第 5 章 矩阵的对角化与二次型

目录:

5.1 方阵的特征值和特征向量

工程技术中的振动和稳定性问题, 往往归结为一个方阵的特征值和特征向量的问题, 特征值、特征向量的概念, 不仅在理论上很重要, 而且可以直接用来解决实际问题.

定义 1: 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}, \tag{5-1}$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 称非零向量 $\boldsymbol{x}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

式 (5-1) 也可写成

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \tag{5-2}$$

式 (5-2) 是一个含有 n 个未知量、 n 个方程的齐次线性方程组, 它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0. \tag{5-3}$$

式 (5-3) 的左端为 λ 的 n 次多项式, 记 $f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值即为其特征多项式的根. 式 (5-3) 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程, 特征方程在复数范围内恒有解, 其解的个数为方程的次数 (重根按重数计算), 因此 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值.

设 $\lambda=\lambda_i$ 为其中的一个特征值, 则由方程

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{5-4}$$

可求得非零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_i$, 那么 $\boldsymbol{p}_i$ 便是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量, 且 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量的全体是齐次线性方程组 (5-4) 的全体非零解. 由齐次线性方程组解的结构定理, 设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_r$ 为方程组 (5-4) 的基础解系, 则 $\boldsymbol{A}$的对应于特

征值 λ_i 的特征向量的全体为 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{p}_r$ $(k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不同时为 0). 这说明对应于某个特征值的特征向量有无穷多个. 但不同的特征值所对应的特征向量是不同的, 也即一个特征向量只能属于一个特征值. 事实上, 如果设 $\boldsymbol{x}$ 同时是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{x},$$

从而

$$\lambda_1\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{x},$$

即

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$,所以

$$\lambda_1=\lambda_2.$$

例 1: 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量. 显示解答 收起解答

例 2: 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量. 显示解答 收起解答

从例 1 和例 2 可以归纳出计算特征值、特征向量的**具体步骤**:

第一步, 计算特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$;

第二步, 求出 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 的全部根, 它们就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

第三步, 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ_i, 求相应的齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_r,$$

则对于不同时为零的任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$,

$$k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{p}_r$$

即为对应于 λ_i 的全部特征向量.

例 3: 求矩阵

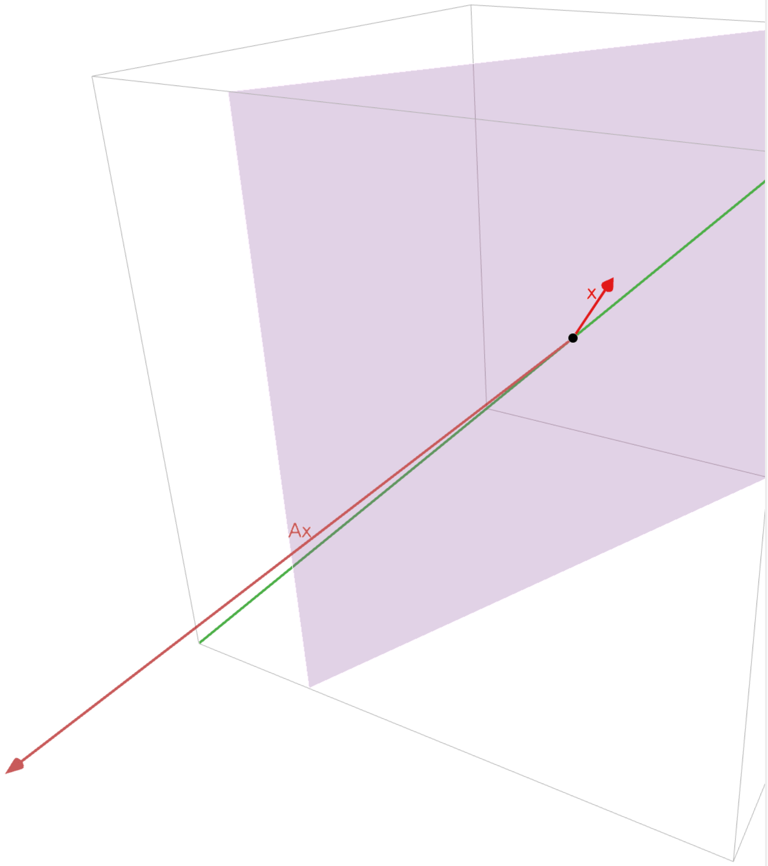
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量. 显示解答 收起解答

$$\begin{bmatrix} 4.00 & 6.00 & 0.00 \\ -3.00 & -5.00 & 0.00 \\ -3.00 & -6.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.00 \\ 2.00 \\ 3.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.00 \\ -13.00 \\ -12.00 \end{bmatrix}$$

The −2.00−eigenspace has algebraic multiplicity 1 and geometric multiplicity 1

The 1.00−eigenspace has algebraic multiplicity 2 and geometric multiplicity 2



特征值与特征向量超链接1 特征值与特征向量超链接2

例 4: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 证明: λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值. 显示证明 收起证明

按例 4 类推, 不难证明: 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值, $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值, 其中

$$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m, \varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m.$$

下面讨论特征值与特征向量的基本性质.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}. \tag{5-5}$$

将这个行列式展开, 得到一个关于 λ 的 n 次多项式, 它的最高次幂项出现在主对角线上元素的乘积

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) \tag{5-6}$$

里, 其余的项至多含有 $n-2$ 个主对角线上的元素. 因此, $f(\lambda)$ 是乘积 (5-6) 和一个至多是 λ 的 $n-2$ 次多项式的和, 故有

$$f(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots,$$

这里没有写出的项的次数至多是 $n-2$.

又在式 (5-5) 中, 令 $\lambda=0$, 得

$$f(0)=|\boldsymbol{A}|.$$

从而有

$$\begin{aligned} f(\lambda)=&(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1} \\ &+\cdots+|\boldsymbol{A}|. \end{aligned} \tag{5-7}$$

若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值,则有

$$\begin{aligned} f(\lambda)=&(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda) \\ =&(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1} \\ &+\cdots+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \end{aligned} \tag{5-8}$$

比较式 (5-7) 与式 (5-8) 中 λ 的同次幂的系数, 可以得到下面的性质.

性质 1: $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$. 称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素之和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹, 记为 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$.

性质 2: $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |\boldsymbol{A}|$.

由性质 2 可得到下面的推论.

推论 1: n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值都不为零.

定理 1: 设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 都是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量, 则它们的任何非零线性组合 $k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{p}_m$ (k_i 为不全为零的常数, $i = 1, 2, \cdots, m$) 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量. 显示证明 收起证明

例 5: 设向量 $\boldsymbol{p}_1 = (1,2,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 都是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda = 2$ 的特征向量, 又向量 $\boldsymbol{\beta} = (-1,2,-2)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A\beta}$. 显示解答 收起解答

定理 2: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征多项式, 因而有相同的特征值.
显示证明 收起证明

定理 3: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 依次是与之对应的特征向量, 则 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关. 显示证明 收起证明

例 6: 设 λ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 证明:
(1) $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;
(2) $\frac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 显示证明 收起证明

例 7: 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1, 2$, 试求 $\left|\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{E}\right|$ 与 $\left|\boldsymbol{A}^{-1} - 2\boldsymbol{A}^*\right|$.
显示解答 收起解答

返回顶部

5.2 相似矩阵与矩阵的对角化

定义 2: 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,如果存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵 (或称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的), 记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

例如,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

取 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

所以, $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

矩阵的相似关系是一种等价关系, 满足下列**性质**:

(1) **反身性:** $\boldsymbol{A}$ 与其本身相似;

(2) **对称性:** 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似;

(3) **传递性:** 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 对方阵 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 称为对 $\boldsymbol{A}$ 的相似变换.

相似矩阵具有如下性质.

性质 3: 相似矩阵有相同的秩. 显示证明 收起证明

性质 4: 相似矩阵的行列式相等. 显示证明 收起证明

性质 5: 相似矩阵同时可逆或同时不可逆. 当它们可逆时, 其逆矩阵也相似. 显示证明 收起证明

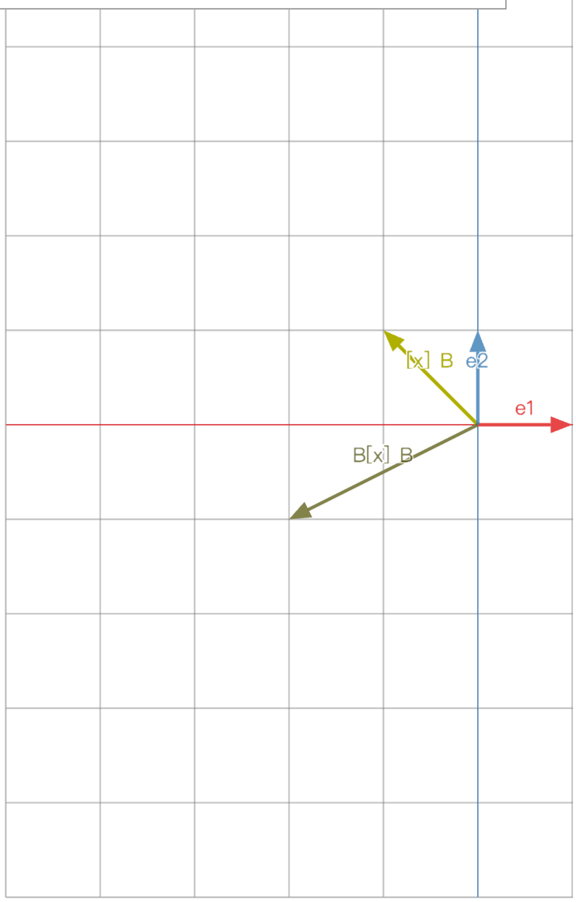
性质 6: 相似矩阵有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值. 显示证明 收起证明

推论 2: 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 相似, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 显示证明 收起证明

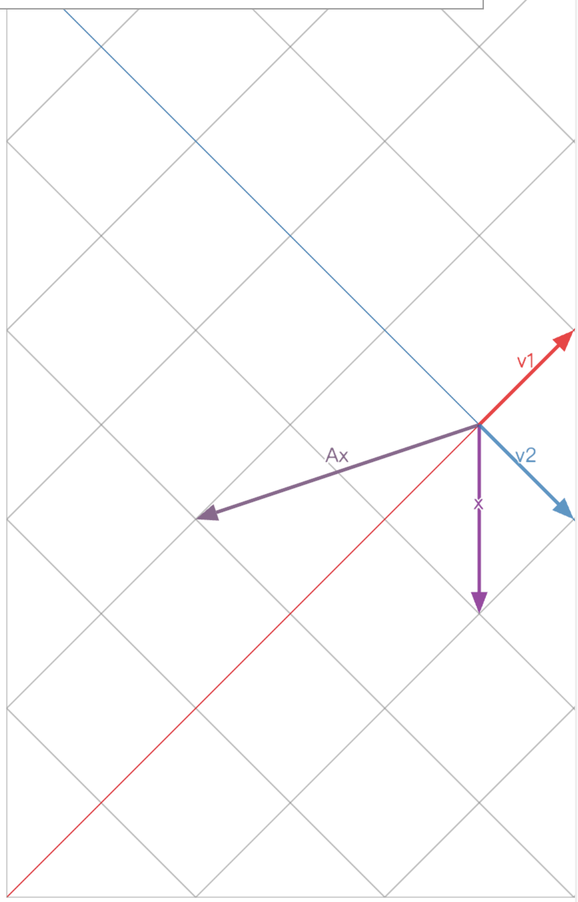
Snap axes

Close Controls

$$B=\begin{bmatrix}2.00 & 0.00\\ 0.00 & -1.00\end{bmatrix} \qquad B\begin{bmatrix}-1.00\\ 1.00\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.00\\ -1.00\end{bmatrix}$$



$$A=\begin{bmatrix}0.50 & 1.50\\ 1.50 & 0.50\end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix}0.00\\ -2.00\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3.00\\ -1.00\end{bmatrix}$$



$$C=\begin{bmatrix}1.00 & 1.00\\ 1.00 & -1.00\end{bmatrix}$$

$$A=CBC^{-1} \qquad x=C[x]_{\mathcal{B}}$$

相似矩阵超链接1
相似矩阵超链接2

例 8: 确定 x, y 的值, 使 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

显示解答 收起解答

关于相似矩阵, 人们关心的一个问题是, 与 $\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵中, 最简单的形式是什么? 由于对角矩阵最简单, 于是考虑是否任何一个方阵都相似于一个对角矩阵呢? 下面就来研究这个问题.

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能相似于对角矩阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

现设已找到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 把 $\boldsymbol{P}$ 用其列向量表示为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$, 由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$, 即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)&=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\&=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n),\end{aligned}$$

于是有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda\boldsymbol{p}_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

可见, $\boldsymbol{P}$ 的列向量 $\boldsymbol{p}_i$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_i 的特征向量. 又因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆,所以 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关. 由于上述推导过程可以反推回去, 因此关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角化有如下结论.

定理 4: n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$, 并且以它们为列向量组成的矩阵 $\boldsymbol{P}$, 能使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵. 而且此对角矩阵的主对角线上的元素依次是与 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 对应的 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

结合定理 3, 可以得到下述推论.

推论 3: 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值,则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

现在的问题是, 对于任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}$, 是否一定存在 n 个线性无关的特征向量, 答案是否定的. 在第 1 节例 3 中, 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程有重根, 但仍能找到三个线性无关的特征向量; 而在例 2 中, 三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程亦有重根, 却找不到三个线性无关的特征向量. 从而例 2 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似.

下面的定理给出了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的又一充分必要条件.

定理 5: n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是对应于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数, 即

$$r(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})=n-k_i,$$

其中 k_i 为特征值 λ_i 的重数 $(i=1,2,\cdots,r;\ k_1+k_2+\cdots+k_r=n)$.

证明从略.

例 9: 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix},$$

问: $\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化? 如果可以, 试求出 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成为对角矩阵. 显示解答 收起解答

注意: 对角矩阵中特征值的排列次序与矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中相应的特征向量的排列次序是一致的.

例 10: 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

(1) 求参数 a,b 的值及 $\boldsymbol{A}$ 的与特征向量 $\boldsymbol{p}$ 对应的特征值;
(2) $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵是否相似? 显示解答 收起解答

返回顶部

5.3 实对称矩阵的对角化

虽然并不是所有矩阵都相似于一个对角矩阵, 但是实对称矩阵是一定可以对角化的, 并且还能找到一个正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.

定理 6: 实对称矩阵的特征值都是实数. 显示证明 收起证明

显然, 当特征值 λ_i 为实数时, 齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

是实系数线性方程组, 从而必有实的基础解系, 即对应于 λ_i 的特征向量必可取实向量.

定理 7: 设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵的两个特征值, $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 是对应的特征向量, 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$,则 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交. 显示证明 收起证明

前面曾指出, 对任意的 n 阶矩阵, 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的, 定理 7 表明,实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量不但线性无关, 而且相互正交.

下面的定理说明实对称矩阵是一定可以对角化的.

定理 8: 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值, 则 $r(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=n-k$, 即对应于 k 重特征值 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量.

证明略.

定理 9: 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,则必存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda},$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵. 显示证明 收起证明

根据定理 9 的证明,可以按以下步骤求出正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成为对角矩阵:

第一步, 求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$;

第二步, 求出 $\boldsymbol{A}$ 的对应于每个特征值 λ_i 的一组线性无关的特征向量, 即求出齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

的一个基础解系; 然后, 利用格拉姆–施密特正交化方法, 把此组基础解系规范正交化; 再将对应于不同特征值的特征向量单位化, 由定理 7 知, 对应于不同特征值的特征向量正交, 如此可得 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个两两正交的单位特征向量;

第三步, 以上面求出的 n 个两两正交的单位特征向量为列向量所得的 n 阶方阵, 即为所求的正交矩阵 $\boldsymbol{T}$; 以相应的特征值为主对角线元素的对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,即为所求的 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$.

注意: $\boldsymbol{T}$ 中列向量的次序与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 主对角线上的特征值的次序相对应.

例 11: 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵. 显示解答
收起解答

例 12: 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7&-3&-1&1\\-3&7&1&-1\\-1&1&7&-3\\1&-1&-3&7\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵. 显示解答 收起解答

返回顶部

5.4 二次型及化二次型为标准形

前面主要研究线性问题, 但在实际问题中还存在大量非线性问题, 其中最简单的模型就是二次型. 本节利用矩阵工具研究二次型, 介绍化二次型为标准形的几种方法.

定义 3: n 元变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ +\cdots \quad \cdots \\ +a_{nn}x_n^2 \tag{5-9}$$

称为 n 元二次型, 简称二次型. 当 a_{ij} 为复数时, f 称为复二次型; 当 a_{ij} 为实数时, f 称为实二次型.

这里只讨论实二次型. 取 $a_{ji}=a_{ij}(i<j)$, 则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$. 于是式 (5-9) 可写成对称形式:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+ \\ &a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+ \\ &\cdots+ \\ &a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ =&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j, \end{aligned} \tag{5-10}$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{5-11}$$

则式 (5-10) 可以用矩阵形式简单表示为

$$\begin{aligned} f=&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \\ =&(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ =&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{5-12}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵.

例如, 二次型 $f=x^2+2xy+4y^2-2xz-6yz+5z^2$ 用矩阵表示即为

$$f=(x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

显然, 这种矩阵表示是唯一的, 即任给一个二次型就唯一确定一个对称矩阵; 反之, 任给一个对称矩阵也可唯一确定一个二次型, 即两者之间存在一一对应关系. 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的秩, f 也称为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型.

在平面解析几何中讨论二次曲线时, 经常把二次曲线的一般方程

$$ax^2+2bxy+cy^2=1,$$

通过坐标变换化成标准形

$$mx'^2+ny'^2=1,$$

再根据标准形判断曲线的形状.

这里对二次型也进行类似的讨论.

对于一般的二次型

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x},$$

设 $\boldsymbol{C}$ 是一个 n 阶可逆矩阵, 令

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C} \boldsymbol{y},$$

称该线性变换为非退化的线性变换或可逆线性变换. 将其代入二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$, 得

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C} \boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} \boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}\right) \boldsymbol{y}.$$

定义 4: 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 如果存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 合同于 $\boldsymbol{A}$, 记作 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$, 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行合同变换.

定理 10: 任给可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 则 $\boldsymbol{B}$ 亦为对称矩阵, 且 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$. 显示证明 收起证明

定理 10 说明, 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C} \boldsymbol{y}$ 后, 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变为与 $\boldsymbol{A}$ 合同的对称矩阵 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$, 且二次型的秩不变. 矩阵的合同关系与相似关系一样, 都满足反身性、对称性、传递性.

定义 5: 只含平方项的二次型, 即

$$f=k_1 y_1^2+k_2 y_2^2+\cdots+k_n y_n^2,$$

称为二次型的标准形 (或法式).

要使二次型 f 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C} \boldsymbol{y}$ 变成标准形, 就是要使

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$$
$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

也就是要使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵. 因此, 化二次型为标准形就是对于对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,寻求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵.

由第 3 节的定理 9 知, 任给实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 总有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$,即 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵. 把此结论应用于二次型, 即有如下定理.

定理 11: 任给实二次型 $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, 总有正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵), 使 f 化为标准形

$$f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的特征值.

用正交变换把二次型化为标准形, 这在理论上和实际应用中都是非常重要的, 而此方法的具体步骤就是第 3 节介绍的化实对称矩阵为对角矩阵的步骤.

例 13: 求一个正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$, 把二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_1x_4 + 2x_3x_4$$

化为标准形. 显示解答 收起解答

例 14: 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0)$, 通过正交变换可化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换.

分析: 由于二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 通过正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ 化成的标准形 $f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$ 的平方项的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 而且变换前后两个二次型的矩阵有下面的关系:

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

所以上式两端取行列式, 即可求得参数 a.

显示解答 收起解答

用正交变换化二次型为标准形, 具有保持几何形状不变的优点. 如果不限于用正交变换, 那么还有多种方法可把一次型化为标准形, 如配方法、初等变换法等. 下面通过实例

分别介绍配方法和初等变换法.

例 15: 化二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

为标准形, 并求所用的变换矩阵. 显示解答 收起解答

例 16: 化二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

为标准形, 并求所用的变换矩阵. 显示解答 收起解答

一般地, 任何二次型都可用例 15 和例 16 的方法找到可逆线性变换化为标准形, 且由定理 10 可知, 标准形中含有的项数就是二次型的秩.

化二次型为标准形就是寻求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成为对角矩阵. 这里 $\boldsymbol{A}$ 为二次型的矩阵, 而任意一个可逆矩阵又可分解为若干个初等矩阵之积, 从而有如下定理.

定理 12: 对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 一定存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s=\operatorname{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

关于初等矩阵, 易见

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j),\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}[i(k)]=\boldsymbol{E}[i(k)],\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}[i+j(k)]=\boldsymbol{E}[j+i(k)].$$

记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$, 则定理 12 还表明, 对 $\boldsymbol{A}$ 同时施行一系列同类的初等行和列的变换得到对角矩阵, 而相应地, 将这一系列的初等列变换施加于单位矩阵, 就得到变换矩阵 $\boldsymbol{C}$. 类似于用初等变换求逆矩阵, 下面通过例子介绍用初等变换求变换矩阵 $\boldsymbol{C}$.

例 17: 用初等变换法将例 15 中的二次型化为标准形. 显示解答 收起解答

例 18: 用初等变换法将例 16 中的二次型化为标准形. 显示解答 收起解答

返回顶部

5.5 正定二次型

第 4 节用不同的方法, 把一个二次型化为标准形. 从例 16 和例 18 可知, 化二次型为标准形时, 可用不同的变换矩阵, 且所得标准形也不相同, 即二次型的标准形不是唯一的. 但正如前面所说, 二次型的秩是唯一的, 在化标准形的过程中秩是不变的, 即一个二次型的两个不同的标准形中, 含有的非零平方项的项数是相同的, 都等于二次型的秩. 不仅如此, 在实可逆线性变换下, 标准形中正系数的个数是不变的 (从而负系数的个数不变, 正、负系数的个数之差——符号差也不变). 即有如下定理 (证明略).

定理 13: (惯性定理) 设有二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 它的秩为 r, 若有两个实的非退化 (可逆) 线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 及 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$, 使

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2 \quad (k_i\neq 0, i=1,2,\cdots,r),$$

及

$$f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2 \quad (\lambda_i\neq 0, i=1,2,\cdots,r),$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相同.

定义 6: 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的标准形中, 系数为正的平方项的个数 p 称为此二次型的正惯性指数, 系数为负的平方项的个数 $r-p$ 称为此二次型的负惯性指数, $s=2p-r$ 称为符号差. 这里 r 为二次型 f 的秩.

定义 7: 设二次型 f 的正惯性指数为 p, 秩为 r, 称

$$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$$

为二次型 f 的规范形.

由定理 13 可知, 任何一个二次型都可以通过可逆线性变换化为规范形, 且二次型的规范形是唯一确定的.

例 19: 将例 16 中的二次型化为规范形. 显示解答 收起解答

定义 8: 设有二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 都有 $f(\boldsymbol{x})>0$ [显然 $f(\boldsymbol{0})=0$], 则称 f 为正定二次型, 并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵; 如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 都有 $f(\boldsymbol{x})<0$, 则称 f 为负定二次型, 称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵.

定理 14: n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型的充分必要条件是它的正惯性指数等于 n. 显示证明 收起证明

推论 4: 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定 (即 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵), 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正.

类似地, 有: 二次型 f 为负定二次型, 当且仅当它的负惯性指数等于 n; 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵, 当且仅当它的所有特征值全为负.

下面不加证明地介绍判定矩阵正 (负) 定的一个充分必要条件.

定义 9: n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 r 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶顺序主子式.

定理 15: 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定,当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全为正,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 1, 2, \cdots, n;$$

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 负定, 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正, 即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 1, 2, \cdots, n.$$

这个定理称为赫尔维茨 (Hurwitz)定理(证明略).

例 20: 判定 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的正定性.

显示解答 收起解答

例 21: 判别二次型

$$f(x, y, z) = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$$

的正定性. 显示解答 收起解答

例 22: 设 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$, 问: λ 取何值时, f 为正定二次型? 显示解答 收起解答

返回顶部

习题 5 (A) 类

1. 判断下列命题是否正确:
   (1) 满足 $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量;
   (2) 如果 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量;
   (3) 实矩阵的特征值一定是实数.
2. 求下列矩阵的特征值和特征问量:
   (1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;
   (2) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$, 对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

   求矩阵 $\boldsymbol{A}$.
4. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1,1$, 与特征值 -1 对应的特征向量 $\boldsymbol{x} = (-1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$.
5. 若 n 阶方阵满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵. 试证: 幂等矩阵的特征值只可能是 1, 或者是 0.
6. 试证: 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只可能是 ± 1.
7. 设 λ_1, λ_2 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.
8. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似. (1) 求 x 与 y; (2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.
9. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.
10. 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵:

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(4) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. 将下列二次型用矩阵形式表示:
(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_3x_1$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;
(3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_1x_4 + 2x_2^2 - x_2x_4$.
12. 写出下列各二次型的矩阵:
(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 7x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3$.
13. 当 t 为何值时, 二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + tx_3^2$ 的秩为 2 ?
14. 用正交变换把下列二次型化为标准形, 并写出所作的变换:
(1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 2x_3x_4$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.
15. 用配方法把下列已次型化为标准形, 并写出所作的变换:
(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.
16. 用初等变换法化下列二次型为标准形, 并写出所作的变换:
(1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 - x_3x_4$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_1x_2 - 4x_2x_3$.
17. 判断下列二次型的正定性:
(1) $f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;
(2) $f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
(3) $f = 99x_1^2 - 12x_1x_2 + 48x_1x_3 + 130x_2^2 - 60x_2x_3 + 71x_3^2$.
18. 当 t 满足什么条件时, 下列二次型是正定的?
(1) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$;
(2) $f = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz + 2tyz$.
19. 试证: 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.
20. 试证: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.
21. 试证: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 都是正定矩阵.

返回顶部

习题 5 (B) 类

1. 已知 λ_1, λ_2 都是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 且 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 分别是对应于 λ_1 与 λ_2 的特征向量, 当 (　　) 时, $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.
A. $k_1 = 0$ 且 $k_2 = 0$
B. $k_1 \neq 0$ 且 $k_2 \neq 0$
C. $k_1k_2 = 0$
D. $k_1 \neq 0$ 而 $k_2 = 0$
显示答案 收起答案
2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值之一是 (　　).
A. $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|^n$
B. $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$

C. $\lambda|\boldsymbol{A}|$
D. $\lambda|\boldsymbol{A}|^n$

显示答案 收起答案

3. 设 λ_1, λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right)$ 线性无关的充分必要条件是 (　　).
A. $\lambda_1 \neq 0$
B. $\lambda_2 \neq 0$
C. $\lambda_1=0$
D. $\lambda_2=0$

显示答案 收起答案

4. 下述四个条件中,三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的一个充分但非必要条件是 (　　).
A. $\boldsymbol{A}$ 有三个互不相等的特征值
B. $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量
C. $\boldsymbol{A}$ 有三个两两线性无关的特征向量
D. $\boldsymbol{A}$ 的对应于不同特征值的特征向量正交

显示答案 收起答案

5. 设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 为三阶矩阵, A_{ij} 为代数余子式, 若 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 2, 且 $|\boldsymbol{A}|=3$, 则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$ ________.

显示答案 收起答案

6. 二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_2+x_3\right)^2-\left(x_3-x_1\right)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为 (　　).
A. $2,0$　　B. $1,1$　　C. $2,1$　　D. $1,2$

显示答案 收起答案

7. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$, 记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-l_1 \boldsymbol{\beta}_1-l_2 \boldsymbol{\beta}_2$, 若 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交, 则 l_1, l_2 依次为 (　　).
A. $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$　　B. $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$　　C. $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$

显示答案 收起答案

8. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 相似, 则 $x=$ ________, $y=$ ________.

显示答案 收起答案

9. 二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=x_1^2-2 x_1 x_2+x_2^2+x_3^2$ 的符号差为 ________.

显示答案 收起答案

10. 已知实二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+4 x_1 x_2+4 x_1 x_3+4 x_2 x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P} \boldsymbol{y}$ 可化为标准形 $f=6 y_1^2$, 则 $a=$ ________.

显示答案 收起答案

11. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶正交矩阵, 且 $|\boldsymbol{A}| \neq|\boldsymbol{B}|$, 证明: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为不可逆矩阵.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 6 & -6 & b\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-2, \lambda_2=4$, 求 a, b 的值.

显示答案 收起答案

13. 设四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E}, |\boldsymbol{A}|<0$, 求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值.
14. 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$, 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2$, 试求:
    (1) $\boldsymbol{B}$ 的特征值;
    (2) 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的对角矩阵;
    (3) $|\boldsymbol{B}|$;
    (4) $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|$.
15. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵, $\lambda_1=8, \lambda_2=\lambda_3=2$ 是其特征值, 已知对应于 $\lambda_1=8$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$, 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, 试求:
    (1) 参数 k;
    (2) 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的另一个特征向量;
    (3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$.
16. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.
    (1) 求 a 的值;
    (2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;
    (3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.
17. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵, 证明: $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$.
18. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, 则存在 n 阶正定矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

返回顶部