第 1 节 实二次型及其标准形

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

在平面解析几何中，二次方程 $ax^2+2bxy+cy^2=d$ 表示一条二次曲线. 为了便于研究该曲线的几何性质，我们可以选择适当的角度 θ，作坐标变换

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta, \end{cases}$$

将二次方程化为只含平方项的标准方程 $a'x'^2+b'y'^2=d$. 由 a' 和 b' 的符号很快能判断出此二次曲线表示的是椭圆或者双曲线. 上述二次方程的左端是一个二次齐次多项式，从代数学的观点来看，就是通过一个可逆线性变换将一个二次齐次多项式化为只含平方项的多项式. 这样的问题，在许多理论问题或实际应用问题中常会遇到. 现在我们把这类问题一般化，讨论 n 个变量的二次齐次多项式的问题.

在平面解析几何中，二次方程 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$ 表示一条二次曲线. 为了便于研究该曲线的几何性质，我们可以选择适当的角度 θ，作坐标变换

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta, \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta, \end{cases}$$

将二次方程化为只含平方项的标准方程 $a'x'^2 + b'y'^2 = d$. 由 a' 和 b' 的符号很快能判断出此二次曲线表示的是椭圆或者双曲线. 上述二次方程的左端是一个二次齐次多项式，从代数学的观点来看，就是通过一个可逆线性变换将一个二次齐次多项式化为只含平方项的多项式. 这样的问题，在许多理论问题或实际应用问题中常会遇到. 现在我们把这类问题一般化，讨论 n 个变量的二次齐次多项式的问题.

在平面解析几何中，二次方程 $ax^2+2bxy+cy^2=d$ 表示一条二次曲线. 为了便于研究该曲线的几何性质，我们可以选择适当的角度 θ，作坐标变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

将二次方程化为只含平方项的标准方程 $a'x'^2+b'y'^2=d$. 由 a' 和 b' 的符号很快能判断出此二次曲线表示的是椭圆或者双曲线. 上述二次方程的左端是一个二次齐次多项式，从代数学的观点来看，就是通过一个可逆线性变换将一个二次齐次多项式化为只含平方项的多项式. 这样的问题，在许多理论问题或实际应用问题中常会遇到. 现在我们把这类问题一般化，讨论 n 个变量的二次齐次多项式的问题.

定义 (5.1.1)

n 元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
+ \cdots \qquad \cdots \\
+ a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为 n 元二次型, 简称为二次型.

若二次型中的系数 $a_{ij} \in \mathbf{R}$ $(i \leqslant j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则称二次型 f 为实二次型; 若 $a_{ij} \in \mathbf{C}$, 则称二次型 f 为复二次型. 本章只讨论实二次型.

定义 (5.1.1)

n 元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ + \cdots \qquad \cdots \\ + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 n 元二次型, 简称为二次型.

若二次型中的系数 $a_{ij} \in \mathbf{R}$ $(i \leqslant j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则称二次型 f 为实二次型; 若 $a_{ij} \in \mathbf{C}$, 则称二次型 f 为复二次型. 本章只讨论实二次型.

若令 $a_{ij}=a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$, 则二次型可记为

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+\\&a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+\\&\cdots+\\&a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则二次型可表示为

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}).$$

这一形式称为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵.

显然，二次型与其矩阵是互相惟一确定的. 以后在实二次型的矩阵表达式 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 中都假定 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的秩.

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则二次型可表示为

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}).$$

这一形式称为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵.

显然，二次型与其矩阵是互相惟一确定的. 以后在实二次型的矩阵表达式 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 中都假定 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的秩.

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则二次型可表示为

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}).$$

这一形式称为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式, 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵.

显然, 二次型与其矩阵是互相惟一确定的. 以后在实二次型的矩阵表达式 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 中都假定 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的秩.

例如，二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + x_2x_3 \\
&= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

这个二次型的矩阵是 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

由于 $\det \boldsymbol{A} = \dfrac{5}{2}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩也是 3.

例如，二次型

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + x_2x_3 \\
&= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

这个二次型的矩阵是 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

由于 $\det \boldsymbol{A} = \dfrac{5}{2}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩也是 3.

对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为从 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**线性变换**.
若线性变换的系数矩阵可逆，则称为**可逆线性变换**.

令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

则线性变换可记为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}.$$

将 n 元二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 作可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 则

$$f(\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}.$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=g(\boldsymbol{Y})$.

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 通过线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 后变成一个新二次型 $g(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$, 这两个二次型的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系是 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

定义 (5.1.2)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 通过线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 后变成一个新二次型 $g(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$, 这两个二次型的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系是 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

定义 (5.1.2)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **合同**.

矩阵之间的合同关系具有以下性质:

1° **反身性**: 任何 n 阶矩阵 A 都与自身合同;

2° **对称性**: 若 A 与 B 合同, 则 B 与 A 合同;

3° **传递性**: 若 A 与 B 合同且 B 与 C 合同, 则 A 与 C 合同.

可逆线性变换 $X = CY$ 把二次型 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 变为二次型 $g(Y) = Y^{\mathrm{T}}BY$, 这两个二次型的矩阵 A 与 B 合同, 即 $B = C^{\mathrm{T}}AC$, 故 A 与 B 的秩相同. 因此 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 的秩相同. 所以**可逆线性变换不改变二次型的秩.**

矩阵之间的合同关系具有以下性质:

1° 反身性: 任何 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与自身合同;

2° 对称性: 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同;

3° 传递性: 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同.

可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 把二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 变为二次型 $g(\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$, 这两个二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩相同. 因此 $f(\boldsymbol{X})$ 与 $g(\boldsymbol{Y})$ 的秩相同. 所以可逆线性变换不改变二次型的秩.

例 (5.1.1)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}$, 求实可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

解

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的二次型是

$$f(x_1,x_2)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=x_1^2-x_2^2,$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的二次型是

$$g(y_1,y_2)=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=-2y_1^2+y_2^2.$$

例 (5.1.1)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 求实可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

解

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的二次型是

$$f(x_1,x_2)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=x_1^2-x_2^2,$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的二次型是

$$g(y_1,y_2)=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=-2y_1^2+y_2^2.$$

例 (5.1.1)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}$, 求实可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

解

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的二次型是

$$f(x_1,x_2)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=x_1^2-x_2^2,$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的二次型是

$$g(y_1,y_2)=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=-2y_1^2+y_2^2.$$

解

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的二次型是

$$f(x_1, x_2) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = x_1^2 - x_2^2,$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的二次型是

$$g(y_1, y_2) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} = -2y_1^2 + y_2^2.$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 0y_1 + y_2, \\ x_2 = \sqrt{2}y_1 + 0y_2, \end{cases}$$

即令矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 则 $f(x_1, x_2)$ 与 $g(y_1, y_2)$ 的矩阵之间的关系为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$.

解

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的二次型是

$$f(x_1, x_2) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X} = x_1^2 - x_2^2,$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的二次型是

$$g(y_1, y_2) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{Y} = -2y_1^2 + y_2^2.$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 0y_1 + y_2, \\ x_2 = \sqrt{2}y_1 + 0y_2, \end{cases}$$

即令矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 则 $f(x_1, x_2)$ 与 $g(y_1, y_2)$ 的矩阵之间的关系为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$.

在各种二次型中，平方和形式

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

无疑是最简单的．下面我们将介绍，任何一个二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$ 都可以通过可逆线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化为平方和形式，这种平方和形式的二次型称为标准形．

定理 (5.1.1)

任何一个二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形．

利用配方法和对变量个数 n 使用归纳法可证明这个定理（证明从略）．下面通过具体例子说明怎样用配方法化二次型为标准形．

在各种二次型中，平方和形式

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

无疑是最简单的．下面我们将介绍，任何一个二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 都可以通过可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化为平方和形式，这种平方和形式的二次型称为标准形．

定理 (5.1.1)

任何一个二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形．

利用配方法和对变量个数 n 使用归纳法可证明这个定理（证明从略）．下面通过具体例子说明怎样用配方法化二次型为标准形．

在各种二次型中，平方和形式

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

无疑是最简单的. 下面我们将介绍，任何一个二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$ 都可以通过可逆线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化为平方和形式，这种平方和形式的二次型称为标准形.

定理 (5.1.1)

任何一个二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形.

利用配方法和对变量个数 n 使用归纳法可证明这个定理 (证明从略). 下面通过具体例子说明怎样用配方法化二次型为标准形.

例 (5.1.2)

用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 为标准形.

解

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3)+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2, \end{aligned}$$

作线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3, \\ y_2 = x_2+2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准形为 $f=y_1^2+y_2^2$.

例 (5.1.2)

用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 为标准形.

解

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\right)+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2, \end{aligned}$$

作线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3, \\ y_2 = x_2+2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准形为 $f=y_1^2+y_2^2$.

例 (5.1.2)

用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 为标准形.

解

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3\right) + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2, \end{aligned}$$

作线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形为 $f = y_1^2 + y_2^2$.

解

若用 y_1, y_2, y_3 表示 x_1, x_2, x_3，则上述线性变换又可表示为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = \quad\quad\; y_2 - 2y_3, \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad\;\; y_3, \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

则上式又可记为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$，即二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 通过可逆线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 变为标准形 $f = y_1^2 + y_2^2$.

解

若用 y_1, y_2, y_3 表示 x_1, x_2, x_3, 则上述线性变换又可表示为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

则上式又可记为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 即二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 通过可逆线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 变为标准形 $f = y_1^2 + y_2^2$.

例 (5.1.3)

用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形.

解

作线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 &, \\ x_2 = y_1 - y_2 &, \\ x_3 = & y_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f &= 2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3 \\ &= 2\left(y_1^2+y_3^2-2y_1y_3\right)-2y_2^2-2y_3^2+8y_2y_3 \\ &= 2(y_1-y_3)^2-2\left(y_2^2+4y_3^2-4y_2y_3\right)+6y_3^2 \\ &= 2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2, \end{aligned}$$

例 (5.1.3)

用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形.

解

作线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f &= 2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3 \\ &= 2\left(y_1^2+y_3^2-2y_1y_3\right)-2y_2^2-2y_3^2+8y_2y_3 \\ &= 2(y_1-y_3)^2-2\left(y_2^2+4y_3^2-4y_2y_3\right)+6y_3^2 \\ &= 2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2, \end{aligned}$$

例 (5.1.3)

用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形.

解

作线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 & , \\ x_2 = y_1 - y_2 & , \\ x_3 = \qquad\qquad y_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f &= 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 + y_2)y_3 - 6(y_1 - y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 \\ &= 2(y_1^2 + y_3^2 - 2y_1y_3) - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 8y_2y_3 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 + 4y_3^2 - 4y_2y_3) + 6y_3^2 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2, \end{aligned}$$

解

再作线性变换 $\begin{cases} z_1 = y_1 \qquad - y_3, \\ z_2 = \qquad y_2 - 2y_3, \\ z_3 = \qquad\qquad y_3, \end{cases}$ 则

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2. \tag{5.1}$$

如果再令

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{2}z_1, \\ t_2 = \sqrt{6}z_3, \\ t_3 = \sqrt{2}z_2, \end{cases}$$

则

$$f = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2. \tag{5.2}$$

(5.1) 与 (5.2) 所表示的二次型都是 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形. 由此可见,一个二次型的标准形不是惟一的. (5.2) 这样的标准形称为规范形.

解

再作线性变换 $\begin{cases} z_1 = y_1 \qquad - y_3, \\ z_2 = \qquad y_2 - 2y_3, \\ z_3 = \qquad\qquad y_3, \end{cases}$ 则

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2. \tag{5.1}$$

如果再令

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{2}z_1, \\ t_2 = \sqrt{6}z_3, \\ t_3 = \sqrt{2}z_2, \end{cases}$$

则

$$f = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2. \tag{5.2}$$

(5.1) 与 (5.2) 所表示的二次型都是 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形. 由此可见,一个二次型的标准形不是惟一的. (5.2) 这样的标准形称为规范形.

n 元二次型的规范形的一般形式为

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \quad (r \leqslant n).$$

定理 (5.1.2(惯性定理))

任何一个二次型的规范形是惟一的.

我们将这个定理的证明思路叙述如下:

n 元二次型的规范形的一般形式为

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \quad (r \leqslant n).$$

定理 (5.1.2(惯性定理))

任何一个二次型的规范形是惟一的.

我们将这个定理的证明思路叙述如下:

二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 可以通过可逆线性变换化为标准形. 经过适当的调整, 将正项集中在前面, 负项集中在后面, 表示为如下形式:

$$f(\boldsymbol{X})=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2,$$

其中 $r\leqslant n,\ d_i>0\,(i=1,2,\cdots,r)$.
再令 $z_i=\sqrt{d_i}y_i\ (i=1,2,\cdots,r)$, 则

$$f(\boldsymbol{X})=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2.$$

由于可逆线性变换不改变二次型的秩, 故标准形中系数不为零的平方项的项数 r 是惟一确定的. 在理论上还可以进一步证明, 标准形中正项项数 p 与负项项数 $r-p$ 也是惟一确定的, 故任一二次型的规范形是惟一的.

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 可以通过可逆线性变换化为标准形. 经过适当的调整, 将正项集中在前面, 负项集中在后面, 表示为如下形式:

$$f(\boldsymbol{X}) = d_1y_1^2 + \cdots + d_py_p^2 - d_{p+1}y_{p+1}^2 - \cdots - d_ry_r^2,$$

其中 $r \leqslant n$, $d_i > 0\,(i = 1, 2, \cdots, r)$.
再令 $z_i = \sqrt{d_i}y_i\ (i = 1, 2, \cdots, r)$, 则

$$f(\boldsymbol{X}) = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2.$$

由于可逆线性变换不改变二次型的秩, 故标准形中系数不为零的平方项的项数 r 是惟一确定的. 在理论上还可以进一步证明, 标准形中正项项数 p 与负项项数 $r-p$ 也是惟一确定的, 故任一二次型的规范形是惟一的.

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 可以通过可逆线性变换化为标准形. 经过适当的调整, 将正项集中在前面, 负项集中在后面, 表示为如下形式:

$$f(\boldsymbol{X}) = d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_r y_r^2,$$

其中 $r \leqslant n$, $d_i > 0\,(i = 1, 2, \cdots, r)$.
再令 $z_i = \sqrt{d_i} y_i\ (i = 1, 2, \cdots, r)$, 则

$$f(\boldsymbol{X}) = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2.$$

由于可逆线性变换不改变二次型的秩, 故标准形中系数不为零的平方项的项数 r 是惟一确定的. 在理论上还可以进一步证明, 标准形中正项项数 p 与负项项数 $r-p$ 也是惟一确定的, 故任一二次型的规范形是惟一的.

二次型的标准形中，

- 正项项数 p 称为**正惯性指数**；
- 负项项数 $r-p$ 称为**负惯性指数**；
- 正负惯性指数的差 $2p-r$ 称为**符号差**.

可逆线性变换不改变二次型的秩与正负惯性指数，而秩与惯性指数在标准形中都是一目了然的，这正是我们要用可逆线性变换化二次型为标准形的目的之一.

二次型的标准形中,

- 正项项数 p 称为正惯性指数;
- 负项项数 $r-p$ 称为负惯性指数;
- 正负惯性指数的差 $2p-r$ 称为符号差.

可逆线性变换不改变二次型的秩与正负惯性指数, 而秩与惯性指数在标准形中都是一目了然的, 这正是我们要用可逆线性变换化二次型为标准形的目的之一.

例 (5.1.4)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$$

的正负惯性指数都是 1，求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形及常数 a.

解

$f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2-y_2^2$. 因为 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正负惯性指数都是 1，所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩为 2，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的秩也为 2.

例 (5.1.4)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$$

的正负惯性指数都是 1，求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形及常数 a.

解

$f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2-y_2^2$. 因为 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正负惯性指数都是 1，所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩为 2，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的秩也为 2.

解

$f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2-y_2^2$. 因为 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正负惯性指数都是 1，所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩为 2，矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的秩也为 2. 故

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+2)=0.$$

解得 $a=1$ 或 $a=-2$.
若 $a=1$，则 $R(A)=1$，与 $R(A)=2$ 矛盾，所以 $a=-2$.

解

$f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $y_1^2 - y_2^2$. 因为 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正负惯性指数都是 1, 所以 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的秩为 2, 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的秩也为 2. 故

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+2) = 0.$$

解得 $a = 1$ 或 $a = -2$.
若 $a = 1$, 则 $R(\boldsymbol{A}) = 1$, 与 $R(\boldsymbol{A}) = 2$ 矛盾, 所以 $a = -2$.

若线性变换 $X = CY$ 中的系数矩阵 C 是正交矩阵, 则称这个线性变换为正交变换.

对 n 维实向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 设 A 为 n 阶正交矩阵, 作正交变换 $X = A\alpha$, $Y = A\beta$, 则

$$(X, Y) = (A\alpha, A\beta) = (A\alpha)^{\mathrm{T}}(A\beta) = \alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\beta = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = (\alpha, \beta).$$

即正交变换保持向量内积不变, 因此也就保持向量的长度与夹角不变. 于是, 在正交变换下, 几何图形的形状不会发生改变. 而这个特征是一般可逆线性变换所不具备的, 这也是我们着重讨论正交变换的目的之一.

若线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 中的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵, 则称这个线性变换为正交变换.

对 n 维实向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$, 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵, 作正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$, 则

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

即正交变换保持向量内积不变, 因此也就保持向量的长度与夹角不变. 于是, 在正交变换下, 几何图形的形状不会发生改变. 而这个特征是一般可逆线性变换所不具备的, 这也是我们着重讨论正交变换的目的之一.

若线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 中的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵, 则称这个线性变换为正交变换.

对 n 维实向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$, 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵, 作正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$, 则

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

即正交变换保持向量内积不变, 因此也就保持向量的长度与夹角不变.
于是, 在正交变换下, 几何图形的形状不会发生改变. 而这个特征是一般可逆线性变换所不具备的, 这也是我们着重讨论正交变换的目的之一.

若线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 中的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵, 则称这个线性变换为正交变换.

对 n 维实向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$, 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵, 作正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$, 则

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

即正交变换保持向量内积不变, 因此也就保持向量的长度与夹角不变. 于是, 在正交变换下, 几何图形的形状不会发生改变. 而这个特征是一般可逆线性变换所不具备的, 这也是我们着重讨论正交变换的目的之一.

设 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是实二次型. 则 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 由 §4.4 定理 3 可知, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 其中
$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.
作正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 则

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

于是, 我们已经证明了如下定理:

定理 (5.1.3(主轴定理))

任何一个实二次型都可以通过正交变换化为标准形.

设 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是实二次型. 则 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 由 §4.4 定理 3 可知, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.
作正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 则

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

于是, 我们已经证明了如下定理:

定理 (5.1.3(主轴定理))

任何一个实二次型都可以通过正交变换化为标准形.

定理 (5.1.3(主轴定理))

任何一个实二次型都可以通过正交变换化为标准形.

由以上推导可知，用正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为标准形的主要工作，在于求正交矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 这项工作在第四章中已经做了详细的讨论.

用正交变换化二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为标准形，平方项的系数刚好是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，若不计特征值的排列顺序，则这样的标准形是惟一的.

定理 (5.1.3(主轴定理))

任何一个实二次型都可以通过正交变换化为标准形.

由以上推导可知，用正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为标准形的主要工作，在于求正交矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 这项工作在第四章中已经做了详细的讨论.

用正交变换化二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为标准形，平方项的系数刚好是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，若不计特征值的排列顺序，则这样的标准形是惟一的.

例 (5.1.5)

用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

为标准形.

解

$f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$,

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

特征值 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=-7$.

例 (5.1.5)

用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

为标准形.

解

$f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$,

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7),$$

特征值 $\lambda_1 = 2$ (2 重), $\lambda_2 = -7$.

解

对于 $\lambda_1 = 2$, 线性方程组 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,0,1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化, 有

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (-2,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}(2,4,5)^{\mathrm{T}},$$

再将 β_1, β_2 单位化, 有

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^{\mathrm{T}}.$$

解

对于 $\lambda_1 = 2$, 线性方程组 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化, 有

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^{\mathrm{T}},$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 单位化, 有

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^{\mathrm{T}}.$$

解

对于 $\lambda_2=-7$，线性方程组 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，有

$$\gamma_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 是正交变换，且 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

解

对于 $\lambda_2=-7$, 线性方程组 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$, 将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化, 有

$$\gamma_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 是正交变换, 且 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

小结 (I)

- 二次型及其矩阵表示: $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \quad \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\right)$. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵. 二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的秩.
- 若线性变换的系数矩阵可逆, 则称为可逆线性变换. 二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 通过线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 后变成一个新二次型 $g(\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$, 这两个二次型的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是合同的.
- 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.
- 标准形: $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$.
- 规范形: $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2 \quad (r\leqslant n)$.

小结 (II)

- 任何一个二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形 (规范形).
- 任何一个二次型的规范形是惟一的.
- 二次型的标准形中, 正项项数 p 称为正惯性指数, 负项项数 $r-p$ 称为负惯性指数, 而正负惯性指数的差 $2p-r$ 称为符号差. 可逆线性变换不改变二次型的秩与正负惯性指数.
- 用配方法化二次型为标准形: 含平方项的情况; 不含平方项的情况.
- 用正交变换化二次型为标准形: 任何一个实二次型都可以通过正交变换化为标准形.
- 用正交变换化二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为标准形, 平方项的系数刚好是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值, 若不计特征值的排列顺序, 则这样的标准形是惟一的.