第 3 章　向量与向量组

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

在平面几何中，坐标平面上每个点的位置可以用它的坐标描述，点的坐标是一个有序数对 (x, y). 一个 n 元方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

可以用一个 $n+1$ 元有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$$

表示. $1 \times n$ 矩阵和 $n \times 1$ 矩阵也可以看作有序数组. 一个企业一年中，从 1 月到 12 月每月的产值，也可以用一个有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_{12})$ 表示. 有序数组的应用非常广泛，有必要对它们进行深入的讨论.

定义 (1)

n 个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{3-1}$$

或

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{3-2}$$

称为一个 n 维向量，简称向量.

一般用小写黑体字母，如 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 表示向量. 式 (3-1) 称为一个行向量，式 (3-2) 称为一个列向量，数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为这个向量的分量，a_i 称为这个向量的第 i 个分量或坐标. 分量都是实数的向量称为实向量，分量是复数的向量称为复向量.

实际上，n 维行向量可以看成行矩阵，n 维列向量也常看成列矩阵.

定义 (1)

n 个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{3-1}$$

或

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{3-2}$$

称为一个 n 维向量, 简称向量.

一般用小写黑体字母, 如 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \cdots$ 表示向量. 式 (3-1) 称为一个行向量, 式 (3-2) 称为一个列向量, 数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为这个向量的分量, a_i 称为这个向量的第 i 个分量或坐标. 分量都是实数的向量称为实向量, 分量是复数的向量称为复向量.

实际上, n 维行向量可以看成行矩阵, n 维列向量也常看成列矩阵.

下面只讨论实向量. 设 k 和 l 为两个任意的常数, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 为三个任意的 n 维向量, 其中

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n), \quad \boldsymbol{\gamma} = (c_1, c_2, \cdots, c_n).$$

定义 (2)

如果 α 和 β 对应的分量都相等, 即

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

就称这两个向量**相等**, 记为 $\alpha = \beta$.

下面只讨论实向量. 设 k 和 l 为两个任意的常数, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 为三个任意的 n 维向量, 其中

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n), \quad \boldsymbol{\gamma} = (c_1, c_2, \cdots, c_n).$$

定义 (2)

如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 对应的分量都相等, 即

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

就称这两个向量**相等**, 记为 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$.

定义 (3)

向量

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**和**, 记为 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$.

向量

$$(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与数 k 的**数量乘积**, 简称**数乘**, 记为 $k\boldsymbol{\alpha}$.

定义 (4)

分量全为零的向量

$$(0, 0, \cdots, 0)$$

称为**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$.

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 -1 的数乘

$$(-1)\boldsymbol{\alpha} = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$$

称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**, 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

定义 (3)

向量

$$(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$$

称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**和**, 记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.
向量

$$(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与数 k 的**数量乘积**, 简称**数乘**, 记为 $k\boldsymbol{\alpha}$.

定义 (4)

分量全为零的向量

$$(0, 0, \cdots, 0)$$

称为**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$.
$\boldsymbol{\alpha}$ 与 -1 的数乘

$$(-1)\boldsymbol{\alpha} = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$$

称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**, 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

向量的加法与数乘的性质

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$; (交换律)

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$; (结合律)

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

(6) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(9) $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

(10) $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

在数学中, 满足 (1) ~ (8) 的运算称为线性运算. 还可以证明:
(11) 如果 $k \neq 0$ 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 那么 $k\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$.

显然, n 维行向量的相等和加法、减法及数乘运算的定义, 与把它们看成行矩阵时的相等和加法, 减法及数乘运算的定义是一致的. 对应地, 也可以定义列向量的加法. 减法和数乘运算, 这些运算与把它们看成列矩阵时的加法、减法和数乘运算也是一致的, 并且同样具有性质 (1) ~ (11).

在数学中, 满足 $(1)\sim(8)$ 的运算称为线性运算. 还可以证明:
(11) 如果 $k\neq 0$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 那么 $k\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

显然, n 维行向量的相等和加法、减法及数乘运算的定义, 与把它们看成行矩阵时的相等和加法, 减法及数乘运算的定义是一致的. 对应地, 也可以定义列向量的加法. 减法和数乘运算, 这些运算与把它们看成列矩阵时的加法、减法和数乘运算也是一致的, 并且同样具有性质 $(1)\sim(11)$.

例 (1)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,0)$, 求 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

解

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3&=3(1,1,0)+2(0,1,1)-(3,4,0)\\&=(3,3,0)+(0,2,2)-(3,4,0)=(0,1,2).\end{aligned}$$

例 (1)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,0)$, 求 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

解

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3&=3(1,1,0)+2(0,1,1)-(3,4,0)\\&=(3,3,0)+(0,2,2)-(3,4,0)=(0,1,2).\end{aligned}$$

例 (2)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,\ -1,1)^{\mathrm{T}}$, 且 $2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}) = 2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\beta})$, 求 $\boldsymbol{\beta}$.

解

由 $2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}) = 2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\beta})$, 整理得

$$\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3 - 2\boldsymbol{\alpha}_4 = (-3,5,3,3)^{\mathrm{T}}.$$

例 (2)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，且 $2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\beta})$，求 $\boldsymbol{\beta}$.

解

由 $2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\beta})$，整理得

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4=(-3,5,3,3)^{\mathrm{T}}.$$

由若干个同维数的列向量 (或同维数的行向量) 组成的集合称为向量组.

例如, 一个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 有 n 个 m 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为矩阵 A 的列向量组.

类似地, 矩阵 A 又有 m 个 n 维行向量

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \boldsymbol{\beta}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots,$$

称向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 为矩阵 A 的行向量组.

由若干个同维数的列向量 (或同维数的行向量) 组成的集合称为向量组.

例如, 一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 有 n 个 m 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组.

类似地, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又有 m 个 n 维行向量

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \boldsymbol{\beta}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots,$$

称向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组.

由若干个同维数的列向量 (或同维数的行向量) 组成的集合称为**向量组**.

例如, 一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 有 n 个 m 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列向量组**.

类似地, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又有 m 个 n 维行向量

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \boldsymbol{\beta}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots,$$

称向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行向量组**.

反之, 由 n 个 m 维列向量组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 或由 m 个 n 维行向量组成的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 也可以构成一个 $m \times n$ 矩阵, 即

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

或

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix}.$$

这样, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就与其列向量组或行向量组之间建立了一一对应的关系. 向量组之间的关系可以用矩阵研究; 反过来, 矩阵的问题也可以用向量组研究.

考察线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3-3}$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组 (3-3) 可表示为如下向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}. \tag{3-4}$$

这样, 线性方程组 (3-3) 是否有解的问题, 就转化为是否存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得下列线性关系式成立:

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

考察线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3-3}$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组 (3-3) 可表示为如下向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}. \tag{3-4}$$

这样, 线性方程组 (3-3) 是否有解的问题, 就转化为是否存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得下列线性关系式成立:

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

向量组的线性组合

定义 (5)

给定向量 β 和向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n,$$

则称向量 β 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的一个**线性组合**, 或者说 β **可由向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ **线性表示**, $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 称为**组合系数**.

例 (3)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,1,1)$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示？若能，写出具体表达式.

解

令

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4.$$

于是得线性方程组

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4=1, \\ k_1+k_2-k_3-k_4=2, \\ k_1-k_2+k_3-k_4=1, \\ k_1-k_2-k_3+k_4=1. \end{cases}$$

例 (3)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)$, $\boldsymbol{\beta}=(1,2,1,1)$, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示? 若能, 写出具体表达式.

解

令

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4.$$

于是得线性方程组

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4=1,\\ k_1+k_2-k_3-k_4=2,\\ k_1-k_2+k_3-k_4=1,\\ k_1-k_2-k_3+k_4=1. \end{cases}$$

解

因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-16\neq 0,$$

由克拉默法则求出

$$k_1=\frac{5}{4},\quad k_2=\frac{1}{4},\quad k_3=k_4=-\frac{1}{4},$$

所以

$$\beta=\frac{5}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_3-\frac{1}{4}\alpha_4.$$

因此，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示.

解

因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$$

由克拉默法则求出

$$k_1 = \frac{5}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{4}, \quad k_3 = k_4 = -\frac{1}{4},$$

所以

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{5}{4}\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

因此, $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

例 (4)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-3,0),\boldsymbol{\beta}=(0,-1,2),\boldsymbol{\gamma}=(0,-7,-4)$，则 $\boldsymbol{\gamma}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示?

解

设

$$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta},$$

于是得线性方程组

$$\begin{cases} 2k_1 \qquad\quad = 0, \\ -3k_1-k_2=-7, \\ \qquad\quad 2k_2=-4. \end{cases}$$

由第一个方程得 $k_1=0$，代入第二个方程得 $k_2=7$，但 k_2 不满足第三个方程，故方程组无解.

所以，$\boldsymbol{\gamma}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

例 (4)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-3,0),\boldsymbol{\beta}=(0,-1,2),\boldsymbol{\gamma}=(0,-7,-4)$, 则 γ 能否由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示?

解

设

$$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta},$$

于是得线性方程组

$$\begin{cases} 2k_1 \qquad\quad = 0, \\ -3k_1-k_2=-7, \\ \qquad\quad 2k_2=-4. \end{cases}$$

由第一个方程得 $k_1=0$, 代入第二个方程得 $k_2=7$, 但 k_2 不满足第三个方程, 故方程组无解.
所以, γ 不能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示.

下面考察齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3-5}$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

则齐次线性方程组 (3-5) 可表示为如下向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}. \tag{3-6}$$

下面考察齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3-5}$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

则齐次线性方程组 (3-5) 可表示为如下向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}. \tag{3-6}$$

向量组的线性相关和线性无关

这样，齐次线性方程组 (3-5) 是否有非零解的问题，就转化为是否存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得下列线性关系式成立：

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}.$$

定义 (6)

对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得

$$\sum_{i=1}^{s} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}, \tag{3-7}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.
反之，如果只有在 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ 时式 (3-7) 才成立，就称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

向量组的线性相关和线性无关

这样，齐次线性方程组 (3-5) 是否有非零解的问题，就转化为是否存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得下列线性关系式成立：

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}.$$

定义 (6)

对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得

$$\sum_{i=1}^{s} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}, \tag{3-7}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.
反之，如果只有在 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ 时式 (3-7) 才成立，就称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

换言之，当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是行向量组时，它们线性相关就是指有非零的 $1 \times s$ 矩阵 $(k_1, k_2, \cdots, k_s)$，使

$$(k_1, k_2, \cdots, k_s)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{pmatrix} = \mathbf{0};$$

当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为列向量组时，它们线性相关就是指有非零的 $s \times 1$ 矩阵 $(k_1, k_2, \cdots, k_s)^{\mathrm{T}}$，使

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s\end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

显然，单个零向量构成的向量组是线性相关的.

换言之，当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是行向量组时，它们线性相关就是指有非零的 $1 \times s$ 矩阵 $(k_1, k_2, \cdots, k_s)$，使

$$(k_1, k_2, \cdots, k_s) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_s \end{pmatrix} = \mathbf{0};$$

当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为列向量组时，它们线性相关就是指有非零的 $s \times 1$ 矩阵 $(k_1, k_2, \cdots, k_s)^{\mathrm{T}}$，使

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

显然，单个零向量构成的向量组是线性相关的.

例 (5)

判断向量组 $\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$ 的线性相关性.

解

对任意的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 都有

$$k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n = (k_1, k_2, \cdots, k_n),$$

所以, 当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 时, 才有

$$k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}.$$

因此, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关. ($\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 称为基本单位向量组.)

例 (5)

判断向量组 $\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$ 的线性相关性.

解

对任意的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 都有

$$k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n = (k_1, k_2, \cdots, k_n),$$

所以，当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ 时，才有

$$k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}.$$

因此，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关. ($\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 称为基本单位向量组.)

例 (6)

判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,2,5), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,6)$$

的线性相关性.

解

对任意的常数 k_1, k_2, k_3, 都有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = (k_1 + k_3, k_1 + 2k_2 + 3k_3, k_1 + 5k_2 + 6k_3),$$

所以, 当且仅当

$$\begin{cases} k_1 + \qquad\quad k_3 = 0, \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ k_1 + 5k_2 + 6k_3 = 0 \end{cases}$$

时,

例 (6)

判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,5),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,6)$$

的线性相关性.

解

对任意的常数 k_1,k_2,k_3, 都有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=(k_1+k_3,k_1+2k_2+3k_3,k_1+5k_2+6k_3),$$

所以, 当且仅当

$$\begin{cases} k_1+k_3=0,\\ k_1+2k_2+3k_3=0,\\ k_1+5k_2+6k_3=0\end{cases}$$

时,

解

才有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}.$$

由于

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = -1$$

满足上述方程组，因此

$$1\boldsymbol{\alpha}_1 + 1\boldsymbol{\alpha}_2 + (-1)\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}.$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 (7)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$, 试证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 也线性无关.

证明.

对任意的常数 k_1, k_2, k_3, 都有

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = (k_1 + k_3)\,\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 + k_2)\,\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_2 + k_3)\,\boldsymbol{\alpha}_3.$$

令

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 故有

例 (7)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$, 试证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 也线性无关.

证明.

对任意的常数 k_1, k_2, k_3, 都有

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = (k_1 + k_3)\,\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 + k_2)\,\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_2 + k_3)\,\boldsymbol{\alpha}_3.$$

令

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 故有 □

例 (7)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$，试证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 也线性无关.

证明.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

由于满足此方程组的 k_1, k_2, k_3 的取值只有

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

因此 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关. □

向量组的线性相关性与线性表示这一概念有着密切的联系.

定理 (1)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量能由其余向量线性表示.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个向量能由其余向量线性表示, 不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

那么

$$-\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. □

向量组的线性相关性与线性表示这一概念有着密切的联系.

定理 (1)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量能由其余向量线性表示.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个向量能由其余向量线性表示, 不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

那么

$$-\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. □

定理 (1)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量能由其余向量线性表示.

证明.

反过来，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，就有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

不妨设 $k_1 \neq 0$，那么

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_s,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示. 证毕. $\square$

例如，向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, 3, 1), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (4, -2, 5, 4), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (2, -1, 4, -1)$$

是线性相关的，因为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2.$$

显然，只含有两个向量的向量组 α_1, α_2 线性相关的充分必要条件是存在常数 k，使得 $\alpha_1 = k\alpha_2$，此时，两个向量的对应分量成比例．在三维的情形中，这就表示向量 α_1 与 α_2 共线；三个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关的几何意义就是它们共面．

例如，向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, 3, 1), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (4, -2, 5, 4), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (2, -1, 4, -1)$$

是线性相关的，因为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2.$$

显然，只含有两个向量的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关的充分必要条件是存在常数 k，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1 = k\boldsymbol{\alpha}_2$，此时，两个向量的对应分量成比例．在三维的情形中，这就表示向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线；三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的几何意义就是它们共面．

定理 (2)

设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且表示式是唯一的.

证明.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，就有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_t,k$，使

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t+k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，可以知道 $k\neq 0$. 因此

$$\boldsymbol{\alpha}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{k_t}{k}\boldsymbol{\beta}_t,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示.
下面证明表示式是唯一的.

定理 (2)

设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且表示式是唯一的.

证明.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，就有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_t, k$，使

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\beta}_t + k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关，可以知道 $k \neq 0$. 因此

$$\alpha = -\frac{k_1}{k}\beta_1 - \frac{k_2}{k}\beta_2 - \cdots - \frac{k_t}{k}\beta_t,$$

即 α 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示.

下面证明表示式是唯一的.

定理 (2)

设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且表示式是唯一的.

证明.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，就有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_t,k$，使

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t+k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，可以知道 $k\neq 0$. 因此

$$\boldsymbol{\alpha}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{k_t}{k}\boldsymbol{\beta}_t,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示.
下面证明表示式是唯一的.

定理 (2)

设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且表示式是唯一的.

证明.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，就有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_t, k$，使

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\beta}_t + k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，可以知道 $k \neq 0$. 因此

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{k_2}{k}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{k_t}{k}\boldsymbol{\beta}_t,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示.
下面证明表示式是唯一的. □

证明.

若有两个表示式，即

$$\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_t\boldsymbol{\beta}_t = h_1\boldsymbol{\beta}_1 + h_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + h_t\boldsymbol{\beta}_t,$$

则有

$$\begin{aligned}&(l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_t\boldsymbol{\beta}_t) - (h_1\boldsymbol{\beta}_1 + h_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + h_t\boldsymbol{\beta}_t)\\ &= (l_1 - h_1)\boldsymbol{\beta}_1 + (l_2 - h_2)\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + (l_t - h_t)\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关，可以得到

$$l_1 = h_1, \quad l_2 = h_2, \quad \cdots, \quad l_t = h_t.$$

因此，表示式是唯一的．证毕．

证明.

若有两个表示式, 即

$$\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_t\boldsymbol{\beta}_t = h_1\boldsymbol{\beta}_1 + h_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + h_t\boldsymbol{\beta}_t,$$

则有

$$\begin{aligned}&(l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_t\boldsymbol{\beta}_t) - (h_1\boldsymbol{\beta}_1 + h_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + h_t\boldsymbol{\beta}_t)\\ =\ &(l_1 - h_1)\boldsymbol{\beta}_1 + (l_2 - h_2)\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + (l_t - h_t)\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关, 可以得到

$$l_1 = h_1, \quad l_2 = h_2, \quad \cdots, \quad l_t = h_t.$$

因此, 表示式是唯一的. 证毕. $\square$

将一个向量组中的某些向量组成的向量组称为原向量组的**部分组**.

定理 (3)

有一个部分组线性相关的向量组一定线性相关.

证明.

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个部分组线性相关. 不妨设这个部分组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r \leqslant s)$, 则有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i = \mathbf{0}.$$

从而存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$, 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r + 0 \cdot \alpha_{r+1} + \cdots + 0 \cdot \alpha_s = \sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{j=r+1}^{s} 0 \cdot \alpha_j = \mathbf{0}.$$

因此, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 也线性相关. 证毕. □

将一个向量组中的某些向量组成的向量组称为原向量组的部分组.

定理 (3)

有一个部分组线性相关的向量组一定线性相关.

证明.

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组线性相关. 不妨设这个部分组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r \leqslant s)$, 则有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}.$$

从而存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_s = \sum_{i=1}^{r} k_i\boldsymbol{\alpha}_i + \sum_{j=r+1}^{s} 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0}.$$

因此, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关. 证毕. □

将一个向量组中的某些向量组成的向量组称为原向量组的部分组.

定理 (3)

有一个部分组线性相关的向量组一定线性相关.

证明.

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组线性相关. 不妨设这个部分组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r \leqslant s)$, 则有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}.$$

从而存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$, 使

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_r \boldsymbol{\alpha}_r + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_s = \sum_{i=1}^{r} k_i \boldsymbol{\alpha}_i + \sum_{j=r+1}^{s} 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0}.$$

因此, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关. 证毕. □

推论 (1)

含有零向量的向量组必线性相关.

定理 (4)

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 为两个向量组, 其中

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \quad \beta_i = \begin{pmatrix} a_{ip_1} \\ a_{ip_2} \\ \vdots \\ a_{ip_n} \end{pmatrix}$$

即 β_i 是对 α_i 各分量的顺序进行重排后得到的向量 $(i = 1, 2, \cdots, s)$, 则这两个向量组有相同的线性相关性.

推论 (1)

含有零向量的向量组必线性相关.

定理 (4)

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 为两个向量组, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_i = \begin{pmatrix} a_{ip_1} \\ a_{ip_2} \\ \vdots \\ a_{ip_n} \end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是对 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 各分量的顺序进行重排后得到的向量 $(i = 1, 2, \cdots, s)$, 则这两个向量组有相同的线性相关性.

证明.

对任意的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 注意到下面的两个列向量

$$\sum_{i=1}^{s} k_i \boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \cdots + k_s a_{s1} \\ k_1 a_{12} + k_2 a_{22} + \cdots + k_s a_{s2} \\ \vdots \\ k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n} + \cdots + k_s a_{sn} \end{pmatrix}$$

和

$$\sum_{i=1}^{s} k_i \boldsymbol{\beta}_i = \begin{pmatrix} k_1 a_{1p_1} + k_2 a_{2p_1} + \cdots + k_s a_{sp_1} \\ k_1 a_{1p_2} + k_2 a_{2p_2} + \cdots + k_s a_{sp_2} \\ \vdots \\ k_1 a_{1p_n} + k_2 a_{2p_n} + \cdots + k_s a_{sp_n} \end{pmatrix}$$

只是各分量的排列顺序不同, 因此 □

证明.

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\beta}_s = \mathbf{0},$$

当且仅当

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 有相同的线性相关性. 证毕. □

定理 4 对行向量也有相同的结论.

定理 (5)

在 r 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的各向量中，添上 $n-r$ 个分量使其变成 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$.

(1) 如果 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关;

(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，那么 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也线性无关.

证明.

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\beta}_s = \mathbf{0},$$

当且仅当

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 有相同的线性相关性. 证毕. □

定理 4 对行向量也有相同的结论.

定理 (5)

在 r 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的各向量中，添上 $n-r$ 个分量使其变成 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$.

(1) 如果 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关;

(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，那么 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也线性无关.

证明.

下面对列向量证明定理. 设

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = \boldsymbol{A}_1,$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

如果 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关, 就有一个非零的 $s \times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)\,\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

从而 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关, 即 (1) 成立. 利用 (1), 用反证法容易证明 (2) 也成立. □

例如, $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ 是线性无关的, 因此, 由定理 5 知, $\alpha_1 = (1,0,0,1), \alpha_2 = (0,1,0,2), \alpha_3 = (0,0,1,3)$ 也线性无关.

证明.

下面对列向量证明定理. 设

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = \boldsymbol{A}_1,$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

如果 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关, 就有一个非零的 $s \times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)\,\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

从而 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关, 即 (1) 成立. 利用 (1), 用反证法容易证明 (2) 也成立. □

例如, $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ 是线性无关的, 因此, 由定理 5 知, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0,2), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1,3)$ 也线性无关.

定理 (6)

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的列 (行) 向量组线性相关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

证明.

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$,

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组. 令

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}, \tag{3-8}$$

定理 (6)

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的列 (行) 向量组线性相关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

证明.

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$,

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组. 令

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}, \tag{3-8}$$

□

证明.

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充分必要条件是, 存在一组不全为零的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得式 (3-8) 成立, 即齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3-9}$$

有非零解. 由第 1 章定理 7 知, 式 (3-9) 存在非零解的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$. 证毕. □

推论 (2)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.

例 (8)

讨论下列矩阵的行 (列) 向量组的线性相关性:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解

由于 $|\boldsymbol{B}|=2\neq 0$, 因此 $\boldsymbol{B}$ 的行 (列) 向量组线性无关; 由于 $|\boldsymbol{C}|=0$, 所以 $\boldsymbol{C}$ 的行 (列) 向量组线性相关.

推论 (2)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.

例 (8)

讨论下列矩阵的行 (列) 向量组的线性相关性:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&2&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}.$$

解

由于 $|B|=2\neq 0$, 因此 B 的行 (列) 向量组线性无关; 由于 $|C|=0$, 所以 C 的行 (列) 向量组线性相关.

推论 (2)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.

例 (8)

讨论下列矩阵的行 (列) 向量组的线性相关性:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解

由于 $|\boldsymbol{B}| = 2 \neq 0$, 因此 $\boldsymbol{B}$ 的行 (列) 向量组线性无关; 由于 $|\boldsymbol{C}| = 0$, 所以 $\boldsymbol{C}$ 的行 (列) 向量组线性相关.

例 (9)

判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,-2),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,-3)$ 是否线性相关.

解

以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为行向量组得到三阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

故由定理 6 知, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 (9)

判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1), \boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,-2), \boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,-3)$ 是否线性相关.

解

以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为行向量组得到三阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

故由定理 6 知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

定理 (7)

当 $m > n$ 时, m 个 n 维向量必线性相关.

证明.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为 n 维向量组. 对每个 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 添加 $m - n$ 个零分量得到 m 维向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$.
易知, 由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 构成的 m 阶方阵的行列式等于 0. 由定理 6 知, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性相关. 从而由定理 5 知, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.
证毕. □

推论 (3)

$n + 1$ 个 n 维向量必线性相关.

定理 (7)

当 $m > n$ 时, m 个 n 维向量必线性相关.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为 n 维向量组. 对每个 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 添加 $m - n$ 个零分量得到 m 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$.
易知, 由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 构成的 m 阶方阵的行列式等于 0. 由定理 6 知, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关. 从而由定理 5 知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.
证毕. □

推论 (3)

$n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

定理 (7)

当 $m > n$ 时，m 个 n 维向量必线性相关.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为 n 维向量组. 对每个 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 添加 $m - n$ 个零分量得到 m 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$.
易知，由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 构成的 m 阶方阵的行列式等于 0. 由定理 6 知，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关. 从而由定理 5 知，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.
证毕. □

推论 (3)

$n + 1$ 个 n 维向量必线性相关.

定义 (7)

设有两个向量组

$$A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r;$$
$$B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s.$$

如果向量组 A 中的每个向量都能由向量组 B 线性表示, 则称向量组 A 能由向量组 B 线性表示. 如果向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示, 则称这两个向量组等价.

显然, 向量组之间的等价关系具有下述性质:

(1) 反身性: 向量组 A 与自身等价;

(2) 对称性: 若向量组 A 与向量组 B 等价, 则向量组 B 与向量组 A 也等价;

(3) 传递性: 若向量组 A 与向量组 B 等价, 向量组 B 与向量组 C 等价, 则向量组 A 与向量组 C 等价.

定义 (7)

设有两个向量组

$$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r;$$
$$B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s.$$

如果向量组 A 中的每个向量都能由向量组 B 线性表示, 则称向量组 A 能由向量组 B 线性表示. 如果向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示, 则称这两个向量组等价.

显然, 向量组之间的等价关系具有下述性质:
(1) 反身性: 向量组 A 与自身等价;
(2) 对称性: 若向量组 A 与向量组 B 等价, 则向量组 B 与向量组 A 也等价;
(3) 传递性: 若向量组 A 与向量组 B 等价, 向量组 B 与向量组 C 等价, 则向量组 A 与向量组 C 等价.

定理 (8)

如果向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，且 $r>s$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.

证明.

不妨假定讨论的是列向量. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，那么

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\begin{pmatrix}p_{i1}\\p_{i2}\\\vdots\\p_{is}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\cdot\gamma_i,$$

其中 $\gamma_i=\begin{pmatrix}p_{i1}\\p_{i2}\\\vdots\\p_{is}\end{pmatrix}$, $i=1,2,\cdots,r$. □

定理 (8)

如果向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，且 $r > s$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.

证明.

不妨假定讨论的是列向量. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，那么

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{is} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) \cdot \gamma_i,$$

其中 $\gamma_i = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{is} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, r.$ □

证明.

令

$$\boldsymbol{A}=\left(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r\right),$$

则

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\right)=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\right)\boldsymbol{A}.$$

由于 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 为由 r 个向量组成的 s 维向量组, 且 $r>s$, 由定理 7 知, 它们必线性相关. 因此有非零的 $r\times 1$ 矩阵

$$\left(k_1,k_2,\cdots,k_r\right)^{\mathrm{T}},$$

使

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{pmatrix}=\left(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r\right)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

证明.

令

$$\boldsymbol{A}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r),$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\,\boldsymbol{A}.$$

由于 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 为由 r 个向量组成的 s 维向量组, 且 $r>s$, 由定理 7 知, 它们必线性相关. 因此有非零的 $r\times 1$ 矩阵

$$(k_1,k_2,\cdots,k_r)^{\mathrm{T}},$$

使

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{pmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

□

证明.

从而

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)\,\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

亦即存在 r 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}.$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关. 证毕. □

推论 (4)

如果向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，那么 $r \leqslant s$.

推论 (5)

两个等价的线性无关的向量组必含有相同个数的向量.

设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，只要向量组中含有非零向量，则只含有这一个非零向量的部分组是线性无关的；在这个部分组中添加原向量组中的另一个非零向量，如果这两个向量组成的部分组仍然是线性无关的，则再从原向量组中取出一个不属于这个部分组的非零向量添加进来，使这三个向量组成的部分组线性无关. 这样一直做下去，最后总能得到向量组中由 r 个向量组成的部分组是线性无关的，再添加一个向量则部分组就线性相关了. 这样得到的由 r 个向量组成的线性无关的部分组是极大的线性无关的部分组.

推论 (4)

如果向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，那么 $r \leqslant s$.

推论 (5)

两个等价的线性无关的向量组必含有相同个数的向量.

设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，只要向量组中含有非零向量，则只含有这一个非零向量的部分组是线性无关的；在这个部分组中添加原向量组中的另一个非零向量，如果这两个向量组成的部分组仍然是线性无关的，则再从原向量组中取出一个不属于这个部分组的非零向量添加进来，使这三个向量组成的部分组线性无关．这样一直做下去，最后总能得到向量组中由 r 个向量组成的部分组是线性无关的，再添加一个向量则部分组就线性相关了．这样得到的由 r 个向量组成的线性无关的部分组是极大的线性无关的部分组.

推论 (4)

如果向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，那么 $r \leqslant s$.

推论 (5)

两个等价的线性无关的向量组必含有相同个数的向量.

设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，只要向量组中含有非零向量，则只含有这一个非零向量的部分组是线性无关的；在这个部分组中添加原向量组中的另一个非零向量，如果这两个向量组成的部分组仍然是线性无关的，则再从原向量组中取出一个不属于这个部分组的非零向量添加进来，使这三个向量组成的部分组线性无关. 这样一直做下去，最后总能得到向量组中由 r 个向量组成的部分组是线性无关的，再添加一个向量则部分组就线性相关了. 这样得到的由 r 个向量组成的线性无关的部分组是极大的线性无关的部分组.

定义 (8)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足:
(1) 部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关;
(2) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}_i (1 \leqslant i \leqslant s)$, 都有 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关, 则称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组(简称极大无关组).

例 (10)

在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-2,5,4),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,4,-1)$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为它的一个极大线性无关组. 首先，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的对应分量不成比例，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，再添入 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 以后，由

$$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$$

可知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组. 不难验证 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大线性无关组.

容易证明, 定义 8 与下面的定义 $8'$ 等价.

定义 (8')

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足:
(1) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关;
(2) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, s)$, $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示, 则称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**极大线性无关组**.

从例 10 发现：向量组的极大线性无关组可能不是唯一的. 因此

性质 (1)

一向量组的极大线性无关组与向量组本身等价.

性质 (2)

一向量组的任意两个极大线性无关组等价.

性质 (3)

一向量组的任意两个极大线性无关组含有相同个数的向量.

性质 3 表明向量组的极大线性无关组所含向量的个数与极大线性无关组的选择无关，它反映了向量组本身的特征.

从例 10 发现: 向量组的极大线性无关组可能不是唯一的. 因此

性质 (1)

一向量组的极大线性无关组与向量组本身等价.

性质 (2)

一向量组的任意两个极大线性无关组等价.

性质 (3)

一向量组的任意两个极大线性无关组含有相同个数的向量.

性质 3 表明向量组的极大线性无关组所含向量的个数与极大线性无关组的选择无关, 它反映了向量组本身的特征.

从例 10 发现: 向量组的极大线性无关组可能不是唯一的. 因此

性质 (1)

一向量组的极大线性无关组与向量组本身等价.

性质 (2)

一向量组的任意两个极大线性无关组等价.

性质 (3)

一向量组的任意两个极大线性无关组含有相同个数的向量.

性质 3 表明向量组的极大线性无关组所含向量的个数与极大线性无关组的选择无关, 它反映了向量组本身的特征.

由第 3 节知道, 一个向量组的极大线性无关组可能不是唯一的, 但任意两个极大线性无关组所含向量的个数是相同的.

定义 (9)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的**秩**, 记为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$. 规定只含零向量的向量组的秩为 0.

例如, 例 10 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2.

由第 3 节知道，一个向量组的极大线性无关组可能不是唯一的，但任意两个极大线性无关组所含向量的个数是相同的.

定义 (9)

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的**秩**，记为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$. 规定只含零向量的向量组的秩为 0.

例如，例 10 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2.

由于线性无关的向量组本身就是它的极大线性无关组，所以有**一向量组线性无关的充分必要条件为它的秩与它所含向量的个数相同**.

我们知道，每个向量组都与它的极大线性无关组等价，由等价的传递性可知，任意两个等价的向量组的极大线性无关组也等价，根据推论 5 就有**等价的向量组必有相同的秩**.

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 能由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示，那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 的极大线性无关组线性表示．因此，由推论 4 有，

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示，则

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leqslant r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

由于线性无关的向量组本身就是它的极大线性无关组, 所以有一向量组线性无关的充分必要条件为它的秩与它所含向量的个数相同.

我们知道, 每个向量组都与它的极大线性无关组等价, 由等价的传递性可知, 任意两个等价的向量组的极大线性无关组也等价, 根据推论 5 就有等价的向量组必有相同的秩.

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 能由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 的极大线性无关组线性表示. 因此, 由推论 4 有,

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示, 则

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leqslant r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

由于线性无关的向量组本身就是它的极大线性无关组，所以有一向量组线性无关的充分必要条件为它的秩与它所含向量的个数相同.

我们知道，每个向量组都与它的极大线性无关组等价，由等价的传递性可知，任意两个等价的向量组的极大线性无关组也等价，根据推论 5 就有等价的向量组必有相同的秩.

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 的极大线性无关组线性表示. 因此，由推论 4 有，

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，则

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) \leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t).$$

定理 (9)

向量组的任意线性无关的部分组都可扩充为一个极大线性无关组.

证明.

设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中的一个线性无关的部分组, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中每个向量都可由这个部分组线性表示, 那么这个部分组就是一个极大线性无关组. 如果还有某向量 $\alpha_{i_{k+1}}$ 不能被这个部分组线性表示, 那么由

$$l_1\alpha_{i_1} + l_2\alpha_{i_2} + \cdots + l_{k+1}\alpha_{i_{k+1}} = \mathbf{0},$$

就有 $l_{k+1} = 0$. 再由向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k}$ 线性无关, 可得

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_k = 0.$$

这样得到一个含 $k+1$ 个向量的线性无关的部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_{k+1}}$. 重复这个过程, 最后必可得到 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性无关的部分组, 使向量组中的每个向量都可由该部分组 (极大线性无关组) 线性表

定理 (9)

向量组的任意线性无关的部分组都可扩充为一个极大线性无关组.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中的一个线性无关的部分组, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量都可由这个部分组线性表示, 那么这个部分组就是一个极大线性无关组. 如果还有某向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{k+1}}$ 不能被这个部分组线性表示, 那么由

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + l_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + l_{k+1}\boldsymbol{\alpha}_{i_{k+1}} = \mathbf{0},$$

就有 $l_{k+1} = 0$. 再由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 线性无关, 可得

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_k = 0.$$

这样得到一个含 $k+1$ 个向量的线性无关的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_{k+1}}$. 重复这个过程, 最后必可得到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个线性无关的部分组, 使向量组中的每个向量都可由该部分组 (极大线性无关组) 线性表示.

定理 (9)

向量组的任意线性无关的部分组都可扩充为一个极大线性无关组.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的一个线性无关的部分组，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量都可由这个部分组线性表示，那么这个部分组就是一个极大线性无关组. 如果还有某向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{k+1}}$ 不能被这个部分组线性表示，那么由

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+l_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+l_{k+1}\boldsymbol{\alpha}_{i_{k+1}}=\mathbf{0},$$

就有 $l_{k+1}=0$. 再由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 线性无关，可得

$$l_1=l_2=\cdots=l_k=0.$$

这样得到一个含 $k+1$ 个向量的线性无关的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_{k+1}}$. 重复这个过程，最后必可得到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个线性无关的部分组，使向量组中的每个向量都可由该部分组 (极大线性无关组) 线性表

定理 (9)

向量组的任意线性无关的部分组都可扩充为一个极大线性无关组.

证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中的一个线性无关的部分组, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量都可由这个部分组线性表示, 那么这个部分组就是一个极大线性无关组. 如果还有某向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{k+1}}$ 不能被这个部分组线性表示, 那么由

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + l_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + l_{k+1}\boldsymbol{\alpha}_{i_{k+1}} = \mathbf{0},$$

就有 $l_{k+1} = 0$. 再由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 线性无关, 可得

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_k = 0.$$

这样得到一个含 $k+1$ 个向量的线性无关的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_{k+1}}$. 重复这个过程, 最后必可得到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个线性无关的部分组, 使向量组中的每个向量都可由该部分组 (极大线性无关组) 线性表示.

推论 (6)

秩为 r 的向量组中，任意含 r 个向量的线性无关的部分组都是向量组的极大线性无关组.

例 (11)

求向量组 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 3)$, $\alpha_2 = (0, 1, -1, 2)$, $\alpha_3 = (1, 0, -1, 5)$, $\alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$ 的一个极大线性无关组及秩.

解

α_1 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个线性无关的部分组，显然，α_2 不能由 α_1 线性表示，所以 α_1 可以扩充为一个线性无关的部分组 α_1, α_2. 容易证明 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$，但 α_4 不能由 α_1, α_2 线性表示，所以 α_1, α_2 又可扩充为一个线性无关的部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为 3，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ 是它的一个极大线性无关组.

推论 (6)

秩为 r 的向量组中，任意含 r 个向量的线性无关的部分组都是向量组的极大线性无关组.

例 (11)

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1,5)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,2)$ 的一个极大线性无关组及秩.

解

α_1 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个线性无关的部分组，显然，α_2 不能由 α_1 线性表示，所以 α_1 可以扩充为一个线性无关的部分组 α_1,α_2. 容易证明 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，但 α_4 不能由 α_1,α_2 线性表示，所以 α_1,α_2 又可扩充为一个线性无关的部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$. 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，α_1,α_2,α 是它的一个极大线性无关组.

推论 (6)

秩为 r 的向量组中，任意含 r 个向量的线性无关的部分组都是向量组的极大线性无关组.

例 (11)

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,4,0,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,-1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,-1,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = (0,0,0,2)$ 的一个极大线性无关组及秩.

解

$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个线性无关的部分组，显然，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以扩充为一个线性无关的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. 容易证明 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，但 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 又可扩充为一个线性无关的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}$ 是它的一个极大线性无关组.

第 2 章中给出了矩阵的秩的定义和计算方法，那么向量组的秩与矩阵的秩有什么关系呢?

引理 (1)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 r 个 n 维列向量 $(r \leqslant n)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$ 至少有一个 r 阶子式不为零.

证明.

充分性由本章的定理 5 与推论 2 可明显得到.
下面证明必要性. 对向量的个数 r，用数学归纳法证明.
当 $r=1$ 时，由 α_1 线性无关知，$\alpha_1 \neq \mathbf{0}$，从而 A 至少有一个一阶子式不为零.
假设当 $r=k$ 时，结论成立.

第 2 章中给出了矩阵的秩的定义和计算方法, 那么向量组的秩与矩阵的秩有什么关系呢?

引理 (1)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 r 个 n 维列向量 $(r \leqslant n)$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$ 至少有一个 r 阶子式不为零.

证明.

充分性由本章的定理 5 与推论 2 可明显得到.

下面证明必要性. 对向量的个数 r, 用数学归纳法证明.

当 $r = 1$ 时, 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关知, $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个一阶子式不为零.

假设当 $r = k$ 时, 结论成立. □

证明.

当 $r=k+1\leqslant n$ 时，设

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix} a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,k+1,$$

且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 亦线性无关. 由数学归纳法知，矩阵 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$ 至少存在一个 k 阶子式不为零. 不妨设

$$D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{3-10}$$

证明.

当 $r = k+1 \leqslant n$ 时，设

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, k+1,$$

且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 亦线性无关. 由数学归纳法知，矩阵 $B = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k)$ 至少存在一个 k 阶子式不为零. 不妨设

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3-10}$$

□

证明.

令

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ki} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, k+1.$$

由式 (3-10) 知, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ 线性无关. 而 $k+1$ 个 k 维向量 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k, \gamma_{k+1}$ 线性相关, 根据本章的定理 2, γ_{k+1} 可由 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ 线性表示, 即存在一组确定的数 $t_1, t_2, \cdots, t_k$, 使得

$$\gamma_{k+1} = t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 + \cdots + t_k\gamma_k,$$

从而有

$$a_{i,k+1} - \sum_{j=1}^{k} t_j a_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{3-11}$$

□

证明.

令$\beta = \boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \sum_{j=1}^{n} t_j \boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 这里,

$$b_i = a_{i,k+1} - \sum_{j=1}^{k} t_j a_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则由式 (3-11) 知, $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$.

但因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性无关，则 $\beta \neq \mathbf{0}$. 因此必存在某个 $b_s \neq 0 (k < s \leqslant n)$. 于是 $k+1$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,k]{c_{k+1}+(-t_i)\times c_i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 \end{vmatrix} = b_s D_k \neq 0.$$

证明.

令 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \sum_{j=1}^{n} t_j \boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 这里,

$$b_i = a_{i,k+1} - \sum_{j=1}^{k} t_j a_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则由式 (3-11) 知, $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$.
但因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. 因此必存在某个 $b_s \neq 0 (k < s \leqslant n)$. 于是 $k+1$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,k]{c_{k+1}+(-t_i)\times c_i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 \end{vmatrix} = b_s D_k \neq 0.$$

下面建立向量组的秩与矩阵的秩的关系.

定理 (10)

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则矩阵 A 的秩等于它的列向量组的秩, 也等于它的行向量组的秩.

证明.

下面只讨论列向量组的情况, 类似可讨论行向量组的情况.
设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 A 的列向量组, $r(A) = r$, $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = s$.
首先, 由 $r(A) = r$, 则矩阵 A 中至少存在一个 r 阶子式 $D_r \neq 0$, 由本章的定理 5 和推论 2 知, D_r 所在的 A 中的 r 个列向量一定线性无关, 从而 $s \geqslant r$; 另外, 由 $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = s$, 则必有 s 个列向量构成 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的极大线性无关组, 由引理 1 知, 这 s 个列向量构成的矩阵中至少存在一个 s 阶子式不为零, 从而 $r \geqslant s$. 于是有 $r = s$. 证毕. □

下面建立向量组的秩与矩阵的秩的关系.

定理 (10)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于它的列向量组的秩, 也等于它的行向量组的秩.

证明.

下面只讨论列向量组的情况, 类似可讨论行向量组的情况.
设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $r(\boldsymbol{A}) = r$, $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = s$.
首先, 由 $r(\boldsymbol{A}) = r$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中至少存在一个 r 阶子式 $D_r \neq 0$, 由本章的定理 5 和推论 2 知, D_r 所在的 $\boldsymbol{A}$ 中的 r 个列向量一定线性无关, 从而 $s \geqslant r$; 另外, 由 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = s$, 则必有 s 个列向量构成 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大线性无关组, 由引理 1 知, 这 s 个列向量构成的矩阵中至少存在一个 s 阶子式不为零, 从而 $r \geqslant s$. 于是有 $r = s$. 证毕. □

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

推论 (7)

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩与列秩相等.

由定理 10 的证明知, 若 D_r 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式, 则 D_r 所在的 r 个行和 r 个列就分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组和列向量组的一个极大线性无关组.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

推论 (7)

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩与列秩相等.

由定理 10 的证明知, 若 D_r 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式, 则 D_r 所在的 r 个行和 r 个列就分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组和列向量组的一个极大线性无关组.

由此，可以给出求向量组的秩和极大线性无关组的步骤：
(1) 以向量组中的各向量作为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$；
(2) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换将该矩阵化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$；
(3) 行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的非零行的个数即为矩阵 $\boldsymbol{B}$ (也是矩阵 $\boldsymbol{A}$) 的秩，亦即向量组的秩；
(4) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应的列向量组有相同的线性组合关系，则与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的首非零元所在的列对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的部分列向量组即为所求向量组的一个极大线性无关组.
同理，也可以将向量组中的各向量作为行向量组成矩阵，通过作初等列变换来求向量组的秩和极大线性无关组.

例 (12)

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,1,0,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,-1,-3,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,2,-1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,2,5,6,2)$ 的秩和一个极大线性无关组, 并把不属于极大线性无关组的其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解

把向量组作为列向量组成矩阵 A, 利用初等行变换将 A 化为行最简形矩阵 B:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\4&5&2&2\\1&-1&2&5\\0&-3&-1&6\\2&2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-3&2&6\\0&-3&2&6\\0&-3&-1&6\\0&-2&0&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B.$$

例 (12)

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,1,0,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,-1,-3,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,2,-1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,2,5,6,2)$ 的秩和一个极大线性无关组, 并把不属于极大线性无关组的其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解

把向量组作为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$, 利用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\4&5&2&2\\1&-1&2&5\\0&-3&-1&6\\2&2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-3&2&6\\0&-3&2&6\\0&-3&-1&6\\0&-2&0&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

解

易见 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 3$, $\boldsymbol{B}$ 的第 $1, 2, 3$ 列线性无关, 由于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的列向量组有相同的线性组合关系, 故与 $\boldsymbol{B}$ 对应的 $\boldsymbol{A}$ 的第 $1, 2, 3$ 列线性无关, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是该向量组的一个极大线性无关组. 又由 $\boldsymbol{B}$, 易得

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

例 (13)

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0), \boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2), \boldsymbol{\alpha}_4=(3,-2,t+4,-1)$ 的秩为 2, 试确定 t 的值.

解

考察矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & t & 5 & t+4 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

由条件知 $r(\boldsymbol{A})=2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式均为 0.
故由

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & t & 5 \end{vmatrix}=-12+4t=0$$

得 $t=3$.

例 (13)

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2),\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-2,t+4,-1)$ 的秩为 2, 试确定 t 的值.

解

考察矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & t & 5 & t+4 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

由条件知 $r(\boldsymbol{A})=2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式均为 0.

故由

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & t & 5 \end{vmatrix}=-12+4t=0$$

得 $t=3$.

例 (13)

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, t, 0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, -4, 5, -2), \boldsymbol{\alpha}_4 = (3, -2, t+4, -1)$ 的秩为 2, 试确定 t 的值.

解

考察矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & t & 5 & t+4 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

由条件知 $r(\boldsymbol{A}) = 2$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式均为 0.
故由

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & t & 5 \end{vmatrix} = -12 + 4t = 0$$

得 $t = 3$.

前面定义了 n 维向量的线性运算，为了描述向量的度量性质，还需要引入向量内积的概念.

定义 (10)

设有 n 维向量

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

称 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积.

内积是向量的一种运算，用矩阵形式可表示为 $[x, y] = x^{\mathrm{T}}y$.

前面定义了 n 维向量的线性运算，为了描述向量的度量性质，还需要引入向量内积的概念.

定义 (10)

设有 n 维向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

称 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**内积**.

内积是向量的一种运算，用矩阵形式可表示为 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

例 (14)

计算下列向量的内积:

(1) $\boldsymbol{x} = (0, 1, 5, -2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y} = (-2, 0, -1, 3)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{x} = (-2, 1, 0, 3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y} = (3, -6, 8, 4)^{\mathrm{T}}$.

解

(1) $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = 0 \times (-2) + 1 \times 0 + 5 \times (-1) + (-2) \times 3 = -11.$

(2) $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = (-2) \times 3 + 1 \times (-6) + 0 \times 8 + 3 \times 4 = 0.$

例 (14)

计算下列向量的内积:

(1) $\boldsymbol{x} = (0, 1, 5, -2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y} = (-2, 0, -1, 3)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{x} = (-2, 1, 0, 3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y} = (3, -6, 8, 4)^{\mathrm{T}}$.

解

(1) $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = 0 \times (-2) + 1 \times 0 + 5 \times (-1) + (-2) \times 3 = -11.$

(2) $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = (-2) \times 3 + 1 \times (-6) + 0 \times 8 + 3 \times 4 = 0.$

若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 为 n 维实向量, λ 为实数, 则从内积的定义可推得下列性质:
(1) $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]$;
(2) $[\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \lambda [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$;
(3) $[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}] = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}] + [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$;
(4) $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] \geqslant 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时等号成立.
由于对任意一个向量 $\boldsymbol{x}$, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] \geqslant 0$, 因此可以引入向量长度的概念.

定义 (11)

称 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的**长度 (或范数)**. 当 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 为**单位向量**.

向量的长度具有下列基本性质:

(1) 非负性: 当 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\| > 0$; 当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\| = 0$;

(2) 齐次性: $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$;

(3) 三角不等式: $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$;

(4) 柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式: $|[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

下面只证明性质 (4).

定义 (11)

称 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的**长度 (或范数)**. 当 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 为**单位向量**.

向量的长度具有下列基本性质:
(1) 非负性: 当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\| > 0$; 当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\| = 0$;
(2) 齐次性: $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$;
(3) 三角不等式: $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$;
(4) 柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式: $|[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.
下面只证明性质 (4).

柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式: $|[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

证明.

当 $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 时, 结论显然成立. 设 $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, 作向量 $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}(t \in \mathbf{R})$, 因为内积 $[\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}] \geqslant 0$, 由内积的运算规律得

$$[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}]t^2+2[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]t+[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] \geqslant 0,$$

上式左端是 t 的二次多项式, 且 t^2 的系数 $[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}]>0$, 因此

$$4[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]^2-4[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}][\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}] \leqslant 0,$$

即

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]^2 \leqslant[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}][\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}]=\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2.$$

故

$$|[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]| \leqslant\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|.$$

证毕. $\square$

柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式: $|[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

证明.

当 $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ 时, 结论显然成立. 设 $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, 作向量 $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}(t \in \mathbf{R})$, 因为内积 $[\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}] \geqslant 0$, 由内积的运算规律得

$$[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}]t^2 + 2[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]t + [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] \geqslant 0,$$

上式左端是 t 的二次多项式, 且 t^2 的系数 $[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}] > 0$, 因此

$$4[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]^2 - 4[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}][\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}] \leqslant 0,$$

即

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]^2 \leqslant [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}][\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}] = \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2.$$

故

$$|[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|.$$

证毕. □

柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式: $|[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

证明.

当 $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 时, 结论显然成立. 设 $\boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}$, 作向量 $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}(t\in\mathbf{R})$, 因为内积 $[\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}]\geqslant 0$, 由内积的运算规律得

$$[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}]t^2+2[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]t+[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}]\geqslant 0,$$

上式左端是 t 的二次多项式, 且 t^2 的系数 $[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}]>0$, 因此

$$4[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]^2-4[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}][\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}]\leqslant 0,$$

即

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]^2\leqslant[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}][\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}]=\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2.$$

故

$$|[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|.$$

证毕. □

对任意一个非零向量 x, 向量 $\frac{x}{\|x\|}$ 是一个单位向量, 因为由向量长度的非负性知, $\|x\| > 0$, 再根据向量长度的齐次性, 有

$$\left\| \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \|\boldsymbol{x}\| = 1.$$

由此可知, 用非零向量 x 的长度去除向量 x, 就可得到一个单位向量, 这一过程通常称为向量 x 的单位化.

由柯西-施瓦茨不等式, 可得

$$\left| \frac{[x, y]}{\|x\| \cdot \|y\|} \right| \leqslant 1 \quad (\|x\| \cdot \|y\| \neq 0).$$

因此, 可利用内积定义 n 维向量的夹角.

对任意一个非零向量 $\boldsymbol{x}$, 向量 $\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 是一个单位向量, 因为由向量长度的非负性知, $\|\boldsymbol{x}\|>0$, 再根据向量长度的齐次性, 有

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\|=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\|\boldsymbol{x}\|=1.$$

由此可知, 用非零向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度去除向量 $\boldsymbol{x}$, 就可得到一个单位向量, 这一过程通常称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的**单位化**.
由柯西-施瓦茨不等式, 可得

$$\left|\frac{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}\right|\leqslant 1\quad(\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|\neq 0).$$

因此, 可利用内积定义 n 维向量的夹角.

定义 (12)

对于两个非零向量 x, y, 定义 $\theta = \arccos \frac{[x,y]}{\|x\| \cdot \|y\|}$ 为 x 与 y 的夹角.

当 $[x, y] = 0$ 时, 称 x 与 y **正交**. 显然, n 维零向量与任意 n 维向量都正交.

称一组两两正交的非零向量组为**正交向量组**.

定理 (11)

若 n 维非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为正交向量组, 则它们为线性无关向量组.

定义 (12)

对于两个非零向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, 定义 $\theta = \arccos \frac{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的夹角.

当 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = 0$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ **正交**. 显然, n 维零向量与任意 n 维向量都正交.

称一组两两正交的非零向量组为**正交向量组**.

定理 (11)

若 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为正交向量组, 则它们为线性无关向量组.

定义 (12)

对于两个非零向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, 定义 $\theta = \arccos \frac{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的夹角.

当 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = 0$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交. 显然, n 维零向量与任意 n 维向量都正交.

称一组两两正交的非零向量组为正交向量组.

定理 (11)

若 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为正交向量组, 则它们为线性无关向量组.

证明.

设有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 使 $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$, 分别用 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 与上式两端作内积 $(k = 1,\ 2, \cdots, r)$, 则有

$$\left[\boldsymbol{\alpha}_k, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i\right] = [\boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{0}] = 0.$$

又由 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_i (i \neq k)$ 正交, 则有

$$\left[\boldsymbol{\alpha}_k, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i\right] = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i [\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_i] = \lambda_k [\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_k].$$

因此得到

$$\lambda_k [\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_k] = 0.$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_k \neq \mathbf{0}$, 故 $[\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_k] = \|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2 \neq 0$. 从而 $\lambda_k = 0, k = 1, 2, \cdots, r$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 证毕. □

证明.

设有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 使 $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$, 分别用 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 与上式两端作内积 $(k = 1,\ 2, \cdots, r)$, 则有

$$\left[\boldsymbol{\alpha}_k, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i\right] = [\boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{0}] = 0.$$

又由 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_i (i \neq k)$ 正交, 则有

$$\left[\boldsymbol{\alpha}_k, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i\right] = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i [\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_i] = \lambda_k [\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_k].$$

因此得到

$$\lambda_k [\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_k] = 0.$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_k \neq \mathbf{0}$, 故 $[\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_k] = \|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2 \neq 0$. 从而 $\lambda_k = 0, k = 1, 2, \cdots, r$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 证毕.

证明.

设有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 使 $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$, 分别用 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 与上式两端作内积 $(k = 1,\ 2, \cdots, r)$, 则有

$$\left[\boldsymbol{\alpha}_k, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i\right] = [\boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{0}] = 0.$$

又由 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_i (i \neq k)$ 正交, 则有

$$\left[\boldsymbol{\alpha}_k, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i\right] = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i [\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_i] = \lambda_k [\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_k].$$

因此得到

$$\lambda_k [\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_k] = 0.$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_k \neq \mathbf{0}$, 故 $[\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_k] = \|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2 \neq 0$. 从而 $\lambda_k = 0, k = 1, 2, \cdots, r$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 证毕. □

例 (15)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 正交，试求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

解

设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq 0$，由 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交，有 $[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1] = [\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2] = 0$，即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

解得 $x_1 = -x_3$，$x_2 = 0$. 令 $x_3 = 1$，有 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，即为所求.

例 (15)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 正交，试求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

解

设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\neq 0$，由 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交，有 $[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2]=0$，即

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=0, \end{cases}$$

解得 $x_1=-x_3$，$x_2=0$. 令 $x_3=1$，有 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，即为所求.

定义 (13)

设 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是一个线性无关向量组，如果 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是一个**规范正交向量组 (或标准正交向量组)**.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是一个线性无关向量组，要求一个规范正交向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_r$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价，这样一个问题，称为将 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 规范正交化 (或标准正交化). 这一过程可以通过格拉姆-施密特 (Gram-Schmidt) 正交化方法实现，其具体步骤如下.

定义 (13)

设 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是一个线性无关向量组，如果 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是一个规范正交向量组 (或标准正交向量组).

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是一个线性无关向量组，要求一个规范正交向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_r$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价，这样一个问题，称为将 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 规范正交化 (或标准正交化). 这一过程可以通过格拉姆-施密特 (Gram-Schmidt) 正交化方法实现，其具体步骤如下.

取

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1, \cdots,$$

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\beta_1, \alpha_r]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_r]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\beta_{r-1}, \alpha_r]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]}\beta_{r-1},$$

容易验证 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 是正交向量组; 然后将它们单位化, 即令

$$e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \quad e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \quad \cdots, \quad e_r = \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|},$$

则 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 就是 V 的一个规范正交向量组.

取

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1, \cdots,$$

$$\boldsymbol{\beta}_r = \boldsymbol{\alpha}_r - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{[\boldsymbol{\beta}_{r-1}, \boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1},$$

容易验证 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 是正交向量组; 然后将它们单位化, 即令

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|},$$

则 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ 就是 V 的一个规范正交向量组.

例 (16)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是一个线性无关向量组，试用格拉姆-施密特正交化方法，构造一个规范正交向量组.

解 (取)

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

例 (16)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是一个线性无关向量组，试用格拉姆-施密特正交化方法，构造一个规范正交向量组.

解 (取)

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2\\&=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

解

再将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 单位化，即得一个规范正交向量组为

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

定义 (14)

如果 n 阶方阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$ (即 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$), 则称 A 为正交矩阵.

定理 (12)

n 阶方阵 A 为正交矩阵的充分必要条件是 A 的列 (行) 向量组是规范正交向量组.

定义 (14)

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$), 则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

定理 (12)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列 (行) 向量组是规范正交向量组.

证明.

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 等价于

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{E},$$

即

$$[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i]=1\quad(i=1,2,\cdots,n),$$
$$[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j]=0\quad(i\neq j;\,i,j=1,2,\cdots,n).$$

这说明, 方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是规范正交向量组. 注意到 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 所以上述结论对 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组也成立. 证毕. □

证明.

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 等价于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{E},$$

即

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i]&=1 \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ [\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j]&=0 \quad (i\neq j;\, i,j=1,2,\cdots,n). \end{aligned}$$

这说明，方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是规范正交向量组．注意到 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，所以上述结论对 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组也成立．证毕． $\square$

例 (17)

验证矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵.

解

易证, A 的每个列向量都是单位向量, 且两两正交, 故 A 是正交矩阵.

例 (17)

验证矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵.

解

易证, A 的每个列向量都是单位向量, 且两两正交, 故 A 是正交矩阵.

由正交矩阵的定义，不难得到下列性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|^2 = 1$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交矩阵；

(3) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正交矩阵.

例 (18)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2 - 4\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ 为正交矩阵.

证明.

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，所以

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) &= \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{E}\right)(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) \\
&= \boldsymbol{A}^2 - 4\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E},
\end{aligned}
$$

即 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ 为正交矩阵. □

由正交矩阵的定义，不难得到下列性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|^2 = 1$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交矩阵；

(3) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶正交矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

例 (18)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2 - 4\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ 为正交矩阵.

证明.

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，所以

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) &= \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{E}\right)(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) \\
&= \boldsymbol{A}^2 - 4\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E},
\end{aligned}
$$

即 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ 为正交矩阵. □

由正交矩阵的定义，不难得到下列性质:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|^2=1$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交矩阵;

(3) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正交矩阵.

例 (18)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明: $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 为正交矩阵.

证明.

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) &= \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{E}\right)(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) \\ &= \boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 为正交矩阵. □

定义 (15)

若 T 是正交矩阵，则线性变换 $y = Tx$ 称为正交变换.

设 $y = Tx$ 是正交变换，则有

$$\|y\| = \sqrt{y^{\mathrm{T}} y} = \sqrt{x^{\mathrm{T}} T^{\mathrm{T}} T x} = \sqrt{x^{\mathrm{T}} x} = \|x\|.$$

这表明，经正交变换后，向量的长度保持不变，这是正交变换的优良特性之一. 其实，正交变换相当于反射和旋转的叠合. 例如

$$T = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

为正交矩阵，正交变换 $y = Tx$ 相当于把 x 旋转 θ 角，再关于纵轴对称反射.

定义 (15)

若 T 是正交矩阵, 则线性变换 $y = Tx$ 称为**正交变换**.

设 $y = Tx$ 是正交变换, 则有

$$\|y\| = \sqrt{y^{\mathrm{T}} y} = \sqrt{x^{\mathrm{T}} T^{\mathrm{T}} T x} = \sqrt{x^{\mathrm{T}} x} = \|x\|.$$

这表明, 经正交变换后, 向量的长度保持不变, 这是正交变换的优良特性之一. 其实, 正交变换相当于反射和旋转的叠合. 例如

$$T = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

为正交矩阵, 正交变换 $y = Tx$ 相当于把 x 旋转 θ 角, 再关于纵轴对称反射.

定义 (15)

若 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵，则线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ 称为正交变换.

设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ 是正交变换，则有

$$\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=\|\boldsymbol{x}\|.$$

这表明，经正交变换后，向量的长度保持不变，这是正交变换的优良特性之一. 其实，正交变换相当于反射和旋转的叠合. 例如

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

为正交矩阵，正交变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ 相当于把 $\boldsymbol{x}$ 旋转 θ 角，再关于纵轴对称反射.