第 3 节 n 维向量空间的正交性

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

内积的定义

定义 (4.3.1)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个向量，则实数 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积，记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

在 R^3 中，也将 (α,β) 记为 $\alpha\cdot\beta$.
利用矩阵的乘法，若将 α,β 看作行矩阵，则 (α,β) 又可表示为 $\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.
若将 α,β 记为列向量的形式，则 (α,β) 可表示为 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta$.

内积的定义

定义 (4.3.1)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个向量，则实数 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积，记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

在 $\mathbf{R}^3$ 中，也将 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 记为 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$.
利用矩阵的乘法，若将 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 看作行矩阵，则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 又可表示为 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.
若将 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 记为列向量的形式，则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$.

内积的性质

根据内积的定义，容易证明内积具有以下性质:

1° **非负性**: $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时等号成立;

2° **对称性**: $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

3° **线性性**: $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}), (k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意三个向量, k 为任意实数.

由上述性质与定义不难看出，内积还满足以下关系:

$$(\boldsymbol{\alpha}, l\boldsymbol{\beta}) = l(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}), \quad l \in \mathbf{R},$$
$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}).$$

利用内积可以定义向量的长度.

内积的性质

根据内积的定义, 容易证明内积具有以下性质:

1° **非负性**: $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时等号成立;

2° **对称性**: $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

3° **线性性**: $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意三个向量, k 为任意实数.

由上述性质与定义不难看出, 内积还满足以下关系:

$$(\boldsymbol{\alpha},l\boldsymbol{\beta})=l(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\quad l\in\mathbf{R},$$
$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}).$$

利用内积可以定义向量的长度.

向量的长度

定义 (4.3.2)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$，则 $\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度，记为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$.

向量的长度具有以下性质：

1° 非负性：$\|\boldsymbol{\alpha}\| \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 0$;

2° 齐次性：$\|k\boldsymbol{\alpha}\| = |k|\|\boldsymbol{\alpha}\|, \quad k \in \mathbf{R}$;

3° 三角不等式：$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$.

当 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 1$ 时，称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量. 若 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，则由

$$\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}, \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}\right) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 1$$

可知 $\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$ 是单位向量.

向量的长度

定义 (4.3.2)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，则 $\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度，记为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$.

向量的长度具有以下性质:

1° **非负性**: $\|\boldsymbol{\alpha}\|\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$;

2° **齐次性**: $\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\|\boldsymbol{\alpha}\|,\quad k\in\mathbf{R}$;

3° **三角不等式**: $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.

当 $\|\alpha\|=1$ 时，称 α 为单位向量. 若 $\alpha\neq\mathbf{0}$，则由

$$\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha},\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}\right)=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=1$$

可知 $\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$ 是单位向量.

向量的长度

定义 (4.3.2)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，则 $\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度，记为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$.

向量的长度具有以下性质:

1° **非负性**: $\|\boldsymbol{\alpha}\|\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$;

2° **齐次性**: $\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\|\boldsymbol{\alpha}\|,\quad k\in\mathbf{R}$;

3° **三角不等式**: $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.

当 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$ 时，称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量. 若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则由

$$\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha},\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}\right)=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=1$$

可知 $\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$ 是单位向量.

柯西 − 施瓦茨不等式

向量的内积还满足以下柯西 − 施瓦茨不等式:

$$\boxed{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2,}$$

当且仅当 α 与 β 线性相关时等号成立.

事实上, 若 α,β 线性无关, 则对任意实数 t, 都有 $t\alpha+\beta\neq 0$, 于是

$$(t\alpha+\beta,t\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)t^2+2(\alpha,\beta)t+(\beta,\beta)>0.$$

这是关于 t 的二次函数, 其函数值恒正, 则其判别式必小于零, 故有

$$[2(\alpha,\beta)]^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)<0,$$

即

$$(\alpha,\beta)^2<\|\alpha\|^2\|\beta\|^2.$$

柯西 － 施瓦茨不等式

向量的内积还满足以下柯西 － 施瓦茨不等式:

$$\boxed{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2,}$$

当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时等号成立.

事实上, 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 则对任意实数 t, 都有 $t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$, 于是

$$(t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})t^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})t+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})>0.$$

这是关于 t 的二次函数, 其函数值恒正, 则其判别式必小于零, 故有

$$[2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]^2-4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})<0,$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2<\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

柯西 – 施瓦茨不等式

向量的内积还满足以下柯西 – 施瓦茨不等式:

$$\boxed{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2,}$$

当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时等号成立.
事实上, 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 则对任意实数 t, 都有 $t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$, 于是

$$(t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})t^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})t+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})>0.$$

这是关于 t 的二次函数, 其函数值恒正, 则其判别式必小于零, 故有

$$[2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]^2-4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})<0,$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 < \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

柯西 － 施瓦茨不等式

向量的内积还满足以下柯西 － 施瓦茨不等式:

$$\boxed{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2,}$$

当且仅当 α 与 β 线性相关时等号成立.
事实上, 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 则对任意实数 t, 都有 $t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$, 于是

$$(t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})t^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})t+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})>0.$$

这是关于 t 的二次函数, 其函数值恒正, 则其判别式必小于零, 故有

$$[2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]^2-4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})<0,$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2<\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

当 α, β 线性相关时, 如果 α, β 中有一个为 0, 那么显然等式成立. 因而不妨设 $\beta = k\alpha \neq \mathbf{0}$, 则有

$$(\alpha, \beta)^2 = (\alpha, k\alpha)^2 = k^2(\alpha, \alpha)^2 = (\alpha, \alpha)(k\alpha, k\alpha) = \|\alpha\|^2\|\beta\|^2.$$

根据柯西 − 施瓦茨不等式, 对于任何非零向量 α, β, 总有

$$\left|\frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}\right| \leqslant 1.$$

这样我们就可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中向量的夹角.

定义 (4.3.3)

当 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 且 $\beta \neq \mathbf{0}$ 时, $\theta = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$ 称为 α 与 β 的夹角, 记为 $\langle \alpha, \beta \rangle$.

当 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关时，如果 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 中有一个为 $\mathbf{0}$，那么显然等式成立. 因而不妨设 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，则有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 = (\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\alpha})^2 = k^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})^2 = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(k\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\alpha}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

根据柯西 – 施瓦茨不等式，对于任何非零向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，总有

$$\left|\frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}\right| \leqslant 1.$$

这样我们就可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中向量的夹角.

定义 (4.3.3)

当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ 时，$\theta = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角，记为 $\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle$.

定义 (4.3.4)

若向量 α 与 β 的内积为零，即 $(\alpha,\beta)=0$，则称 α 与 β **正交**.

显然，$\mathbf{R}^n$ 中的零向量 $\mathbf{0}$ 与任一向量 α 的内积 $(\mathbf{0},\alpha)=0$，所以零向量与任何向量都正交.

定义 (4.3.5)

若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意两个向量都正交且不含零向量，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为**正交向量组**.

正交向量组是 $\mathbf{R}^n$ 中十分重要的概念，下面讨论正交向量组的有关性质.

定义 (4.3.4)

若向量 α 与 β 的内积为零，即 $(\alpha,\beta)=0$，则称 α 与 β **正交**.

显然，$\mathbf{R}^n$ 中的零向量 $\mathbf{0}$ 与任一向量 α 的内积 $(\mathbf{0},\alpha)=0$，所以零向量与任何向量都正交.

定义 (4.3.5)

若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意两个向量都正交且不含零向量，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为**正交向量组**.

正交向量组是 $\mathbf{R}^n$ 中十分重要的概念，下面讨论正交向量组的有关性质.

定理 (4.3.1)

正交向量组是线性无关的.

证明.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是正交向量组, 且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}.$$

用 α_1 与上式两端作内积, 则

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \mathbf{0}) &= (\alpha_1, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m) \\ &= (\alpha_1, k_1\alpha_1) + (\alpha_1, k_2\alpha_2) + \cdots + (\alpha_1, k_m\alpha_m) \\ &= k_1(\alpha_1, \alpha_1) + k_2(\alpha_1, \alpha_2) + \cdots + k_m(\alpha_1, \alpha_m) \\ &= k_1(\alpha_1, \alpha_1) = 0.\end{aligned}$$

因为 $\alpha_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $(\alpha_1, \alpha_1) > 0$, 于是 $k_1 = 0$.
同理, $k_2 = \cdots = k_m = 0$. 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关. □

定理 (4.3.1)

正交向量组是线性无关的.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是正交向量组, 且

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

用 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与上式两端作内积, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}) &= (\boldsymbol{\alpha}_1, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, k_1\boldsymbol{\alpha}_1) + (\boldsymbol{\alpha}_1, k_2\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}_1, k_m\boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= k_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_m(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= k_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) = 0.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) > 0$, 于是 $k_1 = 0$.
同理, $k_2 = \cdots = k_m = 0$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

定理 (4.3.1)

正交向量组是线性无关的.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是正交向量组, 且

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

用 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与上式两端作内积, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}) &= (\boldsymbol{\alpha}_1, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, k_1\boldsymbol{\alpha}_1) + (\boldsymbol{\alpha}_1, k_2\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}_1, k_m\boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= k_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_m(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= k_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) = 0.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) > 0$, 于是 $k_1 = 0$.
同理, $k_2 = \cdots = k_m = 0$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

定理 (4.3.1)

正交向量组是线性无关的.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是正交向量组, 且

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

用 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与上式两端作内积, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}) &= (\boldsymbol{\alpha}_1, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, k_1\boldsymbol{\alpha}_1) + (\boldsymbol{\alpha}_1, k_2\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}_1, k_m\boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= k_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_m(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ &= k_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) = 0.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) > 0$, 于是 $k_1 = 0$.
同理, $k_2 = \cdots = k_m = 0$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. □

但是，线性无关向量组未必是正交向量组．如 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,1)$ 线性无关，但其中任何两个向量都不正交．

例 (4.3.1)

在 $\mathbf{R}^3$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-2,1)$，求向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为正交向量组．

解

显然 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 0$，设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)$，则应有

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3) = x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,0,1)$．$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为正交向量组．
因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基．

但是，线性无关向量组未必是正交向量组. 如 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,1)$ 线性无关，但其中任何两个向量都不正交.

例 (4.3.1)

在 $\mathbf{R}^3$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-2,1)$，求向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为正交向量组.

解

显然 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 0$，设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)$，则应有

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3) = x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,0,1)$. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为正交向量组.
因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基.

例 (4.3.2)

在 $\mathbf{R}^n$ 中，设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r < n)$ 线性无关，且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 中每一个向量都与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 中每一个向量正交，且 $s + r > n$. 证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, r)$, $\boldsymbol{\beta}_j\ (j = 1, 2, \cdots, s)$ 均为列向量，则

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j) = \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r,\ j = 1, 2, \cdots, s),$$

又设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{\beta}_j$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的解向量. 而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系由 $n - R(\boldsymbol{A}) = n - r$ 个解向量组成，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩 $\leq n - r$，由已知条件 $s + r > n$ 可得 $s > n - r$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关. □

例 (4.3.2)

在 $\mathbf{R}^n$ 中，设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r < n)$ 线性无关，且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 中每一个向量都与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 中每一个向量正交，且 $s + r > n$. 证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, r)$, $\boldsymbol{\beta}_j\ (j = 1, 2, \cdots, s)$ 均为列向量，则

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j) = \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r,\ j = 1, 2, \cdots, s),$$

又设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{\beta}_j$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的解向量. 而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系由 $n - R(\boldsymbol{A}) = n - r$ 个解向量组成，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩 $\leq n - r$，由已知条件 $s + r > n$ 可得 $s > n - r$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关. □

例 (4.3.2)

在 $\mathbf{R}^n$ 中，设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r < n)$ 线性无关，且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 中每一个向量都与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 中每一个向量正交，且 $s + r > n$. 证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, r)$, $\boldsymbol{\beta}_j \ (j = 1, 2, \cdots, s)$ 均为列向量，则

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j) = \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r, \ j = 1, 2, \cdots, s),$$

又设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{\beta}_j$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的解向量. 而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n - R(\boldsymbol{A}) = n - r$ 个解向量组成，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩 $\leq n - r$，由已知条件 $s + r > n$ 可得 $s > n - r$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关. $\square$

例 (4.3.2)

在 $\mathbf{R}^n$ 中，设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r < n)$ 线性无关，且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 中每一个向量都与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 中每一个向量正交，且 $s + r > n$. 证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, r)$, $\boldsymbol{\beta}_j \ (j = 1, 2, \cdots, s)$ 均为列向量，则

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j) = \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r, \ j = 1, 2, \cdots, s),$$

又设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{\beta}_j$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的解向量. 而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系由 $n - R(\boldsymbol{A}) = n - r$ 个解向量组成，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩 $\leqslant n - r$，由已知条件 $s + r > n$ 可得 $s > n - r$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关. □

在正交向量组中，每一个向量的长度都是 1 的正交向量组在相关讨论中特别重要.

定义 (4.3.6)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的正交向量组，且 $\|\boldsymbol{\alpha}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为标准正交向量组. 若 $s = n$，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基.

标准正交向量组又称为规范正交向量组.

例如，$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 0, 1)$ 与

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \boldsymbol{\beta}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \boldsymbol{\beta}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

都是 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基.

在正交向量组中，每一个向量的长度都是 1 的正交向量组在相关讨论中特别重要.

定义 (4.3.6)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的正交向量组，且 $\|\boldsymbol{\alpha}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为标准正交向量组. 若 $s = n$，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基.

标准正交向量组又称为规范正交向量组.

例如，$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 0, 1)$ 与

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \boldsymbol{\beta}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \boldsymbol{\beta}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

都是 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基.

例 (4.3.3)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基, 求 $\mathbf{R}^n$ 中向量 β 在该基下的坐标.

解

设 $\beta = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 将此式两边对 $\boldsymbol{\alpha}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 分别求内积, 得

$$\begin{aligned}(\beta, \boldsymbol{\alpha}_j) &= (x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j (\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j.\end{aligned}$$

故 β 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $x_j = (\beta, \boldsymbol{\alpha}_j), j = 1, 2, \cdots, n$.

在 R^3 中, 取 i, j, k 为标准正交基, 这里的 x_1, x_2, x_3 就是 β 在 i, j, k 上的投影.

例 (4.3.3)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基，求 $\mathbf{R}^n$ 中向量 β 在该基下的坐标.

解

设 $\beta = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，将此式两边对 $\boldsymbol{\alpha}_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 分别求内积，得

$$\begin{aligned}(\beta, \boldsymbol{\alpha}_j) &= (x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j (\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j.\end{aligned}$$

故 β 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $x_j = (\beta, \boldsymbol{\alpha}_j), j = 1, 2, \cdots, n$.

在 R^3 中，取 i, j, k 为标准正交基，这里的 x_1, x_2, x_3 就是 β 在 i, j, k 上的投影.

例 (4.3.3)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基, 求 $\mathbf{R}^n$ 中向量 β 在该基下的坐标.

解

设 $\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 将此式两边对 $\boldsymbol{\alpha}_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 分别求内积, 得

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j) &= (x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\,(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j\,(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j.
\end{aligned}
$$

故 β 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $x_j = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j), j = 1, 2, \cdots, n$.

在 $\mathbf{R}^3$ 中, 取 i, j, k 为标准正交基, 这里的 x_1, x_2, x_3 就是 β 在 i, j, k 上的投影.

例 (4.3.3)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基，求 $\mathbf{R}^n$ 中向量 β 在该基下的坐标.

解

设 $\beta = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，将此式两边对 $\boldsymbol{\alpha}_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 分别求内积，得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j) &= (x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\,(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j\,(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j.\end{aligned}$$

故 β 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $x_j = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j), j = 1, 2, \cdots, n.$

在 R^3 中，取 i, j, k 为标准正交基，这里的 x_1, x_2, x_3 就是 β 在 i, j, k 上的投影.

例 (4.3.3)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基，求 $\mathbf{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在该基下的坐标.

解

设 $\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，将此式两边对 $\boldsymbol{\alpha}_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 分别求内积，得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j) &= (x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j (\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $x_j = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j), j = 1, 2, \cdots, n$.

在 $\mathbf{R}^3$ 中，取 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为标准正交基，这里的 x_1, x_2, x_3 就是 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 上的投影.

- n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中任意 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 都可以作为 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 这组基未必是标准正交基.
- 但是, 任何一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 都可以通过适当的方法化为一组任意两个向量都正交的单位向量 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$, 且 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 等价. 这种方法就是施密特 (Schmidt) 正交化方法.
- 我们首先考虑由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 组成的线性无关向量组.

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\beta}_1$, 选择适当的 k, 使得 $(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=0$, 即

$$(\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)+k(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=0,$$

由此推出 $k=-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}$,

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1.$$

令 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$, 为使 $(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1)=0,(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=0$, 则可推出

$$k_1=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)},\qquad k_2=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)},$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2.$$

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\beta}_1$，选择适当的 k，使得 $(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=0$，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)+k(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=0,$$

由此推出 $k=-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}$，

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1.$$

令 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$，为使 $(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1)=0,(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=0$，则可推出

$$k_1=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)},\quad k_2=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)},$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2.$$

一般地，把线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 化为与之等价的标准正交向量组的**施密特正交化过程如下**:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\cdots$$

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{\alpha}_s - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_{s-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{s-1}, \boldsymbol{\beta}_{s-1})}\boldsymbol{\beta}_{s-1}.}$$

再令

$$\gamma_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|}\boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

则 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 是一组与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 等价的标准正交向量组.

一般地, 把线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 化为与之等价的标准正交向量组的施密特正交化过程如下:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\cdots$$

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{\alpha}_s - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_{s-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{s-1}, \boldsymbol{\beta}_{s-1})}\boldsymbol{\beta}_{s-1}.}$$

再令

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|}\boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s$ 是一组与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 等价的标准正交向量组.

例 (4.3.4)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)$, 在 $\mathbf{R}^3$ 中求 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, 使 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为正交向量组.

解

由 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 0$, $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3) = 0$ 可知, $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都应满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 其基础解系为 $\xi_1 = (1,0,-1)$, $\xi_2 = (0,1,-1)$.

将 ξ_1, ξ_2 正交化:

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \xi_1 = (1,0,-1),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_3 &= \xi_2 - \frac{(\xi_2, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) \\ &= \frac{1}{2}(-1,2,-1).\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为所求的正交向量组.

例 (4.3.4)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)$, 在 $\mathbf{R}^3$ 中求 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, 使 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为正交向量组.

解

由 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 0$, $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3) = 0$ 可知, $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都应满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,-1)$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (0,1,-1)$.

将 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 正交化:

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,-1),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,0,-1)$$
$$= \frac{1}{2}(-1,2,-1).$$

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为所求的正交向量组.

例 (4.3.4)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)$, 在 $\mathbf{R}^3$ 中求 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, 使 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为正交向量组.

解

由 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 0$, $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3) = 0$ 可知, $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都应满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,-1)$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (0,1,-1)$.
将 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化:

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\xi}_1 = (1,0,-1),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)}\boldsymbol{\alpha}_2 &= (0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) \\ &= \frac{1}{2}(-1,2,-1).\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为所求的正交向量组.

例 (4.3.5)

在 $\mathbf{R}^3$ 中, 将基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1), \boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,1)$ 化为标准正交基.

解

先正交化, 令

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1),$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,2,1)-\frac{4}{3}(1,1,1)=\frac{1}{3}(-1,2,-1),$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=(0,-1,1)-\frac{0}{3}(1,1,1)+\frac{1}{2}(-1,2,-1)=\frac{1}{2}(-1,0,1).$$

例 (4.3.5)

在 $\mathbf{R}^3$ 中, 将基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1), \boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,1)$ 化为标准正交基.

解

先正交化, 令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)-\frac{4}{3}(1,1,1)=\frac{1}{3}(-1,2,-1),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\&=(0,-1,1)-\frac{0}{3}(1,1,1)+\frac{1}{2}(-1,2,-1)=\frac{1}{2}(-1,0,1).\end{aligned}$$

例 (4.3.5)

在 $\mathbf{R}^3$ 中，将基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,1)$ 化为标准正交基.

解

先正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)-\frac{4}{3}(1,1,1)=\frac{1}{3}(-1,2,-1),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\&=(0,-1,1)-\frac{0}{3}(1,1,1)+\frac{1}{2}(-1,2,-1)=\frac{1}{2}(-1,0,1).\end{aligned}$$

例 (4.3.5)

在 $\mathbf{R}^3$ 中, 将基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1), \boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,1)$ 化为标准正交基.

解

先正交化, 令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)-\frac{4}{3}(1,1,1)=\frac{1}{3}(-1,2,-1),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\&=(0,-1,1)-\frac{0}{3}(1,1,1)+\frac{1}{2}(-1,2,-1)=\frac{1}{2}(-1,0,1).\end{aligned}$$

例 (4.3.5)

在 $\mathbf{R}^3$ 中，将基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,1)$ 化为标准正交基.

解

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{3}(-1,2,-1),\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{2}(-1,0,1).$$

再单位化，令

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$
$$\gamma_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1),$$
$$\gamma_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).$$

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 就是 $\mathbf{R}^3$ 的一组标准正交基.

将例 5 中的 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 作为一个矩阵的行向量组

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

不难验证 $A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}=I$.

定义 (4.3.7)

如果 n 阶实矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}=I$, 则称 A 为正交矩阵.

将例 5 中的 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 作为一个矩阵的行向量组

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

不难验证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$.

定义 (4.3.7)

如果 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

由定义 7 可知正交矩阵必为方阵且具有以下性质:

1° $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

2° $\det \boldsymbol{A}=\pm 1$.

事实上, $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=\left(\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\left(\det \boldsymbol{A}\right)=\left(\det \boldsymbol{A}\right)^2=\det \boldsymbol{I}=1$, 故有 $\det \boldsymbol{A}=\pm 1$.

3° 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

4° n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组是标准正交向量组.

由定义 7 可知正交矩阵必为方阵且具有以下性质:

1° $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

2° $\det \boldsymbol{A}=\pm 1$.
事实上, $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=\left(\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)(\det \boldsymbol{A})=(\det \boldsymbol{A})^2=\det \boldsymbol{I}=1$, **故有** $\det \boldsymbol{A}=\pm 1$.

3° 若 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.

4° n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 A 的行 (列) 向量组是标准正交向量组.

由定义 7 可知正交矩阵必为方阵且具有以下性质:

1° $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

2° $\det A = \pm 1$.
事实上, $\det\left(A^{\mathrm{T}}A\right) = \left(\det A^{\mathrm{T}}\right)\left(\det A\right) = \left(\det A\right)^2 = \det I = 1$, 故有 $\det A = \pm 1$.

3° 若 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.

4° n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 A 的行 (列) 向量组是标准正交向量组.

由定义 7 可知正交矩阵必为方阵且具有以下性质:

1° $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

2° $\det \boldsymbol{A}=\pm 1$.
事实上, $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=\left(\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)(\det \boldsymbol{A})=(\det \boldsymbol{A})^{2}=\det \boldsymbol{I}=1$, 故有 $\det \boldsymbol{A}=\pm 1$.

3° 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

4° n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组是标准正交向量组.

事实上, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组, 故

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\right),$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_1\alpha_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

由上式可知, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$ 的充要条件是

$$\alpha_i\alpha_i^{\mathrm{T}} = 1, \quad \alpha_i\alpha_j^{\mathrm{T}} = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是标准正交向量组.

事实上，设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组，故

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\right),$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_1\alpha_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

由上式可知，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$ 的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} = 1, \quad \boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}} = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交向量组.

例 (4.3.6)

设

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

A 的行向量组是标准正交向量组，故 A 是正交矩阵. B 的各行向量虽然两两正交，但 $\alpha_1=(2,0,0)$ 不是单位向量，故 B 不是正交矩阵.

小结 (I)

- 内积: 实数 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的内积, 记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.
- 若将 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 看作行矩阵, 则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 又可表示为 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 若将 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 记为列向量的形式, 则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$.
- 内积的性质: 非负性, 对称性, 线性性.
- 长度: $\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的长度, 记为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$.
- 向量长度的性质: 非负性, 齐次性和三角不等式 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.
- 当 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$ 时, 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量. 若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 则 $\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$ 是单位向量.
- 向量的内积还满足柯西 · 施瓦茨不等式: $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时等号成立.
- 当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$ 时, $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$.

小结 (II)

- n 维向量的正交性: 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为零, 即 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 中任意两个向量都正交且不含零向量, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为正交向量组.
- 正交向量组是线性无关的.
- 标准正交向量组: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的正交向量组, 且 $\|\boldsymbol{\alpha}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为标准正交向量组 (规范正交向量组). 若 $s = n$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基.

小结 (III)

- 施密特正交化方法: 把线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 化为与之等价的标准正交向量组的施密特正交化过程如下: 正交化

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2, \cdots$$

  单位化: $\boldsymbol{\gamma}_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|}\boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s).$

- 正交矩阵 $\boldsymbol{A}$: n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$.
- 正交矩阵必为方阵且具有以下性质:

  1° $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. $\det \boldsymbol{A} = \pm 1$.

  2° 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正交矩阵.

  3° n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组是标准正交向量组.