第 2 节 高斯消元法与矩阵的初等变换

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

例 (1.2.1)

解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

解

将方程组中的第一个与第三个方程交换位置，得方程组

$$\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 3. \end{cases}$$

将方程组的第一个方程的 -1 倍加到第二个方程，然后将第一个方程的 -3 倍加到第三个方程，得方程组

例 (1.2.1)

解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

解

将方程组中的第一个与第三个方程交换位置，得方程组

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 3. \end{array}\right.$$

将方程组的第一个方程的 -1 倍加到第二个方程，然后将第一个方程的 -3 倍加到第三个方程，得方程组

解

将方程组的第一个方程的 -1 倍加到第二个方程，然后将第一个方程的 -3 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_2 + 8x_3 = -3. \end{cases}$$

再将方程组中第二个方程的 -5 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 + 3x_3 = -1, \\ -7x_3 = 2. \end{cases}$$

解

将方程组的第一个方程的 -1 倍加到第二个方程，然后将第一个方程的 -3 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_2 + 8x_3 = -3. \end{cases}$$

再将方程组中第二个方程的 -5 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 + 3x_3 = -1, \\ -7x_3 = 2. \end{cases}$$

解

最后将方程组的第三个方程乘 $-\dfrac{1}{7}$, 得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ \qquad x_2 + 3x_3 = -1, \\ \qquad\qquad x_3 = -\dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

这就是高斯消元过程．于是得方程组的惟一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{7}, \\ x_2 = -\dfrac{1}{7}, \\ x_3 = -\dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

解

最后将方程组的第三个方程乘 $-\frac{1}{7}$, 得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ \qquad\quad x_2 + 3x_3 = -1, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = -\dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

这就是高斯消元过程. 于是得方程组的惟一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{7}, \\ x_2 = -\dfrac{1}{7}, \\ x_3 = -\dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

解

最后将方程组的第三个方程乘 $-\frac{1}{7}$，得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ \qquad x_2 + 3x_3 = -1, \\ \qquad\qquad x_3 = -\dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

这就是高斯消元过程. 于是得方程组的惟一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{7}, \\ x_2 = -\dfrac{1}{7}, \\ x_3 = -\dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

例 (1.2.2)

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 14x_3 = 8, \\ -x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

解

将第一个方程的 -2 倍加到第二个方程，第一个方程的 -3 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ -x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_2 + 2x_3 = 14, \\ -x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

例 (1.2.2)

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = & -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = & 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 14x_3 = & 8, \\ -x_2 + x_3 = & 7. \end{cases}$$

解

将第一个方程的 -2 倍加到第二个方程，第一个方程的 -3 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = & -2, \\ -x_2 + x_3 = & 7, \\ -2x_2 + 2x_3 = & 14, \\ -x_2 + x_3 = & 7. \end{cases}$$

解

将第一个方程的 -2 倍加到第二个方程，第一个方程的 -3 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3 = & -2, \\ -x_2+x_3 = & 7, \\ -2x_2+2x_3 = & 14, \\ -x_2+x_3 = & 7. \end{cases}$$

先将第二个方程乘 -1，再将第二个方程的 2 倍加到第三个方程，最后将第二个方程加到第四个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3 = & -2, \\ x_2-x_3 = & -7, \\ 0 = & 0, \\ 0 = & 0. \end{cases}$$

解

将第一个方程的 -2 倍加到第二个方程，第一个方程的 -3 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ -x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_2 + 2x_3 = 14, \\ -x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

先将第二个方程乘 -1，再将第二个方程的 2 倍加到第三个方程，最后将第二个方程加到第四个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ x_2 - x_3 = -7, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

解

即
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$$

为求方程组的解，将第二个方程改写为 $x_2 = x_3 - 7$，再将它代入第一个方程，得 $x_1 = -7x_3 + 19$. 于是得

$$\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 19, \\ x_2 = x_3 - 7, \end{cases}$$

其中 x_3 可以任意取值. 我们称 x_3 为自由未知量. 因为 x_3 可以任意取值，所以方程组有无穷多个解.

解

即

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$$

为求方程组的解，将第二个方程改写为 $x_2 = x_3 - 7$，再将它代入第一个方程，得 $x_1 = -7x_3 + 19$. 于是得

$$\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 19, \\ x_2 = \quad\ \ x_3 - 7, \end{cases}$$

其中 x_3 可以任意取值. 我们称 x_3 为自由未知量. 因为 x_3 可以任意取值，所以方程组有无穷多个解.

例 (1.2.3)

解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8. \end{cases}$$

解

将方程组的第一个方程的 -3 倍加到第二个方程，将第一个方程的 -2 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \quad - x_4 + 2x_5 = 2, \\ \qquad 5x_2 - 4x_3 \qquad\quad - 7x_5 = 0, \\ \qquad 5x_2 - 4x_3 \qquad\quad - 7x_5 = 4. \end{cases}$$

再将方程组的第二个方程的 -1 倍加到第三个方程，得方程组

例 (1.2.3)

解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8. \end{cases}$

解

将方程组的第一个方程的 -3 倍加到第二个方程, 将第一个方程的 -2 倍加到第三个方程, 得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ \quad 5x_2 - 4x_3 \qquad -7x_5 = 0, \\ \quad 5x_2 - 4x_3 \qquad -7x_5 = 4. \end{cases}$$

再将方程组的第二个方程的 -1 倍加到第三个方程, 得方程组

解

将方程组的第一个方程的 -3 倍加到第二个方程，将第一个方程的 -2 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ \quad 5x_2 - 4x_3 \qquad - 7x_5 = 0, \\ \quad 5x_2 - 4x_3 \qquad - 7x_5 = 4. \end{cases}$$

再将方程组的第二个方程的 -1 倍加到第三个方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ \quad 5x_2 - 4x_3 \qquad - 7x_5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0x_5 = 4. \end{cases}$$

因为方程组的第三个方程无解，所以所给方程组无解.

前面三个例子在解方程组的过程中，我们总要先通过一些变换，将方程组化为容易求解的同解方程组，这些变换可以归纳为以下三种变换：

1° 交换两个方程的位置;
2° 用一个非零数乘某一个方程;
3° 把一个方程的适当倍数加到另一个方程上去.

为了后面叙述方便，我们称这三种变换为线性方程组的初等变换.
高斯消元法的过程就是反复施行初等变换的过程，且总是将方程组变成同解方程组.

矩阵的初等变换

我们比照线性方程组的初等变换引入矩阵的初等变换的概念.

定义 (1.2.1)

矩阵的行 (列) 初等变换指对矩阵施以下列三种变换:

1°　交换两行 (列) 的位置;

2°　用一非零数乘某一行 (列) 的所有元;

3°　把矩阵的某一行 (列) 的适当倍数加到另一行 (列) 上去.

现在解线性方程组可用对增广矩阵施以行初等变换来代替, 这样在书写上更方便.

为方便计算, 用 r_i 表示矩阵的第 i 行, 交换 i,j 两行, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$; 数 k 乘第 i 行, 记为 kr_i; 数 k 乘第 i 行加到第 j 行, 记为 $kr_i + r_j$.

下面我们对前面三个例子用矩阵的行初等变换来求解.

矩阵的初等变换

我们比照线性方程组的初等变换引入矩阵的初等变换的概念.

定义 (1.2.1)

矩阵的行 (列) 初等变换指对矩阵施以下列三种变换:

1° 交换两行 (列) 的位置;

2° 用一非零数乘某一行 (列) 的所有元;

3° 把矩阵的某一行 (列) 的适当倍数加到另一行 (列) 上去.

现在解线性方程组可用对增广矩阵施以行初等变换来代替, 这样在书写上更方便.

为方便计算, 用 r_i 表示矩阵的第 i 行, 交换 i, j 两行, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$; 数 k 乘第 i 行, 记为 kr_i; 数 k 乘第 i 行加到第 j 行, 记为 $kr_i + r_j$.

下面我们对前面三个例子用矩阵的行初等变换来求解.

先解例 1 的方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

对增广矩阵施以行初等变换:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_1+r_3]{-r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-5r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[-3r_3+r_2]{r_3+r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

先解例 1 的方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

对增广矩阵施以行初等变换:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_1+r_3]{-r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-5r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[-3r_3+r_2]{r_3+r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

先解例 1 的方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

对增广矩阵施以行初等变换:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_1+r_3]{-r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-5r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[-3r_3+r_2]{r_3+r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[-3r_3+r_2]{r_3+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right).$$

于是得原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{10}{7}, \\ x_2 = -\frac{1}{7}, \\ x_3 = -\frac{2}{7}. \end{cases}$

注意，最后两步初等变换我们使用了高斯消元法的改进方法高斯 - 若当消元法，即在行阶梯形矩阵基础上进一步化为简化行阶梯形矩阵.

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_3}\left(\begin{array}{ccc:c}1&-2&-1&2\\0&1&3&-1\\0&0&1&-\frac{2}{7}\end{array}\right)\xrightarrow[-3r_3+r_2]{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&-2&0&\frac{12}{7}\\0&1&0&-\frac{1}{7}\\0&0&1&-\frac{2}{7}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&\frac{10}{7}\\0&1&0&-\frac{1}{7}\\0&0&1&-\frac{2}{7}\end{array}\right).$$

于是得原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=\frac{10}{7},\\x_2=-\frac{1}{7},\\x_3=-\frac{2}{7}.\end{cases}$

注意，最后两步初等变换我们使用了高斯消元法的改进方法高斯 - 若尔当消元法，即在行阶梯形矩阵基础上进一步化为简化行阶梯形矩阵.

- 若一个矩阵每个非零行的非零首元都出现在上一行非零首元的右边，同时没有一个非零行出现在零行之下，则称这种矩阵为行阶梯形矩阵.
- 若行阶梯形矩阵的每一个非零行的非零首元都是 1，且非零首元所在列的其余元都为 0，则称这种矩阵为简化行阶梯形矩阵.
- 例如下面两个矩阵都是行阶梯形矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&2\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3&0&-1\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

且 A 为简化行阶梯形矩阵，而 B 不是简化行阶梯形矩阵.

- 显然，用有限次行初等变换可以把任何矩阵化为一个简化行阶梯形矩阵，以后还会知道，所得到的简化行阶梯形矩阵是惟一的．于是，这就为用行初等变换将增广矩阵化简的过程提供了一个明确的目标.

- 若一个矩阵每个非零行的非零首元都出现在上一行非零首元的右边，同时没有一个非零行出现在零行之下，则称这种矩阵为行阶梯形矩阵.
- 若行阶梯形矩阵的每一个非零行的非零首元都是 1，且非零首元所在列的其余元都为 0，则称这种矩阵为简化行阶梯形矩阵.
- 例如下面两个矩阵都是行阶梯形矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&2\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3&0&-1\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

  且 A 为简化行阶梯形矩阵，而 B 不是简化行阶梯形矩阵.
- 显然，用有限次行初等变换可以把任何矩阵化为一个简化行阶梯形矩阵，以后还会知道，所得到的简化行阶梯形矩阵是惟一的. 于是，这就为用行初等变换将增广矩阵化简的过程提供了一个明确的目标.

- 若一个矩阵每个非零行的非零首元都出现在上一行非零首元的右边，同时没有一个非零行出现在零行之下，则称这种矩阵为行阶梯形矩阵.
- 若行阶梯形矩阵的每一个非零行的非零首元都是 1，且非零首元所在列的其余元都为 0，则称这种矩阵为简化行阶梯形矩阵.
- 例如下面两个矩阵都是行阶梯形矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}$ 为简化行阶梯形矩阵，而 $\boldsymbol{B}$ 不是简化行阶梯形矩阵.

- 显然，用有限次行初等变换可以把任何矩阵化为一个简化行阶梯形矩阵，以后还会知道，所得到的简化行阶梯形矩阵是惟一的. 于是，这就为用行初等变换将增广矩阵化简的过程提供了一个明确的目标.

- 若一个矩阵每个非零行的非零首元都出现在上一行非零首元的右边，同时没有一个非零行出现在零行之下，则称这种矩阵为行阶梯形矩阵.
- 若行阶梯形矩阵的每一个非零行的非零首元都是 1，且非零首元所在列的其余元都为 0，则称这种矩阵为简化行阶梯形矩阵.
- 例如下面两个矩阵都是行阶梯形矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}$ 为简化行阶梯形矩阵，而 $\boldsymbol{B}$ 不是简化行阶梯形矩阵.

- 显然，用有限次行初等变换可以把任何矩阵化为一个简化行阶梯形矩阵，以后还会知道，所得到的简化行阶梯形矩阵是惟一的．于是，这就为用行初等变换将增广矩阵化简的过程提供了一个明确的目标.

再解例 2 的方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=-2, \\ 2x_1+5x_2+9x_3=3, \\ 3x_1+7x_2+14x_3=8, \\ -x_2+x_3=7. \end{cases}$

对增广矩阵施以行初等变换:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \\ 3 & 7 & 14 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2+r_4]{2r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 7 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

再解例 2 的方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 14x_3 = 8, \\ -x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

对增广矩阵施以行初等变换:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \\ 3 & 7 & 14 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2+r_4]{2r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 7 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

与矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 = 19, \\ x_2 - x_3 = -7, \end{cases}$$

令 $x_3 = k$ (k 为任意数), 则方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = & -7k + 19, \\ x_2 = & k - 7, \\ x_3 = & k. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 7 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

与矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 = 19, \\ x_2 - x_3 = -7, \end{cases}$$

令 $x_3 = k$ (k 为任意数), 则方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = & -7k + 19, \\ x_2 = & k - 7, \\ x_3 = & k. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 7 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

与矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 = 19, \\ x_2 - x_3 = -7, \end{cases}$$

令 $x_3 = k$ (k 为任意数), 则方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = & -7k + 19, \\ x_2 = & k - 7, \\ x_3 = & k. \end{cases}$$

最后解例 3 的方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8. \end{cases}$

对增广矩阵施以行初等变换:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[-2r_1+r_3]{-3r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

与矩阵对应的方程组为 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 5x_2 - 4x_3 - 7x_5 = 0, \\ 0x_5 = 4, \end{cases}$

由第三个方程知方程组无解.

最后解例 3 的方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8. \end{cases}$

对增广矩阵施以行初等变换:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[-2r_1+r_3]{-3r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

与矩阵对应的方程组为 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 5x_2 - 4x_3 - 7x_5 = 0, \\ 0x_5 = 4, \end{cases}$

由第三个方程知方程组无解.

从上面的三个例子可见，对于一般的线性方程组 $AX = b$，通过消元步骤，即对增广矩阵作三种行初等变换，可将其化为简化行阶梯形矩阵．为了便于作一般的讨论，不妨假设 $\overline{A} = (A, b)$ 化为如下的简化阶梯形矩阵：

$$\overline{A} = (A, b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc:c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right), \quad (1.1)$$

其中 $c_{ii} = 1 (i = 1, 2, \cdots, r)$.

与这个矩阵对应的非齐次线性方程组与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 是同解方程组. 由矩阵易见, 方程组有解的充要条件是 $d_{r+1}=0$. 这是因为当 $d_{r+1}\neq 0$ 时, 式 (1.1) 中第 $r+1$ 行对应的方程 $0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=d_{r+1}$ 是无解的. 当 $d_{r+1}=0$ 时, 即在有解的情况下, 又分两种情况:

(1) 当 $r=n$ 时, 有惟一解

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad = d_1, \\ \quad x_2 \qquad\qquad = d_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\quad x_n = d_n; \end{cases}$$

(2) 当 $r<n$ 时, 有无穷多个解, 求解时, 把矩阵中每行第一个非零元 $c_{ii}(i=1,2,\cdots,r)$ 所在列对应的未知量 (这里是 $x_1,x_2,\cdots,x_r$) 取为基本未知量, 其余未知量 (这里是 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$) 取为自由未知量, 然后将 $n-r$ 个自由未知量依次取任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$, 即可解得 $x_1,x_2,\cdots,x_r$, 从而得到方程组的全部解.

将上述结果总结为如下定理:

与这个矩阵对应的非齐次线性方程组与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 是同解方程组. 由矩阵易见, 方程组有解的充要条件是 $d_{r+1}=0$. 这是因为当 $d_{r+1}\neq 0$ 时, 式 (1.1) 中第 $r+1$ 行对应的方程 $0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=d_{r+1}$ 是无解的.
当 $d_{r+1}=0$ 时, 即在有解的情况下, 又分两种情况:
(1) 当 $r=n$ 时, 有惟一解

$$\begin{cases} x_1 & & & = d_1, \\ & x_2 & & = d_2, \\ & & \cdots\cdots\cdots & \\ & & & x_n = d_n; \end{cases}$$

(2) 当 $r<n$ 时, 有无穷多个解, 求解时, 把矩阵中每行第一个非零元 $c_{ii}(i=1,2,\cdots,r)$ 所在列对应的未知量（这里是 $x_1,x_2,\cdots,x_r$）取为基本未知量, 其余未知量（这里是 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$）取为自由未知量, 然后将 $n-r$ 个自由未知量依次取任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$, 即可解得 $x_1,x_2,\cdots,x_r$, 从而得到方程组的全部解.
将上述结果总结为如下定理:

与这个矩阵对应的非齐次线性方程组与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 是同解方程组. 由矩阵易见, 方程组有解的充要条件是 $d_{r+1}=0$. 这是因为当 $d_{r+1}\neq 0$ 时, 式 (1.1) 中第 $r+1$ 行对应的方程 $0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=d_{r+1}$ 是无解的. 当 $d_{r+1}=0$ 时, 即在有解的情况下, 又分两种情况:

(1) 当 $r=n$ 时, 有惟一解

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad\quad = d_1, \\ \quad x_2 \qquad\qquad\quad = d_2, \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdot \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_n = d_n; \end{cases}$$

(2) 当 $r<n$ 时, 有无穷多个解, 求解时, 把矩阵中每行第一个非零元 $c_{ii}(i=1,2,\cdots,r)$ 所在列对应的未知量 (这里是 $x_1,x_2,\cdots,x_r$) 取为基本未知量, 其余未知量 (这里是 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$) 取为自由未知量, 然后将 $n-r$ 个自由未知量依次取任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$, 即可解得 $x_1,x_2,\cdots,x_r$, 从而得到方程组的全部解.

将上述结果总结为如下定理:

定理 (1.2.1)

设 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$, 对它的增广矩阵施以行初等变换, 得到简化行阶梯形矩阵 (1.1), 若 $d_{r+1}\neq 0$, 则方程组无解; 若 $d_{r+1}=0$, 则方程组有解, 而且当 $r=n$ 时有惟一解, 当 $r<n$ 时有无穷多解.

用不同的消元步骤, 将增广矩阵化为行阶梯形矩阵时, 行阶梯形矩阵的形式不是惟一的, 但行阶梯形矩阵的非零行的行数是惟一确定的. 当方程组有解时, 表明解中任意常数的个数是相同的, 但解的表示式不是惟一的, 然而每一种解的表示式中, 包含的无穷多个解的集合又是相等的. 这些重要的结论, 在第三章研究了向量组的线性相关性理论后才能给以严格的论证.

定理 (1.2.1)

设 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$, 对它的增广矩阵施以行初等变换, 得到简化行阶梯形矩阵 (1.1), 若 $d_{r+1}\neq 0$, 则方程组无解; 若 $d_{r+1}=0$, 则方程组有解, 而且当 $r=n$ 时有惟一解, 当 $r<n$ 时有无穷多解.

用不同的消元步骤, 将增广矩阵化为行阶梯形矩阵时, 行阶梯形矩阵的形式不是惟一的, 但行阶梯形矩阵的非零行的行数是惟一确定的. 当方程组有解时, 表明解中任意常数的个数是相同的, 但解的表示式不是惟一的, 然而每一种解的表示式中, 包含的无穷多个解的集合又是相等的. 这些重要的结论, 在第三章研究了向量组的线性相关性理论后才能给以严格的论证.

关于齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$, 我们知道它总有平凡解 (零解)

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=0.$$

当 $r<n$ 时, 有无穷多解, 求解的方法与非齐次线性方程组相同. 如果齐次线性方程组的方程个数 m 小于未知量个数 n, 则必有 $r\leqslant m<n$, 因而必有无穷多个非零解, 于是有如下定理:

定理 (1.2.2)

设 m 个 n 元方程组成的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$, 若 $m<n$, 则方程组必有非零解.

关于齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$, 我们知道它总有平凡解 (零解)

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=0.$$

当 $r<n$ 时, 有无穷多解, 求解的方法与非齐次线性方程组相同. 如果齐次线性方程组的方程个数 m 小于未知量个数 n, 则必有 $r\leqslant m<n$, 因而必有无穷多个非零解, 于是有如下定理:

定理 (1.2.2)

设 m 个 n 元方程组成的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$, 若 $m<n$, 则方程组必有非零解.

初等变换是可逆变换. 初等变换和它的逆变换对比如下表所示:

类型	初等变换	逆变换
I	交换两行 (列)	交换同样的两行 (列)
II	用 $k \neq 0$ 乘某一行 (列)	用 $\frac{1}{k}$ 乘同一行 (列)
III	把第 i 行 (列) 的 k 倍 加到第 j 行 (列) 上	把第 i 行 (列) 的 $-k$ 倍 加到第 j 行 (列) 上

矩阵的等价

定义

如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B, 就称**矩阵 A 与 B 等价, 记作 $A \cong B$.** 若使用的是行 (列) 初等变换, 则称 A 与 B 行 (列) 等价.

矩阵的等价关系具有

(1) 反身性: $A \cong A$;

(2) 对称性: 若 $A \cong B$, 则 $B \cong A$;

(3) 传递性: 若 $A \cong B, B \cong C$, 则 $A \cong C$.

矩阵的等价

定义

如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B, 就称矩阵 A 与 B 等价, 记作 $A \cong B$. 若使用的是行 (列) 初等变换, 则称 A 与 B 行 (列) 等价.

矩阵的等价关系具有

(1) 反身性: $A \cong A$;

(2) 对称性: 若 $A \cong B$, 则 $B \cong A$;

(3) 传递性: 若 $A \cong B, B \cong C$, 则 $A \cong C$.

初等变换在矩阵理论中具有十分重要的作用. 根据矩阵乘法运算的特定含义, 我们可以把矩阵的初等变换表示为矩阵的乘法运算. 先看几个矩阵的乘法运算.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

初等变换在矩阵理论中具有十分重要的作用. 根据矩阵乘法运算的特定含义, 我们可以把矩阵的初等变换表示为矩阵的乘法运算. 先看几个矩阵的乘法运算.

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

初等变换在矩阵理论中具有十分重要的作用. 根据矩阵乘法运算的特定含义, 我们可以把矩阵的初等变换表示为矩阵的乘法运算. 先看几个矩阵的乘法运算.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ ca_{11} + a_{31} & ca_{12} + a_{32} & \cdots & ca_{1n} + a_{3n} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ ca_{11} + a_{31} & ca_{12} + a_{32} & \cdots & ca_{1n} + a_{3n} \end{pmatrix}.$$

由此可见, 上面左边三个三阶矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$, 分别使 $\boldsymbol{A}$ 作了三种行初等变换 (第 $1,2$ 行交换; 第 2 行乘 c; 第 1 行乘 c 加到第 3 行). 这三个三阶矩阵本身又是单位矩阵作同样的行初等变换 (即对 $\boldsymbol{A}$ 所作的三种行初等变换) 而得到的, 它们称为初等矩阵. 上面三个式子表明 $\boldsymbol{A}$ 的行初等变换可以表示成相应的初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$ 的运算.

定义 (1.2.2)

将单位矩阵作一次初等变换得到的矩阵, 称为初等矩阵.

对应于三种初等变换有三种类型的初等矩阵.

$$1^\circ \quad \boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow 第 i 行 \\ \\ \leftarrow 第 j 行 \\ \\ \\ \end{array} \hspace{-12em} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{array}.$$

$\boldsymbol{E}_{ij}$ 是由单位矩阵第 i, j 行 (或列) 交换而得到的.

$$2^\circ \quad \boldsymbol{E}_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}\ .$$

其中 $c \neq 0$, $\boldsymbol{E}_i(c)$ 是由单位矩阵第 i 行 (或列) 乘 c 而得到的.

$$3^\circ \quad \boldsymbol{E}_{ij}(c)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

$\boldsymbol{E}_{ij}(c)$ 是由单位矩阵第 i 行乘 c 加到第 j 行而得到的, 或由第 j 列乘 c 加到第 i 列而得到的.

由矩阵乘法定义立即可得如下定理:

定理 (1.2.3)

对一个 $m \times n$ 矩阵 A 作一次行初等变换就相当于在 A 的左边乘上相应的 $m \times m$ 初等矩阵; 对 A 作一次列初等变换就相当于在 A 的右边乘上相应的 $n \times n$ 初等矩阵.

- 若矩阵 B 是由 A 经过有限次行初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $E_1, E_2, \cdots, E_k$, 使得 $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$.
- 若矩阵 B 是由 A 经过有限次列初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $E_1', E_2', \cdots, E_s'$, 使得 $B = AE_1' E_2' \cdots E_s'$.
- 若矩阵 B 是由 A 经过有限次初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 与 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_l$, 使得

$$B = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_{l-1} Q_l.$$

由矩阵乘法定义立即可得如下定理:

定理 (1.2.3)

对一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次行初等变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘上相应的 $m \times m$ 初等矩阵; 对 $\boldsymbol{A}$ 作一次列初等变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘上相应的 $n \times n$ 初等矩阵.

- 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次行初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}$.
- 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次列初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{E}'_1, \boldsymbol{E}'_2, \cdots, \boldsymbol{E}'_s$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}'_1\boldsymbol{E}'_2\cdots\boldsymbol{E}'_s$.
- 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_k$ 与 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_l$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_{k-1}\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_{l-1}\boldsymbol{Q}_l.$$

由矩阵乘法定义立即可得如下定理:

定理 (1.2.3)

对一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次行初等变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘上相应的 $m \times m$ 初等矩阵; 对 $\boldsymbol{A}$ 作一次列初等变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘上相应的 $n \times n$ 初等矩阵.

- 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次行初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_k \boldsymbol{E}_{k-1} \cdots \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{A}$.
- 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次列初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{E}'_1, \boldsymbol{E}'_2, \cdots, \boldsymbol{E}'_s$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}'_1 \boldsymbol{E}'_2 \cdots \boldsymbol{E}'_s$.
- 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_k$ 与 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_l$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{P}_{k-1} \cdots \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_1 \cdots \boldsymbol{Q}_{l-1} \boldsymbol{Q}_l.$$

由矩阵乘法定义立即可得如下定理:

定理 (1.2.3)

对一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次行初等变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘上相应的 $m \times m$ 初等矩阵; 对 $\boldsymbol{A}$ 作一次列初等变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘上相应的 $n \times n$ 初等矩阵.

- 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次行初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_k \boldsymbol{E}_{k-1} \cdots \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{A}$.
- 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次列初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{E}'_1, \boldsymbol{E}'_2, \cdots, \boldsymbol{E}'_s$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}'_1 \boldsymbol{E}'_2 \cdots \boldsymbol{E}'_s$.
- 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换得到的, 则必存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_k$ 与 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_l$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{P}_{k-1} \cdots \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_1 \cdots \boldsymbol{Q}_{l-1} \boldsymbol{Q}_l.$$

例 (1.2.4)

设

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&2&1&-1\\1&2&1&2\\2&1&0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\c&0&0&1\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix},$$

求 $P_1P_2P_3$.

解

$$
\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3 = (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)\,\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1+c & 0 & 3 & 1 \\ -c & 2 & 1 & -1 \\ 1+2c & 2 & 1 & 2 \\ 2+c & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1+c & 0 & 3 & 1 \\ -c & 2k & 1 & -1 \\ 1+2c & 2k & 1 & 2 \\ 2+c & k & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

应用案例一：卷积

卷积神经网络在计算机视觉等领域有重要应用，其核心是经典的卷积运算. 设卷积核 $\boldsymbol{w}=(w(-a),\ w(-a+1),\cdots,w(a))^{\mathrm{T}}$，信号 $\boldsymbol{f}=(f(1),f(2),\cdots,f(n))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 的卷积定义为 $g=(g(1),g(2),\cdots,g(n))^{\mathrm{T}}$，其中

$$g(x)=w(x)*f(x)=\sum_{s=-a}^{a}w(s)f(x-s),\quad x=1,2,\cdots,n,$$

$*$ 表示卷积运算. 例如 $\boldsymbol{w}=(w(-1),w(0),w(1))^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{f}=(f(1),f(2),f(3),f(4),f(5))^{\mathrm{T}}$，根据卷积的定义有

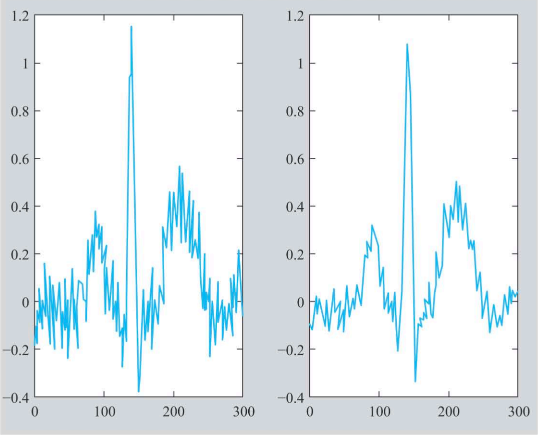
$$\begin{aligned}
g(1)&=w(1)f(0)+w(0)f(1)+w(-1)f(2),\\
g(2)&=w(1)f(1)+w(0)f(2)+w(-1)f(3),\\
g(3)&=w(1)f(2)+w(0)f(3)+w(-1)f(4),\\
g(4)&=w(1)f(3)+w(0)f(4)+w(-1)f(5),\\
g(5)&=w(1)f(4)+w(0)f(5)+w(-1)f(6),
\end{aligned}$$

假设满足零边界条件, 即 $f(0)=f(6)=0$. 我们可以用矩阵和矩阵的乘积将 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 的卷积简洁地表示为

$$\begin{pmatrix} g(1) \\ g(2) \\ g(3) \\ g(4) \\ g(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(0) & w(-1) & & & \\ w(1) & w(0) & w(-1) & & \\ & w(1) & w(0) & w(-1) & \\ & & w(1) & w(0) & w(-1) \\ & & & w(1) & w(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \end{pmatrix}.$$

来看一个现实世界的例子, 图 (a) 中曲线表示存在噪声污染的脑电信号 f, 图 (b) 中曲线表示卷积核 $\boldsymbol{w}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 的卷积. 我们观察到此卷积核和脑电信号的卷积更加平滑.

本质上，给定卷积核 w 和信号 f，计算其卷积 g 是计算矩阵和矩阵的乘积．反之，给定卷积核 w 和卷积 g，计算信号 f (即反卷积) 是求解线性方程组．



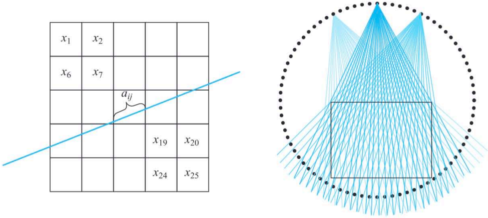
(a) (b)

应用案例二: 计算机断层成像 (Computed Tomography)

基于不同的密度组织对 X 射线的吸收能力不同的原理, 计算机断层成像利用计算机将不同角度的 X 射线观测合成为特定区域的断层面图像. 由于其在诊断和治疗方面的巨大价值, 计算机断层成像获 1979 年诺贝尔生理学或医学奖. 计算机断层成像问题可以建模为

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n,$$

其中 y_i 表示射线 i 的观测值, x_j 表示区域内的像素 j 的密度, a_{ij} 表示射线 i 经过像素 j 的长度 (见图 (a)).

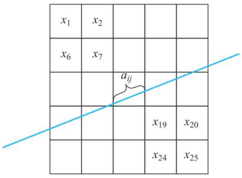


(a) (b)

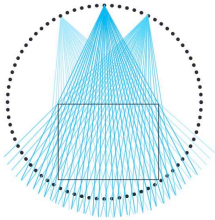
对于每条射线 i, 可以列出一个线性方程. 对于不同角度的射线 (见图 (b)), 就可以列出线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m. \end{cases}$$

通过计算线性方程组的解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 我们就能知道特定区域的密度.



(a)



(b)

小结

- 高斯消元法: 线性方程组的三种初等变换.
- 矩阵的初等变换: $r_i \leftrightarrow r_j$, kr_i, $kr_i + r_j$.($c_i \leftrightarrow c_j$, kc_i, $kc_i + c_j$)
  矩阵作行初等变换 $\to$ 行阶梯形矩阵 $\to$ 简化行阶梯形矩阵.
- 方程组求解的高斯消元法: 对 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 施以行初等变换, 得到简化行阶梯形矩阵, 若 $d_{r+1} \neq 0$, 则方程组无解; 若 $d_{r+1} = 0$, 则方程组有解, 而且当 $r = n$ 时有惟一解, 当 $r < n$ 时有无穷多解. m 个 n 元方程组成的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$, 若 $m < n$, 则方程组必有非零解.
- 矩阵的等价 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$. 三条性质.
- 初等矩阵: $\boldsymbol{E}_{ij}$, $\boldsymbol{E}_i(c)$, $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$.
  对一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次行初等变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘上相应的 $m \times m$ 初等矩阵; 对 $\boldsymbol{A}$ 作一次列初等变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘上相应的 $n \times n$ 初等矩阵.