EXPOSÉ VIII

GROUPES DIAGONALISABLES

par A. Grothendieck

1. Bidualité

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie, que nous identifions comme d'habitude à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}} = \mathbf{Hom}(\mathscr{C}, (\mathbf{Ens}))$ (cf. Exp. I). Soit I un foncteur-groupe commutatif, i.e. un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ muni d'une structure de groupe commutative (cf. I, 2.1). [1] Pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$, l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X}, \mathrm{I})$ est muni d'une structure de groupe commutative, induite par celle de I. Pour tout groupe G dans $\widehat{\mathscr{C}}$, soit 1

$$\mathrm{D}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{I})$$

le sous-objet de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{I})$ défini, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, par :

$$\mathrm{D}(\mathrm{G})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}, \mathrm{I}_{\mathrm{S}}), \tag{x}$$

où $\mathrm{G}_{\mathrm{S}} = \mathrm{G} \times \mathrm{S}$ et $\mathrm{I}_{\mathrm{S}} = \mathrm{I} \times \mathrm{S}$ sont considérés comme des S-groupes, i.e. des groupes dans $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathrm{S}}$. Alors, D(G) est un sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{I})$. De cette façon on obtient un foncteur contravariant D de la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes dans la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes commutatifs.

Le deuxième membre de (x) peut aussi s'interpréter comme le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathrm{G} \times \mathrm{S}, \mathrm{I})$ formé des morphismes $\mathrm{G} \times \mathrm{S} \to \mathrm{I}$ qui sont « *multiplicatifs par rapport au premier argument* G ». D'ailleurs, les formules précédentes valent plus généralement lorsque S est un objet quelconque de $\widehat{\mathscr{C}}$, ne provenant pas nécessairement de $\mathscr{C}$.

Si maintenant on prend pour S un groupe dans $\widehat{\mathscr{C}}$, que nous noterons G', alors dans le premier membre $\mathrm{Hom}(\mathrm{G}', \mathrm{D}(\mathrm{G}))$ de (x), on peut distinguer le sous-ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}', \mathrm{D}(\mathrm{G}))$ formé des morphismes qui respectent les structures de groupe de G' 2
et D(G). Il correspond alors au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}', \mathrm{I})$ formé des morphismes qui sont multiplicatifs par rapport au premier *et* par rapport au deuxième argument,

---

[0] version 1.1 du 8 novembre 2009 : ajouts dans 1.2, 1.4, 1.7, 3.1, 3.4, 4.5.1, 6.4, 6.8 – 1.5.1 et section 7 à revoir

[1] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

— qu'on pourra appeler morphismes bilinéaires de $G \times G'$ dans I, ou accouplements de G et G' à valeurs dans I. On trouve ainsi

$$\text{(xx)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(G', D(G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{bil.}}(G \times G', I),$$

qui est un isomorphisme fonctoriel en le couple (G, G'). Comme le deuxième membre est symétrique en G et G', on en déduit une bijection fonctorielle :

$$\text{(xxx)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(G', D(G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(G, D(G')).$$

En d'autres termes, « il revient au même » de se donner un homomorphisme de groupes $G' \to D(G)$, ou un homomorphisme de groupes $G \to D(G')$, l'un et l'autre se ramenant en effet à la donnée d'un accouplement $G \times G' \to I$.

Appliquons ceci au cas où $G' = D(G)$, et à l'homomorphisme identique $G' \to D(G)$, on trouve alors un *homomorphisme canonique*

$$\text{(xxxx)} \qquad G \longrightarrow D(D(G)).$$

Définition 1.0. — [2] On dira que G est *réflexif* (relativement à I) si l'homomorphisme précédent est un isomorphisme. On notera que cela implique que G est commutatif.

On voit ainsi que :

Proposition 1.0.1. — *Le foncteur* D *induit une anti-équivalence de la catégorie des* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes réflexifs avec elle-même.*

En particulier, si G, H sont deux groupes réflexifs, D induit un *isomorphisme* :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(D(H), D(G))$$

(il suffit même que H soit réflexif, comme on voit sur la formule (xxx)).

3 ***Définition 1.0.2***. — Comme d'habitude, nous dirons alors qu'un $\mathscr{C}$-groupe G est *réflexif*, s'il est réflexif en tant que $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe (sans nous préoccuper si D(G) est représentable ou non).

On obtient ainsi, par D, une anti-équivalence de la catégorie des $\mathscr{C}$-groupes réflexifs G tels que D(G) soit représentable, avec elle-même.

Remarque 1.0.3. — Signalons pour finir ces généralités, que la formation des duaux D(G) commute à l'extension de la base, qui transforme donc groupes réflexifs en groupes réflexifs.

Nous nous intéressons par la suite au cas où $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch})_{/S}$, catégorie des préschémas sur S, et $I = \mathbb{G}_{m,S}$, le « groupe multiplicatif sur S », cf. exposé I. Pour tout groupe ordinaire M, nous considérons le S-groupe M_S. On voit aussitôt que pour tout préschéma en groupes J sur S, on a un isomorphisme canonique (fonctoriel en M et J, et compatible avec l'extension de la base) :

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(M_S, J) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(M, J(S)).$$

[2] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.0, 1.0.1, … afin de mettre en évidence les définitions et énoncés qui s'y trouvent.

Appliquant ceci à $\mathrm{J} = \mathrm{I} = \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ et à un S' variable sur S, on trouve un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{D}(\mathrm{M}_\mathrm{S})(\mathrm{S}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{M}, \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')). \tag{1.0.4}$$

On retrouve donc le foncteur déjà considéré dans I, 4.4, aussi noté $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$, qui est représentable pour M commutatif, puisque

$$\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \mathrm{D}(\mathrm{M}_\mathrm{S}) = \mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_\mathrm{S}(\mathrm{M}),$$

où $\mathscr{O}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ désigne l'algèbre du groupe M à coefficients dans $\mathscr{O}_\mathrm{S}$. (Notons d'ailleurs dans le cas général que D(M) ne change pas si on remplace M par M rendu abélien, de sorte qu'on ne perd rien en supposant M commutatif).

Définition 1.1. — Un préschéma en groupes G sur S est dit *diagonalisable* s'il est 4
isomorphe à un schéma de la forme $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \mathrm{D}(\mathrm{M}_\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{M}_\mathrm{S}, \mathbb{G}_m)$ pour un groupe commutatif M convenable.

On dit que G est *localement diagonalisable*, si tout point de S admet un voisinage ouvert U, tel que $\mathrm{G}|_\mathrm{U}$ soit diagonalisable.

Théorème 1.2. — *Soit* Γ *un schéma en groupes commutatifs constant sur* S*, i.e. isomorphe à un schéma en groupes de la forme* M_S*, où* M *est un groupe commutatif ordinaire. Alors* Γ *est réflexif, i.e. l'homomorphisme canonique*

$$\Gamma \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{D}(\Gamma))$$

est un isomorphisme. [(3)] *Le groupe diagonalisable* $\mathrm{D}(\mathrm{M}_\mathrm{S})$ *est donc aussi réflexif.*

Compte tenu des définitions, cela résulte de l'énoncé suivant (qu'on appliquera à un préschéma S' sur S) :

Corollaire 1.3. — *Soit* $\mathrm{G} = \mathrm{D}(\mathrm{M}_\mathrm{S})$*. Alors tout homomorphisme de* S*-groupes*

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$$

est défini par une section uniquement déterminée de M_S *sur* S*, i.e. par une application localement constante, uniquement déterminée, de* S *dans* M.

Démonstration. Comme par définition on a

$$\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} = \mathrm{GL}(1)_\mathrm{S} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathscr{O}_\mathrm{S}),$$

on voit que la donnée d'un homomorphisme de groupes $\mathrm{G} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ équivaut à la donnée sur $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ d'une structure de G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module, compatible avec la structure de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module naturelle sur $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ (cf. I, 4.7). Par I, 4.7.3, cela revient aussi à la donnée d'une *graduation de type* M sur $\mathscr{O}_\mathrm{S}$, i.e. d'une décomposition de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ en somme directe de mo- 5
dules $\mathscr{L}_m$ ($m \in \mathrm{M}$). Or il est bien connu qu'un facteur direct d'un module localement libre de type fini est localement libre de type fini, donc chaque $\mathscr{L}_m$ est, au voisinage de chaque point de S, soit nul soit libre de rang 1, et dans ce cas identique à $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ dans ce voisinage. Soit S_m l'ouvert de S formé des points où c'est cette seconde alternative qui se produit. Exprimant que $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ est la somme directe des $\mathscr{L}_m$, on voit que la réunion des S_m est S, et que les S_m sont deux à deux disjoints. Donc la donnée d'un

(3) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

homomorphisme de groupes $G \to \mathbb{G}_{m,S}$ équivaut à la donnée d'une décomposition de S comme réunion d'ouverts S_m ($m \in M$) deux à deux disjoints, i.e. à la donnée d'une application localement constante de S dans M. Cela établit 1.3 donc 1.2.

Corollaire 1.4. — *Un groupe diagonalisable est réflexif ; il en est donc de même d'un groupe localement diagonalisable. Si* M, N *sont deux groupes commutatifs ordinaires, l'homomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(M_S, N_S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(D(N_S), D(M_S))$$

est bijectif.

[(4)] L'isomorphisme précédent étant compatible à l'extension de la base, on en déduit un isomorphisme de S-foncteurs en groupes :

$$(1) \qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(M_S, N_S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(D(N_S), D(M_S)) \ .$$

Pour tout S-préschéma T, on a

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(M_S, N_S)(T) = \mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(M, \Gamma(N_T/T)),$$

et, d'après I 1.8, $\Gamma(N_T/T)$ est le groupe abélien des applications localement constantes $T \to N$. D'autre part, soit $\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(M, N)_S$ le S-groupe constant associé au groupe abélien ordinaire $\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(M, N)$. On a un homomorphisme évident de S-foncteurs en groupes commutatifs :

$$(2) \qquad \mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(M, N)_S \xrightarrow{\theta} \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(M_S, N_S),$$

qui est toujours un monomorphisme. De plus, c'est un *isomorphisme* si M est *de type fini.* [(5)]

On déduit de ce qui précède le point (a) du corollaire suivant ; le point (b) en découle d'après les résultats de descente « rappelés » en 1.7. [(6)]

6 ***Corollaire 1.5***. — a) *Soient* M, N *deux groupes commutatifs ordinaires,* M de type fini*, alors on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(M, N)_S \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(D(N_S), D(M_S)) \ ;$$

par conséquent $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(D(N_S), D(M_S))$ *est* représentable.

---

(4)N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(5)N.D.E. : En effet, si l'on note F(M) (resp. G(M)) le membre de gauche (resp. de droite) de (2), et si $M = M_1 \oplus M_2$, on a un isomorphisme canonique $F(M) = F(M_1) \oplus F(M_2)$, et de même pour G. Ceci nous ramène à vérifier que θ est un isomorphisme lorsque $M = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, pour un entier $r \geqslant 0$. Dans ce cas, $F(M) = ({}_rN)_S$, où ${}_rN$ est le noyau de $r \cdot \mathrm{id}_N$, et, pour tout $T \to S$, l'homomorphisme

$$F(M)(T) = \Gamma({}_rN_T/T) \longrightarrow G(M)(T) = {}_r\Gamma(N_T/T)$$

est bijectif, d'où le résultat voulu.

(6)N.D.E. : L'original énoncait après 1.5 : « On en conclut plus généralement que si G, H sont localement diagonalisables, H étant *de type fini*, alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(G, H)$ est représentable ». On a inclus cette assertion dans l'énoncé de 1.5, et l'on a explicité sa démonstration en 1.7.

b) *Plus généralement, si* G, H *sont localement diagonalisables,* H *étant* de type fini*, alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ *est* représentable.

[(7)] On conclut de 1.5 :

Corollaire 1.6. — *Sous les conditions de* 1.5*, si* S *est* connexe*, on a*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{D_S(N)},\mathrm{D_S(M)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$$

et

$$\mathrm{Isom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{D_S(N)},\mathrm{D_S(M)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{M},\mathrm{N}).$$

1.7. Descente de la représentabilité. — [(8)] On « rappelle » dans ce paragraphe quelques résultats de descente, qui seront fréquemment utilisés dans la suite.

Scholie 1.7.1. — Soient S un préschéma et X, Y, T des S-préschémas. Si (T_i) est un recouvrement ouvert de T, et si l'on pose $\mathrm{T}_{ij} = \mathrm{T}_i \cap \mathrm{T}_j = \mathrm{T}_i \times_{\mathrm{T}} \mathrm{T}_j$ alors, comme la donnée d'un morphisme de T-préschémas $\mathrm{X_T} \to \mathrm{Y_T}$ est locale sur T, on a une suite exacte d'ensembles :

$$(1) \qquad \mathrm{Hom_T}(\mathrm{X_T},\mathrm{Y_T}) \longrightarrow \textstyle\prod_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}_i}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}_i},\mathrm{Y}_{\mathrm{T}_i}) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}_{ij}}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}_{ij}},\mathrm{Y}_{\mathrm{T}_{ij}})$$

i.e. $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est un S-foncteur *local*, c.-à-d., un faisceau sur $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ munie de la topologie de Zariski.

Plus généralement, d'après IV 4.5.13, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est un *faisceau* sur $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ pour toute topologie moins fine que la topologie canonique, par exemple pour la topologie (fpqc).

Si G, H sont des S-préschémas en groupes, on en déduit que le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est un *faisceau* pour la topologie (fpqc) (donc a fortiori un foncteur *local*).

Lemme 1.7.2. — [(9)] *Soit* F *un* S*-foncteur* local.

(i) *On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert* (S_i) *de* S *tel que la restriction* $\mathrm{F}_i = \mathrm{F} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$ *de* F *à chaque* S_i *soit* représentable *par un* S_i*-préschéma* X_i*. Alors* F *est* représentable *par un* S*-préschéma* X.

(ii) *On suppose que* F *est un* faisceau (fpqc) *et qu'il existe un morphisme fidèlement plat et quasi-compact* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *tel que la restriction* $\mathrm{F}' = \mathrm{F} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *de* F *soit* représentable *par un* S'*-préschéma* X'*. Alors* X' *est muni d'une* donnée de descente (cf. IV 2.1) *relativement à* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Si de plus cette donnée de descente est effective (*ce qui est le cas si* X' *est* affine sur S')*, alors* F *est* représentable *par un* S*-préschéma* X.

[(7)] N.D.E. : Il faudrait ajouter un énoncé 1.5.1 traitant le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$, considéré dans X 5.10 et 5.11 ...

[(8)] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, pour expliciter le caractère « local sur S » de la représentabilité de certains faisceaux sur S, utilisé maintes fois dans la suite (et de façon implicite dans l'original).

[(9)] N.D.E. : Voir aussi la remarque XI 3.4.

Démonstration. (i) Il résulte de l'hypothèse que $X_i \times_S S_j$ et $X_j \times_S S_i$ représentent tous les deux la restriction de F à $S_{ij} = S_i \times_S S_j$ donc, d'après le lemme de Yoneda, il existe un unique isomorphisme de S_{ij}-préschémas

$$c_{ji} : \quad X_i \times_S S_j \xrightarrow{\sim} X_j \times_S S_i \ ;$$

on a alors des isomorphimes de préschémas au-dessus de $S_{ijk} = S_i \times_S S_j \times S_k$:

$$\begin{tikzcd}
X_i \times_S S_j \times S_k \arrow[r, "c_{ji}\times \mathrm{id}_{S_k}"] \arrow[d, equal] & X_j \times_S S_i \times_S S_k \arrow[r, equal] & X_j \times_S S_k \times_S S_i \arrow[d, "c_{kj}\times \mathrm{id}_{S_i}"] \\
X_i \times_S S_k \times_S S_j \arrow[r, "c_{ki}\times \mathrm{id}_{S_j}"] & X_k \times_S S_i \times_S S_j \arrow[r, equal] & X_k \times_S S_j \times_S S_i
\end{tikzcd}$$

et comme tous ces objets représentent la restriction de F à S_{ijk}, ce diagramme est commutatif, i.e. les c_{ji} vérifient la relation de cocyle usuelle $c_{kj} \circ c_{ji} = c_{ki}$.

Il en résulte que les X_i se recollent en un S-préschéma X tel que $X \times_S S_i = X_i$ pour tout i. Pour tout Y au-dessus de S_i, on a donc

$$(*) \qquad F(Y) = F_i(Y) = \mathrm{Hom}_{S_i}(Y, X \times_S S_i) = \mathrm{Hom}_S(Y, X) = h_X(Y).$$

Puis, pour $Y \to S$ arbitraire, les $Y_i = Y \times_S S_i$ forment un recouvrement ouvert de Y ; posons $Y_{ij} = Y_i \times_Y Y_j = Y \times_S S_{ij}$. Comme F (resp. h_X) est un foncteur local par hypothèse (resp. puisque la topologie de Zariski est moins fine que la topologie canonique), alors F(Y) et $h_X(Y)$ s'identifie tous les deux, compte-tenu de $(*)$, au noyau de la double flèche :

$$\begin{tikzcd}
\prod_i F(Y_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & \prod_{i,j} F(Y_{ij}) \arrow[d, equal] \\
\prod_i h_X(Y_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j} h_X(Y_{ij}) .
\end{tikzcd}$$

Ceci prouve (i).

(ii) Il résulte de l'hypothèse que $F''_1 = F' \times_{S'} S''_1$ (où $S''_1 = S'' = S' \times_S S'$ considéré comme S'-préschéma via la 1ère projection) est représenté par $X''_1 = X' \times_{S'} S''_1$; de même, $F''_2 = F' \times_{S'} S''_2$ est représenté par $X''_2 = X' \times_{S'} S''_2$. Or $F''_1 = F \times_S S'' = F''_2$, donc il existe un (unique) S''-isomorphisme $c : X''_1 \xrightarrow{\sim} X''_2$; alors, si l'on note q_i (resp. p_{ji}) la projection de $S''' = S' \times_S S' \times_S S'$ sur le i-ème facteur (resp. sur les facteurs i et j), $X'''_i = X' \times_{S'} S'''_i$ (où $S'''_i = S'''$ considéré comme S'-préschéma via q_i), et $p^*_{ji}(c) : X'''_i \xrightarrow{\sim} X'''_j$ l'isomorphisme de S'''-préschemas déduit de c par changement de base, on obtient un diagramme d'isomorphismes de S'''-préschémas :

$$\begin{tikzcd}
X'''_1 \arrow[r, "p^*_{21}(c)"] \arrow[dr, "p^*_{31}(c)"'] & X'''_2 \arrow[d, "p^*_{32}(c)"] \\
 & X'''_3
\end{tikzcd}$$

et comme tous ces objets représentent la restriction de F à S''', ce diagramme est commutatif, i.e. on a la relation de cocyle usuelle $p_{32}^*(c) \circ p_{21}^*(c) = p_{31}^*(c)$, i.e. c est une donnée de descente sur X' relativement à $S' \to S$ (cf. IV 2.1).

Supposons de plus que cette donnée de descente soit *effective*, i.e. qu'il existe un S-préschéma X tel que $X' \simeq X \times_S S'$ (d'après SGA 1, VIII 2.1, ceci est le cas si X' est *affine sur* S' [(10)]). Alors, pour tout $Y \to S'$, on a

$$(**) \qquad F(Y) = F'(Y) = \mathrm{Hom}_{S'}(Y, X \times_S S') = \mathrm{Hom}_S(Y, X) = h_X(Y).$$

Puis, pour $Y \to S$ arbitraire, posons $Y' = Y \times_S S'$ et $Y'' = Y' \times_Y Y' \simeq Y \times_S S''$. Alors $Y' \to Y$ est, comme $S' \to S$, fidèlement plat et quasi-compact, donc un épimorphisme $\mathscr{M}$-effectif (où $\mathscr{M}$ = famille des morphismes fidèlement plats quasi-compacts), i.e. la relation d'équivalence

$$Y' \times_Y Y' \rightrightarrows Y'$$

est $\mathscr{M}$-effective et a pour quotient Y. Comme F (resp. h_X) est un faisceau (fpqc) par hypothèse (resp. puisque la topologie (fpqc) est moins fine que la topologie canonique), alors F(Y) et $h_X(Y)$ s'identifie tous les deux, compte-tenu de (∗∗), au noyau de la double flèche :

$$\begin{tikzcd} F(Y') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & F(Y' \times_Y Y') \arrow[d, equal] \\ h_X(Y') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & h_X(Y' \times_Y Y') . \end{tikzcd}$$

Ceci prouve (ii).

Corollaire 1.7.3. — *Soit* F *un* faisceau (fpqc) *sur* $(\mathbf{Sch})_{/S}$. *On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert* (S_i) *de* S *et pour chaque* i *un morphisme fidèlement plat et quasi-compact* $S'_i \to S_i$ *tel que la restriction* $F'_i = F \times_S S'_i$ *soit* représentable *par un* S'_i*-préschéma* X'_i affine sur S'_i. *Alors* F *est* représentable *par un* S*-préschéma* X affine sur S (*tel que* $X \times_S S'_i = X'_i$ *pour tout* i).

Si de plus chaque $X'_i \to S'_i$ *est une immersion fermée* (*resp. un morphisme fini étale*)*, il en est de même de* $X \to S$.

La première assertion découle de 1.7.2. Pour la seconde, il suffit de vérifier que chaque morphisme $X \times_S S_i \to S_i$ est une immersion fermée (resp. fini et étale), ce qui résulte de EGA IV_2, 2.7.1 (resp. et IV_4, 17.7.3).

Remarque 1.7.4. — L'assertion 1.5 (b) découle, comme annoncé, de 1.7.1 et 1.7.2 (i).

2. Propriétés schématiques des groupes diagonalisables

Elles sont résumées dans la

(10) N.D.E. : Pour un autre critère d'effectivité, voir plus loin X 5.4–5.6.

Proposition 2.1. — *Soient* S *un préschéma non vide,* M *un groupe commutatif ordinaire,* $G = D(M_S)$ *le* S*-groupe diagonalisable défini par* M*. On a ce qui suit :*

a) G *est fidèlement plat sur* S*, et affine sur* S (*a fortiori quasi-compact sur* S).

b) M *de type fini* $\Longleftrightarrow$ G *de type fini sur* S $\Longleftrightarrow$ G *de présentation finie sur* S.

c) M *fini* $\Longleftrightarrow$ G *fini sur* S $\Longleftrightarrow$ G *de type fini sur* S *et annulé par un entier* $n > 0$. *Alors* $\deg(G/S) = \mathrm{Card}(M)$.

7 c′) M *un groupe de torsion* $\Longleftrightarrow$ G *entier sur* S.

d) $M = 0 \Longleftrightarrow G =$ S*-groupe unité.*

e) M *de type fini, et l'ordre de son sous-groupe de torsion est premier aux caractéristiques résiduelles de* S $\Longleftrightarrow$ G *est lisse sur* S.

La vérification de a) à d) est triviale, et laissée au lecteur. Prouvons e). Si G est lisse sur S, il est localement de présentation finie sur S, donc de présentation finie sur S puisqu'il est affine sur S, donc M est de type fini. Donc on peut supposer déjà M de type fini, donc G de présentation finie sur S. Alors [(11)] G est lisse sur S si et seulement si ses fibres géométriques le sont, ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos k. Écrivant $M = T \times L$, avec T sous-groupe de torsion et L libre, $L \simeq \mathbb{Z}^r$, on aura $D(M) = D(T) \times D(L)$, où $D(L) \simeq \mathbb{G}_m^r$ est lisse sur k. Donc $G = D(M)$ est lisse sur k si et seulement si D(T) l'est, ce qui signifie, puisque D(T) est fini sur k de degré égal à l'ordre n de T, que $D(T)(k)$ a n éléments. Or T est isomorphe à une somme de groupes $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, n étant le produit des n_i, donc D(T) est produit des $D(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}) = \boldsymbol{\mu}_{n_i}$ (schéma en groupes des racines n_i-èmes de l'unité), donc

$$\mathrm{card}(D(T)(k)) = \prod_i \mathrm{card}\, \boldsymbol{\mu}_i(k)$$

où $\mathrm{card}\,\boldsymbol{\mu}_i(k) =$ (nombre des racines n_i-èmes de l'unité dans k) $\leqslant n_i$, l'égalité étant atteinte si et seulement si n_i est premier à la caractéristique p de k. Donc on a $\mathrm{card}(D(T)(k)) = n$ (où $n = \prod_i n_i$) si et seulement si tous les n_i sont premiers à p, i.e. si et seulement si n est premier à p. C.Q.F.D.

3. Propriétés d'exactitude du foncteur D_S

Théorème 3.1. — *Soient* S *un préschéma, et*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

8 *une suite exacte de groupes commutatifs ordinaires. Considérons la suite d'homomorphismes transposés :*

$$0 \longrightarrow D_S(M'') \xrightarrow{v^t} D_S(M) \xrightarrow{u^t} D_S(M') \longrightarrow 0.$$

(i) v^t *induit un isomorphisme de* $D_S(M'')$ *avec le noyau de* u^t*, et* u^t *est fidèlement plat et quasi-compact.*

[(11)] N.D.E. : (puisque G est plat sur S, d'après a))

(ii) [12] $\mathrm{D_S(M')}$ *représente le faisceau quotient* (fpqc) $\mathrm{D_S(M)/D_S(M'')}$.

Notons $\mathscr{M}$ la famille des morphismes fidèlement plats quasi-compacts. D'abord, (ii) découle de (i) (cf. IV, 4.6.5.1). En effet, la relation d'équivalence dans $\mathrm{D_S(M)}$ définie par u^t est la même que celle définie par le sous-groupe $\mathrm{Ker}(u^t) = \mathrm{D_S(M'')}$; comme $u^t \in \mathscr{M}$, cette relation d'équivalence est $\mathscr{M}$-effective (cf. IV, 3.3.2.1), et donc $\mathrm{D_S(M')}$ représente le faisceau quotient pour la topologie (fpqc) (cf. IV, 4.6.5).

La première assertion de (i) est une conséquence triviale de la définition des foncteurs $\mathrm{D_S}(-)$; plus généralement on aura pour toute suite exacte

$$\mathrm{M'} \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M''} \longrightarrow 0$$

(sans zéro à gauche), une suite transposée *exacte* :

$$0 \longrightarrow \mathrm{D_S(M'')} \longrightarrow \mathrm{D_S(M)} \longrightarrow \mathrm{D_S(M')}\ .$$

(Ceci est valable plus généralement dans le contexte du début du N° 1). D'autre part, comme $\mathrm{D_S(M)}$ et $\mathrm{D_S(M')}$ sont affines sur S, u^t est nécessairement un morphisme affine, a fortiori quasi-compact (ceci quel que soit l'homomorphisme $u : \mathrm{M'} \to \mathrm{M}$). La seconde assertion de (i) résultera donc du point a) dans le

Corollaire 3.2. — *Soient* S *un préschéma non vide,* $u : \mathrm{M'} \to \mathrm{M}$ *un homomorphisme de groupes commutatifs ordinaires,* $u^t : \mathrm{G} \to \mathrm{G'}$ *l'homomorphisme transposé. Alors :*

a) *Pour que u soit un monomorphisme, il faut et il suffit que* u^t *soit fidèlement plat.*

b) *Pour que u soit un épimorphisme, il faut et il suffit que* u^t *soit un monomorphisme* (*et alors* u^t *est même une immersion fermée*).

Pour prouver a), on note que si u est un monomorphisme, alors $\mathscr{O}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ est un module sur $\mathscr{O}_\mathrm{S}(\mathrm{M'})$ admettant une base non vide (savoir, le système de sections défini par 9
n'importe quel système de représentants de M modulo M′), a fortiori il est fidèlement plat. Réciproquement, s'il en est ainsi, alors $u^t : \mathscr{O}_\mathrm{S}(\mathrm{M'}) \to \mathscr{O}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ est injectif, ce qui (pour $\mathrm{S} \neq \varnothing$) implique que $u : \mathrm{M'} \to \mathrm{M}$ est injectif.

Pour prouver b), on note que si u est un épimorphisme, alors $\mathscr{O}_\mathrm{S}(\mathrm{M'}) \to \mathscr{O}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ est surjectif, donc u^t est une immersion fermée et a fortiori un monomorphisme. Inversement, s'il en est ainsi, alors $\mathrm{Ker}\, u^t =$ groupe unité, or posant $\mathrm{M''} = \mathrm{Coker}\, u$, on a vu que $\mathrm{Ker}\, u^t \simeq \mathrm{D_S(M'')}$, donc par 2.1 d) on a $\mathrm{M''} = 0$ donc u est un épimorphisme.

On conclut de 3.1 de la façon habituelle :

Corollaire 3.3. — *Soit* $\mathrm{M'} \xrightarrow{u} \mathrm{M} \xrightarrow{v} \mathrm{M''}$ *une suite exacte de groupes commutatifs ordinaires, considérons la suite transposée*

$$\mathrm{G''} \xrightarrow{v^t} \mathrm{G} \xrightarrow{u^t} \mathrm{G'}.$$

Alors v^t *induit un morphisme fidèlement plat et quasi-compact de* $\mathrm{G''}$ *dans* $\mathrm{Ker}\, u^t$, *et ce dernier est un groupe diagonalisable isomorphe à* $\mathrm{D_S}(v(\mathrm{M})) = \mathrm{D_S}(\mathrm{Coker}\, u)$.

[12] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit, et l'on a détaillé la démonstration en conséquence.

Corollaire 3.4. — *Soient* S *un préschéma,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de* S-*préschémas en groupes localement diagonalisables, avec* H de type fini *sur* S. *Posons* $\mathrm{G}' = \mathrm{Ker}\, u$. *Alors :*

a) G′ *est localement diagonalisable, il est de type fini sur* S *si* G *l'est.*

b) *Le quotient* G/G′ *« existe », de façon plus précise la relation d'équivalence définie par* G′ *dans* G *est* $\mathscr{M}$*-effective* (*où* $\mathscr{M}$ = *ensemble des morphismes fidèlement plats quasi-compacts, cf.* IV, 3.4). *De plus* G/G′ *est localement diagonalisable, de type fini sur* S.

c) *L'homomorphisme* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *se factorise de façon unique en*

$$\mathrm{G} \xrightarrow{\ v\ } \mathrm{G}/\mathrm{G}' \xrightarrow{\ w\ } \mathrm{H},$$

10 *où* v *est l'homomorphisme canonique* (*donc* v *est fidèlement plat et quasi-compact*). *De plus* w *est une immersion fermée, et a fortiori un monomorphisme.*

Enfin, le quotient $\mathrm{H}' = \mathrm{H}/\mathrm{Im}\, w = \mathrm{Coker}\, w = \mathrm{Coker}\, u$ *existe ; de façon précise la relation d'équivalence définie par* G/G′ *dans* H *est* $\mathscr{M}$*-effective, et* H′ *est de type fini sur* S.

La première assertion de c) est conséquence de b), par définition du quotient G/G′ (cf. IV, 3.2.3). [13] Montrons que le faisceau (fpqc) quotient $\widetilde{\mathrm{G}}/\widetilde{\mathrm{G}'}$ est représentable. Ceci se vérifie localement sur S, de même que toutes les autres assertions ; on peut donc supposer G et H diagonalisables, de la forme $\mathrm{D_S(M)}$ et $\mathrm{D_S(N)}$.

Comme H est de type fini sur S, alors N est de type fini, d'après 2.1 b), donc, d'après 1.5, u est défini par un homomorphisme $u' : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$. Alors, en vertu de 3.1 et 3.2, G′ est isomorphe à $\mathrm{D_S}(\mathrm{Coker}\, u')$ et $\widetilde{\mathrm{G}}/\widetilde{\mathrm{G}'}$ est représentable par $\mathrm{D_S}(\mathrm{Im}\, u')$; de plus, considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, u' \longrightarrow \mathrm{N} \xrightarrow{\ w'\ } \mathrm{Im}\, u' \longrightarrow 0\,,$$

on obtient que w est une immersion fermée, et que le quotient $\mathrm{H}' = \mathrm{H}/\mathrm{Im}\, w$ est $\mathrm{D_S}(\mathrm{Ker}\, u')$; celui-ci est de type fini sur S puisque N, et donc $\mathrm{Ker}\, u'$, est de type fini.

Remarques. — Le résultat d'existence de quotients 3.4 sera substantiellement généralisé au N°5.

D'autre part, on notera que dans le présent N° et le précédent, l'hypothèse $\mathrm{S} \neq \varnothing$ n'est intervenue que pour assurer la validité de certaines réciproques, permettant de déduire de certaines hypothèses sur des S-groupes diagonalisables des propriétés pour les groupes ordinaires correspondants. Les résultats en sens « direct » sont valables sans restriction sur S, et les démonstrations données ici s'appliquent dans le cas général.

Corollaire 3.5. — *Soit* G *un préschéma en groupes diagonalisable sur* S, *et soit* n *un entier* $\neq 0$. *Alors le sous-groupe* ${}_n\mathrm{G}$ *de* G, *noyau de l'homomorphisme* $n \cdot \mathrm{id_G} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, *est entier sur* S, *et fini sur* S *si* G *est de type fini sur* S.

[13] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

En effet, si $G = D_S(M)$, alors ${}_nG = D_S(M/nM)$ en vertu de 3.1, et on conclut par 2.1 b), c), c′).

4. Torseurs sous un groupe diagonalisable

11

Soient S un préschéma, et $G = D_S(M)$ un groupe diagonalisable sur S. Nous nous proposons de déterminer les G-*torseurs* (ou G-*fibrés principaux homogènes*) sur S, au sens de la « topologie fidèlement plate quasi-compacte », cf. Exp. IV, 5.1. Rappelons qu'un préschéma P sur S, à groupe d'opérateurs G, est dit *un torseur* ou *principal homogène* si tout point de S admet un voisinage ouvert U et un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $S' \to U$, tel que $P' = P \times_S S'$ soit un fibré à opérateurs isomorphe à $G' = G \times_S S'$ (opérant sur lui-même par translations à droite). Comme G est affine sur S, il en résulte par SGA 1, VIII 5.6 que P *est nécessairement affine sur* S. Notons aussi que puisque G est lui-même fidèlement plat et quasi-compact sur S, alors P est principal homogène sous G si et seulement si il est « formellement principal homogène », et s'il est de plus fidèlement plat et quasi-compact sur S (cf. IV, 5.1.6).

Rappelons d'autre part (Exp. I, 4.7.3) que la donnée d'un S-préschéma P *affine sur* S à groupe d'opérateurs $G = D_S(M)$ revient à la donnée d'une algèbre quasi-cohérente commutative *graduée de type* M sur S, i.e. d'une algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}$ sur S, munie d'une décomposition en somme directe (en tant que module) :

$$\mathscr{A} = \coprod_{m \in M} \mathscr{A}_m,$$

avec

$$\mathscr{A}_m \cdot \mathscr{A}_{m'} \subseteq \mathscr{A}_{m+m'} \qquad \text{pour} \quad m, m' \in M.$$

Ceci posé, la réponse au problème posé plus haut est donnée par la

Proposition 4.1. — *Pour que le préschéma* P *à groupe d'opérateurs* $G = D_S(M)$*, défini par l'algèbre* $\mathscr{A}$ *graduée de type* M*, soit un fibré principal homogène sous* G*, il faut et il suffit que* $\mathscr{A}$ *satisfasse les conditions suivantes :*

a) *Pour tout* $m \in M$*,* $\mathscr{A}_m$ *est un module inversible sur* S.

b) *Pour* m, $m' \in M$*, l'homomorphisme* 12

$$\mathscr{A}_m \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}_{m'} \longrightarrow \mathscr{A}_{m+m'}$$

induit par la multiplication dans $\mathscr{A}$*, est un isomorphisme.*

La nécessité des conditions est immédiate par descente, car elles sont vérifiées dans le cas où P est le fibré principal homogène trivial, i.e. $\mathscr{A} = \mathscr{O}_S(M)$. Pour la suffisance, on note que a) implique déjà que P est fidèlement plat sur S, il est de toutes façons quasi-compact sur S (étant affine sur S), donc il reste à vérifier qu'il est formellement principal homogène sous G, i.e. que l'homomorphisme bien connu

$$P \underset{S}{\times} G \longrightarrow P \underset{S}{\times} P$$

est un isomorphisme. Or sur les algèbres affines, cet homomorphisme s'explicite comme l'homomorphisme

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}(M) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{O}_S(M)$$

qui en bidegré (m,n) (où $m,n \in \mathrm{M}$) est donné par

$$x_m \otimes y_n \mapsto x_m y_n \otimes e_n.$$

Du point de vue degrés, cet homomorphisme est compatible avec l'homomorphisme $\mathrm{M}\times\mathrm{M} \to \mathrm{M}\times\mathrm{M}$ donné par

$$(m,n) \longmapsto (m+n,n),$$

qui est un isomorphisme. Cela montre que b) exprime précisément (indépendamment de a)) que P est formellement principal homogène, et établit 4.1.

Notons aussi qu'on obtient, par descente fidèlement plate :

Corollaire 4.2. — *Les conditions de* 4.1 *impliquent que l'homomorphisme*

$$\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathscr{A}_0$$

est un isomorphisme.

13 Si par exemple $\mathrm{M} = \mathbb{Z}$, alors sous les conditions de 4.1 on voit que $\mathscr{A}$ est essentiellement connu quand on connaît $\mathscr{A}_1 = \mathscr{L}$, savoir

$$\mathscr{A} \simeq \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n}$$

(isomorphisme d'algèbres graduées). On retrouve ainsi le résultat bien connu :

Corollaire 4.3. — *Il y a une équivalence entre la catégorie des fibrés principaux homogènes* P *sur* S *de groupe* $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$*, et la catégorie des modules inversibles* $\mathscr{L}$ *sur* S (*en prenant comme morphismes pour définir l'une et l'autre catégorie, les isomorphismes pour les structures entrant en jeu*)*. On obtient deux foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre en associant à tout* P *le composant de degré* 1 *de son algèbre affine* $\mathbb{Z}$*-graduée, et en associant à tout* $\mathscr{L}$ *le spectre de l'algèbre* $\mathbb{Z}$*-graduée* $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n}$.

En particulier :

Corollaire 4.4. — *Le groupe des classes de fibrés principaux homogènes sur* S *de groupe* $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$*, est isomorphe au groupe* Pic(S) *des classes de modules inversibles sur* S*, i.e. à* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{\times})$.

Compte tenu que $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est le schéma des automorphismes du module $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, on voit que 4.4 est équivalent à l'énoncé suivant, qui est une des variantes du « théorème 90 » de Hilbert.

Corollaire 4.5. — *Tout fibré principal homogène sur* S *de groupe* $\mathbb{G}_m$ *est localement trivial* (*au sens de la topologie de Zariski*).

Remarque 4.5.1. — On notera que l'énoncé précédent n'est plus vrai en général pour un groupe tel que $\boldsymbol{\mu}_n$, ou pour une « forme tordue » de $\mathbb{G}_m$; par exemple l'unique forme tordue de $\mathbb{G}_m$ sur le corps $\mathbb{R}$ des réels donne un groupe de 1-cohomologie égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

[14] En effet, soit $\mathbb{S}^1$ le noyau du morphisme de norme $\mathrm{N} : \prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$; c'est une $\mathbb{C}/\mathbb{R}$-forme tordue de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$. L'équation $\mathrm{N}(z) = -1$ dans $\prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})$ définit un $\mathbb{S}^1$-torseur X sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{R})$, localement trivial pour la topologie étale, mais non trivial puisque $\mathrm{X}(\mathbb{R}) = \varnothing$. Montrons que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a une suite exacte de $\mathbb{R}$-groupes algébriques commutatifs lisses :

$$1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \longrightarrow \prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \longrightarrow 1$$

qui donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie étale (ou de cohomologie galoisienne) :

$$0 \longrightarrow \mathbb{S}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\ \mathrm{N}\ } \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) \longrightarrow \cdots$$

Or (voir par exemple XXIV, 8.4), $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \prod_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{C}, \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})$, et ce dernier est nul d'après 4.5 (ou, ici, puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos). On obtient donc un isomorphisme $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}^\times/\mathrm{N}(\mathbb{C}^\times) \simeq \{\pm 1\}$.

Nous aurons besoin au N° suivant du résultat suivant :

Proposition 4.6. — *Sous les conditions de* 4.1, *les conditions* a) *et* b) *sont équivalentes aux conditions suivantes :* 14

a′) $\mathscr{O}_\mathrm{S} \to \mathscr{A}_0$ *est un isomorphisme.*

b′) *Pour tout* m *dans* M (*il suffit : dans un système de générateurs de* M), *on a :*

$$\mathscr{A}_m \cdot \mathscr{A}_{-m} = \mathscr{A}_0.$$

La nécessité étant évidente, compte tenu de 4.2 [15], on va se ramener à prouver le

Corollaire 4.7. — *Soit* $\mathrm{A} = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_n$ *un anneau* $\mathbb{Z}$*-gradué, tel que*

$$\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_{-1} = \mathrm{A}_0.$$

Alors les A_n *sont des* A_0*-modules inversibles, et pour* $n,\ n' \in \mathbb{Z}$*, l'homomorphisme*

$$\mathrm{A}_n \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A}_{n'} \longrightarrow \mathrm{A}_{n+n'}$$

induit par la multiplication dans A, *est un isomorphisme.*

Par hypothèse, il existe des $f_i \in \mathrm{A}_1$, $g_i \in \mathrm{A}_{-1}$, tels que

$$(*) \qquad \sum_i f_i g_i = 1.$$

Comme la conclusion à établir est locale sur $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_0)$, [16] et comme, d'après $(*)$, $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_0)$ est recouvert par les ouverts affines $\mathrm{D}(f_i g_i)$, on est ramené au cas où il existe un élément $f \in \mathrm{A}_1$, *inversible* dans A. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f^n est un élément de A_n inversible dans A, donc définit un isomorphisme $h \mapsto f^n h$ de A_0 sur A_n. De plus,

[14] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.
[15] N.D.E. : On a corrigé 4.1 en 4.2.
[16] N.D.E. : On a détaillé le passage qui suit.

ceci montre que l'on obtient un isomorphisme $\mathrm{A}_0[t,t^{-1}] \to \mathrm{A}$ de A_0-algèbres graduées en envoyant t dans f, ce qui achève la démonstration de 4.7.

Alors, sous les conditions de 4.6, 4.7 implique déjà que les $\mathscr{A}_m$ ($m \in \mathrm{M}$) sont inversibles. Pour prouver la condition 4.1 *b*), on peut donc supposer que $\mathscr{A}_m$ et $\mathscr{A}_{m'}$ ont des bases f_m et $f_{m'}$, ayant des inverses $f_m^{-1} \in \Gamma(\mathscr{A}_{-m})$ et $f_{m'}^{-1} \in \Gamma(\mathscr{A}_{-m'})$. Alors le produit par $f_m^{-1}f_{m'}^{-1} \in \Gamma(\mathscr{A}_{-m-m'})$ définit un homomorphisme $\mathscr{A}_{m+m'} \to \mathscr{A}_0 \simeq \mathscr{O}_\mathrm{S}$, transformant l'image de $f_m \otimes f_{m'}$ en la section 1 de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}_m \otimes \mathscr{A}_{m'} \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "w"] & \mathscr{A}_{m+m'} \arrow[r, "v"] & \mathscr{A}_0 \simeq \mathscr{O}_\mathrm{S} \end{tikzcd}$$

w et v sont donc des épimorphismes de faisceaux inversibles, donc des isomorphismes, donc u est un isomorphisme. C.Q.F.D.

5. Quotient d'un schéma affine par un groupe diagonalisable opérant librement

15

(17) On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des morphismes fidèlement plats quasi-compacts, et l'on rappelle que l'on considère des torseurs au sens de la topologie (fpqc).

Théorème 5.1. — *Soient* S *un préschéma,* M *un groupe commutatif ordinaire,* $\mathrm{G} = \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ *le groupe diagonalisable sur* S *qu'il définit,* P *un* S*-préschéma* affine sur S *sur lequel* G *opère* librement *à droite.*

Alors la relation d'équivalence définie par G *dans* P *est* $\mathscr{M}$*-effective*(cf. IV, 3.4), *i.e. le quotient* $\mathrm{X} = \mathrm{P}/\mathrm{G}$ *existe et* P *est un torseur sur* X *de groupe* $\mathrm{G}_\mathrm{X} = \mathrm{D}_\mathrm{X}(\mathrm{M})$*. De plus,* P/G *est affine sur* S *; de façon précise, si* P *est défini par l'algèbre* $\mathscr{A}$ *graduée de type* M*, alors* P/G *est isomorphe à* $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}_0)$*, où* $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}^\mathrm{G}$ *est le composant de degré* 0 *de* $\mathscr{A}$*.*

Démonstration. Posons $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}_0)$, alors on a un morphisme naturel $\mathrm{P} \to \mathrm{X}$, déduit de $\mathscr{A}_0 \to \mathscr{A}$, qui est invariant par les opérations de G. De cette façon, P devient un X-préschéma, affine sur X, avec groupe d'opérateurs $\mathrm{G}_\mathrm{X} = \mathrm{D}_\mathrm{X}(\mathrm{M})$, et l'hypothèse que G opère librement sur P/S implique que G_X opère librement sur P/X. Tout revient à montrer que P est un fibré principal homogène sous G_X, utilisant le fait que $\mathscr{B}_0 = \mathscr{O}_\mathrm{X}$, où $\mathscr{B}$ est l'algèbre graduée de type M sur X qui définit P/X. On peut alors supposer X = S et S affine, donc P est affine, donné par un anneau A gradué de type M dont la partie homogène de degré m sera notée A_m, de sorte que $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_0)$. Compte tenu de 4.6, il reste à vérifier que l'on a :

$$\text{(x)} \qquad \mathrm{A}_m \cdot \mathrm{A}_{-m} = \mathrm{A}_0 \qquad \text{pour tout} \quad m \in \mathrm{M}.$$

On constate d'ailleurs par un calcul immédiat que (x) équivaut à dire que $\mathrm{P} \times_\mathrm{S} \mathrm{G} \to \mathrm{P} \times_\mathrm{S} \mathrm{P}$ est une *immersion fermée*, et non seulement un monomorphisme (selon l'hy-
16 pothèse que G opère librement), i.e. que l'homomorphisme sur les anneaux affines

(17) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

$$\theta : \quad \mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}(\mathrm{M})$$

est surjectif [18]. Cela donne 5.1 lorsqu'on suppose que la relation d'équivalence définie par G dans P est fermée. Nous allons cependant montrer que cette hypothèse est déjà conséquence du fait que G opère librement, (ce qui est d'ailleurs implicitement contenu dans le théorème 5.1, puisque $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ doit être isomorphe à $\mathrm{P} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{P}$, qui est fermé dans $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ puisque X est affine sur S donc séparé sur S).

Soit $\mathrm{R} = \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$. L'hypothèse que G opère librement, i.e. que $\mathrm{R} \to \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ est un monomorphisme, s'écrit en disant que le morphisme diagonal

$$\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R} \underset{(\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P})}{\times} \mathrm{R} = \mathrm{R}'$$

est un isomorphisme. On a $\mathrm{R} = \operatorname{Spec}(\mathrm{A}(\mathrm{M}))$ et

$$\mathrm{R}' = \operatorname{Spec}(\mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})/\mathrm{K}) \quad [19]$$

où K est l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$x_m\,(e_{m,0} - e_{0,m}), \qquad \text{avec} \quad m \in \mathrm{M},\ x_m \in \mathrm{A}_m;$$

soit $\phi : \mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{M}) \to \mathrm{A}(\mathrm{M})$ l'homorphisme surjectif d'anneaux défini par

$$x\, e_{m,n} \longmapsto x\, e_{m+n} \qquad (m, n \in \mathrm{M},\ x \in \mathrm{A})$$

(où les e_m, resp. $e_{m,n} = e_m \otimes e_n$, sont les éléments de la base canonique de A(M), resp. $\mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})$). Alors le morphisme diagonal $\mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ correspond à l'homomorphisme

$$\overline{\phi} : \mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})/\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{A}(\mathrm{M})$$

obtenu en passant au quotient par K. Or le noyau de $\overline{\phi}$ est l'idéal K' engendré par les

$$d_m = e_{m,0} - e_{0,m}.$$

On a $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$, et l'hypothèse que G opère librement sur P, i.e. que $\overline{\phi}$ soit un isomor- **17**
phisme, équivaut à l'égalité $\mathrm{K}' = \mathrm{K}$, qui s'exprime par les relations

$$\text{(xx)} \qquad d_m \in \mathrm{K} = \sum_p \mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})\, \mathrm{A}_p\, d_p, \qquad \text{pour tout } m \in \mathrm{M}.$$

Utilisant la tri-graduation naturelle de $\mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})$, et le fait que le premier degré de d_m est nul, cela signifie qu'on peut écrire d_m comme somme d'éléments de la forme

$$f\, e_{r,s}\,(e_{p,0} - e_{0,p}) \qquad \text{avec} \quad f \in \mathrm{A}_{-p} \cdot \mathrm{A}_p,$$

et utilisant le fait que le degré total de d_m est m, on peut se borner à des termes tels que

$$r + s + p = m.$$

---

[18] N.D.E. : En effet, pour tout $b \in \mathrm{A}$, $a_m \in \mathrm{A}_m$, on a $\theta(b \otimes a_m) = ba_m \otimes e_m$, donc la surjectivité de θ équivaut à (x).

[19] N.D.E. : on a noté K l'idéal noté J dans l'original, afin de le distinguer des idéaux J_p de A_0 qui apparaissent dans (xxx). D'autre part, on a explicité plus loin que les relations (xx) équivalent à l'égalité $\mathrm{K} = \mathrm{K}'$ (voir ce qui suit).

Donc on doit avoir, pour tout $m \in \mathrm{M}$, une expression :

$$\text{(xxx)} \qquad \begin{cases} d_m = e_{m,0} - e_{0,m} = \sum_{r,s} \lambda_{r,s}\,(e_{m-s,s} - e_{r,m-r}) \\ \text{avec} \quad \lambda_{r,s} \in \mathrm{J}_p = \mathrm{A}_p \cdot \mathrm{A}_{-p} \subseteq \mathrm{A}_0\,, \quad p = m - (r+s). \end{cases}$$

Il faut en conclure la relation (x), i.e. les relations

$$\text{(xxxx)} \qquad \mathrm{J}_n = \mathrm{A}_0 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathrm{M}.$$

Or pour ceci, il suffit d'établir la même relation modulo tout idéal maximal de A_0. Comme les hypothèses faites sont invariantes par une telle réduction, on peut supposer déjà que A_0 est un *corps.*

Lemme 5.2. — *Sous les conditions précédentes* (*avec* A_0 *un corps*), *si* $\mathrm{M} \neq 0$, *il existe un* $p \in \mathrm{M} - \{0\}$ *tel que* $\mathrm{J}_p = \mathrm{A}_0$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, alors la somme du dernier membre de (xxx) serait nulle, pour tout $m \in \mathrm{M}$, ce qui est absurde.

18 ***Corollaire 5.3***. — *Sous les conditions précédentes, mais sans plus supposer que* A_0 *soit un corps, il existe un nombre fini d'éléments* $p_i \in \mathrm{M} - \{0\}$, *tels que* $\sum_i \mathrm{J}_{p_i} = \mathrm{A}_0$.

En effet, on applique le résultat 5.2 aux situations déduites de A/A_0 par réduction modulo les idéaux maximaux de A_0. [20]

Corollaire 5.4. — *Supposons à nouveau* A_0 *un corps. Alors pour tout sous-groupe* N *de* M *tel que* $\mathrm{N} \neq \mathrm{M}$, *il existe un* $p \in \mathrm{M} - \mathrm{N}$ *tel que* $\mathrm{J}_p = \mathrm{A}_0$.

En effet, soit $\mathrm{M}' = \mathrm{M}/\mathrm{N}$, et considérons l'anneau A' gradué de type M', dont l'anneau sous-jacent est A, et dont la graduation est donnée par

$$\mathrm{A}'_{m'} = \coprod_{m \in h^{-1}(m')} \mathrm{A}_m,$$

où $h : \mathrm{M} \to \mathrm{M}' = \mathrm{M}/\mathrm{N}$ est l'homomorphisme canonique. Géométriquement, cette construction revient à considérer le sous-groupe $\mathrm{G}' = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}')$ de G, et la structure sur P de schéma à groupe d'opérateurs G' induite par les opérations de G. Il est alors évident que G' opère librement sur P', i.e. le couple $(\mathrm{M}', \mathrm{A}')$ satisfait aux hypothèses de 5.3. On obtient donc

$$1 = \sum f_i g_i \quad \text{avec} \quad f_i \in \mathrm{A}'_{m'_i} \quad , \quad g_i \in \mathrm{A}'_{-m'_i} \quad \textit{et} \quad m'_i \in \mathrm{M}' - \{0\},$$

d'où aussitôt la conclusion 5.4 en prenant les composantes du deuxième membre suivant A_0, et utilisant que A_0 est un corps.

Notons maintenant que

$$\mathrm{J}_p \cdot \mathrm{J}_q \subseteq \mathrm{J}_{p+q} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_p = \mathrm{J}_{-p},$$

[20] N.D.E. : Il résulte de 5.2 que $\sum_{p \neq 0} \mathrm{J}_p = \mathrm{A}_0$, donc 1 s'écrit comme une somme finie $\sum_i x_i$, avec $x_i \in \mathrm{J}_{p_i}$.

donc si N désigne l'ensemble des $m \in M$ tels que $J_p = A_0$, on voit que N est un *sous-groupe* de M. Utilisant 5.4 on voit qu'il est égal à M. Cela achève la démonstration du théorème 5.1.

Comme nous l'avons signalé en cours de démonstration, le théorème 5.1 implique : 19

Corollaire 5.5. — *Sous les conditions de* 5.1*, le morphisme graphe*

$$P \underset{S}{\times} G \longrightarrow P \underset{S}{\times} P$$

est une immersion fermée.

On en conclut aussitôt :

Corollaire 5.6. — *Soit σ une section de* P *sur* S*. Alors le morphisme $g \mapsto \sigma \cdot g$ de* G *dans* P *défini par σ est une immersion fermée.*

Corollaire 5.7. — *Soient* G, H *deux* S*-groupes, avec* G diagonalisable*,* H affine sur S*, et soit $u : G \to H$ un homomorphisme de* S*-groupes qui soit un* monomorphisme*. Alors u est une immersion fermée,* $H/G = X$ *existe et* H *est un fibré principal homogène sur* X *de groupe* G_X*, enfin* X *est affine sur* S.

Corollaire 5.8. — *Sous les conditions de* 5.1*, si* P *est de type fini* (*resp. de présentation finie*) *sur* S*, il en est de même de* $X = P/G$.

En effet, il résulte de l'hypothèse que les fibres de G_X sont de type fini, donc G_X est de présentation finie sur X par 2.1 b), donc P étant un torseur sous G_X est de présentation finie sur X [(21)]. Comme il est aussi fidèlement plat sur X, notre conclusion résulte alors de Exp. V, Prop. 9.1.

6. Morphismes essentiellement libres, et représentabilité de certains foncteurs de la forme $\prod_{Y/S} Z/Y$ [(*)]

20

Définition 6.1. — Soit $f : X \to S$ un morphisme de préschémas. On dit que f est *essentiellement libre*, ou encore que X *est essentiellement libre sur* S, si on peut trouver un recouvrement de S par des ouverts affines S_i, pour tout i un S_i-préschéma S'_i *affine et fidèlement plat* sur S_i, et un recouvrement $(X'_{ij})_j$ de $X'_i = X \times_S S'_i$ par des ouverts affines X'_{ij}, tels que pour tout (i, j), l'anneau de X'_{ij} soit un module *libre* sur l'anneau de S'_i. [(22)]

(*) Le présent numéro est indépendant de la théorie des groupes diagonalisables ; sa place naturelle serait dans VI_B.

(21) N.D.E. : cf. EGA II, 2.7.1 (vi).

(22) N.D.E. : On peut remplacer « libre » par « projectif », cf. 6.8 plus bas. D'autre part, cette notion est à rapprocher de celle de S-préschéma plat et *pur*, introduite et développée dans [**RG71**] ; voir en particulier *loc. cit.*, 1ère partie, 3.3.12 et 2ème partie, 3.1.4.1.

Proposition 6.2. — a) *Si* X *est essentiellement libre sur* S*, il est* plat *sur* S*, la réciproque étant vraie si* S *est artinien.*

b) *Si* S *est le spectre d'un corps, tout* S*-préschéma est essentiellement libre sur* S.

c) *Si* X *est essentiellement libre sur* S*, et si* $S' \to S$ *est un morphisme de changement de base,* $X' = X \times_S S'$ *est essentiellement libre sur* S'*. La réciproque est vraie si* $S' \to S$ *est fidèlement plat et quasi-compact.*

La démonstration est immédiate, en utilisant pour la réciproque dans a) le fait qu'un module plat sur un anneau local artinien est libre. [23]

Proposition 6.3. — *Soit* H *un* S*-préschéma en groupes diagonalisable* (*plus généralement, qui devient diagonalisable par extension fidèlement plate quasi-compacte convenable de tout ouvert affine de* S*, i.e.* H *est « de type multiplicatif » , cf.* IX 1.1)*. Alors* H *est essentiellement libre sur* S.

En effet, si H est diagonalisable, il est affine sur S et défini par une algèbre qui est un $\mathscr{O}_S$-module libre.

L'introduction de la définition 6.1 est justifiée par le

21 ***Théorème 6.4***. — *Soient* S *un préschéma,* Z *un* S*-préschéma* essentiellement libre*,* Y *un sous-préschéma* fermé *de* Z*. Considérons le foncteur suivant* [24]

$$F = \prod_{Z/S} Y/Z : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \longrightarrow (\mathbf{Ens}), \qquad F(S') = \Gamma(Y_{S'}/Z_{S'}) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } Z_{S'} \neq Y_{S'}; \\ \{\mathrm{id}_{Z_{S'}}\} & \text{si } Z_{S'} = Y_{S'}. \end{cases}$$

Ce foncteur est représentable par un sous-préschéma fermé de S. [25]

[26] Notons d'abord que F est un *faisceau* pour la topologie (fpqc) : comme $F(S') = \varnothing$ ou $\{\mathrm{pt}\}$ pour tout S', ceci se ramène à vérifier que si (S_i) est un recouvrement ouvert de S (resp. $S' \to S$ un morphisme fidèlement et quasi-compact), et si chaque $Y_{S_i} \to Z_{S_i}$ (resp. si $Y'_S \to Z_{S'}$) est un isomorphisme, il en est de même de $Y \to Z$; or ceci est clair (resp. résulte de SGA 1, VIII 5.4 ou EGA IV_2, 2.7.1).

De plus, d'après SGA 1, VIII 2.1 et 5.5, les morphismes fidèlement plats et quasi-compacts sont de *descente effective* pour la catégorie fibrée des flèches d'immersion fermée. Ceci nous permet de nous borner avec les notations de 6.1 au cas où $S = S'_i$.

Soit alors (Z_j) un recouvrement de Z par des ouverts affines tels que $\mathscr{O}(Z_j)$ soit un module libre sur $A = \mathscr{O}(S)$, et soient $Y_j = Y \cap Z_j$ et $F_j : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \to (\mathbf{Ens})$ le foncteur défini en termes de (Z_j, Y_j) comme F en termes de (Z, Y). C'est un sous-foncteur du foncteur final, et on a évidemment $F = \bigcap_j F_j$, ce qui nous ramène à

[23] N.D.E. : En effet, soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local artinien, k son corps résiduel, M un A-module arbitraire, $(x_i)_{i\in I}$ des éléments de M dont les images forment une base de $M/\mathfrak{m}M$ sur k. Soient F le A-module libre de base $(e_i)_{i\in I}$, et $\phi : F \to M$ le A-morphisme défini par $\phi(e_i) = x_i$. Alors $Q = \mathrm{Coker}\,\phi$ vérifie $Q = \mathfrak{m}Q$, d'où, puisque $\mathfrak{m}$ est nilpotent, $Q = 0$. Supposons de plus M *plat* sur A ; alors $K = \mathrm{Ker}\,\phi$ vérifie $K \otimes_A k = 0$, i.e. $K = \mathfrak{m}K$, d'où $K = 0$.

[24] N.D.E. : cf. II.1, où ce foncteur est noté $\prod_{Z/S} Y$.

[25] N.D.E. : On a corrigé Z en S.

[26] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; voir ausi 1.7.3.

prouver que chaque F_j est représentable par un sous-schéma fermé T_j de S (car alors F sera représentable par le sous-schéma fermé T intersection des T_j). On peut donc supposer Z également affine, Z = Spec(B), où B est un A-module libre. Soit J une partie de B définissant le sous-schéma Y de Z, et soit K l'idéal dans A engendré par les $u_i(J) \subseteq A$, où les $u_i : B \to A$ sont les formes coordonnées par rapport à la base choisie. On constate aussitôt que $T = \mathscr{V}(K) = \mathrm{Spec}(A/K)$ satisfait à la condition voulue, ce qui achève la démonstration.

Exemples 6.5. — Donnons des exemples importants de foncteurs qui se ramènent à des foncteurs $\prod_{Z/S} Y/Z$ du type envisagé dans 6.4 et pour lesquels il est utile par la suite d'avoir des critères de représentabilité. On désigne par S un préschéma, par X, Y, Z etc. des préschémas sur S.

a) Donnons-nous un S-morphisme

(x) $$q : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z),$$

(« X opère sur Y, à valeurs dans Z »), i.e. un morphisme

(xx) $$r : X \underset{S}{\times} Y \longrightarrow Z.$$

Considérons un sous-préschéma Z′ de Z, d'où un monomorphisme **22**

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z)$$

qui fait du premier foncteur un sous-foncteur du second, soit X′ l'image inverse de ce sous-foncteur par (x), c'est le sous-foncteur de X tel que X′(T) soit l'ensemble des $x \in X(T)$ tels que $q(x) : Y_T \to Z_T$ se factorise par Z'_T. Ce foncteur X′ peut se décrire de la façon suivante : on pose $P = X \times_S Y$, soit P′ l'image inverse de Z′ par $r : P \to Z$, alors on a un isomorphisme évident

(xxx) $$X' \simeq \prod_{P/X} P'/P.$$

On obtient donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et* Z′ *fermé dans* Z*, le sous-foncteur* X′ *de* X *est représentable par un sous-préschéma fermé de* X.

b) Donnons-nous deux façons de faire opérer X sur Y à valeurs dans Z, i.e. deux morphismes

$$q_1, q_2 : X \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z),$$

et posons $X' = \mathrm{Ker}(q_1, q_2)$: c'est le sous-foncteur de X tel que X′(T) soit l'ensemble des $x \in X(T)$ tels que les deux morphismes $q_1(x)$, $q_2(x) : Y_T \rightrightarrows Z_T$ soient égaux. Or la donnée de q_1, q_2 équivaut à la donnée d'un morphisme

$$q : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, Z \underset{S}{\times} Z),$$

ou encore, d'un morphisme $r : X \times_S Y \to Z \times_S Z$; posons alors $U = Z \times_S Z$, soit U′ le sous-préschéma diagonal de $Z \times_S Z$, alors X′ n'est autre que l'image inverse du sous-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, U') \to \underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, U)$ par q, donc peut se mettre sous la forme (xxx), avec $P = X \times_S Y$, et P′ = image inverse de la diagonale par r, i.e. noyau de **23**
$X \times_S Y \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} Z$. On est donc sous les conditions de (a).

On voit par suite que : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et* Z *séparé sur* S*, alors le sous-foncteur* X′ *de* X *est représentable par un sous-préschéma fermé de* X.

c) Donnons-nous un morphisme

$$q : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y},\mathrm{Y}),$$

i.e. « X opère sur Y ». Soit X′ le « noyau » de ce morphisme, i.e. le sous-foncteur X′ de X tel que X′(T) soit l'ensemble des $x \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ tels que $q(x) : \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}$ soit l'identité. Ce foncteur est justiciable de b), comme on voit en introduisant un deuxième homomorphisme

$$q' : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y},\mathrm{Y})$$

« en faisant opérer X trivialement sur Y ». Donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et séparé sur* S*, le sous-foncteur noyau de* q *est représentable par un sous-préschéma fermé de* X.

d) Sous les conditions de c), considérons le sous-foncteur Y′ de Y « des invariants sous X », donc Y′(T) est l'ensemble des $y \in \mathrm{Y}(\mathrm{T})$ tels que le morphisme correspondant $\overline{q}(y) : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}$ soit « le T-morphisme constant de valeur y ». Introduisant q' comme dans c), et les homomorphismes correspondants à q et q' :

$$\overline{q}, \overline{q'} :\ \mathrm{Y} \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}),$$

on voit que Y′ est précisément $\mathrm{Ker}(\overline{q}, \overline{q'})$, et est donc justiciable encore de b) (avec les rôles de X, Y renversés et Z = Y).

Par suite, *si* X *est essentiellement libre sur* S, Y *séparé sur* S*, alors le sous-foncteur* Y′ *de* Y *des invariants sous* X *est représentable par un sous-préschéma fermé de* Y.

24 **e)** Des constructions du type explicité dans les exemples précédents sont surtout fréquentes en théorie des groupes. Ainsi, lorsque G est un S-préschéma en groupes opérant sur le S-préschéma X :

$$q : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}),$$

le noyau de q (« le sous-groupe de G opérant trivialement ») est un sous-schéma fermé de G pourvu que X soit essentiellement libre et séparé sur S (exemple c)), et le sous-objet X^{G} des invariants est un sous-préschéma fermé de X, pourvu que G soit essentiellement libre sur S, et X séparé sur S [(27)] (exemple d)).

Soient Y, Z des sous-préschémas de X ; considérons le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ de G (« *transporteur de* Y *en* Z ») dont les points à valeurs dans un T sur S sont les $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ tels que l'automorphisme correspondant de X_{T} satisfasse $g(\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}) \subseteq \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$ i.e. induise un morphisme $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$ se factorisant en $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$. Donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S*, et* Z *fermé dans* X*, alors* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ *est un sous-préschéma fermé de* G (exemple a)).

On peut aussi considérer le *transporteur strict de* Y *en* Z*,* [(28)] dont les points à valeurs dans un T sur S sont les $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ tels que $g(\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}) = \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$, qui n'est autre que

[(27)] N.D.E. : On a corrigé S_{X} en S.

[(28)] N.D.E. : noté $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})$.

$\underline{\mathrm{Transp}}_G(Y, Z) \cap \sigma(\underline{\mathrm{Transp}}_G(Z, Y))$, où σ est la symétrie de G. Par suite, *si* Y *et* Z *sont essentiellement libres sur* S *et fermés dans* X*, le transporteur strict de* Y *en* Z *est un sous-préschéma fermé de* G.

Un cas important est celui où X = G, G opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs. Si H est un sous-préschéma de G, le transporteur strict de H en H est aussi appelé le *normalisateur* de H dans G, et noté $\underline{\mathrm{Norm}}_G\,H$. Donc : *si* H *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G*, essentiellement libre sur* S*, alors* $\underline{\mathrm{Norm}}_G\,H$ *est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de* G.

Soit enfin Z un sous-préschéma de G, alors son *centralisateur* $\underline{\mathrm{Centr}}_G(Z)$ dans G est le sous-foncteur en groupes de G défini par le procédé de d), quand on considère que « Z opère sur G » par les opérations induites par celles de G ; donc *si* Z *est essentiellement libre sur* S *et* G *est séparé sur* S*,* $\underline{\mathrm{Centr}}_G(Z)$ *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G. En particulier, *si* G *est essentiellement libre et séparé sur* S*, alors le* centre C *de* G*, qui n'est autre que* $\underline{\mathrm{Centr}}_G(G)$*, est un sous-préschéma en groupes fermé de* G. **25**

Lorsque S est le spectre d'un corps, 6.3 b) montre que dans les exemples a) à e) ci-dessus, les conditions « essentiellement libre » sont automatiquement satisfaites, il ne reste que des conditions de séparation. Se rappelant qu'un préschéma en groupes sur un corps est nécessairement séparé, on trouve par exemple :

Corollaire 6.7. — [29] *Soit* G *un préschéma en groupes sur un corps* k*. Alors :*

– *Pour tout sous-préschéma* Z *de* G*, le centralisateur de* Z *dans* G *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G *; c'est en particulier le cas pour le centre* $\underline{\mathrm{Centr}}_G(G)$ *de* G.

– *Plus généralement, si* $u, v : X \to G$ *sont des morphismes de préschémas,* $\underline{\mathrm{Transp}}_G(u, v)$ *est représentable par un sous-préschéma fermé de* G.

– *Pour deux sous-préschémas* Y, Z *de* G*, avec* Z *fermé,* $\underline{\mathrm{Transp}}_G(Y, Z)$ *est un sous-préschéma fermé de* G*. Si* Y *est également fermé, on a la même conclusion pour* $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(Y, Z)$.

– *Pour* tout *sous-préschéma* en groupes [30] H *de* G*, le* normalisateur $\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* G.

Remarque 6.8. — [31] Soient A un anneau commutatif, M un A-module, $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$; munissons le A-module $\mathrm{End}_A(M)$ de la topologie de la convergence ponctuelle discrète, c.-à-d., une base de voisinage de 0 est formée par les sous-A-modules suivants, où $n \in \mathbb{N}$ et $m_1, \dots, m_n \in M$:

$$K(m_1, \dots, m_n) = \{u \in \mathrm{End}_A(M) \mid u(m_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n\}.$$

On dit que M est un A-module *quasi-libre* si l'image du morphisme canonique $\Theta : M \otimes_A M^\vee \to \mathrm{End}_A(M)$ contient dans son adhérence id_M, c.-à-d., si la condition suivante

[29] N.D.E. : On a conservé la numérotation de l'original : il n'y a pas de 6.6.

[30] N.D.E. : En effet, sur un corps k, tout sous-préschéma en groupes de G est *fermé*, cf. $\mathrm{VI_A}$, 0.6.1.

[31] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; en particulier on a ajouté le lemme 6.8.1.

est vérifiée :

$$(*)\qquad \begin{cases} \text{pour tous } m_1, \ldots, m_n \in \mathrm{M}, \text{ il existe } x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{M} \text{ et } f_1, \ldots, f_r \in \mathrm{M}^\vee \\ \text{tels que } m_i = \Theta(\sum_{s=1}^r x_s \otimes f_s)(m_i) = \sum_{s=1}^r f_s(m_i)\, x_s \text{ pour } i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

(Dans ce cas, $\operatorname{Im}\Theta$ est dense dans $\operatorname{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ car pour tout $u \in \operatorname{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$, on a $u(m_i) = \sum_{s=1}^r f_s(m_i)\, u(x_s) = \Theta(\sum_{s=1}^r u(x_s) \otimes f_s)(m_i)$.)

Notons d'abord que cette propriété est stable par changement de base. En effet, soient $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ un morphisme d'anneaux, $\mathrm{M}' = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$, et $m'_1, \ldots, m'_n \in \mathrm{M}'$, alors $m'_i = \sum_j m_{ij} \otimes b_{ij}$ ($m_{ij} \in \mathrm{M}$, $b_{ij} \in \mathrm{A}'$) ; par hypothèse, il existe $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{M}$ et $f_1, \ldots, f_r \in \operatorname{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$ tels que $m_{ij} = \sum_s x_s\, f_s(m_{ij})$ pour tout i, j. Notons $\phi \circ f_s$ l'image de f_s dans $\operatorname{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A}') = \operatorname{Hom}_{\mathrm{A}'}(\mathrm{M}, \mathrm{A}')$; alors pour tout $i = 1, \ldots, n$ on a :

$$\big(\sum_s x_s \otimes \phi \circ f_s\big)(m'_i) = \sum_{s,j} x_s \otimes \phi(f_s(m_{ij}))\, b_{ij} = \sum_j \big(\sum_s x_s\, f_s(m_{ij})\big) \otimes b_{ij} = m'_i\,,$$

ce qui prouve que M' est quasi-libre sur A'.

Notons aussi que tout A-module projectif P est quasi-libre (il existe des A-morphismes $\mathrm{A}^{(\mathrm{I})} \xrightarrow{\pi} \mathrm{P} \xrightarrow{\tau} \mathrm{A}^{(\mathrm{I})}$ tels que $\pi \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathrm{P}}$, notons (e_i) la base canonique de $\mathrm{A}^{(\mathrm{I})}$ et f_i la forme linéaire $e_i^* \circ \tau$ sur P ; si $m_1, \ldots, m_n \in \mathrm{P}$, il existe une partie finie J de I telle que $m_k = \sum_{i \in \mathrm{J}} f_i(m_k)\, \pi(e_i)$ pour $k = 1, \ldots, n$).

Alors, le théorème 6.4 reste valable en remplaçant dans l'énoncé de la définition 6.1 le mot « libre » par « projectif » ou, plus généralement, par « quasi-libre ». En effet, en procédant comme dans la démonstration de 6.4, on se ramène à prouver le

Lemme 6.8.1. — *Soient* M *un* A*-module* quasi-libre*,* N *un sous-module,* F *le foncteur covariant* (A-algèbres) $\to$ (**Ens**) *tel que* $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{pt}\}$ *si* $\mathrm{M}_{\mathrm{B}} = (\mathrm{M}/\mathrm{N})_{\mathrm{B}}$*, et* $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \varnothing$ *sinon. Alors il existe un idéal* K *de* A *tel que* $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{pt}\}$ *si et seulement si le morphisme* $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *se factorise par* A/K*, i.e. on a un isomorphisme fonctoriel en* B *:*

$$\mathrm{F}(\mathrm{B}) \simeq \operatorname{Hom}_{\text{A-alg.}}(\mathrm{A}/\mathrm{K}, \mathrm{B}).$$

Démonstration. Soit (n_j) un système de générateurs de N, et soit F_j le sous-foncteur du foncteur final $\underline{\mathbf{e}}$ ($\underline{\mathbf{e}}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{pt}\}$ pour tout B) correspondant au sous-module $\mathrm{A}n_j$. On a $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \{\mathrm{pt}\}$ si et seulement si l'image de chaque n_j dans M_{B} est nulle, donc F est l'intersection des foncteurs F_j. Ceci nous ramène au cas où N est engendré par un élément n.

Soit $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ une A-algèbre ; si l'image $n \otimes 1$ de n dans M_{B} est nulle, alors pour tout $f \in \mathrm{M}^\vee = \operatorname{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$ on a $0 = f(n) \otimes 1 = \phi(f(n))$. D'autre part, comme M est quasi-libre, il existe $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{M}$ et $f_1, \ldots, f_r \in \mathrm{M}^\vee$ tels que $n = \sum_s f_s(n)\, x_s$, d'où $n \otimes 1 = \sum_s x_s \otimes \phi(f_s(n))$. Il en résulte que $n \otimes 1 = 0$ si et seulement si ϕ se factorise par A/K, où K est l'idéal engendré par les $f_s(n)$ pour $s = 1, \ldots, r$. Ceci prouve le lemme.

7. Appendice : Sur les monomorphismes de préschémas en groupes

Le résultat démontré dans le présent numéro est inutile pour la suite du séminaire, sauf X 8.8 et XV et XVI. Il s'appuie de façon essentielle sur le théorème d'existence de groupes quotients de l'Exposé $\mathrm{VI_A}$. [32]

Le corollaire 5.7 conduit à se demander sous quelles conditions on peut affirmer 26
qu'un monomorphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ de S-groupes est une immersion, voire une immersion fermée.

Nous avons vu dans $\mathrm{VI_B}$ 1.4.2 qu'il en est ainsi si S est le spectre d'un corps, pourvu que G soit de type fini sur k et H localement de type fini sur k. On en conclut aisément que le même résultat reste valable si on suppose seulement S artinien. [33]

D'autre part, il est facile de donner des exemples de monomorphismes bijectifs qui ne sont pas des immersions, S étant par exemple la droite affine sur un corps, ou le spectre d'un anneau de valuation discrète. On prendra par exemple $\mathrm{H} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_\mathrm{S}$, $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times_\mathrm{S} \mathrm{G}_2$, où G_1 est le sous-groupe ouvert de H, complémentaire du point fermé x distinct de 0 de la fibre $\mathrm{H}_s \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (où s désigne un point fermé fixé de S), et G_2 le sous-schéma fermé de H qui est somme du sous-schéma réduit à la section unité, et du sous-schéma fermé réduit défini par le point fermé x. On constate aisément que G_2 est bien stable pour la multiplication de H, donc est un schéma en groupes. Les immersions $\mathrm{G}_i \to \mathrm{H}$ $(i = 1, 2)$ définissent alors un homomorphisme de S-groupes $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \to \mathrm{H}$, qui est évidemment un monomorphisme bijectif (et en plus une immersion locale), mais n'est pas une immersion. (On constate que G et H sont réduits, G ayant trois composantes irréductibles disjointes, alors que H n'a que deux composante irréductibles). On notera que $\mathrm{G}_1 \to \mathrm{H}$ donne aussi un exemple d'un sous-groupe ouvert G de H qui n'est pas fermé (contrairement à ce qui a lieu pour les groupes algébriques sur un corps). La théorie de la dégénérescence des courbes elliptiques fournit d'autres exemples de ce dernier phénomène, avec de plus H *lisse* sur S de dimension relative 1, G à fibres connexes.

Il est possible [(*)] par contre que dès qu'on suppose G *plat* sur S, et (disons) G et H *de présentation finie* sur S, un monomorphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ de S-groupes soit automatiquement une immersion. Nous allons prouver un résultat de cette nature, moyennant des hypothèses supplémentaires.

Notons d'abord que l'on peut supposer S *affine*, et (grâce à l'hypothèse de présen- 27
tation finie sur G et H, qui permet de se ramener au cas du spectre d'un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$ [34]) S *noethérien.* Alors G et H sont noethériens. Dire que $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est une immersion fermée, (resp. une immersion) revient alors à dire que u est un monomorphisme (ce qui est vrai par hypothèse) et que u est propre (resp. et que u est

[(*)] En fait, M. Raynaud a construit un contre-exemple, avec G lisse à fibres connexes, cf. XVI 1.1 c). Si on ne suppose pas G à fibres connexes, on peut prendre $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_2)$, $\mathrm{G} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_\mathrm{S}$ privé du point fermé non neutre, $\mathrm{H} = (\boldsymbol{\mu}_2)_\mathrm{S}$.

[32] N.D.E. : cf. Exp. $\mathrm{VI_A}$, Théorèmes 3.2 et 3.3.2.

[33] N.D.E. : tenir compte des ajouts faits dans $\mathrm{VI_B}$ ...

[34] N.D.E. : cf. EGA IV_3, § 8, et Exp. $\mathrm{VI_B}$, § 10.

propre en tout point de $u(\mathrm{G})$ [35]. Le critère valuatif de propreté nous assure qu'il suffit de vérifier que pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, avec S' le spectre d'un anneau de valuation discrète, complet si on y tient, le morphisme $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ a la même propriété de propreté. (Le cas de la propreté locale a été oublié dans EGA II 7.3, et figurera en remords dans EGA IV [*]). Cela nous ramène donc au cas où S *est lui-même le spectre d'un anneau de valuation discrète complet*, — sous réserve que les hypothèses supplémentaires sur G, H, u que nous serions amenés à formuler soient stables par changement de base.

Soient alors s (resp. s') le point fermé (resp. le point générique) de S. Alors les homomorphismes induits sur les fibres

$$u_s : \mathrm{G}_s \longrightarrow \mathrm{H}_s \qquad \text{et} \qquad u_{s'} : \mathrm{G}_{s'} \longrightarrow \mathrm{H}_{s'}$$

sont des immersions fermées, puisque ce sont des monomorphismes de schémas en groupes de type fini sur des corps ($\mathrm{VI_B}$ 1.4.2). Nous pouvons donc identifier $\mathrm{G}_{s'}$ à un sous-schéma fermé de $\mathrm{H}_{s'}$. Or on a le résultat suivant :

Lemme 7.1. — *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète,* s' *son point générique,* H *un* S*-préschéma,* L' *un sous-préschéma fermé de la fibre générique* $\mathrm{H}_{s'}$*, de sorte que* L' *est aussi un sous-préschéma de* H.

Alors l'adhérence schématique L' *dans* H (*i.e. le plus petit sous-préschéma fermé de* H *majorant* L'*,* cf. EGA I 9.5) *existe et est aussi l'unique sous-préschéma fermé de* H*, plat sur* S*, dont la fibre générique soit* L'*. De plus, la formation de* L *est fonctorielle par rapport à un couple* $(\mathrm{H}, \mathrm{L}')$ *variable, et commute à la formation de produits cartésiens sur* S.

28 *En particulier, si* H *est un* S*-groupe et* L' *un sous-groupe de* $\mathrm{H}_{s'}$*, alors* L *est un sous-groupe de* H.

La démonstration est immédiate et laissée au lecteur [**]. Appliquant ceci à la situation H, $\mathrm{G}_{s'}$, on voit que le monomorphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ se factorise en $\mathrm{G} \to \mathrm{L} \to \mathrm{H}$, où L est un sous-groupe de H qui est un sous-préschéma fermé, *plat* sur S, et où $\mathrm{G} \to \mathrm{L}$ induit un isomorphisme pour les fibres génériques. Alors $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est une immersion (resp. une immersion fermée) si et seulement si $u' : \mathrm{G} \to \mathrm{L}$ l'est. Cela nous ramène donc au cas où H *est plat sur* S *et* $u_{s'} : \mathrm{G}_{s'} \to \mathrm{H}_{s'}$ *un isomorphisme*, (sous réserve que les hypothèses supplémentaires que nous aurions à formuler sur G, H, u soient respectées lorsqu'on remplace H par un sous-préschéma en groupes fermé). Comme alors H est l'adhérence schématique de $\mathrm{H}_{s'}$, si u est une immersion, alors $u(\mathrm{G})$ sera un sous-préschéma [36] de H qui majore $\mathrm{H}_{s'}$, donc son adhérence schématique sera également H, et par suite $u(\mathrm{G})$ sera un sous-préschéma ouvert de H. Par suite, nous devrons prouver en fait que u est une immersion *ouverte*, (resp. un *isomorphisme* si nous voulions établir que u est une immersion fermée). Comme G et H sont plats

[*] cf. EGA IV_3, 15.7.
[**] cf. EGA IV_2, 2.8.

[35] N.D.E. : cf. EGA IV_3, 8.11.5 et 15.7.1
[36] N.D.E. : On a supprimé le mot « fermé ».

sur S, il revient au même de dire que les morphismes induits sur les fibres sont des immersions ouvertes, resp. des isomorphismes (cf. SGA 1, I 5.7), et comme il en est déjà ainsi de $u_{s'}$, *on est ramené à prouver que* u_s *est une immersion ouverte, resp. un isomorphisme.*

Notons d'abord que, puisque G et H sont plats sur S, la dimension de leurs fibres reste constante ($\mathrm{VI_B}$ 4.3). Comme G et H ont même fibre générique, il s'ensuit que cette dimension est la même pour G et H, donc $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ est un *monomorphisme* de groupes algébriques *de même dimension.* On en conclut facilement que G_s est ouvert dans H_s, et en fait est ensemblistement une réunion de composantes connexes de H_s (on est ramené au cas où le corps de base est algébriquement clos, et G et H réduits, donc lisses sur k, où c'est immédiat...). Donc $\mathrm{H}_s - \mathrm{G}_s$ est fermé dans H_s, donc dans H, donc son complémentaire H′ dans H est ouvert, et c'est évidemment un 29
ouvert stable pour la loi de groupe de H. Donc, quitte à remplacer H par H′, on peut, pour prouver que u est une immersion, se ramener (avec la réserve habituelle) au cas où, en plus des hypothèses précédentes, on suppose *u bijectif,* i.e. $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *bijectif.* On est donc en tous cas ramené à prouver que u ou encore u_s est un isomorphisme, moyennant le cas échéant l'hypothèse de bijectivité.

Supposons donc d'abord que u est bijectif. Si H_s est *réduit*, on peut évidemment conclure que u_s est un isomorphisme, car G_s s'identifie à un sous-schéma fermé de H_s ayant même ensemble sous-jacent. En particulier, si $k = \kappa(s)$ est de caractéristique nulle, tout groupe algébrique sur k est réduit d'après Cartier (cf. $\mathrm{VI_B}$, 1.6.1, ou $\mathrm{VII_B}$, 3.3.1, ou EGA IV_4, 16.12.2 et 17.12.5) et on a ainsi obtenu :

Proposition 7.2. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de préschémas en groupes de présentation finie sur* S. *Supposons que u soit un monomorphisme,* G *plat sur* S, *et les corps résiduels de* S *de caractéristique nulle. Alors u est une immersion.*

Lorsque $\kappa(s)$ est de caractéristique $p > 0$, nous allons nous borner au cas où G *est commutatif.* Alors (avec les réductions faites) H est également commutatif, car c'est l'adhérence schématique de $\mathrm{H}_{s'}$ qui est isomorphe à $\mathrm{G}_{s'}$ donc commutatif. Pour tout entier $n \geqslant 0$, nous posons $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{V}/\mathfrak{m}^{n+1})$, (où V est l'anneau de valuation qui définit S et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal), $\mathrm{G}_n = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$, $\mathrm{H}_n = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$. Pour tout entier $m > 0$, nous introduisons aussi les sous-groupes ${}_m\mathrm{G}$ et ${}_m\mathrm{H}$ de G et H, noyaux de la puissance m-ème. On définit de même ${}_m(\mathrm{G}_n) = ({}_m\mathrm{G})_n$, qu'on notera simplement ${}_m\mathrm{G}_n$, et de même pour H.

En vertu de $\mathrm{VI_A}$ 3.2, on peut former les quotients $\mathrm{Q}_n = \mathrm{H}_n/\mathrm{G}_n$, alors Q_n est un schéma en groupes commutatifs sur S_n, plat sur S_n, et $\mathrm{H}_n \to \mathrm{Q}_n$ est un morphisme fidèlement plat de noyau G_n. Comme la formation des quotients commute à l'extension de la base [37], on a

$$\mathrm{Q}_n \simeq \mathrm{Q}_m \underset{\mathrm{S}_m}{\times} \mathrm{S}_n \quad \text{pour} \quad m \geqslant n,$$

en particulier la fibre $\mathrm{Q}_n \times_{\mathrm{S}_n} \mathrm{S}_0$ n'est autre que $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{H}_0/\mathrm{G}_0$. Comme G_0 a même 30
ensemble sous-jacent que H_0, alors Q_0 est réduit ensemblistement à un seul point :

[37] N.D.E. : Mettre ceci en évidence dans les Exp. V et $\mathrm{VI_A}$...

c'est un groupe *purement infinitésimal.* Par suite, chaque Q_n est *fini* et plat sur S_n. Donc Q_n est défini par une algèbre C_n sur $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}/\mathfrak{m}^{n+1}$ qui est un module libre de type fini sur cet anneau, et pour $m \geqslant n$, on a $\mathrm{C}_n = \mathrm{C}_m \otimes_{\mathrm{V}_m} \mathrm{V}_n$, isomorphisme respectant l'application diagonale également. On obtient donc un module libre de type fini $\mathrm{C} = \varprojlim \mathrm{C}_n$ sur $\mathrm{V} = \varprojlim \mathrm{V}_n$, et les applications diagonales des C_n définissent une application diagonale de C, de sorte que $\mathrm{Q} = \mathrm{Spec}(\mathrm{C})$ devient un schéma en groupes fini et plat sur S, tel que

$$\mathrm{Q} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_n = \mathrm{Q}_n$$

pour tout n.

Lemme 7.3. — [38] *Soient* K *un corps,* Q *un schéma en groupe fini sur* K*, de degré* n*. Alors le morphisme de puissance* n*-ème dans* Q *est nul.*

Cf. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 8.5.

Remarque 7.3.1. — L'énoncé 7.3 garde un sens pour un schéma en groupes Q/S fini et localement libre sur S, S étant un préschéma de base quelconque. Il serait intéressant de trouver une démonstration dans ce cas général

On notera que 7.3 (i.e. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, 8.5) prouve en tous cas que l'énoncé envisagé est vrai si S est *réduit*, comme on voit en appliquant 7.3 aux fibres de Q en les points maximaux (i.e. points génériques des composantes irréductibles) de S. [39]

En particulier, sous les conditions de la démonstration précédente, où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète et Q est commutatif, on trouve que $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Q}} = 0$. D'ailleurs, ici n est une puissance p^{ν_0} de la caractéristique résiduelle, et on trouve le

31 ***Corollaire 7.4***. — Q *et les* Q_n *étant comme ci-dessus, et leur degré commun étant* p^{ν_0}*, on aura* $p^{\nu_0} \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Q}} = 0$ *et par suite* $p^{\nu_0} \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Q}_n} = 0$ *pour tout* n*.*

Corollaire 7.5. — *Supposons de plus* G_0 *lisse sur* k*, et l'homomorphisme* $p \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}_0}$ *plat* (*ce qui revient à dire, en vertu de la structure des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos* $\overline{k}$*, que* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *ne contient pas de sous-groupe isomorphe au groupe additif*)*. Alors pour tout* $\nu \geqslant \nu_0$ *et* $n > 0$*, le groupe* ${}_{p^\nu}\mathrm{H}_n$ *est plat sur* S_n*.*

En effet, il résulte de $p^{\nu_0} \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Q}_n} = 0$ que $p^{\nu} \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}_n}$ se factorise à travers G_n, de sorte qu'on aura un diagramme commutatif :

[38] N.D.E. : On a supprimé ici l'hypothèse que Q soit commutatif, et l'on a modifié 7.3.1 en conséquence. Noter que si Q n'est pas commutatif, le morphisme de puissance n-ème n'est pas en général un homomorphisme de groupes.

[39] N.D.E. : Ajouter ceci dans $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ – D'autre part, l'énoncé est vrai pour tout S si Q est *commutatif*, cf. le théorème de Deligne dans [**TO70**], p. 4.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_n \arrow[r, "p^\nu \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}_n}"] \arrow[dr, "v_n"] & \mathrm{H}_n \\
\mathrm{G}_n \arrow[u, "u_n"] \arrow[r, "p^\nu \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}_n}"] & \mathrm{G}_n \arrow[u, "u_n"']
\end{tikzcd} \quad .$$

Je dis que v_n est *plat*. En effet, comme H_n et G_n sont plats sur S_n, on est ramené à vérifier que v_0 est plat (SGA 1, IV 5.9), donc on peut supposer que $n = 0$ d'où $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(k)$. Comme $p \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}_0}$ donc $p^\nu \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}_0}$ est plat, son image est un sous-groupe ouvert *induit* G'_0 de G_0, et comme $u_0 : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$ est surjectif, il s'ensuit que v_0 prend ses valeurs dans G'_0, donc peut être considéré comme un homomorphisme dans G'_0. Comme son composé avec u_0 est un épimorphisme, c'est un épimorphisme, donc c'est un homomorphisme plat dans G'_0, donc un homomorphisme plat dans G_0. Donc v_n est plat, donc $\mathrm{Ker}\, v_n = {}_{p^\nu}\mathrm{H}$ est plat sur S. C.Q.F.D.

Remarque. — Nous n'avons pas utilisé explicitement le fait que G_0 soit lisse sur k ; mais il est facile de voir que c'est une conséquence du fait que $p \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ soit plat, c'est 32
pourquoi nous avons explicité cette condition dans l'hypothèse du corollaire 7.5.

Lemme 7.6. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un monomorphisme surjectif de groupes algébriques commutatifs sur un corps* k *de caractéristique* $p > 0$, *considérons le groupe* (*purement infinitésimal*) $\mathrm{Q} = \mathrm{H}/\mathrm{G}$, *alors il existe un entier* ν_1 *tel que pour* $\nu \geqslant \nu_1$ *la suite*

$$0 \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{G} \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{Q} \longrightarrow 0$$

soit exacte.

Il suffit d'assurer l'exactitude en Q, et pour ceci d'assurer que l'homomorphisme

$$\text{(x)} \qquad \mathscr{O}_{\mathrm{Q},e} \longrightarrow \mathscr{O}_{{}_{p^\nu}\mathrm{H},e}$$

des anneaux locaux en les éléments neutres est injectif (N.B. se rappeler que Q est réduit à l'élément e ensemblistement). Or on a un homomorphisme naturel

$$\text{(xx)} \qquad \mathscr{O}_{{}_{p^\nu}\mathrm{H},e} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{H},e}/\mathfrak{m}^{p^\nu},$$

où $\mathfrak{m}$ est l'idéal d'augmentation (i.e. l'idéal maximal) de $\mathscr{O}_{\mathrm{H},e}$, comme on voit en notant que $p^\nu \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$ s'annule sur le noyau de « l'homomorphisme de Frobenius itéré » F^ν ; le composé des homomorphismes (x) et (xx) est aussi égal au composé naturel

$$\text{(xxx)} \qquad \mathscr{O}_{\mathrm{Q},e} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{H},e} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{H},e}/\mathfrak{m}^{p^\nu}.$$

Or $\mathscr{O}_{\mathrm{Q},e} \to \mathscr{O}_{\mathrm{H},e}$ est injectif, puisque $\mathrm{H} \to \mathrm{Q}$ est un épimorphisme donc est plat, d'autre part $\mathscr{O}_{\mathrm{Q},e}$ est artinien, enfin l'intersection dans $\mathscr{O}_{\mathrm{H},e}$ des $\mathfrak{m}^{p^\nu}$ est réduit à 0, donc aussi l'intersection de leurs traces sur $\mathscr{O}_{\mathrm{Q},e}$. Par suite l'une de ces traces est 33
réduite à 0, ce qui prouve que (xxx) est injectif, et a fortiori (x) est injectif.

Lemme 7.7. — *Sous les conditions de* 7.5 *il existe un* ν_1 *tel que, pour* $\nu \geqslant \nu_1$ *et tout* n*, la suite de* S_n*-groupes*

$$0 \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{G}_n \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{H}_n \xrightarrow{w_n} \mathrm{Q}_n \longrightarrow 0$$

soit exacte, (de façon précise w_n *est fidèlement plat et son noyau est* ${}_{p^\nu}\mathrm{G}_n$*).*

On prend ν_1 comme dans 7.6 appliqué à $u_0 : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$, et $\nu_1 \geqslant \nu_0$ (où $p^{\nu_0} = \operatorname{rang} \mathrm{Q}_0$). Il faut seulement vérifier que w_n est fidèlement plat. Or en vertu de 7.5, ${}_{p^\nu}\mathrm{H}$ est plat sur S_n, et comme Q_n l'est aussi, on est ramené à vérifier que $w_0 : {}_{p^\nu}\mathrm{H}_0 \to \mathrm{Q}_0$ est fidèlement plat i.e. est un épimorphisme, ce qui est vrai d'après le choix de ν_1.

Corollaire 7.8. — *Supposons de plus* H *séparé sur* S*, plus généralement que* ${}_{p^\nu}\mathrm{H}$ *soit séparé sur* S *pour tout* ν*, et que* ${}_{p^\nu}\mathrm{G}$ *soit fini sur* S *pour tout* ν*. Alors les schémas en groupes* ${}_{p^\nu}\mathrm{G}$ *et* ${}_{p^\nu}\mathrm{H}$ *sont finis et plats sur* S *pour* $\nu \geqslant \nu_1$*, et on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{G} \longrightarrow {}_{p^\nu}\mathrm{H} \xrightarrow{w} \mathrm{Q} \longrightarrow 0.$$

Comme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est surjectif, il en est de même du morphisme induit ${}_{p^\nu}\mathrm{G} \to {}_{p^\nu}\mathrm{H}$, et comme le premier membre est fini sur S et le deuxième séparé sur S, il s'ensuit que le deuxième membre est fini sur S. Pour vérifier alors que ${}_{p^\nu}\mathrm{G}$ et ${}_{p^\nu}\mathrm{H}$ sont aussi plats sur S, il suffit de vérifier qu'il en est ainsi de ${}_{p^\nu}\mathrm{G}_n$ et ${}_{p^\nu}\mathrm{H}_n$ pour tout n, ce qui est contenu dans 7.5. Enfin, la suite exacte de 7.8 provient des suites exactes 7.7 pour n variable.

34 Prenant les fibres génériques dans la suite exacte 7.8 et se rappelant que $u_{s'} : \mathrm{G}_{s'} \to \mathrm{H}_{s'}$ est un isomorphisme, on trouve $\mathrm{Q}_{s'} =$ groupe unité, d'où (puisque Q est plat sur S) Q = groupe unité, d'où $\mathrm{Q}_s =$ groupe unité, donc $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ est un isomorphisme. Donc :

Proposition 7.9. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de préschémas en groupes de présentation finie sur le préschéma* S*. On suppose :*

a) *u est un monomorphisme.*

b) G *est plat sur* S.

c) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $\kappa(s)$ *soit de caractéristique résiduelle* $p > 0$*, on veut que les conditions suivantes soient vérifiées pour l'homomorphisme* $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ *de préschémas en groupes sur* $\mathrm{S}' = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$ *déduit de* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *par le changement de base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *:*

- G' *est commutatif,*
- *la fibre spéciale* $\mathrm{G}'_0 = \mathrm{G}_s$ *est lisse sur* $\kappa(s)$*,*
- *pour tout entier* $\nu > 0$*,* ${}_{p^\nu}\mathrm{G}'$ *est fini sur* S' *et* ${}_{p^\nu}\mathrm{H}'$ *est séparé sur* S'.

Sous ces conditions, u est une immersion.

Il suffit de remarquer que dans c), la condition que ${}_p\mathrm{G}'$ soit fini sur S' implique que ${}_p\mathrm{G}'_0$ est fini sur $\kappa(s)$, ce qui implique déjà que $\mathrm{G}'_0 \otimes_{\kappa(s)} \overline{\kappa(s)}$ n'a pas de sous-groupe isomorphe au groupe additif, de sorte qu'on est sous les hypothèses de 7.5.

Remarque 7.10. — Des exemples de M. Raynaud (XVI 1.1 a) et b)) montrent qu'on ne peut dans c) abandonner ni l'hypothèse que les ${}_{p^\nu}\mathrm{G}'$ soient finis sur S', ni celle que les ${}_{p^\nu}\mathrm{H}'$ soient séparés sur S'.

Nous voulons maintenant des conditions assurant que u est une immersion *fermée.* Nous conservons donc les hypothèses précédant 7.9 mais en ne supposant plus u surjectif (seulement u un isomorphisme sur les fibres génériques). Nous savons déjà que $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est une immersion ouverte, il en est donc même de $u_0 : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$, dont **35**
l'image contient donc la composante connexe de l'élément neutre $(\mathrm{H}_0)^0$. Notons que comme G_0 est lisse sur k et « sans composante additive » sur la clôture algébrique de k, il en est de même de H_0. Or on a le

Lemme 7.11. — *Soit* H *un groupe algébrique commutatif sur un corps* k*, tel que* $\mathrm{H} \otimes_k \overline{k}$ *ne contienne pas de sous-groupe isomorphe à* $\mathbb{G}_a$*. Soit* $n =$ *degré* H/H^0*, alors l'homomorphisme*

$$ {}_n\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}/\mathrm{H}^0 $$

est surjectif.

On peut supposer en effet k algébriquement clos, et alors cela résulte du fait bien connu que $\mathrm{H}^0(k)$ est un groupe *divisible.*

Supposons maintenant (revenant à notre situation $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$) que les ${}_n\mathrm{G}$ $(n > 0)$ sont *propres* sur S, et les ${}_n\mathrm{H}$ sont *séparés sur* S. Notons d'autre part que les ${}_n\mathrm{H}$ sont *plats* sur S. En effet, il suffit de le voir en les points au-dessus de s, on est ramené alors à prouver que $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$ est plat en les points au-dessus de s, et pour ceci on est ramené à vérifier que $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}_0}$ est plat, ce qui équivaut (comme nous l'avons déjà noté) au fait que $(\mathrm{H}_0)^0$ est lisse [40] sur k et n'a pas de composante $\mathbb{G}_a$ sur la clôture algébrique de k. Comme $(\mathrm{H}_0)^0 = (\mathrm{G}_0)^0$, cela résulte de l'hypothèse analogue faite sur G_0. D'autre part les ${}_n\mathrm{H}$ sont séparés sur S puisque H l'est, donc le morphisme ${}_n\mathrm{G} \to {}_n\mathrm{H}$ est propre, donc son image est fermée. Comme cette image contient la fibre générique de ${}_n\mathrm{H}$ (puisque $u_{s'} : \mathrm{G}_{s'} \to \mathrm{H}_{s'}$ est un isomorphisme) et que ${}_n\mathrm{H}$ est plat sur S, donc identique à l'adhérence de sa fibre générique, il s'ensuit que ${}_n\mathrm{G} \to {}_n\mathrm{H}$ est *surjectif,* donc ${}_n\mathrm{G}_0 \to {}_n\mathrm{H}_0$ est surjectif. Se rappelant que $\mathrm{G}_0 \supset (\mathrm{H}_0)^0$ et appliquant 7.11, on trouve que $\mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$ est surjectif, donc u est surjectif. On obtient ainsi :

Proposition 7.12. — *Avec les notations de* 7.9*, supposons que les conditions* a) *et* b) *soient vérifiées, ainsi que la condition* c$'$) (*plus forte que* c))*, obtenue en exigeant que* **36**
pour tout entier $n > 0$ (*non seulement de la forme* p^ν), ${}_n\mathrm{G}'$ *soit fini sur* S' *et* ${}_n\mathrm{H}'$ *séparé sur* S'*. Sous ces conditions,* u *est une immersion fermée.*

Remarque 7.13. — a) On vérifie facilement que l'hypothèse de séparation faite sur les ${}_n\mathrm{H}$ implique en fait que H est séparé sur S. C'est d'ailleurs contenu formellement dans 7.12 en y prenant pour G le S-groupe unité. Notons aussi que lorsque S est localement noethérien, on peut dans 7.9 se borner à supposer H localement de type fini sur S (au

[40] N.D.E. : On a actualisé la terminologie, remplaçant « simple » par « lisse » (voir, par exemple, la note (1) de A. Grothendieck dans SGA 1, Exp. II).

lieu de : de type fini sur S), la démonstration donnée s'appliquant telle quelle ; pour 7.12 on supposera de plus que les fibres de H sont de type fini.

b) Utilisant 7.12, il n'est pas difficile de prouver que si $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est un monomorphisme de S-préschémas en groupes de présentation finie, avec G diagonalisable (ou plus généralement, « de type multiplicatif ») et H séparé sur S, alors u est une immersion fermée, – ce qui constitue une généralisation satisfaisante de la première conclusion énoncée dans 5.7. Lorsque G est lisse sur S, il suffit d'appliquer 7.12, et le cas général se ramène facilement à celui-là. Lorsqu'on ne suppose plus H séparé sur S, on peut encore montrer que u est une immersion ; dans le cas où G est un tore, ce fait résulte d'ailleurs également de ce qui suit.

c) Lorsque dans 7.9 on suppose G à fibres connexes, on peut dans la condition 7.9 c) abandonner l'hypothèse que les ${}_{p^\nu}\mathrm{H}'$ soient séparés sur S′. En effet, avec les réductions faites dans la démonstration, on peut supposer H plat sur S et u bijectif, donc H à fibres connexes, donc H séparé sur S en vertu du théorème de Raynaud ($\mathrm{VI_B}$ 5.5). [41]

Bibliographie

[42]

[RG71] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. math. **13** (1971), 1-89.

[TO70] J. Tate, F. Oort, *Group schemes of prime order*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. (4) **3** (1970), 1-21.

[41] N.D.E. : préciser dans $\mathrm{VI_B}$ § 5 cette attribution, qui figurait dans SGAD 1965, en signalant les modifications entre SGAD et le Lect. Notes 151.

[42] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

EXPOSÉ IX

GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF : HOMOMORPHISMES DANS UN SCHÉMA EN GROUPES

par A. Grothendieck

1. Définitions

37

Définition 1.1. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes. On dit que G est un groupe *de type multiplicatif* si G est localement diagonalisable au sens de la topologie fidèlement plate quasi-compacte (cf. IV 6.3), i.e. si pour tout $s \in \mathrm{S}$, il existe un voisinage ouvert U de s et un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ tel que $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit un S′-groupe diagonalisable (I 4.4 et VIII 1.1).

– On dit que G est de type multiplicatif *quasi-isotrivial* s'il est même localement diagonalisable au sens de la topologie étale (IV 6.3), i.e. si dans la définition précédente, on peut même prendre $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ *étale* surjectif, ou encore (ce qui revient au même, comme on voit en prenant le schéma somme des S′ attachés aux divers $s \in \mathrm{S}$) s'il existe $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ étale et surjectif tel que $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit un S′-groupe localement diagonalisable.

– Si on peut même choisir $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ étale surjectif et *fini*, on dit que G est de type multiplicatif *isotrivial*.

– Enfin on dit que G est un groupe de type multiplicatif *localement trivial* (resp. *localement isotrivial*) si tout $s \in \mathrm{S}$ admet un voisinage ouvert U tel que $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}$ soit un U-groupe diagonalisable (resp. un groupe de type multiplicatif isotrivial, i.e. il existe $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ morphisme étale surjectif fini tel que $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit un S′-groupe diagonalisable).

Commentaires 1.2. — On notera que les cinq notions précédentes se déduisent toutes de la notion de *groupe diagonalisable* par le processus de localisation, au sens de cinq « topologies » différentes associées à (**Sch**).

On convient de façon générale que lorsque le mot « localement » n'est pas explicité 38
par la désignation de la topologie envisagée, il s'agit de la topologie de Zariski, ce qui est conforme à la terminologie reçue. Dans la terminologie introduite ici, « de type multiplicatif localement trivial » équivaut à « localement diagonalisable » de VIII 1.1,

---

[(0)] version 1.0 du 8 novembre 2009 : ajouts dans preuve 3.6 bis, 4.4–7, 5.0–6, 6.1, 7.1, 8.2. Revoir 8.1 et 4.5.

de même « trivial » se traduit par « diagonalisable ». Entre les cinq notions introduites, on a le diagramme d'implications suivant, qui résulte des relations correspondantes entre les topologies en jeu :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{type multiplicatif général} & \\
 & \text{quasi-isotrivial} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & \text{localement isotrivial} \arrow[u, Rightarrow] & \\
\text{isotrivial} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{localement trivial} \arrow[ul, Rightarrow] \\
 & \text{trivial} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Du point de vue pratique, signalons tout de suite que tous les groupes de type multiplicatif que nous rencontrerons seront quasi-isotriviaux ; ainsi, nous verrons dans l'exposé suivant (X 4.5) que lorsque G est *de type fini* sur S, alors G est automatiquement quasi-isotrivial, mais nous donnerons des exemples où il n'est pas localement isotrivial. Nous y verrons de même que G peut être localement trivial, sans être isotrivial ni a fortiori trivial (ce qui implique facilement que les inclusions du diagramme précédent sont strictes).

Par contre, nous y verrons également (X 5.16) lorsque S est localement noethérien et *normal* (plus généralement géométriquement unibranche), alors tout groupe de type multiplicatif de type fini sur S est nécessairement isotrivial, et de plus trivial dès qu'il est localement trivial (ou seulement trivial sur un ouvert dense). Ceci explique que la plupart des groupes de type multiplicatif qu'on rencontrera en pratique seront sans doute isotriviaux, d'autant plus que nous verrons par la suite que les *tores maximaux des schémas en groupes semi-simples* sont automatiquement isotriviaux.

39 ***Définition 1.3***. — Soient S, G comme dans 1.1. On dit que G est un *tore* s'il est localement isomorphe, au sens de la topologie fidèlement plate quasi-compacte, à un groupe de la forme $\mathbb{G}_m^r$ (où r est un entier $\geqslant 0$).

Avec les notations de 1.1, cela signifie donc qu'on peut choisir S' tel que G' soit isomorphe à un groupe de la forme $(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}'})^r$. On notera que l'entier r dépend de $s \in \mathrm{S}$, c'est la *dimension de la fibre* $\mathrm{G}_s = \mathrm{G} \otimes_{\mathrm{S}} \kappa(s)$. C'est une fonction localement constante de s, comme on constate aussitôt. Il y a lieu de généraliser cette remarque :

Définition 1.4. — Soit G un schéma en groupes diagonalisable sur un corps k, donc G est isomorphe à un groupe $\mathrm{D}_k(\mathrm{M})$, où M est un groupe commutatif ordinaire, défini à isomorphisme près par cette condition, de façon précise $\mathrm{M} \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{G}, \mathbb{G}_{m,k})$ (VIII 1.3). La classe à isomorphisme près de M s'appelle le *type* du groupe diagonalisable G ; il est évidemment invariant par extension du corps de base.

Si maintenant G est un schéma en groupes de type multiplicatif sur un préschéma S quelconque, alors pour tout $s \in \mathrm{S}$, il existe une extension k de $\kappa(s)$ telle que $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Spec}(k)$ soit un k-groupe diagonalisable [(1)], son type est alors indépendant de l'extension choisie d'après la remarque précédente, et sera appelé le *type de* G *en* s, ou type de G_s. En particulier, si G lui-même est diagonalisable, donc isomorphe à un groupe de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, alors pour tout $s \in \mathrm{S}$, le type de G en s est égal à la classe du groupe M.

De façon générale, si G est un groupe de type multiplicatif sur S, M un groupe commutatif ordinaire, on dira que G est *de type* M s'il est de type M en tout point $s \in \mathrm{S}$, en d'autres termes si G est localement isomorphe à $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ au sens de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte.

Remarque 1.4.1. — [(2)] a) On voit immédiatement que pour un groupe de type multiplicatif donné G sur S, la fonction $s \mapsto$ type de G_s est localement constante sur S : en effet, avec les notations de 1.1, si G' est de type M, alors G est de type M sur le voisinage U de s. Il s'ensuit que l'on a une *partition canonique* de S en somme de préschémas S_i, telle que pour tout i, $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$ soit de type M_i, où les M_i sont des groupes commutatifs deux à deux non isomorphes. 40

b) En particulier, si S est connexe, alors le type des fibres de G est constant i.e. il existe un groupe commutatif M tel que G soit de type M. Enfin, si G est un tore, le type de G en s est caractérisé par l'entier $\dim \mathrm{G}_s$ (en effet, G_s est de type $\mathbb{Z}^n$, où $n = \dim \mathrm{G}_s$).

Remarque 1.5. — a) Il est trivial sur les définitions 1.1 et 1.3 que celles-ci sont « compatibles avec l'extension de la base ». Ainsi, si G est un préschéma en groupes sur S, et $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme de changement de base, alors si G est de type multiplicatif (resp. de type multiplicatif isotrivial, etc.), il en est de même de G'.

b) Lorsque de plus $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est fidèlement plat et quasi-compact, alors si G' est de type multiplicatif, resp. un tore, il en est de même de G. Si de plus $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est étale (resp. fini étale), et G' quasi-isotrivial (resp. isotrivial), il en est de même de G.

c) Enfin, revenant à un morphisme de changement de base quelconque $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, si $s' \in \mathrm{S}'$ et $s = f(s')$, alors le type de G' en s' est égal à celui de G en s, puisque $\mathrm{G}'_{s'} = \mathrm{G}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$.

[(1)] N.D.E. : En effet, il existe par hypothèse un voisinage ouvert U de s et un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ soit diagonalisable ; alors pour tout $s' \in \mathrm{S}'$ au-dessus de s, $\kappa(s')$ est une extension de $\kappa(s)$ et $\mathrm{G}_{s'} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Spec}(\kappa(s'))$ est diagonalisable.

[(2)] N.D.E. : On a mis le numéro 1.4.1 aux remarques qui suivent, pour des références ultérieures.

2. Extension de certaines propriétés des groupes diagonalisables aux groupes de type multiplicatif

Les extensions dont il s'agit sont des conséquences essentiellement triviales des résultats de l'exposé précédent, compte tenu des définitions 1.1 et de la nature « locale » (au sens de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte) des résultats dont il s'agit.

Définition 2.0. — [(3)] On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des morphismes fidèlement plats et quasi-compacts.

Proposition 2.1. — *Soit* G *un groupe de type multiplicatif sur un préschéma* S. *On a ce qui suit :*

a) G *est fidèlement plat sur* S, *et affine sur* S (*a fortiori quasi-compact sur* S).

41 b) G *de type fini sur* S $\Longleftrightarrow$ G *de présentation finie sur* S $\Longleftrightarrow$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le type de* G *en* s *est donné par un groupe commutatif de type fini.*

c) G *fini sur* S $\Longleftrightarrow$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le type de* G *en* s *est donné par un groupe commutatif fini* $\Longleftrightarrow$ (*si* S *quasi-compact*) G *est de type fini sur* S *et est annulé par un entier* $n > 0$.

c′) G *entier sur* S $\Longleftrightarrow$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le type de* G *en* s *est donné par un groupe commutatif de torsion.*

d) G *est le groupe unité* $\Longleftrightarrow$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le type de* G *en* s *est donné par le groupe commutatif nul.*

e) G *est lisse sur* S $\Longleftrightarrow$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le type de* G *en* s *est donné par un groupe commutatif de type fini dont le sous-groupe de torsion est d'ordre premier à la caractéristique de* $\kappa(s)$.

Ces énoncés résultent de VIII 2.1, compte tenu que les propriétés dont il s'agit se descendent par morphismes fidèlement plats et quasi-compacts (cf. SGA 1, VIII ou EGA IV_2, § 2).

Utilisant VIII 3.5, on obtient de même :

Proposition 2.2. — *Soit* G *un groupe de type multiplicatif et de type fini sur* S, *alors pour tout entier* $n \neq 0$, *le noyau* ${}_n\mathrm{G}$ *de* $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ *est un groupe de type multiplicatif fini sur* S.

Proposition 2.3. — *Soit* G *un groupe de type multiplicatif sur le préschéma* S, *opérant librement à droite sur le* S*-préschéma* X *affine sur* S. *Alors :*

a) *La relation d'équivalence définie par* G *dans* X *est* $\mathscr{M}$*-effective* (IV 3.4), *de plus* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{G}$ *est affine sur* S.

b) *Si de plus* X *est de présentation finie* (*resp. de type fini*) *sur* S, *il en est de même de* Y.

La première assertion résulte de VIII 5.1, traitant le cas où G est diagonalisable, et
42 de IV 3.5.2, qui permet de s'y ramener, compte tenu que les morphismes fidèlement plats et quasi-compacts $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ sont des morphismes de descente *effective* pour la

(3) N.D.E. : On a ajouté cette définition, qui apparaît dans les propositions 2.3 et 2.7.

catégorie fibrée des schémas affines sur d'autres, i.e. pour tout Y' affine sur S', muni d'une donnée de descente relativement à $S' \to S$, cette donnée de descente est effective, i.e. Y' provient d'un Y affine sur S, cf. SGA 1, VIII 2.1.

Pour la deuxième assertion on est ramené également au cas diagonalisable VIII 5.8, car les conditions de finitude envisagées se descendent par morphismes fidèlement plats et quasi-compacts (SGA 1, VIII 3.3 et 3.6 [(4)]). Procédant comme dans VIII, corollaires 5.5 à 5.7, on tire de 2.3 :

Corollaire 2.4. — *Sous les conditions de* 2.3, *le morphisme graphe*

$$X \underset{S}{\times} G \longrightarrow X \underset{S}{\times} X$$

est une immersion fermée. Pour toute section σ *de* X *sur* S, *le morphisme correspondant* $G \to X$, $g \mapsto \sigma \cdot g$ *est une immersion fermée.*

En particulier :

Corollaire 2.5. — *Soit* $u : G \to H$ *un* monomorphisme *de* S-*préschémas en groupes, avec* G de type multiplicatif *et* H affine sur S. *Alors* u *est une immersion fermée,* $H/G = Y$ *existe et est affine sur* S, *enfin* H *est un fibré principal homogène sur* Y *de groupe* G_Y.

Remarque 2.6. — Soit $u : G \to H$ un monomorphisme de S-préschémas en groupes, G étant de type multiplicatif et de type fini sur S, H étant de présentation finie sur S et séparé sur S. Alors on peut montrer que u est une immersion fermée, en utilisant VIII 7.12 (voir remarque VIII 7.13 b)).

Proposition 2.7. — *Soit* $u : G \to H$ *un homomorphisme de* S-*groupes de type multiplicatif, avec* H de type fini *sur* S. *Alors :* 43

(i) $G' = \operatorname{Ker} u$ *est un* S-*groupe de type multiplicatif, la relation d'équivalence définie par* G' *dans* G *est* $\mathscr{M}$-*effective, donc* (IV 3.4) u *se factorise en*

$$G \longrightarrow G/G' = I \longrightarrow H,$$

où $I \to H$ *est un monomorphisme* [(5)] *de* S-*groupes ;* I *est de type multiplicatif, la relation d'équivalence dans* H *définie par* I *est* $\mathscr{M}$-*effective, par suite* $H' = H/I$ *existe, et de plus* H' *est de type multiplicatif.*

(ii) H' *et* I *sont de type fini, et il en est de même de* G' *si* G *l'est.*

Démonstration. Procédant comme pour 2.3 on est ramené au cas où G et H sont diagonalisables, et alors 2.7 se réduit à VIII 3.4.

Notons les corollaires suivants :

(4) N.D.E. : cf. aussi V, 9.1 ou EGA IV_2, 2.7.1.

(5) N.D.E. : et même une *immersion fermée*

Corollaire 2.8. — a) *Soit* S *un préschéma. Alors la catégorie des* S*-groupes de type multiplicatif et de type fini est une catégorie abélienne.*

b) *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme dans cette catégorie, pour que ce soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*) *dans cette catégorie, il faut et il suffit que* u *soit un monomorphisme de préschémas* (*resp. que* u *soit fidèlement plat, resp. que* u *soit un isomorphisme de préschémas*).

Il suffit de noter que le produit de deux S-groupes de type multiplicatif est encore de type multiplicatif (ce qui est immédiat), évidemment de type fini sur S si les deux facteurs le sont. Le reste de 2.8 résulte immédiatement de 2.7, le détail est laissé au lecteur.

Corollaire 2.9. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de* S*-groupes de type multiplicatif et de type fini. Soit* U *l'ensemble des points* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *soit un monomorphisme* (*resp. fidèlement plat, resp. un isomorphisme*). *Alors* U *est à la fois*
44 *ouvert et fermé, et l'homomorphisme induit* $u_{\mathrm{U}} : \mathrm{G}_{\mathrm{U}} \to \mathrm{H}_{\mathrm{U}}$ *est un monomorphisme* (*resp. fidèlement plat, resp. un isomorphisme*).

Soit P (resp. Q) le noyau (resp. conoyau) de u. Grâce à 2.7, Q existe et P et Q sont de type multiplicatif, de plus la formation de P et de Q commute à tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, en particulier à la formation des fibres. D'autre part, u est un monomorphisme (resp. fidèlement plat, resp. un isomorphisme) si et seulement si $\mathrm{P} = 0$ (resp. $\mathrm{Q} = 0$, resp. $\mathrm{P} = \mathrm{Q} = 0$). On est donc ramené, grâce à ces remarques, à vérifier ceci : si R est un S-groupe de type multiplicatif, alors l'ensemble U des $s \in \mathrm{S}$ tels que $\mathrm{R}_s = 0$ est ouvert et fermé, et $\mathrm{R}_{\mathrm{U}} = 0$. Or ceci est contenu dans la remarque 1.4.1 a).

Corollaire 2.10. — *Soient* G *un* S*-groupe de type multiplicatif et de type fini,* H *et* H' *deux sous-groupes de type multiplicatif.*

a) $\mathrm{H}'' = \mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$ *est un sous-groupe de type multiplicatif de* G.

b) *Soit* U *l'ensemble des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* $\mathrm{H}_s \subseteq \mathrm{H}'_s$ (*resp.* $\mathrm{H}_s = \mathrm{H}'_s$). *Alors* U *est ouvert et fermé, et* $\mathrm{H}_{\mathrm{U}} \subseteq \mathrm{H}'_{\mathrm{U}}$ (*resp.* $\mathrm{H}_{\mathrm{U}} = \mathrm{H}'_{\mathrm{U}}$).

Bien entendu, le signe intersection dans $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$ désigne l'intersection au sens fonctoriel, i.e. $\mathrm{H} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{H}'$, qui est évidemment un sous-S-groupe de G ; de même le signe d'inclusion (resp. d'égalité) désigne la relation d'ordre (resp. l'égalité) entre sous-foncteurs de H (et pas l'inclusion (resp. l'égalité) pour les ensembles sous-jacents).

Appliquant d'abord 2.7 au morphisme d'inclusion $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$, on trouve que H est de type fini ; de même H' est de type fini. Il résulte alors de 2.8 que $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$ est de type multiplicatif et de type fini (on notera que le foncteur canonique de la catégorie envisagée dans 2.8 dans la catégorie $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ commute aux limites projectives finies).

La formation de $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$ commute à l'extension de la base, en particulier à la formation des fibres. D'autre part, $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{H}'$ (resp. $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$) équivaut à $\mathrm{H}'' = \mathrm{H}$ (resp. $\mathrm{H}'' = \mathrm{H}$ et $\mathrm{H}'' = \mathrm{H}'$). Considérons alors les homomorphismes canoniques $\mathrm{H}'' \to \mathrm{H}$ et $\mathrm{H}'' \to \mathrm{H}'$, alors U est l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que l'homomorphisme induit $\mathrm{H}''_s \to \mathrm{H}_s$ soit un isomorphisme (resp. tels que $\mathrm{H}''_s \to \mathrm{H}_s$ et $\mathrm{H}''_s \to \mathrm{H}'_s$ soient des isomorphismes). En

vertu de 2.9, il s'ensuit que U est ouvert et fermé, et que $H''_U \to H_U$ (resp. $H''_U \to H_U$ 45
et $H''_U \to H'_U$) sont des isomorphismes. D'où la conclusion voulue.

Proposition 2.11. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe de type multiplicatif et de type fini sur* S*,* H *un sous-groupe de type multiplicatif de* G*, et* $K = G/H$ (*qui est un groupe de type multiplicatif quotient de* G).

(i) *Supposons* G *trivial i.e. diagonalisable. Alors il existe une partition de* S *en parties* S_i *ouvertes et fermées, telles que pour tout* i*,* H_{S_i} *et* K_{S_i} *soient diagonalisables. En particulier, si* S *est connexe,* H *et* K *sont diagonalisables.*

(ii) *Même énoncé que dans* (i)*, en remplaçant « diagonalisable » par « isotrivial », pourvu que* S *soit connexe, ou localement connexe, ou quasi-compact.*

(iii) *Supposons* G *localement trivial* (*resp. localement isotrivial, resp. quasi-isotrivial*)*, alors il en est de même de* K *et de* H.

Démonstration. (i) Par hypothèse on a $G = D_S(M)$, où M est un groupe commutatif de type fini. Pour tout groupe quotient M_i de M, soit $H_i = D_S(M_i)$ le sous-groupe diagonalisable correspondant de G (VIII 3.1). Soit S_i l'ensemble des $s \in S$ tels que $H_s = (H_i)_s$; en vertu de 2.10, S_i est ouvert et fermé, et on a $H_{S_i} = (H_i)_{S_i}$, donc H_{S_i} est diagonalisable, donc aussi K_{S_i} (VIII 3.1). Évidemment les S_i sont deux à deux disjoints, je dis qu'ils recouvrent S. Cela résulte du fait que pour tout s, H_s est diagonalisable, comme sous-groupe du groupe diagonalisable G_s (cf. 8.1 plus loin [6]), donc H_s est de la forme $D_{\kappa(s)}(M_i)$, d'après VIII, 1.5 et 3.2 b). Se limitant à la famille des S_i non vides, la conclusion (i) apparaît.

(ii) Par hypothèse, il existe $S' \to S$ étale fini surjectif, tel que $G_{S'}$ soit diagonalisable. Donc tout point de S' a un voisinage U', à la fois ouvert et fermé, tel que $H_{U'}$ et $K_{U'}$ soient diagonalisables. Alors l'image U de U' dans S est à la fois ouverte et fermée, et
$S' \to S$ induit encore un morphisme étale fini surjectif $U' \to U$, donc on voit que tout 46
point s de S a un voisinage U ouvert et fermé tel que H_U et K_U soient isotriviaux. La conclusion (ii) en résulte aussitôt.

(iii) Résulte aussitôt de (i) et (ii) et des définitions. Noter d'ailleurs que le cas « quasi-isotrivial » résultera aussi du fait plus général que « type fini $\Rightarrow$ quasi-isotrivial », annoncé dans 1.2 (cf. X 4.5).

3. Propriétés infinitésimales : théorèmes de relèvement et de conjugaison

Les propriétés infinitésimales fondamentales des groupes de type multiplicatif découlent du théorème suivant :

Théorème 3.1. — *Soient* S *un schéma* affine, H *un* S*-groupe* de type multiplicatif*,* $\mathscr{F}$ *un faisceau quasi-cohérent sur* S*, sur lequel* H *opère* (I 4.7)*. Alors on a*

$$H^i(H, \mathscr{F}) = 0 \quad \textit{pour} \quad i > 0,$$

où H^i *est la cohomologie de Hochschild étudiée dans* Exp. I, § 5.

[6] N.D.E. : On a corrigé la référence erronée à IV 4.7.5. Noter que le n°8 du présent exposé est indépendant des n^{os} 3 à 7.

En effet, d'après *loc. cit.*, 5.3, la cohomologie de Hochschild s'explicite, en termes des anneaux affines A de S et B de G, et du module M sur A définissant $\mathscr{F}$, comme cohomologie d'un complexe de A-modules $\mathrm{C}^{\bullet}(\mathrm{H}, \mathrm{M})$, *dont la formation commute à tout changement de base* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$. Par suite, pour un changement de base $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ avec A' *plat* sur A, on aura

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{H}', \mathscr{F}') = \mathrm{H}^i(\mathrm{H}, \mathscr{F}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}',$$

et par suite, si on suppose même A' fidèlement plat sur A, pour prouver que $\mathrm{H}^i(\mathrm{H}, \mathscr{F})$ est nul, il suffit de prouver qu'il en est ainsi de $\mathrm{H}^i(\mathrm{H}', \mathscr{F}')$. Cette remarque nous ramène à vérifier 3.1 dans le cas où G est diagonalisable ; dans ce cas cela a été prouvé dans I 5.3.3.

47 Utilisant les résultats de l'Exposé III, nous allons tirer de 3.1 diverses conséquences de nature géométrique :

Théorème 3.2. — *Soient* S *un schéma* affine, S_0 *un sous-schéma affine défini par un idéal* $\mathscr{J}$, H *un groupe de type multiplicatif sur* S, G *un préschéma en groupes quelconque sur* S, $u, v : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *deux homomorphismes de groupes,* $u_0, v_0 : \mathrm{H}_0 \to \mathrm{G}_0$ *les homomorphisme déduits de* u, v *par le changement de base* $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$. *Si* $\mathscr{J}^2 = 0$ *et* $u_0 = v_0$, *alors il existe un* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $v = \mathrm{int}(g) \circ u$ *et* $g_0 = e$.

Cela résulte de III 2.1 (ii), et de 3.1 (nullité de H^1).

Corollaire 3.3. — *Sous les conditions préliminaires de* 3.2 *supposons de plus* G lisse *sur* S, *mais en revanche supposons seulement* $\mathscr{J}$ *nilpotent* (*pas nécessairement de carré nul*). *S'il existe* $g_0 \in \mathrm{G}_0(\mathrm{S}_0)$ *tel que* $v_0 = \mathrm{int}(g_0) \circ u_0$, *alors* g_0 *se relève en un* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $v = \mathrm{int}(g) \circ u$.

Par récurrence sur l'entier n tel que $\mathscr{J}^n = 0$, on est ramené au cas où $\mathscr{J}$ est de carré nul. De plus, G étant lisse sur S, on peut relever g_0 en un élément g' de G(S). Quitte à remplacer v par $v' = \mathrm{int}(g') \circ u$, on est alors ramené à la situation 3.2.

Corollaire 3.4. — *Sous les conditions préliminaires de* 3.2, *avec* $\mathscr{J}$ *nilpotent, supposons de plus* u central (*par exemple* G *commutatif*). *Alors* $u_0 = v_0$ *implique* $u = v$.

En effet, la réduction au cas $\mathscr{J}$ de carré nul est encore immédiate, et alors il suffit d'appliquer 3.2. En particulier :

Corollaire 3.5. — *Soient* S, S_0, H, G *comme dans* 3.2, *avec* $\mathscr{J}$ *nilpotent. Soit* u : $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S*-groupes, tel que* $u_0 : \mathrm{H}_0 \to \mathrm{G}_0$ *soit l'homomorphisme unité, alors* u *est l'homomorphisme unité.*

48 ***Théorème 3.6***. — *Soient* S *un schéma* affine, S_0 *un sous-schéma défini par un idéal* $\mathscr{J}$ nilpotent, H *un groupe de type multiplicatif sur* S, G *un préschéma en groupes* lisse *sur* S, $u_0 : \mathrm{H}_0 \to \mathrm{G}_0$ *un homomorphisme des* S_0*-groupes déduits par le changement de base* $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$.

Alors il existe un homomorphisme $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *de* S*-groupes qui relève* u_0 (*et par* 3.3 *deux tels relèvements* u, u' *sont conjugués par un élément de* G(S) *se réduisant suivant l'élément unité de* $\mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$).

Cela résulte de III 2.1 et 2.3, et de 3.1 (nullité de H^2 pour l'existence du relèvement de u_0, nullité du H^1 pour l'unicité à conjugaison près).

On peut prouver de même les variantes suivantes de 3.2 à 3.6 (qui en fait entraînent les énoncés précédents, en les appliquant aux sous-groupes *graphes* des homomorphismes envisagés dans 3.2 à 3.6) :

Théorème 3.2 bis. — *Soient* S *un schéma* affine*,* S_0 *un sous-schéma défini par un idéal* $\mathscr{J}$*,* G *un* S*-préschéma en groupes,* H, H′ *des sous-préschémas en groupes, de type multiplicatif,* G_0, H_0, H'_0 *les groupes sur* S_0 *déduits par le changement de base* $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$*. Si* $\mathscr{J}^2 = 0$ *et* $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}'_0$*, alors il existe* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $\mathrm{H}' = \mathrm{int}(g)(\mathrm{H})$ *et* $g_0 = e$*.*

Corollaire 3.3 bis. — *Sous les conditions préliminaires de* 3.2 bis*, supposons de plus* G lisse *sur* S*, et* $\mathscr{J}$ *nilpotent (pas nécessairement de carré nul). Soit* $g_0 \in \mathrm{G}_0(\mathrm{S}_0)$ *tel que* $\mathrm{H}'_0 = \mathrm{int}(g_0)(\mathrm{H}_0)$*, alors* g_0 *se relève en* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $\mathrm{H}' = \mathrm{int}(g)(\mathrm{H})$*.*

Corollaire 3.4 bis. — *Sous les conditions préliminaires de* 3.2 bis*, supposons* $\mathscr{J}$ *nilpotent,* H *central (par exemple* G *commutatif). Alors* $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}'_0$ *implique* $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$*.*

Théorème 3.6 bis. — *Soient* S *un schéma* affine*,* S_0 *un sous-schéma défini par un idéal* **49**
$\mathscr{J}$ nilpotent*,* G *un* S*-préschéma en groupes* lisse*,* H_0 *un sous-préschéma en groupes de* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$*, de type multiplicatif. Alors :*

(a) *Il existe un sous-préschéma en groupes* H *de* G*, plat sur* S*, tel que* $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 = \mathrm{H}_0$*.*

(b) *Un tel* H *est nécessairement de type multiplicatif.*

(c) *Enfin, d'après* 3.2 bis*, deux tels relèvements* H, H′ *de* H_0 *sont conjugués par un élément* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *se réduisant suivant l'élément unité de* $\mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$*.*

Montrons comment on peut prouver 3.2 bis (dont 3.3 bis et 3.4 bis sont une conséquence immédiate) et l'assertion (a) de 3.6 bis. Cette dernière résulte de 3.1 (nullité du H^2) et de III 4.37 (ii). De même 3.2 bis résulte de 3.1 (nullité du H^1) et de III 4.37 (i), du moins lorsque G et H sont *lisses* sur S.

Mais en utilisant les résultats de l'exposé suivant, on peut déduire très simplement 3.2 bis et 3.6 bis, sous la forme générale énoncée ici, de 3.2 resp. 3.6. Pour 3.2 bis, il suffit en effet de noter qu'en vertu de X 2.1, H et H′ sont isomorphes, ce qui nous ramène à 3.2.

Pour 3.6 bis, on note que H_0 est nécessairement de type fini sur S_0 : [(7)] en effet, comme sous-préschéma de G_0, qui est lisse sur S_0, H_0 est localement de type fini sur S_0 ; or, d'après 2.1 a), H_0 est affine sur S_0, donc est de type fini sur S_0. Alors, d'après X 4.5, H_0 est quasi-isotrivial, donc provient, d'après X 2.1, d'un groupe de type multiplicatif H sur S. [(8)] Alors, d'après 3.6, il existe un homomorphisme de S-groupes $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ qui relève l'immersion $\mathrm{H}_0 \hookrightarrow \mathrm{G}_0$; comme H et H_0 (resp. G et G_0) ont même espace topologique sous-jacent, et comme, pour tout $h \in \mathrm{H}$, le morphisme

[(7)] N.D.E. : L'original indiquait : « *par* 2.1 b), *car ses fibres le sont* ». Les éditeurs n'ont pas compris cet argument, et lui ont substitué celui qui suit.
[(8)] N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

$\mathscr{O}_{\mathrm{G},u(h)} \to \mathscr{O}_{\mathrm{H},h}$ est surjectif (car il l'est après réduction modulo $\mathscr{J}$, qui est nilpotent), u est également une immersion (cf. EGA I, 4.2.2).

Enfin, pour *tout* relèvement H de H_0 en un sous-groupe plat de G, H est nécessairement de type multiplicatif d'après X 2.3 [(9)], ce qui prouve aussi l'assertion (b) de 3.6 bis. (Le lecteur vérifiera que les résultats 3.2 bis à 3.6 bis ne sont pas utilisés dans l'Exposé X, donc qu'il n'y a pas de cercle vicieux !).

Proposition 3.8. — [(10)] *Soient* S *un préschéma,* S_0 *un sous-préschéma fermé défini par un idéal* $\mathscr{J}$ *localement nilpotent,* G *un* S*-groupe de type multiplicatif,* X *un* S*-préschéma* localement de présentation finie. *On suppose que* G *opère sur* X, *de telle façon que* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$ *opère trivialement sur* $\mathrm{X}_0 = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$. *Sous ces conditions,* G *opère trivialement sur* X.

50 La démonstration est celle de III 2.4 b) ; on peut aussi se ramener à *loc. cit.* en notant que 3.8 se ramène aussitôt au cas où G est diagonalisable, ce qui est le cas envisagé dans *loc. cit.*

Corollaire 3.9. — *Soient* S, S_0 *comme ci-dessus, et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de* S*-groupes, avec* G *de type multiplicatif et* H localement de présentation finie *sur* S. *On suppose que l'homomorphisme* $u_0 : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$ *déduit par changement de base* $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$ *est* central. *Alors* u *est* central.

En effet, il suffit d'appliquer 3.8 en faisant X = H, et faisant opérer G sur H par $(g, h) \mapsto \mathrm{int}(u(g)) \cdot h = u(g)\, h\, u(g)^{-1}$.

4. Le théorème de densité

Ce théorème (cf. 4.7 ci-dessous) [(*)], joint au théorème [(11)] du N°7, sera l'outil essentiel dans le présent exposé et les deux suivants, pour passer des propriétés infinitésimales des groupes de type multiplicatif, qu'on vient de développer, aux propriétés « finies ».

Définition 4.1. — Soit X un préschéma. On dit qu'une famille $(\mathrm{Z}^i)_{i\in\mathrm{I}}$ de sous-préschémas de X est *schématiquement dense* si pour tout ouvert U de X, et tout sous-préschéma fermé U′ de U qui majore les $\mathrm{Z}^i \cap \mathrm{U}$, on a U′ = U.

On dit qu'un sous-préschéma Z de X est schématiquement dense dans X, s'il en est ainsi de la famille réduite à Z.

[(*)] Tous les résultats de 4.1 à 4.6 sont contenus dans EGA IV_3, 11.10, auquel nous renvoyons le lecteur pour un exposé en forme de la notion de densité schématique.

[(9)] N.D.E. : On notera que X 2.3 dépend de façon essentielle du théorème 3.6 du présent exposé.
[(10)] N.D.E. : On a conservé la numérotation de l'original : il n'y a pas de n°3.7.
[(11)] N.D.E. : théorème « d'algébricité » 7.1.

On voit immédiatement (cf. EGA IV_3, 11.10.1) que la définition équivaut à dire que pour tout ouvert U de X, toute section f de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$ qui est nulle sur les $\mathrm{Z}^i \cap \mathrm{U}$, est nulle, ce qui signifie aussi que l'intersection des noyaux des homomorphismes canoniques

$$u_i : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \longrightarrow (v_i)_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Z}^i})$$

est nulle, où $v_i : \mathrm{Z}^i \to \mathrm{X}$ est l'immersion canonique. [12] Lorsque X est au-dessus d'un préschéma S, ceci équivaut encore à dire que pour tout ouvert U de X et tout couple (u, v) de morphismes de U dans un S-préschéma Y *séparé sur* S, qui coïncident sur les $\mathrm{Z}^i \cap \mathrm{U}$, on a $u = v$. (En effet, la relation $u = v$ équivaut à la relation $\mathrm{U}' = \mathrm{U}$, où U' est l'image inverse de la diagonale de $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ par le S-morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ défini **51**
par (u, v) ; cette diagonale est un sous-préschéma *fermé* de $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ donc U' est un sous-préschéma fermé de U, majorant les $\mathrm{Z}^i \cap \mathrm{U}$ d'après l'hypothèse sur (u, v), donc si la famille (Z^i) est schématiquement dense, on aura $\mathrm{U}' = \mathrm{U}$ d'où $u = v$; on voit l'implication inverse en prenant simplement $\mathrm{Y} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{T}]$).

Avec la terminologie introduite dans EGA I, fin du N°9.5, dire que le sous-préschéma Z de X est schématiquement dense, signifie aussi que X est identique au *sous-préschéma adhérence de* Z *dans* X.

Lemme 4.2. — *Soient* X *un* S*-préschéma* plat*,* $(\mathrm{Z}^i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille de sous-préschémas de* X*,* plats *sur* S*. Soit* S_0 *un sous-préschéma de* S*, défini par un idéal* $\mathscr{J}$ nilpotent *; on suppose les modules* $\mathscr{J}^n / \mathscr{J}^{n+1}$ localement libres *sur* S_0.

Soient $\mathrm{X}_0, \mathrm{Z}^i_0$ *déduits de* X, Z^i *par le changement de base* $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$*. Alors, si la famille* $(\mathrm{Z}^i_0)_{i\in \mathrm{I}}$ *est schématiquement dense dans* X_0*, la famille* $(\mathrm{Z}^i)_{i\in \mathrm{I}}$ *l'est dans* X.

Supposons $\mathscr{J}^{n+1} = 0$ (où $n \geqslant 0$), raisonnons par récurrence sur n, l'assertion étant triviale pour $n = 0$. Définissant les S_m, X_m, Z^i_m par réduction modulo $\mathscr{J}^{m+1}$ comme à l'accoutumée, l'hypothèse de récurrence implique déjà que $(\mathrm{Z}^i_{n-1})_{i\in \mathrm{I}}$ est schématiquement dense dans X_{n-1}. Quitte à remplacer X par un ouvert induit, nous sommes ramenés à prouver que toute section f de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ qui s'annule sur les Z^i est nulle.

Or la section f_{n-1} de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{n-1}} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}} / \mathscr{J}^n \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ définie par f s'annule sur les Z^i_{n-1}, donc est nulle, donc f est une section de $\mathscr{J}^n \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. Comme X est plat sur S, on a

$$\mathscr{J}^n \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \xleftarrow{\sim} \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}, \qquad \text{où} \quad \mathscr{E} = \mathscr{J}^n = \mathscr{J}^n / \mathscr{J}^{n+1}.$$

De même, comme chaque Z^i est plat sur S, la restriction f_i de f à Z^i peut être regardée comme une section de :

$$\mathscr{J}^n \mathscr{O}_{\mathrm{Z}^i} \xleftarrow{\sim} \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Z}^i_0} \quad .$$

Par hypothèse, les f_i sont nuls. Or, $\mathscr{E}$ est localement libre par hypothèse, donc il en **52**
est de même de $\mathscr{F} = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$. Donc f est une section du module *localement libre* $\mathscr{F}$ sur X_0, telle que pour tout i sa restriction à Z^i_0 soit nulle. Comme $(\mathrm{Z}^i_0)_{i\in \mathrm{I}}$ est schématiquement dense dans X_0, il s'ensuit aussitôt que f est nulle. C.Q.F.D.

---

[12] N.D.E. : Tous les résultats de densité schématique énoncés dans EGA IV_3, § 11.10 découlent des résultats sur les « *familles séparantes d'homorphismes* » démontrés dans *loc. cit.*, § 11.9, auxquels nous ferons référence dans certaines N.D.E. qui suivent.

Corollaire 4.3. — *Soient* X *un* S*-préschéma* localement noethérien et plat *sur* S, $(Z^i)_{i\in I}$ *une famille de sous-préschémas de* X plats *sur* S. *On suppose que pour tout* $s \in S$, *la famille* $(Z^i_s)_{i\in I}$ *des fibres en* s *est schématiquement dense dans* X_s. *Alors la famille* $(Z^i)_{i\in I}$ *est schématiquement dense dans* X.

Quitte à remplacer X par un ouvert induit, on est ramené à prouver que toute section f de $\mathscr{O}_X$ dont la restriction aux Z^i est nulle, est nulle. [13] Pour ceci, il suffit de prouver que pour tout $x \in X$, l'image de f dans $\mathscr{O}_{X,x}$ est nulle. Notons $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$, et $\mathfrak{m}_s$ celui de $\mathscr{O}_{S,s}$, où s est l'image de x dans S. Comme $\mathscr{O}_{X,x}$ est noethérien, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_x^n = 0$ d'où, a fortiori, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{O}_{X,x}\mathfrak{m}_s^n = 0$

Donc, il suffit de montrer que, pour tout entier n, la section induite par f sur $X \times_S \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s^{n+1})$ est nulle. Par hypothèse, la famille des fibres $Z^i_s = Z^i \otimes_{\mathscr{O}_{S,s}} \kappa(s)$ est schématiquement dense dans la fibre $X_s = X \otimes_{\mathscr{O}_{S,s}} \kappa(s)$ Cela nous ramène donc au cas où S est le spectre d'un anneau local dont l'idéal maximal J est nilpotent, $S_0 = \operatorname{Spec} \kappa(s)$, et les hypothèse de 4.2 sont vérifiées, d'où la conclusion.

Lemme 4.4. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien*,* X *un* S*-préschéma* localement noethérien et plat *sur* S*,* $(Z^i)_{i\in I}$ *une famille de sous-préschémas de* X plats *sur* S. *On suppose que pour tout* $s \in S$, *la famille* $(Z^i_s)_{i\in I}$ *des fibres en* s *est schématiquement dense dans* X_s.

Alors, pour tout changement de base $S' \to S$ (S' *pas nécessairement localement noethérien*)*, la famille* $(Z^{i\,\prime}_n)_{i\in I}$ *est schématiquement dense dans* X' (c.-à-d., la famille $(Z^i)_{i\in I}$ est *universellement schématiquement dense dans* X *relativement à* S, cf. EGA IV_3, Déf. 11.10.8)

Démonstration. [14] Soit f' une section de $\mathscr{O}_{X'}$ sur un ouvert U' de X', qui s'annule sur les $Z^{i\,\prime}_n$; il faut montrer que f' est nulle. Soit $s' \in S'$, il suffit de prouver que f' *est nulle en tous les points de* U' *au-dessus de* s'. Soit s l'image de s' dans S ; quitte à remplacer S, S' par les spectres des anneaux locaux en s, s', on peut supposer S, S'
53 locaux, et que s, s' en sont les points fermés. On peut de plus supposer X affine, donc

$$S = \operatorname{Spec}(A), \quad S' = \operatorname{Spec}(A'), \quad X = \operatorname{Spec}(B), \quad X' = \operatorname{Spec}(B'), \quad B' = B \otimes_A A'$$

où A, A' sont locaux, $A \to A'$ est un homomorphisme *local*, et A, B sont noethériens. On peut aussi supposer U' affine, de la forme $X'_{g'}$, avec $g' \in B'$.

Pour toute sous-A-algèbre A'' de A', on considère $S'' = \operatorname{Spec}(A'')$ et X'', $Z^{i\,\prime\prime}_n$ déduits de X, Z^i par le changement de base $S'' \to S$, d'où le diagramme :

---

[13] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[14] N.D.E. : Pour une autre démonstration, utilisant une réduction au cas où S' est localement noethérien (et 4.3 et 4.5 comme ici), voir EGA IV_3, 11.9.16 et 11.9.12 (N. B. dans la dernière ligne de la preuve de 11.9.16, remplacer 11.9.5 par 11.9.12).

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^i \arrow[d] & \mathrm{Z}^{i\prime\prime}_n \arrow[l] \arrow[d] & \mathrm{Z}^{i\prime}_n \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{X} \arrow[d] & \mathrm{X}'' \arrow[l] \arrow[d] & \mathrm{X}' \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{S} & \mathrm{S}'' \arrow[l] & \mathrm{S}' \arrow[l]
\end{tikzcd}\quad.$$

Nous nous limiterons par la suite aux A'' qui sont localisées de sous-A-algèbres de type fini A''_1 de A' en $\mathfrak{m}' \cap \mathrm{A}''_1$ (où $\mathfrak{m}'$ est l'idéal maximal de A'), de sorte que les homomorphismes $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'' \to \mathrm{A}'$ sont locaux. Notons que ces A'' forment une famille filtrante croissante de sous-algèbres dont la réunion est A', donc leur limite inductive est également A'. On a donc de même $\mathrm{B}' = \varinjlim_{\mathrm{A}''} \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}''$. Donc, il existe un A'' et un élément $g'' \in \mathrm{B}'' = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}''$, dont l'image dans B' est g'.

[15] D'après le lemme 4.5 ci-dessous, la propriété que la famille des fibres $(\mathrm{Z}^i_s)_{i\in\mathrm{I}}$ soit schématiquement dense dans X_s est préservée par tout changement de base $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$; par conséquent, comme chaque S'' est localement noethérien, si on remplace S par un S'' approprié, et X, Z^i par X'', $\mathrm{Z}^{i\prime\prime}$, les hypothèses de 4.4 seront préservées.

Donc, quitte à remplacer S par S'' (et X, Z^i par X'', $\mathrm{Z}^{i\prime\prime}$) on peut supposer que g' provient de $g \in \mathrm{B}$. Quitte à remplacer X par l'ouvert $\mathrm{X}_g = \mathrm{U}$, on peut donc supposer que $\mathrm{U}' = \mathrm{X}'$. On voit de même qu'on peut supposer que f' provient d'une section f de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ sur X.

Soit $\mathrm{Y} = \mathrm{V}(f)$ le sous-schéma de X défini par f, et $\mathrm{Y}^i = \mathrm{Z}^i \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}$ son intersection avec Z^i, qui est un sous-schéma fermé de Z^i, égal à $\mathrm{V}(f^i)$, où f^i est la section de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}^i}$ induite par f. Dénotant par Y', $\mathrm{Y}^{i\prime}$ les S'-schémas déduits des précédents par changement de base, on aura encore

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{V}(f'), \qquad \mathrm{Y}^{i\prime} = \mathrm{Z}^{i\prime} \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{Y}' = \mathrm{V}(f^{i\prime}),$$

et on a les relations analogues pour Y'', $\mathrm{Y}^{i\prime\prime}$. L'hypothèse que f' s'annule sur les $\mathrm{Z}^{i\prime}$ s'exprime par les relations $\mathrm{Y}^{i\prime} = \mathrm{Z}^{i\prime}$ pour tout i [16].

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Pour tout entier $n \geqslant 0$, introduisons le sous-schéma $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$ de S, et les schémas X_n, Y_n, Z^i_n, Y^i_n déduits de X, Y, Z^i, Y^i
par le changement de base $\mathrm{S}_n \to \mathrm{S}$. De façon générale, pour tout S-préschéma P, on 54
posera $\mathrm{P}_n = \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$.

Pour tout n, et $i \in \mathrm{I}$, considérons le foncteur

$$\mathrm{F}^i_n = \prod_{\mathrm{Z}^i_n/\mathrm{S}_n} \mathrm{Y}^i_n/\mathrm{Z}^i_n : \quad (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}_n} \longrightarrow (\mathbf{Ens})$$

---

[15] N.D.E. : On a ajouté la phrase suivante, et détaillé l'original dans ce qui suit.

[16] N.D.E. : l'original ajoutait : « du moins en tout point x' de X' au-dessus de s' », mais cette restriction semble inutile.

défini par (cf. VIII, 6.4) : pour tout P sur S_n,

$$\mathrm{F}^i_n(\mathrm{P}) = \Gamma\big((\mathrm{Y}^i_n)_\mathrm{P}/(\mathrm{Z}^i_n)_\mathrm{P}\big) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } (\mathrm{Y}^i_n)_\mathrm{P} \neq (\mathrm{Z}^i_n)_\mathrm{P}; \\ \{\mathrm{id}\} & \text{si } (\mathrm{Y}^i_n)_\mathrm{P} = (\mathrm{Z}^i_n)_\mathrm{P}. \end{cases}$$

Comme S_n est local artinien, et Z^i_n plat donc *essentiellement libre* sur S_n, alors, d'après VIII, 6.4, chaque F^i_n est représentable par un sous-préschéma fermé T^i_n de S_n.

(17) Le complété $\widehat{\mathrm{A}}$ de l'anneau local A est noethérien car A l'est, et c'est la limite projective des A_n. Notons K^i_n l'idéal de $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1}$ définissant T^i_n et K^i la limite projective des K^i_n ; c'est un idéal de $\widehat{\mathrm{A}}$.

Pour i fixé, $m \geqslant n$ et tout S_n-préschéma P, on a

$$(\mathrm{Y}^i_n)_\mathrm{P} = \mathrm{Y}^i \times_\mathrm{S} \mathrm{S}_n \times_{\mathrm{S}_n} \mathrm{P} = \mathrm{Y}^i \times_\mathrm{S} \mathrm{P} = (\mathrm{Y}^i_m)_\mathrm{P}\ ,$$

et de même $(\mathrm{Z}^i_n)_\mathrm{P} = (\mathrm{Z}^i_m)_\mathrm{P}$; il en résulte que F^i_n est la restriction $\mathrm{F}^i_m \times_{\mathrm{S}_m} \mathrm{S}_n$ de F^i_m à $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}_n}$, d'où $\mathrm{T}^i_n = \mathrm{T}^i_m \times_{\mathrm{S}_m} \mathrm{S}_n$. On a donc un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{K}^i_m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{A}_m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathscr{O}(\mathrm{T}^i_m) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{K}^i_n \arrow[r] & \mathrm{A}_n \arrow[r] & \mathscr{O}(\mathrm{T}^i_n) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches verticales sont *surjectives*. Ceci a les conséquences suivantes : d'une part, le système projectif $(\mathrm{K}^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler, et donc la limite projective des $\mathscr{O}(\mathrm{T}^i_n)$ s'identifie à l'anneau topologique quotient $\widehat{\mathrm{A}}/\mathrm{K}^i$ (cf. EGA 0_{III}, § 13.2). D'autre part, l'application $\mathrm{K}^i \to \mathrm{K}^i_n$ est *surjective* (cf. [**BEns**], III, § 7.4, Prop. 5), d'où il résulte que $\mathrm{K}^i_n \simeq (\mathrm{K}^i + \mathfrak{m}^{n+1}\widehat{\mathrm{A}})/\mathfrak{m}^{n+1}\widehat{\mathrm{A}}$ et $\mathscr{O}(\mathrm{T}^i_n) \simeq (\widehat{\mathrm{A}}/\mathrm{K}) \otimes_\mathrm{A} (\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$.

En d'autres termes, $(\mathrm{T}^i_n)_n$ est un système inductif de schémas affines artiniens, et la limite inductive $\mathrm{T}^i = \varinjlim_n \mathrm{T}^i_n$ est un sous-schéma formel fermé du schéma formel $\widehat{\mathrm{S}} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathrm{A}})$ (cf. EGA I, § 10), dont la réduction modulo $\mathfrak{m}^{n+1}$ est T^i_n.

Soit T le sous-schéma formel fermé de $\widehat{\mathrm{S}}$ intersection des T^i, c.-à-d., défini par $\mathrm{K} = \sum_i \mathrm{K}^i$. Comme $\widehat{\mathrm{A}}$ est noethérien, il existe une partie finie J de I, telle que l'on ait $\mathrm{K} = \sum_{i\in\mathrm{J}} \mathrm{K}^i$ (i.e. $\mathrm{T} = \bigcap_{i\in\mathrm{J}} \mathrm{T}^i$). Notons alors que pour tout n, on a $\mathrm{K}_n = \sum_{i\in\mathrm{J}} \mathrm{K}^i_n$ où K_n désigne l'image de K dans A_n.

Rappelons que f^i désigne l'image de $f \in \mathrm{B} = \mathscr{O}(\mathrm{X})$ dans $\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i)$, et $f^{i\prime}$ son image dans $\mathscr{O}(\mathrm{Z}^{i\prime}_n) = \mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_\mathrm{A} \mathrm{A}'$; l'hypothèse $\mathrm{Y}^{i\prime} = \mathrm{Z}^{i\prime}$ équivaut à la nullité de $f^{i\prime}$. Comme $\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_\mathrm{A} \mathrm{A}'$ est la limite inductive des sous-algèbres $\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_\mathrm{A} \mathrm{A}''$ (où A'' satisfait aux conditions explicitées plus haut), il existe donc un A'' tel que $\mathrm{Y}^{i\prime\prime} = \mathrm{Z}^{i\prime\prime}$. A priori, A'' dépend de i, mais on peut trouver un A'' qui marche pour tous les $i \in \mathrm{J}$, puisque J est fini. Posons $\mathrm{S}'' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}'')$ et $\mathrm{S}''_{(n)} = \mathrm{S}'' \times_\mathrm{S} \mathrm{S}_n$. (18)

(17) N.D.E. : On a détaillé et corrigé l'original, pour faire voir que la limite projective des anneaux $\mathscr{O}(\mathrm{T}^i_n)$ définit un sous-schéma formel fermé du schéma formel $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathrm{A}})$.

(18) N.D.E. : On a détaillé et corrigé l'original, en faisant la distinction entre $\mathrm{S}''_{(n)}$ et le sous-schéma $\mathrm{S}''_n = \mathrm{S}''_n(s'')$ introduit plus bas.

Comme $\mathrm{Y}^{i\prime\prime} \times_{\mathrm{S}''} \mathrm{S}''_{(n)} = (\mathrm{Y}^i_n)_{\mathrm{S}''_{(n)}}$ égale $\mathrm{Z}^{i\prime\prime} \times_{\mathrm{S}''} \mathrm{S}''_{(n)} = (\mathrm{Z}^i_n)_{\mathrm{S}''_{(n)}}$ pour tout $i \in \mathrm{J}$, il résulte de la définition des T^i_n que $\mathrm{S}''_{(n)} \to \mathrm{S}_n$ se factorise par T^i_n pour tout $i \in \mathrm{J}$, donc aussi par $\mathrm{T}_n = \bigcap_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{T}^i_n$, donc aussi par T^i_n pour *tout* $i \in \mathrm{I}$. Notant f'' l'image de f dans $\mathrm{B}'' = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}''$, et $f''_{(n)}$ son image dans $\mathrm{B}''_{(n)} = \mathrm{B}''/\mathfrak{m}^{n+1}\mathrm{B}''$, cela signifie que pour tout n, $f''_{(n)}$ s'annule sur les $\mathrm{Z}^i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''_{(n)}$.

Comme les morphismes $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'' \to \mathrm{A}'$ sont locaux, l'image s'' de s' dans S'' est le point fermé de S'', correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m}''$ de B'', et l'image de s'' dans S est s. Fixons n et notons maintenant S''_n le n-ième voisinage infinitésimal de s'' dans S'', c.-à-d., $\operatorname{Spec}(\mathrm{A}''/\mathfrak{m}''^{n+1})$. Posons $\mathrm{B}''_n = \mathrm{B}''/\mathfrak{m}''^{n+1}\mathrm{B}''$ et $\mathrm{Z}''^i_n = \mathrm{Z}^i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''_n = \operatorname{Spec}(\mathrm{B}''_n)$. Alors, l'image f''_n de $f''_{(n)}$ dans B''_n s'annule sur $\mathrm{Z}^{i\prime\prime}_n$, pour tout i. Or, d'après le lemme 4.5 ci-dessous, la famille des fibres

$$\mathrm{Z}^{i\prime\prime}_0 = \mathrm{Z}^{i\prime\prime}_n \times_{\mathrm{S}''_n} \kappa(s'') = \mathrm{Z}^i_s \times_{\kappa(s)} \kappa(s'')$$

est schématiquement dense dans la fibre $\mathrm{X}''_0 = \mathrm{X}''_n \times_{\mathrm{S}''_n} \kappa(s'') = \mathrm{X}_s \times_{\kappa(s)} \kappa(s'')$. Donc S''_n, X''_n, $(\mathrm{Z}^{i\prime\prime}_n)_{i\in\mathrm{I}}$, et $\mathrm{S}''_0 = \operatorname{Spec}\kappa(s'')$ vérifient les hypothèses du lemme 4.2 ; il s'ensuit donc que $f''_n = 0$, i.e. $f'' \in \mathfrak{m}''^{n+1}\mathrm{B}''$, ceci pour tout n.

Comme B est noethérien et $\mathrm{B}'' = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}''$ est un localisé d'une B-algèbre de type fini, B'' est noethérien, donc ses anneaux locaux séparés pour leur topologie habituelle. Il s'ensuit que f'' est nul en les points x'' de X'' tels que $\mathfrak{m}''\mathrm{B}''$ soit contenu dans l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'',x''}$, i.e. en les points de X'' au-dessus de s''. A fortiori, f' est nul en les points x' de X' au-dessus de s'. C.Q.F.D.

Lemme 4.5.0. — [19] *Soient* X *un* S-*préschéma,* $(\mathrm{Z}^i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de sous-préschémas de* X, *et* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme* fidèlement plat. *Si la famille* $(\mathrm{Z}^{i\prime})_{i\in\mathrm{I}}$ *est schématiquement dense dans* X', *alors* $(\mathrm{Z}^i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est schématiquement dense dans* X.

Ceci résulte de EGA IV_3, 11.10.5 (i) et 11.9.10 (i). Reste à reporter la démonstration du

Lemme 4.5. — *Soient* X *un préschéma* localement noethérien [20] *sur un corps* k, $(\mathrm{Z}^i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de sous-préschémas de* X, k' *une extension de* k, X' *et* $\mathrm{Z}^{i\prime}$ *les préschémas déduits de* X *et* Z^i *par le changement de base* k'/k. *Pour que* $(\mathrm{Z}^i)_{i\in\mathrm{I}}$ *soit schématiquement dense dans* X, *il faut et suffit que* $(\mathrm{Z}^{i\prime})_{i\in\mathrm{I}}$ *le soit dans* X'.

Le « il suffit » découle de 4.5.0, prouvons le « il faut ». [21] D'abord, on peut supposer 55
$\mathrm{X} = \operatorname{Spec}(\mathrm{B})$ affine. Pour tout i, soit $(\mathrm{Z}^{ij})_{j\in\mathrm{J}_i}$ un recouvrement de Z^i par des ouverts affines ; remplaçant $(\mathrm{Z}^i)_{i\in\mathrm{I}}$ par la famille $(\mathrm{Z}^{ij})_{(i,j)\in\mathrm{J}}$, où $\mathrm{J} = \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{J}_i$, on peut aussi supposer les Z^i affines.

Soient $g \in \mathrm{B}' = \mathrm{B} \otimes_k k'$ et $t' \in \mathrm{B}'_g$ une section de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$ sur l'ouvert affine $\mathrm{U}' = \mathrm{X}'_g$, nulle sur les $\mathrm{Z}^{i\prime} \cap \mathrm{U}'$, i.e. dont l'image dans chaque $(\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k k')_g$ est nulle. Il existe une sous-k-algèbre de type fini A de k' telle que $g \in \mathrm{B}_{\mathrm{A}} = \mathrm{B} \otimes_k \mathrm{A}$ et

[19] N.D.E. : On a inséré ici ce lemme, utilisé dans la démonstration de 4.5 et 4.7.
[20] N.D.E. : Cette hypothèse est en fait superflue, cf. EGA IV_3, 11.10.6 et 11.9.13.
[21] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

$t' \in (\mathrm{B_A})_g$. L'application $\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k \mathrm{A} \to \mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k k'$ étant injective, il en est de même de l'application

$$(\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k \mathrm{A})_g \longrightarrow (\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k k')_g\,;$$

compte tenu de l'hypothèse, ceci implique que l'image de t' dans chaque $(\mathscr{O}(\mathrm{Z}^i) \otimes_k \mathrm{A})_g$ est nulle. Ceci nous ramène à montrer que la famille $(\mathrm{Z}^i_\mathrm{A})_{i \in \mathrm{I}}$ est schématiquement dense dans $\mathrm{X_A}$, [22] ce qui résulte de EGA IV_3, 11.9.10 b).

Notons en passant le résultat suivant, qui servira dans un exposé ultérieur : [23]

Corollaire 4.6. — *Soient* X *un* S-*préschéma* plat*,* U *une partie ouverte de* X*. On suppose que pour tout* $s \in \mathrm{S}$*,* U_s *est schématiquement dense dans* X_s*, et que* X *est* localement noethérien*, ou* localement de présentation finie *sur* S*. Alors* U *est schématiquement dense dans* X*.*

56 Supposons pour simplifier U rétrocompact dans X (cf. EGA IV_3, 11.10.10 et 11.9.17 pour le cas général). Le cas X localement noethérien n'est mis que pour mémoire, il est contenu dans 4.3.

Dans le deuxième cas envisagé, on peut évidemment supposer S et X affines, alors X et U sont de présentation finie sur $\mathrm{S} = \mathrm{Spec(A)}$. L'anneau A est limite inductive de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres A_i de type fini. Le « procédé breveté » déjà utilisé (cf. EGA IV_3, 8.8.2 et 8.10.5 (iii)) montre qu'il existe un i, un schéma affine X_i sur $\mathrm{S}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_i)$ et un ouvert U_i dans X_i, dont X, U se déduisent par changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$. Soit E_i la partie de S_i formée des $s \in \mathrm{S}_i$ tels que $(\mathrm{U}_i)_s$ soit schématiquement dense dans $(\mathrm{X}_i)_s$.

[24] D'après EGA IV_2, 5.9.9 et 5.10.2, E_i est l'ensemble des $s \in \mathrm{S}_i$ tels que $(\mathrm{U}_i)_s$ contienne l'ensemble $\mathrm{Ass}\,\mathscr{O}_{(\mathrm{X}_i)_s}$ des points « associés » au faisceau structural de $(\mathrm{X}_i)_s$, et d'après EGA IV_3, 11.9.17.1 cette condition est de nature constructible, i.e. E_i est une partie constructible de S_i.

[24] D'après 4.5, l'image inverse de E_i par $\mathrm{S}_j \to \mathrm{S}_i$ (resp. par $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$) est E_j (resp. l'ensemble E des $s \in \mathrm{S}$ tels que U_s soit schématiquement dense dans X_s). De plus, par hypothèse, $\mathrm{E} = \mathrm{S}$, qui est aussi l'image inverse par chaque $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$ de S_i. D'après EGA IV_3, 8.3.11, ceci entraîne qu'il existe un $j \geqslant i$ tel que $\mathrm{E}_j = \mathrm{S}_j$, i.e. tel que pour tout $s \in \mathrm{S}_j$, $(\mathrm{U}_j)_s$ soit schématiquement dense dans $(\mathrm{X}_j)_s$.

Alors, en vertu de 4.4 appliqué à $(\mathrm{S}_j, \mathrm{X}_j, \mathrm{U}_j)$ et au changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_j$, il s'ensuit que U est schématiquement dense dans X. On notera d'ailleurs qu'on n'utilise ici 4.4 que dans le cas d'une famille dont l'ensemble d'indices est fini (en fait, réduit à un élément), auquel cas la démonstration de 4.4 se simplifie beaucoup, comme le lecteur constatera par lui-même.

[22] N.D.E. : L'original continuait par : « Utilisant 4.3 pour les $\mathrm{X}_{\mathrm{A}'}$, où A' est un quotient de A par une puissance d'un idéal maximal, et le Nullstellensatz de Hilbert, on est ramené au cas où k' est une extension *finie* de k ». On pourrait détailler cette réduction, et poursuivre dans cette voie, car le cas d'une extension finie k'/k est un peu plus simple que le cas plus général traité dans EGA IV_3, 11.9.10 b).

[23] N.D.E. : Préciser ceci . . .

[24] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Théorème 4.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un groupe de type multiplicatif et* de type fini *sur* S. *Pour tout entier $n > 0$, soit ${}_n\mathrm{G}$ le noyau de $n \cdot \mathrm{id}_\mathrm{G}$. Alors la famille des sous-préschémas $({}_n\mathrm{G})_{n>0}$ de* G *est schématiquement dense* (déf. 4.1).

Nous distinguons deux cas.

a) Cas S localement noethérien. Alors par 4.3 on est ramené aucas où S est le spectre d'un corps k. D'après 4.5.0, on peut supposer k algébriquement clos et G diagonalisable, i.e. de la forme $\mathrm{D}_k(\mathrm{M})$, où M est un groupe commutatif de type fini. Alors M est de la forme $\Gamma \times \mathbb{Z}^r$, avec Γ fini, donc G est de la forme $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$, avec **57**
$\mathrm{G}_1 = \mathrm{D}(\Gamma)$ et $\mathrm{G}_2 = \mathbb{G}_m^r$, et pour n grand multiplicativement (à savoir n multiple de l'ordre de Γ) on aura ${}_n\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times {}_n\mathrm{G}_2$ puisqu'on aura ${}_n\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_1$.

Appliquant encore 4.3 à la projection $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_1$, on est ramené au cas de G_2, i.e. au cas où $\mathrm{G} = \mathbb{G}_m^r$. Comme alors G est réduit, il revient au même de dire que $({}_n\mathrm{G})_{n>0}$ est schématiquement dense dans G, ou que la réunion des ${}_n\mathrm{G}$ est dense dans G pour la topologie habituelle. Comme ${}_n\mathrm{G} = ({}_n\mathbb{G}_m)^r$, on est ramené au cas de $\mathrm{G} = \mathbb{G}_m$, donc G irréductible de dimension 1. Alors cela résulte du fait que l'ensemble réunion des ${}_n\mathrm{G}$ (égal à l'ensemble des racines de l'unité dans k) est *infini.*

b) Cas général. Pour tout point s de S, il existe un voisinage ouvert U de s et un morphisme fidèlement plat quasi-compact $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ tel que $\mathrm{G}' = \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ soit diagonalisable, i.e. de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{M})$. D'après 4.5.0 à nouveau, on peut se ramener au cas de G', donc on peut supposer G diagonalisable, donc il provient du groupe absolu $\mathrm{H} = \mathrm{D}_\mathbb{Z}(\mathrm{M})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ par changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. D'après la preuve de a), pour tout $s \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, la famille $({}_n\mathrm{H}_s)_{n>0}$ est schématiquement dense dans H ; il suffit maintenant d'appliquer 4.4. [25]

Corollaire 4.8. — a) *Soient u, v : $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ deux homomorphismes de* S*-préschémas en groupes, avec* H *de type multiplicatif et* [26] de type fini*, et supposons que pour tout entier $n > 0$, les restrictions de u et v à ${}_n\mathrm{H}$ sont identiques. Alors $u = v$.*

b) *Soient* H_1, H_2 *deux sous-groupes de type multiplicatif et* de type fini *d'un préschéma en groupes* G*, et supposons que pour tout entier $n > 0$, on ait ${}_n\mathrm{H}_1 = {}_n\mathrm{H}_2$, alors $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2$.*

La première assertion résulte de la seconde, par considération des sous-groupes H_1 et H_2 de $\mathrm{H} \times \mathrm{G}$, graphes de u et v. Pour prouver b), soit $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2$, c'est un sous-préschéma en groupes de H_i ($i = 1, 2$), il faut montrer qu'il est identique à H_i, or l'hypothèse signifie qu'il majore les ${}_n\mathrm{H}_i$. On est donc ramené à prouver le

Corollaire 4.9. — *Soient* G *un* S*-groupe de type multiplicatif et* de type fini*, et* H *sous-préschéma en groupes qui majore les ${}_n\mathrm{G}$, $n > 0$. Alors* $\mathrm{H} = \mathrm{G}$.

En vertu de 4.7 on est ramené à prouver que le sous-préschéma H est *fermé*, ou **58**
encore qu'il est égal ensemblistement à G. Cela nous ramène au cas où S est le spectre

[25] N.D.E. : On aura besoin en X 4.3 de ce résultat pour S non localement noethérien (à savoir, $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}} \otimes_\mathrm{A} \widehat{\mathrm{A}})$, où $\widehat{\mathrm{A}}$ est le complété de l'anneau local noethérien A.

[26] N.D.E. : On a remplacé « diagonalisable » par « de type multiplicatif ».

d'un corps, mais alors tout sous-préschéma en groupes de G est fermé ($\mathrm{VI_B}$ 1.4.2), d'où la conclusion.

Remarque 4.10. — Sous les conditions de 4.7, soit m un entier > 0 qui a les propriétés suivantes : pour tout $s \in S$, m n'est pas une puissance de la caractéristique de $\kappa(s)$, et si G_s est de type M, les diviseurs premiers de la torsion de M divisent m. (N. B. cette deuxième condition est toujours vérifiée si G est un tore). Alors la démonstration donnée montre que dans l'énoncé de 4.7 et les corollaires 4.8 et 4.9, on peut se borner à considérer les sous-groupes de la forme ${}_{(m^r)}G$, avec $r > 0$.

D'ailleurs, on voit aussitôt que lorsque G est *lisse* sur S, alors pour tout point $s \in S$, il existe un voisinage ouvert U de s et un entier $m > 0$, premier à toutes les caractéristiques résiduelles de U, et qui satisfait les conditions précédentes pour G_U. (Prendre par exemple pour m l'ordre de la torsion du type de G en s, cf. 1.4.1 a) et 2.1 e).) Sous ces conditions, on trouve des ${}_{(m^r)}G$ qui sont finis et *étales* sur S, et dont la famille est schématiquement dense, à condition de se restreindre au-dessus de U. Cette remarque permet dans certains cas (notamment ceux faisant intervenir les théorèmes 3.2 et 3.2 bis, cf. XI 6, mais non ceux faisant intervenir les théorèmes 3.6 et 3.6 bis) de se passer du théorème 3.1, faisant intervenir la cohomologie de Hochschild.

5. Homomorphismes centraux des groupes de type multiplicatif

Lemme 5.0. — [27] *Soient* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau* local noethérien, $S = \mathrm{Spec}(A)$, *et* H *un schéma* fini *sur* S, *donc* $H = \mathrm{Spec}(B)$, *où* B *est fini sur* A. *Soit* K *un sous-schéma de* H, *tel que par réduction modulo* $\mathfrak{m}^{n+1}$ *on ait* $K_n = H_n$ *pour tout* n. *Alors* $K = H$.

Soit s le point fermé de S. Notons d'abord que K est un sous-schéma *fermé* de H. En effet, c'est a priori un sous-schéma fermé d'un ouvert U de H. Mais K, donc U contient la fibre $K_s = H_s$; comme le morphisme $H \to S$ est fini, donc fermé, il s'ensuit que le complémentaire de U est vide, i.e. $U = H$. Donc K est défini par un idéal I de B. L'hypothèse entraîne que I est contenu dans $\mathfrak{m}^n B$ pour tout n ; comme B est un A-module fini, il est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, d'où $I = 0$.

Théorème 5.1. — *Soient* u, v : $H \to G$ *deux homomorphismes de* S-*préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini, *et* S localement noethérien *ou* G de présentation finie *sur* S. *Soit* $s \in S$ *tel que* $u_s = v_s$, *et supposons* u_s central. *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $u_U = v_U$.

59 Distinguons les deux cas :

a) S localement noethérien. [28] Soit $K = \mathrm{Ker}(u, v)$ l'image inverse de la diagonale de $G \times_S G$ par le morphisme (u, v) ; c'est un sous-préschéma en groupes de H. Nous voulons trouver U tel que $K_U = H_U$. Notons que, comme S est localement noethérien et H de type fini sur S, alors H est localement noethérien, donc l'immersion $K \hookrightarrow H$

[27] N.D.E. : On a explicité ce lemme, utilisé à plusieurs reprises dans la suite (de façon implicite dans l'original).

[28] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

est de type fini (cf. EGA I, 6.3.5). Donc K est de type fini sur S, donc de présentation finie sur S, puisque S est localement noethérien. Par conséquent, d'après EGA IV_3, 8.8.2.4, pour montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de s tel que $\mathrm{K_U} = \mathrm{H_U}$, il suffit de montrer que $\mathrm{K_{S'}} = \mathrm{H_{S'}}$, où S′ est le spectre de $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$. On peut donc supposer S local de point fermé s. Quitte à remplacer l'anneau local noethérien A par son complété $\widehat{\mathrm{A}}$, ce qui introduit un changement de base $\widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$ fidèlement plat et quasi-compact, on peut même supposer [29] si l'on veut A complet.

En vertu de 3.4 on a $u_n = v_n$ pour tout n, où comme d'habitude l'indice n indique la réduction modulo $\mathfrak{m}^{n+1}$ ($\mathfrak{m}$ étant l'idéal maximal de A). Pour tout entier $m > 0$, dénotant par ${}_m u$, ${}_m v$ les homomorphismes ${}_m\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ induits par u, v, on a donc aussi $({}_m u)_n = ({}_m v)_n$. Ceci étant vrai pour tout n, et ${}_m\mathrm{H}$ étant *fini* sur S en vertu de 2.2, il s'ensuit que ${}_m u = {}_m v$, d'après 5.0. Ceci étant vrai pour tout m, on a donc $u = v$ en vertu de 4.7.

b) G de présentation finie. [30] Comme H est aussi de présentation finie sur S alors, d'après EGA IV_3, 8.8.2, nous pouvons encore supposer S local de point fermé s et prouver qu'alors $u = v$. Si $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est un morphisme fidèlement plat quasi-compact et si l'on note f_H le morphisme $\mathrm{H}' \to \mathrm{H}$ et u', $v' : \mathrm{H}' \to \mathrm{G}'$ les morphismes déduits de u, v, alors l'égalité $u' = v'$ entraîne $u' \circ f_\mathrm{H} = v' \circ f_\mathrm{H}$, d'où $u = v$, puisque f_H est un épimorphisme. Donc, quitte à faire une extension fidèlement plate et quasi-compacte de la base, on peut supposer de plus H diagonalisable, donc de la forme $\mathrm{D_S(M)}$, avec M un groupe commutatif de type fini.

Introduisons comme dans la démonstration de 4.6 la famille filtrante croissante des sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini A_i de $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, et $\mathrm{S}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_i)$. [30] Notons que $\mathrm{H} = \mathrm{D_S(M)}$ provient, pour tout i, du groupe diagonalisable $\mathrm{H}_i = \mathrm{D}_{\mathrm{S}_i}(\mathrm{M})$. Comme G est de présentation finie sur S, alors, d'après EGA IV_3, 8.8.2 (voir aussi $\mathrm{VI_B}$, 10.2 et 10.3), il existe un indice i, un préschéma en groupes G_i de présentation finie sur S_i, et des morphismes de S_i-groupes u_i, $v_i : \mathrm{H}_i \to \mathrm{G}_i$ dont u, v proviennent par changement de base. Soit s_i l'image de s dans S_i et soit $\rho_i : \mathrm{H}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{G}_i \to \mathrm{G}_i$ le morphisme de S_i-préschémas défini par $\rho_i(h, g) = u_i(h)\, g\, u_i(h)^{-1}$. Alors, comme u_s est central, $\rho_s = \rho_i \times_{\kappa(s_i)} \kappa(s)$ égale la deuxième projection, il en est donc de même pour ρ_i (puisque $\kappa(s_i) \to \kappa(s)$ est fidèlement plat et quasi-compact), i.e. $(u_i)_{s_i}$ est central. De même, comme $u_s = v_s$ on a $(u_i)_{s_i} = (v_i)_{s_i}$. On peut alors appliquer a) à la situation sur S_i, d'où aussitôt la conclusion annoncée.

Corollaire 5.2. — *Soient* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S-*préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini, *et* S localement noethérien *ou* G de présentation finie *sur* S. *Soit* $s \in \mathrm{S}$ *et supposons que* u_s *soit l'homomorphisme unité. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* u_U *soit l'homomorphisme unité.*

Corollaire 5.3. — *Soient* u, H, G, *comme dans* 5.2, *supposons de plus* G séparé *sur* S. *Soit* U *l'ensemble des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* u_s *soit l'homomorphisme unité. Alors* U *est une partie* ouverte et fermée *de* S, *et* $u_\mathrm{U} : \mathrm{H_U} \to \mathrm{G_U}$ *est l'homomorphisme unité.* 60

[29] N.D.E. : Car K = H si $\mathrm{K}_{\widehat{\mathrm{S}}} = \mathrm{H}_{\widehat{\mathrm{S}}}$, cf. SGA 1, VIII 5.4 ; mais la suite n'utilise pas l'hypothèse « A complet ».

[30] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Il reste à prouver seulement que U est fermé. Or soit $K = \mathrm{Ker}(u)$, comme G est séparé sur S, K est un sous-préschéma *fermé* de H, et U est l'ensemble des $s \in S$ tels que $K_s = H_s$. On voit alors facilement que U est fermé, par exemple comme application de VIII 6.4 (H étant essentiellement libre sur S d'après VIII 6.3), ou en notant qu'on peut supposer S réduit et U dense dans S, donc schématiquement dense dans S, ce qui implique H_U schématiquement dense dans H puisque H est plat sur S [31], et comme u et l'homomorphisme unité coincïdent sur H_U, ils coïncident sur H.

Corollaire 5.4. — *Soient* S *un préschéma,* H *et* G *deux* S*-groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini *et* G séparé et de présentation finie *sur* S, $\pi : S' \to S$ *un* [32] *épimorphisme effectif universel* (*par exemple, un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, ou un morphisme admettant une section, cf.* IV 1.12) à fibres géométriquement connexes. [33]

Soit $u' : H' \to G'$ *un homomorphisme* central *des* S′*-groupes déduits de* H, G *par le changement de base* $S' \to S$*. Alors, il existe un unique homomorphisme* $u : H \to G$ *de* S*-groupes tel que* $u \times_S S' = u'$*. Lorsque* S′/S *admet une section* g*, alors* u *est le morphisme déduit de* u' *par le changement de base* $g : S \to S'$*.*

Comme π est un épimorphisme effectif universel, il en est de même de $H' \to H$, d'où l'unicité de u, cf. le début de la preuve de 5.1 b). Si π admet une section g, alors $u' = \pi^*(u)$ entraîne $u = g^*\pi^*(u) = g^*(u')$.

Pour l'existence de u, on est ramené, d'après IV 2.3, à montrer que les deux homomorphismes $u''_1, u''_2 : H'' \to G''$ de S″-groupes déduits de u' par les deux changements de base $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : S'' = S' \times_S S' \to S'$, sont identiques. Or ils coïncident sur la diagonale de S″, de façon précise les images inverses de u''_1 et u''_2 par le morphisme diagonal $S' \to S''$ sont identiques (car égales à u'). [34] Comme u''_1 et u''_2 sont centraux, on peut appliquer 5.3 au morphisme $u''_1(u''_2)^{-1}$. Il existe donc une partie *ouverte et fermée* U
61 de S″, contenant la diagonale de S″, telle que u''_1 et u''_2 coïncident au-dessus de U.

Or les fibres de S′/S étant géométriquement connexes, il en est de même de celles de S″/S, qui sont donc a fortiori connexes, d'où résulte que U (contenant les diagonales des dites fibres) contient les dites fibres, donc est égal à S″, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 5.5. — *Soient* S *un préschéma,* K *un* S*-préschéma en groupes* localement de type fini [35] *et* à fibres connexes*,* H *un sous-groupe* de type multiplicatif et de type fini, invariant *dans* K*. Alors* H *est un sous-groupe* central *de* K*.*

---

[31] N.D.E. : et de présentation finie sur S, cf. EGA IV_3, 11.10.5 (ii) et 11.9.10 (ii)

[32] N.D.E. : On a remplacé « morphisme couvrant pour la topologie fidèlement plate et quasi-compacte » par « épimorphisme effectif universel », afin de pouvoir appliquer ceci au morphisme $K \to S$ de 5.5, et l'on a modifié en conséquence le début de la démonstration.

[33] N.D.E. : Ceci est le cas, par exemple, si $S = \mathrm{Spec}\, k$ et $S' = \mathrm{Spec}\, k'$, où k est un corps et k' une extension *radicielle* de k, cf. X, Prop. 1.4.

[34] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[35] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse « *localement de type fini* » pour être en accord avec la référence $\mathrm{VI_A}$, 2.4. En fait, on peut montrer que sur un corps, *tout* schéma en groupes connexe est géométriquement connexe.

[36] Notons d'abord que $\pi : \mathrm{K} \to \mathrm{S}$ est à fibres géométriquement connexes, puisque pour un schéma en groupes localement de type fini sur un corps, connexe implique géométriquement connexe (cf. $\mathrm{VI_A}$ 2.4). On peut alors appliquer 5.4 en faisant $\mathrm{G} = \mathrm{H}$ et $\mathrm{S}' = \mathrm{K}$, à l'homomorphisme de K-groupes $u' : \mathrm{H_K} \to \mathrm{H_K}$ défini ensemblistement par $(h, k) \mapsto (khk^{-1}, k)$, qui est central puisque H est commutatif. L'image inverse de u' par la section unité $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{K}$ est l'homomorphisme identique de K, donc par 5.4 il en est de même de $\mathrm{H_K} \to \mathrm{H_K}$, donc H est central dans K.

Énonçons les variantes des résultats précédents pour des sous-groupes centraux de type multiplicatif. On obtient, en procédant comme pour les résultats précédents (et utilisant 3.2 bis) :

Théorème 5.1 bis. — *Soient* G *un* S-*préschéma en groupes,* H_1 *et* H_2 *deux sous-préschémas en groupes* de type multiplicatif et de type fini, *avec* $(\mathrm{H}_1)_s$ central. *On suppose* S localement noethérien *ou* G de présentation finie *sur* S. *Alors pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $(\mathrm{H}_1)_s = (\mathrm{H}_2)_s$*, il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $\mathrm{H}_1|_{\mathrm{U}} = \mathrm{H}_2|_{\mathrm{U}}$.

Corollaire 5.3 bis. — *Sous les conditions précédentes, supposons de plus* G séparé *sur* S. *Soit* U *l'ensemble des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* $(\mathrm{H}_1)_s = (\mathrm{H}_2)_s$. *Alors* U *est une partie de* S ouverte et fermée, *et* $\mathrm{H}_1|_{\mathrm{U}} = \mathrm{H}_2|_{\mathrm{U}}$.

Corollaire 5.4 bis. — *Soient* S *un préschéma,* G *un préschéma en groupes* séparé et de présentation finie *sur* S, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme* couvrant pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, *et* à fibres géométriquement connexes, H' *un sous-groupe* de type multiplicatif et de type fini *de* $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$. 62

Alors il existe un unique sous-groupe H *de* G *tel que* $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, *et* H *est de type multiplicatif et de type fini sur* S, *d'après* 1.1 *et* 2.1 b). *Si* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *admet une section* g, *alors* H *est l'image inverse du sous-groupe* H' *de* G' *par* $g : \mathrm{S} \to \mathrm{S}'$.

Théorème 5.6. — *Soient* S *un préschéma,* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S-*préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini, G de présentation finie *sur* S.

a) *Supposons* G à fibres connexes, *et soit* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $u_s : \mathrm{H}_s \to \mathrm{G}_s$ *soit un homomorphisme central. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que l'homomorphisme* $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$ *induit par* u *soit central.*

b) *Supposons que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, $u_s : \mathrm{H}_s \to \mathrm{G}_s$ *soit central. Alors* u *est central.*

[37] Démontrons (a). En procédant exactement comme dans la preuve de 5.1 (b), on peut supposer S local de point fermé s, puis $\mathrm{H} = \mathrm{D_S(M)}$ diagonalisable, puis qu'il existe une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de type fini A_i de $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ et un morphisme $u_i : \mathrm{D}_{\mathrm{S}_i}(\mathrm{M}) \to \mathrm{G}_i$ tel que u_{s_i} soit central (où s_i est l'image de s dans S_i) et dont u provienne par changement de base. Ceci nous ramène au cas où S est local noethérien, de point fermé s, et on doit alors prouver que u est central.

[36] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[37] N.D.E. : On a détaillé l'original dans la preuve de a).

Soit K le sous-préschéma $\mathrm{Ker}(v,w)$, où $v, w : \mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{G}$ sont définis par

$$v(h,g) = g, \qquad w(h,g) = \mathrm{int}(u(h))\cdot g = u(h)\,g\,u(h)^{-1}\,.$$

Alors K est un sous-G-groupe du G-groupe $\mathrm{H}_{\mathrm{G}} = \mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}$, on veut montrer qu'il est égal à H_{G} lui-même. En vertu de 4.9 on est ramené à prouver qu'il majore les ${}_{m}(\mathrm{H}_{\mathrm{G}}) = ({}_{m}\mathrm{H})\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}$ pour tout entier $m > 0$, ce qui nous ramène au cas où $\mathrm{H} = {}_{m}\mathrm{H}$
63 donc H *fini* sur S.

Soit e l'élément unité de la fibre G_s, alors $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{G},e})$ est un schéma local *noethérien* (G étant de présentation finie sur S noethérien) ; posons $\mathrm{S}'_n = \mathrm{S}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}_n$, où $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$. Alors $\mathrm{K}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{K}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{S}'$ est un sous-préschéma de $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'$ et, d'après 3.9, on a $\mathrm{K}_{\mathrm{S}'_n} = \mathrm{H}_{\mathrm{S}'_n}$ pour tout n. [38] Comme $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ est *fini* sur S′, on conclut de 5.0 (appliqué à l'anneau local noethérien B) que $\mathrm{K}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$.

D'autre part, comme $\mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}$ est noethérien (étant de présentation finie sur S noethérien), l'immersion $\mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}$ est de type fini (cf. EGA I, 6.3.5), de sorte que K est de type fini, donc de présentation finie sur G. Alors l'égalité $\mathrm{K}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H}_{\mathrm{G}}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{S}'$ entraîne, d'après EGA IV_3, 8.8.2.4, qu'il existe un voisinage ouvert W de e dans G tel que $\mathrm{K}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{W} = \mathrm{H}_{\mathrm{G}}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{W} = \mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{W}$. Donc K majore le voisinage ouvert $\mathrm{V} = \mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{W}$ de la section unité de G_{H} sur H.

Pour tout $t \in \mathrm{H}$, la fibre G_t (étant un $\kappa(t)$-groupe algébrique) est de Cohen-Macaulay (VI_{A}, 1.1.1) donc sans composantes immergées, comme elle est de plus connexe, donc irréductible (VI_{A}, 2.4), elle a pour unique point associé son point générique. Donc, d'après EGA IV_2, 3.1.8, l'ouvert V_t est schématiquement dense dans G_t. En vertu de 4.3, V est donc schématiquement dense dans G_{H}. De plus, comme K est un sous-H-groupe de G_{H}, il induit sur chaque fibre G_h un sous-groupe K_h, et comme ce dernier majore un voisinage ouvert de l'élément neutre et que G_h est connexe, il s'ensuit que $\mathrm{K}_h = \mathrm{G}_h$ d'où $\mathrm{K} = \mathrm{G}_{\mathrm{H}}$ ensemblistement. Ainsi, K est un sous-préschéma *fermé* de G_{H} qui majore le sous-préschéma schématiquement dense V, donc $\mathrm{K} = \mathrm{G}_{\mathrm{H}}$, ce qui prouve a).

Enfin, b) est une conséquence directe de 3.9, compte tenu que pour vérifier qu'un sous-préschéma K de $\mathrm{P} = \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{H}$ est identique à P, il suffit de vérifier que pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, où S′ est un quotient artinien d'un anneau local de S, on a $\mathrm{K}' = \mathrm{P}'$.

6. Monomorphismes des groupes de type multiplicatif, et factorisation canonique d'un homomorphisme d'un tel groupe

Lemme 6.1. — *Soient* S *un préschéma* quasi-compact*,* G *un* S*-préschéma en groupes* commutatif, de présentation finie et quasi-fini *sur* S. *Alors il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $n\cdot\mathrm{id}_{\mathrm{G}} = 0$*, i.e.* $\mathrm{G} = {}_{n}\mathrm{G}$.

64 Si S est le spectre d'un corps k, alors G est fini sur k, et d'après $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 8.5, il suffit

[38] N.D.E. : On a détaillé et corrigé l'original, en remplaçant « section unité de $(\mathrm{G}_{\mathrm{H}})_n$ sur H_n » par $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'_n}$.

de prendre $n = \deg(\mathrm{G}/k)$. Supposons maintenant $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ local artinien, soient k le corps résiduel de A, $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} k$, et $n_0 = \deg(\mathrm{G}_0/k)$. Distinguons deux cas.

a) k est de caractéristique nulle. Alors G_0 est séparable sur k, donc G est non ramifié sur S. Alors la section unité de G est une immersion ouverte, donc ${}_n\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ est un sous-schéma ouvert de G, donc pour qu'il soit égal à G, il suffit qu'il le soit ensemblistement, on peut donc alors prendre $n = n_0$.

b) k est de caractéristique $p > 0$. Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et $\mathrm{S}_r = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{r+1})$ pour tout r. Soit m un entier tel que $\mathfrak{m}^{m+1} = 0$, je dis qu'on peut prendre $n = p^m n_0$. En effet, procédant par récurrence sur m, et posant $n' = p^{m-1} n_0$, on peut supposer que $n' \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ induit dans $\mathrm{G}_{m-1} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{m-1}$ l'endomorphisme nul.

(39) Notons E l'ensemble des endomorphismes u de G qui ont cette propriété et K le noyau du morphisme de foncteurs en groupes $\mathrm{G} \to \prod_{\mathrm{S}_{m-1}/\mathrm{S}} \mathrm{G}$ (cf. III 0.1.2). Alors E s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{K})$; en particulier la loi de groupe abélien sur E est induite par celle de K. Or, d'après III 0.9, K est le S-foncteur en groupes qui à tout $g : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ associe le k-espace vectoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{G}_0/\mathrm{S}_0}), \mathfrak{m}^m \mathscr{O}_{\mathrm{T}})\,;$$

on a donc $pu = 0$ pour tout $u \in \mathrm{E}$. Donc on a $pn' \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}} = 0$, i.e. $p^m n_0 \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}} = 0$.

Supposons maintenant S noethérien (on s'y ramène dans 6.1 par la réduction habituelle au cas noethérien (40)). Il suffit alors de conjuguer ce qui précède et le

Lemme 6.2. — *Soient* X *un préschéma* quasi-fini *au-dessus de* S noethérien*, et considérons une famille filtrante croissante de sous-préschémas* $(\mathrm{X}^i)_{i \in \mathrm{I}}$*, ayant la propriété suivante :*

$$\begin{cases} \textit{pour tout } s \in \mathrm{S} \textit{ et } n \geqslant 0, \textit{ posant } \mathrm{S}_{s,n} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}/\mathfrak{m}^{n+1}), \textit{ il existe un } i \in \mathrm{I} \\ \textit{tel que } \mathrm{X}^i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{s,n} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{s,n}. \end{cases}$$

Sous ces conditions, il existe un $i \in \mathrm{I}$*, tel que* $\mathrm{X}^i = \mathrm{X}$.

Comme S est noethérien, il existe un ouvert U *maximal* tel que l'on ait $\mathrm{X}|_{\mathrm{U}} = \mathrm{X}^i|_{\mathrm{U}}$ **65**
pour i grand, on va montrer que $\mathrm{U} = \mathrm{S}$. En d'autres termes, on va montrer que si $\mathrm{U} \neq \mathrm{S}$, on peut trouver un U' strictement plus grand que U, et un i tel que $\mathrm{X}|_{\mathrm{U}'} = \mathrm{X}^i|_{\mathrm{U}'}$. Localisant en un point maximal s de $\mathrm{S} - \mathrm{U}$, on est ramené au cas où S est local de point fermé s, et $\mathrm{U} = \mathrm{S} - \{s\}$. (En effet, si l'on note $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$ et s'il existe i tel que $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' = \mathrm{X}^i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ alors, (41) il existe un voisinage ouvert V de

(39) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, en précisant les résultats de l'Exp. III qu'on utilise.

(40) N.D.E. : Comme S est *quasi-compact*, il est recouvert par un nombre *fini* d'ouverts affines, donc on est ramené au cas où $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Alors, comme G est de présentation finie sur S, on peut appliquer EGA IV_3, 8.8.2.

(41) N.D.E. : On a corrigé plus haut $\mathrm{X} - \{s\}$ en $\mathrm{S} - \{s\}$. D'autre part, on rappelle qu'un morphisme quasi-fini est supposé *de type fini*, cf. EGA II, 6.2.3 (et EGA III_2, $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}$ 20 pour la définition de « localement quasi-fini »). Donc ici (S étant noethérien), X est de présentation finie sur S, chaque immersion $\mathrm{X}^i \hookrightarrow \mathrm{X}$ est de type fini (d'après EGA I, 6.3.5), donc X^i est de présentation finie sur S, et l'on peut appliquer EGA IV_3, 8.8.2.

s tel que $X|_V = X^i|_V$, donc en prenant i assez grand pour que $X^i|_U = X|_U$, on aura $X|_W = X^i|_W$, où $W = U \cup V$).

Alors, pour i grand, comme $X|_U = X^i|_U$ on voit que X^i est un sous-préschéma fermé de X défini par un idéal $\mathscr{I}^{(i)}$ de support contenu dans $X_s = X_0 = X \times_S S_0$ (où $S_n = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}^{n+1})$, $S = \mathrm{Spec}(A)$). Comme X_0 est quasi-fini sur S_0, X_0 est une partie fermée finie de X noethérien, donc $\mathscr{I}^{(i)}$ est un module de *longueur finie*. Il s'ensuit qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{I}^{(i)} \cap \mathfrak{m}^{n+1}\mathscr{O}_X = 0$. D'autre part, en vertu de l'hypothèse dans 6.2, on peut supposer (à condition d'augmenter i) que l'image de $\mathscr{I}^{(i)}$ dans $\mathscr{O}_{X_n} = \mathscr{O}_X/\mathfrak{m}^{n+1}\mathscr{O}_X$ est nulle. Cela implique $\mathscr{I}^{(i)} = 0$ donc $X^i = X$. C.Q.F.D.

Lemme 6.3. — *Soient* S *un préschéma,* K *un préschéma en groupes sur* S*,* localement de présentation finie*,* $s \in S$ *tel que* K_s *soit quasi-fini* (*resp. non ramifié*) *sur* $\kappa(s)$ *en l'élément unité. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $K|_U$ *soit localement quasi-fini* (*resp. non ramifié*) *sur* U. (*)

Soit en effet V l'ensemble des points x de K tels que, notant t l'image de x dans S, la fibre K_t soit quasi-finie (resp. non ramifiée) sur $\kappa(t)$ en x, i.e. tel que x soit isolé dans K_t (resp. et son anneau local dans K_t une extension séparable de $\kappa(t)$). On sait que V est ouvert puisque K est localement de présentation finie sur S, [42] donc si ε désigne la section unité de K, $\varepsilon^{-1}(V)$ est ouvert. Par hypothèse il contient s, donc c'est un voisinage ouvert U de s. Ce dernier fait l'affaire, en d'autres termes $t \in U$ implique que K_t est localement quasi-fini (resp. non ramifié) sur $\kappa(t)$: en effet,
66 comme K_t est un groupe localement de type fini sur $\kappa(t)$, cela résulte du fait qu'il est quasi-fini (resp. non ramifié) sur $\kappa(t)$ au point $\varepsilon(t)$, cf. VI_B 1.3.

Combinant 6.1 et 6.3, on trouve le

Théorème 6.4. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S*-groupe* de type multiplicatif et de type fini*,* K *un sous-préschéma en groupes* fermé, de présentation finie *sur* S. *Soit* $s \in S$ *tel que* K_s *soit* fini.

Alors il existe un voisinage ouvert U *de* s *tel que* $K|_U$ *soit contenu dans* ${}_nH|_U$ *pour un certain* n*, et a fortiori* (${}_nH$ *étant fini sur* S) *tel que* $K|_U$ *soit fini sur* U.

Utilisant le lemme de Nakayama, on en déduit :

Corollaire 6.5. — *Avec les notations précédentes, supposons que* K_s *soit le groupe unité. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $K|_U$ *soit le groupe unité.*

Corollaire 6.6. — *Soit* $u : H \to G$ *un homomorphisme de* S*-préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini*, et* G séparé *sur* S. *On suppose de plus* S localement noethérien*, ou* G localement de présentation finie [43] *sur* S.

(*) cf. VI_B 2.5 (ii) pour un énoncé plus général.

[42] N.D.E. : cf. EGA IV_3, 13.1.4, et EGA IV_4, 17.4.1. Par ailleurs, on a noté t (au lieu de s) l'image de x.

Soit $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $u_s : \mathrm{H}_s \to \mathrm{G}_s$ *soit un monomorphisme, alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* u *induise un monomorphisme* $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$.

Soit en effet $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(u)$, l'hypothèse sur u_s signifie que K_s est le groupe unité, la conclusion que $\mathrm{K}|_{\mathrm{U}}$ est le groupe unité, pour U convenable. Or G étant séparé sur S, K est un sous-groupe *fermé* de H, et dans le cas où on ne suppose pas S localement noethérien mais en revanche G localement de présentation finie sur S, K est localement de présentation finie sur S [43], donc de présentation finie sur S puisqu'il est séparé sur S (H l'étant) et quasi-compact sur S (étant fermé dans H qui est quasi-compact sur S). On peut donc appliquer 6.5, d'où 6.6.

Remarque 6.6.1. — [44] Sous les hypothèses de 6.6, on notera que lorsque de plus G est affine sur S (resp. de présentation finie sur S), $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$ est même une *immersion fermée*, comme on l'a signalé dans 2.5 (resp. 2.6).

Corollaire 6.7. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S*-préschémas en groupes,* 67
avec H de type multiplicatif et de type fini*; on suppose* S localement noethérien *ou* G localement de présentation finie *sur* S.

Si tous les homomorphismes induits sur les fibres $u_s : \mathrm{H}_s \to \mathrm{G}_s$ *sont des monomorphismes, alors* u *est un monomorphisme.*

Le raisonnement est le même que dans 6.6, l'hypothèse que G soit séparé sur S étant ici inutile pour assurer que K est fermé dans H, puisque l'hypothèse que les u_s sont des monomorphismes implique que K est réduit ensemblistement à la section unité de G.

Théorème 6.8. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S*-préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif et de type fini*, et* G séparé *sur* S*. On suppose de plus* S localement noethérien *ou* G de présentation finie *sur* S.

Alors $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(u)$ *est un sous-groupe* de type multiplicatif et de type fini *de* H*, et* u *se factorise en*

$$\mathrm{H} \xrightarrow{u'} \mathrm{H}/\mathrm{K} \xrightarrow{u''} \mathrm{G},$$

où H/K *est* de type multiplicatif et de type fini*,* u' *est l'homomorphisme canonique et est* fidèlement plat (*et affine*)*, et* u'' *est un* monomorphisme.

(N.B. Comme remarqué en 6.6.1, u'' est une immersion fermée si G est affine sur S ou de présentation finie sur S). Il suffit de prouver que K est de type multiplicatif, le reste de la proposition résultant alors de 2.7 et IV 5.2.6.

Supposons d'abord G de présentation finie sur S. Cette hypothèse étant stable par changement de base, on est ramené pour prouver que K est de type multiplicatif, au cas où H est diagonalisable, i.e. $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, où M est un groupe commutatif de type fini. Soit $s \in \mathrm{S}$, alors K_s est un sous-groupe fermé de $\mathrm{H}_s = \mathrm{D}_{\kappa(s)}(\mathrm{M})$, donc

[43] N.D.E. : Il suffit en fait de supposer G *localement de type fini* sur S ; d'après EGA IV_4, 1.4.3 (v), ceci entraîne ($\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ étant de présentation finie) que $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est localement de présentation finie, donc aussi $\mathrm{K} \to \mathrm{S}$ qui s'en déduit par changement de base.

[44] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 6.6.1, pour des références ultérieures.

en vertu de 8.1 [45] est de la forme $D_\kappa(s)(N)$, où N est un groupe quotient de M. Posons $K' = D_S(N)$, alors K′ est un sous-groupe de type multiplicatif de H, soit
68 $v' : K' \to G$ induit par u. [46] Alors v'_s est l'homomorphisme unité par construction, donc en vertu de 5.2 il existe un voisinage ouvert U de s tel que $v'|_U : K'|_U \to G|_U$ soit l'homomorphisme unité. Donc quitte à remplacer S par U, on peut supposer que v' est l'homomorphisme unité, donc que u se factorise en

$$H \xrightarrow{u'} H/K' \xrightarrow{u''} G.$$

Or, puisque u''_s est déduit de u_s en factorisant à travers $H_s \to H_s/\operatorname{Ker}(u_s)$, alors u''_s est un monomorphisme (IV 5.2.6), donc en vertu de 6.6 il existe un voisinage ouvert U de s tel que $u''|_U : (H/K')|_U \to G|_U$ soit un monomorphisme. Donc quitte à restreindre S, on voit que u'' est un monomorphisme, donc $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u') = K'$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} u$ est de type multiplicatif.

La même démonstration est valable si, au lieu de supposer G de présentation finie sur S, on suppose S localement noethérien, du moins dans le cas où H est diagonalisable. Dans le cas où on ne fait pas cette hypothèse sur H, il faut montrer que l'on peut trouver un changement de base couvrant $S' \to S$, avec S′ *localement noethérien*, qui trivialise H. C'est ce qu'on verra en effet dans l'exposé suivant (X 4.6).

7. Algébricité des homomorphismes formels dans un groupe affine

Théorème 7.1. — *Soient* A *un anneau* noethérien*, muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I*-adique,* $S = \operatorname{Spec}(A)$, $S_n = \operatorname{Spec}(A/I^{n+1})$, H, G *des* S*-préschémas en groupes, avec* H de type multiplicatif isotrivial*, et* G affine.

Alors l'application canonique

$$\text{(x)} \qquad \theta : \quad \operatorname{Hom}_{S\text{-gr.}}(H, G) \longrightarrow \varprojlim_n \operatorname{Hom}_{S_n\text{-gr.}}(H_n, G_n)$$

est bijective (*où* H_n, G_n *sont les* S_n*-groupes déduits de* H, G *par le changement de base* $S_n \to S$).

69 Supposons d'abord H diagonalisable, donc de la forme

$$H = \operatorname{Spec} A(M)\,,$$

où B = A(M) est l'algèbre du groupe commutatif M à coefficients dans A. On a aussi G = Spec(C), où C est une A-algèbre munie d'une application diagonale (satisfaisant aux axiomes connus). Alors les homomorphismes de S-groupes $H \to G$ correspondent bijectivement aux homomorphismes de A-algèbres $\varphi : C \to B$ compatibles avec les applications diagonales, i.e. tels que, pour tout $f \in C$,

$$\Delta_H(\varphi(f)) = (\varphi \otimes \varphi)(\Delta_G(f))$$

[45] N.D.E. : On a corrigé la référence erronée à IV 4.7.5. Noter que le n°8 du présent exposé est indépendant des n^{os} 2 à 7.
[46] N.D.E. : On a corrigé « induit par G » en « induit par u ».

où Δ_{H} et Δ_{G} sont les applications diagonales. On a une description analogue pour les homomorphismes de S_n-groupes $\mathrm{H}_n \to \mathrm{G}_n$, définis par certains homomorphismes de A_n-algèbres $\varphi_n : \mathrm{C}_n \to \mathrm{B}_n$ (où on pose $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}/\mathrm{I}^{n+1}$, $\mathrm{B}_n = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_n$, $\mathrm{C} = \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_n$). Posons

$$\widehat{\mathrm{B}} = \varprojlim_n \mathrm{B}_n \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathrm{C}} = \varprojlim_n \mathrm{C}_n\,,$$

alors $\widehat{\mathrm{B}} = \varprojlim_n \mathrm{A}_n(\mathrm{M})$ s'identifie à un sous-module du produit A^{M} (à savoir celui formé des familles $(a_m)_{m\in\mathrm{M}}$ d'éléments de A qui tendent vers 0 (pour la topologie I-adique) suivant le filtre des complémentaires des parties finies de M). Ceci implique déjà que l'homomorphisme canonique $\mathrm{B} \to \widehat{\mathrm{B}}$ est injectif, [47] puisque le système projectif $\theta(\varphi) = (\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ définit un homorphisme $\widehat{\varphi} = \widehat{\mathrm{C}} \to \widehat{\mathrm{B}}$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathrm{B} \arrow[d] \\
\widehat{\mathrm{C}} \arrow[r, "\widehat{\phi}"] & \widehat{\mathrm{B}}
\end{tikzcd}\quad .$$

Prouvons que θ est surjectif : prenons un système projectif $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ et prouvons qu'il provient par réduction d'un φ du premier membre. A priori, (φ_n) définit un homomorphisme sur les algèbres complétées

$$\widehat{\varphi} : \widehat{\mathrm{C}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{B}}\,,$$

et tout revient à voir que son composé $\Phi : \mathrm{C} \to \widehat{\mathrm{C}} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \widehat{\mathrm{B}}$ avec l'homomorphisme canonique $\mathrm{C} \to \widehat{\mathrm{C}}$ applique C dans B. En effet, s'il en est ainsi, on trouve un homo- 70
morphisme de A-algèbres $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$, se réduisant suivant les φ_n, d'où on conclut aussitôt qu'il est compatible avec les applications diagonales (puisque les φ_n le sont, et que $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \to \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}} \mathrm{B}$ est injectif, comme on voit comme ci-dessus en remplaçant M par $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$).

Notons que l'homomorphisme diagonal Δ_{H} de H définit en passant aux complétés un homomorphisme

$$\widehat{\Delta}_{\mathrm{H}} : \widehat{\mathrm{B}} \longrightarrow \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}} \mathrm{B}\,,$$

et on a un diagramme commutatif (déduit par passage à la limite projective des diagrammes analogues définis par les φ_n) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{G}}"'] & \widehat{\mathrm{B}} \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{H}}"] \\
\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \arrow[r, "\Psi"] & \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}} \mathrm{B}
\end{tikzcd}\quad ,$$

où Ψ est le composé

$$\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \xrightarrow{\Phi\otimes\Phi} \widehat{\mathrm{B}} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{B}} \longrightarrow \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}} \mathrm{B}$$

[47] N.D.E. : On détaillé ce qui suit.

(la dernière flèche est l'homomorphisme canonique évident). Il s'ensuit que pour tout $f \in \mathrm{C}$, $\Phi(f)$ est un élément de $\widehat{\mathrm{B}}$ dont l'image par $\widehat{\Delta}_{\mathrm{H}}$ est un élément « décomposable » de $\widehat{\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}}$, i.e. est dans l'image de $\widehat{\mathrm{B}} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{B}}$.

Notons $(e_m)_{m\in\mathrm{M}}$ la base canonique de $\mathrm{A(M)}$ et $(e_{m,m'})$ celle de $\mathrm{A(M \times M)} = \mathrm{A(M)} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A(M)}$. Comme $\Delta_{\mathrm{H}}(e_m) = e_m \otimes e_m = e_{m,m}$ pour tout m, il suffit maintenant d'appliquer le

Lemme 7.2. — *Soient* A *un anneau* noethérien, M *un ensemble,* $(a_{m,m'})$ *une famille d'éléments de* A *indexée par* $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$*, telle que*

(i) $a_{m,m'} = 0$ *si* $m \neq m'$ (*i.e. le support de la famille est contenu dans la diagonale de* $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$),

71 (ii) *On a*

$$a_{m,m'} = \sum_i b^i_m c^i_{m'}$$

où les b^i, c^i *sont des éléments de* $\mathrm{A^M}$ *en nombre fini* (*i.e.* $(a_{m,m'})$ *appartient à l'image de l'homomorphisme canonique* $\mathrm{A^M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A^M} \to \mathrm{A^{M\times M}}$).

Sous ces conditions, le support de la famille $(a_{m,m'})$ *est* fini.

En vertu de (i), la famille $(a_{m,m'})$ est déterminée par la connaissance des $a_m = a_{m,m}$. Posons pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathrm{M}} \in \mathrm{A^{(M)}}$:

$$(u \cdot x)_m = \sum_{m'} a_{m,m'}\, x_{m'}\,,$$

i.e. interprétons $(a_{m,m'})$ comme la matrice d'un homomorphisme $u : \mathrm{A^{(M)}} \to \mathrm{A^M}$. Alors en vertu de (i) on a simplement

$$(u \cdot x)_m = a_m x_m\,.$$

D'autre part, en vertu de (ii) on a

$$u \cdot x \in \sum_i \mathrm{A} \cdot b^i,$$

donc $u(\mathrm{A^{(M)}})$ reste dans un A-module de type fini. Par suite, désignant par $(e^m)_{m\in\mathrm{M}}$ la base canonique de $\mathrm{A^{(M)}} \subset \mathrm{A^M}$, les $a_m e^m$ restent dans un A-module de type fini. Comme A est noethérien, le module qu'ils engendrent est lui-même de type fini, ce qui implique (puisque les e^m sont linéairement indépendants) que tous les a_m sauf un nombre fini sont nuls. Cela prouve 7.2 et par suite 7.1 dans le cas où H est diagonalisable.

Prouvons maintenant le cas général de 7.1, où on suppose seulement H isotrivial,
72 i.e. qu'il existe un morphisme fini étale surjectif $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ tel que $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit diagonalisable. Nous utiliserons seulement le fait que $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est fini et couvrant (pour la topologie fidèlement plate et quasi compacte, ou simplement pour la topologie canonique de (**Sch**)) – ainsi l'hypothèse « étale » pourrait être remplacée par « plat ».

Soit $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, introduisons de même S'_n et $\mathrm{S}''_n = \mathrm{S}'' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n = \mathrm{S}'_n \times_{\mathrm{S}_n} \mathrm{S}'_n$, et H', G', H'', G'', H'_n, G'_n, H''_n, G''_n déduits de H et G par les changements de base qu'on devine. Noter que H' et H'' sont maintenant diagonalisables. Noter aussi que S' donc S'' est affine, et que si $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$, $\mathrm{S}'' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}'')$, alors A' et A'' sont séparés et complets pour la topologie définie par IA' resp. par IA'' (puisque A' et A'' sont finis sur A). Comme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $\mathrm{S}'_n \to \mathrm{S}_n$ sont couvrants, on obtient un diagramme commutatif d'applications d'ensembles dont les deux lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{H},\mathrm{G}) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-gr}}(\mathrm{H}',\mathrm{G}') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "u'"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}''\text{-gr}}(\mathrm{H}'',\mathrm{G}'') \arrow[d, "u''"] \\
\varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_n\text{-gr}}(\mathrm{H}_n,\mathrm{G}_n) \arrow[r] & \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'_n\text{-gr}}(\mathrm{H}'_n,\mathrm{G}'_n) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}''_n\text{-gr}}(\mathrm{H}''_n,\mathrm{G}''_n).
\end{tikzcd}$$

(N. B. la deuxième ligne est exacte comme limite projective de diagrammes exacts, relatifs aux divers $\mathrm{S}'_n \to \mathrm{S}_n$). D'après ce qu'on a déjà prouvé (cas diagonalisable), u' et u'' sont bijectifs. Il en est donc de même de u, ce qui achève la démonstration de 7.1.

Corollaire 7.3. — *Sous les conditions de* 7.1, *supposons de plus* G lisse *sur* S, *et soit* $u_0 : \mathrm{H}_0 \to \mathrm{G}_0$ *un homomorphisme de* S_0*-groupes. Alors il existe un homomorphisme de* S*-groupes* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *qui relève* u_0. *Deux tels relèvements* u, u' *sont conjugués par un élément* g *de* G(S) *se réduisant suivant l'élément unité de* $\mathrm{G}_0(\mathrm{S}_0)$.

Résulte de la conjonction de 3.6 et de 7.1. Pour construire un u, on construit de proche en proche des u_n, ce qui est possible par 3.6, et en vertu de 7.1 le système (u_n) provient d'un u. Étant donné deux relèvements u et u', pour construire g tel **73**
que $u' = \mathrm{int}(g)u$, $g_0 = 1$, on construit de proche en proche des g_n, tels que $g_0 = 1$, g_n se déduit de g_{n+1} par réduction, $u'_n = \mathrm{int}(g_n)u_n$; cela est possible grâce à 3.6. Comme A est séparé et complet, les g_n proviennent d'un $g \in \mathrm{G(S)}$ et pour prouver que $u' = \mathrm{int}(g)u$, il suffit d'utiliser *l'injectivité* dans l'assertion 7.1.

Remarque 7.4. — On comparera 7.1 avec EGA III 5.4.1, qui implique que l'énoncé 7.1 est valable si, au lieu de supposer H de type multiplicatif et G affine, on suppose H propre sur S, et G séparé et localement de type fini sur S. Le fait d'avoir un énoncé comme 7.1 *sans hypothèse de propreté* est assez exceptionnel, et doit ici être interprété comme un des aspects de la grande « *rigidité* » de la structure d'un groupe de type multiplicatif. L'énoncé analogue avec $\mathrm{G} = \mathrm{H} = \mathbb{G}_a$ (groupe additif) est faux en général, comme on voit en prenant A de caractéristique $p > 0$, et définissant les u_n par réduction mod I^{n+1} à partir d'une série formelle additive

$$u(\mathrm{T}) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{T}^{p^n},$$

où les a_n sont des éléments de A qui tendent vers 0 pour la topologie I-adique, mais non pour la topologie discrète. L'énoncé 7.1 devient faux également si on y supprime l'hypothèse G affine, même pour $\mathrm{H} = \mathbb{G}_m$ (groupe multiplicatif) ; on en voit un exemple (avec A anneau de valuation discrète complet) en partant d'une courbe elliptique sur le corps des fractions K de A, qui se réduit (dans la théorie de réduction de Néron-Kodaira, disons) suivant le groupe $\mathbb{G}_m$ sur le corps résiduel k : [48] on aura donc un schéma en groupes commutatif lisse G sur S, dont la fibre spéciale est $\mathbb{G}_{m,k}$ (ce qui permet grâce à 3.6 de définir un système projectif d'isomorphismes $u_n : \mathrm{H}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}_n$, où $\mathrm{H} = \mathbb{G}_{m,\mathrm{A}}$), mais dont la fibre générique est une variété abélienne, de sorte qu'il n'existe d'autre homomorphisme de S-groupes $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ que 0.

8. Sous-groupes, groupes quotients et extensions de groupes de type multiplicatif sur un corps (*)

Scholie 8.0. — [49] Soient k un corps, H un k-schéma en groupes *affine*. On note $k[\mathrm{H}]$ son algèbre affine et $\mathrm{X(H)} = \mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{H}, \mathbb{G}_{m,\,k})$ le groupe des caractères de H. D'après le lemme d'indépendance des caractères, X(H) est une partie *libre* de $k[\mathrm{H}]$. Il en résulte que H est diagonalisable si et seulement si X(H) engendre $k[\mathrm{H}]$ comme k-espace vectoriel.

74

Proposition 8.1. — *Soit* G *un schéma en groupes diagonalisable* (*resp. de type multiplicatif*) *sur un corps* k [50]. *Alors pour tout sous-schéma en groupes* H *de* G*,* H *et* G/H *sont diagonalisables* (*resp. de type multiplicatif*).

La définition 1.1 nous ramène aussitôt au cas non respé. Un passage à la limite facile, utilisant $\mathrm{VI_B}$ 11.13 et VIII 3.1, nous ramène au cas où G est de type fini sur k [51]. En vertu de $\mathrm{VI_B}$ 11.16, [52] on peut trouver une famille finie d'éléments non nuls

$$f_i = \sum a_{im}\, m \quad , \quad a_{im} \in k \tag{8.1.1}$$

de l'anneau affine $k(\mathrm{M})$ de $\mathrm{G} = \mathrm{D}_k(\mathrm{M})$, telle que les points de H (à valeurs dans une k-algèbre arbitraire k') sont les points $g \in \mathrm{G}(k')$ tels que l'on ait

$$\tau_g f_i = \lambda_i(g)\, f_i, \quad \text{avec} \quad \lambda_i(g) \in k', \tag{8.1.2}$$

où τ_g désigne la translation par g. Or on a

$$\tau_g f_i = \sum a_{im}\, \chi_m(g)\, m\,, \tag{8.1.3}$$

(*) Rajouté en Juillet 1969. Ce numéro-remords est indépendant des n^{os} 3 à 7.

[48] N.D.E. : On pourrait expliciter un tel exemple ...

[49] N.D.E. : On a ajouté ce scholie.

[50] N.D.E. : On a ajouté : « *sur un corps k* », implicite dans l'original ; d'autre part, on a remplacé « groupe algébrique » par « schéma en groupes », puisque G n'est pas supposé de type fini.

[51] N.D.E. : Détailler ce « passage à la limite » : ceci utilise 8.0 et aussi l'égalité $\mathrm{G/H} = \varprojlim_i \mathrm{G}_i/\mathrm{H}_i$, cf. $\mathrm{VI_B}$, preuve de 11.17. Pour voir que $\mathrm{H} = \varprojlim_i (\mathrm{H} \cap \mathrm{G}_i)$, utilise-t-on le fait que H est *fermé* dans G ? En utilisant ceci, on peut donner une démonstration directe ...

[52] N.D.E. : Il faudrait sans doute récrire $\mathrm{VI_B}$ 11.16 sous la forme usuelle, plus agréable. En particulier, il suffit ci-dessous d'un seul f_i ...

$\chi_m : \mathrm{G} \to \mathbb{G}_{m,k}$ étant le caractère associé à m, de sorte que (8.1.2) équivaut à la relation

(8.1.4) $$\chi_m(g) = \chi_{m'}(g) \quad \text{si} \quad m, m' \in \mathrm{Z}_i\,,$$

Z_i désignant l'ensemble des $m \in \mathrm{M}$ tels que $a_{im} \neq 0$. Cette relation peut aussi s'écrire 75

$$\chi_{m'-m}(g) = 1 \quad \text{si} \quad m, m' \in \mathrm{Z}_i\,.$$

Désignant par N le sous-groupe de M engendré par tous les $m' - m$ (i variable, et m, $m' \in \mathrm{Z}_i$), on déduit de la définition de $\mathrm{D}_k(\mathrm{M})$ ($\simeq$ G) que H s'identifie à $\mathrm{D}_k(\mathrm{M/N})$. Il résulte alors de VIII 3.1 que G/H s'identifie à $\mathrm{D}_k(\mathrm{N})$. C.Q.F.D.

Proposition 8.2. — [53] *Soient k un corps,* H, K *des k-schémas en groupes* de type multiplicatif et de type fini, *et* G *un k-schéma en groupes tel que l'on ait une suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow 1$$

(*ce qui entraîne que* G *est* de type fini *sur k*).

(i) *Si on suppose* G commutatif *ou* K connexe*, alors* G *est de type multiplicatif.*

(ii) *Si* K *et* H *sont* diagonalisables*,* K *étant un* tore*, alors* G *est diagonalisable.*

Pour la démonstration de (i), le lecteur se reportera à XVII 7.1.1, dont 8.2 (i) est un cas particulier ; le cas d'un corps est traité dans la partie (i) de la démonstration de XVII 7.1.1 (n'utilisant pas les résultats des exposés suivants).

(ii) Supposons maintenant K et H diagonalisables :

$$\mathrm{K} \simeq \mathrm{D}_k(\mathrm{M}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H} \simeq \mathrm{D}_k(\mathrm{N}),$$

[53] et supposons G de type multiplicatif (ce qui est le cas d'après (i) si K est un tore). Alors, d'après X 1.4, G est isotrivial sur k, i.e. il existe une extension finie séparable k'/k telle que $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_k k'$ soit diagonalisable, donc $\mathrm{G}' = \mathrm{D}_{k'}(\mathrm{E})$, pour un groupe commutatif E, et l'on a une suite exacte

(1) $$0 \longrightarrow \mathrm{D}_{k'}(\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{D}_{k'}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathrm{D}_{k'}(\mathrm{M}) \longrightarrow 0.$$

Donc, d'après VIII, 3.1 et 3.2, M est un sous-groupe de E et l'on a une suite exacte

(2) $$0 \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow 0.$$

Pour une extension E_0 de N par M *donnée*, considérons le k-groupe diagonalisable $\mathrm{G}_0 = \mathrm{D}_k(\mathrm{E}_0)$; alors le k-foncteur en groupes A des automorphismes de l'extension

(3) $$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}_0 \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow 1$$

i.e. le sous-foncteur en groupes de $\underline{\mathrm{Aut}}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{G}_0)$ dont les points sur un k-préschéma T sont les $\phi \in \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{T}\text{-gr.}}(\mathrm{G}_\mathrm{T})$ induisant l'identité sur H_T et sur K_T, s'identifie à $\underline{\mathrm{Hom}}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{K}, \mathrm{H})$, qui est, d'après VIII 1.5, le k-groupe constant de valeur $\mathrm{L} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$.

On voit donc que la classification des extensions G de K par H, qui sur une clôture séparable k_s de k deviennent isomorphes à l'extension (3), est la même que celle des

[53] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé, ainsi que sa démonstration.

k-torseurs pour la topologie étale sous le groupe constant L_k. Notant $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$, ceux-ci sont classifiés par le groupe de cohomologie galoisienne (L étant un Γ-module trivial) :

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(k, \mathrm{L}_k) = \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{L}) = \mathrm{Hom}_{\text{gr. top.}}(\Gamma, \mathrm{L}).$$

76 Si de plus K est un tore, M est sans torsion, donc L aussi, d'où $\mathrm{Hom}_{\text{gr. top.}}(\Gamma, \mathrm{L}) = 0$; il en résulte que toute extension de K par H est déjà diagonalisable.

Remarque 8.3. — Comme on l'a déjà signalé dans la démonstration de 8.2, la première assertion est énoncée et prouvée sur une base quelconque dans XVII 7.1.1. D'autre part, la deuxième assertion se généralise, avec essentiellement la même démonstration, au cas d'un schéma de base intègre normal (ou plus généralement, géométriquement unibranche), en utilisant X 5.13 plus bas.

Enfin, on peut aussi considérer 8.1 comme un corollaire du résultat (nettement moins trivial) 6.8, également valable sur un schéma de base arbitraire. [54]

Bibliographie

[55]

[BEns] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chap. I-IV, Hermann, 1970.

[54] N.D.E. : Noter toutefois que la démonstration de 6.8 utilise 8.1 !
[55] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

EXPOSÉ X

CARACTÉRISATION ET CLASSIFICATION DES GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF

par A. Grothendieck

1. Classification des groupes isotriviaux. Cas d'un corps de base 77

Rappelons (IX 1.1) que le groupe de type multiplicatif H sur le préschéma S est dit *isotrivial* s'il existe un morphisme *étale fini surjectif* $S' \to S$ tel que $H' = H \times_S S'$ soit diagonalisable. Lorsque S est connexe, alors S' se décompose en somme finie de composantes connexes S'_i, et on peut donc (quitte à remplacer S' par un des S'_i) supposer S' connexe. Enfin, on sait qu'on peut majorer S' par un S'_1 fini étale connexe, qui soit *galoisien*, i.e. un fibré principal homogène sur S de groupe Γ_S, où Γ est un groupe fini ordinaire (cf. SGA 1, V N$^{\text{os}}$ 7 & 3 lorsque S est localement noethérien, et EGA IV$_4$, 18.2.9 dans le cas général). [1] Nous supposons S' choisi ainsi, et nous proposons de déterminer les groupes de type multiplicatif H sur S qui sont « trivialisés » par S', i.e. tels que $H' = H \times_S S'$ soit diagonalisable. [2] D'après la théorie de la descente (cf. SGA 1, VIII 5.4), la catégorie de ces H est équivalente à la catégorie des groupes diagonalisables H' sur S', munis d'opérations de Γ sur H' compatibles avec les opérations de Γ sur S'. (N. B. Comme les groupes envisagés sont *affines* au-dessus de la base, la question d'effectivité d'une donnée de descente se résoud par l'affirmative, cf. SGA 1, VIII 2.1). Or S' étant *connexe*, le foncteur contravariant

$$M \longmapsto D_{S'}(M)$$

est une *anti-équivalence* de la catégorie des groupes commutatifs ordinaires avec la 78
catégorie des groupes diagonalisables sur S' (cf. VIII 1.6), dont un foncteur quasi-inverse est $H \mapsto \mathrm{Hom}_{S'\text{-gr.}}(H, \mathbb{G}_{m,S'})$. [3]

---

[0] version xy du 6 novembre 2009 : Addenda mis en Sect. 9, revu jusque 8.8

[1] N.D.E. : Plus précisément, ceci découle des « conditions axiomatiques d'une théorie de Galois », cf. SGA 1, V N°4 g) ; lorsque S est localement noethérien, la vérification des axiomes est faite dans *loc. cit.*, N$^{\text{os}}$ 7 & 3, en particulier 3.7, qui repose sur SGA 1, I 10.9. Ce dernier résultat est démontré, sans hypothèses noethériennes, dans EGA IV$_4$, 18.2.9.

[2] N.D.E. : Dans la suite, on dira qu'un S-groupe de type multiplicatif est « *déployé* » s'il est « trivial » au sens de IX 1.2, c.-à-d., si c'est un S-groupe diagonalisable.

[3] N.D.E. : On a corrigé S en S'.

Proposition 1.1. — *Soient* S *un préschéma* connexe*,* S′ *un revêtement principal connexe de* S *de groupe* Γ (fini)*. Alors la catégorie des groupes de type multiplicatif sur* S *déployés* [4] *par* S′*, est anti-équivalente à la catégorie des* Γ*-modules, i.e. des groupes commutatifs ordinaires* M *munis d'un homomorphisme* $\Gamma \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{M})$*.*

On en conclut de manière standard :

Corollaire 1.2. — *Soient* S *un préschéma* connexe*,* $\xi : \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathrm{S}$ *un « point géométrique » de* S*, i.e. un homomorphisme dans* S *du spectre d'un corps algébriquement clos* Ω*, considérons le groupe fondamental de* S *en* ξ (cf. SGA 1 V, N°7) *:*

$$\pi = \pi_1(\mathrm{S}, \xi).$$

Alors la catégorie des groupes de type multiplicatif isotriviaux H *sur* S *est anti-équivalente à la catégorie des « modules galoisiens » sous* π*, i.e. des* π*-modules* M *tels que le stabilisateur dans* π *de tout point de* M *est un sous-groupe ouvert.*

Dans cette correspondance, au groupe de type multiplicatif isotrivial H est associé le groupe $\mathrm{M} = \mathrm{Hom}_{\Omega\text{-gr.}}(\mathrm{H}_\xi, \mathbb{G}_{m,\Omega})$, où H_ξ est la fibre de H en ξ ; ce groupe se trouve muni de façon naturelle d'opérations de $\pi_1(\mathrm{S}, \xi)$.

Remarque 1.3. — Nous verrons plus bas (cf. 5.16) que si S est normal, ou plus généralement géométriquement unibranche, alors tout groupe de type multiplicatif et de type fini sur S est nécessairement isotrivial, donc le principe de classification 1.2 est applicable aux groupes de type multiplicatif et de type fini sur S, qui correspondent
79 aux π-modules galoisiens qui sont de type fini sur $\mathbb{Z}$. Pour l'instant, bornons-nous au résultat suivant :

Proposition 1.4. — *Soient* k *un corps,* H *un groupe de type multiplicatif et* de type fini *sur* k*, alors* H *est isotrivial, i.e. il existe une extension finie* séparable k' *de* k *qui déploie* H*.*

Par suite, en vertu de 1.2*, si* π *est le groupe de Galois topologique d'une clôture algébrique* Ω *de* k*, la catégorie des groupes de type multiplicatif et de type fini* H *sur* k *est anti-équivalente à la catégorie des modules galoisiens* M *sous* π *qui sont de type fini comme* $\mathbb{Z}$*-modules.*

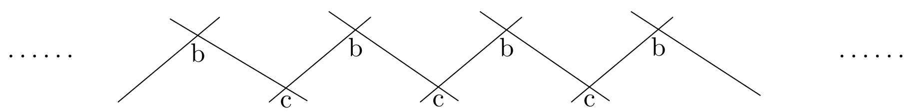
Il résulte d'abord du fait que H est de type fini sur k et du « principe de l'extension finie » (cf. EGA IV_3, 9.1.4) qu'il existe une extension finie k' de k qui déploie H. Rappelons le principe de démonstration : par hypothèse il existe un groupe diagonalisable de type fini G sur k, un S′ fidèlement plat sur $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, et un isomorphisme de S′-groupes $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} \simeq \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$. Quitte à remplacer S′ par le corps résiduel d'un point de S′, on peut supposer que S′ est le spectre d'une extension K de k. Cette dernière est limite inductive de ses sous-algèbres A_i de type fini, d'où résulte facilement (cf. EGA IV_3, 8.8.2.4) que u provient d'un A_i-isomorphisme $u_i : \mathrm{H}_{\mathrm{A}_i} \simeq \mathrm{G}_{\mathrm{A}_i}$ pour i assez grand. En vertu du Nullstellensatz, il existe un anneau quotient k' de A_i qui est une extension finie de k. Celle-ci déploie donc H.

[4] N.D.E. : On a remplacé, ici et dans la suite, « splittés » par « *déployés* », « splitte » par « *déploie* », etc.

Alors k' est une extension radicielle d'une extension séparable k'_s de k. En vertu de IX 5.4 l'isomorphisme $u' : \mathrm{H}_{k'} \simeq \mathrm{G}_{k'}$ provient d'un isomorphisme $\mathrm{H}_{k'_s} \simeq \mathrm{G}_{k'_s}$, ce qui prouve que k'_s déploie H et établit 1.4.

Remarque 1.5. — L'énoncé 1.2 fournit en particulier une caractérisation des tores isotriviaux sur S de dimension relative n : posant $\pi = \pi_1(\mathrm{S}, \xi)$, ils correspondent aux classes (à « équivalence » près) de représentations $\pi \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ à noyau un sous-groupe ouvert de π.

1.6. Même lorsque S est une courbe algébrique, il peut exister sur S des tores (de dimension relative 2) qui sont non localement isotriviaux (et a fortiori non isotriviaux) ; **80**
il peut exister également des tores localement triviaux non isotriviaux. (Noter cependant que de tels phénomènes ne peuvent se présenter que si S n'est pas normale, comme on a déjà signalé dans 1.3). Soit par exemple S une courbe algébrique irréductible (sur un corps algébriquement clos pour fixer les idées) ayant un point double ordinaire a, soient S' la normalisée, et b et c les deux points de S' au-dessus de a. On construit alors un fibré principal homogène P sur S, de groupe structural $\mathbb{Z}$, connexe, en rattachant entre eux une infinité d'exemplaires de S' suivant le diagramme



(N. B. Il s'agit d'un fibré principal au sens de la topologie étale). Or on a un homomorphisme

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}), \qquad \varphi(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui permet de construire un tore T sur S, de dimension relative 2, à partir du tore trivial $\mathbb{G}_m^2$ sur P et de la donnée de descente sur ce dernier déduite de φ. (N. B. on notera que la projection $\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ est couvrante pour la topologie étale et a fortiori pour la topologie canonique de (**Sch**), et que la donnée de descente envisagée est nécessairement effective, puisque $\mathbb{G}_{m,\mathrm{P}}^2$ est *affine* sur P). Il n'est pas difficile de prouver que T n'est pas isotrivial au voisinage de a [5] (il est cependant trivial dans $\mathrm{S} - \{a\}$).

On trouve une variante de cette construction en prenant pour S une courbe ayant deux composantes irréductibles S_1 et S_2 se coupant en deux points a' et a'', ce qui permet de construire un fibré principal homogène P sur S de groupe $\mathbb{Z}_{\mathrm{S}}$, connexe, et localement trivial, d'où un tore associé T qui est localement trivial, mais non isotrivial.

2. Variations de structure infinitésimales **81**

[6] Commençons par rappeler le résultat suivant (cf. SGA 1, I 8.3 dans le cas S localement noethérien, EGA IV_4, 18.1.2 en général)

[5] N.D.E. : Voir 7.3 plus bas.

[6] N.D.E. : On a ajouté ce « rappel », pour des références ultérieures.

Rappel 2.0. — Soit S un préschéma, S_0 un sous-préschéma ayant même ensemble sous-jacent. Alors le foncteur

$$X \longmapsto X_0 = X \underset{S}{\times} S_0$$

est une *équivalence* entre la catégorie des préschémas étales sur S et la catégorie analogue sur S_0.

Proposition 2.1. — *Soient* S *un préschéma,* S_0 *un sous-préschéma ayant même ensemble sous-jacent* (*i.e. défini par un nilidéal* $\mathscr{I}$). *Alors le foncteur*

$$H \longmapsto H_0 = H \underset{S}{\times} S_0$$

de la catégorie des préschémas en groupes de type multiplicatif sur S *vers la catégorie analogue sur* S_0*, est* pleinement fidèle*.*

De plus, il induit une équivalence *entre la catégorie de groupes de type multiplicatif* quasi-isotriviaux *sur* S *et la catégorie analogue sur* S_0*.*

Prouvons d'abord la pleine fidélité, i.e. que si H, G sur S sont de type multiplicatif, alors

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(H, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(H_0, G_0)$$

est bijectif. La question étant locale sur S, on peut supposer S affine, il existe alors un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $S' \to S$ qui déploie H et G. Soient $S'' = S' \times_S S'$, désignons par H', G' resp. H'', G'' les groupes déduits de H, G par le changement de base $S' \to S$ resp. $S'' \to S$, définissons de même S'_0 et S''_0, ce dernier étant aussi isomorphe à $S'_0 \times_{S_0} S'_0$. On trouve alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(H, G) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Hom}_{S'\text{-gr.}}(H', G') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "u'"] & \mathrm{Hom}_{S''\text{-gr.}}(H'', G'') \arrow[d, "u''"] \\
\mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(H_0, G_0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{S'_0\text{-gr.}}(H'_0, G'_0) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{Hom}_{S''_0\text{-gr.}}(H''_0, G''_0),
\end{tikzcd}$$

donc pour prouver que u est bijective, il suffit de prouver qu'il en est ainsi de u' et u'', ce qui nous ramène au cas où H et G sont *diagonalisables*, donc de la forme $D_S(M)$ et
82 $D_S(N)$, où M et N sont des groupes commutatifs ordinaires. On aura donc de même $H_0 = D_{S_0}(M)$, $G_0 = D_{S_0}(N)$. On a alors un diagramme commutatif [7]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(N_S, M_S) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(D_S(M), D_S(N)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(N_{S_0}, M_{S_0}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(D_{S_0}(M), D_{S_0}(N)),
\end{tikzcd}$$

(7) N.D.E. : On a corrigé l'original, en échangeant M et N dans les termes de droite.

où les flèches horizontales sont des isomorphismes en vertu de VIII 1.4, donc on est ramené à prouver que l'homomorphisme

$$\text{(x)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{N_S}, \mathrm{M_S}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S_0\text{-}gr.}}(\mathrm{N_{S_0}}, \mathrm{M_{S_0}})$$

est bijectif, i.e. à prouver que le foncteur $\mathrm{M_S} \mapsto \mathrm{M_{S_0}}$, des préschémas en groupes commutatifs constants sur S vers les préschémas en groupes commutatifs constants sur $\mathrm{S_0}$, est pleinement fidèle. Or (x) s'identifie aussi à l'application naturelle

$$\mathrm{Hom_{gr.}}(\mathrm{N}, \Gamma(\mathrm{M_S})) \longrightarrow \mathrm{Hom_{gr.}}(\mathrm{N}, \Gamma(\mathrm{M_{S_0}}))$$

déduite de $\Gamma(\mathrm{M_S}) \to \Gamma(\mathrm{M_{S_0}})$, or cette dernière application est évidemment bijective (car $\Gamma(\mathrm{M_S})$ = ensemble des applications localement constantes de S dans M, ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent à S), d'où la conclusion voulue.

Pour prouver la deuxième assertion de 2.1, il reste à voir que tout groupe de type multiplicatif $\mathrm{H_0}$ sur $\mathrm{S_0}$ qui est quasi-isotrivial provient d'un groupe de type multiplicatif H sur S quasi-isotrivial. Pour le voir, soit $\mathrm{S'_0} \to \mathrm{S_0}$ un morphisme étale surjectif qui déploie $\mathrm{H_0}$.

On sait (cf. 2.0) qu'il existe un morphisme étale $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$ et un $\mathrm{S_0}$-isomorphisme $\mathrm{S'} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S_0} \simeq \mathrm{S'_0}$, donc on peut supposer que $\mathrm{S'_0}$ provient de $\mathrm{S'}$ par réduction. Comme **83**
$\mathrm{H'_0}$ est diagonalisable, on voit tout de suite qu'il est isomorphe au groupe déduit par changement de base $\mathrm{S'_0} \to \mathrm{S'}$ d'un groupe diagonalisable $\mathrm{H'}$ sur $\mathrm{S'}$ (N. B. si $\mathrm{H'_0} = \mathrm{D_{S'_0}(M)}$, on prend $\mathrm{H'} = \mathrm{D_{S'}(M)}$). Posons comme d'habitude $\mathrm{S''} = \mathrm{S'} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'}$, $\mathrm{S'''} = \mathrm{S'} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'}$, et définissons de même $\mathrm{S''_0}$, $\mathrm{S'''_0}$, déduits des précédents par changement de base $\mathrm{S_0} \to \mathrm{S}$ et isomorphes aussi au carré resp. cube fibré de $\mathrm{S'_0}$ sur $\mathrm{S_0}$. Utilisant la pleine fidélité déjà démontrée, dans les cas $(\mathrm{S''}, \mathrm{S''_0})$ et $(\mathrm{S'''}, \mathrm{S'''_0})$, on voit que la *donnée de descente* naturelle sur $\mathrm{H'_0}$ relativement à $\mathrm{S'_0} \to \mathrm{S_0}$ (cf. IV 2.1) provient d'une donnée de descente bien déterminée sur $\mathrm{H'}$ relativement à $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$. Cette donnée de descente est *effective* puisque $\mathrm{H'}$ est affine sur $\mathrm{S'}$ (SGA 1, VIII 2.1), il existe donc un S-groupe H tel que $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'} = \mathrm{H'} = \mathrm{D_{S'}(M)}$, et H est donc de type multiplicatif quasi-isotrivial.

On vérifie alors facilement, utilisant maintenant le résultat de pleine fidélité pour $(\mathrm{S'}, \mathrm{S'_0})$, que l'isomorphisme donné entre $\mathrm{H'_0}$ et $\mathrm{H'} \times_{\mathrm{S'}} \mathrm{S'_0}$ provient d'un isomorphisme entre $\mathrm{H_0}$ et $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S_0}$. (Pour un exposé plus en forme de résultats de ce type, voir l'article de Giraud en préparation (*) sur la théorie de la descente).

Corollaire 2.2. — *Soient* H *un* S*-groupe de type multiplicatif, et* $\mathrm{H_0} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S_0}$*. Pour que* H *soit quasi-isotrivial* (*resp. localement isotrivial, resp. isotrivial, resp. localement trivial, resp. trivial*)*, il faut et il suffit que* $\mathrm{H_0}$ *le soit.*

Le « il faut » est trivial, le « il suffit » a déjà été vu dans le cas quasi-isotrivial, car grâce à la pleine fidélité, il suffit de savoir que tout groupe quasi-isotrivial sur $\mathrm{S_0}$ se remonte en un groupe quasi-isotrivial sur S. Le même argument marche pour « trivial ». Pour le cas « isotrivial », on reprend le raisonnement établissant la deuxième assertion de 2.1, mais en prenant $\mathrm{S'_0} \to \mathrm{S_0}$ étale surjectif et *fini*. Les cas « localement isotrivial » et « localement trivial » résultent aussitôt des cas « isotrivial » et « trivial ».

On peut généraliser un peu 2.2 lorsque $\mathscr{I}$ est nilpotent, en ne supposant pas a **84**

(*) cf. J. Giraud, Méthode de la descente, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 2, (1964).

priori H de type multiplicatif : [8]

Corollaire 2.3. — *Supposons l'idéal* $\mathscr{I}$ *définissant* S_0 localement nilpotent. *Soit* H *un préschéma en groupes sur* S, plat *sur* S, *et* $H_0 = H \times_S S_0$. *Pour que* H *soit* de type multiplicatif quasi-isotrivial, *il faut et il suffit que* H_0 *le soit.*

En effet, supposons que H_0 soit de type multiplicatif quasi-isotrivial, prouvons que H l'est. La question étant locale pour la topologie étale, et la catégorie des préschémas étales sur S étant équivalente à la catégorie des préschémas étales sur S_0 par lefoncteur $S' \mapsto S' \times_S S_0$ (cf. 2.0), on est ramené aussitôt au cas où H_0 est diagonalisable, donc isomorphe à un groupe $D_{S_0}(M)$. Soit $G = D_S(M)$, on a donc un isomorphisme u_0 : $H_0 \xrightarrow{\sim} G_0$, je dis qu'il provient d'un unique homomorphisme $u : H \to G$, qui sera donc un isomorphisme puisque u_0 l'est (H et G étant plats sur S, et $\mathscr{I}$ localement nilpotent [9]), ce qui établira 2.3. Or on a (cf. VIII 1 (xxx))

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(H, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(M_S, \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(H, \mathbb{G}_{m,S})),$$

et le deuxième membre s'identifie aussi à

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(M, \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(H, \mathbb{G}_{m,S})),$$

donc l'homomorphisme

$$\text{(x)} \qquad \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(H, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(H_0, G_0)$$

est isomorphe à l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(M, \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(H, \mathbb{G}_{m,S})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(M, \mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(H_0, \mathbb{G}_{m,S_0}))$$

déduit de l'homomorphisme de restriction

$$\text{(xx)} \qquad \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(H, \mathbb{G}_{m,S}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(H_0, \mathbb{G}_{m,S_0}),$$

85 donc pour prouver que (x) est bijectif, il suffit de prouver que (xx) l'est. La question est locale sur S, on peut donc supposer S affine. Or $\mathbb{G}_{m,S}$ étant commutatif et *lisse* sur S, la situation est justiciable de IX 3.6, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.4. — *Soient* A *un anneau* local artinien *de corps résiduel* k, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_0 = \mathrm{Spec}(k)$.

(i) [10] *Soit* H *un* S-*préschéma en groupes* plat et localement de type fini, *tel que* $H_0 = H \times_S S_0$ *soit* de type multiplicatif. *Alors* H *est* de type multiplicatif, de type fini et isotrivial. *En particulier, tout* S-*préschéma en groupes* H de type multiplicatif et de type fini *est* isotrivial.

(ii) *Le foncteur* $H \mapsto H_0$ *est une* équivalence *entre la catégorie des groupes de type multiplicatif* de type fini *sur* A *et la catégorie analogue sur* k.

---

[8] N.D.E. : On rappelle que 2.3 est utilisé pour démontrer le théorème IX 3.6 bis.

[9] N.D.E. : Comme u_0 est un isomorphisme, il suffit de voir que pour tout $h \in H$, le morphisme $\phi : \mathscr{O}_{G,u(h)} \to \mathscr{O}_{H,h}$ est bijectif. Il l'est par réduction modulo $I = \mathscr{I}_s$ (où s est l'image de h dans S), donc son conoyau C vérifie $C = IC$, d'où $C = 0$ puisque I est nilpotent. Alors, comme $\mathscr{O}_{H,h}$ est *plat* sur $\mathscr{O}_{S,s}$, le noyau K de ϕ vérifie aussi $K = IK$, d'où $K = 0$.

[10] N.D.E. : On a récrit l'énoncé en ne conservant que l'implication non triviale, pour la mettre en évidence.

En effet, soit H comme dans (i). Alors H_0 est de type multiplicatif et localement de type fini, donc de type fini, donc isotrivial d'après 1.4. Donc, d'après 2.3 et 2.2, H est de type multiplicatif (donc de type fini) et isotrivial. L'assertion (ii) découle alors de 2.1.

Corollaire 2.5. — *Soit* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme* fidèlement plat et radiciel.

(i) *Le foncteur* $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, *de la catégorie des groupes de type multiplicatif sur* S *vers la catégorie analogue sur* S', *est* pleinement fidèle.

De plus, il induit une équivalence *entre les sous-catégories formées des groupes de type multiplicatif* quasi-isotriviaux.

(ii) *Si* H *est de type multiplicatif, pour qu'il soit quasi-isotrivial,* (*resp. localement isotrivial, resp. isotrivial, resp. localement trivial, resp. trivial*) *il faut et il suffit que* H' *le soit.*

Soient en effet $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et $\mathrm{S}''' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, alors l'hypothèse que $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est radiciel implique que les immersions diagonales $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ et $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}'''$ sont surjectives, donc le changement de base par l'une ou l'autre de ces immersions est justiciable de 2.1 et 2.2. Compte tenu que $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des groupes de type multiplicatif sur des préschémas (car il est fidèlement plat et quasi-compact [11]), notre assertion résulte formellement de 2.1 et 2.2 (cf. pour un raisonnement en forme l'article de Giraud déjà cité).

3. Variations de structure finies : anneau de base complet 86

Lemme 3.1. — *Soient* A *un anneau* noethérien*, muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I-*adique,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{S}_0 = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$, G *et* H *deux* S-*schémas en groupes, avec* G *de type multiplicatif et* isotrivial*,* H affine *sur* S*,* plat sur S en les points de $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$*,* H_0 *de type multiplicatif* quasi-isotrivial*. Alors l'application naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0\text{-}\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}_0, \mathrm{H}_0)$$

est bijective.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I}^{n+1})$, et soient G_n, H_n les groupes déduits de G, H par le changement de base $\mathrm{S}_n \to \mathrm{S}$. Comme G/S est de type multiplicatif *isotrivial* et H *affine sur* S, alors, d'après IX 7.1, l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \longrightarrow \varprojlim_{n} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_n\text{-}\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}_n, \mathrm{H}_n)$$

est bijectif. D'autre part, en vertu de 2.3, les H_n sont de type multiplicatif quasi-isotriviaux, et en vertu de 2.1 les homomorphismes de transition dans le système projectif $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_n\text{-}\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}_n, \mathrm{H}_n))_n$ sont des isomorphismes, d'où aussitôt 3.1.

Théorème 3.2. — *Soient* A *un anneau* noethérien *muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I-*adique,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{S}_0 = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$*. Alors :*

[11] N.D.E. : Préciser ce point ...

(i) *Le foncteur*

$$\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{H}_0 = \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_0$$

est une équivalence *entre la catégorie des groupes de type multiplicatif* isotriviaux *sur* S *et la catégorie analogue sur* S_0.

87 (ii) *Soit* H *un* S-*groupe de type multiplicatif et* de type fini *; pour que* H *soit* isotrivial*, il faut et il suffit que* H_0 *le soit.*

Démonstration. Pour (i) on peut, soit reprendre la démonstration de 2.1, soit utiliser 1.2, en utilisant dans l'un et l'autre cas que le foncteur

$$\mathrm{S}' \longmapsto \mathrm{S}'_0 = \mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_0$$

de la catégorie des schémas finis et étales sur S dans la catégorie des schémas finis et étales sur S_0 est une équivalence (SGA 1, I 8.4), ce qu'on peut aussi énoncer (se ramenant au cas S connexe, i.e. S_0 connexe), choisissant un point géométrique ξ de S_0, en disant que l'homomorphisme canonique

$$\pi_1(\mathrm{S}_0, \xi) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{S}, \xi)$$

est un isomorphisme.

Prouvons (ii), i.e. que si H_0 est isotrivial, alors H l'est. En vertu de (i), il existe un groupe de type multiplicatif isotrivial G sur S et un S_0-isomorphisme

$$u_0 : \mathrm{G}_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0.$$

(12) Comme H est de type fini, il en est de même de H_0 et G_0 ; donc, d'après IX 2.1 b), le type de G en chaque point de S est un groupe abélien de type fini, et donc G est de type fini sur S. D'autre part, en vertu de 3.1, u_0 provient d'un homomorphisme de S-groupes

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}.$$

Enfin, comme G, H sont de type multiplicatif et *de type fini* sur S, et comme u_0 est un isomorphisme, alors, d'après IX 2.9, u est un isomorphisme (compte tenu que tout voisinage de S_0 dans S est égal à S).

88 ***Corollaire 3.3***. — *Soit* A *un anneau* local noethérien complet *de corps résiduel* k.

(i) *Tout groupe de type multiplicatif et* de type fini *sur* A *est* isotrivial.

(ii) *Le foncteur* $\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{H} \otimes_{\mathrm{A}} k = \mathrm{H}_0$ *est une* équivalence *entre les catégorie de groupes de type multiplicatif et* de type fini *sur* A *et sur* k.

(12) D'abord, (i) résulte de 3.2 (ii) et 1.4 ; alors (ii) résulte de 3.2 (i), compte-tenu du fait que H est de type fini si et seulement si H_0 l'est (cf. la preuve de 3.2 (ii)).

Remarque 3.3.1. — On notera que 3.3 donne, en vertu de 1.4, une classification complète des groupes de type multiplicatif et *de type fini* sur A en termes du groupe de Galois topologique d'une clôture algébrique Ω de k.

(12) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Remarques 3.4. — Sous les hypothèses de 3.2 (i.e. A noethérien, séparé et complet pour la topologie I-adique, mais sans autre hypothèse sur A/I), il résultera du N°5 que le foncteur $H \mapsto H_0$, de la catégorie des groupes de type multiplicatif et *de type fini* sur S vers la catégorie analogue sur S_0, est encore *pleinement fidèle* (sans hypothèses d'isotrivialité). [(13)]

Cependant, il n'est pas en général essentiellement surjectif, en fait il peut exister un S_0-groupe H_0, de type multiplicatif et de type fini, localement trivial si on y tient (mais non isotrivial), qui ne provienne pas par réduction d'un groupe de type multiplicatif H sur S.

Pour le voir reprenons l'un ou l'autre des exemples 1.6 d'un groupe de type multiplicatif non isotrivial sur une courbe non normale. On peut évidemment prendre cette courbe affine, soit S_0, et supposer qu'elle soit plongée dans l'espace affine de dimension 2, donc définie par un idéal J dans $k[X, Y]$. Nous prendrons pour A le complété de cet anneau pour la topologie J-préadique, de sorte que A est un anneau régulier de dimension 2, a fortiori *normal*. Nous verrons en 5.16 qu'il en résulte que tout groupe de type multiplicatif et *de type fini* sur $S = \mathrm{Spec}(A)$ est *isotrivial* ; donc H_0, qui est de type fini et non isotrivial, ne provient pas d'un groupe de type multiplicatif H sur S (car H serait nécessairement de type fini, donc isotrivial).

Lemme 3.5. — [(*)] *Soient* S *un préschéma,* $u : G \to H$ *un homomorphisme de* S-*préschémas en groupes* localement de présentation finie et plats *sur* S*,* U *l'ensemble des* $s \in S$ *tels que l'homomorphisme induit sur les fibres* $u_s : G_s \to H_s$ *soit plat* (*resp. lisse, resp. non ramifié, resp. étale, resp. quasi-fini*). 89

Alors U *est ouvert, et la restriction* $u|_U : G|_U \to H|_U$ *est un morphisme plat* (*resp. lisse, resp. non ramifié. resp. étale, resp. quasi-fini*).

Soit en effet V l'ensemble des points en lesquels u est plat (resp. ...). On sait que V est ouvert (cf. SGA 1, I à IV dans le cas localement noethérien, EGA IV en général [(14)]), et que pour $x \in G$ au-dessus de $s \in S$, on a $x \in V$ si et seulement si $u_s : G_s \to H_s$ est plat (resp. ...) en x (même référence ; dans les cas plat, lisse, étale, on utilise ici la platitude de G et H sur S). Comme u_s est un homomorphisme de groupes localement algébriques, cela signifie aussi que u_s est plat (resp. ...) partout (Exp. $\mathrm{VI_B}$, 1.3), i.e. $s \in U$. Donc U est l'image inverse de l'ouvert V par la section unité de G, donc ouvert, et $V = G|_U$, donc $G|_U \to H|_U$ est plat (resp. ...) ce qui achève la démonstration. (N. B. dans le cas « non ramifié » ou « quasi-fini », l'hypothèse de platitude sur G et H est inutile).

Lemme 3.6. — *Soit* H *un groupe* algébrique commutatif *sur un corps* k*, admettant un sous-groupe* ouvert G *de type multiplicatif. Alors la famille des sous-schémas* ${}_nH$

(*) cf. aussi $\mathrm{VI_B}$ 2.5 pour des développements plus systématiques de cette nature.

(13) N.D.E. : Préciser cette référence, éventuellement ajouter un corollaire dans le N°5 ...

(14) N.D.E. : Préciser ces références : Comme G, H sont localement de présentation finie, u est localement de présentation finie (IV_1, 1.4.3 (v)), ensuite on applique IV_3, 11.3.10 et 13.1.4 pour plat et quasi-fini, IV_4, 17.4.1, 17.5.1 et 17.6.1 pour non-ramifié, lisse et étale ; comparer avec $\mathrm{VI_B}$ 2.5.

$(n > 0)$ *de* H *est* schématiquement dense*, en particulier si on a* ${}_n\mathrm{H} = {}_n\mathrm{G}$ *pour tout* $n > 0$*, alors* $\mathrm{H} = \mathrm{G}$.

Ici ${}_n\mathrm{H}$ désigne le noyau de $n \cdot \mathrm{id}_\mathrm{H}$. [15] Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k ; il suffit de montrer que la famille $({}_n\mathrm{H}_{\overline{k}})_{n>0}$ est schématiquement dense dans $\mathrm{H}_{\overline{k}}$, car alors la famille $({}_n\mathrm{H})_{n>0}$ le sera dans H (cf. IX 4.5). Donc, on peut supposer k algébriquement clos, donc G de la forme $\mathrm{D}_k(\mathrm{M})$, M un groupe commutatif de type fini ordinaire. Soit $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}/\mathrm{Torsion}(\mathrm{M})$, alors $\mathrm{T} = \mathrm{D}_k(\mathrm{M}_0)$ est le plus grand tore contenu dans G, et H/T est fini, donc $\mathrm{H}(k)/\mathrm{T}(k)$ est annulé par un entier $\nu > 0$. On peut trouver un nombre fini d'éléments $g_i \in \mathrm{H}(k)$ tels que

$$\mathrm{H} = \coprod_i g_i \cdot \mathrm{G},$$

et on aura $g_i^\nu \in \mathrm{T}(k)$. Comme k est algébriquement clos, $\nu \cdot \mathrm{id}_\mathrm{T}$ est surjectif dans $\mathrm{T}(k) \simeq k^{*d}$, donc quitte à remplacer les g_i par $g_i t_i^{-1}$, où $t_i \in \mathrm{T}(k)$ est tel que $t_i^\nu = g_i^\nu$,
90 on peut supposer que $g_i^\nu = 1$. Si alors n est un multiple de ν, on aura

$${}_n\mathrm{H} \supseteq g_i \cdot {}_n\mathrm{G},$$

et comme (pour $n > 0$ variable) la famille des ${}_n\mathrm{G}$ est schématiquement dense dans G en vertu de IX 4.7, la conclusion 3.6 apparaît.

Théorème 3.7. — *Soient* A *un anneau* noethérien *muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I*-adique,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$*,* $\mathrm{S}_0 = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$*, et soit* H *un* S*-schéma en groupes* affine de type fini, plat sur S en les points *de* H_0*, tel que* $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}_0$ *soit de type multiplicatif et* isotrivial.

Alors il existe un sous-groupe ouvert et fermé G *de* H*,* de type multiplicatif isotrivial (*et de type fini*)*, tel que* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{H}_0$.

En vertu de 3.2 (i), il existe un groupe de type multiplicatif isotrivial G sur S et un isomorphisme

$$u_0 : \mathrm{G}_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0.$$

En vertu de 3.1, u_0 provient d'un unique homomorphisme de S-groupes

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}.$$

Utilisant IX 6.6, on voit que u est un monomorphisme (car si U est l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ est un monomorphisme, alors U est un voisinage ouvert de S_0 donc identique à S, et $\mathrm{G}|_\mathrm{U} \to \mathrm{H}|_\mathrm{U}$ est un monomorphisme). En vertu de IX 2.5, u est même une immersion fermée.

[16] Donc G est de type fini, donc de présentation finie sur S. Alors, en vertu du lemme 3.5 dans le cas « étale », on voit qu'il existe un ouvert U voisinage de S_0, donc identique à S, tel que $\mathrm{G}|_\mathrm{U} \to \mathrm{H}|_\mathrm{U}$ soit étale, donc u est étale, donc une immersion ouverte (comme c'est un monomorphisme étale [17]), ce qui achève la démonstration.

---

[15] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[16] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[17] N.D.E. : cf. EGA IV_4, 17.9.1.

Corollaire 3.8. — *Soient* A *un anneau* noethérien *muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I*-adique,* $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_0 = \mathrm{Spec}(A/I)$*, et soit* H *un* S*-préschéma en groupes* de type fini, affine et plat sur S. **91**

Pour que H *soit* de type multiplicatif et isotrivial*, il faut et il suffit que* H_0 *le soit, et que* H *satisfasse l'une des conditions* a) *et* b) *suivantes* (qui sont donc équivalentes moyennant les conditions précédentes) *:*

a) *Les fibres de* H *sont de type multiplicatif, et de type constant sur chaque composante connexe de* S*.*

b) H *est commutatif et les* ${}_n\mathrm{H}$ $(n > 0)$ *sont* finis *sur* S.

Ces dernières conditions sont aussi impliquées par la suivante :

c) *Les fibres de* H *sont* connexes*.*

Bien entendu, si H est de type multiplicatif (et isotrivial), les conditions a) et b) sont vérifiées, d'après IX 1.4.1 a) et 2.1 c), donc seul le « il suffit » demande une démonstration. Nous allons utiliser le sous-groupe G indiqué dans 3.7. Lorsque la condition c) est satisfaite, on a évidemment $G = H$ et on a fini.

Dans le cas b), on note que l'immersion $u : G \to H$ induit une immersion ouverte

$$ {}_n u : \quad {}_n\mathrm{G} \longrightarrow {}_n\mathrm{H} $$

qui induit un isomorphisme $({}_n\mathrm{G})_0 \xrightarrow{\sim} ({}_n\mathrm{H})_0$; comme ${}_n\mathrm{H}$ est fini sur S, cela implique aussitôt que ${}_n u$ est un isomorphisme (le complémentaire de son image est fini sur S et se réduit suivant $\varnothing$). En vertu de 3.6 il s'ensuit que les morphismes induits sur les fibres $u_s : G_s \to H_s$ sont des isomorphismes, donc u est surjectif, donc un isomorphisme.

Enfin, dans le cas a), on peut supposer S connexe, [18] et il s'ensuit que pour tout $s \in S$, $u_s : G_s \to H_s$ est un monomorphisme de groupes algébriques de type multiplicatif et *de même type* sur $\kappa(s)$ [19]. Je dis qu'un tel homomorphisme est nécessairement un isomorphisme (ce qui achèvera encore la démonstration [20]). En effet, on peut supposer, quitte à étendre le corps de base, que les deux groupes sur $\kappa(s)$ sont diagonalisables, et alors cela résulte de VIII 3.2 b) et du fait qu'un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}$-modules de type fini isomorphes $M \to N$ est nécessairement bijectif.

Corollaire 3.9. — *Soient* A *un anneau* noethérien *muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I*-adique, et soit* H *un* S*-préschéma en groupes* de type fini, affine et plat sur S*,* à fibres connexes*.* **92**

Pour que H *soit un* tore isotrivial*, il faut et il suffit que* H_0 *le soit.*

---

(18) N.D.E. : L'original indiquait : « i.e. S_0 connexe ». Noter que, comme A est séparé pour la topologie I-adique, S_0 *rencontre chaque composante connexe de* S (et comme A est complet, les composantes connexes de S_0 et de S sont en bijection).

(19) N.D.E. : puisque G_s et H_s sont de même type pour tout $s \in S_0$, donc pour tout s.

(20) N.D.E. : car u sera à nouveau une immersion ouverte surjective.

4. Cas d'une base quelconque. Théorème de quasi-isotrivialité

Soit A un anneau local. Rappelons qu'on dit avec Nagata que A est *hensélien* si toute algèbre B finie sur A est produit d'algèbres *locales* B_i finies sur A.

Rappel 4.0. — [21] Soient A un anneau *local hensélien*, k son corps résiduel, $S = \operatorname{Spec}(A)$, $S_0 = \operatorname{Spec}(k)$, et ξ un point géométrique de S_0. Alors, le foncteur

$$X \longmapsto X_0 = X \underset{S}{\times} S_0$$

est une *équivalence* entre la catégorie des *revêtements étales* sur S et la catégorie analogue sur S_0 (cf. EGA IV_4, § 18.5). Par conséquent (cf. SGA 1, V), on a $\pi_1(S_0, \xi) = \pi_1(S, \xi)$.

Supposons de plus A *noethérien* et notons A′ son complété, $S' = \operatorname{Spec}(A')$. Alors A′ est un anneau local noethérien complet, donc hensélien (*loc. cit.*, 18.5.14), et le foncteur

$$X \longmapsto X' = X \underset{S}{\times} S',$$

de la catégorie des revêtements étales sur S vers la catégorie analogue sur S′, s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rev.\acute{e}t.}(S) \arrow[rr] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \mathrm{Rev.\acute{e}t.}(S') \arrow[dl, "\simeq"] \\
& \mathrm{Rev.\acute{e}t.}(S_0) &
\end{tikzcd}$$

donc est aussi une *équivalence de catégories*, d'où $\pi_1(S_0, \xi) = \pi_1(S', \xi)$.

Remarque 4.0.1. — Comme S est connexe (A étant local), il résulte de 1.2 que la catégorie des groupes de type multiplicatif *isotriviaux* sur S est *équivalente* à la catégorie analogue sur S_0 (et aussi sur S′ si de plus A est noethérien).

Lemme 4.1. — *Soient* A *un anneau* local hensélien *de corps résiduel k,* $S = \operatorname{Spec}(A)$*,* $S_0 = \operatorname{Spec}(k)$*.*

(i) *Le foncteur*

$$H \longmapsto H_0 = H \underset{S}{\times} S_0$$

est une équivalence *entre la catégorie des groupes de type multiplicatif* finis *sur* S *et*
93 *la catégorie analogue sur* S_0*.*

(ii) *Si de plus* A *est* noethérien*, notant* A′ *son complété et* $S' = \operatorname{Spec}(A')$*, le foncteur*

$$H \longmapsto H' = H \underset{S}{\times} S'$$

est une équivalence *entre la catégorie des groupes de type multiplicatif* finis *sur* S *et la catégorie analogue sur* S′*.*

[21] N.D.E. : On a détaillé ce rappel, et ajouté la remarque 4.0.1.

Comme en 4.0, la deuxième assertion est une conséquence de la première ; démontrons celle-ci. On sait déjà que le foncteur envisagé est essentiellement surjectif, car tout groupe de type multiplicatif H_0 sur $\mathrm{S}_0 = \mathrm{Spec}(k)$, *fini* donc de type fini sur k, est isotrivial par 1.4, donc provient d'un groupe de type multiplicatif isotrivial sur S, d'après 4.0.1.

Reste à prouver la pleine fidélité, i.e. que pour deux groupes G, H de type multiplicatif *finis* sur S, l'application ci-dessous est bijective :

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{G}_0, \mathrm{H}_0),$$

[22] c.-à-d., notant F le S-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$, que l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}, \mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{S}_0, \mathrm{F}_0)$$

induite par le changement de base $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$, est bijective. Pour ceci, compte tenu du rappel 4.0, il suffit de prouver le

Lemme 4.2. — *Soient* G, H *deux groupes de type multiplicatif* finis *sur un préschéma* S. *Alors* $\mathrm{F} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ *est représentable par un schéma* étale fini *sur* S.

[23] Soit $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact tel que G' et H' soient diagonalisables. Il suffit de montrer que $\mathrm{F}_{\mathrm{S}'}$ est représentable par un préschéma X' étale et fini (donc *affine*) sur S', car la donnée de descente sur X' relativement à f (cf. VIII 1.7.2) sera alors effective (d'après SGA 1 VIII, 2.1), d'où l'existence d'un S-préschéma X tel que $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' = \mathrm{X}'$, qui représente F, et est étale et fini sur S (cf. SGA 1, V 5.7 et EGA IV_4, 17.7.3 (ii)).

On peut donc supposer que $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{N})$, où M et N sont des groupes commutatifs *finis* (cf. VIII 2.1 c)). Alors, $\mathrm{K} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ est un groupe abélien *fini* et, d'après VIII 1.5, on a un isomorphisme 94

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \simeq \mathrm{K}_{\mathrm{S}},$$

ce qui achève la démonstration de 4.2 et donc de 4.1.

Proposition 4.3.0. — [24] *Soient* S *un schéma local* hensélien, *s son point fermé, g :* $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un morphisme* localement de type fini, *x un point* isolé *de la fibre* X_s.

(i) *Alors* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *est* fini *sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$. (En particulier, si l'extension résiduelle $\kappa(x)/\kappa(s)$ est *triviale*, alors $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est surjectif, d'après le lemme de Nakayama.)

(ii) *Si de plus g est* séparé, *alors* $\mathrm{X}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$ *est un sous-schéma* ouvert et fermé *de* X, *i.e. on a une décomposition en somme disjointe* $\mathrm{X} = \mathrm{X}' \coprod \mathrm{X}''$.

Démonstration D'après la forme locale du théorème principal de Zariski qu'on trouve dans [**Pes66**], ou [**Ray70**, Ch. IV, Th. 1], x possède un voisinage ouvert affine $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ de type fini et *quasi-fini* sur $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, et il existe une immersion ouverte $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{C})$, où C est une A-algèbre *finie*. (N. B. pour parvenir à cette

[22] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

[23] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[24] N.D.E. : On a ajouté ce rappel, utilisé dans la preuve de 4.3 (la référence à EGA IV_4 18.5.11 n'étant pas totalement satisfaisante).

conclusion, on peut aussi utiliser le théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.4), puis la forme du théorème principal de Zariski donnée dans *loc. cit.*, 8.12.8.)

Comme A est hensélien, Y est la somme disjointe de schémas locaux $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n$, chacun fini sur S, et les points de Y au-dessus de s sont les points fermés $y_1, \ldots, y_n$. Donc $x = y_i$ pour un certain i, et $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} = \mathscr{O}_{\mathrm{U},x} = \mathrm{C}_i$ est *fini* sur A. De plus, $\mathrm{X}' = \mathrm{C}_i$ est un sous-schéma *ouvert* de U donc de X.

Supposons de plus g *séparé*. Alors, comme le morphisme $\mathrm{X}' \to \mathrm{S}$ est fini (C_i étant fini sur A), il en est de même de l'immersion $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ (cf. EGA II, 6.1.5 (v)), donc X' est aussi fermé dans X.

Lemme 4.3. — *Soient* A *un anneau* local noethérien hensélien, A' *son complété,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$, *$s$ le point fermé de* S, G *et* H *deux* S-*préschémas en groupes, avec* G de type multiplicatif et de type fini *sur* S, H localement de type fini et séparé *sur* S, H_s de type multiplicatif, *et* H plat sur S en les points de H_s.

Soient G', H' *déduits de* G, H *par le changement de base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *Alors l'application naturelle ci-dessous est bijective :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-gr.}}(\mathrm{G}', \mathrm{H}').$$

Comme S' est fidèlement plat et quasi-compact sur S, on sait par SGA 1, VIII 5.2 que cette application est une bijection du premier membre sur la partie du deuxième formée des $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ tels que les deux images inverses u''_1, $u''_2 : \mathrm{G}'' \to \mathrm{H}''$ de u' sur $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ (par les projections pr_1, pr_2 de S'' sur S') sont égales.

Donc tout revient à prouver que pour tout homomorphisme de S'-groupes $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$, on a $u''_1 = u''_2$. En vertu du théorème de densité IX 4.8 il suffit de prouver que u''_1 et u''_2 coïncident sur ${}_n\mathrm{G}''$ pour tout entier $n > 0$. (N. B. on a besoin ici de façon essentielle du théorème de densité dans un cas où le préschéma de base, ici S'', *n'est pas localement noethérien*).

Cela nous ramène, remplaçant G par ${}_n\mathrm{G}$, au cas où il existe un entier $n > 0$ tel que $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}} = 0$, donc où G est *fini* sur S. Soit de même ${}_n\mathrm{H}$ le noyau du morphisme ϕ_n de puissance n-ème dans H. (N. B. nous n'avons pas supposé H commutatif, donc ϕ_n (resp. ${}_n\mathrm{H}$) n'est pas nécessairement un homomorphisme de groupes (resp. un sous-
95 groupe de H).) Puisque ${}_n\mathrm{H}$ est défini comme le produit fibré de $\phi_n : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ et de la section unité $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{H}$, sa formation commute à tout changement de base $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, i.e. on a $({}_n\mathrm{H})_{\mathrm{T}} = {}_n(\mathrm{H}_{\mathrm{T}})$.

(25) On note avec un indice m à droite les réductions modulo $\mathfrak{m}^{m+1}$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A. Alors H_m est plat sur S_m (puisque H l'est sur S en les points de H_0) ; donc, d'après 2.4, comme H_0 est de type multiplicatif et de type fini, il en est de même de H_m. Donc chaque $({}_n\mathrm{H})_m = {}_n(\mathrm{H}_m)$ est un *sous-groupe* de H_m, *de type multiplicatif, fini et plat* sur S_m.

En particulier, $({}_n\mathrm{H})_0 = {}_n(\mathrm{H}_0)$ est fini sur S_0 ; puisque S est local hensélien et que ${}_n\mathrm{H}$ est (comme H) localement de type fini et séparé sur S, alors, d'après 4.3.0, les

(25) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, sur la base d'indications de M. Raynaud.

anneaux locaux de ${}_n\mathrm{H}$ aux points de $({}_n\mathrm{H})_0$ sont *finis* sur S et l'on a une décomposition en somme disjointe d'ouverts

$$(*) \qquad {}_n\mathrm{H} = {}_n\mathrm{H}^+ \coprod {}_n\mathrm{H}^-,$$

où $\mathrm{Z} = {}_n\mathrm{H}^+$ est *fini* sur S, et ${}_n\mathrm{H}^-$ se situe au-dessus de $\mathrm{S} - \{s\}$.

Notons que, pour tout S-schéma fini Y (tel G), tout S-morphisme $\mathrm{Y} \to {}_n\mathrm{H}$ se factorise par Z, et que la formation de la décomposition $(*)$ commute au changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (où $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$, A' le complété de A).

Alors $\mathrm{Z}' = \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ est un schéma *fini* sur S', de même que $\mathrm{P}' = \mathrm{Z}' \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{Z}'$. Notons ν la restriction à P' de la multiplication de H' et σ l'automorphisme de P' qui échange les deux facteurs. Comme P' est fini sur S' et H' séparé et localement de type fini sur S', alors, d'après EGA II 5.4.3 et IV_1 1.1.3, $\mathrm{Y} = \nu(\mathrm{P}')$ est un sous-schéma fermé de H', universellement fermé et quasi-compact, donc de type fini, donc *propre* sur S'. De plus, $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}'$ est à fibres finies (puisque $\mathrm{P}' \to \mathrm{S}'$ l'est). Donc, comme S' est noethérien, le morphisme $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}'$ est *fini* (cf. EGA III, 4.4.2). Comme $\mathrm{Z}' \subseteq \mathrm{Y}$ et $\mathrm{Z}'_m = \mathrm{Y}'_m$ pour tout m, alors $\mathrm{Z}' = \mathrm{Y}$, d'après le lemme IX 5.0, donc Z' est un *sous-groupe* de H'. De même, le noyau $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(\nu, \nu \circ \sigma)$ est un sous-schéma fermé de P', tel que $\mathrm{K}_m = \mathrm{P}'_m$ pour tout m (puisque $\mathrm{Z}'_m = {}_n\mathrm{H}_m$ est commutatif), donc $\mathrm{K} = \mathrm{P}'$, i.e. Z' est un *sous-groupe commutatif* de H'.

D'autre part, comme chaque réduction $\mathrm{Z}'_m = {}_n\mathrm{H}_m$ est plate sur S_m, alors, d'après le « critère local de platitude » (cf. EGA 0_{III}, 10.2.2 ou [**BAC**], III § 5, Exemple 1 et Th. 1), Z' est *plat* sur S'. Comme, de plus, $\mathrm{Z}'_0 = {}_n\mathrm{H}_0$ est un groupe de type multiplicatif fini sur S_0, donc isotrivial d'après 1.4, alors Z' est de type multiplicatif (et isotrivial) sur S', d'après 3.8 b). Comme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est fidèlement plat et quasi-compact, on en déduit que la multiplication $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z} \to \mathrm{H}$ se factorise par Z et fait de Z un sous-groupe de H, fini sur S et de type multiplicatif (puisque Z' l'est).

Enfin, d'après les remarques faites plus haut sur la décomposition $(*)$, Z' est la « partie finie » de ${}_n\mathrm{H}'$, et donc le morphisme $u' : \mathrm{G}' \to {}_n\mathrm{H}'$ prend ses valeurs dans Z'. Comme Z est de type multiplicatif et *fini* sur S, ainsi que $\mathrm{G} = {}_n\mathrm{G}$, alors, d'après 4.1, u' provient d'un $u : \mathrm{G} \to \mathrm{Z}$, et donc $u''_1 = u''_2$. Ceci achève la démonstration de 4.3.

Lemme 4.4.0. — [26] *Soient* A *un anneau,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$*,* H *un* S*-schéma en groupes de type multiplicatif et de type fini, quasi-isotrivial* (*resp. isotrivial*)*,* (A_i) *une famille filtrante de sous-anneaux de* A *dont* A *soit la limite inductive,* $\mathrm{S}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_i)$*.*

Alors il existe un indice i et un S_i*-schéma en groupes* H_i*, de type multiplicatif et de type fini, quasi-isotrivial* (*resp. isotrivial*)*, tel que* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}$.

Théorème 4.4. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S*-préschéma en groupes* affine et de présentation finie *sur* S*, et* $s \in \mathrm{S}$*. On suppose :*

α) H *est* plat sur S en les points de H_s.

β) H_s *est* de type multiplicatif.

Alors il existe un morphisme étale $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*, un point s' de* S' *au-dessus de s tel que l'extension $\kappa(s')/\kappa(s)$ soit triviale, et un sous-groupe* ouvert et fermé G' *de* $\mathrm{H}' =$ 96

[26] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, utilisé à plusieurs reprises dans la suite.

$\mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'$, *de type multiplicatif et de type fini,* isotrivial*, tel que* $\mathrm{G}'_{s'} = \mathrm{H}'_{s'}$.

[27] a) Notons provisoirement $\mathrm{T} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$ et montrons que, par « descente des conclusions », on peut se ramener au cas où $\mathrm{S} = \mathrm{T}$. En effet, supposons avoir trouvé un morphisme étale $g : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$, un point $s' \in \mathrm{T}'$ et un sous-groupe G' de $\mathrm{H}' = \mathrm{H}_{\mathrm{T}'}$ vérifiant les conditions de l'énoncé ; remplaçant T' par un voisinage ouvert affine de s', on peut supposer T' de présentation finie sur T.

Comme G' est isotrivial, il existe un morphisme étale fini surjectif $f : \widetilde{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}'$ tel que $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G}'\times_{\mathrm{T}'}\widetilde{\mathrm{T}}$ soit isomorphe à $\mathrm{D}_{\widetilde{\mathrm{T}}}(\mathrm{M})$, où M est un groupe abélien de type fini. Puisque T', H, et $\widetilde{\mathrm{T}}$, G' sont de présentation finie sur $\mathrm{T} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$, et que $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ est la limite inductive des sous-algèbres $\mathrm{A}_i = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}_i)$, où S_i parcourt les voisinages ouverts affines de s dans S, alors, d'après EGA IV_3, 8.8.2 (et l'Exp. VI_{B}, 10.2 et 10.3), il existe un indice i, des S_i-préschémas (resp. un S_i-préschéma en groupes) de présentation finie S'_i et $\widetilde{\mathrm{S}}_i$ (resp. G'_i), et des morphismes $g_i : \mathrm{S}'_i \to \mathrm{S}_i$ et $f_i : \widetilde{\mathrm{S}}_i \to \mathrm{S}'_i$ (resp. un morphisme de S_i-préschémas en groupes $u_i : \mathrm{G}'_i \to \mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'_i$), dont f et g (resp. $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$) proviennent par le changement de base $\mathrm{T}' \to \mathrm{S}_i$. De plus, prenant i assez grand, g_i sera étale, f_i étale fini surjectif, et u_i une immersion ouverte et fermée (cf. EGA IV, 8.10.5 et 17.7.8).

Alors, $\widetilde{\mathrm{G}}$ provient des groupes $\widetilde{\mathrm{G}}_i = \mathrm{G}_i\times_{\mathrm{S}_i}\widetilde{\mathrm{S}}_i$ et $\mathrm{D}_{\widetilde{\mathrm{S}}_i}(\mathrm{M})$; donc, d'après EGA IV_3, 8.8.2 (i) (et VI_{B}, 10.2), il existe un indice $j \geqslant i$ tel que $\widetilde{\mathrm{G}}_j \simeq \mathrm{D}_{\widetilde{\mathrm{S}}_j}(\mathrm{M})$, donc G_j est de type multiplicatif isotrivial. Notons s'_j l'image de s' dans S'_j. Alors le morphisme étale $\mathrm{S}'_j \to \mathrm{S}_j \hookrightarrow \mathrm{S}$, le point s'_j et le sous-groupe ouvert et fermé G'_j de $\mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'_j$, vérifient les conditions de l'énoncé. Ceci montre qu'on peut supposer $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ local, de point fermé s.

b) Alors, A est la limite inductive d'anneaux locaux A_i qui sont des localisés de $\mathbb{Z}$-algèbres de type fini ; notons $\mathrm{S}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_i)$. Montrons que les hypothèses α) et β) « se descendent » à un certain A_i. Comme $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ est de présentation finie, l'ensemble des $x \in \mathrm{H}$ tels que H soit plat sur S en x est un ouvert W, qui contient H_s par hypothèse, donc contient un ouvert V quasi-compact contenant H_s (car H_s étant affine, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts affines contenus dans W). Alors l'immersion ouverte $\tau : \mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{H}$ est de présentation finie, donc $\mathrm{V} \to \mathrm{S}$ l'est aussi.

Donc, d'après EGA IV_3, 8.8.2 (et l'Exp. VI_{B}, 10.2 et 10.3), il existe un indice i, un S_i-préschéma V_i (resp. un S_i-préschéma en groupes H_i) de présentation finie sur S_i, et un S_i-morphisme $\tau_i : \mathrm{V}_i \to \mathrm{H}_i$ dont V, H et τ proviennent par le changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$; de plus, prenant i assez grand, τ_i sera une immersion ouverte et V_i sera plat sur S_i, d'après EGA IV_3, 8.10.5 et 11.2.6. Notons s_i l'image de s dans s_i ; comme l'immersion ouverte $(\mathrm{V}_i)_{s_i} \hookrightarrow (\mathrm{H}_i)_{s_i}$ donne, par le changement de base $\kappa(s_i) \to \kappa(s)$, l'égalité $\mathrm{V}_s = \mathrm{H}_s$, on a déjà $(\mathrm{V}_i)_{s_i} = (\mathrm{H}_i)_{s_i}$, i.e. $(\mathrm{H}_i)_{s_i} \subseteq \mathrm{V}_i$, donc H_i est plat sur S_i aux points de $(\mathrm{H}_i)_{s_i}$. Enfin, $(\mathrm{H}_i)_{s_i}$ est de type multiplicatif, puisque $\mathrm{H}_s = (\mathrm{H}_i)_{s_i}\otimes_{\kappa(s_i)}\kappa(s)$ l'est. Donc le triplet $(\mathrm{S}_i, \mathrm{H}_i, s_i)$ vérifie les hypothèses de 4.4, et si l'assertion voulue est vérifiée pour ce triplet, elle le sera aussi, par changement de

[27] N.D.E. : On a détaillé les réductions qui suivent (l'original indiquait : « On se ramène aussitôt au cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien A, et où s est le point fermé de S. »).

base, pour $(\mathrm{S}, \mathrm{H}, s)$. Ceci nous ramène au cas où A est *local et noethérien.* Distinguons maintenant deux cas.

1°) A est local noethérien *et hensélien.* Soient $\widehat{\mathrm{A}}$ son complété, $\widehat{\mathrm{S}} = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})$, et $\widehat{\mathrm{H}} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \widehat{\mathrm{S}}$. Appliquons le théorème 3.7, on trouve un $\widehat{\mathrm{S}}$-groupe $\widehat{\mathrm{G}}$ de type multiplicatif, isotrivial et de type fini, et un homomorphisme de $\widehat{\mathrm{S}}$-groupes

$$\widehat{u} : \widehat{\mathrm{G}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{H}}$$

qui est une immersion ouverte et une immersion fermée, telle que $\widehat{u}$ induise un isomorphisme $\widehat{u}_0 : \widehat{\mathrm{G}}_0 \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{H}}_0$.

D'après la remarque 4.0.1, le foncteur changement de base par $\widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$ induit une équivalence entre la catégorie des groupes de type multiplicatif isotriviaux sur S, et sur $\widehat{\mathrm{S}}$; en particulier $\widehat{\mathrm{G}}$ « provient » d'un S-groupe de type multiplicatif G, isotrivial et de type fini. En vertu de 4.3, $\widehat{u}$ provient d'un homomorphisme

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H};$$

de plus u est une immersion ouverte et fermée et induit un isomorphisme $u_0 : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$, puisque il en est ainsi après le changement de base fidèlement plat quasi-compact $\widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$. Cela prouve donc 4.4 dans ce cas (en prenant bien entendu, dans la conclusion de 4.4, $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$ et $s' = s$).

2°) A est local noethérien. La réduction au cas 1°) est immédiate, en appliquant 1°) à l'anneau A^h « hensélisé » de A. De façon précise, on voit facilement (utilisant SGA 1, I § 5 (*)) que les anneaux locaux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$ des S-préschémas étales S′ munis d'un point s' au-dessus de s tel que $\kappa(s')/\kappa(s)$ soit triviale, forment un système inductif filtrant, dont la limite inductive est un anneau local noethérien hensélien A^h (appelé l'anneau « hensélisé » de A) ; pour des détails de cette construction (due à Nagata dans le cas normal), cf. SGA 4, VIII § 4 (*). Les sorites de EGA IV_3 § 8 permettent **97**
alors, comme dans la partie a) de la démonstration, de déduire d'un résultat connu sur la limite inductive A^h des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$, un résultat analogue sur un des (S', s'), ce qui prouve 4.4.

Corollaire 4.5. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S-*préschéma en groupes* de type multiplicatif et de type fini*. Alors* H *est* quasi-isotrivial*, i.e. est déployé par un morphisme étale surjectif* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

En effet, soit $s \in \mathrm{S}$. D'après 4.4, il existe un morphisme étale $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, un $s' \in \mathrm{S}'$ au-dessus de s tel que $\kappa(s) = \kappa(s')$, et un sous-groupe G′ de H′, de type multiplicatif isotrivial et de type fini, tel que $\mathrm{G}'_{s'} = \mathrm{H}'_{s'}$. Comme G′ et H′ sont de type multiplicatif et de type fini alors, d'après IX 2.9, il existe un voisinage ouvert U′ de s' tel que $\mathrm{G}'|_{\mathrm{U}'} = \mathrm{H}'|_{\mathrm{U}'}$.

[28] Supposons de plus S *local hensélien*, de point fermé s ; alors, d'après EGA IV_4, 18.5.11 b), il existe une section σ de $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ telle que $\sigma(s) = s'$. (N. B. on peut

(*) ou EGA IV_4, § 18.6.

[28] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui précède, et ce qui suit.

voir directement que $\mathrm{B} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$ égale $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ comme suit : d'après 4.3.0 (i), on a $\mathrm{B} \simeq \mathrm{A}/\mathrm{I}$, et comme B est une A-algèbre de présentation finie et plate, I est un idéal de type fini (cf. EGA IV_1, 1.4.7), et $\mathrm{I} = \mathrm{I}\,\mathfrak{m}$ (où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A), d'où $\mathrm{I} = 0$.) Donc H est déjà isotrivial. On obtient donc :

Corollaire 4.6. — *Soient* A *un anneau* local hensélien*, k son corps résiduel, et π le groupe de Galois topologique d'une clôture algébrique de k.*

(i) *Tout groupe* de type multiplicatif et de type fini *sur* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *est* isotrivial.

(ii) *La catégorie de ces groupes sur* S *est* équivalente (*via le foncteur* $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{H} \otimes_{\mathrm{A}} k$) *à la catégorie analogue sur* $\mathrm{S}_0 = \mathrm{Spec}(k)$ *; elle est donc* anti-équivalente*, d'après* 1.4*, à la catégorie des modules galoisiens sous π, qui sont de type fini comme $\mathbb{Z}$-modules.*

Corollaire 4.7. — *Sous les conditions de* 4.4 *supposons de plus* l'une *des conditions suivantes vérifiées :*

a) *Pour toute générisation t de s,* H_t *est de type multiplicatif et de même type que* H_s.

b) H *est commutatif et les* ${}_n\mathrm{H}$ ($n > 0$) *sont finis sur* S *au voisinage de s.*

c) *Pour toute générisation t de s, la fibre* H_t *est connexe.*

Alors il existe un voisinage ouvert U *de s tel que* $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ *soit de type multiplicatif.*

98 Compte tenu qu'un morphisme étale est ouvert, on est ramené à prouver qu'il existe (avec les notations de la conclusion de 4.4) un voisinage ouvert U' de s' tel que $\mathrm{G}'|_{\mathrm{U}'} = \mathrm{H}'|_{\mathrm{U}'}$. Posons $\mathrm{S}'' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'})$; comme G' et H' sont de présentation finie sur S', il suffit de montrer, d'après EGA IV_3, 8.8.2, que $\mathrm{G}'' = \mathrm{H}''$. On peut donc supposer $\mathrm{S} = \mathrm{S}''$, et alors les hypothèses (a), (b), (c) deviennent celles du lemme ci-dessous, dont la démonstration est la même que celle de 3.8 :

Lemme 4.7.1. — *Soient* S *un schéma* local*, s son point fermé,* H *un* S*-schéma en groupes* de type fini*,* G *un sous-groupe* ouvert et fermé *de* H*,* de type multiplicatif*, tel que* $\mathrm{G}_s = \mathrm{H}_s$*. On suppose de plus vérifiée* l'une *des conditions suivantes :*

a) *Les fibres de* H *sont de type multiplicatif et de même type que* H_s.

b) H *est commutatif et les* ${}_n\mathrm{H}$ ($n > 0$) *sont finis sur* S.

c) *Les fibres de* H *sont connexes.*

Alors $\mathrm{G} = \mathrm{H}$.

Corollaire 4.8. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S*-préschéma en groupes* affine, plat et de présentation finie sur S*,* à fibres de type multiplicatif.

Pour que H *soit de type multiplicatif, il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des deux conditions suivantes* (*équivalentes moyennant les conditions qui précèdent*) *:*

a) *Le type de* H_s (*cf.* IX 1.4) *est une fonction localement constante de* $s \in \mathrm{S}$.

b) H *est commutatif, et les* ${}_n\mathrm{H}$ ($n > 0$) *sont finis sur* S.

De plus, ces conditions a), b) *sont impliquées par la suivante :*

c) *Les fibres de* H *sont connexes.*

En particulier, on trouve :

Corollaire 4.9. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S*-préschéma en groupes* plat et de présentation finie *sur* S*. Supposons de plus* H affine sur S *et* à fibres connexes*.* [29] *Si* $s \in \mathrm{S}$ *est tel que* H_s *soit un tore, il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ *soit un tore.*

En particulier, si toutes les fibres de H *sont des tores,* H *est un tore.*

5. Schéma des homomorphismes d'un groupe de type multiplicatif dans un autre. Groupes constants tordus et groupes de type multiplicatif

Définition 5.1. — a) Soient S un préschéma, R un préschéma en groupes sur S. On dit que R est un *groupe constant tordu* sur S s'il est localement isomorphe, au sens de la **99**
topologie fidèlement plate quasi-compacte, à un schéma en groupes constant, i.e. de la forme M_{S} avec M un groupe ordinaire.

b) On dit que le groupe constant tordu R sur S est *quasi-isotrivial*, resp. *isotrivial*, resp. *localement isotrivial*, resp. *localement trivial*, resp. *trivial*, si dans la définition ci-dessus on peut remplacer la topologie fidèlement plate quasi-compacte par la topologie étale, resp. la topologie étale finie globale, resp. la topologie étale finie, resp. la topologie de Zariski, resp. la topologie la moins fine (ou « chaotique »), cf. IX 1.1 et 1.2, et IV 6.6.

Dire que R est quasi-isotrivial (resp. isotrivial) signifie donc qu'il existe un morphisme étale surjectif (resp. et fini) $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ tel que $\mathrm{R}' = \mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit un groupe constant sur S ; dire qu'il est trivial signifie que R est un groupe constant.

c) On définit comme dans VIII 1.4 le *type* d'un groupe constant tordu R sur S en un $s \in \mathrm{S}$; c'est une classe de groupes ordinaires à isomorphisme près, qui pour s variable est une fonction localement constante en s, donc constante si S est connexe. On dira aussi que R est « de type M » si toutes les fibres de R sont de type M.

On fera attention que R n'est quasi-compact sur S que s'il est *fini* sur S, i.e. si son type en tout $s \in \mathrm{S}$ est un groupe fini. [30]

d) Le cas le plus intéressant pour nous est celui où R est *commutatif.* Nous dirons alors que R est « *à engendrement fini* » si son type en tout point $s \in \mathrm{S}$ est donné par un $\mathbb{Z}$-module de type fini, notion qu'il ne faut pas confondre avec la notion schématique « R de type fini sur S » (cf. ci-dessus).

Remarque 5.2. — Nous aurons aussi à considérer des S-préschémas X qui sont localement isomorphes (pour la topologie fidèlement platequasi-compacte) à des préschémas constants, indépendamment de toute structure de groupe. Nous dirons alors que X est un *fibré constant tordu* sur S, et étendrons à ces préschémas la terminologie introduite dans 5.1. Bien entendu, on fera attention que lorsque X est muni d'une structure de S-groupe, le sens des expressions « constant tordu », « isotrivial » etc. change, suivant qu'on tient compte ou non de la structure de groupe sur S. Il en est de même si on **100**

---

[29] N.D.E. : Ce résultat est généralisé en 8.1 : il suffit en fait de supposer que les fibres de H soient *affines et connexes*.

[30] N.D.E. : Voir le lemme 5.12 plus bas.

considère sur X toute autre espèce de structure algébrique (par exemple celle de fibré principal galoisien qui sera considérée au numéro suivant).

Proposition 5.3. — *Soit* R *un groupe constant tordu commutatif sur* S.

(i) *Le foncteur* $H = D_S(R)$ (cf. VIII 1) *est* représentable *et est un groupe de type multiplicatif sur* S.

(ii) *Pour tout* $s \in S$, *le* type *de* R *en* s *est égal à celui de* H *en* s.

(iii) *Pour que* R *soit quasi-isotrivial* (*resp. isotrivial, resp. trivial, resp. localement isotrivial, resp. localement trivial*) *il faut et il suffit que* H *le soit.*

Remarque 5.3.1. — [31] On s'inquiète peut-être de voir dans 5.3 employer le terme « type » dans deux sens différents suivant qu'il s'agit de R et de H ; heureusement, lorsqu'un S-préschéma en groupes G est à la fois un groupe constant tordu et de type multiplicatif, son type dans l'un et l'autre sens est le même, grâce au fait qu'un groupe commutatif fini ordinaire est isomorphe à son dual !

Démonstration. Comme les familles couvrantes pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte sont des familles de descente effective pour la catégorie fibrée des préschémas en groupes *affines* sur des préschémas de base variables (SGA 1, VIII 2.1), on voit que H est représentable (et est affine sur S), puisqu'il l'est « localement » [32] (car il l'est lorsque R est constant, et alors H est un groupe diagonalisable).

Le fait que H soit de type multiplicatif est alors évident par définition, de même que le fait que le type de R et H en $s \in S$ est le même. Enfin, puisque $H_{S'} = D_{S'}(R_{S'})$, la dernière assertion est réduite au cas « trivial », i.e. à vérifier que R est trivial si et seulement si H l'est, ce qui résulte aussitôt du théorème de bidualité VIII 1.2

Pour finir de préciser la correspondance entre groupes constants tordus et groupes de type multiplicatif, il faut partir d'un groupe de type multiplicatif H, et étudier $R = D_S(H)$. Si ce dernier est représentable, c'est évidemment un groupe constant tordu, et on aura $H \simeq D_S(R)$. En d'autres termes :

Scholie 5.4.0. — Le foncteur $R \mapsto D_S(R)$ est une anti-équivalence [33] entre la catégorie des groupes constants tordus sur S et celle des groupes de type multiplicatif H
101 sur S *tels que* $D_S(H)$ *soit représentable.*

J'ignore si cette condition sur H est toujours satisfaite ; nous allons voir cependant qu'elle l'est lorsque H est quasi-isotrivial, en particulier lorsque H est de type fini.

Lemme 5.4. — *Soient* $S' \to S$ *un morphisme* fidèlement plat localement de présentation finie, X' *un* S'*-préschéma* séparé, localement de présentation finie et localement quasi-fini *sur* S'.

Alors toute donnée de descente sur X' *relativement à* $S' \to S$ *est* effective, *i.e. il existe un* S*-préschéma* X, *et un* S'*-isomorphisme* $X \times_S S' \simeq X'$ *compatible avec la donnée de descente.*

[31] N.D.E. : On a déplacé ici cette remarque, figurant dans l'original après la démonstration.
[32] N.D.E. : cf. VIII § 1.7.
[33] N.D.E. : On a corrigé « équivalence » en anti-équivalence ».

On a déjà remarqué que l'hypothèse sur $S' \to S$ implique que c'est un morphisme couvrant pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte (IV 6.3.1 (iv)), a fortiori un morphisme de descente effective.

Lorsque $X' \to S'$ est quasi-compact donc de présentation finie et quasi-fini, alors c'est un morphisme quasi-affine (cf. SGA 1, VIII 6.2 [(34)]), et l'effectivité résulte dans ce cas de SGA 1, VIII 7.9. Dans le cas général, on se ramène aussitôt au cas où S et S' sont affines. On recouvre X' par des ouverts affines U'_i ; soit V'_i le saturé de U'_i pour la relation d'équivalence dans X' définie par la donnée de descente, i.e. $V'_i = q_2(q_1^{-1}(U'_i))$, où q_1, q_2 sont les deux projections de $X''_1 = X' \times_{S'} (S'', p_1)$ sur X' ($q_1 = \mathrm{pr}_1$, et q_2 est déduit de la première projection de $X''_2 = X' \times_{S'} (S'', p_2)$ grâce à l'isomorphisme de descente donné $X''_1 \simeq X''_2$). Comme $S' \to S$ est fidèlement plat quasi-compact localement de présentation finie, il en est de même de $p_1 : S'' = S' \times_S S' \to S'$ donc aussi de q_1 et q_2, qui sont par suite des morphismes *ouverts* (SGA 1 IV 6.6 [(35)]). Par suite, V'_i est une partie *ouverte et quasi-compacte* de X'. D'après ce qu'on a déjà vu, les données de descente induites dans les V'_i sont effectives, d'où résulte qu'il en est de même de celle de X' (SGA 1, VIII 7.2).

Corollaire 5.5. — *Un morphisme* $S' \to S$ fidèlement plat de présentation finie *est un morphisme* de descente effective *pour la catégorie fibrée des groupes* constants tordus (*sur des préschémas de base variables*).

En effet, cela revient à affirmer l'effectivité d'une donnée de descente sous les conditions de 5.4, lorsque X' est un S'-préschéma *constant*. 102

Théorème 5.6. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* H *deux* S-*préschémas en groupes* de type multiplicatif quasi-isotriviaux*, avec* G [(36)] de type fini.

Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ *est* représentable *par, et est un groupe* constant tordu quasi-isotrivial *sur* S *;* [(37)] *pour tout* $s \in S$*, si le type en* s *de* G (*resp.* H) *est* M (*resp.* N)*, celui de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ *est* $\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$.

On procède comme dans 4.2, en utilisant le fait que l'assertion est établie (VIII 1.5) lorsque G et H sont triviaux. Le critère d'effectivité nécessaire est fourni par 5.5 (dans le cas d'un morphisme $S' \to S$ étale surjectif).

En particulier, faisant $G = \mathbb{G}_{m,S}$, on trouve :

Corollaire 5.7. — (i) *Soit* H *un* S-*groupe* de type multiplicatif quasi-isotrivial*, alors le* S-*groupe* $D_S(H)$ *est* représentable *et est un groupe* constant tordu quasi-isotrivial *sur* S.

(ii) *Les foncteurs* $R \mapsto D_S(R)$ *et* $H \mapsto D_S(H)$ *sont des* anti-équivalences*, quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des* S-*groupes constants tordus quasi-isotriviaux et celle des* S-*groupes de type multiplicatif quasi-isotriviaux.*

---

(34) N.D.E. : (lorsque S' est localement noethérien, et EGA IV_3, 8.11.2 en général).
(35) N.D.E. : (lorsque S' est localement noethérien, et EGA IV_2, 2.4.6 en général).
(36) N.D.E. : On a corrigé H en G.
(37) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

(iii) *Ces foncteurs induisent des anti-équivalences entre les sous-catégories formées des groupes isotriviaux, resp. localement isotriviaux, resp. localement triviaux, resp. triviaux.*

La dernière assertion n'est mise que pour mémoire, étant déjà contenue dans 5.3.

De plus, comme tout S-groupe de type multiplicatif et de type fini est *quasi-isotrivial*, d'après 4.5, on déduit de 5.6 :

Corollaire 5.8. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* H *deux* S*-préschémas en groupes* de type multiplicatif et de type fini*, alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ *est* représentable *et est un* S*-groupe* constant tordu quasi-isotrivial à engendrement fini *sur* S*.*

Notons aussi que dans 5.3, R est à engendrement fini si et seulement si $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{R})$ est de type fini (IX 2.1 b)). En vertu de 4.5, H est alors quasi-isotrivial, donc R est quasi-isotrivial. On trouve ainsi :

103 ***Corollaire 5.9***. — *Les foncteurs de* 5.7 *induisent des anti-équivalences quasi-inverses l'une de l'autre entre la catégorie des* S*-groupes* H de type multiplicatif de type fini*, et celle des* S*-groupes* R constants tordus à engendrement fini *; de plus, tout tel groupe* R *est* quasi-isotrivial.

Corollaire 5.10. — *Soient* H*,* G *deux* S*-préschémas en groupes* de type multiplicatif et de type fini.

(i) *Alors* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ *est* représentable *par un sous-préschéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$*, et c'est un* S-préschéma constant tordu.

(ii) *En particulier,* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H})$ *est* représentable *et est un* S-groupe constant tordu (*en général non commutatif*)*.*

Cela résulte de 5.8 et de VIII 1.6. [38]

Rappel 5.11.0. — [39] Rappelons que si X est un préschéma *localement noethérien*, ses composantes connexes (qui sont toujours fermées) sont *ouvertes*. En effet, soient C une composante connexe de X, $x \in \mathrm{C}$ et U un voisinage ouvert *noethérien* de x, alors U n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, donc la composante connexe U_x de x dans U est ouverte dans U donc dans X ; comme $\mathrm{U}_x \subseteq \mathrm{C}$, ceci montre que C est ouverte dans X

Proposition 5.11. — *Soient* S *un préschéma,* R *un groupe* constant tordu commutatif *sur* S*,* $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{R})$ *le groupe de type multiplicatif qu'il définit. Considérons les conditions suivantes :*

(i) H *est* isotrivial (*i.e.* R *est isotrivial*)*.*

(ii) R *est réunion de sous-préschémas à la fois* ouverts et fermés R_i*, qui sont* quasi-compacts *sur* S (*et alors nécessairement* finis sur S)*.*

---

[38] N.D.E. : Corriger cette référence en traitant le cas du foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}\,\text{S-gr.}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ dans un ajout 1.5.1 dans VIII . . .

[39] N.D.E. : On a ajouté ce rappel, utilisé à plusieurs reprises dans la suite. (Voir aussi EGA I, 6.1.9 ; noter toutefois que la démonstration de *loc. cit.* paraît inutilement compliquée).

(iii) *Les* composantes connexes *de* R *sont* finies sur S.

a) *Alors* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). [40]

b) *On a* (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) *si* S *est* localement noethérien.

c) *Enfin,* (i) $\Leftrightarrow$ (ii) *si* R *est* à engendrement fini (*i.e. si* H *est* de type fini *sur* S)*, du moins si* S *est* quasi-compact *ou si ses composantes connexes sont* ouvertes.

Décomposant d'abord S en préschéma somme de préschémas S_i sur chacun desquels H est de type constant (cf. IX 1.4.1), on est ramené au cas où H donc R est de type constant M. Nous aurons besoin du

Lemme 5.12. — *Soient* S *un préschéma,* R *un* préschéma constant tordu *sur* S*. Alors tout sous-préschéma* fermé Z *de* R *qui est* quasi-compact sur S *est* fini *sur* S.

En effet, on est ramené au cas où R est constant, donc de la forme I_S, où I est un ensemble, donc réunion filtrante croissante des J_S, où J parcourt les parties finies de I. On peut supposer de plus S affine, alors Z est quasi-compact, donc contenu dans un des J_S. Comme J_S est fini sur S, il en est de même de Z. **104**

Le lemme 5.12 établit déjà l'assertion entre parenthèses dans 5.11 (ii). [41] L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est alors claire, puisque les composantes connexes de R sont fermées ; d'après 5.11.0 elles sont ouvertes et fermées si S est localement noethérien (R étant étale, donc localement de type fini sur S), d'où (iii) $\Rightarrow$ (ii) dans ce cas.

Prouvons que (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour ceci, soit $S' \to S$ un morphisme étale fini surjectif qui déploie H donc R (cf. 5.3), de sorte que R′ est isomorphe à $M_{S'} = \coprod_{m\in M} R'_m$, où les R'_m sont des ouverts disjoints de R′, S′-isomorphes à S′. Soit $g : R' \to R$ la projection, qui est un morphisme fini étale surjectif, donc un morphisme ouvert et fermé ; alors les $R_m = g(R'_m)$ sont des parties à la fois ouvertes et fermées de R, et évidemment quasi-compactes sur S puisque les R'_m le sont.

Enfin, supposons H de type fini sur S, et prouvons (ii) $\Rightarrow$ (i). Le cas où les composantes connexes de S sont ouvertes se ramène aussitôt au cas où S est connexe, donc on peut supposer S quasi-compact ou connexe. Comme M est à engendrement fini, on peut écrire $M = \mathbb{Z}^r \times N$, où r est un entier $\geqslant 0$ et N un groupe abélien fini. Soit $G = D_S(M)$; considérons les préschémas

$$P = \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(H, G) \subset \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(H, G) = Q$$

cf. 5.8 et 5.10. On a des isomorphismes

$$Q \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(M_S, R) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{Z}^r_S, R) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(N_S, R) \simeq R^r \times E\,,$$

où $E = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(N_S, R)$ est *fini* sur S [42]. Il s'ensuit que Q est réunion de sous-préschémas à la fois ouverts et fermés Q_i finis sur S. Donc P est réunion des sous-préschémas à la fois ouverts et fermés $P_i = P \cap Q_i$, finis sur S. Comme ils sont étales sur S, leurs images dans S sont des parties S_i à la fois ouvertes et fermées, et elles recouvrent S. Si S est connexe ou quasi-compact, il existe donc un ensemble fini **105**

[40] N.D.E. : Comparer avec les exemples de 1.6 ...
[41] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[42] N.D.E. : car c'est un groupe constant tordu de type $\mathrm{End}_{\mathrm{gr.}}(N)$ (cf. 5.6 et 5.8).

d'indices i tels que les S_i recouvrent S, soit S' la réunion des P_i correspondants. Alors $S' \to S$ est fini étale surjectif, et posant $P' = P \times_S S' = \underline{\mathrm{Isom}}_{S'\text{-gr.}}(H', G')$, on voit que P' a une section sur S', donc il existe un isomorphisme de S'-groupes

$$H' = H \underset{S}{\times} S' \xrightarrow{\sim} G' = G \underset{S}{\times} S' = D_{S'}(M),$$

ce qui prouve que S' déploie H. Ceci achève la preuve de 5.11 [43].

Remarque 5.11 bis. — Remarquons d'ailleurs qu'on peut, lorsque H est de type fini sur S et de type constant, donner le critère d'isotrivialité suivant (où il n'est plus nécessaire de faire aucune restriction sur S) : $H = D_S(R)$ est isotrivial si et seulement si R est réunion d'une *suite* de parties à la fois ouvertes et fermées finies sur S. [44]

Lemme 5.13. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien et connexe*,* P *un* S-*préschéma* constant tordu quasi-isotrivial*,* Z *une partie à la fois* ouverte et fermée *de* P*, telle qu'il existe un* $s \in S$ *tel que* Z_s *soit* fini*. Alors* Z *est* fini *sur* S.

Ne supposons pas d'abord S connexe : soit U l'ensemble des $s \in S$ tels que Z_s soit fini, nous allons prouver que U est à la fois ouvert et fermé, et que $Z|_U$ est fini sur U. C'est là évidemment un énoncé essentiellement équivalent à 5.13 mais qui a l'avantage d'être « de nature locale » sur S pour la topologie étale (disons), ce qui nous ramène au cas où P est constant, i.e. de la forme I_S, où I est un ensemble. (N. B. l'hypothèse localement noethérienne n'est pas perdue par un changement de base étale ; c'est là où on utilise la quasi-isotrivialité de P sur S).

On peut de plus supposer S connexe, puisque ses composantes connexes sont ouvertes (S étant localement noethérien). Mais alors on a nécessairement $Z = J_S$, où J est une partie de I, et on a donc $U = \varnothing$ ou $U = S$, suivant que J est infini ou fini, ce qui donne la conclusion voulue.

Rappels 5.14.0. — [45] Soit S un préschéma *localement noethérien*, et soit $\widetilde{S}$ le normalisé de $S_{\text{réd}}$ (cf. EGA II, 6.3.8). Rappelons que S est dit *géométriquement unibranche* (cf. EGA 0_{IV}, § 23.2 et IV_2, § 6.15) si le morphisme canonique $\widetilde{S} \to S$ est *radiciel* (et donc un homéomorphisme universel) ; en particulier, les composantes connexes de S sont irréductibles.

Supposons alors S connexe, donc irréductible, soit η son point générique et soit $f : P \to S$ un morphisme *plat et localement quasi-fini*. Soient P_i les composantes irréductibles de P, et ξ_i le point générique de P_i. Comme P est plat sur S, chaque ξ_i

[43] N.D.E. : modulo la vérification que (ii) ⇒ (i) lorsque S est localement noethérien et R n'est pas à engendrement fini ...

[44] N.D.E. : Détailler ce point : M étant un $\mathbb{Z}$-module de type fini, il est dénombrable, et la démonstration de 5.11 (i) ⇒ (ii) montre que R est réunion d'une famille dénombrable de parties ouvertes et fermées, finies sur S. Il faudrait voir la réciproque ...

[45] N.D.E. : L'original traitait en 5.14 le cas où S est localement noethérien et *normal*, et signalait en Remarque 5.15 que le raisonnement s'applique, plus généralement, si on suppose seulement S *géométriquement unibranche* au lieu de normal. On a modifié en conséquence l'énoncé de 5.14 (et ausi 5.16), et l'on a ajouté ces « rappels », tirés de EGA IV_4, 18.10.6 et 18.10.7, qui montrent que la preuve de 5.14 s'applique *verbatim* au cas géométriquement unibranche.

est au-dessus de η (cf. EGA IV$_2$, 2.3.4), et donc $(\mathrm{P}_i)_\eta = \mathrm{P}_i \cap \mathrm{P}_\eta$ est l'adhérence de ξ_i dans P_η. Puisque la fibre P_η est discrète, on a donc $(\mathrm{P}_i)_\eta = \{\xi_i\}$. Ceci s'applique en particulier lorsque f est *étale* ; dans ce cas, P est aussi localement noethérien et géométriquement unibranche (cf. EGA IV$_4$, 17.5.7), donc ses composantes irréductibles sont ses composantes connexes et sont ouvertes (et fermées).

Corollaire 5.14. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien et géométriquement unibranche*,* P *un* S*-préschéma* constant tordu quasi-isotrivial*. Alors les composantes connexes de* P *sont* finies *sur* S*.*

On peut évidemment supposer S connexe donc irréductible, soit η son point générique. D'après ce qui précède, chaque composante connexe P_i de P est ouverte et fermée, et rencontre la fibre P_η en un seul point. Donc 5.13 s'applique et montre que chaque P_i est fini sur S. **106**

Théorème 5.16. — (46) *Soit* S *un préschéma* localement noethérien et géométriquement unibranche*. Alors tout* S*-groupe* de type multiplicatif et de type fini *est* isotrivial*.*

On peut supposer en effet S connexe, donc H de type constant M. Il suffit d'appliquer 5.14 à $\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$, où $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, puis de raisonner comme dans la démonstration de 5.11 (ii) $\Rightarrow$ (i). On peut aussi appliquer 5.14 à $\mathrm{P} = \mathrm{R} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ (cf. 5.9), puis utiliser 5.11.

6. Revêtements principaux galoisiens infinis et groupe fondamental élargi

(Les résultats du présent N° et du suivant ne seront plus utilisés dans la suite de ce Séminaire).

Soit S un préschéma, nous nous proposons de déterminer les fibrés principaux homogènes P sur S de groupe structural de la forme G_{S}, le S-groupe constant défini par **107**
un groupe ordinaire G (pas nécessairement fini), qu'on appellera aussi *fibrés principaux galoisiens* sur S de groupe G. Nous prenons « fibré principal » au sens de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte (cf. Exp. IV, Déf. 5.1.5), mais on notera que pour un tel P, le morphisme structural $\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ est nécessairement étale et surjectif, donc couvrant pour la topologie étale, par suite P est aussi localement trivial pour la topologie étale (cf. IV, Prop. 5.1.6). (47)

Nous supposerons que S est somme de préschémas connexes, i.e. que ses composantes connexes sont ouvertes, ce qui nous ramène aussitôt au cas où S est connexe. Nous choisirons alors un « point géométrique » ξ de S, i.e. un S-schéma ξ qui soit le spectre d'un corps algébriquement clos $\Omega = \kappa(\xi)$. Alors pour tout fibré principal galoisien P sur S de groupe G, P_ξ est un fibré principal galoisien sur le corps algébriquement clos $\kappa(\xi)$, donc est trivial. Nous préciserons donc le problème initial en nous

(46) N.D.E. : On a supprimé la remarque 5.15, rendue obsolète par l'ajout 5.14.0 (cf. la N.D.E. précédente), et dans 5.16 on a remplacé « normal » par « *géométriquement unibranche* ».

(47) N.D.E. : Noter que P est supposé être un *préschéma* — dans le cas a priori plus général d'un faisceau (fpqc) P qui est un G_{S}-torseur, P est-il nécessairement représentable ?

proposant de déterminer la catégorie des fibrés principaux galoisiens sur S *pointés* au-dessus de ξ, i.e. munis d'un S-homomorphisme $\xi \to \mathrm{P}$, i.e. d'une trivialisation de P_ξ. Pour G fixé, l'ensemble des classes de tels fibrés, à un isomorphisme près respectant le point-base, sera noté $\pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$. Alors l'ensemble $\pi^1(\mathrm{S}; \mathrm{G})$ des classes à isomorphisme près de fibrés principaux galoisiens sur S de groupe G (sans point-base précisé) est isomorphe à l'ensemble des orbites de G dans $\pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$ (compte tenu des opérations naturelles de G sur cet ensemble, correspondant à la translation par G du point marqué dans un fibré principal galoisien pointé P) :

$$\pi^1(\mathrm{S}; \mathrm{G}) = \pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})/\mathrm{G}\,.$$

Pour tout morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ qui est un morphisme de descente effective universelle pour la catégorie fibrée des préschémas constants tordus sur une base variable (par exemple $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fidèlement plat et localement de présentation finie, cf. 5.4 ; pour d'autres exemples cf. SGA 1 IX), nous nous proposons de déterminer les sous-
108 ensembles des ensembles précédents, notés $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$ et $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}; \mathrm{G})$, formés des fibrés principaux galoisiens sur S *qui deviennent triviaux sur* S′ (ou, comme on dit, sont « *déployés* » par S′). On déterminera en fait la catégorie des fibrés principaux galoisiens P sur S qui sont déployés par S′. Bien entendu, on aura alors

$$\pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G}) = \varinjlim_{\mathrm{S}'} \pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})\,,$$

où dans le deuxième membre, S′ parcourt un système cofinal dans l'ensemble des S'/S couvrants pour la topologie étale (par exemple, lorsque S est quasi-compact, l'ensemble des S′ sur S qui sont quasi-compacts et à morphisme structural étale et surjectif). De même, la catégorie des fibrés principaux galoisiens sur S sera la limite inductive des sous-catégories définies par les S′ (formées des fibrés qui sont déployés sur S′).

Grâce à l'hypothèse faite sur S'/S, la catégorie des fibrés principaux galoisiens sur S déployés par S′ est équivalente à la catégorie des fibrés principaux galoisiens triviaux sur S′ (donc de la forme $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, où G opère par translations à droite), *munis d'une donnée de descente relativement à* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. La donnée d'un point-base sur un fibré principal galoisien P sur S déployé par S′ revient, en termes du fibré trivial P′ correspondant sur S′ et de sa donnée de descente, à la donnée d'une trivialisation de $\mathrm{P}' \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{S}'_\xi$ compatible avec la donnée de descente induite, relativement à $\mathrm{S}'_\xi \to \xi$ (N. B. on a posé $\mathrm{S}'_\xi = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \xi$), i.e. une section σ de P'_ξ sur S'_ξ compatible avec la donnée de descente. Il y a alors intérêt, pour un S-préschéma *quelconque* S′ (pour lequel on ne suppose plus que $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ soit un morphisme de descente effective universelle pour la catégorie fibrée des fibrés constants tordus . . .) de définir $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}; \mathrm{G})$ et $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$ comme l'ensemble des classes, à isomorphisme près, des structures avec données de descente qu'on vient de préciser. On obtient alors pour ces foncteurs en G une description simpliciale fort simple, en termes des carré et cube fibrés S″ et S‴ de S′ sur S, que nous allons esquisser plus bas (cf. 6.3).

109 La conclusion importante à retenir sera la suivante :

Proposition 6.1. — *Supposons que les composantes connexes de* S' *et* S'' *soient ouvertes, et, par exemple, que l'ensemble quotient de* $\pi_0(\mathrm{S}')$ *par la relation d'équivalence induite par les deux projections* $\pi_0(\mathrm{S}'') \to \pi_0(\mathrm{S}')$ *soit ponctuel.* [48]

(i) *Le foncteur* $\mathrm{G} \mapsto \pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$*, de la catégorie des groupes dans la catégorie des ensembles, est représentable par un groupe, noté* $\pi_1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi)$ *et appelé le* groupe fondamental de S en ξ relativement à $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *On a donc une bijection fonctorielle :*

$$\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\pi_1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi), \mathrm{G})\,.$$

(ii) *Ce groupe a un ensemble de générateurs en bijection avec* $\pi_0(\mathrm{S}'')$*, et est décrit en termes de ces générateurs par des relations en bijection avec les éléments de* $\pi_0(\mathrm{S}''')$ [49]. *En particulier,* $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi)$ *est à engendrement fini (resp. de présentation finie) si* $\pi_0(\mathrm{S}'')$ *(resp. ainsi que* $\pi_0(\mathrm{S}'')$*) est fini.*

(iii) *La catégorie des fibrés principaux galoisiens sur* S *déployés par* S'*, avec point-base au-dessus de* ξ*, est équivalente à la catégorie des groupes ordinaires* G*, munis d'un homomorphisme de* $\pi_1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi)$ *dans* G.

La démonstration est donnée plus bas, cf. ...

6.2. Lorsque S est un préschéma connexe *localement noethérien*, ce qui implique que tout préschéma étale S' sur S est localement noethérien donc a ses composantes connexes ouvertes, on conclut de ce qui précède [50] que le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$, de la catégorie des groupes ordinaires dans la catégorie des ensembles, est *strictement pro-représentable* (cf. Séminaire Bourbaki, Février 1960, N° 195, §§ A.2 et A. 3), i.e. il existe un système projectif

$$\Pi = \Pi_1(\mathrm{S}; \xi) = (\pi_i)_{i \in \mathrm{I}}$$

de groupes ordinaires sur un ensemble d'indices I filtrant croissant, qui soit « strict » **110**
(i.e. à morphismes de transition $\pi_j \to \pi_i$ *surjectifs*), et un isomorphisme de foncteurs en G

$$\pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G}) \simeq \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\pi_i, \mathrm{G})\,.$$

Le deuxième membre est aussi simplement noté $\mathrm{Hom}_{\text{pro-gr.}}(\Pi, \mathrm{G})$ (cf. *loc. cit.*).

Dans le cas où la limite projective $\pi = \varprojlim \pi_i$ est « assez grande », de façon précise lorsque les homomorphismes canoniques $\Pi \to \Pi_i$ sont *surjectifs*, il y a lieu de munir

[48] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que les composantes connexes de S' soient ouvertes, ainsi que la seconde hypothèse. Cette dernière signifie que l'ensemble simplicial $\mathrm{K}_\bullet = \pi_0(\mathrm{S}_\bullet)$ défini en 6.3 est connexe ; il suffit en fait d'une hypothèse plus faible, à savoir que le *cône* $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$ d'un certain morphisme d'ensembles simpliciaux $k_\bullet \to \mathrm{K}_\bullet$ soit connexe (cf. *loc. cit.*).

[49] N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse, superflue, que les composantes connexes de S''' soient ouvertes. D'autre part, la description donnée plus loin (cf. ...) donne comme ensemble naturel de générateurs l'ensemble $\pi_0(\mathrm{S}'') \amalg \pi_0(\mathrm{S}'_\xi)$; on se ramène ensuite à $\pi_0(\mathrm{S}'')$ au moyen des relations entre ces générateurs provenant des 2-cellules. Voir par exemple [**Kan58**], § 19 pour une description plus fine.

[50] N.D.E. : On pourrait détailler cette déduction ; I est en bijection avec un ensemble cofinal de morphismes $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ couvrants pour la topologie étale ...

Π de la topologie limite projective des topologies discrètes des Π_i, et l'isomorphisme précédent s'écrit aussi :

$$\pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{gr. top.}}(\pi, \mathrm{G}),$$

où le deuxième membre désigne l'ensemble des homomorphismes de *groupes topologiques*, étant entendu que G est muni de la topologie discrète.

L'hypothèse qu'on vient de formuler sur le système projectif Π est vérifiée, comme il est bien connu, lorsque les π_i sont des groupes *finis* (cf. [**BEns**], III § 7.4, Th. 1). Cette dernière condition signifie évidemment aussi que tout fibré principal galoisien sur S est *isotrivial*, i.e. est déployé par un morphisme étale surjectif *fini*. C'est le cas lorsque S est géométriquement unibranche (par exemple normal) comme il résulte aussitôt de 5.14. [51] Dans le cas où les π_i sont finis, le groupe π coïncide aussi avec le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{S}, \xi)$ introduit dans SGA 1, V.

Aussi, dans le cas favorable ($\pi \to \pi_i$ surjectifs) on pourrait appeler π le *groupe fondamental élargi* de S en ξ. En dehors de ce cas favorable, π lui-même ne présente guère d'intérêt, et le rôle du groupe fondamental habituel est joué par le système projectif Π lui-même, qu'on appellera le *pro-groupe fondamental élargi de* S *en* ξ. (Toute suggestion terminologique meilleure que « élargi » est bienvenue ! [52]). On notera que la connaissance de ce pro-groupe est plus précise que celle du groupe fondamental habituel $\pi_1(\mathrm{S}, \xi)$ de SGA 1 V ; de façon précise ce dernier est la limite projective du système projectif formé des *quotients finis des* π_i.

111 **6.3.** Indiquons rapidement le « calcul » de $\pi_1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi)$. Soit S_i la puissance fibrée $(i+1)$-ème de S′ sur S (i.e. $\mathrm{S}_0 = \mathrm{S}'$, $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}''$, etc.). On a entre les S_i des opérations simpliciales évidentes, qui font de $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un *objet simplicial de* $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$.

Transformant cet objet simplicial par le foncteur « ensemble des composantes connexes »

$$\pi_0 : (\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}} \longrightarrow (\mathbf{Ens}),$$

on trouve un ensemble simplicial $\mathrm{K}_\bullet = (\mathrm{K}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, avec $\mathrm{K}_i = \pi_0(\mathrm{S}_i)$.

De même, les $\mathrm{S}_{i\,\xi}$ (= puissance fibrée $(i+1)$-ème de S'_ξ sur ξ) forment un objet simplicial de $(\mathbf{Sch})_{/\xi}$ donc de $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$, d'ailleurs muni d'un homomorphisme naturel d'objets simpliciaux dans $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, d'où un ensemble simplicial $k_\bullet$ (avec $k_i = \pi_0(\mathrm{S}_{i\,\xi})$) et un homomorphisme canonique

$$k_\bullet \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet\,.$$

Nous pouvons former un nouvel ensemble simplicial en prenant le cône de ce morphisme (cf. 9.5.1) :

$$\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet = \mathrm{Cône}(k_\bullet \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet).$$

[51] N.D.E. : On a corrigé 5.13 en 5.14.

[52] N.D.E. : Certains auteurs parlent du « *vrai* » groupe fondamental .

(53) De cette façon, on obtient un « ensemble simplicial pointé » $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$ (i.e. un ensemble simplicial muni d'un homomorphisme $\widetilde{\xi} : e_\bullet \to \widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$, où $e_\bullet$ est l'ensemble simplicial final). Nous pouvons en construire les invariants combinatoires bien connus $\pi_0(\widetilde{\mathrm{K}_\bullet}, \widetilde{\xi})$ et $\pi_1(\widetilde{\mathrm{K}_\bullet}, \widetilde{\xi})$, dont la construction ne fait intervenir d'ailleurs que les composantes de degré $\leqslant 1$ resp. de degré $\leqslant 2$. Ces invariants sont définis sans restriction sur S ni S′. On vérifie alors sans difficulté, lorsque les composantes connexes de S_0 et S_1 sont ouvertes et que $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$ est connexe, (54) que $\pi_1(\widetilde{\mathrm{K}_\bullet}, \widetilde{\xi})$ *représente* le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$, i.e. qu'on a :

$$\pi_1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}; \xi) \simeq \pi_1(\widetilde{\mathrm{K}_\bullet}, \widetilde{\xi}) .$$

Signalons également que lorsque le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est « universellement sub- **112**
mersif » (cf. SGA 1, IV 2.1), et les composantes connexes de S′ ouvertes, alors (55) l'ensemble simplicial $\mathrm{K}_\bullet$, donc également $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$, est connexe.

Exemples 6.4. — Il reste à donner des exemples de groupes fondamentaux élargis. Reprenons les exemples de 1.6, c.-à-d., soient k un corps algébriquement clos, C_1 une courbe rationnelle complète sur k, ayant exactement un point singulier, ce point étant point double ordinaire, et C_2 une courbe réunion de deux composantes irréductibles, isomorphes à $\mathbb{P}^1_k$ et se coupant en exactement deux points, qui sont points doubles ordinaires de C_2. Dans l'un et l'autre cas, le groupe fondamental élargi de la courbe est isomorphe à $\mathbb{Z}$. (56)

De façon générale, il y aurait lieu de reprendre (en les simplifiant et rectifiant) les résultats de SGA 1 IX 5, dans le cadre du groupe fondamental élargi. Les exemples de *loc. cit.*, 5.5 donneraient autant d'exemples de pro-groupes fondamentaux élargis qui ne sont pas profinis. Ainsi, si au lieu d'un point double ordinaire, on prenait dans le premier exemple un point double à n branches distinctes, (57) on trouverait comme groupe fondamental élargi le groupe libre (*discret* !) à $n-1$ générateurs.

---

(53) N.D.E. : On a corrigé l'original, qui considère $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet = \mathrm{K}_\bullet/k_\bullet$ alors que d'une part $k_\bullet$ est déjà contractile (cf. 9.7.1) et d'autre part que le morphisme $k_\bullet \to \mathrm{K}_\bullet$ n'est en général pas injectif. C'est un épimorphisme si S′/S est étale fini (cf. 9.7.3).

(54) N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$ soit connexe ; pour la démonstration, voir l'addenda plus bas (section 9).

(55) N.D.E. : On a modifié la suite, en tenant compte de la correction effectuée plus haut, cf. N.D.E. (53).

(L'original était : « $\pi_0(\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet, \widetilde{\xi})$ est aussi canoniquement isomorphe à l'ensemble $\pi_0(\mathrm{S}, \xi)$ des composantes connexes de S, pointé par la composante connexe de ξ dans S ».)

(56) N.D.E. : On pourrait détailler ceci : d'abord, tenant compte de 5.14, le groupe fondamental élargi de la droite projective $\mathbb{P}^1_k$ est nul, i.e. $\mathbb{P}^1_k$ est « vraiment » simplement connexe. Ensuite, il faudrait étendre au cas du groupe fondamental élargi et de la catégories des fibrés principaux (non nécessairement finis), le Corollaire 5.4 de SGA 1 IX et la discussion qui le suit. (Soient Γ_1 et Γ_2 deux copies de $\mathbb{P}_k$, a_i, b_i deux points distincts de Γ_i, C''_2 la réunion disjointe de Γ_1 et Γ_2, C'_2 la courbe obtenue en identifiant a_1 à a_2 ; alors C_2 s'obtient à partir de C'_2 en identifiant de plus b_1 à b_2. La discussion suivant *loc. cit.*, étendue au cas élargi, montre alors que le groupe fondamental élargi de C'_2 (resp. C_2) est nul (resp. $\mathbb{Z}$).

(57) N.D.E. : Il s'agit d'un point n-uple à n tangentes distinctes, par exemple la courbe $\mathrm{X}^n - \mathrm{Y}^n = \mathrm{X}^{n+1}$.

7. Classification des préschémas constants tordus et des groupes de type multiplicatif de type fini en termes du groupe fondamental élargi

7.0. Soit S un préschéma, que nous supposons encore *localement noethérien*, pour assurer que S et certains préschémas au-dessus de S que nous allons considérer
113 (notamment ceux étales sur S, plus généralement ceux qui sont localement de type fini sur S) sont *localement connexes*.

Proposition 7.0.1. — *Tout préschéma constant tordu* X *sur* S *qui est localement trivial pour la topologie* (fppf) (*i.e. qui est déployé par un morphisme fidèlement plat localement de présentation finie* $S' \to S$) *est* quasi-isotrivial (*i.e. on peut même choisir* $S' \to S$ *étale surjectif*).

En effet, on peut supposer S connexe, donc X de type I, où I est un ensemble fixe. Donc $X' = X \times_S S'$ est isomorphe à $I_{S'}$, donc $I_{S'}$ se trouve muni d'une donnée de descente relativement à $S' \to S$, i.e. on a un isomorphisme $I_{S''} \xrightarrow{\sim} I_{S''}$ satisfaisant à la condition habituelle de transitivité. Or, $S'' = S' \times_S S'$ est localement noethérien donc localement connexe, d'où résulte que les automorphismes de $I_{S''}$ correspondent aux sections de $G_{S''}$, où $G = \mathrm{Aut}(I)$ est le groupe des permutations de I.

De cette façon, on obtient une donnée de descente sur $G_{S'}$ (considéré comme fibré principal galoisien trivial) relativement à $S' \to S$. En vertu de 5.4 cette donnée de descente est effective, d'où un fibré principal galoisien P sur S, de groupe G. Par construction, il représente le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_S(I_S, X)$ dans la catégorie des préschémas au-dessus de S qui sont localement noethériens. Par suite, le changement de base étale surjectif $P \to S$ déploie X, donc X est bien quasi-isotrivial.

Remarque 7.0.2. — On fera attention que même si S est le spectre d'un corps, il n'est pas vrai en général que *tout* fibré constant tordu sur S soit quasi-isotrivial. Il suffit par exemple de prendre pour X le schéma somme d'une suite de schémas de la forme $\mathrm{Spec}(k_i)$, où les k_i sont des extensions séparables de k de degrés strictement croissants.

La démonstration donnée plus haut montre en même temps que la classification des fibrés constants tordus X sur S, quasi-isotriviaux et de type I, est équivalente à celle des fibrés principaux galoisiens sur S, de groupe $G = \mathrm{Aut}(I)$. C'est même là une *équivalence de catégories*.

Elle peut être mise sous une forme plus commode comme dans SGA 1 V. Pour
114 ceci, supposons S connexe, et muni d'un point géométrique ξ. Par suite le pro-groupe fondamental élargi $\Pi = \Pi_1(S, \xi)$ est défini. D'autre part, pour tout fibré constant tordu X quasi-isotrivial sur S, soit $I = X(\xi)$ sa fibre ensembliste en ξ. Donc X est de type I, et par suite associé comme on vient de dire à un fibré principal galoisien $P = \underline{\mathrm{Isom}}_S(I_S, X)$ sur S, de groupe $G = \mathrm{Aut}(I)$.

D'après la définition de Π, on obtient donc un homomorphisme canonique de Π dans G, i.e. d'un des Π_i dans G. Comme G est le groupe des permutations de $I = X(\xi)$, cela signifie que Π « opère continûment sur $I = X(\xi)$ », étant entendu par là que les π_i (i grand) opèrent sur I, de façon compatible avec les morphismes de transition.

Nous laissons au lecteur de vérifier que tout S-morphisme $X \to Y$ entre fibrés constants tordus quasi-isotriviaux sur S induit une application $X(\xi) \to Y(\xi)$ *compatible* avec les opérations de Π, et que le foncteur ainsi obtenu est une *équivalence de catégories* :

Proposition 7.0.3. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien connexe*,* ξ *un point géométrique de* S*,* $\Pi = \Pi_1(S, \xi)$ *le pro-groupe fondamental élargi de* S *en* ξ*. Alors le foncteur*

$$X \longmapsto X(\xi)$$

est une équivalence *entre la catégorie des fibrés constants tordus quasi-isotriviaux sur* S *et la catégorie des ensembles où* Π *opère continûment.*

Ce foncteur est compatible avec les opérations de sommes finies et de $\varprojlim$ finies. Il s'ensuit par exemple que les groupes (ou anneaux etc.) constants tordus quasi-isotriviaux sur S correspondent aux groupes (resp. anneaux etc.) ordinaires sur lesquels le pro-groupe Π opère continûment. En particulier :

Corollaire 7.0.4. — *La catégorie des groupes commutatifs constants tordus quasi-isotriviaux sur* S *est* équivalente *à la catégorie des « Π-modules » i.e. des groupes commutatifs* M *dans lesquels* Π *opère continûment.*

Utilisant maintenant 5.7 on en conclut le :

Théorème 7.1. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien connexe*,* ξ *un point géométrique de* S*,* $\Pi = \Pi_1(S, \xi)$ *le pro-groupe fondamental élargi de* S *en* ξ*. Alors le foncteur*

$$G \longmapsto \mathrm{Hom}_{\kappa(\xi)\text{-gr.}}(G_\xi, \mathbb{G}_{m,\xi})$$

induit une anti-équivalence *de la catégorie des groupes* de type multiplicatif quasi- 115
isotriviaux *sur* S *avec la catégorie des* Π*-modules.*

Utilisant 4.5 on en conclut :

Corollaire 7.2. — *Le foncteur précédent induit une* anti-équivalence *de la catégorie des groupes* de type multiplicatif et de type fini *sur* S*, et de la catégorie des* Π-modules *qui sont* de type fini sur $\mathbb{Z}$*.*

Exemple 7.3. — Reprenons par exemple pour S une courbe rationnelle complète sur un corps algébriquement clos, ayant exactement un point multiple à $n+1$ branches distinctes. D'après 6.4, le groupe fondamental élargi $\Pi(S, \xi)$ est un groupe libre à n générateurs. Donc, d'après 7.2, la classification des *tores de dimension relative* m sur S est équivalente à la classification des systèmes de n endomorphismes $A_1, \ldots, A_n$ du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^m$, à automorphisme de $\mathbb{Z}^m$ près. Sauf pour $n \leqslant 1$ ou $m \leqslant 1$, une classification explicite de tels systèmes semble sans espoir. On peut du moins définir une foule d'invariants non triviaux pour un tel système, tels les polynômes caractéristiques des A_i. [58]

[58] N.D.E. : En particulier, ceci montre que les tores de dimension relative 2 considérés en 1.6 sont non isotriviaux.

Remarque 7.4. — Si on ne fait aucune hypothèse sur S, il reste vrai que pour un groupe commutatif ordinaire M de type fini sur $\mathbb{Z}$ donné, la catégorie des groupes de type multiplicatif de type M sur S est anti-équivalente à la catégorie des fibrés principaux galoisiens sur S, de groupe $G = \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.}}(M)$. Cela résulte facilement de 5.9 et 5.10.

Remarque 7.5. — La théorie du pro-groupe fondamental que nous avons esquissée dans les deux présents numéros s'écrira avantageusement dans le cadre des sites généraux. Sous cette forme, elle s'applique également, par exemple, aux espaces topologiques ordinaires, et donne une théorie satisfaisante du moins pour un espace topologique localement connexe (pas nécessairement localement simplement connexe). Dans ce cas également il semble qu'on ne peut se contenter de définir un groupe fondamental, et qu'il faut un pro-groupe. Enfin, remarquons que, une fois qu'on dispose du langage des topologies et de la descente (qui est vraiment au fond de ces questions), l'exposé esquissé ici est aussi techniquement plus simple que celui de SGA 1 V, et devrait donc en principe s'y substituer.

8. Appendice : Élimination de certaines hypothèses affines

116 Notre objet est de prouver la généralisation suivante de 4.9.

Théorème 8.1. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S*-préschéma en groupes* plat et de présentation finie*, à fibres* connexes et affines [59]*. Soit* $s \in S$*, on suppose que* H_s *est un tore. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $H|_U$ *soit un tore.*

On en conclut immédiatement :

Corollaire 8.2. — *Soit* H *un* S*-préschéma en groupes,* plat et de présentation finie *sur* S*. Pour que* H *soit un tore, il faut et il suffit que ses fibres soient des tores.*

Remarque 8.3. — Même lorsque S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, on ne peut dans 8.1 abandonner l'hypothèse que les fibres de H (ici la fibre générique) soient affines, car il y a des exemples de groupes lisses sur S, dont la fibre générique est une courbe elliptique, et la fibre spéciale est $\mathbb{G}_m$.

Démonstration de 8.1. On peut supposer évidemment $S = \mathrm{Spec}(A)$ affine, ce qui nous ramène par le procédé standard (cf. EGA IV_2, 8.8.2) au cas où S est de plus noethérien. Nous commençons par prouver 8.2 dans ce cas.

En vertu de 4.9 on est ramené à prouver que H est affine sur S. On peut donc supposer [60] A noethérien *local*, et comme le complété $\widehat{A}$ est fidèlement plat sur A, on est ramené par descente au cas où A est un anneau noethérien local *complet*. Soit S' le normalisé de $S_{\mathrm{réd}}$, on sait par Nagata qu'il est fini sur S (EGA 0_{IV}, 23 1.5) ; de plus $S' \to S$ est surjectif, donc $H' = H \times_S S' \to H$ est fini et surjectif, donc pour prouver que H est affine, il suffit de montrer qu'il en est ainsi de H' (EGA II, 6.7.1).

[59] N.D.E. : Noter que les hypothèses entraînent que H est *séparé* sur S, d'après VI_B, Th. 5.3 ou Cor. 5.5.
[60] N.D.E. : par EGA IV_2, 8.8.2 à nouveau

[61] Remplaçant S par une composante connexe de S′, ceci nous ramène au cas où A est un anneau noethérien (semi-local) *normal et intègre*. De plus, quitte à remplacer A par son normalisé dans une extension finie séparable de son corps des fractions, **117**
on peut supposer que la fibre générique H_η de H est diagonalisable, i.e. qu'on a un isomorphisme

$$u_\eta : \mathrm{H}_\eta \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_\eta,$$

où $\mathrm{T} = \mathbb{G}^r_{m,\mathrm{S}}$. Or on a le

Lemme 8.4. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien normal et irréductible*, de point générique* η*,* H *un préschéma en groupes sur* S lisse et à fibres connexes*,* T *un préschéma en groupes* de type multiplicatif et de type fini *sur* S*,* $u_\eta : \mathrm{H}_\eta \to \mathrm{T}_\eta$ *un homomorphisme de groupes algébriques sur* $\kappa(\eta)$*.*

Alors u_η *se prolonge en un homomorphisme de groupes* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{T}$*.*

Quitte à remplacer S par son normalisé dans une extension finie séparable de son corps des fonctions, on peut supposer T diagonalisable (ce qui est d'ailleurs le cas dans l'application que nous avons en vue). Alors T est un sous-groupe fermé d'un groupe de la forme $\mathbb{G}^r_{m,\mathrm{S}}$, ce qui nous ramène au cas où $\mathrm{T} = \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$.

Tout revient à prouver que u_η, considérée comme une application rationnelle de H dans $\mathrm{T} = \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, est partout définie (car le morphisme $u : \mathrm{H} \to \mathrm{T}$ qui la prolonge est alors nécessairement un homomorphisme de groupes). On peut considérer u_η comme une section inversible f du faisceau structural de H_η, et il faut montrer qu'elle se prolonge en une section inversible du faisceau structural de H. Or H, étant lisse sur S normal, est normal (SGA 1, II 3.1), donc il suffit de trouver une partie fermée Z de H de codimension $\geqslant 2$ telle que f se prolonge en une section inversible du faisceau structural de $\mathrm{H}-\mathrm{Z}$. Cela nous ramène aussitôt au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A (en localisant aux points de codimension 1 de S).

Soit t une uniformisante de A, t' la section de $\mathscr{O}_\mathrm{H}$ qu'elle définit, de sorte que la fibre spéciale H_0 est égale à $\mathscr{V}(t')$. Par hypothèse H_0 est lisse sur le corps résiduel k, et connexe. Alors f est une fonction rationnelle sur H qui n'a ni zéros ni pôles dans $\mathrm{H} - \mathrm{H}_0$; comme $\mathrm{H}_0 = \mathscr{V}(t')$ est un diviseur irréductible, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t'^n f = t^n f$ n'ait pas de zéros ni de pôles, i.e. soit une section inversible de **118**
$\mathscr{O}_\mathrm{H}$. Elle définit donc un morphisme $v : \mathrm{H} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, et comme $v_\eta = t'^n\, u_\eta$ et u_η est un homomorphisme de groupes, v transforme la section unité de H en une section de $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ dont la valeur au point générique de S est t^n ; comme il s'agit d'une section de $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, il faut que t^n soit une unité, i.e. $n = 0$, donc v prolonge u_η, ce qui achève de prouver 8.4.

Appliquant ce lemme au cas actuel, on trouve un homomorphisme de groupes

$$u : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{T} = \mathbb{G}^r_{m,\mathrm{S}}$$

qui induit sur les fibres génériques un isomorphisme. Prouvons que u est un isomorphisme.

[61] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Lemme 8.5. — *Pour tout entier $n > 0$ premier à la caractéristique résiduelle de* A, ${}_n\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(n \cdot \mathrm{id}_\mathrm{H})$ *est fini sur* S.

Si n est premier à la caractéristique résiduelle de A, il est premier à toutes les caractéristiques résiduelles des points de S. Donc $n \cdot \mathrm{id}_\mathrm{H}$ induit sur toute fibre de H un morphisme étale, par suite $n \cdot \mathrm{id}_\mathrm{H}$ est étale (SGA 1, I 5.9), donc son noyau ${}_n\mathrm{H}$ est étale sur S. D'autre part, ${}_n\mathrm{H}$ est séparé sur S puisque H l'est [(*)] [(62)]. De plus, toutes ses fibres ont même rang n^r, puisque les fibres de H sont des tores, tous de même dimension r (H étant lisse sur S). On en conclut que ${}_n\mathrm{H}$ est fini sur S (SGA 1, I 10.9 ou EGA IV_4, 18.2.9).

Donc, d'après le lemme précédent, $u({}_n\mathrm{H})$ est une partie fermée de T. Comme sur la fibre générique T_η, cette partie est identique à ${}_n(\mathrm{T}_\eta)$, il s'ensuit qu'elle contient l'adhérence de cette partie, savoir ${}_n\mathrm{T}$. Or pour tout $s \in \mathrm{S}$, les ${}_n(\mathrm{T}_s)$ sont denses dans T_s ; comme $u_s(\mathrm{H}_s)$ est une partie *fermée* ($\mathrm{VI_B}$ 1.4.2) les contenant, on voit que $u_s(\mathrm{H}_s) = \mathrm{T}_s$, donc u est surjectif. Comme un homomorphisme surjectif de tores de même dimension sur un corps est plat [(63)], il s'ensuit que u induit sur chaque fibre un morphisme plat, donc u est plat (SGA 1 I 5.9). Par suite, $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(u)$ est plat sur S, [(64)] donc égal à l'adhérence de sa fibre générique K_η. Or K_η est le groupe groupe
119 unité par construction, et comme K est séparé sur S (puisque H l'est), sa section unité est fermée, d'où il s'ensuit que K est le groupe unité. Donc u est un monomorphisme ; comme on a vu qu'il est fidèlement plat, c'est donc un isomorphisme (cf. SGA 1, I 5.1 ou EGA IV_4, 17.9.1). Cela prouve que H est un tore, donc achève la démonstration de 8.2. [(65)]

Remarque 8.5.1. — Au lieu d'invoquer 8.5 on peut aussi invoquer le « Main Theorem » de Zariski, qui implique directement que u est une immersion ouverte, donc un isomorphisme. [(66)]

Pour prouver 8.1, on est ramené grâce au théorème de quasi-isotrivialité au cas où S est local, s son point fermé, [(67)] et à prouver qu'avec les hypothèses faites par ailleurs, H est alors un tore. En vertu de 8.2 déjà prouvé, on est ramené à prouver que les fibres de H sont des tores. On peut supposer S spectre d'un anneau local noethérien *complet* A. En vertu de 3.3 il existe pour tout $n > 0$ un groupe de type multiplicatif T_n fini sur S, et un isomorphisme $(\mathrm{T}_n)_s \simeq {}_n(\mathrm{H}_s)$, où s est le point fermé

[(*)] En vertu du th. de Raynaud $\mathrm{VI_B}$ 5.3.

[(62)] N.D.E. : Détailler ce point, en liaison avec les modifications dans $\mathrm{VI_B}$ § 5.

[(63)] N.D.E. : Ceci résulte, par exemple, de VIII 3.2 a) ; plus généralement, si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est un morphisme surjectif de groupes algébriques sur un corps k et si H est *réduit*, alors f est plat (cf. $\mathrm{VI_B}$ 1.3).

[(64)] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[(65)] N.D.E. : Au moins dans le cas envisagé jusqu'ici, à savoir S localement noethérien.

[(66)] N.D.E. : Les éditeurs n'ont pas compris cette remarque, ne comprenant pas pourquoi u serait *a priori* à fibres finies et surjectif . . .

[(67)] N.D.E. : Détailler cette réduction . . .

de S. Procédant comme dans 3.1 et utilisant le fait que T_n est *fini* sur S, [68] on voit que l'isomorphisme précédent provient d'un homomorphisme $u_n : \mathrm{T}_n \to \mathrm{H}$, d'ailleurs uniquement déterminé. (Passer à la limite sur les quotients artiniens de A).

De plus, en vertu des propriétés d'unicité, $u_n : \mathrm{T}_n \to \mathrm{H}$ se déduit de $u_m : \mathrm{T}_m \to \mathrm{H}$ par restriction à ${}_n(\mathrm{T}_m) \simeq \mathrm{T}_n$ lorsque m est un multiple de n. Il résulte de IX, 6.6 que les u_n sont des monomorphismes, donc les T_n sont des sous-groupes de H, et pour m multiple de n, on a $\mathrm{T}_n = {}_n(\mathrm{T}_m)$.

Donc pour tout $t \in \mathrm{S}$, les $(\mathrm{T}_n)_t$ sont des sous-groupes de H_t, de type $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$ (où $r = \dim \mathrm{H}_s = \dim \mathrm{H}_t$), tels que pour m multiple de n, on ait $(\mathrm{T}_n)_t = {}_n(\mathrm{T}_m)_t$. Le fait que H_t soit un tore résulte maintenant du

Lemme 8.6. — *Soient* H *un groupe algébrique* affine lisse *sur un corps algébriquement clos k,* $(\mathrm{T}_n)_{n>0}$ *une famille de sous-groupes de* type multiplicatif *de* H*, telle que pour tout entier $n > 0$,* T_n *soit de type* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$*, et pour tout multiple m de n, on ait* $\mathrm{T}_n = {}_n(\mathrm{T}_m)$*.*

Sous ces conditions, H *contient un tore de dimension $\geqslant r$ contenant les* T_n*, donc* 120
si H *est connexe de dimension $\leqslant r$,* H *est un tore de dimension r.*

Il s'agit d'un exercice de groupes algébriques affines, que nous allons traiter à coups de références à *Bible*. Nous nous bornons à considérer les T_n pour n premier à la caractéristique. Soit K l'adhérence de la réunion des T_n dans H, muni de la structure réduite induite, alors des raisonnements standard montrent que K est un sous-groupe algébrique commutatif de H. En vertu de *Bible*, § 4.5, th. 4, K est donc isomorphe à un produit $\mathrm{K}_u \times \mathrm{K}_s$, avec K_u « unipotent » et K_s diagonalisable. Tout sous-groupe diagonalisable de K est contenu dans K_s, donc les T_n sont des sous-groupes de K_s, donc $\mathrm{K} = \mathrm{K}_s$. Écrivons $\mathrm{K} = \mathrm{D}(\mathrm{M})$, avec M un groupe commutatif ordinaire, de type fini sur $\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{T}_n \subseteq \mathrm{K}$ signifie que M admet un groupe quotient isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$. Ceci étant vrai pour tout entier n premier à la caractéristique de k (il suffirait, pour les puissances d'un nombre premier fixé) il s'ensuit que M est de rang $\geqslant r$, donc K contient un tore de dimension r, soit T. Lorsque H est connexe de dimension r, il s'ensuit $\mathrm{T} = \mathrm{H}$, ce qui achève la démonstration de 8.6. Ainsi 8.1 est démontré.

Remarques 8.7. — Utilisant 8.1, il ne devrait pas être difficile de donner des généralisations analogues de 4.7 et 4.8. Une étude plus intéressante serait celle de la situation 8.1 où on abandonnerait l'hypothèse que les fibres de H soient affines. On peut montrer qu'il existe alors un voisinage ouvert U de s tel que $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ soit commutatif et que pour tout $t \in \mathrm{U}$, la fibre géométrique $\mathrm{H}_{\overline{t}}$ est une extension d'une variété abélienne par un tore. [69] Bien entendu, dans des questions de ce genre, on peut se borner au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, s son point fermé, t son point générique.

On peut généraliser ce résultat de la façon suivante. Pour tout groupe algébrique G connexe lisse sur un corps algébriquement clos k, un théorème bien connu de Chevalley

---
[68] N.D.E. : Détailler ce point ...
[69] N.D.E. : Donner une référence ici ?

121 nous dit que G est (de façon unique) extension d'une variété abélienne A par un groupe affine lisse connexe V. Désignons par *rang abélien* (resp. *rang réductif*, resp. *rang nilpotent*, resp. *dimension semi-simple*) de G, et notons $\rho_{\mathrm{ab}}(\mathrm{G})$ (resp. $\rho_r(\mathrm{G})$, resp. $\rho_n(\mathrm{G})$, resp. $d_s(\mathrm{G})$) la dimension de A, resp. la dimension des tores maximaux de G, resp. la dimension des sous-groupes de Cartan [70] de G, resp. la dimension du quotient de G (ou encore de V), par son radical, (cf. *Bible* pour toutes ces notions). Introduisons aussi le rang unipotent $\rho_u(\mathrm{G}) = \rho_u(\mathrm{V}) = \rho_n(\mathrm{G}) - \rho_r(\mathrm{G}) - \rho_{ab}(\mathrm{G})$. Lorsque G n'est pas algébriquement clos, nous désignons encore par les mêmes noms et les mêmes notations les invariants correspondants pour $\mathrm{G}_{\overline{k}}$, où $\overline{k}$ est la clôture algébrique de k.

Ceci posé, soit G un schéma en groupes lisse sur le spectre S d'un anneau de valuation discrète, soient ρ_{ab} etc. (resp. ρ'_{ab} etc.) les invariants associés à la fibre spéciale (resp. à la fibre générique), alors on a les inégalités :

$$\begin{cases} \rho_{\mathrm{ab}} \leqslant \rho'_{\mathrm{ab}} \\ \rho_r + \rho_{\mathrm{ab}} \leqslant \rho'_r + \rho'_{\mathrm{ab}} \\ d_s \leqslant d'_s \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_n \geqslant \rho'_n \\ \rho_u \geqslant \rho'_u. \end{cases}$$

Il revient au même de dire qui si G est lisse de type fini sur une base quelconque S, les fonctions $s \mapsto \rho_{\mathrm{ab}}(s)$, $\rho_{\mathrm{ab}}(s) + \rho_r(s)$, $d_s(s)$ sont semi-continues inférieurement, les fonctions $s \mapsto \rho_n(s)$, $\rho_u(s)$ sont semi-continues supérieurement. [71]

Les mêmes résultats valent probablement encore sans supposer G lisse sur S, mais simplement plat de présentation finie sur S, en convenant de désigner, pour un groupe algébrique G sur un corps algébriquement clos k, par $\rho_{\mathrm{ab}}(\mathrm{G})$ etc. les invariants correspondants de $\mathrm{G}^0_{\mathrm{réd}}$.

Dans ce Séminaire, nous présentons quelques résultats de ce type pour G affine sur
122 S, ou plus généralement à fibres affines : dans ce cas, nous vérifierons les propriétés de semi-continuité pour ρ_r, ρ_n donc pour $\rho_u = \rho_n - \rho_r$, et la continuité de ρ_s au voisinage d'un point s dont la fibre est un groupe réductif. [71]

On peut généraliser 8.2 lorsqu'on suppose déjà G commutatif, de la façon suivante :

Théorème 8.8. — [72] *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes commutatif, qui soit plat et de présentation finie sur* S*, à fibres affines connexes. Soit* $s \in \mathrm{S}$*, et supposons que*

a) *si* $\overline{k}$ *désigne une clôture algébrique de* $\kappa(s)$*,* $(\mathrm{G}_{\overline{k}})_{\mathrm{réd}}$ *est un tore.*

b) *Il existe une générisation* t *de* s *telle que* G_t *soit lisse sur* $\kappa(t)$*.*

Sous ces conditions, il existe un voisinage ouvert U *de* s*, tel que* G|U *soit un tore.*

(Noter d'ailleurs que si on suppose seulement que pour toute générisation t de s, G_t est affine resp. connexe, on en tire facilement que la même conclusion est valable pour t dans un voisinage ouvert de s).

[70] N.D.E. : Rappeler la définition de « sous-groupe de Cartan » ...

[71] N.D.E. : Donner une référence pour ces résultats ?

[72] N.D.E. : G. Prasad et J.-K. Yu ont généralisé (moyennant quelques hypothèses additionnelles) ce résultat en ne supposant pas G commutatif et en remplaçant dans l'hypothèse a) et la conclusion « tore » par « groupe réductif », cf. [PY06], Th. 6.2.

Démonstration de 8.8. Il suffit de prouver que G_s est lisse sur $\kappa(s)$. En effet, comme G est plat de présentation finie sur S, il s'ensuit alors que G est lisse sur S au-dessus d'un voisinage de s (cf. 3.5), mais alors on est sous les conditions de 8.1.

Pour prouver que G_s est lisse sur $\kappa(s)$, le procédé habituel nous ramène au cas où S est affine noethérien. Choisissant un homomorphisme $S' \to S$ d'un spectre d'anneau de valuation discrète S' dans S, qui envoie le point fermé en s et le point générique η en t, on est ramené au cas où S est lui-même le spectre d'un anneau de valuation discrète, qu'on peut supposer de plus complet à corps résiduel algébriquement clos, et où s et $t = \eta$ sont respectivement le point fermé et le point générique de S.

Donc G est plat, séparé, de type fini sur S, la fibre générique G_η est lisse et connexe, 123
et la fibre spéciale G_0 est telle que $T_0 = (G_0)_{\text{réd}}$ soit un tore. Soit m un entier > 0 premier à la caractéristique résiduelle en s, donc aussi à celle en η, on sait alors que $m \cdot \mathrm{id}_G$ est un morphisme étale fibre par fibre ($\mathrm{VII_A}$ 8.4), donc un morphisme étale puisque G est plat sur S (SGA 1 I 5.9), donc son noyau ${}_mG$ est étale sur S, et comme G est séparé [(*)] [(73)] de type fini sur S, il en est de même de ${}_mG$. Comme $({}_mG)_0 = {}_m(T_0)$, son degré est m^r, où $r = \dim T_0 = \dim G_0 = \dim G$. Il s'ensuit que le rang de $({}_mG)_\eta = {}_m(G_\eta)$ est $\geqslant m^r$, ce qui prouve déjà (en utilisant 8.6) que G_η est un tore de dimension r, puisque les deux fibres de ${}_mG$ ont même rang, donc comme dans 8.5 que ${}_mG$ est fini sur S. [(74)]

Noter que puisque S est complet à corps résiduel algébriquement clos, le revêtement fini étale ${}_mG$ se décompose complètement, donc par tout point de ${}_mG_0$ passe une section de G sur S, en particulier l'ensemble des points de G_0 par lesquels passe une section de G sur S est partout dense. Or on a ceci :

Lemme 8.9. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien régulier de dimension 1, G *un* S*-préschéma en groupes* plat et localement de type fini*, tel que* G_η *soit* lisse *sur* $\kappa(\eta)$ *pour tout point maximal* η *de* S (*ce qui implique que* G *est* réduit)*. Supposons que le schéma normalisé* X *de* G *soit* fini *sur* G (*c'est le cas, d'après Nagata, si* S *est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet,* cf. EGA IV_2, 7.7.4)*, et soit* G' *l'ouvert de* X *formé des points en lesquels* X *est* lisse sur S*. Avec ces notations :*

a) *Si la projection* $G' \to S$ *est surjective, alors il existe sur* G' *une unique structure de* S*-préschéma en groupes, telle que le morphisme canonique* $G' \to G$ *soit un homomorphisme de groupes.*

b) *Supposons que pour tout point fermé* s *de* S*, l'ensemble des points de* G_s^0 *par lesquels passe une quasi-section étale soit dense dans* G_s^0 *pour la topologie de Zariski. Alors* X *est régulier, on est sous les conditions de* a)*, et l'application* $\Gamma(G'/S) \to$ 124
$\Gamma(G/S)$ *est bijective.*

Dans le cas qui nous intéresse, ce lemme s'applique et nous donne un homomorphisme de groupes $u : G' \to G$, où G' est lisse sur S, et où u_η est un isomorphisme

(*) En vertu du th. de Raynaud $\mathrm{VI_B}$ 5.3.

(73) N.D.E. : cf. la N.D.E. (62) dans 8.5.

(74) N.D.E. : revoir la phrase précédente ...

$G'_\eta \xrightarrow{\sim} G_\eta$. Quitte à remplacer G' par un sous-groupe ouvert, on peut supposer que G'_0 est connexe, et comme $u_0 : G'_0 \to G_0$ induit un morphisme surjectif $G'_0 \to T_0$, où T_0 est un tore de même dimension que G'_0, on conclut facilement que G'_0 est un tore (par exemple en utilisant 8.6, ou en référant à *Bible*, § 7.3, th. 3 a)). Par suite, en vertu de 8.2 G' est un tore, mais alors en vertu de IX 6.8, $\operatorname{Ker} u$ est un sous-groupe de type multiplicatif de G', et comme sa fibre générique est réduite au groupe unité, c'est le groupe unité, donc u est un *monomorphisme*. Utilisant maintenant VIII 7.9 il s'ensuit que u est une *immersion*. Étant surjective, et G étant réduit, il s'ensuit que u est un isomorphisme, ce qui achève de prouver 8.8.

Reste à prouver 8.9. Pour prouver a), notons que l'unicité de la loi de groupe sur G' rendant $u : G' \to G$ un homomorphisme de groupes est claire, puisqu'on connaît la loi de groupe de G' sur la fibre générique (supposant S irréductible, ce qui est loisible). Pour l'existence, on se ramène aisément au cas où S est local, spectre d'un anneau de valuation discrète A, et grâce à l'unicité, et du fait que l'opération de clôture intégrale commute à une extension étale de la base, on peut faire sur S des extensions étales de la base, ce qui nous ramène au cas où A est « strictement local » i.e. hensélien et à corps résiduel séparablement clos La même réduction s'applique pour b), mais dans l'hypothèse faite dans b), on peut maintenant remplacer « quasi-section étale » par « section ».

Notons que G' étant lisse sur S et X normal, $G' \times_S X$ est normal (car lisse sur X qui est normal), donc le morphisme composé $G' \times_S X \to G \times_S G \to G$ se factorise en

$$p : G' \underset{S}{\times} X \longrightarrow X.$$

125 Prouvons que ce dernier morphisme induit sur l'ouvert $G' \times_S G'$ de $G' \times_S X$ un morphisme

$$G' \underset{S}{\times} G' \longrightarrow G'.$$

Il faut donc montrer que $G'_0 \times_k G'_0$ est appliqué dans l'ouvert G'_0 de X_0, il suffit de voir que pour tout point g'_0 de G'_0 à valeurs dans k, le morphisme

$$\text{(x)} \qquad h'_0 \longmapsto p_0(g'_0, h'_0)$$

de G'_0 dans X_0 est à valeurs dans G'_0. Or comme G' est lisse sur S et S est hensélien, tout g'_0 comme dessus est induit par une section g' de G' sur S, et on constate tout de suite que le morphisme (x) ci-dessus est alors induit par le morphisme $h' \mapsto p(g', h')$ de G' dans X, lui-même déduit par transport de structure de l'automorphisme $h \mapsto g \cdot h$ de G, translation à gauche par la section g de G image de g'. Donc $h' \mapsto p(g', h')$ est lui-même un *automorphisme* de X, donc applique G' dans G', ce qui prouve notre assertion.

Reste à prouver que la loi de composition ainsi obtenue dans G' est une loi de groupe. L'associativité résulte aussitôt de l'associativité de la fibre générique (isomorphe à celle de G). D'autre part, l'automorphisme de symétrie du S-préschéma G induit un automorphisme de X, qui laisse donc G' stable et induit un automorphisme σ de G'. On constate alors que ce dernier a les propriétés d'un inverse pour la loi de composition sur G', car cela revient encore à la vérification de la commutativité de certains diagrammes faisant intervenir des puissances fibrées de G' sur S, et celles-ci étant lisses sur S, il suffit d'en vérifier la commutativité sur la fibre générique, ce qui est clair. Cela prouve la partie a) de 8.9.

Prouvons b). Soit Z' l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathscr{O}_{X,x}$ soit non régulier, c'est une partie fermée en vertu d'un théorème de Nagata (EGA IV_2, 6.12.6), évidemment **126**
contenue dans X_0, soit Z son image dans G, qui est donc une partie fermée de G_0. Alors Z est une *partie rare* de G_0, i.e. ne contient aucun point maximal y de G_0. En effet, comme G_0 est défini dans G par une équation $t = 0$ (où t est une uniformisante de l'anneau de valuation discrète A), $\mathscr{O}_{G,y}$ est de dimension 1 par le Hauptidealsatz, donc pour tout x de X au-dessus de y, $\mathscr{O}_{X,x}$ est de dimension 1, donc un anneau de valuation discrète puisque X est normal donc régulier en codimension 1. D'autre part, il est évident que pour toute section g de G sur S, Z' est stable sous l'automorphisme de X défini par transport de structure à partir de la translation à gauche par g dans G, donc Z est stable par la translation à gauche dans G_0 définie par g_0. Or par hypothèse l'ensemble de ces g_0 est dense dans G_0^0. Comme Z est stable par translation par ces g_0, et est un fermé rare, il s'ensuit aussitôt que $Z = \varnothing$, d'où $Z' = \varnothing$, donc X est *régulier.* Par suite, X *est lisse sur* S *en tout point par lequel passe une section.* Or toute section de G sur S se relève de façon unique en une section de X sur S donc de G' sur S. Il en est ainsi en particulier de la section unité, ce qui prouve que l'image de G' dans S est S i.e. qu'on est sous les conditions de (a). Cela achève la démonstration de 8.9 donc de 8.8.

9. Addenda

[75]

9.1. Ensembles simpliciaux, topos, groupoïdes, et espaces topologiques. —

Notations 9.1.1. — (1) Soit E un ensemble simplicial. On peut lui associer les objets suivants :

(2) un topos $T = E^{\sim}$, obtenu à partir des topos naturellement associés aux ensembles E_i, suivant le procédé décrit en [**Del74**], 6.3.1 (voir aussi [**Ill72**], VI.5.2 et SGA 4 VI.7) ;

(3) un groupoïde $G = \Pi(E)$, dont les objets sont les éléments de E_0 (les « sommets ») et les flèches sont définies dans [**GZ67**], II.7 ;

(4) un espace topologique $X = |E|$ (un complexe cellulaire), appelé « réalisation géométrique » (ou « topologique ») (cf. *loc. cit.*, III.1).

Remarquons qu'un faisceau sur T n'est rien d'autre qu'un ensemble simplicial au-dessus de E.

[75] N.D.E. : Cette section additionnelle a été rédigée par Fabrice Orgogozo (en suivant des indications d'Ofer Gabber).

9.2. Faisceaux localement constants ; données de descente. —

Définitions 9.2.1. — On appelle *faisceau localement constant* sur :

(1) un ensemble simplicial E, tout morphisme d'ensembles simpliciaux $E' \to E$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $e \in E_i$, les opérateurs face d induisent des isomorphismes $E'_e \xrightarrow{\sim} E'_{d(e)}$ entre les fibres (cf. [**AM69**], § 10) ;

(2) un topos T, tout objet F de T tel qu'il existe un épimorphisme $U \to 1$ et un isomorphisme $F \times U \simeq f^*I \times U$, où I est un ensemble et $f : T \to \mathbf{Ens}$ est le morphisme final (cf. SGA 4, IX.2) ;

(3) un groupoïde G, tout préfaisceau sur G, c'est-à-dire tout foncteur contravariant de G dans la catégorie des ensembles (cf. [**GZ67**], append. I.1.2) ;

(4) un espace topologique X, tout faisceau d'ensembles sur X, localement constant au sens usuel.

Enfin :

(5) on appelle *donnée de descente* sur un ensemble simplicial E la donnée d'un faisceau F sur $E_0^{\sim}$ (c'est-à-dire une fonction ensembliste sur E_0) et d'un isomorphisme $\alpha : p_1^*F \xrightarrow{\sim} p_2^*F$, où $p_1, p_2 : E_1^{\sim} \to E_0^{\sim}$ sont les morphismes (déduits des) faces, satisfaisant la relation de cocycle usuelle (cf. Exp. IV, 2.1 [(1)] et *infra*).

Les morphismes entre ces cinq types d'objets, ainsi que foncteurs images inverses associés, sont définis de façon évidente.

9.3. Quelques équivalences de catégories. — Soient E un ensemble simplicial et respectivement T, G et X le topos, le groupoïde et l'espace topologique associés.

Proposition 9.3.1. — *Les catégories des faisceaux localement constants sur* E, T, G, X *ainsi que la catégorie des données de descente sur* E *sont équivalentes.*

Esquisse de démonstration. — Notons de (1) à (5) les catégories d'objets définies dans le paragraphe précédent.

– (1)⇔(5). C'est un cas particulier de [**AM69**], 10.6 (voir aussi [**GZ67**], append. I.2.3, [**Fri82**], ?.5.6 ou [**Ill72**], VI.8.1.6). Une équivalence de catégories est donnée par le foncteur associant à l'objet $(E' \to E)$ la paire (E'_0, α) où E'_0 est considéré comme un faisceau sur E_0 et où α est l'unique isomorphisme $p_1^*E'_0 \xrightarrow{\sim} p_2^*E'_0$ dont la fibre en chaque $y \in E_1$ — d'images notées x_1 et x_2 par les deux projections — est donné par les isomorphismes $(E'_0)_{x_1} \xleftarrow{\sim} (E'_1)_y \xrightarrow{\sim} (E'_0)_{x_2}$.

– (5)⇔(3). Évident : l'une des deux relations définissant les morphismes dans le groupoïde G associé à E est une relation de cocycle.

– (1)⇔(4). Cf. [**GZ67**], append. I.3.2.1.

– (1)⇔(2). Il faut montrer qu'un objet au-dessus de E est un faisceau localement constant au sens simplicial si et seulement si il l'est en tant que faisceau sur $T = E^{\sim}$. Cela résulte du fait que les faisceaux localement constants $F_\bullet$ sur T ne sont autre que les faisceaux *cartésiens*, c'est-à-dire pour lesquels les flèches $([n] \to [m])^*F_m \to F_n$ sont des isomorphismes. Ce dernier point est un cas particulier d'un fait général sur

(1) PP : j'ai remplacé « FGA, Technique de descente I, 1.6 » par « Exp. IV, 2.1 ».

les topos simpliciaux joint au fait que tout faisceau sur $E_0^{\sim}$ est localement constant. (Voir aussi [**Ill72**], VI.8.1.6.)

C.Q.F.D.

Pour tout groupe H, les équivalences de catégories ci-dessus induisent des équivalences entre les catégories de H-*torseurs*, ces derniers étant des faisceaux localement constants munis d'une action de H, à fibres isomorphes à H agissant sur lui-même par translation.

9.4. Groupes et groupoïdes fondamentaux. — Il résulte des équivalences de catégories précédentes que pour tout groupe H et tout ensemble simplicial E, les ensembles de classes d'isomorphismes de H-torseurs $\mathrm{H}^1(\mathrm{E},\mathrm{H})$, $\mathrm{H}^1(\mathrm{E}^{\sim},\mathrm{H})$, $\pi_0(\mathrm{Hom}(\Pi(\mathrm{E}),\mathrm{BH}))$ et $\mathrm{H}^1(|\mathrm{E}|,\mathrm{H})$ sont naturellement en bijection. Rappelons que l'on note BH le groupoïde ponctuel associé à H et π_0 le foncteur associant à une catégorie l'ensemble des classes d'isomorphismes de ses objets.

De même, si e est un *point* de E, les équivalences précédentes induisent des bijections entre les ensembles de classes d'isomorphismes de H-torseurs *trivialisés sur* e, notés respectivement $\mathrm{H}^1(\mathrm{E}\text{ rel }e,\mathrm{H})$, $\mathrm{H}^1(\mathrm{E}^{\sim}\text{ rel }e^{\sim},\mathrm{H})$, $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Pi(\mathrm{E}),e),\mathrm{H})$ et $\mathrm{H}^1(|\mathrm{E}|\text{ rel }|e|,\mathrm{H})$. Rappelons que l'on note $\pi_1(\Pi(\mathrm{E}),e)$ le *groupe* $\mathrm{Isom}_{\Pi(\mathrm{E})}(e,e)$.
Pour H variable, ces foncteurs sont représentés, dans le cas connexe, par un groupe que l'on note $\pi_1(\mathrm{E},e)$. Le groupe $\pi_1(\mathrm{E},e)$ est isomorphe à $\pi_1(\Pi(\mathrm{E}),e)$ et $\pi_1(|\mathrm{E}|,|e|)$, ainsi donc qu'au groupe fondamental d'un ensemble simplicial tel que défini par Kan (cf. p. ex. [**May67**], 16.1 ou [**Ill72**], I.2.1.1). (Rappelons que l'ensemble $\mathrm{H}^1(\mathrm{E},\mathrm{H})$ est quant à lui isomorphe à l'ensemble $\mathrm{H}^1(\pi_1(\mathrm{E},e),\mathrm{H})$ des morphismes vers H *modulo conjugaison*, aussi noté $\mathrm{Hom\,ext}(\pi_1(\mathrm{E},e),\mathrm{H})$.)

9.5. Cônes. —

Définitions 9.5.1. — (1) Soit $f:\mathrm{E}'\to\mathrm{E}$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Rappelons (cf. par exemple [**Del74**], 6.3.1) que l'on note $\mathrm{C}(f)$ l'ensemble simplicial pointé dont l'ensemble sous-jacent en degré $n\geqslant 0$ est

$$\mathrm{E}_n \amalg \Big(\coprod_{i<n}\mathrm{E}'_i\Big)\amalg\star,$$

où $\star$ est un singleton. Nous laissons le soin au lecteur de définir les applications simpliciales, la définition des faces en rang inférieur ou égal à deux étant rappelée ci-après. (Voir aussi [**GZ67**], VI.2 pour une variante pointée.) La catégorie des faisceaux localement constants sur $\mathrm{C}(f)$ est équivalente à la catégorie des faisceaux localement constants sur E muni d'une trivialisation de l'image inverse sur E′. L'ensemble simplicial $\mathrm{C}(f)$ est naturellement pointé par $\star\to\mathrm{C}(f)$.

(2) Soit $f:\mathrm{T}'\to\mathrm{T}$ un morphisme de topos. Notons $\mathrm{C}(f)$ le topos dont les objets sont les quintuplets $\big(\mathrm{F},\mathrm{F}',\mathrm{A},\alpha:f^*\mathrm{F}\to\mathrm{F}',\beta:\mathrm{A}\to\Gamma(\mathrm{T}',\mathrm{F}')\big)$, où F (resp. F′) est un objet de T (resp. T′), A est un ensemble, et α (resp. β) est un morphisme dans T′ (resp. **Ens**). (Voir aussi [**Del80**], 4.3.4 et [**Ill72**], III.4 pour une variante de cette construction.) La catégorie des faisceaux localement constants sur $\mathrm{C}(f)$ est équivalente à la catégorie des faisceaux localement constants sur T munis d'une trivialisation de

l'image inverse sur T'. Le topos $\mathrm{C}(f)$ est naturellement pointé par le foncteur fibre envoyant le quintuplet $\big(\mathrm{F}, \mathrm{F}', \mathrm{A}, \alpha : f^*\mathrm{F} \to \mathrm{F}', \beta : \mathrm{A} \to \Gamma(\mathrm{T}', \mathrm{F}')\big)$ sur l'ensemble A.

(3) Soit $f : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ un morphisme de groupoïdes. Notons $\mathrm{C}(f)$ la colimite du diagramme
$$\mathrm{G} \leftarrow \mathrm{G}' \to \mathrm{B1}$$
où B1 est la catégorie ponctuelle (un objet, une flèche). La catégorie des faisceaux localement constants sur $\mathrm{C}(f)$ est équivalente à la catégorie des faisceaux localement constants sur G munis d'une trivialisation de l'image inverse sur G'.

(4) Soit $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ un morphisme d'espaces topologiques. Notons $\mathrm{C}(f)$ la colimite du diagramme
$$\star \leftarrow \mathrm{X}' \times \{0\} \to \mathrm{X}' \times [0,1] \leftarrow \mathrm{X}' \times \{1\} \to \mathrm{X}.$$
La catégorie des faisceaux localement constants sur $\mathrm{C}(f)$ est équivalente à la catégorie des faisceaux localement constants sur X muni d'une trivialisation de l'image inverse sur X'. L'espace topologique $\mathrm{C}(f)$ est naturellement pointé par $\star \to \mathrm{C}(f)$.

9.5.2. Données de descente sur le cône d'une application simpliciale.

Soient $f : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$ un morphisme d'ensembles simpliciaux et $\mathrm{C}(f)$ son cône (cf. *supra*, (1)). Utilisons la lettre p (resp. q, r) pour désigner les applications faces de E' (resp. E, $\mathrm{C}(f)$). Avant d'énoncer la proposition ci-dessous, explicitons les faces r en degré inférieur ou égal à deux en fonction de p et q. Par convention, p_{ij} (resp. p_i) est l'application face $\mathrm{E}'_2 = \mathrm{E}'_{\{1,2,3\}} \to \mathrm{E}'_1 = \mathrm{E}'_{\{1,2\}}$ (resp. $\mathrm{E}'_1 = \mathrm{E}'_{\{1,2\}} \to \mathrm{E}'_0 = \mathrm{E}'_{\{1\}}$) correspondant à l'application croissante $\{1,2\} \to \{1,2,3\}$ (resp. $\{1\} \to \{1,2\}$) d'image $\{i,j\}$ (resp. $\{i\}$)[2]. On adopte la même convention pour les faces de E et $\mathrm{C}(f)$.
Le morphisme
$$r_1 : \mathrm{C}(f)_1 = \mathrm{E}_1 \amalg \mathrm{E}'_0 \amalg \star \to \mathrm{C}(f)_0 = \mathrm{E}_0 \amalg \star$$
(resp. r_2) est :

– $q_1 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_0$ (resp. $q_2 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_0$) sur E_1 ;
– $\mathrm{E}'_0 \to \star$ (resp. $f_0 : \mathrm{E}'_0 \to \mathrm{E}_0$) sur E'_0 ;
– $\star \to \star$ sur $\star$.

De même le morphisme
$$r_{21} : \mathrm{C}(f)_2 = \mathrm{E}_2 \amalg \mathrm{E}'_1 \amalg \mathrm{E}'_0 \amalg \star \to \mathrm{C}(f)_1 = \mathrm{E}_1 \amalg \mathrm{E}'_0 \amalg \star$$
(resp. r_{32}, r_{31}) est :

– $q_{21} : \mathrm{E}_2 \to \mathrm{E}_1$ (resp. q_{32}, q_{31}) sur E_2 ;
– $p_1 : \mathrm{E}'_1 \to \mathrm{E}'_0$ (resp. $f_1 : \mathrm{E}'_1 \to \mathrm{E}_1$, $p_2 : \mathrm{E}'_1 \to \mathrm{E}'_0$) sur E'_1 ;
– $\mathrm{E}'_0 \to \star$ (resp. $\mathrm{Id} : \mathrm{E}'_0 \to \mathrm{E}'_0$, $\mathrm{Id} : \mathrm{E}'_0 \to \mathrm{E}'_0$) sur E'_0.

Soit H une donnée de descente sur $\mathrm{C}(f)$, c'est-à-dire un faisceau H_0 sur $\mathrm{C}(f)_0 = \mathrm{E}_0 \amalg \star$ muni d'un isomorphisme $\gamma : r_1^*\mathrm{H}_0 \xrightarrow{\sim} r_2^*\mathrm{H}_0$ entre ses images inverses sur $\mathrm{C}(f)_1 = \mathrm{E}_1 \amalg \mathrm{E}'_0 \amalg \star$ satisfaisant la relation de cocycle $r_{31}^*\gamma = r_{32}^*\gamma \circ r_{21}^*\gamma$.

[2] Cette convention s'écarte de la norme simpliciale actuelle mais est plus proche des notations utilisées par Grothendieck dans sa théorie de la descente.

La restriction de l'isomorphisme γ à E_1 (resp. E'_0) est une donnée de descente $\beta : q_1^*\mathrm{G}_0 \xrightarrow{\sim} q_2^*\mathrm{G}_0$ où G_0 est la restriction de H_0 à E_0 (resp. une trivialisation t : $\underline{\mathrm{H}_0(\star)} \xrightarrow{\sim} f^*\mathrm{G}_0 =: \mathrm{F}_0$ où $\underline{\mathrm{H}_0(\star)}$ est le faisceau constant de tige $\mathrm{H}_0(\star)$). La restriction de la relation de cocycle satisfaite par γ à E_2 (resp. E'_1) est la relation de cocycle pour β (resp. $p_2^*(t) = f_1^*(\beta) \circ p_1^*(t)$). Cette dernière relation signifie que la trivialisation t est compatible à la donnée de descente $f_1^*(\beta)$ induite par β sur F_0. Il en résulte :

Proposition 9.5.3. — *Soient $f : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$ un morphisme d'ensembles simpliciaux et $\mathrm{C}(f)$ son cône, pointé par $\star$. La catégorie des données de descente sur $\mathrm{C}(f)$ trivialisées sur $\star$ est équivalente à la catégorie des données de descentes sur E munies d'une trivialisation de la donnée de descente induite sur E'.*

9.6. Représentabilité du foncteur $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; -)$. — Les notations sont celles de la page 90 et l'*on suppose dorénavant les composantes connexes de* $\mathrm{S}_0 = \mathrm{S}'$ *et* $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *ouvertes.* Sous cette hypothèse, on a la description combinatoire explicite suivante, qui résulte immédiatement des rappels ci-dessus.

Proposition 9.6.1. — *Pour tout groupe G, l'ensemble $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$ des classes d'isomorphismes de données de descentes munies d'une trivialisation au-dessus de ξ est en bijection naturelle avec l'ensemble de cohomologie non abélienne relative $\mathrm{H}^1(\mathrm{K} \operatorname{rel} k, \mathrm{G}) := \mathrm{H}^1(\widetilde{\mathrm{K}} \operatorname{rel} \star, \mathrm{G})$.*

Il en résulte que ce foncteur est représentable par un groupe, noté $\pi_1(\mathrm{K}, k)$ (le « groupe fondamental relatif »), dès lors que l'ensemble simplicial $\widetilde{\mathrm{K}} = \mathrm{C}(k \to \mathrm{K})$ est *connexe*. On vérifie immédiatement qu'il en est ainsi si et seulement si l'application $\pi_0(k) \to \pi_0(\mathrm{K})$ est *surjective*. Il suffit en particulier que l'ensemble simplicial K soit connexe. Comme indiqué dans le texte, c'est le cas si le schéma S est connexe et le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est universellement submersif.

9.7. Contractabilité de k, contre-exemple à l'injectivité de $k_\bullet \to \mathrm{K}_\bullet$. — Les deux propositions suivantes précisent la N.D.E. (53).

Proposition 9.7.1. — *Soient κ un corps algébriquement clos, et X un κ-schéma* connexe. *Pour tout entier $i \geqslant 0$, notons X_i la puissance fibrée $(i+1)$-ème de X sur κ. Pour tout entier $i \geqslant 0$, l'application canonique*

$$\pi_0(\mathrm{X}_i) \to \pi_0(\mathrm{X})^{i+1}$$

est une bijection. *En particulier, l'ensemble simplicial $\pi_0(\mathrm{X}_\bullet)$ est* contractile.

Il suffit de démontrer le lemme suivant, qui résulte par passage à la limite de la formule de Künneth. [Détailler ?]

Lemme 9.7.2. — *Soient κ un corps algébriquement clos et X, Y deux κ-schémas* connexes. *Alors, le produit fibré $\mathrm{X} \times_\kappa \mathrm{Y}$ est connexe.*

Proposition 9.7.3. — *Soient X un schéma* connexe, *$\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ un morphisme fini étale et $\overline{x}$ un point géométrique de X localisé en un point x. Le morphisme canonique $\pi_0(\mathrm{X}'_{\overline{x}}) \to \pi_0(\mathrm{X}')$ est* surjectif.

En effet, toute composante connexe de X' est d'image un ouvert-fermé de X donc rencontre la fibre X'_x. Le morphisme $\pi_0(X'_x) \to \pi_0(X')$ est donc surjectif, de même que le morphisme $\pi_0(X'_{\overline{x}}) \to \pi_0(X'_x)$.

Bibliographie

(76)

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV, Hermann, 1961, Masson, 1985, Springer-Verlag, 2006.

[BEns] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chap. I-IV, Hermann, 1970.

[Pes66] C. Peskine, *Une généralisation du « Main Theorem » de Zariski*, Bull. Sci. Math. **90** (1966), 119-127.

[PY06] G. Prasad, J.-K. Yu, *On quasi-reductive group schemes*, J. Alg. Geom. **15** (2006), 507-549.

[Ray70] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lect. Notes Maths. **169**, Springer-Verlag, 1970.

[AM69] M. Artin & B. Mazur, *Etale homotopy*, Lect. Notes Maths **100**, Springer, 1969.

[Del74] P. Deligne, *Théorie de Hodge* III, Publ. Math. IHÉS **44** (1974), 5-77.

[Del80] P. Deligne, *La conjecture de Weil* II, Publ. Math. IHÉS **52** (1980), 137-252.

[Fri82] E. M. Friedlander, *Etale homotopy of simplicial schemes*, Princeton Univ. Press, 1982.

[GZ67] P. Gabriel & M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer, 1967.

[Ill72] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations* I & II, Lect. Notes Maths **239** & **283**, Springer, 1971 & 1972.

[Kan58] D. Kan, *A combinatorial definition of homotopy groups*, Ann. of Math. **67** (1958), 282-312.

[May67] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Univ. of Chicago Press, 1967.

(76) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé ; les références [AM69] et suivantes concernent l'Addenda.

EXPOSÉ XI

CRITÈRES DE REPRÉSENTABILITÉ. APPLICATIONS AUX SOUS-GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF DES SCHÉMAS EN GROUPES AFFINES

par A. Grothendieck

0. Introduction

Comme nous en avons déjà vu des exemples dans Exp. X, N^{os} 4, 5, la représen- **127**
tabilité de certains foncteurs, tels certains foncteurs du type $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et diverses variantes, joue un rôle important dans nombre de questions concernant les préschémas en groupes.

Parmi les résultats particulièrement utiles dans cette théorie, signalons (en plus des questions de représentabilité de quotients, étudiées dans les exposés V et VI et dans Exp. VIII 5) la question de la représentabilité des foncteurs de la forme $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X}$ (Y un sous-objet de X) étudiée dans Exp VIII 6 dans un cas très élémentaire, dont on donnera des variantes dans le N°6 du présent exposé ; ces résultats nous fournissent la représentabilité de divers centralisateurs, normalisateurs, transporteurs.

Des critères de représentabilité moins élémentaires, utilisant des résultats qui figureront dans EGA VI, sont indiqués dans 6.12 et dans les Exp XV, XVI où on donnera un critère de représentabilité de quotients G/H dans des cas non couverts par les exposés antérieurs (critère qui n'a pas été développé dans les exposés oraux).

Notre objet principal dans le présent exposé est la démonstration des théorèmes 4.1 et 4.2, qui fournissent un exemple typique de technique de construction non projective (proche de celle qui sera développée dans EGA VI). Il est d'ailleurs apparu, depuis l'exposé oral et la rédaction du texte actuel, que les hypothèses affines faites dans 4.1 **128**
et 4.2 peuvent être éliminées dans une large mesure (cf. XV), et que d'autre part on peut, pour l'essentiel de la théorie développée dans l'exposé suivant, se passer de 4.1 et 4.2. Il pourrait enfin être intéressant de prouver l'analogue de ces résultats pour un préschéma en groupes réductif (par exemple semi-simple) général au lieu d'un groupe de type multiplicatif, auquel cas 4.1 et 4.2 seront sans doute le résultat clef pour la démonstration.

---

(0) version xy du 5/12/08

1. Rappels sur les morphismes lisses, étales, non ramifiés

Le lecteur est référé à EGA IV § § 17 & 18, et en attendant sa publication, à SGA 1 I, II, III (où il y a lieu cependant de remplacer certaines hypothèses noethériennes, gênantes dans les applications, par des hypothèses de présentation finie).

Définition 1.1. — Soient S un préschéma, F un foncteur $(\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$. On dit que F est *formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié* [(*)], resp. *formellement étale*) si pour tout S-préschéma S′, affine (au sens absolu), et tout sous-schéma S'_0 de S′ défini par un idéal nilpotent $\mathscr{J}$, l'application

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}') \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{S}'_0)$$

est surjective (resp. injective, resp. bijective). Un préschéma X sur S est dit formellement lisse sur S (resp. formellement non ramifié sur S, resp. formellement étale sur S), si le foncteur correspondant est formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale) ; on dit que X est *lisse sur* S (resp. *non ramifié sur* S, resp. *étale sur* S), s'il vérifie la condition précédente et si de plus X est localement de présentation finie sur S.

129 L'intérêt de ces définitions pour X réside dans le fait que d'une part, elles s'expriment de façon remarquablement simple en termes du foncteur représenté par X (et en pratique, X est souvent donné comme l'objet sur S représentant un foncteur explicité), et que d'autre part elles s'expriment également par des propriétés remarquables concernant la structure locale de X, que nous allons rappeler dans les énoncés suivants (pour la démonstration nous renvoyons à *loc. cit.*).

Proposition 1.2. — *Soit* X *un préschéma localement de présentation finie sur* S. *Alors :*

(i) *Pour que* X *soit lisse sur* S, *il faut et il suffit que* X *soit plat sur* S, *et que ses fibres géométriques* $\mathrm{X}\otimes_{\mathrm{S}}\mathrm{Spec}(\overline{\kappa(s)})$ *soient des schémas réguliers. Plus généralement, pour que* X *soit lisse sur* S *dans un voisinage du point* $x \in \mathrm{X}$, (*on dit alors que* X *est lisse sur* S *en* x), *il faut et il suffit que* X *soit plat sur* S *en* x *et* X_s *soit lisse sur* $\kappa(s)$ *en* x, *i.e.* $\mathrm{X}_s\otimes_{\kappa(s)}\overline{\kappa(s)}$ *soit régulier en les points* (*ou simplement, un point*) *au-dessus de* x.

(ii) *Supposons* S *donc* X *localement noethérien, soit* $x \in \mathrm{X}$ *et* $s \in \mathrm{S}$ *son image dans* S, *alors la nature lisse de* X *sur* S *en* x *se reconnaît sur l'homomorphisme local* $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s} \to \mathrm{B} = \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *d'anneaux locaux noethériens,* (*ou même sur l'homomorphisme local* $\widehat{\mathrm{A}} \to \widehat{\mathrm{B}}$ *de leurs complétés*), *par la propriété caractéristique suivante :* B *est plat sur* A, *et* $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}} k$ *est* géométriquement régulier *sur* k (*le corps résiduel de* A), *i.e. pour toute extension finie* k' *de* k, $(\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}} k)\otimes_k k' = \mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}} k'$ *est un anneau semi-local régulier. Lorsque l'extension résiduelle* $k(\mathrm{B})/k(\mathrm{A})$ *est triviale, ces conditions équivalent aussi à la suivante :* $\widehat{\mathrm{B}}$ *est isomorphe comme* $\widehat{\mathrm{A}}$*-algèbre à une algèbre de séries formelles* $\widehat{\mathrm{A}}[[t_1, \dots, t_n]]$.

[(*)] On dira plutôt maintenant « net » au lieu de « non ramifié ».

Ainsi, du point de vue « formel », la structure de X sur S est celle de *l'espace affine type* $S[t_1, \ldots, t_n]$ *sur* S.

Proposition 1.3. — *Soit* X *un préschéma localement de présentation finie sur* S. *Alors :* 130

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X *est non ramifié sur* S.

b) *Le morphisme diagonal* $X \to X \times_S X$ *est une immersion ouverte.*

c) $\Omega^1_{X/S} = 0$.

d) *Les fibres géométriques de* X/S *sont discrètes réduites, i.e. isomorphes à des sommes de copies du corps de base.*

e) *Pour tout* $s \in S$, *la fibre* $X \otimes_S \operatorname{Spec} \kappa(s) = X_s$ *est non ramifiée sur* $\kappa(s)$, *ou encore est isomorphe à une somme de spectres d'extensions finies séparables de* $\kappa(s)$.

(ii) *On a des conditions analogues de nature ponctuelle pour que* X *soit non ramifié sur* S *en un point donné* x (*i.e. dans un voisinage du dit point*) *par exemple il faut et il suffit que* $\mathscr{O}_{X_s,x}$ *soit une extension finie séparable de* $\kappa(s)$, *ce qui s'exprime aussi en termes de l'homomorphisme local* $A = \mathscr{O}_{S,s} \to B = \mathscr{O}_{X,x}$ *par la condition que* $B \otimes_A k$ *soit une extension finie séparable de* k (*corps résiduel de* A), *i.e.* $\mathfrak{r}(A)B = \mathfrak{r}(B)$ *et* $k(B)$ *est une extension finie séparable de* $k(A)$. *Lorsque* A *donc aussi* B *est noethérien, et* $k(A) \xrightarrow{\sim} k(B)$, *cela signifie aussi que* $\widehat{A} \to \widehat{B}$ *est surjectif.*

Ainsi, du point de vue « formel », dire que X est non ramifié sur S signifie que X est essentiellement un *sous-préschéma* de S. Observer aussi que les conditions d) et e) s'expriment uniquement en termes des fibres de X/S.

Proposition 1.4. — *Soit* X *un préschéma localement de présentation finie sur* S. *Pour que* X *soit étale sur* S, *il faut et il suffit qu'il soit lisse sur* S *et non ramifié sur* S (*trivial par définition*), *ce qui permet d'appliquer les critères* 1.2 *et* 1.3. *On trouve en particulier :*

(i) *Pour que* X *soit étale sur* S, *il faut et il suffit qu'il soit plat sur* S *et non ramifié sur* S. *Critère local analogue pour que* X *soit étale sur* S *en un point* x *donné.* 131

(ii) *Supposons de plus* S *donc* X *localement noethérien. Alors le fait que* X *soit étale sur* S *en un point* x *se reconnaît sur l'homomorphisme local* $A = \mathscr{O}_{S,s} \to B = \mathscr{O}_{X,s}$ (*et même sur l'homomorphisme local* $\widehat{A} \to \widehat{B}$) *par la propriété caractéristique suivante :* B *est plat sur* A, *et* $B \otimes_A k$ *est une extension finie séparable de* k (*corps résiduel* [1] *de* A). *Lorsque* $k(A) \xrightarrow{\sim} k(B)$, *cette condition signifie simplement que* $\widehat{A} \to \widehat{B}$ *est un isomorphisme.*

Ainsi, du point de vue « formel », dire que X est étale sur S signifie simplement que X est localement isomorphe à S.

Remarque 1.5. — Lorsque X est localement de présentation finie sur S, et qu'on se donne un point $x \in X$, alors le fait que X soit lisse (resp. non ramifié, resp. étale) sur S en x i.e. au voisinage de x, se reconnaît encore sur le *foncteur* X : $(\mathbf{Sch})^\circ_{/S} \to (\mathbf{Ens})$

[1] N.D.E. : on a remplacé « extension résiduelle » par « corps résiduel ».

par la propriété suivante : pour tout S' sur S, S' spectre d'un anneau local, tout sous-schéma S'_0 de S' défini par un idéal nilpotent, et tout S-morphisme $u_0 : S'_0 \to X$ appliquant le point fermé s' de S' en x, il existe au moins un (resp. au plus un, resp. exactement un) S-morphisme $u : S' \to X$ qui le prolonge. Cet énoncé montre en particulier que dans la définition 1.1 on peut se limiter à des S' qui sont des schémas locaux (à condition que le foncteur envisagé soit représentable par un préschéma localement de présentation finie sur S). D'autre part, lorsque S est localement noethérien, on peut même dans le critère ponctuel précédent se limiter à des S' qui sont des schémas locaux *artiniens*, et on peut donc faire la même restriction sur S' dans la définition 1.1 (sous réserve que S soit localement noethérien et le foncteur envisagé représenté par un préschéma localement de type fini sur S).

132 ***Remarque 1.6***. — Bien entendu, étant donné un morphisme $f : X \to Y$ de préschémas, on dira que f est lisse (resp. ...) si f fait de X un Y-préschéma lisse (resp. ...). Lorsque X et Y sont des S-préschémas et f un S-morphisme de présentation finie, alors ces propriétés sur f s'expriment de façon immédiate en termes du morphisme des foncteurs $F, G : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \to (\mathbf{Ens})$ défini par f : f est lisse (resp. non ramifié, resp. étale) si pour tout S-préschéma S', S' affine (au sens absolu), et tout sous-schéma S'_0 de S' défini par un idéal nilpotent $\mathscr{J}$, l'application

$$F(S') \longrightarrow F(S'_0) \underset{G(S'_0)}{\times} G(S')$$

déduite du carré commutatif

$$\begin{tikzcd} F(S') \arrow[r] \arrow[d] & G(S') \arrow[d] \\ F(S'_0) \arrow[r] & G(S'_0) \end{tikzcd}$$

est surjective (resp. injective, resp. bijective), i.e. pour tout carré commutatif de morphismes de foncteurs sur S (où S', S'_0 sont comme ci-dessus et $i : S'_0 \to S'$ est l'immersion canonique) :

$$\text{(Q)} \qquad \begin{tikzcd} S'_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u_0"] & S' \arrow[d, "v"'] \\ F \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

il existe au moins un (resp. au plus un, resp. exactement un) morphisme

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dl, "u"'] \\ F & \end{tikzcd}$$

133 rendant les deux triangles correspondants commutatifs :

$$u_0 = ui \quad \text{et} \quad v = fu.$$

Cette propriété pour un homomorphisme de foncteurs $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sur S garde un sens même si les foncteurs envisagés ne sont pas représentables ; on dira (si elle est vérifiée) que l'homomorphisme de foncteurs $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale). On notera qu'elle ne dépend que de l'homomorphisme des foncteurs $(\mathbf{Sch})^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ définis par F, G (cf. I 1.4.1), et pas des morphismes structuraux $\mathrm{F} \to \mathrm{S}$ et $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$. Une façon équivalente d'exprimer la définition précédente, plutôt plus maniable dans les applications, est la suivante : *le morphisme de foncteurs* $\mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *sur* S *est dit* formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale), *lorsque pour tout* S' *sur* S *et tout morphisme* $\mathrm{S}' \to \mathrm{G}$*, le foncteur* $\mathrm{F}' = \mathrm{F} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}'$ sur S' *est formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*).

Remarque 1.7. — Sous les conditions de 1.6, lorsqu'on se donne un « point de F » à valeurs dans un corps k, i.e. un élément x de $\mathrm{F}(\mathrm{Spec}(k))$ ou, ce qui revient au même, un morphisme $\mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{F}$, on dit de même que f est formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale) *en* x, si la condition de la définition qui précède est vérifiée chaque fois que S' est un schéma local et le morphisme $\mathrm{S}'_0 \to \mathrm{F}$ dans le diagramme (Q) ci-dessus est « compatible avec les points marqués » au sens suivant : si k' désigne le corps résiduel de S' et S'_0 en leur point fermé, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(k') \arrow[d, "j"'] & \mathrm{Spec}(k) \arrow[d, "x"] \\ \mathrm{S}'_0 \arrow[r, "u_0"] & \mathrm{F} \end{tikzcd}$$

(où $j : \mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{S}'_0$ désigne l'immersion canonique) peut être complété en un **134**
diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}(k'') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Spec}(k') \arrow[d] & & \mathrm{Spec}(k) \arrow[d] \\ \mathrm{S}'_0 \arrow[rr] & & \mathrm{F} \end{tikzcd} \quad ,$$

où k'' est le spectre d'un corps. Lorsque F, G sont représentables par des S-préschémas X, Y et que le S-morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est localement de présentation finie, cette condition signifie précisément (en vertu de 1.5) que $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est lisse au point de X image de $\mathrm{Spec}(k)$ par $x : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{X}$.

Remarque 1.8. — Lorsque la condition de la définition précédente est vérifiée en se bornant à des S' locaux artiniens, on dira que $\mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est *infinitésimalement lisse* (resp. *infinitésimalement non ramifié*, resp. *infinitésimalement étale*) *en* x, et on dit que $\mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est infinitésimalement lisse (resp. ...) si il l'est en tout point x, en d'autres termes si la condition envisagée dans 1.6 est vérifiée chaque fois que S' est local artinien. Cette variante des notions précédentes est techniquement utile, car elle est souvent de vérification plus commode, étant une notion plus faible, tout en étant suffisante fréquemment (par exemple si $F \to G$ est un morphisme localement de présentation finie, avec G représentable par un préschéma localement noethérien. . .) à entraîner la condition forte.

Les morphismes lisses de préschémas se comportent de façon remarquablement simple vis-à-vis du calcul différentiel. Nous nous bornons ici à rappeler la propriété suivante :

Proposition 1.9. — *Soit* $f : X \to S$ *un morphisme lisse de préschémas. Alors* $\Omega^1_{X/S}$ *est un module localement libre de type fini sur* X, *son rang en un point* $x \in X$ *est égal à la dimension de la fibre* X_s (*où* $s = f(x)$) *au voisinage du point* x.

135 On appelle cette dimension la *dimension relative* de X sur S en x. On notera qu'elle est nulle (lorsque f est lisse en x) si et seulement si f est étale en x. Cette dimension se calcule pratiquement encore en termes du foncteur F représenté par X, de la façon suivante. Soit ξ un point de F à valeurs dans un corps k, « localisé en x », i.e. un morphisme $\mathrm{Spec}(k) \to F = X$ dont l'image est x. Considérons l'algèbre $D(k) = k[t]/(t^2)$ des nombres duaux sur k, considérée comme un S-préschéma, et considérons l'application

$$F(D(k)) \longrightarrow F(k)$$

déduite de l'augmentation $D(k) \to k$, soit enfin $F(D(k), \xi)$ l'image inverse de $\xi \in F(k)$ par cette application. Alors cet ensemble est muni de façon naturelle d'une structure d'espace vectoriel sur k (en fait, c'est l'espace vectoriel dual de $\Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} k$), dont la dimension est la dimension relative de X sur S en x.

Pour expliciter la loi vectorielle sur $F(D(k), \xi)$, il y a intérêt à introduire plus généralement, comme dans l'exposé II, pour tout vectoriel V sur k, l'algèbre $D_k(V) = k + V$ (V idéal de carré nul), et de considérer $F(D_k(V), \xi)$, image inverse de ξ par $F(D_k(V)) \to F(k)$, comme un foncteur covariant en V, à valeurs dans (**Ens**). Il suffit alors que ce foncteur commute au produit de deux facteurs (ce qui signifie que F transforme certaines sommes amalgamées d'un type très particulier en produits fibrés, comparer exposé II, condition toujours vérifiée si F est représentable), pour conclure que les $F(D_k(V), \xi)$ et en particulier $F(D(k), \xi)$ sont munis de structures vectorielles sur k. On peut ainsi définir la dimension relative de F sur X en le « point » ξ, sous des conditions sensiblement plus larges que la représentabilité de F.

Dans le présent exposé, le fait que certains foncteurs que nous expliciterons soient représentables par des préschémas lisses sur S, nous servira surtout par l'intermédiaire du résultat suivant, qui sera pour nous l'intermédiaire technique pour passer de
136 constructions sur le *complété* de l'anneau local A d'un point s d'un schéma noethérien S, à un anneau local A′ sur A *étale sur* A, ce qui donnera en particulier un moyen pour passer de s aux points voisins :

Proposition 1.10. — *Soit* $f : X \to S$ *un morphisme lisse de préschémas,* s *un point de* S, *et* x *un point de* X *au-dessus de* s *tel que* $\kappa(x)$ *soit une extension finie séparable de* $\kappa(s)$. *Alors il existe un sous-schéma* S′ *de* S, *étale sur* S, *passant par* x. *Donc on* *peut trouver un morphisme étale* $S' \to S$*, un point* s' *de* S' *au-dessus de* s *d'extension résiduelle égale à* $\kappa(x)/\kappa(s)$ *et un* S*-morphisme* $S' \to X$ *appliquant* s' *dans* x*.*

Pour construire S', on prend simplement un système $g_1, \ldots, g_n$ de sections de $\mathscr{O}_X$ sur un voisinage de x, qui induisent en x un système régulier de paramètres de l'anneau local de la fibre X_s en x ; le sous-schéma S' défini par les g_i est alors étale sur S en x, et à condition de rapetisser S', il sera donc étale sur S.

Nous utiliserons 1.10 lorsque $\kappa(x) = \kappa(s)$, i.e. x est rationnel sur $\kappa(s)$ i.e. x peut être considéré comme une section de X_s au-dessus de $\mathrm{Spec}(\kappa(s))$. Alors 1.10 est dans la nature d'un théorème d'extension de sections (après extension étale de la base). Il prend une forme particulièrement simple dans le cas particulier suivant :

Corollaire 1.11. — *Sous les conditions de* 1.10 *supposons que* S *soit le spectre d'un anneau local* hensélien*, et que* $\kappa(x) = \kappa(s)$*. Alors il existe une section de* X *sur* S *passant par* x (*uniquement déterminée si* X *est même étale sur* S *en* x).

En effet, S étant hensélien, il s'ensuit sous les conditions de 1.10 que S' contient un sous-schéma ouvert qui est fini sur S et dont la fibre en s est réduite à x. Comme il est étale sur S, il s'ensuit qu'il est isomorphe à S, d'où la conclusion. – On notera que lorsque S est le spectre d'un anneau local *complet*, 1.10 ou 1.11 est plus ou moins l'équivalent du classique « *lemme de Hensel* », et il arrive qu'on y réfère par ce nom.

2. Exemples de foncteurs formellement lisses tirés de la théorie des groupes de type multiplicatif

137

Nous allons interpréter, dans le langage introduit au N° précédent, les résultats énoncés dans IX 3, concernant les extensions infinitésimales d'un homomorphisme d'un groupe de type multiplicatif (conséquences de la nullité de la cohomologie de Hochschild d'un tel groupe, établie dans l'Exposé I).

Proposition 2.1. — *Soient* S *un préschéma,* H *un groupe de type multiplicatif sur* S*,* G *un* S*-préschéma en groupes* lisse sur S*, considérons le foncteur sur* S

$$M_H = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H, G)$$

(*dont la valeur en* S' *sur* S *est l'ensemble des homomorphismes de* S'*-groupes de* $H_{S'}$ *dans* $G_{S'}$). *Ce foncteur est formellement lisse sur* S.

Cf. IX 3.6. Plus généralement :

Corollaire 2.2. — *Soient* S, G *comme ci-dessus, considérons un homomorphisme* $u : H_1 \to H_2$ *de schémas en groupes de type multiplicatif sur* S*, d'où avec les notations précédentes un morphisme de foncteurs sur* S *:*

$$M_{H_2} \longrightarrow M_{H_1} \quad (M_{H_i} = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H_i, G)),$$

donné par $w \mapsto w \circ u$*. Cet homomorphisme est formellement lisse.*

En effet, en vertu des définitions 1.6, ceci équivaut à l'énoncé suivant : lorsque S est affine, S_0 un sous-schéma défini par un idéal nilpotent, soit

$$v : H_1 \longrightarrow G$$

un homomorphisme de S-groupes, et

$$w_0 : (H_2)_{S_0} \longrightarrow G_{S_0}$$

138 un homomorphisme de S_0-groupes tel que $w_0 u_{S_0} = v_{S_0}$; il existe alors un homomorphisme de S-groupes

$$w : H_2 \longrightarrow G$$

prolongeant w_0, et tel que $wu = v$. Pour le voir, on commence par prolonger w_0 en un homomorphisme de S-groupes $w' : H_2 \to G$, ce qui est possible par 2.1, considérons alors $v' = w'u : H_1 \to G$, il est tel que $v'_{S_0} = v_{S_0}$ par hypothèse sur w_0, donc en vertu de VIII 3.6, il existe un élément g de G(S), dont l'image dans $G(S_0)$ est l'élément unité, et tel que $v = \mathrm{int}(g)v'$ d'où $v = (\mathrm{int}(g)w')u$, et il suffira donc de prendre $w = \mathrm{int}(g)w'$.

Corollaire 2.3. — *Avec les notations de* 2.1 *considérons* $M_H = M$ *comme un foncteur à groupe d'opérateurs* G (G *opérant par* $(v, g) \mapsto$ *int*$(g) \circ v$). *Alors le morphisme correspondant*

$$R : G \underset{S}{\times} M \longrightarrow M \underset{S}{\times} M$$

défini par $(g, v) \mapsto (\mathit{int}(g) \circ v, v)$ *est un morphisme formellement lisse.*

Moyennant un changement de base $S' \to S$, ceci équivaut à l'énoncé suivant :

Corollaire 2.4. — *Avec les notations de* 2.1, *soient* v_1, $v_2 : H \to G$ *deux morphismes de* S*-groupes, soit* $\underline{\mathrm{Transp}}(v_1, v_2)$ *le sous-foncteur de* G *formé des* g *tels que* $\mathit{int}(g) \circ v_1 = v_2$. *Alors ce foncteur est formellement lisse sur* S. *En particulier* (*si* $v_1 = v_2 = v$) *le foncteur* $\underline{\mathrm{Centr}}(v)$, *sous-groupe de* G *formé des* h *tels que* $\mathrm{int}(h)v = v$, *est formellement lisse sur* S.

139 (N.B. Le couple (v_1, v_2) peut être considéré comme une section sur S du deuxième membre dans le morphisme R de 2.3, et $\underline{\mathrm{Transp}}(v_1, v_2)$ comme le foncteur image inverse de ladite section par R). L'énoncé 2.4 lui-même équivaut au suivant : lorsque S est affine et que S_0 est un sous-schéma de S défini par un idéal nilpotent, pour tout $g_0 \in G(S_0)$ tel que $\mathrm{int}(g_0)(v_1)_{S_0} = (v_2)_{S_0}$, g_0 se prolonge en un $g \in G(S)$ tel que $\mathrm{int}(g)v_1 = v_2$. Pour le prouver, on commence par prolonger g_0 en une section g' de G sur S, ce qui est possible puisque G est lisse sur S, on pose $v'_2 = \mathrm{int}(g')v_1$, on note que v_2 et v'_2 ont même restriction au-dessus de S_0, donc par le résultat déjà invoqué IX 3.6 il existe un $g'' \in G(S)$, induisant la section unité sur S_0, et tel que $v_2 = \mathrm{int}(g'')v'_2$, d'où $v_2 = \mathrm{int}(g'')\,\mathrm{int}(g')v_1 = \mathrm{int}(g''g')v_1$, donc il suffit de prendre $g = g''g'$.

Proposition 2.1 bis. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S, *considérons le foncteur* $M : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \to (\mathbf{Ens})$ *:*

$$M(S') = \textit{ ensemble des sous-groupes de type multiplicatif de } G_{S'}.$$

Alors M *est formellement lisse sur* S.

Cf. IX 3.6 bis.

Corollaire 2.2 bis. — *Soit n un entier, et considérons le morphisme de foncteurs*

$$\varphi_n : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$$

défini par

$$\varphi_n(\mathrm{H}) = {}_n\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(n \cdot \mathrm{id}_\mathrm{H}).$$

Alors φ_n est un morphisme formellement lisse. Si pour tout entier $p > 0$, M_p désigne le sous-foncteur de M tel que $\mathrm{M}_p(\mathrm{S}')$ soit l'ensemble des sous-groupes de type multiplicatif H de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ tels que ${}_p\mathrm{H} = \mathrm{H}$, alors le morphisme induit par φ_n :

$$\mathrm{M}_{np} \longrightarrow \mathrm{M}_n$$

est formellement lisse. **140**

La deuxième assertion est trivialement contenue dans la première et n'est mise que pour la commodité d'une référence ultérieure. La démonstration de la première est analogue à celle de 2.2, en invoquant cette fois-ci IX 3.6 bis.

Corollaire 2.3 bis. — *Avec les notations de* 2.1 bis*, considérons* M *comme un foncteur à groupe d'opérateurs* G (G *opérant par* $(g, \mathrm{H}) \mapsto \mathrm{int}(g)(\mathrm{H})$). *Alors le morphisme correspondant*

$$\mathrm{R} : \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{M}$$

défini par $(g, v) \mapsto (\mathrm{int}(g)v, v)$ *est formellement lisse.*

Ceci équivaut à l'énoncé suivant :

Corollaire 2.4 bis. — *Avec les notations de* 2.1 bis*, soient* H_1, H_2 *deux sous-groupes de type multiplicatif de* G*, et soit* $\underline{\mathrm{Transp}}_\mathrm{G}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ *le sous-foncteur de* G *formé des g tels que* $\mathrm{int}(g)\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2$. *Alors ce foncteur est formellement lisse sur* S. *En particulier, si* $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = \mathrm{H}$*, le sous-foncteur* $\underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{H})$ *de* G*, normalisateur de* H*, est formellement lisse sur* S.

La démonstration est analogue à celle de 2.4, en invoquant encore IX 3.6 bis.

Proposition 2.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S, K *un sous-*S*-préschéma en groupes, lisse sur* S *ou de type multiplicatif,* H *un* S*-préschéma en groupes de type multiplicatif,* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S*-groupes, et désignons par* $\underline{\mathrm{Transp}}_\mathrm{G}(u, \mathrm{K})$ *le sous-foncteur de* G *dont la valeur, en un* S' *sur* S*, est formé des* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ *tels que* $\mathrm{int}(g)u_{\mathrm{S}'} : \mathrm{H}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *se factorise par* $\mathrm{K}_{\mathrm{S}'}$. *Alors ce foncteur est formellement lisse sur* S.

La démonstration est analogue à celle de 2.2, en invoquant IX 3.6 et X 2.1 (ce **141**
dernier dans le cas K de type multiplicatif).

3. Résultats auxiliaires de représentabilité

Proposition 3.1. — *Soit* F → S *un foncteur au-dessus du préschéma* S. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) F *est représentable, et* F → S *est une immersion ouverte* (*on dit aussi simplement que* F → S *est une immersion ouverte*).

(ii) F *est un faisceau pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, « commute aux limites inductives d'anneaux »,* F → S *est un monomorphisme, enfin la condition suivante est vérifiée : pour tout préschéma local* S' *au-dessus de* S, *de corps résiduel* k, *et tout* S*-morphisme* $\operatorname{Spec}(k) = S'_0 \to F$, *il existe un* S*-morphisme* $S' \to S$ *qui le prolonge.*

(iii) (*Lorsque* S *est localement noethérien*). F *est un faisceau pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, « commute aux limites inductives d'anneaux », « commute aux limites projectives adiques d'anneaux locaux artiniens »,* F → S *est un monomorphisme, et est infinitésimalement étale* (cf. 1.8).

Précisons d'abord deux points de terminologie.

Remarque 3.2. — On dit qu'un foncteur [(2)] F au-dessus de S « *commute aux limites inductives* (sous-entendu : filtrantes) *d'anneaux* » si pour tout système projectif filtrant $(S'_i)_{i\in I}$ de S-schémas affines au-dessus d'un ouvert affine de S, d'anneaux A'_i, l'homomorphisme naturel

$$(*) \qquad \varinjlim_i F(S'_i) \to F(S') \quad (\text{où } S' = \operatorname{Spec} A',\ A' = \varinjlim_i A'_i)$$

142 est bijectif. On notera que S' n'est autre que la limite projective de (S'_i) dans la catégorie des préschémas, (et même de tous les espaces annelés), donc la condition envisagée est dans la nature d'une condition d'*exactitude à droite* (commutation à certaines limites inductives dans $(\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S}$), tout comme la condition d'être un faisceau pour quelque topologie. On fera attention que la condition envisagée est essentiellement *relative*, i.e. fait intervenir le morphisme F → S et non seulement le foncteur $F : (\mathbf{Sch})^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$, de façon précise dans $(*)$ $F(S'_i)$ et $F(S')$ désignent $\operatorname{Hom}_S(S'_i, F)$, $\operatorname{Hom}_S(S', F)$. Ainsi, lorsque F est représentable, la condition envisagée signifie que F est localement de présentation finie sur S. (Et nous nous sommes servis à plusieurs reprises, dans les deux derniers exposés, du fait qu'un foncteur représenté par un S-préschéma localement de présentation finie commute aux limites inductives d'anneaux).

Remarque 3.3. — On dit qu'un foncteur [(2)] F au-dessus de S *commute aux limites projectives adiques d'anneaux locaux artiniens*, si pour tout S' au-dessus de S qui est spectre d'un anneau local noethérien complet A', posant $S'_n = \operatorname{Spec}(A'/\operatorname{rad}(A')^{n+1})$, l'application naturelle

$$(\mathrm{xx}) \qquad F(S') \longrightarrow \varprojlim_n F(S'_n)$$

[(2)] N.D.E. : contravariant

est bijective. On notera que cette condition, qui est dans la nature d'une condition d'exactitude à gauche, est *satisfaite chaque fois que* F *est représentable.* On voit facilement que, contrairement à la condition de commutation aux limites inductives d'anneaux, elle est intrinsèque à F en tant qu'élément de $\mathrm{Ob}(\widehat{\mathbf{Sch}})$, i.e. ne fait pas intervenir le morphisme $\mathrm{F} \to \mathrm{S}$.

Remarque 3.4. — Soit F un foncteur au-dessus de S qui soit un faisceau pour la topologie de Zariski, ou comme on dit encore, qui est « de nature locale ». (Il suffit pour ceci que F soit un faisceau pour une topologie plus fine, telle la topologie fidèlement plate quasi-compacte). Soit (S_i) un recouvrement de S par des ouverts, alors on vérifie facilement (par une méthode de recollement de morceaux) que F est représentable si **143**
et seulement si les $\mathrm{F}_i = \mathrm{F} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$ le sont, ce qui permet par exemple de se ramener au cas où S est affine. Supposons que le foncteur F de nature locale commute aux limites inductives d'anneaux. Alors, pour que F soit représentable, il faut et il suffit que sa restriction à la catégorie des préschémas localement de présentation finie sur S soit représentable. Le « il faut » a été signalé dans 3.2, le « il suffit » revient à ceci : si X est un préschéma localement de présentation finie sur S et $\mathrm{X} \to \mathrm{F}$ un morphisme tel que, pour tout S′ localement de présentation finie sur S, le morphisme induit

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{F})$$

est bijectif, alors $\mathrm{X} \to \mathrm{F}$ est un isomorphisme. Or ceci résulte facilement du fait que X et F sont deux foncteurs de nature locale qui commutent aux limites inductives d'anneaux.

Prouvons maintenant 3.1. Les implications (i) ⇒ (ii) et (i) ⇒ (iii) sont évidentes, prouvons les implications inverses.

On a (ii) ⇒ (i). Soit en effet U l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que le monomorphisme canonique $\mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to \mathrm{S}$ se factorise par F. En vertu de la dernière condition (ii), pour tout $s \in \mathrm{U}$, le monomorphisme canonique $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}) \to \mathrm{U}$ se factorise par F. Notant que $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ est la limite inductive des anneaux des voisinages affines de s, il résulte du fait que F commute aux limites inductives d'anneaux que pour tout $s \in \mathrm{S}$, il existe un voisinage ouvert U^s tel que l'immersion canonique $\mathrm{U}^s \to \mathrm{S}$ se factorise par F. Cela implique $\mathrm{U}^s \subset \mathrm{U}$, donc U *est ouvert.* Comme $\mathrm{F} \to \mathrm{S}$ est un monomorphisme, et F est de nature locale, les S-morphismes $\mathrm{U}^s \to \mathrm{F}$ se recollent dans les $\mathrm{U}^s \cap \mathrm{U}^{s'}$ $(s, s' \in \mathrm{U})$, donc proviennent d'un S-morphisme $\mathrm{U} \to \mathrm{F}$. Reste à prouver que c'est un isomorphisme, donc que tout S-morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{F}$ se factorise de façon unique par U (où S′ est un S-préschéma). Comme $\mathrm{F} \to \mathrm{S}$ et $\mathrm{U} \to \mathrm{S}$ est un monomorphisme, il revient au même de dire que le morphisme structural $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par U, ce qui nous ramène au cas où S′ est le spectre d'un corps, donc réduit à un seul point **144**
s'. Soit s le point de S au-dessous de s', je dis que le S-morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{F}$ se factorise par $\mathrm{Spec}(\kappa(s)) = \mathrm{S}_0 \to \mathrm{F}$, (ce qui implique $s \in \mathrm{U}$ et prouvera ce qu'on veut).

Il revient au même, puisque $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}_0$ est couvrant pour fpqc et F est un faisceau pour cette topologie, que les deux composés

$$\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}_0}{\times} \mathrm{S}' \rightrightarrows \mathrm{S}' \to \mathrm{F}$$

sont les mêmes, ce qui résulte du fait que $F \to S$ est un monomorphisme.

On a (iii) $\Rightarrow$ (ii) (lorsque S est localement noethérien). Il suffit de prouver la dernière condition de (ii), et d'ailleurs (en vertu de la démonstration précédente) il suffit de le faire lorsque S' est de la forme $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s})$, avec $s \in S$. Soient $A = \mathscr{O}_{S,s}$, $A_n = A/\mathfrak{m}^{n+1}$, $S_n = \mathrm{Spec}(A_n)$, alors il résulte de l'hypothèse que $F \to S$ est infinitésimalement lisse, que le morphisme donné $S_0 \to F$ se prolonge en des morphismes $S_n \to F$. Comme $F \to S$ est un monomorphisme, on obtient ainsi un élément de $\varprojlim_n F(S_n)$, et comme F commute aux limites projectives adiques d'anneaux locaux artiniens, les $S_n \to F$ proviennent d'un morphisme $\mathrm{Spec}(\widehat{A}) = \widehat{S'} \to F$. Comme $F \to S$ est un monomorphisme, F un faisceau pour fpqc, et $\widehat{S'} \to S'$ couvrant pour la dite topologie, ce morphisme $\widehat{S'} \to F$ se factorise par $S' \to F$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 3.5. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* $F \to S$ *un foncteur au-dessus de* S*,* $(X_i, u_i)_{i\in I}$ *une famille de* S*-morphismes* $u_i : X_i \to F$*, où les* X_i *sont des préschémas localement de type fini sur* S*. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

a) F *est un faisceau pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, commute aux limites inductives d'anneaux, commute aux limites projectives adiques d'anneaux locaux artiniens.*

145 b) *Les* $u_i : X_i \to F$ *sont des monomorphismes, et sont infinitésimalement étales* (cf. 1.8).

c) *La famille des* u_i *est « ensemblistement surjective ».*

Sous ces conditions, F *est représentable par un préschéma localement de type fini sur* S*, (et les* u_i *sont des immersions ouvertes, qui font de la famille des* X_i *un recouvrement ouvert de* F*).*

Remarque 3.6. — Procédant comme à la fin de la remarque 1.7, on définit, pour tout foncteur $F : (\mathbf{Sch})^\circ \to (\mathbf{Ens})$, un « ensemble sous-jacent » ens(F) comme un ensemble quotient de l'ensemble des points de F à valeurs dans des corps (pour la relation d'équivalence précisée dans 1.7). Lorsque F est représentable par X, on retrouve bien l'ensemble sous-jacent à X. Évidemment ens(F) dépend fonctoriellement de F, donc si $G \to F$ est un morphisme de foncteurs, on pourra dire que ce morphisme est ensemblistement surjectif si l'application induite $\mathrm{ens}(G) \to \mathrm{ens}(F)$ est surjective. Cela signifie donc aussi que tout point de F à valeurs dans un corps k « provient » d'un point de G à valeurs dans une extension convenable de k. Cette définition s'étend aussitôt au cas d'une famille de morphismes $G_i \to F$, ce qui précise la signification de c).

Prouvons 3.5. Pour ceci, introduisons pour $(i, j) \in I \times I$

$$X_{i,j} = X_i \underset{F}{\times} X_j,$$

et considérons les projections

$$v_{i,j} : X_{i,j} \longrightarrow X_i \quad \text{et} \quad w_{i,j} : X_{i,j} \longrightarrow X_j.$$

Je dis que ces dernières sont *représentables par des immersions ouvertes*. Pour le voir, on applique le critère 3.1 (iii) : $X_{i,j}$ satisfait aux trois conditions d'exactitude (être un faisceau, commuter aux $\varinjlim$ d'anneaux et aux $\varprojlim$ adiques d'anneaux locaux artiniens), car F, X_i, X_j y satisfont, et ces conditions sont stables par limites projectives finies, 146
en particulier par produits fibrés ; comme $X_i \to F$ est un monomorphisme, de même $v_{i,j} : X_{i,j} \to X_i$ qui s'en déduit par changement de base $X_j \to F$, et de façon symétrique $v_{j,i}$ est un monomorphisme ; enfin la condition « infinitésimalement étale » se conserve également par changement de base. Cela prouve qu'on est sous les conditions 3.1 (iii).

Nous pouvons utiliser maintenant les X_i, $X_{i,j}$, $v_{i,j}$ et $w_{i,j}$ pour construire à la façon habituelle un S-préschéma X, tel que les X_i s'identifient à des ouverts de X, les $X_{i,j}$ aux intersections $X_i \cap X_j$ et les $v_{i,j}$, $w_{i,j}$ aux immersions canoniques. Notons que X est aussi le quotient de

$$\mathbf{X} = \coprod_i X_i$$

par la relation d'équivalence $R = \coprod_{i,j} X_{i,j}$ (les deux projections v, $w : R \rightrightarrows Y$ étant définies par les $v_{i,j}$ resp. les $w_{i,j}$). De façon précise, F étant un faisceau pour fpqc, les $u_i : X_i \to F$ proviennent d'un $\mathbf{u} : \mathbf{X} \to F$, et R n'est autre que la relation d'équivalence définie par $\mathbf{u}$, $R = \mathbf{X} \times_F \mathbf{X}$, enfin le quotient $X = Y/R$ est aussi un quotient dans la catégorie des faisceaux pour fpqc (et même, dans la catégorie des faisceaux pour la topologie de Zariski) : il suffit d'utiliser les définitions de « quotient » et de « faisceau » pour s'en convaincre. Par suite, $\mathbf{u}$ se factorise de façon unique par un morphisme

$$u : X \longrightarrow F,$$

et ce morphisme est un *monomorphisme*. Reste à montrer que c'est un isomorphisme. Comme F est de nature locale, on peut supposer S affine, et comme de plus F commute aux limites inductives d'anneaux, il suffit de vérifier que pour tout T affine de type fini sur S, tout morphisme $T \to F$ se factorise par X, (cf. 3.4). Pour ceci, considérons $G = X \times_F T \to T$, il suffit de prouver que c'est un isomorphisme. Or, T étant noethérien, on voit comme ci-dessus que c'est une immersion ouverte (N.B. $X \to F$ est infinitésimalement étale, comme il résulte aussitôt du fait que les morphismes induits $u_i : X_i \to F$ le sont). Or par hypothèse $X \to F$ est ensemblistement surjectif, et on voit tout de suite que c'est là une condition stable par changement de base, 147
donc $G \to T$ est ensemblistement surjectif, donc un isomorphisme puisque c'est une immersion ouverte. C.Q.F.D.

Proposition 3.7. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* I *un ensemble d'indices filtrant croissant,* $(T_i)_{i\in I}$ *un système projectif de* S*-préschémas localement de type fini,* $T = \varprojlim T_i$ *le foncteur limite projective,* F *un foncteur sur* S, $u : F \to T$ *un* S*-morphisme. On suppose les conditions suivantes satisfaites :*

a) F *est un faisceau pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, commute aux limites inductives d'anneaux, et aux limites projectives adiques d'anneaux locaux artiniens.*

b) *Le morphisme* $u : F \to T$ *est un monomorphisme.*

b′) *Le morphisme* $u : \mathrm{F} \to \mathrm{T}$ *est infinitésimalement étale.*

c) *Pour tout point* ξ *de* F *à valeurs dans le spectre d'un corps* k, *désignant par* $\xi_i \in \mathrm{T}_i(\mathrm{Spec}(k))$ *son image et par* t_i *l'élément correspondant de* T_i, *il existe un* $i \in \mathrm{I}$ *tel que pour* $j \geqslant i$ *le morphisme de transition* $p_{i,j} : \mathrm{T}_j \to \mathrm{T}_i$ *soit étale en* t_j.

d) *Pour tout préschéma* X *localement de type fini sur* S, *et tout* S*-morphisme* $\mathrm{X} \to \mathrm{F}$, *l'ensemble des* $x \in \mathrm{X}$ *en lesquels ce morphisme est infinitésimalement étale est ouvert.*

Sous ces conditions, F *est représentable par un préschéma localement de type fini sur* S.

Notons tout de suite que dans le cas qui nous occupera au N°suivant, on vérifiera les conditions c) et d) par l'intermédiaire du corollaire suivant :

Corollaire 3.8. — *Moyennant* a), b), b′), *les conditions* c) *et* d) *sont impliquées par les suivantes :*

148 c′) *Les* T_i *sont lisses sur* S, *et les morphismes de transition* $p_{i,j} : \mathrm{T}_j \to \mathrm{T}_i$ *sont lisses.*

d′) *Pour tout point* ξ *de* F *à valeurs dans le spectre d'un corps* k, *soit* $t_i(\xi)$ *l'élément de* T_i *défini par* ξ, $d_i(\xi)$ *la dimension relative de* T_i *sur* S *en* $t_i(\xi)$, *et* $d(\xi) = \mathrm{Sup}\ d_i(\xi)$. *Alors :*

1°) *pour tout* ξ *comme dessus, on a* $d(\xi) < +\infty$, *et*

2°) *pour tout préschéma* X *localement de type fini sur* S, *et tout* S*-monomorphisme* $v : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$, *la fonction* $x \mapsto d(\xi_x)$ *sur* X *est localement constante,* (*où pour* $x \in \mathrm{X}$, *on désigne par* ξ_x *le point de* F *à valeurs dans* $\kappa(x)$ *induit par* v).

Démontrons 3.7. Plaçons-nous dans les conditions de c), soit t l'élément de ens(F) défini par ξ (cf. 3.6) et posons

$$\mathscr{O}_t = \varinjlim_i \mathscr{O}_{\mathrm{T}_i, t_i}.$$

Alors utilisant la condition énoncée dans c), on voit facilement que $\mathscr{O}_t$ est un anneau local *noethérien* (EGA 0_{IV} 10.3.1.3). Son corps résiduel $\kappa(t)$ est limite inductive des corps résiduels $\kappa(t_i)$, et k en est une extension. Si η désigne le spectre de $\kappa(t)$, ξ celui de k, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{F} \arrow[d] \\ \eta \arrow[r] & \mathrm{T} \end{tikzcd} \qquad ,$$

dont la définition est évidente et laissée au lecteur. Comme $\xi \to \eta$ est couvrant pour la topologie fpqc, que F est un faisceau pour ladite en vertu de a), et $\mathrm{F} \to \mathrm{T}$ un monomorphisme en vertu de b), on voit aussitôt que le morphisme $\eta \to \mathrm{T}$ se factorise
149 (de façon unique) en un morphisme $\eta \to \mathrm{F}$. Notons maintenant le

Lemme 3.9. — *Sous les conditions de* 3.7, *soient* $\mathrm{T}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *un schéma local noethérien,* $\mathrm{T}'_0 = \mathrm{Spec}(k(\mathrm{A}))$, $i : \mathrm{T}'_0 \to \mathrm{T}'$ *l'immersion canonique, et supposons donné un carré commutatif de morphismes*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}'_0 \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{F} \arrow[d] \\ \mathrm{T}' \arrow[r] & \mathrm{T} \end{tikzcd} \quad .$$

Alors il existe un T*-morphisme unique* $\mathrm{T}' \to \mathrm{F}$.

La démonstration est celle de 3.1 (iii) $\Rightarrow$ (ii) (où le fait que le S de l'énoncé cité soit représentable n'a pas servi), en utilisant que F est un faisceau pour la topologie fpqc, commute aux limites projectives adiques d'anneaux locaux artiniens (en l'occurrence les $\mathrm{A}/\mathrm{rad}(\mathrm{A})^{n+1}$) et que $\mathrm{F} \to \mathrm{T}$ est un monomorphisme et est infinitésimalement étale.

Nous appliquerons le lemme 3.9 au cas où $\mathrm{T}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_t)$, donc $\mathrm{T}'_0 = \mathrm{Spec}(\kappa(t))$, en notant que nous venons de construire $\mathrm{T}'_0 \to \mathrm{F}$, et que les homomorphismes canoniques $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_i,t_i} \to \mathscr{O}_t$ définissent un système projectif de morphismes $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_t) \to \mathrm{T}_i$, d'où un morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_t) \to \mathrm{T}$. La commutativité du carré correspondant (x) est triviale (car par définition de T, il suffit de la vérifier avec T remplacé par T_i), d'où un unique T-morphisme

$$v' : \mathrm{T}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_t) \longrightarrow \mathrm{F}.$$

Comme F commute aux limites inductives d'anneaux, ce morphisme se factorise en

$$v'_i : \mathrm{T}'_i = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}_i,t_i}) \longrightarrow \mathrm{F}$$

pour i grand. Pour un tel i, on a

$$\mathrm{T}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}'_i \quad \text{i.e.} \quad \mathscr{O}_{\mathrm{T}_i,t_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_t.$$

En effet, comme $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}'_i$ est fidèlement plat quasi-compact donc un épimorphisme **150**
effectif, il suffit de voir que c'est un monomorphisme. Or si on a deux morphismes $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{T}'$ (avec R représentable) ayant même composé avec $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}'_i$, ils ont même composé avec $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$, (qui se factorise par $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}'_i$) donc même composé avec $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}_j$ pour tout j, donc avec $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}'_j$ pour tout j, donc sont égaux car T' est la limite projective des T'_j dans la catégorie (**Sch**).

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}' \arrow[r, "v'"] \arrow[d] & \mathrm{F} \arrow[d] \\ \mathrm{T}'_i \arrow[r] \arrow[ur, "v'_i"] & \mathrm{T}_i \end{tikzcd} \quad ,$$

où les flèches non précisées sont les flèches évidentes. Le carré est commutatif et le triangle supérieur également, donc comme $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}'_i$ est un épimorphisme, il s'ensuit que le triangle inférieur est commutatif. Or $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_i,t_i}$ est la limite inductive des anneaux affines des voisinages ouverts affines de t_i dans T_i, donc comme F commute aux limites inductives d'anneaux, v'_i provient d'un morphisme

$$v_t : \mathrm{U}_t \longrightarrow \mathrm{F}$$

d'un voisinage ouvert U_t de t_i dans T_i. On voit de suite que quitte à restreindre au besoin ce voisinage, v_t est nécessairement un T_i-morphisme (T_i étant localement de type fini sur S, donc commutant également aux limites inductives d'anneaux). Alors le composé de v_t avec $\mathrm{F} \to \mathrm{T}_i$ est un monomorphisme, donc v_t est un *monomorphisme.* Je dis qu'il est *infinitésimalement étale en* t_i. Comme $\mathrm{F} \to \mathrm{T}$ est infinitésimalement étale, il revient au même de dire que le composé $\mathrm{T}_i \to \mathrm{F} \to \mathrm{T}$ est infinitésimalement
151 étale en t_i, ou encore que le morphisme induit $\mathrm{T}'_i \to \mathrm{T}$ est infinitésimalement étale, ou enfin (puisque $\mathrm{T}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}'_i$) que $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ est infinitésimalement étale, ce qui est immédiat, ce morphisme étant la limite projective des morphismes infinitésimalement étales $\mathrm{T}'_i \to \mathrm{T}_i$.

Appliquons maintenant la condition d), (qui n'avait pas encore servi), il s'ensuit que v_t est infinitésimalement étale au voisinage de t, donc quitte à remplacer U_t par un ouvert plus petit, on peut supposer que v_t est un *monomorphisme infinitésimalement étale.*

Pour $t \in \mathrm{ens(F)}$ variable, la famille des morphismes v_t est justiciable de 3.5, qui implique la conclusion de 3.7.

Prouvons maintenant 3.8, en supposant vérifiées les conditions c′) et d′) de 3.8. Alors avec les notations de d′), on aura $d_i(\xi) =$ constante pour i grand, donc la dimension relative de T_j sur T_i en t_j, égale à $d_j(\xi) - d_i(\xi)$, est nulle, donc $\mathrm{T}_j \to \mathrm{T}_i$ est étale en t_j, ce qui prouve la condition c). Par suite la démonstration qui précède s'applique pour donner, pour chaque $t \in \mathrm{ens(F)}$, un indice i, un voisinage ouvert U_t de t_i et un morphisme $\mathrm{U}_t \to \mathrm{F}$ qui soit un monomorphisme, infinitésimalement étale en t_i, et tout revient à prouver que ce morphisme est infinitésimalement étale au voisinage de t_i. Or avec la notation de d′) 2°, où on fait $\mathrm{X} = \mathrm{U}_t$, on peut supposer, quitte à remplacer U_t par la composante connexe de t_i dans U_t, que pour tout $x \in \mathrm{U}_t$, on a

$$d(\xi_x) = d(\xi_{t_i}) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{U}_t.$$

Or $d(\xi_{t_i}) =$ dimension relative de T_i sur S en t_i, et comme la dimension relative de T_i sur S reste constante sur U_t, on aura aussi, pour tout $x \in \mathrm{U}_t$:

$$(*) \qquad d(\xi_x) = \text{dimension relative de } \mathrm{U}_t \text{ sur S en } x.$$

D'autre part, avec les notations de la démonstration de 3.7, on voit aussitôt que pour
152 tout préschéma local noethérien $\mathrm{R}' = \mathrm{Spec(A)}$, posant $\mathrm{R}'_0 = \mathrm{Spec}\, k(\mathrm{A})$, tout morphisme $\mathrm{R}' \to \mathrm{F}$ tel que le morphisme induit $\mathrm{R}'_0 \to \mathrm{F}$ se factorise par F (i.e. appliquant le point fermé de R' dans $t \in \mathrm{ens(F)}$) se factorise (de façon évidemment unique) par T'. (La démonstration est celle de 3.1 ou 3.9 : on utilise que $\mathrm{T}' \to \mathrm{F}$ est un monomorphisme infinitésimalement étale *en* t, et que T' est un faisceau pour fpqc commutant aux $\varinjlim$ adiques. . .). Appliquant ce résultat au morphisme $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_t,x}) = \mathrm{R}' \to \mathrm{F}$ induit par v_t et au point $t_x \in \mathrm{ens(F)}$ image du point fermé de R', i.e. image de x par

v_t, on trouve une factorisation

$$\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_t,x}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{t_x}) \longrightarrow \mathrm{F}$$

et comme la deuxième flèche est infinitésimalement étale en t_x, pour prouver que la composée l'est en x, il suffit de prouver que la première l'est en t_x. Or grâce à la formule (x) plus haut, c'est un S-homomorphisme local des localisés, en deux points x, t_x, de S-*préschémas lisses* U_t, U_{t_x} *de même dimension relative* d sur S en t, t_x. Ce morphisme est induit par un S-morphisme

$$w : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{V}$$

où U est un voisinage ouvert de x dans U_t, et où $\mathrm{V} = \mathrm{U}_{t_x}$ (EGA I 6.5.1). Tout revient à prouver que ce morphisme est étale en x. D'ailleurs, U et V sont munis de monomorphismes $\mathrm{U} \to \mathrm{F}$, $\mathrm{V} \to \mathrm{F}$, et on voit aussitôt que, quitte à restreindre encore U, w est un F-morphisme, donc w est un *monomorphisme*. Il suffit maintenant de prouver le

Lemme 3.10. — *Soient* U, V *deux* S-*préschémas lisses, de même dimension relative* d *sur* S, *et* $w : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *un* S-*morphisme qui soit un monomorphisme, alors* w *est une immersion ouverte* (*et a fortiori est étale*).

En vertu de SGA I 5.7 on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps, qu'on peut supposer algébriquement clos. En vertu de SGA I 5.1 il suffit de prouver que w est étale, et il suffit de le prouver aux points fermés de U. Soient x un tel point, 153
$y = w(x)$, alors prenant un système régulier de paramètres $f_1, \ldots, f_d$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{V},y}$, on voit que $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{U},x}/\sum f_i\mathscr{O}_{\mathrm{U},x}$ est l'extension triviale de $k = \mathscr{O}_{\mathrm{V},y}/\sum f_i\mathscr{O}_{\mathrm{V},y}$ (car w étant un monomorphisme, il en est de même du morphisme structural $\mathrm{Spec(A)} \to \mathrm{Spec}(k)$ qui s'en déduit par changement de base). Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{U},x}$ est un anneau local régulier de dimension d, il s'ensuit que les f_i forment un système régulier de paramètres de cet anneau, ce qui implique aussitôt que w est étale en x et achève la démonstration de 3.10 donc de 3.8.

Corollaire 3.11. — *Sous les conditions de* 3.8, *pour tout ouvert quasi-compact* U *de* F *séparé sur* S, *il existe un* $i \in \mathrm{I}$ *tel que pour tout* $j \geqslant i$ *le morphisme* $u_j|\mathrm{U} : \mathrm{U} \to \mathrm{T}_j$ *soit une immersion ouverte. En particulier, si les* T_i *sont quasi-affines sur* S, *alors tout ouvert* U *de* F *quasi-compact sur* S *i.e. de type fini sur* S *est quasi-affine sur* S.

La démonstration de 3.7 montre que pour tout $t \in \mathrm{F}$, il existe un $i \in \mathrm{I}$ tel que $u_i : \mathrm{F} \to \mathrm{T}_i$ soit un isomorphisme local en t, et alors u_j est un isomorphisme local en x pour tout $j \geqslant i$. Par raison de quasi-compacité, on peut choisir i indépendant de $x \in \mathrm{U}$. Il reste à prouver que pour i grand, $u_i|_\mathrm{U} : \mathrm{U} \to \mathrm{T}_i$ est un monomorphisme. Or comme $\mathrm{U} \to \mathrm{T}$ est un monomorphisme, on voit que l'intersection des relations d'équivalence $\mathrm{U} \times_{\mathrm{T}_i} \mathrm{U} \subset \mathrm{U} \times_\mathrm{S} \mathrm{U}$ est réduite à la diagonale, et comme $\mathrm{U} \times_\mathrm{S} \mathrm{U}$ est un préschéma noethérien et les $\mathrm{U} \times_{\mathrm{T}_i} \mathrm{U}$ des sous-préschémas fermés, il s'ensuit que l'un de ces $\mathrm{U} \times_{\mathrm{T}_i} \mathrm{U}$ est déjà réduit à la diagonale, i.e. $u_i|\mathrm{U}$ est un monomorphisme. Cela prouve la première assertion dans 3.11, et la deuxième en est une conséquence immédiate.

Proposition 3.12. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*préschéma en groupes affine.*

a) *Soit* F *le foncteur* $(\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *tel que, pour tout* T *sur* S,

$\mathrm{F(T)} =$ *ensemble des sous-groupes de type multiplicatif de* $\mathrm{G}_{\mathrm{T_S}}$ *qui sont finis sur* T.

154 *Supposons* S *localement noethérien ou* G *de présentation finie sur* S*. Alors le foncteur* F *est représentable et est affine sur* S*. Si* G *est de présentation finie sur* S*, alors* F *est localement de présentation finie sur* S.

b) *Soit* H *un* S*-préschéma en groupes de type multiplicatif, et fini sur* S*. Alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ *est représentable. Il est affine sur* S*, et si* G *est de type fini* (*resp. de présentation finie*) *sur* S*, il en est de même de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$.

Remarque 3.13. — Sauf pour la précision que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}$ est affine, et dans le cas où G est de présentation finie sur S (qui nous suffira), 3.12 est une conséquence immédiate de la théorie des Schémas de Hilbert (A. Grothendieck, Techniques de construction et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique : IV Les Schémas de Hilbert, Séminaire Bourbaki Mai 1961, N°221). Il suffit même que G soit quasi-projectif sur S ; dans le cas a), on peut représenter aussi le foncteur plus gros

$$\mathrm{F}'(\mathrm{T}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{ensemble des sous-préschémas en groupes de } \overline{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}}, \\ \text{plats propres et de présentation finie sur T,} \end{array} \right\}$$

(le monomorphisme canonique $\mathrm{F} \to \mathrm{F}'$ est une « immersion ouverte », comme il résulte du critère 3.1 et de X 4.7 b), de sorte que la représentabilité de F′ entraîne que F est représentable par un ouvert de F) ; dans le cas b), on peut se borner à supposer que H est projectif et de présentation finie sur S. Dans les deux cas, on obtient un foncteur localement de présentation finie sur S. Dans le présent exposé, 3.12 n'est qu'un lemme technique pour prouver un résultat clef au N° suivant, aussi nous allons esquisser une démonstration directe facile de 3.12, n'utilisant pas les schémas de Hilbert.

Prouvons d'abord b). Il suffira que nous prouvions que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ est représentable (indépendamment de toute structure de groupe sur H, G), et a les propriétés supplémentaires énoncées pour $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$, car utilisant aussi le même résultat pour $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}, \mathrm{G})$, on explicite le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$
155 par une limite projective finie (en fait, à l'aide de produits fibrés) faisant intervenir G, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}, \mathrm{G})$, que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter. D'autre part, on aura

$$\mathrm{H} = \mathrm{Spec}(\mathscr{B}),$$

où $\mathscr{B}$ est un faisceau d'algèbres sur S qui est localement libre comme faisceau de modules (c'est là la seule hypothèse sur H que nous aurons à retenir). Comme la question de représentabilité envisagée est locale sur S, nous pouvons supposer S affine d'anneau A. D'autre part, on aura $\mathrm{G} = \mathrm{Spec}(\mathrm{C})$, où C est une A-algèbre. Lorsque $\mathrm{G} = \mathrm{S}[t] = \mathrm{G}_0$, t une indéterminée, le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}$ n'est autre que

$$\mathrm{T} \mapsto \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{B}_{\mathrm{T}}),$$

qui est représentable ($\mathscr{B}$ étant localement libre) par le fibré vectoriel $\mathbb{V}(\mathscr{B}^{\vee})$, où $\mathscr{B}^{\vee}$ est le faisceau de modules dual de $\mathscr{B}$. Lorsque $\mathrm{G} = \mathrm{S}[(t_i)]$, avec (t_i) une famille (pas nécessairement finie) d'indéterminées, on aura donc $G = G_0^I$ (produit sur S d'une famille de copies de G_0) qui est représentable par le schéma affine

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(H, G)^I = \mathbb{V}(\mathscr{B}^\vee)^I = \mathbb{V}(\mathscr{B}^{\vee(I)}).$$

Dans le cas général, G sera isomorphe à un sous-schéma fermé d'un schéma de la forme $S[(t_i)]$, i.e. C sera un quotient d'une A-algèbre de la forme $A[(t_i)]$. Soit (F_j) un système de générateurs de l'idéal par lequel on divise. Supposons $\mathscr{B}$ libre de rang n, ce qui est loisible quitte à recouvrir S par des ouverts affines plus petits. Choisissons une base $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathscr{B}$, alors écrivant les n composantes suivant cette base de $F_j((x_i))$, pour des $x_i = \sum x_{ik}e_k$ (x_{ik} des coefficients indéterminés, pris dans une algèbre non précisée A' sur A) on trouve, pour chaque F_j, n polynômes $F_{j,k}$ en les $(x_{i,k})_{i\in I,\, 1\leqslant k\leqslant n}$, à coefficients dans A. On constate aussitôt que $\underline{\mathrm{Hom}}_S(H, G)$ est représenté par le spectre du quotient de l'anneau de polynômes $A[(x_{i,k})]$ par l'idéal engendré par les $F_{j,k}$. Cela prouve aussitôt b).

Prouvons a). Pour tout groupe fini commutatif ordinaire M, soit F_M le sous-foncteur de F obtenu en se bornant aux sous-groupes de G_T qui sont de type multiplicatif et **156**
de type M. On voit facilement, par un raisonnement de recollement comme celui qui a servi dans 3.5 (que nous aurions dû énoncer en dévissant un peu plus !) qu'il suffit de vérifier que les F_M sont représentables, alors F sera représentable par le préschéma somme des F_M, où M parcourt l'ensemble des classes de groupes finis commutatifs à isomorphisme près. (F est en effet la somme des F_M dans la catégorie des faisceaux...).

Dorénavant nous supposons fixé M, et écrirons F au lieu de F_M. Soit $H = D_S(M)$, considérons le sous-foncteur $F' = \underline{\mathrm{Imm}}_{S\text{-gr}}(H, G)$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H, G)$ dont la valeur en T est l'ensemble des homomorphismes de T-groupes $H_T \to G_T$ qui sont des immersions fermées. On sait déjà que $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H, G)$ est représentable par un S-préschéma affine en vertu de b), et utilisant IX 6.8, on voit aussitôt que F' est représentable par un sous-préschéma ouvert et fermé de ce dernier, donc il est également *affine* sur S. Considérons enfin le morphisme canonique $F' \to F$, qui associe à chaque monomorphisme $H_T \to G_T$ le groupe image. On constate aussitôt, en vertu des définitions, que de cette façon F' devient un fibré principal homogène (dans la catégorie des faisceaux pour fpqc) sur F, de groupe $\Gamma_F = \Gamma_S \times_S F$, où $\Gamma = \mathrm{Aut}_{gr}(M)$, d'où il résulte « par descente » que ce morphisme est représentable (i.e. pour tout morphisme $T \to F$, avec T représentable, $T \times_F F'$ au-dessus de T est représentable, – en fait, représentable par un fibré principal galoisien sous Γ). Donc en vertu de IV 4.6.6 F est représentable si et seulement si le quotient F'/F'', où $F'' = F' \times_F F'$, existe dans (**Sch**) et est effectif universel pour les morphismes fidèlement plats quasi-compacts, ou ce qui revient au même, si et seulement si le quotient F'/Γ existe et est effectif universel pour lesdits morphismes. Or comme F' est affine sur S on a vu dans V 4.1 que la condition en question est bien vérifiée. Cela prouve la représentabilité de F dans a).

Quant au complément, relatif au cas où on suppose G de présentation finie sur S, il se déduit aussitôt de la démonstration qui précède, compte tenu qu'en vertu de b), F' est alors localement de présentation finie sur S, de sorte qu'on peut appliquer l'Exposé V [(3)].

157

4. Le schéma des sous-groupes de type multiplicatif d'un groupe lisse affine

Le résultat principal du présent exposé est constitué par le

Théorème 4.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et affine sur* S*,* F *le foncteur* $(\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \to (\mathbf{Ens})$ *défini par*

$$F(T) = \textit{ensemble des sous-groupes de type multiplicatif de } G_T.$$

Alors le foncteur F *est représentable, et est lisse et séparé sur* S.

Signalons tout de suite la variante suivante :

Corollaire 4.2. — *Soient* G, H *deux* S*-préschémas en groupes, avec* G *lisse et affine sur* S*,* H *de type multiplicatif et de type fini. Alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H, G)$ *est représentable, et est lisse et séparé sur* S.

En effet, lorsque H est lisse sur S, il en est de même de $H \times_S G$, et on peut appliquer 4.1 à ce dernier. Par la considération des groupes graphes, $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H, G)$ devient un sous-foncteur F' du foncteur F : « sous-groupes de type multiplicatif de $H \times_S G$ », savoir $F'(T)$ = ensemble des sous-groupes de type multiplicatif K de $(H \times_S G)_T = H_T \times_T G_T$, tels que l'homomorphisme induit par la première projection

$$K \longrightarrow H_T$$

soit un isomorphisme. En vertu de IX 2.9, le morphisme canonique $F' \to F$ est une immersion ouverte, donc F étant représentable, il en est de même de F', qui sera représentable par un ouvert de F ; et F étant séparé et lisse sur S, il en sera de même de F'. Dans le cas où H est fini sur S, il suffit d'appliquer 3.12 b) pour la représentabilité de $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H, G)$. Lorsque H est un produit $H_1 \times_S H_2$, avec H_1 lisse sur S et H_2 fini sur S, alors $\mathrm{Hom}_{T\text{-gr.}}(H_T, G_T)$ s'identifie au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{T\text{-gr.}}((H_1)_T, G_T) \times \mathrm{Hom}_{T\text{-gr.}}((H_2)_T, G_T)$ formé des couples (u_1, u_2) tels que $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1$, d'où il résulte que $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H, G)$ est représentable par un sous-
158 préschéma fermé de $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H_1, G) \times_S \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H_2, G) = X$, comme on voit en appliquant VIII 6.5 b), où on fait $Y = H$, $Z = G$, q_1 et q_2 étant définis respectivement par $(u_1, u_2) \mapsto u_1 \cdot u_2$ et $(u_1, u_2) \mapsto u_2 \cdot u_1$.

Dans le cas général, la question étant locale sur S pour la topologie de Zariski, on peut supposer que S est affine, et H de type constant sur S. Alors H étant quasi-isotrivial (X 4.5) on peut trouver un morphisme étale surjectif $S' \to S$, S' affine, qui splitte H, i.e. tel que $H' = H_{S'}$ soit diagonalisable. Alors le résultat précédent s'applique, car un groupe diagonalisable est le produit d'un tore diagonalisable par un groupe diagonalisable fini. Reste à voir que la donnée de descente obtenue sur le S'-préschéma $\underline{\mathrm{Hom}}_{S'\text{-gr}}(H', G') = X'$ est effective. Cela se voit par le raisonnement de X 5.4, en notant que dans *loc. cit.*, l'hypothèse que $X' \to S'$ était séparé et localement

(3) N.D.E. : référence à vérifier/préciser

quasi-fini n'avait servi qu'à assurer que toute partie ouverte de X' quasi-compacte sur S' était quasi-affine sur S'. Or cette propriété est encore vérifiée dans le cas présent, comme il résulte facilement du fait qu'il en est ainsi pour le foncteur F de 4.1 (ce qui sera vu en cours de démonstration de 4.1). Cela (où toute autre variante de ce petit dévissage) établit la représentabilité de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$, et en même temps le fait qu'il est séparé sur S. Il est localement de présentation finie sur S, comme on voit par exemple (comme on a signalé dans 3.2) grâce au fait que ce foncteur « commute aux limites inductives d'anneaux ». Enfin, ce foncteur étant formellement lisse sur S (en vertu de 2.1), il est lisse sur S.

Remarque 4.3. — Nous avons ici déduit 4.2 de 4.1, ce qui n'est vraiment immédiat que lorsque H est également lisse sur S. Pour que la déduction se fasse sans contorsions pour le cas général, il faudrait que le résultat de représentabilité 4.1 soit établi sans supposer G lisse sur S, mais seulement affine de présentation finie sur S. (Bien entendu, alors F ne sera plus lisse en général sur S !). Il n'y a guère de doute que 4.1 reste vrai sous ces hypothèses plus générales, mais la démonstration semble devoir être plus délicate (faute de pouvoir invoquer 3.8) [(*)] [(4)]. Signalons cependant que lorsque G est un sous-groupe fermé d'un groupe affine et lisse G' sur S, alors le foncteur F **159**
représentant les sous-groupes de type multiplicatif de G est représentable par un sous-préschéma fermé du préschéma représentant le foncteur analogue F' pour G' (justiciable de 4.1), comme on voit facilement en appliquant VIII 6.4. Cela soulève aussi la question : un schéma en groupes G sur S affine, qui est affine et de présentation finie sur S, est-il isomorphe à un sous-schéma en groupes d'un $\mathrm{GL}(n)_{\mathrm{S}}$, n convenable ? C'est vrai lorsque S est le spectre d'un corps, cf. $\mathrm{VI_B}$ 11.11, mais malheureusement faux en général, même pour les tores, cf. 4.6. Enfin, notons qu'on pourrait démontrer aussi directement 4.2 par exactement la même méthode que 4.1.

Démontrons maintenant 4.1. Comme le foncteur F est évidemment de nature locale, on peut supposer S affine, donc $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, A un anneau. Considérant A comme limite inductive de ses sous-anneaux de type fini sur $\mathbb{Z}$, et notant que G provient d'un groupe lisse et affine sur un tel sous-anneau (EGA IV 8), on est ramené au cas où S est noethérien. Pour tout entier $n > 0$, soit T_n le foncteur défini comme F, mais en se bornant aux sous-groupes H de type multiplicatif de $\mathrm{G_T}$ tels que $n \cdot \mathrm{id_H} = 0$, i.e. tels que ${}_n\mathrm{H} = \mathrm{H}$. Ordonnons l'ensemble I des entiers > 0 par la relation de divisibilité. Lorsque m est multiple de n, définissons

$$p_{n,m} : \mathrm{T}_m \longrightarrow \mathrm{T}_n$$

(*) C'est effectivement prouvé pour G plat et quasi-affine sur S à fibres connexes, à condition de se borner aux sous-tores *centraux* de G (XV 8.8).

(4) N.D.E. : Dans le cas H lisse (non nécessairenent affine) sur une base normale S localement noethérienne, M. Raynaud a montré que le plus grand ouvert représentable du foncteur des sous-tores de H est somme disjointe d'ouverts lisses et affines sur S. Il s'agit du théorème IX.9.26 dans *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et sur les espaces homogènes*, Lecture Notes Maths. 119 (1970).

par $p_{n,m}(\mathrm{H}) = {}_n\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(n \cdot \mathrm{id_H})$. De cette façon les T_n forment un système projectif de foncteurs sur S. En vertu de 3.12 a) les foncteurs T_n sont représentables, affines et de type fini sur S. Définissons de même des morphismes

$$u_n : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{T}_n,$$

par la relation $u_n(\mathrm{H}) = {}_n\mathrm{H}$. De cette façon, on obtient un morphisme

$$u : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{T} = \varprojlim_n \mathrm{T}_n,$$

160 où la $\varprojlim$ est prise dans la catégorie des foncteurs sur S. Mais signalons tout de suite que, les T_n étant représentables et affines sur S, il en est de même de T (ce sera le spectre de la limite inductive des algèbres quasi-cohérentes sur S qui définissent les T_n). Bien entendu, T n'est pas en général de type fini sur S.

Nous allons appliquer 3.7 et sommes ramenés à vérifier les conditions a) à d) de 3.7 qui impliqueront que F est représentable par un préschéma localement de type fini sur S. Il résulte alors de 2.1 bis que F est même lisse sur S, et comme F est un sous-foncteur de T qui est affine sur S, il s'ensuit que F est séparé sur S (étant séparé sur T, qui est séparé sur S). Prouvons tout de suite le complément invoqué plus haut, savoir que tout ouvert U de F quasi-compact sur S est quasi-affine sur S : Cela résulte de 3.11 et du fait que les T_u sont affines sur S.

Vérifions donc les conditions de 3.7.

a) F est un faisceau pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, par la théorie de la descente SGA 1 VIII, qui s'applique ici puisque les groupes de type multiplicatifs sur T sont affines sur S. Il commute aux limites inductives d'anneaux par le tapis général EGA IV 8. Montrons qu'il commute aux limites projectives adiques d'anneaux locaux artiniens. Quand on a affaire, au lieu du foncteur F, au foncteur analogue envisagé dans 4.2, cette propriété n'est autre que celle de IX 7.1 dans le cas particulier où A est un anneau local noethérien complet, muni d'un idéal de définition pour sa topologie habituelle (N. B. C'est exactement ici que l'hypothèse G affine intervient de façon essentielle). Dans le cas actuel, nous sommes ramenés à prouver le

Lemme 4.4. — *Soient* A *un anneau local noethérien complet, d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, G *un schéma en groupes affine sur* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. *Pour tout entier* $n \geqslant 0$, *soient* $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$, $\mathrm{G}_n = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$. *Soit pour tout* n, H_n *un sous-groupe de type multiplicatif et de type fini de* G_n, *tel que pour* $m \geqslant n$, H_n *se déduise de* H_m *par*
161 *réduction. Sous ces conditions, il existe un unique sous-groupe de type multiplicatif* H *dans* G, *qui se réduise suivant les* H_n.

En vertu de X 3.2 il existe un groupe de type multiplicatif H sur S, nécessairement de type fini et isotrivial, déterminé à isomorphisme unique près, qui soit muni d'un isomorphisme $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 \simeq \mathrm{H}_0$, (en utilisant le fait que H_0 est isotrivial, étant de type fini sur un corps, cf. X 1.4). En vertu de X 2.1, pour tout n, l'isomorphisme $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 \simeq \mathrm{H}_0$ se relève en un isomorphisme unique $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n \simeq \mathrm{H}_n$. Ceci dit, en vertu de IX 7.1 déjà cité, les homomorphismes $H_n \to G_n$ proviennent d'un unique homomorphisme de S-groupes $u : H \to G$. En vertu de IX 6.6 ce dernier est un monomorphisme puisque $u_0 : H_0 \to G_0$ l'est. Cela achève la démonstration de 4.4.

b) Le morphisme $u : F \to T$ est un monomorphisme. Cela résulte du théorème de densité IX 4.7, sous la forme du corollaire 4.8 b). On fera attention qu'il est essentiel, pour l'application que nous en faisons ici, de disposer de ce résultat sur une base non nécessairement noethérienne. (N. B. comme le foncteur T ne commute pas aux limites inductives d'anneaux, il n'est pas possible de s'y ramener a priori).

b′) Le morphisme $u : F \to T$ est infinitésimalement étale, en d'autres termes on a le

Lemme 4.5. — *Soient* A *un anneau local artinien de corps résiduel* k*,* $S = \mathrm{Spec}(A)$*,* I *un idéal* $\subset \mathrm{rad}(A)$*,* $S' = \mathrm{Spec}(A/I)$*,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*,* $G' = G \times_S S'$*, donnons-nous un sous-groupe de type multiplicatif* H' *de* G' *et pour tout entier* $n > 0$*, un sous-groupe de type multiplicatif* $H(n)$ *de* G *de telle façon que*

1°) *pour tout multiple* m *de* n*,* $H(n) = {}_nH(m)$*, et*

2°) $H(n)' = {}_nH'$.

Sous ces conditions, il existe un sous-groupe de type multiplicatif H *de* G *et un seul tel que* ${}_nH = H(n)$ *pour tout* n*.*

L'unicité est déjà contenue dans b). Pour l'existence, une récurrence immédiate nous ramène au cas où $J\mathfrak{m} = 0$, $\mathfrak{m}$ étant l'idéal maximal de A. Soient $k = A/\mathfrak{m}$, $S_0 = \mathrm{Spec}(k)$, $G_0 = G \times_S S_0$, $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie de G_0, $\mathfrak{h}_0$ celle de H_0. On a un **162**
isomorphisme de groupes canonique :

$$\mathfrak{g}_0 \otimes_k J \simeq \mathrm{Ker}(G(S) \longrightarrow G(S_0)),$$

cf. Exp III. En vertu de IX 3.6 bis et 3.7, il existe un sous-groupe de type multiplicatif H de G se réduisant suivant H', et un tel H est déterminé modulo automorphisme intérieur par un élément de $N = \mathrm{Ker}(G(S) \to G(S_0))$. Ainsi, l'ensemble P des relèvements H de H_0 est un ensemble principal homogène sous le groupe N/M, où M est le groupe des $g \in N$ tels que $\mathrm{int}(g) \cdot H = H$.

Or on voit facilement (Exp III) que ce sous-groupe n'est autre que le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_0 \otimes_k J$ formé des invariants sous H_0, lorsque H_0 opère sur $\mathfrak{g}_0 \otimes_k J$ par la représentation induite par la représentation adjointe de G_0. De même, l'ensemble $P(n)$ des relèvements de $H(n)_0 = {}_nH_0$ est un ensemble principal homogène sous $N/M(n)$, où $M(n)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_0 \otimes_k J = N$ formé des invariants sous ${}_nH_0$. Utilisant le théorème de densité Exp IX 4.7, on voit facilement que pour n grand, (au sens de la relation d'ordre mise sur l'ensemble des entiers $n > 0$, savoir la relation de divisibilité) on a $M = M(n)$. Par suite, l'application naturelle $H \mapsto {}_nH$ de P dans $P(n)$, qui est compatible avec les opérations de N donc avec l'homomorphisme $N/M \to N/M(n)$ sur les groupes d'opérateurs, est bijectif pour n grand. La conclusion de 4.5 en résulte aussitôt.

Pour vérifier c) et d) de 3.7, nous utilisons 3.8 qui nous ramène à la vérification de c′) et d′) ci-dessous.

c′) Les T_n sont lisses sur S, et les morphismes de transition $p_{n,m} : \mathrm{T}_m \to \mathrm{T}_n$ sont lisses.

Ceci n'est autre que 2.2 bis.

d′) Avec les notations de 3.8, un point ξ de F à valeurs dans un corps k au-dessus de S n'est autre qu'un sous-groupe de type multiplicatif H_0 de $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}_k$. Reprenons le
163 raisonnement de b′) ci-dessus, on voit que l'entier $d(\xi)$ envisagé dans 3.8 n'est autre que la dimension de $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}_0^{\mathrm{H}_0}$, où $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie de G_0 et $\mathfrak{g}_0^{\mathrm{H}_0}$ est le sous-espace vectoriel des invariants sous H_0. C'est donc un entier fini, i.e. la condition d′) 1°) de 3.8 est vérifiée. Avec les notations de d′) 2°), la donnée d'un morphisme $v : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$ revient à la donnée d'un sous-groupe de type multiplicatif H de G_X. Pour $x \in \mathrm{X}$, l'entier $d(\xi_x)$ n'est alors autre que la dimension de $(\mathfrak{g} \otimes \kappa(x))^{\mathrm{H}_x}$, où $\mathfrak{g}$ est le faisceau en algèbres de Lie de G_X (qui est localement libre de type fini sur X car G_X est lisse sur X, et $\mathfrak{g}\otimes\kappa(x)$ n'est autre que l'algèbre de Lie de la fibre G_x de G_X en x), et H_x est la fibre de H en x. Or $\mathfrak{g}$ étant un module localement libre sur S sur lequel le groupe de type multiplicatif H opère, on voit aussitôt que le sous-foncteur $\mathfrak{g}^\mathrm{H}$ des invariants sous H est donné par un sous-faisceau localement facteur direct donc localement libre de $\mathfrak{g}$. (Par descente, on est ramené au cas où H est diagonalisable, et où on applique Exp I 4.7.3, en notant que le sous-faisceau des invariants correspond à la composante de degré zéro). Par suite $d(\xi_x) =$ rang en x de $\mathfrak{g}^\mathrm{H}$, donc c'est une fonction localement constante en x. Cela achève de prouver la condition d′).

Nous avons ainsi vérifié les conditions de 3.7, ce qui achève la démonstration de 4.1.

Remarque 4.6. — Lorsque $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(n)_\mathrm{S}$, on peut donner une démonstration directe nettement plus simple et plus explicite de 4.1, en utilisant I 4.7.3. La démonstration montre de plus que dans ce cas, le schéma modulaire est un schéma somme d'une famille de schémas *affines* sur S. Procédant comme il a été dit dans 4.3, on en déduit le même résultat chaque fois que G est un sous-groupe fermé d'un groupe de la forme $\mathrm{GL}(n)_\mathrm{S}$. On se gardera de croire cependant que les préschémas qui représentent les foncteurs dans 4.1 ou 4.2 sont toujours des sommes d'une famille de schémas affines sur S. Soit par exemple H un groupe de type multiplicatif et de type fini sur un préschéma localement noethérien S, alors en vertu X 5.11 H est isotrivial si et seulement si
164 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H}, \mathbb{G}_m)$ est somme d'une famille de préschémas affines sur S, or on a signalé (X 1.6) qu'il peut exister des tores H (de dimension relative 2) non isotriviaux ; pour un tel tore, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H}, \mathbb{G}_m)$ n'est donc pas somme de S-préschémas affines sur S, et on voit de même que le groupe constant tordu « dual » $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathbb{G}_m, \mathrm{H})$ n'est pas non plus une telle somme (car si deux groupes constants tordus commutatifs de présentation finie R, R′ sont duaux l'un de l'autre, $\mathrm{R}' = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}_\mathrm{S})$, on voit facilement que l'un est isotrivial si et seulement si l'autre l'est). Ce dernier point montre aussi qu'un tel H n'est pas isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de la forme $\mathrm{GL}(n)_\mathrm{S}$; de façon précise, on peut montrer qu'un groupe de type multiplicatif et de type fini sur S localement noethérien connexe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de la forme $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Mod}}(\mathscr{E})$ (avec $\mathscr{E}$ un module localement libre de type fini sur S) si et seulement si il est isotrivial. Enfin, prenant $\mathrm{G} = \mathrm{H} \times \mathbb{G}_m$ dans les deux exemples précédents, on trouve un exemple où le préschéma représentant le foncteur

F de 4.1 n'est pas somme d'une famille de S-préschémas affines sur S, (avec G un tore de dimension relative 3 si on veut).

5. Premiers corollaires du théorème de représentabilité

Soient H, G comme dans 4.2. Posons

$$\mathrm{M} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G}),$$

qui est un S-préschéma lisse, séparé sur S, en vertu de 4.2. Notons que G opère sur le foncteur $\mathrm{M} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ par

$$(g, u) \mapsto \mathrm{int}(g) \circ u,$$

d'où un morphisme canonique

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{M}, \tag{x}$$

dont les composantes sont le morphisme précédant $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{M} \to \mathrm{M}$, et la deuxième projection $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{M} \to \mathrm{M}$.

Corollaire 5.1. — *Le morphisme précédent* (x) *est lisse.* 165

Cela résulte de 4.2 et 2.3. Cet énoncé est équivalent au suivant :

Corollaire 5.2. — *Soient u_1, u_2 : $\mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{G}$ deux homomorphismes de* S*-groupes. Alors le sous-foncteur* $\underline{\mathrm{Transp}}(u_1, u_2)$ *de* G (cf. 2.4) *est représentable par un sous-préschéma fermé de* G*, lisse sur* S.

Il reste seulement à prouver que $\underline{\mathrm{Transp}}(u_1, u_2) \to \mathrm{G}$ est bien une immersion fermée, ce qui résulte du fait que c'est le noyau d'un couple de morphismes $\mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{M}$, (savoir $g \mapsto \mathrm{int}(g)u_1$ et le morphisme « constant » $g \mapsto u_2$), et du fait que M est séparé sur S. En particulier :

Corollaire 5.3. — *Soit u :* $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un morphisme de* S*-groupes. Alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u) = \underline{\mathrm{Transp}}(u, u)$ *est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de* G*, lisse sur* S*. De plus,* $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u)$ *est représentable par un sous-préschéma ouvert de* M.

Il reste à prouver ce dernier point. Or le morphisme

$$g \mapsto \mathrm{int}(g) \circ u$$

de G dans M est lisse de type fini en vertu de 5.2, c'est donc un morphisme ouvert (EGA IV 6.6), et si U désigne son image, avec la structure induite par M, le morphisme induit $\mathrm{G} \to \mathrm{U}$ est lisse, surjectif, de type fini, donc couvrant pour la topologie fidèlement plate et quasi-compacte. D'ailleurs il est évident que le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{M}$ précédent fait de G un faisceau formellement principal homogène sous $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u)_{\mathrm{M}}$, ce qui implique que le faisceau $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u)$ est bien représentable par U.

Corollaire 5.4. — *Soient* u_1, u_2 : $\mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{G}$ *deux homomorphismes de* S*-groupes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u_1 *et* u_2 *sont conjugués localement pour la topologie étale.*

166 (i bis) u_1, u_2 *sont conjugués localement au sens de la topologie fidèlement plate quasi-compacte.*

(ii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, désignant par* $\overline{s}$ *le spectre d'une clôture algébrique de* $\kappa(s)$*, les morphismes* $u_{1,\overline{s}}$, $u_{2,\overline{s}} : \mathrm{H}_{\overline{s}} \rightrightarrows \mathrm{G}_{\overline{s}}$ *sont conjugués par un élément de* $\mathrm{G}(\kappa(\overline{s}))$.

(ii bis) *Le morphisme structural* $\underline{\mathrm{Transp}}(u_1, u_2) \to \mathrm{S}$ *est surjectif.*

(iii) $\underline{\mathrm{Transp}}(u_1, u_2)$ *est un torseur sous l'action du* S*-préschéma en groupes lisse de type fini* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u_1)$.

(i) ⇒ (i bis) et (ii) ⇒ (ii bis) sont triviaux, (le deuxième grâce au Nullstellensatz), par ailleurs (i bis) ⇒ (ii) par le « principe de l'extension finie » (EGA IV 9). D'autre part (ii bis) ⇒ (iii) grâce au fait que $\underline{\mathrm{Transp}}(u_1, u_2)$ est lisse sur S donc plat sur S, et de type fini donc quasi-compact sur S, il est donc fidèlement plat quasi-compact sur S si et seulement si son morphisme structural est surjectif. Comme d'autre part, il est formellement principal homogène sous $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u_1)$, qui est fidèlement plat et quasi-compact sur S, on voit que cette dernière condition équivaut aussi à dire que $\underline{\mathrm{Transp}}(u_1, u_2)$ est un torseur sous $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u_1)$ (sous-entendu : au sens de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte). Enfin (iii) ⇒ (i) grâce au fait que $\underline{\mathrm{Transp}}(u_1, u_2)$ est lisse sur S et au « lemme de Hensel » sous la forme 1.10.

Remarque 5.5. — Pour $u_1 = u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ fixé, le foncteur $(\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ qui à tout T sur S associe l'ensemble des homomorphismes de T-groupes $u_2 : \mathrm{H}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{T}}$ qui sont conjugués de $u_{\mathrm{T}} : \mathrm{H}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{T}}$ localement pour la topologie étale, est précisément représentable par l'ouvert de M, isomorphe à $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u)$, envisagé dans 5.3.

Esquissons les variantes des résultats précédents, obtenues par application de 4.1 au lieu de 4.2. Soit donc G un préschéma en groupes lisse et affine sur S, et dési-
167 gnons maintenant par M le S-préschéma lisse, séparé sur S, qui représente le foncteur envisagé dans 4.1. On a encore des opérations de G sur M :

$$(g, \mathrm{H}) \longmapsto \mathrm{int}(g)(\mathrm{H}),$$

d'où comme ci-dessus un morphisme

$$\text{(x bis)} \qquad \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{M}.$$

Corollaire 5.1 bis. — *Le morphisme précédent est lisse.*

Résulte de 4.1 et 2.3 bis. On en conclut encore :

Corollaire 5.2 bis. — *Soient* $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$ *deux sous-groupes de type multiplicatif de* G*. Alors le sous-foncteur* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ *de* G *est représentable par un sous-préschéma fermé de* G*, lisse sur* S.

En particulier :

Corollaire 5.3 bis. — *Soit* H *un sous-groupe de type multiplicatif de* G. *Alors le sous-foncteur en groupes* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *de* G *est représentable par un sous-préschéma fermé de* G, *lisse sur* S. *De plus, le quotient* $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est représentable par un sous-préschéma ouvert de* M.

Corollaire 5.4 bis. — *Soient* H_1, H_2 *deux sous-groupes de type multiplicatif de* G. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H_1 *et* H_2 *sont conjugués localement pour la topologie étale.*

(i bis) H_1 *et* H_2 *sont conjugués localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte.*

(ii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *désignant par* $\overline{s}$ *le spectre d'une clôture algébrique de* $\kappa(s)$, *les sous-groupes* $\mathrm{H}_{1,\overline{s}}$, $\mathrm{H}_{2,\overline{s}}$ *de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *sont conjugués par un élément de* $\mathrm{G}(\kappa(\overline{s}))$.

(ii bis) *Le morphisme structural* $\underline{\mathrm{Transp}}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2) \to \mathrm{S}$ *est surjectif.* 168

(iii) $\underline{\mathrm{Transp}}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ *est un fibré principal homogène sous l'action du* S-*préschéma en groupes lisse de type fini* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_1)$.

Remarque 5.5 bis. — La remarque 5.5 se transpose également au cas actuel.

Remarque 5.6. — Notons que pour établir le résultat 5.2, et par suite aussi la première assertion dans 5.3, ainsi que 5.4, la référence à 4.2 peut se remplacer par une référence à VIII, 6.4, dont la démonstration est beaucoup plus facile. Cela montre aussi que l'hypothèse G affine sur S y est inutile. De plus, dans le N°6, nous montrerons comment une variante de cette méthode permet d'étendre ces résultats au cas de certains groupes H plus généraux que les groupes de type multiplicatif. Ces mêmes observations s'étendent aux variantes 5.2 bis etc. Par contre, le résultat 5.8 qui suit utilise de façon essentielle toutes les hypothèses faites (notamment G affine et lisse sur S, H de type multiplicatif), et le conférencier n'en connaît d'autre démonstration que via les théorèmes de représentabilité 4.1 ou 4.2 (*).

5.7. Comme le morphisme (x) resp. (x bis) est lisse donc ouvert, son image est ouverte. Soit R cette image, munie de la structure induite par $\mathrm{M} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{M}$, on constate facilement que R est une *relation d'équivalence* dans M, qui n'est autre d'ailleurs que celle explicitée dans 5.4 resp. 5.4 bis. Il serait intéressant de savoir si le faisceau quotient M/R (qui est formellement étale sur S) est représentable (il est alors représentable par un préschéma *étale* sur S) ; il l'est par exemple si S est le spectre d'un corps. On notera d'ailleurs qu'il peut arriver que R ne soit pas fermé dans $\mathrm{M} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{M}$ (même si G est quasi-fini sur S...), ce qui signifie (lorsque M/R est représentable) que M/R est alors non séparé sur S.

Théorème 5.8. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*préschéma lisse et affine sur* S, $s \in \mathrm{S}$. *Alors :* 169

(*) La situation a changé depuis la rédaction de ce texte, cf. XV et XIX n°6.

a) *Pour tout sous-groupe de type multiplicatif* H_0 *de* G_s, *il existe un morphisme étale* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *un point* s' *de* S' *au-dessus de* s *tel que l'extension résiduelle* $\kappa(s')/\kappa(s)$ *soit triviale, et un sous-groupe de type multiplicatif* H' *de* $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, *tel que* $\mathrm{H}'_{s'} = \mathrm{H}_0 \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$.

b) *Pour tout homomorphisme de groupes* $u_0 : \mathrm{H}_s \to \mathrm{G}_s$, *où* H *est un* S*-préschéma en groupes de type multiplicatif et de type fini, il existe un morphisme étale* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *un point* s' *de* S' *au-dessus de* s *tel que l'extension résiduelle* $\kappa(s')/\kappa(s)$ *soit triviale, et un homomorphisme de groupes* $u' : \mathrm{H}' \to \mathrm{G}'$, *tel que* $u'_{s'} : \mathrm{H}'_{s'} \to \mathrm{G}'_{s'}$ *soit égal à* $u_0 \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$.

Cela résulte de 4.1 resp. 4.2, et du lemme de Hensel sous la forme 1.10.

Proposition 5.9. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma lisse et affine sur* S, H *un sous-groupe de type multiplicatif de* G. *Considérons* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$, *qui par* 5.3 *et* 5.3 *bis sont des sous-préschémas en groupes fermés de* G, *lisses sur* S. *Alors le premier groupe est un sous-préschéma ouvert et fermé du second, et le faisceau quotient*

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) / \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$$

est représentable par un sous-préschéma en groupes ouvert de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H})$ *; c'est donc un* S*-préschéma en groupes quasi-fini, étale et séparé sur* S.

Considérons en effet l'homomorphisme évident

$$\theta : \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H}),$$

dont le noyau est par définition $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$. Comme $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H})$ est représentable par un S-préschéma en groupes *étale et séparé* sur S (X 5.10), sa section unité est une
170 immersion ouverte et fermée, donc son image inverse par θ est un sous-groupe ouvert et fermé de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$. Je dis de plus que θ *est un morphisme lisse* : cela résulte en effet formellement des définitions, et du fait que $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est lisse sur S et $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H})$ est étale sur S. On en conclut comme dans 5.3 que l'image de θ est un ouvert U de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H})$ et que muni de la structure induite, U représente le faisceau quotient $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) / \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$. Ce dernier est donc étale et séparé sur S puisque $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H})$ l'est, et il est quasi-fini sur S, étant quasi-compact sur S comme image de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ qui l'est. Cela achève la démonstration de 5.9.

Corollaire 5.10. — *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *soit*

$$w(s) = \text{rang } \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_s}(\mathrm{H}_s) / \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_s}(\mathrm{H}_s)$$

(*qui est aussi l'indice de* $\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}(k)} \mathrm{H}(k)$ *dans* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}(k)} \mathrm{H}(k)$, *où* k *est une clôture algébrique de* $\kappa(s)$). *Alors la fonction* $s \mapsto w(s)$ *est semi-continue inférieurement. Pour qu'elle soit constante au voisinage du point* s, *il faut et suffit que* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *soit fini sur* S *au voisinage de* s.

En effet, pour tout S-préschéma W qui est étale, de type fini et séparé sur S, il est vrai que la fonction $s \mapsto w(s) =$ rang $[\mathrm{W}_s : \kappa(s)]$ est semi-continue inférieurement, et qu'elle est constante au voisinage du point s si et seulement si W est fini sur S au voisinage de s, (fait signalé dans SGA 1, I 10.9, et dont la démonstration, qui n'offre pas de difficulté, se trouvera dans EGA IV [(*)].

Remarque 5.11. — [(5)] Soit G un préschéma en groupes affine et lisse sur S, H un sous-groupe de type multiplicatif, alors 5.3 et 5.3 bis impliquent que les quotients

$$\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) \quad \text{et} \quad \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$$

sont des préschémas lisses sur S et *quasi-affines* sur S, puisque dans l'un et l'autre cas, le préschéma modulaire M dans lequel le quotient se trouve plongé est tel que tout **171**
ouvert U de M quasi-compact sur S est quasi-affine sur S (3.11). Nous verrons d'ailleurs dans l'exposé suivant [(6)] que pour tout U comme dessus, l'adhérence schématique $\overline{\mathrm{U}}$ de U dans M est même affine sur S, ce qui montre que les quotients envisagés sont affines sur S pourvu que l'ouvert U dans le schéma modulaire correspondant (des homomorphismes de groupe de H dans G, resp. des sous-groupes de type multiplicatif de G) soit *fermé* dans M. C'est par exemple le cas si H est un « tore maximal » dans le second cas envisagé, ou lorsque S est le spectre d'un corps, cf. XII.5.4 [(7)]. J'ignore si les quotients envisagés sont affines sur S en général.

6. Sur une propriété de rigidité pour les homomorphismes de certains schémas en groupes, et la représentabilité de certains transporteurs [(*)]

Proposition 6.1. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* H *un* S*-préschéma en groupes commutatif, de type fini sur* S*,* E *un ensemble d'entiers* > 0*, stable par multiplication, et supposons vérifiées les conditions suivantes :*

a) *Pour tout* $n \in \mathrm{E}$*, le sous-groupe* ${}_n\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}})$ *est fini et plat sur* S.

b) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, la famille des* ${}_n\mathrm{H}_s$ $(n \in \mathrm{E})$ *est schématiquement dense dans* H.

Soit Y *un sous-préschéma fermé de* H*. Alors le sous-foncteur* $\prod_{\mathrm{H}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{H}$ *de* S (*comparer* VIII, 6) *est représentable par un sous-préschéma fermé* T *de* S*, et si* S *est noethérien, il existe un* $n \in \mathrm{E}$ *tel que*

$$\text{(x)} \qquad \prod_{\mathrm{H}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{H} = \prod_{{}_n\mathrm{H}/\mathrm{S}} \mathrm{Y} \cap {}_n\mathrm{H}/\mathrm{S}.$$

En effet, en vertu de VIII 6.4, comme par la condition a) ${}_n\mathrm{H}$ est fini et plat et a fortiori « essentiellement libre » sur S, il s'ensuit que le deuxième membre de (x) est **172**
représentable par un sous-préschéma fermé T_n de T. Bien entendu, pour $n \in \mathrm{E}$, E

(*) EGA IV 15.5.1 et 18.10.7.

(*) Le présent Numéro n'utilise pas les résultats des N$^{\mathrm{os}}$ 3, 4, 5 ; sa place naturelle serait dans VI_{B}.

(5) N.D.E. : Pour une généralisation au cas non affine, voir M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes Math. 119 (1970), IX.2.8.

(6) N.D.E. : cf. remarque XII.5.7. Mentionnons ici la généralisation suivante. Sans hypothèse d'affinité sur G, si H est un tore et S est localement noethérien, $\overline{\mathrm{U}}$ est affine et lisse d'après un théorème de Raynaud (*loc. cit.*, IX.2.6 et IX.2.8). En effet, $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est un ouvert de M et le plus grand ouvert représentable de M est somme disjointe d'ouverts lisses et affines sur S.

(7) N.D.E. : sous l'hypothèse que G est de rang réductif localement constant.

ordonné par divisibilité, les T_n forment une famille décroissante de sous-préschémas fermés de S, donc si S est noethérien (ce que nous pouvons supposer) elle est stationnaire pour n grand. Soit T la valeur de T_n pour n grand, je dis que T représente bien le premier membre de (x), ce qui achèvera la démonstration. On est ramené à prouver que si S′ est un préschéma sur S tel que $(\mathrm{Y} \cap {}_n\mathrm{H})_{\mathrm{S}'} = ({}_n\mathrm{H})_{\mathrm{S}'}$ pour tout $n \in \mathrm{E}$, i.e. tel que $\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'} \supset {}_n\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ pour tout $n \in \mathrm{E}$, alors $\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$. Or c'est bien le cas, car en vertu de IX 4.4 la famille des ${}_n\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ est schématiquement dense dans $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$, compte tenu des conditions a) et b).

Théorème 6.2. — *Soient* S *un préschéma,* H, E *comme dans* 6.1 *satisfaisant les conditions* a), b), $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme de* S*-groupes de* H *dans un* S*-préschéma en groupes localement de type fini sur* S*, enfin* K *un sous-préschéma en groupes fermé de* H*. Considérons le sous-foncteur* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u, \mathrm{K})$ *de* G (cf. 2.5)*. Alors ce dernier est représentable par un sous-préschéma fermé de* G*, et si* G *est noethérien* (*par exemple* S *noethérien et* G *de type fini sur* S)*, il existe un entier* $n \in \mathrm{E}$ *tel que* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u, \mathrm{K}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u|_{{}_n\mathrm{H}}, \mathrm{K})$*. Si enfin* G *est lisse sur* S*, et* K *lisse sur* S *ou de type multiplicatif, et si* H, E *satisfont à la condition suivante plus forte que* a) *:*

a′) *Pour tout* $n \in \mathrm{E}$*, le sous-groupe* ${}_n\mathrm{H}$ *de* H *est de type multiplicatif,*

alors $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u, \mathrm{K})$ *est lisse sur* S.

Considérons en effet le G-groupe $\mathrm{H}_{\mathrm{G}} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$, qui satisfait évidemment aux conditions de 6.1 (S remplacé par G, et H par H_{G}), et le sous-préschéma fermé Y de H_{G}, image inverse de $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ par

$$\mathrm{H}_{\mathrm{G}} = \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$$

173 défini par $(h, g) \mapsto \mathrm{int}(g) \cdot u(h)$. Alors $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u, \mathrm{K})$ n'est autre que $\prod_{\mathrm{H}_{\mathrm{G}}/\mathrm{G}} \mathrm{Y}/\mathrm{H}_{\mathrm{G}}$ (comparer VIII, exemples 6.5 e)). Donc les premières assertions résultent de 6.1, et d'ailleurs, on voit que pour tout ouvert U quasi-compact de G, il existe $n \in \mathrm{E}$ tel que $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u, \mathrm{K})$ et $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u|_{{}_n\mathrm{H}}, \mathrm{K})$ aient même trace sur U. Pour vérifier la dernière assertion de 6.2, on peut donc remplacer H par un ${}_n\mathrm{H}$, et alors il suffit d'appliquer 2.5, qui s'applique puisque ${}_n\mathrm{H}$ est supposé de type multiplicatif sur S.

Remarque 6.3. — La démonstration précédente n'utilise que le résultat très élémentaire VIII 6.4, et de plus (pour la dernière partie) 2.5, c'est-à-dire, lorsque K est lisse sur S, le résultat infinitésimal IX 3.6, donc la nullité de la cohomologie des groupes de type multiplicatif. On notera que dans les cas les plus importants (cf. 6.7) on peut supposer même les $n \in \mathrm{E}$ premiers aux caractéristiques résiduelles de S, i.e. inversibles dans $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, donc les ${}_n\mathrm{H}$ étales finis sur S, et alors le résultat cohomologique invoqué est pratiquement trivial, donc 6.2 est alors indépendant de la théorie des groupes de type multiplicatif.

6.4. On voit comme d'habitude que 6.1 s'étend au cas où on a un S-préschéma S′ sur S (pas nécessairement localement noethérien), et un sous-préschéma fermé Y′ de $\mathrm{H}' = \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$, pourvu que $\mathrm{Y}' \to \mathrm{H}'$ soit de présentation finie i.e. l'idéal définissant Y′ de type fini : alors $\prod_{\mathrm{H}'/\mathrm{S}'} \mathrm{Y}'/\mathrm{H}'$ est représentable par un sous-préschéma fermé T′ de

S', tel que $T' \to S'$ soit de présentation finie, et si S' est quasi-compact, il existe un $n \in E$ tel que la relation analogue à (x) soit valable. Il s'ensuit aussi que le premier énoncé dans 6.2 est valable sans supposer G localement de type fini sur S, pourvu que l'immersion $K \to G$ soit de présentation finie.

6.5. Comme annoncé dans 5.6, le théorème 6.2 permet d'étendre aux préschémas en groupes satisfaisant a′) et b) ci-dessus, certains résultats établis par une autre méthode et sous des conditions plus restrictives pour les groupes de type multiplicatif. Il en est ainsi des résultats 5.2, du début de 5.3, de 5.4 et les variantes bissées des résultats **174**
précédents de 5.9 et 5.10. Il en est de même des résultats de IX, N^{os} 5 et 6, à l'exclusion de IX 6.8 (déjà faux pour un homomorphisme de schémas abéliens $u : H \to G$, sur le spectre S d'un anneau de valuation discrète à caractéristique résiduelle $p > 0$: il peut en effet arriver que $\operatorname{Ker} u$ ait comme fibre générique le groupe unité, et comme fibre spéciale un groupe radiciel non réduit au groupe unité).

6.6. Nous venons de donner un exemple d'une propriété de rigidité pour les groupes de type multiplicatif qui n'est pas partagée par les schémas abéliens. Un autre exemple, extrêmement important, est dans le fait que le théorème d'existence de prolongements infinitésimaux d'homomorphismes IX 3.6 n'est plus valable lorsque H est un schéma abélien. Ainsi, un schéma abélien $\neq 0$ sur un corps admet des variations infinitésimales non triviales, contrairement à ce qui a lieu pour un groupe de type multiplicatif, – ce qui est l'aspect infinitésimal du fait qu'il existe une « théorie des modules » (d'ailleurs loin d'être achevée) pour les variétés abéliennes, alors que la théorie des modules pour les groupes de type multiplicatif est vide. Un autre aspect « global » de cette différence infinitésimale est que si H est un schéma abélien sur S localement noethérien, et G un S-préschéma en groupes commutatif localement de type fini sur S, alors on peut montrer que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(H, G)$ est représentable par un préschéma localement de type fini sur S, mais contrairement à ce qui se passe pour H de type multiplicatif, ce préschéma *n'est pas étale sur* S, mais seulement non ramifié sur S. Ainsi, si S est par exemple le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, H et G des schémas abéliens sur S, il peut exister des homomorphismes $H_0 \to G_0$ sur les fibres spéciales qui ne proviennent pas « par spécialisation » d'un homomorphisme sur les fibres génériques.

6.7. Le théorème 6.2 s'applique chaque fois que H est un schéma abélien sur S, ou plus généralement une extension d'un tel schéma par un tore. En effet, la question étant locale sur S, on peut supposer qu'il existe un nombre premier ℓ premier aux ca- **175**
ractéristiques résiduelles de S, et on voit qu'il suffit alors de prendre pour E l'ensemble des puissances de ℓ pour satisfaire aux conditions a′) et b).

Un raisonnement analogue à celui de 6.1 nous donne le

Théorème 6.8. — *Soit* X *un préschéma lisse sur* S, *à fibres géométriques connexes non vides. Alors pour tout sous-préschéma fermé* Y *de* X, *le foncteur* $\prod_{X/S} Y/X$ *est représentable par un sous-préschéma fermé* T *de* S. *Si* Y *est de présentation finie sur* X, *alors* T *est de présentation finie sur* S.

Comme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ est fidèlement plat localement de présentation finie, il est couvrant pour la topologie fpqc. Comme d'autre part $\mathrm{T} = \prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X}$ est évidemment un sous-*faisceau* de S (pour la topologie fpqc), il s'ensuit que la question de la représentabilité de T par un sous-préschéma fermé de S est de nature locale sur S pour la topologie fpqc, et il en est de même de la question de décider si T est de présentation finie sur S. Quitte à faire alors le changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, avec $\mathrm{S}' = \mathrm{X}$, on est ramené au cas où X admet une section e sur S. On peut de plus supposer S affine et a fortiori quasi-compact. On a alors :

Corollaire 6.9. — *Sous les conditions de* 6.8*, supposons que* S *soit quasi-compact et que* X *admette une section* e *sur* S. *Soit, pour tout entier* $n \geqslant 0$, X_n *le sous-préschéma de* X*, voisinage infinitésimal d'ordre* n *de la section* e. *Supposons* Y *de présentation finie sur* X. *Alors il existe un entier* $n \geqslant 0$ *tel que l'on ait* $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X} = \prod_{\mathrm{X}_n/\mathrm{S}} \mathrm{Y}_n/\mathrm{X}_n$ *(où* $\mathrm{Y}_n = \mathrm{Y} \cap \mathrm{X}_n$*).*

Ce corollaire implique bien 6.8 lorsque Y est de présentation finie sur X, grâce à VIII 6.4, car X étant lisse sur S, X_n est fini et localement libre sur S et a fortiori est « essentiellement libre » sur S au sens de VIII 6.1, donc $\prod_{\mathrm{X}_n/\mathrm{S}} \mathrm{Y}_n/\mathrm{X}_n$ est représentable par un sous-préschéma fermé de S. De plus, la démonstration de *loc. cit.*, ou la
176 réduction au cas noethérien, nous montre immédiatement que ledit sous-préschéma fermé de S est de présentation finie sur S.

Prouvons d'abord 6.9 donc 6.8 lorsque S est *noethérien.* Soit $\mathrm{T}_n = \prod_{\mathrm{X}_n/\mathrm{S}} \mathrm{Y}_n/\mathrm{X}_n$, alors les T_n forment une suite décroissante de sous-préschémas fermés de S, et S étant noethérien, cette suite est stationnaire. Soit $\mathrm{R} = \bigcap_{n\geqslant 0} \prod_{\mathrm{X}_n/\mathrm{S}} \mathrm{Y}_n/\mathrm{X}_n$ leur valeur commune pour n grand, on a évidemment $\mathrm{T} \subset \mathrm{R}$, et il suffit d'établir que l'on a $\mathrm{R} \subset \mathrm{T}$. Quitte à faire le changement de base $\mathrm{R} \to \mathrm{S}$, on est ramené au cas où $\mathrm{R} = \mathrm{S}$, i.e. $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n$ pour tout n i.e. $\mathrm{Y} \supset \mathrm{X}_n$ pour tout n, et à prouver alors $\mathrm{T} = \mathrm{S}$ i.e. $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$. Or $\mathrm{Y} \supset \mathrm{X}_n$ pour tout n implique (grâce au fait que X est localement noethérien) que Y est, au voisinage de chaque point de $e(\mathrm{S})$, un sous-préschéma ouvert induit de X, donc il existe un ouvert induit U de X, contenant $e(\mathrm{S})$, tel que $\mathrm{U} \subset \mathrm{Y}$. En vertu de IX 4.3, les fibres de X/S étant intègres, U est schématiquement dense dans X, donc (Y étant un sous-préschéma fermé majorant U) on a $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$. Cela prouve 6.9 donc 6.8 dans ce cas.

Le cas général procède par réduction au cas précédent. Pour tout $s \in \mathrm{S}$, il existe un voisinage ouvert affine U de s et un voisinage ouvert affine V de $e(s)$ tel que $f(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$. Alors $f(\mathrm{V})$ est un voisinage ouvert de s contenu dans U, et si S' est un voisinage ouvert affine de s contenu dans $e^{-1}(\mathrm{V}) \cap f(\mathrm{V})$, et $\mathrm{X}' = \mathrm{V} \cap f^{-1}(\mathrm{S}')$, alors X' et S' sont des ouverts affines de X resp. S, et X'/S' admet une section. À cause de la nature locale de 6.8 et 6.9 on peut supposer $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$. Je dis qu'alors on a $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X} = \prod_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}} \mathrm{Y}'/\mathrm{X}'$, où $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \cap \mathrm{X}'$; en effet, en vertu de IX 4.6, X' est schématiquement dense dans X (du moins lorsque X est quasi-séparé sur S donc X' est rétrocompact dans X ; mais en fait on peut montrer sans difficulté que IX 4.6 reste valable sans l'hypothèse de rétrocompacité), et de même pour tout changement de base $\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}$, $\mathrm{X}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$ est schématiquement dense dans $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$, d'où aussitôt l'égalité annoncée. Cela nous ramène au cas où $\mathrm{X} = \mathrm{X}'$, donc on peut supposer S et X *affines.*

De plus, si $X = \mathrm{Spec}(B)$ et si J est l'idéal de B qui définit Y, J est limite inductive de ses sous-idéaux de type fini, donc Y est intersection de sous-préschémas fermés Y_i **177**
de X qui sont de présentation finie sur S, et par suite $\prod_{X/S} Y/X = \bigcap_i \prod_{X/S} Y_i/X$, ce qui nous ramène, pour prouver 6.8, au cas où Y est de présentation finie sur X. Il suffit alors de prouver 6.9 avec S et X affines. Mais alors X et Y sur S proviennent par changement de base $S \to S_0$ d'une situation analogue X_0 et Y_0 sur S_0, avec S_0 noethérien, ce qui nous ramène au cas où S et noethérien, qui a déjà été traité. Cela achève la démonstration de 6.8 et 6.9.

Corollaire 6.10. — *Soient* X *un* S*-préschéma en groupes lisse de présentation finie, à fibres connexes,* Y *un préschéma en groupes de présentation finie sur* S*,* $i : Y \to X$ *un monomorphisme de* S*-préschémas en groupes, faisant donc de* Y *un sous-groupe de* X*. Alors* $\prod_{X/S} Y/X$ *est représentable par un sous-préschéma fermé de présentation finie de* S*. Si* S *est quasi-compact, désignant pour tout entier* $n \geqslant 0$ *par* X_n *le voisinage infinitésimal d'ordre* n *de la section unité de* X*, et posant* $Y_n = X_n \cap Y$*, on a pour* n *assez grand :* $\prod_{X/S} Y/X = \prod_{X_n/S} Y_n/X_n$.

La démonstration est essentiellement celle de 6.9. Notons que les sections unité de X et de Y induisent des immersions bijectives $S \to X_n$ et $S \to Y_n$, induisant donc des isomorphismes de $S_{\text{réd}}$ avec $(X_n)_{\text{réd}}$ et $(Y_n)_{\text{réd}}$, ce qui implique que l'injection $Y_n \to X_n$ est *propre*, donc, étant un monomorphisme de présentation finie, est une immersion fermée. Par suite, en vertu de VIII 6.4 déjà utilisé, $\prod_{X_n/S} Y_n/X_n$ est représentable par un sous-préschéma fermé de S de présentation finie sur S, et il reste donc à prouver la dernière assertion de 6.10 dans le cas où on suppose de plus S affine. On se réduit immédiatement encore au cas où S est noethérien, et on est ramené à prouver qu'alors on a $R = T$ (avec les notations de la démonstration de 6.9), ou encore que $Y \supset X_n$ pour tout n implique $Y = X$. Or l'hypothèse implique que $i : Y \to X$ est étale en les points de la section unité de Y sur S, donc Y est lisse sur S en les points de la section unité, d'où il résulte que l'ouvert Y' des points de Y en lesquels Y est lisse **178**
sur S est un sous-groupe ouvert induit de Y. Alors $Y' \to X$ est un monomorphisme étale en vertu de X 3.5 donc une immersion ouverte, or les fibres de X étant connexes et tout sous-groupe ouvert d'un groupe algébrique étant aussi fermé, il s'ensuit que c'est une immersion ouverte surjective i.e. un isomorphisme. Donc $Y' = X$ et a fortiori $Y = X$, ce qui achève la démonstration de 6.10.

Procédant comme dans VIII 6.5, on conclut de 6.10 :

Corollaire 6.11. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes localement de type fini et quasi-séparé sur* S*,* H *un préschéma en groupes lisse de présentation finie sur* S *à fibres connexes,* $i : H \to G$ *un monomorphisme de* S*-groupes, faisant donc de* H *un sous-groupe de* G*. Alors :*

a) $\underline{\mathrm{Centr}}_G(H)$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$ *sont représentables par des sous-préschémas fermés de* G *de présentation finie sur* G*, et de même, pour tout monomorphisme* $j : K \to G$ *de présentation finie de* S*-préschémas en groupes,* $\underline{\mathrm{Transp}}_G(H, K)$ *est représentable par un sous-préschéma fermé de* G *de présentation finie sur* G.

b) *Si* G *est quasi-compact, dans les divers cas envisagés dans* a)*, il existe un entier* $n \geqslant 0$ *tel que* (*si* H_n *désigne le voisinage infinitésimal d'ordre* n *de la section unité de* H) *on ait*

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) &= \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n)\\ \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) &= \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n)\\ \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{K}) &= \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n,\mathrm{K}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n,\mathrm{K}_n).\end{aligned}$$

On applique 6.10 au préschéma en groupes $\mathrm{X} = \mathrm{H}_{\mathrm{G}} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ au-dessus du préschéma de base G, et au sous-préschéma en groupes Y image inverse du sous-groupe diagonal de $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})_{\mathrm{G}}$ sur G par un homomorphisme de G-groupes convenable de
179 X dans $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})_{\mathrm{G}}$ (dans le cas de $\underline{\mathrm{Centr}}$), resp. l'image inverse de K_{G} par un homomorphisme de G-groupes convenable de X dans G_{G} (dans le cas de $\underline{\mathrm{Transp}}$). Le cas de $\underline{\mathrm{Norm}}$ se ramène au transporteur en faisant K = H, l'hypothèse sur G assurant que $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est de présentation finie, (donc $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est de présentation finie) ; dans le cas de $\underline{\mathrm{Centr}}$, l'hypothèse faite sur G assure que le groupe diagonal de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ est de présentation finie sur $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$, d'où encore le fait que Y est de présentation finie sur X.

Remarque 6.12. — On peut prouver (utilisant des résultats assez délicats de EGA VI [(*)]) que si X est un préschéma plat de présentation finie sur S, qui est *propre* sur S *ou* à fibres géométriques *connexes non vides*, alors pour tout sous-préschéma fermé Y de X de présentation finie sur S, $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X}$ est représentable par un sous-préschéma fermé de S de présentation finie sur S. De même, si X est un S-préschéma en groupes plat de présentation finie à fibres connexes, et $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un monomorphisme de S-groupes, avec Y un S-préschéma en groupes de présentation finie, alors $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X}$ est représentable par un sous-préschéma fermé de S de présentation finie sur S. En particulier, 6.11 a) reste valable en remplaçant l'hypothèse « H lisse sur S » par « H plat sur S ».

[(*)] cf. aussi J.P. Murre, Representation of unramified functors. Applications, Sém. Bourbaki N° 294 (Mai 1965), th. 3 (p. 13).

EXPOSÉ XII

TORES MAXIMAUX, GROUPE DE WEYL, SOUS-GROUPES DE CARTAN, CENTRE RÉDUCTIF DES SCHÉMAS EN GROUPES LISSES ET AFFINES

par A. Grothendieck

À partir du présent exposé, contrairement aux exposés précédents, nous ferons **180**
usage des résultats connus sur la structure des groupes algébriques lisses sur un corps algébriquement clos k, et surtout de la théorie de Borel des groupes algébriques affines, exposée dans le Séminaire Chevalley 56/57 : « Classification des groupes de Lie algébriques » [(1)]. Suivant l'usage en théorie des groupes algébriques, nous référons à ce Séminaire par le sigle BIBLE. Pour les prochains exposés, nous aurons besoin notamment des résultats de BIBLE 4, 5, 6, 7 (le chiffre après BIBLE renvoie au numéro de l'exposé). Il semble d'ailleurs que la théorie des schémas n'apporte aucune simplification notable à la théorie de Borel telle qu'elle est exposée dans BIBLE. C'est pourquoi il n'a pas semblé utile de la reproduire dans le présent Séminaire, notre but étant ici de déduire, de résultats connus sur les corps algébriquement clos, des résultats analogues valables sur tout préschéma de base. (Il n'en sera plus de même pour la théorie de structure de Chevalley des groupes semi-simples, qui, semble-t-il, se traite avec avantage ab ovo sur un préschéma de base quelconque).

Dans les exposés oraux (que nous avons suivis dans les N$^{\text{os}}$ 1 à 4), nous nous étions limités aux préschémas en groupes affines sur S, en nous appuyant de façon essentielle sur les théorèmes de représentabilité de Exp XI N°4. Dans les présentes notes (cf. N$^{\text{os}}$ **181**
6 à 8) nous montrons rapidement comment on peut éliminer les hypothèses affines par une méthode plus simple n'utilisant pas les résultats les plus délicats de l'Exposé XI. Pour d'autres généralisations des résultats contenus dans le présent exposé, voir également exposés XV et XVI. (Il est évident que le contenu des exposés XI, XII, XV, XVI devrait être complètement refondu).

1. Tores maximaux

[(0)]version xy du 2/12/08

[(1)]N.D.E. : Ce séminaire a maintenant été publié, sous une forme révisée par P. Cartier, comme volume 3 des Oeuvres de Chevalley (Springer, 2005).

1.0. Soit d'abord G un groupe algébrique sur un corps *algébriquement clos* k. On appelle *tore maximal* de G un sous-groupe algébrique T de G qui est un *tore* (ce qui signifie ici, k étant algébriquement clos, qu'il est isomorphe à un groupe de la forme $\mathbb{G}_m^r$), et qui est maximal pour cette propriété. Noter que, k étant parfait, $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$ est un sous-groupe de G, lisse sur k, c'est donc essentiellement un groupe algébrique au sens de BIBLE. D'ailleurs, tout sous-groupe réduit de G (tel un tore) est automatiquement un sous-groupe de $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$, par suite les tores maximaux de G coïncident avec les tores maximaux de $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$. Lorsque G est affine, donc $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$ affine, un théorème fondamental de Borel nous dit que deux tores maximaux de G sont conjugués par un élément de $\mathrm{G}(k) = \mathrm{G}_{\mathrm{réd}}(k)$ (BIBLE 6, th. 4 c), en particulier ils ont même dimension. Nous appellerons la dimension commune des tores maximaux de G le *rang réductif* de G. Noter d'ailleurs que la restriction G affine est inutile, comme il résulte d'un théorème connu de Chevalley, affirmant que tout groupe algébrique connexe lisse sur k est une extension d'une variété abélienne par un groupe affine ; cf. N°6. Dans les N$^{\mathrm{os}}$ 1 à 4, nous nous bornerons le plus souvent aux préschémas en groupes affines sur la base.

Soit G un groupe algébrique lisse sur k, et T un tore maximal de G, le centralisateur C(T) de T dans G sera appelé le *sous-groupe de Cartan* de G associé à T. C'est pour nous un sous-préschéma en groupes défini grâce à VIII 6.7, mais on notera que G étant lisse sur k, il en est de même du sous-groupe de Cartan C, en vertu de XI 5.3, donc
182 dans ce cas C est l'unique sous-préschéma en groupes de G lisse sur k (i.e. un sous-groupe algébrique de G au sens de BIBLE) tel que $\mathrm{C}(k)$ soit le sous-groupe de $\mathrm{G}(k)$ centralisateur de $\mathrm{T}(k)$, i.e. c'est essentiellement le centralisateur au sens de BIBLE. D'après le théorème de conjugaison déjà cité, les sous-groupes de Cartan associés aux divers tores maximaux sont conjugués entre eux, donc ont même dimension. Nous appellerons leur dimension commune le *rang nilpotent de* G, il est égal à celui de $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$. Soient $\rho_r(\mathrm{G})$ et $\rho_n(\mathrm{G})$ les rangs réductif et nilpotent de G, alors on a

$$\rho_r(\mathrm{G}) \leqslant \rho_n(\mathrm{G}),$$

et la différence

$$\rho_u(\mathrm{G}) = \rho_n(\mathrm{G}) - \rho_r(\mathrm{G}) = \dim \mathrm{C}/\mathrm{T}$$

pourrait être appelé, lorsque G est affine, le *rang unipotent* de G. Lorsque G est lisse, affine et connexe, alors C est un groupe algébrique *nilpotent et connexe* (BIBLE 6, th. 6 a) et c)), donc (BIBLE 6, th. 2) isomorphe au produit $\mathrm{C}_s \times \mathrm{C}_u$, où $\mathrm{C}_s = \mathrm{T}$ est le tore maximal de départ (qui est a fortiori un tore maximal dans C), et où C_u est un sous-groupe lisse unipotent, i.e. extension successive de groupes isomorphes à $\mathbb{G}_a$ (BIBLE 6 th. 1 cor. 1 et 7, th. 4). On a donc aussi, dans ce cas :

$$\rho_u(\mathrm{G}) = \dim \mathrm{C}_u.$$

Remarque 1.1. — En plus des trois notions de rang que nous venons de préciser pour un groupe algébrique affine, il en est deux autres qui sont utiles, savoir le *rang semi-simple* $\rho_s(\mathrm{G})$, qui est par définition le rang réductif du quotient G/R, où R est le radical de G, et enfin le *rang infinitésimal* $\rho_i(\mathrm{G})$, qui est par définition le rang nilpotent de l'algèbre de Lie de G (qui sera défini et étudié dans l'exposé suivant). Nous ne les utiliserons pas dans le présent exposé. Signalons seulement les inégalités :

$$\rho_s \leqslant \rho_r \leqslant \rho_n \leqslant \rho_i.$$

Lemme 1.2. — *Soit* G *un groupe algébrique sur le corps algébriquement clos* k*,* T *un sous-groupe algébrique de* G*,* k' *une extension algébriquement close de* k*,* G′ *et* T′ *les groupes déduits de* G*,* T *par extension de la base. Pour que* T *soit un tore maximal de* G*, il faut et suffit que* T′ *soit un tore maximal de* G′*.* **183**

C'est une conséquence immédiate du « principe de l'extension finie » EGA IV 9.1.1.

Définition 1.3. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes de type fini, T un sous-préschéma en groupes de G. On dit que T est un *tore maximal* de G si

a) T est un tore (IX 1.3) et

b) pour tout $s \in \mathrm{S}$, désignant par $\overline{s}$ le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(s)$, $\mathrm{T}_{\overline{\mathrm{S}}}$ est un tore maximal dans $\mathrm{G}_{\overline{s}}$.

Remarques 1.4. — Il résulte de 1.2 que lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos on retrouve la définition habituelle, et que la propriété 1.3 est stable par tout changement de base. Noter que en vertu de X 8.8 l'on peut dans la définition 1.3 remplacer la condition a) par la condition :

a′) T est de présentation finie et plat sur S.

On fera attention qu'un tore maximal au sens de la définition 1.3 est bien maximal dans l'ensemble des sous-tores de G (comme il résulte aussitôt de IX 2.9), mais que la réciproque ne peut être exacte, la base S étant disons connexe, que si G admet effectivement un tore maximal au sens de 1.3, ce qui n'est pas le cas en général (même si $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et si G est « semi-simple » ; voir aussi 1.6). Nous verrons cependant dans XIV que la réciproque est vraie lorsque S est artinien, ou lorsque S est un schéma local et G est « réductif » : dans ce cas, tout tore de G est contenu dans un tore maximal.

Définition 1.5. — Soit G un groupe algébrique sur un corps k. On appelle *rang réductif* (resp. *rang nilpotent*, resp. *rang unipotent* etc.) de G le rang réductif (resp. . . .) de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$, où $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k. **184**

On notera qu'en vertu de 1.2 et de la commutation de la formation de $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ avec l'extension de la base, les notions de rang introduites dans 1.5 sont *invariantes par extension du corps de base* ; d'autre part, pour k algébriquement clos, elles coïncident avec celles introduites au début du présent numéro.

Remarque 1.6. — Il n'est pas difficile de construire un schéma en groupes affine et lisse G sur le spectre S d'un anneau de valuation discrète, dont la fibre générique soit isomorphe à $\mathbb{G}_m$, et la fibre spéciale isomorphe à $\mathbb{G}_a$. Un tel G ne contient aucun tore sauf le tore trivial T (réduit au sous-groupe unité), qui n'est évidemment pas tore maximal. De façon précise, dans la fibre spéciale $\mathrm{G}_0 = \mathbb{G}_{a,\,k}$, T_0 est bien tore maximal, mais dans la fibre générique $\mathrm{G}_1 = \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{K}}$, T_1 n'est plus tore maximal (k est le corps résiduel, K le corps des fractions de l'anneau de valuation envisagé). On voit aussi sur cet exemple que le rang réductif de G_s ($s \in S$) n'est pas fonction continue de s. On a cependant les résultats suivants :

Théorème 1.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes affine et lisse sur* S*. Pour tout* $s \in S$*, considérons* $\rho_r(s) = \rho_r(G_s)$ *et* $\rho_n(s) = \rho_n(G_s)$*, les rangs réductif et nilpotent de* G_s (1.5)*. Avec ces notations, on a ce qui suit :*

a) *La fonction* ρ_r *sur* S *est semi-continue inférieurement, la fonction* ρ_n *sur* S *est semi-continue supérieurement, donc la fonction* $\rho_u = \rho_n - \rho_r$ *est semi-continue supérieurement.*

b) *Les conditions suivantes* (*stables par changement de base quelconque*) *sont équivalentes :*

(i) *La fonction* ρ_r *sur* S *est localement constante.*

185 (ii) *Il existe localement, au sens de la topologie étale, un tore maximal dans* G.

(ii bis) *Il existe localement, au sens de la topologie fidèlement plate quasi-compacte, un tore maximal dans* G.

c) *Soient* T_1, T_2 *deux tores maximaux dans* G (*ce qui implique que l'on est sous les conditions envisagées dans b*))*. Alors* T_1, T_2 *sont conjugués localement au sens de la topologie étale, i.e. il existe un morphisme étale surjectif* $S' \to S$ *tel que les sous-groupes* $(T_1)_{S'}$ *et* $(T_2)_{S'}$ *de* $G_{S'}$ *soient conjugués par une section de* $G_{S'}$ *sur* S'.

d) *Sous les conditions de* b)*, i.e. lorsque* ρ_r *est localement constante, il en est de même de* ρ_n (*donc aussi de* $\rho_u = \rho_n - \rho_r$).

Démonstration. a) Notons que pour tout morphisme $S' \to S$, si $G' = G \times_S S'$, les fonctions ρ'_r etc. sur S' définies en termes de G' comme ρ_r etc. en termes de G, s'obtiennent simplement en composant ces dernières avec $S' \to S$. Lorsque $S' \to S$ est fidèlement plat quasi-compact, il en résulte que ρ' est continue, resp. semi-continue supérieurement, resp. semi-continue inférieurement, si et seulement si ρ l'est, la topologie de Zariski de S étant en effet quotient de celle de S' (SGA1 VIII 4.3). Par suite, les assertions de a) sont locales pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte. Soit alors $s \in S$, on veut montrer que l'ensemble U des $t \in S$ tels que $\rho_r(t) \geqslant \rho_r(s)$ (resp. $\rho_n(t) \leqslant \rho_n(s)$) est un voisinage de s. En vertu du principe de l'extension finie, il existe une extension finie k de $\kappa(s)$, telle que G_k admette un tore maximal. Il existe alors un voisinage ouvert U de s, et un morphisme fini surjectif localement libre $S' \to U$, tel que la fibre S'_s soit $\kappa(s)$-isomorphe à $\mathrm{Spec}(k)$ (cf. EGA III 10.3.2, où l'hypothèse noethérienne est manifestement inutile). Comme $S' \to S$ est un morphisme ouvert (SGA1 IV 6.6), on est ramené au cas où $S' = S$, i.e. au cas où il existe un tore maximal T_s dans G_s. De plus, grâce à XI 5.8 a), quitte à
186 remplacer encore S par un S' étale sur S et muni d'un point s' au-dessus de s, on peut supposer que T_s est la fibre en s d'un sous-tore T de G. Alors pour tout $t \in S$, $\rho_r(t) = \rho_r(G_t) \geqslant \dim T_t = \dim T_s = \rho_r(G_s) = \rho_r(s)$, ce qui prouve que ρ_r est semi-continue inférieurement. D'autre part, en vertu de XI 5.3, le foncteur

$$C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$$

est représentable par $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ [2], un sous-préschéma en groupes fermé de G *lisse* sur S. Donc il existe un voisinage U de s tel que $t \in \mathrm{U}$ implique $\dim \mathrm{C}_t = \dim \mathrm{C}_s = \rho_n(s)$. La semi-continuité supérieure de ρ_n est alors une conséquence de la relation

$$\rho_n(t) \leqslant \dim \mathrm{C}_t \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathrm{S},$$

qui est contenue elle-même dans le lemme purement géométrique suivant :

Lemme 1.8. — *Soient k un corps,* G *un groupe algébrique affine et lisse sur k,* T *un tore dans* G, C *son centralisateur, alors on a*

$$\rho_n(\mathrm{G}) \leqslant \dim \mathrm{C}.$$

En effet, on peut supposer k algébriquement clos, de sorte que T est contenu dans un tore maximal T'. Soit C' le centralisateur de ce dernier, alors on a $\mathrm{C}' \subset \mathrm{C}$, donc $\dim \mathrm{C}' \leqslant \dim \mathrm{C}$. C.Q.F.D.

b) Si ρ_r est localement constant, alors pour tout tore T dans G, et tout $s \in \mathrm{S}$, si T_s est tore maximal dans G_s, alors il existe un voisinage ouvert U de s tel que $\mathrm{T}|_{\mathrm{U}}$ soit tore maximal dans $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$. Utilisant maintenant le raisonnement de a), on voit que (i) $\Rightarrow$ (ii bis). D'autre part (ii bis) $\Rightarrow$ (i), car lorsque G admet un tore maximal T, alors il est évident que $\rho_r(s) = \dim \mathrm{T}_s$ est une fonction localement constante de s, or nous avons signalé au début de la démonstration de a) que la question de la continuité de ρ_r était locale pour la topologie fidèlement plate. Donc (i) $\Leftrightarrow$ (ii bis), et évidemment (ii) $\Rightarrow$ (ii bis), reste à prouver l'implication inverse (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour ceci, **187**
introduisons le foncteur F de XI 4.1[3], qui est donc un préschéma lisse et séparé sur S, et considérons le sous-foncteur $\mathscr{T}$ de F, dont la valeur pour un S' sur S est l'ensemble des tores maximaux dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$. Utilisant la remarque précédente que, moyennant (i), un tore dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ qui est maximal dans la fibre d'un point $s \in \mathrm{S}'$ est maximal au-dessus d'un voisinage ouvert de s, on voit que $\mathscr{T}$ est représentable par un sous-préschéma ouvert de F, et par suite est lisse et séparé sur S. Comme le morphisme structural $\mathscr{T} \to \mathrm{S}$ est évidemment surjectif, il admet donc une section localement au sens de la topologie étale en vertu de XI 1.10, ce qui prouve (i) $\Rightarrow$ (ii).

c) C'est une conséquence immédiate de XI 5.4 bis, compte tenu du théorème de conjugaison de Borel rappelé au début du numéro.

d) Moyennant la remarque du début de la démonstration dans a), et compte tenu de b), on peut supposer qu'il existe un tore maximal T dans G. Si C est son centralisateur, alors C est représentable et est lisse sur S par XI 5.3, donc la fonction $s \mapsto \rho_n(s) = \dim \mathrm{C}_s$ est bien localement constante.

La démonstration de 1.7 est achevée. Nous référerons aux conditions envisagées dans 1.7 b) en disant que dans ce cas, G est de *rang réductif localement constant.* Notons :

---

[2] N.D.E. : modification faite pour introduire le préschéma $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ représentant le foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$.

[3] N.D.E. : Il s'agit du foncteur des sous–groupes de type multiplicatif de G.

Corollaire 1.9. — *Soit* G *comme dans* 1.7, *et soit* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $\rho_u(s) = 0$ *i.e.* $\rho_r(s) = \rho_n(s)$, (*i.e. les sous-groupes de Cartan de* G_k *sont des tores, où* k *est une clôture algébrique de* $\kappa(s)$). *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *sur lequel* ρ_r *et* ρ_n *sont constants, en particulier pour tout* $t \in \mathrm{U}$, *le rang unipotent* $\rho_u(t)$ *de* G_t *est nul.*

En effet, cela résulte immédiatement de 1.7 a) et de l'inégalité $\rho_r(t) \leqslant \rho_n(t)$ pour tout $t \in \mathrm{S}$.

Notons aussi que nous avons prouvé, en même temps que b), le

188 ***Corollaire 1.10***. — *Soit* G *comme dans* 1.7, *et supposons* G *de rang réductif localement constant. Considérons le foncteur*

$$\mathscr{T} : (\mathbf{Sch})^{\circ} \longrightarrow (\mathbf{Ens}),$$

tel que pour tout S' *sur* S, *on ait*

$$\mathscr{T}(\mathrm{S}') = \textit{ ensemble des tores maximaux de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}.$$

Alors $\mathscr{T}$ *est représentable par un préschéma lisse, séparé et de type fini sur* S.

Il reste à vérifier que $\mathscr{T}$ est de type fini sur S. La question étant locale pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, on peut supposer que G admet un tore maximal T. D'après XI 5.3 bis et la version bis de 5.5, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ sont représentables par des préschémas $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{G}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, et $\mathscr{T}$ est isomorphe à $\mathrm{G}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ [(4)]. Le morphisme $\mathrm{G} \to \mathscr{T}$ défini par $g \mapsto \mathrm{int}(g)(\mathrm{T})$ étant surjectif, et G quasi-compact sur S, il en est de même de $\mathscr{T}$, ce qui achève la démonstration.

Remarques 1.11. — a) Le préschéma $\mathscr{T}$ de 1.10 s'appellera comme de juste le *préschéma des tores maximaux* de G. On verra au N°5 qu'il est en fait *affine* sur S. On peut le vérifier directement, lorsque G est isomorphe à un sous-préschéma en groupes fermé d'un préschéma de la forme $\mathrm{GL}(n)$, en utilisant XI 4.6 et en remarquant que par le raisonnement de la démonstration de 1.7 b), $\mathscr{T}$ s'identifie à un sous-préschéma à la fois *ouvert et fermé* du préschéma F qui représente les sous-groupes de type multiplicatif de G.

b) Il est possible de donner une démonstration de 1.7 donc de 1.9 n'utilisant pas les résultats délicats de XI, mais seulement les résultats faciles XI 3.12 et 6.2, en travaillant uniquement avec des groupes de type multiplicatif finis sur la base (moralement, les groupes ${}_n\mathrm{T}$ où T est un tore maximal), comparer N°7. La même remarque vaut pour la démonstration de 1.10.

189 Nous terminons ce numéro en donnant des exemples où il existe un unique tore maximal.

Proposition 1.12. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes de type multiplicatif et de type fini. Alors* G *admet un unique tore maximal, et tout tore dans* G *est contenu dans ce tore maximal.*

[(4)] N.D.E. : modification faite pour introduire les préschémas $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{G}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$.

L'unicité résulte évidemment de cette dernière assertion, qui caractérise le tore maximal comme le plus grand sous-tore de G. De l'unicité résulte que la question d'existence est locale pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, ce qui nous permet de supposer G diagonalisable, i.e. de la forme $D_S(M)$, M un groupe commutatif de type fini. Soit M_0 le quotient de M par son sous-groupe de torsion, je dis que le tore $T = D_S(M_0)$ dans G est tore maximal et un plus grand sous-tore. En effet un sous-tore T' de G est localement diagonalisable pour la topologie fpqc, donc pour prouver $T' \subset T$, on peut supposer T' diagonalisable, donc de la forme $D_S(N)$, où N est un quotient libre de M (VIII 1.4 et 3.2 b)), donc N est un quotient de M_0, donc $T' \subset T$. Comme la construction de T comme $D_S(M_0)$ est compatible avec toute extension de la base, cela montre en même temps que T est un tore maximal de G, et achève la démonstration. Dans le cas où G est lisse sur S, on peut généraliser 1.12 :

Proposition 1.13. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes de présentation finie sur* S. *Supposons que* G *admette localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte un tore maximal* central. *Alors* G *admet* (*globalement*) *un unique tore maximal*[(5)], *et c'est le plus grand sous-tore de* G.

Ici encore, l'unicité est triviale sur la dernière assertion, et rend l'existence une question locale pour fpqc, ce qui nous permet de supposer que G admet un tore maximal central T. Montrons que tout tore R de G est contenu dans T.

Ceci résulte du 190

Lemme 1.14. — *Soient* G *un* S-*préschéma en groupes, de présentation finie sur* S, T *un tore maximal de* G, R *un sous-tore de* G, *et supposons que* T *et* R *commutent. Alors* $R \subset T$.

En effet, comme R et T commutent, le morphisme $R \times_S T \to G$ défini par $(r,t) \mapsto r \cdot t$ est un homomorphisme de groupes, donc en vertu de IX 6.8 il admet un sous-groupe image T' dans G, qui est un groupe de type multiplicatif quotient de $R \times_S T$, donc un tore, contenant évidemment T. Comme T est un tore maximal, on a $T' = T$ (1.4), donc $R \subset T$, ce qui démontre 1.14 donc 1.13. En particulier, utilisant 1.7 b) :

Corollaire 1.15. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes* commutatif, *lisse et affine sur* S, *de rang réductif localement constant. Alors* G *admet un unique tore maximal, et ce dernier contient tout sous-tore de* G.

Corollaire 1.16. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes, lisse et affine sur* S. *Supposons que pour tout* $s \in S$, *désignant par* $\overline{s}$ *le spectre d'une clôture algébrique* k *de* $\kappa(s)$, *la fibre géométrique* $G_{\overline{s}}$ *soit un groupe algébrique connexe, et nilpotent* (*au sens de BIBLE, i.e. le groupe* $G(k)$ *de ses points à valeurs dans* k *est nilpotent*). *Supposons de plus le rang réductif de* G *localement constant. Alors* G *admet un unique tore maximal* T, *de plus* T *est central et c'est le plus grand sous-tore de* G.

---

(5) N.D.E. : qui est central !

En vertu de 1.7 b), G admet localement pour fpqc un tore maximal, et en vertu de 1.13 on est ramené à prouver qu'un tore maximal de G est central. En vertu de IX 5.6 b), on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps, qu'on peut supposer algébriquement clos. Alors $\mathrm{T}(k)$ est dans le centre de $\mathrm{G}(k)$ en vertu de BIBLE 6 th.2, ce qui implique que T est dans le centre de G, car $\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est un sous-schéma fermé de G (VIII 6.6), qui contient les points de $\mathrm{G}(k)$, donc est identique à G par le Nullstellensatz (G étant réduit).

191 Enfin, pour référence ultérieure, signalons la proposition triviale suivante, (dont nous avons fait déjà usage implicitement) :

Proposition 1.17. — *Soient* $\mathrm{G} \supset \mathrm{H} \supset \mathrm{T}$ *des préschémas en groupes de type fini sur* S. *Conditions équivalentes :*

(i) T *est un tore maximal de* G.

(ii) T *est un tore maximal de* H*, et pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, on a égalité des rangs réductifs* $\rho_r(\mathrm{G}_s) = \rho_r(\mathrm{H}_s)$*.*

2. Le groupe de Weyl

Soit d'abord k un corps algébriquement clos, et soit G un groupe algébrique sur k, lisse et affine sur k. Si T est un tore maximal, C son centralisateur et N son normalisateur, alors en vertu de XI 5.9 ce sont des sous-groupes fermés lisses de G, et C est un sous-groupe ouvert de N, de sorte que $\mathrm{W} = \mathrm{N}/\mathrm{C}$ est un groupe fini étale sur k, donc déterminé par le groupe $\mathrm{W}(k)$ de ses points à valeurs dans k, comme $\mathrm{W} = \mathrm{W}(k)_k$ (groupe constant défini par le groupe fini ordinaire $\mathrm{W}(k)$). Le groupe fini $\mathrm{W}(k)$ s'appellera le *groupe de Weyl géométrique*, (ou simplement groupe de Weyl si une confusion n'est pas à craindre), *de* G *relativement à* T. En vertu du théorème de conjugaison de Borel, les groupes de Weyl relatifs aux divers tores maximaux sont isomorphes entre eux, c'est pourquoi on parle parfois « du » groupe de Weyl de G, sans préciser de tore maximal. Comme la formation de C, N, et N/C commute à toute extension de la base, on voit que si k' est une extension algébriquement close de k, le groupe de Weyl géométrique de $\mathrm{G}_{k'}$ relativement à $\mathrm{T}_{k'}$ est canoniquement isomorphe à celui de G relativement à T ; par suite, « le » groupe de Weyl géométrique de G (qui est à proprement parler une classe à isomorphisme près de groupes finis ordinaires) coïncide avec celui de G'.

192 Ceci permet, lorsque G est un groupe algébrique lisse et affine sur un corps quelconque k, de parler du *groupe de Weyl géométrique* de G comme étant la classe à isomorphisme près du groupe de Weyl géométrique de $\mathrm{G}_{k'}$, où k' est une extension algébriquement close quelconque de k. Lorsque G admet le tore maximal T, alors on peut évidemment former comme plus haut $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, $\mathrm{N} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, $\mathrm{W} = \mathrm{N}/\mathrm{C}$ qui est un groupe fini étale sur k, appelé le *groupe de Weyl de* G *relativement à* T ; le groupe de Weyl géométrique n'est alors autre que la classe du groupe des points de W à valeurs dans une extension algébriquement close quelconque k' de k. Ici, la connaissance du groupe de Weyl géométrique $\mathrm{W}(k')$ ne suffit évidemment plus en général, à reconstituer le groupe algébrique W : il faut de plus connaître les

opérations sur $W(k')$ du groupe de Galois de la clôture algébrique séparable de k dans k'.

Lorsque enfin G est un préschéma en groupes sur une base quelconque S, G lisse et affine sur S, et si T est un tore maximal de G, alors XI 5.9 nous permet encore de former le groupe

$$W(T) = N(T)/C(T),$$

qui est un S-préschéma en groupes étale, séparé et quasi-fini sur S. Ses fibres géométriques (relatives aux clôtures algébriques des corps résiduels $\kappa(s)$, $s \in S$) sont les groupes de Weyl géométriques des fibres G_s. Par suite, XI 5.10 nous donne des renseignements sur la variation de ces groupes avec $s \in S$. Nous pouvons préciser et généraliser ces renseignements de la façon suivante :

Théorème 2.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et affine sur* S*. Pour tout* $s \in S$*, soit* $w(s)$ *le groupe de Weyl géométrique de* G_s*, qui est donc une classe de groupes finis à isomorphisme près. Dans l'ensemble* E *de telles classes, introduisons la relation de préordre suivante :* $w \leqslant w'$ *si et seulement si* w *et* w' *sont représentés par des groupes finis* W *et* W′*, tels que* W *soit isomorphe à un quotient d'un sous-groupe de* W′*. Avec cette convention :*

a) *La fonction* $s \mapsto w(s)$ *de* S *dans* E *est semi-continue inférieurement.* 193

b) *Supposons que le rang réductif de* G *soit localement constant. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La fonction* $s \mapsto w(s)$ *est localement constante.*

(i bis) *La fonction* $s \mapsto \operatorname{card} w(s)$ *est localement constante.*

(ii) *Il existe, localement pour la topologie étale* (*ou seulement pour la topologie* fpqc) *un tore maximal* T*, tel que* W(T) *soit fini sur sa base.*

(ii bis) *Pour tout* S′ *sur* S*, et tout tore maximal* T *de* $G_{S'}$*, le groupe de Weyl associé* W(T) *est fini sur* S′*.*

Démonstration. a) Procédant comme dans 1.7 a), on est ramené, pour prouver que pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert U de s tel que $t \in U$ implique $w(t) \geqslant w(s)$, au cas où il existe un tore R dans G tel que R_s soit un tore maximal dans G_s. Soit

$$W(R) = \mathrm{Norm}_G(R)/\,\mathrm{Centr}_G(R)$$

comme dans XI 5.9, c'est un préschéma en groupes étale, séparé, quasi-fini sur S. Pour tout $t \in S$, soit $w'(t) \in E$ sa fibre géométrique en t. Comme R_s est un tore maximal dans G_s, et la formation de Norm, Centr, Norm / Centr est compatible avec toute extension de la base, en particulier le passage aux fibres, on voit que l'on a

$$w(s) = w'(s);$$

je dis que de plus, pour t voisin de s, on aura les inégalités

$$w(t) \geqslant w'(t) \qquad \text{et} \qquad w'(t) \geqslant w'(s),$$

ce qui suffira pour établir a). Ces deux inégalités sont contenues dans les deux lemmes suivants :

194 ***Lemme 2.2***. — *Soient* S *un préschéma,* W *un* S*-préschéma en groupes qui est étale, séparé et quasi-fini sur* S*. Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, soit* $f(s)$ *la classe de la fibre géométrique de* W *en* s*, qui est un élément de l'ensemble ordonné* E *des classes de groupes finis à isomorphisme près, introduit dans* 2.1*. Alors la fonction* $f : \mathrm{S} \to \mathrm{E}$ *est semi-continue inférieurement. Pour qu'elle soit constante au voisinage de* $s \in \mathrm{S}$*, il faut et suffit qu'il en soit de même de la fonction* $s \mapsto \operatorname{card} f(s)$*, et pour ceci il faut et suffit que* W *soit fini sur* S *au-dessus d'un voisinage ouvert* U *de* s*.*

Ce résultat est un raffinement, en termes de groupes, de celui invoqué dans la démonstration de XI 5.10, nous nous bornons à une esquisse de la démonstration (qui est du type le plus standard). On est ramené comme d'habitude au cas S affine noethérien. On voit de suite que la fonction f est constructible (EGA 0_{III} 9.3.1 et 9.3.2, et sorites de EGA IV 9), et en vertu de EGA 0_{III} 9.3.4 on est ramené pour la semi-continuité à prouver que si t est une générisation de s, on a $f(t) \geqslant f(s)$. Cela nous ramène grâce à EGA II 7.1.7 au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, qu'on peut supposer complet à corps résiduel algébriquement clos. Mais alors, s désignant le point fermé de S, comme G est étale et séparé sur S, il contient un sous-schéma à la fois ouvert et fermé G', fini sur S, tel que $\mathrm{G}'_s = \mathrm{G}_s$ (EGA II 6.2.6), et on voit de suite que G' est ici un sous-groupe de G. D'ailleurs G' étant étale fini sur $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{V})$, V complet à corps résiduel algébriquement clos, est un groupe constant, donc de la forme A_{S}, où $\mathrm{A} = \mathrm{G}'(\kappa(s)) = \mathrm{G}(\kappa(s))$ a pour classe $f(s)$. Si B est la fibre géométrique de G en le point générique t de S, on a donc un monomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, ce qui prouve $f(s) \leqslant f(t)$. (N. B. cette démonstration prouve en fait la semi-continuité pour une relations d'ordre sur E plus fine que celle indiquée dans 2.1). Le fait que f soit continue en s si et seulement si $s \mapsto \operatorname{card} f(s)$ l'est résulte du fait que pour w, $w' \in \mathrm{E}$, les relations $w \leqslant w'$ et card $w = \operatorname{card} w'$ impliquent $w = w'$. Le fait que cette condition soit équivalente à la finitude de W sur un voisinage de s est alors indépendant de la structure de groupe
195 sur W, et a été signalé après XI 5.10 ; d'ailleurs sa démonstration se fait aisément par les arguments précédents, en utilisant le critère valuatif de propreté EGA II 7.3.8.

Lemme 2.3. — *Soient* G *un groupe algébrique affine lisse sur un corps algébriquement clos* k*,* $\mathrm{R} \subset \mathrm{T}$ *deux sous-tores,* W(R) *et* W(T) *les deux groupes finis associés comme dans* XI 5.9*, quotients du normalisateur par le centralisateur. Alors* W(R) *est isomorphe à un quotient d'un sous-groupe de* W(T)*.*

Considérons en effet le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T} \arrow[r, hook] & \mathrm{C(T)} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{C(R)} \arrow[d, hook] \\
& \mathrm{N(T)} \cap \mathrm{N(R)} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{N(R)} \\
& \mathrm{N(T)} &
\end{tikzcd}$$

alors $(\mathrm{N(T)} \cap \mathrm{N(R)})/\mathrm{C(T)}$ est un sous-groupe de $\mathrm{W(T)} = \mathrm{N(T)/C(T)}$, et on a un homomorphisme évident :

$$(\mathrm{N(T)} \cap \mathrm{N(R)})/\mathrm{C(T)} \longrightarrow \mathrm{W(R)} = \mathrm{N(R)/C(R)},$$

et tout revient à prouver que ce dernier est surjectif, donc que pour tout point g de N(R) à valeurs dans k, il existe un point c de C(R) à valeurs dans k tel que cg normalise T, i.e. tel que

$$\mathrm{int}(c)(\mathrm{int}(g)\mathrm{T}) = \mathrm{T}.$$

Or pour ceci, il suffit de noter que $\mathrm{int}(g)\mathrm{T}$ est un tore de N(R) donc de C(R) (qui en est un sous-groupe ouvert). Alors T et $\mathrm{int}(g)\mathrm{T}$ sont des tores maximaux de C(R), puisqu'ils sont maximaux dans G, et on conclut par le théorème de conjugaison de Borel.

Cela prouve 2.3 et par là 2.1 a). **196**

b) Nous avons déjà signalé que (i) et (i bis) sont équivalents trivialement, ils impliquent (ii bis) d'après la réciproque à 2.2 ou XI 5.10 au choix ; (ii bis) $\Rightarrow$ (ii) grâce à 1.7 b), enfin (ii) $\Rightarrow$ (i bis), car on voit comme dans 1.7 a) que la condition (i) est locale pour fpqc, ce qui nous permet de supposer que G admet un tore maximal T tel que W(T) soit fini sur S, et on conclut encore par XI 5.10. Cela achève la démonstration de 2.1.

3. Sous-groupes de Cartan

Définition 3.1. — Soit G un préschéma en groupes lisse de type fini sur le préschéma S. On appelle *sous-groupe de Cartan* de G un sous-préschéma en groupes C de G, lisse sur S, tel que pour tout $s \in \mathrm{S}$, désignant par $\overline{s}$ le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(s)$, $\mathrm{C}_{\overline{s}}$ soit un sous-groupe de Cartan (cf. N°1) de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$.

Il est immédiat que si C est un sous-groupe de Cartan de G, alors pour tout S′ sur S, $\mathrm{C}_{\mathrm{S}'}$ est un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$. Si S est le spectre d'un corps algébriquement clos, on retrouve la notion rappelée au N°1. Enfin, on vérifie aussitôt que le fait pour un sous-préschéma en groupes C de G d'être un sous-groupe de Cartan est de *nature locale* pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte.

Théorème 3.2. — *Soit* G *sur* S *comme dans* 3.1*, et supposons que* G *soit affine sur* S*, et de rang réductif localement constant. Alors l'application*

$$\mathrm{T} \longmapsto \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$$

induit une bijection de l'ensemble des tores maximaux de G *avec l'ensemble des sous-groupes de Cartan* (*) *de* G*. Si* C *correspond à* T*, alors* T *est l'unique tore maximal* **197**
de C*.*

(*) La démonstration donnée ici prouve en fait seulement 3.2 pour les sous-groupes de Cartan *fermés* de G. Cependant, 7.1 a) établit 3.2 sous la forme énoncée, et implique que les sous-groupes de Cartan de G sont fermés.

Si T est un tore maximal de G, le foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est représentable, en vertu de XI 5.3 ou 6.2, par un sous-préschéma fermé et lisse de G, $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, et il résulte des définitions que C est un sous-groupe de Cartan de G. De plus, T est évidemment un tore maximal de C, et étant central, c'est l'unique tore maximal de C (1.13). Donc l'application $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ de l'ensemble des tores maximaux dans l'ensemble des sous-groupes de Cartan est injective, reste à prouver qu'elle est surjective. Soit donc C un sous-groupe de Cartan de G, prouvons qu'il est de la forme $\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, pour T un tore maximal de G. Pour cela il suffit de trouver un tore maximal T de C, car alors T sera un tore maximal de G (car pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s et C_s ont même rang réductif). En vertu de IX 5.6 b) T est dans le centre de C, donc $\mathrm{C} \subset \mathrm{C}' = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, et alors C est un sous-groupe lisse du groupe lisse C′ sur S′, coïncidant avec C′ fibre par fibre, d'où $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. Or comme G est de rang réductif localement constant, il en est de même de C, donc C admet un tore maximal *localement* pour la topologie étale en vertu de 1.7 b), et comme ce tore est central par le raisonnement précédent, il s'ensuit par 1.13 que C admet bien un tore maximal, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.3. — *Soit* G *un préschéma en groupes lisse et affine sur* S *de rang réductif localement constant, soit* $\mathscr{C} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *le foncteur défini par*

$$\mathscr{C}(\mathrm{S}') = \text{ ensemble des sous-groupes de Cartan de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}.$$

Alors le foncteur $\mathscr{C}$ *est isomorphe au foncteur* $\mathscr{T}$ *de* 1.10*, donc est représentable par le même préschéma lisse, séparé et de type fini sur* S.

Corollaire 3.4. — *Sous les conditions de* 3.2*, si* $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$*, on a*

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}).$$

198 ***Remarque 3.5***. — Lorsque G n'est pas de rang réductif localement constant, il est cependant possible que G admette des sous-groupes de Cartan (par exemple si G est à fibres connexes nilpotentes, G est un sous-groupe de Cartan de lui-même, mais n'est pas nécessairement de rang réductif localement constant, cf. 1.6). Dans XV, nous développons la théorie des sous-groupes de Cartan sans supposer G affine sur S ni de rang réductif localement constant, en utilisant la théorie des éléments réguliers du prochain exposé. Voir aussi les N$^{\text{os}}$ 6 et 7 pour l'élimination de l'hypothèse affine.

4. Le centre réductif

Définition 4.1. — Soient S un préschéma, G un S-groupe de présentation finie sur S, à fibres affines, Z un sous-préschéma en groupes de G. On dit que Z est un *centre réductif* de G si

(i) Z est central, et de type multiplicatif et

(ii) pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, et tout homomorphisme central $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, où H est un groupe de type multiplicatif et de type fini sur S, u se factorise à travers $\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}$.

(Pour une variante de cette notion lorsqu'on ne suppose pas les fibres de G affines, cf. 8.6.)

Notons qu'un tel Z est nécessairement de type fini sur S (puisque ses fibres le sont), donc est uniquement déterminé comme le plus grand sous-groupe central de type multiplicatif de G. Il est facile de donner des exemples où G (lisse et affine sur S) admet un plus grand sous-groupe central de type multiplicatif Z, mais où Z n'est pas un centre réductif (i.e. G n'admet pas de centre réductif), cf. par exemple 1.6 ; il résulte cependant facilement de IX 6.8 qu'un sous-groupe Z de G est un centre réductif de G si et seulement si c'est un plus grand sous-groupe central de type multiplicatif, et garde cette propriété par tout changement de base ; voir aussi 4.3 plus bas.

Il est évident sur 4.1 que si Z est le centre réductif de G, alors pour tout changement **199**
de base $S' \to S$, $Z_{S'}$ est le centre réductif de $G_{S'}$. De ceci, et de l'unicité du centre réductif, résulte grâce à la théorie de la descente fidèlement plate quasi-compacte (SGA 1 VIII) :

Proposition 4.2. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes de présentation finie sur* S *et à fibres affines. Si* G *admet un centre réductif localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, il admet un centre réductif. Pour que* Z *soit un centre réductif de* G*, il faut et suffit qu'il le soit localement pour la topologie* fpqc.

Notons aussi :

Proposition 4.3. — *Soient* G *un* S-*préschéma en groupes de présentation finie et à fibres affines,* Z *un sous-préschéma en groupes. Pour que* Z *soit un centre réductif de* G*, il faut et il suffit qu'il soit de type multiplicatif, et que pour tout* $s \in S$, Z_s *soit un centre réductif de* G_s.

En effet, il résulte d'abord de IX 5.6 b) qu'alors Z est central. Comme les conditions envisagées sont stables par changement de base, il reste à prouver que tout homomorphisme central $u : H \to G$, avec H de type multiplicatif et de type fini, se factorise par Z. Or, Z étant central, u et l'immersion canonique $v : Z \to G$ définissent un homomorphisme de groupes

$$w : H \underset{S}{\times} Z \longrightarrow G.$$

En vertu de IX 6.8 ce dernier admet un groupe image K, qui est un sous-groupe de type multiplicatif de G, et tout revient à prouver que l'on a $K = Z$. Or cela est vrai fibre par fibre d'après l'hypothèse sur Z, et il suffit maintenant d'appliquer IX 5.1 bis, ce qui achève de prouver 4.3.

On notera que dans le critère 4.3, l'hypothèse que pour tout $s \in S$, Z_s soit le centre réductif de G_s est en fait purement géométrique, i.e. il suffit de le vérifier sur la clôture algébrique de $\kappa(s)$, comme il résulte de la deuxième assertion de 4.2.

Théorème 4.4. — *Soit* G *un groupe algébrique* affine *sur un corps* k. *Alors* G *admet* **200**
un centre réductif.

Comme le centre de G est représentable par un sous-groupe fermé de G (VIII 6.7), on est ramené aussitôt au cas où G est commutatif. De plus, en vertu de 4.2 on peut supposer k algébriquement clos. Nous verrons dans XVII que dans ce cas G s'écrit comme un produit $Z \times U$, où Z est de type multiplicatif, et U « unipotent », d'où il résultera aussitôt que Z est bien un centre réductif de G. Nous allons donner ici une démonstration indépendante du théorème de structure des groupes algébriques commutatifs sous la forme générale qu'on vient d'indiquer.

Notons qu'il résulte de IX 6.8 que l'ensemble des sous-groupes de type multiplicatif H de G est filtrant croissant. Montrons qu'il admet un plus grand élément.

Lorsque G est lisse sur k, on applique le théorème de structure BIBLE 4 th. 4,

$$\mathrm{G} = \mathrm{G}_s \times \mathrm{G}_u,$$

avec G_s de type multiplicatif et G_u « unipotent », ce qui signifie ici que G_u admet une suite de composition dont les facteurs sont des sous-groupes (lisses si on y tient) de $\mathbb{G}_a$. (En effet, $\mathrm{G}_u/\mathrm{G}_u^0$ est un groupe unipotent par BIBLE 4, cor. au th. 3, donc un p-groupe où $p =$ exposant caractéristique, grâce à BIBLE 4 prop. 4, d'autre part G_u^0 admet une suite de composition à quotients connexes lisses de dimension 1 par BIBLE 6 th. 1, cor. 1, et ces derniers sont isomorphes à $\mathbb{G}_a$ par BIBLE 7 th. 4). Or on voit facilement (cf. lemme plus bas) que tout homomorphisme d'un groupe de type multiplicatif dans $\mathbb{G}_a$, donc aussi dans G_u, est trivial, ce qui prouve bien que tout sous-groupe de type multiplicatif de G est contenu dans G_s.

Dans le cas général, considérons le sous-groupe

$$\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}_{\text{réd}}$$

201 de G, qui est lisse sur k, donc par ce qui précède admet un plus grand sous-groupe de type multiplicatif Z_0. Les sous-groupes de type multiplicatif de G contenant Z_0 correspondent à des sous-groupes de type multiplicatif de $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}_0$. Or on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{G}_0/\mathrm{Z}_0 \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{Z}_0 \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{G}_0 \longrightarrow 0,$$

où en vertu de ce qui précède, $\mathrm{G}_0/\mathrm{Z}_0$ n'a pas de sous-groupe de type multiplicatif sauf le groupe unité. Comme un sous-groupe d'un groupe de type multiplicatif est de type multiplicatif (IX.8), il s'ensuit que pour tout sous-groupe de type multiplicatif H de G/Z_0, on a $\mathrm{H} \cap (\mathrm{G}_0/\mathrm{Z}_0) = 0$, donc $\mathrm{H} \to \mathrm{G}/\mathrm{G}_0$ est injectif. Comme G/G_0 est un groupe algébrique radiciel, donc fini sur k, cela implique que H est lui-même radiciel et de *rang majoré* par celui de G/G_0. Cela implique que la famille des sous-groupes de type multiplicatif de G admet un plus grand élément, soit Z.

Je dis que G/Z n'a pas de sous-groupe de type multiplicatif autre que le sous-groupe unité. Cela résulte du fait (démontré dans 7.1.1) qu'une extension commutative de deux groupes algébriques de type multiplicatif est de type multiplicatif : si donc Z' est l'image inverse dans G d'un sous-groupe de type multiplicatif de G/Z, alors Z' est de type multiplicatif, donc $\mathrm{Z}' = \mathrm{Z}$ par le caractère maximal de Z, donc $\mathrm{Z}'/\mathrm{Z} = 0$.

Il résulte maintenant aisément du « principe de l'extension finie » que pour toute extension K de k, $(\mathrm{G}/\mathrm{Z})_{\mathrm{K}} = \mathrm{G}_{\mathrm{K}}/\mathrm{Z}_{\mathrm{K}}$ n'a pas non plus de sous-groupe de type multiplicatif sauf le groupe unité.

Nous pouvons maintenant prouver que Z est un centre réductif de G. En effet, soit $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$ un homomorphisme de S-groupes, où S est un préschéma sur k et H un groupe de type multiplicatif et de type fini sur S, prouvons que u se factorise à travers Z_{S}. Il revient au même de dire que l'homomorphisme composé $\mathrm{H} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}} \to (\mathrm{G}/\mathrm{Z})_{\mathrm{S}} =$

G_S/Z_S est nul. Or je dis que, posant $U = G/Z$, tout homomorphisme $u : H \to U_S$ est nul. En effet, en vertu de IX 5.2 on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps, et par IX 6.8 cela résulte alors du fait que U_K n'a d'autre sous-groupe de type **202**
multiplicatif que 0. Cela achève la démonstration de 4.4. Il reste seulement à reporter la démonstration du

Lemme 4.4.1. — *Soit* H *un* S*-préschéma en groupes de type multiplicatif, alors tout homomorphisme de* S*-groupes* $u : H \to \mathbb{G}_a$ *est trivial.*

Considérons en effet le module $\mathscr{O}_S^2 = E$ comme une extension de $\mathscr{O}_S = E'$ par $\mathscr{O}_S = E''$, alors $\mathbb{G}_a$ s'identifie au préschéma des automorphismes de cette extension, donc un homomorphisme $u : H \to \mathbb{G}_a$ s'identifie à une structure de H-module sur E respectant la structure d'extension, i.e. telle que E' soit stable par H et que les opérations induites par H dans E' et E'' soient triviales. En vertu de I 4.7.3 il s'ensuit que H opère trivialement sur E, donc u est trivial. C.Q.F.D.

Remarque 4.4.2. — Si G est une variété abélienne non nulle sur k, alors G n'admet pas de centre réductif au sens de 4.1 où on omettrait la restriction « G affine », car pour n premier à la caractéristique, ${}_nG$ est étale sur k d'ordre premier à la caractéristique, donc de type multiplicatif, or la famille des ${}_nG$ est schématiquement dense dans G, donc s'il y avait un centre réductif, il serait identique à G, ce qui est absurde, G n'étant pas de type multiplicatif. C'est la raison pour laquelle il y a lieu dans 4.1 d'imposer la restriction que G soit à fibres affines.

Lemme 4.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, affine sur* S*, à fibres connexes,* T *un tore maximal de* G*,* $u : H \to G$ *un homomorphisme central, avec* H *un* S*-préschéma en groupes de type multiplicatif et de type fini. Alors* u *se factorise par* T.

En effet, soit C le centralisateur de T, qui est un sous-préschéma en groupes fermé de G lisse sur S (XI 5.3), donc affine sur S. Comme T est dans le centre de G, il est invariant, et on peut considérer le groupe quotient $G/T = U$, qui est représentable (VIII 5.1). Comme u est central, il se factorise par C, et tout revient à prouver que **203**
l'homomorphisme composé $H \to C \to U = C/T$ est trivial. En vertu de IX 5.2 on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps, qu'on peut supposer algébriquement clos. Mais alors en vertu de BIBLE 6, th. 2, U est un groupe algébrique connexe (lisse sur k) « unipotent », ce qui signifie, comme nous l'avons déjà observé, qu'il admet une suite de composition à quotients isomorphes à $\mathbb{G}_a$. Donc tout homomorphisme d'un groupe de type multiplicatif de type fini H dans U est trivial. Cela démontre 4.5.

Corollaire 4.6. — *Soit* G *comme dans* 4.5*. Si* G *admet un centre réductif, ce dernier est contenu dans tout tore maximal de* G.

Théorème 4.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S*, affine sur* S*, et à fibres connexes.*

a) *Pour tout* $s \in S$*, soit* $z(s)$ *le type du centre réductif de* G_s *(qui est défini en vertu de* 4.4*). Ordonnons l'ensemble* E *des classes, à isomorphisme près, de* $\mathbb{Z}$*-modules de type fini, en déclarant que la classe de* M *est plus grande que celle de* M'*, si* M' *est* *isomorphe à un quotient de* M. *Alors l'application* $\mathrm{S} \to \mathrm{E}$, $s \mapsto z(s)$ *est semi-continue inférieurement.*

b) *Pour que* G *admette un centre réductif* Z, *il faut et il suffit que la fonction précédente* $z : \mathrm{S} \to \mathrm{E}$ *soit localement constante. S'il en est ainsi,* G/Z *est représentable* (cf. VIII 5.1), *et* G/Z *admet pour centre réductif le sous-groupe unité.*

c) *Supposons que le rang réductif de* G *soit localement constant* (cf. 1.7 b). *Alors* G *admet un centre réductif* Z. *Si* G/Z *est représentable* (*par exemple,* G *affine sur* S) *alors de plus les tores maximaux* T *de* G (*resp. les sous-groupes de Cartan* C *de* G) *et* T' (*resp.* C') *de* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ *sont en correspondance biunivoque, à* T (*resp.* C) *correspondant* $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Z}$ (*resp.* $\mathrm{C}' = \mathrm{C}/\mathrm{Z}$), *et à* T' (*resp.* C') *correspondant* $\mathrm{T} = \varphi^{-1}(\mathrm{T}')$ (*resp.* $\mathrm{C} = \varphi^{-1}(\mathrm{C}')$), *où* $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *est l'homomorphisme canonique.*

204 d) *Soit* T *un tore maximal de* G, *désignons par* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G, *et considérons l'homomorphisme*

$$\theta : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),$$

induit par la représentation adjointe de G (II 4). *Alors le noyau de* θ *est un centre réductif de* G.

Démonstration. a) et b). La démonstration de a) et de la première assertion dans b) est essentiellement identique à celle de 1.7 a) et b), et nous nous dispensons de reproduire ici le raisonnement. Signalons seulement qu'il faut faire appel dans a) à IX 5.6 (utilisant le fait que G est à fibres connexes). Prouvons la deuxième assertion de b), i.e. que si Z est un centre réductif de G, alors $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ admet pour centre réductif le sous-groupe unité. Notons tout de suite qu'en vertu de VIII 5.1 le groupe quotient G/Z est bien représentable, il est affine sur S, de présentation finie sur S (VIII 5.8) et même lisse sur S (car il suffit de le voir pour les fibres, G' étant plat de présentation finie sur S, or pour les fibres on a signalé dans $\mathrm{VI_B}$.9.2.(xii) qu'un quotient d'un groupe algébrique lisse sur un corps k est lisse) ; enfin G étant à fibres connexes, il en est de même de G'. Ainsi G' satisfait aux mêmes hypothèses de départ que G. Pour voir que le sous-groupe unité de G' est un centre réductif, on peut se borner si on veut au cas où S est le spectre d'un corps (4.3). Soit Z' un sous-groupe central de type multiplicatif de G', tout revient à prouver que Z' est réduit au groupe unité. Soit Z_1 l'image inverse de Z' dans G, et considérons les opérations de Z_1 sur G induites par automorphismes intérieurs de G. Comme Z est central, Z opère trivialement, de sorte que Z_1 opère par l'intermédiaire d'opérations de Z' sur G. D'ailleurs Z étant dans le centre de G, Z_1 donc Z' opère trivialement sur Z, de plus Z' étant dans le
205 centre de G', les opérations de Z' dans le quotient $\mathrm{G}/\mathrm{Z} = \mathrm{G}'$ sont également triviales. Comme Z est central, il s'ensuit aussitôt que les opérations de Z' sur G proviennent d'un homomorphisme de groupes

$$u : \mathrm{Z}' \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{G}', \mathrm{Z}),$$

par

$$r(z') \cdot g = g \cdot u(z')(\varphi(g)),$$

où $r : \mathrm{Z}' \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{G})$ est la représentation envisagée de Z' par automorphismes de G, $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ l'homomorphisme canonique. Or la donnée d'un homomorphisme de groupes u comme ci-dessus, revient à la donnée d'un homomorphisme de groupes

$$v : \mathrm{G}' \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{Z}', \mathrm{Z}),$$

d'autre part en vertu de X 5.8 le deuxième membre est représentable et est un groupe étale sur S, donc sa section unité est une immersion ouverte, donc $\mathrm{Ker}\, v$ est un sous-groupe ouvert de G′. Comme G′ est à fibres connexes, il est égal à G′, donc v est nul, donc u est nul, donc Z′ opère trivialement dans G, donc il en est de même de Z_1, qui est donc *central* dans G. Ainsi Z_1 est une extension *commutative* d'un groupe de type multiplicatif Z′ par un groupe de type multiplicatif Z, donc (comme on est sur un corps) est un groupe de type multiplicatif (7.1.1). Étant central dans G, il est contenu dans le centre réductif Z, i.e. $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}$, d'où Z′ = groupe unité, ce qui achève de prouver b).

d) Soit $\mathrm{Z} = \mathrm{Ker}\,\theta$, qui est un sous-groupe de type multiplicatif de T (par exemple en vertu de IX 6.8). En vertu de 4.5, tout homomorphisme central $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$, avec H de type multiplicatif et de type fini, se factorise par T, donc par Z. Comme la formation de Z est compatible avec tout changement de base, il reste à prouver que Z est *central*, i.e. que le centralisateur C de Z est égal à G. Or, en vertu de XI 5.3, C est un sous-groupe fermé lisse de G, d'autre part, comme Z opère trivialement sur 206
$\mathfrak{g}$, on voit que $\mathrm{Lie}(\mathrm{C}) = \mathfrak{g}$. On en conclut aisément que C = G : en effet, l'immersion $\mathrm{C} \to \mathrm{G}$ est étale, car elle l'est fibre par fibre (comme un homomorphisme non ramifié de groupes algébriques lisse de même dimension, VI_{B}.1.3) et on peut appliquer X 3.5. Ainsi $\mathrm{C} \to \mathrm{G}$ est une immersion fermée étale, donc une immersion ouverte (SGA1 I 5.1), et comme c'est aussi une immersion fermée et que G est à fibres connexes, c'est un isomorphisme.

c) En vertu de 1.7 b), G admet localement pour la topologie fpqc un tore maximal, donc en vertu de 4.2 et de d) qu'on vient de démontrer, G admet un centre réductif Z. On a vu dans d) que tout tore maximal T de G contient Z. On constate aussitôt que $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Z}$ est un tore, pour prouver que c'est un tore maximal dans G′, on est ramené par la définition 1.3 au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, et alors l'assertion est contenue dans BIBLE 7 th. 3a). Inversement, soit T′ un tore maximal de G′, et soit $\mathrm{T} = \varphi^{-1}(\mathrm{T}')$, prouvons que T est un tore maximal de G. La question étant locale pour la topologie fpqc, on peut supposer que G admet déjà un tore maximal, soit T_0, de sorte que en vertu de ce qui précède, $\mathrm{T}'_0 = \mathrm{T}_0/\mathrm{Z}_0$ est un tore maximal de G′. En vertu du théorème de conjugaison 1.7 c), T′ et T'_0 sont localement conjugués pour la topologie fpqc, donc ($\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ étant couvrant pour cette topologie, donc toute section de G′ se remontant localement en une section de G) T et T_0 sont également conjugués localement. Comme T est un tore maximal, il en est donc de même de T. On procède de façon analogue pour les sous-groupes de Cartan. Cela achève la démonstration.

Donnons une traduction utile de d), dans le cas où T est diagonalisable, donc de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, où M est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini. Alors (I 4.7.3) le T-module

$\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe de sous-T-modules $\mathfrak{g}_m (m \in \mathrm{M})$:

$$\mathfrak{g} = \coprod_{m \in \mathrm{M}} \mathfrak{g}_m,$$

207 qui sont nécessairement localement libres. Supposons que pour tout $m \in \mathrm{M}$, le rang de $\mathfrak{g}_m$ soit constant (ce qui est le cas en particulier si S est connexe). Alors l'ensemble R des $m \in \mathrm{M}$ tels que $\mathfrak{g}_m \neq 0$ (« racines ») est fini. Ceci posé :

Corollaire 4.8. — *Sous les conditions et avec les notations précédentes, le centre réductif de* G *est l'intersection des noyaux des caractères racines* $m \in \mathrm{R}$ *sur* T. *On a donc un isomorphisme*

$$\mathrm{Z} \simeq \mathrm{D_S(N)},$$

où N *est le quotient de* M *par le sous-groupe engendré par* R.

Corollaire 4.9. — *Soit* G *un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos* k. *On suppose* G *lisse sur* k*, connexe affine, à centre réductif réduit au groupe unité, et que l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de* G *est nilpotente. Alors* G *est « unipotent », i.e. admet une suite de composition à quotients isomorphes à* $\mathbb{G}_a$.

En vertu de BIBLE 6, th. 4, cor. 3 il suffit de prouver qu'un tore maximal T de G est réduit au groupe unité, ou ce qui revient au même, que l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T est réduite à 0. Or il résulte du fait que le T-module $\mathfrak{g}$ se décompose suivant les caractères α de T (I 4.7.3), que pour tout $t \in \mathfrak{t}$, l'opération $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t)$ dans $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Si donc $\mathfrak{g}$ est nilpotente, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t)$ est nul. Or en vertu de 4.7 d), le centre réductif de G étant réduit à l'élément neutre, l'homomorphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est un monomorphisme donc induit une application injective sur les algèbres de Lie, ce qui signifie (II 4.5.) que pour $t \in \mathfrak{t}$, la relation $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t) = 0$ implique $t = 0$. Cela prouve que $\mathfrak{t} = 0$ et achève la démonstration.

Proposition 4.10. — *Soit* G *un groupe algébrique affine, lisse, connexe sur un corps algébriquement clos* k. *Alors le centre réductif de* G *est l'intersection des tores maximaux de* G.

208 Bien entendu, il s'agit de l'intersection au sens schématique, (ou ce qui revient au même, au sens sous-foncteurs de G), i.e. du plus grand sous-préschéma fermé de G majoré par les tores maximaux de G. Il résulte du caractère noethérien de G que c'est aussi l'intersection d'un ensemble *fini* convenable de tores maximaux de G.

Soit Z l'intersection en question, Z est un sous-groupe fermé d'un tore donc est de type multiplicatif, d'autre part en vertu de 4.5 il contient le centre réductif de G. Pour prouver qu'il lui est égal, il reste à prouver qu'il est central. Comme G est connexe, il suffit en vertu de IX 5.5 de prouver que Z est *invariant.* Or par construction Z est invariant par les $\mathrm{int}(g)$, avec $g \in \mathrm{G}(k)$, donc le normalisateur N de Z (cf. VIII 6.7) est un sous-groupe fermé de G qui contient les points rationnels de G. Comme G est réduit, on a $\mathrm{N} = \mathrm{G}$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 4.11. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, affine sur* S*, à fibres connexes, et de rang unipotent nul, ce qui implique* (1.9) *que*

G *est de rang réductif localement constant, donc* (1.10) *que le « préschéma des tores maximaux de* G *» est défini, soit* $\mathscr{T}$*, et est lisse, séparé, de type fini sur* S*. Faisons opérer* G *sur* $\mathscr{T}$ *via automorphismes intérieurs, d'où un homomorphisme de foncteurs groupes*

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathscr{T}).$$

Sous ces conditions, les trois sous-foncteurs suivants de G *sont identiques :*

(i) *Le centre réductif* Z *de* G*.*

(ii) *Le centre* Z' *de* G*.*

(iii) *Le noyau* $\mathrm{Z}'' = \mathrm{Ker}\, u$ *de l'homomorphisme précédent.*

En particulier, le centre de G *est représentable par un sous-groupe de type multiplicatif de* G*.*

Démonstration. On a trivialement $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Z}' \subset \mathrm{Z}''$, reste à prouver que $\mathrm{Z}'' \subset \mathrm{Z}$, ce qui **209**
revient à prouver (les hypothèses étant stables par changement de base) que toute section g de G sur S qui opère trivialement sur $\mathscr{T}$ est une section de Z. Introduisant $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ et utilisant 4.7 b) et c), qui impliquent en particulier que le préschéma $\mathscr{T}'$ des tores maximaux de G' est canoniquement isomorphe à $\mathscr{T}$, on est ramené au cas où $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$, i.e. au cas où le centre réductif Z de G est nul. (N. B. noter qu'en vertu de 4.7 c), le rang unipotent de G' est égal à celui de G, donc est nul puisque celui de G l'est). Il faut donc prouver dans ce cas que g est la *section unité* de G. Le procédé de réduction habituel nous ramène au cas où S est noethérien, et même au cas où S est *artinien local*, (puisque pour vérifier que g est la section unité, il suffit de vérifier lorsque S est localement noethérien qu'il en est ainsi après tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, avec S' artinien local). Or dans ce cas le noyau Z'' de u est représentable (VIII 6.2 a) et 6.5 c)) (Noter que Z'' est représentable par XI 6.8). Pour prouver que Z'' est réduit au sous-groupe unité, il suffit en vertu de Nakayama de prouver qu'il en est ainsi de sa fibre Z''_0. Cela nous ramène donc au cas où S est le spectre d'un corps k, que l'on peut évidemment supposer algébriquement clos. Or Z'' est contenu dans le stabilisateur de tout point de $\mathscr{T}(k)$, i.e. dans la normalisateur N(T) de tout tore maximal T de G. Comme le rang réductif de G est nul, il s'ensuit par XI 5.9 que T est un sous-groupe ouvert de N(T), donc que l'algèbre de Lie de N(T) est identique à celle de T. Donc l'algèbre de Lie de Z'' est contenue dans celle de T. D'autre part, il résulte de 4.10 que l'intersection des algèbres de Lie des tores maximaux T de G n'est autre que l'algèbre de Lie du centre réductif Z, donc ici nulle, puisqu'on a supposé $\mathrm{Z} = 0$. Par suite, l'algèbre de Lie de Z'' est nulle, i.e. Z'' est étale sur k. D'ailleurs Z'' est évidemment invariant dans G, et comme G est connexe il en résulte facilement que Z'' est dans le *centre* de G. Il est donc dans $\mathrm{T} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ pour tout tore maximal T, donc dans l'intersection des tores maximaux, i.e. dans $\mathrm{Z} = 0$ par 4.10, ce qui achève la démonstration.

5. Application au schéma des sous-groupes de type multiplicatif (*)

210

Théorème 5.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et affine sur* S*,* M *le « préschéma des sous-groupes de type multiplicatif de* G *», représentant le* *foncteur explicité dans* XI 4.1. *Pour tout entier* $n > 0$, *soit* T_n *le sous-foncteur de* M *tel que* $\mathrm{T}_n(\mathrm{S}') =$ *ensemble des sous-préschémas en groupes de type multiplicatif* H *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *tels que* $n\,\mathrm{id}_{\mathrm{H}} = 0$, *de sorte que* T_n *est représentable, et est affine sur* S (XI, 3.12 a)). *Soit* $u_n : \mathrm{M} \to \mathrm{T}_n$ *le morphisme défini par* $u_n(\mathrm{H}) = {}_n\mathrm{H}$ (*où* ${}_n\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(n\,\mathrm{id}_{\mathrm{H}})$). *Avec ces notations, on a ce qui suit :*

a) *Tout sous-préschéma* U *de* M, *de type fini sur* S, *est contenu dans un sous-préschéma fermé de type fini sur* S, *et tout sous-préschéma fermé* X *de* M, *de type fini sur* S, *est affine sur* S.

b) *Supposons* S *quasi-compact, et soit* X *un sous-préschéma fermé de* M *de type fini sur* S. *Alors il existe un entier* $n > 0$ *tel que pour tout multiple* m *de* n, *le morphisme induit*

$$u_m|_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T}_m$$

soit une immersion fermée.

Démonstration. a) Pour prouver la première assertion de a), on prendra pour X l'adhérence schématique de U (EGA I 9.5.1 et 9.5.3), qui est définie puisque l'immersion $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ est quasi-compacte (car U est de type fini sur S et M séparé sur S (4.1)). Il faut donc prouver qu'un tel X est affine sur S, ce qui prouvera en même temps la seconde assertion de a). Sous la forme précédente, on voit que la question est locale sur S, qu'on peut donc supposer affine. Alors, U étant de type fini sur S, est contenu dans un ouvert quasi-compact de M, et cela nous ramène au cas où U est lui-même
211 un ouvert, de type fini sur S i.e. quasi-compact. (N. B. Un sous-schéma fermé d'un schéma affine sur S est affine sur S).

Il suffit de prouver qu'un tel U est majoré par un sous-préschéma fermé de M qui est affine. Sous cette forme, le procédé de réduction habituel nous ramène aussitôt au cas où S est noethérien. On procède de même pour b), qui se ramène au cas où S est affine noethérien.

Reprenons la limite projective T des T_n utilisée dans la démonstration de XI 4.1, qui est un préschéma affine (mais non de type fini) sur S, et dont les anneaux locaux sont des anneaux noethériens, comme il a été vu au début de la démonstration de IX 3.7. (N. B. Pour $t \in \mathrm{T}$, $t = (t_n)$, les morphismes de transition $\mathrm{T}_m \to \mathrm{T}_n$ étant lisses et la dimension des T_m majorée, il existe un n_0 tel que les $\mathrm{T}_n \to \mathrm{T}_{n_0}$ soient étales en t_n pour tout n multiple de n_0). La démonstration de *loc. cit.*, ou XI 3.11, montrent que le morphisme canonique

$$u : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{T}$$

est une *immersion*, et induit des isomorphismes sur les anneaux locaux (mais on fera attention que u n'est pas en général une immersion ouverte ni un morphisme quasi-compact). Soit U un ouvert quasi-compact de M, nous allons prouver que son adhérence dans T est contenue dans M, ce qui prouve (si X désigne l'adhérence schématique de U dans M) que $u|\mathrm{X} : \mathrm{X} \to \mathrm{T}$ est une immersion fermée, donc que X est

(*) Pour une généralisation des résultats du présent n° au cas où on ne suppose pas G affine sur S, cf. M. Raynaud : Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, Chap. IX.

affine, et cela prouvera a). Comme U est noethérien, il n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, et tout élément $t \in \mathrm{T}$ dans l'adhérence de U est spécialisation d'un élément x de U. Comme l'anneau local de t dans T est noethérien, il en est de même de l'anneau local A de t dans $\overline{x}$ muni de la structure réduite induite.

Le morphisme canonique du schéma local noethérien intègre $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ dans T envoie alors le point fermé de S' dans t, le point générique dans $x \in \mathrm{M}$, et il faut montrer sous ces conditions que $t \in \mathrm{M}$. Quitte à remplacer A par le quotient d'une A-algèbre locale complète plate sur A convenable (EGA 0_{III} 10.3.1) par un idéal premier minimal, on peut supposer que A est complet à corps résiduel algébriquement clos, (et **212**
on pourrait même se ramener au cas où c'est de plus un anneau de valuation discrète grâce à EGA II 7.1.7). On est ainsi ramené (faisant le changement de notation : S' dénoté par S) au

Lemme 5.2. — *Soient* S *le spectre d'un anneau local noethérien intègre complet à corps résiduel algébriquement clos,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et affine sur* S*,* $(\mathrm{H}(n))_{n>0}$ *un système de sous-groupes de type multiplicatif de* G*, indexé par les entiers* $n > 0$*,* η *le point générique de* S*. On suppose :*

a) *Si* m *est un multiple de* n*, on a* $\mathrm{H}(n) = {}_n\mathrm{H}(m)$*.*

b) *Il existe un sous-groupe de type multiplicatif* H_η *de* G_η *te que l'on ait* $\mathrm{H}(n)_\eta = {}_n(\mathrm{H}_\eta)$ *pour tout* $n > 0$*.*

Sous ces conditions, il existe un sous-groupe H *de type multiplicatif de* G*, tel que pour tout* $n > 0$*, on ait* $\mathrm{H}(n) = {}_n\mathrm{H}$*.*

Pour tout n, soit $\mathrm{C}_n = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}(n))$, qui est un sous-préschéma en groupes fermé de G, lisse sur S (XI 5.3). L'ensemble des entiers $n > 0$ étant ordonné par divisibilité, les C_n forment une famille décroissante de sous-préschémas fermés de G, et comme G est noethérien, cette famille est stationnaire. Soit C la valeur commune des C_n pour n grand. Alors C satisfait les mêmes conditions que G, de plus les $\mathrm{H}(n)$ sont en fait des sous-groupes de C. Donc, quitte à remplacer G par C, on peut supposer que les $\mathrm{H}(n)$ sont des sous-groupes *centraux* de G.

Soit alors s le point fermé de S, et Z_s le centre réductif de G_s (défini grâce à 4.4). En vertu de la définition (4.1) Z_s contient les $\mathrm{H}(n)_s$. Comme A est complet, Z_s provient d'un sous-préschéma en groupes de type multiplicatif Z de G (XI 5.8). Je dis que Z contient les $\mathrm{H}(n)$. En effet, comme $\mathrm{H}(n)$ est central donc commute à Z dans G, on déduit un homomorphisme de groupes $\mathrm{Z} \times \mathrm{H}(n) \to \mathrm{G}$, qui d'après IX 6.8, admet un groupe image qui est un sous-groupe de type multiplicatif K de G contenant Z, et **213**
tout revient à prouver que $\mathrm{K} = \mathrm{Z}$, ce qui résulte de $\mathrm{K}_s = \mathrm{Z}_s$ et de IX 5.1 bis.

On est ainsi ramené à prouver l'analogue de 5.2, mais G étant remplacé par un groupe Z de type multiplicatif et de type fini sur S (pas nécessairement lisse sur S). Comme A est complet à corps résiduel algébriquement clos, Z est diagonalisable (X 3.3 et 1.4) donc de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, M un groupe commutatif de type fini. Par suite tout sous-groupe de type multiplicatif H de Z est diagonalisable (IX 2.11 (i)), donc de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{N})$, où N est un groupe quotient de M (VIII 3.2). Ainsi les $\mathrm{H}(n)$ correspondent à des groupes quotients $\mathrm{M}(n)$ de M, et l'existence d'un sous-groupe de type multiplicatif H de Z tel que $\mathrm{H}(n) = {}_n\mathrm{H}$ pour tout n revient à celle d'un groupe quotient N de M tel que $\mathrm{M}(n) = \mathrm{N}/n\mathrm{N}$ pour tout n. Or ceci provient aussitôt du fait qu'il existe un sous-groupe H_η de G_η tel que $\mathrm{H}(n)_\eta = {}_n(\mathrm{H}_\eta)$ pour tout n. Cela achève la démonstration de 5.2 donc de a).

b) Nous savons déjà que $u|_\mathrm{X} : \mathrm{X} \to \mathrm{T}$ est une immersion fermée. Il en résulte facilement que pour m grand, le composé $u_m|_\mathrm{X} : \mathrm{X} \to \mathrm{T}_m$ est également une immersion fermée. Comme nous n'aurons pas besoin de ce fait par la suite, nous nous dispensons d'en détailler ici la démonstration.

Corollaire 5.3. — *Avec les notations de* 5.1*, soit* U *une partie à la fois ouverte et fermée de* M*, de type fini sur* S*. Alors* U *est affine sur* S *pour la structure induite par* M*, et si* S *est quasi-compact, il existe un entier* $n > 0$ *tel que pour tout multiple* m *de* n*, le morphisme induit* $u_m|_\mathrm{U} : \mathrm{U} \to \mathrm{T}_m$ *soit une immersion ouverte et fermée,* (*i.e. un isomorphisme sur une partie ouverte et fermée de* T_m*, munie de la structure induite*).

La première assertion résulte de 5.1 a), la seconde de 5.1 b), compte tenu que $u_m : \mathrm{M} \to \mathrm{T}_m$ est lisse (XI 2.2 bis) et qu'une immersion lisse i.e. étale est une immersion ouverte.

214 ***Corollaire 5.4***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et affine sur* S*, de rang réductif localement constant* (1.7 b))*,* $\mathscr{T}$ *le « préschéma des tores maximaux de* G *»* (1.10)*. Alors* $\mathscr{T}$ *est lisse et affine sur* S*. Si* T *est un tore maximal de* G*,* N(T) *son normalisateur, alors* G/N(T) (XI 5.3 bis) *est affine sur* S*. Il en est de même de* G/C(T) (*où* C(T) *est le centralisateur de* T) *pourvu que* W(T) = N(T)/C(T) *soit fini sur* S (cf. 2.1 b)).

La deuxième assertion est contenue dans la première, puisque par le théorème de conjugaison, G/N(T) est isomorphe à $\mathscr{T}$ (XI 5.5 bis). Pour la première assertion, on note que par construction, $\mathscr{T}$ est isomorphe à un sous-préschéma ouvert et fermé de M (car on peut supposer le rang réductif de G constant et égal à r, et alors $\mathscr{T}$ est le sous-préschéma de M qui correspond aux sous-tores de dimension relative r, i.e. le plus grand sous-préschéma de M sur lequel le « sous-groupe de type multiplicatif universel » $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}_\mathrm{M}$ soit un tore de dimension relative r). On peut donc appliquer 5.3. Enfin, pour la dernière assertion, on note que G/C(T) est fini sur $\mathrm{G/N(T)} \simeq (\mathrm{G/C(T)})/\mathrm{W(T)}$, donc est affine puisque G/N(T) l'est.

Corollaire 5.5. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse et affine sur un corps* k*. Alors le schéma* M *des sous-groupes de type multiplicatif de* G *est une somme directe de schémas affines sur* S*. Pour tout sous-groupe de type multiplicatif* H *de* G*, si* C *et* N *désignent respectivement son centralisateur et son normalisateur, les quotients* G/C *et* G/N *sont affines.*

Utilisant XI 5.1 bis, on voit que le saturé par G opérant sur M de toute partie finie fermée de M est ouverte : en effet, on est ramené au cas où k est algébriquement clos, donc au cas de la trajectoire d'un point x rationnel sur k, mais alors par *loc. cit.* le morphisme $g \mapsto g \cdot x$ de G dans M est lisse donc ouvert, donc son image est ouverte.

Soit U la réunion des classes des points fermés de M pour la relation d'équivalence définie par les opérations de G. Alors U est ouvert et contient tout point fermé de M, 215
donc par le Nullstellensatz est identique à M. Ainsi M est réunion disjointe d'ouverts, qui sont donc nécessairement fermés, donc M est le préschéma somme de préschémas M_i, dont chacun est une trajectoire sous G d'un point fermé, donc est quasi-compact, donc de type fini. En vertu de 5.3 les M_i sont donc affines. Si H est un sous-groupe de type multiplicatif de G, il correspond à un point x de M rationnel sur k, et G/N s'identifie à la trajectoire de x sous G (XI 5.5 bis). Il est donc affine par ce qui précède. Comme C est un sous-groupe ouvert de N (XI 5.9) G/C est donc fini sur G/N (car ce dernier est isomorphe à (G/C)/(N/C)) donc affine puisque G/C l'est. Cette démonstration montre en même temps :

Corollaire 5.6. — *Sous les conditions de* 5.5 *pour* G *et* H*, le sous-schéma* U *de* M *« des sous-groupes de type multiplicatif de* G *qui sont localement conjugués de* H *» est un sous-préschéma ouvert et fermé de* G*.*

De façon imagée, tout sous-groupe de type multiplicatif H′ de G qui est limite de sous-groupes de G conjugués de H, est lui-même conjugué de H.

Remarques 5.7. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma lisse et affine sur S, H un S-préschéma de type multiplicatif et de type fini, posons $M = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(H, G)$, qui en vertu de XI 4.2 est représentable et est lisse sur S et séparé sur S. On peut alors prouver pour M un résultat tout analogue à 5.1, soit en se ramenant à 5.1 par une démonstration analogue à celle de XI 4.2, soit en procédant directement par une démonstration calquée sur celle de 5.1. On en déduit des variantes correspondantes pour 5.3, 5.5, 5.6, que le lecteur formulera.

6. Tores maximaux et sous-groupes de Cartan des groupes algébriques non nécessairement affines (corps de base algébriquement clos)

216

Lemme 6.1. — *Soit* G *un groupe algébrique connexe sur un corps k,* Z *un sous-groupe algébrique d'indice fini de son centre, alors* G/Z *est affine.*

On peut supposer que Z est le centre de G, car un schéma fini sur un schéma affine est affine. Considérons les espaces vectoriels

$$P^n = P^n(G) = \mathscr{O}_{G,e}/\mathfrak{m}_{G,e}^{n+1} \quad (n \text{ entier} \geqslant 0),$$

où $\mathfrak{m}_{G,e}$ est l'idéal maximal, alors G opère sur les $P^n(G)$ par la représentation adjointe, et si Z_n est le noyau de l'homomorphisme correspondant

$$\mathrm{ad}_n : G \longrightarrow GL(P^n),$$

on vérifie facilement (utilisant le fait que G est connexe) que Z est l'intersection des Z_n, donc (G étant noethérien), égal à l'un des Z_n. Mais ad_n définit, par passage au quotient, un monomorphisme $G/Z_n \to GL(P^n)$, qui est donc une immersion fermée, donc G/Z_n est affine, et par suite G/Z l'est.

Lemme 6.2. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse sur le corps* k, Z *un sous-groupe algébrique central,* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$, $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *l'homomorphisme canonique,* T *un sous-groupe de type multiplicatif dans* G, $\mathrm{T}' = u(\mathrm{T})$ *le groupe image,* C *le centralisateur de* T *dans* G, C′ *celui de* T′ *dans* G′. *Alors on a*

$$\mathrm{C}'^0 \subset u(\mathrm{C}).$$

On peut supposer k algébriquement clos. Soit

$$\mathrm{C}_1 = (u^{-1}(\mathrm{C}')^0)_{\mathrm{réd}},$$

217 il suffit de prouver qu'on a $\mathrm{C}_1 \subset \mathrm{C}$, car $u(\mathrm{C}_1)$ est connexe d'indice fini dans C′ donc égal ensemblistement à C'^0, donc égal à C'^0 puisque C′ et par suite C'^0 sont lisses. Considérons le morphisme

$$(g,t) \mapsto gtg^{-1}t^{-1}$$

de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ dans G, il induit un morphisme

$$\varphi : \mathrm{C}_1 \times \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{Z}_1, \quad \text{où} \quad \mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_{\mathrm{réd}},$$

car le premier membre étant réduit, il suffit de voir que pour $g \in \mathrm{C}_1(k)$, $t \in \mathrm{T}(k)$, on a $gtg^{-1}t^{-1} \in \mathrm{Z}(k)$, ce qui provient du fait que g centralise T modulo Z. On voit facilement (en calculant sur les points rationnels sur k) que $\varphi(g,t)$ est additif en g, et additif en t, donc est « bilinéaire », je dis que (Z_1 étant lisse et C_1 connexe) cet homomorphisme est identiquement nul, ce qui prouvera bien que $\mathrm{C}_1 \subset \mathrm{C}$. Utilisant le théorème de densité pour T, on est ramené au cas où T est fini i.e. où il existe un entier $n > 0$ tel que $n\,\mathrm{id}_{\mathrm{T}} = 0$. Notons que φ est défini par un homomorphisme de groupes

$$\mathrm{C}_1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{Z}_1),$$

or Z_1 étant commutatif et lisse, le deuxième membre est représentable par un groupe algébrique étale sur k, et C_1 étant connexe, tout homomorphisme de groupes de C_1 dans ce dernier est nul. C.Q.F.D.

Corollaire 6.3. — *Sous les conditions précédentes, supposons* C′ *connexe, alors on a*

$$\mathrm{C}' = u(\mathrm{C}), \qquad \mathrm{C} = u^{-1}(\mathrm{C}').$$

En effet, alors $\mathrm{C}' = \mathrm{C}'^0$, d'autre part C contient évidemment Z, donc est égal à $u^{-1}(u(\mathrm{C}))$.

218 ***Lemme 6.4***. — *Soient* G *un groupe algébrique sur le corps* k, Z *un sous-groupe algébrique central tel que* $\mathrm{G}/\mathrm{Z} = \mathrm{G}'$ *soit un tore. Alors* G *est commutatif, et si* k *est algébriquement clos, il existe un tore* T *dans* G *tel que* $u(\mathrm{T}) = \mathrm{G}'$, *où* u *est l'homomorphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{Z} = \mathrm{G}'$.

On peut supposer k algébriquement clos. Considérons encore le morphisme $\mathrm{G}\times\mathrm{G} \to \mathrm{G}$ défini par $(g,h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$, alors (Z étant central) ce morphisme se factorise en un morphisme $\mathrm{G}'\times\mathrm{G}' \to \mathrm{G}$, et G′ étant commutatif, ce dernier prend ses valeurs dans Z, et même dans $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_{\mathrm{réd}}$, puisque $\mathrm{G}' \times \mathrm{G}'$ est réduit. On voit comme dessus que le morphisme $\varphi : \mathrm{G}' \times \mathrm{G}' \to \mathrm{Z}_{\mathrm{réd}}$ ainsi obtenu est bilinéaire, donc nul, ce qui prouve que G est commutatif. Pour trouver un tore T de G tel que $u(\mathrm{T}) = \mathrm{G}'$, on peut (quitte à remplacer G par $\mathrm{G}^0_{\mathrm{réd}}$) supposer G lisse et connexe, et de plus (quitte à remplacer Z par $Z^0_{\text{réd}}$) que Z est lisse et connexe. D'après un théorème bien connu de Chevalley [6], Z est une extension d'une variété abélienne par un groupe affine, ce qui nous ramène aussitôt à prouver notre assertion dans chacun des deux cas suivants : 1°) Z est affine, 2°) Z est une variété abélienne. Dans le cas 1°), G est affine et le résultat est bien connu (BIBLE 7 th. 3 a)). Supposons donc que Z soit une variété abélienne. Comme tout homomorphisme du groupe additif $\mathbb{G}_a$ dans le tore $G' = R$ ou dans la variété abélienne Z est trivial, il s'ensuit qu'il en est de même de tout homomorphisme de $\mathbb{G}_a$ dans G, donc G ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{G}_a$. Par le théorème de structure de Chevalley déjà invoqué, on a une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

où A est une variété abélienne, et T un groupe affine lisse et connexe. Comme ce dernier est commutatif et ne contient pas de sous-groupe additif, il s'ensuit que T est un tore (et c'est évidemment l'unique tore maximal de G). Tout revient à prouver que tout épimorphisme

$$u : G \longrightarrow R,$$

où R est un tore, satisfait à $u(T) = R$. Posons

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(T, \mathbb{G}_m) = M, \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(R, \mathbb{G}_m) = P,$$

(ce sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini qui redonnent T, R à isomorphisme près **219**
par $T = D_k(M)$, $R = D_k(P)$), et soit

$$B = \mathrm{Ext}^1_{k\text{-gr}}(A, \mathbb{G}_m),$$

(B est aussi l'ensemble des points rationnels sur k de la variété abélienne duale de A). On a évidemment

$$(\mathrm{xx}) \qquad \mathrm{Ext}^1(A, T) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(M, B), \qquad \mathrm{Ext}^1(A, R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(P, B),$$

en particulier l'extension G de A par T est donnée par un homomorphisme

$$\theta : M \longrightarrow B.$$

D'autre part la suite exacte $(*)$ donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T, R) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A, R),$$

de plus $\mathrm{Hom}(A, R) = 0$, et $\mathrm{Hom}(T, R) \to \mathrm{Ext}^1(A, R)$ s'identifie à l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, B)$$

déduit de $\theta : M \to B$. Posant

$$N = \mathrm{Ker}(\theta),$$

on trouve donc une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}(G, R) \simeq \mathrm{Hom}(P, N) \simeq \mathrm{Hom}(S, R), \quad \text{où} \quad S = D_k(N),$$

qu'on peut décrire géométriquement de façon immédiate ainsi :

Lemme 6.5. — *Soit* G *une extension d'une variété abélienne* A *par un tore* $\mathrm{T} = \mathrm{D}_k(\mathrm{M})$, *définie par un homomorphisme* $\theta : \mathrm{M} \to \mathrm{B} = \mathrm{Ext}^1(\mathrm{A}, \mathbb{G}_m)$ (*corps de base* k *algébriquement clos*). *Soit* $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}\,\theta$, $\mathrm{S} = \mathrm{D}_k(\mathrm{N})$ *le tore correspondant, isomorphe à* T/U *où* $\mathrm{U} = \mathrm{D}_k(\mathrm{M}/\mathrm{N})$, *considérons l'extension* $\mathrm{H} = \mathrm{G}/\mathrm{U}$ *de* A *par* S. *Cette extension* splitte[7], *donc on a une unique projection de* H *sur* S, *d'où un unique homomorphisme* 220

$$v : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{S}$$

prolongeant l'homomorphisme canonique $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$. *Ceci posé, pour tout tore* R, *et tout homomorphisme* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{R}$, *il existe un unique homomorphisme* $u' : \mathrm{S} \to \mathrm{R}$ *tel que* $u = u'v$. *En particulier, on a* $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u') = u(\mathrm{T})$.

Cela montre en particulier que si u est un épimorphisme, il en est de même de sa restriction à T, ce qui achève de prouver 6.4.

Théorème 6.6. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse et connexe sur un corps algébriquement clos* k.

a) *Les tores maximaux de* G *sont conjugués.*

b) *Soit* T *un tore de* G, *alors son centralisateur est lisse et connexe.*

c) *L'application* $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des tores maximaux* T *de* G, *et l'ensemble des sous-groupes de Cartan* (N°1) *de* G. *Pour qu'un sous-groupe algébrique* C *de* G *soit un sous-groupe de Cartan, il faut et il suffit qu'il soit lisse, nilpotent et ensemblistement égal à son normalisateur connexe,* (*et alors il est même égal à son normalisateur connexe*) ; *on a alors* $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, *où* T *est l'unique tore maximal de* C, *et* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$.

d) *Soit* $v : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un épimorphisme de groupes algébriques lisses et connexes, alors les tores maximaux* (*resp. les sous-groupes de Cartan*) *de* H *sont les images des tores maximaux* (*resp. des sous-groupes de Cartan*) *de* G. *Si* T *est un tore maximal de* G, C *son centralisateur, alors* $v(\mathrm{C})$ *est le centralisateur de* $v(\mathrm{T})$.

221 e) *Sous les conditions de* d), *supposons que* $\mathrm{Ker}\,v$ *soit un sous-groupe central de* G, *alors* $\mathrm{T} \mapsto v(\mathrm{T})$ (*resp.* $\mathrm{C} \mapsto v(\mathrm{C})$) *établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des tores maximaux* (*resp. des sous-groupes de Cartan*) *de* G, *et l'ensemble des tores maximaux* (*resp. des sous-groupes de Cartan*) *de* H. *Les sous-groupes de Cartan de* G *contiennent le centre de* G *et a fortiori* $\mathrm{Ker}\,v$, *et sont les groupes de la forme* $v^{-1}(\mathrm{C}')$, *où* C′ *est un sous-groupe de Cartan de* H.

Explicitons aussi tout de suite la conséquence immédiate suivante de c) :

Corollaire 6.7. — *Pour que* G *soit nilpotent* (*i.e. le groupe* $\mathrm{G}(k)$ *nilpotent*) *il faut et il suffit que les tores dans* G *soient centraux, ou encore que* G *n'ait qu'un seul tore maximal,* (*et alors ce dernier est le plus grand sous-tore de* G).

Démonstration de 6.6. Soit Z un sous-groupe algébrique central de G, soit $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$, et $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ l'homomorphisme canonique. Alors G′ est un groupe lisse et connexe. Si T′ est un sous-tore de G′, il résulte de 6.4 que $u^{-1}(\mathrm{T}')$ est commutatif,

[6] N.D.E. : donner des références ici.

[7] N.D.E. : est scindée !

et que T' est l'image d'un sous-tore de $u^{-1}(T')$ donc d'un sous-tore de G. Comme $u^{-1}(T')$ est commutatif, il admet évidemment un plus grand sous-tore T (car la somme de deux sous-tores en donne un troisième qui les contient tous deux), et on a donc $u(T) = T'$. De ceci résulte immédiatement que pour tout tore maximal T de G, son image $T' = u(T)$ est un tore maximal de G', et que $T \mapsto u(T)$ est une correspondance biunivoque entre tores maximaux de G et tores maximaux de G'.

Nous faisons maintenant

$$Z = \mathrm{Centr}(G)^0_{\mathrm{réd}},$$

alors G' est *affine* en vertu de 6.1. Comme les tores maximaux de G' sont alors conjugués, il en est donc de même de ceux de G, ce qui prouve a). D'ailleurs, pour **222**
que G soit nilpotent, resp. n'ait qu'un seul tore maximal, il faut et il suffit que G' satisfasse la même condition, or G' étant affine, les deux conditions en question sur G' sont équivalentes (BIBLE 6 th. 4 cor. 2), donc il en est de même pour les conditions en question pour G. D'ailleurs, si G n'a qu'un seul tore maximal T, ce dernier est invariant donc central, et comme tout tore dans G est contenu dans un tore maximal, il est central. Réciproquement, si tout tore est central, il en est de même des tores maximaux, et par le théorème de conjugaison a) il n'y a qu'un seul tore maximal. Cela prouve 6.7.

Soit T un tore quelconque de G, $T' = u(T)$, alors $C' = \mathrm{Centr}_{G'}(T')$ est connexe (BIBLE 6 th. 6 a)), donc en vertu de 6.3 le centralisateur C de T est égal à $u^{-1}(C)$, donc connexe (puisque Z est connexe), ce qui prouve b). Si T est maximal, donc T' maximal, alors on sait que C' est nilpotent, donc C (qui est une extension centrale de C') est nilpotent. De plus, T est un tore maximal de C, donc en vertu de 6.7 c'est l'unique tore maximal de C, par suite l'application $T \mapsto \mathrm{Centr}_G(T)$ de l'ensemble des tores maximaux de G dans l'ensemble de sous-groupes de Cartan est *bijective.* D'ailleurs on a

$$\mathrm{Centr}_G(T) = C \subset \mathrm{Norm}_G(C) \subset \mathrm{Norm}_G(T)$$

et comme on sait que le centralisateur de T est d'indice fini dans son normalisateur (cf. XI 5.9 dont le raisonnement est valable sans hypothèse affine, en utilisant seulement la représentabilité des deux foncteurs en question, comme il a été signalé dans XI 6.5), et que C est lisse et connexe, on en conclut

$$C = \mathrm{Norm}_G(C)^0.$$

De plus, d'après la correspondance biunivoque entre les tores maximaux et les sous-groupes de Cartan, on voit que $\mathrm{Norm}_G(C)$ et $\mathrm{Norm}_G(T)$ ont mêmes points à valeurs dans k, et comme le deuxième est lisse, on a

$$\mathrm{Norm}_G(T) = \mathrm{Norm}_G(C).$$

Pour achever d'établir c), il reste à prouver que si C est un sous-groupe lisse nilpotent **223**
connexe de G qui est d'indice fini dans son normalisateur, alors C est un sous-groupe de Cartan. Or comme Z est central, le normalisateur de C contient Z, et comme Z est lisse et connexe, on en conclut $Z \subset C$, d'où $C = u^{-1}(C')$, où $C' = u(C)$. On a alors

$$\mathrm{Norm}_G(C) = u^{-1}(\mathrm{Norm}_{G'}(C')),$$

ce qui prouve que C' est nilpotent connexe d'indice fini dans son normalisateur, donc en vertu de BIBLE 7 th. 1 c'est un sous-groupe de Cartan de G', d'où aussitôt que C est un sous-groupe de Cartan de G.

Prouvons e) : on est sous les conditions du début de la démonstration, (en posant $\operatorname{Ker} u = Z$, $G' = H$), on a déjà vu que $T \mapsto u(T)$ est une correspondance biunivoque entre tores maximaux de G et tores maximaux de G'. Compte tenu de la correspondance biunivoque entre tores maximaux et sous-groupes de Cartan qu'on vient de prouver, on en déduit une correspondance biunivoque entre sous-groupes de Cartan C de G et sous-groupes de Cartan C' de G', en faisant correspondre à $C = \mathrm{Centr}_G(T)$ le groupe $C' = \mathrm{Centr}_{G'}(T')$, où $T' = u(T)$. Comme C' est connexe en vertu de b), il s'ensuit par 6.3 que $C' = u(C)$, et $C = u^{-1}(C')$, ce qui prouve e).

Reste à prouver d). Soit T un tore maximal de G, prouvons que $v(T)$ est un tore maximal de H (ce qui, compte tenu du théorème de conjugaison a), impliquera que les tores maximaux de H sont tous de la forme $v(T)$ comme ci-dessus). Soit donc R un tore dans H contenant $v(T)$, et prouvons $R = v(T)$. Quitte à remplacer H par R, G par $v^{-1}(R)^0_{\text{réd}}$, on peut supposer $R = H$, i.e. que H est un tore, et on est ramené à prouver que alors $v(T) = H$. Soit encore $Z = \mathrm{Centr}(G)^0_{\text{réd}}$, $G' = G/Z$, et $H' = H/v(Z)$:

(D) $$\begin{tikzcd} e \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, "v''"'] & G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & G' \arrow[r] \arrow[d, "v'"'] & e \\ e \arrow[r] & v(Z) \arrow[r] & H \arrow[r, "u'"'] & H' \arrow[r] & e. \end{tikzcd}$$

224 Nous savons déjà que $u(T)$ est un tore maximal de G', et comme G' est affine donc $v' : G' \to H'$ un épimorphisme de groupes affines lisses et connexes, $v'(u(T))$ est un tore maximal de H' (BIBLE 7 th. 3 a)) donc égal à H', i.e. $u'(v(T)) = H'$, donc pour prouver $v(T) = H$ il suffit de montrer que $v(T) \supset v(Z)$. Or $v(Z)$ est un sous-groupe lisse connexe de H, donc un tore, et $v'' : Z \to v(Z)$ est un épimorphisme, donc en vertu de 6.4 on a $v(Z) = v''(S)$, où S est un tore de Z. Or S, étant central dans G, est évidemment contenu dans le tore maximal T, d'où $v(Z) \subset v(T)$. Cela prouve l'assertion d) dans le cas des tores maximaux.

Compte tenu de la correspondance biunivoque entre tores maximaux et sous-groupes de Cartan, il reste à prouver que si T est un tore maximal de G, C son centralisateur, alors $v(C)$ est le centralisateur de $v(T)$. Pour cela, reprenons le diagramme (D) ci-dessus (où bien entendu H n'est plus supposé un tore), soient $T' = u(T)$, $C' = u(C)$, nous avons déjà vu dans e) que C' est le centralisateur du tore maximal T', donc (G' étant affine, donc H' étant affine) $v'(C')$ est le centralisateur du tore maximal $v'(T')$ de H' (BIBLE 7 th. 3 a), i.e. $u'(v(C))$ est le centralisateur de $u'(v(T))$; comme C contient Z donc $v(C)$ contient $v(Z)$, $v(C)$ est donc l'image inverse par u' de $u'(v(C))$ i.e. du centralisateur de $u'(v(T))$, c'est donc le centralisateur de $v(T)$ comme il résulte de e) appliqué à $u' : H \to H'$ et au tore maximal $v(T)$ de H. Cela achève la démonstration de 6.6.

7. Application aux préschémas en groupes lisses non nécessairement affines

Théorème 7.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse, séparé et de type fini sur* S. *On suppose que* G *admet localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte un tore maximal. Alors :*

a) *L'application*

$$\mathrm{T} \longmapsto \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$$

induit une bijection de l'ensemble des tores maximaux de G *avec l'ensemble des sous-groupes de Cartan de* G. *Si* C *correspond à* T, *alors* T *est l'unique tore maximal de* C. **225**

b) *Soient* T, T′ *deux tores maximaux de* G, C, C′ *les sous-groupes de Cartan correspondants, alors on a*

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T},\mathrm{T}') = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C},\mathrm{C}') = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T},\mathrm{C}'),$$

les deux premiers termes sont aussi identiques aux transporteurs stricts, *enfin le foncteur en question est représentable par un sous-préschéma fermé de* G *lisse sur* S. *Les tores* T, T′ *et les sous-groupes de Cartan* C, C′ *sont conjugués localement pour la topologie étale.*

c) *Il existe localement pour la topologie étale un tore maximal de* G *et un sous-groupe de Cartan de* G.

d) *Supposons que toute partie finie d'une fibre* G_s *de* G *soit contenue dans un ouvert affine de* G (*par exemple* G *quasi-projectif sur* S, *ou* S *artinien*), *alors le foncteur* $\mathscr{T} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *défini dans* 1.10 (*foncteur des tores maximaux de* G), *isomorphe au foncteur* $\mathscr{T} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *des sous-groupes de Cartan de* G, *est représentable par un préschéma lisse, séparé de type fini sur* S, *qui est quasi-projectif sur* S *lorsque* G *l'est, et est affine sur* S *lorsque* G *est affine sur* S, *ou lorsque* S *est artinien.*

e) *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de* S*-préschémas en groupes, où* G′ *est lisse, séparé de type fini sur* S, *et supposons que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *on ait* $u_s(\mathrm{G}_s) = \mathrm{G}'_s$ *i.e.* u_s *est fidèlement plat* (Exp. VI [8]). *Alors pour tout tore maximal* T *de* G, $u(\mathrm{T})$ *est un tore maximal de* G′ *; si* G′ *est à fibres connexes, alors pour tout sous-groupe de Cartan* C *de* G, $u(\mathrm{C})$ *est un sous-groupe de Cartan de* G′, *et si* C *est le centralisateur de* T, $u(\mathrm{C})$ *est le centralisateur de* $u(\mathrm{T})$. *Dans l'un et l'autre cas, le morphisme induit* $\mathrm{T} \to u(\mathrm{T})$, *resp.* $\mathrm{C} \to u(\mathrm{C})$, *est fidèlement plat.*

f) *Sous les conditions de* e), *supposons de plus que* Ker u *soit un sous-groupe central de* G. *Alors* $\mathrm{T} \mapsto u(\mathrm{T})$ *est une applications bijective de l'ensemble des tores maximaux de* G *sur l'ensemble des tores maximaux de* G′, *et si* G′ *est à fibres connexes,* $\mathrm{C} \mapsto u(\mathrm{C})$ *est de même une application bijective de l'ensemble des sous-groupes de Cartan de* G *sur l'ensemble des sous-groupes de Cartan de* G′ *; si* $\mathrm{C}' = u(\mathrm{C})$, *on a* $\mathrm{C} = u^{-1}(\mathrm{C}')$. **226**

(8) N.D.E. : référence non localisée dans $\mathrm{VI_B}$, voir M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, I, Masson (1970), proposition II.5.1.(c).

Remarques 7.2. — Nous verrons dans XV que la conclusion de d) reste valable sans la condition restrictive sur les parties finies des G_s. Nous y prouverons également les conclusions concernant les seuls sous-groupes de Cartan contenues dans b) c) d) e), lorsqu'on suppose seulement que G admet localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte un sous-groupe de Cartan (mais par nécessairement un tore maximal). Pour ceci, nous aurons d'ailleurs à utiliser 7.1 dans le cas ou S est artinien. D'ailleurs, la démonstration de c) et d) (dans le cas S non artinien), se simplifie considérablement en utilisant la méthode de XV.

Démonstration de 7.1. a) Procédant comme dans 3.2, on voit que pour tout tore maximal T de G, $C = \mathrm{Centr}_G(T)$ est bien un sous-groupe de Cartan de G, et T est déterminé en termes de C comme l'unique tore maximal de C, de sorte qu'il reste à montrer seulement que tout sous-groupe de Cartan C de G est défini par un tore maximal de G, ou encore que C admet un tore maximal central. La question étant encore locale pour la topologie fpqc on peut supposer que G admet un tore maximal T. Alors en vertu de XI 6.2, $\underline{\mathrm{Transp}}_G(T, C)$ est représentable par un sous-préschéma fermé S′ de G lisse sur S, d'ailleurs $S' \to S$ est surjectif, comme il résulte de 6.6 c). Donc quitte à faire le changement de base $S' \to S$, on peut supposer qu'il existe une section g de G telle que $\mathrm{ad}(g) \cdot T \subset C$, mais alors $\mathrm{ad}(g) \cdot T$ est un tore maximal de C, qui est central fibre par fibre en vertu de 6.6 c), donc central en vertu de IX 5.6 b). C.Q.F.D.

227 b) Soient T, T', deux tores maximaux de G, et C, C' les sous-groupes de Cartan correspondants de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ T \subset T' \qquad (2)\ T = T' \qquad (3)\ T \subset C' \qquad (4)\ C \subset C' \qquad (5)\ C = C'.$$

Cela résulte trivialement de a). Utilisant le même résultat après changement de base quelconque, on en conclut l'identité énoncée dans b), entre divers transporteurs et transporteurs stricts. D'ailleurs, on a déjà remarqué dans a) que $\underline{\mathrm{Transp}}_G(T, C')$ est représentable par un sous-préschéma fermé de G, lisse sur S, et que son morphisme structural est surjectif. Par suite, par Hensel il existe localement pour la topologie étale une section de ce préschéma sur S, donc T et T′ d'une part, C et C′ d'autre part, sont conjugués localement pour la topologie étale, ce qui prouve b).

c) Supposons d'abord que S soit artinien, local. Lorsque G admet un tore maximal T, alors il résulte du théorème de conjugaison prouvé dans b) que le foncteur $\mathscr{T}$ des tores maximaux de G est représentable par l'espace homogène G/N, où N est le normalisateur de T dans G, qui est lisse en vertu de b). D'ailleurs, comme on a observé dans $\mathrm{VI_A}$.3.2.1, comme $\mathscr{T}$ est un espace homogène sous G, toute partie finie de $\mathscr{T}$ est contenue dans un ouvert affine. Dans le cas général, il existe une extension finie k' du corps résiduel k de S telle que $G_{k'}$ ait un tore maximal, alors k' provient de k par changement de base fini plat $S' \to S$, et le tore maximal de $G_{k'}$ se remonte en un tore maximal $G_{S'}$ (XI 2.1 bis), donc le foncteur $\mathscr{T}_{S'}$ est représentable par un préschéma sur S′, lisse séparé et de type fini sur S′, dont toute partie finie est contenue dans un ouvert affine. Donc la donnée de descente naturelle sur $\mathscr{T}_{S'}$ est effective, donc $\mathscr{T}$ est représentable, et par descente on voit que $\mathscr{T}$ est lisse sur S, séparé et de type fini sur S. De la lissité résulte, grâce à Hensel, que $\mathscr{T}$ admet une section localement pour la topologie étale. Cela prouve c) et d) dans le cas S artinien (N. B. nous prouverons plus bas que dans ce cas, $\mathscr{T}$ est en fait affine sur S).

Supposons maintenant S quelconque. Pour prouver c) et d), qui sont des assertions locales sur S pour la topologie de Zariski, on peut supposer qu'il existe un nombre **228**
premier ℓ premier aux caractéristiques résiduelles de S, que S est affine, et que le rang réductif des fibres de G (qui est évidemment localement constant, grâce à l'hypothèse de l'existence locale pour fpqc d'un tore maximal) est constant, soit r. Soit $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, S' affine, tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ admette un tore maximal T'. Soit C' son centralisateur, je dis qu'il existe une puissance convenable n de ℓ telle qu'on ait aussi $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}({}_n\mathrm{T})$. En effet, pour le voir, on est ramené aussitôt au cas S' noethérien, où cela a été vu dans XI 6.2. Fixons n ainsi, posons

$$\mathrm{M} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r, \qquad \mathrm{P} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{M}_{\mathrm{S}}, \mathrm{G}),$$

alors P est évidemment représentable comme un sous-préschéma fermé de présentation finie de $({}_n\mathrm{G})^r$, où

$${}_n\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}, \mathrm{G}),$$

qui est aussi le noyau du morphisme de puissance n-ème dans G, donc représentable par un sous-préschéma fermé de présentation finie de G. D'ailleurs P est *lisse* sur S en vertu de XI 2.1. Soit $s \in \mathrm{S}$, en vertu de ce qu'on a vu plus haut, il existe une extension finie séparable k'' de $\kappa(s)$ telle qu'il existe un tore maximal T'' dans $\mathrm{G}_{k''}$; de plus, comme ${}_n\mathrm{T}''$ est étale sur k'' (n étant premier à la caractéristique de k'') on peut supposer (quitte à remplacer k'' par une extension finie séparable) que ${}_n\mathrm{T}''$ est isomorphe à $\mathrm{M}_{k''}$. Soit $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$ un morphisme étale, tel qu'il existe un $s'' \in \mathrm{S}''$ au-dessus de $s \in \mathrm{S}$, donnant lieu à l'extension résiduelle $\kappa(s'') \simeq k''$. On a donc une section de $\mathrm{P}_{\mathrm{S}''} \otimes \kappa(s'')$ sur $\mathrm{Spec}(\kappa(s''))$, donc par Hensel, quitte à remplacer (S'', s'') par (S''', s''') étale sur lui, on peut supposer qu'il existe une section de $\mathrm{P}_{\mathrm{S}''}$ sur S'', i.e. un élément de $\mathrm{P}(\mathrm{S}'')$, qui étend la section donnée. En d'autres termes, on a un homomorphisme $\mathrm{M}_{\mathrm{S}''} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$ qui induit un isomorphisme $\mathrm{M}_{\kappa(s'')} \simeq {}_n\mathrm{T}''$. En vertu de IX 6.4 (qui ici se réduit à une simple application du lemme de Nakayama) cet homomorphisme est une immersion fermée au-dessus d'un voisinage ouvert de s', **229**
qu'on peut supposer égal à S''. Soit H'' son image, et considérons son centralisateur C'' dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$, qui est un sous-préschéma fermé lisse de G, en vertu de XI 6.2. Notons d'ailleurs :

Lemme 7.3. — *Sous les conditions précédentes pour ℓ, n, r, pour tout préschéma* S'' *sur* S *et tout tore maximal* T'' *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$, *on a*

$$\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}}(\mathrm{T}'') = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}}({}_n\mathrm{T}'').$$

En effet, par descente fidèlement plate à partir de $\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$, on est ramené au cas où $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$ admet un tore maximal T''_1 pour lequel la relation précédente est vraie. Mais comme T'' est localement conjugué à T''_1 pour la topologie étale en vertu de b), il s'ensuit que la même relation est vraie pour T''.

Appliquons le résultat précédent pour $\mathrm{Spec}(\kappa(s''))$ au lieu de S'', on voit que la fibre $\mathrm{C}''_{s''}$ est un sous-groupe de Cartan de G. Notons maintenant que G étant lisse sur S, la réunion des composantes neutres des fibres G_s est un ouvert de G (en vertu d'un résultat général de EGA IV sur les morphismes lisses [(9)]), évidemment stable par la loi de groupe de G, c'est donc un sous-groupe de G pour la structure de préschéma induite par G. De plus, G^0 satisfait aux hypothèses préliminaires de G, et il y a une correspondance biunivoque évidente entre les tores maximaux de G, et ceux de G^0. Donc pour prouver c) et d), on peut supposer G à fibres connexes, ce que nous ferons. Alors les sous-groupes de Cartan de G sont à fibres connexes (6.6 a)). Ceci posé, je dis que C''^0 est un sous-groupe de Cartan de $G_{S''}$ au-dessus d'un voisinage ouvert de s'' dans S'' (ce qui achèvera de prouver c)). Ceci résulte en effet du

Lemme 7.4. — *Sous les conditions de* 7.1, *supposons* G *à fibres connexes, soit* C *un*
230 *sous-préschéma en groupes fermé de* G, *lisse sur* S, *et* s *un élément de* S *tel que* C_s *soit un sous-groupe de Cartan de* G_s, *alors* C^0 *est un sous-groupe de Cartan de* G *au-dessus d'un voisinage ouvert de* s.

On se ramène facilement au cas où S est local et s son point fermé, et à prouver qu'alors C est un sous-groupe de Cartan de G, puis par descente plate au cas où G admet un tore maximal, soit T. Alors en vertu de XI 6.2, $\underline{\mathrm{Transp}}_{G}(T, C)$ est représentable par un sous-préschéma fermé de G lisse sur S. De plus, en vertu de l'hypothèse sur C_s, la fibre du transporteur en s est non vide (compte tenu du théorème de conjugaison 6.6 a)). Cela nous ramène par descente fidèlement plate au cas où ce transporteur admet une section sur S, donc au cas où C contient un tore maximal T de G. Mais alors T est central dans C^0 en vertu de IX 5.6 a), donc $C^0 \subset \mathrm{Centr}_G(T)$, et comme il s'agit d'une inclusion de schémas en groupes lisses sur S, ayant même dimension relative (savoir la dimension de leur fibre commune en s) et à fibres connexes, c'est une égalité, ce qui achève la démonstration.

d) Nous gardons les notations et hypothèses précédentes pour ℓ, n, r, et la connexité des fibres de G. Soit $Q : (\mathbf{Sch})^\circ_{/S} \to (\mathbf{Ens})$ le foncteur défini par

$Q(S') =$ ensemble des sous-groupes de type multiplicatif de $G_{S'}$ de type égal à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r = M$ (IX 1.4).

Alors

$$T \longmapsto {}_nT$$

est un morphisme

$$\varphi : \mathscr{T} \longrightarrow Q,$$

qui est un monomorphisme en vertu de 7.3. Je dis que Q *est représentable* par un préschéma séparé de présentation finie sur S. En effet, comme nous avons signalé dans la démonstration de XI 3.12 a), on a un isomorphisme

$$Q \simeq P'/\Gamma$$

231 où P' est le sous-préschéma ouvert et fermé du préschéma $P = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(M_S, G)$ introduit dans c) qui correspond aux *monomorphismes* $M_{S'} \to G_{S'}$ (cf. IX 6.8), et où $\Gamma = (\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(M))_S$. L'hypothèse que toute partie finie d'une fibre G_s est contenue dans un ouvert affine de G, étant stable par passage à un sous-préschéma fermé et par produits cartésiens, est évidemment héritée par $({}_nG)^r$ donc par P, donc par P', de

[(9)] N.D.E. : préciser cette référence.

sorte que Q est représentable par un préschéma de présentation finie sur S (cf. V)[10]. On voit de la même façon que si G est quasi-projectif (resp. affine) sur S, il en est de même de Q. En tous cas, Q est séparé sur S. Or on a le

Lemme 7.5. — *L'homomorphisme $\varphi = \mathscr{T} \to \mathrm{Q}$ précédent est représentable par une immersion ouverte.*

En d'autres termes, il faut prouver que si H est un sous-groupe de type multiplicatif de G, de type M, alors il existe une partie ouverte U de S telle que pour tout S′ sur S, $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ est de la forme ${}_n\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$, pour un tore maximal convenable $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, si et seulement si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par U. On peut supposer évidemment que le rang nilpotent des fibres de G est constant (car grâce à b), il est localement constant), soit r'. Soit $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$, qui est un sous-préschéma en groupes fermé de G lisse sur S (XI 6.2). Alors quitte à remplacer S par la partie ouverte et fermée des points en lesquels C est de dimension relative r', on peut supposer C de dimension relative r' partout. On voit alors aussitôt que H est de la forme ${}_n\mathrm{T}$, pour un tore maximal T de G, si et seulement si C^0 admet un tore maximal central T de dimension relative r partout et que $\mathrm{H} = {}_n\mathrm{T}$, ce qui donne une autre expression du sous-foncteur U de S que nous voulons représenter (en remplacant dans le critère précédent S par un S′ sur S). D'ailleurs par descente plate, on peut supposer que G admet un tore maximal T_1. Soit R le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_1, \mathrm{Centr}_{\mathrm{C}^0}(\mathrm{C}^0))$ de $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_1, \mathrm{C})$; ce dernier est représentable par un préschéma lisse sur S en vertu de XI 6.2, et le premier est représentable par un sous-préschéma ouvert induit, comme il résulte aussitôt de IX 5.6 a), en particulier il est lisse sur S. Par suite son morphisme structural dans S est **232**
ouvert, donc son image est ouverte, et quitte à remplacer S par ladite image (munie de la structure induite) on peut supposer le morphisme structural surjectif. Alors en vertu de 1.13 appliqué à C^0, C^0 admet un tore maximal central T puisqu'il en admet un localement pour fpqc, qui sera évidemment de dimension relative égale à celle de T_1, i.e. r. Ainsi, la condition à exprimer pour H est l'égalité $\mathrm{H} = {}_n\mathrm{T}$, ce qui en vertu de IX 2.10 revient encore à prendre une partie ouverte (et fermée) convenable de S.

Le lemme 7.5 implique donc que $\mathscr{T}$ est représentable par un préschéma séparé localement de présentation finie sur S, et même de présentation finie sur S, comme on voit en reprenant la démonstration de 7.5 pour s'assurer que φ est en fait une immersion ouverte quasi-compacte, ou en se ramenant par descente fidèlement plate quasi-compacte au cas où G admet un tore maximal, et où $\mathscr{T}$ est donc isomorphe à $\mathrm{G}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$. Cette dernière expression, ou au choix XI 2.1, montrent de plus que $\mathscr{T}$ est lisse sur S. Enfin, si G est quasi-projectif sur S, il en est de même de Q donc aussi de $\mathscr{T}$. Si G est affine sur S, l'assertion que $\mathscr{T}$ est alors affine sur S est mise pour mémoire, étant établie dans 5.4 (N. B. J'ignore si sans hypothèse affine pour G/S, il est possible de choisir n de façon que dans 7.5 l'immersion ouverte soit aussi une immersion fermée). Pour l'assertion que $\mathscr{T}$ est affine sur S si S est artinien, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps (EGA I 6.1.7), qu'on peut supposer algébriquement clos. Alors grâce à f) qui sera prouvé plus bas, il suffit de prouver la

[10] N.D.E. : préciser cette référence

même assertion pour $\mathrm{G}/\operatorname{Centr}(\mathrm{G})$, or ce dernier est affine par 6.1, de sorte qu'on est sous les conditions précédentes. Cela achève la démonstration de d).

e) En vertu de IX 6.8, on sait qu'il existe un sous-tore T' de G' tel que u induise un morphisme fidèlement plat $\mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ (ce qui caractérise T' comme le sous-faisceau $u(\mathrm{T})$ de G'). Soient C le centralisateur de T, C' celui de T', prouvons que le morphisme
233 $\mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ est *plat*, et fidèlement plat si G' est à fibres connexes. Comme C, C' sont plats de présentation finie sur S, on est ramené au cas d'un corps de base (SGA1 I 5.9), qu'on peut supposer évidemment algébriquement clos. De plus on peut supposer G, G' connexes (quitte à les remplacer par G^0 et G'^0, ce qui ne change pas C^0 et C'^0), et il suffit alors d'appliquer 6.6 d), compte tenu de a).

f) Compte tenu de a) et e), on peut se borner à prouver l'assertion concernant les sous-groupes de Cartan. Or comme un sous-groupe de Cartan de G est le centralisateur d'un tore maximal, il contient le centre de G et a fortiori $\operatorname{Ker} u$, donc il est de la forme $u^{-1}(\mathrm{C}')$, où $\mathrm{C}' = u(\mathrm{C})$ est le sous-groupe de Cartan de G' envisagé dans e). Donc l'application $\mathrm{C} \mapsto u(\mathrm{C})$ est injective, pour montrer qu'elle est bijective, il suffit de voir que pour tout sous-groupe de Cartan C' de G', $u^{-1}(\mathrm{C}')$ est un sous-groupe de Cartan de G. La question étant locale pour fpqc, on peut supposer que G admet un sous-groupe de Cartan C_1, donc $u(\mathrm{C}_1) = \mathrm{C}'_1$ est un sous-groupe de Cartan de G', donc localement conjugué à C' pour fpqc en vertu de b), et comme $u^{-1}(\mathrm{C}'_1) = \mathrm{C}_1$ est un sous-groupe de Cartan de G, il s'ensuit que $u^{-1}(\mathrm{C}')$ est un sous-groupe de Cartan de G. C.Q.F.D.

On peut aussi, pour prouver que $u^{-1}(\mathrm{C}')$ est un sous-groupe de Cartan, noter qu'il est plat sur S car u l'est (SGA1 I 5.9), ce qui nous ramène par définition au cas d'un corps de base, et on peut appliquer 6.6 e).

Corollaire 7.6. — *Sous les conditions de* 7.1 e), G' *admet localement pour la topologie étale un tore maximal, donc satisfait aux conditions préliminaires pour* G. *Si de plus* $\operatorname{Ker} u$ *est central, alors les foncteurs* $\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$, $\mathscr{C}_{\mathrm{G}}$ *des tores maximaux de* G *et des sous-groupes de Cartan de* G *sont isomorphes aux foncteurs analogues* $\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$, $\mathscr{C}_{\mathrm{G}'}$ *pour* G' (*donc, dans le cas où ils sont représentables, ils sont représentés par des* S-*préschémas isomorphes*).

Remarque 7.7. — a) Contrairement à ce qui a lieu dans le cas où G est affine sur S (il suffit, en fait, que G soit à fibres affines, comme on verra dans XVI), il n'est pas vrai
234 que le fait que G ait un rang réductif localement constant implique que G admette localement pour fpqc un tore maximal. Soient par exemple S le spectre d'un anneau de valuation discrète, G_1 et G_2 des schémas en groupes lisses séparés de type fini sur S, tels que la fibre générique de G_1 soit une courbe elliptique, la fibre spéciale un groupe $\mathbb{G}_m$, et la fibre générique de G_2 un groupe $\mathbb{G}_m$, la fibre spéciale un groupe $\mathbb{G}_a$, et prenons $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}_2$. Alors les deux fibres de G ont le rang réductif 1, mais on voit aussitôt que G n'admet pas de tore maximal localement pour fpqc. Il est par contre très plausible que la condition suivante (pour un groupe lisse séparé de type fini sur un préschéma S) soit *suffisante* pour l'existence d'un tore maximal localement pour la topologie étale : le rang réductif *et* le rang abélien des fibres de G sont des fonctions localement constantes.

b) Dans la démonstration de 7.1 (notamment a)) nous avons invoqué XI 6.2 dans des cas où S n'est pas supposé localement noethérien. Cependant dans les cas envisagés d'application de XI 6.2 la réduction au cas S noethérien affine est immédiate.

Voici une variante de 7.1 b) :

Proposition 7.8. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes lisse de présentation finie à fibres connexes,* H *un préschéma en groupes lisse sur* S, $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de* S*-groupes* (*faisant de* H *un sous-*S*-groupe de* G). *Alors pour tout sous-groupe de Cartan*(*) C *de* G, $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{H})$ *est représentable par un* sous-préschéma fermé de G lisse *sur* S.

Le fait que le transporteur soit représentable par un sous-préschéma fermé de G de présentation finie est contenu dans XI 6.11, compte tenu que C est à fibres connexes puisque G l'est (6.6 b)). Pour montrer que le transporteur est lisse sur S, on est ramené par le procédé standard au cas où S est affine noethérien, puis au cas où S est artinien local, et par descente au cas où le corps résiduel de S est algébriquement clos. Mais alors C admet un tore maximal T, qui est tore maximal de G. On peut supposer que 235
le rang réductif et le rang nilpotent de la fibre H_0 sont égaux à ceux de G_0 (autrement le transporteur serait vide), mais alors on voit aussitôt (utilisant la connexité de C et le fait que le centralisateur dans H d'un tore maximal de H est lisse) que l'on a

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}, \mathrm{H})$$

et comme on sait que le deuxième membre est lisse (XI 2.5), il en est de même du premier. Le raisonnement précédent montre plus généralement la partie b) de la

Proposition 7.9. — *Soient* G *et* $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *comme dans* 7.8, *supposons de plus que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, H_s *soit connexe, et ait même rang réductif et même rang nilpotent que* G_s (*i.e.* $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *contient un sous-groupe de Cartan de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$). *Alors on a ce qui suit :*

a) $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est représentable par un sous-préschéma fermé* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *de* G *de présentation finie sur* S, *et le monomorphisme canonique* $\mathrm{H} \to \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est une immersion ouverte ; par suite i est une immersion, et on a*

$$\mathrm{H} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})^0.$$

b) *Pour tout sous-groupe de Cartan* C *de* G, $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{H})$ *est un sous-préschéma fermé de* G, *lisse sur* S, *à morphisme structural surjectif. Si* C *est le centralisateur d'un tore maximal* T *de* G, *on a de plus*

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}, \mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{H}).$$

c) *Soit* C *un sous-préschéma en groupes de* H. *Pour que ce soit un sous-groupe de Cartan de* H, *il faut et il suffit que ce soit un sous-groupe de Cartan de* G.

d) *Supposons que* G *admette localement pour la topologie étale, ou pour la topologie* 236
fpqc, *un sous-groupe de Cartan* (*resp. un tore maximal*), *alors il en est de même de* H.

(*) La démonstration montre qu'il suffit de supposer que C est un sous-groupe lisse de G dont chaque fibre géométrique est le centralisateur connexe d'un sous-groupe d'un tore maximal de $\mathrm{G}_{\overline{\mathrm{S}}}$.

Démonstration. a) La représentabilité de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ par un sous-préschéma fermé $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ de G de présentation finie sur S est contenue dans XI 6.11. Comme H est lisse donc plat localement de présentation finie sur S, pour vérifier que $\mathrm{H} \to \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est une immersion ouverte, on est ramené à le vérifier sur les fibres (VI_{B}.2.6), ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos k. On est ramené alors (Exp. VI [11]) à vérifier que l'homomorphisme correspondant sur les algèbres de Lie est un isomorphisme, ou ce qui revient au même, que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{H}} = 0$, où $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont les algèbres de Lie de G et de H, et l'exposant H désigne les invariants sous H (cf. II 5.2.3 (i)). Or H contient par hypothèse un sous-groupe de Cartan C de G, centralisateur du tore maximal T de G, et il suffit donc de prouver que l'on a

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{T}} = 0,$$

ce qui résulte, compte tenu de la complète réductibilité des représentations de T (I, 4.7.3), de la relation analogue $(\mathfrak{g}/\mathfrak{c})^{\mathrm{T}}$, où $\mathfrak{c} = \mathrm{Lie}(\mathrm{C})$. Quant à cette dernière, équivalente à

$$\mathfrak{g}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{c},$$

elle signifie que le centralisateur C et le normalisateur N de T ont même algèbre de Lie, ce qui résulte du fait que C est un sous-groupe ouvert de N (XI 5.9). Cela achève de prouver a).

b) Comme on l'a signalé, la démonstration a été donnée dans 7.8.

c) Compte tenu du fait que H est un sous-préschéma de G, l'assertion se ramène trivialement au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, auquel cas elle résulte aussitôt de l'hypothèse faite sur H.

237 d) On utilise b), c) et le « lemme de Hensel » XI 1.10.

Corollaire 7.10. — *Soient* G *et* H *comme dans* 7.9*, et supposons que pour tout corps algébriquement clos k au-dessus de* S*, tout élément de* $\mathrm{G}_k(k)$ *qui normalise* H_k *est dans* $\mathrm{H}_k(k)$*. Alors* H *est un* sous-préschéma fermé de G*, et est* son propre normalisateur.

Cela résulte trivialement de 7.9 a). Nous appliquerons en particulier 7.10 aux sous-groupes de Borel (plus généralement, aux sous-groupes paraboliques) de G.

Corollaire 7.11. — *Soient* G, H *comme dans* 7.9*. Alors* H *contient tout sous-préschéma en groupes* Z *de* G*, central dans* G *et plat et de présentation finie sur* S.

On peut comme d'habitude se ramener au cas S affine noethérien, puis au cas S artinien, ce qui implique qu'on est sous les conditions de 7.1. En vertu de 7.9 c) on peut supposer que H contient un sous-groupe de Cartan C de G, et on est ramené à prouver que $\mathrm{C} \supset \mathrm{Z}$. Or comme S est artinien, $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ est représentable par un préschéma en groupes de type fini sur S, le morphisme canonique $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ étant fidèlement plat et son noyau étant Z (VI_{A}.3.2). Évidemment G′ est lisse sur S, et on peut appliquer 7.1 f), qui implique que C est de la forme $u^{-1}(\mathrm{C}')$, donc contient Z.

[11] N.D.E. : référence non localisée dans VI_{B}, voir M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, I, Masson (1970), corollaire II.5.6.

Corollaire 7.12. — *Soient* G, G′ *deux* S*-préschémas en groupes lisses de présentation finie,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un homomorphisme de groupes fidèlement plat* (*i.e. pour tout* $s \in \mathrm{S}$, u_s *est fidèlement plat*), *supposons* $\mathrm{Ker}\, u$ *central et* G *à fibres connexes. Alors l'application*

$$\mathrm{H}' \longmapsto \mathrm{H} = u^{-1}(\mathrm{H}')$$

établit une correspondance biunivoque entre sous-préschémas en groupes H′ *de* G′*, lisses de présentation finie sur* S*, ayant même rang réductif et même rang nilpotent* **238**
que G′ *en tout* $s \in \mathrm{S}$*, et l'ensemble des sous-préschémas en groupes* H *de* G*, lisses de présentation finie sur* S*, ayant même rang réductif et même rang nilpotent que* G *en tout* $s \in \mathrm{S}$*. Pour que* H *soit à fibres connexes, il faut et suffit que* H′ *le soit.*

Soit H un sous-préschéma en groupes de G ayant les propriétés qu'on vient de préciser. Alors en vertu de 7.10, H contient $\mathrm{Z} = \mathrm{Ker}\, u$, donc en vertu de la théorie de la descente fidèlement plate, est de la forme $u^{-1}(\mathrm{H}')$, où H′ est un sous-préschéma en groupes bien déterminé de G′, et on constate aussitôt compte tenu de 6.6 e) que ce dernier a les propriétés énoncées plus haut. D'ailleurs, si H est à fibres connexes, il en est évidemment de même de $\mathrm{H}' = \mathrm{H}/\mathrm{Z}$. Il reste donc à prouver que si on part d'un sous-groupe H′ de G′ ayant les propriétés énoncées, alors $u^{-1}(\mathrm{H}') = \mathrm{H}$ a les mêmes propriétés dans G ; et que si H′ est à fibres connexes, il en est de même de H. Compte tenu de 6.6 e), on est ramené à prouver que H est lisse sur S (resp. et à fibres connexes). Or H est déjà plat sur S comme image inverse de H′ qui l'est par le morphisme plat u, donc on est réduit à vérifier que les fibres géométriques de H sont lisses (resp. et connexes) ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Alors H′ contient un sous-groupe de Cartan C′ de G′, donc H contient l'image inverse C de C′, qui est un sous-groupe de Cartan de G par 6.6 e), donc C est lisse et connexe. Par suite 7.11 résulte du lemme suivant :

Lemme 7.13. — *Soient* G, G′ *deux préschémas en groupes plats de présentation finie sur* S*,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un homomorphisme de groupes qui soit fidèlement plat,* C′ *un sous-préschéma en groupes de* G *de présentation finie sur* S*, tel que* $\mathrm{C} = u^{-1}(\mathrm{C}')$ *soit lisse sur* S (*resp. à fibres connexes*)*. Alors pour tout sous-préschéma en groupes* H′ *de* G′ *de présentation finie sur* S*, contenant* C′*, et tel que* H′ *soit lisse sur* S (*resp. à fibres connexes*)*, son image inverse* $\mathrm{H} = u^{-1}(\mathrm{H}')$ *est lisse sur* S (*resp. à fibres connexes*)*.*

Comme nous l'avons remarqué plus haut, cet énoncé se réduit aussitôt au cas où S est le spectre d'un corps. Notons alors que H est fibré principal de base H/C, de **239**
groupe C (Exp. $\mathrm{VI_B}$.9), d'autre part $\mathrm{H}/\mathrm{C} \simeq \mathrm{H}'/\mathrm{C}'$ (cf. Exp. IV), et H′ étant lisse (resp. connexe) il en est de même de H′/C′ donc de H/C. Comme il en est de même de C par hypothèse, il s'ensuit aussitôt qu'il en est encore de même pour le fibré H. C.Q.F.D.

8. Éléments semi-simples, réunion et intersection des tores maximaux dans les schémas en groupes non nécessairement affines

Dans tout ce Numéro, G désigne un préschéma en groupes lisse de présentation finie sur S, à *fibres connexes.*

Supposons d'abord que S soit le spectre d'un corps algébriquement clos. Lorsque G est affine, on a défini dans BIBLE 4 N°4 la notion d'*élément semi-simple* de $G(k)$; on constate aussitôt que cette notion est invariante par extension algébriquement close k'/k du corps de base. De plus, on a vu dans BIBLE 6 th. 5 (c) que $g \in G(k)$ est semi-simple si et seulement si il est contenu dans un tore maximal de G. Lorsque G n'est plus supposé affine, G s'écrit canoniquement (grâce à Chevalley) comme extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique affine lisse et connexe :

$$(*) \qquad e \longrightarrow V \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow e.$$

Nous dirons qu'un élément g de $G(k)$ est *semi-simple* si c'est un élément semi-simple de $V(k)$. Comme les tores maximaux de V sont évidemment identiques aux tores maximaux de G, il revient au même de dire que g appartient à un tore maximal de G. C'est évidemment encore une notion invariante par extension algébriquement close k'/k du corps de base k.

Supposons maintenant que S soit le spectre d'un corps quelconque k, et soit $g \in G$. Alors (choisissant une extension algébriquement close K de $\kappa(g)$) on voit que g est
240 l'image d'un point géométrique g' de G à valeurs dans une extension algébriquement close K de k, et nous dirons que g est *semi-simple* si g' est semi-simple, ce qui est indépendant du choix particulier de g', grâce à ce qui a été dit plus haut. Si k' est une extension de k, alors l'ensemble des éléments semi-simples de $G_{k'}$ est l'image inverse de l'ensemble G^{ss} des éléments semi-simples de G.

Supposons enfin S quelconque, alors un point $g \in G$ est dit semi-simple s'il est semi-simple dans sa fibre G_s. Si $S' \to S$ est un morphisme quelconque, alors $G^{ss}_{S'}$ est donc l'image inverse de G^{ss}. Supposons que le foncteur $\mathscr{T}$ défini dans 1.10 (foncteur des tores maximaux) soit représentable par un préschéma de présentation finie sur S (ce qui est le cas par exemple si G admet localement pour fpqc un tore maximal, en vertu de 7.1 d), du moins si G est quasi-projectif sur S). Considérons le tore maximal $\underline{T}$ de $G_{\mathscr{T}}$ canonique (« tore maximal universel de G »), et le morphisme

$$u : \underline{T} \longrightarrow G$$

induit par la projection $G_{\mathscr{T}} \to G$. Alors il résulte aussitôt de la définition que G^{ss} n'est autre que l'image du morphisme précédent. On va en conclure :

Proposition 8.1. — *L'ensemble* G^{ss} *des éléments semi-simples de* G *est localement constructible* (*donc constructible si* S *donc* G *est quasi-compact et quasi-séparé*).

On se ramène comme d'habitude au cas où S est affine noethérien, de plus on peut supposer (par le critère noethérien habituel de constructibilité (EGA 0_{III} 9.2.3)) que S est intègre, et se borner à prouver qu'il existe un ouvert non vide U de S tel que $G^{ss}|_U$ est constructible. Prenant U assez petit, et le remplaçant au besoin par un revêtement fini, on peut supposer que G est séparé sur S et contient un tore maximal
241 T. Mais alors en vertu de 7.1 d) le foncteur $\mathscr{T}$ est représentable par un préschéma de présentation finie sur S, et il en est donc de même de $\underline{T}$, dont l'image dans G est par suite constructible. C.Q.F.D.

Supposons de nouveau que k soit un corps, et considérons le sous-groupe H de G engendré par le morphisme précédant (cf. $\mathrm{VI_B}.1.2$). C'est un sous-schéma en groupes lisse de G, connexe puisque $\underline{\mathrm{T}}$ l'est, dont la formation est évidemment compatible avec toute extension du corps de base (cf. VI), celle de $\underline{\mathrm{T}}$ l'étant. Lorsque k est algébriquement clos, on voit tout de suite que H est aussi le sous-groupe algébrique de G engendré par les tores maximaux de G, ou ce qui revient au même, par les tores de G, et c'est aussi le plus petit sous-groupe algébrique de G qui contient les éléments semi-simples de $\mathrm{G}(k)$. (En fait, ces caractérisations de H restent valables dès que k est un corps infini, grâce au fait, prouvé dans XIV, que l'ensemble des points de $\underline{\mathrm{T}}$ rationnels sur k est dense dans $\underline{\mathrm{T}}$). D'ailleurs, H est invariant dans G, car pour le voir, on peut se borner au cas où k est algébriquement clos, et alors (H et G étant lisses sur k) il suffit de vérifier que H est stable par les automorphismes intérieurs $\mathrm{int}(g)$, $g \in \mathrm{G}(k)$, ce qui est évident. (On pourrait même montrer que H est un sous-groupe *caractéristique* de G, i.e. stable sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{k\text{-gr}}(\mathrm{G})$). Il résulte alors aussitôt de 6.6 d) que le rang réductif de G/H est nul ; de façon plus précise, si K est un sous-groupe algébrique invariant de G, il résulte aussitôt du fait que pour k algébriquement clos, les tores maximaux de G/K sont les images directes des tores maximaux de G, que le rang réductif de G/K est nul si et seulement si K contient tous les tores maximaux de G (k étant supposé algébriquement clos), ou encore si et seulement si K contient H (k étant quelconque) : donc H est le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que G/H soit de rang réductif nul. Une autre caractérisation évidente de H est la suivante : c'est le plus petit sous-groupe algébrique de G ayant même rang réductif que G. Notons enfin que H est affine : en effet, pour le voir on peut encore supposer k algébriquement clos, et reprenant la suite exacte $(*)$ du début du N°, on note que les tores maximaux de G sont contenus dans V, donc il en est de même de H, donc V **242**
étant affine, H l'est. Résumons les résultats obtenus :

Proposition 8.2. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse et connexe sur le corps k, et soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Il existe un sous-groupe algébrique* H *de* G, *tel que* $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ *soit le sous-groupe algébrique de* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *engendré par les tores maximaux* (*ou encore par les tores*) *de* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$. *Le groupe* H *est aussi caractérisé comme le plus petit sous-groupe algébrique de* G *ayant même rang réductif que* G, *ou le plus petit sous-groupe algébrique invariant de* G *tel que le rang réductif de* G/H *soit nul. C'est un sous-groupe lisse connexe invariant et affine de* G, *dont la formation commute à toute extension du corps de base.*

Pour utiliser la caractérisation de H en termes de G/H, il convient d'expliciter le

Corollaire 8.3. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse et connexe sur un corps k algébriquement clos k. Pour que* G *soit de rang réductif nul* (*i.e. avec les notations de* 8.2, *pour que l'on ait* $\mathrm{H} = (e)$) *il faut et suffit que* G *soit une extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe unipotent* (*i.e. extension successive de groupes isomorphes au groupe additif* $\mathbb{G}_a$).

En effet, grâce à la suite exacte de Chevalley $(*)$, on est ramené à prouver que le rang réductif du groupe lisse connexe affine V est nul si et seulement si V est unipotent, ce qui est contenu dans BIBLE 6.4. th. 4 cor. 3. Donc, avec les notations de 8.2, H est le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que $(\mathrm{G}/\mathrm{H})_{\overline{k}}$ soit une extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe affine unipotent. On conclut aussi :

Corollaire 8.4. — *Avec les notations de* 8.2 *pour qu'on ait* G = H (*i.e.* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *engendré par ses tores maximaux*) *il faut et suffit que* G *soit affine et que tout homomorphisme de* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *dans la groupe additif soit trivial.*

243 ***Remarques 8.5***. — a) Soit $\overline{\mathrm{V}}$ le plus grand sous-groupe algébrique lisse connexe affine de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ (de sorte que $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ est extension d'une variété abélienne par $\overline{\mathrm{V}}$). Il est bien connu (Rosenlicht [(12)]), si k n'est pas parfait, que $\overline{\mathrm{V}}$ n'est en général pas « défini sur k » i.e. qu'il n'existe pas en général de sous-groupe algébrique V de G, tel que $\mathrm{V}_{\overline{k}} = \overline{\mathrm{V}}$. Cependant, lorsque $\overline{\mathrm{V}}$ est engendré par ses tores maximaux, i.e. lorsque $\overline{\mathrm{V}}$ n'admet pas de groupe quotient isomorphe au groupe additif $\mathbb{G}_{a,\overline{k}}$, il existe un tel V, savoir le groupe H de 8.2. On voit donc que dans cette question de rationalité, comme dans bien d'autres (cf. par exemple XIV N°6), tous les ennuis proviennent des groupes unipotents i.e. du groupe additif, tandis que c'est la présence de (suffisamment de) groupes de type multiplicatif qui assure au contraire que les choses marchent bien.

b) On peut aussi introduire, avec les notations de 8.2, l'image inverse H′ dans G du sous-groupe des commutateurs de G/H, alors H′ est le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que $(\mathrm{G}/\mathrm{H}')_{\overline{k}}$ soit extension *commutative* d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe affine unipotent. H′ est encore un sous-groupe lisse connexe affine de G. Soit H″ l'image inverse dans G de $p^n(\mathrm{G}/\mathrm{H}')$ pour n grand, p étant la caractéristique (supposée > 0), alors on voit facilement que H″/H′ est une variété abélienne, et H″ est le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que G/H″ soit un groupe algébrique commutatif lisse connexe affine unipotent. Ceci posé, on voit facilement que pour que $\overline{\mathrm{V}} = \mathrm{H}_{\overline{k}}$ (notations de a)) i.e. pour que tout homomorphisme de $\overline{\mathrm{V}}$ dans le groupe additif soit trivial, il faut et il suffit que H″ = G, ou encore que tout homomorphisme de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ dans le groupe additif soit trivial.

Pour finir, nous allons généraliser aux groupes lisses à fibres connexes la notion de centre réductif développée dans le N°4, en nous inspirant de 4.10. Soit Z le sous-foncteur de G défini par

Z(S′) = Ensemble des sections g' de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ sur S′ telles que pour tout S″ sur S′ et
244 tout tore maximal T″ de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$, l'image inverse g'' de g' par S″ → S′ est une section de T″ sur S″.

Introduisant les foncteurs $\mathscr{T}(\mathrm{S}') =$ ensemble des tores maximaux de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, et $\underline{\mathrm{T}}(\mathrm{S}') =$ ensemble des couples (T', g'), où T′ est un tore maximal de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ et g' une section de T′ sur S′, on voit que $\underline{\mathrm{T}}$ est un sous-foncteur de $\mathscr{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} = \mathscr{T}_{\mathrm{G}}$, et avec ces notations, on peut écrire aussi

$$\mathrm{Z} = \prod_{\mathscr{T}_{\mathrm{G}}/\mathrm{G}} \underline{\mathrm{T}}/\mathscr{T}_{\mathrm{G}}.$$

(12) N.D.E. : indiquer ici des références.

Utilisant XI 6.8, et 7.1 d) qui assure la représentabilité de $\mathscr{T}$ par un S-préschéma lisse sous certaines conditions, on pourrait en conclure la représentabilité de Z sous certaines conditions, que nous allons obtenir cependant par voie plus directe plus bas.

Définition 8.6. — Soit G un S-préschéma en groupes lisse de présentation finie à fibres connexes. On dit que G *admet un centre réductif* si le foncteur Z précédent (qui est évidemment un sous-groupe de G) est représentable par un groupe de type multiplicatif. On dit alors que Z est le *centre réductif* de G.

On notera que si Z est un centre réductif de G, alors pour tout changement de base $S' \to S$, $Z_{S'}$ est un centre réductif de $G_{S'}$; d'autre part, l'existence d'un centre réductif est évidemment une question *locale* pour la topologie fpqc. Quant à la terminologie « centre réductif », notons que Z est en tous cas *central*, car évidemment Z est invariant par

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G})$$

et a fortiori c'est un sous-groupe invariant de G, et on applique IX 5.5.

Le lemme 4.5 doit se remplacer ici par :

Lemme 8.7. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme central, où* H *est de type multiplicatif et de type fini sur* S, *supposons que pour tout corps algébriquement clos* k *sur* S, $u_k(\mathrm{H}_k)$ *soit contenu dans le plus grand sous-groupe affine lisse connexe de* G_k. *Alors* u *se factorise à travers tout tore maximal* T *de* G (*donc,* u *se factorise en fait à travers le sous-foncteur* Z *de* G *défini plus haut*). 245

Utilisant une variante facile de IX 5.1 bis (où le signe = serait remplacé par un signe d'inclusion), on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps k, qu'on peut supposer algébriquement clos. (Se ramener au cas S affine noethérien, puis artinien, puis utiliser IX 3.6). Comme T est contenu dans le plus grand sous-groupe affine lisse connexe V de G, on est alors ramené au cas où G = V i.e. où G est affine, où le résultat a été démontré dans 4.5.

Proposition 8.8. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes lisse de présentation finie à fibres connexes.*

a) *Si* S *est le spectre d'un corps* k, *alors* G *admet un centre réductif* Z. *Lorsque* G *est extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe affine* V (*par exemple si* k *est algébriquement clos*), *alors* Z *est aussi le centre réductif de* V, *et c'est le plus grand sous-groupe de type multiplicatif central de* V.

b) *Soit* Z *un sous-préschéma en groupes de type multiplicatif de* G. *Alors* Z *est un centre réductif de* G *si et seulement si pour tout* $s \in \mathrm{S}$, Z_s *est un centre réductif de* G_s. *Alors* Z *est le plus grand sous-groupe de type multiplicatif* K *de* G *tel que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, K_s *soit contenu dans le centre réductif de* G_s *; plus généralement, pour tout homomorphisme* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$, *avec* H *de type multiplicatif et de type fini sur* S, *tel que pour tout corps algébriquement clos* k *sur* S, $u_k : \mathrm{H}_k \to \mathrm{G}_k$ *se factorise par le plus grand sous-groupe lisse connexe affine de* G_k, u *se factorise par* Z (*et en particulier,* u *est central*).

c) *Si* G *admet localement pour la topologie* fpqc *un tore maximal, alors* G *admet un centre réductif.* 246

d) *Soit* T *un tore maximal de* G. *Alors* $T \cap \mathrm{Centr}(G) = \mathrm{Ker}(T \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}))$ *et c'est un centre réductif de* G.

e) *Soit* Z *un centre réductif de* G, *et supposons* $G' = G/Z$ *représentable* (*par exemple* S *artinien*), *alors* G′ *admet le sous-groupe unité comme centre réductif, et* $T' \mapsto T = u^{-1}(T')$ *établit une correspondance biunivoque entre tores maximaux de* G′ *et tores maximaux de* G.

Démonstration. a) Supposons que S est le spectre d'un corps k. Pour prouver alors l'existence d'un centre réductif, on peut supposer k algébriquement clos, et on est ramené par suite au cas où G est extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe affine V. Comme pour tout S′ sur k, les tores maximaux de $G_{S'}$ sont ceux de $V_{S'}$ (en vertu de IX 5.2 et du fait que sur un corps algébriquement clos, un homomorphisme d'un tore dans une variété abélienne est trivial), il s'ensuit que le foncteur Z défini plus haut en termes de G est le même que celui défini en termes de V. On est ainsi ramené au cas de G affine. Comme $\mathscr{T}$ est représentable, et nécessairement « essentiellement libre » sur k (VIII 6.1) il s'ensuit que $\mathscr{T}_G$ est essentiellement libre sur G, et comme $\underline{T}$ est un sous-schéma fermé de $\mathscr{T}_G = G_{\mathscr{T}}$ (en vertu par exemple de VIII 5.7) il s'ensuit en vertu de VIII 6.4 que $Z = \prod_{\mathscr{T}_G/G} \underline{T}/\mathscr{T}_G$ est représentable par un sous-schéma fermé de G. C'est donc un sous-schéma en groupes de G, je dis qu'il est de type multiplicatif : en effet on peut supposer k algébriquement clos, alors G admet un tore maximal T, et par définition on aura $Z \subset T$, donc Z est de type multiplicatif comme sous-groupe algébrique d'un groupe de type multiplicatif (IX.8). Cela prouve que Z est un centre réductif de G. Le fait que ce soit le plus grand sous-groupe de type multiplicatif central de V est contenu dans 8.7.

b) Le « seulement si » étant trivial, prouvons que si Z est un sous-groupe de type
247 multiplicatif de G tel que pour tout $s \in S$, Z_s soit le centre réductif de G_s, alors Z est un centre réductif de G. Il faut prouver d'abord que Z est contenu dans tout tore maximal de G (ce qui restera donc vrai après tout changement de base) : c'est une conséquence immédiate de 8.7. Ensuite, il faut prouver que si g est une section de G sur S tel que pour tout S′ sur S, et tout tore maximal T′ de $G_{S'}$, $g_{S'}$ est une section de T′, alors g est une section de Z. Notons qu'on pouvait se ramener comme à l'accoutumée (compte tenu que $\prod_{\mathscr{T}_G/G} \underline{T}/\mathscr{T}_G = Z'$ est un faisceau pour fpqc qui commute aux limites inductives d'anneaux) au cas S affine, puis S noethérien, et enfin S artinien. Alors $\mathscr{T}$ est représentable par un préschéma lisse sur S en vertu de 7.1 d), donc procédant comme dans a), on voit que $\prod_{\mathscr{T}_G/G} \underline{T}/\mathscr{T}_G$ est représentable par un sous-schéma fermé Z′ de G. On a déjà vu que $Z \subset Z'$, d'autre part par hypothèse sur Z on a $Z_k = Z'_k$ (où k est le corps résiduel), or Z étant plat sur S, il s'ensuit $Z = Z'$, ce qui prouve que Z est un centre réductif de G. Les autres assertions de b) sont contenues dans 8.7.

c) Se ramène immédiatement à d).

d) Bien entendu, $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de G, et $\mathrm{T} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ l'homomorphisme induit par la représentation adjointe de G. On a trivialement

$$\mathrm{T} \cap \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{T} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})),$$

la démonstration de l'inclusion inverse est la même que dans 4.7 d), nous ne la répétons pas ici. Soit Z le groupe en question, en tant que $\mathrm{Ker}(\mathrm{T} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}))$ il est de type multiplicatif, (cf. par exemple IX 6.8). Pour prouver que c'est un centre réductif de G, on est ramené par b) au cas où S est le spectre d'un corps. Soit alors Z' le centre réductif (qui existe en vertu de a)), on a évidemment $\mathrm{Z}' \subset \mathrm{T} \cap \mathrm{Centr}(\mathrm{G}) = \mathrm{Z}$, d'autre part comme Z est un sous-groupe central de type multiplicatif contenu dans le sous-groupe lisse connexe affine T, il résulte de a) que $\mathrm{Z}' \supset \mathrm{Z}$, donc $\mathrm{Z}' = \mathrm{Z}$. C.Q.F.D.

e) Sous les conditions de 7.1 f) posons $\mathrm{Z} = \mathrm{Ker}\, u$ et supposons que pour tout corps algébriquement clos k sur S, Z_k soit contenu dans un tore maximal de G_k. Alors on 248
constate aisément que l'application $\mathrm{T}' \mapsto u^{-1}(\mathrm{T}')$ induit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des tores maximaux de G', et l'ensemble des tores maximaux de G. Appliquant ceci à la situation 8.8 e), la conclusion voulue en résulte aussitôt.

Remarques 8.9. — a) La démonstration donnée de 8.8 est indépendante des résultats du N°4, et en particulier celle de 8.8 a) n'utilise pas 4.4 (dont la démonstration est un peu pénible).

b) On voit facilement que le sous-groupe Z de G envisagé dans 8.6 est toujours central (qu'il soit représentable ou non), et il peut être tentant de l'appeler centre réductif de G dans tous les cas.

c) On peut également généraliser 4.9, on trouve l'énoncé suivant : Soit G un groupe algébrique lisse et connexe sur un corps algébriquement clos, pour que G soit une extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe unipotent (i.e. pour que le rang réductif de G soit nul, cf. 8.3) il faut et suffit que le centre réductif de G soit réduit au groupe unité, et que l'algèbre de Lie de G soit nilpotente.

9. Complément : action d'un schéma en groupes et points fixes

Le but de cette section, ajoutée en janvier 2008, est d'étudier les points fixes sous l'action d'un schéma en groupes.

9.1. Représentabilité du foncteur des points fixes. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes qui opère sur un S-schéma X. On définit le sous-foncteur X^{G} de X des points fixes de X sous G : pour tout S-schéma T, $\mathrm{X}^{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est le sous-ensemble de X(T) formé des points fixes sous G (VIII.6.e).

Rappelons la notion de '« schéma S-pur » introduite dans ([G-R], § 3.3, [R]). Soit G un S-schéma en groupes plat, de présentation finie. Comme les fibres de G sont sans composantes immergées, la notion de pureté pour G prend la forme suivante. Le schéma G est S-pur si pour tout S-schéma local strictement hensélien T, de point fermé t, tout point générique $\widetilde{x}$ d'une fibre de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ se spécialise en un point de G_t, i.e. l'adhérence de $\widetilde{x}$ dans $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ rencontre G_t.

Exemples. — (1) Si G est quasi-fini et séparé sur S, G est S-pur si et seulement si G est fini sur S.

(2) Si $S = \mathrm{Spec}(R)$ et $G = \mathrm{Spec}(A)$, G est S-pur si et seulement si A est un R-module projectif ([G-R], 3.3.5). En particulier G est S-pur si G est diagonalisable.

(3) Un schéma en groupes de type multiplicatif est S-pur car la notion de pureté est locale pour la topologie étale sur S.

(4) Le schéma G est S-pur si G est S-propre ou si les fibres de G sont irréductibles ou si S est semi-local artinien.

(5) En particulier, un S-schéma en groupes réductifs G est S-pur.

Proposition 9.2. — *Soit* G *un* S*-schéma en groupes de présentation finie,* S*-plat et* S*-pur, qui opère sur un* S*-schéma* X *de présentation finie. Alors le foncteur* X^G *des points fixes de* X *sous* G *est représentable par un sous-schéma fermé de* X*, de présentation finie sur* S.

En effet, soit a dans X(S) et soit H le sous-schéma en groupes de G, fixateur de a. Alors a est fixe sous G si et seulement si $H = G$. Or le sous-foncteur C de S des coïncidences (de façon précise, si T est un S–schéma, $C(T) = \{\varnothing\}$ si $H \times_S T \to G \times_S T$ est bijectif, et $C(T) = \varnothing$ sinon) de H avec G est représentable par un sous-schéma fermé de S, défini par un faisceau d'idéaux de type fini ([G-R], 4.1.1). On applique ce résultat avec $S = X$ en prenant pour a le point de X universel (i.e. l'identité dans $X(X) = \mathrm{Hom}_S(X, X)$).

9.3. Obstruction infinitésimale. — Sous l'hypothèse que G est un S-schéma en groupes plat de présentation finie qui opère (à gauche) sur un S-préschéma lisse X, nous allons maintenant étudier la lissité formelle du foncteur X^G.

On suppose ici que S est muni d'un sous-schéma fermé S_0 défini par un faisceaux d'idéaux quasi-cohérents $\mathscr{I}$ de carré nul. On note $j : S_0 \to S$, $G_0 = G \times_S S_0$, $X_0 = X \times_S S_0$.

Soit ε_0 un point de $X^G(S_0)$ qui se relève en un point de X(S). Nous allons étudier l'obstruction à relever ε_0 en un point de $X^G(S)$. Puisque X est lisse, on sait que les relèvements de ε_0 à X(S) forment un espace principal homogène trivial pour le sous le groupe abélien

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{S_0}}(\varepsilon_0^*(\Omega^1_{X_0/S_0}), \mathscr{I})$$

(III.0.2, 0.3). On pose alors

$$L_0 = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_{S_0}}(\varepsilon_0^*(\Omega^1_{X_0/S_0}), \mathscr{I}),$$

c'est un $\mathscr{O}_{S_0}$-module. En outre, vu que ε_0 est fixe sous G, L_0 est naturellement un G_0-$\mathscr{O}_{S_0}$-module. On note $\rho_0 : G_0 \to \mathrm{Aut}_{S_0}(L_0)$ (resp. $\rho : G \to \mathrm{Aut}_S(j_*L_0)$) la représentation associée.

Lemme 9.4. — *Il existe une certaine classe* $c(\varepsilon_0) \in H^1(G, j_*L_0) \cong H^1(G_0, L_0)$*, définie canoniquement par* ε_0*, telle que* ε_0 *se relève à* $X^G(S)$ *si et seulement si* $c(\varepsilon_0) = 0$.

L'adjonction $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, j_*\mathrm{L}_0) \cong \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_0, \mathrm{L}_0)$ est celle du lemme III.1.1.2. Nous allons travailler avec le petit site fppf sur S. Pour tout schéma T plat et de présentation finie sur S, on note $\mathrm{G}_\mathrm{T} = \mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{T}$, $\mathrm{X}_\mathrm{T} = \mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{T}$ les objets correspondants sur T. Considérons le faisceau A sur le petit site fppf de S tel que, pour tout T plat et de présentation finie sur S on ait :

$$\mathrm{A}(\mathrm{T}) = \Big\{ \text{ ensemble des relèvements de } \varepsilon_0 \times_\mathrm{S} \mathrm{T} \text{ dans } \mathrm{X}(\mathrm{T}) \Big\}.$$

Vu que la formation de L_0 commute aux changements de bases plats, les considérations précédentes indiquent que A(T) est un espace principal homogène trivial sous le groupe abélien $\mathrm{H}^0(\mathrm{T}, j_*\mathrm{L}_0)$. Toujours du fait que ε_0 est fixe, pour tout T plat et de présentation finie sur S, et tout g dans G(T), g agit par automorphismes affines sur A(T), de façon compatible avec l'action de G sur $j_*\mathrm{L}_0$. C'est-à-dire :

$$g(a_\mathrm{T} + v) = g(a_\mathrm{T}) \,+\, \rho(g)(v), \;\; v \in \mathrm{H}^1(\mathrm{T}, j_*\mathrm{L}_0).$$

Comme G est plat de type fini on peut appliquer ces considérations en prenant T = G et pour g le point universel id_G de G. On obtient ainsi une action du faisceau fppf G sur A.

Soit a un relèvement de ε_0 dans X(S). On note $g^\sharp$ le point universel de G et on définit $v^\sharp \in \mathrm{H}^0(\mathrm{G}, j_*\mathrm{L}_0)$ par

$$\rho(g^\sharp)(v^\sharp) = g^\sharp\,.a_\mathrm{G} - a_\mathrm{G}.$$

Pour tout S-préschéma Y, on pose $z(\mathrm{Y}) : \mathrm{G}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Y}, j_*\mathrm{L}_0)$, $g \mapsto v^\sharp(g)$. Ceci définit le 1-cocycle z dans $\mathrm{Z}^1(\mathrm{G}, \mathrm{L})$ (exposé I, § 5).

Sa classe $c(\varepsilon_0)$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, j_*\mathrm{L}_0)$ ne dépend pas du choix de a. En particulier, si ε_0 se relève à $\mathrm{X}^\mathrm{G}(\mathrm{S})$, on a $c(\varepsilon_0) = 0$. Réciproquement, si $c(\varepsilon_0) = 0$, alors il existe $w \in \mathrm{H}^0(\mathrm{S}, j_*\mathrm{L}_0)$ tel que $z(\mathrm{Y})(g) = g\,.w_\mathrm{Y} - w_\mathrm{Y}$ tout S–préschéma Y et tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{Y})$. En appliquant ceci à Y = G et à $g^\sharp$, on conclut que $a - w \in \mathrm{X}^\mathrm{G}(\mathrm{S})$. On a donc établi que ε_0 se relève dans $\mathrm{X}^\mathrm{G}(\mathrm{S})$ si et seulement si $c(\varepsilon_0) = 0$.

Remarque 9.5. — Dans le cas où G est affine et plat de type fini sur S affine, on peut raffiner cette obstruction en une classe $\widetilde{c}(\varepsilon_0) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{X}_0, \mathrm{L}_0)$ où $\mathrm{H}^1_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{X}_0, \mathrm{L}_0)$ est le groupe de cohomologie G_0–équivariante défini par Wevers ([W], app. C). Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de supposer que ε_0 se relève à X(S).

9.6. Lissité des points fixes. —

Théorème 9.7. — *Soit* G *un* S*-schéma en groupes plat, de type fini sur une base noethérienne* S *qui opère sur un* S*-schéma lisse* X*. On suppose que* G *est* S*-pur, et pour tout point géométrique s au dessus de* S (*de corps résiduel algébriquement clos*), *on a*

$$\mathrm{H}^1\big(\mathrm{G}_s, (\Omega^1_{\mathrm{X}_s})^*\big) = 0.$$

Alors le foncteur X^G *des points fixes de* X *sous* G *est représentable par un sous-schéma fermé de* X *lisse sur* S.

Montrons le théorème 9.7. On sait que X^G est représentable par un sous–schéma fermé de X de présentation finie sur S. On peut supposer S = Spec(A) local. Suivant le critère de lissité (SGA1 III.3.1.iii.bis), il suffit de vérifier la lissité formelle de X^G

pour $S' = \mathrm{Spec}(A')$ et le sous-schéma fermé $S'_0 = \mathrm{Spec}(A'/\mathscr{I}') = \mathrm{Spec}(A'_0)$, où A' est un anneau local artinien et $\mathscr{I}'$ un idéal de carré nul de A'. Par dévissage, on se ramène au cas où $\mathscr{I}'$ est annulé par l'idéal maximal de A'. En particulier, si k désigne le corps résiduel de A', $\mathscr{I}'$ est un k-espace vectoriel.

On se donne donc un élément $\varepsilon'_0 \in X^G(S'_0)$ que l'on souhaite relever à $X^G(S')$. On note alors $X' = X \times_S S'$, $G' = G \times_S S'$, $X'_0 = X \times_S S'_0$, $G'_0 = G \times_S S'_0$. Vu que S' est affine et que X' est lisse sur S', $\varepsilon'_0 \in X^G(S'_0)$ se relève à $X(S')$. Selon le lemme 9.4, la classe

$$c(\varepsilon_0) \in H^1(G'_0, L'_0)$$

est l'obstruction à relever ε'_0 dans $X^G(S')$, où $L'_0 = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_{S'_0}}(\varepsilon'^*_0(\Omega^1_{X'_0/S'_0}), \mathscr{I}')$. Vu que L'_0 est un k-espace vectoriel, on a un isomorphisme canonique $H^1(G'_0, L'_0) \xrightarrow{\sim} H^1(G'_0 \times_{A'_0} k, L'_0)$. Il suffit de montrer que $H^1(G'_0 \times_{A'_0} k, L'_0) = 0$. Notant $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, on a un isomorphisme (IX.3.1 dans le cas affine, lemme 9.11 en général)

$$H^1(G'_0 \times_{A'_0} k, L'_0) \otimes_k \overline{k} \xrightarrow{\sim} H^1(G'_0 \times_{A'_0} \overline{k}, L'_0 \otimes_k \overline{k}).$$

On remarque alors que la représentation $L'_0 \otimes_k \overline{k}$ est une somme directe de $(\Omega^1_{X'_0 \times_k \overline{k}})^*$. Par hypothèse on a $H^1(G'_0 \times_{\overline{k}} A'_0, (\Omega^1_{X'_0 \times_k \overline{k}})^*) = 0$ ce qui implique $H^1(G'_0 \times_{A'_0} k, L'_0) = 0$.

Corollaire 9.8. — *Soit* G *un* S*-schéma en groupes plat, de présentation finie qui opère sur un* S*-schéma lisse* X *de présentation finie. On suppose que* G *admet une suite de composition dont les facteurs sont d'un des types suivants :*

(1) S*-schéma abélien* (*i.e.* G *est lisse sur* S *et ses fibres sont des variétés abéliennes*),

(2) S*-schéma en groupes de type multiplicatif,*

(3) S*-schéma en groupes fini, étale, de degré inversible sur* S*,*

(4) S*–groupe réductif si* S *est un* $\mathbb{Q}$*–schéma.*

Alors le foncteur X^G *des points fixes de* X *sous* G *est représentable par un sous-schéma fermé de* X*, de présentation finie, lisse sur* S.

En effet, si $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ est une suite exacte de S–groupes satisfaisant les hypothèses du théorème, le S–groupe G'' opère sur le foncteur $X^{G'}$ et le foncteur X^G n'est pas autre chose que celui des points fixes de $X^{G'}$ pour G''. Ainsi, on est ramené au cas d'un S–groupe d'un des quatre types ci-dessus. Par passage à la limite, on peut supposer S noethérien. On va vérifier le critère cohomologique énoncé ci-dessus pour une fibre G_s au dessus d'un point géométrique s de S et une représentation linéaire de dimension finie V de G_s.

Dans le cas d'un schéma abélien, toute application de G_s^n dans V est constante et par suite les $H^i(G_s, V)$ sont nuls pour $i > 0$.

Dans le cas d'un schéma en groupes de type multiplicatif, G_s est un groupe diagonalisable. Le théorème I.5.3.3 montre que les $H^i(G_s, V)$ sont nuls pour $i > 0$.

Dans les deux cas suivants, l'argument est le même puisqu'il repose sur la semi-simplicité des représentations linéaires de G_s. En effet dans le cas d'un S-schéma en groupes fini, étale, de degré inversible sur S, G_s est un groupe fini constant de degré inversible dans le corps résiduel $\kappa(s)$, il est bien connu que toute représentation linéaire de G_s est semi-simple.

Pour le cas réductif, le corps résiduel $\kappa(s)$ est supposé (algébriquement clos) de caractéristique nulle. On sait alors toute représentation linéaire de G_s est semi-simple (voir [T-Y], théorème 27.3.3).

Remarque 9.9. — Ceci s'applique en particulier au cas d'une action de G/S sur un S–schéma en groupes H lisse. Si G est un groupe de type multiplicatif agissant par tranformations intérieures sur H lisse et affine sur S, on retrouve alors le corollaire XI.5.3 énonçant la lissité du centralisateur de G dans H.

Remarque 9.10. — Dans le cas où $S = \mathrm{Spec}(k)$ et G est un groupe algébrique linéairement réductif défini sur le corps algébriquement clos k, ce résultat est dû indépendamment à Fogarty ([F], theorem 5.4) et Iversen ([I], proposition 1.3).

La démonstration du théorème 9.7 utilise le lemme suivant bien connu dans le cas d'un schéma en groupes affine (IX.3.1).

Lemme 9.11. — *Soient* G *un schéma en groupes sur un schéma affine* $S = \mathrm{Spec}(A)$, *et* $f : S' = \mathrm{Spec}(A') \to S$ *un morphisme plat. On pose* $G' = G \times_S S'$. *Alors pour tout* G-$\mathscr{O}_S$*–module* M *quasi-cohérent, on a des isomorphismes canoniques*

$$H^i(G, M) \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} H^i(G', M \otimes_A A') \qquad (i \geqslant 0).$$

Vu que les chaînes de degré $n \geqslant 1$ pour la cohomologie de Hochschild sont déterminées par leur valeur au point $(\mathrm{id}, \dots, \mathrm{id}) \in G(G) \times \cdots G(G)$ on a un isomorphisme de A-modules $C^n(G, M) \cong \Gamma(G^n, M \otimes_A \mathscr{O}_{G^n})$. Le groupe de cohomologie $H^n(G, M)$ est le n-ième groupe de cohomologie du complexe

$$L \longrightarrow \Gamma(G, M \otimes_A \mathscr{O}_G) \longrightarrow \Gamma(G^2, M \otimes_A \mathscr{O}_{G^2}) \longrightarrow \Gamma(G^3, M \otimes_A \mathscr{O}_{G^3}) \longrightarrow \cdots$$

Puisque A′ est plat sur A, on a, d'après EGA IV_1, 1.7.21,

$$\Gamma(G^n, M \otimes_A \mathscr{O}_{G^n}) \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} \Gamma(G'^n, (M \otimes_A A') \otimes_{A'} \mathscr{O}_{G'^n}).$$

Ceci entraîne l'assertion voulue en prenant la cohomologie.

Bibliographie

(13)

[Fo73] J. Fogarty, *Fixed point schemes*, Amer. J. Math. **95** (1973), 35-51.

[RG71] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. math. **13** (1971), 1-89.

[Iv72] B. Iversen, *A fixed point formula for action of tori on algebraic varieties*, Invent. math. **16** (1972), 229-236.

(13) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

[Ray72] M. Raynaud, *Flat modules in algebraic geometry*, Compositio Math. **24** (1972), 11-31.

[TY06] P. Tauvel, R. W. T. Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer-Verlag, 2006.

[We05] S. Wewers, *Formal deformation of curves with group scheme action*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), 1105-1165.

EXPOSÉ XIII

ÉLÉMENTS RÉGULIERS DES GROUPES ALGÉBRIQUES ET DES ALGÈBRES DE LIE

par A. Grothendieck

1. Un lemme auxiliaire sur les variétés à opérateurs

249

Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes opérant à gauche sur un S-préschéma V, W un sous-S-préschéma fermé de V, N son stabilisateur dans G, sous-groupe de G dont les points, à valeurs dans un S' sur S, sont les $g \in G(S')$ tels que $g \cdot W_{S'} = W_{S'}$. Nous munissons $(\mathbf{Sch}_{/S})$ de la topologie fidèlement plate quasi-compacte, et identifions G, V, M aux faisceaux correspondants (cf. IV). Nous raisonnerons donc dans la catégorie des faisceaux sur $(\mathbf{Sch})_{/S}$, et dans ce numéro la locution « localement » réfère à la topologie que nous venons de préciser sur $(\mathbf{Sch})_{/S}$. Notons que N est un faisceau, considérons le faisceau quotient G/N. On voit tout de suite qu'il est isomorphe au foncteur suivant : à tout S' sur S, on associe l'ensemble des sous-faisceaux W' de $V_{S'}$ qui sont localement conjugués de $W_{S'}$ par le groupe G. Soit X le sous-faisceau de $G/N \times_S V$ dont la valeur, pour tout S' sur S, est l'ensemble des (W', v), où W' est comme dessus et v est une section de W' sur S' (donc une section de $V_{S'}$ sur S'). Soit Z l'image inverse de X dans $G \times_S V$, de sorte que nous avons le diagramme cartésien

$$\text{(x)} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, hook, "i"] \\ G \times_S V \arrow[r] & G/N \times_S V, \end{tikzcd}$$

où i est l'immersion canonique, et la deuxième flèche horizontale provient du morphisme canonique $G \to G/N$. Comme celui-ci fait correspondre au point $g \in G(S')$ le sous-faisceau $g \cdot W_{S'}$ de $V_{S'}$, on voit que $Z(S')$ est l'ensemble des couples $(g, v) \in G(S') \times V(S')$ tels que $v \in g \cdot W_{S'}(S')$. Par suite, Z est isomorphe au faisceau $G \times_S W$, grâce à l'isomorphisme 250

$$G \underset{S}{\times} W \xrightarrow{\sim} Z$$

[0] version xy du 1/12/08

défini par $(g, w) \mapsto (g, g \cdot w)$. Ainsi le diagramme cartésien précédent donne le diagramme cartésien

$$\text{(xx)} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "i"] \\ \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V} \arrow[r] & \mathrm{G/N} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V} \end{tikzcd}$$

où l'on a $\lambda(g, w) = (g, g \cdot w)$, donc $q(g, w) = (\overline{g}, g \cdot w)$, où $\overline{g}$ désigne l'image de g par l'application canonique $\mathrm{G}(\mathrm{S}') \to (\mathrm{G/N})(\mathrm{S}')$. On voit enfin sur le diagramme (x) que $\mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ fait de Z un fibré principal de base X et de groupe N opérant à droite par $(g, v) \cdot n = (gn, v)$, de sorte que dans (xx), $q : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W} \to \mathrm{X}$ fait de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}$ un fibré principal de base X et de groupe N opérant à droite par

$$(g, w) \cdot n = (gn, n^{-1} \cdot w).$$

Nous résumons les principaux morphismes précédents dans le diagramme suivant :

$$\text{(D)} \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W} \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathrm{G/N} & \mathrm{X} \arrow[l, "p"] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook, "i"] & \mathrm{V} \\ & \mathrm{G/N} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V} \arrow[ul, dashed, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{pr}_2"'] & \end{tikzcd}$$

où $\psi = \mathrm{pr}_2 \circ i$ et $\varphi = \psi \circ q$ i.e. $\varphi(g, w) = g \cdot w$. Si v est une section de V sur S, le
251 sous-faisceau X_v de X image inverse de cette section par ψ est donné par $\mathrm{X}_v(\mathrm{S}') =$ ensemble des sous-faisceaux W' de $\mathrm{V}_{\mathrm{S}'}$ qui sont localement conjugués de $\mathrm{W}_{\mathrm{S}'}$ par G, et qui contiennent la section $v_{\mathrm{S}'}$ de $\mathrm{V}_{\mathrm{S}'}$, tandis que le sous-faisceau de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}$ image inverse de v par φ est isomorphe au sous-faisceau M_v de G donné par $\mathrm{M}_v(\mathrm{S}') =$ ensemble des $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ tels que $v_{\mathrm{S}'} \in g \cdot \mathrm{W}(\mathrm{S}')$, i.e. tels que $g^{-1} v_{\mathrm{S}'} \in \mathrm{W}(\mathrm{S}')$. Si v est une section de W et non seulement de V, alors M_v contient évidemment N.

Dans ces explicitations, on n'a pas utilisé le fait que G, V, W étaient représentables (ni que le site sur lequel on travaille est défini en termes de préschémas !). Mais supposons maintenant que N soit représentable et fidèlement plat et quasi-compact sur S, et que G/N soit représentable. Lorsque S est le spectre d'un corps, et que G est de type fini sur k, on sait que cette hypothèse est nécessairement satisfaite (VIII 6 et VI_{B}.11.18). On voit alors sur le diagramme cartésien (xx), utilisant la théorie de la descente fidèlement plate quasi-compacte et le fait que $\mathrm{Z} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ est une immersion fermée, que X est représentable (il est obtenu par descente du sous-préschéma fermé Z de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ par le morphisme fidèlement plat et quasi-compact $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V} \to \mathrm{G/N} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$). Donc le diagramme (D) est un diagramme de morphismes de préschémas sur S.

Nous supposons par la suite que S est le spectre d'un corps k, et que G, V, W sont de type fini sur k. Soit $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N, donc on a $\dim \mathrm{N} \leqslant \operatorname{rang} \mathfrak{n}$, l'égalité étant vraie si et seulement si N est lisse sur k (Exp VI [1]). Soit $a \in \mathrm{W}(k)$, et considérons le sous-schéma M_a de G défini plus haut, contenant N, et isomorphe à $\varphi^{-1}(a)$; nous désignerons par $\mathfrak{m}_a$ son espace tangent de Zariski en l'élément neutre e de N, de sorte qu'on a

$$(1) \qquad \mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}_a, \qquad \dim \mathrm{N} \leqslant \operatorname{rang} \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}_a.$$

Lemme 1.1. — *Avec les notations précédentes :* **252**

a) *Considérons les conditions suivantes :*

(i) $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_a$ *et* N *est lisse sur* k.

(i bis) $\dim \mathrm{N} = \operatorname{rang}_k \mathfrak{m}_a$.

(ii) *Le morphisme* $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{V}$ *est non ramifié en* $(\overline{e}, a)$.

(iii) M_a *et* N *coïncident au voisinage de* e.

Alors on a les implications (i) $\Leftrightarrow$ *(i bis)* $\Rightarrow$ *(ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii).*

b) *Supposons* $\varphi : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ *lisse en* (e, a). *Alors* M_a *est lisse sur* k *en* e, *et* ψ *est lisse en* $(\overline{e}, a)$.

Démonstration. a) L'équivalence de (i) et (i bis) résulte aussitôt des relations (1) et du fait signalé plus haut que N est lisse sur k si et seulement si $\dim \mathrm{N} = \operatorname{rang}_k \mathfrak{n}$. D'autre part, considérons le morphisme d'inclusion $\mathrm{N} \to \mathrm{M}_a$, il est bien connu [2] que si N est lisse sur k en e et l'application tangente en e surjective, alors $\mathrm{N} \to \mathrm{M}_a$ est lisse en e, donc (étant une immersion) est un isomorphisme en e, ce qui montre que (i) implique (iii). Pour prouver l'équivalence de (ii) et (iii), considérons comme plus haut $\mathrm{X}_a = \psi^{-1}(a)$ et utilisons l'isomorphisme $\mathrm{M}_a \simeq \varphi^{-1}(a) \simeq q^{-1}(\mathrm{X}_a)$ pour obtenir un morphisme $p_a : \mathrm{M}_a \to \mathrm{X}_a$ qui fait de M_a un fibré principal homogène de groupe $\mathrm{N}_{\mathrm{X}_a}$. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}_a \arrow[d, "p_a"'] & & \mathrm{N} \arrow[ll, "j_a"'] \arrow[d] \\
\mathrm{X}_a \arrow[rr, "j'_a"] & & \mathrm{S} = \operatorname{Spec}(k),
\end{tikzcd}$$

où $\operatorname{Spec}(k) \to \mathrm{X}_n$ est défini par le point $(\overline{e}, a)$ de X, et $j_a : \mathrm{N} \to \mathrm{M}_a$ est l'immersion canonique. Dire que ψ est non ramifié en $(\overline{e}, a)$ signifie que j'_a est une immersion ouverte, ou encore qu'il induit un isomorphisme $\mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}_a, a})$. Comme p_a est plat, **253**
il est équivalent de dire que le morphisme déduit du précédent par le changement de base $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{M}_a, e}) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}_a, b})$ est un isomorphisme, or ce morphisme déduit n'est autre que le morphisme $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{N}, e}) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{M}_a, e})$, ce qui prouve l'équivalence de (ii) et (iii).

On notera d'ailleurs que la démonstration prouve que les conditions (ii), (iii) impliquent la condition suivante, en apparence plus forte que (iii) :

(iii bis) N est un sous-schéma ouvert et fermé de M.

---

[1] N.D.E. : N'ayant pas identifié cette référence, nous renvoyons au théorème II.5.2.1 du livre : M. Demazure & P. Gabriel, *Groupes algébriques* I, Masson (1970).

[2] N.D.E. : voir, par exemple, EGA IV_4, Th. 17.11.1 d).

b) La première assertion provient du fait que M_a est isomorphe à $\varphi^{-1}(a)$, la deuxième du fait que q est plat et $q(e,a) = (\overline{e}, a)$.

2. Théorème de densité et théorie des points réguliers de G

Nous allons appliquer les constructions et notations du N° précédent dans le cas où G est un groupe algébrique connexe lisse sur k, où $\mathrm{V} = \mathrm{G}$ sur lequel G opère par automorphismes intérieurs, et où W est un sous-groupe algébrique connexe lisse H de G. Nous désignerons par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, par $\mathfrak{h}$ celle de H, par N le normalisateur de H dans G, par $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N. Si $a \in \mathrm{G}(k)$, nous désignerons encore comme au N°1 par M_a le symétrique de son transporteur dans H, de sorte que si $a \in \mathrm{H}(k)$, on a $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}_a$; dans ce cas, on désigne par $\mathfrak{m}_a$ l'espace tangent de Zariski de M_a en l'élément neutre e de G. Notons que

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}_a \subset \mathfrak{g} \qquad \text{pour } a \in \mathrm{H}(k).$$

Nous aurons à utiliser le

254 ***Lemme 2.0***. — *Pour qu'on ait* $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0$, *il faut et suffit que l'on ait* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{H}} = 0$ (*où le premier membre désigne le sous-espace des invariants sous l'opération de* H *déduite de la représentation adjointe*). *Lorsque cette condition est satisfaite,* N *est lisse et on a* $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{G}$. *En tous cas,* $\dim \mathrm{X} \leqslant \dim \mathrm{G}$, *et cette inégalité est une égalité si et seulement si* H *est d'indice fini dans* N.

En effet, on a vu (II 5.2.3 (i)) que $\mathfrak{n}$ est égal à l'image inverse de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{H}}$ par le morphisme $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, donc $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{H}} = 0$ équivaut à $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$, ce qui équivaut aussi (H étant un sous-groupe algébrique lisse connexe du groupe algébrique N) à $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0$ (cf. VI.2). Cela implique évidemment que N est lisse. D'autre part, on a

$$\dim \mathrm{X} = (\dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{N}) + \dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{G} - (\dim \mathrm{N} - \dim \mathrm{H}),$$

donc on a

$$\dim \mathrm{X} \leqslant \dim \mathrm{G},$$

l'égalité étant atteinte si et seulement si $\dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{N}$, i.e. si et seulement si H est d'indice fini dans N. Ceci est le cas en particulier si $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0$, ce qui achève la démonstration de 2.0

Théorème 2.1. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse connexe sur le corps algébriquement clos* k, H *un sous-groupe algébrique connexe et lisse,* N *son normalisateur,* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}$ *les algèbres de Lie,* $\mathrm{X} = \mathrm{G} \times^{\mathrm{N}} \mathrm{H}$ *le schéma* (*fibré sur* G/N *de fibre type* H) *introduit au* N°1, $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *le morphisme canonique* (*dont l'image est aussi l'image de* $\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *défini par* $\varphi(g,h) = int(g)h = ghg^{-1}$). *Les conditions suivantes sont toutes équivalentes :*

(i) H *contient un sous-groupe de Cartan* (XII 1) C *de* G.

(i bis) H *a même rang réductif et même rang nilpotent* (XII 1) *que* G.

(ii) H *contient un tore maximal* T *de* G, *et* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{T}} = 0$.

255 (iii) *L'ensemble des conjugués de* H *contenant un tore maximal donné est fini non vide, et* H *est d'indice fini dans son normalisateur.*

(iv) *Il existe* $a \in \mathrm{H}(k)$ *qui n'est contenu que dans un nombre fini de conjugués de* H (*ou seulement tel que* $\psi^{-1}(a)$ *ait un point isolé*), *et* H *est d'indice fini dans son normalisateur.*

(iv bis) *Le morphisme* $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est génériquement quasi-fini* (*i.e. il existe un ouvert dense de* X *sur lequel* ψ *est quasi-fini*), *et* H *est d'indice fini dans son normalisateur.*

(v) *Il existe un ouvert dense* U *dans* G *tel que pour tout* $x \in \mathrm{U}(k)$, *l'ensemble des conjugués de* H *contenant* x *soit fini non vide, i.e.* $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est dominant et génériquement quasi-fini.*

(vi) *Il existe un ouvert dense* U *de* G *tel que tout* $x \in \mathrm{U}(k)$ *soit contenu dans un conjugué de* H , *i.e.* $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est dominant.*

(vii) *Il existe* $a \in \mathrm{H}(k)$ *tel que le sous-espace de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *des points fixes de* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\ (a)$ *soit nul.*

De plus, ces conditions impliquent que H *est son propre normalisateur connexe i.e.* N *est lisse et* $\dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{N}$, *et que* $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est génériquement étale.*

Démonstration. D'après 2.0, on a $\dim \mathrm{X} \leqslant \dim \mathrm{G}$, avec égalité si et seulement si $\dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{N}$, i.e. H d'indice fini dans N. De l'inégalité $\dim \mathrm{X} \leqslant \dim \mathrm{G}$ résulte que ψ est dominant si et seulement si il est dominant et génériquement quasi-fini, ou encore si et seulement si ψ est génériquement quasi-fini et $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{G}$. Comme cette dernière égalité signifie aussi, d'après 2.0, que H est d'indice fini dans N, on a prouvé l'équivalence de (vi), (v), (iv bis). L'équivalence de (iv) et (iv bis) est immédiate.

L'équivalence de (i) et (ibis) est immédiate sur les définitions, et laissée au lecteur. D'autre part, si H contient un sous-groupe de Cartan C de G, il contient le tore 256 maximal T de C, qui est un tore maximal de G. Comme C est le centralisateur de T, son algèbre de Lie $\mathfrak{c}$ est donnée par

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{g}^{\mathrm{T}}$$

(II, 5.2.3 (ii)). Donc comme $\mathrm{H} \supset \mathrm{C}$, d'où $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{n}$, il s'ensuit que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathrm{T}}$, ce qui équivaut grâce à I, 4.7.3 à la relation

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{T}} = 0. \tag{x}$$

Inversement, supposons que H contienne le tore maximal T et que la relation précédente soit valable, i.e. que l'on ait $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{n}$, je dis que H contient le centralisateur C de T (ce qui établira (i) $\Leftrightarrow$ (ii)). Cela résulte du

Lemme 2.1.1. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse sur le corps* k, T *un sous-groupe de type multiplicatif de* G, C *son centralisateur connexe* (*égal au centralisateur de* T *si* G *est connexe et* T *un tore,* (XII 6.6 *b*)), H *un sous-groupe lisse de* G *contenant* T. *Pour que* H *contienne* C, *il faut et il suffit que son algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ *contienne celle* $\mathfrak{c}$ *de* C.

En effet, on sait (XI 2.4) que $\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est lisse sur k, donc C est lisse sur k, de même $\mathrm{Centr}_{\mathrm{H}}(\mathrm{T})$ est lisse sur k, or $\mathrm{Centr}_{\mathrm{H}}(\mathrm{T}) = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{H}$ a $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{c}$ comme algèbre de Lie, donc l'hypothèse implique que le sous-groupe lisse $\mathrm{Centr}_{\mathrm{H}}(\mathrm{T})$ du groupe lisse $\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ a même algèbre de Lie, donc il contient la composante connexe C de ce dernier, donc H contient C. C.Q.F.D.

Prouvons l'équivalence de (i) et (iii), ce qui revient à prouver que si H contient le tore maximal T de G, alors la condition $\mathrm{H} \supset \mathrm{C}$ (qui équivaut aussi à (x) ci-dessus, comme on vient de voir), équivaut au fait que H est d'indice fini dans son normalisateur
257 et que l'ensemble des conjugués de H contenant T est fini. Si H contient C donc si on a (x), alors a fortiori

$$(\mathrm{xx}) \qquad (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{H}} = 0,$$

or on sait que $\mathfrak{n}$ est l'image inverse du premier membre de la relation précédente par l'homomorphisme canonique $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (II 5.2.3 (i)), donc la relation précédente signifie aussi en vertu de 2.0 que $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0$, a fortiori H est d'indice fini dans son normalisateur. Considérons maintenant le diagramme de sous-groupes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T} \arrow[r] & \mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H} \arrow[d] \\
& \mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{N}(\mathrm{H}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{N}(\mathrm{H}) \\
& \mathrm{N}(\mathrm{T}). &
\end{tikzcd}$$

Utilisant le théorème de conjugaison des tores maximaux dans H (XII 6.6 a)), on voit que tout conjugué de H contenant T est conjugué de H par un élément de $\mathrm{N}(\mathrm{T})(k)$, donc que l'ensemble des conjugués de H contenant T est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des points de $\mathrm{N}(\mathrm{T})/\mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{N}(\mathrm{H})$ à coefficients dans k, or comme $\mathrm{H} \supset \mathrm{C}$ on a $\mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{H} \supset \mathrm{C}$ donc l'ensemble précédent est un quotient de $(\mathrm{N}(\mathrm{T})/\mathrm{C})(k)$ qui est un ensemble fini, donc est fini. Cela prouve que (i) $\Rightarrow$ (iii). Inversement, supposons (iii) i.e. $\mathrm{N}(\mathrm{T})/\mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{N}(\mathrm{H})$ fini et $\mathrm{N}(\mathrm{H})/\mathrm{H}$ fini. Utilisant encore le théorème de conjugaison dans H, on voit encore que l'homomorphisme

$$\mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{N}(\mathrm{H})/\mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathrm{H})/\mathrm{H}$$

induit par le diagramme précédent est bijectif sur les points à valeurs dans k, (en fait, c'est un isomorphisme), donc comme le second est fini, il en est de même du premier, donc $\mathrm{N}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{H}$ est d'indice fini dans $\mathrm{N}(\mathrm{T})$, donc contient $\mathrm{C} = \mathrm{N}(\mathrm{T})^0$, donc $\mathrm{H} \supset \mathrm{C}$. Ainsi, (i), (i bis), (ii), (iii) sont des conditions équivalentes.

258 Prouvons que (ii)$\Rightarrow$ (vii). On voit aussitôt que les conditions (ii) et (vii) sont chacune invariante par une extension $k \to k'$ du corps de base, avec k' algébriquement clos, ce qui nous permet de supposer que k est de degré de transcendance infini sur son sous-corps premier. Alors il est bien connu (et on vérifie immédiatement) qu'il existe un élément a de $\mathrm{T}(\mathrm{K})$ tel que le sous-groupe de $\mathrm{T}(\mathrm{K})$ qu'il engendre soit dense

dans T pour la topologie de Zariski. On en conclut aisément $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{T}} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{ad}(a)}$, et comme par hypothèse le premier membre est nul, on en conclut (vii).

Prouvons (vii) $\Rightarrow$ (vi). Cette implication est contenue dans le résultat suivant, qui précise 2.1 :

Corollaire 2.2. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse sur un corps k,* H *un sous-groupe algébrique lisse,* N *son normalisateur dans* G*, $\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ le morphisme défini par $\varphi(g, h) = \mathrm{ad}(g)h = ghg^{-1}$, $\psi : \mathrm{X} = \mathrm{G} \times^{\mathrm{N}} \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ le morphisme déduit de φ par passage au quotient* (cf. N°1)*, $a \in \mathrm{H}(k)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *φ est lisse en (e, a).*

(ii) *ψ est étale en $(\overline{e}, a)$, et* N *est lisse sur k.*

(iii) $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{ad}(a)} = 0$ *(où $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sont les algèbres de Lie de* G, H*).*

Ces conditions impliquent $\mathrm{H}^0 = \mathrm{N}^0$.

On sait que la lissité de φ (qui est un morphisme de k-préschémas lisses) en un point rationnel sur k est équivalente à la surjectivité de l'application tangente en ce point. Or un calcul immédiat montre que cette application tangente s'écrit (moyennant les identifications habituelles des espaces tangents aux points de G et de H à l'algèbre de Lie de G et de H)

$$d\varphi(\xi, \eta) = (\mathrm{id} - \mathrm{ad}(a)) \cdot \xi + \eta,$$

considérée comme application de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. La surjectivité équivaut donc à la **259**
surjectivité de $(\mathrm{id} - \mathrm{ad}(a))$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, i.e. à (iii). Or (iii) implique a fortiori $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{H}} = 0$, i.e. (cf. 2.0, où l'hypothèse de connexité du début du N° est inutile) $\mathrm{H}^0 = \mathrm{N}^0$. On en tire que N est lisse, et $\dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{N}$, d'où $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{G}$. Or comme $q : \mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{X}$ est plat et $\psi = \varphi \circ q$ lisse en (e, a), il s'ensuit que ψ est lisse en $q(e, a) = (\overline{e}, a)$, donc étale en ce point par raison de dimensions. Donc on a prouvé (i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii), d'autre part (ii) $\Rightarrow$ (i), car la lissité de N implique celle de q. C.Q.F.D.

Prouvons enfin (vi) $\Rightarrow$ (i), ce qui, avec les implications déjà établies, prouvera le théorème. Supposons d'abord G *affine*. Soit U un ouvert non vide de G tel que $x \in \mathrm{U}(k)$ implique que x est contenu dans un conjugué de H. Soit C un sous-groupe de Cartan de G. Utilisant l'implication (i) $\Rightarrow$ (iv) pour C au lieu de H (c'est le « théorème de densité » de Borel), il s'ensuit que l'on peut trouver un conjugué de C qui rencontre U, donc on peut supposer que $\mathrm{U} \cap \mathrm{C} \neq \varnothing$, i.e. qu'il existe un ouvert V non vide dans C tel que pour tout $x \in \mathrm{V}(k)$, x soit contenu dans un conjugué de H. Écrivons C comme produit

$$\mathrm{C} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{C}_u$$

où T est le tore maximal de C (qui est un tore maximal de G) et C_u la partie unipotente de C, T étant dans le centre de C (BIBLE 6 th. 2). Nous pouvons encore supposer que k est de degré de transcendance infini sur son sous-corps premier, ce qui nous permet de trouver un élément t de $\mathrm{T}(k)$ qui soit élément de la projection de V sur T (qui est un ouvert non vide de T) i.e. $t \cdot \mathrm{C}_u \cap \mathrm{V} \neq \varnothing$, et tel que t « engendre » T. Comme tout sous-groupe algébrique de G qui contient un produit $t \cdot u$ $(t \in \mathrm{T}(k), u \in \mathrm{C}_u(k))$ contient les deux facteurs (BIBLE 4 th. 3), il s'ensuit, avec le choix précédent de t, et prenant $t \cdot u \in \mathrm{V}(k)$, qu'il existe un conjugué de H qui contient t, donc T. Donc on peut déjà supposer que l'on a

$$\mathrm{T} \subset \mathrm{H}.$$

260 Si W est l'ouvert de C_u image inverse de V par $u \mapsto t \cdot u$, on voit donc que pour tout élément x de $(\mathrm{T} \cdot \mathrm{W})(k)$, il existe un conjugué de H qui contient T et x. Comme nous avons déjà remarqué, un tel conjugué est de la forme $\mathrm{int}(g) \cdot \mathrm{H}$, où $g \in \mathrm{N}(\mathrm{T})(k)$. Considérons alors le morphisme

$$f : \mathrm{N}(\mathrm{T}) \times \mathrm{H} \to \mathrm{G}$$

défini par $f(g, h) = \mathrm{int}(g) \cdot h = ghg^{-1}$, alors l'image de f contient $\mathrm{T} \cdot \mathrm{W}$, donc comme N(T) est réunion finie de translatés $\mathrm{C} \cdot g_i$ (où $g_i \in \mathrm{N}(\mathrm{T})(k)$) puisque C est d'indice fini dans N(T), il s'ensuit qu'il existe un ouvert dense V' de $\mathrm{C} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{C}_u$ qui est contenu dans l'image de $(\mathrm{C} \cdot g_i) \times \mathrm{H}$ par f. Quitte à remplacer H par $\mathrm{int}(g_i) \cdot \mathrm{H}$ on peut supposer $g_i = e$, i.e. $f(\mathrm{C} \times \mathrm{H}) \supset \mathrm{V}'$. Donc pour tout $u \in \mathrm{V}'(k)$, il existe $v \in \mathrm{C}(k)$ et $h \in \mathrm{H}(k)$ tel que

$$v^{-1}hv = u \quad \text{d'où} \quad vuv^{-1} \in \mathrm{H}(k),$$

d'où, posant

$$\mathrm{C}' = \mathrm{C} \cap \mathrm{H} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{H}}(\mathrm{T}),$$

$vuv^{-1} \in \mathrm{C}'$ d'où $\mathrm{int}(v) \cdot \mathrm{C}' \to u$. Cela prouve que la réunion des conjugués de C' dans C (par des éléments de $\mathrm{C}(k)$) est dense, ce qui implique (comme on l'a vu pour le cas du couple (G, H) au lieu de $(\mathrm{C}, \mathrm{C}')$) que C' est d'indice fini dans son normalisateur dans C. En vertu de BIBLE 7 lemme du N°1, il s'ensuit que $\mathrm{C}' = \mathrm{C}$, donc $\mathrm{C} = \mathrm{H}$, ce qui prouve (vi) $\Rightarrow$ (i) lorsque G est affine.

Dans le cas général, nous procédons par récurrence sur $n = \dim \mathrm{G}$, l'assertion étant triviale si $n = 0$. Soit Z le centre de G, et distinguons deux cas :

1°) $\dim \mathrm{Z} \cap \mathrm{H} > 0$, alors posant $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z} \cap \mathrm{H}$, on a $\dim \mathrm{G}' < n$, d'autre part
261 l'hypothèse (vi) sur H implique la même condition pour l'image H' de H dans G', donc H' contient un sous-groupe de Cartan C' de G', donc H contient l'image inverse C de C', qui est un sous-groupe de Cartan en vertu de XII 6.6 e).

2°) $\dim \mathrm{Z} \cap \mathrm{H} = 0$, donc le morphisme canonique $\mathrm{H} \to \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ est un morphisme fini, et comme G/Z est affine en vertu de XII 6.1, il s'ensuit que H est *affine*, donc tout homomorphisme de H dans une variété abélienne est nul (et même tout morphisme de préschémas de H dans une variété abélienne est nul) : cela résulte du fait qu'un groupe algébrique affine lisse connexe sur un corps algébriquement clos est une variété rationnelle, ou simplement qu'il est réunion de ses sous-groupes de Borel (BIBLE 6 th. 5 b)), or il résulte très facilement des théorèmes de structure, BIBLE 6.2 et 6.3 qu'un groupe affine lisse connexe *résoluble* est une variété rationnelle. Utilisons maintenant le théorème de structure de Chevalley pour G, suivant lequel G est extension d'une variété abélienne A par un groupe affine lisse. Alors l'image de H dans A est nulle, H étant affine, d'autre part elle est identique à A, car la réunion de ses conjugués dans A doit être dense. Donc $\mathrm{A} = 0$, donc G est affine, et on est ramené au cas déjà traité. Cela achève la démonstration de 2.1.

Corollaire 2.3. — *Supposons réalisées les conditions équivalentes de* 2.1.

a) *Soit* $k(\mathrm{X})$ (*resp.* $k(\mathrm{G})$) *le corps des fonctions rationnelles de* X (*resp.* G)*, alors* $k(\mathrm{X})$ *est une extension finie séparable de* $k(\mathrm{G})$*. Désignons par* d *son degré.*

b) *Soit* T *un tore maximal de* G *contenu dans* H (*qui existe par la forme* 2.1 (ii))*, soit* C *le sous-groupe de Cartan de* G *correspondant. Alors* $\mathrm{C} \subset \mathrm{H}$*. D'autre part,* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *est un sous-groupe lisse de* G *et* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})}(\mathrm{T})$ *en est un sous-groupe lisse d'indice fini égal à* d (*défini dans* a))*. Le nombre des conjugués de* H *contenant un tore maximal ou un sous-groupe de Cartan donné est égal à* d*.*

c) *Soit* U *le plus grand ouvert de* G *tel que* $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *induise un morphisme* 262
$\psi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ *qui soit* fini et étale*. Alors* U *est un ouvert dense et pour* $g \in \mathrm{G}(k)$*, on a* $g \in \mathrm{U}(k)$ *si et seulement si il existe exactement* d *conjugués de* H *contenant* g*, ou encore si et seulement si il existe au moins* d *conjugués distincts* H_i *de* H *contenant* g *tels que pour tout* i*,* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i)^{\mathrm{ad}(g)} = 0$ (*où* $\mathfrak{h}_i = \mathrm{Lie}(\mathrm{H}_i)$)*.*

L'assertion a) provient du fait que ψ est génériquement étale (qui a été énoncé à la fin de 2.1) ; cela implique aussi que l'ouvert U introduit dans c) est non vide i.e. dense, et les deux caractérisations énoncées pour les éléments de $\mathrm{U}(k)$, (compte tenu que ψ est séparé, X intègre et G intègre normal, SGA1 I 10.11, et du fait que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i)^{\mathrm{ad}(g)} = 0$ signifie que ψ est étale en le point x_i de $\psi^{-1}(g)$ correspondant à H_i). Si H contient le tore maximal T de G, alors les centralisateurs de T dans H et G ont même dimension, et sont lisses et connexes (XII 6.6 b)), donc sont égaux, ce qui prouve que $\mathrm{C} \subset \mathrm{G}$. D'ailleurs on sait que le normalisateur de T dans un groupe lisse qui le contient est lisse (XI, 2.4 bis), donc $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{Norm}_{\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})}(\mathrm{T})$ sont lisses (N.B. on a signalé que $\mathrm{N} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est lisse, à la fin de l'énoncé 2.1), d'ailleurs $\mathrm{Norm}_{\mathrm{N}}(\mathrm{T})$ contient C qui est d'indice fini dans $\mathrm{N}(\mathrm{T})$, donc il est d'indice fini dans $\mathrm{N}(\mathrm{T})$. Utilisant le théorème de conjugaison pour les tores maximaux de H, on voit que l'indice en question est égal au nombre des conjugués de H qui contiennent T, ou ce qui revient au même, qui contiennent C. Or comme la réunion des conjugués de C dans G est dense (en vertu de 2.1 (i) $\Rightarrow$ (vi) appliqué à C au lieu de H), et l'ouvert U défini dans c) évidemment stable par automorphismes intérieurs, on voit que $\mathrm{C} \cap \mathrm{U} \neq \varnothing$. Procédant comme dans la démonstration de l'implication (vi) $\Rightarrow$ (ii) de 2.1, on en conclut que (quitte à faire un changement de corps de base inoffensif) il existe un $g \in (\mathrm{C} \cap \mathrm{U})(k)$ tel que tout conjugué de H qui contient g contienne T, et par suite aussi C. Donc les conjugués de H contenant C sont ceux contenant g, et comme $g \in \mathrm{U}(k)$, leur nombre est égal à d, ce qui achève d'établir b). On notera que nous avons établi en fait que l'ensemble des conjugués de H contenant T est un ensemble 263
homogène sous le groupe des points rationnels de

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) / \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}),$$

ce qui prouve en particulier que

$$d \leqslant \text{ ordre du groupe de Weyl de G.}$$

Corollaire 2.4. — *Avec les notations de* 2.1*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est un morphisme birationnel.*

(ii) *Il y a un conjugué et un seul de* H *contenant un sous-groupe de Cartan donné de* G.

(iii) H *contient un sous-groupe de Cartan* C *de* G, *et* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) \supset \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C})$.

(iv) *Il existe un ouvert non vide* V *de* G *tel que* $g \in \mathrm{V}(k)$ *implique que* g *est contenu dans exactement un conjugué de* H.

C'est clair grâce à 2.1 et 2.3.

Corollaire 2.5. — *Supposons réalisées les conditions de* 2.4 *et soit* $g \in \mathrm{G}(k)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $g \in \mathrm{U}(k)$, *où* U *est défini dans* 2.3 c), *i.e.* g *est contenu dans un conjugué et un seul de* H.

(ii) *L'ensemble des conjugués de* H *contenant* g *est fini non vide.*

(iii) *Le schéma* $\psi^{-1}(g)$ « *des conjugués de* H *contenant* g » *contient un point isolé.*

264 (iv) *Il existe un conjugué* H' *de* H *contenant* g, *et on a* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}')^{\mathrm{ad}(g)} = 0$, *où* $\mathfrak{h}' = \mathrm{Lie}(\mathrm{H}')$.

Enfin, U *est aussi le plus grand ouvert de* G *tel que* ψ *induise un isomorphisme* $\psi^{-1}(\mathrm{U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}$.

L'équivalence de (i) (ii) (iii) ainsi que la dernière assertion résultent du « Main Theorem » [(3)] appliqué au morphisme birationnel $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$, compte tenu que G est normal. L'équivalence de ces conditions avec (iv) résulte aussitôt de la dernière assertion de 2.1 caractérisant l'ensemble des éléments de X en lesquels ψ est étale.

Théorème 2.6. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse connexe sur un corps algébriquement clos* k, C *un sous-groupe de Cartan, associé à un tore maximal* T, $\mathrm{N} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ (cf. XII 8.4), *soit* $\mathrm{X} = \mathrm{G} \times^{\mathrm{N}} \mathrm{C}$, *où* N *opère sur le facteur gauche* G *par translations à droite, et sur le facteur droit* C *par automorphisme intérieurs,* $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *le morphisme canonique.*

a) *Le morphisme* ψ *est birationnel.*

b) *Soit* U *le plus grand ouvert de* G *tel que* ψ *induise un isomorphisme* $\psi^{-1}(\mathrm{U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}$ (cf. 2.5). *Soit*

$$\rho = \rho_\nu(\mathrm{G}) = \dim \mathrm{C}$$

le rang nilpotent de G. *Alors pour tout* $g \in \mathrm{G}(k)$, *la multiplicité de la valeur propre* 1 *dans* $\mathrm{ad}(g)$ *opérant sur* $\mathfrak{g}$ *est au moins égale à* ρ, *et pour qu'elle soit égale à* ρ, *il faut et il suffit que l'on ait* $g \in \mathrm{U}(k)$.

Démonstration. Comme la condition 2.1 (i) est vérifiée, ou peut appliquer 2.4 (iii) ⇒ (i), qui établit (a). Dans BIBLE 7 (dans le cas où G est affine) les points de $\mathrm{U}(k)$ sont appelés les *points réguliers* de $\mathrm{G}(k)$, et nous suivrons cette terminologie en appelant U l'ouvert des points réguliers de G. (N. B. La démonstration donnée
265 dans BIBLE du fait que l'ensemble en question est lui-même ouvert est incorrecte, mais nous l'avons obtenu dans le présent expoée sous des conditions plus générales).

[(3)] N.D.E. : de Zariski !

Prouvons b), et pour ceci, introduisons pour tout $g \in \mathrm{G}(k)$ le polynôme caractéristique

$$\mathrm{P}(\mathrm{ad}(g), t) = t^n + c_1(g)t^{n-1} + \cdots + c_n(g);$$

on voit aussitôt (remplaçant k par une algèbre quelconque sur k) que les $c_i(g)$ proviennent de sections bien déterminées

$$c_i \in \Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_\mathrm{G}).$$

Lorsque $g \in \mathrm{G}(k)$ est un élément contenu dans un sous-groupe de Cartan, (par exemple un élément régulier), que nous pouvons supposer être C, alors par 2.5 (iv) on voit que l'on a $(\mathfrak{g}/\mathfrak{c})^{\mathrm{ad}(g)} = 0$ si et seulement si g est régulier (où $\mathfrak{c}$ désigne l'algèbre de Lie de C) ; d'autre part comme C est nilpotent on voit tout de suite que $\mathrm{ad}_\mathfrak{c}(g)$ n'a que la seule valeur propre 1, ce qui prouve que la multiplicité de la valeur propre 1 dans $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(g)$ est $\geqslant \rho$, et égale exactement à $\dim \mathrm{C} = \rho$ si et seulement si g est régulier. En particulier, le polynôme ci-dessus est divisible par $(t-1)^\rho$. Comme la relation de divisibilité par $(t-1)^\rho$ s'exprime par des relations linéaires (à coefficients entiers) entre les coefficients du polynôme, et que ces relations sont satisfaites pour $g \in \mathrm{U}(k)$, U étant un ouvert dense, il s'ensuit (G étant réduit) qu'elles le sont pour tout g, en fait on a une relation

$$(\dagger) \qquad t^n + c_1 t^{n-1} + c_0 = (t-1)^\rho (t^{n-\rho} + b_1 t^{n-\rho-1} + \cdots + b_{n-\rho})$$

dans l'anneau des polynômes sur $\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_\mathrm{G})$; en particulier pour *tout* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{K})$, $\mathrm{ad}(g)$ a la valeur propre 1 avec la multiplicité ρ au moins. De plus, on vu qu'on a égalité si g est régulier, prouvons la réciproque. Pour ceci, supposons d'abord G affine, et écrivons g comme produit

$$g = g_s g_u$$

de sa partie semi-simple par sa partie unipotente (BIBLE 4 N°4), alors **266**

$$\mathrm{ad}(g) = \mathrm{ad}(g_s)\,\mathrm{ad}(g_u)$$

est la décomposition analogue de $\mathrm{ad}(g)$ (*loc. cit.* cor au th. 3), et par suite $\mathrm{ad}(g)$ et $\mathrm{ad}(g_s)$ ont mêmes valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités), en particulier la valeur propre 1 intervient avec la même multiplicité dans $\mathrm{ad}(g)$ et dans $\mathrm{ad}(g_s)$.

D'autre part, en vertu de BIBLE 7 th. 2 cor. 1, g est régulier si et seulement si g_s l'est. Donc pour prouver b), on peut supposer $g = g_s$ i.e. g semi-simple, donc contenu dans un tore maximal en vertu de BIBLE 6 th. 5 c), et a fortiori dans un sous-groupe de Cartan, cas qui a déjà été traité. Cela prouve b) dans le cas G affine. Dans le cas général, soit $\mathrm{Z} = \mathrm{Centr}(\mathrm{G})_{\text{réd}}$, alors en vertu de XII 6.6 e) les sous-groupes de Cartan de G sont les images inverses de ceux de $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$, donc g est régulier dans G si et seulement si son image g' dans G' est régulier dans G'. D'autre part, comme Z est lisse, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ de G' n'est autre que $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, où $\mathfrak{z} = \mathrm{Lie}(\mathrm{Z})$, et $\mathrm{ad}(g')$ n'est autre que $\mathrm{ad}(g)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{z}}$, donc la multiplicité de la valeur propre 1 dans $\mathrm{ad}(g)$ est égale à $d = \dim \mathrm{Z}$ plus la multiplicité de la valeur propre 1 dans $\mathrm{ad}(g')$, d'où résulte aussitôt que le premier est égal au rang nilpotent de G si et seulement si le deuxième est égal au rang nilpotent de G'. Ainsi on est ramené au cas de G', or G' étant affine en vertu de XII 6.1, ce cas a déjà été traité. Cela achève la démonstration de 2.6.

Corollaire 2.7. — *Avec les notations de la démonstration qui précède*[4], *soit*

$$b = 1 + b_1 + \cdots + b_{n-\rho} \in \Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}).$$

Alors l'ouvert des points réguliers de G *est donné par*

$$\mathrm{U} = \mathrm{G}_b$$

(*ensemble des points de* G *en lesquels* b *est inversible*), *en particulier* U *est un ouvert affine si* G *est affine.*

267 ***Corollaire 2.8***. — *Soit* H *un sous-groupe algébrique lisse et connexe de* G *contenant un sous-groupe de Cartan de* G.

a) *Soit* C *un sous-groupe algébrique de* H. *Pour que* C *soit un sous-groupe de Cartan de* H, *il faut et suffit que ce soit un sous-groupe de Cartan de* G.

b) *Soit* $g \in \mathrm{G}(k)$, *et soit* d *l'entier introduit dans* 2.3. *Pour que* g *soit un point régulier de* G, *il faut et il suffit qu'il existe exactement* d *conjugués* H_i *de* H *contenant* g, *et que pour chaque* i, g *soit un élément régulier de* H_i, *ou encore qu'il y ait au plus* d *conjugués de* H *contenant* g, *et que* g *soit régulier dans l'un d'eux. S'il en est ainsi, et si* C *est l'unique sous-groupe de Cartan de* G *contenant* g, *alors les conjugués de* H *contenant* g *sont les conjugués de* H *contenant* C.

c) *Soit* $g \in \mathrm{H}(k)$, *pour que* g *soit régulier dans* G, *il faut et suffit qu'il soit régulier dans* H, *et qu'on ait*

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{ad}(g)} = 0.$$

Prouvons a). Sous l'une et l'autre hypothèse sur C, l'unique tore maximal T de C est un tore maximal de H et de G, (H ayant même rang réductif que G), donc comme $\mathrm{Centr}_{\mathrm{H}}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ sont des groupes lisses connexes de même dimension, ils sont égaux, donc il revient au même de dire que C est égal à l'un ou à l'autre de ces deux groupes, ce qui prouve a).

Prouvons b). Supposons d'abord g régulier pour G, soit C l'unique sous-groupe de Cartan de G contenant g, alors en vertu de 2.3. b) il existe exactement d conjugués H_i de H contenant C. Comme $(\mathfrak{g}/\mathfrak{c})^{\mathrm{ad}(g)} = 0$ i.e. $\mathrm{ad}(g)$ n'a pas de valeur propre $+1$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, on a a fortiori $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i)^{\mathrm{ad}(g)} = 0$, donc en vertu de 2.3 c) il y a exactement d conjugués de H contenant g, savoir les H_i. Pour un tel H_i, un sous-groupe de Cartan
268 de H_i contenant g est un sous-groupe de Cartan de G contenant g en vertu de a), donc égal à C, ce qui prouve que g est régulier dans H_i. Inversement, supposons qu'il existe au plus d conjugués H_i de H contenant g, et que g soit régulier dans l'un d'eux, qu'on peut supposer égal à H. Prouvons que g est régulier dans G. Comme g est régulier dans H il est contenu dans un unique sous-groupe de Cartan C de H, par a) c'est un sous-groupe de Cartan de G. Soit C' un sous-groupe de Cartan de G contenant g, prouvons $\mathrm{C}' = \mathrm{C}$ (ce qui prouvera que g est régulier dans C). En effet en vertu de 2.3 b) il existe exactement d conjugués de H contenant C', et comme ces derniers contiennent g, ce sont nécessairement les H_i, donc les H_i et en particulier H

[4] N.D.E. : cf. (†) plus haut.

contiennent C′. Donc C, C′ sont deux sous-groupes de Cartan de H (en vertu de a)) qui contiennent le même élément régulier g de H, donc sont égaux. C.Q.F.D.

Prouvons c) : désignant par $\nu(u)$ la nullité[5] de $id - u$, pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on aura

$$\nu(\mathrm{ad}(g)_{\mathfrak{g}}) = \nu(\mathrm{ad}(g)_{\mathfrak{h}}) + \nu(\mathrm{ad}(g)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}),$$

or les deux termes du deuxième membre sont respectivement $\geqslant$ rang nilpotent de H (égal au rang nilpotent ρ de G en vertu de a)) et $\geqslant 0$, donc on a $\nu(\mathrm{ad}(g)_{\mathfrak{g}}) = \rho$ si et seulement si $\nu(\mathrm{ad}(g)_{\mathfrak{h}}) = \rho$ et $\nu(\mathrm{ad}(g)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}) = 0$, i.e. g est régulier dans G si et seulement si g est régulier dans H et $\mathrm{ad}(g)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est sans invariants non nuls. C.Q.F.D.

Remarques 2.9. — Dans l'énoncé de 2.1, on ne peut affaiblir la condition (iii) en supposant seulement que H contient un tore maximal et est d'indice fini dans son normalisateur, même si on exige que ce normalisateur soit de plus lisse i.e. qu'on ait $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0$, et même lorsque G est affine résoluble. Un exemple est fourni par le groupe G des matrices de la forme

$$g = \begin{pmatrix} t & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et le sous-groupe H des matrices de la forme précédente, avec $b = c = 0$ (N. B. le **269**
sous-groupe de Cartan de G est ici formé des matrices g avec $a = c = 0$).

Remarques 2.10. — Soient G un groupe algébrique lisse sur k, H un sous-groupe algébrique lisse, mais ne supposons plus que H et G soient connexes. Supposons que H^0 contienne un sous-groupe de Cartan de G^0. Alors $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{H}} \subset (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{H}^0} = 0$, donc $\mathrm{H}^0 = \mathrm{N}^0$ (N est le normalisateur de H), en particulier N est lisse. Cependant, on construit facilement des exemples, avec G connexe, où H a une composante connexe H_i telle que pour aucun $h \in \mathrm{H}_i(k)$, on n'ait $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{ad}(h)} = 0$ i.e. le morphisme $(g, h) \to \mathrm{ad}(g) \cdot h$ de $\mathrm{G} \times \mathrm{H}_i$ dans G n'est étale (ni même quasi-fini) en aucun point (prendre par exemple pour H le normalisateur du tore maximal dans $\mathrm{SL}(2)_k$. De même, même si l'image H′ de H dans le groupe fini $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{G}^0$ est égale à G′, il n'est pas nécessairement vrai que la réunion des conjugués de H dans G soit dense (prendre pour G le produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $\mathrm{G}^0 = \mathrm{SL}(2)_k$ sur lequel il opère par « symétrie », et pour H le produit semi-direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot \mathrm{T}$, où T est un tore maximal de G^0). Par contre, si on ne suppose pas a priori que H^0 contienne un sous-groupe de Cartan de G^0, mais que la réunion des conjugués de H dans G est dense, alors H^0 contient nécessairement un sous-groupe de Cartan de G^0 : pour le vérifier, on peut évidemment supposer G connexe, et il suffit de reprendre la démonstration de 2.1 (vi) $\Rightarrow$ (i), qui est valable sans supposer H connexe.

[5] N.D.E. : c.-à-d., la dimension de son nil-espace.

3. Cas d'un préschéma de base quelconque

Supposons d'abord que l'on soit sur un corps de base k, pas nécessairement algébriquement clos. Comme les conditions 2.1 (i bis), (iv bis), (v), (vi) sont invariantes par
270 extension du corps de base, on voit par passage à la clôture algébrique $\overline{k}$ de k qu'elles sont équivalentes entre elles, et équivalent au fait que $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ contient un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$. Lorsque cette condition est satisfaite, alors (avec les notations de 2.3) il sera encore vrai que $k(\mathrm{X})$ est une extension finie séparable de $k(\mathrm{G})$, de degré d indépendant de toute extension de la base. Si U est le plus grand ouvert de G tel que ψ induise un morphisme $\psi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ qui soit fini et étale, alors la formation de U commute avec l'extension du corps de base. Si ψ est birationnel, alors U est aussi le plus grand ouvert de G tel que ψ induise un isomorphisme $\psi^{-1}(\mathrm{U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}$, et si alors $g \in \mathrm{U}(k)$, il existe un sous-groupe H′ de G et un seul, conjugué de H sur la clôture algébrique $\overline{k}$ de k, tel que $\mathrm{H}' \ni g$.

Un point $g \in \mathrm{G}(k)$ est dit *régulier*, s'il est régulier en tant qu'élément de $\mathrm{G}(\overline{k}) = \mathrm{G}_{\overline{k}}(\overline{k})$. Plus généralement, la construction de 2.7 nous donne on ouvert de G, dont la formation commute avec toute extension du corps de base, appelé *ouvert des points réguliers* de G, qui est aussi caractérisé par le fait que pour toute extension algébriquement close K de k et tout point $g \in \mathrm{G}(\mathrm{K}), g$ est un point régulier de G_{K} si et seulement si $g \in \mathrm{U}(\mathrm{K})$. Si $g \in \mathrm{U}(k)$[6], voit que g est contenu dans un sous-groupe de Cartan et un seul de G, comme nous allons montrer sous des conditions plus générales ci-dessous.

Soit G un préschéma en groupes lisse, séparé, de type fini, à fibres connexes sur le préschéma S, considérons le foncteur $\mathscr{C} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ défini par

$$\mathscr{C}(\mathrm{S}') = \text{ensemble des sous-groupe de Cartan (XII 3.1) de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}.$$

Supposons que ce foncteur soit représentable par un préschéma lisse sur S ; nous donnons dans XV une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, mais nous savons déjà que cette hypothèse est satisfaite si G est affine sur S de rang réductif localement constant (XII 3.3), ou plus généralement si G admet localement pour la topologie fpqc un tore maximal (XII 7.1 a)), par exemple si S est le spectre d'un corps.
271 Soit X le sous-groupe de Cartan du $\mathscr{C}$-préschéma en groupes $\mathrm{G}_{\mathscr{C}}$, « sous-groupe de Cartan universel » de G. En tant que préschéma sur S, X représente donc le foncteur

$\mathrm{X}(\mathrm{S}')$ = ensemble des couples (C, g), C un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ et g une section de C sur S′.

Considérons le morphisme de projection canonique $(\mathrm{C}, g) \mapsto g$

$$\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}.$$

On a alors le

Théorème 3.1. — *Sous les conditions précédentes sur* G*, et avec les notations précédentes, soit* U *l'ensemble des* $g \in \mathrm{G}$ *tels que* g *soit un élément régulier de sa fibre* G_s.

(6) N.D.E. : correction de $\mathrm{G}(k)$ en $\mathrm{U}(k)$.

Alors U *est ouvert, et c'est aussi le plus grand ouvert* U *de* G *tel que* ψ *induise un isomorphisme*

$$\psi^{-1}(\mathrm{U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}.$$

Prouvons d'abord que U est ouvert. De l'hypothèse de représentabilité de $\mathscr{C}$ comme préschéma lisse sur S, comme son morphisme structural est évidemment surjectif, on conclut aussitôt que G admet localement pour la topologie étale un sous-groupe de Cartan, et que le rang nilpotent des fibres de G est localement constant. Il en est de même de la dimension des fibres de G, et quitte à se localiser sur S, on peut supposer que l'un et l'autre sont constants, soient ρ et n. Considérons alors le polynôme de Killing

$$\mathrm{P_G}(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n \in \mathrm{A}[t], \qquad \text{où } \mathrm{A} = \Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_\mathrm{G}).$$

La restriction de ce polynôme aux fibres G_s de G, et en particulier aux fibres en les points maximaux de S, est divisible par $(t-1)^\rho$, ce qui s'exprime par le fait que certaines combinaisons linéaires à coefficients entiers des c_i sont nuls sur les fibres **272**
G_s. Lorsque S est réduit (ce qu'on peut supposer pour établir que U est ouvert), il s'ensuit qu'elles sont elles-mêmes nulles, donc que le polynôme de Killing lui-même est divisible par $(t-1)^\rho$, soit

$$\mathrm{P_G}(t) = (t-1)^\rho (t^{n-\rho} + b_1 t^{n-r-1} + \cdots + b_{n-\rho}).$$

Soit b la somme des coefficients $b_0 = 1, b_1, \ldots, b_{n-\rho}$ du deuxième facteur, alors en vertu de 2.7 appliqué aux fibres de G, on voit que

$$\mathrm{U} = \mathrm{G}_b,$$

ce qui prouve bien que U est ouvert.

Pour prouver que $\psi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ est un isomorphisme, on est ramené par SGA1 I 5.7 à le vérifier fibre par fibre, ce qui nous ramène au cas d'un corps de base, qu'on peut supposer algébriquement clos. Alors il existe un sous-groupe de Cartan C de G, et si N est son normalisateur, $\mathscr{C}$ s'identifie par le théorème de conjugaison XII 7.1 a) et b) à G/N, et le morphisme $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ envisagé ici n'est autre que celui défini dans le N°2. On conclut alors par 2.6 b). Le même raisonnement montre également que U est le *plus grand* ouvert de G tel que ψ induise un isomorphisme $\psi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$.

Corollaire 3.2. — *Sous les conditions de* 3.1*, soit* g *une section régulière de* G*, i.e. telle que pour tout* $s \in \mathrm{S}, g(s)$ *soit un point régulier de* G_s*. Alors il existe un et un seul sous-groupe de Cartan* C *de* G *tel que* g *soit une section de* C.

En effet, l'hypothèse sur g signifie que g est une section de U, et la conclusion qu'il existe une unique section de X qui la relève, ce qui n'est qu'une autre façon d'exprimer que $\psi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ est un isomorphisme.

Notons maintenant que l'ouvert $\psi^{-1}(\mathrm{U})$ du sous-groupe de Cartan X de $\mathrm{G}_\mathscr{C}$ n'est **273**
autre que l'ouvert de X formé des points de X qui sont réguliers dans $\mathrm{G}_\mathscr{C}$ (par quoi on entend : réguliers dans leur fibre). On obtient ainsi une « fibration » naturelle de l'ouvert dense U des points réguliers de G au-dessus du préschéma $\mathscr{C}$, les fibres étant des ouverts denses de sous-groupes de Cartan des fibres de $\mathrm{G}_\mathscr{C}$ (savoir les ouverts

des points réguliers dans G). On trouve par exemple le résultat suivant (qui sera considérablement précisé dans l'exposé suivant) :

Corollaire 3.3. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse connexe sur le corps* k, $\mathscr{T}$ *le schéma des tores maximaux de* G ($\simeq$ *le schéma des sous-groupes de Cartan de* G). *Alors le corps des fonctions* $k(\mathrm{G})$ *de* G *est isomorphe au corps des fonctions d'un groupe algébrique lisse connexe affine nilpotent* C *sur le corps des fonctions* $k(\mathscr{T})$ *de* $\mathscr{T}$, *savoir* C = « *le sous-groupe de Cartan générique de* G ». *Si* G *est affine de rang unipotent nul, i.e. si les sous-groupes de Cartan de* $\mathrm{G}_{\overline{\mathrm{K}}}$ *sont des tores, alors* $k(\mathrm{G})$ *est une extension unirationnelle de* $k(\mathscr{T})$.

Bien entendu, par sous-groupe de Cartan générique de G, on entend (par abus de langage) le sous-groupe de Cartan de $\mathrm{G}_{k(\mathscr{T})}$ fibre générique de X au-dessus de $\mathscr{T}$. Il n'y a plus qu'à prouver la dernière assertion de 3.3, qui est contenue dans le résultat bien connu suivant (dû à Chevalley) :

Lemme 3.4. — *Soient* k *un corps,* T *un tore sur* k, $k(\mathrm{T})$ *le corps des fonctions rationnelles sur* T, *alors* $k(\mathrm{T})$ *est une extension unirationnelle de* k, *i.e. est contenue dans une extension transcendante pure de* k.

Soit en effet k' une extension finie séparable de k qui splitte[(7)] T (X 1.4), alors $\mathrm{T} \otimes_k k'$ est une variété rationnelle i.e. admet un ouvert dense isomorphe à un ouvert dense de l'espace affine $\mathbb{A}^n_{k'}$, donc $\mathrm{T}' = \prod_{\mathrm{Spec}(k')/\,\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{T}_{k'}/\,\mathrm{Spec}(k')$ est une variété rationnelle (car admet un ouvert dense isomorphe à un ouvert dense de
274 $\prod_{\mathrm{Spec}(k')/\,\mathrm{Spec}(k)} \mathbb{A}^n_{k'}$, qui est isomorphe à l'espace affine de dimension mn sur k, où $m = [k' : k]$). Considérons l'homomorphisme norme de T′ dans T (défini dès que T est un schéma en groupes commutatif sur k) ; le composé $\mathrm{T} \to \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ est la puissance m-ème dans T, donc dominant, donc $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ est dominant, ce qui prouve que T est unirationnel.

Revenons aux conditions de 3.1, mais en supposant même que G admette, localement pour la topologie fpqc, un tore maximal (XII 7.1). Soit Y le tore maximal du sous-groupe de Cartan X de G, de sorte que le morphisme $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ induit un morphisme $\mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ dont l'image est formée ensemblistement des éléments semi-simples des fibres de G (XII 8). Enfin, il résulte de 3.1 que la restriction de ψ à l'ouvert $\mathrm{Y}^{\mathrm{rég}}$ des points réguliers de Y induit une immersion fermée

$$\mathrm{Y}^{\mathrm{rég}} \to \mathrm{U} = \mathrm{G}^{\mathrm{rég}}.$$

Explicitant la signification de $\mathrm{Z} = \mathrm{Y}^{\mathrm{reg}}$ en tant que foncteur sur S, on trouve :

Corollaire 3.5. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes lisse, séparé, de type fini et à fibres connexes sur le préschéma* S, *admettant localement pour la topologie* fpqc *un tore maximal. Soit* $\mathrm{Z} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *le foncteur défini par*

$\mathrm{Z}(\mathrm{S}')$ = *ensemble des sections régulières de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *sur* S′ *qui sont contenues dans un tore maximal de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$

(7) N.D.E. : déploie (?), ou : « sur laquelle T est déployé ».

Alors Z *est représentable par un sous-préschéma fermé, lisse sur* S*, de l'ouvert* $\mathrm{U} = \mathrm{G}^{\text{rég}}$ *de* G *introduit dans* 3.1.

Pour finir, notons le résultat suivant, qui précise le théorème de densité 2.1 (i) ⇒ (vi) :

Corollaire 3.6. — *Sous les conditions de* 3.5*, soit* C *un sous-groupe de Cartan de* G*, et considérons le morphisme* 275

$$\varphi : \mathrm{Z} \times \mathrm{C} \to \mathrm{G}$$

défini par $\varphi(g,h) = \mathrm{ad}(g)h = ghg^{-1}$. *Alors* φ *est dominant.*

Il suffit évidemment de le prouver fibre par fibre, ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Soit T le tore maximal de C, t_0 un élément de $\mathrm{T}(k)$ régulier dans G, c_0 un élément de $\mathrm{C}(k)$ régulier dans G, considérons $\varphi^{-1}(\varphi(t_0,c_0))$, dont les points rationnels sur k sont les couples (t,c), avec $t \in \mathrm{Z}(k)$, $c \in \mathrm{C}(k)$, tels que

$$\mathrm{ad}(t)c = \mathrm{ad}(t_0)c_0 \qquad i.e. \qquad c = \mathrm{ad}(t^{-1}t_0)c_0,$$

qui sont donc en correspondance biunivoque avec les $t \in \mathrm{Z}(k)$ tels que $\mathrm{ad}(t^{-1}t_0)c_0 \in \mathrm{C}$, ou ce qui revient au même, c_0, étant régulier, tels que $t^{-1}t_0 \in \mathrm{N}$ (normalisateur de C), i.e. $t \in \mathrm{N}$. On obtient une partie ouverte et fermée de cette fibre en se bornant aux $t \in \mathrm{Z}(k)$ tels que $t \in \mathrm{C}(k)$. Donc on a trouvé une composante connexe de $\varphi^{-1}\varphi(t_0,c_0)$ isomorphe à T (N. B. que le raisonnement ensembliste précédent donne bien un isomorphisme de schémas se voit en remplaçant les points à valeurs dans k par des points à valeurs dans un k-préschéma quelconque), donc la fibre générique de φ est de dimension $\leqslant \dim \mathrm{T}$, donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension $\geqslant \dim \mathrm{Z}\times\mathrm{C} - \dim\mathrm{T} = \dim\mathrm{Z} + \dim\mathrm{C} - \dim\mathrm{T}$, or on a $\dim\mathrm{Z} = \dim\mathrm{Y} = \dim\mathscr{C} + \dim\mathrm{T} = \dim\mathrm{G} - \dim\mathrm{C} + \dim\mathrm{T}$, d'où enfin $\dim\mathrm{Im}(\varphi) \geqslant \dim\mathrm{G}$ donc φ est dominante. C.Q.F.D.

Remarques 3.7. — On notera que le raisonnement montre en plus que la composante connexe en (t_0,c_0) de la fibre de $\varphi(t_0,c_0)$ est isomorphe à T, en particulier est lisse sur k, et a même dimension que la fibre générique, ce qui implique que φ est en fait *lisse* 276
en (t_0,c_0) (ce qu'on devrait pouvoir vérifier également par le calcul de l'application tangente). Il s'ensuit que sous les conditions de 3.6 le morphisme induit $\mathrm{Z}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{C}^{\text{rég}} \to \mathrm{G}^{\text{rég}}$ (où on a posé $\mathrm{C}^{\text{rég}} = \mathrm{C}\cap\mathrm{G}^{\text{rég}}$) est un morphisme *lisse.* On voit de même que le morphisme analogue $\mathrm{Z}\times\mathrm{T}^{\text{rég}} \to \mathrm{Z}$ (où T est un tore maximal de G) est lisse ; plus généralement, pour tout sous-groupe algébrique lisse connexe invariant H de C contenant un élément régulier c_0 de $\mathrm{G}(k)$, l'image de $\mathrm{Z}\times\mathrm{H}\to\mathrm{G}$ est dense dans celle de $\mathrm{G}\times\mathrm{H}\to\mathrm{G}$.

4. Algèbres de Lie sur un corps : rang , éléments réguliers , sous-algèbres de Cartan

Dans la suite de cet exposé, nous reprenons la théorie développée par Chevalley dans son livre « Théorie des Groupes de Lie III » (Act. Sc. Ind. 1226, Paris 1955), la technique des schémas nous permettant d'éliminer l'hypothèse de caractéristique nulle. Nous commençons par rappeler dans le présent n° certaines notions et résultats bien connus.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un anneau k. Pour tout $a \in \mathfrak{g}$, on désigne par $\mathrm{ad}(a)$ l'endomorphisme

$$\mathrm{ad}(a) \cdot x = [a, x]$$

de $\mathfrak{g}$, qui est une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Or pour toute dérivation D de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le nil-espace de D, i.e. la réunion des noyaux des itérés de D, est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, comme on voit sur la formule de Leibniz

$$\mathrm{D}^m([x, y]) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant m} \binom{m}{p} [\mathrm{D}^p x, \mathrm{D}^{m-p} y].$$

Nous poserons

$$\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g}) = \text{ nil-espace de } \mathrm{ad}(a) = \bigcup_{m \geqslant 0} \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad}(a)^m;$$

277 quand aucune confusion ne sera à craindre, nous le noterons simplement $\mathrm{Nil}(a)$, et l'appellerons le nil-espace de a (dans $\mathfrak{g}$).

Proposition 4.1. — *Pour tout $a \in \mathfrak{g}$, son nil-espace* $\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ *est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, égale à son propre normalisateur.*

Il reste à prouver que c'est son propre normalisateur, i.e. que tout élément de $\mathfrak{g}/\mathrm{Nil}$ annulé par la représentation adjointe de Nil dans $\mathfrak{g}/\mathrm{Nil}$ est nul, ce qui est trivial (car tout élément dans ce quotient annulé par $\mathrm{Ad}(a)$ est nul).

Dans la suite de ce N°, nous supposons que k est un corps, et $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur k. Nous désignerons par $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ le schéma sur k défini par $\mathfrak{g}$, dont les points dans la k-algèbre A sont les éléments de $\mathfrak{g} \otimes_k \mathrm{A}$. Si $a \in \mathfrak{g}$, le polynôme caractéristique de $\mathrm{ad}(a)$ est aussi appelé *polynôme caractéristique* ou *polynôme de Killing* de a dans $\mathfrak{g}$, soit

$$\mathrm{P}_{\mathfrak{g}}(a, t) = t^n + c_1(a) t^{n-1} + \cdots + c_n(a),$$

où $n = \mathrm{rang}_k\, \mathfrak{g}$, les $c_i(a) \in k$. Prenant également ce polynôme pour $a \in \mathfrak{g} \otimes_k \mathrm{A}$[(8)], où A est une k-algèbre quelconque, on voit que les $c_i(a)$ proviennent de sections bien déterminées c_i du faisceau structural de $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ i.e. d'éléments de l'algèbre symétrique $\mathrm{A} = \mathrm{Sym}_k(\mathfrak{g}^\vee)$, où $\mathfrak{g}^\vee$ est le dual du k-module $\mathfrak{g}$. (Lorsque k est un corps infini, les c_i sont déterminés par la connaissance des fonctions polynômiales correspondantes $\mathfrak{g} \to k$, mais il n'en est plus ainsi si k est un corps fini). Soit r le plus grand entier tel que le polynôme de Killing

$$\mathrm{P}_{\mathfrak{g}}(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n \in \mathrm{A}[t]$$

soit divisible par t^r, i.e. on a :

$$\mathrm{P}_{\mathfrak{g}}(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \ldots + c_{n-r} t^r, \quad c_{n-r} \neq 0.$$

278 L'entier r est appelé le *rang nilpotent* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il est invariant par extension du corps de base.

(8) N.D.E. : on a corrigé $\mathrm{W} \otimes_k \mathrm{A}$ en $\mathfrak{g} \otimes_k \mathrm{A}$.

Proposition 4.2. — *Soit r le rang nilpotent de $\mathfrak{g}$, et soit $a \in \mathfrak{g}$. Alors on a*

$$\operatorname{rang}_k \operatorname{Nil}(a, \mathfrak{g}) \geqslant r,$$

et on a égalité si et seulement si on a

$$c_{n-r}(a) \neq 0.$$

Dans ce cas, $\operatorname{Nil}(a, \mathfrak{g})$ *est une algèbre de Lie nilpotente,* (et nous verrons dans 5.7 b) la réciproque, lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique G lisse sur k).

La première assertion est triviale, car par définition on a $\operatorname{rang}_k \operatorname{Nil}(a, \mathfrak{g})$ = multiplicité de la racine nulle dans $\mathrm{P}_{\mathfrak{g}}(a, t)$. Prouvons que si $c_{n-r}(a) \neq 0$, alors $\operatorname{Nil}(a)$ est nilpotente, ce qui signifie aussi que pour tout $x \in \operatorname{Nil}(a)$, $\operatorname{ad}_{\operatorname{Nil}(a)}(x)$ est un endomorphisme nilpotent. On peut supposer k algébriquement clos, alors comme $\operatorname{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\operatorname{Nil}(a)}$ est injectif, il existe un ouvert non vide U de $\mathrm{W}(\operatorname{Nil}(a))$ tel que pour tout $x \in \mathrm{U}(k)$, $\operatorname{ad}(x)_{\mathfrak{g}/\operatorname{Nil}(a)}$ soit injectif donc $\operatorname{Nil}(x) \subset \operatorname{Nil}(a)$; on peut supposer de plus U contenu dans l'ouvert des points où c_{n-r} ne s'annule pas (puisque cet ouvert est non vide en vertu de $c_{n-r}(a) \neq 0$) et alors $\operatorname{Nil}(x)$ ayant même dimension que $\operatorname{Nil}(a)$, on aura $\operatorname{Nil}(x) = \operatorname{Nil}(a)$. Par suite, pour tout $x \in \mathrm{U}(k)$, $\operatorname{ad}(x)_{\operatorname{Nil}(a)}$ est nilpotent, et par le principe de prolongement des identités algébriques, cela restera vrai pour tout $x \in \operatorname{Nil}(a)$, donc $\operatorname{Nil}(a)$ est nilpotent.

On dit que l'élément a de $\mathfrak{g}$ est *régulier*, si $c_{n-r}(a) \neq 0$ i.e. si $\operatorname{rang}_k(\operatorname{Nil}(a, \mathfrak{g}) =$
r. Lorsque k est infini, cela signifie donc aussi que $\operatorname{rang}_k \operatorname{Nil}(a, \mathfrak{g})$ est le plus petit **279**
possible (pour a variable dans $\mathfrak{g}$). En tous cas, la notion d'élément régulier de $\mathfrak{g}$ est invariante par extension du corps de base, et l'ensemble des points de $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ qui sont réguliers, (i.e. qui proviennent de points réguliers de $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ à valeur dans une extension convenable de k) est ouvert, car identique à $\mathrm{W}(\mathfrak{g})_{c_{n-r}}$ (ensemble des points où c_{n-r} est inversible).

Corollaire 4.3. — *Soit a un élément régulier de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui contient a. Alors $\mathfrak{h}$ est nilpotente si et seulement si $\mathfrak{h} \subset \operatorname{Nil}(a, \mathfrak{g})$; en particulier,* $\operatorname{Nil}(a, \mathfrak{g})$ *est une sous-algèbre* nilpotente maximale *de* $\mathfrak{g}$.

Comme $\operatorname{Nil}(a)$ est nilpotente, la relation $\mathfrak{h} \subset \operatorname{Nil}(a)$ implique en effet que $\mathfrak{h}$ est nilpotente, et inversement, si $\mathfrak{h}$ est nilpotente, elle est contenue dans le nil-espace de son élément a, i.e. $\mathfrak{h} \subset \operatorname{Nil}(a)$.

Proposition 4.4. — *Supposons k infini. Soit $\mathfrak{d}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Considérons les conditions suivantes :*

(i) $\mathfrak{d}$ *est nilpotente maximale et contient un élément régulier de* $\mathfrak{g}$.

(i bis) $\mathfrak{d}$ *est de la forme* $\operatorname{Nil}(a, \mathfrak{g})$, *où a est un élément régulier de* $\mathfrak{g}$.

(ii) $\mathfrak{d}$ *est nilpotente et de la forme* $\operatorname{Nil}(a, \mathfrak{g})$, *où $a \in \mathfrak{g}$.*

(ii bis) $\mathfrak{d}$ *est nilpotente, et il existe $a \in \mathfrak{d}$ tel que $ad(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ soit injectif.*

(iii) $\mathfrak{d}$ *est nilpotente et identique à son propre normalisateur.*

On a les implications :

$(i) \Leftrightarrow (i\ bis) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (ii\ bis) \Leftrightarrow (iii)$

(et nous verrons dans 5.7 a) que si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique lisse, alors toutes les conditions précédentes sont équivalentes).

280 L'équivalence de (i) et (i bis) est triviale par 4.3, et ces conditions impliquent trivialement (ii). L'équivalence de (ii) et (ii bis) est également triviale, ainsi que (ii bis) $\Rightarrow$ (iii) (cf. 4.1). Reste à prouver l'implication (iii)$\Rightarrow$(ii bis), la seule d'ailleurs qui utilise le fait que k soit infini, et qui résulte aussitôt du

Lemme 4.5. — *Soit $\mathfrak{d}$ une algèbre de Lie nilpotente sur un corps infini k, opérant sur un vectoriel* V *de dimension finie. Supposons que pour tout $x \in \mathfrak{d}$, l'endomorphisme $u(x)$ soit non injectif. Alors il existe un élément v non nul de* V *annulé par $\mathfrak{d}$.*

On peut supposer k algébriquement clos et $\mathfrak{d}$ de dimension finie. On sait alors que V est somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables non nuls V_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, tels que pour tout i, et tout $x \in \mathfrak{d}$, $u(x)|_{\mathrm{V}_i}$ ait une seule valeur propre $\lambda_i(x)$, (cf. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. I, § 4, Exercice 22). Soit $c_i(x)$ le terme constant du polynôme caractéristique de $u(x)|_{\mathrm{V}_i}$, de sorte que $\lambda_i(x) = 0$ si et seulement si $c_i(x) = 0$. Alors c_i est une fonction polynômiale sur $\mathfrak{d}$, et l'hypothèse signifie que $\mathfrak{d}$ est la réunion des ensembles de zéros des c_i. Donc un des c_i est nul, ce qui nous ramène (remplaçant V par V_i) au cas où V est tel que les $u(x)$ $(x \in \mathfrak{d})$ sont nilpotents. Mais alors le théorème d'Engel (Bourbaki *loc. cit.* th.1) implique qu'il existe v non nul dans V annulé par $\mathfrak{d}$. C.Q.F.D.

On voit facilement que (k étant toujours un corps infini) les conditions (i) (i bis) de 4.4 sont invariantes par toute extension du corps de base. Si elles sont remplies, on dira que $\mathfrak{d}$ est une *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{g}$; dans le cas général (k non nécessairement infini) on dira que $\mathfrak{d}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, si elle devient une sous-algèbre de Cartan pour une (et par suite, toute) extension du corps de base $k \to k'$, avec k' infini. Cela implique donc que $\mathfrak{d}$ est *nilpotente et égale à son propre normalisateur.*

281 ***Proposition 4.6***. — a) *Soit a un élément de $\mathfrak{g}$. Si a est régulier, il est contenu dans une sous-algèbre de Cartan et une seule de* $\mathfrak{g}$ (et nous verrons dans 6.1 d) la réciproque lorsque k est algébriquement clos et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique lisse).

b) *Soit $\mathfrak{d}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, a un élément de $\mathfrak{d}$, alors a est régulier dans $\mathfrak{g}$ si et seulement si* $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ *est injectif.*

En effet, pour a) on note que si a est régulier, alors $\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (car c'est vrai sur une extension infinie k' de k), et il résulte alors aussitôt de 4.3 que toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant a est identique à la précédente. Pour b) on note que la nullité(9) de $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}}$ est égale à la somme des nullités de $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{d}}$ et de $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$, et comme la première vaut r, la somme est égale à r si et seulement si $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ est injectif. C.Q.F.D.

(9)N.D.E. : c.-à-d., la dimension du nil-espace.

Corollaire 4.7. — *Soient a un élément régulier de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant a,* A *une algèbre sur k , $\mathfrak{g}_{\mathrm{A}}$ et $\mathfrak{d}_{\mathrm{A}} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{A}}$ les* A*-algèbres de Lie déduites de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}$ par changement de base, a_{A} l'image de a dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{A}}$. Soit u un automorphisme de $\mathfrak{g}_{\mathrm{A}}$. Pour que $u(\mathfrak{d}_{\mathrm{A}}) = \mathfrak{d}_{\mathrm{A}}$, il faut et suffit que l'on ait $u(a_{\mathrm{A}}) \in \mathfrak{d}_{\mathrm{A}}$.*

La condition est trivialement nécessaire, prouvons qu'elle est aussi suffisante. Si elle est remplie, alors $\mathfrak{d}' = u(\mathfrak{d}_{\mathrm{A}})$ est une sous-algèbre de Lie contenant a_{A}, et dont tout élément b est tel que $\mathrm{ad}(b)\mathfrak{d}$ soit nilpotent (car $\mathfrak{d}'$ est isomorphe à $\mathfrak{d}_{\mathrm{A}}$ qui a cette propriété, comme il résulte aussitôt de la définition de « nilpotent » dans Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. I, § 4, déf. 1). Prenant $b = a_{\mathrm{A}}$, on voit que le nil-espace $\mathrm{Nil}(b, \mathfrak{g}_{\mathrm{A}})$ contient $\mathfrak{d}'$, d'autre part il est égal à $\mathfrak{d}_{\mathrm{A}}$ et comme $\mathfrak{d}'$ est localement facteur direct dans le module $\mathfrak{g}_{\mathrm{A}}$ ($\mathfrak{d}$ l'étant) donc dans $\mathfrak{d}_{\mathrm{A}}$, et que c'est un module projectif de même rang r que ce dernier, on conclut qu'il lui est égal. C.Q.F.D.

Proposition 4.8. — *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.* 282

a) *Les conditions suivantes sont équivalentes si k est infini :*

(i) *$\mathfrak{h}$ contient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{g}$.*

(ii) *$\mathfrak{h}$ contient un élément régulier a de $\mathfrak{g}$, et un élément b tel que* $\mathrm{ad}(b)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *soit injectif.*

(iii) *$\mathfrak{h}$ a même rang nilpotent que $\mathfrak{g}$, et contient un élément régulier de $\mathfrak{g}$.*

Ces conditions sont invariantes par extension du corps de base k.

b) *Supposons que ces conditions soient vérifiées sur une extension infinie convenable k' de k. Soit $a \in \mathfrak{h}$, alors a est régulier dans $\mathfrak{g}$ si et seulement si il est régulier dans $\mathfrak{h}$ et* $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *est injectif, i.e. si et seulement si* $\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{h}) = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ *et si c'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$.*

c) *Sous les conditions de* b)*, soit $\mathfrak{d}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{h}$; pour que ce soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$, il suffit que ce soit une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$ (et nous verrons dans 5.8 que la condition est aussi nécessaire si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique lisse G, et $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique lisse H de G).

On voit tout de suite que les conditions (ii) et (iii) de a) sont invariantes par extension du corps de base k (supposé infini), et que dans les énoncés b) et c), on peut supposer k infini, ce que nous ferons. Si $\mathfrak{h}$ contient la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d} = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$, alors a est un élément régulier de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ soit injectif, donc (i)$\Rightarrow$ (ii). Réciproquement, si (ii) est vérifié, alors pour un élément a « assez général » de $\mathfrak{h}$, a satisfait *simultanément* aux deux conditions envisagées dans (ii), donc $\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et est contenue dans $\mathfrak{h}$, donc on a (i). Donc (i) et (ii) sont équivalentes. Supposons-les vérifiées, soit a un élément variable de $\mathfrak{h}$, alors 283

$$\text{(x)} \qquad \mathrm{rang}_k \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g}) = \mathrm{rang}_k \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{h}) + \mathrm{rang}_k \mathrm{Nil}(\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}),$$

d'autre part, les deux termes du deuxième membre sont respectivement $\geqslant r' =$ rang nilpotent de $\mathfrak{h}$, et $\geqslant 0$, les égalités étant d'ailleurs atteintes [10] pour un élément « assez général » de $\mathfrak{h}$. D'ailleurs, on a également $\mathrm{rang}_k \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g}) \geqslant r =$ rang nilpotent de $\mathfrak{g}$,

[10] N.D.E. : on a remplacé « l'égalité » par « les égalités ».

l'égalité étant atteinte pour un élément « assez général » de $\mathfrak{h}$, et étant atteinte si et seulement si a est régulier dans $\mathfrak{g}$. On conclut de ceci que l'on a $r = r'$, et que a est régulier si et seulement si les deux termes du second membre de (x) sont égaux respectivement à r' et à 0, i.e. si et seulement si a est régulier dans $\mathfrak{h}$ et $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est injectif, ce qui prouve b), et c) en résulte trivialement en prenant un élément a dans $\mathfrak{d}$ régulier dans $\mathfrak{g}$, de sorte que $\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g}) = \mathfrak{d}$. De plus, le résultat précédent montre que (i)⇒(iii), enfin (iii)⇒(i), car moyennant (iii), un élément assez général a de $\mathfrak{h}$ est régulier dans $\mathfrak{h}$ et dans $\mathfrak{g}$, donc $\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{h}) \subset \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ sont respectivement des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{g}$, et comme elles ont même rang sur k, elles sont identiques, ce qui prouve (i). Cela achève la démonstration de 4.8.

5. Cas de l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique lisse : théorème de densité

Soit G un groupe algébrique lisse sur le corps k, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Faisons opérer G sur $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ par la représentation adjointe, et considérons le sous-schéma $\mathrm{W}(\mathfrak{h})$. La construction du N°1 nous amène à introduire

$$\mathrm{N} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W}(\mathfrak{h})),$$

qui est un sous-groupe algébrique de G (pas nécessairement lisse),

$$\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(\mathrm{N}),$$

284 et le schéma

$$\mathrm{X} = \mathrm{G} \times^{\mathrm{N}} \mathrm{W}(\mathfrak{h})$$

quotient de $\mathrm{X} = \mathrm{G} \times \mathrm{W}(\mathfrak{h})$ par N opérant à droite par $(g, x) \cdot n = (gn, \mathrm{Ad}(n^{-1})x)$. Nous considérons les morphismes canoniques

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \mathrm{W}(\mathfrak{h}) \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\mathrm{X} \arrow[r, "\psi"] & \mathrm{W}(\mathfrak{g}).
\end{tikzcd}$$

Théorème 5.1. — *Avec les notations précédentes, supposons k infini. Considérons les conditions suivantes :*

(i) $\mathfrak{h}$ *contient une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{d}$ *de* $\mathfrak{g}$.

(ii) *Il existe $a \in \mathfrak{h}$ tel que* $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *soit injectif.*

(iii) $\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{W}(\mathfrak{h}) \to \mathrm{W}(\mathfrak{g})$ *est génériquement lisse.*

(iv) *Le morphisme précédent φ (ou encore $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g})$) est dominant, et $\mathfrak{h}$ a même rang nilpotent que* $\mathfrak{g}$.

(v) $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g})$ *est génériquement lisse et* $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$.

(vi) $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g})$ *est dominant, et* $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$.

(vii) $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g})$ *est dominant.*

(viii) $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g})$ *est dominant, et* N *est lisse.*

(ix) $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g})$ *est dominant, et* $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$*, et* $\mathfrak{h}$ *est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique lisse* H *de* G.

(x) $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g})$ *est génériquement quasi-fini, et* $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$.

(xi) $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g})$ *est génériquement étale, et* $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$.

(xii) *Il existe un sous-groupe algébrique lisse* H *de* G *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$*, et* $\mathfrak{h}$ *contient une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{d}$ *de* $\mathfrak{g}$.

(xiii) *Il existe* $a \in \mathfrak{h}$ *tel que* N *et le transporteur* M_a *de* a *dans* $\mathfrak{h}$ (cf. n°1) *coïncident* **285**
au voisinage de e*, et* $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$.

On a alors le diagramme d'implications suivant :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{xi}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{xii}) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (\mathrm{xiii}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathrm{viii}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{ix}) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (\mathrm{x}) \\
(\mathrm{i}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{ii}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{iii}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{iv}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathrm{v}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathrm{vi}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathrm{vii}).
\end{tikzcd}$$

Lorsque k *est de caractéristique nulle, toutes les conditions envisagées sont équivalentes. Enfin, on a*

$$(\mathrm{xi}) \Leftrightarrow [(\mathrm{i}) \text{ et } (\mathrm{viii})] \Leftrightarrow [(\mathrm{v}) \text{ et } (\mathrm{viii})].$$

Notons d'abord les implications triviales :

$$(\mathrm{v}) \Rightarrow (\mathrm{vi}) \Rightarrow (\mathrm{vii}) \quad , \quad (\mathrm{ix}) \Rightarrow (\mathrm{vi}) \quad , \quad (\mathrm{xi}) \Leftrightarrow [(\mathrm{x}) \text{ et } (\mathrm{v})].$$

Prouvons l'équivalence des conditions (i) à (iv) et le fait qu'elles impliquent (v). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est triviale. D'autre part (iii) signifie, lorsque k est algébriquement clos, qu'il existe un point de $\mathrm{G} \times \mathrm{W}(\mathfrak{h})$ rationnel sur k en lequel l'application tangente à φ est surjective, et on voit aussitôt que l'on peut prendre ce point de la forme (e, a), où $a \in \mathfrak{h}$ (quitte à le transformer par une opération de $\mathrm{G}(k)$). On en conclut que si k est infini (pas nécessairement algébriquement clos) cette condition (évidemment suffisante) de lissité générique est encore nécessaire. Or l'application tangente se calcule aisément : en identifiant l'espace tangent à $\mathrm{W}(\mathfrak{h})$ en a à $\mathfrak{h}$, c'est l'application

$$(\xi, x) \longmapsto [\xi, a] + x$$

de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Dire qu'elle est surjective signifie aussi que $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est surjectif, ou ce qui revient au même, injectif. Cela prouve l'équivalence des conditions (ii) et (iii). D'ailleurs, (ii) implique évidemment $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$, et (iii) implique que ψ est génériquement **286**
lisse, car si φ est lisse en un point u, il s'ensuit (q étant plat) que ψ est lisse en $q(u)$. Donc (ii), (iii) impliquent (v). Prouvons qu'ils impliquent (i). Pour ceci, notons que puisque ψ est dominant, et que l'ensemble des points réguliers de $\mathfrak{g}$ est ouvert dense, il s'ensuit que $\mathfrak{h}$ contient des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$, donc qu'un élément « assez général » b de $\mathfrak{h}$ est régulier dans $\mathfrak{g}$ et satisfait à $\mathrm{ad}(b)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ injectif, donc $\mathrm{Nil}(b, \mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$, donc $\mathfrak{h}$ contient la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d} = \mathrm{Nil}(b, \mathfrak{g})$. Donc (i) (ii) (iii) sont équivalents, enfin (i) $\Leftrightarrow$(iv), car on a déjà remarqué que si $\mathfrak{h}$ contient une sous-algèbre de Cartan, elle a même rang que $\mathfrak{g}$ (4.6), donc (i)$\Rightarrow$(iv), inversement si (iv) est vérifié, alors $\mathfrak{h}$

contient un élément régulier de $\mathfrak{g}$ et comme elle a même rang que $\mathfrak{g}$, elle contient une sous-algèbre de Cartan en vertu de 4.6.

Prouvons l'équivalence des conditions (viii) à (x). Remarquons d'abord les faits suivants :

Lemme 5.2. — a) *Si* N *est lisse, alors*

$$\dim \mathrm{X} \leqslant \dim \mathrm{G},$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$.

b) *Si* $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$*, alors*

$$\dim \mathrm{X} \geqslant \dim \mathrm{G},$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si N *est lisse.*

Ces assertions résultent aussitôt de la formule

$$\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{N} + \dim_k \mathfrak{h},$$

et du fait que $\dim \mathrm{N} = \dim_k \mathfrak{n}$ équivaut à N lisse.

287 Ceci posé, (viii)$\Rightarrow$ (x), car (viii) implique $\dim \mathrm{X} \geqslant \dim \mathrm{G}$, donc en vertu de 5.2 a) l'égalité de ces dimensions et $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$, donc (x), et on voit de même (x) $\Rightarrow$(viii) en appliquant 5.2. b). D'autre part, (viii) implique (ix), car il implique $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$, donc $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe algébrique lisse N de G, et inversement (ix) $\Rightarrow$ (viii), car comme H normalise son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, et il est contenu dans N, et comme H est lisse et a même algèbre de Lie que N, il s'ensuit que N est lisse.

Prouvons enfin l'équivalence des conditions (xi) (xii) (xiii) et le fait qu'elles entraînent (iii) (ce qui achèvera d'établir notre diagramme d'implications). On a (xi) $\Leftrightarrow$ (xiii), car si $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$, alors en vertu de 5.2 b) on a $\dim \mathrm{X} \geqslant \dim \mathrm{G}$, donc (xi) équivaut alors (compte tenu que $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ est normal) au fait que ψ est génériquement non ramifié, ce qui équivaut aussi à (xiii) grâce à (1.1 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)), en procédant comme plus haut pour la démonstration de (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Comme (xi) $\Rightarrow$ (x) $\Rightarrow$ (viii) par ce que nous avons déjà vu, on voit que (xi) implique que N est lisse i.e. $q : \mathrm{G} \times \mathrm{W}(\mathfrak{h}) \to \mathrm{X}$ est lisse, donc le composé $\varphi = \psi \circ q$ est génériquement lisse, i.e. on a (iii). Comme (iii) $\Rightarrow$ (i), il s'ensuit aussi que (xi) $\Rightarrow$ (xii)[11]. Enfin (xii) $\Rightarrow$ (xi), car on a évidemment (xii) $\Rightarrow$ (i), donc comme on a vu (i)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(v), on a (xii) $\Rightarrow$ (v), il s'ensuit qu'on a aussi (xii) $\Rightarrow$ (ix), et comme on a vu (ix) $\Rightarrow$ (x), il s'ensuit que (xii) $\Rightarrow$ ((v) et (x)), donc (xii) $\Rightarrow$ (xi) puisque génériquement étale = génériquement lisse + génériquement quasi-fini.

Enfin, lorsque k est de caractéristique 0, alors (vii) $\Rightarrow$ (viii), car en vertu d'un théorème de Cartier, N est automatiquement lisse ($\mathrm{VI_B}$ 1.6.1.), et [(viii) et (x)] $\Rightarrow$ (xi), puisque en caractéristique nulle, pour un morphisme de préschémas intègres, génériquement étale = dominant et génériquement quasi-fini. Cela montre que dans ce cas, toutes les conditions (i) à (xiii) sont équivalentes.

288 ***Corollaire 5.3***. — *Sous les conditions équivalentes* (viii) *à* (x)*, il existe un unique*

[11] N.D.E. : car H = N convient.

sous-groupe algébrique lisse et connexe H *de* G *dont l'algèbre de Lie soit* $\mathfrak{h}$*, et on a*

$$\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h}) = \mathrm{N}, \qquad \mathrm{H} = \mathrm{N}^0.$$

En effet, $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0$ satisfera aux conditions voulues, d'autre part si H y satisfait, alors (comme H normalise son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$) on a $\mathrm{H} \subset \mathrm{N}$, donc comme il s'agit d'une inclusion de groupes lisses ayant même algèbre de Lie, avec H connexe, on aura $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0$. Pour l'identité $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h})$, on peut supposer k algébriquement clos, alors de ce qu'on vient de voir, il résulte immédiatement que les points des deux groupes à valeurs dans k sont les mêmes, d'autre part les inclusions $\mathrm{H} \subset \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{N}$ montrent que $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ et N ont même algèbre de Lie donc ils sont identiques.

Corollaire 5.4. — *Sous les conditions équivalentes* (i) *à* (iv)*, soit* $a \in \mathfrak{h}$*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes, et sont réalisées si* a *est régulier dans* $\mathfrak{g}$ *:*

(i) φ *est lisse en* (e, a)*.*

(ii) $\mathrm{M}_a = \mathrm{Transp}_{\mathrm{G}}(a, \mathfrak{h})$ *est lisse en* e*, et* $\dim_e(\mathrm{M}_a) = \mathrm{rang}_k \mathfrak{h}$*.*

(iii) $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *est injectif* (*ou encore, bijectif*)*.*

Lorsqu'on est sous les conditions équivalentes (xi) *à* (xiii)*, soit* H *le sous-groupe algébrique de* G *envisagé dans* 5.3*. Alors les conditions précédentes équivalent aussi aux conditions suivantes :*

(iv) ψ *est étale en* $(\overline{e}, a)$*.*

(v) *Désignant par* M_a^0 *la composante connexe de* e *dans le transporteur* M_a *de* a 289
dans $\mathfrak{h}$*, muni de la structure induite par* M_a*, on a*

$$\mathrm{H} = \mathrm{M}_a^0.$$

Évidemment (i)$\Rightarrow$(ii) puisque M_a est isomorphe à la fibre $\varphi^{-1}(a)$, le point e correspondant à (e, a), et on a (ii)$\Rightarrow$(i), car (ii) implique que φ est « équidimensionnel » en (e, a) (i.e. la dimension de la fibre passant par ce point est celle de la fibre générique) ce qui implique ($\mathrm{G} \times \mathrm{W}(\mathfrak{h})$ et $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ étant réguliers) qu'il est plat en (e, a), donc lisse puisque sa fibre l'est en ce point. L'équivalence de (i) et (iii) a été vue dans la démonstration de 5.1 comme résultant du simple calcul de l'application tangente. D'ailleurs, on a vu dans 4.8 b), que « a régulier dans $\mathfrak{g}$ » $\Rightarrow$(iii). Sous les conditions (xi) à (xiii), comme $q : \mathrm{G} \times \mathrm{W}(\mathfrak{h}) \to \mathrm{X}$ est lisse (N étant lisse), il s'ensuit que (i) équivaut à ψ lisse en $(\overline{e}, a)$, et comme ψ est génériquement étale, cela équivaut à (iv). Enfin, comme il a été signalé à la fin de la démonstration de 1.1, (iv) implique que N est le préschéma induit sur M_a par une partie ouverte et fermée de M_a, d'où (v), enfin (v)$\Rightarrow$(ii) trivialement (ou encore (v)$\Rightarrow$ (iv) par 1.1, car ψ étant dominant et $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ normal, « non ramifié » équivaut ici à « étale ») ; cela achève la démonstration de 5.4.

Corollaire 5.5. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse sur un corps* k*,* H *un sous-groupe algébrique lisse tel que son algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ *contienne* (*tout au moins sur une extension convenable de* k) *une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de* G*. Soit* K *un sous-groupe algébrique connexe de* G (*pas nécessairement lisse*)*, d'algèbre de Lie* $\mathfrak{k}$*, supposons que* $\mathfrak{k}$ *contienne un élément régulier* a *de* $\mathfrak{g}$ (*tout au moins sur une extension convenable de* k)*. Alors* H *contient* K *si et seulement si* $\mathfrak{h}$ *contient* $\mathfrak{k}$*.*

En effet, en vertu de 5.4 (iii)⇒(v) on a $\mathrm{H} = \mathrm{M}_a^0$ (N. B. bien entendu, cette relation étant invariante par extension du corps de base, elle est valable sans l'hypothèse que ce dernier soit infini !), d'autre part $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$ implique évidemment $\mathrm{K} \subset \mathrm{M}_a$, donc comme K est connexe, $\mathrm{K} \subset \mathrm{M}_a^0$, d'où $\mathrm{K} \subset \mathrm{H}$. C.Q.F.D.

290 ***Corollaire 5.6***. — *Soient* G, H *comme dans* 5.5 *et soit* K *un sous-groupe algébrique de* G*, on suppose* H *connexe et* K *lisse. Alors* K *contient* H *si et seulement si* $\mathfrak{k}$ *contient* $\mathfrak{h}$.

En effet, si $\mathfrak{k} \supset \mathfrak{h}$, alors K satisfait à l'hypothèse envisagée dans 5.5 pour H, d'autre part H satisfait évidemment à la condition envisagée pour K dans 5.5. La conclusion résulte alors de 5.5.

Corollaire 5.7. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique lisse* G *sur un corps* k*. Alors :*

a) *Soit* $\mathfrak{d}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*. Pour que* $\mathfrak{d}$ *soit une sous-algèbre de Cartan, il faut et suffit que* $\mathfrak{d}$ *soit nilpotente et égale à son propre normalisateur.*

b) *Soit* a *un élément de* $\mathfrak{g}$*, pour que* a *soit régulier, il faut et suffit que* $\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ *soit nilpotent.*

Quitte à faire une extension du corps de base, on peut supposer k infini. Compte tenu de 4.4, on est ramené pour a) à prouver que si $\mathfrak{d}$ est nilpotente et contient un élément a tel que $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ soit injectif, alors $\mathfrak{d}$ est une sous-algèbre de Cartan. Or en vertu de 5.1 (ii) ⇒ (i), $\mathfrak{d}$ contient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}' = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$, et en vertu de 4.3 on conclut du fait que $\mathfrak{d}$ est nilpotente que $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$. Pour prouver b), on note que $\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ grâce à a), donc a est régulier.

Corollaire 5.8. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse sur un corps* k*,* H *un sous-groupe algébrique lisse,* $\mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{h}$ *les algèbres de Lie, supposons que après extension convenable du corps de base,* $\mathfrak{h}$ *contienne une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$*. Soit* $\mathfrak{d}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{h}$*, alors c'est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{h}$ *si et seulement si c'est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$*.*

291 Compte tenu de 4.8 c), il reste à montrer que si $\mathfrak{d}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$, c'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et pour ceci on est ramené à montrer que $\mathfrak{d}$ contient un élément a régulier dans $\mathfrak{g}$, en supposant (ce qui est loisible) k algébriquement clos. Mais comme il y a un ouvert dense dans $\mathfrak{h}$ formé de points réguliers *de* $\mathfrak{g}$, notre assertion résulte de 5.1 (i) ⇒ (vii) appliqué à $(\mathfrak{h}, \mathfrak{d})$.

6. Sous-algèbres de Cartan et sous-groupes de type (C), relatifs à un groupe algébrique lisse

Pour simplifier, nous nous bornons dans le théorème suivant au cas d'un corps de base algébriquement clos, (le cas d'un préschéma de base quelconque étant traité dans le prochain exposé) :

Théorème 6.1. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse sur un corps algébriquement clos* k*,* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie. Alors :*

a) *Les sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *sont conjuguées.*

b) *Soit* $\mathfrak{d}$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$. *Alors son normalisateur* N *dans* G *est lisse, et* $\mathrm{D} = \mathrm{N}^0$ *est le seul sous-groupe lisse et connexe de* G *dont l'algèbre de Lie est* $\mathfrak{d}$. *On a*

$$\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) = \mathrm{N}, \quad \textit{donc} \quad \mathrm{D} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})^0.$$

c) *Avec* $\mathfrak{d}$ *comme dans* b), *posons comme dans le* N°5 : $\mathrm{X} = \mathrm{G} \times^{\mathrm{N}} \mathrm{W}(\mathfrak{d})$, *et considérons le morphisme canonique*

$$\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g}),$$

(*dont la fibre en* $a \in \mathfrak{g}$ *a comme points à valeurs dans* k *l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *qui contiennent* a). *Alors* ψ *est un morphisme birationnel.*

d) *Avec les notations de* c), *soit* U *le plus grand ouvert de* $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ *tel que* ψ *induise un isomorphisme* **292**

$$\psi^{-1}(\mathrm{U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}.$$

Alors pour $a \in \mathfrak{g}$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $a \in \mathrm{U}(k)$.

(ii) *a est contenu dans une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *et une seule.*

(iii) *L'ensemble des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *contenant a est fini non vide.*

(iv) *La fibre* $\psi^{-1}(a)$ *a un point isolé.*

(v) (*Si* $a \in \mathfrak{d}$) *Le morphisme* ψ *est étale* (*ou seulement : quasi fini*) *en le point* $(\overline{e}, a)$.

(vi) *a est un élément régulier de* $\mathfrak{g}$.

(vii) *Avec les notations de* 5.4 (iii), *on a* $\mathrm{N} = \mathrm{M}_a$.

Démonstration. Appliquons 5.1 lorsque $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre Cartan $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{g}$, montrons que les conditions les plus fortes (xi) à (xiii) sont alors vérifiées. Cela est évident, soit sous la forme (xiii) compte tenu de 4.7, (qui implique que pour un élément régulier a de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{d}$, on a $\mathrm{N} = \mathrm{M}_a$), soit sous la forme (xi)=(x)+(i), car la condition (i) est triviale et la condition (x) résulte du fait que un point régulier de $\mathfrak{g}$ est contenu dans une seule sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (4.6 a)), et a fortiori dans un seul conjugué de $\mathfrak{d}$. Alors b) résulte de 5.3 et c) résulte du fait que ψ est génériquement étale et qu'un point assez général (de façon précise, un point régulier) de $\mathfrak{g}$ est contenu dans une seule sous-algèbre Cartan de $\mathfrak{g}$. Sous ces conditions, l'équivalence des conditions (i) à (v) sur a est une conséquence immédiate du Main Theorem de Zariski pour le morphisme séparé birationnel ψ, compte tenu que $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ est normal et X est intègre. **293**
L'équivalence de (v) et (vi) est un cas particulier de 5.4 (iii)$\Leftrightarrow$(iv) (en se ramenant au cas où $a \in \mathfrak{d}$ en transformant a par un élément convenable $g \in \mathrm{G}(k)$), compte tenu de 4.6 b). D'ailleurs par 5.4, (v) et (vi) équivalent aussi à $\mathrm{N} \supset \mathrm{M}_a^0$, et en vertu de 4.7 déjà invoqué, cela implique même N = M. Cela prouve d).

Bien entendu, b), c), et l'équivalence de (i) (iv) (v) (vi) (vii) restent valables sur un corps de base quelconque. Prouvons maintenant a) en utilisant le fait que k est algébriquement clos. En vertu de 5.1 (i) $\Rightarrow$ (vii), $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g})$ est dominant, donc il existe un ouvert dense V de $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ tel que tout $a \in \mathrm{V}(k)$ est l'image d'un élément de

$X(k)$, i.e. est contenu dans un conjugué de $\mathfrak{d}$. Appliquant ce résultat à une deuxième sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}'$ de $\mathfrak{g}$, on voit qu'on peut prendre V tel que tout élément de $V(k)$ soit conjugué d'un élément de $\mathfrak{d}$ et d'un élément $\mathfrak{d}'$. Prenant un élément *régulier* dans $V(k)$, il s'ensuit qu'il y a un conjugué $\mathfrak{d}''$ de $\mathfrak{d}'$ qui contient un élément de $\mathfrak{d}$ régulier dans $\mathfrak{g}$, donc qui est égal à $\mathfrak{d}$ en vertu de 4.6 a). Cela achève la démonstration de 6.1.

Définition 6.2. — Soit G un groupe algébrique lisse sur un corps k. On appelle *sous-groupe de type* (C) *de* G, tout sous-groupe algébrique lisse et connexe dont l'algèbre de Lie est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On appelle *rang infinitésimal* de G le rang nilpotent de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, égal à la dimension de tout sous-groupe de type (C) de G.

De 6.1 b) on conclut aussitôt :

Corollaire 6.3. — *Sous les conditions de* 6.2*, l'application* $D \mapsto \mathfrak{d} = \operatorname{Lie} D$ *établit une correspondance biunivoque entre sous-groupes de type* (C) *de* G*, et sous-algèbres de Cartan* $\mathfrak{d}$ *de* $\mathfrak{g}$*. Si* D *est un sous-groupe de type* (C) *de* G*,* D *est son propre normalisateur connexe :*

$$D = \mathrm{Norm}_G(D)^0.$$

294 Conjuguant 6.1 (a) et 6.3, on trouve :

Corollaire 6.4. — *Si k est algébriquement clos, les sous-groupes de type* (C) *de* G *sont conjugués entre eux.*

Corollaire 6.5. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse sur k algébriquement clos,* H *un sous-groupe algébrique lisse de* G*,* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{h}$ *les algèbres de Lie. Pour que* $\mathfrak{h}$ *contienne une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$*, il faut et suffit que* H *contienne un sous-groupe* D *de type* (C) *de* G.

C'est évidemment suffisant, et c'est aussi nécessaire, car pour que l'on ait $H \supset D$, il faut et *suffit* que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{d}$, en vertu de 5.5.

Remarques 6.6. — a) On notera que les sous-groupes *connexes* H de G décrits dans 6.5 correspondent biunivoquement aux sous-algèbres de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui satisfont à la condition la plus forte (xii) de 5.1 (et en vertu de 5.5, les relations d'inclusion entre de tels sous-groupes se reconnaissent déjà sur leurs algèbres de Lie).

b) Supposons toujours k algébriquement clos, et soit D un sous-groupe de type (C) de G, alors il est facile de montrer que D contient un sous-groupe de Cartan C de G : en effet, soit $V = \mathfrak{g}/\mathfrak{d}$, alors pour un élément « général » a de $\mathfrak{d}$, $\mathrm{ad}(a)$ opérant sur V est injectif (il suffit que a soit régulier dans $\mathfrak{g}$), d'où on conclut facilement que pour $g \in D(k)$ « général », $\mathrm{Ad}(g)$ opérant sur V n'a pas d'invariant non nul, ce qui permet d'appliquer 2.1 (vii)$\Rightarrow$ (i). En fait, nous verrons dans l'exposé suivant un résultat plus précis : tout sous-groupe de Cartan C de G est contenu dans un sous-groupe de type (C) *et un seul* de G.

c) On se gardera de confondre en général sous-groupes de Cartan et sous-groupes de type (C) : les sous-groupes de type (C) de G sont des sous-groupes de Cartan si et seulement si ils sont nilpotents (les sous-groupes de Cartan étant en effet des sous-groupes nilpotent maximaux), or il peut arriver que $\mathfrak{g}$ soit nilpotente sans que G le soit (exemple : $\mathrm{SL}(2)_k$ pour k de caractéristique 2), alors les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont identiques à $\mathfrak{g}$, i.e. G est un sous-groupe de type (C) de lui-même si G est connexe, mais ce n'est pas un sous-groupe de Cartan de G ! Par contre, nous verrons dans XIV que si G est un groupe semi-simple *adjoint*, alors ses sous-groupes de type (C) sont ses sous-groupes de Cartan. De même, en caractéristique 0, sans restriction sur le groupe algébrique lisse G sur k, la même conclusion est valable : cela résulte aussitôt du fait qu'en caractéristique 0, un groupe algébrique connexe est nilpotent si (et seulement si) son algèbre de Lie l'est. Ceci résulte aussitôt du fait qu'en caractéristique zéro, le centre Z du groupe algébrique connexe G a comme algèbre de Lie le centre de $\mathfrak{g}$ (car on obtient a priori l'espace des invariant de $\mathfrak{g}$ sous la représentation adjointe de G, or G étant connexe et k de caractéristique nulle, ce sont aussi les « invariants » au sens infinitésimal de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, i.e. le centre de $\mathfrak{g}$), et que par le théorème de Cartier (cf. $\mathrm{VI_B}$ 1.6.1) Z est lisse. **295**

EXPOSÉ XIV

ÉLEMENTS RÉGULIERS : SUITE, APPLICATION AUX GROUPES ALGÉBRIQUES

par A. Grothendieck
avec un Appendice par J.-P. Serre

1. Construction de sous-groupes de Cartan et de tores maximaux pour un groupe algébrique lisse

296

Théorème 1.1. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse sur un corps k. Alors* G *admet un tore maximal* T*, donc un sous-groupe de Cartan* $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$.

En vertu de XII 3.2, il revient au même de trouver un tore maximal T de G, ou un sous-groupe de Cartan C de G. D'ailleurs, comme les tores maximaux de G sont ceux de G^0, on peut supposer G *connexe*. Nous distinguons deux cas :

1°) Le corps k est fini. Soit $\mathscr{T}$ le schéma des tores maximaux de G (Exp XII 1.10.), qui est un schéma lisse sur k. Notons que G opère sur $\mathscr{T}$ via automorphismes intérieurs, et en vertu du théorème de conjugaison (XII 6.6 a)), deux points de $\mathscr{T}_{\overline{k}}$ rationnels sur $\overline{k}$ sont congrus sous $\mathrm{G}_{\overline{k}}(\overline{k})$. Compte tenu que $\mathscr{T}$ est lisse sur k donc $\mathscr{T}_{\overline{k}}$ lisse sur $\overline{k}$, il s'ensuit que $\mathscr{T}_{\overline{k}}$ est isomorphe à $\mathrm{G}_{\overline{k}}/\overline{\mathrm{N}}$, où $\overline{\mathrm{N}}$ est le stabilisateur d'un élément de $\mathscr{T}_{\overline{k}}(\overline{k})$ i.e. le normalisateur d'un tore maximal $\overline{\mathrm{T}}$ de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$. Par suite, $\mathscr{T}$ est un « espace homogène » sous l'action du groupe G. Un théorème bien connu de Lang (Amer. J. Math. 78, 1956, pp. 555-563) nous dit que tout espace homogène sous un groupe algébrique lisse connexe sur un corps fini k admet un point rationnel. En particulier, $\mathscr{T}$ admet un point rationnel, i.e. G admet un tore maximal T. C.Q.F.D.

2°) Le corps k est infini. Nous utiliserons le 297

Lemme 1.2. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse sur un corps k. Alors* G *admet un sous-groupe de type* (C) (XIII 6.2)*.*

En vertu de XIII 6.3 il revient au même de dire que $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}$. C'est trivial si k est infini, car alors $\mathfrak{g}$ contient un élément régulier a, et on prendra $\mathfrak{d} = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$. Le cas k fini se traite exactement comme dans la démonstration 1°) ci-dessus, mais nécessite la construction préalable du schéma $\mathfrak{d}$ des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ et le fait que ce dernier est lisse sur k, qui seront vus ci-dessous (2.16).

[(0)] version xy du 1/12/08

Pour établir 1.1 dans le cas 2°) où nous nous sommes placés, il nous suffira de toutes façons de connaître 1.2 pour k infini. Signalons aussi pour mémoire :

Lemme 1.3. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse, connexe, affine, dont le centre réductif* (XII 4.1 et 4.4) *est réduit au groupe unité. Alors* G *est nilpotent si* (*et seulement si*) *son algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente.*

Ceci est contenu dans XII 4.9.

Nous pouvons maintenant donner un procédé de construction de sous-groupes de Cartan de G (valable également lorsque k est fini, en admettant 1.2 dans ce cas). Supposons d'abord G affine. Nous procédons par récurrence sur $n = \dim \mathrm{G}$, l'assertion étant triviale si $n = 0$. Donc supposons $n > 0$ et l'assertion démontrée pour les dimensions $n' < n$. Soit Z le centre réductif de G, et soit

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$$

l'homomorphisme canonique. En vertu de XII 4.7 c), on a une correspondance biunivoque $\mathrm{C}' \mapsto \mathrm{C} = u^{-1}(\mathrm{C})$ entre sous-groupes de Cartan de G′ et sous-groupes de Cartan de G. Donc, quitte à remplacer G par G′, on peut supposer que le centre réductif Z de G est réduit à l'élément neutre (car il en est ainsi de celui de G′ par
298 XII 4.7 b)). En vertu de 1.3, G admet un sous-groupe D de type (C). Nous savons que sur la clôture algébrique $\overline{k}$ de k, $\mathrm{D}_{\overline{k}}$ contient un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ (XIII 6.6 b)), donc tout sous-groupe de Cartan de D est un sous-groupe de Cartan de G (XIII, 2.8 a)). Donc on est ramené à trouver un sous-groupe de Cartan de D. Si $\dim \mathrm{D} = \dim \mathrm{G}$, i.e. $\mathrm{D} = \mathrm{G}$, alors l'algèbre de Lie de G est une sous-algèbre de Cartan d'elle-même, donc est nilpotente, donc en vertu de 1.3 G est nilpotent, donc est un sous-groupe de Cartan de lui-même. Si $\dim \mathrm{D} < \dim \mathrm{G}$, alors par l'hypothèse de récurrence il existe un sous-groupe de Cartan de D, qui est donc un sous-groupe de Cartan de G, ce qui achève la démonstration dans le cas où G est affine. Dans le cas général, soit Z le centre de G, alors $\mathrm{G}/\mathrm{Z} = \mathrm{G}'$ est affine (XII 6.1) et pour tout sous-groupe de Cartan C′ de G′, son image inverse C dans G est un sous-groupe de Cartan de G (XII 6.6 e)). On est ramené à trouver un sous-groupe de Cartan du groupe algébrique lisse *affine* G′, cas qui a déjà été traité.

Corollaire 1.4. — *Soit* G *un schéma en groupes lisse de type fini sur un schéma artinien* S. *Alors* G *admet un tore maximal* T, *donc un sous-groupe de Cartan* $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$. *Tout tore* S *dans* G *est contenu dans un tore maximal.*

On peut en effet supposer S local de corps résiduel k, alors en vertu de 1.1, $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Spec}(k)$ admet un tore maximal T_0, en vertu de IX 3.6 bis et X 2.3, T_0 provient d'un tore T de G, qui est évidemment un tore maximal. Le dernier énoncé résulte de là, en appliquant le résultat précédent au centralisateur de S, qui est bien lisse sur k (XI 2.4).

Remarques 1.5. — a) Nous donnerons plus bas (3.20, 3.21 et XV) des variantes de 1.4 dans le cas où S n'est pas supposé artinien.

b) J'ignore si tout groupe algébrique G (pas nécessairement lisse) sur un corps k admet un tore maximal. La question ne se pose qu'en caractéristique $p > 0$, et

utilisant 1.1 pour un groupe quotient lisse de la forme $G' = G/I$, où I est un sous-groupe *radiciel* convenable de G (par exemple, le noyau d'une puissance assez élevée de l'homomorphisme de Frobenius), en prenant l'image inverse dans G d'un tore **299**
maximal de G′, on est ramené au cas où $(G_{\overline{k}})_{\text{réd}}$ est un tore ($\overline{k}$ désignant toujours la clôture algébrique de k). Il est facile de voir que la réponse est affirmative lorsque G est commutatif, (ou plus généralement nilpotent) : alors G admet un *unique* tore maximal, qu'on peut construire par exemple par descente à partir du tore maximal de $G_{\overline{k}}$ (*).

c) Dans le cas où G est affine, et k est parfait ou G résoluble, 1.1 est connu et dû à Rosenlicht ; sa démonstration est très différente de celle donnée ici.

d) Lorsque k est infini, 1.1 est une conséquence du résultat beaucoup plus précis que le schéma $\mathscr{T}$ des tores maximaux de G est une variété rationnelle, prouvé plus bas (6.1). La méthode est essentiellement une conjonction de la démonstration de 1.1 et de l'explicitation de la structure du schéma $\mathfrak{D}$ des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$. Pour parvenir au résultat voulu, nous devons d'abord généraliser au cas d'un préschéma de base quelconque certains résultats de XIII 4 à 6 (c'est le but des deux N$^{\text{os}}$ suivants), et préciser la construction précédente prouvant 1.1, en utilisant le fait que tout sous-groupe de Cartan de G est contenu dans un *en un seul* sous-groupe de type (C) de G (N$^{\text{os}}$ 4, 5).

2. Algèbres de Lie sur un préschéma quelconque : sections régulières et sous-algèbres de Cartan

Lemme 2.1. — *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{d}$ *une algèbre de Lie sur* A*, et pour tout* $s \in \operatorname{Spec}(A)$*, soit* $\mathfrak{d}(s) = \mathfrak{d} \otimes_A k(s)$ *l'algèbre de Lie correspondante sur le corps résiduel* $k(s)$*. On suppose le* A*-module* $\mathfrak{d}$ *de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $s \in \operatorname{Spec}(A)$*,* $\mathfrak{d}(s)$ *est nilpotente.*

(ii) *Pour tout* $x \in \mathfrak{d}$*,* $\operatorname{ad}(x)$ *est nilpotent.*

(iii) *Il existe un entier* $N \geqslant 0$ *tel que pour toute suite* $x_1, \dots, x_N$ *d'éléments de* $\mathfrak{d}$*,* **300**
on ait

$$\operatorname{ad}(x_1)\operatorname{ad}(x_2)\dots\operatorname{ad}(x_N) = 0.$$

Lorsque A est un corps. l'équivalence de (i) et (iii) est la définition de « nilpotent », celle de (ii) et (iii) est une conséquence bien connue du théorème d'Engel (Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I, § 4, N°2). Dans le cas général, on a trivialement (iii) ⇒ (ii), et (ii) ⇒ (i) grâce au résultat précédent et au fait que (ii) est stable par passage au quotient et par localisation. Reste à prouver (i) ⇒ (iii). Lorsque A est artinien local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, soit $n > 0$ un entier tel que $\mathfrak{m}^n = 0$, soit N un entier tel que la condition (iii) soit vérifiée pour $\mathfrak{d}(s) = \mathfrak{d} \otimes_A A/\mathfrak{m}$, prenons $N' = nN$, on voit aussitôt que cet entier satisfait à (iii). Lorsque A est noethérien, alors il existe

(*) M. Raynaud a donné une réponse négative à la question soulevée ici, cf. XVII Exemple 5.9.c).

un nombre fini d'éléments $s_i \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et d'idéaux de définition $\mathfrak{q}_i \subset \mathrm{A}_{s_i}$, tel que l'application naturelle

$$\mathfrak{d} \longrightarrow \prod_i \mathfrak{d} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_i, \quad \text{où} \quad \mathrm{A}_i = \mathrm{A}_{s_i}/\mathfrak{q}_i,$$

soit injective ; alors en vertu de ce qui précède il existe pour tout i un entier N_i satisfaisant à (iii) pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{d} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_i$, et prenant pour N le plus grand des N_i, on satisfait à (iii) pour $\mathfrak{d}$. Enfin, le cas général se ramène au cas noethérien par le procédé habituel expliqué dans EGA IV 8.

Définition 2.2. — Soient S un préschéma, $\mathfrak{d}$ une algèbre de Lie quasi-cohérente sur S, qui soit un module de présentation finie. On dit que $\mathfrak{d}$ est localement nilpotente si pour tout $s \in \mathrm{S}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}(s)$ sur $k(s)$ est nilpotente. On dit que $\mathfrak{d}$ est strictement localement nilpotente si elle est localement libre, et si sur tout ouvert U de S sur le quel elle est de rang constant r, son polynôme de Killing se réduit à $\mathrm{P}_{\mathfrak{d}}(t) = t^r$.

Bien entendu, si $\mathfrak{d}$ est une algèbre de Lie localement libre (en tant que module) sur S, on définit son polynôme de Killing comme un polynôme

$$\mathrm{P}_{\mathfrak{d}} \in \mathrm{A}[t], \quad \text{où} \quad \mathrm{A} = \Gamma(\underline{\mathrm{Sym}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathfrak{d})) \simeq \Gamma(\mathrm{W}(\mathfrak{d}))$$

301 est l'anneau des sections du faisceau structural du fibré vectoriel $\mathrm{W}(\mathfrak{d})$ défini par $\mathfrak{d}$.

Il est évident que les deux notions qu'on vient d'introduire dans 2.2 sont stables par changement de base, et de nature locale pour la topologie fpqc. Notons :

Proposition 2.3. — *Si $\mathfrak{d}$ est strictement localement nilpotente, elle est localement nilpotente. La réciproque est vraie lorsque $\mathfrak{d}$ est localement libre, et* S *réduit.*

La démonstration est immédiate.

Définition 2.4. — Soient S un préschéma, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur S qui soit un module localement libre de type fini. Soit $\mathfrak{d}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, on dit que c'est une sous-algèbre de Cartan si elle satisfait aux conditions suivantes :

(i) $\mathfrak{d}$ est un sous-module localement facteur direct (donc aussi localement libre de type fini).

(ii) Pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathfrak{d}(s)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(s)$.

Définition 2.5. — Soient S, $\mathfrak{g}$ comme dans 2.4. Une section a de $\mathfrak{g}$ est dite quasi-régulière si pour tout $s \in \mathrm{S}$, $a(s) \in \mathfrak{g}(s)$ est un élément régulier de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(s)$ sur $k(s)$. On dit que a est une section régulière si elle est quasi-régulière et contenue dans une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Les notions 2.4 et 2.5 sont encore stables par changement de base, et de nature locale pour la topologie fpqc. Seule la dernière assertion, et pour le cas de la notion « section régulière », demande une démonstration, et provient du fait que la sous-algèbre de Cartan contenant une section régulière donnée est uniquement déterminée. De façon plus précise :

302 ***Proposition 2.6***. — *Soient* S, $\mathfrak{g}$ *comme dans* 2.4 *et soit* a *une section quasi-régulière de* $\mathfrak{g}$. *Alors il existe au plus une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *contenant* a. *Pour qu'il en existe une, i.e. pour que* a *soit une section régulière, il faut et suffit que* a *satisfasse la condition suivante :* $\mathfrak{d} = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ *est un sous-module localement facteur direct de* $\mathfrak{g}$, *et* $\mathrm{ad}(a)$ *induit un automorphisme de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{d}$. *Dans ce cas,* $\mathfrak{d}$ *est l'unique sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *contenant* a.

Supposons en effet que a soit contenue dans la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ est bijectif en chaque fibre, donc (comme $\mathfrak{g}/\mathfrak{d}$ est localement libre de type fini) c'est un automorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{d}$, d'autre part en vertu de 2.1 $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{d}}$ est localement nilpotent, donc $\mathfrak{d} = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$, ce qui prouve l'unicité de $\mathfrak{d}$, et la nécessité du critère annoncé de régularité. Pour la suffisance, notons que l'hypothèse faite sur a implique que la formation de $\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ commute à l'extension de la base et en particulier au passage aux fibres, ce qui montre en particulier que les fibres $\mathfrak{d}(s)$ de $\mathfrak{d} = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ sont des sous-algèbres de Cartan des $\mathfrak{g}(s)$; d'ailleurs $\mathfrak{d}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ en vertu de XIII 4.1, donc c'est une sous-algèbre de Cartan.

Corollaire 2.7. — *Sous les conditions de* 2.4, *soit* $\mathfrak{d}$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$, a *une section de* $\mathfrak{d}$ *qui est régulière dans* $\mathfrak{g}$, u *un automorphisme de* $\mathfrak{g}$. *Pour que* u *invarie* $\mathfrak{d}$, *il faut et il suffit que* $u(a)$ *soit une section de* $\mathfrak{d}$.

En effet, alors par transport de structure $u(a)$ est une section régulière de $\mathfrak{g}$, contenue dans les deux sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{d}$ et $u(\mathfrak{d})$, qui sont donc identiques.

Corollaire 2.8. — *Sous les conditions de* 2.4, *soit* $\mathfrak{d}$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$. *Alors pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $k(s)$ *soit infini, il existe un voisinage ouvert* V *de* s *et une section régulière* a *de* $\mathfrak{g}$ *sur* V, *telle que* $\mathfrak{d} = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g}|_{\mathrm{V}})$ (*i.e. telle que* a *soit une section de* $\mathfrak{d}|_{\mathrm{V}}$).

En effet, le fait que $k(s)$ soit infini assure l'existence d'un élément régulier a_0 de 303
$\mathfrak{g}(s)$ contenu dans $\mathfrak{d}(s)$, on peut le prolonger en une section a de $\mathfrak{d}$ sur un voisinage ouvert U de s, et comme $\mathrm{ad}(a)\mathfrak{g}/\mathfrak{d}$ induit un automorphisme de $\mathfrak{g}(s)/\mathfrak{d}(s)$, il s'ensuit qu'à condition de restreindre V, $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ est un automorphisme, ce qui implique que a est une section quasi-régulière de $\mathfrak{g}|_{\mathrm{V}}$, qui satisfait à la condition voulue.

Soit $\mathfrak{g}$ comme dans 2.4, alors l'examen de son polynôme de Killing implique aussitôt que la fonction

$$s \mapsto \text{ rang nilpotent de } \mathfrak{g}(s)$$

sur S est *semi-continue supérieurement*. Nous nous intéressons surtout au cas où cette fonction est en fait continue i.e. localement constante. Voici quelques variantes de cette propriété :

Proposition 2.9. — *Soient* S, $\mathfrak{g}$ *comme dans* 2.4. *Considérons les conditions suivantes :*

(C_0) *Le rang nilpotent des* $\mathfrak{g}(s)$ ($s \in \mathrm{S}$) *est une fonction localement constante de* s.

(C_1) *Il existe localement pour la topologie* fpqc *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

(C'_1) *Comme* (C_1), *en remplaçant* « topologie fpqc » *par* « topologie étale ».

(C_2) *La condition* (C_0) *est satisfaite, et pour tout* S' *sur* S*, toute section quasi-régulière de* $\mathfrak{g}_{\mathrm{S}'} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *est régulière.*

(C_3) *Tout* $s \in \mathrm{S}$ *a un voisinage ouvert* V *sur lequel le polynôme de Killing de* $\mathfrak{g}$ *est de la forme*

$$t^r(t^{n-r} + c_1 t^{n-r-1} + \cdots + c_{n-r})$$

où pour tout $s \in \mathrm{V}$*,* $c_{n-r}(s) \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}(s)^\vee)$ *est non nul.*

Avec ces notations, on a les implications

$$(\mathrm{C}_3) \Rightarrow (\mathrm{C}_2) \Rightarrow (\mathrm{C}'_1) \Rightarrow (\mathrm{C}_1) \Rightarrow (\mathrm{C}_0),$$

304 *et lorsque* S *est réduit, les cinq conditions envisagées sont équivalentes.*

Notons aussi que les conditions envisagées sont manifestement stables par changement de base, et de nature locale pour la topologie fpqc.

Les implications $(\mathrm{C}'_1) \Rightarrow (\mathrm{C}_1) \Rightarrow (\mathrm{C}_0)$ sont triviales, l'implication $(\mathrm{C}_0) \Rightarrow (\mathrm{C}_3)$ lorsque S est réduit immédiate. Notons d'ailleurs :

Corollaire 2.10. — *Supposons la condition* (C_0) *satisfaite. Soit* U *l'ensemble des éléments de* $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ *qui sont réguliers dans leur fibre. Alors* U *est ouvert ; en particulier, pour toute section* a *de* $\mathfrak{g}$ *sur* S*, l'ensemble* V *des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* $a(s) \in \mathfrak{g}(s)$ *soit régulier, est ouvert.*

En effet, la première assertion résulte de la seconde (appliquées à $\mathfrak{g}_{\mathrm{S}'}$ pour tout changement de base S' sur S). Pour celle-ci, comme on peut supposer ici S réduit, donc (C_3) vérifié, il suffit d'examiner le polynôme de Killing de a dans $\mathfrak{g}$.

L'implication $(\mathrm{C}_2) \Rightarrow (\mathrm{C}'_1)$ résulte maintenant facilement de b) dans l'énoncé plus précis suivant :

Corollaire 2.11. — *Supposons la condition* (C_2) *satisfaite. Alors :*

a) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *et toute sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{d}_0$ *de* $\mathfrak{g}(s)$*, telle que* $\mathfrak{d}_0$ *contienne un élément régulier de* $\mathfrak{g}(s)$ (*condition automatiquement vérifiée si* $k(s)$ *est infini*)*, il existe un voisinage ouvert* V *de* s*, et une sous-algèbre de* $\mathfrak{d}$ *de* $\mathfrak{g}|_{\mathrm{V}}$ *dont la fibre en* s *soit* $\mathfrak{d}_0$*. Si* S_1 *est un sous-préschéma de* S *contenant* s*, et si on a déjà prolongé* $\mathfrak{d}_0$ *en une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{d}_1$ *de* $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$*, alors on peut trouver un voisinage ouvert* V *de* s *dans* S *et une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{d}$ *de* $\mathfrak{g}|_{\mathrm{V}}$ *telle que* $\mathfrak{d} \otimes_{\mathrm{V}} (\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{V})$ *soit égale à* $\mathfrak{d}_1|_{(\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{V})}$*.*

305 b) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $\mathfrak{g}(s)$ *contienne un élément régulier* (*condition automatiquement satisfaite si* $k(s)$ *est infini*)*, il existe un voisinage ouvert* V *de* s *et une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{d}$ *de* $\mathfrak{g}|_{\mathrm{V}}$*.*

L'énoncé b) résulte de a) en prenant $\mathfrak{d}_0 = \mathrm{Nil}(a_0, \mathfrak{g}(s))$, a_0 étant un élément régulier de $\mathfrak{g}(s)$. Pour prouver a), disons la deuxième formulation, on considère un élément régulier a_0 de $\mathfrak{g}(s)$ contenu dans $\mathfrak{d}_0$, on le prolonge au voisinage de s dans S_1 en une section de $\mathfrak{d}_1$, et on prolonge cette dernière en une section de $\mathfrak{g}$ au voisinage de s. En vertu de 2.10 cette section et quasi-régulière dans un voisinage ouvert V de s, donc régulière en vertu de (C_2), donc en vertu de 2.6 $\mathfrak{d} = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g}|_{\mathrm{V}})$ satisfait aux conditions voulues.

Remarque 2.12. — J'ignore si l'énoncé 2.11 a) et b) est valable sans hypothèse d'existence de points réguliers (lorsque $k(s)$ est fini).

Il reste à prouver l'implication $(\mathrm{C}_3) \Rightarrow (\mathrm{C}_2)$. Notons aussi la forme équivalente suivante de (C_3) :

(C'_3) On a (C_0) i.e. le rang nilpotent des $\mathfrak{g}(s)$ $(s \in \mathrm{S})$ est localement constant, et sur tout ouvert V de S où ce rang est de valeur r, le polynôme de Killing de $\mathfrak{g}|_{\mathrm{V}}$ est divisible par t^r.

Il faut montrer que cette condition implique que toute section quasi-régulière a de $\mathfrak{g}$ est régulière. Compte tenu de 2.6, ceci est contenu dans le lemme suivant (appliqué à l'endomorphisme $\mathrm{ad}(a)$ de $\mathfrak{g}$), (iv) $\Rightarrow$ (iii) :

Lemme 2.13. — *Soient* A *un anneau,* M *un* A-*module projectif de type fini,* u *un endomorphisme de* M. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est somme directe de deux modules stables* M', M'' *tels que* $u|\mathrm{M}'$ *soit nilpotent, et* $u|\mathrm{M}''$ *soit un automorphisme de* M''.

(ii) *Il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $\mathrm{Im}\, u^n + \mathrm{Ker}\, u^n = \mathrm{M}$.

(iii) *Le nil-espace* $\mathrm{Nil}(u) = \bigcup_{n>0} \mathrm{Ker}\, u^n$ *est facteur direct dans* M, *et* $\mathrm{M} = \mathrm{Nil}(u) + u(\mathrm{M})$.

Ces conditions sont impliquées par la suivante, (*et lui sont équivalentes lorsque* A *est réduit*) *:* 306

(iv) *Localement sur* Spec(A) (*pour la topologie de Zariski*) *le polynôme caractéristique* $\mathrm{P}_u(t)$ *de* u *peut se mettre sous le forme*

$$t^r(t^{n-r} + c_1 t^{n-r-1} + \cdots + c_{n-r}),$$

où c_{n-r} *est inversible.*

L'équivalence de (i) (ii) (iii) est immédiate et mise pour mémoire. Le fait que (i) implique (iv) lorsque A est réduit provient du fait que dans ce cas, un endomorphisme nilpotent d'un module projectif de rang r a comme polynôme caractéristique t^r, tandis que en tous cas, le polynôme caractéristique d'un automorphisme d'un module projectif de type fini a comme terme constant le déterminant de u au signe près (localement sur Spec(A)), donc un élément inversible de A. Enfin, pour prouver (iv) $\Rightarrow$ (i), on note que M est un module sur l'anneau de polynômes $\mathrm{A}[t]$, en faisant opérer t par u, et l'identité bien connue

$$\mathrm{P}(u) = 0$$

montre que M est annulé par $\mathrm{PA}[t]$, donc peut être considéré comme un module sur $\mathrm{A}[t]/\mathrm{PA}[t]$. Or écrivant $\mathrm{P} = t^r\mathrm{Q}$, où le terme constant de Q est inversible, on voit aussitôt que

$$\mathrm{PA}[t] = t^r\mathrm{A}[t] \cap \mathrm{QA}[t],$$

donc $\mathrm{A}[t]/\mathrm{PA}[t]$ se décompose en produit des anneaux $\mathrm{A}[t]/t^r\mathrm{A}[t]$ et $\mathrm{A}[t]/\mathrm{QA}[t]$, d'où une décomposition correspondante de M en somme de deux $\mathrm{A}[t]$-modules i.e. en somme de deux sous-A-modules M' et M'' stables par u, c'est la décomposition envisagée dans (i).

Cela achève la démonstration de 2.13, donc de 2.9.

307 ***Corollaire 2.14***. — *Lorsque la condition* (C_3) *de* 2.9 *est vérifiée, les sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *sont strictement nilpotentes* (2.2).

La démonstration est immédiate.

Remarque 2.15. — a) Signalons qu'on peut prouver une réciproque de 2.14 : (C_3) équivaut au fait que pour tout S' sur S, toute section quasi-régulière de $\mathfrak{g}_{S'}$ soit régulière et toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{S'}$ strictement nilpotente, ou encore toute section quasi-régulière de $\mathfrak{g}_{S'}$ contenue dans une sous-algèbre de Cartan strictement nilpotente de $\mathfrak{g}_{S'}$.

b) Contrairement aux autres conditions (C_0) à (C_2), la condition (C_3) est de « nature infinitésimale », de façon précise, lorsque S est localement noethérien, $\mathfrak{g}$ satisfait la condition (C_3) si et seulement si pour tout changement de base $S' \to S$, avec S' artinien local (si on veut, S' le spectre d'un quotient artinien d'un anneau local de S), $\mathfrak{g}_{S'}$ satisfait la même condition. De même, *lorsque* (C_0) *est satisfait,* la condition pour une section de $\mathfrak{g}$ d'être régulière est de nature infinitésimale.

c) Lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un préschéma en groupes lisse de présentation finie sur S, alors nous verrons que les conditions (C_0), (C_1), (C'_1), (C_2) sur $\mathfrak{g}$ sont équivalentes (5.2 a)) ; j'ignore ce qu'il en est en général (sauf que, même pour S artinien local, (C_0) n'implique pas (C_1)). Cependant, même dans le cas où $\mathfrak{g}$ provient d'un G, et S étant artinien local, il n'est pas vrai en général que (C_2) implique (C_3), car $\mathfrak{g}$ peut être nilpotente sans être strictement nilpotente. On obtient un exemple de ce fait en partant d'un schéma en groupes G lisse et affine sur le spectre S d'un anneau de valuation discrète, tel que l'algèbre de Lie de la fibre générale soit non nilpotente (par exemple la fibre générale est un groupe semi-simple adjoint), et celle de la fibre spéciale étant nilpotente (par exemple, la fibre spéciale étant un groupe vectoriel) : alors pour n assez grand, l'algèbre de Lie de $G_n = G \times_S S_n$ n'est pas strictement nilpotente, cependant elle est nilpotente.

308 Plaçons-nous toujours sous les conditions de 2.4, et soit

$$\mathscr{D} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \longrightarrow (\mathbf{Ens})$$

le foncteur défini par

$$\mathscr{D}(S') = \text{ ensemble des sous-algèbres de Cartan de } \mathfrak{g}_{S'}.$$

Introduisons également le foncteur

$$X(S') = \begin{array}{l} \text{ensemble des couples } (\mathfrak{d}, a), \text{ où } \mathfrak{d} \text{ est une sous-algèbre de Cartan de} \\ \mathfrak{g}_{S'} \text{ et } a \text{ une section de } \mathfrak{d}. \end{array}$$

On a donc deux projections $(\mathfrak{d}, a) \mapsto \mathfrak{d}$ et $(\mathfrak{d}, a) \mapsto a$:

$$p : X \longrightarrow \mathfrak{d} \quad \text{et} \quad \psi : X \longrightarrow W(\mathfrak{g}).$$

Lorsque (C_0) est vérifiée, nous considérons aussi l'ouvert U des points réguliers de $W(\mathfrak{g})$ (cf. 2.10) et la condition (C_2) s'exprime alors par le fait que le morphisme

$$\psi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

induit par ψ est un *isomorphisme* (a priori, c'est un monomorphisme grâce à 2.6). Noter qu'il est trivial que le morphisme $p : X \to \mathfrak{d}$ est représentable par une projection de fibrés vectoriels, (i.e. pour tout S-morphisme $\mathrm{S}' \to \mathfrak{d}$, correspondant à une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{g}_{\mathrm{S}'}$, $\mathrm{X} \times_{\mathfrak{d}} \mathrm{S}'$ est représentable par un fibré vectoriel sur S', savoir $\mathrm{W}(\mathfrak{d})$) ; donc si $\mathfrak{d}$ est représentable, il en est de même de X. Or on a :

Théorème 2.16. — *Soient* S *un préschéma,* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* S *qui est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*module localement libre de type fini, supposons la condition* (C_0) *de* 2.9 *satisfaite.*

a) *Le foncteur* $\mathscr{D}$ *des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *défini ci-dessus est représentable par un préschéma quasi-projectif de présentation finie sur* S. *Il en est de même du* **309**
foncteur X *défini ci-dessus.*

b) *Lorsque la condition* (C_2) *de* 2.9 *est vérifiée,* $\mathscr{D}$ *et* X *sont lisses sur* S, *et le morphisme* $\psi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ *induit par* ψ *est un isomorphisme.*

c) *Supposant toujours la condition* (C_2) *vérifiée, soient* $s \in \mathrm{S}$, $\mathfrak{d}_0$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}(s)$, *correspondant à un point* d *de* $\mathscr{D}$ *rationnel sur* $k(s)$. *Supposons que* $\mathfrak{d}_0$ *contienne un point régulier de* $\mathfrak{g}(s)$ (*condition automatiquement vérifiée si* $k(s)$ *est infini*). *Soit* r *le rang infinitésimal de* $\mathfrak{g}(s)$, n *son rang sur* $k(s)$, *alors il existe un voisinage ouvert* V *de* d *dans* $\mathscr{D}$ *qui est* S-*isomorphe à un ouvert* V' *de* $\mathrm{S}[t_1, \dots, t_{n-r}]$.

Démonstration. On peut supposer que $\mathfrak{g}$ est de rang constant n, et de rang nilpotent constant r. Les assertions faites sur X dans a) et b) résultent aussitôt des assertions faites sur $\mathscr{D}$ et du fait que X est un fibré vectoriel sur $\mathscr{D}$ défini par un module localement libre, et sont mises uniquement pour mémoire.

a) Le foncteur $\mathscr{D}$ est un sous-foncteur du foncteur $\underline{\mathrm{Grass}}_{n-r}(\mathfrak{g})$ dont la valeur en S' est l'ensemble des module quotient localement libres de rang $n-r$ de $\mathfrak{g}_{\mathrm{S}'}$, et il est bien connu que ce dernier foncteur est représentable par un préschéma projectif et lisse sur S (cf. par exemple Séminaire Cartan 1960/61, Exp. 12, N$^{\text{os}}$ 2 et 3 dont les constructions se transposent telles quelles au cas des préschémas)(*)[1]. On est donc ramené à un problème relatif, savoir le suivant : étant donné un module quotient localement libre de rang $n-r$ de $\mathfrak{g}$, ou ce qui revient au même, un sous-module $\mathfrak{d}$ localement libre de rang r qui soit localement facteur direct, représenter le foncteur suivant : $\mathrm{F}(\mathrm{S}') = \varnothing$ si $\mathfrak{d}$ n'est pas une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathrm{S}'}$, $\mathrm{F}(\mathrm{S}') = \{\varnothing\}$ dans le cas contraire. En fait, nous allons voir que F est représentable par un *sous-préschéma* de présentation finie de S (ce qui montrera que $\mathscr{D} \to \underline{\mathrm{Grass}}$ est représentable par une immersion de présentation finie, et achèvera de prouver a)). On commence par exprimer la condition que $\mathfrak{d}_{\mathrm{S}'}$ soit une *sous-algèbre de Lie* de $\mathfrak{g}_{\mathrm{S}'}$, on voit tout de suite que cela s'exprime par le fait que $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par un certain sous-préschéma fermé S_1 de S, de **310**
présentation finie sur S (dont les équations locales sur S s'écrivent immédiatement à l'aide d'une base de $\mathfrak{g}$ adaptée au sous-module $\mathfrak{d}$). On peut donc supposer qu'on a déjà $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1$. On doit exprimer ensuite que $\mathfrak{d}_{\mathrm{S}'}$ contient localement pour fpqc une section quasi-régulière de $\mathfrak{g}_{\mathrm{S}'}$, et pour ceci on considère $\mathrm{V} = \mathrm{W}(\mathfrak{d}) \cap \mathrm{U}$, où U est l'ouvert des points réguliers de $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ (2.10) ; alors le morphisme structural $\mathrm{V} \to \mathrm{S}$ étant lisse et quasi-compact, son image S_1 est une partie ouverte de S et le morphisme d'immersion

(*) cf. aussi EGA I, 2ème édition (à paraître dans North Holland Publishing Cie).

[1] N.D.E. : Voir § I.1.3 de M. Demazure et P. Gabriel, Groupes algébriques, Masson (1970).

$S_1 \to S$ est quasi-compact i.e. de présentation finie. La condition envisagée sur S' s'exprime alors en disant que $S' \to S$ se factorise par S_1. Donc on est ramené au cas de $S = S_1$, et utilisant la théorie de la descente, au cas où $\mathfrak{d}$ admet une section a qui est une section quasi-régulière de $\mathfrak{g}$. Il faut enfin exprimer que la section $a_{S'}$ de $\mathfrak{g}_{S'}$ déduite de a satisfait à $\mathrm{ad}(a_{S'})_{\mathfrak{g}_{S'}/\mathfrak{d}_{S'}}$ bijectif, ce qui revient encore à dire que $S' \to S$ se factorise à travers un certain sous-préschéma ouvert de présentation finie de S, savoir S_D, où D est le déterminant de $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$. Mais alors on voit tout de suite que $\mathfrak{d}|_{S_D}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}|_{S_D}$, donc S_D représente le foncteur F, ce qui prouve a).

b) Est immédiat grâce à 2.11 a) et XI 1.5. Bien entendu b) est également une conséquence de l'énoncé plus précis c).

c) Soit a_0 un point régulier de $\mathfrak{g}(s)$, contenu dans $\mathfrak{d}_0$, prolongeons-le en une section a de $\mathfrak{g}$, sur un voisinage ouvert V de s ; on peut évidemment supposer V = S. Soit d'autre part M_0 un supplémentaire de l'espace vectoriel $\mathfrak{d}_0$ dans $\mathfrak{g}(s)$, alors dans un voisinage ouvert V de S il existe un sous-module M de $\mathfrak{g}$, facteur direct de $\mathfrak{g}|_V$, tel que $M(s) = M_0$, et on peut supposer encore V = S. Soit maintenant V le sous-foncteur de $\mathscr{D}$ tel que $V(S')$ soit l'ensemble des sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{d}'$ de $\mathfrak{g}_{S'}$ qui satisfont aux deux conditions suivantes :

1°) $\mathfrak{d}'$ est supplémentaire de $M_{S'}$, et
2°) l'unique section de $(a_{S'} + M_{S'}) \cap \mathfrak{d}$ est une section régulière de $\mathfrak{g}_{S'}$.

311 La condition 1°) correspond à un ouvert V_1 de $\mathfrak{d}$ (induit par l'ouvert de $\underline{\mathrm{Grass}}_{n-r}(\mathfrak{g})$ défini par la même condition 1°) ; la conjonction 1° et 2° correspond à un ouvert de V_1 en vertu de 2.10 et (C_2). Donc V est représenté par un sous-préschéma ouvert V de $\mathscr{D}$, contenant évidemment a.

Soit d'autre part V' le sous-foncteur de W(M) défini par

$V'(S') =$ ensemble des sections u' de $M_{S'}$ telles que :
(i) $a_{S'} + u'$ soit une section régulière de $\mathfrak{g}_{S'}$, et
(ii) l'unique sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}'$ de $\mathfrak{g}_{S'}$ qui contient $a_{S'} + u'$ soit un supplémentaire de $M_{S'}$.

Alors la condition 1°) correspond à un sous-préschéma ouvert V'_1 de W(M), savoir l'image inverse de l'ouvert U des points réguliers de $W(\mathfrak{g})$ (cf. 2.10) par le morphisme de translation $m \mapsto a + m$. La conjonction de (i) et (ii) correspond à un ouvert V' de V'_1, savoir l'image inverse de V par le morphisme évident $V'_1 \to \mathscr{D}$ (associant à u' l'unique sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}'$ de $\mathfrak{g}_{S'}$ qui contient $a_{S'} + u'$). La restriction de ce dernier morphisme à V' est un morphisme

$$V' \longrightarrow V,$$

qui est évidemment un isomorphisme. Cela démontre c).

Corollaire 2.17. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps* k*. Alors le schéma* $\mathscr{D}$ *des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ (2.16 a)) *est quasi-projectif, lisse et irréductible. Lorsque* $\mathfrak{g}$ *contient un élément régulier* (*par exemple lorsque* k *est infini*) $\mathfrak{d}$ *est une variété rationnelle i.e. son corps de fonctions est une extension pure de* k*.*

Le fait que $\mathscr{D}$ soit irréductible provient du fait qu'on a un morphisme surjectif $\psi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathscr{D}$, et $\psi^{-1}(\mathrm{U})$ est irréductible, étant isomorphe à l'ouvert U de $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$. L'assertion sur le corps des fonctions est une conséquence immédiate de c).

Remarques 2.18. — J'ignore si cette conclusion reste vraie si k est fini, sans supposer que $\mathfrak{g}$ contienne un point régulier, comparer 2.12. On peut prouver qu'il en est ainsi lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique G lisse sur k, du moins lorsque **312**
G/radical est un groupe semi-simple « *adjoint* », en utilisant un résultat de Chevalley signalé plus bas (cf. Appendice). Il est plausible que ce résultat reste valable sans restriction sur G ; il suffirait pour ceci que le résultat cité de Chevalley soit prouvé pour tout groupe algébrique semi-simple (non nécessairement adjoint).

3. Sous-groupes de type (C) des préschémas en groupes sur un préschéma quelconque

Théorème 3.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse,* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie* (*qui est un module localement libre de type fini sur* S), $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$ *qui soit* (*en tant que module*) *localement facteur direct dans* $\mathfrak{g}$, *et telle que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *la fibre géométrique* $\mathfrak{h}_{\overline{s}}$ *contienne une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}_{\overline{s}}$. *Soit* a *une section quasi-régulière de* $\mathfrak{g}$ (2.5). *Alors*

$$\mathrm{M}_a = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(a, \mathfrak{h})$$

(*sous-foncteur de* G *dont les points à valeurs dans* S′ *sont les* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ *tels que* $\mathrm{ad}(g)\cdot a_{\mathrm{S}'} \in \Gamma(s', \mathfrak{h}_{\mathrm{S}}))$ *est représentable par un sous-préschéma fermé* [2] *de* G *lisse sur* S, *dont le morphisme structural dans* S *est surjectif.*

Considérons le morphisme canonique

$$\varphi : \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{W}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathfrak{g})$$

donné par $(g, x) \mapsto \mathrm{ad}(g)\cdot x$, alors M_a est S-isomorphe à $\varphi^{-1}(a)$, image inverse de a (considéré comme section de $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ sur S) par φ. Il suffira donc pour la lissité de M_a que nous montrions que φ est lisse en les points de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}(\mathfrak{h})$ au-dessus de $\mathrm{Im}(a)$; plus généralement φ est lisse en tout point au-dessus d'un point de $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$ qui est régulier dans sa fibre $\mathrm{W}(\mathfrak{g}(s))$ sur S. Pour le voir, comme source et but de φ sont lisses donc plats localement de présentation finie sur S, on est ramené à faire la vérification fibre par fibre ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, G étant donc un groupe localement algébrique sur k, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, contenant une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et a un point régulier **313**
de $\mathfrak{g}$. On peut évidemment supposer (compte tenu que φ est un G-morphisme) que le point envisagé de $\mathrm{G} \times \mathrm{W}(\mathfrak{h})$ est de la forme (e, a). On peut évidemment supposer G connexe, donc de type fini sur k, mais alors notre assertion n'est autre que XIII 5.4. D'ailleurs, le fait que M_a est un sous-préschéma fermé de G (de présentation finie sur S) est trivial, puisque M_a est l'image inverse de $\mathrm{W}(\mathfrak{h})$ par le morphisme $g \mapsto \mathrm{ad}(g)\cdot a$ de G dans $\mathrm{W}(\mathfrak{g})$. La surjectivité du morphisme structural $\mathrm{M}_a \to \mathrm{S}$ se

[2] N.D.E. : on le notera $\mathrm{Transp}_{\mathrm{G}}(a, \mathfrak{h})$.

ramène également au cas d'un corps de base algébriquement clos, mais alors $\mathfrak{h}$ contient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}$ par hypothèse, qui est donc conjuguée à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d} = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ par le théorème de conjugaison XIII 6.1 a), donc $\mathfrak{h}$ contient un conjugué de a. Cela achève la démonstration de 3.1.

Corollaire 3.2. — *Soient* G, $\mathfrak{g}$ *comme dans* 3.1, *avec* G *de type fini sur* S, *soient* $\mathfrak{k}$ *et* $\mathfrak{h}$ *deux sous-akgèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$, *localement facteurs directs* (*en tant que modules*), *supposons que l'on soit sous l'une des deux hypothèses suivantes :*

a) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *la fibre géométrique* $\mathfrak{k}_{\overline{s}}$ *est nilpotente et contient un élément régulier de* $\mathfrak{g}_{\overline{s}}$ *; la fibre géométrique* $\mathfrak{h}_{\overline{s}}$ *contient une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}_{\overline{s}}$.

b) $\mathfrak{k}$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

Alors $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{k}, \mathfrak{h})$ *est un sous-préschéma fermé de* G lisse *sur* S *; de plus, dans le cas* a), *son morphisme structural dans* S *est surjectif.*

Le fait que le transporteur soit représentable par un sous-préschéma fermé de présentation finie de G est immédiat, et laissé au lecteur. Prouvons d'abord la lissité dans le cas a). Supposons d'abord qu'il existe une section a de $\mathfrak{k}$ qui soit quasi-régulière dans $\mathfrak{g}$. Alors il suffit d'appliquer 3.1 et le

Lemme 3.3. — *Sous les conditions de* 3.2 a), *si a est une section de* $\mathfrak{k}$ *quasi-régulière dans* $\mathfrak{g}$, *alors on a*

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{k}, \mathfrak{h}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(a, \mathfrak{h}).$$

314 En effet, compte tenu des définitions, cela revient à montrer que si a est de plus une section de $\mathfrak{h}$, alors on a $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$. Or comme par hypothèse, $\mathfrak{k}$ est localement nilpotente, il résulte de 2.1 que $\mathfrak{k} \subset \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$, d'autre part $\mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$ car $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est injectif (l'étant fibre par fibre en vertu de XIII 4.8 b)). D'où la conclusion. Dans le cas général, on se ramène au cas où S est affine noethérien par le procédé standard habituel, puis au cas où S est local artinien (la lissité étant une propriété de nature infinitésimale), et par descente plate au cas où son corps résiduel est infini, donc la fibre $\mathscr{K}_0$ admet un élément qui est régulier dans $\mathfrak{g}_0$. On relève cet élément en un élément de $\mathscr{K} = \Gamma(\mathfrak{k})$, ce qui nous ramène au cas précédent. Ainsi, on a prouvé dans le cas a) la lissité du transporteur ; quant au fait que son morphisme structural est surjectif, il se ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, donc où $\mathscr{K}$ contient un point régulier de $\mathfrak{g}$, et on applique 3.3 et 3.1.

Pour prouver b), on est ramené par définition de la lissité (XI 1.1) à prouver que si S est affine, S_0 un sous-schéma défini par un Idéal quasi-cohérent nilpotent $\underline{\mathrm{J}}$, g_0 un élément de $\mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$ qui transporte $\mathfrak{k}_0$ dans $\mathfrak{g}_0$, alors g_0 se relève en un élément g de G(S) qui transporte $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$. Or l'hypothèse faite sur g_0 implique qu'on est sous les conditions de a), déjà traité. Cela achève la démonstration.

Bien entendu, lorsque dans 3.2 b) $\mathfrak{h}$ satisfait à l'hypothèse plus forte de 3.1, alors (et alors seulement) le morphisme structural $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d}, \mathfrak{h}) \to \mathrm{S}$ est surjectif. Utilisant le lemme de Hensel XI 1.10, on conclut de 3.1 et 3.2 :

Corollaire 3.4. — *Sous les conditions de* 3.1 *pour* G *et* $\mathfrak{h}$ *et supposant* G *de type fini sur* S *:*

a) *pour toute section quasi-régulière* a *de* $\mathfrak{g}$*, il existe localement pour la topologie étale un conjugué de* a *qui soit une section de* $\mathfrak{h}$*.*

b) *Pour toute sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{d}$ *de* $\mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{d}$ *est localement pour la topologie étale conjuguée d'une sous-algèbre de* $\mathfrak{h}$*.*

En particulier, lorsque $\mathfrak{h}$ est elle-même une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on trouve : **315**

Corollaire 3.5. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes lisse de type fini,* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie,* $\mathfrak{d}$ *et* $\mathfrak{d}'$ *deux sous-algèbres de Cartan de* G*. Alors* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}')$ *est identique au transporteur strict de* $\mathfrak{d}$ *en* $\mathfrak{d}'$*, et est un sous-préschéma fermé de* G *lisse sur* S*, à morphisme structural surjectif. Localement pour la topologie étale,* $\mathfrak{d}$ *et* $\mathfrak{d}'$ *sont conjugués.*

Le fait que le transporteur soit ici identique au transporteur strict provient trivialement du fait que $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{d}'$ sont localement facteurs directs dans $\mathfrak{g}$, et ont même rang en chaque point. Donc 3.5 est un cas particulier de 3.4. En particulier, si $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$:

Corollaire 3.6. — *Soit* G *comme dans* 3.5*, et soit* $\mathfrak{d}$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$*. Alors* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d})$ *est un sous-préschéma en groupes fermé de* G *lisse sur* S*, dont l'algèbre de Lie est identique à* $\mathfrak{d}$*.*

En effet, cette dernière assertion revient à dire que $\mathfrak{d}$ est son propre normalisateur dans $\mathfrak{d}$, ce qui provient aussitôt du fait que c'est vrai fibre par fibre.

Corollaire 3.7. — *Soient* G*,* $\mathfrak{g}$ *comme dans* 3.5*. Alors les conditions* (C_2)*,* (C'_1)*,* (C_1) *de* 2.9 *sont équivalentes, en d'autres termes, si* $\mathfrak{g}$ *admet localement pour la topologie* fpqc *une sous-algèbre de Cartan, alors toute section quasi-régulière de* $\mathfrak{g}$ *est régulière.*

Soit en effet a une section quasi-régulière, prouvons qu'elle est régulière. La question étant locale pour la topologie fpqc, on peut supposer que $\mathfrak{g}$ admet une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}$. En vertu de 3.4 a), a est alors localement pour la topologie étale conjugué à une section de $\mathfrak{d}$, ce qui nous ramène au cas où a est une section de $\mathfrak{d}$, où la conclusion est triviale sur la définition.

Définition 3.8. — Soit G un préschéma en groupes lisse sur un préschéma S. On appelle sous-groupe de type (C) de G, un sous-préschéma en groupes D de G, lisse sur S, à fibres connexes, tel que $\mathfrak{d} = \mathrm{Lie}(\mathrm{D})$ soit une sous-algèbre de Cartan (2.4) de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, i.e. tel que pour tout $s \in \mathrm{S}$, D_s soit un sous-groupe de type (C) du groupe algébrique G_s (XIII 6.2). **316**

Théorème 3.9. — *Soit* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie,* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie. Alors :*

a) *L'application*

$$\mathrm{D} \mapsto \mathfrak{d} = \mathrm{Lie}(\mathrm{D})$$

établit une correspondance biunivoque entre sous-groupes de type (C) *de* G*, et sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$*.*

b) *Si* D *et* $\mathfrak{d}$ *se correspondent, on a*

$$\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d}),$$

c'est un sous-préschéma fermé de G *lisse sur* S*, et on a*

$$\mathrm{D} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})^0 = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d})^0.$$

c) *Deux sous-groupes de type* (C) D *et* D′ *de* G *sont conjugués localement pour la topologie étale.*

Démonstration. Soit D un sous-groupe de type (C) de G, et $\mathfrak{d}$ son algèbre de Lie, alors $\mathrm{D} \subset \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d})$, et en vertu de la définition 3.8 et de 3.6 c'est une inclusion de préschémas en groupes lisses sur S, induisant un isomorphisme sur les algèbres de Lie. Comme D est à fibres connexes, on a donc $\mathrm{D} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d})^0$. Donc l'application envisagée dans a) est injective, prouvons qu'elle est surjective. Soit donc $\mathfrak{d}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, alors en vertu de 3.6 $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d}) = \mathrm{N}$ est un sous-préschéma en groupes fermé de G lisse sur S, admettant $\mathfrak{d}$ comme algèbre de Lie. Comme G est
317 de présentation finie sur S, il en est de même de N, donc (comme il a été signalé dans XII après 7.3) la réunion des composantes connexes des fibres de N est l'ensemble sous-jacent à un sous-préschéma en groupes ouvert N° de N, qui est évidemment un sous-groupe de type (C) de G ayant l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$. Cela prouve a), la première assertion b) en résulte aussitôt, et la formule $\mathrm{D} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d})^0$ a déjà été prouvée. Enfin, c) résulte de a) et de 3.5.

Corollaire 3.10. — *Supposons que* $\mathfrak{g}$ *admette localement pour la topologie* fpqc *une sous-algèbre de Cartan* (*ou ce qui revient au même en vertu de* 3.9 a)*, que* G *admette localement pour la topologie* fpqc *un sous-groupe de type* (C)). *Considérons le foncteur* $\mathscr{D} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *défini par* $\mathscr{D}(\mathrm{S}')$ = *ensemble des sous-groupes de type* (C) *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$. *Alors ce foncteur est représentable par un préschéma quasi-projectif et lisse sur* S*, à fibres géométriques connexes. Lorsque* S *est le spectre d'un corps* k*, donc* G *un groupe algébrique lisse sur* k*, et que* $\mathfrak{g}$ *admet un point régulier* (*condition automatiquement vérifiée si* k *est infini*)*, alors* $\mathscr{D}$ *est une variété rationnelle sur* k.

En effet, en vertu de 3.9 a), le foncteur $\mathscr{D}$ est canoniquement isomorphe au foncteur envisagé dans 2.16, d'autre part en vertu de 3.7 la condition (C_2) est satisfaite. Donc 3.10 résulte de 2.16 et 2.17.

Corollaire 3.11. — *Soit* D *un sous-groupe de type* (C) *de* G*, et soit* N *son normalisateur dans* G*. Alors le faisceau quotient* G/N *est canoniquement isomorphe au foncteur* $\mathscr{D}$ *de* 3.10*, donc représentable par un préschéma quasi-projectif et lisse sur* S*, à fibres géométriques connexes.*

Proposition 3.12. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse de présentation finie sur* S, H, K *deux sous-préschémas en groupes, lisses de présentation finie sur* S*,* K *étant à fibres connexes,* $\mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{k}$*,* $\mathfrak{h}$ *les algèbres de Lie correspondantes. On suppose que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée pour les fibres géométriques de ces dernières :*

318 a) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, $\mathfrak{k}_{\overline{s}}$ *contient un élément régulier de* $\mathfrak{g}_{\overline{g}}$, *et* $\mathfrak{h}_{\overline{s}}$ *contient une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}_{\overline{s}}$.

b) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, $\mathfrak{k}_{\overline{s}}$ *contient une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}_{\overline{s}}$. *Sous ces conditions, pour qu'on ait* $\mathrm{H} \supset \mathrm{K}$, *il faut et suffit que l'on ait* $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{k}$.

Bien entendu, on doit seulement prouver que si $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{k}$, alors $\mathrm{H} \supset \mathrm{K}$. Dans le cas b), l'inclusion $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{k}$ montre qu'on est en fait sous les conditions de a), donc il suffit de prouver a). Procédant comme dans 3.2 a) par réduction au cas S artinien local, on est ramené au cas où il existe une section a de $\mathfrak{k}$ qui est quasi-régulière dans $\mathfrak{g}$. Dans ce cas, procédant comme dans XIII 5.5, on est ramené à l'énoncé suivant :

Corollaire 3.13. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes lisse de présentation finie sur* S, H *un sous-préschéma en groupes de* G *lisse de présentation finie sur* S, $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{h}$ *les algèbres de Lie, a une section de* $\mathfrak{h}$ *qui soit quasi-régulière dans* $\mathfrak{g}$. *On suppose que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *la fibre géométrique* $\mathfrak{h}_{\overline{s}}$ *contient une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}_{\overline{s}}$. *Soit*

$$\mathrm{M}_a = \mathrm{Transp}_{\mathrm{G}}(a, \mathfrak{h}),$$

qui est un sous-préschéma fermé de G *lisse sur* S (cf. 3.1), *de sorte que* M_a^0 (*réunion des composantes connexes de l'élément neutre dans les fibres de* M_a) *est une partie ouverte de* M_a, *que nous munirons de la structure induite par* M_a. *On a alors* $\mathrm{H}^0 = \mathrm{M}_a^0$.

Évidemment, on a $\mathrm{H} \subset \mathrm{M}_a$ d'où $\mathrm{H}^0 \subset \mathrm{M}_a^0$. Comme c'est là une inclusion de préschémas lisses sur S, pour prouver que c'est une égalité, on est ramené à le vérifier sur les fibres, ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, cas qui a été vu dans XIII 5.4.

Corollaire 3.14. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes lisse de présentation finie,* D *un sous-groupe de type* (C) *de* G, H *un sous-préschéma en groupes de* G *lisse sur* S 319
et de présentation finie sur S, $\mathfrak{d}$ *et* $\mathfrak{h}$ *leurs algèbres de Lie. Alors on a*

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}, \mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{d}, \mathfrak{h}),$$

et ce foncteur est représentable par un sous-préschéma fermé de G *lisse sur* S.

En effet, l'identité entre les deux transporteurs résulte de 3.12 b), ce qui permet d'appliquer 3.2.

Corollaire 3.15. — *Soient* G, H *comme dans* 3.14 *et supposons que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *la fibre géométrique* $\mathfrak{h}_{\overline{s}}$ *contient une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}_{\overline{s}}$. *Supposons de plus que* $\mathfrak{g}$ *admette localement pour la topologie* fpqc *une sous-algèbre de Cartan. Alors localement pour la topologie étale,* H *contient un sous-groupe de type* (C) *de* G.

En vertu de 3.7 et 3.9 a), G admet localement pour la topologie *étale* un sous-groupe de type (C), donc on peut supposer que G admet un tel sous-groupe, soit D. Alors l'hypothèse sur $\mathfrak{h}$ signifie aussi que le morphisme structural du transporteur considéré dans 3.14 est surjectif (compte tenu du théorème de conjugaison XIII 6.1 a)). On conclut alors par le lemme de Hensel XI 1.10.

Corollaire 3.16. — *Soient* G, H, K, *comme dans* 3.12 a), *supposons de plus que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *la fibre géométrique* $\mathfrak{k}_{\overline{s}}$ *soit nilpotente,* (*i.e.* $\mathfrak{k}$ *est localement nilpotente*). *Alors on a*

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{K},\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{k},\mathfrak{h}),$$

et ce foncteur est représentable par un sous-préschéma fermé de G *lisse sur* S, *à morphisme structural dans* S *surjectif.* H *contient localement pour la topologie étale un sous-groupe conjugué à* K.

320 L'identité des deux transporteurs est encore contenue dans 3.12 a), l'assertion sur sa structure n'est alors autre que 3.2 a), et la dernière assertion de 3.16. est alors conséquence du lemme de Hensel.

Remarques 3.17. — a) Dans 3.12 et 3.16, on peut remplacer l'hypothèse que K est lisse sur S par l'hypothèse plus faible suivante : le faisceau $e_{\mathrm{K}}^{*}(\Omega^{1}_{\mathrm{K/S}}) = \omega^{1}_{\mathrm{K}}$ des 1-différentielles relatives le long de la section unité est localement libre. De cette façon, 3.12 contient XIII 5.5.

b) Soient G, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ comme dans 3.1, avec G de présentation finie sur S. Alors $\mathrm{N} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h})$ n'est pas nécessairement lisse sur S le long de la section unité, ou ce qui revient au même, il n'existe par nécessairement un sous-préschéma en groupes H de S lisse sur S dont l'algèbre de Lie soit $\mathfrak{h}$, même si S est le spectre d'un corps. Lorsqu'un tel H existe, de sorte qu'on a alors (prenant H à fibres connexes) $\mathrm{N} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$, j'ignore si N est lisse sur S. Dans cette question, on peut évidemment se ramener au cas où S est local artinien.

Pour finir ce N°, examinons le cas où G est « semi-simple » sur S :

Théorème 3.18. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S, *dont les fibres géométriques sont des groupes semi-simples « adjoints », i.e. semi-simples à centre réductif* (XII 4.1 et 4.4) *réduit au groupe unité. Alors les sous-groupes de type* (C) *de* G *sont identiques à ses tores maximaux, donc aussi à ses sous-groupes de Cartan* (XII 3.1).

Compte tenu des définitions, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, et à prouver alors que pour un tore maximal T de G, l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire (compte tenu de l'inégalité rang nilpotent de $\mathfrak{g} \geqslant$ rang nilpotent de $\mathrm{G} = \dim \mathrm{T} = \mathrm{rang}\,\mathfrak{t} = r$) qu'il existe $x \in \mathfrak{t}$ avec $\dim \mathrm{Nil}(x,\mathfrak{g}) = r$. Comme $\mathfrak{t}$ est abélienne et a fortiori nilpotente, il revient au
321 même de dire qu'il existe un $a \in \mathfrak{t}$ tel que $\mathrm{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}$ soit injective (XIII 5.7 a)). Or considérons les caractères α de T qui interviennent dans la représentation induite sur T par la représentation adjointe de G. La théorie de structure de groupe semi-simple G (BIBLE, 13 th. 1 a) et th. 3, cor. 2), plus précisément de la « grosse cellule » de G, produit semi-direct de T et de sous-groupes P_{α} isomorphes au groupe additif $\mathbb{G}_a$, invariés par T et correspondants aux caractères « racines » de G pour le tore T, montre que le sous-espace propre de $\mathfrak{g}$ relatif au caractère unité n'est autre que $\mathfrak{t}$, et les autres sous-espaces propres sont de dimension 1, les caractères α associés n'étant autres que les *racines* de G pour T. En vertu du calcul du centre réductif de G comme intersection des noyaux des caractères de T qui interviennent dans la représentation

adjointe de G (XII 4.8), on voit que le fait que G soit adjoint s'interprète par le fait que *les racines engendrent le réseau* $\mathrm{M} = \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathbb{G})$. Or un lemme bien connu de la théorie des racines nous dit que toute racine fait partie d'un système de racines simples, donc d'une base du groupe engendré par les racines, et par suite d'une base du dual M de T[(3)]. On en conclut :

Corollaire 3.19. — *Si* G *est un groupe algébrique semi-simple adjoint sur un corps algébriquement clos* k*,* T *un tore maximal de* G*, alors pour toute racine* α *de* G *par rapport à* T*,* $\alpha : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_m$*, l'homomorphisme correspondant* $\alpha' : \mathfrak{t} \to k$ *est non nul.*

Ce résultat est essentiellement équivalent au théorème 3.18, car pour un $t \in \mathfrak{t}$, $\mathrm{ad}(t)$ est semi-simple et ses valeurs propres dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ ne sont autres que les $\alpha'(t)$, donc $\mathrm{ad}(t)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}$ est injectif si et seulement si les $\alpha'(t)$ sont $\neq 0$, et il existe un $t \in \mathfrak{t}$ ayant cette propriété si et seulement si tous les α' sont $\neq 0$.

Corollaire 3.20. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse, de présentation finie sur* S*, à fibres géométriques des groupes algébriques connexes et réductifs* (*i.e. extensions d'un groupe semi-simple par un tore*)*. Alors pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$ *admette un tore maximal.* [(*)]

Nous verrons en effet dans XVI que l'hypothèse qu'on vient de faire sur G implique **322**
que G est affine sur S et de rang réductif localement constant ; donc (XII 4.7 c)) G admet un centre réductif Z, $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ est un groupe lisse et affine sur S, dont le centre réductif est réduit au groupe unité, enfin les tores maximaux de G et de G′ sont en correspondance biunivoque. De plus, on voit aussitôt que les fibres géométriques de G′ sont des groupes connexes semi-simples, et de plus adjoints par définition (leur centre réductif étant trivial). Donc il suffit de se borner au cas où G est semi-simple et adjoint, et en vertu de 3.18 on est ramené à trouver un voisinage ouvert U de s et un sous-groupe *de type* (C) de G|U, où ce qui revient au même (3.9 a)) une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}|\mathrm{U}$. Or ceci est possible si $k(s)$ est infini, car en vertu de 3.7 $\mathfrak{g}$ satisfait à la condition (C_2) de 2.9, donc on peut appliquer 2.11 b). En fait, l'énoncé 3.20 reste valable sans supposer $k(s)$ infini. En effet, par la démonstration précédente, il suffit de savoir que *pour tout groupe semi-simple adjoint* G *sur un corps fini* k*, l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de* G *contient un élément régulier*. Or cet énoncé a été prouvé par Chevalley (en utilisant les propriétés de l'*élément de Coxeter* du groupe de Weyl...), cf. l'Appendice plus bas par J.-P. Serre.

Remarques 3.21. — a) L'énoncé 3.20 reste valable, avec essentiellement la même démonstration, en y remplaçant G par un sous-préschéma en groupes H fermé, lisse sur S, ayant partout même rang que G (par exemple un « sous-groupe parabolique » de G), pourvu que $k(s)$ soit infini. J'ignore si ici encore, l'hypothèse que $k(s)$ soit infini est superflue. On peut montrer qu'il en est ainsi du moins si H est parabolique, grâce

---

[(*)] Ce résultat, ainsi que 2.11 sur lequel il s'appuie, se généralise immédiatement au cas où s est remplacé par une partie finie de S, contenue dans un ouvert affine.

[(3)] N.D.E. : on a remplacé $\widehat{\mathrm{T}}$ par T à la construction du radical U de H et du quotient H/U, ce qui nous ramène au cas semi-simple. Malheureusement, la méthode des éléments réguliers semble ici impuissante, car on construit facilement des exemples (par exemple avec le groupe projectif et son sous-groupe de Borel « standard ») où l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H ne contient aucun élément régulier.

323 b) La démonstration de 3.20 montre en fait un résultat plus précis (en invoquant 3.9 b)) dans le cas où $k(s)$ est infini, savoir que tout tore maximal T_0 de G_s provient d'un tore maximal T sur un voisinage ouvert de s. J'ignore si cet énoncé reste valable lorsque $k(s)$ n'est plus supposé infini, la difficulté provenant évidemment du fait que l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_0$ de T_0 ne contient en général pas d'élément régulier de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de la fibre G_s. Une réponse affirmative à ce problème impliquerait l'énoncé suivant (qui n'est démontré que dans le cas d'un corps résiduel infini ou lorsque A est séparé et complet) : Soit A un anneau local, de corps résiduel k, M une « algèbre de Azumaya » sur A, i.e. une algèbre telle que M soit un module libre de type fini sur A, et $M_0 = M \otimes_A k$ une algèbre centrale simple sur k, D_0 une sous-algèbre commutative de M_0 séparable sur k, telle que $[M_0 : k] = ([D_0 : k])^2$; alors il existe une sous-algèbre commutative D de M, qui est un module facteur direct dans M et tel que $D \otimes_A k = D_0$ (?). (Noter que la donnée de M équivaut à la donnée d'un fibré principal homogène sous le groupe projectif $\mathrm{PGL}(n)_A$, d'où une forme tordue « intérieure » G de $\mathrm{PGL}(n)$, et les tores maximaux de G correspondant biunivoquement aux sous-algèbres commutatives D de M, étales sur A, de rang n sur A).

c) Appliquant 3.20 au centralisateur d'un sous-tore Q de G (G S-préschéma en groupes réductif), on déduit que tout tel Q est contenu, localement pour la topologie de Zariski, dans un tore maximal de G.

4. Une digression sur les sous-groupes de Borel

Définition 4.1. — Soit G un groupe algébrique lisse sur un corps algébriquement clos. On appelle *sous-groupe de Borel* de G un sous-groupe algébrique lisse résoluble connexe, qui soit maximal pour ces propriétés.

Lorsque G est affine, on retrouve donc la terminologie de BIBLE 6 déf. 1. Notons
324 tout de suite que si Z est un sous-groupe connexe et lisse de G, contenu dans le centre (ou plus généralement, résoluble et invariant), alors pour tout sous-groupe de Borel B de G, l'image BZ de $B \times Z$ par le morphisme $(b, z) \mapsto bz$ de $B \times Z$ dans G est un sous-groupe lisse résoluble connexe de G contenant B, donc identique à B, donc B contient Z, donc B est l'image inverse d'un sous-groupe algébrique B' de $G' = G/Z$, et il est immédiat que B' est un sous-groupe de Borel de G'. Prenant $Z = \mathrm{Centr}(G^0)^0_{\text{réd}}$, $G' = G/Z$ est affine (XII 6.1), donc les sous-groupes de Borel de G' sont conjugués et pour un tel B', G'/B' est une variété projective (BIBLE 6 th. 4). Par suite :

Proposition 4.2. — *Soit* G *comme dans* 4.1. *Alors les sous-groupes de Borel de* G *sont conjugués. Si* B *est un sous-groupe de Borel, alors* G/B *est une variété projective. Les tores maximaux de* B (*resp. les sous-groupes de Cartan de* B, G *étant connexe*) *sont des tores maximaux de* G (*resp. des sous-groupes de Cartan de* G).

Il reste à prouver la dernière assertion, et on peut évidemment supposer $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$. Pour les sous-groupes de Cartan, elle résulte de l'assertion analogue dans G' (BIBLE 6 th. 4 cor. 4) et de XII 6.6 e). Pour les tores maximaux, elle se déduit de la précédente, puisque par XII 6.6 c) les tores maximaux d'un groupe algébrique lisse sont les tores maximaux de ses sous-groupes de Cartan.

Corollaire 4.3. — *Supposons* G *connexe. Alors tout élément de* G *est contenu dans un sous-groupe de Borel de* G.

On est ramené au même énoncé dans G', qui est bien connu (BIBLE 6 th. 5 d)).

Corollaire 4.4. — *Soit* B *un sous-groupe de Borel de* G*,* C *un sous-groupe de Cartan de* B*,* N *son normalisateur dans* G*, alors* $\mathrm{N} \cap \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

En effet, $\mathrm{N} \cap \mathrm{B} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})$, on est donc ramené à montrer que lorsque G est connexe et résoluble, alors un sous-groupe de Cartan C est son propre normalisateur **325**
connexe. Or avec les notations précédentes, C est l'image inverse d'un sous-groupe de Cartan C' de G', on est donc ramené au cas où G est affine. Comme on sait que le normalisateur d'un sous-groupe de Cartan est lisse (C étant son propre normalisateur connexe, cf. par exemple XII 6.6 c)), il suffit de voir que C et N ont mêmes points à valeurs dans k, ce qui n'est autre que BIBLE th. 6 d).

Définition 4.5. — Soit G un préschéma en groupes lisse de présentation finie sur un préschéma S. On appelle *sous-groupe de Borel* de G tout sous-préschéma en groupes lisse B de présentation finie de G, tel que pour tout $s \in \mathrm{S}$, la fibre géométrique $\mathrm{B}_{\overline{s}}$ soit un sous-groupe de Borel de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$.

C'est donc là, comme on le vérifie aussitôt, une notion stable par changement de base, et de nature locale pour la topologie fpqc (car si k' est une extension algébriquement close d'un corps algébriquement clos k, alors un sous-groupe algébrique B du groupe algébrique G lisse sur k est un sous-groupe de Borel de G si et seulement si $\mathrm{B}_{k'}$ en est un de $\mathrm{G}_{k'}$). Il résulte de cette définition que si G est un groupe algébrique lisse sur un corps quelconque k, B un sous-groupe de Borel de G, alors G/B est une variété projective, tout tore maximal T de B est un tore maximal de G, son normalisateur dans B est identique à son centralisateur C, et est un sous-groupe de Cartan de G lorsque G est connexe.

Remarques 4.6. — Malheureusement, il n'est plus vrai en général (même si G est affine sur S et S est le spectre de l'algèbre des nombres duaux sur un corps k algébriquement clos) que deux sous-groupes de Borel de G soient conjugués localement pour la topologie fpqc. Comme conséquence de ce fait regrettable, signalons que si G est un groupe algébrique lisse, affine, connexe sur un corps k non parfait, il n'est pas possible en général de définir de façon naturelle un espace homogène D sous G, jouant le rôle d'une variété de drapeaux i.e. de la variété des sous-groupes de Borel de G (qui, sur la clôture algébrique $\overline{k}$ de k, serait donc isomorphe à $\mathrm{G}_{\overline{k}}/\overline{\mathrm{B}}$, où $\overline{\mathrm{B}}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$). En effet, lorsque le quotient de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ par son radical $\overline{\mathrm{R}}$ est un groupe semi-simple adjoint, alors le noyau de $\mathrm{G}_{\overline{k}} \to \underline{\mathrm{Aut}}_k(\overline{\mathrm{D}})$ est le radical de **326**
$\mathrm{G}_{\overline{k}}$, donc si $\overline{\mathrm{D}}$ provient d'un espace homogène D sous G, le radical $\overline{\mathrm{R}}$ provient d'un

sous-groupe R de G. Or on construit facilement des exemples où $G_{\overline{k}}/\overline{R}$ est adjoint mais $\overline{R}$ n'est pas « défini sur k ». Il est facile de voir que sous ces conditions, le foncteur $\mathscr{B} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \to (\mathbf{Ens})$ tel que $\mathscr{B}(S')$ = ensemble des sous-groupes de Borel de $G_{S'}$, n'est pas représentable par un S-préschéma lisse. Du point de vue infinitésimal (III § 3), la non validité du théorème de conjugaison s'exprime par le fait que si B est un sous-groupe de Borel du groupe algébrique lisse G, le groupe de cohomologie $H^1(B, \mathfrak{g}/\mathfrak{b})$ [(4)] peut être différent de zéro.

Nous verrons par contre dans un exposé ultérieur que lorsque G est semi-simple, ou plus généralement réductif, de tels phénomènes déplaisants ne se produisent pas. Ce sont ces phénomènes sans doute, ainsi que l'absence de bons théorèmes d'existence, qui expliquent que les sous-groupes de Borel ne jouent qu'un rôle relativement effacé dans l'étude des schémas en groupes *généraux* du point de vue schématique, alors qu'ils domineront la théorie des schémas en groupes semi-simples dans les exposés ultérieurs.

Proposition 4.8. — [(5)] *Soient* G *un* S-*préschéma en groupes lisse de présentation finie à fibres connexes,* B *un sous-groupe de Borel de* G*, alors* B *est identique à son propre normalisateur, et c'est un sous-préschéma* fermé *de* G*.*

En effet, en vertu de XII 7.10, on est ramené à prouver que sur un corps algébriquement clos k, tout élément de $G(k)$ qui normalise B est dans $B(k)$, ce qui pour G affine est un résultat fondamental de Chevalley (BIBLE 9 th. 1) ; le cas général s'y ramène aussitôt par la réduction utilisée déjà dans 4.2.

Remarques 4.8.1. — On peut généraliser la définition 4.5, en introduisant également la notion de *sous-groupe parabolique* de G : on appelle ainsi un sous-préschéma en groupes P de G, lisse et de présentation finie sur S, tel que pour tout $s \in S$, la fibre géométrique $P_{\overline{s}}$ soit un sous-groupe parabolique de $G_{\overline{s}}$, i.e. contienne un sous-groupe
327 de Borel de $G_{\overline{s}}$. La proposition 4.8 s'étend (avec la même démonstration de réduction à l'énoncé « ensembliste », qui est connu) au cas d'un sous-groupe parabolique P de G. Notons la conséquence suivante de ce résultat (cf. XVI). Si P est un sous-groupe parabolique de G, alors G/P est représentable par un préschéma quasi-projectif de présentation finie sur S (N. B. on suppose G à fibres connexes). D'ailleurs G/P est évidemment lisse sur S, et de plus à fibres géométriques connexes et propres, d'où on peut conclure facilement, utilisant EGA III 5.5.1, que D = G/P est en fait propre, donc projectif, sur S. D'ailleurs, si sa dimension relative est n, il est connu que le faisceau inversible $\Omega^n_{D/S}$ est tel que son inverse induise sur les fibres géométriques de D/S des faisceaux amples, donc (EGA III 4.7.1) $(\Omega^n_{D/S})^{-1}$ est ample sur D relativement à S.

On voit aisément, par réduction au cas affine et au cas d'un corps de base algébriquement clos, que si $u : G \to G'$ est un épimorphisme de groupes algébriques lisses, alors pour tout sous-groupe de Borel B de G, $u(B) = B'$ est un sous-groupe de Borel

(4) N.D.E. : où $\mathfrak{b}$ est l'algèbre de Lie de B.
(5) N.D.E. : il n'y a pas de numéro 4.7.

de G'. Nous nous intéressons au cas où on obtient ainsi une correspondance bijective entre sous-groupes de Borel de G et de G' :

Proposition 4.9. — *Soient* G, G' *deux* S*-préschémas en groupes lisses de présentation finie à fibres connexes,* $u : G \to G'$ *un homomorphisme de groupes fidèlement plat i.e.* surjectif[6]*. On suppose qu'on est dans l'un des deux cas suivants* (*où on a posé* $N = \operatorname{Ker} u$) *:*

a) N *est central dans* G.

b) S *est le spectre d'un corps k, et si* $\overline{k}$ *en désigne une clôture algébrique,* $N_{\overline{k}} = \operatorname{Ker} u_{\overline{k}}$ *est contenu dans le* radical *de* $G_{\overline{k}}$ *i.e. dans le plus grand sous-groupe lisse connexe résoluble invariant de* $G_{\overline{k}}$.

Alors l'application $B' \mapsto u^{-1}(B')$ *induit une bijection de l'ensemble des sous-groupes de Borel de* G' *avec l'ensemble analogue pour* G.

Le cas b) résulte aussitôt de la correspondance entre sous-groupes algébriques de G' et sous-groupes algébriques de G contenant N, et le fait que lorsque k est algébri- **328**
quement clos, les sous-groupes de Borel de G contiennent le radical de G (ce qui est immédiat par le raisonnement précédant 4.2).

Prouvons le cas a). En vertu de XII 7.12, l'application $H' \mapsto H = u^{-1}(H')$ établit une correspondance biunivoque entre sous-préschémas en groupes H' de G' qui sont lisses de présentation finie sur S, à fibres connexes, et qui ont en tout $s \in S$ même rang réductif et même rang nilpotent que G', et les sous-préschémas en groupes H de G ayant les propriétés analogues. Or les sous-groupes de Borel (de G', ou de G), ont les propriétés en question. Reste à prouver que si H', H se correspondent, alors H' est un sous-groupe de Borel de G' si et seulement si H en est un dans G. Par définition, cette question se ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Or comme N est central dans G donc dans H, il s'ensuit que H est résoluble si et seulement si H' l'est. Enfin, compte tenu de la correspondance entre sous-groupes algébriques de G' et sous-groupes algébriques de G contenant N, on voit aussitôt que H' possède le caractère maximal de la définition 4.1 si et seulement si H le possède, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.10. — *Avec les notations de* 4.7*, si* B' *et* B *sont des sous-groupes de Borel de* G' *et* G *qui se correspondent, on a*

$$\mathfrak{b} = \operatorname{Lie}(u)^{-1}(\mathfrak{b}')$$

où $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ *sont les algèbres de Lie de* G, G', B, B', *et où* $\operatorname{Lie}(u) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *est l'homomorphisme déduit de* u.

Cet énoncé résulte trivialement des définitions et de la relation $u^{-1}(B') = B$.

Nous pouvons maintenant prouver le résultat principal du présent numéro :

Théorème 4.11. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse sur un corps algébriquement clos k,* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie. Alors* $\mathfrak{g}$ *est égal à la réunion des algèbres de Lie* $\mathfrak{b}$ *des sous-groupes de Borel* B *de* G.

[6]N.D.E. : ajouter une référerence ici ?

329 On peut évidemment supposer G connexe. Soit R le radical de G et soit $G' = G/R$. Alors 4.9 b) et 4.10 nous ramènent à prouver le théorème 4.11 pour G' au lieu de G, i.e. on peut supposer G *semi-simple*. Soit alors Z le centre de G, identique au centre réductif, et soit $G' = G/Z$. Le même raisonnement (utilisant maintenant 4.9 a) nous ramène à prouver le théorème pour G', i.e. on peut supposer G *semi-simple adjoint*. Soit B un Borel de G, T un tore maximal de B donc de G, et soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie. En vertu de 3.18, T est un sous-groupe de type (C) de G, i.e. $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, donc la réunion des conjugués de $\mathfrak{t}$ est dense dans $\mathfrak{g}$ (XIII 5.1 (i) $\Rightarrow$ (vii)). A fortiori la réunion des conjugués de $\mathfrak{b}$ est dense dans $\mathfrak{g}$. Or soit X le sous-schéma fermé de $G/B \times W(\mathfrak{g})$ dont les points à valeurs dans k sont les (g', x) tels que $x \in \mathrm{Ad}(g) \cdot \mathfrak{b}$ (cf. XIII 1). Alors le morphisme $\psi : X \to W(\mathfrak{g})$ induit par la deuxième projection est propre puisque G/B est propre sur k, d'autre part on vient de voir qu'il est dominant, donc il est surjectif, ce qui prouve 4.11.

Le seul résultat du présent n° que nous utiliserons dans la suite de cet exposé est le corollaire suivant :

Corollaire 4.12. — *Soient k un corps infini,* G *un groupe algébrique lisse sur k,* T *un tore maximal de* G*, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie, $u : G \to GL(V)$ une représentation linéaire* (V *un vectoriel de dimension finie sur k*)*, d'où une représentation d'algèbres de Lie $u' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, faisant de* V *un $\mathfrak{g}$-module. Alors le minimum de la nullité de* $u'(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ *est atteinte pour un élément $x \in \mathfrak{t}$.*

On est ramené aussitôt au cas où k est algébriquement clos. On peut évidemment supposer G connexe, et quitte à diviser G par $(\mathrm{Ker}\, u)_{\text{réd}}$, on peut supposer G affine. Utilisant 4.11 et le théorème de conjugaison des tores maximaux de G, on est ramené au cas où G est de plus résoluble. Alors G est un produit semi-direct $T \cdot V$, où V est la « partie unipotente » de G, qui est un groupe lisse connexe unipotent (BIBLE 6 th. 3). Donc $\mathfrak{g}$ est somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des sous-algèbres de Lie $\mathfrak{t}$ et
330 $\mathfrak{v} = \mathrm{Lie}(V)$. En vertu du théorème de Lie-Kolchin (BIBLE 6 th. 1), $\mathfrak{v}$ admet une suite de composition par des sous-espaces $\mathfrak{v}_i$ stables, tels que $\mathfrak{v}_i/\mathfrak{v}_{i+1} = \mathfrak{w}_i$ soit de dimension 1. Alors pour chaque i, on a une représentation induite $u_i : G \to GL(\mathfrak{w}_i) = \mathbb{G}_m$ et l'homomorphisme d'algèbres de Lie correspondant $u'_i : \mathfrak{g} \to k$, de sorte que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la nullité de $u'(x)$ est égal au nombre des i tels que $u'_i(x) = 0$. Comme V est unipotent, les u_i sont triviaux sur V, donc les u'_i sont triviaux sur $\mathfrak{v}$, ce qui prouve que si $x = t + v$ $(t \in \mathfrak{t}, v \in \mathfrak{v})$, alors $u'_i(x) = u'_i(t)$ pour tout i, donc la nullité de $u'(x)$ est égale à celle de $u'(t)$. L'assertion 4.12 en résulte aussitôt.

5. Relations entre sous-groupes de Cartan et sous-algèbres de Cartan

Appliquant 4.12 à la représentation adjointe de G, on trouve :

Théorème 5.1. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse sur un corps infini,* T *un tore maximal de* G*, $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{t}$ les algèbres de Lie, alors $\mathfrak{t}$ contient un élément régulier de $\mathfrak{g}$.*

Corollaire 5.2. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes lisse de présentation finie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.*

a) *Les conditions* (C_0) *à* (C_2) *de* 2.9 *sur* $\mathfrak{g}$ *sont équivalentes, en particulier si le rang infinitésimal des fibres de* $\mathfrak{g}$ *aux points de* S *est localement constant, alors* $\mathfrak{g}$ *admet localement pour la topologie étale une sous-algèbre de Cartan, donc* (d'après 3.9 a)) G *admet localement pour la topologie étale un sous-groupe de type* (C).

b) *Soient* H *un sous-préschéma en groupes de* G *lisse de présentation finie sur* S, *à fibres connexes ayant même rang réductif que* G *en chaque* $s \in$ S (*par exemple,* H *est un tore maximal ou un sous-groupe de Cartan de* G), D *un sous-groupe de type* (C) *de* G, *alors on a* H $\subset$ D *si et seulement si on a* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{d}$.

c) *Supposons la condition* (C_0) *satisfaite i.e. le rang infinitésimal de* G *localement* **331**
constant. Soit H *un sous-préschéma en groupes de* G *lisse de présentation finie sur* S, *à fibres connexes nilpotentes, ayant même rang réductif que* G *en chaque point* (*par exemple,* H *est un tore maximal ou un sous-groupe de Cartan de* G). *Alors* H *est contenu dans un sous-groupe* D *de type* (C) *de* G *et dans un seul.*

d) *Supposons que* G *admette localement pour* fpqc *un sous-groupe de Cartan, alors il en est de même de tout sous-groupe* D *de type* (C) *de* G.

Démonstration. a) Supposons la condition (C_0) satisfaite, et prouvons qu'il en est de même de (C_2), i.e. que toute section quasi-régulière a de $\mathfrak{g}$ est régulière. On se ramène comme d'habitude au cas S affine noethérien, puis, la question étant « infinitésimale » (2.15 b), au cas où S est local artinien (alors (C_0) est d'ailleurs trivialement satisfaite). On peut supposer de plus le corps résiduel k de S infini. Notons qu'en vertu de 3.7 il suffit d'établir que $\mathfrak{g}$ admet une sous-algèbre de Cartan. Soit T un tore maximal de G, en vertu de 5.1 il existe un élément quasi-régulier t contenu dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T, prouvons qu'il est régulier, ce qui achèvera la démonstration. Considérons la représentation linéaire de T dans $\mathfrak{g}$ induite par la représentation adjointe de G ; il existe donc un ensemble fini $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de caractères de T, tel que $\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe de sous-modules $\mathfrak{g}_i$ stables sous T, T opérant sur $\mathfrak{g}_i$ par u_i (cf. I § 4.7.3). Soit $u'_i : \mathfrak{t} \to$ A l'homomorphisme d'algèbres de Lie déduit de $u_i : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_m$ (N. B. A désigne l'anneau de S). Considérons les homomorphismes u_{i0} et u'_{i0} déduits des précédents par passage aux fibres, i.e. par le changement de base A $\to k$. Soit I′ l'ensemble des $i \in$ I tels que $u'_{i0} \neq 0$, et soit I″ = I − I′. Le fait que t soit régulier s'exprime par la condition $u'_{i0}(t_0) \neq 0$ pour tout $i \in$ I′, donc $u'_i(t)$ inversible pour $i \in$ I′. La sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ défini par t, i.e. le sous-espace noyau de l'endomorphisme semi-simple $\mathrm{ad}(t_0)$ de $\mathfrak{g}_0$, est $\sum_{i\in \mathrm{I}''}(\mathfrak{g}_i)_0$. Considérons

$$\mathfrak{d} = \sum_{i\in \mathrm{I}''} \mathfrak{g}_i,$$

alors $\mathrm{ad}(t)$ est nilpotent dans $\mathfrak{d}$, d'autre part c'est un automorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{d} \simeq$ **332**
$\sum_{i\in \mathrm{I}'} \mathfrak{g}_i$. En vertu de 2.6 t est donc régulier.

b) Résulte de 3.12 a), H vérifiant l'hypothèse que toute fibre géométrique de $\mathfrak{h}$ contient un élément régulier de celle de $\mathfrak{g}$, grâce à 5.1.

c) En vertu de b), on est ramené à prouver que $\mathfrak{h}$ est contenu dans une sous-algèbre de Cartan et une seule de $\mathfrak{d}$. En vertu de a) on sait d'ailleurs que $\mathfrak{g}$ satisfait à (C_2). On est donc ramené au

Lemme 5.3. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* S *qui soit un module localement libre de type fini, et satisfasse la condition* (C_2) *de* 2.9*. Soit* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$ *qui satisfasse aux conditions suivantes : c'est un module localement facteur direct, elle est localement nilpotente, et pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, la fibre géométrique* $\mathfrak{h}_{\overline{s}}$ *contient un élément régulier de* $\mathfrak{g}_{\overline{s}}$*. Alors* $\mathfrak{h}$ *est contenu dans une sous-algèbre de Cartan et une seule de* $\mathfrak{g}$*.*

(N. B. dans le cas qui nous intéresse, $\mathfrak{h}$ satisfait aux conditions énoncées : elle est localement nilpotente car H est à fibres nilpotentes, et la condition sur les éléments réguliers résulte de 5.1). Comme 5.3 est local pour la topologie fpqc, il suffit de prouver qu'en un point $s \in \mathrm{S}$ tel que $\kappa(s)$ soit infini, il existe un voisinage ouvert U de s tel que existence et unicité soient vrais pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorisant par U. Prenons un élément régulier de $\mathfrak{g} \otimes \kappa(s)$ contenu dans $\mathfrak{h} \otimes \kappa(s)$, prolongeons-le en une section a de $\mathfrak{h}$ sur un voisinage ouvert U de s, grâce à (C_2) on peut supposer que cette section est régulière (2.10). On peut supposer $\mathrm{U} = \mathrm{S}$. Une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{h}$ contient a, donc est identique à $\mathfrak{d} = \mathrm{Nil}(a, \mathfrak{g})$ (2.6), d'où l'unicité. D'ailleurs comme $\mathfrak{h}$ est localement nilpotente, on a bien $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{d}$, ce qui prouve l'existence.

d) C'est un cas particulier de XII 7.9 d).

333 ***Corollaire 5.4***. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse et connexe sur un corps algébriquement clos* k*,* H *un sous-groupe algébrique connexe tel que* $\mathfrak{h}$ *contienne une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$*, i.e. tel que* H *contienne un sous-groupe de type* (C) *de* G*. Alors le nombre de conjugués de* H *contenant un élément régulier de* $\mathrm{G}(k)$*, est égal au nombre des conjugués de* $\mathfrak{h}$ *contenant un élément régulier de* $\mathfrak{g}$*.*

En effet, soit g un élément régulier de $\mathrm{G}(k)$, C l'unique sous-groupe de Cartan de G contenant g (XIII 2), alors les conjugués de H contenant g sont ceux contenant C (XIII 2.8 b)). Soit de même x un élément régulier de $\mathfrak{g}$, alors si un conjugué $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{h}$ contient x, alors $\mathrm{ad}(x)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'}$ est injectif (XIII 5.4) donc $\mathfrak{h}'$ contient $\mathrm{Nil}(x, \mathfrak{g}) = \mathfrak{d}$, donc le nombre de conjugués de $\mathfrak{h}$ contenant x est égal au nombre de conjugués contenant la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d}$. D'ailleurs $\mathfrak{d}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe D de type (C) de G. On peut évidemment supposer $\mathrm{C} \subset \mathrm{D}$, et l'assertion 5.4. résultera de ceci : *pour que* H *contienne* C*, il faut et suffit que* $\mathfrak{h}$ *contienne* $\mathfrak{d}$. En effet, en vertu de XIII 5.5 la relation $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{d}$ implique $\mathrm{H} \supset \mathrm{D}$ et a fortiori $\mathrm{H} \supset \mathrm{C}$. Inversement, par 5.1 $\mathfrak{t}$ contient un élément régulier x de $\mathfrak{g}$, alors $\mathrm{H} \supset \mathrm{C}$ implique $\mathfrak{h} \ni x$, donc comme on a déjà signalé, cela implique $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{d}$. Cela achève la démonstration.

Soit G comme dans 5.2 et supposons que le rang infinitésimal des fibres de G reste localement constant (condition (C_0)). Alors grâce à 5.2 c), on trouve un homomorphisme de foncteurs sur $(\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}}$:

$$\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

où

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(\mathrm{S}') &= \text{ ensemble des sous-groupes de Cartan de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \\ \mathscr{D}(\mathrm{S}') &= \text{ ensemble des sous-groupes de type (C) de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}\ . \end{aligned}$$

En vertu de 3.10 et 5.2 a), $\mathscr{D}$ est représentable par un préschéma lisse et quasi-projectif sur S. Considérons le sous-groupe D de type (C) de $G_{\mathscr{D}}$ jouant le rôle universel 334
par rapport à G/S, on peut considérer alors le foncteur $\mathscr{C}_D : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathscr{D}} \to (\mathbf{Ens})$ défini en termes du $\mathscr{D}$-groupe D comme $\mathscr{C}$ en termes du S-groupe G. On a alors le résultat suivant :

Proposition 5.5. — *Sous les conditions précédentes, considérons $\mathscr{C}$ comme un foncteur au-dessus du préschéma $\mathscr{D}$, alors $\mathscr{C}$ est $\mathscr{D}$-isomorphe au foncteur $\mathscr{C}_D$ « des sous-groupes de Cartan de* D *».*

Cela résulte aussitôt du

Corollaire 5.6. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes lisse de présentation finie,* D *un sous-groupe de type* (C) *de* G*. Alors il y a correspondance biunivoque entre les sous-groupes de Cartan de* G *contenus dans* D*, et les sous-groupes de Cartan de* D*,* (*de façon précise, pour un sous-groupe* H *de* G*,* H *est un sous-groupe de Cartan de* G *si et seulement si c'est un sous-groupe de Cartan de* D).

En effet, c'est un cas particulier de XII 7.9 c), compte tenu que sur un corps algébriquement clos, un sous-groupe de type (C) de G contient un sous-groupe de Cartan de G.

Pour le numéro suivant, le résultat principal obtenu ici est 5.2 c) pour H un sous-groupe de Cartan de G, qui permet d'énoncer 5.5 et fournit ainsi un « dévissage » utile de $\mathscr{C}$.

6. Applications à la structure des groupes algébriques

Théorème 6.1. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse sur un corps k. Considérons le schéma $\mathscr{T}$ des tores maximaux de* G*, isomorphe au schéma $\mathscr{C}$ des sous-groupes de Cartan de* G*, qui est un espace homogène sous* G^0*, et un schéma algébrique lisse affine connexe* (XII 7.1 d))*. Alors $\mathscr{C}$ est une variété rationnelle, i.e. le corps des fonctions rationnelles de $\mathscr{C}$ est une extension pure de k.*

Nous ferons d'abord la démonstration dans le cas où k est infini. On peut évidem- 335
ment supposer G connexe, car $\mathscr{T}$ donc $\mathscr{C}$ ne change pas en remplaçant G par G^0. De plus, en vertu de XII 7.6, $\mathscr{C}$ ne change pas en divisant G par un sous-groupe central. Cela nous permet, divisant d'abord par le centre de G, de supposer G affine (XII 6.1), puis, divisant par son centre réductif (XII 4.1 et 4.4), de supposer que le centre réductif de G est trivial (XII 4.7 b)). Par ailleurs nous procédons par récurrence sur $n = \dim G$, en supposant le théorème prouvé pour les dimensions $n' < n$. Si G est nilpotent, alors $\mathscr{C}$ est réduit à un point rationnel sur k, et 6.1 est trivial. Dans le cas contraire, l'algèbre de Lie de G est non nilpotente (1.3), donc les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont de dimension $n' < n$, donc les sous-groupes de type (C) de G sont de dimension $n' < n$. Considérons alors le morphisme

$$\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

envisagé dans 5.5. On sait par 3.10 (k étant un corps infini, donc $\mathfrak{g}$ contenant un élément régulier) que $\mathscr{D}$ est une variété rationnelle, i.e. le corps K des fonctions rationnelles sur $\mathscr{D}$ est extension pure de k. Considérons la fibre de $\mathscr{C}$ en le point générique x de $\mathscr{D}$, c'est en vertu de 5.5 le schéma des sous-groupes de Cartan d'un certain groupe algébrique D_x lisse et connexe sur $\mathrm{K} = \kappa(x)$ (savoir $\mathrm{D}_x =$ « le sous-groupe de type (C) générique de G »). Le corps L des fonctions rationnelles sur $\mathscr{C}$ est donc isomorphe au corps des fonctions rationnelles sur $\mathscr{C}_{\mathrm{D}_x}$, qui par l'hypothèse de récurrence (comme $\dim \mathrm{D}_x = n' < n$) est une extension pure de K. Donc par transitivité L est une extension pure de k.

Lorsque k est fini, il faut une démonstration différente. On peut encore supposer que G est affine et connexe. Noter que k est parfait, il en résulte aussitôt que le radical $\overline{\mathrm{R}}$ de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ est « défini sur k » i.e. provient d'un sous-groupe R de G. Supposons d'abord $\mathrm{R} \neq \mathrm{G}$ i.e. G non résoluble, et soit

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{R}$$

336 le morphisme canonique. Considérons le morphisme correspondant $\mathrm{C} \mapsto u(\mathrm{C})$

$$v : \mathscr{C}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{G}'}$$

(dont la définition est immédiate en vertu de XII 7.1 e)). Soit x le point générique de $\mathscr{C}_{\mathrm{G}'}$, alors la fibre $v^{-1}(x)$ s'identifie au schéma des sous-groupes de Cartan de G_{K} (où $\mathrm{K} = \kappa(x)$) dont l'image dans G'_{K} est un certain sous-groupe de Cartan C'_x (savoir, « le sous-groupe de Cartan générique de G′ »). C'est donc aussi le schéma des sous-groupes de Cartan de $\mathrm{H} = u_{\mathrm{K}}^{-1}(\mathrm{C}')$ (XII 7.9 c)) et comme K est ici une extension infinie de k, il résulte de la partie déjà prouvée de 7.1 que le corps L des fonctions rationnelles de $\mathscr{C}_{\mathrm{G}}$, égal à celui de $\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$, est une extension transcendante pure de K. Pour prouver que c'est une extension transcendante pur de k, il suffit donc de prouver qu'il en est ainsi de K, i.e. on est ramené au cas où G est semi-simple. On peut de plus supposer que G est adjoint (quitte à diviser G par son centre réductif). Mais alors en vertu de 3.18 on a $\mathscr{C}_{\mathrm{G}} \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{G}}$, et en vertu de 3.10 il suffit de prouver que $\mathfrak{g}$ admet un point régulier, ce qui (comme on l'a signalé dans 3.20) est un résultat inédit de Chevalley [(7)].

Il reste donc seulement à traiter le cas où k est fini, G connexe affine *résoluble*. On a en fait un résultat plus général :

Corollaire 6.2. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse résoluble sur un corps k, alors la variété $\mathscr{C}$ des sous-groupes de Cartan de* G *est isomorphe à un espace affine* $\operatorname{Spec} k[t_1, \dots, t_{\mathrm{N}}]$.

On peut encore supposer G connexe, et affine. Soit G_∞ le plus petit des groupes figurant dans la série centrale descendante de G (par des G_i tels que $\mathrm{G}_{i+1} = [\mathrm{G}, \mathrm{G}_i]$) ; c'est donc le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que $\mathrm{G}/\mathrm{G}_\infty$ soit nilpotent. Soit C un sous-groupe de Cartan de G (il en existe en vertu de 1.1), alors l'image de C dans $\mathrm{G}/\mathrm{G}_\infty$ en est un sous-groupe de Cartan, donc est égale à $\mathrm{G}/\mathrm{G}_\infty$, par suite le morphisme $g \mapsto \mathrm{Ad}(g) \cdot \mathrm{C}$ de G_∞ dans $\mathscr{C}$ est un épimorphisme, et identifie

(7) N.D.E. : cf. l'Appendice, par J. -P. Serre

$\mathscr{C}$ à l'espace homogène $G_\infty/N\cap G_\infty$, où N est le normalisateur de C dans G (d'ailleurs **337**
égal à C comme on a rappelé dans 4.4, mais peu importe ici). Noter que $U = G_\infty$ est évidemment un groupe algébrique lisse et connexe « unipotent » (car sur la clôture algébrique de k, il est contenu dans la partie unipotente de G, en vertu de la structure connue des groupes lisses affines résolubles, BIBLE 6 th, 3). Lorsque k est parfait, (seul cas nécessaire pour établir 6.1), il s'ensuit très facilement que U est même *k-unipotent*, i.e. admet une suite de composition par des sous-groupes algébriques U_i tels que U_i/U_{i+1} soit isomorphe à $\mathbb{G}_a$. En fait, Rosenlicht a prouvé que ce résultat reste valable pour un groupe de la forme G_∞ comme dessus, sans restriction sur k (M. Rosenlicht, Questions of rationality for solvable algebraic groups over non perfect fields, Annali di Matematica 1963, pp. 97-120, theorem 4 cor. 2), résultat nettement plus délicat que nous admettrons ici. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme suivant, sans doute bien connu des spécialistes :

Lemme 6.3. — *Soit* U *un groupe algébrique lisse connexe sur un corps k,* $X = U/V$ *un espace homogène sous* U *ayant un point rationnel sur k. Supposons* U *k-unipotent. Alors en tant que k-schéma,* X *est isomorphe à un espace affine* $\operatorname{Spec} k[t_1, \dots, t_N]$.

Soit en effet $(U_i)_{0\leqslant 1\leqslant n}$ une suite de composition de U par des sous-groupes lisses connexes, avec $U_n = (e)$, $U_0 = U$, $U_i/U_{i+1} \simeq \mathbb{G}_a$, les U_i invariants dans U. Alors les $K_i = U_iV$ sont des sous-groupes algébriques de U (pas nécessairement lisses ni connexes si V ne l'est pas, mais peu nous chaut), et K_{i+1} est invariant dans K_i. On a un morphisme canonique $U_i/U_{i+1} \to K_i/K_{i+1}$ qui est un épimorphisme, ce qui prouve que K_i/K_{i+1} est soit réduit au groupe unité, soit isomorphe à $\mathbb{G}_a/H_i$, où H_i est un sous-groupe fini de $\mathbb{G}_a$, ce qui en vertu de Rosenlicht (*loc. cit.*, th 2) implique que $K_i/K_{i+1} \simeq \mathbb{G}_a$, (résultat d'ailleurs immédiat si k est parfait). Posons maintenant $X_i = U/K_i$, prouvons par récurrence sur i que X_i est isomorphe à un espace affine. En effet, s'il en est ainsi pour X_i, prouvons qu'il en est de même de X_{i+1}. Si $K_i/K_{i+1} = e$
on a $X_i = X_{i+1}$ et c'est trivial. Sinon, X_{i+1} est un fibré principal de base X_i et de **338**
groupe structural $\mathbb{G}_a \simeq K_i/K_{i+1}$. Donc, X_i étant affine, X_{i+1} est un fibré trivial donc est isomorphe à $X_i \times \mathbb{G}_a$, ce qui prouve encore que X_{i+1} est isomorphe à un espace affine type. Cela prouve 6.2 et par suite achève de prouver 6.1.

Corollaire 6.4. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse sur un corps infini k. Alors l'ensemble des points de* $\mathscr{C}$ (*notations de* 6.1) *rationnels sur k est dense pour la topologie de Zariski. La réunion des sous-groupes de Cartan de* G *est dense dans* G.

La première assertion est valable pour toute variété unirationnelle sur un corps infini, et est d'ailleurs ici pour nous la conséquence « arithmétique » la plus importante des résultats d'unirationalité. La deuxième assertion résulte de la première et du théorème de densité XIII 2.1.

Corollaire 6.5. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse connexe sur k. Alors la variété* Z *des points semi-simples réguliers de* G (XIII 3.5) *est une variété unirationnelle. En particulier, si k est infini, l'ensemble des points de* Z *rationnels sur k est dense dans* Z.

En effet, Z est un ouvert d'un tore sur $\mathscr{C}$, donc son corps des fonctions L est le corps des fonctions d'un tore défini sur le corps des fonction K de $\mathscr{C}$ (savoir le « tore maximal générique » de G), c'est donc une extension unirationnelle de K (XIII 3.4), et comme K est une extension pure de k en vertu de 6.1, L est une extension unirationnelle de k.

Corollaire 6.6. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse connexe sur* k*, et soit* H *le sous-groupe de* G *engendré par la sous-variété* Z *des points semi-simples réguliers, i.e.* (XII 8.2) *le plus petit sous-groupe algébrique invariant de* G *tel que* G/H *soit de rang réductif nul* (*i.e. soit sur la clôture algébrique de* k *extension d'une variété abélienne par un groupe lisse connexe unipotent*)*. Alors* H *est une variété unirationnelle. En particulier, si* G = H *i.e.* (XII 8.4) *si* G *est affine et si sur la clôture algébrique* $\overline{k}$*,*
339 *il n'existe pas d'homomorphisme non trivial de* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *dans* $\mathbb{G}_a$*, alors* G *est une variété unirationnelle, donc si* k *est infini, l'ensemble de ses points rationnels sur* k *est dense.*

Ceci résulte aussitôt de 6.5, car il est immédiat que si on a des k-préschémas lisses connexes Z_i qui sont des variétés unirationnelles et des morphismes $u_i : \mathrm{Z}_i \to \mathrm{G}$, alors le sous-groupe algébrique de G engendré par les u_i ($\mathrm{VI_B}$ 7.1) est une variété unirationnelle.

Comme cas particulier intéressant de 6.5 ou 6.6 (au choix), notons :

Corollaire 6.7. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse connexe affine de rang unipotent nul, alors* G *est une variété unirationnelle.*

On peut préciser 6.4 de la façon suivante :

Corollaire 6.8. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse connexe sur le corps infini* k*, et soit* C *un sous-groupe de Cartan de* G*. Alors la réunion des conjugués de* C *par des éléments semi-simples réguliers de* G(k) *est dense dans* G*.*

Cela résulte aussitôt de 6.4 et de XIII 3.6 qui dit que le morphisme $\varphi : \mathrm{Z} \times \mathrm{C} \to \mathrm{G}$ défini par $\varphi(t, c) = \mathrm{ad}(t)c$ est dominant. Ce résultat implique aussi (sans supposer k infini) :

Corollaire 6.9. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse connexe sur* k*,* H *un sous-groupe algébrique lisse connexe de* G*, tel que* H *ait même rang réductif et même rang nilpotent que* G (*i.e. sur la clôture algébrique* $\overline{k}$ *de* k*,* $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ *contient un sous-groupe de Cartan de* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$)*. Si* H *est une variété unirationnelle, il en est de même de* G*. Si* H(k) *est dense dans* H*,* G(k) *est dense dans* G*.*

En effet, le morphisme $\varphi : \mathrm{Z} \times \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ défini par $\varphi(t, h) = \mathrm{ad}(t)h$ est dominant, or en vertu de 6.5, Z est une variété unirationnelle, et par hypothèse il en est de même de H, donc de Z × H, d'où le premier résultat. Le deuxième se prouve de façon analogue.

Nous retrouvons maintenant le résultat bien connu suivant (dû à Chevalley, en caractéristique 0, à Rosenlicht en caractéristique $p > 0$) :

340 ***Corollaire 6.10***. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse connexe affine sur un corps parfait* k*. Alors* G *est une variété unirationnelle, donc si* k *est de plus infini,* G(k) *est dense dans* G*.*

En effet, en vertu de 1.1, G admet un sous-groupe de Cartan C. En vertu de 6.9 il suffit de prouver que ce dernier est une variété unirationnelle. Or k étant parfait, on voit aussitôt par descente galoisienne à partir du cas k algébriquement clos (BIBLE 6 th.2) que l'on a $\mathrm{C} = \mathrm{T} \times \mathrm{C}_u$, où T est le tore maximal de C et C_u un groupe lisse connexe unipotent. On sait déjà que T est une variété unirationnelle (XIII 3.4), il reste à voir qu'il en est de même de C_u. Or k étant parfait, C_u est même k-unipotent, et on peut appliquer 6.3.

Remarques 6.11. — a) On connaît (Rosenlicht) des exemples de formes tordues de $\mathbb{G}_a$ sur un corps non parfait, qui n'ont qu'un nombre fini de points rationnels, donc a fortiori ce ne sont pas des variétés unirationnelles. D'autre part, Chevalley a donné un exemple de tore sur un corps de caractéristique nulle, qui n'est pas une variété rationnelle. Par contre, il résulte de la théorie de Chevalley des groupes semi-simples que sur un corps algébriquement clos, tout groupe algébrique lisse connexe affine est une variété rationnelle. Notons d'ailleurs que la question d'unirationnalité ne se pose de toutes façons que pour les groupes algébriques *affines*, un groupe algébrique unirationnel étant nécessairement affine d'après le théorème de structure de Chevalley.

b) Avec les notations de 6.6, il est tentant d'essayer de donner une condition d'unirationnalité de G en termes du groupe G/H, (qui est unipotent si G est supposé affine). Il *faut* évidemment que ce dernier soit unirationnel, cette condition est-elle également suffisante ? Notons qu'un exemple de Rosenlicht (*loc. cit.*) montre qu'un groupe algébrique lisse connexe unipotent U peut être une variété rationnelle, sans être k-unipotent.

c) Il serait intéressant d'étudier, sur un corps *fini* k, des questions du type « densité », comme la suivante (soulevée par Rosenlicht) : Soit G un groupe algébrique **341**
lisse et connexe sur k, alors G est-il engendré par ses sous-groupes de Cartan [(*)][(8)] ?

[(*)]Cette question a depuis été résolue par l'affirmative par Steinberg.

[(8)]N.D.E. : n'ayant pas identifié ce résultat dans les Collected Papers de R. Steinberg, donnons-en une preuve fondée sur la décomposition de Bruhat. Soit G/k un groupe semi-simple défini sur le corps fini k. Il s'agit de montrer que G est engendré par ses k-sous-groupes de Cartan. Cette question est stable par isogénie centrale et par restriction des scalaires ; on est donc ramené au cas où G est géométriquement simple (de la même façon qu'au lemme 1 de l'appendice ci-après). On note $\mathrm{G}^\sharp$ le sous-groupe de G engendré par ses sous-k-tores. Le groupe G est quasi-déployé (Lang) et admet donc un couple de Killing (T,B). Par définition, on a $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}^\sharp$; en particulier T normalise $\mathrm{G}^\sharp$. La grosse cellule $\mathrm{R}_u(\mathrm{B}^-)\,\mathrm{T}\,\mathrm{R}_u(\mathrm{B})$ de G indique qu'il suffit de vérifier que $\mathrm{R}_u(\mathrm{B}) \subset \mathrm{G}^\sharp$. Soit S le k-tore déployé maximal de T. On considère le système de racines relatif $\Phi(\mathrm{G},\mathrm{S})$ et une base Δ_k. Étant donné $\alpha \in \Phi(\mathrm{G},\mathrm{S})$, on note $\mathrm{U}_{(\alpha)}$ le sous-groupe unipotent associé à α (cf. A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, seconde édition (1991), Springer, Prop. 21.9). Vu que le k-groupe $\mathrm{R}_u(\mathrm{B})$ est engendré par les k-groupes unipotents $\mathrm{U}_{(\alpha)}$ $(\alpha \in \Delta_k)$, on est ramené à vérifier que $\mathrm{U}_{(\alpha)} \subset \mathrm{G}^\sharp$. Un coup d'oeil sur la classification montre qu'il existe un groupe semi-simple G_α de type quasi-déployé A_1, ${}^2\mathrm{A}_1$, ${}^3\mathrm{A}_1$ ou ${}^2\mathrm{A}_2$ tel que $\mathrm{U}_{(\alpha)} \subset \mathrm{G}_\alpha \subset \mathrm{G}$. Il est donc loisible de supposer que $\mathrm{G} = \mathrm{PGL}_2$ ou $\mathrm{G} = \mathrm{SU}_3(\mathrm{K})$, où K désigne l'unique extension quadratique de corps de k. Le groupe $\mathrm{PGL}_2^\sharp$ contenant le tore déployé standard T, les possibilités à conjugaison près sous $\mathrm{G}(k)$ sont les suivantes : $\mathrm{PGL}_2^\sharp = \mathrm{T}$, $\mathrm{PGL}_2^\sharp = \mathrm{B}$, ou $\mathrm{PGL}_2^\sharp = \mathrm{PGL}_2$. Le cas $\mathrm{PGL}_2^\sharp = \mathrm{T}$ est exclu puisque $\mathrm{PGL}_2^\sharp$ contient le k-tore $\mathrm{R}_{\mathrm{K}/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$. La discussion précédente indique que si $\mathrm{PGL}_2^\sharp = \mathrm{B}$, alors $\mathrm{PGL}_2^\sharp = \mathrm{PGL}_2$. On a donc $\mathrm{PGL}_2^\sharp = \mathrm{PGL}_2$. Si

Dans cette question, on peut se ramener au cas G affine, en divisant par le centre. La réponse serait affirmative dans le cas G semi-simple, si on pouvait préciser le résultat d'existence de points réguliers de Chevalley signalé dans 3.20, de façon à obtenir un élément régulier de $\mathfrak{g}$ qui n'appartienne pas à $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{H})$, où H est un sous-groupe algébrique lisse de G et $\neq$ G donné à l'avance, (G groupe semi-simple adjoint sur le corps fini k).

$\mathrm{G} = \mathrm{SU}_3(\mathrm{K})$, $\Delta_k = \{\alpha\}$ et les possibilités pour $\mathrm{G}^\sharp$ (à conjugaison près) sont les suivantes : $\mathrm{G}^\sharp = \mathrm{T}$, $\mathrm{G}^\sharp = \mathrm{B}$, $\mathrm{G}^\sharp = \mathrm{U}_{(2\alpha)} \rtimes \mathrm{T}$, $\mathrm{G}^\sharp = \langle \mathrm{U}_{(2\alpha)}, \mathrm{U}_{(-2\alpha)}, \mathrm{T}\rangle = \mathrm{SL}_2 \cdot \mathrm{T}$, ou $\mathrm{G}^\sharp = \mathrm{G}$. Le cas $\mathrm{G}^\sharp = \mathrm{B}$ est exclu comme pour PGL_2. Le cas $\mathrm{SL}_2 \cdot \mathrm{T}$ est exclu parce que $\mathrm{G}^\sharp$ contient le k-tore $\mathrm{R}^1_{\mathrm{K}/k}\Big(\mathrm{R}^1_{\mathrm{K}_3/\mathrm{K}}(\mathbb{G}_m)\Big)$, K_3/K désignant l'extension de degré 3 de K, et la classe d'isogénie de ce tore est irréductible. En outre, ce tore exclut aussi les cas $\mathrm{G}^\sharp = \mathrm{T}$ et $\mathrm{G}^\sharp = \mathrm{U}_{(2\alpha)} \rtimes \mathrm{T}$. On conclut que $\mathrm{G}^\sharp = \mathrm{G}$.

7. APPENDICE : Existence d'éléments réguliers sur les corps finis 342

par J. -P. Serre

Dans tout ce qui suit, k désigne un corps *fini*, et $\overline{k}$ sa clôture algébrique ; le groupe de Galois de $\overline{k}/k$ est noté $\mathscr{G}$; on rappelle que, si $q = \mathrm{Card}(k)$, $\mathscr{G}$ est topologiquement engendré par l'élément « de Frobenius » $\mathrm{F} : x \mapsto x^q$.

On se propose de démontrer le théorème suivant[1] :

Théorème. — *Soit* G *un groupe semi-simple adjoint défini sur k, et soit g son algèbre de Lie. La k-algèbre de Lie $g(k)$ contient un élément régulier.*

Remarques. — (1) Il est bon de rappeler que « adjoint » signifie que le centre de G est trivial (en tant que sous-schéma en groupes de G). Vu le séminaire Chevalley, cela signifie aussi que, si T est un tore maximal de G, le groupe X(T) des caractères de T (définis sur $\overline{k}$) est *engendré* par l'ensemble R des racines. Il en résulte en particulier que le rang de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est égal à la dimension de T (i.e. au rang de G).

(2) Le rédacteur ignore si l'hypothèse que G est adjoint est indispensable.

Lemme 1. — *Il suffit de prouver le théorème lorsque* G *est géométriquement simple.*

(On dit que G est géométriquement simple si $\mathrm{G}\otimes\overline{k}$ ne contient aucun sous-schéma en groupes distingué lisse sur $\overline{k}$, à part G et $\{e\}$; condition équivalente : le système de racines R associé est irréductible).

On peut d'abord supposer G indécomposable sur k. Le groupe $\mathrm{G}\otimes\overline{k}$ est alors 343
produit de composantes géométriquement simples S qui sont permutées transitivement par le groupe de Galois $\mathscr{G}$. Si $\mathscr{H}$ est le sous-groupe de $\mathscr{G}$ laissant fixe l'une de ces composantes S, cette composante est définie sur le corps K correspondant à $\mathscr{H}$ (i.e. provient par extension des scalaires d'un sous-schéma de $\mathrm{G}\otimes\mathrm{K}$), et un argument standard montre que $\mathrm{G} = \prod_{\mathrm{K}/k}(\mathrm{S})$ (i.e. $\mathrm{R}_{\mathrm{K}/k}(\mathrm{S})$, pour les lecteurs habitués aux notations de Weil). De même, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G s'identifie à $\prod_{\mathrm{K}/k}\mathfrak{s}$, où $\mathfrak{s}$ est l'algèbre de Lie de S. Si le théorème est vrai pour S, il existe $x \in \mathfrak{s}(\mathrm{K}) = \mathfrak{g}(k)$ qui est régulier dans $\mathfrak{s}$; on vérifie alors aisément qu'il est régulier dans $\mathfrak{g}$. C.Q.F.D.

À partir de maintenant, on suppose G *géométriquement simple* et l'on choisit un tore maximal T de G (on sait que c'est possible). On note X le groupe des caractères de $\mathrm{T}\otimes\overline{k}$, R son système de racines, W son groupe de Weyl et E le groupe d'automorphismes de X conservant R. Le groupe W est un sous-groupe distingué de E.

Si T′ est un autre tore de G, on note X′, R′, W′, E′ le groupe des caractères, système de racines,..., correspondants. Si l'on choisit $y \in \mathrm{G}(\overline{k})$ tel que $y\cdot(\mathrm{T}\otimes\overline{k})\cdot y^{-1} = \mathrm{T}'\otimes\overline{k}$, on peut identifier X′, R′, W′, E′ à X, R, W, E grâce à $\mathrm{int}(y)$. Changer y modifie cette identification par un automorphisme de X correspondant à un élément de W.

---

[1] Ce théorème est dû à Chevalley. Le rédacteur tient à exprimer sa reconnaissance à l'American Express qui, en égarant une malle de manuscrits de Chevalley, l'a obligé à reconstituer la démonstration.

Le générateur canonique $x \mapsto x^q$ de $\mathscr{G}$ opère sur X' en laissant stable R' ; il définit donc un élément $f_{\mathrm{T}'}$ de E'. On posera en particulier $f = f_{\mathrm{T}}$. Lorsqu'on identifie E' à E comme on vient de le dire, l'élément $f_{\mathrm{T}'}$ se transforme en un élément f' de E, défini au remplacement près par $wf'w^{-1}$, avec $w \in \mathrm{W}$. On va comparer cet élément à f :

Lemme 2. — *On a* $f' \equiv f \mod \mathrm{W}$ *; réciproquement, tout* $f' \in \mathrm{E}$ *vérifiant cette condition peut s'obtenir à partir d'un tore maximal* T' *de* G.

Posons $\overline{\mathrm{T}} = \mathrm{T} \otimes \overline{k}$, $\overline{\mathrm{T}}' = \mathrm{T}' \otimes \overline{k}$, et soit $y \in \mathrm{G}(\overline{k})$ tel que $y\overline{\mathrm{T}}y^{-1} = \overline{\mathrm{T}}'$; comme
344 $y^q\overline{\mathrm{T}}y^{-q} = \overline{\mathrm{T}}'$, on en conclut que $n = y^{-1}y^q$ appartient au *normalisateur* N(T) de T. L'effet de f' sur les points de $\mathrm{T}(\overline{k})$ est alors le suivant :

$$f'(t) = y^{-1}(yty^{-1})^q y = y^{-1}y^q t^q y^{-q} y = nt^q n^{-1}.$$

Si $w \in \mathrm{W}$ est l'élément défini par n, cela montre que f' et $f \circ w$ ont même effet sur les points de $\overline{\mathrm{T}}$, donc aussi sur ses caractères, et l'on a $f' = f \circ w$, d'où $f' \equiv f \mod \mathrm{W}$. Inversement, si $w \in \mathrm{W}$ est donné, on le représente par un élément $n \in \mathrm{N(T)}(\overline{k})$; grâce à un théorème classique de Lang, on peut écrire n sous la forme $n = y^{-1}y^q$, avec $y \in \mathrm{G}(\overline{k})$; le tore $\overline{\mathrm{T}}' = y\overline{\mathrm{T}}y^{-1}$ est alors défini sur k, et le calcul précédent montre que le f' correspondant est égal à $f \circ w$.

Lemme 3. — *Soient* X, R, W, E *comme ci-dessus* (R *étant irréductible*), *et soit* $\varphi \in \mathrm{E/W}$. *Il existe alors un élément* $f \in \mathrm{E}$ *représentant* φ, *ainsi qu'une famille* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *de racines jouissant des deux propriétés suivantes :*

(1) $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *est une base de* X.

(2) R *est réunion des orbites des* θ_i *par les puissances de* f (i.e. tout $a \in \mathrm{R}$ s'écrit $a = f^m\theta_i$, avec m et i convenables).

On donnera la démonstration un peu plus loin.

Voici maintenant un lemme d'algèbre linéaire :

Lemme 4. — *Soit* V *un espace vectoriel sur* k, *et soit* $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *une base du dual de* $\mathrm{V} \otimes \overline{k}$. *Il existe* $x \in \mathrm{V}$ *tel que* $\theta_i(x) \neq 0$ *pour tout* i.

Soit V^* le dual de V, et soit $\overline{\mathrm{W}}_i$ le sous-espace de $\mathrm{V}^* \otimes \overline{k}$ engendré par les conjugués de θ_i ; ce sous-espace est défini sur k, i.e. de la forme $\mathrm{W}_i \otimes \overline{k}$. L'application évidente $\mathrm{W}_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{W}_n \to \wedge^n \mathrm{V}^*$ n'est pas nulle (sinon son extension à $\overline{k}$ le serait aussi, ce qui est absurde puisque $\theta_i \in \overline{\mathrm{W}}_i$, et $\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n \neq 0$). Il existe donc une base de V^* formée d'éléments $u_i \in \mathrm{W}_i$. Soit $x \in \mathrm{V}$ tel que $u_i(x) \neq 0$ pour tout i (par exemple $u_i(x) = 1$). L'élément x répond à la question, car, si l'on avait $\theta_i(x) = 0$, les conjugués de θ_i s'annuleraient aussi en x, et il en serait de même de u_i, ce qui n'est pas le cas.

345 *Fin de la démonstration du théorème.*

En combinant les lemmes 2 et 3, on peut choisir un tore T dont l'élément f vérifie les propriétés du lemme 3. Si Y est le dual de X, l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}(\overline{k})$ de $\overline{\mathrm{T}}$ [9] s'identifie canoniquement à $\mathrm{Y} \otimes \overline{k}$, et cette opération est compatible avec l'action du groupe de

[9] N.D.E. : on a changé T en $\overline{\mathrm{T}}$.

Galois (ce dernier opérant sur $\mathrm{Y} \otimes \overline{k}$ grâce à son action sur Y et sur $\overline{k}$). Soit $\mathrm{V} = \mathfrak{t}(k)$ l'algèbre de Lie de de T sur k. Un élément $x \in \mathrm{V}$ est régulier si et seulement si il n'est annulé par aucune racine $\alpha \in \mathrm{R}$, ou plutôt par aucune des formes linéaires $\overline{\alpha} \in \mathrm{V}^* \otimes \overline{k}$ définies canoniquement par les $\alpha \in \mathrm{R}$. D'après le lemme 4, on peut trouver un tel x qui ne soit annulé par aucune des racines θ_i ; mais toute racine est conjuguée d'une θ_i (c'est ce qu'exprime la condition (2) du lemme 3) ; il s'ensuit que x n'est annulé par *aucune racine*, et c'est bien un élément régulier.

Démonstration du lemme 3.

Elle s'appuie sur les propriétés des *transformations de Coxeter.* Rappelons brièvement en quoi cela consiste :

Soit $a_1, \dots, a_n$ un système simple de racines de R, et, pour tout i, soit r_i la symétrie correspondant à a_i. Posons :

$$c = r_1 \cdots r_n.$$

On a $c \in \mathrm{W}$; bien entendu l'élément c dépend du choix du système simple $(a_1, \dots, a_n)$ ainsi que de l'ordre des a_i ; toutefois on démontre que sa classe de conjugaison ne dépend d'aucun de ces choix. On appelle *c l'élément de Coxeter* du système considéré. On démontre (nous l'admettrons) que *c n'admet* pas 1 *pour valeur propre.*

Lemme 5. — *Posons $\theta_i = r_n \cdots r_{i+1}(a_i)$. Alors :*

(a) *Les θ_i forment une base du groupe* X *engendré par les racines,*

(b) *On a $\theta_i > 0$ et $c(\theta_i) < 0$ pour tout i.*[2]

(c) *Toute racine $a \in \mathrm{R}$ telle que $a > 0$ et $c(a) < 0$ est égale à l'une des θ_i.* **346**

(d) R *est réunion des orbites des θ_i par les puissances de c.*

Il est clair que θ_i est de la forme $a_i + \Sigma_{j>i} m_{ij} a_j$, avec $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, ce qui démontre (a). Les assertions (b) et (c) sont conséquences de la remarque suivante : la symétrie r_i conserve le signe de toute racine distincte de $\pm a_i$, et change le signe de $\pm a_i$.

Enfin, pour (d) on remarque qu'une orbite de c ne peut être formée entièrement de racines positives (resp. négatives), car, en prenant la somme de ces racines on trouverait un élément non nul de X invariant par c, et l'on a bien voulu admettre que c n'admet pas 1 pour valeur propre. Il y a donc nécessairement dans toute orbite un élément $a > 0$ tel que $c(a) < 0$, et on applique (c).

Remarque. — On a esquissé la démonstration précédente seulement pour faciliter la tâche du lecteur ; on aurait pu se borner à renvoyer aux textes canoniques sur Coxeter (cf. par exemple Koszul, Séminaire Bourbaki, 1959/1960, exposé 191). Lesdits textes contiennent d'autres résultats : les orbites de c ont toutes le même nombre h d'éléments, et chacune ne contient qu'un seul θ_i. En particulier $h = \mathrm{Card}(\mathrm{R})/n$.

Revenons maintenant à la *démonstration du lemme* 3. Distinguons trois cas :

(1) *L'élément $\varphi \in \mathrm{E}/\mathrm{W}$ donné est égal à l'élément neutre.*

On doit alors prendre $f \in \mathrm{W}$; on choisit $f = c$; ça marche d'après le lemme 5.

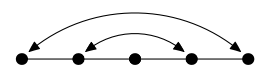
[2] Pour la relation d'ordre définie par $(a_1, \dots, a_n)$.

(2) *Le système* R *est du type* A_n, *avec* n *pair* $\geqslant 2$, *et* φ *est l'unique élément non trivial de* E/W.

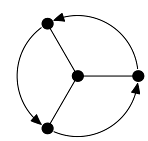
On sait que $-1 \notin \mathrm{W}$; on prend alors $f = -c$. Un calcul simple montre que c est d'ordre $h = n+1$; son ordre est donc impair. Si $a \in \mathrm{R}$ est une racine quelconque,
347 on a $a = c^m\theta_i$ pour un couple (m,i), cf. lemme 5 ; quitte à ajouter h à m, on peut supposer m *pair*, et on voit que l'on a alors $a = (-c)^m\theta_i = f^m\theta_i$. Les orbites des θ_i remplissent donc bien R.

(3) *L'élément* $\varphi \in \mathrm{E/W}$ *est non trivial, et* R *est de l'un des types suivants* :

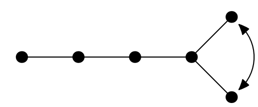
A_n, n *impair* ≥ 3



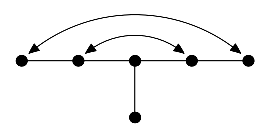
D_4



D_n, $n \geq 5$



E_6.



(Un coup d'oeil sur la classification montre que ce sont bien là tous les cas (avec A_n, n pair) où E/W est non trivial.)

Soit S un système simple de racines, que nous ne numérotons pas pour l'instant. On sait que E est produit semi-direct de W et du groupe Ψ des permutations de S qui laissent invariante la matrice de Cartan (ou le diagramme de Dynkin, c'est la même chose). Le groupe E/W s'identifie ainsi à Ψ, et en particulier φ correspond à un élément $\psi \in \Psi$. On constate par inspection des diagrammes de Dynkin (cf. figures ci-dessus) que *toute orbite de* ψ *dans* S *est formée de racines deux à deux orthogonales* (i.e. non liées dans le diagramme). [Noter que ce ne serait pas le cas pour A_n (n pair), ce qui nous a obligé à traiter ce cas séparément.] Si σ est une telle orbite, les symétries r_a, $a \in \sigma$, commutent entre elles ; leur produit sera noté ρ_σ. Il est clair que ρ_σ commute à ψ.

Ceci étant, choisissons sur S un ordre total tel que toute orbite soit un *segment* pour cette relation d'ordre ; cela revient à numéroter les éléments de S : $\mathrm{S} = \{a_1, \dots, a_n\}$. Soient $\theta_1, \dots, \theta_n$ les racines définies plus haut, et $c = r_1 \cdots r_n$ l'élément de Coxeter correspondant. L'élément c est produit des ρ_σ, les σ étant rangés dans un certain ordre ; il s'ensuit qu'il *commute à* ψ. On pose alors $f = c\psi$. On remarque en plus que
348 ψ *permute* les θ_i entre eux. En effet, on a $\psi(\theta_i) > 0$ puisque $\theta_i > 0$ et $c(\psi(\theta_i)) = \psi(c(\theta_i')) < 0$, donc (lemme 5, (c)), $\psi(\theta_i)$ est égal à un θ_j. Il est maintenant immédiat

que $f = c\psi$ répond à la question. En effet, si $a \in \mathrm{R}$, on a $a = c^m\theta_i$ pour un couple (m, i), d'où $a = f^m(\psi^{-m}\theta_i) = f^m\theta_j$ pour un certain j. C.Q.F.D.

Remarque. — On peut prouver que, sauf dans le cas (2), toute orbite de f a exactement $h = \mathrm{Card}(\mathrm{R})/n$ éléments et contient un θ_i et un seul. Dans le cas (2), certains des θ_i sont inutiles.

EXPOSÉ XV

COMPLÉMENTS SUR LES SOUS-TORES D'UN PRÉSCHÉMA EN GROUPES. APPLICATION AUX GROUPES LISSES.

par M. Raynaud (*)

0. Introduction

349

Cet exposé complète et reprend partiellement les exposés XI et XII ; la connaissance des exposés XIII et XIV n'est pas indispensable. Poursuivant l'effort entrepris dans XII, nous travaillerons sur des S-préschémas en groupes non nécessairement affines et non nécessairement séparés sur S.

Les paragraphes 1, 2, 3, 4 sont consacrés à l'étude des sous-tores d'un préschéma en groupes. On obtient des théorèmes de relèvement infinitésimal (§ 2) et global (§ 4), où un rôle essentiel est joué par les points d'ordre fini (§ 1).

Les paragraphes 5, 6 et 7 sont indépendants des paragraphes précédents. La considération des voisinages infinitésimaux conduit à la représentabilité du foncteur des sous-groupes lisses égaux à leur normalisateur connexe (§ 5). Aux § § 6 et 7, on s'intéresse plus spécialement aux sous-groupes de Cartan.

Enfin, on donne au § 8 une condition nécessaire et suffisante pour que le foncteur des sous-tores d'un groupe lisse, ou celui des tores maximaux, soit représentable.

1. Relèvement des sous-groupes finis

350

1. *Sous-groupes de type multiplicatif finis, lisses et centraux*

Proposition 1.1. — *Soient* S *un schéma affine,* S_0 *un sous-schéma fermé de* S *défini par un idéal de carré nul,* G *un* S*-préschéma en groupes,* H_0 *un sous-schéma en groupes de* $G_0 = G \times_S S_0$*, qui soit lisse sur* S_0*, de type fini, et de type multiplicatif. Alors, pour qu'il existe un sous-schéma en groupes de* G*, de type* multiplicatif*, qui*

(0) version xy du 1/12/08

(*) Cet exposé et les deux suivants (Exp. XVI et XVII) ne correspondent pas à des exposés oraux du séminaire. Ils développent, avec quelques compléments, la substance de notes manuscrites (succintes) de A. Grothendieck, écrites en 1964, à l'occasion du présent séminaire.

relève H_0*, il faut et il suffit qu'il existe un sous-schéma* H' *de* G*,* plat sur S*, qui relève* H_0.

La nécessité de la condition est bien claire, prouvons la suffisance. Le groupe de type multiplicatif H_0 est quasi-isotrivial (X 4.5) ; d'après Exp. X 2.1, il existe un S-groupe de type multiplicatif H et un S_0-isomorphisme de groupes :

$$u_0 : \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0.$$

Comme H' est plat sur S et $\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$ de présentation finie sur S_0 (Exp. IX 2.1 b)), H' est de présentation finie sur S ; par ailleurs, ses fibres sont lisses, donc H' est lisse sur S (EGA IV 17.5.1). Le schéma S étant affine, u_0 se relève donc en un S-morphisme de préschémas :

$$u : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}'.$$

Il résulte alors de Exp. III 2.1 et de Exp. IX 3.1 que le morphisme composé v_0 :
351 $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0 \to \mathrm{G}_0$ se relève aussi en un S-morphisme de groupes :

$$v : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Comme v_0 est une immersion, il en est de même de v. L'image de H par v est donc un sous-schéma en groupes de G, de type multiplicatif, qui relève H_0.

Proposition 1.2. — *Soient* S *un préschéma,* S_0 *un sous-préschéma de* S *défini par un faisceau d'idéaux localement nilpotent,* G *un* S*-préschéma en groupes,* plat *et de présentation finie sur* S *et* H_0 *un sous-schéma en groupes de* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$ *qui est* lisse, fini *sur* S_0*, de type multiplicatif et* central*. Alors il existe un unique sous-schéma en groupes* H *de* G*, de type multiplicatif, qui relève* H_0*. De plus* H *est central.* (Voir XVII App. III, 1).

Proposition 1.2. bis. — *Soient* S*,* G*,* S_0*,* G_0 *comme ci-dessus,* H *un* S*-schéma en groupes, de type multiplicatif, lisse et fini sur* S *et* $u_0 : \mathrm{H}_0 = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 \to \mathrm{G}_0$ *un homomorphisme central. Alors* u *se relève de manière unique en un homomorphisme* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$*. De plus* u *est central.*

L'existence du relèvement u dans 1.2 bis se déduit facilement de 1.2 par la considération du graphe de u_0. Le relèvement u est unique et central d'après Exp. IX 3.4 et Exp. IX 5.1.

Démonstration de 1.2. L'unicité de H et le fait que H soit central résultent de Exp. IX 5.6 b) et de Exp. IX 3.4 bis. Compte tenu de l'unicité, pour prouver l'existence
352 de H, on peut supposer S affine et S_0 défini par un idéal de carré nul et il nous suffit (1.1) de trouver un sous-schéma de G, plat sur S, qui relève H_0.

Comme H_0 est lisse et fini sur S_0, on peut supposer, quitte à restreindre S, qu'il existe un entier $n > 0$, inversible sur S, tel que $\mathrm{H}_0 = {}_n\mathrm{H}_0$. Considérons le morphisme d'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans G :

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}, \qquad x \mapsto x^n.$$

Notons encore ${}_n\mathrm{G}$ le « noyau de u », c.-à-d. l'image réciproque par u de la section unité de G (N. B. u n'est pas en général un morphisme de groupes). Admettons un instant le lemme suivant :

Lemme 1.3. — *Soient k un corps,* G *un schéma en groupes localement de type fini sur k, n un entier premier à la caractéristique de k, u le morphisme d'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans* G. *Alors u est étale en tout point x de* G *qui appartient au centre de* G.

Comme G est plat et de présentation finie sur S, il résulte du lemme précédent et de EGA IV 17.8.2 que si x est un point de G se projetant en s dans S et qui appartient au centre de G_s, le morphisme u est *étale* en x. Si de plus x est un point de ${}_n\mathrm{G}$, ${}_n\mathrm{G}$ est donc étale sur S en x. Par hypothèse, le groupe H_0 est central et contenu dans ${}_n\mathrm{G}_0$, il est donc en fait contenu dans le plus grand ouvert V de ${}_n\mathrm{G}$ qui est étale sur S. Comme H_0 et $\mathrm{V}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}_0 = \mathrm{V}_0$ sont étales sur S_0, H_0 est un ouvert de V_0 (EGA **353**
IV 17.8.7 et 17.9.1). Mais alors, le sous-préschéma ouvert de V qui a même espace sous-jacent que H_0 est un sous-schéma de G, plat sur S, qui relève H_0.

Il nous reste à démontrer le lemme 1.3. Pour cela notons que le plus grand ouvert de G sur lequel u est étale est invariant par extension du corps de base (EGA IV 17.8.2) ; ceci nous permet de nous ramener au cas où x est rationnel sur k. Notons t_x la translation par x, qui est un k-automorphisme du schéma G. Comme x est dans le centre de G, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "t_x"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "t_x^n"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "u"] & \mathrm{G} \end{tikzcd} .$$

Il suffit donc de montrer que u est étale à l'origine, mais cela a été vu dans $\mathrm{VII_A}$ 8.4.

2. *Relèvement global des groupes finis*

Lemme 1.4. — *Soient* A *un anneau local, séparé et complet pour la topologie définie par son idéal maximal* $\mathfrak{m}$*,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$*,* $\mathrm{S}_n = Spec(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n)$*. Alors pour tout préschéma* X (*resp. pour tout* S*-préschéma* X)*, l'application canonique :*

$$\text{(x)}\qquad \mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{X}) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_n,\mathrm{X})$$

(resp. *:*

$$\text{(xx)}\qquad \Gamma(\mathrm{X}/\mathrm{S}) \longrightarrow \varprojlim_n \Gamma(\mathrm{X}_n/\mathrm{S}_n), \quad \text{où} \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{X}\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathrm{S}_n)$$

est bijective.

(xx) est une conséquence facile de (x). Démontrons (x). **354**

Soit $u_n : \mathrm{S}_n \to \mathrm{X}$ $(n\in\mathbb{N})$, un système cohérent de morphismes. L'image y du point fermé de S_n est donc indépendante de n et u_n se factorise à travers $\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_y$. Les morphismes u_n définissent par passage à la limite projective un morphisme d'anneaux :

$$\widetilde{u} : \mathscr{O}_y \longrightarrow \varprojlim_n (\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n) = \mathrm{A}.$$

Ceci montre que (x) est surjective ; elle est injective dès que A est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

Corollaire 1.5. — *Soient* A *un anneau local noethérien complet,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n)$, X *un schéma fini sur* S *et* Y *un* S-*préschéma. Alors l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_n}(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n)$$

(*où* $\mathrm{X}_n = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$ *et de même* $\mathrm{Y}_n = \cdots$) *est bijective.*

En effet, il résulte de EGA II 6.2.5 que X est une somme finie de S-schémas locaux finis sur S. Ceci nous ramène au cas où X lui-même est le spectre d'un anneau local noethérien complet. Mais $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \Gamma(\mathrm{Z}/\mathrm{X})$ où Z est le X-préschéma $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ et on applique la proposition précédente.

Proposition 1.6. — *Soient* A, S, S_n *comme ci-dessus et soient* G *et* M *deux* S-*préschémas en groupes,* M *étant fini sur* S. *Alors :*

a) *L'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathrm{M}, \mathrm{G}) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_n\text{-gr}}(\mathrm{M}_n, \mathrm{G}_n)$$

355 *est bijective.*

b) *Si* M *est de type multiplicatif et si* G *est lisse sur* S *l'application canonique :*

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathrm{M}, \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0\text{-gr}}(\mathrm{M}_0, \mathrm{G}_0)$$

est surjective. De plus, si $\varphi(u) = \varphi(u') = u_0$, *alors* u *et* u' *sont conjugués par un élément de* G(S) *se réduisant suivant l'élément unité de* $\mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$.

c) *Si* M *est de type multiplicatif et lisse sur* S, *si* G *est plat de type fini sur* S, *et si* $u_0 : \mathrm{M}_0 \to \mathrm{G}_0$ *est un homomorphisme central,* u_0 *se relève de manière unique en un homomorphisme*

$$u : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

De plus u *est central si* G *est à fibres connexes.*

Démonstration. a) Résulte de 1.5, du fait que $\mathrm{M} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{M}$ est fini sur S et de la caractérisation des morphismes de groupes comme étant ceux rendant commutatif le diagramme bien connu :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{M} \arrow[r, "u \times u"] \arrow[d] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[d] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "u"] & \mathrm{G} \end{tikzcd} .$$

b) D'après Exp IX 3.6, on peut construire un système cohérent d'homomorphismes $u_n : \mathrm{M}_n \to \mathrm{G}_n$ qui relèvent un homomorphisme $u_0 : \mathrm{M}_0 \to \mathrm{G}_0$. D'où la première assertion de b), compte tenu de a).

Si maintenant u et u' sont deux relèvements de u_0, alors u_n et u'_n sont conjugués **356**
par un élément g_n de $\mathrm{G}(\mathrm{S}_n)$ qui relève l'élément unité de $\mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$ (Exp. IX 3.6) ; *loc. cit.* implique aussi que l'on peut choisir les g_n de façon cohérente, donc (1.4) provenant d'une section g de $\mathrm{G}(\mathrm{S})$. Les morphismes u et $\mathrm{int}(g)u'$ coïncident alors modulo $\mathfrak{m}^n$ pour tout n, donc coïncident (1.5).

c) L'existence et l'unicité de u résultent de a) et de 1.2 bis. Si G est à fibres connexes, u est central d'après Exp. IX 5.6 a).

2. Relèvement infinitésimal des sous-tores **357**

1. *Énoncé du théorème*

Nous allons donner un théorème de relèvement infinitésimal des sous-tores d'un préschéma en groupes qui ne fait pas appel à des hypothèses de lissité (contrairement à Exp. IX 3.6 bis) et qui par ailleurs répond à une question très naturelle[(1)] : suffit-il de pouvoir relever « suffisamment » de points d'ordre fini d'un sous-tore T_0, pour être assuré de pouvoir relever T_0 (infinitésimalement bien sûr) ?

Théorème 2.1. — *Soient* S *un schéma affine noethérien,* S_0 *un sous-schéma fermé de* S *défini par un idéal* J *de carré nul,* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini,* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$*,* T_0 *un sous-tore de* G_0*, q un entier > 0 inversible sur* S*. Supposons que pour tout entier n égal à une puissance de q, il existe un sous-schéma* M_n *de* G*,* plat *sur* S*, tel que* $\mathrm{M}_n \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 = {}_n\mathrm{T}_0$*. Alors il existe un sous-tore* T *de* G *tel que* $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 = \mathrm{T}_0$.

Le théorème 2.1 nous sera utile par les deux corollaires suivants :

Corollaire 2.2. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* S_0 *un sous-préschéma fermé de* S *défini par un faisceau d'idéaux localement nilpotent,* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini,* T_0 *un sous-tore de* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$*, q un entier > 0 inversible sur* S *; enfin, l'entier n parcourant les puissances de q, soit* (M_n) *un système cohérent* **358**
de S*-sous-schémas en groupes de* G*, de type multiplicatif, qui relève les* ${}_n\mathrm{T}_0$ *(N. B. Le système de sous-groupes de type multiplicatif* (M_n) *est dit* cohérent *si* $\mathrm{M}_m = {}_m(\mathrm{M}_n)$ *lorsque l'entier m divise n.) Alors il existe un et un seul sous-tore* T *de* G *tel que* $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 = \mathrm{T}_0$ *et* ${}_n\mathrm{T} = \mathrm{M}_n$ *pour tout n.*

Corollaire 2.3. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes,* plat *et de présentation finie sur* S*,* S_0 *un sous-préschéma fermé de* S *défini par un faisceau d'idéaux de type fini et localement nilpotent,* T_0 *un tore central de* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$*. Alors il existe un et un seul sous-tore* T *de* G*, qui relève* T_0*. De plus* T *est central.*

[(1)] N.D.E. : L'idée d'approximer un tore par ses sous-groupes finis apparaît dans la preuve de Grothendieck sur la connexité des centralisateurs de tores, voir § 4.6 de BIBLE.

Remarque 2.4. — Nous laissons au lecteur le soin de formuler l'analogue des énoncés 2.1, 2.2, 2.3, où au lieu de relever un sous-tore de G_0, on se donne un tore T sur S et on se propose de relever un morphisme

$$u_0 : T_0 \longrightarrow G_0$$

(on se ramène aux cas précédents par la considération du graphe de u_0).

Montrons comment on déduit les corollaires 2.2 et 2.3 de 2.1.

Démonstration du corollaire 2.2.

L'unicité de T résulte de Exp. IX 4.8 b) et de Exp. IX 4.10. Pour prouver l'existence de T, on peut donc se ramener au cas où S est affine, donc noethérien, et au cas où S_0 est défini par un idéal de carré nul.

359 ***Lemme 2.5***. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes, de présentation finie, et* H *un sous-schéma en groupes de* G*, de type multiplicatif,* lisse *sur* S*. Alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_{G}(H)$ *est représentable par un sous-préschéma en groupes de* G*, de présentation finie.*

Le lemme résulte de Exp. VIII 6.5 e), sans hypothèse de lissité sur H, lorsque G est séparé sur S. Dans le cas présent, on remarque que l'assertion à démontrer est locale pour la topologie fpqc, ce qui nous permet de supposer H diagonalisable, donc de la forme $D_S(M)$. On peut aussi supposer S affine, puis S noethérien grâce à EGA IV 8. Comme H est lisse sur S et de type fini, l'ordre q du sous-groupe de torsion de M est inversible sur S (Exp VIII 2.1 e)). Il est alors immédiat (cf. Exp. IX 4.10) que les sous-groupes ${}_nH$, où n parcourt les puissances de q, sont schématiquement denses dans H (Exp. IX 4.1). Mais ${}_nH$ est un revêtement complètement décomposé de S (c'est-à-dire est isomorphe à une somme directe finie de copies de S), donc $\underline{\mathrm{Centr}}_{G}({}_nH) = Z_n$ est représentable par l'intersection des centralisateurs dans G des sections de ${}_nH$ au-dessus de S. Il suffit alors d'appliquer le lemme :

Lemme 2.5. bis. — *Soient* S *un préschéma noethérien,* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini,* H *un sous-groupe de type multiplicatif de* G*,* H_i *une famille filtrante croissante de sous-groupes de type multiplicatif de* G*, et supposons que* $Z_i = \underline{\mathrm{Centr}}_{G}(H_i)$ *soit représentable par un sous-préschéma en groupes de* G*. Alors la famille des*
360 Z_i *est stationnaire. Si de plus les* H_i *sont schématiquement denses dans* H*, on a* $Z_i = \underline{\mathrm{Centr}}_{G}(H)$ *pour* i *assez grand.*

Pour voir que la famille des Z_i est stationnaire, il suffit de montrer que la famille des ensembles sous-jacents $\mathrm{ens}(Z_i)$ est stationnaire. En effet, la valeur stationnaire sera une partie fermée d'un ouvert U de G, et quitte à remplacer G par U, on est ramené à étudier une famille filtrante décroissante de sous-préschémas *fermés* d'un préschéma noethérien. Un argument facile de constructibilité nous ramène au cas où S est intègre. Nous devons alors montrer que la famille des $\mathrm{ens}(Z_i)$ est stationnaire au-dessus d'un ouvert non vide de S. Or la fibre générique de G est séparée (Exp. VI_A 0.3), donc, quitte à restreindre S, on peut supposer G séparé sur S (EGA IV 8). Mais alors Z_i est fermé dans G (Exp. VIII 6.5 e)).

Pour établir la dernière assertion du lemme, notons Z la valeur stationnaire de la famille Z_i. Il est clair que $\underline{\mathrm{Centr}}_G(H)$ est un sous-foncteur de Z ; montrons que Z centralise H. Or soit E le sous-préschéma de $H \times_S Z$ noyau du couple de morphismes :

$$\begin{aligned} &H \underset{S}{\times} Z \rightrightarrows G \\ &(h, c) \longmapsto c \\ &(h, c) \longmapsto hch^{-1}. \end{aligned}$$

Le préschéma E majore $H_i \times_S Z$ pour tout i. D'autre part les H_i sont plats sur S, donc (EGA IV 11.10.9) pour tout point s de S, les $(H_i)_s$ sont schématiquement denses dans H_s et les $H_i \times_S Z$ sont schématiquement denses dans $H \times_S Z$. Comme G_s est séparé, E_s est fermé dans $(H \times_s Z)_s$ et par suite lui est égal. Mais alors E est fermé dans **361**
$H \times_S Z$, donc est égal à $H \times_S Z$. C'est dire que Z centralise H.

Revenons à la démonstration de 2.2. D'après 2.5, $Z_n = \underline{\mathrm{Centr}}_G(M_n)$ est représentable et d'après 2.5 bis, la famille décroissante des sous-préschémas Z_n est stationnaire, soit Z la valeur stationnaire. Le groupe Z majore T_0 et les M_n. Quitte à remplacer G par Z, on peut donc supposer les M_n centraux.

Nous sommes alors dans les conditions d'application du théorème 2.1 et il existe un sous-tore T de G, relevant T_0. Les groupes ${}_nT$ et M_n sont alors deux relèvements de ${}_nT_0$, donc sont conjugués (Exp. IX 3.2 bis) et par suite coïncident, M_n étant central. Le tore T répond à la question.

Démonstration du corollaire 2.3.

L'unicité de T résulte de Exp. IX 5.1 bis et le fait que T soit central résulte de IX 5.6 b). Cette remarque permet de nous ramener par le procédé habituel, au cas où S est affine, (donc S_0 défini par un idéal nilpotent de type fini) puis au cas où S est noethérien. En restreignant au besoin S, on peut supposer qu'il existe un entier q inversible sur S. Le corollaire 2.3 est alors conséquence de 2.2 et de 1.2.

Remarque 2.6. — On montre facilement que le corollaire 2.3 reste vrai si l'on remplace le tore T_0 par un sous-groupe de type multiplicatif lisse et central de G_0.

2. *Démonstration de* 2.1 **362**

a) Réduction au cas où $T_0 = \mathbb{G}_{m\,S_0}$.

Grâce à 1.1, on peut supposer que M_n est un sous-groupe de type multiplicatif. Utilisant Exp. IX 3.2 bis, on peut supposer que la famille des M_n est cohérente (2.2). Le centralisateur Z_n de M_n dans G est représentable (2.5) et la famille filtrante des Z_n est stationnaire (2.5 bis). Quitte à remplacer G par Z_n pour n assez grand, on peut donc supposer T_0 et les M_n centraux. L'unicité du relèvement de T_0 est alors assurée (Exp. IX 5.1 bis).

Procédant comme dans la démonstration de 1.1, on peut supposer qu'il existe un S-tore T et un S_0-isomorphisme :

$$u_0 : T \underset{S}{\times} S_0 \xrightarrow{\sim} T_0$$

et il est équivalent de relever u_0 ou de relever T_0. Vu l'unicité, il suffit de prouver l'existence d'un relèvement de u_0 après avoir fait une extension $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fidèlement plate affine de type fini (descente fpqc), ce qui nous permet de supposer $\mathrm{T} = \mathbb{G}^r_{m\,\mathrm{S}}$ (Exp. X 4.5). Si la restriction de u_0 à chaque facteur $\mathbb{G}$ se relève en un S-morphisme, nécessairement central, on en déduit immédiatement un relèvement de u_0. Bref, on peut supposer $\mathrm{T}_0 = \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}_0}$.

b) Définition de l'obstruction à l'existence d'un relèvement de T_0.

Pour prouver 2.1, il suffit d'après 1.1 de trouver un sous-schéma de G, plat sur S, qui relève T_0. Nous allons voir que l'on peut définir l'obstruction à l'existence d'un
363 tel relèvement comme un élément d'un certain $\mathrm{Ext}^1(\ ,\ )$ de faisceaux de modules.

Soit U un ouvert de G tel que T_0 soit fermé dans U et notons encore U (resp. U_0) le sous-schéma ouvert de G (resp. G_0) ayant U pour espace sous-jacent. Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$, considéré comme faisceau sur U, est donc un quotient de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0}$. Soit h l'épimorphisme canonique :

$$h : \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}.$$

Lemme 2.7. — *L'application canonique :*

$$h' = \mathrm{id}_{\mathrm{J}} \otimes h : \quad \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \longrightarrow \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$$

se factorise (*évidemment de manière unique*) *en* $i \circ j_{\mathrm{U}}$ *où* j_{U} *est l'épimorphisme canonique :*

$$\mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \longrightarrow \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}} \simeq \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0}.$$

On doit montrer que $h'(\mathrm{K}) = 0$, où K est le noyau de j_{U}. Or pour tout entier n égal à une puissance de q, on a un épimorphisme :

$$h_n : \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \longrightarrow \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0}$$

et comme ${}_n\mathrm{T}_0$ se relève en un schéma M_n plat sur S, le morphisme canonique :

$$j_n : \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0} \longrightarrow \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{M}_n}$$

est un isomorphisme.

364 Le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K} \arrow[r] & \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \arrow[r, "j_{\mathrm{U}}"] \arrow[d, "h'"] & \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}} \subset \mathscr{O}_{\mathrm{U}} \arrow[dl, "i"'] \\
& \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \arrow[d, "h'_n"] & \\
& \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0} \arrow[r, "\cong", "j_n"'] & \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{M}_n} \subset \mathscr{O}_{\mathrm{M}_n}
\end{tikzcd}$$

prouve que $h'(\mathrm{K})$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\, h'_n$ pour tout n donc est contenu dans $\bigcap_n \mathrm{Ker}\, h'_n$ et il suffit de montrer que ce dernier est nul. Or le faisceau $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$ est égal au faisceau $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}[\mathbb{Z}]$, algèbre du groupe $\mathbb{Z}$ à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$, tandis que $\mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0}$ est l'algèbre quotient : $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$.

Soit $a = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \otimes m$ un élément de $\mathrm{J}\otimes_{\mathrm{S}_0}\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$. Les a_m sont donc des sections de J presque toutes nulles. Prenons n assez grand pour que les indices m pour lesquels a_m est non nul, aient des images distinctes dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors si $a \in \operatorname{Ker} h'_n$, on a nécessairement $a = 0$. Ceci prouve que $\bigcap_n \operatorname{Ker} h'_n = 0$, et démontre 2.7.

Soit alors K_0 le noyau de h ; considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}} \arrow[d, "\wr"] & & \mathrm{K}_0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathscr{O}_{\mathrm{U}} \arrow[r] & \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
 & \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{S}_0}\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} & & \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \arrow[d] & \\
 & & & 0 & .
\end{tikzcd}$$

Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$ définit un élément Φ du groupe $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{U}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0}, \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0})$. Soit Ψ l'élément **365**
de $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{U}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{S}_0}\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0})$ déduit de Φ par bifonctorialité de $\operatorname{Ext}^1(\ ,\ )$ grâce aux morphismes : $\mathrm{K}_0 \to \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0}$ et $i : \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \to \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{S}_0}\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$. Il résulte de Exp. III 4.1 et du critère de platitude infinitésimal (confer. Exp. III 4.3) qu'il existe un sous-schéma de U, *plat sur* S, qui relève T_0, si et seulement si Ψ est nul.

Mais notons que T_0 est affine, il suffit donc (Exp. III 4.5 et 4.6) de montrer qu'il existe localement sur U, un sous-schéma plat sur S qui relève T_0. Bref, il suffit de montrer que l'image de Ψ dans le faisceau :

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{U}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{S}_0}\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0})$$

est nulle. Nous noterons encore Ψ cet élément de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{E})$.

c) Réduction au cas S local artinien, à corps résiduel algébriquement clos.

Comme K_0 et $\mathrm{J}\otimes_{\mathrm{S}_0}\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$ sont des faisceaux cohérents, il en est de même du faisceau $\mathscr{E}$, de plus $\mathscr{E}$ a son support dans T_0 puisqu'il en est ainsi de $\mathrm{J}\otimes_{\mathrm{S}_0}\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$. Pour montrer
que la section f de $\mathscr{E}$ est nulle, il suffit de voir que pour tout point u de T_0, l'image de **366**
f dans la fibre de $\mathscr{E}$ au point u est nulle. Mais la formation des $\mathscr{E}xt^i(\ ,\ )$ de faisceaux cohérents commute aux extensions plates de la base[(2)], de sorte que l'on est ramené à prouver l'existence d'un relèvement de $\mathrm{T}_0 \cap \operatorname{Spec}\mathscr{O}_u$ qui soit plat sur S. Soit s la projection de u sur S, on peut alors remplacer S par $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_s$ et G par $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\operatorname{Spec}\mathscr{O}_s$.

[(2)] N.D.E. : cf. EGA 0_{III}, 12.3.5.

Quitte encore à faire une extension fidèlement plate, on peut supposer que $\mathscr{O}_s$ a un corps résiduel algébriquement clos (EGA 0_{III} 10.3.1)

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_s$ et $\mathrm{S}_n = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_s/\mathfrak{m}^n$. Supposons avoir montré que pour tout $n > 0$, l'obstruction au relèvement de $\mathrm{T}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n = (\mathrm{T}_0)_n$ en un sous-schéma de $\mathrm{G}_n = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$, plat sur S_n, soit nulle et soit T_n l'unique relèvement de $(\mathrm{T}_0)_n$, plat sur S_n qui est un sous-tore de G_n. Il est clair que si $n > n'$, on a :

$$(\mathrm{T}_n) \underset{\mathrm{S}_n}{\times} \mathrm{S}_{n'} = \mathrm{T}_{n'}.$$

Si alors u est un point de T_0 qui se projette sur s, il résulte du lemme ci-après, appliqué au système cohérent de relèvements $(\mathrm{T}_n \cap \operatorname{Spec} \mathscr{O}_u)$ de $(\mathrm{T}_0)_n \cap \operatorname{Spec} \mathscr{O}_u$, qu'il existe bien un relèvement de $\mathrm{T}_0 \cap \operatorname{Spec} \mathscr{O}_u$ plat sur $\mathscr{O}_s$. Nous sommes donc ramenés à prouver que Ψ est nul lorsque $\mathrm{S} = \mathrm{S}_n$ est le spectre d'un anneau artinien local à corps résiduel algébriquement clos et à prouver le :

Lemme 2.8. — *Soient* $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens,* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A*,* J *un idéal de carré nul de* A*,* M *un* B*-module de type fini,* $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}/\mathrm{J}$*,* $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}/\mathrm{JB}$*,* $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}/\mathrm{JM}$*,* N_0 *un* B_0*-module* quotient *de* M_0 *qui est* plat
367 *sur* A_0*. Pour tout entier* $n > 0$ *notons* A_n*,* $\mathrm{A}_{0,n}$*, etc. les objets obtenus par extension de la base :* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathfrak{m}^n = \mathrm{A}_n$ *et soit* $\overline{\mathrm{J}}_n$ *l'image de* J *dans* A_n*. Pour tout entier* $n > 0$*, soit* N_n *un* B_n *module quotient de* M_n*, plat sur* A_n*, qui relève* $\mathrm{N}_{0,n}$ *et supposons que pour* $n \geqslant n'$*,* $\mathrm{N}_{n'}$ *s'obtienne à partir de* N_n *par extension de la base :* $\mathrm{A}_n \to \mathrm{A}_{n'}$*. Alors il existe un* B*-module* N*, quotient de* M*, plat sur* A*, qui relève* N_0*.*

Démonstration de 2.8.

Notons P_0 le noyau de l'épimorphisme : $\mathrm{M}_0 \to \mathrm{N}_0$. Pour tout $n > 0$, on a donc la diagramme commutatif suivant, où les lignes horizontales sont exactes :

$$(*)_n \qquad \begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & \mathrm{P}_{0,n} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{J}}_n \mathrm{M}_n \arrow[r] \arrow[dd] & \mathrm{M}_n \arrow[r] \arrow[dd] & \mathrm{M}_{0,n} \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
\overline{\mathrm{J}}_n \otimes_{\mathrm{A}_{0,n}} \mathrm{M}_{0,n} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{J}}_n \otimes_{\mathrm{A}_{0,n}} \mathrm{N}_{0,n} \arrow[r] & \mathrm{N}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{N}_{0,n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

De plus, par hypothèse, le diagramme $(*)_{n+1}$ se réduit suivant $(*)_n$ modulo $\mathfrak{m}^n$.

Le lemme d'Artin-Rees (Bourbaki, *Alg. comm.*, Chap. 3 § 3 cor. 1) montre que la
368 filtration définie sur JM (resp. $\mathrm{J} \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{M}_0$ et $\mathrm{J} \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{N}_0$) par les noyaux des morphismes :

$$\mathrm{JM} \longrightarrow \overline{\mathrm{J}}_n\mathrm{M}_n, \quad (\text{resp. } \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{M}_0 \longrightarrow \overline{\mathrm{J}}_n\otimes_{\mathrm{A}_{0,n}}\mathrm{M}_{0,n} \text{ et } \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0 \longrightarrow \overline{\mathrm{J}}_n\otimes_{\mathrm{A}_{0,n}}\mathrm{N}_{0,n})$$

est $\mathfrak{m}$B-bonne, de sorte qu'en passant à la limite projective sur les diagrammes $(*)_n$ et en notant $\widehat{\mathrm{Q}}$ le séparé complété d'un B-module Q pour la topologie $\mathfrak{m}$B-adique, on obtient le diagramme commutatif suivant où les deux lignes horizontales sont encore exactes :

$$\widehat{(*)} \qquad \begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & \widehat{\mathrm{P}}_0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \widehat{\mathrm{JM}} \arrow[r] \arrow[dd] & \widehat{\mathrm{M}} \arrow[r] \arrow[dd] & \widehat{\mathrm{M}}_0 \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
\mathrm{J}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0}\mathrm{M}_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{J}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0 \arrow[r] & \varprojlim_n \mathrm{N}_n \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathrm{N}}_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Or $(\mathrm{B}, \mathfrak{m}\mathrm{B})$ est un anneau de Zariski et $\mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0$ est de type fini sur B, donc est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$B-adique. Le diagramme $\widehat{(*)}$ montre alors que le morphisme :

$$\mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{M}_0 \longrightarrow \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0$$

déduit de l'épimorphisme $\mathrm{M}_0 \to \mathrm{N}_0$ se factorise à travers JM :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{M}_0 \arrow[rr, "\text{can.}"] \arrow[dr] & & \mathrm{JM} \arrow[dl] \\
 & \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0 &
\end{tikzcd} .$$

Dans ces conditions, il résulte de Exp. III 4.1 et Exp. III 4.3 qu'il existe un B-module quotient N de M, plat sur A, qui relève N_0, si et seulement si un certain élément g de $\mathrm{E} = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{B}}(\mathrm{P}_0, \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0)$ est nul. Plus précisément, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{JM} \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}_0 \longrightarrow 0$$

définit un élément f de F, où F est le B-module $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}_0, \mathrm{JM})$, et g est l'image de f **369**
par le morphisme naturel $\mathrm{F} \to \mathrm{E}$ qui provient par bifonctorialité des morphismes :

$$\mathrm{P}_0 \longrightarrow \mathrm{M}_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{JM} \longrightarrow \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0.$$

Il résulte du diagramme $\widehat{(*)}$ et de Exp. III 4.1 que l'image de g dans $\widehat{\mathrm{E}}$, canoniquement identifié à $\mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathrm{B}}}(\widehat{\mathrm{P}}_0, \mathrm{J}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0)$, est nulle. Mais E est de type fini sur B, donc est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$B-adique et par suite, g est bien égal à 0, ce qui achève la démonstration de 2.8.

d) Étude de $\mathscr{E}$. Nous supposons donc que S est le spectre d'un anneau local artinien A, à corps résiduel k, algébriquement clos. Soit A_0 l'anneau de S_0, $\mathfrak{m}_0$ l'idéal maximal de A_0. Comme S_0 est artinien, T_0 est fermé dans G (Exp. VI_{B} 1.4.2) ; nous pouvons donc prendre l'ouvert U égal à G, de sorte que :

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_\mathrm{G}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}).$$

Soit B_0 l'anneau du S_0-schéma affine $\mathrm{T}_0 = \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}_0}$ et $\overline{\mathrm{B}}_0$ l'anneau de la fibre spéciale $\mathrm{T}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{Spec}(k) = \mathbb{G}_{m,\,k}$ de T_0. Le faisceau $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$-module cohérent, donc est défini par un B_0-module de type fini que nous noterons E.

Considérons le module gradué associé à E et à la filtration $\mathfrak{m}_0\mathrm{B}_0$-adique :

$$\mathrm{E}_r = \mathfrak{m}_0^r\mathrm{E}/\mathfrak{m}_0^{r+1}\mathrm{E}.$$

370 Chaque E_r est donc un $\overline{\mathrm{B}}_0$-module de type fini et $\mathrm{E}_r = 0$ pour r assez grand, S_0 étant artinien.

Soit alors g une section de G au-dessus de S, qui sur S_0 induit une section g_0 de T_0. La translation (à gauche pour fixer les idées), par l'élément g, définit un « automorphisme de la situation » du point de vue du problème d'obstruction envisagé. En particulier, à g correspond un S_0-automorphisme du faisceau $\mathscr{E}$ qui laisse l'obstruction Ψ fixe. Plus précisément, g définit un automorphisme semi-linéaire du B_0-module E (relativement au A_0-automorphisme de B_0 défini par la translation par g_0 dans le groupe T_0). Par réduction modulo $\mathfrak{m}_0^{r+1}$, g définit donc un automorphisme semi-linéaire de E_r (relativement au k-automorphisme de $\overline{\mathrm{B}}_0$ défini par la translation par $g_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{Spec}(k)$ dans $\mathrm{T}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{Spec}(k)$).

Lemme 2.9. — *Pour tout entier $r \geqslant 0$, E_r est un $\overline{\mathrm{B}}_0$-module localement libre.*

Soit x un point de T_0, $\kappa(x)$ son corps résiduel, $(\mathrm{E}_r)_x$ « la fibre » de E_r en x égale à $\mathrm{E}_r \otimes_{\overline{\mathrm{B}}_0} \kappa(x)$, $\ell(x)$ le rang de $(\mathrm{E}_r)_x$ sur $\kappa(x)$, ℓ la valeur maximum de $\ell(x)$ lorsque x parcourt les points de T_0. Notons L le plus grand sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}\,\overline{\mathrm{B}}_0 = \mathbb{G}_{m,\,k}$, au-dessus duquel E_r est localement libre de rang ℓ (TDTE IV Lemme 3.6). Soit β un point de $\mathrm{L}(k)$ (il en existe, L étant de type fini sur k algébriquement clos) et soit α un point de $\mathrm{G}_{m,\,k}(k)$ d'ordre égal à une puissance n de q. Le point α est donc rationnel
371 sur k et comme, par hypothèse, ${}_n\mathrm{T}_0$ se relève en un sous-schéma M_n étale sur S, il existe une section a de G au-dessus de S, qui relève α et qui, au-dessus de S_0, est une section de T_0. Les remarques faites plus haut montrent alors que les fibres de E_r sont k-isomorphes aux points β et $\alpha\beta$ de $\mathbb{G}_{m,\,k}(k)$. Mais les points d'ordre une puissance de q sont denses dans $\mathbb{G}_{m,\,k}$ et il en est de même de leurs translatés par β. Comme L est fermé dans $\mathbb{G}_{m,\,k}$ et que $\mathbb{G}_{m,\,k}$ est réduit, L est égal à $\mathbb{G}_{m,\,k}$ et E_r est localement libre sur $\overline{\mathrm{B}}_0$, de rang ℓ.

e) Fin de la démonstration du théorème 2.1.

Soit $\mathrm{K}_0(n)$ le faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}_0}$ qui définit le sous-schéma fermé ${}_n\mathrm{T}_0$. Le faisceau K_0[3] est donc un sous-faisceau de $\mathrm{K}_0(n)$. Posons pour simplifier :

$$\mathrm{R} = \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(n) = \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0}.$$

Le faisceau $\mathrm{R}(n)$ est donc un quotient de R, et on a le diagramme d'applications :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{K}_0 \arrow[d] & \\
 & & & \mathrm{K}_0(n) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{G}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \arrow[r] & \mathscr{O}_{\mathrm{G}_0} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{R} \arrow[d] & & & \\
 & \mathrm{R}(n) & & &
\end{tikzcd}$$

Utilisant alors la bifonctorialité de $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\ ,\ )$, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}_0}, \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \arrow[dr] & & \\
 & \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0(n), \mathrm{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}) = \mathscr{E} \arrow[d] \\
 & \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0(n), \mathrm{R}(n)) \arrow[r] & \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}(n))
\end{tikzcd} .$$

Désignons encore par Φ l'élément de $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}_0}, \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{G}})$ défini par la suite exacte : **372**

$$0 \longrightarrow \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{G}_0} \longrightarrow 0$$

de sorte que Ψ est l'image de Φ dans $\mathscr{E}$. Comme ${}_n\mathrm{T}_0$ se relève en un sous-schéma M_n de G, plat sur S, l'image de Φ dans le faisceau $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0(n), \mathrm{R}(n))$ est nulle (Exp. III 4.1), a fortiori l'image de Φ dans $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}(n))$, qui est aussi l'image de Ψ, est nulle.

Lemme 2.10. — *Le morphisme canonique :*

$$\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}) \otimes_{\mathrm{B}_0} \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0} \longrightarrow \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}(n))$$

est injectif pour tout entier n.

[3] N.D.E. : introduit après le lemme 2.7.

En effet, le schéma affine $\mathrm{T}_0 = \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}_0}$ a pour anneau :

$$\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}_0[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}].$$

Le sous-schéma ${}_n\mathrm{T}_0$ est défini par l'annulation de la section suivante de B_0 :

$$h(n) = \mathrm{T}^n - 1,$$

qui est régulière (EGA 0_{IV} 15.2.2) et reste régulière après tout changement de base : $\mathrm{S}'_0 \to \mathrm{S}_0$. On a donc une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \xrightarrow{h(n)} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \longrightarrow \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0} \longrightarrow 0.$$

373 Comme ${}_n\mathrm{T}_0$ est plat sur S, on obtient, par tensorisation par J sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{R} \xrightarrow{h(n)} \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}(n) \longrightarrow 0$$

Puis la suite exacte des $\mathscr{E}xt$:

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_\mathrm{G}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}) \xrightarrow{h(n)} \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_\mathrm{G}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}) \longrightarrow \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_\mathrm{G}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}(n)),$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Ce qui précède montre que pour tout entier n égal à une puissance de q, l'image de Ψ dans $\mathrm{E}/h(n)\mathrm{E}$ est nulle. Pour montrer que Ψ est nul, il suffit de voir que si $\Psi \in \mathfrak{m}_0^r\mathrm{E}$, alors $\Psi \in \mathfrak{m}_0^{r+1}\mathrm{E}$. Soit $\overline{\Psi}$ l'image de Ψ dans E_r. Il existe un élément $\Psi(n)$ de E tel que l'on ait :

$$\Psi = \Psi(n)h(n) \quad (n \text{ égal à une puissance de } q).$$

Nous avons remarqué que l'image $\overline{h(n)}$ de $h(n)$ dans $\overline{\mathrm{B}}_0$ est encore $\overline{\mathrm{B}}_0$-régulière. Comme E_s est localement libre sur $\overline{\mathrm{B}}_0$ pour tout s (2.9), la multiplication par $\overline{h(n)}$ dans E_s est injective. On en déduit immédiatement que $\Psi(n)$ est dans $\mathfrak{m}_0^r\mathrm{E}$. Soit $\overline{\Psi(n)}$ son image dans E_r, de sorte que l'on a la relation :

$$\overline{\Psi} = \overline{h(n)}\,\overline{\Psi(n)} \quad (n \text{ égal à une puissance de } q).$$

Ceci montre que l'ensemble F des points de $\mathbb{G}_{m,\,k}$ en lesquels $\overline{\Psi}$ prend la valeur 0 contient l'ensemble dense des points d'ordre une puissance de q. Par ailleurs F est un fermé (car E_r est localement libre sur $\overline{\mathrm{B}}_0$) et $\mathbb{G}_{m,\,k}$ est réduit, donc $\overline{\Psi}$ est nul.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.1.

3. Caractérisation d'un sous-tore par son ensemble sous-jacent

374

1. *Énoncé du théorème*

Notations. — Si X est un préschéma, ens(X) désigne l'ensemble sous-jacent à X. Si X et S′ sont deux S-préschémas, $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}'$, $u : \mathrm{X}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{X}$ le morphisme canonique, E une partie de ens(X), on désigne par $\mathrm{E}_{\mathrm{S}'}$ (ou $\mathrm{E} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}'$) le sous-ensemble de $\mathrm{ens}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'})$ égal à $u^{-1}(\mathrm{E})$.

Théorème 3.1. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini,* q *un entier* > 0 *inversible sur* S, E *une partie de* ens(G). *Considérons les assertions suivantes portant sur* E :

(i) *L'ensemble* E *est l'ensemble sous-jacent à un sous-tore* T *de* G.

(ii) a) *Pour tout point* s *de* S, *il existe un sous-tore* T_s *de* G_s *tel que* $\mathrm{E} \cap \mathrm{ens}(\mathrm{G}_s) = \mathrm{E}_s$ *soit l'ensemble sous-jacent à* T_s.

b) *L'entier* n *parcourant les puissances de* q, *il existe une famille cohérente* (cf. 2.2) M_n *de sous-schémas en groupes de* G, *de type multiplicatif, telle que pour tout point* s *de* S, *on ait :*

$$(\mathrm{M}_n)_s = {}_n\mathrm{T}_s.$$

(iii) a) *comme* (ii) a).

b) *L'ensemble* E *est localement fermé dans* ens(G) *et la dimension des fibres de* E, *relativement à* S, *est localement constante.* 375

(iv) a) *comme* (ii) a).

b) *Pour tout* S*-schéma* S′ *qui est le spectre d'un anneau de valuation discrète, complet, à corps résiduel algébriquement clos,* $\mathrm{E}_{\mathrm{S}'}$ *est l'ensemble sous-jacent à un sous-tore de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$.

Alors on a les implications suivantes :

A) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

B) *Si* G *est séparé sur* S, *on a* (iii) $\Leftrightarrow$ (iv), *et de plus* E *est fermé.*

C) *Les conditions* (i), (ii), (iii) (et aussi (iv), *si* G *est séparé sur* S) *sont équivalentes dans les deux cas suivants :*

1er cas : a) *Le préschéma* S *est réduit ou bien* G *est plat sur* S, *et*
b) *Pour tout point* s *de* S, T_s *est un tore* central *de* G_s.

2ème cas : S *est normal.*

De plus, dans les deux cas ci-dessus, le tore T *d'espace sous-jacent* E *est unique.*

Remarques 3.2. — a) Lorsque S est réduit, il est inutile dans (ii) de supposer que la famille M_n est cohérente, cette condition étant entraînée par les autres hypothèses. En effet, si l'entier m divise n, les sous-groupes ${}_m\mathrm{M}_n$ et M_m sont étales sur S, donc 376
réduits, et ont même espace sous-jacent, donc ils coïncident.

b) Si S n'est plus supposé normal, il n'est plus vrai en général que (iii) $\Rightarrow$ (i) même lorsque S est réduit, géométriquement unibranche et que G est un schéma en groupes lisse sur S. En effet, considérons le sous-groupe de Borel de $\mathrm{SL}_{2,\mathrm{S}}$ formé des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} t & u \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix},$$

où S est la courbe affine sur un corps k ayant pour anneau :

$$k[x,y]/(y^2 - x^3).$$

Considérons alors l'ensemble E obtenu de la façon suivante : Au-dessus du « point de rebroussement de S » $(x = y = 0)$ nous prendrons le tore diagonal $(u = 0)$. Au-dessus de l'ouvert complémentaire ($x \neq 0$) nous prendrons le tore déduit du tore diagonal par conjugaison par l'élément :

$$\begin{pmatrix} 1 & y/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble E obtenu satisfait à (iii) a), d'autre part il est fermé dans G et le sous-schéma réduit ayant pour ensemble sous-jacent E a pour équations :

$$\begin{cases} xu + y(t - t^{-1}) = 0 \\ u^2 - x(t - t^{-1})^2 = 0. \end{cases}$$

377 Ce n'est donc pas un sous-tore de G, puisque la fibre au-dessus du point de rebroussement n'est pas réduite.

Plan de la démonstration de 3.1.

Dans une première partie, nous établirons les implications « faciles » suivantes :

$$\begin{tikzcd} & \text{(ii)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{(i)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{(iv)} \\ & \text{(iii)} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

et (iv) $\Rightarrow$ $\big[$(iii) et E fermé$\big]$ si G est séparé sur S.

La démonstration des implications plus délicates se fera en trois étapes :

I) Réduction de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) (sous les hypothèses de C), 1^er^ cas), au cas où S est normal.

II) (iii) $\Rightarrow$ (ii) si S est normal.

III) (ii) $\Rightarrow$ (i).

2. *Démonstration des assertions « faciles » contenues dans* 3.1

(i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) est trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Quitte à remplacer S par S$'$, nous pouvons supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Soit t le point générique de S et s le point fermé.

Comme E est localement fermé, il existe un sous-préschéma de G, qui est réduit et dont l'espace sous-jacent est E, nous le noterons $\overline{\mathrm{E}}$. La fibre générique $\overline{\mathrm{E}}_t$ de $\overline{\mathrm{E}}$
378 est donc égale au sous-tore T_t de rang r de G_t (d'après (iii) a)). Soit E$'$ l'adhérence schématique de $\overline{\mathrm{E}}_t$ dans $\overline{\mathrm{E}}$. Le préschéma E$'$ est irréductible et sa fibre fermée E'_s n'est pas vide (elle contient la section unité de G_s) donc E'_s est de dimension r (EGA IV 14.3.10). Mais E'_s est alors un sous-schéma fermé de $\overline{\mathrm{E}}_s$ et ce dernier est de dimension r (d'après (iii) b)) et irréductible (car il a même espace sous-jacent que T_s), donc E'_s a même espace sous-jacent que $\overline{\mathrm{E}}_s$ et par suite $\mathrm{E}' = \overline{\mathrm{E}}$, ce qui prouve que $\overline{\mathrm{E}}$ est plat sur S.

Soit maintenant E$''$ l'adhérence schématique de $\overline{\mathrm{E}}_t$ dans G. Alors E$''$ est un sous-préschéma en groupes de G plat sur S (Exp. VIII 7.1) qui majore E$'$ donc $\overline{\mathrm{E}}$. La fibre fermée E''_s est un sous-groupe algébrique de G_s, de dimension r (*loc. cit.*). Comme T_s est un fermé irréductible de G_s, de dimension r, $\overline{E}_s$ a même ensemble sous-jacent que la composante neutre $(E''_s)^0$ de E''_s. Soit $(E'')^0$ la « composante neutre » de E'', c.-à-d. le sous-groupe ouvert de E'' complémentaire de la réunion des composantes irréductibles de E''_s ne contenant pas l'origine. On a donc :

$$E = \mathrm{ens}[(E'')^0].$$

Comme $\overline{E}$ et E'' sont réduits, on a même $\overline{E} = (E'')^0$. Finalement, $\overline{E}$ est un sous-préschéma en groupes de G, plat et de type fini sur S, à fibres connexes, donc séparé (Exp. VI_B 5.2), dont la fibre générique est un tore T_t, et dont la fibre fermée réduite est un tore T_s, mais alors $\overline{E}$ est un tore (Exp. X 8.8).

(ii) ⇒ (iv). On peut encore supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, et nous gardons les notations introduites ci-dessus. L'adhérence schématique **379**
dans G de T_t est un sous-préschéma en groupes $\overline{T}$ de G, plat sur S, qui majore M_n pour tout entier n égal à une puissance de q. Par suite la fibre fermée de $\overline{T}$ est un sous-schéma fermé de G_s qui majore $(M_n)_s$ pour tout n, donc qui majore T_s. Pour des raisons de dimension, la « composante neutre » $\overline{T}^0$ de $\overline{T}$ admet E pour ensemble sous-jacent et on conclut comme ci-dessus que $\overline{T}^0$ est un sous-tore de G.

(iv) ⇒ [(iii) et E fermé], si G est séparé sur S. Montrons que E est fermé. [4] Prouvons d'abord le lemme :

Lemme 3.3. — *Si les conditions énoncées dans* 3.1 iv) *sont satisfaites,* E *est une partie localement constructible de* ens(G).

Par la méthode habituelle, nous sommes ramenés à étudier le cas où S est noethérien, intègre, de point générique η. Quitte à restreindre S, on peut supposer (Exp. VI_B 10.10) qu'il existe un sous-schéma en groupes de G, soit H, plat sur S, à fibres connexes, dont la fibre générique H_η soit égale à T_η. Pour prouver 3.3, il suffit alors de montrer que ens(H) = E. Or si s est un point de S, il existe, d'après EGA II 7.1.9, un S-schéma S′, spectre d'un anneau de valuation discrète, que l'on peut supposer complet à corps résiduel algébriquement clos, dont le point générique t' se projette sur η et le point fermé s' se projette sur s. D'après (iv) b), il existe un sous-tore $T_{S'}$ de $G_{S'}$ ayant $E_{S'}$ pour espace sous-jacent. Les deux sous-préschémas en groupes $T_{S'}$ et $H_{S'} = H \times_S S'$, de $G_{S'}$, sont plats sur S′, à fibres connexes et ont même fibre générique $T_{t'}$, donc ils coïncident avec la composante neutre de l'adhérence schématique de $T_{t'}$ **380**
dans $G_{S'}$. Par suite $\mathrm{ens}(H_s) = E_s$, donc ens(H) = E, ce qui prouve le lemme.

Ceci étant, sachant que E est localement constructible, pour voir que E est fermé, il suffit de montrer que toute spécialisation dans G d'un point de E est un point de E. Par la technique habituelle, nous sommes ramenés au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, complet, à corps résiduel algébriquement clos. Mais alors, le sous-tore de G, d'espace sous-jacent E ((iv) b)) est fermé dans G puisque G est séparé (Exp. VIII 7.12).

[4] N.D.E. : Le fait que (iv) ⇒ (iii) apparaitra au cours de la démonstration.

3. *Suite de la démonstration de* 3.1

I) Réduction de (iii) $\Rightarrow$ (i) (C, 1^er^ cas) au cas où S est normal.

a) Réduction au cas S affine réduit.

Nous supposons donc que pour tout point s de S, E_s est l'espace sous-jacent à un sous-tore central de G_s. L'unicité de T résulte alors de Exp. IX 5.1 bis, et de plus T sera nécessairement central (*loc. cit.*). Vu l'unicité, pour prouver l'existence de T, nous pouvons supposer S noethérien, affine d'anneau A. Si S n'est pas réduit, par hypothèse, G est plat sur S. D'après 2.3, il suffit alors de résoudre le problème pour $\mathrm{S}_{\text{réd}}$ et $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{\text{réd}}$. Nous pouvons donc supposer de plus S réduit.

b) Réduction au cas où l'anneau A est de type fini sur $\mathbb{Z}$.

Démontrons d'abord deux lemmes :

381 ***Lemme 3.4***. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique,* E *un sous-ensemble de* G*, k' une extension de k,* $\mathrm{T}_{k'}$ *un sous-tore de* $\mathrm{G}_{k'}$ *ayant* $\mathrm{E}_{k'}$ *pour espace sous-jacent. Alors si* $\mathrm{T}_{k'}$ *est central ou si k est parfait,* E *est l'ensemble sous-jacent à un sous-tore de* G_k.

En effet, par descente fpqc, il suffit de montrer que les deux images réciproques de $\mathrm{T}_{k'}$ dans $\mathrm{G}_{k''}$, où $k'' = k' \otimes_k k'$ coïncident. Or elles ont même espace sous-jacent, à savoir l'image réciproque de E. Si $\mathrm{T}_{k'}$ est central, le lemme est alors conséquence de Exp. IX 5.1 bis. Si k est parfait, k'' est réduit et les deux images réciproques de $\mathrm{T}_{k'}$, étant lisses sur k'', sont réduites, donc coïncident.

Remarque 3.5. — Il résulte du lemme précédent que dans l'énoncé de 3.1 (iv), la propriété (iv) a) est conséquence de (iv) b) dans les deux cas suivants :

(1) On suppose que les corps résiduels des points de S sont parfaits.

(2) Pour tout S′ comme dans (iv) b), on suppose que le tore d'espace sous-jacent égal à $\mathrm{E}_{\mathrm{S}'}$, est central dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$.

Lemme 3.6. — *Soient* S *un préschéma limite projective de schémas affines* S_i (cf. EGA IV 8)*,* H *un* S*-schéma en groupes de type multiplicatif et de type fini. Alors il existe un indice i, un* S_i*-schéma en groupes* H_i *de type multiplicatif et de type fini et un* S*-isomorphisme :*

$$\mathrm{H}_i \underset{\mathrm{S}_i}{\times} \mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}.$$

382 *Si de plus* H *est isotrivial, on peut supposer* H_i *isotrivial.*

Comme H est de type fini sur S, H est même de présentation finie sur S (Exp. IX 2.1 b)), il existe donc un indice ℓ et un S_ℓ-schéma en groupes H_ℓ tel que $\mathrm{H}_\ell \times_{\mathrm{S}_\ell} \mathrm{S}$ soit isomorphe à H (Exp. $\mathrm{VI_B}$. 10). Posant $\mathrm{H}_i = \prod \mathrm{H}_\ell \mathrm{S}_i \mathrm{S}_\ell$, on a donc $\mathrm{H} \cong \prod \mathrm{H}_i \mathrm{S} \mathrm{S}_i$ pour tout $i \geqslant \ell$.

Comme H est de type fini sur S, H est quasi-isotrivial (Exp. X 4.5) donc trivialisé par un morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, étale surjectif. Utilisant la quasi-compacité de S, on voit facilement qu'il existe un recouvrement de S par un nombre fini d'ouverts affines S_α et pour tout α un morphisme étale, surjectif et de présentation finie $\mathrm{S}'_\alpha \to \mathrm{S}_\alpha$ qui trivialise $\mathrm{H}|_{\mathrm{S}_\alpha}$. Ce recouvrement (S_α) de S provient alors d'un recouvrement $(\mathrm{S}_{i,\alpha})$ de S_i pour i assez grand (EGA IV 8). Quitte à remplacer S_i par $\mathrm{S}_{i,\alpha}$ et S par S_α, on peut donc supposer que H est trivialisé par un morphisme $S' \to S$ étale surjectif et de présentation finie. Pour i assez grand, il existe alors un préschéma S'_i, un morphisme $S'_i \to S_i$ étale surjectif, de présentation finie et un S-isomorphisme $S'_i \times_{S_i} S \to S'$ (EGA IV 17.16). Posons alors pour j assez grand :

$$S'_j = S'_i \underset{S_i}{\times} S_j, \qquad H'_j = H_j \underset{S_j}{\times} S'_j, \qquad H' = H \underset{S}{\times} S'.$$

Vu le choix de S', il existe un groupe abélien M de type fini et un S-isomorphisme de schémas en groupes : $D_{S'}(M) \xrightarrow{\sim} H'$. Comme les S'_i sont quasi-compacts et que $S' = \varprojlim S'_i$, il résulte de Exp. VI_B 10 qu'il existe un indice j et un S'_j-isomorphisme de schémas en groupes :

$$D_{S'_j}(M) \xrightarrow{\sim} H'_j.$$

Mais c'est dire que H_j est un groupe de type multiplicatif quasi-isotrivial. **383**

Lorsque H est isotrivial, on procède de manière analogue en utilisant une trivialisation de H par un morphisme $S' \to S$ étale fini.

Ceci étant nous pouvons effectuer la réduction b) annoncée. L'anneau A de S est limite inductive filtrante de ses sous-anneaux A_i de type fini sur $\mathbb{Z}$. Soient $S_i = \operatorname{Spec} A_i$, $u_j : S \to S_j$ et $u_{jk} : S_k \to S_j$ $(k \geqslant j)$ les morphismes de transition. Comme S est noethérien et G de présentation finie sur S, il existe un indice i et un S_i-préschéma en groupes G_i, de type fini sur S_i, tel que G soit S-isomorphe à $G_i \times_{S_i} S$. De même, E étant localement fermé dans G, on peut supposer qu'il existe un sous-ensemble localement fermé E_i de G_i tel que $E = E_i \times_{S_i} S$ (EGA IV 8.3.11). Pour tout $j > i$, notons $G_j = G_j \times_{S_i} S_j$ et $E_j = E_i \times_{S_i} S_j$ et soit Q_j l'ensemble des points s de S_j tels que $(E_j)_s$ soit l'ensemble sous-jacent à un sous-tore central de $(G_j)_s$.

Il résulte de 3.4 que $Q_k = u_{jk}^{-1}(Q_j)$ pour $k \geqslant j$, et par hypothèse $\operatorname{ens}(S) = u_j^{-1}(Q_j)$ pour $j \geqslant i$. Par ailleurs je dis que Q_j est ind-constructible (EGA IV 1.9.4). En effet, comme S_j est noethérien, il suffit (EGA IV 1.9.10) de voir que si S est un schéma intègre noethérien, de point générique η, et si E_η est l'ensemble sous-jacent à un sous-tore central T_η de G_η, il existe un voisinage U de η tel que pour tout point s de U, E_s possède la même propriété. Or quitte à restreindre S, on peut supposer **384**
que le centre Z de G est représentable et qu'il existe un sous-schéma en groupes T de G dont la fibre générique est T_η (VI_B § 10). Mais alors, ens(T) et E sont deux sous-ensembles localement fermés de ens(G) qui coïncident sur la fibre générique, on peut donc trouver un voisinage U de η, tel que, au-dessus de U, ens(T) = E (EGA IV 8.3.11). Pour les mêmes raisons, on peut supposer que au-dessus de U, T est central puisque T est un tore (3.6).

Sachant maintenant que Q_j est ind-constructible, il résulte de EGA IV 8.3.4 que $Q_j = \operatorname{ens}(S_j)$ pour j assez grand. Nous pouvons alors remplacer S, G, E par S_j, G_j, E_j ce qui nous ramène au cas où S est un schéma affine réduit, de type fini sur $\mathbb{Z}$.

c) Réduction au cas où S est spectre d'un anneau local noethérien, réduit complet.

En raison de l'unicité du tore d'espace sous-jacent E, la technique habituelle (EGA IV 8) et le lemme 3.6 permettent de remplacer S par le spectre de l'anneau local A d'un point de S. Soit $\widehat{S}$ le spectre du complété $\widehat{A}$ de A pour la topologie définie par l'idéal maximal. Comme A est le localisé d'une algèbre de type fini sur $\mathbb{Z}$, $\widehat{S}$ est encore

réduit (EGA IV 7.6.5). Je dis qu'il suffit de résoudre le problème après extension de la base : $\widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$. En effet si $\widehat{\mathrm{T}}$ désigne le sous-tore de $\mathrm{G}_{\widehat{\mathrm{S}}}$ d'espace sous-jacent $\mathrm{E}_{\widehat{\mathrm{S}}}$, ses deux images réciproques dans $\mathrm{G}_{\widehat{\mathrm{S}}\times_{\mathrm{S}}\widehat{\mathrm{S}}}$ sont deux sous-tores centraux qui ont même
385 espace sous-jacent, donc coïncident (Exp. IX 5.1 bis) et par descente fpqc, $\widehat{\mathrm{T}}$ provient d'un tore T de G qui répond à la question (cf. 3.4).

d) Un lemme de descente.

Rappelons les propriétés suivantes des morphismes finis qui ont été signalées dans TDTE I : Soient S et S′ deux préschémas et $u : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme fini. Alors :

(1) Le morphisme u est un *épimorphisme* si et seulement si le morphisme canonique de faisceaux :

$$\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \longrightarrow u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$$

est injectif.

(2) Le morphisme u est un *épimorphisme effectif* (Exp. IV 1.3) si et seulement si le diagramme canonique :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \longrightarrow u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) \rightrightarrows u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$$

est exact.

(3) Si de plus S est noethérien et si u est un épimorphisme, u est le composé d'une suite finie d'épimorphismes effectifs finis.

Nous sommes alors en mesure de prouver le lemme suivant dont la démonstration utilise une technique de descente non plate :

Lemme 3.7. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien, G *un* S*-préschéma en groupes de type fini,* S′ *un préschéma et* $u : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme* fini. *Pour tout* S*-préschéma* T*, notons* M(T) *l'ensemble des sous-groupes de type multiplicatif de* G_{T}
386 (*resp. l'ensemble des sous-groupes de type multiplicatif et centraux de* G_{T}) *de sorte que* M *soit de manière naturelle un foncteur contravariant défini sur* **Sch**/S*. Alors si* u *est un* épimorphisme effectif (*resp. un épimorphisme*)*, le diagramme d'ensembles :*

$$(*) \qquad \mathrm{M}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{S}') \rightrightarrows \mathrm{M}(\mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}')$$

est exact.

Démonstration. i) *Réduction au cas où u est un épimorphisme effectif.* Nous nous intéressons donc au foncteur des sous-groupes de type multiplicatif et centraux de G. L'injectivité de $\mathrm{M}(\mathrm{S}) \to \mathrm{M}(\mathrm{S}')$ est une question de nature locale sur S, et cette injectivité étant admise, l'exactitude de $(*)$ devient un problème de nature locale sur S. On peut donc supposer S affine noethérien.

Étudions le cas où $u : \mathrm{S} \to \mathrm{S}'$ est le composé de deux épimorphismes finis :

$$\mathrm{S}' \xrightarrow{v} \mathrm{S}'' \xrightarrow{w} \mathrm{S}.$$

Je dis que si les deux diagrammes :

$$(*)' \qquad \mathrm{M}(\mathrm{S}'') \longrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{S}') \rightrightarrows \mathrm{M}(\mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}''}{\times} \mathrm{S}')$$

$$(*)'' \qquad \mathrm{M}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{S}'') \rightrightarrows \mathrm{M}(\mathrm{S}'' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'')$$

sont exacts, il en est de même de $(*)$.

En effet l'injectivité de $\mathrm{M(S)} \to \mathrm{M(S')}$ est claire. Si maintenant $\mathrm{T'}$ est un élément de : $\operatorname{Ker} \mathrm{M(S')} \rightrightarrows \mathrm{M(S'} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S')}$, a fortiori, $\mathrm{T'}$ appartient à $\operatorname{Ker} \mathrm{M(S')} \rightrightarrows \mathrm{M(S'} \times_{\mathrm{S''}} \mathrm{S')}$ donc par l'exactitude de $(*)'$, provient d'un unique élément $\mathrm{T''}$ de $\mathrm{M(S'')}$. Il nous suffit **387**
de montrer que $\mathrm{T''}$ appartient à $\operatorname{Ker} \mathrm{M(S'')} \rightrightarrows \mathrm{M(S''} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'')}$ car, vu l'exactitude de $(*)''$, $\mathrm{T''}$ se descendra sur S. Soient donc T''_1 et T''_2 les deux images inverses de $\mathrm{T''}$ dans $\mathrm{M(S''} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'')}$. Comme ce sont deux sous-groupes de type multiplicatif centraux de $\mathrm{G}_{\mathrm{S''} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S''}}$, pour montrer que $\mathrm{T}''_1 = \mathrm{T}''_2$, il suffit de voir qu'ils ont mêmes fibres (Exp. IX 5.1 bis). Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S'} \arrow[d, "v"'] & \mathrm{S'} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d, "v \times v"] \\
\mathrm{S''} & \mathrm{S''} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S''}. \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right]
\end{tikzcd}$$

Le morphisme v est un épimorphisme fini donc est dominant (propriété (a) ci-dessus) et fermé, donc est surjectif et il en est de même de $v \times v$. Soit alors x'' un point de $\mathrm{S''} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S''}$ et x' un point de $\mathrm{S'} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'}$ au-dessus de x''. Il résulte de la commutativité du diagramme ci-dessus que les deux images réciproques de $(\mathrm{T}''_1)_{x''}$ et $(\mathrm{T}''_2)_{x''}$ dans $\mathrm{G}_{x'}$ coïncident, donc $(\mathrm{T}''_1)_{x''} = (\mathrm{T}''_2)_{x''}$ (EGA IV 2.2.15).

Ce qui précède et une récurrence immédiate sur le nombre des facteurs d'une factorisation de $u : \mathrm{S'} \to \mathrm{S}$ en épimorphismes effectifs (propriété c) rappelée ci-dessus) montrent que pour prouver l'exactitude de $(*)$ dans le cas des sous-groupes de type multiplicatif centraux, on peut se borner au cas où u est un épimorphisme effectif. Finalement, utilisant encore une fois Exp. IX 5.1 bis, on voit qu'il suffit de démontrer 3.7 lorsque M est le foncteur des sous-groupes de type multiplicatif de G et u un épimorphisme effectif.

ii) *Injectivité de* $\mathrm{M(S)} \to \mathrm{M(S')}$. Comme $u : \mathrm{S'} \to \mathrm{S}$ est un épimorphisme, le **388**
morphisme canonique :

$$\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \longrightarrow u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S'}})$$

est injectif ; par ailleurs, un S-groupe de type multiplicatif est plat sur S ; l'injectivité de $\mathrm{M(S)} \to \mathrm{M(S')}$ est donc une conséquence du lemme plus général suivant :

Lemme 3.8. — *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *et* $g : \mathrm{S'} \to \mathrm{S}$ *deux morphismes de préschémas,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-module quasi-cohérent,* $\mathrm{X'} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'}$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S'}}$, $\mathrm{Q}(\mathscr{F})$ *l'ensemble des* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules quotients* $\mathscr{G}$ *de* $\mathscr{F}$ *qui sont quasi-cohérents et plats sur* S, $\mathrm{Q}(\mathscr{F}')$ *l'analogue relatif à* $\mathscr{F}'$, $\mathrm{X'}$ *et* $\mathrm{S'}$. *Supposons g quasi-compact et* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S'}})$ *injectif ; alors l'application canonique :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(\mathscr{F}) &\longrightarrow \mathrm{Q}(\mathscr{F}') \\ \mathscr{G} &\longmapsto \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S'}} \end{aligned}$$

est injective.

En effet, on peut supposer S affine, puis X affine. Le morphisme g étant quasi-compact, $\mathrm{S'}$ est alors réunion d'un nombre fini d'ouverts affines S'_i. Quitte à remplacer $\mathrm{S'}$ par $\coprod \mathrm{S}'_i$ (opération qui conserve l'injectivité de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S'}})$), on peut supposer

S' affine. On est alors ramené à prouver le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate :

389 ***Lemme 3.9***. — *Soient* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ *un homomorphisme injectif d'anneaux,* M *un* A-*module,* $\mathrm{N} = \mathrm{M}/\mathrm{P}$ *un* A-*module quotient plat sur* A, $\mathrm{M}' = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$, $\mathrm{N}' = \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}' = \mathrm{M}'/\mathrm{P}'$. *Alors* P *est l'image inverse de* P' *sous l'homomorphisme canonique* $\mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ (*donc* N *et* P *sont connus quand on connaît* N' *et* P').

iii) *Exactitude de* 3.7 $(*)$ *en* $\mathrm{M}(\mathrm{S}')$. Soit T' un élément de $\operatorname{Ker} \mathrm{M}(\mathrm{S}') \rightrightarrows \mathrm{M}(\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}')$. *Supposons avoir prouvé* iii) *lorsque* S *est spectre d'un anneau local noethérien.* Pour tout point s de S, il existe donc un sous-groupe de type multiplicatif T_s de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$ qui provient par descente de $\mathrm{T}' \times_{\mathrm{S}'} u^{-1} \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$. D'après (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10 et 3.6), il existe un voisinage U de s dans S et un sous-schéma en groupes T de G au-dessus de U qui est de type multiplicatif et qui prolonge T_s. Soit U' l'image réciproque de U dans S'. On connaît alors deux sous-schémas de $\mathrm{G}'|_{\mathrm{U}'}$: $\mathrm{T}'|_{\mathrm{U}'}$ et $\mathrm{T} \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'$ qui coïncident sur $u^{-1}(\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}))$. Si l'on considère $u^{-1}(\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}))$ comme étant la limite projective des schémas $u^{-1}(\mathrm{V})$ où V parcourt les voisinages ouverts de s dans U, il résulte de EGA IV 8 qu'il existe un ouvert V de U contenant s tel que $\mathrm{T} \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'$ et T' coïncident au-dessus de $u^{-1}(\mathrm{V})$. Donc avec les hypothèses faites, T' se descend localement sur S, mais en raison de l'unicité prouvée dans ii), T' se descend alors globalement sur S. Bref, il suffit de prouver iii) lorsque S est le spectre d'un *anneau local noethérien.*

390 Notons alors $\widehat{\mathrm{S}}$ le spectre du complété de l'anneau de S et soient $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, $\widehat{\mathrm{S}}' = \widehat{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, $\widehat{\mathrm{S}}'' = \widehat{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'' = \widehat{\mathrm{S}}' \times_{\mathrm{S}} \widehat{\mathrm{S}}'$. Je dis qu'il suffit de montrer que le diagramme :

$$(*) \qquad \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}) \longrightarrow \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}') \rightrightarrows \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}'')$$

est exact en $\mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}')$. Cela résulte du diagramme commutatif ci-dessous où la deuxième ligne est exacte en $\mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}')$ par hypothèse, où les deux premières colonnes sont exactes (descente fpqc), et où l'application f est injective comme il résulte de ii) appliqué à l'épimorphisme fini :

$$\widehat{\mathrm{S}}' \underset{\mathrm{S}'}{\times} \widehat{\mathrm{S}}' \longrightarrow \widehat{\mathrm{S}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \widehat{\mathrm{S}}$$

déduit de $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ par le changement de base plat $\widehat{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}(\mathrm{S}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{M}(\mathrm{S}') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \mathrm{M}(\mathrm{S}'') \arrow[d] \\
\mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}''}) \\
\mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \widehat{\mathrm{S}}) \arrow[r, "f"] & \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}' \times_{\mathrm{S}'} \widehat{\mathrm{S}}') &
\end{tikzcd}$$

(le diagram-chasing est laissé au lecteur). Il résulte de la caractérisation b) des épimorphismes finis effectifs que le morphisme $\widehat{\mathrm{S}}' \to \widehat{\mathrm{S}}$, déduit de $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ par le changement de base plat $\widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$, est encore un épimorphisme fini effectif. Nous sommes donc ramenés au cas où de plus S est le spectre d'un *anneau noethérien local complet.*

Notons S_0 le sous-schéma réduit de S qui a pour espace sous-jacent le point fermé de S. Soient T' un élément de $\operatorname{Ker} M(S') \rightrightarrows M(S'')$, T'' son image dans $M(S'')$. Comme $S'_0 = S' \times_S S_0$ est fidèlement plat sur S_0, il existe un S-sous-groupe de type multiplicatif T_0 de G_{S_0} dont l'image inverse dans $G_{S'_0}$ est $T'_{S'_0}$ (descente fpqc). Mais S est local **391**
noethérien complet, donc il existe un S-groupe de type multiplicatif T et un S_0-morphisme $u_0 : T \times_S S_0 \to T_0$ (Exp. X 3.3). L'image inverse u'_0 de u_0 au-dessus de S'_0 se prolonge de manière unique en un S'-isomorphisme $u' : T_{S'} \to T'$, toujours d'après Exp. X 3.3 (noter que S' étant fini sur S local complet est la somme d'un nombre fini de schémas locaux complets). Les deux images réciproques de u' au-dessus de S'' sont deux morphismes de $T_{S''}$ dans T'' qui coïncident sur $S_0 \times_S S''$, donc ils coïncident (*loc. cit.*). Comme T est plat sur S et que $S' \to S$ est un épimorphisme effectif fini, il résulte de TDTE I page 8 que le diagramme :

$$\mathrm{Hom}_S(T, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(T_{S'}, G_{S'}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S''}(T_{S''}, G_{S''})$$

est exact. Donc u' provient d'un morphisme de préschémas $u : T \to G$. De même $T \times_S T$ est plat sur S et par suite l'application :

$$\mathrm{Hom}_S(T \underset{S}{\times} T, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(T_{S'} \underset{S'}{\times} T_{S'}, G_{S'})$$

est injective. On en déduit immédiatement que u est un morphisme de groupes puisqu'il en est ainsi de u'. De plus u est un monomorphisme. En effet, notons d'abord que $\operatorname{Ker} u$ est plat sur S, car pour établir ce fait, on peut supposer S artinien local (EGA 0_{III} 10.2.2), donc G séparé (Exp. $\mathrm{VI_A}$ 0.3), mais alors $\operatorname{Ker} u$ est de type multiplicatif (Exp. IX 6.8) donc est plat sur S. Comme $\operatorname{Ker}(u) \times_S S' = \operatorname{Ker}(u') = 0$, on a $\operatorname{Ker}(u) = 0$ (3.8). Mais u étant un monomorphisme est une immersion (Exp. VIII, remarques 7.13) et le groupe image $u(T)$ est bien un élément de M(S) dont l'image dans $M(S')$ est T', ce qui achève de démontrer 3.7.

e) Fin de la démonstration de I). **392**

Nous sommes ramenés par la réduction c) au cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien réduit et complet A. Soit S' le spectre du normalisé A' de A, qui est fini sur A d'après Nagata (EGA 0_{IV} 23.1.5) ; $S' \to S$ est un épimorphisme puisque A s'envoie injectivement dans A'. Supposons alors qu'il existe un tore T' de $G_{S'}$ ayant $E_{S'}$ pour espace sous-jacent. Les deux images inverses de T' dans $G_{S' \times_s S'}$ sont deux sous-tores centraux ayant même espace sous-jacent, donc ils coïncident (Exp. IX 5 bis) donc, d'après 3.7, T' provient d'un sous-tore central T de G_S qui admet évidemment E pour espace sous-jacent. Il suffit donc de démontrer l'existence de T', ce qui nous ramène au cas où S est normal et achève la démonstration de I).

II) Démonstration de (iii) ⇒ (ii) lorsque S est normal.

Nous pouvons nous limiter au cas où S est intègre ; soit t son point générique. Pour tout entier n égal à une puissance de q, soit ${}_nG$ le sous-préschéma de G « noyau » de l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans G. Comme E est localement fermé dans G (d'après (iii) b)), l'intersection de $\mathrm{ens}({}_nG)$ avec E est localement fermée dans ens(G) ; notons alors $E(n)$ le sous-préschéma réduit de G qui a $\mathrm{ens}({}_nG) \cap E$ pour espace sous-jacent.

Montrons que le morphisme structural : $E(n) \to S$ est *séparé* et *universellement ouvert.* Pour ces deux propriétés, on dispose d'un critère valuatif (EGA II 7.2.3 et

EGA IV 14.5.8). Soit donc S′ un S-schéma qui est le spectre d'un anneau de valuation
393 discrète, complet à corps résiduel algébriquement clos. Nous avons démontré que 3.1 (iii) ⇒ 3.1 (iv), donc il existe un sous-tore T′ de $G_{S'}$ ayant $E_{S'}$ pour espace sous-jacent. Or ${}_n T'$ est fini et étale sur S′ donc est séparé et universellement ouvert sur S′ et il en est de même de $E(n) \times_S S'$ qui a même espace sous-jacent que ${}_n T'$.

Par ailleurs, les fibres de E(n) ont le même nombre de points géométriques, à savoir r^n si r est le rang du tore T_t. Enfin, la fibre générique $E(n)_t$, étant réduite, est égale à ${}_n T_t$ donc est étale sur Spec(t). Comme S est normal, il résulte alors de SGA I 10.11 que E(n) est un revêtement étale de S.

Si s est un point de S, $E(n)_s$ est étale sur Spec $\kappa(s)$, donc est réduit et par suite coïncide avec le groupe de type multiplicatif ${}_n T_s$. Montrons que E(n) est un sous-préschéma en groupes de G. En effet, soit m le morphisme

$$E(n) \underset{S}{\times} E(n) \longrightarrow G$$

induit par la multiplication dans G. L'application ens(m) sous-jacente à m se factorise à travers E(n), donc m se factorise à travers le préschéma E(n) puisque le premier membre $E(n) \times_S E(n)$ est étale sur S, donc réduit. Il résulte alors de Exp. X 4.8 a) que E(n) est un sous-groupe de type multiplicatif. Comme on l'a déjà remarqué (3.2 a)) la famille des sous-groupes E(n) est nécessairement cohérente. Nous avons donc prouvé que (iii) ⇒ (ii) lorsque S est normal.

394 **III)** Démonstration de (ii) ⇒ (i).

En fait nous allons montrer qu'il existe un unique sous-tore T de G d'espace sous-jacent égal à E et tel que ${}_n T = M_n$ pour tout n égal à une puissance de q. L'unicité de T résulte simplement de Exp. IX 4.8 b). Pour établir l'existence de T, compte tenu de l'unicité, nous pouvons supposer successivement que :

a) S est noethérien.

b) Les M_n sont des sous-groupes centraux. En effet, il suffit de remplacer G par $Z_n = \underline{\mathrm{Centr}}_G(M_n)$ pour n assez grand (2.5 et 2.5 bis),

c) S est le spectre d'un anneau local. Supposons en effet le problème résolu après tout changement de base : $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s}) \to S$ où s parcourt les points de S. Soit T_s le sous-tore de $G \times_S \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s})$ ainsi obtenu. Pour tout s il existe alors un voisinage ouvert U de s et un sous-tore T de $G|_U$ qui prolonge T_s (Exp. VI_B § 10 et 3.6). Nous avons démontré que 3.1 (ii) ⇒ 3.1 (iv) ; comme S est noethérien, E est donc constructible (3.3). Par suite, quitte à restreindre U, on peut supposer que ens (T) = $E \times_S U$ (EGA IV 9.5.2). Mais alors, pour tout entier n égal à une puissance de q, ${}_n T$ et $M_n \times_S U$ sont deux sous-groupes de type multiplicatif de $G|_U$ qui ont mêmes fibres, donc qui coïncident, M_n étant central (Exp. IX 5.3 bis). Bref, avec les hypothèses faites, il existe une solution localement sur S, donc en raison de l'unicité, il existe une solution globale.

395 d) S est le spectre d'un anneau local noethérien complet, et si s est le point fermé, T_s est trivial. Cela résulte de EGA 0_{III} 10.3.1 et de la descente fpqc.

e) S est réduit. On applique 2.2.

f) S est normal. On applique le théorème de finitude de Nagata (EGA $0_{\rm IV}$ 23.1.5) et le lemme 3.7 dans le cas des sous-tores centraux.

Ces réductions étant faites, comme T_s est trivial, $(\mathrm{M}_n)_s$ est trivial, donc M_n est trivial (Exp. X 3.3). Si t est un point de S, les sous-groupes ${}_n\mathrm{T}_t$ de T_t sont donc triviaux pour tout n égal à une puissance de q, et il résulte facilement de Exp. X 1.4 que T_t lui-même est trivial. Il nous suffit alors de démontrer le lemme :

Lemme 3.10. — *Sous les hypothèses de* 3.1 (ii), *supposons de plus que* S *soit noethérien et normal et que pour tout point s de* S, T_s *soit un tore trivial. Alors il existe un unique sous-tore* T *de* G *d'espace sous-jacent égal à* E, *tel que* ${}_n\mathrm{T} = \mathrm{M}_n$ *pour tout n égal à une puissance de q. De plus* T *est trivial.*

L'unicité de T résulte du fait que T étant lisse sur S, T est réduit. Pour prouver l'existence, on peut supposer S irréductible de point générique η. Soient r le rang de T_η, $\mathrm{T}' = \mathbb{G}^r_{m,\mathrm{S}}$, u_η un isomorphisme de T'_η sur T_η, ${}_nu_\eta$ la restriction de u_η à ${}_n\mathrm{T}'_\eta$. Comme ${}_n\mathrm{T}'$ et M_n sont triviaux, il existe un unique prolongement ${}_nu$ de ${}_nu_\eta$ en un S-isomorphisme de ${}_n\mathrm{T}'$ sur M_n. Je dis que pour tout point s de S, il existe un isomorphisme de groupes, nécessairement unique :

$$u_s : \mathrm{T}'_s \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{T}_s$$

qui prolonge ${}_nu_s$ pour tout n égal à une puissance de q. En effet, soit S_1 un S-schéma, **396**
spectre d'un anneau de valuation discrète, complet, à corps résiduel algébriquement clos, dont le point générique t_1 se projette sur η et le point fermé s_1 sur s (EGA II 7.1.9). Il résulte de la démonstration de 3.1 (ii) $\Rightarrow$ 3.1 (iv) qu'il existe un sous-tore T^1 de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_1}$ tel que $(\mathrm{M}_n)_{\mathrm{S}_1} = {}_n\mathrm{T}^1$ pour tout n égal à une puissance de q. Comme S_1 est normal, T^1 est isotrivial (Exp. X 5.16) et il résulte de la classification des tores isotriviaux (Exp. X 1.2) et de SGA1 V 8.2 que T^1, ayant sa fibre générique triviale, est trivial. On peut donc prolonger l'isomorphisme $u_\eta \times_\eta t_1$ en un S_1-isomorphisme de schémas en groupes :

$$u^1 : \mathrm{T}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^1.$$

La restriction de u^1 à ${}_n\mathrm{T}' \times_\mathrm{S} \mathrm{S}_1$ d'une part, et ${}_nu \times_\mathrm{S} \mathrm{S}^1$ d'autre part, coïncident sur la fibre générique par construction, donc coïncident. La restriction $u^1_{s_1}$ de u^1 à la fibre fermée réalise donc le prolongement cherché après extension du corps résiduel : $\kappa(s) \to \kappa(s_1)$. Il résulte alors de Exp. IX 4.8 a) et de la descente fpqc que $u^1_{s_1}$ se descend sur $\kappa(s)$ en un isomorphisme de groupes $u_s : \mathrm{T}'_s \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_s$ qui répond à la question.

Par ailleurs, T′ est lisse sur S qui est normal, donc est normal. Il résulte alors d'un critère facile de prolongement des applications rationnelles (EGA IV_4 20.4.6), que, pour qu'il existe un S-morphisme $u : \mathrm{T}' \to \mathrm{G}$ dont la restriction à T'_s, pour tout point s de S, soit le morphisme composé :

$$\mathrm{T}'_s \xrightarrow{u_s} \mathrm{T}_s \longrightarrow \mathrm{G}_s$$

il faut et il suffit qu'il en soit ainsi après tout changement de base $\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}$, où S_1 est **397**
le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel algébriquement clos.

Or dans le cas présent, un raisonnement analogue à celui que l'on vient de faire, montre que la condition de prolongement est bien satisfaite. Notons u le S-morphisme $T' \to G$ ainsi obtenu.

Montrons que u est bien un morphisme de groupes. Soit $m_{T'}$ (resp. m_G) le morphisme définissant la multiplication dans T′ (resp. G). Nous devons vérifier que $m_G \circ (u \times_S u) = u \circ m_{T'}$. Or le sous-préschéma des coïncidences de ces deux morphismes est un sous-préschéma de $T' \times_S T'$, qui majore les fibres (car u_S est un morphisme de groupes), donc qui a même espace sous-jacent que $T' \times_S T'$, donc est égal à ce dernier, puisque $T' \times_S T'$ est lisse sur S, donc réduit.

Enfin notons que u est un monomorphisme (puisqu'il en est ainsi sur les fibres) donc est une immersion (Exp. VIII 7.9). L'image de T′ par u est alors un sous-tore de G qui a E pour ensemble sous-jacent.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.

4. Caractérisation d'un sous-tore T par les sous-groupes ${}_nT$

398 1. *Énoncé du théorème principal*

Théorème 4.1. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien* connexe*,* G *un* S-*préschéma en groupes de type fini sur* S*, q un entier* > 1 *inversible sur* S*, r un entier positif. Pour tout entier n égal à une puissance de q, soit* $M(n)$ *un sous-schéma en groupes de* G*, de type multiplicatif et de type* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$*. On suppose que :*

a) *La famille des sous-groupes* $M(n)$ *est cohérente, c'est-à-dire que, si l'entier m divise n, on a :*

$$ {}_mM(n) = M(m). $$

b) *Il existe un point s de* S *et un sous-tore* T_s *de* G_s *tel que :*

$$ M(n)_s = {}_nT_s \quad \text{pour tout } n. $$

c) *Pour tout point t de* S*, il existe un sous-schéma fermé et affine* $F_{\overline{t}}$ *de* $G_{\overline{t}}$ *qui majore* $M(n)_{\overline{t}}$ *pour tout n.*

Alors il existe un sous-tore T *de* G *et un seul, tel que* ${}_nT = M(n)$ *pour tout n égal à une puissance de q.*

On a un théorème analogue portant sur le relèvement des morphismes :

Théorème 4.1. bis. — *Soient* S, G *et q comme ci-dessus,* T *un* S*-tore, et pour tout entier n égal à une puissance de q, soit $u(n)$ un* S*-morphisme de groupes :* ${}_nT \to G$*. On suppose que :*

399 a) *La famille des morphismes $u(n)$ est cohérente, c.-à-d., si m divise n, on a :*

$$ u(m) = u(n)|_{{}_mT}. $$

b) *Il existe un point s de* S *et un morphisme de groupes :*

$$ u_s : T_s \longrightarrow G_s $$

tel que $u_s|_{{}_nT_s} = u(n)_s$ *pour tout n égal à une puissance de q.*

c) *Pour tout point t de* S, *il existe un sous-schéma fermé et affine* $\mathrm{F}_{\overline{t}}$ *de* $\mathrm{G}_{\overline{t}}$ *qui majore* $u(n)_{\overline{t}}\,({}_n\mathrm{T}_{\overline{t}})$ *pour tout n.*

Alors il existe un unique morphisme de groupes $u : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$, *tel que pour tout n égal à une puissance de q, la restriction de u à ${}_n\mathrm{T}$ soit égale à $u(n)$.*

Remarque 4.2. — Utilisant la semi-continuité inférieure du rang abélien d'un préschéma en groupes plat de type fini sur le spectre d'un anneau de valuation discrète (confer. Exp. X 8.7) on peut, dans l'énoncé de 4.1 et de 4.1 bis, affaiblir la condition c) en demandant simplement que le sous-schéma fermé et affine $\mathrm{F}_{\overline{t}}$ exigé existe pour tout point maximal t de S.

Montrons comment 4.1 bis *résulte de* 4.1. Soit $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$. Pour tout entier n égal à une puissance de q, considérons le morphisme de groupes :

$$v(n) : {}_n\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{G}'$$

dont les projections sur G et T sont respectivment $u(n)$ et l'immersion canonique : ${}_n\mathrm{T} \to \mathrm{T}$. Le morphisme $v(n)$ est donc une immersion, soit $\mathrm{M}(n)$ le sous-groupe image. **400**
Il est clair que la famille des sous-groupes $\mathrm{M}(n)$ est cohérente au sens de 4.1, que le groupe $\mathrm{M}(n)_s$ est égal à ${}_n\mathrm{T}'_s$, où T'_s est le sous-tore de G'_s graphe de u_s, et que pour tout point t de S, le sous-schéma fermé et affine $\mathrm{F}_{\overline{t}} \times_{\overline{t}} \mathrm{T}_{\overline{t}}$ de $\mathrm{G}'_{\overline{t}}$ majore les sous-groupes $\mathrm{M}(n)_{\overline{t}}$ pour tout n. D'après 4.1 il existe donc un sous-tore T' de G' tel que ${}_n\mathrm{T}' = \mathrm{M}(n)$ pour tout n égal à une puissance de q. Soient f la restriction à T' de la projection de G' sur T, et $f(n)$ la restriction de f à $\mathrm{M}(n)$. On a :

$$f(n) \circ v(n) = \mathrm{id}_{{}_n\mathrm{T}}\,.$$

La fibre en s de T' est le tore déjà noté T'_s, égal au graphe de u_s (ceci résulte de Exp. IX 4.8 b)), donc f_s est un isomorphisme. Mais $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Coker} f$ sont des groupes de type multiplicatif (Exp. IX 2.7) de type constant, S étant connexe, donc réduits au groupe unité, et f est un isomorphisme. Soit v l'isomorphisme réciproque de f. On a :

$$v|_{{}_n\mathrm{T}} = v(n).$$

Par suite, le composé de v et de la projection de G' sur G est un morphisme $u : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$ qui répond à la question. Ce qui précède prouve l'existence du morphisme u ; quant à l'unicité elle résulte de toute façon de Exp. IX 4.8 a).

2. *Application*

Nous nous proposons de généraliser le théorème 7.1 de Exp. IX.

Soient A un anneau local noethérien complet, I son idéal maximal, $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$, **401**
$\mathrm{S}_m = \operatorname{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I}^m)$. Pour tout préschéma X, posons $\mathrm{X}_m = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_m$.

Soient alors G un S-préschéma en groupes de type fini, T un S-tore, q un entier inversible sur S et $u_m : \mathrm{T}_m \to \mathrm{G}_m$ ($m \in \mathbb{N}$) une famille cohérente de morphismes de groupes. L'entier n parcourant les puissances de q, notons $u_m(n)$ la restriction de u_m à ${}_n\mathrm{T}_m$ et $u(n)$ l'unique morphisme de groupes :

$$u(n) : {}_n\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui prolonge les morphismes $u_m(n)$ pour tout m (1.6 a)). Nous dirons que la famille (u_m), $m \in \mathbb{N}$, est *admissible* si pour tout point t de S, il existe un sous-préschéma *fermé affine* $\mathrm{F}_{\overline{t}}$ de $\mathrm{G}_{\overline{t}}$ qui majore $u(n)_{\overline{t}}({}_n\mathrm{T}_{\overline{t}})$ pour tout n égal à une puissance de q (cette propriété est indépendante de q comme on va le voir).

Proposition 4.3. — *Avec les notations ci-dessus, l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G}) \longrightarrow \varprojlim_m \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_m\text{-gr}}(\mathrm{T}_m,\mathrm{G}_m)$$

induit un isomorphisme du premier membre sur le sous-ensemble du second membre formé des familles cohérentes « admissibles ».

En effet, il suffit d'appliquer 4.1 bis en prenant pour s le point fermé de S.

Corollaire 4.4. — *Avec les notations ci-dessus, supposons de plus que* G *est à fibres* affines, *alors l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G}) \longrightarrow \varprojlim_m \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_m\text{-gr}}(\mathrm{T}_m,\mathrm{G}_m)$$

402 *est un isomorphisme.*

En effet, si G est à fibres affines, toute famille cohérente est « admissible ».

Remarque 4.5. — Lorsque G est *séparé,* on peut dans 4.3 remplacer l'anneau A par un anneau noethérien I-adique ; on peut en effet utiliser EGA III 5.4.1 au lieu de 1.6 a).

3. *Démonstration de* 4.1

Lemme 4.6. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique, q un entier premier à la caractéristique résiduelle de k, r un entier > 0,* M(n) *(n parcourant les puissances de q) une famille cohérente de sous-groupes de* G*, de type multiplicatif et de type* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$*. Alors il existe un plus petit sous-schéma fermé* H *de* G *qui majore les* M(n) *pour tout n. De plus,* H *est un sous-groupe algébrique de* G*, lisse, connexe et commutatif « dont la formation est compatible avec l'extension du corps de base ».*

Soient M le sous-ensemble de ens(G) réunion des ensembles sous-jacents aux sous-groupes M(n) pour tout n, et H le sous-schéma fermé réduit de G ayant l'adhérence de M pour espace sous-jacent. Comme M(n) est étale sur k donc réduit, M(n) est contenu dans H et par suite, H est le plus petit sous-schéma fermé de G qui majore M(n) pour tout n. Soit maintenant $\overline{k}$ une extension algébriquement close de k. Par
403 construction, les sous-schémas M(n) sont schématiquement denses dans H (Exp. IX 4.1), les $\mathrm{M}(n)_{\overline{k}}$ sont donc schématiquement denses dans $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ (Exp. IX 4.5), par ailleurs $\mathrm{M}(n)_{\overline{k}}$ est réduit, il en résulte que $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ est nécessairement égal au sous-schéma fermé et réduit de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ qui a pour espace sous-jacent l'adhérence de $\mathrm{M}_{\overline{k}}$. Ceci prouve que H est géométriquement réduit (EGA IV 4.6.1). La famille M(n) étant cohérente, M est stable par la loi de groupe, de plus $\mathrm{M} \times_k \mathrm{M}$ est dense dans ens$(\mathrm{H} \times_k \mathrm{H})$ et $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$ est réduit (EGA IV 4.6.5) ; on en déduit immédiatement que H est un sous-groupe algébrique de G. De plus H est lisse sur S, car il est géométriquement réduit (Exp. $\mathrm{VI_A}$ 1.3.1) et H est commutatif puisque les M(n) sont commutatifs. Il reste à voir que H est

connexe. Soient H^0 la composante neutre de H, m le nombre de points géométriques de H/H^0, q^s l'exposant de q dans la décomposition en facteurs premiers de m. Pour tout entier n égal à une puissance de q, $q^s\mathrm{M}(n)$ est alors contenu dans H^0. Mais la famille $\mathrm{M}(n)$ est cohérente et $\mathrm{M}(n)$ est de type $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$, par suite $q^s\mathrm{M}(nq^s) = \mathrm{M}(n)$. Donc H^0 majore $\mathrm{M}(n)$ pour tout n et par suite est égal à H.

Ceci étant, nous allons préciser la condition c) de 4.1. En effet, d'après ce qui précède, nous pouvons considérer le plus petit sous-schéma fermé H_t de G_t qui majore $\mathrm{M}(n)_t$ pour tout n. La formation de H_t commutant avec l'extension du corps de base (4.6), $\mathrm{H}_{\overline{t}} = \mathrm{H}_t \times_t \overline{t}$ est contenu dans le fermé affine $\mathrm{F}_{\overline{t}}$, donc est affine. Bref, H_t est affine. D'autre part, nous savons (4.6) que H_t est un groupe algébrique lisse, connexe, commutatif. Il résulte alors de la structure des groupes algébriques affines lisses commutatifs et connexes, sur un corps algébriquement clos (BIBLE 4 Th. 4), 404
que $\mathrm{H}_{\overline{t}}$ est produit direct d'un tore $\mathrm{T}_{\overline{t}}$ et d'un groupe unipotent $\mathrm{U}_{\overline{t}}$. Mais alors $\mathrm{M}(n)_{\overline{t}}$ est nécessairement contenu dans $\mathrm{T}_{\overline{t}}$, donc $\mathrm{H}_{\overline{t}} = \mathrm{T}_{\overline{t}}$ et par suite, H_t est un tore.

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration de 4.1.

a) Unicité de la solution : il suffit d'appliquer Exp. IX 4.8 b).

b) Cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A complet, à corps résiduel algébriquement clos k. Notons K le corps des fractions de A, s le point fermé de S, t le point générique, J l'idéal maximal de A, $\mathrm{S}_m = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{J}^m)$, $\mathrm{X}_m = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_m$.

Distinguons deux cas :

1er cas : Le point s de 4.1 b) est le point générique t de S. Soit alors T' l'adhérence schématique dans G du tore T_t. La fibre fermée T'_s est donc un sous-groupe algébrique de G_s, de dimension r, qui majore $\mathrm{M}(n)_s$ pour tout n, donc T'_s majore H_s. Mais H_s est un tore qui contient $\mathrm{M}(n)_s$ donc H_s a un rang au moins égal à r. Par suite H_s a même espace sous-jacent que la composante neutre de T'_s. La « composante neutre » $(\mathrm{T}')^0$ de T' est alors un sous-préschéma en groupes de G, plat, séparé (VI_{B} 5.2) dont la fibre générique T_t est un tore et la fibre fermée réduite H_s est un tore. Mais alors $(\mathrm{T}')^0$ est un tore (Exp. X 8.8) que nous notons T. Les groupes ${}_n\mathrm{T}$ et M_n sont lisses sur S, donc réduits et comme ils ont même espace sous-jacent, ils coïncident. Donc le tore T est la solution du problème.

2ème cas : Le point s de 4.1 b) est le point fermé s de S. Quitte à remplacer G par 405
l'adhérence schématique dans G du plus petit sous-groupe algébrique H_t qui majore la famille $\mathrm{M}(n)_t$ (4.6), nous pouvons supposer G_t affine.

Pour tout entier $m \geqslant 0$, il résulte de 2.2 qu'il existe un unique sous-tore T_m de G_m qui relève T_s et tel que pour tout entier n égal à une puissance de q, on ait ${}_n\mathrm{T}_m = \mathrm{M}(n)_m$. Par ailleurs, soit $\mathrm{T}' = \mathbb{G}^r_{m,\mathrm{S}}$. Comme k est algébriquement clos, T_s est trivial et il existe un k-isomorphisme $u_s : \mathrm{T}'_s \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_s$. Le morphisme u_s se relève de manière unique en un S_m-isomorphisme $u_m : \mathrm{T}'_m \to \mathrm{T}_m$ (Exp. IX 3.3). La famille de morphismes u_m, $m \in \mathbb{N}$, définit à la limite un morphisme $\widehat{u}$ des complétés formels

$\widehat{\mathrm{T}}'$ et $\widehat{\mathrm{G}}$ de T′ et G le long de leur fibre fermée :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathrm{T}'} & \xrightarrow{\widehat{u}} & \widehat{\mathrm{G}} \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathrm{T}' & & \mathrm{G} \end{array},$$

où i et j désignent les morphismes canoniques.

Nous allons montrer que le morphisme $\widehat{u}$ est *algébrisable.* Pour cela nous allons nous ramener au cas où le groupe G est affine.

Lemme 4.7. — *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète* A, X *et* Y *deux* S-*préschémas, quasi-compacts, quasi-séparés et plats sur* S. *Alors, l'application canonique :*

$$\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \otimes_{\mathrm{A}} \Gamma(\mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}})$$

est un isomorphisme.

406 Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ (resp. $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$) le morphisme structural. Comme X (resp. Y) est quasi-compact et quasi-séparé, il résulte de EGA I 9.2.2 et de EGA IV 1.7.4 que $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ (resp. $g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$) est une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente qui correspond donc à un S-schéma affine $\widetilde{\mathrm{X}}$ (resp. $\widetilde{\mathrm{Y}}$). Par hypothèse, Y est plat sur S, il résulte alors de EGA III 1.4.15, compte tenu de EGA IV 1.7.21, que l'application canonique (déduite du morphisme canonique $\mathrm{X} \to \widetilde{\mathrm{X}}$) :

$$\Gamma(\widetilde{\mathrm{X}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{X}}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}})$$

est un isomorphisme. Mais X étant plat sur S, $\widetilde{\mathrm{X}}$ est plat sur S (car plat sur A équivaut à sans torsion). Appliquons encore EGA III 1.4.15 en permutant les rôles de X et Y, on obtient un isomorphisme :

$$\Gamma(\widetilde{\mathrm{X}}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{X}}}) \otimes_{\mathrm{A}} \Gamma(\widetilde{\mathrm{Y}}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}) \simeq \Gamma(\widetilde{\mathrm{X}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \widetilde{\mathrm{Y}}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{X}}\times_{\mathrm{S}}\widetilde{\mathrm{Y}}}) \xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(\widetilde{\mathrm{X}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{X}}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}})$$

d'où le lemme.

Dans le cas présent, le S-groupe G est plat sur S et de type fini, donc quasi-compact et quasi-séparé. On peut donc appliquer le lemme à $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$:

$$\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \otimes_{\mathrm{A}} \Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}}).$$

Au morphisme $m_g : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, définissant la multiplication dans G, correspond donc un morphisme :

$$\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}}) \xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \otimes_{\mathrm{A}} \Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}})$$

donc un S-morphisme :

$$m_{\widetilde{\mathrm{G}}} : \widetilde{\mathrm{G}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}},$$

407 où $\widetilde{\mathrm{G}}$ désigne le S-schéma affine ayant $\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}})$ pour A-algèbre. Il est formel, à partir de là, de vérifier que $m_{\widetilde{\mathrm{G}}}$ munit $\widetilde{\mathrm{G}}$ d'une structure de S-schéma en groupes, telle que le morphisme canonique $v : \mathrm{G} \to \widetilde{\mathrm{G}}$ soit un morphisme de S-groupes.

Remarque 4.8. — $\widetilde{\mathrm{G}}$ joue le rôle d'un plus grand « quotient affine » de G, d'ailleurs, on peut montrer que $\widetilde{\mathrm{G}}$ est bien un quotient de G pour fpqc donc est de type fini sur S (XVII App. III, 2).

Dans le cas qui nous occupe, la fibre générique G_t de G est affine, il résulte alors de EGA I 9.3.3 que v_t est un isomorphisme. Comme $\widetilde{\mathrm{G}}$ est affine, la famille cohérente de morphismes :

$$w_m = v_m u_m : \mathrm{T}'_m \longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}}_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

provient d'un unique morphisme de S-groupes (Exp. IX 7.1)

$$w : \mathrm{T}' \longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}}.$$

Soit alors T_t le sous-tore de G_t égal à $v_t^{-1} w_t(\mathrm{T}'_t)$. Le tore T_t est donc de rang r au plus (comme image d'un tore de rang r). Montrons que T_t majore $\mathrm{M}(n)_t$ pour tout n. En effet, soit $u(n)_m$ le S_m-isomorphisme $({}_n\mathrm{T}')_m \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}(n)_m$ obtenu par restriction de u_m à $({}_n\mathrm{T}')_m$. La famille cohérente de morphismes $u(n)_m$ provient d'un unique S-isomorphisme $u(n) : {}_n\mathrm{T}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}(n)$ (car $\mathrm{M}(n)$ est fini sur S). Pour tout entier $m \geqslant 0$, on a alors les égalités :

$$w_m|_{({}_n\mathrm{T}')_m} = (v_m u_m)|_{({}_n\mathrm{T}')_m} = (v \circ u(n))_m.$$

Par suite, $w|_{{}_n\mathrm{T}'} = v \circ u(n)$ (1.6 a)). En particulier, on a :

$$w_t|_{({}_n\mathrm{T}')_t} = v_t \circ u(n)_t,$$

donc $v_t^{-1} w_t\,({}_n\mathrm{T}')_t = u(n)_t\,({}_n\mathrm{T}')_t = \mathrm{M}(n)_t$.

Ceci prouve bien que T_t majore $\mathrm{M}(n)_t$ et entraîne que T_t est de rang r. On termine 408
comme dans le premier cas déjà étudié, en considérant l'adhérence schématique dans G de T_t, soit T''. Comme T_t majore $\mathrm{M}(n)_t$, alors T''_s majore $\mathrm{M}(n)_s$ donc majore T_s (théorème de densité). D'autre part, T'' étant plat sur S et T_t de dimension r, T''_s est de dimension r (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 4). Bref, T_s a même espace sous-jacent que la composante neutre de T''_s, et on conclut comme dans le premier cas que la composante neutre de T'' est un sous-tore de G qui répond à la question.

c) Fin de la démonstration de 4.1.

Pour prouver l'existence du sous-tore T, on peut supposer S réduit (2.2). Compte tenu de 3.1 (ii) ⇒ (i), il suffit alors de prouver que l'ensemble U des points x de S tels qu'il existe un sous-tore T_x de G_x avec ${}_n\mathrm{T}_x = \mathrm{M}(n)_x$ pour tout n égal à une puissance de q, est égal à ens(S). Le tore T_x dont il est question est nécessairement unique et par descente fpqc, il suffit de prouver son existence après extension du corps résiduel de x (Exp. IX 4.8 b)).

Ceci étant, comme S est localement noethérien et connexe et comme U n'est pas vide (il contient le point s de 4.1 b)), on est ramené, par un raisonnement immédiat, à prouver que si x et x' sont deux points de S, x étant une spécialisation de x', et si l'un des deux points appartient à U, alors les deux points sont dans U. Par la technique habituelle (EGA II 7.1.9) on se ramène au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, cas qui a été traité dans b).

Ceci achève la démonstration du théorème 4.1.

5. Représentabilité du foncteur : sous-groupes lisses identiques à leur normalisateur connexe

409 ***Proposition 5.1***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie,* H *un sous-préschéma en groupes de* G*, lisse à fibres connexes. Alors :*

a) *Le normalisateur* N *de* H *dans* G *est représentable par un sous-préschéma fermé de* G*, de présentation finie sur* S.

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *L'immersion canonique* $\mathrm{H} \to \mathrm{N}$ *est une immersion ouverte.*

ii) *Le groupe* N *est lisse le long de la section unité et sa composante neutre, qui est alors représentable* (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10)*, est égale à* H.

iii) *Pour tout point* s *de* S*, on a* $\mathrm{H}_s = (\mathrm{N}_s)^0$.

Démonstration. Le préschéma en groupes H est localement de présentation finie sur S (H est lisse sur S) et à fibres connexes, donc est de présentation finie sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.3.3). L'assertion a) est alors une conséquence de Exp. XI 6.11. L'équivalence des conditions figurant dans b) est mise ici pour mémoire et a été démontrée dans $\mathrm{VI_B}$ 6.5.1.

Ceci étant, nous pouvons énoncer le théorème principal de ce paragraphe :

410 ***Théorème 5.2***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*,* $\mathscr{L}_{\mathrm{G}}$ (*ou simplement* $\mathscr{L}$ *s'il n'y a pas d'ambiguité*) *le* S*-foncteur tel que pour tout* S*-préschéma* S′ *on ait :*

$\mathscr{L}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}') =$ *ensemble des sous-préschémas en groupes de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*, lisses sur* S′*, à fibres connexes, qui sont identiques à leur normalisateur connexe.*

Alors le foncteur $\mathscr{L}$ *est représentable par un* S*-préschéma, réunion d'une famille croissante* $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de sous-préschémas ouverts, quasi-projectifs, de présentation finie sur* S*, donc a fortiori séparé sur* S.

Premières réductions.

Pour tout entier $r \geqslant 0$, soit $\mathscr{L}_r$ le sous-foncteur de $\mathscr{L}$ tel que pour tout S-préschéma S′, on ait :

$\mathscr{L}_r(\mathrm{S}') =$ ensemble des sous-préschémas en groupes de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, lisses, à fibres connexes, identiques à leur normalisateur connexe et de *dimension relative* r.

Comme la dimension des fibres d'un groupe lisse est une fonction localement constante, le monomorphisme canonique : $\mathscr{L}_r \to \mathscr{L}$ est représentable par une immersion à la fois ouverte et fermée. Il suffit donc de montrer que pour tout r, $\mathscr{L}_r$ est représentable par un S-préschéma possédant les propriétés ci-dessus, car $\mathscr{L}$ sera alors représentable par le S-préschéma somme $\coprod_{r\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_r$.

411 Pour tout entier $n \geqslant 0$, tout S-préschéma S′ et tout sous-préschéma en groupes H de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, nous noterons $\mathrm{H}^{(n)}$ le $n^{\text{ième}}$ *invariant normal* de la section unité $\mathrm{S}' \to \mathrm{H}$ de

H (EGA IV 16.1.2), de sorte que $\mathrm{H}^{(n)}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$-modules, de type fini, qui correspond au $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de la section unité de H. Si H est lisse sur S′ de dimension relative r, $\mathrm{H}^{(n)}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre dont le rang $\varphi(n,r)$ ne dépend que de n et de r. Par ailleurs, comme H est un sous-préschéma de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, on a un épimorphisme canonique, compatible avec l'extension de la base :

$$\mathrm{G}^{(n)} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'} \simeq \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}^{(n)} \to \mathrm{H}^{(n)}.$$

Introduisons alors le S-schéma projectif :

$$\mathrm{P}_{\varphi(n,r)} = \mathrm{Grass}_{\varphi(n,r)}\Big((\mathrm{G})^{(n)}\Big)$$

(EGA I 2° éd. 9.7; cf. aussi Séminaire Cartan, 1960/61, Exp. N°14 de A. Grothendieck). Il résulte alors des remarques précédentes que l'application :

$$\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{H}^{(n)}$$

définit un morphisme canonique :

$$u_{n,r} : \mathscr{L}_r \longrightarrow \mathrm{P}_{\varphi(n,r)}.$$

Le groupe G opère de manière naturelle sur $\mathrm{G}^{(n)}$, donc sur $\mathrm{P}_{\varphi(n,r)}$, par l'intermédiaire de la représentation :

$$\mathrm{int} : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S\text{-}gr}}(\mathrm{G}), \qquad g \mapsto \mathrm{int}(g).$$

De plus, si S′ est un S-préschéma *quasi-compact* et H un élément de $\mathscr{L}_r(\mathrm{S}')$, on sait **412**
(Exp. XI 6.11) que pour n assez grand, on a :

$$\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(n)}).$$

Pour chaque entier $n \geqslant 0$, introduisons le sous-foncteur $\mathscr{L}_r^n$ de $\mathscr{L}_r$ tel que pour tout S-préschéma S′, on ait :

$$\mathscr{L}_r^n(\mathrm{S}') = \begin{array}{l}\text{ensemble des sous-groupes H de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \text{ qui appartiennent à } \mathscr{L}_r(\mathrm{S}')\\ \text{et tels que } \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(n)}).\end{array}$$

Représentabilité de $\mathscr{L}_r^n$.

Comme l'entier r est fixé jusqu'à la fin de la démonstration de 5.2, nous omettrons de le rappeler dans les notations. Ainsi nous écrirons $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^n$, P_n, u_n au lieu de $\mathscr{L}_r$, $\mathscr{L}_r^n$, $\mathrm{P}_{\varphi(n,r)}$, $u_{n,r}$.

Soit v_n la restriction de u_n au sous-foncteur $\mathscr{L}^n$ de $\mathscr{L}$. Il résulte de la définition de $\mathscr{L}^n$ et de 5.1 b) ii) que v_n est un monomorphisme. En fait on a le lemme suivant :

Lemme 5.3. — *Le morphisme v_n est une immersion de présentation finie. A fortiori, $\mathscr{L}^n$ est représentable par un* S*-préschéma, quasi-projectif et de présentation finie sur* S.

Quitte à remplacer S par P_n, on est ramené par la technique habituelle à prouver l'assertion suivante : Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{P}_n(\mathrm{S})$ et considérons le sous-foncteur $\mathscr{F}$ du foncteur h_{S} représenté par l'objet final S de **Sch**/S, tel que pour tout S-préschéma S′, on ait :

$\mathscr{F}(\mathrm{S}') = \ h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}')$ (ensemble réduit à un élément) s'il existe $\mathrm{H} \in \mathscr{L}^n(\mathrm{S}')$ tel que $\mathrm{H}^{(n)} = \mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$,

$\mathscr{F}(\mathrm{S}') = \ \varnothing$ sinon.

413 Alors, le monomorphisme canonique : $\mathscr{F} \to \mathrm{S}$ est une immersion de présentation finie.

Commençons par transformer la définition du foncteur $\mathscr{F}$. Pour cela, notons que le normalisateur de Q dans G est représentable par un sous-préschéma en groupes N de présentation finie sur S (à savoir l'image réciproque du point Q de $\mathrm{P}_n(\mathrm{S})$ par le morphisme :

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{P}_n, \qquad g \mapsto g \cdot \mathrm{Q}.$$

Je dis que le foncteur $\mathscr{F}$ coïncide avec le sous-foncteur de h_{S} suivant :

$\mathscr{F}(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}')$ si on a :

(a) $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ est lisse le long de la section unité et de dimension relative r.

(b) $(\mathrm{N}_{\mathrm{S}'})^{(n)}$ (qui est alors canoniquement un élément de $\mathrm{P}_n(\mathrm{S}')$) est égal à $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$.

$\mathscr{F}(\mathrm{S}') = \varnothing$ sinon.

En effet, notons provisoirement $\mathscr{F}_1$ le foncteur $\mathscr{F}$ première manière et $\mathscr{F}_2$ le foncteur $\mathscr{F}$ deuxième manière. Alors :

i) $$\mathscr{F}_1(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}') \Rightarrow \mathscr{F}_2(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}').$$

414 En effet, soit $\mathrm{H} \in \mathscr{F}^n(\mathrm{S}')$ le sous-groupe de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ tel que $\mathrm{H}^{(n)} = \mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$. On a donc :

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(n)}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{N}_{\mathrm{S}'}.$$

Donc d'après 5.1 b) ii), $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ est lisse le long de la section unité et sa composante neutre est H. Par suite, $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ est de dimension relative r et comme H est ouvert dans $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ (d'après 5.1 b) i)), on a $(\mathrm{N}_{\mathrm{S}'})^{(n)} = \mathrm{H}^{(n)} = \mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$. Bref, $\mathscr{F}_2(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}')$.

ii) $$\mathscr{F}_2(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}') \Rightarrow \mathscr{F}_1(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}').$$

Par hypothèse, $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ est lisse le long de la section unité, de dimension relative r ; sa composante neutre est donc représentable (Exp. VI_{B} 3.10) par un sous-préschéma en groupes H, lisse sur S', à fibres connexes de dimension r. Comme H est invariant dans $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ et ouvert dans $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$, on a les inclusions suivantes :

$$\mathrm{N}_{\mathrm{S}'} \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}) \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(n)}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}^{(n)}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{N}_{\mathrm{S}'}.$$

Les inclusions ci-dessus sont donc des égalités. La première inclusion montre alors que H est égal à son normalisateur connexe et la deuxième montre que H est un élément de $\mathscr{L}^n(\mathrm{S}')$. C'est dire que $\mathscr{F}_1(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}')$.

Les implications i) et ii) entraînent $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$. Nous gardons la deuxième définition du foncteur $\mathscr{F}$ et nous allons d'abord « représenter la condition a) » par une immersion de présentation finie. Pour cela, il suffit d'appliquer le :

Lemme 5.4. — *Soient* S *un préschéma,* X *un* S*-préschéma localement de présentation finie sur* S, $\sigma : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ *une section de* X, r *un entier* $\geqslant 0$ *et* $\mathrm{L} : (\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ *le sous-foncteur de* S *défini comme suit :* **415**

$$\begin{cases} \mathrm{L}(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}') \ \textit{si } \mathrm{X}_{\mathrm{S}'} \textit{ est lisse le long de la section } \sigma_{\mathrm{S}'} \textit{ et de dimension} \\ \qquad\qquad \textit{relative } r \textit{ aux points de } \sigma_{\mathrm{S}'}(\mathrm{S}'). \\ \mathrm{L}(\mathrm{S}') = \varnothing \ \textit{sinon.} \end{cases}$$

Alors :

a) *Le monomorphisme* $\mathrm{L} \to \mathrm{S}$ *est une immersion de présentation finie.*

b) *Soit* J *le faisceau conormal relatif à l'immersion :* $\mathrm{S} \to \mathrm{X}$ (EGA IV 16.1.2)*; supposons que pour tout point* s *de* S, $\mathrm{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}} \kappa(s)$ *soit de rang au plus* r*, alors l'immersion* $\mathrm{L} \to \mathrm{S}$ *est une immersion fermée.*

Démonstration. Le foncteur L est de nature locale sur S, ce qui nous ramène au cas où S est affine. Quitte à remplacer X par un voisinage de $\sigma(\mathrm{S})$, on peut supposer X de présentation finie sur S, puis (EGA IV 8.9) S noethérien (noter, dans le cas b), que la formation du faisceau conormal commute à l'extension de la base (EGA IV 16.6.4) et que le rang des fibres de J est une fonction constructible sur S). Ceci étant, pour tout S-préschéma S′, notons $\mathrm{J}' = \mathrm{J}_{\mathrm{S}'}$ le faisceau conormal relatif à la section $\sigma_{\mathrm{S}'}$, soient $\mathrm{S}^{\bullet}(\mathrm{J}')$, canoniquement isomorphe à $\mathrm{S}^{\bullet}(\mathrm{J})_{\mathrm{S}'}$ l'algèbre symétrique de J′ sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$, $\mathrm{Gr}_{\bullet}(\sigma_{\mathrm{S}'})$ le faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$-algèbres graduées associé à $\sigma_{\mathrm{S}'}$ (EGA IV 16) et pour tout entier $n \geqslant 0$ soit $\sigma_{n,\mathrm{S}'} : \mathrm{S}^{n}(\mathrm{J}') \to \mathrm{G}r_{n}(\sigma_{\mathrm{S}'})$ l'épimorphisme canonique.

Il résulte de EGA IV 17.12.3 et de EGA 0_{IV} 19.5.4 que, pour que $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}$ soit lisse le long de la section $\sigma_{\mathrm{S}'}$ et de dimension relative r aux points de $\sigma_{\mathrm{S}'}(\mathrm{S}')$, il faut et il **416**
suffit que :

i) J′ soit un $\mathrm{O}_{\mathrm{S}'}$-faisceau localement libre de rang r.

ii) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sigma_{n,\mathrm{S}'}$ soit un isomorphisme.

Or il résulte de TDTE IV, lemme 3.6, que « le foncteur qui rend J localement libre de rang r » est représentable par un sous-préschéma S_1, fermé dans S dans le cas b). Remplaçant S par S_1 on est ramené au cas où J est localement libre de rang r. Procédons alors par récurrence sur l'entier n. Supposons avoir représenté par un sous-préschéma fermé S_{n-1} de S le « foncteur qui rend les morphismes $\sigma_{q,\mathrm{S}'}$ injectifs pour tout entier $q \leqslant n-1$ », et montrons que le « sous-foncteur[(5)] qui rend $\sigma_{n,\mathrm{S}'}$ injectif » est représentable par un sous-préschéma fermé S_n de S_{n-1}. Remplaçant S par S_{n-1} nous pouvons supposer que $\sigma_{q,\mathrm{S}}$ est bijectif pour $q \leqslant n-1$. Mais alors, le $(n-1)^{\text{ième}}$ invariant normal $\mathrm{X}^{(n-1)}$ relatif à la section σ_s admet une suite de composition : $\mathrm{X}^{(0)}, \ldots, \mathrm{X}^{(n-1)}$ dont les quotients successifs $\mathrm{Gr}_0(\sigma_s), \ldots, \mathrm{Gr}_{n-1}(\sigma_s)$ sont localement libres sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ donc plats, par suite $\mathrm{X}^{(n-1)}$ est *plat sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. Comme la formation de $\mathrm{X}^{(i)}$ commute à l'extension de la base (EGA IV 16), on a pour tout S-préschéma S′ :

$$\mathrm{Gr}_n(\sigma_{\mathrm{S}'}) = \operatorname{Ker} \mathrm{X}^{(n)}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{X}^{(n-1)}_{\mathrm{S}'} = (\mathrm{G}r_n(\sigma))_{\mathrm{S}'} \quad \text{et} \quad \sigma_{n,\mathrm{S}'} = (\sigma_{n,\mathrm{S}})_{\mathrm{S}'}.$$

(5) N.D.E. : on a remplacé « foncteur » par « sous-foncteur ». Faudrait-il écrire « qui rend $\sigma_{q,\mathrm{S}'}$ injectif pour $q \leqslant n$ » ?

Donc, le foncteur qui nous intéresse est « celui qui rend le morphisme $\sigma_{n,\mathrm{S}}$ injectif ». Ce foncteur est de nature locale sur S, ce qui nous permet de supposer S affine et $\mathrm{S}^n(\mathrm{J})$ *libre* sur $\mathscr{O}_\mathrm{S}$. Mais il est clair alors que le foncteur en question est représentable par le sous-schéma fermé de S défini par l'idéal engendré par les coordonnées de $\operatorname{Ker}\sigma_{n,\mathrm{S}}$ par rapport à une base de $\mathrm{S}^n(\mathrm{J})$.

417 Comme S est noethérien, la suite décroissante $\{\mathrm{S}_n\}$ de sous-préschémas fermés de S_1 est stationnaire, et la valeur stationnaire représente le foncteur L, ce qui achève la démonstration de 5.4.

Revenons à la question de la représentabilité de $\mathscr{L}^n$. Remplaçant S par un sous-préschéma convenable S_1, on peut donc supposer N lisse le long de la section unité et de dimension relative r. Le foncteur $\mathscr{L}^n$ est alors le « foncteur des coïncidences » de deux sections de P_n au-dessus de S, h et g, correspondant aux faisceaux Q et $\mathrm{N}^{(n)}$ (condition b) intervenant dans la définition du foncteur $\mathscr{F}_2$ ci-dessus). Il est donc représentable par le sous-préschéma fermé de S, image réciproque de la diagonale de $\mathrm{P}_n \times_\mathrm{S} \mathrm{P}_n$ par le morphisme de présentation finie $h \times_\mathrm{S} g$. Ceci achève la démonstration de 5.3.

Étude des morphismes de transition $\mathscr{L}^n \to \mathscr{L}^m$.

Si un sous-groupe H de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ appartient à $\mathscr{L}^n(\mathrm{S}')$, il appartient a fortiori à $\mathscr{L}^m(\mathrm{S}')$ pour tout $m \geqslant n$, d'où des monomorphismes naturels :

$$u_n^m : \mathscr{L}^n \longrightarrow \mathscr{L}^m \quad \text{pour} \quad m \geqslant n.$$

Lemme 5.5. — *Le morphisme u_n^m est une immersion ouverte.*

Quitte à changer S, nous sommes ramenés au problème suivant : Soient $\mathrm{H} \in \mathscr{L}^m(\mathrm{S})$,

$$\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{H}^{(m)}), \qquad \mathrm{N}' = \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{H}^{(n)})$$

et soit $\mathscr{D} : (\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^\circ \to (\mathbf{Ens})$ le foncteur des coïncidences de N et de N′ défini par $\mathscr{D}(\mathrm{S}') = h_\mathrm{S}(\mathrm{S}')$ si $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$ et $\mathscr{D}(\mathrm{S}') = \varnothing$ sinon. Nous devons montrer que $\mathscr{D} \to \mathrm{S}$
418 est une immersion ouverte. Or je dis que $\mathscr{D}$ est aussi le sous-foncteur de S qui « rend l'immersion $\mathrm{H} \to \mathrm{N}'$ ouverte ». En effet, si $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$, alors $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$ est bien une immersion ouverte puisqu'il en est ainsi de $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ (prop. 5.1). Réciproquement, si $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$ est une immersion ouverte, H étant à fibres connexes, $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ est la composante neutre de $\mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$ (Exp. VI_B 3.10) et par suite est invariant dans $\mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$, donc $\mathrm{N}'_{\mathrm{S}'} \subset \mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$. Comme de toute façon N′ majore N, on a bien $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$. Les préschémas en groupes H et N′ sont de présentation finie sur S et H est plat sur S ; le fait que $\mathscr{D} \to \mathrm{S}$ soit une immersion ouverte résulte alors de Exp. VI_B 2.6.

Fin de la démonstration de 5.2.

Les foncteurs $\mathscr{L}^n$ étant représentables et les morphismes de transition u_n^m étant compatibles entre eux et représentables par des immersions ouvertes, il existe un S-préschéma X, réunion d'une suite croissante d'ouverts $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tel que X_i représente le foncteur $\mathscr{L}^i$ et tel que si on identifie $\mathscr{L}^i$ à X_i, l'inclusion $\mathrm{X}_i \to \mathrm{X}_j$ $(j \geqslant i)$ s'identifie à u_i^j. Pour conclure que X représente le foncteur $\mathscr{L}$, il suffit alors de remarquer que, dans la catégorie des faisceaux sur **Sch**/S munie de la topologie de Zariski (Exp. IV 6.1), on a :

$$\mathrm{X} = \varprojlim \mathrm{X}_i \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L} = \varprojlim \mathscr{L}^i.$$

Remarque 5.6. — Avec les notations précédentes, supposons de plus que S ait toutes ses *caractéristiques résiduelles nulles,* alors pour tout entier $r \geqslant 0$, le foncteur $\mathscr{L}_r$ est égal à $\mathscr{L}_r^1$, donc est représentable par un S-préschéma de *présentation finie et quasi-projectif* sur S. En effet, il suffit de montrer que si $\mathrm{H} \in \mathscr{L}_r(\mathrm{S}')$, l'immersion 419
canonique :

$$\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(1)})$$

est une immersion ouverte (car cela entraîne $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H})$, donc $\mathrm{H} \in \mathscr{L}_r^1(\mathrm{S}')$). Comme H est plat sur S, H et N de présentation finie sur S, il suffit (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.6) de montrer que pour tout point s de S, $\mathrm{H}_s \to \mathrm{N}_s$ est une immersion ouverte. Or il résulte facilement[(6)] du théorème de Cartier (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 1.6) que si G est un groupe algébrique sur un corps de caractéristique 0 et si H est un sous-groupe algébrique connexe, on a :

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}^{(1)}).$$

Par contre, si S possède des caractéristiques résiduelles non nulles, les sous-foncteurs $\mathscr{L}_r^n$ de $\mathscr{L}_r$ peuvent former une suite strictement croissante (même lorsque S est quasi-compact) et dans ce cas, $\mathscr{L}_r$ n'est pas représentable par un S-préschéma, quasi-compact sur S. Prenons par exemple le groupe algébrique G, défini sur un corps k de caractéristique $p > 0$, égal au produit semi-direct du tore $\mathrm{T} = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ par le groupe unipotent $\mathrm{U} = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$, l'opération de T sur U étant définie par : $(t, t', u, u') \to (tu, t'u')$. Pour tout entier $n > 0$, considérons alors le sous-groupe lisse et connexe U_n de U d'équation $u' = u^{p^n}$, et le sous-tore T_n de T d'équation $t' = t^{p^n}$. Il est immédiat de vérifier que T_n opère sur U_n et que le sous-groupe G_n de G, égal à $\mathrm{T}_n \cdot \mathrm{U}_n$ est lisse, connexe et identique à son normalisateur dans G. Or tous les groupes G_n, pour $n \geqslant m$, sont distincts et ont même voisinage infinitésimal d'ordre p^m.

Remarque 5.7. — Il existe sur $\mathscr{L}$ un faisceau inversible canonique L, dont la restriction 420
à tout ouvert U de $\mathscr{L}$, quasi-compact sur S, est S-*ample*. En effet, considérons le sous-préschéma en groupes H de $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ lisse sur $\mathscr{L}$, à fibres connexes, égal à son normalisateur connexe et qui est universel pour ces propriétés. Je dis que l'on peut prendre pour L, le faisceau $(\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}))^{-1}$ (rappelons que si F est un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules sur un préschéma S, qui est localement libre de rang fini, dét(F) désigne le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible dont la restriction au sous-préschéma ouvert et fermé S_r de S ($r \geqslant 0$) où F est de rang r, est égale à $\bigwedge^r(\mathrm{F})$). Nous gardons les notations de la démonstration de 5.2. Pour prouver l'assertion faite sur L, nous pouvons nous limiter au foncteur $\mathscr{L}_r^n$ et prouver que $\mathrm{L}|_{\mathscr{L}_r^n}$ est S-ample. Considérons l'immersion canonique $v_n : \mathscr{L}_r^n \to \mathrm{P}_n$, et soit Q le faisceau localement libre sur P_n, universel pour la grassmanienne P_n. Par construction, on a : $v_n^*(\mathrm{Q}) = \mathrm{H}^{(n)}$ (où maintenant H désigne le sous-préschéma en groupes de $\mathrm{G}_{\mathscr{L}_r^n}$, universel pour le foncteur $\mathscr{L}_r^n$). Or dét(Q) est le faisceau ample

(6) N.D.E. : On peut appliquer par exemple la proposition II.6.1 du livre de M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques* I, Masson & North Holland (1970).

canonique sur P_n (EGA I 2°éd., 9.7), donc $\mathrm{dét\,H}^{(n)}$ est ample relativement à $\mathscr{L}_r^n$ (EGA II 4.6.13 i) bis). Notons encore J le faisceau conormal, égal à $\mathrm{H}^{(1)}$, et $\mathrm{S}^q(\mathrm{J})$ la partie homogène de degré q de l'algèbre symétrique de J sur $\mathscr{O}_{\mathscr{L}_r^n}$. Comme H est lisse sur $\mathscr{L}_r^n$, il est immédiat que l'on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{dét\,H}^{(n)} \simeq \prod_{1\leqslant q\leqslant n} \mathrm{dét\,S}^q(\mathrm{J}).$$

D'autre part, on démontre que pour tout faisceau localement libre J de rang r et pour
421 tout entier $q > 0$, il existe un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{dét\,S}^q(\mathrm{J}) \simeq (\mathrm{dét\,J})^{\otimes s},$$

où $s > 0$ est un entier qui ne dépend que de r et de q. Finalement, on obtient : $\mathrm{dét\,H}^{(n)} \simeq (\mathrm{dét\,J})^{\otimes s}$ pour un entier $s > 0$ convenable, donc (EGA II 4.5.6), $\mathrm{dét\,J} = (\mathrm{dét\,Lie\,H})^{-1}$ est bien S-ample.

Remarque 5.8. — Soient S un préschéma, G et H deux S-préschémas en groupes de présentation finie sur S, $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un S-homomorphisme de groupes qui est un *monomorphisme.* Si H est lisse sur S, à fibres connexes, on sait (Exp. XI 6.11) que $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est représentable par un *sous-préschéma* en groupes fermé de G, de présentation finie sur S. Supposons de plus que N est lisse le long de la section unité et a même dimension relative sur S que H. La composante neutre N^0 de N est alors représentable par un sous-préschéma en groupes ouvert de N, lisse sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10). Le monomorphisme i se factorise évidemment à travers N^0. En fait on a $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0$. En effet, pour tout point s de S, on a $\mathrm{H}_s = (\mathrm{N}^0)_s$, ces deux groupes algébriques étant connexes, lisses, et de même dimension. Comme H est plat sur S, on en déduit que $\mathrm{H} \to \mathrm{N}^0$ est un isomorphisme (EGA IV 17.9.5). Finalement, H est un *sous-préschéma* en groupes de G. On a donc montré que le foncteur $\mathscr{L}$ introduit dans ce paragraphe est identique au foncteur des *sous-groupes* H de G, lisses sur S, à fibres connexes et égaux à leur normalisateur connexe.

6. Foncteur des sous-groupes de Cartan et foncteur des sous-groupes paraboliques

422 Lorsque G est un groupe algébrique lisse et connexe, défini sur un corps k algébriquement clos, on a défini les sous-tores de G, les sous-tores maximaux, les sous-groupes de Cartan (Exp. XII 1) les sous-groupes de Borel (Exp. XIV 4.1), les sous-groupes paraboliques (Exp. XIV 4.8 bis). Nous étendons ces notions au cas d'un préschéma en groupes sur une base quelconque, de la façon suivante :

Définition 6.1. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes de présentation finie sur S, H un S-préschéma en groupes, $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un S-monomorphisme qui fait de H un sous-groupe de G. Nous dirons que H est un sous-tore de G (resp. un sous-tore maximal de G, un sous-groupe de Cartan, un sous-groupe de Borel, un sous-groupe parabolique) si :

i) H est lisse sur S.

ii) Pour tout point géométrique $\overline{s}$ au-dessus de S, $H_{\overline{s}}$ est un sous-tore de $(G_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ (resp. un sous-tore maximal, un sous-groupe de Cartan, un sous-groupe de Borel, un sous-groupe parabolique).

Remarques 6.1. bis. — a) Si le S-groupe H est un sous-tore de G (resp. ...), ses fibres sont connexes, et par suite H est de présentation finie sur S (Exp. VI_B 5.3.3).

b) Si H est un sous-tore de G, alors H est un tore au sens de Exp. IX, comme il résulte immédiatement de Exp. X 8.1. De plus le monomorphisme $i : \text{H} \to \text{G}$ est une immersion (cf. 8.3 ci-après). **423**

c) Si G est lisse sur S, à fibres connexes et si H est un sous-groupe de Cartan de G (resp. un sous-groupe de Borel, un sous-groupe parabolique), le monomorphisme $i : \text{H} \to \text{G}$ est une immersion, de sorte que nos définitions coïncident avec celles introduites dans Exp. XII et Exp. XIV. En effet, H est alors identique à son normalisateur connexe (d'après XII 6.6 c), XIV 4.8 et 4.8 bis) et il suffit d'appliquer 5.8.

Définition 6.1. ter. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes localement de type fini, s un point S. On appelle *rang nilpotent* de G au point s, et on note $\rho_n(s)$, la dimension des sous-groupes de Cartan de $(G_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$. On définit de façon analogue le *rang réductif* $\rho_r(s)$, le *rang unipotent* $\rho_u(s)$, le *rang abélien* $\rho_{ab}(s)$ (cf. Exp. X 8.7).

Si maintenant G est un groupe algébrique, lisse et connexe, défini sur un corps k algébriquement clos, rappelons que le *radical* de G, noté rad(G) est le plus grand sous-groupe algébrique de G, qui est invariant, lisse, connexe et résoluble ; G/ rad(G) est alors *semi-simple* (utiliser Exp. XII 6.1 pour se ramener au cas G affine). Si G est de plus affine, on définit le *radical unipotent* $\text{rad}^u(\text{G})$ de G comme étant le plus grand sous-groupe algébrique de G, invariant, lisse, connexe et unipotent : $\text{G}/\text{rad}^u(\text{G})$ est **424**
alors *réductif.*

Proposition 6.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* H *deux* S*-préschémas en groupes de présentation finie sur* S, $i : \text{H} \to \text{G}$ *un* S*-monomorphisme de groupes qui fait de* H *un sous-groupe de* G *et soit* P(s) *l'une des propriétés suivantes concernant le point s de* S *:*

i) $(G_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ *est une variété abélienne* (*resp. est affine, est un tore, est unipotent*).

ii) $(H_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ *est un tore maximal de* $G_{\overline{s}}$.

iii) $(H_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ *est le centralisateur dans* $(G_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ *d'un tore de* $G_{\overline{s}}$ (*resp. est un sous-groupe de Cartan de* $G_{\overline{s}}$).

iv) $(H_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ *est un sous-groupe de Borel* (*resp. un sous-groupe parabolique*) *de* $G_{\overline{s}}$.

v) $(H_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ *est le radical de* $G_{\overline{s}}$ (*resp.* $(G_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ *est semi-simple*).

vi) $G_{\overline{s}}$ *est affine et* $(H_{\overline{s}})^0_{\text{red}}$ *est le radical unipotent de* $G_{\overline{s}}$ (*resp.* $(G_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ *est réductif*).

Alors l'ensemble E *des points* s *de* S, *tels que* P(s) *soit vraie est* localement constructible (EGA 0_{III} 9.1.11).

Remarque 6.2.1. — Cette proposition complète Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10. Par ailleurs, on peut encore préciser la structure de E, en utilisant des théorèmes de semi-continuité (cf. Exp. X 8.7) ; nous en verrons un exemple un peu plus loin.

425 *Démonstration de* 6.2.

Notons que si S est le spectre d'un corps, E est invariant par extension de ce corps. Une réduction standard (EGA IV 9) permet alors de nous ramener au cas où S est noethérien intègre, de point générique η. On doit montrer que E ou ens(S) \ E, contient un voisinage de η (EGA IV 9.2.1). On peut supposer S affine d'anneau A et de corps des fractions K. Si L est une extension finie de K, il est immédiat qu'il existe une sous-A-algèbre B de L, finie sur A, ayant L pour corps des fractions. Le morphisme canonique : $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$, où $\mathrm{S'} = \operatorname{Spec} \mathrm{B}$, est dominant, de présentation finie, donc l'image d'un ouvert non vide de S′ contient un ouvert non vide de S (EGA IV 1.8.4). Du point de vue qui nous intéresse, nous pouvons donc remplacer S par S′, donc remplacer K par une extension finie L. Ainsi nous pouvons choisir L de façon que $(\mathrm{G_L})_{\mathrm{réd}}$ et $(\mathrm{H_L})_{\mathrm{réd}}$ soient lisses sur L (EGA IV 4.6.6). Quitte à restreindre S′, nous pouvons supposer que $\mathrm{G_{réd}}$ et $\mathrm{H_{réd}}$ sont des préschémas en groupes lisses sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10 et EGA IV 17). Vu les propriétés à démontrer, nous pouvons remplacer G et H par leurs composantes neutres (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.9) réduites, donc supposer G et H lisses sur S, à fibres connexes. Enfin, nous pouvons supposer que H est un sous-préschéma en groupes fermé de G (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.4).

Démonstration de i). Quitte à faire une extension finie de K, nous pouvons supposer que G_η possède une « décomposition de Chevalley », c.-à-d. est extension d'une variété abélienne D_η par un groupe algébrique linéaire F_η, lisse et connexe (Séminaire
426 Bourbaki 1956/57 N°145). D'après Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.16, il existe un voisinage ouvert U de η, tel que cette extension générique provienne d'une extension :

$$1 \longrightarrow \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}|_{\mathrm{U}} \longrightarrow \mathrm{D} \longrightarrow 1.$$

On peut de plus supposer F et D lisses sur U, à fibres connexes, F affine sur U et D propre sur U (EGA IV 8, 9 et 17). Pour tout point s de U, $(\mathrm{D}_s, \mathrm{F}_s)$ est alors la « décomposition de Chevalley » de G_s. Par suite, G_s est une variété abélienne (resp. est affine) si est seulement si F_s (resp. D_s) est le groupe unité, ce qui est une propriété constructible (EGA IV 9.2.6.1).

Pour établir les deux dernières assertions de i), nous pouvons, vu ce qui précède, supposer G affine sur S. Soient q un nombre premier inversible sur S et ${}_q\mathrm{G}$ le « noyau » de l'élévation à la puissance $q^{\text{ième}}$ dans G. Il résulte facilement de la structure des groupes algébriques affines que G_s est un tore (resp. est unipotent) si et seulement si a) ${}_q\mathrm{G}_s$ est quasi-fini, ce qui est une propriété constructible (EGA IV 9.3.2) et b) ${}_q\mathrm{G}_s$ a r^q points géométriques, où r désigne la dimension relative de G sur S (resp. ${}_q\mathrm{G}_s$ a un seul point). Or la fonction $s \mapsto$ (nombre de points géométriques de ${}_q\mathrm{G}_s$) est constructible (EGA IV 9.7.9). Ceci achève de démontrer (i).

Démonstration de iii). a) Cas d'un centralisateur d'un tore. Supposons que $\mathrm{H}_\eta = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_\eta}(\mathrm{T}_\eta)$, où T_η est un tore de G_η et montrons que H_s est le centralisateur d'un sous-tore de G_s pour s dans un voisinage de η. D'après i), quitte à restreindre S, on

peut supposer que T_η provient d'un sous-tore T de G. Mais alors, $Z = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$ est représentable (Exp. XI 6.11) par un sous-préschéma en groupes de G. Comme H et **427**
Z coïncident génériquement, ils coïncident au-dessus d'un voisinage de η. Ceci nous prouve que l'ensemble E des points s de S tels que H_s soit le centralisateur dans G_s d'un sous-tore de G_s est ind-constructible (EGA IV 1) et ce résultat nous suffira pour établir, dans le lemme 6.6 ci-après, que E est une partie ouverte de S ; a fortiori, E sera bien une partie localement constructible de S.

iii) b) Cas d'un sous-groupe de Cartan. Supposons que H_η est un sous-groupe de Cartan de G_η et montrons que H_s est un sous-groupe de Cartan de G_s en tout point s d'un voisinage de η. Le groupe H_η est le centralisateur dans G_η d'un tore de G_η et est nilpotent (Exp. XII 6.6). D'après a) et Exp. $\mathrm{VI_B}$ 8.4, H_s possède les mêmes propriétés en tout point s d'un voisinage U de η. Pour tout point s de U, le groupe H_s a donc même rang réductif que G_s et son unique tore maximal est central (Exp. XII 6.7), c'est donc le centralisateur d'un tore maximal de G_s, c.-à-d. un groupe de Cartan de G_s.

Supposons maintenant que H ne soit pas un sous-groupe de Cartan de G et montrons que H_s n'est pas un sous-groupe de Cartan de G_s pour s dans un voisinage U de η. Compte tenu de l'assertion provisoirement admise dans (a) ci-dessus, nous pouvons nous limiter au cas où H est le centralisateur dans G d'un sous-tore T. Mais alors H_η contient un sous-groupe de Cartan C_η de H_η. On vient de voir que, quitte à restreindre S, C_η se prolonge en un sous-groupe de Cartan C de G, que l'on peut supposer contenu dans H. Par hypothèse H_η majore strictement C_η, donc H_s majore strictement C_s pour s dans un voisinage U de η (EGA IV 9.5.2) ; a fortiori, H_s n'est **428**
pas un sous-groupe de Cartan de G_s pour s dans U.

Démonstration de ii). Supposons que H_η soit un tore maximal de G_η et soit C_η son centralisateur dans G_η. D'après i) et iii), H est un tore au-dessus d'un voisinage U de η et $C = \mathrm{Centr}_{G|_U}(H|_U)$ est un sous-groupe de Cartan de $G|_U$. Pour prouver que H est un tore maximal de G sur un voisinage de η, on peut alors remplacer G par C, puis par la composante linéaire F d'une décomposition de Chevalley de C (cf. i)). Soit q un entier inversible sur S, ${}_qF$ le noyau de l'élévation à la puissance $q^{\text{ième}}$ dans F. Comme F_s est affine, nilpotent, lisse et connexe, $F_{\overline{s}}$ est le produit direct de son tore maximal T_s par un groupe unipotent (BIBLE 6-04), donc ${}_qF_s = {}_qT_s$. Comme H_η est un tore maximal, ${}_qH_\eta = {}_qF_\eta$ et par suite, ${}_qH = {}_qF$ au-dessus d'un voisinage V de η. Pour tout point s de V, ${}_qH_s = {}_qT_s$, donc $H_s = T_s$ est un tore maximal.

Supposons maintenant que H_η ne soit pas un tore maximal de G_η. D'après i), nous pouvons nous limiter au cas où H_η est un tore, puis supposer qu'il est contenu dans un tore T_η strictement plus grand. Ce dernier se prolonge en un tore T qui majore strictement H sur un voisinage U de η. A fortiori, H_s n'est pas un tore maximal pour $s \in U$.

Démonstration de iv). Quitte à restreindre S, on peut supposer que le centre Z de G est représentable (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.11) et plat sur S, ainsi que le quotient G/Z (*loc. cit.*). La propriété « H_s majore Z_s » est constructible (EGA IV 9.5.2) et tout sous-groupe parabolique de G_s contient Z_s (Exp. XIV 4.9 a)) ; ceci nous permet de remplacer G par G/Z donc de supposer G affine sur S (Exp. XII 6.1 et i)). On peut encore **429** supposer que G/H est représentable, mais alors H_s est un sous-groupe parabolique de G_s si et seulement si $(G/H)_s$ est propre (BIBLE 6. Th.4 b)) ce qui est une propriété ind-constructible (EGA IV 9.3.5). Donc E est ind-constructible et ceci nous suffira pour prouver que E est ouvert (Lemme 6.6) donc localement constructible.

Examinons maintenant le cas des sous-groupes de Borel. Si H_η est un sous-groupe de Borel de G_η, c.-à-d. un sous-groupe parabolique résoluble de G_η, ce qui précède et Exp. VI_B 8.4 entraînent que ces propriétés sont encore vraies en tout point s d'un voisinage de η. Si maintenant H_η n'est pas un sous-groupe de Borel de G_η, pour prouver qu'il en est de même aux points s d'un voisinage de η, nous pouvons nous limiter (vu ce qui précède) au cas où H_η est un sous-groupe parabolique, puis supposer que H_η contient un sous-groupe de Borel B_η. On vient de montrer que ce dernier se prolonge en un sous-groupe de Borel B de G sur un voisinage U de η. Comme H_η majore strictement B_η, alors H_s majore strictement B_s en tout point d'un ouvert V, et H_s n'est pas un sous-groupe de Borel de G_s pour $s \in V$.

Démonstration de v). Supposons que H_η soit le radical de G_η. Le groupe H_η est donc invariant dans G_η, résoluble (lisse et connexe), il en est donc de même de H_s pour s appartenant à un voisinage U de η (Exp. VI_B 8 et 10), donc, pour $s \in U$, H_s est contenu dans le radical de G_s. Remplaçant G par G/H (Exp. VI_B 10), il nous faut
430 prouver que si G_η est semi-simple, G_s est semi-simple en tout point d'un voisinage V de η. Grâce à i) et ii), on peut supposer que G est affine sur S et possède un tore maximal T. Soit W le groupe de Weyl de T (Exp. XII 2) qui est quasi-fini et étale sur S, donc fini et étale sur un ouvert V. Il résulte alors des propriétés élémentaires des racines (Exp. XIX 1.12) que G est semi-simple au-dessus de V.

Supposons maintenant que H_η ne soit le radical de G_η. Quitte à remplacer K par une extension finie L, on peut supposer que G_η possède un radical R_η. D'après ce qui précède, R_η se prolonge en un sous-préschéma en groupes R de $G|_U$, tel que pour tout $s \in U$, R_s soit le radical de G_s. Par hypothèse, $R_\eta \neq H_\eta$. Donc $R_s \neq H_s$ pour $s \in V$. Reste à prouver que si G_η n'est pas semi-simple, il en est de même de G_s aux points voisins, mais c'est un cas particulier de ce qui précède (prendre H = groupe unité).

Démonstration de vi). La démonstration est tout-à-fait analogue à celle de v), compte tenu de i), et est laissée au soin du lecteur.

Corollaire 6.3. — *Soient* S_0 *un préschéma quasi-compact,* S_i $(i \in L)$*, un système projectif de* S_0*-préschémas, affines sur* S_0, $S = \varprojlim S_i$ (EGA IV 8.2), G_0 *un préschéma en groupes de présentation finie sur* S_0, $G_i = G_0 \times_{S_0} S_i$, $G = G_0 \times_{S_0} S$, H *un sous-groupe de* G. *Alors si* H *est un sous-tore de* G (*resp. un sous-tore maximal, un sous-groupe de Cartan, un sous-groupe de Borel, un sous-groupe parabolique*)*, il existe un indice* $i \in L$*, et un sous-groupe* H_i *de* G_i*, tel que* $H = H_i \times_{S_i} S$ *et que* H_i *soit un sous-tore de* G_i (resp. ...).

431 En effet, H est lisse, à fibres connexes, donc de présentation fine sur S (Exp. VI_B 5.3.3). D'après (Exp. VI_B § 10) il existe un $i \in L$ et un sous-groupe H_i de G_i, lisse sur S, tel que $H = H_i \times_{S_i} S$. Le corollaire Exp. 6.3 résulte alors de la définition 6.1, de 6.2 et de EGA IV 9.3.3.

Corollaire 6.3. bis. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*. Alors les fonctions* ρ_n*,* ρ_r*,* ρ_u*,* ρ_{ab} (cf. 6.1 ter) *sont des fonctions localement constructibles sur* S*.*

Il nous suffit de montrer (EGA IV 9.) que si S est un schéma intègre noethérien de point générique η, les fonctions en jeu sont constantes sur un voisinage de η. Quitte à remplacer S par un schéma S$'$, fini sur S, dominant S, nous pouvons supposer que G_η possède un sous-groupe de Cartan C_η, possèdant une décomposition de Chevalley : $1 \to \mathrm{L}_\eta \to \mathrm{C}_\eta \to \mathrm{A}_\eta \to 1$. Le raisonnement fait dans 6.2 i) prouve que cette décomposition se prolonge en une décomposition de Chevalley sur un voisinage de η :

$$1 \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{A} \longrightarrow 1.$$

De plus, on peut supposer que C est un sous-groupe de Cartan de G (6.3) et que le tore maximal T_η de L_η se prolonge en un tore maximal T de L (6.3). Le corollaire résulte immédiatement de là et des définitions.

6.4.0. Soient alors S un préschéma, G un S-préschéma en groupes de présentation finie sur S, $\mathscr{L}$ le foncteur des sous-groupes de G, lisses, à fibres connexes et égaux à
leur normalisateur connexe (cf. § 5) ; $\mathscr{L}$ est représentable (5.2 et 5.8). La suite de ce **432**
paragraphe est consacrée à l'étude de certains sous-foncteurs de $\mathscr{L}$. Plus précisément, introduisons les sous-foncteurs de $\mathscr{L}$, notés $\mathscr{LC}$ (resp. $\mathscr{CT}$, resp. $\mathscr{P}$), définis de la manière suivante : pour tout S-préschéma S$'$, $\mathscr{LC}(\mathrm{S}')$ (resp. $\mathscr{CT}(\mathrm{S}')$, resp. $\mathscr{P}(\mathrm{S}')$) est l'ensemble des sous-groupes H de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, lisses sur S$'$, à fibres connexes, égaux à leur normalisateur connexe et tels que pour tout point s de S$'$, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ contienne un sous-groupe de Cartan (6.1) de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ (resp. soit le centralisateur dans $(\mathrm{G}_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ d'un sous-tore de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$, resp. soit un sous-groupe parabolique (6.1) de G_s).

Théorème 6.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*, alors les* S*-foncteurs* $\mathscr{LC}$*,* $\mathscr{CT}$*,* $\mathscr{P}$ *ci-dessus* (6.4.0) *sont représentables par des* S*-préschémas de* présentation finie *sur* S*, quasi-projectifs sur* S*.*

Remarque 6.5. — Si G est à fibres lisses, par exemple si G est lisse sur S, ou si les caractéristiques résiduelles de S sont nulles (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 1.6.1), tout sous-groupe H de G, lisse sur S, à fibres connexes, tel que pour tout point s de S, H_s contienne un sous-groupe de Cartan de $(\mathrm{G}_{\overline{s}})^0$, est nécessairement égal à son normalisateur connexe (et par suite est un élément de $\mathscr{LC}(\mathrm{S})$). En effet, grâce à 5.1 iii), on peut supposer que S est le spectre d'un corps, auquel cas la propriété a été signalée à la fin de l'énoncé de Exp. XIII 2.1.

Notons que l'on a des monomorphismes naturels :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{CT} \arrow[dr] & & \\ & \mathscr{LC} \arrow[r] & \mathscr{L}. \\ \mathscr{P} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

433 Montrons que ces monomorphismes sont des immersions ouvertes de présentation finie, (ce qui prouvera déjà, compte tenu de 5.2 que $\mathscr{LC}$, $\mathscr{CT}$, $\mathscr{P}$ sont représentables par des S-préschémas, réunion d'une suite croissante de sous-préschémas ouverts, quasi-projectifs et de présentation finie sur S). Or ceci va résulter, par la technique habituelle, du lemme suivant :

Lemme 6.6. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie,* H *un sous-groupe de* G*, lisse à fibres connexes. Alors l'ensemble des points* s *de* S *tels que* $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *contienne un sous-groupe de Cartan de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ (*resp. soit égal au centralisateur, dans* $(\mathrm{G}_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$*, d'un tore de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$) *est un ouvert de* S*. Si de plus,* H *est égal à son normalisateur connexe* [(*)]*, l'ensemble des points* s *de* S*, tels que* H_s *soit un sous-groupe parabolique de* G_s *est également un ouvert de* S*.*

L'assertion à démontrer est locale sur S, ce qui nous permet de supposer S affine, puis par EGA IV 8.1 et 6.3, S noethérien. Notons E l'ensemble des points de S possédant la propriété en question. Il résulte alors des assertions effectivement démontrées de 6.2 que E est ind-constructible. Mais S est noethérien, donc pour prouver que E est ouvert, il suffit alors de montrer que E est stable par générisations (EGA IV 1.10.1). Utilisant EGA II 7.1.9, nous sommes finalement amenés à prouver que si S est le
434 spectre d'un anneau de valuation discrète, et si le point fermé s appartient à E, alors il en est de même du point générique t. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 6.7. — *Soient* A *un anneau local noethérien complet,* $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$*,* s *le point fermé de* S*,* H *un* S*-préschéma en groupes, lisse à fibres connexes,* T_s *un sous-tore de* H_s*. Alors :*

i) *Il existe un sous-préschéma en groupes fermé* C *de* H*, lisse, à fibres connexes, tel que* $\mathrm{C}_s = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_s}(\mathrm{T}_s)$*.*

ii) *Pour tout point* t *de* S*,* C_t *est le centralisateur dans* H_t *d'un sous-tore* T_t *de* H_t*.*

Démonstration de 6.7. Soit T′ un S-tore, tel qu'il existe un isomorphisme $u_0 : \mathrm{T}'_s \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_s$ (Exp. X 4.6). Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}/\mathfrak{m}^n$, $\mathrm{S}_n = \operatorname{Spec} \mathrm{A}_n$, $\mathrm{H}_n = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$, etc. Comme H est lisse sur S, pour tout entier $n > 0$, il existe un S_n-morphisme de groupes :
$$u_n : \mathrm{T}'_n \longrightarrow \mathrm{H}_n$$
qui relève u_0 (Exp. IX 3.6) et on peut supposer par récurrence sur n que u_n relève u_{n-1}. Soit d'autre part q un nombre premier inversible sur S ; pour tout entier ℓ égal à une puissance de q, notons ${}_{\ell}u_n$ la restriction de u_n au sous-groupe ${}_{\ell}\mathrm{T}'_n$. Pour ℓ fixé et n variable, les morphismes ${}_{\ell}u_n$ forment un système projectif, donc proviennent d'un unique S-morphisme de groupes ${}_{\ell}u : {}_{\ell}\mathrm{T}' \to \mathrm{H}$ (1.6 a)). Comme H est séparé (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2) et que u_0 est un monomorphisme, ${}_{\ell}u$ est un monomorphisme (Exp. IX 6.8)
435 et même une immersion fermée, puisqu'il est fini, ${}_{\ell}\mathrm{T}'$ étant fini sur S. Notons $\mathrm{M}(\ell)$ le groupe image. Il est clair que la famille de sous-groupes de type multiplicatif $\mathrm{M}(\ell)$ est cohérente au sens de 4.1. Soit $\mathrm{C}_{\ell} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{M}(\ell))$, qui est représentable par un sous-préschéma en groupes (2.5), fermé (H est séparé), lisse sur S (Exp. XI 2.4). Les C_{ℓ}

[(*)] hypothèse en fait superflue, cf. XVII App. III 3.

forment une famille filtrante, décroissante de sous-schémas fermés, donc stationnaire, H étant noethérien. La valeur stationnaire est un sous-groupe C, lisse et fermé, tel que $\mathrm{C}_s = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_s}(\mathrm{T}_s)$ d'après le théorème de densité (Exp. IX 4.7). Il nous reste à montrer que pour tout point t de S, C_t est le centralisateur dans H_t d'un sous-tore T_t (ce qui entraînera que C_t est connexe). Mais cela va résulter du lemme plus précis suivant, appliqué à la famille $\mathrm{M}(\ell)_t$ de sous-groupes de H_t :

Lemme 6.8. — *Soient* G *un groupe algébrique connexe, défini sur un corps k, r un entier* > 0*, q un entier premier à la caractéristique* [(7)] *de k,* $\mathrm{M}(\ell)$ *(ℓ parcourant les puissances de q) une famille cohérente de sous-groupes de type multiplicatif de* G*, de type* $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^r$ (cf. 4.6)*,* M *le sous-groupe algébrique de* G *engendré par les* $\mathrm{M}(\ell)$ *(loc. cit.),* T *l'unique tore maximal de* M (cf. 3.4)*. Alors on a*

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}(\ell)) \qquad \textit{pour } \ell \textit{ assez grand.}$$

La dernière égalité est bien claire. Pour démontrer la première, introduisons le centre Z de G, $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$, M' (resp. T') l'image de M (resp. T) dans G', K l'image réciproque de T' dans G (c.-à-d. le sous-groupe algébrique de G engendré par T et Z). Il suffit évidemment de prouver que $\mathrm{K} \supset \mathrm{M}$, donc que $\mathrm{T}' = \mathrm{M}'$. Or, M est lisse et connexe (4.6) et G' est affine (Exp. XII 6.1), donc M' est produit direct de son tore **436**
maximal T' (Exp. XII 6.6 d)) et d'un groupe unipotent (BIBLE 4 Th. 4) (on peut supposer k algébriquement clos). L'image de $\mathrm{M}(\ell)$ dans M' est donc nécessairement contenue dans T'. Donc l'image réciproque de T' dans M, majore $\mathrm{M}(\ell)$ pour tout ℓ, donc est égale à M. Par suite $\mathrm{M}' = \mathrm{T}'$. Ceci prouve 6.8 et donc 6.7.

Ceci étant, démontrons 6.6. Nous nous sommes ramenés au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A, que l'on peut supposer de plus complet à corps résiduel algébriquement clos. Quitte à remplacer A par son normalisé dans une extension finie de son corps des fractions, on peut supposer que $(\mathrm{G}_t)_{\mathrm{réd}}$ est lisse[(8)]. Il est clair que, pour prouver 6.6, on peut remplacer G par la composante neutre de l'adhérence schématique dans G de $(\mathrm{G}_t)^0_{\mathrm{réd}}$, donc supposer que G est plat sur S, à fibres connexes, et que G_t est lisse.

a) Supposons que H_s est le centralisateur dans $(\mathrm{G}_s)_{\mathrm{réd}}$ d'un tore T_s et montrons que H_t est alors le centralisateur dans G_t d'un sous-tore de G_t. D'après le lemme 6.7, il existe un sous-schéma en groupes C de H, lisse sur S, dont la fibre fermée est H_s et tel que $\mathrm{C}_t = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_t}(\mathrm{T}_t)$, où T_t est un sous-tore de H_t. Comme H est lisse sur S, à fibres connexes, on en conclut, pour des raisons de dimension, que $\mathrm{C} = \mathrm{H}$. Gardant les notations de 6.7, on a : $\mathrm{H} = \mathrm{C} = \mathrm{C}_\ell$ pour ℓ grand. Considérons de même $\mathrm{C}'_\ell = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}(\ell))$ (2.5), et soit C' la valeur stationnaire de C'_ℓ pour ℓ grand (2.5 bis). Le schéma en groupes C' majore H et est tel que $\mathrm{C}'_t = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_t}(\mathrm{T}_t)$ (6.8) et $\mathrm{C}'_s = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_s}(\mathrm{T}_s)$. L'hypothèse faite sur H_s implique : $\dim \mathrm{H}_s = \dim \mathrm{C}'_s$. Par ailleurs, $\dim \mathrm{H}_s = \dim \mathrm{H}_t$ (car H est lisse sur S) et $\dim \mathrm{C}'_t \leqslant \dim \mathrm{C}'_s$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 4.1), **437**
donc on a $\dim \mathrm{H}_t = \dim \mathrm{C}'_t$. Mais G_t étant lisse et connexe, $\mathrm{C}'_t = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_t}(\mathrm{T}_t)$ est lisse et connexe, donc finalement on a $\mathrm{H}_t = \mathrm{C}'_t = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_t}(\mathrm{T}_t)$.

---

(7) N.D.E. : on a supprimé le mot « résiduelle ».
(8) N.D.E. : détails ou références à donner ici...

b) Supposons que H_s contienne un sous-groupe de Cartan C_s de G_s, c.-à-d. le centralisateur dans $(G_s)_{\text{réd}}$ d'un tore maximal T_s de G_s. D'après 6.7, il existe un sous-schéma en groupes C de H, lisse sur S, à fibres connexes, qui relève C_s. Il suffit évidemment de prouver que C_t contient un sous-groupe de Cartan de G_t. Or d'après a) appliqué avec H = C, C_t est le centralisateur dans G_t d'un sous-tore de G_t, donc contient un sous-groupe de Cartan de G_t.

c) Supposons que H_s soit un sous-groupe parabolique de G_s. Soit $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$. Par hypothèse, H est égal à son normalisateur connexe, donc N_s est lisse, et par suite est égal à : $\underline{\mathrm{Norm}}_{(G_s)_{\text{réd}}}(H_s) = H_s$ (Exp. XII 8 bis). Mais alors N est *plat* sur S. Nous verrons dans Exp. XVI, que dans ces conditions, G/N est représentable. Comme $H_s = N_s$ est une sous-groupe parabolique de G, $(G/N)_s$ est propre. Comme (G/N) est à fibres connexes, et plat sur S, il résulte de EGA III 5.5.1 que (G/N) est propre sur S. Donc $(G/N)_t = G_t/N_t$ est propre sur t, et il en est de même de G_t/H_t, puisque N_t/H_t est fini. Il suffit alors d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 6.9. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique,* H *un sous-groupe algé-*
438 *brique lisse et connexe de* G*,* $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G H$*, alors si* $\dim H = \dim N$ *et si* G/H *est propre,* H *est un sous-groupe parabolique de* G.

En effet, on peut supposer k algébriquement clos et G lisse et connexe. Le centre Z de G est contenu dans N, et l'hypothèse $\dim H = \dim N$, entraîne que $Z' = (Z)^0_{\text{réd}}$ est contenu dans H, donc $G' = G/Z'$ est affine (Exp. XII 6.1). Remplaçant G par G′, et H par son image dans G′, on est ramené au cas où G est affine (Exp. XIV 4.9) et le lemme 6.9 résulte alors de BIBLE 6 Th. 4. Nous avons donc démontré le lemme 6.6.

Pour achever de démontrer 6.4, il nous faut prouver que les S-préschémas qui représentent $\mathscr{L}\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}\mathscr{T}$, resp. $\mathscr{P}$) sont de présentation finie sur S. Cette assertion est locale sur S, ce qui nous permet de supposer S affine, puis, G étant de présentation finie, S noethérien (EGA IV 8.9). Nous venons de voir que les inclusions naturelles : $\mathscr{C}\mathscr{T} \to \mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{P} \to \mathscr{L}$) sont des immersions, il en est donc de même des inclusions : $\mathscr{C}\mathscr{T} \to \mathscr{L}\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{P} \to \mathscr{L}\mathscr{C}$) et par suite, il suffit de prouver que $\mathscr{L}\mathscr{C}$ est représentable par un S-préschéma de présentation finie.

Reprenons les notations introduites dans 5.2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit donc $\mathscr{L}^n$ le sous-foncteur de $\mathscr{L}$ tel que :

$$\mathscr{L}^n(S') = \{H \in \mathscr{L}(S') \quad \text{tels que} \quad \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}}(H) = \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}} H^{(n)}\}.$$

Le S-foncteur $\mathscr{L}^n$ est donc représentable par un sous-préschéma ouvert de $\mathscr{L}$, somme des $\mathscr{L}^n_r$. Chaque $\mathscr{L}^n_r$ est de présentation finie sur S (5.3) et est vide pour $r > \mathrm{Sup}_{s\in S} \dim G_s$ (qui est un nombre fini, S étant quasi-compact), donc $\mathscr{L}^n$ est de
439 présentation finie sur S. Il suffit de prouver que $\mathscr{L}\mathscr{C}$ est contenu dans $\mathscr{L}^n$ pour n assez grand.

Pour tout point s de S, soit $d(s)$ le plus petit entier n (fini ou infini) tel que $\mathscr{L}\mathscr{C}_{G_s} \subset \mathscr{L}^n_{G_s}$. Il suffit de montrer que la fonction d est bornée sur S, car si M est un majorant, $\mathscr{L}\mathscr{C}$ sera ensemblistement contenu dans $\mathscr{L}^M$, donc $\mathscr{L}\mathscr{C}$ sera contenu dans $\mathscr{L}^M$, puisque ce dernier est un ouvert de $\mathscr{L}$. Un argument immédiat de constructibilité nous ramène à prouver que si S est noethérien intègre de point générique t, alors la fonction d est bornée sur un voisinage de t.

a) Réduction au cas où G est lisse sur S.

Procédant comme dans 6.2, on voit que quitte à changer S, on peut supposer que $(\mathrm{G})_{\text{réd}}$ est un préschéma en groupes lisse sur S, que nous noterons G′. Posons $\mathrm{X} = \mathscr{LC}_{\mathrm{G}}$, $\mathrm{X}' = \mathscr{LC}_{\mathrm{G}'}$ et soit H (resp. H′) le sous-préschéma en groupes de G_{X} (resp. $\mathrm{G}'_{\mathrm{X}'}$) universel pour le foncteur $\mathscr{LC}_{\mathrm{G}}$ (resp. $\mathscr{LC}_{\mathrm{G}'}$). Comme H est lisse sur X, $\mathrm{H} \times_{\mathrm{X}} (\mathrm{X}_{\text{réd}})$ est réduit, donc contenu dans $\mathrm{G}'_{\mathrm{X}_{\text{réd}}}$ et c'est un élément de $\mathscr{LC}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{X}_{\text{réd}})$, d'où un morphisme canonique $p : \mathrm{X}_{\text{réd}} \to \mathrm{X}'$. Il est clair que p est un monomorphisme ; montrons que p est même une immersion. Soit N′ le normalisateur de H′ dans $\mathrm{G}_{\mathrm{X}'}$. L'ensemble des points s de X′ tels que l'immersion $\mathrm{H}'_s \to \mathrm{N}'_s$ soit une immersion ouverte est un ouvert U et $\mathrm{H}'|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{N}|_{\mathrm{U}}$ est une immersion ouverte (Exp. VI_{B} 2.5 et EGA IV 17.9.5). Il résulte de 5.1 iii) que U est le plus grand ouvert de X′ au-dessus duquel H′ est égal à son normalisateur connexe dans $\mathrm{G}_{\mathrm{X}'}$, donc $\mathrm{H}'|_{\mathrm{U}} \in \mathscr{LC}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})$. On en déduit immédiatement que p est un isomorphisme de $\mathrm{X}_{\text{réd}}$ sur $\mathrm{U}_{\text{réd}}$. Si on sait **440**
montrer que $\mathscr{LC}_{\mathrm{G}}$ est de type fini lorsque G est lisse, X′ sera de type fini sur S, donc $\mathrm{X}_{\text{réd}}$ sera de type fini (S est noethérien) et par suite sera contenu dans $\mathscr{L}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}}$ pour M assez grand et il en sera de même de X.

b) Cas où S est le spectre d'un corps k algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$ et G est un groupe algébrique lisse sur k.

Au lieu d'utiliser les voisinages infinitésimaux $\mathrm{H}^{(n)}$ d'un sous-préschéma en groupes H de G, nous utiliserons les sous-groupes radiciels ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{H})$, noyaux des itérés du morphisme de Frobenius dans H (Exp. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 4), ce qui est légitime ici, vu que ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{H})$ est contenu dans le voisinage infinitésimal d'ordre p^n de la section unité de H. Si T est un sous-tore de G, ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{T}) = {}_{p^n}(\mathrm{T})$ et il est immédiat par dualité que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{p^n}(\mathrm{T}))$ est égal à $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ pour n assez grand. On a alors la proposition plus précise suivante :

Proposition 6.10. — *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, G un k-groupe algébrique lisse, T un tore maximal de G_k, m le plus petit entier tel que :*

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{p^m}(\mathrm{T}))^0 = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})^0.$$

Alors, pour tout k-préschéma S *et pour tout* $\mathrm{H} \in \mathscr{LC}(\mathrm{S})$*, on a :*

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}}({}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})).$$

A fortiori, $\mathscr{LC}$ est contenu dans $\mathscr{L}^{p^m}$.

Comme H est lisse sur S, de présentation finie sur S et a un rang nilpotent constant (à savoir celui de G), nous verrons au paragraphe suivant (7.3), que le foncteur $\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ **441**
des sous-groupes de Cartan de H est représentable par un S-préschéma, lisse sur S (le lecteur vérifiera que la démonstration donnée de cette propriété, n'utilise pas le fait que $\mathscr{LC}_{\mathrm{H}}$ soit de type fini sur S). Il résulte alors de Exp. XIII 3.1 que l'on peut considérer l'ouvert U des points réguliers de H.

Soit S′ un S-préschéma, g un élément de G(S′) normalisant ${}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})_{\mathrm{S}'}$. Pour prouver que g normalise $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$, il suffit de prouver que $\mathrm{int}(g)\mathrm{U}_{\mathrm{S}'}$ est contenu dans $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$; en effet, $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} \cap \mathrm{int}(g)\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ contiendra alors un sous-groupe ouvert de $\mathrm{int}(g)\mathrm{H}$, donc sera égal à int$(g)$H, puisque ce dernier est à fibres connexes. Quitte à remplacer S$'$ par un S$''$ convenable, puis S$''$ par S, on est ramené à prouver que si $g \in \mathrm{G(S)}$ normalise ${}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})$ et si $u \in \mathrm{U(S)}$, alors $\mathrm{int}(g)u \in \mathrm{H(S)}$.

Or soit C l'unique sous-groupe de Cartan de $\mathrm{H_S}$ qui « contient » u (Exp. XIII 3.2). Il nous suffit de montrer que $\mathrm{C}' = \mathrm{int}(g)\mathrm{C} \subset \mathrm{H}$. Comme $\mathrm{H} \in \mathscr{LC}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$, C est aussi un sous-groupe de Cartan de G, mais ce dernier possède des tores maximaux, donc (Exp. XII 7.1 (a)) C est le centralisateur dans $\mathrm{G}^0_{\mathrm{S}}$ de son unique tore maximal T. Il résulte de la définition de m (et du fait que deux tores maximaux de G sont localement conjugués pour fpqc (Exp. XII 7.1)) que l'on a :

$$\mathrm{C} = (\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}))^0 = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{p^m}(\mathrm{T}))^0,$$

d'où par conjugaison par g :

$$\mathrm{C}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{int}(g)({}_{p^m}(\mathrm{T})))^0.$$

Mais $\mathrm{int}(g)({}_{p^m}(\mathrm{T}))$ est un sous-groupe de type multiplicatif de $\mathrm{int}(g)({}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H}))$ égal à
442 ${}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})$ (g normalise ${}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})$), donc est contenu dans H. Il résulte alors de Exp. XIII 2.1 (qui est démontré lorsque la base est un corps, mais s'étend immédiatement au cas d'une base quelconque) que pour que C$'$ soit contenu dans H, il suffit que l'on ait :

$$\mathrm{Lie}\,\mathrm{C}' \subset \mathrm{Lie}\,\mathrm{H}.$$

Or, $\mathrm{Lie}\,\mathrm{C}' = \mathrm{int}(g)(\mathrm{Lie}\,\mathrm{C}) \subset \mathrm{int}(g)(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H})$.

D'autre part, si $m \geqslant 1$, ce qu'il est loisible de supposer, on a (en utilisant Exp. $\mathrm{VII_A}$ 4.1.2) :

$$\mathrm{Lie}\,\mathrm{H} = \mathrm{Lie}({}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})) = \mathrm{Lie}\,(\mathrm{int}(g)({}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H}))) = \mathrm{int}(g)(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}).$$

Donc $\mathrm{Lie}\,\mathrm{C}' \subset \mathrm{Lie}\,\mathrm{H}$, ce qui achève la démonstration de 6.10.

Nous aurons besoin d'une autre définition de l'entier m introduit dans 6.10.

Lemme 6.11. — *Soient* G *un groupe algébrique, lisse, défini sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$,* T *un tore maximal de* G*, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ et* R *la famille des caractères non nuls de* T *qui interviennent dans la représentation de* T *dans $\mathfrak{g}$ induite par la représentation adjointe de* G*. Pour tout élément $r \in \mathrm{R}$, notons e_r le plus grand entier n tel que p^n divise r dans le groupe des caractères de* T*. Alors $m = \mathrm{Sup}_{r\in\mathrm{R}}(e_r + 1)$ si $\mathrm{R} \neq \varnothing$ et $m = 0$ sinon.*

En effet, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est lisse et contenu dans $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{p^m}(\mathrm{T}))$, donc :

$$\begin{aligned}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T})^0 = (\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{p^m}(\mathrm{T})))^0 &\Longleftrightarrow \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}) = \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{T})))\\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{g}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{g}^{{}_{p^m}(\mathrm{T})} \quad (\text{Exp. II 5.2.3})\end{aligned}$$

443 Or avec les notations habituelles, on a :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \coprod_{r\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}^r.$$

Donc $\mathfrak{g}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}^{({}_{p^m}(\mathrm{T}))} = \mathfrak{g}_0 + \coprod_{r\in\mathrm{R}'} \mathfrak{g}^r$, où R$'$ est la partie de R formée des caractères de T dont la restriction à ${}_{p^m}(\mathrm{T})$ est nulle. Mais un caractère non nul r de T, a une restriction nulle à ${}_{p^m}(\mathrm{T})$ si et seulement si $m \leqslant e_r$, d'où le lemme.

c) Revenons à la démonstration de 6.4. Nous nous sommes ramenés (d'après le point a) et le paragraphe qui le précède), au cas où S est un schéma intègre noethérien et G est lisse sur S. Nous devons montrer que la fonction d est bornée sur un voisinage du point générique t de S. Quitte à changer S, nous pouvons supposer que G possède un tore maximal (6.2) trivial $\mathrm{T} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$. Soit alors $\mathfrak{g} = \coprod_{\lambda\in\mathrm{M}} \mathfrak{g}^{\lambda}$ la décomposition de l'algèbre de Lie de G suivant les caractères de T et soit R l'ensemble fini des caractères non nuls de M, tels que $\mathfrak{g}^{\lambda} \neq 0$. Distinguons alors deux cas :

1er cas : le point t, et par suite tous les points de S, ont une caractéristique résiduelle $p > 0$. Il est clair, vu ce qui précède, que la fonction d est alors majorée par p^m, où m est défini comme dans 6.11.

2ème cas : le point t a une caractéristique résiduelle nulle. Pour tout $\lambda \in \mathrm{R}$, soit n_{λ} le plus grand entier qui divise λ dans le groupe M, et posons $n = \prod n_{\lambda}$, $\lambda \in \mathrm{R}$. Pour tout nombre premier q divisant n, notons S_q la partie fermée de S formée des points de S dont la caractéristique résiduelle est égale à q et soit U l'ouvert non vide (il contient t) complémentaire dans S de la réunion des S_q. Si maintenant s est un point de U, ou **444**
bien s a une caractéristique résiduelle nulle et alors $d(s) = 1$ (5.6), ou bien s a une caractéristique résiduelle $p > 0$ qui ne divise pas n, donc l'entier m, relatif au groupe G_s, défini dans 6.11, est inférieur ou égal à un. Par ailleurs, il résulte de Exp. VII[9] que l'on a :

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{F}^1(\mathrm{H})) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(1)}).$$

Finalement, il résulte de 6.10 que si $\mathrm{H} \in \mathscr{LC}_{\mathrm{G}_s}(\mathrm{S}')$, on a : $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(1)})$, et par suite $d(s) \leqslant 1$, donc d est bornée par 1 sur U.

Ceci achève la démonstration de 6.4.

Corollaire 6.12. — *Soient* S *un préschéma et* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie. Supposons que le rang nilpotent* (*resp. la dimension des sous-groupes de Borel*) *des fibres de* G *soit une fonction localement constante sur* S*, alors le foncteur* $\mathscr{C}$ *des sous-groupes de Cartan de* G (*resp. le foncteur* $\mathscr{B}$ *des sous-groupes de Borel de* G) *est représentable par un* S*-préschéma de présentation finie sur* S.

En effet, quitte à restreindre S, on peut supposer que le rang nilpotent des fibres ν est constant. Mais alors il est clair que $\mathscr{C}$ est représenté par le sous-préschéma à la fois ouvert et fermé du préschéma X qui représente $\mathscr{LC}$ (6.4), au-dessus duquel le sous-groupe universel de G_{X} relatif au foncteur $\mathscr{LC}$, est de dimension relative ν. La démonstration est analogue pour le foncteur $\mathscr{B}$, compte tenu de la représentabilité du foncteur $\mathscr{P}$.

7. Sous-groupes de Cartan d'un groupe lisse

445

Proposition 7.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie,* lisse *sur* S*, à fibres connexes.*

[9] N.D.E. : argument à expliciter...

i) *Soit* $\mathscr{C}\mathscr{T}$ *le* S-*foncteur* $(\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^{\circ} \to \mathbf{Ens}$, *tel que pour tout* S-*préschéma* S', *on ait :*

$\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S}')$ = *ensemble des sous-préschémas en groupes* H *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, *lisses sur* S', *tels que pour tout point* s' *de* S', $\mathrm{H}_{\overline{s'}}$ *soit le centralisateur dans* $\mathrm{G}_{\overline{s'}}$ *d'un sous-tore de* $\mathrm{G}_{\overline{s'}}$. *Alors,* $\mathscr{C}\mathscr{T}$ *est représentable par un* S-*préschéma de présentation finie sur* S, *lisse et quasi-projectif sur* S.

ii) *Si* S *est artinien et si* $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, H *est le centralisateur dans* G *d'un sous-tore de* G. *Si* S *est le spectre d'un anneau local hensélien, et si* $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, H *est le centralisateur dans* G *d'un sous-groupe de type multiplicatif de* G, *étale sur* S.

iii) *Si* L *est un* S-*préschéma en groupes, lisse et de présentation finie sur* S, $i : \mathrm{L} \to \mathrm{G}$ *un* S-*monomorphisme de groupes, et* H *un élément de* $\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, *alors* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}, \mathrm{L})$ *et* $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}, \mathrm{L})$ (cf. Exp. VIII 6.5 e)) *sont représentables par des sous-préschémas fermés de* G, *lisses sur* S.

iv) *Si* $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, H *est fermé dans* G, $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est représentable par un*
446 *sous-préschéma en groupes de* G, *fermé et lisse sur* S *;* N/H *est représentable par un* S-*préschéma en groupes, séparé sur* S, *étale et de type fini sur* S *;* G/N *est représentable par un* S-*préschéma lisse et quasi-projectif sur* S.

v) *Soit* G' *un* S-*préschéma en groupes, de présentation finie sur* S *et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$, *un* S-*morphisme de groupes, fidèlement plat, de sorte que* G' *satisfait aux mêmes hypothèses que* G (Exp. VI_{B} 9). *Alors si* $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$, *l'image de* H *par* u *est représentable par un sous-préschéma en groupes* H' *de* G' *qui est un élément de* $\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{S})$. *De plus,* $\mathrm{H} \to \mathrm{H}'$ *est fidèlement plat et si* H *est le centralisateur dans* G *d'un tore* T, H' *est le centralisateur dans* G' *du tore* $\mathrm{T}' = u(\mathrm{T})$.

vi) *Sous les conditions de* v), *considérons le* S-*morphisme :*

$$\widetilde{u} : \mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}, \qquad \mathrm{H} \mapsto \mathrm{H}' = u(\mathrm{H}).$$

Alors $\widetilde{u}$ *est un morphisme fidèlement plat quasi-compact ; si de plus* $\operatorname{Ker} u$ *est central,* $\widetilde{u}$ *est un isomorphisme, l'isomorphisme réciproque étant* $\mathrm{H}' \mapsto u^{-1}(\mathrm{H}')$.

Démonstration de ii). Pour la première assertion, on peut supposer S local artinien de point fermé s. Soit $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$ et $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ le tore central maximal de $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ qui est déjà défini sur $\kappa(s)$ (cf. 3.4). Comme $\mathrm{H}_s \in \mathscr{C}\mathscr{T}(s)$, on a : $\mathrm{H}_s = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_s} \mathrm{T}_s$. Le groupe H est lisse, donc T_s se relève (de manière unique) en un sous-tore T de H, central dans
447 H (Exp. IX 3.6 bis et Exp. IX 5.6). Mais alors $\mathrm{H}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}$ majore H et a même fibre que H ; comme H est plat sur S, on a $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$ (Exp. VI_{B} 2.5).

Supposons maintenant que S soit le spectre d'un anneau local hensélien, qu'on peut supposer noethérien par les réductions habituelles. Notons s le point fermé de S, T_s le tore central maximal de H_s, q un entier inversible sur S, ℓ une puissance de q, T un S-tore ayant une fibre fermée isomorphe à T_s (Exp. X 4.6). Soit d'autre part ${}_{\ell}\mathrm{H}$ le « noyau » de l'élévation à la puissance $\ell^{\text{ième}}$ dans H et soit U_{ℓ} le plus grand ouvert de ${}_{\ell}\mathrm{H}$ qui est étale sur S. Il résulte alors de 1.3 et du fait que H est plat sur S que U_{ℓ} majore ${}_{\ell}\mathrm{T}_s$. Comme S est hensélien, il existe un unique S-morphisme :

$$u_{\ell} : {}_{\ell}\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{U}_{\ell}$$

qui, sur la fibre fermée, induit l'immersion canonique ${}_{\ell}\mathrm{T}_s \to (\mathrm{U}_\ell)_s$. En raison de l'unicité, on voit facilement que u_ℓ est un morphisme de S-groupes, central (Exp. IX 5.6 a)). Procédant alors comme dans 6.6 et 6.7, on montre que u_ℓ est une immersion et que si M_ℓ est le groupe image $u_\ell({}_{\ell}\mathrm{T})$, alors $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}_\ell)$ est égal à H pour ℓ assez grand (c'est ici que sert l'hypothèse S noethérien).

Démonstration de i). Le groupe G est lisse sur S, à fibres connexes, donc si $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, H a ses fibres connexes (Exp. XII 6.6 b)) et est égal à son normalisateur connexe (6.5) de sorte que le foncteur $\mathscr{C}\mathscr{T}$ défini dans 7.1 i) coïncide avec le foncteur aussi noté $\mathscr{C}\mathscr{T}$ qui a été défini dans 6.4.0. Donc, d'après le théorème 6.4, $\mathscr{C}\mathscr{T}$ est représentable par un S-préschéma de présentation finie et quasi-projectif sur S. Il reste à montrer que ce préschéma est lisse sur S. On se ramène d'abord par EGA IV 8, **448**
au cas où S est affine noethérien. Grâce à Exp. XI 1.5, il suffit alors de prouver que si S est le spectre d'un anneau local artinien, S_0 un sous-schéma défini par un idéal nilpotent, H_0 un élément de $\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S}_0)$, alors H_0 se relève en un sous-préschéma en groupes H de G, lisse sur S. Or d'après ii), $\mathrm{H}_0 = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}\,\mathrm{T}_0$, où T_0 est un sous-tore de G_0. Comme G est lisse, T_0 se relève en un sous-tore T de G (Exp. IX 3.6 bis), et il suffit de prendre $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ qui est bien lisse sur S (Exp. XI 2.4 et lemme 2.5).

Démonstration de iii). Comme H est lisse, à fibres connexes, alors, d'après Exp. XI 6.11, $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{L})$ est représentable par un sous-préschéma fermé de G, de présentation finie sur S. Pour montrer que ce transporteur est lisse, on se ramène, comme ci-dessus, à prouver que si S est local artinien, S_0 un sous-préschéma fermé de S, $g_0 \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$ tel que $\mathrm{int}(g_0)\mathrm{H}_0 \subset \mathrm{L}_0$, alors g_0 se relève en $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{H} \subset \mathrm{L}$. Le groupe G étant lisse sur S, il existe une section g_1 de G qui relève g_0 ; soit $\mathrm{H}' = \mathrm{int}(g_1)\mathrm{H}$. C'est donc un élément de $\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{H}'_0 \subset \mathrm{L}_0$. D'après ii), H′ est le centralisateur dans G d'un tore T′ de G. Comme L est lisse, le tore T'_0 de L_0 se relève en un tore T″ de L (Exp. XI 3.6 bis). Le groupe $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{L}}\,\mathrm{T}''$ est contenu dans $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}''$, a même fibre que ce dernier (à savoir H'_0) et est lisse, donc est égal à $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}'' = \mathrm{H}''$. Les sous-tores T′ et T″ de G sont deux relèvements de T'_0, donc sont conjugués par un élément h de G(S) se réduisant suivant la section unité de G_0 (Exp. IX 3.3 bis) ; il en est donc de même de leurs centralisateurs H′ et H″ dans G. La section $g = hg_1$ relève g_0 et l'on a bien $\mathrm{int}(g)\mathrm{H} \subset \mathrm{L}$. **449**

Si maintenant $g \in \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{L})(\mathrm{S})$, pour que $\mathrm{int}(g)\mathrm{H} = \mathrm{L}$, il faut et il suffit que pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\dim \mathrm{H}_s = \dim \mathrm{L}_s$. Il en résulte que si U désigne le sous-préschéma de S à la fois ouvert et fermé au-dessus duquel les fibres de H ont même dimension que celles de L, le transporteur strict de H dans L, $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{L})$, est représentable par le S-préschéma :

$$\mathrm{U} \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{L}).$$

Démonstration de iv). Pour voir que si $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, H est fermé dans G, on peut supposer S affine noethérien, puis S spectre d'un anneau local complet (EGA IV 8), mais alors H est le centralisateur dans G d'un sous-groupe de type multiplicatif (d'après ii)) donc est fermé puisque G est séparé sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2).

D'après iii), $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H})$ est représentable par un sous-préschéma en groupes lisse sur S et fermé dans G. Considérons le S-morphisme :

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathscr{C}\mathscr{T}, \qquad g \mapsto \mathrm{int}(g)\mathrm{H}.$$

Il résulte de iii) que ce morphisme est lisse, son image est donc un ouvert U de $\mathscr{C}\mathscr{T}$. On prouve alors comme dans Exp. XI 5.3 que G/N est représentable par U, donc en particulier est quasi-projectif.

Étudions maintenant le quotient N/H. Grâce à EGA IV 8, pour prouver que N/H
450 est représentable, on peut supposer S affine noethérien, puis S spectre d'un anneau local A donc de dimension[10] finie. Nous allons procéder par récurrence croissante sur la dimension de S. Si $\dim \mathrm{S} = 0$, la propriété résulte de Exp. $\mathrm{VI_A}$ § 4. Notons maintenant que si N/H est représentable, il est séparé sur S (car H est fermé dans N d'après iv)), de type fini et étale sur S (car N est lisse sur S, de type fini et H est ouvert dans N), donc N/H est nécessairement quasi-affine sur S (SGA1 VIII.6.2). Par descente effective des schémas quasi-affines (*loc. cit.* 7.9), on peut remplacer A par son complété donc supposer S spectre d'un anneau local noethérien complet. Soient s son point fermé et $\mathrm{U} = \mathrm{S} \setminus s$. Par hypothèse de récurrence, $(\mathrm{N}|_{\mathrm{U}})/(\mathrm{H}|_{\mathrm{U}})$ est représentable par un U-groupe K. Soient alors T_s le tore central maximal de H_s, q un entier inversible sur S, ℓ une puissance de q, M_ℓ l'unique sous-groupe de type multiplicatif de H, central, qui relève ${}_\ell\mathrm{T}_s$ (cf. ii)). Choisissons ℓ assez grand pour que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}_\ell) = \mathrm{H}$, et soit $\mathrm{N}' = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}_\ell)$. Comme $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}_\ell) = \mathrm{H}$, on a $\mathrm{N}' \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$. De plus, on vérifie immédiatement que T_s (donc aussi $(\mathrm{M}_\ell)_s$) est un sous-groupe caractéristique de H_s (c.-à-d. stable par $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{gr}}(\mathrm{H}_s)$), donc N_s normalise $(\mathrm{M}_\ell)_s$ et par suite $\mathrm{N}_s = \mathrm{N}'_s$. La démonstration de Exp. XI 5.9 prouve alors que le quotient $\mathrm{N}'/\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}_\ell)/\,\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}_\ell)$ est représentable par un S-groupe K'. Comme N' est lisse sur S et que $\mathrm{N}'_s = \mathrm{N}_s$, N' est un sous-groupe ouvert de N (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.5) qui contient H, donc l'image de $\mathrm{N}'|_{\mathrm{U}}$ dans K est un sous-groupe ouvert, isomorphe à $\mathrm{K}'|_{\mathrm{U}}$. Soit L le S-préschéma obtenu par recollement de K et de K' grâce à l'isomorphisme précédent et soit p le S-morphisme $\mathrm{N} \to \mathrm{L}$, obtenu par recollement
451 des projections canoniques $\mathrm{N}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{K}$ et $\mathrm{N}' \to \mathrm{K}'$. Il est clair que (L, p) représente le quotient N/H.

Démonstration de v). Supposons d'abord que S soit le spectre d'un corps k. L'image H' de H est alors un sous-groupe lisse de G'. Nous devons montrer que $\mathrm{H}' \in \mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{S})$, ce qui va résulter du lemme plus précis suivant :

Lemme 7.2. — *Soient* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un épimorphisme de* k*-groupes algébriques lisses et connexes,* T *un tore de* G*,* T' *son image dans* G'*, alors :*

$$u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}'}\,\mathrm{T}'.$$

Notons $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}$, $\mathrm{H}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}'}\,\mathrm{T}'$, $\mathrm{H}'' = u(\mathrm{H})$. On a $\mathrm{H}'' \subset \mathrm{H}'$. Pour prouver que $\mathrm{H}' = \mathrm{H}''$, on peut supposer le corps de base algébriquement clos et il suffit de prouver que tout sous-groupe de Cartan de H' est contenu dans H''. En effet, H'' contiendra alors l'ouvert des points réguliers de H', donc H'' sera un sous-groupe

[10] N.D.E. : (de Krull)

ouvert de H′ et par suite sera égal à H′ puisque ce dernier a ses fibres connexes. Soit donc C′ un sous-groupe de Cartan de H′ ; C′ est aussi un sous-groupe de Cartan de G′, puisque H′ est le centralisateur d'un tore T′, donc a même rang réductif et même rang nilpotent que G′. Posons $K = (u^{-1}(C'))^0_{\text{réd}}$. Comme T′ est dans le centre de H′, C′ contient T′, donc K contient T. Soit alors C un sous-groupe de Cartan de K qui contient T. Le tore T est contenu dans l'unique tore maximal de C qui est central dans C (Exp. XII 6.6 c)) donc C est contenu dans $H = \underline{\mathrm{Centr}}_G\, T$. Utilisant maintenant le fait que deux sous-groupes de Cartan de G sont conjugués et que l'image d'un sous-groupe de Cartan de G est un sous-groupe de Cartan de G′ (Exp. XII 6.6), on en **452**
déduit que C est aussi un sous-groupe de Cartan de G, son image est donc un sous-groupe de Cartan de G′ ; comme elle est contenue dans C′, on a $u(C) = C'$, donc C′ est bien contenu dans H″.

Nous avons donc établi v) lorsque S est le spectre d'un corps k. Étudions maintenant le cas général. Comme G, H et G′ sont de présentation finie sur S, pour prouver que $u(H)$ est représentable et est un élément de $\mathscr{C}\mathscr{T}_{G'}(S)$, on se ramène par la technique habituelle au cas où S est affine noethérien, puis au cas où S est le spectre d'un anneau local. Par descente fpqc des sous-préschémas de G′, on peut même supposer que S est le spectre d'un anneau local noethérien complet A.

Reprenons les notations de ii), c.-à-d. : Soient T_s le tore central maximal de H_s (s est le point fermé de S), M_ℓ un sous-groupe de type multiplicatif de H qui relève ${}_\ell T_s$ et tel que $H = \underline{\mathrm{Centr}}_G\, M_\ell$. Soit T'_s l'image de T_s dans G'_s. Comme G′ est séparé sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2), l'image de M_ℓ par u est un sous-groupe de type multiplicatif M'_ℓ de G′ (Exp. IX 6.8). Posons alors $H' = \underline{\mathrm{Centr}}_{G'}\, M'_\ell$, qui est un sous-préschéma en groupes lisse de G′. Pour tout entier ℓ' égal à une puissance de q, il existe ℓ tel que $(M'_\ell)_s$ majore ${}_{\ell'}T'_s$, on peut donc supposer ℓ choisi assez grand pour que $H'_s = \underline{\mathrm{Centr}}_{G'_s}\, T'_s = u_s(H_s)$, où la dernière égalité résulte de 7.2. La restriction de u à H, soit v, se factorise évidemment à travers H′. Prouvons que $v : H \to H'$ est un morphisme plat. Comme H et H′ sont plats sur S et que $H_s \to H'_s$ est plat, v est plat sur un voisinage de H_s (EGA IV 11.3.10 et 11.3.1). Le morphisme v est donc plat sur un sous-groupe ouvert de H (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.2) donc v est plat, H ayant ses fibres **453**
connexes. L'image ensembliste de H est donc un ouvert de H′ (nécessairement égal à $(H')^0$) qui, muni de sa structure induite, représente le faisceau image $u(H)$ (pour la topologie fpqc). Le fait que $u(H)$ soit un élément de $\mathscr{C}\mathscr{T}_{G'}(S)$ résulte alors de 7.2.

Supposons maintenant que H soit le centralisateur dans G d'un tore T et soit T′ l'image de T par u, qui est un sous-tore de G′ (Exp. IX 6.8). L'image de H par u est contenue dans $\underline{\mathrm{Centr}}_{G'}(T')$, coïncide fibre par fibre avec ce dernier (7.2) et est lisse sur S, donc $u(H) = \underline{\mathrm{Centr}}_{G'}(T')$.

Démonstration de vi). Pour montrer que $\widetilde{u}$ est un S-morphisme fidèlement plat, sachant que $\mathscr{C}\mathscr{T}_G$ et $\mathscr{C}\mathscr{T}_{G'}$ sont lisses sur S (d'après i)), il suffit de le vérifier sur les fibres géométriques. Nous sommes donc ramenés au cas où S est le spectre d'un corps k algébriquement clos. Soient $H' \in \mathscr{C}\mathscr{T}_{G'}(k)$, T′ son tore central maximal, T un sous-tore de G dont l'image est T′, $H = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$, de sorte que $H' = u(H)$ (7.2), $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$, $N' = \underline{\mathrm{Norm}}_{G'}(H')$. Nous avons montré dans iv) que G/N (resp. G′/N′) s'identifient canoniquement à des voisinages ouverts de H dans $\mathscr{C}\mathscr{T}_G$

(resp. de H' dans $\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$). Moyennant ces identifications, la restriction de $\widetilde{u}$ à G/N coïncide avec le morphisme naturel :

$$w : \mathrm{G}/\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{G}'/\mathrm{N}'$$

déduit de u par passage au quotient. Or w est un épimorphisme d'espaces homogènes sous G donc est fidèlement plat. Ceci prouve que $\widetilde{u}$ est un morphisme plat tel que $u(\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}})$, qui est donc un ouvert de $\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$, contienne tout point de $\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}(k)$. Comme
454 $\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$ est de type fini sur k, on en déduit que $\widetilde{u}$ est surjectif, donc est fidèlement plat.

Les assertions complémentaires contenues dans vi) dans le cas où $\operatorname{Ker} u$ est central résultent de Exp. XII 7.12.

Le théorème suivant généralise le théorème 7.1 de Exp. XII :

Théorème 7.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*, lisse, à fibres connexes et considérons le* S*-foncteur* $\mathscr{C} : (\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^{\circ} \to \mathbf{Ens}$ *tel que :*

$$\mathscr{C}(\mathrm{S}') = \text{ ensemble des sous-groupes de Cartan de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}.$$

i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le foncteur* $\mathscr{C}$ *est représentable.*

b) *Le foncteur* $\mathscr{C}$ *est représentable par un* S*-préschéma lisse, quasi-projectif, de présentation finie sur* S *à fibres affines.*

c) *Le groupe* G *possède localement pour la topologie étale un sous-groupe de Cartan.*

d) *Le groupe* G *possède localement pour la topologie fidèlement plate un sous-groupe de Cartan.*

e) *Le rang nilpotent des fibres de* G *est une fonction localement constante sur* S.

ii) *Si les conditions précédentes sont réalisées, deux sous-groupes de Cartan de* G
455 *sont localement conjugués pour la topologie étale. L'ensemble des points réguliers des fibres de* G (Exp. XIII 2.7) *est un ouvert* $\mathrm{G}_{\text{rég}}$*, de présentation finie sur* S*, et toute section de* $\mathrm{G}_{\text{rég}}$ *au-dessus de* S *est contenue dans un sous-groupe de Cartan de* G *et un seul.*

iii) *Soit* G' *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S *et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un* S*-morphisme de groupes fidèlement plat, de sorte que* G' *est lisse sur* S*, à fibres connexes. Alors si* C *est un sous-groupe de Cartan de* G*,* $u(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$ *est représentable par un sous-groupe de Cartan de* G' *et* $\mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ *est fidèlement plat.*

iv) *Sous les conditions de* i) *et* iii) *le morphisme :*

$$\widetilde{u} : \mathscr{C}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{G}'}, \qquad \mathrm{C} \mapsto u(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$$

est fidèlement plat. Si de plus $\operatorname{Ker}(u)$ *est central,* $\widetilde{u}$ *est un isomorphisme.*

v) *Pour tout renseignement complémentaire concernant les transporteurs, les relations avec les tores maximaux, on pourra consulter* 7.1 *et* Exp. XII 7.1.

Démonstration. i) On va montrer que b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ d).

b) $\Rightarrow$ c). Soit s un point de S. Comme $\mathscr{C}_s$ est lisse sur $\kappa(s)$, il existe des points de $\mathscr{C}_s$ dont le corps résiduel est une extension finie séparable de $\kappa(s)$. Appliquant Exp. XI 1.10, on voit qu'il existe un voisinage ouvert U de s et un morphisme étale surjectif 456
$\mathrm{U}' \to \mathrm{U}$ tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{U}'}$ possède un sous-groupe de Cartan.

c) $\Rightarrow$ d) est bien clair.

d) $\Rightarrow$ e). Soit $s \in \mathrm{S}$. Par hypothèse, il existe un S-préschéma S′, plat sur S, dont l'image contient s, tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ possède un sous-groupe de Cartan. Soit s' un point de S′ au-dessus de s. Le rang nilpotent des fibres de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ est donc constant sur $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$ et par suite le rang nilpotent des fibres de G est constant sur $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ qui est l'image de $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$ (EGA IV 2.3.4 ii)). Soit r sa valeur. Il résulte de 6.3 bis que l'ensemble E_r formé des points x de S tels que le rang nilpotent de G_x soit égal à r est une partie ind-constructible de S, donc contient un voisinage de s (EGA IV 1.10.1).

e) $\Rightarrow$ b). L'assertion est locale sur S, on peut donc supposer que le rang nilpotent des fibres de G est constant et égal à r. Pour tout S-préschéma S′, il y a alors identité entre les sous-groupes de Cartan de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ et les sous-préschémas en groupes de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, lisses sur S′, de dimension relative r, dont les fibres géométriques sont les centralisateurs d'un tore. Comme $\mathscr{C}\mathscr{T}$ est représentable, d'après 7.1, $\mathscr{C}$ est représentable par le sous-préschéma à la fois ouvert et fermé de $\mathscr{C}\mathscr{T}$, qui représente le sous-foncteur de $\mathscr{C}\mathscr{T}$ formé des groupes de dimension relative r. Les autres assertions figurant dans b) sont contenues dans 7.1 i), sauf le fait que les fibres de $\mathscr{C}$ sont affines qui, lui, résulte de Exp. XII 7.1 d).

Il est clair que b) $\Rightarrow$ a). Montrons que a) $\Rightarrow$ d). Il résulte de 6.2 iii) que le foncteur 457
$\mathscr{C}$ commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux, donc si $\mathscr{C}$ est représentable, il est nécessairement représentable par un S-préschéma localement de présentation finie (EGA IV 8.14.2). Pour prouver que $\mathscr{C}$ est lisse sur S, on est ramené à montrer que si S est affine et si S_0 est le sous-schéma fermé défini par un idéal nilpotent J, alors tout sous-groupe de Cartan C_0 de $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$ se relève en un sous-groupe de Cartan C de G. Mais l'existence de C_0 entraîne que la condition e) est satisfaite pour S_0 donc pour S qui a même espace sous-jacent, et on conclut du fait que d) $\Rightarrow$ b). Puisque $\mathscr{C}$ est lisse sur S et que $\mathscr{C} \to \mathrm{S}$ est surjectif, on voit que a) $\Rightarrow$ d).

ii) Soient C et C′ deux sous-groupes de Cartan de G. Alors $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{C}')$ est représentable par un préschéma lisse sur S (7.1 iii)), à fibres non vides (confer Exp. XII 6.6 a) et c)). Le fait que C et C′ soient localement conjugués pour la topologie étale est alors une conséquence du lemme de Hensel (Exp. XI 1.10).

Les autres assertions de ii) sont des conséquences de XIII 3.1 et XIII 3.2, compte tenu de i).

iii) Soit C un sous-groupe de Cartan de G. On sait (7.1 v)) que $u(\mathrm{C})$ est représentable par un sous-groupe lisse C′ de G′. Comme les fibres de C′ sont des sous-groupes de Cartan des fibres de G′ (Exp. XII 6.6 d)), C′ est un sous-groupe de Cartan de G′.

iv) Pour prouver que le morphisme $\widetilde{u}$ est fidèlement plat, on procède comme dans 7.1 vi).

Si maintenant $\operatorname{Ker} u$ est central et si C′ est un sous-groupe de Cartan de G′, 458
$u^{-1}(\mathrm{C}') = \mathrm{C}$ est lisse, à fibres connexes (7.1 vi)) et ses fibres sont des sous-groupes de

Cartan (Exp. XII 6.6 f)), donc C est un sous-groupe de Cartan de G, ce qui achève la démonstration de iv), compte tenu de 7.1 vi).

8. Critère de représentabilité du foncteur des sous-tores d'un groupe lisse

459 **8.0.** Dans ce paragraphe, si S est un préschéma et G un S-préschéma en groupes, $\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$ (ou simplement $\mathscr{T}$ s'il n'y a pas d'ambiguité) désigne le S-foncteur $(\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^{\circ} \to \mathbf{Ens}$ tel que, pour tout S-préschéma S′, on ait :

$$\mathscr{T}(\mathrm{S}') = \text{ ensemble des sous-tores de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}.$$

On définit de même $\mathscr{T}\mathscr{C}$ comme étant le foncteur des sous-tores centraux de G.

Proposition 8.1. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien et* G *un* S-*préschéma en groupes de type fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Le foncteur* $\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$ *« commute aux limites adiques d'anneaux locaux artiniens »,* c.-à-d. *pour tout* S-*préschéma de la forme* Spec(A) = S′, *où* A *est un anneau local noethérien complet pour la topologie définie par son idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *l'application canonique :*

$$\mathscr{T}(\mathrm{S}') \longrightarrow \varprojlim_{n} \mathscr{T}(\mathrm{S}'_n) \quad (\text{où } \mathrm{S}'_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n))$$

est bijective.

ii) *Comme dans* i) *mais on se limite au cas où* A *est un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos.*

460 iii) *Comme dans* ii)*, mais on se limite au sous-foncteur* $\mathscr{T}^{(1)}$ *de* $\mathscr{T}$ *relatif aux sous-tores de* G *de dimension relative* 1*.*

i bis) *Pour tout* S-*préschéma* S′ *comme dans* i) *et pour tout* S′-*tore* T*, l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}) \longrightarrow \varprojlim_{n} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'_n\text{-gr}}(\mathrm{T}_{\mathrm{S}'_n}, \mathrm{G}_{\mathrm{S}'_n})$$

est bijective.

ii bis) *Comme* i bis)*, mais on se limite au cas où* A *est un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos.*

iii bis) *Comme* ii bis)*, mais on se limite au cas où* T *est le groupe multiplicatif* $\mathbb{G}_m$*.*

Remarque 8.2. — On a une proposition analogue en se restreignant aux sous-tores centraux de G et aux homomorphismes centraux d'un tore dans G.

Démonstration. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 8.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*préschéma en groupes,* T *un* S-*tore,* $u : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$ *un* S-*morphisme de groupes. On suppose de plus que* G *est de présentation finie sur* S *ou bien que* S *est localement noethérien et* G *localement de type fini. Alors :*

a) $\mathrm{Ker}\, u$ *est un sous-groupe de type multiplicatif de* T*.*

b) *Le quotient* $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Ker}\, u$ *est un tore.*

461 c) *Le monomorphisme canonique* $\mathrm{T}' \to \mathrm{G}$*, déduit de* u *par passage au quotient, est une immersion.*

Ce lemme est une conséquence de Exp. IX 6.8 lorsque G est séparé sur S. Dans le cas général, on se ramène comme d'habitude au cas où S est noethérien. Montrons d'abord que $K = \operatorname{Ker} u$ est plat. Nous pouvons supposer que S est le spectre d'un anneau local artinien (EGA 0_{III} 10.2.6), auquel cas G est séparé (Exp. VI_{B} 5.2), donc K est de type multiplicatif (Exp. IX 6.8) et a fortiori plat sur S. Prouvons maintenant que $\operatorname{Ker} u$ est fermé dans T, ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète (EGA II 7.2.1). Comme T est plat, à fibres connexes, u se factorise à travers la composante neutre de l'adhérence schématique dans G de la fibre générique de G. Nous pouvons donc supposer G plat à fibres connexes, mais alors G est séparé (Exp. VI_{B} 5.2), donc K est fermé. Ceci étant, il résulte de Exp. X 4.8 b) que K est un sous-groupe de type multiplicatif de T. Le quotient $T' = T/K$ est alors représentable et T' est un groupe de type multiplicatif (Exp. IX 2.7) dont les fibres sont des tores, c'est donc un tore. Le fait que le monomorphisme $T' \to G$ soit une immersion résulte alors de Exp. VIII 7.9.

Démonstration de 8.1.

i) $\Rightarrow$ i bis). Posons $T_n = T_{S'_n}$, $G_n = G_{S'_n}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ un élément de $\varprojlim_n \operatorname{Hom}_{S'_n\text{-gr}}(T_n, G_n)$. Pour tout entier n, $u_n(T_n)$ est donc un sous-tore T'_n de G_n (lemme 8.3). Par hypothèse, il existe un unique sous-tore T' de G qui relève T'_n pour tout n. Comme T' est à fibres affines, on conclut grâce à 4.4.

i bis) $\Rightarrow$ i). Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\varprojlim_n \mathscr{T}(S_n)$. D'après Exp. X 4.6, il existe **462**
un S'-tore T' et un S_0-isomorphisme :

$$u_0 : T'_0 \xrightarrow{\sim} T_0.$$

Comme T_n est lisse sur S'_n, u_0 se relève en un S'_n-morphisme

$$u_n : T'_n \longrightarrow T_n \quad \text{(Exp. IX 3.6)}$$

et on peut supposer la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cohérente, donc provenant d'un morphisme $u : T' \to G$. L'image de T' par u est alors un sous-tore de G (lemme 8.3) qui relève T_n pour tout n.

Les implications i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) d'une part et i bis) $\Rightarrow$ ii bis) $\Rightarrow$ iii bis) d'autre part sont évidentes. L'implication iii) $\Rightarrow$ iii bis) se démontre comme i) $\Rightarrow$ i bis). Il nous suffit donc de prouver : iii bis) $\Rightarrow$ ii bis) $\Rightarrow$ i bis).

ii bis) $\Rightarrow$ i bis). Avec la terminologie introduite dans 4.3, l'assertion i bis) est vraie si et seulement si tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\varprojlim_n \operatorname{Hom}_{S_n\text{-gr}}(T_n, G_n)$ est « admissible ». Pour tout point t de S' distinct du point fermé s de S', il existe un S-schéma S'', spectre d'un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, dont le point générique se projette sur t et le point fermé se projette sur s (EGA II 7.1.9). On en déduit immédiatement un critère valuatif pour qu'une famille de morphismes soit admissible. C'est dire que ii bis) $\Rightarrow$ i bis).

iii bis) $\Rightarrow$ ii bis). Soit T un S-tore, où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos. Le tore T est alors trivial (Exp. X 4.6), c.-à-d. isomorphe à $(\mathbb{G}_{m,S})^r$ pour un entier r convenable. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élé- **463**
ment de $\varprojlim_n \operatorname{Hom}_{S_n\text{-gr}}((\mathbb{G}_m)^r_{S_n}, G_n)$. Par hypothèse, les restrictions des u_n à chaque

facteur de $(\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}}$ proviennent d'un morphisme de groupes :

$$\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

D'où un morphisme produit $(\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}^r$ qui, composé avec le morphisme $\mathrm{G}^r \to \mathrm{G}$ défini par la loi de composition dans G, fournit un morphisme :

$$v : (\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Vu l'existence du morphisme de groupes u_n, il est clair que $u_n = v_n$. Il reste à voir que v est un morphisme de groupes, ce qui se traduit par le fait que deux morphismes évidents $f, g : \mathrm{X} = (\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} (\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ coïncident. Soit Z le sous-schéma des coïncidences de f et g. Comme $(\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}}$ est à fibres connexes et que $v(\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}}$ contient la section unité, on voit comme dans 8.3 que v se factorise à travers la composante neutre de G, ce qui nous permet de supposer G séparé (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2), donc Z est fermé. Par ailleurs, comme v_n est un morphisme de groupes, on a $f_n = g_n$ pour tout n, donc Z contient un voisinage de la fibre fermée de X (EGA I 10.9.4), donc est schématiquement dense dans X, X ayant ses fibres lisses et irréductibles (Exp. IX 4.6) et par suite $\mathrm{Z} = \mathrm{X}$, donc $f = g$.

Définition 8.4. — Soient S un préschéma localement noethérien, G un S-préschéma en groupes de type fini et $\mathscr{S}$ l'ensemble des S-schémas S′, spectre d'un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, de point fermé s, de
464 point générique t, tels que $(\mathrm{G}_t)^0_{\text{réd}}$ soit lisse et possède une décomposition de Chevalley, c.-à-d. soit extension d'une variété abélienne par un sous-groupe algébrique linéaire, lisse et connexe L_t (cette décomposition est alors unique). Si $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}$, désignons par G′ (resp. L′) l'adhérence schématique dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ de G_t (resp. L_t).

Dans ces conditions, nous dirons que

> « la partie abélienne de G ne dégénère pas en une partie torique », ou plus brièvement que G satisfait à la propriété AT,

si pour tout $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}$, L_s a même rang réductif que G'_s. (*Intuitivement, supposons que le quotient* $\mathrm{A} = \mathrm{G}'/\mathrm{L}$ *soit représentable, auquel cas* A *est un préschéma en groupes plat tel que* $(\mathrm{A}_t)^0_{\text{réd}}$ *soit une variété abélienne. La condition* « AT » *signifie alors que* A_s *a un rang réductif nul, donc que* $(\mathrm{A}_s)^0_{\text{réd}}$ *est extension d'une variété abélienne par un groupe unipotent.*)

De même, supposant de plus G à fibres connexes, nous dirons que

G satisfait à la propriété ATC

si pour tout $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}$, l'adhérence schématique Z du centre Z_t de G_t satisfait à AT.

Ces définitions techniques sont justifiées par la proposition suivante :

Proposition 8.5. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini. Alors :*

a) *Pour que le foncteur* $\mathscr{T}$ *des sous-tores de* G *« commute aux limites adiques d'anneaux locaux artiniens »* (cf. 8.1)*, il faut et il suffit que* G *satisfasse à la propriété* AT (8.4).

b) *Si* G *est à fibres connexes, pour que le foncteur* $\mathscr{TC}$ *des* sous-tores centraux *de* G *commute aux limites adiques d'anneaux locaux artiniens, il faut et il suffit que* G *satisfasse à la propriété* ATC (8.4). **465**

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 8.6. — *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète, s le point fermé de* S, G *un* S*-préschéma en groupes plat et de type fini,* T_s *un sous-tore de* G_s*. Alors il existe un* S*-schéma* S'*, spectre d'un anneau de valuation discrète, fidèlement plat sur* S*, de point fermé* s'*, et un sous-schéma en groupes* C *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, plat sur S', commutatif, *à fibres connexes, tel que* $\mathrm{C}_{s'}$ *majore* $\mathrm{T}_s \times_s s'$.

Quitte à remplacer S par S', spectre d'un anneau de valuation discrète fidèlement plat sur S, on peut supposer que T_s est égal à $(\mathbb{G}_m)^r_s$ et que le degré de transcendance de $\kappa(s)$ sur le corps premier est $\geqslant r$ (EGA 0_{III} 10.3.1 et EGA II 7.1.9). Il existe alors un élément $\overline{x}$ de $\mathrm{T}_s(s)$ tel que tout sous-groupe algébrique de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ qui « contient » $\overline{x}$, majore $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ (cf. Exp. XIII preuve de 2.1 (ii) $\Rightarrow$ (vii)). Comme G est plat sur S, par $\overline{x}$ passe une quasi-section (EGA IV 14.5.8) et par suite, quitte à remplacer S par le spectre d'un anneau de valuation discrète fidèlement plat sur S, on peut supposer qu'il existe une section x de G au-dessus de S qui relève $\overline{x}$. Soit C_t le sous-groupe algébrique commutatif de G_t engendré par x_t (Exp. VI_{B} 7) et soit C l'adhérence schématique de C_t dans G. Il est clair que C_s contient $\overline{x}$, donc majore T_s, et par suite, la « *composante neutre* » de C sera un schéma en groupes plat et commutatif qui répondra à la question.

Démonstration de 8.5 a). **466**

Supposons que le foncteur $\mathscr{T}$ commute aux limites adiques d'anneaux artiniens et montrons que G satisfait à la propriété AT. Soit donc $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}$, et soit T_s un tore maximal de G'_s. Nous devons prouver que T_s est contenu dans L_s. La formation de L et de G' commute évidemment aux extensions fidèlement plates $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ d'anneaux de valuation discrète. Quitte à changer S', nous pouvons donc, d'après le lemme 8.6, supposer qu'il existe un sous-schéma en groupes C de $\mathrm{G}'_{\mathrm{S}'}$, plat et commutatif, tel que C_s majore T_s. Mais alors T_s est un sous-tore *central* de C_s et par suite se relève infinitésimalement en un sous-tore central (cor. 2.3). Vu l'hypothèse faite sur G, T_s se relève en un sous-tore T de G. Évidemment T_t est contenu dans la composante linéaire L_t de G_t, donc T est contenu dans L.

Supposons maintenant que G satisfasse à la propriété AT et montrons que la condition 8.1 iii) bis est vérifiée. Soit donc S le spectre d'un anneau de valuation discrète A, complet, à corps résiduel algébriquement clos, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n)$, u_n, $n \in \mathbb{N}$, un système cohérent de morphismes de groupes $u_n : (\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})_n \to \mathrm{G}_n = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$. Soit q un nombre premier inversible sur S. L'entier ℓ parcourant les puissances de q, il existe un unique S-morphisme de groupes :

$$ {}_\ell u : {}_\ell\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G} $$

qui relève $u_n|_{\ell(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})_n}$ pour tout n (prop. 1.6 a)). Par suite, s'il existe un S-morphisme de groupes $u : \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$, qui relève u_n pour tout n, sa restriction à ${}_\ell\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est uniquement déterminée. Compte tenu du théorème de densité (Exp. IX 4.8 (a)) ceci prouve **467** l'unicité de u et le fait que pour prouver l'existence de u, nous pouvons nous permettre une extension fidèlement plate de la base. Or $(\mathrm{G}_{\bar{t}})^0_{\text{réd}}$ possède une décomposition de Chevalley et celle-ci est déjà définie sur une extension finie L du corps des fractions K de A. Quitte à remplacer S par le normalisé de S dans L, nous pouvons donc supposer que $\mathrm{S} \in \mathscr{S}$. Le morphisme ${}_\ell u_t$ se factorise à travers $(\mathrm{G}_t)_{\text{réd}}$, donc ${}_\ell u$ se factorise à travers l'adhérence schématique G'' de $(\mathrm{G}_t)_{\text{réd}}$ dans G'. Toujours grâce au théorème de densité, on en déduit que u_n se factorise à travers G''_n pour tout n. Comme G possède la propriété AT, tout sous-tore de G'_s, et a fortiori de G''_s, est contenu dans L_s, donc u_s se factorise à travers L_s. Je dis que pour tout n, u_n se factorise à travers L_n. En effet, comme L_t est invariant dans $(\mathrm{G}'')_t$, L est invariant dans G'', d'autre part L est plat sur S, donc pour tout entier n, le quotient $\mathrm{H}_n = \mathrm{G}''_n/\mathrm{L}_n$ est représentable (Exp. VI_{A} § 4). L'image de $(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})_n$ dans H_n, est un sous-tore de H_n (Exp. IX 6.8), dont la fibre fermée est nulle, donc cette image est nulle et par suite u_n se factorise à travers L_n. Mais comme L_t est affine, on en déduit que la famille u_n est admissible (prop. 4.3), ce qui achève la démonstration.

La démonstration de 8.5 b) est tout-à-fait analogue à celle de 8.5 a), compte tenu de 8.2 et de Exp. IX 5.6 a).

Proposition 8.7. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini. Alors :*

468 i) *Si* G *est à fibres connexes et satisfait à* AT*, il satisfait à* ATC.

ii) *Si* G *satisfait à* AT*, tout sous-préschéma en groupes de* G *satisfait à* AT.

iii) *Si* G *est plat sur* S *et si le rang abélien des fibres de* G *est une fonction localement constante sur* S*, alors* G *satisfait à* AT.

i) résulte immédiatement de 8.5 et de Exp. IX 5.6 a).

ii) Soit H un sous-préschéma en groupes de G. Pour prouver que H satisfait à la propriété AT, nous pouvons supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet et nous devons montrer que toute famille cohérente de S_n-morphismes de groupes

$$u_n : (\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})_n \longrightarrow \mathrm{H}_n$$

est admissible (8.5 et 8.1 iii bis)). Or par hypothèse, G satisfait à la propriété AT, donc il existe un S-morphisme de groupes

$$u : (\mathbb{G}_m)_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui relève u_n pour tout n. Procédant comme dans la démonstration de 8.5, on voit que $u|_{{}_\ell\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}}$ (où ℓ parcourt les puissances d'un nombre premier q inversible sur S) se factorise à travers H. Par densité, on en déduit que sur la fibre générique, u_t se factorise à travers H_t. Comme $(\mathbb{G}_m)_{\mathrm{S}}$ est réduit, il en résulte bien que u se factorise à travers H.

469 iii) Soit $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}$ (notations de 8.4). Le groupe L est plat sur S, sa fibre générique L_t est affine ; dans ces conditions, on peut montrer que L_s est nécessairement affine

(XVII App. III, 2). Comme G et L sont plats, on a $G = G'$ et la dimension des fibres de G et L est constante sur S (Exp. VI_B 4) de sorte que l'on a les inégalités :

$$\text{rg abélien } G_s \leqslant \dim G_s - \dim L_s = \dim G_t - \dim L_t = \text{rg abélien } G_t.$$

L'hypothèse entraîne que ces inégalités sont des égalités. Il en résulte que $(G_s/L_s)^0_{\text{réd}}$ est une variété abélienne, donc a un rang réductif nul, et par suite L_s a même rang réductif que G_s.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver les théorèmes principaux de ce paragraphe :

Théorème 8.8. — *Soit* G *un préschéma en groupes de type fini sur un préschéma* S *localement noethérien. Supposons* G plat *sur* S *et à fibres connexes. Alors :*

a) *Pour que le foncteur* $\mathscr{TC}$ *des sous-tores centraux de* G *soit représentable, il faut et il suffit que* G *possède la propriété* ATC (8.4). *De plus, dans ce cas,* $\mathscr{TC}$ *est représentable par un* S*-préschéma* étale et séparé *sur* S.

b) *Sous les conditions de* a), *pour tout* S*-tore, le foncteur* $\underline{\text{Hom cent}}_{\text{S-gr}}(T, G)$ *des homomorphismes centraux de* T *dans* G *est représentable par un* S*-préschéma étale et séparé sur* S.

Théorème 8.9. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien et* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini,* lisse *sur* S.

a) *Pour que le foncteur* $\mathscr{T}$ *des sous-tores de* G *soit représentable, il faut et il suffit* **470**
que G *possède la propriété* AT (8.4). *De plus dans ce cas,* $\mathscr{T}$ *est représentable par un* S*-préschéma lisse et séparé sur* S *; plus précisément, le morphisme structural* $\mathscr{T} \to S$, *admet une factorisation canonique :*

$$\mathscr{T} \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} S$$

où v *est un morphisme lisse et quasi-projectif* (*donc de type fini*) *et* u *est un morphisme étale séparé.*

b) *Sous les conditions de* a), *pour tout* S*-tore* T, *le foncteur* $\underline{\text{Hom}}_{\text{S-gr}}(T, G)$ *des homomorphismes de* T *dans* G *est représentable par un* S*-préschéma lisse et séparé sur* S.

Démonstration de 8.8 a).

Si le foncteur $\mathscr{TC}$ est représentable, il commute aux limites adiques d'anneaux artiniens, et par suite, (8.2 et 8.5 b)) G possède la propriété ATC. Pour établir la réciproque, nous utiliserons le résultat suivant, qui sera démontré dans EGA VI, et se trouve également dans l'exposé de Murre : Sém. Bourbaki, Mai 1965, N°294, Théorème 1, corollaire 2.

Lemme 8.10. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien, et* $\mathscr{F}$ *un foncteur contravariant défini sur* **Sch**/S, *à valeurs dans la catégorie des ensembles. Pour que* $\mathscr{F}$ *soit représentable par un* S*-préschéma étale et séparé,* (*il faut et*) *il suffit que* $\mathscr{F}$ *satisfasse aux cinq propriétés suivantes :*

i) $\mathscr{F}$ *est un faisceau pour la topologie* fpqc (Exp. IV).

ii) $\mathscr{F}$ *commute aux limites inductives d'anneaux* (Exp. XI 3.2). 471

iii) $\mathscr{F}$ *commute aux limites adiques d'anneaux locaux artiniens* (8.1 i)).

iv) $\mathscr{F}$ *satisfait au « critère valuatif de séparation »,* c.-à-d. *que pour tout* S*-schéma* S′ *qui est le spectre d'un anneau de valuation discrète, de point générique* t*, l'application canonique :*

$$\mathscr{F}(\mathrm{S}') \longrightarrow \mathscr{F}(t)$$

est injective.

v) $\mathscr{F}$ *est infinitésimalement étale* (Exp. XI 1.8).

Montrons que le foncteur $\mathscr{T}\mathscr{C}$ de 8.8 satisfait aux cinq conditions de 8.10.

i) Le foncteur $\mathscr{T}$ (resp. $\mathscr{T}\mathscr{C}$) est un faisceau pour la topologie fpqc dès que G est de présentation finie sur S. En effet, tout monomorphisme d'un tore dans G est alors une immersion (Exp. VIII 7.9), et la propriété résulte de la descente fpqc des sous-préschémas.

ii) Le corollaire 6.3 prouve que le foncteur $\mathscr{T}$ commute aux limites inductives d'anneaux si G est de présentation finie sur S ; on en déduit immédiatement qu'il en est de même de $\mathscr{T}\mathscr{C}$.

iii) En vertu de 8.5, la condition iii) équivaut précisément à la propriété ATC.

iv) résulte simplement du fait que si S est le spectre d'un anneau de valuation
472 discrète, deux sous-tores de G qui ont même fibre générique, coïncident et plus précisément coïncident avec la composante neutre de l'adhérence schématique dans G de leur fibre générique.

v) résulte de 2.3 puisque G est plat sur S.

Démonstration de 8.8 b).

Procédant comme dans Exp. XI 4.2, on voit qu'il suffit de prouver que le groupe produit $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ satisfait encore à la propriété ATC, ce qui est immédiat sur la définition.

Démonstration de 8.9 a).

Quitte à remplacer G par sa composante neutre (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10), on peut supposer G à fibres connexes. Si T est un sous-tore de G, son centralisateur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est alors représentable (Exp. XI 6.11) par un sous-préschéma en groupes de G, lisse sur S (Exp. XI 2.4), à fibres connexes (Exp. XII 6.6 b)), donc est un élément de $\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, où $\mathscr{C}\mathscr{T}$ est le foncteur défini dans 7.1 i). Il est clair que l'application :

$$\mathrm{T} \longmapsto \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$$

définit un S-morphisme :

$$u : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{C}\mathscr{T}$$

Comme $\mathscr{C}\mathscr{T}$ est représentable par un S-préschéma lisse et quasi-projectif sur S (7.1 i)), il nous suffit de prouver que le morphisme u est représentable par un morphisme séparé et étale.

473 Après changement de base convenable $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (avec $\mathrm{S}' = \mathscr{C}\mathscr{T}$, donc S′ localement noethérien), nous sommes ramenés au problème suivant : soient S un préschéma localement noethérien, G un S-préschéma en groupes, lisse et de type fini sur S, à fibres

connexes, H un sous-groupe de G, lisse sur S et à fibres connexes. Considérons le sous-foncteur X de $\mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ tel que, pour tout S-préschéma S′, X(S′) soit l'ensemble des sous-tores centraux T de $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$, tels que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) = \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$. Nous allons montrer que X est représentable par un S-préschéma étale et séparé sur S.

En effet, par hypothèse, G satisfait à la propriété AT, il en est donc de même de H (8.7 ii)), et comme H est à fibres connexes, H satisfait aussi à la propriété ATC (8.7 i)). D'autre part H est lisse sur S, donc plat. D'après 8.8 a) $\mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ est représentable par un S-préschéma étale et séparé sur S. Il nous suffit alors de montrer que le monomorphisme canonique : $\mathrm{X} \to \mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ est représentable par une immersion ouverte.

Posons $\mathrm{S}' = \mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ et soit K le centralisateur dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ du tore central « universel » de $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$. Le groupe K est un schéma en groupes lisse sur S′, à fibres connexes, qui majore $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$. Par définition, on a $\mathrm{X} = \prod_{\mathrm{K}/\mathrm{S}'} \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{K}$ qui est bien représentable par le sous-préschéma à la fois ouvert et fermé de S′, au-dessus duquel $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ et K ont même dimension relative.

On prouve 8.9 b) de façon analogue à 8.8 b).

Corollaire 8.11. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S *et de présentation finie. Alors, si le rang abélien des fibres de* G *est une fonction localement constante sur* S (*en particulier si les fibres de* G *sont affines*)*, le foncteur* **474**
des sous-tores de G *est représentable par un* S*-préschéma, lisse et séparé sur* S*, et il en est de même du foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G})$*, pour tout* S*-tore* T.

En effet, l'assertion est locale sur S, nous pouvons donc supposer S affine et le rang abélien des fibres de G constant. On peut alors trouver (Exp. VI_{B} § 10) un schéma affine *noethérien* S_0 et un S_0-préschéma en groupes G_0, lisse, de type fini sur S_0, tel que G soit S-isomorphe à $\mathrm{G}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{S}$. Par ailleurs, le rang abélien des fibres d'un S-préschéma en groupes de présentation finie sur S est une fonction ind-constructible (6.3 bis). Par un raisonnement standard (EGA IV 8), on conclut que dans le cas présent, on peut supposer le rang abélien des fibres de G_0 constant sur S_0. Mais alors G_0 possède la propriété AT (8.7 iii)), et par suite (8.10) le foncteur des sous-tores de G_0 est représentable par un S_0-préschéma lisse et séparé sur S_0, d'où la propriété annoncée pour G. Pour ce qui est du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G})$, on procède de manière analogue.

Généralisation de 8.9.

Le foncteur $\mathscr{T}$ des sous-tores d'un groupe lisse G n'étant par nécessairement représentable, nous allons énoncer des conditions suffisantes pour qu'un sous-foncteur de $\mathscr{T}$ soit représentable.

Proposition 8.12. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S*, à fibres connexes et* $\mathscr{F}$ *un sous-*S*-foncteur du foncteur* $\mathscr{T}$ *des* **475**
sous-tores de G*, vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $\mathscr{F}$ *est un faisceau pour la topologie* fpqc (Exp. IV).

ii) $\mathscr{F}$ *commute aux limites inductives d'anneaux* (Exp. XI 3.2).

iii) $\mathscr{F}$ *commute aux limites adiques d'anneaux locaux artiniens* (Exp. XI 3.3).

iv) $\mathscr{F}$ *est infinitésimalement lisse sur* S (Exp. XI 1.8).

v) $\mathscr{F}$ *est stable par automorphismes intérieurs de* G, c.-à-d. *pour tout* S*-préschéma* S′*, on a :*

$$\mathrm{T} \in \mathscr{F}(\mathrm{S}') \text{ et } g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \Rightarrow \mathrm{int}(g)\mathrm{T} \in \mathscr{F}(\mathrm{S}').$$

Alors $\mathscr{F}$ *est représentable par un* S*-préschéma, lisse et séparé sur* S.

Proposition 8.12. bis. — *Soient* S *et* G *comme ci-dessus,* T *un* S*-tore et* $\mathscr{F}$ *un sous-foncteur de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$*, vérifiant les propriétés suivantes :*

i), ii), iii), iv) *comme ci-dessus.*

v) $\mathscr{F}$ *est stable par automorphismes intérieurs de* G, c.-à-d. *pour tout* S*-préschéma* S′*, on a :*

$$u \in \mathscr{F}(\mathrm{S}') \textit{ et } g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \Rightarrow \mathrm{int}(g)u \in \mathscr{F}(\mathrm{S}').$$

Alors $\mathscr{F}$ *est représentable par un* S*-préschéma lisse et séparé sur* S.

Démonstration de 8.12. (La démonstration de 8.12 bis est tout-à-fait analogue et est laissée aux soins du lecteur.)

476 Soit $u : \mathscr{F} \to \mathscr{C}\mathscr{T}$ (7.1 i)) le S-morphisme qui à tout élément T de $\mathscr{F}(\mathrm{S}')$ associe l'élément $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T})$ de $\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S}')$. Comme $\mathscr{C}\mathscr{T}$ est représentable par un S-préschéma lisse et quasi-projectif (7.1 i)), nous sommes ramenés à prouver la représentabilité de u. Après changement de base $\mathscr{C}\mathscr{T} \to \mathrm{S}$, nous sommes ramenés au problème suivant : étant donnés S et G comme ci-dessus, H un sous-groupe lisse de G, à fibres connexes, nous devons représenter le foncteur $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ tel que $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}(\mathrm{S}')$ = ensemble des éléments $\mathrm{T} \in \mathscr{F}(\mathrm{S}')$, tels que :

$$\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}).$$

Nous allons montrer que $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ est étale et séparé sur S. Pour ce faire, il nous suffit de vérifier les cinq conditions de 8.10.

Les conditions i), ii) et iii) de 8.10 résultent facilement de 8.12 i), ii) et iii). On a déjà remarqué que $\mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ était un foncteur séparé et infinitésimalement étale, donc $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$, qui est un sous-foncteur de $\mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$, est séparé et infinitésimalement non ramifié (Exp. XI 1.8). Il nous suffit donc de montrer que $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ est infinitésimalement lisse (*loc. cit.*). Soit S le spectre d'un anneau local artinien, S_0 un sous-schéma de S défini par un idéal nilpotent, T_0 un élément de $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}(\mathrm{S}_0)$; prouvons que T_0 se relève en un élément T de $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}(\mathrm{S})$. Par hypothèse (8.12 iv)), T_0 se relève en un élément T′ de $\mathscr{F}(\mathrm{S})$. D'autre part, H étant lisse, T_0 se relève en un sous-tore T″ de H_{S} (Exp. IX 3.6 bis) qui est conjugué de T′ par un élément $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ (*loc. cit.*), donc $\mathrm{T}'' \in \mathscr{F}(\mathrm{S})$ (8.12 v)). Comme $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{T}'')$ est lisse sur S et coïncide avec $\mathrm{H}_{\mathrm{S}_0}$ au-dessus de S_0, T″ est dans le centre
477 de H_{S} (Exp. IX 5.6 a)) et son centralisateur dans G est égal à H_{S}, bref $\mathrm{T}'' \in \mathscr{F}_{\mathrm{H}}(\mathrm{S})$, et on prend $\mathrm{T} = \mathrm{T}''$.

Corollaire 8.13. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres connexes et soit* $\mathscr{T}\mathscr{D}$ *le sous-foncteur de* $\mathscr{T}$*, dont l'ensemble des points à valeurs dans un* S*-préschéma* S′ *est l'ensemble des sous-tores* T *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *tels que, pour tout point* s' *de* S′, $\mathrm{T}_{s'}$ *soit contenu dans le* sous-groupe dérivé

(Exp. $\mathrm{VI_B}$ 7) *de* $\mathrm{G}_{s'}$. *Alors* $\mathscr{T}\mathscr{D}$ *est représentable par un* S-*préschéma lisse et séparé sur* S.

Corollaire 8.13. bis. — *Soient* S *et* G *comme ci-dessus,* T *un* S-*tore et soit*

$$\underline{\mathrm{Hom\,der}}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$$

le sous-foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$ *dont l'ensemble des points à valeur dans* S' *est l'ensemble des* S'-*morphismes* $u : \mathrm{T}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *tels que, pour tout point* s' *de* S', $u_{s'}$ *se factorise à travers le* groupe dérivé *de* $\mathrm{G}_{s'}$. *Alors ce foncteur est représentable par un* S-*préschéma lisse et séparé sur* S.

Le corollaire 8.13 et le corollaire 8.13 bis se démontrent de façon analogue ; prouvons par exemple 8.13 bis. Par le procédé habituel, nous nous ramenons au cas où S est noethérien. Vérifions que les cinq conditions de 8.12 bis sont vérifiées :

Les conditions i) et iv) résultent immédiatement des propriétés correspondantes du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$. La condition v) est vérifiée car le groupe dérivé d'un groupe algébrique est invariant (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 7). Pour établir ii), nous sommes ramenés par une réduction standard (EGA IV 8) à prouver que si S est un schéma intègre noethérien de point générique η et si $u : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$ est un S-morphisme de groupes qui sur la fibre **478**
générique se factorise à travers le groupe dérivé de G_η, alors il existe un voisinage U de η tel que, pour tout point s de U, u_s se factorise à travers le groupe dérivé de G_s. Mais cela résulte immédiatement de Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.12. Pour établir iii), reprenons les notations de 4.3. Pour montrer qu'un élément $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\varprojlim_m \underline{\mathrm{Hom\,der}}_{\mathrm{S}_m\text{-gr}}(\mathrm{T}_m,\mathrm{G}_m)$ est « admissible », au sens de 4.3, et provient d'un élément de $\underline{\mathrm{Hom\,der}}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$, on se ramène immédiatement au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet (cf. 8.1). Soient t le point générique et s le point fermé de S, D l'adhérence schématique dans G du groupe dérivé D_t de G_t.

a) D_s contient le groupe dérivé de G_s. En effet, comme D_t est invariant dans G_t et G plat sur S, D est invariant dans G. De plus le morphisme :

$$\mathrm{G}\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}, \qquad (x,y)\mapsto xyx^{-1}y^{-1}$$

se factorise à travers D_t sur la fibre générique, donc il se factorise à travers D. Par suite le groupe algébrique $\mathrm{G}_s/\mathrm{D}_s$ est commutatif, d'où l'assertion a).

b) Si $u_m \in \underline{\mathrm{Hom\,der}}_{\mathrm{S}_m\text{-gr}}(\mathrm{T}_m,\mathrm{G}_m)$, u_m se factorise à travers D_m. En effet, par hypothèse, u_s se factorise à travers le groupe dérivé de G_s, donc a fortiori se factorise à travers D_s, d'après a). Comme D_m est plat sur S_m et invariant dans G_m, le groupe quotient $\mathrm{H}_m = \mathrm{G}_m/\mathrm{D}_m$ est représentable (Exp. $\mathrm{VI_A}$ § 4). Comme l'image de T_m dans H_m est un tore (Exp. IX 6.8) dont la fibre fermée est nulle, l'image de T_m est nulle ; c'est dire que u_m se factorise à travers D_m. **479**

c) La famille $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est « admissible » et se relève en un morphisme $\mathrm{T}\to\mathrm{G}$ qui appartient à $\underline{\mathrm{Hom\,der}}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$. Vu ce qui précède et 4.1 bis, il suffit de prouver que D_t est un groupe algébrique affine, ce qui résulte du lemme suivant :

Lemme 8.14. — *Soit* G *un groupe algébrique, lisse et connexe, défini sur un corps* k. *Alors le groupe dérivé* D *de* G *est affine.*

Comme la formation de D commute à l'extension du corps de base (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 7), on peut supposer k algébriquement clos. Mais alors G est extension d'une variété abélienne A par un groupe linéaire L. Comme A est commutatif, D est nécessairement contenu dans L donc est affine.

Tores maximaux.

Théorème 8.15. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien et* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse et de type fini sur* S*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Le* S*-foncteur* $\mathscr{T}\mathscr{M}$*, dont l'ensemble des points à valeurs dans un* S*-préschéma* S′ *est égal à l'ensemble des tores maximaux de* $\mathrm{G_{S'}}$ (Exp. XII 1.3)*, est représentable.*

ii) *Le foncteur* $\mathscr{T}\mathscr{M}$ *précédent est représentable par un* S*-préschéma lisse et quasi-projectif sur* S*, à fibres affines.*

iii) *Le groupe* G *possède localement pour la topologie étale un tore maximal.*

480 iv) *Le groupe* G *possède localement pour la topologie fidèlement plate un tore maximal.*

v) *Le groupe* G *possède la propriété* AT (8.4)*, et le rang réductif de ses fibres est une fonction localement constante sur* S.

Démonstration : ii) ⇒ i) est clair.

i) ⇒ iii). En effet, comme G est de présentation finie sur S, il résulte de 6.3 que $\mathscr{T}\mathscr{M}$ commute aux limites inductives d'anneaux, donc est localement de présentation finie s'il est représentable (EGA IV 8.14). Par ailleurs $\mathscr{T}\mathscr{M}$ est formellement lisse (Exp. XI 2.1 bis). Donc s'il est représentable, il est représentable par un préschéma lisse sur S et iii) résulte alors du lemme de Hensel (Exp. XI 1.10).

iii) ⇒ iv) est clair.

iv) ⇒ v). Soit s un point de S. Par hypothèse, il existe un S-préschéma S′, plat sur S, dont l'image contient s, tel que $\mathrm{G_{S'}}$ possède un tore maximal T′. Soit s' un point de S′ au-dessus de s. Le rang réductif des fibres de $\mathrm{G_{S'}}$ est donc constant sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{S'},s'}$ et par suite, le rang réductif des fibres de G est constant sur l'image de $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{S'},s'}$, qui est $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ (EGA IV 2.3.4 ii)). Or le rang réductif des fibres de G est une fonction localement constructible sur S (6.3 bis), donc ce rang est constant sur un voisinage de s (EGA IV 1.10.1).

Pour voir que G possède la propriété AT, considérons un S-schéma $\mathrm{S_1}$, spectre
481 d'un anneau de valuation discrète, le point fermé s_1 de $\mathrm{S_1}$ se projetant sur le point s précédent. Le préschéma $\mathrm{S'_1} = \mathrm{S_1} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'}$ est fidèlement plat sur $\mathrm{S_1}$ et $\mathrm{G_{S'_1}}$ possède un tore maximal. Soient A (resp. A′) l'anneau de $\mathrm{S_1}$ (resp. $\mathrm{S'_1}$). Considérant A′ comme limite inductive de ses sous-A-algèbres de type fini, il résulte de 6.3 qu'il existe un $\mathrm{S_1}$-schéma $\mathrm{S''_1}$ tel que $\mathrm{G_{S''_1}}$ possède un tore maximal et tel que le morphisme structural $\mathrm{S''_1} \to \mathrm{S_1}$ soit de type fini et surjectif. Utilisant maintenant EGA II 7.1.9, nous pouvons supposer que $\mathrm{S'_1}$ est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Mais alors il est clair que $\mathrm{G_{S'_1}}$, donc aussi $\mathrm{G_{S_1}}$, possède la propriété AT. Comme ceci est vrai pour tout S-préschéma $\mathrm{S_1}$, spectre d'un anneau de valuation discrète, G possède la propriété AT.

v) ⇒ i). En effet d'après 8.9, le foncteur $\mathscr{T}$ des sous-tores de G est représentable et il est clair que $\mathscr{T}\mathscr{M}$ est représentable par le sous-préschéma à la fois ouvert et fermé de $\mathscr{T}$, qui représente le sous-foncteur des tores de rang r, où r désigne le rang réductif de G (que l'on peut supposer constant).

iii) $\Rightarrow$ ii). En effet, si la condition iii) est réalisée, nous pouvons utiliser les résultats de Exp. XII 7.1. Le foncteur $\mathscr{T}\mathscr{M}$ est donc canoniquement isomorphe au foncteur des sous-groupes de Cartan de G et il suffit d'appliquer 7.3 i).

Remarque 8.16. — On peut montrer que le préschéma $\mathscr{T}\mathscr{M}$ des tores maximaux de G est *affine sur* S [(*)], ce qui généralise Exp. XII 5.4.

Corollaire 8.17. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*préschéma en groupes, lisse et de présentation finie sur* S. *Supposons que le rang abélien et le rang réductif des fibres de* G *soient des fonctions localement constantes sur* S, *alors* G *vérifie les propriétés* (*équivalentes*) i) *à* iv) *de* 8.15. **482**

Nous pouvons supposer que le rang abélien et le rang réductif des fibres de G sont constants. Procédant comme dans 8.11, et compte tenu de 6.3 bis, on se ramène au cas où S est noethérien. Mais alors G possède la propriété AT (8.7) et on conclut par 8.15 v).

Corollaire 8.18. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*préschéma en groupes, lisse sur* S. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le rang unipotent* ρ_u *et le rang abélien* ρ_{ab} (6.1 ter) *des fibres de* G *sont des fonctions localement constantes sur* S.

b) *Le rang unipotent* ρ_u *est localement constant et* G *possède localement pour la topologie* fpqc *des tores maximaux.*

c) *Le rang réductif* ρ_r (6.1 ter) *et le rang abélien* ρ_{ab} *des fibres de* G *sont des fonctions localement constantes sur* S.

Remarques 8.19. — Sous les hypothèses de 8.18, un raisonnement plus précis, utilisant la semi-continuité inférieure du rang abélien (annoncée dans Exp. X 8.7) permet de montrer que si deux des trois rangs ρ_u, ρ_r, ρ_{ab} sont localement constants, alors il en est de même du troisième.

Démonstration de 8.18. Quitte à remplacer G par sa composante neutre, nous pouvons supposer G de présentation finie sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.3.3). **483**

a) $\Rightarrow$ c). Soit s un point de S. Comme ρ_{ab} est localement constant, il résulte de 8.11 que, quitte à faire une extension étale, couvrant S, on peut supposer qu'il existe un sous-tore T de G, dont la fibre T_s est un tore maximal de G_s. Soit $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, qui est un sous-préschéma en groupes de G, lisse sur S, à fibres connexes. Pour tout point t de S, C_t contient évidemment un sous-groupe de Cartan C'_t de G_t. Quitte à

[(*)] cf. M. Raynaud, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes (thèse, à paraître)(N.D.E. : voir Lecture Notes Math. 119 (1970), Springer), notamment IX 2.9.

restreindre S, on peut supposer ρ_u, ρ_{ab} et la dimension relative de C sur S constants. On a alors les inégalités :

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{C}_s = \dim \mathrm{C}_t \geqslant \dim \mathrm{C}'_t &\geqslant \rho_u(t) + \rho_{\mathrm{ab}}(t) + \dim \mathrm{T}_t \\ &= \rho_u(s) + \rho_{\mathrm{ab}}(s) + \dim \mathrm{T}_s = \rho_\nu(s) = \dim \mathrm{C}_s.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{C}_t = \mathrm{C}'_t$, donc que T est un tore maximal de G et a fortiori, $\rho_r(t) = \rho_r(s)$.

c) $\Rightarrow$ b) d'après 8.17.

b) $\Rightarrow$ a). En effet, puisque G possède localement pour la topologie fpqc des tores maximaux, il possède localement pour la topologie fpqc des sous-groupes de Cartan, et par suite (Exp. XII 7.3) le rang nilpotent $\rho_\nu = \rho_u + \rho_r + \rho_{\mathrm{ab}}$ est localement constant. Comme ρ_r et ρ_{ab} sont localement constants, ρ_u est localement constant.

EXPOSÉ XVI

GROUPES DE RANG UNIPOTENT NUL

par M. Raynaud (*)

1. Un critère d'immersion 484

1.1. Exemples de monomorphismes de préschémas en groupes qui ne sont pas des immersions.— Nous allons construire un préschéma S, deux S-préschémas en groupes G et H, et un S-monomorphisme de groupes $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$, qui ne soit pas une immersion. Les groupes G et H seront de présentation finie sur S, plats sur S et G sera même lisse sur S (cf. Exp. VIII, paragraphe et note $(*)$ précédant 7.1, voir aussi XVII App. III, 4).

Prenons d'abord pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète A, *d'inégale caractéristique* et de caractéristique résiduelle égale à 2. Soit t le point générique de S et s le point fermé.

a) Prenons pour G le sous-groupe ouvert du groupe constant $\mathrm{G}' = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$ obtenu en enlevant le point de la fibre fermée $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_s$ distinct de l'élément neutre, et prenons pour H le groupe de type multiplicatif $(\boldsymbol{\mu}_2)_{\mathrm{S}}$ des racines $2^{\text{èmes}}$ de l'unité (Exp. I 4.4.4). Vu le choix de S, H_t est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_t$ tandis que H_s est un groupe radiciel. On a un morphisme évident $\mathrm{G}' \to \mathrm{H}$, défini par la section (-1) de H, d'où un morphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$, qui est un monomorphisme, mais qui n'est pas une immersion (sinon ce serait nécessairement un isomorphisme (cf. Exp. VIII 7). Ici, Exp. VIII 7.9 ne s'applique pas, car ${}_2\mathrm{G} = \mathrm{G}$ n'est pas fini sur S.

b) Désignons par K le S-préschéma en groupes, étale et non séparé, obtenu à partir du groupe unité en « dédoublant » l'unique point de la fibre fermée. Prenons pour H le groupe produit : $(\boldsymbol{\mu}_2)_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{K}$. Soit a (resp. b) l'unique section de $\boldsymbol{\mu}_2$ (resp. K), au-dessus de S, qui est distincte de la section unité et soit $h = (a, b)$ la section correspondante de H. La donnée de h définit un S-morphisme de groupes : 485

$$u : \mathrm{G} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{H}.$$

(0) version xy du 1/12/08

(*) Cf. note à la page 1 de Exp. XV.

Il est clair que u est un monomorphisme et ce n'est pas une immersion. Ici, Exp. VIII 7.9 ne s'applique pas, car ${}_2\mathrm{H} = \mathrm{H}$ n'est pas séparé sur S.

c) Plus intéressant est l'exemple suivant, où G est un groupe lisse, à *fibres connexes*, (et même $\mathrm{G} = (\mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$) (cf. Exp. VIII 7.10).

Prenons pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète A d'*égale caractéristique* 2 et soient π une uniformisante de A, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A.

Considérons le groupe additif $(\mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$, le groupe produit $(\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$ d'anneau $\mathrm{A}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ et soit G_1 le sous groupe fermé d'équation :

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - \pi\mathrm{Y} = 0. \tag{1}$$

Le groupe G_1 est lisse sur S, sa fibre générique est isomorphe à $(\mathbb{G}_a)_t$ et sa fibre fermée est isomorphe au produit de $(\mathbb{G}_a)_s$ par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_s$. On peut prendre pour facteur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_s$ le sous-groupe N_s de $(\mathrm{G}_1)_s$ d'équation :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = 0. \tag{2}$$

486 Soient N' et N'' deux sous-schémas en groupes de G_1, isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_\mathrm{S}$, dont les fibres fermées coïncident avec N_s et dont les fibres génériques sont distinctes. Les groupes N' et N'' sont donc définis par la donnée de deux sections de G_1 au-dessus de S de coordonnées (a', b') (resp. (a'', b'')) telles que :

$$\begin{cases} a'^2 + a' - \pi b' = a''^2 + a'' - \pi b'' = 0, \\ \quad a' \text{ et } a'' \quad \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}, \quad a' \neq a'' \\ \quad b' \text{ et } b'' \quad \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}. \end{cases} \tag{3}$$

(On peut prendre par exemple $(1, 0)$ et $(1 + \pi^2, \pi + \pi^3)$.)

Les groupes quotients $\mathrm{G}' = \mathrm{G}_1/\mathrm{N}'$ et $\mathrm{G}'' = \mathrm{G}_1/\mathrm{N}''$ sont représentables (Exp. V 4.1). Soit u le morphisme canonique :

$$u : \mathrm{G}_1 \longrightarrow \mathrm{G}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}'',$$

et soit H le sous-schéma en groupes de $\mathrm{G}' \times_\mathrm{S} \mathrm{G}''$ égal à l'adhérence schématique dans $\mathrm{G}' \times_\mathrm{S} \mathrm{G}''$ de $u_t(\mathrm{G}_1)_t$, de sorte que u se factorise à travers H. Le noyau de u est $\mathrm{K} = \mathrm{N}' \cap \mathrm{N}''$, dont la fibre générique est le groupe unité et dont la fibre fermée est égale à N_s ; en particulier, K n'est pas plat sur S. Sur la fibre générique, u_t est donc un isomorphisme de $(\mathrm{G}_1)_t$ sur H_t. Par contre, je dis que H_s n'est pas lisse. En effet, si H_s était lisse, comme u_s est un morphisme à noyau fini et que $(\mathrm{G}_1)_s$ et H_s ont même dimension (à savoir 1), u_s serait un morphisme plat ; comme G_1 et H sont plats, u serait un morphisme plat et par suite $\operatorname{Ker} u$ serait plat sur S, ce qui n'est pas. Il est clair que la restriction de u à la composante neutre G de G_1 est un monomorphisme (les fibres de $\mathrm{K} \cap \mathrm{G}$ sont des groupes unité, donc $\mathrm{K} \cap \mathrm{G}$ est le groupe unité (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.9)), mais ce n'est pas une immersion (sinon ce serait une immersion ouverte et H_s
487 serait lisse). Ici, Exp. VIII 7.9 ne s'applique pas, car ${}_2\mathrm{G} = \mathrm{G}$ n'est pas fini sur S.

Pour les amateurs d'équations, disons que dans l'exemple ci-dessus, on peut prendre pour H le sous-groupe fermé de $(\mathbb{G}_a \times_\mathrm{S} \mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$ qui a pour anneau : $\mathrm{A}[\mathrm{V}, \mathrm{W}]/(\mathrm{F})$ avec :

$$\mathrm{F} = (a''b' - b''a')(a''^2\mathrm{V} - a'^2\mathrm{W}) - (a''\mathrm{V} - a'\mathrm{W})^2$$

(où a', a'', b', b'' satisfont à (3)). Pour G, on prend le groupe $(\mathbb{G}_a)_{\mathrm{S}}$ d'anneau A[T], et pour morphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$, le S-morphisme défini par les applications :

$$\mathrm{V} \mapsto a'(a'\mathrm{T} + \pi\mathrm{T}^2), \qquad \mathrm{W} \mapsto a''(a''\mathrm{T} + \pi\mathrm{T}^2).$$

Remarque 1.2. — La construction précédente est inspirée de la méthode de Koizumi-Shimura[(1)]. Elle ne s'applique pas lorsque S est le spectre d'un anneau d'inégale caractéristique, les points d'ordre fini de G étant alors « trop rigides ».

1.3. Enoncé du critère d'immersion. —

Thèoréme 1.3. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S*, de type fini, possédant localement pour la topologie* fpqc *des sous-groupes de Cartan* (Exp. XV 6.1 et 7.3 (i))*,* H *un* S*-préschéma en groupes localement de type fini,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un* S*-monomorphisme de groupes. Alors :*

a) *Si* G *est à fibres connexes, pour que* u *soit une* immersion*,* (*il faut et*) *il suffit que pour tout* S*-schéma* S′ *qui est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel algébriquement clos, et pour tout sous-groupe de Cartan* C *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*,* **488**
la restriction de $u_{\mathrm{S}'}$ *à* C *soit une immersion.*

b) *Pour que* u *soit une* immersion (*resp. une* immersion fermée)*,* (*il faut et*) *il suffit que pour tout* S′ *comme ci-dessus et tout sous-groupe de Cartan* C *de la composante neutre* $(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'})^0$ *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*, la restriction de* $u_{\mathrm{S}'}$ *au normalisateur* (Exp. XI 6.11) N *de* C *dans* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *soit une immersion* (*resp. une immersion fermée*)*.*

Avant de démontrer 1.3, énonçons quelques applications :

Corollaire 1.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, de présentation finie sur* S*, de rang unipotent* (Exp. XV 6.1 ter) *nul et possédant, localement pour la topologie* fpqc*, des tores maximaux,* H *un* S*-préschéma en groupes,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un* S*-monomorphisme de groupes. On suppose de plus ou bien* H *de présentation finie sur* S *ou bien* S *localement noethérien et* H *localement de type fini. Alors :*

a) *Si* G *est à fibres connexes,* u *est une immersion.*

b) *Si* H *est séparé sur* S *et si pour tout* S′ *au-dessus de* S *et tout tore maximal* T *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*, le groupe de Weyl :*

$$\mathrm{W} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) / \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}^0_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T})$$

est représentable (*condition toujours réalisée si* G *est à fibres connexes* (Exp. XV 7.1 (iv)) *et est fini sur* S*, alors* u *est une immersion fermée.*

Corollaire 1.5. — *Soit* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, de* **489**
présentation finie sur S*, à fibres connexes,* H *un* S*-préschéma en groupes,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un* S*-monomorphisme de groupes. On suppose ou bien* H *de présentation finie sur* S*, ou bien* S *localement noethérien et* H *localement de type fini. Alors :*

[(1)] N.D.E. : S. Koizumi & G. Shimura, Specialization of abelian varieties, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo 9 (1959), 187-211.

a) *Si* G *est réductif,* c.-à-d. *est affine sur* S, *à fibres réductives* (cf. Exp. XIX)*, u est une immersion, et une immersion fermée si* H *est séparé.*

b) *Si* G *est à fibres affines, résolubles, connexes, de rang unipotent nul, u est une immersion, et une immersion fermée si* H *est séparé.*

Démonstration de 1.4 *à partir de* 1.3.

Réduction au cas S *noethérien.* Si S est localement noethérien, la réduction est immédiate, les propriétés à démontrer étant locales sur S. Dans le second cas G et H sont de présentation finie sur S. Quitte à restreindre S, nous pouvons supposer S affine. D'après Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10, il existe un schéma noethérien S_0, un S_0-préschéma en groupes G_0, lisse sur S_0, (à fibres connexes dans le cas a)), de type fini sur S_0, un S_0-préschéma en groupes H_0 de type fini (séparé dans le cas b)), un S_0-morphisme de groupes

$$u_0 : G_0 \longrightarrow H_0,$$

tels que G, H, u, s'obtiennent à partir de G_0, H_0, u_0 par une extension de la base : $S \to S_0$. Le fait que u soit un monomorphisme se traduit par $\mathrm{Ker}\, u =$ groupe unité ; on
490 peut donc supposer que u_0 est un monomorphisme. Comme G est de rang unipotent ρ_u nul et possède localement, pour la topologie fpqc, des tores maximaux, le rang abélien ρ_{ab} des fibres de G est localement constant (Exp. XV 8.18). Mais ρ_u et ρ_{ab} sont des fonctions localement constructibles (Exp. XV. 6.3 bis). Un raisonnement standard (cf. EGA IV 8.3.4) montre que l'on peut choisir S_0 et G_0 de façon que le rang unipotent (resp. le rang abélien) des fibres de G_0 soit nul (resp. localement constant). Mais alors, G_0 possède localement des tores maximaux pour la topologie fpqc (Exp. XV 8.18) et le foncteur $\mathscr{T}\mathscr{M}_{G_0}$ des tores maximaux de G_0 est représentable par un S_0-schéma X_0, de type fini sur S_0 (Exp. XV 8.15). Soient T_0 le tore maximal « universel » de $(G_0)_{X_0}$, X le S-préschéma $X_0 \times_{S_0} S$, $T = T_0 \times_{S_0} S$ le tore maximal universel pour G. Par hypothèse, dans le cas b), le groupe de Weyl relatif à T est représentable et fini sur X. Ces deux propriétés sont compatibles avec les limites projectives de préschémas (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.1 iii) et EGA IV 8.10.5). On peut donc choisir S_0 de façon que le groupe de Weyl de T_0 soit fini sur X_0. Il est clair dans ces conditions que pour prouver 1.4, on peut remplacer S, G, u, H, par S_0, G_0, u_0, H_0, donc supposer S noethérien.

Utilisons le critère valuatif fourni par 1.3. Nous sommes ramenés au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète et au cas où G^0 possède un sous-groupe de Cartan C.

Démonstration de 1.4 a). Nous devons montrer que la restriction de u à C est une immersion (1.3 a)), ce qui nous ramène au cas où G = C est à fibres connexes
491 nilpotentes. Des réductions standard (cf. Exp. VIII preuve de 7.1) nous ramènent au cas où H est plat sur S, u un isomorphisme sur la fibre générique et u un isomorphisme des espaces sous-jacents sur la fibre fermée. Le groupe H est alors à fibres connexes, donc séparé sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2). Admettons un instant le lemme :

Lemme 1.6. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S, *à fibres connexes, nilpotentes, de rang unipotent nul. Alors :*

i) G *est commutatif.*

ii) *Pour tout entier* $n > 0$, ${}_n\mathrm{G}$ *est un préschéma en groupes, plat, quasi-fini sur* S, *fini sur* S *si et seulement si le rang abélien, ou le rang réductif de* G, *sont localement constants sur* S.

iii) *Pour tout entier* $q > 0$, *inversible sur* S, *la famille des sous-groupes* ${}_{q^n}\mathrm{G}$ *est universellement schématiquement dense dans* G *relativement à* S (EGA IV 11.10.8).

Le lemme 1.6 s'applique au groupe G, et comme G possède localement des tores maximaux, le rang réductif des fibres de G est localement constant, donc (1.6 ii)), pour tout entier $n > 0$, ${}_n\mathrm{G}$ est fini sur S. Le fait que u soit une immersion résulte alors de Exp. VIII 7.9.

Démonstration de 1.6. Examinons d'abord le cas où S est le spectre d'un corps :

Lemme 1.7. — *Soient* k *un corps de caractéristique* p, G *un* k*-groupe algébrique, lisse, connexe, nilpotent, de rang unipotent nul. Alors* G *est un groupe commutatif, extension d'une variété abélienne* A *par un tore* T. *Pour tout entier* $n > 0$, ${}_n\mathrm{G}$ *est un groupe fini, étale si* $(n, p) = 1$, *défini par une* k*-algèbre de rang* $n^{\rho_r + 2\rho_{ab}}$. *Si* $(q, p) = 1$, *la famille des sous-groupes* ${}_{q^n}\mathrm{G}$ $(n \in \mathbb{N})$ *est schématiquement dense dans* G. **492**

Démonstration de 1.7. Soit Z le centre de G. Le groupe G/Z est affine (Exp. XII 6.1), de rang unipotent nul, lisse et connexe, donc est un tore (BIBLE 4 th. 4), mais alors G est commutatif (Exp. XII 6.4). Si T est l'unique tore maximal de G (Exp. XV 3.4), il résulte immédiatement du théorème de Chevalley (Sém. Bourbaki 1956/57, N°145) que G est extension d'une variété abélienne A par T. Pour tout entier $n > 0$, l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ est un épimorphisme dans T, on en déduit une suite exacte :

$$0 \longrightarrow {}_n\mathrm{T} \longrightarrow {}_n\mathrm{G} \longrightarrow {}_n\mathrm{A} \longrightarrow 0.$$

Un théorème classique de Weil (A. Weil : Variétés abéliennes et courbes algébriques, § IX th. 33 cor. 1) nous dit que ${}_n\mathrm{A}$ est un groupe fini défini par une k-algèbre de rang $n^{2\rho_{ab}}$. Comme ${}_n\mathrm{T}$ est un groupe fini de rang n^{ρ_r}, on en déduit la structure annoncée de ${}_n\mathrm{G}$.

Soit alors H le plus petit sous-schéma fermé de G qui majore ${}_{q^n}\mathrm{G}$ pour tout n. Il résulte de ce qui précède et de Exp. XV 4.6 que H est un sous-groupe lisse et connexe, donc du même type que G. L'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans H est un épimorphisme (car ${}_q\mathrm{H}$ est fini), de sorte que l'on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow {}_q\mathrm{H} \longrightarrow {}_q\mathrm{G} \longrightarrow {}_q(\mathrm{G}/\mathrm{H}) \longrightarrow 0.$$

Il en résulte que ${}_q(\mathrm{G}/\mathrm{H}) = 0$, donc $\mathrm{G}/\mathrm{H} = 0$. C'est dire que les sous-groupes ${}_{q^n}\mathrm{G}$ sont **493**
schématiquement denses dans G.

Suite de la démonstration de 1.6. i). Pour montrer que G est commutatif, on se ramène par le procédé habituel au cas où S est noethérien, puis au cas où S est le spectre d'un anneau local de point fermé s. Le centre de G est représentable par un sous-schéma en groupes fermé Z de G (Exp. XI 6.11). Pour montrer que Z = G, il suffit de montrer que Z = G après réduction par toute puissance de l'idéal maximal de l'anneau de S (car Z sera alors un sous-groupe ouvert de G, donc sera égal à G, puisque G est à fibres connexes). Ceci nous ramène au cas où S est local artinien.

Soit q un entier inversible sur S. Pour tout entier n, ${}_{q^n}\mathrm{G}_s$ est un sous-groupe de type multiplicatif de G_s étale et central (1.7). Comme G est lisse, ${}_{q^n}(\mathrm{G}_s)$ se relève en un S-sous-schéma en groupes étale et *central* M_n de G (Exp. XV 1.2). La famille des sous-groupes plats M_n, $n \in \mathbb{N}$, est alors schématiquement dense dans G (1.7 et EGA IV 11.10.9). Comme Z est fermé dans G et majore tous les M_n, on a bien $\mathrm{Z} = \mathrm{G}$.

1.6 ii). Pour voir que ${}_n\mathrm{G}$ est plat et quasi-fini sur S, il suffit de montrer que l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans G est un morphisme plat et quasi-fini. Comme G est plat sur S, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps (EGA IV 11.3.10),
494 et l'on a remarqué dans la démonstration de 1.7 que l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ était un épimorphisme. De plus, ${}_n\mathrm{G}$ est séparé sur S, car G est séparé sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2). Pour que ${}_n\mathrm{G}$ soit fini sur S, il faut et il suffit alors que les fibres de ${}_n\mathrm{G}$ soient les spectres d'algèbres finies, de rang localement constant (on le voit immédiatement on se ramenant au cas où S est le spectre d'un anneau local hensélien). Mais, d'après 1.7, cette condition équivaut à dire que le rang abélien, ou le rang réductif, des fibres de G est localement constant.

1.6 iii). Pour voir que la famille des sous-groupes ${}_{q^n}\mathrm{G}$ ($n \in \mathbb{N}$) est universellement schématiquement dense dans G, on se ramène encore au cas S noethérien. Compte tenu de 1.7 et 1.6 b), il suffit alors d'appliquer EGA IV 11.10.9.

Démonstration de 1.4 b). Nous nous sommes ramenés au cas où S était le spectre d'un anneau de valuation discrète et au cas où G^0 possédait un sous-groupe de Cartan C. Soit $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}$, où T est l'unique tore maximal de C (Exp. XII 7.1 a) et b)). Comme H est séparé sur S, il résulte de 1.6 ii) et de Exp. VIII 7.12 que la restriction de u à C est une immersion fermée. D'autre part, pour prouver que u est une immersion fermée, il suffit de montrer qu'il en est ainsi de $u|_{\mathrm{N}}$ (1.3 b)). Comme par hypothèse $\mathrm{W} = \mathrm{N}/\mathrm{C}$ est représentable par un schéma en groupes fini, ceci va résulter du lemme suivant, appliqué à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{W} \longrightarrow 1$$

(noter qu'une immersion propre est une immersion fermée).

495 ***Lemme 1.8***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*, extension d'un préschéma en groupes* G''*, propre et de présentation finie sur* S*, par un préschéma en groupes* G'*, de présentation finie et plat sur* S *:*

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'' \longrightarrow 1.$$

Soient d'autre part H *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S (*ou localement de présentation finie si* S *est localement noethérien*) *et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un* S*-morphisme de groupes. Alors si la restriction de* u *à* G' *est propre,* u *est propre.*

Démonstration de 1.8. Nous nous ramenons comme d'habitude au cas où S est noethérien (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10 et Exp. XV 6.2) et nous pouvons alors appliquer le critère valuatif de propreté (EGA II 7.3.8). Nous supposons donc que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A, de point fermé s et de point générique t. Soient $\overline{x} \in \mathrm{G}(t)$ et $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$, tels que $u_t(\overline{x}) = h(t)$. Nous devons montrer que $\overline{x}$ provient d'un unique élément x de G(S). Il suffit même de prouver l'existence et l'unicité de x après extension fidèlement plate de l'anneau de valuation discrète A. Or soit $\overline{y}$ la projection de $\overline{x}$ dans $G''(t)$. Comme G'' est propre sur S, $\overline{y}$ provient d'un unique élément y de $G''(S)$. Soit X l'image réciproque de y dans G. Le préschéma X est fidèlement plat sur S (car G' est fidèlement plat sur S ainsi que le morphisme $G \to G''$ (Exp. VI_B § 9))). Quitte à faire un changement d'anneau de valuation discrète, fidèlement plat, on peut supposer que X possède une section ℓ au-dessus de S (EGA IV 14.5.8). Remplaçant $\overline{x}$ par $\overline{x}\ell_t^{-1}$, on peut supposer que $\overline{x} \in G'(t)$. Mais alors l'existence et l'unicité de x résultent du fait que $u|_{G'}$ est propre.

Démonstration de 1.5. 496

a) Nous verrons dans Exp. XIX que si G est réductif, G possède localement pour la topologie fidèlement plate des tores maximaux, a un groupe de Weyl fini, et un rang unipotent nul. L'assertion a) en résulte, compte tenu de 1.4.

b) Si G est à fibres affines, de rang unipotent nul, G possède des tores maximaux localement pour la topologie fpqc (Exp. XV 8.18). Il suffit alors d'appliquer 1.4, compte tenu du fait que G étant à fibres connexes, lisses, affines, résolubles, son groupe de Weyl est le groupe unité (BIBLE 6 th. 1 cor. 3).

Démonstration de 1.3 a).

Comme le morphisme u est déjà un monomorphisme, pour voir que u est une immersion, il suffit de montrer que u est propre aux points de $u(G)$ (EGA IV 15.7.1) et pour cela, nous pouvons utiliser le critère valuatif de propreté locale (EGA IV 15.7.5). Nous sommes donc ramenés au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel algébriquement clos, de point fermé s et de point générique t. Comme G est plat sur S, des réductions standard (cf. Exp. VIII preuve de 7.1) permettent de nous ramener au cas où H est plat sur S, où u_t est un isomorphisme et où u_s est un isomorphisme sur les espaces sous-jacents. Dire que u est une immersion équivaut alors à dire que u est un isomorphisme.

Par hypothèse, le groupe G possède localement des sous-groupes de Cartan pour 497
la topologie fpqc, nous pouvons donc parler de l'ouvert U des points réguliers de G (Exp. XV 7.3 i) et ii)).

Lemme 1.9. — *Avec les hypothèses précédentes, pour que u soit une immersion, il suffit que $u|_U$ soit une immersion.*

En effet, dire que $u|_U$ est une immersion signifie qu'il existe un ouvert V de H et un fermé F de V tels que $u|_U$ se factorise à travers F et induise un isomorphisme de U sur F. Comme H_t, donc aussi V_t, est irréductible, on a nécessairement $V_t = F_t$. Mais alors F_t majore l'adhérence schématique de V_t dans V, qui est égale à V puisque H est plat sur S. Bref, on a $V = F$. Il en résulte que $u|_U$ est une *immersion ouverte*, donc u est une immersion ouverte (VI_B 2.6).

Il nous reste donc à montrer que $u|_U$ est une immersion, et pour cela appliquons le critère valuatif de propreté locale. Quitte à remplacer S par le spectre d'un anneau de valuation discrète, fidèlement plat sur S, nous devons montrer que si h est une section de H au-dessus de S, dont *l'image* $h(S)$ *est contenue dans* $u(U)$, alors h est l'image d'une section g de U au-dessus de S. Il suffit de montrer que h est contenu dans l'image d'un sous-groupe de Cartan C de G. En effet, par hypothèse, $u|_C$ est une immersion, donc h est l'image d'une section g de C, qui est nécessairement une section de U.

498 Soit $a \in \mathrm{U}(s)$ (resp. $b \in \mathrm{U}(t)$) tel que $u_s(a) = h(s)$ (resp. $u_t(b) = h(t)$). Comme u_t est un isomorphisme, $h(t)$ est un point régulier de H_t, donc est contenu dans un unique sous-groupe de Cartan D_t de H_t (Exp. XIII 3.2). Soit D l'adhérence schématique de D_t dans H.

Lemme 1.10. — i) D_s *est un groupe algébrique nilpotent* (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 8).
ii) $\dim \mathrm{D}_s = \nu =$ *rang nilpotent de* $\mathrm{G} =$ *rang nilpotent de* $(\mathrm{H}_s)_{\mathrm{réd}}$.
iii) $h(s) \in \mathrm{D}_s(\kappa(s))$.

i) Comme H est séparé (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2), il en est de même de D. Par ailleurs, D est plat sur S, et sa fibre générique est nilpotente. Le fait que D_s soit nilpotent résulte alors de Exp. $\mathrm{VI_B}$ 8.4.

ii) Comme $(\mathrm{H}_s)_{\mathrm{réd}} \simeq \mathrm{G}_s$, ces deux groupes ont même rang nilpotent. Le groupe G possédant, localement pour la topologie fpqc, des sous-groupes de Cartan, G_s et G_t ont même rang nilpotent ν. Enfin, le groupe D étant plat sur S, on a $\dim \mathrm{D}_s = \dim \mathrm{D}_t = \nu$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 4).

c) Comme h_t se factorise à travers D_t, h se factorise évidemment à travers D, d'où iii).

Ceci étant, le lemme suivant prouve que $(\mathrm{D}_s)_{\mathrm{réd}}$ est un sous-groupe de Cartan de $(\mathrm{H}_s)_{\mathrm{réd}} \cong \mathrm{G}_s$:

499 ***Lemme 1.11***. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse et connexe défini sur un corps k algébriquement clos,* D *un sous-groupe algébrique lisse, nilpotent, contenant un élément régulier a de* $\mathrm{G}(k)$*. Alors* D^0 *est contenu dans un sous-groupe de Cartan de* G. *Si de plus* $\dim \mathrm{D}$ *est égal au rang nilpotent de* G*, alors* D *est un sous-groupe de Cartan de* G (*donc est connexe*).

Soient Z le centre de G, $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ qui est affine (Exp. XII 6.1), a', D' les images de a, D dans G'. Il résulte immédiatement de la correspondance entre sous-groupes de Cartan de G et sous-groupes de Cartan de G' (Exp. XII 6.6 e)) que a' est un élément régulier de G' et qu'il suffit de prouver le lemme pour le couple D', G' ; ceci nous permet de supposer G affine.

Soit alors s la composante semi-simple de a, qui appartient à $\mathrm{D}(k)$ (BIBLE 4 th. 3) et est régulière (BIBLE 7 th. 2 cor. 1). D'après BIBLE 6 th. 2, s centralise D^0, donc D^0 est contenu dans le centralisateur connexe de s, qui est un sous-groupe de Cartan de G (BIBLE 7 th. 2). Si maintenant $\dim \mathrm{D} =$ rang nilpotent de G, D^0 est donc un sous-groupe de Cartan de G, égal à $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, où T est l'unique tore maximal de D^0 (Exp. XII 6.6). Mais D est nilpotent, donc centralise T (BIBLE 6 th. 2), donc $\mathrm{D} = \mathrm{D}^0$.

Travaillons maintenant avec le groupe G. Le groupe $\mathrm{C}_t = u_t^{-1}(\mathrm{D}_t)$ est l'unique sous-groupe de Cartan de G_t qui contient b. Soit C l'adhérence schématique de C_t dans G.

500 Par fonctorialité de l'adhérence schématique, $u|_{\mathrm{C}}$ se factorise à travers D, donc $u_s(\mathrm{C}_s) \subset \mathrm{D}_s$. Comme u_s est un isomorphisme de G_s sur $(\mathrm{H}_s)_{\mathrm{réd}}$, que $\dim \mathrm{C}_s =$

$\dim \mathrm{C}_t = \nu = \dim \mathrm{D}_s$ (1.10), et que D_s est connexe (1.11), u_s fournit un isomorphisme de $(\mathrm{C}_s)_{\text{réd}}$ sur $(\mathrm{D}_s)_{\text{réd}}$, donc $(\mathrm{C}_s)_{\text{réd}}$ est un sous-groupe de Cartan de G_s. Le lemme suivant montre qu'en fait C est un sous-groupe de Cartan de G.

Lemme 1.12. — *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète,* G *un* S-*préschéma en groupes lisse, de type fini,* C *un sous-préschéma en groupes de* G*,* plat *sur* S*, tel que la fibre générique* C_t *soit un sous-groupe de Cartan de* G_t *et la fibre fermée géométrique réduite* $(\mathrm{C}_{\overline{s}})_{\text{réd}}$ *soit un sous-groupe de Cartan de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$*. Alors* C *est un sous-groupe de Cartan de* G.

Nous devons montrer que C est lisse sur S, et il suffit d'établir ce point après extension fidèlement plate de la base. Les hypothèses faites sur C entraînent que le rang nilpotent des fibres de G est constant et nous pouvons donc parler de l'ouvert U des points réguliers de G (Exp. XV 7.3). Comme $(\mathrm{C}_{\overline{s}})_{\text{red}}$ est un sous-groupe de Cartan de G_s, $\mathrm{C}_{\overline{s}}$ contient un point régulier $a_{\overline{s}}$ de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$. Mais C est plat sur S, donc (EGA IV 14.5.8), quitte à faire une extension fidèlement plate de la base, nous pouvons supposer que $a_{\overline{s}}$ est un élément de $\mathrm{G}(s)$ et se relève en une section a de C(S). Comme U est un ouvert et contient $a(s)$, U contient a. Soit C′ l'unique sous-groupe de Cartan de G qui contient a (Exp. XV 7.3). On a nécessairement $\mathrm{C}_t = \mathrm{C}'_t$ et par suite C′ et C **501**
coïncident avec la composante neutre de l'adhérence schématique de C_t dans G (noter que C′ et C sont plats sur S).

Fin de la démonstration de 1.3 a). Par hypothèse, la restriction de u au sous-groupe de Cartan C de G est une immersion. Il est clair que $h(\mathrm{S})$ est contenu dans $u(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$, donc h est l'image d'une section g de C(S). C.Q.F.D.

Démonstration de 1.3 b).

Nous allons encore utiliser le critère valuatif de propreté locale (EGA IV 15.5) dans le cas d'une immersion (resp. le critère valuatif de propreté (EGA II 7.3.6) dans le cas d'une immersion fermée). Ceci nous ramène au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel algébriquement clos. Soient s le point fermé et t le point générique de S. Remplaçant H par l'adhérence schématique dans H de $u_t(\mathrm{G}_t)$, nous pouvons supposer que H est plat sur S et que u_t est un isomorphisme.

Soit G^0 la composante connexe de G. D'après 1.2 a), $u|_{\mathrm{G}^0}$ est une immersion, notons H′ le sous-préschéma en groupes de H *image* de G^0. On a donc $\mathrm{H}'_s = (\mathrm{H}_s)^0_{\text{réd}}$.

Pour vérifier le critère valuatif, nous devons montrer que toute section h de H au-dessus de S, telle que $h(\mathrm{S})$ soit contenu dans $u(\mathrm{G})$ dans le cas d'une immersion (resp. que toute section h de H au-dessus de S, dans le cas d'une immersion fermée) est l'image d'une section g de G au-dessus de S.

Soit C un sous-groupe de Cartan de G, $\mathrm{D} = u(\mathrm{C})$ le sous-groupe de Cartan de H′ **502**
image de C. Le S-groupe $\mathrm{D}' = \mathrm{int}(h)\mathrm{D}$ est à fibres connexes, donc d'espace sous-jacent contenu dans celui de H′ ; d'autre part, étant lisse sur S, il est réduit, et par suite D′ est un sous-préschéma en groupes lisse de H′. Les fibres de D′ sont des sous-groupes de Cartan des fibres de H′, donc D′ est un sous-groupe de Cartan de H′, et $\mathrm{C}' = u^{-1}(\mathrm{D}')$ est un sous-groupe de Cartan de G. Mais $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{C}')$ est lisse et surjectif sur S (Exp. XII 7.1 b)). Comme S est hensélien à corps résiduel algébriquement clos, il existe $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. Quitte à remplacer h par $u(g)^{-1}h$, nous pouvons

supposer que $h(t)$ normalise D_t (et que $h(s)$ est l'image d'un élément du normalisateur de C_s dans G_s dans le cas d'une immersion). Soit $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C})$. Par hypothèse $u|_{\mathrm{N}}$ est une immersion (resp. une immersion fermée) donc h est bien l'image d'une section de N au-dessus de S, ce qui achève la démonstration.

2. Un théorème de représentabilité des quotients

503 « Rappelons » le résultat suivant :

Théorème 2.1. — *Soient* S *un préschéma,* X *et* Y *deux* S-*préschémas,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S-*morphisme. On suppose que l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :*

a) *Le morphisme f est localement de présentation finie.*

b) *Le préschéma* S *est localement noethérien et* X *est localement de type fini sur* S.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *Il existe un* S-*préschéma* X′ *et une factorisation de f :*

$$f : \mathrm{X} \xrightarrow{f'} \mathrm{X}' \xrightarrow{f''} \mathrm{Y},$$

où f' est un S-*morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie et f'' est un* monomorphisme.

ii) *La* (*première*) *projection :*

$$p_1 : \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$$

est un morphisme plat.

De plus, si les conditions précédentes sont réalisées, (X', f') *est un quotient de* X *par la relation d'équivalence définie par f* (*pour la topologie* fpqc), *de sorte que la factorisation $f = f'' \circ f'$ de* i) *est unique à isomorphisme près.*

La démonstration de ce théorème délicat se trouvera dans EGA V ; on peut aussi consulter l'exposé de J.-P. Murre, Séminaire Bourbaki, Mai 1965, N°294 th. 2 cor. 2,
504 où est traité le cas Y localement noethérien, X de type fini sur Y. Nous allons voir que l'on peut se ramener à ce cas.

Faisons d'abord quelques remarques :

a) i) ⇒ ii) est trivial. En effet, la première projection :

$$p'_1 : \mathrm{X} \underset{\mathrm{X}'}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$$

se factorise à travers $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$:

$$p'_1 : \mathrm{X} \underset{\mathrm{X}'}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{u} \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{p_1} \mathrm{X}$$

Le morphisme u est un isomorphisme, puisque f'' est un monomorphisme, et p'_1 est plat, puisque f' est plat, donc p_1 est plat.

b) Les assertions de 2.1 sont locales sur Y (donc sont locales sur S) ; elles sont aussi locales sur X, comme il résulte facilement du fait qu'un morphisme plat et localement de présentation finie est ouvert (EGA IV 11.3.1).

c) Sous les hypothèses de 2.1 a), vu ce qui précède, nous sommes ramenés au cas où X et Y sont affines et f de présentation finie. Quitte à remplacer S par Y, on peut supposer X et Y de présentation finie sur S. On se ramène alors au cas S noethérien grâce à EGA IV 11.2.6.

d) Sous les hypothèses de 2.1 b), on peut supposer S, X, Y affines, S noethérien et X de type fini sur S. Considérons Y comme limite projective filtrante de schémas affines Y_i de type fini sur S. Les schémas $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}_i} \mathrm{X}$ forment une famille filtrante décroissante de sous-schémas fermés de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, dont la limite projective est $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est noethérien, on a $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}_i} \mathrm{X} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ pour i assez grand, de sorte que $f_i : \mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}_i$ satisfait aux hypothèses de 2.1 ii) s'il en est ainsi de f. Comme la **505** relation d'équivalence définie par f sur X coïncide avec celle définie par f_i, il est clair qu'il suffit de prouver ii) $\Rightarrow$ i) pour f_i, ce qui nous ramène au cas où Y est de type fini sur S.

Application aux préschémas en groupes

Théorème 2.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes localement de présentation finie sur* S*, qui opère sur un* S*-préschéma* X*. Soit* $\xi \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ *une section de* X *au-dessus de* S*, telle que le stabilisateur* H *de* ξ *dans* G *soit un sous-préschéma en groupes de* G*,* plat sur S*. Alors, si* X *est localement de type fini sur* S*, ou si* S *est localement noethérien, l'espace homogène quotient* G/H *est représentable par un* S*-préschéma, localement de présentation finie sur* S*, et le* S*-morphisme :*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{X}, \qquad g \mapsto g \cdot \xi.$$

se factorise en :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathrm{G/H} \arrow[r, "i"] & \mathrm{X}, \end{tikzcd}$$

où p *est la projection canonique, qui est un morphisme fidèlement plat localement de présentation finie, et* i *est un monomorphisme.* (Pour fixer les idées, nous avons supposé que G opérait à gauche sur X.)

Démonstration. Le morphisme f fait de G un X-préschéma. Par définition du stabili- **506** sateur de ξ, le morphisme :

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{G}, \qquad (g, h) \mapsto (g, gh)$$

est un isomorphisme. Comme H est plat sur S, $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ est plat sur G, donc la première projection $p_1 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est un morphisme plat. Par ailleurs, si X est localement de type fini sur S, f est localement de présentation finie (EGA IV 1.4.3 v)) et sinon, S est supposé localement noethérien. Il suffit alors d'appliquer 2.1 au morphisme f.

Il reste à voir que G/H est localement de présentation finie sur S, mais cela résulte immédiatement de Exp. V 9.1.

Corollaire 2.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* H *deux* S*-préschémas en groupes,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un* S*-homomorphisme. On suppose* G *localement de présentation finie sur* S *et que, ou bien* H *est localement de type fini sur* S*, ou bien* S *est localement noethérien. Alors, si* $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(u)$ *est* plat *sur* S*, le groupe quotient* G/K *est représentable par un* S*-préschéma en groupes localement de présentation finie sur* S*, et* u *se factorise en :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{H} \\ & \mathrm{G/K} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où p *est la projection canonique et* i *un monomorphisme.*

Démonstration : on applique 2.2 en prenant X = H et pour ξ la section unité de H.

Corollaire 2.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*,* H *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S*, à fibres connexes* (donc *de présentation finie* sur S, d'après $\mathrm{VI_B}$, 5.5)*,* $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de* S*-groupes. sorte que* H *est un sous-groupe de* G.

Supposons que $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ (*qui est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de* G*, de présentation finie sur* S (Exp. XI 6.11)) *soit* plat *sur* S. *Alors* G/N *est représentable par un* S*-préschéma, de présentation finie sur* S *et* quasi-projectif *sur* S.

Toutes les assertions à démontrer, sauf la dernière, sont locales sur S. Pour les établir, nous pouvons donc supposer S quasi-compact et la dimension relative de H sur S constante et égale à r. Procédons comme dans XV § 5. Soit, pour tout entier $n > 0$, $\mathrm{G}^{(n)}$ (resp. $\mathrm{H}^{(n)}$) le $n^{\text{ième}}$ invariant normal de la section unité de G (resp. de H) (EGA IV 16). Le faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathrm{H}^{(n)}$ est un quotient de $\mathrm{G}^{(n)}$ et, H étant lisse sur S de dimension r, $\mathrm{H}^{(n)}$ définit canoniquement un élément ξ_n de $\mathrm{X}_n = \mathrm{Grass}_{\varphi(n,r)}\,\mathrm{G}^{(n)}$ (EGA I 2^e^ éd. § 9) pour un entier $\varphi(n,r)$ convenable. D'autre part, G opère de façon naturelle sur $\mathrm{G}^{(n)}$ (donc aussi sur X_n) par l'intermédiaire de la représentation :

$$\mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{G}), \qquad g \mapsto \mathrm{int}(g).$$

Comme S est quasi-compact, il existe un entier m tel que pour $n \geqslant m$, on ait :

$$\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}^{(n)} \quad \text{(Exp. XI 6.11 b)).}$$

507 C'est dire que N est le stabilisateur de ξ_n pour n grand. La représentabilité de G/N résulte donc de 2.2. Le fait que G/N soit de présentation finie sur S est une conséquence de Exp. V 9.1. Il reste à voir que G/N est quasi-projectif sur S et pour cela nous allons exhiber un faisceau inversible sur G/N, S-ample, canonique. Considérons le foncteur $\mathscr{F} : (\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^{\circ} \to \mathbf{Ens}$, tel que pour tout S-préschéma T, on ait :

$\mathscr{F}(\mathrm{T})$ = ensemble des T-sous-groupes H de $\mathrm{G_T}$, représentables, lisses sur T, à fibres connexes.

Un tel groupe H est de présentation finie sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.5) et $\mathrm{H} \to \mathrm{G_T}$ est un morphisme quasi-affine (EGA IV 8.11.2). Par descente effective des morphismes quasi-affines (SGA1 VIII 7.9), on déduit que $\mathscr{F}$ est un faisceau pour la topologie fpqc. Comme G/N est le faisceau associé à un sous-faisceau de $\mathscr{F}$, on voit qu'il existe un monomorphisme canonique $\mathrm{G/N} \to \mathscr{F}$. Il existe donc un sous-groupe H' de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} (\mathrm{G/N})$, représentable, lisse sur G/N, à fibres connexes, « universel » pour le foncteur G/N. Je dis que le faisceau inversible $\mathscr{L} = (\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}'))^{-1}$ est S-ample. Sous cette forme, l'assertion devient locale sur S et la démonstration est analogue à celle donnée dans (Exp. XV 5.8).

Le corollaire suivant a été annoncé dans Exp. XIV 4.8 bis.

Corollaire 2.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres connexes,* P *un sous-groupe parabolique de* G (Exp. XIV 4.8 bis). *Alors* G/P *est représentable par un* S*-préschéma lisse et projectif sur* S. **508**

Il reste seulement à montrer (*loc. cit.*) que G/P est représentable par un S-préschéma quasi-projectif, de présentation finie, ce qui résulte de 2.4, compte tenu du fait que $\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$ (*loc. cit.*) donc est plat sur S.

3. Groupes à centre plat

509

Proposition 3.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres connexes. Supposons que le centre* Z *de* G (*qui est représentable d'après* Exp. XI 6.11.) *soit* plat *sur* S. *Pour tout entier* $n > 0$*, notons* $\mathrm{G}^{(n)}$ *le* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module localement libre égal au* $n^{\text{ième}}$ *invariant normal de* G *le long de la section unité, et soit* ρ_n *la « représentation adjointe » naturelle de* G *dans* $\mathrm{GL_S}(\mathrm{G}^{(n)})$. *Alors :*

a) *Le quotient* $\mathrm{G}' = \mathrm{G/Z}$ *est représentable par un* S*-préschéma en groupes, lisse, de présentation finie sur* S*, quasi-affine, à fibres affines et connexes.*

b) *La représentation* ρ_n *se factorise à travers* G' *:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[rr, "\rho_n"] \arrow[dr] & & \mathrm{GL_S}(\mathrm{G}^{(n)}) \\ & \mathrm{G/Z} \arrow[ur, "i_n"'] & \end{tikzcd}$$

Si S *est quasi-compact,* i_n *est un* monomorphisme *pour* n *assez grand.*

c) *Le foncteur* $\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$ *des sous-tores de* G' *est représentable par un* S*-préschéma, lisse sur* S*, et qui est une somme d'une famille de préschémas* affines *sur* S *si* S *est quasi-compact.*

Démonstration. Les assertions contenues dans a) sont locales sur S, ce qui nous permet de supposer S quasi-compact. D'après Exp. XI 6.11 b), Z est égal à $\mathrm{Ker}\,\rho_n$ pour n assez grand, donc ce dernier est plat sur S. Le fait que G/Z soit représentable et que **510**
i_n soit un monomorphisme résulte donc de 2.3. Comme G est lisse et de présentation

finie sur S, il en est de même de G′ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 9). Le groupe $\mathrm{GL_S}(\mathrm{G}^{(n)})$ est affine sur S, et un monomorphisme de présentation finie est quasi-affine (EGA IV 8.11.2), donc G′ est quasi-affine sur S et à fibres affines. Comme G′ est lisse sur S, le foncteur $\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$ est formellement lisse (Exp. XI 2.1 bis). Compte tenu de Exp. XI 4.6 et 4.3, les assertions contenues dans 3.1 c) vont donc résulter du lemme suivant :

Lemme 3.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* H *deux* S*-préschémas en groupes, de présentation finie sur* S*,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un* S*-monomorphisme de groupes,* $\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$ (resp. $\mathscr{T}_{\mathrm{H}}$) *les foncteurs des sous-tores de* G (*resp. de* H) (cf. Exp. XV § 8). *Alors, l'application :* $\mathrm{T} \mapsto u(\mathrm{T})$ *définit un monomorphisme* (XV 8.3 c))

$$\widetilde{u} : \mathscr{T}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{T}_{\mathrm{H}}$$

qui est représentable par une immersion fermée *de présentation finie.*

Par le procédé habituel, nous sommes ramenés au problème suivant : soient T un sous-tore de H, $\mathrm{T}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{H}$ son image réciproque dans G, $u_{\mathrm{T}} : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ le S-monomorphisme de groupes déduit de u. On doit montrer que le S-foncteur $\prod_{\mathrm{T/S}}(\mathrm{T}'/\mathrm{T})$ est représentable par un sous-préschéma fermé de S, de présentation finie. Mais T étant un tore, est lisse sur S, à fibres connexes, et il suffit d'appliquer Exp. XI 6.10.

511 ***Théorème 3.3***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres connexes,* Z *le centre de* G. *Supposons que* Z *soit plat sur* S *et que le rang unipotent* (Exp. XV 6.1 ter) *de* G *soit égal à celui de* Z. *Alors :*

a) *Le groupe* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ *est représentable, et si* S *est quasi-compact, le morphisme canonique* $i_n : \mathrm{G}' \to \mathrm{GL_S}(\mathrm{G}^{(n)})$ (cf. 3.1 b)) *est une* immersion *pour* n *grand.*

b) *Le groupe* G′ *est quasi-affine sur* S*, à fibres affines, le centre de* G′ *est le groupe unité, et* G′ *est de rang unipotent nul.*

c) *Le groupe* G′ *possède localement pour la topologie étale des tores maximaux, et ce sont aussi des sous-groupes de Cartan de* G′. *Le foncteur* $\mathscr{TM}_{\mathrm{G}'}$ *des tores maximaux de* G′ (Exp. XV § 8) *est représentable par un* S*-préschéma lisse et* affine *sur* S.

d) *Le groupe* G *possède localement pour la topologie étale des sous-groupes de Cartan, et le foncteur* $\mathscr{C}_{\mathrm{G}}$ *des sous-groupes de Cartan de* G *est représentable par un* S*-préschéma, lisse et* affine *sur* S.

Démonstration. D'après 3.1, le groupe G′ est représentable par un S-préschéma, lisse et quasi-affine sur S, à fibres affines. Vu la correspondance entre les sous-groupes de Cartan des fibres de G et des fibres de G′ (Exp. XII 6.6 e)), l'hypothèse faite sur le rang unipotent de Z entraîne que G′ a un rang unipotent nul. Utilisant maintenant
512 Exp. XV 8.18, on voit que G′ possède localement pour la topologie étale des tores maximaux. Le fait que i_n soit une immersion pour n grand résulte alors de 3.1 b) et 1.4 a). Ceci achève de prouver a).

Montrons maintenant c). Comme G′ est de rang unipotent nul, il est clair que tout tore maximal de G′ est aussi un sous-groupe de Cartan de G′. Le foncteur des tores maximaux de G′ est représentable par un sous-préschéma à la fois ouvert et fermé du foncteur des sous-tores de G′, par ailleurs, il est de type fini sur S (Exp. XV 8.15) ; il résulte alors de 3.1 c), que ce foncteur est représentable par un S-préschéma, lisse et *affine* sur S.

Comme G′ possède, localement pour la topologie étale, des sous-groupes de Cartan, il en est de même de G, et le foncteur des sous-groupes de Cartan de G est canoniquement isomorphe à celui de G′ (Exp. XV 7.3 iv)), donc c) ⇒ d).

Il nous reste à montrer b) et plus précisément, il reste à prouver que le centre Z′ de G′ est le groupe unité. Comme Z′ est représentable (Exp. XI 6.11) et de présentation finie sur S, il suffit de montrer que les fibres de Z′ sont réduites au groupe unité (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.9), ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Le centre Z′ est évidemment contenu dans tout sous-groupe de Cartan de G′, donc dans tout tore maximal de G′ d'après c), donc est de type multiplicatif. Par ailleurs, nous verrons dans Exp. XVII que si G est un groupe algébrique, connexe, de centre Z, le centre Z′ de G/Z est unipotent. Dans le cas présent, Z′ étant à la fois de type multiplicatif et unipotent, est réduit au groupe unité (cf. Exp. XVII). **513**

Exemples de groupes dont le centre est plat

Proposition 3.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*, lisse, à fibres connexes,* Z *le centre de* G*. Alors* Z *est* plat *sur* S *dans les deux cas suivants :*

a) *Le rang unipotent* ρ_u (Exp. XV 6.1 ter) *des fibres de* G *est nul.*

b) i) S *est réduit.*

ii) *La dimension des fibres de* Z *est une fonction localement constante sur* S.

iii) *Le rang unipotent de* G *est égal au rang unipotent de* Z*.*

Démonstration de 3.4 a). Nous allons prouver en même temps la

Proposition 3.5. — *Sous les hypothèses de* 3.4 a)*, supposons de plus que* G *possède un tore maximal* T *et soit* $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *le sous-groupe de Cartan de* G *associé à* T (Exp. XII 7.1)*. Alors :*

(i) $\mathrm{Z} \cap \mathrm{T}$ *est un sous-groupe de type multiplicatif de* G*.*

(ii) C *est commutatif et égal à* $\mathrm{T} \cdot \mathrm{Z}$*.*

(iii) *Si les quotients* $\mathrm{Z}/\mathrm{Z}\cap\mathrm{T}$ *et* C/T *sont représentables, ils sont représentables par des préschémas abéliens* (c.-à-d. *des* S*-préschémas en groupes, lisses sur* S*, dont les fibres sont des variétés abéliennes*) *et le monomorphisme canonique :* $\mathrm{Z}/\mathrm{Z}\cap\mathrm{T} \to \mathrm{C}/\mathrm{T}$ *est un isomorphisme.*

En utilisant les propriétés générales de passage à la limite démontrées dans Exp. **514**
$\mathrm{VI_B}$ § 10 et Exp. XV 6.2, 6.3, et 6.3 bis, on se ramène comme d'habitude au cas où S est noethérien (noter que les assertions contenues dans 3.4 et 3.5 sont locales sur S). Nous avons remarqué dans 3.1 que les hypothèses faites sur G entraînent que Z est représentable. Pour montrer que Z est plat sur S, on se ramène alors par EGA 0_{III} 10.2.6, au cas où S est local artinien. Mais alors, G étant lisse, G possède localement pour la topologie étale des tores maximaux (Exp. XV 8.17). Quitte à faire une extension plate finie de S (ce qui est loisible pour prouver que Z est plat), nous pouvons donc supposer que G possède un tore maximal T.

Montrons, de la même façon, que pour établir 3.5, nous pouvons nous ramener au cas S artinien.

i) Comme Z est fermé dans G (Exp. XI 6.11), $Z \cap T$ est un sous-schéma en groupes fermé de T. Il résulte alors de Exp. X 4.8 b), que $Z \cap T$ est de type multiplicatif si et seulement s'il est plat sur S. Comme plus haut, il suffit d'établir que $Z \cap T$ est plat lorsque S est artinien.

ii) Comme G est de rang unipotent nul, tout sous-groupe de Cartan C de G satisfait aux hypothèses du lemme 1.6, donc est commutatif. Le fait que $C = T \cdot Z$ va résulter de iii).

iii) Si C/T est représentable, C/T est lisse sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9) et ses fibres sont des variétés abéliennes (1.7) donc C/T est un préschéma abélien. Pour montrer que le monomorphisme canonique

$$Z/Z \cap T \xrightarrow{i} C/T$$

515 est un isomorphisme, il suffit de le vérifier lorsque S est local artinien. En effet on en déduira successivement que $Z/Z \cap T$ est plat sur S (EGA 0_{III} 10.2.6), puis que i est plat (EGA IV 11.3.10), puis que i est une immersion ouverte (EGA IV 17.9.1), puis que i est un isomorphisme (car C/T a des fibres connexes).

Nous supposons désormais que S est local artinien de point fermé s et que G possède un tore maximal T. Soit $C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$. Le groupe C est un sous-groupe de Cartan de G (Exp. XII 7.1) et majore Z.

Le groupe algébrique $M_s = Z_s \cap T_s$ est un sous-groupe de type multiplicatif de G_s qui est central. Comme T est lisse sur S, M_s se relève en un sous-schéma en groupes M de T, de type multiplicatif (Exp. IX 3.6 bis) et contenu dans le centre de G (Exp. IX 3.9), donc contenu dans $Z \cap T$. Comme S est artinien et M et T plats sur S, les groupes quotients $Z \cap T/M$, $Z' = Z/M$ et $A = C/T$ sont représentables (Exp. $\mathrm{VI_A}$ §§4 et 5). Par construction, $(Z \cap T/M)_s$ est le groupe unité, donc $Z \cap T = M$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.9), a fortiori, il est plat sur S, ce qui prouve 3.5. i).

Par passage au quotient, on a un monomorphisme canonique $i : Z' \to A$, qui est donc une immersion fermée (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 1.4.2). Nous avons déjà remarqué que A est un schéma abélien. Il reste à montrer que i est un isomorphisme. En effet, cela prouvera 3.5 iii) et entraînera que Z' est plat sur S, donc que Z est plat sur S (comme extension de Z' par le groupe plat M (Exp. $\mathrm{VI_B}$ §9)). Comme Z_s a même rang abélien que G_s
516 (Exp. XII 6.1), i_s est un épimorphisme, donc est un isomorphisme. Soit q un entier > 0, inversible sur S. D'après le théorème de densité de 1.6 iii), pour voir que $i(Z') = A$, il suffit de montrer que pour tout entier n égal à une puissance de q, $i(S')$ majore ${}_nA$. Or soit M_s^0 la composante neutre de M_s. Il est immédiat par dualité, que l'élévation à la puissance $q^{\text{ième}}$ dans M_s^0 est un épimorphisme. On en déduit immédiatement que si m_0 est l'exposant de q dans la décomposition en facteurs premiers de $\mathrm{card}(M_s/M_s^0)$, l'image de ${}_{nm_0}Z_s$ dans $A_s \cong Z_s/M_s$, majore ${}_nA_s$. Il existe donc un sous-groupe de type multiplicatif $M_s(n)$ de Z_s dont l'image dans A_s soit ${}_nA_s$. Comme plus haut, on voit que $M_s(n)$ se relève en un sous-groupe de G, *central* et de type multiplicatif $M(n)$. L'image de $M(n)$ dans A est un sous-groupe de type multiplicatif (Exp. IX

6.8), donc nécessairement égal à ${}_n\mathrm{A}$, puisqu'il en est ainsi sur la fibre réduite (Exp. IX 5.1 bis). Ceci achève la démonstration de 3.4 a) et de 3.5.

Démonstration de 3.4 b). L'assertion à démontrer est locale sur S, nous pouvons donc supposer S affine d'anneau A. Considérant A comme limite inductive de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini, on se ramène comme plus haut au cas où S est noethérien réduit.

Pour montrer que Z est plat, on dispose alors d'un critère valuatif de platitude (EGA IV 11.8.1) ce qui nous permet de nous ramener au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, complet, à corps résiduel algébriquement clos, de point générique t et de point fermé s. Soit Z' l'adhérence schématique dans Z de Z_t. Il nous faut montrer que $\mathrm{Z}' = \mathrm{Z}$, et il suffit même de montrer que $\mathrm{Z}_s = \mathrm{Z}'_s$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.6). 517
D'après (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 4), on a les inégalités :

$$\dim \mathrm{Z}_t = \dim \mathrm{Z}'_t = \dim \mathrm{Z}'_s \leqslant \dim \mathrm{Z}_s.$$

Mais par hypothèse, $\dim \mathrm{Z}_t = \dim \mathrm{Z}_s$, donc $\dim \mathrm{Z}'_s = \dim \mathrm{Z}_s$ et par suite Z'_s majore $(\mathrm{Z}_s)^0_{\text{réd}}$. Il en résulte que $\mathrm{G}'_s = \mathrm{G}_s/\mathrm{Z}'_s$ est affine (Exp. XII 6.1). Vu la correspondance entre sous-groupes de Cartan de G et de G' (Exp. XII 6.6 e)), l'hypothèse 3.4 iii) entraîne que le rang unipotent de G'_s est nul, et par suite ses sous-groupes de Cartan sont aussi ses tores maximaux. L'image Z''_s de Z_s dans G'_s est un sous-groupe algébrique central de G'_s, donc contenu dans tout sous-groupe de Cartan de G'_s, c'est-à-dire dans tout tore maximal ; Z''_s est donc un sous-groupe *de type multiplicatif* de G'_s. Dans ces conditions, nous montrerons dans (Exp. XVII § 7) qu'il existe un sous-groupe de type multiplicatif fini M_s de Z_s, dont l'image dans $\mathrm{Z}_s/\mathrm{Z}'_s$ soit Z''_s (nous avons utilisé ce fait dans la démonstration de 3.4 a) lorsque Z''_s est étale). Comme G est lisse sur S et S spectre d'un anneau local *complet*, M_s se relève en un S-sous-groupe de type multiplicatif M de G (Exp. IX 3.6 bis et Exp. XV 1.6 b)) qui est *central* (Exp. IX 5.6 a)). Donc M_t est contenu dans $\mathrm{Z}'_t = \mathrm{Z}_t$ et puisque M est plat, M est contenu dans Z'. Le groupe M_s est donc contenu dans Z'_s, mais cela implique que Z''_s est le groupe unité, c'est-à-dire que $\mathrm{Z}_s = \mathrm{Z}'_s$. Ceci achève la démonstration de 3.4 b).

Exemple de préschéma en groupes lisse à fibres connexes, dont le centre n'est pas plat

Soit S le spectre d'un anneau de valuation discrète A, π une uniformisante de A, 518
t le point générique de S, s le point fermé. Soit G le S-groupe lisse et affine sur S, d'anneau $\mathrm{B} = \mathrm{A}[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}, \mathrm{U}]/\mathrm{F}$ avec $\mathrm{F} = 1 - \mathrm{T} + \pi\mathrm{U}$, la loi de composition étant définie par :

$$(t, u), (t, u') \longmapsto (tt', \pi uu' + u + u').$$

La fibre générique G_t est donc isomorphe au groupe multiplicatif $(\mathbb{G}_m)_t$, tandis que la fibre fermée G_s est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{G}_a)_s$. La fonction T est inversible dans $\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_\mathrm{G})$ et définit un S-morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{G} \to (\mathbb{G}_m)_\mathrm{S}$ qui est un isomorphisme sur la fibre générique et le morphisme nul sur la fibre fermée. La donnée de φ permet de construire le groupe produit semi-direct $\mathrm{H} = \mathrm{G} \cdot (\mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$ (noter que $(\mathbb{G}_m)_\mathrm{S}$ opère sur $(\mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$). Le centre Z de H est le groupe unité sur la fibre générique et est égal à H_s sur la fibre fermée, donc n'est pas plat sur S.

4. Groupes à fibres affines, de rang unipotent nul

519 ***Théorème 4.1***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, de présentation finie, à fibres affines, connexes, de rang unipotent* (Exp XV 6.1 ter) *nul. Alors :*

a) *Le centre* Z *de* G *est un groupe de type multiplicatif* (*et par suite est un centre réductif de* G (Exp. XII 4.1)).

b) G *satisfait aux conditions* a) *à* d) *de* 3.3.

c) G *possède localement pour la topologie étale des tores maximaux, et ce sont aussi des sous-groupes de Cartan de* G*. Le foncteur* $\mathscr{T}\mathscr{M}_{\mathrm{G}}$ *des tores maximaux de* G *est représentable par un* S*-préschéma lisse et* affine *sur* S.

d) G *est quasi-affine sur* S*. De plus, si* T *est un tore maximal de* G*,* $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}$ *son normalisateur dans* G*,* $\mathrm{W} = \mathrm{N}/\mathrm{T}$ *le groupe de Weyl relatif à* T*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine sur* S.
(ii) $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ *est affine sur* S.
(iii) N *est affine sur* S.
(iv) W *est affine sur* S.

Ces conditions sont toujours réalisées, si S *est localement noethérien de dimension* $\leqslant 1$.

Démonstration. Comme G est à fibres affines (donc de rang abélien nul) et de rang unipotent nul, G possède localement pour la topologie étale des tores maximaux (Exp.
520 XV 8.18) et tout tore maximal de G est évidemment un sous-groupe de Cartan de G, ce qui prouve la première partie de c). Pour voir que Z est de type multiplicatif, on peut supposer, d'après ce qui précède, que G possède un tore maximal T. Comme T est aussi un sous-groupe de Cartan, T majore Z (car $\mathrm{T} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ d'après Exp. XII 7.1) et $\mathrm{Z} = \mathrm{Z} \cap \mathrm{T}$ est de type multiplicatif d'après 3.5 i). Ceci prouve a). L'assertion b) est claire, compte tenu de a). D'autre part le foncteur $\mathscr{T}\mathscr{M}_{\mathrm{G}}$ est isomorphe au foncteur des sous-groupes de Cartan de G (Exp. XII 7.1) donc est lisse et affine sur S (3.3 c)), ce qui achève de prouver c). Il reste à démontrer d).

Démonstration de d). Comme G′ est quasi-affine (3.5 b)) et Z de type multiplicatif, donc affine sur S, G est quasi-affine (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 9).

i) ⇔ ii). Si G est affine, G′ est affine d'après Exp. IX 2.3. Si G′ est affine, G est affine comme extension d'un groupe affine par un groupe affine (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 9).

i) ⇔ iii). Si G est affine, N est affine puisque fermé dans G (Exp. XI 6.11 a)). Par ailleurs G/N est isomorphe au foncteur $\mathscr{T}\mathscr{M}_{\mathrm{G}}$ (conjugaison des tores maximaux cf. Exp. XII 7.1 b)), donc est affine sur S d'après c). Donc si N est affine sur S, G est affine, comme « extension » d'un espace homogène affine par un groupe affine (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 9).

iii) ⇔ iv). Si N est affine, W = N/T est affine (Exp. IX 2.3) et réciproquement d'après Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 9.

521 Par ailleurs, N/T est représentable par un S-préschéma en groupes, étale, séparé

sur S, de type fini (Exp. XV 7.1 iv)) donc quasi-fini sur S. La dernière assertion de d) va donc résulter du lemme suivant, appliqué avec X = W et Y = S :

Lemme 4.2. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien, de dimension* 1*,* X *et* Y *deux* S*-préschémas localement de type fini sur* S*,* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S*-morphisme quasi-fini et séparé. Supposons que pour tout point* s *de* S*, le morphisme* $u_s : \mathrm{X}_s \to \mathrm{Y}_s$ *déduit de* u *par le changement de base* $\operatorname{Spec} \kappa(s) \to \mathrm{S}$*, soit* fini*. Alors* u *est un morphisme* affine*.*

L'assertion à démontrer est locale sur Y, ce qui nous permet de supposer Y (donc aussi X) de type fini sur S. Par EGA IV 8, on voit qu'il suffit de démontrer 4.2 lorsque S est le spectre d'un anneau local A. Par descente fpqc, on peut supposer A complet, puis A réduit (EGA II 1.6.4), puis A normal (théorème de Nagata (EGA 0_{IV} 22) et théorème de Chevalley (EGA II 6.7.1)). Si A est un corps, u est fini par hypothèse, donc affine. Sinon A est un anneau de valuation discrète, soient s le point fermé de S, t le point générique, π une uniformisante de A. Soit y un point de Y_s. Appliquant encore une fois EGA IV 8, on peut remplacer Y par le spectre Y' de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ et X par $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$; enfin on pout supposer $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ complet. Comme u est quasi-fini et séparé, d'après EGA II 6.2.6, X' est somme de deux schémas X_1 et X_2 avec X_1 *fini* sur Y' (donc affine) et X_2 tel que $u(\mathrm{X}_2)$ ne contienne pas le point fermé y de Y'. Je dis que dans ces conditions, X_2 ne rencontre pas la fibre fermée X'_s. En effet, par hypothèse, **522**
$\mathrm{X}'_s \to \mathrm{Y}'_s$ est fini, donc la restriction de ce morphisme au fermé $(\mathrm{X}_2)_s$ est fini et son image dans $(\mathrm{Y}')_s$ est un fermé. Comme cette image ne contient pas le point fermé du schéma local $(\mathrm{Y}')_s$, $(\mathrm{X}_2)_s$ est vide. Comme u_t est fini, la restriction à $(\mathrm{X}_2)_t = \mathrm{X}_2$ du morphisme $\mathrm{X}'_t \to \mathrm{Y}'_t$ est finie. Par ailleurs, on a $\mathrm{Y}'_t = \mathrm{Y}'_\pi$, donc l'immersion ouverte $\mathrm{Y}'_t \to \mathrm{Y}'$ est affine. Bref, le morphisme composé $\mathrm{X}_2 \to \mathrm{Y}'_t \to \mathrm{Y}'$ est affine, et il en résulte bien que le morphisme $\mathrm{X}' = \mathrm{X}_1 \coprod \mathrm{X}_2 \to \mathrm{Y}'$ est affine.

Corollaire 4.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres* affines, résolubles, connexes, de rang unipotent nul. *Alors* G *est* affine *sur* S*. Si de plus le centre de* G *est le groupe unité et si* S *est quasi-compact, le morphisme canonique* $i_n : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}^{(n)})$ (cf. 3.1 b)) *est une* immersion fermée *pour* n *assez grand.*

Pour prouver que G est affine sur S, on peut supposer que G possède un tore maximal T (4.1 c)). Le groupe G ayant ses fibres résolubles, le groupe de Weyl relatif à T est le groupe unité (BIBLE 6 th. 1 cor. 3) et la condition 4.1 d) iv) est satisfaite. Si le centre de G est le groupe unité, i_n est un monomorphisme pour n assez grand (3.1), donc est une immersion fermée (1.5 b)).

5. Application aux groupes réductifs et semi-simples

523

Définition 5.1. — Un S-préschéma en groupes G est dit *réductif* (resp. *semi-simple*) si G est lisse et affine sur S, à fibres réductives (resp. semi-simples).

5.1.1. Les groupes réductifs seront systématiquement étudiés à partir de Exp. XIX. Dans ce paragraphe, nous aurons besoin des propriétés suivantes, qui seront démontrées dans Exp. XIX (sans utiliser les développements du présent exposé).

a) Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes, lisse et *affine* sur S, à fibres connexes, s un point de S tel que G_s soit réductif (resp. semi-simple). Alors il existe un voisinage U de s tel que $G|_U$ soit réductif (resp. semi-simple).

b) Si G est réductif, G possède localement pour la topologie étale des tores maximaux, et si T est un tore maximal de G, le groupe de Weyl $W = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/T$ est fini sur S.

c) Un groupe réductif a un rang unipotent nul.

Ceci étant admis, nous nous proposons d'améliorer l'assertion a) ci-dessus.

Théorème 5.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres connexes, s un point de* S*. Alors :*

(i) *Si les fibres de* G *sont affines et si* G_s *est réductif, il existe un voisinage ouvert* U *de s tel que* $G|_U$ *soit réductif.*

524 (ii) *Si* G_s *est semi-simple, il existe un voisinage ouvert* U *de s tel que* $G|_U$ *soit semi-simple.*

Utilisant Exp. XV 6.2 i) et Exp. VI_B § 10, on se ramène au cas où S est noethérien.

Dans le cas ii), considérons le centre Z de G, qui est représentable (Exp. XI 6.11 a)). Comme G_s est semi-simple, il est bien connu que Z_s est fini. Par suite (Exp. VI_B § 4), il existe un voisinage U de s, tel que Z soit quasi-fini au-dessus de U. Pour tout point t de U, G_t est alors affine (Exp. XII 6.1). Quitte à restreindre S, nous pouvons donc supposer que les fibres de G sont affines, dans le cas ii) comme dans le cas i).

Pour prouver 5.2 il suffit, compte tenu de a), de prouver que G est affine sur S. Comme G est à fibres affines, nous savons que le foncteur des sous-tores de G est représentable par un S-préschéma lisse (Exp. XV 8.11 et 8.9). Quitte à faire une extension étale couvrant s, ce qui est loisible, nous pouvons donc supposer qu'il existe un sous-tore T de G, tel que T_s soit un tore maximal de G_s. Mais alors, $C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$ est un sous-groupe lisse de G, à fibres connexes, qui majore T, tel que $C_s = T_s$ (car C_s est un sous-groupe de Cartan de G_s et G_s est de rang unipotent nul d'après c)). Il en résulte que C = T, donc T est un sous-groupe de Cartan et un tore maximal de G ; a fortiori, le rang unipotent de G est nul et on peut appliquer 4.1.

D'après 4.1 d), il suffit de montrer que le groupe de Weyl W relatif à T est *affine* au-dessus d'un voisinage U de s. En fait nous allons voir que W est même *fini* au-
525 dessus d'un voisinage de s. Comme W est quasi-fini sur S (Exp. XV 7.1 iv)), dire que W est fini au-dessus d'un voisinage U de s équivaut à dire que le morphisme $W \to S$ est propre en s (EGA IV 15.7 et EGA III 4.4.2) et pour établir ce point, on dispose du critère valuatif de propreté locale (EGA IV 15.7) qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, de point fermé s. Mais alors, d'après la dernière assertion de 4.1 d), G est affine sur S et on peut appliquer la propriété a) rappelée ci-dessus, pour conclure que G est réductif (resp. semi-simple). Utilisant

maintenant la propriété b), on conclut que W est bien fini sur S, ce qui achève la démonstration de 5.2.

6. Applications : Extension de certaines propriétés de rigidité des tores aux groupes de rang unipotent nul

526

Proposition 6.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, de présentation finie, à fibres connexes affines, et dont le centre est de type multiplicatif* (*par exemple* G *de rang unipotent nul,* cf. 4.1 a)). *Alors tout sous-groupe fermé invariant* K *de* G*, de présentation finie sur* S*, quasi-fini sur* S*, est* fini *sur* S*.*

En effet, pour tout point géométrique $\overline{s}$ au-dessus de S, $(\mathrm{K}_{\overline{s}})_{\mathrm{réd}}$ est un sous-groupe étale fini de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$, invariant donc central (car $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est connexe). Par suite $\mathrm{K}' = \mathrm{Z} \cap \mathrm{K}$ (où Z désigne le centre de G) a même espace sous-jacent que K, et il suffit de montrer que K′ est fini sur S. Or K′ est un sous-groupe fermé, quasi-fini du groupe de type multiplicatif Z, donc est fini comme on le voit immédiatement (localement sur S, K′ sera majoré par ${}_n\mathrm{Z}$ pour un entier n convenable, et ${}_n\mathrm{Z}$ est fini sur S).

Corollaire 6.2. — *Soient* S *et* G *comme ci-dessus,* K *un sous-préschéma en groupes de* G*, de présentation finie sur* S*, invariant et fermé dans* G*, s un point de* S*. Si* K_s *est fini* (*resp. est le groupe unité*) *il existe un voisinage ouvert* U *de s, tel que* $\mathrm{K}|_{\mathrm{U}}$ *soit fini sur* S (*resp. soit le groupe unité*)*.*

Vu la semi-continuité supérieure de la dimension des fibres de K (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 4), on peut déjà supposer, quitte à limiter S, que K est quasi-fini sur S, donc fini (6.1). 527
Si de plus K_s est le groupe unité, on en déduit facilement par le lemme de Nakayama que K est le groupe unité au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_s$, donc au-dessus d'un voisinage de s.

Proposition 6.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres affines, connexes, de rang unipotent nul,* H *un* S*-préschéma en groupes, s un point de* S*, u* : G → H *un* S*-morphisme de groupes tel que* $\operatorname{Ker} u_s$ *soit central. On suppose de plus* H *de présentation finie sur* S *ou* S *localement noethérien et* G *localement de type fini sur* S*. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de s tel que si* $\mathrm{K} = \operatorname{Ker} u$, $\mathrm{K}|_{\mathrm{U}}$ *soit central, de type multiplicatif. De plus* $\mathrm{G}' = (\mathrm{G}|_{\mathrm{U}})/(\mathrm{K}|_{\mathrm{U}})$ *est représentable et le morphisme* $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ *déduit de u par passage au quotient est une immersion.*

Démonstration. Soient Z le centre de G, et $\mathrm{K}' = \mathrm{K} \cap \mathrm{Z}$.

a) K′ est un sous-groupe de type multiplicatif au-dessus d'un voisinage U de s. En effet, quitte à faire une extension étale au-dessus d'un voisinage U de s, ce qui est légitime, nous pouvons supposer que G possède un tore maximal T (4.1 c)). Mais alors $\mathrm{T} \cap \mathrm{K}$ est un groupe de type multiplicatif (Exp. XV 8.3) dont la fibre en s est centrale par hypothèse, donc $\mathrm{T} \cap \mathrm{K}$ est central au-dessus d'un voisinage de s (Exp. IX 5.6 a)) et par suite coïncide avec K′.

b) Montrons que $K' = K$ au-dessus d'un voisinage U de s. D'après a) on peut 528
déjà supposer que K' est de type multiplicatif, donc est plat sur S. Comme $K'_s = K_s$, l'immersion naturelle $K' \to K$ est alors ouverte au-dessus d'un voisinage U de s (Exp. VI_B 2.6). Si $t \in U$, l'image de K_t dans le groupe $G'_t = G_t/Z_t$ est donc un groupe étale fini invariant dans G'_t (car K_t est invariant dans G_t) donc central, donc réduit au groupe unité (3.3 b)). C'est dire que K_t est contenu dans Z_t donc est égal à K'_t, d'où $K = K'$ au-dessus de U.

c) La représentabilité de G' résulte alors de 2.3 ; le fait que u' soit une immersion est contenu dans 1.3 a), compte tenu de 4.1 c) appliqué à G'.

Proposition 6.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse, de présentation finie sur* S*, à fibres connexes, s un point de* S*, tel que* G_s *soit engendré par ses sous-tores* (Exp. XII 8.2) (*par exemple* G_s *affine de rang unipotent nul*), H *un* S*-préschéma en groupes, u et v* : $G \to H$ *deux* S*-homomorphismes, tels que* $u_s = v_s$ *et tels que u_s soit central. Supposons de plus que* H *soit de présentation finie sur* S*, ou bien que* S *est localement noethérien. Alors il existe un voisinage* U *de s tel que* $u|_U = v|_U$.

On se ramène comme d'habitude au cas où S est noethérien (pour étudier la condition : « G_s est engendré par ses sous-tores », on utilise Exp. VI_B 7.4). Comme G est à
529 fibres connexes, pour montrer que $u = v$ au-dessus d'un voisinage U de s, il suffit de montrer que $u = v$ après réduction par toute puissance de l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{S,s}$, ce qui nous ramène au cas où S est local artinien.

Mais alors, le foncteur des sous-tores maximaux de G est représentable par un S-schéma X, lisse de type fini sur S (Exp. XV 8.17). Soit T le sous-tore maximal de G_X, universel pour le foncteur X. L'hypothèse faite sur G_s signifie que le sous-groupe algébrique de G_s, engendré (Exp. VI_B § 7) par le $\kappa(s)$-morphisme $f : T_s \to G_s$ (composé de l'immersion $T_s \to G_{X_s}$ et de la projection canonique $G_{X_s} \to G_s$) est égal à G_s tout entier. Mais X_s est géométriquement connexe (car si $\overline{T}$ est un tore maximal de $G_{\overline{s}}$, N son normalisateur dans $G_{\overline{s}}$, $X_{\overline{s}}$ est isomorphe à $G_{\overline{s}}/N$), et l'image de T_s par f contient la section unité de G_s ; il résulte alors de Exp. VI_B 7.4, qu'il existe un entier $N > 0$ et un certain S-morphisme $f^N : T^N \to G$ (où $T^N = T \times_S \ldots \times_S T$ (N facteurs) et f^N ne dépend que de f et de la loi de multiplication de G) tels que $(f^N)_s$ soit *surjectif*.

Considérons le changement de base $X \to S$ et les restrictions de u_X et v_X au sous-tore T de G_X. Par hypothèse, on a $u_{X_s} = v_{X_s}$ et $u_{X_s} : T_{X_s} \to H_{X_s}$ est un homomorphisme central. Il résulte alors de Exp. IX 5.1 que l'on a $u_X|_T = v_X|_T$. En explicitant la définition de f^N et en tenant compte du fait que u et v sont des homomorphismes, on en déduit immédiatement que $uf^N = vf^N$. Mais le $\kappa(s)$-morphisme f^N_s est surjectif et G_s est lisse, donc réduit, par suite f^N_s est génériquement plat. Comme T est lisse sur S, donc plat, il existe un ouvert non vide V de T tel que $f^N|_V$ soit plat (EGA IV 11.3.10). L'image de V est un ouvert W de G (EGA IV 11.3.1) et $f^N : V \to W$ est
530 fidèlement plat, de présentation finie, donc couvrant pour la topologie fpqc. L'égalité $uf^N = vf^N$ implique alors $u|_W = v|_W$. Comme W est schématiquement dense dans

G (EGA IV 11.10.10) et H séparé sur S (Exp. $\mathrm{VI_A}$ 0.3) on en déduit immédiatement que $u = v$.

EXPOSÉ XVII

GROUPES ALGÉBRIQUES UNIPOTENTS. EXTENSIONS ENTRE GROUPES UNIPOTENTS ET GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF

par M. Raynaud (*)

0. Quelques notations

531

Dans le présent chapitre, nous aurons surtout à considérer des groupes algébriques définis sur un corps k. Le nombre $p \geqslant 0$ désignera toujours la caractéristique de k, $\mathbb{F}_p$ le corps premier à p éléments si $p > 0$, $\overline{k}$ une extension algébriquement close de k, q un nombre premier *distinct* de p.

Pour tout S-préschéma, $(\mathbb{G}_a)_{\mathrm{S}}$ (resp. $(\mathbb{G}_m)_{\mathrm{S}}$) désigne le groupe additif (resp. le groupe multiplicatif) au-dessus de S (cf. Exp. I 4.3). Pour tout entier $n > 0$, $(\boldsymbol{\mu}_n)_{\mathrm{S}}$ (resp. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$) désigne le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (Exp. I 4.4.4) (resp. le groupe constant au-dessus de S, associé au groupe abstrait $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (Exp. I 4.1)). Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$ est fini et étale sur S ; le groupe $(\boldsymbol{\mu}_n)_{\mathrm{S}}$ est plat et fini sur S, et est étale sur S si et seulement si n est inversible sur S (Exp. VIII 2.1).

Si S est un préschéma de caractéristique $p > 0$, pour tout entier $n > 0$, et tout S-préschéma en groupes G, nous notons ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G})$ le sous-S-préschéma en groupes radiciel de G égal au noyau du $n^{\text{ième}}$ itéré du morphisme de Frobenius relatif à G (Exp. $\mathrm{VII_A}$). En particulier, si $\mathrm{G} = (\mathbb{G}_a)_{\mathrm{S}}$ nous posons ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G}) = (\boldsymbol{\alpha}_{p^n})_{\mathrm{S}}$, qui est un S-groupe radiciel, plat et fini sur S, qui représente le foncteur suivant : pour tout S-préschéma S′, $(\boldsymbol{\alpha}_{p^n})_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}')$ est l'ensemble des $x' \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$ tels que $x'^{p^n} = 0$.

Le groupe $(\boldsymbol{\mu}_{p^n})_{\mathrm{S}}$, déjà défini, est canoniquement isomorphe à ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathbb{G}_m)_{\mathrm{S}}$. 532

Lorsqu'il n'y a pas ambiguité sur le schéma de base S, nous écrirons simplement $\mathbb{G}_a$, $\mathbb{G}_m$, $\boldsymbol{\alpha}_{p^n}$, etc. au lieu de $(\mathbb{G}_a)_{\mathrm{S}}$, $(\mathbb{G}_m)_{\mathrm{S}}$, $(\boldsymbol{\alpha}_{p^n})_{\mathrm{S}}$, etc.

Si G est un S-préschéma en groupes commutatifs, pour tout entier $n > 0$, ${}_n\mathrm{G}$ est le sous-préschéma en groupes de G égal au noyau de l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans G.

(0) version xy du 18/11/08

(*) cf. note à la page 1 de l'exposé XV.

Pour la commodité du lecteur, nous avons rassemblé en appendice quelques propriétés des groupes algébriques démontrées dans Exp. VI et VII, ainsi que des propriétés élémentaires de la cohomologie de Hochschild, qui nous seront utiles dans ce chapitre.

1. Définition des groupes algébriques unipotents

533 ***Définition 1.1***. — Un groupe algébrique G défini sur un corps k algébriquement clos est dit *unipotent* si G admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à des sous-groupes algébriques de $(\mathbb{G}_a)_k$.

Proposition 1.2. — *Soient k un corps algébriquement clos,* K *une extension algébriquement close de k,* G *un groupe algébrique défini sur k. Alors, pour que* G *soit unipotent, il faut et il suffit que* G_{K} *soit unipotent.*

La nécessité de la condition est claire puisqu'une suite de composition donne une suite de composition par extension de la base.

La démonstration de la suffisance est standard : K est limite inductive de ses sous-k-algèbres de type fini. D'après Exp. VI_{B} § 10, on peut trouver une sous-k-algèbre de type fini A de K, une suite de composition G_i de G_{S} ($\mathrm{S} = \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$) et des immersions $u_i : \mathrm{H}_i = \mathrm{G}_i/\mathrm{G}_{i+1} \to (\mathbb{G}_a)_{\mathrm{S}}$. Pour prouver que G est unipotent, il suffit alors de faire une k-extension de la base : $\mathrm{A} \to k$, ce qui est possible, car $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{A}, k)$ n'est pas vide, A étant une k-algèbre, non nulle, de type fini sur k algébriquement clos.

Définition 1.3. — Soit G un groupe algébrique défini sur un corps k. Nous dirons que G est *unipotent* s'il existe une extension algébriquement close $\overline{k}$ de k, telle que $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ soit unipotent (définition 1.1).

534 D'après 1.2, la propriété est indépendante de l'extension algébriquement close $\overline{k}$ choisie.

Définition 1.4. — Soient G un groupe algébrique défini sur un corps k et H un groupe algébrique défini sur une extension k' de k. Nous dirons que H est une *forme* de G sur k' si les groupes algébriques $\mathrm{G}_{k'}$ et $\mathrm{H}_{k'}$ deviennent isomorphes sur $\overline{k}'$ (comme plus haut on voit que la propriété ne dépend pas du choix de l'extension algébriquement close $\overline{k}'$ de k'). Nous dirons encore que H est un groupe G « tordu ».

Nous sommes alors en mesure de décrire les sous-groupes algébriques de $\mathbb{G}_a$.

Proposition 1.5. — *Soit k un corps caractéristique $p \geqslant 0$. Alors un sous-groupe algébrique* H *de* $(\mathbb{G}_a)_k$ *est de l'un des types suivants :*

(i) $\mathrm{H} = 0$.

(ii) $\mathrm{H} = \mathbb{G}_a$.

(iii) (*Si* $p > 0$) H *est extension d'un groupe constant tordu* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ *par un groupe radiciel* $\boldsymbol{\alpha}_{p^n}$ (r *et* n *entiers* $\geqslant 0$, $r + n > 0$). *Si de plus k est* parfait, *cette extension est nécessairement triviale.*

Démonstration. Si H est de dimension 1, il est clair que $\mathrm{H} = \mathbb{G}_a$. Sinon H est de dimension 0 et par suite est extension [1] d'un groupe étale H'' par sa composante neutre H' qui est un groupe radiciel. Pour décrire $\mathrm{H}''_{\overline{k}}$, il suffit de connaître le groupe 535
abstrait $\mathrm{H}''(\overline{k})$, isomorphe à $\mathrm{H}(\overline{k})$. Or ce dernier est un sous-groupe fini de $\mathbb{G}_a(\overline{k})$, donc est nul si $p = 0$ et est de la forme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ sinon, car annulé par p. Le groupe H' est fermé dans $\mathbb{G}_a$ et est défini par une seule équation (l'anneau $k[\mathrm{T}]$ de $\mathbb{G}_a$ est principal), qui sur $\overline{k}$ admet 0 pour seule racine, donc cette équation est de la forme $\mathrm{T}^n = 0$. La compatibilité avec la loi de groupe entraîne que $(\mathrm{T} + \mathrm{T}')^n$ appartient à l'idéal engendré par T^n et T'^n dans l'anneau $k[\mathrm{T}, \mathrm{T}']$ donc : si $p = 0$, on a $n = 1$ et H' le groupe unité ; si $p > 0$, on a $n = p^m$ et $\mathrm{H}' = \boldsymbol{\alpha}_{p^m}$.

La dernière assertion de 1.5 résulte plus généralement du lemme :

Lemme 1.6. — *Si k est un corps parfait, toute extension* H *d'un groupe algébrique étale* H'' *par un groupe radiciel* H' *est triviale. De plus il existe un unique relèvement de* H'' *dans* H*, à savoir* $\mathrm{H}_{\mathrm{réd}}$.

En effet, k étant parfait, le k-schéma réduit $\mathrm{H}_{\mathrm{réd}}$ est un sous-groupe algébrique de H (Exp. $\mathrm{VI_A}$ 0.2) géométriquement réduit, donc lisse sur k (Exp. $\mathrm{VI_A}$, 1.3.1), donc étale, H étant de dimension 0. Pour voir que la projection canonique $\mathrm{H}_{\mathrm{réd}} \to \mathrm{H}''$ est un isomorphisme, il suffit de le voir après extension du corps de base $k \to \overline{k}$, auquel cas il suffit de montrer que l'on a un isomorphisme sur les points à valeurs dans $\overline{k}$, ce qui est bien clair. La dernière assertion résulte du fait que tout relèvement de H'' dans H, étant étale sur k, est réduit, donc est nécessairement contenu dans $\mathrm{H}_{\mathrm{réd}}$. 536

Notons que $\boldsymbol{\alpha}_{p^n}$ est extension multiple de groupes isomorphes à $\boldsymbol{\alpha}_p$. On déduit alors de 1.5 le corollaire :

Corollaire 1.7. — *Pour qu'un groupe algébrique* G *défini sur un corps k algébriquement clos soit unipotent, il faut et il suffit qu'il possède une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à* $\mathbb{G}_a$ *si $p = 0$, et à l'un des groupes* $\mathbb{G}_a$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\boldsymbol{\alpha}_p$ *si* $p > 0$. (*Nous appellerons ces groupes,* les groupes unipotents élémentaires).

2. Premières propriétés des groupes unipotents 537

Proposition 2.1. — *Un groupe algébrique unipotent défini sur un corps k est* affine *sur k.*

Par descente (fpqc) des morphismes affines, il suffit de prouver 2.1 lorsque k est algébriquement clos. Dans ce cas, G est, par définition, extension multiple de groupes algébriques affines, donc est affine, d'après Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9.2 (viii) appliqué aux morphismes *affines.* [2]

Proposition 2.2. — i) *La propriété pour un groupe algébrique d'être unipotent est invariante par extension du corps de base.*

[1] N.D.E. : référence à $\mathrm{VII_A}$?
[2] N.D.E. : vérifier cette réf.

ii) *Tout sous-groupe algébrique d'un groupe unipotent est unipotent.*

iii) *Tout groupe algébrique quotient d'un groupe unipotent est unipotent.*

iv) *Toute extension d'un groupe algébrique unipotent par un groupe algébrique unipotent est itou.*

Démonstration. i) résulte immédiatement de 1.3 et 1.2. Pour établir les autres propriétés, nous pouvons supposer le corps k algébriquement clos. Alors iv) est évident sur la définition 1.3.

538 Soient donc G un groupe algébrique unipotent, G' un sous-groupe algébrique de G, G'' un groupe algébrique quotient de G, G_i $(i = 1, \ldots, n)$ une suite de composition de G telle que $H_i = G_i/G_{i+1}$ soit un groupe unipotent élémentaire (1.7).

Pour prouver ii), considérons la suite de composition de G' induite par celle de G : $G'_i = G_i \cap G'$. Le groupe G'_i/G'_{i+1} s'identifie à un sous-groupe algébrique de H_i, donc est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{G}_a$ et par suite G' est unipotent.

Pour prouver iii), considérons la suite de composition de G'' image de celle de G : G''_i = image de G_i dans G''. Le groupe G''_i/G''_{i+1} est alors un quotient de H_i et il suffit de prouver le lemme :

Lemme 2.3. — *Si* H *est groupe unipotent élémentaire* (1.7) *défini sur un corps k, tout groupe algébrique quotient* H'' *de* H *est nul ou est isomorphe à* H *sur k.*

Démonstration. Si $H = \mathbb{G}_a$ en caractéristique 0, ou si $H = \boldsymbol{\alpha}_p$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $(p > 0)$, il suffit de noter qu'il résulte de 1.5 que H ne possède pas de sous-groupes algébriques autres que 0 et H (remarquer qu'un sous-groupe algébrique non nul de $\boldsymbol{\alpha}_p$ est défini par une k-algèbre de rang sur k au moins égal à p (1.5 iii) donc est égal à $\boldsymbol{\alpha}_p$).

Soit maintenant $H = \mathbb{G}_a$ $(p > 0)$, de sorte que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \mathbb{G}_a \longrightarrow H'' \longrightarrow 0.$$

Si $N = \mathbb{G}_a$, alors $H'' = 0$. Sinon, procédant par récurrence sur la longueur d'une
539 suite de composition de N, on peut supposer que $N = \boldsymbol{\alpha}_p$, ou que N est une forme de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ (1.5).

a) Si $N \simeq \boldsymbol{\alpha}_p$, la démonstration de 1.5 iii) montre que N est nécessairement le noyau du morphisme de Frobenius F dans $\mathbb{G}_a$ et on conclut à l'aide de la suite exacte :

$$0 \to \boldsymbol{\alpha}_p \to \mathbb{G}_a \xrightarrow{F} \mathbb{G}_a \to 0$$

b) Si $N \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il est immédiat qu'il existe $a \in k^*$ tel que N soit le sous-schéma fermé de $\mathbb{G}_a = \operatorname{Spec} k[X]$, défini par l'équation $X^p - aX = 0$. On conclut alors à l'aide de la suite exacte :

$$0 \to N \to \mathbb{G}_a \xrightarrow{\mathfrak{P}} \mathbb{G}_a \to 0,$$

où $\mathscr{P}$ est le morphisme d'Artin-Schreier : $x \mapsto x^p - ax$.

c) Si N est une forme de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$, il existe une extension finie galoisienne k' de k qui trivialise N. D'après b) et une récurrence évidente sur r, $\mathbb{G}_a/N$ est une forme de $\mathbb{G}_a$ trivialisée par k'. Il suffit alors d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 2.3 bis. — *Soit k un corps,* G *un k-groupe algébrique qui est une forme de $\mathbb{G}_a$, trivialisée par une extension finie k',* séparable *de k. Alors* G *est isomorphe à $\mathbb{G}_a$.*

En effet, le groupe des k'-automorphismes du groupe algébrique $(\mathbb{G}_a)_{k'}$ est le groupe des homothéties non nulles $(k')^\times$ (*Bible*, Exp. 9, Lemme 1) et le groupe de cohomologie galoisienne $\mathrm{H}^1(k'/k, \mathbb{G}_m)$ est nul (on peut supposer que k' est une extension galoisienne de k), d'après le théorème 90 de Hilbert. Le lemme 2.3 bis résulte alors de la classification des k-formes d'un groupe algébrique (cf. J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Chap. III, 1.3).

Ceci achève la démonstration de 2.2. **540**

Proposition 2.4. — *Soient k un corps,* M *un k-groupe de type multiplicatif* (Exp. VIII) *et de type fini,* U *un k-groupe algébrique unipotent. Alors :*

i) $\underline{\mathrm{Hom}}_{k\text{-gr}}(\mathrm{M}, \mathrm{U}) = \underline{\mathbf{e}}$ (*a fortiori* $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathrm{M}, \mathrm{U}) = e$).

ii) $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathrm{U}, \mathrm{M}) = e$.

Pour démontrer i) nous devons établir que pour tout préschéma S au-dessus de k, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{M}_\mathrm{S}, \mathrm{U}_\mathrm{S}) = e$. Mais cela résulte du lemme suivant :

Lemme 2.5. — *Soient* S *un préschéma,* M *un* S*-groupe de type multiplicatif et de type fini sur* S*,* U *un* S*-préschéma en groupes, de présentation finie sur* S*, à fibres unipotentes, alors* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{M}, \mathrm{U}) = e$.

En effet, avec les hypothèses faites, pour qu'un S-morphisme de groupe $u : \mathrm{M} \to \mathrm{U}$ soit l'homomorphisme unité, il suffit que la restriction de u aux fibres de M au-dessus des points de S soit le morphisme nul (Exp. IX 5.2). Nous sommes donc ramenés au cas où S est le spectre d'un corps, que l'on peut supposer de plus algébriquement clos. Vu la définition 1.1, on peut se borner à $\mathrm{U} = \mathbb{G}_a$, auquel cas la propriété a déjà été démontrée (Exp. XII 4.4.1).

Prouvons maintenant 2.4 ii). Soit donc $u : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ un k-morphisme de groupes. L'image $u(\mathrm{U})$ est représentable par un sous-groupe algébrique U'' de M (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.4). [(3)] Le groupe U'' est unipotent comme quotient d'un groupe unipotent (2.2 iii)) et est de type multiplicatif comme sous-groupe d'un groupe de type multiplicatif **541**
(cf. *Bible*, Exp. 4, Th. 2 cor. 1, ou Exp. IX 6.8), donc U'' est le groupe unité d'après 2.4 i).

Remarque 2.6. — Gardant les notations de 2.4, il n'est plus vrai en général que le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{k\text{-gr}}(\mathrm{U}, \mathrm{M})$ soit égal à $\underline{\mathbf{e}}$. Ainsi, prenons un préschéma S tel que $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$ contienne un élément non nul ε tel que $\varepsilon^2 = 0$ (par exemple le spectre de l'algèbre des nombres duaux d'un anneau A). Pour tout S' au-dessus de S, l'application $u \mapsto 1 + \varepsilon_{\mathrm{S}'} u$ définit un homomorphisme, fonctoriel en S', du groupe additif $\Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$ dans le groupe multiplicatif $\Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}^\times)$, donc définit un S-morphisme de groupes $(\mathbb{G}_a)_\mathrm{S} \to (\mathbb{G}_m)_\mathrm{S}$, et comme $\varepsilon \neq 0$, ce morphisme n'est pas nul.

Rappelons (Exp. $\mathrm{VII_A}$ § 3) que lorsque G est un S-préschéma en groupes commutatif, fini et plat sur S, on dispose de la dualité de Cartier, et G est réflexif au sens de Exp. VIII § 1. Plus précisément, le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{G}, \mathbb{G}_m)$ est représentable

(3) N.D.E. : vérifier cette réf.

par un S-préschéma en groupes D(G) commutatif, fini et plat sur S, et le morphisme canonique $G \to D(D(G))$ est un isomorphisme. En particulier, on obtient :

(i) $D(\boldsymbol{\mu}_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et par suite $D(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \boldsymbol{\mu}_n$.

(ii) Si S est de caractéristique $p > 0$, $D(\boldsymbol{\alpha}_p) \simeq \boldsymbol{\alpha}_p$.

3. Groupes unipotents opérant sur un espace vectoriel

542 Rappelons (Exp. I ,4.6.1) que si S est un préschéma et M un faisceau de $\mathscr{O}_S$-modules, on note $\mathbf{W}(M)$ le S-foncteur : $(\mathbf{Sch}/S)^\circ \to (\mathbf{Ens})$ défini par la condition $\mathbf{W}(M)(S') = \Gamma(S', M \otimes \mathscr{O}_{S'})$ pour tout S-préschéma S′.

Par ailleurs, rappelons que si un S-groupe opère sur un S-foncteur $\mathbf{V}$, on définit le S-foncteur $\mathbf{V}^G$ des invariants de $\mathbf{V}$ sous G, comme étant le sous-foncteur de $\mathbf{V}$ dont l'ensemble des points à valeur dans un S′ au-dessus de S est l'ensemble des $x \in \mathbf{V}(S')$ tels que $x_{S''}$ soit fixe sous $G(S'')$ pour tout S″ au-dessus de S′.

Ceci étant, on a le lemme suivant :

Lemme 3.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, affine sur* S, *défini par la* $\mathscr{O}_S$*-algèbre quasi-cohérente* A. *Supposons que* G *opère sur un faisceau quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_S$*-modules* M, *et soient* $\mu : M \to A \otimes_{\mathscr{O}_S} M$ *le comorphisme définissant l'action de* G *sur* M (Exp. I 4.7.2) *et* $\nu : M \to A \otimes_{\mathscr{O}_S} M$ *le morphisme* $x \mapsto \mu(x) - 1 \otimes x$. *Alors :*

i) $\underline{M}^G(S) = \Gamma\,\mathrm{Ker}(\nu)$.

ii) *Si* S *est le spectre d'un corps* k, $\underline{M}^G$ *est de la forme* W(N), *où* N *est un sous-espace vectoriel de* M.

iii) *Si* S *est le spectre d'un corps* k, *tout élément* x *de* M *est contenu dans un*
543 *sous-espace vectoriel de* M, *de dimension finie sur* k, *stable sous l'action de* G.

Démonstration. iii) est mis pour mémoire et a déjà été démontré dans Exp. VI_B 11.2.

i) Il est clair que $\underline{M}^G(S)$ contient $\Gamma\,\mathrm{Ker}(\nu)$. Pour établir la réciproque, on peut supposer S affine d'anneau B. Soit $m \in \underline{M}^G(S)$. Alors pour toute B-algèbre B′ et tout u élément de $\mathrm{Hom}_{B\text{-alg}}(A, B')$ (u correspond à un élément de $G(\mathrm{Spec}\,B')$), on a :

$$(u \otimes 1_M)\nu(m) = 0 \text{ dans } B' \otimes_B M.$$

Prenons en particulier $B' = A$ et u l'identité de A, on trouve bien $\nu(m) = 0$.

ii) Soit N le noyau de ν, égal à $\underline{M}^G(k)$ d'après i). Tout k-préschéma S est plat sur k, donc on a :

$$\underline{M}^G(S) = \Gamma\,\mathrm{Ker}(\nu \otimes_k S) = \Gamma(N \otimes_k S).$$

Donc $\underline{M}^G$ est isomorphe au foncteur W(N).

Proposition 3.2. — *Soit* G *un groupe algébrique unipotent, défini sur un corps* k, *qui opère sur un* k*-espace vectoriel* V. *Alors si* $V \neq 0$, *on a* $\mathbf{V}^G \neq 0$.

Compte tenu de 3.1 ii) et iii), on peut supposer k algébriquement clos et V de dimension finie sur k.

Soit $0 \to \mathrm{G}' \to \mathrm{G} \to \mathrm{G}'' \to 0$ une suite exacte de groupes algébriques et supposons que G opère sur un faisceau $\mathbf{V}$ (pour la topologie fpqc). On a bien sûr $\mathbf{V}^{\mathrm{G}} \subset \mathbf{V}^{\mathrm{G}'}$ et le préfaisceau quotient G/G' opère de façon naturelle sur $\mathbf{V}^{\mathrm{G}'}$. Mais $\mathbf{V}^{\mathrm{G}'}$ est un 544
faisceau (comme noyau du couple de morphismes bien connu : $\mathrm{V} \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}', \mathrm{V})$) ; par suite, le faisceau associé à G/G', c'est-à-dire G'', opère sur $\mathbf{V}^{\mathrm{G}'}$, et il est immédiat de vérifier que $(\mathbf{V}^{\mathrm{G}'})^{\mathrm{G}''} = \mathbf{V}^{\mathrm{G}} = (\mathbf{V}^{\mathrm{G}'})^{\mathrm{G}/\mathrm{G}'}$.

Cette remarque permet de nous ramener, pour prouver 3.2, au cas où G est un groupe unipotent élémentaire (1.7).

a) $\mathrm{G} = \mathbb{G}_a$, $p = 0$. Il résulte de (BIBLE 4 prop. 4) qu'un morphisme de $\mathbb{G}_a$ dans le groupe linéaire GL(V) est donné par une application exponentielle :

$$\mathrm{T} \mapsto \sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{T}^q \frac{n^q}{q!}$$

où n est un endomorphisme nilpotent de V. Mais alors $\mathrm{V} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} n \neq 0$, et il est clair que tout vecteur de V annulé par n est laissé fixe par G.

Supposons maintenant $p > 0$.

b) $\mathrm{G} = \boldsymbol{\alpha}_p$. Le groupe $\boldsymbol{\alpha}_p$ étant un groupe radiciel de hauteur 1 (Exp. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ § 7), se donner une représentation de $\boldsymbol{\alpha}_p$ dans V revient à se donner une représentation de la p-algèbre de Lie $\boldsymbol{\alpha}_p$ dans $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ (App. II 2.2), c'est-à-dire ici, à se donner un élément X de End(V) tel que $\mathrm{X}^p = 0$ (App. II 2.1). Mais alors $\mathrm{V} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{W} = \mathrm{Ker}(\mathrm{X}) \neq 0$, et toujours d'après (App. II 2.2), on a $\mathrm{W} = \mathrm{V}^{\boldsymbol{\alpha}_p}$.

c) $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Une représentation de G dans V équivaut à la donnée d'un élément x de Aut(V) tel que $x^p = 1$, i.e. $(1 - x)^p = 0$, donc x est de la forme $1 + n$, avec n nilpotent et $\mathrm{W} = \operatorname{Ker} n$ est laissé fixe par x. 545

d) $\mathrm{G} = \mathbb{G}_a$. Soit G_i, $i \in \mathrm{I}$, la famille filtrante croissante des sous-groupes algébriques étales de $\mathbb{G}_a$, donc isomorphes à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_i}$ (prop. 1.5) et soit $\mathrm{V}_i = \mathrm{V}^{\mathrm{G}_i}$. Comme V est de dimension finie non nulle, et que V_i est non nul d'après c), la famille filtrante décroissante des V_i est stationnaire, et $\mathrm{W} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{V}_i \neq 0$. Or on a le lemme :

Lemme 3.3. — *La famille des sous-groupes étales de* $(\mathbb{G}_a)_{\mathrm{S}}$ (S-*préschéma de caractéristique* $p > 0$) *est schématiquement dense dans* G (Exp. IX 4.1).

D'après Exp. IX 4.4, il suffit de prouver le lemme lorsque S est le spectre du corps premier $\mathbb{F}_p$. Dans ce cas, il suffit de considérer la famille de sous-groupes étales G_n ($n \geqslant 1$) d'équation $\mathrm{X}^{p^n} - \mathrm{X} = 0$, qui est schématiquement dense dans $(\mathbb{G}_a)_{\mathrm{F}_p}$ puisqu'elle contient tout point fermé.

Ceci étant, revenons à la démonstration de 3.2 d). Si $w \in \mathrm{W}$, son stabilisateur dans G est un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_a$ qui majore G_i pour tout $i \in \mathrm{I}$, donc est égal à $\mathbb{G}_a$ (3.3) et par suite $\mathrm{W} = \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$.

On déduit immédiatement de 3.2 le

Corollaire 3.4. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique unipotent qui opère sur un k-espace vectoriel* V *de dimension finie. Alors* V *possède une suite de sous-espaces*
546 *vectoriels* V_i*, définis sur k, stables par* G*,*

$$0 = \mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{V}_n = \mathrm{V},$$

tels que G *opère trivialement sur* $\mathrm{V}_{i+1}/\mathrm{V}_i$*. On peut de plus supposer* $\mathrm{V}_{i+1}/\mathrm{V}_i$ *de dimension* 1*.*

Nous allons maintenant résumer et compléter les propriétés déjà démontrées des groupes unipotents dans le théorème suivant :

Théorème 3.5. — *Soit* G *un groupe algébrique défini sur un corps k. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

i) G *est unipotent.*

ii) G *possède une suite de composition, définie sur k, dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbb{G}_a$ si $p = 0$ (resp. à $\boldsymbol{\alpha}_p$, $\mathbb{G}_a$, ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ tordu* (1.4) *si $p > 0$).*

iii) *Comme dans* ii)*, mais on suppose de plus la suite de composition centrale.*

iv) G *possède une suite de composition* caractéristique (Exp. $\mathrm{VI_B}$) *définie sur k, dont les quotients successifs sont isomorphes à $(\mathbb{G}_a)^r$ si $p = 0$ (resp. à $(\boldsymbol{\alpha}_p)^r$, $(\mathbb{G}_a)^s$ tordu ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t$ tordu, pris dans cet ordre, si $p > 0$).*

v) G *est isomorphe à un sous-groupe algébrique du groupe* $\mathrm{Trigstr}(n)_k$ *des matrices triangulaires supérieures strictes du groupe linéaire* $\mathrm{GL}(n)_k$*, pour un entier $n \geqslant 0$ convenable.*

vi) G *est affine et pour toute représentation linéaire de* G *dans un k espace vectoriel* V*, de dimension finie, non nul, on a* $\mathrm{V}^{\mathrm{G}} \neq 0$*.*

547 *Démonstration.*
i) $\Rightarrow$ vi) d'après 2.1 et 3.2.
vi) $\Rightarrow$ v). Le groupe algébrique G étant affine, G est un sous-groupe algébrique d'un groupe linéaire convenable GL(V) (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 11.3). Appliquons 3.4 à la représentation de G dans V définie par ce plongement, on trouve v).
v) $\Rightarrow$ iii). On sait que le groupe algébrique $\mathrm{Trigstr}(n)$ possède une suite de composition centrale, à quotients successifs isomorphes à $\mathbb{G}_a$. La suite de composition induite sur G donne la propriété iii), compte tenu de 1.5.
iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) et iv) $\Rightarrow$ i) est clair.
Nous démontrerons i) $\Rightarrow$ iv) dans un instant, mais notons déjà quelques conséquences de ce qui a été démontré.

Définition 3.6. — Nous dirons qu'une p-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ($p > 0$) (cf. Exp. $\mathrm{VII_A}$ § 5) est *unipotente* si l'application $x \mapsto x^{(p)}$ est nilpotente, c.-à-d. si pour tout $x \in \mathfrak{g}$, il existe un entier $n > 0$, tel que $x^{(p^n)} = 0$.

Corollaire 3.7. — *Un groupe algébrique* G *unipotent est nilpotent* (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 8) *; son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente* (Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1 § 4) *et est isomorphe à une algèbre de Lie d'endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel* *de dimension finie. En caractéristique* $p > 0$, $\mathfrak{g}$ *est une* p*-algèbre de Lie unipotente* (3.6).

Comme i) $\Rightarrow$ v), il suffit de prouver 3.7 lorsque $\mathrm{G} = \mathrm{Trigstr}(n)$. Nous avons déjà utilisé le fait que $\mathrm{Trigstr}(n)$ est un groupe algébrique nilpotent. Par ailleurs l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathrm{Trigstr}(n)$ est formée des endomorphismes de V triangulaires supérieurs **548**
qui ont des zéros sur la diagonale principale. Ils sont donc nilpotents et par suite $\mathfrak{h}$ est nilpotente (Bourbaki, *loc. cit.* Chap. 1 § 4. cor. 3). Si $p > 0$, comme la puissance $p^{\text{ième}}$ dans la p-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathrm{V}) = \mathrm{End}(\mathrm{V})$ coïncide avec la puissance $p^{\text{ième}}$ des endomorphismes de V (Exp. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 6.4.4), on voit que $\mathfrak{h}$ est unipotente.

Corollaire 3.8. — *Soit k un corps algébriquement clos et soit* G *un groupe algébrique* lisse *et affine sur k. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) G *est unipotent.*

ii) $\mathrm{G}(k)$ *est formé d'éléments unipotents* (BIBLE 4 prop. 4 cor. 1)*, c'est-à-dire* G *est unipotent au sens de* BIBLE.

i) $\Rightarrow$ ii) car G est isomorphe à un sous-groupe algébrique d'un groupe $\mathrm{Trigstr}(n)$ d'après 3.2 i) $\Rightarrow$ v).

ii) $\Rightarrow$ i). Soit donc G un groupe algébrique unipotent au sens de BIBLE et notons G^0 sa composante neutre. Les tores maximaux de G^0 étant formés d'éléments unipotents sont triviaux, donc G^0 est égal à ses sous-groupes de Cartan. Par suite, G^0 est résoluble (BIBLE 6 Th. 6), donc est triangularisable (BIBLE 6. Th. 1). Bref, G^0 est un sous-groupe algébrique d'un groupe $\mathrm{Trigstr}(n)$, il est donc unipotent au sens de cet exposé.

Le groupe $(\mathrm{G}/\mathrm{G}^0)(k)$ est un groupe fini formé d'éléments unipotents ; il est donc nul si $p = 0$ et égal à un p-groupe fini si $p > 0$ (BIBLE 4 prop. 4). Mais alors G/G^0 est unipotent au sens de cet exposé comme extension multiple de groupes isomorphes à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Ceci prouve que G est unipotent.

Fin de la démonstration de 3.5. Prouvons que i) $\Rightarrow$ iv). **549**

a) $p > 0$. Considérons la suite croissante de sous-groupes algébriques de G :

$$\{e\} \subset {}_{\mathrm{F}}(\mathrm{G}) \subset {}_{\mathrm{F}^2}(\mathrm{G}) \subset \cdots \subset {}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{G}^0 \subset \mathrm{G}.$$

On obtient ainsi une suite de composition caractéristique de G (App. II 1) et pour n assez grand, $\mathrm{G}/{}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G})$ est lisse (App. II 3.1) de sorte que les quotients successifs sont, dans l'ordre :

(1) des groupes radiciels de hauteur 1,
(2) un groupe lisse et connexe,
(3) un groupe étale.

Pour prouver i) $\Rightarrow$ iv) il nous suffit donc de prouver le :

Lemme 3.9. — *Soit* G *un groupe algébrique unipotent défini sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Alors* G *possède une suite de composition caractéristique, définie sur k, dont les quotients successifs sont isomorphes à :*

i) $(\boldsymbol{\alpha}_p)^r$ *si* G *est radiciel.*
ii) $(\mathbb{G}_a)^r$ *tordu si* G *est lisse et connexe.*

iii) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$ *tordu si* G *est étale.*

Démonstration. i) Le groupe G est radiciel. Filtrant G par les ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G})$, on se ramène au cas où G est radiciel de hauteur 1. Comme G est nilpotent (3.5 i) $\Rightarrow$ iii)) et que le centre d'un groupe algébrique est représentable (Exp. VIII 6.5 e)), on peut considérer
550 la suite centrale ascendante de G, évidemment caractéristique dans G, ce qui nous ramène au cas où G est de plus commutatif.

Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Le morphisme π de puissance $p^{\text{ième}}$ est donc additif dans $\mathfrak{g}$ (Exp. $\mathrm{VII_A}$) ; nous allons nous ramener au cas où elle est nulle. Pour tout préschéma S au-dessus de k, posons $\mathfrak{g}_\mathrm{S} = \mathfrak{g} \otimes_k \mathscr{O}_\mathrm{S}$ et soit $\mathfrak{h}_\mathrm{S}$ le sous-faisceau de groupes abéliens de $\mathfrak{g}_\mathrm{S}$, image de $\mathfrak{g}_\mathrm{S}$ par π_S. Enfin soit $\overline{\mathfrak{h}}_\mathrm{S}$ le sous-faisceau de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules de $\mathfrak{g}_\mathrm{S}$ engendré par $\mathfrak{h}_\mathrm{S}$. Il est clair que $\overline{\mathfrak{h}}_\mathrm{S} = \mathfrak{h}_k \otimes_k \mathscr{O}_\mathrm{S}$ et que $\overline{\mathfrak{h}}_\mathrm{S}$ [4] est une sous-p-algèbre de Lie caractéristique de $\mathfrak{g}_\mathrm{S}$ (c'est-à-dire est stable par le S-foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{p\text{-Lie}}(\mathfrak{g})$). Il résulte alors de App. II 2.2 que $\overline{\mathfrak{h}}_k$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique H de G caractéristique dans G.

De plus, compte tenu de 3.7 et du lemme 3.9 bis ci-après, si $\mathrm{G} \neq \{e\}$, H est distinct de G, car $\overline{\mathfrak{h}}_k$ est distinct de $\mathfrak{g}$. Par ailleurs, si $\mathrm{G}/\mathrm{H} = \mathrm{G}''$, on a $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}'' = \mathfrak{g}/\overline{\mathfrak{h}}_k$ (App. II 2.2), et par suite, la puissance $p^{\text{ième}}$ est nulle dans $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}''$. Procédant par récurrence sur $\dim \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$, on est donc ramené au cas où $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ est une p-algèbre de Lie dans laquelle la puissance $p^{\text{ième}}$ est nulle. Mais alors $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}''$ est isomorphe à $\mathrm{Lie}(\boldsymbol{\alpha}_p)^r$ pour un entier $r \geqslant 0$ convenable (App. II 2.1) et par suite (App. II 2.2), G'' est isomorphe à $(\boldsymbol{\alpha}_p)^r$. Il reste à prouver le

Lemme 3.9 bis. — *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, $\mathfrak{g}$ une p-algèbre de Lie, commutative, unipotente* (3.6)*, de dimension finie sur k, et $\mathfrak{h}$ la sous-p-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par l'image de la puissance $p^{\text{ième}}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors si $\mathfrak{g} \neq 0$, on a $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$.*

En effet, comme $\mathfrak{g}$ est commutative, $\mathfrak{h}$ est simplement le sous-k-espace vectoriel
551 de $\mathfrak{g}$ engendré par les $\mathrm{X}^{(p)}$ ($\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$). Si $\mathfrak{g}$ est $\neq 0$ et est unipotente, il existe $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{X} \neq 0$, tel que $\mathrm{X}^{(p)} = 0$. Soit $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ une base d'un supplémentaire dans $\mathfrak{g}$ de la droite $k\mathrm{X}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est alors le sous-k-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathrm{X}_1^{(p)}, \dots, \mathrm{X}_n^{(p)}$, donc est de dimension au plus $n = \dim \mathfrak{g} - 1$.

Démonstration de 3.9 ii) G est lisse et connexe. Dans ce cas, la suite centrale descendante de G est représentable par des sous-groupes algébriques G_i lisses et connexes caractéristiques (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 8.3 et 7.4) et $\mathrm{G}_i = 0$ pour i assez grand, puisque G est nilpotent (3.5 i) $\Rightarrow$ iii)). Il suffit de prouver 3.9 pour les groupes $\mathrm{G}_i/\mathrm{G}_{i+1}$, ce qui nous ramène au cas où de plus G est commutatif. Pour tout entier $n > 0$, soit G_n le sous-groupe algébrique de G image de G par le morphisme d'élévation à la puissance p^n-ième. Le groupe G_n est donc lisse, connexe et caractéristique, et il résulte de la définition 1.1 des groupes unipotents que $\mathrm{G}_n = 0$ pour n assez grand. Remplaçant G par $\mathrm{G}_n/\mathrm{G}_{n+1}$, on peut supposer de plus que G est annulé par l'élévation à la puissance p. Mais alors, d'après (J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classe*q, chap. VII, prop. 11) G est une forme de $(\mathbb{G}_a)^r$, pour un entier r convenable.

[4] N.D.E. : on a changé $\mathfrak{h}$ en $\overline{\mathfrak{h}}$.

Démonstration de 3.9 iii) G est étale. Procédant comme dans ii), on se ramène au cas où G est commutatif, puis au cas où G est annulé par p, mais alors $G_{\overline{k}}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$.

Démonstration de 3.5 i) $\Rightarrow$ iv) dans le cas b) $p = 0$. Le groupe G est alors lisse et connexe, et procédant comme dans 3.9 ii), on se ramène au cas où G est de plus commutatif. On a alors le résultat plus précis suivant :

Lemme 3.9 ter. — *Soient k un corps de caractéristique* 0, G *un-k-groupe algébrique unipotent, commutatif,* $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$. *Alors il existe un isomorphisme canonique :* 552

$$\exp : W(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} G$$

Le morphisme exp *est l'unique homomorphisme* $W(\mathfrak{g}) \to G$ *qui induit l'identité sur les algèbres de Lie.*

Comme G est unipotent, G se réalise comme sous-groupe algébrique de Trigstr(n) pour un entier n convenable (3.5 i) $\Rightarrow$ v)). Le choix d'un tel plongement permet d'identifier $\mathfrak{g}$ à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n)$ formée d'endomorphismes nilpotents. D'où un k-morphisme :

$$\exp : W(\mathfrak{g}) \longrightarrow GL(n), \qquad T \mapsto \sum_{i \geqslant 0} \frac{T^i}{i!}.$$

Comme G est commutatif, le morphisme exp est un homomorphisme. Soit G′ le groupe algébrique image de $W(\mathfrak{g})$ par le morphisme exp. Si l'on identifie canoniquement $\operatorname{Lie} W(\mathfrak{g})$ à $\mathfrak{g}$, l'application linéaire tangente à exp est simplement l'injection $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n)$. Par suite $\operatorname{Lie}(G \cap G') = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Comme $G \cap G'$ est lisse (Exp. VI_B 1.6.1) et G connexe (car extension multiple de groupes $\mathbb{G}_a$ (3.5 i) $\Rightarrow$ ii)), on a nécessairement $G = G'$. Le noyau Ker(exp) est un groupe unipotent étale, donc est le groupe unité et par suite exp est un isomorphisme de $W(\mathfrak{g})$ sur G.

Si $h : W(\mathfrak{g}) \to G$ est un autre homomorphisme tel que $\operatorname{Lie}(h)$ soit l'application identique de $\mathfrak{g}$, le morphisme $h - \exp$ est un homomorphisme (G est commutatif) donc l'application linéaire tangente est nulle. Comme k est de caractéristique 0 et 553
$W(\mathfrak{g})$ connexe, il résulte encore du théorème de Cartier que l'on a nécessairement $h = \exp$.

Proposition 3.10. — *Soit* G *un groupe algébrique défini sur un corps k algébriquement clos. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Tout morphisme d'un groupe de type multiplicatif* M *dans* G *est le morphisme nul.*

i bis) G *ne possède pas de sous-groupes de type multiplicatif non nuls.*

ii) a) *si $p = 0$:* $G(k)$ *ne contient pas de points d'ordre fini autres que e ;*

b) *si $p \neq 0$:* *pour tout nombre premier $q \neq p$, $x \in G(k)$ et $x^q = e$ implique $x = e$,*
pour tout $X \in \mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ *tel que* $X^{(p)} = X$, *on a* $X = 0$.

ii bis) a) *si* $p = 0$ *:* *comme* ii) a) *;*

b) *si* $p \neq 0$ *:* *tout sous-groupe fini de* $\mathrm{G}(k)$ *est un* p*-groupe,*

pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ *tel que* $\mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X}$*, on a* $\mathrm{X} = 0$.

Démonstration.

i) $\Leftrightarrow$ i bis), puisque l'image d'un groupe de type multiplicatif est de type multiplicatif (Exp. IX 2.7).

554 ii) $\Leftrightarrow$ ii bis). Car si un groupe fini ordinaire H a un ordre qui n'est pas une puissance de p, il existe un nombre premier $q \neq p$, et un élément x de H distinct de e, tel que $x^q = e$ (théorème de Sylow, cf. J.-P. Serre, *Corps locaux*, chap. IX § 2).

i) $\Rightarrow$ ii) résulte du lemme suivant :

Lemme 3.11. — *Soit* G *un groupe algébrique défini sur un corps* k.

a) *Si* k *contient les racines* $n^{\text{ièmes}}$ *de l'unité,* n *entier premier à* p*, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(\boldsymbol{\mu}_n, \mathrm{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathrm{G}) \simeq {}_n\mathrm{G}(k)$$

(*points d'ordre* n *de* $\mathrm{G}(k)$).

b) *Si* $p > 0$*,* $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(\boldsymbol{\mu}_p, \mathrm{G}) \simeq \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{G},$ *tels que* $\mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X}\}$.

En effet, pour démontrer a) on note que $\boldsymbol{\mu}_n$ est alors isomorphe sur k à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, et b) est conséquence de App. II 2.1.

ii) $\Rightarrow$ i bis). D'après le lemme 3.11, ii) équivaut au fait que quelque soit le nombre premier r, G ne contient pas de sous-groupes $\boldsymbol{\mu}_r$, ce qui entraîne i bis) en raison du :

Lemme 3.12. — *Soit* G *un* S*-groupe diagonalisable, de type fini sur* S *et distinct du groupe unité. Alors il existe un nombre premier* r *et un sous-groupe de* G *isomorphe à* $(\boldsymbol{\mu}_r)_{\mathrm{S}}$.

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, où M est un groupe abélien de type fini, donc extension d'un groupe libre M'' par un groupe fini M'. Si $\mathrm{M}'' \neq 0$, il est clair que M admet des quotients isomorphes à $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ pour tout entier r. Si $\mathrm{M}'' = 0$, M' admet un quotient
555 isomorphe à $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ pour tout nombre premier r divisant l'ordre de M. On en déduit le lemme par dualité.

Nous avons vu (prop. 2.4) qu'un groupe unipotent satisfait aux conditions équivalentes de 3.10. Le but du paragraphe suivant est de démontrer la réciproque.

4. Une caractérisation des groupes unipotents

556 Comme annoncé, nous allons montrer qu'un groupe algébrique G défini sur un corps k algébriquement clos, qui ne contient pas de sous-groupe de type multiplicatif non nul, est unipotent. En fait, il suffit qu'il ne contienne pas de sous-groupes de type multiplicatif « élémentaires » bien particuliers, qui dépendent des hypothèses faites sur G. Avant d'énoncer le théorème général, étudions en détail quelques cas particuliers.

4.1. Groupes algébriques lisses, connexes et affines. —

Proposition 4.1.1. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique, lisse, connexe et affine,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) G *est unipotent.*

ii) G *possède une suite de composition centrale, dont les quotients successifs sont des formes de* $\mathbb{G}_a$.

iii) G *possède une suite de composition centrale, caractéristique, dont les quotients successifs sont des formes de* $(\mathbb{G}_a)^r$.

iv) *Il existe un entier $n > 1$, tel que* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *ne contienne pas de sous-groupe isomorphe à* $\boldsymbol{\mu}_n$.

v) *Tout tore maximal de* G *est le groupe unité.*

Supposons de plus que G *soit un sous-groupe algébrique d'un groupe linéaire* $\mathrm{GL}(n)$. *Alors les conditions précédentes sont encore équivalentes à :*

vi) $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$ *est formée d'endomorphismes nilpotents.* **557**

vii) $\mathfrak{g}$ *est nilpotente et son centre ne contient pas d'endomorphisme semi-simple non nul.*

Démonstration. ii) $\Rightarrow$ i) est clair et i) $\Rightarrow$ iii) a été vu dans 3.9. L'implication iii) $\Rightarrow$ ii) va résulter du lemme suivant :

Lemme 4.1.2. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique qui est une forme de* $(\mathbb{G}_a)^r$. *Alors :*

a) G *se réalise comme sous-groupe algébrique du groupe* $(\mathbb{G}_a)^n$ *pour un entier n convenable.*

b) G *possède une suite de composition dont les quotients successifs sont des formes de* $\mathbb{G}_a$.

En effet, par hypothèse, il existe une extension k' de k telle que $\mathrm{G}_{k'}$ soit isomorphe à $(\mathbb{G}_{a,\,k'})^r$. D'après le principe de l'extension finie (EGA IV 9.1.1), on peut supposer que k' est une extension finie de k. Mais alors, pour a), il suffit de considérer l'immersion fermée canonique (EGA V [(5)]) :

$$\mathrm{G} \longrightarrow \prod_{k'/k} (\mathrm{G}_{k'})/k' \xrightarrow{\ \sim\ } (\mathbb{G}_{a,\,k})^n \quad (\text{avec } n = r\deg(k'/k)).$$

Pour prouver b), compte tenu de a), on peut supposer que G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{G}' = (\mathbb{G}_a)^n$. Si $\mathrm{G} \neq 0$, il existe un hyperplan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}' = \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}'$ qui ne contient pas $\mathfrak{g}$. Soit H le sous-groupe vectoriel $\mathrm{W}(\mathfrak{h})$ de $\mathrm{W}(\mathfrak{g}') = \mathrm{G}'$. Comme H est défini par une équation dans G', $\mathrm{H} \cap \mathrm{G}$ est défini par une équation dans G et on a les inégalités :

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{G} - 1 &\leqslant \dim(\mathrm{G} \cap \mathrm{H}) \\ &\leqslant \dim \mathrm{Lie}(\mathrm{G} \cap \mathrm{H}) = \dim_k(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}) = \dim_k(\mathfrak{g}) - 1 = \dim \mathrm{G} - 1\end{aligned}$$

D'où $\dim(\mathrm{G} \cap \mathrm{H}) = \dim \mathrm{Lie}(\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$ et par suite $\mathrm{G} \cap \mathrm{H}$ est lisse. Le groupe $\mathrm{G}_1 = (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})^0$ **558**

(5) N.D.E. : donner ici une autre référence...

est un sous-groupe algébrique de G, lisse et connexe, tel que G/G_1 soit lisse, connexe, de dimension 1, donc est une forme de $\mathbb{G}_a$ (4.1 i) $\Rightarrow$ iii)). On termine par récurrence sur la dimension de G.

Avant de poursuivre la démonstration de 4.1, notons que l'équivalence i) $\Leftrightarrow$ ii) et 2.3 bis entraîne le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.3. — *Si k est un corps* parfait*, un k-groupe algébrique lisse et connexe est unipotent si et seulement si il possède une suite de composition à quotients successifs isomorphes à $\mathbb{G}_a$.*

Suite de la démonstration de 4.1.

i) $\Rightarrow$ iv) d'après 2.4 i).

iv) $\Rightarrow$ v). D'après Exp. XIV 4.1, G possède un tore maximal T défini sur k. Or si $r = \dim \mathrm{T}$, $({}_n\mathrm{T})_{\overline{k}}$ est isomorphe à $(\boldsymbol{\mu}_n)^r$. Donc $r = 0$.

v) $\Rightarrow$ i) comme on l'a remarqué dans la démonstration de 3.8.

i) $\Rightarrow$ vi). D'après 3.4, G est en fait contenu dans un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(n)$ isomorphe à $\mathrm{Trigstr}(n)$, donc $\mathfrak{g}$ est formé d'endomorphismes nilpotents.

vi) $\Rightarrow$ vii). En effet, $\mathfrak{g}$ est nilpotente d'après le théorème d'Engel (Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. I § 4 cor. 3).

vii) $\Rightarrow$ v). Soit T un sous-tore maximal de G (Exp. XIV 1.1), $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. Le plongement de G dans $\mathrm{GL}(n)$ définit une représentation de T qui est nécessairement
559 semi-simple (cela se voit sur une clôture algébrique $\overline{k}$ de k et on applique Exp. I 4.7.3). Donc si $\mathrm{X} \in \mathfrak{t}$, X est un endomorphisme semi-simple dans $\mathfrak{gl}(n)$. On voit immédiatement que cela entraîne que l'application :

$$\operatorname{ad} \mathrm{X} : \mathrm{Y} \longmapsto [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$$

est un endomorphisme semi-simple de $\mathfrak{gl}(n)$ donc de $\mathfrak{g}$. Comme par ailleurs cet endomorphisme est nilpotent, $\mathfrak{g}$ étant nilpotente, ad X est nul, donc X est central. Mais alors $\mathfrak{t}$ est centrale et formée d'endomorphismes semi-simples, donc est nulle par hypothèse ; a fortiori, T est le groupe unité.

Remarque 4.1.4. — a) Nous donnerons plus loin (4.3.1) une caractérisation infinitésimale des groupes unipotents en caractéristique $p > 0$, qui est indépendante d'un plongement dans $\mathrm{GL}(n)$.

b) Lorsque k est *parfait* les conditions ii) et iii) de 4.1.1 se simplifient en raison du lemme suivant :

Lemme 4.1.5. — *Si k est un corps parfait, tout k-groupe algébrique* G *qui est une forme de $(\mathbb{G}_a)^r$ est isomorphe à $(\mathbb{G}_a)^r$.*

Le lemme résulte de 3.9 ter si la caractéristique p de k est nulle, et de 2.3 bis si $r = 1$. Dans le cas général ($p > 0$), réalisons G comme sous-groupe algébrique de $(\mathbb{G}_a)^n$ pour un entier n convenable (4.1.2) et raisonnons par récurrence sur l'entier $n - r$. Si $r = n$ on a bien $\mathrm{G} = (\mathbb{G}_a)^r$. Sinon le groupe quotient $\mathbb{G}_a^n/\mathrm{G}$ est un groupe unipotent lisse connexe, non nul, qui, compte tenu de 4.1.1 i) $\Rightarrow$ ii) et de 2.3 bis,
560 possède une suite de composition à quotients isomorphes à $\mathbb{G}_a$. On en déduit qu'il existe un sous-groupe algébrique G_1 de $(\mathbb{G}_a)^n$, lisse et connexe, contenant G, tel que

$\mathbb{G}_a^n/\mathrm{G}_1 = \mathbb{G}_a$. Par récurrence il suffit de montrer que G_1 est isomorphe à $(\mathbb{G}_a)^{n-1}$. Or il est immédiat de vérifier qu'un homomorphisme de $\operatorname{Spec} k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n] = \mathbb{G}_a^n$ dans $\mathbb{G}_a = \operatorname{Spec} k[\mathrm{T}]$ est défini par un polynôme additif de la forme :

$$\sum_{i,j} a_{i,j} \mathrm{X}_i^{p^j}.$$

Comme G_1 est lisse, la partie linéaire de ce polynôme n'est pas nulle. Quitte à faire un changement linéaire sur les coordonnées X_i, nous pouvons supposer que G_1 est un sous-groupe algébrique de $(\mathbb{G}_a)^n$ défini par l'équation :

$$(*) \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}_1 + \sum_{j=1}^{q} a_j \mathrm{X}_1^{p^j} + \mathrm{Q}(\mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n) = 0,$$

$$\text{avec} \quad \mathrm{Q}(\mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n) = \sum_{\substack{i>1 \\ j>0}} b_{i,j} \mathrm{X}_i^{p^j}.$$

Procédons alors par récurrence sur le degré de P. Si $\deg \mathrm{P} = 1$, il est clair que $\mathrm{G}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_a^{n-1}$. Sinon, comme k est parfait, on a $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}_1(\mathrm{X})^p$ et nous pouvons définir un endomorphisme v de $\mathbb{G}_a^n$ par les formules :

$$\mathrm{X}_i \mapsto \mathrm{X}_i \quad \text{pour } i > 1, \qquad \mathrm{X}_1 \mapsto \sum_{j=1}^{q} a_j^{1/p} \mathrm{X}_1^{p^{j-1}} + \mathrm{Q}_1(\mathrm{X}).$$

Il est clair que v induit un isomorphisme sur G_1 et que $v(\mathrm{G}_1)$ a pour équation dans $\mathbb{G}_a^n$:

$$(*)_1 \qquad \mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}_1 + \sum_{j=1}^{q} a_j^{1/p} \mathrm{X}_1^{p^j} + \mathrm{Q}_1(\mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n) = 0.$$

Distinguons alors deux cas :

1^{er} *cas.* $\deg(\mathrm{Q}) = \deg \mathrm{P} > p^q$. Alors on a $\deg \mathrm{P}_1 < \deg \mathrm{P}$ et on gagne par hypothèse **561**
de récurrence.

$2^{ème}$ *cas.* $\deg \mathrm{P} = p^q$ $(a_q \neq 0)$. On a alors $\deg \mathrm{P}_1 = \deg \mathrm{P} = p^q$ et $\deg \mathrm{Q}_1 < p^q$. (On ne peut pas avoir $\mathrm{Q} = 0$, sinon G_1 ne serait pas connexe). Si le polynôme Q_1 ne possède pas de partie linéaire, on peut réitérer la transformation précédente. Continuant le processus, on obtient finalement une équation de la forme :

$$(*)_s \qquad \mathrm{P}_s(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}_1 + \sum_{j=1}^{q} a_j^{1/p^s} \mathrm{X}_1^{p^j} + \mathrm{Q}_s(\mathrm{X}),$$

où $\mathrm{Q}_s(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}(\mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n)^{1/p^s}$ est un polynôme additif ayant une partie linéaire non nulle, et de plus $\deg \mathrm{Q}_s < p^q$. Supposons par exemple que le coefficient de X_2 dans Q_s ne soit pas nul, et soit $-\mathrm{L}$ la partie linéaire de $\mathrm{P}_s(\mathrm{X})$. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, l'équation de G_1 devient :

$$\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = -\mathrm{L} + \sum_{j=1}^{q} a_j^{1/p^s} \mathrm{X}_1^{p^j} + \mathrm{Q}'(\mathrm{L}, \mathrm{X}_3, \dots, \mathrm{X}_n),$$

où Q′ est un polynôme additif, sans partie linéaire, et $\deg(\mathrm{Q}') < p^q$. Mais alors nous sommes ramenés au premier cas [6].

4.2. Groupes radiciels. —

Proposition 4.2.1. — *Soit* G *un groupe algébrique radiciel défini sur un corps* k *de caractéristique* $p > 0$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) G *est unipotent.*

ii) G *possède une suite de composition centrale, à quotients successifs isomorphes à* $\boldsymbol{\alpha}_p$.

562 iii) G *possède une suite de composition centrale et caractéristique à quotients successifs isomorphes à* $(\boldsymbol{\alpha}_p)^r$.

iv) $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *ne contient pas de sous-groupe isomorphe à* $\boldsymbol{\mu}_p$.

v) $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ *est une* p*-algèbre de Lie unipotente* (3.6).

Démonstration. iii) ⇒ ii) ⇒ i) est clair, i) ⇒ iii) est 3.9 i), et i) ⇒ iv) d'après 2.4 i).

Nous aurons besoin du lemme suivant sur les p-algèbres de Lie abéliennes :

Lemme 4.2.2. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* p*-algèbre de Lie, abélienne, de dimension finie sur un corps* k *parfait. Alors* $\mathfrak{g}$ *s'écrit de manière unique comme somme directe d'une sous-*p*-algèbre de Lie* $\mathfrak{r}$ *sur laquelle la puissance* $p^{\text{ième}}$ *est bijective et d'une sous-*p*-algèbre de Lie* $\mathfrak{u}$, *unipotente* (3.6). (*L'algèbre* $\mathfrak{r}$ *sera appelée la* partie réductive *de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{u}$ *la* partie unipotente.) *La formation de* $\mathfrak{r}$ *et* $\mathfrak{u}$ *est compatible avec l'extension du corps* k. *Si de plus* k *est algébriquement clos,* $\mathfrak{r}$ *admet une base* e_i *telle que* $e_i^{(p)} = e_i$.

La démonstration de ce lemme est facile et laissée au soin du lecteur (cf. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. I § 1 exercice 23). Disons simplement que $\mathfrak{u}$ est le noyau d'un itéré convenable de l'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^{(p)}$ et que $\mathfrak{r}$ est l'image du même itéré.

563 Ceci étant, prouvons iv) ⇒ v). Quitte à faire une extension du corps de base, on peut supposer k algébriquement clos.

Soit alors X un élément de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ la sous-p-algèbre de Lie engendrée par X dans $\mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathfrak{h}$ est évidemment commutative et sa partie réductive (4.2.2) est nulle, sinon d'après *loc. cit.*, $\mathfrak{h}$ contiendrait un élément $\mathrm{Y} \neq 0$, tel que $\mathrm{Y}^{(p)} = \mathrm{Y}$ et par suite (App. II 2.1 et 2.2) G contiendrait un sous-groupe isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_p$ contrairement à l'hypothèse. Donc $\mathfrak{h}$, et par suite $\mathfrak{g}$, est une p-algèbre de Lie unipotente.

v) ⇒ i). C'est l'implication la moins triviale de 4.2.1.

a) Cas où G est de hauteur 1 (Exp. $\mathrm{VII_A}$ 4.1.3). Comme G est radiciel, il est affine, donc isomorphe à un sous-groupe algébrique d'un groupe linéaire GL(V) (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 11). Ce plongement identifie $\mathfrak{g}$ à une sous-p-algèbre de Lie de End(V), la puissance $p^{\text{ième}}$ de X dans $\mathfrak{g}$ coïncidant avec la puissance $p^{\text{ième}}$ de l'endomorphisme X (Exp. $\mathrm{VII_A}$ 6.4.4). Comme $\mathfrak{g}$ est unipotente par hypothèse, $\mathfrak{g}$ est donc une algèbre d'endomorphismes nilpotents de V et d'après le *théorème d'Engel* (Bourbaki, Groupes et

[6] N.D.E. : en remplaçant X_1 par L.

algèbres de Lie, chap. I § 4 th. 1) est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ du groupe des matrices triangulaires supérieures strictes $\mathrm{Trigstr}(n)$ par rapport à une base convenable de V. Comme G est de hauteur 1, on déduit alors de App. II 2.2 que G lui-même est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{Trigstr}(n)$, donc est unipotent (3.5 v) $\Rightarrow$ i)).

b) Cas général. Procédons par récurrence sur la hauteur h de G [(*)]. Le cas $h = 1$ vient d'être traité. Supposons $h > 1$, posons $\mathrm{G}' = {}_{\mathrm{F}}\mathrm{G}$ et $\mathrm{G}'' = \mathrm{G}/\mathrm{G}'$. Le groupe G' est de hauteur 1 et $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}' = \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ est unipotente, donc G' est unipotent d'après a). Pour **564**
montrer que G est unipotent, il suffit donc de prouver que G'' est unipotent (2.2). Mais G'' est de hauteur $h - 1$, donc, par hypothèse de récurrence, il suffit de montrer que $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}''$ est unipotente. Comme iv) $\Rightarrow$ v), il suffit de montrer que $\mathrm{G}''_{\overline{k}}$ ne contient pas de groupes isomorphes à $\boldsymbol{\mu}_p$. Soit donc un sous-groupe de $\mathrm{G}''_{\overline{k}}$ isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_p$, H son image réciproque dans $\mathrm{G}_{\overline{k}}$. Le groupe G' étant unipotent, nous prouverons au § 5 que l'extension :

$$e \longrightarrow \mathrm{G}'_{\overline{k}} \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_p \longrightarrow e$$

est nécessairement triviale (la démonstration donnée de ce fait est indépendante des résultats du présent paragraphe). Bref le groupe $\boldsymbol{\mu}_p$ se relève dans H, mais étant de hauteur 1 il est nécessairement contenu dans $\mathrm{G}'_{\overline{k}} = {}_{\mathrm{F}}\mathrm{G}_{\overline{k}}$, d'où une contradiction, G' étant unipotent.

4.3. Groupes affines connexes en caractéristique $p > 0$. —

Proposition 4.3.1. — *Soit* G *un groupe algébrique affine connexe sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) G *est unipotent.*

ii) G *possède une suite de composition à quotients successifs isomorphes à* $\boldsymbol{\alpha}_p$ *et* $\mathbb{G}_a$ *(pris dans cet ordre).*

iii) G *admet une suite de composition, caractéristique, à quotients successifs isomorphes à* $(\boldsymbol{\alpha}_p)^r$ *et* $(\mathbb{G}_a)^s$ *(pris dans cet ordre).*

iv) $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *ne contient pas de sous-groupe isomorphe à* $\boldsymbol{\mu}_p$.

v) $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ *est unipotente* (3.6).

vi) $\mathfrak{g}$ *est nilpotente, et la partie réductive du centre de* $\mathfrak{g}$ (4.2.2) *est triviale.* **565**

vi bis) $\mathfrak{g}$ *est nilpotente, et tout sous-groupe de type multiplicatif de la composante neutre du centre de* G *est nul.*

vi ter) G *est nilpotent, et tout sous-groupe de type multiplicatif de la composante neutre du centre de* G *est nul.*

Démonstration. Il est clair que iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i). Pour établir i) $\Rightarrow$ iii), nous aurons besoin du lemme suivant :

[(*)] i.e. le plus entier tel que $\mathrm{F}^h = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$, cf. App. II 1.

Lemme 4.3.2. — *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, $n \in \mathbb{N}$, k' une extension radicielle de k telle que $(k')^{p^n}$ soit contenu dans k ; pour tout k-préschéma* X (*resp. tout k'-préschéma* X′) *notons* $\mathrm{X}^{(p^n)}$ (*resp.* $\mathrm{X'}_\varphi$) *le k-préschéma déduit de* X (*resp.* X′) *par le changement de base :*

$$\mathrm{F}^n : k \longrightarrow k, \quad x \mapsto x^{p^n}, \qquad (resp. \quad \varphi : k' \longrightarrow k, \quad x' \mapsto x'^{p^n}).$$

Alors, pour tout k-préschéma X, *il existe un isomorphisme fonctoriel :*

$$(\mathrm{X}_{k'})_\varphi \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}^{(p^n)}.$$

Par suite, si X *et* Y *sont deux k-préschémas tels qu'il existe un k'-isomorphisme $u' : \mathrm{X}_{k'} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Y}_{k'}$, alors il existe un k-isomorphisme $v : \mathrm{X}^{(p^n)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Y}^{(p^n)}$. Si de plus* X *et* Y *sont munis de structures de k-préschémas en groupes et si u' est un k'-homomorphisme, alors v est un k-homomorphisme.*

566 Le lemme résulte simplement de la transitivité des changements de base et du fait que le morphisme composé : $k \to k' \xrightarrow{\varphi} k$ est égal à F^n.

Suite de la démonstration de 4.3.1.

i) ⇒ iii). Procédons par récurrence sur dim G. Si dim G = 0, comme G est connexe, il est radiciel et on applique 3.9 i). Si dim G > 0, il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que le quotient $\mathrm{G}/_{\mathrm{F}^m}\mathrm{G}$ soit un groupe lisse (App. II 3.1), évidemment connexe et non nul. Appliquant 4.1.1 i) ⇒ iii) à ce dernier, on voit qu'il existe un sous-groupe algébrique G′ de G qui est caractéristique et connexe et tel que le quotient $\mathrm{G''} = \mathrm{G}/\mathrm{G'}$ soit une forme de $\mathbb{G}_a^r$ $(r > 0)$. D'après 4.1.5, si K est une clôture parfaite de k, on a $\mathrm{G''_K} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{K}})^r$. Comme G″ est de type fini sur k, il existe une extension radicielle finie k' de k telle que $\mathrm{G''_{k'}} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{a,\,k'})^r$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10). Soit $n > 0$ tel que $(k')^{p^n} \subset k$. Gardant les notations de 4.3.2, on en déduit qu'il existe un k-isomorphisme de groupes algébriques :

$$(\mathbb{G}_{a,\,k})^r = (\mathbb{G}_{a,\,k'})^r_\varphi \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}'')^{(p^n)}.$$

Considérons alors l'homomorphisme de Frobenius relatif à G″ (Exp. $\mathrm{VII_A}$ § 4)

$$\mathrm{F}^n : \mathrm{G''} \longrightarrow (\mathrm{G''})^{(p^n)}.$$

Comme G″ (donc aussi $(\mathrm{G''})^{(p^n)}$) est lisse sur k, et que F^n est radiciel, F^n est un épimorphisme pour la topologie fpqc, de sorte que $(\mathrm{G''})^{(p^n)}$ s'identifie à $\mathrm{G''}/_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G''})$. Finalement nous avons montré que $\mathrm{G''}/_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G''})$ était isomorphe, comme groupe al-
567 gébrique, à $(\mathbb{G}_a)^r$. L'image réciproque G'_n de ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G''})$ dans G est un sous-groupe de G, connexe, caractéristique, de dimension strictement inférieure à celle de G, auquel nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence.

i) ⇒ iv) d'après 2.4 i).

iv) ⇒ i). Considérons G comme extension d'un groupe lisse et connexe G″ par un groupe radiciel G′ (App. II 3.1). Le groupe G′ est unipotent (4.2.1 iv) ⇔ i)). Il suffit de voir que G″ est unipotent et pour cela il suffit de montrer que $\mathrm{G''_{\overline{k}}}$ ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_p$ (4.1.1 i) ⇔ iv)). Or si $\mathrm{G''_{\overline{k}}}$ contenait un sous-groupe $\boldsymbol{\mu}_p$, celui-ci se relèverait dans $\mathrm{G_{\overline{k}}}$, d'après le résultat (5.1) déjà utilisé démontré dans § 5, d'où une contradiction avec iv).

i) $\Rightarrow$ v) d'après 3.7.

v) $\Rightarrow$ vi). En effet comme $(\operatorname{ad} X)^{p^r} = \operatorname{ad}\big(X^{(p^r)}\big)$ ($\mathrm{VII_A}$ 5.2), ad X est nilpotent si $\mathfrak{g}$ est unipotente, donc $\mathfrak{g}$ est nilpotente d'après le *théorème d'Engel* (Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie chap. I § 4). D'autre part, si $\mathfrak{g}$ est unipotente, il en est évidemment de même de son centre, dont la partie réductive est alors triviale (4.2.2).

vi) $\Rightarrow$ iv). En effet, si $G_{\overline{k}}$ contient un sous-groupe isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_p$, il existe un élément $X \neq 0$ de son algèbre de Lie tel que $X^{(p)} = X$ (App. II 2.1), donc $X^{(p^r)} = X$ pour tout $r > 0$. Comme ad X est nilpotent puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente et que $(\operatorname{ad} X)^{p^r} = \operatorname{ad} X^{(p^r)}$, nécessairement ad X = 0, donc X appartient à la partie réductive du centre $\mathfrak{g}_{\overline{k}}$, d'où une contradiction avec vi).

i) $\Rightarrow$ vi ter) résulte de 2.4 i) et de 3.5 i) $\Rightarrow$ iii).

vi ter) $\Rightarrow$ vi bis). En effet, si G est nilpotent, il en est de même de son sous-groupe 568
${}_{\mathrm{F}}G$. Il résulte d'autre part de App. II 2.2 que ${}_{\mathrm{F}}G$ est nilpotent si et seulement si $\operatorname{Lie}{}_{\mathrm{F}}G = \operatorname{Lie} G$ (Exp. $\mathrm{VII_A}$) est nilpotente.

vi bis) $\Rightarrow$ vi). Soit Z la composante neutre du centre de G et soit $\mathfrak{r}$ la composante réductive du centre de $\mathfrak{g}$. Nous devons montrer que $\mathfrak{r} = 0$. Or il est immédiat que $\mathfrak{r}$ est une sous-p-algèbre de Lie caractéristique de $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}{}_{\mathrm{F}}G$ (c.-à-d. stable par le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{p\text{-Lie}}(\mathfrak{g})$) ; donc $\mathfrak{r}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe radiciel caractéristique R de ${}_{\mathrm{F}}G$ (App. II 2.2). D'autre part, il résulte de la dernière assertion contenue dans 4.2.2 et de App. II 2.1, que R est une forme de $(\boldsymbol{\mu}_p)^r$. Le groupe R étant caractéristique dans ${}_{\mathrm{F}}G$ qui est lui-même un sous-groupe caractéristique de G (App. II 1), R est a fortiori invariant dans G, donc est central, G étant connexe (Exp. IX 5.5). Donc par l'hypothèse vi bis) R est nul, et il en est donc de même de $\mathfrak{r}$.

4.4. Groupes étales. — La proposition suivante est une conséquence facile des théorèmes de Sylow et de la structure des q-groupes finis (cf. J.-P. Serre, *Corps locaux*, chap. IX § 1).

Proposition 4.4.1. — *Soient* G *un groupe algébrique fini étale défini sur un corps k algébriquement clos. Alors pour que* G *soit unipotent, il faut et il suffit que pour tout nombre premier q distinct de la caractéristique p de k,* G *ne contienne pas de sous-groupe isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_q$.*

4.5. Variétés abéliennes. — Soit G une variété abélienne définie sur un corps k 569
algébriquement clos. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) G est unipotent.

ii) G = 0.

iii) Il existe un entier n, premier à la caractéristique p de k, tel que G ne contienne pas de sous-groupe isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_n$.

En effet, si G est une variété abélienne de dimension d, on sait (cf. S. Lang, *Abelian varieties*, chap. IV § 3. th. 6.) que le groupe ${}_nG(k)$ (n entier premier à p) est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2d}$, donc est isomorphe à $(\boldsymbol{\mu}_n)^{2d}$. D'où iii) $\Rightarrow$ ii), et ii) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ iii) sont évidents.

4.6. Cas général. — Si G et H sont deux groupes algébriques définis sur un corps k algébriquement clos, nous noterons $\mathrm{P}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ la propriété : « il n'existe pas de sous-groupe algébrique de G isomorphe à H ». On obtient alors les caractérisations suivantes des groupes unipotents :

Théorème 4.6.1. — *Soit* G *un groupe algébrique défini sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p. Alors :*

i) *Si* G *est lisse, affine et connexe :*

$$\mathrm{G} \textit{ est unipotent } \Longleftrightarrow \exists\, n > 1 \textit{ tel que } \mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_n) \textit{ soit vraie } \Longleftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{G}, \mathbb{G}_m) \textit{est vraie.}$$

ii) *Si* G *est lisse et connexe :*

$$\mathrm{G} \textit{ est unipotent } \Longleftrightarrow \exists\, n \textit{ premier à } p \textit{ tel que } \mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_n) \textit{ soit vraie.}$$

570 iii) *Si* G *est lisse :*

$$\mathrm{G} \textit{ est unipotent } \Longleftrightarrow \textit{ pour tout nombre premier } n \neq p,\ \mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_n) \textit{est vraie.}$$

iv) G *est affine connexe et $p > 0$:* G *unipotent* $\Longleftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_p)$ *est vraie.*

v) G *est connexe et $p > 0$:*

$$\mathrm{G} \textit{ unipotent } \Longleftrightarrow \exists\, n \textit{ premier à } p \textit{ tel que } \mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_n) \textit{ soit vraie et } \mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_p) \textit{ est vraie.}$$

vi) G *groupe algébrique quelconque :*

$$\mathrm{G} \textit{ est unipotent } \Longleftrightarrow \textit{ pour tout nombre premier } n,\ \mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_n) \textit{ est vraie.}$$

Démonstration. i) résulte de 4.1.1, et iv) de 4.3.1. Nous allons prouver vi) ; ii), iii), v) se démontrent de façon analogue et sont laissées au soin du lecteur.

Soit donc G un groupe algébrique. Si G est unipotent, $\mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_n)$ est vraie pour tout $n > 1$ (2.4 i)). Réciproquement, supposons $\mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_n)$ vraie pour tout nombre premier n et montrons que G est unipotent. Soit G^0 la composante neutre de G. Si G^0 est lisse, il résulte d'un théorème classique de Chevalley (*) que G^0 est extension d'une variété abélienne A par un groupe affine, connexe, lisse, L. Si G n'est pas lisse, ce qui suppose $p > 0$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 1.6.1), il existe un entier $n > 0$ tel que $\mathrm{G}'' = \mathrm{G}^0/{}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G})$ soit lisse (App. II 3.1). Donc G'' est extension d'une variété abélienne A par un groupe linéaire lisse et connexe L''. Notons L l'image réciproque de L'' dans G^0, qui est encore
571 affine et connexe, puisque ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G})$ est radiciel. Dans tous les cas, G possède donc une suite de composition :

$$0 \subset \mathrm{L} \subset \mathrm{G}^0 \subset \mathrm{G}$$

telle que L soit affine et connexe, $\mathrm{G}^0/\mathrm{L} = \mathrm{A}$ soit une variété abélienne, et G/G^0 un groupe étale.

Si $\mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_n)$ est vraie, a fortiori $\mathrm{P}(\mathrm{L}, \boldsymbol{\mu}_n)$ est vraie, donc L est unipotent (4.1.1 et 4.3.1). Si A n'est pas nul, il existe un nombre premier n, et un sous-groupe de A isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_n$ (4.5) ; d'après 5.1 ci-après, ce sous-groupe se relève dans G, ce qui contredit l'hypothèse $\mathrm{P}(\mathrm{G}, \boldsymbol{\mu}_n)$; donc $\mathrm{A} = 0$. Enfin si G/G^0 n'est pas unipotent, il existe un entier q et un sous-groupe de G/G^0 isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_q$ (4.4.1). On en déduit

(*) Sém. Bourbaki n°145, 1956/57.

comme ci-dessus que $P(G, \boldsymbol{\mu}_q)$ n'est pas vraie ; donc G/G^0 est unipotent, et par suite il en est de même de G.

5. Extension d'un groupe de type multiplicatif par un groupe unipotent 572

5.1. Énoncé du théorème. —

Définition 5.1.0. — Soient k un corps, G un k-groupe algébrique. Suivant la terminologie introduite par Rosenlicht (*Questions of rationality for solvable algebraic groups over non perfect fields*, Annali di Math. 61 (1963)), nous dirons que G est « k-résoluble » s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

i) G possède une suite de composition à quotients successifs isomorphes à $\mathbb{G}_a$.

ii) G possède une suite de composition caractéristique (G_i), telle que les quotients successifs G_i/G_{i+1} soient commutatifs et possèdent une suite de composition à quotients successifs isomorphes à $\mathbb{G}_a$.

Le fait que i) $\Rightarrow$ ii) est prouvé dans *loc. cit.*. En fait, on peut prendre pour suite de composition (G_i), la suite de composition introduite dans la démonstration de 3.9 ii).

Théorème 5.1.1. — *Soient k un corps,* U *un k-groupe algébrique unipotent,* H *un k-groupe de type multiplicatif,* E *un k-groupe algébrique extension de* H *par* U*, de sorte que l'on a la suite exacte :*

$$1 \longrightarrow U \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow 1.$$

Alors : 573

i) *L'extension* E *est triviale dans chacun des cas suivants :* 574

a) *k est algébriquement clos.*

b) *k est parfait et l'un des groupes* U *ou* H *est connexe.*

c) U *est k-résoluble.*

d) U *est lisse et* H *est connexe.*

ii) *Si* H′ *et* H″ *sont deux relèvements de* H *dans* E*, alors* H′ *et* H″ *sont conjugués par un élément de* $U(k)$ *dans chacun des cas suivants :*

a) *k est algébriquement clos et* H *est lisse.*

b) *k est algébriquement clos et* U *est lisse.*

(Nous signalons en cours de démonstration, d'autres cas où la conclusion de ii) est vraie sans supposer k algébriquement clos).

Si U est un groupe algébrique (resp. un groupe algébrique commutatif) défini sur un corps k, nous notons $H^1(k, U)$ (resp. $H^i(k, U)$, $i \geqslant 0$) l'ensemble pointé (resp. le $i^{\text{ième}}$ groupe) de cohomologie galoisienne de k à valeurs dans U (cf. J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes Maths. n°5, Springer).

Si S est un préschéma, H un S-préschéma en groupes commutatifs, G un S-préschéma en groupes qui opère sur H, nous notons $\mathrm{H}^i(\mathrm{G},\mathrm{H})$ [(7)] le $i^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de Hochschild de G à valeurs dans H (App. I 1).

Pour prouver 5.1.1, nous procèderons en plusieurs étapes.

575

5.2. Démonstration de 5.1.1 i) et ii) dans le cas U lisse et H étale. —

Lemme 5.2.1. — *Avec les notations de* 5.1.1*, si* H *est étale, le morphisme canonique* $\mathrm{E} \to \mathrm{H}$ *possède une section* $s : \mathrm{H} \to \mathrm{E}$*, définie sur* k*, dans les cas suivants :*

a) *k est algébriquement clos.*

b) *k est parfait et* U *est lisse et connexe.*

c) U *est « k-résoluble ».*

a) résulte simplement du fait que $\mathrm{E}(k) \to \mathrm{H}(k)$ est surjectif. On a b) $\Rightarrow$ c) d'après 4.1.2. b) et 2.3 (bis). Il suffit donc de traiter le cas c). Or soit x un point de H, x est donc une partie à la fois ouverte et fermée de H, et le sous-schéma induit est isomorphe à Spec K, où K est une extension finie séparable de k. Soit X l'image réciproque dans E du schéma x. Le K-schéma X est un K-espace principal homogène sous le groupe U_{K}. Mais U_{K} possède une suite de composition à quotients successifs isomorphes à $(\mathbb{G}_a)_{\mathrm{K}}$, donc $\mathrm{H}^1(\mathrm{K},\mathrm{U}_{\mathrm{K}}) = 0$ (J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, chap. III, prop. 6) et par suite X est trivial, donc possède un point rationnel sur K. On obtient ainsi une k-section de $\mathrm{E} \to \mathrm{H}$ au-dessus de x, pour tout point x de H, d'où l'existence d'une section $\mathrm{H} \to \mathrm{E}$.

Lemme 5.2.3. — [(8)] *Avec les notations de* 5.1.1*, supposons* H *étale. Alors :*

i) *L'extension* E *est triviale dans chacun des cas suivants :*

a) U *est commutatif et* $\mathrm{E} \to \mathrm{H}$ *possède une section.*

576 b) *k est algébriquement clos.*

c) *k est parfait et* U *est connexe.*

d) U *est « k-résoluble ».*

De plus, dans chacun des cas ci-dessus, deux relèvements H' *et* H'' *de* H *dans* E *sont conjugués par un élément de* $\mathrm{U}(k)$.

ii) *Soit* R *le k-foncteur :* $(\mathbf{Sch}/k)^{\circ} \to \mathbf{Ens}$ *tel que, pour tout k-préschéma* S, R(S) *soit l'ensemble des relèvements de* H_{S} *dans* E_{S}*. Alors si* U *est commutatif,* R *est représentable par un k-schéma affine, non vide. Le groupe* U *opère par automorphismes intérieurs sur* R*, et cette opération fait de* R *un espace homogène sous* U (*pour la topologie* fpqc (cf. Exp. IV)).

Démonstration de i). Nous allons ramener les cas b), c) et d) au cas a).

Cas b) Comme U possède une suite de composition caractéristique, à quotients successifs commutatifs (3.5 i) $\Leftrightarrow$ iv)), on se ramène immédiatement au cas où U est

(7) N.D.E. : on a remplacé H^i_0 par H^i, pour se mettre en accord avec les notations de App. I et de Exp. I.

(8) N.D.E. : il n'y a pas de numéro 5.2.2.

commutatif. De plus $E \to H$ possède une section d'après 5.2.1 a) et nous sommes ramenés au cas a).

Cas d) On procède de même en utilisant 5.1.0 ii) et 5.2.1 c).

Cas c) Soit $E_{\text{réd}}$ le sous-groupe réduit associé à E. Comme H est lisse, $E_{\text{réd}}$ est extension de H par $U' = U \cap E_{\text{réd}}$, et on peut remplacer E par $E_{\text{réd}}$. Mais U, donc aussi U', est connexe, et il est clair que U' est la composante neutre de $E_{\text{réd}}$, donc est lisse. Mais alors U' est lisse et connexe, k est parfait, donc U' est k-résoluble (4.1.4 b)) et nous sommes ramenés au cas d).

Les réductions précédentes montrent que dans les cas b), c) et d) on peut supposer **577**
que U possède une suite de composition (U_i), caractéristique, telle que U_i/U_{i+1} soit commutatif et telle que les applications $U_i(k) \to (U_i/U_{i+1})(k)$ soient surjectives (dans les cas c) et d), ce dernier point provient de $H^1(k, \mathbb{G}_a) = 0$). Un dévissage immédiat montre alors qu'il suffit de prouver la conjugaison de deux relèvements H' et H'' dans E lorsque U est commutatif. Bref, il suffit de prouver i) a). Dans ce cas, la trivialité de l'extension E est assurée si $H^2(H, U) = 0$ (App. I 3.1) et la conjugaison de H' et H'' l'est si $H^1(H, U) = 0$. Or nous avons le lemme suivant :

Lemme 5.2.4. — *Soient* S *un préschéma,* U *un* S*-préschéma en groupes commutatif,* H *un* S*-préschéma en groupes, étale, fini, de rang* n*, qui opère sur* U. *Alors les groupes* $H^i(H, U)$ $(i > 0)$ *sont annulés par* n *dans les deux cas suivants :*

a) H *est un* S*-groupe constant* (Exp. I 4.1).

b) S *est le spectre d'un corps.*

Démonstration de a). Le groupe H est par hypothèse le groupe constant associé à un groupe ordinaire $\{H\}$ d'ordre n. Il est clair[(9)] alors que $H^i(H, U)$ est isomorphe au $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie $H^i(\{H\}, U(S))$ du groupe $\{H\}$, à valeurs dans le groupe ordinaire U(S), et il est classique que ces groupes sont annulés par n (J.-P. Serre, *Corps locaux*, Chap. VIII, prop. 4 cor. 1).

Démonstration de b). Soit $x \in H^i(H, U)$ $(i > 0)$ que l'on représente par un i-cocycle **578**
$f : H^{(i)} \to U$ (où $H^{(i)}$ désigne le produit, sur k, de i copies de H). Si K est une extension finie galoisienne de k qui décompose H, il résulte de a) que nf_K est un cobord. Plus précisément, un calcul facile montre que si on définit le K-morphisme $F_K : H_K^{(i-1)} \to U_K$ par la formule :

$$F_K(h_1, \dots, h_{i-1}) = \sum_{h \in H(K)} f_K(h_1, \dots, h_{i-1}, h),$$

on a au signe près :

$$d(F_K) = nf_K \qquad (d \text{ opérateur cobord}).$$

Or un argument galoisien immédiat, montre que F_K provient d'un k-morphisme $F : H^{(i-1)} \to U$, et par suite, on a $d(F) = nf$.

(9) N.D.E. : Il s'agit de la proposition III.6.4.2 du livre de M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques* I, Masson & North-Holland (1970).

Corollaire 5.2.4 bis. — *Avec les notations de* 5.2.4, *supposons de plus que* U *est plat et de présentation finie sur* S, *à fibres unipotentes, et que n est premier aux caractéristiques résiduelles de* S. *Alors, dans les cas* a) *et* b) *ci-dessus, on a* $\mathrm{H}^i(\mathrm{H},\mathrm{U}) = 0$ *pour* $i > 0$.

Il suffit de montrer que l'élévation à la puissance n dans U est un isomorphisme, car cela entraînera que la multiplication par n dans $\mathrm{H}^i(\mathrm{H},\mathrm{U})$ sera à la fois un isomorphisme et le morphisme nul, donc $\mathrm{H}^i(\mathrm{H},\mathrm{U}) = 0$. Or, avec les hypothèses faites sur U, il suffit de vérifier que l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ est un isomorphisme sur les fibres de U (EGA IV 17.9.5) ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps k de caractéristique p. Comme $(n,p) = 1$, l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans U est un morphisme étale (Exp. VII), et c'est un monomorphisme (2.4 i)), donc une immersion
579 ouverte (EGA IV 17.9.1). Cela prouve déjà que la restriction à la composante neutre U^0 est un isomorphisme ; comme U/U^0 est un p-groupe fini, on a terminé.

Ceci achève de prouver 5.2.3 i) a), puisque H, étant un groupe de type multiplicatif étale, est d'ordre premier à p.

Démonstration de 5.2.3 ii). Il est clair que R est un faisceau pour la topologie fpqc. Par ailleurs, compte tenu de la descente des schémas affines, les assertions de 5.2.3 ii) sont locales pour la topologie fpqc. Nous pouvons donc supposer k algébriquement clos. Le groupe H est alors décomposé et l'extension E est triviale (i b)) ; soit H' un relèvement de H dans E. Pour tout k-préschéma S, et tout relèvement H'' de H_{S} dans E_{S}, H'_{S} et H'' sont conjugués par un élément de U(S) puisque $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_{\mathrm{S}},\mathrm{U}_{\mathrm{S}}) = 0$ (5.2.4 bis). Soit alors $\mathrm{U}^{\mathrm{H}'}$ le faisceau des invariants de U sous H', qui est représentable par un sous-groupe algébrique de U (Exp. VIII 6.5 d)). Il résulte des remarques précédentes que le k-morphisme :

$$\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{R}, \qquad u \mapsto \mathrm{int}(u)\mathrm{H}' \quad (u \in \mathrm{U}(\mathrm{S}))$$

définit un k-isomorphisme $\mathrm{U}/\mathrm{U}^{\mathrm{H}'} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}$. Ceci prouve la représentabilité de R et le fait que R est affine (2.1).

Remarque 5.2.5. — On peut montrer que les assertions de 5.2.3 ii) sont encore vraies lorsque U n'est pas commutatif, mais nous n'en aurons pas besoin pour prouver 5.1.1.

580

5.3. Étude du cas H lisse. —

Proposition 5.3.1. — *Les assertions contenues dans* 5.2.3 i) *restent vraies lorsque l'on remplace l'hypothèse* « H *étale* » *par* « H *lisse* ».

Procédant comme dans la démonstration de 5.2.3 i), on se ramène au cas où de plus U est commutatif.

Soit $\mathbb{N}'$ l'ensemble des entiers > 0, premiers à p, ordonné par la relation de divisibilité. Pour tout $n \in \mathbb{N}'$, ${}_n\mathrm{H}'$ est un groupe étale et la famille des ${}_n\mathrm{H}'$ $(n \in \mathbb{N}')$ est schématiquement dense dans H, puisque H est lisse (Exp. IX 4.10). Notons E_n l'image réciproque de ${}_n\mathrm{H}$ dans E, de sorte que E_n est une extension de ${}_n\mathrm{H}$ par U, enfin soit R_n le k-foncteur des relèvements de ${}_n\mathrm{H}$ dans E_n (cf. 5.2.3 ii)). Si n divise m, il est clair que l'on a un k-morphisme naturel $\mathrm{R}_m \to \mathrm{R}_n$, de sorte que les R_n forment un système projectif de k-foncteurs. Comme R_n est représentable par un k-schéma affine non

vide (5.2.3 ii)), et qu'une limite inductive filtrante d'anneaux non nuls est non nulle, le foncteur $\mathrm{R} = \varprojlim \mathrm{R}_n$ est représentable par un k-schéma affine non vide (EGA IV 8 et 1.9.1). Il existe donc une extension K de k et un point $u \in \mathrm{R}(\mathrm{K})$. L'image u_n de u dans $\mathrm{R}_n(\mathrm{K})$ correspond à un relèvement H'_n de $({}_n\mathrm{H})_\mathrm{K}$ dans $(\mathrm{E}_n)_\mathrm{K}$. Par construction, $\mathrm{H}'_n = {}_n(\mathrm{H}'_m)$ si n divise m. Posons $\mathrm{U}_n = (\mathrm{U}_\mathrm{K})^{\mathrm{H}'_n}$. Le choix de H'_n permet d'identifier $(\mathrm{R}_n)_\mathrm{K}$ à $\mathrm{U}_\mathrm{K}/\mathrm{U}_n$. Mais la famille des H'_n est filtrante croissante, donc la famille des U_n est filtrante décroissante et par suite est stationnaire pour n assez grand (U_K est noethérien). Il en résulte que la famille des $(\mathrm{R}_n)_\mathrm{K}$ est stationnaire, et par suite il en **581**
est de même de la famille des R_n. Bref, on a $\mathrm{R}_n = \mathrm{R}$ pour n assez grand.

Avec les hypothèses faites, il résulte de 5.2.3 i) que $\mathrm{R}_n(k)$ n'est pas vide. On peut donc trouver un système cohérent de relèvements H'_n de ${}_n\mathrm{H}$ pour $n \in \mathbb{N}'$. Notons H' le plus petit sous-schéma fermé de E qui majore H'_n pour tout n (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 7). Le raisonnement fait dans Exp. XV 4.6 montre que H' est un groupe algébrique lisse, commutatif, dont la formation commute à l'extension du corps de base. Pour montrer que H' est un relèvement de H dans E, nous pouvons donc supposer k algébriquement clos. D'après BIBLE 4 th. 4, H' est alors le produit direct d'un groupe de type multiplicatif M (lisse) par un groupe unipotent V. Les groupes H'_n sont alors nécessairement contenus dans M (2.4) et vu la définition de H' cela entraîne $\mathrm{H}' = \mathrm{M}$. Donc H' est de type multiplicatif et par suite $\mathrm{H}' \cap \mathrm{U} = 0$. Le morphisme $\mathrm{H}' \to \mathrm{H}$ est donc un monomorphisme, par ailleurs il résulte du théorème de densité (Exp. IX 4.10) que c'est un épimorphisme, c'est donc bien un isomorphisme.

Soient maintenant H' et H'' deux relèvements de H dans E. Pour tout $n \in \mathbb{N}'$, notons $\mathrm{T}_n = \underline{\mathrm{Transp}}({}_n\mathrm{H}', {}_n\mathrm{H}'')$ le transporteur de ${}_n\mathrm{H}'$ dans ${}_n\mathrm{H}''$, qui est représentable par un sous-schéma fermé de U (Exp. VIII 6.5 e)). Les T_n forment une famille filtrante décroissante de sous-schémas fermés de U, non vides d'après 5.2.3 i a). Soit T la valeur stationnaire. Sous les hypothèses de 5.2.3 i), $\mathrm{T}_n(k)$ n'est pas vide. Il existe donc un élément u de $\mathrm{U}(k)$ tel que ${}_n\mathrm{H}'' = \mathrm{int}(u){}_n\mathrm{H}'$ pour tout $n \in \mathbb{N}'$. Mais alors $\mathrm{H}'' = \mathrm{int}(u)\mathrm{H}'$ (Exp. IX 4.8 b). **582**

5.4. Étude du cas U radiciel. —

Proposition 5.4.1. — *Si k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, et si* U *est radiciel, l'extension* E *de* 5.1.1 *est triviale.*

Utilisant une suite de composition caractéristique de U, nous pouvons nous limiter au cas où U est égal à $(\boldsymbol{\alpha}_p)^r$ (3.9).

Il résulte de App. II 2.2 et 2.1 que l'on a des isomorphismes de k-foncteurs :

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{k\text{-gr}}(\boldsymbol{\alpha}_p)^r \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Aut}}_{p\text{-Lie}}(\mathrm{Lie}(\boldsymbol{\alpha}_p)^r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(\boldsymbol{\alpha}_p)^r).$$

Considérons alors un k-espace vectoriel V de rang r, le k-schéma en groupes vectoriel W(V) (Exp. I 4.6), et identifions $(\boldsymbol{\alpha}_p)^r$ à ${}_\mathrm{F}\mathrm{V}$. Les remarques qui précèdent montrent alors que l'action de H sur ${}_\mathrm{F}\mathrm{V}$, définie par l'extension E, provient d'une représentation linéaire v de H dans V. Considérons alors la suite exacte :

$$(*) \qquad 0 \to {}_\mathrm{F}\mathrm{V} \to \mathrm{V} \xrightarrow{\mathrm{F}} \mathrm{V}^{(p)} \to 0,$$

où F est le morphisme de Frobenius. Alors $(*)$ est une suite exacte de H-groupes, à condition de faire opérer H sur le facteur $V^{(p)}$ grâce à la représentation linéaire $H \xrightarrow{v} GL(V) \xrightarrow{F} GL(V^{(p)})$.

Comme le corps k est parfait, le morphisme $F : V \to V^{(p)}$ induit une application surjective $V(k) \to V^{(p)}(k)$. Il résulte alors de App. I 2.1 que la suite exacte $(*)$ définit
583 une suite exacte :

$$(**) \qquad H^1(H, V^{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(H, {}_F V) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(H, V).$$

Montrons que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(H, V) = 0$. Soit donc E' un groupe algébrique extension de H par V :

$$1 \to V \to E' \xrightarrow{h} H \to 1.$$

Le schéma E' est un torseur de base H est de groupe $\mathbb{G}_a^r$, donc définit un élément de $H^1(H, \mathscr{O}_H^r)$ (au sens de la cohomologie des faisceaux cohérents). Comme H est affine, on a $H^1(H, \mathscr{O}_H^r) = 0$ (EGA III § 1). C'est dire que $E' \to H$ possède une section. Par suite, le groupe $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(H, V)$ est isomorphe à $H^2(H, V)$ (App. I 3.1). Or $H^i(H, V) = H^i(H, W(V)) = 0$ pour $i > 0$ (Exp. IX 3.1). On conclut alors, par la suite exacte $(**)$, que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(H, {}_F V) = 0$, donc que E est une extension triviale.

5.5. Démonstration de 5.1.1 i). — Si k est de caractéristique 0, U est k-résoluble (4.1.3) et H est lisse ; le fait que E soit une extension triviale résulte donc de 5.3.1 et de 5.2.3 d). On prouve de même que deux relèvements de H, dans E, sont conjugués par un élément de $U(k)$.

Désormais, nous supposons donc que k est un corps de caractéristique $p > 0$.

Démonstration de i) b) : *Cas k parfait,* U *connexe.*

Nous allons nous ramener au cas où U est radiciel. Pour cela notons que k étant parfait, $H_{\mathrm{réd}}$ est lisse ; soit E' son image réciproque dans E. Il résulte alors de 5.3.1 et
584 de 5.2.3 i) c) que l'extension :

$$1 \longrightarrow U \longrightarrow E' \longrightarrow H_{\mathrm{réd}} \longrightarrow 1$$

est triviale. Soit H_1 un relèvement de $H_{\mathrm{réd}}$ dans E. D'après App. II 3.1, il existe un entier $n > 0$ tel que $E^{(n)} = E/_{F^n}(E)$ soit lisse ; soit E'' le sous-groupe algébrique de E engendré par H_1 et ${}_{F^n}(E)$ (c.-à-d. l'image réciproque dans E de l'image de H_1 dans $E^{(n)}$). Notons H'' l'image de E'' dans H. Alors je dis que $H'' = H$. En effet, notons R l'image de ${}_{F^n}(E)$ dans H, de sorte que H'' est engendré par R et $H_{\mathrm{réd}}$. Le groupe H/R est un quotient de $E^{(n)}$ donc est lisse ; par suite le morphisme canonique

$$H_{\mathrm{réd}} \longrightarrow H/R$$

est un épimorphisme, donc H est engendré par R et $H_{\mathrm{réd}}$, donc est égal à H''. On obtient ainsi une suite exacte :

$$(\dagger) \qquad 1 \longrightarrow U'' = U \cap E'' \longrightarrow E'' \longrightarrow H \longrightarrow 1.$$

Mais E'' a même espace sous-jacent que H_1 donc U'' est radiciel. Par ailleurs, il est clair qu'il suffit de prouver que l'extension $(\dagger)$ est triviale, ce qui résulte de 5.4.1.

Démonstration de i) b) : *Cas k parfait,* H *connexe.*

Le groupe U est extension d'un groupe étale par sa composante neutre U^0. Le cas U connexe venant d'être traité, il suffit d'examiner le cas U étale. On a alors le lemme plus précis :

Lemme 5.5.1. — *Avec les notations de* 5.1.1*, supposons de plus* U *étale. Alors :*

i) *Si* H *est connexe, il existe un unique relèvement de* H *dans* E*, à savoir la composante neutre* E^0 *de* E. 585

ii) *Si k est algébriquement clos,* E *est triviale, et deux relèvements de* H *dans* E *sont conjugués par un élément de* $U(k)$.

i) La formation de la composante neutre commutant à l'extension du corps de base, nous pouvons nous limiter au cas k algébriquement clos. Si H est un tore, E est triviale (5.3.1 et 5.2.3 i b)), et il est clair que E^0 est l'unique relèvement de H. Ceci prouve déjà que dans le cas général, $E^0 \cap U$ est radiciel ; comme par ailleurs il est étale (U étant étale), il est nul. Le morphisme $E^0 \to H$ est donc un monomorphisme, plat (car E^0 est ouvert dans E) et surjectif (H est connexe), donc est un isomorphisme. Si maintenant H' est un autre relèvement de H, H' est connexe, donc contenu dans E^0 et par suite est égal à E^0.

ii) Soit H^0 la composante neutre de H. D'après i), E^0 est l'unique relèvement de H^0 dans E. Posons $E' = E/E^0$, $H' = H/H^0$, de sorte que l'on a l'extension :

$$1 \longrightarrow U \longrightarrow E' \longrightarrow H' \longrightarrow 1.$$

H' étant étale, cette extension est triviale (5.2.3 i b)). Si H'_1 est un relèvement de H' dans E', H_1 son image réciproque dans E, il est clair que H_1 relève H dans E. Si H_2 est un deuxième relèvement de H dans E, il contient E^0 ; d'après 5.2.3 i b), l'image de H_2 dans E' est conjuguée de H'_1 par un élément u de $U(k)$, d'où immédiatement $H_2 = \mathrm{int}(u)H_1$.

Remarque 5.5.2. — Sous les hypothèses de 5.5.1 i), il est facile de voir que E^0 centralise U. 586

Démonstration de 5.1.1 i) a). Utilisant la suite de composition

$$1 \longrightarrow U^0 \longrightarrow U \longrightarrow U/U^0 \longrightarrow 1,$$

i) a) résulte de la conjonction de i) b) et de 5.5.1 ii).

Avant de prouver 5.1.1 c) et d), nous allons d'abord établir 5.1.1 ii).

Démonstration de 5.5.1 ii) a). Faute de disposer d'un énoncé général satisfaisant, nous allons décrire un certain nombre de cas où, lorsque H est lisse, deux relèvements de H dans E sont conjugués :

Proposition 5.6.1. — *Avec les notations de* 5.1.1*, supposons de plus* H lisse*, et soient* H' *et* H'' *deux relèvements de* H *dans* E*. Alors* H' *et* H'' *sont conjugués par un élément de* $U(k)$ *dans chacun des cas suivants :*

a) *k est algébriquement clos.*

b) U *est commutatif.*

c) *k est parfait et* U *est connexe.*

d) U *est k-résoluble.*

e) *Le centralisateur de* H′ *dans* U *est k-résoluble.*

f) *Le groupe de type multiplicatif* H *est trivialisé par une extension finie galoisienne* K *de k de degré premier à p.*

587 *Démonstration.* a), b), c), d) résultent de 5.3.1.

e) Soient Z le centralisateur de H′ dans U, T le transporteur de H′ dans H″. D'après a), T n'est pas vide, donc T est un espace principal homogène sous Z, et l'hypothèse faite sur Z entraîne qu'il est trivial.

f) Procédant comme dans 5.3.1, on voit qu'il suffit de considérer le cas H étale. Supposons d'abord H diagonalisable, défini par le groupe ordinaire M, d'ordre m premier à p. La donnée des deux relèvements H′ et H″ définit un 1-cocycle de M à valeurs dans U(k), c'est-à-dire une application h de M dans U(k) telle que $h(mn) = h(m)\,{}^{m}h(n)$ pour tout couple m, n d'éléments de M. Les groupes H′ et H″ sont conjugués par un élément de U(k) si et seulement si il existe $a \in \mathrm{U}(k)$ tel que

$$h(m) = a^{-1}\,({}^{m}a).$$

Or le groupe abstrait U(k) possède une suite de composition à quotients successifs commutatifs et annulés par une puissance de p (il est loisible de supposer $p > 0$ compte tenu de 5.6.1 c)). On en déduit immédiatement dans ce cas que h est un cobord.

Examinons maintenant le cas général. Notons encore Z le centralisateur de H′ dans U et T le transporteur de H′ dans H″ qui est un torseur sous Z. Par hypothèse, il existe une extension galoisienne finie K de k, de groupe de Galois G, d'ordre premier à p, qui trivialise H. D'après l'étude faite plus haut, H'_{K} et $\mathrm{H}''_{\mathrm{K}}$ sont conjugués par
588 un élément de U(K), donc T_{K} est trivial. Par suite T est défini par un élément de $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{Z})$. Pour les mêmes raisons que plus haut, l'hypothèse faite sur G entraîne que $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{Z}) = e$, donc T est trivial.

5.7. Démonstration de 5.1.1 ii) b). —

Lemme 5.7.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, séparé et* lisse *sur* S, H *un* S*-groupe de type multiplicatif qui opère sur* G. *Alors le* S*-foncteur* $\mathrm{Z} = \mathrm{G}^{\mathrm{H}}$ *des invariants de* G *sous* H *est représentable par un sous-*S*-préschéma en groupes de* G*, fermé et* lisse *sur* S.

Le fait que G^{H} soit représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de G résulte de Exp. VIII 6.5 d). Considérons alors le produit semi-direct $\mathrm{K} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$. Le centralisateur de H dans K est alors égal à $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$. Pour prouver que Z est lisse, nous devons vérifier que si S est affine, si S_0 est un sous-schéma fermé de S défini par un idéal de carré nul, et si u_0 est un élément de $\mathrm{Z}(\mathrm{S}_0)$, alors il existe un élément u de Z(S) qui relève u_0. Or comme G est lisse sur S, il existe un élément u de G(S) qui relève u_0. Soit i l'immersion canonique de H dans K et considérons les deux S-morphismes de groupes

$$\mathrm{H} \rightrightarrows \mathrm{K}, \qquad i \quad \text{et} \quad \mathrm{int}(u)i = j.$$

Comme u_0 appartient à $\mathrm{Z}(\mathrm{S}_0)$, on a $i_{\mathrm{S}_0} = j_{\mathrm{S}_0}$. D'après Exp. IX 3.2, il existe $v \in \mathrm{K}(\mathrm{S})$
589 qui relève la section unité de $\mathrm{K}(\mathrm{S}_0)$, et qui est tel que

$$i = \mathrm{int}(v)j = \mathrm{int}(vu)i.$$

Donc $vu = (u', v')$ appartient à $(\mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H})(\mathrm{S})$. Donc u' appartient à $\mathrm{Z}(\mathrm{S})$ et relève u_0.

Lemme 5.7.2. — *Soient k un corps,* H *un k-groupe algébrique et soit* P(H) *la propriété suivante :*

> *« pour tout k-groupe lisse et unipotent* U*, et pour toute extension* E *de* H *par* U*, deux relèvements de* H *dans* E *sont conjugués par un élément de* $\mathrm{U}(k)$ *».*

Alors si H *est un groupe algébrique extension d'un groupe de type multiplicatif* H'' *par un groupe de type multiplicatif* H' *et si* $\mathrm{P}(\mathrm{H}')$ *et* $\mathrm{P}(\mathrm{H}'')$ *sont vraies,* P(H) *est vraie.*

En effet, soit U un k-groupe unipotent lisse, E une extension de H par U, H_1 et H_2 deux relèvements de H dans E, H'_1 et H'_2 les relèvements correspondants de H'. Comme $\mathrm{P}(\mathrm{H}')$ est vraie, il existe $u \in \mathrm{U}(k)$ tel que $\mathrm{H}'_2 = \mathrm{int}(u)\mathrm{H}'_1$. Quitte à remplacer H_1 par $\mathrm{int}(u)\mathrm{H}_1$, nous pouvons supposer $\mathrm{H}'_1 = \mathrm{H}'_2$, que nous nous permettons de noter simplement H'. Soit $\mathrm{E}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{E}}\,\mathrm{H}'$, qui est égal à

$$\mathrm{U}^{\mathrm{H}'} \cdot \mathrm{H}_1 = \mathrm{U}^{\mathrm{H}'} \cdot \mathrm{H}_2 \,.$$

D'après 5.6.1, $\mathrm{U}^{\mathrm{H}'} = \mathrm{U}'$ est lisse. Considérons alors l'extension

$$1 \longrightarrow \mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{E}' \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow 1.$$

Par construction H' est central dans E', donc invariant. Par passage au quotient, on obtient la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{E}'' \longrightarrow \mathrm{H}'' \longrightarrow 1.$$

Comme U' est lisse, et comme $\mathrm{P}(\mathrm{H}'')$ est vraie, les deux images de H_1 et de H_2 **590**
dans E'' sont conjuguées par un élément u de $\mathrm{U}'(k)$, mais alors $\mathrm{H}_1 = \mathrm{int}(u)\mathrm{H}_2$.

Pour démontrer 5.1.1 ii) b) notons alors que, k étant algébriquement clos, H possède une suite de composition dont les quotients successifs sont lisses ou isomorphes à $\boldsymbol{\mu}_p$ lorsque $p > 0$. Par utilisation répétée de 5.7.2, nous sommes ramenés au cas où H est lisse ou égal à $\boldsymbol{\mu}_p$. Dans le premier cas, il suffit d'appliquer 5.1.1 ii) a). Reste le cas $\mathrm{H} = \boldsymbol{\mu}_p$. Comme U est lisse, U possède une suite de composition caractéristique à quotients successifs étales ou isomorphes à $(\mathbb{G}_a)^r$ (3.9). Si U est étale, on applique 5.5.1. Il reste finalement le cas $\mathrm{H} = \boldsymbol{\mu}_p$, $\mathrm{U} = \mathbb{G}_a^r$.

Nous devons montrer que $\mathrm{H}^1(\boldsymbol{\mu}_p, \mathrm{U}) = 0$. La méthode utilisée dans 5.4.1 ne s'applique plus ici, car $\boldsymbol{\mu}_p$ n'opère pas en général linéairement sur $(\mathbb{G}_a)^r$. Fixons les notations : H' désigne un relèvement de H dans E, $\mathfrak{e} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{E}$, $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{U}$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{H}$, $\mathfrak{h}' = \mathrm{Lie}\,\mathrm{H}'$. Soit X un élément non nul de $\mathfrak{h}$ tel que $\mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X}$ (App. II 3.1) et soit X' son relèvement dans $\mathfrak{h}'$.

Comme $\boldsymbol{\mu}_p$ est un groupe radiciel de hauteur 1, il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des relèvements de H dans E, et l'ensemble A des $\mathrm{Y} \in \mathfrak{e}$, tels que $\mathrm{Y}^{(p)} = \mathrm{Y}$, qui se projettent sur X (App. II 2.2). De même si $\mathrm{Y} \in \mathrm{A}$ correspond au relèvement H'' de H dans E, et si $u \in \mathrm{U}(k)$, alors $\mathrm{int}(u)\mathrm{H}' = \mathrm{H}''$ si et seulement si $\mathrm{Ad}(u)\mathrm{X} = \mathrm{Y}$. Soit donc B le sous-ensemble des $\mathrm{Y} \in \mathfrak{e}$, de la forme $\mathrm{Ad}(u)\mathrm{X}$, où $u \in \mathrm{U}(k)$. On a évidemment $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, et tout revient à montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ si k est **591** algébriquement clos.

a) Étude de A. Comme $\mathfrak{u}$ est commutative et normalisée par $\mathfrak{h}$, la formule de Jacobson (Exp. $\mathrm{VII_A}$ 5.2) donne simplement ici, pour $u \in \mathfrak{u}$:

$$(\mathrm{X}' + u)^{(p)} = \mathrm{X}'^{(p)} + u^{(p)} + (\operatorname{ad} \mathrm{X}')^{p-1}(u) = \mathrm{X}' + (\operatorname{ad} \mathrm{X}')^{p-1}(u),$$

de sorte que $\mathrm{X}' + u \in \mathrm{A} \Leftrightarrow u = (\operatorname{ad} \mathrm{X}')^{p-1}(u)$.

Or soit $\mathfrak{u} = \coprod_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mathfrak{u}_n$ la décomposition canonique de $\mathfrak{u}$ sous l'action de H', que l'on peut encore écrire :

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 \oplus \coprod_{n \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}} \mathfrak{u}_n.$$

Si $u \in \mathfrak{u}_0$, on a $\operatorname{ad} \mathrm{X}'(u) = 0$. Si $u \in \mathfrak{u}_n$ ($n \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$), on a $(\operatorname{ad} \mathrm{X}')^{p-1}(u) = u$. Finalement, $\mathrm{Y} = \mathrm{X}' + u$ est un élément de A si et seulement si $u \in \coprod_{n \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}} \mathfrak{u}_n$. Retenons que A est l'ensemble des points rationnels sur k d'un sous-schéma irréductible de $\mathrm{W}(\mathfrak{e})$, de dimension égale à $\operatorname{rg} \mathfrak{u} - \operatorname{rg} \mathfrak{u}_0 = \operatorname{rg} \mathfrak{u} - \operatorname{rg} \operatorname{Centr}_{\mathfrak{u}}(\mathrm{X}')$.

b) Étude de B. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.7.3. — (Rosenlicht). *Soit* U *un groupe algébrique unipotent sur un corps k qui opère sur un k-schéma quasi-affine* X. *Alors l'orbite de tout point $x \in \mathrm{X}(k)$ est fermée dans* X (*par orbite de x nous entendons le sous-ensemble de* ens(X) *image de* G *par le morphisme $g \mapsto g \cdot x$*).

592 Par fonctorialité, G opère sur l'enveloppe affine de X (c'est-à-dire $\operatorname{Spec} \Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$), ce qui nous permet de supposer X affine. On peut ensuite supposer k algébriquement clos, X réduit et U lisse (noter que $\mathrm{U}_{\mathrm{réd}}$ opère sur $\mathrm{X}_{\mathrm{réd}}$ si k est parfait). Soit Y l'image schématique de G (EGA I 9.5.1) par le morphisme $g \mapsto g \cdot x$, qui est un sous-schéma fermé et réduit de X sur lequel G opère. Il résulte facilement de EGA IV 1.8.6 que l'orbite de x est une partie ouverte Z de Y, dense dans Y. Nous devons montrer que $\mathrm{Z} = \operatorname{ens}(\mathrm{Y})$. Soit F le sous-schéma fermé réduit de Y ayant $\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Z}$ pour espace sous-jacent. On a donc $\mathrm{F} = \mathrm{V}(\mathrm{J})$, où J est un idéal non nul de $\Gamma(\mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$. Comme G est lisse, G opère sur F, donc sur J et par suite (3.2) $\mathrm{J}^{\mathrm{G}} \neq 0$. Si a est un élément non nul de J^{G}, a est nécessairement constante sur l'orbite Z, donc est constante sur Y, Z étant dense dans Y. Mais alors l'idéal J contient k et $\mathrm{F} = \varnothing$.

Ceci étant, appliquons le lemme précédent au groupe U opérant sur l'espace affine $\mathrm{W}(\mathfrak{e})$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe. On obtient que l'orbite de X' est l'ensemble sous-jacent à un sous-préschéma fermé de $\mathrm{W}(\mathfrak{e})$. Par ailleurs, le stabilisateur Z de X' est le centralisateur de X' dans U, et l'on a une immersion fermée :

$$\mathrm{U}/\mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{W}(\mathfrak{e}).$$

Retenons que l'orbite de X' est l'espace sous-jacent à un sous-schéma fermé de $\mathrm{W}(\mathfrak{e})$ de dimension égale à $\dim \mathrm{U} - \dim \mathrm{Z}$.

c) fin de la démonstration de 5.1.1 ii) b). Lorsque k est algébriquement clos, l'ap-
593 plication canonique $\mathrm{U}(k) \to (\mathrm{U}/\mathrm{Z})(k)$ est surjective, de sorte que d'après le point b) précédent, B est l'ensemble des points rationnels d'un sous-schéma fermé de $\mathrm{W}(\mathfrak{e})$ de

dimension $\dim \mathrm{U} - \dim \mathrm{Z}$. Compte tenu du point a), pour prouver que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, il suffit alors de montrer que l'on a :

$$\mathrm{rg}\, \mathfrak{u} - \mathrm{rg}\, \mathrm{Centr}_{\mathfrak{u}}(\mathrm{X}') \leqslant \dim \mathrm{U} - \dim \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{U}}(\mathrm{X}').$$

Or U étant lisse, on a $\dim \mathrm{U} = \mathrm{rg}\, \mathfrak{u}$. D'autre part, on a (Exp. II 5.3.3) :

$$\dim \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{U}}(\mathrm{X}') \leqslant \mathrm{rg}\, \mathrm{Centr}_{\mathfrak{u}}(\mathrm{X}'),$$

d'où le résultat (notons que l'on a en fait $\dim \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{U}}(\mathrm{X}') = \mathrm{rg}\, \mathrm{Centr}_{\mathfrak{u}}(\mathrm{X}')$, ce qui redémontre que Z est lisse (5.7.1).

5.8. Fin de la démonstration de 5.1.1 i). — Il nous reste à prouver i) c) et i) d).

Démonstration de 5.1.1 i) d) (U lisse, H connexe). Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.8.1. — *Avec les notations de* 5.1.1*, supposons* U *lisse et* H *radiciel, et soit* H_1 *un sous-groupe algébrique de* H *qui possède un relèvement* H'_1 *dans* E. *Alors* H *possède un relèvement* H' *dans* E *qui majore* H'_1.

Par récurrence sur la hauteur de H/H_1, on peut supposer H/H_1 de hauteur 1. Soit $\mathrm{C}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{E}}(\mathrm{H}'_1)$. Je dis que le morphisme canonique $\mathrm{C}' \to \mathrm{H}$ est un épimorphisme. Pour établir ce point, nous pouvons supposer k algébriquement clos ; mais alors, l'extension E est triviale (5.1.1 i a)) ; soient H'' un relèvement de H dans E, H''_1 l'image **594**
réciproque de H_1 dans H''. Les groupes H'_1 et H''_1 sont deux relèvements de H_1 dans E, donc sont conjugués par un élément de $\mathrm{U}(k)$, puisque k est algébriquement clos et U lisse (5.1.1 ii b)). Il est clair alors que pour prouver l'assertion sur C', il suffit de la prouver pour $\mathrm{C}'' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{E}}(\mathrm{H}''_1)$. Mais dans ce cas, C'' majore H'', et la propriété est claire. Par ailleurs il résulte de 5.7.1 que $\mathrm{C} \cap \mathrm{U}$ est lisse. Il est clair alors que nous pouvons remplacer E par C, donc supposer H'_1 central. Mais alors, quitte à passer au quotient par H'_1, nous pouvons supposer $\mathrm{H}_1 = 0$ et H de hauteur 1.

Comme U est lisse, on a la suite exacte de p-algèbres de Lie : (App. II 3.2) :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Lie}\, \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{Lie}\, \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{Lie}\, \mathrm{H} \longrightarrow 0.$$

Compte tenu de App. II 2.2, dire que E est triviale équivaut à dire que $(*)$ est une extension triviale de p-algèbres de Lie. Supposons $\mathrm{H} \neq 0$ (donc $\mathrm{Lie}\, \mathrm{H} \neq 0$) et supposons avoir trouvé une sous-p-algèbre de Lie $\mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\, \mathrm{H}$ qui soit non nulle et qui se relève en une sous-p-algèbre de Lie $\mathfrak{h}'_1$ de Lie E. D'après *loc. cit.*, il existe un sous-groupe H_1 de H, tel que $\mathrm{Lie}\, \mathrm{H}_1 = \mathfrak{h}_1$, et un relèvement H'_1 de H_1 dans E tel que $\mathrm{Lie}\, \mathrm{H}'_1 = \mathfrak{h}'_1$. Appliquant à nouveau la réduction décrite plus haut, on se ramène au même problème, où l'on a remplacé H par H/H_1. Comme H est de hauteur 1, $\mathrm{Lie}(\mathrm{H}/\mathrm{H}_1) = \mathrm{Lie}\, \mathrm{H}/\mathrm{Lie}\, \mathrm{H}_1$ (*loc. cit.*), donc $\mathrm{rg}\, \mathrm{Lie}(\mathrm{H}/\mathrm{H}_1) \leqslant \mathrm{rg}\, \mathrm{Lie}(\mathrm{H}) - 1$. Bref, procédant par récurrence sur le rang de Lie H, on voit qu'il suffit, lorsque $\mathfrak{h} \neq 0$, de trouver une sous-algèbre de Lie **595**
non nulle de Lie H qui se relève dans Lie E. Or on a le lemme suivant :

Lemme 5.8.2. — *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, et φ un morphisme surjectif de p-k-algèbres de Lie de rang fini $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Alors :*

i) *Si* $\mathfrak{h}_{\overline{k}}$ *est réductive* (4.2.2) *et* $\neq 0$, *il existe une sous-algèbre de* Lie *réductive* $\mathfrak{h}_1$ *de* $\mathfrak{g}$, *dont l'image dans* $\mathfrak{h}$ *est non nulle.*

ii) *Si* k *est parfait et si* u *est un élément unipotent de* $\mathfrak{h}$ (*i.e. il existe* n *tel que* $u^{(p^n)} = 0$), *alors* u *se relève en un élément unipotent de* $\mathfrak{g}$.

Prenons pour X un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{h}$ dans le cas i) et u dans le cas ii), et soit X′ un relèvement de X dans $\mathfrak{g}$. La sous-p-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par X′ est une p-algèbre de Lie abélienne (Exp.VII) $\mathfrak{h}'$.

Cas i). Il est clair sur la description donnée dans 4.2.2 que la partie réductive (*loc. cit.*) de $\mathfrak{h}'_k$ est déjà définie sur k, notons-la $\mathfrak{r}'$. Je dis que l'image de $\mathfrak{r}'$ dans $\mathfrak{h}$ est non nulle. Pour établir ce point nous pouvons supposer k algébriquement clos, de sorte que $\mathfrak{h}' = \mathfrak{r}' \oplus \mathfrak{u}'$ ($\mathfrak{u}'$ partie unipotente de $\mathfrak{h}'$). Si l'image de $\mathfrak{r}'$ dans $\mathfrak{h}$ était nulle, l'image de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$ serait unipotente, donc serait nulle puisque $\mathfrak{h}$ est réductive (cf. 2.4 ii)), or par construction elle contient X.

Cas ii). On procède de même, en échangeant les rôles de $\mathfrak{r}'$ et de $\mathfrak{u}'$.

596 *Fin de la démonstration de* 5.8.1. Supposant H $\neq 0$, il existe d'après 5.8.2 une sous-algèbre de Lie réductive non nulle $\mathfrak{h}'_1$ de Lie E. Comme Lie U est unipotente (4.3 i)), on a nécessairement $(\mathrm{Lie}\,\mathrm{U}) \cap \mathfrak{h}'_1 = 0$, de sorte que $\mathfrak{h}'_1$ est un relèvement d'une sous-p-algèbre de Lie de Lie H.

Fin de la démonstration de 5.1.1 i d). D'après 5.8.1, il existe une famille de sous-groupes algébriques H'_n ($n \in \mathbb{N}$) de E, telle que H'_{n+1} majore H'_n et telle que H'_n relève ${}_{\mathrm{F}^n}\mathrm{H}$. La suite décroissante de sous-groupes $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{E}}(\mathrm{H}'_n)$ est stationnaire, soit C la valeur stationnaire. Le centre Z de C majore H'_n pour tout n, donc l'image de Z dans H majore ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{H})$ pour tout n, et par suite, est un sous-groupe ouvert de H (Exp. $\mathrm{VII_A}$ § 4), donc est égale à H puisque H est connexe. Pour prouver que E est triviale, on peut donc remplacer E par Z, donc supposer E commutatif. Nous verrons alors dans 7.2.1 que E contient un sous-groupe de type multiplicatif maximal M, dont la formation commute à l'extension du corps de base. Comme $\mathrm{E}_{\overline{k}}$ est une extension triviale (5.1.1 i) a)) et que U est unipotent, il est clair que M est l'unique relèvement de H dans E.

Démonstration de 5.1.1 i) c) (U k-résoluble). Comme $(\mathrm{H}/\mathrm{H})^0(k)$ est d'ordre premier à p, il est immédiat par dualité qu'il existe un entier n tel que ${}_n\mathrm{H}$ soit un sous-groupe étale et tel que le morphisme canonique ${}_n\mathrm{H} \to \mathrm{H}/\mathrm{H}^0$ soit un épimorphisme, de sorte que $\mathrm{H}/{}_n\mathrm{H}$ est connexe. D'après 5.2.3 d), il existe un relèvement H′ de ${}_n\mathrm{H}$ dans E. On
597 montre, comme dans le début de la démonstration de 5.8.1, que $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{E}}(\mathrm{H}')$ est un sous-groupe de E tel que C → H soit un épimorphisme et tel que $\mathrm{C} \cap \mathrm{U}$ soit lisse. Remplaçant E par C et passant au quotient par H′, on est ramené au cas où U est lisse et H connexe, c'est-à-dire au cas i) d).

Ceci achève la démonstration de 5.1.1.

5.9. Contre-exemples. — Indiquons d'abord un procédé pour obtenir des extensions non triviales d'un k-groupe de type multiplicatif H par un k-groupe unipotent U. Supposons donnée une action de H sur U, et soit E le produit semi-direct $\mathrm{E} = \mathrm{U}\cdot\mathrm{H}$. Soit d'autre part un élément de $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{U})$ représenté par un 1-cocycle a. Le groupe U opère par automorphismes intérieurs sur E. La donnée de a définit donc une k-forme de E notée E_a. Supposons de plus que U soit commutatif, alors U opère trivialement sur U et sur le quotient $\mathrm{E}/\mathrm{U} = \mathrm{H}$, de sorte que E_a est encore une extension de H par U. Supposons, pour simplifier, que H soit un groupe étale diagonalisable, de sorte que le groupe de Galois $\mathscr{G}$ de $\overline{k}/k$ opère trivialement sur $\mathrm{H}(k)$; l'action de $\mathscr{G}$ sur les points de $\mathrm{E}_a(\overline{k})$ est alors donnée par la formule :

$$^g(u,h) = (^g u + a(g) - {}^h a(g), h) \qquad (g \in \mathscr{G},\ u \in \mathrm{U}(\overline{k}),\ h \in \mathrm{H}(\overline{k})).$$

Si h est un point de $\mathrm{H}(k)$, X son image réciproque dans E_a, X est donc un torseur sous U défini par la classe du 1-cocycle de $\mathscr{G}$ à valeur dans U, $g \mapsto a(g) - {}^h a(g)$. Il en résulte que s'il existe un point h de $\mathrm{H}(k)$ tel que le 1-cocycle précédent ne soit pas **598**
trivial, l'extension E_a n'est pas triviale. Nous allons appliquer cette construction dans deux cas particuliers :

a) *Extension non triviale d'un groupe étale diagonalisable* H *par* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Prenons pour H le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ que l'on fait opérer par multiplication sur $\mathrm{U} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soient d'autre part k un corps de caractéristique p, K une extension de k de groupe de Galois $\mathscr{G}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, a un élément non nul de $\mathrm{H}^1(\mathscr{G}, \mathrm{U}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, \mathrm{U})$. Le groupe E_a répond alors à la question.

b) *Exemple d'une extension non triviale d'un groupe étale diagonalisable* H, *par un groupe unipotent lisse et connexe* U.

Prenons pour corps k un corps non parfait tel qu'il existe une k-forme U de $\mathbb{G}_a$, telle que $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{U}) \neq 0$. Par exemple (cf. J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*), on peut prendre pour k le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète d'égale caractéristique $p > 0$, et pour U le sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_a \times_k \mathbb{G}_a$, d'équation $\mathrm{X}^p + \mathrm{X} + t\mathrm{Y}^p = 0$, où t désigne une uniformisante de k. En effet, supposant pour simplifier que k contient les racines $(p-1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité, on a une suite exacte de groupes algébriques :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{U} & \longrightarrow & \mathbb{G}_a & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (x,y) & \longmapsto & y & & \end{array},$$

donc une suite exacte de cohomologie : **599**

$$\mathbb{G}_a(k) \xrightarrow{d} \mathrm{H}^1(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(k, \mathrm{U}) \to 0,$$

où d fait correspondre à x l'espace homogène sous $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'équation

$$\mathrm{X}^p + \mathrm{X} + tx^p = 0.$$

Par ailleurs, on sait que $\mathrm{H}^1(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est isomorphe à $k/\mathfrak{P}(k)$ (où $\mathfrak{P}(x) = x^p + x$), donc $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{U})$ est isomorphe à $k/(\mathfrak{P}(k) + tk^p)$. Supposons de plus $p \neq 2$, il est alors clair que t^2 est un élément de k qui n'appartient pas à $\mathfrak{P}(k) + tk^p$, donc $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{U}) \neq 0$.

D'autre part $\boldsymbol{\mu}_{p-1}$ opère sur U par la formule :

$$(h, x, y) \longmapsto (hx, hy).$$

Notons $\mathscr{G}$ le groupe de Galois de l'extension K définie par l'équation

$$\mathrm{X}^p + \mathrm{X} + t^2 = 0,$$

et soit $a \in \mathrm{H}^1(\mathscr{G}, \mathrm{U})$ l'élément non nul décrit plus haut. On vérifie immédiatement que E_a est alors une extension non triviale de $\boldsymbol{\mu}_{p-1}$ par U.

c) *Extension non triviale de* $\mathbb{G}_m$ *par* $\boldsymbol{\alpha}_p$.

D'après 5.1.1 i) b), une telle extension ne peut exister que sur un corps k non parfait. Soit donc k un corps non parfait, G le produit semi-direct de $\mathrm{U} = \mathbb{G}_a$ par $\mathrm{H} = \mathbb{G}_m$, $\mathbb{G}_m$ opérant sur $\mathbb{G}_a$ par homothéties. Comme U est invariant dans G, alors ${}_{\mathrm{F}}\mathrm{U}$ l'est aussi. Soit $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/{}_{\mathrm{F}}\mathrm{U}$. Le groupe G′ est isomorphe à $\mathbb{G}_a \cdot \mathbb{G}_m$, où $\mathbb{G}_m$ opère sur $\mathbb{G}_a$ par la formule :

$$(h, u) \longmapsto h^p\, u.$$

600 Le foncteur $\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$ (resp. $\mathscr{T}_{\mathrm{G}''}$) des sous-tores de G (resp. G″) (cf. Exp. XV) est isomorphe à $\mathbb{G}_a$, et le morphisme $\mathscr{T}_{\mathrm{G}} \to \mathscr{T}_{\mathrm{G}''}$ déduit du morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ s'identifie au morphisme $u \mapsto u^p$. Il en résulte que si T″ est un sous-tore de G″ qui correspond à un point x de $k \simeq \mathbb{G}_a(k)$ tel que $x^{1/p}$ ne soit pas dans k, l'image réciproque E de T″ dans G sera extension d'un tore T″ par ${}_{\mathrm{F}}\mathrm{U} = \boldsymbol{\alpha}_p$, ne possèdera pas de tores maximaux définis sur k, donc ne sera pas triviale. On trouve pour E le sous-groupe de $\mathrm{G} = \mathrm{Spec}[\mathrm{U}, \mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}]$ d'équation $\mathrm{U}^p = x - x\mathrm{T}^p$.

Remarque 5.9.1. — Ce dernier exemple montre qu'un groupe algébrique non lisse, défini sur un corps non parfait, ne possède pas nécessairement de tores maximaux et répond ainsi à la question posée dans Exp. XIV 1.5 b).

d) Donnons maintenant un *exemple d'extension triviale* E *d'un groupe de type multiplicatif* H *par un groupe unipotent* U*, et de deux relèvements* H′ *et* H″ *de* H *qui ne soient pas conjugués par un élément de* U(k).

Prenons pour E le produit semi-direct de $\mathrm{U} = \mathbb{G}_a$ par $\boldsymbol{\mu}_p = \mathrm{Spec}\, k[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^p - 1)$, l'action de $\boldsymbol{\mu}_p$ sur $\mathbb{G}_a = \mathrm{Spec}\, k[\mathrm{U}]$, étant définie par le comorphisme :

$$\mathrm{U} \mapsto (\mathrm{U} + \mathrm{U}^p)\mathrm{T} - \mathrm{U}^p.$$

Le centralisateur de $\boldsymbol{\mu}_p$ dans U est alors le groupe étale Z d'équation $\mathrm{U} + \mathrm{U}^p = 0$. Il en résulte que si k n'est pas algébriquement clos, l'application canonique $\mathrm{U}(k) \to$
601 $(\mathrm{U}/\mathrm{Z})(k)$ n'est pas en général surjective, donc, compte tenu de 5.1.1 ii) b), deux relèvements de $\boldsymbol{\mu}_p$ dans E ne sont pas nécessairement conjugués par un élément de $\mathrm{U}(k)$.

Voici un autre exemple, avec k *algébriquement clos* de caractéristique $p > 0$. Soit G le groupe radiciel produit semi-direct de $\boldsymbol{\mu}_p$ par $\boldsymbol{\alpha}_p$, où $\boldsymbol{\mu}_p$ opère sur $\boldsymbol{\alpha}_p$ par « homothéties ». On a alors une suite exacte de groupes algébriques, à groupes d'opérateurs $\boldsymbol{\mu}_p$:

$$\begin{array}{c} 0 \to \boldsymbol{\alpha}_p \to \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a \to 0 \\ \qquad\qquad x \ \mapsto x^p \qquad , \end{array}$$

où $\boldsymbol{\mu}_p$ opère par homothéties sur le premier terme $\mathbb{G}_a$, et trivialement sur le second. La suite exacte de cohomologie (App. I, prop. 11) fournit ici la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_a(k) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\boldsymbol{\mu}_p, \boldsymbol{\alpha}_p) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\boldsymbol{\mu}_p, \mathbb{G}_a).$$

Comme le dernier terme est nul (I 5.3.3), on voit que $\mathrm{H}^1(\boldsymbol{\mu}_p, \boldsymbol{\alpha}_p)$ est non nul, donc deux relèvements de $\boldsymbol{\mu}_p$ dans G ne sont pas nécessairement conjugués.

6. Extension d'un groupe unipotent par un groupe de type multiplicatif

602

6.1. Énoncé du théorème. —

Théorème 6.1.1. — *Soient k un corps,* U *un k-groupe algébrique unipotent,* H *un k-groupe de type multiplicatif,* E *un k-groupe algébrique extension de* U *par* H*, de sorte que l'on a la suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{U} \longrightarrow 1.$$

Alors l'extension E *est* triviale *et il existe un unique relèvement de* U *dans* E *dans chacun des cas suivants :*

A) *Le groupe* U *est lisse et l'une des conditions suivantes est réalisée :*
   i) U *est connexe et le morphisme canonique* $\mathrm{E} \to \mathrm{U}$ *possède une section.*
   ii) U *possède une suite de composition à quotients successifs isomorphes à* $\mathbb{G}_a$*.*
   iii) H *est étale.*
   iv) k *est parfait.*

B) $\mathrm{U} = \boldsymbol{\alpha}_p$ *et k est parfait.*

C) E *est commutatif et k est parfait.*

6.2. Démonstration de 6.1.1 A). — Établissons d'abord trois lemmes.

Lemme 6.2.1. — *Soient* S *un préschéma,* E *un* S*-préschéma en groupes, extension d'un* S*-préschéma en groupes* U*, à* fibres connexes*, par un* S*-groupe de type multiplicatif et de type fini* H (c.-à-d. U *est le quotient de* E *par* H *pour la topologie* fpqc). *Alors* E *est une* extension centrale. 603

En effet, comme H est commutatif, le groupe U opère par automorphismes intérieurs sur H, par l'intermédiaire d'un S-morphisme de groupes

$$u : \mathrm{U} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H}).$$

Le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{H})$ est représentable par un S-schéma étale (Exp. X 5.10) et par suite la section unité est une immersion à la fois ouverte et fermée. Comme U est à fibres connexes, on en déduit que u est le morphisme unité.

Lemme 6.2.2. — *Avec les notations de* 6.1.1*, si* E *est triviale, il existe un unique relèvement de* U *dans* E.

Soient donc U′ et U″ deux relèvements de U dans E. Pour montrer que $\mathrm{U}' = \mathrm{U}''$, nous pouvons supposer k algébriquement clos et il suffit de montrer que $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}, \mathrm{H}) = 0$. Si U est connexe, U centralise H (6.2.1), donc

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{U}, \mathrm{H}) = \mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathrm{U}, \mathrm{H}) = 0$$

d'après 2.4 ii). Dans le cas général, notons U^0_1 l'unique relèvement dans E de la composante connexe U^0 de U, et soit $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{E}}(\mathrm{U}^0_1)$. Si $g \in \mathrm{E}(k)$, $\mathrm{int}(g)\mathrm{U}^0_1$ est un relèvement de U^0 donc est égal à U^0_1 et par suite $\mathrm{N}(k) \supset \mathrm{E}(k)$. Par ailleurs, N majore H (6.2.1) et U^0_1, d'où immédiatement le fait que $\mathrm{N} = \mathrm{E}$. Passant au quotient par U^0_1 on 604
est ramené au cas où U est étale. Dans ce cas, k étant algébriquement clos, $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}, \mathrm{H})$

s'identifie au groupe de cohomologie ordinaire $\mathrm{H}^1(\mathrm{U}(k), \mathrm{H}(k))$ [(10)] et par suite est nul, puisque $\mathrm{U}(k)$ est un p-groupe fini et que $\mathrm{H}(k)$ est uniquement p-divisible.

Corollaire 6.2.3. — *Pour prouver que* E *est triviale, il suffit de montrer que* E *devient triviale après extension finie* séparable *du corps de base, en particulier, on peut supposer* H *diagonalisable.*

Lemme 6.2.4. — *Pour que toute* extension centrale E *de* U *par un k-groupe diagonalisable* H *soit triviale, il suffit que toute extension centrale de* U *par* $\mathbb{G}_m$ *soit triviale.*

En effet, par récurrence sur r, on note d'abord que l'hypothèse faite entraîne que E est triviale si $\mathrm{H} = \mathbb{G}_m^r$. Dans le cas général, H se plonge dans $\mathbb{G}_m^r$ pour un entier r convenable (c'est immédiat par dualité) ; soit $\mathrm{H}'' = \mathbb{G}_m^r/\mathrm{H}$. On obtient la suite exacte (App. I 2.1) :

$$\mathrm{Z}^1(\mathrm{U}, \mathrm{H}'') \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{U}, \mathrm{H}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{U}, \mathbb{G}_m^r) = 0$$

(où U opère trivialement sur H, H″, $\mathbb{G}_m^r$). Mais $\mathrm{Z}^1(\mathrm{U}, \mathrm{H}'') = \mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathrm{U}, \mathrm{H}'') = 0$ (2.4 ii)), donc $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{U}, \mathrm{H}) = 0$.

Démonstration de 6.1.1 A) i). Comme $\mathrm{E} \to \mathrm{U}$ possède une section, E définit un élément $\overline{f}$ de $\mathrm{H}^2(\mathrm{U}, \mathrm{H})$ (App. I 3.1). Nous devons montrer que $\overline{f}$ est nulle, et pour cela, il suffit de montrer qu'un 2-cocycle $f : \mathrm{U} \times_k \mathrm{U} \to \mathrm{H}$ est un morphisme constant, ce qui va résulter du lemme suivant :

605 ***Lemme 6.2.5***. — *Soient* U *un k-groupe algébrique unipotent lisse et connexe,* H *un k-groupe de type multiplicatif ; alors tout k-morphisme* (*de préschémas*) *:*

$$f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{H}$$

est constant.

Pour démontrer ce lemme, nous pouvons supposer k algébriquement clos. Nous procédons par récurrence croissante sur dim U. Si $\dim \mathrm{U} > 0$, U possède une suite de composition (cf. 3.9) :

$$1 \to \mathrm{U}' \to \mathrm{U} \xrightarrow{\pi} \mathrm{U}'' \to 1$$

avec $\mathrm{U}' \simeq \mathbb{G}_a$ et $\dim \mathrm{U}'' < \dim \mathrm{U}$. Il suffit de montrer que f se factorise à travers U″. Comme le graphe de la relation d'équivalence définie par π est lisse sur k, donc réduit, il suffit de montrer que si $x, y \in \mathrm{U}(k)$ ont même image z dans $\mathrm{U}''(k)$, alors $f(x) = f(y)$. Or $\pi^{-1}(z)$ est isomorphe à $\mathbb{G}_a$, donc la restriction de f à $\pi^{-1}(z)$ se factorise à travers une composante irréductible réduite de H, donc à travers un k-schéma isomorphe à $(\mathbb{G}_m)^r$. Il suffit alors de noter que tout morphisme de $\mathbb{G}_a$ dans $(\mathbb{G}_m)^r$ est constant, puisque toute fonction régulière inversible sur $\mathbb{G}_a$ est constante.

Démonstration de 6.1.1 A) ii). Grâce à 6.2.1, 6.2.3 et 6.2.4, nous pouvons supposer que $\mathrm{H} = \mathbb{G}_m$. Par hypothèse, U possède une suite de composition $\mathrm{U} \supset \mathrm{U}_1 \supset \cdots$, telle que $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}$ soit isomorphe à $\mathbb{G}_a$. Soit E_1 l'image réciproque de U_1 dans E. Par récurrence sur dim U, on peut supposer que l'extension E_1 est triviale ; soit U'_1 l'unique

(10) N.D.E. : voir, par exemple, la proposition III.6.4.2 du livre de M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques* I, Masson & North-Holland (1970.

relèvement de U_1. Procédant comme dans la démonstration de 6.2.4, on montre que **606**
U'_1 est invariant dans E. Après passage au quotient par U'_1, on est ramené au cas où $U = \mathbb{G}_a$. Le S-schéma E (où S = U) est alors un torseur sous le S-groupe $\mathbb{G}_m \times_k S$, donc possède une section, puisque Pic(S) = 0 (Exp. VIII 4.3). L'extension E est alors triviale d'après A) i).

Démonstration de 6.1.1 A) iii) (U *lisse,* H *étale*). Supposons d'abord U connexe. Le groupe $U_{\overline{k}}$ possède alors une suite de composition à quotients successifs isomorphes à $\mathbb{G}_a$, donc $E_{\overline{k}}$ est triviale d'après A) ii). Comme H est étale, il est clair que l'unique relèvement de $U_{\overline{k}}$ dans $E_{\overline{k}}$ est la composante connexe de $E_{\overline{k}}$, donc ce relèvement est déjà défini sur k. Dans le cas général, quitte à passer au quotient par la composante connexe de E, on est ramené au cas où E est étale, puis au cas où E est complètement décomposé (6.2.3). Comme $U(k)$ est un p-groupe et que $H(k)$ est d'ordre premier à p, on peut prendre pour relèvement de $U(k)$ le p-groupe de Sylow de $E(k)$.

Démonstration de 6.1.1 A) iv) (U *lisse, k parfait*). Si U est connexe, U possède une suite de composition à quotients successifs isomorphes à $\mathbb{G}_a$ (4.1.2 b)) et on applique A) ii). Dans le cas général, ce qui précède permet de nous ramener au cas où U est étale, puis au cas où U est complètement décomposé et H diagonalisable (6.2.3). Utilisant maintenant une suite de composition caractéristique de H ($H \supset H^0 \supset {}_{F^n}(H) \supset 0$), on se ramène au cas où H est de l'un des trois types suivants :

a) H est étale. **607**
b) $H = \mathbb{G}_m^r$.
c) H est radiciel.

Dans le cas a), on applique A) iii) ; dans le cas c), on applique 1.6. Enfin dans le cas b), on remarque qu'en vertu du théorème 90 de Hilbert, $E \to U$ possède une section, de sorte qu'il suffit de montrer que $H^2(U, \mathbb{G}_m^r) = H^2(U(k), \mathbb{G}_m^r(k)) = 0$. Or $U(k)$ est un p-groupe fini, tandis que $\mathbb{G}_m^r(k)$ est uniquement p-divisible (car k est parfait).

6.3. Démonstration de 6.1.1 B) et C). — Grâce à 6.2.1, 6.2.3, 6.2.4, on voit qu'il suffit de démontrer B) lorsque $H = \mathbb{G}_m$. On a donc une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow E \longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_p \longrightarrow 1.$$

Comme $\mathbb{G}_m$ est lisse, on en déduit une suite exacte de p-algèbres de Lie (App. II 3.2) :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \operatorname{Lie} \mathbb{G}_m \longrightarrow \operatorname{Lie} E \longrightarrow \operatorname{Lie} \boldsymbol{\alpha}_p \longrightarrow 0.$$

Le groupe $\boldsymbol{\alpha}_p$ étant de hauteur 1, l'extension E est triviale si et seulement si (App. II 2.2) la suite exacte $(*)$ de p-algèbres de Lie est scindée. On sait que $\operatorname{Lie} \boldsymbol{\alpha}_p$ est engendrée par un élément $X \neq 0$ tel que $X^{(p)} = 0$ (App. II 2.1) ; il suffit donc de montrer que X se relève en un élément Z de Lie E, tel que $Z^{(p)} = 0$. Or d'après 5.8.2 ii), il existe un élément unipotent Z de Lie E qui relève X. Comme la partie unipotente de Lie E est clairement au plus de dimension 1, on a nécessairement $Z^{(p)} = 0$.

Démonstration de 6.1.1 C). Si U'_1 est un relèvement dans E d'un sous-groupe algé- **608**
brique U_1 de U, U'_1 est invariant dans E, puisque E est supposé commutatif, et nous pouvons passer au quotient par U'_1. Utilisant une suite de composition de U (3.5 ii)),

la remarque précédente permet de nous ramener au cas où U est lisse ou égal à $\boldsymbol{\alpha}_p$. Mais alors E est triviale d'après A) iv) et B).

6.4. Exemples d'extensions d'un groupe unipotent U **par un groupe de type multiplicatif** H **qui ne sont pas triviales.** —

Vu 6.1.1 A) iv), le problème ne se pose qu'en caractéristique $p > 0$.

a) $\mathrm{H} = \mathbb{G}_m$, U est une forme non triviale de $\mathbb{G}_a$ (cf. App. III, § 5).

Soit k un corps non parfait de caractéristique 2, u un élément de k tel que $u^{1/2}$ n'appartienne pas à k. Considérons le groupe affine E, d'anneau $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, (\mathrm{X}^2 + u\mathrm{Y}^2)^{-1}]$, où la multiplication est donnée par le comorphisme :

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longmapsto (\mathrm{XX}' + u\mathrm{YY}', \mathrm{XY}' + \mathrm{YX}').$$

Le groupe E est lisse, connexe, commutatif, de dimension 2 ; le sous-schéma $\mathrm{Y} = 0$ définit un sous-groupe $\mathrm{H} \simeq \mathbb{G}_m$. Le noyau K de l'élévation à la puissance $2^{\text{ième}}$ dans E a pour équation :

$$\mathrm{X}^2 + u\mathrm{Y}^2 = 1,$$

donc est de dimension 1. Le groupe K contient le radical unipotent de E (défini sur $\overline{k}$) mais aussi la contribution de H qui est isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_2$. Comme K est réduit sur
609 k, le radical unipotent de E n'est pas défini sur k et $\mathrm{U} = \mathrm{E}/\mathrm{H}$ ne se relève pas dans E. (On vérifie immédiatement que U est la forme de $\mathbb{G}_a$ ayant pour anneau $k[\mathrm{V}, \mathrm{W}]/(\mathrm{V} + u\mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2)$, le morphisme $\mathrm{E} \to \mathrm{U}$ correspondant au comorphisme : $\mathrm{V} \mapsto \mathrm{Y}^2/(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 u)$, $\mathrm{W} \mapsto \mathrm{XY}/(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 u)$).

b) $\mathrm{H} = \mathbb{G}_m$, $\mathrm{U} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, k non parfait de caractéristique 2.

Choisissant k et u comme dans a), considérons le sous-groupe E de GL_2 engendré par l'élément X tel que :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{1/2} & 0 \\ 0 & u^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u^{-1/2} \\ u^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe E est extension de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\mathbb{G}_m$, mais cette extension n'est pas triviale car la partie unipotente de X n'est pas définie sur k.

c) $\mathrm{H} = \boldsymbol{\mu}_p$, $\mathrm{U} = \boldsymbol{\alpha}_p$, k non parfait.

Soit $\mathfrak{e}$ la p-algèbre de Lie commutative engendrée par deux éléments X et Y tels que $\mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X}$ et $\mathrm{Y}^{(p)} = a\mathrm{X}$. D'après App. II 2.2, $\mathfrak{e}$ est la p-algèbre de Lie d'un groupe algébrique E extension de $\boldsymbol{\alpha}_p$ par $\boldsymbol{\mu}_p$, mais cette extension est triviale si et seulement si, il existe $b \in k$ tel que $b^p = a$ (car on a alors $(b\mathrm{X} + \mathrm{Y})^{(p)} = 0$).

d) $\mathrm{H} = \boldsymbol{\mu}_2$, $\mathrm{U} = \boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_2$, E non commutative, k corps de caractéristique 2.

Considérons le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_{2,k}$ et soit $\mathrm{E} = {}_{\mathrm{F}}(\mathrm{SL}_{2,k})$. Le groupe E est
610 un groupe radiciel de hauteur 1, dont l'algèbre de Lie est engendrée par trois éléments X, Y, Z vérifiant les relations suivantes :

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{Z}, \qquad [\mathrm{X}, \mathrm{Z}] = [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}] = 0$$
$$\mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{Y}^{(p)} = 0, \qquad \mathrm{Z}^{(p)} = \mathrm{Z}.$$

Par suite, E est extension centrale de U $\simeq \boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_2$ par $\boldsymbol{\mu}_2$. Chaque facteur $\boldsymbol{\alpha}_2$ de U se relève de manière unique dans E, mais U lui-même ne se relève pas dans E, car $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \neq 0$.

7. Groupes algébriques affines nilpotents

611

7.1. Extensions de groupes de type multiplicatif. —

Proposition 7.1.1. — *Soient* S *un préschéma,* H *et* K *deux* S*-préschémas en groupes de type multiplicatif et de type fini,* E *un préschéma en groupes extension de* K *par* H (c.-à-d. K *est le quotient de* E *par* H *pour la topologie* fpqc). *Alors* E *est de type multiplicatif dans les deux cas suivants :*

a) E *est commutatif.*

b) *Les fibres de* K *sont connexes.*

Démonstration. i) *Cas où* S *est le spectre d'un corps k.*

L'assertion à démontrer est locale pour la topologie fpqc, ce qui nous permet de supposer k algébriquement clos, donc H et K diagonalisables. Notons que K opère trivialement sur H par automorphismes intérieurs : c'est clair dans le cas a) et cela résulte de 6.2.1 dans le cas b). Par récurrence sur la longueur d'une suite de composition convenable de K, on est ramené au cas où K est de l'un des trois types suivants : a) $\mathrm{K} = \mathbb{G}_m$, b) $\mathrm{K} = \boldsymbol{\mu}_p$, c) $\mathrm{K} = \boldsymbol{\mu}_q$ avec $(q, p) = 1$ et, dans ce cas, E est commutatif. Utilisant maintenant un plongement de H dans $\mathbb{G}_m^r$, on en déduit que E se plonge dans une extension de K par $\mathbb{G}_m^r$. On peut donc supposer que $\mathrm{H} = \mathbb{G}_m^r$.

a) Si $\mathrm{K} = \mathbb{G}_m$, E est un groupe algébrique lisse, connexe, affine (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9.2) de rang unipotent nul, c'est donc un tore.

b) $\mathrm{K} = \boldsymbol{\mu}_p$. Dans ce cas E est une extension triviale. En effet, comme H est lisse, le morphisme canonique $\operatorname{Lie} \mathrm{E} \to \operatorname{Lie} \boldsymbol{\mu}_p$ est surjectif (App. II 3.2) et il suffit d'appliquer 5.8.2 i), compte tenu de App. II 2.2. 612

c) $\mathrm{K} = \boldsymbol{\mu}_q$, avec $(q, p) = 1$ et E commutative. Là encore l'extension E est triviale. En effet, soit $x \in \mathrm{E}(k)$ un relèvement d'un générateur $\overline{x}$ de $\boldsymbol{\mu}_q(k)$. L'élément x^q est un élément de $\mathrm{H}(k)$ donc est de la forme y^q, $y \in \mathrm{H}(k)$ (noter que $\mathbb{G}_m^r(k)$ est q-divisible). Comme E est commutatif, $y^{-1}x$ est un relèvement de x qui est d'ordre q.

ii) *Cas général.* Les groupes H et K sont plats, affines et de présentation finie sur S (Exp. IX 2.1) et par suite il en est de même de E (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9.2). Utilisant alors la technique générale de $\mathrm{VI_B}$ § 10, nous nous ramenons au cas où S est noethérien. Pour montrer que E est de type multiplicatif, il suffit alors de prouver que E est commutatif et que ${}_n\mathrm{E}$ est fini sur S pour tout n (Exp. X 4.8 b).

a) E est commutatif. On doit vérifier que le morphisme :

$$\mathrm{E} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \qquad (x, y) \mapsto [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

se factorise à travers la section unité de E, et il suffit de le vérifier lorsque S est le spectre d'un anneau local artinien. Mais alors E est de type multiplicatif d'après i) et Exp. X 2.3.

b) ${}_n\mathrm{E}$ est fini sur S. En effet, on a la suite exacte :

$$0 \to {}_n\mathrm{H} \to {}_n\mathrm{E} \to {}_n\mathrm{K} \xrightarrow{u} \mathrm{H}_n$$

613 (où H_n est le conoyau de l'élévation à la puissance n dans H). On sait que H_n est de type multiplicatif (Exp. IX 2.7) donc séparé, et que ${}_n\mathrm{H}$ et ${}_n\mathrm{K}$ sont finis sur S ; $\operatorname{Ker} u$ est un sous-groupe fermé de ${}_n\mathrm{K}$, donc est fini sur S, et ${}_n\mathrm{E}$ est fini sur S, comme extension d'un groupe fini par un groupe fini (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9.2).

7.2. Structure des groupes algébriques affines commutatifs. —

Théorème 7.2.1. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique affine commutatif. Alors :*

a) G *contient un plus grand sous-groupe de type multiplicatif* M. *Le groupe* M *est caractéristique dans* G *et* G/M *est unipotent, et sa formation commute à l'extension du corps k.*

b) *Si k est parfait,* G *est le produit direct de* M *et d'un sous-groupe algébrique unipotent* U*, et ceci de manière unique.*

Démonstration. i) k algébriquement clos.

Lorsque G est lisse, 7.2.1 b) est bien connu (BIBLE § 4 Th. 4). Si G est radiciel de hauteur 1, à la décomposition de $\operatorname{Lie} \mathrm{G}$ décrite dans 4.2.2 correspond, compte tenu de 4.3.1 v) et de App. II 2.2, une décomposition de G du type 7.2.1 b). Dans le cas général, G admet une suite de composition dont les quotients successifs sont lisses ou radiciels de hauteur 1 (App. II 3.1). Pour prouver 7.2.1 b), il suffit alors de noter que si l'on a une suite exacte de groupes algébriques commutatifs :

$$0 \longrightarrow \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'' \longrightarrow 0,$$

614 où G' (resp. G'') est produit d'un groupe de type multiplicatif par un groupe unipotent $\mathrm{G}' = \mathrm{M}' \cdot \mathrm{U}'$ (resp. $\mathrm{G}'' = \mathrm{M}'' \cdot \mathrm{U}''$), alors il en est de même de G. En effet, considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{G}'/\mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{G}'' \longrightarrow 0.$$

D'après 7.1.1 a), l'image réciproque dans G/U' de M'' est un sous-groupe de type multiplicatif M_1. Le groupe M_1 se relève en un sous-groupe M de G (5.1.1 i) a)). De même, utilisant cette fois 6.1.1 C), on prouve qu'il existe un sous-groupe unipotent U de G extension de U'' par U'. Il est clair que $\mathrm{G} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{U}$.

ii) k quelconque. D'après i), $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ est produit direct d'un groupe de type multiplicatif $\mathrm{M}_{\overline{k}}$ par un groupe unipotent $\mathrm{U}_{\overline{k}}$. Posons $\mathrm{S} = \overline{k} \times_k \overline{k}$ et soient M_1 et M_2 les deux images inverses de $\mathrm{M}_{\overline{k}}$ par les deux projections $\mathrm{S} \rightrightarrows \overline{k}$. Le groupe $\mathrm{G_S}/\mathrm{M}_2 = (\mathrm{G}/\mathrm{M}_{\overline{k}})_\mathrm{S}$ a ses fibres unipotentes, donc l'image de M_1 dans $\mathrm{G_S}/\mathrm{M}_2$ est nulle (2.4 i)) et M_2 majore M_1. De même M_1 majore M_2, et finalement $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2$. Par descente fpqc, il en résulte que $\mathrm{M}_{\overline{k}}$ provient d'un sous-groupe algébrique M de G. Il est clair que M est de type multiplicatif, que G/M est unipotent et que la formation de M est compatible avec toute extension du corps k. Pour tout k-préschéma S, tout sous-groupe de type multiplicatif H de $\mathrm{G_S}$ est contenu dans $\mathrm{M_S}$. En effet, d'après 2.5, son image dans le groupe à fibres unipotentes $(\mathrm{G}/\mathrm{M})_\mathrm{S} = \mathrm{G_S}/\mathrm{M_S}$ est nulle. Prenant en particulier pour H le transformé de $\mathrm{M_S}$ par un automorphisme de $\mathrm{G_S}$, on en déduit que M est caractéristique dans G.

Enfin si k est parfait, G/M se relève dans G en un groupe unipotent, et ce de manière unique d'après 6.1.1 C).

615

Remarque 7.2.2. — i) Si k n'est pas parfait, la composante unipotente de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ n'est pas nécessairement définie sur k, comme le montre l'exemple 6.4 a).

ii) Contrairement à ce qui se passe pour la composante de type multiplicatif M, la composante unipotente U n'est pas en général caractéristique dans G (et ceci quelle que soit la caractéristique de k). Bien sûr, l'unicité de la décomposition 7.2.1 b) entraîne que U est invariant par tout k-automorphisme de G. Mais si U et M sont tels qu'il existe un k-préschéma S et un S-homomorphisme non nul $h : \mathrm{U_S} \to \mathrm{M_S}$ (cf. 2.6), on en déduit un S-automorphisme de $\mathrm{G_S}$, $(u, m) \mapsto (u, h(u) + m)$, qui ne laisse pas $\mathrm{U_S}$ invariant.

iii) Si G est fini sur k, G/M correspond par la dualité de Cartier (2.6) à la composante connexe du dual D(G) de G.

7.3. Structure des groupes algébriques affines nilpotents. —

Théorème 7.3.1. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique nilpotent* (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 8)*, affine, connexe. Alors* G *possède un plus grand sous-groupe de type multiplicatif* M*. Le groupe* M *est central et caractéristique, et* G/M *est un groupe algébrique unipotent.*

Soit Z le centre de G, M le plus grand sous-groupe de type multiplicatif de Z (7.2.1). Comme Z est caractéristique dans G et M caractéristique dans Z, M est caractéristique dans G. Il suffit de montrer que G/M est unipotent. Par récurrence sur la longueur de la suite centrale ascendante de G, ceci va résulter plus généralement du lemme 616
suivant :

Lemme 7.3.2. — (Rosenlicht). *Soit* G *un k-groupe algébrique connexe,* Z *son centre. Alors le centre* Z' *de* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ *est unipotent.*

Démonstration. Nous pouvons supposer k algébriquement clos. Il suffit alors de montrer que Z' ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_\ell$ pour tout nombre premier ℓ (4.6.1 vi)). Soit donc $\boldsymbol{\mu}_\ell$ un sous-groupe de Z', N son image réciproque dans G. Comme $\boldsymbol{\mu}_\ell$ est central dans G', N est invariant dans G.

i) Cas où $(\ell, p) = 1$. On peut trouver un élément x de $\mathrm{N}(k)$ et un entier n possédant les propriétés suivantes :

a) x relève un générateur $\overline{x}$ de $\boldsymbol{\mu}_\ell$.

b) $x^{\ell^n} \in \mathrm{Z}^0(k)$;

(il suffit de choisir un relèvement de $\overline{x}$ dont l'image dans $\mathrm{N}/\mathrm{Z}^0(k)$ appartienne au ℓ-sous-groupe de Sylow).

L'élévation à la puissance $\ell^{\text{ième}}$ dans le groupe commutatif Z^0 est un morphisme étale, donc $\mathrm{Z}^0(k)$ est ℓ-divisible. Par suite, quitte à multiplier x par un élément de $\mathrm{Z}^0(k)$, on peut supposer que $x^{\ell^n} = 0$. Le groupe N est alors engendré par deux groupes commutatifs qui commutent (Z et le groupe engendré par x), donc est commutatif. Le groupe ${}_{\ell^n}\mathrm{N}$ est un groupe de type multiplicatif, caractéristique dans N, donc invariant dans G, et par suite central, G étant connexe (Exp. IX 5.5). Donc ${}_{\ell^n}\mathrm{N}$ est contenu dans Z, ce qui contredit le fait que son image dans G′ contient $\boldsymbol{\mu}_\ell$.

617 ii) $\ell = p$. Il existe alors un entier n, tel que l'image de ${}_{\mathrm{F}^n}\mathrm{N}$ dans G′ contienne $\boldsymbol{\mu}_p$, de sorte que l'on a la suite exacte :

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow {}_{\mathrm{F}^n}\mathrm{N} \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_p \longrightarrow 1.$$

Le groupe K est contenu dans Z, donc est commutatif ; il résulte alors de 7.2.1 et de 7.1.1 b) et 5.5.1 qu'il existe un sous-groupe de type multiplicatif contenu dans ${}_{\mathrm{F}^n}\mathrm{N}$ dont l'image dans le quotient par K est $\boldsymbol{\mu}_p$. On en déduit comme dans i) que ${}_{\mathrm{F}^n}\mathrm{N}$ est commutatif. La composante de type multiplicatif de ${}_{\mathrm{F}^n}\mathrm{N}$ (7.2.1) est caractéristique dans ${}_{\mathrm{F}^n}\mathrm{N}$, donc invariante dans G, donc centrale (Exp. IX 5.5) ; comme son image dans G′ contient $\boldsymbol{\mu}_p$ on obtient une contradiction.

A. Appendice I. Cohomologie de Hochschild et extensions de groupes algébriques

618

A.1. Définition des groupes de cohomologie. — Soient k un corps, G un k-groupe algébrique, $(\mathbf{Ab})_{\mathrm{G}}$ la catégorie abélienne des k-groupes algébriques commutatifs sur lesquels G opère. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ab})_{\mathrm{G}}$, le foncteur $h_{\mathrm{A}} : (\mathbf{Sch}/k)^\circ \to (\mathbf{Ens})$ canoniquement défini par A, est un G-$\mathbb{Z}$-module au sens de I 3.2. Nous pouvons donc considérer le complexe standard $\mathrm{C}^\bullet(\mathrm{G},\mathrm{A})$ des *cochaines algébriques* de G à valeur dans A (Exp. I 5.1), ainsi que le groupe des i-cocycles $\mathrm{Z}^i(\mathrm{G},\mathrm{A})$, des i-cobords $\mathrm{B}^i(\mathrm{G},\mathrm{A})$ et le $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie $\mathrm{H}^i(\mathrm{G},\mathrm{A})$. Comme d'habitude, $\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\mathrm{A})$ s'identifie au groupe $\mathrm{A}^{\mathrm{G}}(k)$, où A^{G} est le k-foncteur des invariants de A sous G. Le groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{A})$ classifie les espaces principaux homogènes sous A, triviaux, sur lesquels G opère.

Le foncteur $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{G},\mathrm{A})$ n'est pas en général un foncteur cohomologique de la catégorie $(\mathbf{Ab})_{\mathrm{G}}$ à valeur dans $\mathbf{Ab}$; toutefois, on a la proposition suivante :

Proposition A.1.1. — *Soit* $0 \to \mathrm{A}' \xrightarrow{u} \mathrm{A} \xrightarrow{v} \mathrm{A}'' \to 0$ *une suite exacte dans* $(\mathbf{Ab})_{\mathrm{G}}$. *Alors :*

a) *Si v possède une section (c'est-à-dire s'il existe un k-morphisme de préschémas $s : \mathrm{A}'' \to \mathrm{A}$ tel que $vs = 1_{\mathrm{A}''}$), on a la suite exacte de cohomologie habituelle :*

$$\cdots \to \mathrm{H}^i(\mathrm{G},\mathrm{A}) \to \mathrm{H}^i(\mathrm{G},\mathrm{A}'') \xrightarrow{d} \mathrm{H}^{i+1}(\mathrm{G},\mathrm{A}') \to \cdots$$

619 b) *Si $\mathrm{A}(k) \to \mathrm{A}''(k)$ est surjectif, on a la suite exacte :*

$$(1) \qquad 0 \to \mathrm{A}'^{\mathrm{G}}(k) \to \mathrm{A}^{\mathrm{G}}(k) \to \mathrm{A}''^{\mathrm{G}}(k) \xrightarrow{d} \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{A}') \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{A}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{A}'').$$

Démonstration. a) On note que l'existence d'une section entraîne l'exactitude de la suite de complexes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathrm{G},\mathrm{A}') \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathrm{G},\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathrm{G},\mathrm{A}'') \longrightarrow 0.$$

b) Si $x'' \in \mathrm{A}''^{\mathrm{G}}(k)$, son image réciproque dans A est un espace principal homogène sous A', trivial (car $\mathrm{A}(k) \to \mathrm{A}''(k)$ est supposé surjectif), sur lequel G opère, donc définit un élément $d(x'') \in \mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{A}')$. L'exactitude de la suite (1) est alors immédiate.

A.2. Le groupe $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$**.** — Soient A et G deux k-groupes algébriques, E et E' deux k-groupes algébriques extension de G par A. Ces deux extensions sont dites *isomorphes* s'il existe un k-morphisme de groupes $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ qui rende commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \mathrm{E} \arrow[dd, "u"] \arrow[dr] & \\ \mathrm{A} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{G} \\ & \mathrm{E}'. \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Le groupe E opère sur A par automorphismes intérieurs et si A est commutatif, cette action se factorise à travers G, donc G opère sur A. Réciproquement, si $\mathrm{A} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ab})_{\mathrm{G}}$, nous notons $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ l'ensemble des classes d'extensions algébriques E de G par A pour lesquelles l'action de G sur A définie par E, et celle provenant de la structure **620**
d'objet de $(\mathbf{Ab})_{\mathrm{G}}$, coïncident.

$\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ est de façon naturelle un bifoncteur covariant en A et contravariant en G. Plus précisément :

a) si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme dans $(\mathbf{Ab})_{\mathrm{G}}$, et si E représente un élément de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$, on définit $f_*(\mathrm{E}) \in \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G}, \mathrm{B})$ comme étant la classe de l'extension de G par B égale au quotient du produit semi-direct $\mathrm{B} \cdot \mathrm{E}$ (E opérant sur B à travers G) par le sous-groupe algébrique image de A par le morphisme (f, i) (ce quotient est représentable d'après Exp. VI_{A} § 5), de sorte que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathrm{A} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathrm{G}}"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathrm{B} \arrow[r] & f_*(\mathrm{E}) \arrow[r] & \mathrm{G} \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

b) Si $g : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est un k-morphisme de k-groupes algébriques, et si E est une extension de G par A, le produit fibré $\mathrm{E} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{H}$ est de façon naturelle une extension de H par A, notée $g^*(\mathrm{E})$. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathrm{A} \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathrm{A}}"'] & g^*(\mathrm{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathrm{A} \arrow[r] & \mathrm{E} \arrow[r] & \mathrm{G} \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

En adaptant les démonstrations données dans J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classe,* chap. VII, on munit $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ d'une structure naturelle de *groupe abélien,* fonctorielle en A et G.

621 ***Proposition A.2.1***. — *Soit :* $0 \to \mathrm{A}' \to \mathrm{A} \to \mathrm{A}'' \to 0$ *une suite exacte dans* $(\mathbf{Ab})_{\mathrm{G}}$, *alors :*

a) *On a une suite exacte canonique de groupes abéliens :*

$$\mathrm{Z}^1(\mathrm{G},\mathrm{A}) \to \mathrm{Z}^1(\mathrm{G},\mathrm{A}'') \xrightarrow{d} \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G},\mathrm{A}') \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G},\mathrm{A}) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G},\mathrm{A}'').$$

b) *Si* $\mathrm{A}(k) \to \mathrm{A}''(k)$ *est surjective, on déduit de* a) *la suite exacte :*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{A}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{A}'') \xrightarrow{d} \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G},\mathrm{A}') \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G},\mathrm{A}) \to \mathrm{Ext}_{alg}(\mathrm{G},\mathrm{A}''). \tag{2}$$

La suite exacte de a) généralise la suite exacte habituelle des $\mathrm{Hom}(\cdot,\cdot)$ valable dans le cadre des extensions commutatives (*loc. cit.*) et se démontre de la même façon. Rappelons simplement la définition du cobord $d : \mathrm{Z}^1(\mathrm{G},\mathrm{A}'') \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G},\mathrm{A}')$. Pour cela, considérons l'extension

$$1 \longrightarrow \mathrm{A}' \longrightarrow \mathrm{A}\cdot\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{A}''\cdot\mathrm{G} \longrightarrow 1,$$

déduite de façon évidente de la suite exacte $0 \to \mathrm{A}' \to \mathrm{A} \to \mathrm{A}'' \to 0$. Si $u \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{G},\mathrm{A}'')$, u définit de la façon habituelle un homomorphisme section $u : \mathrm{G} \to \mathrm{A}''\cdot\mathrm{G}$. On a alors $d(u) = u^*(\mathrm{A}\cdot\mathrm{G})$.

A.3. Comparaison de $\mathrm{H}^2(\mathrm{G},\mathrm{A})$ **et de** $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$**.** — Il est bien connu, dans le cas des groupes abstraits, qu'il existe un isomorphisme fonctoriel entre les groupes abéliens $\mathrm{H}^2(\mathrm{G},\mathrm{A})$ et $\mathrm{Ext}(\mathrm{G},\mathrm{A})$. De même dans le cas présent, si A est un élément de $(\mathbf{Ab})_{\mathrm{G}}$, à tout 2-cocycle $u \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{G},\mathrm{A})$ on peut faire correspondre une structure de groupe algébrique sur le préschéma $\mathrm{A} \times_k \mathrm{G}$ qui en fait un élément de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$. De plus cette extension est triviale si et seulement si $u \in \mathrm{B}^2(\mathrm{G},\mathrm{A})$ (cf. Exp. III 1.2.2). Rappelons que la loi de composition sur $\mathrm{A} \times \mathrm{G}$ est définie par la formule :

$$(a,g)(a',g') = a + {}^g a' + u(g,g').$$

622 Il est clair que les extensions de G par A ainsi obtenues ne sont pas quelconques, puisqu'elles possèdent une section. Mais réciproquement, si $\mathrm{E} \in \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$ possède une section s, E est isomorphe à l'extension de G par A associée au 2-cocycle u tel que :

$$u(g,g') = s(g)s(g')s(gg')^{-1}.$$

On obtient finalement la proposition suivante :

Proposition A.3.1. — *Il existe un isomorphisme fonctoriel entre les bifoncteurs à valeur dans les groupes abéliens :*

$$(\mathrm{G},\mathrm{A}) \mapsto \mathrm{H}^2(\mathrm{G},\mathrm{A}) \qquad \textit{et} \qquad (\mathrm{G},\mathrm{A}) \mapsto \mathrm{Ext}_s(\mathrm{G},\mathrm{A}),$$

où $\mathrm{Ext}_s(\mathrm{G},\mathrm{A})$ *désigne le sous-groupe de* $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$ *formé des classes d'extension de* G *par* A *qui possèdent une section.*

B. Appendice II. Rappels et compléments sur les groupes radiciels

623 Soit p un nombre premier > 1 et soit S un $\mathbb{F}_p$-préschéma.

B.1. Le morphisme de Frobenius. — Pour tout S-préschéma X et tout entier $n > 0$, notons $\mathrm{P}^n : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ le $\mathbb{F}_p$-endomorphisme qui correspond à l'élévation à la puissance p^n-ième dans $\mathscr{O}_\mathrm{X}$ et notons $\mathrm{X}^{(n)}$ le S-préschéma image inverse de X par le morphisme $\mathrm{P}^n : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$. Il existe alors un unique S-morphisme $\mathrm{F}^n : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^{(n)}$ qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{X} \arrow[dll, "\mathrm{P}^n"'] \arrow[dl, "\mathrm{F}^n"] \arrow[ddl] \\
\mathrm{X} \arrow[d] & \mathrm{X}^{(n)} \arrow[l] \arrow[d] & \\
\mathrm{S} & \mathrm{S}. \arrow[l, "\mathrm{P}^n"'] &
\end{tikzcd}$$

Il est clair que F^n s'identifie au « $n^{\text{ième}}$ itéré » de $\mathrm{F}^1 = \mathrm{F}$, appelé *morphisme de Frobenius de* X/S.

Si G est un S-préschéma en groupes, $\mathrm{G}^{(n)}$ est un S-préschéma en groupes et $\mathrm{F}^n : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(n)}$ est un S-morphisme de groupes. Son noyau ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G})$ est un sous-préschéma en groupes caractéristique de G (c.-à-d. stable par le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{G})$), et radiciel sur S. Si G est un S-préschéma en groupes radiciel, on dit que G est de *hauteur* $\leqslant h$, si ${}_{\mathrm{F}^h}(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$.

B.2. Groupes et p-algèbres de Lie. — Si G est un S-préschéma en groupes, Lie(G) (Exp. II) est de façon naturelle une p-Algèbre de Lie restreinte (Exp. $\mathrm{VII_A}$ 624
§§ 5 et 6). En particulier on a le résultat suivant (cf. Exp. $\mathrm{VII_A}$) :

Proposition B.2.1. — i) $\mathrm{Lie}(\boldsymbol{\alpha}_p)_\mathrm{S} = \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$ [11] *est un faisceau de* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-modules, libre sur* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ *de rang* 1 *engendré par un élément* X *tel que* $\mathrm{X}^{(p)} = 0$.

ii) $\mathrm{Lie}(\boldsymbol{\mu}_p)_\mathrm{S} = \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_m)_\mathrm{S}$ *est un faisceau de* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-modules, libre sur* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ *de rang* 1*, possédant une base canonique* X *telle que* $\mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X}$.

Rappelons maintenant le résultat fondamental prouvé dans Exp. $\mathrm{VII_A}$ § 7 :

Théorème B.2.2. — *Supposons* S *affine d'anneau* A*. Alors le foncteur :*

$$\mathrm{G} \longmapsto \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$$

établit une équivalence de catégories entre, d'une part, la catégorie des S*-préschémas en groupes* G *de présentation finie et plats sur* S*, de hauteur* 1*, dont l'algèbre de*

[11] N.D.E. : on a supprimé ici la définition de $\boldsymbol{\alpha}_p$, déjà donnée au début de cet Exposé.

*Lie est localement libre sur $\mathscr{O}_S$ et, d'autre part, la catégorie des p-*A*-algèbres de Lie restreintes localement libres de rang fini.*

De plus, si G *est comme ci-dessus et si* H *est un* S*-préschéma en groupes de présentation finie, le morphisme canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{p\text{-A-Lie}}(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}(\mathrm{S}),\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}(\mathrm{S}))$$

est un isomorphisme.

625

B.3. Groupes radiciels et groupes lisses. — Nous supposons maintenant que S est le spectre d'un corps k de caractéristique p.

Rappelons que dans Exp. $\mathrm{VI_A}$ § 5, on a montré que si G est un k-groupe algébrique, H un sous-groupe algébrique de G, alors le faisceau G/H (faisceau pour la topologie fpqc) est représentable. Rappelons alors ($\mathrm{VII_A}$ 8.3) :

Proposition B.3.1. — *Soit* G *un k-groupe algébrique. Alors il existe un entier m, tel que pour tout $n \geqslant m$, le groupe algébrique* $\mathrm{G}/\mathrm{F}^n(\mathrm{G})$ *soit lisse sur k.*

Proposition B.3.2. — *Considérons une suite exacte de k-groupes algébriques :*

$$1 \to \mathrm{G}' \to \mathrm{G} \xrightarrow{u} \mathrm{G}'' \to 1$$

et les assertions suivantes :

i) *Le morphisme u est lisse.*

ii) G' *est lisse sur k.*

iii) *Pour tout entier $n > 0$, on a la suite exacte :*

$$1 \longrightarrow {}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G}') \longrightarrow {}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G}) \longrightarrow {}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{G}'') \longrightarrow 1.$$

iv) *Le morphisme* ${}_{\mathrm{F}}\mathrm{G} \to {}_{\mathrm{F}}\mathrm{G}''$ *est un épimorphisme.*

v) *Le morphisme* $(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G})(k) \to (\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}'')(k)$ *est surjectif.*

Alors, on a les implications suivantes :

$$\text{i)} \Longleftrightarrow \text{ii)} \Longrightarrow \text{iii)} \Longrightarrow \text{iv)} \Longleftrightarrow \text{(v)}.$$

De plus, si G *est lisse, les cinq assertions sont équivalentes.*

626 i) $\Leftrightarrow$ ii) d'après Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9.2 vii).

ii) $\Rightarrow$ iii). Si G' est lisse, $\mathrm{F}^n : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}'^{(n)}$ est un épimorphisme et iii) résulte du diagramme du « serpent ».

iii) $\Rightarrow$ iv) est clair.

iv) $\Leftrightarrow$ v) d'après le théorème B.2.2.

v) $\Rightarrow$ ii) lorsque G est lisse. En effet G'' est alors lisse, et v) entraîne que l'on a $\dim \mathrm{G}' = \dim_k(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}')(k)$, donc G' est lisse.

C. Appendice III. Remarques et compléments concernant les exposés XV, XVI, XVII

627

C.1. Il se peut que les propositions 1.2 et 1.2 bis de XV restent vraies si on supprime l'hypothèse que H_0 est lisse sur S_0. C'est en particulier le cas si G est fini, plat et commutatif.

C.2. Complément à XV 4.8. — La proposition suivante ainsi que les théorèmes C.3.1 et C.4.1 ci-après figureront dans un article en préparation de M. Raynaud sur les schémas en groupes sur un anneau de valuation discrète. [12]

Proposition C.2.1. — *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète, t son point générique,* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini et plat,* $\widetilde{\mathrm{G}} = \operatorname{Spec}\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}})$, $u : \mathrm{G} \to \widetilde{\mathrm{G}}$ *le morphisme canonique. Alors :*

(1) $\widetilde{\mathrm{G}}$ *est de façon naturelle un* S*-schéma en groupes et u est un homomorphisme.*

(2) $\mathrm{Ker}(u)$ *est plat sur* S *et* $(\widetilde{\mathrm{G}}, u)$ *est un quotient* fpqc *de* G *par* $\mathrm{Ker}(u)$*, de sorte que* $\widetilde{\mathrm{G}}$ *est le plus grand quotient affine de* G.

(3) *Si* G_t *est affine,* $\mathrm{Ker}(u)$ *est un groupe étale sur* S*, égal au groupe unité si et seulement si* G *est séparé sur* S*. En particulier, un* S*-schéma en groupes* G*, plat, de type fini, séparé, à fibre générique affine est affine.*

C.3. Dans l'énoncé de XV 6.6, l'hypothèse que H soit égal à son normalisateur connexe est inutile pour que l'ensemble des points s de S tels que H_s soit un sous-groupe parabolique de G_s soit un ensemble ouvert. En effet, reprenons la démonstration donnée dans le paragraphe c) précédant le lemme 6.9, et notons $\overline{\mathrm{N}}$ l'adhérence schématique de N_t dans G. Donc $\overline{\mathrm{N}}$ est un sous-schéma en groupes fermé de G, plat sur S, qui majore H et qui est contenu dans N. Il résulte alors du théorème ci-après **628**
que $\mathrm{G}/\overline{\mathrm{N}}$ est représentable. Comme $\mathrm{G}_s/\overline{\mathrm{N}}_s$ est propre et connexe, on termine comme dans *loc. cit.*

Théorème C.3.1. — [13] *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien,* G *un* S*-préschéma en groupes localement de type fini,* H *un sous-préschéma en groupes fermé de* G*, plat sur* S*, alors* G/H *est représentable.*

C.4. Complément à (XVI 1.1). — Le théorème suivant précise (VIII 7.9).

Théorème C.4.1. — *Soit* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète de caractéristique résiduelle* $p > 0$ *et soit* G *un* S*-schéma en groupes, commutatif, lisse, de type fini et séparé sur* S*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) ${}_p\mathrm{G}$ *est fini sur* S.

(ii) *Pour tout* S*-préschéma* S′ *et pour tout* S′*-préschéma en groupes* H′*, de présentation finie sur* S′*, séparé sur* S′*, tout* S′*-monomorphisme* $u : \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{H}'$ *est une immersion.*

---

[12] N.D.E. : commentaires à ajouter ici, dont renvois à VI_{B}...

[13] N.D.E. : Voir le théorème 4C dans : S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Bull. Soc. Math. France, Mém. **33** (1976), 5-79.

C.5. L'exemple (XVII 6.4 a)) fournit un exemple de groupe lisse sur un corps k, dont le radical unipotent n'est pas défini sur k. La proposition suivante donne une méthode générale pour obtenir de tels groupes :

Proposition C.5.1. — *Soient k un corps,* K *une extension finie de k, radicielle, de degré* > 1, H *un* K*-groupe algébrique connexe, lisse, de dimension r,* $\mathrm{G} = \prod_{\mathrm{K}/k} \mathrm{H}/\mathrm{K}$*, qui est un k-groupe algébrique, lisse, connexe, de dimension* $r[\mathrm{K} : k]$*. Soient* $u : \mathrm{G}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{H}$ *l'homomorphisme canonique, et* $\mathrm{R} = \mathrm{Ker}(u)$*. Alors :*

629 i) *Le morphisme u est un épimorphisme et* R *est un groupe algébrique, lisse, unipotent, connexe.*

ii) *Si* U *est un sous-groupe algébrique lisse de* G*, tel que* U_{K} *majore* R*, alors* $\mathrm{U} = \mathrm{G}$.

Corollaire. — *Gardons les notations de la proposition précédente.*

a) *Si* H *n'est pas unipotent, le radical unipotent de* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *n'est pas défini sur k.*

b) *Si* H *est une variété abélienne, non nulle,* G *n'est pas extension d'une variété abélienne par un groupe linéaire lisse.*

c) *Si* H *n'est pas résoluble, le radical résoluble de* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *n'est pas défini sur k, et* G *ne possède pas de sous-groupe de Borel défini sur k.*

Montrons d'abord comment le corollaire résulte de la proposition.

a) Soit U un radical unipotent de G. Alors U_{K} est le radical unipotent de G_{K}, donc majore R, puisque R est lisse unipotent connexe d'après i), donc $\mathrm{U} = \mathrm{G}$ d'après ii). Or G_{K} admet H comme quotient, et H n'est pas unipotent par hypothèse, donc G n'est pas unipotent, d'où une contradiction.

b) Si G est extension d'une variété abélienne par un groupe linéaire L, lisse sur k, nécessairement L_{K} majore R, donc $\mathrm{L} = \mathrm{G}$. Or G ne peut être un groupe linéaire puisque G_{K} possède un quotient qui est une variété abélienne non nulle.

c) Soit S (resp. B) un radical résoluble de G (resp. un sous-groupe de Borel de G), alors S_{K} (resp. B_{K}) majore R, donc $\mathrm{S} = \mathrm{G}$ (resp. $\mathrm{B} = \mathrm{G}$). Mais alors G est résoluble, ce qui contredit le fait que G_{K} possède un quotient qui n'est pas résoluble.

Démonstration de la proposition 5.1 :

i) Commençons par décrire le morphisme u. La donnée d'un K-schéma

$$f : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{K})$$

630 permet de construire le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\mathrm{K}) \arrow[d, "j"'] & \mathrm{T} \arrow[l, "h"'] \arrow[d, bend right, "j_{\mathrm{T}}"'] \\
\mathrm{Spec}(k) & \mathrm{S} \arrow[l, "g"] \arrow[ul, "f"] \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}$$

où $g = j \circ f$, $\mathrm{T} = \mathrm{Spec}(\mathrm{K}) \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{S}$, h et j_{T} sont les deux projections et s est la section de T au-dessus de S telle que $h \circ s = f$. L'application

$$u(\mathrm{S}) : \mathrm{G}_{\mathrm{K}}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{S})$$

est simplement l'application composée :

$$\mathrm{G}_{\mathrm{K}}(\mathrm{S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}(\mathrm{T}) \to \mathrm{H}(\mathrm{S}),$$

où la dernière flèche est définie par la section s.

Prenons en particulier pour S le spectre d'une clôture algébrique $\overline{k}$ de k et pour f l'unique k-morphisme $\mathrm{K} \to \overline{k}$, de sorte que T est un schéma local artinien. Pour prouver i) il suffit de le faire après extension $\mathrm{K} \to \overline{k}$ du corps de base. Or il est clair que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}} = \prod_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} \mathrm{H}_{\mathrm{T}}/\mathrm{T}$ représente le foncteur de Greenberg de H_{T} relativement à S (M. J. Greenberg, *Schemata over local rings*, Ann. of Maths. 73, 1961, p. 624-648). La description faite plus haut montre alors que, moyennant cette dernière identification, u_{S} est le morphisme de transition canonique :

$$\mathrm{Green}(\mathrm{H}_{\mathrm{T}}) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{S}} = \mathrm{H}_{\mathrm{T}} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S}.$$

L'assertion i) résulte alors du fait que H est lisse sur K et de (M. J. Greenberg, *Schemata over local rings* II, Ann. of Maths. 78, 1963, p. 256-266).

ii) Pour établir ii) nous pouvons supposer k séparablement clos. Soit donc U un sous-groupe algébrique lisse de G tel que $\mathrm{U}_{\mathrm{K}} \supset \mathrm{R}$ et montrons que $\mathrm{U} = \mathrm{G}$. Comme 631
G est connexe, on peut supposer U connexe. Soient V le sous-groupe algébrique lisse et connexe $u(\mathrm{U}_{\mathrm{K}})$ de H et $\mathrm{V}' = \prod_{\mathrm{K}/k} \mathrm{V}/\mathrm{K}$, qui est un sous-groupe algébrique lisse et connexe de G. Le groupe V'_{K} est un sous-groupe algébrique de G_{K} et le morphisme canonique $\mathrm{V}'_{\mathrm{K}} \to \mathrm{V}$ est simplement la restriction de u à V'_{K}. Par hypothèse, U_{K} majore R, a fortiori, U_{K} majore $\mathrm{Ker}(\mathrm{V}'_{\mathrm{K}} \to \mathrm{V})$; d'autre part, par construction, l'image de U_{K} dans H est égale à V. On en déduit que U_{K} majore V'_{K}, donc que U majore V′. D'autre part, l'isomorphisme canonique :

$$\mathrm{G}(k) \hookrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{K}) \xrightarrow{u(\mathrm{K})} \mathrm{H}(\mathrm{K})$$

envoie évidemment $\mathrm{U}(k)$ dans $\mathrm{V}(\mathrm{K}) = \mathrm{V}'(k)$; c'est dire que $\mathrm{U}(k)$ est contenu dans $\mathrm{V}'(k)$. Comme U est lisse et k séparablement clos, cela entraîne $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}'$, d'où $\mathrm{U} = \mathrm{V}'$. On a alors les égalités :

$$([\mathrm{K} : k] - 1) \dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{V}'_{\mathrm{K}} \to \mathrm{V}) = \dim \mathrm{R} = ([\mathrm{K} : k] - 1) \dim \mathrm{H}.$$

Comme $\mathrm{K} \neq k$, on conclut que $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{H}$, d'où $\mathrm{V} = \mathrm{H}$ et finalement $\mathrm{U} = \mathrm{V}' = \mathrm{G}$.

EXPOSÉ XVIII

THÉORÈME DE WEIL SUR LA CONSTRUCTION D'UN GROUPE À PARTIR D'UNE LOI RATIONNELLE

par Michael Artin

0. Introduction

632

Cet exposé est consacré au théorème bien connu de Weil [1] qui donne la construction d'une variété de groupe à partir d'une loi birationnelle. Il semble que la généralisation de ce résultat au cas où la base est le spectre d'un anneau de valuation discrète était déjà connue de plusieurs personnes, on peut par exemple voir [2]. Ici nous démontrerons le théorème pour un groupe plat et de présentation finie sur un préschéma de base quelconque S. Puisqu'on doit faire les hypothèses avec un peu plus de soin, l'énoncé n'est pas sous la forme donnée par Weil ; mais lorsque S est le spectre d'un corps on voit que la forme donnée ici est essentiellement équivalente à celle de Weil. Nous utilisons la suggestion suivante de Grothendieck : Étant donné un « germe de groupe » X sur un préschéma S, on doit construire le groupe comme quotient de $X \times_S X$ par une relation d'équivalence convenable.

1. « Rappels » sur les applications rationnelles

633

Soit X/S un préschéma relatif et $U \subseteq X$ un ouvert. On dit que U est *schématiquement dense dans* X *relativement à* S, ou que $U \hookrightarrow X$ est relativement schématiquement dense, si pour tout changement de base $S' \to S$ l'ouvert $U \times_S S'$ est schématiquement dense dans $X \times_S S'$. Pour la définition et les propriétés de cette notion on réfère à Exp. IX, § 4. (*)

Proposition 1.1. — (i) *Une intersection finie ainsi qu'une réunion d'une famille non vide d'ouverts schématiquement denses relativement à* S *est schématiquement dense relativement à* S.

(0) version du 8 mai 09

(*) cf. aussi EGA IV_3, 11.9 et 11.10 (notamment 11.10.8), où on dit « *universellement* schématiquement dense relativement à S ».

(ii) *Si* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ *est schématiquement dense relativement à* S *et si* $\mathrm{S} \to \mathrm{T}$ *est un morphisme, alors* $\mathrm{U}_{\mathrm{T}} \subseteq \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$ *est schématiquement dense relativement à* T.

(iii) *Soient* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{V} \subseteq \mathrm{X}$ *des immersions ouvertes. Pour que* U *soit schématiquement dense dans* X *relativement à* S, *il faut et suffit qu'il le soit dans* V *et que* V *le soit dans* X.

(iv) *Si* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ *et* $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{Y}$ *sont relativement schématiquement denses, alors* $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ *est schématiquement dense dans* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ *relativement à* S.

Dans Exp. IX on trouve le critère suivant :

Proposition 1.2. — *Soit* X/S *localement de présentation finie et plat et soit* U *un ouvert de* X. *Si pour chaque* $s \in \mathrm{S}$ *la fibre* U_s *est schématiquement dense dans* X_s, *alors* U *est schématiquement dense dans* X *relativement à* S.

En particulier :

Corollaire 1.3. — *Si* X/S *est localement de présentation finie et plat, et si chaque fibre* X_s *est « sans composante immergée », alors* U *est schématiquement dense dans* X *relativement à* S *si et seulement si pour chaque* $s \in \mathrm{S}$, U_s *est dense dans* X_s *au sens topologique.*

634 On déduit facilement de la définition la

Proposition 1.4. — *Soit* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ *schématiquement dense relativement à* S *et soient* f, $g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *deux morphismes de foncteurs au-dessus de* S, *où* Y *satisfait à une des conditions suivantes :*

(i) Y *est un préschéma au-dessus de* S *et chaque fibre* Y_s *est séparée.*

(ii) Y *est un préfaisceau* [(1)] *sur* S *tel que le morphisme diagonal* $\mathrm{Y} \to \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ *soit représentable par une immersion fermée.* [(2)]

Alors si $f = g$ *sur* U, *on a* $f = g$.

Démonstration. Dans le cas (i), le raisonnement standard après IX 4.1 montre que f et g sont égaux sur chaque fibre, donc le sous-préschéma $\mathrm{Ker}(f, g)$ de X est ensemblistement égal à X, donc est fermé, et comme il majore U, il est égal à X, i.e. $f = g$. Le cas (ii) se démontre comme dans *loc. cit.* [(3)]

Définition 1.5. — [(*)] Soient X un préschéma sur S et Y un préfaisceau sur S. On appelle *application rationnelle* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *au-dessus de* S une classe d'équivalence de

[(*)] cf. EGA IV_4, 20.5, où on dit « pseudo-morphisme de X dans Y relativement à S », pour ne pas entrer en conflit avec EGA I, 7.12.

[(1)] N.D.E. : préciser pour quelle topologie : *a priori* (fpqc).

[(2)] N.D.E. : Rappelons ici la définition d'une immersion fermée. Un morphisme de S-foncteurs $\mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est *relativement représentable* si pour tout S-morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{G}$, où T est un S–préschéma, le T-foncteur $\mathrm{F}_{\mathrm{T}} = \mathrm{F} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ est représentable par un T-préschéma. Un morphisme de S-foncteurs $\mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est une *immersion ouverte* (resp. *fermée*) s'il est relativement représentable et si pour tout S-morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{G}$, où T est un S-préschéma, le T-morphisme $\mathrm{F}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}$ est une immersion ouverte (resp. fermée).

[(3)] N.D.E. : Détailler ce point...

morphismes $f : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ sur S, où U est un ouvert de X qui est schématiquement dense relativement à S, et où on pose $(f : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}) \sim (f' : \mathrm{U}' \to \mathrm{Y})$ si et seulement s'il existe un ouvert $\mathrm{U}'' \subseteq \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}$, schématiquement dense relativement à S, tel que $f = f'$ sur U''.

Cette définition est faite d'une telle manière qu'on peut définir de façon évidente l'application rationnelle $f \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ pour toute extension de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Si U est un ouvert de X, on dit que l'application rationnelle f est *définie sur* U s'il existe un morphisme représentant f dont l'ensemble de définition contient U.

Définition 1.5.1. — [4] Si Y satisfait à une des conditions (i), (ii) de 1.4, il est clair qu'il existe un plus grand ouvert U de X tel que f soit définie sur U, et cet U est sisisch. dense rel.schématiquement dense relativement à S. On l'appelle *domaine de définition de f sur* S, et on le notera $\mathrm{Dom}(f)$.

Cette notion ne commute pas aux changements de base, mais on a

Proposition 1.6. — *Soiten* X *un* S*-préschéma et* Y *un* S*-foncteur vérifiant l'une des hypothèses* (i), (ii) *de* 1.4. *Soenit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application rationnelle au-dessus de* S, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme plat et localement de présentation finie, et* $f' = f \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$. **635**
Alors

$$\mathrm{Dom}(f') = \mathrm{Dom}(f) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'$$

Démonstration. Posons $\mathrm{U} = \mathrm{Dom}(f)$. Il est clair que $\mathrm{V}' = \mathrm{Dom}(f')$ contient $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$. Soit V l'image de V', qui est un ouvert de X parce que $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est ouvert. Il faut démontrer que $\mathrm{V} = \mathrm{U}$, c'est-à-dire, il faut trouver un morphisme $\mathrm{V} \to \mathrm{Y}$ qui représente f. Posons $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$,

$$\mathrm{X}'' = \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'', \qquad \mathrm{U}'' = \mathrm{U} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'', \qquad \mathrm{V}'' = \mathrm{V}' \underset{\mathrm{V}}{\times} \mathrm{V}'.$$

Alors U'' est schématiquement dense dans X'' relativement à S'', donc U'' est schématiquement dense dans V'' relativement à S, puisque $\mathrm{U}'' \subseteq \mathrm{V}'' \subseteq \mathrm{X}''$. La restriction de $f' : \mathrm{V}' \to \mathrm{Y}'$ à U' est déduite de $f : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ par changement de base. Les deux morphismes $\mathrm{V}'' \to \mathrm{Y}$ déduits de g par changement de base sont égaux sur U'', donc sont égaux. Or puisque $\mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ est plat et localement de présentation finie, il est fppf-couvrant (Exp. IV 6.3) et on trouve le morphisme $\mathrm{V} \to \mathrm{Y}$ par descente.

Nous allons nous servir fréquemment de la trivialité suivante :

Proposition 1.7. — *Soit* X/S *fidèlement plat, localement de présentation finie, et soit* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ *un ouvert relativement schématiquement dense. Alors il existe une extension de base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *qui est fppf-couvrante, et une section* $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ *qui est contenue dans* $\mathrm{U}(\mathrm{S}')$.

En effet, U/S est fppf-couvrant. On pose $\mathrm{S}' = \mathrm{U}$ et on prend comme section le S-graphe de l'inclusion de U dans X.

[4] N.D.E. : On a ajouté le numéro 1.5.1.

2. Détermination locale d'un morphisme de groupes

Soient G et H des groupes et soit $U \subseteq G$ un sous-ensemble tel que $U \cdot U = G$. Alors si f et g sont des homomorphismes de G dans H tels que $f = g$ sur U, on a $f = g$. De même :

Proposition 2.1. — *Soient* S *un site* (cf. Exp. IV [5]), G *un faisceau en groupes sur* S, *et* $U \subseteq G$ *un sous-faisceau d'ensembles tel que le morphisme* $U \times U \to G$ *induit par la multiplication soit un* épimorphisme. *Alors si f et g sont des homomorphismes de* G *dans un faisceau en groupes* H *qui sont égaux sur* U, *on a* $f = g$.

636 ***Corollaire 2.2***. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes localement de présentation finie et plat, soient* $U \subseteq G$ *un ouvert qui est relativement schématiquement dense, et* H *un faisceau en groupes sur* S *pour la topologie* fppf. *Alors tout homomorphisme* $f : G \to H$ *est déterminé par sa restriction à* U.

En effet, puisque G est plat sur S, la loi de composition dans G est un morphisme plat (VI_B.9.2.xi) et il s'ensuit que $U \times_S U \to G$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, donc fppf-couvrant, donc un épimorphisme.

Proposition 2.3. — *Soient* G *un préschéma en groupes localement de présentation finie et plat sur* S, $U \subseteq G$ *un ouvert relativement schématiquement dense, et* H *un faisceau en groupes pour la topologie* fppf. On note m_G la multiplication de G et m_H celle de H.

Soit $\overline{f} : U \to H$ *un* S-*morphisme et supposons qu'il existe un ouvert relativement schématiquement dense* V *de* $m_G^{-1}(U) \cap U \times_S U$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "(\overline{f}\times\overline{f})|_V"] \arrow[d, "m_G"] & H \times_S H \arrow[d, "m_H"] \\ U \arrow[r, "\overline{f}"] & H \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Alors il existe un morphisme de S-*groupes* $f : G \to H$ (*nécessairement unique*) *prolongeant* $\overline{f}$, *dans chacune des situations suivantes :*

(i) H *est représentable.*

(ii) *Le morphisme diagonal* $H \to H \times_S H$ *est représentable par une immersion fermée.* [6]

(iii) *Pour chaque section* $a \in U(S)$, *l'ouvert* $\mathrm{pr}_2\big((a \times_S U) \cap V\big)$ *est relativement schématiquement dense dans* U [(*)], *et cet énoncé reste vrai après tout changement de base* $S' \to S$.

[(*)] ou dans G, ce qui revient au même en vertu de 1.1 (iv).

[5] N.D.E. : c.-à-d., une catégorie munie d'une topologie, cf. IV, § 4.2.

[6] N.D.E. : Voir la note en 1.4.

Démonstration. Notons d'abord que V est relativement schématiquement dense dans $G \times_S G$. En effet, V est relativement schématiquement dense dans

$$m_G^{-1}(U) \bigcap U \underset{S}{\times} G \bigcap G \underset{S}{\times} U$$

et les trois facteurs sont déduits de $U \subseteq G$ par un changement de base $G \times_S G \to G$ évident, ce qui implique l'assertion d'après 1.1.

Pour construire un morphisme $f : G \to H$ il suffit, puisque $U \times_S U \to G$ est fppf-couvrant, de trouver un morphisme de $U \times_S U$ dans H tel que les deux morphismes **637**
induits sur $(U \times_S U) \times_G (U \times_S U)$ sont les mêmes.

Prenons $m_H \circ (\overline{f} \times \overline{f}) : U \times_S U \to H$. On doit vérifier que chaque fois qu'on a des sections $a, b, c, d \in U(S')$, $S' \to S$ arbitraire, telles que $ab = cd$, on a aussi $\overline{f}(a)\overline{f}(b) = \overline{f}(c)\overline{f}(d)$. Par hypothèse, c'est vrai si (a, d) et (c, d) sont contenus dans $V(S')$, puisque dans ce cas on a $\overline{f}(a)\overline{f}(b) = \overline{f}(ab)$ et $\overline{f}(c)\overline{f}(d) = \overline{f}(cd)$. Donc, c'est vrai chaque fois que $(a, b, c, d) \in (V \times_G V)(S')$.

Je dis que $V \times_G V$ est un ouvert de $(U \times_S U) \times_G (U \times_S U)$ schématiquement dense relativement à S. Cela achèvera la démonstration dans les cas (i) et (ii) d'après 1.4, les faits que le morphisme f ainsi construit étend $\overline{f}$ et que f est un homomorphisme étant évidents, aussi d'après 1.4.

Or, écrivons

$$V \underset{G}{\times} V = V \underset{G}{\times} (G \underset{S}{\times} G) \bigcap (G \underset{S}{\times} G) \underset{G}{\times} V.$$

Par symétrie et 1.1, il suffit de vérifier que $V \times_G (G \times_S G)$ est relativement schématiquement dense dans $(G \times_S G) \times_G (G \times_S G)$. Mais ce dernier préschéma est S-isomorphe à $G \times_S G \times_S G$, le morphisme étant donné par $(a, b, c, d) \mapsto (a, b, c)$. Donc ce qu'il faut démontrer est que $V \times_S G$ est schématiquement dense dans $G \times_S G \times_S G$ relativement à S, ce qui est conséquence du fait que V est relativement schématiquement dense dans $G \times_S G$.

Il reste à traiter le cas (iii). Pour démontrer $\overline{f}(a)\overline{f}(b) = \overline{f}(c)\overline{f}(d)$, il est permis de faire une extension de base fppf-couvrante. Supposons qu'on a une section $x \in G(S')$, $S' \to S$ fppf-couvrant, telle que (b, x), (a, bx), (d, x), (c, dx) sont tous dans V. Alors on aura

$$f(a)f(b)f(x) = f(a)f(bx) = f(abx) = f(cdx) = f(c)f(dx) = f(c)f(d)f(x),$$

d'où l'égalité cherchée.

[7] Pour trouver un tel x, posons, pour tout $z \in U(S')$,

$$V_z = \mathrm{pr}_2(z \underset{S'}{\times} U_{S'} \cap V_{S'}).$$

Alors, les hypothèses sur x veulent dire que $x \in W$, où

$$W = V_b(S') \bigcap V_d(S') \bigcap b^{-1}V_a(S') \bigcap d^{-1}V_c(S').$$

D'après (iii), W est relativement schématiquement dense dans G. Donc l'existence d'une section x après une extension fppf-couvrante découle de la proposition 1.7.

[7]N.D.E. : On a ajouté le début de la phrase qui suit.

Vérifions que le morphisme ainsi construit est multiplicatif : Soient $a, b \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ arbitraire, et notons $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Choisissons une extension de base fppf-couvrante $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et une section $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ telles que $x \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$ et $ax^{-1} \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$, c'est-à-dire $x \in (a^{-1}\mathrm{U})^{-1}(\mathrm{S}')$. Choisissons de plus une autre extension fppf-couvrante $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ et
638 une section $y \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$ telles que

$$y,\ by^{-1},\ aby^{-1} \qquad \text{appartiennent à} \quad \mathrm{U}(\mathrm{S}''),$$

et

$$by^{-1} \in \mathrm{V}_x, \qquad xby^{-1} \in \mathrm{V}_{ax}^{-1}.$$

Alors d'après la définition de f, on a sur S''

$$f(a) = \overline{f}(ax^{-1})\overline{f}(x), \qquad f(b) = \overline{f}(by^{-1})\overline{f}(y), \qquad f(ab) = \overline{f}(aby^{-1})\overline{f}(y).$$

De plus,

$$\begin{aligned} f(a)f(b) = \overline{f}(ax^{-1})\overline{f}(x)\overline{f}(by^{-1})\overline{f}(y) = \overline{f}(ax^{-1})\overline{f}(xby^{-1})\overline{f}(y) \\ = \overline{f}(aby^{-1})\overline{f}(y) = f(ab), \end{aligned}$$

d'où la multiplicativité.

Le fait que f étend $\overline{f}$ est maintenant facile : Soit $a \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$, notons $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$, et choisissons $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-couvrant et des sections $x, y \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ telles que (x, y), (ax, y), (a, xy) sont dans $\mathrm{V}(\mathrm{S}')$. Alors

$$f(xy) = \overline{f}(x)\overline{f}(y) = \overline{f}(xy), \qquad f(axy) = \overline{f}(ax)\overline{f}(y) = \overline{f}(axy).$$

Donc

$$f(a) = f(axy)f((xy)^{-1}) = f(axy)f(xy)^{-1} = \overline{f}(axy)\overline{f}(xy)^{-1} = \overline{f}(a).$$

Remarque 2.3.1. — Dans beaucoup de cas l'hypothèse (iii) est vraie, car elle sera même vraie si l'on remplace U par un ouvert plus petit U′, encore relativement schématiquement dense dans G. Par exemple on a :

Proposition 2.4. — *La situation étant comme dans* 2.3*, supposons que chaque fibre géométrique de* G/S *soit* irréductible. *Soient* $\mathrm{U}' = \mathrm{pr}_1\mathrm{V}$ *et*

$$\mathrm{V}' = \mathrm{V} \bigcap m_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{U}') \bigcap (\mathrm{U}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{U}').$$

Alors $\mathrm{U}' \subseteq \mathrm{U}$ *est un ouvert relativement schématiquement dense de* G *et les objets* U', $\overline{f}|_{\mathrm{U}'}$ *et* V' *satisfont à l'hypothèse* (iii).

Démonstration. U′ est ouvert parce que $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est plat et localement de présentation finie. Toutes les autres vérifications sont triviales sauf l'hypothèse (iii).

Soit $a \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$, notons $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Pour vérifier que $\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{U}') \cap \mathrm{V}'\big)$ est relativement schématiquement dense dans U′, il suffit de le faire fibre par fibre d'après le corollaire 1.3, c'est-à-dire il suffit de traiter le cas où S est le spectre d'un corps, et dans ce cas il suffit de démontrer que U′ est non vide, parce que G est irréductible et « sans composantes immergées » (cf. $\mathrm{VI_A}$, 1.1.1). Or

$$\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{U}') \cap \mathrm{V}'\big) = \mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{U}') \cap \mathrm{V}\big) \bigcap \mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{U}') \cap m_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{U}')\big)$$

et le deuxième terme du membre droit est dense dans G. Donc il suffit de démontrer que $\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{U}') \cap \mathrm{V}\big)$ est dense dans G, c'est-à-dire, non vide, ce qui est clair car $a \in \mathrm{U}' = \mathrm{pr}_1\mathrm{V}$.

3. Construction d'un groupe à partir d'une loi rationnelle

639

3.0. On suppose donné un préschéma X/S et une application rationnelle $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ au-dessus de S, et on cherche un groupe G/S et une application *birationnelle* relativement à S [8]

$$\mathrm{X} \dashrightarrow \mathrm{G}$$

qui commute avec les lois de composition. Nous traitons seulement le cas où X/S vérifie l'hypothèse suivante :

$$(\diamondsuit) \qquad \begin{array}{l}\text{X/S est fidèlement plat, de présentation finie, et}\\ \text{à fibres séparées et « sans composantes immergées ».}\end{array}$$

(Notons que les deux dernières hypothèses sont des propriétés vraies pour un préschéma en groupes [9]).

Nous allons souvent supprimer le symbole S dans les produits fibrés.

Soit X/S un préschéma ayant les propriétés ($\diamondsuit$) ci-dessus et soit W un sous-préschéma de présentation finie de $\mathrm{X} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ ayant la propriété suivante :

$$(*) \qquad \begin{array}{l}\text{Les trois morphismes } \mathrm{W} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X} \text{ donnés par les projections de } \mathrm{X}^3 \text{ sur } \mathrm{X}^2\\ \text{sont des immersions ouvertes schématiquement denses relativement à S.}\end{array}$$

Notations. — Nous allons utiliser la terminologie suivante : Étant donné des sections a, b, $c \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ arbitraire, telles que $(a, b, c) \in \mathrm{W}(\mathrm{S}')$, nous écrivons :

$$c = ab, \qquad b = a^{-1}c, \qquad a = cb^{-1}.$$

Définition 3.0.1. — [10] Nous disons, étant donné une section $(a, b) \in \mathrm{X}^2(\mathrm{S}')$, que ab est *défini* si, et seulement si, il existe une section $c \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ telle que $(a, b, c) \in \mathrm{W}(\mathrm{S}')$, i.e. si et seulement si (a, b) est dans $\mathrm{pr}_{12}\mathrm{W}(\mathrm{S}')$. De même, dire que $a^{-1}b$ ou ab^{-1} est défini a la significations analogue, et on étend cette terminologie aussi aux produits de plusieurs facteurs.

Remarque 3.0.2. — Notons tout de suite le fait suivant : D'après (i), W définit une application rationnelle $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{X}$ au-dessus de S (celle donnée par $(a, b) \mapsto ab$). Il peut bien arriver que cette application rationnelle ait un domaine de définition plus grand que $\mathrm{pr}_{12}\mathrm{W}$. Néanmoins, nous disons que ab est défini seulement si $(a, b) \in \mathrm{pr}_{12}\mathrm{W}(\mathrm{S}')$.

Définition 3.1. — Un *germe de groupe* est un préschéma X/S ayant les propriétés 640

[8] N.D.E. : Expliciter la notion d'application birationnelle (relativement à S), peut-être dans un ajout 1.5.2 ?

[9] N.D.E. : cf. VI_{A}, à préciser ...

[10] N.D.E. : On a introduit la numérotation 3.0.1 et 3.0.2.

($\diamondsuit$) ci-dessus et un sous-préschéma de présentation finie W de $\mathrm{X} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ ayant les propriétés suivantes :

(i) W vérifie la propriété ($*$) ci-dessus.

(ii) Pour chaque section $a \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$, les ensembles

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}_i\big((a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}) \cap \mathrm{W}\big), && i = 2, 3,\\ &\mathrm{pr}_i\big((\mathrm{X} \times a \times \mathrm{X}) \cap \mathrm{W}\big), && i = 3, 1,\\ &\mathrm{pr}_i\big((\mathrm{X} \times \mathrm{X} \times a) \cap \mathrm{W}\big), && i = 1, 2,\end{aligned}$$

sont schématiquement denses dans X relativement à S, et cet énoncé reste vrai après tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. (L'hypothèse (i) implique que ces ensembles sont des ouverts de X.) Intuitivement, cela veut dire que « ax est défini pour x assez général », etc.

(iii) La loi est *associative*, c'est-à-dire, si $(a, b, c) \in \mathrm{X}^3(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ arbitraire, est tel que $(ab)c$ et $a(bc)$ sont définis, on a $(ab)c = a(bc)$.

Remarques. — (a) On peut remplacer dans (i) la condition W schématiquement dense dans X^2 relativement à S par la condition que pour chaque $s \in \mathrm{S}$ la fibre W_s est dense dans X_s^2 au sens topologique, grâce aux hypothèses faites sur X et à 1.2.

(b) La condition (iii) équivaut à la suivante : Soit V_1 (resp. V_2) l'ouvert de X^3 où l'application rationnelle $(a, b, c) \mapsto a(bc)$ (resp. $(a, b, c) \mapsto (ab)c$) est définie (*). Alors, il existe un ouvert $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$ qui est schématiquement dense dans X^3 relativement à S tel que les deux applications précédentes coïncident sur V. C'est une conséquence de 1.4 parce que, bien entendu, V_1 et V_2 sont schématiquement denses dans X^3 relativement à S.

(c) L'hypothèse (ii) servira plus bas à assurer que X sera un *sous-objet* du préschéma en groupes qu'il définit. Dans beaucoup de cas on peut déduire (ii) à partir de (i), à condition de remplacer X par un ouvert X′ relativement schématiquement dense, et W par un ouvert relativement schématiquement dense de $\mathrm{W} \cap \mathrm{X}'^3$. On a en fait :

Proposition 3.2. — *Supposons que chaque fibre géométrique de* X/S *soit* irréductible *et soit* W *un sous-préschéma de* X^3 *qui satisfait à la condition* (i) *de* 3.1. *Alors il existe un ouvert* X′ *de* X *relativement schématiquement dense et un ouvert* W′ *de* $\mathrm{W} \cap (\mathrm{X}' \times \mathrm{X}')$ *relativement schématiquement dense tels que le couple* (X′, W′) *satisfasse aux conditions* (i) *et* (ii). *Si* (iii) *est vérifié pour* (X, W), *elle l'est pour* (X′, W′).

641 *Démonstration.* Posons $\mathrm{X}' = \bigcap_{i=1}^{3} \mathrm{pr}_i \mathrm{W}$. Chaque $\mathrm{pr}_i\mathrm{W}$ est ouvert dans X parce que $\mathrm{W} \to \mathrm{X}^2$ est une immersion ouverte et que les projections $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{X}$ sont plates et de présentation finie. De plus, $\mathrm{pr}_i\mathrm{W}$ est relativement schématiquement dense dans X parce que W l'est dans X^2 et les projections $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{X}$ sont surjectives (il suffit de vérifier la densité au sens topologique). Prenons $\mathrm{W}' = \mathrm{W} \cap \mathrm{X}'^3$.

(*) Au sens expliqué dans 3.0.1 ; on pourrait aussi remplacer ces ouverts par les domaines de définition (cf. 1.5) des applications rationnelles envisagées.

Pour vérifier que (i) est vraie, notons que

$$W' = \big(W \cap (X' \times X' \times X)\big) \bigcap \big(W \cap (X \times X' \times X')\big) \bigcap \big(W \cap (X' \times X \times X')\big).$$

Or $W \cap (X' \times X' \times X) \simeq \mathrm{pr}_{12}W \cap X' \times X'$, donc est relativement schématiquement dense dans W. De même, les autres termes du membre de droite sont relativement schématiquement denses dans W, et par suite W′ est relativement schématiquement dense dans W. Donc $\mathrm{pr}_{ij}W'$ est relativement schématiquement dense dans $\mathrm{pr}_{ij}W$, donc dans $X \times X$, donc dans $X' \times X'$.

Pour vérifier la condition (ii), soit $a \in X'(S')$, et notons $S' = S$. Il nous faut démontrer que, par exemple, $\mathrm{pr}_2\big((a \times X' \times X') \cap W'\big)$ est schématiquement dense dans X′ relativement à S. D'après 1.3, il suffit de le vérifier fibre par fibre, c'est-à-dire qu'il suffit de traiter le cas où S est le spectre d'un corps, et dans ce cas, il suffit de vérifier que l'ouvert est non-vide, parce que les fibres de X/S sont irréductibles et « sans composantes immergées ». Puisque $\mathrm{pr}_2\big((a \times X \times X) \cap W\big)$ est non-vide, a étant section de X′, cet ouvert est dense dans X. On a

$$\mathrm{pr}_2\big((a \times X \times X) \cap W\big) = \mathrm{pr}_2\big((a \times X) \cap \mathrm{pr}_{12}W\big).$$

Donc,

$$\mathrm{pr}_2\big((a \times X) \cap \mathrm{pr}_{12}W\big) \cap X' = \mathrm{pr}_2\big((a \times X') \cap \mathrm{pr}_{12}W\big) = \mathrm{pr}_2\big((a \times X' \times X) \cap W\big)$$

est dense dans X, donc dans X′.

De même, $\mathrm{pr}_3(a \times X \times X' \cap W)$ est dense dans X, donc dans $\mathrm{pr}_3(a \times X \times X \cap W)$, c'est-à-dire, $(a \times X \times X' \cap W)$ est dense dans $(a \times X \times X \cap W)$, c'est-à-dire, $\mathrm{pr}_2(a \times X \times X' \cap W)$ est dense dans $\mathrm{pr}_2(a \times X \times X \cap W)$, donc dense dans X, donc dense dans X′.

Or puisque

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_2(a \times X' \times X' \cap W') &= \mathrm{pr}_2(a \times X' \times X' \cap W)\\ &= \mathrm{pr}_2(a \times X' \times X \cap W) \cap \mathrm{pr}_2(a \times X \times X' \cap W),\end{aligned}$$

il est bien dense dans X′, ce qu'il fallait démontrer. Les autres assertions de (ii) suivent par symétrie, et le fait que la condition (iii) est préservée est trivial. [11] La proposition 3.2 est démontrée.
[12]

3.2.1. — Fixons maintenant un germe de groupe (X, W) au dessus de S. Il nous faut faire des remarques préliminaires sur la situation, que nous avons réunies ci-dessous. Nous utiliserons ces règles souvent sans mention explicite dans la suite. **642**

Soit $a \in X(S')$, et notons $S' = S$. Alors on obtient une application (bi)rationnelle φ au-dessus de S de X dans lui-même en faisant correspondre à une section x la section ax si elle est définie. D'après 3.1 (ii), le domaine de définition de φ contient l'ouvert relativement schématiquement dense $\mathrm{pr}_2\big((a \times X \times X) \cap W\big)$, et φ définit un isomorphisme de cet ouvert sur l'ouvert (où $a^{-1}x$ est défini) $\mathrm{pr}_3\big((a \times X \times X) \cap W\big)$. Cette remarque est généralisée de la façon évidente dans la règle 1.

---

[11] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[12] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.2.1, ainsi que 3.2.2.

Règle 1. — Soit $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x, t_1, \dots, t_n)$ un « produit » des symboles x, $t_1, \dots, t_n$ obtenu récursivement de la manière suivante : $\mathrm{P}_0 = x$; P_{i+1} = une des expressions suivantes :

$$\mathrm{P}_i\, t, \qquad t\,\mathrm{P}_i, \qquad \mathrm{P}_i^{-1} t, \qquad t\,\mathrm{P}_i^{-1}, \qquad \mathrm{P}_i\, t^{-1}, \qquad t^{-1}\mathrm{P}_i,$$

où t est un des t_j ; $\mathrm{P}_r = \mathrm{P}$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$. Alors il existe un ouvert relativement schématiquement dense U de $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}$ tel que le produit $\mathrm{P}(x, a_1, \dots, a_n)$ est défini (au sens de la remarque 3.0.2) pour une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ si et seulement si $x \in \mathrm{U}(\mathrm{S}'')$, et l'application $x \to \mathrm{P}(x, (a))$ donne un isomorphisme de U sur un autre ouvert relativement schématiquement dense, noté $\mathrm{P}(\mathrm{U}, (a))$, de $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}$.

Règle 2. — Soient a, $b \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$. Alors :
Si ab est défini, il en est de même de $a^{-1}(ab)$, et $a^{-1}(ab) = b$.
Si $a^{-1}b$ est défini, il en est de même de $a(a^{-1}b)$, et $a(a^{-1}b) = b$.
Si ba^{-1} est défini, il en est de même de $(ba^{-1})a$, et $(ba^{-1})a = b$.

Règle 3. — Soient a, b, $b' \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$. Si $ab = ab'$, si $ba = b'a$, si $a^{-1}b = a^{-1}b'$ ou si $ba^{-1} = b'a^{-1}$, alors $b = b'$. Ici il est sous-entendu que la relation d'égalité implique que les deux côtés sont définis.

Règle 4. — Soient a, b, $c \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$. Alors chaque fois que les deux côtés sont définis, on a

$$a\big((ba)^{-1}c\big) = b^{-1}c.$$

643 De même :

$$\big(c(ab)^{-1}\big)a = cb^{-1}, \qquad a^{-1}\big((ab^{-1})c\big) = b^{-1}c, \qquad \big(c(b^{-1}a)\big)a^{-1} = cb^{-1}.$$

Règle 5. — Toutes les lois d'associativité suivantes sont vraies, chaque fois que les deux côtés sont définis :

$$(a^{-1}b)c = a^{-1}(bc), \qquad (ab^{-1})c = a(b^{-1}c), \qquad (ab)c^{-1} = a(bc^{-1}),$$

$$(ab)^{-1}c = b^{-1}(a^{-1}c), \qquad (a^{-1}b)c^{-1} = a^{-1}(bc^{-1}), \qquad (ab^{-1})c^{-1} = a(cb)^{-1}.$$

3.2.2. Vérification des règles. — (1) se fait par récurrence évidente sur la longueur r de P, le cas $r = 1$ étant conséquence directe de (3.1) (ii).

(2) C'est trivial d'après la définition.

(3) En effet, d'après la règle 2, par exemple dans le premier cas, ona

$$b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ab') = b'.$$

(4) Vérifions par exemple la première relation : du côté droit la multiplication à gauche par b est définie et donne c, d'après la règle 2. Supposons qu'elle soit aussi définie du côté gauche. Alors on aura

$$b\Big(a\big((ba)^{-1}c\big)\Big) = (ba)\big((ba)^{-1}c\big) = c.$$

En effet (ba) est défini par hypothèse parce qu'il figure dans l'expression. Donc le membre du milieu est défini et égal à c d'après la règle 2, et égal au membre de gauche par associativité (cf. 3.1 (iii)). Donc la règle 3 implique que l'égalité cherchée est vraie si cette multiplication par b est définie.

Or, fixons a et b. Alors la règle 1 implique que $b\big(a((ba)^{-1}c)\big)$ est bien défini pour c « dans » un ouvert U de X relativement schématiquement dense, donc dans cet ouvert relativement schématiquement dense les deux applications rationnelles $c \mapsto b^{-1}c$ et $c \mapsto a\big((ba)^{-1}c\big)$ sont égales. D'après 1.4, elles sont égales sur chaque domaine commun de définition, d'où le résultat cherché.

(5) C'est le même genre de raisonnement que le précédent. Par exemple on vérifie 644
$(ab^{-1})c^{-1} = a(cb)^{-1}$ de la manière suivante : Si la multiplication à droite par c est définie du côté droit, on a égalité d'après la règle 4. Comme il suffit de vérifier une telle formule sur un ouvert relativement schématiquement dense, on se réduit au cas où cette multiplication est bien définie.

3.2.3. — Considérons maintenant la relation R sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ obtenue en posant, pour $a, b, a', b' \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$, $(a, b) \sim (a', b')$ modulo $\mathrm{R}(\mathrm{S}')$ si, et seulement si, il existe un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ couvrant pour fppf et une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ tels que $(xa)b$ et $(xa')b'$ soient définis et égaux. Alors R est une relation d'équivalence.

En effet, cette relation est évidemment symétrique. D'après la règle 1, le produit $(xa)b$ est défini si x est « dans » un ouvert relativement schématiquement dense convenable. Donc 1.7 affirme qu'il existe un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ couvrant pour fppf et un $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ tels que $(xa)b$ soit défini. La relation est donc réflexive, et la transitivité est conséquence du lemme suivant :

Lemme 3.3. — *Soient x, y, a, b, a', b', des sections de* $\mathrm{X}(\mathrm{S}')$ *tels que $(xa)b$, $(xa')b'$, $(ya)b$, $(ya')b'$ soient définis. Si $(xa)b = (xa')b'$ alors $(ya)b = (ya')b'$.*

En effet, le lemme dit qu'on peut tester $(a, b) \sim (a', b')$ avec un $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-couvrant, arbitraire tel que les deux produits soient définis. Étant donné a, b, a', b', a'', $b'' \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$, on peut, d'après la règle 1, 1.1 et 1.7, trouver une extension $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-couvrante et une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ telles que les trois produits en cause soient définis, d'où la transitivité.

Démonstration du lemme. Écrivons formellement pour commencer :

$$(za)b = \Big(\big((zx^{-1})x\big)a\Big)b = \big((zx^{-1})(xa)\big)b = (zx^{-1})\big((xa)b\big)$$
$$(za')b' = \Big(\big((zx^{-1})x\big)a'\Big)b' = \big((zx^{-1})(xa')\big)b' = (zx^{-1})\big((xa')b'\big)$$

On vérifie que ces égalités sont bien vraies si les membres sont définis, d'après les règles appropriées [(13)]. Il suit que $(za)b = (za')b'$ si toutes ces expressions sont définies. De plus, d'après la règle 1 et les hypothèses déjà faites, ces expressions sont bien 645
définies si $z \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ est dans $\mathrm{V}(\mathrm{S}'')$, où V est un certain ouvert de X relativement schématiquement dense (nous avons pris $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$). Donc les deux applications rationnelles de X dans lui-même données par $z \mapsto (za)b$ et $z \mapsto (za')b'$ sont égales, d'où $(ya)b = (ya')b'$.

(13) N.D.E. : à préciser...

Lemme 3.4. — *Considérons l'application rationnelle* $\varphi : \mathrm{X}^3 \to \mathrm{X}$ *au-dessus de* S *définie par* $(a,b,c) \mapsto c^{-1}(ab)$. *Soit* U *le domaine de définition de* φ *et considérons le graphe* Γ *du morphisme* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ *induit par* φ*, qui est un sous-schéma de* X^4. *Alors une section* $(a,b,c,d) \in \mathrm{X}^4(\mathrm{S})$ *est dans* $\Gamma(\mathrm{S})$ *si et seulement si* $(a,b) \sim (c,d)$.

Démonstration. Notons d'abord que l'application rationnelle φ est la même que celle qui est donnée par la formule $(a,b,c) \mapsto (xc)^{-1}((xa)b)$ pour une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ arbitraire. Il revient au même de dire qu'on a $c^{-1}(ab) = (xc)^{-1}((xa)b)$ chaque fois que les deux côtés sont définis. Nous laissons la vérification au lecteur.

Montrons alors que l'application φ est définie pour une section $(a,b,c) \in \mathrm{X}^3(\mathrm{S})$ si et seulement s'il existe d avec $(a,b) \simeq (c,d)$ et qu'alors $d = \varphi(a,b,c)$. En effet supposons qu'on ait $(a,b) \sim (c,d)$. Pour vérifier que l'application φ est définie, il est permis de faire une extension de base fppf-couvrante (proposition 1.6), et on peut donc supposer qu'il existe une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ telle que $(xa)b$ et $(xc)d$ soient définis et égaux. Il s'ensuit (règle 2) que $(xc)^{-1}((xa)b)$ est défini et égal à d.

Inversement, supposons l'application φ définieen la section (a,b,c) et soit $d = \varphi(a,b,c)$. Choisissons un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-couvrant et une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ tels que $(xa)b$ et $(xc)d$ soient définis. Nous voulons montrer qu'ils sont égaux. Pour cela, il suffit de démontrer que les deux applications rationnelles au-dessus de S de X dans lui-même, données par $b \mapsto (xa)b$ et $b \mapsto (xc)\varphi(a,b,c)$ sont les mêmes, ce qui suit de la remarque du premier paragraphe.

646 ***Proposition 3.5***. — *La relation d'équivalence* $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{X}^2$ *est représentable et c'est une relation plate et de présentation finie, c'est-à-dire, les projections de* R *sur* X^2 *sont des morphismes plats et de présentation finie.*

Démonstration. On peut supposer S affine. Puisque (X,W) est de présentation finie sur S on peut descendre toute la situation à un S de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, et donc noethérien. Nous pouvons donc supposer que S est noethérien. Alors il est trivial que le graphe Γ de (3.4) est de présentation finie au-dessus de X^2. La projection $\mathrm{pr}_{12}|\Gamma$ est plate parce que $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_{123}\Gamma$, qui est un ouvert de X^3, et que la projection $\mathrm{pr}_{12} : \mathrm{X}^3 \to \mathrm{X}^2$ est plate parce que X est plat au-dessus de S.

Je dis que Γ représente R. Notons qu'il y a quelque chose à démontrer parce que le domaine de définition d'une application rationnelle ne commute pas en général aux extensions de base. Soit $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$. Ce qui est clair, d'après (3.4) appliqué à S'', est que $\mathrm{R}(\mathrm{S}'') \supset \Gamma(\mathrm{S}'')$, parce que $\varphi \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$ est certainement définie sur $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$. Soit donc $(a,b,c,d) \in \mathrm{R}(\mathrm{S}'')$. Il faut démontrer que $(a,b,c,d) \in \Gamma(\mathrm{S}'')$. La vérification de cela se fait localement pour, disons, la topologie étale. On peut donc supposer S'' strictement local, i.e. , le spectre d'un anneau hensélien, à corps résiduel séparablement clos. De plus, en appliquant (1.6) et les sorites habituels de passage à la limite, on se réduit au cas S strictement local et $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$ local. Supposons qu'on ait une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ telle que sur S'' les produits $(xa)b$ et $(xc)d$ soient définis. Ça impliquera que $(xc)^{-1}((xa)b)$ est défini, et égal à d. Or il existe un ouvert V de X^3 relativement sch. dense tel que $(xc)^{-1}((xa)b)$ soit défini si et seulement si $(a,b,c) \in \mathrm{V}(\mathrm{S}'')$, et on a $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}$. Donc $(a,b,c,d) \in \Gamma(\mathrm{S}'')$ si un tel x existe. D'après (1.6) il est permis de faire une extension de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-couvrante pour trouver un tel x. Puisque S est strictement local, on peut [(*)] trouver un $S' \to S$ fidèlement plat, local, et fini et une section $x \in X(S')$ qui « passe par » un point fermé arbitraire de la fibre fermée de X/S. Or dire que $(xa)b$ et $(xc)d$ sont définis veut dire que sur S'', x est dans un certain ouvert relativement sch. dense, ce qui se vérifie sur la fibre fermée de $X_{S''}$. Donc ça marche.

Soit maintenant G le quotient de X^2 par R en tant que faisceau pour la topologie fppf. On va définir une loi de composition sur G de la manière suivante : Soit $(g, g') \in G(S')$ représenté par une section $((a,b),(c,d))$ de $X^2 \times X^2(S'')$, $S'' \to S'$ fppf-couvrante. On suppose de plus que X admet une section x au-dessus de S'' telle que $a(b(cx))$ et $x^{-1}d$ soient définis, ce qui est permis d'après la règle 1 et (1.7), et on appelle gg' la classe dans $G(S')$ représentée par la section $(a(b(cx)), x^{-1}d)$ de $X^2(S'')$. 647

Vérifions que gg' ne dépend pas du choix de la section x et du représentant $((a,b),(c,d))$: Soient en effet $(a',b') \sim (a,b)$, $(c',d') \sim (c,d)$, et x tels que $a'(b'(c'x'))$ et ${x'}^{-1}d'$ soient définis. Nous pouvons supposer que tous sont des sections au-dessus de S''. On doit démontrer que

$$(a(b(cx)), x^{-1}d) \sim (a'(b'(c'x')), {x'}^{-1}d'),$$

c'est-à-dire que pour une section convenable $z \in X(S''')$, $S''' \to S''$ fppf-couvrante convenable, on a

$$(z(a(b(cx))))(x^{-1}d) = (z(a'(b'(c'x'))))({x'}^{-1}d').$$

Chaque fois que tous les produits sont définis, on a

$$\begin{aligned}(z(a(b(cx))))(x^{-1}d) &= ((za)(b(cx)))(x^{-1}d) = \\ = (((za)b)(cx))(x^{-1}d) &= ((((za)b)c)x)(x^{-1}d) = \\ = (((za)b)c)(x(x^{-1}d)) &= (((za)b)c)d,\end{aligned}$$

et les mêmes identités sont vraies avec les primes. Or, d'après la règle 1 et (1.7) il existe un tel z. On doit donc démontrer que

$$(((za)b)c)d = (((za')b')c')d'.$$

Mais $(za)b = (za')b'$ parce que $(a,b) \sim (a',b')$ (3.3) et on a donc l'égalité cherchée parce que $(c,d) \sim (c',d')$.

Considérons le morphisme naturel $i : X \to G$ défini de la manière suivante : Pour $a \in X(S')$, on choisit un $S'' \to S'$ fppf-couvrant et une section $b \in X(S'')$ tels que ab^{-1} soit défini, et on pose 648

$$i(a) = \text{ classe dans G de } (ab^{-1}, b).$$

On vérifie aisément que cette classe, qui est a priori dans $G(S'')$, ne dépend pas du choix de b et donne donc un élément bien déterminé de $G(S')$.

Le lecteur se fera le plaisir de vérifier la

Proposition 3.6. — *Le morphisme i commute aux lois de composition de* X *et de* G, *c.-à-d., si a,* $b \in X(S')$ *sont des sections telles que ab est défini, on a* $i(a)i(b) = i(ab)$.

[(*)]conjuguant Exp. VI_A, 1.1.1 et EGA IV_4, 17.16.2.

Le but de ce numéro est le théorème suivant :

Théorème 3.7. — [14] *Soit* (X, W) *un germe de groupe au-dessus de* S, *avec* X/S *fidèlement plat, de présentation finie, et à fibres séparées et sans composante immergée. Alors avec les notations ci-dessus on a*

(i) G *est un faisceau en groupes.*

(ii) $i : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est représentable par une immersion ouverte.*

(iii) G *est représentable localement sur* S *pour la topologie* fppf.

(iv) *Si* G/S *est représentable, alors c'est un groupe plat et de présentation finie, et* $i : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est schématiquement dense relativement à* S.

Notons que G est évidemment caractérisé par les propriétés (i), …, (iv) ; on peut donc oublier la construction explicite de G.

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

Lemme 3.8. — (i) *Soit c une section de* X(S)*, alors le morphisme du préschéma* $c \times \mathrm{X}$ (*qui est* S*-isomorphe à* X) *dans* G *donné par* $c \times \mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est un monomorphisme.*

649 (ii) *Soient* $\{c_i\}$, $i \in \mathrm{I}$, *des sections de* X(S)*, soit* $\mathrm{Z} = \coprod_i c_i \times \mathrm{X}$, *et appelons* $\mathrm{R}' \rightrightarrows \mathrm{Z}$ *la relation d'équivalence induite sur* Z *par le morphisme évident* $\mathrm{Z} \to \mathrm{X}^2$*. Alors* R' *est un « recollement » des* $c_i \times \mathrm{X} \simeq \mathrm{X}$.

Démonstration.

(i) Pour que deux sections (c, a) et (c, a') de $(c \times \mathrm{X})(\mathrm{S}')$ aient même image dans G, on doit avoir $(c, a) \sim (c, a')$, c'est-à-dire, $(xc)a \sim (xc)a'$ pour $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ convenable, $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ fppf-couvrante, d'où $a = a'$ par la règle 3.

(ii) Soient c_i, c_j deux sections et considérons l'application birationnelle ψ_{ji} de X en lui-même au-dessus de S qui est donnée par la formule $x \mapsto c_j^{-1}(c_i x)$. C'est la même application que celle donnée par $x \mapsto (yc_j)^{-1}((yc_i)x)$, si $y \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$, comme on voit aisément. De plus, on vérifie que φ_{ji} est défini pour un $b \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ si et seulement si il existe b' tel que $(c_i, b) \sim (c_j, b')$, et alors $b' = \varphi_{ji}(b)$. Soit U_{ji} le domaine de définition sur S de φ_{ji}. Il reste à démontrer que ce domaine de définition est universel, c'est-à-dire, que si $b \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$, $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$ arbitraire, et si φ_{ji} est défini en b, alors $b \in \mathrm{U}_{ji}(\mathrm{S}'')$. Il revient au même de démontrer que si b, $b' \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ sont telles que $(c_i, b) \simeq (c_j, b')$, alors $b \in \mathrm{U}_{ji}(\mathrm{S}'')$. Nous laissons la vérification de ce fait, qui est analogue à celle de (3.5), au lecteur.

Lemme 3.9. — *Supposons que* $\{c_i\}$, $i \in \mathrm{I}$, *sont des sections de* X(S) *telles que* $\coprod_i c_i \times \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *soit surjectif en tant que morphisme de faisceaux. Alors* G *est représentable et plat, de présentation finie sur* S, *et le morphisme structural* $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{G}$ *est plat et de présentation finie.*

[14] N.D.E. : Si X est lisse, séparé sur S, fidèlement plat de présentation finie sur S, alors G/S est représentable par un S–schéma en groupes lisse et de type fini sur S. C'est le théorème 6.6.1 du livre "Néron models" de Bosch-Lütkebohmert-Raynaud, Springer (1990).

Démonstration. Le fait que G soit représentable est conséquence immédiate de (3.8), et il s'ensuit que $\coprod_i c_i \times \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ est un recouvrement ouvert. Pour démontrer que $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{G}$ est plat, il suffit de le faire localement, donc de démontrer que l'application rationnelle $\mathrm{X}^2 \to c_i \times \mathrm{X}$ induit un morphisme plat sur son domaine de définition. Or cette application rationnelle est donnée par $(a, b) \mapsto (c_i, ((xc_i)^{-1}(xa))b)$, x une 650
section arbitraire, et si c'est défini en $(a, b) \in \mathrm{X}^2(\mathrm{S}')$, on peut trouver un $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ fppf-couvrant et une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ tels que $((xc_i)^{-1}(xa))b$ soit défini. On voit facilement que c'est donc un morphisme plat. Il s'ensuit de même que c'est localement de présentation finie, donc fppf-couvrant. Or par construction, la relation R est effective. Donc d'après (3.5) le morphisme $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{G}$ devient de présentation finie après le changement de base $\mathrm{G} \leftarrow \mathrm{X}^2$, qui est fppf-couvrant, donc $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{G}$ est de présentation finie. Montrons que $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est plat et de présentation finie. Il est plat et localement de présentation finie puisque G est recouvert par les $c_i \times \mathrm{X} \simeq \mathrm{X}$. Or X^2/S est quasi-compact, et $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{G}$ est surjectif. Cela démontre que G/S est quasi-compact. Pour démontrer que $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et quasi-séparé, notons qu'on a le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathrm{X}^2 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}^2 \arrow[d, "\beta"] \\
\mathrm{G} \arrow[r, "\Delta"] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}.
\end{tikzcd}$$

On a γ surjectif et α, β quasi-compacts, donc $\beta\alpha$ est quasi-compact, donc Δ est quasi-compact. [15]

Lemme 3.10. — *Soient* $\{c_i\}$, $i \in \mathrm{I}$ *des sections de* $\mathrm{X}(\mathrm{S})$. *Pour que* $\coprod_i c_i \times \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *soit surjectif en tant que morphisme de* fppf-*faisceaux, il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Pour chaque $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et* $(a, b) \in \mathrm{X}^2(\mathrm{S}')$, *il existe un recouvrement ouvert* $\{\mathrm{S}'_\nu\}$, $\nu \in \mathrm{N}$, *de* S' *et une fonction* $\mathrm{N} \to \mathrm{I}$ $(\nu \mapsto i(\nu))$ *tel que* $(c_{i(\nu)}^{-1}a)b$ *soit définie sur* S'_ν.

Démonstration. Soit $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$ arbitraire, et $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$. Choisissons un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ fppf-couvrant et une section $(a, b) \in \mathrm{X}^2(\mathrm{S}')$ qui représente g. Prenons le recouvrement ouvert $\{\mathrm{S}'_\nu\}$ de S' qui existe par l'hypothèse du lemme. Alors sur chaque S'_ν on a $(a, b) \sim (c_{i(\nu)}, (c_{i(\nu)}^{-1}a)b)$ donc g est représenté par une section de $[c_{i(\nu)} \times \mathrm{X}](\mathrm{S}')$ sur S'_ν, ce qui démontre la surjectivité, parce que la famille de morphisme $\{\mathrm{S}'_\nu \to \mathrm{S}''\}$ est fppf-couvrante.

Lemme 3.11. — *Soit* Y/S *un préschéma de présentation finie, et soient* $\{a_i\}$, $i \in \mathrm{I}$, 651
des sections de $\mathrm{Y}(\mathrm{S})$. *Soient* s_0, s_1 *des points de* S *tels que* s_0 *soit spécialisation de* s_1, *et* Y_j *la fibre de* Y/S *au point* s_j. *Soit* C_j *l'adhérence dans* Y_j *de l'ensemble des points* $\{a_i(s) \cap \mathrm{Y}_j\}$. *Alors on a* $\dim \mathrm{C}_1 \geqslant \dim \mathrm{C}_0$.

Démonstration. Il suffit de faire la vérification après un changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ avec des points choisis s'_0 et s'_1 tels que $s'_j \mapsto s_j$ et s'_0 est spécialisation de s'_1. On est

[15] N.D.E. : Une autre façon de conclure ici est par descente fidèlement plate (EGA IV_2, 2.7.1), vu que β est couvrant pour fppf.

donc (EGA II 7.1.4) réduit au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation A, s_0 le point fermé de S, et s_1 le point générique de S. Or soit V l'adhérence de C_1 dans Y. Il est clair que $C_0 \subseteq V$, et ainsi le lemme est conséquence du fait « bien connu » qu'un sous-préschéma fermé irréductible V d'un préschéma Y/S de présentation finie vérifie $\dim V \times s_1 \geqslant \dim V \times s_0$ si S est le spectre d'un anneau de valuation et si $V \times s_1 \neq \varnothing$ (EGA IV 13.1.6).

Lemme 3.12. — *Supposons que* S *est le spectre d'un anneau local, de point fermé* s_0*, et soient* $\{c_i\}$*,* $i \in I$*, des sections telles que l'adhérence* C_0 *de l'ensemble* $\{c_i(s) \cap X_0\}$ *dans la fibre fermée* X_0 *soit de dimension égale à* $\dim X_0 = n$*. Alors la condition du lemme* 3.9 *est satisfaite.*

Démonstration. Notons d'abord que les fibres de X/S ont toutes la même dimension u, ce qui résulte de EGA IV 12.1.1 (i) et du fait que X a une loi de composition rationnelle. Le lemme (3.11) implique donc que pour chaque morphisme $S_1 \to S$ avec S_1 spectre d'un corps, la dimension de l'adhérence de l'ensemble $\{c_i \times_S S_1\}$ dans X_{S_1} est égale à n. Vérifions la condition de (3.10) : Soit $(a, b) \in X^2(S')$. Pour que $(c_i^{-1}a)b$ soit défini, il faut et suffit que c_i soit contenu dans un certain ouvert $U \subseteq X_{S'}$ qui est sch. dense, relativement à S' (règle 1). On doit démontrer que c'est vrai pour i convenable, localement sur S'. Il suffit donc de traiter le cas où S' est le spectre d'un anneau local, et alors le fait que $c_i \in U(S')$ se vérifie sur la fibre fermée. On est donc réduit au cas $S' = \operatorname{Spec} k$, k un corps. Or avec les notations ci-dessus, prenons $S' = S_1$.
652 On a $\dim C_1 = \dim X_{S_1}$, et U est relativement sch. dense dans X_{S_1}. Donc $U \cap C_1 \neq \varnothing$, d'où $U \cap \{c_p \times_S S_1\} \neq \varnothing$ et on a gagné.

La démonstration du théorème est maintenant facile. Notons d'abord la conséquence suivante de la finitude du lemme (3.9) : Si $\{A_i\}$ est un système inductif d'anneaux au-dessus de S, si $\underrightarrow{A} = \lim A_i$, et si les hypothèses de (3.9) sont satisfaites pour $S = \operatorname{Spec} \underrightarrow{A}$, alors on pourra descendre l'objet qui représente le quotient G de $R \rightrightarrows X^2$ à un des $S_i = \operatorname{Spec} A_i$ avec les propriétés de finitude et de platitude énoncées dans (3.9). C'est le passage à la limite habituelle (EGA IV 8 et 11). Il s'ensuit que pour la démonstration de (iii) et (iv) de (3.7), on peut se borner au cas $S = \operatorname{Spec} A$, avec A un anneau strictement local. Soit alors x_0 un point fermé de la fibre fermée X_0 de X/S. Il existe [(*)] une extension A' de A, locale, libre et finie, et une section de $X' = X \times_S S'$ passant par le point unique x'_0 de X' au-dessus de x_0. Notons que $X'_0 \to X_0$ est radiciel puisque S est strictement local, donc le corps résiduel de A séparablement clos. Il s'ensuit qu'il existe un système inductif $\{A_i\}$ *d'* anneaux locaux, plats et finis au-dessus de S tel que, en posant $\underrightarrow{A} = \varinjlim A_i$ et $\underleftarrow{X} = X \times_S \operatorname{Spec} \underrightarrow{A}$, $\underleftarrow{X}$ ait un ensemble de sections qui induise un ensemble dense sur la fibre fermée $\underleftarrow{X_0}$. On prend pour chaque point fermé x_0 de X_0 une extension $A(x_0)$ telle que l'extension de base de X correspondante admette une section « passant par x_0 », et on prend comme système inductif le système des produits tensoriels finis des $A(x_0)$. Notons que $\underrightarrow{A}$ est locale, étant limite d'anneaux locaux. Donc d'après (3.12) et (3.10) on a le quotient G

[(*)] cf. note au bas de la page 15, Exp. VII.

au-dessus de Spec $\underrightarrow{A}$, donc au-dessus d'un des Spec A_i d'après les remarques ci-dessus, donc localement pour la topologie fppf.

En fait il résulte des constructions que localement pour la topologie fppf on peut trouver un ensemble *fini* des sections $\{c_i\}$ $(i = l, \dots, r)$ tel que G soit recouvert par les $c_i \times X$. (ii) et (iv) suivent facilement de ce fait, et nous laissons la vérification de (i) au lecteur.

Corollaire 3.13. — *Le faisceau en groupes* G *déterminé par un germe de groupe* (X, W) **653**
au-dessus de S *est représentable dans chacune des situations suivantes :*

(i) S *est artinien.*

(ii) *Pour chaque schéma local* $S' \to S$ *d'un point fermé* s *de* S, $X_{S'}$ *a un ensemble de sections qui induit sur la fibre fermée un ensemble dont l'adhérence est de dimension* $\dim X_s$.

(iii) S *est strictement local, et* X/S *est lisse.*

(iv) *Il existe* $S' \to S$ fppf-*couvrante tel que* $G_{S'}$ *soit représentable et affine au-dessus de* S.

En effet, (ii) est conséquence de (3.10) et (3.12), (iii) résulte directement de (ii) et du « lemme de Hensel », (iv) de la descente des schémas affines, et (i) de la descente des schémas en groupes, qui est possible ici parce qu'on sait que tout sous-ensemble fini d'un groupe sur un corps est contenu dans un ouvert affine (Exp VI).

Bibliographie

[1] Weil, A., Variétés abéliennes et courbes algébriques. Hermann, Paris, 1948.

[2] Yanagihara, H. Reduction of group varieties and transformation spaces. Journ. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, vol. 27, No.1, June, 1963.