第 4 节 克拉默法则

安徽财经大学

统计与应用数学学院

在本章 §2.2 中，我们不仅介绍了行列式的性质，而且还得到了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. 这里，我们进一步利用行列式给出逆矩阵的表达式，并给出解线性方程组的克拉默 (Cramer) 法则.

引理 (2.4.1)

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, A_{ij} 表示 a_{ij} 的代数余子式，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j;\, i, j = 1, \cdots, n).$$

引理 1 说明：行列式的任一行 (列) 的元乘另一行 (列) 对应元的代数余子式之和等于零.

证明.

行列式按第 j 行展开得

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk},$$

所以将行列式中第 j 行的元 $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$ 换成 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 后所得的行列式, 其展开式为 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$, 即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} = 0.$$

引理 (2.4.2)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I},$$

其中

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**（ A_{ij} 是 $\det \boldsymbol{A}$ 中元 a_{ij} 的代数余子式 ）.

证明.

由引理 1 可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det \boldsymbol{A} & & & \\ & \det \boldsymbol{A} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}.$$

同理, 由行列式按列展开定理, 可得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$. □

定理 (2.4.1)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^*.$$

证明.

由引理 2, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$, 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 于是

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^*\right) = \boldsymbol{I},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^*.$$

定理 (2.4.1)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^*.$$

证明.

由引理 2, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$, 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 于是

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^*\right) = \boldsymbol{I},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^*.$$

$\square$

例 (2.4.1)

矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&3&-3\\1&15&-11\end{pmatrix}$$

是否可逆？若可逆，求 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1}$.

解

因为 $\det\boldsymbol{A}=2$, $\det\boldsymbol{B}=0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{B}$ 不可逆. 下面来求 $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\3&3\end{vmatrix}=-6,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5,$$

例 (2.4.1)

矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&3&-3\\1&15&-11\end{pmatrix}$$

是否可逆? 若可逆, 求 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1}$.

解

因为 $\det\boldsymbol{A}=2$, $\det\boldsymbol{B}=0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{B}$ 不可逆. 下面来求 $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\3&3\end{vmatrix}=-6,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5,$$

解

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2.$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{*}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$

定理 1 给出了 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的简明表达式，但由例 1 可以看出，用这个公式来求逆矩阵，计算量非常大．实际应用中求逆矩阵，一般用第一章介绍的行初等变换法，且该方法程序固定，适宜于计算机上计算大型方阵的逆矩阵．

例 (2.4.2)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $(A^*)^{-1}$.

解

因为 $\det A = 2 \neq 0$, 所以由 $AA^* = (\det A)I$ 得

$$\left(\frac{1}{\det A}A\right)A^* = I,$$

故 A^* 可逆且

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{\det A}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

例 (2.4.2)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

解

因为 $\det\boldsymbol{A}=2\neq 0$, 所以由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$ 得

$$\left(\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

例 (2.4.3)

设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，且 $\det \boldsymbol{A} = \frac{1}{3}$，求 $\det\left((2\boldsymbol{A})^{-1} - 3\boldsymbol{A}^*\right)$.

解

因为 $(2\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned}\det\left((2\boldsymbol{A})^{-1} - 3\boldsymbol{A}^*\right) &= \det\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\right) = \det\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = -\frac{1}{8}\frac{1}{\det \boldsymbol{A}} = -\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

例 (2.4.3)

设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，且 $\det \boldsymbol{A} = \frac{1}{3}$，求 $\det\left((2\boldsymbol{A})^{-1} - 3\boldsymbol{A}^*\right)$.

解

因为 $(2\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$，所以

$$\begin{aligned}\det\left((2\boldsymbol{A})^{-1} - 3\boldsymbol{A}^*\right) &= \det\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\right) = \det\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = -\frac{1}{8}\frac{1}{\det \boldsymbol{A}} = -\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

例 (2.4.4)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 为同型矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}$, 证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 当

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

时, 求 $\boldsymbol{B}$.

解

由已知有 $(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是由 $|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I}||\boldsymbol{B}|=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\neq 0$ 知 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I}$ 可逆, 再由上式得

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I})]^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1},$$

例 (2.4.4)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 为同型矩阵，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆，当

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

时，求 $\boldsymbol{B}$.

解

由已知有 $(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是由 $|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{B}|=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\neq 0$ 知 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I}$ 可逆，再由上式得

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I})^{-1}\,\boldsymbol{A}^{-1}=[\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I})]^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1},$$

解

由已知有 $(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是由 $|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{B}|=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\neq 0$ 知 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I}$ 可逆, 再由上式得

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{I})]^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1},$$

很容易计算得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

于是, 求出上述矩阵的逆矩阵便得 $\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

定理 (2.4.2 克拉默法则)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 其中

$$x_j=\frac{\det \boldsymbol{A}_j}{\det \boldsymbol{A}} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

$\det \boldsymbol{A}_j$ 是用 $\boldsymbol{b}$ 代替 $\det \boldsymbol{A}$ 中的第 j 列得到的行列式.

证明.

关于解的惟一性, 在 §1.3 定理 3 的推论中已给出充要条件, 下面证明解的表示式. 由于

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

故比较两端对应元得

$$x_j = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}) = \frac{\det \boldsymbol{A}_j}{\det \boldsymbol{A}}.$$

$\square$

克拉默法则给了我们一个用行列式写出 n 元线性方程组解的简便方法，具有重要的理论价值. 然而，为了求出解，我们需计算 $n+1$ 个 n 阶行列式. 一般其计算量要比用高斯消元法多得多.

例 (2.4.5)

已知三次曲线 $y=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3$ 过四点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4, y_4)$，其中 x_1,x_2,x_3,x_4 互不相同，试求系数 a_1,a_2,a_3,a_4.

解

将四个点的坐标分别代入三次曲线的方程，得关于 a_1, a_2, a_3, a_4 的方程组

$$\begin{cases} a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + a_4x_1^3 = y_1, \\ a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2 + a_4x_2^3 = y_2, \\ a_1 + a_2x_3 + a_3x_3^2 + a_4x_3^3 = y_3, \\ a_1 + a_2x_4 + a_3x_4^2 + a_4x_4^3 = y_4, \end{cases}$$

系数行列式 $\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant 4} (x_i - x_j) \neq 0,$

由克拉默法则，有惟一解

$$a_j = \frac{\det \boldsymbol{A}_j}{\det \boldsymbol{A}} \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

其中 $\det \boldsymbol{A}_j$ 是以 y_1, y_2, y_3, y_4 替代 $\det \boldsymbol{A}$ 中第 j 列元所得行列式.

小结

- 行列式性质: 行列式的任一行 (列) 的元乘另一行 (列) 对应元的代数余子式之和等于零.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \det \boldsymbol{A}, \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, \cdots, n).$$

- 伴随矩阵: 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{A}^* = (A_{ji})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 (A_{ij} 是 $\det \boldsymbol{A}$ a_{ij} 的代数余子式).
- 逆矩阵表达式: 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*$.
- 克拉默法则: 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 有惟一解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 其中

$$x_j = \frac{\det \boldsymbol{A}_j}{\det \boldsymbol{A}} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

$\det \boldsymbol{A}_j$ 是用 $\boldsymbol{b}$ 代替 $\det \boldsymbol{A}$ 中的第 j 列得到的行列式.

矩阵和行列式相关重要公式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I},\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I},\qquad \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|},\qquad \boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=?\qquad (k\boldsymbol{A})^{-1}=?\qquad |k\boldsymbol{A}|=?\qquad (k\boldsymbol{A})^{*}=?$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=?\qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=?\qquad |\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=?\qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{*}=?$$

$$(\boldsymbol{A}^{n})^{\mathrm{T}}=?\qquad (\boldsymbol{A}^{n})^{-1}=?\qquad |\boldsymbol{A}^{n}|=?\qquad (\boldsymbol{A}^{n})^{*}=?$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=?\qquad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=?\qquad |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=?\qquad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{*}=?$$

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=?\qquad (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=?\qquad |\boldsymbol{A}^{-1}|=?\qquad (\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=?$$

$$(\boldsymbol{A}^{*})^{\mathrm{T}}=?\qquad (\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=?\qquad |\boldsymbol{A}^{*}|=?\qquad (\boldsymbol{A}^{*})^{*}=?$$

矩阵和行列式相关重要公式

$$AA^{-1}=I, \qquad AA^*=A^*A=|A|I, \qquad A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}, \qquad A^*=|A|A^{-1}$$

$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$	$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$	$\lvert kA\rvert=k^n\lvert A\rvert$	$(kA)^*=k^{n-1}A^*$
$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert$	$(AB)^*=B^*A^*$
$(A^n)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^n$	$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$	$\lvert A^n\rvert=\lvert A\rvert^n$	$(A^n)^*=(A^*)^n$
$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$	$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$	$\lvert A^{\mathrm{T}}\rvert=\lvert A\rvert$	$(A^{\mathrm{T}})^*=(A^*)^{\mathrm{T}}$
$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$	$(A^{-1})^{-1}=A$	$\lvert A^{-1}\rvert=\lvert A\rvert^{-1}$	$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$
$(A^*)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^*$	$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\lvert A\rvert^{-1}A$	$\lvert A^*\rvert=\lvert A\rvert^{n-1}$	$(A^*)^*=\lvert A\rvert^{n-2}A$

$$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}, \quad |A+B|\neq|A|+|B|, \quad (A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$$