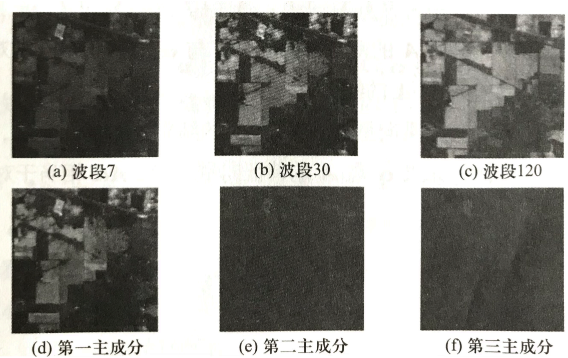
第 1 节 特征值与特征向量的概念与计算

安徽财经大学

统计与应用数学学院

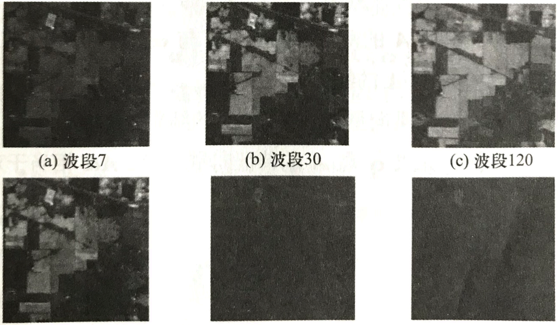
第三章提到的高光谱图像由搭载在不同空间平台上的成像光谱仪，以数十至数百个连续且细分的光谱波段对目标区域同时成像得到．其中每个波段对应一幅灰度图像，也称为高光谱图像的一个通道．在处理高光谱图像时，同时挖掘多个通道中的信息比单独处理每个通道更有效．通常，成像区域的一些特征可同时出现在多个通道中，这意味着高光谱图像中包含了大量冗余信息．



(a) 波段7　(b) 波段30　(c) 波段120

(d) 第一主成分　(e) 第二主成分　(f) 第三主成分

主成分分析方法可将原始多个通道的高光谱图像中的大部分信息用少数几幅彼此不相关的合成图像来表示. 比如, 图 (a), (b), (c) 分别表示高光谱图像中的三个光谱波段图像. 主成分分析方法将这三个波段的图像重新线性组合, 得到了三幅主成分图像, 如图 (d), (e), (f) 所示. 第一主成分图像 (d) 的方差占比率为 97.08%. 这意味着, 第一主成分图像包含了原始三个波段图像 97.08% 的信息. 如此, 信息得以浓缩和简化. 那么如何得到这些主成分图像呢? 这个问题的答案与本章内容密切相关.


(a) 波段7 (b) 波段30 (c) 波段120
(d) 第一主成分 (e) 第二主成分 (f) 第三主成分

特征值与特征向量的定义

在实际问题中，常常碰到这样的问题，即对于一个给定的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，是否存在非零的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 平行，即存在常数 λ，使得 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$ 成立．在数学上，这就是特征值与特征向量的问题．

定义 (4.1.1)

设 A 是 n 阶方阵，如果存在数 λ 和 n 维非零向量 α，使

$$A\alpha = \lambda\alpha, \tag{4.1}$$

则称 λ 为方阵 A 的一个特征值，α 为方阵 A 对应于特征值 λ 的一个特征向量．

特征值与特征向量的定义

在实际问题中，常常碰到这样的问题，即对于一个给定的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，是否存在非零的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 平行，即存在常数 λ，使得 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 成立. 在数学上，这就是特征值与特征向量的问题.

定义 (4.1.1)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}, \tag{4.1}$$

则称 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量.

例 (4.1.1)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$,

有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

由定义可知, 1 与 2 就是 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 分别对应于特征值 1 与 2 的特征向量; 而 $\boldsymbol{\beta}$ 则不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

例 (4.1.1)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$，

有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=1\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ -1\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

由定义可知，1 与 2 就是 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 分别对应于特征值 1 与 2 的特征向量；而 $\boldsymbol{\beta}$ 则不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

例 (4.1.1)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=1\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ -1\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

由定义可知, 1 与 2 就是 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 分别对应于特征值 1 与 2 的特征向量; 而 $\boldsymbol{\beta}$ 则不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

例 (4.1.1)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$,

有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=1\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ -1\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

由定义可知, 1 与 2 就是 A 的两个特征值, α_1 与 α_2 就是 A 分别对应于特征值 1 与 2 的特征向量; 而 β 则不是 A 的特征向量.

例 (4.1.1)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

有

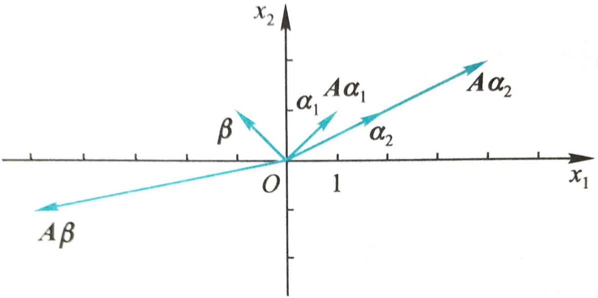
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=1\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由定义可知, 1 与 2 就是 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 分别对应于特征值 1 与 2 的特征向量; 而 $\boldsymbol{\beta}$ 则不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

从几何上看，矩阵 A 分别乘向量 α_1, α_2 与 β 的结果如下图所示，$A\alpha_2$ 相当于将向量 α_2 增大一倍. 这说明，如果 α 是 A 的特征向量，那么 $A\alpha$ 相当于对 α 作一次 "伸缩" 变换.



例 (4.1.2)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 0 或 1.

证明.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0})$. 于是

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{A\alpha})=\lambda^2\boldsymbol{\alpha},$$

所以

$$\left(\lambda^2-\lambda\right)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 所以 $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$, 即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$. □

例 (4.1.2)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 0 或 1.

证明.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$. 于是

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{A\alpha})=\lambda^2\boldsymbol{\alpha},$$

所以

$$\left(\lambda^2-\lambda\right)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$, 即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$. □

例 (4.1.2)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 0 或 1.

证明.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0})$. 于是

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\lambda^2\boldsymbol{\alpha},$$

所以

$$\left(\lambda^2-\lambda\right)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 所以 $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$, 即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$. □

例 (4.1.2)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 0 或 1.

证明.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0})$. 于是

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{A\alpha})=\lambda^2\boldsymbol{\alpha},$$

所以

$$\left(\lambda^2-\lambda\right)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 所以 $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$, 即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$. □

例 (4.1.2)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 0 或 1.

证明.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0})$. 于是

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{A\alpha})=\lambda^2\boldsymbol{\alpha},$$

所以

$$\left(\lambda^2-\lambda\right)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 所以 $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$, 即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$. $\square$

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量, 那么对任意的 $k \neq 0$

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha}) = k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = k(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda(k\boldsymbol{\alpha}),$$

所以, $k\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量, 且 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right) &= k_1\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_r\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_r\right) \\ &= k_1\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_r\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_r\right) \\ &= \lambda\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right). \end{aligned}$$

所以 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量, 那么对任意的 $k \neq 0$

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha}) = k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = k(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda(k\boldsymbol{\alpha}),$$

所以, $k\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量, 且 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right) &= k_1\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_r\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_r\right) \\ &= k_1\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_r\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_r\right) \\ &= \lambda\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right).\end{aligned}$$

所以 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量, 那么对任意的 $k \neq 0$

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha}) = k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = k(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda(k\boldsymbol{\alpha}),$$

所以, $k\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量, 且 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right) &= k_1\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_r\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_r\right) \\ &= k_1\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_r\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_r\right) \\ &= \lambda\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right). \end{aligned}$$

所以 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量, 那么对任意的 $k \neq 0$

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha}) = k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = k(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda(k\boldsymbol{\alpha}),$$

所以, $k\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.
设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量, 且 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right) &= k_1\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_r\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_r\right) \\
&= k_1\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_r\left(\lambda\boldsymbol{\alpha}_r\right) \\
&= \lambda\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right).
\end{aligned}$$

所以 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

设 V_λ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的所有特征向量以及零向量所组成的集合，即

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \lambda \in \mathbf{C}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{C}^n\}.$$

由以上分析可知 V_λ 对向量的加法和数乘封闭，故 V_λ 构成子空间. 我们称 V_λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间.

在例 1 中，$A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = 2\alpha_2$，不难证明 A 对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的所有特征向量都可以由 α_1 线性表出，对应于 $\lambda_2 = 2$ 的所有特征向量都可以由 α_2 线性表出.

从几何上看

设 V_λ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的所有特征向量以及零向量所组成的集合，即

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \lambda \in \mathbf{C}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{C}^n\}.$$

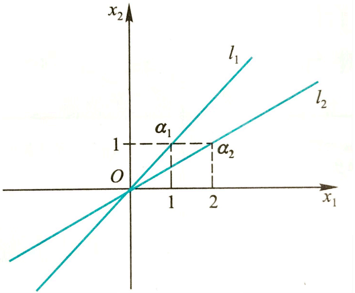
由以上分析可知 V_λ 对向量的加法和数乘封闭，故 V_λ 构成子空间．我们称 V_λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间．

在例 1 中，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$，不难证明 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的所有特征向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表出，对应于 $\lambda_2 = 2$ 的所有特征向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出．

从几何上看

从几何上看，V_{λ_1} 对应于过原点与点 $(1,1)$ 的直线 l_1，V_{λ_2} 对应于过原点与点 $(2,1)$ 的直线 l_2，即

$$V_{\lambda_1}=\{l_1\text{上的所有向量}\},\ V_{\lambda_2}=\{l_2\text{上的所有向量}\}.$$



下面讨论对于给定的方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 怎样求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量, 即 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0})$, $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. 于是, $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 即

$$\begin{cases} (\lambda-a_{11})\,x_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n=0, \\ -a_{21}x_1+(\lambda-a_{22})\,x_2-\cdots-a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\cdots+(\lambda-a_{nn})\,x_n=0 \end{cases}$$

的非零解. 因此, $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解空间就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间, 它的维数为

$$\dim V_\lambda=n-R(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}).$$

$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 V_λ 的基.

因为齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式等于零, 所以

$$\boxed{\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0.}$$

我们将方程 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程. 特征方程的根就是特征值, 故有时又将特征值称为特征根. 若 λ 是单根, 则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的单特征根; 若 λ 是 k 重根, 则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征根.

由以上分析可得求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量的计算步骤如下:

1° 求特征方程 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ 的全部相异根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k (k \leqslant n)$;

2° 分别求 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \boldsymbol{\alpha}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$, 则

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_{i1} + k_2 \boldsymbol{\alpha}_{i2} + \cdots + k_{r_i} \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$$

$(k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}$ 不全为零) 就是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_i 的全部特征向量.

因为齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式等于零，所以

$$\boxed{\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0.}$$

我们将方程 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**. 特征方程的根就是特征值，故有时又将特征值称为特征根. 若 λ 是单根，则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的单特征根；若 λ 是 k 重根，则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征根.

由以上分析可得求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量的计算步骤如下：

1° 求特征方程 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ 的全部相异根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k (k \leqslant n)$;

2° 分别求 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \boldsymbol{\alpha}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$，则

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_{i1} + k_2 \boldsymbol{\alpha}_{i2} + \cdots + k_{r_i} \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$$

$(k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}$ 不全为零) 就是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_i 的全部特征向量.

例 (4.1.3)

求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2\\-1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2.$

对于 $\lambda_1=1$, 齐次线性方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}-2 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $x_1-x_2=0$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$, 故对应于 $\lambda_1=1$ 的 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1\,(k_1\neq 0)$.

例 (4.1.3)

求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

对于 $\lambda_1=1$, 齐次线性方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $x_1-x_2=0$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$, 故对应于 $\lambda_1=1$ 的 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1\,(k_1\neq 0)$.

例 (4.1.3)

求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$.
对于 $\lambda_1=1$, 齐次线性方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $x_1-x_2=0$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$, 故对应于 $\lambda_1=1$ 的 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1\,(k_1\neq 0)$.

例 (4.1.3)

求方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

对于 $\lambda_2 = 2$, 齐次线性方程组 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $x_1 - 2x_2 = 0$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1)^{\mathrm{T}}$, 故对应于 $\lambda_2 = 2$ 的 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2\,(k_2 \neq 0)$.

例 (4.1.3)

求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

对于 $\lambda_2=2$, 齐次线性方程组 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $x_1-2x_2=0$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1)^{\mathrm{T}}$, 故对应于 $\lambda_2=2$ 的 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2\,(k_2\neq 0)$.

例 (4.1.4)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+6 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 \\ 2 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=-7$.

例 (4.1.4)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4 & -2\\ 2 & \lambda+6 & -4\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4\\ 2 & \lambda+6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=-7$.

例 (4.1.4)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+6 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 \\ 2 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=-7$.

例 (4.1.4)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+6 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 \\ 2 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=-7$.

例 (4.1.4)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+6 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 \\ 2 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=-7$.

例 (4.1.4)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+6 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 \\ 2 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=-7$.

例 (4.1.4)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+6 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 \\ 2 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$ (2 重), $\lambda_2=-7$.

例 (4.1.4)

求 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

对于 $\lambda_1 = 2$, 齐次线性方程组 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $x_1 = -2x_2 + 2x_3$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ $(k_1, k_2$ 不全为零$)$.

例 (4.1.4)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

对于 $\lambda_1=2$, 齐次线性方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $x_1=-2x_2+2x_3$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ $(k_1,k_2$ 不全为零$)$.

例 (4.1.4)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

对于 $\lambda_1=2$, 齐次线性方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $x_1=-2x_2+2x_3$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ (k_1,k_2 不全为零).

例 (4.1.4)

求 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

对于 $\lambda_2 = -7$, 齐次线性方程组 $(\lambda_2 I - A)X = 0$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{cases}$ 其基础解系为 $\alpha_3 = (1, 2, -2)^{\mathrm{T}}$, A 对应于 $\lambda_2 = -7$ 的全部特征向量为 $k_3\alpha_3\,(k_3 \neq 0)$.

例 (4.1.4)

求 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

对于 $\lambda_2=-7$, 齐次线性方程组 $(\lambda_2 I-A)X=0$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3,\\x_2=-x_3,\end{cases}$ 其基础解系为

$\alpha_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$, A 对应于 $\lambda_2=-7$ 的全部特征向量为 $k_3\alpha_3\ (k_3\neq 0)$.

例 (4.1.4)

求 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

对于 $\lambda_2 = -7$, 齐次线性方程组 $(\lambda_2 I - A) X = \mathbf{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应简化的齐次线性方程组为 $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{cases}$ 其基础解系为 $\alpha_3 = (1, 2, -2)^{\mathrm{T}}$, A 对应于 $\lambda_2 = -7$ 的全部特征向量为 $k_3 \alpha_3 \ (k_3 \neq 0)$.

例 (4.1.5)

求方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$ (2 重).

例 (4.1.5)

求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1\ (2\ 重\ ).$

解

对于 $\lambda_1 = 2$, 对应的齐次线性方程组 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 & = 0, \\ 4x_1 - x_2 & = 0, \\ -x_1 & = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量为 $k_1 \boldsymbol{\alpha}_1\ (k_1 \neq 0)$.

对于 $\lambda_2 = 1$, 相应的齐次线性方程组 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & & = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 & & = 0, \\ -x_1 & -x_3 & = 0, \end{cases}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量为 $k_2 \boldsymbol{\alpha}_2\ (k_2 \neq 0)$.

解

对于 $\lambda_1 = 2$, 对应的齐次线性方程组 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 &= 0, \\ -x_1 &= 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1\,(k_1 \neq 0)$.

对于 $\lambda_2 = 1$, 相应的齐次线性方程组 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 &= 0, \\ -x_1 - x_3 &= 0, \end{cases}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2\,(k_2 \neq 0)$.

在例 4 中, $\lambda_1 = 2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征根, $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_1 的线性无关的特征向量有两个, 即 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系由两个解向量组成. 在例 5 中, $\lambda_2 = 1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征根, 但 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2 = 1$ 的线性无关的特征向量却只有一个, 即 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系只由一个解向量组成.

设 n 阶矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

其中 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j), \sum_{i=1}^{r} k_i = n$, 则 k_i 称为特征值 λ_i 的代数重数, 而 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 的维数称为 λ_i 的几何重数.

可以证明: 特征值的几何重数不大于它的代数重数. 即如果 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k_i 重特征值, 则 A 对应于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数不大于 k_i, 也就是 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系所含解向量个数不大于 k_i.

在例 4 中，$\lambda_1 = 2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征根，$\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_1 的线性无关的特征向量有两个，即 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由两个解向量组成．在例 5 中，$\lambda_2 = 1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征根，但 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2 = 1$ 的线性无关的特征向量却只有一个，即 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系只由一个解向量组成．

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

其中 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j), \sum_{i=1}^{r} k_i = n$，则 k_i 称为特征值 λ_i 的代数重数，而 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 的维数称为 λ_i 的几何重数．

可以证明：特征值的几何重数不大于它的代数重数．即如果 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k_i 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数不大于 k_i，也就是 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量个数不大于 k_i．

在例 4 中，$\lambda_1=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征根，$\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_1 的线性无关的特征向量有两个，即 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由两个解向量组成．在例 5 中，$\lambda_2=1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征根，但 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量却只有一个，即 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只由一个解向量组成．

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_r},$$

其中 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j),\sum_{i=1}^{r}k_i=n$，则 k_i 称为特征值 λ_i 的代数重数，而 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 的维数称为 λ_i 的几何重数．

可以证明：特征值的几何重数不大于它的代数重数．即如果 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k_i 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数不大于 k_i，也就是 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量个数不大于 k_i．

例 (4.1.6)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$, $\lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$.

例 (4.1.6)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2,$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1+\mathrm{i}$, $\lambda_2=1-\mathrm{i}$.

解

对于 $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$, $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \mathrm{i}x_2,$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1\,(k_1 \neq 0)$.

对于 $\lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$, $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2\,(k_2 \neq 0)$.

解

对于 $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$, $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \mathrm{i}x_2,$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1\,(k_1 \neq 0)$.

对于 $\lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$, $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2\,(k_2 \neq 0)$.

我们将行列式 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，记为 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$，即

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}).$$

下面进一步讨论特征多项式 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的性质:

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix},$$

故 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 是 λ 的 n 次多项式

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_1\lambda+\alpha_0. \tag{4.3}$$

我们将行列式 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，记为 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$，即

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}).$$

下面进一步讨论特征多项式 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的性质:

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix},$$

故 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 是 λ 的 n 次多项式

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0. \tag{4.3}$$

利用行列式性质将 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 展开可得

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \\ &= \lambda^{n}-\left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n}\det \boldsymbol{A}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

又设 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的全部根 (即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值) 为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n) \\ &= \lambda^{n}-\left(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\right)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \end{aligned} \tag{4.5}$$

比较式 (4.3), (4.4), (4.5) 可得,

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= -\left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right)=-\left(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\right), \\ \alpha_0 &= (-1)^{n}\det \boldsymbol{A}=(-1)^{n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \end{aligned}$$

利用行列式性质将 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 展开可得

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\, \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det \boldsymbol{A}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

又设 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的全部根 (即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值) 为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\, \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \end{aligned} \tag{4.5}$$

比较式 (4.3), (4.4), (4.5) 可得,

$$\alpha_{n-1} = -(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n),$$

$$\alpha_0 = (-1)^n \det \boldsymbol{A} = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

利用行列式性质将 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 展开可得

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \\ &= \lambda^{n}-\left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right) \lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n} \det \boldsymbol{A}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

又设 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的全部根 (即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值) 为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \left(\lambda-\lambda_{1}\right)\left(\lambda-\lambda_{2}\right) \cdots\left(\lambda-\lambda_{n}\right) \\ &= \lambda^{n}-\left(\lambda_{1}+\lambda_{2}+\cdots+\lambda_{n}\right) \lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n} \lambda_{1} \lambda_{2} \cdots \lambda_{n}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

比较式 (4.3), (4.4), (4.5) 可得,

$$\begin{gathered} \alpha_{n-1}=-\left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right)=-\left(\lambda_{1}+\lambda_{2}+\cdots+\lambda_{n}\right), \\ \alpha_{0}=(-1)^{n} \det \boldsymbol{A}=(-1)^{n} \lambda_{1} \lambda_{2} \cdots \lambda_{n}. \end{gathered}$$

于是, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元及 $\det \boldsymbol{A}$ 之间有以下关系:

$$\boxed{\begin{gathered}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}),\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det \boldsymbol{A}.\end{gathered}}$$

因此

- 方阵的 n 个特征值之和等于方阵的主对角元之和;
- n 个特征值之积等于方阵的行列式;
- n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全不为零.

在多项式理论中可以证明: 整系数多项式的整数根一定是常数项的整数因子. 利用这个结论, 可以确定某些矩阵是否有整数特征值.

于是，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元及 $\det \boldsymbol{A}$ 之间有以下关系：

$$\boxed{\begin{gathered}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}),\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det \boldsymbol{A}.\end{gathered}}$$

因此

- 方阵的 n 个特征值之和等于方阵的主对角元之和；
- n 个特征值之积等于方阵的行列式；
- n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全不为零.

在多项式理论中可以证明：整系数多项式的整数根一定是常数项的整数因子. 利用这个结论，可以确定某些矩阵是否有整数特征值.

例 (4.1.7)

设 $\lambda_1 = 12$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & a & 4 \end{pmatrix}$ 的一个特征值，求常数 a 及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的其余特征值.

解 因为 $\lambda_1 = 12$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，所以，

$$\det(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & -a & 8 \end{vmatrix} = 9a + 36 = 0,$$

故 $a = -4$. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的其余特征值是 λ_2, λ_3，则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7 + 7 + 4 = 18, \tag{4.6}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det \boldsymbol{A} = 108, \tag{4.7}$$

将 $\lambda_1 = 12$ 代入式 (4.6), (4.7)，可得 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

例 (4.1.7)

设 $\lambda_1 = 12$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & a & 4 \end{pmatrix}$ 的一个特征值, 求常数 a 及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的其余特征值.

解 因为 $\lambda_1 = 12$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 所以,

$$\det(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & -a & 8 \end{vmatrix} = 9a + 36 = 0,$$

故 $a = -4$. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的其余特征值是 λ_2, λ_3, 则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7 + 7 + 4 = 18, \tag{4.6}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det \boldsymbol{A} = 108, \tag{4.7}$$

将 $\lambda_1 = 12$ 代入式 (4.6), (4.7), 可得 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

例 (4.1.7)

设 $\lambda_1 = 12$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & a & 4 \end{pmatrix}$ 的一个特征值, 求常数 a 及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的其余特征值.

解 因为 $\lambda_1 = 12$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 所以,

$$\det(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & -a & 8 \end{vmatrix} = 9a + 36 = 0,$$

故 $a = -4$. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的其余特征值是 λ_2, λ_3, 则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7 + 7 + 4 = 18, \tag{4.6}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det \boldsymbol{A} = 108, \tag{4.7}$$

将 $\lambda_1 = 12$ 代入式 (4.6), (4.7), 可得 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

矩阵的特征值与特征向量

- 特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是使得 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$ 成立的非零向量.
- 特征值 λ 是特征方程 $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ 的根.
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$.
- 特征方程 $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ 是关于 λ 的 n 次方程.
- n 次方程在复数域内有 n 个根 (包括重根), 所以 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值.
- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值的重数之和为 n.
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间 V_λ 就是齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的解空间. 且 $\dim V_\lambda = n - R(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.
- 特征值的几何重数小于等于代数重数.
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.
- $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det \boldsymbol{A}$.

小结 (I)

- 定义: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 如果存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, 则称 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量.
- 特征子空间: 设 V_λ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的所有特征向量以及零向量所组成的集合, 即

$$V_\lambda=\{\boldsymbol{\alpha}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\lambda\in\mathbf{C},\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C}^n\}.$$

  V_λ 对向量的加法和数乘封闭, 称 V_λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间.
- $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解空间就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间, 它的维数为 $\dim V_\lambda=n-R(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$. $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 V_λ 的基.
- 方程 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程. 特征方程的根就是特征值, 故有时又将特征值称为特征根.
- $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

小结 (II)

- 求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量的计算步骤如下:
  - 1° 求特征方程 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ 的全部相异根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k(k\leqslant n)$;
  - 2° 分别求 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$, 则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_{i1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i2}+\cdots+k_{r_i}\boldsymbol{\alpha}_{ir_i}(k_1,k_2,\cdots,k_{r_i}$ 不全为零) 就是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_i 的全部特征向量.
- 称特征值 λ_i 的重数为代数重数, 而 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 的维数称为 λ_i 的几何重数. 特征值的几何重数不大于它的代数重数.
- 方阵的 n 个特征值之和等于方阵的主对角元之和:
  $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$.
- n 个特征值之积等于方阵的行列式: $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}$.
- n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全不为零.

小结 (III)

矩阵	特征值	特征向量
$\boldsymbol{A}$	λ	$\boldsymbol{\alpha}$
$k\boldsymbol{A}$	$k\lambda$	$\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{A}^m$	λ^m	$\boldsymbol{\alpha}$
$f(\boldsymbol{A})$	$f(\lambda)$	$\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{A}^{-1}$	λ^{-1}	$\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{A}^*$	$\lvert\boldsymbol{A}\rvert\lambda^{-1}$	$\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	λ	不一定是 $\boldsymbol{\alpha}$

- $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^{-1}(\lambda\boldsymbol{\alpha})$. $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.
- $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|^{\mathrm{T}} = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.