第 3 节 拉普拉斯定理

安徽财经大学

统计与应用数学学院

拉普拉斯 (Laplace) 定理是行列式按一行 (列) 展开的推广. 下面我们先将余子式与代数余子式的概念加以推广.

定义 (2.3.1)

在 n 阶行列式 D 中, 任取 k 行、k 列 $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 位于这 k 行、k 列的交点上的 k^2 个元按原来的相对位置组成的 k 阶行列式 S, 称为 D 的一个 k **阶子式**. 在 D 中划去 S 所在的 k 行与 k 列, 余下的元按原来的相对位置组成的 $n-k$ 阶行列式 M 称为 S 的**余子式**. 设 S 的各行位于 D 中第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行 $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$, S 的各列位于 D 中第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列 $(j_1 < j_2 < \cdots < j_k)$, 则称

$$A = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M$$

为 S 的**代数余子式**.

例如，在四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

中选取第 $1, 3$ 行，第 $2, 4$ 列得一个二阶子式

$$S = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

S 的余子式为

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

S 的代数余子式为

$$A = (-1)^{(1+3)+(2+4)} M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

例如，在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

中选取第 $1,3$ 行，第 $2,4$ 列得一个二阶子式

$$S=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2,$$

S 的余子式为

$$M=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

S 的代数余子式为

$$A=(-1)^{(1+3)+(2+4)}M=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

例如，在四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

中选取第 $1,3$ 行，第 $2,4$ 列得一个二阶子式

$$S = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

S 的余子式为

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

S 的代数余子式为

$$A = (-1)^{(1+3)+(2+4)} M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

例如，在四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

中选取第 $1, 3$ 行，第 $2, 4$ 列得一个二阶子式

$$S = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

S 的余子式为

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

S 的代数余子式为

$$A = (-1)^{(1+3)+(2+4)} M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

由于从 n 个行中任取 k 行，共有 C_n^k 种取法，从 n 个列中任取 k 列，也有 C_n^k 种取法，故 n 阶行列式 D 的 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 阶子式共有 $(\mathrm{C}_n^k)^2$ 个。而对 D 的每一个子式 S，它的余子式 M 和代数余子式 A 都由 S 惟一确定。

定理 (2.3.1 拉普拉斯定理)

若在行列式 D 中任意取定 k 个行 (列) $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$，则由这 k 个行 (列) 组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于 D.

设 D 的某 k 行 (列) 组成的所有 k 阶子式分别为 $S_1, S_2, \cdots, S_t \left(t = \mathrm{C}_n^k\right)$，它们相应的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$，则

$$D = S_1A_1 + S_2A_2 + \cdots + S_tA_t.$$

当 $k = 1$ 时，拉普拉斯定理就是行列式按一行 (列) 展开，因此拉普拉斯定理是行列式按一行 (列) 展开性质的推广，它是行列式按某 k 行 (列) 的展开.

由于从 n 个行中任取 k 行，共有 C_n^k 种取法，从 n 个列中任取 k 列，也有 C_n^k 种取法，故 n 阶行列式 D 的 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 阶子式共有 $(\mathrm{C}_n^k)^2$ 个．而对 D 的每一个子式 S，它的余子式 M 和代数余子式 A 都由 S 惟一确定．

定理 (2.3.1 拉普拉斯定理)

若在行列式 D 中任意取定 k 个行 (列) $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$，则由这 k 个行 (列) 组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于 D.

设 D 的某 k 行 (列) 组成的所有 k 阶子式分别为 $S_1, S_2, \cdots, S_t \left(t = \mathrm{C}_n^k\right)$，它们相应的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$，则

$$D = S_1A_1 + S_2A_2 + \cdots + S_tA_t.$$

当 $k = 1$ 时，拉普拉斯定理就是行列式按一行 (列) 展开，因此拉普拉斯定理是行列式按一行 (列) 展开性质的推广，它是行列式按某 k 行 (列) 的展开.

例 (2.3.1)

计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

按第 $1,2$ 行展开，这两行元共组成 $\mathrm{C}_5^2=10$ 个二阶子式，但其中不为 0 的二阶子式只有 3 个，即

$$S_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3,\quad S_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2,\quad S_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

它们对应的代数余子式为

例 (2.3.1)

计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

按第 $1,2$ 行展开，这两行元共组成 $\mathrm{C}_5^2=10$ 个二阶子式，但其中不为 0 的二阶子式只有 3 个，即

$$S_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3,\quad S_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2,\quad S_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

它们对应的代数余子式为

解

$$S_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad S_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad S_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

它们对应的代数余子式为

$$A_1 = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_2 = (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_3 = (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

故由拉普拉斯定理 $D = S_1A_1 + S_2A_2 + S_3A_3 = 6.$

由拉普拉斯定理可得下列常用结果: 分块下三角形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{C}_{n\times n} \end{pmatrix}$$

或分块上三角形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{m\times m} & * \\ O & \boldsymbol{C}_{n\times n} \end{pmatrix}$$

的行列式

$$\det \boldsymbol{A}=(\det \boldsymbol{B})(\det \boldsymbol{C}).$$

事实上, 对于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{C}_{n\times n} \end{pmatrix},$$

在 $\det \boldsymbol{A}$ 的前 m 行的所有 m 阶子式中, 只有一个可能不为零, 故由拉普拉斯定理, 按前 m 行展开, 易知 $\det \boldsymbol{A}=(\det \boldsymbol{B})(\det \boldsymbol{C})$ 成立. 同理, 对于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{m\times m} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_{n\times n} \end{pmatrix},$$

按 $\det \boldsymbol{A}$ 的前 m 列展开便知结论成立.

特别地, 分块对角矩阵行列式的常用结果: 设 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_t)$, 其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 为方阵, 则

$$\det \boldsymbol{A}=(\det \boldsymbol{A}_1)(\det \boldsymbol{A}_2)\cdots(\det \boldsymbol{A}_t).$$

例 (2.3.2)

设分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 O 是零矩阵, B 和 D 是可逆矩阵, 求 A^{-1}.

解

根据拉普拉斯定理 $\det A = (\det B)(\det D) \neq 0$, 所以 A 可逆.

设 A^{-1} 对应的分块矩阵为 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$, 其中 X_1 与 B 是同型矩阵, X_4 与 D 是同型矩阵, 则根据分块矩阵的乘法有

$$
\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} BX_1 & BX_2 \\ CX_1 + DX_3 & CX_2 + DX_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} = I,
\end{aligned}
$$

例 (2.3.2)

设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{O}$ 是零矩阵，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是可逆矩阵，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解

根据拉普拉斯定理 $\det \boldsymbol{A}=(\det \boldsymbol{B})(\det \boldsymbol{D})\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

设 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 对应的分块矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，$\boldsymbol{X}_4$ 与 $\boldsymbol{D}$ 是同型矩阵，则根据分块矩阵的乘法有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I},\end{aligned}$$

解

故

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{I}, \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{I}. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{B}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{X}_3 = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{D}^{-1}. \end{cases}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

小结

- 拉普拉斯定理: 若在行列式 D 中任意取定 k 个行 (列) $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, 则由这 k 个行 (列) 组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于 D.
- 分块上 (下) 三角形矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O}_{m\times n} \\ * & \boldsymbol{C}_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{B}_{m\times m} & * \\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{C}_{n\times n} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{C}|.$$

- 分块斜上 (下) 三角形矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} * & \boldsymbol{B}_{m\times m} \\ \boldsymbol{C}_{n\times n} & \boldsymbol{O}_{n\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{B}_{m\times m} \\ \boldsymbol{C}_{n\times n} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{C}|.$$