第 3 章 向量与向量组

目录:

3.1 n 维向量

在平面几何中, 坐标平面上每个点的位置可以用它的坐标描述, 点的坐标是一个有序数对 (x, y). 一个 n 元方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

可以用一个 $n + 1$ 元有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$$

表示. $1 \times n$ 矩阵和 $n \times 1$ 矩阵也可以看作有序数组. 一个企业一年中, 从 1 月到 12 月每月的产值, 也可以用一个有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_{12})$ 表示. 有序数组的应用非常广泛, 有必要对它们进行深入的讨论.

定义 1: n 个数组成的有序数组

(3-1) $$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

或

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{3-2}$$

称为一个 n 维向量, 简称向量.

一般用小写黑体字母, 如 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \cdots$ 表示向量. 式 (3-1) 称为一个行向量, 式 (3-2) 称为一个列向量, 数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为这个向量的分量, a_i 称为这个向量的第 i 个分量或坐标. 分量都是实数的向量称为实向量, 分量是复数的向量称为复向量.

实际上, n 维行向量可以看成行矩阵, n 维列向量也常看成列矩阵.

下面只讨论实向量. 设 k 和 l 为两个任意的常数, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 为三个任意的 n维向量, 其中

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n), \quad \boldsymbol{\gamma} = (c_1, c_2, \cdots, c_n).$$

定义 2: 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 对应的分量都相等, 即

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

就称这两个向量相等, 记为 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$.

定义 3: 向量

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$.

向量

$$(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与数 k 的数量乘积, 简称数乘, 记为 $k\boldsymbol{\alpha}$.

定义 4: 分量全为零的向量

$$(0, 0, \cdots, 0)$$

称为零向量, 记为 $\mathbf{0}$.

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 -1 的数乘

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量, 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

由向量的加法及负向量的定义可定义向量的减法, 即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).$$

向量的加法与数乘具有下列性质:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$; (交换律)

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$; (结合律)

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

(6) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(9) $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

(10) $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

在数学中, 满足 $(1)\sim(8)$ 的运算称为线性运算. 还可以证明:

(11) 如果 $k\neq 0$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 那么 $k\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

显然, n 维行向量的相等和加法、减法及数乘运算的定义, 与把它们看成行矩阵时的相等和加法, 减法及数乘运算的定义是一致的. 对应地, 也可以定义列向量的加法. 减法和数乘运算, 这些运算与把它们看成列矩阵时的加法、减法和数乘运算也是一致的, 并且同样具有性质$(1)\sim(11)$.

例 1: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,0)$, 求 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 显示解答 收起解答

例 2: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 且 $2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\beta})$, 求 $\boldsymbol{\beta}$. 显示解答 收起解答

由若干个同维数的列向量 (或同维数的行向量)组成的集合称为向量组.

例如, 一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 有 n 个 m 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},$$

称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组.

类似地, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又有 m 个 n 维行向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),\\ \boldsymbol{\beta}_2&=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),\quad\cdots,\\ \boldsymbol{\beta}_m&=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn}),\end{aligned}$$

称向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组.

反之, 由 n 个 m 维列向量组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 或由 m 个 n 维行向量组成的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也可以构成一个 $m\times n$ 矩阵, 即

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$$

或

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}.$$

这样, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就与其列向量组或行向量组之间建立了一一对应的关系. 向量组之间的关系可以用矩阵研究; 反过来, 矩阵的问题也可以用向量组研究.

返回顶部

3.2 向量组的线性相关性

考察线性方程组

$$
\left\{\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m,
\end{aligned}\right. \tag{3-3}
$$

令

$$
\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,n),\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},
$$

则线性方程组 (3-3) 可表示为如下向量形式:

$$
x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}. \tag{3-4}
$$

这样, 线性方程组 (3-3) 是否有解的问题, 就转化为是否存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 使得下列线性关系式成立:

$$
\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n.
$$

为了解决这个问题, 先定义向量组的线性组合的概念.

定义 5: 给定向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$
\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n,
$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个线性组合, 或者说 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示, $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 称为组合系数.

例 3: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)$, $\boldsymbol{\beta}=(1,2,1,1)$,则 $\boldsymbol{\beta}$

能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示? 若能,写出具体表达式. 显示解答
收起解答

例 4: 设 $\boldsymbol{\alpha} = (2, -3, 0), \boldsymbol{\beta} = (0, -1, 2), \boldsymbol{\gamma} = (0, -7, -4)$, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性表示? 显示解答 收起解答

下面考察齐次线性方程组

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{array}\right. \tag{3-5}$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

则齐次线性方程组 (3-5) 可表示为如下向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}. \tag{3-6}$$

这样, 齐次线性方程组 (3-5) 是否有非零解的问题, 就转化为是否存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得下列线性关系式成立:

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}.$$

为了解决这一问题, 下面给出向量组的线性相关和线性无关的概念.

定义 6: 对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,使得

$$\sum_{i=1}^{s} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}, \tag{3-7}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

反之, 如果只有在 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ 时式 (3-7) 才成立, 就称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

换言之, 当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是行向量组时, 它们线性相关就是指有非零的 $1 \times s$矩阵 $(k_1, k_2, \cdots, k_s)$, 使

$$(k_1, k_2, \cdots, k_s)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{pmatrix} = \mathbf{0};$$

当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为列向量组时, 它们线性相关就是指有非零的 $s \times 1$ 矩阵 $(k_1, k_2, \cdots, k_s)^{\mathrm{T}}$,使

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_s\end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

显然, 单个零向量构成的向量组是线性相关的.

例 5: 判断向量组

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1 &=(1, 0, \cdots, 0),\\ \boldsymbol{e}_2 &=(0, 1, \cdots, 0),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{e}_n &=(0, 0, \cdots, 1)\end{cases}$$

的线性相关性. 显示解答 收起解答

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 称为基本单位向量组.

例 6: 判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 2, 5), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 3, 6)$$

的线性相关性. 显示解答 收起解答

- 利用SageMath在线代码模块求解例 6.

显示代码 收起代码

- 例 6 交互式演示界面超链接

例 7: 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$, 试证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 也线性无关. 显示证明 收起证明

向量组的线性相关性与线性表示这一概念有着密切的联系.

定理 1: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量能由其余向量线性表示. 显示证明 收起证明

例如, 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, 3, 1), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (4, -2, 5, 4), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (2, -1, 4, -1)$$

是线性相关的, 因为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2.$$

显然, 只含有两个向量的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关的充分必要条件是存在常数 k, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1 = k\boldsymbol{\alpha}_2$, 此时, 两个向量的对应分量成比例. 在三维的情形中, 这就表示向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线; 三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的几何意义就是它们共面.

定理 2: 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关, 而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示, 且表示式是唯一的. 显示证明 收起证明

将一个向量组中的某些向量组成的向量组称为原向量组的部分组.

定理 3: 有一个部分组线性相关的向量组一定线性相关. 显示证明 收起证明

推论 1: 含有零向量的向量组必线性相关.

定理 4: 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 为两个向量组, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_i = \begin{pmatrix} a_{ip_1} \\ a_{ip_2} \\ \vdots \\ a_{ip_n} \end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是对 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 各分量的顺序进行重排后得到的向量 $(i=1,2,\cdots,s)$, 则这两个向量组有相同的线性相关性. 显示证明 收起证明

定理 4 是对列向量的情形叙述的, 对行向量也有相同的结论. 类似这样的情形, 今后不再说明.

定理 5: 在 r 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的各向量中, 添上 $n-r$ 个分量使其变成 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$.
(1) 如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关,那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关;
(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也线性无关.
显示证明 收起证明

例如, $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ 是线性无关的, 因此, 由定理 5 知,
$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,3)$ 也线性无关.

定理 6: 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的列 (行) 向量组线性相关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$. 显示证明 收起证明

推论 2: n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.

例 8: 讨论下列矩阵的行 (列) 向量组的线性相关性:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&2&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}.$$

显示解答 收起解答

例 9: 判断向量组
$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,-2),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,-3)$ 是否线性相关.
显示解答 收起解答

定理 7: 当 $m>n$ 时, m 个 n 维向量必线性相关. 显示证明 收起证明

推论 3: $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

返回顶部

3.3 向量组间的关系与极大线性无关组

定义 7: 设有两个向量组

$$A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r;$$
$$B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s.$$

如果向量组 A 中的每个向量都能由向量组 B 线性表示, 则称向量组 A 能由向量组 B 线性表示. 如果向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示, 则称这两个向量组等价.

显然, 向量组之间的等价关系具有下述性质:

(1) 反身性: 向量组 A 与自身等价;

(2) 对称性: 若向量组 A 与向量组 B 等价, 则向量组 B 与向量组 A 也等价;

(3) 传递性: 若向量组 A 与向量组 B 等价, 向量组 B 与向量组 C 等价, 则向量组 A 与向量组 C 等价.

定理 8: 如果向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示, 且 $r > s$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关. 显示证明 收起证明

推论 4: 如果向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 那么 $r \leqslant s$.

推论 5: 两个等价的线性无关的向量组必含有相同个数的向量.

设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 只要向量组中含有非零向量, 则只含有这一个非零向量的部分组是线性无关的; 在这个部分组中添加原向量组中的另一个非零向量, 如果这两个向量组成的部分组仍然是线性无关的, 则再从原向量组中取出一个不属于这个部分组的非零向量添加进来, 使这三个向量组成的部分组线性无关. 这样一直做下去, 最后总能得到向量组中由 r 个向量组成的部分组是线性无关的, 再添加一个向量则部分组就线性相关了. 这样得到的由 r 个向量组成的线性无关的部分组是极大的线性无关的部分组.

定义 8: 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足:
(1) 部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关;
(2) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}_i(1 \leqslant i \leqslant s)$, 都有 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关,
则称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组 (简称极大无关组).

例 10: 在向量组
$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, 3, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (4, -2, 5, 4), \boldsymbol{\alpha}_3 = (2, -1, 4, -1)$ 中,
$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$为它的一个极大线性无关组. 首先, 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的对应分量不成比例, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 再添入 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 以后, 由

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$$

可知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组. 不难验证 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大线性无关组.

容易证明, 定义 8 与下面的定义 $8'$ 等价.

定义 $8'$: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足:
(1) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关;
(2) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}_i(i = 1, 2, \cdots, s), \boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示,
则称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组.

从例 10 发现: 向量组的极大线性无关组可能不是唯一的.

因此存在下面的性质.

性质 1: 一向量组的极大线性无关组与向量组本身等价.

性质 2: 一向量组的任意两个极大线性无关组等价.

性质 3: 一向量组的任意两个极大线性无关组含有相同个数的向量.

性质 3 表明向量组的极大线性无关组所含向量的个数与极大线性无关组的选择无关, 它反映了向量组本身的特征.

返回顶部

3.4 向量组的秩及其与矩阵的秩的关系

由第 3 节知道, 一个向量组的极大线性无关组可能不是唯一的, 但任意两个极大线性无关组所含向量的个数是相同的.

定义 9: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩, 记为 $r\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\right)$. 规定只含零向量的向量组的秩为 0.

例如, 例 10 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2.

由于线性无关的向量组本身就是它的极大线性无关组, 所以有**一向量组线性无关的充分必要条件为它的秩与它所含向量的个数相同**.

我们知道, 每个向量组都与它的极大线性无关组等价, 由等价的传递性可知, 任意两个等价的向量组的极大线性无关组也等价, 根据推论 5 就有**等价的向量组必有相同的秩**.

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 的极大线性无关组线性表示. 因此, 由推论 4 有, **若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示, 则**
$r\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\right) \leqslant r\left(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t\right)$.

定理 9: 向量组的任意线性无关的部分组都可扩充为一个极大线性无关组. 显示证明 收起证明

推论 6: 秩为 r 的向量组中, 任意含 r 个向量的线性无关的部分组都是向量组的极大线性无关组.

例 11: 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1,5)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,2)$ 的一个极大线性无关组及秩.
显示解答 收起解答

第 2 章中给出了矩阵的秩的定义和计算方法, 那么向量组的秩与矩阵的秩有什么关系呢?

首先建立一个引理.

引理 1: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 r 个 n 维列向量 $(r \leqslant n)$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$ 至少有一个 r 阶子式不为零. 显示证明 收起证明

下面建立向量组的秩与矩阵的秩的关系.

定理 10: 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于它的列向量组的秩, 也等于它的行向量组的秩. 显示证明 收起证明

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

推论 7: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩与列秩相等.

由定理 10 的证明知, 若 D_r 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式, 则 D_r 所在的 r 个行和 r 个列就分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组和列向量组的一个极大线性无关组.

由此, 可以给出求向量组的秩和极大线性无关组的步骤:

(1) 以向量组中的各向量作为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换将该矩阵化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$;

(3) 行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的非零行的个数即为矩阵 $\boldsymbol{B}$ (也是矩阵 $\boldsymbol{A}$) 的秩, 亦即向量组的秩;

(4) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应的列向量组有相同的线性组合关系, 则与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的首非零元所在的列对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的部分列向量组即为所求向量组的一个极大线性无关组.

同理, 也可以将向量组中的各向量作为行向量组成矩阵, 通过作初等列变换来求向量组的秋和极大线性无关组.

例 12: 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,4,1,0,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,5,-1,-3,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,2,2,-1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (-1,2,5,6,2)$ 的秩和一个极大线性无关组,并把不属于极大线性无关组的其余向量用该极大线性无关组线性表示. 显示解答 收起解答

例 13: 已知向量组
$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,-1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,0,t,0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,-4,5,-2), \boldsymbol{\alpha}_4 =$

$(3,-2,t+4,-1)$ 的秩为 2, 试确定 t 的值. 显示解答 收起解答

返回顶部

3.5 向量的内积与正交向量组

前面定义了 n 维向量的线性运算, 为了描述向量的度量性质, 还需要引入向量内积的概念.

定义 10: 设有 n 维向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

称 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积.

内积是向量的一种运算,用矩阵形式可表示为 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

例 14: 计算下列向量的内积:
(1) $\boldsymbol{x}=(0,1,5,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(-2,0,-1,3)^{\mathrm{T}}$;
(2) $\boldsymbol{x}=(-2,1,0,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(3,-6,8,4)^{\mathrm{T}}$. 显示解答 收起解答

若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 为 n 维实向量, λ 为实数, 则从内积的定义可推得下列性质:

(1) $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}]$;

(2) $[\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\lambda[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$;

(3) $[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}]+[\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$;

(4) $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]\geqslant 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时等号成立.

由于对任意一个向量 $\boldsymbol{x}$, $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]\geqslant 0$, 因此可以引入向量长度的概念.

定义 11: 称 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度 (或范数). 当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 为单位向量.

向量的长度具有下列**基本性质**:

(1) 非负性: 当 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\|>0$; 当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\|=0$;

(2) 齐次性: $\|\lambda \boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$;

(3) 三角不等式: $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$;

(4) 柯西–施瓦茨 (Cauchy–Schwarz) 不等式: $|[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]| \leqslant\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

下面只证明性质 (4), 性质 (1) 、(2)、(3) 的证明留给读者. 显示证明
收起证明

对任意一个非零向量 $\boldsymbol{x}$, 向量 $\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 是一个单位向量, 因为由向量长度的非负性知, $\|\boldsymbol{x}\|>0$, 再根据向量长度的齐次性, 有

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\|=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\|\boldsymbol{x}\|=1.$$

由此可知, 用非零向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度去除向量 $\boldsymbol{x}$, 就可得到一个单位向量, 这一过程通常称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的单位化.

由柯西–施瓦茨不等式, 可得

$$\left|\frac{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot\|\boldsymbol{y}\|}\right| \leqslant 1 \quad(\|\boldsymbol{x}\| \cdot\|\boldsymbol{y}\| \neq 0).$$

因此, 可利用内积定义 n 维向量的夹角.

定义 12: 对于两个非零向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, 定义 $\theta=\arccos \frac{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot\|\boldsymbol{y}\|}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的夹角.

当 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]=0$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交.

显然, n 维零向量与任意 n 维向量都正交.

称一组两两正交的非零向量组为正交向量组.

定理 11: 若 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为正交向量组, 则它们为线性无关向量组. 显示证明 收起证明

例 15: 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 正交, 试求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交. 显示解答 收起解答

定义 13: 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 是一个线性无关向量组, 如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 两两正交, 且都是单位向量, 则称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 是一个规范正交向量组 (或标准正交向量组).

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是一个线性无关向量组, 要求一个规范正交向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$, 使 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价, 这样一个问题, 称为将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 规范正交化 (或标准正交化). 这一过程可以通过格拉姆–施密特 (Gram–Schmidt) 正交化方法实现, 其具体步骤如下.

取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,$$
$$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1},$$

容易验证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是正交向量组; 然后将它们单位化, 即令

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|},$$

则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 就是 V 的一个规范正交向量组.

例 16: 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是一个线性无关向量组, 试用格拉姆–施密特正交化方法, 构造一个规范正交向量组. 显示解答 收起解答

定义 14: 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$), 则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

定理 12: n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列 (行) 向量组是规范正交向量组. 显示证明 收起证明

例 17: 验证矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵. 显示解答 收起解答

由正交矩阵的定义, 不难得到下列**性质**:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}|^2 = 1$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交矩阵;

(3) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

例 18: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 - 4\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 证明: $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ 为正交矩阵. 显示证明 收起证明

定义 15: 若 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵, 则线性变换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ 称为正交变换.

设 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ 是正交变换, 则有

$$\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}\|.$$

这表明, 经正交变换后, 向量的长度保持不变, 这是正交变换的优良特性之一. 其实, 正交变换相当于反射和旋转的叠合. 例如

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

为正交矩阵, 正交变换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ 相当于把 $\boldsymbol{x}$ 旋转 θ 角, 再关于纵轴对称反射.

返回顶部

习题 3 (A) 类

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,0)$. 求 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 及 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.
2. 设 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10),\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)$.求 α.
3. 判断下列命题是否正确:
   (1) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 那么其中每个向量都可由其他向量线性表示;
   (2) 如果向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也线性相关;
   (3) 如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 且表示式是唯一的, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关;
   (4) 如果当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$ 时才有 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关;
   (5) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性相关, 则有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$, 使
   $$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m.$$
4. 判别下列向量组的线性相关性:
   (1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,3)$;
   (2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(4,3)$;
   (3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(4,1,-3,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1,2)$;
   (4) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,2,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1,5,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,3,-1,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,0,4,-1)$.
5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关.
6. 问: a 为何值时, 向量组
   $$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,a)^{\mathrm{T}}$$
   线性相关? 并将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.
7. 作一个以 $(1,0,1,0)$ 和 $(1,-1,0,0)$ 为行向量的秩为 4 的方阵.
8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r $(r\leqslant s)$, 且其中每个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组.
9. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,k),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,k,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1,1)$ 的秩和一个极大线性无关组.

10. 确定向量 $\boldsymbol{\beta}_3=(2,a,b)$, 使向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,1),\boldsymbol{\beta}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)$ 的秩相同, 且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.
11. 求下列向量组的秩与一个极大线性无关组:
    (1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-5,-6)$,
    $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,-4,-7)$;
    (2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,-1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3,-4)$,
    $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-9,-6,22),\boldsymbol{\alpha}_4=(7,1,0,-1,3)$;
    (3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$,
    $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$.
12. 求下列向量组的一个极大线性无关组, 并将其余向量用此极大线性无关组线性表示:
    (1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-1,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-2,8,-9)$,
    $\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,3,1,7)$;
    (2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,3,5)$,
    $\boldsymbol{\alpha}_4=(4,-2,5,6),\boldsymbol{\alpha}_5=(-3,-1,-5,-7)$.
13. 设两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩相同, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价.
14. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r_1, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 r_2, 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$$

    的秩为 r_3, 试证:

$$\max\{r_1,r_2\}\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2.$$

15. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,a,a,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(a,1,a,a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(a,a,1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(a,a,a,1)^{\mathrm{T}}$ 的秩为 3, 试确定 a 的值.
16. 求下列矩阵的行向量组的一个极大线性无关组:

$$(1)\ \begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix};$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

17. 计算向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积 $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$:
(1) $\boldsymbol{\alpha} = (-1, 0, 3, -5), \boldsymbol{\beta} = (4, -2, 0, 1)$;
(2) $\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -1\right), \boldsymbol{\beta} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -2, \sqrt{3}, \frac{2}{3}\right)$.
18. 把下列向量单位化:
(1) $\boldsymbol{\alpha} = (3, 0, -1, 4)$;
(2) $\boldsymbol{\alpha} = (5, 1, -2, 0)$.
19. 求一个四维单位向量, 使它与以下三个向量都正交:
$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, -1, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, -1, -1, 1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (2, 1, 1, 3)$.
20. 利用格拉姆–施密特正交化方法把下列向量组正交化:
(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$;
(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, -1, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, -1, 0, 1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 1, 1, 0)$.
21. 试证: 若 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 则对于任意实数 k, l, 有 $k\boldsymbol{\alpha}$ 与 $l\boldsymbol{\beta}$ 正交.
22. 判断下列矩阵是否为正交矩阵:
(1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$;
(2) $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
23. 设 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 1$, 令 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$. 证明: $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交矩阵.
24. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 证明: $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

返回顶部

习题 3 (B) 类

1. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性相关的是 (　　).
A. $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$
B. $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - 2\boldsymbol{\alpha}_1$

D. $\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + 2\boldsymbol{\alpha}_1$

显示答案 收起答案

2. 下列命题中正确的是(　　).

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性相关的 n 维向量, 则对于任意不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 均有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性无关的 n 维向量, 则对于任意不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 均有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \neq \mathbf{0}$

C. 若在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r \geqslant 2)$ 中任取 $m(m < r)$ 个向量组成的部分向量组都线性无关,则这个向量组本身也线性无关

D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r \geqslant 2)$ 是线性相关的, 则其中任何一个向量均可由其余向量线性表示

显示答案 收起答案

3. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 中(　　).

A. 必有一列元素为 0

B. 必有两列元素对应成比例

C. 必有一个列向量是其余列向量的线性组合

D. 任意一个列向量都是其余列向量的线性组合

显示答案 收起答案

4. 设向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示, 则 (　　).

A. 当 $r < s$ 时, 向量组 B 必线性相关

B. 当 $r > s$ 时, 向量组 B 必线性相关

C. 当 $r < s$ 时, 向量组 A 必线性相关

D. 当 $r > s$ 时, 向量组 A 必线性相关

显示答案 收起答案

5. 设向量组 $(2,1,1,1), (2,1,a,a), (3,2,1,a), (4,3,2,1)$ 线性相关, 且 $a \neq 0$, 则 $a =$ ________.

显示答案 收起答案

6. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$, 问: a为何值时, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关? 当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

显示答案 收起答案

7. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,a,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

显示答案 收起答案

8. 已知直线 $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点, 法向量 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_i, b_i, c_i)^{\mathrm{T}}, i = 1, 2, 3$, 则 (　　).
A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示
B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示
C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示
D. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

显示答案 收起答案

9. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, a, 2)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 4, b)$ 线性相关, 则 $a =$ ________, $b =$ ________.

显示答案 收起答案

10. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a, 0, c), \boldsymbol{\alpha}_2 = (b, c, 0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, a, b)$ 线性无关, 则 a, b, c 必满足关系式________.

显示答案 收起答案

11. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 则:
(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 证明你的结论.
(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 证明你的结论.

显示答案 收起答案

12. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关, 但其中任意 n 个向量都线性无关, 证明: 必存在 $n+1$ 个全不为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0}.$$

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 矩阵, 其中 $n < m$, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 证明: $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

返回顶部