# 第 4 节 实对称矩阵的相似对角化

安徽财经大学

统计与应用数学学院

- 在 §4.2 中所讨论的一般 $n$ 阶矩阵相似对角化的结论对于实对称矩阵当然成立. 而实对称矩阵的相似对角化又有其自身的特殊性. 实对称矩阵的一个重要特性就是它的特征值都是实数. 为了证明这个结论, 我们先介绍复矩阵的共轭矩阵概念及其基本性质.
- 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, 我们把 $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{m\times n}$ 称为 $A$ 的共轭矩阵, 其中 $\overline{a}_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 的共轭复数.
- 由共轭矩阵的定义及共轭复数的运算性质, 易证共轭矩阵有以下性质:

  $1^\circ \quad \overline{A^{\mathrm{T}}} = \overline{A}^{\mathrm{T}}; \qquad 2^\circ \quad \overline{kA} = \overline{k}\overline{A}; \qquad 3^\circ \quad \overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}.$
- 现在我们利用上述性质证明以下定理:

- 在 §4.2 中所讨论的一般 $n$ 阶矩阵相似对角化的结论对于实对称矩阵当然成立. 而实对称矩阵的相似对角化又有其自身的特殊性. 实对称矩阵的一个重要特性就是它的特征值都是实数. 为了证明这个结论, 我们先介绍复矩阵的共轭矩阵概念及其基本性质.
- 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij}\in\mathbf{C}$, 我们把 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵, 其中 $\overline{a}_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 的共轭复数.
- 由共轭矩阵的定义及共轭复数的运算性质, 易证共轭矩阵有以下性质:

  $1^\circ$ $\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$; $2^\circ$ $\overline{k\boldsymbol{A}}=\overline{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$; $3^\circ$ $\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$.
- 现在我们利用上述性质证明以下定理:

- 在 §4.2 中所讨论的一般 $n$ 阶矩阵相似对角化的结论对于实对称矩阵当然成立. 而实对称矩阵的相似对角化又有其自身的特殊性. 实对称矩阵的一个重要特性就是它的特征值都是实数. 为了证明这个结论, 我们先介绍复矩阵的共轭矩阵概念及其基本性质.
- 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij} \in \mathbf{C}$, 我们把 $\overline{\boldsymbol{A}} = (\overline{a}_{ij})_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵, 其中 $\overline{a}_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 的共轭复数.
- 由共轭矩阵的定义及共轭复数的运算性质, 易证共轭矩阵有以下性质:

  $1^\circ$ $\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}} = \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$; $2^\circ$ $\overline{k\boldsymbol{A}} = \overline{k}\overline{\boldsymbol{A}}$; $3^\circ$ $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}}\ \overline{\boldsymbol{B}}$.
- 现在我们利用上述性质证明以下定理:

- 在 §4.2 中所讨论的一般 $n$ 阶矩阵相似对角化的结论对于实对称矩阵当然成立. 而实对称矩阵的相似对角化又有其自身的特殊性. 实对称矩阵的一个重要特性就是它的特征值都是实数. 为了证明这个结论, 我们先介绍复矩阵的共轭矩阵概念及其基本性质.
- 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij}\in\mathbf{C}$, 我们把 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵, 其中 $\overline{a}_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 的共轭复数.
- 由共轭矩阵的定义及共轭复数的运算性质, 易证共轭矩阵有以下性质:
  $1^\circ\quad \overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}};\qquad 2^\circ\quad \overline{k\boldsymbol{A}}=\overline{k}\overline{\boldsymbol{A}};\qquad 3^\circ\quad \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}.$
- 现在我们利用上述性质证明以下定理:

**定理 (4.4.1)**

实对称矩阵的特征值都是实数.

证明.

设 $\lambda$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 则有非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 欲证 $\lambda$ 是实数, 只需证明 $\overline{\lambda}=\lambda$. 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两端取共轭, 得 $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda\boldsymbol{\alpha}}$, 由共轭矩阵的性质 2° 及性质 3°, 有 $\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以 $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 于是有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}},$$

上式两端再取转置, 有

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}},$$

再用 $\boldsymbol{\alpha}$ 右乘上式两端, 得

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

$$\lambda\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

**定理 (4.4.1)**

实对称矩阵的特征值都是实数.

**证明.**

设 $\lambda$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 则有非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$. 欲证 $\lambda$ 是实数, 只需证明 $\overline{\lambda} = \lambda$. 在 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两端取共轭, 得 $\overline{\boldsymbol{A\alpha}} = \overline{\lambda\boldsymbol{\alpha}}$, 由共轭矩阵的性质 2° 及性质 3°, 有 $\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$, 于是有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}},$$

上式两端再取转置, 有

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}},$$

再用 $\boldsymbol{\alpha}$ 右乘上式两端, 得

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

$$\lambda\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

**定理 (4.4.1)**

实对称矩阵的特征值都是实数.

**证明.**

设 $\lambda$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 则有非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 欲证 $\lambda$ 是实数, 只需证明 $\overline{\lambda}=\lambda$. 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两端取共轭, 得 $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}}$, 由共轭矩阵的性质 $2°$ 及性质 $3°$, 有 $\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以 $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 于是有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}},$$

上式两端再取转置, 有

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}},$$

再用 $\boldsymbol{\alpha}$ 右乘上式两端, 得

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

$$\lambda\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

**定理** (4.4.1)

实对称矩阵的特征值都是实数.

**证明.**

设 $\lambda$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，则有非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 欲证 $\lambda$ 是实数，只需证明 $\overline{\lambda}=\lambda$. 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两端取共轭，得 $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda\boldsymbol{\alpha}}$，由共轭矩阵的性质 $2^\circ$ 及性质 $3^\circ$，有 $\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，于是有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}},$$

上式两端再取转置，有

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}},$$

再用 $\boldsymbol{\alpha}$ 右乘上式两端，得

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

$$\lambda\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

**定理 (4.4.1)**

实对称矩阵的特征值都是实数.

**证明.**

设 $\lambda$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 则有非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$. 欲证 $\lambda$ 是实数, 只需证明 $\overline{\lambda} = \lambda$. 在 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两端取共轭, 得 $\overline{\boldsymbol{A\alpha}} = \overline{\boldsymbol{\lambda\alpha}}$, 由共轭矩阵的性质 $2^\circ$ 及性质 $3^\circ$, 有 $\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$, 于是有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}},$$

上式两端再取转置, 有

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}},$$

再用 $\boldsymbol{\alpha}$ 右乘上式两端, 得

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$
$$\lambda\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

**定理 (4.4.1)**

实对称矩阵的特征值都是实数.

**证明.**

移项, 有 $(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 所以

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\cdots,\overline{a}_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_ia_i>0,$$

故 $\lambda-\overline{\lambda}=0$, $\lambda=\overline{\lambda}$, 即 $\lambda$ 为实数. □

任一 $n$ 阶矩阵的不同特征值的特征向量是线性无关的, 实对称矩阵则有

**定理 (4.4.1)**

实对称矩阵的特征值都是实数.

**证明.**

移项, 有 $(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 所以

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\cdots,\overline{a}_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_ia_i>0,$$

故 $\lambda-\overline{\lambda}=0$, $\lambda=\overline{\lambda}$, 即 $\lambda$ 为实数. □

任一 $n$ 阶矩阵的不同特征值的特征向量是线性无关的, 实对称矩阵则有

**定理 (4.4.1)**

实对称矩阵的特征值都是实数.

**证明.**

移项, 有 $(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 所以

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\cdots,\overline{a}_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_ia_i>0,$$

故 $\lambda-\overline{\lambda}=0$, $\lambda=\overline{\lambda}$, 即 $\lambda$ 为实数. □

任一 $n$ 阶矩阵的不同特征值的特征向量是线性无关的, 实对称矩阵则有:

**定理 (4.4.2)**

设 $A$ 为一个实对称矩阵，那么对应于 $A$ 的不同特征值的特征向量彼此正交.

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是 $A$ 的两个不同的特征值，$\alpha_1, \alpha_2$ 是 $A$ 分别属于 $\lambda_1, \lambda_2$ 的特征向量，于是有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, \quad A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2,$$

上面第一个等式两端取转置可得

$$\alpha_1^{\mathrm{T}} A = \lambda_1 \alpha_1^{\mathrm{T}},$$

用 $\alpha_2$ 右乘上式两端得

$$\lambda_1\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 = \alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_2 = \alpha_1^{\mathrm{T}}\lambda_2\alpha_2 = \lambda_2\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2,$$

即 $(\lambda_1 - \lambda_2)\,\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 = 0$. 又因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以有 $\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 = 0$，即 $\alpha_1$ 与 $\alpha_2$ 正交.

## 定理 (4.4.2)

设 $\boldsymbol{A}$ 为一个实对称矩阵，那么对应于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量彼此正交.

## 证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 分别属于 $\lambda_1, \lambda_2$ 的特征向量，于是有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2,$$

上面第一个等式两端取转置可得

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},$$

用 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 右乘上式两端得

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_2,$$

即 $(\lambda_1 - \lambda_2)\, \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_2 = 0$. 又因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以有 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_2 = 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

**定理 (4.4.2)**

设 $\boldsymbol{A}$ 为一个实对称矩阵，那么对应于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量彼此正交.

**证明.**

设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 分别属于 $\lambda_1, \lambda_2$ 的特征向量，于是有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

上面第一个等式两端取转置可得

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},$$

用 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 右乘上式两端得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即 $(\lambda_1 - \lambda_2)\,\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$. 又因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以有 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

**定理 (4.4.2)**

设 $\boldsymbol{A}$ 为一个实对称矩阵，那么对应于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量彼此正交.

**证明.**

设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 分别属于 $\lambda_1, \lambda_2$ 的特征向量，于是有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

上面第一个等式两端取转置可得

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},$$

用 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 右乘上式两端得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即 $(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$. 又因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以有 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

**定理 (4.4.2)**

设 $\boldsymbol{A}$ 为一个实对称矩阵，那么对应于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量彼此正交.

**证明.**

设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 分别属于 $\lambda_1, \lambda_2$ 的特征向量，于是有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

上面第一个等式两端取转置可得

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},$$

用 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 右乘上式两端得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即 $(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$. 又因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以有 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交. □

一般 $n$ 阶矩阵未必能与对角矩阵相似, 而实对称矩阵则一定能够与对角矩阵相似, 这个结论可由下面的定理得到:

**定理 (4.4.3)**

对任意 $n$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 都存在一个 $n$ 阶正交矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

为对角矩阵.

由定理 3 可知实对称矩阵的对角化问题, 实质上是求正交矩阵 $C$ 的问题. 计算 $C$ 的步骤如下:

$1^\circ$ 求出实对称矩阵 $A$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$;

$2^\circ$ 对于各个不同的特征值 $\lambda_i$, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i I - A)\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系. 对基础解系进行正交化和单位化, 得到 $A$ 对于 $\lambda_i$ 的一组标准正交的特征向量. 由 §4.2 的推论 3 可知, 这个向量组所含向量的个数恰好是 $\lambda_i$ 作为 $A$ 的特征值的重数;

$3^\circ$ 将 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 的所有标准正交的特征向量构成一组 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$

$4^\circ$ 取 $C = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$, 则 $C$ 为正交矩阵且使得 $C^{\mathrm{T}}AC \left(= C^{-1}AC\right)$ 为对角矩阵, 对角线上的元为相应特征向量的特征值.

由定理 3 可知实对称矩阵的对角化问题，实质上是求正交矩阵 $C$ 的问题. 计算 $C$ 的步骤如下:

$1^\circ$ 求出实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$;

$2^\circ$ 对于各个不同的特征值 $\lambda_i$, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i I - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系. 对基础解系进行正交化和单位化，得到 $\boldsymbol{A}$ 对于 $\lambda_i$ 的一组标准正交的特征向量. 由 §4.2 的推论 3 可知，这个向量组所含向量的个数恰好是 $\lambda_i$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的重数;

$3^\circ$ 将 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 的所有标准正交的特征向量构成一组 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$

$4^\circ$ 取 $C = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$, 则 $C$ 为正交矩阵且使得 $C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}C (= C^{-1}\boldsymbol{A}C)$ 为对角矩阵，对角线上的元为相应特征向量的特征值.

由定理 3 可知实对称矩阵的对角化问题，实质上是求正交矩阵 $C$ 的问题．计算 $C$ 的步骤如下：

$1^\circ$ 求出实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$;
$2^\circ$ 对于各个不同的特征值 $\lambda_i$，求出齐次线性方程组 $(\lambda_i I - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系．对基础解系进行正交化和单位化，得到 $\boldsymbol{A}$ 对于 $\lambda_i$ 的一组标准正交的特征向量．由 §4.2 的推论 3 可知，这个向量组所含向量的个数恰好是 $\lambda_i$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的重数;
$3^\circ$ 将 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 的所有标准正交的特征向量构成一组 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$
$4^\circ$ 取 $C = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$，则 $C$ 为正交矩阵且使得 $C^{\mathrm{T}}AC \left(= C^{-1}AC\right)$ 为对角矩阵，对角线上的元为相应特征向量的特征值．

由定理 3 可知实对称矩阵的对角化问题, 实质上是求正交矩阵 $C$ 的问题. 计算 $C$ 的步骤如下:

1° 求出实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$;
2° 对于各个不同的特征值 $\lambda_i$, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i I - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系. 对基础解系进行正交化和单位化, 得到 $\boldsymbol{A}$ 对于 $\lambda_i$ 的一组标准正交的特征向量. 由 §4.2 的推论 3 可知, 这个向量组所含向量的个数恰好是 $\lambda_i$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的重数;
3° 将 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 的所有标准正交的特征向量构成一组 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$
4° 取 $C = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$, 则 $C$ 为正交矩阵且使得 $C^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} C (= C^{-1} \boldsymbol{A} C)$ 为对角矩阵, 对角线上的元为相应特征向量的特征值.

由定理 3 可知实对称矩阵的对角化问题, 实质上是求正交矩阵 $C$ 的问题. 计算 $C$ 的步骤如下:

$1^\circ$　求出实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$;
$2^\circ$　对于各个不同的特征值 $\lambda_i$, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i I - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系. 对基础解系进行正交化和单位化, 得到 $\boldsymbol{A}$ 对于 $\lambda_i$ 的一组标准正交的特征向量. 由 §4.2 的推论 3 可知, 这个向量组所含向量的个数恰好是 $\lambda_i$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的重数;
$3^\circ$　将 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 的所有标准正交的特征向量构成一组 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$
$4^\circ$　取 $C = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$, 则 $C$ 为正交矩阵且使得 $C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}C \left(= C^{-1}\boldsymbol{A}C\right)$ 为对角矩阵, 对角线上的元为相应特征向量的特征值.

**例 (4.4.1)**

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵.

**解**

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-9 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 2 & \lambda-9 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

**例 (4.4.1)**

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 $C$，使 $C^{-1}\boldsymbol{A}C$ 为对角矩阵.

**解**

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-9 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 2 & \lambda-9 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

## 例 (4.4.1)

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $C$, 使 $C^{-1}AC$ 为对角矩阵.

## 解

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 2 & \lambda-9 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

## 例 (4.4.1)

设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $C$, 使 $C^{-1}AC$ 为对角矩阵.

## 解

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-9 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 2 & \lambda-9 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

**例 (4.4.1)**

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 $C$，使 $C^{-1}\boldsymbol{A}C$ 为对角矩阵.

**解**

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-9 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 2 & \lambda-9 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

**例 (4.4.1)**

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $C$, 使 $C^{-1}\boldsymbol{A}C$ 为对角矩阵.

**解**

$$\begin{aligned}\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 2 & \lambda-9 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda-10).\end{aligned}$$

**解**

对于 $\lambda_1 = 1$ (2 重 ), 由 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化, 有

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}} - \frac{-4}{5}(-2, 1, 0)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^{\mathrm{T}}.$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 单位化, 有

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$$

## 解

对于 $\lambda_1 = 1$ (2 重 ), 由 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化, 有

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}} - \frac{-4}{5}(-2, 1, 0)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^{\mathrm{T}}.$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 单位化, 有

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$$

**解**

对于 $\lambda_1 = 1$ (2 重 ), 由 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化, 有

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}} - \frac{-4}{5}(-2, 1, 0)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^{\mathrm{T}}.$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 单位化, 有

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^{\mathrm{T}}, \gamma_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

**解**

对于 $\lambda_2=10$, 由 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$, 将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化, 有

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$.

**解**

对于 $\lambda_2 = 10$, 由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 解得 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 2, -2)^{\mathrm{T}}$, 将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化, 有

$$\boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\boldsymbol{\alpha}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$.

**例 (4.4.2)**

设 $A, B$ 都是 $n$ 阶实对称矩阵, 证明 $A$ 与 $B$ 相似的充要条件是 $A$ 与 $B$ 有相同的特征值.

**证明.**

**充分性** 设 $A$ 与 $B$ 有相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则存在可逆矩阵 $P, Q$, 使

$$P^{-1}AP = \Lambda = Q^{-1}BQ,$$

其中 $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. 由矩阵相似的传递性可知 $A$ 与 $B$ 相似.

必要性的证明与 §4.2 定理 1 的证明相同. □

**例 (4.4.2)**

设 $A, B$ 都是 $n$ 阶实对称矩阵, 证明 $A$ 与 $B$ 相似的充要条件是 $A$ 与 $B$ 有相同的特征值.

**证明.**

**充分性** 设 $A$ 与 $B$ 有相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则存在可逆矩阵 $P, Q$, 使

$$P^{-1}AP = \Lambda = Q^{-1}BQ,$$

其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. 由矩阵相似的传递性可知 $A$ 与 $B$ 相似.
必要性的证明与 §4.2 定理 1 的证明相同. □

**例 (4.4.3)**

设 $A, B$ 都是 $n$ 阶实对称矩阵, 若存在正交矩阵 $T$, 使 $T^{-1}AT, T^{-1}BT$ 都是对角矩阵, 则 $AB$ 是实对称矩阵.

证明.

由 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA$ 可知, $AB$ 对称的充要条件是 $AB$ 可交换. 因此只需证 $AB = BA$. 据已知, 设

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), T^{-1}BT = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n),$$

则

$$\left(T^{-1}AT\right)\left(T^{-1}BT\right) = \left(T^{-1}BT\right)\left(T^{-1}AT\right) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_n\mu_n),$$

所以 $AB = BA$. 故 $AB$ 是实对称矩阵. □

**例 (4.4.3)**

设 $A, B$ 都是 $n$ 阶实对称矩阵, 若存在正交矩阵 $T$, 使 $T^{-1}AT, T^{-1}BT$ 都是对角矩阵, 则 $AB$ 是实对称矩阵.

**证明.**

由 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA$ 可知, $AB$ 对称的充要条件是 $AB$ 可交换. 因此只需证 $AB = BA$. 据已知, 设

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \ T^{-1}BT = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n),$$

则

$$\left(T^{-1}AT\right)\left(T^{-1}BT\right) = \left(T^{-1}BT\right)\left(T^{-1}AT\right) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_n\mu_n),$$

所以 $AB = BA$. 故 $AB$ 是实对称矩阵. □

**例 (4.4.3)**

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$ 都是对角矩阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵.

**证明.**

由 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 可知，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 对称的充要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可交换. 因此只需证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 据已知，设

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n),$$

则

$$\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}\right) = \left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}\right)\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_n\mu_n),$$

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵. □

**例 (4.4.3)**

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$ 都是对角矩阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵.

**证明.**

由 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 可知，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 对称的充要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可交换. 因此只需证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 据已知，设

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n),$$

则

$$\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}\right) = \left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}\right)\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_n\mu_n),$$

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵. □

# 小结

- 实对称矩阵的特征值都是实数. 不同特征值的特征向量彼此正交.
- 对任意 $n$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 都存在一个 $n$ 阶正交矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵.
- 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.
- 实对称矩阵的对角化的步骤如下:
  (1) 求出实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$;
  (2) 对于各个不同的特征值 $\lambda_i$, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i I-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系. 对基础解系进行正交化和单位化, 得到 $\boldsymbol{A}$ 对于 $\lambda_i$ 的一组标准正交的特征向量.
  (3) 将 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$ 的所有标准正交的特征向量构成一组 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$
  (4) 取 $\boldsymbol{C}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$, 则 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵且使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ $(=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})$ 为对角矩阵, 对角线上的元为相应特征向量的特征值.