第 3 章 多维随机变量

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

定义 (3.1.1 二维随机变量)

设 $X(\omega)$, $Y(\omega)$ 是定义在同一样本空间 Ω 上的两个随机变量，则称 $(X(\omega), Y(\omega))$ 为 Ω 上的二维随机变量，简记为 (X, Y).

定义 (3.1.1 二维随机变量)

设 $X(\omega)$, $Y(\omega)$ 是定义在同一样本空间 Ω 上的两个随机变量, 则称 $(X(\omega), Y(\omega))$ 为 Ω 上的二维随机变量, 简记为 (X, Y).

定义 (3.1.2 联合分布函数)

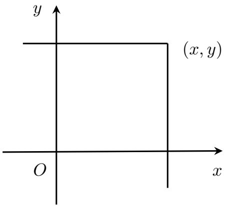
设 (X, Y) 是二维随机变量, 对任意实数 x 和 y, 称二元函数

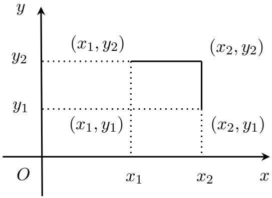
$$F(x, y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$$

为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

分布函数的几何解释

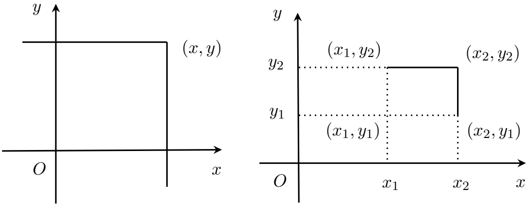
如果把二维随机变量 (X, Y) 看成是平面上随机点的坐标，那么，分布函数 $F(x, y)$ 就是随机点落在无穷矩形区域 $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$ 的概率.





分布函数的几何解释

如果把二维随机变量 (X, Y) 看成是平面上随机点的坐标, 那么, 分布函数 $F(x, y)$ 就是随机点落在无穷矩形区域 $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$ 的概率.



随机点 (X, Y) 落在矩形域 $\{x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2\}$ 内的概率为:

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

分布函数 $F(x, y)$ 的基本性质

(1) 单调不减性: 对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y)$;
对于任意固定的 x, 当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1)$.

分布函数 $F(x, y)$ 的基本性质

(1) 单调不减性: 对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y)$; 对于任意固定的 x, 当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1)$.

(2) 有界性: $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$, 且对于任意固定的 y, $F(-\infty, y) = 0$, 对于任意固定的 x, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.

分布函数 $F(x, y)$ 的基本性质

(1) 单调不减性: 对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y)$; 对于任意固定的 x, 当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1)$.

(2) 有界性: $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$, 且对于任意固定的 y, $F(-\infty, y) = 0$, 对于任意固定的 x, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.

(3) 右连续性: $F(x, y)$ 关于 x 和 y 是右连续的, 即

$$F(x+0, y) = F(x, y), \quad F(x, y+0) = F(x, y).$$

分布函数 $F(x, y)$ 的基本性质

(1) 单调不减性: 对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y)$; 对于任意固定的 x, 当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1)$.

(2) 有界性: $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$, 且对于任意固定的 y, $F(-\infty, y) = 0$, 对于任意固定的 x, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.

(3) 右连续性: $F(x, y)$ 关于 x 和 y 是右连续的, 即

$$F(x+0, y) = F(x, y), \quad F(x, y+0) = F(x, y).$$

(4) 非负性: 对于任意 $a < b$, $c < d$, 下述不等式成立:

$$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \geqslant 0.$$

分布函数 $F(x,y)$ 的基本性质

(1) 单调不减性: 对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y)$; 对于任意固定的 x, 当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1)$.

(2) 有界性: $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$, 且对于任意固定的 y, $F(-\infty, y) = 0$, 对于任意固定的 x, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.

(3) 右连续性: $F(x,y)$ 关于 x 和 y 是右连续的, 即

$$F(x+0, y) = F(x,y),\ \ F(x, y+0) = F(x,y).$$

(4) 非负性: 对于任意 $a < b$, $c < d$, 下述不等式成立:

$$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \geqslant 0.$$

注: 以上四个性质是二维随机变量的本质性质, 满足以上性质的任一二元实值函数 $F(x,y)$ 一定可以看作某个二维随机变量的分布函数. 仅满足前三条性质则不成立, 反例如下.

例

判断二元函数

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y \geqslant 0, \\ 0, & x + y < 0. \end{cases}$$

是否是某个二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数?

例

判断二元函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\geqslant 0,\\ 0, & x+y<0.\end{cases}$$

是否是某个二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数?

解

$$F(1,1)+F(-1,-1)-F(1,-1)-F(-1,1)=1+0-1-1=-1<0.$$

例

下列函数可以作为二维分布函数的是 (   ).

A. $F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y>0.8;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

B. $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x \mathrm{e}^{-s-t}\mathrm{d}s\mathrm{d}t, & x>0,\ y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

C. $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-s-t}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$

D. $F(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x-y}, & x>0,\ y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

例

下列函数可以作为二维分布函数的是 (　　).

A. $F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y>0.8;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

B. $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x e^{-s-t}\,ds\,dt, & x>0,\ y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

C. $F(x,y)=\int_{-\infty}^y\int_{-\infty}^x e^{-s-t}\,ds\,dt$

D. $F(x,y)=\begin{cases}e^{-x-y}, & x>0,\ y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

解

A. $F(1,1)+F(0,0)-F(1,0)-F(0,1)=1+0-1-1=-1<0.$

C. $F(+\infty,+\infty)=+\infty\neq 1.$

D. $F(+\infty,+\infty)=0\neq 1.$

定义 (3.1.3)

若二维随机变量 (X, Y) 的所有可能取值是有限对或可列无穷多对，则称 (X, Y) 为**二维离散型随机变量**.

定义 (3.1.3)

若二维随机变量 (X, Y) 的所有可能取值是有限对或可列无穷多对，则称 (X, Y) 为**二维离散型随机变量**.

定义 (3.1.4)

二维随机变量 (X, Y) (联合) 概率分布或 (联合) 分布列的一切可能取值为 (x_i, y_i)，$i, j = 1, 2, \cdots$，且 (X, Y) 取各对可能值的概率为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots . \tag{1}$$

称式 (1) 为 (X, Y) 的**(联合) 概率分布**或**(联合) 分布律**.

表: 离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

由分布律的定义知 p_{ij} 具有如下性质:

(1) **非负性**: $p_{ij} \geqslant 0, \ i, j = 1, 2, \cdots.$

(2) **规范性**: $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1.$

由分布律的定义知 p_{ij} 具有如下性质:

(1) **非负性**: $p_{ij} \geqslant 0,\ i, j = 1, 2, \cdots.$

(2) **规范性**: $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1.$

离散型随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \sum_{x_i \leqslant x} \sum_{y_j \leqslant y} p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \leqslant x,\ y_j \leqslant y$ 的 i, j 来求和的.

例 (3.1.1)

袋子中有 5 件产品 (3 正 2 次), 任取一件产品, 再取一件产品, 设

$$X = \begin{cases} 1, & \text{第一次取到正品}, \\ 0, & \text{第一次取到次品}; \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{第二次取到正品}, \\ 0, & \text{第二次取到次品}; \end{cases}$$

(1) 试求有放回抽取方式下 (X, Y) 的联合分布律.
(2) 试求不放回抽取方式下 (X, Y) 的联合分布律.

解

由题知 (X, Y) 的可能取值对有 4 对: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

(1) **有放回抽取**: 由第一章古典概型计算可知

$$P(X=0, Y=0)=\frac{2\times 2}{5\times 5}=\frac{4}{25}, P(X=0, Y=1)=\frac{2\times 3}{5\times 5}=\frac{6}{25},$$

$$P(X=1, Y=0)=\frac{3\times 2}{5\times 5}=\frac{6}{25}, P(X=1, Y=1)=\frac{3\times 3}{5\times 5}=\frac{9}{25}.$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$

解

(2) **不放回方式:**

$$P(X=0,\,Y=0)=\frac{2\times 1}{5\times 4}=\frac{1}{10},\ P(X=0,\,Y=1)=\frac{2\times 3}{5\times 4}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=1,\,Y=0)=\frac{3\times 2}{5\times 4}=\frac{3}{10},\ P(X=1,\,Y=1)=\frac{3\times 2}{5\times 4}=\frac{3}{10}.$$

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

例 (3.1.2)

设随机变量 X 在 $1,2,3,4$ 四个整数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值，试求 (X,Y) 的分布律.

解

由乘法公式容易求得 (X,Y) 的分布律，易知 $\{X=i,Y=j\}$ 的取值情况是：$i=1,2,3,4$, j 取不大于 i 的正整数，且

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},\ i=1,2,3,4,\ j\leqslant i,$$

解

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

1. 二维随机变量及其分布
   - 二维随机变量的定义及其分布函数
   - 二维离散型随机变量
   - 二维连续型随机变量
   - 常见的二维分布
2. 边际分布
3. 随机变量的独立性
4. 两个随机变量的函数的分布
5. 条件分布
6. n 维随机变量及其分布

定义 (3.1.4 联合分布密度)

设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$，若存在一个非负可积函数 $f(x, y)$，使得对任意实数 x, y，都有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量，称 $f(x, y)$ 为 (X, Y) 的**联合分布密度**或**概率密度**.

定义 (3.1.4 联合分布密度)

设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$，若存在一个非负可积函数 $f(x, y)$，使得对任意实数 x, y，都有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量，称 $f(x, y)$ 为 (X, Y) 的**联合分布密度**或**概率密度**.

由定义可知，联合密度函数 $f(x, y)$ 表示空间中的一个曲面，联合分布函数在 (x, y) 处的值 $F(x, y)$ 是以 $f(x, y)$ 为顶，以点 (x, y) 左下方为积分区域的二重积分 (体积).

概率密度 $f(x, y)$ 具有如下性质:

(1) **非负性**: $f(x, y) \geqslant 0, \quad (-\infty < x, y < +\infty).$

(2) **正则性**: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 1.$

概率密度 $f(x, y)$ 具有如下性质:

(1) **非负性**: $f(x, y) \geqslant 0, \quad (-\infty < x, y < +\infty)$.

(2) **正则性**: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) \mathrm{d} u \mathrm{d} v = 1$.

(3) 设 D 为 xOy 平面上的任一区域, 则点 (X, Y) 落在 D 内的概率为

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y.$$

概率密度 $f(x, y)$ 具有如下性质:

(1) 非负性: $f(x, y) \geqslant 0, \quad (-\infty < x, y < +\infty)$.

(2) 正则性: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v = 1$.

(3) 设 D 为 xOy 平面上的任一区域, 则点 (X, Y) 落在 D 内的概率为

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

(4) 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续, 则有

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

例 (3.1.3)

设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-x-y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求: (1) 常数 c; (2) $P(X + Y \leqslant 1)$; (3) $P(X = Y)$.

例 (3.1.3)

设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-x-y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求: (1) 常数 c; (2) $P(X + Y \leqslant 1)$; (3) $P(X = Y)$.

解

(1) 由联合密度函数的正则性知

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} ce^{-x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= c\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x \int_{0}^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y = c$$

从而 $c = 1$.

例 (3.1.3)

设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-x-y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求: (1) 常数 c; (2) $P(X + Y \leqslant 1)$; (3) $P(X = Y)$.

例 (3.1.3)

设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-x-y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求: (1) 常数 c; (2) $P(X + Y \leqslant 1)$; (3) $P(X = Y)$.

解

(2) 令 $D = \{(x, y) \mid x + y \leqslant 1, x > 0, y > 0\}$, 则

$$P(X + Y \leqslant 1) = \iint_D e^{-x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} e^{-x-y} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 (e^{-y} - e^{-1}) \mathrm{d}y = 1 - 2e^{-1}.$$

(3) $P(X = Y) = \iint\limits_{x=y} e^{-x-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$

1. 二维均匀分布

定义

设 D 是平面上的一个有界区域, 其面积为 S, 若随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S}, & (x, y) \in D; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

就称 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布, 简记为 $(X, Y) \sim U(D)$.

2. 二维正态分布

定义

设二维随机变量 (X, Y) 具有联合概率密度函数

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

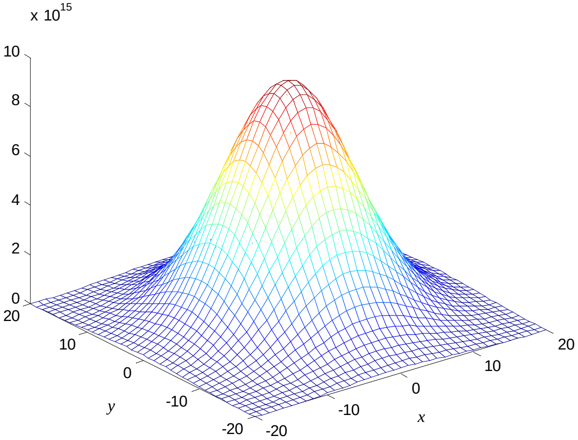
其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2; \rho$ 均为常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$, 则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2; \rho$ 的二维正态分布, 记作

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2; \rho).$$

二维正态分布的联合密度函数如下图所示.

2. 二维正态分布

二维正态分布 $N(0,0,8,8;0.4)$ 的联合密度函数如下图所示.



3. 二维指数分布

定义

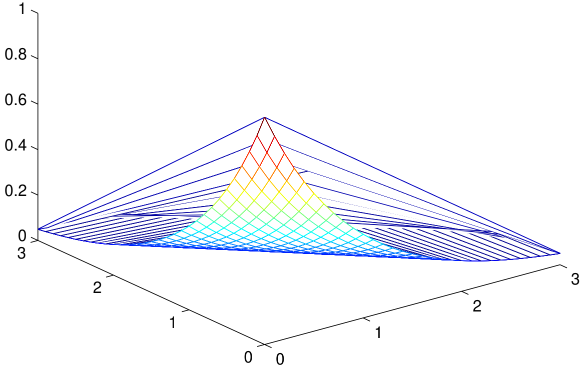
设二维随机变量 (X, Y) 具有联合概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 则称 (X, Y) 服从参数为 α, β 的二维指数分布.

3. 二维指数分布

二维指数分布, $\alpha = \beta = 1$



例 (3.1.4)

设 (X, Y) 在圆域 $x^2 + y^2 \leqslant 4$ 上服从均匀分布, 求:
(1) (X, Y) 的概率密度. (2) $P\{0 < X < 1, 0 < Y < 1\}$.

例 (3.1.4)

设 (X, Y) 在圆域 $x^2+y^2 \leqslant 4$ 上服从均匀分布, 求:
(1) (X, Y) 的概率密度. (2) $P\{0<X<1, 0<Y<1\}$.

解

(1) 圆域 $x^2+y^2 \leqslant 4$ 的面积 $A=4\pi$, 故 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}, & x^2+y^2 \leqslant 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 (3.1.4)

设 (X, Y) 在圆域 $x^2+y^2 \leqslant 4$ 上服从均匀分布, 求:
(1) (X, Y) 的概率密度. (2) $P\{0<X<1, 0<Y<1\}$.

解

(1) 圆域 $x^2+y^2 \leqslant 4$ 的面积 $A=4\pi$, 故 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}, & x^2+y^2 \leqslant 4, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) G 为不等式 $0<x<1, 0<y<1$ 所确定的区域, 所以

$$P\{0<X<1, 0<Y<1\}=\iint_G f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{4\pi}\mathrm{d}y=\frac{1}{4\pi}.$$

例 (2020307)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < y < \sqrt{1 - x^2})\}$ 上服从均匀分布，令

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X - Y > 0, \\ 0, & X - Y \leqslant 0, \end{cases} \qquad Z_2 = \begin{cases} 1, & X + Y > 0, \\ 0, & X + Y \leqslant 0, \end{cases}$$

求二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布.

解

二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

$$P\{Z_1 = 0, Z_2 = 0\} = P\{X - Y \leqslant 0, X + Y \leqslant 0\} = \frac{1}{4}.$$

$$P\{Z_1 = 0, Z_2 = 1\} = P\{X - Y \leqslant 0, X + Y > 0\} = \frac{1}{2}.$$

$$P\{Z_1 = 1, Z_2 = 0\} = P\{X - Y > 0, X + Y \leqslant 0\} = 0.$$

$$P\{Z_1 = 1, Z_2 = 1\} = P\{X - Y > 0, X + Y > 0\} = \frac{1}{4}.$$

1. 二维随机变量及其分布
2. 边际分布
   - 边际分布函数
   - 二维离散型随机变量的边际分布律
   - 二维连续型随机变量的边际分布
3. 随机变量的独立性
4. 两个随机变量的函数的分布
5. 条件分布
6. n 维随机变量及其分布

定义

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，X, Y 各自的分布函数分别记为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则称 $F_X(x)$ 为 (X, Y)关于 X 的边际分布函数(Marginal distribution function)，称 $F_Y(y)$ 为 (X, Y)关于 Y 的边际分布函数.

定义

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，X, Y 各自的分布函数分别记为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则称 $F_X(x)$ 为 (X, Y)关于 X 的边际分布函数(Marginal distribution function)，称 $F_Y(y)$ 为 (X, Y)关于 Y 的边际分布函数.

边际分布可以由 (X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y)$ 唯一确定，这是因为

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(X \leqslant x, Y < +\infty\ ) = \lim_{y \to +\infty} P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$$
$$= \lim_{y \to +\infty} F(x, y) =: F(x, +\infty).$$

类似有关于 Y 的边际分布函数

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) =: F(+\infty, y).$$

例 (3.2.1)

设 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = A(B + \arctan \frac{x}{2})(C + \arctan \frac{y}{3}),$$

试求: (1) 系数 A, B, C; (2) $F_X(x)$, $F_Y(y)$.

解 $(F(x,y) = A(B + \arctan\frac{x}{2})(C + \arctan\frac{y}{3}))$

由联合分布函数性质知

$$F(+\infty,+\infty) = A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2}) = 1,$$

$$F(x,-\infty) = A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2}) = 0,$$
$$F(-\infty,y) = A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan\frac{y}{3}) = 0,$$

于是 $A = \frac{1}{\pi^2}, B = C = \frac{\pi}{2}$. 从而两个边际分布函数为

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{2}\right),$$

$$F_Y(y) = F(+\infty,y) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{y}{3}\right).$$

定义 (3.2.2 边际分布律)

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，分别称 X, Y 的分布律

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i),\ \ i = 1, 2, \cdots,$$
$$p_{\cdot j} = P(Y = y_j),\ \ j = 1, 2, \cdots,$$

为 (X, Y) 关于 X, Y 的边际分布律.

定义 (3.2.2 边际分布律)

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，分别称 X, Y 的分布律

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \cdots ,$$
$$p_{\cdot j} = P(Y = y_j), \quad j = 1, 2, \cdots ,$$

为 (X, Y) 关于 X, Y 的**边际分布律**.

事实上，边际分布列可由联合分布律唯一确定并通过下式表出

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots ,$$
$$p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i p_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots ,$$

例 (3.2.2)

设一个口袋中有三个球，它们依次标有数字 $1, 2, 2$. 从这袋中任取一球后，再从袋中任取一球. 设每次取球时，袋中各个球被取到的可能性相同. 以 X, Y 分别记第一次、第二次取得的球上标有的数字，写出下列两种试验的随机变量 (X, Y) 的联合分布与边际分布. (1) 有放回摸球; (2) 无放回摸球.

例 (3.2.2)

设一个口袋中有三个球, 它们依次标有数字 $1, 2, 2$. 从这袋中任取一球后, 再从袋中任取一球. 设每次取球时, 袋中各个球被取到的可能性相同. 以 X, Y 分别记第一次、第二次取得的球上标有的数字, 写出下列两种试验的随机变量 (X, Y) 的联合分布与边际分布. (1) 有放回摸球; (2) 无放回摸球.

解 ((1) 采取有放回摸球时, (X, Y) 的联合分布与边际分布:)

$X \backslash Y$	1	2	$P\{X = x_i\}$
1	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

例 (3.2.2)

设一个口袋中有三个球，它们依次标有数字 $1, 2, 2$. 从这袋中任取一球后，再从袋中任取一球. 设每次取球时，袋中各个球被取到的可能性相同. 以 X, Y 分别记第一次、第二次取得的球上标有的数字，写出下列两种试验的随机变量 (X, Y) 的联合分布与边际分布. (1) 有放回摸球; (2) 无放回摸球.

例 (3.2.2)

设一个口袋中有三个球，它们依次标有数字 $1, 2, 2$. 从这袋中任取一球后，再从袋中任取一球. 设每次取球时，袋中各个球被取到的可能性相同. 以 X, Y 分别记第一次、第二次取得的球上标有的数字，写出下列两种试验的随机变量 (X, Y) 的联合分布与边际分布. (1) 有放回摸球; (2) 无放回摸球.

解 ((2) 采取无放回摸球时，(X, Y) 的联合分布与边际分布:)

$X \backslash Y$	1	2	$P\{X = x_i\}$
1	$\frac{1}{3} \times 0$	$\frac{1}{3} \times 1$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

- 在上例的表中，中间部分是 (X, Y) 的联合分布律，而边际部分是 X 和 Y 的边际分布律，它们由联合分布经同一行或同一列的和而得到，"边际" 两字即由上表的外貌得来.
- 显然，离散型二维随机变量的边际分布律也是离散的.
- 另外，例 3.2.2 的 (1) 和 (2) 中的 X 和 Y 的边际分布是相同的，但它们的联合分布却完全不同.

- 在上例的表中，中间部分是 (X, Y) 的联合分布律，而边际部分是 X 和 Y 的边际分布律，它们由联合分布经同一行或同一列的和而得到，“边际” 两字即由上表的外貌得来.
- 显然，离散型二维随机变量的边际分布律也是离散的.
- 另外，例 3.2.2 的 (1) 和 (2) 中的 X 和 Y 的边际分布是相同的，但它们的联合分布却完全不同.
- 由此可见，联合分布不能由边际分布唯一确定，也就是说，二维随机变量的性质不能由它的两个分量的个别性质来确定.
- 此外，还必须考虑它们之间的联系. 这进一步说明了多维随机变量的作用.

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量有联合密度函数为 $f(x, y)$，由 X 的边际分布的定义知

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}u,$$

故称

$$\boxed{f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y.}$$

为 (X, Y) 关于 X 的边际密度函数(或简称为 X 的边际密度函数，实际上就是 X 的密度函数).

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量有联合密度函数为 $f(x, y)$，由 X 的边际分布的定义知

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}u,$$

故称

$$\boxed{f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y.}$$

为 (X, Y) 关于 X 的边际密度函数(或简称为 X 的边际密度函数，实际上就是 X 的密度函数).

同样称

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x.}$$

为 (X, Y) 关于 Y 的边际密度函数(或简称为 Y 的边际密度函数，实际上就是 Y 的密度函数).

例 (3.2.3)

设 (X, Y) 服从单位圆 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上的均匀分布，试求 X, Y 的边际密度函数.

例 (3.2.3)

设 (X, Y) 服从单位圆 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 上的均匀分布, 试求 X, Y 的边际密度函数.

解

由题知 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \leqslant 1; \\ 0, & x^2+y^2>1.\end{cases}$$

所以, 当 $x \leqslant -1$ 或者 $x \geqslant 1$ 时, $f(x, y)=0$, $f_X(x)=0$.

例 (3.2.3)

设 (X, Y) 服从单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的均匀分布，试求 X, Y 的边际密度函数.

解

由题知 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1;\\ 0, & x^2+y^2>1.\end{cases}$$

所以，当 $x\leqslant -1$ 或者 $x\geqslant 1$ 时，$f(x, y)=0$，$f_X(x)=0$.
当 $-1<x<1$，且 $-\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}$ 时，$f(x, y)\neq 0$，此时有

$$f_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

例 (3.2.3)

设 (X, Y) 服从单位圆 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上的均匀分布，试求 X, Y 的边际密度函数.

解

综合可得 X 的边际密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

同理可得 Y 的边际密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}, & -1 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由此可看出，对于单位圆域上的二维均匀分布来说，其边际分布不再是一维均匀分布.

思考: 矩形域 $[a, b] \times [c, d]$ 上的均匀分布的边际分布是否是均匀分布?

思考：矩形域 $[a, b] \times [c, d]$ 上的均匀分布的边际分布是否是均匀分布？

解

此时，(X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & (x, y) \in [a, b] \times [c, d]. \\ 0, & (x, y) \notin [a, b] \times [c, d]. \end{cases}$$

所以，当 $x \leqslant a$ 或者 $x \geqslant b$ 时，$f(x, y) = 0$，$f_X(x) = 0$.
当 $a < x < b$，且 $c < y < d$ 时，$f(x, y) \neq 0$，此时有

$$f_X(x) = \int_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)} \mathrm{d}y = \frac{1}{b-a}.$$

解

综合可得 X 的边际密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

同理可得 Y 的边际密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c}, & c < y < d, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 (3.2.4)

求二维正态随机变量的边际概率密度.

例 (3.2.4)

求二维正态随机变量的边际概率密度.

解

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$, 由于

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right] \\
= & -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + (1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right],
\end{aligned}
$$

于是

$$
f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \mathrm{d}y,
$$

例 (3.2.4)

求二维正态随机变量的边际概率密度.

解

令

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$$

则有

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \ -\infty < x < +\infty.$$

同理

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

- 我们看到二维正态分布的两个边际分布都是一维正态分布，并且都不依赖于 ρ，亦即对于给定的 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$，不同的 ρ 对应不同的二维正态分布，它们的边际分布却都是一样的.
- 这一事实表明，对于连续型随机变量来说，单由关于 X 和关于 Y 的边际分布，一般来说也是不能确定 X 和 Y 的联合分布.

- 我们看到二维正态分布的两个边际分布都是一维正态分布，并且都不依赖于 ρ，亦即对于给定的 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$，不同的 ρ 对应不同的二维正态分布，它们的边际分布却都是一样的.
- 这一事实表明，对于连续型随机变量来说，单由关于 X 和关于 Y 的边际分布，一般来说也是不能确定 X 和 Y 的联合分布.
- 由上述的讨论可知：对于二维随机变量，联合分布函数唯一确定两个边际分布函数，联合密度函数唯一确定两个边际密度函数，联合分布列唯一确定两个边际分布列，反之不成立.

定义 (3.3.1)

设 X 和 Y 为两个随机变量, 若对于任意的 x 和 y, 事件 $\{X \leqslant x\}$, $\{Y \leqslant y\}$ 是相互独立的, 即

$$P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = P\{X \leqslant x\}P\{Y \leqslant y\},$$

则称 X 和 Y**相互独立**(Mutually independent) .

定义 (3.3.1)

设 X 和 Y 为两个随机变量, 若对于任意的 x 和 y, 事件 $\{X \leqslant x\}$, $\{Y \leqslant y\}$ 是相互独立的, 即

$$P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = P\{X \leqslant x\}P\{Y \leqslant y\},$$

则称 X 和 Y**相互独立**(Mutually independent) .

若二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 其边际分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则上述独立性条件等价于对所有 x 和 y 有

$$\boxed{F(x, y) = F_X(x)F_Y(y).}$$

对于二维离散型随机变量, 独立性条件等价于:

对于任何可能取的值 (x_i, y_j) 有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}.$$

对于二维连续型随机变量, 独立性条件等价于:

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y),$$

在 $f(x, y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 的一切公共连续点上都成立.

对于二维离散型随机变量, 独立性条件等价于:

对于任何可能取的值 (x_i, y_j) 有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}.$$

对于二维连续型随机变量, 独立性条件等价于:

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y),$$

在 $f(x, y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 的一切公共连续点上都成立.

由随机变量的独立性定义可知: 当 X, Y 相互独立时, 边际分布可以唯一确定联合分布.
如在例 3.2.2 的随机取数中, (1) 有放回方式时, X 与 Y 是相互独立的; 而 (2) 无放回方式时, X 与 Y 不是相互独立的.

例 (3.3.1)

设 (X, Y) 的联合分布律为:

$X \backslash Y$	0	1
0	0.3	0.4
1	0.2	0.1

试判断 X, Y 的独立性.

例 (3.3.1)

设 (X, Y) 的联合分布律为:

$X \backslash Y$	0	1
0	0.3	0.4
1	0.2	0.1

试判断 X, Y 的独立性.

解 (显然 X, Y 的边际分布律为:)

X	0	1
P	0.7	0.3

Y	0	1
P	0.5	0.5

因为 $P(X=0, Y=0)=0.3$, 而 $P(X=0)\cdot P(Y=0)=0.7\times 0.5=0.35$, 所以 X, Y 不独立.

例

设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，已知 (X, Y) 的联合分布律，求其余未知的概率值.

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X=x_i)$
1	0.01	0.2		
2	0.03			
$P(Y=y_j)$				

例

设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，已知 (X, Y) 的联合分布律，求其余未知的概率值.

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X = x_i)$
1	0.01	0.2	0.04	0.25
2	0.03	0.6	0.12	0.75
$P(Y = y_j)$	0.04	0.8	0.16	

例 (3.3.2)

已知 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y}, & x>0,\ y>0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

问 X 与 Y 是否独立?

例 (3.3.2)

已知 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x > 0,\ y > 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

问 X 与 Y 是否独立?

解

X, Y 的边际密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-x-y} \mathrm{d}y = e^{-x}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-x-y} \mathrm{d}x = e^{-y}, & y > 0; \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

由此可见 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, X, Y 相互独立.

例

随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k\,\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 k; (2) 求 (X, Y) 的分布函数;
(3) 求 $P\{0 < X \leqslant 1, 0 < Y \leqslant 2\}$;
(4) 求 $f_X(x), f_Y(y)$; (5) X 与 Y 是否相互独立?

例

随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k\,\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 k; (2) 求 (X, Y) 的分布函数;
(3) 求 $P\{0 < X \leqslant 1, 0 < Y \leqslant 2\}$;
(4) 求 $f_X(x), f_Y(y)$; (5) X 与 Y 是否相互独立?

解 ((1) 由联合概率密度函数的完备性得)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} k\mathrm{e}^{-3x-4y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= k\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-4y}\,\mathrm{d}y = \frac{k}{12} = 1,$$

所以, $k = 12$.

(2) 由联合分布函数的定义，当 $x \leqslant 0$ 或 $y \leqslant 0$ 时，$f(x, y) = 0$，所以 $F(x, y) = 0$；当 $x \geqslant 0$ 且 $y \geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s, t) \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} 12\mathrm{e}^{-3s-4t}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-3x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-4y}\right); \end{aligned}$$

综上，分布函数的表达式为

$$F(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \mathrm{e}^{-3x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-4y}\right), & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned} P\{0 < X \leqslant 1, 0 < Y \leqslant 2\} &= \int_{0}^{1} \int_{0}^{2} f(x, y) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-8}\right). \end{aligned}$$

(4) 由边际密度函数的定义知

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 12\mathrm{e}^{-3x-4y}\,\mathrm{d}y, & x > 0; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-3x}, & x > 0; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 12\mathrm{e}^{-3x-4y}\,\mathrm{d}x, & y > 0; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 4\mathrm{e}^{-4y}, & y > 0; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

(5) 由于 $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 相互独立.

例 (3.3.3)

设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 则 X, Y 独立的充要条件为 $\rho = 0$.

例 (3.3.3)

设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 则 X, Y 独立的充要条件为 $\rho = 0$.

证明.

充分性: 当 $\rho = 0$ 时, (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

又由例 3.2.4 知

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

所以 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, X, Y 独立. $\square$

例 (3.3.3)

设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$，则 X, Y 独立的充要条件为 $\rho = 0$.

证明.

必要性：设 X, Y 独立，则对任意的 x, y 都有 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$. 特别的，取 $x = \mu_1$，$y = \mu_2$ 得 $f(\mu_1, \mu_2) = f_X(\mu_1) f_Y(\mu_2)$，即

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2},$$

于是 $\sqrt{1-\rho^2} = 1$，$\rho = 0$. $\square$

例 (3.3.4)

证明: 若 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y)$ 是变量分离函数, 即 $f(x, y) = g(x)h(y)$, 则 X, Y 相互独立.

例 (3.3.4)

证明: 若 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y)$ 是变量分离函数, 即 $f(x, y) = g(x)h(y)$, 则 X, Y 相互独立.

解

只需证明 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. 因为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)\mathrm{d}y = g(x)\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)\mathrm{d}x = h(y)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

于是有

$$f_X(x)f_Y(y) = g(x)h(y)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = g(x)h(y) = f(x, y).$$

设 (X, Y) 为二维离散型随机变量，$z = g(x, y)$ 为连续函数，则 $Z = g(X, Y)$ 仍然是离散型随机变量.

例 (3.4.1)

设 (X, Y) 的分布律为:

X \ Y	-1	0	2
1	0.1	0.2	0.1
2	0.1	0.3	0.2

求 $Z = X + Y$ 和 $Z = XY$ 的分布律.

解

从表中看出 $Z=X+Y$ 可能取值为 $0,1,2,3,4.$ 且

$$P\{Z=0\}=P\{X+Y=0\}=P\{X=1,\ Y=-1\}=0.1;$$
$$P\{Z=1\}=P\{X+Y=1\}=P\{X=1,\ Y=0\}+P\{X=2,\ Y=-1\}=0.2$$

同理可得: $P(Z=2)=0.3,\ P(Z=3)=0.1,\ P(Z=4)=0.2.$ 于是 $Z=X+Y$ 的分布律为:

$X+Y$	0	1	2	3	4
P	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

同理可得, $Z=XY$ 的分布律为:

XY	-1	-2	0	2	4
P	0.1	0.1	0.5	0.1	0.2

解

一般地也可以通过如下列表方式来求:

P	0.1	0.2	0.1	0.1	0.3	0.2
(X, Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,2)$	$(2,-1)$	$(2,0)$	$(2,2)$
$X+Y$	0	1	3	1	2	4
XY	-1	0	2	-2	0	4

然后再写出 $X+Y$, XY 的分布列, 需要注意的相同取值对应的概率应相加.

例 (3.4.2)

设 X, Y 相互独立，且依次服从泊松分布 $P(\lambda_1)$，$P(\lambda_2)$，求证 $Z = X + Y$ 服从 $P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

例 (3.4.2)

设 X, Y 相互独立，且依次服从泊松分布 $P(\lambda_1)$，$P(\lambda_2)$，求证 $Z = X + Y$ 服从 $P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

证明.

Z 的可能取值为 $0, 1, 2, \cdots$，Z 的分布律为

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P\{X = i\}P\{Y = k - i\}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k! \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} = \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^k, \ k = 0, 1, 2, \cdots.$$

所以 $Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$. □

分布的可加性

例 (3.4.2)

设 X, Y 相互独立, 且依次服从泊松分布 $P(\lambda_1)$, $P(\lambda_2)$, 求证 $Z = X + Y$ 服从 $P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

- 称性质 "同一类分布的独立随机变量和的分布仍属于此类分布" 为此类分布具有可加性.
- $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 两者独立, 则 $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 两者独立, 则 $X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$.
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立且均服从 $B(1, p)$, 则

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim B(n, p).$$

例 (3.4.3)

设随机变量 X, Y 相互独立, 且都服从参数为 0.2 的 $0-1$ 分布, 即

$$P(X=1)=P(Y=1)=0.2,\ \ P(X=0)=P(Y=0)=0.8.$$

求 $U=\min(X,Y),\ V=\max(X,Y)$ 的分布.

解

显然 U 的可能取值为 $0,1$. 又

$$\begin{aligned}P(U=0)&=P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)\\&=P(X=0)P(Y=1)+P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=0)\\&=0.8\times 0.2+0.8\times 0.8+0.2\times 0.8=0.96.\end{aligned}$$

$$P(U=1)=P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=0.2\times 0.2=0.04.$$

解

于是 U 的分布律为:

$U=\min(X, Y)$	0	1
P	0.96	0.04

同理可得 V 的分布律为:

$V=\max(X, Y)$	0	1
P	0.64	0.36

设二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$，$g(x, y)$ 是一个连续函数，则 $Z = g(X, Y)$ 也是连续型随机变量．同一维连续型随机变量函数的分布求法相同，也是先求 Z 的分布函数，然后求导可得密度函数 $f_Z(z)$．

求密度函数 $f_Z(z)$ 的一般方法如下:

- 首先求出 $Z = g(X, Y)$ 的分布函数

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leqslant z\} = P\{g(X, Y) \leqslant z\} = P\{(X, Y) \in D_z\} \\ &= \iint_{D_z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

  其中 $D_z = \{(x, y) \mid g(x, y) \leqslant z\}$．
- 然后可得 $Z = g(X, Y)$ 密度函数为: $f_Z(z) = F'_Z(z)$．

(1) $Z = X + Y$ 的分布.

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = \iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里积分区域 G: $x + y \leqslant z$ 是直线 $x + y = z$ 左下方的半平面, 化成累次积分得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

固定 z 和 y, 对积分 $\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\mathrm{d}x$ 作变量变换, 令 $x = u - y$, 得

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{z} f(u - y, y)\mathrm{d}u,$$

于是

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u - y, y)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u - y, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y, y) \mathrm{d}u \right] \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y, y) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}u.$$

由概率密度的定义, 即得 Z 的概率密度为

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) \mathrm{d}y,}$$

由 X, Y 的对称性, $f_Z(z)$ 又可写成

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) \mathrm{d}x.}$$

这样, 我们得到了两个随机变量和的概率密度的一般公式.

卷积公式

特别地，当 X 和 Y 相互独立时，设 (X, Y) 关于 X, Y 的边际概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$，则有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y;$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \mathrm{d}x.$$

这两个公式称为卷积 (Convolution) 公式，记为

$$\boxed{f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \mathrm{d}x.}$$

例 (3.4.4)

设 X, Y 的联合密度如下,

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$Z=\dfrac{Y}{X}$, 试求 Z 的密度.

解

由 X, Y 的取值及 Z 与 X, Y 的关系可知, Z 的取值范围为 $0 \leqslant z \leqslant 1$. 先求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$. 当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$; 当 $z \geqslant 1$ 时, $F_Z(z) = 1$; 当 $0 \leqslant z < 1$ 时有

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P\left(\frac{Y}{X} \leqslant z\right) = P(Y \leqslant zX) \\
&= \iint\limits_{y \leqslant zx} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{zx} e^{-x}\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\
&= z\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = z.
\end{aligned}$$

则 Z 的密度函数为:

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant z \leqslant 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 (3.4.5)

设 X 和 Y 相互独立, 密度函数分别为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},$$

求 $Z = X + Y$ 的概率分布密度.

解

由卷积公式知

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}\mathrm{d}x,$$

设 $t = x - \dfrac{z}{2}$, 得

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}},$$

即 $Z \sim N(0,2)$.

上述结果有更为一般性的结论:

- 若 X, Y 相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

- 利用归纳法可将结论推广到 n 个独立正态随机变量之和的情况.
- 更一般地, 可以证明有限个相互独立的正态随机变量的线性组合 (组合系数不全为零) 仍服从正态分布.
若 $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, $i = 1, 2, \cdots n$, 且它们相互独立, 则其线性组合:

$$c_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n \sim N\left(\mu, \sigma^2\right),$$

其中 $c_1, c_2 \cdots c_n$ 是不全为 0 的常数, 两个参数为:

$$\mu = c_0 + c_1\mu_1 + \cdots + c_n\mu_n, \quad \sigma^2 = c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_n^2\sigma_n^2.$$

例 (3.4.6)

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0; \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + Y$ 的分布密度.

解

X, Y 相互独立, 所以由卷积公式知

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x.$$

注意到当 $x \leqslant 0$ 时, $f_X(x) = 0$; 当 $z - x \leqslant 0$, $f_Y(z-x) = 0$, 从而当 $z \leqslant 0$ 上述积分中被积函数为 0, $f_Z(z) = 0$; 当 $0 < x < z$ 时上述积分简化为

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda(z-x)}\mathrm{d}x = \lambda^2 z e^{-\lambda z},$$

所以

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0; \end{cases}$$

这是参数为 $(2, \lambda)$ 的 Γ-分布 ($Gamma$) 的密度函数.

例

X, Y 相互独立, 同时服从 $[0,1]$ 上的均匀分布, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

例

X, Y 相互独立, 同时服从 $[0,1]$ 上的均匀分布, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解

由卷积公式: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\ \mathrm{d}x$, 易知仅当

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z - x \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ z - 1 \leqslant x \leqslant z, \end{cases} \quad \text{时},$$

上述积分的被积函数不等于零!
根据 x 与 z 构成的区域, 依 z 分段考虑, 得:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z 1\ \mathrm{d}x = z, & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ \int_{z-1}^1 1\ \mathrm{d}x = 2 - z, & 1 < z \leqslant 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

另解，先求 $F(x)$ 再求 $f(x)$ 法:

$$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z)$$
$$= \iint_{x+y\leqslant z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{x+y\leqslant z} f_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

当 $z < 0$ 时，$F_Z(z) = 0$;

当 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 时，$F_z(z) = \iint_{\substack{x+y\leqslant z\\0<x,y<1}} 1 \times 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ 三角形面积 $= \frac{1}{2}z^2$;

当 $1 < z \leqslant 2$ 时，$F_Z(z) =$ 正方形面积减去三角形面积 $= 1 - \frac{1}{2}(2-z)^2$;

当 $z > 2$ 时，$F_Z(z) = 1$.

$$\therefore F_z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1, \\ 0.5z^2, & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ -0.5z^2 + 2z - 1, & 1 < z \leqslant 2, \\ 1, & z > 2 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} z, & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ 2 - z, & 1 < z \leqslant 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

设 X,Y 相互独立，且分布函数分别为 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$，求 X,Y 的最大值，最小值：$M=\max(X,Y)$，$N=\min(X,Y)$ 的分布函数 $F_M(z)$，$F_N(z)$.
由于 $M=\max(X,Y)$ 不大于 z 等价于随机变量 X 和 Y 都不大于 z，故 $P\{M\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}$，又由于 X 和 Y 相互独立，得

$$\begin{aligned}F_M(z)&=P(M\leqslant z)=P(X\leqslant z,Y\leqslant z)\\&=P(X\leqslant z)P(Y\leqslant z)=F_X(z)F_Y(z).\end{aligned}$$

类似地，可得 $N=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_N(z)&=P(N\leqslant z)=1-P(N>z)=1-P(X>z,Y>z)\\&=1-P(X>z)P(Y>z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z)).\end{aligned}$$

例 (3.4.7)

设 X, Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，求 $Z = \max(X, Y)$，$T = \min(X, Y)$ 的密度函数.

解

设 X, Y 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$，则

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0; \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

由于 Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = P\{X \leqslant z, Y \leqslant z\} = P\{X \leqslant z\}P\{Y \leqslant z\} = [F(z)]^2,$$

所以，Z 的密度函数为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = 2F(z)f(z) = \begin{cases} 2e^{-z}(1 - e^{-z}), & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$$

例 (3.4.7)

设 X, Y 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 求 $Z = \max(X, Y)$, $T = \min(X, Y)$ 的密度函数.

例 (3.4.7)

设 X, Y 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 求 $Z = \max(X, Y)$, $T = \min(X, Y)$ 的密度函数.

解

从而 T 的分布函数和密度函数为

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(X > t, Y > t) \\ &= 1 - P(X > t)P(Y > t) = 1 - [1 - F(t)]^2 \end{aligned}$$

$$f_T(t) = F'_T(t) = 2[1 - F(t)]f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

此例说明: 相互独立的两个服从参数为 λ 的指数分布的最小值分布仍然是指数分布, 参数为 2λ.

例

设 $P\{X \geqslant 0, Y \geqslant 0\} = \frac{1}{5}$, $P\{X \geqslant 0\} = P\{Y \geqslant 0\} = \frac{2}{5}$, 则 $P\{\max(X, Y) \geqslant 0\} = (\quad\quad)$.

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

例

设 $P\{X \leqslant 1, Y \leqslant 1\} = \frac{2}{5}$, $P\{X \leqslant 1\} = P\{Y \leqslant 1\} = \frac{3}{5}$, 则 $P\{\min(X, Y) \leqslant 1\} = (\quad)$.

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{9}{25}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

1. 二维随机变量及其分布
2. 边际分布
3. 随机变量的独立性
4. 两个随机变量的函数的分布
5. 条件分布
   - 二维离散型随机变量的条件分布律
   - 二维连续型随机变量的条件分布
6. n 维随机变量及其分布

定义 (3.5.1)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \ (i, j = 1, 2, \cdots).$$

对于固定的 j, 若 $P\{Y = y_j\} > 0$, 则称

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \cdots ,$$

为在条件 $Y = y_j$ 下随机变量 X 的条件分布律(Conditional distribution).
同样, 对于固定的 i, 若 $P\{X = x_i\} > 0$, 则称

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \cdots ,$$

为在条件 $X = x_i$ 下随机变量 Y 的条件分布律.

从上述定义中可以看出条件分布列具有分布列的两条重要性质:

(1) **非负性**. $P\{X=x_i \mid Y=y_j\} \geqslant 0$.

(2) **正则性**. $\sum\limits_i P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=1$.

例 (3.5.1)

已知 (X, Y) 的联合分布律如下表所示:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.1	0.2
1	0.3	0.2	0.1

求: (1) 在 $Y=2$ 的条件下, X 的条件分布律.

(2) 在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律.

解

(1) 由联合分布律表可知: $P(Y=2)=0.3$. 于是

$$P(X=0\mid Y=2)=\frac{P(X=0,\,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3},$$

$$P(X=1\mid Y=2)=\frac{P(X=1,\,Y=2)}{P(X=2)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}.$$

即, 在 $Y=2$ 的条件下 X 的条件分布律为:

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

(2) 同理可求得在 $X=1$ 的条件下的条件分布律为:

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

定义 (3.5.2)

设二维连续型随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$，概率密度函数为 $f(x, y)$，且 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续，$f_Y(y) > 0$，$f_X(x) > 0$，则分别称

$$f_{X \mid Y}(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)},$$

为在条件 $Y = y$ 下 X 的条件概率密度，

$$f_{Y \mid X}(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)},$$

为在条件 $X = x$ 下 Y 的条件概率密度.

定义 (3.5.2)

设二维连续型随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$，概率密度函数为 $f(x, y)$，且 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续，$f_Y(y) > 0$，$f_X(x) > 0$，则分别称

$$F_{X \mid Y}(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} \mathrm{d}u,$$

为在条件 $Y = y$ 下 X 的条件分布函数.

$$F_{Y \mid X}(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x, v)}{f_X(x)} \mathrm{d}v,$$

为在条件 $X = x$ 下 Y 的条件分布函数.

例 (3.5.2)

设 $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$，在 $X = x$ 的条件下 $Y \mid X = x \sim N(x, \sigma_2^2)$，试求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解（由题意知：）

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},$$

$$f(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_2^2}},$$

于是可得

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f(y \mid x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-x)^2}{2\sigma_2^2}\right)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

例 (3.5.2)

设 $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$，在 $X = x$ 的条件下 $Y \mid X = x \sim N(x, \sigma_2^2)$，试求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解

令 $c = \dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$，且将指数部分关于 x 进行配方得

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2c}\left[x - c\left(\frac{\mu}{\sigma_1^2}+\frac{y}{\sigma_1^2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right],$$

最后一个等式应用到了密度函数的正则性. 这个式子也表明 $Y \sim N(\mu, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

例 (3.5.3)

设随机变量 $X \sim U(0,1)$，当观察到 $X = x\ (0 < x < 1)$ 时，$Y \sim U(x,1)$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解

按题意，X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

类似地，对于任意给定的值 $x\ (0 < x < 1)$，在 $X = x$ 的条件下，Y 的条件概率密度

$$f_{Y \mid X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

解

因此, X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_{Y \mid X}(y \mid x) f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

于是, 得关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^y \dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x = -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

定义 (3.6.1)

设 $X_i(\omega)$, $i=1,2,\cdots,n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量，则称向量 $(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ 为 Ω 的 n 维随机变量，简记为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

与二维随机变量一样，n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的性质不仅与每个分量性质有关，而且还依赖于它们的相互关系，通常也用 n 维分布函数来描述其分布规律.

定义 (3.6.2)

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维随机变量，对任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 y，称 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n)$$

为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数，或称为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数.

定义 (3.6.3)

若 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的所有可能取值是有限对或可列无穷多对，则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维离散型随机变量.

例 (3.6.1)

进行 n 次独立重复试验，如果每次有 r 个可能结果：$A_1, A_2, \cdots, A_r$，且每次试验中 A_i 发生的概率为 p_i，$i = 1, 2, \cdots, r$. 记 X_i 为 n 次独立重复试验中 A_i 出现的次数，$i = 1, 2, \cdots, r$. 则 A_1 出现 n_1 次，A_2 出现 n_2 次，$\cdots$，A_r 出现 n_r 次的概率为

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \cdots, X_r = n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$$

其中 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

这个联合分布称为 r 项分布，又称多项分布，记为 $M(n, p_1, p_2, \cdots, p_r)$. $r = 2$ 时即为二项分布 $b(n, p_1)$.

定义 (3.6.4)

对 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，如果存在非负可积函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得对于任意的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，都有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \cdots, u_n)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n,$$

就称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维连续型随机变量，称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合概率密度函数，简称为概率密度.

可以证明：$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 落在区域 D 的概率就是密度函数在该区域上的 n 重积分，即

$$P((x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D) = \int\int\cdots\int_D f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

例 (3.6.2 多维均匀分布)

设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界区域, 其度量 (平面上为面积, 空间为体积等) 为 S_D, 若多维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_D}, & (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 D 上的多维均匀分布, 记为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim U(D)$.

定义 (3.6.5)

若 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 称

$$F_{X_i}(x_i) = F(+\infty, +\infty, \cdots, x_i, +\infty, \cdots, +\infty)$$

为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_i 的边际缘分布.
类似于二维随机变量, 对离散型随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称

$$P(X_i = x_i) = \sum_{x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$$

为其关于 X_i 的边际缘分布列.
对连续型随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1} \mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n$$

为其关于 X_i 的边缘概率密度函数.

定义 (3.6.6)

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，边际缘分布为 $F_{X_i}(x_i)$，若

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$**相互独立**.

对于离散型和连续型随机变量，上述独立性条件分别等价于

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i),$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

对于任意的 x_i 都成立.

例 (3.6.3)

设三维随机变量 (X_1, X_2, X_3) 的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2+x_3)}, & x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

判断 X_1, X_2, X_3 的独立性.

解

先计算 X_1 的概率密度

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$$

当 $x_1 \leqslant 0$ 时，$f(x_1, x_2, x_3) = 0$，于是 $f_{X_1}(x_1) = 0$. 当 $x_1 > 0$ 时，有

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-(x_1+x_2+x_3)}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = e^{-x_1}.$$

同理可得

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} e^{-x_2}, & x_2 > 0, \\ 0, & x_2 \leqslant 0. \end{cases} \qquad f_{X_3}(x_3) = \begin{cases} e^{-x_3}, & x_3 > 0, \\ 0, & x_3 \leqslant 0. \end{cases}$$

显然有 $f(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)f_{X_3}(x_3)$，$X_1, X_2, X_3$ 独立.

对于 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 设 $x = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 元连续函数, 则

$$Z = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

为一个随机变量, 一般地可由 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布可求得 Z 的分布.

(1) 设 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 且相互独立, 则

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2).$$

(2) 设 X_i 的分布函数是 $F_{X_i}(x_i)$，且 X_i 相互独立，则有 $Z=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(z);$$

$Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

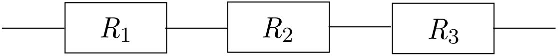
$$F_Z(z)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(z));$$

特别地，当 X_i 独立且具有相同分布函数 $F(\cdot)$ 时有，

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,\ \ F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n.$$

例 (3.6.4)

某系统由 3 个独立的电子原件串联而成, 设各电子元件的寿命 X_i 均服从参数为 λ 的指数分布, 试求该系统稳定的时间 T 的概率密度.



解

X_i 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

显然系统稳定时间 $T = \min(X_1, X_2, X_3)$, 于是由例 3.4.7 知

$$f_T(t) = \begin{cases} 3\lambda e^{-3\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

本章小结

(1) 常见的二维随机变量: 二维离散型随机变量和二维连续型随机变量.

(2) 二维随机变量的分布函数: $F(x,y)=P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}$, 联合分布函数的性质: 单调不减性、有界性、右连续性、非负性.

(3) 二维离散型随机变量的联合分布列描述, 有性质: 非负性: $p_{ij}\geqslant 0$; 规范性: $\sum\limits_{i,j}p_{ij}=1$.

(4) 二维连续型随机变量的联合密度 $f(x,y)$ 描述, 有性质

- 非负性: $f(x,y)\geqslant 0,\ \ (-\infty<x,y<+\infty)$.
- 正则性: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=1$.
- $P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续, 则 $f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$.

(5) 边际分布函数、边际分布列和边际密度函数

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=F(x,+\infty),$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(+\infty,y).$$

$$p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_j P(X=x_i,\ Y=y_j)=\sum_j p_{ij},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum_i P(X=x_i,\ Y=y_j)=\sum_i p_{ij},\quad j=1,2,\cdots,$$

$$f_X(x)=\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(6) 随机变量 X, Y 相互独立的三个充要条件:

- $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.
- 对于二维离散型变量: $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$.
- 对于二维连续型变量: $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.

(7) 两个随机变量函数的分布.

(8) * 条件分布.

(9) * n 维随机变量的联合分布、边际分布及独立性.