第 5 章　矩阵的对角化与二次型

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

定义 (1)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{5-1}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**, 称非零向量 $\boldsymbol{x}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的**特征向量**.

式 (5-1) 也可写成

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{5-2}$$

式 (5-2) 是一个含有 n 个未知量、n 个方程的齐次线性方程组, 它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0. \tag{5-3}$$

定义 (1)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{5-1}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**, 称非零向量 $\boldsymbol{x}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的**特征向量**.

式 (5-1) 也可写成

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{5-2}$$

式 (5-2) 是一个含有 n 个未知量、n 个方程的齐次线性方程组, 它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0. \tag{5-3}$$

定义 (1)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{5-1}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 称非零向量 $\boldsymbol{x}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

式 (5-1) 也可写成

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{5-2}$$

式 (5-2) 是一个含有 n 个未知量、n 个方程的齐次线性方程组, 它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0. \tag{5-3}$$

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0. \tag{5-3}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}|$ 为 λ 的 n 次多项式, 记

$$f(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}|,$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值即为其特征多项式的根.

特征方程在复数范围内恒有解, 其解的个数为方程的次数 (重根按重数计算), 因此 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值.

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0. \tag{5-3}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$ 为 λ 的 n 次多项式, 记

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|,$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值即为其特征多项式的根.

特征方程在复数范围内恒有解, 其解的个数为方程的次数 (重根按重数计算), 因此 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值.

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0. \tag{5-3}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$ 为 λ 的 n 次多项式, 记

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|,$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值即为其特征多项式的根.

特征方程在复数范围内恒有解, 其解的个数为方程的次数 (重根按重数计算), 因此 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值.

设 $\lambda = \lambda_i$ 为其中的一个特征值, 则由方程

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{5-4}$$

可求得非零解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_i$, 那么 $\boldsymbol{p}_i$ 便是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量, 且 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量的全体是齐次线性方程组 (5-4) 的全体非零解.

由齐次线性方程组解的结构定理, 设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_r$ 为方程组 (5-4) 的基础解系, 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量的全体为

$$k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{p}_r$$

$(k_1, k_2, \cdots, k_r$ 不同时为 $0)$.

设 $\lambda=\lambda_i$ 为其中的一个特征值, 则由方程

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{5-4}$$

可求得非零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_i$, 那么 $\boldsymbol{p}_i$ 便是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量, 且 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量的全体是齐次线性方程组 (5-4) 的全体非零解.

由齐次线性方程组解的结构定理, 设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_r$ 为方程组 (5-4) 的基础解系, 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量的全体为

$$k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{p}_r$$

$(k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不同时为 $0)$.

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{x}=\mathbf{0} \tag{5-4}$$

这说明对应于某个特征值的特征向量有无穷多个. 但不同的特征值所对应的特征向量是不同的, 也即一个特征向量只能属于一个特征值.

事实上, 如果设 x 同时是 A 的对应于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1 \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_2 \boldsymbol{x},$$

从而

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}=\lambda_2 \boldsymbol{x},$$

即

$$(\lambda_1-\lambda_2)\, \boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 所以

$$\lambda_1=\lambda_2.$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{5-4}$$

这说明对应于某个特征值的特征向量有无穷多个. 但不同的特征值所对应的特征向量是不同的, 也即一个特征向量只能属于一个特征值.

事实上, 如果设 $\boldsymbol{x}$ 同时是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{x},$$

从而

$$\lambda_1\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{x},$$

即

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以

$$\lambda_1=\lambda_2.$$

例 (1)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=(4-\lambda)(2-\lambda)=0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=4$.

当 $\lambda_1=2$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得 $x_1=x_2$, 所以对应的特征向量可取为

例 (1)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=(4-\lambda)(2-\lambda)=0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=4.$

当 $\lambda_1=2$ 时, 由

$$\begin{pmatrix}3-2 & -1\\ -1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得 $x_1=x_2$, 所以对应的特征向量可取为

例 (1)

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=(4-\lambda)(2-\lambda)=0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=4.$

当 $\lambda_1=2$ 时，由

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得 $x_1=x_2$, 所以对应的特征向量可取为

解

解得 $x_1 = x_2$，所以对应的特征向量可取为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2 = 4$ 时，由

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得 $x_1 = -x_2$，所以对应的特征向量可取为

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 (2)

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解

A 的特征方程为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

例 (2)

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

解

当 $\lambda_1 = 2$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以，$k\boldsymbol{p}_1 (k \neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量.

解

当 $\lambda_1 = 2$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以，$k\boldsymbol{p}_1 (k \neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量.

解

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-2&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

所以，$k\boldsymbol{p}_2(k\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量.

解

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-2&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

所以，$k\boldsymbol{p}_2(k\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量.

计算特征值、特征向量的具体步骤:

(1) 计算特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}|$;

(2) 求出 $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}|=0$ 的全部根，它们就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(3) 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ_i，求相应的齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_r,$$

则对于不同时为零的任意常数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,

$$k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{p}_r$$

即为对应于 λ_i 的全部特征向量.

计算特征值、特征向量的具体步骤:

(1) 计算特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}|$;

(2) 求出 $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}|=0$ 的全部根, 它们就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(3) 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ_i, 求相应的齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_r,$$

则对于不同时为零的任意常数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,

$$k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{p}_r$$

即为对应于 λ_i 的全部特征向量.

计算特征值、特征向量的具体步骤:

(1) 计算特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}|$;

(2) 求出 $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}|=0$ 的全部根, 它们就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(3) 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ_i, 求相应的齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_r,$$

则对于不同时为零的任意常数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,

$$k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{p}_r$$

即为对应于 λ_i 的全部特征向量.

计算特征值、特征向量的具体步骤:

(1) 计算特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$;

(2) 求出 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 的全部根, 它们就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(3) 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ_i, 求相应的齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_r,$$

则对于不同时为零的任意常数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,

$$k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{p}_r$$

即为对应于 λ_i 的全部特征向量.

例 (3)

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解

A 的特征多项式为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(2+\lambda),$$

所以, A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2.$

例 (3)

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解

A 的特征多项式为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda)^2(2+\lambda),$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2.$

解

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 4-1 & 6 & 0 \\ -3 & -5-1 & 0 \\ -3 & -6 & 1-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是，$k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 \ (k_1^2 + k_2^2 \neq 0)$ 为对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的全部特征向量.

解

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 4-1 & 6 & 0 \\ -3 & -5-1 & 0 \\ -3 & -6 & 1-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是，$k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 \ (k_1^2 + k_2^2 \neq 0)$ 为对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的全部特征向量.

解

当 $\lambda_3=-2$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}4+2 & 6 & 0\\ -3 & -5+2 & 0\\ -3 & -6 & 1+2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系

$$p_3=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

所以，$k_3\boldsymbol{p}_3\ (k_3\neq 0)$ 为对应于 $\lambda_3=-2$ 的全部特征向量.

解

当 $\lambda_3 = -2$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 4+2 & 6 & 0 \\ -3 & -5+2 & 0 \\ -3 & -6 & 1+2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以，$k_3\boldsymbol{p}_3\ (k_3 \neq 0)$ 为对应于 $\lambda_3 = -2$ 的全部特征向量.

例 (4)

设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 证明: λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值.

证明.

因 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 故有 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda^2\boldsymbol{p}.$$

所以, λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值. □

按例 4 类推, 不难证明: 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值, $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 其中 $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$,

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{E} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m.$$

例 (4)

设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 证明: λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值.

证明.

因 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 故有 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda^2\boldsymbol{p}.$$

所以, λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值. □

按例 4 类推, 不难证明: 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值, $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 其中 $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$,

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{E} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m.$$

例 (4)

设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 证明: λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值.

证明.

因 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 故有 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda^2\boldsymbol{p}.$$

所以, λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值. □

按例 4 类推, 不难证明: 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值, $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 其中 $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$,

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{E} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m.$$

特征值与特征向量的基本性质

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}. \tag{5-5}$$

$f(\lambda)$ 是一个关于 λ 的 n 次多项式，它的最高次幂项出现在乘积

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) \tag{5-6}$$

里，其余的项至多含有 $n-2$ 个主对角线上的元素．因此，

$$f(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots.$$

特征值与特征向量的基本性质

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}. \tag{5-5}$$

$f(\lambda)$ 是一个关于 λ 的 n 次多项式，它的最高次幂项出现在乘积

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) \tag{5-6}$$

里，其余的项至多含有 $n-2$ 个主对角线上的元素. 因此，

$$f(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots.$$

又在式 (5-5) 中, 令 $\lambda=0$, 得

$$f(0)=|\boldsymbol{A}|.$$

从而有

$$f(\lambda)=(-1)^{n}\lambda^{n}+(-1)^{n-1}\left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right)\lambda^{n-1}+\cdots+|\boldsymbol{A}|. \quad (5\text{-}7)$$

若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, 则有

$$\begin{aligned} f(\lambda)&=\left(\lambda_1-\lambda\right)\left(\lambda_2-\lambda\right)\cdots\left(\lambda_n-\lambda\right)\\ &=(-1)^{n}\lambda^{n}+(-1)^{n-1}\left(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\right)\lambda^{n-1}+\cdots+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \end{aligned} \quad (5\text{-}8)$$

比较式 (5-7) 与式 (5-8) 中 λ 的同次幂的系数, 可以得到下面的性质.

又在式 (5-5) 中, 令 $\lambda = 0$, 得

$$f(0) = |\boldsymbol{A}|.$$

从而有

$$f(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\left(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}\right)\lambda^{n-1} + \cdots + |\boldsymbol{A}|. \quad (5\text{-}7)$$

若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, 则有

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) \\ &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \end{aligned} \quad (5\text{-}8)$$

比较式 (5-7) 与式 (5-8) 中 λ 的同次幂的系数, 可以得到下面的性质.

性质 (1)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素之和 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**迹**, 记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

性质 (2)

$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |\boldsymbol{A}|$.

推论 (1)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值都不为零.

性质 (1)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素之和 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

性质 (2)

$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |\boldsymbol{A}|$.

推论 (1)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值都不为零.

性质 (1)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素之和 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

性质 (2)

$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |\boldsymbol{A}|$.

推论 (1)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值都不为零.

定理 (1)

设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 都是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，则它们的任何非零线性组合 $k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{p}_m$ (k_i 为不全为零的常数，$i = 1, 2, \cdots, m$) 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

证明.

因 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 都是齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

的解，则易验证 $k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{p}_m$ 也是上述方程组的解，故当 $k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{p}_m \neq \boldsymbol{0}$ 时，其是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量.

证毕. □

定理 (1)

设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 都是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，则它们的任何非零线性组合 $k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{p}_m$ (k_i 为不全为零的常数，$i = 1, 2, \cdots, m$) 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

证明.

因 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 都是齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

的解，则易验证 $k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{p}_m$ 也是上述方程组的解，故当 $k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{p}_m \neq \boldsymbol{0}$ 时，其是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量.
证毕. $\square$

例 (5)

设向量 $\boldsymbol{p}_1 = (1,2,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 都是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda = 2$ 的特征向量，又向量 $\boldsymbol{\beta} = (-1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$.

解

由于 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p}_1 - 2\boldsymbol{p}_2$，根据定理 1，$\boldsymbol{\beta}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda = 2$ 的特征向量，故有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\beta} = (-2,4,-4)^{\mathrm{T}}.$$

例 (5)

设向量 $\boldsymbol{p}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 都是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，又向量 $\boldsymbol{\beta}=(-1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A\beta}$.

解

由于 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{p}_1-2\boldsymbol{p}_2$，根据定理 1，$\boldsymbol{\beta}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，故有

$$\boldsymbol{A\beta}=2\boldsymbol{\beta}=(-2,4,-4)^{\mathrm{T}}.$$

定理 (2)

方阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征多项式, 因而有相同的特征值.

证明.

由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{E}$, 有

$$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\left|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\right|=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|.$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征多项式, 所以它们有相同的特征值. 证毕. □

定理 (2)

方阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征多项式，因而有相同的特征值.

证明.

由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{E}$，有

$$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\left|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\right|=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|.$$

因此，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征多项式，所以它们有相同的特征值. 证毕. □

定理 (3)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 依次是与之对应的特征向量, 则 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

证明.

设有常数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 使

$$x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0},$$

则

$$\boldsymbol{A}\left(x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{p}_m\right) = \boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1 x_1\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2 x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_m x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0}.$$

类推, 有

$$\lambda_1^k x_1\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2^k x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_m^k x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0} \quad (k = 1, 2, \cdots, m-1).$$

定理 (3)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 依次是与之对应的特征向量, 则 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

证明.

设有常数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 使

$$x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0},$$

则

$$\boldsymbol{A}\left(x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{p}_m\right) = \boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1 x_1\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2 x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_m x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0}.$$

类推, 有

$$\lambda_1^k x_1\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2^k x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_m^k x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0} \quad (k = 1, 2, \cdots, m-1).$$

定理 (3)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 依次是与之对应的特征向量，则 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

证明.

设有常数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，使

$$x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0},$$

则

$$\boldsymbol{A}\left(x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{p}_m\right) = \boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_1 x_1\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2 x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_m x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0}.$$

类推，有

$$\lambda_1^k x_1\boldsymbol{p}_1 + \lambda_2^k x_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + \lambda_m^k x_m\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{0} \quad (k = 1, 2, \cdots, m-1).$$

证明.

把上列各式合写成矩阵形式, 得

$$(x_1\boldsymbol{p}_1, x_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, x_m\boldsymbol{p}_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}.$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙德行列式. 当 λ_i 各不相同时, 该矩阵可逆, 于是有

$$(x_1\boldsymbol{p}_1, x_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, x_m\boldsymbol{p}_m) = \boldsymbol{O},$$

即 $x_i\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0}$. 但 $\boldsymbol{p}_i \neq \boldsymbol{0}$, 故 $x_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 所以, 向量组 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关. 证毕. □

证明.

把上列各式合写成矩阵形式, 得

$$(x_1\boldsymbol{p}_1, x_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, x_m\boldsymbol{p}_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}.$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙德行列式. 当 λ_i 各不相同时, 该矩阵可逆, 于是有

$$(x_1\boldsymbol{p}_1, x_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, x_m\boldsymbol{p}_m) = \boldsymbol{O},$$

即 $x_i\boldsymbol{p}_i = \mathbf{0}$. 但 $\boldsymbol{p}_i \neq \mathbf{0}$, 故 $x_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 所以, 向量组 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关. 证毕. □

例 (6)

设 λ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 证明:
(1) $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值; (2) $\frac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的特征值.

证明.

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知, $\lambda \neq 0$.
(1) 由 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值知, 存在 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}$, 两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}$, 即

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{p}.$$

故 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^{*} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 (1) 可知, $\frac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的特征值. (这里的证明与书上的有所不同) □

例 (6)

设 λ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，证明：
(1) $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值；　　(2) $\frac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的特征值.

证明.

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知，$\lambda \neq 0$.
(1) 由 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值知，存在 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{p}$，两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}$，即

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{p}.$$

故 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^{*} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 (1) 可知，$\frac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的特征值. (这里的证明与书上的有所不同)

例 (6)

设 λ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 证明:
(1) $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值; (2) $\frac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的特征值.

证明.

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知, $\lambda \neq 0$.
(1) 由 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值知, 存在 $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{p}$, 两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}$, 即

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{p}.$$

故 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^{*} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 (1) 可知, $\frac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的特征值. (这里的证明与书上的有所不同) $\square$

例 (7)

设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1, 2$, 试求 $\left|\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{E}\right|$ 与 $\left|\boldsymbol{A}^{-1} - 2\boldsymbol{A}^*\right|$.

解

根据特征值的特点, 令 $\varphi_1(\lambda) = \lambda^2 - 2$, 则 $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{E} = \varphi_1(\boldsymbol{A})$. 从而 $\varphi_1(\boldsymbol{A})$ 的三个特征值分别为 $\varphi_1(1) = -1, \varphi_1(-1) = -1, \varphi_1(2) = 2$. 于是

$$\left|\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{E}\right| = (-1) \times (-1) \times 2 = 2.$$

由 $|\boldsymbol{A}| = 1 \times (-1) \times 2 = -2$ 知, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = -2\boldsymbol{A}^{-1}$. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的三个特征值分别为 $1, -1, \frac{1}{2}$. 从而有

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{A}^{-1} - 2\boldsymbol{A}^*\right| &= \left|\boldsymbol{A}^{-1} + 4\boldsymbol{A}^{-1}\right| = \left|5\boldsymbol{A}^{-1}\right| \\ &= 5^3\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| = 5^3 \times 1 \times (-1) \times \frac{1}{2} = -\frac{125}{2}.\end{aligned}$$

例 (7)

设三阶方阵 A 的特征值为 $1,-1,2$, 试求 $\left|A^2-2E\right|$ 与 $\left|A^{-1}-2A^*\right|$.

解

根据特征值的特点, 令 $\varphi_1(\lambda)=\lambda^2-2$, 则 $A^2-2E=\varphi_1(A)$. 从而 $\varphi_1(A)$ 的三个特征值分别为 $\varphi_1(1)=-1,\varphi_1(-1)=-1,\varphi_1(2)=2$. 于是

$$\left|A^2-2E\right|=(-1)\times(-1)\times 2=2.$$

由 $|A|=1\times(-1)\times 2=-2$ 知, A 可逆, 且 $A^*=|A|A^{-1}=-2A^{-1}$. A^{-1} 的三个特征值分别为 $1,-1,\frac{1}{2}$. 从而有

$$\begin{aligned}\left|A^{-1}-2A^*\right|&=\left|A^{-1}+4A^{-1}\right|=\left|5A^{-1}\right|\\&=5^3\left|A^{-1}\right|=5^3\times 1\times(-1)\times\frac{1}{2}=-\frac{125}{2}.\end{aligned}$$

例 (7)

设三阶方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 试求 $\left|A^2 - 2E\right|$ 与 $\left|A^{-1} - 2A^*\right|$.

解

根据特征值的特点，令 $\varphi_1(\lambda) = \lambda^2 - 2$, 则 $A^2 - 2E = \varphi_1(A)$. 从而 $\varphi_1(A)$ 的三个特征值分别为 $\varphi_1(1) = -1, \varphi_1(-1) = -1, \varphi_1(2) = 2$. 于是

$$\left|A^2 - 2E\right| = (-1) \times (-1) \times 2 = 2.$$

由 $|A| = 1 \times (-1) \times 2 = -2$ 知，A 可逆，且 $A^* = |A|A^{-1} = -2A^{-1}$. A^{-1} 的三个特征值分别为 $1, -1, \frac{1}{2}$. 从而有

$$\begin{aligned}\left|A^{-1} - 2A^*\right| &= \left|A^{-1} + 4A^{-1}\right| = \left|5A^{-1}\right| \\ &= 5^3\left|A^{-1}\right| = 5^3 \times 1 \times (-1) \times \frac{1}{2} = -\frac{125}{2}.\end{aligned}$$

定义 (2)

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵, 如果存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵 (或称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的), 记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

例如,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},$$

取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

所以, $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

定义 (2)

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵, 如果存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵 (或称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的), 记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

例如,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},$$

取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

所以, $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

矩阵的相似关系是一种等价关系, 满足下列性质:

(1) **反身性:** A 与其本身相似;

(2) **对称性:** 若 A 与 B 相似, 则 B 与 A 相似;

(3) **传递性:** 若 A 与 B 相似, B 与 C 相似, 则 A 与 C 相似.

以可逆矩阵 P 对方阵 A 进行运算 $P^{-1}AP$, 称为对 A 的相似变换.

相似矩阵具有如下性质.

相似矩阵的性质

性质 (3)

相似矩阵有相同的秩.

证明.

由于可逆矩阵 P 与 P^{-1} 可以看成若干个初等矩阵的乘积, 从而 $P^{-1}AP$ 相当于对 A 施行了有限次初等变换, 而初等变换不改变矩阵的秩, 所以

$$r(A) = r\left(P^{-1}AP\right) = r(B).$$

□

相似矩阵的性质

性质 (3)

相似矩阵有相同的秩.

证明.

由于可逆矩阵 P 与 P^{-1} 可以看成若干个初等矩阵的乘积，从而 $P^{-1}AP$ 相当于对 A 施行了有限次初等变换，而初等变换不改变矩阵的秩，所以

$$r(A) = r\left(P^{-1}AP\right) = r(B).$$

□

相似矩阵的性质

性质 (4)

相似矩阵的行列式相等.

证明.

设 $A \sim B$, 则存在可逆矩阵 P, 使

$$B = P^{-1}AP,$$

所以 $\left|P^{-1}AP\right| = |B|$, 即

$$\left|P^{-1}\right||A||P| = |B|,$$

而 $\left|P^{-1}\right| = |P|^{-1}$, 所以 $|A| = |B|$. □

相似矩阵的性质

性质 (4)

相似矩阵的行列式相等.

证明.

设 $A \sim B$, 则存在可逆矩阵 P, 使

$$B = P^{-1}AP,$$

所以 $|P^{-1}AP| = |B|$, 即

$$|P^{-1}||A||P| = |B|,$$

而 $|P^{-1}| = |P|^{-1}$, 所以 $|A| = |B|$. □

相似矩阵的性质

性质 (4)

相似矩阵的行列式相等.

证明.

设 $A \sim B$, 则存在可逆矩阵 P, 使

$$B = P^{-1}AP,$$

所以 $\left|P^{-1}AP\right| = |B|$, 即

$$\left|P^{-1}\right||A||P| = |B|,$$

而 $\left|P^{-1}\right| = |P|^{-1}$, 所以 $|A| = |B|$. □

性质 (5)

相似矩阵有相同的可逆性. 当它们可逆时, 其逆矩阵也相似.

证明.

设 $A \sim B$, 则 $|A| = |B|$, 所以 $|A|$ 与 $|B|$ 同时为 0 或不为 0, 即 A 与 B 同时不可逆或同时可逆.

如果 $A \sim B$, 且都可逆, 则存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = B.$$

于是

$$B^{-1} = \left(P^{-1}AP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}\left(P^{-1}\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P,$$

即

$$A^{-1} \sim B^{-1}.$$

性质 (5)

相似矩阵有相同的可逆性. 当它们可逆时, 其逆矩阵也相似.

证明.

设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$, 所以 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{B}|$ 同时为 0 或不为 0, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同时不可逆或同时可逆.

如果 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 且都可逆, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}.$$

于是

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P},$$

即

$$\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}.$$

性质 (5)

相似矩阵有相同的可逆性．当它们可逆时，其逆矩阵也相似．

证明.

设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$，所以 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{B}|$ 同时为 0 或不为 0，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同时不可逆或同时可逆．

如果 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，且都可逆，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}.$$

于是

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P},$$

即

$$\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}.$$

□

性质 (6)

相似矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

证明.

设 $A \sim B$，即有可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = B$，故

$$
\begin{aligned}
|B - \lambda E| &= |P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda E)P| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| \\
&= |P^{-1}||A - \lambda E||P| = |A - \lambda E|.
\end{aligned}
$$

所以 A 与 B 有相同的特征多项式，从而它们有相同的特征值. □

性质 (6)

相似矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

证明.

设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$, 故

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E}| &= \left|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}(\lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{P}\right| = \left|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{P}\right| \\ &= \left|\boldsymbol{P}^{-1}\right| |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| |\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}|.\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，从而它们有相同的特征值. □

推论 (2)

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

证明.

易知 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 的 n 个特征值. 由性质 6 知，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 证毕. □

推论 (2)

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

证明.

易知 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 的 n 个特征值. 由性质 6 知, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 证毕. $\square$

相似矩阵的性质小结:

- 相似矩阵有相同的秩.
- 相似矩阵的行列式相等.
- 相似矩阵有相同的可逆性. 当它们可逆时, 其逆矩阵也相似.
- 相似矩阵有相同的特征多项式和特征值.
- 相似矩阵有相同的迹.
- $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}^k \sim \boldsymbol{B}^k$, k 为正整数.

例 (8)

确定 x, y 的值, 使 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

解

解法 1 因 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $-1,2,y$. 而 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+2)\left[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)\right]=0.$$

以特征值 $\lambda=-1$ 代入上式, 得 $x=0$. 从而知 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-2)=0.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,2,-2$, 即 $y=-2$.

例 (8)

确定 x, y 的值, 使 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

解

解法 1 因 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $-1, 2, y$. 而 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+2)\left[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)\right]=0.$$

以特征值 $\lambda=-1$ 代入上式, 得 $x=0$. 从而知 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-2)=0.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1, 2, -2$, 即 $y=-2$.

例 (8)

确定 x, y 的值, 使 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

解

解法 1 因 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $-1, 2, y$. 而 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+2)\left[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)\right]=0.$$

以特征值 $\lambda=-1$ 代入上式, 得 $x=0$. 从而知 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-2)=0.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1, 2, -2$, 即 $y=-2$.

解

解法 2　由于 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则由性质 6，有

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E}|,$$

即

$$-(\lambda + 2)\left[\lambda^2 - (x+1)\lambda + (x-2)\right] = (-1-\lambda)(2-\lambda)(y-\lambda).$$

上面的等式对任意的实数 λ 都成立.

令 $\lambda = 0$, 得 $y = x - 2$;

令 $\lambda = -1$, 得 $x = 0$, 从而 $y = -2$.

本题也可先由 $\lambda = -2$ 是 A 的特征值, 得出 $y = -2$. 再根据 A 的迹等于 B 的迹得到 $x = y + 2 = 0$.

解

解法 2 由于 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则由性质 6，有

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E}|,$$

即

$$-(\lambda + 2)\left[\lambda^2 - (x+1)\lambda + (x-2)\right] = (-1-\lambda)(2-\lambda)(y-\lambda).$$

上面的等式对任意的实数 λ 都成立.
令 $\lambda = 0$, 得 $y = x - 2$;
令 $\lambda = -1$, 得 $x = 0$, 从而 $y = -2$.

本题也可先由 $\lambda = -2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 得出 $y = -2$. 再根据 $\boldsymbol{A}$ 的迹等于 $\boldsymbol{B}$ 的迹得到 $x = y + 2 = 0$.

解

解法 2 由于 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则由性质 6，有

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{E}|,$$

即

$$-(\lambda+2)\left[\lambda^2 - (x+1)\lambda + (x-2)\right] = (-1-\lambda)(2-\lambda)(y-\lambda).$$

上面的等式对任意的实数 λ 都成立.
令 $\lambda = 0$, 得 $y = x - 2$;
令 $\lambda = -1$, 得 $x = 0$, 从而 $y = -2$.

本题也可先由 $\lambda = -2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 得出 $y = -2$. 再根据 $\boldsymbol{A}$ 的迹等于 $\boldsymbol{B}$ 的迹得到 $x = y + 2 = 0$.

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能相似于对角矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ **可对角化**.

现设已找到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 把 $\boldsymbol{P}$ 用其列向量表示为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)&=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\
&=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n),
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda\boldsymbol{p}_i \quad (i=1,2,\cdots,n).
$$

可见，$\boldsymbol{P}$ 的列向量 $\boldsymbol{p}_i$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量. 又因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关. 由于上述推导过程可以反推回去，因此关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角化有如下结论.

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能相似于对角矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

现设已找到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 把 $\boldsymbol{P}$ 用其列向量表示为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)&=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\&=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n),\end{aligned}$$

于是有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda\boldsymbol{p}_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

可见，$\boldsymbol{P}$ 的列向量 $\boldsymbol{p}_i$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量. 又因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关. 由于上述推导过程可以反推回去，因此关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角化有如下结论.

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能相似于对角矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

现设已找到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 把 $\boldsymbol{P}$ 用其列向量表示为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)&=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\&=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n)\,,\end{aligned}$$

于是有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda\boldsymbol{p}_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

可见，$\boldsymbol{P}$ 的列向量 $\boldsymbol{p}_i$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量. 又因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关. 由于上述推导过程可以反推回去，因此关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角化有如下结论.

矩阵可对角化的充要条件一

定理 (4)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$, 并且矩阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ 能使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵. 而且此对角矩阵的主对角线上的元素依次是与 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 对应的 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

推论 (3)

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

对于任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}$, 是否一定存在 n 个线性无关的特征向量?

矩阵可对角化的充要条件一

定理 (4)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$, 并且矩阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ 能使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵. 而且此对角矩阵的主对角线上的元素依次是与 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 对应的 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

推论 (3)

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

对于任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}$, 是否一定存在 n 个线性无关的特征向量?

矩阵可对角化的充要条件二

定理 (5)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是对应于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数, 即

$$r(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})=n-k_i,$$

其中 k_i 为特征值 λ_i 的重数 $(i=1,2,\cdots,r;\ k_1+k_2+\cdots+k_r=n)$.

例 (9)

设

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

问: A 是否可以对角化? 如果可以, 试求出 P, 使 $P^{-1}AP$ 成为对角矩阵.

解

由第 1 节例 3 知, A 的对应于二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的线性无关的特征向量恰有两个:

$$p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

例 (9)

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix},$$

问：$\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化？如果可以，试求出 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成为对角矩阵.

解

由第 1 节例 3 知，$\boldsymbol{A}$ 的对应于二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量恰有两个:

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

解

$\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_3=-2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$,

由定理 5 可知, $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

注意: 对角矩阵中特征值的排列次序与矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中相应的特征向量的排列次序是一致的.

解

$\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_3 = -2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

由定理 5 可知, $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

注意: 对角矩阵中特征值的排列次序与矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中相应的特征向量的排列次序是一致的.

例 (10)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) 求参数 a, b 的值及 $\boldsymbol{A}$ 的与特征向量 $\boldsymbol{p}$ 对应的特征值;

(2) $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵是否相似?

解

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的与特征向量 p 对应的特征值为 λ, 可得方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

亦即

$$\begin{cases} -\lambda-1=0, \\ -\lambda+a+2=0, \\ \lambda+b+1=0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda=-1, \\ a=-3, \\ b=0. \end{cases}$$

解

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的与特征向量 $\boldsymbol{p}$ 对应的特征值为 λ, 可得方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

亦即

$$\begin{cases} -\lambda-1=0, \\ -\lambda+a+2=0, \\ \lambda+b+1=0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda=-1, \\ a=-3, \\ b=0. \end{cases}$$

解

(2) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3=0$$

知，$\boldsymbol{A}$ 有三重特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$$

由于

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 5 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解

(2) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3=0$$

知, $\boldsymbol{A}$ 有三重特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$$

由于

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解

由于

$$A+E=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可知

$$r(A+E)=2, \quad n-r(A+E)=3-2=1,$$

即 A 的与三重特征值 $\lambda=-1$ 对应的线性无关的特征向量只有 1 个. 所以, A 不与对角矩阵相似.

虽然并不是所有矩阵都相似于一个对角矩阵，但是实对称矩阵是一定可以对角化的，并且还能找到一个正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

定理 (6)

实对称矩阵的特征值都是实数.

证明.

设复数 λ 为实对称矩阵 A 的特征值, 复向量 x 为对应的特征向量, 即

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

用 $\overline{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数, $\overline{x}$ 表示 x 的共轭复向量, 则

$$A\overline{x} = \overline{A}\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

定理 (6)

实对称矩阵的特征值都是实数.

证明.

设复数 λ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 复向量 $\boldsymbol{x}$ 为对应的特征向量, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}.$$

用 $\overline{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数, $\overline{\boldsymbol{x}}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的共轭复向量, 则

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}.$$

定理 (6)

实对称矩阵的特征值都是实数.

证明.

设复数 λ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 复向量 $\boldsymbol{x}$ 为对应的特征向量, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}.$$

用 $\overline{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数, $\overline{\boldsymbol{x}}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的共轭复向量, 则

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}.$$

□

证明.

对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 两端左乘 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$, 得

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x}=\lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

又

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\left(\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\left(\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

两式相减, 得

$$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0.$$

但因 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0.$$

故 $\lambda-\overline{\lambda}=0$, 即 $\lambda=\overline{\lambda}$, 这表明 λ 是实数. 证毕. □

证明.

对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 两端左乘 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$, 得

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x}=\lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

又

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\left(\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

两式相减, 得

$$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0.$$

但因 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0.$$

故 $\lambda-\overline{\lambda}=0$, 即 $\lambda=\overline{\lambda}$, 这表明 λ 是实数. 证毕.

证明.

对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 两端左乘 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$, 得

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x}=\lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

又

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\left(\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

两式相减, 得

$$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0.$$

但因 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0.$$

故 $\lambda-\overline{\lambda}=0$, 即 $\lambda=\overline{\lambda}$, 这表明 λ 是实数. 证毕. □

显然，当特征值 λ_i 为实数时，齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

是实系数线性方程组，从而必有实的基础解系，即对应于 λ_i 的特征向量必可取实向量.

定理 (7)

设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵的两个特征值，p_1,p_2 是对应的特征向量，若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 p_1 与 p_2 正交.

定理 7 表明，实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量不但线性无关，而且相互正交．证明如下：

显然，当特征值 λ_i 为实数时，齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

是实系数线性方程组，从而必有实的基础解系，即对应于 λ_i 的特征向量必可取实向量.

定理 (7)

设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵的两个特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 是对应的特征向量，若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

定理 7 表明，实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量不但线性无关，而且相互正交. 证明如下：

定理 (7)

设 λ_1, λ_2 是实对称矩阵的两个特征值，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ 是对应的特征向量，若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

证明.

由已知，$\lambda_1 \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \lambda_2 \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$，因 $\boldsymbol{A}$ 对称，故

$$\lambda_1 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1 \boldsymbol{p}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A},$$

两端右乘 $\boldsymbol{p}_2$，得

$$\lambda_1 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} (\lambda_2 \boldsymbol{p}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2,$$

移项得

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = 0,$$

但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，故 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = 0$，即 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交. 证毕. □

定理 (7)

设 λ_1, λ_2 是实对称矩阵的两个特征值，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ 是对应的特征向量，若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

证明.

由已知，$\lambda_1 \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \lambda_2 \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$，因 $\boldsymbol{A}$ 对称，故

$$\lambda_1 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1 \boldsymbol{p}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A},$$

两端右乘 $\boldsymbol{p}_2$，得

$$\lambda_1 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} (\lambda_2 \boldsymbol{p}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2,$$

移项得

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = 0,$$

但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，故 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = 0$，即 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交. 证毕. □

定理 (7)

设 λ_1, λ_2 是实对称矩阵的两个特征值，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ 是对应的特征向量，若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

证明.

由已知，$\lambda_1 \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \lambda_2 \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$，因 $\boldsymbol{A}$ 对称，故

$$\lambda_1 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1 \boldsymbol{p}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A},$$

两端右乘 $\boldsymbol{p}_2$，得

$$\lambda_1 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} (\lambda_2 \boldsymbol{p}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2,$$

移项得

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = 0,$$

但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，故 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_2 = 0$，即 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交. 证毕. $\square$

下面的定理说明实对称矩阵是一定可以对角化的.

定理 (8)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值, 则 $r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=n-k$, 即对应于 k 重特征值 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量.

定理 (9)

设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则必存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\Lambda,$$

其中 Λ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

下面的定理说明实对称矩阵是一定可以对角化的.

定理 (8)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值, 则 $r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=n-k$, 即对应于 k 重特征值 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量.

定理 (9)

设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则必存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda},$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，它们的重数依次为 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，并且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$.

由定理 8 知，对应于特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 恰有 k_i 个线性无关的实特征向量，利用格拉姆-施密特正交化方法把它们正交化并单位化，即得到 k_i 个正交的单位特征向量. 这样的特征向量共有 n 个.

由定理 7 知，对应于不同特征值的特征向量正交，故这 n 个单位特征向量两两正交. 于是以它们为列向量构成的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵，且

$$\boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda},$$

其中对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元素含有 k_1 个 $\lambda_1, \cdots, k_s$ 个 λ_s，恰是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 证毕. □

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，它们的重数依次为 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，并且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$.

由定理 8 知，对应于特征值 $\lambda_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 恰有 k_i 个线性无关的实特征向量，利用格拉姆-施密特正交化方法把它们正交化并单位化，即得到 k_i 个正交的单位特征向量．这样的特征向量共有 n 个．

由定理 7 知，对应于不同特征值的特征向量正交，故这 n 个单位特征向量两两正交．于是以它们为列向量构成的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵，且

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda},$$

其中对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元素含有 k_1 个 $\lambda_1, \cdots, k_s$ 个 λ_s，恰是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值．证毕． □

证明.

设 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数依次为 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 并且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$.

由定理 8 知, 对应于特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 恰有 k_i 个线性无关的实特征向量, 利用格拉姆-施密特正交化方法把它们正交化并单位化, 即得到 k_i 个正交的单位特征向量. 这样的特征向量共有 n 个.

由定理 7 知, 对应于不同特征值的特征向量正交, 故这 n 个单位特征向量两两正交. 于是以它们为列向量构成的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda},$$

其中对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元素含有 k_1 个 $\lambda_1, \cdots, k_s$ 个 λ_s, 恰是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 证毕. □

实对称矩阵正交对角化的步骤

第一步, 求出 A 的所有不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$;

第二步, (1) 求出 A 的对应于每个特征值 λ_i 的一组线性无关的特征向量, 即求出齐次线性方程组 $(A - \lambda_i E)\,x = 0$ 的一个基础解系;
(2) 利用格拉姆-施密特正交化方法, 把此组基础解系规范正交化;
(3) 将对应于不同特征值的特征向量单位化, 由定理 7 知, 对应于不同特征值的特征向量正交, 如此可得 A 的 n 个两两正交的单位特征向量;

第三步, 以上面求出的 n 个两两正交的单位特征向量为列向量所得的 n 阶方阵, 即为所求的正交矩阵 T; 以相应的特征值为主对角线元素的对角矩阵 Λ, 即为所求的 $T^{-1}AT$.

注意: T 中列向量的次序与矩阵 Λ 主对角线上的特征值的次序相对应.

实对称矩阵正交对角化的步骤

第一步，求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$;

第二步，(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的对应于每个特征值 λ_i 的一组线性无关的特征向量，即求出齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；
(2) 利用格拉姆-施密特正交化方法，把此组基础解系规范正交化；
(3) 将对应于不同特征值的特征向量单位化，由定理 7 知，对应于不同特征值的特征向量正交，如此可得 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个两两正交的单位特征向量；

第三步，以上面求出的 n 个两两正交的单位特征向量为列向量所得的 n 阶方阵，即为所求的正交矩阵 $\boldsymbol{T}$; 以相应的特征值为主对角线元素的对角矩阵 Λ，即为所求的 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$.

注意：$\boldsymbol{T}$ 中列向量的次序与矩阵 Λ 主对角线上的特征值的次序相对应.

实对称矩阵正交对角化的步骤

第一步, 求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$;

第二步, (1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的对应于每个特征值 λ_i 的一组线性无关的特征向量, 即求出齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;
(2) 利用格拉姆-施密特正交化方法, 把此组基础解系规范正交化;
(3) 将对应于不同特征值的特征向量单位化, 由定理 7 知, 对应于不同特征值的特征向量正交, 如此可得 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个两两正交的单位特征向量;

第三步, 以上面求出的 n 个两两正交的单位特征向量为列向量所得的 n 阶方阵, 即为所求的正交矩阵 $\boldsymbol{T}$; 以相应的特征值为主对角线元素的对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 即为所求的 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}$.

注意: $\boldsymbol{T}$ 中列向量的次序与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 主对角线上的特征值的次序相对应.

例 (11)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.

解

显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 故一定存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.

第一步, 先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda&2&2\\5-\lambda&1-\lambda&2\\5-\lambda&2&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\0&-(\lambda+1)&0\\0&0&-(\lambda+1)\end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)(\lambda+1)^2=0,$$

例 (11)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.

解

显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 故一定存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.
第一步, 先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| &= \begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda&2&2\\5-\lambda&1-\lambda&2\\5-\lambda&2&1-\lambda\end{vmatrix}\\
&=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\0&-(\lambda+1)&0\\0&0&-(\lambda+1)\end{vmatrix}\\
&=(5-\lambda)(\lambda+1)^2=0,
\end{aligned}
$$

解

求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5.$

第二步, 对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, 求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求得一组基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5.$

第二步, 对于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, 求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求得一组基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

解

正交化: 令

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再单位化: 令

$$\gamma_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

解

正交化: 令

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再单位化: 令

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

解

对于 $\lambda_3 = 5$，求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+(-1)\times r_2]{\substack{-\frac{1}{2}\times r_1 \\ -\frac{1}{6}\times r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求得一组基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}},$$

这里只有一个向量，单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

解

对于 $\lambda_3 = 5$, 求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+(-1)\times r_2]{\substack{-\frac{1}{2}\times r_1 \\ -\frac{1}{6}\times r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求得一组基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}},$$

这里只有一个向量, 单位化, 得

$$\gamma_3 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

解

第三步, 以正交单位向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 为列向量的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 就是所求的正交矩阵, 即令

$$\boldsymbol{T} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix},$$

有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

例 (12)

设 $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

解

由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 7-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7-\lambda & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_1+c_3\\ c_1+c_4}]{c_1+c_2}$$

例 (12)

设 $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

解

由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 7-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7-\lambda & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_1+c_3 \\ c_1+c_4}]{c_1+c_2}$$

解

$$\xlongequal[\substack{c_1+c_3\\ c_1+c_4}]{c_1+c_2}\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -1 & 1 \\ 4-\lambda & 7-\lambda & 1 & -1 \\ 4-\lambda & 1 & 7-\lambda & -3 \\ 4-\lambda & -1 & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3+(-1)\times r_1\\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-1)\times r_1}\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 8-\lambda & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}}(4-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & 2 & -2 \\ 4 & 8-\lambda & -4 \\ 2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2}$$

解

$$\xlongequal{c_1+c_2}(4-\lambda)\begin{vmatrix} 12-\lambda & 2 & -2 \\ 12-\lambda & 8-\lambda & -4 \\ 0 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+(-1)\times r_1}(4-\lambda)\begin{vmatrix} 12-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)^2(8-\lambda)(12-\lambda)=0,$$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的不同的特征值为 $\lambda_1=4$ *(二重)*, $\lambda_2=8, \lambda_3=12.$

解

对于 $\lambda_1 = 4$, 求解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 + r_1 \\ r_4 + (-3) \times r_1}]{r_2 + 3 \times r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{8} \times r_2]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解

求得一组基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

显然，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交，只需将其单位化，即令

$$\gamma_1 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}, \quad \gamma_2 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda_2 = 8$，类似地可求得齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一组单位化的基础解系为

$$\gamma_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

解

求得一组基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

显然，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交，只需将其单位化，即令

$$\gamma_1 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}, \quad \gamma_2 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda_2 = 8$，类似地可求得齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一组单位化的基础解系为

$$\gamma_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

解

对于 $\lambda_3 = 12$, 类似地可求得对应的单位特征向量为

$$\gamma_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

于是

$$T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

即为所求的正交矩阵, 且 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$

解

对于 $\lambda_3 = 12$, 类似地可求得对应的单位特征向量为

$$\gamma_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

于是

$$\boldsymbol{T} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

即为所求的正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$

前面主要研究线性问题，但在实际问题中还存在大量非线性问题，其中最简单的模型就是二次型．本节利用矩阵工具研究二次型，介绍化二次型为标准形的几种方法．

定义 (3)

n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ + \cdots \qquad \cdots \\ + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{5-9}$$

称为 n 元二次型, 简称二次型. 当 a_{ij} 为复数时, f 称为复二次型; 当 a_{ij} 为实数时, f 称为实二次型.

这里只讨论实二次型.

取 $a_{ji}=a_{ij}(i<j)$, 则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$. 于是式 (5-9) 可写成对称形式:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+\\ &a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+\\ &\cdots+\\ &a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\ =&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j. \end{aligned} \tag{5-10}$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{5-11}$$

则式 (5-10) 可以用矩阵形式简单表示为

$$\begin{aligned} f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{5-12}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵.

例如, 二次型 $f = x^2 + 2xy + 4y^2 - 2xz - 6yz + 5z^2$ 用矩阵表示即为

$$f = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

显然, 这种矩阵表示是唯一的, 即任给一个二次型就唯一确定一个对称矩阵; 反之, 任给一个对称矩阵也可唯一确定一个二次型, 即两者之间存在一一对应关系.

对称矩阵 A 称为二次型 f 的矩阵, A 的秩称为二次型 f 的秩, f 也称为对称矩阵 A 的二次型.

例如，二次型 $f = x^2 + 2xy + 4y^2 - 2xz - 6yz + 5z^2$ 用矩阵表示即为

$$f = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

显然，这种矩阵表示是唯一的，即任给一个二次型就唯一确定一个对称矩阵；反之，任给一个对称矩阵也可唯一确定一个二次型，即两者之间存在一一对应关系.

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的秩，f 也称为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型.

在平面解析几何中讨论二次曲线时，经常把二次曲线的一般方程

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$

通过坐标变换化成标准形

$$mx'^2 + ny'^2 = 1,$$

再根据标准形判断曲线的形状.

这里对二次型也进行类似的讨论.

对于一般的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,

设 C 是一个 n 阶可逆矩阵, 令

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

称该线性变换为非退化的线性变换或可逆线性变换. 将其代入二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 得

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{y}.$$

定义 (4)

对于 n 阶矩阵 A 和 B, 如果存在 n 阶可逆矩阵 C, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则称 B 合同于 A, 记作 $A \simeq B$. 对 A 进行运算 $C^{\mathrm{T}}AC$, 称为对 A 进行合同变换.

对于一般的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$,
设 $\boldsymbol{C}$ 是一个 n 阶可逆矩阵, 令

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C} \boldsymbol{y},$$

称该线性变换为非退化的线性变换或可逆线性变换. 将其代入二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$, 得

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} \right) \boldsymbol{y}.$$

定义 (4)

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 如果存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 合同于 $\boldsymbol{A}$, 记作 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$, 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行合同变换.

定理 (10)

任给可逆矩阵 C, 令 $B = C^{\mathrm{T}} A C$. 如果 A 为对称矩阵, 则 B 亦为对称矩阵, 且 $r(B) = r(A)$.

证明.

因 $A^{\mathrm{T}} = A$, 故 $B^{\mathrm{T}} = (C^{\mathrm{T}} A C)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} C = C^{\mathrm{T}} A C = B$, 即 B 为对称矩阵.
又因为 $B = C^{\mathrm{T}} A C$, 而 C^{T} 与 C 均为可逆矩阵, 故 A 与 B 等价, 于是 $r(B) = r(A)$. 证毕. $\square$

经可逆线性变换 $x = Cy$ 后, 二次型 f 的矩阵 A 变为与 A 合同的对称矩阵 $C^{\mathrm{T}} A C$, 且二次型的秩不变. 矩阵的合同关系与相似关系一样, 都满足反身性、对称性、传递性.

定理 (10)

任给可逆矩阵 C, 令 $B = C^{\mathrm{T}}AC$. 如果 A 为对称矩阵, 则 B 亦为对称矩阵, 且 $r(B) = r(A)$.

证明.

因 $A^{\mathrm{T}} = A$, 故 $B^{\mathrm{T}} = \left(C^{\mathrm{T}}AC\right)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}C = C^{\mathrm{T}}AC = B$, 即 B 为对称矩阵.
又因为 $B = C^{\mathrm{T}}AC$, 而 C^{T} 与 C 均为可逆矩阵, 故 A 与 B 等价, 于是 $r(B) = r(A)$. 证毕. □

经可逆线性变换 $x = Cy$ 后, 二次型 f 的矩阵 A 变为与 A 合同的对称矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC$, 且二次型的秩不变. 矩阵的合同关系与相似关系一样, 都满足反身性、对称性、传递性.

定理 (10)

任给可逆矩阵 C, 令 $B = C^{\mathrm{T}}AC$. 如果 A 为对称矩阵, 则 B 亦为对称矩阵, 且 $r(B) = r(A)$.

证明.

因 $A^{\mathrm{T}} = A$, 故 $B^{\mathrm{T}} = \left(C^{\mathrm{T}}AC\right)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}C = C^{\mathrm{T}}AC = B$, 即 B 为对称矩阵.
又因为 $B = C^{\mathrm{T}}AC$, 而 C^{T} 与 C 均为可逆矩阵, 故 A 与 B 等价, 于是 $r(B) = r(A)$. 证毕. □

经可逆线性变换 $x = Cy$ 后, 二次型 f 的矩阵 A 变为与 A 合同的对称矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC$, 且二次型的秩不变. 矩阵的合同关系与相似关系一样, 都满足反身性、对称性、传递性.

定义 (5)

只含平方项的二次型，即

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2,$$

称为二次型的**标准形** (或**法式**).

要使二次型 f 经可逆线性变换 $x = Cy$ 变成标准形，就是要使

$$y^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} A C y = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

也就是要使 $C^{\mathrm{T}} A C$ 成为对角矩阵. 因此, 化二次型为标准形就是对于对称矩阵 A, 寻求可逆矩阵 C, 使 $C^{\mathrm{T}} A C$ 为对角矩阵.

定义 (5)

只含平方项的二次型, 即

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2,$$

称为二次型的**标准形** (或**法式**).

要使二次型 f 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 变成标准形, 就是要使

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} \boldsymbol{y} &= k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 \\ &= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

也就是要使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵. 因此, 化二次型为标准形就是对于对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 寻求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$ 为对角矩阵.

由第 3 节的定理 9 知，任给实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，总有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

定理 (11)

任给实二次型 $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵)，使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值.

用正交变换把二次型化为标准形，这在理论上和实际应用中都是非常重要的，而此方法的具体步骤就是第 3 节介绍的化实对称矩阵为对角矩阵的步骤.

由第 3 节的定理 9 知, 任给实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 总有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$, 即 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

定理 (11)

任给实二次型 $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$, 总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵), 使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值.

用正交变换把二次型化为标准形, 这在理论上和实际应用中都是非常重要的, 而此方法的具体步骤就是第 3 节介绍的化实对称矩阵为对角矩阵的步骤.

例 (13)

求一个正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$, 把二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_1x_4 + 2x_3x_4$$

化为标准形.

解

f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

例 (13)

求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$, 把二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+2x_2x_4-2x_1x_4+2x_3x_4$$

化为标准形.

解

f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

解

f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(1-\lambda)^3(3+\lambda).$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=1$ (三重), $\lambda_2=-3$.

解

对于 $\lambda_1 = 1$, 解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求得一组基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解

对于 $\lambda_1 = 1$, 解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求得一组基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解

令

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \sum_{i=1}^{2} \frac{[\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i]}\boldsymbol{\beta}_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解

再令

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ 0\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=-3$, 解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1&-3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

解

再令

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ 0\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=-3$, 解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1&-3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

解

求得一组基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 令

$$\gamma_4 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_4}{\|\boldsymbol{\alpha}_4\|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

取正交矩阵

$$\boldsymbol{T} = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

再令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$, 则可得

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

解

求得一组基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_4 = (1, -1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 令

$$\gamma_4 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_4}{\|\boldsymbol{\alpha}_4\|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

取正交矩阵

$$\boldsymbol{T} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

再令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$, 则可得

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

例 (14)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$，通过正交变换可化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换.

分析: 由于二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 通过正交变换 $x=Ty$ 化成的标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$ 的平方项的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，而且变换前后两个二次型的矩阵有下面的关系:

$$T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

所以上式两端取行列式，即可求得参数 a.

例 (14)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$，通过正交变换可化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换.

分析: 由于二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ 化成的标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$ 的平方项的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而且变换前后两个二次型的矩阵有下面的关系:

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

所以上式两端取行列式，即可求得参数 a.

解

变换前后二次型的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}.$$

设所求正交矩阵为 $\boldsymbol{T}$, 则有 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$. 此时两端取行列式, 并注意到 $|\boldsymbol{T}|=\pm1$, 得

$$\left|\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\right||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{T}|=|\boldsymbol{T}|^2|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\Lambda}|,$$

即

$$2\left(9-a^2\right)=10.$$

由 $a>0$, 得 $a=2$.

解

变换前后二次型的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

设所求正交矩阵为 $\boldsymbol{T}$, 则有 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$. 此时两端取行列式, 并注意到 $|\boldsymbol{T}|=\pm 1$, 得

$$\left|\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\right||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{T}|=|\boldsymbol{T}|^2|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\Lambda}|,$$

即

$$2\left(9-a^2\right)=10.$$

由 $a>0$, 得 $a=2$.

解

根据分析可知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$.

当 $\lambda_1 = 1$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，得特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}.$$

同理，可求得与 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ 对应的特征向量分别为

$$\xi_2 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \xi_3 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

又因为对应于不同特征值的特征向量是相互正交的，所以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是正交向量组.

解

根据分析可知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5.$

当 $\lambda_1=1$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

同理，可求得与 $\lambda_2=2,\lambda_3=5$ 对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

又因为对应于不同特征值的特征向量是相互正交的，所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是正交向量组.

解

将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化，得

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

以 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 为列向量，即得所求的正交矩阵

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

用正交变换化二次型为标准形，具有保持几何形状不变的优点．下面通过实例分别介绍用配方法和初等变换法化二次型为标准型．

例 (15)

化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形，并求所用的变换矩阵．

解

由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$\begin{aligned} f &= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3\right) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2. \end{aligned}$$

用正交变换化二次型为标准形，具有保持几何形状不变的优点. 下面通过实例分别介绍用配方法和初等变换法化二次型为标准型.

例 (15)

化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形，并求所用的变换矩阵.

解

由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2. \end{aligned}$$

用正交变换化二次型为标准形，具有保持几何形状不变的优点．下面通过实例分别介绍用配方法和初等变换法化二次型为标准型．

例 (15)

化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形，并求所用的变换矩阵．

解

由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$\begin{aligned} f &= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3\right) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2. \end{aligned}$$

解

上式右端除第一项外已不再含 x_1，继续配方，得

$$f=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3, \\ y_2 = x_2+2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = y_1-y_2+y_3, \\ x_2 = y_2-2y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$

就把 f 化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2$. 所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (|\boldsymbol{C}|=1\neq 0).$$

例 (16)

化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

为标准形，并求所用的变换矩阵.

解

在 f 中不含平方项，由于含有 x_1x_2 乘积项，故令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

即 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

代入 f 可得 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

例 (16)

化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

为标准形，并求所用的变换矩阵.

解

在 f 中不含平方项，由于含有 x_1x_2 乘积项，故令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

代入 f 可得 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

例 (16)

化二次型
$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$
为标准形，并求所用的变换矩阵.

解

在 f 中不含平方项，由于含有 x_1x_2 乘积项，故令
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$
即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$
代入 f 可得 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

解

再配方，得 $f=2\left(y_1-y_3\right)^2-2\left(y_2-2y_3\right)^2+6y_3^2$. 故令

$$\begin{cases} z_1=y_1 \quad\quad -y_3, \\ z_2= \quad\quad y_2-2y_3, \\ z_3= \quad\quad\quad\quad y_3, \end{cases} \text{即} \begin{cases} y_1=z_1 \quad\quad +z_3, \\ y_2= \quad\quad 2z_2+2z_3, \\ y_3= \quad\quad\quad\quad z_3 \end{cases}$$

亦即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

就有 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$. 因为经过两次代换，所以所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (|C|=-2\neq 0).$$

解

再配方，得 $f=2\left(y_1-y_3\right)^2-2\left(y_2-2y_3\right)^2+6y_3^2$. 故令

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= y_1 - y_3, \\ z_2 &= y_2 - 2y_3, \\ z_3 &= y_3, \end{aligned}\right. \quad \text{即} \left\{\begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_3, \\ y_2 &= 2z_2 + 2z_3, \\ y_3 &= z_3 \end{aligned}\right.$$

亦即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

就有 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$. 因为经过两次代换，所以所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (|C|=-2\neq 0).$$

解

再配方，得 $f=2\left(y_1-y_3\right)^2-2\left(y_2-2y_3\right)^2+6y_3^2$. 故令

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} z_1 & = & y_1 & & -\quad y_3, \\ z_2 & = & & y_2 & -\ 2y_3, \\ z_3 & = & & & y_3, \end{array}\right. \quad \text{即} \left\{\begin{array}{rcrcr} y_1 & = & z_1 & & +\quad z_3, \\ y_2 & = & & 2z_2 & +\ 2z_3, \\ y_3 & = & & & z_3 \end{array}\right.$$

亦即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

就有 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$. 因为经过两次代换，所以所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (|\boldsymbol{C}|=-2\neq 0).$$

化二次型为标准形就是寻求可逆矩阵 C, 使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 成为对角矩阵.

定理 (12)

对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 一定存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}} \cdots \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_s = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n).$$

关于初等矩阵, 易见

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i,j) = \boldsymbol{E}(i,j),\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}[i(k)] = \boldsymbol{E}[i(k)],\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}[i+j(k)] = \boldsymbol{E}[j+i(k)].$$

记 $C = P_1P_2\cdots P_s$, 则定理 12 还表明, 对 A 同时施行一系列同类的初等行和列的变换得到对角矩阵, 而相应地, 将这一系列的初等列变换施加于单位矩阵, 就得到变换矩阵 C. 类似于用初等变换求逆矩阵.

化二次型为标准形就是寻求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵.

定理 (12)

对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 一定存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}} \cdots \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_s = \mathrm{diag}\,(d_1, d_2, \cdots, d_n)\,.$$

关于初等矩阵, 易见

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i,j) = \boldsymbol{E}(i,j),\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}[i(k)] = \boldsymbol{E}[i(k)],\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}[i+j(k)] = \boldsymbol{E}[j+i(k)].$$

记 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$, 则定理 12 还表明, 对 $\boldsymbol{A}$ 同时施行一系列同类的初等行和列的变换得到对角矩阵, 而相应地, 将这一系列的初等列变换施加于单位矩阵, 就得到变换矩阵 $\boldsymbol{C}$. 类似于用初等变换求逆矩阵.

例 (17)

用初等变换法将例 15 中的二次型
$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 化为标准形.

解

例 15 中的二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2+(-1)\times c_1 \\ c_3+(-1)\times c_1}]{\substack{r_2+(-1)\times r_1 \\ r_3+(-1)\times r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 (17)

用初等变换法将例 15 中的二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 化为标准形.

解

例 15 中的二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2+(-1)\times c_1 \\ c_3+(-1)\times c_1}]{\substack{r_2+(-1)\times r_1 \\ r_3+(-1)\times r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 (17)

用初等变换法将例 15 中的二次型
$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 化为标准形.

解

例 15 中的二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2+(-1)\times c_1 \\ c_3+(-1)\times c_1}]{\substack{r_2+(-1)\times r_1 \\ r_3+(-1)\times r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解

$$\xrightarrow[c_3+(-2)\times c_2]{r_3+(-2)\times r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故令

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2.$$

解

$$\xrightarrow[c_3+(-2)\times c_2]{r_3+(-2)\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故令

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

则

$$f = y_1^2 + y_2^2.$$

例 (18)

用初等变换法将例 16 中的二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 化为标准形.

解

例 16 中的二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1+c_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 (18)

用初等变换法将例 16 中的二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 化为标准形.

解

例 16 中的二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1+c_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 (18)

用初等变换法将例 16 中的二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 化为标准形.

解

例 16 中的二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1+c_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解

$$\xrightarrow[\substack{c_2+\left(-\frac{1}{2}\right)\times c_1\\ c_3+c_1}]{\substack{r_2+\left(-\frac{1}{2}\right)\times r_1\\ r_3+r_1}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -2\\ 0 & -2 & -2\\ 1 & -\frac{1}{2} & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3+(-4)\times c_2]{r_3+(-4)\times r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 6\\ 1 & -\frac{1}{2} & 3\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故令

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{pmatrix},$$

则

$$f = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 6y_3^2.$$

解

$$\xrightarrow[\substack{c_2+\left(-\frac{1}{2}\right)\times c_1 \\ c_3+c_1}]{\substack{r_2+\left(-\frac{1}{2}\right)\times r_1 \\ r_3+r_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3+(-4)\times c_2]{r_3+(-4)\times r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故令

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

则

$$f = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 6y_3^2.$$

二次型的标准形不是唯一的，但二次型的秩是唯一的．在实可逆线性变换下，标准形中正系数的个数是不变的（从而负系数的个数不变，正、负系数的个数之差也不变）．即

定理 (13 惯性定理)

设有二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，它的秩为 r，若有两个实的非退化（可逆）线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 及 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$，使

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \quad (k_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r),$$

及

$$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r),$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相同．

定义 (6)

二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的标准形中，系数为正的平方项的个数 p 称为此二次型的**正惯性指数**，系数为负的平方项的个数 $r-p$ 称为此二次型的**负惯性指数**，$s=2p-r$ 称为**符号差**. 这里 r 为二次型 f 的秩.

定义 (7)

设二次型 f 的正惯性指数为 p，秩为 r，称

$$f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

为二次型 f 的**规范形**.

由定理 13 可知，任何一个二次型都可以通过可逆线性变换化为规范形，且二次型的规范形是唯一确定的.

定义 (6)

二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的标准形中，系数为正的平方项的个数 p 称为此二次型的**正惯性指数**，系数为负的平方项的个数 $r-p$ 称为此二次型的**负惯性指数**，$s = 2p - r$ 称为**符号差**. 这里 r 为二次型 f 的秩.

定义 (7)

设二次型 f 的正惯性指数为 p，秩为 r，称

$$f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

为二次型 f 的**规范形**.

由定理 13 可知，任何一个二次型都可以通过可逆线性变换化为规范形，且二次型的规范形是唯一确定的.

例 (19)

将例 16 中的二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 化为规范形.

解

由例 16 知, f 经线性变换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3, \end{cases}$$

化为标准形 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$. 令

$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{2}z_1, \\ w_2 = \sqrt{6}z_3, \\ w_3 = \sqrt{2}z_2, \end{cases} \text{即} \begin{cases} z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_1, \\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_3, \\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}w_2, \end{cases}$$

则将 f 化为规范形 $f = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$.

例 (19)

将例 16 中的二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 化为规范形.

解

由例 16 知, f 经线性变换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3, \end{cases}$$

化为标准形 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$. 令

$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{2}z_1, \\ w_2 = \sqrt{6}z_3, \\ w_3 = \sqrt{2}z_2, \end{cases} \text{即} \begin{cases} z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_1, \\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_3, \\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}w_2, \end{cases}$$

则将 f 化为规范形 $f = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$.

例 (19)

将例 16 中的二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 化为规范形.

解

由例 16 知, f 经线性变换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3, \end{cases}$$

化为标准形 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$. 令

$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{2}z_1, \\ w_2 = \sqrt{6}z_3, \\ w_3 = \sqrt{2}z_2, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}w_1, \\ z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}w_3, \\ z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}w_2, \end{cases}$$

则将 f 化为规范形 $f = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$.

定义 (8)

设有二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 如果对任何 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 都有 $f(\boldsymbol{x}) > 0$ [显然 $f(\mathbf{0}) = 0$], 则称 f 为正定二次型, 并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵; 如果对任何 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 都有 $f(\boldsymbol{x}) < 0$, 则称 f 为负定二次型, 称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵.

定理 (14)

n 元二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型的充分必要条件是它的正惯性指数等于 n.

定义 (8)

设有二次型 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 如果对任何 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 都有 $f(\boldsymbol{x}) > 0$ [显然 $f(\boldsymbol{0}) = 0$], 则称 f 为正定二次型, 并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵; 如果对任何 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 都有 $f(\boldsymbol{x}) < 0$, 则称 f 为负定二次型, 称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵.

定理 (14)

n 元二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型的充分必要条件是它的正惯性指数等于 n.

证明.

充分性. 设可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 使

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2.$$

设 $k_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 任给 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 从而

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 > 0,$$

即 f 是正定二次型.

必要性. 假设有某个 $s (1 \leqslant s \leqslant n)$, 使 $k_s \leqslant 0$, 则当 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_s$ (基本单位坐标向量) 时, 有

$$f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_s) = k_s \leqslant 0,$$

这与 f 为正定二次型矛盾, 故必有 $k_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 证毕. □

证明.

充分性. 设可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 使

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2.$$

设 $k_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, 任给 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 从而

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 > 0,$$

即 f 是正定二次型.

必要性. 假设有某个 $s(1 \leqslant s \leqslant n)$, 使 $k_s \leqslant 0$, 则当 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_s$ (基本单位坐标向量) 时, 有

$$f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_s) = k_s \leqslant 0,$$

这与 f 为正定二次型矛盾, 故必有 $k_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$. 证毕.

证明.

充分性. 设可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 使

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}k_iy_i^2.$$

设 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, 任给 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 从而

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}k_iy_i^2>0,$$

即 f 是正定二次型.

必要性. 假设有某个 $s(1\leqslant s\leqslant n)$, 使 $k_s\leqslant 0$, 则当 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_s$ (基本单位坐标向量) 时, 有

$$f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_s)=k_s\leqslant 0,$$

这与 f 为正定二次型矛盾, 故必有 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 证毕. □

证明.

充分性. 设可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 使

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2.$$

设 $k_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, 任给 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 从而

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 > 0,$$

即 f 是正定二次型.

必要性. 假设有某个 $s(1 \leqslant s \leqslant n)$, 使 $k_s \leqslant 0$, 则当 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_s$ (基本单位坐标向量) 时, 有

$$f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_s) = k_s \leqslant 0,$$

这与 f 为正定二次型矛盾, 故必有 $k_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$. 证毕.

证明.

充分性. 设可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 使

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2.$$

设 $k_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, 任给 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 从而

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 > 0,$$

即 f 是正定二次型.

必要性. 假设有某个 $s(1 \leqslant s \leqslant n)$, 使 $k_s \leqslant 0$, 则当 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_s$ (基本单位坐标向量) 时, 有

$$f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_s) = k_s \leqslant 0,$$

这与 f 为正定二次型矛盾, 故必有 $k_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$. 证毕. □

推论 (4)

对称矩阵 A 正定 (即 A 为正定矩阵), 当且仅当 A 的特征值全为正.

类似地, 有: 二次型 f 为负定二次型, 当且仅当它的负惯性指数等于 n; 对称矩阵 A 为负定矩阵, 当且仅当它的所有特征值全为负.

下面介绍判定矩阵正 (负) 定的一个充分必要条件.

定义 (9)

n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 r 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

称为 A 的 r 阶顺序主子式.

推论 (4)

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定 (即 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵), 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正.

类似地, 有: 二次型 f 为负定二次型, 当且仅当它的负惯性指数等于 n; 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵, 当且仅当它的所有特征值全为负.

下面介绍判定矩阵正 (负) 定的一个充分必要条件.

定义 (9)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 r 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶顺序主子式.

定理 (15 赫尔维茨 (Hurwitz) 定理)

对称矩阵 A 正定，当且仅当 A 的各阶顺序主子式全为正，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 1, 2, \cdots, n;$$

对称矩阵 A 负定，当且仅当 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 1, 2, \cdots, n.$$

定理 (15 赫尔维茨 (Hurwitz) 定理)

对称矩阵 A 正定，当且仅当 A 的各阶顺序主子式全为正，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 1, 2, \cdots, n;$$

对称矩阵 A 负定，当且仅当 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 1, 2, \cdots, n.$$

例 (20)

判定 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的正定性.

解

由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = (1-\lambda)^2(5-\lambda),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 1, 5$. 根据推论 4, $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 从而 f 为正定次型.

例 (20)

判定 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 的正定性.

解

由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=(1-\lambda)^2(5-\lambda),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,5$. 根据推论 4, $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 从而 f 为正定次型.

例 (21)

判别二次型

$$f(x,y,z) = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$$

的正定性.

解

f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, 因

$$a_{11} = -5 < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad |A| = -80 < 0.$$

则根据定理 15, f 为负定二次型.

例 (21)

判别二次型

$$f(x,y,z) = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$$

的正定性.

解

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, 因

$$a_{11} = -5 < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad |\boldsymbol{A}| = -80 < 0.$$

则根据定理 15, f 为负定二次型.

例 (21)

判别二次型

$$f(x,y,z) = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$$

的正定性.

解

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, 因

$$a_{11} = -5 < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad |\boldsymbol{A}| = -80 < 0.$$

则根据定理 15, f 为负定二次型.

例 (22)

设 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$，问：$\lambda$ 取何值时，f 为正定二次型？

解

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，因

$$a_{11} = 1 > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2, |\boldsymbol{A}| = -4(\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

则根据定理 15，当 $\begin{cases} 4 - \lambda^2 > 0, \\ -4(\lambda - 1)(\lambda + 2) > 0, \end{cases}$

即 $-2 < \lambda < 1$ 时，所给二次型 f 正定.

例 (22)

设 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$，问：$\lambda$ 取何值时，f 为正定二次型?

解

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，因

$$a_{11} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2, \quad |\boldsymbol{A}| = -4(\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

则根据定理 15，当 $\begin{cases} 4 - \lambda^2 > 0, \\ -4(\lambda - 1)(\lambda + 2) > 0, \end{cases}$

即 $-2 < \lambda < 1$ 时，所给二次型 f 正定.

例 (22)

设 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$，问：$\lambda$ 取何值时，f 为正定二次型?

解

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，因

$$a_{11} = 1 > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2, |\boldsymbol{A}| = -4(\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

则根据定理 15，当 $\begin{cases} 4 - \lambda^2 > 0, \\ -4(\lambda - 1)(\lambda + 2) > 0, \end{cases}$

即 $-2 < \lambda < 1$ 时，所给二次型 f 正定.

例 (22)

设 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$，问：$\lambda$ 取何值时，f 为正定二次型？

解

f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，因

$$a_{11} = 1 > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2, |\boldsymbol{A}| = -4(\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

则根据定理 15，当 $\begin{cases} 4 - \lambda^2 > 0, \\ -4(\lambda - 1)(\lambda + 2) > 0, \end{cases}$

即 $-2 < \lambda < 1$ 时，所给二次型 f 正定.