第 4 章 线性方程组

目录:

4.1 线性方程组的初等变换

解线性方程组最常用的方法就是消元法. 其步骤是逐步消除变元的系数, 把原方程组化为等价的三角形方程组, 再用回代过程解此等价的方程组, 从而得出原方程组的解.

例 1: 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3= 3, \\ -2x_1+4x_2+5x_3=-7, \\ 4x_1+7x_2+7x_3= 1. \end{cases}$$

显示解答 收起解答

分析上述例子, 可以得出以下两个结论.

(1) 对方程施行了三种变换:

1° 交换两个方程的位置;

2° 用一个不等于 0 的数乘某个方程;

3° 将某个方程乘一个数加到另一个方程上.

这三种变换称为线性方程组的初等变换, 也称为同解变换.

由初等代数知识可知, 以下定理成立.

定理 1: 初等变换把一个线性方程组变为一个与它同解的线性方程组.

(2) 线性方程组有没有解以及有什么样的解, 完全取决于它的系数和常数项.

因此在讨论线性方程组时, 主要是研究它的系数和常数项.

设有线性方程组

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4-1}
$$

此为线性方程组的代数表示形式.

线性方程组也可以表示成矩阵形式. 令

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

则式 (4-1) 可以写成矩阵形式:

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{4-2}
$$

分别称 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为线性方程组 (4-1) 的系数矩阵、未知量矩阵和常数项矩阵. 同时称

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

为线性方程组 (4-1) 的增广矩阵.

线性方程组还可以表示成向量形式. 对式 (4-2) 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块, 有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n), \quad \boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

由分块矩阵的乘法, 线性方程组 (4-1) 可写成如卡向量形式:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{b},$$

即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零, 则称式 (4-1) 为非齐次线性方程组; 若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零, 则称式 (4-1) 为齐次线性方程组.

满足式 (4-1) 的一个 n 元有序数组称为 n 元线性方程组 (4-1) 的一个解, 一般用列向量形式 $\boldsymbol{\xi}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$ 表示, 因此也称 $\boldsymbol{\xi}$ 为方程组 (4-1) 的一个解向量.

当线性方程组有无穷多个解时, 其所有解的集合称为方程组的通解或一般解.

显然, 对方程组施行初等变换, 相当于对它的增广矩阵施行一个相应的初等 变换. 而化简线性方程组相当于用初等行变换化简它的增广矩阵. 这样, 不但讨论起来比较方便, 而且能够提供一种方法, 即利用一个线性方程组的增广矩阵求解这个线性方程组, 而不必每次都把未知量写出.

例 2: 解线性方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\ \ x_3=1, \\ \quad x_1+\frac{5}{3}x_2+3x_3=3, \\ 2x_1+\frac{4}{3}x_2+5x_3=2. \end{cases}$$

显示解答 收起解答

从例 2 可知, 用消元法解线性方程组的过程, 实质上就是对该方程组的增广矩阵作初等行变换将其化为行阶梯形矩阵的过程. 在解线性方程组时, 只写出方程组的增广矩阵的变换过程即可.

返回顶部

4.2 线性方程组有解的判别定理

上一节讨论了用消元法解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

这个方法实际应用时比较方便, 但是还有几个问题没有解决, 就是线性方程组 (4-1) 在什么时候无解? 在什么时候有解? 有解时, 又有多少个解? 本节将对这些问题予以解答.

首先, 设线性方程组 (4-1) 的增广矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换, 且不妨设 $a_{11}\neq 0$, 否则第一列总有某个元素不为零, 将该元素所在的行与第一行对调, 便可使第一行第一列的元素不为 0; 然后, 将第一行乘以 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 加到第 i 行上 $(i=2,3,\cdots,m)$, 可将 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix},$$

对这个矩阵的第二行到第 m 行、第二列到第 $n+1$ 列构成的子块再按以上步骤进行变换, 必要时可重新安排方程中未知量的次序, 则可得到如下行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \cdots & b'_{1r} & b'_{1,r+1} & \cdots & b'_{1n} & d'_1 \\ 0 & b'_{22} & \cdots & b'_{2r} & b'_{2,r+1} & \cdots & b'_{2n} & d'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b'_{rr} & b'_{r,r+1} & \cdots & b'_{rn} & d'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d'_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $b'_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$. 再进一步通过初等行变换, 可将上述矩阵化为下面的 行最简形矩阵:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{4-3}
$$

与矩阵 (4-3) 对应的线性方程组为

$$
\begin{cases}
x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\
x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\
0 = d_{r+1}, \\
0 = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = 0.
\end{cases} \tag{4-4}
$$

由定理 1 知, 方程组 (4-1) 与方程组 (4-4) 是同解方程组. 在方程组 (4-4) 中去掉 “ $0=0$ ” 形式的方程并不影响方程组的解, 因此, 可以看到, 方程组 (4-4) 是否有解就取决于 $d_{r+1}=0$ 是否成立. 这就给出了判别方程组 (4-1) 是否有解的一个方法: 用初等变换将方程组 (4-1) 变为方程组 (4-4), 则方程组 (4-1) 有解的充分必要条件为 $d_{r+1}=0$.

方程组有解可分两种情形加以考虑.

(1) 当 $r=n$ 时, 方程组 (4-4) 可写成

$$
\begin{cases}
x_1 = d_1, \\
x_2 = d_2, \\
\cdots\cdots\cdots \\
x_n = d_n,
\end{cases}
$$

此即方程组 (4-1) 的唯一解.

(2) 当 $r<n$ 时, 方程组 (4-4) 可写成

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases}$$

视 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 为 $n-r$ 个自由未知量, 若任给 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 一组值 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}$, 就唯一地确定出 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的值, 从而给出方程组 (4-1) 的一个解. 这表明方程组 (4-1) 有无穷多个解, 其通解的形式为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}t_1 - \cdots - c_{1n}t_{n-r}, \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}t_1 - \cdots - c_{2n}t_{n-r}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}t_1 - \cdots - c_{rn}t_{n-r}, \\ x_{r+1} = t_1, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = t_{n-r}. \end{cases}$$

总之, 解线性方程组的步骤是用初等行变换化方程组 (4-1) 的增广矩阵为阶 梯形矩阵, 根据 d_{r+1} 是否等于 0 判断原方程组是否有解. 如果 $d_{r+1}\neq 0$, 则有 $r(\boldsymbol{A})=r$, 而 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r+1$, 即 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$, 此时方程组 (4-1) 无解; 如果 $d_{r+1}=0$, 则 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=r$, 此时方程组 (4-1) 有解. 而当 $r=n$ 时, 方程组 (4-1) 有唯一解; 当 $r<n$ 时, 方程组 (4-1) 有无穷多个解. 由此可以得到如下定理.

定理 2:(线性方程组有解的判定定理) 线性方程组 (4-1) 有解的充分必要条件是系数矩阵与增广矩阵有相同的秩 r.
(1) 当 r 等于方程组所含未知量的个数 n 时, 方程组有唯一解;
(2) 当 $r<n$ 时, 方程组有无穷多个解.

例 3: 研究线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - 4x_3 + 5x_4 = -1. \end{cases}$$

的解的存在情况. 显示解答 收起解答

表 4–1 各批次的生产总成本

生产批次	产品 /kg				总成本 / 元
	I	II	III	IV	
1	200	100	100	50	2900
2	500	250	200	100	7050
3	100	40	40	20	1360
4	400	180	160	60	5500

例 4: 某厂在每批次投料生产中, 获得四种不同产量的产品, 同时测算出各批次的生产总成本, 把它们列表如表 4–1 所示. 试求每种产品的单位成本. 显示解答 收起解答

例 5: 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -21. \end{cases}$$

显示解答 收起解答

例 6: 问: a 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a, \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

有解? 并求其解. 显示解答 收起解答

下面考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4-5}$$

齐次线性方程组 (4-5) 的矩阵形式可以写成

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{4-6}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

我们常常希望知道, 一个齐次线性方程组有没有非零解. 由定理 2 可得到下面的定理.

定理 3: 齐次线性方程组 (4-5) 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) < n$.

显然, 若齐次线性方程组 (4-5) 有非零解, 则它一定有无穷多个解.

由定理 3 很容易得到下面的几个推论.

推论 1: 当方程的个数 m 小于未知量的个数 n 时, 齐次线性方程组 (4-5) 有非零解.

推论 2: 齐次线性方程组 (4-5) 只有零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) = n$.

推论 3: 当 $m = n$ 时, 齐次线性方程组 (4-5) 只有零解 (有非零解) 的充分必要条件是系数行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ ($|\boldsymbol{A}| = 0$).

例 7: 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

显示解答 收起解答

返回顶部

4.3 线性方程组与向量组的关系

第 3 章中介绍了向量组及其相关知识, 下面运用线性方程组讨论向量组的线性组合、线性相关性、线性表示以及等价.

由本章第 1 节中线性方程组的向量表示形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b},$$
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

可知, m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 是否可由 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示与非齐次线性方程组 (4-1) 是否有解等价; 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是否线性相关与齐次线性方程组 (4-1) 是否有非零解等价.

记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.

推论 4: (1) m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一线性表示的充分必要条件是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解, 即 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = n$.
(2) m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示, 且表示法不唯一的充分必要条件是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多个解, 即 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) < n$.
(3) m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的

充分必要条件是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解, 即 $r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

推论 5: (1) m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 即 $r(\boldsymbol{A})<n$.
(2) m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有唯一的零解, 即 $r(\boldsymbol{A})=n$.

设向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$, 由第 3 章可知, 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示, 则存在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 使 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 即矩阵方程

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$$

有解.

记

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

结合向量组和矩阵的秩的性质可得下面的推论.

推论 6: (1) 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 能由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.
(2) 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

例 8: 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_{3\times3}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 求 t. 显示解答 收起解答

例 9: 设 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad m<n.$$

令 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,m)$. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 试判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

对该问题, 读者既可以把它作为练习题来尝试解答, 也可以把它作为例子来学习 (扫描二维码见详细解答过程).

返回顶部

4.4 线性方程组解的结构

本章第 2 节给出了线性方程组有解的判别定理, 下面用向量组的线性相关性知识研究线性方程组解的结构.

4.4.1 齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases}$$

的矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

齐次线性方程组的解具有下面的性质.

性质 1: 若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是齐次线性方程组 (4-6) 的解, 则 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解. 显示证明 收起证明

性质 2: 若 $\boldsymbol{\xi}$ 是齐次线性方程组 (4-6) 的解, k 为任意实数, 则 $k\boldsymbol{\xi}$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解. 显示证明 收起证明

推论 7: 若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 是齐次线性方程组 (4-6) 的 r 个解, $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 为任意实数, 则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\xi}_r$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解.

这说明, 齐次线性方程组的解的线性组合仍是该方程组的解.

定义 1: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是齐次线性方程组 (4-5) 的 r 个解向量, 如果满足条件:
(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;
(2) 齐次线性方程组 (4-5) 的任意一个解向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,
则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 称为齐次线性方程组 (4-5) 的基础解系.

易见, 基础解系可看成解向量组的一个极大线性无关组. 显然, 齐次线性方程组的基础解系不是唯一的.

定理 4: 齐次线性方程组 (4-5) 若有非零解, 则它一定有基础解系, 且基础解系所含解向量的个数等于 $n-r$, 其中 r 是系数矩阵的秩.
显示证明 收起证明

定理 4 实际上指出了求齐次线性方程组的基础解系的一种方法.

此外, 由定理 4 还可以知道, 若 $r(\boldsymbol{A})=r<n$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的任何 $n-r$ 个线性无关的解向量都可以作为它的一个基础解系.

推论 8: (齐次线性方程组解的结构定理) 若齐次线性方程组 (4-5) 有非零解, 则它的通解就是基础解系的线性组合.

例 10: 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解. 显示解答 收起解答

- 利用SageMath在线代码模块求解例 10

显示代码 收起代码

- 利用SageMath在线代码模块求例 10 中齐次线性方程组的通解

```
#教材108页例10
from sage.misc.html import HtmlFragment

def HSLE_as_latex(A, variables):
    nvars = A.ncols()
    pretty_print(HtmlFragment(
    r'$$\left\{\begin{array}{%s}'%('r'*(nvars+1))+
    r'\\'.join('%s=&0'%(
        ' & '.join((r'%s%s\cdot %s'%('+' if c>0 else
```

运行

例 11: λ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解? 并求其通解. 显示解答 收起解答

例 12: 设 $\boldsymbol{B}$ 是一个三阶非零矩阵, 它的每一列都是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解, 求 λ 的值和 $|\boldsymbol{B}|$. 显示解答 收起解答

4.4.2 非齐次线性方程组解的结构

下面讨论非齐次线性方程组解的结构.

非齐次线性方程组

$$(4\text{-}9)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

的矩阵形式可以表示为

$$(4\text{-}10)\qquad \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix}.$$

取 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 得到齐次线性方程组

$$(4\text{-}11)\qquad \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},$$

称式 (4-11) 为非齐次线性方程组 (4-10) 的导出方程组, 简称导出组.

非齐次线性方程组 (4-10) 的解与它的导出组 (4-11) 的解之间有下列性质.

性质 3: 如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 (4-10) 的一个解, $\boldsymbol{\xi}$ 是其导出组的一个解, 则 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 (4-10) 的一个解.

显示证明 收起证明

性质 4: 如果 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 (4-10) 的任意两个解, 则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是其导出组的解. 显示证明 收起证明

定理 5: (非齐次线性方程组解的结构定理) 如果非齐次线性方程组 (4-9) 有解, 则其通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi},$$

其中 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 (4-9) 的一个特解, 而 $\boldsymbol{\xi}$ 是其导出组的通解. 显示证明 收起证明

由定理 5 可知, 如果非齐次线性方程组有解, 则只需求出它的一个特解 $\boldsymbol{\eta}^*$, 并求出其导出组的一个基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$, 则其全部解可以表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

一般地, 求非齐次线性方程组 (4-9) 的一个特解与求它的导出组的通解可同时进行.

例 13: 试求

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +3x_2 & -\ \ x_3 & +\ \ 2x_4 & +\ \ 4x_5 & =3, \\ 2x_1 & -\ \ x_2 & +8x_3 & +\ \ 7x_4 & +\ \ 2x_5 & =9, \\ 4x_1 & +5x_2 & +6x_3 & +11x_4 & +10x_5 & =15 \end{array}\right.$$

的全部解. 显示解答 收起解答

- 利用SageMath在线代码模块求解例 13

显示代码 收起代码

- 利用SageMath在线代码模块求例 13 中非齐次线性方程组的通解

```
#教材112页例13（系数为分数的先转化为整数）
from sage.misc.html import HtmlFragment

def SLE_as_latex(A, b, variables):
    nvars = A.ncols()
    pretty_print(HtmlFragment(
    r'$$\left\{\begin{array}{%s}'%('r'*(nvars+1))+
    r'\\'.join('%s=&%s'%(
        (' & '.join((r'%s%s\cdot %s'%('+' if c>0 els
```

运行

注意: 在求方程组的特解与它的导出组的基础解系时, 一定要小心常数列 (项) 的处理, 最好把特解与基础解系中的解分别代入两个方程组进行验证.

例 14: 设线性方程组

$$\begin{cases} px_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + tx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2tx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

试就 p, t 讨论方程组的解的情况, 若有解, 则求出其解. 显示解答 收起解答

例 15: 设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 已知它的三个解向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$, 其中

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求该方程组的通解. 显示解答 收起解答

返回顶部

习题 4 (A) 类

1. 用消元法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 \phantom{{}+2x_3} + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 8; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

2. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$(1)\left\{\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3&=0,\\ x_1+5x_2+\ \ x_3&=0,\\ 3x_1+5x_2+8x_3&=0;\end{aligned}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned} x_1-\ \ x_2+5x_3-\ \ x_4&=0,\\ x_1+\ \ x_2-2x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1-\ \ x_2+8x_3+\ \ x_4&=0,\\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4&=0;\end{aligned}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{aligned} x_1+\ \ x_2+2x_3+2x_4+7x_5&=0,\\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4\qquad\quad&=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3+8x_4\qquad\quad&=0;\end{aligned}\right.$$

$$(4)\left\{\begin{aligned} x_1+2x_2-2x_3+2x_4-\ \ x_5&=0,\\ x_1+2x_2-\ \ x_3+3x_4-2x_5&=0,\\ 2x_1+4x_2-7x_3+\ \ x_4+\ \ x_5&=0.\end{aligned}\right.$$

3. 解下列非齐次线性方程组:

$$(1)\left\{\begin{aligned} x_1+\ \ x_2+2x_3&=1,\\ 2x_1-\ \ x_2+2x_3&=4,\\ x_1-2x_2\qquad\quad&=3,\\ 4x_1+\ \ x_2+4x_3&=2;\end{aligned}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned} 2x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+\ \ x_4&=1,\\ 4x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4&=2,\\ 2x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4&=1;\end{aligned}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4&=\ \ 1,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4&=-1,\\ x_1-2x_2+x_3+x_4&=\ \ 5;\end{aligned}\right.$$

$$(4)\left\{\begin{aligned} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5&=\ \ 7,\\ 3x_1+2x_2+\ \ x_3+\ \ x_4-3x_5&=-2,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5&=\ \ 23,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-\ \ x_5&=\ \ 12.\end{aligned}\right.$$

4. 某工厂有三个车间,各车间相互提供产品 (或劳务), 今年各车间出厂产量及对其他车间的消耗如表 4-2 所示.

表 4-2 各车间出厂产量及对其他车间的消耗

<table>
<tr><th rowspan="2">车间</th><th colspan="3">车间</th><th rowspan="2">出厂产量
/ 万元</th><th rowspan="2">总产量
/ 万元</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0.1</td><td>0.2</td><td>0.45</td><td>22</td><td>x_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.3</td><td>0</td><td>x_2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.5</td><td>0</td><td>0.12</td><td>55.6</td><td>x_3</td></tr>
</table>

表中第一列消耗系数 $0.1, 0.2, 0.5$ 表示 1 车间生产 1 万元的产品需分别消耗 $1, 2, 3$ 车间 0.1 万元、 0.2 万元、 0.5 万元的产品; 第二、三列类似, 求今年各车间的总产量.

5. λ 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

(1) 有唯一解? (2) 无解? (3) 有无穷多个解? 并求其解.

6. 当 λ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y - z = 0, \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

才可能有非零解? 并求其解.

7. 当 a, b 取何值时, 下列线性方程组无解、有唯一解或无穷多个解? 在有解时, 求出其解:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = a, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + bx_4 = -6; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1. \end{cases}$$

8. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 求一秩为 2 的三阶方阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$.

9. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 且 $r(\boldsymbol{A})=1$ 及

$$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

10. 求出一个齐次线性方程组, 使它的基础解系由下列向量组成:

(1) $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\5\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

11. 证明: 线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1,\\x_2-x_3=a_2,\\x_3-x_4=a_3,\\x_4-x_5=a_4,\\x_5-x_1=a_5\end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^5 a_i=0$.

12. 设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系. 证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关;

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x-3y+z=2,\\2x+y-z=-1,\\7x-2z=-1\end{cases}$$

的解向量, 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

返回顶部

习题 4 (B) 类

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}$ 的解向量, 若 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-k \boldsymbol{\alpha}_3$ 是其导出组 $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$ 的解向量, 则 $k=(\quad)$.

   A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

   显示答案 收起答案

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$ 的两个解向量, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}$ 的两个解向量, 则(　　).

   A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}$ 的解
   B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$ 是 $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$ 的解
   C. $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$ 的解
   D. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1$ 是 $\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}$ 的解

   显示答案 收起答案

3. 对于同一矩阵 $\boldsymbol{A}$, 关于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0})$ 和齐次线性方程组 $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$, 下列说法中正确的是(　　).

   A. $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$ 无非零解时, $\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}$ 无解
   B. $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$ 有无穷多个解时, $\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解
   C. $\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}$ 无解时, $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$ 无非零解
   D. $\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解时, $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$ 只有零解

   显示答案 收起答案

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 且 $r(\boldsymbol{A})=n-1, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A x}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解, 则 $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$ 的通解是(　　).

   A. $k \boldsymbol{\alpha}_1$
   B. $k \boldsymbol{\alpha}_2$
   C. $k\left(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\right)$
   D. $k\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right)$

   显示答案 收起答案

5. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\right), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示, 则(　　).

   A. $\boldsymbol{A x}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B x}=\mathbf{0}$ 的解
   B. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解

C. $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解
D. $\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解

显示答案 收起答案

6. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$的伴随矩阵, 则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为 (　　).
A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数

显示答案 收起答案

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 则 $t=$ ________.

显示答案 收起答案

8. 若四元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的同解方程组是 $\begin{cases}x_1=-3x_3,\\ x_2=0,\end{cases}$ 则 $r(\boldsymbol{A})=$ ________, 自由未知量的个数为________, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系有________个解向量.

显示答案 收起答案

9. 设 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一组解向量, 如果 $c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是该方程组的一个解向量, 则 $c_1+c_2+\cdots+c_s=$ ________.

显示答案 收起答案

10. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1), \boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$, $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$, 则:
(1) a, b 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示?
(2) a, b 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 唯一地线性表示? 并写出该表示式.
(3) a, b 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示, 且表示不唯一? 并写出表示式.

11. 设有下列线性方程组 (I) 和 (II):

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - \ x_4 = \ \ 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \qquad\quad = \ \ 3; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - \ x_4 = -5, \\ \qquad nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2x_4 = 1 - t. \end{cases}$$

(1) 求方程组 (I) 的通解;

(2) 当方程组 (II) 中的参数 m, n, t 为何值时, (I) 与 (II) 同解?

12. 设四元齐次线性方程组 (I) 为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$ 又已知某齐次线性方程组 (II) 的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求齐次线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解; 若没有, 则说明理由.

返回顶部