第 4 章　线性方程组

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

解线性方程组最常用的方法就是消元法. 其步骤是逐步消除变元的系数, 把原方程组化为等价的三角形方程组, 再用回代过程解此等价的方程组, 从而得出原方程组的解.

例 (1)

解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -7, \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

解

将第一个方程加到第二个方程上，再将第一个方程乘以 (-2) 加到第三个方程上，得到与原方程组同解的线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 6x_2 + 8x_3 = -4, \\ 3x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$

例 (1)

解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -7, \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

解

将第一个方程加到第二个方程上，再将第一个方程乘以 (-2) 加到第三个方程上，得到与原方程组同解的线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 6x_2 + 8x_3 = -4, \\ 3x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$

解

将第一个方程加到第二个方程上，再将第一个方程乘以 (-2) 加到第三个方程上，得到与原方程组同解的线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ \qquad\ \ 6x_2 + 8x_3 = -4, \\ \qquad\ \ 3x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$

在上式中交换第二个和第三个方程，然后将第二个方程乘以 (-2) 加到第三个方程上，得到与原方程组同解的三角形方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ \qquad\ \ 3x_2 + x_3 = -5 \\ \qquad\qquad\quad 6x_3 = 6. \end{cases}$$

再回代，得 $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1.$

解

将第一个方程加到第二个方程上，再将第一个方程乘以 (-2) 加到第三个方程上，得到与原方程组同解的线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ \qquad\quad 6x_2 + 8x_3 = -4, \\ \qquad\quad 3x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$

在上式中交换第二个和第三个方程，然后将第二个方程乘以 (-2) 加到第三个方程上，得到与原方程组同解的三角形方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ \qquad\quad 3x_2 + x_3 = -5 \\ \qquad\qquad\quad 6x_3 = 6. \end{cases}$$

再回代，得 $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1.$

分析上述例子, 可以得出以下两个结论.

(1) 对方程施行了三种变换:

1° 交换两个方程的位置;

2° 用一个不等于 0 的数乘某个方程;

3° 将某个方程乘一个数加到另一个方程上.

这三种变换称为线性方程组的初等变换, 也称为同解变换.

由初等代数知识可知, 以下定理成立.

定理 (1)

初等变换把一个线性方程组变为一个与它同解的线性方程组.

(2) 线性方程组有没有解以及有什么样的解, 完全取决于它的系数和常数项.

因此在讨论线性方程组时, 主要是研究它的系数和常数项.

分析上述例子, 可以得出以下两个结论.

(1) 对方程施行了三种变换:

1° 交换两个方程的位置;

2° 用一个不等于 0 的数乘某个方程;

3° 将某个方程乘一个数加到另一个方程上.

这三种变换称为线性方程组的初等变换, 也称为同解变换.

由初等代数知识可知, 以下定理成立.

定理 (1)

初等变换把一个线性方程组变为一个与它同解的线性方程组.

(2) 线性方程组有没有解以及有什么样的解, 完全取决于它的系数和常数项.

因此在讨论线性方程组时, 主要是研究它的系数和常数项.

分析上述例子，可以得出以下两个结论.

(1) 对方程施行了三种变换:

1° 交换两个方程的位置;

2° 用一个不等于 0 的数乘某个方程;

3° 将某个方程乘一个数加到另一个方程上.

这三种变换称为**线性方程组的初等变换**，也称为**同解变换**.

由初等代数知识可知，以下定理成立.

定理 (1)

初等变换把一个线性方程组变为一个与它同解的线性方程组.

(2) 线性方程组有没有解以及有什么样的解，完全取决于它的系数和常数项.

因此在讨论线性方程组时，主要是研究它的系数和常数项.

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4-1}$$

此为线性方程组的代数表示形式.

线性方程组也可以表示成矩阵形式. 令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则式 (4-1) 可以写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{4-2}$$

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4-1}$$

此为线性方程组的代数表示形式.
线性方程组也可以表示成矩阵形式. 令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则式 (4-1) 可以写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{4-2}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \tag{4-2}$$

分别称 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为线性方程组 (4-1) 的系数矩阵、未知量矩阵和常数项矩阵. 同时称

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

为线性方程组 (4-1) 的增广矩阵.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{4-2}$$

分别称 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为线性方程组 (4-1) 的系数矩阵、未知量矩阵和常数项矩阵. 同时称

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

为线性方程组 (4-1) 的增广矩阵.

线性方程组还可以表示成向量形式. 对式 (4-2) 中的矩阵 A 按列分块, 有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\quad \boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

由分块矩阵的乘法, 线性方程组 (4-1) 可写成如下向量形式:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{b},$$

即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

线性方程组还可以表示成向量形式. 对式 (4-2) 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块, 有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\,,\quad \boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

由分块矩阵的乘法, 线性方程组 (4-1) 可写成如下向量形式:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{b},$$

即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零, 则称式 (4-1) 为非齐次线性方程组;
若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零, 则称式 (4-1) 为齐次线性方程组.

满足式 (4-1) 的一个 n 元有序数组称为 n 元线性方程组 (4-1) 的一个解, 一般用列向量形式 $\xi = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$ 表示, 因此也称 ξ 为方程组 (4-1) 的一个解向量.
当线性方程组有无穷多个解时, 其所有解的集合称为方程组的通解或一般解.

对方程组施行初等变换, 相当于对它的增广矩阵施行一个相应的初等变换.
化简线性方程组相当于用初等行变换化简它的增广矩阵.

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零，则称式 (4-1) 为**非齐次线性方程组**；
若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零，则称式 (4-1) 为**齐次线性方程组**.

满足式 (4-1) 的一个 n 元有序数组称为 n 元线性方程组 (4-1) 的一个**解**，一般用列向量形式 $\xi = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$ 表示，因此也称 ξ 为方程组 (4-1) 的一个**解向量**.
当线性方程组有无穷多个解时，其所有解的集合称为方程组的**通解或一般解**.

对方程组施行初等变换，相当于对它的增广矩阵施行一个相应的初等变换.
化简线性方程组相当于用初等行变换化简它的增广矩阵.

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零, 则称式 (4-1) 为非齐次线性方程组;
若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零, 则称式 (4-1) 为齐次线性方程组.

满足式 (4-1) 的一个 n 元有序数组称为 n 元线性方程组 (4-1) 的一个解, 一般用列向量形式 $\xi = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$ 表示, 因此也称 ξ 为方程组 (4-1) 的一个解向量.
当线性方程组有无穷多个解时, 其所有解的集合称为方程组的通解或一般解.

对方程组施行初等变换, 相当于对它的增广矩阵施行一个相应的初等变换.
化简线性方程组相当于用初等行变换化简它的增广矩阵.

例 (2)

解线性方程组 $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \ \ x_3 = 1, \\ \ \ x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

解

其增广矩阵是

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{3} & 3 & 3 \\ 2 & \frac{4}{3} & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

交换矩阵第一行与第二行, 再将第一行分别乘以 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 和 (-2) 加到第二行和第三行上, 然后将第二行乘以 (-2), 得

例 (2)

解线性方程组
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 + \ \ x_3 = 1, \\ \quad x_1 + \dfrac{5}{3}x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + \dfrac{4}{3}x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

解

其增广矩阵是
$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{3} & 3 & 3 \\ 2 & \frac{4}{3} & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

交换矩阵第一行与第二行, 再将第一行分别乘以 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 和 (-2) 加到第二行和第三行上, 然后将第二行乘以 (-2), 得

解

$$\overline{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

与行阶梯形矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ 对应的三角形（阶梯形）方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{5}{3}x_2 + 3x_3 = 3, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -2. \end{cases}$$

回代，得 $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = -2.$

用消元法解线性方程组的过程，实质上就是对该方程组的增广矩阵作初等行变换将其化为行阶梯形矩阵的过程．在解线性方程组时，只写出方程组的增广矩阵的变换过程即可．

解

$$\overline{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

与行阶梯形矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ 对应的三角形 (阶梯形) 方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{5}{3}x_2 + 3x_3 = 3, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -2. \end{cases}$$

回代, 得 $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = -2.$

用消元法解线性方程组的过程, 实质上就是对该方程组的增广矩阵作初等行变换将其化为行阶梯形矩阵的过程. 在解线性方程组时, 只写出方程组的增广矩阵的变换过程即可.

上一节讨论了用消元法解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

这个方法实际应用时比较方便，但是还有几个问题没有解决，就是线性方程组 (4-1) 在什么时候无解？在什么时候有解？有解时，又有多少个解？

首先，设线性方程组 (4-1) 的增广矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换，且不妨设 $a_{11}\neq 0$，否则第一列总有某个元素不为零，将该元素所在的行与第一行对调，便可使第一行第一列的元素不为 0；然后，将第一行乘以 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 加到第 i 行上 $(i=2,3,\cdots,m)$，可将 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix},$$

首先, 设线性方程组 (4-1) 的增广矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换, 且不妨设 $a_{11}\neq 0$, 否则第一列总有某个元素不为零, 将该元素所在的行与第一行对调, 便可使第一行第一列的元素不为 0; 然后, 将第一行乘以 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 加到第 i 行上 $(i=2,3,\cdots,m)$, 可将 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix},$$

对这个矩阵的第二行到第 m 行、第二列到第 $n+1$ 列构成的子块再按以上步骤进行变换，必要时可重新安排方程中未知量的次序，则可得到如下行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \cdots & b'_{1r} & b'_{1,r+1} & \cdots & b'_{1n} & d'_1 \\ 0 & b'_{22} & \cdots & b'_{2r} & b'_{2,r+1} & \cdots & b'_{2n} & d'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b'_{rr} & b'_{r,r+1} & \cdots & b'_{rn} & d'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d'_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $b'_{ii} \neq 0(i=1,2,\cdots,r)$.

再进一步通过初等行变换, 可将上述矩阵化为下面的行最简形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4-3}$$

与矩阵 (4-3) 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ 0 = d_{r+1}, \\ 0 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = 0. \end{cases} \tag{4-4}$$

由定理 1 知, 方程组 (4-1) 与方程组 (4-4) 是同解方程组. 方程组 (4-4) 是否有解就取决于 $d_{r+1} = 0$ 是否成立.

判别方程组 (4-1) 是否有解的一个方法: 用初等变换将方程组 (4-1) 变为方程组 (4-4), 则方程组 (4-1) 有解的充分必要条件为 $d_{r+1} = 0$.

与矩阵 (4-3) 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ 0 = d_{r+1}, \\ 0 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = 0. \end{cases} \tag{4-4}$$

由定理 1 知, 方程组 (4-1) 与方程组 (4-4) 是同解方程组. 方程组 (4-4) 是否有解就取决于 $d_{r+1} = 0$ 是否成立.

判别方程组 (4-1) 是否有解的一个方法: 用初等变换将方程组 (4-1) 变为方程组 (4-4), 则方程组 (4-1) 有解的充分必要条件为 $d_{r+1} = 0$.

方程组有解可分两种情形加以考虑.

(1) 当 $r = n$ 时, 方程组 (4-4) 可写成

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = d_n, \end{cases}$$

此即方程组 (4-1) 的唯一解.

(2) 当 $r < n$ 时, 方程组 (4-4) 可写成

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases}$$

视 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 为 $n-r$ 个自由未知量, 若任给 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 一组值 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}$, 就唯一地确定出 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的值, 从而给出方程组 (4-1) 的一个解. 这表明方程组 (4-1) 有无穷多个解.

方程组 (4-1) 通解的形式为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}t_1 - \cdots - c_{1n}t_{n-r}, \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}t_1 - \cdots - c_{2n}t_{n-r}, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}t_1 - \cdots - c_{rn}t_{n-r}, \\ x_{r+1} = t_1, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = t_{n-r}. \end{cases}$$

总之，解线性方程组的步骤是用初等行变换化方程组 (4-1) 的增广矩阵为阶梯形矩阵，根据 d_{r+1} 是否等于 0 判断原方程组是否有解.

- 如果 $d_{r+1} \neq 0$，则有 $r(A) = r$，而 $r(\overline{A}) = r + 1$，即 $r(A) \neq r(\overline{A})$，此时方程组 (4-1) 无解;
- 如果 $d_{r+1} = 0$，则 $r(A) = r(\overline{A}) = r$，此时方程组 (4-1) 有解．而当 $r = n$ 时，方程组 (4-1) 有唯一解; 当 $r < n$ 时，方程组 (4-1) 有无穷多个解.

由此可以得到如下定理.

定理 (2 线性方程组有解的判定定理)

线性方程组 (4-1) 有解的充分必要条件是系数矩阵与增广矩阵有相同的秩 r.

(1) 当 r 等于方程组所含未知量的个数 n 时，方程组有唯一解;

(2) 当 $r < n$ 时，方程组有无穷多个解.

总之，解线性方程组的步骤是用初等行变换化方程组 (4-1) 的增广矩阵为阶梯形矩阵，根据 d_{r+1} 是否等于 0 判断原方程组是否有解.

- 如果 $d_{r+1} \neq 0$，则有 $r(\boldsymbol{A}) = r$，而 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r + 1$，即 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，此时方程组 (4-1) 无解;
- 如果 $d_{r+1} = 0$，则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r$，此时方程组 (4-1) 有解. 而当 $r = n$ 时，方程组 (4-1) 有唯一解; 当 $r < n$ 时，方程组 (4-1) 有无穷多个解.

由此可以得到如下定理.

定理 (2 线性方程组有解的判定定理)

线性方程组 (4-1) 有解的充分必要条件是系数矩阵与增广矩阵有相同的秩 r.
(1) 当 r 等于方程组所含未知量的个数 n 时，方程组有唯一解;
(2) 当 $r < n$ 时，方程组有无穷多个解.

总之，解线性方程组的步骤是用初等行变换化方程组 (4-1) 的增广矩阵为阶梯形矩阵，根据 d_{r+1} 是否等于 0 判断原方程组是否有解.

- 如果 $d_{r+1} \neq 0$，则有 $r(\boldsymbol{A}) = r$，而 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r + 1$，即 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，此时方程组 (4-1) 无解;
- 如果 $d_{r+1} = 0$，则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r$，此时方程组 (4-1) 有解. 而当 $r = n$ 时，方程组 (4-1) 有唯一解; 当 $r < n$ 时，方程组 (4-1) 有无穷多个解.

由此可以得到如下定理.

定理 (2 线性方程组有解的判定定理)

线性方程组 (4-1) 有解的充分必要条件是系数矩阵与增广矩阵有相同的秩 r.

(1) 当 r 等于方程组所含未知量的个数 n 时，方程组有唯一解;

(2) 当 $r < n$ 时，方程组有无穷多个解.

例 (3)

研究线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - 4x_3 + 5x_4 = -1. \end{cases}$$

的解的存在情况.

解

对增广矩阵进行初等行变换将其化为行阶梯形矩阵:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+(-3)\times r_1 \\ r_4+(-1)\times r_1}]{r_2+(-2)\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-1)\times r_2]{r_3+(-1)\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可见 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$, 所以方程组无解.

例 (4)

某厂在每批次投料生产中，获得四种不同产量的产品，同时测算出各批次的生产总成本，把它们列表如表 4-1 所示.

表 4-1 各批次的生产总成本

生产批次	产品 /kg				总成本 / 元
	I	II	III	IV	
1	200	100	100	50	2900
2	500	250	200	100	7050
3	100	40	40	20	1360
4	400	180	160	60	5500

试求每种产品的单位成本.

解

设 I、II、III、IV 四种产品的单位成本分别为 x_1, x_2, x_3, x_4，由题意得方程组

$$\begin{cases} 200x_1 + 100x_2 + 100x_3 + \ \ 50x_4 = 2900, \\ 500x_1 + 250x_2 + 200x_3 + 100x_4 = 7050, \\ 100x_1 + \ \ 40x_2 + \ \ 40x_3 + \ \ 20x_4 = 1360, \\ 400x_1 + 180x_2 + 160x_3 + \ \ 60x_4 = 5500. \end{cases}$$

化简，得

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = \ \ 58, \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 141, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = \ \ 68, \\ 20x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 275. \end{cases}$$

写出该方程组的增广矩阵

解

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 58 \\ 10 & 5 & 4 & 2 & 141 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 68 \\ 20 & 9 & 8 & 3 & 275 \end{pmatrix}.$$

对该增广矩阵进行初等行变换将其化为行最简形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

由上面的矩阵可看出, 系数矩阵与增广矩阵的秩相等, 并且等于未知量的个数, 所以方程组有唯一解

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 2.$$

解

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 58 \\ 10 & 5 & 4 & 2 & 141 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 68 \\ 20 & 9 & 8 & 3 & 275 \end{pmatrix}.$$

对该增广矩阵进行初等行变换将其化为行最简形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

由上面的矩阵可看出,系数矩阵与增广矩阵的秩相等,并且等于未知量的个数,所以方程组有唯一解

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 2.$$

解

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 58 \\ 10 & 5 & 4 & 2 & 141 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 68 \\ 20 & 9 & 8 & 3 & 275 \end{pmatrix}.$$

对该增广矩阵进行初等行变换将其化为行最简形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

由上面的矩阵可看出, 系数矩阵与增广矩阵的秩相等, 并且等于未知量的个数, 所以方程组有唯一解

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 2.$$

例 (5)

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -21. \end{cases}$$

解

对该方程组的增广矩阵进行初等行变换将其化为行阶梯形矩阵:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1&5\\2&0&2&-2&2\\-1&-2&3&2&8\\1&2&-9&-5&-21\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_4-r_1}]{r_2-2\times r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&1&5\\0&-4&-4&-4&-8\\0&0&6&3&13\\0&0&-12&-6&-26\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2\times r_3]{-\frac{1}{4}\times r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&1&5\\0&1&1&1&2\\0&0&6&3&13\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{6}\times r_3]{r_1+(-2)\times r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&1&1&2\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{13}{6}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+(-1)\times r_3]{r_1+(-1)\times r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{6}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{13}{6}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解

由上式可看出，$r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3 < n = 4$，所以方程组有无穷多个解．与最后的矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - \dfrac{3}{2}x_4 = -\dfrac{7}{6}, \\ \qquad x_2 \qquad + \dfrac{1}{2}x_4 = -\dfrac{1}{6}, \\ \qquad\qquad x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 = \dfrac{13}{6}. \end{cases}$$

把 x_4 移到等式右端，作为自由未知量，令 $x_4 = c$，即得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{6} + \frac{3}{2}c, \\ x_2 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}c, \\ x_3 = \frac{13}{6} - \frac{1}{2}c, \\ x_4 = c, \end{cases}$$ 其中 c 为任意常数．

解

由上式可看出, $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3 < n = 4$, 所以方程组有无穷多个解. 与最后的矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - \dfrac{3}{2}x_4 = -\dfrac{7}{6}, \\ \qquad x_2 \qquad + \dfrac{1}{2}x_4 = -\dfrac{1}{6}, \\ \qquad\qquad x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 = \dfrac{13}{6}. \end{cases}$$

把 x_4 移到等式右端, 作为自由未知量, 令 $x_4 = c$, 即得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{6} + \frac{3}{2}c, \\ x_2 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}c, \\ x_3 = \frac{13}{6} - \frac{1}{2}c, \\ x_4 = c, \end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

例 (6)

问: a 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a, \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

有解? 并求其解.

解

对增广矩阵进行初等行变换:

$$\overline{A} = (A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)\times r_1]{r_2+(-a)\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$$

例 (6)

问: a 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ \ x_3 = a, \\ ax_1 + x_2 + \ \ x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

有解? 并求其解.

解

对增广矩阵进行初等行变换:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)\times r_1]{r_2+(-a)\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$$

解

当 $a \neq 1$ 时, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = 3$, 方程组有唯一解:

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = a + 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

当 $a = 1$ 时, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = 1 < 3$, 方程组有无穷多个解. 取 x_2, x_3 为自由未知量, 令 $x_2 = c_1, x_3 = c_2$, 则得到方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - c_1 - c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

解

当 $a \neq 1$ 时, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = 3$, 方程组有唯一解:

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = a + 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

当 $a = 1$ 时, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = 1 < 3$, 方程组有无穷多个解. 取 x_2, x_3 为自由未知量, 令 $x_2 = c_1, x_3 = c_2$, 则得到方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - c_1 - c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

下面考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4-5}$$

齐次线性方程组 (4-5) 的矩阵形式可以写成

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{4-6}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

由定理 2 可得到下面的定理.

定理 (3)

齐次线性方程组 (4-5) 有非零解的充要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) < n$.

显然，若齐次线性方程组 (4-5) 有非零解，则它一定有无穷多个解.

推论 (1)

当方程的个数 m 小于未知量的个数 n 时，齐次线性方程组 (4-5) 有非零解.

推论 (2)

齐次线性方程组 (4-5) 只有零解的充要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) = n$.

推论 (3)

当 $m = n$ 时，齐次线性方程组 (4-5) 只有零解 (有非零解) 的充要条件是系数行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ $(|\boldsymbol{A}| = 0)$.

定理 (3)

齐次线性方程组 (4-5) 有非零解的充要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) < n$.

显然, 若齐次线性方程组 (4-5) 有非零解, 则它一定有无穷多个解.

推论 (1)

当方程的个数 m 小于未知量的个数 n 时, 齐次线性方程组 (4-5) 有非零解.

推论 (2)

齐次线性方程组 (4-5) 只有零解的充要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) = n$.

推论 (3)

当 $m = n$ 时, 齐次线性方程组 (4-5) 只有零解 (有非零解) 的充要条件是系数行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ $(|\boldsymbol{A}| = 0)$.

定理 (3)

齐次线性方程组 (4-5) 有非零解的充要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) < n$.

显然，若齐次线性方程组 (4-5) 有非零解，则它一定有无穷多个解.

推论 (1)

当方程的个数 m 小于未知量的个数 n 时，齐次线性方程组 (4-5) 有非零解.

推论 (2)

齐次线性方程组 (4-5) 只有零解的充要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) = n$.

推论 (3)

当 $m = n$ 时，齐次线性方程组 (4-5) 只有零解 (有非零解) 的充要条件是系数行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ $(|\boldsymbol{A}| = 0)$.

定理 (3)

齐次线性方程组 (4-5) **有非零解**的充要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) < n$.

显然，若齐次线性方程组 (4-5) 有非零解，则它一定有无穷多个解.

推论 (1)

当方程的个数 m **小于**未知量的个数 n 时，齐次线性方程组 (4-5) **有非零解**.

推论 (2)

齐次线性方程组 (4-5) **只有零解**的充要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) = n$.

推论 (3)

当 $m = n$ 时，齐次线性方程组 (4-5) 只有零解 *(有非零解)* 的充要条件是系数行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ $(|\boldsymbol{A}| = 0)$.

例 (7)

求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

解 (对系数矩阵作初等行变换:)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\times r_3]{r_2+2\times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-1)\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 (7)

求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+3x_2-2x_3-x_4=0. \end{cases}$

解 (对系数矩阵作初等行变换:)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)\times r_1]{r_2+(-1)\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\times r_3]{r_2+2\times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-1)\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解

由此知，$r(\boldsymbol{A}) = 2 < 4$，故原方程组有无穷多个解．与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad - \dfrac{1}{2}x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 \qquad = 0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 + x_4, \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

取 x_3, x_4 为自由未知量，令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$，则得到原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}c_1 + c_2, \\ x_2 = \frac{1}{2}c_1, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$ 其中 c_1, c_2 为任意常数.

解

由此知，$r(\boldsymbol{A}) = 2 < 4$，故原方程组有无穷多个解．与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad - \dfrac{1}{2}x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 \qquad = 0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 + x_4, \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

取 x_3, x_4 为自由未知量，令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$，则得到原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}c_1 + c_2, \\ x_2 = \frac{1}{2}c_1, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$ 其中 c_1, c_2 为任意常数．

第 3 章中介绍了向量组及其相关知识, 下面运用线性方程组讨论向量组的线性组合、线性相关性、线性表示以及等价.

由本章第 1 节中线性方程组的向量表示形式

$$\begin{aligned} x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n &= \boldsymbol{b}, \\ x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n &= \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

可知, m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 是否可由 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示与非齐次线性方程组 (4-1) 是否有解等价;

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是否线性相关与齐次线性方程组 (4-1) 是否有非零解等价.

由本章第 1 节中线性方程组的向量表示形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b},$$
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

可知, m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 是否可由 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示与非齐次线性方程组 (4-1) 是否有解等价;

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是否线性相关与齐次线性方程组 (4-1) 是否有非零解等价.

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

推论 (4)

(1) m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一线性表示的充分必要条件是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解, 即

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n.$$

(2) m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示, 且表示法不唯一的充分必要条件是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解, 即

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n.$$

(3) m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由 m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的充分必要条件是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解, 即

$$r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}).$$

推论 (5)

(1) m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，即 $r(\boldsymbol{A}) < n$.
(2) m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有唯一的零解，即 $r(\boldsymbol{A}) = n$.

设向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$，由第 3 章可知，若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则存在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，使

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)\, \boldsymbol{A}_{m\times n},$$

即矩阵方程

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)\, \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$$

有解.

推论 (5)

(1) m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解，即 $r(\boldsymbol{A}) < n$.
(2) m 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有唯一的零解，即 $r(\boldsymbol{A}) = n$.

设向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$，由第 3 章可知，若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则存在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，使

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)\,\boldsymbol{A}_{m\times n},$$

即矩阵方程

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)\,\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$$

有解.

记

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\,,\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\,.$$

结合向量组和矩阵的秩的性质可得下面的推论.

推论 (6)

(1) 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 能由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.
(2) 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

例 (8)

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_{3\times 3} \neq O$ 且 $AB=O$, 求 t.

解

因为 $B_{3\times 3} \neq O$ 且 $AB=O$, 所以 $Ax=0$ 有非零解, 由克拉默法则知, $|A|=0$, 所以 $t=-3$.

例 (8)

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_{3\times 3}\neq O$ 且 $AB=O$, 求 t.

解

因为 $B_{3\times 3}\neq O$ 且 $AB=O$, 所以 $Ax=\mathbf{0}$ 有非零解, 由克拉默法则知, $|A|=0$, 所以 $t=-3$.

例 (9)

设 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个非零解，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad m < n.$$

令 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})^{\mathrm{T}}\ (i = 1, 2, \cdots, m)$. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，试判断 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \beta$ 的线性相关性.

解

设存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m, k$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \qquad (*)$$

成立. 因 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个非零解,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

解

即
$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0 \quad (i=1,2,\cdots,m),$$
从而
$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,m).$$
在式 $(*)$ 两端左乘 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 有
$$k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_m+k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0,$$
即 $k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$. 但因 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$, 从而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq 0$. 故只有 $k=0$, 于是式 $(*)$ 为
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$
由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

解

即

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

从而

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

在式 $(*)$ 两端左乘 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 有

$$k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0,$$

即 $k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$. 但因 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 从而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \neq 0$. 故只有 $k = 0$, 于是式 $(*)$ 为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

本章第 2 节给出了线性方程组有解的判别定理，下面用向量组的线性相关性知识研究线性方程组解的结构.

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

的矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

齐次线性方程组解的性质

性质 (1)

若 ξ_1, ξ_2 是齐次线性方程组 (4-6) 的解，则 $\xi_1+\xi_2$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解.

证明.

因为 ξ_1, ξ_2 都是齐次线性方程组 (4-6) 的解，则有

$$A\xi_1 = \mathbf{0}, \quad A\xi_2 = \mathbf{0},$$

于是

$$A(\xi_1+\xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

即 $\xi_1+\xi_2$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解. 证毕. □

齐次线性方程组解的性质

性质 (1)

若 ξ_1, ξ_2 是齐次线性方程组 (4-6) 的解, 则 $\xi_1+\xi_2$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解.

证明.

因为 ξ_1, ξ_2 都是齐次线性方程组 (4-6) 的解, 则有

$$\boldsymbol{A}\xi_1=\mathbf{0}, \quad \boldsymbol{A}\xi_2=\mathbf{0},$$

于是

$$\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\boldsymbol{A}\xi_1+\boldsymbol{A}\xi_2=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

即 $\xi_1+\xi_2$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解. 证毕. □

性质 (2)

若 ξ 是齐次线性方程组 (4-6) 的解，k 为任意实数，则 $k\xi$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解.

证明.

由 $A\xi = \mathbf{0}$，得

$$A(k\xi) = kA\xi = k\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故 $k\xi$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解. 证毕. □

推论 (7)

若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 是齐次线性方程组 (4-6) 的 r 个解，$k_1, k_2, \cdots, k_r$ 为任意实数，则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_r\xi_r$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解.

这说明，齐次线性方程组的解的线性组合仍是该方程组的解.

性质 (2)

若 ξ 是齐次线性方程组 (4-6) 的解, k 为任意实数, 则 $k\xi$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解.

证明.

由 $\boldsymbol{A}\xi = \mathbf{0}$, 得

$$\boldsymbol{A}(k\xi) = k\boldsymbol{A}\xi = k\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故 $k\xi$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解. 证毕. □

推论 (7)

若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 是齐次线性方程组 (4-6) 的 r 个解, $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 为任意实数, 则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_r\xi_r$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解.

这说明, 齐次线性方程组的解的线性组合仍是该方程组的解.

性质 (2)

若 ξ 是齐次线性方程组 (4-6) 的解, k 为任意实数, 则 $k\xi$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解.

证明.

由 $\boldsymbol{A}\xi = \mathbf{0}$, 得

$$\boldsymbol{A}(k\xi) = k\boldsymbol{A}\xi = k\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故 $k\xi$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解. 证毕. □

推论 (7)

若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 是齐次线性方程组 (4-6) 的 r 个解, $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 为任意实数, 则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_r\xi_r$ 也是齐次线性方程组 (4-6) 的解.

这说明, 齐次线性方程组的解的线性组合仍是该方程组的解.

定义 (1)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是齐次线性方程组 (4-5) 的 r 个解向量，如果满足条件:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

(2) 齐次线性方程组 (4-5) 的任意一个解向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 称为齐次线性方程组 (4-5) 的**基础解系**.

基础解系可看成解向量组的一个极大线性无关组. 显然，齐次线性方程组的基础解系不是唯一的.

定义 (1)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是齐次线性方程组 (4-5) 的 r 个解向量，如果满足条件:
(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;
(2) 齐次线性方程组 (4-5) 的任意一个解向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 称为齐次线性方程组 (4-5) 的**基础解系**.

基础解系可看成解向量组的一个极大线性无关组. 显然，齐次线性方程组的基础解系不是唯一的.

定理 (4)

齐次线性方程组 (4-5) 若有非零解，则它一定有基础解系，且基础解系所含解向量的个数等于 $n-r$，其中 r 是系数矩阵的秩.

证明.

设齐次线性方程组 (4-5) 的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

由定理 3 知，秩 $r(A)=r<n$.

定理 (4)

齐次线性方程组 (4-5) 若有非零解，则它一定有基础解系，且**基础解系所含解向量的个数等于 $n-r$**，其中 r 是系数矩阵的秩.

证明.

设齐次线性方程组 (4-5) 的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

由定理 3 知，秩 $r(\boldsymbol{A})=r<n$. □

证明.

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个列向量线性无关, 则 $\boldsymbol{A}$ 可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

与之对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = 0, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4-7}$$

证明.

令 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 为自由未知量，得

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases} \tag{4-8}$$

分别取

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由方程组 (4-8), 依次可得 $\square$

证明.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_{1,n+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \end{pmatrix}.$$

从而得到方程组 (4-5) 的 $n-r$ 个解为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\xi}_{n-r} = \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

证明.

下面证明 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 就是方程组 (4-5) 的一个基础解系.

首先, 由于 $n-r$ 个 $n-r$ 维向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关, 由第 3 章的定理 5 知, $n-r$ 个 n 维向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 亦线性无关.

其次, 证明方程组 (4-5) 的任意一个解 $\xi = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$ 都可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示. 因为方程组 (4-8) 是方程组 (4-5) 的同解方程组, 于是

证明.

下面证明 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 就是方程组 (4-5) 的一个基础解系.
首先, 由于 $n-r$ 个 $n-r$ 维向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关, 由第 3 章的定理 5 知, $n-r$ 个 n 维向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 亦线性无关.

其次, 证明方程组 (4-5) 的任意一个解 $\xi = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$ 都可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示. 因为方程组 (4-8) 是方程组 (4-5) 的同解方程组, 于是

证明.

下面证明 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 就是方程组 (4-5) 的一个基础解系.
首先，由于 $n-r$ 个 $n-r$ 维向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性无关，由第 3 章的定理 5 知，$n-r$ 个 n 维向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 亦线性无关.

其次，证明方程组 (4-5) 的任意一个解 $\xi = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$ 都可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示. 因为方程组 (4-8) 是方程组 (4-5) 的同解方程组，于是 $\square$

证明.

$$\begin{cases} k_1 = -c_{1,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{1n}k_n, \\ k_2 = -c_{2,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{2n}k_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_r = -c_{r,r+1}k_{r+1} - \cdots - c_{rn}k_n, \\ k_{r+1} = k_{r+1}, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n = k_n, \end{cases}$$

则有

$$\xi = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = k_{r+1}\xi_1 + k_{r+2}\xi_2 + \cdots + k_n\xi_{n-r},$$

即 ξ 是 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 的线性组合. 所以 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是方程组 (4-5) 的一个基础解系. 证毕. $\square$

定理 4 实际上指出了求齐次线性方程组的基础解系的一种方法.

此外, 由定理 4 还可以知道, 若 $r(\boldsymbol{A}) = r < n$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的任何 $n - r$ 个线性无关的解向量都可以作为它的一个基础解系.

推论 (8 齐次线性方程组解的结构定理)

若齐次线性方程组 (4-5) 有非零解, 则它的通解就是基础解系的线性组合.

定理 4 实际上指出了求齐次线性方程组的基础解系的一种方法.

此外, 由定理 4 还可以知道, 若 $r(\boldsymbol{A}) = r < n$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的任何 $n - r$ 个线性无关的解向量都可以作为它的一个基础解系.

推论 (8 齐次线性方程组解的结构定理)

若齐次线性方程组 (4-5) 有非零解, 则它的通解就是基础解系的线性组合.

例 (10)

求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解

齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 (10)

求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解

齐次线性方程组的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

解

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换将其化为行最简形矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-2&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&-2&2\\0&0&-3&3\end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&-1&1\\0&0&-3&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可看出，$r=2<4$，故有非零解，其对应的同解方程组为

解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

把 x_2, x_4 看作自由未知量，令

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

从而得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

由此，得方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ (其中 k_1, k_2 为任意常数).

解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

把 x_2, x_4 看作自由未知量，令

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

从而得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

由此，得方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (其中 k_1, k_2 为任意常数).

例 (11)

λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解？并求其通解.

解

所给方程组属于方程的个数与未知量的个数相等的特殊情形，可通过判断其系数行列式是否为零来确定方程组是否有非零解. 其系数行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(4-\lambda),$$

当 $|A| = 0$，即 $\lambda = -1, 4$ 时，原方程组有非零解.

例 (11)

λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解？并求其通解.

解

所给方程组属于方程的个数与未知量的个数相等的特殊情形，可通过判断其系数行列式是否为零来确定方程组是否有非零解. 其系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(4-\lambda),$$

当 $|\boldsymbol{A}| = 0$，即 $\lambda = -1, 4$ 时，原方程组有非零解.

解

将 $\lambda=-1$ 代入原方程组, 得

$$\begin{cases} x_1+x_2-\ \ x_3=0, \\ -x_1-x_2+\ \ x_3=0, \\ x_1-x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

方程组的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组 $\begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_3=0, \\ x_2-\frac{3}{2}x_3=0, \end{cases}$

解

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0, \end{cases}$$

把 x_3 看作自由未知量，令 $x_3 = 2$，得 $x_1 = -1, \quad x_2 = 3$. 从而得基础解系

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以，方程组的通解为 $x = k\boldsymbol{\xi}$ (k 为任意常数).

同理，当 $\lambda = 4$ 时，可求得方程组的通解为

$$x = k\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (k \text{ 为任意常数}).$$

解

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0, \end{cases}$$

把 x_3 看作自由未知量，令 $x_3 = 2$，得 $x_1 = -1, \quad x_2 = 3$. 从而得基础解系

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

所以，方程组的通解为 $x = k\boldsymbol{\xi}$ (k 为任意常数).

同理，当 $\lambda = 4$ 时，可求得方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (k \text{ 为任意常数}).$$

例 (12)

设 B 是一个三阶非零矩阵，它的每一列都是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解，求 λ 的值和 $|B|$.

解

由于 B 是一个三阶非零矩阵，所以 B 中至少有一列向量不是零向量；又由于 B 的每一列都是齐次线性方程组的解，故该齐次线性方程组有非零解，从而系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\lambda - 5 = 0,$$

所以 $\lambda = 1$.

当 $\lambda = 1$ 时，$r(A) = 2$，从而基础解系中只含有一个解向量，因而 B 的三个列向量必线性相关，得 $|B| = 0$.

下面讨论非齐次线性方程组解的结构.

解

由于 B 是一个三阶非零矩阵，所以 B 中至少有一列向量不是零向量；又由于 B 的每一列都是齐次线性方程组的解，故该齐次线性方程组有非零解，从而系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\lambda - 5 = 0,$$

所以 $\lambda = 1$.

当 $\lambda = 1$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = 2$，从而基础解系中只含有一个解向量，因而 B 的三个列向量必线性相关，得 $|B| = 0$.

下面讨论非齐次线性方程组解的结构.

解

由于 B 是一个三阶非零矩阵，所以 B 中至少有一列向量不是零向量；又由于 B 的每一列都是齐次线性方程组的解，故该齐次线性方程组有非零解，从而系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\lambda - 5 = 0,$$

所以 $\lambda = 1$.

当 $\lambda = 1$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = 2$，从而基础解系中只含有一个解向量，因而 B 的三个列向量必线性相关，得 $|B| = 0$.

下面讨论非齐次线性方程组解的结构.

非齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4-9}$$

的矩阵形式可以表示为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{4-10}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

取 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, 得到齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{4-11}$$

称式 (4-11) 为非齐次线性方程组 (4-10) 的导出方程组, 简称导出组.

$$\text{非齐次线性方程组}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4-9}$$

的矩阵形式可以表示为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{4-10}$$

$$\text{其中}\,\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

取 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, 得到齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{4-11}$$

称式 (4-11) 为非齐次线性方程组 (4-10) 的**导出方程组**, 简称**导出组**.

非齐次线性方程组 (4-10) 的解与它的导出组 (4-11) 的解之间有下列性质.

性质 (3)

如果 η 是非齐次线性方程组 (4-10) 的一个解, ξ 是其导出组的一个解, 则 $\xi+\eta$ 是非齐次线性方程组 (4-10) 的一个解.

证明.

由于

$$A\eta=b,\quad A\xi=0,$$

则由

$$A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b$$

知, $\xi+\eta$ 是非齐次线性方程组 (4-10) 的解. 证毕. □

非齐次线性方程组 (4-10) 的解与它的导出组 (4-11) 的解之间有下列性质.

性质 (3)

如果 η 是非齐次线性方程组 (4-10) 的一个解, ξ 是其导出组的一个解, 则 $\xi+\eta$ 是非齐次线性方程组 (4-10) 的一个解.

证明.

由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0},$$

则由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

知, $\xi+\eta$ 是非齐次线性方程组 (4-10) 的解. 证毕. □

性质 (4)

如果 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 (4-10) 的任意两个解，则 $\eta_1 - \eta_2$ 是其导出组的解.

证明.

由

$$A\eta_1 = b, \quad A\eta_2 = b,$$

有

$$A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = 0,$$

故 $\eta_1 - \eta_2$ 为导出组的解. 证毕. □

性质 (4)

如果 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 (4-10) 的任意两个解，则 $\eta_1 - \eta_2$ 是其导出组的解.

证明.

由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{b},$$

有

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\right) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

故 $\eta_1 - \eta_2$ 为导出组的解. 证毕. □

非齐次线性方程组解的结构定理

定理 (5)

如果非齐次线性方程组 (4-9) 有解，则其通解为

$$x = \eta^* + \xi,$$

其中 η^* 是非齐次线性方程组 (4-9) 的一个特解，而 ξ 是其导出组的通解.

证明.

首先由性质 3 知，$\eta^* + \xi$ 是非齐次线性方程组 (4-9) 的解．其次设 η 是非齐次线性方程组解 (4-9) 的任意一个解，则由性质 4 知，

$$\xi = \eta - \eta^*$$

是其导出组的一个解，于是得到

$$\eta = \eta^* + \xi,$$

即非齐次线性方程组 (4-9) 的任意一个解都是非齐次线性方程组 (4-9) 的一个解 η^* 与其导出组某个解的和．由此得到非齐次线性方程组 (4-9) 的通解可以写为

$$x = \eta^* + \xi.$$

证毕． □

证明.

首先由性质 3 知, $\boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}$ 是非齐次线性方程组 (4-9) 的解. 其次设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组解 (4-9) 的任意一个解, 则由性质 4 知,

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^*$$

是其导出组的一个解, 于是得到

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi},$$

即非齐次线性方程组 (4-9) 的任意一个解都是非齐次线性方程组 (4-9) 的一个解 η^* 与其导出组某个解的和. 由此得到非齐次线性方程组 (4-9) 的通解可以写为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}.$$

证毕. $\square$

由定理 5 可知, 如果非齐次线性方程组有解, 则只需求出它的一个特解 $\boldsymbol{\eta}^*$, 并求出其导出组的一个基础解系 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$, 则其全部解可以表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数.

一般地, 求非齐次线性方程组 (4-9) 的一个特解与求它的导出组的通解可同时进行.

例 (13)

试求

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 9, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 11x_4 + 10x_5 = 15 \end{cases}$$

的全部解.

解

对增广矩阵进行初等行变换:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&3&-1&2&4&3\\2&-1&8&7&2&9\\4&5&6&11&10&15\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&-1&2&4&3\\0&-7&10&3&-6&3\\0&-7&10&3&-6&3\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&-1&2&4&3\\0&-7&10&3&-6&3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&-1&2&4&3\\0&1&-\frac{10}{7}&-\frac{3}{7}&\frac{6}{7}&-\frac{3}{7}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{23}{7}&\frac{23}{7}&\frac{10}{7}&\frac{30}{7}\\0&1&-\frac{10}{7}&-\frac{3}{7}&\frac{6}{7}&-\frac{3}{7}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此可知, 系数矩阵与增广矩阵的秩都是 2 , 故方程组有解.

解

其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{30}{7} - \frac{23}{7}x_3 - \frac{23}{7}x_4 - \frac{10}{7}x_5, \\ x_2 = -\frac{3}{7} + \frac{10}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4, x_5 为自由未知量，令

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得方程组的一个特解为

$$\boldsymbol{\eta}^* = \left(\frac{30}{7}, -\frac{3}{7}, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

解

原方程组的导出组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{23}{7}x_3 - \frac{23}{7}x_4 - \frac{10}{7}x_5, \\ x_2 = \frac{10}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 \end{cases}$$

同解 *(去掉常数列)*. 选择 x_3, x_4, x_5 为自由未知量, 令

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得导出组的基础解系为

解

原方程组的导出组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{23}{7}x_3 - \frac{23}{7}x_4 - \frac{10}{7}x_5, \\ x_2 = \frac{10}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 \end{cases}$$

同解 *(去掉常数列)*. 选择 x_3, x_4, x_5 为自由未知量, 令

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得导出组的基础解系为

解

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{23}{7}\\ \frac{10}{7}\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{23}{7}\\ \frac{3}{7}\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{10}{7}\\ -\frac{6}{7}\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

于是原方程组的全部解（一般解）为

$$x=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3,$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

解

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{23}{7} \\ \frac{10}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{23}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{10}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是原方程组的全部解 (一般解) 为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + k_3\boldsymbol{\xi}_3,$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

注意: 在求方程组的特解与它的导出组的基础解系时, 一定要小心常数列 (项) 的处理, 最好把特解与基础解系中的解分别代入两个方程组进行验证.

例 (14)

设线性方程组

$$\begin{cases} px_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + tx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2tx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

试就 p, t 讨论方程组的解的情况, 若有解, 则求出其解.

解

对增广矩阵进行初等行变换，得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 4 \\ 1 & t & 1 & 3 \\ 1 & 2t & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 3 \\ 1 & 2t & 1 & 4 \\ p & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 3 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 0 & 1-pt & 1-p & 4-3p \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 3 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-p & 4-2p \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-p & 4-2p \\ 0 & 0 & (p-1)t & 1-4t+2pt \end{pmatrix}.$$

解

(1) 当 $(p-1)t \neq 0$, 即 $p \neq 1, t \neq 0$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$, 方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{2t-1}{(p-1)t}, \quad x_2 = \frac{1}{t}, \quad x_3 = \frac{1-4t+2pt}{(p-1)t}.$$

(2) 当 $p=1$, 且 $1-4t+2pt = 1-2t = 0$, 即 $t = \frac{1}{2}$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2 < 3$, 方程组有无穷多个解, 此时

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0, & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解

(1) 当 $(p-1)t \neq 0$, 即 $p \neq 1, t \neq 0$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$, 方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{2t-1}{(p-1)t}, \quad x_2 = \frac{1}{t}, \quad x_3 = \frac{1-4t+2pt}{(p-1)t}.$$

(2) 当 $p=1$, 且 $1-4t+2pt = 1-2t = 0$, 即 $t = \frac{1}{2}$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2 < 3$, 方程组有无穷多个解, 此时

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0, & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解

于是方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad (\,k\text{ 为任意常数}).$$

(3) 当 $p=1$, 但 $1-4t+2pt=1-2t\neq 0$, 即 $t\neq\frac{1}{2}$ 时, $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 方程组无解.

(4) 当 $t=0$ 时, $1-4t+2pt=1\neq 0$, 此时, $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 故方程组也无解.

解

于是方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad(\,k\text{ 为任意常数}).$$

(3) 当 $p=1$, 但 $1-4t+2pt=1-2t\neq 0$, 即 $t\neq\frac{1}{2}$ 时, $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 方程组无解.

(4) 当 $t=0$ 时, $1-4t+2pt=1\neq 0$, 此时, $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 故方程组也无解.

解

于是方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad (\,k\text{ 为任意常数}).$$

(3) 当 $p=1$, 但 $1-4t+2pt=1-2t\neq 0$, 即 $t\neq\frac{1}{2}$ 时, $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 方程组无解.

(4) 当 $t=0$ 时, $1-4t+2pt=1\neq 0$, 此时, $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 故方程组也无解.

例 (15)

设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，已知它的三个解向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$，其中

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求该方程组的通解.

解

因四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $4-3=1$ 个解向量，故导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任何一个非零解都可作为其方程组的基础解系. 由解的性质，易知

$$\xi_1-\frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3)=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\6\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-7\\-3\\2\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$$

是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解，故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\xi_1+k\left[\xi_1-\frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3)\right]=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-7\\-3\\2\end{pmatrix}\quad(k\ 为任意常数).$$

解

因四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则其导出组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系含有 $4-3=1$ 个解向量，故导出组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的任何一个非零解都可作为其方程组的基础解系．由解的性质，易知

$$\boldsymbol{\xi}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\6\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-7\\-3\\2\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$$

是导出组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个非零解，故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1+k\left[\boldsymbol{\xi}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)\right]$$

$$=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-7\\-3\\2\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数}).$$

解

因四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则其导出组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $4-3=1$ 个解向量, 故导出组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任何一个非零解都可作为其方程组的基础解系. 由解的性质, 易知

$$\boldsymbol{\xi}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\6\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-7\\-3\\2\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$$

是导出组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解, 故原方程组的通解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{\xi}_1+k\left[\boldsymbol{\xi}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)\right]\\&=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-7\\-3\\2\end{pmatrix}\qquad(k\text{ 为任意常数}).\end{aligned}$$