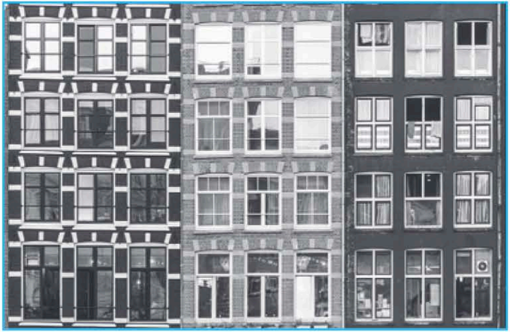
第 1 节 n 阶行列式的定义

安徽财经大学

统计与应用数学学院

上一章学习的矩阵概念可以简洁且统一地表示形式千变万化的数据 (文本、图像和视频等). 更进一步, 如何定量地刻画矩阵所表示的信息? 行列式和秩是刻画矩阵的重要数值指标, 在图像处理、计算机视觉、机器学习中具有广泛的应用. 比如思考下图有何特点? 如何利用这种特点进行图像压缩?



我们先从解二元及三元线性方程组引入二阶、三阶行列式的概念及计算.
考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 那么方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

我们先从解二元及三元线性方程组引入二阶、三阶行列式的概念及计算.
考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 那么方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

如果对于方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

引入行列式记号 “$|\quad|$” 和 $\det \boldsymbol{A}$, 那么就可以得到一个二阶行列式, 并规定 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值为

$$\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 称为方程组的系数行列式.

记

$$\det \boldsymbol{A}_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \det \boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么二元线性方程组的解可写成

$$x_1=\frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}}, \qquad x_2=\frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}}.$$

如果对于方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

引入行列式记号“| |”和 det $\boldsymbol{A}$, 那么就可以得到一个二阶行列式, 并规定 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值为

$$\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 det $\boldsymbol{A}$ 称为方程组的系数行列式.
记

$$\det \boldsymbol{A}_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \det \boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么二元线性方程组的解可写成

$$x_1=\frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}}, \quad x_2=\frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}}.$$

类似地，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式规定为

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

那么，当 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ 时，方程组的解也可写成

$$x_1 = \frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}}, \quad x_2 = \frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}}, \quad x_3 = \frac{\det \boldsymbol{A}_3}{\det \boldsymbol{A}},$$

其中 $\det \boldsymbol{A}_1, \det \boldsymbol{A}_2, \det \boldsymbol{A}_3$ 是将系数行列式的第 1 列、第 2 列、第 3 列分别换成常数列所得的行列式.

类似地，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式规定为

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

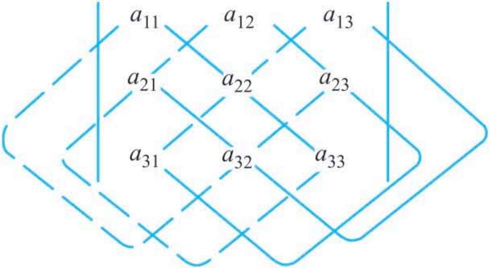
$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

那么，当 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ 时，方程组的解也可写成

$$x_1 = \frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}}, \quad x_2 = \frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}}, \quad x_3 = \frac{\det \boldsymbol{A}_3}{\det \boldsymbol{A}},$$

其中 $\det \boldsymbol{A}_1, \det \boldsymbol{A}_2, \det \boldsymbol{A}_3$ 是将系数行列式的第 1 列、第 2 列、第 3 列分别换成常数列所得的行列式.

三阶行列式的计算方法可用图示记忆法 (如下图所示). 凡是实线上三个元相乘所得到的项带正号, 凡是虚线上三个元相乘所得到的项带负号.



对 n 元线性方程组的解要得到类似的结果, 显然要对 n 阶行列式给出合理的定义.

观察三阶行列式的值, 我们可以将三阶行列式写成如下展开式形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \tag{2.1}$$

其中 A_{11}, A_{12}, A_{13} 分别称为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

二阶行列式的展开式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 也可视为按第 1 行展开，且 a_{22} 恰为 a_{11} 的代数余子式，$-a_{21}$ 恰为 a_{12} 的代数余子式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}. \tag{2.2}$$

如果把 (2.1), (2.2) 两式分别作为三阶和二阶行列式的定义，显然这种定义的方法是统一的，都是用低阶行列式定义高一阶的行列式. 因此，我们自然也就希望用这种递归的方法来定义一般的 n 阶行列式.

定义 (2.2.1)

设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是由 $\boldsymbol{A}$ 确定的一个数：

(1) 当 $n = 1$ 时，$\det \boldsymbol{A} = \det(a_{11}) = a_{11}$;

(2) 当 $n \geqslant 2$ 时，

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j},$$

其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$,

定义 (2.2.1)

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$,

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

称 M_{1j} 为元 a_{1j} 的余子式, 即为划掉 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行第 j 列后所得的 $n-1$ 阶行列式, A_{1j} 称为 a_{1j} 的代数余子式.

在不引起混淆的时候, 也用 $|A|$ 表示矩阵 A 的行列式.

由定义可以看出, 行列式是由行列式不同行不同列的元乘积构成的和式, 这种定义方法称为归纳定义. 通常, 把上述定义简称为按行列式的第 1 行展开.

定义 (2.2.1)

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$,

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

称 M_{1j} 为元 a_{1j} 的余子式, 即为划掉 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行第 j 列后所得的 $n-1$ 阶行列式, A_{1j} 称为 a_{1j} 的代数余子式.

在不引起混淆的时候, 也用 $|\boldsymbol{A}|$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.
由定义可以看出, 行列式是由行列式不同行不同列的元乘积构成的和式, 这种定义方法称为归纳定义. 通常, 把上述定义简称为按行列式的第 1 行展开.

例 (2.1.1)

计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解

因为 $a_{12} = a_{13} = 0$, 所以由定义

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{14}A_{14}$$

例 (2.1.1)

计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解

因为 $a_{12} = a_{13} = 0$, 所以由定义

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{14}A_{14}$$

解

因为 $a_{12}=a_{13}=0$, 所以由定义

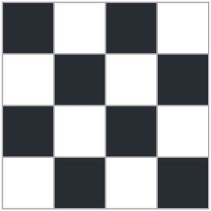
$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} =& a_{11}A_{11}+a_{14}A_{14} \\
=& 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
=& 2\left[1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right] \\
& -4\left[7\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}\right] \\
=& 2[5+5(18-4)]-4[7(18-4)-(6-8)]=-250.
\end{aligned}
$$

例 (2.1.2)

考虑如下图所示的黑白图像 (每个小方块表示一个像素). 若记黑色和白色像素分别为 0 和 1 , 则其对应矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

计算矩阵 A 的行列式 $\det A$.



例 (2.1.2)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$.

解

因为 $a_{11} = a_{13} = 0$, 所以由行列式定义有

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= a_{12}A_{12} + a_{14}A_{14} \\ &= 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

例 (2.1.3)

计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

由定义，将 D_n 按第一行展开，得

$$D_n = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 (2.1.3)

计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

由定义，将 D_n 按第一行展开，得

$$D_n = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 (2.1.3)

计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

由定义，将 D_n 按第一行展开，得

$$D_n = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 (2.1.3)

计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

同理可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 和数量矩阵的行列式分别为

$$\det \boldsymbol{I} = 1, \quad \det(k\boldsymbol{I}_n) = k^n.$$

例 (2.1.4)

计算 n 阶下三角形行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & * \\ a_1 & & & \end{vmatrix}.$$

解

由行列式定义有

$$
\begin{aligned}
D_n &= a_n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} & & & a_{n-1} \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & * \\ a_1 & & & \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}a_nD_{n-1} = (-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2} \\
&= \cdots = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1 \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.
\end{aligned}
$$

同理 $D_n = \begin{vmatrix} & * & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$

解

由行列式定义有

$$D_n = a_n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} & & & a_{n-1} \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & * \\ a_1 & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}a_nD_{n-1} = (-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2}$$

$$= \cdots = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

同理 $D_n = \begin{vmatrix} & * & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$

小结

- n 阶行列式的定义: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

  是由 $\boldsymbol{A}$ 确定的一个数: 当 $n = 1$ 时, $\det \boldsymbol{A} = \det(a_{11}) = a_{11}$; 当 $n \geqslant 2$ 时, $\det \boldsymbol{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$, 其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$. M_{1j} 为元 a_{1j} 的余子式, 即为划掉 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行第 j 列后所得的 $n-1$ 阶行列式, A_{1j} 称为 a_{1j} 的代数余子式.
- 上 (下) 三角行列式: $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.
- 斜上 (下) 三角行列式: $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.