第 2 节 正定二次型

安徽财经大学

统计与应用数学学院

二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \tag{5.1}$$

具有如下特性: 对任意一组不全为零的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 都有

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0.$$

二次型

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$$

则不具备这样的性质.

二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \tag{5.1}$$

具有如下特性: 对任意一组不全为零的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 都有

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0.$$

二次型

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$$

则不具备这样的性质.

定义 (5.2.1)

若对任一非零实向量 $\boldsymbol{X}$，都使二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$，则称 $f(\boldsymbol{X})$ 为**正定二次型**，$f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**正定矩阵**.

换句话说，若对任意一组不全为零的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，都使 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)>0$，则二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定二次型．例如，式 (5.1) 所示的二次型就是正定二次型．对于一般的二次型，下面的定理可以判断它是否正定．

定理 (5.2.1)

二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为**正定二次型**的充要条件是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值全为正数**.

定义 (5.2.1)

若对任一非零实向量 $\boldsymbol{X}$，都使二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$，则称 $f(\boldsymbol{X})$ 为正定二次型，$f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵.

换句话说，若对任意一组不全为零的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，都使 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) > 0$，则二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定二次型．例如，式 (5.1) 所示的二次型就是正定二次型．对于一般的二次型，下面的定理可以判断它是否正定.

定理 (5.2.1)

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定二次型的充要条件是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数.

定义 (5.2.1)

若对任一非零实向量 $\boldsymbol{X}$, 都使二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$, 则称 $f(\boldsymbol{X})$ 为正定二次型, $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵.

换句话说, 若对任意一组不全为零的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 都使 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)>0$, 则二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定二次型. 例如, 式 (5.1) 所示的二次型就是正定二次型. 对于一般的二次型, 下面的定理可以判断它是否正定.

定理 (5.2.1)

二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定二次型的充要条件是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则通过正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 可将 $f(\boldsymbol{X})$ 化为

$$f(\boldsymbol{X}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = g(\boldsymbol{Y}).$$

充分性 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全为正数, 则对任一非零实向量 $\boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{0}$, 均有 $g(\boldsymbol{Y}) > 0$. 故对任一非零实向量 $\boldsymbol{X}$, 可得非零实向量 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$, 使 $f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{Y}) > 0$, 故 $f(\boldsymbol{X})$ 是正定二次型.

必要性 用反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值 $\lambda_i \leqslant 0$, 不妨设 $\lambda_1 \leqslant 0$, 则对于

$$\boldsymbol{Y} = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}},$$

有 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{0}$,而

$$f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{Y}) = \lambda_1 \leqslant 0,$$

这与 $f(\boldsymbol{X})$ 是正定二次型矛盾, 故 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全为正数. □

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则通过正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 可将 $f(\boldsymbol{X})$ 化为

$$f(\boldsymbol{X}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = g(\boldsymbol{Y}).$$

充分性 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全为正数, 则对任一非零实向量 $\boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{0}$, 均有 $g(\boldsymbol{Y}) > 0$. 故对任一非零实向量 $\boldsymbol{X}$, 可得非零实向量 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$, 使 $f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{Y}) > 0$, 故 $f(\boldsymbol{X})$ 是正定二次型.

必要性 用反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值 $\lambda_i \leqslant 0$, 不妨设 $\lambda_1 \leqslant 0$, 则对于

$$\boldsymbol{Y} = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}},$$

有 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{0}$,而

$$f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{Y}) = \lambda_1 \leqslant 0,$$

这与 $f(\boldsymbol{X})$ 是正定二次型矛盾, 故 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全为正数. □

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则通过正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 可将 $f(\boldsymbol{X})$ 化为

$$f(\boldsymbol{X}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = g(\boldsymbol{Y}).$$

充分性 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全为正数, 则对任一非零实向量 $\boldsymbol{Y} \neq \mathbf{0}$, 均有 $g(\boldsymbol{Y}) > 0$. 故对任一非零实向量 $\boldsymbol{X}$, 可得非零实向量 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$, 使 $f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{Y}) > 0$, 故 $f(\boldsymbol{X})$ 是正定二次型.

必要性 用反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值 $\lambda_i \leqslant 0$, 不妨设 $\lambda_1 \leqslant 0$, 则对于

$$\boldsymbol{Y} = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}},$$

有 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} \neq \mathbf{0}$, 而

$$f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{Y}) = \lambda_1 \leqslant 0,$$

这与 $f(\boldsymbol{X})$ 是正定二次型矛盾, 故 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全为正数. □

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则通过正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 可将 $f(\boldsymbol{X})$ 化为

$$f(\boldsymbol{X}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = g(\boldsymbol{Y}).$$

充分性 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全为正数, 则对任一非零实向量 $\boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{0}$, 均有 $g(\boldsymbol{Y}) > 0$. 故对任一非零实向量 $\boldsymbol{X}$, 可得非零实向量 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$, 使 $f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{Y}) > 0$, 故 $f(\boldsymbol{X})$ 是正定二次型.

必要性 用反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值 $\lambda_i \leqslant 0$, 不妨设 $\lambda_1 \leqslant 0$, 则对于

$$\boldsymbol{Y} = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}},$$

有 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{0}$,而

$$f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{Y}) = \lambda_1 \leqslant 0,$$

这与 $f(\boldsymbol{X})$ 是正定二次型矛盾, 故 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全为正数. □

推论 (5.2.1)

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定二次型的充要条件是 $f(\boldsymbol{X})$ 的**正惯性指数为 n**.

事实上, 二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 通过正交变换可化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

于是, 由定理 1 可得推论 1.

因为可逆线性变换不改变二次型的正负惯性指数, 所以可逆线性变换也不会改变二次型的正定性.

推论 (5.2.1)

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定二次型的充要条件是 $f(\boldsymbol{X})$ 的正惯性指数为 n.

事实上, 二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 通过正交变换可化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

于是, 由定理 1 可得推论 1.

因为可逆线性变换不改变二次型的正负惯性指数, 所以可逆线性变换也不会改变二次型的正定性.

推论 (5.2.1)

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定二次型的充要条件是 $f(\boldsymbol{X})$ 的正惯性指数为 n.

事实上，二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 通过正交变换可化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

于是，由定理 1 可得推论 1.
因为可逆线性变换不改变二次型的正负惯性指数，所以可逆线性变换也不会改变二次型的正定性.

若 n 元二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$ 的正惯性指数为 n, 则其规范形为

$$g(\boldsymbol{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I} \boldsymbol{Y}, \tag{5.2}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 合同.

反之, 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 合同, 则 $f(\boldsymbol{X})$ 的规范形必然是式 (5.2). 于是可得

推论 (5.2.2)

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$ 是正定二次型的充要条件是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同.

若 n 元二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的正惯性指数为 n, 则其规范形为

$$g(\boldsymbol{Y})=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Y}, \tag{5.2}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 合同.

反之, 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 合同, 则 $f(\boldsymbol{X})$ 的规范形必然是式 (5.2). 于是可得

推论 (5.2.2)

二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定二次型的充要条件是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同.

若 n 元二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的正惯性指数为 n, 则其规范形为

$$g(\boldsymbol{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Y}, \tag{5.2}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 合同.
反之, 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 合同, 则 $f(\boldsymbol{X})$ 的规范形必然是式 (5.2). 于是可得

推论 (5.2.2)

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定二次型的充要条件是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同.

有时需要直接从二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 判断 $f(\boldsymbol{X})$ 是否为正定二次型. 为此, 我们先引入顺序主子式的概念.

定义 (5.2.2)

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 子式

$$P_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式.

有了这个概念, 我们不加证明地给出下面的定理:

有时需要直接从二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 判断 $f(\boldsymbol{X})$ 是否为正定二次型. 为此, 我们先引入顺序主子式的概念.

定义 (5.2.2)

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 子式

$$P_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式.

有了这个概念, 我们不加证明地给出下面的定理:

定理 (5.2.2)

二次型 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 是正定二次型的充要条件是对称矩阵 A 的所有顺序主子式全大于零.

例 (5.2.1)

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, 当 t 取何值时, f 为正定二次型?

定理 (5.2.2)

二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定二次型的充要条件是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全大于零.

例 (5.2.1)

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, 当 t 取何值时, f 为正定二次型?

解

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式为

$$P_1=1,\ P_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2,$$

$$P_3=\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ t & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix}=-4t^2-4t+8=-4(t-1)(t+2).$$

由于 $P_1=1>0$, 故 f 正定的充要条件是 $P_2>0$ 且 $P_3>0$, 即

$$\begin{cases}4-t^2>0,\\ -4(t-1)(t+2)>0,\end{cases}$$

解得 $-2<t<1$. 故当 $-2<t<1$ 时, f 正定.

解

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式为

$$P_1=1,\ P_2=\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix}=4-t^2,$$

$$P_3=\begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-4t^2-4t+8=-4(t-1)(t+2).$$

由于 $P_1=1>0$, 故 f 正定的充要条件是 $P_2>0$ 且 $P_3>0$, 即

$$\begin{cases} 4-t^2>0, \\ -4(t-1)(t+2)>0, \end{cases}$$

解得 $-2<t<1$. 故当 $-2<t<1$ 时, f 正定.

因为正定二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵，所以 $f(\boldsymbol{X})$ 正定的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵. 与二次型的正定性判断相平行，可得下面的结论:

定理 (5.2.3)

对于实对称矩阵 A, 下列命题等价:

1° $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵;

2° $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数;

3° $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同;

4° $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零.

因为正定二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵，所以 $f(\boldsymbol{X})$ 正定的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵. 与二次型的正定性判断相平行，可得下面的结论:

定理 (5.2.3)

对于实对称矩阵 A，下列命题等价:

1° $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵;

2° $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数;

3° $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同;

4° $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零.

例 (5.2.2)

证明正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵.

由于我们定义的正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 首先是一个实对称矩阵, 而 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是一个实对称矩阵.

证明.

证一　因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全为正数, 且存在正交矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 于是

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)^{-1}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right),$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$ 全为正数, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为正定矩阵. □

例 (5.2.2)

证明正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵.

由于我们定义的正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 首先是一个实对称矩阵，而 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是一个实对称矩阵.

证明.

证一　因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全为正数，且存在正交矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，于是

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)^{-1}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right),$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$ 全为正数，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为正定矩阵. □

例 (5.2.2)

证明正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵.

由于我们定义的正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 首先是一个实对称矩阵，而 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是一个实对称矩阵.

证明.

证一　因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全为正数，且存在正交矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，于是

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)^{-1}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right),$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$ 全为正数，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为正定矩阵. □

证明.

证二 因为 A 是正定矩阵，所以 A 与单位矩阵 I 合同，即存在可逆矩阵 P，使

$$A = P^{\mathrm{T}} I P = P^{\mathrm{T}} P,$$

所以

$$A^{-1} = (P^{\mathrm{T}} P)^{-1} = P^{-1} (P^{\mathrm{T}})^{-1} = P^{-1} (P^{-1})^{\mathrm{T}} = P^{-1} I (P^{-1})^{\mathrm{T}},$$

于是，A^{-1} 与单位矩阵 I 合同.

证三 设 $f(X) = X^{\mathrm{T}} A^{-1} X$，作可逆线性变换 $X = AY$，得

$$X^{\mathrm{T}} A^{-1} X = Y^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A^{-1} A Y = Y^{\mathrm{T}} A Y,$$

可逆线性变换不改变二次型的正定性，而 $Y^{\mathrm{T}} A Y$ 是正定二次型，故 $X^{\mathrm{T}} A^{-1} X$ 也是正定二次型，因此矩阵 A^{-1} 是正定矩阵. □

证明.

证二 因为 A 是正定矩阵，所以 A 与单位矩阵 I 合同，即存在可逆矩阵 P，使

$$A = P^{\mathrm{T}} I P = P^{\mathrm{T}} P,$$

所以

$$A^{-1} = \left(P^{\mathrm{T}} P\right)^{-1} = P^{-1}\left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = P^{-1}\left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = P^{-1} I \left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}},$$

于是，A^{-1} 与单位矩阵 I 合同.

证三 设 $f(X) = X^{\mathrm{T}} A^{-1} X$，作可逆线性变换 $X = AY$，得

$$X^{\mathrm{T}} A^{-1} X = Y^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A^{-1} A Y = Y^{\mathrm{T}} A Y,$$

可逆线性变换不改变二次型的正定性，而 $Y^{\mathrm{T}} A Y$ 是正定二次型，故 $X^{\mathrm{T}} A^{-1} X$ 也是正定二次型，因此矩阵 A^{-1} 是正定矩阵. □

证明.

证二　因为 A 是正定矩阵，所以 A 与单位矩阵 I 合同，即存在可逆矩阵 P，使

$$A = P^{\mathrm{T}} I P = P^{\mathrm{T}} P,$$

所以

$$A^{-1} = \left(P^{\mathrm{T}} P\right)^{-1} = P^{-1}\left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = P^{-1}\left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = P^{-1} I \left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}},$$

于是，A^{-1} 与单位矩阵 I 合同.

证三　设 $f(X) = X^{\mathrm{T}} A^{-1} X$，作可逆线性变换 $X = AY$，得

$$X^{\mathrm{T}} A^{-1} X = Y^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A^{-1} A Y = Y^{\mathrm{T}} A Y,$$

可逆线性变换不改变二次型的正定性，而 $Y^{\mathrm{T}} A Y$ 是正定二次型，故 $X^{\mathrm{T}} A^{-1} X$ 也是正定二次型，因此矩阵 A^{-1} 是正定矩阵. □

证明.

证二 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\right)^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{\mathrm{T}},$$

于是, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同.

证三 设 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$, 作可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$, 得

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y},$$

可逆线性变换不改变二次型的正定性, 而 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ 是正定二次型, 故 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$ 也是正定二次型, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定矩阵. □

与正定二次型相对应, 我们还可以讨论负定二次型、半正定二次型与半负定二次型.

定义 (5.2.3)

对于二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 及任一非零实向量 $\boldsymbol{X}$,

1° 若 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} < 0$, 则称 $f(\boldsymbol{X})$ 是负定二次型;

2° 若 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \geqslant 0$, 则称 $f(\boldsymbol{X})$ 是半正定二次型;

3° 若 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \leqslant 0$, 则称 $f(\boldsymbol{X})$ 是半负定二次型;

4° 不是正定、半正定、负定、半负定的二次型称为不定二次型.

负定二次型的判定

定理 (5.2.4)

对于二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$, 下列命题等价:

1° $f(\boldsymbol{X})$ 为负定二次型;

2° $f(\boldsymbol{X})$ 的特征值全为负数;

3° $f(\boldsymbol{X})$ 的负惯性指数为 n;

4° $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式满足 $(-1)^k P_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

事实上, 由正定二次型与负定二次型的定义可知, $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$ 为负定二次型的充要条件是 $-f(\boldsymbol{X}) = -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$ 为正定二次型.

值得注意的是, $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$ 是负定二次型的充要条件不是顺序主子式全小于零, 而是按照子式阶数的奇偶性呈现出奇负偶正的特点.

负定二次型的判定

定理 (5.2.4)

对于二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 下列命题等价:

1° $f(\boldsymbol{X})$ 为负定二次型;

2° $f(\boldsymbol{X})$ 的特征值全为负数;

3° $f(\boldsymbol{X})$ 的负惯性指数为 n;

4° $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式满足 $(-1)^k P_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

事实上, 由正定二次型与负定二次型的定义可知, $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为负定二次型的充要条件是 $-f(\boldsymbol{X}) = -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定二次型.

值得注意的是, $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是负定二次型的充要条件不是顺序主子式全小于零, 而是按照子式阶数的奇偶性呈现出奇负偶正的特点.

负定二次型的判定

定理 (5.2.4)

对于二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 下列命题等价:

1° $f(\boldsymbol{X})$ 为负定二次型;

2° $f(\boldsymbol{X})$ 的特征值全为负数;

3° $f(\boldsymbol{X})$ 的负惯性指数为 n;

4° $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式满足 $(-1)^k P_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

事实上, 由正定二次型与负定二次型的定义可知, $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为负定二次型的充要条件是 $-f(\boldsymbol{X}) = -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定二次型.

值得注意的是, $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是负定二次型的充要条件不是顺序主子式全小于零, 而是按照子式阶数的奇偶性呈现出奇负偶正的特点.

例 (5.2.3)

判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ 是否为负定二次型.

解

f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

因为 $(-1)P_1 = -|-5| > 0$, $(-1)^2P_2 = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0$,

$$(-1)^3P_3 = -\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 80 > 0,$$

所以 f 是负定二次型.

例 (5.2.3)

判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ 是否为负定二次型.

解

f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

因为 $(-1)P_1 = -|-5| > 0$, $(-1)^2P_2 = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0$,

$$(-1)^3P_3 = -\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 80 > 0,$$

所以 f 是负定二次型.

例 (5.2.4)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^2$. 求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}$, 并确定 k 为何值时, $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=0$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},$$

例 (5.2.4)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^2$. 求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}$, 并确定 k 为何值时, $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=0$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},$$

例 (5.2.4)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^2$. 求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}$, 并确定 k 为何值时, $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=0$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},$$

解

于是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= (k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^2 = \left(k\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)^2 \\
&= \left[\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right]\left[\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \boldsymbol{P}(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D})^2\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} (k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} (k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k^2 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{\Lambda}$.

由此可知, 当 $k \neq -2$ 且 $k \neq 0$ 时, $\boldsymbol{B}$ 的特征值全为正实数, 此时 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

解

于是

$$\begin{aligned} B &= (kI + A)^2 = \left(kPP^{\mathrm{T}} + PDP^{\mathrm{T}}\right)^2 \\ &= \left[P(kI + D)P^{\mathrm{T}}\right]\left[P(kI + D)P^{\mathrm{T}}\right] \\ &= P(kI + D)^2 P^{\mathrm{T}} \\ &= P\begin{pmatrix} (k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k^2 \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

令 $\Lambda = \begin{pmatrix} (k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k^2 \end{pmatrix}$, 则 $B \sim \Lambda$.

由此可知, 当 $k \neq -2$ 且 $k \neq 0$ 时, B 的特征值全为正实数, 此时 B 为正定矩阵.

小结 (I)

- 正定二次型的定义:
  若对任一非零实向量 $\boldsymbol{X}$, 都使二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$, 则称 $f(\boldsymbol{X})$ 为正定二次型, $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵.
- 可逆线性变换不改变二次型的秩, 不改变二次型的正负惯性指数, 不改变二次型的正定性.
- 正定二次型的充要条件:
  (1) $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定的 $\Leftrightarrow$对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数.
  (2) $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定的 $\Leftrightarrow$ $f(\boldsymbol{X})$ 的正惯性指数为 n.
  (3) $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定的 $\Leftrightarrow$ 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同.
  (4) $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定的 $\Leftrightarrow$ 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全大于零.

小结 (II)

- 正定矩阵的判定: 对于实对称矩阵 A, 下列命题等价:
  1° $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵;
  2° $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数;
  3° $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n;
  4° $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同;
  5° $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零.
- 负定二次型、半正定二次型与半负定二次型
- 负定二次型的判定: 二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 下列命题等价:
  1° $f(\boldsymbol{X})$ 为负定二次型;
  2° $-f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$ 为正定二次型 ($-\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵);
  3° $f(\boldsymbol{X})$ 的特征值全为负数;
  4° $f(\boldsymbol{X})$ 的负惯性指数为 n;
  5° 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{I}$ 合同;
  6° $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式满足 $(-1)^k P_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$.

小结 (III)

正定矩阵的性质:

- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为正定矩阵.
- n 阶正定矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的主对角线元素为正数, 即 $a_{ii}>0$, $i=1,2,\ldots,n$.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^k$ 也为正定矩阵, 其中 k 为正整数.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也为正定矩阵.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于零.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}|>0$.