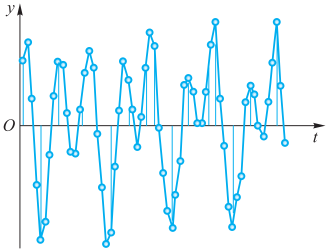
第 1 节 n 维向量空间的概念

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

智能语音应用已经逐渐走进我们的生活，比如智能音箱、手机里面的各种智能语音服务等．这些设备或程序是如何接收和处理我们语音的呢？首先要做的就是“采样”，将连续的模拟信号转换为离散的数字信号，下图显示包含人类笑声的一段信号．在传输和处理过程中就只考虑这些“采样点”上的值，可以用矩阵 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 来表示，这样便于压缩、分离、识别等后续任务．这类矩阵很特殊，其本身及所在的空间也是线性代数中非常重要的内容，在实际工程中有着极为广泛的应用，这是本章所要研究的对象．



1. n 维向量空间的概念
2. $\mathbf{R}^n$ 的子空间

向量的线性运算

在几何空间中，如果点 P 对于坐标原点 O 的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 是 $\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{a}$ 的分量就是点 P 的坐标，因此，向量也就记为 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$.
我们定义向量的线性运算，即向量的加法

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

和向量的数乘

$$k\boldsymbol{a}=(ka_1,ka_2,ka_3),$$

并且向量的加法与数乘满足八条运算法则:

向量的加法与数乘满足八条运算法则

1° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

3° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

4° $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

5° $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

6° $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

7° $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

8° $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

其中 λ,μ 为数.

对于所有三维向量 (a_1,a_2,a_3) 组成的集合, 若按我们定义的向量的加法与数乘满足八条运算法则, 则称这个集合构成一个三维向量空间, 记为 $\mathbf{R}^3$.

向量的加法与数乘满足八条运算法则

$1^\circ \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

$2^\circ \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

$3^\circ \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

$4^\circ \quad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

$5^\circ \quad 1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

$6^\circ \quad \lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

$7^\circ \quad \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

$8^\circ \quad (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

其中 λ,μ 为数.

对于所有三维向量 (a_1,a_2,a_3) 组成的集合, 若按我们定义的向量的加法与数乘满足八条运算法则, 则称这个集合构成一个三维向量空间, 记为 $\mathbf{R}^3$.

向量的加法与数乘满足八条运算法则

1° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

3° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

4° $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

5° $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

6° $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

7° $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

8° $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

其中 λ,μ 为数.

对于所有三维向量 (a_1,a_2,a_3) 组成的集合, 若按我们定义的向量的加法与数乘满足八条运算法则, 则称这个集合构成一个三维向量空间, 记为 $\mathbf{R}^3$.

现在我们把 $\mathbf{R}^3$ 推广到 n 维向量空间.

- n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组称为n **维向量**, 记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

- 我们也称 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为 n **维行向量**, a_i 称为向量 α 的第 i 个分量;
- 称

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

为 n **维列向量**, b_i 称为向量 β 的第 i 个分量.

- 分量为实数的向量称为实向量, 分量为复数的向量称为复向量.

现在我们把 $\mathbf{R}^3$ 推广到 n 维向量空间.

- n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组称为 n 维向量, 记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

- 我们也称 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为 n 维行向量, a_i 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量;
- 称

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

为 n 维列向量, b_i 称为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的第 i 个分量.

- 分量为实数的向量称为实向量, 分量为复数的向量称为复向量.

现在我们把 $\mathbf{R}^3$ 推广到 n 维向量空间.

- n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组称为n **维向量**, 记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

- 我们也称 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为 n **维行向量**, a_i 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量;
- 称

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

为 n **维列向量**, b_i 称为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的第 i 个分量.

- 分量为实数的向量称为实向量, 分量为复数的向量称为复向量.

现在我们把 $\mathbf{R}^3$ 推广到 n 维向量空间.

- n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组称为n 维向量, 记为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

- 我们也称 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为 n 维行向量, a_i 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量;
- 称

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

为 n 维列向量, b_i 称为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的第 i 个分量.

- 分量为实数的向量称为实向量, 分量为复数的向量称为复向量.

- 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为 n 维向量，若它们的各个分量对应相等，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等，记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.
- 定义零向量 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$，负向量 $-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$.
- 记 $\mathbf{R}^n$ 为具有 n 个实分量的一切 n 维向量的集合，且定义加法和数乘规则如下：
  设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $k\in\mathbf{R}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n),$$
$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n).$$

向量的加法与数乘满足下列运算规律：

- 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为 n 维向量, 若它们的各个分量对应相等, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等, 记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.
- 定义零向量 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$, 负向量 $-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$.
- 记 $\mathbf{R}^n$ 为具有 n 个实分量的一切 n 维向量的集合, 且定义加法和数乘规则如下:
  设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $k\in\mathbf{R}$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}&=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n),\\ k\boldsymbol{\alpha}&=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n).\end{aligned}$$

向量的加法与数乘满足下列运算规律:

n 维实向量空间

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是 n 维向量，k,l 是数，

1° $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

2° $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

3° $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

4° $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

5° $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

6° $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

7° $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

8° $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

$\mathbf{R}^n$ 称为 n 维实向量空间.

实际上，n 维行向量可以视为 $1\times n$ 矩阵，n 维列向量可以视为 $n\times 1$ 矩阵．向量的加法及数乘实质上就是矩阵的加法及数乘．$1^\circ-8^\circ$ 条运算规律就是矩阵的加法和数乘所满足的八条运算规律.

n 维实向量空间

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是 n 维向量，k,l 是数，

1° $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

2° $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

3° $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

4° $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

5° $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

6° $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

7° $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

8° $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

$\mathbf{R}^n$ 称为 n 维实向量空间.

实际上，n 维行向量可以视为 $1\times n$ 矩阵，n 维列向量可以视为 $n\times 1$ 矩阵. 向量的加法及数乘实质上就是矩阵的加法及数乘. $1^\circ-8^\circ$ 条运算规律就是矩阵的加法和数乘所满足的八条运算规律.

- 我们已经看到，对于给定的坐标系，可以把一个物理向量表示为 $\mathbf{R}^3$ 中的向量．在 $\mathbf{R}^n$ 中引进长度和角度的一般概念仍然是可能的和有用的，后面第四章中我们将这样做．
- 早在 18 世纪，拉格朗日研究质点运动时，就曾用质点在空间的位置坐标 (x, y, z) 及时间 t 这四个有序数 (x, y, z, t) 来描述质点的运动，因而引入了四维向量及四维向量空间的概念．
- 又如，在一个较复杂的控制系统中 (如导弹、飞行器等)，决定系统在 t 时刻的参数，假定最少需要 n 个：$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，那么这 n 个变量就称为系统的状态变量．
- n 维向量 $\boldsymbol{X} = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ 就称为系统的状态向量．它的全体就称为系统的状态空间．状态空间中的任一点 $\boldsymbol{X}$ (向量) 就表示系统的一个状态．
- 一个 $m \times n$ 矩阵的每一行可看成是一个 n 维向量，每一列则可看成一个 m 维向量，一共有 m 个行向量，n 个列向量．

有了向量的运算，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以写成以下简单形式:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b},$$

有了向量的运算, 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以写成以下简单形式:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b},$$

即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}}\ (j = 1, 2, \cdots, n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$. 还可写为如下更简单形式:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. 满足上式的 $\boldsymbol{X}$ 称为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 的一个解向量.

1 n 维向量空间的概念

2 $\mathbf{R}^n$ 的子空间

取 $\varnothing \neq V \subset \mathbf{R}^n$, 对于 $\mathbf{R}^n$ 的运算, V 常常也构成一个 n 维向量空间.

定义 (3.1.1)

设 $\varnothing \neq V \subset \mathbf{R}^n$, 如果 V 对于 $\mathbf{R}^n$ 的线性运算也构成一个向量空间, 那么称 V 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间.

一个非空子集合要满足什么条件才能成为子空间呢?

取 $\varnothing \neq V \subset \mathbf{R}^n$, 对于 $\mathbf{R}^n$ 的运算, V 常常也构成一个 n 维向量空间.

定义 (3.1.1)

设 $\varnothing \neq V \subset \mathbf{R}^n$, 如果 V 对于 $\mathbf{R}^n$ 的线性运算也构成一个向量空间, 那么称 V 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个**子空间**.

一个非空子集合要满足什么条件才能成为子空间呢?

设有非空子集合 $V \subset \mathbf{R}^n$, 对于 $\mathbf{R}^n$ 中原有的运算, V 中的向量满足向量空间定义中的规则 $1°, 2°, 5° - 8°$ 是显然的. 如果 V 对于 $\mathbf{R}^n$ 中原有的运算具有封闭性, 那么不难看出规则中的 $3°, 4°$ 也满足. 因此, 我们得到

定理 (3.1.1)

设 V 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集合, V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间的充要条件为 V 对于 $\mathbf{R}^n$ 的加法和数乘运算是封闭的.

例 (3.1.1)

设 $V=\{(x_1,x_2)\mid x_2=2x_1\}\subset\mathbf{R}^2$, $(c,2c)$ 为 V 的任一元素, $k\in\mathbf{R}$, 则

$$k(c,2c)=(kc,2kc)\in V.$$

设 $(a,2a),(b,2b)$ 为 V 的任意两元素, 则

$$(a,2a)+(b,2b)=(a+b,2(a+b))\in V.$$

易见, V 为 $\mathbf{R}^2$ 的子空间.

例 (3.1.2)

在 $\mathbf{R}^3$ 中，由平行四边形法则，过坐标原点的平面上的任两向量的和向量仍在该平面上，其上的任一向量的数乘向量仍在该平面上，故该平面为 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间．同理，过原点的空间直线也为 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间．但是，不过原点的平面或空间直线不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间，这是因为 0 不在它们之中，而任何子空间都应是包含零元的 (对此，我们可以参见例 3).

例 (3.1.3)

考虑 $\mathbf{R}^3$ 的子集

$$W=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y-z=1\right\}.$$

容易验证，W 关于向量的线性运算不封闭．事实上，$\alpha=(1,0,0)\in W$，但 $2\alpha\notin W$．故 W 不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间．

例 (3.1.2)

在 $\mathbf{R}^3$ 中，由平行四边形法则，过坐标原点的平面上的任两向量的和向量仍在该平面上，其上的任一向量的数乘向量仍在该平面上，故该平面为 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间．同理，过原点的空间直线也为 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间．但是，不过原点的平面或空间直线不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间，这是因为 0 不在它们之中，而任何子空间都应是包含零元的 (对此，我们可以参见例 3)．

例 (3.1.3)

考虑 $\mathbf{R}^3$ 的子集

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - z = 1\right\}.$$

容易验证，W 关于向量的线性运算不封闭．事实上，$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0) \in W$，但 $2\boldsymbol{\alpha} \notin W$．故 W 不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间．

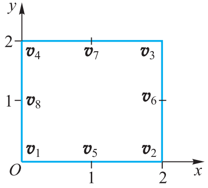
应用实例: 矩阵、向量在计算机图形学中的应用

用几何的术语来说, 若用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘向量 $\boldsymbol{v}$, 则向量 $\boldsymbol{v}$ 变换为另一个向量 $\boldsymbol{w}$. 我们可将 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ 看成函数 $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$. 例如, 在计算机图形学中, 这种变换用来在电视广告中产生文字与动画. 这为一个向量被一个矩阵乘的效果提供了一种可视化的方法.

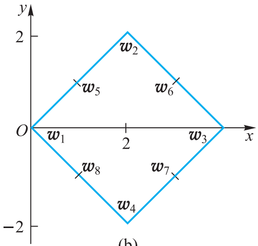
现在简单地把二维向量表示为平面上的点. 考虑

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ 是一边长为 2 的正方形的顶点, $\boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_6, \boldsymbol{v}_7, \boldsymbol{v}_8$ 是这个正方形各边的中点 (图 (a)).



(a)



(b)

设 $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i (i = 1, 2, \cdots, 8)$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则变换后的正方形如图 (b) 所示:

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{w}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

原正方形中点 $\boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_6, \boldsymbol{v}_7, \boldsymbol{v}_8$ 是如何变换为旋转后正方形的中点向量 $\boldsymbol{w}_5, \boldsymbol{w}_6, \boldsymbol{w}_7, \boldsymbol{w}_8$ 的呢? 如果 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 之间的线段不变换为 $\boldsymbol{w}_1$ 与 $\boldsymbol{w}_2$ 之间的线段, 那么要确定 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 之间的线段上的点如何变换则是冗长乏味的.

下列定理具有重大的实际价值，正如上面提到的，只需计算出端点被映射到哪里即可，使计算机图形学中的计算得到简化.

以下我们证明，对于 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$，任何把二维向量 $\boldsymbol{v}$ 变为二维向量 $\boldsymbol{w}$ 的变换 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$，总是把直线映成直线. 这里给出的证明，用意是说明线性代数与几何之间的关系和线性代数的作用，证明的细节并不重要.

定理 (3.1.2)

对于任何一个 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}$，二维向量空间的映射 $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ 把直线映成直线. 把一条直线映射到一点的特殊情况除外.

证明.

向量 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 之间的线段 L 可表示为向量组

$$L=\{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_1+c(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),0\leqslant c\leqslant 1\}.$$

当 $c=0$ 时，可得 $\boldsymbol{v}_1$. 设 $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2$. 需证上述映射把 L 映射到线段

$$L'=\{\boldsymbol{y}:\boldsymbol{y}=\boldsymbol{w}_1+c(\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_1),0\leqslant c\leqslant 1\}.$$

下面我们证明向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_1+c(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)$ 映射到向量 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{w}_1+c(\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_1)$，即 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}_1+c(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1+c\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\\&=\boldsymbol{w}_1+c(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{w}_1+c(\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_1)=\boldsymbol{y},\end{aligned}$$

在 $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{w}_2$ 的特殊情况，L' 缩为点 $\boldsymbol{w}_1$. □

小结

- n 维向量，向量的线性运算 (加法和数乘) 满足八条运算法则.
- n 维向量空间的概念: 设 V 是一个 n 维向量的集合，如果 V 非空，且对向量的线性运算封闭，即 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, k \in \mathbf{R}$，都有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V$，$k\boldsymbol{\alpha} \in V$，则称 V 构成一个向量空间.
- 全体 n 维实向量组成的集合 $\mathbf{R}^n$ 构成一个向量空间，称为 n 维实向量空间.
- $\mathbf{R}^n$ 的子空间: 设 V 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集合，V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间的充要条件为 V 对于 $\mathbf{R}^n$ 的加法和数乘运算是封闭的.
- 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \in \mathbf{R}^n$，则

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \mid k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbf{R}\}$$

构成 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间，称为由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 生成的子空间.