Aix Marseille Université - Campus Luminy

UFR des Sciences

Rapport de TP

Master Informatique

Module ARO – Algorithme et Recherche Opérationnelle

TP n°1 :

Modélisation en programmation linéaire.

Réalisé par :

ZEMMOURI Yasmine.

BEKHEDDA Hadjira.

2023-2024.

Exercice 1 :

- **Identification des variables de décision :**

Définissons les variables clés de ce problème.

Soient : **a :** l'investissement dans l'obligation A.

b : l'investissement dans l'obligation B.

c : l'investissement dans l'obligation C.

d : l'investissement dans l'obligation D.

e : l'investissement dans l'obligation E.

- **Formulation d'une fonction objective :**

L'agent financier investit **10%** du revenu annuel dans obligation **A**, **4%** en obligation **B**, 7% dans l'obligation **C**, **6%** dans l'obligation **D** et **8%** dans l'obligation **E**. Le revenu annuel **Z** est donné par la formule :

$$Z = 0.1 * a + 0.04 * b + 0.07 * c + 0.06 * d + 0.08 * e.$$

Le but est de maximiser le revenu annuel, i.e. la fonction objective.

- **Formulation des contraintes :**

✓ Un agent financier a 100000 euros à investir en cinq obligations : $\boldsymbol{a + b + c + d \leq 100000}$.
✓ Au moins 50% de l'argent doit être investi dans des obligations à court terme : $\boldsymbol{b + d \leq 50000}$.
✓ Au plus 50 % de l'argent doit être investi dans des obligations à risque élevé : $\boldsymbol{a + e \geq 50000}$.
✓ Au moins 40 % des fonds doivent aller dans des investissements exonérés d'impôts : $\boldsymbol{b + d \geq 40000}$.
✓ Au moins 30 % des revenus annuels doivent être exonérés d'impôts : $\mathbf{0.04 * b + 0.06 * d \geq 0.3 * (+0.1 * a + 0.04 * b + 0.07 * c + 0.06 * d + 0.08 * e)}$.
✓ On ne peut investir un montant négatif, les variables doivent être positives : $\boldsymbol{a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0, e \geq 0}$.

- **Résolution :**

Code :

```
/* Variable definitions */
var a >= 0;
var b >= 0;
var c >= 0;
var d >= 0;
var e >= 0;
/* Objective function */
maximize R: +0.1*a +0.04*b +0.07*c +0.06*d +0.08*e;

/* Constraints */
R1: +a+b+c+d+e <= 100000;
R2: b+e >= 50000;
R3:+a+e <=50000;
R4: +b+d >= 40000;
R5: +0.04*b +0.06*d >= 0.3*(+0.1*a +0.04*b +0.07*c +0.06*d +0.08*e);
```

- **Solution optimale : 7100**, les revenus annuels de l'agent s'élèveront à 7100 avec :
  - Un investissement de **13500** dans l'obligation A (a=13500).
  - Un investissement de **13500** dans l'obligation B (b=13500).
  - Un investissement d'environ **10000** dans l'obligation C (c=10000).
  - Un investissement d'environ **26500** dans l'obligation D (d=26500).
  - Un investissement de **36500** dans l'obligation E (e=36500).

OPTIMAL : 7100

Summary Logs Output Variables Cc

Name	Value
a	13500.000000000004
b	13500.000000000004
c	9999.999999999996
d	26499.999999999996
e	36500

Exercice 2 :

- **Identification des variables de décision :**

Définissons les variables clés de ce problème.

Soit : x_{ij} **:** la quantité de blé transportée d'une région *j* vers une minoterie *i*.

- **Formulation d'une fonction objective :**

Le coût de transport est de 0.10 euro/ (tonne × km). Le but est de minimiser le coût total de transport entre les régions de production et les minoteries. D'où :

$$Z = 0.1 * \sum_{1 \leq i,j \leq 3} d_{ij} * x_{ij}$$

- **Formulation des contraintes :**

Soient les données suivantes :

Qte_i : la quantité de blé que la minoterie *i* doit recevoir.

QTE_j : la quantité de blé récoltée de la région *j*.

Nous aurons ainsi les contraintes suivantes :

- ✓ La somme des quantités transportées d'une région *j* doit être égale à la quantité récoltée de cette région : $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leq QTE_j$. Et ceci pour toutes les régions.

- ✓ La somme des quantités transportées vers une minoterie *i* doit être égale à la quantité qu'elle doit recevoir : $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq qte_i$. Et ceci pour toutes les minoteries.
- ✓ On ne transporter une quantité négative, la variable doit être positive : $x_{ij} \geq 0$.

- **Résolution :**

Code :

```
set REGION;
set MINOTERIE;

param QTE {REGION} > 0;
param qte {MINOTERIE} > 0;
param distance {MINOTERIE,REGION} >= 0;

var x {i in MINOTERIE, j in REGION} >= 0;

minimize obj:  0.1* sum {i in MINOTERIE, j in REGION} x[i,j] * distance[i,j];

R_MINOTERIE {i in MINOTERIE} : sum{j in REGION} x[i,j] >= qte[i];
R_REGION {j in REGION} : sum{i in MINOTERIE} x[i,j] <= QTE[j];

data;

set REGION := R1 R2 R3;
set MINOTERIE := M1 M2 M3 ;


 param:   QTE  :=
   R1   275
   R2   400
   R3   300;

 param:   qte  :=
    M1     200
    M2     550
    M3     225;

 param distance (tr):
          M1    M2    M3:=
    R1   210   500   400
    R2   350   300   220
    R3   550   200   250;
 end;
```

- ➢ **Solution optimale : 24000**, le coût de transport s'élève à 24000 avec :
  - **200** tonnes de la région R1 vers la minoterie M1.
  - **0** tonne de la région R1 vers la minoterie M2.
  - **75** tonnes de la région R1 vers la minoterie M3.
  - **0** tonne de la région R2 vers la minoterie M1.
  - **250** tonnes de la région R2 vers la minoterie M2.
  - **150** tonnes de la région R2 vers la minoterie M3.
  - **0** tonne de la région R3 vers la minoterie M1.

- **300** tonnes de la région R3 vers la minoterie M2.
- **0** tonne de la région R3 vers la minoterie M3.

OPTIMAL : 24000

Summary Logs Output Variables (

Name	Value	Type
x[M1,R1]	200	continuous
x[M1,R2]	0	continuous
x[M1,R3]	0	continuous
x[M2,R1]	0	continuous
x[M2,R2]	250	continuous
x[M2,R3]	300	continuous
x[M3,R1]	75	continuous
x[M3,R2]	150	continuous
x[M3,R3]	0	continuous

Exercice 3 :

- **Identification des variables de décision :**

Définissons les variables clés de ce problème.

Soit : **agent$_i$:** nombre d'agents commençant à la période *i*.

- **Formulation d'une fonction objective :**

Notre objectif est de déterminer le nombre minimum d'agents que le poste de police doit employer chaque jour, ainsi de minimiser la fonction suivante :

$$Z = \sum_{i=1}^{6} agent_i.$$

- **Formulation des contraintes :**

Les agents de police travaillent 8 heures consécutives :

- ✓ $agent_6 + agent_1 \leq 9.$
- ✓ $agent_1 + agent_2 \leq 21.$
- ✓ $agent_2 + agent_3 \leq 25.$
- ✓ $agent_3 + agent_4 \leq 16.$
- ✓ $agent_4 + agent_5 \leq 30.$
- ✓ $agent_5 + agent_6 \leq 12.$

- **Résolution :**

Code :

```
var agent{i in 1..6} >= 0;

minimize obj:  sum {i in 1..6} agent[i];

R1: agent[1] + agent[6] >= 9;
R2: agent[2] + agent[1] >= 21;
R3: agent[3] + agent[2] >= 25;
R4: agent[4] + agent[3] >= 16;
R5: agent[5] + agent[4] >= 30;
R6: agent[6] + agent[5] >= 12;
```

- **Solution optimale : 64,** le nombre d'agents minimum s'élève à 64, avec :
  - 9 agents débutant en première période.
  - 12 agents débutant en deuxième période.
  - 13 agents débutant en troisième période.
  - 18 agents débutant en quatrième période.
  - 12 agents débutant en cinquième période.
  - 0 agent débutant en sixième période.

OPTIMAL : 64

Summary Logs Output Varia

Name	Value
agent[1]	9
agent[2]	12
agent[3]	13
agent[4]	18
agent[5]	12
agent[6]	0

Autre code possible :

```
set PERIODE;
param Agent_Periode {i in PERIODE} > 0;

var agent{i in PERIODE} >= 0;

minimize obj:  sum {i in PERIODE} agent[i];

R1: agent[1] + agent[6] >= Agent_Periode[1];
R2: agent[2] + agent[1] >= Agent_Periode[2];
R3: agent[3] + agent[2] >= Agent_Periode[3];
R4: agent[4] + agent[3] >= Agent_Periode[4];
R5: agent[5] + agent[4] >= Agent_Periode[5];
R6: agent[6] + agent[5] >= Agent_Periode[6];

data;
set PERIODE:= 1 2 3 4 5 6;

param Agent_Periode :=
1 9
2 21
3 25
4 16
5 30
6 12;
end;
```

Exercice 4 :

- **Identification des variables de décision :**

Définissons les variables clés de ce problème.

Soient : x_1 **:** quantité du mélange 1.

x_2 **:** quantité du mélange 2.

x_3 **:** quantité du mélange 3.

x_4 **:** quantité du mélange 4.

Formulation d'une fonction objective :

Le fournisseur vient juste de recevoir une commande d'un éleveur de poulets qui voudrait **4** tonnes d'un mélange. Le coût est donné par la formule :

$$Z = 0{,}5 * x_1 + 0{,}6 * x_2 + 0{,}64 * x_3 + 0{,}3 * x_4 .$$

Le but est de minimiser le coût annuel, i.e. la fonction objective.

- **Formulation des contraintes :**
- ✓ Le mélange contient au moins **20 %** de maïs : $\boldsymbol{a + b + c + d \leq 100000}$.
- ✓ Le mélange contient au moins **15 %** de graines :$\boldsymbol{b + d \leq 50000}$.

- ✓ Le mélange contient au moins **25 %** de minéraux : $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{e} \geq \mathbf{50000}$.
- ✓ On ne peut obtenir une quantité négative d'un mélange, les variables doivent être positives : $x_1 \geq \mathbf{0}, x_2 \geq \mathbf{0},\ x_3 \geq \mathbf{0}, x_4 \geq \mathbf{0}$.

- **Résolution :**

Code :

```
var X1 >= 0;
var X2>= 0;
var X3>= 0;
var X4>= 0;

minimize obj: +0.5*X1 +0.6*X2 +0.64*X3 +0.3*X4 ;

R1: +0.03*X1+0.05*X2+0.2*X3+0.1*X4 >= 0.2*4000;
R2: +0.1*X1+0.3*X2+0.15*X3+0.1*X4 >=0.15*4000;
R3: +0.2*X1+0.15*X2+0.2*X3+0.3*X4 >=0.25*4000;
R4: X1+X2+X3+X4=4000;
```

- ➢ **Solution optimale :** **UNDEFINED**, ce programme linéaire ne peut avoir de solution, les contraintes se font un interblocage.

UNDEFINED SOLUTION

Summary Logs Output V

Name	Value
X1	0
X2	0
X3	0
X4	0

Exercice 5 :

- **Identification des variables de décision :**

Définissons les variables clés de ce problème.

Soient : $\mathbf{p_i}$ **:** production du mois *i*.

$\mathbf{r_i}$ **:** production restante du mois *i*.

- **Formulation d'une fonction objective :**

Le but est de minimiser le coût de production et stockage, donné par la formule :

$$Z = (\sum_{i=1}^{6} p_i * \text{coût [i]}) + 0{,}015 * \sum_{i=1}^{6} r_i * \text{coût [i]})$$

Avec : coût [i]: coût de production unitaire du mois *i*.

- **Formulation des contraintes :**

✓ La taille de l'entrepôt de Frigora permet de stocker un maximum de 6000 unités. Le service commercial désire avoir un minimum de 1500 unités en stock à la fin de chaque mois pour pouvoir réagir à des demandes imprévues : $\mathbf{1500 \leq \boldsymbol{r_i} \leq 6000}$.

✓ Frigora désire produire chaque mois un nombre d'unités au moins égal à la moitié de sa capacité de production : $\frac{\boldsymbol{capacite_i}}{\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{p_i} \leq \boldsymbol{capacite_i}$.

✓ $\mathbf{r}_i = \boldsymbol{r_{i-1}} + \boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{demande_i}$.

✓ $\boldsymbol{r_{i-1}} + \boldsymbol{p_i} \geq \boldsymbol{demande_i}$.

✓ Une production est un nombre positif : $\mathbf{r}_i \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{p_i} \geq \mathbf{0}$.

- **Résolution :**

Code :

```
set MOIS;

param Cout {MOIS} > 0;
param Demande {MOIS} > 0;
param Capacite {MOIS} > 0;

var p{i in MOIS} >= 0;
var r{i in MOIS} >= 0;
minimize obj:  (sum {i in MOIS} p[i] * Cout[i]) + (0.015* sum {i in MOIS} r[i] * Cout[i]);

R1: r[1]= 2750 + p[1] - Demande[1];
R2 {i in 2..6}: r[i] = r[i-1] + p[i] - Demande[i];
R3 {i in MOIS}: r[i] >= 1500;
R4 {i in MOIS}: r[i] <= 6000;
R5: 2750 + p[1] >= Demande[1];
R6 {i in 2..6}: r[i-1] + p[i] >= Demande[i];
R7 {i in MOIS}: p[i] <= Capacite[i];
R8 {i in MOIS}: p[i] >= Capacite[i]/2;
```

```
data;

set MOIS := 1 2 3 4 5 6;

param:   Cout  :=
1 240
2 250
3 265
4 285
5 280
6 285;

param:   Demande  :=
1 1000
2 4500
3 6000
4 5500
5 3500
6 4000;

param:   Capacite  :=
1 4000
2 3500
3 4000
4 4500
5 4000
6 3500;
end;
```

- **Solution optimale : 6294418.75**, le coût de production s'élèvera à 6294418.75, avec :
  - **Mois 1 :** une production de **4000** avec un reste de **5750**.
  - **Mois 2 :** une production de **3500** avec un reste de **4750**.
  - **Mois 3 :** une production de **4000** avec un reste de **2750**.
  - **Mois 4 :** une production de **4250** avec un reste de **1500**.
  - **Mois 5 :** une production de **4000** avec un reste de **2000**.
  - **Mois 6 :** une production de **3500** avec un reste de **1500**.

OPTIMAL : 6294418.75

Summary Logs Output

Name	Value
p[1]	4000
p[2]	3500
p[3]	4000
p[4]	4250
p[5]	4000
p[6]	3500
r[1]	5750
r[2]	4750
r[3]	2750
r[4]	1500
r[5]	2000
r[6]	1500