第 1 章　行列式

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

先看用消元法求解二元一次线性方程组的过程:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \tag{1.1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \tag{1.2}$$

式 (1.1) $\times a_{22}+$ 式 (1.2) $\times(-a_{12})$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

式 (1.2) $\times a_{11}+$ 式 (1.1) $\times(-a_{21})$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

先看用消元法求解二元一次线性方程组的过程:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \tag{1.1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \tag{1.2}$$

式 $(1.1) \times a_{22}+$ 式 $(1.2) \times (-a_{12})$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

式 $(1.2) \times a_{11}+$ 式 $(1.1) \times (-a_{21})$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

先看用消元法求解二元一次线性方程组的过程:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \tag{1.1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \tag{1.2}$$

式 $(1.1) \times a_{22}+$ 式 $(1.2) \times (-a_{12})$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

式 $(1.2) \times a_{11}+$ 式 $(1.1) \times (-a_{21})$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

上面的解的分母 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ 由方程组未知量的系数组成. 将它用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

称为二阶行列式.

- $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为二阶行列式的元素, 横排称为行, 竖排称为列.
- 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 称为列标, 表明该元素位于第 j 列.

上面的解的分母 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ 由方程组未知量的系数组成. 将它用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

称为二阶行列式.

- $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为二阶行列式的元素, 横排称为行, 竖排称为列.
- 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 称为列标, 表明该元素位于第 j 列.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

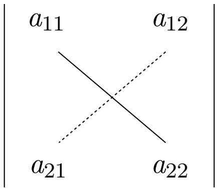

图: 1-1 行列式的对角线法则

- 行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线, 从右上角到左下角的对角线称为行列式的副对角线.
- 二阶行列式的值等于主对角线上的两个元素之积减去副对角线上的两个元素之积. 这种计算方法称为行列式的对角线法则.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix}$$

图: 1-1 行列式的对角线法则

- 行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线，从右上角到左下角的对角线称为行列式的副对角线.
- 二阶行列式的值等于主对角线上的两个元素之积减去副对角线上的两个元素之积. 这种计算方法称为行列式的对角线法则.

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则当 $D\neq 0$ 时，由式 (1.1)、式 (1.2) 组成的方程组的解 x_1, x_2 可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上式即为二元一次线性方程组的求解公式，其中，分母 D 是由方程组未知量的系数确定的二阶行列式，称为系数行列式；x_j 的分子 D_j 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_j 的系数 a_{1j}, a_{2j} 所得的二阶行列式，其中 $j=1,2$.

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则当 $D \neq 0$ 时，由式 (1.1)、式 (1.2) 组成的方程组的解 x_1, x_2 可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上式即为二元一次线性方程组的求解公式，其中，分母 D 是由方程组未知量的系数确定的二阶行列式，称为系数行列式；x_j 的分子 D_j 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_j 的系数 a_{1j}, a_{2j} 所得的二阶行列式，其中 $j = 1, 2$.

例 (1)

求解二元一次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$

解

由于 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7 \neq 0$, 故方程组有解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) - 3 \times 3 = -17,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2,$$

因此, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{17}{7}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{2}{7}.$$

例 (1)

求解二元一次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$

解

由于 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7 \neq 0$, 故方程组有解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) - 3 \times 3 = -17,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2,$$

因此, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{17}{7}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{2}{7}.$$

例 (1)

求解二元一次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$

解

由于 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7 \neq 0$, 故方程组有解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) - 3 \times 3 = -17,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2,$$

因此, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{17}{7}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{2}{7}.$$

类似地，对于三元一次线性方程组

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \tag{1.4}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \tag{1.5}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \tag{1.6}$$

式 (1.4) $\times a_{22}+$ 式 (1.5) $\times(-a_{12})$，消去 x_2 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{I}$$

式 (1.5) $\times a_{32}+$ 式 (1.6) $\times(-a_{22})$，消去 x_2 得

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{II}$$

式 (1.4) $\times a_{32}+$ 式 (1.6) $\times(-a_{12})$，消去 x_2 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{III}$$

类似地，对于三元一次线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3, \end{aligned}$$

在等式 (I), (II), (III) 的两边分别乘以 a_{33}, a_{13}, $-a_{23}$, 得

$$a_{33}\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} x_3\right) = a_{33}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

$$a_{13}\left(\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} x_3\right) = a_{13}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$-a_{23}\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} x_3\right) = -a_{23}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}.$$

上述三个等式相加消去 x_3, 得到

$$\left(a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right)x_1$$
$$= a_{13}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

即:

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3, \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

用记号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为三阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.7}$$

用记号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为三阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.7}$$

例 (2)

求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

解

系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 4\times 4 + (-1)\times(-2)\times 3 + (-1)\times 3\times(-2) - 2\times(-2)\times(-2) - (-1)\times 3\times 4 - (-1)\times 4\times 3 = 60 \neq 0,$$

故方程组有解.

例 (2)

求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

解

系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 4\times 4 + (-1)\times(-2)\times 3 + (-1)\times 3\times(-2) - 2\times(-2)\times(-2) - (-1)\times 3\times 4 - (-1)\times 4\times 3 = 60 \neq 0,$$

故方程组有解.

解

又

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix}=180,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix}=60,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix}=60,$$

因此，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{180}{60}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{60}{60}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{60}{60}=1.$$

观察式 (1.7), 可以发现其右端是一些项的代数和, 其中, 每项是位于不同行、不同列的三个数相乘, 这三个数的第一个下标是按自然顺序排列的, 第二个下标则不全按自然顺序排列. 我们不禁要问: 这个代数和的项数、每项前的符号与第二个下标的排列顺序有无关系? 为此下面给出全排列、逆序数等概念.

定义 (1)

由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n **级全排列** (简称**排列**).

例如, 213 是一个 3 级排列; 4321 及 2341 都是 4 级排列. 一般来说, n 级排列总共有 $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n\,!$ 个 ($n\,!$ 读作 "n 的阶乘"). 例如, 3 级排列的总数是 $3! = 6$, 它们分别是 $123, 132, 213, 231, 312, 321$. 在 n 级排列中, 排列 $123 \cdots n$ 是按从小到大的自然顺序排列的, 称为**自然排列**. 除此以外, 其余的排列中, 都有较大的数排在较小的数前面的情况.

观察式 (1.7), 可以发现其右端是一些项的代数和, 其中, 每项是位于不同行、不同列的三个数相乘, 这三个数的第一个下标是按自然顺序排列的, 第二个下标则不全按自然顺序排列. 我们不禁要问: 这个代数和的项数、每项前的符号与第二个下标的排列顺序有无关系? 为此下面给出全排列、逆序数等概念.

定义 (1)

由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列 (简称排列).

例如, 213 是一个 3 级排列; 4321 及 2341 都是 4 级排列. 一般来说, n 级排列总共有 $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ 个 ($n!$ 读作 "n 的阶乘"). 例如, 3 级排列的总数是 $3! = 6$, 它们分别是 $123, 132, 213, 231, 312, 321$. 在 n 级排列中, 排列 $123 \cdots n$ 是按从小到大的自然顺序排列的, 称为自然排列. 除此以外, 其余的排列中, 都有较大的数排在较小的数前面的情况.

观察式 (1.7), 可以发现其右端是一些项的代数和, 其中, 每项是位于不同行、不同列的三个数相乘, 这三个数的第一个下标是按自然顺序排列的, 第二个下标则不全按自然顺序排列. 我们不禁要问: 这个代数和的项数、每项前的符号与第二个下标的排列顺序有无关系? 为此下面给出全排列、逆序数等概念.

定义 (1)

由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n **级全排列** (简称**排列**).

例如, 213 是一个 3 级排列; 4321 及 2341 都是 4 级排列. 一般来说, n 级排列总共有 $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n\,!$ 个 ($n\,!$ 读作 "n 的阶乘"). 例如, 3 级排列的总数是 $3! = 6$, 它们分别是 $123, 132, 213, 231, 312, 321$. 在 n 级排列中, 排列 $123 \cdots n$ 是按从小到大的自然顺序排列的, 称为**自然排列**. 除此以外, 其余的排列中, 都有较大的数排在较小的数前面的情况.

定义 (2)

在一个排列中，如果某个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这两个数 (或这个数对) 构成一个**逆序**. 一个排列中，逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，一般记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.
例如，排列 12 的逆序数为 0; 排列 21 的逆序数为 1; 排列 231 中，数对 21 和 31 均构成逆序，而 23 不构成逆序，因此排列 231 的逆序数为 2; 同理，排列 213 的逆序数为 1，即 $\tau(213) = 1$.

定义 (2)

在一个排列中，如果某个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这两个数 (或这个数对) 构成一个**逆序**. 一个排列中，逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，一般记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.
例如，排列 12 的逆序数为 0; 排列 21 的逆序数为 1; 排列 231 中，数对 21 和 31 均构成逆序，而 23 不构成逆序，因此排列 231 的逆序数为 2; 同理，排列 213 的逆序数为 1，即 $\tau(213)=1$.

定义 (3)

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**, 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如, 2 级排列 12 为偶排列, 21 为奇排列 3 级排列 231 为偶排列, 213 为奇排列.

对任意一个排列, 可以按照以下方法计算它的逆序数: 设所给排列为 $j_1j_2\cdots j_n$, 考虑 $j_i(i=1,2,\cdots,n)$, 如果在排列中排在 j_i 的前面且比 j_i 大的数有 τ_i 个, 则称 j_i 的逆序数为 τ_i. 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数即为其全体元素的逆序数之和:

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\sum_{i=1}^{n}\tau_i.$$

定义 (3)

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**, 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如, 2 级排列 12 为偶排列, 21 为奇排列 3 级排列 231 为偶排列, 213 为奇排列.

对任意一个排列, 可以按照以下方法计算它的逆序数: 设所给排列为 $j_1j_2\cdots j_n$, 考虑 $j_i(i=1,2,\cdots,n)$, 如果在排列中排在 j_i 的前面且比 j_i 大的数有 τ_i 个, 则称 j_i 的逆序数为 τ_i. 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数即为其全体元素的逆序数之和:

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\sum_{i=1}^{n}\tau_i.$$

例 (3)

计算以下各排列的逆序数, 并指出它们的奇偶性:

(1) 42531; (2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解

(1) 对于所给排列, 4 排在首位, 其逆序数为 0; 2 的前面有一个比它大的数, 其逆序数为 1; 5 的前面没有比它大的数, 其逆序数为 0; 3 的前面有两个比它大的数, 其逆序数为 2; 1 的前面有四个比它大的数, 其逆序数为 4. 把这些数加起来, 即 $\tau(42531)=0+1+0+2+4=7$, 故排列 42531 是奇排列.

(2) 同理, 可得

$$\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)]=0+\sum_{j=0}^{n-1}j=\frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时, 所给排列为偶排列; 当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时, 所给排列为奇排列.

例 (3)

计算以下各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

(1) 42531;　　　(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解

(1) 对于所给排列，4 排在首位，其逆序数为 0; 2 的前面有一个比它大的数，其逆序数为 1; 5 的前面没有比它大的数，其逆序数为 0; 3 的前面有两个比它大的数，其逆序数为 2; 1 的前面有四个比它大的数，其逆序数为 4. 把这些数加起来，即 $\tau(42531)=0+1+0+2+4=7$, 故排列 42531 是奇排列.

(2) 同理，可得

$$\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)]=0+\sum_{j=0}^{n-1}j=\frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，所给排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，所给排列为奇排列.

例 (3)

计算以下各排列的逆序数, 并指出它们的奇偶性:
(1) 42531; (2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解

(1) 对于所给排列, 4 排在首位, 其逆序数为 0; 2 的前面有一个比它大的数, 其逆序数为 1; 5 的前面没有比它大的数, 其逆序数为 0; 3 的前面有两个比它大的数, 其逆序数为 2; 1 的前面有四个比它大的数, 其逆序数为 4. 把这些数加起来, 即 $\tau(42531)=0+1+0+2+4=7$, 故排列 42531 是奇排列.
(2) 同理, 可得

$$\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)]=0+\sum_{j=0}^{n-1}j=\frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时, 所给排列为偶排列; 当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时, 所给排列为奇排列.

定义 (4)

在一个 n 级排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，将某两个数 i_s 与 i_t 对调，其余的数不动，得到另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，这种对排列的变换称为**对换**，记为 (i_s, i_t). 将相邻两个数对换，称为**相邻对换** (或邻换).

例如，对排列 23541 施以对换 $(2, 5)$ 后得到排列 53241.

定理 (1)

任意一个排列经过一次对换后，其奇偶性改变.

定义 (4)

在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，将某两个数 i_s 与 i_t 对调，其余的数不动，得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这种对排列的变换称为**对换**，记为 (i_s, i_t). 将相邻两个数对换，称为**相邻对换** (或邻换).

例如，对排列 23541 施以对换 $(2,5)$ 后得到排列 53241.

定理 (1)

任意一个排列经过一次对换后，其奇偶性改变.

定义 (4)

在一个 n 级排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，将某两个数 i_s 与 i_t 对调，其余的数不动，得到另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，这种对排列的变换称为**对换**，记为 (i_s, i_t). 将相邻两个数对换，称为**相邻对换** (或邻换).

例如，对排列 23541 施以对换 $(2, 5)$ 后得到排列 53241.

定理 (1)

任意一个排列经过一次对换后，其奇偶性改变.

证明.

先证相邻对换的情形. 设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$, 对换 p_i 与 p_{i+1} 两个数, 则排列变为

$$p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n.$$

显然, $p_1,\cdots,p_{i-1},p_{i+2},\cdots,p_n$ 这些数的逆序数经过对换并不改变, 仅 p_i 与 p_{i+1} 两数的逆序数改变, 即当 $p_i<p_{i+1}$ 时, 对换后, $p_{i+1}p_i$ 是逆序, 新排列的逆序数增加 1; 当 $p_i>p_{i+1}$ 时, $p_{i+1}p_i$ 不是逆序, 新排列的逆序数减少 1 . 所以排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$ 与排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$ 的逆序数相差 1, 奇偶性改变. □

证明.

再证一般对换的情形. 设排列为

$$p_1 \cdots p_{i-1} p_i p_{i+1} \cdots p_{i+m} p_{i+m+1} p_{i+m+2} \cdots p_n,$$

对换 p_i 与 p_{i+m+1}, 可以按如下方法实现: 把 p_i 往后连续作 m 次相邻对换, 排列变为

$$p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_{i+m} p_i p_{i+m+1} p_{i+m+2} \cdots p_n,$$

再把 p_{i+m+1} 往前连续作 $m+1$ 次相邻对换, 排列变为

$$p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+m+1} p_{i+1} \cdots p_{i+m} p_i p_{i+m+2} \cdots p_n,$$

它是经 $2m+1$ 次相邻对换而成的, 排列也就改变了 $2m+1$ 次奇偶性, 所以两个排列的奇偶性相反. 证毕. $\square$

定理 (2)

由 n 个自然数 $(n>1)$ 组成的 n 级排列总共有 $n!$ 个，其中奇、偶排列各占一半.

证明.

由前面已知 n 级排列的总数为 $n!$ 个，设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 若对每个奇排列都施以同一对换，则由定理 1，p 个奇排列均变为偶排列，故 $p \leqslant q$；同理，若对每个偶排列也施以同一对换，则 q 个偶排列均变为奇排列. 故 $q \leqslant p$. 所以 $p=q$，从而 $p=q=\frac{n!}{2}$. 证毕. □

下面探讨式 (1.3)、式 (1.7) 右端各项的规律.

定理 (2)

由 n 个自然数 $(n>1)$ 组成的 n 级排列总共有 $n!$ 个，其中奇、偶排列各占一半.

证明.

由前面已知 n 级排列的总数为 $n\,!$ 个，设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 若对每个奇排列都施以同一对换，则由定理 1，p 个奇排列均变为偶排列，故 $p \leqslant q$；同理，若对每个偶排列也施以同一对换，则 q 个偶排列均变为奇排列. 故 $q \leqslant p$. 所以 $p=q$，从而 $p=q=\frac{n!}{2}$. 证毕. □

下面探讨式 (1.3)、式 (1.7) 右端各项的规律.

定理 (2)

由 n 个自然数 $(n>1)$ 组成的 n 级排列总共有 $n!$ 个，其中奇、偶排列各占一半.

证明.

由前面已知 n 级排列的总数为 $n\,!$ 个，设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 若对每个奇排列都施以同一对换，则由定理 1，p 个奇排列均变为偶排列，故 $p \leqslant q$; 同理，若对每个偶排列也施以同一对换，则 q 个偶排列均变为奇排列. 故 $q \leqslant p$. 所以 $p=q$，从而 $p=q=\frac{n!}{2}$. 证毕. □

下面探讨式 (1.3)、式 (1.7) 右端各项的规律.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =& a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

式 (1.3) 右端各项的第一个下标按自然顺序排列, 对它们的第二个下标进行观察: 第二个下标由两个自然数 1 和 2 组成, 只能构成两个 2 级排列 12 和 21, 排列的个数等于式 (1.3) 右端的项数. 排列 12 的逆序数为 0, 对应项的符号为 "+" ; 而排列 21 的逆序数为 1, 对应项的符号为 "−" . 式 (1.7) 右端各项的第一个下标按自然顺序排列, 第二个下标由自然数 1, 2 和 3 组成, 这 3 个数构成的 3 级排列共有 $3! = 6$ 个, 分别为 $123, 231, 312, 132, 213, 321$, 这正好等于式 (1.7) 右端的项数. 排列 $123, 231, 312$ 的逆序数分别为 $0, 2, 2$, 它们均为偶排列, 对应项的符号为 "+" ; 排列 $132, 213, 321$ 的逆序数分别为 $1, 1, 3$, 它们均为奇排列, 对应项的符号为 "−" .

综上所述，式 (1.7) 右端各项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里 $j_1j_2j_3$ 是 $1,2,3$ 的一个 3 级排列. 当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正号；当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为负号. 各项所带符号均可表示为 $(-1)^{\tau}$，其中 $\tau=\tau(j_1j_2j_3)$ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数. 从而式 (1.7) 可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{1.8}$$

其中 $\sum_{j_1j_2j_3}$ 表示对全体 3 级排列求和.
可以仿照三阶行列式的定义式 (1.8) 给出 n 阶行列式的定义.

定义 (5)

由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积的代数和

$$\sum (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1.9}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列, τ 为这个排列的逆序数.

定义 (5)

这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \qquad (1.10)$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

式 (1.10) 称为 n 阶行列式的展开式, 它是前面所说的二阶行列式和三阶行列式的推广. 特别地, 当 $n = 1$ 时, 一阶行列式 $|a|$ 就是数 a. 注意, 这里的 "$|\ |$" 不要与绝对值记号相混淆.

定义 (5)

这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \qquad (1.10)$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

式 (1.10) 称为 n 阶行列式的展开式, 它是前面所说的二阶行列式和三阶行列式的推广. 特别地, 当 $n = 1$ 时, 一阶行列式 $|a|$ 就是数 a. 注意, 这里的 "$|\ |$" 不要与绝对值记号相混淆.

例 (4)

计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解

根据定义, D 的展开式中应有 $4! = 24$ 项. 考虑其一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$, 由于第一行中除 a_{14} 外其余元素全为 0, 故只考虑 $j_1 = 4$; 同理, 其余行中只需考虑 $j_2 = 3, j_3 = 2, j_4 = 1$. 这就是说, 行列式中不为 0 的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$, 而 $\tau(4321) = 6$, 这一项前面的符号应该是正号. 因此有

$$D = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

例 (4)

计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}.$$

解

根据定义，D 的展开式中应有 $4!=24$ 项．考虑其一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，由于第一行中除 a_{14} 外其余元素全为 0，故只考虑 $j_1=4$；同理，其余行中只需考虑 $j_2=3, j_3=2,\ j_4=1$．这就是说，行列式中不为 0 的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，而 $\tau(4321)=6$，这一项前面的符号应该是正号．因此有

$$D=1\times2\times3\times4=24.$$

例 (5)

计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

上述行列式称为下三角形行列式, 它的特点是 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的主对角线以上的元素全为 0, 即当 $i<j$ 时, 元素 $a_{ij}=0$.

解

D 的展开式中的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

第一行中，除 a_{11} 外其余元素全为 0，故取 $j_1 = 1$；第一行中，除 a_{21}, a_{22} 外其余元素全为 0，但由于已取 $j_1 = 1$，故只能取 $j_2 = 2$；同理，在其余行中，只需考虑 $j_3 = 3, \cdots, j_n = n$. 因此，D 的展开式中，除乘积 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 外其余各项均为 0. 由于 $\tau(12 \cdots n) = 0$，所以这一项前面的符号为正号，故有 $D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

在一个行列式中，如果主对角线以下的元素全为 0，即当 $i > j$ 时，元素 $a_{ij} = 0$，则该行列式称为上三角形行列式. 同理可以证明，n 阶上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在一个行列式中，如果主对角线以外的元素全为 0，即当 $i \neq j$ 时，元素 $a_{ij} = 0$，则该行列式称为对角行列式. 显然，对角行列式既是上三角形行列式，又是下三角形行列式. 因此有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

其中，未写出的元素全为 0.

在一个行列式中，如果主对角线以下的元素全为 0，即当 $i > j$ 时，元素 $a_{ij} = 0$，则该行列式称为上三角形行列式. 同理可以证明，n 阶上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在一个行列式中，如果主对角线以外的元素全为 0，即当 $i \neq j$ 时，元素 $a_{ij} = 0$，则该行列式称为对角行列式. 显然，对角行列式既是上三角形行列式，又是下三角形行列式. 因此有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

其中，未写出的元素全为 0.

例 (6)

证明
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

其中 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ 所在的副对角线以下的元素全为 0.

证明.

由于行列式的值为 $\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$, 因此只需对可能不为 0 的乘积 $(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 求和. 考虑第 n 行元素 a_{nj_n}, 知 $j_n = 1$ 时 a_{nj_n} 可能不为 0, 再考虑第 $n-1$ 行元素 $a_{n-1,j_{n-1}}$, 知 $j_{n-1} = 1$ 或 $j_{n-1} = 2$ 时 $a_{n-1,j_{n-1}}$ 可能不为 0, 由 $j_n = 1$ 知, $j_{n-1} = 2$, 以此类推, $j_2 = n-1, j_1 = n$, 故排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能是排列 $n(n-1)\cdots 21$, 它的逆序数为 $\tau = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$. 所以行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

例 (6)

证明
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$
其中 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ 所在的副对角线以下的元素全为 0.

证明.

由于行列式的值为 $\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，因此只需对可能不为 0 的乘积 $(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 求和. 考虑第 n 行元素 a_{nj_n}，知 $j_n = 1$ 时 a_{nj_n} 可能不为 0, 再考虑第 $n-1$ 行元素 $a_{n-1,j_{n-1}}$，知 $j_{n-1} = 1$ 或 $j_{n-1} = 2$ 时 $a_{n-1,j_{n-1}}$ 可能不为 0, 由 $j_n = 1$ 知, $j_{n-1} = 2$, 以此类推, $j_2 = n-1, j_1 = n$, 故排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能是排列 $n(n-1)\cdots 21$, 它的逆序数为 $\tau = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$. 所以行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

特别地，有

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & \iddots & \\ & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

上述行列式称为反对角行列式.
由于数的乘法是可交换的，所以行列式的展开式的各项中的元素的顺序也可任意交换. 例如，四阶行列式中，乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{14}$ 可以写成 $a_{22}a_{11}a_{44}a_{33}$；一般 n 阶行列式中，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可以写成 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 都是 n 级排列.

定理 (3)

n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 均为 n 级排列.

证明.

该项中任意两元素互换, 行下标与列下标同时对换, 由定理 1 知, n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 同时改变奇偶性, 于是 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)$ 的奇偶性不变. 如果将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换为自然排列 $12\cdots n$ (逆序数为 0), 排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 也相应对换为 $j_1j_2\cdots j_n$, 则有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

证毕. $\square$

定理 (3)

n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)+\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n},$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 均为 n 级排列.

证明.

该项中任意两元素互换, 行下标与列下标同时对换, 由定理 1 知, n 级排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 同时改变奇偶性, 于是 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)+\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)$ 的奇偶性不变. 如果将排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 对换为自然排列 $12 \cdots n$ (逆序数为 0), 排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 也相应对换为 $j_1 j_2 \cdots j_n$, 则有

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)+\mathrm{r}(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}.$$

证毕. □

由定理 3 可知, 行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)+\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}. \tag{1.11}$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列, 而将相应行下标的排列设为 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 于是行列式又可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \tag{1.12}$$

由定理 3 可知, 行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)+\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}. \tag{1.11}$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列, 而将相应行下标的排列设为 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 于是行列式又可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \tag{1.12}$$

例 (7)

试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是六阶行列式中的项.

解

由于

$$\tau(431265)=6,$$

所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是六阶行列式中的项.

而

$$\tau(341526)+\tau(234156)=5+3=8,$$

所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是六阶行列式中的项.

例 (7)

试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是六阶行列式中的项.

解

由于

$$\tau(431265) = 6,$$

所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是六阶行列式中的项.
而

$$\tau(341526) + \tau(234156) = 5 + 3 = 8,$$

所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是六阶行列式中的项.

例 (8)

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

证明 $D = D_1 D_2$.

证明.

记

$$D=\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{61} & \cdots & d_{66} \end{vmatrix},$$

其中

$$\begin{gathered} d_{k1}=a_{k1},\quad d_{k2}=a_{k2},\quad k_{k3}=a_{k3}, \\ d_{3+k,1}=c_{k1},\quad d_{3+k,2}=c_{k2},\quad d_{3+k,3}=c_{k3}, \\ d_{k4}=d_{k5}=d_{k6}=0, \\ d_{3+k,4}=b_{k1},\quad d_{3+k,5}=b_{k2},\quad d_{3+k,6}=b_{k3}\quad (k=1,2,3). \end{gathered}$$

考察 D 的一般项 $(-1)^\tau d_{1r_1}d_{2r_2}d_{3r_3}d_{4r_1}d_{5r_5}d_{6r_6}$, τ 是排列 $r_1r_2r_3r_4r_5r_6$ 的逆序数. 由于 $d_{k4}=d_{k5}=d_{k6}=0$ $(k=1,2,3)$, 因此 r_1,r_2,r_3 均不可大于 3, 否则该项为 0, 故 r_1,r_2,r_3 只能在 $1,2,3$ 中选取, 从而 r_4,r_5,r_6 只能在 $4,5,6$ 中选取, 于是 D 中不为 0 的项可以记作 □

证明.

于是 D 中不为 0 的项可以记作

$$(-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} b_{1q_1} b_{2q_2} b_{3q_3},$$

这里 $p_1 = r_1, p_2 = r_2, p_3 = r_3, q_1 = r_4 - 3, q_2 = r_5 - 3, q_3 = r_6 - 3$, τ 是排列 $p_1 p_2 p_3 (q_1 + 3) \cdot (q_2 + 3) (q_3 + 3)$ 的逆序数. 显然, 有
$\tau = \tau\left[p_1 p_2 p_3 (q_1 + 3) (q_2 + 3) (q_3 + 3)\right] = \tau (p_1 p_2 p_3) + \tau (q_1 q_2 q_3)$, 这里 $\tau (p_1 p_2 p_3)$ 与 $\tau (q_1 q_2 q_3)$ 分别是排列 $p_1 p_2 p_3$ 与 $q_1 q_2 q_3$ 的逆序数. 于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1 p_2 p_3} \sum_{q_1 q_2 q_3} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3) + \tau(q_1 q_2 q_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} b_{1q_1} b_{2q_2} b_{3q_3} \\ &= \left[\sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}\right] \cdot \left[\sum_{q_1 q_2 q_3} (-1)^{\tau(q_1 q_2 q_3)} b_{1q_1} b_{2q_2} b_{3q_3}\right] \\ &= D_1 D_2. \end{aligned}$$

证毕. $\square$

第 2 节中引入了行列式的概念，并且利用行列式的定义计算了几个比较简单的行列式，但不难看出，行列式的计算是比较麻烦的，尤其是当行列式的阶数增大时，计算量会越来越大. 因此有必要研究行列式的性质，使实际计算行列式变得方便、快捷.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} (也可记为 D') 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 (1)

行列式与它的转置行列式相等.

证明.

记

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 按行列式的定义, 有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D. \end{aligned}$$

$\square$

性质 (1)

行列式与它的转置行列式相等.

证明.

记

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 按行列式的定义, 有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D. \end{aligned}$$

□

性质 (2)

互换行列式的两行 (列), 行列式反号.

证明.

下面只证列的情形. 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 p, q 两列, 得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 (2)

互换行列式的两行 (列), 行列式反号.

证明.

下面只证列的情形. 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 p, q 两列, 得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明.

将 D 与 D_1 按式 (1.12) 计算, 对于 D 中任意一项

$$(-1)^{\tau} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

其中 τ 为排列 $i_1 i_2 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$ 的逆序数, 在 D_1 中必有对应一项

$$(-1)^{\tau_1} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n}$$

(当 $j \neq p, q$ 时, 第 j 列元素取 $a_{i_j j}$, 第 p 列元素取 $a_{i_q q}$, 第 q 列元素取 $a_{i_p p}$), 其中 τ_1 为排列 $i_1 i_2 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$ 的逆序数. 而 $i_1 i_2 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$ 与 $i_1 i_2 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$ 只经过一次对换, 由定理 1 知, $(-1)^{\tau}$ 与 $(-1)^{\tau_1}$ 符号相反. 又因

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n},$$

故对于 D 中任意一项, D_1 中必定有一项与它的符号相反而两者的绝对值相等, 又 D 与 D_1 的项数相同, 所以 $D = -D_1$. $\square$

本书中，交换行列式第 i 行和第 j 行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$; 交换行列式第 i 列和第 j 列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 (1)

若行列式有两行 (列) 元素对应相等，则行列式为零.

证明.

互换元素相等的两行 (列)，有 $D = -D$，故 $D = 0$. 证毕. □

性质 (3)

行列式的某一行 (列) 中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

第 i 行 (列) 乘以数 k，记作 $k \times r_i (k \times c_i)$.

本书中，交换行列式第 i 行和第 j 行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$; 交换行列式第 i 列和第 j 列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 (1)

若行列式有两行 (列) 元素对应相等，则行列式为零.

证明.

互换元素相等的两行 (列)，有 $D = -D$, 故 $D = 0$. 证毕. □

性质 (3)

行列式的某一行 (列) 中所有元素都乘以同一个数 k, 等于用数 k 乘以此行列式.

第 i 行 (列) 乘以数 k, 记作 $k \times r_i (k \times c_i)$.

本书中，交换行列式第 i 行和第 j 行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$; 交换行列式第 i 列和第 j 列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 (1)

若行列式有两行 *(列)* 元素对应相等，则行列式为零.

证明.

互换元素相等的两行 (列)，有 $D = -D$，故 $D = 0$. 证毕. □

性质 (3)

行列式的某一行 *(列)* 中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

第 i 行 (列) 乘以数 k，记作 $k \times r_i (k \times c_i)$.

推论 (2)

行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子, 可以提到行列式符号的外面.

推论 (3)

若行列式中有一行 (列) 的元素全为零, 则此行列式为零.

性质 (4)

若行列式中有两行 (列) 元素对应成比例, 则此行列式为零.

性质 (5)

若行列式的某行 (列) 的元素都是两个数之和, 则此行列式等于相应的两个行列式的和.

推论 (2)

行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子, 可以提到行列式符号的外面.

推论 (3)

若行列式中有一行 (列) 的元素全为零, 则此行列式为零.

性质 (4)

若行列式中有两行 (列) 元素对应成比例, 则此行列式为零.

性质 (5)

若行列式的某行 (列) 的元素都是两个数之和, 则此行列式等于相应的两个行列式的和.

推论 (2)

行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子, 可以提到行列式符号的外面.

推论 (3)

若行列式中有一行 (列) 的元素全为零, 则此行列式为零.

性质 (4)

若行列式中有两行 (列) 元素对应成比例, 则此行列式为零.

性质 (5)

若行列式的某行 (列) 的元素都是两个数之和, 则此行列式等于相应的两个行列式的和.

推论 (2)

行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子, 可以提到行列式符号的外面.

推论 (3)

若行列式中有一行 (列) 的元素全为零, 则此行列式为零.

性质 (4)

若行列式中有两行 (列) 元素对应成比例, 则此行列式为零.

性质 (5)

若行列式的某行 (列) 的元素都是两个数之和, 则此行列式等于相应的两个行列式的和.

例如:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 显然可以推广到某一行 (列) 为多组数的和的情形.

性质 (6)

把行列式某一行 (列) 的元素乘以数 k, 加到另一行 (列) 的对应元素上, 行列式的值不变.

例如, 以数 k 乘以第 i 行 (列) 的元素加到第 j 行 (列) 的对应元素上, 记作 $r_j + k \times r_i (c_j + k \times c_i)$, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j + k \times r_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{j1} + ka_{i1}) & (a_{j2} + ka_{i2}) & \cdots & (a_{jn} + ka_{in}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意: $r_j + k \times r_i$ 不能写作 $k \times r_i + r_j$.

性质 (6)

把行列式某一行 *(列)* 的元素乘以数 k, 加到另一行 *(列)* 的对应元素上, 行列式的值不变.

例如, 以数 k 乘以第 i 行 (列) 的元素加到第 j 行 (列) 的对应元素上, 记作 $r_j + k \times r_i\,(c_j + k \times c_i)$, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j + k \times r_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{j1} + ka_{i1}) & (a_{j2} + ka_{i2}) & \cdots & (a_{jn} + ka_{in}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意: $r_j + k \times r_i$ 不能写作 $k \times r_i + r_j$.

例 (9)

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ c & a & d & b \\ a & c & d & b \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal[r_4+(-1)\times r_1]{r_3+(-1)\times r_2} \begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ 0 & 0 & d-b & b-d \\ 0 & 0 & d-b & b-d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{推论1}} 0.$$

例 (9)

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ c & a & d & b \\ a & c & d & b \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal[r_4+(-1)\times r_1]{r_3+(-1)\times r_2} \begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ 0 & 0 & d-b & b-d \\ 0 & 0 & d-b & b-d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{推论1}} 0.$$

例 (10)

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+5\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

例 (10)

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+5\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+5\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+(-8)\times r_2]{r_3+4\times r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}\times r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 8 \times \frac{5}{2} = 40.$$

例 10 是通过行列式的性质将一个行列式的计算转化为一个上三角形 (或下三角形) 行列式的计算. 这种计算行列式的方法称为化三角形法.

例 (11)

计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解

解法 1 行列式 D 的主对角线上的元素全为 a, 而其余元素全为 b, 注意到行列式每行的元素之和是相等的, 因此, 将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列, 然后提出第 1 列的公因子 $a+(n-1)b$, 得到

$$D=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+(-1)\times r_1}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

解

解法 2

$$D \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+(-1)\times r_1} \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

定义 (6)

在 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的所有元素，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的排法构成的 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

由定义 6 可知，A_{ij} 与行列式中第 i 行、第 j 列的元素无关.
例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

引理 (1)

在 n 阶行列式 D 中，如果第 i 行元素除 a_{ij} 外全部为零，那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

证明.

先证 $i=1, j=1$ 的情形，此时有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由第 2 节例 8 的结果知，

引理 (1)

在 n 阶行列式 D 中，如果第 i 行元素除 a_{ij} 外全部为零，那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

证明.

先证 $i=1, j=1$ 的情形，此时有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由第 2 节例 8 的结果知，

$\square$

证明.

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形, 此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 的第 i 行依次与第 $i-1, i-2, \cdots, 1$ 行交换后, 再将第 j 列依次与第 $j-1, j-2, \cdots, 1$ 列交换, 这样经过 $i+j-2$ 次交换后, 得 □

证明.

$$D = (-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}D_1,$$

这里 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，而 a_{ij} 在 D_1 中的余子式仍然是 a_{ij} 在 D 中的余子式 M_{ij}，因此有 $D_1 = a_{ij}M_{ij}$，故

$$D = (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}.$$

定理 (4 行列式的按行 (列) 展开定理, 或拉普拉斯 (Laplace) 展开定理)

行列式 D 等于它的任意一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

证明.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + 0 + \cdots + 0 & \cdots & 0 + \cdots + 0 + a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 (4 行列式的按行 (列) 展开定理, 或拉普拉斯 (Laplace) 展开定理)

行列式 D 等于它的任意一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

证明.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + 0 + \cdots + 0 & \cdots & 0 + \cdots + 0 + a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

同理可证按列展开的情形. 证毕. □

例 (12)

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

由定理 4, 按第一行展开, 得

$$\begin{aligned} D &= 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2\times 2 - 4\times(-6-15) \\ &= 88. \end{aligned}$$

例 (12)

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

由定理 4, 按第一行展开, 得

$$\begin{aligned} D &= 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2\times 2 - 4\times(-6-15) \\ &= 88. \end{aligned}$$

利用定理 4 虽然能将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶行列式进行计算, 但当行列式的某一行 (列) 的元素有很多不为零时, 按这一行 (列) 展开并不能减少很多计算量. 因此, 我们总是选择行列式中有较多零元素的行 (列) 展开. 更常用的方法是: 先利用行列式的性质把行列式的某一行 (列) 化为只含有一个非零元素的行 (列), 然后再结合定理 4, 将行列式按这一行 (列) 展开进行计算, 就能简化行列式的计算. 实际上这是一种将高阶行列式化为低阶行列式的计算方法. 这种计算行列式的方法称为降阶法. 降阶法在需要应用数学归纳法的行列式计算, 以及后面要介绍的应用递推法的行列式证明或计算中都起到了重要作用.

例 (13)

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal[c_4+5\times c_1]{c_2+(-2)\times c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -5 & 1 & 22 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二行展开}} 1\times(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -5 & 1 & 22 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+(-1)\times r_2]{r_1+(-3)\times r_2} - \begin{vmatrix} 6 & 0 & -14 \\ -2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二列展开}} -1\times(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6 & -14 \\ -3 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= -48.$$

例 (13)

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal[c_4+5\times c_1]{c_2+(-2)\times c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -5 & 1 & 22 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二行展开}} 1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -5 & 1 & 22 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+(-1)\times r_2]{r_1+(-3)\times r_2} -\begin{vmatrix} 6 & 0 & -14 \\ -2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二列展开}} -1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & -14 \\ -3 & 15 \end{vmatrix}$$

$$=-48.$$

例 (14)

证明范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j),$$

其中连乘积

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\cdots$$
$$(x_n - x_2)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})$$

是满足条件 $1 \leqslant j < i \leqslant n$ 的所有因子 $(x_i - x_j)$ 的乘积.

证明.

用数学归纳法证明. 当 $n=2$ 时, 有

$$V_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j),$$

结论成立. 假设结论对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立, 下面证明对 n 阶范德蒙德行列式, 结论也成立.

在 V_n 中, 从第 n 行起, 依次将前一行乘 $(-x_1)$ 加到后一行上, 得

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix},$$

按第一列展开, 并分别提取公因子, 得

证明.

用数学归纳法证明. 当 $n=2$ 时, 有

$$V_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j),$$

结论成立. 假设结论对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立, 下面证明对 n 阶范德蒙德行列式, 结论也成立.

在 V_n 中, 从第 n 行起, 依次将前一行乘 $(-x_1)$ 加到后一行上, 得

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix},$$

按第一列展开, 并分别提取公因子, 得 □

证明.

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，根据归纳假设得

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

所以

$$V_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

证毕. □

证明.

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，根据归纳假设得

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

所以

$$V_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

证毕. □

例 (15)

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

解

当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，显然 $D=0$. 现假设 $xy \neq 0$，将行列式 D 分别添加上一行和一列，并保持行列式的值不变，由引理 1 知，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4,5]{r_i+(-1)\times r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

例 (15)

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

解

当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，显然 $D=0$. 现假设 $xy\neq 0$, 将行列式 D 分别添加上一行和一列，并保持行列式的值不变，由引理 1 知，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4,5]{r_i+(-1)\times r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4,5]{r_i+(-1)\times r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+\frac{1}{y}\times c_4,\ c_1+\left(-\frac{1}{y}\right)\times c_5]{c_1+\frac{1}{x}\times c_2,\ c_1+\left(-\frac{1}{x}\right)\times c_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

由例 15 可知，有时增加行列式的行数和列数反而容易求出行列式的值．上述计算行列式的方法称为加边法．

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4,5]{r_i+(-1)\times r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+\frac{1}{y}\times c_4,\ c_1+\left(-\frac{1}{y}\right)\times c_5]{c_1+\frac{1}{x}\times c_2,\ c_1+\left(-\frac{1}{x}\right)\times c_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

由例 15 可知, 有时增加行列式的行数和列数反而容易求出行列式的值. 上述计算行列式的方法称为加边法.

例 (16)

设 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix},$$

求 D_n 的第一行各元素的代数余子式之和 $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}$.

解

由于 D_n 的第一行各元素的代数余子式 $A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n}$ 与第一行的元素无关, 可以将 $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}$ 写成 $1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + \cdots + 1 \cdot A_{1n}$, 于是将 D_n 中第一行的元素全都换成 1, 其余元素不变, 则由定理 4, 有

例 (16)

设 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix},$$

求 D_n 的第一行各元素的代数余子式之和 $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}$.

解

由于 D_n 的第一行各元素的代数余子式 $A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n}$ 与第一行的元素无关，可以将 $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}$ 写成 $1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + \cdots + 1 \cdot A_{1n}$，于是将 D_n 中第一行的元素全都换成 1，其余元素不变，则由定理 4，有

解

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+\left(-\frac{1}{i}\right)\times c_i}\begin{vmatrix}1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\0&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)\cdot n!.$$

推论 (4)

行列式 D 中任意一行 *(列)* 的元素与另一行 *(列)* 的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$\text{或}\, a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

证明.

将行列式 D 按第 j 行展开, 有

$$a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 (4)

行列式 D 中任意一行 (列) 的元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$\text{或}\, a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

证明.

将行列式 D 按第 j 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明.

因为 $A_{jk}(k=1,2,\cdots,n)$ 与行列式中第 j 行的元素无关，将上式中的 a_{jk} 换成 $a_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$，则当 $i\neq j$ 时，有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

同理可证

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

证毕. □

综上所述，即得代数余子式的重要性质 [行列式按行（列）展开公式]:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

例 (17)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

解

由行列式 D_n 可知，$D_1 = |x + a_1| = x + a_1$. 将 D_n 按第一列展开，有

例 (17)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

解

由行列式 D_n 可知，$D_1 = |x+a_1| = x+a_1$. 将 D_n 按第一列展开，有

解

由行列式 D_n 可知，$D_1 = |x + a_1| = x + a_1$. 将 D_n 按第一列展开，有

$$
\begin{aligned}
D_n =& x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

即 $D_n = xD_{n-1} + a_n$.

解

这个式子对任何 $n(n \geqslant 2)$ 都成立，故有

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n = x\left(xD_{n-2} + a_{n-1}\right) + a_n \\ &= x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n \\ &= \cdots \\ &= x^{n-1}D_1 + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\ &= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

例 17 是利用已知行列式的特性，建立起同类型的 n 阶行列式与 $n-1$ 阶（或更低阶）行列式间的关系，即导出递推公式，然后得出行列式的值. 这种计算行列式的方法称为递推公式法.

例 (18)

求方程 $f(x)=0$ 的根, 其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}.$$

解

$x=0$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个根，因为若 $x=0$，行列式第 $1,2$ 列的完素对应成比例．要求其他根，需展开这个行列式，将第 1 列乘以 -1 分别加到第 $2,3,4$ 列，再将变换后的第 2 列加到第 4 列，结合例 8，即得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ x-2 & -2 & 0 & 0 \\ x-3 & -3 & -1 & -1 \\ x-4 & -4 & x-1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ x-2 & -2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x-1 & -2 \end{vmatrix}=-x(x+1),$$

所以方程 $f(x)=0$ 有两个根：0 与 -1．

下面用 n 阶行列式求解含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组.
将含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组表示成

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right. \tag{1.13}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D 称为方程组 (1.13) 的系数行列式.

下面用 n 阶行列式求解含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组.
将含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组表示成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.13}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D 称为方程组 (1.13) 的系数行列式.

定理 (克拉默 (Cramer) 法则)

如果线性方程组 (1.13) 的系数行列式 $D \neq 0$, 那么方程组 (1.13) 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{1.14}$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是把系数行列式 D 中的第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明.

下面分两步证明. (1) 把方程组 (1.13) 简写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

把式 (1.14) $x_j = \frac{D_j}{D}$ 代入第 i 个方程, 左端变为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j.$$

因为 $D_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} = \sum_{s=1}^{n} b_sA_{sj}$, 且

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = \begin{cases} D, & s = i, \\ 0, & s \neq i, \end{cases}$$

证明.

所以

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j &= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{ij}A_{sj}b_s \\
&= \frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}b_s = \frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}\right) b_s \\
&= \frac{1}{D}Db_i = b_i.
\end{aligned}
$$

这相当于把式 (1.14) 代入方程组 (1.13) 的每个方程使它们同时变成了恒等式, 因而式 (1.14) 确实为方程组 (1.13) 的解. □

证明.

(2) 用 D 中第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$ 依次乘方程组 (1.13) 的 n 个方程, 再把所得的 n 个方程相加, 得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj}\right)x_n=\sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj}.$$

于是有

$$Dx_j = D_j \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

当 $D \neq 0$ 时, 得解一定满足式 (1.14).
综上所述, 方程组 (1.13) 有唯一解. 证毕. □

例 (19)

解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$$

所以可用克拉默法则求解.

例 (19)

解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$$

所以可用克拉默法则求解.

解

由于

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27.$$

于是方程组有唯一解

$$x_1=3,\quad x_2=-4,\quad x_3=-1,\quad x_4=1.$$

克拉默法则亦可叙述如下.

定理 (5)

如果线性方程组 (1.13) 的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组 (1.13) 一定有解, 且解是唯一的.

它的逆否命题如下.

定理 (5')

如果线性方程组 (1.13) 无解, 或至少有两个不同的解, 则它的系数行列式必为零 ($D = 0$).

应该注意的是, 克拉默法则只能应用于系数行列式不为零的含 n 个未知量、n 个方程的线性方程组, 即线性方程组的未知量的个数与方程的个数要相等且系数行列式不为零. 至于方程组的系数行列式为零的情形, 将在后面的一般线性方程组中讨论.

克拉默法则亦可叙述如下.

定理 (5)

如果线性方程组 (1.13) 的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组 (1.13) 一定有解, 且解是唯一的.

它的逆否命题如下.

定理 (5')

如果线性方程组 (1.13) 无解, 或至少有两个不同的解, 则它的系数行列式必为零 $(D = 0)$.

应该注意的是, 克拉默法则只能应用于系数行列式不为零的含 n 个未知量、n 个方程的线性方程组, 即线性方程组的未知量的个数与方程的个数要相等且系数行列式不为零. 至于方程组的系数行列式为零的情形, 将在后面的一般线性方程组中讨论.

当方程组右端的常数项全为 0 时，方程组 (1.13) 变为

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0.
\end{cases}
\tag{1.15}
$$

线性方程组 (1.15) 称为齐次线性方程组. 显然，齐次线性方程组总是有解的，因为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是它的一个解，这个解称为齐次线性方程组 (1.15) 的零解.

若有一组不全为零的数，它是齐次线性方程组 (1.15) 的解，则称它为齐次线性方程组 (1.15) 的非零解.

由定理 5 可以得到如下定理.

定理 (6)

如果齐次线性方程组 (1.15) 的系数行列式不等于零, 则齐次线性方程组 (1.15) 没有非零解.

定理 (7)

齐次线性方程组 (1.15) 存在非零解的充分必要条件是齐次线性方程组 (1.15) 的系数行列式必为零.

必要性由定理 6 可直接推出, 充分性将在第 4 章中给出证明.

由定理 5 可以得到如下定理.

定理 (6)

如果齐次线性方程组 (1.15) 的系数行列式不等于零, 则齐次线性方程组 (1.15) 没有非零解.

定理 (7)

齐次线性方程组 (1.15) 存在非零解的充分必要条件是齐次线性方程组 (1.15) 的系数行列式必为零.

必要性由定理 6 可直接推出, 充分性将在第 4 章中给出证明.

例 (20)

当 λ 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0, \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

有非零解？

解

方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda).$$

若方程组 (1.16) 有非零解，则它的系数行列式 $D=0$，从而有 $\lambda=2$，$\lambda=5$，$\lambda=8$．易证，当 $\lambda=2, \lambda=5$ 或 $\lambda=8$ 时，方程组有非零解．

例 (20)

当 λ 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0, \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

有非零解？

解

方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda).$$

若方程组 (1.16) 有非零解，则它的系数行列式 $D=0$，从而有 $\lambda=2$，$\lambda=5$，$\lambda=8$. 易证，当 $\lambda=2, \lambda=5$ 或 $\lambda=8$ 时，方程组有非零解.

例 (21)

求四个平面 $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 相交于一点 (x_0, y_0, z_0) 的必要条件.

解

把平面方程写成

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i t = 0,$$

其中 $t = 1$. 于是四个平面交于一点, 即等价于含 x, y, z, t 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t = 0, \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t = 0 \end{cases}$$

有唯一的非零解 $(x_0, y_0, z_0, 1)$.

例 (21)

求四个平面 $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0(i=1,2,3,4)$ 相交于一点 (x_0,y_0,z_0) 的必要条件.

解

把平面方程写成

$$a_ix+b_iy+c_iz+d_it=0,$$

其中 $t=1$. 于是四个平面交于一点, 即等价于含 x,y,z,t 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3t=0, \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4t=0 \end{cases}$$

有唯一的非零解 $(x_0,y_0,z_0,1)$.

例 (21)

求四个平面 $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0(i=1,2,3,4)$ 相交于一点 (x_0,y_0,z_0) 的必要条件.

解

根据齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式等于 0, 则四个平面相交于一点的必要条件为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$