N1:

1° Za zadanie miałam wykreślić błąd w zależności od h

$|D_h\, f(x) - f'(x)|$ dla $f(x) = \cos(x),$ x=1

w zależności od h ∈ $[10^{-16}, 1]$ dla trzech różnych metod dyskretyzacji

a) $D_h^{(a)} f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

b) $D_h^{(b)} f(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

c) $D_h^{(c)} f(x) = \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h}$

2° policzyć h optymalne, aby przybliżenie numeryczne było najdokładniejsze

3° i minimalny błąd jaki dana metoda może popełnić.

Rozwijam f(x+h) w szereg Taylora

$$a)\ D_h^{(a)} f(x) = f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\overbrace{f(x)+f'(x)\cdot h+\frac{f''(x)\cdot h^2}{2}+\frac{f'''(x)\cdot h^3}{6}+\cdots}^{f(x+h)}-f(x)}{h}$$

$$\approx \frac{f'(x)\cdot \cancel{h} + \frac{f''(x)\cdot h^{\cancel{2}}}{2} + \frac{f'''(x)\cdot h^{\cancel{3}2}}{6}}{\cancel{h}} = \underbrace{f'(x)}_{\text{Tego szukamy}} + \underbrace{\frac{f''(x)\cdot h}{2}}_{\text{To jest błąd obliczeń}} + \overbrace{\frac{f'''(x)\cdot h^2}{6}}^{\text{To jest małe więc zaniedbuję}}$$

Błąd maszynowy wynosi w przybliżeniu $\frac{2\varepsilon f}{h}$

Błąd obliczeń (metody) $\Delta D_h = \frac{f''\cdot h}{2}$

Błąd h to błąd metody + maszynowy, $\Delta h = \frac{f''\cdot h}{2} + \frac{2\varepsilon f}{h}$

Aby znaleźć h optymalne należy wyliczyć ekstremum lokalne z Δh

$\Delta' h :\ \frac{f''}{2} - \frac{2\varepsilon f}{h^2} = 0$

$\frac{-4\varepsilon f + h^2 \cdot f''}{2\cdot h^2} = 0$

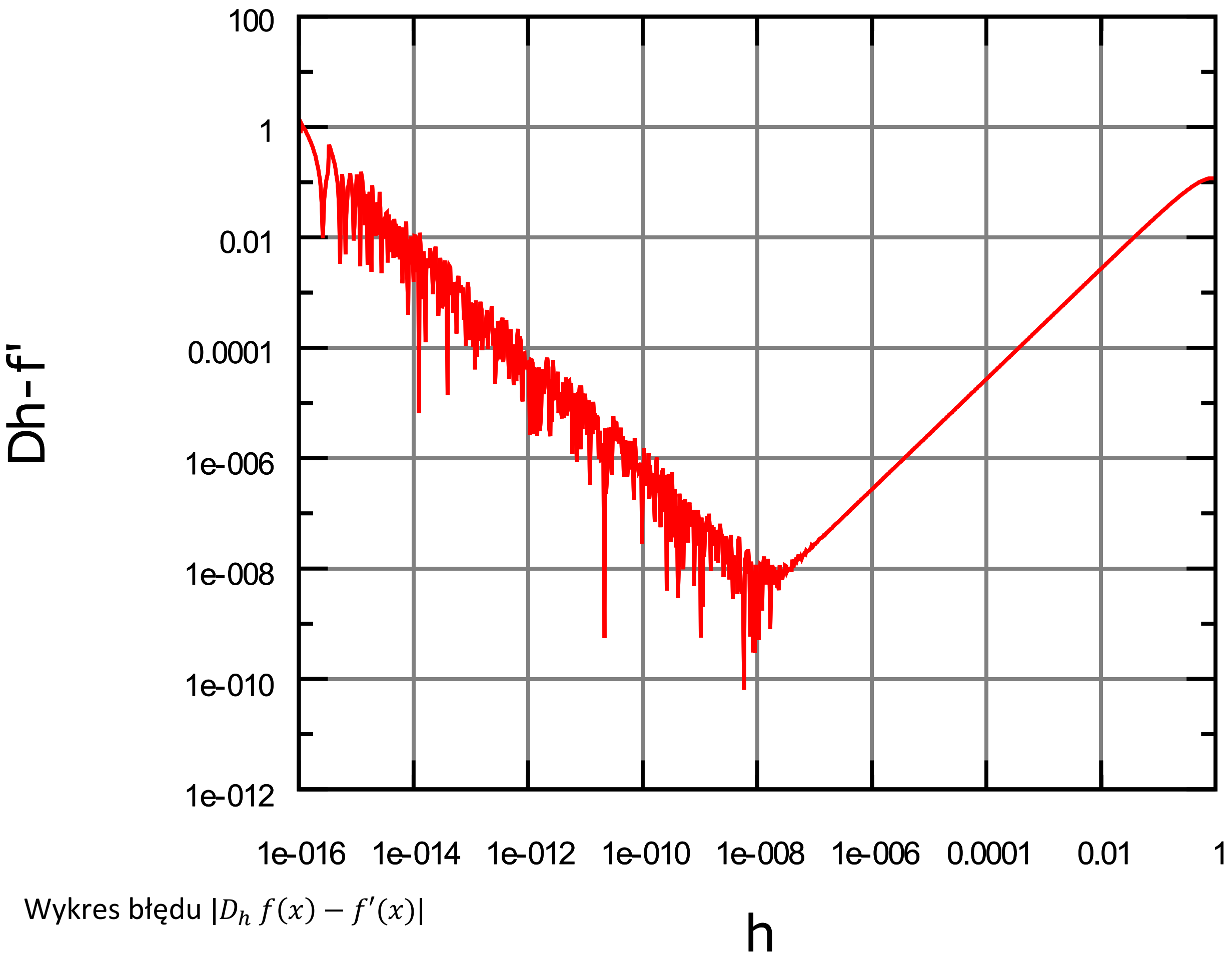
$$h^2 f'' = 4\varepsilon f$$

$$h = 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{f}{f''}}$$ - h optymalne dla $D_h^{(a)} f(x)$

Wartość h optymalnego podstawiam pod wartość do wzoru na błąd h

$$\Delta(\text{h opt}) = \frac{f'' \cdot 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{f}{f''}}}{2} + \frac{2\varepsilon f}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{f}{f''}}} = \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{f \cdot f''} + \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{f \cdot f''} = 2\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{f \cdot f''}$$

H optymalne w przybliżeniu wynosi $\sqrt{\varepsilon}$, błąd h optymalnego to w przybliżeniu także $\sqrt{\varepsilon}$.



Wykres błędu $|D_h\, f(x) - f'(x)|$

Najmniejszy błąd jaki metoda może popełnić znajduje się w ok. ½ wykresu dla przedziału double $[10^{-16}, 1]$ dla $h \approx 10^{-8}$, błąd wynosi około 10^{-10}.
Dla typu float $[10^{-8}, 1]$ byłoby to dla $h \approx 10^{-4}$.

b) $D_h^{(b)} f(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{f(x)+f'(x)\cdot h+\frac{f''(x)\cdot h^2}{2}+\frac{f'''(x)\cdot h^3}{6}+\cdots}{2h} +$

$$- \frac{f(x) - f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)\cdot h^2}{2} - \frac{f'''(x)\cdot h^3}{6}}{2h} \approx$$

$$\approx \frac{\cancel{2}\cdot f'(x)\cdot \cancel{h}}{\cancel{2\,h}} + \frac{\frac{f''(x)\cdot h^2}{2} - \frac{f''(x)\cdot h^2}{2}}{2h} + \frac{\frac{\cancel{2}f'''(x)\cdot h^{\cancel{3}2}}{6}}{\cancel{2h}} =$$

$$= f'(x) + \frac{f'''(x)\cdot h^2}{6} + \frac{f^5(x)\cdot h^4}{120}$$

To jest błąd obliczenia pochodnej, parzyste pochodne się skracają

Δh=$\frac{f'''(x)\cdot h^2}{6} + \frac{2\varepsilon f}{h}$

Liczę ekstremum Δ'h : $\frac{f'''\cdot h}{3}$ - $\frac{2\varepsilon f}{h^2}$ = 0

$$\frac{h^3 f''' - 6\varepsilon f}{3h^2} = 0$$

$$h^3 f''' = 6\varepsilon f$$

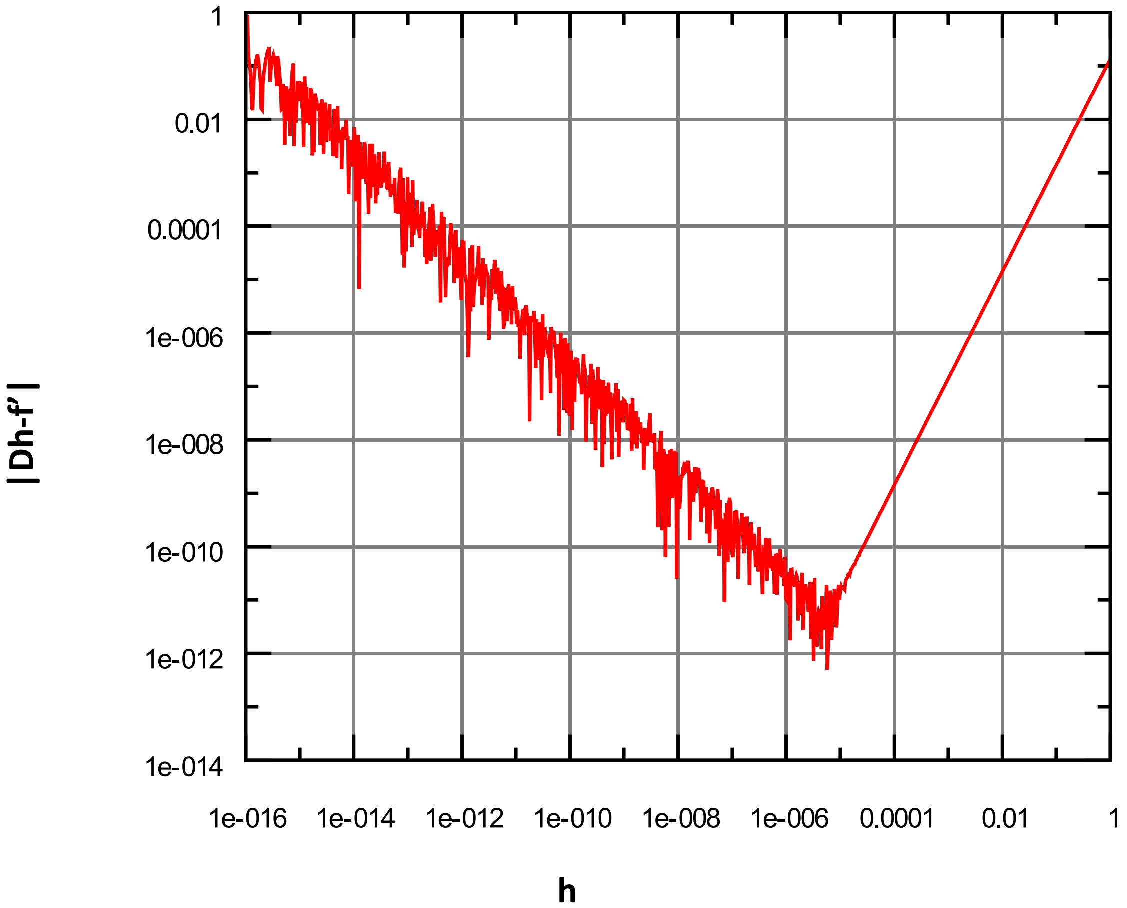
$h = \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon f}{f'''}} = \sqrt[3]{\varepsilon} \cdot \sqrt[3]{\frac{6f}{f'''}}$ - h optymalne

Podstawiam h opt pod wzór na błąd h:

Δ(h opt)=$\frac{f'''\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{6\varepsilon f}{f'''}}\right)^2}{6} + \frac{2\varepsilon f}{\sqrt[3]{\frac{6\varepsilon f}{f'''}}} = \frac{6\,\varepsilon f + 12\varepsilon f}{6\cdot\sqrt[3]{\frac{6\varepsilon f}{f'''}}} = \frac{3\cancel{18}\varepsilon f}{\cancel{6}\cdot\sqrt[3]{\frac{6\varepsilon f}{f'''}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{6}} \cdot \sqrt[3]{\varepsilon^2} \cdot \sqrt[3]{f'''\cdot f^2}$

H optymalne w przybliżeniu wynosi $\sqrt[3]{\varepsilon}$ a błąd h optymalnego to w przybliżeniu $\sqrt[3]{\varepsilon^2}$.

Daje to 100 razy lepszy wynik od poprzedniego (dla double minimalny błąd jaki metoda może popełnić jest dla h≈ 10^{-5} i oscyluje w okolicy 10^{-12} co widać na poniższym wykresie).



Wykres błędu $|D_h\, f(x) - f'(x)|$

c)

$$D_h^{(c)}f(x) = = \frac{-f\big(x+2h\big)+8f\big(x+h\big)-8f\big(x-h\big)+f(x-2h)}{12h} =$$

$$= \frac{-f(x)-f'(x)\cdot 2h - f''(x)\cdot\frac{4h^2}{2} - f'''(x)\cdot\frac{8h^3}{6} - f^{(4)}(x)\cdot\frac{16h^4}{24} - f^{(5)}(x)\cdot\frac{32h^5}{120}}{12h} +$$

$$+\frac{f(x)-f'(x)\cdot 2h + f''(x)\cdot\frac{4h^2}{2} - f'''(x)\cdot\frac{8h^3}{6} + f^{(4)}(x)\cdot\frac{16h^4}{24} - f^{(5)}(x)\cdot\frac{32h^5}{120}}{12h} +$$

$$+\frac{8f(x)+8f'(x)\cdot h + 8f''(x)\cdot\frac{h^2}{2} + 8f'''(x)\cdot\frac{h^3}{6} + 8f^{(4)}(x)\cdot\frac{h^4}{24} + 8f^{(5)}(x)\cdot\frac{h^5}{120}}{12h} +$$

$$+\frac{-8f(x)+8f'(x)\cdot h - 8f''(x)\cdot\frac{h^2}{2} + 8f'''(x)\cdot\frac{h^3}{6} - 8f^{(4)}(x)\cdot\frac{h^4}{24} + 8f^{(5)}(x)\cdot\frac{h^5}{120}}{12h} =$$

$$= \frac{12\,f'(x)\cdot h}{12h} - \frac{-64f^{(5)}(x)\cdot\frac{h^5}{120}}{12h} + \frac{16f^{(5)}(x)\cdot\frac{h^5}{120}}{12h} =$$

$$= f'(x) - \frac{48f^{(5)}(x)\cdot h^4}{12\cdot 120} = f'(x) - \frac{f^{(5)}(x)\cdot h^4}{30}$$

Błąd tej metody wynosi

$$\varDelta D_h = \frac{f^{(5)}\cdot h^4}{30}$$

Błąd h wynosi

$$\varDelta h = \frac{f^{(5)}\cdot h^4}{30} + \frac{2\varepsilon f}{h}$$

Liczę h optymalne

$$\varDelta' h = \frac{4f^{(5)}\cdot h^3}{30} - \frac{2\varepsilon f}{h^2} = 0$$

$$\frac{2(f^{(5)}\cdot h^3 - 15\varepsilon f)}{15h^2} = 0$$

$$f^{(5)} \cdot h^3 - 15\varepsilon f = 0$$

h optymalne wynosi

$$h = \sqrt[5]{\frac{15\varepsilon f}{f^{(5)}}}$$

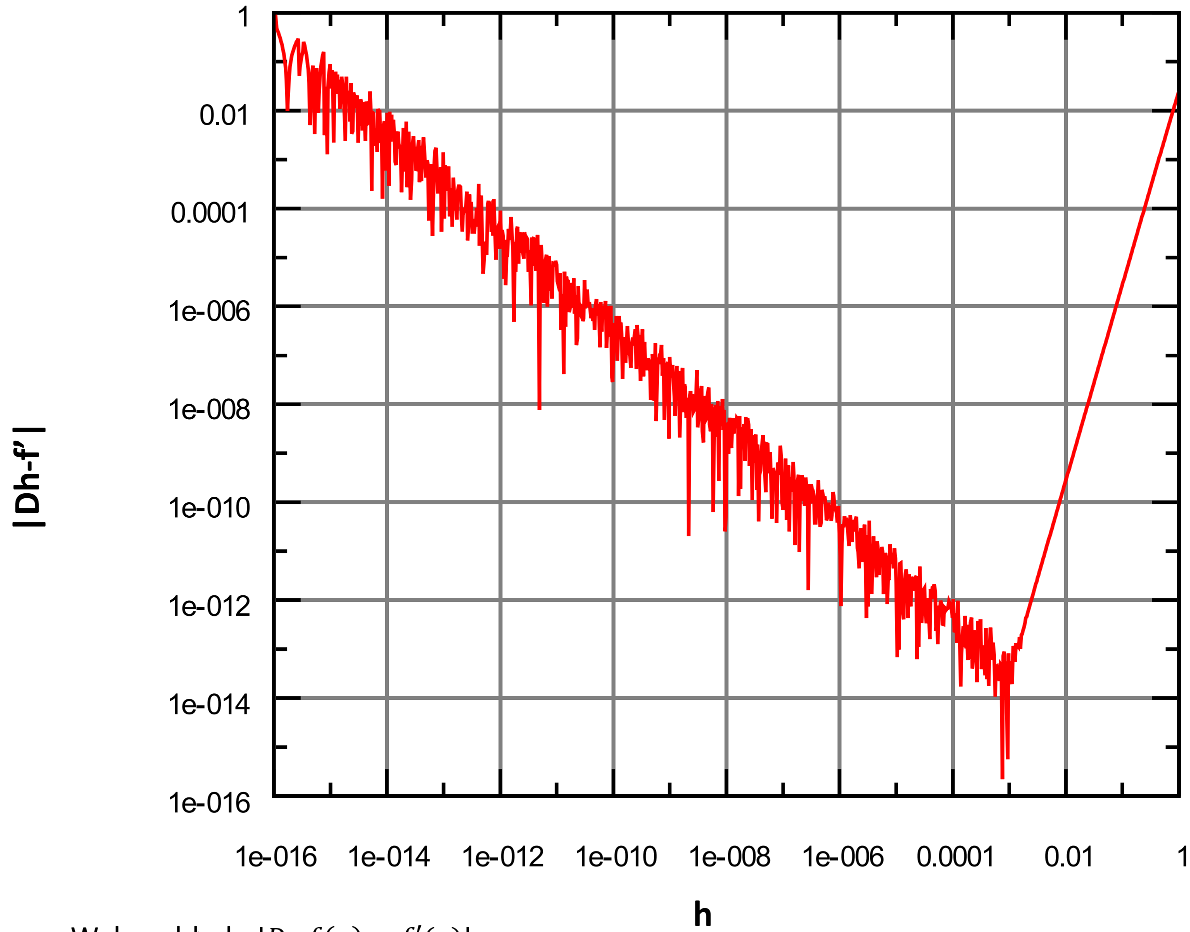
$$\Delta(h\,opt) = \frac{f^{(5)} \cdot \sqrt[5]{\frac{15\varepsilon f}{f^{(5)}}}^{4}}{30} + \frac{2\varepsilon f}{\sqrt[5]{\frac{15\varepsilon f}{f^{(5)}}}} = \frac{15\varepsilon f + 60\varepsilon f}{30\sqrt[5]{\frac{15\varepsilon f}{f^{(5)}}}} = \frac{75\varepsilon f}{30 \cdot \sqrt[5]{30\varepsilon} \cdot \sqrt[5]{\frac{f}{f^{(5)}}}} =$$

$$= \frac{15}{6 \cdot \sqrt[5]{30}} \cdot \sqrt[5]{\varepsilon^4} \cdot \sqrt[5]{f^{(5)} \cdot f^4}$$

H optymalne w przybliżeniu wynosi $\sqrt[5]{\varepsilon}$ a błąd h optymalnego to w przybliżeniu $\sqrt[5]{\varepsilon^4}$.

Daje to 1000 razy lepszy wynik od poprzedniego

- dla double minimalny błąd jaki metoda może popełnić jest dla h≈ 10^{-3} i wynosi 10^{-15}, co widać na poniższym wykresie.



Wykres błędu $|D_h f(x) - f'(x)|$