

Interpolacja Lagrange'a

- wielomian interpolujący W konstruowany jest w następujący sposób:

$$W(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + \dots + y_n \cdot L_n(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- łatwo zauważyć, że każdy z wielomianów L „zeruje” się w każdym innym węźle, niż ten, któremu ów wielomian odpowiada

- z kolei w węźle mu odpowiadającym każdy wielomian L przyjmuje wartość jedynki

- z powyższych wynika, że wielomian W interpoluje żądane punkty

implementacja

zainicjuj wielomian W jako 0

dla każdego węzła

zainicjuj wielomian L_i jako 1

zainicjuj mianownik jako 1

dla każdego węzła

jeżeli nie i'ty węzeł // $i \neq j$

*mianownik *= $(x_i - x_j)$*

*wielomian L_i *= jednomian $(x - x_j)$*

dodaj L_i do W

//dodawanie wielomianów

Interpolacja Newtona

- wielomian interpolujący W konstruuje się w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & & & \\ x_1 & y_1 & f(x_1; x_2) & & \\ x_2 & y_2 & f(x_1; x_3) & f(x_1; x_2; x_3) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & f(x_1; x_n) & f(x_1; x_2; x_n) & \dots & f(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{bmatrix} \quad \text{- tablica ilorazów różnicowych}$$

$$f(x_i; x_{i+1}, \dots, x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}) - f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i} \quad \text{- iloraz różnicowy}$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$W_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)\omega_0(x) + f(x_0; x_1; x_2)\omega_1(x) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)\omega_{n-1}(x)$$

- skonstruowany w ten sposób wielomian równoważny jest wielomianowi interpolującemu Newtona

implementacja

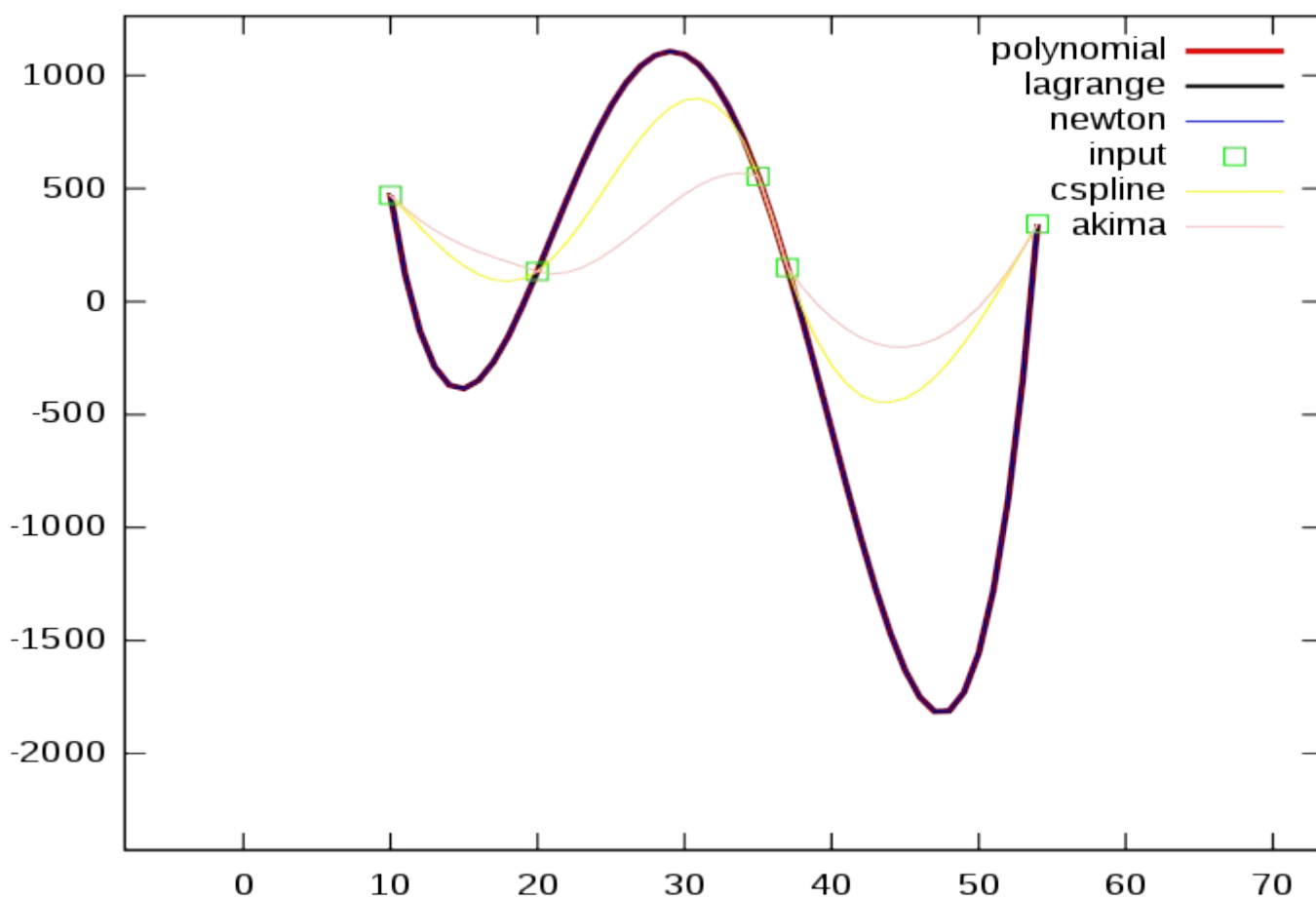
wypełnienie pierwszej kolumny ilorazów różnicowych

dla każdego wiersza począwszy od drugiego

dla każdej kolumny począwszy od drugiej

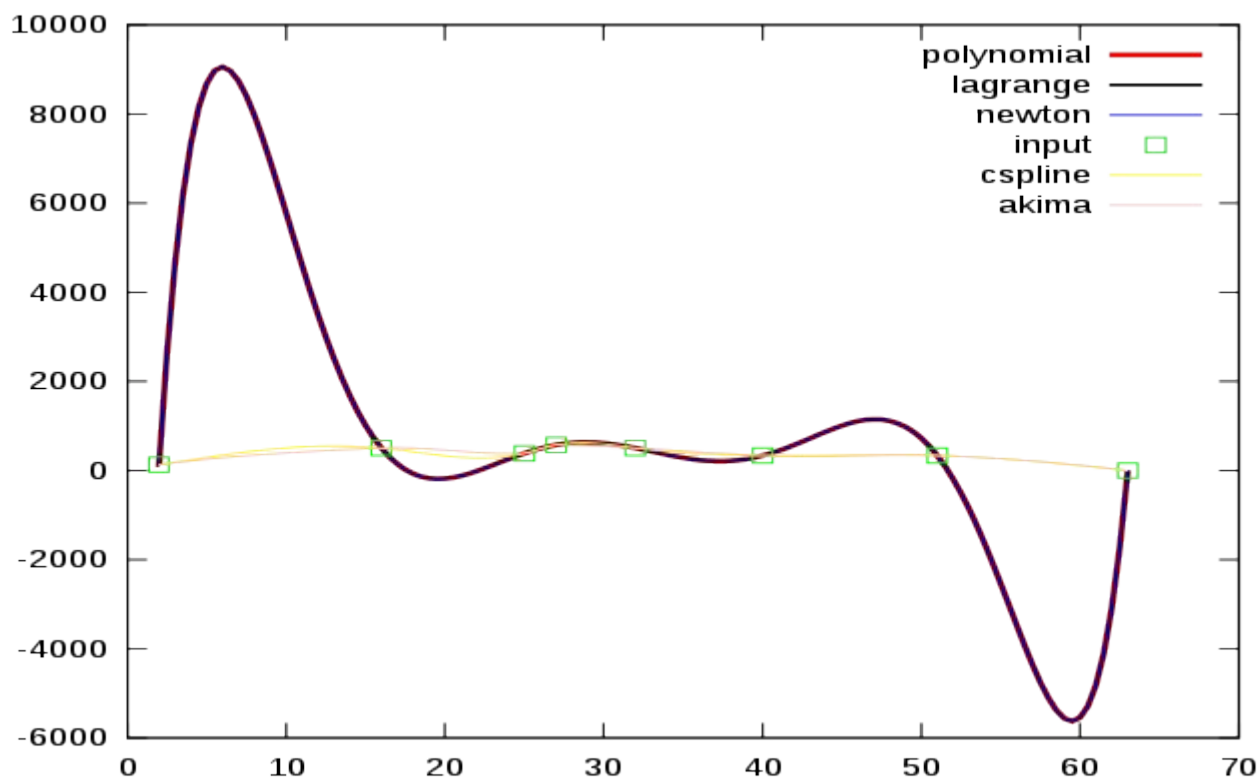
oblicz kolejny iloraz w tablicy //miejsce wyznacza aktualna kolumna i wiersz
 zainicjalizuj wielomian omega jako 1
 zainicjalizuj wielomian wynikowy W
 dla każdego węzła x_i
 skopiuj wielomian omega
 wynik wymnóż przez odpowiedni iloraz różnicowy z tablicy
 dodaj wynik do wielomianu wynikowego W
 wymnóż wielomian omega razy jednomian $(x-x_i)$

Wyniki

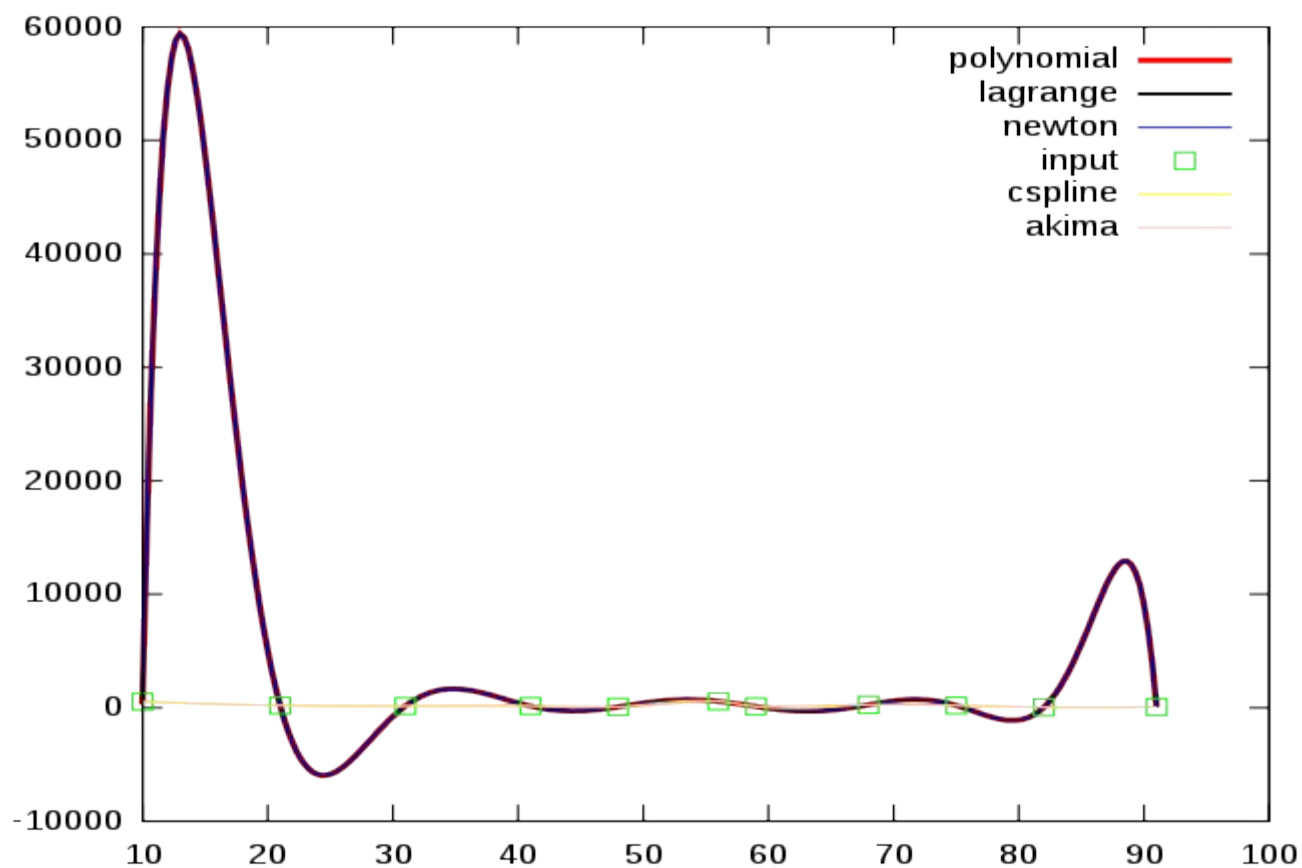


rys. A zestawienie dla pięciu węzłów

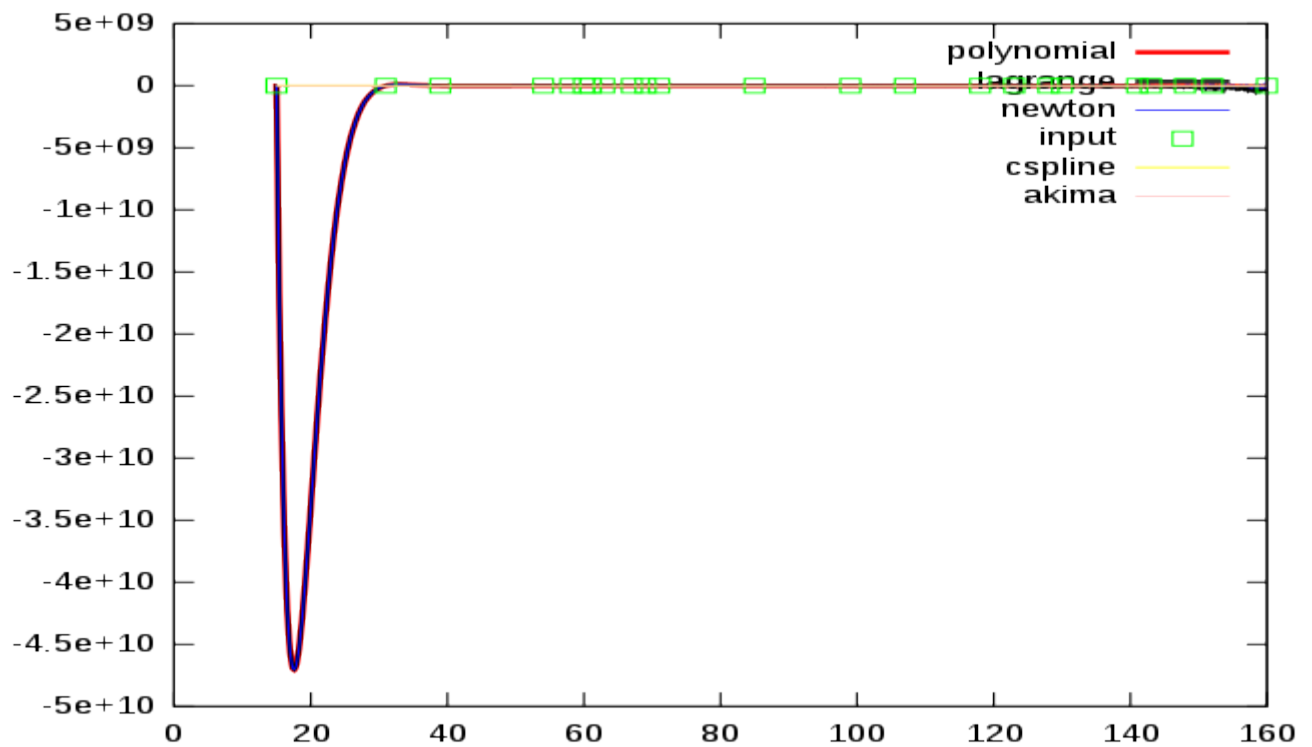
- można zaobserwować pokrycie się wykresów interpolacji wielomianowej GSL oraz zaimplementowanych metod Lagrange'a i Newtona
- nawet przy tylu węzłach można zaobserwować przewagę spline'ów nad wielomianami
- z kolei wśród spline'ów lepszymi właściwościami wykazuje się metoda akima



rys. B zestawienie dla siedmiu węzłów – pierwsze oznaki efektu rungego; znakomite właściwości spline'ów; interpolacje wielomianowe pokrywają się



rys. C zestawienie dla jedenastu węzłów – efekt rungego nabiera na sile; znakomite właściwości spline'ów; interpolacje wielomianowe pokrywają się



rys. C zestawienie dla dwudziestu trzech węzłów – efekt rungego; znakomite właściwości spline'ów; interpolacje wielomianowe pokrywają się

- interpolacja wielomianowa wykazuje tragiczne właściwość
- generowane punkty są niemal równoodległe, co powoduje tak drastyczne skutki efektu rungego
- powyżej trzydziestu węzłów interpolacja wielomianowe nie pokrywają się – prawdopodobnie błędy numeryczne w 'moich' implementacjach przyrastają szybciej

Czasy

GSL polynomial inicjalizacja zajęła średnio 13.900000 usec
Odchylenie standardowe 9.170605 usec

GSL cspline inicjalizacja zajęła średnio 6.000000 usec
Odchylenie standardowe 4.447221 usec

GSL akima inicjalizacja zajęła średnio 4.900000 usec
Odchylenie standardowe 1.852926 usec

Mojej met. Lagrange'a inicjalizacja zajęła średnio 651.900000 usec
Odchylenie standardowe 56.159396 usec

Mojej met. Newton'a inicjalizacja zajęła średnio 64.500000 usec
Odchylenie standardowe 12.039288 usec

GSL polynomial ewaluacja zajęła średnio 213.300000 usec
Odchylenie standardowe 106.334953 usec
GSL akima ewaluacja zajęła średnio 28.000000 usec
Odchylenie standardowe 2.449490 usec
GSL cspline ewaluacja zajęła średnio 63.000000 usec
Odchylenie standardowe 8.178563 usec
Mojej met. Lagrange'a ewaluacja zajęła średnio 6259.000000 usec
Odchylenie standardowe 94.881212 usec
Mojej met. Newton'a ewaluacja zajęła średnio 6231.000000 usec
Odchylenie standardowe 82.280010 usec

- implementacja interpolacji wielomianowej w bibliotece GSL jest wysokiej jakości
- interpolacja spline'ami jest o wiele szybsza niż wielomianowa