第 2 节 行列式的性质与计算

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

性质 (2.2.1)

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式按任一行展开，其值相等，即

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij}是 $\det \boldsymbol{A}$ 中去掉第 i 行和第 j 列元所成的 $n-1$ 阶行列式，称为元 a_{ij} 的余子式，A_{ij}称为元 a_{ij} 的代数余子式.

推论

若行列式的某行元全为零，则行列式等于零.

性质 (2.2.1)

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式按任一行展开，其值相等，即

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij}是 $\det \boldsymbol{A}$ 中去掉第 i 行和第 j 列元所成的 $n-1$ 阶行列式，称为元 a_{ij} 的余子式，A_{ij}称为元 a_{ij} 的代数余子式.

推论

若行列式的某行元全为零，则行列式等于零.

例 (2.2.1)

计算 n 阶上三角行列式 (即当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$).

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

先将 D_n 按第 n 行展开，以后每次都按最后一行展开.

$$D_n=a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}=a_{nn}a_{n-1,n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 (2.2.1)

计算 n 阶上三角行列式 (即当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$).

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

先将 D_n 按第 n 行展开, 以后每次都按最后一行展开.

$$D_n=a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}=a_{nn}a_{n-1,n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 (2.2.2)

计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

由于第 3 行除 $a_{32}=2$ 外，其他元均为零，故由性质 1 得

$$D=a_{32}A_{32}=2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix},$$

再按第 1 行展开有

$$D=-2\times 6\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-12\times(-9+8)=12.$$

例 (2.2.2)

计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

由于第 3 行除 $a_{32}=2$ 外，其他元均为零，故由性质 1 得

$$D=a_{32}A_{32}=2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix},$$

再按第 1 行展开有

$$D=-2\times 6\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-12\times(-9+8)=12.$$

性质 (2.2.2)

若 n 阶行列式某两行对应元全相等，则行列式为零.

即当 $a_{ik}=a_{jk}, i\neq j, k=1,2,\cdots,n$ 时，$\det \boldsymbol{A}=0$.

证明.

用数学归纳法证明. 结论对二阶行列式显然成立. 当 $n\geqslant 3$ 时，假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立，在 n 阶的情况下，对第 k 行展开 $(k\neq i,j)$，则

$$\det \boldsymbol{A}=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{kl},$$

因为 M_{kl} $(l=1,2,\cdots,n)$ 是 $n-1$ 阶行列式，且其中都有两行元全相等，所以

$$A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}=0 \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

故 $\det \boldsymbol{A}=0$. □

性质 (2.2.2)

若 n 阶行列式某两行对应元全相等，则行列式为零.

即当 $a_{ik} = a_{jk}, i \neq j, k = 1, 2, \cdots, n$ 时，$\det \boldsymbol{A} = 0$.

证明.

用数学归纳法证明. 结论对二阶行列式显然成立. 当 $n \geqslant 3$ 时，假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立，在 n 阶的情况下，对第 k 行展开 $(k \neq i, j)$，则

$$\det \boldsymbol{A} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}A_{kl},$$

因为 M_{kl} $(l = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $n-1$ 阶行列式，且其中都有两行元全相等，所以

$$A_{kl} = (-1)^{k+l}M_{kl} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

故 $\det \boldsymbol{A} = 0$. □

性质 (2.2.3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明.

由性质 1，将上式左端行列式按第 i 行展开得

$$
\begin{aligned}
\text{左} &= (b_{i1}+c_{i1})A_{i1}+(b_{i2}+c_{i2})A_{i2}+\cdots+(b_{in}+c_{in})A_{in} \\
&= (b_{i1}A_{i1}+b_{i2}A_{i2}+\cdots+b_{in}A_{in})+(c_{i1}A_{i1}+c_{i2}A_{i2}+\cdots+c_{in}A_{in}) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

性质 3 说明：如果行列式的某一行是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，这两个行列式分别以这两组数为这一行的元，其他行与原来行列式的对应各行不变.

证明.

由性质 1, 将上式左端行列式按第 i 行展开得

$$
\begin{aligned}
\text{左} &= (b_{i1}+c_{i1})A_{i1}+(b_{i2}+c_{i2})A_{i2}+\cdots+(b_{in}+c_{in})A_{in} \\
&= (b_{i1}A_{i1}+b_{i2}A_{i2}+\cdots+b_{in}A_{in})+(c_{i1}A_{i1}+c_{i2}A_{i2}+\cdots+c_{in}A_{in}) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

性质 3 说明: 如果行列式的某一行是两组数的和, 那么这个行列式就等于两个行列式的和, 这两个行列式分别以这两组数为这一行的元, 其他各行与原来行列式的对应各行不变.

性质 (2.2.4 行列式的初等变换)

若把行初等变换施于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上:

(1) 将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行乘数 k 得到 $\boldsymbol{A}_1$, 则 $\det \boldsymbol{A}_1 = k(\det \boldsymbol{A})$;

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行的 k 倍加到另一行得到 $\boldsymbol{A}_2$, 则 $\det \boldsymbol{A}_2 = \det \boldsymbol{A}$;

(3) 交换 $\boldsymbol{A}$ 的两行得到 $\boldsymbol{A}_3$, 则 $\det \boldsymbol{A}_3 = -\det \boldsymbol{A}$.

证明.

(1) 利用性质 1, 按乘数 k 的那一行展开, 即得 $\det \boldsymbol{A}_1 = k(\det \boldsymbol{A})$.

(2) 由性质 3 及 (1) 得 □

接下页

性质 (2.2.4 行列式的初等变换)

若把行初等变换施于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上:

(1) 将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行乘数 k 得到 $\boldsymbol{A}_1$, 则 $\det \boldsymbol{A}_1 = k(\det \boldsymbol{A})$;

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行的 k 倍加到另一行得到 $\boldsymbol{A}_2$, 则 $\det \boldsymbol{A}_2 = \det \boldsymbol{A}$;

(3) 交换 $\boldsymbol{A}$ 的两行得到 $\boldsymbol{A}_3$, 则 $\det \boldsymbol{A}_3 = -\det \boldsymbol{A}$.

证明.

(1) 利用性质 1, 按乘数 k 的那一行展开, 即得 $\det \boldsymbol{A}_1 = k(\det \boldsymbol{A})$.

(2) 由性质 3 及 (1) 得 □

接下页

$$\det \boldsymbol{A}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \boldsymbol{A} + k \cdot 0 = \det \boldsymbol{A}.$$

(3) 由 (2) 可知

$$\det \boldsymbol{A}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\det \boldsymbol{A}.$$

推论

若行列式某两行对应元成比例，则行列式的值为零.

由性质 4 可知下列常用结论成立，设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则

$$\det(k\boldsymbol{A}) = k^n(\det \boldsymbol{A}).$$

必须指出，不能把矩阵的初等变换与行列式的初等变换混淆，首先矩阵是数表，行列式是数；其次，前者是保持两矩阵的等价关系，不是相等，而后者是保持两行列式的等值关系.

推论

若行列式某两行对应元成比例，则行列式的值为零.

由性质 4 可知下列常用结论成立，设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则

$$\det(k\boldsymbol{A}) = k^n(\det \boldsymbol{A}).$$

必须指出，不能把矩阵的初等变换与行列式的初等变换混淆，首先矩阵是数表，行列式是数；其次，前者是保持两矩阵的等价关系，不是相等，而后者是保持两行列式的等值关系.

为了研究矩阵转置的行列式，我们先来讨论初等矩阵的行列式．对于三个初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_i(c)$ 和 $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$，设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，由性质 4 有

$$\det(\boldsymbol{E}_{ij}) = \det(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{I}) = -\det \boldsymbol{I} = -1,$$
$$\det \boldsymbol{E}_i(c) = c \neq 0,$$
$$\det \boldsymbol{E}_{ij}(c) = 1.$$

于是，设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，由性质 4 得

$$\det(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}) = -\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_{ij})(\det \boldsymbol{A}),$$
$$\det(\boldsymbol{E}_i(c)\boldsymbol{A}) = c(\det \boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{E}_i(c))(\det \boldsymbol{A}),$$
$$\det(\boldsymbol{E}_{ij}(c)\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_{ij}(c))(\det \boldsymbol{A}).$$

故对任一初等矩阵 $\boldsymbol{E}$，都有

$$\det(\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{E})(\det \boldsymbol{A}).$$

一般地，设 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$ 为初等矩阵，则

$$\det(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2)\cdots(\det \boldsymbol{E}_t)(\det \boldsymbol{A}).$$

为了研究矩阵转置的行列式，我们先来讨论初等矩阵的行列式．对于三个初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_i(c)$ 和 $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$，设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，由性质 4 有

$$\begin{gathered}
\det(\boldsymbol{E}_{ij}) = \det(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{I}) = -\det \boldsymbol{I} = -1, \\
\det \boldsymbol{E}_i(c) = c \neq 0, \\
\det \boldsymbol{E}_{ij}(c) = 1.
\end{gathered}$$

于是，设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，由性质 4 得

$$\begin{gathered}
\det(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}) = -\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_{ij})(\det \boldsymbol{A}), \\
\det(\boldsymbol{E}_i(c)\boldsymbol{A}) = c(\det \boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{E}_i(c))(\det \boldsymbol{A}), \\
\det(\boldsymbol{E}_{ij}(c)\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_{ij}(c))(\det \boldsymbol{A}).
\end{gathered}$$

故对任一初等矩阵 $\boldsymbol{E}$，都有

$$\det(\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{E})(\det \boldsymbol{A}).$$

一般地，设 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$ 为初等矩阵，则

$$\det(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2)\cdots(\det \boldsymbol{E}_t)(\det \boldsymbol{A}).$$

为了研究矩阵转置的行列式，我们先来讨论初等矩阵的行列式．对于三个初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_i(c)$ 和 $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$，设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，由性质 4 有

$$\begin{gathered}\det(\boldsymbol{E}_{ij}) = \det(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{I}) = -\det \boldsymbol{I} = -1, \\ \det \boldsymbol{E}_i(c) = c \neq 0, \\ \det \boldsymbol{E}_{ij}(c) = 1.\end{gathered}$$

于是，设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，由性质 4 得

$$\begin{gathered}\det(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}) = -\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_{ij})(\det \boldsymbol{A}), \\ \det(\boldsymbol{E}_i(c)\boldsymbol{A}) = c(\det \boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{E}_i(c))(\det \boldsymbol{A}), \\ \det(\boldsymbol{E}_{ij}(c)\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_{ij}(c))(\det \boldsymbol{A}).\end{gathered}$$

故对任一初等矩阵 $\boldsymbol{E}$，都有

$$\det(\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{E})(\det \boldsymbol{A}).$$

一般地，设 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$ 为初等矩阵，则

$$\det(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2)\cdots(\det \boldsymbol{E}_t)(\det \boldsymbol{A}).$$

性质 (2.2.5)

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 与其转置矩阵的行列式 $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)$ 的值相等，即

$$\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=\det \boldsymbol{A}.$$

证明.

由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也不可逆. 设 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}$ 的最后一行的元全为零，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_t \boldsymbol{R}.$$

由性质 1 的推论知 $\det \boldsymbol{R}=0$，因而

$$\det \boldsymbol{A}=\left(\det \boldsymbol{E}_1\right)\left(\det \boldsymbol{E}_2\right) \cdots\left(\det \boldsymbol{E}_t\right)(\det \boldsymbol{R})=0.$$

又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也不可逆，同理，$\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=0$. 故 $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=\det \boldsymbol{A}$.

性质 (2.2.5)

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 与其转置矩阵的行列式 $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)$ 的值相等，即

$$\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) = \det \boldsymbol{A}.$$

证明.

由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也不可逆. 设 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}$ 的最后一行的元全为零，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_t \boldsymbol{R}.$$

由性质 1 的推论知 $\det \boldsymbol{R} = 0$，因而

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2)\cdots(\det \boldsymbol{E}_t)(\det \boldsymbol{R}) = 0.$$

又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也不可逆，同理，$\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) = 0$. 故 $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) = \det \boldsymbol{A}$. □

证明.

当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 由 §1.3 的定理 3, 存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_s$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_s$, 从而

$$\begin{aligned} \det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) &= \det\left(\boldsymbol{E}_s^{\mathrm{T}} \cdots \boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\right) \\ &= \left(\det \boldsymbol{E}_s^{\mathrm{T}}\right) \cdots \left(\det \boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\right) \left(\det \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\right), \end{aligned}$$

又由于对于三种初等矩阵, 显然其行列式均分别等于它们转置的行列式, 因而

$$\begin{aligned} \det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) &= (\det \boldsymbol{E}_s) \cdots (\det \boldsymbol{E}_2) (\det \boldsymbol{E}_1) \\ &= (\det \boldsymbol{E}_1) (\det \boldsymbol{E}_2) \cdots (\det \boldsymbol{E}_s) \\ &= \det\left(\boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_s\right) \\ &= \det \boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

□

性质 5 说明，行列式对行成立的性质对列也成立．于是，由性质 1 和性质 5 知，n 阶行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 可按任一行或任一列展开，即

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

例 (2.2.3)

试证：奇数阶反称矩阵的行列式必为零．

证明．

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反称矩阵 (n 为奇数)，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$，因而

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \det(-\boldsymbol{A}) = (-1)^n \det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A},$$

故 $\det \boldsymbol{A} = 0$. □

性质 5 说明, 行列式对行成立的性质对列也成立. 于是, 由性质 1 和性质 5 知, n 阶行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 可按任一行或任一列展开, 即

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

例 (2.2.3)

试证: 奇数阶反称矩阵的行列式必为零.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反称矩阵 (n 为奇数), 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$, 因而

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \det(-\boldsymbol{A}) = (-1)^n \det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A},$$

故 $\det \boldsymbol{A} = 0$. □

性质 5 说明, 行列式对行成立的性质对列也成立. 于是, 由性质 1 和性质 5 知, n 阶行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 可按任一行或任一列展开, 即

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

例 (2.2.3)

试证: 奇数阶反称矩阵的行列式必为零.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反称矩阵 (n 为奇数), 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$, 因而

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \det(-\boldsymbol{A}) = (-1)^n \det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A},$$

故 $\det \boldsymbol{A} = 0$. □

计算行列式的一个基本方法是利用行列式的性质，把行列式化成上三角形行列式．由于这一方法程序固定，故适合在计算机上使用，而且计算工作量比按定义展开的方要少．

例 (2.2.4)

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\-1&-1&2&1\\2&5&2&4\\1&2&3&2\end{vmatrix}\xlongequal[-r_1+r_4]{\substack{r_1+r_2\\-2r_1+r_3}}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&0&1&4\\0&3&4&-2\\0&1&4&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&3&4&-2\\0&0&1&4\end{vmatrix}\xlongequal{-3r_2+r_3}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&0&-8&1\\0&0&1&4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&0&1&4\\0&0&-8&1\end{vmatrix}\xlongequal{8r_3+r_4}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&0&1&4\\0&0&0&33\end{vmatrix}=\frac{33}{2}.$$

计算行列式的另一基本方法是，恰当地利用性质，将某一行（列）的元尽可能化为零，然后按该行（列）展开，降阶后再计算.

例 (2.2.5)

计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 & -3 \\ -4 & 7 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & -8 & -10 & -5 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal[-4c_4+c_3]{\substack{2c_4+c_1\\ -3c_4+c_2}} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 & -3 \\ 4 & -5 & -18 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 10 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } r_3 \text{ 展开}}$$

$$= 1 \times (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 \\ 4 & -5 & -18 \\ -3 & 7 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[-3r_1+r_3]{4r_1+r_2} - \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 \\ 0 & 39 & 6 \\ 0 & -26 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 39 & 6 \\ -26 & -8 \end{vmatrix} = -156.$$

这里 c_i 表示第 i 列.

例 (2.2.6)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解

注意到每行除了一个 x 外, 其余 $n-1$ 个数全为 y, 故将第 2 列, 第 3 列, $\cdots$, 第 n 列都加到第 1 列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)y & y & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 1 & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

例 (2.2.6)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解

注意到每行除了一个 x 外，其余 $n-1$ 个数全为 y，故将第 2 列，第 3 列，$\cdots$，第 n 列都加到第 1 列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)y & y & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 1 & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)y & y & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 1 & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-r_1+r_i(i=2,\cdots,n)} [x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}.$$

例 (2.2.7)

证明

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明.

证一　把左端行列式的第 $2,3$ 列加到第 1 列, 提取公因子 2, 再把第 1 列乘 -1 加到第 $2,3$ 列得

$$左式 = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix}.$$

把第 $2,3$ 列加到第 1 列, 然后分别提取 $2,3$ 列的公因数 -1, 再作两次列对换, 等式得证.

例 (2.2.7)

证明
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明.

证一 把左端行列式的第 $2,3$ 列加到第 1 列，提取公因子 2，再把第 1 列乘 -1 加到第 $2,3$ 列得

$$\text{左式} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix}.$$

把第 $2,3$ 列加到第 1 列，然后分别提取 $2,3$ 列的公因数 -1，再作两次列对换，等式得证. □

证明.

证二

$$
\text{左式}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+0+0+0+0+0+0+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}=\text{右式}.
$$

□

例 (2.2.8)

证明范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j),$$

其中 $n \geqslant 2$, 连乘积

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2)\cdots$$

$$(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})$$

是满足条件 $1 \leqslant j < i \leqslant n$ 的所有因子 $(x_i - x_j)$ 的乘积.

证明.

对行列式的阶数 n 作数学归纳法.

当 $n=2$ 时, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

结论成立.

假设对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式结论成立. 下证对 n 阶范德蒙德行列式结论也成立.

在 V_n 中从第 n 行开始, 逐行减去上一行的 x_1 倍, 可得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

证明.

对行列式的阶数 n 作数学归纳法.
当 $n=2$ 时, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

结论成立.
假设对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式结论成立. 下证对 n 阶范德蒙德行列式结论也成立.
在 V_n 中从第 n 行开始, 逐行减去上一行的 x_1 倍, 可得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

证明.

对行列式的阶数 n 作数学归纳法.
当 $n=2$ 时, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

结论成立.
假设对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式结论成立. 下证对 n 阶范德蒙德行列式结论也成立.
在 V_n 中从第 n 行开始, 逐行减去上一行的 x_1 倍, 可得

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2\left(x_2 - x_1\right) & x_3\left(x_3 - x_1\right) & \cdots & x_n\left(x_n - x_1\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}\left(x_2 - x_1\right) & x_3^{n-2}\left(x_3 - x_1\right) & \cdots & x_n^{n-2}\left(x_n - x_1\right) \end{vmatrix}$$

证明.

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

证明.

上式右端的行列式是一个 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，根据归纳假设有

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j),$$

由归纳法，结论成立.

显然，$V_n \neq 0$ 的充要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互不相同. □

由上例可见，利用数学归纳法证明行列式时，在降阶过程中注意保持行列式的“原形”是很重要的.

在 n 阶行列式的计算中，一般都将高阶行列式转化为低阶行列式来计算. 但对某些特殊的行列式，也常采用“加边”法.

证明.

上式右端的行列式是一个 $n-1$ 阶范德蒙德行列式, 根据归纳假设有

$$V_n = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

由归纳法, 结论成立.
显然, $V_n \neq 0$ 的充要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互不相同. □

由上例可见, 利用数学归纳法证明行列式时, 在降阶过程中注意保持行列式的 “原形” 是很重要的.
在 n 阶行列式的计算中, 一般都将高阶行列式转化为低阶行列式来计算. 但对某些特殊的行列式, 也常采用 “加边” 法.

例 (2.2.9)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}.$$

解

我们利用如下的加边法:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix},$$

例 (2.2.9)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}.$$

解

我们利用如下的加边法:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix},$$

解

我们利用如下的加边法:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix},$$

将第 1 行的 -1 倍分别加到第 2 行, 第 3 行, $\cdots$, 第 $n+1$ 行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix},$$

解

若 $m=0$, 则

$$D_n=\begin{cases} x_1, & n=1, \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

若 $m\neq 0$, 则将 D_n 中第 2 列, 第 3 列, $\cdots$, 第 $n+1$ 列都乘 $-\frac{1}{m}$ 后加到第 1 列得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=(-m)^n\left(1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$=(-1)^{n-1}m^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right).$$

解

若 $m=0$, 则

$$D_n=\begin{cases} x_1, & n=1,\\ 0, & n>1.\end{cases}$$

若 $m\neq 0$, 则将 D_n 中第 2 列, 第 3 列, $\cdots$, 第 $n+1$ 列都乘 $-\frac{1}{m}$ 后加到第 1 列得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=(-m)^n\left(1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$=(-1)^{n-1}m^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right).$$

解

若 $m=0$, 则

$$D_n=\begin{cases} x_1, & n=1, \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

若 $m\neq 0$, 则将 D_n 中第 2 列, 第 3 列, $\cdots$, 第 $n+1$ 列都乘 $-\frac{1}{m}$ 后加到第 1 列得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} \\ &= (-m)^n\left(1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) \\ &= (-1)^{n-1}m^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right). \end{aligned}$$

定理 (2.2.1)

n 阶矩阵 A 可逆的充要条件为 $\det A \neq 0$.

证明.

设 A 经行初等变换化为简化行阶梯形矩阵 R, 即存在初等矩阵 $E_1, E_2, \cdots, E_t$, 使得

$$A = E_1 E_2 \cdots E_t R.$$

若 A 可逆, 则 $R = I$, 因此

$$\det A = (\det E_1)(\det E_2)\cdots(\det E_t)(\det I) \neq 0.$$

反之, 若 $\det A \neq 0$, 但 A 不可逆, 则 R 的最后一行的元全为零, 因此由行列式的性质知 $\det R = 0$, 则

$$\det A = (\det E_1)(\det E_2)\cdots(\det E_t)(\det R) = 0$$

矛盾, 故 A 可逆. □

定理 (2.2.1)

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换化为简化行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$, 即存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_t \boldsymbol{R}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, 因此

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2) \cdots (\det \boldsymbol{E}_t)(\det \boldsymbol{I}) \neq 0.$$

反之, 若 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 但 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{R}$ 的最后一行的元全为零, 因此由行列式的性质知 $\det \boldsymbol{R} = 0$, 则

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2) \cdots (\det \boldsymbol{E}_t)(\det \boldsymbol{R}) = 0$$

矛盾, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

定理 (2.2.1)

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换化为简化行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$, 即存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_t \boldsymbol{R}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, 因此

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2) \cdots (\det \boldsymbol{E}_t)(\det \boldsymbol{I}) \neq 0.$$

反之, 若 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 但 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{R}$ 的最后一行的元全为零, 因此由行列式的性质知 $\det \boldsymbol{R} = 0$, 则

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2) \cdots (\det \boldsymbol{E}_t)(\det \boldsymbol{R}) = 0$$

矛盾, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

定理 (2.2.1)

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换化为简化行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$, 即存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_t \boldsymbol{R}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, 因此

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2) \cdots (\det \boldsymbol{E}_t)(\det \boldsymbol{I}) \neq 0.$$

反之, 若 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 但 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{R}$ 的最后一行的元全为零, 因此由行列式的性质知 $\det \boldsymbol{R} = 0$, 则

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2) \cdots (\det \boldsymbol{E}_t)(\det \boldsymbol{R}) = 0$$

矛盾, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆. □

定理 (2.2.2)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，则 $\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换化为简化行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{R}$，则

$$|\boldsymbol{AB}| = \det(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{RB}) = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2)\cdots(\det \boldsymbol{E}_t)(\det(\boldsymbol{RB})).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$. 此时 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t$，于是

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2)\cdots(\det \boldsymbol{E}_t),$$

$$\text{故 } \det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det(\boldsymbol{IB})) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B}).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则$\boldsymbol{R}$ 的最后一行全为零，因而 $\boldsymbol{RB}$ 的最后一行也全为零，故由行列式性质，$\det(\boldsymbol{RB}) = 0$，从而 $\det(\boldsymbol{AB}) = 0$. 又由定理 1 知 $\det \boldsymbol{A} = 0$，故 $\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$. □

定理 (2.2.2)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 则 $\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换化为简化行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$, 即存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{R}$, 则

$$|\boldsymbol{AB}| = \det(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{RB}) = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2)\cdots(\det \boldsymbol{E}_t)(\det(\boldsymbol{RB})).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$. 此时 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t$, 于是

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2)\cdots(\det \boldsymbol{E}_t),$$

$$\text{故 } \det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det(\boldsymbol{IB})) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B}).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{R}$ 的最后一行全为零, 因而 $\boldsymbol{RB}$ 的最后一行也全为零, 故由行列式性质, $\det(\boldsymbol{RB}) = 0$, 从而 $\det(\boldsymbol{AB}) = 0$. 又由定理 1 知 $\det \boldsymbol{A} = 0$, 故 $\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$. □

定理 (2.2.2)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 则 $\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换化为简化行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$, 即存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{R}$, 则

$$|\boldsymbol{AB}| = \det(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{RB}) = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2)\cdots(\det \boldsymbol{E}_t)(\det(\boldsymbol{RB})).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$. 此时 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t$, 于是

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{E}_1)(\det \boldsymbol{E}_2)\cdots(\det \boldsymbol{E}_t),$$

$$\text{故 } \det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det(\boldsymbol{IB})) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B}).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则$\boldsymbol{R}$ 的最后一行全为零, 因而 $\boldsymbol{RB}$ 的最后一行也全为零, 故由行列式性质, $\det(\boldsymbol{RB}) = 0$, 从而 $\det(\boldsymbol{AB}) = 0$. 又由定理 1 知 $\det \boldsymbol{A} = 0$, 故 $\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$.

定理 (2.2.2)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 则 $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换化为简化行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$, 即存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_t$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{R}$, 则

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = \det\left(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}\right) = \left(\det \boldsymbol{E}_1\right)\left(\det \boldsymbol{E}_2\right)\cdots\left(\det \boldsymbol{E}_t\right)\left(\det(\boldsymbol{R}\boldsymbol{B})\right).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$. 此时 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_t$, 于是

$$\det \boldsymbol{A} = \left(\det \boldsymbol{E}_1\right)\left(\det \boldsymbol{E}_2\right)\cdots\left(\det \boldsymbol{E}_t\right),$$

$$\text{故}\ \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{A})(\det(\boldsymbol{I}\boldsymbol{B})) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B}).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则$\boldsymbol{R}$ 的最后一行全为零, 因而 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}$ 的最后一行也全为零, 故由行列式性质, $\det(\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}) = 0$, 从而 $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = 0$. 又由定理 1 知 $\det \boldsymbol{A} = 0$, 故 $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$. □

推论

设 $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,r)$ 均为 n 阶矩阵, 则

$$\det\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_r\right)=\left(\det\boldsymbol{A}_1\right)\left(\det\boldsymbol{A}_2\right)\cdots\left(\det\boldsymbol{A}_r\right).$$

推论

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明.

因为 $\det(\boldsymbol{AB})=(\det\boldsymbol{A})(\det\boldsymbol{B})=\det\boldsymbol{I}=1$, 所以 $\det\boldsymbol{A}\neq0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在, 于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{IB}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

推论

设 $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,r)$ 均为 n 阶矩阵, 则

$$\det(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_r)=(\det\boldsymbol{A}_1)(\det\boldsymbol{A}_2)\cdots(\det\boldsymbol{A}_r).$$

推论

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明.

因为 $\det(\boldsymbol{AB})=(\det\boldsymbol{A})(\det\boldsymbol{B})=\det\boldsymbol{I}=1$, 所以 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在, 于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{IB}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

□

推论

设 $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,r)$ 均为 n 阶矩阵，则

$$\det(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_r)=(\det\boldsymbol{A}_1)(\det\boldsymbol{A}_2)\cdots(\det\boldsymbol{A}_r).$$

推论

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$（或 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$），则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$. 由定理 2 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$ 有

$$(\det\boldsymbol{A})\left(\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)\right)=\det\boldsymbol{I}=1,$$

因而

$$\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)=(\det\boldsymbol{A})^{-1}.$$

这说明 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的行列式等于 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的倒数.

例 (2.2.10)

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right), \det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}), \det(2\boldsymbol{A}), \det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right), \det\left(2\boldsymbol{A}^{2}\boldsymbol{B}^{-1}\right)$.

解

显然 $\det \boldsymbol{A} = 6 \neq 0, \det \boldsymbol{B} = 8 \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆, 且

$$\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right) = (\det \boldsymbol{A})\left(\det \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right) = 48,$$

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\det(2\boldsymbol{A}) = 2^3 \det \boldsymbol{A} = 48,$$

$$\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{1}{6},$$

$$\det\left(2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{-1}\right) = 2^3 \det\left(\boldsymbol{A}^2\right)\left(\det \boldsymbol{B}^{-1}\right) = 2^3(\det \boldsymbol{A})^2 \cdot \frac{1}{\det \boldsymbol{B}} = 36.$$

例 (2.2.11)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$ 都是 4×1 矩阵. 设 $|\boldsymbol{A}|=4, |\boldsymbol{B}|=1$, 求 $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right|$.

解

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right| &= \left|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\right| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \\
&= |(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, 2\boldsymbol{\nu}_1, 2\boldsymbol{\nu}_2, 2\boldsymbol{\nu}_3)| \\
&= |(\boldsymbol{\alpha}, 2\boldsymbol{\nu}_1, 2\boldsymbol{\nu}_2, 2\boldsymbol{\nu}_3)| + |(\boldsymbol{\beta}, 2\boldsymbol{\nu}_1, 2\boldsymbol{\nu}_2, 2\boldsymbol{\nu}_3)| \\
&= 2^3\,|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)| + 2^3\,|(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)| = 40.
\end{aligned}$$

例 (2.2.11)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$ 都是 4×1 矩阵. 设 $|\boldsymbol{A}|=4, |\boldsymbol{B}|=1$, 求 $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right|$.

解

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right| &= \left|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\right| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \\ &= |(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, 2\boldsymbol{\nu}_1, 2\boldsymbol{\nu}_2, 2\boldsymbol{\nu}_3)| \\ &= |(\boldsymbol{\alpha}, 2\boldsymbol{\nu}_1, 2\boldsymbol{\nu}_2, 2\boldsymbol{\nu}_3)| + |(\boldsymbol{\beta}, 2\boldsymbol{\nu}_1, 2\boldsymbol{\nu}_2, 2\boldsymbol{\nu}_3)| \\ &= 2^3\,|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)| + 2^3\,|(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)| = 40.\end{aligned}$$

小结 (I)

- 行列式的性质:
- (1) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式按任一行展开都相等,

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

- (2) 若行列式的某行元全为零, 则行列式等于零.
- (3) 若 n 阶行列式某两行对应元全相等, 则行列式为零.
- (4) 如果行列式的某一行是两组数的和, 那么这个行列式就等于两个行列式的和, 这两个行列式分别以这两组数为这一行的元, 其他各行与原来行列式的对应各行不变.

小结 (II)

- 行列式的性质:
- (5) 若把行初等变换施于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上:
  (a) 将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行乘数 k 得到 $\boldsymbol{A}_1$, 则$\det \boldsymbol{A}_1 = k(\det \boldsymbol{A})$;
  (b) 将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行的 k 倍加到另一行得到 $\boldsymbol{A}_2$, 则$\det \boldsymbol{A}_2 = \det \boldsymbol{A}$;
  (c) 交换 $\boldsymbol{A}$ 的两行得到 $\boldsymbol{A}_3$, 则$\det \boldsymbol{A}_3 = -\det \boldsymbol{A}$.
- (6) 若行列式某两行对应元成比例, 则行列式的值为零.
- (7) $\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) = \det \boldsymbol{A}$.

小结 (III)

- 行列式的计算: (1) 计算行列式的一个基本方法是利用行列式的性质, 把行列式化成上三角形行列式.
  (2) 计算行列式的另一基本方法是, 恰当地利用性质, 将某一行 (列) 的元尽可能化为零, 然后按该行 (列) 展开, 降阶后再计算.
  (3) 利用特殊的行列式, 如范德蒙德 (Vandermonde) 行列式.
  (4) 提取公因式法, 加边法, 递归法, 分拆法, 拉普拉斯定理, 逐行相加减法, 滚动消去法.
- 矩阵可逆的充要条件: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.
- 方阵乘积的行列式: $\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$.
- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.