第 3 节 向量组的秩与极大无关组

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

1. 向量组的秩与极大无关组
2. $\mathbf{R}^n$ 的基、维数与坐标

1. 向量组的秩与极大无关组
2. $\mathbf{R}^n$ 的基、维数与坐标

- m 个 n 维向量形成的向量组的线性相关性是就全体 m 个向量而言的. 但是, 其中最多有多少个向量是线性无关的呢?
- 例如, 设 $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (1, -1, 1), \alpha_3 = (2, 0, 2)$, 可以验证, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. 但其中部分向量 α_1, α_2 及 α_2, α_3 是线性无关的, 它们都含有两个线性无关的向量.
- 从该例可以看出, 在 α_1, α_2 及 α_2, α_3 这两个线性无关向量组中, 如果再添加一个向量进去, 那么它们就变成线性相关的了. 可见它们在该向量组中作为一个线性无关向量组, 所包含的向量个数达到了最多. 为此, 我们引出向量组的秩与极大无关组的概念.

- m 个 n 维向量形成的向量组的线性相关性是就全体 m 个向量而言的. 但是, 其中最多有多少个向量是线性无关的呢?
- 例如, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1), \boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,2)$, 可以验证, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 但其中部分向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的, 它们都含有两个线性无关的向量.
- 从该例可以看出, 在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 这两个线性无关向量组中, 如果再添加一个向量进去, 那么它们就变成线性相关的了. 可见它们在该向量组中作为一个线性无关向量组, 所包含的向量个数达到了最多. 为此, 我们引出向量组的秩与极大无关组的概念.

- m 个 n 维向量形成的向量组的线性相关性是就全体 m 个向量而言的. 但是, 其中最多有多少个向量是线性无关的呢?
- 例如, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1), \boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,2)$, 可以验证, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 但其中部分向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的, 它们都含有两个线性无关的向量.
- 从该例可以看出, 在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 这两个线性无关向量组中, 如果再添加一个向量进去, 那么它们就变成线性相关的了. 可见它们在该向量组中作为一个线性无关向量组, 所包含的向量个数达到了最多. 为此, 我们引出向量组的秩与极大无关组的概念.

定义 (3.3.1)

设向量组 T 满足

1° 在 T 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

2° T 中任意 $r+1$ 个向量 (如果 T 中有 $r+1$ 个向量) 都线性相关; 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 T 的一个极大线性无关组, 简称为极大无关组, 数 r 称为向量组 T 的秩.

规定, 只含零向量的向量组的秩为零.

例 (3.3.1)

求向量组
$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,4,-2),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,-3,1,1)$
的秩和一个极大无关组.

解

显然 α_1,α_2 线性无关, 而

$$A=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&-1&3\\3&2&4\\-1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(A)=2<n=3$. 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 同理可得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$; $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$; $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也线性相关. 故 α_1,α_2 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组, 秩为 2 . 此外, 由同样方法可知, α_1,α_3; α_1,α_4; α_2,α_3; α_2,α_4; α_3,α_4 分别也都是向量组的极大无关组.

例 (3.3.1)

求向量组
$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,4,-2),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,-3,1,1)$
的秩和一个极大无关组.

解

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 而

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&-1&3\\3&2&4\\-1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=2<n=3$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 同理可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$; $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$; $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也线性相关. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组, 秩为 2 . 此外, 由同样方法可知, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$; $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4$; $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$; $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$; $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 分别也都是向量组的极大无关组.

例 (3.3.1)

求向量组
$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,1,3,-1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (3,-1,2,0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,4,-2), \boldsymbol{\alpha}_4 = (4,-3,1,1)$
的秩和一个极大无关组.

解

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 而

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{A}) = 2 < n = 3$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 同理可得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$; $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$; $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 也线性相关. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组, 秩为 2 . 此外, 由同样方法可知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$; $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_4$; $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$; $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$; $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 分别也都是向量组的极大无关组.

我们知道矩阵的最高阶非零子式可能不止一个，但矩阵的秩是惟一的；类似地，由定义及例 1 知，

- 向量组的极大无关组也可能不止一个，但向量组的秩是惟一的.
- 由定义易知，一个向量组若线性无关，则其极大无关组就是它本身，秩就是向量组中向量的个数.
- 向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组的秩等于向量组所含向量的个数.
- 向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组的秩小于向量组所含向量的个数.

我们知道矩阵的最高阶非零子式可能不止一个，但矩阵的秩是惟一的；类似地，由定义及例 1 知，

- 向量组的极大无关组也可能不止一个，但向量组的秩是惟一的.
- 由定义易知，一个向量组若线性无关，则其极大无关组就是它本身，秩就是向量组中向量的个数.
- 向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组的秩等于向量组所含向量的个数.
- 向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组的秩小于向量组所含向量的个数.

我们知道矩阵的最高阶非零子式可能不止一个，但矩阵的秩是惟一的；类似地，由定义及例 1 知，

- 向量组的极大无关组也可能不止一个，但向量组的秩是惟一的.
- 由定义易知，一个向量组若线性无关，则其极大无关组就是它本身，秩就是向量组中向量的个数.
- 向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组的秩等于向量组所含向量的个数.
- 向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组的秩小于向量组所含向量的个数.

例 (3.3.2)

$\mathbf{R}^n$ 的秩为 n, 且任意 n 个线性无关的 n 维向量均为 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组.

事实上, 因为任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关, 所以任意 n 个线性无关的 n 维向量都是 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组.

例 (3.3.2)

$\mathbf{R}^n$ 的秩为 n, 且任意 n 个线性无关的 n 维向量均为 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组.

事实上, 因为任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关, 所以任意 n 个线性无关的 n 维向量都是 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组.

定理 (3.3.1(行初等变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性))

若矩阵 A 经有限次行初等变换变成 B, 则 A 的任意 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个列向量与 B 的对应的 k 个列向量有相同的线性相关性.

证明.

- 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 任取 A 的 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个列向量得矩阵 A_k, A_k 经有限次行初等变换后化为 B_k.
- 由于行初等变换保持齐次线性方程组同解, 因而齐次线性方程组 $A_kX = 0$ 与 $B_kX = 0$ 同时具有非零解或只有零解.
- 故由 §3.2 的定理 2 知, A_k 的列向量组与 B_k 的列向量组有相同的线性相关性.

□

类似地, 我们还可就列初等变换同样地得到相应的结果.

定理 (3.3.1(行初等变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性))

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次行初等变换变成 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个列向量与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的 k 个列向量有相同的线性相关性.

证明.

- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 任取 $\boldsymbol{A}$ 的 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个列向量得矩阵 $\boldsymbol{A}_k$, $\boldsymbol{A}_k$ 经有限次行初等变换后化为 $\boldsymbol{B}_k$.
- 由于行初等变换保持齐次线性方程组同解, 因而齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{X} = 0$ 与 $\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X} = 0$ 同时具有非零解或只有零解.
- 故由 §3.2 的定理 2 知, $\boldsymbol{A}_k$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}_k$ 的列向量组有相同的线性相关性.

□

类似地, 我们还可就列初等变换同样地得到相应的结果.

定理 (3.3.1(行初等变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性))

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次行初等变换变成 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个列向量与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的 k 个列向量有相同的线性相关性.

证明.

- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 任取 $\boldsymbol{A}$ 的 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个列向量得矩阵 $\boldsymbol{A}_k$, $\boldsymbol{A}_k$ 经有限次行初等变换后化为 $\boldsymbol{B}_k$.
- 由于行初等变换保持齐次线性方程组同解, 因而齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 同时具有非零解或只有零解.
- 故由 §3.2 的定理 2 知, $\boldsymbol{A}_k$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}_k$ 的列向量组有相同的线性相关性.

□

类似地, 我们还可就列初等变换同样地得到相应的结果.

定理 (3.3.1(行初等变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性))

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次行初等变换变成 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个列向量与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的 k 个列向量有相同的线性相关性.

证明.

- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 任取 $\boldsymbol{A}$ 的 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个列向量得矩阵 $\boldsymbol{A}_k$, $\boldsymbol{A}_k$ 经有限次行初等变换后化为 $\boldsymbol{B}_k$.
- 由于行初等变换保持齐次线性方程组同解, 因而齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 同时具有非零解或只有零解.
- 故由 §3.2 的定理 2 知, $\boldsymbol{A}_k$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}_k$ 的列向量组有相同的线性相关性.

$\square$

类似地, 我们还可就列初等变换同样地得到相应的结果.

定理 (3.3.1(行初等变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性))

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次行初等变换变成 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个列向量与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的 k 个列向量有相同的线性相关性.

证明.

- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 任取 $\boldsymbol{A}$ 的 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个列向量得矩阵 $\boldsymbol{A}_k$, $\boldsymbol{A}_k$ 经有限次行初等变换后化为 $\boldsymbol{B}_k$.
- 由于行初等变换保持齐次线性方程组同解, 因而齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 同时具有非零解或只有零解.
- 故由 §3.2 的定理 2 知, $\boldsymbol{A}_k$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}_k$ 的列向量组有相同的线性相关性.

□

类似地, 我们还可就列初等变换同样地得到相应的结果.

给定一个向量组，我们可以由它们作为一个矩阵的行（或列）向量组来确定一个矩阵；反之，给定一个矩阵 A，我们可以得到 A 的行（列）向量组.
那么，**向量组的秩与矩阵的秩有什么关系呢?**
把矩阵 A 的列向量组的秩称为 A 的**列秩**;
把矩阵 A 的行向量组的秩称为 A 的**行秩**.
关于矩阵 A 的秩、列秩和行秩，我们有

定理 (3.3.2)

矩阵的行秩等于列秩，也等于矩阵的秩.

给定一个向量组, 我们可以由它们作为一个矩阵的行 (或列) 向量组来确定一个矩阵; 反之, 给定一个矩阵 $\boldsymbol{A}$, 我们可以得到 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组. 那么, 向量组的秩与矩阵的秩有什么关系呢?
把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的列秩;
把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的行秩.
关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩、列秩和行秩, 我们有

定理 (3.3.2)

矩阵的行秩等于列秩, 也等于矩阵的秩.

证明.

设 $R(\boldsymbol{A})=r$,

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \boldsymbol{B}\ (\text{行阶梯形矩阵}),$$

则 $\boldsymbol{B}$ 中有且仅有 r 个非零行, 由 §3.2 的定理 2 及定义知, $\boldsymbol{B}$ 的 r 个非零行的非零首元所在 r 个列向量是线性无关的, 且为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组.

根据定理 1, $\boldsymbol{A}$ 中与这 r 个列向量相对应的 r 个列向量也是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组. 故 $\boldsymbol{A}$ 的列秩等于 r.

$\boldsymbol{A}$ 的行向量即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量, 于是由 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$ 知, $\boldsymbol{A}$ 的行秩也等于 r. □

值得注意的是, 定理 2 的证明实际上还给出了如何方便地利用行初等变换求出向量组的秩和极大无关组的方法.

证明.

设 $R(\boldsymbol{A}) = r$,

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \boldsymbol{B}\ (\text{行阶梯形矩阵}),$$

则 $\boldsymbol{B}$ 中有且仅有 r 个非零行, 由 §3.2 的定理 2 及定义知, $\boldsymbol{B}$ 的 r 个非零行的非零首元所在 r 个列向量是线性无关的, 且为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组.

根据定理 1, $\boldsymbol{A}$ 中与这 r 个列向量相对应的 r 个列向量也是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组. 故 $\boldsymbol{A}$ 的列秩等于 r.

$\boldsymbol{A}$ 的行向量即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量, 于是由 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{A})$ 知, $\boldsymbol{A}$ 的行秩也等于 r. □

值得注意的是, 定理 2 的证明实际上还给出了如何方便地利用行初等变换求出向量组的秩和极大无关组的方法.

证明.

设 $R(\boldsymbol{A}) = r$,

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \boldsymbol{B}\ (\text{行阶梯形矩阵}),$$

则 $\boldsymbol{B}$ 中有且仅有 r 个非零行, 由 §3.2 的定理 2 及定义知, $\boldsymbol{B}$ 的 r 个非零行的非零首元所在 r 个列向量是线性无关的, 且为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组.

根据定理 1, $\boldsymbol{A}$ 中与这 r 个列向量相对应的 r 个列向量也是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组. 故 $\boldsymbol{A}$ 的列秩等于 r.

$\boldsymbol{A}$ 的行向量即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量, 于是由 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{A})$ 知, $\boldsymbol{A}$ 的行秩也等于 r. □

值得注意的是, 定理 2 的证明实际上还给出了如何方便地利用行初等变换求出向量组的秩和极大无关组的方法.

证明.

设 $R(\boldsymbol{A}) = r$,

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \boldsymbol{B}\ (\text{行阶梯形矩阵}),$$

则 $\boldsymbol{B}$ 中有且仅有 r 个非零行, 由 §3.2 的定理 2 及定义知, $\boldsymbol{B}$ 的 r 个非零行的非零首元所在 r 个列向量是线性无关的, 且为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组.

根据定理 1, $\boldsymbol{A}$ 中与这 r 个列向量相对应的 r 个列向量也是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组. 故 $\boldsymbol{A}$ 的列秩等于 r.

$\boldsymbol{A}$ 的行向量即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量, 于是由 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{A})$ 知, $\boldsymbol{A}$ 的行秩也等于 r. □

值得注意的是, 定理 2 的证明实际上还给出了如何方便地利用行初等变换求出向量组的秩和极大无关组的方法.

例 (3.3.3)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,12,-2,12),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-3,8,2)$，求向量组的秩和一个极大无关组，并判断向量组的线性相关性.

解

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&12&-3\\1&-2&8\\4&12&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&6&-9\\0&-4&6\\0&4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且由定理 2 的证明知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组.

例 (3.3.3)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,4), \boldsymbol{\alpha}_2=(2,12,-2,12), \boldsymbol{\alpha}_3=(2,-3,8,2)$，求向量组的秩和一个极大无关组，并判断向量组的线性相关性.

解

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&12&-3\\1&-2&8\\4&12&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&6&-9\\0&-4&6\\0&4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2，因而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且由定理 2 的证明知 α_1,α_2 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组.

例 (3.3.3)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,12,-2,12),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-3,8,2)$，求向量组的秩和一个极大无关组，并判断向量组的线性相关性.

解

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&12&-3\\1&-2&8\\4&12&2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&2\\0&6&-9\\0&-4&6\\0&4&-6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且由定理 2 的证明知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组.

例 (3.3.4)

求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1),\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,2)$$

的秩和一个极大无关组，判断向量组的线性相关性，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

解

作

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

例 (3.3.4)

求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1),\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,2)$$

的秩和一个极大无关组，判断向量组的线性相关性，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

解

作

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

解

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 $2<4$, 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关 (事实上, 由向量个数大于向量维数直接知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关), 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组. 将 B 再施以行初等变换

$$B\to\begin{pmatrix}2&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

解

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 $2<4$, 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关 (事实上, 由向量个数大于向量维数直接知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关), 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组.将 B 再施以行初等变换

$$\boldsymbol{B}\to\begin{pmatrix}2&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

解

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 $2<4$, 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关 (事实上, 由向量个数大于向量维数直接知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关), 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组.将 B 再施以行初等变换

$$\boldsymbol{B}\to\begin{pmatrix}2&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

例 (3.3.5)

设数 $a \neq b$, 求 $(1,2),(1,a),(1,b)$ 的一个极大无关组.

解

这三个二维向量一定线性相关. 又因为 $a \neq b$, 所以 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$, 从而 $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ 线性无关. 因而该向量组的秩为 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ 为一个极大无关组.

例 (3.3.5)

设数 $a \neq b$, 求 $(1,2),(1,a),(1,b)$ 的一个极大无关组.

解

这三个二维向量一定线性相关. 又因为 $a \neq b$, 所以 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$, 从而 $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ 线性无关. 因而该向量组的秩为 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ 为一个极大无关组.

由极大无关组的定义容易看出:

- 向量组与其任一极大无关组等价;
- 一向量组的任意两个极大无关组都是等价的;
- 一向量组的任意两个极大无关组所含向量个数是相同的, 均为向量组的秩.

下面我们来讨论两向量组的秩的关系，先证如下常用定理：

定理 (3.3.3)

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r \leqslant s$.

证明.

不妨设讨论的是列向量（若是行向量，证明方法类似），记

$$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r), \quad B = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s),$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，所以存在矩阵

$$K = (k_{ij})_{s\times r} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_r),$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_j = (k_{1j}, k_{2j}, \cdots, k_{sj})^{\mathrm{T}}$ $(j = 1, 2, \cdots, r)$，使得 $A = BK$.

下面我们来讨论两向量组的秩的关系，先证如下常用定理:

定理 (3.3.3)

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r \leqslant s$.

证明.

不妨设讨论的是列向量 (若是行向量，证明方法类似)，记

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r), \quad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s),$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，所以存在矩阵

$$\boldsymbol{K} = (k_{ij})_{s\times r} = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r),$$

其中 $\gamma_j = (k_{1j}, k_{2j}, \cdots, k_{sj})^{\mathrm{T}}\ (j = 1, 2, \cdots, r)$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$. □

证明.

假设 $r > s$, 则向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ 线性相关, 于是是有不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_r$, 使

$$x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + \cdots + x_r\gamma_r = \mathbf{0},$$

即

$$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{KX} = \mathbf{0},$$

这里 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_r)^{\mathrm{T}}$. 因此 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{BKX} = \boldsymbol{B}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. 即方程组 $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ 有非零解, 由 §3.2 的定理 2 知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 与定理假设矛盾. 故 $r > s$ 不成立, 即 $r \leqslant s$. $\square$

定理 (3.3.3(“以少表多，多者相关”))

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r \leqslant s$.

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，如果 $r > s$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.

由定理 3 可得向量组秩的性质：

设向量组 (I) 的秩为 r_1，向量组 (II) 的秩为 r_2，若 (I) 能由 (II) 线性表出，则 $r_1 \leqslant r_2$.

事实上，设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1}$ 为 (I) 的极大无关组，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r_2}$ 为 (II) 的极大无关组，因 (I) 可由 (II) 线性表出，据向量组与其极大无关组的等价性知，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1}$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r_2}$ 线性表出，且由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1}$ 线性无关和定理 3，有 $r_1 \leqslant r_2$.

由此可知，任何两个等价的向量组必有相同的秩.

定理 (3.3.3(“以少表多，多者相关”))

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r\leqslant s$.

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，如果 $r>s$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.

由定理 3 可得向量组秩的性质:

设向量组 (I) 的秩为 r_1, 向量组 (II) 的秩为 r_2, 若 (I) 能由 (II) 线性表出，则 $r_1\leqslant r_2$.

事实上，设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 为 (I) 的极大无关组，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 为 (II) 的极大无关组，因 (I) 可由 (II) 线性表出，据向量组与其极大无关组的等价性知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 线性表出，且由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 线性无关和定理 3，有 $r_1\leqslant r_2$.

由此可知，任何两个等价的向量组必有相同的秩.

定理 (3.3.3(“以少表多，多者相关”))

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r\leqslant s$.
若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，如果 $r>s$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.

由定理 3 可得向量组秩的性质:

设向量组 (I) 的秩为 r_1，向量组 (II) 的秩为 r_2，若 (I) 能由 (II) 线性表出，则 $r_1\leqslant r_2$.

事实上，设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 为 (I) 的极大无关组，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 为 (II) 的极大无关组，因 (I) 可由 (II) 线性表出，据向量组与其极大无关组的等价性知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 线性表出，且由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 线性无关和定理 3，有 $r_1\leqslant r_2$.
由此可知，任何两个等价的向量组必有相同的秩.

定理 (3.3.4)

设 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性无关部分组，它是极大无关组的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每一个向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出.

证明.

充分性　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由线性无关的部分组 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性表出，则据定理 3 知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任何 $r+1$ 个向量都线性相关，因而 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 是极大无关组.

必要性　若 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大无关组，则当 $j\in\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}$ 时，显然 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,s)$ 可由 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性表出；当 $j\notin\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}$ 时，$\alpha_j,\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性相关，又 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性无关，因而 $\alpha_j(j=1,\cdots,s)$ 可由 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性表出. □

定理 (3.3.4)

设 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性无关部分组，它是极大无关组的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中每一个向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出.

证明.

充分性　若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可由线性无关的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出，则据定理 3 知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 $r+1$ 个向量都线性相关，因而 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是极大无关组.

必要性　若 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大无关组，则当 $j \in \{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$ 时，显然 $\boldsymbol{\alpha}_j (j = 1, 2, \cdots, s)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出；当 $j \notin \{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性相关，又 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性无关，因而 $\boldsymbol{\alpha}_j (j = 1, \cdots, s)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出. □

定理 (3.3.4)

设 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性无关部分组，它是极大无关组的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每一个向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出.

证明.

充分性 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由线性无关的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出，则据定理 3 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 $r+1$ 个向量都线性相关，因而 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是极大无关组.

必要性 若 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大无关组，则当 $j\in\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}$ 时，显然 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,s)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出；当 $j\notin\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性相关，又 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性无关，因而 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,\cdots,s)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出. □

定理 2 告诉我们, 矩阵的秩和向量组的秩有着本质的联系, 因而关于二者的问题常常相互转化. 例如, 对于如下关于矩阵秩的重要不等式, 我们用向量组的理论可以容易地加以证明.

例 (3.3.6)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times r, r \times n$ 矩阵, 证明

$$R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}.$$

证明.

设 $\boldsymbol{C}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times r}\boldsymbol{B}_{r\times n}$, 即

$$(\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_k,\cdots,\boldsymbol{c}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rk} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{c}_k,\boldsymbol{\alpha}_j(k=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,r)$ 分别为 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量. 由上式有

$$\boldsymbol{c}_k=b_{1k}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2k}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{rk}\boldsymbol{\alpha}_r \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组 $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_n$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出, 故有 $R(\boldsymbol{C})\leqslant R(\boldsymbol{A})$. □

例 (3.3.6)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times r, r \times n$ 矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}.$$

证明.

另一方面，由以上结果便得

$$R(\boldsymbol{C}) = R\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\right) = R\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) \leqslant R\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right) = R(\boldsymbol{B}).$$

故 $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$. □

注：也可以证明 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表出，故有 $R(\boldsymbol{C}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$.

例 (3.3.6)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times r, r \times n$ 矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}.$$

证明.

另一方面，由以上结果便得

$$R(\boldsymbol{C}) = R\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\right) = R\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) \leqslant R\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right) = R(\boldsymbol{B}).$$

故 $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$. □

注：也可以证明 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表出，故有 $R(\boldsymbol{C}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$.

例 (3.3.6)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times r, r \times n$ 矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}.$$

证明.

另一方面，由以上结果便得

$$R(\boldsymbol{C}) = R\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\right) = R\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) \leqslant R\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right) = R(\boldsymbol{B}).$$

故 $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$. □

注： 也可以证明 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表出，故有 $R(\boldsymbol{C}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$.

大家可能已经注意到, 我们在定理 3 的证明和例 6 的证明中两次用到向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表出, 也就是存在矩阵 $\boldsymbol{K}_{p\times q}$, 使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p)\, \boldsymbol{K} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q)\,,$$

这里假设向量是列向量.

如果设矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p)\,, \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q)$, 上式也就等价于矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解. 于是, 由 §3.2 定理 1 我们便有如下结论:
向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表出的充要条件是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B});$$

两向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 等价的充要条件是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).$$

大家可能已经注意到，我们在定理 3 的证明和例 6 的证明中两次用到向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表出，也就是存在矩阵 $\boldsymbol{K}_{p\times q}$，使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p)\, \boldsymbol{K} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q)\,,$$

这里假设向量是列向量.

如果设矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p)\,, \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q)$，上式也就等价于矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解．于是，由 §3.2 定理 1 我们便有如下结论:

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表出的充要条件是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B});$$

两向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 等价的充要条件是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).$$

大家可能已经注意到，我们在定理 3 的证明和例 6 的证明中两次用到向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表出，也就是存在矩阵 $\boldsymbol{K}_{p\times q}$，使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p)\,\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q)\,,$$

这里假设向量是列向量.

如果设矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p)\,, \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q)$，上式也就等价于矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解. 于是，由 §3.2 定理 1 我们便有如下结论:

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表出的充要条件是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B});$$

两向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 等价的充要条件是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).$$

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表出的充要条件是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B});$$

两向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 等价的充要条件是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).$$

也就是说, 我们把 §3.2 的定理 1 推广成了如下三命题等价:

1° 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表出;

2° $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解;

3° $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

1 向量组的秩与极大无关组

2 $\mathbf{R}^n$ 的基、维数与坐标

- n 维向量的全体 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组也称为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基.
- $\mathbf{R}^n$ 的任一极大无关组所含向量个数又称为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的维数, 记为 $\dim \mathbf{R}^n$. 显然 $\dim \mathbf{R}^n = n$.
- 单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准基. i, j, k 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个标准基.
- 可见, $\mathbf{R}^n$ 中任一向量均为其基的线性组合. 即设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 则

$$\mathbf{R}^n = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n).$$

- n 维向量的全体 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组也称为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基.
- $\mathbf{R}^n$ 的任一极大无关组所含向量个数又称为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的维数, 记为 $\dim \mathbf{R}^n$. 显然 $\dim \mathbf{R}^n = n$.
- 单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准基. i, j, k 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个标准基.
- 可见, $\mathbf{R}^n$ 中任一向量均为其基的线性组合. 即设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 则

$$\mathbf{R}^n = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n).$$

如果在 $\mathbf{R}^3$ 中, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, 那么它们构成 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 且 $\mathbf{R}^3 = L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$. 因此, 任何第四个向量 $(a, b, c)^{\mathrm{T}} \in L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$.
设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$,

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标. 由 §3.2 的定理 5 知坐标是惟一的.
对于 $\mathbf{R}^n$ 的子空间 V, 也可类似地定义基、维数 (记为 $\dim V$) 和坐标.
一个向量组是某空间的一组基, 必须满足两个条件:
(1) 向量组线性无关,
(2) 向量组能张成该空间.
基是能张成空间的 “最小” 向量组, 也是 “最大” 的线性无关组.

如果在 $\mathbf{R}^3$ 中, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, 那么它们构成 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 且 $\mathbf{R}^3=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$. 因此, 任何第四个向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}\in L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.
设 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$,

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标. 由 §3.2 的定理 5 知坐标是惟一的.
对于 $\mathbf{R}^n$ 的子空间 V, 也可类似地定义基、维数 (记为 $\dim V$) 和坐标.
一个向量组是某空间的一组基, 必须满足两个条件:
(1) 向量组线性无关,
(2) 向量组能张成该空间.
基是能张成空间的“最小”向量组, 也是“最大”的线性无关组.

例 (3.3.7)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 张成一个一维子空间

$$L(\boldsymbol{\alpha})=\{k\boldsymbol{\alpha}\mid k\in\mathbf{R}\}.$$

一向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}\in L(\boldsymbol{\alpha})$ 的充要条件是点 (a,b,c) 在由坐标原点 $(0,0,0)$ 和点 (x_1,x_2,x_3) 决定的直线上. 因此, $\mathbf{R}^3$ 的一维子空间可用过坐标原点的一直线表示.

设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 线性无关, 则

$$L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\{k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}\mid k_1,k_2\in\mathbf{R}\}$$

是 $\mathbf{R}^3$ 的二维子空间. 向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}\in L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 的充要条件是点 (a,b,c) 位于由点 $(0,0,0)$, (x_1,x_2,x_3) 和 (y_1,y_2,y_3) 决定的平面上. 因此, $\mathbf{R}^3$ 的二维子空间可表为一过原点的平面.

例 (3.3.7)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 张成一个一维子空间

$$L(\boldsymbol{\alpha})=\{k\boldsymbol{\alpha}\mid k\in\mathbf{R}\}.$$

一向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}\in L(\boldsymbol{\alpha})$ 的充要条件是点 (a,b,c) 在由坐标原点 $(0,0,0)$ 和点 (x_1,x_2,x_3) 决定的直线上. 因此, $\mathbf{R}^3$ 的一维子空间可用过坐标原点的一直线表示.

设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 线性无关, 则

$$L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\{k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}\mid k_1,k_2\in\mathbf{R}\}$$

是 $\mathbf{R}^3$ 的二维子空间. 向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}\in L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 的充要条件是点 (a,b,c) 位于由点 $(0,0,0)$, (x_1,x_2,x_3) 和 (y_1,y_2,y_3) 决定的平面上. 因此, $\mathbf{R}^3$ 的二维子空间可表为一过原点的平面.

例 (3.3.8)

对于 §3.2 的例 5 中的向量, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}$ 在该基下的坐标为 $(1, 2, -1)$.

任意 n 个线性无关的 n 维向量都是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 不同的基之间有什么关系呢? 同一向量在不同基下的坐标一般是不相同的, 它们之间的关系又是怎样的呢? 这就是所谓的基变换和坐标变换的问题.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 分别为 $\mathbf{R}^n$ 的基, 由于 $\mathbf{R}^n$ 的任两组基都是等价的, 所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\, \boldsymbol{A},$$

我们称 $\boldsymbol{A}$ 为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

设向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$ 在两组基下的坐标分别为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$，即

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

由坐标的惟一性知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

这就是向量 α 在两组基下的坐标变换公式.

例如, 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基
$\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, -2, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (-2, -1, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 2, -3)^{\mathrm{T}}$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

例 (3.3.9)

在 $\mathbf{R}^3$ 中取两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-3)^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

求从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

解

设 $\boldsymbol{A}$ 是从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵. 则

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\,\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 20 & 8 \\ 7 & 15 & 7 \end{pmatrix}.$$

小结 (I)

- 向量组的秩与极大无关组: 若向量组 T 满足
(1) T 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;
(2) T 中任意 $r+1$ 个向量 (如果 T 中有 $r+1$ 个向量) 都线性相关;
则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 T 的一个极大无关组, r 称为向量组 T 的秩.
- 等价命题: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 T 的一个线性无关部分组, 则它是极大无关组的充分必要条件是 T 中每一个向量均可由它线性表出.
- 推论: 向量组的任意一个极大无关组都与这个向量组本身等价.
- 向量组线性无关 (相关) $\Leftrightarrow$ 向量组的秩等于 (小于) 向量组所含向量的个数.
- 定理: 矩阵的行初等变换不改变其列向量组的线性相关性.
- 定理: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $=$ $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩 $=$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩.

小结 (II)

- 求向量组秩与极大无关组的方法：设有列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$，对 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = R(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{B}$ 中非零行的非零首元所在列对应的 $\boldsymbol{A}$ 中各向量就构成向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组.
- 定理：设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r \leqslant s$.
- 逆否命题：设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，若 $r > s$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.
- 特别地，两个等价的线性无关向量组所含向量个数相同.
- 推论：若向量组 $\boldsymbol{A}$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表出，则秩 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$；特别地，等价向量组有相同的秩.
- 注：秩相同的两个向量组却不一定等价.

小结 (III)

- $\mathbf{R}^n$ 的基、维数: n 维向量的全体 $\mathbf{R}^n$ 的一个极大无关组也称为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 其任一极大无关组所含向量个数又称为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的维数, 记为 $\dim \mathbf{R}^n$.
- 显然 $\dim \mathbf{R}^n = n$. 单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准基. i, j, k 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个标准基. 可见, $\mathbf{R}^n$ 中任一向量均为其基的线性组合.
- $\mathbf{R}^n$ 的坐标: 设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 则称 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.

矩阵的秩相关结论总结

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，则 $0\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$.
(2) $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$.
(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，则 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.
(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 当且仅当 $R(\boldsymbol{A})=n$.
(5) $R(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.
(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times s$ 的矩阵，则

$$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

(7) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 的矩阵，则

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n\leqslant R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}.$$

(8) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 的矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

(9) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})=R(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}).$$