

Complexité TD4 : NP et réductions

Université d'Aix-Marseille, M1 Informatique

Année universitaire 2020–2021

1 Transversal et Zone-Vide

Dans ce problème, nous revenons sur le problème de décision appelé TRANSVERSAL dont la définition est donnée ci-dessous :

Problème : TRANSVERSAL

Données : Un graphe non-orienté sans boucle $G = (S, A)$, et un entier positif $k \leq |S|$.

Question : Existe-t-il un transversal de G de taille k ou moins ?

où un *transversal* de $G = (S, A)$ un graphe non-orienté, est un sous-ensemble S' de S tel que pour toute arête $\{x, y\} \in A$, alors $x \in S'$ ou $y \in S'$. En d'autres termes, un transversal est un sous-ensemble de sommets partageant au moins un sommet avec chaque arête du graphe.

Question 1.1. Démontrez que le problème TRANSVERSAL appartient à la classe **NP** en exhibant un algorithme pour modèle de calcul non-déterministe (pseudo-C non-déterministe par exemple) qui le résout et dont la complexité est polynomiale. Démontrez que le problème TRANSVERSAL appartient à la classe **NP** en exhibant un certificat polynomial. (Vous pouvez utiliser la représentation de graphes en matrice d'adjacence.)

Question 1.2. En supposant que vous disposez d'un algorithme appelé ALGO-TRANS, de résolution pour ce problème, on cherche à exploiter cet algorithme pour résoudre un autre problème de décision, le problème ZONE-VIDE (une zone vide est un sous-graphe sans arête).

Problème : ZONE-VIDE

Données : Un graphe non-orienté sans boucle $G = (S, A)$, et un entier positif $k \leq |S|$.

Question : Existe-t-il dans G une zone vide de taille k ou plus ?

Notons tout d'abord qu'en théorie des graphes, on emploie le terme *stable* plutôt que "zone vide". Montrez comment on peut résoudre le problème ZONE-VIDE en exploitant l'algorithme ALGO-TRANS. Pour cela, vous essayerez de transformer les données de ZONE-VIDE en données de TRANSVERSAL. Évaluez la complexité de résolution de ZONE-VIDE par cette approche, en supposant que la complexité de ALGO-TRANS est $\Theta(f(n))$.

Question 1.3. En supposant que vous disposez d'un algorithme de résolution de ZONE-VIDE appelé ALGO-ZONE-VIDE dont la complexité serait $\Theta(g(n))$, montrez comment on peut résoudre le problème TRANSVERSAL en l'exploitant. Évaluez la complexité de résolution de TRANSVERSAL par cette approche.

Question 1.4. Quelle serait la complexité de résolution de ZONE-VIDE en utilisant le procédé développé dans la question 1.2 en supposant que la complexité de l'algorithme ALGO-TRANS soit maintenant polynomiale ?

2 Partition et Somme

Question 2.1. On considère le problème suivant :

Nom : PARTITION

Donnée : Un ensemble fini A , une fonction de taille $t: A \rightarrow \mathbb{N}$

Question : A possède-t-il un sous-ensemble B dont la somme de la taille de ses éléments est exactement égale à la somme de la taille des éléments de A qui ne sont pas dans B ?

Démontrez que le problème PARTITION appartient à la classe **NP** en exhibant un algorithme pour modèle de calcul non-déterministe (pseudo-C non-déterministe par exemple) qui le résout et dont la complexité est polynomiale. Démontrez que le problème PARTITION appartient à la classe **NP** en exhibant un certificat polynomial.

Question 2.2. On considère le problème suivant :

Nom : SOMME

Donnée : Un ensemble fini A , une fonction de taille $t: A \rightarrow \mathbb{N}$ et un entier k

Question : A possède-t-il un sous-ensemble B dont la somme de la taille de ses éléments vaut k ?

Mêmes questions que dans le problème 1 avec les problèmes PARTITION et SOMME et des algorithmes respectivement appelés ALGO-PARTITION et ALGO-SOMME