第 2 节 向量组的线性相关性

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

1. 向量组的线性组合
2. 向量组的线性相关性

向量组的线性组合

同维数的向量所组成的集合称为向量组.

两个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 之间最简单的关系是对应分量成比例, 即存在数 k, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\beta}$.

在多个向量之间, 这一关系推广为线性组合.

定义 (3.2.1)

对于给定的向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 若存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合, 或称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出. 所有 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性组合的集合用 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 表示.

例如，设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,4,1)$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,0,0,-3)$，由于 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，因而 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

例 (3.2.1)

零向量是任一向量组的线性组合.

事实上，设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为任一向量组，有

$$\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m.$$

例如, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,4,1)$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,0,0,-3)$, 由于 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$, 因而 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

例 (3.2.1)

零向量是任一向量组的线性组合.

事实上, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为任一向量组, 有

$$\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m.$$

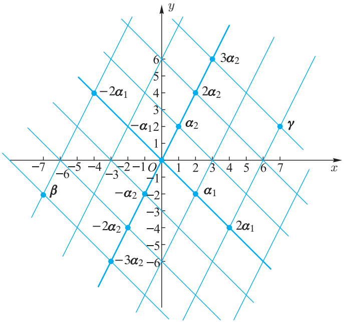
例 (3.2.2)

在 $\mathbf{R}^3$ 中, $L(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ 是所有形如 $x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}=(x_1,x_2,x_3)$ 的向量集合, 因此 $\mathbf{R}^3=L(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$. 同理, $\mathbf{R}^n=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$, 其中

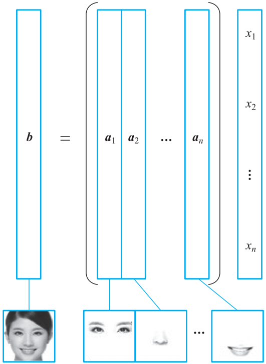
$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \cdots\quad,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

容易证明, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 n 维向量组, 则 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间, 称之为由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间.

建立平面直角坐标系，那么平面上的点就与 $\mathbf{R}^2$ 中的向量一一对应．令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，下图中展示了部分由这两个向量构成的线性组合．比如 $\boldsymbol{\beta}=-2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\gamma}=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$．则 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 为整个平面．



下面通过一个例子直观解释前面学习的线性表出概念. 下图等号左边的向量由右边的向量线性表出, 其中等号左边的向量表示人脸图像, 等号右边的向量分别表示“眼睛”“鼻子”和“嘴巴”等图像及相应的表出系数.



例 (3.2.3)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中任一向量都可用这个向量组线性表出.

因为

$$\boldsymbol{\alpha}_i = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + 1\boldsymbol{\alpha}_i + 0\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

例 (3.2.3)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中任一向量都可用这个向量组线性表出.

因为

$$\boldsymbol{\alpha}_i = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + 1\boldsymbol{\alpha}_i + 0\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

下面我们来看线性组合及矩阵的秩与非齐次线性方程组之间的联系.
设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},\qquad (3.1)$$

记

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\quad \boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}},$$

则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 与线性组合及矩阵的秩有如下重要结果:

定理 (3.2.1)

设有向量组 (3.1), $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 则下列命题等价:

1° $\boldsymbol{b}\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$;

2° $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有解;

3° $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})$.

证明.

$1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$: 向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 即有数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$, 即有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{b},$$

即有 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$, 也就是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 上述步骤可逆, 故 $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$. □

定理 (3.2.1)

设有向量组 (3.1), $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则下列命题等价:

1° $\boldsymbol{b} \in L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$;

2° $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 有解;

3° $R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = R(\boldsymbol{A})$.

证明.

$1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$: 向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 即有数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b}$, 即有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b},$$

即有 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$, 也就是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. 上述步骤可逆, 故 $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$. □

证明.

$2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$：设 $R(\boldsymbol{A}) = r$, 因为初等变换不改变矩阵的秩, 所以对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 作行初等变换可得

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc:c} c_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & c_{rs} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & & & d_{r+1} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{array}\right) = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d}),$$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{d}$ 同解. 因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow d_{r+1} = 0$ $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d}) = R(\boldsymbol{B}) = r$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 有解等价于 $R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = R(\boldsymbol{A}) = r$. 故定理结论成立. $\square$

该定理中的 2° 与 3° 的等价性常被称作方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的判别定理.

例 (3.2.4)

线性方程组 $\begin{cases} x_1 = b_1, \\ 5x_1+4x_2=b_2, \\ 2x_1+4x_2=b_3 \end{cases}$ 有解的充要条件是 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,5,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,4,4)^{\mathrm{T}}$ 线性表出, 其几何意义就是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 张成的平面上.

例 (3.2.5)

证明: 向量 $\boldsymbol{\beta}=(-1,1,5)^{\mathrm{T}}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,6)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合, 并具体将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

该定理中的 2° 与 3° 的等价性常被称作方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的判别定理.

例 (3.2.4)

线性方程组 $\begin{cases} x_1 = b_1, \\ 5x_1+4x_2=b_2, \\ 2x_1+4x_2=b_3 \end{cases}$ 有解的充要条件是 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,5,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,4,4)^{\mathrm{T}}$ 线性表出，其几何意义就是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 张成的平面上.

例 (3.2.5)

证明：向量 $\boldsymbol{\beta}=(-1,1,5)^{\mathrm{T}}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,6)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合，并具体将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

证明.

只需考察线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

解得 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$. 故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 且 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$. □

定义 (3.2.2)

设有两个向量组 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$, (II): $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$, 若向量组 (I) 中每个向量都可由向量组 (II) 中的向量线性表出, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出. 若向量组 (I) 与向量组 (II) 可互相线性表出, 则称它们等价.

不难证明, 向量组等价关系有下述性质:

(1) 反身性: 每一个向量组都与其自身等价;

(2) 对称性: 若向量组 (I) 与向量组 (II) 等价, 则向量组 (II) 与向量组 (I) 等价;

(3) 传递性: 若向量组 (I) 与向量组 (II) 等价, 向量组 (II) 与向量组 (III) 等价, 则向量组 (I) 与向量组 (III) 等价.

定义 (3.2.2)

设有两个向量组 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$, (II): $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$, 若向量组 (I) 中每个向量都可由向量组 (II) 中的向量线性表出, 则称**向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出**. 若向量组 (I) 与向量组 (II) 可互相线性表出, 则称它们**等价**.

不难证明, 向量组等价关系有下述性质:

(1) **反身性**: 每一个向量组都与其自身等价;

(2) **对称性**: 若向量组 (I) 与向量组 (II) 等价, 则向量组 (II) 与向量组 (I) 等价;

(3) **传递性**: 若向量组 (I) 与向量组 (II) 等价, 向量组 (II) 与向量组 (III) 等价, 则向量组 (I) 与向量组 (III) 等价.

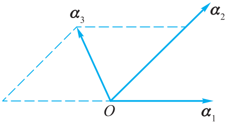
1. 向量组的线性组合
2. 向量组的线性相关性

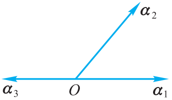
向量组的线性相关性是向量在线性运算下的一种性质，是线性代数中极重要的基本概念. 我们先来讨论一下它在三维空间中的某些几何背景.

若两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线，则 $\boldsymbol{\alpha}_2 = l\boldsymbol{\alpha}_1 (l \in \mathbf{R})$. 这等价于，存在不全为零的数 k_1, k_2，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$.

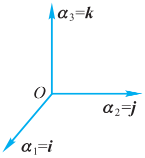
若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不共线，则 $\forall l \in \mathbf{R}$，有 $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq l\boldsymbol{\alpha}_1$. 它等价于，只有当 k_1, k_2 全为零时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$.

若三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面，则其中至少一个向量可用另两个向量线性表出，如左图中，$\boldsymbol{\alpha}_3 = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2$；右图中，$\boldsymbol{\alpha}_1 = 0\boldsymbol{\alpha}_2 + l_3\boldsymbol{\alpha}_3$，二者都等价于存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$.

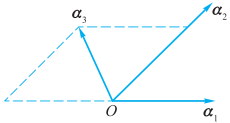


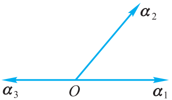


若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面，则任一个向量都不能由另两个向量线性表出. 即只有当 k_1, k_2, k_3 全为零时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$.

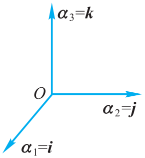


若三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面，则其中至少一个向量可用另两个向量线性表出，如左图中，$\boldsymbol{\alpha}_3 = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2$；右图中，$\boldsymbol{\alpha}_1 = 0\boldsymbol{\alpha}_2 + l_3\boldsymbol{\alpha}_3$，二者都等价于存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$.

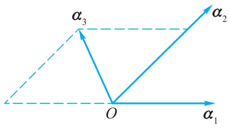


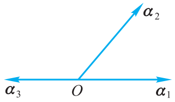


若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面，则任一个向量都不能由另两个向量线性表出. 即只有当 k_1, k_2, k_3 全为零时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$.

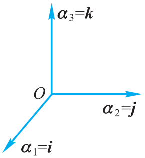


若三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面，则其中至少一个向量可用另两个向量线性表出，如左图中，$\boldsymbol{\alpha}_3=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2$；右图中，$\boldsymbol{\alpha}_1=0\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$，二者都等价于存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$.





若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不共面，则任一个向量都不能由另两个向量线性表出．即只有当 k_1,k_2,k_3 全为零时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$.



上述三维向量在线性运算下的性质，即一组向量中是否存在一个向量可由其余向量线性表出，或是否存在不全为零的系数使向量组的线性组合为零向量，就是向量组的线性相关性. n 维向量组的线性相关性的一般定义如下:

定义 (3.2.3)

设有 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}, \tag{3.2}$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关; 否则, 称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 即仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时, 式 (3.2) 才成立.

根据定义 3，容易得到下列基本性质:

(1) 对于只含一个向量 α 的向量组, 线性相关的充要条件是这个向量为零向量; 线性无关的充要条件是这个向量不是零向量.

事实上, 由定义 3，若 α 线性相关, 则存在数 $k \neq 0$, 使得 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 因此, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$; 反之, 若 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则取 $k = 1 \neq 0$, 即有 $1\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 因而 α 线性相关.

(2) 两个向量线性相关 (无关) 的充要条件是它们的各分量对应成 (不成) 比例.

事实上, 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 且 $k_1 \neq 0$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

因而 α_1 各分量与 α_2 各对应分量成比例; 反之, 若有数 k 使 $\boldsymbol{\alpha}_1 = k\boldsymbol{\alpha}_2$, 即 $1\boldsymbol{\alpha}_1 - k\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关.

根据定义 3，容易得到下列基本性质:

(1) 对于只含一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组, 线性相关的充要条件是这个向量为零向量; 线性无关的充要条件是这个向量不是零向量.

事实上, 由定义 3，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 则存在数 $k \neq 0$, 使得 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 因此, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$; 反之, 若 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则取 $k = 1 \neq 0$, 即有 $1\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 因而 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关.

(2) 两个向量线性相关 (无关) 的充要条件是它们的各分量对应成 (不成) 比例.

事实上, 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 且 $k_1 \neq 0$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

因而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 各分量与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 各对应分量成比例; 反之, 若有数 k 使 $\boldsymbol{\alpha}_1 = k\boldsymbol{\alpha}_2$, 即 $1\boldsymbol{\alpha}_1 - k\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关.

根据定义 3，容易得到下列基本性质:

(1) 对于只含一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组, 线性相关的充要条件是这个向量为零向量; 线性无关的充要条件是这个向量不是零向量.

事实上, 由定义 3，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 则存在数 $k \neq 0$, 使得 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 因此, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$; 反之, 若 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则取 $k = 1 \neq 0$, 即有 $1\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 因而 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关.

(2) 两个向量线性相关 (无关) 的充要条件是它们的各分量对应成 (不成) 比例.

事实上, 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 且 $k_1 \neq 0$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

因而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 各分量与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 各对应分量成比例; 反之, 若有数 k 使 $\boldsymbol{\alpha}_1 = k\boldsymbol{\alpha}_2$, 即 $1\boldsymbol{\alpha}_1 - k\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关.

根据定义 3，容易得到下列基本性质:
(1) 对于只含一个向量 α 的向量组, 线性相关的充要条件是这个向量为零向量; 线性无关的充要条件是这个向量不是零向量.
事实上, 由定义 3，若 α 线性相关, 则存在数 $k \neq 0$, 使得 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 因此, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$; 反之, 若 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则取 $k = 1 \neq 0$, 即有 $1\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 因而 α 线性相关.
(2) 两个向量线性相关 (无关) 的充要条件是它们的各分量对应成 (不成) 比例.
事实上, 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 且 $k_1 \neq 0$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

因而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 各分量与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 各对应分量成比例; 反之, 若有数 k 使 $\boldsymbol{\alpha}_1 = k\boldsymbol{\alpha}_2$, 即 $1\boldsymbol{\alpha}_1 - k\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关.

可见，在 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 中，两向量共线 (或平行) 的充要条件是它们线性相关.

设 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中线性无关的向量，则点 (x_1, x_2, x_3) 和点 (y_1, y_2, y_3) 不在 $\mathbf{R}^3$ 中过坐标原点的同一直线上.

因为三点 $(0,0,0), (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ 不共线，所以它们决定一平面. 如果点 (z_1, z_2, z_3) 位于这平面上，向量 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$ 可写成 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的线性组合，因而 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 线性相关. 如果点 (z_1, z_2, z_3) 不位于这平面上，那么这三个向量线性无关.

例 (3.2.6)

n 维单位向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性无关.

证明.

考察 $x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=\mathbf{0}$, 即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, 于是 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$, 即 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关. 特别地, 在 $\mathbf{R}^2$ 中, $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 线性无关; 在 $\mathbf{R}^3$ 中, $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 线性无关. □

例 (3.2.7)

含有零向量的向量组线性相关.

证明.

设向量组为 $0,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 因为 $1\mathbf{0}+0\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$, 所以结论成立. □

一般地, n 个 m 维向量 (用列向量形式表示)

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}\qquad(3.3)$$

是否线性相关的问题, 也就是 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$, 即

例 (3.2.7)

含有零向量的向量组线性相关.

证明.

设向量组为 $0, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 因为 $1\mathbf{0} + 0\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$, 所以结论成立. □

一般地, n 个 m 维向量 (用列向量形式表示)

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

是否线性相关的问题, 也就是 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$, 即

也就是 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}, \tag{3.4}$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 有无非零解的问题，其中

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

定理 (3.2.2)

设有 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则下列三命题等价:

1° $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关;

2° $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 有非零解;

3° $R(\boldsymbol{A}) < n$.

证明.

设向量组 (3.3) 线性相关，据定义 3，有不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使式 (3.4) 成立，即方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 上述步骤可逆，故 1° 与 2° 等价.

另一方面，将 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换可得

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & c_{rs} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解，且 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r$. 由 §1.2 的定理 2 知，当 $r<n$ 时，$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；又当 $r=n$ 时，$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 显然只有零解. 故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})<n$. 即 2° 与 3° 等价. □

证明.

设向量组 (3.3) 线性相关, 据定义 3, 有不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使式 (3.4) 成立, 即方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 有非零解. 上述步骤可逆, 故 1° 与 2° 等价.

另一方面, 将 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换可得

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & c_{rs} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$ 同解, 且 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = r$. 由 §1.2 的定理 2 知, 当 $r < n$ 时, $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$ 有非零解; 又当 $r = n$ 时, $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$ 显然只有零解. 故 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A}) < n$. 即 2° 与 3° 等价. □

特别地，若 $m=n$，即向量组中向量个数等于向量维数，$\boldsymbol{A}$ 为方阵，则由 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$ 当且仅当 $R(\boldsymbol{A})=n$，有

推论 (3.2.1)

设有 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则下列三命题等价:

1° $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 (无关);

2° $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 (只有零解);

3° $\det\boldsymbol{A}=0(\neq 0)$.

对于向量个数大于向量维数的向量组 (即 $n > m$) 有

推论 (3.2.2)

设 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, $n > m$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 必线性相关.

证明.

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)_{m\times n}$, 由 $n > m$ 知 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant m < n$, 于是由定理 2 有 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关. □

由推论 1 和推论 2 可知, 三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中任意四个向量必线性相关, 而任意三个向量线性相关的充要条件是它们共面.

在 $\mathbf{R}^n$ 中, 任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的, 因此, 任一线性无关的 n 维向量组中最多含有 n 个向量.

对于向量个数大于向量维数的向量组 (即 $n > m$) 有

推论 (3.2.2)

设 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, $n > m$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 必线性相关.

证明.

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)_{m\times n}$, 由 $n > m$ 知 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant m < n$, 于是由定理 2 有 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关. □

由推论 1 和推论 2 可知, 三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中任意四个向量必线性相关, 而任意三个向量线性相关的充要条件是它们共面.

在 $\mathbf{R}^n$ 中, 任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的, 因此, 任一线性无关的 n 维向量组中最多含有 n 个向量.

对于向量个数大于向量维数的向量组 (即 $n > m$) 有

推论 (3.2.2)

设 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, $n > m$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 必线性相关.

证明.

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)_{m\times n}$, 由 $n > m$ 知 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant m < n$, 于是由定理 2 有 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关. $\square$

由推论 1 和推论 2 可知, 三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中任意四个向量必线性相关, 而任意三个向量线性相关的充要条件是它们共面.

在 $\mathbf{R}^n$ 中, 任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的, 因此, 任一线性无关的 n 维向量组中最多含有 n 个向量.

例 (3.2.8)

判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,7),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,4,11),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-6,3)$ 的线性相关性.

解

法一　因为 $\det \boldsymbol{A}=\det\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\right)=\begin{vmatrix}2&1&3\\-1&4&-6\\7&11&3\end{vmatrix}=0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

法二　由行初等变换, 有

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&4&-6\\7&11&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&4&-6\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2<3$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 (3.2.8)

判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,7), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,4,11), \boldsymbol{\alpha}_3=(3,-6,3)$ 的线性相关性.

解

法一　因为 $\det \boldsymbol{A}=\det\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -6 \\ 7 & 11 & 3 \end{vmatrix}=0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

法二　由行初等变换, 有

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -6 \\ 7 & 11 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2<3$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 (3.2.8)

判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,7), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,4,11), \boldsymbol{\alpha}_3=(3,-6,3)$ 的线性相关性.

解

法一　因为 $\det \boldsymbol{A}=\det\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -6 \\ 7 & 11 & 3 \end{vmatrix}=0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

法二　由行初等变换, 有

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -6 \\ 7 & 11 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2<3$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 (3.2.9)

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

证明.

设有数 x_1, x_2, x_3，使 $x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}$，即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + x_3(\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0},$$

整理得

$$(x_1 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_1 + x_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_2 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}.$$

例 (3.2.9)

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

证明.

设有数 x_1, x_2, x_3, 使 $x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}$, 即

$$x_1\left(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\right) + x_2\left(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3\right) + x_3\left(\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1\right) = \mathbf{0},$$

整理得

$$\left(x_1 + x_3\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(x_1 + x_2\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + \left(x_2 + x_3\right)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}.$$

$\square$

证明.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 所以有

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \quad x_3 = 0, \\ x_1 + \quad x_2 \qquad = 0, \\ \qquad x_2 + \quad x_3 = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

由 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ 知方程组 (3.5) 只有零解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, 故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关. □

定理 (3.2.3)

若向量组中有一部分向量 (称为**部分组**) 线性相关, 则整个向量组线性相关.

证明.

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中有 r 个 $(r \leqslant m)$ 向量的部分组线性相关, 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关, 则有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$ 成立. 改写上式为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \cdots + 0\alpha_m = \mathbf{0},$$

显然, $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$ 也是一组不全为零的数, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m$ 也线性相关. □

定理 3 常叙述为: 线性无关的向量组的任何一部分组都线性无关. 即所谓的 “若部分相关, 则整体相关”, “若整体无关, 则部分无关”.

定理 (3.2.3)

若向量组中有一部分向量 (称为部分组) 线性相关, 则整个向量组线性相关.

证明.

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有 r 个 $(r \leqslant m)$ 向量的部分组线性相关, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 则有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = 0$ 成立. 改写上式为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + 0\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

显然, $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$ 也是一组不全为零的数, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性相关. $\square$

定理 3 常叙述为: 线性无关的向量组的任何一部分组都线性无关. 即所谓的 "若部分相关, 则整体相关", "若整体无关, 则部分无关".

定理 (3.2.3)

若向量组中有一部分向量 (称为部分组) 线性相关, 则整个向量组线性相关.

证明.

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有 r 个 $(r \leqslant m)$ 向量的部分组线性相关, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 则有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = 0$ 成立. 改写上式为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + 0\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

显然, $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$ 也是一组不全为零的数, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性相关. □

定理 3 常叙述为: 线性无关的向量组的任何一部分组都线性无关. 即所谓的 "若部分相关, 则整体相关", "若整体无关, 则部分无关".

定理 (3.2.4)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ **线性相关**的充要条件是其中**至少有一个向量可以由其余 $m-1$ 个向量线性表出**.

证明.

必要性 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 即有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

因 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 中至少有一个不为零, 不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + \left(-\frac{k_3}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由其余向量线性表出. □

定理 (3.2.4)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可以由其余 $m-1$ 个向量线性表出.

证明.

必要性　设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 即有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

因 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 中至少有一个不为零, 不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + \left(-\frac{k_3}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由其余向量线性表出. □

定理 (3.2.4)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可以由其余 $m-1$ 个向量线性表出.

证明.

充分性　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一个向量 (不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$) 能由其余向量线性表出，即有数 $l_2,l_3,\cdots,l_m$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$，即

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

因 $-1,l_2,\cdots,l_m$ 不全为零，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. □

定理 4 也就是，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是其中任一向量均不能由其余向量线性表出.

定理 (3.2.5)

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，且表示式惟一.

证明.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，即有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m, k$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

再证 $k \neq 0$，否则得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$，而 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零，此与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾，故 $k \neq 0$. 于是

$$\boldsymbol{\beta} = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出. □

定理 (3.2.5)

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，且表示式惟一.

证明.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，即有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m, k$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

再证 $k \neq 0$, 否则得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$, 而 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零，此与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾，故 $k \neq 0$. 于是

$$\boldsymbol{\beta} = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出. □

定理 (3.2.5)

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，且表示式惟一.

证明.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，即有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m, k$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

再证 $k \neq 0$, 否则得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$, 而 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零，此与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾，故 $k \neq 0$. 于是

$$\boldsymbol{\beta} = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出. □

定理 (3.2.5)

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，且表示式惟一.

证明.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，即有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m, k$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

再证 $k \neq 0$，否则得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$，而 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零，此与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾，故 $k \neq 0$. 于是

$$\boldsymbol{\beta} = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出. □

定理 (3.2.5)

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，且表示式惟一.

证明.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，即有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

再证 $k\neq 0$，否则得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，而 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零，此与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾，故 $k\neq 0$. 于是

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(-\frac{k_2}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_m}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出. □

证明.

为了证 β 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出的表示式惟一，设有两种表示式

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m,$$
$$\beta = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \cdots + s_m\alpha_m,$$

两式相减得

$$(l_1 - s_1)\alpha_1 + (l_2 - s_2)\alpha_2 + \cdots + (l_m - s_m)\alpha_m = \mathbf{0}.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，所以

$$l_1 - s_1 = l_2 - s_2 = \cdots = l_m - s_m = 0,$$

即 $l_i = s_i (i = 1, 2, \cdots, m)$，故 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 惟一地线性表出. □

证明.

为了证 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出的表示式惟一，设有两种表示式

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$
$$\boldsymbol{\beta}=s_1\boldsymbol{\alpha}_1+s_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+s_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

两式相减得

$$(l_1-s_1)\,\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-s_2)\,\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_m-s_m)\,\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以

$$l_1-s_1=l_2-s_2=\cdots=l_m-s_m=0,$$

即 $l_i=s_i(i=1,2,\cdots,m)$，故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 惟一地线性表出. □

例 (3.2.10)

设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix},$$

问: (1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关? (2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出? 若能, 则求其表示式.

解

(1) 作矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&3\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&4\\0&0&5\end{pmatrix},$$

因而 $R(\boldsymbol{A})=3=n$, 由定理 2 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例 (3.2.10)

设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

问: (1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关? (2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出? 若能, 则求其表示式.

解

(1) 作矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

因而 $R(\boldsymbol{A}) = 3 = n$, 由定理 2 知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

解

(2) 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 显然线性相关 (向量个数 4 大于向量维数 3), 所以由定理 5 知 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 且表示式惟一. 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_4,$$

即

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

得惟一解 $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_4 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$.

小结 (I)

- 向量组的线性组合: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维向量，若存在数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，则称 β 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合，或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.
- 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，又记为 $\boldsymbol{\beta} \in L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$，其中 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ 是由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的向量空间.
- 向量组等价: 设有两个向量组 I: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, II: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$. 若向量组 I 中的每个向量都能由向量组 II 中的向量线性表出，则称向量组 I 能由向量组 II 线性表出; 若两个向量组能相互线性表出，则称这两个向量组等价. 等价向量组具有反身性、对称性和传递性.
- 定理: 向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = R(\boldsymbol{A})$，其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.

小结 (II)

- 向量组的线性相关性: 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关. 否则, 称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 即仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 时, 上式才成立.
- 定理: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为列向量组, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) < n$.
- 推论: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维列向量组, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow \det \boldsymbol{A} = 0$.
- 推论: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是一个 n 维向量组, 若 $m > n$, 则该向量组线性相关.

小结 (III)

- 定理: 向量组中有一部分向量线性相关, 则整个向量组线性相关.
- 逆否命题: 向量组整体线性无关, 则这个向量组的任意部分向量所组成的向量组都线性无关.
- 定理: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量能被其余 $m-1$ 个向量线性表出.
- 逆否命题:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 线性无关的充要条件是向量组中任意一个向量都不能被其余的向量线性表出.
- 定理: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出, 且表示式唯一.