第 3 节 逆矩阵

安徽财经大学

统计与应用数学学院

目录

1. 逆矩阵的概念与性质
2. 用行初等变换求逆矩阵


永不消逝的电波
中国民主法制出版社
永不消逝的电波

加密原理: $AX = C$ 或 $XA = C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

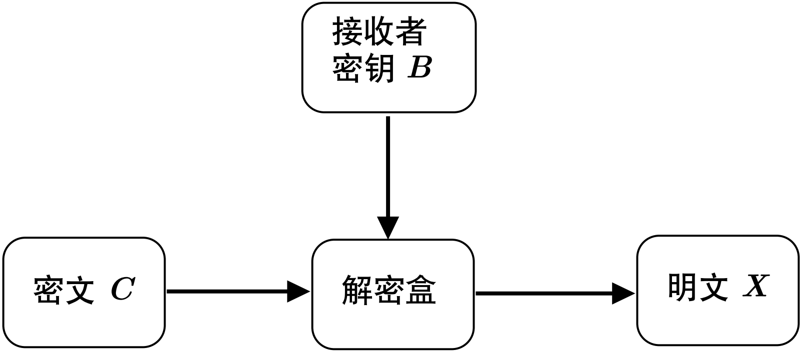
发送者
密钥 A

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 36 & 18 \\ 31 & 45 & 10 \\ 30 & 48 & 27 \end{pmatrix}$$

明文 X → 加密盒 → 密文 C

$$AX = C$$
$$XA = C$$

解密

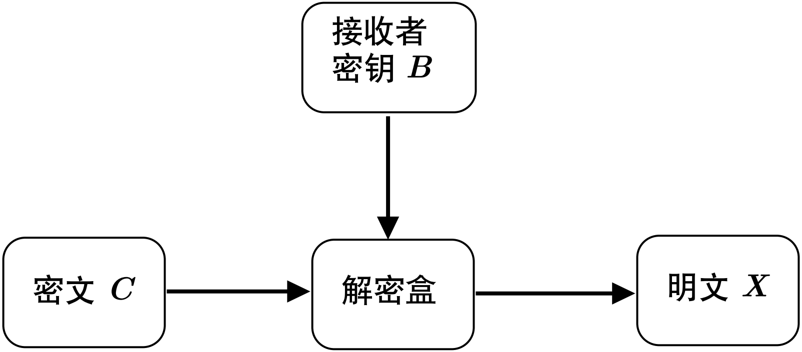


$$\boldsymbol{X} = ?$$

已知 $AX = C$. 若$BA = I$, 则 $X = BAX = BC$.

已知 $XA = C$. 若$AB = I$, 则 $X = XAB = CB$.

解密

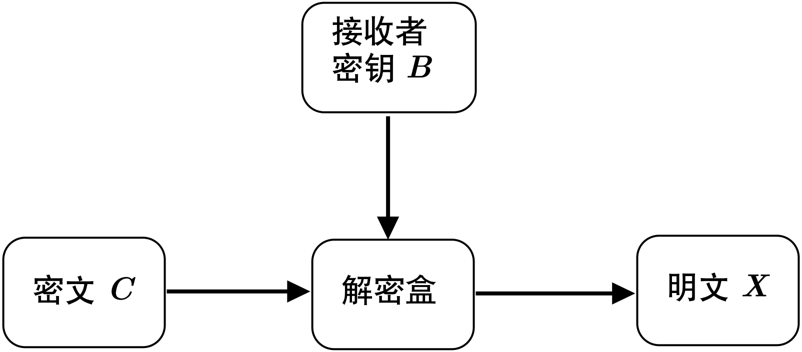


$$X = ?$$

已知 $AX = C$. 若 $BA = I$, 则 $X = BAX = BC$.

已知 $XA = C$. 若 $AB = I$, 则 $X = XAB = CB$.

解密

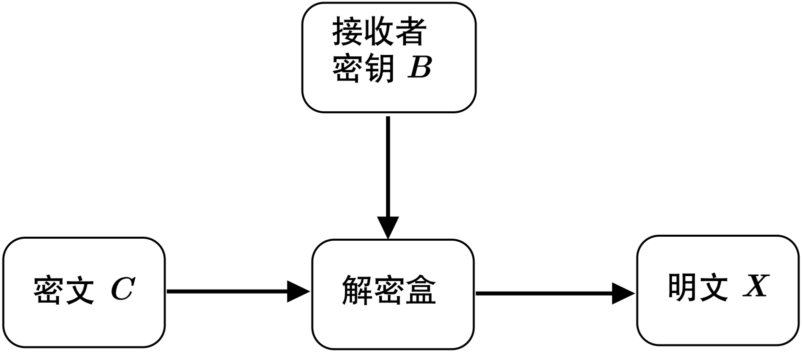


$$\boldsymbol{X} = ?$$

已知 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{C}$. 若 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BAX} = \boldsymbol{BC}$.

已知 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{C}$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{XAB} = \boldsymbol{CB}$.

解密



$$X = ?$$

已知 $AX = C$. 若$BA = I$, 则 $X = BAX = BC$.

已知 $XA = C$. 若$AB = I$, 则 $X = XAB = CB$.

逆矩阵的概念

对于任意方阵 $\boldsymbol{A}$, 有 $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$. 所以, 从矩阵乘法的角度来看, 单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 类似于数 1 的作用. 一个数 $a\neq 0$ 的倒数 a^{-1} 可用 $aa^{-1}=1$ 或 $a^{-1}a=1$ 来刻画. 类似地, 我们引入逆矩阵的概念.

定义 (1.3.1)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 简称 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

逆矩阵的概念

对于任意方阵 $\boldsymbol{A}$, 有 $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$. 所以, 从矩阵乘法的角度来看, 单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 类似于数 1 的作用. 一个数 $a \neq 0$ 的倒数 a^{-1} 可用 $aa^{-1} = 1$ 或 $a^{-1}a = 1$ 来刻画. 类似地, 我们引入逆矩阵的概念.

定义 (1.3.1)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 简称 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

定理 (1.3.1)

设 A 是可逆矩阵，则它的逆矩阵是惟一的.

证明.

设 A 有两个逆矩阵 B 和 C，即

$$AB = BA = I, AC = CA = I.$$

于是

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

故可逆矩阵的逆矩阵是惟一的. □

定理 (1.3.1)

设 A 是可逆矩阵，则它的逆矩阵是惟一的.

证明.

设 A 有两个逆矩阵 B 和 C, 即

$$AB = BA = I, AC = CA = I.$$

于是

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

故可逆矩阵的逆矩阵是惟一的. □

定理 (1.3.1)

设 A 是可逆矩阵，则它的逆矩阵是惟一的.

证明.

设 A 有两个逆矩阵 B 和 C, 即

$$AB = BA = I, AC = CA = I.$$

于是

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

故可逆矩阵的逆矩阵是惟一的. $\square$

- 由定义可知, 若 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 亦是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵, 它们互为逆矩阵.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵存在, 记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 且有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.
- 显然, $\boldsymbol{I}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 由逆矩阵的定义易得对角矩阵的逆矩阵. 设

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right),d_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n),$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1},\frac{1}{d_2},\cdots,\frac{1}{d_n}\right).$$

- 要注意的是, 并非每个矩阵都有逆矩阵, 例如矩阵 $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ 不可能有逆矩阵, 这是因为它与任何二阶矩阵的乘积都不可能为单位矩阵.

- 由定义可知, 若 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 亦是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵, 它们互为逆矩阵.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵存在, 记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 且有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.
- 显然, $\boldsymbol{I}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 由逆矩阵的定义易得对角矩阵的逆矩阵. 设

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right),d_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n),$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1},\frac{1}{d_2},\cdots,\frac{1}{d_n}\right).$$

- 要注意的是, 并非每个矩阵都有逆矩阵, 例如矩阵 $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ 不可能有逆矩阵, 这是因为它与任何二阶矩阵的乘积都不可能为单位矩阵.

例 (1.3.1)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

解

用待定系数法，令 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I},$$

所以

$$\begin{pmatrix}c & d\\ a+2c & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

例 (1.3.1)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

解

用待定系数法，令 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I},$$

所以

$$\begin{pmatrix}c & d\\ a+2c & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

例 (1.3.1)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

解

用待定系数法, 令 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 则可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I},$$

所以

$$\begin{pmatrix}c&d\\a+2c&b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

解

所以

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此可得线性方程组 $\begin{cases} c=1, \\ d=0, \\ a+2c=0, \\ b+2d=1. \end{cases}$ 解得 $a=-2, b=1, c=1, d=0.$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

用待定系数法求 n 阶矩阵的逆矩阵，当 n 较大时，工作量很大，并不方便，后面将介绍简便的方法．在介绍其他方法之前，先研究逆矩阵的性质．

解

所以

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此可得线性方程组 $\begin{cases} c=1, \\ d=0, \\ a+2c=0, \\ b+2d=1. \end{cases}$ 解得 $a=-2, b=1, c=1, d=0.$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

用待定系数法求 n 阶矩阵的逆矩阵，当 n 较大时，工作量很大，并不方便，后面将介绍简便的方法．在介绍其他方法之前，先研究逆矩阵的性质．

定理 (1.3.2)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 数 $\lambda \neq 0$, 则

1° $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;

2° $\lambda \boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;

3° $\boldsymbol{AB}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

4° $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

证明.

3° 因为 $(\boldsymbol{AB})\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{BB}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AIA}^{-1} = \boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$, 所以 $\boldsymbol{AB}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

4° 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$, 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$. □

由数学归纳法, 若 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s$ 均为同阶可逆矩阵, 则

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1} = \boldsymbol{A}_s^{-1}\boldsymbol{A}_{s-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

定理 (1.3.2)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，数 $\lambda \neq 0$，则

1° $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;

2° $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;

3° $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

4° $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

证明.

3° 因为 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$,
所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

4° 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆，且
$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$. □

由数学归纳法，若 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s$ 均为同阶可逆矩阵，则

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1} = \boldsymbol{A}_s^{-1}\boldsymbol{A}_{s-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

定理 (1.3.2)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 数 $\lambda \neq 0$, 则

1° $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$;

2° $\lambda \boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;

3° $\boldsymbol{AB}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

4° $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

证明.

3° 因为 $(\boldsymbol{AB})\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{BB}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AIA}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$, 所以 $\boldsymbol{AB}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

4° 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$, 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$. □

由数学归纳法, 若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 均为同阶可逆矩阵, 则

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1}=\boldsymbol{A}_s^{-1}\boldsymbol{A}_{s-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

定理 (1.3.2)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，数 $\lambda \neq 0$，则

1° $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;

2° $\lambda \boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;

3° $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

4° $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

证明.

3° 因为 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

4° 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$. □

由数学归纳法，若 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s$ 均为同阶可逆矩阵，则

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1} = \boldsymbol{A}_s^{-1}\boldsymbol{A}_{s-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

例 (1.3.2)

设方阵 $\boldsymbol{B}$ 为幂等矩阵 (即 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, 从而 $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{B}$), $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$.

证明.

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\right)=\frac{1}{2}\left(3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\right),$$

而

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}+3\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I},$$

于是

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\right)=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$. □

例 (1.3.2)

设方阵 B 为幂等矩阵 (即 $B^2 = B$, 从而 $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $B^k = B$), $A = I + B$, 证明: A 可逆, 且 $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(3I - A)$.

证明.

$$A\left(\frac{1}{2}(3I - A)\right) = \frac{1}{2}\left(3A - A^2\right),$$

而

$$A^2 = (I + B)^2 = I + 2B + B^2 = I + 3B = I + 3(A - I) = 3A - 2I,$$

于是

$$A\left(\frac{1}{2}(3I - A)\right) = \frac{1}{2}(3A - 3A + 2I) = I,$$

故 A 可逆, 且 $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(3I - A)$. □

例 (1.3.2)

设方阵 $\boldsymbol{B}$ 为幂等矩阵 (即 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, 从而 $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{B}$), $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$.

证明.

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\right)=\frac{1}{2}\left(3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\right),$$

而

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}+3\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I},$$

于是

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\right)=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$. □

例 (1.3.2)

设方阵 B 为幂等矩阵 (即 $B^2 = B$, 从而 $\forall k \in \mathrm{N}^*$, $B^k = B$), $A = I + B$, 证明: A 可逆, 且 $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(3I - A)$.

证明.

$$A\left(\frac{1}{2}(3I - A)\right) = \frac{1}{2}\left(3A - A^2\right),$$

而

$$A^2 = (I + B)^2 = I + 2B + B^2 = I + 3B = I + 3(A - I) = 3A - 2I,$$

于是

$$A\left(\frac{1}{2}(3I - A)\right) = \frac{1}{2}(3A - 3A + 2I) = I,$$

故 A 可逆, 且 $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(3I - A)$. □

例 (1.3.2)

设方阵 B 为幂等矩阵 (即 $B^2=B$, 从而 $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $B^k=B$), $A=I+B$, 证明: A 可逆, 且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(3I-A)$.

证明.

$$A\left(\frac{1}{2}(3I-A)\right)=\frac{1}{2}\left(3A-A^2\right),$$

而

$$A^2=(I+B)^2=I+2B+B^2=I+3B=I+3(A-I)=3A-2I,$$

于是

$$A\left(\frac{1}{2}(3I-A)\right)=\frac{1}{2}(3A-3A+2I)=I,$$

故 A 可逆, 且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(3I-A)$. □

例 (1.3.3)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$, 证明: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

证明.

由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=10\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\right)=\boldsymbol{I},$$

故由逆矩阵的定义知, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})$.
再由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$ 得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})=6\boldsymbol{I}$, 即

$$\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$. □

例 (1.3.3)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$, 证明: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

证明.

由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=10\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\right)=\boldsymbol{I},$$

故由逆矩阵的定义知, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})$.

再由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$ 得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})=6\boldsymbol{I}$, 即

$$\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$.

例 (1.3.3)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$, 证明: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

证明.

由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=10\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\right)=\boldsymbol{I},$$

故由逆矩阵的定义知, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})$.
再由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$ 得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})=6\boldsymbol{I}$, 即

$$\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})^{-1}=\dfrac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$. □

由初等变换可逆及其与逆变换的对应关系可知，初等矩阵是可逆的，且逆矩阵仍为初等矩阵，事实上，

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij};\ \boldsymbol{E}_{i}^{-1}(c) = \boldsymbol{E}_{i}\left(\frac{1}{c}\right), c \neq 0;\ \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(c) = \boldsymbol{E}_{ij}(-c).$$

定理 (1.3.3)

设 A 为 n 阶矩阵，则下列各命题是等价的：

1° A 是可逆的；

2° 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有零解；

3° A 与 I 行等价；

4° A 可表示为有限个初等矩阵的乘积.

由初等变换可逆及其与逆变换的对应关系可知，初等矩阵是可逆的，且逆矩阵仍为初等矩阵，事实上，

$$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij};\ \boldsymbol{E}_{i}^{-1}(c) = \boldsymbol{E}_{i}\left(\frac{1}{c}\right), c \neq 0;\ \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(c) = \boldsymbol{E}_{ij}(-c).$$

定理 (1.3.3)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则下列各命题是等价的：

1° $\boldsymbol{A}$ 是可逆的；

2° 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 只有零解；

3° $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 行等价；

4° $\boldsymbol{A}$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积.

证明.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$　设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的且 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，则

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},$$

因此，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$　若齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，设

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{B}\text{为行阶梯形矩阵}),$$

则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解. 若 $\boldsymbol{B}$ 有一对角元为零，则 $\boldsymbol{B}$ 的最后一行元全为零，这样 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解于未知量个数多于方程个数的线性方程组. 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，这与已知矛盾. 因而行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对角元全为非零，从而 $\boldsymbol{A}$ 经过行初等变换可化为的简化行阶梯形矩阵是 $\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 行等价.

证明.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$　设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的且 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解，则

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

因此，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 只有零解.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$　若齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 只有零解，设

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{B}\text{为行阶梯形矩阵}),$$

则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 同解. 若 $\boldsymbol{B}$ 有一对角元为零，则 $\boldsymbol{B}$ 的最后一行元全为零，这样 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 同解于未知量个数多于方程个数的线性方程组. 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 有非零解，这与已知矛盾. 因而行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对角元全为非零，从而 $\boldsymbol{A}$ 经过行初等变换可化为的简化行阶梯形矩阵是 $\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 行等价. □

证明.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$ 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 行等价，所以 $\boldsymbol{A}$ 经过行初等变换可以得到 $\boldsymbol{I}$. 又因对 $\boldsymbol{A}$ 施以行初等变换相当于用初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$，从而存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_k$，使得 $\boldsymbol{P}_k \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，又因初等矩阵可逆，故 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1^{-1} \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_k^{-1}$，而初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵，因此 $\boldsymbol{A}$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积.

$4^\circ \Rightarrow 1^\circ$ 设存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_k$，由初等矩阵可逆及定理 2 中 3° 的推广知 $\boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_k$ 也可逆. 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆. □

证明.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$　因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 行等价, 所以 $\boldsymbol{A}$ 经过行初等变换可以得到 $\boldsymbol{I}$. 又因对 $\boldsymbol{A}$ 施以行初等变换相当于用初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$, 从而存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_k$, 使得 $\boldsymbol{P}_k \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 又因初等矩阵可逆, 故 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1^{-1} \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_k^{-1}$, 而初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积.

$4^\circ \Rightarrow 1^\circ$　设存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_k$, 由初等矩阵可逆及定理 2 中 3° 的推广知 $\boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_k$ 也可逆. 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆. □

推论

设 A 为 n 阶矩阵，则非齐次线性方程组 $AX=b$ 有惟一解的充要条件是 A 可逆.

证明.

充分性 若 A 可逆，则 $AX=b$ 有惟一解 $X=A^{-1}b$.

必要性 设 $AX=b$ 有惟一解 X，但 A 不可逆，则 $AX=0$ 有非零解 $Z\neq 0$. 令 $Y=X+Z$，易知，$Y\neq X$ 且

$$AY=A(X+Z)=AX+AZ=b+0=b,$$

即 Y 也为 $AX=b$ 的解，矛盾. 故 A 可逆. □

推论

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

证明.

充分性　若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

必要性　设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解 $\boldsymbol{X}$，但 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{AX}=0$ 有非零解 $\boldsymbol{Z}\neq 0$. 令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Z}$，易知，$\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{X}$ 且

$$\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{b}+0=\boldsymbol{b},$$

即 $\boldsymbol{Y}$ 也为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，矛盾. 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆. □

推论

设 A 为 n 阶矩阵，则非齐次线性方程组 $AX = b$ 有惟一解的充要条件是 A 可逆.

证明.

充分性　若 A 可逆，则 $AX = b$ 有惟一解 $X = A^{-1}b$.
必要性　设 $AX = b$ 有惟一解 X，但 A 不可逆，则 $AX = 0$ 有非零解 $Z \neq 0$. 令 $Y = X + Z$，易知，$Y \neq X$ 且

$$AY = A(X + Z) = AX + AZ = b + 0 = b,$$

即 Y 也为 $AX = b$ 的解，矛盾. 故 A 可逆. □

例 (图像的顺时针旋转)

在平面直角坐标系中，线性变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

是将点 (x, y) 逆时针旋转 θ 角得到新点 (x', y') 的旋转变换.
而将点 (x', y') 顺时针旋转 θ 角可回到点 (x, y). 那么该旋转变换是什么?
顺时针旋转 θ 角相当于逆时针旋转 $2\pi - \theta$ 角. 因此

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

是将点 (x', y') 顺时针旋转 θ 角回到点 (x, y) 的旋转变换.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 (图像的顺时针旋转)

在平面直角坐标系中，线性变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

是将点 (x, y) 逆时针旋转 θ 角得到新点 (x', y') 的旋转变换.
而将点 (x', y') 顺时针旋转 θ 角可回到点 (x, y). 那么该旋转变换是什么?
顺时针旋转 θ 角相当于逆时针旋转 $2\pi - \theta$ 角. 因此

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

是将点 (x', y') 顺时针旋转 θ 角回到点 (x, y) 的旋转变换.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 (图像的顺时针旋转)

在平面直角坐标系中, 线性变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

是将点 (x, y) 逆时针旋转 θ 角得到新点 (x', y') 的旋转变换.
而将点 (x', y') 顺时针旋转 θ 角可回到点 (x, y). 那么该旋转变换是什么?
顺时针旋转 θ 角相当于逆时针旋转 $2\pi - \theta$ 角. 因此

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

是将点 (x', y') 顺时针旋转 θ 角回到点 (x, y) 的旋转变换.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 (图像的顺时针旋转)

在平面直角坐标系中，线性变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

是将点 (x, y) 逆时针旋转 θ 角得到新点 (x', y') 的旋转变换.
而将点 (x', y') 顺时针旋转 θ 角可回到点 (x, y). 那么该旋转变换是什么?
顺时针旋转 θ 角相当于逆时针旋转 $2\pi-\theta$ 角. 因此

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

是将点 (x', y') 顺时针旋转 θ 角回到点 (x, y) 的旋转变换.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 (图像的顺时针旋转)

在平面直角坐标系中，线性变换

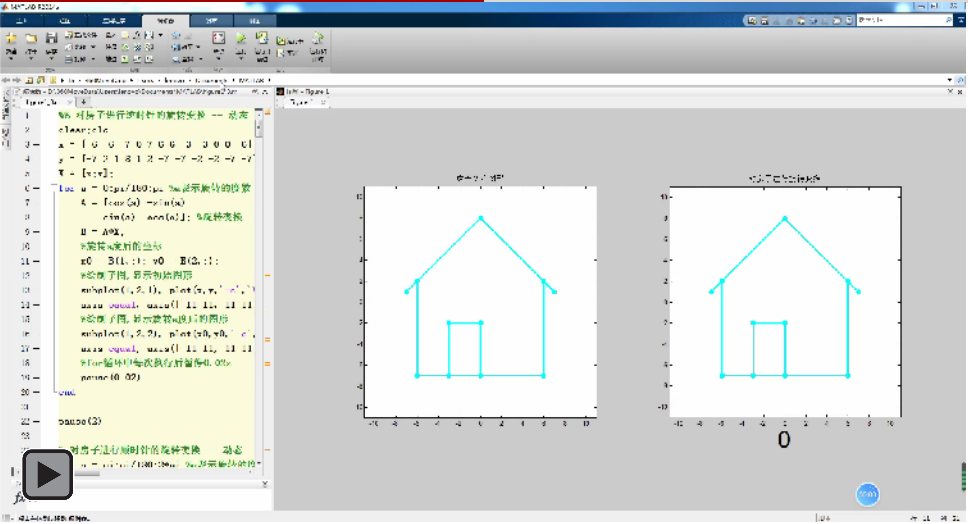
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

是将点 (x, y) 逆时针旋转 θ 角得到新点 (x', y') 的旋转变换.
而将点 (x', y') 顺时针旋转 θ 角可回到点 (x, y). 那么该旋转变换是什么?
顺时针旋转 θ 角相当于逆时针旋转 $2\pi - \theta$ 角. 因此

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

是将点 (x', y') 顺时针旋转 θ 角回到点 (x, y) 的旋转变换.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$


clear;clc
B = A*X;
pause(0.02)
end
pause(2)
0

应用案例: 密文解密

已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$, 求得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\4&-1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$. 因此, 由 $AX=C$ 可知电文明文

$$X=A^{-1}C=\begin{pmatrix}-2&1&1\\4&-1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25&36&18\\31&45&10\\30&48&27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&21&1\\9&3&8\\5&12&9\end{pmatrix},$$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

对照字母表得到密信内容为: KUAI CHE LI

应用案例: 密文解密

已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$, 求得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\4&-1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$. 因此, 由 $AX=C$ 可知电文明文

$$X=A^{-1}C=\begin{pmatrix}-2&1&1\\4&-1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25&36&18\\31&45&10\\30&48&27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&21&1\\9&3&8\\5&12&9\end{pmatrix},$$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

对照字母表得到密信内容为: KUAI CHE LI

1 逆矩阵的概念与性质

2 用行初等变换求逆矩阵

现在我们介绍一个求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的简便方法. 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故存在初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_k$, 使得

$$\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

即

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_{k-1}\cdots\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{I}.$$

因此, 如果用一系列行初等变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{I}$, 则用同样的行初等变换就将 $\boldsymbol{I}$ 化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 这就给我们提供了一个计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的有效方法:

若对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$ 施以行初等变换将 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$\boxed{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1})\,.}$$

现在我们介绍一个求 A^{-1} 的简便方法. 设 A 可逆, 故存在初等矩阵 $E_1, E_2, \cdots, E_k$, 使得

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I,$$

即

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_1 = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I.$$

因此, 如果用一系列行初等变换将 A 化为 I, 则用同样的行初等变换就将 I 化为 A^{-1}. 这就给我们提供了一个计算 A^{-1} 的有效方法:
若对 (A, I) 施以行初等变换将 A 变为 I, 则 I 就变为 A^{-1}, 即

$$\boxed{(A, I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(I, A^{-1}\right).}$$

例 (1.3.4)

利用行初等变换求 $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}.

解

$$(A,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

例 (1.3.4)

利用行初等变换求 $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}.

解

$$(A,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

解

$$\xrightarrow{-2r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

用行初等变换求逆矩阵时，必须始终用行初等变换，其间不能做任何列初等变换.

解

$$\xrightarrow{-2r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

用行初等变换求逆矩阵时，必须始终用行初等变换，其间不能做任何列初等变换.

例 (1.3.5)

问矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ 是否可逆?

解

$$(A, I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

故 A 不可逆.

例 (1.3.5)

问矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$ 是否可逆?

解

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

例 (1.3.6)

解线性方程组 $\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

解

现在用逆矩阵求解. 设原方程组为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

由例 4 知 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 故原方程组有惟一解

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = (-5, 2, 2)^{\mathrm{T}}$.

例 (1.3.6)

解线性方程组 $\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

解

现在用逆矩阵求解. 设原方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

由例 4 知 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 故原方程组有惟一解

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = (-5, 2, 2)^{\mathrm{T}}$.

方程组 $AX=B$ 可以认为是矩阵方程，若 A 可逆，则有解 $X=A^{-1}B$. 而对于矩阵方程 $XA=B$，若 A 可逆，则有解 $X=BA^{-1}$. 若 A,B 均可逆，对于矩阵方程 $AXB=C$，则有解 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

类似于前面关于 “$(A,I)\xrightarrow{\text{行初等变换}}(I,A^{-1})$” 的推导方法，我们很容易知道可以用如下方法求 $A^{-1}B$:

$$\boxed{(A,B)\xrightarrow{\text{行初等变换}}(I,A^{-1}B)\,.}$$

方程组 $AX = B$ 可以认为是矩阵方程，若 A 可逆，则有解 $X = A^{-1}B$. 而对于矩阵方程 $XA = B$，若 A 可逆，则有解 $X = BA^{-1}$. 若 A, B 均可逆，对于矩阵方程 $AXB = C$，则有解 $X = A^{-1}CB^{-1}$.

类似于前面关于 "$(A, I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (I, A^{-1})$" 的推导方法，我们很容易知道可以用如下方法求 $A^{-1}B$:

$$\boxed{(A, B) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (I, A^{-1}B)\,.}$$

以上介绍了用初等行变换的方法求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.
如果求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BA}^{-1}$, 方法如下:
对矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 施行初等列变换, 当 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{I}$ 时, $\boldsymbol{B}$ 就化为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BA}^{-1}$, 即

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{BA}^{-1} \end{pmatrix}.}$$

以上介绍了用初等行变换的方法求解矩阵方程 $AX = B$.
如果求解矩阵方程 $XA = B$, A 可逆, 则 $X = BA^{-1}$, 方法如下:
对矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 施行初等列变换, 当 A 化为 I 时, B 就化为 $X = BA^{-1}$, 即

$$\boxed{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ BA^{-1} \end{pmatrix}.}$$

例 (1.3.7)

设 $\left(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{I}$ 是 4 阶单位矩阵,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解

由题设有 $C\left(2I-C^{-1}B\right)A^{\mathrm{T}}=I$, 即 $(2C-B)A^{\mathrm{T}}=I$, 也就是 $A(2C-B)^{\mathrm{T}}=I$. 由于

$$2C-B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

且易知 $2C-B$ 可逆, 因而 $(2C-B)^{\mathrm{T}}$ 也可逆, 于是

$$A=\left((2C-B)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left((2C-B)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

解

由题设有 $\boldsymbol{C}\left(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$, 即 $(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$, 也就是 $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$. 由于

$$2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

且易知 $2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}$ 可逆, 因而 $(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$ 也可逆, 于是

$$\boldsymbol{A}=\left((2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left((2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

例 (1.3.8)

设

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

求 $(P_1P_2P_3)^{-1}$.

解

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1} &= \boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

应用案例一：颜色空间的转换

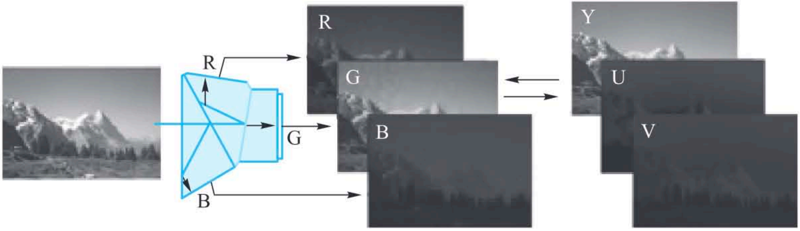
RGB 颜色空间中 3×1 矩阵表示一种颜色，其三个分量分别表示红、绿、蓝的值. YUV 颜色空间中 3×1 矩阵表示一种颜色，其三个分量分别表示明亮度 Y 及色度 U 和 V 的值. 在不同的应用场景下，我们需要在不同的颜色空间之间转换. 如下矩阵乘积将 RGB 颜色空间的颜色变换到 YUV 颜色空间的颜色

$$\begin{pmatrix} Y \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.147 & -0.289 & 0.436 \\ 0.615 & -0.515 & -0.100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}.$$

而如下其逆矩阵的乘积将 YUV 颜色空间的颜色变换到 RGB 颜色空间的颜色，

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.140 \\ 1 & -0.395 & -0.581 \\ 1 & 2.032 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ U \\ V \end{pmatrix}.$$

下面我们展示一张图像及其对应的 RGB 分量图像和 YUV 分量图像.



应用案例二：敏感度分析——扰动分析

一个家具厂生产桌子、椅子和沙发，该厂一个月可用 550 单位木材，475 单位劳力及 222 单位纺织品．家具厂要为每月用完这些资源制订生产计划表．不同产品所需资源的数量如下表所示．

资源	桌子	椅子	沙发
木材	4	2	5
劳力	3	2	5
纺织品	0	2	4

试确定：
(1) 每种产品应生产出多少个？
(2) 若纺织品的数量增加 10 个单位，所生产沙发的数量改变多少？

解

(1) 设每月生产桌子、椅子和沙发的数量分别为 x_1, x_2, x_3.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 550 \\ 475 \\ 222 \end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -8 & \frac{5}{2} \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 75 \\ 55 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

解

(2) 在许多实际问题中，求出满足已知需求的量，只是全过程的一半. 人们还对如下问题感兴趣：需求微小改变对解 X 有怎样的影响？这个课题称为敏感度分析——扰动分析.

纺织品数量增加 10 个单位，使得 b 改变 $\Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$. 研究 Δb 对解的影响，我们建立新的关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}$，则于是，

$$\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}^{-1}\Delta\boldsymbol{b} = \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}.$$

$$\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\Delta\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -8 & \frac{5}{2} \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ -10 \end{pmatrix},$$

故所生产椅子的数量增加 25 个，生产沙发的数量需减少 10 个.

小结

- 逆矩阵的概念: $AB = BA = I$, 可逆矩阵是方阵, 可逆矩阵的逆矩阵是惟一的, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
- 逆矩阵的性质: 设 A, B 均为可逆矩阵, $\lambda \neq 0$, 则 A^{-1}, λA, AB, A^{T} 都可逆, 且 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.
- 矩阵可逆的充要条件: A 可逆 $\Leftrightarrow AX = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow AX = b$ 有惟一解 $\Leftrightarrow A$ 与 I 行等价 $\Leftrightarrow A$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积.
- 用行初等变换求逆矩阵: $(A, I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(I, A^{-1}\right)$.
- 用行初等变换求矩阵方程 $AX = B$:

$$(A, B) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(I, A^{-1}B\right).$$