第 4 节 分块矩阵

安徽财经大学

统计与应用数学学院

有时候，我们用几条纵线与横线将矩阵分割，把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的，就如矩阵是由数组成的一样，构成一个分块矩阵，从而把大型矩阵的运算化为若干小型矩阵的运算，使运算更为简明．这是处理阶数较高的矩阵的重要方法．

若将 $\boldsymbol{A}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

若将 $\boldsymbol{A}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

则得四个子矩阵

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{22}=(a_{33}).$$

这样，$\boldsymbol{A}$ 就能表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

于是，$\boldsymbol{A}$ 被看作是以矩阵为元的 2×2 型矩阵．这样就能将行与列较多的矩阵根据需要简单地表出．

若将 $\boldsymbol{A}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

则得四个子矩阵

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{22}=(a_{33}).$$

这样，$\boldsymbol{A}$ 就能表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

于是，$\boldsymbol{A}$ 被看作是以矩阵为元的 2×2 型矩阵．这样就能将行与列较多的矩阵根据需要简单地表出．

又如, 对矩阵 A 进行如下形式分块:

$$
\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:cc}
1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 4 & 1
\end{array}\right),
$$

记

$$
\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix},
$$

则

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}.
$$

又如，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行如下形式分块:

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&0&2\\0&1&0&1&-3\\0&0&1&-1&0\\\hdashline 0&0&0&4&1\end{array}\right),$$

记

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&2\\1&-3\\-1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}4&1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}.$$

当考虑一个矩阵的分块时，一个重要的原则是使分块后的子矩阵中有便于利用的特殊矩阵，如单位矩阵、零矩阵、对角矩阵、三角形矩阵等.
常用的分块矩阵，除了上面的 2×2 分块矩阵，还有以下几种形式:
将 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 按行分块为 $m \times 1$ 分块矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$.
将 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 按列分块为 $1 \times n$ 分块矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$.

当考虑一个矩阵的分块时，一个重要的原则是使分块后的子矩阵中有便于利用的特殊矩阵，如单位矩阵、零矩阵、对角矩阵、三角形矩阵等.

常用的分块矩阵，除了上面的 2×2 分块矩阵，还有以下几种形式：

将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 按行分块为 $m\times 1$ 分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\quad(i=1,2,\cdots,m)$.

将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 按列分块为 $1\times n$ 分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}\quad(j=1,2,\cdots,n)$.

当矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中非零元都集中在主对角线附近时可将 $\boldsymbol{A}$ 分块成下面的块对角矩阵 (又称为准对角矩阵):

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_t\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是 r_i 阶方阵 $\left(\sum_{i=1}^{t} r_i=n\right)$.

例如

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix},
$$

其中

$$
\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2=(-1), \quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

分块矩阵的运算

设分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1s}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{rs}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1s}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1}&\cdots&\boldsymbol{B}_{rs}\end{pmatrix},$$

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分块的办法相同，即相应小矩阵 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的行数、列数对应相等，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1s}+\boldsymbol{B}_{1s}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1}+\boldsymbol{B}_{r1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{rs}+\boldsymbol{B}_{rs}\end{pmatrix}.$$

例 (1.4.1)

设 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:ccc}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & -1 & -4\\ \hdashline 3 & -1 & -2 & 2\end{array}\right)$, $\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c:ccc}2 & 5 & -6 & -1\\ 4 & 7 & 3 & -2\\ \hdashline -1 & 2 & 4 & 5\end{array}\right)$, 则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -6 & -1\\ 7 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -3 & 3\\ 10 & 2 & -6\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21}=(3)+(-1)=(2),$$

$$\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\end{pmatrix}.$$

设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$, k 是数, 则 $\boldsymbol{A}$ 的数乘为 $k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$.
设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$, 如果把 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别分块为 $r\times s$ 和 $s\times t$ 分块矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法相同, 那么

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st} \end{pmatrix}=\boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是 $r\times t$ 分块矩阵, 且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_{kl}&=\boldsymbol{A}_{k1}\boldsymbol{B}_{1l}+\boldsymbol{A}_{k2}\boldsymbol{B}_{2l}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ks}\boldsymbol{B}_{sl}\\ &=\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{B}_{il}\quad (k=1,2,\cdots,r;\ l=1,2,\cdots,t).\end{aligned}$$

例 (1.4.2)

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$, 求 AB.

解

令 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$. 再将 $\boldsymbol{B}$ 分块为

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ -1 & 2\\ \hdashline 1 & 0\\ -1 & -1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ -2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

解

令 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A = \begin{pmatrix} I & O \\ A_1 & I \end{pmatrix}$. 再将 B 分块为

$$B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ \hdashline 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

于是

$$AB = \begin{pmatrix} I & O \\ A_1 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 B_1 + B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 (1.4.3)

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同型块对角矩阵，即

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_t), \quad \boldsymbol{B} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{B}_t),$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{B}_i$ 是同阶方阵 $(i = 1, 2, \cdots, t)$，则

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_t\boldsymbol{B}_t \end{pmatrix}.$$

若块对角矩阵 $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_t)$，其中 $\boldsymbol{A}_i (i = 1, 2, \cdots, t)$ 可逆. 因为

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_t \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_t^{-1} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_t\boldsymbol{A}_t^{-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I},
$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1}, \boldsymbol{A}_2^{-1}, \cdots, \boldsymbol{A}_t^{-1})$.

同理, 若 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 可逆, 则

$$\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_t & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_t^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

同理, 若 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 可逆, 则

$$\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_t & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_t^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

若分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},$$

则不难验证

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{r1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{r2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1s}^{\mathrm{T}} & A_{2s}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{rs}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

即除了把子块的行与列对换外，每个子块还要进行转置.

若分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},$$

则不难验证

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{r1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{r2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1s}^{\mathrm{T}} & A_{2s}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{rs}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

即除了把子块的行与列对换外，每个子块还要进行转置.

例 (1.4.4)

若乘法 AB 有意义, B 按列分块, $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n).$$

可见, 若 $AB=O$, 则 $Ab_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$. 即 B 的每一列 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.

例 (1.4.4)

若乘法 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 有意义, $\boldsymbol{B}$ 按列分块, $\boldsymbol{B}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\right)=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_n\right).$$

可见, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i=\mathbf{0}$, $i=1,2,\cdots,n$. 即 $\boldsymbol{B}$ 的每一列 $\boldsymbol{b}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解.

例 (1.4.5)

设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}.$$

例 (1.4.5)

设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}.$$

例 (1.4.5)

设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}.$$

应用案例: 图像压缩

相对矩阵运算, 矩阵分块运算在计算上能够更加高效地并行实现. 例如经典的 JPEG2000 图像压缩算法就是将如下图所示 168×168 图像分块为 21×21 个图像块, 然后分别处理每个 8×8 小图像块.

小结

- 分块矩阵的加法和数乘: $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$, $k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$.
- 分块矩阵的乘法 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{A}$ 的列的分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法相同.
$$\boldsymbol{C}_{kl}=\boldsymbol{A}_{k1}\boldsymbol{B}_{1l}+\boldsymbol{A}_{k2}\boldsymbol{B}_{2l}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ks}\boldsymbol{B}_{sl}=\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{B}_{il}.$$
- 分块矩阵的逆矩阵:
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \\ & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \end{pmatrix}.$$
- 分块矩阵的转置:
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$