第 3 节 n 维向量空间的正交性

安徽财经大学

统计与应用数学学院





目录

- 内积
- 2 n 维向量的正交性
- ③ 施密特正交化方法
- 4 正交矩阵



- 内积
- 2 n 维向量的正交性
- ③ 施密特正交化方法
- 4 正交矩阵





内积的定义

定义 (4.3.1)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是 \mathbf{R}^n 中的两个向量, 则实 数 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ 称为 α 与 β 的内积, 记为 (α, β) .





内积的定义

定义 (4.3.1)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是 \mathbf{R}^n 中的两个向量, 则实数 $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ 称为 α 与 β 的内积, 记为 (α, β) .

在 \mathbb{R}^3 中, 也将 (α, β) 记为 $\alpha \cdot \beta$.

利用矩阵的乘法, 若将 α, β 看作行矩阵, 则 (α, β) 又可表示为 $\alpha\beta^{\mathrm{T}}$. 若将 α, β 记为列向量的形式, 则 (α, β) 可表示为 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta$.





内积的性质

根据内积的定义, 容易证明内积具有以下性质:

- 1° 非负性: $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时等号成立;
- 2° 对称性: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha});$
- 3° 线性性: $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma), (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta),$ 其中 α, β, γ 为 \mathbb{R}^n 中任意三个向量, k 为任意实数.

由上述性质与定义不难看出,内积还满足以下关系

$$(\alpha, l\beta) = l(\alpha, \beta), \quad l \in \mathbf{R},$$

 $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$

利用内积可以定义向量的长度.





内积的性质

根据内积的定义, 容易证明内积具有以下性质:

- 1° 非负性: $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时等号成立;
- 2° 对称性: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha});$
- 3° 线性性: $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma), (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta),$ 其中 α, β, γ 为 \mathbb{R}^n 中任意三个向量, k 为任意实数.

由上述性质与定义不难看出, 内积还满足以下关系:

$$(\boldsymbol{\alpha}, l\boldsymbol{\beta}) = l(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad l \in \mathbf{R},$$
 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}).$

利用内积可以定义向量的长度.





向量的长度

定义 (4.3.2)

设
$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$$
, 则 $\sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 称为 α 的长度, 记为 $\|\alpha\|$.

向量的长度具有以下性质

- 1° 非负性: $\|\alpha\| \ge 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $\|\alpha\| = 0$;
- 2° 齐次性: $||k\alpha|| = |k|||\alpha||$, $k \in \mathbb{R}$;
- 3° 三角不等式: $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

当 $\|\alpha\| = 1$ 时, 称 α 为单位向量. 若 $\alpha \neq 0$, 则由

$$\left(\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha, \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right) = \frac{1}{\|\alpha\|^2}(\alpha, \alpha) = 1$$

可知 $\frac{1}{\alpha}$ α 是单位向量.



向量的长度

定义 (4.3.2)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, 则 $\sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 称为 α 的长度, 记为 $\|\alpha\|$.

向量的长度具有以下性质:

- 1° 非负性: $\|\alpha\| \ge 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $\|\alpha\| = 0$;
- 2° 齐次性: $||k\boldsymbol{\alpha}|| = |k|||\boldsymbol{\alpha}||, \quad k \in \mathbf{R};$
- 3° 三角不等式: $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

当 $\|\alpha\| = 1$ 时, 称 α 为单位向量. 若 $\alpha \neq 0$, 则由

$$\left(\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha, \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right) = \frac{1}{\|\alpha\|^2}(\alpha, \alpha) = 1$$





向量的长度

定义 (4.3.2)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, 则 $\sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 称为 α 的长度, 记为 $\|\alpha\|$.

向量的长度具有以下性质:

- 1° 非负性: $\|\boldsymbol{\alpha}\| \geqslant 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 0$;
- 2° 齐次性: $||k\boldsymbol{\alpha}|| = |k|||\boldsymbol{\alpha}||, \quad k \in \mathbf{R};$
- 3° 三角不等式: $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

当 $\|\alpha\| = 1$ 时, 称 α 为单位向量. 若 $\alpha \neq 0$, 则由

$$\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}, \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}\right) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 1$$

可知 $\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 是单位向量.



向量的内积还满足以下柯西 - 施瓦茨不等式:

$$\boxed{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \|\boldsymbol{\beta}\|^2,}$$

当且仅当 α 与 β 线性相关时等号成立.

事实上,若 $oldsymbol{lpha},oldsymbol{eta}$ 线性无关,则对任意实数 t,都有 $tlpha+oldsymbol{eta}
eq 0$,于是

$$(t\alpha + \beta, t\alpha + \beta) = (\alpha, \alpha)t^2 + 2(\alpha, \beta)t + (\beta, \beta) > 0.$$

这是关于 t 的二次函数,其函数值恒正,则其判别式必小于零,故有

$$2(\alpha, \beta)]^2 - 4(\alpha, \alpha)(\beta, \beta) < 0,$$

即

 $(\alpha, \beta)^2 < \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$



向量的内积还满足以下柯西 - 施瓦茨不等式:

$$\left| (\boldsymbol{lpha}, \boldsymbol{eta})^2 \leqslant \| \boldsymbol{lpha} \|^2 \| \boldsymbol{eta} \|^2,
ight|$$

当且仅当 α 与 β 线性相关时等号成立.

事实上, 若 α , β 线性无关, 则对任意实数 t, 都有 $t\alpha + \beta \neq 0$, 于是

$$(t\alpha + \beta, t\alpha + \beta) = (\alpha, \alpha)t^2 + 2(\alpha, \beta)t + (\beta, \beta) > 0.$$

这是关于 t 的二次函数, 其函数值恒正, 则其判别式必小于零, 故有

$$[2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})]^2 - 4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) < 0,$$

即

 $(\alpha, \beta)^2 < \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$



向量的内积还满足以下柯西 - 施瓦茨不等式:

$$| (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \|\boldsymbol{\beta}\|^2,$$

当且仅当 α 与 β 线性相关时等号成立.

事实上, 若 α , β 线性无关, 则对任意实数 t, 都有 $t\alpha + \beta \neq 0$, 于是

$$(t\alpha + \beta, t\alpha + \beta) = (\alpha, \alpha)t^2 + 2(\alpha, \beta)t + (\beta, \beta) > 0.$$

这是关于 t 的二次函数, 其函数值恒正, 则其判别式必小于零, 故有

$$[2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]^2 - 4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) < 0,$$

即

 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 < \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \|\boldsymbol{\beta}\|^2.$



向量的内积还满足以下柯西 - 施瓦茨不等式:

$$\left| (\boldsymbol{lpha}, \boldsymbol{eta})^2 \leqslant \|\boldsymbol{lpha}\|^2 \|\boldsymbol{eta}\|^2, \right|$$

当且仅当 α 与 β 线性相关时等号成立.

事实上, 若 α , β 线性无关, 则对任意实数 t, 都有 $t\alpha + \beta \neq 0$, 于是

$$(t\alpha + \beta, t\alpha + \beta) = (\alpha, \alpha)t^2 + 2(\alpha, \beta)t + (\beta, \beta) > 0.$$

这是关于 t 的二次函数, 其函数值恒正, 则其判别式必小于零, 故有

$$[2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]^2 - 4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) < 0,$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 < \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$



当 α, β 线性相关时, 如果 α, β 中有一个为 0, 那么显然等式成立. 因而不妨设 $\beta = k\alpha \neq 0$, 则有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 = (\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\alpha})^2 = k^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})^2 = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(k\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\alpha}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

根据柯西 - 施瓦茨不等式,对于任何非零向量 α, β ,总有

$$\left| \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|} \right| \leqslant 1.$$

这样我们就可以定义 \mathbf{R}^n 中向量的夹角.

定义 (4.3.3)

当 $\alpha \neq 0$ 且 $\beta \neq 0$ 时, $\theta = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}$ 称为 α 与 β 的夹角, 记为 $\langle \alpha, \beta \rangle$.



当 α, β 线性相关时, 如果 α, β 中有一个为 0, 那么显然等式成立. 因而不妨设 $\beta = k\alpha \neq 0$, 则有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 = (\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\alpha})^2 = k^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})^2 = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(k\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\alpha}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

根据柯西 - 施瓦茨不等式,对于任何非零向量 α, β ,总有

$$\left| \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|} \right| \leqslant 1.$$

这样我们就可以定义 \mathbf{R}^n 中向量的夹角.

定义 (4.3.3)

当 $\alpha \neq 0$ 且 $\beta \neq 0$ 时, $\theta = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}$ 称为 α 与 β 的夹角, 记为 $\langle \alpha, \beta \rangle$.



- 1 内积
- 2 n 维向量的正交性
- ③ 施密特正交化方法
- 4 正交矩阵





定义 (4.3.4)

若向量 α 与 β 的内积为零, 即 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 与 β 正交.

显然, \mathbf{R}^n 中的零向量 0 与任一向量 α 的内积 $(\mathbf{0}, \alpha) = 0$, 所以零向量与任何向量都正交.

定义 (4.3.5)

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中任意两个向量都正交且不含零向量, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为正交向量组.

正交向量组是 \mathbb{R}^n 中十分重要的概念,下面讨论正交向量组的有关性质。



8/26



定义 (4.3.4)

若向量 α 与 β 的内积为零, 即 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 与 β 正交.

显然, \mathbf{R}^n 中的零向量 0 与任一向量 α 的内积 $(\mathbf{0}, \alpha) = 0$, 所以零向量与任何向量都正交.

定义 (4.3.5)

线性代数

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中任意两个向量都正交且不含零向量, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为正交向量组.

正交向量组是 \mathbf{R}^n 中十分重要的概念,下面讨论正交向量组的有关性质。



8/26



正交向量组是线性无关的.

证明

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是正交向量组, 且

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}.$$

用 α_1 与上式两端作内积,则

$$(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{1}\boldsymbol{\alpha}_{1} + k_{2}\boldsymbol{\alpha}_{2} + \dots + k_{m}\boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{1}\boldsymbol{\alpha}_{1}) + (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{2}\boldsymbol{\alpha}_{2}) + \dots + (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{m}\boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= k_{1}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{1}) + k_{2}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{2}) + \dots + k_{m}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= k_{1}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{1}) = 0.$$

因为 $\alpha_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $(\alpha_1, \alpha_1) > 0$, 于是 $k_1 = 0$

同理, $k_2 = \cdots = k_m = 0$. 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关



正交向量组是线性无关的。

证明.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是正交向量组, 且

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

用 α_1 与上式两端作内积,则

$$(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{1}\boldsymbol{\alpha}_{1} + k_{2}\boldsymbol{\alpha}_{2} + \dots + k_{m}\boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{1}\boldsymbol{\alpha}_{1}) + (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{2}\boldsymbol{\alpha}_{2}) + \dots + (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{m}\boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= k_{1}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{1}) + k_{2}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{2}) + \dots + k_{m}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= k_{1}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{1}) = 0.$$

因为 $\alpha_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $(\alpha_1, \alpha_1) > 0$, 于是 $k_1 = 0$.

同理, $k_2 = \cdots = k_m = 0$. 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关

正交向量组是线性无关的.

证明.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是正交向量组, 且

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

用 α_1 与上式两端作内积, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{1}\boldsymbol{\alpha}_{1} + k_{2}\boldsymbol{\alpha}_{2} + \dots + k_{m}\boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{1}\boldsymbol{\alpha}_{1}) + (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{2}\boldsymbol{\alpha}_{2}) + \dots + (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{m}\boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= k_{1}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{1}) + k_{2}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{2}) + \dots + k_{m}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= k_{1}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{1}) = 0.$$

因为 $oldsymbol{lpha}_1
eq oldsymbol{0}$,所以 $(oldsymbol{lpha}_1,oldsymbol{lpha}_1)>0$,于是 $k_1=0$. 同理, $k_2=\cdots=k_m=0$.所以 $oldsymbol{lpha}_1,oldsymbol{lpha}_2,\cdots,oldsymbol{lpha}_m$ 线性

正交向量组是线性无关的.

证明.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是正交向量组, 且

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

用 α_1 与上式两端作内积, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{1}\boldsymbol{\alpha}_{1} + k_{2}\boldsymbol{\alpha}_{2} + \dots + k_{m}\boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{1}\boldsymbol{\alpha}_{1}) + (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{2}\boldsymbol{\alpha}_{2}) + \dots + (\boldsymbol{\alpha}_{1}, k_{m}\boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= k_{1}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{1}) + k_{2}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{2}) + \dots + k_{m}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{m})$$

$$= k_{1}(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{1}) = 0.$$

因为 $\alpha_1 \neq 0$, 所以 $(\alpha_1, \alpha_1) > 0$, 于是 $k_1 = 0$.

同理, $k_2 = \cdots = k_m = 0$. 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.



但是, 线性无关向量组未必是正交向量组. 如 $\alpha_1 = (1,0,0)$, $\alpha_2 = (1,1,0)$, $\alpha_3 = (1,1,1)$ 线性无关, 但其中任何两个向量都不正交.

例 (4.3.1)

在 \mathbf{R}^3 中, $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, -2, 1)$, 求向量 α_3 , 使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为正 交向量组.

解

显然 $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, 设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)$, 则应有

$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_3) = x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ (\alpha_2, \alpha_3) = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

其基础解系为 $\alpha_3 = (-1,0,1)$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为正交向量组. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是正交向量组. 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 \mathbf{R}^3 的一组基.

1011010101010

但是, 线性无关向量组未必是正交向量组. 如 $\alpha_1 = (1,0,0)$, $\alpha_2 = (1,1,0)$, $\alpha_3 = (1,1,1)$ 线性无关, 但其中任何两个向量都不正交.

例 (4.3.1)

在 \mathbf{R}^3 中, $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, -2, 1)$, 求向量 α_3 , 使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为正 交向量组.

解

显然 $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, 设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)$, 则应有

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3) = x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

其基础解系为 $\alpha_3 = (-1,0,1)$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为正交向量组. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是正交向量组, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 \mathbf{R}^3 的一组基.



在 \mathbf{R}^n 中, 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r < n)$ 线性无关, 且向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 中每一个向量都与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 中每一个向量正交, 且 s+r>n. 证明 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关.

证明

设 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, r), \beta_j (j = 1, 2, \dots, s)$ 均为列向量,则

$$(\alpha_i, \beta_j) = \alpha_i^{\mathrm{T}} \beta_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s),$$

又设矩阵
$$m{A} = \left(egin{array}{c} m{lpha}_1^{\mathrm{T}} \\ m{lpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ m{lpha}_r^{\mathrm{T}} \end{array}
ight)$$
,则 $m{A}m{eta}_j = \left(egin{array}{c} m{lpha}_1^{\mathrm{T}} m{eta}_j \\ m{lpha}_2^{\mathrm{T}} m{eta}_j \\ \vdots \\ m{lpha}_r^{\mathrm{T}} m{eta}_j \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}
ight)$,即 $m{eta}_j$ 是齐次

线性方程组 AX=0 的解向量. 而 AX=0 的基础解系由 n-R(A)=n-r 个解向量组成, 所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩 $\leqslant n-r$, 由已 知条件 s+r>n 可得 s>n-r, 所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.

在 \mathbf{R}^n 中, 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r < n)$ 线性无关, 且向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 中每一个向量都与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 中每一个向量正交, 且 s+r>n. 证明 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关.

证明.

设
$$\alpha_i (i=1,2,\cdots,r)$$
, $\beta_j (j=1,2,\cdots,s)$ 均为列向量, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j) = \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s),$$

又设矩阵
$$m{A} = \left(egin{array}{c} m{lpha}_1^{
m T} \ m{lpha}_2^{
m T} \ dots \ m{lpha}_r^{
m T} \end{array}
ight)$$
,则 $m{A}m{eta}_j = \left(egin{array}{c} m{lpha}_1^{
m T}m{eta}_j \ m{lpha}_2^{
m T}m{eta}_j \ dots \ m{lpha}_r^{
m T}m{eta}_j \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} 0 \ 0 \ dots \ dots \ 0 \end{array}
ight)$,即 $m{eta}_j$ 是齐次

线性方程组 AX=0 的解向量. 而 AX=0 的基础解系由 n-R(A)=n-r 个解向量组成, 所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩 $\leqslant n-r$, 由已 知条件 s+r>n 可得 s>n-r, 所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.

在 \mathbf{R}^n 中, 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r < n)$ 线性无关, 且向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 中每一个向量都与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 中每一个向量正交, 且 s+r>n. 证明 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关.

证明.

设
$$\alpha_i(i=1,2,\cdots,r)$$
, β_j $(j=1,2,\cdots,s)$ 均为列向量, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j) = \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s),$$

又设矩阵
$$m{A} = \left(egin{array}{c} m{lpha}_1^{
m T} \ m{lpha}_2^{
m T} \ dots \ m{lpha}_2^{
m T} m{eta}_j \end{array}
ight)$$
,则 $m{A}m{eta}_j = \left(egin{array}{c} m{lpha}_1^{
m T}m{eta}_j \ m{lpha}_2^{
m T}m{eta}_j \ dots \ m{lpha}_2^{
m T}m{eta}_j \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} 0 \ 0 \ dots \ 0 \end{array}
ight)$,即 $m{eta}_j$ 是齐次

线性方程组 AX = 0 的解向量. 而 AX = 0 的基础解系由

n-R(A)=n-r 个解问重组成,所以 eta_1,eta_2,\cdots,eta_s 的秩 $\leqslant n-r$, 田已 知条件 s+r>n 可得 s>n-r, 所以 eta_1,eta_2,\cdots,eta_s 线性相关.

在 \mathbf{R}^n 中, 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r < n)$ 线性无关, 且向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 中每一个向量都与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 中每一个向量正交, 且 s+r>n. 证明 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性相关.

证明.

设
$$\alpha_i (i=1,2,\cdots,r)$$
, $\beta_j (j=1,2,\cdots,s)$ 均为列向量, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j) = \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s),$$

又设矩阵
$$m{A} = \left(egin{array}{c} m{lpha}_1^{
m T} \ m{lpha}_2^{
m T} \ dots \ m{lpha}_r^{
m T} \end{array}
ight)$$
,则 $m{A}m{eta}_j = \left(egin{array}{c} m{lpha}_1^{
m T} m{eta}_j \ m{lpha}_2^{
m T} m{eta}_j \ dots \ m{lpha}_r^{
m T} m{eta}_j \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} 0 \ 0 \ dots \ 0 \end{array}
ight)$,即 $m{eta}_j$ 是齐次

线性方程组 AX = 0 的解向量. 而 AX = 0 的基础解系由 n - R(A) = n - r 个解向量组成, 所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的秩 $\leq n - r$, 由已 知条件 s + r > n 可得 s > n - r, 所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性相关.

在正交向量组中,每一个向量的长度都是 1 的正交向量组在相关讨论中特别重要.

定义 (4.3.6)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维向量空间 \mathbf{R}^n 的正交向量组, 且 $\|\boldsymbol{\alpha}_i\|=1$ $(i=1,2,\cdots,s)$, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为标准正交向量组. 若 s=n, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 \mathbf{R}^n 的标准正交基.

标准正交向量组又称为规范正交向量组。

例如, $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1)$ 与

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \beta_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \beta_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

都是 ${f R}^3$ 的标准正交基





在正交向量组中,每一个向量的长度都是 1 的正交向量组在相关讨论中 特别重要.

定义 (4.3.6)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维向量空间 \mathbf{R}^n 的正交向量组, 且 $\|\boldsymbol{\alpha}_i\|=1$ $(i=1,2,\cdots,s)$, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为标准正交向量组. 若 s=n, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 \mathbf{R}^n 的标准正交基.

标准正交向量组又称为规范正交向量组。

例如, $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1)$ 与

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \boldsymbol{\beta}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \boldsymbol{\beta}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

都是 \mathbb{R}^3 的标准正交基.





设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基, 求 \mathbb{R}^n 中向量 β 在该基下 的坐标.

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j) = (x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_j)$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j (\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j.$$



设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbf{R}^n 的一组标准正交基, 求 \mathbf{R}^n 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在该基下的坐标.

解

设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$, 将此式两边对 $\alpha_j~(j=1,2,\cdots,n)$ 分别求内积, 得

$$(\beta, \alpha_j) = (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n, \alpha_j)$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i, \alpha_j) = x_j(\alpha_j, \alpha_j) = x_j.$$

故 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $x_i = (\beta, \alpha_i), j = 1, 2, \cdots, n$

在 \mathbf{R}^3 中, 取 i,j,k 为标准正交基, 这里的 x_1,x_2,x_3 就是 $oldsymbol{eta}$ 在 i,j,k 投影.



设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基, 求 \mathbb{R}^n 中向量 β 在该基下 的坐标.

解

设 $\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$, 将此式两边对 $\alpha_j \ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 分 别求内积,得

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j) = (x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_j)$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j.$$

在 \mathbb{R}^3 中, 取 i,j,k 为标准正交基, 这里的 x_1,x_2,x_3 就是 β 在 i,j,k



安徽财经大学

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbf{R}^n 的一组标准正交基, 求 \mathbf{R}^n 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在该基下的坐标.

解

设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$, 将此式两边对 $\alpha_j~(j=1,2,\cdots,n)$ 分别求内积, 得

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j) = (x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_j)$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j (\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j.$$

故 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $x_j = (\beta, \alpha_j), j = 1, 2, \dots, n$.

在 \mathbb{R}^3 中, 取 i,j,k 为标准正交基, 这里的 x_1,x_2,x_3 就是 β 在 i,j,k . 投影.



设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 \mathbf{R}^n 的一组标准正交基, 求 \mathbf{R}^n 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在该基下的坐标.

解

设 $\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$, 将此式两边对 $\alpha_j \ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 分别求内积, 得

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_j) = (x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_j)$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j (\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = x_j.$$

故 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $x_j = (\beta, \alpha_j), j = 1, 2, \dots, n$.

在 \mathbb{R}^3 中, 取 i, j, k 为标准正交基, 这里的 x_1, x_2, x_3 就是 β 在 i, j, k 投影.



- ① 内积
- 2 n 维向量的正交性
- ③ 施密特正交化方法
- 4 正交矩阵





- n 维向量空间 \mathbb{R}^n 中任意 n 个线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都可以作为 \mathbb{R}^n 的一组基, 这组基未必是标准正交基.
- 但是,任何一组线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,都可以通过适当的方法化为一组任意两个向量都正交的单位向量 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$,且 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价.这种方法就是施密特(Schmidt)正交化方法.

第四章 特征值与特征向量

• 我们首先考虑由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 组成的线性无关向量组.





令
$$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2+k\beta_1$$
, 选择适当的 k , 使得 $(\beta_2,\beta_1)=0$, 即

$$(\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1) + k(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1) = 0,$$

由此推出 $k = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}$,

$$oldsymbol{eta}_2 = oldsymbol{lpha}_2 - rac{(oldsymbol{lpha}_2, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1.$$

令 $\beta_3 = \alpha_3 + k_1\beta_1 + k_2\beta_2$, 为使 $(\beta_3, \beta_1) = 0, (\beta_3, \beta_2) = 0$, 则可推出

$$k_1 = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}, \quad k_2 = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)},$$

于是

$$oldsymbol{eta}_3 = oldsymbol{lpha}_3 - rac{(oldsymbol{lpha}_3, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1 - rac{(oldsymbol{lpha}_3, oldsymbol{eta}_2)}{(oldsymbol{eta}_2, oldsymbol{eta}_2)} oldsymbol{eta}_2$$



令
$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 + k\beta_1$$
, 选择适当的 k , 使得 $(\beta_2, \beta_1) = 0$, 即

$$(\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1) + k(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1) = 0,$$

由此推出 $k = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}$,

$$oldsymbol{eta}_2 = oldsymbol{lpha}_2 - rac{(oldsymbol{lpha}_2, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1.$$

令
$$\beta_3 = \alpha_3 + k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2$$
, 为使 $(\beta_3, \beta_1) = 0$, $(\beta_3, \beta_2) = 0$, 则可推出

$$k_1 = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}, \quad k_2 = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)},$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)} \boldsymbol{\beta}_2.$$



一般地,把线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 化为与之等价的标准正交向量组的施密特正交化过程如下:

. . .

$$egin{aligned} oldsymbol{eta}_s = oldsymbol{lpha}_s - rac{(oldsymbol{lpha}_s, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1 - rac{(oldsymbol{lpha}_s, oldsymbol{eta}_2)}{(oldsymbol{eta}_2, oldsymbol{eta}_2)} oldsymbol{eta}_2 - \cdots - rac{(oldsymbol{lpha}_s, oldsymbol{eta}_{s-1})}{(oldsymbol{eta}_{s-1}, oldsymbol{eta}_{s-1})} oldsymbol{eta}_{s-1}. \end{aligned}$$

再令

$$\gamma_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|} \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

这向量组.

则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 是一组与 $lpha_1,lpha_2,\cdots,lpha_s$ 等价的标准止交问量组

一般地, 把线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 化为与之等价的标准正交向 量组的施密特正交化过程如下:

$$eta_1 = oldsymbol{lpha}_1, \ eta_2 = oldsymbol{lpha}_2 - rac{(oldsymbol{lpha}_2, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1, \ oldsymbol{eta}_3 = oldsymbol{lpha}_3 - rac{(oldsymbol{lpha}_3, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1 - rac{(oldsymbol{lpha}_3, oldsymbol{eta}_2)}{(oldsymbol{eta}_2, oldsymbol{eta}_2)} oldsymbol{eta}_2,$$

$$egin{aligned} oldsymbol{eta}_s = oldsymbol{lpha}_s - rac{(oldsymbol{lpha}_s, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1 - rac{(oldsymbol{lpha}_s, oldsymbol{eta}_2)}{(oldsymbol{eta}_2, oldsymbol{eta}_2)} oldsymbol{eta}_2 - \cdots - rac{(oldsymbol{lpha}_s, oldsymbol{eta}_{s-1})}{(oldsymbol{eta}_{s-1}, oldsymbol{eta}_{s-1})} oldsymbol{eta}_{s-1}. \end{aligned}$$

再令

$$\gamma_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|} \boldsymbol{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

则 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 是一组与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价的标准正交向量组.



例 (4.3.4)

设 $\alpha_1 = (1,1,1)$, 在 \mathbb{R}^3 中求 α_2, α_3 , 使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为正交向量组.

解

由 $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, $(\alpha_1, \alpha_3) = 0$ 可知, α_2, α_3 都应满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 其基础解系为 $\xi_1 = (1, 0, -1)$, $\xi_2 = (0, 1, -1)$ 将 ξ_1 , ξ_2 正交化:

$$\alpha_2 = \xi_1 = (1, 0, -1),$$

$$\alpha_3 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} \alpha_2 = (0, 1, -1) - \frac{1}{2} (1, 0, -1)$$

$$= \frac{1}{2} (-1, 2, -1).$$

 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为所求的正交向量组.



例 (4.3.4)

设 $\alpha_1 = (1,1,1)$, 在 \mathbb{R}^3 中求 α_2, α_3 , 使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为正交向量组.

解

由
$$(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$
, $(\alpha_1, \alpha_3) = 0$ 可知, α_2, α_3 都应满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 其基础解系为 $\xi_1 = (1, 0, -1)$, $\xi_2 = (0, 1, -1)$.

$$\alpha_{3} = \xi_{1} - (1, 0, -1),$$

$$\alpha_{3} = \xi_{2} - \frac{(\xi_{2}, \alpha_{2})}{(\alpha_{2}, \alpha_{2})} \alpha_{2} = (0, 1, -1) - \frac{1}{2} (1, 0, -1)$$

$$= \frac{1}{2} (-1, 2, -1).$$

 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为所求的正交向量组.



例 (4.3.4)

设 $\alpha_1 = (1,1,1)$, 在 \mathbb{R}^3 中求 α_2, α_3 , 使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为正交向量组.

解

由
$$(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$
, $(\alpha_1, \alpha_3) = 0$ 可知, α_2, α_3 都应满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1, -1)$. 将 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化:

$$egin{aligned} m{lpha}_2 &= m{\xi}_1 = (1,0,-1), \\ m{lpha}_3 &= m{\xi}_2 - rac{(m{\xi}_2,m{lpha}_2)}{(m{lpha}_2,m{lpha}_2)} m{lpha}_2 = (0,1,-1) - rac{1}{2}(1,0,-1) \\ &= rac{1}{2}(-1,2,-1). \end{aligned}$$

 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为所求的正交向量组.



在 \mathbf{R}^3 中, 将基 $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (0,-1,1)$ 化为标准正 交基.

解

先正交化。令

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 1),$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1, 2, 1) - \frac{4}{3}(1, 1, 1) = \frac{1}{3}(-1, 2, -1),$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

$$= (0, -1, 1) - \frac{0}{3} (1, 1, 1) + \frac{1}{2} (-1, 2, -1) = \frac{1}{2} (-1, 0, 1)$$



在 \mathbf{R}^3 中, 将基 $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (0,-1,1)$ 化为标准正 交基.

解

先正交化, 今

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1),$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1, 2, 1) - \frac{4}{3} (1, 1, 1) = \frac{1}{3} (-1, 2, -1),$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

$$= (0, -1, 1) - \frac{0}{3} (1, 1, 1) + \frac{1}{2} (-1, 2, -1) = \frac{1}{2} (-1, 0, 1).$$

在 \mathbf{R}^3 中, 将基 $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (0,-1,1)$ 化为标准正 交基.

解

先正交化, 今

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1),$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1, 2, 1) - \frac{4}{3} (1, 1, 1) = \frac{1}{3} (-1, 2, -1),$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$
$$= (0, -1, 1) - \frac{0}{3} (1, 1, 1) + \frac{1}{2} (-1, 2, -1) = \frac{1}{2} (-1, 0, 1)$$

在 \mathbf{R}^3 中, 将基 $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (0,-1,1)$ 化为标准正 交基.

解

先正交化, 今

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1),$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1, 2, 1) - \frac{4}{3} (1, 1, 1) = \frac{1}{3} (-1, 2, -1),$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

$$= (0, -1, 1) - \frac{0}{3} (1, 1, 1) + \frac{1}{2} (-1, 2, -1) = \frac{1}{2} (-1, 0, 1).$$

18 / 26

在 \mathbf{R}^3 中, 将基 $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (0,-1,1)$ 化为标准正交基.

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 1), \beta_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, -1), \beta_3 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1).$$

再单位化,令

$$\begin{split} & \boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} \boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1), \\ & \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} \boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, 2, -1), \\ & \boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|} \boldsymbol{\beta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1). \end{split}$$

 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 就是 \mathbf{R}^3 的一组标准正交基.

- ① 内积
- 2 n 维向量的正交性
- ③ 施密特正交化方法
- 4 正交矩阵





将例 5 中的 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 作为一个矩阵的行向量组

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

不难验证 $A^{T}A = AA^{T} = I$.

定义 (4.3.7)

如果 n 阶实矩阵 A 满足 $A^{T}A = AA^{T} = I$, 则称 A 为正交矩阵.





将例 5 中的 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 作为一个矩阵的行向量组

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

不难验证 $A^{T}A = AA^{T} = I$.

定义 (4.3.7)

如果 n 阶实矩阵 A 满足 $A^{T}A = AA^{T} = I$ 则称 A 为正交矩阵.





- $1^{\circ} A^{-1} = A^{\mathrm{T}}.$
- 2° det $A = \pm 1$. 事实上, det $(A^{\mathrm{T}}A) = (\det A^{\mathrm{T}}) (\det A) = (\det A)^2 = \det I = 1$, 故
- 3° 若 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵
- 4° n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 A 的行 (9) 向量组是标准正交向量组.





- $1^{\circ} A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$
- $2^{\circ} \det A = \pm 1$. 事实上, $\det (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) (\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{I} = 1$, 故 有 det $\mathbf{A} = \pm 1$.





- $1^{\circ} A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$
- $2^{\circ} \det A = \pm 1$. 事实上, $\det (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) (\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{I} = 1$, 故 有 det $\mathbf{A} = \pm 1$.
- 3° 若 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.





- $1^{\circ} A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$
- $2^{\circ} \det A = \pm 1$. 事实上, $\det (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) (\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{I} = 1$, 故 有 det $\mathbf{A} = \pm 1$.
- 3° 若 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.
- 4° n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 A 的行 (列) 向量组是标准 正交向量组.





事实上, 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 A 的行向量组, 故

$$m{A} = \left(egin{array}{c} m{lpha}_1 \ m{lpha}_2 \ dots \ m{lpha}_n \end{array}
ight), \quad m{A}^{
m T} = \left(m{lpha}_1^{
m T}, m{lpha}_2^{
m T}, \cdots, m{lpha}_n^{
m T}
ight),$$

$$m{A}m{A}^{
m T} = \left(egin{array}{cccc} m{lpha}_1 m{lpha}_1^{
m T} & m{lpha}_1 lpha_2^{
m T} & \cdots & m{lpha}_1 m{lpha}_n^{
m T} \ m{lpha}_2 m{lpha}_2^{
m T} & \cdots & m{lpha}_2 m{lpha}_n^{
m T} \ dots & dots & dots \ m{lpha}_n m{lpha}_1^{
m T} & m{lpha}_n m{lpha}_2^{
m T} & \cdots & m{lpha}_n m{lpha}_n^{
m T} \end{array}
ight),$$

由上式可知, $AA^{T} = I$ 的充要条件是

$$\alpha_i \alpha_i^{\mathrm{T}} = 1, \quad \alpha_i \alpha_j^{\mathrm{T}} = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是标准正交向量组



安徽财经大学

事实上, 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 A 的行向量组, 故

$$oldsymbol{A} = \left(egin{array}{c} oldsymbol{lpha}_1 \ oldsymbol{lpha}_2 \ dots \ oldsymbol{lpha}_n \end{array}
ight), \quad oldsymbol{A}^{
m T} = \left(oldsymbol{lpha}_1^{
m T}, oldsymbol{lpha}_2^{
m T}, \cdots, oldsymbol{lpha}_n^{
m T}
ight),$$

$$m{A}m{A}^{
m T} = \left(egin{array}{cccc} m{lpha}_1 m{lpha}_1^{
m T} & m{lpha}_1 lpha_2^{
m T} & \cdots & m{lpha}_1 m{lpha}_n^{
m T} \ m{lpha}_2 m{lpha}_2^{
m T} & \cdots & m{lpha}_2 m{lpha}_n^{
m T} \ dots & dots & dots \ m{lpha}_n m{lpha}_1^{
m T} & m{lpha}_n m{lpha}_2^{
m T} & \cdots & m{lpha}_n m{lpha}_n^{
m T} \end{array}
ight),$$

由上式可知, $AA^{T} = I$ 的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}_{i}\boldsymbol{\alpha}_{i}^{\mathrm{T}}=1, \quad \boldsymbol{\alpha}_{i}\boldsymbol{\alpha}_{j}^{\mathrm{T}}=0 \quad (i\neq j, \quad i,j=1,2,\cdots,n),$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是标准正交向量组.



例 (4.3.6)

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

A 的行向量组是标准正交向量组, 故 A 是正交矩阵. B 的各行向量虽然两两正交, 但 $\alpha_1=(2,0,0)$ 不是单位向量, 故 B 不是正交矩阵.



23 / 26



小结 (I)

- 内积: 实数 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ 称为 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的内积, 记为 (α, β) .
- 若将 α , β 看作行矩阵, 则 (α, β) 又可表示为 $\alpha\beta^{T}$. 若将 α , β 记为 列向量的形式, 则 (α, β) 可表示为 $\alpha^{T}\beta$.
- 内积的性质: 非负性, 对称性, 线性性.
- 长度: $\sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 称为 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的长度,记为 $\|\alpha\|$.
- 向量长度的性质: 非负性, 齐次性和三角不等式 ||α + β|| ≤ ||α|| + ||β||.
- 当 $\|\alpha\| = 1$ 时, 称 α 为单位向量. 若 $\alpha \neq 0$, 则 $\frac{1}{\|\alpha\|} \alpha$ 是单位向量.
- 向量的内积还满足<mark>柯西·施瓦茨不等式</mark>: $(\alpha, \beta)^2 \le \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$, 当且 仅当 α 与 β 线性相关时等号成立.

第四章 特征值与特征向量

• 当 $\alpha \neq 0$ 且 $\beta \neq 0$ 时, α 与 β 的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}$.

小结(Ⅱ)

- n 维向量的正交性: 若向量 α 与 β 的内积为零, 即 $(\alpha, \beta) = 0$, 则 称 α 与 β 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组: 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中任意两个向量都正交且不 含零向量,则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为正交向量组.
- 正交向量组是线性无关的.
- 标准正交向量组: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 n 维向量空间 \mathbf{R}^n 的正交向量组, 且 $\|\alpha_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为标准正交向量组 (规范正交向量组). 若 s = n, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 \mathbf{R}^n 的标准正交基.





安徽财经大学

小结 (Ⅲ)

• 施密特正交化方法: 把线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 化为与之等价的标准正交向量组的施密特正交化过程如下: 正交化

$$eta_1 = oldsymbol{lpha}_1, \quad oldsymbol{eta}_2 = oldsymbol{lpha}_2 - rac{(oldsymbol{lpha}_2, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1, \ oldsymbol{eta}_3 = oldsymbol{lpha}_3 - rac{(oldsymbol{lpha}_3, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1 - rac{(oldsymbol{lpha}_3, oldsymbol{eta}_2)}{(oldsymbol{eta}_2, oldsymbol{eta}_2)} oldsymbol{eta}_2, \cdots$$

单位化:
$$\gamma_i = \frac{1}{\|\beta_i\|} \beta_i$$
 $(i = 1, 2, \dots, s)$.

- 正交矩阵 A: n 阶实矩阵 A 满足 $A^{T}A = AA^{T} = I$.
- 正交矩阵必为方阵且具有以下性质:

$$1^{\circ} \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}. \quad \det \mathbf{A} = \pm 1.$$

- 2° 若 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.
- 3° n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 A 的行 (9) 向量组是标准正交向量组。

