第 4 节 线性方程组解的结构

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

1. 齐次线性方程组
2. 非齐次线性方程组

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \mathbf{0}, \tag{3.2}$$

显然有一组平凡解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, 即 $\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$, 称为零解.

关于齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，我们已经得到下列重要结论:
设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则下面三命题等价:
1°　$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解;
2°　$R(\boldsymbol{A})=n$;
3°　$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.

即下面三命题等价:

1° $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解;

2° $R(\boldsymbol{A})<n$;

3° $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.

特别地, 当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时, 下面三命题等价:

1° $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 (有非零解);

2° $R(\boldsymbol{A})=n$ $(R(\boldsymbol{A})<n)$;

3° $\det\boldsymbol{A}\neq 0$ $(\det\boldsymbol{A}=0)$.

即下面三命题等价:

1° $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 有非零解;

2° $R(\boldsymbol{A}) < n$;

3° $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.

特别地, 当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时, 下面三命题等价:

1° $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 只有零解 (有非零解);

2° $R(\boldsymbol{A}) = n$ $(R(\boldsymbol{A}) < n)$;

3° $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ $(\det \boldsymbol{A} = 0)$.

关于 $AX=0$ 的解, 有如下性质:

性质 (3.4.1)

若 ξ_1,ξ_2 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解, 则 $X=\xi_1+\xi_2$ 也是 $AX=0$ 的解.

证明.

由 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0$, 知 $\xi_1+\xi_2$ 也是 $AX=0$ 的解. □

性质 (3.4.2)

若 ξ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解, k 为数, 则 $X=k\xi$ 也是 $AX=0$ 的解.

证明.

由 $A(k\xi)=kA\xi=k0=0$ 知结论成立. □

关于 $AX=0$ 的解, 有如下性质:

性质 (3.4.1)

若 ξ_1,ξ_2 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解, 则 $X=\xi_1+\xi_2$ 也是 $AX=0$ 的解.

证明.

由 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0$, 知 $\xi_1+\xi_2$ 也是 $AX=0$ 的解. □

性质 (3.4.2)

若 ξ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解, k 为数, 则 $X=k\xi$ 也是 $AX=0$ 的解.

证明.

由 $A(k\xi)=kA\xi=k0=0$ 知结论成立. □

关于 $AX=0$ 的解，有如下性质:

性质 (3.4.1)

若 ξ_1, ξ_2 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，则 $X=\xi_1+\xi_2$ 也是 $AX=0$ 的解.

证明.

由 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0$，知 $\xi_1+\xi_2$ 也是 $AX=0$ 的解. □

性质 (3.4.2)

若 ξ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，k 为数，则 $X=k\xi$ 也是 $AX=0$ 的解.

证明.

由 $A(k\xi)=kA\xi=k0=0$ 知结论成立. □

关于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解，有如下性质:

性质 (3.4.1)

若 ξ_1,ξ_2 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{X}=\xi_1+\xi_2$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解.

证明.

由 $\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\boldsymbol{A}\xi_1+\boldsymbol{A}\xi_2=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$，知 $\xi_1+\xi_2$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解. □

性质 (3.4.2)

若 ξ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解，k 为数，则 $\boldsymbol{X}=k\xi$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解.

证明.

由 $\boldsymbol{A}(k\xi)=k\boldsymbol{A}\xi=k\mathbf{0}=\mathbf{0}$ 知结论成立. □

由性质 1, 2 立即得

性质 (3.4.3)

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 解向量的线性组合也为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解. 即设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解, 则对任意 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解.

将齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解的全体记为 W, 即

$$W=\{\boldsymbol{X}\in\mathrm{R}^n \mid \boldsymbol{AX}=\mathbf{0}\}.$$

由性质 1, 2 知 W 为 R^n 的一个子空间, 称为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解空间, 其任一组基称为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

于是, 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一组解向量, 则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系当且仅当 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任一解向量都可表为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 的线性组合. 易见, 仅当 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解时才有基础解系.

由性质 $1, 2$ 立即得

性质 (3.4.3)

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 解向量的线性组合也为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解. 即设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解, 则对任意 s 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解.

将齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解的全体记为 W, 即

$$W=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{AX}=\mathbf{0}\}.$$

由性质 $1, 2$ 知 W 为 R^n 的一个子空间, 称为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的 解空间, 其任一组基称为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

于是, 设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一组解向量, 则 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系当且仅当 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任一解向量都可表为 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 的线性组合. 易见, 仅当 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解时才有基础解系.

由性质 $1,2$ 立即得

性质 (3.4.3)

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 解向量的线性组合也为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解. 即设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解, 则对任意 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解.

将齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解的全体记为 W, 即

$$W=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{AX}=\mathbf{0}\}.$$

由性质 $1,2$ 知 W 为 R^n 的一个子空间, 称为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的 解空间, 其任一组基称为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

于是, 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一组解向量, 则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系当且仅当 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任一解向量都可表为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 的线性组合. 易见, 仅当 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解时才有基础解系.

定理 (3.4.1)

设齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$, 则方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ **有基础解系且所含解向量个数为** $n-r$, 即 W 的维数为 $n-r$, 这里 n 为方程组中未知数的个数.

证明.

设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个列向量线性无关, 于是由 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换可得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

定理 (3.4.1)

设齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$, 则方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有基础解系且所含解向量个数为 $n-r$, 即 W 的维数为 $n-r$, 这里 n 为方程组中未知数的个数.

证明.

设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个列向量线性无关, 于是由 $\boldsymbol{A}$ 经行初等变换可得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

证明.

与 $\boldsymbol{B}$ 对应, 有方程组

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases} \tag{3.3}$$

方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 (3.3) 同解. 在方程组 (3.3) 中, 任给 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 一组值, 则惟一确定 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的值, 就得方程组 (3.3) 的一个解, 也就是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. 令 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 取下列 $n-r$ 组数

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

证明.

由方程组 (3.3) 依次可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$

从而求得方程组 $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ 的 $n-r$ 个解:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

证明.

下面证明 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 就是基础解系.

首先, 因 $(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 所取的 $n-r$ 个 $n-r$ 维向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关, 所以在每个向量前面添加 r 个分量而得到的 $n-r$ 个 n 维向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 也线性无关 (参见习题 3.2 的题 10). □

证明.

其次, 证明方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任一解 $\boldsymbol{X}=(l_1,\cdots,l_r,l_{r+1},\cdots,l_n)^{\mathrm{T}}$ 都可由 ξ_1, $\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出. 为此, 作向量

$$\boldsymbol{\eta}=l_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+l_{r+2}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

由性质 3 知 $\boldsymbol{\eta}$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解. 比较 $\boldsymbol{\eta}$ 与 $\boldsymbol{X}$, 它们的后面 $n-r$ 个分量对应相等, 由于它们都满足方程组 (3.3), 从而它们的前面 r 个分量也必对应相等, 因此 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}$, 即

$$\boldsymbol{X}=l_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+l_{r+2}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

于是由定义知, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系. □

值得注意的是, 该定理的证明实际上就是一个具体求基础解系的方法. 因为齐次线性方程组的基础解系实质上就是向量组 W 的一个极大无关组, 因而一般不惟一, 但是基础解系中向量个数必为 $n-r$.

证明.

其次，证明方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任一解 $\boldsymbol{X}=(l_1,\cdots,l_r,l_{r+1},\cdots,l_n)^{\mathrm{T}}$ 都可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出. 为此，作向量

$$\boldsymbol{\eta}=l_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+l_{r+2}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

由性质 3 知 $\boldsymbol{\eta}$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解. 比较 $\boldsymbol{\eta}$ 与 $\boldsymbol{X}$，它们的后面 $n-r$ 个分量对应相等，由于它们都满足方程组 (3.3)，从而它们的前面 r 个分量也必对应相等，因此 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}$，即

$$\boldsymbol{X}=l_{r+1}\boldsymbol{\xi}_1+l_{r+2}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

于是由定义知，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系. □

值得注意的是，该定理的证明实际上就是一个具体求基础解系的方法. 因为齐次线性方程组的基础解系实质上就是向量组 W 的一个极大无关组，因而一般不惟一，但是基础解系中向量个数必为 $n-r$.

例如, 任取 $n-r$ 个线性无关的 $n-r$ 维向量, 并使 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 分别等于这些向量, 再通过方程组 (3.8) 求出 $x_1, x_2, \cdots, x_r$, 便得一个基础解系.

设求得 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 则该方程组的任一解可表示为

$$\boldsymbol{X} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意数, 上式称为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的通解.

例 (3.4.1)

求齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解.

解

对系数矩阵作行初等变换

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 (3.4.1)

求齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解.

解

对系数矩阵作行初等变换

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解

得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -4x_3 + 5x_4 \end{cases}$. 因此基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{X} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2, \quad k_1, k_2 \text{ 为任意数}.$$

例 (3.4.2)

求齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+8x_2-2x_3=0, \\ 4x_1-x_2+9x_3=0 \end{cases}$ 的通解.

解

对系数矩阵 A 作行初等变换

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 (3.4.2)

求齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+8x_2-2x_3=0, \\ 4x_1-x_2+9x_3=0 \end{cases}$ 的通解.

解

对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$ 取 $x_3 = 1$ 得基础解系 $\xi = (-2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 故原方程组的通解为 $X = k\xi$, k 为任意数.

例 (3.4.3)

试证明与 $AX=0$ 基础解系等价的线性无关的向量组也是该方程组的基础解系.

证明.

两个等价的线性无关的向量组所含向量个数是相等的. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与之等价, 则 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表出, 从而 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$ 也是 $AX=0$ 的解.

因齐次线性方程组任一解 β 均可由基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表出, 从而由题设知 β 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 于是由定义知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为一个基础解系. □

例 (3.4.3)

试证明与 $AX=0$ 基础解系等价的线性无关的向量组也是该方程组的基础解系.

证明.

两个等价的线性无关的向量组所含向量个数是相等的. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与之等价, 则 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表出, 从而 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$ 也是 $AX=0$ 的解.

因齐次线性方程组任一解 β 均可由基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表出, 从而由题设知 β 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 于是由定义知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为一个基础解系. □

例 (3.4.3)

试证明与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 基础解系等价的线性无关的向量组也是该方程组的基础解系.

证明.

两个等价的线性无关的向量组所含向量个数是相等的. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与之等价, 则 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表出, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解.

因齐次线性方程组任一解 β 均可由基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表出, 从而由题设知 β 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 于是由定义知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为一个基础解系. □

例 (3.4.4)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明.

将 $\boldsymbol{B}$ 分块为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$，其中 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组，则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=(\boldsymbol{Ab}_1,\boldsymbol{Ab}_2,\cdots,\boldsymbol{Ab}_n)=\boldsymbol{O},$$

即

$$\boldsymbol{Ab}_i=\boldsymbol{0}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

即 $\boldsymbol{b}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，因而 $\boldsymbol{b}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出，这里 $r=R(\boldsymbol{A})$. 于是

$$R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\leqslant R(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})=n-R(\boldsymbol{A}),$$

即 $R(\boldsymbol{B})\leqslant n-R(\boldsymbol{A})$，也就是 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$. □

例 (3.4.4)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 证明 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

证明.

将 $\boldsymbol{B}$ 分块为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$, 其中 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n)=\boldsymbol{O},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i=\mathbf{0} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

即 $\boldsymbol{b}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解, 因而 $\boldsymbol{b}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出, 这里 $r=R(\boldsymbol{A})$. 于是

$$R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n) \leqslant R(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r})=n-R(\boldsymbol{A}),$$

即 $R(\boldsymbol{B}) \leqslant n-R(\boldsymbol{A})$, 也就是 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}) \leqslant n$. □

本节定理揭示了 $\boldsymbol{A}$ 的秩和 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解的关系，它不仅对求解 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 具有重要意义，而且如例 4 所表明的那样，常常可以通过研究齐次线性方程组的解来讨论系数矩阵的秩.

例 (3.4.5)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=n-1(n\geqslant 2)$，证明 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$.

证明.

由 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 知 $\det \boldsymbol{A}=0$, 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$. 便有

$$R(\boldsymbol{A})+R\left(\boldsymbol{A}^*\right)\leqslant n.$$

所以 $R\left(\boldsymbol{A}^*\right)\leqslant n-R(\boldsymbol{A})=1$. 又由 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 知 $\boldsymbol{A}$ 中有 $n-1$ 阶子式不为零, 因而 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$, 便有 $R\left(\boldsymbol{A}^*\right)\geqslant 1$. 这样我们就证得 $R\left(\boldsymbol{A}^*\right)=1$. □

综合例 5 和 §2.5 的例 6, 我们证明了如下常用结果: 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 则

$$R\left(\boldsymbol{A}^*\right)=\begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1\,(n\geqslant 2),\\ 0, & R(\boldsymbol{A})<n-1\,(n\geqslant 2).\end{cases}$$

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，则 $0\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$.
(2) $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$.
(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，则 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.
(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 当且仅当 $R(\boldsymbol{A})=n$.
(5) $R(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.
(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times s$ 的矩阵，则

$$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

(7) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 的矩阵，则

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n\leqslant R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}.$$

(8) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 的矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

(9) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})=R(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}).$$

用线性方程组的理论可以讨论空间平面的位置关系.

例 (3.4.6)

对于三个过原点的平面

$$\begin{cases} \pi_1: & a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ \pi_2: & a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ \pi_3: & a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{cases}$$

根据系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 的秩 r 的大小分别讨论如下:

(1) 当 $r=3$ 时, 由 §3.2 的定理 2 知, 线性方程组只有零解, 即三平面相交于一点的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=3$, 即 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

用线性方程组的理论可以讨论空间平面的位置关系.

例 (3.4.6)

对于三个过原点的平面

$$\begin{cases} \pi_1: & a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ \pi_2: & a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ \pi_3: & a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{cases}$$

根据系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 的秩 r 的大小分别讨论如下:

(1) 当 $r=3$ 时, 由 §3.2 的定理 2 知, 线性方程组只有零解, 即三平面相交于一点的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=3$, 即 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

例 (3.4.6)

(2) 当 $r=2$ 时，三平面有两平面相交于一直线，另一平面或通过这一交线，或与其中一平面重合. 这是因为假如 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量，由 $R(\boldsymbol{A})=2$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，而其中有两个向量线性无关. 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，那么 a_1, b_1, c_1 与 a_2, b_2, c_2 不成比例，因此平面 π_1 与 π_2 交于一条直线. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，可知 $\boldsymbol{\alpha}_3 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，当 $k_1k_2 \neq 0$ 时，平面 π_3 通过 π_1, π_2 两平面的交线. 当 $k_1k_2 = 0$ 时，若 $k_1 = 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_3 = k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，这时 π_2, π_3 平行，又因为它们都过原点，所以 π_2, π_3 两平面重合. 同理，若 $k_2 = 0$，则有 π_1, π_3 两平面重合.

(3) 当 $r=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的三个行向量两两线性相关，从而三平面两两平行，又因为它们都过原点，因而重合.

例 (3.4.6)

(2) 当 $r=2$ 时，三平面有两平面相交于一直线，另一平面或通过这一交线，或与其中一平面重合．这是因为假如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量，由 $R(\boldsymbol{A})=2$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，而其中有两个向量线性无关．假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，那么 a_1,b_1,c_1 与 a_2,b_2,c_2 不成比例，因此平面 π_1 与 π_2 交于一条直线．由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，可知 $\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，当 $k_1k_2\neq 0$ 时，平面 π_3 通过 π_1,π_2 两平面的交线．当 $k_1k_2=0$ 时，若 $k_1=0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_3=k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，这时 π_2,π_3 平行，又因为它们都过原点，所以 π_2,π_3 两平面重合．同理，若 $k_2=0$，则有 π_1,π_3 两平面重合．

(3) 当 $r=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的三个行向量两两线性相关，从而三平面两两平行，又因为它们都过原点，因而重合．

1 齐次线性方程组

2 非齐次线性方程组

对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.4}$$

设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则方程组 (3.4) 可记为 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}. \tag{3.5}$$

关于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$, 在本章 §3.2 中我们已得到如下重要结果:

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\text{ 有解}\Leftrightarrow \boldsymbol{b}\text{ 可由}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\text{ 线性表出}\Leftrightarrow R(\overline{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A}).$$

下面来讨论 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解的结构. 方程组 (3.5) 对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 称为方程组 (3.5) 的导出组. 非齐次线性方程组的解有如下性质:

性质 (3.4.4)

设 η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的两个解, 则 $\eta_2 - \eta_1$ 为其导出组的解.

证明.

因 $A(\eta_2 - \eta_1) = A\eta_2 - A\eta_1 = b - b = 0$, 故 $\eta_2 - \eta_1$ 为导出组的解. □

性质 (3.4.5)

设 η 为 $AX = b$ 的解, ξ 为 $AX = 0$ 的解, 则 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解.

证明.

由 $A(\eta + \xi) = A\eta + A\xi = b + 0 = b$, 知 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解. □

$AX = b$ 的任意一个解, 我们都称之为 $AX = b$ 的一个**特解**. 于是由以上两个性质得:

性质 (3.4.4)

设 η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $AX = b$ 的两个解，则 $\eta_2 - \eta_1$ 为其导出组的解.

证明.

因 $A(\eta_2 - \eta_1) = A\eta_2 - A\eta_1 = b - b = 0$，故 $\eta_2 - \eta_1$ 为导出组的解. □

性质 (3.4.5)

设 η 为 $AX = b$ 的解，ξ 为 $AX = 0$ 的解，则 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解.

证明.

由 $A(\eta + \xi) = A\eta + A\xi = b + 0 = b$，知 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解. □

$AX = b$ 的任意一个解，我们都称之为 $AX = b$ 的一个**特解**. 于是由以上两个性质得:

性质 (3.4.4)

设 η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $AX = b$ 的两个解，则 $\eta_2 - \eta_1$ 为其导出组的解.

证明.

因 $A(\eta_2 - \eta_1) = A\eta_2 - A\eta_1 = b - b = 0$，故 $\eta_2 - \eta_1$ 为导出组的解. □

性质 (3.4.5)

设 η 为 $AX = b$ 的解，ξ 为 $AX = 0$ 的解，则 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解.

证明.

由 $A(\eta + \xi) = A\eta + A\xi = b + 0 = b$，知 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解. □

$AX = b$ 的任意一个解，我们都称之为 $AX = b$ 的一个**特解**. 于是由以上两个性质得:

性质 (3.4.4)

设 η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $AX = b$ 的两个解，则 $\eta_2 - \eta_1$ 为其导出组的解.

证明.

因 $A(\eta_2 - \eta_1) = A\eta_2 - A\eta_1 = b - b = 0$，故 $\eta_2 - \eta_1$ 为导出组的解. □

性质 (3.4.5)

设 η 为 $AX = b$ 的解，ξ 为 $AX = 0$ 的解，则 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解.

证明.

由 $A(\eta + \xi) = A\eta + A\xi = b + 0 = b$，知 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解. □

$AX = b$ 的任意一个解，我们都称之为 $AX = b$ 的一个特解. 于是由以上两个性质得:

性质 (3.4.6)

若 γ_0 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的任一解 γ 都可表示成

$$\gamma=\gamma_0+\xi, \tag{3.6}$$

其中 ξ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个解. 因此，对于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的任一特解 γ_0，当 ξ 取遍它的导出组的全部解时，式 (3.6) 就给出 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的全部解.

证明.

显然

$$\gamma=\gamma_0+(\gamma-\gamma_0),$$

由性质 4, $\gamma-\gamma_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，令 $\xi=\gamma-\gamma_0$，就得性质的结论. 既然 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的任一解都能表示成式 (3.6) 的形式，当然在 ξ 取遍 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的全部解时，$\gamma=\gamma_0+\xi$ 就取遍 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的全部解. □

性质 (3.4.6)

若 γ_0 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一解 γ 都可表示成

$$\gamma=\gamma_0+\xi, \tag{3.6}$$

其中 ξ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解. 因此，对于 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一特解 γ_0，当 ξ 取遍它的导出组的全部解时，式 (3.6) 就给出 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的全部解.

证明.

显然

$$\gamma=\gamma_0+(\gamma-\gamma_0),$$

由性质 4，$\gamma-\gamma_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，令 $\xi=\gamma-\gamma_0$，就得性质的结论. 既然 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一解都能表示成式 (3.6) 的形式，当然在 ξ 取遍 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的全部解时，$\gamma=\gamma_0+\xi$ 就取遍 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的全部解. □

性质 6 说明，想要找出非齐次线性方程组的全部解，我们只要找到它的一个特解以及它的导出组的全部解就行了．若 γ_0 是非齐次方程组的一个特解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系，则非齐次方程组的任意一个解都可以表示成

$$\boldsymbol{X} = \gamma_0 + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意数．上式称为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的通解．

例 (3.4.7)

求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 的通解.

解

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

例 (3.4.7)

求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 的通解.

解

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

解

所以 $R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$, 因而原方程组有解, 且得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + x_2, \\ x_3 = \frac{1}{2} + x_4, \end{cases} \tag{3.7}$$

(1) 求对应齐次线性方程组的一个基础解系. 由方程组 (3.7) 的对应齐次线性方程组分别取 $x_2 = 1, x_4 = 0$ 和 $x_2 = 0, x_4 = 1$ 得基础解系

$$\xi_1 = (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \xi_2 = (0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 求非齐次线性方程组的一个特解. 由式 (3.7), 取 $x_2 = x_4 = 0$ 得

$$\gamma_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$$

故原方程组的通解为 $\boldsymbol{X} = \gamma_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2, k_1, k_2$ 为任意数.

解

所以 $R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$, 因而原方程组有解, 且得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + x_2, \\ x_3 = \frac{1}{2} + x_4, \end{cases} \tag{3.7}$$

(1) 求对应齐次线性方程组的一个基础解系.由方程组 (3.7) 的对应齐次线性方程组分别取 $x_2 = 1, x_4 = 0$ 和 $x_2 = 0, x_4 = 1$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 求非齐次线性方程组的一个特解.由式 (3.7), 取 $x_2 = x_4 = 0$ 得

$$\gamma_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$$

故原方程组的通解为 $\boldsymbol{X} = \gamma_0 + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2, k_1, k_2$ 为任意数.

解

所以 $R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$，因而原方程组有解，且得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + x_2, \\ x_3 = \frac{1}{2} + x_4, \end{cases} \tag{3.7}$$

(1) 求对应齐次线性方程组的一个基础解系. 由方程组 (3.7) 的对应齐次线性方程组分别取 $x_2 = 1, x_4 = 0$ 和 $x_2 = 0, x_4 = 1$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (0,0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 求非齐次线性方程组的一个特解. 由式 (3.7)，取 $x_2 = x_4 = 0$ 得

$$\gamma_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$$

故原方程组的通解为 $\boldsymbol{X} = \gamma_0 + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2, k_1, k_2$ 为任意数.

例 (3.4.8)

问 λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有惟一解？有无穷多解？无解？有解时并求解.

解

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda^2+\lambda-\lambda^3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda)\end{array}\right). \tag{3.8}$$

解

(1) 当 $\lambda = 1$ 时，$R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 1 < n = 3$，有无穷多解. 此时

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得同解方程组 $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. 由其对应的齐次线性方程组取 $x_2 = 1, x_3 = 0$ 和 $x_2 = 0, x_3 = 1$ 得对应齐次线性方程组的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

取 $x_2 = x_3 = 0$ 得非齐次线性方程组的特解 $\gamma_0 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，故原方程组的通解为 $\boldsymbol{X} = \gamma_0 + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2, k_1, k_2$ 为任意数.

解

(2) 当 $\lambda=-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，无解.

(3) 当 $\lambda\neq 1,-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=3=n$，所以有惟一解. 此时由式 (3.8) 直接得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-\lambda-1}{\lambda+2}, \\ x_2=\dfrac{1}{\lambda+2}, \\ x_3=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}. \end{cases}$$

解

(2) 当 $\lambda=-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，无解.

(3) 当 $\lambda\neq 1,-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=3=n$，所以有惟一解. 此时由式 (3.8) 直接得

$$
\begin{cases}
x_1=\dfrac{-\lambda-1}{\lambda+2},\\
x_2=\dfrac{1}{\lambda+2},\\
x_3=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.
\end{cases}
$$

例 (3.4.9)

判断方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ ax_1 + bx_2 = c, \\ a^2x_1 + b^2x_2 = c^2 \end{cases}$ 是否有解，其中 a, b, c 互不相等.

解

因

$$\det \overline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b),$$

由题设知 $\det \overline{A} \neq 0$，因而 $R(\overline{A}) = 3$，而 $R(A) = 2$，故 $R(A) \neq R(\overline{A})$，于是方程组无解.

例 (3.4.9)

判断方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ ax_1 + bx_2 = c, \\ a^2x_1 + b^2x_2 = c^2 \end{cases}$ 是否有解，其中 a, b, c 互不相等.

解

因

$$\det \overline{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b),$$

由题设知 $\det \overline{\boldsymbol{A}} \neq 0$，因而 $R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$，而 $R(\boldsymbol{A}) = 2$，故 $R(\boldsymbol{A}) \neq R(\overline{\boldsymbol{A}})$，于是方程组无解.

例 (3.4.10)

已知方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.9}$$

的系数矩阵 A 的秩等于 $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$ 的秩, 证明方程组 (3.9) 有解.

解

增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right),$$

显然, $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行向量组是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组的部分组, 因而 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行向量组可以由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表出, 从而 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行向量组的秩小于等于 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组的秩, 所以 $R(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$.又已知 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$, 于是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) \geqslant R(\overline{\boldsymbol{A}}). \tag{3.10}$$

又因 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的列向量组线性表出, 因此

$$R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\overline{\boldsymbol{A}}). \tag{3.11}$$

由式 (3.10), (3.11) 得 $R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}})$. 故方程组 (3.14) 有解.

解

增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right),$$

显然，$\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行向量组是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组的部分组，因而 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行向量组可以由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表出，从而 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行向量组的秩小于等于 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组的秩，所以 $R(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$.又已知 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$，于是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) \geqslant R(\overline{\boldsymbol{A}}). \tag{3.10}$$

又因 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的列向量组线性表出，因此

$$R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\overline{\boldsymbol{A}}). \tag{3.11}$$

由式 (3.10), (3.11) 得 $R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}})$. 故方程组 (3.14) 有解.

解

增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right),$$

显然，$\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行向量组是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组的部分组，因而 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行向量组可以由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表出，从而 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行向量组的秩小于等于 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组的秩，所以 $R(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$.又已知 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$，于是

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) \geqslant R(\overline{\boldsymbol{A}}). \tag{3.10}$$

又因 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的列向量组线性表出，因此

$$R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\overline{\boldsymbol{A}}). \tag{3.11}$$

由式 (3.10), (3.11) 得 $R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}})$. 故方程组 (3.14) 有解.

例 (3.4.11)

讨论两平面

$$\begin{aligned}\pi_1: &\quad a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ \pi_2: &\quad a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{aligned}$$

之间的关系.

解

设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix},\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\end{array}\right).$$

当 $R(A)=2$ 时, 非齐次线性方程组有解, 但 $R(A)=R(\overline{A})=2<n=3$, 因而有无穷多解. 所以两平面相交于一直线;
当 $R(A)=1, R(\overline{A})=2$ 时, 非齐次线性方程组无解, 所以两平面平行;
当 $R(A)=R(\overline{A})=1$ 时, 显然 $\overline{A}$ 的两个行向量线性相关, 即 a_1,b_1,c_1,d_1 与 a_2,b_2,c_2,d_2 成比例, 所以两平面重合.

例 (3.4.11)

讨论两平面

$$\begin{aligned} \pi_1: \quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ \pi_2: \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{aligned}$$

之间的关系.

解

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right).$$

当 $R(\boldsymbol{A}) = 2$ 时，非齐次线性方程组有解，但 $R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2 < n = 3$，因而有无穷多解. 所以两平面相交于一直线;

当 $R(\boldsymbol{A}) = 1, R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$ 时，非齐次线性方程组无解，所以两平面平行;

当 $R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 1$ 时，显然 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的两个行向量线性相关，即 a_1, b_1, c_1, d_1 与 a_2, b_2, c_2, d_2 成比例，所以两平面重合.

例 (3.4.11)

讨论两平面

$$\begin{aligned}\pi_1: \quad & a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ \pi_2: \quad & a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{aligned}$$

之间的关系.

解

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\end{array}\right).$$

当 $R(\boldsymbol{A})=2$ 时, 非齐次线性方程组有解, 但 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<n=3$, 因而有无穷多解. 所以两平面相交于一直线;

当 $R(\boldsymbol{A})=1, R(\overline{\boldsymbol{A}})=2$ 时, 非齐次线性方程组无解, 所以两平面平行;

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=1$ 时, 显然 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的两个行向量线性相关, 即 a_1, b_1, c_1, d_1 与 a_2, b_2, c_2, d_2 成比例, 所以两平面重合.

例 (3.4.11)

讨论两平面

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ \pi_2: &\quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{aligned}$$

之间的关系.

解

设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right).$$

当 $R(A) = 2$ 时, 非齐次线性方程组有解, 但 $R(A) = R(\overline{A}) = 2 < n = 3$, 因而有无穷多解. 所以两平面相交于一直线;
当 $R(A) = 1, R(\overline{A}) = 2$ 时, 非齐次线性方程组无解, 所以两平面平行;
当 $R(A) = R(\overline{A}) = 1$ 时, 显然 $\overline{A}$ 的两个行向量线性相关, 即 a_1, b_1, c_1, d_1 与 a_2, b_2, c_2, d_2 成比例, 所以两平面重合.

例 (3.4.12)

讨论空间三个平面

$$\begin{aligned}
\pi_1: &\quad a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\
\pi_2: &\quad a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\
\pi_3: &\quad a_3x+b_3y+c_3z=d_3
\end{aligned}$$

的位置关系.

解

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{array}\right).$$

现在我们利用向量组的线性相关性及线性方程组的理论来讨论这三个平面的位置关系.

解

1. $R(\boldsymbol{A}) = 3$.

这时 $R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$, 根据克拉默法则知, 上面方程组有惟一解, 所以三个平面交于一点 *(见图 (a))*.

2. $R(\boldsymbol{A}) = 2, R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$.

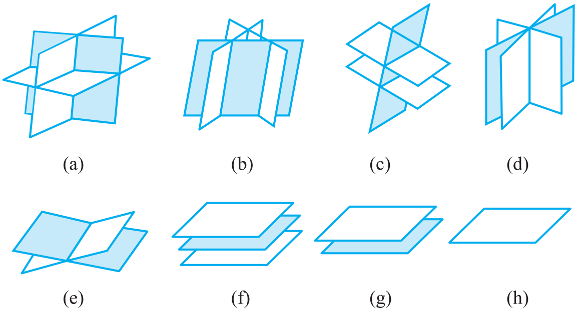
此时方程组无解, 所以三个平面不相交. 又因为 $R(\boldsymbol{A}) = 2$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的三个行向量 a_1, a_2, a_3 *(*它们也是三个平面的法向量*)* 线性相关, 即存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3, 使得 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$. 当 k_1, k_2, k_3 都不为零时, 有 $a_i \times a_j \neq 0 (i \neq j)$, 即任意两个平面相交, 且由

$$a_1 \cdot (a_2 \times a_3) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \det \boldsymbol{A} = 0$$

知 π_2 和 π_3 的交线与 π_1 平行. 同理可知, π_1 和 π_3 的交线与 π_2 平行; π_1 和 π_2 的交线与 π_3 平行. 因此三个平面形成一个三棱柱 *(见图 (b))*. 当 k_1, k_2, k_3 中有一个为零时, 三个平面中有两个平面平行, 另一平面与这两个平面相交 *(见图 (c))*.

解

3. $R(\boldsymbol{A})=2, R(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.
这时方程组有解，且解里仅含一个参数，故三个平面相交于一条直线. 又因为 $R(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，所以 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的三个行向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 线性相关，即存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1 b_1+k_2 b_2+k_3 b_3=0$. 当 k_1, k_2, k_3 都不为零时，三个平面互异 (见图 (d)). 当 k_1, k_2, k_3 中有一个为零时，三平面中有两个平面重合 (见图 (e)).
4. $R(\boldsymbol{A})=1, R(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.
此时方程组无解，所以三个平面不相交. 又因为 $R(\boldsymbol{A})=1$，所以三个平面平行; 而由 $R(\overline{\boldsymbol{A}})=2$ 知三个平面中至少有两个平面互异. 即三个平面平行，并且互异 (见图 (f)); 或三个平面平行，其中有两个平面重合 (见图 (g)).
5. $R(\boldsymbol{A})=1, R(\overline{\boldsymbol{A}})=1$.
这时方程组有解，且解里含两个参数，故这些解所对应的点必在一个平面内，即三个平面重合 (见图 (h)).
三个平面总共有上述八种不同的位置.


(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)

1 齐次线性方程组

2 非齐次线性方程组

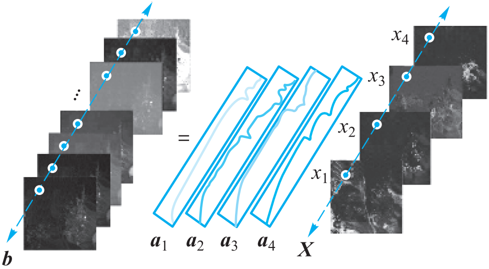
应用实例一：高光谱图像解混

高光谱图像由搭载在不同空间平台上的成像光谱仪，在电磁波谱的紫外、可见光、近红外和中红外区域，以数十至数百个连续且细分的光谱波段对目标区域同时成像得到. 由于成像设备限制和环境因素等的影响，高光谱图像中的每个像素是不同典型地物的光谱特征的线性组合，其数学模型可写为

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$ 表示高光谱图像中的一个像素 (也称为混合像元)，$\boldsymbol{a}_i \in \mathbf{R}^m$ 表示一个端元光谱特征，$x_i \in \mathbf{R}$ 则代表端元 $\boldsymbol{a}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 所占比例.

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$, $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 若已知像素 $\boldsymbol{b}$ 和光谱矩阵 $\boldsymbol{A}$, 计算成分向量 $\boldsymbol{X}$ 就是求解线性方程组 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 通常称为高光谱图像解混. 在实际应用中, 通常 $m\neq n$. 特别地, 在稀疏解混中一般假设 $m<n$. 试问, 当 $m<n$ 时, 上述方程组有解吗? 如果有解, 有多少解? 又如何求出其全部解?



应用实例二：投入产出模型

现代生产高度专业化的特点，使得一个经济系统内众多的生产部门之间紧密关联，相互依存. 每个部门在生产过程中都要消耗各个部门提供的产品或服务，称之为投入；每个部门也向各个部门及社会提供自己的产品或服务，称之为产出. 投入产出数学模型就是应用线性代数理论所建立的研究经济系统各部门之间投入产出综合平衡关系的经济数学模型.
若从事的是生产活动，则产出就是生产的产品. 这里我们只讨论价值型投入产出模型，投入和产出都用货币数值来度量.

应用实例二：投入产出模型

在一个经济系统中，每个部门 (企业) 作为生产者，它既要为自身及系统内其他部门 (企业) 进行生产而提供一定的产品，又要满足系统外部 (包括出口) 对它的产品需求．另一方面，每个部门 (企业) 为了生产其产品，又必然是消耗者，它既有物资方面的消耗 (消耗本部门 (企业) 和系统内其他部门 (企业) 所生产的产品，如原材料、设备、运输和能源等)，又有人力方面的消耗．消耗的目的是为了生产，生产的结果必然要创造新的价值，以用于支付劳动者的报酬、缴付税金和获取合理的利润．显然，对每个部门 (企业) 来讲，在物资方面的消耗和新创造的价值等于它的总产品的价值，这就是“投入”与“产出”之间的总的平衡关系．

(一) 分配平衡方程组

我们从产品分配的角度讨论投入产出的一种平衡关系. 即讨论: 在经济系统内每个部门 (企业) 的产品产量与系统内部对产品的消耗及系统外部对产品的需求处于平衡的情况下, 如何确定各部门 (企业) 的产品产量. 设某个经济系统由 n 个企业组成, 为帮助理解, 列表如下:

表: 企业投入产出平衡关系

调运数		销地				外部需求	总产值
		1	2	$\cdots$	n		
生产企业	1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	d_1	x_1
	2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	d_2	x_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n	c_{n1}	c_{n2}	$\cdots$	c_{nn}	d_n	x_n

其中 x_i 表示第 i 个企业的总产值, $x_i \geqslant 0$; d_i 表示系统外部对第 i 个企业的产值的需求量, $d_i \geqslant 0$; c_{ij} 表示第 j 个企业生产单位产值需要消耗第 i 个企业的产值数, 称为第 j 个企业对第 i 个企业的直接消耗系数, $c_{ij} \geqslant 0$. 表中编号相同的生产企业和消耗企业是指同一个企业. 如 "1" 号表示煤矿', "2" 号表示电厂, c_{21} 表示煤矿生产单位产值需要直接消耗电厂的产值数, c_{22} 表示电厂生产单位产值需要直接消耗自身的产值数, d_2 表示系统外部对电厂产值的需求量, x_2 表示电厂的总产值.
第 i 个企业分配给系统内各企业生产性消耗的产值数为

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n,$$

提供给系统外部的产值数为 d_i, 这两部分之和就是第 i 个企业的总产值 x_i. 于是可得分配平衡方程组

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\right) + d_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.12}$$

记

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix},$$

于是式 (3.12) 可表示成矩阵形式

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{d}, \tag{3.13}$$

即

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{d}, \tag{3.14}$$

式 (3.13) 或式 (3.14) 是投入产出数学模型之一，这是一个含 n 个未知量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和 n 个方程的线性方程组.

$\boldsymbol{C}$ 称为直接消耗系数矩阵，$\boldsymbol{X}$ 称为生产向量，$\boldsymbol{d}$ 称为外部需求向量. 显然它们的元均非负.

若设 x_{ij} 表示第 j 部门在生产过程中消耗第 i 部门的产品数量，一般称为中间产品，如 x_{12} 表示第 2 部门在生产过程中消耗第 1 部门的生产数量. 于是显然第 j 部门对第 i 部门的直接消耗系数

$$c_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

由上式可知，直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 具有以下性质:
(1) $0 \leqslant c_{ij} \leqslant 1, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$;
(2) $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} < 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n$.
可以证明 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}$ 是可逆的，且其逆的元均非负. 从而，分配平衡方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{d}$ 一定有惟一解 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{d}$.

实例一

某工厂有三个车间，设在某一生产周期内，车间之间直接消耗系数及总产值如下表：

直接消耗系数		消耗车间			外部需求	总产值
		1	2	3		
生产车间	1	0.25	0.10	0.10	d_1	400
	2	0.20	0.20	0.10	d_2	250
	n	0.10	0.10	0.20	d_3	300

为使各车间与系统内外需求平衡，求：(1) 各车间的最终产品 d_1, d_2, d_3; (2) 各车间之间的中间产品 $x_{ij}(i,j=1,2,3)$.

解

(1)

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.10 & -0.10 \\ -0.20 & 0.80 & -0.10 \\ -0.10 & -0.10 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 245 \\ 90 \\ 175 \end{pmatrix},$$

即 $d_1 = 245, d_2 = 90, d_3 = 175.$

(2) 由 $x_{ij} = c_{ij}x_j, i, j = 1, 2, 3,$ 得

$$x_{11} = 0.25 \times 400 = 100, \quad x_{12} = 0.1 \times 250 = 25, \quad x_{13} = 0.1 \times 300 = 30,$$

同理得

$$\begin{aligned} x_{21} &= 80, \quad x_{22} = 50, \quad x_{23} = 30, \\ x_{31} &= 40, \quad x_{32} = 25, \quad x_{33} = 60. \end{aligned}$$

实例二

设某一经济系统在某生产周期内的直接消耗系数矩阵 C 和外部需求向量如下:

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 0.25 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} 235 \\ 125 \\ 210 \end{pmatrix}$$

求该系统在这一生产周期内的总产值向量 $\boldsymbol{X}$.

解

由分配平衡方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{d}$ 的增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0.75 & -0.1 & -0.1 & 235 \\ -0.2 & 0.8 & -0.1 & 125 \\ -0.1 & -0.1 & 0.8 & 210 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & -0.85 & 5.9 & 1810 \\ 0 & 1 & -1.7 & -295 \\ 1 & 1 & -8 & -2100 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -8 & -2100 \\ 0 & 1 & -1.7 & -295 \\ 0 & -0.85 & 5.9 & 1810 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -6.3 & -1805 \\ 0 & 1 & -1.7 & -295 \\ 0 & 0 & 4.455 & 1559.25 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right)$$

知，$\boldsymbol{X}=(400,300,350)^{\mathrm{T}}$.

(二) 消耗平衡方程组

这里我们从消耗的角度讨论投入产出的另一种平衡关系，它是在系统内各个部门 (企业) 的总产值应与生产性消耗及新创造的价值 (净产值) 相等 (相平衡) 的情况下，讨论系统内各部门 (企业) 的总产值与新创造的价值 (净产值) 之间的相互关系.

某个经济系统的几个企业之间的直接消耗系数仍如前所述，那么第 j 个企业生产产值 x_j 需要消耗自身和其他企业的产值数（在原材料、运输、能源、设备等方面的生产性消耗）为 $c_{1j}x_j + c_{2j}x_j + \cdots + c_{nj}x_j$，如果生产产值 x_j 所获得的净产值为 z_j，那么 $x_j = c_{1j}x_j + c_{2j}x_j + \cdots + c_{nj}x_j + z_j$，即

$$x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\right) x_j + z_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.15}$$

方程组 (3.15) 称为消耗平衡方程组. 式 (3.15) 可写成

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\right) x_j = z_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.16}$$

记

$$
\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_{i1} & & & \\ & \sum_{i=1}^{n} c_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=1}^{n} c_{in} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},
$$

于是式 (3.15), (3.16) 的矩阵形式为

$$
\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Z}, \tag{3.17}
$$

即

$$
(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}. \tag{3.18}
$$

式 (3.17), (3.18) 是投入产出模型之二, 它揭示了经济系统的生产向量 $\boldsymbol{X}$ 、净产值向量 $\boldsymbol{Z}$ 与企业消耗矩阵 $\boldsymbol{D}$ 之间的关系.

由式 (3.12) 和式 (3.15) 可得
$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\right) + d_i\right] = \sum_{j=1}^{n}[(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_j) + z_j]$, 故

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{j=1}^{n} z_j. \tag{3.19}$$

式 (3.19) 表明, 系统外部对各企业产值的需求量总和等于系统内部各企业净产值总和.

小结 (I)

- 性质：齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 解向量的线性组合也是它的解.
- 定义：$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 解向量的全体 $W=\{\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{AX}=\mathbf{0}\}$ 构成一个向量空间，W 的一组基称为方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.
- 等价命题：设 $\xi_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一组解向量，满足
  (1) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关;
  (2) 方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任一解向量都可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性表出，
  则称 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.
- 定理：若 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，则方程组有基础解系且所含解向量的个数为 $n-r$.
- 齐次线性方程组的通解：设 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 n 元方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},\ (k_1,\cdots,k_{n-r}\text{ 为任意常数})$$

小结 (II)

- 性质: 若 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解, 则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是其导出组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解.
- 性质: 若 $\boldsymbol{\eta}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解, $\boldsymbol{\xi}$ 是其导出组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解, 则 $\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解.
- 性质: 若 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一解 $\boldsymbol{\eta}$ 都可表示成 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\xi}$, 其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个解.
- 非齐次线性方程组的通解: 设 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=r<n$, $\boldsymbol{\eta}_0$ 是 n 元方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系, 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-\zeta}\boldsymbol{\xi}_{n-r}, \ (k_1, \cdots, k_{n-r}\text{ 为任意常数}).$$