# 第3节 拉普拉斯定理

# 安徽财经大学

统计与应用数学学院





安徽财经大学

拉普拉斯 (Laplace) 定理是行列式按一行 (列) 展开的推广 下面我们先将余子式与代数余子式的概念加以推广

## 定义 (2.3.1)

在 n 阶行列式 D 中, 任取 k 行、k 列  $(1 \le k \le n)$ , 位于这 k 行、k 列的 交点上的  $k^2$  个元按原来的相对位置组成的 k 阶行列式 S, 称为 D 的一个 k 阶子式. 在 D 中划去 S 所在的 k 行与 k 列, 余下的元按原来的相对位置组成的 n-k 阶行列式 M 称为 S 的余子式. 设 S 的各行位于 D 中第  $i_1,i_2,\cdots,i_k$  行  $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ , S 的各列位于 D 中第  $j_1,j_2,\cdots,j_k$  列  $(j_1 < j_2 < \cdots < j_k)$ , 则称

$$A = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M$$

为 S 的代数余子式.





$$D = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right|$$

# 中选取第 1,3 行, 第 2,4 列得一个二阶子式

$$S = \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 2,$$

S 的余子式为

$$M = \left| \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1,$$

S 的代数余子式为

$$A = (-1)^{(1+3)+(2+4)} M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$



$$D = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right|$$

中选取第 1,3 行, 第 2,4 列得一个二阶子式

$$S = \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 2,$$

## S 的余子式为

$$M = \left| \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1,$$

#### S 的代数余子式为

$$A = (-1)^{(1+3)+(2+4)}M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$



$$D = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right|$$

中选取第 1,3 行,第 2,4 列得一个二阶子式

$$S = \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 2,$$

S 的余子式为

$$M = \left| \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1,$$

S 的代数余子式为

$$A = (-1)^{(1+3)+(2+4)}M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$



安徽财经大学

$$D = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right|$$

中选取第 1,3 行, 第 2,4 列得一个二阶子式

$$S = \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 2,$$

S 的余子式为

$$M = \left| \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1,$$

S 的代数余子式为

$$A = (-1)^{(1+3)+(2+4)}M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$



安徽财经大学

由于从 n 个行中任取 k 行, 共有  $C_n^k$  种取法, 从 n 个列中任取 k 列, 也有  $C_n^k$  种取法, 故 n 阶行列式 D 的  $k(1 \le k \le n)$  阶子式共有  $(C_n^k)^2$  个. 而 对 D 的每一个子式 S, 它的余子式 M 和代数余子式 A 都由 S 惟一确定.

## 定理(2.3.1 拉普拉斯定理)

若在行列式 D 中任意取定 k 个行 (列)  $(1 \le k \le n-1)$ , 则由这 k 个行 (列) 组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于 D.

设 D 的某 k 行 (列) 组成的所有 k 阶子式分别为  $S_1, S_2, \cdots, S_t$   $(t = C_n^k)$  它们相应的代数余子式分别为  $A_1, A_2, \cdots, A_t$ , 则

 $D = S_1 A_1 + S_2 A_2 + \dots + S_t A_t.$ 

当 k=1 时, 拉普拉斯定理就是行列式按一行 (列) 展开, 因此拉普拉斯定理是行列式按一行 (列) 展开性质的推广, 它是行列式按某 k 行 (列) 的展开.

由于从 n 个行中任取 k 行, 共有  $C_n^k$  种取法, 从 n 个列中任取 k 列, 也有  $C_n^k$  种取法, 故 n 阶行列式 D 的  $k(1 \le k \le n)$  阶子式共有  $(C_n^k)^2$  个. 而 对 D 的每一个子式 S, 它的余子式 M 和代数余子式 A 都由 S 惟一确定.

#### 定理 (2.3.1 拉普拉斯定理)

若在行列式 D 中任意取定 k 个行 (列)  $(1 \le k \le n-1)$ , 则由这 k 个行 (列) 组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于 D.

设 D 的某 k 行 (列) 组成的所有 k 阶子式分别为  $S_1, S_2, \cdots, S_t$   $(t = C_n^k)$ ,它们相应的代数余子式分别为  $A_1, A_2, \cdots, A_t$ ,则

$$D = S_1 A_1 + S_2 A_2 + \dots + S_t A_t.$$

当 k=1 时, 拉普拉斯定理就是行列式按一行 (列) 展开, 因此拉普拉斯定理是行列式按一行 (列) 展开性质的推广, 它是行列式按某 k 行 (列) 的展开.

4/11

## 例 (2.3.1)

# 计算

$$D = \left| \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right|$$

解

按第 1,2 行展开, 这两行元共组成  $\mathrm{C}_5^2=10$  个二阶子式, 但其中不为 0 的二阶子式只有 3 个, 即

$$S_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad S_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad S_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

它们对应的代数余子式为

◆ロト ◆個ト ◆屋ト ◆屋ト ■ 釣り

## 例 (2.3.1)

计算

$$D = \left| \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right|.$$

#### 解

按第 1,2 行展开, 这两行元共组成  $C_5^2=10$  个二阶子式, 但其中不为 0 的二阶子式只有 3 个, 即

$$S_1 = \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 3, \quad S_2 = \left| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 2, \quad S_3 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = 1,$$

它们对应的代数余子式为

4□ > 4問 > 4 = > 4 = > = 90

$$S_1 = \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 3, \quad S_2 = \left| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 2, \quad S_3 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = 1,$$

# 它们对应的代数余子式为

$$A_{1} = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{2} = (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{3} = (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

故由拉普拉斯定理  $D = S_1A_1 + S_2A_2 + S_3A_3 = 6$ .

#### 由拉普拉斯定理可得下列常用结果: 分块下三角形矩阵

$$m{A} = \left(egin{array}{cc} m{B}_{m imes m} & m{O} \ * & m{C}_{n imes n} \end{array}
ight)$$

#### 或分块上三角形矩阵

$$m{A} = \left(egin{array}{cc} m{B}_{m imes m} & * \ O & m{C}_{n imes n} \end{array}
ight)$$

的行列式

$$\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{B})(\det \mathbf{C}).$$





## 事实上,对于

$$oldsymbol{A} = \left(egin{array}{cc} oldsymbol{B}_{m imes m} & oldsymbol{O} \ st & oldsymbol{C}_{n imes n} \end{array}
ight),$$

在  $\det A$  的前 m 行的所有 m 阶子式中, 只有一个可能不为零, 故由拉普拉斯定理, 按前 m 行展开, 易知  $\det A = (\det B)(\det C)$  成立. 同理, 对于

$$oldsymbol{A} = \left(egin{array}{cc} oldsymbol{B}_{m imes m} & * \ oldsymbol{O} & oldsymbol{C}_{n imes n} \end{array}
ight),$$

按  $\det A$  的前 m 列展开便知结论成立.

特别地, 分块对角矩阵行列式的常用结果: 设

$$A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_t)$$
, 其中  $A_i (i = 1, 2, \cdots, t)$  为方阵, 则

$$\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}_1) (\det \mathbf{A}_2) \cdots (\det \mathbf{A}_t).$$





例 (2.3.2)

设分块矩阵 
$$A=\left(egin{array}{cc} B & O \\ C & D \end{array}
ight)$$
,其中  $O$  是零矩阵, $B$  和  $D$  是可逆矩阵, 求  $A^{-1}$ .

解

根据拉普拉斯定理  $\det A = (\det B)(\det D) \neq 0$ ,所以 A 可逆. 设  $A^{-1}$  对应的分块矩阵为  $A^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ ,其中  $X_1$  与 B 是同型矩阵, $X_4$  与  $X_4$  是同型矩阵,则根据分块矩阵的乘法有

$$egin{aligned} AA^{-1} &= \left(egin{array}{ccc} B & O \ C & D \end{array}
ight) \left(egin{array}{ccc} X_1 & X_2 \ X_3 & X_4 \end{array}
ight) \ &= \left(egin{array}{ccc} BX_1 & BX_2 \ CX_1 + DX_3 & CX_2 + DX_4 \end{array}
ight) = \left(egin{array}{ccc} I & O \ O & I \end{array}
ight) = I, \end{aligned}$$

4□ > 4ⓓ > 4≧ > 4≧ > ½

9/11

例 (2.3.2)

设分块矩阵  $m{A}=\left(egin{array}{cc} m{B} & m{O} \\ m{C} & m{D} \end{array}
ight)$ ,其中  $m{O}$  是零矩阵, $m{B}$  和  $m{D}$  是可逆矩阵,求  $m{A}^{-1}$ .

### 解

根据拉普拉斯定理  $\det A = (\det B)(\det D) \neq 0$ ,所以 A 可逆. 设  $A^{-1}$  对应的分块矩阵为  $A^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ ,其中  $X_1$  与 B 是同型矩阵.  $X_4$  与  $X_4$  是同型矩阵. 则根据分块矩阵的乘法有

$$egin{aligned} m{A}m{A}^{-1} &= \left(egin{array}{ccc} m{B} & m{O} \ m{C} & m{D} \end{array}
ight) \left(egin{array}{ccc} m{X}_1 & m{X}_2 \ m{X}_3 & m{X}_4 \end{array}
ight) \ &= \left(egin{array}{ccc} m{B}m{X}_1 & m{B}m{X}_2 \ m{C}m{X}_1 + m{D}m{X}_3 & m{C}m{X}_2 + m{D}m{X}_4 \end{array}
ight) = \left(egin{array}{ccc} m{I} & m{O} \ m{O} & m{I} \end{array}
ight) = m{I}, \end{aligned}$$

4□ > 4ⓓ > 4≧ > 4≧ > ½ 90

9/11

## 解

故

$$\begin{cases}
BX_1 = I, \\
BX_2 = O, \\
CX_1 + DX_3 = O, \\
CX_2 + DX_4 = I.
\end{cases}$$

解得

$$\left\{ \begin{array}{l} \pmb{X}_1 = \pmb{B}^{-1}, \\ \pmb{X}_2 = \pmb{O}, \\ \pmb{X}_3 = -\pmb{D}^{-1}\pmb{C}\pmb{B}^{-1}, \\ \pmb{X}_4 = \pmb{D}^{-1}. \end{array} \right.$$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$



# 小结

- 拉普拉斯定理: 若在行列式 D 中任意取定 k 个行 (列)  $(1 \le k \le n-1)$ , 则由这 k 个行 (列) 组成的所有 k 阶子式与它们的 代数余子式的乘积之和等于 D.
- 分块上(下)三角形矩阵的行列式:

$$\left|egin{array}{ccc} oldsymbol{B}_{m imes m} & oldsymbol{O}_{m imes n} \ st & oldsymbol{C}_{n imes n} \end{array}
ight| = \left|egin{array}{ccc} oldsymbol{B}_{m imes m} & st \ oldsymbol{O}_{n imes m} & oldsymbol{C}_{n imes n} \end{array}
ight| = |oldsymbol{B}|\cdot|oldsymbol{C}|.$$

• 分块斜上(下)三角形矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} * & B_{m \times m} \\ C_{n \times n} & O_{n \times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O_{m \times n} & B_{m \times m} \\ C_{n \times n} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |B| \cdot |C|.$$



