第 1 章 行列式

目录:

1.1 二阶与三阶行列式

行列式起源于求解线性方程组. 先看用消元法求解二元一次线性方程组的过程:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \tag{1-1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \tag{1-2}$$

式 (1-1) $\times a_{22}+$ 式 (1-2) $\times (-a_{12})$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

式 (1-2) $\times a_{11}+$ 式 (1-1) $\times (-a_{21})$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

可以注意到, 上面的解的分母 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ 由方程组未知量的系数组成. 将它用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示, 即

$$(1\text{-}3) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称为二阶行列式. 其中, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为二阶行列式的元素, 横排称为行, 竖排称为列. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 称为列标, 表明该元素位于第 j 列. 行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线, 从右上角到左下角的对角线称为行列式的副对角线. 于是, 二阶行列式的值便等于主对角线上的两个元素之积减去副对角线上的两个元素之积. 这种计算方法称为行列式的对角线法则, 如图 1.1 所示.

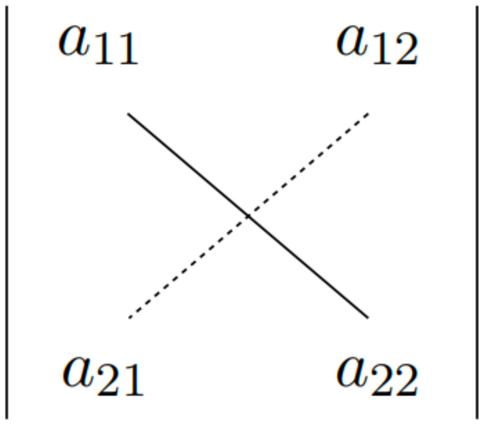

图1.1

利用二阶行列式的概念, 若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则当 $D \neq 0$ 时, 由式 $(1\text{-}1)$、式 $(1\text{-}2)$ 组成的方程组的解 x_1, x_2 可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上式即为二元一次线性方程组的求解公式, 其中, 分母 D 是由方程组未知量的系数确定的二阶行列式, 称为系数行列式; x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式; x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1: 求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$$

显示解答 收起解答

类似地, 对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \tag{1-4}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \tag{1-5}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \tag{1-6}$$

用记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和:

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

称为三阶行列式, 即

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{1-7}$$

由上述定义可见, 三阶行列式的展开式有六项, 每项均为不同行、不同列的三个元素之积再冠以正号或负号, 其计算方法可用对角线法则或沙路法则描述.

1° 对角线法则如图 1.2 所示.

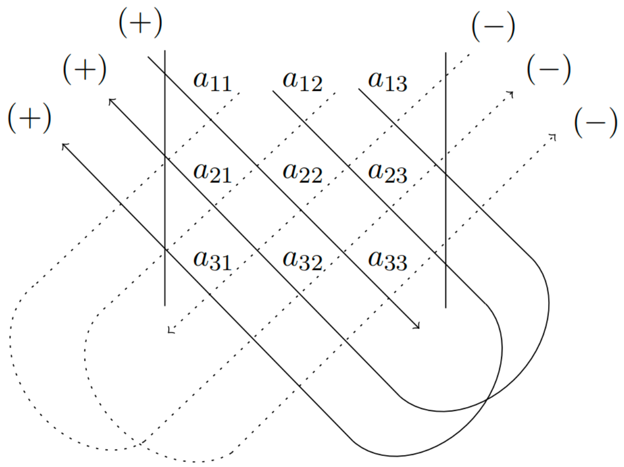

图1.2

2° 沙路法则如图 1.3 所示.

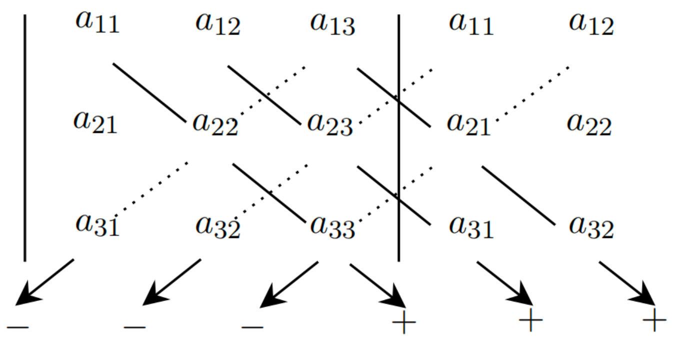

图1.3

若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

当系数行列式 $D\neq 0$ 时, 由式 (1-4)、式 (1-5)、式 (1-6) 组成的方程组的求解公式为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 2: 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2-\ \ x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$$

显示解答 收起解答

返回顶部

1.2 n 阶行列式

观察式 (7), 可以发现其右端是一些项的代数和, 其中, 每项是位于不同行、不同列的三个数相乘, 这三个数的第一个下标是按自然顺序排列的, 第二个下标则不全按自然顺序排列. 我们不禁要问: 这个代数和的项数、每项前的符号与第二个下标的排列顺序有无关系? 为此下面给出全排列、逆序数等概念.

1.2.1 全排列与逆序数

定义 1: 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列 (简称排列).

例如, 213 是一个 3 级排列; 4321 及 2341 都是 4 级排列. 一般来说, n 级排列总共有 $n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$ 个 ($n!$ 读作“n 的阶乘”). 例如, 3 级排列的总数是 $3!=6$, 它们分别是 $123,132,213,231,312,321$.

在 n 级排列中, 排列 $123\cdots n$ 是按从小到大的自然顺序排列的, 称为自然排列. 除此以外, 其余的排列中, 都有较大的数排在较小的数前面的情况.

定义 2: 在一个排列中, 如果某个较大的数排在一个较小的数的前面, 则称这两个数 (或这个数对) 构成一个逆序. 一个排列中, 逆序的总数称为这个排列的逆序数.

一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数, 一般记为 $\tau\left(j_1j_2\cdots j_n\right)$.

例如, 排列 12 的逆序数为 0; 排列 21 的逆序数为 1; 排列 231 中, 数对 21 和 31 均构成逆序, 而 23 不构成逆序, 因此排列 231 的逆序数为 2; 同理, 排列 213 的逆序数为 1, 即 $\tau(213)=1$.

定义 3: 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如, 2 级排列 12 为偶排列, 21 为奇排列 3 级排列 231 为偶排列, 213 为奇排列.

对任意一个排列, 可以按照以下方法计算它的逆序数：设所给排列为 $j_1j_2\cdots j_n$, 考虑 $j_i(i=1,2,\cdots,n)$, 如果在排列中排在 j_i 的前面且比 j_i 大的数有 τ_i 个, 则称 j_i 的逆序数为 τ_i. 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数即为其全体元素的逆序数之和:

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\sum_{i=1}^{n}\tau_i.$$

例 3: 计算以下各排列的逆序数, 并指出它们的奇偶性:
(1) 42531 ;
(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$. 显示解答 收起解答

1.2.2 对换

定义 4: 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中, 将某两个数 i_s 与 i_t 对调, 其余的数不动, 得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$, 这种对排列的变换称为对换, 记为 (i_s,i_t). 将相邻两个数对换, 称为相邻对换 (或邻换).

例如, 对排列 23541 施以对换 $(2,5)$ 后得到排列 53241 .

定理 1: 任意一个排列经过一次对换后, 其奇偶性改变. 显示证明 收起证明

定理 2: 由 n 个自然数 $(n>1)$ 组成的 n 级排列总共有 $n!$ 个, 其中奇、偶排列各占一半. 显示证明 收起证明

1.2.3 n 阶行列式

现在探讨式 (1-3)、式 (1-7) 右端各项的规律.

式 (1-3) 右端各项的第一个下标按自然顺序排列, 对它们的第二个下标进行观察: 第二个下标由两个自然数 1 和 2 组成, 只能构成两个 2 级排列 12 和 21, 排列的个数等于式 (1-3) 右端的项数. 排列 12 的逆序数为 0, 对应项的符号为 “$+$”; 而排列 21 的逆序数为 1, 对应项的符号为 “$-$”.

式 (1-7) 右端各项的第一个下标按自然顺序排列, 第二个下标由自然数 1, 2 和 3 组成, 这 3 个数构成的 3 级排列共有 $3!=6$ 个, 分别为 $123,231,312,132,213,321$, 这正好等于式 (1-7) 右端的项数. 排列 $123,231,312$ 的逆序数分别为 $0,2,2$, 它们均为偶排列, 对应项的符号为 “$+$”; 排列 $132,213,321$ 的逆序数分别为 $1,1,3$, 它们均为奇排列, 对应项的符号为 “$-$”.

综上所述, 式 (1-7) 右端各项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, 这里 $j_1j_2j_3$ 是 $1,2,3$ 的一个 3 级排列. 当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时, 项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正号; 当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时, 项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为负号. 各项所带符号均可表示为 $(-1)^{\tau}$, 其中 $\tau=\tau(j_1j_2j_3)$ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数. 从而式 (1-7) 可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{1-8}$$

其中 $\sum_{j_1j_2j_3}$ 表示对全体 3 级排列求和.

可以仿照三阶行列式的定义式 (1-8) 给出 n 阶行列式的定义.

定义 5: 由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积的代数和

$$\sum(-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1-9}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个 n 级排列, τ 为这个排列的逆序数. 这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1-10}$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

式 (1-10) 称为 n 阶行列式的展开式, 它是前面所说的二阶行列式和三阶行 列式的推广. 特别地, 当 $n = 1$ 时, 一阶行列式 $|a|$ 就是数 a. 注意, 这里的 “$|\ |$” 不要与绝对值记号相混淆.

下面来看几个例子.

例 4: 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

显示解答 收起解答

例 5: 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

上述行列式称为下三角形行列式, 它的特点是 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的主对角线以上的元素全为 0, 即当 $i<j$ 时, 元素 $a_{ij}=0$. 显示解答 收起解答

在一个行列式中, 如果主对角线以下的元素全为 0, 即当 $i>j$ 时, 元素 $a_{ij}=0$, 则该行列式称为上三角形行列式. 同理可以证明, n 阶上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在一个行列式中, 如果主对角线以外的元素全为 0, 即当 $i \neq j$ 时, 元素 $a_{ij}=0$, 则该行列式称为对角行列式. 显然, 对角行列式既是上三角形行列式, 又是下三角形行列式. 因此有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

其中, 未写出的元素全为 0 .

例 6: 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

其中 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ 所在的副对角线以下的元素全为 0 . 显示证明 收起证明

特别地, 有

$$\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & ⋰ & \\ a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

上述行列式称为反对角行列式.

由于数的乘法是可交换的, 所以行列式的展开式的各项中的元素的顺序也可任意交换. 例如, 四阶行列式中, 乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{14}$ 可以写成 $a_{22}a_{11}a_{44}a_{33}$; 一般 n

阶行列式中, 乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可以写成 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$, 其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 都是 n 级排列.

定理 3: n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 均为 n 级排列. 显示证明 收起证明

由定理 3 可知, 行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}. \tag{1-11}$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列, 而将相应行下标的排列设为 $i_1i_2\cdots i_n$, 于是行列式又可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1-12}$$

例 7: 试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是六阶行列式中的项. 显示解答 收起解答

例 8: 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$. 显示证明 收起证明

返回顶部

1.3 行列式的性质

第 2 节中引入了行列式的概念, 并且利用行列式的定义计算了几个比较简单的行列式, 但不难看出, 行列式的计算是比较麻烦的, 尤其是当行列式的阶数增大时, 计算量会越来越大. 因此有必要研究行列式的性质, 使实际计算行列式变得方便、快捷.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} (也可记为 D') 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1: 行列式与它的转置行列式相等. 显示证明 收起证明

性质 1 表明, 行列式中行与列的地位是对等的, 即行列式中行具有的性质, 其列也具有.

性质 2: 互换行列式的两行 (列), 行列式反号. 显示证明 收起证明

本书中, 交换行列式第 i 行和第 j 行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$; 交换行列式第 i 列和第 j 列, 记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1: 若行列式有两行 (列) 元素对应相等, 则行列式为零. 显示证明 收起证明

性质 3: 行列式的某一行 (列) 中所有元素都乘以同一个数 k, 等于用数 k 乘以此行列式.

第 i 行 (列) 乘以数 k, 记作 $k\times r_i\,(k\times c_i)$.

推论 2: 行列式中某一行 (列)的所有元素的公因子, 可以提到行列式符号的外面.

推论 3: 若行列式中有一行 (列) 的元素全为零, 则此行列式为零.

性质 4: 若行列式中有两行 (列) 元素对应成比例, 则此行列式为零.

性质 5: 若行列式的某行 (列) 的元素都是两个数之和, 则此行列式等于相应的两个行列式的和.

例如:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 显然可以推广到某一行 (列) 为多组数的和的情形.

性质 6： 把行列式某一行(列)的元素乘以数 k, 加到另一行(列)的对应元素上, 行列式的值不变.

例如, 以数 k 乘以第 i 行 (列) 的元素加到第 j 行 (列) 的对应元素上, 记作 $r_j+k\times r_i\ (c_j+k\times c_i)$, 其中 $(i\neq j)$, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[]{r_j+k\times r_i}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{j1}+ka_{i1}) & (a_{j2}+ka_{i2}) & \cdots & (a_{jn}+ka_{in}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意: $r_j + k \times r_i$ 不能写作 $k \times r_i + r_j$.

性质 $3 \sim$ 性质 6 请读者自己证明.

利用行列式的性质计算行列式, 可以使计算简化. 下面举例说明.

例 9: 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ c & a & d & b \\ a & c & d & b \end{vmatrix}.$$

显示解答 收起解答

例 10: 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

显示解答 收起解答

- 利用SageMath在线代码模块求例 10 中的行列式.

显示代码 收起代码

例 10 是通过行列式的性质将一个行列式的计算转化为一个上三角形 (或下三角形)行列式的计算. 这种计算行列式的方法称为化三角形法.

一般来说, 将行列式化为上三角形行列式的步骤是: 如果行列式第一列的第一个元素为 0, 则先将第一行与其他行交换, 使得第一列第一个元素不为 0, 注意, 此时行列式的值改变符号; 然后把第一行分别乘以适当的数加到其他各行, 使得第一列除第一个元素外其余元素全为 0; 再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶行列式, 如此继续下去, 直至使它化为上三角形行列式, 这时主对角线上所有元素的乘积就是所求行列式的值.

例 11: 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

显示解答 收起解答

- 利用SageMath在线代码模块求例 11 中的行列式.

显示代码 收起代码

返回顶部

1.4 行列式按行(列)展开

一般而言, 低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便, 如果能将高阶行列式用低阶行列式表示, 就能简化其运算. 为此, 首先引入余子式与代数余子式的概念.

定义 6: 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的所有元素, 剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的排法构成的 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij}. 记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

由定义 6 可知, A_{ij} 与行列式中第 i 行、第 j 列的元素无关.

例如, 四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中, 元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

引理 1: 在 n 阶行列式 D 中, 如果第 i 行元素除 a_{ij} 外全部为零, 那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积, 即

$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

显示证明 收起证明

定理 4: 行列式 D 等于它的任意一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和, 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

显示证明 收起证明

定理 4 称为行列式的按行 (列) 展开定理, 也称为拉普拉斯 (Laplace) 展开定理.

例 12: 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

显示解答 收起解答

利用定理 4 虽然能将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶行列式进行计算, 但当行列式的某一行 (列) 的元素有很多不为零时, 按这一行 (列) 展开并不能减少很多计算量. 因此, 我们总是选择行列式中有较多零元素的行 (列) 展开. 更常用的方法是: 先利用行列式的性质把行列式的某一行 (列) 化为只含有一个非零元素的行 (列), 然后再结合定理 4, 将行列式按这一行 (列) 展开进行计算, 就能简化行列式的计算. 实际上这是一种将高阶行列式化为低阶行列式的计算方法. 这种计算行列式的方法称为降阶

法. 降阶法在需要应用数学归纳法的行列式计算, 以及后面要介绍的应用递推法的行列式证明或计算中都起到了重要作用.

例 13: 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&2\\1&2&0&-5\\1&0&1&2\\4&3&1&2\end{vmatrix}.$$

显示解答 收起解答

例 14: 证明范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

其中连乘积

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)\cdots\\(x_n-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})$$

是满足条件 $1\leqslant j<i\leqslant n$ 的所有因子 (x_i-x_j) 的乘积. 显示证明 收起证明

请读者记住例 14 中范德蒙德行列式的计算公式, 该公式非常重要, 在很多行列式的计算中都有应用.

例 15: 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}.$$

显示解答 收起解答

由例 15 可知, 有时增加行列式的行数和列数反而容易求出行列式的值. 上述计算行列式的方法称为加边法.

例 16: 设 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix},$$

求 D_n 的第一行各元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$. 显示解答
收起解答

由定理 4, 还可以得到下面的重要推论.

推论 4: 行列式 D 中任意一行 (列)的元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i \neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i \neq j).$$

显示证明 收起证明

综上所述, 即得代数余子式的重要性质 [行列式按行(列)展开公式]:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

例 17: 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

显示解答 收起解答

例 17 是利用已知行列式的特性, 建立起同类型的 n 阶行列式与 $n-1$ 阶 (或更低阶) 行列式间的关系, 即导出递推公式, 然后得出行列式的值. 这种计算行列式的方法称为递推公式法.

例 18: 求方程 $f(x)=0$ 的根, 其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}.$$

显示解答 收起解答

返回顶部

1.5 克拉默法则

作为 n 阶行列式的一个应用, 下面用 n 阶行列式求解含有 n 个未知量、 n 个方程的线性方程组.

将含有 n 个未知量、 n 个方程的线性方程组表示成

$$\text{(1-13)}\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D 称为方程组 (1-13) 的系数行列式.

定理 [克拉默 (Cramer) 法则]: 如果线性方程组 (1-13) 的系数行列式 $D\neq 0$, 那么方程组 (1-13) 有唯一解

$$\text{(1-14)}\qquad x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中的第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显示证明 收起证明

例 19: 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

显示解答 收起解答

- 利用SageMath在线代码模块求例 19 中的方程组.

显示代码 收起代码

克拉默法则亦可叙述如下.

定理 5: 如果线性方程组 (1-13) 的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组 (1-13) 一定有解, 且解是唯一的.

它的逆否命题如下.

定理 $5'$: 如果线性方程组 (1-13) 无解, 或至少有两个不同的解, 则它的系数行列式必为零 $(D = 0)$.

应该注意的是, 克拉默法则只能应用于系数行列式不为零的含 n 个未知量、 n 个方程的线性方程组, 即线性方程组的未知量的个数与方程的个数要相等且系数行列式不为零. 至于方程组的系数行列式为零的情形, 将在后面的一般线性方程组中讨论.

当方程组右端的常数项全为 0 时, 方程组 (1-13) 变为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1-15}$$

线性方程组 (1-15) 称为齐次线性方程组. 显然, 齐次线性方程组总是有解的, 因为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是它的一个解, 这个解称为齐次线性方程组 (1-15) 的零解.

若有一组不全为零的数, 它是齐次线性方程组 (1-15) 的解, 则称它为齐次线性方程组 (1-15) 的非零解. 由定理 5 可以得到如下定理.

定理 6: 如果齐次线性方程组 (1-15) 的系数行列式不等于零, 则齐次线性方程组 (1-15) 没有非零解.

定理 7: 齐次线性方程组 (1-15) 存在非零解的充分必要条件是齐次线性方程组 (1-15) 的系数行列式必为零.

必要性由定理 6 可直接推出, 充分性将在第 4 章中给出证明.

例 20: 当 λ 为何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0, \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \tag{1-16}$$

有非零解? 显示解答 收起解答

例 21: 求四个平面 $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0(i=1,2,3,4)$ 相交于一点 (x_0,y_0,z_0) 的必要条件. 显示解答 收起解答

返回顶部

习题 1 (A) 类

1. 求下列各排列的逆序数:
   (1) 341782659;
   (2) 987654321;
   (3) $n(n-1)\cdots 321$;
   (4) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.
   显示答案 收起答案
2. 求出 j,k, 使 9 级排列 $24j157k98$ 为偶排列. 显示答案 收起答案
3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{22}a_{34}$ 的项. 显示答案 收起答案
4. 在六阶行列式中, 下列各项前应带什么符号?
   (1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$;
   (2) $a_{32}a_{13}a_{14}a_{51}a_{65}a_{25}$.
   显示答案 收起答案
5. 用行列式的定义计算下列各行列式:

   (1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

显示答案 收起答案

6. 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} ab & -ac & -ae \\ -bd & cd & -de \\ -bf & -cf & -ef \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & b & -1 & 0 \\ 0 & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

显示代码 收起代码

7. 证明下列等式:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$;

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & 0 & 0 & & & b \\ & \ddots & & & & & \iddots & \\ 0 & & & a & b & & & 0 \\ 0 & & & c & d & & & 0 \\ & \iddots & & & & & \ddots & \\ c & & & 0 & 0 & & & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n;$

(5) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^n a_i,$

其中$(a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$.

8. 计算下列 n 阶行列式:

(1) $D_n=\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix};$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix};$

(3) $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix};$

(4) $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

显示答案 收起答案

9. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}.$$

显示答案 收起答案

10. 计算 n 阶行列式(其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$)

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\\ a_1^{n-2}b_1 & a_2^{n-2}b_2 & a_3^{n-2}b_3 & \cdots & a_n^{n-2}b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1b_1^{n-2} & a_2b_2^{n-2} & a_3b_3^{n-2} & \cdots & a_nb_n^{n-2}\\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & b_3^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

显示答案 收起答案

11. 已知四阶行列式 D 中第三列的元素依次为 $-1,2,0,1$, 它们的余子式依次为 $8,7,2,10$, 求行列式 D 的值. 显示答案 收起答案
12. 用克拉默法则解下列方程组:

(1) $\begin{cases}4x_1+5x_2=0,\\ 3x_1-7x_2=2;\end{cases}$

显示代码 收起代码

(2) $\begin{cases}x_1-\ \ x_2+x_3=2,\\ x_1+2x_2\qquad\ =1,\\ x_1\qquad\quad -x_3=4;\end{cases}$

显示代码 收起代码

(3) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=5,\\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=1,\\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2,\\ x_2+2x_3+3x_4=3;\end{cases}$

显示代码 收起代码

(4) $\begin{cases}x_1+6x_2=1,\\ x_1+5x_2+6x_3=0,\\ x_2+5x_3+6x_4=0,\\ x_3+5x_4+6x_5=0,\\ x_4+5x_5=1.\end{cases}$

显示代码 收起代码

13. λ 满足什么条件时, 线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - \ \ x_3 = 1, \\ \lambda x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

有唯一解? 显示答案 收起答案

14. λ 和 μ 为何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \ \ 4x_2 + x_3 = 0, \\ \ \ x_1 + \ \ \mu x_2 + x_3 = 0, \\ \ \ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解? 显示答案 收起答案

15. 求三次多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, 使得

$$f(-1) = 0, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 16.$$

显示答案 收起答案

返回顶部

习题 1 (B) 类

1. 已知 n 阶行列式 D 的每列元素之和均为零, 则 $D =$ ________. 显示答案 收起答案
2. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$, 则 x^3 项的系数为________. 显示答案 收起答案
3. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________. 显示答案 收起答案
4. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于(　　).

   A. $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$
   B. $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$
   C. $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$
   D. $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$

   显示答案 收起答案

5. 写出行列式 $D_4=\begin{vmatrix}5x & 1 & 2 & 3\\ x & x & 1 & 2\\ 1 & 2 & x & 3\\ x & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix}$ 的展开式中包含 x^3 和 x^4 的项. 显示答案

收起答案

6. 已知四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 4 & 4\\ 1 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{vmatrix},$$

试求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$, 其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 为行列式 D_4 的第四行第 j 列元素的代数余子式. 显示答案 收起答案

7. 解方程 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n\end{vmatrix}=0.$ 显示答案 收起答案

8. 求出使一平面上的三个点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 位于同一条直线上的充分必要条件. 显示答案 收起答案

[返回顶部]