线性代数总复习

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

1.1 矩阵及其运算

- 矩阵的概念: $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 方阵, 零矩阵, 对角矩阵, 数量矩阵, 单位矩阵, 上 (下) 三角形矩阵.
- 矩阵的线性运算: 矩阵的加法 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 矩阵的数乘 $k\boldsymbol{A}$, 矩阵的线性运算满足八条性质.
- 矩阵的乘法: $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times p}\boldsymbol{B}_{p\times n}$.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

矩阵乘法满足结合律和分配律, 但不满足交换律和消去律.

- 方阵的幂和方阵的多项式: $\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$,

$$f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}.$$

- 矩阵的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$: 矩阵转置的运算规律, $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 对称矩阵: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$; 反对称矩阵: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.

1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换

- 高斯消元法: 线性方程组的三种初等变换.
- 矩阵的初等变换: $r_i \leftrightarrow r_j$, kr_i, $kr_i + r_j$.($c_i \leftrightarrow c_j$, kc_i, $kc_i + c_j$)
  矩阵进行初等变换 $\rightarrow$ 行阶梯形矩阵 $\rightarrow$ 简化行阶梯形矩阵.
- 方程组求解的高斯消元法: 对 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 施以行初等变换, 得到简化行阶梯形矩阵, 若 $d_{r+1} \neq 0$, 则方程组无解; 若 $d_{r+1} = 0$, 则方程组有解, 而且当 $r = n$ 时有惟一解, 当 $r < n$ 时有无穷多解. m 个 n 元方程组成的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$, 若 $m < n$, 则方程组必有非零解.
- 矩阵的等价 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$. 三条性质.
- 初等矩阵: $\boldsymbol{E}_{ij}$, $\boldsymbol{E}_i(c)$, $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$.
  对一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次行初等变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘上相应的 $m \times m$ 初等矩阵; 对 $\boldsymbol{A}$ 作一次列初等变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘上相应的 $n \times n$ 初等矩阵.

1.3 逆矩阵

- 逆矩阵的概念: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$, 可逆矩阵是方阵, 可逆矩阵的逆矩阵是惟一的, $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.
- 逆矩阵的性质: 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵, $\lambda\neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$; $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$; $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$; $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.
- 矩阵可逆的充要条件: $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 行等价 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积.
- 用行初等变换求逆矩阵: $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})\xrightarrow{\text{行初等变换}}\left(\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}^{-1}\right)$.
- 用行初等变换求矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$:

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{行初等变换}}\left(\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right).$$

1.4 分块矩阵

- 分块矩阵的加法和数乘: $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$, $k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$.
- 分块矩阵的乘法 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{A}$ 的列的分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法相同.

$$\boldsymbol{C}_{kl}=\boldsymbol{A}_{k1}\boldsymbol{B}_{1l}+\boldsymbol{A}_{k2}\boldsymbol{B}_{2l}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ks}\boldsymbol{B}_{sl}=\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{B}_{il}.$$

- 分块矩阵的逆矩阵:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \\ & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \end{pmatrix}.$$

- 分块矩阵的转置:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

2.1 n 阶行列式的定义

- n 阶行列式的定义: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是由 $\boldsymbol{A}$ 确定的一个数: 当 $n=1$ 时, $\det \boldsymbol{A} = \det(a_{11}) = a_{11}$; 当 $n \geqslant 2$ 时, $\det \boldsymbol{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$, 其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$. M_{1j} 为元 a_{1j} 的余子式, 即为划掉 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行第 j 列后所得的 $n-1$ 阶行列式, A_{1j} 称为 a_{1j} 的代数余子式.

- 上 (下) 三角行列式: $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.
- 斜上 (下) 三角行列式: $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

2.2 行列式的性质与计算 (I)

- 行列式的性质:
- (1) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式按任一行展开都相等,

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.
- (2) 若行列式的某行元全为零, 则行列式等于零.
- (3) 若 n 阶行列式某两行对应元全相等, 则行列式为零.
- (4) 如果行列式的某一行是两组数的和, 那么这个行列式就等于两个行列式的和, 这两个行列式分别以这两组数为这一行的元, 其他各行与原来行列式的对应各行不变.

2.2 行列式的性质与计算 (II)

- 行列式的性质:
- (5) 若把行初等变换施于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上:
  (a) 将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行乘数 k 得到 $\boldsymbol{A}_1$, 则$\det \boldsymbol{A}_1 = k(\det \boldsymbol{A})$;
  (b) 将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行的 k 倍加到另一行得到 $\boldsymbol{A}_2$, 则$\det \boldsymbol{A}_2 = \det \boldsymbol{A}$;
  (c) 交换 $\boldsymbol{A}$ 的两行得到 $\boldsymbol{A}_3$, 则$\det \boldsymbol{A}_3 = -\det \boldsymbol{A}$.
- (6) 若行列式某两行对应元成比例, 则行列式的值为零.
- (7) $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) = \det \boldsymbol{A}$.

2.2 行列式的性质与计算 (III)

- 行列式的计算: (1) 计算行列式的一个基本方法是利用行列式的性质, 把行列式化成上三角形行列式.
  (2) 计算行列式的另一基本方法是, 恰当地利用性质, 将某一行 (列) 的元尽可能化为零, 然后按该行 (列) 展开, 降阶后再计算.
  (3) 利用特殊的行列式, 如范德蒙德 (Vandermonde) 行列式.
  (4) 提取公因式法, 加边法, 递归法, 分拆法, 拉普拉斯定理, 逐行相加减法, 滚动消去法.
- 矩阵可逆的充要条件: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.
- 方阵乘积的行列式: $\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$.
- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

2.3 拉普拉斯定理

- 拉普拉斯定理: 若在行列式 D 中任意取定 k 个行 (列) $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, 则由这 k 个行 (列) 组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于 D.
- 分块上 (下) 三角形矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O}_{m\times n} \\ * & \boldsymbol{C}_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{B}_{m\times m} & * \\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{C}_{n\times n} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{C}|.$$

- 分块斜上 (下) 三角形矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} * & \boldsymbol{B}_{m\times m} \\ \boldsymbol{C}_{n\times n} & \boldsymbol{O}_{n\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \\ \boldsymbol{C}_{n\times n} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{C}|.$$

2.4 克拉默法则

- 行列式性质: 行列式的任一行 (列) 的元乘另一行 (列) 对应元的代数余子式之和等于零.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \det \boldsymbol{A}, \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, \cdots, n).$$

- 伴随矩阵: 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{A}^* = (A_{ji})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 (A_{ij} 是 $\det \boldsymbol{A}$ a_{ij} 的代数余子式).
- 逆矩阵表达式: 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*$.
- 克拉默法则: 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 有惟一解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 其中

$$x_j = \frac{\det \boldsymbol{A}_j}{\det \boldsymbol{A}} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

$\det \boldsymbol{A}_j$ 是用 $\boldsymbol{b}$ 代替 $\det \boldsymbol{A}$ 中的第 j 列得到的行列式.

2.5 矩阵的秩 (I)

- 矩阵秩的概念: 设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式 D, 且没有不等于零的 $r+1$ 阶子式, 那么 D 称为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式, 数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $R(\boldsymbol{A})$. 零矩阵的秩等于零.
  $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中不等于零的子式的最高阶数.
- 矩阵秩的计算: 初等变换不改变矩阵的秩.
  $R(\boldsymbol{A})=r$ 的充要条件是通过行初等变换能将 $\boldsymbol{A}$ 化为具有 r 个非零行的行阶梯形矩阵.
  矩阵秩的性质:
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则 $R(\boldsymbol{PA})=R(\boldsymbol{AQ})=R(\boldsymbol{PAQ})=R(\boldsymbol{A})$, 其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵.
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$;
- 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}, R(\boldsymbol{A})=R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)$;

2.5 矩阵的秩 (II)

- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \leqslant R(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{m, n\}$;
- 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，$R(k\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A})\ (k \neq 0)$，$R(k\boldsymbol{A}) = 0\ (k = 0)$.
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵 $(n \geqslant 2)$，则 $R(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & R(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & R(\boldsymbol{A}) < n-1. \end{cases}$
- 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，都存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times m}$，$\boldsymbol{Q}_{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}_{m\times n}, \quad R(\boldsymbol{A}) = r,$$

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形. 即任何矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于其标准形.

- 同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

矩阵和行列式相关重要公式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}, \quad \boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$$

$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$	$\|k\boldsymbol{A}\| = k^n\|\boldsymbol{A}\|$	$(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$
$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$	$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|$	$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$
$(\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^n$	$(\boldsymbol{A}^n)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^n$	$\|\boldsymbol{A}^n\| = \|\boldsymbol{A}\|^n$	$(\boldsymbol{A}^n)^* = (\boldsymbol{A}^*)^n$
$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$	$\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\| = \|\boldsymbol{A}\|$	$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$
$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$	$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$	$\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = \|\boldsymbol{A}\|^{-1}$	$(\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}$
$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$	$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \|\boldsymbol{A}\|^{-1}\boldsymbol{A}$	$\|\boldsymbol{A}^*\| = \|\boldsymbol{A}\|^{n-1}$	$(\boldsymbol{A}^*)^* = \|\boldsymbol{A}\|^{n-2}\boldsymbol{A}$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}, \ |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|, \ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$$

3.1 n 维向量空间的概念

- n 维向量，向量的线性运算（加法和数乘）满足八条运算法则.
- n 维向量空间的概念：设 V 是一个 n 维向量的集合，如果 V 非空，且对向量的线性运算封闭，即 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, k \in \mathbf{R}$，都有 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$，$k\boldsymbol{\alpha} \in V$，则称 V 构成一个向量空间.
- 全体 n 维实向量组成的集合 $\mathbf{R}^n$ 构成一个向量空间，称为 n 维实向量空间.
- $\mathbf{R}^n$ 的子空间：设 V 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集合，V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间的充要条件为 V 对于 $\mathbf{R}^n$ 的加法和数乘运算是封闭的.
- 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \in \mathbf{R}^n$，则

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \mid k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbf{R}\}$$

构成 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间，称为由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}$ 生成的子空间.

3.2 向量组的线性相关性 (I)

- 向量组的线性组合: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维向量, 若存在数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$, 则称 β 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.
- 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 又记为 $\boldsymbol{\beta} \in L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$, 其中 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ 是由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的向量空间.
- 向量组等价: 设有两个向量组 I: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, II: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$. 若向量组 I 中的每个向量都能由向量组 II 中的向量线性表出, 则称向量组 I 能由向量组 II 线性表出; 若两个向量组能相互线性表出, 则称这两个向量组等价. 等价向量组具有反身性、对称性和传递性.
- 定理: 向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = R(\boldsymbol{A})$, 其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.

3.2 向量组的线性相关性 (II)

- **向量组的线性相关性**: 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ **线性相关**. 否则, 称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 即仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 时, 上式才成立.
- **定理**: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为列向量组, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ **线性相关** $\Leftrightarrow \boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ **有非零解** $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) < n$.
- **推论**: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维列向量组, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ **线性相关** $\Leftrightarrow \det \boldsymbol{A} = 0$.
- **推论**: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是一个 n 维向量组, 若 $m > n$, 则该向量组线性相关.

3.2 向量组的线性相关性 (III)

- 定理: 向量组中有一部分向量线性相关, 则整个向量组线性相关.
- 逆否命题: 向量组整体线性无关, 则这个向量组的任意部分向量所组成的向量组都线性无关.
- 定理: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量能被其余 $m-1$ 个向量线性表出.
- 逆否命题:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 线性无关的充要条件是向量组中任意一个向量都不能被其余的向量线性表出.
- 定理: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出, 且表示式唯一.
- 定理: 矩阵的行初等变换不改变其列向量组的线性相关性.

3.3 向量组的秩与极大无关组 (I)

- 向量组的秩与极大无关组: 若向量组 T 满足
  (1) T 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;
  (2) T 中任意 $r+1$ 个向量 (如果 T 中有 $r+1$ 个向量) 都线性相关;
  则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 T 的一个极大无关组, r 称为向量组 T 的秩.
- 等价命题: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 T 的一个线性无关部分组, 则它是极大无关组的充分必要条件是 T 中每一个向量均可由它线性表出.
- 推论: 向量组的任意一个极大无关组都与这个向量组本身等价.
- 向量组线性无关 (相关) $\Leftrightarrow$ 向量组的秩等于 (小于) 向量组所含向量的个数.
- 定理: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $=$ $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩 $=$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩.

3.3 向量组的秩与极大无关组 (II)

- 求向量组秩与极大无关组的方法: 设有列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$, 对 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = R(\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{B}$ 中非零行的非零首元所在列对应的 $\boldsymbol{A}$ 中各向量就构成向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组.
- 定理: 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 则 $r \leqslant s$.
- 逆否命题: 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出, 若 $r > s$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.
- 特别地, 两个等价的线性无关向量组所含向量个数相同.
- 推论: 若向量组 A 可由向量组 B 线性表出, 则秩 $R(A) \leqslant R(B)$; 特别地, 等价向量组有相同的秩.
- 注: 秩相同的两个向量组却不一定等价.

3.3 向量组的秩与极大无关组 (III)

- $\mathbf{R}^n$ 的基、维数: n 维向量的全体 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组也称为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 其任一极大无关组所含向量个数又称为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的维数, 记为 $\dim \mathbf{R}^n$.
- 显然 $\dim \mathbf{R}^n = n$. 单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准基. i, j, k 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个标准基. 可见, $\mathbf{R}^n$ 中任一向量均为其基的线性组合.
- $\mathbf{R}^n$ 的坐标: 设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 则称 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.

矩阵的秩相关结论总结

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，则 $0\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant \min\{m,n\}$.
(2) $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$.
(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，则 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.
(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 当且仅当 $R(\boldsymbol{A})=n$.
(5) $R(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.
(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times s$ 的矩阵，则

$$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

(7) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 的矩阵，则

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n\leqslant R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}.$$

(8) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 的矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

(9) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})=R(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}).$$

3.4 线性方程组解的结构——齐次线性方程组

- 性质: 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 解向量的线性组合也是它的解.
- 定义: $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 解向量的全体 $W=\{\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{AX}=\mathbf{0}\}$ 构成一个向量空间, W 的一组基称为方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.
- 等价命题: 设 $\xi_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一组解向量, 满足
(1) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关;
(2) 方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任一解向量都可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性表出,
则称 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.
- 定理: 若 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$, 则方程组有基础解系且所含解向量的个数为 $n-r$.
- 齐次线性方程组的通解: 设 $R(\boldsymbol{A})=r<n$, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 n 元方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系, 则 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},\ (k_1,\cdots,k_{n-r}\text{ 为任意常数})$$

3.4 线性方程组解的结构——非齐次线性方程组

- 性质: 若 η_1, η_2 是方程组 $AX = b$ 的解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 是其导出组 $AX = 0$ 的解.
- 性质: 若 η 是方程组 $AX = b$ 的解, ξ 是其导出组 $AX = 0$ 的解, 则 $\eta + \xi$ 是 $AX = b$ 的解.
- 性质: 若 η_0 是方程组 $AX = b$ 的一个特解, 则 $AX = b$ 的任一解 η 都可表示成 $\eta = \eta_0 + \xi$, 其中 ξ 是 $AX = 0$ 的一个解.
- 非齐次线性方程组的通解: 设 $R(A) = R(\overline{A}) = r < n$, η_0 是 n 元方程组 $AX = b$ 的一个特解, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是 $AX = 0$ 的基础解系, 则 $AX = b$ 的通解为

$$X = \eta_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-\zeta}\xi_{n-r}, \ (k_1, \cdots, k_{n-r} \text{ 为任意常数}).$$

4.1 特征值与特征向量的概念与计算 (I)

- 定义: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 如果存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$, 则称 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量.
- 特征子空间: 设 V_λ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的所有特征向量以及零向量所组成的集合, 即

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \lambda \in \mathbf{C}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{C}^n\}.$$

  V_λ 对向量的加法和数乘封闭, 称 V_λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间.
- $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的解空间就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间, 它的维数为 $\dim V_\lambda = n - R(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$. $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 V_λ 的基.
- 方程 $\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程. 特征方程的根就是特征值, 故有时又将特征值称为特征根.
- $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

4.1 特征值与特征向量的概念与计算 (II)

- 求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量的计算步骤如下:
  1° 求特征方程 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ 的全部相异根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k(k\leqslant n)$;
  2° 分别求 $(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$, 则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_{i1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i2}+\cdots+k_{r_i}\boldsymbol{\alpha}_{ir_i}(k_1,k_2,\cdots,k_{r_i}$ 不全为零) 就是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_i 的全部特征向量.
- 称特征值 λ_i 的重数为代数重数, 而 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 的维数称为 λ_i 的几何重数. 特征值的几何重数不大于它的代数重数.
- 方阵的 n 个特征值之和等于方阵的主对角元之和:
  $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$.
- n 个特征值之积等于方阵的行列式: $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}$.
- n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全不为零.

4.1 特征值与特征向量的概念与计算 (III)

矩阵	特征值	特征向量
$\boldsymbol{A}$	λ	$\boldsymbol{\alpha}$
$k\boldsymbol{A}$	$k\lambda$	$\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{A}^m$	λ^m	$\boldsymbol{\alpha}$
$f(\boldsymbol{A})$	$f(\lambda)$	$\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{A}^{-1}$	λ^{-1}	$\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{A}^*$	$\|\boldsymbol{A}\|\lambda^{-1}$	$\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	λ	不一定是 $\boldsymbol{\alpha}$

4.2 矩阵的相似对角化 (I)

- 相似矩阵的基本概念: 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.
- 矩阵之间的相似关系是一种等价关系, 具有反身性, 对称性, 传递性.
- 相似矩阵的性质: 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则
  (1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式和特征值.
  (2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行列式相等.
  (3) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的迹相同.
  (4) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩相等.
  (5) $\boldsymbol{A}^k$ 与 $\boldsymbol{B}^k$ 相似, 其中 k 为正整数. $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$.
  (6) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的可逆性, 当 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可逆时, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 也相似.
- 矩阵的相似对角化: 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 相似, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对元就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

4.2 矩阵的相似对角化 (II)

- 矩阵的相似对角化: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.
- 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 分别对应于这些特征值的特征向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.
- 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是单特征根, 则 $\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵相似.
- 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值, $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \boldsymbol{\alpha}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$ 是对应于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1r_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{kr_k}$ 也线性无关.
- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充要条件是对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个 k_i 重特征根 λ_i, $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 k_i 个解向量组成.
- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充要条件是对于每一个 k_i 重特征根 λ_i, $R(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = n - k_i$.

4.2 矩阵的相似对角化 (III)

- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的一般步骤:

(1) 写出 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$, 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(2) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同的特征值. 对每个 $\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 设其重数为 $k_i\,(k_1+k_2+\cdots+k_m=n)$, 求解齐次方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$, 得到一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \boldsymbol{\alpha}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{is_i}$. 若 $s_i=k_i\,(i=1,2,\cdots,m)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 否则 $\boldsymbol{A}$ 不可以对角化.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化, 用已求出的全部基础解系的解向量 (所有解向量的个数必为 n) 作为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量. 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵, 其主对角线上的元素为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

4.3 n 维向量空间的正交性 (I)

- 内积: 实数 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的内积, 记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.
- 若将 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 看作行矩阵, 则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 又可表示为 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 若将 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 记为列向量的形式, 则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$.
- 内积的性质: 非负性, 对称性, 线性性.
- 长度: $\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的长度, 记为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$.
- 向量长度的性质: 非负性, 齐次性和三角不等式 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.
- 当 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$ 时, 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量. 若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 则 $\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$ 是单位向量.
- 向量的内积还满足柯西 · 施瓦茨不等式: $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时等号成立.
- 当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$ 时, $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$.

4.3 n 维向量空间的正交性 (II)

- n 维向量的正交性: 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为零, 即 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 中任意两个向量都正交且不含零向量, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为正交向量组.
- 正交向量组是线性无关的.
- 标准正交向量组: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的正交向量组, 且 $\|\boldsymbol{\alpha}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为标准正交向量组 (规范正交向量组). 若 $s = n$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基.

4.3 n 维向量空间的正交性 (III)

- 施密特正交化方法: 把线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 化为与之等价的标准正交向量组的施密特正交化过程如下: 正交化

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2, \cdots$$

  单位化: $\boldsymbol{\gamma}_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|}\boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s).$

- 正交矩阵 $\boldsymbol{A}$: n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$.
- 正交矩阵必为方阵且具有以下性质:

  1° $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. $\det \boldsymbol{A} = \pm 1$.

  2° 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正交矩阵.

  3° n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组是标准正交向量组.

4.4 实对称矩阵的相似对角化

- 实对称矩阵的特征值都是实数. 不同特征值的特征向量彼此正交.
- 对任意 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 都存在一个 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵.
- 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.
- 实对称矩阵的对角化的步骤如下:
  (1) 求出实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$;
  (2) 对于各个不同的特征值 λ_i, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 对基础解系进行正交化和单位化, 得到 $\boldsymbol{A}$ 对于 λ_i 的一组标准正交的特征向量.
  (3) 将 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$ 的所有标准正交的特征向量构成一组 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$
  (4) 取 $\boldsymbol{C}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$, 则 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵且使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ $\left(=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)$ 为对角矩阵, 对角线上的元为相应特征向量的特征值.

1 矩阵及其初等变换

2 行列式

3 n 维向量空间

4 特征值与特征向量

5 二次型

6 总结

5.1 实二次型及其标准形 (I)

- 二次型及其矩阵表示: $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \quad \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\right)$. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵. 二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的秩.
- 若线性变换的系数矩阵可逆, 则称为可逆线性变换. 二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 通过线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 后变成一个新二次型 $g(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$, 这两个二次型的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是合同的.
- 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.
- 标准形: $d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$.
- 规范形: $y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \quad (r \leqslant n)$.

5.1 实二次型及其标准形 (II)

- 任何一个二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形 (规范形).
- 任何一个二次型的规范形是惟一的.
- 二次型的标准形中, 正项项数 p 称为正惯性指数, 负项项数 $r-p$ 称为负惯性指数, 而正负惯性指数的差 $2p-r$ 称为符号差. 可逆线性变换不改变二次型的秩与正负惯性指数.
- 用配方法化二次型为标准形: 含平方项的情况; 不含平方项的情况.
- 用正交变换化二次型为标准形: 任何一个实二次型都可以通过正交变换化为标准形.
- 用正交变换化二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为标准形, 平方项的系数刚好是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值, 若不计特征值的排列顺序, 则这样的标准形是惟一的.

5.2 正定二次型 (I)

- 正定二次型的定义:
  若对任一非零实向量 $\boldsymbol{X}$, 都使二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$, 则称 $f(\boldsymbol{X})$ 为正定二次型, $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵.
- 可逆线性变换不改变二次型的秩, 不改变二次型的正负惯性指数, 不改变二次型的正定性.
- 正定二次型的充要条件:
  (1) $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定的 $\Leftrightarrow$对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数.
  (2) $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定的 $\Leftrightarrow$ $f(\boldsymbol{X})$ 的正惯性指数为 n.
  (3) $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定的 $\Leftrightarrow$ 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同.
  (4) $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定的 $\Leftrightarrow$ 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全大于零.

5.2 正定二次型 (II)

- 正定矩阵的判定: 对于实对称矩阵 A, 下列命题等价:
  1° $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵;
  2° $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数;
  3° $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n;
  4° $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同;
  5° $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零.
- 负定二次型、半正定二次型与半负定二次型
- 负定二次型的判定: 二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 下列命题等价:
  1° $f(\boldsymbol{X})$ 为负定二次型;
  2° $-f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$ 为正定二次型 ($-\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵);
  3° $f(\boldsymbol{X})$ 的特征值全为负数;
  4° $f(\boldsymbol{X})$ 的负惯性指数为 n;
  5° 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{I}$ 合同;
  6° $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式满足 $(-1)^k P_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

5.2 正定二次型 (III)

正定矩阵的性质:

- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为正定矩阵.
- n 阶正定矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的主对角线元素为正数, 即 $a_{ii}>0$, $i=1,2,\ldots,n$.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{k}$ 也为正定矩阵, 其中 k 为正整数.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也为正定矩阵.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于零.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}|>0$.

一、几个等价命题

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 下面的命题是等价的.

- $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) = n$.
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解.
- $\boldsymbol{A}$ 可表示成一系列初等矩阵的乘积.
- $\boldsymbol{A}$ 经过一系列行的初等变换可化为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$.
- $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.
- $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值均不为零.

二、几个矩阵

- 增广矩阵, 行阶梯形矩阵, 简化行阶梯形矩阵, (等价) 标准形矩阵.
- $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$.
- $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$.
- $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$.
- 初等矩阵: 单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵. $[\boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_i(c), \boldsymbol{E}_{ij}(c)]$
- $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵: $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$. (或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$)
- 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵: $\forall \boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$.
  $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于零. $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$.
  $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$. $\Rightarrow |\boldsymbol{A}| > 0$.

三、几种关系

- 矩阵 A 与矩阵 B 等价，记作 $A \cong B$: $\exists$ 可逆矩阵 P 和 Q，使得

$$PAQ = B.$$

- 方阵 A 与方阵 B 相似，记作 $A \sim B$: $\exists$ 可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B.$$

- 方阵 A 与方阵 B 合同，记作 $A \simeq B$: $\exists$ 可逆矩阵 P，使得

$$P^{T}AP = B.$$

- 相似一定等价，合同一定等价；相似未必合同，合同未必相似.
- 实对称矩阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 一定合同. 反之不成立.

四、几种变换

- 行列式的初等变换.
  行: (i) $r_i \leftrightarrow r_j$; (ii) $r_i \times k$; (iii) $k \times r_i + r_j$.
  列: (i) $c_i \leftrightarrow c_j$; (ii) $c_i \times k$; (iii) $k \times c_i + c_j$.
- 线性方程组的初等变换.
  线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \xrightarrow[\text{消元过程}]{\text{初等变换}}$ 阶梯形方程组 $\xrightarrow[\text{回代过程}]{\text{初等变换}}$ 求得 $\boldsymbol{X}$.
- 矩阵的初等变换.
  (1) 初等对换变换: $r_i \leftrightarrow r_j$ (或 $c_i \leftrightarrow c_j$).
  (2) 初等倍乘变换: $r_i \times k$ (或 $c_i \times k$).
  (3) 初等倍加变换: $k \times r_i + r_j$ (或 $k \times c_i + c_j$).

四、几种变换——矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是线性代数中最为重要的运算，可以用于求（非）齐次方程组的解，求矩阵方程的解，求矩阵的秩，判断向量组的线性相关性，求向量组的极大无关组．必须要熟练掌握．

(i) $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{行初等变换}}$ 阶梯形矩阵 $\xrightarrow{\text{列初等变换}}$ 等价标准形矩阵．

(ii) 增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\text{行初等变换}}$ 阶梯形矩阵 $\xrightarrow{\text{行初等变换}}$ 简化行阶梯形矩阵．(可用于求方程组的解，求矩阵的秩)

(iii) $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1})$．(求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$)

(iv) $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$．(已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.)

(v) $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s) \xrightarrow[\text{判断线性相关性}]{\text{行初等变换}}$ 阶梯形矩阵 $\xrightarrow[\text{求极大无关组}]{\text{行初等变换}}$ 简化行阶梯形矩阵．

四、几个判定定理

- 克拉默 (Cramer) 法则: 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.
- 齐次线性方程组有非零解的判定定理和解的结构: $\boldsymbol{A}_{m\times n}$
  (1) $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) < n$.
  (2) $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = n$.
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 有解的判定定理和解的结构:
  (1) $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}})$.
  (2) $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = n$.
  (3) $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多个解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) < n$.
- 向量组线性相关性的若干判定定理.
- 向量组秩的判定定理和矩阵的秩的判定定理.
- 矩阵可对角化的判定定理.
- 二次型可化为标准形或规范形的判定定理.
- 正定二次型和正定矩阵的判定定理.

五、几个性质

- 可逆矩阵的性质.
- 矩阵转置的性质.
- 行列式的性质.
- 矩阵的行列式的性质.
- 伴随矩阵的性质.
- 矩阵的秩的性质.
- 向量内积的性质.
- 向量长度 (范数) 的性质.
- 正交矩阵的性质.
- 特征值和特征向量的性质.
- 相似矩阵的性质.
- 正定矩阵的性质.

六、重要知识点

- 求矩阵的逆矩阵, 矩阵的乘法运算, 求矩阵的秩.
- 行列式的计算. 主要用到行列式的性质和行列式按行列展开.
- 求向量组的秩, 判断向量组的线性相关性, 求向量组的极大无关组, 并将其余向量用所求的极大无关组线性表示出来.
- 求（非）齐次线性方程组的解, 并用对应的齐次线性方程组（即导出组）的基础解系表示其全部解.
- 求矩阵 A 的特征值和特征向量, 判断矩阵 A 是否与对角矩阵相似.
- 化二次型为标准形, 并写出对应的可逆线性变换. 一般主要用到配方法, 但是正交变换法也要了解.