第 2 章 矩阵

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

例 (1)

某航空公司在 A, B, C, D 四个城市之间开辟了若干条航线，用图 1 表示四个城市间的航班图，若从 A 到 B 有航班，则用从 A 指向 B 的带箭头的线连接 A 与 B.

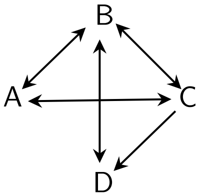

图: 1

用表格表示如下:

		出发地			
		A	B	C	D
出发地	A		$\surd$	$\surd$	
	B	$\surd$		$\surd$	$\surd$
	C	$\surd$	$\surd$		$\surd$
	D		$\surd$		

其中 $\surd$ 表示有航班. 为了便于研究, 记上述表格中的 $\surd$ 为 1, 空白处为 0, 则得到一个数表:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该数表反映了四个城市间的交通连接情况.

用表格表示如下:

		出发地			
		A	B	C	D
	A		√	√	
出	B	√		√	√
发	C	√	√		√
地	D		√		

其中 √ 表示有航班. 为了便于研究, 记上述表格中的 √ 为 1, 空白处为 0, 则得到一个数表:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该数表反映了四个城市间的交通连接情况.

例 (2)

假设一个经济系统由煤炭、电力和钢铁三个部门组成，各部门之间的分配如表 2-1 所示，其中每栏中的数表示该部门总产出的比例. 如表 2-1 中的第三栏所示，电力部门分配总产出的 40% 给煤炭部门，50% 给钢铁部门，剩下的 10% 给电力部门作为运转费用.

表 2-1 煤炭、电力、钢铁三部门之间的分配

采购部门	部门的产出分配		
	煤炭	电力	钢铁
煤炭	0.0	0.4	0.6
电力	0.6	0.1	0.2
钢铁	0.4	0.5	0.2

将上述表格简单地用数表 $\begin{pmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$ 表示，它具体描述了经济系统各部门产出的分配情况.

例 (2)

假设一个经济系统由煤炭、电力和钢铁三个部门组成，各部门之间的分配如表 2-1 所示，其中每栏中的数表示该部门总产出的比例．如表 2-1 中的第三栏所示，电力部门分配总产出的 40% 给煤炭部门，50% 给钢铁部门，剩下的 10% 给电力部门作为运转费用．

表 2-1 煤炭、电力、钢铁三部门之间的分配

采购部门	部门的产出分配		
	煤炭	电力	钢铁
煤炭	0.0	0.4	0.6
电力	0.6	0.1	0.2
钢铁	0.4	0.5	0.2

将上述表格简单地用数表 $\begin{pmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$ 表示，它具体描述了经济系统各部门产出的分配情况．

例 (3)

含有 n 个未知量、m 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的未知量的系数可排列成一个 m 行、n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}, \end{pmatrix}$$

这样的表称为 $m \times n$ 矩阵，可用黑体大写字母 A 表示．a_{ij} 称为矩阵 A 的元素，它位于矩阵 A 的第 i 行、第 j 列的交叉处．

例 (3)

含有 n 个未知量、m 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的未知量的系数可排列成一个 m 行、n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}, \end{pmatrix}$$

这样的表称为 $m \times n$ **矩阵**, 可用黑体大写字母 $\boldsymbol{A}$ 表示. a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**, 它位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 列的交叉处.

定义 (1)

$m \times n$ 个数按一定顺序排成一个 m 行、n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

此数表称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵. 矩阵一般用黑体大写字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$ 表示，有时亦记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，如果 $m = n$，就称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 全为实（复）数，就称 $\boldsymbol{A}$ 为实（复）矩阵.

定义 (1)

$m \times n$ 个数按一定顺序排成一个 m 行、n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

此数表称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ **矩阵**. 矩阵一般用黑体大写字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$ 表示，有时亦记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 或 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$.

在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，如果 $m = n$，就称 $\boldsymbol{A}$ 为 n **阶方阵**. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 全为实 (复) 数，就称 $\boldsymbol{A}$ 为实 (复) 矩阵.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为行矩阵; 只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵. 一般也可以将列矩阵用黑体小写字母表示.
当两个矩阵的行数相等、列数也相等时, 就称它们是同型矩阵.
元素都是零的矩阵称为零矩阵, 记作 $\boldsymbol{O}$.
注意: 不同型的零矩阵是不同的.

(1) 三角形矩阵.

在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中, 位于第 i 行与第 i 列交叉位置的元素 $a_{ii}(i=1,\ 2,\cdots,n)$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素, 其所在的对角线称为方阵的主对角线. 下面介绍几种常见的特殊方阵.

(1) 三角形矩阵.

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足条件 $a_{ij}=0(i>j;i,j=1,2,\cdots,n)$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线以下的元素全为零, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶上三角形矩阵, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(1) 三角形矩阵.

(1) 三角形矩阵.

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足条件 $a_{ij}=0(i<j;i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线以上的元素全为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶下三角形矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

上三角形矩阵与下三角形矩阵统称为三角形矩阵.

(2) 对角矩阵.

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij}=0(i\neq j)$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线以外的元素全为零, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对角矩阵, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

也记作 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\,(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 显然, 对角矩阵既是上三角形矩阵, 也是下三角形矩阵.

(3) 数量矩阵.

如果 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ii}=a(i=1,2,\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为数量矩阵, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

(4) 单位矩阵.

如果 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ii}=1(i=1,2,\cdots,n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶单位矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}_n$, 简记为 $\boldsymbol{E}$, 即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵的运算包括矩阵的加法、矩阵与数的乘法、矩阵的乘法以及矩阵的转置等. 首先给出两个矩阵相等的概念.

如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素都相等, 则称这两个矩阵相等, 记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

定义 (2)

设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}), \boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意: 两个矩阵只有同型时, 才能进行加法运算.

由于矩阵的加法归结为它们的元素的加法，也就是数的加法，所以不难验证矩阵的加法满足下列运算规律:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$; (交换律)

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$. (结合律)

例 (4)

有某种物资（单位：t）需从两个产地运往三个销地，调运了两次，两次调运方案用矩阵分别表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&1&2\end{pmatrix},$$

则从各产地运往各销地的两次调运物资的总量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&3\\2&1&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1+0&2+1&3+3\\2+2&5+1&3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&6\\4&6&5\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

定义 (3)

数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$, 规定为

$$\lambda\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵满足下列运算规律 (设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 $m \times n$ 矩阵, λ, μ 均为数):
(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A})$;
(2) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{A}$;
(3) $\lambda(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$.
设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 记 $-\boldsymbol{A} = (-1) \cdot \boldsymbol{A} = (-a_{ij})$, $-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.
显然, 有

$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O},$$

其中 $\boldsymbol{O}$ 为各元素均为 0 的同型矩阵. 于是, 矩阵的减法定义为

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}).$$

例 (5)

已知

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&3&1&2\\2&1&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&2&2&1\\0&2&1&3\end{pmatrix},$$

求 $4A+2B$.

解

由于

$$4A=\begin{pmatrix}4&4&8&-4\\0&12&4&8\\8&4&0&-4\end{pmatrix},\quad 2B=\begin{pmatrix}-4&2&2&2\\2&4&4&2\\0&4&2&6\end{pmatrix},$$

所以 $4A+2B=\begin{pmatrix}0&6&10&-2\\2&16&8&10\\8&8&2&2\end{pmatrix}$.

例 (5)

已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

求 $4\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$.

解

由于

$$4\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 12 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad 2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

所以 $4\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & -2 \\ 2 & 16 & 8 & 10 \\ 8 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

例 (6)

设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 8 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

且有 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解

由 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 知,

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -5 \\ 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

例 (6)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 8 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

且有 $A + 2X = B$, 求矩阵 X.

解

由 $A + 2X = B$ 知,

$$X = \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -5 \\ 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

例 (7)

某地有四个工厂，生产三种产品. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示一年中各工厂生产各种产品的数量，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示各种产品的单位价格 (单位: 元) 和单位利润 (单位: 元)，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示各工厂的总收入和总利润.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix},$$

其中，$a_{ik}(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$ 是第 i 个工厂生产第 k 种产品的数量，b_{k1} 及 $b_{k2}(k=1,2,3\ )$ 分别是第 k 种产品的单位价格和单位利润，c_{i1} 及 $c_{i2}(i=1,2,3,4)$ 分别是第 i 个工厂生产三种产品的总收入和总利润. 则:

例 (7)

$$\begin{aligned}
\text{第一个工厂的总收入为 } c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, \\
\text{总利润为 } c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}; \\
\text{第二个工厂的总收入为 } c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}, \\
\text{总利润为 } c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}; \\
\text{第三个工厂的总收入为 } c_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}, \\
\text{总利润为 } c_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}; \\
\text{第四个工厂的总收入为 } c_{41} &= a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31}, \\
\text{总利润为 } c_{42} &= a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} + a_{43}b_{32}.
\end{aligned}$$

因此, 矩阵 A, B, C 的元素之间有下列关系:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \quad (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2),$$

即矩阵 C 的元素 c_{ij} 是矩阵 A 的第 i 行元素与矩阵 B 的第 j 列对应元素的乘积之和. 称矩阵 C 是矩阵 A 与矩阵 B 的乘积.

定义 (4)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$, 那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. 记号 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 常读作 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

特别地，行矩阵 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is})$ 与列矩阵 $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}$ 相乘，即

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

是一个数 c_{ij}，这表明若 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$，则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和.

注意: 只有当第一个矩阵（左矩阵）的列数与第二个矩阵（右矩阵）的行数相等时，两个矩阵才能相乘. 两个矩阵相乘所得矩阵的行数同第一个矩阵（左矩阵）的行数，列数同第二个矩阵（右矩阵）的列数.

例 (8)

设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA.

解

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ aa_1 + bb_1 + cc_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 (8)

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ aa_1 + bb_1 + cc_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 (9)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 $n \times 1$ 矩阵和 $1 \times n$ 矩阵, 且

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

计算 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

例 (9)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 $n \times 1$ 矩阵和 $1 \times n$ 矩阵, 且

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

计算 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

解

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{BA} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n.$$

$\boldsymbol{AB}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{BA}$ 是一阶矩阵 (运算的最后结果为一阶矩阵时，可以把它与数等同看待，不必加矩阵符号，但是在运算过程中，一般不能把一阶矩阵看成数).

例 (10)

对于一个含有 n 个未知量、m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_n = b_m, \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

分别为 $m \times n$ 矩阵、$n \times 1$ 矩阵和 $m \times 1$ 矩阵，则该线性方程组可以写成如下矩阵形式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

例 (10)

对于一个含有 n 个未知量、m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,
分别为 $m \times n$ 矩阵、$n \times 1$ 矩阵和 $m \times 1$ 矩阵，则该线性方程组可以写成如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

在许多实际问题中，会遇到一组变量由另一组变量线性表示的问题，如变量 y_1，$y_2, \cdots, y_m$ 可由变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性表示，即

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

这种由变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的变换称为线性变换.

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ （称 $\boldsymbol{A}$ 为线性变换的系数矩阵），

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

则上述线性变换可以写成矩阵的形式，即

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

注意: (1) 一般情况下, 矩阵的乘法不满足交换律, 即 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$, 这从例 8 和例 9 中就可以看出. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.
(2) 当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 时, 不一定有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$. 如例 8 所示.
(3) 矩阵的乘法不满足消去律, 即当 $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC}$, 且 $\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{O}$ 时, 不一定有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.
例如, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然, $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC}$, 且 $\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{O}$, 但 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$.

但在运算都可行的情况下，矩阵的乘法仍满足下列运算规律:

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$; (结合律)

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$; (左分配律)

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$; (右分配律)

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$ (其中 λ 为数).

对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$, 容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\quad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n},$$

其中 $\boldsymbol{E}_m$ 与 $\boldsymbol{E}_n$ 分别表示 m 阶单位矩阵与 n 阶单位矩阵. 可见，在矩阵乘积中，单位矩阵类似于数 1 的作用.

有了矩阵的乘法，就可以定义 n 阶方阵的幂. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 是正整数，称

$$\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k\text{个}}$$

为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂. 规定

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}.$$

显然，只有方阵的幂才有意义.
由于矩阵的乘法满足结合律，所以方阵的幂满足下列运算规律:

$$\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{A}^\tau = \boldsymbol{A}^{k+\tau}, \quad \left(\boldsymbol{A}^k\right)^\tau = \boldsymbol{A}^{k\tau}$$

其中 k, τ 为正整数.
但因为矩阵的乘法一般不满足交换律，所以对于两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，一般来说，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^k \neq \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B}^k$.

例 (11)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$. 证明:

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}\ (n\geqslant 2\ \text{为正整数}).$$

证明.

用数学归纳法证明. 当 $n=2$ 时,

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix},$$

结论成立.

例 (11)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$. 证明:

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}\ (n\geqslant 2\text{ 为正整数}).$$

证明.

用数学归纳法证明. 当 $n=2$ 时,

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix},$$

结论成立. □

证明.

假设 $n=k$ 时，结论成立，即

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}.$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k\\ 0 & 0 & \lambda^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}.$$

于是等式得证. □

证明.

假设 $n=k$ 时, 结论成立, 即

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}.$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k\\ 0 & 0 & \lambda^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}.$$

于是等式得证. $\square$

定义 (5)

把 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成相应的列, 得到的 $n \times m$ 矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**, 记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (或 $\boldsymbol{A}'$).

例如, 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

由矩阵的定义，易得下列运算规律:

(1) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

同时，可以证明:

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{A}^{n})^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{n}$.

事实上, 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$, 记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{n\times m}$, 于是有

$$c_{ji}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},$$

而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行为 $(b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{si})$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列为 $(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{js})^{\mathrm{T}}$, 因此

$$d_{ij}=(b_{1i},b_{2i},\ldots,b_{si})\begin{pmatrix}a_{j1}\\a_{j2}\\\vdots\\a_{js}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},$$

所以

$$d_{ij}=c_{ji}\quad(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m),$$

即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}$, 也就是 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 类推可证 $(\boldsymbol{A}^{n})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

那么，$\boldsymbol{A}$ 称为对称矩阵；若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，即

$$a_{ij}=-a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

那么，$\boldsymbol{A}$ 称为反对称矩阵.
例如，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}12 & 6 & 1\\ 6 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

是三阶对称矩阵，而

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

是三阶反对称矩阵.
易知，对称矩阵的特点：它的元素以主对角线为对称轴对应相等；而反对称矩阵的特点：以主对角线为对称轴的对应元素的绝对值相等，符号相反，且主对角线上各元素均为 0.

例 (12)

设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\\3&2\end{pmatrix},$$

那么

$$AB=\begin{pmatrix}5&6\\10&7\\0&-5\end{pmatrix},$$

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&2\\2&3&-1\end{pmatrix},\quad B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-1&2\end{pmatrix},$$

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}5&10&0\\6&7&-5\end{pmatrix}=(AB)^{\mathrm{T}}.$$

例 (13)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是 n 阶反对称矩阵.

证明.

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，而

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}&=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})+(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}).\end{aligned}$$

所以结论成立. □

例 (13)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是 n 阶反对称矩阵.

证明.

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$, 而

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}} &= (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\\ &= \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})+(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}).\end{aligned}$$

所以结论成立. □

定义 (6)

由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素构成的行列式 (各元素的位置不变), 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$.

应该注意, 方阵与行列式是两个不同的概念, n 阶方阵是 n^2 个数按一定方式排成的数表, 而 n 阶行列式则是这些数 (也就是数表 $\boldsymbol{A}$) 按一定的运算法则所确定的一个数.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, λ 为数, 则有下列等式成立 (请读者自己证明):

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$;

(2) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$;

(3) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

定义 (6)

由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素构成的行列式 (各元素的位置不变), 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$.

应该注意, 方阵与行列式是两个不同的概念, n 阶方阵是 n^2 个数按一定方式排成的数表, 而 n 阶行列式则是这些数 (也就是数表 $\boldsymbol{A}$) 按一定的运算法则所确定的一个数.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, λ 为数, 则有下列等式成立 (请读者自己证明):

(1) $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = |\boldsymbol{A}|$;

(2) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$;

(3) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

例 (14)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=-1$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

解

由于

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| &= |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})| \\ &= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = -|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}| \\ &= -|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,\end{aligned}$$

所以

$$2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0.$$

即

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0.$$

例 (14)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=-1$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

解

由于

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| &= \left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = \left|\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\right| \\ &= |\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = -\left|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\right| \\ &= -|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,\end{aligned}$$

所以

$$2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0.$$

即

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0.$$

解一元一次方程 $ax=b$，当 $a\neq 0$ 时，存在一个数 a^{-1}，使 $x=a^{-1}b$ 为该方程的解；而求解多元一次方程，等价于求解该多元一次方程对应的矩阵形式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，那么是否存在一个矩阵，使这个矩阵乘以 $\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{x}$ 呢？

定义 (7)

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果有一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，满足

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且把方阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

显然，若 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵.

例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}.$$

因此，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个逆矩阵.

注意: 如果 A 是可逆的, 则 A 的逆矩阵唯一.
事实上, 设 B, C 都是 A 的逆矩阵, 则一定有

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C,$$

由逆矩阵的唯一性, 通常将 A 的逆矩阵记作 A^{-1}.

定义 (8)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵, A_{ij} 为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式, 记

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

利用行列式的按行 (列) 展开定理, 可以证明

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

利用上式给出一个方阵可逆的充分必要条件.

定理 (1)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

证明.

先证必要性. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，则有 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$，故 $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{E}| = 1$，即 $|\boldsymbol{A}^{-1}| \cdot |\boldsymbol{A}| = 1$. 所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

再证充分性. 设 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 由伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的性质，有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

因 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则 $\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right) = \left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

这说明 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$. 证毕.

定理 (1)

设 A 是 n 阶方阵, 则 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*,$$

其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

证明.

先证必要性. 由于 A 是可逆的, 则有 A^{-1}, 使 $A^{-1}A = E$, 故 $\left|A^{-1}A\right| = |E| = 1$, 即 $\left|A^{-1}\right| \cdot |A| = 1$. 所以 $|A| \neq 0$.

再证充分性. 设 $|A| \neq 0$. 由伴随矩阵 A^* 的性质, 有

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

因 $|A| \neq 0$, 则 $A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E$.

这说明 A 是可逆的, 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. 证毕. □

定义 (9)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵；否则，称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.

由定理 1 可知，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.

推论 (1)

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$)，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可逆，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明.

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，有 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=1\neq 0$，得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，且

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

□

定义 (9)

设 A 是 n 阶方阵, 若 $|A| = 0$, 则称 A 为奇异矩阵; 否则, 称 A 为非奇异矩阵.

由定理 1 可知, n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 为非奇异矩阵.

推论 (1)

对于 n 阶方阵 A, 若存在 n 阶方阵 B, 使 $AB = E$ (或 $BA = E$), 则 A 一定可逆, 且 $B = A^{-1}$.

证明.

由 $AB = E$, 有 $|A||B| = 1 \neq 0$, 得 $|A| \neq 0$, 故 A^{-1} 存在, 且

$$B = EB = \left(A^{-1}A\right)B = A^{-1}E = A^{-1}.$$

定义 (9)

设 A 是 n 阶方阵, 若 $|A|=0$, 则称 A 为奇异矩阵; 否则, 称 A 为非奇异矩阵.

由定理 1 可知, n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 为非奇异矩阵.

推论 (1)

对于 n 阶方阵 A, 若存在 n 阶方阵 B, 使 $AB=E$ (或 $BA=E$), 则 A 一定可逆, 且 $B=A^{-1}$.

证明.

由 $AB=E$, 有 $|A||B|=1\neq 0$, 得 $|A|\neq 0$, 故 A^{-1} 存在, 且

$$B=EB=\left(A^{-1}A\right)B=A^{-1}E=A^{-1}.$$

□

方阵的逆矩阵满足下列性质

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 数 $\lambda\neq 0$, 则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 亦可逆, 且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵且均可逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 亦可逆, 且 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 亦可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$;

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则有 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$;

(6) 设 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $a_i\neq 0(i=1,\ 2,\cdots,n)$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\operatorname{diag}\left(a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_n^{-1}\right)$.

证明.

(3) 由于

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right) &= \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{-1} \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

根据推论 1, 即有 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(4)

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E},$$

所以 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$. 证毕. □

证明.

(3) 由于

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right) &= \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{-1} \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

根据推论 1, 即有 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(4)

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E},$$

所以 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$. 证毕. □

例 (15)

求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解

因为 $|\boldsymbol{A}|=2\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 先求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

$$\begin{array}{lll} A_{11}=3, & A_{12}=-3, & A_{13}=1, \\ A_{21}=-6, & A_{22}=10, & A_{23}=-4, \\ A_{31}=2, & A_{32}=-4, & A_{33}=2. \end{array}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 (15)

求方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解

因为 $|\boldsymbol{A}| = 2 \neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 先求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

$$\begin{aligned} &A_{11} = 3, && A_{12} = -3, && A_{13} = 1, \\ &A_{21} = -6, && A_{22} = 10, && A_{23} = -4, \\ &A_{31} = 2, && A_{32} = -4, && A_{33} = 2. \end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 (16)

在第 1 章例 2 中，令

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}4\\11\\11\end{pmatrix},$$

则线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4,\\3x_1+4x_2-2x_3=11,\\3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$$

可以写成矩阵形式:

$$Ax=b.$$

例 (16)

由于 $|\boldsymbol{A}| = 60 \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60} \end{pmatrix}.$$

于是, 方程组的解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例 (17)

设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix},$$

求矩阵 X, 并满足

$$AXB=C.$$

解

若 A^{-1}, B^{-1} 均存在, 则用 A^{-1} 左乘上式, 用 B^{-1} 右乘上式, 有

$$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1},$$

即

$$X=A^{-1}CB^{-1}.$$

例 (17)

设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix},$$

求矩阵 X, 并满足

$$AXB=C.$$

解

若 A^{-1}, B^{-1} 均存在, 则用 A^{-1} 左乘上式, 用 B^{-1} 右乘上式, 有

$$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1},$$

即

$$X=A^{-1}CB^{-1}.$$

解

由于 $|\boldsymbol{A}|=2, |\boldsymbol{B}|=1$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{B}^{-1}$ 均存在, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注意: 解矩阵方程时, 要区分矩阵的左乘与右乘. 因为矩阵的乘法不满足交换律, 所以不能混淆左乘与右乘.

例 (18)

设三阶方阵 A, B 满足 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 且 $A = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}\right)$, 求 B.

解

由 $A^{-1}BA - BA = 6A$, 得

$$\left(A^{-1} - E\right) BA = 6A.$$

上式两端右乘 A^{-1}, 得

$$\left(A^{-1} - E\right) B = 6E.$$

由于 $\left|\left(A^{-1} - E\right) B\right| = |6E| \neq 0$, 则 $\left|A^{-1} - E\right| \neq 0$, 即 $A^{-1} - E$ 可逆, 所以

例 (18)

设三阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 6\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 且 $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}\right)$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解

由 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 6\boldsymbol{A}$, 得

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 6\boldsymbol{A}.$$

上式两端右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{E}.$$

由于 $\left|\left(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{B}\right| = |6\boldsymbol{E}| \neq 0$, 则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{E}\right| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{E}$ 可逆, 所以

解

$$B = 6\left(A^{-1} - E\right)^{-1} = 6\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 (19)

设 A 可逆, 且 $A^*B = A^{-1} + B$, 证明 B 可逆. 又当 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 时, 求 B.

证明.

由 $A^*B = A^{-1} + B = A^{-1} + EB$, 得

$$(A^* - E)\,B = A^{-1}. \tag{2-1}$$

于是 $|A^* - E|\,|B| = \left|A^{-1}\right| \neq 0$, 所以 $|B| \neq 0$, 即 B 可逆. 再由式 (2-1), 得

$$B = (A^* - E)^{-1} A^{-1} = \left[A\,(A^* - E)\right]^{-1} = (|A|E - A)^{-1},$$

例 (19)

设 A 可逆, 且 $A^*B = A^{-1} + B$, 证明 B 可逆. 又当 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 时, 求 B.

证明.

由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}$, 得

$$(\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}. \tag{2-1}$$

于是 $|\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{B}| = \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| \neq 0$, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{B}$ 可逆. 再由式 (2-1), 得

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{E})^{-1}\,\boldsymbol{A}^{-1} = [\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{E})]^{-1} = (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1},$$

□

证明.

其中

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

按逆矩阵的性质 (2) 和求逆公式，易得

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

□

定理 1 不仅给出了一个方阵可逆的判定准则，同时也给出了求逆矩阵的一种方法，这种方法称为伴随矩阵法. 当方阵的阶数较高时，这种方法就不太适用了. 在本章的第 6 节中我们将要介绍一种简便、实用的求逆矩阵的方法.

对于行数和列数比较多的矩阵 $\boldsymbol{A}$，在其计算过程中经常采用矩阵分块法，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

将 $\boldsymbol{A}$ 分成子块的分法很多，下面列举三种分块形式：

(1) $\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$;

(2) $\left(\begin{array}{c:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$;

(3) $\left(\begin{array}{c:c:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$.

在分法 (1) 中, 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{A}_{21}=(a_{31},a_{32}),\quad \boldsymbol{A}_{22}=(a_{33},a_{34}),$$

即 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的子块, 而 $\boldsymbol{A}$ 成为以 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22}$ 为元素的分块矩阵.

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算类似, 具体讨论如下.

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵, 采用同样的分块法, 有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 亦为同型矩阵, 则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}+\boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2}+\boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

设 k 为数, 则 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=\begin{pmatrix} k\boldsymbol{A}_{11} & k\boldsymbol{A}_{12} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1r} \\ k\boldsymbol{A}_{21} & k\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\boldsymbol{A}_{s1} & k\boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}.$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times l$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $l \times n$ 矩阵, 将 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别分成

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1}, \boldsymbol{A}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{A}_{it}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j}, \boldsymbol{B}_{2j}, \cdots, \boldsymbol{B}_{tj}$ 的行数, 则有

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj} (i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, r)$.

注意: 在分块矩阵的乘法中, 要求左矩阵的列的分法与右矩阵的行的分法是一致的.

例 (20)

设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

求 AB.

解

将 A, B 分别分块成

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 4 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}.$$

解

而

$$
\begin{aligned}
A_1B_{11}+B_{21}&=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-3&4\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix},\\
A_1+B_{22}&=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\3&1\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

所以

$$
AB=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\ \hdashline -2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{array}\right).
$$

(3) 设

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\
\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}
\end{pmatrix},
$$

则

$$
\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}}
\end{pmatrix}.
$$

(4) 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & \boldsymbol{O} & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix},$$

除主对角线上的子块外，其余子块都为零矩阵，且 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 称为分块对角矩阵 (或准对角矩阵)，简记为 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m)$.

准对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式具有下述性质:

$$\det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_m|\,.$$

若有与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的准对角矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & \boldsymbol{O} & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{B}_m \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{B}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 亦为同阶方阵, 则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & & \boldsymbol{O} & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m \end{pmatrix};$$

若 $|\boldsymbol{A}_i| \neq 0(i=1,2,\cdots,m)$, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 并有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & \boldsymbol{O} & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{A}_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 (21)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:cc}5&0&0\\ \hdashline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$, 且

$$\boldsymbol{A}_1=(5),\quad \boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}.$$

于是, 有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\begin{array}{c:cc}\frac{1}{5}&0&0\\ \hdashline 0&1&-1\\0&-2&3\end{array}\right).$$

例 (21)

设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解

把矩阵 A 分块为 $A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$，且

$$A_1=(5),\quad A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}.$$

于是，有

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{c|cc}\frac{1}{5}&0&0\\\hline 0&1&-1\\0&-2&3\end{array}\right).$$

例 (22)

设 A, C 分别为 r 阶可逆矩阵、s 阶可逆矩阵，求分块矩阵

$$X = \begin{pmatrix} O & A \\ C & B \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

解

设分块矩阵 (各子块符合分块矩阵乘法的要求)

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

由

$$XX^{-1} = \begin{pmatrix} O & A \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = E,$$

例 (22)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ 分别为 r 阶可逆矩阵、s 阶可逆矩阵, 求分块矩阵

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

解

设分块矩阵 (各子块符合分块矩阵乘法的要求)

$$\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} \end{pmatrix},$$

由

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} \end{pmatrix}=\boldsymbol{E},$$

解

得

$$\begin{pmatrix} AX_{21} & AX_{22} \\ CX_{11}+BX_{21} & CX_{12}+BX_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

比较等式两端对应的子块, 可得矩阵方程组

$$\begin{cases} AX_{21} = E_r, \\ AX_{22} = O, \\ CX_{11}+BX_{21} = O, \\ CX_{12}+BX_{22} = E_s. \end{cases}$$

注意到 A, C 可逆, 可解得

$$\begin{aligned} X_{21} &= A^{-1}, & X_{22} &= O, \\ X_{11} &= -C^{-1}BA^{-1}, & X_{12} &= C^{-1}. \end{aligned}$$

所以 $X^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$

解

特别地, 当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 时, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

这一结论还可推广到一般情形, 即分块矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_s & & & \end{pmatrix},$$

若子块 $\boldsymbol{A}_i (i=1,2,\cdots,s)$ 都可逆, 则

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \\ & & \boldsymbol{A}_{s-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

本节介绍矩阵的初等变换, 并建立矩阵的初等变换与矩阵乘法的联系.

定义 (10)

对矩阵施行的以下三种变换称为**矩阵的初等行 (列) 变换**:
(1) 交换矩阵的第 i 行 (列) 和第 j 行 (列), 记为 $r_i \leftrightarrow r_j\,(c_i \leftrightarrow c_j)$;
(2) 以一个非零常数 k 乘以矩阵的第 i 行 (列), 记为 $k \times r_i\,(k \times c_i)$;
(3) 把矩阵的第 i 行 (列) 所有元素的 k 倍加到第 j 行 (列) 对应的元素上, 记为 $r_j + k \times r_i\,(c_j + k \times c_i)$.

初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.

显然, 初等变换都是可逆的, 且逆变换也是同类的初等变换.
例如, $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换仍为 $r_i \leftrightarrow r_j$, $k \times r_i$ 的逆变换为 $\frac{1}{k} \times r_i$, $r_j + k \times r_i$ 的逆变换为 $r_j + (-k) \times r_i$.

本节介绍矩阵的初等变换，并建立矩阵的初等变换与矩阵乘法的联系.

定义 (10)

对矩阵施行的以下三种变换称为矩阵的初等行 (列) 变换:
(1) 交换矩阵的第 i 行 (列) 和第 j 行 (列)，记为 $r_i \leftrightarrow r_j\,(c_i \leftrightarrow c_j)$;
(2) 以一个非零常数 k 乘以矩阵的第 i 行 (列)，记为 $k \times r_i\,(k \times c_i)$;
(3) 把矩阵的第 i 行 (列) 所有元素的 k 倍加到第 j 行 (列) 对应的元素上，记为 $r_j + k \times r_i\,(c_j + k \times c_i)$.

初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.

显然，初等变换都是可逆的，且逆变换也是同类的初等变换.
例如，$r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换仍为 $r_i \leftrightarrow r_j$, $k \times r_i$ 的逆变换为 $\frac{1}{k} \times r_i$, $r_j + k \times r_i$ 的逆变换为 $r_j + (-k) \times r_i$.

定义 (11)

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 记为 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$.

容易验证, 矩阵的等价关系具有下列性质:

(1) 反身性: $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{A}$;

(2) 对称性: 若 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{A}$;

(3) 传递性: 若 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C}$.

定义 (11)

如果矩阵 A 经有限次初等变换化为矩阵 B, 则称矩阵 A 与 B 等价, 记为 $A \cong B$.

容易验证, 矩阵的等价关系具有下列性质:
(1) 反身性: $A \cong A$;
(2) 对称性: 若 $A \cong B$, 则 $B \cong A$;
(3) 传递性: 若 $A \cong B, B \cong C$, 则 $A \cong C$.

例 (23)

已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 6 \\ -1 & -3 & 4 & -17 \\ 1 & 4 & -7 & 3 \\ -1 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$，对其作如下初等行变换:

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \\ -1 & -3 & 4 & -17 \\ 3 & 2 & 9 & 6 \\ -1 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & -10 & 30 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+10\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -143 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

则 $A \cong B$.

矩阵 B 称为行阶梯形矩阵，它具有下列特征:
(1) 元素全为零的行 (简称零行) 位于非零行的下方;
(2) 各非零行的首非零元 (即该行从左至右的第一个不为零的元素) 的列标随着行标的增大而严格增大 (即首非零元的列标一定不小于行标).
对矩阵 B 再作初等行变换:

$$B \xrightarrow{-\frac{1}{143}\times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+(-4)\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 59 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+14\times r_3]{r_1+(-59)\times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C,$$

则有 $B \cong C$, 从而 $A \cong C$.

矩阵 C 称为行最简形矩阵, 它具有下列特征:
(1) 它是行阶梯形矩阵;
(2) 各非零行的首非零元都是 1;
(3) 每个首非零元所在列的其余元素都是 0.
如果对矩阵 C 再作初等列变换:

$$C \xrightarrow[c_3+3\times c_2]{c_3+(-5)\times c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}.$$

矩阵 D 的左上角为一个单位矩阵 E_3, 其他各子块都是零矩阵. 称矩阵 D 为矩阵 A 的等价标准形.

事实上，有下面的结论.

定理 (2)

任何一个矩阵 A 总可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵，并进一步化为行最简形矩阵.

定理 (3)

任何一个矩阵都有等价标准形，矩阵 A 与 B 等价，当且仅当它们有相同的等价标准形.

注意: 与矩阵 A 等价的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵不是唯一的，但矩阵 A 的等价标准形是唯一的.

两个等价的矩阵不一定是相等的，那么它们之间有什么关系呢？为此，我们引入初等矩阵的概念.

事实上，有下面的结论.

定理 (2)

任何一个矩阵 A 总可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵，并进一步化为行最简形矩阵.

定理 (3)

任何一个矩阵都有等价标准形，矩阵 A 与 B 等价，当且仅当它们有相同的等价标准形.

注意: 与矩阵 A 等价的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵不是唯一的，但矩阵 A 的等价标准形是唯一的.

两个等价的矩阵不一定是相等的，那么它们之间有什么关系呢？为此，我们引入初等矩阵的概念.

事实上，有下面的结论.

定理 (2)

任何一个矩阵 A 总可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵，并进一步化为行最简形矩阵.

定理 (3)

任何一个矩阵都有等价标准形，矩阵 A 与 B 等价，当且仅当它们有相同的等价标准形.

注意: 与矩阵 A 等价的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵不是唯一的，但矩阵 A 的等价标准形是唯一的.

两个等价的矩阵不一定是相等的，那么它们之间有什么关系呢？为此，我们引入初等矩阵的概念.

定义 (12)

由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

显然，初等矩阵都是方阵，三种初等变换对应着三种初等矩阵.

交换 E 的第 i 行和第 j 行 (或交换 E 的第 i 列和第 j 列)，得

$$E(i,j)=\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 0 && \cdots && 1 && \\ &&& 1 &&&&& \\ && \vdots && \ddots && \vdots && \\ &&&&& 1 &&& \\ && 1 && \cdots && 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array};$$

定义 (12)

由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

显然, 初等矩阵都是方阵, 三种初等变换对应着三种初等矩阵.
交换 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行和第 j 行 (或交换 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列和第 j 列), 得

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & \cdots & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & \cdots & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array};$$

用常数 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行 (或第 i 列), 得

$$\boldsymbol{E}[i(k)] = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行};$$

将 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行 (或将第 i 列的 k 倍加到第 j 列), 得

$$\boldsymbol{E}[i+j(k)] = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

这三类矩阵就是全部的初等矩阵. 容易证明, 初等矩阵都是可逆的, 它们的逆矩阵还是初等矩阵. 事实上,

$$\boldsymbol{E}(i,j)^{-1} = \boldsymbol{E}(i,j), \quad \boldsymbol{E}[i(k)]^{-1} = \boldsymbol{E}\left[i\left(\frac{1}{k}\right)\right],$$

$$\boldsymbol{E}[i+j(k)]^{-1} = \boldsymbol{E}[i+j(-k)].$$

定理 (4)

对一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于用相应的 m 阶初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$; 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于用相应的 n 阶初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$.

证明.

这里只证初等行变换的情形，初等列变换的情形可同样证明. 将矩阵 A 分块，即

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_i, \cdots, \boldsymbol{A}_j, \cdots, \boldsymbol{A}_m)^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{A}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kn})$. 由分块矩阵的乘法，得 □

定理 (4)

对一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于用相应的 m 阶初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于用相应的 n 阶初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$.

证明.

这里只证初等行变换的情形，初等列变换的情形可同样证明. 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块，即

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_i, \cdots, \boldsymbol{A}_j, \cdots, \boldsymbol{A}_m\right)^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{A}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kn})$. 由分块矩阵的乘法，得 □

证明.

$$\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix},$$

这相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行交换;

$$\boldsymbol{E}[i(k)]\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \vdots\\ k\boldsymbol{A}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix},$$

证明.

这相当于用数 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行;

$$\boldsymbol{E}[i+j(k)]\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_i+k\boldsymbol{A}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix},$$

这相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行. 证毕. □

例如，对矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&2\end{pmatrix},$$

有

$$E[1+2(2)]A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&7\\0&1&2\end{pmatrix},$$

而

$$A\xrightarrow{r_1+2\times r_2}\begin{pmatrix}2&3&7\\0&1&2\end{pmatrix}=E[1+2(2)]A.$$

这说明对 A 施行的将第二行的元素乘以 2 加到第一行的对应元素上的初等行变换所得到的矩阵等于用初等矩阵 $E[1+2(2)]$ 左乘 A.

推论 (2)

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_s, \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \cdots \boldsymbol{P}_s \boldsymbol{B} \boldsymbol{Q}_1 \cdots \boldsymbol{Q}_t.$$

由于初等矩阵都是可逆矩阵, 因此还可以得到下面的推论.

推论 (3)

$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}.$$

推论 (2)

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_s, \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \cdots \boldsymbol{P}_s \boldsymbol{B} \boldsymbol{Q}_1 \cdots \boldsymbol{Q}_t.$$

由于初等矩阵都是可逆矩阵, 因此还可以得到下面的推论.

推论 (3)

$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 Q, 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}.$$

本章第 3 节中给出了求逆矩阵的公式法——伴随矩阵法. 但对于较高阶的矩阵, 用伴随矩阵法求逆矩阵的计算量太大. 下面给出另一种简便、可行的求逆矩阵的方法———初等变换法.

定理 (5)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则下面的命题是等价的:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是可逆的;

(2) $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵;

(3) 存在 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_s;$$

(4) $\boldsymbol{A}$ 可经过一系列初等行 (列) 变换化为 $\boldsymbol{E}$.

证明.

(1) $\Rightarrow$ (2). 由定理 2 和定理 3, 对 $\boldsymbol{A}$ 施行若干次初等变换可将其化为等价标准形 $\boldsymbol{D}$. 而由定理 4, 对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等变换相当于用相应的初等矩阵乘 $\boldsymbol{A}$, 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且初等矩阵可逆, 则其乘积亦可逆, 所以 $\boldsymbol{D}$ 可逆, 即 $|\boldsymbol{D}| \neq 0$. 于是 $\boldsymbol{D}$ 不能有任一行 (列) 的元素全为 0 , 因此 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{E}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{E}$, 根据等价的对称性知 $\boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{E}$ 可经若干次初等变换化为 $\boldsymbol{A}$, 从而存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_r, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使

$$\boldsymbol{P}_1 \cdots \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{E} \boldsymbol{P}_{r+1} \cdots \boldsymbol{P}_s = \boldsymbol{A},$$

即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_s.$$

证明.

(1) $\Rightarrow$ (2). 由定理 2 和定理 3, 对 $\boldsymbol{A}$ 施行若干次初等变换可将其化为等价标准形 $\boldsymbol{D}$. 而由定理 4, 对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等变换相当于用相应的初等矩阵乘 $\boldsymbol{A}$, 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且初等矩阵可逆, 则其乘积亦可逆, 所以 $\boldsymbol{D}$ 可逆, 即 $|\boldsymbol{D}| \neq 0$. 于是 $\boldsymbol{D}$ 不能有任一行 (列) 的元素全为 0 , 因此 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{E}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{E}$, 根据等价的对称性知 $\boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{E}$ 可经若干次初等变换化为 $\boldsymbol{A}$, 从而存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_r, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使

$$\boldsymbol{P}_1 \cdots \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{E} \boldsymbol{P}_{r+1} \cdots \boldsymbol{P}_s = \boldsymbol{A},$$

即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_s.$$

□

证明.

(3) $\Rightarrow$ (4). 由

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s,$$

有

$$\boldsymbol{P}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},$$

由于 $\boldsymbol{P}_1^{-1}, \boldsymbol{P}_2^{-1}, \cdots, \boldsymbol{P}_s^{-1}$ 仍是初等矩阵, 由定理 4, 上式说明对 $\boldsymbol{A}$ 施行若干次初等行变换可将其化为 $\boldsymbol{E}$. 列的情形类似可证得.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 $\boldsymbol{A}$ 可经过一系列初等行变换化为 $\boldsymbol{E}$, 则存在初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_s$, 使

$$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

由于初等矩阵都是可逆的, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 证毕. □

证明.

(3) $\Rightarrow$ (4). 由

$$A = P_1 P_2 \cdots P_s,$$

有

$$P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = E,$$

由于 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots, P_s^{-1}$ 仍是初等矩阵，由定理 4，上式说明对 A 施行若干次初等行变换可将其化为 E. 列的情形类似可证得.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 A 可经过一系列初等行变换化为 E，则存在初等矩阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_s$，使

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_s A = E.$$

由于初等矩阵都是可逆的，从而 A 可逆. 证毕. □

下面介绍用初等变换求逆矩阵的方法.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由定理 5 的命题 (4) 和定理 4 知, 存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m$, 使

$$\boldsymbol{P}_m \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}. \tag{2-2}$$

上式两端右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 则有

$$\boldsymbol{P}_m \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{-1}. \tag{2-3}$$

式 (2-2) 和式 (2-3) 表明, 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一系列初等行变换可将其化为 $\boldsymbol{E}$, 则对 $\boldsymbol{E}$ 施行相同的一系列初等行变换可将其化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是得到用初等变换求逆矩阵的方法: 构造一个 $n \times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})$, 用初等行变换将左边的 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{E}$ 时, 右边的 $\boldsymbol{E}$ 便化为了 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\boldsymbol{E} \vdots \boldsymbol{A}^{-1}\right).$$

例 (24)

设

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},
$$

求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解

对 $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})$ 作初等行变换:

$$
(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

例 (24)

设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1}.

解

对 $(A \vdots E)$ 作初等行变换:

$$(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

解

$$\xrightarrow{r_3+(-2)\times r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+3\times r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+(-1)\times r_2]{\substack{r_2+r_3 \\ r_1+2\times r_3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

于是 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

注意: 也可以利用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \hdashline \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \hdashline \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

本节将通过矩阵的子式来判断矩阵的一个内在特性, 即所谓矩阵的秩. 秩对于矩阵理论的研究和应用十分重要.

定义 (13)

在一个 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任意选定 k 行和 k 列, 位于这些选定的行和列的交叉位置的 k^2 个元素按原来的次序所组成的 k 阶行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式.

显然, $k \leqslant \min\{s, n\}$ (s, n 中较小的一个).

例 (25)

在矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&6&1\\0&1&-2&4&0\\0&0&0&5&3\\0&1&1&0&2\end{pmatrix}$$

中，选定第 $1,3$ 行和第 $3,4$ 列，则位于其交叉位置的元素所组成的二阶行列式

$$\begin{vmatrix}3&6\\0&5\end{vmatrix}$$

就是 $\boldsymbol{A}$ 的一个二阶子式．易见，$\boldsymbol{A}$ 的二阶子式共有 $\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_5^2=60$ 个．

一般地, $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $\mathrm{C}_s^k\cdot\mathrm{C}_n^k$ 个.

定义 (14)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $s\times n$ 矩阵, 如果至少存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶子式不为 0, 而 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式 (如果存在的话) 都为 0, 则称数 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记为 $r(\boldsymbol{A})$. 并规定零矩阵的秩等于 0.

由行列式的性质可知, 在 $\boldsymbol{A}$ 中, 当所有 $r+1$ 阶子式都为 0 时, 所有高于 $r+1$ 阶的子式也全为 0, 因此, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数. 若 $r(\boldsymbol{A})=r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 一定存在一个 r 阶非零子式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式. 一般来说, $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式可能不止一个.

例 (26)

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$ 的秩.

解

在 $\boldsymbol{A}$ 中, 存在一个二阶子式

$$\begin{vmatrix}1&3\\2&-5\end{vmatrix}\neq 0,$$

又 $\boldsymbol{A}$ 的三阶子式只有一个 $|\boldsymbol{A}|$, 且

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{vmatrix}=0.$$

故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

例 (27)

已知矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

的秩为 3, 求 a 的值.

解

由于 $r(\boldsymbol{A}) = 3$, 则 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

例 (27)

已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

的秩为 3, 求 a 的值.

解

由于 $r(\boldsymbol{A})=3$, 则 $|\boldsymbol{A}|=0$, 即

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

解

$$|\boldsymbol{A}| = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3 = 0.$$

由此得 $a=-3$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时，显然，有 $r(\boldsymbol{A})=1$，不符合题意；

当 $a=-3$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的左上角的三阶子式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

故当且仅当 $a=-3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=3$.

解

$$|\boldsymbol{A}| = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3 = 0.$$

由此得 $a=-3$ 或 $a=1$.
当 $a=1$ 时, 显然, 有 $r(\boldsymbol{A})=1$, 不符合题意;
当 $a=-3$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的左上角的三阶子式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

故当且仅当 $a=-3$ 时, $r(\boldsymbol{A})=3$.

例 (28)

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩.

解

A 是一个行阶梯形矩阵, 其非零行只有三行, 故 A 的所有四阶子式全为零. 此外, A 的一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

所以 $r(A) = 3$.

例 (28)

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩.

解

A 是一个行阶梯形矩阵, 其非零行只有三行, 故 A 的所有四阶子式全为零. 此外, A 的一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

所以 $r(A) = 3$.

从例 28 可以看出，一个行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $s \times n$ 矩阵，显然，有 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{s, n\}$. 当 $r(\boldsymbol{A}) = \min\{s, n\}$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵；否则称 $\boldsymbol{A}$ 为降秩矩阵.

利用定义计算矩阵的秩，需要由高阶到低阶考虑矩阵的子式，当矩阵的行数与列数较多时，是非常麻烦的. 由于行阶梯形矩阵的秩实际上就是其非零行的个数，故行阶梯形矩阵的秩很容易判断. 而矩阵都可以经过初等行变换化为行阶梯形矩阵，因而可考虑借助初等变换求矩阵的秩.

定理 (6)

两个同型矩阵等价的充分必要条件是它们的秩相等.

证明.

设 A 与 B 是两个同型矩阵, 首先证明: 若 $A \cong B$, 则 $r(A) = r(B)$. 这只需证明每类初等行 (列) 变换不改变矩阵的秩即可. 显然, 第一类初等变换和第二类初等变换不改变矩阵的秩, 因此只就第三类初等变换证明即可.

设 $A \xrightarrow{r_j + k \times r_i} B$, 考察 B 的任意 $r(A)+1$ 阶子式 $|B_1|$:

若 B_1 不包含 B 的第 j 行, 则 $|B_1|$ 也是 A 的 $r(A)+1$ 阶子式, 从而 $|B_1| = 0$;

若 B_1 既包含 B 的第 j 行也包含 B 的第 i 行, 则由行列式的性质知, $|B_1|$ 与 A 的一个 $r(A)+1$ 阶子式相等, 从而 $|B_1| = 0$;

若 B_1 包含 B 的第 j 行但不包含 B 的第 i 行, 则由行列式的性质知, $|B_1| = |A_1| + k|A_2|$, 这里 $|A_1|$ 与 $|A_2|$ 都是 A 的 $r(A)+1$ 阶子式, 从而也有 $|B_1| = 0$. $\square$

定理 (6)

两个同型矩阵等价的充分必要条件是它们的秩相等.

证明.

设 A 与 B 是两个同型矩阵, 首先证明: 若 $A \cong B$, 则 $r(A) = r(B)$. 这只需证明每类初等行 (列) 变换不改变矩阵的秩即可. 显然, 第一类初等变换和第二类初等变换不改变矩阵的秩, 因此只就第三类初等变换证明即可.

设 $A \xrightarrow{r_j + k \times r_i} B$, 考察 B 的任意 $r(A)+1$ 阶子式 $|B_1|$:

若 B_1 不包含 B 的第 j 行, 则 $|B_1|$ 也是 A 的 $r(A)+1$ 阶子式, 从而 $|B_1| = 0$;

若 B_1 既包含 B 的第 j 行也包含 B 的第 i 行, 则由行列式的性质知, $|B_1|$ 与 A 的一个 $r(A)+1$ 阶子式相等, 从而 $|B_1| = 0$;

若 B_1 包含 B 的第 j 行但不包含 B 的第 i 行, 则由行列式的性质知, $|B_1| = |A_1| + k|A_2|$, 这里 $|A_1|$ 与 $|A_2|$ 都是 A 的 $r(A)+1$ 阶子式, 从而也有 $|B_1| = 0$. □

定理 (6)

两个同型矩阵等价的充分必要条件是它们的秩相等.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是两个同型矩阵, 首先证明: 若 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$, 则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$. 这只需证明每类初等行 (列) 变换不改变矩阵的秩即可. 显然, 第一类初等变换和第二类初等变换不改变矩阵的秩, 因此只就第三类初等变换证明即可.

设 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_j + k \times r_i} \boldsymbol{B}$, 考察 $\boldsymbol{B}$ 的任意 $r(\boldsymbol{A}) + 1$ 阶子式 $|\boldsymbol{B}_1|$:

若 $\boldsymbol{B}_1$ 不包含 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行, 则 $|\boldsymbol{B}_1|$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的 $r(\boldsymbol{A}) + 1$ 阶子式, 从而 $|\boldsymbol{B}_1| = 0$;

若 $\boldsymbol{B}_1$ 既包含 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行也包含 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行, 则由行列式的性质知, $|\boldsymbol{B}_1|$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $r(\boldsymbol{A}) + 1$ 阶子式相等, 从而 $|\boldsymbol{B}_1| = 0$;

若 $\boldsymbol{B}_1$ 包含 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行但不包含 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行, 则由行列式的性质知, $|\boldsymbol{B}_1| = |\boldsymbol{A}_1| + k|\boldsymbol{A}_2|$, 这里 $|\boldsymbol{A}_1|$ 与 $|\boldsymbol{A}_2|$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的 $r(\boldsymbol{A}) + 1$ 阶子式, 从而也有 $|\boldsymbol{B}_1| = 0$. □

定理 (6)

两个同型矩阵等价的充分必要条件是它们的秩相等.

证明.

综上所述, B 的任意 $r(A)+1$ 阶子式都为零, 于是 $r(B) \leqslant r(A)$.

注意到 $B \xrightarrow{r_j+(-k)\times r_i} A$, 由上面的讨论知, $r(A) \leqslant r(B)$. 因此有 $r(A)=r(B)$.

反过来, 设 $r(A)=r(B)=r$, 则 A 与 B 具有相同的等价标准形 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 故由本章的定理 3 知, $A \cong B$. 证毕. □

定理 6 表明, 初等变换不改变矩阵的秩. 因此利用定理 6 求一个矩阵的秩, 相关问题只需用初等行变换将矩阵化为行阶梯形矩阵, 则其非零行的个数便是矩阵的秩.

例 (29)

设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

求 $r(A)$, 并求 A 的一个最高阶非零子式.

解

对 A 作初等行变换将其化为行阶梯形矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+(-2)\times r_1 \\ r_4+(-3)\times r_1}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2(-1)\times r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

例 (29)

设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

求 $r(A)$, 并求 A 的一个最高阶非零子式.

解

对 A 作初等行变换将其化为行阶梯形矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+(-2)\times r_1 \\ r_4+(-3)\times r_1}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2(-1)\times r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

解

$$\xrightarrow[r_4-4\times r_2]{r_3-3\times r_2}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-\times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为行阶梯形矩阵的非零行的个数为 3, 故 $r(\boldsymbol{A}) = 3$.

再求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式. 由 $r(\boldsymbol{A}) = 3$ 知, $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式为三阶子式, $\boldsymbol{A}$ 的三阶子式共有 $\mathrm{C}_4^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 = 40$ 个, 要从 40 个子式中找出一个非零子式是相当麻烦的. 现在选取 $\boldsymbol{A}$ 的第一列、第二列和第四列组成新矩阵, 记为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix},$$

解

$$\xrightarrow[r_4-4\times r_2]{r_3-3\times r_2}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-\times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为行阶梯形矩阵的非零行的个数为 3, 故 $r(\boldsymbol{A})=3$.
再求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式. 由 $r(\boldsymbol{A})=3$ 知, $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式为三阶子式, $\boldsymbol{A}$ 的三阶子式共有 $\mathrm{C}_4^3\cdot\mathrm{C}_5^3=40$ 个, 要从 40 个子式中找出一个非零子式是相当麻烦的. 现在选取 $\boldsymbol{A}$ 的第一列、第二列和第四列组成新矩阵, 记为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix},$$

解

其对应的行阶梯形矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此 $r(\boldsymbol{B}) = 3$. 故 $\boldsymbol{B}$ 中必有三阶非零子式. $\boldsymbol{B}$ 的三阶子式共有 $\mathrm{C}_4^3 = 4$ 个, 在这 4 个三阶子式中选取一个非零子式显然要方便些. 事实上, $\boldsymbol{B}$ 的前 3 行元素构成的子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

因此这个子式便是 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.

例 (30)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & \lambda & -1 & 2\\ 5 & 3 & \mu & 6\end{pmatrix}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=2$, 求 λ 与 μ 的值.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & \lambda & -1 & 2\\ 5 & 3 & \mu & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-5)\times r_1]{r_2+(-3)\times r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4\\ 0 & 8 & \mu-5 & -4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)\times r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4\\ 0 & 5-\lambda & \mu-1 & 0\end{pmatrix}.$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=2$, 则 $5-\lambda=0$, $\mu-1=0$, 即 $\lambda=5, \mu=1$.

例 (30)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & \lambda & -1 & 2\\ 5 & 3 & \mu & 6\end{pmatrix}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=2$, 求 λ 与 μ 的值.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & \lambda & -1 & 2\\ 5 & 3 & \mu & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-5)\times r_1]{r_2+(-3)\times r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4\\ 0 & 8 & \mu-5 & -4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)\times r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4\\ 0 & 5-\lambda & \mu-1 & 0\end{pmatrix}.$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=2$, 则 $5-\lambda=0$, $\mu-1=0$, 即 $\lambda=5, \mu=1$.

例 (31)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆方阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 矩阵. 证明: $r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{B})$.

证明.

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故 $\boldsymbol{A}$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积, 即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_s.$$

于是

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_s \boldsymbol{B}.$$

这表明 $\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 经过 s 次初等行变换而得到的. 由定理 6 可知 $r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{B})$. □

例 (31)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆方阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 矩阵. 证明: $r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{B})$.

证明.

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故 $\boldsymbol{A}$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积, 即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_s.$$

于是

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_s \boldsymbol{B}.$$

这表明 $\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 经过 s 次初等行变换而得到的. 由定理 6 可知 $r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{B})$. $\square$