div 3 = 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = 6\frac{5}{6} \text{ (小时)}$$

【点拨】去时的上坡是返回时的下坡，去时的下坡是返回时的上坡。

2. 【解析】 $4.5 \div \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{18}\right) = 32.4$ (千米)

甲、乙两地全长 32.4 千米。

【点拨】往返过程可看成上坡、下坡各行了一个全程。

3. 【解析】设去时时间为 1，则 $t_{\text{上}}$ 、 $t_{\text{平}}$ 、 $t_{\text{下}}$ 均为 $\frac{1}{3}$ 。

回时 $t_{\text{上}}$ 为： $\frac{1}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$ ， $t_{\text{下}}$ 为： $\frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ ， $t_{\text{平}}$ 不变。

共用时： $\frac{5}{12} + \frac{4}{15} + \frac{1}{3} = \frac{61}{60}$ ，则原来共用时： $15 \div \left(\frac{61}{60} - 1\right) = 900$ (分)，900 分 = 15 小时。

全长： $15 \times \frac{1}{3} \times 40 + 15 \times \frac{1}{3} \times 45 + 15 \times \frac{1}{3} \times 50 = 675$ (千米)

【点拨】去时上坡为回时下坡，则回时下坡为去时上坡用时的 $\frac{4}{5}$ ，同理回时上坡为去时下坡用时的 $\frac{5}{4}$ ，再根据差量除以差率求出总时间，然后就可轻松算出全长。

4. 【解析】(1) 设 AB 、 BC 、 AC 三段距离分别是 $3x$ 、 $4x$ 和 $5x$ ，因为乐乐和扬扬同时出发，2.5 小时后在 D 点相遇，故有

$$6 \times \left(2.5 - \frac{3x}{4}\right) + 4 \times \left(2.5 - \frac{5x}{5}\right) = 4x$$

$$\therefore x = 2, AB = 3 \times 2 = 6 \text{ (千米)}, BC = 4 \times 2 = 8 \text{ (千米)},$$

$$AC = 5 \times 2 = 10 \text{ (千米)}$$

当扬扬走到 C 点时，用时： $\frac{10}{5} = 2$ (小时)，

乐乐 $\frac{6}{4} = 1.5$ (小时) 到 B 点，

$$BE = 6 \times (2 - 1.5) = 3 \text{ (千米)},$$

$$AB : BE = 6 : 3 = 2 : 1.$$

即扬扬走到 C 点时，乐乐是在下坡， AB 和 BE 距离的比是 2 : 1。

(2) 扬扬从 A 到 D 用 2.5 小时， AC 用 2 小时，那么 CD 用 0.5 小时， $CD = 4 \times 0.5 = 2$ (千米)。

5. 【解析】 $1 - \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$

$$15 \div \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) = 15 \div \frac{5}{9} = 27 \text{ (千米)}$$

甲、乙两地之间的路程是 27 千米。

【点拨】去时下坡行全程的 $\frac{1}{3}$ ，回来时下坡行全程的

$$\frac{2}{9}, \text{往返下坡共行全程的 } \frac{5}{9}.$$

6. 【解析】如图，去时上山占全长： $\left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$

$$\text{去时下山占全长: } \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

$$v_{\text{上}} : v_{\text{平}} = 80\% : 100\% = 4 : 5$$

$$v_{\text{平}} : v_{\text{下}} = 100\% : 120\% = 5 : 6$$

$$v_{\text{上}} : v_{\text{平}} : v_{\text{下}}$$

$$4 : 5$$

$$5 : 6$$

$$4 : 5 : 6$$

$$\text{去时 } \begin{cases} s_{\text{上}} : s_{\text{平}} : s_{\text{下}} = \frac{8}{25} : \frac{1}{5} : \frac{12}{25} = 8 : 5 : 12 \\ v_{\text{上}} : v_{\text{平}} : v_{\text{下}} = 4 : 5 : 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{\text{上}} : t_{\text{平}} : t_{\text{下}} = \frac{8}{4} : \frac{5}{5} : \frac{12}{6} = 2 : 1 : 2 \end{cases}$$

$$\text{去时 } \begin{cases} t_{\text{上}} : 2 \times \frac{2}{2+1+2} = \frac{4}{5} \text{ (h)} \\ t_{\text{平}} : 2 \times \frac{1}{2+1+2} = \frac{2}{5} \text{ (h)} \\ t_{\text{下}} : 2 \times \frac{2}{2+1+2} = \frac{4}{5} \text{ (h)} \end{cases}$$

$$\text{回时 } t_{\text{平}} \text{ 不变, 仍为 } \frac{2}{5} \text{ h.}$$

$$s \text{ 一定: } \begin{cases} v_{\text{上}} : v_{\text{下}} = 4 : 6 = 2 : 3 \\ t_{\text{上}} : t_{\text{下}} = 3 : 2 \end{cases}$$

$$\text{回时 } t_{\text{上}} = \text{去时 } t_{\text{下}} \times \frac{3}{2}$$

$$\text{回时 } t_{\text{下}} = \text{去时 } t_{\text{上}} \times \frac{2}{3}$$

$$\text{则回时共用: } \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = 2\frac{2}{15} \text{ (h)}$$

$$\text{【点拨】先根据去时路程比与速度比和总时间求出去时上山、平路、下山分别所用时间, 再把上、下山的时间根据上下山路程一定, 速度与时间成反比例进行转化, 即回时 } t_{\text{上}} = \text{去时 } t_{\text{下}} \times \frac{3}{2}, \text{回时 } t_{\text{下}} = \text{去时 } t_{\text{上}} \times \frac{2}{3}.$$

$$\text{【点拨】先根据去时路程比与速度比和总时间求出去时上山、平路、下山分别所用时间, 再把上、下山的时间根据上下山路程一定, 速度与时间成反比例进行转化, 即回时 } t_{\text{上}} = \text{去时 } t_{\text{下}} \times \frac{3}{2}, \text{回时 } t_{\text{下}} = \text{去时 } t_{\text{上}} \times \frac{2}{3}.$$

【点拨】先根据去时路程比与速度比和总时间求出去时上山、平路、下山分别所用时间，再把上、下山的时间根据上下山路程一定，速度与时间成反比例进行转化，即回时 $t_{\text{上}} = \text{去时 } t_{\text{下}} \times \frac{3}{2}$ ，回时 $t_{\text{下}} = \text{去时 } t_{\text{上}} \times \frac{2}{3}$ 。

142. 考点 57 容斥原理

1. 20

$$\text{【解析】} (60 + 100 + 120) \div 2 = 280 \div 2 = 140 \text{ (人)}$$

〈六年级人数〉

$$140 - 120 = 20 \text{ (人)}$$

【点拨】一共 140 人，120 人订《数学报》，则 20 人没有订《数学报》，则这 20 人订了《少年报》和《语文报》。

2. 【解析】 $40 - 12 = 28$ (人) 〈第 2 题做对有 28 人〉

$$30 + 28 - 20 = 38 \text{ (人)} \text{ 〈至少做对 1 题有 38 人〉}$$

$$40 - 38 = 2 \text{ (人)} \text{ 〈两题都未做对有 2 人〉}$$

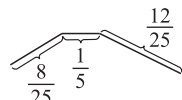
$$28 - 20 = 8 \text{ (人)} \text{ 〈第 2 题做对而第 1 题未做对有 8 人〉}$$

答：第 2 题做对而第 1 题未做对有 8 人，两题都未做对有 2 人。

3. 【解析】至少参加一个兴趣小组的人数为 $26 + 30 - 15 = 41$ (人)，

$$\text{两个兴趣小组都没有参加的人数为 } 64 - 41 = 23 \text{ (人).}$$

答：两个兴趣小组都没有参加的人数是 23 人。



第 6 题图

4. 【解析】 $5 - 2 = 3$ (人) 〈只能教英语和日语人数〉
 $3 - 2 = 1$ (人) 〈只能教法语和日语人数〉
 $4 - 2 = 2$ (人) 〈只能教英语和法语人数〉
 $27 - (8 + 2 + 2 + 3 + 1 + 6) = 27 - 22 = 5$ (人)
 答:只能教法语的教师有5人。
 【点拨】画图分析法。

143. 考点 58 抽屉原理

1. B
 【解析】 $8 \div 3 = 2 \cdots 2$, $2 + 1 = 3$ (只)
 【点拨】抽屉原理,每个鸽舍中飞2只还剩2只鸽子,所以至少有3只鸽子飞进同一个鸽舍里。
2. 169
 【解析】12个属相相当于12个抽屉,2022人放入12个抽屉中。
 $2022 \div 12 = 168 \cdots 6$,每个抽屉中至少有 $168 + 1 = 169$ (人)属相相同。
3. 19
 【解析】 $5 + 5 + 5 + 4 = 19$ (人)
 【点拨】每个房间住4人或5人,4人最多有1间,因为 $4 + 4 + 5 = 13$, $13 < 14$ 。

144. 考点 59 逻辑推理

1. C
 【解析】据题分析得:若丁说得没错,则乙也没有说错,那么甲、丙之中有一个人说错了;假设甲说对了“我最高”,那么丙也说对了“我没有甲高,但还有人比我矮”,所以假设不成立,即甲错,丙对。由上述推理得,这四个人身高从高到矮是乙,甲,丙,丁。
 【点拨】据题可知丁没有说错,如果丁说错了,这四个就没有最矮的了,抓住这一点即可展开讨论推理。
2. 重庆
 【解析】
- | 成都 | 西安 | 重庆 | | 足球 | 围棋 | 街舞 |
|----|----|----|---|----|----|----|
| √ | × | × | A | × | × | √ |
| × | √ | × | B | × | √ | × |
| × | × | √ | C | √ | × | × |
- 【点拨】①根据“喜欢街舞的是成都人”和“B不喜欢街舞”“B不是重庆人”可知B不是成都人,只能是西安人。
 ②喜欢足球的不是西安人,则B不喜欢足球,只能C喜欢足球。
 ③喜欢街舞的是成都人,则A是成都人,C是重庆人。
3. 乙
 【解析】乙说的话和丁说的话相互矛盾,必定一真一假,则甲和丙都说的是真话,所以乙考得最好。
 检验:假设乙考得最好,甲说得对,乙说错了,丙说得对,丁说得对,符合题中“只有一个人讲的话错了”的条件。
4. 【解析】由(1)(2)得徐老师、周老师都不是英语老师,则黄老师是英语老师。

由(3)得周老师不是数学老师,则周老师是语文老师。则徐老师是数学老师。
 答:黄老师教英语,周老师教语文,徐老师教数学。

145. 考点 60 公因数与公倍数

1. 12
 【解析】 $(18, 24, 30) = 6$
 $(18 + 24 + 30) \div 6 = 12$ (段)
 【点拨】每段的长应是18、24和30的公因数,且要使每段尽可能长,则每段长度为它们的最大公因数,再用总和除以最大公因数就是段数。
2. 42
 【解析】 $(168, 210, 252) = 42$
 【点拨】份数应为168、210和252的公因数,且要使份数最多,则就是求这三个数的最大公因数,求多个数最大公因数时,用短除法思考。
3. 28
 【解析】 $(196, 112) = 28$
 $(196 \div 28) \times (112 \div 28) = 7 \times 4 = 28$ (个)
 【点拨】正方形边长越大,剪成的块数越少,正方形边长最大是长和宽的最大公因数。
4. $a \quad 1 \quad ab$
 【解析】 $a \div b = 0.2$, $a = 0.2b$, $a = \frac{1}{5}b$, $b \div a = 5$ 。
 $a + 1 = b$,则a和b互质。最大公因数是1,最小公倍数是它们的乘积。
 【点拨】有倍数关系的两个数,最大公因数是较小数,最小公倍数是较大数,相邻两个自然数肯定是一组互质数。
5. 1
 【解析】 $[2, 3, 7] = 2 \times 3 \times 7 = 42$
 $42 \times \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = 42 \times \frac{1}{42} = 1$ (人)
 【点拨】总人数是2、3、7的公倍数,不超过60人,只能是42人。
6. 207
 【解析】根据题意总人数除以5余2,说明整除5,差3;除以6余3,说明能整除6,差3;除以7余4,说明能整除7,差3;综上所述判断总人数加3是5、6、7的公倍数,所以至少有 $5 \times 6 \times 7 - 3 = 207$ (名)。
7. 36和48 【解析】用短除法,通过 $12 \times a \times b = 144$
 $a \times b = 12$
 $12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$,第二组不互质,第一组解出现三位数。
 故 $A = 3 \times 12 = 36$, $B = 4 \times 12 = 48$
8. 314
 【解析】站3人一排,多出2人,即比3的倍数少1;站5人一排,多出4人,即比5的倍数少1;站7人一排,多出6人,即比7的倍数少1。而3、5、7的最小公倍数为105,因为战死几十人,即战死人数不超过100人,战后剩余人数超过 $350 - 100 = 250$ (人),又 $105 \times 3 = 315$ (人), $105 \times 2 = 210$ (人),且 $210 < 250$,所以还剩 $315 - 1 = 314$ (人)。