第 5 节 矩阵的秩

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

矩阵的秩是矩阵的一个重要数值特征，是线性代数中的一个重要概念.
为了建立矩阵的秩的概念，先给出矩阵的子式的定义.

定义 (2.5.1)

在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，位于任意取定的 k 行和 k 列 $(1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\})$ 交叉点上的 k^2 个元，按原来的相对位置组成的 k 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k **阶子式**.

例如，在矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$ 中，

取第 $1, 2$ 行和第 $2, 4$ 列交叉点上的元，组成的二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的一个二阶子式.

矩阵的秩是矩阵的一个重要数值特征，是线性代数中的一个重要概念．为了建立矩阵的秩的概念，先给出矩阵的子式的定义．

定义 (2.5.1)

在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，位于任意取定的 k 行和 k 列 $(1\leqslant k\leqslant \min\{m,n\})$ 交叉点上的 k^2 个元，按原来的相对位置组成的 k 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k **阶子式**．

例如，在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$ 中，取第 $1,2$ 行和第 $2,4$ 列交叉点上的元，组成的二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的一个二阶子式．

有了子式的概念，就可以定义矩阵的秩.

定义 (2.5.2)

设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且没有不等于零的 $r+1$ 阶子式，那么 D 称为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})$. 并规定零矩阵的秩等于零.

- 由行列式的性质可知，$\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式全等于零时，所有高于 $r+1$ 阶的子式也全等于零，因此 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 中不等于零的子式的最高阶数.
- 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, $R(\boldsymbol{A})$ 是惟一的，但其最高阶非零子式一般是不惟一的.
- 定义 2 实际上包含两部分:
  $R(\boldsymbol{A}) \geqslant r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不为零;
  $R(\boldsymbol{A}) \leqslant r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式全为零.

有了子式的概念，就可以定义矩阵的秩.

定义 (2.5.2)

设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且没有不等于零的 $r+1$ 阶子式，那么 D 称为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})$**. 并规定零矩阵的秩等于零.

- 由行列式的性质可知，$\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式全等于零时，所有高于 $r+1$ 阶的子式也全等于零，因此 **$\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 中不等于零的子式的最高阶数.**
- 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，$R(\boldsymbol{A})$ 是惟一的，但其最高阶非零子式一般是不惟一的.
- 定义 2 实际上包含两部分：
  $R(\boldsymbol{A}) \geqslant r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不为零；
  $R(\boldsymbol{A}) \leqslant r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式全为零.

有了子式的概念，就可以定义矩阵的秩.

定义 (2.5.2)

设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且没有不等于零的 $r+1$ 阶子式，那么 D 称为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})$**. 并规定零矩阵的秩等于零.

- 由行列式的性质可知，$\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式全等于零时，所有高于 $r+1$ 阶的子式也全等于零，因此 **$\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 中不等于零的子式的最高阶数.**
- 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，$R(\boldsymbol{A})$ 是惟一的，但其最高阶非零子式一般是不惟一的.
- 定义 2 实际上包含两部分：
  $R(\boldsymbol{A}) \geqslant r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不为零；
  $R(\boldsymbol{A}) \leqslant r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式全为零.

有了子式的概念，就可以定义矩阵的秩.

定义 (2.5.2)

设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且没有不等于零的 $r+1$ 阶子式，那么 D 称为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})$. 并规定零矩阵的秩等于零.

- 由行列式的性质可知，$\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式全等于零时，所有高于 $r+1$ 阶的子式也全等于零，因此 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 中不等于零的子式的最高阶数.
- 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}, R(\boldsymbol{A})$ 是惟一的，但其最高阶非零子式一般是不惟一的.
- 定义 2 实际上包含两部分:
  $R(\boldsymbol{A}) \geqslant r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不为零;
  $R(\boldsymbol{A}) \leqslant r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式全为零.

例 (2.5.1)

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩.

解

A 有 *12* 个一阶子式. 例如, 由第 *2* 行、第 *2* 列交点上的元构成的一阶子式

$$\det(-1)=-1\neq 0.$$

再看一下 *A* 的二阶子式, 可以知道 *A* 有 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^2=3\times 6=18$ 个二阶子式, 其中由第 *1*, *2* 行和第 *1*, *2* 列交叉点上的元构成的二阶子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

例 (2.5.1)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩.

解

A 有 12 个一阶子式. 例如, 由第 2 行、第 2 列交点上的元构成的一阶子式

$$\det(-1)=-1\neq 0.$$

再看一下 A 的二阶子式, 可以知道 A 有 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^2=3\times 6=18$ 个二阶子式, 其中由第 1, 2 行和第 1, 2 列交叉点上的元构成的二阶子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

解

最后，再考察一下 $\boldsymbol{A}$ 的三阶子式，$\boldsymbol{A}$ 有 4 个三阶子式，分别计算有

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

故由定义，$R(\boldsymbol{A}) = 2$.

从例 1 可看出，根据定义求秩是很困难的，下面给出求矩阵秩的初等变换法.

1. 矩阵秩的概念
2. 矩阵秩的计算
3. 矩阵秩的性质
4. 应用实例

定理 (2.5.1)

初等变换不改变矩阵的秩.

证明.

只就行初等变换加以证明, 列初等变换的情形同理可证.
对于行初等变换中的第一种和第二种变换, 由于变换后矩阵中的每一个子式均能在原来的矩阵中找到相应的子式, 它们之间或只是行的次序不同, 或只是某一行扩大了 k 倍, 因此相应子式或同为零, 或同为非零, 所以矩阵的秩不变. □

定理 (2.5.1)

初等变换不改变矩阵的秩.

证明.

只就行初等变换加以证明, 列初等变换的情形同理可证.
对于行初等变换中的第一种和第二种变换, 由于变换后矩阵中的每一个子式均能在原来的矩阵中找到相应的子式, 它们之间或只是行的次序不同, 或只是某一行扩大了 k 倍, 因此相应子式或同为零, 或同为非零, 所以矩阵的秩不变. □

证明.

对于第三种行初等变换，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

不妨考虑把 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行的 k 倍加至第 1 行上，得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \cdots & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

□

证明.

设 $R(\boldsymbol{B})=t$, 即 $\boldsymbol{B}$ 中有 t 阶子式 B_t 不为零. 若 B_t 不包含第 1 行的元, 则在 $\boldsymbol{A}$ 中能找到与 B_t 完全相同的 t 阶子式, 因此 $R(\boldsymbol{A})\geqslant t$; 若 B_t 包含第 1 行的元, 即

$$0\neq B_t=\begin{vmatrix} a_{1j_1}+ka_{2j_1} & \cdots & a_{1j_t}+ka_{2j_t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_tj_1} & \cdots & a_{i_tj_t} \end{vmatrix},$$

则由行列式的性质知

$$0\neq B_t=\begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_tj_1} & \cdots & a_{i_tj_t} \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{2j_1} & \cdots & a_{2j_t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_tj_1} & \cdots & a_{i_tj_t} \end{vmatrix},$$

$\square$

证明.

$$0 \neq B_t = \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_tj_1} & \cdots & a_{i_tj_t} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{2j_1} & \cdots & a_{2j_t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_tj_1} & \cdots & a_{i_tj_t} \end{vmatrix},$$

若 B_t 不包含第 2 行元，则上面两个行列式中至少有一个非零；
若 B_t 包含第 2 行元，则右端第一个行列式非零，而以上两种情况的非零行列式均为 $\boldsymbol{A}$ 中的 t 阶子式，所以 $R(\boldsymbol{A}) \geqslant t = R(\boldsymbol{B})$.
总之，归纳以上得到的结论：若由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经第三种行初等变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})$. 但事实上，我们又能从 $\boldsymbol{B}$ 出发经初等变换得到 $\boldsymbol{A}$ (即只要把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行的 $-k$ 倍加到第 1 行)，因此根据上面的结论又有 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$. 故

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}).$$

□

例 (2.5.2)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$ 的秩.

解

对 A 作行初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$$

例 (2.5.2)

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$ 的秩.

解

对 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$$

解

对 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B},$$

$\boldsymbol{B}$ 中有三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$$

显然 $\boldsymbol{B}$ 中所有四阶子式全为零, 所以 $R(\boldsymbol{B}) = 3$. 故 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 3$.

例

求 §2.1 例 2 中黑白图像对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

例

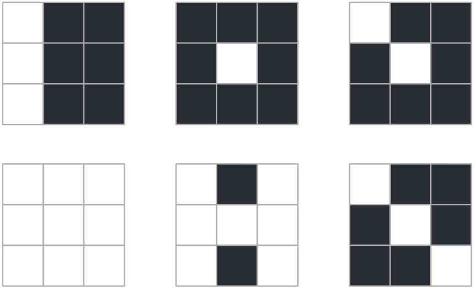
求 §2.1 例 2 中黑白图像对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

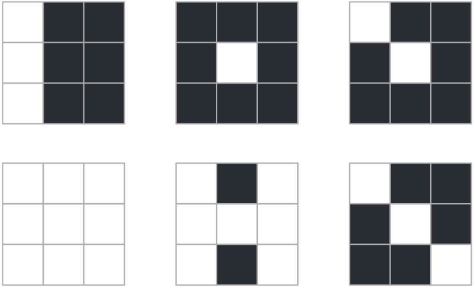
所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

计算下图中黑白图像对应矩阵的行列式和秩．比较行列式与秩的异同．



事实上，将矩阵 A 用行初等变换化为行阶梯形矩阵，则行阶梯形矩阵非零行的行数就是 A 的秩，即：设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $R(A)=r$ 的充要条件是通过行初等变换能将 A 化为具有 r 个非零行的行阶梯形矩阵．

计算下图中黑白图像对应矩阵的行列式和秩. 比较行列式与秩的异同.



事实上, 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用行初等变换化为行阶梯形矩阵, 则**行阶梯形矩阵非零行的行数就是 $\boldsymbol{A}$ 的秩**, 即: 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 则 **$R(\boldsymbol{A}) = r$ 的充要条件是通过行初等变换能将 $\boldsymbol{A}$ 化为具有 r 个非零行的行阶梯形矩阵.**

例 (2.5.4)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, 已知 $R(\boldsymbol{A}) = 2$, 求 t.

解

对 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换得

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

由 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 2$, 知 $\boldsymbol{B}$ 中第 2 行、第 3 行成比例. 于是由 $\dfrac{-2}{2+t} = \dfrac{-4}{6}$ 得 $t = 1$.

例 (2.5.4)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&-2\\-1&t&5\\1&0&-3\end{pmatrix}$，已知 $R(\boldsymbol{A})=2$，求 t.

解

对 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换得

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&-4\\0&2+t&6\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

由 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，知 $\boldsymbol{B}$ 中第 2 行、第 3 行成比例. 于是由 $\dfrac{-2}{2+t}=\dfrac{-4}{6}$ 得 $t=1$.

推论

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则

$$R(\boldsymbol{PA}) = R(\boldsymbol{AQ}) = R(\boldsymbol{PAQ}) = R(\boldsymbol{A}),$$

其中 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵.

证明.

因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$，使得 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_k \cdots \boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{E}_1$，从而 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{E}_k \cdots \boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{PA}$ 为对 $\boldsymbol{A}$ 施以 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$ 相对应的行初等变换所得矩阵，于是由定理 1 知，

$$R(\boldsymbol{PA}) = R(\boldsymbol{A}),$$

同理可证 $R(\boldsymbol{AQ}) = R(\boldsymbol{PAQ}) = R(\boldsymbol{A})$. □

推论

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则

$$R(\boldsymbol{PA}) = R(\boldsymbol{AQ}) = R(\boldsymbol{PAQ}) = R(\boldsymbol{A}),$$

其中 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵.

证明.

因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$，使得 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_k \cdots \boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{E}_1$，从而 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{E}_k \cdots \boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{PA}$ 为对 $\boldsymbol{A}$ 施以 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$ 相对应的行初等变换所得矩阵，于是由定理 1 知，

$$R(\boldsymbol{PA}) = R(\boldsymbol{A}),$$

同理可证 $R(\boldsymbol{AQ}) = R(\boldsymbol{PAQ}) = R(\boldsymbol{A})$. □

例 (2.5.5)

设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $R(\boldsymbol{AB})$.

解

因为 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆. 显然 $R(\boldsymbol{B}) = 2$. 故 $R(\boldsymbol{AB}) = R(\boldsymbol{B}) = 2$.

例 (2.5.5)

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $R(\boldsymbol{AB})$.

解

因为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 显然 $R(\boldsymbol{B})=2$. 故 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})=2$.

关于矩阵的秩, 有如下性质:

定理 (2.5.2)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$;
(2) 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, $R(\boldsymbol{A})=R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)$;
(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则 $0\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$;
(4) 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, $R(k\boldsymbol{A})=\begin{cases}0, & k=0,\\ R(\boldsymbol{A}), & k\neq 0.\end{cases}$

(3) 和 (4) 是显然的. 我们证明 (1) 和 (2).

证明.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 因此由定义 2 知 $R(\boldsymbol{A}) = n$.
反之, 若 $R(\boldsymbol{A}) = n$, 由定义 2 易知 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
(2) $\boldsymbol{A}$ 的任一子式的转置就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的子式; 反之, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的任一子式的转置就是 $\boldsymbol{A}$ 的子式. 根据行列式的性质, $\boldsymbol{A}$ 中不为零的最高阶子式就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中不为零的最高阶子式, 反之亦然. 故

$$R(\boldsymbol{A}) = R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right).$$

由 (1) 知, 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\det \boldsymbol{A} = 0$ 的充要条件是 $R(\boldsymbol{A}) < n$.
故, 可逆矩阵又称为满秩矩阵, 不可逆矩阵又称为降秩矩阵或退化矩阵.

证明.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 因此由定义 2 知 $R(\boldsymbol{A}) = n$.
反之, 若 $R(\boldsymbol{A}) = n$, 由定义 2 易知 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
(2) $\boldsymbol{A}$ 的任一子式的转置就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的子式; 反之, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的任一子式的转置就是 $\boldsymbol{A}$ 的子式. 根据行列式的性质, $\boldsymbol{A}$ 中不为零的最高阶子式就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中不为零的最高阶子式, 反之亦然. 故

$$R(\boldsymbol{A}) = R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right).$$

$\square$

由 (1) 知, 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\det \boldsymbol{A} = 0$ 的充要条件是 $R(\boldsymbol{A}) < n$.
故, 可逆矩阵又称为满秩矩阵, 不可逆矩阵又称为降秩矩阵或退化矩阵.

证明.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 因此由定义 2 知 $R(\boldsymbol{A}) = n$.
反之, 若 $R(\boldsymbol{A}) = n$, 由定义 2 易知 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
(2) $\boldsymbol{A}$ 的任一子式的转置就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的子式; 反之, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的任一子式的转置就是 $\boldsymbol{A}$ 的子式. 根据行列式的性质, $\boldsymbol{A}$ 中不为零的最高阶子式就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中不为零的最高阶子式, 反之亦然. 故

$$R(\boldsymbol{A}) = R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right).$$

□

由 (1) 知, 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\det \boldsymbol{A} = 0$ 的充要条件是 $R(\boldsymbol{A}) < n$.
故, 可逆矩阵又称为满秩矩阵, 不可逆矩阵又称为降秩矩阵或退化矩阵.

例 (2.5.6)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵 $(n \geqslant 2)$，证明

$$R\left(\boldsymbol{A}^*\right)=\begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A})=n, \\ 0, & R(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$$

证明.

若 $R(\boldsymbol{A})=n$，即 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$ 有

$$(\det \boldsymbol{A})\left(\det \boldsymbol{A}^*\right)=\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\right)=\det((\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I})=(\det \boldsymbol{A})^n \neq 0,$$

故 $\det \boldsymbol{A}^* \neq 0$，即 $R\left(\boldsymbol{A}^*\right)=n$. □

例 (2.5.6)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵 $(n \geqslant 2)$，证明

$$R\left(\boldsymbol{A}^{*}\right)=\begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A})=n, \\ 0, & R(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$$

证明.

若 $R(\boldsymbol{A})=n$，即 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=(\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$ 有

$$(\det \boldsymbol{A})\left(\det \boldsymbol{A}^{*}\right)=\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\right)=\det((\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I})=(\det \boldsymbol{A})^{n} \neq 0,$$

故 $\det \boldsymbol{A}^{*} \neq 0$，即 $R\left(\boldsymbol{A}^{*}\right)=n$. □

证明.

若 $R(\boldsymbol{A}) < n-1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 中最高阶非零子式的阶数小于 $n-1$, 因而 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $n-1$ 阶子式均为零, 所以

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O},$$

即 $R(\boldsymbol{A}^*) = 0$. □

对于例 6 中 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$ 的情形, 将在 §3.4 的例 5 中给出.

定理 (2.5.3)

对任意矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 都存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times m}$, $\boldsymbol{Q}_{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}_{m\times n}, \quad R(\boldsymbol{A}) = r,$$

其中 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形. 即任何矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于其标准形.

证明.

对任意的 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 总可经有限次行初等变换化为简化行阶梯形矩阵, 然后通过有限次列初等变换便可得到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

又由于行阶梯形矩阵非零行的行数 r 即 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 因而 $R(\boldsymbol{A}) = r$. 故存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_s$, $\widetilde{\boldsymbol{E}}_1, \widetilde{\boldsymbol{E}}_2, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{E}}_t$, 使得

$$\boldsymbol{E}_s \cdots \boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{A} \widetilde{\boldsymbol{E}}_1 \widetilde{\boldsymbol{E}}_2 \cdots \widetilde{\boldsymbol{E}}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_s \cdots \boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{Q} = \widetilde{\boldsymbol{E}}_1 \widetilde{\boldsymbol{E}}_2 \cdots \widetilde{\boldsymbol{E}}_t$, 则 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 可逆且

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

证明.

对任意的 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 总可经有限次行初等变换化为简化行阶梯形矩阵, 然后通过有限次列初等变换便可得到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

又由于行阶梯形矩阵非零行的行数 r 即 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 因而 $R(\boldsymbol{A}) = r$. 故存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_s$, $\widetilde{\boldsymbol{E}}_1, \tilde{\boldsymbol{E}}_2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{E}}_t$, 使得

$$\boldsymbol{E}_s \cdots \boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{A} \widetilde{\boldsymbol{E}}_1 \tilde{\boldsymbol{E}}_2 \cdots \tilde{\boldsymbol{E}}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_s \cdots \boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{Q} = \widetilde{\boldsymbol{E}}_1 \widetilde{\boldsymbol{E}}_2 \cdots \widetilde{\boldsymbol{E}}_t$, 则 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 可逆且

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

$\square$

定理 3 也说明, 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{S}$, 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{K}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{S}, \quad R(\boldsymbol{A}) = r.$$

推论

同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

例 (2.5.7)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的标准形.

解

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的标准形必为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 (2.5.7)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的标准形.

解

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的标准形必为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

例 (2.5.8)

证明 $R\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\right) = R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$.

证明.

设 $R(\boldsymbol{A}) = r_1, R(\boldsymbol{B}) = r_2$. 由定理 3，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_2} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_2,$$

于是

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_2} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_2 \end{pmatrix}$$

例 (2.5.8)

证明 $R\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\right) = R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$.

证明.

设 $R(\boldsymbol{A}) = r_1, R(\boldsymbol{B}) = r_2$. 由定理 3，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_2} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_2,$$

于是

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_2} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_2 \end{pmatrix}$$

例 (2.5.8)

证明 $R\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\right) = R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$.

证明.

设 $R(\boldsymbol{A}) = r_1, R(\boldsymbol{B}) = r_2$. 由定理 3，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_2} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_2,$$

于是

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{r_2} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_2 \end{pmatrix}$$

□

证明.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1 & O \\ O & P_2 \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$$

由 $\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$ 可逆，知

$$R\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) = R\left(\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix}\right) = r_1 + r_2.$$

证明.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1 & O \\ O & P_2 \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$$

由 $\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$ 可逆, 知

$$R\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) = R\left(\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix}\right) = r_1 + r_2.$$

应用实例: 推荐系统

由于巨大的应用价值, 推荐系统 (Recommendation System) 开始受到广泛关注, 其中最著名的是奈飞 (Netflix) 问题. 奈飞是美国的一家影片租赁公司, 其推荐系统要利用用户仅有的对少数的电影评分为用户推荐影片. 这种推荐越符合用户的喜好, 也就越能提高该公司租赁电影的业务量. 为此该公司设立了百万美元的奖金用于奖励能够最好地提高该公司推荐系统质量的解决方法.

应用实例: 推荐系统

假设矩阵的每一列代表同一用户对不同电影的评分 (分数为 $1\sim 5$), 每一行代表不同用户对同一电影的评分. 由于用户和电影数目巨大, 因此这个矩阵的规模巨大. 由于用户所评分的电影有限, 这个矩阵中只有很小一部分的元已知 (见下图, 其中 "?" 代表用户没有给出评分). 奈飞问题就是如何从这个不完整的矩阵中推测其中未知元即矩阵填充问题. 矩阵填充得越准确, 为用户推荐的电影也就越符合用户的喜好. 若不加任何约束, 则矩阵填充问题有无穷多解. 由于影响用户对电影喜好的因素数目有限, 如电影的题材、演员、年代、导演等, 因此这个矩阵本质上是一个低秩矩阵 (即矩阵的秩远远小于矩阵的行数和列数).

应用实例: 推荐系统

电影	用户			
	用户 1	用户 2	用户 3	用户 4
影片 A	5	5	1	2
影片 B	5	?	?	3
影片 C	?	4	2	?
影片 D	1	1	5	4
影片 E	2	3	5	?

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & ? & ? & 3 \\ ? & 4 & 2 & ? \\ 1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & ? \end{pmatrix}$$

大数据时代下, 事实上许多数据信息高度冗余, 表示数据的矩阵通常具有这种"低秩"模式. 考虑矩阵低秩模式有助于成功解决矩阵的填充问题.

小结 (I)

- 矩阵秩的概念: 设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式 D, 且没有不等于零的 $r+1$ 阶子式, 那么 D 称为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式, 数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $R(\boldsymbol{A})$. 零矩阵的秩等于零.
  $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中不等于零的子式的最高阶数.
- 矩阵秩的计算: 初等变换不改变矩阵的秩.
  $R(\boldsymbol{A})=r$ 的充要条件是通过行初等变换能将 $\boldsymbol{A}$ 化为具有 r 个非零行的行阶梯形矩阵.
  矩阵秩的性质:
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则 $R(\boldsymbol{PA})=R(\boldsymbol{AQ})=R(\boldsymbol{PAQ})=R(\boldsymbol{A})$, 其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵.
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$;
- 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}, R(\boldsymbol{A})=R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)$;

小结 (II)

- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则 $0\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$;
- 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, $R(k\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})\ (k\neq 0)$, $R(k\boldsymbol{A})=0\ (k=0)$.
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵 $(n\geqslant 2)$, 则 $R\left(\boldsymbol{A}^*\right)=\begin{cases}n, & R(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & R(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$
- 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 都存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times m}$, $\boldsymbol{Q}_{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n},\quad R(\boldsymbol{A})=r,$$

$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形. 即任何矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于其标准形.

- 同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

矩阵和行列式相关重要公式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I},\qquad \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|},\quad \boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$$

$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$	$\lvert k\boldsymbol{A}\rvert=k^n\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	$(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$
$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$	$\lvert\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\rvert=\lvert\boldsymbol{A}\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{B}\rvert$	$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$
$(\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^n$	$(\boldsymbol{A}^n)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^n$	$\lvert\boldsymbol{A}^n\rvert=\lvert\boldsymbol{A}\rvert^n$	$(\boldsymbol{A}^n)^*=(\boldsymbol{A}^*)^n$
$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$	$\lvert\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\rvert=\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$
$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$	$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$	$\lvert\boldsymbol{A}^{-1}\rvert=\lvert\boldsymbol{A}\rvert^{-1}$	$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$
$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$	$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\lvert\boldsymbol{A}\rvert^{-1}\boldsymbol{A}$	$\lvert\boldsymbol{A}^*\rvert=\lvert\boldsymbol{A}\rvert^{n-1}$	$(\boldsymbol{A}^*)^*=\lvert\boldsymbol{A}\rvert^{n-2}\boldsymbol{A}$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\ |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|,\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$$