TABLE DES MATIÈRES

EXPOSÉ XIX

GROUPES RÉDUCTIFS - GÉNÉRALITÉS

par M. Demazure

La suite de ce Séminaire est consacrée à l'étude des groupes réductifs. Le but principal en est la généralisation des résultats classiques de Chevalley (*Bible* et *Tôhoku*) [(1)] aux schémas de base arbitraires, les deux résultats centraux étant le *théorème d'unicité* (Exp. XXIII, th. 4.1 et cor. 5.1 à 5.10) et le *théorème d'existence* (Exp. XXV, th. 1.1) des schémas en groupes réductifs « épinglés » correspondant à des « données radicielles » prescrites. Les démonstrations employées sont inspirées de celles de Chevalley, la technique des schémas permettant de leur donner une efficacité accrue. 1

Les résultats du premier volume de la *Bible* (Exp. 1 à 13) seront systématiquement utilisés. En revanche, nous démontrerons directement sur un schéma quelconque les résultats du second volume (théorème d'isomorphisme en particulier) ; la connaissance des démonstrations sur un corps algébriquement clos n'est donc pas absolument indispensable.

Dans la démonstration de ces deux résultats fondamentaux, nous n'utiliserons que les résultats les plus élémentaires de la théorie des groupes de type multiplicatif, contenus pour l'essentiel dans Exp. VIII et IX ; nous ferons d'autre part un usage essentiel des résultats de l'Exposé XVIII [(2)]. Le lecteur s'intéressant spécialement aux théorèmes d'existence et d'unicité pourra dans une première lecture sauter les Exposés X à XVII.

1. Rappels sur les groupes sur un corps algébriquement clos

2

1.1. *Dans ce numéro, k désignera toujours un corps algébriquement clos.* Comme annoncé ci-dessus, les seuls résultats de *Bible* utilisés par la suite, se trouvent dans le volume 1 (Exposés 1 à 13). Tous les résultats de *Bible* (*loc. cit.*) concernant les groupes

---

(1) N.D.E. : voir les références bibliographiques à la fin de cet Exposé. En particulier, une réédition du Séminaire Chevalley 1956-58, cité [**Bible**], révisée par P. Cartier, a été publiée en 2005, cf. [**Ch05**].

(2) N.D.E. : Plus précisément, la proposition XVIII 2.3 (extension d'un « homomorphisme générique » entre groupes) est utilisée en XXII 4.1.11 puis dans l'Exp. XXIII (démonstration du théorème d'unicité), et aussi dans l'Exp. XXIV ; le théorème XVIII 3.7 (construction d'un groupe à partir d'un germe de groupe) n'est utilisé que dans l'Exp. XXV.

semi-simples sont valables plus généralement pour des groupes *réductifs* (définition ci-dessous) et leur démonstration est identique, avec les modifications anodines ci-après :

- Exp. 9, § 4, définition 3, voir 1.6.1 ci-dessous.
- Exp. 12, § 4, théorème 2, e), supprimer « fini ».
- Exp. 13, § 3, théorème 2, remplacer « rang » par « rang semi-simple ».
- Exp. 13, § 4, corollaire 2 au théorème 3, remplacer « rang » par « rang réductif ».

1.2. Soit G un k-groupe lisse affine et connexe. Le *radical* de G (*Bible*, § 9.4, prop. 2) [(3)] est le sous-groupe réduit associé à la composante neutre de l'intersection des sous-groupes de Borel de G ; c'est aussi le plus grand sous-groupe résoluble lisse connexe distingué de G ; nous le noterons rad(G).

Le *radical unipotent* de G est la partie unipotente du radical de G ; c'est aussi le plus grand sous-groupe unipotent lisse connexe distingué de G ; nous le noterons $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$.

1.3. Soient G un k-groupe lisse affine et connexe, Q un tore de G. Alors le centralisateur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ de Q dans G est un sous-groupe fermé de G (Exp. VIII, 6.7), lisse (Exp. XI, 2.4) et connexe (cf. *Bible*, § 6.6, th. 6 a) ou [**Ch05**], § 6.7, th. 7 a)).

3 On a la relation fondamentale :

$$\mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G}) \cap \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}). \tag{1.3.1}$$

[(4)] D'abord, $\mathrm{U} = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G}) \cap \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est un sous-groupe unipotent distingué de $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$; montrons qu'il est lisse et connexe. Si on fait opérer Q sur $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ par automorphismes intérieurs, U n'est autre que le schéma des invariants de cette opération. Or, celui-ci est lisse et connexe, d'après le lemme 1.4 plus bas.

Par conséquent, U est un sous-groupe fermé de $\mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))$. D'autre part, d'après *Bible*, Exp. 12, § 3, cor. au th. 1, on a $\mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))(k) \subset \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})(k)$. L'égalité (1.3.1) en résulte.

Signalons un cas particulier du résultat précédent : si G est un k-groupe lisse affine et connexe et si T est un tore maximal de G,

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T} \cdot (\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})). \tag{1.3.2}$$

En effet (cf. *Bible*, § 6.6, th. 6 c) ou [**Ch05**], § 6.7, th. 7 c)), $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est un groupe résoluble, donc produit semi-direct de son tore maximal T et de son radical unipotent.

4 D'après le théorème de densité (cf. *Bible*, § 6.5, th. 5 a) ou [**Ch05**], § 6.6, th. 6 a)), la réunion des $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, pour T parcourant l'ensemble des tores maximaux de G, contient un *ouvert dense* de G ; il résulte donc de (1.3.2) :

---

(3) N.D.E. : On a remplacé la référence 9-06 (= Exp. 9, p. 6) par § 9.4 (= Exp. 9, § 4), qui s'applique aussi bien à [**Bible**] qu'à [**Ch05**]. Lorsque la numérotation de [**Ch05**] diffère de [**Bible**], ce qui est le cas dans l'Exp. 6, on indiquera explicitement les deux références.

(4) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

Corollaire 1.3.3. — *Si* G *est un* k*-groupe lisse affine et connexe, la réunion des* $\mathrm{T}\cdot\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$*, où* T *parcourt l'ensemble des tores maximaux de* G*, contient un* ouvert dense *de* G.

Notations 1.4.0. — [5] Nous utiliserons systématiquement la notation suivante : si S est un schéma et s un point de S, on notera $\overline{s}$ le spectre d'une clôture algébrique $\overline{\kappa}(s)$ de $\kappa(s)$.

Lemme 1.4. — [5] *Soient* S *un schéma,* Q *un* S*-tore opérant sur un* S*-schéma en groupes* H*,* séparé et lisse *sur* S.

(i) *Le foncteur des invariants* H^{Q} *est représentable par un sous-schéma fermé de* H*,* de présentation finie sur H *et* lisse sur S*.*

(ii) *Si de plus* H *est affine sur* S*, et à fibres connexes, alors* H^{Q} *l'est aussi.*

D'abord, d'après VIII 6.5 (d), [6] puisque H est séparé sur S et Q essentiellement libre sur S, alors H^{Q} est représentable par un sous-schéma fermé de H. En particulier, si H est affine sur S, alors H^{Q} l'est aussi.

Considérons maintenant le produit semi-direct $\mathrm{G}=\mathrm{H}\cdot\mathrm{Q}$; il est lisse et séparé sur S. Alors, le centralisateur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est représentable par un sous-schéma fermé de G, de présentation finie sur G, d'après Exp. XI 6.11 (a),[6] et il est lisse sur S d'après Exp. XI 2.4.

D'autre part, on a évidemment $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})=\mathrm{H}^{\mathrm{Q}}\cdot\mathrm{Q}$, d'où un diagramme commutatif de S-schémas :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})=\mathrm{H}^{\mathrm{Q}}\cdot\mathrm{Q} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathrm{H}^{\mathrm{Q}} \arrow[d, "q"] \\
& \mathrm{S}.
\end{tikzcd}$$

Comme π, p sont localement de présentation finie et p fidèlement plat, q est de présentation finie (EGA IV_4, 17.7.5) ; puis, comme π est lisse et p fidèlement plat, q est lisse (*loc. cit.*, 17.7.7). Ceci prouve la première assertion de 1.4.

Enfin, supposons H affine sur S et à fibres connexes. Alors, chaque fibre géométrique $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ de G est un $\overline{\kappa}(s)$-groupe lisse, affine et connexe, donc, d'après la première assertion de 1.3, il en est de même de

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\overline{s}}}(\mathrm{Q}_{\overline{s}})=(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))_{\overline{s}}=(\mathrm{H}^{\mathrm{Q}})_{\overline{s}}\cdot\mathrm{Q}_{\overline{s}},$$

et ceci entraîne que $(\mathrm{H}^{\mathrm{Q}})_{\overline{s}}$ est connexe.

---

(5) N.D.E. : On a inséré ici ces notations, figurant dans 2.3 de l'original ; d'autre part, on a détaillé l'énoncé et la démonstration de 1.4.

(6) N.D.E. : Voir aussi les ajouts faits dans $\mathrm{VI_B}$, 6.2.4 (d) et 6.5.5 (a).

1.5. On rappelle que le *rang réductif* du k-groupe lisse et affine G est la dimension commune des tores maximaux de G. Nous le noterons $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}/k)$ ou $\mathrm{rgred}(\mathrm{G})$. Pour que $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}/k) = 0$, il faut et il suffit que G soit *unipotent* (i.e. que $\mathrm{G} = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$), par *Bible*, § 6.4, cor. 1 au th. 4 ou [**Ch05**], § 6.5, cor. 1 au th. 5.

Si H est un sous-groupe invariant du k-groupe lisse et affine G, le quotient G/H est affine et lisse (Exp. $\mathrm{VI_B}$, 11.17 et VIA, 3.3.2 (iii)). De plus (*Bible*, § 7.3, th. 3, a) et c)), on a

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) + \mathrm{rgred}(\mathrm{H}).$$

Définition 1.6.1. — [(7)] On dit que le k-groupe G est *réductif* s'il est lisse, affine et connexe, et si rad(G) est un tore, c'est-à-dire si $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}) = \{e\}$.

Lemme 1.6.2. — *Soit* G *un k-groupe réductif.*

(i) *Si* Q *est un tore de* G*, alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est réductif.*

(ii) *En particulier, si* T *est un tore maximal de* G*, alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$.

(iii) *Le centre de* G *est contenu dans tout tore maximal, donc est diagonalisable.*

(iv) *Le radical de* G *est le tore maximal* (*unique*) *de* $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$.

En effet, (i) résulte de (1.3.1), (ii) de (1.3.2), et (iii) découle de (ii). Enfin, le tore maximal de $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ (c.-à-d., la composante neutre $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})^0$) est un sous-groupe lisse résoluble connexe, invariant dans G, donc contenu dans rad(G) ; réciproquement rad(G) est un tore invariant dans G, donc central (*Bible*, § 4.3, cor. à la prop. 2), d'où (iv).

5 ***Remarque 1.6.3***. — Si G est réductif et si $\dim(\mathrm{G}) \neq \mathrm{rgred}(\mathrm{G})$, alors $\dim(\mathrm{G}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) \geqslant 2$. En effet, cette différence est toujours paire (cf. 1.10 ci-dessous).

1.7. Soient G un k-groupe lisse affine et connexe et H un sous-groupe lisse et connexe invariant. Alors

$$\mathrm{rad}(\mathrm{H}) = (\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H})^0_{\mathrm{réd}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rad}^u(\mathrm{H}) = (\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H})^0_{\mathrm{réd}} \tag{1.7.1}$$

comme on le voit aussitôt. En particulier, si G est réductif, H l'est aussi.

Soit $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme surjectif de k-groupes lisses affines et connexes. Alors

$$f(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G}'). \tag{1.7.2}$$

En particulier, si G est réductif, G′ l'est aussi.

Prouvons (1.7.2). D'abord, f envoie $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ dans $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}')$. Introduisant $\mathrm{H} = (f^{-1}(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}')))^0_{\mathrm{réd}}$, qui contient $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$, on a $\mathrm{rad}^u(\mathrm{H}) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ et on est ramené au cas où G = H, i.e. où G′ est unipotent. Comme la réunion des $\mathrm{T} \cdot \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ (T parcourant l'ensemble des tores maximaux de G) est dense dans G, la réunion des $f(\mathrm{T})f(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}))$ est dense dans G′ ; mais $f(\mathrm{T})$ est composé d'éléments semi-simples, donc $f(\mathrm{T}) = \{e\}$, G′ étant unipotent ; ceci montre que $f(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}))$ est dense dans G′.

---

(7) N.D.E. : On a transformé 1.6 en les numéros 1.6.1 à 1.6.3. Noter que dans ce Séminaire tout k-groupe réductif (resp. semi-simple, cf. 1.8) est, par définition, connexe.

Donc, d'après *Bible*, § 5.4, lemme 4 ou [**Ch05**], § 6.1, lemme 1, [8] $f(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}))$ est un sous-groupe ouvert de G' ; celui-ci étant connexe, il en résulte $f(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})) = \mathrm{G}'$.
(N. B. : on peut prouver sous les mêmes hypothèses que $f(\mathrm{rad}(\mathrm{G})) = \mathrm{rad}(\mathrm{G}'))$.

1.8. On dit que le k-groupe G est *semi-simple* s'il est lisse, affine et connexe et si $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) = \{e\}$, c'est-à-dire si G est réductif et $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ fini. Si G est un k-groupe lisse affine connexe quelconque, alors $\mathrm{G}/\mathrm{rad}(\mathrm{G})$ est semi-simple (*Bible*, § 9.4, prop. 2), et $\mathrm{G}/\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ est réductif. On appelle *rang semi-simple* de G et on note $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}/k)$ ou $\mathrm{rgss}(\mathrm{G})$ le rang réductif de $\mathrm{G}/\mathrm{rad}(\mathrm{G})$.

Si G est réductif, on a donc 6

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}) + \dim(\mathrm{rad}(\mathrm{G})).$$

Si G est un k-groupe lisse affine et connexe et si Q est un sous-tore central de G, alors G/Q est semi-simple si et seulement si G est réductif et $\mathrm{Q} = \mathrm{rad}(\mathrm{G})$. En effet, si G/Q est semi-simple, $\mathrm{Q} \supset \mathrm{rad}(\mathrm{G})$, donc $\mathrm{rad}(\mathrm{G})$ est un tore, donc G est réductif, donc $\mathrm{rad}(\mathrm{G})$ est le tore maximal de $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$, donc $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) = \mathrm{Q}$. Si G est réductif et si Q est un sous-groupe central alors (G/Q est réductif et) $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}/\mathrm{Q})$.

1.9. Si K est une extension algébriquement close de k et si G est un k-groupe affine lisse connexe, G est réductif (resp. semi-simple) si et seulement si G_K l'est et on a

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}/k) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G}_\mathrm{K}/\mathrm{K}),$$
$$\mathrm{rgss}(\mathrm{G}/k) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}_\mathrm{K}/\mathrm{K}).$$

1.10. Soit G un k-groupe lisse et connexe et soit T un tore de G. [9] On note $\mathfrak{g}$ la k-algèbre de Lie de G, c.-à-d., $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/k)(k)$; on note de même $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$. Alors, $\mathfrak{g}$ se décompose sous l'action de T (par $\mathrm{T} \to \mathrm{G}$ et l'opération adjointe de G) en

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha, \tag{1.10.1}$$

où les $\alpha \in \mathrm{R}$ sont des caractères non triviaux de T et où les $\mathfrak{g}^\alpha$ sont $\neq 0$. Les caractères 7
$\alpha \in \mathrm{R}$ sont dits les *racines* de G par rapport à T. Par Exp. II, 5.2.3, (i), on a

$$\mathfrak{g}^0 = \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})). \tag{1.10.2}$$

En particulier, [10] comme $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})$ est connexe (1.3 dans le cas où G est affine, et Exp. XII 6.6 b) dans le cas général), T est son propre centralisateur si et seulement si $\mathfrak{g}^0 = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$.

Cette condition entraîne que T est maximal et que $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{T}$, donc d'après Exp. XII 8.8 d) on a :

$$\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})\big) = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha)\,; \tag{1.10.3}$$

[8] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.
[9] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[10] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

de plus $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ est alors affine, donc $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ affine ; comme ce dernier groupe est affine (Exp. XII 6.1), G l'est aussi.

Lorsque G est réductif et T maximal, les racines au sens précédent coïncident avec les racines au sens de *Bible*, § 12.2, déf. 1 ; ces dernières sont en effet des racines au sens de ce numéro (*Bible*, § 13.2, th. 1, c)) et il y en a $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T})$ (*Bible*, § 13.4, cor. 2 au th. 3). De plus, si α est une racine, $-\alpha$ en est aussi une (*Bible*, § 12.2, cor. à la prop. 1). (Comme à l'habitude, on note indifféremment additivement ou multiplicativement la structure de groupe de $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,k})$.) Il s'ensuit que, pour G réductif,

$$\dim(\mathrm{G}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \mathrm{Card}(\mathrm{R}) \tag{1.10.4}$$

est toujours pair.

Le rang semi-simple du groupe réductif G est le rang de la partie R du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,k}) \otimes \mathbb{Q}$ (*Bible*, § 13.3, th. 2).

Lemme 1.11. — *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe lisse affine connexe,* T *un tore de* G, $\mathrm{W}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *le* groupe de Weyl *de* G *par rapport à* T. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

8 (i) G *est réductif,* T *est maximal,* $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = 1$.

(ii) G *est réductif,* T *est maximal,* $\mathrm{G} \neq \mathrm{T}$ *; il existe un sous-tore* Q *de* T*, de codimension* 1 *dans* T*, central dans* G.

(iii) G *n'est pas résoluble et* $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) \leqslant 2$.

(iv) $\mathrm{W}(\mathrm{T}) \neq \{e\}$ *et* $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) \leqslant 2$.

(v) $\mathrm{W}(\mathrm{T}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ *et* $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) = 2$.

De plus, sous ces conditions, il y a exactement deux racines de G *par rapport à* T *; elles sont opposées. Sous les conditions de* (ii)*,* $\mathrm{Q} = \mathrm{rad}(\mathrm{G})$.

On a évidemment (v) $\Rightarrow$ (iv). On a (iv) $\Rightarrow$ (iii) par *Bible*, § 6.1, cor. 3 au th. 1 ou [**Ch05**], § 6.2, cor. 3 au th. 2. Prouvons (iii) $\Rightarrow$ (ii) : soit U le radical unipotent de G ; on sait que G/U est réductif et n'est pas un tore (sinon G serait résoluble) ; on a donc, d'après (1.10.4)

$$\dim(\mathrm{G}/\mathrm{U}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U}) = \mathrm{Card}(\mathrm{R}) \geqslant 2;$$

mais

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U}) + \mathrm{rgred}(\mathrm{U}) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U}),$$

d'où

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{U}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) &= \dim(\mathrm{G}/\mathrm{U}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U}) \\ &\geqslant 2 \geqslant \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) \geqslant \dim(\mathrm{G}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}).\end{aligned}$$

Cela donne $\dim(\mathrm{U}) = 0$, donc G est réductif, $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{T})$, donc T est maximal, $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) = 2$. Par *Bible*, § 10.4, prop. 8, il existe un tore singulier Q de codimension 1 dans T ; alors $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est réductif (1.6.2 (i)), non résoluble (définition d'un tore singulier), donc $\dim(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) \geqslant 2$, ce qui prouve que $\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ et Q est central dans G.

Prouvons (ii) $\Rightarrow$ (i). On sait que G/Q est réductif (1.7) et que rgred(G/Q) $= 1$ donc rgss(G/Q) $= 0$ ou 1. Le premier cas est impossible, car il entraînerait rgss(G) $= 0$, donc G $=$ T ; on a donc rgred(G/Q) $=$ rgss(G/Q) $= 1$, ce qui prouve que G/Q est 9
semi-simple ; donc Q est le radical de G et rgss(G) $= 1$.

Prouvons enfin (i) $\Rightarrow$ (v). Si Q est le radical de G, on a $\dim(\mathrm{T}) - \dim(\mathrm{Q}) = 1$ et Q est central dans G, donc $\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$, ce qui prouve que Q est un tore singulier ; par *Bible*, § 11.3, th. 2, on a $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$; par *Bible*, § 12.1, lemme 1, on a $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) = 2$. Il y a donc au plus deux racines de G par rapport à T, or il y en a au moins deux, opposées (1.10).

Proposition 1.12. — *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe lisse et connexe,* T *un tore de* G, R *l'ensemble des racines de* G *par rapport à* T *et*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha, \qquad \textit{avec } \mathfrak{g}^\alpha \neq 0,$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ *sous* Ad(T). *Pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, soient T_α le tore maximal de* $\mathrm{Ker}(\alpha)$ [(11)] *et* $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine, réductif ;* T *est maximal.*

(ii) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$, *chaque* Z_α $(\alpha \in \mathrm{R})$ *est réductif.*

(iii) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$, *chaque* $\mathfrak{g}^\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{R})$ *est de dimension* 1 *; et si $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ et $q \in \mathbb{Q}$ sont tels que $\beta = q\,\alpha$, alors $q = \pm 1$; pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, il existe un $w_\alpha \in \mathrm{G}(k)$ qui normalise* T, *centralise* T_α, *mais ne centralise pas* T.

De plus, sous ces conditions, chaque Z_α *est de rang semi-simple* 1 *et on a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

Si G est affine et réductif et si T est maximal, chaque Z_α est affine et réductif (1.6.2 (i)), de tore maximal T ; de plus, T est son propre centralisateur (1.6.2 (ii)), donc $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$, ce qui prouve (i) $\Rightarrow$ (ii).

D'autre part $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$ entraîne que T est maximal et G affine (cf. 1.10) donc chaque 10
Z_α est affine, lisse et connexe, d'après 1.3. De toutes façons, on a par Exp. II, 5.2.2

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha) = \mathfrak{g}^{\mathrm{T}_\alpha} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\beta\in\mathrm{R}\cap\mathbb{Q}\alpha} \mathfrak{g}^\beta.$$

On a donc

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha) \supset \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

ce qui entraîne $\mathrm{Z}_\alpha \neq \mathrm{T}$. Comme T_α est un sous-tore de codimension 1 dans T, central dans Z_α, on obtient par 1.11, appliqué à Z_α, l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) et les compléments.

Il reste à prouver (ii) $\Rightarrow$ (i) ; on sait déjà que (ii) entraîne que T est maximal et G affine. Soit U son radical unipotent ; il est distingué dans G, son algèbre de Lie est invariante sous Ad(T). On a donc

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) = \big(\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{g}^0\big) + \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \big(\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{g}^\alpha\big).$$

[(11)] N.D.E. : i.e., la composante connexe de $\mathrm{Ker}(\alpha)$.

Par (1.3.1), on a

$$\mathrm{U} \cap \mathrm{T} = \mathrm{U} \cap \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{T}) = \{e\},$$

$$\mathrm{U} \cap \mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{U} \cap \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha) = \mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{Z}_\alpha) = \{e\}.$$

On a donc [12]

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{g}^0 = \mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(\mathrm{U} \cap \mathrm{T}) = 0\,,$$

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha) = \mathrm{Lie}(\mathrm{U} \cap \mathrm{Z}_\alpha) = 0\,;$$

d'où $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) = 0$ et $\mathrm{U} = \{e\}$, i.e. G est réductif.

Corollaire 1.13. — *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe lisse et connexe,* T *un tore de* G*,* R *l'ensemble des racines de* G *par rapport à* T *et*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha$$

11 *comme ci-dessus. Pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, soient T_α le tore maximal de* $\mathrm{Ker}(\alpha)$ *et* $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine, semi-simple ;* T *est maximal.*

(ii) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$*, chaque* Z_α *est réductif et* $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha)$ *est fini.*

[13] Ceci résulte des égalités $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})^0$ et $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha)$, établies en 1.6.2 (iv) et (1.10.3).

2. Schémas en groupes réductifs. Définitions et premières propriétés

Scholie 2.1. — Si G est un schéma en groupes sur S, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) G est affine et lisse sur S, et à fibres connexes.

(ii) G est affine et plat sur S, de présentation finie sur S, et à fibres géométriques intègres.

Ces propriétés sont stables par changement de base et locales pour (fpqc).

[14] En effet, supposons (i) vérifié. Comme G est affine et lisse sur S, il est de présentation finie sur S ; et comme ses fibres sont lisses et connexes, elles sont géométriquement intègres, d'après VI_{A}, 2.4.

Réciproquement, si (ii) est vérifié, les fibres de G sont connexes et géométriquement réduites, donc lisses (VI_{A}, 1.3.1) ; alors G est lisse sur S, d'après EGA IV_4, 17.5.2.

Bien entendu, ces propriétés sont stables par changement de base : cf. EGA II, 1.5.1 pour « affine », IV_1, 1.6.2 (iii) pour « de présentation finie », IV_2, 2.1.4 pour « plat », et IV_2, 4.6.5 (i) pour « à fibres géométriques intègres ».

[12] N.D.E. : Noter que si U, L sont deux sous-schémas en groupes de G, on a $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathrm{Lie}(\mathrm{L}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{U} \cap \mathrm{L})$.

[13] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[14] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

D'autre part, ces propriétés sont clairement locales pour la topologie de Zariski, donc il suffit de vérifier que si $S' \to S$ est un morphisme fidèlement plat quasi-compact et si $G_{S'} \to S'$ a les propriétés indiquées, il en est de même de $G \to S$. Cela résulte de EGA IV_2, 2.5.1 pour « plat », 2.7.1 (vi) et (xiii) pour « de présentation finie » et « affine », et 4.6.5 (i) pour « à fibres géométriquement intègres » (et aussi EGA IV_4, 17.7.3 (ii) pour « lisse »).

2.2. Soient G un S-schéma en groupes vérifiant les conditions précédentes, et Q un tore (cf. IX, Déf. 1.3) de G. [15] Alors, d'après XI, 6.11 a) et XI, 2.4, $\underline{\mathrm{Centr}}_{G}(Q)$ est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de G (donc affine sur S), de présentation finie et lisse sur S ; de plus, comme chaque fibre géométrique $G_{\overline{s}}$ de G est un $\overline{\kappa}(s)$-groupe lisse, affine et connexe, alors, d'après la première assertion de 1.3, il en est de même de

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{G_{\overline{s}}}(Q_{\overline{s}}) = (\underline{\mathrm{Centr}}_{G}(Q))_{\overline{s}}\,.$$

Lemme 2.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes lisse et affine sur* S*,* 12
à fibres connexes, T *un tore de* G*. L'ensemble des* $s \in S$ *tels que* $G_{\overline{s}}$ *soit un* $\overline{s}$*-groupe réductif, de rang semi-simple* 1 *et de tore maximal* $T_{\overline{s}}$*, est un ouvert* U *de* S*.*

Comme G et T sont plats sur S, la fonction

$$s \longmapsto \dim(G_{\overline{s}}/\overline{s}) - \dim(T_{\overline{s}}/\overline{s})$$

est localement constante ; soit U_1 l'ouvert des points de S où elle vaut 2.

[16] D'après 6.3, le groupe de Weyl

$$W_G(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/\,\underline{\mathrm{Centr}}_G(T);$$

est représentable par un S-schéma en groupes étale et séparé sur S, et la fonction

$$s \longmapsto \text{ nombre de points de } W_G(T)_{\overline{s}}$$

est semi-continue inférieurement. Soit U_2 l'ensemble des points de S où cette fonction est > 1 ; c'est un ouvert. D'après 1.11, l'ensemble des s tels que $G_{\overline{s}}$ soit réductif, de rang semi-simple 1, de tore maximal $T_{\overline{s}}$, est $U = U_1 \cap U_2$; de plus, pour tout $s \in U$, $W_G(T)_{\overline{s}}$ a exactement deux points.

Par conséquent (cf. SGA 1, I 10.9 et EGA IV_3, 15.5.1 et IV_4, 18.12.4), $W_G(T)_U$ est étale et *fini* sur U.

Remarque 2.4. — *Le groupe* $W_G(T)_U$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_U$. En effet, d'après ce qui précède, il est étale et fini sur U ; comme le foncteur des automorphismes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_U$ est le groupe unité, il suffit de vérifier l'assertion localement, or elle est immédiate si l'algèbre $\mathscr{A}$ qui définit $W_G(T)_U$ est un $\mathscr{O}_U$-module libre. [17]

---

[15] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

[16] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit. Noter, d'autre part, que la section 6 est indépendante du reste de cet Exposé.

[17] N.D.E. : L'hypothèse entraîne que $\mathscr{A}$ est localement libre de rang 2, et comme l'idéal d'augmentation $\mathscr{I}$ est facteur direct de $\mathscr{A}$ alors, remplaçant U par un ouvert affine Spec(R) assez petit, on peut supposer que $I = \Gamma(U, \mathscr{I})$ est un R-module libre de rang 1. Si x est un générateur de I, on a alors $x^2 = ax$ pour un certain $a \in R$, et l'hypothèse que $A = \Gamma(U, \mathscr{A})$ soit étale entraîne que a est

Notations et rappels 2.5.0. — [18] Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes, ε : $\mathrm{S} \to \mathrm{G}$ la section unité de G. On a vu dans II, § 4.11, que le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est représentable par la fibration vectorielle $\mathrm{V}(\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})$ (où $\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})$), et l'on note

$$\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = (\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})^\vee$$

le faisceau des sections de cette fibration vectorielle. Supposons de plus G *lisse* sur S, alors $\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ et donc $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ sont des $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules localement libres de type fini, et l'on a (cf. I 4.6.5.1) :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})),$$

c.-à-d., pour tout S-schéma S′,

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}).$$

D'après II 4.1.1.1, l'action adjointe de G munit $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S}))$ d'une structure de G-$\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module, donc $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est un G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module (cf. I 4.7.1). Si de plus G est *affine* sur S, ceci revient à dire, d'après I 4.7.2, que $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est un $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule.

Si T est un tore sur S (IX Déf. 1.3), on dira que T est *déployé* (« trivial » dans l'original) s'il est isomorphe à $\mathbb{G}^r_{m,\mathrm{S}}$ pour un certain entier $r \geqslant 0$, et l'on dira que T est *trivialisé* si l'on a fixé un tel isomorphisme ou, plus généralement, un isomorphisme $\mathrm{T} \simeq \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$, où M est un groupe abélien libre de rang r.

Rappelons enfin (XII Déf. 1.3) qu'un tore T de G est dit *maximal* si, pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ est un tore maximal de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$.

Théorème 2.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes* affine et de présentation finie *sur* S*,* à fibres connexes*, et s_0 un point de* S*. Supposons* G plat *sur* S *en*
13 *$\varepsilon(s_0)$ et la fibre géométrique $\mathrm{G}_{\overline{s_0}}$* (*réduite et*) réductive (*resp. semi-simple*)*. Alors, il existe un ouvert* U *de* S*, contenant s_0 et un morphisme étale surjectif* $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ *tels que :*

(i) G_U *est lisse sur* S*, à fibres géométriques réductives* (*resp. semi-simples*)*, de rang réductif et de rang semi-simple constants.*

(ii) $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *possède un tore maximal déployé* [19] T*, et le groupe de Weyl* (cf. 6.3)

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) / \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$$

est fini *sur* S′*.*

[20] Notons $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural et $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ la section unité. Comme G est plat sur S en $\varepsilon(s_0)$ et $\mathrm{G}_{\overline{s}_0}$ réduit (donc lisse sur $\overline{s}_0$, cf. $\mathrm{VI_A}$ 1.3.1), alors G est lisse sur S au point $\varepsilon(s_0)$ (EGA IV_4, 17.5.1), c.-à-d., il existe un voisinage ouvert V de $\varepsilon(s_0)$ tel que $\pi|_\mathrm{V}$ soit lisse. Alors, $\mathrm{S}' = \varepsilon^{-1}(\mathrm{V})$ est un ouvert de S, et $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ est

inversible dans R, et l'on voit alors facilement que A est l'algèbre affine du R-groupe constant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (comparer avec les premières lignes de [**TO70**]).

[18] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe de notations et rappels.

[19] N.D.E. : On a ajouté « déployé ».

[20] N.D.E. : On a détaillé la démonstration.

lisse sur S' aux points de $\varepsilon(S')$. Comme G est à fibres connexes, $G_{S'}$ est lisse sur S', d'après VI_B, 3.10. Donc, remplaçant S par S', on peut supposer G lisse sur S.

D'après Exp. XI, th. 4.1, le foncteur des sous-groupes de type multiplicatif de G est représentable par un S-schéma $\mathscr{M}$, lisse et séparé sur S. Notons r_0 le rang de $G_{\overline{s_0}}$ et considérons le sous-schéma ouvert $\mathscr{M}_{r_0}$ de $\mathscr{M}$, qui représente le foncteur des sous-tores de rang r_0 de G (IX.1.4). La lissité entraîne que $\mathscr{M}_{r_0}$ admet un point rationnel sur une extension finie séparable de $\kappa(s_0)$ (cf. EGA IV_4, 17.15.10 (iii)). Ainsi il existe $S' \to S$ étale muni d'un point s'_0 s'appliquant sur s_0 tel que $G_{s'_0}$ admette un tore de rang r_0. Donc, remplaçant S par S', on peut supposer que G_{s_0} admette un tore de rang r_0.

D'après le « lemme de Hensel » (cf. XI, 1.10), la lissité de $\mathscr{M}_{r_0}$ permet de relever ce tore en un S'-tore T de G où $S' \to S$ est étale muni d'un point s'_0 s'envoyant sur s_0. D'après Exp. X, 4.5 (voir aussi 6.1 [(21)]), il existe un morphisme étale $f : S'' \to S'$ déployant T et tel que $f^{-1}(s'_0) \neq \varnothing$. Comme un morphisme étale est ouvert et que les assertions de (i) sont locales pour la topologie étale on peut donc supposer que G possède un tore déployé T, [(22)] maximal en s_0. Écrivons donc $T = D_S(M)$ et soit

$$\mathfrak{g} = \coprod_{m \in M} \mathfrak{g}^m,$$

la décomposition de $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(G/S)$ sous Ad(T) (Exp. I, 4.7.3).

On pose $\mathfrak{t} = \mathscr{L}ie(T)$ et, pour tout $m \in M$, on note $\mathfrak{g}^m(s_0) = \mathfrak{g}^m \otimes_{\mathscr{O}_S} \kappa(s_0)$. [(23)] Soit R l'ensemble des $m \in M$, $m \neq 0$, tels que $\mathfrak{g}^m(s_0) \neq 0$. [(24)] Comme $G_{\overline{s}_0}$ est réductif, on a $\mathfrak{g}^0(s_0) = \mathfrak{t}(s_0)$, donc

$$\mathfrak{g}(s_0) = \mathfrak{t}(s_0) \bigoplus \coprod_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha(s_0).$$

Comme les modules en cause sont localement libres, on peut, quitte à restreindre S, **14**
supposer les $\mathfrak{g}^\alpha$ libres et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \bigoplus \coprod_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha.$$

On rappelle, cf. Exp. XII, 1.12, qu'un groupe de type multiplicatif possède un unique tore maximal (c'est d'ailleurs à peu près trivial par descente, le cas diagonalisable étant évident). Soient alors T_α le tore maximal du noyau de α et $Z_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T_\alpha)$. [(25)] D'après 2.2, Z_α est affine et lisse sur S, à fibres connexes, et d'après 1.12, sa fibre $(Z_\alpha)_{\overline{s}_0}$ est réductive, de rang semi-simple 1, de tore maximal $T_{\overline{s}_0}$. Par 2.3, il existe donc un ouvert U_α de S, contenant s_0, tel que $Z_\alpha|_{U_\alpha}$ ait ses fibres réductives.

---

(21) N.D.E. : qui est indépendant du reste de cet exposé.

(22) N.D.E. : Dans tout ce volume, on a remplacé « tore trivial » par « tore déployé ».

(23) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui précède.

(24) N.D.E. : Noter que, $\mathfrak{g}$ étant un $\mathscr{O}_S$-module fini localement libre, R est un ensemble *fini*.

(25) N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

Posons $\mathrm{U} = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathrm{U}_\alpha$. Par 1.12, pour tout $s \in \mathrm{U}$, $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est réductif, de tore maximal $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ et l'ensemble des racines de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ s'identifie à R, de sorte que

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}_{\overline{s}}) = \dim(\mathrm{T}) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}), \qquad \mathrm{rgss}(\mathrm{G}_{\overline{s}}) = \mathrm{rg}(\mathrm{R}) \quad (\text{cf. } 1.10).$$

On a donc prouvé (i) et la première assertion de (ii) ; reste à prouver que le groupe de Weyl $\mathrm{W}_{\mathrm{G}_\mathrm{U}}(\mathrm{T}_\mathrm{U})$ est *fini* sur U, i.e. « qu'il a le même nombre de points dans chaque fibre géométrique » (cf. SGA 1, I 10.9 et EGA IV_3, 15.5.1 et IV_4, 8.12.4).

Pour cela, il suffit de remarquer que la fibre géométrique de ce groupe en $s \in \mathrm{U}$ est déterminée par la situation $\mathrm{R} \subset \mathrm{M}$, comme groupe constant associé au « groupe de Weyl abstrait de ce système de racines », et en particulier est indépendante du point s, cf. *Bible*, § 11.3, th. 2 (voir aussi Exp. XXII, n°3).

Corollaire 2.6. — *Soit* G *un* S*-groupe* affine et lisse *sur* S*, à* fibres connexes. *L'ensemble des points* $s \in \mathrm{G}$ *tels que* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *soit réductif* (*resp. semi-simple*) *est un ouvert* U *de* S *et les fonctions*
15

$$s \mapsto \mathrm{rgred}(\mathrm{G}_{\overline{s}}/\overline{s}), \qquad s \mapsto \mathrm{rgss}(\mathrm{G}_{\overline{s}}/\overline{s})$$

sont localement constantes sur U.

Définition 2.7. — Un S-groupe (= S-schéma en groupes) G est dit *réductif* (resp. *semi-simple*) s'il est *affine et lisse* sur S, à fibres géométriques *connexes*, et *réductives* (resp. *semi-simples*).

Le fait d'être réductif (resp. semi-simple) pour un S-groupe G est stable par changement de base et *local* pour la topologie (fpqc).

2.8. Soit G un S-groupe réductif. Pour tout tore (resp. tore maximal) Q de G, $\mathrm{Z}(\mathrm{Q}) = \underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ est réductif (resp. est Q). Cela résulte aussitôt de 2.2 et 1.6.

Appliquant 2.5 à $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ on en déduit que Q est contenu (localement pour la topologie étale) dans un tore maximal.

Remarque 2.9. — Utilisant comme d'habitude la technique de EGA IV_3, § 8, les hypothèses de présentation finie et le théorème 2.5, on voit que si G est un groupe réductif sur S, il existe un recouvrement ouvert de S, soit $\{\mathrm{U}_i\}$, tel que chaque $\mathrm{G}_{\mathrm{U}_i}$ provienne par changement de base d'un groupe réductif sur un anneau noethérien (en fait une algèbre de type fini sur $\mathbb{Z}$). De même, si G possède un tore maximal déployé T, on peut de plus supposer que $\mathrm{T}_{\mathrm{U}_i}$ provient d'un tore maximal déployé du groupe précédent, ...

3. Racines et systèmes de racines des schémas en groupes réductifs

16

3.1. Soient S un schéma, T un S-tore opérant linéairement sur un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module localement libre de type fini $\mathscr{F}$ (cf. I, § 4.7). Pour tout caractère α de T (c.-à-d., $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$), on définit un sous-foncteur de $\mathrm{W}(\mathscr{F})$ par

$$\mathrm{W}(\mathscr{F})^\alpha(\mathrm{S}') = \{x \in \mathrm{W}(\mathscr{F})(\mathrm{S}') \mid t\, x = \alpha(t)x \text{ pour tout } t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}''),\ \mathrm{S}'' \longrightarrow \mathrm{S}'\}.$$

Lemme. — [26] *Alors* $\mathrm{W}(\mathscr{F})^{\alpha} = \mathrm{W}(\mathscr{F}^{\alpha})$, *où* $\mathscr{F}^{\alpha}$ *est un sous-module de* $\mathscr{F}$, localement facteur direct *dans* $\mathscr{F}$, *donc aussi localement libre.*

En effet, l'assertion est locale pour la topologie (fpqc) et on peut supposer $\mathrm{T} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, où M est un groupe abélien (libre) de type fini. Alors α s'identifie à une fonction localement constante de S dans M (Exp. VIII 1.3), et quitte à restreindre S, on peut supposer que cette fonction est constante. On est alors ramené à Exp. I, 4.7.3.

Définition 3.2. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes lisse à fibres connexes, [27] T un tore de G. On note $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ et on fait opérer T sur $\mathfrak{g}$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe de G.

On dit que le caractère α de T est une *racine de* G *par rapport à* T si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) Pour chaque $s \in \mathrm{S}$, $\alpha_{\overline{s}}$ est une racine de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ (1.10).

(ii) α est non trivial sur chaque fibre et $\mathfrak{g}^{\alpha}(s) \neq 0$ pour chaque $s \in \mathrm{S}$.

Lemme 3.3. — *Soient* S *un schéma,* T *un* S*-tore,* α *un caractère de* T. *Les conditions suivantes sont équivalentes :* 17

(i) α *est non trivial sur chaque fibre, c'est-à-dire : pour tout* $s \in \mathrm{S}$, $\alpha_{\overline{s}}$ *est distinct du caractère unité de* $\mathrm{T}_{\overline{s}}$.

(ii) *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{S}' \neq \varnothing$, $\alpha_{\mathrm{S}'}$ *est distinct du caractère unité de* $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$.

(iii) *Le morphisme* α *est fidèlement plat.*

[28] Il est clair que (ii) $\Rightarrow$ (i) et l'on voit facilement que (iii) $\Rightarrow$ (i). On a (i) $\Rightarrow$ (ii) car si $s' \in \mathrm{S}'$ est au-dessus de s et si $\alpha_{s'}$ est le caractère unité, il en est de même de α_s. Enfin, pour prouver (i) $\Rightarrow$ (iii), on se ramène au cas où T est diagonalisable et on conclut par Exp. VIII 3.2 a).

3.4. [29] Soient G un S-schéma en groupes *réductif*, T un tore maximal de G. Soit α une racine de G par rapport à T. Alors, d'après 2.5.0 et 1.12, $\mathfrak{g}^{\alpha}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de rang un. De plus, d'après 1.10, $-\alpha$ est aussi une racine de G par rapport à T. En particulier, si G est de rang semi-simple 1, on a par 1.11 et 1.12 :

---

[26] N.D.E. : On a fait de cet énoncé un lemme, pour le mettre en évidence.

[27] N.D.E. : L'original ajoutait l'hypothèse que G soit de présentation finie sur S, qui ne semble pas utilisée dans la suite. De toutes façons, G étant lisse sur S et à fibres connexes, il est quasi-compact et séparé sur S (VI_{B}, 5.5), donc de présentation finie sur S.

[28] N.D.E. : On a simplifié l'original, qui invoquait Exp. IX, 5.2. Notons toutefois que *loc. cit.*, 5.3 montre que si S est *connexe*, alors les condition du lemme sont vérifiées dès lors que (i) est vérifié en *un* point s de S.

[29] N.D.E. : On a modifié ce qui suit, pour rappeler les hypothèses de 3.2 et ajouter que T est un tore *maximal*.

Lemme 3.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif de rang semi-simple* 1*,* T *un tore maximal de* G*. Si α est une racine de* G *par rapport à* T*, alors $-\alpha$ en est aussi une et on a*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

où $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ sont localement libres de rang 1*.*

Définition 3.6. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, R un ensemble de racines de G par rapport à T. On dit que R est *un système de*
18 *racines* de G par rapport à T si les conditions *équivalentes* suivantes sont satisfaites :

(i) Pour chaque $s \in \mathrm{S}$, $\alpha \mapsto \alpha_{\overline{s}}$ est une bijection de R sur l'ensemble des racines de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$.

(ii) Les éléments de R sont distincts sur chaque fibre (i.e. si α, $\alpha' \in \mathrm{R}$, $\alpha \neq \alpha'$, alors $\alpha - \alpha'$ $(= \alpha\,\alpha'^{-1})$ est non trivial sur chaque fibre) et pour chaque $s \in \mathrm{S}$, on a

$$\dim(\mathrm{G}_s/\kappa(s)) - \dim(\mathrm{T}_s/\kappa(s)) = \mathrm{Card}(\mathrm{R}).$$

(iii) On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^{\alpha}$.

L'équivalence de ces diverses conditions est triviale.

Lemme 3.7. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* R *un système de racines de* G *par rapport à* T*. Toute racine de* G *par rapport à* T *est localement sur* S *égale à un élément de* R*.*

C'est visible sur la condition (iii).

Posons $\mathscr{M} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$; c'est un S-schéma en groupes constant tordu (Exp. X 5.6). Si G admet un système de racines R par rapport à T, alors l'inclusion $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathscr{M}(\mathrm{S})$ définit un morphisme $\mathrm{R}_{\mathrm{S}} \to \mathscr{M}$, où R_{S} est le S-schéma constant défini par R ; grâce à la condition (ii), on voit facilement que ce morphisme est une immersion ouverte et fermée dont l'image n'est autre que $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{R}} \alpha(\mathrm{S})$ (chaque $\alpha \in \mathrm{R}$ étant considéré comme une section $\mathrm{S} \to \mathscr{M}$).

Soit $\mathcal{R}$ le *foncteur des racines* de G par rapport à T : par définition, $\mathcal{R}(\mathrm{S}')$ est l'ensemble des racines de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$; si $\mathrm{S}' = \varnothing$, on pose $\mathcal{R}(\varnothing) = \{e\}$, et si $\mathrm{S}' \neq \varnothing$ alors l'inclusion $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathscr{M}(\mathrm{S}')$ identifie R à un système de racines de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$, et donc, d'après 3.7, on a

$$\mathcal{R}(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\text{loc. const.}}(\mathrm{S}', \mathrm{R}),$$

19 ce qui montre que $\mathcal{R}$ est représentable par R_{S}.

Si maintenant on ne suppose plus nécessairement que G possède un système de racines relativement à T, $\mathcal{R}$ est de toute façon un sous-faisceau de $\mathscr{M}$ pour (fpqc). Localement pour cette topologie, G possède un système de racines par rapport à T (prendre par exemple T déployé). Par Exp. IV 4.6.8 et la théorie de la descente des sous-schémas ouverts (resp. fermés), [(30)] on obtient :

[(30)]N.D.E. : voir SGA 1, VIII 4.4 ou EGA IV_2, 2.7.1.

Proposition 3.8. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe,* T *un tore maximal de* G*. Le foncteur* $\mathcal{R}$ *des racines de* G *par rapport à* T *est représentable par un* S*-schéma* fini constant tordu (Exp. X 5.1) *qui est un sous-schéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$.

Pour que $\mathrm{R} \subset \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$ *soit un système de racines de* G *par rapport à* T*, il faut et il suffit que le morphisme* $\mathrm{R}_\mathrm{S} \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$ *défini par l'inclusion précédente induise un isomorphisme* $\mathrm{R}_\mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$.

3.9. Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T (i.e. une section de $\mathcal{R}$). Considérons le noyau $\mathrm{Ker}(\alpha)$ de R, son unique tore maximal T_α et le centralisateur de ce dernier, $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{T}_\alpha)$. C'est un S-groupe fermé dans G, *réductif* (2.8) de *rang semi-simple* 1 (1.12). De plus,

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{Z}_\alpha/\mathrm{S}) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

donc $\{\alpha, -\alpha\}$ est un système de racines de Z_α par rapport à T.

3.10. Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T. Si $q \in \mathbb{Q}$ et si $q\,\alpha$ est une racine de G par rapport à T, alors $q = 1$ ou $q = -1$. Cela résulte aussitôt de 1.12.

4. Racines et schémas en groupes vectoriels

20

4.1. Soient S un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module *localement libre de type fini.* Le S-schéma $\mathrm{W}(\mathscr{F})$ est *lisse* sur S. Son algèbre de Lie est canoniquement isomorphe à $\mathscr{F}$. En effet, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{W}(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S}) = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S})).$$

(Exp. II, 4.4.1 et 4.4.2). Nous identifierons toujours $\mathscr{F}$ et $\mathscr{L}ie(\mathrm{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S})$.

Lemme 4.2. — *Soient* S *un schéma,* V *une fibration vectorielle sur* S*,* lisse *sur* S*. Il existe alors un isomorphisme unique de* $\mathbf{O}_\mathrm{S}$*-modules*

$$\exp : \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{V}/\mathrm{S})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}$$

qui induise l'identité sur les algèbres de Lie. [31]

[31] N.D.E. : On a conservé la démonstration de l'original ; on peut aussi la détailler comme suit. Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module quasi-cohérent, $\mathrm{V} = \mathbb{V}(\mathscr{F})$. On note π la projection $\mathrm{V} \to \mathrm{S}$ et ε la section nulle $\mathrm{S} \to \mathrm{V}$. Alors $\Omega^1_{\mathrm{V}/\mathrm{S}} = \pi^*\mathscr{F}$, d'où

$$\omega^1_{\mathrm{V}/\mathrm{S}} = \varepsilon^*\Omega^1_{\mathrm{V}/\mathrm{S}} \simeq \varepsilon^*\pi^*\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}, \tag{1}$$

et donc $\mathscr{L}ie(\mathrm{V}/\mathrm{S}) = (\omega^1_{\mathrm{V}/\mathrm{S}})^\vee \simeq \mathscr{F}^\vee$. Si on suppose V *lisse* sur S alors, d'après (1), $\mathscr{F}$ est localement libre de type fini, et donc

$$\mathrm{V} = \mathbb{V}(\mathscr{F}) \simeq \mathrm{W}(\mathscr{F}^\vee) \simeq \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{V}/\mathrm{S})). \tag{2}$$

Maintenant, si U est un S-schéma muni d'une section $\tau : \mathrm{S} \to \mathrm{U}$, et si l'on s'est donné un isomorphisme $\phi : \mathrm{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}$ de S-schémas « pointés », i.e. tel que $\phi \circ \varepsilon = \tau$ (par exemple si U est un S-groupe), alors

En effet, on a $\mathrm{V} = \mathbb{V}(\mathscr{F})$ pour un certain $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$. Comme V est lisse sur S, alors $\mathscr{F} \simeq \omega^1_{\mathrm{V/S}}$ est localement libre de type fini, et donc

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{V/S}) = \mathbb{V}(\omega^1_{\mathrm{V/S}}) \simeq \mathrm{W}(\mathscr{L}\!ie(\mathrm{V/S})).$$

De plus, d'après Exp. II *loc. cit.*, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{V} \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{V/S}) \simeq \mathrm{W}(\mathscr{L}\!ie(\mathrm{V/S}))$$

et on a aussitôt l'unicité de exp, car W est pleinement fidèle.

4.3. Notations. — Si V est un fibré vectoriel sur S, on désignera par $\mathrm{V}^\times$ l'ouvert de V obtenu en retirant la section 0. Notons la loi de groupe de V en notation multiplicative. L'opération de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$ sur V définissant la structure de module sera alors notée exponentiellement

$$\mathbf{O}_{\mathrm{S}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad (x, v) \longmapsto v^x.$$

21 On a $(vv')^x = v^x v'^x$, $v^{x+x'} = v^x v^{x'}$, $v^{xx'} = (v^x)^{x'}$. En particulier, si on restreint la loi d'opérateurs à $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, alors $\mathrm{V}^\times$ est stable et est donc muni d'une structure d'objet à groupe d'opérateurs $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$. On notera encore cette loi par $(z, v) \mapsto v^z$.

Définition 4.4.1. — [(32)] Soit $\mathscr{L}$ un module inversible sur S et $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ le fibré vectoriel associé. Alors $\mathrm{W}(\mathscr{L})^\times$ est un fibré principal homogène (localement trivial) sous $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$. On note $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{L})^\times = \mathrm{W}(\mathscr{L})^\times(\mathrm{S})$.

Scholie 4.4.2. — Il y a correspondance bijective entre les *isomorphismes* de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \simeq \mathscr{L}$, les *isomorphismes* de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathbf{O}_{\mathrm{S}} \simeq \mathrm{W}(\mathscr{L})$ [(33)], et les sections $\mathrm{S} \to \mathrm{W}(\mathrm{L})^\times$.

Cette correspondance s'effectue par $f \mapsto \mathrm{W}(f) \mapsto \mathrm{W}(f)(1)$. Elle est compatible avec l'extension de la base. On peut donc considérer $\mathrm{W}(\mathscr{L})^\times$ comme le « *schéma des trivialisations de* $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ ».

ϕ induit un isomorphisme $d\phi : \mathscr{F}^\vee \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{L}\!ie(\mathrm{U/S})$, d'où un isomorphisme ψ :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W}(\mathscr{F}^\vee) \arrow[r, equal] & \mathrm{V}(\mathscr{F}) \arrow[r, "\phi", "\sim"'] & \mathrm{U} \\
& \mathrm{W}(\mathscr{L}\!ie(\mathrm{U/S})) \arrow[ul, "\simeq", "\mathrm{W}(d\phi^{-1})"'] \arrow[ur, "\simeq", "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

qui permet d'identifier U à $\mathrm{W}(\mathscr{L}\!ie(\mathrm{U/S}))$. Comme le foncteur W est pleinement fidèle, il existe un *unique* isomorphisme $\exp : \mathrm{W}(\mathscr{L}\!ie(\mathrm{U/S})) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{U}$ tel que $\mathscr{L}\!ie(\psi^{-1} \circ \exp) = \mathrm{id}$. En fait, on peut voir directement que $\mathscr{L}\!ie(\psi) = \mathrm{id}$, de sorte que $\exp = \psi$.

(32) N.D.E. : Pour des références ultérieures, on a transformé 4.4 en 4.4.1 et 4.4.2.

(33) N.D.E. : Ici, on identifie le fibré vectoriel $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ au *foncteur* en $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules qu'il représente.

4.5. Soient S un schéma, T un tore sur S, P un S-groupe à groupe d'opérateurs $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ (par exemple un fibré vectoriel), α un caractère de T. On note $\mathrm{T}\cdot_\alpha \mathrm{P}$ le produit semi-direct de P par T, où T opère sur P par le morphisme composé

$$\mathrm{T} \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{P}).$$

Définition 4.6. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes, T un sous-groupe de G, α un caractère de T, $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module. Soit

$$p : \mathbf{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{G} \qquad {}^{(34)}$$

un morphisme de S-foncteurs en groupes. On dit que p est *normalisé par* T *avec le multiplicateur* α s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) p est un morphisme d'objets à groupes d'opérateurs T, si on fait opérer T sur $\mathbf{W}(\mathscr{L})$ par α et sur G par automorphismes intérieurs. En d'autres termes, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tous $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ et $x \in \mathbf{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$, on a **22**

$$\mathrm{int}(t)p(x) = p(\alpha(t)x).$$

(ii) Le morphisme $\mathrm{T}\cdot_\alpha \mathbf{W}(\mathscr{L}) \to \mathrm{G}$ défini par le produit dans G (i.e. par $(t,x) \mapsto t\cdot p(x)$) est un morphisme de groupes.

Lemme 4.7. — *Sous les conditions de* 4.6*, supposons de plus* G lisse *et* à fibres connexes*,* [35] T *tore maximal de* G*,* $\mathscr{L}$ *inversible. Si* p *est un* monomorphisme *et* α *non nul sur chaque fibre, alors* α *est une racine de* G *par rapport à* T.

En effet $\mathscr{L}ie(p) : \mathscr{L} \to \mathfrak{g}$ est un monomorphisme qui se factorise par $\mathfrak{g}^\alpha$.

Proposition 4.8. — *Sous les conditions de* 4.7*, supposons que* G *soit réductif, et que* p *soit un* monomorphisme*. Alors* α *est une racine de* G *par rapport à* T *et* $\mathscr{L}ie(p)$ *induit un isomorphisme*

$$\mathscr{L}ie(p) : \mathscr{L} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathfrak{g}^\alpha.$$

En effet, en vertu de 4.7 et du fait que $\mathfrak{g}^\alpha$ est inversible, il suffit de prouver que α est non nul sur chaque fibre. Soit donc $s \in \mathrm{S}$ tel que $\alpha_{\overline{s}} = 0$ ($= 1$ en notation multiplicative). Si X est une section non nulle de $\mathscr{L} \otimes_{\mathrm{S}} \kappa(\overline{s})$, $p(\mathrm{X})$ est un élément unipotent $\neq e$ de $\mathrm{G}(\overline{s})$ qui centralise $\mathrm{T}_{\overline{s}}$, ce qui est impossible, car celui-ci est son propre centralisateur.

Corollaire 4.9. — *Sous les conditions de* 4.8*, il existe un monomorphisme de groupes à opérateurs* T (*i.e. normalisé par* T *avec le multiplicateur* α)

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui induit sur les algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^\alpha \to \mathfrak{g}$.

Nous verrons bientôt que 4.9 est vérifiée en fait chaque fois que G est un groupe **23**

[34] N.D.E. : Ici, on a noté $\mathbf{W}(\mathscr{L})$ (avec $\mathbf{W}$ en *gras*) car, pour un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{L}$ arbitraire, $\mathbf{W}(\mathscr{L})$ n'est pas nécessairement représentable. Mais dans la suite, $\mathscr{L}$ sera supposé localement libre de rang fini (et même *inversible*), auquel cas le foncteur est représentable par le fibré vectoriel $\mathrm{V}(\mathscr{L}^\vee)$, et on le notera simplement $\mathrm{W}(\mathscr{L})$.

[35] N.D.E. : cf. la N.D.E. (27).

réductif et α une racine de G par rapport à T, et qu'un tel morphisme est unique.

Rappel 4.10. — Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T. Il existe un monomorphisme

$$p : \mathbb{G}_{a,\,k} \longrightarrow \mathrm{G}$$

normalisé par T avec le multiplicateur α.

Voir *Bible*, § 13.1, th. 1.

4.11. Terminons cette section par un résultat technique qui nous sera utile. Soient S un schéma, et $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible. Soit q un entier > 0 tel que $x \mapsto x^q$ soit un endomorphisme du S-groupe $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$. (Si $\mathrm{S} \neq \varnothing$, on a $q = 1$, ou $q = p^n$, p étant un nombre premier nul sur S ; cela résulte aussitôt du fait élémentaire suivant : le pgcd des coefficients binomiaux $\binom{q}{i}$, pour $i \neq 0, q$, est p si $q = p^n$, p premier, et 1 dans le cas contraire). Le morphisme défini par la puissance q-ième

$$\mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}^{\otimes q}$$

est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens. Il définit par changement de base un morphisme de S-schémas en groupes :

$$\mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathscr{L}^{\otimes q}).$$

En particulier, si $\mathscr{L}'$ est un autre module inversible et si on a un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$h : \mathscr{L}^{\otimes q} \longrightarrow \mathscr{L}',$$

24 on en déduit un morphisme de S-schémas en groupes :

$$\mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathscr{L}'), \qquad x \mapsto h(x^q).$$

Ces notations posées, on a

Proposition 4.12. — *Soient* S *un schéma,* T (*resp.* T′) *un* S*-tore,* $\mathscr{L}$ (*resp.* $\mathscr{L}'$) *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module inversible,* α (*resp.* α') *un caractère de* T (*resp.* T′). [36] *Soient* $f : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ *un morphisme de groupes et* $g : \mathrm{W}(\mathscr{L}) \to \mathrm{W}(\mathscr{L}')$ *un morphisme de* S*-schémas* (*pas nécessairement un morphisme de* S*-groupes*) *vérifiant la condition suivante :*

$$(\star) \qquad g(\alpha(t)x) = \alpha'(f(t))\, g(x)$$

pour tous $x \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}')$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *Soit* $s_0 \in \mathrm{S}$ *tel que* $\alpha_{\overline{s}_0} \neq 0$.

a) *Supposons que* g *envoie la section* 0 *sur la section* 0 *et que pour tout entier* $n > 0$, *on ait* $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}_0} \neq n\,\alpha_{\overline{s}_0}$. *Alors* $g = 0$ *au voisinage de* s_0.

b) *Supposons que* g *soit un morphisme de groupes tel que* $g_{\overline{s}_0} \neq 0$. *Il existe alors un ouvert* U *de* S *contenant* s_0 *et un entier* $q > 0$ *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{U}}$ *et que* $(\alpha' \circ f)_{\mathrm{U}} = q\,\alpha_{\mathrm{U}}$.

---

[36] N.D.E. : On a supprimé « considérons le produit semi-direct $\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathrm{W}(\mathscr{L})$, resp. $\mathrm{T}' \cdot_{\alpha'} \mathrm{W}(\mathscr{L}')$ ». Par contre, l'hypothèse dans (b) que g soit un morphisme de groupes, combinée avec $(\star)$, équivaut à dire que le morphisme $(t, x) \mapsto (f(t), g(x))$ est un morphisme de groupes de $\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathrm{W}(\mathscr{L})$ vers $\mathrm{T}' \cdot_{\alpha'} \mathrm{W}(\mathscr{L}')$.

c) *Supposons que* $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}_0} = q\,\alpha_{\overline{s}_0}$, *où* q *est un entier* > 0 *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$. *Il existe alors un ouvert* U *de* S *contenant* s_0 *et un unique morphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*

$$h : \mathscr{L}^{\otimes q}|_{\mathrm{U}} \longrightarrow \mathscr{L}'|_{\mathrm{U}}$$

tels que g_{U} *soit le morphisme composé*

$$\mathrm{W}(\mathscr{L})_{\mathrm{U}} \xrightarrow{x \mapsto x^q} \mathrm{W}(\mathscr{L}^{\otimes q})_{\mathrm{U}} \xrightarrow{\mathrm{W}(h)} (\mathscr{L}')_{\mathrm{U}}.$$

Démontrons (a). Comme la conclusion est locale sur S, on peut supposer que 25
$\mathrm{W}(\mathscr{L}) = \mathrm{W}(\mathscr{L}') = \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ et donc que g s'exprime comme un polynôme

$$g(\mathrm{X}) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \mathrm{X}^n, \qquad a_n \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}).$$

La condition $(\star)$ qui lie f et g s'écrit comme une identité dans $\Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})[\mathrm{X}]$:

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n \alpha'(f(t))\mathrm{X}^n = \sum_{n \geqslant 0} a_n \alpha(t)^n \mathrm{X}^n,$$

soit, pour tout $n \geqslant 0$, tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$,

$$a_n(\alpha'(f(t)) - \alpha(t)^n) = 0.$$

Pour chaque $n \geqslant 0$, soit S_n l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}} = n\,\alpha_{\overline{s}}$. On sait (Exp. IX 5.3) que les S_n sont ouverts et fermés, et que $(\alpha' \circ f)_{\mathrm{S}_n} = n\,\alpha_{\mathrm{S}_n}$. De plus, comme $\alpha_{\overline{s}_0} \neq 0$, on peut, quitte à restreindre S, supposer que α est non nul sur chaque fibre (même référence), ce qui entraîne que les S_n sont disjoints. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer que l'on est dans l'un des deux cas suivants : il existe un n tel que $\mathrm{S} = \mathrm{S}_n$ ou bien tous les S_n sont vides.

Soit $m \geqslant 0$ tel que $\mathrm{S}_m = \varnothing$, je dis qu'alors $a_m = 0$; en effet $\alpha' \circ f$ et $m\,\alpha$ sont distincts sur chaque fibre de S, et on a :

Lemme 4.13. — *Soient* S *un schéma,* T *un* S*-tore,* α *et* α' *deux caractères de* T *distincts sur chaque fibre ; il existe une famille* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ *couvrante pour* (fpqc)*, et pour chaque* i *un* $t_i \in \mathrm{T}(\mathrm{S}_i)$*, tels que* $\alpha(t_i) - \alpha'(t_i) = 1$.

Le lemme est trivial, par réduction au cas diagonalisable, puis au cas $\mathrm{T} = \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$.

Reprenons la démonstration de la proposition 4.12 ; on vient de prouver (a). Dans 26
les cas (b) et (c), il existe un n tel que $\mathrm{S} = \mathrm{S}_n$ ($n = q$ dans (c)). Par le résultat précédent on a donc $a_m = 0$ pour $m \neq n$, ce qui prouve que g s'écrit

$$g(\mathrm{X}) = a_n \mathrm{X}^n, \qquad a_n \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}).$$

Cela prouve aussitôt (c). Dans le cas (b), on sait que $a_n(s_0) \neq 0$, on peut donc supposer a_n inversible sur S, ce qui entraîne que $x \mapsto x^n$ est un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ (en vertu de l'hypothèse de (b)) et achève la démonstration.

5. Un exemple instructif

5.1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Posons $\mathrm{A} = k[t]$, anneau des polynômes à une variable sur k et $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ suivante : comme module, elle est libre de dimension 3, de base $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\}$; la table de multiplication est

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 2t\mathrm{H}, \quad [\mathrm{H}, \mathrm{X}] = \mathrm{X} \quad \text{et} \quad [\mathrm{H}, \mathrm{Y}] = -\mathrm{Y}.$$

Pour $s \in \mathrm{S}$, $s \neq s_0$ (point défini par $t = 0$) la fibre $\mathfrak{g}(s) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{A}} \kappa(s)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{PGL}_{2,\,\kappa(s)}$. Pour $s = s_0$, c'est une algèbre de Lie résoluble.

5.2. Soit G_1 le schéma en groupes des automorphismes de $\mathfrak{g}$: pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{G}_1(\mathrm{S}')$ est le groupe des automorphismes de la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$. C'est un sous-schéma fermé du groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ des automorphismes du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathfrak{g}$. Soient $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $u \in \mathrm{M}_3(\Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}))$ considéré comme un endomorphisme du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module
27 $\mathfrak{g} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$:

$$\begin{aligned} u(\mathrm{X}) &= a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + e\mathrm{H}, \\ u(\mathrm{Y}) &= b'\mathrm{X} + a'\mathrm{Y} + e'\mathrm{H}, \\ u(\mathrm{H}) &= c\mathrm{X} + c'\mathrm{Y} + d\mathrm{H}. \end{aligned}$$

On voit aussitôt que u est une section de G_1 si et seulement si $\mathrm{dét}(u)$ est inversible et si on a les relations : [37]

$$\begin{array}{lclc} (1)\ a(d-1) = ec & , & (1')\ a'(d-1) = e'c' & , \\ (2)\ b(d+1) = ec' & , & (2')\ b'(d+1) = e'c & , \\ (3)\ e = 2t(bc - ac') & , & (3')\ e' = 2t(b'c' - a'c) & , \\ (4)\ 2tc = eb' - ae' & , & (4')\ 2tc' = be' - ea' & , \end{array}$$
$$(5)\ 2t(aa' - bb') = 2td.$$

Lemme 5.3. — *Les relations* (1), (1′), (2), (2′) *impliquent*

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}(u) &= aa'(2-d) + bb'(d+2), \\ aa' - bb' &= d \cdot \mathrm{dét}(u). \end{aligned}$$

En effet, la première assertion s'obtient aussitôt en reportant les relations (1), (1′), (2), (2′) dans le développement de $\mathrm{dét}(u)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}(u) &= aa'd + be'c + b'c'e - a'ec - ae'c' - bb'd \\ &= aa'd + bb'(d+1) + bb'(d+1) - aa'(d-1) - bb'd - aa'(d-1) \\ &= aa'(d - d + 1 - d + 1) + bb'(d + 1 + d + 1 - d) \\ &= aa'(2-d) + bb'(d+2). \end{aligned}$$

Multipliant alors cette relation par d, on obtient

$$d \cdot \mathrm{dét}(u) = aa'(2d - d^2) + bb'(d^2 + 2d).$$

[37] N.D.E. : L'égalité $[u(\mathrm{X}), u(\mathrm{Y})] = 2\,t\,u(\mathrm{H})$ (resp. $[u(\mathrm{H}), u(\mathrm{X})] = u(\mathrm{X})$, resp. $[u(\mathrm{H}), u(\mathrm{Y})] = -u(\mathrm{Y})$) donne les relations (4), (4′) et (5) (resp. (1–3), resp. (1′–3′)).

Mais la relation $(1) \times (1') = (2) \times (2')$ donne aussitôt

$$aa'(d-1)^2 = bb'(d+1)^2.$$

Combinant les deux relations précédentes, on trouve aussitôt la seconde formule cherchée. **28**

5.4. Considérons alors $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \cap \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$. C'est le sous-groupe fermé de G_1 défini par l'équation $\mathrm{dét}(u) = 1$. C'est donc un groupe affine sur S.

Proposition 5.5. — *Le groupe* G *est* lisse *sur* S.

Pour démontrer la proposition, on aura besoin des lemmes qui suivent.

Lemme 5.6. — *Soit* U *l'ouvert de* $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{W}(\mathrm{M}_3(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}))$ *défini par la condition « le produit ad est inversible », i.e. l'ouvert* $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})_f$, *où* f *est la fonction définie par* $f(u) = ad$. *Alors* $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}$ *est le sous-schéma fermé de* U *défini par les* 6 *équations :*

$$(1), \quad (2), \quad (2'), \quad (3), \quad (3') \quad \textit{et} \quad (\mathrm{D}) : aa' - bb' = d.$$

Il est d'abord clair que ces 6 relations sont vérifiées par tout « point » de G (lemme 5.3), en particulier par tout « point » de $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}$. Réciproquement, il faut montrer que si $u \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$ (pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$), et si u vérifie les 6 conditions de l'énoncé, alors $\mathrm{dét}(u) = 1$ et u vérifie aussi $(1')$, (4), $(4')$ et (5).

On a d'abord $(\mathrm{D}) \Rightarrow (5)$. D'après (2) et $(2')$, on a

$$bb'(d+1) = bce' = b'c'e.$$

Mais par (3) et $(3')$, on a, en écrivant de deux manières $2t(bc - ac')(b'c' - a'c)$:

$$(bc - ac')e' = (b'c' - a'c)e.$$

Combinant avec la relation précédente, cela donne $ac'e' = a'ce$. Mais par (1), $a'ce = a'a(d-1)$, ce qui prouve $a(a'(d-1) - e'c') = 0$ et entraîne $(1')$, puisque a est supposé inversible.

Ainsi, (1), (2), $(2')$ et $(1')$ sont vérifiées, donc par le lemme 5.3 et (D) on a $d(\mathrm{dét}(u) - 1) = 0$. Comme d est supposé inversible, ceci entraîne $\mathrm{dét}(u) = 1$.

Prouvons (4) et $(4')$. Faisons-le par exemple pour $(4')$, l'autre calcul s'en déduisant **29**
par symétrie. Par (3), $(3')$ et (D), on a aussitôt

$$a'e + be' = -2t(aa' - bb')c' = -2tdc'.$$

Combinant $(1')$ et (2), on a aussi [38]

$$a'e + be' = -d(be' - ea'),$$

ce qui termine la démonstration de $(4')$, d étant supposé inversible.

Lemme 5.7. — G *est lisse sur* S *le long de la section unité.*

---

[38] N.D.E. : On a corrigé le signe.

Par 5.6 et SGA 1, II 4.10, il suffit de prouver que les différentielles des fonctions

$$a(d-1)-ec, \qquad b(d+1)-ec', \qquad b'(d+1)-e'c,$$
$$e-2t(bc-ac'), \qquad e'-2t(b'c'-a'c), \qquad aa'-bb'-d,$$

aux points de la section unité de G sont linéairement indépendantes. Or notant par une majuscule la différentielle de la minuscule correspondant, ce sont [39]

$$\mathrm{D}, \qquad 2\mathrm{B}, \qquad 2\mathrm{B}', \qquad \mathrm{E}+2t\mathrm{C}', \qquad \mathrm{E}'+2t\mathrm{C}, \qquad \mathrm{A}+\mathrm{A}'-\mathrm{D},$$

qui sont bien linéairement indépendantes modulo tout $(t-\lambda)$, $\lambda \in k$. [40]

Lemme 5.8. — *Pour $s \in \mathrm{S}$, $s \neq s_0$, la fibre G_s est connexe et semi-simple.*

[41] En effet, comme $s \neq s_0$, $\mathfrak{g}(s)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de $\mathrm{PGL}_{2,\kappa(s)}$ et, d'autre part, on a $\mathrm{G}_s = (\mathrm{G}_1)_s$; or il est connu que le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie de PGL_2 sur un corps de caractéristique 0 est PGL_2 lui-même, qui est connexe et semi-simple.

Lemme 5.9. — *La fibre G_{s_0} est résoluble et a deux composantes connexes qui sont de la forme suivante :*

$$\mathrm{G}^0_{s_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ c & c' & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \textit{et} \quad \mathrm{G}^-_{s_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b^{-1} & 0 & 0 \\ c & c' & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

30 En effet, on a $e = e' = 0$, car $t = 0$ en s_0. On résout alors immédiatement les équations (1), (1′), ... (5) et (D).

Lemme 5.10. — $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *est une section de* G *sur* S, *telle que* $w(s_0) \in \mathrm{G}^-_{s_0}$.

Démontrons maintenant 5.5. [42] Notons G^0 la réunion des composantes neutres des fibres de G (c'est-à-dire le complémentaire de $\mathrm{G}^-_{s_0}$) ; comme G est lisse sur S le long de la section unité (5.7), alors G^0 est un sous-groupe ouvert de G lisse sur S, d'après $\mathrm{VI_B}$, 3.10. Comme, par translation, G est évidemment lisse aux points de $w(\mathrm{S})$, G est lisse sur S.

5.11. Considérons le morphisme $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}^0$ défini par $z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1/z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est un monomorphisme qui définit un tore T de G^0. Je dis qu'on a

$$\mathrm{T} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{T}).$$

[39] N.D.E. : On a corrigé $\mathrm{A}+\mathrm{A}'+\mathrm{B}$ en $\mathrm{A}+\mathrm{A}'-\mathrm{D}$.

[40] N.D.E. : On a corrigé « $(t-a)$, $a \in \mathrm{A}$ » en « $(t-\lambda)$, $\lambda \in k$ ».

[41] N.D.E. : On a modifié légèrement la phrase qui suit.

[42] N.D.E. : On a modifié la phrase qui suit, en ajoutant la référence à $\mathrm{VI_B}$, 3.10.

Il suffit en effet de vérifier la première égalité. Comme il s'agit de sous-groupes lisses sur S de G, il suffit de vérifier qu'ils ont les mêmes points géométriques. Pour les fibres aux points $s \neq s_0$, cela résulte de ce que $\mathrm{PGL}_{2,\,\kappa(s)}$ est réductif et de ce que T_s en est un tore maximal pour des raisons de dimensions (cf. 1.11). Sur la fibre de s_0, le calcul se fait immédiatement. Il en résulte en particulier que T est un tore maximal de G et de G^0.

5.12. La section w de G définie en 5.9 normalise T. Il en résulte aussitôt (cf. 2.4) **31**
que le groupe de Weyl de G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$, et en particulier fini sur S.

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}.$$

En revanche $\mathrm{W}_{\mathrm{G}^0}(\mathrm{T})$ *n'est pas fini* sur S : il lui « manque un point » au-dessus de s_0.

5.13. L'immersion ouverte $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ n'est pas une immersion fermée (car G^0 est dense dans G) ; elle est cependant un morphisme *affine* (et donc G^0 est *affine* sur S). En effet, comme $\mathrm{G}^0_{s_0}$ est fermé dans G_{s_0}, qui est fermé dans G, le complémentaire U de $\mathrm{G}^0_{s_0}$ dans G est ouvert ; G^0 et U forment un recouvrement ouvert de G et il suffit de vérifier que les immersions $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}^0$ et $\mathrm{G}^0 \cap \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ sont affines ; pour la première c'est trivial, pour la seconde, on remarque que $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}^0$ est défini dans U par l'équation $t \neq 0$.

On a donc construit un S-groupe affine lisse, à fibres connexes, G^0, possédant un tore maximal T qui est son propre centralisateur et dont le groupe de Weyl $\mathrm{W}_{\mathrm{G}^0}(\mathrm{T})$ *n'est pas fini* (comparer au théorème 2.5).

6. Existence locale de tores maximaux. Le groupe de Weyl

Au cours de la démonstration de 2.5, nous avons utilisé un résultat de Exp. XI sur l'existence locale pour la topologie étale de tores maximaux ; la démonstration de Exp. XI utilise un résultat fin de représentabilité (XI 4.1). Dans le cas particulier qui nous occupe, on peut en donner une autre démonstration, basée sur les idées de Exp. XII n°7, et de nature beaucoup plus élémentaire.

Proposition 6.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes lisse, affine et à* **32**
fibres connexes sur S*,* s_0 *un point de* S *tel que les tores maximaux de la fibre géométrique* $\mathrm{G}_{\overline{s}_0}$ *soient leur propre centralisateur. Il existe un morphisme étale* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *couvrant* s_0*, et un tore maximal déployé* T *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*.*

D'abord, on peut supposer S affine. [(43)] Comme G est de présentation finie sur S, on peut supposer S noethérien, puis local, puis hensélien à corps résiduel séparablement clos (cf. EGA IV, 8.12, § 8.8, et § 18.8). Posons donc S = Spec(A), A hensélien à corps résiduel $k = \kappa(s_0)$ séparablement clos. Choisissons un tore maximal T_0 de G_0 ($= \mathrm{G}_k$) (il en existe, par exemple parce que le schéma des tores maximaux de G_0 est lisse sur

[(43)] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui précède ainsi que la référence à EGA IV dans ce qui suit.

k, Exp. XII, 7.1 c)) ; comme k est séparablement clos, T_0 est déployé (cf. X 1.4) et est donc donné par un monomorphisme de groupes

$$f_0 : \mathbb{G}_{m,\,k}^r \longrightarrow \mathrm{G}_0\,.$$

Soit m un entier > 1 premier à la caractéristique de k. D'après Exp. VIII 6.7, pour tout $h > 0$, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}({}_{m^h}\mathrm{T}_0)$ est représentable par un sous-schéma fermé de G_0. Comme les ${}_{m^h}\mathrm{T}_0$ sont schématiquement denses dans T_0 (cf. Exp. IX 4.10) et que G_0 est noethérien, il existe un h tel que

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}({}_{m^h}\mathrm{T}_0) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{T}_0) = \mathrm{T}_0.$$

Posons $n = m^h$; comme n est inversible sur S, ${}_n\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$; f_0 définit donc un monomorphisme de groupes

$$u_0 : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_k^r \longrightarrow \mathrm{G}_0$$

tel que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u_0) = \mathrm{T}_0$. Or le S-foncteur

$$\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}^r, \mathrm{G})$$

est représentable par un S-schéma de type fini (comme sous-schéma fermé de ${}_n\mathrm{G} =$
33 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}, \mathrm{G}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{G} \xrightarrow{n} \mathrm{G})$). Mais P est lisse sur S (Exp. IX 3.6), donc $u_0 \in \mathrm{P}(k)$ se relève en une section $u \in \mathrm{P}(\mathrm{S})$ (lemme de Hensel, Exp. XI 1.11) :

$$u : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}^r \longrightarrow \mathrm{G}\,.$$

Considérons $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u)$; c'est un sous-schéma en groupe fermé de G, d'après Exp. VIII 6.5 e), et l'on a $\mathrm{H}_0 = \mathrm{T}_0$ par hypothèse. [44] De plus, H est lisse sur S : en effet, soient $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ un schéma affine au-dessus de S, $u' : {}_n\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}'} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ le morphisme déduit de u par changement de base, $\mathrm{S}'_{\mathrm{J}} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{J})$, où J est un idéal de carré nul, et soit $x \in \mathrm{H}(\mathrm{S}'_{\mathrm{J}})$; comme G est lisse, x se relève en un élément g de $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$, alors $v = \mathrm{int}(g)(u')$ vérifie $v_{\mathrm{J}} = u'_{\mathrm{J}}$ et donc, d'après IX 3.2, il existe un élément g' de $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ tel que $g'_{\mathrm{J}} = e$ et $\mathrm{int}(g')(v) = u'$, alors $h = g'g$ appartient à $\mathrm{H}(\mathrm{S}')$ et vérifie $h_{\mathrm{J}} = x$.

Soit alors H^0 la composante neutre de H ; c'est un sous-schéma en groupes de G, lisse et à fibres connexes, dont la fibre spéciale est un tore. Par Exp. X 8.1, c'est un tore, nécessairement déployé (Exp. X 4.6). Posons $\mathrm{H}^0 = \mathrm{T}$ et soit $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ qui est un sous-groupe fermé de G (Exp. VIII 6.5 e)), lisse (Exp. XI 2.4). Considérons C^0 (on a en fait $\mathrm{C}^0 = \mathrm{C}$, mais nous n'avons pas besoin de le savoir) ; alors $\mathrm{C}^0 \supset \mathrm{T}$ et ce sont deux groupes lisses et à fibres connexes. Ils coïncident en s_0, donc au voisinage. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer $\mathrm{C}^0 = \mathrm{T}$, donc *a fortiori* T maximal.

Remarque 6.2. — La démonstration montre en particulier que le rang réductif de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est constant au voisinage de $s = s_0$.

Proposition 6.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*,* Q *un sous-tore de* G*.*

[44] N.D.E. : On a ajouté la référence VIII 6.5 e) dans ce qui précède, et l'on a détaillé la phrase qui suit.

(i) $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *sont représentables par des sous-schémas en groupes fermés, lisses (et donc de présentation finie) sur* S.

(ii) $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est un sous-schéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$. *Le quotient* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})/\,\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est représentable par un sous-schéma en groupes* **34**
ouvert de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{Q})$, *c'est donc un* S*-schéma en groupes* quasi-fini, étale et séparé sur S.

(iii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *posons*

$$w(s) = \left|\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}(\overline{s})}(\mathrm{Q}(\overline{s}))/\,\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}(\overline{s})}(\mathrm{Q}(\overline{s}))\right|.$$

Alors $s \mapsto w(s)$ *est semi-continue inférieurement, et est constante au voisinage de* s *si et seulement si* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est* fini *sur* S *au voisinage de* s.

Par Exp. XI 6.11, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ sont représentables par des sous-schéma fermés et de présentation finie de G. Ceux-ci sont lisses par Exp. XI 2.4 et 2.4 bis, ce qui prouve (i). Les assertions (ii) et (iii) se démontrent alors comme dans Exp. XI 5.9 et 5.10, dont la démonstration n'utilise en fait que (i) et non les théorèmes fins Exp. XI 4.1 et 4.2.

Bibliographie

[Bible] C. Chevalley (avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard), *Classification des groupes de Lie algébriques*, 1956-58.

[Ch05] C. Chevalley, *Classification des groupes algébriques semi-simples* (avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard), Collected Works, vol. 3, Springer, 2005.

[Tô55] C. Chevalley, *Sur certains groupes simples*, Tôhoku Math. J. (2) **7** (1955), 14-66.

[TO70] J. Tate & F. Oort, *Group schemes of prime order*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. (4), t. **3** (1970), 1-21.

EXPOSÉ XX

GROUPES RÉDUCTIFS DE RANG SEMI-SIMPLE 1
par M. Demazure

1. Systèmes élémentaires. Les groupes U_α et $\mathrm{U}_{-\alpha}$ 35

Rappel 1.1. — Soit $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos, et soient G un S-groupe réductif de rang semi-simple 1, T un tore maximal (nécessairement déployé) de G. On a alors
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$
où α et $-\alpha$ sont les racines de G par rapport à T. De plus, il existe deux monomorphismes de groupes
$$p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}$$
tels que
$$t\,p_\alpha(x)\,t^{-1} = p(\alpha(t)x) \qquad \text{et} \qquad t\,p_{-\alpha}(x)\,t^{-1} = p_{-\alpha}(\alpha(t)^{-1}x),$$
pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tous $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, et que le morphisme
$$\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G},$$
défini par $(y,t,x) \mapsto p_{-\alpha}(y)\,t\,p_\alpha(x)$, soit radiciel et dominant (*Bible*, § 13.4, cor. 2 au th. 3).

Comme l'application tangente à l'élément neutre est bijective, ce morphisme est également séparable, donc birationnel ; par le « Main Theorem » de Zariski (EGA III_1, 4.4.9), c'est donc une immersion ouverte.

Lemme 1.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes,* T *un tore de* G*,* Q *un sous-tore de* T*,* α *un caractère de* T *induisant sur* Q *un caractère non trivial sur chaque fibre. Soit* $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ (*resp.* $p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$) *un morphisme de groupes normalisé par* T *avec le multiplicateur* α (*resp.* $-\alpha$). *Supposons que le morphisme* 36
$$u : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}$$
défini ensemblistement par $u(y,t,x) = p_{-\alpha}(y)\,t\,p_\alpha(x)$ *soit une immersion ouverte. Soient enfin* q *un entier* $\geqslant 0$ *et*
$$p : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

un morphisme de groupes tel que pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* $t \in \mathrm{Q}(\mathrm{S}')$, $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$ *on ait*

$$\mathrm{int}(t)^q\big(p(x)\big) = p(\alpha(t)x).$$

Il existe alors un unique $\nu \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$ *tel que* $p(x) = p_\alpha(\nu\, x^q)$.

Soient en effet Ω l'image de u et $\mathrm{U} = p^{-1}(\Omega)$. C'est un ouvert de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$, contenant la section nulle. Pour toute section t de Q, l'automorphisme de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ défini par la multiplication par $\alpha(t)$ laisse fixe globalement U. On a $\mathrm{U} = \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$; en effet, il suffit de le vérifier lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos k ; alors $\alpha : \mathrm{Q}(k) \to k^*$ est surjectif, ce qui prouve aussitôt $\mathrm{U}(k) \supset k^*$, donc $\mathrm{U} = \mathbb{G}_{a,\,k}$. Il existe donc trois morphismes

$$a : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}, \qquad b : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{T}, \qquad c : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}},$$

tels que

$$p(x) = p_{-\alpha}(a(x))\; b(x)\; p_\alpha(c(x)).$$

La condition sur p se traduit par

$$\begin{aligned} a(\alpha(t)x) &= \alpha(t)^{-q}\, a(x), \\ b(\alpha(t)x) &= b(x), \\ c(\alpha(t)x) &= \alpha(t)^q\, c(x). \end{aligned}$$

37 Pour la même raison que précédemment, on a donc pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$,

$$a(zx) = z^{-q}a(x), \qquad b(zx) = b(x), \qquad c(zx) = z^q c(x),$$

donc

$$z^q a(z) = a(1), \qquad b(z) = b(1), \qquad c(z) = z^q c(1).$$

Comme $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ est schématiquement dense dans $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$, on a aussitôt pour tout $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$:

$$\begin{aligned} x^q a(x) &= a(1) = a(0) = 0, && \text{d'où } a = 0, \\ c(x) &= x^q c(1) = \nu\, x^q, && \text{pour un } \nu \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}), \\ b(x) &= b(1) = b(0) = e, && \text{d'où } b = e, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Définition 1.3. — Soit S un schéma. On appelle S-*système élémentaire* un triplet $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ où

(i) G est un S-groupe réductif de rang semi-simple 1 (Exp. XIX 2.7),
(ii) T est un tore maximal de G,
(iii) α est une racine de G par rapport à T (Exp. XIX 3.2).

On a donc une décomposition en somme directe (Exp. XIX 3.5) [(1)]

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

$\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ étant localement libres de rang un.

[(1)] N.D.E. : de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules.

1.4. Si (G, T, α) est un S-système élémentaire, alors $(G_{S'}, T_{S'}, \alpha_{S'})$ est un S′-système élémentaire pour tout $S' \to S$. Si (G, T, α) est un S-système élémentaire, alors $(G, T, -\alpha)$ en est aussi un.

Si S est un schéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine 38
de G par rapport à T, alors (Exp. XIX 3.9), (Z_α, T, α) est un S-système élémentaire.

Soit (G, T, α) un S-système élémentaire. Le module inversible $\mathfrak{g}^\alpha$ est muni canoniquement d'une structure de T-module. On a donc également une structure de T-module sur le fibré vectoriel $W(\mathfrak{g}^\alpha)$. D'autre part, les automorphismes intérieurs de T définissent sur G une structure de groupe à groupe d'opérateurs T.

Théorème 1.5. — *Soit* (G, T, α) *un* S-*système élémentaire.*

(i) *Il existe un unique morphisme de groupes à groupe d'opérateurs* T

$$\exp : W(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow G$$

qui induise sur les algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^\alpha \to \mathfrak{g}$. [2]

Autrement dit, exp *est l'unique morphisme vérifiant les conditions suivantes : pour tout* $S' \to S$ *et tout* $t \in T(S')$, $X, X' \in W(\mathfrak{g}^\alpha)(S')$, *on a*

$$\begin{aligned} \exp(X + X') &= \exp(X)\exp(X'), \\ \operatorname{int}(t)\big(\exp(X)\big) &= \exp(\alpha(t)X), \\ \underline{\mathrm{Lie}}(\exp)(X) &= X. \end{aligned}$$

(ii) *Si on définit de même* (*dans le* S-*système élémentaire* $(G, T, -\alpha)$)

$$\exp : W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \longrightarrow G,$$

alors le morphisme

$$W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \underset{S}{\times} T \underset{S}{\times} W(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow G$$

défini ensemblistement par $(Y, t, X) \mapsto \exp(Y) \cdot t \cdot \exp(X)$ *est une immersion ouverte.*

Supposons avoir démontré l'existence des morphismes exp demandés et démontrons les autres assertions du théorème. Prouvons d'abord (ii). Comme les deux membres sont de présentation finie et plats sur S, il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un 39
corps algébriquement clos (SGA 1, I 5.7 et VIII 5.5). Soit alors $S = \operatorname{Spec} k$. Soient $x \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$, $Y \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$. Il suffit de prouver que le morphisme

$$\mathbb{G}_{a,k} \underset{k}{\times} T \underset{k}{\times} \mathbb{G}_{a,k} \longrightarrow G \qquad (y, t, x) \mapsto \exp(yY)\, t\, \exp(xX)$$

est une immersion ouverte. Or d'après 1.1 et 1.2, il existe a, $b \in k$ tels que

$$\exp(yY) = p_{-\alpha}(ay) \qquad \text{et} \qquad \exp(xX) = p_\alpha(bx).$$

Comme exp : $W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \to G$ induit un monomorphisme sur les algèbres de Lie, on a $a \neq 0$; de même $b \neq 0$ et on est ramené à 1.1.

[2] N.D.E. : On verra plus loin (Cor. 5.9) que exp est un isomorphisme de $W(\mathfrak{g}^\alpha)$ sur un sous-groupe *fermé* de G.

L'unicité du morphisme exp peut se démontrer localement sur S ; on se ramène alors au cas où $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ sont libres, et on n'a plus qu'à appliquer 1.2 (avec $\mathrm{Q} = \mathrm{T}$ et $q = 1$).

Reste donc à prouver l'existence du morphisme exp demandé. Remarquons d'abord qu'en vertu de la théorie de la descente fidèlement plate et de l'assertion d'unicité précédente, il suffit de démontrer cette existence *localement* sur S pour la topologie (fpqc). Par les raisonnements habituels utilisant la présentation finie, on se ramène au cas où S est noethérien, puis au cas où il est noethérien local. En vertu de la remarque précédente, on peut donc se contenter de prouver l'existence du morphisme exp cherché lorsque $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, A local noethérien complet à corps résiduel k algébriquement clos. Soit alors $p_0 : \mathbb{G}_{a,\,k} \to \mathrm{G}_k$ un monomorphisme de k-groupes normalisé par T_k avec le multiplicateur $\alpha_0 = \alpha \otimes_{\mathrm{A}} k$ (il en existe par 1.1). On sait (1.1 et 1.2) que le morphisme $\mathrm{T}_k \cdot_{\alpha_0} \mathbb{G}_{a,\,k} \to \mathrm{G}_k$ correspondant est une immersion, donc en particulier un monomorphisme. Admettons provisoirement les deux lemmes suivants :

40 ***Lemme 1.6***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe de présentation finie,* T *un* S*-tore,* α *un caractère non trivial sur chaque fibre de* T*,* s_0 *un point de* S*. Soit*

$$f : \mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

un morphisme de S*-groupes tel que* f_{s_0} *soit un monomorphisme et que la restriction de* f *à* T *soit un monomorphisme. Il existe un voisinage ouvert* U *de* s_0 *tel* $f|_{\mathrm{U}}$ *soit un monomorphisme.*

Lemme 1.7. — *Soient* A *un anneau local complet noethérien à corps résiduel k algébriquement clos,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *un* A*-système élémentaire,* $p_0 : \mathbb{G}_{a,\,k} \to \mathrm{G}_k$ *un morphisme de k-groupes normalisé par* T_k *avec le multiplicateur* $\alpha \otimes_{\mathrm{A}} k$*. Il existe un morphisme de groupes* $p : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{A}} \to \mathrm{G}$ *normalisé par* T *avec le multiplicateur* α*.*

Soit p le morphisme dont l'existence est affirmée par 1.7. Soit $f : \mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ le morphisme correspondant. Il vérifie les hypothèses de 1.6, donc est un monomorphisme ; en particulier p est un monomorphisme. On conclut alors par Exp. XIX 4.9.

Démonstration de 1.6. Désignons par $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ la section unité. Comme f est non ramifié en $\varepsilon(s_0)$, il l'est en $\varepsilon(s)$ pour tous les s d'un voisinage ouvert U de s_0 ; $f|_{\mathrm{U}}$ est donc non ramifié (Exp. X 3.5), donc son noyau $\mathrm{Ker}(f)_{\mathrm{U}}$ non ramifié sur U. Pour prouver que $f|_{\mathrm{U}}$ est un monomorphisme, il suffit donc [3] de prouver que $\mathrm{Ker}(f)_{\mathrm{U}}$ est radiciel sur U, ce qui est une question ensembliste. On est donc ramené à prouver :

41 ***Lemme 1.8***. — *Soit k un corps algébriquement clos ; soit* N *un sous-groupe invariant de* $\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,k}$ *(*α *caractère non trivial du tore* T*), étale sur k et tel que* $\mathrm{N} \cap \mathrm{T} = \{e\}$*. Alors* $\mathrm{N} = \{e\}$*.*

On a $\mathrm{int}(t')(t, x) = (t, \alpha(t')x)$. Si (t, x) est un point de N, avec $x \neq 0$, alors (t, zx) est aussi un point de N pour $z \in k^*$ et (t, x) n'est pas isolé, donc N n'est pas quasi-fini. On a donc ensemblistement $\mathrm{N} \subset \mathrm{T}$ et on a terminé.

[3] N.D.E. : selon EGA IV_4, 17.9.1.

Démonstration de 1.7. Soient $\mathfrak{m}$ le radical de A et $S_n = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}^{n+1})$, $n \geqslant 0$. Montrons d'abord, par récurrence sur n, que p_0 peut se prolonger pour chaque n en un morphisme de S_n-groupes

$$p_n : \mathbb{G}_{a,\,S_n} \longrightarrow G_{S_n}$$

normalisé par T_{S_n} avec le multiplicateur α_n, les p_n vérifiant de plus la condition $p_{n+1} \times_{S_{n+1}} S_n = p_n$.

Soit $H = T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,S}$. Le morphisme $H_{S_n} \to G_{S_n}$ défini par p_n est noté f_n. Admettons le lemme suivant :

Lemme 1.9. — *Si* (G, T, α) *est un k-système élémentaire, k algébriquement clos, et si* $p : \mathbb{G}_{a,\,k} \to G$ *est un monomorphisme normalisé par* T *avec le multiplicateur α, on a*

$$H^2(T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k}, \mathfrak{g}) = 0.$$

(*On fait opérer* $T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k}$ *sur* $\mathfrak{g}$ *par l'intermédiaire du morphisme* $T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k} \to G$ *défini par p, et de la représentation adjointe de* G).

Alors, en vertu de Exp. III 2.8, f_n se prolongera en un morphisme de S_{n+1}-groupes

$$f'_{n+1} : H_{S_{n+1}} \longrightarrow G_{S_{n+1}} .$$

Or f'_{n+1} et l'immersion canonique de $T_{S_{n+1}}$ dans $G_{S_{n+1}}$ ont même restriction à T_{S_n}. **42**
Par Exp. III 2.5, il existe un élément $g \in G(S_{n+1})$ tel que $g \times_{S_{n+1}} S_n = e$ et tel que $f_{n+1} = \mathrm{int}(g) \circ f'_{n+1}$ se restreigne à T_{n+1} suivant l'immersion canonique de T_{n+1}. Soit p_{n+1} la restriction de f_{n+1} à $\mathbb{G}_{a,\,S_{n+1}}$. C'est un morphisme normalisé par $T_{S_{n+1}}$ avec le multiplicateur $\alpha_{S_{n+1}}$, qui prolonge p_n.

On a donc construit un système cohérent (f_n) et il nous faut maintenant l'algébriser. Or on a :

Lemme 1.10. — *Soient* A *un anneau local noethérien complet,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_n = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}^{n+1})$, T *un* S*-tore,* α *un caractère non nul de* T, X *un* S*-schéma affine sur lequel* T *opère. Faisons opérer* T *sur* $\mathbb{G}_{a,\,S}$ *par l'intermédiaire de* α*. Soit q un entier* $\geqslant 0$*, et soit* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *un système cohérent de morphismes*

$$f_n : \mathbb{G}^q_{a,\,S_n} \longrightarrow X_{S_n}$$

d'objets à opérateurs T_{S_n}*. Il existe un unique morphisme d'objets à opérateurs* T

$$f : \mathbb{G}^q_{a,\,S} \longrightarrow X$$

qui induise les f_n (comparer à Exp. IX 7.1).

Corollaire 1.11. — *Si* X *est un groupe à groupe d'opérateurs* T *et si les* f_n *sont des morphismes de groupes,* f *en est aussi un.*

Il suffit d'appliquer l'assertion d'unicité du lemme aux deux morphismes $\mathbb{G}^{2q}_{a,\,S} \to X$ déduits de f à la manière habituelle.

Démonstration de 1.10. Supposons T déployé, ce qui d'ailleurs est le cas dans l'application de 1.10 à la démonstration de 1.5. On sait (Exp. I 4.7.3, remarque), que **43**
$X \mapsto \mathscr{A}(X)$ réalise une équivalence de la catégorie des S-schémas affines munis d'une

opération de T et de la catégorie opposée à celle des S-algèbres graduées de type $\mathrm{M} = \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$.

On a donc des graduations

$$\mathrm{B} = \mathscr{A}(\mathrm{X}) = \coprod_{m\in\mathrm{M}} \mathrm{B}_m \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C} = \mathscr{A}(\mathbb{G}^q_{a,\,\mathrm{S}}) = \coprod_{m\in\mathrm{M}} \mathrm{C}_m\,.$$

On voit aussitôt que chaque C_m est *libre de type fini* sur A. (En effet, on a $\mathrm{C}_m = 0$ si m n'est pas multiple de α, et si $m = d\,\alpha$, C_m est isomorphe au A-module des polynômes homogènes de degré d, à q variables). Posons

$$\widehat{\mathrm{B}}_m = \varprojlim_n \mathrm{B}_m \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})\,,$$
$$\widehat{\mathrm{C}}_m = \varprojlim_n \mathrm{C}_m \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})\,,$$
$$\widehat{\mathrm{B}} = \textstyle\coprod_{m\in\mathrm{M}} \widehat{\mathrm{B}}_m, \qquad \widehat{\mathrm{C}} = \textstyle\coprod_{m\in\mathrm{M}} \widehat{\mathrm{C}}_m.$$

On a alors des morphismes canoniques d'algèbres graduées de type M

$$g_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \longrightarrow \widehat{\mathrm{B}} \qquad \text{et} \qquad g_{\mathrm{C}} : \mathrm{C} \longrightarrow \widehat{\mathrm{C}}.$$

Il résulte de la remarque faite plus haut que g_{C} est un *isomorphisme.* Se donner un système cohérent (f_n) comme dans l'énoncé est équivalent à se donner un morphisme de A-algèbres graduées

$$\widehat{\mathrm{F}} : \widehat{\mathrm{B}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{C}}.$$

Trouver un morphisme f comme dans l'énoncé est équivalent à trouver un morphisme de A-algèbres graduées $\mathrm{F} : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "\mathrm{F}"] \arrow[d, "g_{\mathrm{B}}"'] & \mathrm{C} \arrow[d, "g_{\mathrm{C}}"] \\ \widehat{\mathrm{B}} \arrow[r, "\widehat{\mathrm{F}}"] & \widehat{\mathrm{C}}. \end{tikzcd}$$

Comme g_{C} est un isomorphisme, l'existence et l'unicité de F sont immédiates. Ceci prouve 1.10.

44 Pour achever la démonstration de 1.5, il ne reste donc qu'à prouver 1.9.

1.12. *Preuve de* 1.9. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Comme expliqué en 1.9, considérons $\mathfrak{g}$ comme un $(\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,k})$-module. Il est clair que $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha}$ est un sous-module de $\mathfrak{g}$, le quotient étant isomorphe à $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ comme k-espace vectoriel et même comme T-module. Il est clair que $\mathbb{G}_{a,\,k}$ opère trivialement sur ce quotient qui est de dimension 1 (car tout morphisme de groupes de $\mathbb{G}_{a,\,k}$ dans $\mathbb{G}_{m,\,k}$ est trivial). De même $\mathfrak{g}^{\alpha}$ est un sous-module de $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha}$, le quotient étant isomorphe à $\mathfrak{t}$ comme T-module, $\mathbb{G}_{a,\,k}$ y opérant trivialement. En résumé :

Lemme 1.13. — *Sous les conditions de* 1.9, $\mathfrak{g}$ *admet une suite de composition comme* $(\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,k})$*-module dont les quotients successifs sont*

$$\mathfrak{g}^{-\alpha}, \quad \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{g}^{\alpha},$$

considérés comme $(\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,k})$*-modules grâce à la projection* $\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,k} \to \mathrm{T}$.

On est donc ramené à calculer la cohomologie de $T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k}$ opérant par l'intermédiaire de la projection $T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k} \to T$ et du caractère β de T (ici $\beta = 0$, α ou $-\alpha$) sur $W(k)$. [4] Notons $k[x_1, \ldots, x_n]$ l'algèbre des polynômes sur k en n variables et $k_q[x_1, \ldots, x_n]$ le sous-espace des polynômes homogènes de degré q.

Lemme 1.14. — *Avec les notations précédentes, on a* $H^n(T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k}, k) = H^n(C^*_{\alpha,\,\beta})$, *où le complexe* $C^*_{\alpha,\,\beta}$ *est défini par* 45

$$C^n_{\alpha,\,\beta} = \begin{cases} k_q[x_1, \ldots, x_n] & si\ \beta = q\alpha,\ avec\ q \in \mathbb{N}^*; \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

et

$$\delta f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = f(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n).$$

En effet, le foncteur $M \mapsto H^0(T, M)$ est exact sur la catégorie des T-modules (et les $H^q(T, -)$ nuls), par Exp. I 5.3.2. Il en résulte, comme dans le cas habituel de la cohomologie des groupes, que $H^n(T \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a\,k}, k)$ peut se calculer comme le n-ème groupe de cohomologie du complexe des cochaines de $\mathbb{G}_{a,\,k}$ dans k, invariantes par T, c'est-à-dire vérifiant

$$f\big(\alpha(t)x_1, \ldots, \alpha(t)x_n\big) = \beta(t) f(x_1, \ldots, x_n).$$

Cela donne bien le complexe annoncé.

Pour démontrer 1.9, il suffit donc de prouver que $H^2(C^*_{\alpha,\,\beta}) = 0$, pour $\beta = 0$, α, $-\alpha$, ce qui se fait immédiatement.

Remarque 1.15. — On peut calculer explicitement les groupes $H^n(C^*_{\alpha,\,\beta})$ pour $\beta = q\alpha$ (voir M. Lazard, Lois de groupes et analyseurs, Annales E.N.S., 1955). En particulier, on trouve $H^n(C^*_{\alpha,\,q\alpha}) = 0$ pour $n > q$.

Notations 1.16. — L'image de l'immersion canonique

$$W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \underset{S}{\times} T \underset{S}{\times} W(\mathfrak{g}^{\alpha}) \longrightarrow G$$

sera notée Ω. C'est un ouvert de G contenant la section unité. L'image de

$$W(\mathfrak{g}^{-\alpha}), \quad \text{resp. } W(\mathfrak{g}^{\alpha}), \quad \text{resp. } W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \underset{S}{\times} T, \quad \text{resp. } T \underset{S}{\times} W(\mathfrak{g}^{\alpha})$$

sera notée [5]

$$U_{-\alpha}, \quad \text{resp.} \quad U_\alpha, \quad \text{resp.} \quad U_{-\alpha} \cdot T, \quad \text{resp.} \quad T \cdot U_\alpha.$$

Alors U_α (resp. $U_{-\alpha}$) est un sous-groupe de G canoniquement muni d'une structure de fibré vectoriel et on a

$$\mathrm{int}(t)(x) = x^{\alpha(t)} \quad (\text{resp.} \quad x^{-\alpha(t)}),$$

---

[4] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[5] N.D.E. : On a remplacé $P_{-\alpha}$ et P_α par $U_{-\alpha}$ et U_α.

pour tous $S' \to S$, $t \in T(S')$, $x \in U_\alpha(S')$ (resp. $x \in U_{-\alpha}(S')$).

46 On a des isomorphismes canoniques

$$T \cdot U_\alpha \simeq T \cdot_\alpha U_\alpha \qquad \text{et} \qquad T \cdot U_{-\alpha} \simeq T \cdot_{-\alpha} U_{-\alpha}.$$

L'ouvert Ω est stable sous $\operatorname{int}(T)$: on a

$$\operatorname{int}(t')(y \cdot t \cdot x) = y^{-\alpha(t')} \cdot t \cdot x^{\alpha(t')}.$$

Corollaire 1.17. — *On a* $\mathscr{L}ie(U_\alpha/S) = \mathfrak{g}^\alpha$ *et* $\mathscr{L}ie(U_{-\alpha}/S) = \mathfrak{g}^{-\alpha}$. *Les isomorphismes*

$$W(\mathfrak{g}^\alpha) \xrightarrow[\sim]{\exp} U_\alpha \qquad \textit{et} \qquad W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \xrightarrow[\sim]{\exp} U_{-\alpha}$$

sont ceux de Exp. XIX 4.2.

Corollaire 1.18. — *L'ouvert* Ω *est* relativement schématiquement dense *dans* G (cf. XVIII, § 1).

Clair par Exp. XVIII, 1.3.

Corollaire 1.19. — *Le centre de* G *est* $\underline{\mathrm{Centr}}(G) = \operatorname{Ker}(\alpha)$. *C'est donc un sous-groupe fermé de* G*, de type multiplicatif et de type fini.*

La seconde assertion résulte de la première par Exp. IX 2.7. Prouvons donc celle-ci. L'automorphisme intérieur défini par une section de $\operatorname{Ker}(\alpha)$ opère trivialement sur Ω (dernière formule de 1.16), donc sur G par 1.18. Réciproquement, si $g \in G(S)$ centralise G, alors il centralise T et U_α, donc est une section de T (Exp. XIX 2.8), qui annule α ; comme ceci se fait aussi après tout changement de base, on a bien $\underline{\mathrm{Centr}}(G) = \operatorname{Ker}(\alpha)$.

Corollaire 1.20. — *Pour qu'il existe un monomorphisme* $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,S} \to G$ *normalisé par* T *avec le multiplicateur* α*, il faut et il suffit que le* $\mathscr{O}_S$*-module* $\mathfrak{g}^\alpha$ *soit libre. Plus précisément, on a une bijection donnée par*

$$X_\alpha \mapsto \big(x \mapsto \exp(xX_\alpha)\big) \qquad \textit{et} \qquad p_\alpha \mapsto \mathscr{L}ie(p_\alpha)$$

entre $\Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ *et l'ensemble des monomorphismes* p_α *comme ci-dessus (qui est aussi l'ensemble des isomorphismes de schémas en groupes vectoriels* $\mathbb{G}_{a,S} \xrightarrow{\sim} U_\alpha$*).* [6]

47 ***Corollaire 1.21***. — *Les sous-groupes* U_α *et* $U_{-\alpha}$ *de* G *ne commutent sur aucune fibre.*

En effet, si $(U_\alpha)_s$ et $(U_{-\alpha})_s$ commutent, Ω_s est un sous-groupe de G_s, donc $\Omega_s = G_s$ [7] et G_s est résoluble, ce qui contredit l'hypothèse que G_s est réductif de rang semi-simple 1.

---

[6] N.D.E. : En effet, d'une part, $\mathscr{L}ie(\mathbb{G}_{a,S}) = \mathscr{O}_S$ et $\mathscr{L}ie(p_\alpha)$ est un élément de $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_S, \mathfrak{g}^\alpha) = \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)$.

[7] N.D.E. : d'après 1.18

2. Structure des systèmes élémentaires

Théorème 2.1. — *Soient* S *un schéma,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *un* S*-système élémentaire. Il existe un morphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*

$$\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathfrak{g}^{-\alpha} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{S}}, \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longmapsto \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle,$$

et un morphisme de S*-groupes*

$$\alpha^* : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{T}$$

tels que pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*, et tous* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^{\alpha} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$*,* $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^{-\alpha} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$ *on ait l'équivalence :*

$$\exp(\mathrm{X}) \cdot \exp(\mathrm{Y}) \in \Omega(\mathrm{S}') \Longleftrightarrow 1 + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}'),$$

et sous ces conditions on a la formule :

$$\boxed{(\mathrm{F}) \qquad \exp(\mathrm{X}) \cdot \exp(\mathrm{Y}) = \exp\left(\frac{\mathrm{Y}}{1 + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle}\right) \alpha^*(1 + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle) \exp\left(\frac{\mathrm{X}}{1 + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle}\right).}$$

De plus les morphismes $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle$ *et* α^* *sont uniquement déterminés, le premier est un isomorphisme, donc met les modules* $\mathfrak{g}^{\alpha}$ *et* $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ *en dualité, et on a* $\alpha \circ \alpha^* = 2$ (élévation au carré dans $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$).

Vu les assertions d'unicité du théorème, il suffit de faire la démonstration localement sur S. On peut donc supposer $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ libres sur S. Prenons alors $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}$, $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}$ et posons $p_{\alpha}(x) = \exp(x\mathrm{X})$, $p_{-\alpha}(y) = \exp(y\mathrm{Y})$, pour x, $y \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Par 1.5 et 1.21, il suffit de prouver : 48

Proposition 2.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe,* T *un tore de* G*,* α *un caractère de* T *non trivial sur chaque fibre,* $p_{\alpha} : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *(resp.* $p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$*) un monomorphisme de groupes normalisé par* T *avec le multiplicateur* α *(resp.* $-\alpha$*). On suppose que :*

(i) *Le morphisme* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *défini par* $(y, t, x) \mapsto p_{-\alpha}(y)\, t\, p_{\alpha}(x)$ *est une immersion ouverte. On note* Ω *son image.*

(ii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*,* $(p_{\alpha})_s(\mathbb{G}_{a,\,\kappa(s)})$ *et* $(p_{-\alpha})_s(\mathbb{G}_{a,\,\kappa(s)})$ *ne commutent pas.*

Alors, il existe $a \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$ *et* $\alpha^* \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$*, uniquement déterminés avec les propriétés suivantes : pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* x*,* $y \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$*, on a*

$$p_{\alpha}(x)\, p_{-\alpha}(y) \in \Omega(\mathrm{S}') \Longleftrightarrow 1 + axy \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}'),$$

et, sous cette condition, on a la formule

$$p_{\alpha}(x)\, p_{-\alpha}(y) = p_{-\alpha}\left(\frac{y}{1 + axy}\right)\ \alpha^*(1 + axy)\ p_{\alpha}\left(\frac{x}{1 + axy}\right).$$

De plus, a *est inversible (i.e.* $a \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$*) et* $\alpha \circ \alpha^* = 2$*.*

Démonstration :

A) Considérons le morphisme

$$\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

49 défini par $(x, y) \mapsto p_\alpha(x)\, p_{-\alpha}(y)$. Soit U l'image inverse de Ω par ce morphisme. C'est un ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$, contenant $0 \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ et $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} 0$. Il existe donc des morphismes de S-schémas, uniquement déterminés,

$$\mathrm{A} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{C} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}},$$
$$\mathrm{B} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{T}$$

vérifiant la relation ensembliste :

$$p_\alpha(u)\, p_{-\alpha}(v) = p_{-\alpha}(\mathrm{A}(u, v))\, \mathrm{B}(u, v)\, p_\alpha(\mathrm{C}(u, v)).$$

On a immédiatement les relations

$$\mathrm{A}(0, v) = v, \quad \mathrm{A}(u, 0) = 0, \qquad \mathrm{C}(u, 0) = u, \quad \mathrm{C}(0, v) = 0,$$
$$\mathrm{B}(u, 0) = \mathrm{B}(0, v) = e.$$

Soit S′ un S-schéma séparé et soit $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ un point de T. Comme $\Omega_{\mathrm{S}'}$ est stable par $\mathrm{int}(t)$, alors, d'après la dernière formule de 1.16, $\mathrm{U}_{\mathrm{S}'}$ est stable sous l'automorphisme $(x, y) \mapsto (\alpha(t)x, \alpha(t)^{-1}y)$ de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}'}$, et on a les relations :

$$\mathrm{A}\big(\alpha(t)u, \alpha(t)^{-1}v\big) = \alpha(t)^{-1}\mathrm{A}(u, v), \qquad \mathrm{C}\big(\alpha(t)u, \alpha(t)^{-1}v\big) = \alpha(t)\mathrm{C}(u, v),$$
$$\mathrm{B}\big(\alpha(t)u, \alpha(t)^{-1}v\big) = \mathrm{B}(u, v).$$

Comme α est fidèlement plat, on en déduit que pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, $\mathrm{U}_{\mathrm{S}'}$ est stable par la transformation $(x, y) \mapsto (zx, z^{-1}y)$ et que l'on a

$$\mathrm{A}(zu, z^{-1}v) = z^{-1}\mathrm{A}(u, v), \qquad \mathrm{C}(zu, z^{-1}v) = z\mathrm{C}(u, v),$$
$$\mathrm{B}(zu, z^{-1}v) = \mathrm{B}(u, v).$$

Supposons d'abord que v soit inversible ; faisant $z = v$, on en déduit que si (u, v) est une section de U, alors $(uv, 1)$ en est aussi une et que l'on a

$$\mathrm{A}(uv, 1) = v^{-1}\mathrm{A}(u, v), \qquad \mathrm{B}(uv, 1) = \mathrm{B}(u, v).$$

Soit alors V l'ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ défini par [(8)]

$$(u, v) \in \mathrm{V}(\mathrm{S}') \iff (u, v),\ (uv, 1) \text{ et } (1, uv) \text{ appartiennent à } \mathrm{U}(\mathrm{S}').$$

50 Comme U est un ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ contenant $0 \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ et $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} 0$, alors V est un voisinage de la section nulle de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ et on vient de voir que les morphismes

$$(u, v) \mapsto \mathrm{A}(u, v) \quad \text{et} \quad (u, v) \mapsto v\mathrm{A}(uv, 1)$$
$$\text{resp.} \quad (u, v) \mapsto \mathrm{B}(u, v) \quad \text{et} \quad (u, v) \mapsto \mathrm{B}(uv, 1)$$

coïncident dans $\mathrm{V} \cap (\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$. Comme $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ est schématiquement dense dans $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$, ces morphismes coïncident donc dans V.

[(8)] N.D.E. : On a rajouté la condition : « $(1, uv) \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$ ».

On sait que $A(0,1) = 1$, il en résulte qu'il existe un ouvert W_1 de $\mathbb{G}_{a,S}$ contenant la section nulle, tel que pour toute section x de W_1, $A(x,1)$ soit inversible ; posant $A(x,1)^{-1} = F(x)$, on obtient que si $(u,v) \in V(S')$ [9] et $uv \in W_1(S')$, $S' \to S$, alors $A(u,v) = vA(uv,1) = vF(uv)^{-1}$. Raisonnant de même pour C, on obtient qu'il existe un ouvert W_2 de $\mathbb{G}_{a,S}$ contenant la section nulle, et un élément E [10] de $\mathscr{O}(W_2)^{\times}$, tels que $C(u,v) = uC(1,uv) = uE(uv)^{-1}$, si $(u,v) \in V(S')$ et $uv \in W_2(S')$. Par conséquent, posant $W = W_1 \cap W_2$, on obtient :

Il existe un ouvert W de $\mathbb{G}_{a,S}$ contenant la section nulle, et des S-morphismes

$$\begin{array}{lcl} F : W \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S} & , & F(0) = 1, \\ H : W \longrightarrow T & , & H(0) = e, \\ E : W \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S} & , & G(0) = 1, \end{array}$$

tels que si $(u,v) \in V(S')$ et $uv \in W(S')$, $S' \to S$, on ait

$$(+) \qquad p_{\alpha}(u)\, p_{-\alpha}(v) = p_{-\alpha}(vF(uv)^{-1})\, H(uv)\, p_{\alpha}(uE(uv)^{-1}).$$

B) Utilisons maintenant l'associativité de G pour écrire

$$p_{\alpha}(u)\, p_{-\alpha}(v)\, p_{-\alpha}(w) = p_{\alpha}(u)\, p_{-\alpha}(v+w).$$

Il existe un ouvert L de $\mathbb{G}^3_{a,S}$, contenant la section unité tel que $(u,v,w) \in L(S')$ soit équivalent à

$$\begin{array}{ccc} (u,v) \in V(S'), & (uE(uv)^{-1}, w) \in V(S'), & (u, v+w) \in V(S'), \\ uv \in W(S'), & uwE(uv)^{-1} \in W(S'), & u(v+w) \in W(S'). \end{array}$$

Utilisant alors la formule (+), on écrit aussitôt pour $(u,v,w) \in L(S')$ les relations :

(1) $E(uv+uw) = E(uwE(uv)^{-1})E(uv)$, 51

(2) $H(uv+uw) = H(uwE(uv)^{-1})H(uv)$,

(3) $(v+w)F(uv+uw)^{-1} = \alpha(H(uv)^{-1})\, w\, F(uwE(uv)^{-1})^{-1} + vF(uv)^{-1}$.

Il est immédiat sur la définition de L que $(1,0,0) \in L(S)$. Considérons donc

$$L \bigcap \left(1 \underset{S}{\times} \mathbb{G}_{a,S} \underset{S}{\times} \mathbb{G}_{a,S}\right) = 1 \underset{S}{\times} M\,;$$

M est un ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,S}$, contenant la section $(0,0)$, et pour $(v,w) \in M(S')$, on a $v, wE(v)^{-1}, v+w \in W(S')$ et

(1′) $E(v+w) = E(wE(v)^{-1})\, E(v)$,

(2′) $H(v+w) = H(wE(v)^{-1})\, H(v)$,

(3′) $(v+w)\, F(v+w)^{-1} = \alpha(H(v))^{-1}\, wF(wE(v)^{-1})^{-1} + vF(v)^{-1}$.

---

[9] N.D.E. : ici et dans la suite, on a remplacé $U(S')$ par $V(S')$.

[10] N.D.E. : On a noté E l'élément noté G dans l'original, puisque G désigne déjà le S-groupe considéré.

Considérons enfin le morphisme de M dans $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ défini ensemblistement par $(v,w)\mapsto(v,w\mathrm{E}(v)^{-1})$. (11) Il conserve la section $(0,0)$ et induit un isomorphisme de M sur un ouvert N de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ contenant la section nulle (l'isomorphisme inverse étant donné par $(x,y)\mapsto(x,y\mathrm{E}(x))$) (12). On a donc prouvé l'assertion suivante :

Il existe un ouvert N de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$, contenant la section nulle, tel que si $(x,y)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}')$, alors x,y et $x+y\mathrm{E}(x)$ (13) appartiennent à $\mathrm{W}(\mathrm{S}')$ et :

$(1'')$ $\mathrm{E}(x+y\mathrm{E}(x))=\mathrm{E}(x)\mathrm{E}(y)$,

$(2'')$ $\mathrm{H}(x+y\mathrm{E}(x))=\mathrm{H}(x)\mathrm{H}(y)$,

$(3'')$ $(x+y\mathrm{E}(x))\,\mathrm{F}(x+y\mathrm{E}(x))^{-1}=x\mathrm{F}(x)^{-1}+r(\mathrm{H}(x))^{-1}\,y\mathrm{E}(x)\mathrm{F}(y)^{-1}$.

C) En raisonnant de même avec l'associativité à gauche, on démontre l'assertion suivante : (14)

Il existe un ouvert N′ de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$, contenant la section nulle, tel que si $(x,y)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}')$, alors x,y et $x+y\mathrm{F}(x)$ (15) appartiennent à $\mathrm{W}(\mathrm{S}')$, et

52 $(4'')$ $\mathrm{F}(x+y\mathrm{F}(x))=\mathrm{F}(x)\,\mathrm{F}(y)$,

$(5'')$ $\mathrm{H}(x+y\mathrm{F}(x))=\mathrm{H}(x)\,\mathrm{H}(y)$,

$(6'')$ $(x+y\mathrm{F}(x))\,\mathrm{E}(x+y\mathrm{F}(x))^{-1}=x\mathrm{E}(x)^{-1}+\alpha(\mathrm{H}(x))^{-1}\,y\mathrm{F}(x)\mathrm{E}(y)^{-1}$.

Nous sommes donc amenés à résoudre « l'équation fonctionnelle » $(1'')$.

Lemme 2.3. — *Soient* S *un schéma,* W *un ouvert de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ *contenant la section unité,* $\mathrm{F}:\mathrm{W}\to\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ *un* S*-morphisme. On suppose que* $\mathrm{F}(0)=1$ *et qu'il existe un ouvert* N *de* $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ *contenant la section nulle tel que pour* $(x,y)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}')$, x,y *et* $x+y\mathrm{F}(x)$ (15) *appartiennent à* $\mathrm{W}(\mathrm{S}')$ *et que l'on ait :*

$$\mathrm{F}(x+y\mathrm{F}(x))=\mathrm{F}(x)\,\mathrm{F}(y). \tag{$\dagger$}$$

(i) *Si* S *est le spectre d'un corps k, il existe $a\in k$ tel que* $\mathrm{F}(x)=1+ax$.

(ii) *Si* $a=\mathrm{F}'(0)\in\Gamma(\mathrm{S},\mathscr{O}_\mathrm{S})$ *est* inversible*, alors* $\mathrm{F}(x)=1+ax$.

En vertu des hypothèses, nous pouvons dériver l'équation donnée pour $x=0$ (resp. pour $y=0$) et nous trouvons que

$$\mathrm{F}'(y)\,(1+y\mathrm{F}'(0))=\mathrm{F}'(0)\,\mathrm{F}(y)\qquad\text{pour } (0,y)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}'), \tag{$*$}$$

resp.

$$\mathrm{F}'(x)\,\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(x)\,\mathrm{F}'(0)\qquad\text{pour } (x,0)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}').$$

Comme F prend ses valeurs dans $\mathbb{G}_m$, la seconde relation nous donne

$$\mathrm{F}'(x)=\mathrm{F}'(0)\qquad\text{pour } (x,0)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}'); \tag{$*'$}$$

(11) N.D.E. : On a corrigé ce qui suit.

(12) N.D.E. : c.-à-d., on a fait le « changement de variables » $x=v$, $y=w\mathrm{E}(v)^{-1}$, soit $v=x$, $w=y\mathrm{E}(x)$.

(13) N.D.E. : On a corrigé $y\mathrm{E}(x)$ en $x+y\mathrm{E}(x)$.

(14) N.D.E. : c.-à-d., on écrit les égalités résultant de $p_\alpha(t)\,p_\alpha(u)\,p_{-\alpha}(v)=p_\alpha(t+u)\,p_{-\alpha}(v)$ et l'on fait $v=1$ et $x=u$, $t=y\mathrm{F}(u)$ (i.e. $y=t\mathrm{F}(u)^{-1}$).

(15) N.D.E. : On a corrigé $y\mathrm{F}(x)$ en $x+y\mathrm{F}(x)$.

d'où, par la première

$$\mathrm{F}'(0)(1+y\mathrm{F}'(0)) = \mathrm{F}'(0)\mathrm{F}(y) \qquad \text{pour } (y,0),\ (0,y) \in \mathrm{N}(\mathrm{S}').$$

Si $a = \mathrm{F}'(0)$ est inversible, cela nous donne 53

$$\mathrm{F}(y) = 1 + ay,$$

pour y section d'un ouvert de W contenant la section unité, donc schématiquement dense dans W, ce qui prouve (ii). Cela prouve aussi (i) lorsque $\mathrm{F}'(0) \neq 0$.

Si $\mathrm{F}'(0) = 0$, alors, d'après $(*')$, $\mathrm{F}'(x) = 0$ lorsque x est « voisin de 0 », donc $\mathrm{F}' = 0$ par densité schématique. Si k est de caractéristique 0, F est une fraction rationnelle à dérivée nulle, donc constante et égale à $\mathrm{F}(0) = 1$.

Si k est de caractéristique p, et si F n'est pas constante, [16] il existe un entier $n > 0$ et une fraction rationnelle $\mathrm{F}_1 \in k(\mathrm{X})$ tels que $\mathrm{F}_1'(\mathrm{X}) \neq 0$ et

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{F}_1(\mathrm{X}^{p^n}) = \mathrm{F}_1(\mathrm{X})^{p^n}.$$

Reportant dans l'équation fonctionnelle, on trouve

$$(\dagger_1) \qquad \mathrm{F}_1(x + y\mathrm{F}_1(x)^{p^n}) = \mathrm{F}_1(x)\mathrm{F}_1(y).$$

Dérivant pour $x = 0$, on trouve

$$(*_1) \qquad \mathrm{F}_1'(y) = \mathrm{F}_1'(0)\mathrm{F}_1(y),$$

et dérivant $(\dagger_1)$ pour $y = 0$, on obtient

$$(*_1') \qquad \mathrm{F}_1'(x)\mathrm{F}_1(x)^{p^n} = \mathrm{F}_1(x)\mathrm{F}_1'(0).$$

Comme, par hypothèse, $\mathrm{F}_1'(\mathrm{X})$ est un élément inversible de $k(\mathrm{X})$, on déduit de ces deux égalités que

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{X})^{p^n} = 1,$$

donc F_1 est une constante, contredisant l'hypothèse de départ. Ceci montre que F est constante, et égale à $1 = \mathrm{F}(0)$.

D) *Supposons que* S *soit le spectre d'un corps.* Si $\mathrm{F}'(0) = 0$, alors $\mathrm{F} = 1$. La formule $(5'')$ nous donne alors $\mathrm{H}(x+y) = \mathrm{H}(x)\mathrm{H}(y)$, ce qui montre que H se prolonge en un morphisme de groupes $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$ (Exp. XVIII 2.3), qui est nécessairement constant de valeur e. D'autre part, d'après le lemme 2.3, on aura aussi $\mathrm{E}(x) = 1 + bx$, pour un certain $b \in k$. Mais alors $(6'')$ donne, pour $(x,y) \in \mathrm{N}(\mathrm{S}')$,

$$(x+y)\mathrm{E}(x+y)^{-1} = x\mathrm{E}(x) + y\mathrm{E}(y)^{-1},$$

donc, [17] d'après Exp. XVIII 2.3 à nouveau, $x \mapsto x\mathrm{E}(x)^{-1}$ se prolonge en un morphisme de k-groupes $\mathbb{G}_{a,\,k} \to \mathbb{G}_{a,\,k}$, donc $x/(1+bx) = cx$ pour un certain $c \in k$, d'où $b = 0$ (et $c = 1$).

Ceci montre que $\mathrm{F}, \mathrm{H}, \mathrm{E}$ sont constants de valeur $(1, e, 1)$, dans un voisinage de la section unité, donc partout, ce qui par $(+)$ montre que U_α et $\mathrm{U}_{-\alpha}$ commutent, contrairement à l'hypothèse (ii).

---

[16] N.D.E. : On a corrigé ce qui suit.

[17] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit. On peut aussi voir par un calcul direct que l'égalité précédente entraîne $0 = xyb(2 + (x+y)b)$, d'où $0 = b(2 + (x+y)b)$, et finalement $b = 0$.

54 *Si* S *est maintenant quelconque*, on a donc prouvé que $\mathrm{F}'(0)$ n'est nul sur aucune fibre, donc est inversible. Il en est évidemment de même pour $\mathrm{E}'(0)$, ce qui par le lemme 2.3, montre qu'il existe $a, b \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$ tels que

$$(\diamondsuit_1) \qquad \mathrm{F}(x) = 1 + ax, \qquad \mathrm{E}(x) = 1 + bx, \qquad \text{pour} \quad x \in \mathrm{W}(\mathrm{S}').$$

E) Le reste est maintenant facile. Reportant les résultats précédents dans $(3'')$, on trouve

$$y\,\alpha(\mathrm{H}(x))\,(1+ay) = y\Big(1 + ax + ay(1+bx)\Big)(1+bx).$$

Cette formule est valable pour toute section (x, y) de N. Mais comme $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ est schématiquement dense dans $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$, on en déduit

$$(1+ay)\,\alpha(\mathrm{H}(x)) = \Big(1 + ax + ay(1+bx)\Big)(1+bx).$$

Faisant $y = 0$, cela donne $\alpha(\mathrm{H}(x)) = (1+ax)(1+bx)$. Reportant ceci dans l'égalité précédente, (18) on trouve

$$a^2xy = abxy.$$

Comme $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ est schématiquement dense dans $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$, on en déduit $a^2 = ab$, d'où, comme a est inversible,

$$(\diamondsuit_2) \qquad a = b \qquad \text{et} \qquad \alpha(\mathrm{H}(x)) = (1+ax)^2.$$

Comme a est inversible, $x \mapsto 1 + ax$ est un automorphisme de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$; on peut donc trouver un ouvert W' de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ contenant la section 1 et un morphisme

$$\mathrm{P} : \mathrm{W}' \longrightarrow \mathrm{T}$$

tel que $\mathrm{P}(1 + ax) = \mathrm{H}(x)$. (19)

Reportant dans la relation $(2')$, on trouve aussitôt pour $(x, y) \in \mathrm{N}(\mathrm{S}')$,

$$\mathrm{P}(1 + ax + ay) = \mathrm{P}\left(\frac{1 + ax + ay}{1 + ax}\right)\mathrm{P}(1 + ax),$$

ce qui prouve qu'il existe un voisinage ouvert de 1 dans $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ tel que l'on ait pour x et y dans ce voisinage $\mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y) = \mathrm{P}(xy)$. En vertu de Exp. XVIII 2.3, il existe un morphisme de groupes

$$(\diamondsuit_3) \qquad \alpha^* : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{T}$$

55 qui prolonge P. Comme $\alpha(\mathrm{H}(x)) = (1 + ax)^2$ au voisinage de la section 0, on a $\alpha(\alpha^*(z)) = z^2$ au voisinage de la section 1, donc

$$(\diamondsuit_4) \qquad \alpha \circ \alpha^* = 2.$$

---

(18) N.D.E. : et tenant compte de ce que $1 + bx$ est inversible.
(19) N.D.E. : c.-à-d., on a fait le changement de variables $x' = 1 + ax$, soit $x = (x' - 1)/a$.

F) [20] Rassemblant les résultats (+) et ($\diamondsuit_1$—$\diamondsuit_4$), on voit qu'il existe $a \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$ et $\alpha^* \in \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$ tels que $\alpha \circ \alpha^* = 2$ et que, si $(u, v) \in \mathrm{V}(\mathrm{S}')$ et $uv \in \mathrm{W}(\mathrm{S}')$, alors $1 + auv$ est inversible et

$$p_\alpha(u)\, p_{-\alpha}(v) = p_{-\alpha}\left(\frac{v}{1 + auv}\right)\ \alpha^*(1 + auv)\ p_\alpha\left(\frac{u}{1 + auv}\right).$$

Considérons l'ouvert V' de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ défini par « $1 + auv$ inversible », i.e. $\mathrm{V}' = (\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}})_f$ où $f(u, v) = 1 + auv$. Les deux membres de la formule précédente définissent des morphismes de V' dans G qui coïncident dans un voisinage de la section 0, donc coïncident dans V'. La formule précédente est donc valable pour toute section (u, v) de V'. Il en résulte en particulier que $\mathrm{V}' \subset \mathrm{U}$, où U est l'ouvert introduit au début de **A)**.

Prouvons que $\mathrm{U} = \mathrm{V}'$. Revenant aux notations de **A)**, on a un morphisme

$$\mathrm{A} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$$

qui, sur V', est défini par $\mathrm{A}(u, v) = v(1 + auv)^{-1}$. Pour montrer que $\mathrm{U} = \mathrm{V}'$, ce qui est une question ensembliste, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps k, donc à l'assertion évidente suivante : l'ensemble de définition de l'application rationnelle $\mathbb{G}^2_{a,\,k} \to \mathbb{G}_{a,\,k}$ définie par la fraction rationnelle $\dfrac{\mathrm{Y}}{1 + a\mathrm{XY}}$ est l'ouvert défini par la fonction $1 + a\mathrm{XY}$.

G) On a donc démontré l'existence de a et de α^*, ainsi que les deux propriétés supplémentaires annoncées. Reste à prouver l'unicité. Soient donc a' et $\alpha^{*\prime}$, vérifiant **56**
aussi les conditions exigées. Si $u, v \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')^2$, on a aussitôt :

$$1 + auv \text{ inversible } \Rightarrow 1 + a'uv \text{ inversible et } \frac{v}{1 + auv} = \frac{v}{1 + a'uv}\,;$$

on a donc pour toute section u de $\mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$

$$1 + au \quad \text{inversible} \implies 1 + au = 1 + a'u,$$

ce qui prouve aussitôt $a = a'$.

Avec les mêmes notations, on a alors

$$1 + au \quad \text{inversible} \implies \alpha^*(1 + au) = \alpha^{*\prime}(1 + au),$$

donc également $\alpha^* = \alpha^{*\prime}$.

Corollaire 2.4. — *Soient* $\exp(\mathrm{Y})\, t \exp(\mathrm{X})$ *et* $\exp(\mathrm{Y}')\, t' \exp(\mathrm{X}')$ *deux éléments de* $\Omega(\mathrm{S}')$. *Alors leur produit est dans* $\Omega(\mathrm{S}')$ *si et seulement si* $u = 1 + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}' \rangle$ *est inversible, et on a alors*

$$(\mathrm{F}') \quad \exp(\mathrm{Y})\, t \exp(\mathrm{X}) \cdot \exp(\mathrm{Y}')\, t' \exp(\mathrm{X}') =$$
$$\exp(\mathrm{Y} + u^{-1}\alpha(t)^{-1}\mathrm{Y}') \cdot tt'\alpha^*(u) \cdot \exp(u^{-1}\alpha(t')^{-1}\mathrm{X} + \mathrm{X}').$$

[20] N.D.E. : On a légèrement modifié ce qui suit, car un ouvert V a déjà été introduit en **A)**.

Remarque 2.5. — On peut aussi écrire la formule (F) du théorème 2.1 sans faire intervenir les morphismes exp. En effet, transportant par ces morphismes la dualité $\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes \mathfrak{g}^{-\alpha} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, on obtient un accouplement canonique de fibrés vectoriels :

$$\mathrm{U}_{\alpha} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{U}_{-\alpha} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}},$$

que nous noterons encore $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$. On a donc

$$\langle \exp \mathrm{X}, \exp \mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle.$$

Si $x \in \mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{S}')$, $y \in \mathrm{U}_{-\alpha}(\mathrm{S}')$ et si $1 + \langle x,y\rangle \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, on a

$$\text{(F)} \qquad x \cdot y = y^{(1+\langle x,y\rangle)^{-1}} \cdot \alpha^*(1 + \langle x,y\rangle) \cdot x^{(1+\langle x,y\rangle)^{-1}}.$$

Corollaire 2.6. — *L'accouplement*

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$$

57 *définit un accouplement de fibrés principaux sous* $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}.$$

Cet accouplement sera noté $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto \langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle$*, ou plus simplement* $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{XY}$.

Pour toute section $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}$*, il existe donc une unique section* X^{-1} *de* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}$ *telle que* $\mathrm{XX}^{-1} = 1$*. On a* $(z\mathrm{X})^{-1} = z^{-1}\mathrm{X}^{-1}$*. Le morphisme*

$$s : \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times} \longrightarrow \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}$$

ainsi défini est donc un isomorphisme de schémas, compatible avec l'isomorphisme $s : z \mapsto z^{-1}$ *sur les groupes d'opérateurs.*

Définition 2.6.1. — On dira que X et $s(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{-1}$ sont *appariés*.

Appliquons le corollaire 2.4 à $\mathrm{Y} = 0 = \mathrm{X}'$ et $\mathrm{Y}' = a\mathrm{X}^{-1}$, $a \in \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S})$. Alors $u = 1+a$ et $u^{-1}\mathrm{Y}' = u^{-1}(u-1)\mathrm{X}^{-1} = (1-u^{-1})\mathrm{X}^{-1}$, d'où :

Corollaire 2.7. — *Soient* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}$ *et* $u \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})^{\times}$*. On a*

$$\alpha^*(u) = \exp\big((u^{-1}-1)\mathrm{X}^{-1}\big) \exp(\mathrm{X}) \exp\big((u-1)\mathrm{X}^{-1}\big) \exp(-u^{-1}\mathrm{X}).$$

Définition 2.8. — Le morphisme α^* est appelé la *coracine associée à la racine* α.

Remarque 2.9. — Si $(\mathrm{G},\mathrm{T},\alpha)$ est un S-système élémentaire, $(\mathrm{G},\mathrm{T},-\alpha)$ en est aussi un. On a donc par le théorème 2.1 une dualité entre $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{\alpha}$, et une coracine $(-\alpha)^*$. Prenant l'inverse de la formule (F), on prouve aussitôt

$$\langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{Y},\mathrm{X}\rangle, \qquad (-\alpha)^* = -\alpha^*.$$

Passons maintenant à l'algèbre de Lie de G. La racine α et la coracine α^* définissent les formes linéaires

$$\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\overline{\alpha}^*} \mathfrak{t} \xrightarrow{\overline{\alpha}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}}.$$

58 On notera $\mathrm{H}_{\alpha} = \overline{\alpha}^*(1)$. On appelle $\overline{\alpha}$ la *racine infinitésimale* associée à α, et H_{α} la *coracine infinitésimale* correspondante.

Lemme 2.10. — *Soient* $S' \to S$ *et* $X, X' \in W(\mathfrak{g}^\alpha)(S')$*,* $H \in W(\mathfrak{t})(S')$*,* $Y, Y' \in W(\mathfrak{g}^{-\alpha})(S')$*,* $t \in T(S')$*. On a*

$$\mathrm{Ad}(t)H = H, \qquad \mathrm{Ad}(t)X = \alpha(t)X, \qquad \mathrm{Ad}(t)Y = \alpha(t)^{-1}Y. \tag{1}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Ad}(\exp(X))H = H - \overline{\alpha}(H)X, \qquad \mathrm{Ad}(\exp(X))X' = X', \\ \mathrm{Ad}(\exp(X))Y = Y + \langle X, Y\rangle H_\alpha - \langle X, Y\rangle X. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Ad}(\exp(Y))H = H + \overline{\alpha}(H)Y, \qquad \mathrm{Ad}(\exp(Y))Y' = Y', \\ \mathrm{Ad}(\exp(Y))X = X + \langle X, Y\rangle H_{-\alpha} - \langle X, Y\rangle Y. \end{cases} \tag{2'}$$

$$[H, X] = \overline{\alpha}(H)X, \qquad [H, Y] = -\overline{\alpha}(H)Y, \qquad [X, Y] = \langle X, Y\rangle H_\alpha. \tag{3}$$

$$H_{-\alpha} = -H_\alpha. \tag{4}$$

$$\overline{\alpha}(H_\alpha) = 2. \tag{5}$$

Le démonstration de ces différentes formules est soit triviale, soit conséquence immédiate de la formule (F) de 2.1.

Corollaire 2.11. — *Supposons* H_α *non nul sur toute fibre* (ce qui est en particulier le cas si 2 est inversible sur S, par (5)). *Alors* $X_\alpha \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ *et* $X_{-\alpha} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$ *sont appariés si et seulement si* $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$.

2.12. Soit (G, T, α) un S-système élémentaire. Nous savons (1.19) que le centre de G est $\underline{\mathrm{Centr}}(G) = \mathrm{Ker}(\alpha)$, groupe de type multiplicatif et de type fini. Si Q est un sous-groupe de type multiplicatif de $\underline{\mathrm{Centr}}(G)$, le quotient G/Q est affine sur S (Exp. IX 2.5), lisse sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9.2) à fibres connexes et réductives de rang semi-simple 1 (Exp. XIX 1.8). **59**

Posons $G' = G/Q$, c'est un S-groupe réductif de rang semi-simple 1 ; $T' = T/Q$ en est un tore maximal. L'ouvert $U_{-\alpha} \cdot T \cdot U_\alpha$ de G est stable par Q et on voit aussitôt que le quotient est isomorphe à $U_{-\alpha} \times_S (T/Q) \times_S U_\alpha$. Si on note α' le caractère de T' induit par α, il en résulte que le morphisme dérivé du morphisme canonique $G \to G'$ induit des isomorphismes

$$\mathfrak{g}^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{\alpha'} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g}^{-\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{-\alpha'}.$$

En particulier, α' est une racine de G' par rapport à T'. Donc, notant α/Q le caractère $T/Q \to \mathbb{G}_{m,S}$ induit par α, on a :

Lemme 2.13. — *Si* Q *est un sous-groupe de type multiplicatif de* $\mathrm{Ker}(\alpha)$*, alors*

$$(G/Q, T/Q, \alpha/Q)$$

est un système élémentaire.

Lemme 2.14. — *Sous les conditions précédentes, les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha}) \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\mathrm{can}"', "\wr"] & \mathrm{G} \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \arrow[l, "\exp"'] \arrow[d, "\mathrm{can}"', "\wr"] \\
\mathrm{W}(\mathfrak{g}'^{\alpha'}) \arrow[r, "\exp"] & \mathrm{G}' & \mathrm{W}(\mathfrak{g}'^{-\alpha'}) \arrow[l, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes \mathfrak{g}^{-\alpha} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{can}"', "\wr"] & \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathfrak{g}'^{\alpha'} \otimes \mathfrak{g}'^{-\alpha'} \arrow[r, "\sim"] & \mathscr{O}_{\mathrm{S}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{T} \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "\mathrm{can}"] & \\
\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[ur, "\alpha^*"] \arrow[dr, "\alpha'^*"'] & & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \\
 & \mathrm{T}' \arrow[ur, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd}.$$

3. Le groupe de Weyl

60 ***Notations 3.0***. — [21] Si $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ est un S-système élémentaire, on notera

$$\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}), \qquad \mathrm{W} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T},$$

(cf. Exp. XIX 6.3) ; N est un sous-groupe fermé de G, lisse sur S. On notera $\mathrm{N}^{\times} = \mathrm{N} - \mathrm{T}$ le sous-schéma ouvert de N induit sur le complémentaire de T. [22] Notons R le tore maximal (unique) de $\mathrm{Ker}(\alpha)$, et T′ l'image de $\alpha^* : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$, qui est un sous-tore de dimension 1 de T.

Le morphisme

$$\mathrm{T}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{T}$$

induit par le produit dans T est surjectif (donc fidèlement plat) ; en effet, on est ramené à le vérifier sur les fibres géométriques, et cela résulte aussitôt de la formule $\alpha \circ \alpha^* = 2$.

Théorème 3.1. — *Avec les notations précédentes :*

(i) W *est isomorphe au groupe constant* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$.

---

[21] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.0, pour des références ultérieures.

[22] N.D.E. : On a remplacé Q par la notation $\mathrm{N}^{\times}$, plus suggestive.

(ii) $N^{\times}$ *est un fibré principal homogène localement trivial sous* T*, à gauche par la loi* $(t, q) \mapsto tq$ *(resp. à droite par la loi* $(q, t) \mapsto qt$*).*

(iii) *On a la formule*

$$\mathrm{int}(w)t = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1})$$

pour $w \in N^{\times}(S')$*,* $t \in T(S')$*,* $S' \to S$*. Dans la décomposition* $T_{S'} = T'_{S'} \cdot R_{S'}$*,* $\mathrm{int}(w)$ *induit l'identité sur* $R_{S'}$ *et la symétrie sur* $T'_{S'}$*. On a les relations* **61**

$$\alpha \circ \mathrm{int}(w) = \alpha^{-1}, \qquad \mathrm{int}(w) \circ \alpha^* = (\alpha^*)^{-1}.$$

(iv) *Pour* $X \in W(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(S')$*,* $S' \to S$*, posons*

$$w_{\alpha}(X) = \exp(X)\exp(-X^{-1})\exp(X).$$

Alors $w_{\alpha}(X) \in N^{\times}(S')$ *et le morphisme* $w_{\alpha} : W(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times} \to N^{\times}$ *ainsi défini vérifie*

$$w_{\alpha}(zX) = \alpha^*(z)\, w_{\alpha}(X) = w_{\alpha}(X)\, \alpha^*(z)^{-1},$$

pour $z \in \mathbb{G}_m(S')$*,* $X \in W(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(S')$*,* $S' \to S$*.*

(v) *On a la relation*

$$w_{\alpha}(X)\, w_{\alpha}(Y) = w_{\alpha}(-XY^{-1}).$$

En particulier,

$$w_{\alpha}(X)^2 = \alpha^*(-1) \in {}_2T(S) \cap \underline{\mathrm{Centr}}(G)(S),$$
$$w_{\alpha}(X)^{-1} = w_{\alpha}(-X) = \alpha^*(-1)\, w_{\alpha}(X).$$

(vi) *Si on définit de même pour* $Y \in W(\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}(S')$*,*

$$w_{-\alpha}(Y) = \exp(Y)\exp(-Y^{-1})\exp(Y),$$

on a (en plus des formules analogues aux précédentes)

$$w_{-\alpha}(X^{-1}) = w_{\alpha}(X)^{-1} = w_{\alpha}(-X),$$
$$w_{\alpha}(X)\, w_{-\alpha}(Y) = \alpha^*(XY).$$

Démonstration. (i) a déjà été vu en Exp. XIX 2.4 ; il en résulte aussitôt que $N^{\times}$ est **62**
bien un fibré principal homogène sous T pour les lois définies dans (ii) ; le fait qu'il soit localement trivial [(23)] résulte notamment de (iv).

Démontrons (iii) ; si $w \in N^{\times}(S)$, il est clair que $\alpha \circ \mathrm{int}(w)$ est une racine de G par rapport à T, qui est donc localement égale à α où $-\alpha$; comme sur chaque fibre c'est $-\alpha$ (*Bible*, 12-05, démonstration du cor. à la prop. 1), on a $\alpha \circ \mathrm{int}(w) = -\alpha$. Par transport de structure, on en déduit

$$-\alpha^* = \mathrm{int}(w)^{-1} \circ \alpha^* = \mathrm{int}(w) \circ \alpha^*,$$

car $\mathrm{int}(w)^2 = \mathrm{int}(w^2)$ et w^2 est une section de T. Donc $\mathrm{int}(w)$ induit la symétrie sur T′ ; comme R est central, $\mathrm{int}(w)$ induit l'identité sur R. La formule de (iii) définit un morphisme $T \to T$ qui vérifie les mêmes propriétés, donc coïncide avec $\mathrm{int}(w)$.

(23) N.D.E. : pour la topologie de Zariski.

Démontrons (iv). On a successivement

$$\begin{aligned} w_\alpha(\mathrm{X})\, t\, w_\alpha(\mathrm{X})^{-1} &= \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(\mathrm{X})\, t\, \exp(-\mathrm{X})\exp(\mathrm{X}^{-1})\exp(-\mathrm{X}) \\ &= \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(\mathrm{X}-\alpha(t)\mathrm{X})\exp(\alpha(t)^{-1}\mathrm{X}^{-1})\exp(-\alpha(t)\mathrm{X})\, t. \end{aligned}$$

Par application de la formule (F), on a

$$\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp\big((1-\alpha(t))\mathrm{X}\big) = \exp\big((\alpha(t)^{-1}-1)\mathrm{X}\big)\,\alpha^*(\alpha(t)^{-1})\,\exp\big(-\alpha(t)^{-1}\mathrm{X}^{-1}\big).$$

Reportant dans la relation précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(w_\alpha(\mathrm{X}))\, t &= \exp\big(\alpha(t)^{-1}\mathrm{X}\big)\,\alpha^*(\alpha(t)^{-1})\,\exp(-\alpha(t)\mathrm{X})\, t \\ &= \exp(a\mathrm{X})\,\alpha^*(\alpha(t)^{-1})\, t, \end{aligned}$$

où

$$a = \alpha(t)^{-1} - (\alpha\circ\alpha^*)(\alpha(t)^{-1})\,\alpha(t),$$

mais $\alpha\circ\alpha^* = 2$, ce qui donne aussitôt $a = 0$ et $w_\alpha(\mathrm{X}) \in \mathrm{N}^\times(\mathrm{S}')$.

Prouvons maintenant la seconde assertion de (iv). On a [(24)]

$$\begin{aligned} \alpha^*(z)\, w_\alpha(\mathrm{X}) &= \exp(z^2\mathrm{X})\exp(-z^{-2}\mathrm{X}^{-1})\exp(z^2\mathrm{X})\,\alpha^*(z) \\ &= \exp(z\mathrm{X})\exp\big((z^2-z)\mathrm{X}\big)\exp(-z^{-2}\mathrm{X}^{-1})\exp(z^2\mathrm{X})\,\alpha^*(z) \\ &= \exp(z\mathrm{X})\exp(-z^{-1}\mathrm{X}^{-1})\,\alpha^*(z)^{-1}\exp((z^3-z^2)\mathrm{X})\exp(z^2\mathrm{X})\,\alpha^*(z) \\ &= \exp(z\mathrm{X})\exp(-z^{-1}\mathrm{X}^{-1})\exp(z\mathrm{X}) = w_\alpha(z\mathrm{X}). \end{aligned}$$

63 Prouvons (v). En vertu du résultat précédent, la première formule de (v) résulte aussitôt de la seconde ; prouvons celle-ci :

$$\begin{aligned} w_\alpha(\mathrm{X})^2 &= \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(2\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(\mathrm{X}) \\ &= \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(\mathrm{X}^{-1})\,\alpha^*(-1)\exp(-2\mathrm{X})\exp(\mathrm{X}) \\ &= \exp(\mathrm{X})\,\alpha^*(-1)\exp(-\mathrm{X}) = \alpha^*(-1), \end{aligned}$$

car $\alpha(\alpha^*(-1)) = (-1)^2 = 1$, ce qui prouve que $\alpha^*(-1) \in \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})(\mathrm{S})$.

Prouvons enfin (vi). La première assertion est un cas particulier de la seconde, démontrons celle-ci. Les deux membres de cette formule définissent des morphismes de $\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$ dans G. Pour prouver qu'ils coïncident, il suffit de le faire sur un ouvert non vide sur chaque fibre (Exp. XVIII 1.4) ; il suffit donc de vérifier la

---

[(24)] N.D.E. : La première égalité découle de 1.5 (i) qui, combiné avec l'égalité $\alpha\circ\alpha^* = 2$, donne les formules

$$(\dagger)\qquad \alpha^*(z)\,\exp(\mathrm{X})\,\alpha^*(z)^{-1} = \exp(z^2\mathrm{X}), \qquad \alpha^*(z)\exp(\mathrm{X}^{-1})\,\alpha^*(z)^{-1} = \exp(z^{-2}\mathrm{X}),$$

la troisième égalité découle de la formule (F), et la quatrième de (†), à nouveau. Enfin, un calcul analogue montre que $w_\alpha(\mathrm{X})\,\alpha^*(z^{-1}) = w_\alpha(z\mathrm{X})$.

relation lorsque $1+\mathrm{XY}$ est inversible. On a alors successivement :

$$\begin{aligned}
&w_\alpha(\mathrm{X})\, w_{-\alpha}(\mathrm{Y}) = \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(\mathrm{X})\exp(\mathrm{Y})\exp(-\mathrm{Y}^{-1})\exp(\mathrm{Y})\\
&= \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp\left(\frac{\mathrm{Y}}{1+\mathrm{XY}}\right)\alpha^*(1+\mathrm{XY})\exp\left(\frac{\mathrm{X}}{1+\mathrm{XY}}\right)\exp(-\mathrm{Y}^{-1})\exp(\mathrm{Y})\\
&= \exp(\mathrm{X})\exp\left(\frac{-\mathrm{X}^{-1}}{1+\mathrm{XY}}\right)\alpha^*(1+\mathrm{XY})\exp\left(\frac{-\mathrm{Y}^{-1}}{1+\mathrm{XY}}\right)\exp(\mathrm{Y})\\
&= \exp(-\mathrm{X}^{-2}\mathrm{Y}^{-1})\,\alpha^*\left(\frac{\mathrm{XY}}{1+\mathrm{XY}}\right)\exp(\mathrm{X}+\mathrm{Y}^{-1})\,\alpha^*(1+\mathrm{XY})\exp\left(\frac{-\mathrm{Y}^{-1}}{1+\mathrm{XY}}\right)\exp(\mathrm{Y})\\
&= \exp(-\mathrm{X}^{-2}\mathrm{Y}^{-1})\,\alpha^*(\mathrm{XY})\exp\left(\frac{\mathrm{Y}^{-1}+\mathrm{X}}{(1+\mathrm{XY})^2}\right)\exp\left(\frac{-\mathrm{Y}^{-1}}{1+\mathrm{XY}}\right)\exp(\mathrm{Y})\\
&= \alpha^*(\mathrm{XY})\exp(-\mathrm{Y})\exp(\mathrm{Y}) = \alpha^*(\mathrm{XY}).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.2. — *Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Pour tout $w \in \mathrm{G(S)}$, les conditions suivantes sont équivalentes :* 64

(i) $w \in \mathrm{N}^\times(\mathrm{S})$,

(ii) *on a* $\mathrm{int}(w)\circ n\alpha^* = -n\alpha^*$ (on rappelle que $(n\alpha^*)(z) = \alpha^*(z)^n$).

On a (i) $\Rightarrow$ (ii) (assertion (iii) du théorème 3.1) ; réciproquement, on peut supposer que $\mathrm{N}^\times$ possède une section et on est ramené à prouver :

Lemme 3.3. — *On a* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(n\alpha^*) = \mathrm{T}$ *pour* $n \neq 0$.

En effet, l'image T' de $n\alpha^*$ est un sous-tore de G. Il en résulte (Exp. XIX 2.8) que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(n\alpha^*)$ est un sous-groupe réductif de G, contenant T. Comme sur chaque fibre on a $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\overline{s}}}(n\alpha^*_{\overline{s}}) \neq \mathrm{G}_{\overline{s}}$, alors $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\overline{s}}}(n\alpha^*_{\overline{s}}) = \mathrm{T}_{\overline{s}}$ (Exp. XIX 1.6.3 [(25)]), donc $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(n\alpha^*) = \mathrm{T}$, car il s'agit de sous-groupes lisses de G.

Remarque 3.4. — La construction de w_α et le fait que $w_\alpha(\mathrm{X})$ normalise T ne s'appuient que sur la formule (F). En particulier, si G est un S-groupe vérifiant les conditions de 2.2, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est différent de T sur chaque fibre. Il en résulte que si G est un S-groupe affine à fibres connexes vérifiant les conditions de 2.2, il est *réductif* de rang semi-simple 1. En effet, il est lisse au voisinage de la section unité, donc lisse et on peut appliquer le critère de Exp. XIX 1.11.

3.5. Avant d'énoncer le théorème suivant, faisons quelques remarques. Nous identifions comme d'habitude $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ à $(\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes -1}$. De même, nous identifierons $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^\alpha)$ à $(\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2}$ et donc 65

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha}), \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)) \simeq \mathrm{W}\big((\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2}\big)^\times.$$

Si $w \in \mathrm{N}^\times(\mathrm{S})$, alors $\mathrm{Ad}(w)$ permute $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ (3.1, (iii)), donc définit un isomorphisme :

$$a_\alpha(w) : \mathfrak{g}^{-\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\alpha,$$

---

(25) N.D.E. : L'hypothèse $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\overline{s}}}(n\alpha^*_{\overline{s}}) \neq \mathrm{G}_{\overline{s}}$ entraîne que $\dim \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\overline{s}}}(n\alpha^*_{\overline{s}}) - \dim \mathrm{T}_{\overline{s}} < 2$, or cette différence est paire, d'après *loc. cit.*

que nous identifierons donc à une section $a_\alpha(w) \in \Gamma(\mathrm{S}, (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2})^\times$. Cette construction est compatible avec le changement de base et définit donc un morphisme

$$a_\alpha : \mathrm{N}^\times \longrightarrow \mathrm{W}\big((\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2}\big)^\times,$$

tel que $a_\alpha(w)\mathrm{Y} = \mathrm{Ad}(w)\mathrm{Y}$ pour tous $w \in \mathrm{N}^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Théorème 3.6. — (i) *On a*

$$\mathrm{int}(w)\exp(\mathrm{Y}) = \exp(a_\alpha(w)\mathrm{Y})$$

pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* $w \in \mathrm{N}^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Y} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})(\mathrm{S}')$.

(ii) *On a*

$$a_\alpha(tw) = \alpha(t)\, a_\alpha(w), \qquad a_\alpha(wt) = \alpha(t)^{-1}\, a_\alpha(w).$$

(iii) *Si on définit de même* $a_{-\alpha} : \mathrm{N}^\times \to \mathrm{W}((\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\otimes 2})^\times$, *on a*

$$a_{-\alpha}(w) = a_\alpha(w)^{-1}. \quad {}^{(26)}$$

(iv) *Pour tout* $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *on a*

$$a_\alpha(w_\alpha(\mathrm{X})) = -\mathrm{X}^2.$$

66 L'assertion (i) est triviale, par la caractérisation des morphismes exp donnée en 1.5. L'assertion (ii) est immédiate, ainsi que (iii). Prouvons (iv) : soient $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^\alpha)^\times$, $\mathrm{Z} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^\alpha)$; on a par définition [27]

$$a_\alpha(w_\alpha(\mathrm{X}))^{-1}(\mathrm{Z}) = \mathrm{Ad}(w_\alpha(\mathrm{X}))(\mathrm{Z}) = \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))\,\mathrm{Ad}(\exp(-\mathrm{X}^{-1}))\,\mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))(\mathrm{Z}).$$

Appliquant les formules (2′) et (2) du lemme 2.10, ainsi que les égalités $\mathrm{H}_{-\alpha} = -\mathrm{H}_\alpha$, $\overline{\alpha}(\mathrm{H}_\alpha) = 2$ (*loc. cit.* (4) et (5)) et $\langle \mathrm{X}, \mathrm{X}^{-1}\rangle = 1$ (2.6), on obtient que le terme de droite égale, successivement :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))\,\mathrm{Ad}(\exp(-\mathrm{X}^{-1}))(\mathrm{Z}) &= \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))\big(\mathrm{Z} + \langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle(\mathrm{H}_\alpha - \mathrm{X}^{-1})\big)\\ &= \mathrm{Z} + \langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle(\mathrm{H}_\alpha - 2\mathrm{X} - \mathrm{X}^{-1} - \mathrm{H}_\alpha + \mathrm{X})\\ &= \mathrm{Z} - \langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle\mathrm{X} - \langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle\mathrm{X}^{-1}.\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{Z} = \langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle\mathrm{X}$ et $\langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle\mathrm{X}^{-1} = \mathrm{X}^{-2}\mathrm{Z}$, donc ceci montre que $a_\alpha(w_\alpha(\mathrm{X}))^{-1} = -\mathrm{X}^{-2}$, d'où $a_\alpha(w_\alpha(\mathrm{X})) = -\mathrm{X}^2$.

Corollaire 3.7. — *On a en particulier*

$$\mathrm{int}(w_\alpha(\mathrm{X}))\exp(\mathrm{X}) = \exp(-\mathrm{X}^{-1}),$$

d'où (*par la définition de* $w_\alpha(\mathrm{X})$) *:*

$$w_\alpha(\mathrm{X})\exp(\mathrm{X})\, w_\alpha(\mathrm{X})^{-1} = \exp(-\mathrm{X})\, w_\alpha(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}),$$

soit, par un calcul immédiat

$$\big(w_\alpha(\mathrm{X})\exp(\mathrm{X})\big)^3 = e.$$

Corollaire 3.8. — *Soient* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. *Alors* $w_\alpha(\mathrm{X})$ *est l'unique section* $w \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *qui vérifie*

---

[26] N.D.E. : c.-à-d., $a_{-\alpha}(w)$ et $a_{-\alpha}(w)$ sont *appariés*, cf. 2.6.1.
[27] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(i) $\mathrm{int}(w)\circ n\alpha^* = -n\alpha^*$.

(ii) $(w\exp(\mathrm{X}))^3 = e$.

On sait que $w_\alpha(\mathrm{X})$ vérifie bien ces conditions. Réciproquement, soit $w \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ 67
vérifiant (i) et (ii). Par 3.2 et 3.1 (ii), on sait qu'il existe $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$ tel que $w = w_\alpha(\mathrm{X})\,t$. Posons $u = \exp(\mathrm{X})$. On a alors

$$w\,u\,w^{-1} = w_\alpha(\mathrm{X})\,t\exp(\mathrm{X})\,t^{-1}\,w_\alpha(\mathrm{X})^{-1} = \exp(-\alpha(t)\mathrm{X}^{-1}),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} u^{-1}w\,u^{-1} &= \exp(-\mathrm{X})\,w_\alpha(\mathrm{X})\,t\exp(-\mathrm{X}) \\ &= \exp(-\mathrm{X})\,w_\alpha(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X})\exp(\mathrm{X}-\alpha(t)\mathrm{X})\,t \\ &= \exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp\big(\mathrm{X}-\alpha(t)\mathrm{X}\big)\,t = \exp(-\mathrm{X}^{-1})\,t\exp(\mathrm{H}). \end{aligned}$$

Or $(wu)^3 = e \Leftrightarrow w\,u\,w^{-1} = u^{-1}w\,u^{-1}$; comparant les deux décompositions de cet élément sur $\mathrm{U}_{-\alpha}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{U}_\alpha$, on en tire $t = e$.

Remarque 3.9. — On peut résumer un certain nombre des résultats de ce numéro par le diagramme suivant de fibrés principaux homogènes (à gauche)

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times \xrightarrow{w_\alpha} \mathrm{N}^\times \xrightarrow{a_\alpha} \mathrm{W}\big((\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2}\big)^\times$$

$$\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\ .$$

Remarquons que a_α *est fidèlement plat* (α l'étant) et que w_α est un *monomorphisme* si et seulement si α^* est un *monomorphisme.* Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les diagrammes correspondants pour les structures de fibrés principaux à droite, ainsi que les diagrammes du même genre pour la racine $-\alpha$, et d'étudier les relations entre ces différents diagrammes.

Lemme 3.10. — *Soient* S *un schéma, q un entier > 0 tel que $x \mapsto x^q$ définisse un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, $(\mathrm{G},\mathrm{T},\alpha)$ et $(\mathrm{G}',\mathrm{T}',\alpha')$ deux* S*-systèmes élémentaires, $f : \mathrm{G}\to\mathrm{G}'$* 68
un morphisme de S*-groupes. Soient*

$$h : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes q} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathfrak{g}'^{\alpha'}$$

un isomorphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules et

$$h^\vee : (\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\otimes q} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathfrak{g}'^{-\alpha'}$$

l'isomorphisme contragrédient. Pour tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ et tout $\mathrm{X}\in\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)(\mathrm{S}')$, on suppose :

$$f(\exp(\mathrm{X})) = \exp(h(\mathrm{X}^q)).$$

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(\alpha^*(z)) = \alpha'^*(z)^q$.

(ii) $f(w_\alpha(\mathrm{Z})) = w_{\alpha'}(h(\mathrm{Z}^q))$.

(iii) $f(\exp(\mathrm{Y})) = \exp(h^\vee(\mathrm{Y}^q))$.

(Chaque condition doit se lire : pour tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ et tout $z\in\mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Z}\in\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Y}\in\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})(\mathrm{S}')$, on a ...).

En effet, (i) $\Rightarrow$ (ii) par 3.8, (ii) $\Rightarrow$ (iii) par 3.7, (iii) $\Rightarrow$ (i) par 2.7.

Proposition 3.11. — *Soient* S *un schéma,* $a \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, *tel que* $x \mapsto x^q$ *définisse un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *et* $(\mathrm{G}', \mathrm{T}', \alpha')$ *deux* S*-systèmes élémentaires,* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de* S*-groupes. Les conditions suivantes sur* f *sont équivalentes :*

(i) *La restriction de* f *à* T *se factorise en un morphisme* $f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{T} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_{\mathrm{T}}"'] & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[d, "q"'] \\
\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha'^*"] & \mathrm{T}' \arrow[r, "\alpha'"] & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}.
\end{tikzcd}$$

69 (ii) *Il existe un isomorphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules* (unique)

$$h : (\mathfrak{g}^{\alpha})^{\otimes q} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{\alpha'}$$

tel que $f(\exp(\mathrm{X})) = \exp(h(\mathrm{X}^q))$, $f(\exp(\mathrm{Y})) = \exp(h^{\vee}(\mathrm{Y}^q))$ *pour tous* $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Y} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (*il en résulte que* f *vérifie également les conditions équivalentes de* 3.10).

On a (ii) $\Rightarrow$ (i). En effet, par 3.10, la condition (ii) entraîne $f \circ \alpha^* = q\,\alpha'^*$ donc, par 3.3, $f|_{\mathrm{T}}$ se factorise par T′. Reste à prouver $\alpha'(f(t)) = \alpha(t)^q$, ce qui résulte aussitôt du fait que f induit un morphisme de groupes $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha} \to \mathrm{T}' \cdot \mathrm{U}_{\alpha'}$.

Prouvons (i) $\Rightarrow$ (ii). Soient $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})$, $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})$. Posons $p_+(x) = f(\exp(x\mathrm{X}))$ et $p_-(x) = f(\exp(y\mathrm{Y}))$, ce sont des morphismes de groupes

$$p_+,\ p_- : \quad \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{int}(\alpha'^*(z))^q(p_+(x)) &= \operatorname{int}\big((f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(z))\big)\big(f(\exp(x\mathrm{X}))\big) \\
&= f\big(\operatorname{int}(\alpha^*(z))(\exp(x\mathrm{X}))\big) \\
&= f(\exp(z^2 x\mathrm{X})) = p_+(z^2 x).
\end{aligned}$$

Appliquant le lemme 1.2 (avec $\mathrm{Q} = \alpha'^*(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$), on en déduit qu'il existe une section $\mathrm{X}' \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha'})$ telle que

$$f(\exp(x\mathrm{X})) = p_+(x) = \exp(x^q\mathrm{X}').$$

De même, il existe une section $\mathrm{Y}' \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha'})$ telle que

$$f(\exp(y\mathrm{Y})) = \exp(y^q\mathrm{Y}').$$

Écrivant maintenant que f est un morphisme de groupes, donc qu'il respecte la formule (F), on obtient aussitôt

$$\mathrm{X}^q\mathrm{Y}^q = (\mathrm{X}\mathrm{Y})^q = \mathrm{X}'\mathrm{Y}'.$$

70 On en conclut aisément que $\mathrm{X}^q \mapsto \mathrm{X}'$ et $\mathrm{Y}^q \mapsto \mathrm{Y}'$ définissent des isomorphismes h et $h^{\vee}$ comme annoncé.

Proposition 3.12. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *un* S*-système élémentaire,* $w \in \mathrm{Q}(\mathrm{S})$*, posons*

$$\Omega_0 = \Omega \cap \mathrm{int}(w^{-1})(\Omega).$$

Soit d *la fonction sur* Ω *définie par*

$$d(\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X})) = \alpha(t)^{-1} + \mathrm{XY}.$$

Alors $\Omega_0 = \Omega_d$ *et on a pour* $\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X}) \in \Omega_0(\mathrm{S}')$ *la formule suivante* (*on pose* $z = d(\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X}))$:

$$(\star) \qquad \mathrm{int}(w)(\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X})) = \exp(z^{-1} a_\alpha(w)^{-1} \mathrm{X}) \cdot t\, \alpha^*(z) \cdot \exp(z^{-1} a_\alpha(w) \mathrm{Y}).$$

De plus, on a $d \circ \mathrm{int}(w) = d^{-1}$.

En effet, on a aussitôt [28]

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(w)(\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X})) &= \exp(a_\alpha(w)\mathrm{Y}) \cdot t\alpha^*(\alpha(t)^{-1}) \cdot \exp(a_\alpha(w)^{-1}\mathrm{X}) \\ &= \exp(a_\alpha(w)\mathrm{Y}) \cdot \exp(\alpha(t) a_\alpha(w)^{-1}\mathrm{X}) \cdot t\alpha^*(\alpha(t)^{-1}). \end{aligned}$$

D'après 2.1, c'est une section de Ω si et seulement si $1 + \alpha(t)\mathrm{XY}$ est inversible, ce qui prouve bien l'égalité $\Omega_0 = \Omega_d$; appliquant ensuite la formule (F) de *loc. cit.*, on en déduit par un calcul immédiat la formule $(\star)$ annoncée. Enfin, il résulte de $(\star)$ que l'on a

$$(d \circ \mathrm{int}(w))(\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X})) = \alpha(t\alpha^*(z))^{-1} + z^{-2}\mathrm{XY} = z^{-2}(\alpha(t)^{-1} + \mathrm{XY}) = z^{-1},$$

d'où la dernière assertion.

N. B. On remarquera que la fonction d est indépendante du choix de w.

4. Le théorème d'isomorphisme

Théorème 4.1. — *Soient* S *un schéma,* $q \in \mathbb{Z}$*,* $q > 0$ *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomor-* 71
phisme de $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$*,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *et* $(\mathrm{G}', \mathrm{T}', \alpha')$ *deux* S*-systèmes élémentaires. Soient*

$$h : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes q} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{\alpha'} \qquad \text{et} \qquad h^\vee : (\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\otimes q} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{-\alpha'}$$

deux isomorphismes contragrédients l'un de l'autre. Soit $f_\mathrm{T} : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ *un morphisme de* S*-groupes rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\alpha^*"'] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[d, "\alpha'^*"] \\ \mathrm{T} \arrow[r, "f_\mathrm{T}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathrm{T}' \arrow[d, "\alpha'"] \\ \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "q"] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}. \end{tikzcd}$$

[28] N.D.E. : On a corrigé l'original en échangeant $a_\alpha(w)$ et $a_\alpha(w)^{-1}$, et l'on a détaillé la preuve de l'égalité $d \circ \mathrm{int}(w) = d^{-1}$.

Il existe un unique *morphisme de* S*-groupes* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *qui prolonge* f_{T} *et vérifie*

$$f(\exp(\mathrm{X})) = \exp(h(\mathrm{X}^q))$$

pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)(\mathrm{S}')$*,* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*. De plus, ce morphisme vérifie aussi*

$$f(\exp(\mathrm{Y})) = \exp(h^\vee(\mathrm{Y}^q)) \quad et \quad f(w_\alpha(\mathrm{Z})) = w_\alpha(h(\mathrm{Z}^q)),$$

pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^{-\alpha})$*,* $\mathrm{Z} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^\alpha)^\times$*.*

Si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ prolonge f_{T}, alors $f \circ \alpha^* = (\alpha'^*)^q$. Si de plus f vérifie la seconde condition, alors il vérifie aussi les deux autres par 3.10. Il en résulte que f est déterminé sur Ω par la relation

$$f(\exp(\mathrm{Y})\, t \exp(\mathrm{X})) = \exp(h^\vee(\mathrm{Y}^q)) f_{\mathrm{T}}(t) \exp(h(\mathrm{X}^q)).$$

72 Comme Ω est schématiquement dense dans G, ceci démontre déjà l'unicité de f. Pour en prouver l'existence, il suffit, en vertu de Exp. XVIII 2.3, de prouver que la formule précédente définit un morphisme « génériquement multiplicatif » de Ω dans G′. Or, par 2.4, cela revient à vérifier que $\alpha' \circ f = \alpha^q$, ce qui résulte de ce que f prolonge f_{T}.

Scholie 4.2. — On peut aussi interpréter 4.1 de la façon suivante : on considère la catégorie $\mathscr{E}$ des S-systèmes élémentaires et la catégorie $\mathscr{D}$ des couples

$$(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\ ,\ \mathscr{L}),$$

où T est un tore, α et α^* des morphismes de groupes tels que $\alpha \circ \alpha^* = 2$, et $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible (le lecteur précisera les morphismes des deux catégories envisagées). On définit un foncteur $\mathscr{E} \to \mathscr{D}$ par

$$(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha) \longmapsto (\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\ ,\ \mathfrak{g}^\alpha).$$

Le théorème précédent dit que ce foncteur est *pleinement fidèle.* C'est en fait une équivalence de catégories comme on le verra au numéro suivant. On a déjà :

Corollaire 4.3. — *Si* $q = 1$ *et si* f_{T} *est un isomorphisme, alors* f *est un isomorphisme.*

Corollaire 4.4. — *Si* $q = 1$ *et si* f_{T} *est fidèlement plat de noyau* Q (cf. Exp. IX 2.7), *alors* f *est fidèlement plat* (*quasi-compact*) *de noyau* Q*, donc identifie* G′ *à* G/Q.

En effet, si f_{T} est fidèlement plat de noyau Q, alors

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Ker}(f_{\mathrm{T}}) \subset \mathrm{Ker}(f_{\mathrm{T}} \circ \alpha') = \mathrm{Ker}(\alpha).$$

Introduisant le S-système élémentaire $(\mathrm{G/Q}, \mathrm{T/Q}, r/\mathrm{Q})$ de 2.13, on est ramené par 2.14 à prouver que f/Q induit un isomorphisme de G/Q sur G′, ce qui résulte aussitôt de 4.3.

5. Exemples de systèmes élémentaires, applications

73

5.1. Soient S un schéma, $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible. Considérons le groupe $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ sur S défini par

$$\mathrm{G}_{\mathscr{L}}(\mathrm{S}') = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, d \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}'), \; \begin{matrix} b \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}') \\ c \in \mathrm{W}(\mathscr{L}^{-1})(\mathrm{S}') \end{matrix}, \; ad - bc \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}') \right\}$$

muni de la loi de multiplication habituelle des matrices. Il est localement isomorphe à $\mathrm{GL}_{2,\,\mathrm{S}}$. C'est donc un S-schéma en groupes, affine et lisse sur S, à fibres connexes.

Remarque. — Soient $\mathscr{L}'$ et $\mathscr{L}''$ deux faisceaux inversibles sur S, tels que $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \otimes \mathscr{L}''^{-1}$. [29] Alors on a un isomorphisme de S-groupes :

$$\mathrm{G}_{\mathscr{L}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(\mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}'')$$

défini comme suit : si x (resp. y) est une section de $\mathscr{L}'$ (resp. $\mathscr{L}''$) sur un ouvert V de S, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

5.2. On notera $\mathrm{S}_{\mathscr{L}}$ le sous-groupe fermé de $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ défini par la relation $ad - bc = 1$. C'est aussi un S-schéma en groupes, affine et lisse sur S, à fibres connexes (isomorphe à $\mathrm{SL}(\mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}'')$ par l'isomorphisme précédent).

De même, considérons le morphisme $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ défini par $z \mapsto \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$. C'est un monomorphisme central ; par passage au quotient, on en déduit un groupe $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$, lisse et affine sur S, à fibres connexes (cf. Exp. VIII 5.7)

On peut voir que, par passage au quotient à partir de l'isomorphisme de la remarque précédente, $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$ s'identifie au groupe des automorphismes du fibré projectif $\mathbb{P}(\mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}'')$ (cf. EGA , II 4.2.7). On notera i et p les morphismes canoniques 74

$$\mathrm{S}_{\mathscr{L}} \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{G}_{\mathscr{L}} \xrightarrow{\ p\ } \mathrm{P}_{\mathscr{L}} \;;$$

i est une immersion fermée, p est fidèlement plat et affine.

5.3. Considérons les morphismes de groupes

$$\begin{aligned} &t_{\mathrm{G}} : \mathbb{G}^2_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathscr{L}}, \qquad && t_{\mathrm{G}}(z, z') = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix}; \\ &t_{\mathrm{S}} : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{S}_{\mathscr{L}}, && t_{\mathrm{S}}(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}; \\ &t_{\mathrm{P}} : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{P}_{\mathscr{L}}, && t_{\mathrm{P}}(z) = p(t_{\mathrm{G}}(z, 1)). \end{aligned}$$

Ce sont des monomorphismes de groupes, qui définissent dans chaque groupe un tore (déployé) de codimension relative 2. Pour tout $s \in \mathrm{S}$, soit

$$\mathrm{X} \in \Gamma(\overline{s}, \mathscr{L} \otimes \overline{s})^{\times};$$

[29] N.D.E. : On a corrigé $\mathscr{L}'' \otimes \mathscr{L}'^{-1}$ en $\mathscr{L}' \otimes \mathscr{L}''^{-1}$ et l'on a détaillé la phrase qui suit.

alors la section $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ \mathrm{X}^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{G}_{\mathscr{L},\overline{s}}$ normalise $t_{\mathrm{G}}(\mathbb{G}^2_{m,\overline{s}})$ et ne le centralise pas ; on conclut alors de Exp. XIX 1.6 que $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ est *réductif,* de *rang semi-simple* 1, de *tore maximal* $t_{\mathrm{G}}(\mathbb{G}^2_{m,\mathrm{S}})$.

On raisonne de même pour $\mathrm{S}_{\mathscr{L}}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$, et on voit que $\mathrm{S}_{\mathscr{L}}$ (resp. $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$) est réductif, de rang semi-simple 1, de tore maximal $t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$ (resp. $t_{\mathrm{P}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$).

5.4. En raisonnant comme d'habitude, on détermine aussitôt l'algèbre de Lie de ces différents groupes et l'opération adjointe du tore maximal choisi. Faisons-le pour $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$; c'est immédiat par Exp. II 4.8 : $\mathscr{L}\!ie(\mathrm{G}_{\mathscr{L}}/\mathrm{S})$ est l'algèbre de Lie des matrices ci-dessous :

$$\mathscr{L}\!ie(\mathrm{G}_{\mathscr{L}}/\mathrm{S}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a \text{ et } d \text{ sections de } \mathscr{O}_{\mathrm{S}},\ b \text{ section de } \mathscr{L},\ c \text{ section de } \mathscr{L}^{-1} \right\}$$

avec le crochet habituel ; on a

$$\mathrm{Ad}(t_{\mathrm{G}}(z,z'))\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & zz'^{-1}b \\ z'z^{-1}c & d \end{pmatrix}.$$

75 Notons $\mathscr{L}\!ie(\mathrm{G}_{\mathscr{L}}/\mathrm{S}) = \mathfrak{g}$. Soit $\alpha_{\mathrm{G}} : t_{\mathrm{G}}(\mathbb{G}^2_{m,\mathrm{S}}) \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ le caractère défini par

$$\alpha_{\mathrm{G}}(t_{\mathrm{G}}(z,z')) = zz'^{-1}.$$

On voit aussitôt sur la relation précédente que α_{G} est une racine de $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ par rapport à $t_{\mathrm{G}}(\mathbb{G}^2_{m,\mathrm{S}})$ et que le morphisme

$$u : \mathscr{L} \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad (\text{resp. } u_- : \mathscr{L}^{-1} \longrightarrow \mathfrak{g})$$

défini par $u(\mathrm{X}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (resp. $u_-(\mathrm{X}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{X} & 0 \end{smallmatrix}\right)$) est un isomorphisme de $\mathscr{L}$ sur $\mathfrak{g}^{\alpha_{\mathrm{G}}}$ (resp. de $\mathscr{L}^{-1}$ sur $\mathfrak{g}^{-\alpha_{\mathrm{G}}}$).

On a donc prouvé que $(\mathrm{G}, t_{\mathrm{G}}(\mathbb{G}^2_{m,\mathrm{S}}), \alpha_{\mathrm{G}})$ est un S-*système élémentaire.*

Posant de même

$$\alpha_{\mathrm{S}}(t_{\mathrm{S}}(z)) = z^2, \qquad \alpha_{\mathrm{P}}(t_{\mathrm{P}}(z)) = z,$$

on démontre que $(\mathrm{S}_{\mathscr{L}}, t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}), \alpha_{\mathrm{S}})$ et $(\mathrm{P}_{\mathscr{L}}, t_{\mathrm{P}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}), \alpha_{\mathrm{P}})$ sont des systèmes élémentaires, et on définit des isomorphismes de $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^{-1}$) avec les facteurs directs correspondants des algèbres de Lie de $\mathrm{S}_{\mathscr{L}}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$.

5.5. Posons $\exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On a ainsi défini un morphisme

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha_{\mathrm{G}}}) \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathscr{L}}$$

qui induit sur les algèbres de Lie le morphisme canonique, donc est l'unique morphisme de ce type (1.5). De même, on pose $\exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{Y} & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{Y} & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Effectuant le calcul explicite de la formule (F), on trouve

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{Y} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{XY}, \qquad \alpha^*_{\mathrm{G}}(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^1 \end{pmatrix} = t_{\mathrm{G}}(z, z^{-1}).$$

[30] L'ouvert $\mathrm{N}^{\times} = \mathrm{N}^{\times}_{\mathrm{G}}$ (défini avant 3.1) est :

$$\mathrm{N}^{\times}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}') = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} & 0 \end{pmatrix} \middle| \ \mathrm{P} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(\mathrm{S}'),\ \mathrm{Q} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}(\mathrm{S}') \right\},$$

le morphisme $w_{\alpha_{\mathrm{G}}}$ (cf. 3.1 (iv)) est donné, pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(\mathrm{S}')$, par

$$w_{\alpha_{\mathrm{G}}}(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ -\mathrm{X}^{-1} & 0 \end{pmatrix};$$

le morphisme $a_{\alpha_{\mathrm{G}}}$ (cf. 3.5) est donné par : **76**

$$\text{si} \quad w = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{N}^{\times}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}') \quad \text{alors} \quad a_{\alpha_{\mathrm{G}}}(w) = \mathrm{PQ}^{-1} \in \mathrm{W}\big((\mathfrak{g}^{\alpha})^{\otimes 2}\big)^{\times}(\mathrm{S}'),$$

c.-à-d., pour tout $\mathrm{Y} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}(\mathrm{S}')$, on a $a_{\alpha_{\mathrm{G}}}(w)(\mathrm{Y}) = \mathrm{PQ}^{-1}\mathrm{Y} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(\mathrm{S}')$.

5.6. Nous laissons au lecteur le soin de faire les mêmes calculs dans $\mathrm{S}_{\mathscr{L}}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$. On trouve la même formule de dualité et les coracines

$$\alpha^*_{\mathrm{S}}(z) = t_{\mathrm{S}}(z), \qquad \alpha^*_{\mathrm{P}}(z) = t_{\mathrm{P}}(z^2).$$

Notons p_{T} le morphisme induit par $p : \mathrm{G}_{\mathscr{L}} \to \mathrm{P}_{\mathscr{L}}$ sur $t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$, c.-à-d.

$$p_{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{S}}(z)) = t_{\mathrm{P}}(z^2).$$

On a donc le diagramme commutatif : [31]

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[dlll, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\alpha^*_{\mathrm{S}}"] \arrow[dr, "\alpha^*_{\mathrm{P}}"'] \arrow[drrr, "2"] & & & \\
\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[rr, "t_{\mathrm{S}}"] \arrow[drrr, "2"'] & & t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) \arrow[rr, "p_{\mathrm{T}}"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathrm{S}}"] & & t_{\mathrm{P}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) \arrow[dl, "\alpha_{\mathrm{P}}"'] & & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[ll, "t_{\mathrm{P}}"'] \arrow[dlll, "\mathrm{id}"] \\
 & & & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} & & &
\end{tikzcd}$$

On reconnaît dans le partie centrale le diagramme commutatif de 4.1 [32] relatif au morphisme canonique $p \circ i : \mathrm{S}_{\mathscr{L}} \to \mathrm{P}_{\mathscr{L}}$, qui induit un morphisme des S-systèmes élémentaires précédents.

---

[30] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

[31] N.D.E. : où t_{S} et t_{P} sont des *isomorphismes.*

[32] N.D.E. : avec $q = 1$.

5.7. Soit maintenant $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ un S-système élémentaire quelconque. Considérons le diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha^*"] \arrow[dr, "2"] & \\
\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[dr, "2"'] & \mathrm{T} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
& \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} &
\end{tikzcd}
\quad .
$$

77 Combinant les deux diagrammes précédents, on obtient un diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[dl, "\alpha_{\mathrm{S}}^*"'] \arrow[d, "\alpha^*"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathrm{P}}^*"] & \\
t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \arrow[r, "\alpha^*\circ t_{\mathrm{S}}^{-1}"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathrm{S}}"'] & \mathrm{T} \arrow[r, "t_{\mathrm{P}}\circ\alpha"] \arrow[d, "\alpha"] & t_{\mathrm{P}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \arrow[dl, "\alpha_{\mathrm{P}}"] \\
& \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} &
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Utilisant 4.1, on a donc :

Proposition 5.8. — *Soient* S *un schéma,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *un* S*-système élémentaire. Posons* $\mathscr{L} = \mathfrak{g}^{\alpha}$ *(et donc* $\mathscr{L}^{-1} = \mathfrak{g}^{-\alpha}$*).*

(i) *Il existe un* unique *morphisme de groupes* $f : \mathrm{S}_{\mathscr{L}} \to \mathrm{G}$ *qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

(a) $f\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \alpha^*(z), \qquad f\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\mathrm{X})$;

(b) $f\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\mathrm{X}), \qquad f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{Y} & 1 \end{pmatrix} = \exp(\mathrm{Y})$;

(c) $f\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\mathrm{X}), \qquad f\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ -\mathrm{X}^{-1} & 0 \end{pmatrix} = w_{\alpha}(\mathrm{X})$.

(ii) *Il existe un* unique *morphisme de groupes* $g : \mathrm{G} \to \mathrm{P}_{\mathscr{L}}$ *qui vérifie*

$$g(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g(\exp(\mathrm{X})) = p\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a

$$g(\exp(\mathrm{Y})) = p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{Y} & 1 \end{pmatrix}, \qquad g(w_{\alpha}(\mathrm{X})) = p\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ -\mathrm{X}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le morphisme g est fidèlement plat quasi-compact de noyau $\mathrm{Ker}(\alpha) = \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ *et* $g \circ f$ *est le morphisme canonique* $\mathrm{S}_{\mathscr{L}} \to \mathrm{P}_{\mathscr{L}}$.

Remarquons que les conditions (b) de (i) donnent une description explicite de la dualité entre $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. 78

Corollaire 5.9. — *Soit* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *un* S*-système élémentaire. Les sous-groupes* $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha}$, $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{-\alpha}$, U_{α} *et* $\mathrm{U}_{-\alpha}$ *sont* fermés.

Comme U_{α} est un sous-schéma en groupes fermé de $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha}$, il suffit de faire la vérification pour ce dernier. D'après le théorème de Noether (Exp. IV 5.3.1 et 6.4.1), il suffit de prouver que $(\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha})/\mathrm{Ker}(\alpha)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{G}/\mathrm{Ker}(\alpha)$. En vertu de 5.8, on est donc ramené à prouver que le sous-groupe de $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$ (ou de $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$, ce qui revient au même en vertu d'une nouvelle application du théorème de Noether), défini par $c = 0$ est fermé, ce qui est trivial.

Par conséquent, les morphismes exp du théorème 1.5 (i) sont des immersions fermées.

N. B. Le corollaire résulte aussi de ce que $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha}$ et $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{-\alpha}$ sont des « sous-groupes de Borel » de G (cf. Exp. XII 7.10).

5.10. Soient $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible et

$$\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$$

un diagramme de groupes [33] tel que $\alpha \circ \alpha^* = 2$. Soient R le tore maximal de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ et $\mathrm{K} = \alpha^{*-1}(\mathrm{R})$. Alors, K est un sous-groupe de type multiplicatif de $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$; en vertu de $\alpha \circ \alpha^* = 2$, c'est même un sous-groupe de $\boldsymbol{\mu}_{2,\mathrm{S}}$. En particulier le morphisme

$$\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{S}_{\mathscr{L}}, \qquad z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

est central. On a donc un monomorphisme de groupes central : 79

$$\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{R} \times \mathrm{S}_{\mathscr{L}}, \qquad z \mapsto \left(\alpha^*(z), \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}\right).$$

Considérons le groupe $\mathrm{G} = (\mathrm{R} \times \mathrm{S}_{\mathscr{L}})/\mathrm{K}$ obtenu par passage au quotient. C'est un groupe affine et lisse sur S, à fibres connexes. Il est immédiat que la suite

$$1 \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{R} \times t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) \xrightarrow{u} \mathrm{T} \longrightarrow 1$$

où $u(x, t_{\mathrm{S}}(z)) = x\,\alpha^*(z)$ est exacte. L'image de $\mathrm{R} \times t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$ dans G est donc un tore T' isomorphe à T. On montre maintenant sans difficultés que si α' est le caractère de T' déduit de α par l'isomorphisme précédent, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}', \alpha')$ est un S-système élémentaire, que $\mathfrak{g}^{\alpha'}$ est isomorphe à $\mathscr{L}$ et que α'^* est obtenu à partir de α^* par l'isomorphisme $\mathrm{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}'$. On a donc construit un S-système élémentaire $(\mathrm{G}, \mathrm{T}', \alpha')$ tel que l'objet

[33] N.D.E. : T étant un tore.

correspondant $(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha'^*} \mathrm{T}' \xrightarrow{\alpha'} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\,,\ \mathfrak{g}^{\alpha'})$ de la catégorie $\mathscr{D}$ définie en 4.2 soit isomorphe à $(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\,,\ \mathscr{L})$. On a donc prouvé le

Théorème 5.11. — *Dans les notations de* 4.2, *le foncteur*

$$(\mathrm{G},\mathrm{T},\alpha) \longmapsto (\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\,,\ \mathfrak{g}^{\alpha})$$

est une équivalence de catégories *entre* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{D}$.

6. Générateurs et relations pour un système élémentaire

80 **6.1.** Soient S un schéma, $(\mathrm{G},\mathrm{T},\alpha)$ un S-système élémentaire. Soient $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(\mathrm{S})$ et $u = \exp(\mathrm{X})$; on a vu en 3.8 que l'élément $w = w_{\alpha}(\mathrm{X})$ vérifie en particulier la relation

$$(w\,u)^3 = e.$$

[34] On note s_{α} l'automorphisme de T induit par $\mathrm{int}(w)$; d'après le théorème 3.1 (iii), pour tout $\mathrm{S}' \to$ et $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, on a

$$s_{\alpha}(t) = \mathrm{int}(w)(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1}).$$

Théorème 6.2. — *Soit* H *un* S*-faisceau en groupes pour* (fppf). *Soient*

$$f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad f_{\alpha} : \mathrm{U}_{\alpha} \longrightarrow \mathrm{H}$$

des morphismes de groupes et $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$ *une section de* H. *Pour qu'il existe un morphisme de groupes* (*nécessairement unique*)

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$$

prolongeant f_{T} *et* f_{α} *et vérifiant* $f(w) = h$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *tout* $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ *et tout* $x \in \mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{S}')$, *on a*

$$f_{\mathrm{T}}(t)\, f_{\alpha}(x)\, f_{\mathrm{T}}(t)^{-1} = f_{\alpha}(t\,x\,t^{-1}) = f_{\alpha}(x^{\alpha(t)}). \tag{1}$$

(autrement dit, f_{T} *et* f_{α} *se prolongent en un morphisme de groupes du produit semi-direct* $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha}$ *dans* H).

(ii) *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tout* $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, *on a*

$$h\, f_{\mathrm{T}}(t)\, h^{-1} = f_{\mathrm{T}}(s_{\alpha}(t)) = f_{\mathrm{T}}(t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1})). \tag{2}$$

81 (iii) *On a les deux relations dans* H(S) *:*

$$h^2 = f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(-1)), \tag{3}$$

$$(h\, f_{\alpha}(u))^3 = e. \tag{4}$$

[34] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

Démonstration. Notons additivement U_α et $U_{-\alpha}$ et multiplicativement leur structure vectorielle. Si f vérifie les conditions de l'énoncé, on a nécessairement pour tout $y \in U_{-\alpha}(S')$,

$$f(y) = f(w^{-1}wyw^{-1}w) = hf_\alpha(w^{-1}yw)h^{-1}.$$

Soit donc $f_{-\alpha} : U_{-\alpha} \to H$ le morphisme défini par

$$(*_1) \qquad f_{-\alpha}(y) = hf_\alpha(w^{-1}yw)h^{-1}.$$

C'est un morphisme de groupes. D'autre part, f est déterminé sur la grosse cellule Ω par

$$f(y\,t\,x) = f_{-\alpha}(y)f_T(t)f_\alpha(x).$$

Cela montre l'unicité de f ; comme les conditions de l'énoncé sont manifestement nécessaires, montrons qu'elles sont suffisantes.

On a par (4)

$$hf_\alpha(u)h^{-1}h^2 = f_\alpha(-u)h^{-1}f_\alpha(-u).$$

Or, par (3) et (1), $h^2 = h^{-2}$ commute à $f_\alpha(-u)$, ce qui donne

$$hf_\alpha(u)h^{-1} = f_\alpha(-u)hf_\alpha(-u).$$

Mais, par définition $hf_\alpha(u)h^{-1} = f_{-\alpha}(wuw^{-1})$; d'après 3.7, comme $u = \exp(X)$ et 82
$w = w_\alpha(X)$, on a

$$(*_2) \qquad w\,u\,w^{-1} = -\widetilde{u},$$

où $\widetilde{u}$ désigne l'élément apparié à u. On obtient donc :

$$(*_3) \qquad f_{-\alpha}(-\widetilde{u}) = f_\alpha(-u)hf_\alpha(-u).$$

Soit maintenant t une section de T sur un $S' \to S$ variable. Faisons opérer $\mathrm{int}(f_T(t))$ sur la formule précédente. On obtient au premier membre [35]

$$\begin{aligned} f_T(t)f_{-\alpha}(-\widetilde{u})f_T(t)^{-1} &= f_T(t)\,hf_\alpha(u)h^{-1}f_T(t)^{-1} \\ &= h\big(h^{-1}f_T(t)h\big)f_\alpha(u)\big(h^{-1}f_T(t)^{-1}h\big)h^{-1} \\ &= hf_T(s_\alpha(t))f_\alpha(u)f_T(s_\alpha(t))^{-1}h^{-1} = hf_\alpha\big(\alpha(s_\alpha(t))\,u\big)h^{-1} \end{aligned}$$

par (2) et (1) ; puis comme $s_\alpha(t) = t\cdot\alpha^*(\alpha(t)^{-1})$ et $\alpha\circ\alpha^* = 2$, ceci égale

$$hf_\alpha\big(\alpha(t)^{-1}u\big)h^{-1}.$$

Enfin, par $(*_1)$ et $(*_2)$ on a

$$hf_\alpha\big(\alpha(t)^{-1}u\big)h^{-1} = f_{-\alpha}\big(\alpha(t)^{-1}\,wuw^{-1}\big) = f_{-\alpha}\big(-\alpha(t)^{-1}\,\widetilde{u}\big).$$

Le second membre de $(*_3)$ donne

$$f_\alpha(-\alpha(t)u)\cdot f_T(t)hf_T(t)^{-1}h^{-1}\cdot h\cdot f_\alpha(-\alpha(t)u)$$

et comme $hf_T(t)^{-1}h^{-1} = f_T(s_\alpha(t^{-1})) = f_T\big(t\cdot\alpha^*(\alpha(t)\big)$, ceci égale

$$f_\alpha(-\alpha(t)u)\cdot f_T\big(\alpha^*(\alpha(t))\big)\cdot h\cdot f_\alpha(-\alpha(t)u).$$

[35] N.D.E. : On a corrigé ce qui suit.

Comparant les deux expressions obtenues, on obtient

$$f_{-\alpha}\big(-\alpha(t)^{-1}\widetilde{u}\big) = f_\alpha(-\alpha(t)u)\cdot f_{\mathrm{T}}\big(\alpha^*(\alpha(t))\big)\cdot h\cdot f_\alpha(-\alpha(t)u).$$

Comme $\alpha : \mathrm{T}\to\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ est fidèlement plat et que H est un préfaisceau séparé, on peut remplacer $-\alpha(t)^{-1}$ par une section quelconque de $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ et on obtient le

Lemme 6.2.1. — *Pour tout* $z\in\mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$, *on a*

$$f_{-\alpha}(z\widetilde{u}) = f_\alpha(z^{-1}u)\cdot f_{\mathrm{T}}\big(\alpha^*(-z^{-1})\big)\cdot h\cdot f_\alpha(z^{-1}u).$$

83 Soient maintenant $x,y\in\mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$; supposons y et $(1+xy)$ inversibles. Appliquant d'abord le lemme à $z=y$, on obtient [36]

$$f_\alpha(xu)f_{-\alpha}(y\widetilde{u}) = f_\alpha\big((x+y^{-1})u\big)\cdot f_{\mathrm{T}}\big(\alpha(-y^{-1})\big)\cdot h\cdot f_\alpha(y^{-1}u)$$

Or $x+y^{-1}=y^{-1}(1+xy)$. Appliquant le lemme à $z=\dfrac{y}{1+xy}$, on trouve

$$f_\alpha((x+y^{-1})u) = f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\,\widetilde{u}\right) f_\alpha(-(x+y^{-1})u)\cdot h^{-1}\cdot f_{\mathrm{T}}\left(\alpha^*\left(\frac{-y}{1+xy}\right)\right).$$

Reportant ceci dans l'égalité précédente, on obtient

$$f_\alpha(xu)f_{-\alpha}(y\widetilde{u}) = f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\,u\right) f_\alpha(-(x+y^{-1})u)\cdot h^{-1}\cdot f_{\mathrm{T}}\Big(\alpha^*(1+xy)^{-1}\Big)\cdot h\cdot f_\alpha(y^{-1}u).$$

Comme $h^{-1}f_{\mathrm{T}}(t)h = f_{\mathrm{T}}(s_\alpha(t))$ d'après (2) (noter que $s_\alpha^2=\mathrm{id}$) et comme $s_\alpha\circ\alpha^* = -\alpha^*$ (cf. 6.2.1), ceci égale

$$f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\,u\right) f_\alpha(-(x+y^{-1})u)\cdot f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(1+xy))\cdot f_\alpha(y^{-1}u)$$

Enfin, comme pour tous $x'\in\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$ et $z\in\mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$ on a

$$f_\alpha(x')f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(z)) = f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(z))f_\alpha(z^{-2}\,x'),$$

on obtient

$$\begin{aligned} f_\alpha(xu)f_{-\alpha}(y\widetilde{u}) &= f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\widetilde{u}\right)\cdot f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(1+xy))\cdot f_\alpha\left(\Big(\frac{-y^{-1}(1+xy)}{(1+xy)^2}+y^{-1}\Big)u\right)\\ &= f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\widetilde{u}\right)\cdot f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(1+xy))\cdot f_\alpha\left(\frac{x}{1+xy}u\right)\end{aligned}$$

On a donc prouvé :

Lemme 6.2.2. — *Soit* $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$. *Si* $a\in\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $b\in\mathrm{U}_{-\alpha}^\times(\mathrm{S}')$, *et* $1+ab\in\mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, *on a*

$$f_\alpha(a)f_{-\alpha}(b) = f_{-\alpha}\left(\frac{b}{1+ab}\right) f_{\mathrm{T}}\Big(\alpha^*(1+ab)\Big)\, f_\alpha\left(\frac{a}{1+ab}\right).$$

[36] N.D.E. : On a détaillé les calculs qui suivent.

Par densité schématique, cette formule reste valable lorsque $b \in \mathrm{U}_{-\alpha}(\mathrm{S}')$, $1 + ab$ étant toujours inversible. Considérons alors le morphisme

$$f : \Omega \longrightarrow \mathrm{H}$$

défini par $f(y\,t\,x) = f_{-\alpha}(y) f_{\mathrm{T}}(t) f_{\alpha}(x)$. **84**

Il résulte aussitôt de 6.2.2, de la condition 6.2 (i), et de la formule (F′) de 2.4, que si g, $g' \in \Omega(\mathrm{S}')$ et $gg' \in \Omega(\mathrm{S}')$, on a $f(gg') = f(g)f(g')$. Par Exp. XVIII 2.3 (iii) et 2.4 [37], il existe donc un morphisme de groupes $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ prolongeant f. Notons-le aussi f ; il répond à la question ; il suffit de prouver, en effet, que $f(w_\alpha) = h$. Or $w_\alpha = u \cdot (-\widetilde{u}) \cdot u$, d'où, d'après $(*_3)$: [38]

$$f(w_\alpha) = f_\alpha(u) f_{-\alpha}(-\widetilde{u}) f_\alpha(u) = h.$$

Remarque 6.3. — Nous complèterons ces résultats en Exp. XXIII 3.5.

[37] N.D.E. : Noter que chaque fibre géométrique de G est connexe, par exemple d'après 1.1.

[38] N.D.E. : On a simplifié l'original en invoquant $(*_3)$.

EXPOSÉ XXI

DONNÉES RADICIELLES

par M. Demazure

Cet exposé rassemble, en l'absence de référence convenable, [1] des résultats connus **85**
sur les données radicielles (= systèmes de racines « abstraits ») dont la plupart seront utilisés par la suite.

Notations. — On désigne par $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des nombres rationnels positifs (ou nuls) ; on a $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}_+ = \mathbb{N}$. Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ; si A (resp. B) est une partie de $\mathbb{Q}$ (resp. V), on note $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$ l'image de $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ par le morphisme $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, autrement dit l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de B à coefficients dans A. On note $-\mathrm{B} = \{-1\}\mathrm{B}$. On désigne par $\mathrm{E} - \mathrm{F}$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F.

1. Généralités

1.1. Définitions, premières propriétés

Définition 1.1.1. — Soient M et M^* deux $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini en dualité. On note $\mathrm{V} = \mathrm{M} \otimes \mathbb{Q}$, $\mathrm{V}^* = \mathrm{M}^* \otimes \mathbb{Q}$; ce sont deux $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels en dualité. On identifie M (resp. M^*) à une partie de V (resp V^*). La forme bilinéaire canonique sur $\mathrm{M}^* \times \mathrm{M}$ (resp $\mathrm{V}^* \times \mathrm{V}$) est notée (,).

Soit R une partie *finie* de M. Donnons-nous une application $\alpha \mapsto \alpha^*$ de R dans **86**
M^* ; l'ensemble des α^*, pour $\alpha \in \mathrm{R}$, est noté R^*. À chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, on associe l'endomorphisme s_α (resp. s^*_α) de M et V (resp. M^* et V^*) donné par les formules :

$$(1) \qquad s_\alpha(x) = x - (\alpha^*, x)\alpha, \qquad \text{i.e.} \qquad s_\alpha = \mathrm{id} - \alpha^* \otimes \alpha\,;$$

$$(1^*) \qquad s^*_\alpha(u) = u - (u, \alpha)\alpha^*, \qquad \text{i.e.} \qquad s^*_\alpha = \mathrm{id} - \alpha \otimes \alpha^*.$$

On dit que le couple $(\mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ (plus précisément le couple $(\mathrm{R}, \mathrm{R} \to \mathrm{M}^*)$) est une *donnée radicielle dans* $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*)$, ou que $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ est une *donnée radicielle*, si les axiomes

[1] N.D.E. : Pour les résultats sur les systèmes de racines (§§ 1–5), on peut consulter [**BLie**], Chap. VI.

suivants sont vérifiés :

$$\text{(DR I)} \quad \text{Pour chaque } \alpha \in \mathrm{R}, \text{ on a } \quad (\alpha^*, \alpha) = 2.$$
$$\text{(DR II)} \quad \text{Pour chaque } \alpha \in \mathrm{R}, \text{ on a } \quad s_\alpha(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}, \quad s^*_\alpha(\mathrm{R}^*) \subset \mathrm{R}^*.$$

On dit que R est le *système de racines* de la donnée radicielle $\mathscr{R} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$. Les éléments de R (resp. R^*) sont dits les *racines* (resp. *coracines*) de la donnée radicielle.

Remarque 1.1.2. — L'axiome (DR I) est équivalent à l'une quelconque des propriétés suivantes :

$$(2) \quad s_\alpha s_\alpha = \mathrm{id} \quad , \quad (2^*) \quad s^*_\alpha s^*_\alpha = \mathrm{id},$$
$$(3) \quad s_\alpha(\alpha) = -\alpha \quad , \quad (3^*) \quad s^*_\alpha(\alpha^*) = -\alpha^*.$$

Remarque 1.1.3. — Les axiomes (DR I) et (DR II) entraînent

$$\mathrm{R} = -\mathrm{R}, \qquad \mathrm{R}^* = -\mathrm{R}^*, \qquad 0 \notin \mathrm{R}, \qquad 0 \notin \mathrm{R}^*.$$

87 ***Lemme 1.1.4***. — *L'application* $\mathrm{R} \to \mathrm{R}^*$ *est une bijection. Plus généralement, si* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ *et* $(\alpha^*, x) = (\beta^*, x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{R}$*, alors* $\alpha = \beta$*.*

En effet, on a alors $s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\beta$, $s_\alpha(\beta) = \beta - 2\alpha$. On en déduit aussitôt

$$s_\beta s_\alpha(\alpha) = 2\beta - \alpha = \alpha + 2(\beta - \alpha), \qquad s_\beta s_\alpha(\beta - \alpha) = s_\beta(\beta - \alpha) = \beta - \alpha,$$

d'où $(s_\beta s_\alpha)^n(\alpha) = \alpha + 2n(\beta - \alpha) \in \mathrm{R}$ par (DR II). Comme R est fini, on a $\beta - \alpha = 0$.

Corollaire 1.1.5. — *L'application inverse* $\mathrm{R}^* \to \mathrm{R}$ *définit une donnée radicielle*

$$\mathscr{R}^* = (\mathrm{M}^*, \mathrm{M}, \mathrm{R}^*, \mathrm{R})$$

dite duale *de* $\mathscr{R}$*.* [(2)]

Définition 1.1.6. — On note $\Gamma_0(\mathrm{R})$ le sous-groupe de M engendré R. On note $\mathscr{V}(\mathrm{R})$ le sous-espace vectoriel de V engendré par R, c'est-à-dire $\Gamma_0(\mathrm{R}) \otimes \mathbb{Q}$. Appliquant ces définitions à $\mathscr{R}^*$, on construit de même $\Gamma_0(\mathrm{R}^*)$ et $\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)$.

On appelle *rang réductif* de $\mathscr{R}$ le nombre

$$\mathrm{rgred}(\mathscr{R}) = \mathrm{rang}(\mathrm{M}) = \dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{V}^*) = \mathrm{rang}(\mathrm{M}^*) = \mathrm{rgred}(\mathscr{R}^*).$$

On appelle *rang semi-simple* de $\mathscr{R}$ le nombre

$$\mathrm{rgss}(\mathscr{R}) = \mathrm{rang}(\mathrm{R}) = \mathrm{rang}(\Gamma_0(\mathrm{R})) = \dim(\mathscr{V}(\mathrm{R})).$$

On a donc $\mathrm{rgss}(\mathscr{R}) \leqslant \mathrm{rgred}(\mathscr{R})$.

On verra ci-dessous que $\mathrm{rgss}(\mathscr{R}) = \mathrm{rgss}(\mathscr{R}^*)$, c'est-à-dire que $\mathscr{V}(\mathrm{R})$ et $\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)$ ont même dimension.

88 ***Définition 1.1.7***. — On dit que $\mathscr{R}$ est *semi-simple* (resp. *triviale*) si $\mathrm{rgss}(\mathscr{R}) = \mathrm{rgred}(\mathscr{R})$ (resp. $\mathrm{rgss}(\mathscr{R}) = 0$). Pour que $\mathscr{R}$ soit triviale, il est donc nécessaire et suffisant que R soit vide. La donnée radicielle triviale de rang réductif nul est notée $0 = (\{0\}, \{0\}, \varnothing, \varnothing)$.

(2) N.D.E. : On notera que $(\alpha^*)^* = \alpha$.

Définition 1.1.8. — On note $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ le groupe de transformations de M engendré par les s_α, $\alpha \in \mathrm{R}$. On l'appelle le *groupe de Weyl* de $\mathscr{R}$. On note

$$\mathrm{W}^*(\mathscr{R}) = \mathrm{W}(\mathscr{R}^*).$$

Alors $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ opère dans R, $\Gamma_0(\mathrm{R})$, $\mathscr{V}(\mathrm{R})$, M et V. Si $w \in \mathrm{W}(\mathscr{R})$ et $x \in \mathrm{M}$ (resp. $x \in \mathrm{V}$), on a $wx - x \in \Gamma_0(\mathrm{R})$ (resp. $wx - x \in \mathscr{V}(\mathrm{R})$), c'est immédiat sur la formule (1). De même pour $\mathrm{W}^*(\mathscr{R})$.

Lemme 1.1.9. — *Pour tous* $\alpha \in \mathrm{R}$, $x \in \mathrm{V}$, $u \in \mathrm{V}^*$, *on a*

$$(s^*_\alpha(u), s_\alpha(x)) = (u, x). \tag{4}$$

En effet, en faisant le produit scalaire de (1) et (1*), on trouve que le premier membre est égal à $(u,x) + (u,\alpha)(\alpha^*,x)\big((\alpha^*,\alpha) - 2\big) = (u,x)$.

Remarque 1.1.10. — Si on suppose $0 \notin \mathrm{R}$ et $0 \notin \mathrm{R}^*$, alors 1.1.9 équivaut à (DR I).

Corollaire 1.1.11. — *Notons* $h \mapsto h^\vee$ *l'isomorphisme de* $\mathrm{GL}(\mathrm{M})$ *sur* $\mathrm{GL}(\mathrm{M}^*)$ *qui associe à* h *son contragrédient. Alors la formule* (4) *s'écrit aussi*

$$(s_\alpha)^\vee = s^*_\alpha. \tag{5}$$

Corollaire 1.1.12. — *L'isomorphisme précédent induit un isomorphisme de* $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ *sur* $\mathrm{W}^*(\mathscr{R})$. 89

Scholie 1.1.13. — En vertu du résultat précédent, nous identifierons W et W^*, et nous considérerons W comme un groupe de transformations de R, R^*, M, M^*, $\Gamma_0(\mathrm{R})$, $\Gamma_0(\mathrm{R}^*)$, V, V^*, $\mathscr{V}(\mathrm{R})$, $\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)$. Nous écrirons s_α pour s^*_α.

1.2. L'application p

Lemme 1.2.1. — *Soit* $p : \mathrm{M} \to \mathrm{M}^*$ (*resp.* $\mathrm{V} \to \mathrm{V}^*$) *l'application linéaire définie par*

$$p(x) = \sum_{u \in \mathrm{R}^*} (u,x)u. \tag{6}$$

Notons $\ell(x) = (p(x), x)$. *On a les propriétés suivantes :*

$$\ell(x) \geqslant 0, \qquad \ell(\alpha) > 0 \quad \text{pour } \alpha \in \mathrm{R}. \tag{7}$$

$$\ell(w\,x) = \ell(x), \qquad \text{pour } w \in \mathrm{W}. \tag{8}$$

$$(p(x), y) = (p(y), x), \qquad \text{pour } x, y \in \mathrm{V}. \tag{9}$$

$$\ell(\alpha)\alpha^* = 2p(\alpha), \qquad \text{pour } \alpha \in \mathrm{R}. \tag{10}$$

Les trois premières relations sont immédiates [3]. Démontrons la dernière. On a par (1), pour $u \in \mathrm{V}^*$:

$$\begin{aligned}(u,\alpha)^2\,\alpha^* &= (u,\alpha)\,u - (u,\alpha)\,s_\alpha(u)\\ &= (u,\alpha)\,u + (u, s_\alpha(\alpha))\,s_\alpha(u)\\ &= (u,\alpha)\,u + (s_\alpha(u),\alpha)\,s_\alpha(u) \qquad (\text{car } s_\alpha^2 = \mathrm{id}).\end{aligned}$$

90 Comme s_α est une permutation de R^* (par (DR II)), il n'y a plus qu'à sommer sur $u \in \mathrm{R}^*$ pour conclure.

Scholie 1.2.2. — La relation (10) dit que $\alpha \mapsto \ell(\alpha)\alpha^*$ est la restriction à R d'une application linéaire de M dans M^*. En particulier, on a

$$(-\alpha)^* = -\alpha^*.$$

Corollaire 1.2.3. — *L'application p induit un isomorphisme de $\mathscr{V}(\mathrm{R})$ sur $\mathscr{V}(\mathrm{R})^*$.*

En effet, p envoie $\mathscr{V}(\mathrm{R})$ sur $\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)$. On a donc

$$\dim(\mathscr{V}(\mathrm{R})) \geqslant \dim(\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)).$$

En appliquant cette formule à la donnée radicielle duale, on en déduit

$$\dim(\mathscr{V}(\mathrm{R})) = \dim(\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)),$$

donc p, étant surjectif, est aussi bijectif.

Corollaire 1.2.4. — *On a* $\dim(\mathscr{V}(\mathrm{R})) = \dim(\mathscr{V}(\mathrm{R}^*))$, *donc*

$$\mathrm{rgss}(\mathscr{R}) = \mathrm{rgss}(\mathscr{R}^*).$$

Corollaire 1.2.5. — *La forme bilinéaire (u,x) est non dégénérée sur $\mathscr{V}(\mathrm{R}^*) \times \mathscr{V}(\mathrm{R})$, donc met ces $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels en dualité.*

En effet, si $(u,x) = 0$ pour tout $u \in \mathrm{R}^*$, alors $p(x) = 0$.

Corollaire 1.2.6. — *La forme bilinéaire symétrique $(p(x),y)$ est positive non dégénérée sur $\mathscr{V}(\mathrm{R})$.*

91 ***Corollaire 1.2.7***. — W *opère fidèlement dans* R (*et donc dans les autres ensembles de* 1.1.13).

En effet, soit $u \in \mathrm{V}^*$. Soit $w \in \mathrm{W}$, supposons que $w(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$ et prouvons que $w(u) = u$. On a

$$(w(u) - u, \alpha) = (w(u),\alpha) - (u,\alpha) = (u, w^{-1}(\alpha)) - (u,\alpha) = 0.$$

Mais $w(u) - u \in \mathscr{V}(\mathrm{R}^*)$. S'il est orthogonal à toutes les racines, il est nul par 1.2.5.

Corollaire 1.2.8. — *Le groupe* W *est fini.*

[3] N.D.E. : (8) résulte de (4), (2) et (DR II).

Proposition 1.2.9. — *Les opérations de* W *respectent la correspondance entre racines et coracines. En d'autres termes, pour* $\alpha \in \mathrm{R}$ *et* $w \in \mathrm{W}$*, on a*

$$w(\alpha^*) = w(\alpha)^*.$$

Il suffit de le vérifier pour $w = s_\beta$, $\beta \in \mathrm{R}$, c'est-à-dire de vérifier la formule

$$s_\beta(\alpha^*) = s_\beta(\alpha)^*.$$

Or, $\ell(s_\beta(\alpha))\, s_\beta(\alpha)^*/2$ égale :

$$p(s_\beta(\alpha)) = \sum_{u \in \mathrm{R}^*} (u, s_\beta(\alpha))\, u = \sum_{u \in \mathrm{R}^*} (s_\beta(u), \alpha)\, u = \sum_{u \in \mathrm{R}^*} (u, \alpha)\, s_\beta(u) = s_\beta(p(\alpha));$$

comme $\ell(s_\beta(\alpha)) = \ell(\alpha)$, on obtient $s_\beta(\alpha)^* = s_\beta\big(2p(\alpha)/\ell(\alpha)\big) = s_\beta(\alpha^*)$.

Corollaire 1.2.10. — *Si* $\alpha \in \mathrm{R}$ *et* $w \in \mathrm{W}$*, on a* 92

$$w s_\alpha w^{-1} = s_{w(\alpha)}.$$

En effet, $w s_\alpha w^{-1}(x) = x - (\alpha^*, w^{-1}(x))\, w(\alpha) = x - (w(\alpha^*), x)\, w(\alpha)$, et ce dernier terme égale, d'après 1.2.9 :

$$x - (w(\alpha)^*, x)\, w(\alpha) = s_{w(\alpha)}(x).$$

Corollaire 1.2.11. — *Soit* $\mathrm{R}' \subset \mathrm{R}$*. Pour que* $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}', \mathrm{R}'^*)$ *soit une donnée radicielle, il faut et il suffit que* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}'$ *entraîne* $s_\alpha(\beta) \in \mathrm{R}'$*.*

2. Relations entre deux racines

2.1. Racines proportionnelles

Proposition 2.1.1. — *Soient* α *et* β *deux racines. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe* $k \in \mathbb{Q}$ *tel que* $\alpha = k\,\beta$*.*

(ii) $s_\alpha = s_\beta$*.*

De plus, sous ces conditions, on a $\alpha^* = k^{-1}\,\beta^*$ *et* k *est égal à l'un des nombres* 1*,* -1*,* 2*,* -2*,* $1/2$*,* $-1/2$*.*

Supposons d'abord (i). On a d'abord

$$\alpha^* = \ell(\alpha)^{-1}\, 2\, p(\alpha) = k^{-2} \ell(\beta)^{-1}\, 2\, k\, p(\beta) = k^{-1}\,\beta^*.$$

Cela entraîne aussitôt $s_\alpha = s_\beta$. Réciproquement, si l'on a $s_\alpha = s_\beta$, alors

$$\alpha = s_\alpha(-\alpha) = s_\beta(-\alpha) = (\beta^*, \alpha)\,\beta - \alpha,$$

d'où $2\,\alpha = (\beta^*, \alpha)\,\beta$, avec $(\beta^*, \alpha) \in \mathbb{Z}$, donc (ii) entraîne (i). Enfin, si $\alpha = k\,\beta$, alors $\alpha^* = k^{-1}\,\beta^*$, d'où

$$(\alpha^*, \beta) = 2k^{-1}, \qquad (\beta^*, \alpha) = 2k,$$

donc $2k$ et $2k^{-1}$ sont des entiers et on a terminé. 93

Application 2.1.2. — Les données radicielles $\mathscr{R}$ telles que $\mathrm{rgss}(\mathscr{R}) = 1$ sont de l'un des deux types suivants :

(i) Type A_1 : il existe un $\alpha \in \mathrm{M}$ tel que les racines soient α et $-\alpha$. Les coracines sont alors α^* et $-\alpha^*$.

(ii) Type A'_1 : il existe un $\alpha \in \mathrm{M}$ tel que les racines soient α, $-\alpha$, 2α, -2α. Les coracines sont alors α^*, $-\alpha^*$, $\alpha^*/2$, $-\alpha^*/2$.

Définition 2.1.3. — On dit que $\alpha \in \mathrm{R}$ est *indivisible* si $\alpha/2 \notin \mathrm{R}$. On dit que $\mathscr{R}$ est *réduite* si toute racine est indivisible.

Pour que $\mathscr{R}$ soit réduite, il faut et il suffit que $\mathscr{R}^*$ le soit. Si α est indivisible et si $w \in \mathrm{W}$, alors $w(\alpha)$ est indivisible.

Définition 2.1.4. — Soit $\alpha \in \mathrm{R}$. Si α est indivisible, on pose $\mathrm{ind}(\alpha) = \alpha$. Sinon, on pose $\mathrm{ind}(\alpha) = \alpha/2$.

Corollaire 2.1.5. — *Si $\alpha \in \mathrm{R}$ est indivisible et si $k\,\alpha \in \mathrm{R}$, où $k \in \mathbb{Q}$, alors $k \in \mathbb{Z}$.*

Proposition 2.1.6. — *Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle. Alors*

$$\mathrm{ind}(\mathscr{R}) = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{ind}(\mathrm{R}), \mathrm{ind}(\mathrm{R})^*)$$

est une donnée radicielle réduite, et l'on a

$$\mathrm{W}(\mathrm{ind}(\mathscr{R})) = \mathrm{W}(\mathscr{R}).$$

En effet, $\mathrm{ind}(\mathscr{R})$ est une donnée radicielle par 1.2.11, car le groupe de Weyl permute les racines indivisibles. La seconde assertion résulte de 2.1.1.

94 ***Remarque 2.1.7***. — Si $\mathscr{R}$ n'est *pas réduite*, on a $\mathrm{ind}(\mathrm{R})^* \neq \mathrm{ind}(\mathrm{R}^*)$ et donc $\mathrm{ind}(\mathscr{R}^*) \neq \mathrm{ind}(\mathscr{R})^*$.

2.2. Racines orthogonales

Lemme 2.2.1. — *Soient α et β deux racines. On a*

$$\ell(\alpha)\,(\alpha^*, \beta) = \ell(\beta)\,(\beta^*, \alpha). \tag{11}$$

Cela résulte aussitôt de 1.2.1, formules (9) et (10).

Corollaire 2.2.2. — *Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(\alpha^*, \beta) = 0$, (ibis) $(\beta^*, \alpha) = 0$,

(ii) $(p(\alpha), \beta) = 0$,

(iii) $s_\alpha(\beta) = \beta$, (iii bis) $s_\beta(\alpha) = \alpha$,

(iv) $s_\alpha(\beta^*) = \beta^*$, (iv bis) $s_\beta(\alpha^*) = \alpha^*$,

(v) $s_\alpha \neq s_\beta$ *et* s_α *et* s_β *commutent.*

Toutes les équivalences sont immédiates, sauf celles qui portent sur (v). Montrons que (i) (et (i bis)) entraînent (v). On a

$$s_\alpha s_\beta(x) = x - (\beta^*, x)\,\beta - (\alpha^*, x)\,\alpha + (\beta^*, x)\,(\alpha^*, \beta)\,\alpha.$$

Si $(\alpha^*, \beta) = 0$, alors $(\beta^*, \alpha) = 0$ et $s_\alpha s_\beta(x) = s_\beta s_\alpha(x)$.

Supposons réciproquement (v). On a alors

$$s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta = s_{s_\beta(\alpha)} \qquad \text{(par 1.2.10)}.$$

Par 2.1, il existe donc $k \in \mathbb{Q}^*$ tel que $\alpha = k\, s_\beta(\alpha) = k\,\alpha - k\,(\beta^*, \alpha)\,\beta$. Comme $s_\alpha \neq s_\beta$, alors β et α ne sont pas proportionnelles par 2.1.1, donc $(\beta^*, \alpha) = 0$.

Définition 2.2.3. — Deux racines vérifiant les conditions équivalentes de 2.2.2 sont dites *orthogonales*.

Remarque 2.2.4. — Les racines α et β sont orthogonales si et seulement si les coracines **95**
α^* et β^* sont orthogonales.

Lemme 2.2.5. — *Si α et β sont deux racines orthogonales, alors $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$ si et seulement si $\alpha - \beta \in \mathrm{R}$.*

En effet $s_\beta(\alpha + \beta) = s_\beta(\alpha) + s_\beta(\beta) = \alpha - \beta$.

Lemme 2.2.6. — *Soient α et β deux racines non orthogonales. Si on définit $\ell(\gamma^*)$ pour une coracine γ^* comme ℓ de la racine γ^* de $\mathscr{R}^*$, on a la relation*

$$\ell(\alpha)\ell(\alpha^*) = \ell(\beta)\ell(\beta^*). \tag{12}$$

En effet, multipliant la formule (11) par la formule correspondante pour $\mathscr{R}^*$, et tenant compte de l'égalité $(\gamma^*)^* = \gamma$ pour tout $\gamma \in \mathrm{R}$, on trouve :

$$(\beta^*, \alpha)\,(\alpha^*, \beta)\,\ell(\alpha)\,\ell(\alpha^*) = (\beta^*, \alpha)\,(\alpha^*, \beta)\,\ell(\beta)\,\ell(\beta^*).$$

2.3. Cas général

Proposition 2.3.1. — *Si α et β sont deux racines quelconques, on a*

$$0 \leqslant (\alpha^*, \beta)(\beta^*, \alpha) \leqslant 4. \tag{13}$$

Si α et β ne sont ni proportionnelles, ni orthogonales, on a

$$1 \leqslant (\alpha^*, \beta)(\beta^*, \alpha) \leqslant 3.$$

En effet, on a $4\,(p(\alpha), \beta)^2 = \ell(\alpha)\ell(\beta)(\alpha^*, \beta)(\beta^*, \alpha)$. D'autre part, d'après 1.2.6, la forme bilinéaire symétrique $(p(x), y)$ est positive non dégénérée sur $\mathscr{V}(\mathrm{R})$, d'où $(p(x), y)^2 \leqslant \ell(x)\,\ell(y)$ [(4)].

Corollaire 2.3.2. — *Soient α et β deux racines non orthogonales. Si $\ell(\alpha) = \ell(\beta)$, il existe $w \in \mathrm{W}$ tel que $w(\alpha) = \beta$.*

En effet, si α et β sont proportionnelles, comme $\ell(\alpha) = \ell(\beta)$, on a $\alpha = \beta$ ou **96**
$\alpha = -\beta$; en ce cas on prend $w = 1$ ou $w = s_\alpha$. Si α et β ne sont ni proportionnelles, ni orthogonales, on a, d'après la formule (11) et 2.3.1 :

$$(\beta^*, \alpha) = (\alpha^*, \beta) = \pm 1.$$

Si $(\beta^*, \alpha) = (\alpha^*, \beta) = 1$, on prend $w = s_\beta s_\alpha s_\beta$. Si $(\beta^*, \alpha) = (\alpha^*, \beta) = -1$, on prend $w = s_\alpha s_\beta$.

---

(4) N.D.E. : avec égalité si et seulement si x et y sont proportionnels

Corollaire 2.3.3. — *Si α et β sont deux racines, si $\alpha \neq \beta$ et $(\beta^*, \alpha) > 0$ (resp. si $\alpha \neq -\beta$ et $(\beta^*, \alpha) < 0$), alors $\alpha - \beta$ (resp. $\alpha + \beta$) est une racine.*

Le second cas se déduit du premier en changeant β en $-\beta$. Si α et β sont proportionnelles et si $(\beta^*, \alpha) > 0$, alors on a $\beta = \alpha$, $2\beta = \alpha$ ou $\beta = 2\alpha$. Le premier cas est exclu. Dans les autres, on a respectivement $\alpha - \beta = \beta \in \mathrm{R}$ ou $\alpha - \beta = -\alpha \in \mathrm{R}$. Si α et β ne sont pas proportionnelles, (α^*, β) et (β^*, α) sont deux entiers strictement positifs de produit au plus 3. L'un d'eux est donc égal à 1. Si $(\beta^*, \alpha) = 1$, on a $\alpha - \beta = s_\beta(\alpha) \in \mathrm{R}$; si $(\alpha^*, \beta) = 1$, on a $\alpha - \beta = -s_\alpha(\beta) \in \mathrm{R}$.

Lemme 2.3.4. — *Soient α et β deux racines non proportionnelles. Si $\beta - \alpha$ n'est pas une racine, alors $\beta + k\,\alpha \in \mathrm{R}$ pour $k = -(\alpha^*, \beta)$, mais pas pour $k = -(\alpha^*, \beta) + 1$.*

En effet, on a $\beta - (\alpha^*, \beta)\,\alpha = s_\alpha(\beta) \in \mathrm{R}$, mais $\beta + (-(\alpha^*, \beta) + 1)\,\alpha = s_\alpha(\beta - \alpha) \notin \mathrm{R}$.

Proposition 2.3.5. — *Soient α et β deux racines non proportionnelles. L'ensemble des entiers k tels que $\beta + k\,\alpha \in \mathrm{R}$ est un intervalle $[p, q]$ ($p \leqslant 0$, $q \geqslant 0$) et on a $p + q = -(\alpha^*, \beta)$.*

97 Pour la première assertion, il suffit par exemple de prouver que si $\beta + k\,\alpha \in \mathrm{R}$, k entier > 0, alors $\beta + (k-1)\,\alpha \in \mathrm{R}$. Si $k = 1$, c'est trivial. Si $k \geqslant 2$, on a

$$(\alpha^*, \beta + k\,\alpha) = (\alpha^*, \beta) + 2k \geqslant -3 + 4 > 0,$$

et on conclut par 2.3.3. Soit donc $[p, q]$ l'intervalle en question. Appliquant 2.3.4 à $\beta + p\,\alpha$, on trouve

$$q - p = -(\alpha^*, \beta + p\,\alpha) = -(\alpha^*, \beta) - 2p. \qquad {}^{(5)}$$

Remarque 2.3.6. — La formule précédente contient les énoncés qualitatifs 2.2.5 et 2.3.3.

Compléments 2.3.7. — (6) D'après 1.2.1 (9) et 1.2.6, la forme bilinéaire sur $\mathscr{V}(\mathrm{R})$ définie par

$$\langle x, y \rangle = (p(x), y)$$

est symétrique et *définie positive*. D'après 1.2.1 (10), pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$ et $y \in \mathscr{V}(\mathrm{R})$,

$$\langle \alpha, y \rangle = \frac{\ell(\alpha)}{2}(\alpha^*, y),$$

où $\ell(\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle$. Par conséquent, on déduit de 2.3.3 le corollaire suivant.

Corollaire. — *Soient $\alpha \neq \beta$ dans R. Si $\alpha - \beta \notin \mathrm{R}$, alors $\langle \alpha, \beta \rangle \leqslant 0$.*

(5) N.D.E. : On a corrigé $+2p$ en $-2p$.
(6) N.D.E. : On a ajouté ces compléments, utiles pour la démonstration de 3.1.5.

3. Racines simples, racines positives

3.1. Systèmes de racines simples

Lemme 3.1.1. — *Soient* α *et* α_i, $i = 1, \dots, n$, *des racines. Supposons* α *distinct des* α_i. *Si l'on a une relation*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} q_i \, \alpha_i, \qquad q_i \in \mathbb{Q}_+,$$

il existe un indice i *tel que* $q_i \neq 0$, $(\alpha^*, \alpha_i) > 0$, $\alpha - \alpha_i \in \mathrm{R}$.

En effet, on écrit $2 = (\alpha^*, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} q_i \, (\alpha^*, \alpha_i)$, ce qui prouve les deux premières assertions. La troisième résulte alors de 2.3.3.

Proposition 3.1.2. — *Soient* α *et* α_i, $i = 1, \dots, n$, *des racines. Si*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \alpha_i, \qquad m_i \in \mathbb{N}_+,$$

il existe une suite $\beta_1, \dots, \beta_m$ *de racines prises parmi les* α_i (*non nécessairement deux* **98**
à deux distinctes) *telle que si l'on note*

$$\gamma_p = \sum_{i=1}^{p} \beta_i, \qquad p = 1, \dots, m,$$

on ait $\gamma_p \in \mathrm{R}$ *et* $\gamma_m = \alpha$.

Raisonnons par récurrence sur l'entier $\sum m_i = m'$. Si α est égal à l'un des α_i, soit α_{i_0} (ce qui est automatique si $m' = 1$), on prend $m = 1$, $\beta_1 = \alpha_{i_0}$. Sinon, on applique le lemme précédent et il existe un indice i tel que $m_i \neq 0$ et que $\alpha - \alpha_i$ soit une racine. On a alors $(m_i - 1) \in \mathbb{N}$ et

$$\alpha - \alpha_i = (m_i - 1) \, \alpha_i + \sum_{j \neq i} m_j \, \alpha_j.$$

Il n'y a plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à $\alpha - \alpha_i$.

Corollaire 3.1.3. — *Soit* $\mathrm{R}' \subset \mathrm{R}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Si* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}'$ *et* $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$, *alors* $\alpha + \beta \in \mathrm{R}'$.

(ii) $(\mathbb{N} \cdot \mathrm{R}') \cap \mathrm{R} \subset \mathrm{R}'$.

En effet, on clairement (ii)$\Rightarrow$ (i). La réciproque résulte aussitôt de la proposition.

Définition 3.1.4. — Un ensemble de racines vérifiant les conditions de 3.1.3 est dit *clos*.

Proposition 3.1.5. — *Soit* $\Delta \subset \mathrm{R}$ *un ensemble de racines. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les éléments de* Δ *sont indivisibles, linéairement indépendants et* **99**

$$\mathrm{R} \subset (\mathbb{Q}_+ \cdot \Delta) \cup (-\mathbb{Q}_+ \cdot \Delta).$$

(ii) *Les éléments de Δ sont linéairement indépendants et*

$$\mathrm{R} \subset (\mathbb{N} \cdot \Delta) \cup (-\mathbb{N} \cdot \Delta).$$

(iii) *Toute racine s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des éléments de Δ, à coefficients entiers tous de même signe.*

[7] On a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (iii). Notons $\alpha_1, \dots \alpha_n$ les éléments (distincts) de Δ. Prouvons (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $\alpha \in \mathrm{R}$. On a donc une écriture unique

$$\varepsilon\, \alpha = \sum q_i\, \alpha_i \qquad q_i \in \mathbb{Q}_+,\ \varepsilon = \pm 1.$$

Montrons que les q_i sont entiers. Cela est certainement vrai s'ils sont tous nuls sauf un (cf. 2.1.5). Sinon, α est distinct des α_i et en appliquant 3.1.1, on trouve un i_0 tel que $\alpha' = \varepsilon\alpha - \alpha_{i_0} \in \mathrm{R}$ et $q_{i_0} \neq 0$. Cela donne

$$\alpha' = (q_{i_0} - 1)\, \alpha_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} q_i\, \alpha_i.$$

100 Comme l'un au moins des q_i, $i \neq i_0$ est non nul, (i) entraîne $q_{i_0} - 1 \geqslant 0$. On recommence l'opération pour α' et au bout d'un nombre fini de pas, on a démontré que les q_i sont entiers.

Montrons (iii) $\Rightarrow$ (i). Montrons que $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Dans le cas contraire, on aurait une égalité

$$x = \sum_{i \in \mathrm{I}} a_i\, \alpha_i = \sum_{j \in \mathrm{J}} b_j\, \alpha_j,$$

où I, J sont deux parties disjointes de $\{1, \dots, n\}$, l'une au moins, disons I, étant non vide, et $a_i, b_j \in \mathbb{N}^*$. D'après le corollaire 2.3.7, on a $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \leqslant 0$ si $i \in \mathrm{I}$ et $j \in \mathrm{J}$, d'où $\langle x, x \rangle \leqslant 0$ et donc $x = 0$. Soit $i_0 \in \mathrm{I}$, alors les égalités

$$\alpha_{i_0} = \alpha_{i_0} + \sum_{i \in \mathrm{I}} a_i\, \alpha_i = \alpha_{i_0} + \sum_{j \in \mathrm{J}} b_j\, \alpha_j$$

entraînent (d'après (iii)) $a_i = 0 = b_j$ pour tout i, j, une contradiction. Ceci montre que les éléments de Δ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$; montrons qu'ils sont aussi indivisibles.

Soit donc $\beta \in \Delta$ divisible. On a $\beta/2 \in \mathrm{R}$, d'où

$$\frac{\beta}{2} = \varepsilon \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha\, \alpha, \qquad m_\alpha \in \mathbb{N},\ \varepsilon = \pm 1,$$

donc aussi $\beta = 2\varepsilon \sum_\alpha m_\alpha\, \alpha$, d'où par unicité $m_\alpha = 0$ si $\alpha \neq \beta$ et $2\varepsilon m_\beta = 1$, une contradiction.

Définition 3.1.6. — Un ensemble Δ de racines vérifiant les conditions de 3.1.5 est dit *système de racines simples*, ou *base de* R.

Si $w \in \mathrm{W}$ et si Δ est un système de racines simples, alors $w(\Delta)$ est un système de racines simples.

[7] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a modifié l'ordre et détaillé la preuve de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i).

Remarque 3.1.7. — Cette définition ne fait intervenir que R et non $\mathscr{R}$, elle ne fait même intervenir en fait que ind(R).

Remarque 3.1.8. — Si Δ est un système de racines simples, Δ est une base du groupe abélien libre $\Gamma_0(\mathrm{R})$. On a donc $\mathrm{Card}(\Delta) = \mathrm{rgss}(\mathscr{R})$.

Remarque 3.1.9. — Les conditions de 3.1.5 sont alors évidemment équivalentes aux suivantes :

(i′) Les éléments de Δ sont indivisibles, en nombre $\leqslant \mathrm{rgss}(\mathrm{R})$ et $\mathrm{R} \subset (\mathbb{Q}_+ \cdot \Delta) \cup (-\mathbb{Q}_+ \cdot \Delta)$.

(ii′) On a $\mathrm{Card}(\Delta) \leqslant \mathrm{rgss}(\mathrm{R})$ et $\mathrm{R} \subset (\mathbb{N} \cdot \Delta) \cup (-\mathbb{N} \cdot \Delta)$.

Corollaire 3.1.10. — *Si Δ est un système de racines simples, alors* $\mathrm{ind}(\Delta^*)$ *est un système de coracines simples* (*i.e. un système de racines simples de* R^*).

En effet, si $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha\, \alpha$ $(a_\alpha \in \mathbb{N})$, alors $p(\alpha) = \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha\, p(\alpha)$, d'où, d'après 1.2.1 (10) :

$$\beta^* = \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha \frac{\ell(\alpha)}{\ell(\beta)}\, \alpha^*,$$

ce qui démontre que $\mathrm{ind}(\Delta^*)$ vérifie (i′). 101

[8] D'après 2.1.1, si α^* n'est *pas* indivisible, alors $\alpha^* = 2u^*$, où $u^* \in \mathrm{ind}(\Delta^*)$ (et $u = 2\alpha$). On en déduit :

Corollaire 3.1.11. — *Si Δ est un système de racines simples et si $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha\, \alpha$ $(a_\alpha \in \mathbb{Z})$ est l'écriture de β suivant Δ, alors $2\, a_\alpha \ell(\alpha)$ est divisible par $\ell(\beta)$ (et même par $2\,\ell(\beta)$ si α^* est indivisible).*

Avant de continuer à énoncer les propriétés des systèmes de racines simples, montrons qu'il en existe.

3.2. Systèmes de racines positives

Définition 3.2.1. — Un ensemble $\mathrm{R}_+ \subset \mathrm{R}$ est dit un *système de racines positives* de $\mathscr{R}$ (ou de R, cf. la remarque 3.2.2), s'il vérifie les conditions suivantes :

(P 1) $\mathrm{R}_+ \cap -\mathrm{R}_+ = \varnothing$.

(P 2) $\mathrm{R}_+ \cup -\mathrm{R}_+ = \mathrm{R}$.

(P 3) $(\mathbb{Q}_+ \cdot \mathrm{R}_+) \cap \mathrm{R} \subset \mathrm{R}_+$.

En particulier, un tel ensemble est *clos*. On verra plus tard qu'en fait un ensemble clos vérifiant (P 1) et (P 2) vérifie aussi (P 3), donc est un système de racines positives. Si $w \in \mathrm{W}$ et si R_+ est un système de racines positives, alors $w(\mathrm{R}_+)$ est un système de racines positives.

Remarque 3.2.2. — Cette définition ne fait intervenir que R. On dira aussi que R_+ 102
est un système de racines positives de R.

[8] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit, et dans 3.1.11 on a remplacé $4\, a_\alpha \ell(\alpha)$ par $2\, a_\alpha \ell(\alpha)$.

Remarque 3.2.3. — De (P 1) et (P 2), on tire aussitôt
$$\mathrm{Card}(\mathrm{R}_+) = \mathrm{Card}(\mathrm{R})/2.$$
Il en résulte que si R_+ et R'_+ sont deux systèmes de racines positives et si $\mathrm{R}_+ \subset \mathrm{R}'_+$, alors $\mathrm{R}_+ = \mathrm{R}'_+$.

Remarque 3.2.4. — Si R_+ est un système de racines positives, R^*_+ est un système de coracines positives (i.e. un système de racines positives de R^*).

Cela résulte aussitôt de 1.1.4 et 1.2.2.

Définition 3.2.5. — Soit Δ un système de racines simples. On pose
$$\mathscr{P}(\Delta) = (\mathbb{Q}_+ \cdot \Delta) \cap \mathrm{R} = (\mathbb{N}_+ \cdot \Delta) \cap \mathrm{R}.$$

Proposition 3.2.6. — *Si Δ est un système de racines simples, $\mathscr{P}(\Delta)$ est un système de racines positives. Si Δ est un système de racines simples et R_+ un système de racines positives, on a l'équivalence :*
$$\Delta \subset \mathrm{R}_+ \Longleftrightarrow \mathrm{R}_+ = \mathscr{P}(\Delta).$$

La première assertion est immédiate. Si $\Delta \subset \mathrm{R}_+$, alors $\mathscr{P}(\Delta) \subset \mathrm{R}_+$ par (P 3), donc $\mathscr{P}(\Delta) = \mathrm{R}_+$ par 3.2.3. Le reste est trivial.

Remarque 3.2.7. — Il existe des systèmes de racines positives : soit $\geqslant$ une structure d'espace vectoriel totalement ordonné sur $\mathscr{V}(\mathrm{R})$. L'ensemble des racines $\geqslant 0$ pour cette relation d'ordre est un système de racines positives.

103 ***Théorème 3.2.8***. — *Soit R_+ un système de racines positives. Il existe un unique système de racines simples $\mathscr{S}(\mathrm{R}_+)$ tel que $\mathscr{S}(\mathrm{R}_+) \subset \mathrm{R}_+$, i.e. tel que $\mathrm{R}_+ = \mathscr{P}(\mathscr{S}(\mathrm{R}_+))$.*

L'unicité résulte aussitôt de :

Lemme 3.2.9. — *Soit Δ un système de racines simples. Alors pour que $\alpha \in \mathscr{P}(\Delta)$ appartienne à Δ, il faut et il suffit que α ne soit pas somme de deux éléments de $\mathscr{P}(\Delta)$.*

Ce lemme résulte aussitôt des définitions et de 3.1.2.

Démontrons maintenant l'existence de $\mathscr{S}(\mathrm{R}_+)$. Considérons l'ensemble des parties T de R_+ telles que $\mathrm{T} = \mathrm{ind}(\mathrm{T})$ et que $(\mathbb{Q}_+ \cdot \mathrm{T}) \supset \mathrm{R}_+$. Cet ensemble est non vide, car il contient $\mathrm{ind}(\mathrm{R}_+)$. Soit Δ un élément minimal de cet ensemble pour la relation d'inclusion. Montrons que Δ est un système de racines simples, c'est-à-dire par 3.1.5 (i), que Δ est une partie libre de $\mathrm{M} \otimes \mathbb{Q}$.

Lemme 3.2.10. — *Si $\alpha, \beta \in \Delta$ et $q\,\alpha + q'\,\beta \in \mathrm{R}$, où $q, q' \in \mathbb{Q}$, alors $qq' \geqslant 0$.*

En effet, si $qq' < 0$, on peut écrire (quitte à échanger α et β)
$$a\alpha - b\beta \in \mathrm{R}_+, \qquad a, b \in \mathbb{Q}^*_+,$$
donc il existe par hypothèse une relation
$$a\alpha - b\beta = \sum_{\gamma \in \mathrm{S}} c(\gamma)\,\gamma, \qquad c(\gamma) \in \mathbb{Q}_+.$$

Si $a \leqslant c(\alpha)$, elle s'écrit

$$-\beta = \frac{c(\alpha) - a}{b}\,\alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{c(\gamma)}{b}\,\gamma.$$

Alors, cet élément appartient à $(\mathbb{Q}_+ \cdot \Delta) \cap \mathrm{R}$, qui est contenu dans R_+ d'après (P 3). Mais alors $\beta \in \mathrm{R}_+ \cap -\mathrm{R}_+$, ce qui contredit (P 1).

Si, au contraire $a > c(\alpha)$, on écrit

$$(a - c(\alpha))\,\alpha = b\beta + \sum_{\gamma \neq \alpha} c(\gamma)\,\gamma,$$

ce qui prouve que $\Delta \subset \mathbb{Q}_+ \cdot (\Delta - \{\alpha\})$, contrairement au caractère minimal de Δ. **104**

Rappelons (cf. 2.3.7) que la forme bilinéaire sur $\mathscr{V}(\mathrm{R})$ définie par $\langle x, y\rangle = (p(x), y)$ est un produit scalaire euclidien ; de plus, pour $\alpha \in \mathrm{R}$ on a $\langle \alpha, y\rangle = \ell(\alpha)\,(\alpha^*, y)/2$, de sorte que $\langle \alpha, y\rangle$ et (α^*, y) sont de même signe.

Lemme 3.2.11. — *Si $\alpha, \beta \in \Delta$, alors $(\beta^*, \alpha) \leqslant 0$ et donc $\langle \beta, \alpha\rangle \leqslant 0$.*

En effet, $s_\beta(\alpha) = \alpha - (\beta^*, \alpha)\,\beta \in \mathrm{R}$, d'où $(\beta^*, \alpha) \leqslant 0$ d'après 3.2.10.

Démontrons maintenant que Δ est libre. Dans le cas contraire, 3.2.11 entraîne, comme dans la démonstration de 3.1.5, qu'il existe une relation non triviale

$$\sum_{\alpha \in \Delta} m(\alpha)\,\alpha = 0, \qquad m(\alpha) \in \mathbb{N},$$

d'où $-\alpha_0 = (m(\alpha_0) - 1)\,\alpha_0 + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} m(\alpha)\,\alpha$, si $m(\alpha_0) \geqslant 1$. Alors, d'après (P 3), α_0 appartient à $\mathrm{P} \bigcap -\mathrm{P}$, contredisant (P 1).

Ceci montre que Δ est une base de R et achève la démonstration du théorème 3.2.8.

Corollaire 3.2.12. — *Soient* R_+ *un système de racines positives,* Δ *une base de* R *et* $w \in \mathrm{W}$*. On a :*

$$\begin{gathered}\Delta \subset \mathrm{R}_+ \iff \mathrm{R}_+ = \mathscr{P}(\Delta) \iff \Delta = \mathscr{S}(\mathrm{R}_+)\\ \mathscr{P}(\mathrm{ind}(\Delta^*)) = \mathscr{P}(\Delta)^*, \qquad \mathscr{S}(\mathrm{R}_+^*) = \mathrm{ind}(\mathscr{S}(\mathrm{R}_+)^*);\\ \mathscr{S}(w(\mathrm{R}_+)) = w(\mathscr{S}(\mathrm{R}_+)), \qquad \mathscr{P}(w(\Delta)) = w(\mathscr{P}(\Delta)).\end{gathered}$$

Définition 3.2.13. — Si on a choisi un système de racines simples Δ, les éléments de $\mathscr{P}(\Delta)$ seront dits positifs. Si on a choisi un système de racines positives R_+, les éléments de $\mathscr{S}(\mathrm{R}_+)$ seront dits simples. **105**

Corollaire 3.2.14. — *Soit* R_+ *un système de racines positives. Soit* $\alpha \in \mathrm{R}_+$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *α est simple* (*i.e.* $\alpha \in \mathscr{S}(\mathrm{R}_+)$).
(ii) *α n'est pas somme de deux éléments de* R_+.
(iii) $\mathrm{R}_+ - \{\alpha\}$ *est clos* (*cf.* 3.1.4).

L'équivalence de (i) et (ii) résulte aussitôt de 3.2.9. L'équivalence de (ii) et (iii) est immédiate.

Définition 3.2.15. — Soit Δ un système de racines simples. La somme des coefficients de la décomposition d'une racine α suivant Δ s'appelle l'ordre de α relativement à Δ et se note $\mathrm{ord}_\Delta(\alpha)$.

On a les équivalences :

$$\alpha \in \mathscr{P}(\Delta) \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_\Delta(\alpha) > 0, \qquad \alpha \in \Delta \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_\Delta(\alpha) = 1.$$

Lemme 3.2.16. — *Soient Δ un système de racines simples et $\alpha \in \mathscr{P}(\Delta)$. Il existe une suite $\alpha_i \in \Delta$, $i = 1, \ldots, m$, telle que*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p \in \mathscr{P}(\Delta) \quad \text{pour} \quad p = 1, \ldots m,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \alpha.$$

De plus, pour toute suite α_i vérifiant ces conditions, on a $m = \mathrm{ord}_\Delta(\alpha)$.

Trivial par 3.1.2.

106 **3.3. Caractérisation et conjugaison des systèmes de racines positives**

Lemme 3.3.1. — *Si $\alpha \in \mathscr{P}(\Delta)$, $\beta \in \Delta$ et si α et β ne sont pas proportionnelles, alors $s_\beta(\alpha) \in \mathscr{P}(\Delta)$.*

En effet, $s_\beta(\alpha) = \alpha - (\beta^*, \alpha)\,\beta$. Comme il y a au moins une racine simple autre que β qui intervient dans la décomposition de α avec un coefficient non nul (donc strictement positif), donc aussi dans la décomposition de $s_\beta(\alpha)$ avec le même coefficient, $s_\beta(\alpha)$ est aussi positive.

Corollaire 3.3.2. — *Si $\beta \in \Delta$, la symétrie s_β échange les éléments de $\mathscr{P}(\Delta)$ non proportionnels à β.*

Lemme 3.3.3. — *Si $\alpha \in \mathscr{P}(\Delta) - \Delta$, α indivisible, il existe $\beta \in \Delta$ tel que $s_\beta(\alpha) \in \mathscr{P}(\Delta)$ et $\mathrm{ord}_\Delta(s_\beta(\alpha)) < \mathrm{ord}_\Delta(\alpha)$.*

En effet, d'après 3.1.1 il existe $\beta \in \Delta$ tel que $(\beta^*, \alpha) > 0$. Comme $\alpha \notin \Delta$ et est indivisible, α ne peut être proportionnel à β. Donc, $s_\beta(\alpha) \in \mathscr{P}(\Delta)$, d'après 3.3.1, et l'on a $\mathrm{ord}_\Delta(s_\beta(\alpha)) = \mathrm{ord}_\Delta(\alpha) - (\beta^*, \alpha) < \mathrm{ord}_\Delta(\alpha)$.

Corollaire 3.3.4. — *Si $\alpha \in \mathscr{P}(\Delta)$ est indivisible, il existe une suite $\beta_p \in \Delta$, $p = 1, \ldots, q$, telle que*

$$\alpha_p = s_{\beta_p} \cdots s_{\beta_1}(\alpha) \in \mathscr{P}(\Delta) \qquad \textit{pour} \quad p = 1, \ldots q,$$

et $\alpha_q \in \Delta$.

Cela résulte de 3.3.3 par récurrence sur $\mathrm{ord}_\Delta(\alpha)$.

Proposition 3.3.5. — *Le groupe de Weyl est engendré par les s_α, pour $\alpha \in \Delta$. Toute racine indivisible est conjuguée d'une racine simple par un élément du groupe de Weyl.*

107 La seconde assertion résulte aussitôt de 3.3.4. La première en résulte par 1.2.10 et 2.1.1.

Proposition 3.3.6. — *Soit* R_+ *un système de racines positives. Soit* $\mathrm{P}' \subset \mathrm{R}$ *vérifiant* (P 2) *et* clos. *Alors il existe $w \in \mathrm{W}$ tel que $w(\mathrm{R}_+) \subset \mathrm{P}'$.*

Énonçons tout de suite les corollaires.

Corollaire 3.3.7. — *Le groupe de Weyl opère* transitivement *sur l'ensemble des systèmes de racines positives* (*resp. des systèmes de racines simples*).

Corollaire 3.3.8. — *Pour qu'une partie de* R *soit un système de racines positives, il faut et il suffit qu'elle vérifie* (P 1) *et* (P 2) *et soit* close.

Corollaire 3.3.9. — *Si l'on munit* $\Gamma_0(\mathrm{R})$ *d'une structure de groupe ordonné telle que toute racine soit* > 0 *ou* < 0, *l'ensemble des racines positives pour cette structure d'ordre est un système de racines positives.*

Démontrons maintenant 3.3.6. On peut trouver un $w \in \mathrm{W}$ tel que $\mathrm{Card}(w(\mathrm{R}_+) \cap \mathrm{P}')$ soit maximum, donc en remplaçant R_+ par $w(\mathrm{R}_+)$, on peut supposer que

$$(*) \qquad \mathrm{Card}(\mathrm{R}_+ \cap \mathrm{P}') \geqslant \mathrm{Card}(\mathrm{R}_+ \cap s_\alpha(\mathrm{P}'))$$

pour tout $\alpha \in \mathscr{S}(\mathrm{R}_+) = \Delta$. Prouvons que $\mathrm{R}_+ \subset \mathrm{P}'$. Sinon, P' étant clos, il existe $\alpha \in \Delta$, $\alpha \notin \mathrm{P}'$. Mais P' vérifiant (P 2), on a alors $-\alpha \in \mathrm{P}'$ (donc $-2\alpha \in \mathrm{P}'$ si 2α est racine). Pour tout $\beta \in \mathrm{R}_+ \cap \mathrm{P}'$, on a $\beta \neq \alpha$; si 2α n'est pas racine, on a alors $s_\alpha(\beta) \in \mathrm{R}_+$ (par 3.3.1), donc

$$s_\alpha(\mathrm{R}_+ \cap \mathrm{P}') \subset \mathrm{R}_+ \cap s_\alpha(\mathrm{P}');$$

mais $\mathrm{R}_+ \cap s_\alpha(\mathrm{P}')$ contient aussi $\alpha = s_\alpha(-\alpha)$, ce qui contredit l'inégalité $(*)$. Si 2α est racine, on raisonne de même.

Pour étudier les ensembles de racines vérifiant (P 2) et *clos*, on est donc ramené au cas où ils contiennent un ensemble de racines positives.

Proposition 3.3.10. — *Soient* R_+ *un système de racines positives et* P' *une partie* 108
close *de* R *contenant* R_+. *Si on note* $\Delta = \mathscr{S}(\mathrm{R}_+)$ *et* $\Delta' = \Delta \cap -\mathrm{P}'$, *alors* P' *est la réunion de* R_+ *et de l'ensemble des racines qui sont combinaison linéaire à coefficients négatifs des éléments de* Δ'.

Démontrons l'assertion par récurrence sur l'ordre d'une racine $\gamma \in \mathrm{P}' - \mathrm{R}_+$. Si $\mathrm{ord}_\Delta(\gamma) = -1$, alors $-\gamma \in \Delta$ et $\gamma \in -\Delta'$. Si $\mathrm{ord}_\Delta(\gamma) < -1$, il existe, d'après 3.1.2, $\beta \in \Delta$ telle que $-\gamma - \beta \in \mathrm{R}$; alors

$$0 < \mathrm{ord}_\Delta(-\gamma - \beta) = \mathrm{ord}_\Delta(-\gamma) - 1 < \mathrm{ord}_\Delta(-\gamma)$$

et la première inégalité montre que $-\gamma - \beta \in \mathrm{R}_+$. Donc, comme $\mathrm{R}_+ \cap -\mathrm{R}_+ = \varnothing$ et comme $\gamma + \beta$ est la somme de deux racines de P', c'est un élément de $\mathrm{P}' - \mathrm{R}_+$, tel que $\mathrm{ord}_\Delta(\gamma+\beta) > \mathrm{ord}_\Delta(\gamma)$. Donc, par l'hypothèse de récurrence, $\gamma+\beta$ est une combinaison linéaire à coefficients négatifs des éléments de Δ'. Comme $\gamma = (\gamma+\beta) - \beta$, il suffit de vérifier que $\beta \in -\mathrm{P}'$. Or $\gamma \in \mathrm{P}'$ et $-(\gamma+\beta) \in \mathrm{R}_+ \subset \mathrm{P}'$, de sorte que $-\beta = \gamma - (\gamma+\beta)$ appartient à P'.

Définition 3.3.10.1. — [9] On dit qu'une partie R' de R est *symétrique* si $-\mathrm{R}' = \mathrm{R}'$.

[9] N.D.E. : On a inséré ici cette définition.

Scholie 3.3.11. — Soit P' un ensemble de racines vérifiant (P 2) et *clos*. Il existe un système de racines simples Δ et une partie Δ' de Δ tels que

$$\mathrm{P}' = \mathrm{R} \cap (\mathbb{N}\cdot\Delta \cup -\mathbb{N}\cdot\Delta').$$

Si on note $\mathrm{R}_{\Delta'} = (\mathbb{Z}\cdot\Delta')\cap\mathrm{R}$, qui est une partie close et symétrique de R, alors P' est donc la réunion disjointe de $\mathrm{R}_{\Delta'}$ et de la partie close de $\mathscr{P}(\Delta)$ formée des $\alpha \in \mathscr{P}(\Delta) - \mathbb{N}\cdot\Delta'$, i.e. des racines positives qui dans la décomposition sur Δ « contiennent au moins une racine de $\Delta - \Delta'$ ».

3.4. Ensembles de racines clos et symétriques

Proposition 3.4.1. — *Soient* $\mathscr{R} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}'^*)$ *une donnée radicielle et* R' *une partie* close et symétrique *de* R. *Alors :*

(i) $\mathscr{R}' = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}', \mathrm{R}'^*)$ *est une donnée radicielle ;*

109 (ii) *pour tout système de racines positives* R_+ *de* R, $\mathrm{R}'_+ = \mathrm{R}_+ \cap \mathrm{R}'$ *est un système de racines positives de* R' *;*

(iii) *le groupe de Weyl* $\mathrm{W}(\mathscr{R}')$ *de* $\mathscr{R}'$ *est le sous-groupe de* $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ *engendré par les* s_α, *pour* $\alpha \in \mathrm{R}'$.

La première assertion est triviale par 1.2.11, la seconde résulte de 3.3.8, la troisième est évidente.

Corollaire 3.4.2. — *Soit* $w \in \mathrm{W}(\mathscr{R}')$. *L'ordre de* w *est le plus petit entier* $n > 0$ *tel que* $w^n(\alpha') = \alpha'$ *pour tout* $\alpha' \in \mathrm{R}'$.

Il suffit d'appliquer 1.2.7 à la donnée radicielle $\mathscr{R}'$.

Corollaire 3.4.3. — *Soient* α *et* β *deux racines non proportionnelles. Soit* n *le plus petit entier* > 0 *tel que* $(s_\alpha s_\beta)^n(\alpha) = \alpha$ *et* $(s_\alpha s_\beta)^n(\beta) = \beta$. *Alors le sous-groupe* $\mathrm{W}_{\alpha,\beta}$ *de* W *engendré par* s_α *et* s_β *est défini par les relations :*

$$s_\alpha^2 = 1, \qquad s_\beta^2 = 1, \qquad (s_\alpha s_\beta)^n = 1.$$

Compte tenu de 3.4.2, il suffit de vérifier :

Lemme 3.4.4. — *Soit* G *le groupe engendré par deux éléments* x *et* y *soumis aux relations* $x^2 = y^2 = 1$. *Tout sous-groupe invariant de* G *ne contenant ni* x *ni* y *est engendré (comme sous-groupe invariant) par un élément de la forme* $(xy)^n$, *où* $n > 0$.

[10] En effet, tout élément de G s'écrit $(xy)^n$, ou $(yx)^n = (xy)^{-n}$, ou :

(a) $$x(yx)^{2n} \quad \text{ou} \quad y(xy)^{2n+1}$$

(b) $$y(xy)^{2n} \quad \text{ou} \quad x(yx)^{2n+1},$$

où $n \in \mathbb{N}$. Or les éléments du type (a), resp. (b), sont conjugués à x, resp. à y.

[10] N.D.E. : On a corrigé l'original dans ce qui suit.

Remarque 3.4.5. — On calcule immédiatement l'entier n : si on pose
$$(\alpha^*, \beta) = p, \qquad (\beta^*, \alpha) = q,$$
on a [11] 110
$$(s_\alpha s_\beta)(\alpha) = (pq - 1)\,\alpha - q\,\beta, \qquad (s_\alpha s_\beta)(\beta) = p\,\alpha - \beta.$$
L'entier n est donc l'ordre de la matrice
$$\begin{pmatrix} pq-1 & p \\ -q & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $pq = 0$, alors $p = q = 0$, d'après 2.2.2, d'où $n = 2$. Sinon, d'après 2.3.1, pq égale 1, 2, ou 3, et l'on trouve, respectivement, $n = 3$, 4 ou 6.

N. B. En écrivant que l'ordre de la matrice précédente est fini, on retrouve l'inégalité (13) de 2.3.1.

Définition 3.4.6. — Soit Δ un système de racines simples et $\Delta' \subset \Delta$. On note
$$\mathrm{R}_{\Delta'} = \mathrm{R} \cap (\mathbb{Q} \cdot \mathrm{S}') = \mathrm{R} \cap (\mathbb{Z} \cdot \Delta').$$

Lemme 3.4.7. — $\mathrm{R}_{\Delta'}$ *est clos et symétrique,* Δ' *est un système de racines simples de la donnée radicielle* $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}_{\Delta'}, \mathrm{R}^*_{\Delta'})$*, dont le groupe de Weyl est le sous-groupe* $\mathrm{W}_{\Delta'}$ *de* W *engendré par les* s_α*, pour* $\alpha \in \Delta'$*. On a* $\Delta \cap \mathrm{R}_{\Delta'} = \Delta'$*.*

Trivial.

Proposition 3.4.8. — *Soit* $\mathrm{R}' \subset \mathrm{R}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un sous-espace vectoriel* V' *de* V (*ou de* $\mathscr{V}(\mathrm{R})$) *tel que* $\mathrm{R}' = \mathrm{R} \cap \mathrm{V}'$*.*

(ii) *Il existe un système de racines simples* Δ *de* R *et une partie* Δ' *de* Δ *telle que* $\mathrm{R}' = \mathrm{R}_{\Delta'}$*.*

Plus précisément, sous ces conditions, tout système de racines simples Δ' *de* 111 $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}', \mathrm{R}'^*)$ *est contenu dans un système de racines simples* Δ *de* R *et l'on a* $\mathrm{R}' = \mathrm{R}_{\Delta'}$*.*

On a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons (i) vérifiée : alors R' est clos et symétrique, donc $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}', \mathrm{R}'^*)$ est une donnée radicielle. Soient Δ' un système de racines simples de cette donnée et $\mathrm{R}'_+ = \mathscr{P}(\Delta')$. Si $\mathrm{V}' = \mathrm{V}$, alors Δ' est un système de racines simples de R et on a terminé. Sinon, il existe $x \in \mathrm{V}^*$ tel que
$$(x, \mathrm{V}') = \{0\}, \qquad (x, \alpha) \neq 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathrm{R} - \mathrm{R}'.$$
Posons $\mathrm{R}_+(x) = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid (x, \alpha) > 0\}$ et $\mathrm{R}_+ = \mathrm{R}_+(x) \cup \mathrm{R}'_+$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on a les équivalences
$$(x, \alpha) > 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}_+(x),$$
$$(x, \alpha) < 0 \Longleftrightarrow \alpha \in -\mathrm{R}_+(x),$$
$$(x, \alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}'.$$
Il résulte aussitôt de 3.3.8 que R_+ est un système de racines positives de R. Posons $\Delta = \mathscr{S}(\mathrm{R}_+)$. Il suffit évidemment de prouver $\Delta' \subset \Delta$. Sinon soit $\alpha \in \Delta' - \Delta$. Alors,

[11] N.D.E. : On a corrigé l'original dans ce qui suit.

par 3.2.14, il existe $\beta, \gamma \in \mathrm{R}_+$ tels que $\alpha = \beta + \gamma$. Si $\beta, \gamma \in \mathrm{R}_+(x)$, on a $\alpha \in \mathrm{R}_+(x)$, ce qui est absurde car $(x, \mathrm{S}') = 0$. Si β ou γ, par exemple β, appartient à R'_+, alors, comme R' est symétrique et clos, $\gamma = \alpha - \beta$ appartient à $\mathrm{R}_+ \cap \mathrm{R}' = \mathrm{R}'_+$; mais alors α n'est pas simple dans R'_+.

Lemme 3.4.9. — *Sous les conditions précédentes, soit $\alpha \in \mathscr{P}(\Delta) - \mathrm{R}'$. Pour tout $w \in \mathrm{W}_{\Delta'}$, on a $w(\alpha) \in \mathscr{P}(\Delta) - \mathrm{R}'$.*

Il suffit en effet de le vérifier pour $w = s_\beta$, $\beta \in \Delta'$, auquel cas cela résulte de 3.3.1 et de ce que $s_\beta(\mathrm{R}') = \mathrm{R}'$.

112 ***Lemme 3.4.10***. — *Soit $w \in \mathrm{W}$. Sous les conditions de* 3.4.8, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $w \in \mathrm{W}_{\Delta'}$.

(ii) *Pour tout $m \in \mathrm{M}$, $w(m) - m \in \mathrm{V}'$.*

(iii) *Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, $w(\alpha) - \alpha \in \mathrm{V}'$.*

On a évidement (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Prouvons (iii) $\Rightarrow$ (i). Soit donc $w \in \mathrm{W}$ tel que $w(\alpha) - \alpha \in \mathrm{V}'$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$. Écrivons $w = s_{\alpha_n} \cdots s_{\alpha_1}$, avec $\alpha_i \in \Delta$, et montrons par récurrence sur n que chaque $\alpha_i \in \Delta'$. On peut supposer que $w' = s_{\alpha_{n-1}} \cdots s_{\alpha_1} \in \mathrm{W}_{\Delta'}$. On a alors, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$,

$$w(\alpha) - \alpha = w'(\alpha) - \alpha - (\alpha_n^*, w'(\alpha))\, \alpha_n.$$

Prenant $\alpha = w'^{-1}(\alpha_n)$, on trouve $2\,\alpha_n \in \mathrm{V}'$, d'où $\alpha_n \in \Delta'$, donc $w = s_{\alpha_n} w'$ appartient à $\mathrm{W}_{\Delta'}$.

3.5. Remarques diverses

Proposition 3.5.1. — *Soit R_+ un système de racines positives. Notons*

$$\rho_{\mathrm{R}_+} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathrm{ind}(\mathrm{R}_+)} \alpha.$$

Alors $(\beta^*, \rho_{\mathrm{R}_+}) = 1$ pour tout $\beta \in \mathscr{S}(\mathrm{R}_+)$.

En effet, on peut écrire

$$2\rho_{\mathrm{R}_+} = \beta + \sum_{\substack{\alpha \in \mathrm{ind}(\mathrm{R}_+) \\ \alpha \neq \beta}} \alpha,$$

donc $s_\beta(2\rho_{\mathrm{R}_+}) = 2\rho_{\mathrm{R}_+} - 2\beta$, par 3.3.2.

113 ***Corollaire 3.5.2***. — *Posons $\rho^*_{\mathrm{R}_+} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha^* \in \mathrm{ind}(\mathrm{R}^*_+)} \alpha^*$. Alors :*

(i) $(\rho^*_{\mathrm{R}_+}, \alpha) > 0$ *pour tout $\alpha \in \mathrm{R}_+$ (i.e. $\rho^*_{\mathrm{R}_+} \in \mathscr{C}(\mathrm{R}_+)$, cf.* 3.6.8).

(ii) *Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on a* $\mathrm{ord}_{\mathscr{S}(\mathrm{R}_+)}(\alpha) = (\rho^*_{\mathrm{R}_+}, \alpha)$. [12]

[12] N.D.E. : En effet, d'après 3.1.5, il suffit de vérifier la formule pour $\alpha \in \Delta$. Or, d'après 3.5.1 appliqué à R^*, on a dans ce cas $(\rho^*_{\mathrm{R}_+}, \alpha) = 1 = \mathrm{ord}_{\mathscr{S}(\mathrm{R}_+)}(\alpha)$.

Remarque 3.5.3. — Si $w \in \mathrm{W}$, on a $\rho_{w(\mathrm{R}_+)} = w(\rho_{\mathrm{R}_+})$ et $\rho^*_{w(\mathrm{R}_+)} = w(\rho^*_{\mathrm{R}_+})$.

Proposition 3.5.4. — *Soient α et γ deux racines non proportionnelles, α étant supposée indivisible. Il existe un système de racines simples contenant α et une racine β telle que $\gamma = a\alpha + b\beta$, avec a, $b \in \mathbb{N}$.*

En effet, construisons une base de l'espace vectoriel $\mathscr{V}(\mathrm{R})$ contenant $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \gamma$. Considérons l'ordre lexicographique par rapport à cette base. L'ensemble des racines > 0 étant noté R_+, il est clair que R_+ est un système de racines positives et que [(13)] le plus petit élément de R_+ non proportionnel à α est simple. Cet élément est de la forme
$$\beta = p\alpha + q\gamma, \qquad 0 < q \leqslant 1.$$
On a donc $\gamma = q^{-1}\beta - q^{-1}p\alpha$, et comme $q^{-1} > 0$, on a $q^{-1} \in \mathbb{N}^*$ et $-q^{-1}p \in \mathbb{N}$.

Faisons enfin deux remarques sur le groupe $\Gamma_0(\mathrm{R})$.

Proposition 3.5.5. — *Soient* G *un groupe abélien et* $f : \mathrm{R} \to \mathrm{G}$ *une application vérifiant les deux conditions suivantes :*

(i) *Si* $\alpha \in \mathrm{R}$, $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.
(ii) *Si* α, β, $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$, $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$.

Alors il existe un homomorphisme de groupes unique $\overline{f} : \Gamma_0(\mathrm{R}) \to \mathrm{G}$ *tel que* $\overline{f}(\alpha) = f(\alpha)$ *pour* $\alpha \in \mathrm{R}$.

En effet, si Δ est un système de racines simples de R, et si $\beta \in \mathrm{R}$ s'écrit **114**
$\sum_{\alpha\in\Delta} a(\alpha)\alpha$, il résulte aussitôt de 3.2.16 que $f(\beta) = \sum_{\alpha\in\Delta} a(\alpha)f(\alpha)$. Or Δ est une base de $\Gamma_0(\mathrm{R})$.

Proposition 3.5.6. — *Soit Δ un système de racines simples. Il existe sur* $\Gamma_0(\mathrm{R})$ *une structure de groupe totalement ordonné telle que les racines* > 0 *soient les éléments de* $\mathscr{P}(\Delta)$ *et que* $\alpha \mapsto \mathrm{ord}_\Delta(\alpha)$ *soit une fonction croissante.*

Soient en effet $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($n = \mathrm{rgss}(\mathscr{R})$), les éléments de Δ. Pour $x \in \Gamma_0(\mathrm{R})$, on a une décomposition
$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i(x)\alpha_i.$$
Il suffit de prendre l'ordre lexicographique relativement aux fonctions $\sum m_i, m_n, m_{n-1}, \dots, m_2$.

Remarque 3.5.7. — Les premières racines sont dans l'ordre :
$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n;$$
on a ensuite (si ce sont des racines) $2\alpha_1$, $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_3$, ...

[(13)] N.D.E. : On a modifié l'original, pour tenir compte du cas où 2α serait une racine.

3.6. Chambres de Weyl

Lemme 3.6.1. — *Soit* V *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* [14] *de dimension finie. Soient* f_i *des formes linéaires indépendantes. Posons*

$$\mathrm{C} = \{x \in \mathrm{V} \mid f_i(x) > 0\}\,.$$

Alors C *est une partie convexe maximale de* $\mathrm{X} = \mathrm{V} - \bigcup_i f_i^{-1}(0)$.

Trivial.

115 ***Définition 3.6.2***. — Une partie C de V pouvant se décrire par le procédé de 3.6.1 sera appelée (ici) une *chambre* de V.

Définition 3.6.3. — On dit que l'hyperplan H de V est un *mur* de C si $\mathrm{H} \cap (\overline{\mathrm{C}} - \mathrm{C})$ contient une partie ouverte non vide de H.

Remarque 3.6.4. — Pour une partie convexe, l'adhérence se décrit sans faire appel à la topologie de V : c'est l'ensemble des extrémités de tous les segments ouverts contenus dans la partie donnée.

Lemme 3.6.5. — *Sous les conditions de* 3.6.1*, on a*

$$\overline{\mathrm{C}} = \{x \in \mathrm{V} \mid f_i(x) \geqslant 0\}\,.$$

Les murs de C *sont les hyperplans* $f_i^{-1}(0)$.

C'est clair pour la première assertion. La seconde résulte alors de ce que $\overline{\mathrm{C}} - \mathrm{C} \subset \bigcup_i f_i^{-1}(0)$ et de ce que les $f_i^{-1}(0)$ sont évidemment des murs de C.

Proposition 3.6.6. — *Soit* C *une chambre de* V. *Si* H_i, $i = 1, 2, \dots n$, *sont les murs distincts de* C, *alors pour tout système de formes linéaires* $\{u_i\}$ *tel que* $\mathrm{H}_i = u_i^{-1}(0)$, *il existe des* $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ *tels que* C *soit définie par*

$$\mathrm{C} = \{x \in \mathrm{V} \mid \varepsilon_i u_i(x) > 0\}.$$

Pour tout mur H *de* C, *on a* $\mathrm{H} \cap \mathrm{C} = \varnothing$ *et* $\mathrm{H} \cap \overline{\mathrm{C}} = \overline{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}$, *où* C_{H} *est une chambre dans* H. *Les murs de* $\mathrm{C}_{\mathrm{H}_i}$ *sont les* $\mathrm{H}_j \cap \mathrm{H}_i$, *pour* $j \neq i$.

Cela résulte trivialement du lemme.

Définition 3.6.7. — Les $\mathrm{C}_{\mathrm{H}_i}$ sont les *faces* de C.

Soit maintenant $\mathscr{R} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ une donnée radicielle. On pose $\mathrm{V}^*_{\mathbb{R}} = \mathrm{M}^* \otimes \mathbb{R}$.

Définition 3.6.8. — [15] Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on pose

$$\mathscr{H}_\alpha = \{x \in \mathrm{V}^*_{\mathbb{R}} \mid (x, \alpha) = 0\}.$$

116 On note $\mathrm{X} = \mathrm{V}^*_{\mathbb{R}} - \bigcup_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathscr{H}_\alpha$. Pour tout $x \in \mathrm{X}$, on pose

$$\mathrm{R}_+(x) = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid (x, \alpha) > 0\}.$$

---

[14] N.D.E. : On a remplacé $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R}$.

[15] N.D.E. : On a ajouté la définition des hyperplans $\mathscr{H}_\alpha$.

Pour tout système de racines positives R_+, on note

$$\mathscr{C}(\mathrm{R}_+) = \{x \in \mathrm{V}_{\mathbb{R}}^* \mid (x, \alpha) > 0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathrm{R}_+\}.$$

Proposition 3.6.9. — (i) *Pour tout $x \in \mathrm{X}$, $\mathrm{R}_+(x)$ est un système de racines positives. Pour tout système de racines positives R_+, $\mathscr{C}(\mathrm{R}_+)$ est une chambre dans $\mathrm{V}_{\mathbb{R}}^*$. Les $\mathscr{C}(\mathrm{R}_+)$ sont les parties convexes maximales de* X.

(ii) *Soit Δ un système de racines simples. On a*

$$\mathscr{C}(\mathscr{P}(\Delta)) = \{x \in \mathrm{V}_{\mathbb{R}}^* \mid (x, \alpha) > 0 \quad \textit{pour tout} \quad \alpha \in \Delta\}.$$

Les murs de $\mathscr{C}(\mathscr{P}(\Delta))$ sont les hyperplans $\mathscr{H}_\alpha = \alpha^{-1}(0)$, pour $\alpha \in \Delta$; ses faces sont les

$$\mathrm{C}_\alpha = \{x \in \mathrm{V}_{\mathbb{R}}^* \mid (x, \alpha) = 0, \quad (x, \beta) > 0 \quad \textit{pour} \quad \beta \in \Delta,\ \beta \neq \alpha\}.$$

(iii) *On a l'équivalence*

$$\mathrm{R}_+(x) = \mathrm{R}_+ \iff x \in \mathscr{C}(\mathrm{R}_+).$$

Il est d'abord clair que $\mathrm{R}_+(x)$ est un système de racines positives. Comme $x \in \mathscr{C}(\mathrm{R}_+(x))$, la réunion des $\mathscr{C}(\mathrm{R}_+(x))$ est X. La propriété (iii) est immédiate ; il en résulte que les $\mathscr{C}(\mathrm{R}_+)$ forment une partition de X. La première assertion de (ii) est évidente. Il en résulte aussitôt que $\mathscr{C}(\mathrm{R}_+)$ est une chambre dans V, ce qui prouve le reste de (ii). Il ne reste qu'à remarquer que

$$\bigcup_{\alpha \in \mathrm{R}} \alpha^{-1}(0) = \bigcup_{\alpha \in \Delta} \alpha^{-1}(0)$$

pour achever la démonstration de (i) par 3.6.1.

Définition 3.6.10. — Les $\mathscr{C}(\mathrm{P})$ sont appelées les *chambres de Weyl* de la donnée radicielle.

Corollaire 3.6.11. — *Les applications $\mathrm{R}_+ \mapsto \mathscr{C}(\mathrm{R}_+)$ et $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{R}_+(x)$ pour un $x \in \mathrm{C}$ quelconque, réalisent une correspondance bijective entre systèmes de racines positives et chambres de Weyl.* **117**

Cette correspondance est invariante par le groupe de Weyl :

Lemme 3.6.12. — *Si $w \in \mathrm{W}(\mathscr{R})$, on a $\mathscr{C}(w(\mathrm{R}_+)) = w(\mathscr{C}(\mathrm{R}_+))$.*

Corollaire 3.6.13. — *Les correspondances $\Delta \leftrightarrow \mathrm{R}_+ \leftrightarrow \mathrm{C}$ sont des isomorphismes d'espaces homogènes sous $\mathrm{W}(\mathscr{R})$.*

On verra plus loin que ces espaces homogènes sont *principaux* (5.5).

Remarque 3.6.14. — Si C est une chambre de Weyl, alors $-\mathrm{C}$ en est aussi une, dite l'*opposée* de C. Il existe donc un $w_0 \in \mathrm{W}$ (et en fait *un seul*, cf. 5.5) tel que $w_0(\mathrm{C}) = -\mathrm{C}$, on l'appelle la *symétrie* de la donnée radicielle relativement à la chambre de Weyl C (ou relativement à $\mathscr{P}(\mathrm{C})$ ou à $\mathscr{S}(\mathscr{P}(\mathrm{C}))$ ...).

4. Données radicielles réduites de rang semi-simple 2

4.0. [16] Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle de rang semi-simple 2. Soit $\{\alpha, \beta\}$ un système de racines simples. Supposons $\ell(\alpha) \leqslant \ell(\beta)$. On a alors par 2.3.1 et 3.2.1 quatre possibilités :

Type	$\ell(\beta)/\ell(\alpha)$	$\ell(\beta^*)/\ell(\alpha^*)$	(β^*, α)	(α^*, β)
$A_1 \times A_1$	–	–	0	0
A_2	1	1	-1	-1
B_2	2	1/2	-1	-2
G_2	3	1/3	-1	-3

118 Il résulte alors de 3.4.5 que l'ordre de $s_\alpha\, s_\beta$ est respectivement 2, 3, 4, 6.

Étudions séparément chacun de ces systèmes et donnons la liste des racines indivisibles.

Type $A_1 \times A_1$. Les racines indivisibles sont α, β, $-\alpha$, $-\beta$. Les coracines correspondantes sont α^*, β^*, $-\alpha^*$, $-\beta^*$.

Type A_2. Les racines indivisibles positives sont comme suit :

racine γ	α	β	$\alpha+\beta$
$\ell(\gamma)/\ell(\alpha)$	1	1	1
coracine γ^*	α^*	β^*	$\alpha^*+\beta^*$
$\ell(\gamma^*)/\ell(\beta^*)$	1	1	1

La demi-somme des racines indivisibles positives est $\rho = \alpha + \beta$.

Type B_2. Les racines indivisibles positives sont les suivantes :

racine γ	α	β	$\alpha+\beta$	$2\alpha+\beta$
$\ell(\gamma)/\ell(\alpha)$	1	2	1	2
coracine γ^*	α^*	β^*	$2\alpha^*+\beta^*$	$\alpha^*+\beta^*$
$\ell(\gamma^*)/\ell(\beta^*)$	2	1	2	1

La demi-somme des racines indivisibles positives est $\rho = (4\alpha + 3\beta)/2$.

Type G_2. Les racines indivisibles positives sont les suivantes :

racine γ	α	β	$\alpha+\beta$	$2\alpha+\beta$	$3\alpha+\beta$	$3\alpha+2\beta$
$\ell(\gamma)/\ell(\alpha)$	1	3	1	1	3	3
coracine γ^*	α^*	β^*	$\alpha^*+3\beta^*$	$2\alpha^*+3\beta^*$	$\alpha^*+\beta^*$	$\alpha^*+2\beta^*$
$\ell(\gamma^*)/\ell(\beta^*)$	3	1	3	3	1	1

119 La demi-somme des racines indivisibles positives est $\rho = 5\alpha + 3\beta$.

[16] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.0, pour des références ultérieures.

Proposition 4.1. — [*] *Soit n l'ordre de $s_\alpha s_\beta$. Posons $u_0 = 0$ et, pour $p \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{cases} u_{2p+1} = u_{2p} + (s_\alpha s_\beta)^p(\alpha)\,; \\ u_{2p+2} = u_{2p+1} + (s_\alpha s_\beta)^p s_\alpha(\beta). \end{cases}$$

Alors : [17]

(i) *$u_{k+2n} = u_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

(ii) *$u_0 = 0$, $u_1 = \alpha$, $u_{2n-1} = \beta$, $u_{2n} = 0$.*

(iii) *Si $1 < k < 2n-1$, on a $u_k = a_k\alpha + b_k\beta$, avec $a_k, b_k \in \mathbb{N}^*$.*

L'assertion (i) résulte de $(s_\alpha s_\beta)^n = 1$ et $u_{2n} = 0$.

Prouvons (ii) et (iii). Le calcul donne aussitôt dans les quatre cas les suites de valeurs : [18]

$(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1)$ $$0, \alpha, \beta+\alpha, \beta, 0.$$

(A_2) $$0, \alpha, \beta+2\alpha, 2\beta+2\alpha, 2\beta+\alpha, \beta, 0.$$

(B_2) $$0, \alpha, \beta+3\alpha, 2\beta+4\alpha, 3\beta+4\alpha, 3\beta+3\alpha, 2\beta+\alpha, \beta, 0.$$

(G_2) $$0, \alpha, \beta+4\alpha, 2\beta+6\alpha, 4\beta+9\alpha, 5\beta+10\alpha, 6\beta+10\alpha, 6\beta+9\alpha, 5\beta+6\alpha,$$
$$4\beta+4\alpha, 2\beta+\alpha, \beta, 0.$$

Lemme 4.2. — *Posons $w_{2p} = (s_\beta s_\alpha)^p$, $w_{2p+1} = s_\alpha(s_\beta s_\alpha)^p$, de telle sorte que $w_0, \dots, w_{2n-1}$ sont les éléments distincts de W. Soient $u_0, \dots, u_{2n-1}$ les éléments de V définis en 4.1. Pour tout $x \in \mathrm{V}^*$, on a* **120**

$$x - w_k(x) = n_k\,\alpha^* + m_k\,\beta^*,$$

avec $n_k, m_k \in \mathbb{Q}$ et $n_k + m_k = (x, u_k)$. [19]

La démonstration se fait par récurrence sur k. Si $k = 0$, la formule est trivialement vérifiée. Effectuons par exemple le passage de w_{2p} à w_{2p+1}. On a $w_{2p+1} = s_\alpha w_{2p}$, d'où

$$x - w_{2p+1}(x) = x - w_{2p}(x) + w_{2p}(x) - s_\alpha w_{2p}(x) = n_{2p}\,\alpha^* + m_{2p}\,\beta^* + (w_{2p}(x), \alpha)\,\alpha^*.$$

Donc

$$\begin{aligned} n_{2p+1} + m_{2p+1} &= n_{2p} + m_{2p} + ((s_\beta s_\alpha)^p(x), \alpha) \\ &= (x, u_{2p}) + (x, (s_\alpha s_\beta)^p(\alpha)) = (x, u_{2p+1}). \end{aligned}$$

---

[*] Les numéros suivants 4.1 à 4.4 sont utilisés dans la démonstration de 5.1. Il y a actuellement des démonstrations plus simples de 5.1 (voir [**BLie**], § V.3, Th. 1). N.D.E. : on a précisé la référence et mis ici cette Note, qui dans l'original figurait en 4.2.

[17] N.D.E. : Soit ρ la demi-somme des racines positives (cf. 3.5.1) ; si l'on pose, comme en 4.2 plus bas, $w_0 = 1, w_1 = s_\alpha, w_2 = s_\beta s_\alpha, w_3 = s_\alpha s_\beta s_\alpha$, etc., alors u_k n'est autre que $\rho - w_k^{-1}(\rho)$, ce qui prouve (i) puisque $w_{2n} = \mathrm{id}$.

[18] N.D.E. : On a corrigé l'original, pour être en accord avec la convention $\ell(\alpha) \leqslant \ell(\beta)$ de 4.0.

[19] N.D.E. : Compte-tenu de la N.D.E. (17), ceci découle immédiatement de 3.5.1 et 1.1.9 : on a $n_k + m_k = (x - w_k(x), \rho) = (x, \rho - w_k^{-1}(\rho)) = (x, u_k)$.

Corollaire 4.3. — [20] *Soit $x \in \mathrm{V}^*$. Pour tout $w \in \mathrm{W}$, on pose*

$$x - w(x) = a_w\,\alpha^* + b_w\,\beta^*.$$

Si $(x,\alpha) \geqslant 0$ et $(x,\beta) \geqslant 0$, alors $a_w + b_w \geqslant 0$. Si de plus $(x,\alpha) > 0$ (resp. $(x,\beta) > 0$), alors $a_w + b_w > 0$ pour $w \neq 1$, s_β (resp. pour $w \neq 1$, s_α).

Cela résulte aussitôt de 4.1 et 4.2.

Corollaire 4.4. — *Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle quelconque et soit Δ un système de racines simples. Soient γ une racine positive, α, β deux racines simples, $\mathrm{W}_{\alpha,\beta}$ le sous-groupe de W engendré par s_α et s_β. Si*

$$\mathrm{ord}_\Delta(s_\alpha(\gamma)) < \mathrm{ord}_\Delta(\gamma), \qquad \mathrm{ord}_\Delta(s_\beta(\gamma)) \leqslant \mathrm{ord}_\Delta(\gamma),$$

121 *alors, pour tout $w \in \mathrm{W}_{\alpha\beta}$, on a $\mathrm{ord}_\Delta(w(\gamma)) \leqslant \mathrm{ord}_\Delta(\gamma)$; de plus $\mathrm{ord}_\Delta(w(\gamma)) < \mathrm{ord}_\Delta(\gamma)$ si $w \neq 1$, $w \neq s_\beta$.*

En effet, considérons la donnée radicielle duale $\mathscr{R}^*$, puis la donnée $(\mathrm{M}^*, \mathrm{M}, \mathrm{R}'^*, \mathrm{R}')$, où R' est l'ensemble des racines combinaisons linéaires rationnelles de α et de β. Appliquant 4.3 à cette donnée, on trouve le corollaire annoncé. [21]

5. Le groupe de Weyl : générateurs et relations

Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle. Comme le groupe de Weyl est le même pour cette donnée et pour la donnée réduite correspondante, on peut supposer $\mathscr{R}$ *réduite* pour étudier le groupe de Weyl.

Soit $\Delta = \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$ un système de racines simples ($n = \mathrm{rgss}(\mathscr{R})$). Soit n_{ij} l'ordre de l'élément $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j}$ de W. En particulier, on a $n_{ii} = 1$ et on a vu en 3.4.2 et 3.4.3 que le sous-groupe W_{ij} de W engendré par s_{α_i} et s_{α_j} était défini par les relations :

$$s_{\alpha_i}^2 = s_{\alpha_j}^2 = (s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{n_{ij}} = 1.$$

Théorème 5.1. — *Le groupe W est le groupe engendré par les éléments s_{α_i}, $i = 1, 2, \ldots n$, soumis aux relations $(s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{n_{ij}} = 1$.*

Nous avons déjà vu que le théorème est vrai lorsque $n = 2$; nous nous servirons de cette remarque dans le cours de la démonstration. Introduisons le groupe $\overline{\mathrm{W}}$ engendré
122 par des éléments T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, soumis aux relations $(\mathrm{T}_i \mathrm{T}_j)^{n_{ij}} = 1$. On a en particulier $n_{ii} = 1$, d'où $\mathrm{T}_i^2 = 1$. Soit $p : \overline{\mathrm{W}} \to \mathrm{W}$ le morphisme de groupes qui envoie T_i sur s_{α_i}. On sait que p est surjectif, on va montrer qu'il est injectif.

Lemme 5.2. — *On peut définir de manière unique pour chaque $\alpha \in \mathscr{P}(\Delta)$ un élément $\mathrm{T}_\alpha \in \overline{\mathrm{W}}$ de telle manière que l'on ait les propriétés suivantes :*

(i) $p(\mathrm{T}_\alpha) = s_\alpha$,

(ii) $\mathrm{T}_{\alpha_i} = \mathrm{T}_i$

(iii) *Si β et α sont deux racines positives telles que $s_{\alpha_i}(\alpha) = \beta$, alors $\mathrm{T}_i \mathrm{T}_\alpha \mathrm{T}_i = \mathrm{T}_\beta$.*

---

[20] N.D.E. : On a corrigé l'énoncé.

[21] N.D.E. : En effet, les hypothèses équivalent à dire que $(\gamma, \alpha^*) > 0$ et $(\gamma, \beta^*) \geqslant 0$; alors $\gamma - w(\gamma)$ appartient à $\mathbb{N}\alpha + \mathbb{N}\beta$ pour tout $w \in \mathrm{W}_{\alpha,\beta}$, et est $\neq 0$ si $w \notin \{1, s_\beta\}$.

Remarquons d'abord qu'il résulte de 1.2.10 et 3.3.6 que (i) est une conséquence de (ii) et (iii) et que (ii) et (iii) déterminent parfaitement les T_α. Nous allons faire la construction par récurrence sur $\mathrm{ord}_\Delta(\alpha)$. Si $\mathrm{ord}_\Delta(\alpha) = 1$, alors $\alpha \in \Delta$ et on pose $T_\alpha = T_i$ si $\alpha = \alpha_i$. Considérons l'hypothèse :

> (H_p) il existe des T_α, pour $\alpha \in \mathscr{P}(\Delta)$, $\mathrm{ord}_\Delta(\alpha) \leqslant p$, vérifiant (ii) et la condition (iii) chaque fois que $\mathrm{ord}_\Delta(\alpha) \leqslant p$, $\mathrm{ord}_\Delta(\beta) \leqslant p$.

Celle-ci est vérifiée pour $p = 1$: en effet si α et $s_{\alpha_i}(\alpha) = \beta$ sont simples, α_i et α sont orthogonales, donc si l'on note $\alpha_j = \alpha = \beta$, on a $n_{ij} = 2$, d'où

$$T_i T_j T_i = T_j.$$

Supposons $p > 1$ et (H_{p-1}) vérifiée.

A) *Construction des* T_α *pour* $\mathrm{ord}_\Delta(\alpha) \leqslant p$. Il suffit évidemment de le faire pour 123
$\mathrm{ord}_\Delta(\alpha) = p$. Il existe alors $\alpha_i \in \Delta$tel que $s_{\alpha_i}(\alpha) \in \mathscr{P}(\Delta)$ et $\mathrm{ord}_\Delta(s_{\alpha_i}(\alpha)) < p$ (3.3.3). On posera alors

$$(\star) \qquad T_\alpha = T_i T_{s_{\alpha_i}(\alpha)} T_i.$$

Vérifions que T_α ne dépend que de α. Soit donc $\alpha_j \in \Delta$ tel que $s_{\alpha_j}(\alpha) \in \mathscr{P}(\Delta)$ et $\mathrm{ord}_\Delta(s_{\alpha_j}(\alpha)) < p$. Prouvons que

$$(+) \qquad T_i T_{s_{\alpha_i}(\alpha)} T_i = T_j T_{s_{\alpha_j}(\alpha)} T_j.$$

Distinguons deux cas.

(1) Supposons α combinaison linéaire de α_i et de α_j. Il en est alors de même de $s_{\alpha_i}(\alpha)$ et $s_{\alpha_j}(\alpha)$ et par (H_{p-1}), $T_{s_{\alpha_i}(\alpha)}$ et $T_{s_{\alpha_j}(\alpha)}$ s'écrivent comme des mots en T_i et T_j. Comme la projection de (+) dans W est vérifiée et que le théorème est vrai pour $n = 2$, donc que p est injectif sur le sous-groupe de $\overline{W}$ engendré par T_i et T_j, (+) est bien vérifiée.

(2) Supposons α non combinaison linéaire de α_i et de α_j. Alors si $w \in W_{\alpha_i\alpha_j}$, les $w(\alpha)$ seront tous positifs (cf. 3.4.9). La relation à vérifier s'écrit aussi

$$(++) \qquad (T_i T_j)^{n_{ij}-1}\, T_{s_{\alpha_i}(\alpha)}\, (T_j T_i)^{n_{ij}-1} = T_{s_{\alpha_j}(\alpha)}.$$

Or il résulte de 4.4 que les $w(\alpha)$ sont tous d'ordre $< p$ pour $w \in W_{\alpha_i\alpha_j}$ $w \neq 1$. On peut donc appliquer $2(n_{ij} - 1)$ fois l'hypothèse (H_{p-1}) et on a terminé.

B) *Vérification de* (H_p). [22] On doit vérifier que si $\alpha_j \in \Delta$ et si $\beta = s_{\alpha_j}(\alpha)$ vérifie 124
$\mathrm{ord}_\Delta(\beta) \leqslant p$, alors $T_j T_\alpha T_j = T_\beta$. Si $\mathrm{ord}_\Delta(\beta) < p$, ceci résulte de ce qui précède (puisque $T_j^2 = 1$), donc on peut supposer que $\mathrm{ord}_\Delta(\beta) = p = \mathrm{ord}_\Delta(\alpha)$. Dans ce cas, α et α_j sont orthogonales, donc $\beta = \alpha$, et il s'agit de voir que l'on a

$$(\dagger) \qquad T_j T_\alpha T_j = T_\alpha.$$

[22] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

D'après ($\star$) ci-dessus, on a $\mathrm{T}_\alpha = \mathrm{T}_i \mathrm{T}_{s_{\alpha_i}(\alpha)} \mathrm{T}_i$, et donc il ne reste plus qu'à vérifier l'égalité suivante :

$$(+{+}+) \qquad \mathrm{T}_j \mathrm{T}_i \mathrm{T}_{s_{\alpha_i}(\alpha)} \mathrm{T}_i \mathrm{T}_j = \mathrm{T}_\alpha = \mathrm{T}_i \mathrm{T}_{s_{\alpha_i}(\alpha)} \mathrm{T}_i.$$

Notons $m = n_{ij}$ et $s_i = s_{\alpha_i}$, $s_j = s_{\alpha_j}$. On a $\mathrm{T}_j\mathrm{T}_i = (\mathrm{T}_i\mathrm{T}_j)^{m-1}$ et, d'après 4.4, on a $\mathrm{ord}_\Delta(w(\alpha)) < p$ pour tout $w \in \mathrm{W}_{ij}$ distinct de $1 = (s_i s_j)^m$ et de $s_j = s_i(s_i s_j)^{m-1}$. On en déduit, d'après l'hypothèse de récurrence, que

$$\mathrm{T}_j(\mathrm{T}_i\mathrm{T}_j)^{m-2}\mathrm{T}_{s_i(\alpha)}(\mathrm{T}_j\mathrm{T}_i)^{m-2}\mathrm{T}_j = \mathrm{T}_{s_j(s_is_j)^{m-2}s_i(\alpha)} = \mathrm{T}_{s_is_j(\alpha)} = \mathrm{T}_{s_i(\alpha)}$$

(la dernière égalité car $s_j(\alpha) = \alpha$), d'où finalement

$$(\mathrm{T}_i\mathrm{T}_j)^{m-1}\mathrm{T}_{s_i(\alpha)}(\mathrm{T}_j\mathrm{T}_i)^{m-1} = \mathrm{T}_i\mathrm{T}_{s_i(\alpha)}\mathrm{T}_i$$

ce qui prouve (+++).

Lemme 5.3. — *Soit $h \in \overline{\mathrm{W}}$. Écrivons-le*

$$h = \mathrm{T}_{\alpha_1} \cdots \mathrm{T}_{\alpha_m}$$

avec les $\alpha_i \in \Delta$, non nécessairement distincts, de telle manière que m soit minimum. Alors

$$p(h)(\alpha_m) \in -\mathscr{P}(\Delta).$$

En effet, comme $p(\mathrm{T}_{\alpha_m})(\alpha_m) = s_{\alpha_m}(\alpha_m) = -\alpha_m$, si $p(h)(\alpha_m)$ était positif, il existerait un indice k, $1 \leqslant k \leqslant m-1$ tel que

$$u = s_{\alpha_{k+1}} \cdots s_{\alpha_m}(\alpha_m) = -s_{\alpha_{k+1}} \cdots s_{\alpha_{m-1}}(\alpha_m) \in -\mathscr{P}(\Delta),$$

et $s_{\alpha_k}(u) \in \mathscr{P}(\Delta)$. Mais alors on a nécessairement $u = -\alpha_k$ (3.3.1), d'où

$$s_{\alpha_{k+1}} \cdots s_{\alpha_{m-1}}(\alpha_m) = \alpha_k,$$

ce qui entraîne par (iii)

$$\mathrm{T}_{\alpha_k}\mathrm{T}_{\alpha_{k+1}} \cdots \mathrm{T}_{\alpha_{m-1}}\mathrm{T}_{\alpha_m} = \mathrm{T}_{\alpha_{k+1}} \cdots \mathrm{T}_{\alpha_{m-1}},$$

et ceci contredit le caractère minimal de m.

125 Soit maintenant $h \in \overline{\mathrm{W}}$ tel que $p(h)(\mathscr{P}(\Delta)) \subset \mathscr{P}(\Delta)$. Par le lemme 5.3, on a $p(h) = 1$, ce qui démontre le théorème 5.1 et en outre le

Corollaire 5.4. — *Si R_+ est un système de racines positives et si $w \in \mathrm{W}$ est tel que $w(\mathrm{R}_+) = \mathrm{R}_+$, alors $w = 1$.*

Corollaire 5.5. — *Le groupe de Weyl opère librement et transitivement dans l'ensemble des système de racines positives (resp. des systèmes de racines simples, resp. des chambres de Weyl).*

Choisissons maintenant un système de racines simples Δ. Posons $\mathrm{R}^+ = \mathscr{P}(\Delta)$. (23) Pour tout couple de racines simples $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$, notons $\mathrm{R}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des racines combinaison linéaire α et de β. Notons $\mathrm{R}^+_{\alpha,\beta} = \mathrm{R}^+ \cap \mathrm{R}_{\alpha,\beta}$ et soit $\mathrm{W}_{\alpha,\beta}$ le groupe de Weyl de $\mathrm{R}_{\alpha,\beta}$, c'est-à-dire le sous-groupe de W engendré par s_α et s_β.

(23) N.D.E. : On a écrit ici R^+ au lieu de R_+, afin de pouvoir noter $\mathrm{R}^+_{\alpha,\beta} = \mathrm{R}_{\alpha,\beta} \cap \mathrm{R}^+$.

Théorème 5.6 (Tits). — *Soient α et β deux racines simples et soit $w \in \mathrm{W}$ tel que $w(\alpha)=\beta$. Il existe une suite de racines simples $\alpha_0,\dots,\alpha_m$ et une suite $w_0,\dots,w_{m-1}$ d'éléments de W vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *On a $\alpha_0=\alpha$, $\alpha_m=\beta$.*

(ii) *On a $w=w_{m-1}w_{m-2}\cdots w_0$.*

(iii) *On a $w_i(\alpha_i)=\alpha_{i+1}$, pour $0\leqslant i\leqslant m-1$.*

(iv) *Pour tout i, $0\leqslant i\leqslant m-1$, tel que $\alpha_i\neq\alpha_{i+1}$, on a $w_i\in\mathrm{W}_{\alpha_i,\alpha_{i+1}}$.*

(v) *Pour tout i, $0\leqslant 1\leqslant m-1$, tel que $\alpha_i=\alpha_{i+1}$, il existe une racine simple β_i telle que $w_i\in\mathrm{W}_{\alpha_i,\beta_i}$.*

Posons [24] 126

$$\mathrm{M}(w)=\mathrm{Card}(\mathrm{R}^+\cap w^{-1}(-\mathrm{R}^+))=\mathrm{Card}\,\{\alpha\in\mathrm{R}^+\mid w(\alpha)\in-\mathrm{R}^+\}.$$

Si $\mathrm{M}(w)=0$, alors $w(\mathrm{R}^+)=\mathrm{R}^+$ donc $w=1$ par 5.4 et le théorème est trivial ($m=0$, les assertions (iii) à (v) sont vides). Raisonnons par récurrence sur $\mathrm{M}(w)$. Si $\mathrm{M}(w)>0$, il existe $\beta_0\in\mathrm{S}$ tel que $w(\beta_0)\in-\mathrm{R}^+$. Posons $\alpha_0=\alpha$. Considérons l'ensemble

$$\mathrm{A}=w^{-1}(\mathrm{R}^+)\cap\mathrm{R}_{\alpha_0,\beta_0}.$$

C'est un système de racines positives de $\mathrm{R}_{\alpha_0,\beta_0}$. Il existe donc $w_0\in\mathrm{W}_{\alpha_0,\beta_0}$ tel que

$$w_0^{-1}(\mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0})=\mathrm{A}.$$

Posons $w'=ww_0^{-1}$. Par 3.4.9, on a aussitôt

$$\mathrm{R}^+-\mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0}=w_0(\mathrm{R}^+-\mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0}),$$

d'où

$$(1)\qquad (\mathrm{R}^+-\mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0})\cap w^{-1}(-\mathrm{R}^+)=w_0\Big((\mathrm{R}^+-\mathrm{R}^+_{\alpha_0\beta_0})\cap w'^{-1}(-\mathrm{R}^+)\Big).$$

D'autre part,

$$(2)\qquad \beta_0\in\mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0}\cap w^{-1}(-\mathrm{R}^+),$$

et, comme $w_0(\mathrm{R}_{\alpha_0,\beta_0})=\mathrm{R}_{\alpha_0,\beta_0}$, on a $w_0(-\mathrm{A})=\mathrm{R}_{\alpha_0,\beta_0}\cap w'^{-1}(-\mathrm{R}^+)$, d'où

$$(2')\qquad \mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0}\bigcap w'^{-1}(-\mathrm{R}^+)=\mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0}\cap w_0(-\mathrm{A})=\mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0}\cap-\mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0}=\varnothing.$$

Il résulte de (1), (2) et (2′) que $\mathrm{M}(w')<\mathrm{M}(w)$.

Posons $\alpha_1=w_0(\alpha_0)$, montrons que $\alpha_1\in\Delta$, c'est-à-dire $\alpha_0\in w_0^{-1}(\Delta)$. On sait que $w(\alpha_0)\in\Delta$, donc que $\alpha_0\in w^{-1}(\Delta)$, donc aussi que $\alpha_0\in w^{-1}(\Delta)\cap\mathrm{R}_{\alpha_0,\beta_0}$, donc que α_0 est une racine simple de $\mathrm{A}=w^{-1}(\mathrm{R}^+)\cap\mathrm{R}_{\alpha_0,\beta_0}=w_0^{-1}(\mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0})$, donc appartient à

$$w_0^{-1}(\Delta\cap\mathrm{R}^+_{\alpha_0,\beta_0})=w_0^{-1}(\{\alpha_0,\beta_0\})$$

(voir 3.4.8). Donc $\alpha_1=w_0(\alpha_0)$ égale α_0 ou β_0. Si $\alpha_1\neq\alpha_0$, on a $\alpha_1=\beta_0$ et $w_0\in\mathrm{W}_{\alpha_0,\alpha_1}$.

Enfin, on a $\beta=w'(\alpha_1)$, avec $\mathrm{M}(w')<\mathrm{M}(w)$ et on conclut par récurrence.

[24] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a détaillé l'original, et l'on a corrigé l'égalité (1).

6. Morphismes de données radicielles

127

6.1. Définition. — Soient $\mathscr{R} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R})$ et $\mathscr{R}' = (\mathrm{M}', \mathrm{M}'^*, \mathrm{R}', \mathrm{R}'^*)$ deux données radicielles. Soit $f : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ une application linéaire et ${}^t f : \mathrm{M}^* \to \mathrm{M}'^*$ l'application transposée.

Définition 6.1.1. — On dit que f est un *morphisme* de $\mathscr{R}'$ dans $\mathscr{R}$ et on note $f : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$, si f induit une bijection de R' sur R et ${}^t f$ une bijection de R^* sur R'^*.

Alors ${}^t f$ est un morphisme des données radicielles duales :

$$ {}^t f : \mathscr{R}^* \longrightarrow \mathscr{R}'^*. $$

On voit facilement que si f est un morphisme de $\mathscr{R}'$ dans $\mathscr{R}$, et si on note $\alpha = f(\alpha')$ pour $\alpha' \in \mathrm{R}'$, on a $\alpha'^* = {}^t f(\alpha^*)$. En effet, on voit immédiatement que si on note p et p' les applications de 1.2.1 respectives à $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$, on a $p' = {}^t f \circ p \circ f$, et l'assertion cherchée en résulte aussitôt. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les énoncés qui suivent et qui sont presque tous triviaux.

Proposition 6.1.2. — *Soit $f : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ un morphisme de données radicielles. Si $\alpha' \in \mathrm{R}'$ et $\alpha = f(\alpha')$, alors $\alpha'^* = {}^t f(\alpha^*)$. De plus, f induit des isomorphismes :*

$$ \mathrm{R}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}, \qquad \Gamma_0(\mathrm{R}') \xrightarrow{\sim} \Gamma_0(\mathrm{R}), \qquad \mathscr{V}(\mathrm{R}') \xrightarrow{\sim} \mathscr{V}(\mathrm{R}), $$

et ${}^t f$ induit des isomorphismes :

$$ \mathrm{R}^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}'^*, \qquad \Gamma_0(\mathrm{R}^*) \xrightarrow{\sim} \Gamma_0(\mathrm{R}'^*), \qquad \mathscr{V}(\mathrm{R}^*) \xrightarrow{\sim} \mathscr{V}(\mathrm{R}'^*), $$

128 *le dernier étant le transposé du morphisme correspondant induit par f. L'application $s_{\alpha'} \mapsto s_{f(\alpha')}$ se prolonge en un isomorphisme $\mathrm{W}(\mathscr{R}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(\mathscr{R})$ compatible avec les opérations de ces deux groupes dans les ensembles de* 1.1.13.

Proposition 6.1.3. — *Les applications*

$$ \Delta' \mapsto f(\Delta'), \qquad \mathrm{R}'_+ \mapsto f(\mathrm{R}'_+), \qquad \mathrm{C}' \mapsto ({}^t f \otimes \mathbb{R})^{-1}(\mathrm{C}') $$

définissent des correspondances bijectives entre systèmes de racines simples, systèmes de racines positives et chambres de Weyl pour $\mathscr{R}'$ et $\mathscr{R}$. Ces correspondances sont compatibles avec l'action des groupes de Weyl et avec les correspondances

$$ \mathscr{S}(\mathrm{R}_+) \leftrightarrow \mathrm{R}_+ \leftrightarrow \mathscr{C}(\mathrm{R}_+). $$

Lemme 6.1.4. — *Les morphismes se composent. Pour que le morphisme $f : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que $f : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ soit bijectif.*

6.2. Isogénies

Définition 6.2.1. — Un morphisme $f : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ de données radicielles est dit une *isogénie* si $f : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ est injectif de conoyau fini.

Si f est une isogénie, alors ${}^t f$ est une isogénie.

Définition 6.2.2. — Soit $f : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ une isogénie. On pose $\mathrm{K}(f) = \mathrm{Coker}(\mathrm{M}' \xrightarrow{f} \mathrm{M})$.

Lemme 6.2.3. — *On a un accouplement naturel*

$$\mathrm{K}(f)\times\mathrm{K}({}^{t}f)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

qui met ces deux groupes finis en dualité.

C'est classique.

Lemme 6.2.4. — *Si $f:\mathscr{R}'\to\mathscr{R}$ est un morphisme, alors* $\mathrm{rgss}(\mathscr{R}')=\mathrm{rgss}(\mathscr{R})$*. Si de* 129
plus f est une isogénie, on a aussi $\mathrm{rgred}(\mathscr{R}')=\mathrm{rgred}(\mathscr{R})$*.*

Trivial.

Lemme 6.2.5. — *Tout morphisme de données radicielles semi-simples est une isogénie.*

Cela résulte aussitôt du fait que f doit induire un isomorphisme de $\mathrm{V}'=\mathscr{V}(\mathrm{R}')$ sur $\mathrm{V}=\mathscr{V}(\mathrm{R})$.

Si $\mathscr{R}'$ et $\mathscr{R}$ sont semi-simples, toute isogénie $f:\mathscr{R}'\to\mathscr{R}$ définit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_0(\mathrm{R}') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \Gamma_0(\mathrm{R}) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{M}' \arrow[r, hook, "f"] & \mathrm{M}.
\end{tikzcd}$$

Si $\mathrm{M}=\Gamma_0(\mathrm{R})$, alors f est nécessairement un isomorphisme.

Définition 6.2.6. — Une donnée radicielle est dite *adjointe* (resp. *simplement connexe*) si $\mathrm{M}=\Gamma_0(\mathrm{R})$, resp. $\mathrm{M}^*=\Gamma_0(\mathrm{R}^*)$.

Une donnée radicielle adjointe ou simplement connexe est donc semi-simple. D'autre part, $\mathscr{R}$ est adjointe (resp. simplement connexe) si et seulement si $\mathscr{R}^*$ est simplement (resp. adjointe). En vertu du résultat précédent, on a :

Proposition 6.2.7. — *Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle semi-simple. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{R}$ est adjointe* (*resp. simplement connexe*)*.*

(ii) *Toute isogénie $\mathscr{R}'\to\mathscr{R}$* (*resp. $\mathscr{R}\to\mathscr{R}'$*) *est un isomorphisme.*

Proposition 6.2.8. — *Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle adjointe* (*resp. simplement connexe*)*. Toute racine* (*resp. coracine*) *indivisible est un élément indivisible de* M (*resp. de* M^*)*.*

En effet, toute racine indivisible fait partie d'une base de $\Gamma_0(\mathrm{R})$, par 3.3.5. 130

6.3. Radical et coradical

Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle. Posons

$$\mathrm{N} = \{x \in \mathrm{M} \mid (\alpha^*, x) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha^* \in \mathrm{R}^*\};$$
$$\mathrm{N}^* = \mathrm{M}^*/\mathscr{V}(\mathrm{R}^*) \cap \mathrm{M}^*.$$

Lemme 6.3.1. — *Considérons les morphismes canoniques :*

$$\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}, \qquad \mathrm{M}^* \longrightarrow \mathrm{N}^*.$$

Ils sont transposés l'un de l'autre et N^* *s'identifie au dual de* N.

C'est immédiat, compte-tenu de 1.2.5.

Définition 6.3.2. — On appelle *coradical* de $\mathscr{R}$ et on note $\mathrm{corad}(\mathscr{R})$ la donnée radicielle triviale

$$\mathrm{corad}(\mathscr{R}) = (\mathrm{N}, \mathrm{N}^*, \varnothing, \varnothing).$$

Si on pose $\mathscr{R}^0 = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \varnothing, \varnothing)$ (c'est une donnée radicielle triviale), on a donc un morphisme

$$\mathrm{corad}(\mathscr{R}) \longrightarrow \mathscr{R}^0.$$

Définition 6.3.3. — On appelle *radical* de $\mathscr{R}$ et on note $\mathrm{rad}(\mathscr{R})$ la donnée radicielle triviale :

$$\mathrm{rad}(\mathscr{R}) = \mathrm{corad}(\mathscr{R}^*)^*. \qquad ^{(25)}$$

On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{corad}(\mathscr{R}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{rad}(\mathscr{R}) \\ & \mathscr{R}^0 \arrow[ur] & \end{tikzcd},$$

131 dont le transposé est le diagramme correspondant pour $\mathscr{R}^*$.

Lemme 6.3.4. — *Le morphisme canonique* $u : \mathrm{corad}(\mathscr{R}) \to \mathrm{rad}(\mathscr{R})$ *est une* isogénie.

Définition 6.3.5. — On pose $\mathrm{N}(\mathscr{R}) = \mathrm{K}(u) = \mathrm{M}/\big((\mathscr{V}(\mathrm{R}) \cap \mathrm{M}) + \bigcap_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha^*)\big)$. On a alors un accouplement canonique

$$\mathrm{N}(\mathscr{R}) \times \mathrm{N}(\mathscr{R}^*) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Lemme 6.3.6. — *On a* $\mathrm{rgred}(\mathrm{rad}(\mathscr{R})) = \mathrm{rgred}(\mathrm{corad}(\mathscr{R})) = \mathrm{rgred}(\mathscr{R}) - \mathrm{rgss}(\mathscr{R})$, *et les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{R}$ est semi-simple,*

(ii) $\mathrm{rad}(\mathscr{R}) = 0$,

(iii) $\mathrm{corad}(\mathscr{R}) = 0$.

---

(25) N.D.E. : c.-à-d., si l'on note $\mathrm{P} = \{y \in \mathrm{M}^* \mid (y, \alpha) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathrm{R}\}$ et $\mathrm{P}^* = \mathrm{M}/\mathscr{V}(\mathrm{R}) \cap \mathrm{M}$, on a $\mathrm{rad}(\mathscr{R}) = (\mathrm{P}^*, \mathrm{P}, \varnothing, \varnothing)$.

6.4. Produits de données radicielles

Définition 6.4.1. — Soient $\mathscr{R} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ et $\mathscr{R}' = (\mathrm{M}', \mathrm{M}'^*, \mathrm{R}', \mathrm{R}'^*)$ deux données radicielles. On appelle donnée radicielle produit de $\mathscr{R}$ et de $\mathscr{R}'$ et on note $\mathscr{R}'' = \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$ la donnée radicielle $(\mathrm{M}'', \mathrm{M}''^*, \mathrm{R}'', \mathrm{R}''^*)$ où

$$\begin{aligned} \mathrm{M}'' &= \mathrm{M} \times \mathrm{M}', & \mathrm{M}''^* &= \mathrm{M}^* \times \mathrm{M}'^*, \\ \mathrm{R}'' &= (\mathrm{R} \times 0) \cup (0 \times \mathrm{R}'), & \mathrm{R}''^* &= (\mathrm{R}^* \times 0) \cup (0 \times \mathrm{R}'^*), \end{aligned}$$

l'application $\alpha \mapsto \alpha^*$ étant l'application évidente.

Proposition 6.4.2. — *Sous les conditions précédentes on a des isomorphismes canoniques*

$$\Gamma_0(\mathrm{R}'') \simeq \Gamma_0(\mathrm{R}) \times \Gamma_0(\mathrm{R}'), \qquad \mathscr{V}(\mathrm{R}'') \simeq \mathscr{V}(\mathrm{R}) \times \mathscr{V}(\mathrm{R}'),$$
$$\mathrm{W}(\mathscr{R}'') \simeq \mathrm{W}(\mathscr{R}) \times \mathrm{W}(\mathscr{R}'),$$

etc., et les égalités **132**

$$\mathrm{rgred}(\mathscr{R}'') = \mathrm{rgred}(\mathscr{R}) + \mathrm{rgred}(\mathscr{R}'), \qquad \mathrm{rgss}(\mathscr{R}'') = \mathrm{rgss}(\mathscr{R}) + \mathrm{rgss}(\mathscr{R}').$$

On a également un isomorphisme canonique de données radicielles

$$(\mathscr{R} \times \mathscr{R}')^* \simeq \mathscr{R}^* \times \mathscr{R}'^*.$$

Les définitions précédentes se généralisent aussitôt à un produit de plusieurs facteurs. On a aussitôt :

Proposition 6.4.3. — *Soit $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \times \mathscr{R}_2 \times \cdots \times \mathscr{R}_n$ un produit de données radicielles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{R}$ est semi-simple* (*resp. simplement connexe, resp. adjointe, resp. réduite*).

(ii) *Chaque $\mathscr{R}_i$ est semi-simple* (*resp. simplement connexe, resp. adjointe, resp. réduite*).

Considérons le cas particulier suivant : soit $\mathscr{R}_0$ une donnée radicielle triviale et $\mathscr{R}_1$ une donnée radicielle semi-simple. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}_1 \arrow[dr] & \\ \mathscr{R}_1 \arrow[ur] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & \mathscr{R}_1. \end{tikzcd}$$

Lemme 6.4.4. — *On a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{corad}(\mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}_1) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \mathrm{rad}(\mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}_1) \\ & \mathscr{R}_0 \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd} .$$

En particulier, $\mathrm{N}(\mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}_1) = 0$.

Nous verrons plus tard que si réciproquement $\mathrm{N}(\mathscr{R}) = 0$, alors la donnée radicielle $\mathscr{R}$ est produit d'une donnée semi-simple par une donnée triviale.

133 **6.5. Données radicielles induites et coinduites**

Soit $\mathscr{R} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ une donnée radicielle. Soit $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$ un sous-groupe contenant les racines, i.e. tel que

$$\Gamma_0(\mathrm{R}) \subset \mathrm{N} \subset \mathrm{M}.$$

L'application linéaire canonique $i_{\mathrm{N}} : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ donne par transposition une application linéaire

$$^t i_{\mathrm{N}} : \mathrm{M}^* \longrightarrow \mathrm{N}^*.$$

Posons $\mathrm{R}_{\mathrm{N}} = \mathrm{R}$ et $\mathrm{R}^*_{\mathrm{N}} = {}^t i_{\mathrm{N}}(\mathrm{R}^*)$.

Lemme 6.5.1. — $\mathscr{R}_{\mathrm{N}} = (\mathrm{N}, \mathrm{N}^*, \mathrm{R}_{\mathrm{N}}, \mathrm{R}^*_{\mathrm{N}})$ *est une* donnée radicielle*, et* i_{N} *un morphisme.*

Montrons d'abord que ${}^t i_{\mathrm{N}}$ induit un isomorphisme de R^* sur $\mathrm{R}^*_{\mathrm{N}}$. Si $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ et ${}^t i_{\mathrm{N}}(\alpha^*) = {}^t i_{\mathrm{N}}(\beta^*)$, on a $(\alpha^*, x) = (\beta^*, x)$ pour tout $x \in \mathrm{N}$, en particulier pour $x \in \mathrm{R}$, ce qui donne $\alpha = \beta$ par 1.1.4. Le reste s'en déduit sans difficultés.

Définition 6.5.2. — $\mathscr{R}_{\mathrm{N}}$ est dite la donnée radicielle *induite* par $\mathscr{R}$ sur N.

Lemme 6.5.3. — *Soit* $f : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ *un morphisme. Posons* $\mathrm{N} = f(\mathrm{M}') \subset \mathrm{M}$. *Alors* f *se factorise de manière unique par* i_{N}.

En particulier, les *isogénies* $\mathscr{R}' \to \mathscr{R}$, à isomorphisme près, correspondent *biunivoquement* aux *sous-groupes d'indice fini de* $\mathrm{M}/\Gamma_0(\mathrm{R})$, ce qui précise 6.2.7.

Soit maintenant N^* un sous-groupe de M^* contenant R^*. On définit la donnée *coinduite* par $\mathscr{R}$ sur N^* par

$$\mathscr{R}^{\mathrm{N}^*} = (\mathscr{R}^*_{\mathrm{N}^*})^*,$$

134 et on a un morphisme canonique :

$$p^{\mathrm{N}^*} : \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{R}^{\mathrm{N}^*}.$$

Lemme 6.5.4. — *Soit* $f : \mathscr{R}' \longrightarrow \mathscr{R}$ *un morphisme. Il existe des sous-groupes* $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$ *et* $\mathrm{N}'^* \subset \mathrm{M}'^*$ *tels que* f *se factorise en*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{R}' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p^{\mathrm{N}'}"'] & \mathscr{R} \\
\mathscr{R}'^{\mathrm{N}'^*} \arrow[r, "f_0", "\sim"'] & \mathscr{R}_{\mathrm{N}}, \arrow[u, "i_{\mathrm{N}}"']
\end{tikzcd}$$

où f_0 *est un isomorphisme.*

En effet, on prend $\mathrm{N} = f(\mathrm{M}')$ comme dans 6.5.3. Le morphisme $\mathrm{M}' \to \mathrm{N}$ obtenu est surjectif, donc son transposé injectif. On prend l'image de ce dernier comme N'^*.

Traitons maintenant certains cas particuliers. Si on prend $\mathrm{N} = \Gamma_0(\mathrm{R})$, on notera $\mathscr{R}_\mathrm{N} = \mathrm{ad}(\mathscr{R})$. Si on prend $\mathrm{N} = \mathscr{V}(\mathrm{R}) \cap \mathrm{M}$, on notera $\mathscr{R}_\mathrm{N} = \mathrm{ss}(\mathscr{R})$. On a donc un diagramme :

$$\mathrm{ad}(\mathscr{R}) \longrightarrow \mathrm{ss}(\mathscr{R}) \longrightarrow \mathscr{R}.$$

Posons $\mathrm{dér}(\mathscr{R}) = \mathrm{ss}(\mathscr{R}^*)^*$ et $\mathrm{sc}(\mathscr{R}) = \mathrm{ad}(\mathscr{R}^*)^*$; par dualité, on obtient un diagramme :

$$\mathscr{R} \longrightarrow \mathrm{dér}(\mathscr{R}) \longrightarrow \mathrm{sc}(\mathscr{R}).$$

Proposition 6.5.5. — (i) *Dans la première ligne du diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ad}(\mathscr{R}) \arrow[r] & \mathrm{ss}(\mathscr{R}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{dér}(\mathscr{R}) \arrow[r] & \mathrm{sc}(\mathscr{R}) \\
& & \mathscr{R} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

les quatre données sont semi-simples et les trois morphismes des isogénies.

(ii) $\mathrm{ad}(\mathscr{R})$ *est une donnée adjointe, et* $\mathscr{R}$ *est adjointe si et seulement si* $\mathrm{ad}(\mathscr{R}) \to \mathscr{R}$ **135**
est un isomorphisme.

(iii) $\mathrm{sc}(\mathscr{R})$ *est une donnée simplement connexe, et* $\mathscr{R}$ *est simplement connexe si et seulement si* $\mathscr{R} \to \mathrm{sc}(\mathscr{R})$ *est un isomorphisme.*

(iv) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathscr{R}$ *est semi-simple,*
(b) $\mathrm{ss}(\mathscr{R}) \to \mathscr{R}$ *est un isomorphisme,*
(c) $\mathscr{R} \to \mathrm{dér}(\mathscr{R})$ *est un isomorphisme.*

Arrêtons-nous un instant sur le morphisme $\mathrm{ss}(\mathscr{R}) \to \mathrm{dér}(\mathscr{R})$. En se reportant à la construction de $\mathrm{ss}(\mathscr{R})$ et de $\mathrm{dér}(\mathscr{R})$, il est aisé de démontrer le

Lemme 6.5.6. — *Soit* $h : \mathrm{ss}(\mathscr{R}) \to \mathrm{dér}(\mathscr{R})$ *l'isogénie canonique. On a* $\mathrm{K}(h) \simeq \mathrm{N}(\mathscr{R})$.

6.5.7. — Considérons d'autres cas particuliers de données induites. Posons

$$\mathrm{N} = \{x \in \mathrm{M} \mid (\alpha^*, x) = 0 \text{ pour } \alpha \in \mathrm{R}\} \times \Gamma_0(\mathrm{R});$$

on sait que la somme est directe par 1.2.5. Il en résulte que la donnée radicielle $\mathscr{R}_\mathrm{N}$ s'identifie au produit $\mathrm{ad}(\mathscr{R}) \times \mathrm{corad}(\mathscr{R})$.

On peut faire de même en remplaçant $\Gamma_0(\mathrm{R})$ par $\mathscr{V}(\mathrm{R}) \cap \mathrm{M}$, puis dualiser ces deux constructions. On obtient ainsi un diagramme de données radicielles :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ad}(\mathscr{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{ss}(\mathscr{R}) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{dér}(\mathscr{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{sc}(\mathscr{R}) \arrow[d] \\
\mathrm{ad}(\mathscr{R}) \times \mathrm{corad}(\mathscr{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{ss}(\mathscr{R}) \times \mathrm{corad}(\mathscr{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{R} \arrow[r] & \mathrm{dér}(\mathscr{R}) \times \mathrm{rad}(\mathscr{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{sc}(\mathscr{R}) \times \mathrm{rad}(\mathscr{R}) \arrow[d] \\
\mathrm{ad}(\mathscr{R}) \arrow[r] & \mathrm{ss}(\mathscr{R}) \arrow[rr] & & \mathrm{dér}(\mathscr{R}) \arrow[r] & \mathrm{sc}(\mathscr{R});
\end{tikzcd}$$

136 qui est commutatif, comme on le vérifie aussitôt. Ce diagramme est auto-dual en un sens évident. Les morphismes horizontaux sont des isogénies. Les composés des flèches verticales sont l'identité.

Lemme 6.5.8. — *Soient h_1 et h_2 les isogénies canoniques :*

$$\mathrm{ss}(\mathscr{R}) \times \mathrm{corad}(\mathscr{R}) \xrightarrow{h_1} \mathscr{R} \xrightarrow{h_2} \mathrm{dér}(\mathscr{R}) \times \mathrm{rad}(\mathscr{R}).$$

On a $\mathrm{K}(h_1) \simeq \mathrm{K}(h_2) \simeq \mathrm{N}(\mathscr{R})$.

C'est trivial sur les définitions.

Corollaire 6.5.9. — *Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{N}(\mathscr{R}) = 0$, *i.e.* $\mathrm{corad}(\mathscr{R}) \to \mathrm{rad}(\mathscr{R})$ *est un isomorphisme.*

(ii) $h : \mathrm{ss}(\mathscr{R}) \to \mathrm{dér}(\mathscr{R})$ *est un isomorphisme.*

(iii) $h_1 : \mathrm{ss}(\mathscr{R}) \times \mathrm{corad}(\mathscr{R}) \to \mathscr{R}$ *est un isomorphisme.*

(iv) $h_2 : \mathscr{R} \to \mathrm{dér}(\mathscr{R}) \times \mathrm{rad}(\mathscr{R})$ *est un isomorphisme.*

(v) $\mathscr{R}$ *est le produit d'une donnée semi-simple et d'une donnée triviale.*

Énonçons également une conséquence triviale des remarques précédentes :

Corollaire 6.5.10. — *Pour toute donnée radicielle $\mathscr{R}$, il existe des isogénies*

$$\mathrm{ad}(\mathscr{R}) \times \mathscr{R}_0 \longrightarrow \mathscr{R} \longrightarrow \mathrm{sc}(\mathscr{R}) \times \mathscr{R}_0,$$

où $\mathscr{R}_0$ est « la » donnée radicielle triviale de rang $\mathrm{rgred}(\mathscr{R}) - \mathrm{rgss}(\mathscr{R})$.

Signalons enfin un résultat qui peut être utile :

Lemme 6.5.11. — *Soient $\mathscr{R}$ une donnée radicielle, Δ un système de racines simples, Δ' une partie de Δ, considérons la donnée radicielle* (cf. 3.4.7)

$$\mathscr{R}_{\Delta'} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}_{\Delta'}, \mathrm{R}^*_{\Delta'}).$$

137 (i) *Si $\mathscr{R}$ est simplement connexe, alors* $\mathrm{dér}(\mathscr{R}_{\Delta'})$ *est simplement connexe.*

(ii) *Si $\mathscr{R}$ est adjointe, alors* $\mathrm{ss}(\mathscr{R}_{\Delta'})$ *est adjointe.*

Les deux assertions sont évidemment équivalentes par dualité. La seconde se ramène à vérifier la formule :

$$\mathrm{M} \cap \mathscr{V}(\mathrm{R}_{\Delta'}) = \Gamma_0(\mathrm{R}_{\Delta'});$$

or, si $\mathrm{M} = \Gamma_0(\mathrm{R})$, les deux membres sont égaux au sous-groupe de M engendré par Δ'.

6.6. Poids

Définition 6.6.1. — Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle. On pose [26]

$$\Lambda(\mathscr{R}) = \{x \in \mathrm{V}(\mathrm{R}) \mid (\alpha^*, x) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } \alpha^* \in \mathrm{R}^*\}.$$

Les éléments de $\Lambda(\mathscr{R})$ sont appelés les *poids* de $\mathscr{R}$. Les poids de $\mathscr{R}^*$ sont appelés les *copoids* de $\mathscr{R}$.

On a $\Gamma_0(\mathrm{R}) \subset \Lambda(\mathscr{R})$ et $\Lambda(\mathscr{R})$ est stable sous $\mathrm{W}(\mathscr{R})$.

Lemme 6.6.2. — *L'application bilinéaire* $\mathrm{V}^* \times \mathrm{V} \to \mathbb{Q}$ *induit une dualité*

$$\Gamma_0(\mathrm{R}^*) \times \Lambda(\mathscr{R}) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Trivial.

Corollaire 6.6.3. — *Soit* $\Delta^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ *un système de coracines simples. Soient* p_i, $i = 1, 2, \dots n$, *les éléments de* $\mathscr{V}(\mathrm{R})$ *définis par*

$$(\alpha_i^*, p_j) = \delta_{ij},$$

(d'où $s_{\alpha_i}(p_i) = p_i - \alpha_i$ *et* $s_{\alpha_i}(p_j) = p_j$ *pour* $i \neq j$*)* (*)*. Alors* $\Lambda(\mathscr{R})$ *est le groupe* **138**
abélien libre engendré par les p_i.

Les p_i sont appelés les *poids fondamentaux* correspondant au système de coracines simples Δ^*.

Corollaire 6.6.4. — *Pour tout* $\alpha^* \in \Delta^*$, *on a donc* $(\alpha^*, \sum_i p_i) = 1$, *donc* $\sum_i p_i = \rho_{\mathrm{R}_+}$ (*cf.* 3.5.1), *où* $\mathrm{R}_+ = \mathscr{P}(\mathrm{ind}(\Delta))$.

Corollaire 6.6.5. — *Pour tout* $x \in \mathscr{V}(\mathrm{R})$, *on a* $x = \sum_i (\alpha_i^*, x)\, p_i$.

Remarquons que $\mathrm{R}^* \subset \Gamma_0(\mathrm{R}^*)$ et $\mathrm{R} \subset \Lambda(\mathscr{R})$, donc que $(\Lambda(\mathscr{R}),\ \Gamma_0(\mathrm{R}^*), \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ est une donnée radicielle.

Corollaire 6.6.6. — *Le morphisme canonique* $\Gamma_0(\mathrm{R}^*) \to \mathrm{M}^*$ *est le transposé du morphisme* $x \mapsto \sum_i (\alpha_i^*, x) p_i$ *qui définit un morphisme de données radicielles et on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{sc}(\mathscr{R}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathscr{R} \arrow[ur] \arrow[r] & (\Lambda(\mathscr{R}), \Gamma_0(\mathrm{R}^*), \mathrm{R}, \mathrm{R}^*).
\end{tikzcd}$$

(*) Attention : si la donnée n'est pas réduite, les α_i ne forment pas un système de racines simples.

[26] N.D.E. : On a remplacé $\Gamma(\mathscr{R})$ par $\Lambda(\mathscr{R})$, pour éviter tout risque de confusion avec $\Gamma_0(\mathrm{R})$.

On a donc une description explicite de $\mathrm{sc}(\mathscr{R})$ en termes des poids de $\mathscr{R}$. De même, on trouve un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ad}(\mathscr{R}) \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr] & \\
(\Gamma_0(\mathrm{R}), \Lambda(\mathscr{R}^*), \mathrm{R}, \mathrm{R}^*) \arrow[r] & \mathscr{R}
\end{tikzcd} .$$

Corollaire 6.6.7. — *Pour que* $\mathscr{R}$ *soit simplement connexe, il faut et il suffit que* $\mathrm{M} = \Lambda(\mathscr{R})$.

139 ***Remarque 6.6.8***. — On a $\Lambda(\mathscr{R}) \cap \mathrm{M} = \mathscr{V}(\mathrm{R}) \cap \mathrm{M}$. Pour que $\mathscr{R}$ soit semi-simple, il est donc nécessaire et suffisant que $\mathrm{M} \subset \Lambda(\mathscr{R})$.

Des résultats de 6.5 il résulte aussi :

Corollaire 6.6.9. — *Pour que* $\mathscr{R}$ *soit produit d'une donnée simplement connexe par une donnée triviale, il faut et il suffit que* $\mathrm{M} \supset \Lambda(\mathscr{R})$.

Considérons maintenant l'isogénie canonique

$$f : \mathrm{ad}(\mathscr{R}) \longrightarrow \mathrm{sc}(\mathscr{R}),$$

et posons $\mathrm{Z}(\mathscr{R}) = \mathrm{K}(f)$. On a $\mathrm{Z}(\mathscr{R}) \simeq \mathrm{Z}(\mathrm{sc}\,\mathscr{R}) \simeq \mathrm{Z}(\mathrm{ad}\,\mathscr{R})$.

Corollaire 6.6.10. — *On a un isomorphisme canonique* $\mathrm{Z}(\mathscr{R}) = \Lambda(\mathscr{R})/\Gamma_0(\mathrm{R})$. *Plus précisément, on a une suite exacte de* $\mathrm{W}(\mathscr{R})$*-modules :*

$$0 \longrightarrow \Gamma_0(\mathrm{R}) \longrightarrow \Lambda(\mathscr{R}) \longrightarrow \mathrm{Z}(\mathscr{R}) \longrightarrow 0.$$

Corollaire 6.6.11. — *On a un accouplement canonique*

$$\mathrm{Z}(\mathscr{R}^*) \times \mathrm{Z}(\mathscr{R}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui met ces groupes en dualité.

Remarque 6.6.12. — On a $\mathrm{Z}(\mathscr{R} \times \mathscr{R}') \simeq \mathrm{Z}(\mathscr{R}) \times \mathrm{Z}(\mathscr{R}')$. Considérons en particulier des données simplement connexes $\mathscr{R}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ et une donnée triviale $\mathscr{R}_0$. Posons $\mathscr{R} = \mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}_1 \times \cdots \times \mathscr{R}_n$. Soient $\mathscr{R} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$, $\mathscr{R}_0 = (\mathrm{M}_0^*, \mathrm{M}_0^*, \varnothing, \varnothing)$. On a

$$\mathrm{M}/\Gamma_0(\mathrm{R}) \simeq \mathrm{M}_0 \times \mathrm{Z}(\mathscr{R}_1) \times \cdots \times \mathrm{Z}(\mathscr{R}_n).$$

6.7. Automorphismes

Un automorphisme de $\mathscr{R}$, c'est, d'après 6.1.4, un automorphisme de M, soit u, tel que $u(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$, ${}^t u(\mathrm{R}^*) = \mathrm{R}^*$. En particulier, tout élément w de $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ définit un
140 automorphisme de $\mathscr{R}$.

Lemme 6.7.1. — $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ *est un sous-groupe invariant de* $\mathrm{Aut}(\mathscr{R})$. *Plus précisément, si* $u \in \mathrm{Aut}(\mathscr{R})$ *et* $\alpha \in \mathrm{R}$*, on a*

$$u s_\alpha u^{-1} = s_{u(\alpha)}.$$

La démonstration est la même que celle de 1.2.10.

Proposition 6.7.2. — *Soit* Δ *un système de racines simples. Posons*
$$\mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R}) = \{u \in \mathrm{Aut}(\mathscr{R}) \mid u(\Delta) = \Delta\}.$$
Alors $\mathrm{Aut}(\mathscr{R})$ *est le produit semi-direct de* $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ *par* $\mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R})$.

Cela résulte aussitôt de ce que $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ opère de façon simplement transitive sur les systèmes de racines simples et de ce que si Δ est un système de racines simples de R, alors $u(\Delta)$ est un système de racines simples pour tout automorphisme u de $\mathscr{R}$.

Nous verrons plus tard une description plus simple de $\mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R})$ dans le cas des données radicielles réduites et irréductibles.

Définition 6.7.3. — On note $\mathrm{Aut}^s(\mathscr{R})$ [27] l'ensemble des $u \in \mathrm{Aut}(\mathscr{R})$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{R} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & \mathscr{R} \arrow[dl] \\ & \mathrm{rad}(\mathscr{R}) & \end{tikzcd} .$$

On note $\mathrm{E}^s_\Delta(\mathscr{R}) = \mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R}) \cap \mathrm{Aut}^s(\mathscr{R})$. 141

Remarque 6.7.4. — Si $u \in \mathrm{Aut}(\mathscr{R})$, on a donc $u \in \mathrm{Aut}^s(\mathscr{R})$ si et seulement si $(u - \mathrm{id})(\mathrm{M}) \subset \mathscr{V}(\mathrm{R})$. En particulier $\mathrm{W}(\mathscr{R}) \subset \mathrm{Aut}^s(\mathscr{R})$. Il en résulte aussitôt :

Proposition 6.7.5. — *Le groupe* $\mathrm{Aut}^s(\mathscr{R})$ *est le produit semi-direct de* $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ *par* $\mathrm{E}^s_\Delta(\mathscr{R})$*, pour tout système de racines simples* Δ.

À tout automorphisme de $\mathscr{R}$ est associé par fonctorialité un automorphisme de $\mathrm{ad}(\mathscr{R})$. On a donc un morphisme canonique
$$\mathrm{Aut}(\mathscr{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{ad}(\mathscr{R})).$$

Lemme 6.7.6. — *Le morphisme* $\mathrm{Aut}^s(\mathscr{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{ad}(\mathscr{R}))$ *est injectif.*

Soit en effet u un automorphisme de M tel que $(u - id)(\mathrm{M}) \subset \mathscr{V}(\mathrm{R})$ et que ${}^t u(\alpha^*) = \alpha^*$ pour $\alpha^* \in \mathrm{R}^*$. Pour tout $x \in \mathrm{M}$, on a
$$(\alpha^*, u(x) - x) = ({}^t u(\alpha^*) - \alpha^*, x) = 0,$$
donc $u(x) - x = 0$, par 1.2.5.

Lemme 6.7.7. — *Le groupe* $\mathrm{Aut}^s(\mathscr{R})$ *est* fini.

En effet, il nous suffit de prouver que $\mathrm{Aut}(\mathscr{R})$ est fini si $\mathscr{R}$ est adjoint. Comme M est engendré alors par R, tout automorphisme de $\mathscr{R}$ est déterminé par la permutation de R qu'il définit.

Remarque 6.7.8. — On voit aussitôt que $\mathrm{Aut}(\mathscr{R})$ (resp. $\mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R})$) est *fini* si et seulement si $\mathrm{rgred}(\mathscr{R}) - \mathrm{rgss}(\mathscr{R}) \leqslant 1$.

[27] N.D.E. : L'exposant s a pour but de suggérer « semi-simple ».

142 6.8. p-morphismes de données radicielles réduites

Dans ce numéro, p est un nombre entier > 0 fixé une fois pour toutes.

Définition 6.8.1. — Soient $\mathscr{R} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ et $\mathscr{R} = (\mathrm{M}', \mathrm{M}'^*, \mathrm{R}', \mathrm{R}'^*)$ deux données radicielles réduites. On dit qu'un morphisme de groupes

$$f : \mathrm{M}' \longrightarrow \mathrm{M}$$

est un p-*morphisme* de $\mathscr{R}'$ dans $\mathscr{R}$, si les conditions suivantes sont vérifiées : il existe une bijection

$$u : \mathrm{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}'$$

et une application $q : \mathrm{R} \to \{p^n, n \in \mathbb{N}\}$ telles que :

(i) on a $f(u(\alpha)) = q(\alpha)\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$.

(ii) on a ${}^t f(\alpha^*) = q(\alpha)u(\alpha)^*$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$. (28)

Corollaire 6.8.2. — *Un* 1-*morphisme n'est autre qu'un morphisme.*

Corollaire 6.8.3. — *Le transposé d'un p-morphisme est un p-morphisme.*

Lemme 6.8.4. — *Si* $w \in \mathrm{W}(\mathscr{R})$, $\alpha \in \mathrm{R}$, *on a* $q(w(\alpha)) = q(\alpha)$. *L'application* $s_\alpha \mapsto s_{u(\alpha)}$ *se prolonge en un isomorphisme* $\overline{u} : \mathrm{W}(\mathscr{R}) \to \mathrm{W}(\mathscr{R}')$ *tel que*

$$u(w(\alpha)) = \overline{u}(w)\big(u(\alpha)\big).$$

Il suffit de prouver que pour $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, on a $u(s_\alpha(\beta)) = s_{u(\alpha)}u(\beta)$ et $q(s_\alpha(\beta)) = q(\beta)$. Or on a successivement :

$$\begin{aligned} f\big(s_{u(\alpha)}u(\beta)\big) &= f(u(\beta)) - (u(\alpha)^*, u(\beta))f(u(\alpha)) \\ &= q(\beta)\beta - q(\beta)q(\alpha)^{-1}(\alpha^*, \beta)q(\alpha)\alpha \\ &= q(\beta)\big(\beta - (\alpha^*, \beta)\alpha\big) = q(\beta)s_\alpha(\beta). \end{aligned}$$

143 Si $\gamma = u^{-1}(s_{u(\alpha)}u(\beta))$, on a donc $q(\gamma)\gamma = f(u(\gamma)) = q(\beta)s_\alpha(\beta)$. Les deux racines γ et $s_\alpha(\beta)$ sont donc proportionnelles (sur $\mathbb{Q}$), donc égales ou opposées, mais $q(\gamma)$ et $q(\beta)$ sont positifs. On a donc $q(\gamma) = q(\beta)$ et $\gamma = s_\alpha(\beta)$.

Définition 6.8.5. — Les $q(\alpha)$ sont dits les *exposants radiciels* de f.

Exemple 6.8.6. — Soient $\mathscr{R}$ une donnée radicielle réduite et $q = p^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Alors la multiplication par $q : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$, $x \mapsto qx$ est un p-morphisme dont tous les exposants radiciels sont égaux à q (et $u = \mathrm{id}$) ; on le note

$$q : \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{R}.$$

Proposition 6.8.7. — *Dans les notations de* 6.8.1*, u réalise un isomorphisme de l'ensemble des systèmes de racines simples* (*resp. de racines positives*) *de* R *sur l'ensemble correspondant pour* R′.

Cela résulte aussitôt de 3.1.5 (resp. 3.2.1).

(28) N.D.E. : Noter que ces deux conditions entraînent $q(\alpha)\,(u(\alpha^*), u(\beta)) = q(\beta)\,(\alpha^*, \beta)$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$.

7. Structure

144

7.1. Décomposition d'une donnée radicielle

Proposition 7.1.1. — *Soient $\mathscr{R}$ une donnée radicielle, Δ un système de racines simples.*

(i) *Soient* R' *et* R'' *deux ensembles de racines* clos et symétriques *formant une partition de* R. *Si on note $\Delta' = \Delta \cap \mathrm{R}'$, $\Delta'' = \Delta \cap \mathrm{R}''$, alors $\mathrm{R}' = \mathrm{R}_{\Delta'}$, $\mathrm{R}'' = \mathrm{R}_{\Delta''}$, et toute racine de Δ' est orthogonale à toute racine de Δ''.*

(ii) *Soient Δ' et Δ'' deux sous-ensembles de Δ formant une partition de Δ et* orthogonaux. *Alors $\mathrm{R}' = \mathrm{R}_{\Delta'}$ et $\mathrm{R}'' = \mathrm{R}_{\Delta''}$ forment une partition de* R.

Prouvons d'abord (i).

Lemme 7.1.2. — *Sous les conditions de* (i)*, si α, β et $\alpha+\beta$ sont des racines, elles appartiennent toutes les trois à R' ou toutes les trois à R''.*

Supposons par exemple $\alpha+\beta \in \mathrm{R}'$. Alors on ne peut avoir $\alpha, \beta \in \mathrm{R}''$, car R'' est clos ; supposons donc $\alpha \in \mathrm{R}'$. Alors $-\alpha \in \mathrm{R}'$ et $\beta = (\beta+\alpha) - \alpha \in \mathrm{R}'$.

Montrons maintenant que $\mathrm{R}' = \mathrm{R}_{\Delta'}$ par récurrence sur l'ordre d'une racine positive $\alpha \in \mathrm{R}' \cap \mathscr{P}(\Delta)$. Si $\mathrm{ord}_\Delta(\alpha) = 1$, alors $\alpha \in \mathrm{R}' \cap \Delta = \Delta'$. Si $\mathrm{ord}_\Delta(\alpha) > 1$, il existe $\beta \in \Delta$ tel que $\alpha - \beta \in \mathrm{R}$. Par le lemme, on a $\beta \in \Delta'$, $\alpha - \beta \in \mathrm{R}'$, donc $\alpha - \beta \in \mathrm{R}_{\Delta'}$ par récurrence et enfin $\alpha = (\alpha-\beta)+\beta \in \mathrm{R}_{\Delta'}$.

Montrons enfin que Δ' et Δ'' sont orthogonaux. Si $\alpha \in \Delta'$ et $\beta \in \Delta''$, alors $(\beta^*, \alpha) \leqslant 0$. Si $(\beta^*, \alpha) \neq 0$, alors $\beta + \alpha$ est une racine, contrairement au lemme.

Démontrons (ii). Si Δ' ou Δ'' est vide, c'est immédiat. Sinon, et si $\mathrm{R}_{\Delta'}$ et $\mathrm{R}_{\Delta''}$ ne forment pas une partition de R, il existe une racine α de la forme 145

$$\alpha = \sum m'_i \alpha'_i + \sum m''_j \alpha''_j, \qquad m'_i \in \mathbb{Z}_+, \quad m''_j \in \mathbb{Z}_+,$$

où on note α'_i (resp. α''_j) des éléments de Δ' (resp. Δ''). Appliquant 3.1.2, on en déduit une relation de la forme (quitte à inverser Δ' et Δ'') :

$$\delta = \gamma + \beta, \quad \gamma \in \mathrm{R}_{\Delta'}, \quad \beta \in \Delta'', \quad \delta \in \mathrm{R}.$$

Mais comme $(\beta^*, \gamma) = 0$, $\gamma - \beta$ est aussi une racine par 2.2.5, ce qui est impossible.

Proposition 7.1.3. — *Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il n'existe pas de partition non triviale de* R *en deux sous-ensembles clos et symétriques.*

(ii) *Pour un* (*resp. tout*) *système de racines simples Δ de* R*, il n'existe pas de partition de Δ en deux sous-ensembles non vides orthogonaux.*

(iii) *La représentation naturelle de $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ dans $\mathscr{V}(\mathrm{R})$ est irréductible.*

(iv) *Pour tout couple (α, β) de racines, il existe une suite de racines $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, avec $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_n = \beta$, les racines α_i et α_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-1)$ étant non orthogonales.*

On a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) par 7.1.1. On a évidemment (iv) $\Rightarrow$ (ii). Réciproquement, si (ii) est vérifiée pour Δ, la condition (iv) est vérifiée si α, $\beta \in \Delta$. Or pour tout racine, il existe une racine simple qui ne lui soit pas orthogonale (3.1.1 par exemple). D'autre
146 part (iii) $\Rightarrow$ (i). En effet sous les conditions de 7.1.1, $\mathscr{V}(\mathrm{R}')$ est stable par $\mathrm{W}(\mathscr{R})$. Il reste à prouver (i) $\Rightarrow$ (iii).

Soit donc H un sous-espace vectoriel de $\mathscr{V}(\mathrm{R})$, stable par $\mathrm{W}(\mathscr{R})$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, l'équation $s_\alpha(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$ donne aussitôt $\alpha \in \mathrm{H}$, ou $\alpha^* \in \mathrm{H}^\perp$ (orthogonal de H dans $\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)$, qui est en dualité avec $\mathscr{V}(\mathrm{R})$). Si on pose $\mathrm{R}' = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \alpha \in \mathrm{H}\}$ et $\mathrm{R}'' = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \alpha^* \in \mathrm{H}^\perp\}$, on a réalisé une partition de R en deux sous-ensembles clos et symétriques.

Définition 7.1.4. — Une donnée radicielle (resp. un système de racines) vérifiant les conditions équivalentes de 7.1.3 et de rang semi-simple $\neq 0$ est dite *irréductible*.

Corollaire 7.1.5. — *Pour toute donnée radicielle $\mathscr{R}$, il existe une partition unique* (*à l'ordre près*) *de* R *en sous-ensembles clos, symétriques et irréductibles.*

Corollaire 7.1.6. — *Toute donnée radicielle adjointe* (*resp. simplement connexe*) *est produit de données radicielles adjointes* (*resp. simplement connexes*) *irréductibles.*

Il suffit de le voir dans le cas adjoint. L'assertion résulte alors de ce que sous les conditions de 7.1.1, on a
$$\Gamma_0(\mathrm{R}) = \Gamma_0(\mathrm{R}') \times \Gamma_0(\mathrm{R}'').$$

Corollaire 7.1.7. — *Pour tout donnée radicielle* (*resp. donnée radicielle réduite*) *$\mathscr{R}$, il existe une isogénie $\mathscr{R} \to \mathscr{R}'$, où $\mathscr{R}'$ est produit d'une donnée radicielle triviale et de données radicielles simplement connexes irréductibles* (*resp. et réduites*).

7.2. Propriétés des données radicielles irréductibles

147 ***Définition 7.2.1***. — Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle irréductible. Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on pose
$$\mathrm{long}(\alpha) = \ell(\alpha)/\ell(\alpha_0);$$
où $\alpha_0 \in \mathrm{R}$ est telle que $\ell(\alpha_0)$ soit minimum ; on dit que $\mathrm{long}(\alpha)$ est la longueur de α.

Lemme 7.2.2. — *Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle irréductible. Le groupe de Weyl opère transitivement dans l'ensemble des racines de même longueur.*

En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$. Comme la représentation de W dans $\mathscr{V}(\mathrm{R})$ est irréductible, α ne peut être orthogonale à tous les $w(\beta)$, $w \in \mathrm{W}$. Il existe donc $w \in \mathrm{W}$, avec $w(\beta)$ non orthogonale à α. Or $\ell(w(\beta)) = \ell(\beta)$ et on conclut par 2.3.2

Lemme 7.2.3. — *Si $\mathscr{R}$ est irréductible et réduite, alors* $\mathrm{long}(\mathrm{R})$ *est* $\{1\}$, $\{1, 2\}$, *ou* $\{1, 3\}$.

En vertu de la remarque utilisée ci-dessus, pour tout α, $\beta \in \mathrm{R}$, il existe toujours un $w \in \mathrm{W}$ tel que $w(\beta)$ ne soit pas orthogonale à β. On a donc $\ell(\alpha)/\ell(\beta) = 1, 2, 3, 1/2$ ou $1/3$ (par 2.3.1). On a donc $\mathrm{long}(\alpha) = 1, 2$, ou 3, mais si $\mathrm{long}(\alpha) = 2$, $\mathrm{long}(\beta) = 3$, alors $\ell(\alpha)/\ell(\beta) = 2/3$, ce qui est impossible.

Remarque 7.2.4. — En raisonnant de manière semblable, on prouve le résultat suivant : si R est irréductible et non réduit avec $\mathrm{rgss}(\mathscr{R}) > 1$, on a $\mathrm{long}(\mathrm{R}) = \{1, 2, 4\}$. Si on pose $\mathrm{long}^{-1}(i) = \mathrm{R}_i$, alors $\mathrm{ind}(\mathrm{R}) = \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2$, $\mathrm{R}_4 = 2\mathrm{R}_1$ et deux racines non proportionnelles de R_1 sont orthogonales. Réciproquement si R est un système irréductible et réduit tel que $\mathrm{long}(\mathrm{R}) = \{1, 2\}$, posons $\mathrm{long}^{-1}(i) = \mathrm{R}_i$ et supposons que deux racines non proportionnelles de R_1 soient orthogonales ; alors $\mathrm{R} \cup 2\ \mathrm{R}_1$ est irréductible, non réduit et $\mathrm{ind}(\mathrm{R} \cup 2\mathrm{R}_1) = \mathrm{R}$.

Lemme 7.2.5. — *Si $\mathscr{R}$ est une donnée radicielle irréductible, $\mathscr{R}^*$ l'est aussi et le pro-* 148
duit $\mathrm{long}(\alpha)\,\mathrm{long}(\alpha^*)$ *est constant, lorsque α parcourt* R.

Cela résulte aussitôt de 7.1.3 (iv) et 2.2.6.

Définition 7.2.6. — Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle quelconque. On appelle longueur de $\alpha \in \mathrm{R}$ et on note $\mathrm{long}(\alpha)$ la longueur de α dans sa composante irréductible.

Lemme 7.2.7. — *Il existe un unique homomorphisme de groupes $u : \Gamma_0(\mathrm{R}) \to \Gamma_0(\mathrm{R}^*)$ tel que $u(\alpha) = \mathrm{long}(\alpha)\alpha^*$ pour $\alpha \in \mathrm{R}$.*

En vertu de 3.5.5, il suffit de vérifier que si α, β, $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$, on a

$$\mathrm{long}(\alpha)\alpha^* + \mathrm{long}(\beta)\beta^* = \mathrm{long}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^*.$$

Mais α, β et $\alpha + \beta$ sont dans la même composante irréductible de R par 7.1.2 et on est ramené à 1.2.2.

Remarque 7.2.8. — Soit u comme en 7.2.7. Pour $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, on a $(u(\alpha), \beta) = (u(\beta), \alpha)$. En effet, cela revient à voir que

$$\mathrm{long}(\alpha)(\alpha^*, \beta) = \mathrm{long}(\beta)(\beta^*, \alpha)$$

ce qui est évidemment vérifié si α et β sont orthogonales. Si α et β ne sont pas orthogonales, alors elles sont dans la même composante irréductible de R, et on est ramené à 1.2.1, formule (9).

Remarque 7.2.9. — La forme bilinéaire symétrique $(u(x), y)$ est positive non dégénérée sur $\Gamma_0(\mathrm{R})$.

En effet, soient R_i les composantes irréductibles de R. On a

$$\Gamma_0(\mathrm{R}) = \prod_i \Gamma_0(\mathrm{R}_i),$$

et la forme bilinéaire $(u(x), y)$ est le produit des formes

$$2^{-1}\ell(\alpha_i)^{-1}(p(x), y)$$

sur les $\Gamma_0(\mathrm{R}_i)$, où $\ell(\alpha_i)$ est le minimum de $\ell(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathrm{R}_i$. Or ces différentes formes 149
bilinéaires symétriques sont positives non dégénérées (1.2.6).

7.3. Matrice de Cartan

Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle. Si Δ est un système de racines simples, on appelle *matrice de Cartan* de $\mathscr{R}$ relativement à Δ la matrice carrée sur l'ensemble d'indices Δ définie par
$$a_{\alpha,\beta} = (\alpha^*, \beta), \qquad \text{pour } \alpha, \beta \in \Delta.$$
Remarquons d'abord que si Δ' est un autre système de racines simples et w un élément de $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ tel que $w(\Delta) = \Delta'$, on a
$$(w(\alpha)^*, w(\beta)) = (\alpha^*, \beta),$$
donc la matrice de Cartan de $\mathscr{R}$ relativement à Δ' s'obtient à partir de celle relative à Δ par l'isomorphisme $\Delta \to \Delta'$ sur l'ensemble d'indices défini par w. Il en résulte qu'à un isomorphisme près sur l'ensemble d'indices, la matrice de Cartan ne dépend que de $\mathscr{R}$.

Proposition 7.3.1. — *La matrice de Cartan possède les propriétés suivantes :*

(i) $a_{\alpha,\alpha} = 2, \qquad a_{\alpha,\beta} \leqslant 0$ *pour* $\alpha \neq \beta$.

(ii) $a_{\alpha,\beta} = 0$ *entraîne* $a_{\beta,\alpha} = 0$.

(iii) *Il existe des entiers strictement positifs* m_α $(= \mathrm{long}(\alpha))$ *tels que la matrice*
$$(m_\alpha \, a_{\alpha,\beta})$$
soit symétrique, positive et non dégénérée.

150 (iv) *Les mineurs diagonaux de la matrice* $(a_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\Delta}$*, i.e. les déterminants*
$$\mathrm{dét}(a_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\Delta'} \quad \textit{pour } \Delta' \subset \Delta,$$
sont strictement positifs.

(v) *On a* $s_\alpha(\beta) = \beta - a_{\alpha,\beta}\,\alpha$ *et* $s_\alpha(\beta^*) = \beta^* - a_{\beta,\alpha}\,\alpha^*$.

En effet, (v) est une définition, (i) résulte de 3.2.11, (ii) de 2.2.2, (iii) de 7.2.9, (iv) se déduit aussitôt de (iii) par la relation
$$\mathrm{dét}(m_\alpha a_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\Delta'} = \prod_{\alpha\in\Delta'} m_\alpha \cdot \mathrm{dét}(a_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\Delta'}.$$

Proposition 7.3.2. — *Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ deux données radicielles* simplement connexes (*resp. adjointes*) *et* réduites, Δ (*resp.* Δ') *un système de racines simples de* $\mathscr{R}$ (*resp.* $\mathscr{R}'$), *et* $u : \Delta \to \Delta'$ *un isomorphisme tel que si on note* $(a_{\alpha,\beta})$ *et* $(a'_{\alpha'\beta'})$ *les matrices de Cartan de* $\mathscr{R}$ *et* $\mathscr{R}'$ *relativement à* Δ *et* Δ', *on ait :*
$$a'_{u(\alpha),u(\beta)} = a_{\alpha,\beta}.$$
Alors, il existe un unique isomorphisme de $\mathscr{R}$ *sur* $\mathscr{R}'$ *qui induise* u *sur* Δ.

Il suffit évidemment de faire la démonstration dans le cas adjoint. Alors $\mathrm{M} = \Gamma_0(\mathrm{R})$ et $\mathrm{M}' = \Gamma_0(\mathrm{R}')$ sont les groupes abéliens libres engendrés par Δ et Δ'. Il existe donc un unique isomorphisme de groupes de M sur M′ qui induise u sur Δ. Notons-le aussi u. Montrons que $u(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}'$. Toute racine α de $\mathscr{R}$ s'écrit $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}(\alpha_{n+1})$ avec $\alpha_i \in \Delta$. On a évidemment
$$u(\alpha) = s_{u(\alpha_1)} \cdots s_{u(\alpha_n)}(u(\alpha_{n+1})),$$

en vertu de l'hypothèse sur u et des relations (v) de 7.3.1.

Il reste à prouver que ${}^t u(\mathrm{R}'^*) \subset \mathrm{R}^*$, ce qui résulte de ce que les éléments de 151
M^*(resp. M'^*) sont déterminés par la dualité avec R ou Δ (resp. R' ou Δ'), par 1.2.5.

Corollaire 7.3.3. — *Une donnée radicielle réduite simplement connexe ou adjointe est déterminée à isomorphisme près par sa matrice de Cartan.*

Corollaire 7.3.4. — *Soient $\mathscr{R}$ une donnée radicielle réduite et simplement connexe (resp. adjointe), et Δ un système de racines simples. Le groupe $\mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R})$ s'identifie au groupe des automorphismes de l'ensemble Δ qui laissent invariante la matrice de Cartan.*

Remarque 7.3.5. — La question de l'existence d'une donnée radicielle correspondant à une matrice de Cartan donnée vérifiant (i) (ii) et (iv) (par exemple) ne se résoud pas facilement directement, sans utiliser la classification.

7.4. Diagrammes de Dynkin

Définition 7.4.1. — On appelle structure de *diagramme de Dynkin* (le mot « schéma » a été banni pour des raisons évidentes) sur un ensemble fini Δ la donnée d'un ensemble de couples d'éléments distincts de Δ, dits couples liés, et d'une application de Δ dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. La notion d'isomorphisme de telles structures est évidente.

Définition 7.4.2. — Soient $\mathscr{R}$ une donnée radicielle et Δ un système de racines simples.
On appelle diagramme de Dynkin de $\mathscr{R}$ relativement à Δ, l'ensemble Δ, deux racines 152
simples étant liées si et seulement si elles ne sont pas orthogonales, à chaque racine étant associée sa longueur.

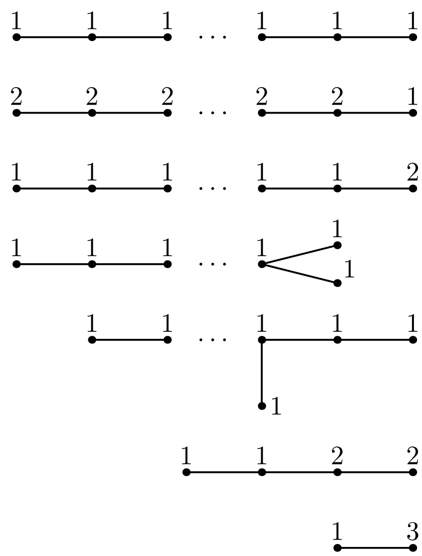
Proposition 7.4.3. — *Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan se déterminent biunivoquement.*

En effet l'équivalence
$$\alpha \text{ et } \beta \text{ ne sont pas liés} \Longleftrightarrow a_{\alpha,\beta} = 0,$$
et la relation
$$\mathrm{long}(\alpha)\, a_{\alpha,\beta} = \mathrm{long}(\beta)\, a_{\beta\,\alpha},$$
(avec inf $\mathrm{long}(\alpha) = 1$ dans chaque composante connexe du diagramme) déterminent les $a_{\alpha,\beta}$ en fonction des liaisons et des longueurs, et réciproquement (le détail de la vérification est laissé au lecteur).

Corollaire 7.4.4. — *Une donnée radicielle réduite simplement connexe ou adjointe est déterminée par son diagramme de Dynkin.*

Corollaire 7.4.5. — *Soient $\mathscr{R}$ une donnée radicielle réduite simplement connexe ou adjointe et Δ un système de racines simples. Le groupe $\mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R})$ s'identifie au groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin de $\mathscr{R}$ relativement à Δ, c'est-à-dire au groupe des permutations de Δ conservant les longueurs et les liaisons.*

Remarque 7.4.6. — On classifie avec la méthode habituelle [(*)][(29)] les divers diagrammes de Dynkin connexes, et on montre que chacun correspond effectivement à une donnée radicielle *réduite simplement connexe irréductible*. On trouve les types
153 bien connus :



A_n , $n \geq 1$.

B_n , $n \geq 2$.

C_n , $n \geq 3$.

D_n , $n \geq 4$.

E_n , $n = 6, 7, 8$.

F_4 .

G_2 .

Par 7.4.5, on trouve aussitôt le groupe $\mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R})$ correspondant ; on a :

$$\mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R}) = \{e\} \text{ pour } \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2.$$
$$\mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ pour } \mathrm{A}_n\ (n \geqslant 2), \mathrm{D}_n\ (n \geqslant 5), \mathrm{E}_6.$$
$$\mathrm{E}_\Delta(\mathscr{R}) = \mathfrak{S}_3 \text{ pour } \mathrm{D}_4.$$

7.5. Compléments sur les p-morphismes

Soit $f : \mathscr{R} \to \mathscr{R}'$ un p-morphisme (cf. 6.8). Il est clair sur les définitions que la bijection $u : \mathrm{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}'$ associée à f fait se correspondre systèmes de racines simples, systèmes de racines positives, composantes irréductibles (etc.) de R et de R′. Supposons donc pour simplifier R et R′ *irréductibles*.

Lemme 7.5.1. — *Si* R *et* R′ *sont irréductibles, il existe* $k \in \mathbb{Q}$ *tel que pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$

$$k \operatorname{long}(u(\alpha)) = q(\alpha)^2 \operatorname{long}(\alpha).$$

[(*)] *Confer* Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chap. VI n°4.2 ou Séminaire Sophus Lie.

[(29)] N.D.E. : Pour une démonstration légèrement différente, voir aussi [**De80**].

En effet, on a $\operatorname{long}(\alpha)\,(\alpha^*, \beta) = \operatorname{long}(\beta)\,(\beta^*, \alpha)$ et, de même,

$$\operatorname{long}(u(\alpha))\,(u(\alpha)^*, u(\beta)) = \operatorname{long}(u(\beta))\,(u(\beta)^*, u(\alpha)).$$

On en déduit aussitôt que pour α et β non orthogonales, on a **154**

$$\frac{q(\alpha)^2 \operatorname{long}(\alpha)}{\operatorname{long}(u(\alpha))} = \frac{q(\beta)^2 \operatorname{long}(\beta)}{\operatorname{long}(u(\beta))}$$

et l'on conclut alors par 7.1.3 (iv).

Remarque 7.5.2. — Il résulte de 7.2.2. et 6.8.4. que $q(\alpha)$ ne dépend que de $\operatorname{long}(\alpha)$. On voit alors facilement que si $q(\alpha)$ n'est pas constant, alors $q(\alpha)\operatorname{long}(\alpha)$ est constant, ce qui montre qu'alors $p = 2$ ou 3. Un coup d'oeil sur les diagrammes du numéro précédent montre qu'il y a quatre cas possibles (on désigne par la même lettre un diagramme de Dynkin et la donnée radicielle simplement connexe réduite correspondante) :

$$p = 2, \qquad \mathrm{B}_n \xrightarrow{f_1} \mathrm{C}_n, \qquad \mathrm{C}_n \xrightarrow{f_2} \mathrm{B}_n \qquad (\text{avec } \mathrm{C}_2 = \mathrm{B}_2).$$

$$p = 2, \qquad \mathrm{F}_4 \xrightarrow{g} \mathrm{F}_4.$$

$$p = 3, \qquad \mathrm{G}_2 \xrightarrow{h} \mathrm{G}_2.$$

Le lecteur remarquera que $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_1$, $g \circ g$ et $h \circ h$ sont des p-morphismes de la forme décrite en 6.8.6.

7.5.3. — On voit aussitôt sur la description précédente que si $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ sont deux données radicielles réduites de rang semi-simple $\leqslant 2$ et si on a un p-morphisme de $\mathscr{R}'$ dans $\mathscr{R}$, alors $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ sont de même type. Plus précisément, on a le tableau suivant.

Notations : Soit $f : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ un p-morphisme. On désigne par q (resp. q_1) une **155**
puissance positive quelconque de p. On utilise pour les systèmes de rang 2 les notations du numéro 4 (on désigne par α, β les racines simples, avec $\ell(\alpha) \leqslant \ell(\beta)$).

Type	p	**valeurs de** f	**valeurs de** ${}^t f$
Trivial	quelconque	-	-
A_1	quelconque	$f(\alpha') = q\alpha$	${}^t f(\alpha^*) = q\alpha'^*$
$\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1$	quelconque	$f(\alpha') = q\alpha$ $f(\beta') = q_1\beta$	${}^t f(\alpha^*) = q\alpha'^*$ ${}^t f(\beta^*) = q_1\beta'^*$
$\mathrm{A}_2,\ \mathrm{B}_2,\ \mathrm{G}_2$	quelconque	$f(\alpha') = q\alpha$ $f(\beta') = q\beta$	${}^t f(\alpha^*) = q\alpha'^*$ ${}^t f(\beta^*) = q\beta'^*$
B_2	$p = 2$	$f(\alpha') = q\beta$ $f(\beta') = 2q\alpha$	${}^t f(\alpha^*) = 2q\beta'^*$ ${}^t f(\beta^*) = q\alpha'^*$
G_2	$p = 3$	$f(\alpha') = q\beta$ $f(\beta') = 3q\alpha$	${}^t f(\alpha^*) = 3q\beta'^*$ ${}^t f(\beta^*) = q\alpha'^*$

Bibliographie

[BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. IV-VI, Hermann, 1968.

[De80] M. Demazure, *A,B,C,D,E,F, etc.*, pp. 221-227 *in :* Séminaire sur les singularités des surfaces (Palaiseau, 1976–1977), éds. M. Demazure, H. C. Pinkham, B. Teissier, Lect. Notes Math. **777**, Springer-Verlag, 1980.

EXPOSÉ XXII

GROUPES RÉDUCTIFS : DÉPLOIEMENTS, SOUS-GROUPES, GROUPES QUOTIENTS

par M. Demazure

Cet exposé comporte deux parties. La première (1 à 5.5) rassemble les résultats **156**
techniques nécessaires à la démonstration des théorèmes d'unicité et d'existence. La seconde (5.6 à la fin) ne sera pas utilisée dans cette démonstration ; la fin du n°5 sera utilisée en particulier dans l'exposé XXVI consacré aux sous-groupes paraboliques ; le n°6 établit dans le cadre des schémas les résultats classiques sur le groupe dérivé d'un groupe réductif.

1. Racines et coracines. Groupes déployés et données radicielles

Théorème 1.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* α *une racine de* G *par rapport à* T*.*

(i) *Il existe un unique morphisme de groupes à groupe d'opérateurs* T

$$\exp_\alpha : \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui induise sur les algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^\alpha \to \mathfrak{g}$*. Ce morphisme est une immersion fermée. Le morphisme correspondant*

$$\mathrm{T} \cdot_\alpha \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow \mathrm{G}$$

est également une immersion fermée. **157**

Si $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *est un monomorphisme normalisé par* T *avec le multiplicateur* α*, il existe un unique* $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ [(1)] *tel que* $p_\alpha(x) = \exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha)$ *; on a* $\mathscr{L}ie(p_\alpha)(1) = \mathrm{X}_\alpha$ *et les deux formules précédentes établissent une correspondance bijective entre* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ *et l'ensemble des monomorphismes* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *normalisés par* T *avec le multiplicateur* α*.*

(ii) *Il existe une dualité unique* (*notée* $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{XY}$)

$$\mathfrak{g}^\alpha \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathfrak{g}^{-\alpha} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{O}_\mathrm{S},$$

(1) N.D.E. : L'ensemble $\Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ est défini en XIX 4.4.1.

et un unique morphisme de groupes

$$\alpha^* : \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{T},$$

tels que l'on ait la formule (F) de Exp. XX 2.1. *On a*

$$\alpha \circ \alpha^* = 2, \qquad (-\alpha)^* = -\alpha^*,$$

et α^* *est donné par la formule de* Exp. XX 2.7.

En effet, un morphisme normalisé par T avec le multiplicateur α se factorise nécessairement par le sous-groupe fermé $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)$ de G (cf. Exp. XIX 3.9). Or $(\mathrm{Z}_\alpha, \mathrm{T}, \alpha)$ est un S-système élémentaire (Exp. XX 1.4), et on est ramené aux résultats de l'exposé XX (1.5, 2.1 et 5.9).

Remarque 1.2. — La partie (i) du théorème 1.1 reste valable si on suppose seulement que α est un caractère de T, non trivial sur chaque fibre. En effet, on a alors une décomposition $\mathrm{S} = \mathrm{S}' \amalg \mathrm{S}''$, telle que $\alpha|_{\mathrm{S}'}$ soit une racine de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ et $\mathfrak{g}^\alpha|_{\mathrm{S}''} = 0$. Si $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$, on est ramené à 1.1 ; si $\mathrm{S} = \mathrm{S}''$ le résultat est trivial ; le cas général s'en déduit aussitôt.

158 ***Notations 1.3***. — Comme dans l'exposé XX, on note U_α l'image de $\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)$; c'est un sous-groupe fermé de G, muni canoniquement d'une structure vectorielle. On dira que c'est le *groupe vectoriel associé à la racine* α. On dit que α^* est la *coracine* associée à α. Des sections $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)$ et $\mathrm{X}_{-\alpha} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})$ sont dites *appariées* si $\mathrm{X}_\alpha \mathrm{X}_{-\alpha} = 1$. Alors $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ et de même pour $\mathrm{X}_{-\alpha}$. Les morphismes p_α et $p_{-\alpha}$ correspondants sont contragrédients l'un de l'autre et on a

$$p_\alpha(x)\, p_{-\alpha}(y) = p_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\right) \alpha^*(1+xy)\, p_\alpha\left(\frac{x}{1+xy}\right).$$

Proposition 1.4. — *Sous les conditions de* 1.1, *soit* $w \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$. *Alors* $\beta = \alpha \circ \mathrm{int}(w)^{-1} : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ *est une racine de* G *par rapport à* T, $\beta^* = \mathrm{int}(w) \circ \alpha^*$ *est la coracine correspondante, et le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha) \arrow[r, "\exp_\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(w)"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "\mathrm{int}(w)"] \\
\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\beta) \arrow[r, "\exp_\beta"] & \mathrm{G}.
\end{tikzcd}$$

Trivial : transport de structure.

Définitions 1.5. — (a) Sous les conditions de 1.1, on note s_α l'automorphisme de T défini par

$$s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t))^{-1}.$$

On note (,) l'accouplement canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}, \mathrm{T}) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) = \mathbb{Z}_{\mathrm{S}}.$$

Alors s_α opère dans $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$, resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$, par les formules suivantes, où χ (resp. u) désigne une section arbitraire de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$ (resp. de 159
$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$) :

$$s_\alpha(\chi) = \chi - (\alpha^*, \chi)\,\alpha,$$
$$s_\alpha(u) = u - (u, \alpha)\,\alpha^*.$$

On a $s_\alpha \circ s_\alpha = \mathrm{id}$ et $s_{-\alpha} = s_\alpha$.

(b) Si $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$, alors l'automorphisme intérieur $w_\alpha(\mathrm{X})$ de T défini par

$$w_\alpha(\mathrm{X}) = \exp_\alpha(\mathrm{X}) \exp_{-\alpha}(-\mathrm{X}^{-1}) \exp_\alpha(\mathrm{X})$$

(cf. Exp. XX 3.1) coïncide avec s_α (*loc. cit.*). On conclut alors de 1.4 :

Corollaire 1.6. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* α *et* β *deux racines de* G *par rapport à* T*. Alors*

$$s_\alpha(\beta) = \beta - (\alpha^*, \beta)\,\alpha$$

est une racine de G *par rapport à* T*, la coracine correspondante étant*

$$s_\alpha(\beta)^* = s_\alpha(\beta^*) = \beta^* - (\beta^*, \alpha)\,\alpha^*.$$

Corollaire 1.7. — *Sous les conditions précédentes,* $\alpha^* = \beta^*$ *implique* $\alpha = \beta$.

En effet, si $\alpha^* = \beta^*$, on a cf. XXI.1.4

$$s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\beta, \qquad s_\alpha(\beta) = \beta - 2\alpha,$$

et on en déduit aussitôt

$$(s_\beta s_\alpha)^n(\alpha) = \alpha + 2n(\beta - \alpha).$$

Si $\beta \neq \alpha$, il existe un $s \in \mathrm{S}$ tel que $\alpha_s \neq \beta_s$. Mais alors la formule précédente montre qu'il existe une infinité de racines distinctes de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$, ce qui est impossible.

Définitions 1.8.0. — [2] Si $u : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$ est un morphisme de groupes, on dira que 160
u est une *coracine* de G par rapport à T, s'il existe une racine α de G par rapport à T telle que $\alpha^* = u$. Considérons le foncteur $\mathcal{R}^*$ des coracines de G par rapport à T défini comme suit :

$$\mathcal{R}^*(\mathrm{S}') = \text{ ensemble des coracines de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \text{ par rapport à } \mathrm{T}_{\mathrm{S}'}.$$

Si $\mathcal{R}$ est le foncteur des racines de G par rapport à T (Exp. XIX 3.8.), on a un morphisme canonique $\mathcal{R} \to \mathcal{R}^*$. En vertu de 1.7 et de Exp. XIX 3.8, on a :

Corollaire 1.8. — *Le morphisme canonique* $\mathcal{R} \to \mathcal{R}^*$ *est un isomorphisme. En particulier,* $\mathcal{R}^*$ *est représentable par un* S*-schéma* fini constant tordu *qui est un sous-schéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$.

Ceci conduit à poser la définition suivante :

[2] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.8.0 pour mettre en évidence ces définitions.

Définition 1.9. — Soient S un schéma, T un S-tore. On appelle *donnée radicielle tordue* dans T la donnée :

(i) d'un sous-schéma fini $\mathcal{R}$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$,

(ii) d'un sous-schéma fini $\mathcal{R}^*$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$,

(iii) d'un isomorphisme $\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^*$ noté $\alpha \mapsto \alpha^*$,

vérifiant les conditions suivantes :

(DR 1) Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $\alpha \in \mathcal{R}(\mathrm{S}')$, on a $\alpha \circ \alpha^* = 2$.

(DR 2) Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tous $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(\mathrm{S}')$, on a

$$\alpha - (\beta^*, \alpha)\,\beta \in \mathcal{R}(\mathrm{S}'), \qquad \alpha^* - (\alpha^*, \beta)\,\beta^* \in \mathcal{R}^*(\mathrm{S}').$$

161 De plus, si $\alpha \in \mathcal{R}(\mathrm{S}')$ $(\mathrm{S}' \neq \varnothing)$ entraîne $2\alpha \notin \mathcal{R}(\mathrm{S}')$, on dit que la donnée radicielle est *réduite*.

Proposition 1.10. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* $\mathcal{R}$ (*resp.* $\mathcal{R}^*$) *le schéma des racines* (*resp. des coracines*) *de* G *par rapport à* T*. Alors* $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^*)$ *est une donnée radicielle tordue* réduite *dans* T.

Le seul fait qui reste à vérifier est que cette donnée radicielle tordue est réduite. C'est ce qu'on a fait en Exp. XIX 3.10.

1.11. Soit $\mathrm{T} = \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$ un tore *trivialisé*. Si on note M^* le groupe abélien dual de M, on a des isomorphismes canoniques (cf. Exp. VIII 1.5) :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M_S}$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}^*_{\mathrm{S}},$$

donc des isomorphismes de groupes :

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{loc.const.}}(\mathrm{S}, \mathrm{M}),$$
$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{loc.const.}}(\mathrm{S}, \mathrm{M}^*).$$

Un caractère de T (resp. un morphisme de groupes $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$) sera dit *constant* (relativement à la trivialisation donnée) si l'isomorphisme précédent le transforme en une application constante de S dans M (resp. M^*).

1.12. Sous les mêmes notations, soit $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ une donnée radicielle (Exp. XXI). Alors $(\mathrm{R_S}, \mathrm{R}^*_{\mathrm{S}})$ est une donnée radicielle tordue dans T. Réciproquement, si
162 $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^*)$ est une donnée radicielle tordue dans un tore T, on appellera *déploiement* de cette donnée radicielle la donnée d'une donnée radicielle habituelle $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ et d'un isomorphisme $\mathrm{T} \simeq \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$ qui transforme $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^*)$ en $(\mathrm{R_S}, \mathrm{R}^*_{\mathrm{S}})$.

Définition 1.13. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G. On appelle *déploiement de* G *relativement à* T la donnée

(i) d'un groupe abélien M et d'un isomorphisme $\mathrm{T} \simeq \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$,

(ii) d'un système de racines R de G par rapport à T (Exp. XIX 3.6),

vérifiant les deux conditions suivantes :

(D_1) S est non vide et les racines $\alpha \in \mathrm{R}$ (resp. les coracines correspondantes) s'identifient à des fonctions constantes de S dans M (resp. M^*).

(D_2) Les $\mathfrak{g}^\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{R}$) sont des $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules libres.

On dit que G est *déployable relativement à* T s'il existe un déploiement de G relativement à T. On appelle *déploiement* de G la donnée d'un tore maximal T de G et d'un déploiement de G par rapport à T. On dit que G est *déployable* s'il existe un déploiement de G. On appelle S-groupe *déployé* un S-groupe réductif muni d'un déploiement ; on le notera par un symbole du type $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$, ou simplement G s'il n'y a pas de confusion possible.

La condition (D 1) entraîne que R (resp. R^*) s'identifie canoniquement à une partie de M (resp. M^*).

Proposition 1.14. — *Soient* S *un schéma* (*non vide*), $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S-*groupe déployé, alors*

$$\mathscr{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}) = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$$

est une donnée radicielle réduite (Exp. XXI 1.1 et 2.1.3) *; c'est un déploiement de la* 163
donnée radicielle tordue de 1.10.

C'est une conséquence triviale de 1.10 et de Exp. XIX 3.7.

Nous noterons parfois pour simplifier $\mathscr{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}) = \mathscr{R}(\mathrm{G})$. Nous utiliserons systématiquement les notations V, $\mathscr{V}(\mathrm{R})$, W, ... de Exp. XXI.

Remarque 1.15. — a) Si S est connexe non vide (resp. si $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}) = 0$) la condition (D 1) (resp. (D 2)) est automatiquement vérifiée.

b) Si $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ est un S-groupe déployé, alors pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{S}' \neq \varnothing$, $(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{T}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ est un S′-groupe déployé et $\mathscr{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}) = \mathscr{R}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{T}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$.

1.16. Soit $\mathrm{T} = \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ un tore *trivialisé*. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T s'identifie canoniquement (Exp. II 5.1.1) à

$$\mathfrak{t} \simeq \mathrm{M}^* \otimes \mathscr{O}_\mathrm{S}.$$

Pour tout morphisme de groupes $u : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, $\mathscr{L}ie(u)$ est une forme linéaire

$$\mathscr{L}ie(u) : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathscr{O}_\mathrm{S} = \mathscr{L}ie(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}/\mathrm{S}).$$

En particulier, si u est défini par un élément $\alpha \in \mathrm{M}$, alors $\mathscr{L}ie(u)$ est la forme linéaire $\overline{\alpha}$ sur $\mathrm{M}^* \otimes \mathscr{O}_\mathrm{S}$ définie par α :

$$\overline{\alpha}(m \otimes x) = (m, \alpha)\, x.$$

Symétriquement, pour tout morphisme de groupes $h : \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$, $\mathscr{L}ie(h)$ est un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-morphisme $\mathscr{O}_\mathrm{S} = \mathscr{L}ie(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}/\mathrm{S}) \to \mathfrak{t}$, défini canoniquement par la section

$$\mathrm{H} = \mathscr{L}ie(h)(1) \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{t}).$$

En particulier, si h est défini par un élément $m \in \mathrm{M}^*$, on a 164

$$\mathrm{H} = \mathscr{L}ie(h)(1) = m \otimes 1.$$

Comparant les deux définitions, on trouve en particulier
$$\overline{\alpha}(\mathrm{H}) = (h, \alpha) \cdot 1 \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}).$$

1.17. Ces définitions s'appliquent en particulier au cas où T est le tore maximal d'un groupe déployé. Toute racine $\alpha \in \mathrm{R}$ définit une *racine infinitésimale* $\overline{\alpha} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathfrak{t}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$ avec
$$\overline{\alpha}(m \otimes x) = (m, \alpha)\, x.$$
Chaque coracine $\alpha \in \mathrm{R}$ définit une *coracine infinitésimale*
$$\mathrm{H}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{t}), \qquad \mathrm{H}_\alpha = \alpha^* \otimes 1.$$
On a pour $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, la relation
$$\overline{\alpha}(\mathrm{H}_\beta) = (\beta^*, \alpha) \cdot 1,$$
et en particulier
$$\overline{\alpha}(\mathrm{H}_\alpha) = 2.$$
En particulier, si 2 est inversible sur S, alors $\overline{\alpha}$ et H_α sont non nuls sur chaque fibre.

2. Existence d'un déploiement. Type d'un groupe réductif

165 ***Proposition 2.1***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*. Supposons* T déployé*. Alors* G *est* localement *déployable par rapport à* T *: pour tout* $s_0 \in \mathrm{S}$*, il existe un voisinage ouvert* U *de* s_0 *tel que le* U*-groupe* G_{U} *soit déployable relativement à* T_{U}*.*

En effet, écrivons $\mathrm{T} \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ et
$$\mathfrak{g} = \coprod_{m \in \mathrm{M}} \mathfrak{g}^m.$$
Soit $\mathrm{R} = \{m \in \mathrm{M} \mid m \neq 0,\ \mathfrak{g}^m(s_0) \neq 0\}$. Quitte à restreindre S et à le remplacer par un voisinage ouvert de s_0, on peut supposer les $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in \mathrm{R}$, libres, et les $\mathfrak{g}^m$, $m \neq 0$, $m \notin \mathrm{R}$, nuls. On a alors
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \bigoplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha,$$
les $\mathfrak{g}^\alpha$ étant libres de rang 1. Il en résulte que R est un système de racines de G par rapport à T (Exp. XIX 3.6). Les coracines α^* correspondant aux $\alpha \in \mathrm{R}$ s'identifient alors à des fonctions localement constantes sur S à valeurs dans M^*. En restreignant encore S, on peut les supposer constantes et on a terminé.

Notons que la démonstration donne aussitôt :

Proposition 2.2. — *Soit* S *un schéma* connexe *non vide tel que* $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}) = 0$*, par exemple* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ *ou un schéma local* (*en particulier le spectre d'un corps*)*. Si* G *est un* S*-groupe réductif possédant un tore maximal déployé* T*, alors* G *est déployable relativement à* T*.*

166 On déduit aussitôt de 2.1 et du fait qu'un groupe réductif possède localement des tores maximaux pour la topologie étale (Exp. XIX 2.5) :

Corollaire 2.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif* (*resp. et* T *un tore maximal de* G)*. Alors* G *est* localement déployable (*resp. localement déployable relativement à* T) pour la topologie étale *sur* S.

Corollaire 2.4. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe réductif. Il existe une extension séparable finie* K/k *telle que* $\mathrm{G_K}$ *soit déployable.*

Remarque 2.5. — En utilisant 2.1 et la remarque Exp. XIX 2.9, on prouve aussitôt le résultat suivant : soit $\mathrm{G} = (\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé ; il existe un recouvrement de S par des ouverts U_i tel que chaque groupe déployé $\mathrm{G}_{\mathrm{U}_i}$ provienne par changement de base d'un groupe déployé sur un anneau noethérien (et en fait une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini). Nous prouverons d'ailleurs que tout groupe déployé sur S provient déjà d'un $\mathbb{Z}$-groupe déployé (Exp. XXV).

2.6. Soient k un corps algébriquement clos et G un k-groupe réductif. On sait (2.4 par exemple) qu'il existe des déploiements de G. Soient $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ et $(\mathrm{G}, \mathrm{T}', \mathrm{M}', \mathrm{R}')$ deux déploiements de G ; les données radicielles $\mathscr{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ et $\mathscr{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T}', \mathrm{M}', \mathrm{R}')$ sont alors isomorphes.

En effet, on voit d'abord qu'on peut se ramener au cas où $\mathrm{T} = \mathrm{T}'$ (car il existe $g \in \mathrm{G}(k)$ tel que $\mathrm{T}' = \mathrm{int}(g)\mathrm{T}$, et on vérifie facilement que si on transporte un déploiement par un automorphisme de G, on trouve une donnée radicielle isomorphe à la donnée initiale) ; mais $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$ étant connexe, l'isomorphisme $\mathrm{D}_k(\mathrm{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_k(\mathrm{M}')$ provient d'un unique isomorphisme $\mathrm{M} \simeq \mathrm{M}'$; pour la même raison, il existe au plus **167**
un système de racines de G par rapport à T.

Définition 2.6.1. — [3] Si G est un k-groupe réductif (k un corps algébriquement clos), on appellera *type de* G la classe d'isomorphisme de la donnée radicielle définie par un déploiement quelconque de G ; si G est un tore, de type M au sens de Exp. IX 1.4, alors le type de G comme groupe réductif est donné par la donnée radicielle triviale $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \varnothing, \varnothing)$.

Par 1.15 b) [4], le type est invariant par extension (algébriquement close) du corps de base.

Définition 2.7. — Si G est un S-groupe réductif et si $s \in \mathrm{S}$, on appelle *type de* G *en s* le type du $\overline{s}$-groupe réductif $\mathrm{G}_{\overline{s}}$.

Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $s' \in \mathrm{S}'$ se projetant en $s \in \mathrm{S}$, le type de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ en s' est égal au type de G en s.

Si G est déployable, et si $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ est un déploiement de G, alors le type de G en s est la classe d'isomorphisme de $\mathscr{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ en vertu de 1.15 b) [4]. Il résulte alors aussitôt de 2.3 la

[3] N.D.E. : On a ajouté le n°2.6.1, pour des références ultérieures.
[4] N.D.E. : On a corrigé l'original, qui renvoyait à 1.17.

Proposition 2.8. — *Soit* G *un* S*-groupe réductif* $(\mathrm{S} \neq \varnothing)$. *La fonction*

$$s \mapsto \text{type de G en } s$$

est localement constante *sur* S. *En particulier, il existe une partition de* S *en sous-schémas ouverts non vides tels que sur chacun d'eux* G *soit de type constant. Plus précisément, soit* E *l'ensemble des types des fibres de* G *; pour tout* $\mathbf{t} \in \mathrm{E}$, *soit* $\mathrm{S}_{\mathbf{t}}$ *l'ensemble des points* $s \in \mathrm{S}$ *où* G *est de type* $\mathbf{t}$ *; alors* $(\mathrm{S}_{\mathbf{t}})_{\mathbf{t}\in\mathrm{E}}$ *est une partition de* S *et chaque* $\mathrm{S}_{\mathbf{t}}$ *est ouvert et fermé (et non vide).*

3. Le groupe de Weyl

168 **3.1.** Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G. Alors

$$\mathrm{W_G(T)} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$$

est un S-groupe *étale fini* (Exp. XIX 2.5). Le morphisme $n \mapsto \mathrm{int}(n)$ induit par passage au quotient un monomorphisme canonique (qui est d'ailleurs une immersion ouverte) :

$$\mathrm{W_G(T)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}).$$

3.2. Supposons maintenant que G soit déployable relativement à T. Choisissons un déploiement, soit $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$. On a alors un isomorphisme canonique (Exp. VIII 1.5)

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}) \simeq (\mathrm{Aut}_{\text{gr.}}(\mathrm{M}))_{\mathrm{S}}.$$

En particulier, si W est le groupe de Weyl de la donnée radicielle $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ (Exp. XXI 1.1.8), on a un monomorphisme

$$\mathrm{W_S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}).$$

3.3. Pour chaque racine $\alpha \in \mathrm{R}$, la symétrie $s_\alpha \in \mathrm{W}$ opère dans M par

$$s_\alpha(x) = x - (\alpha^*, x)\,\alpha,$$

donc dans T (par le morphisme précédent), par

$$s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t))^{-1}.$$

D'autre part, comme $\mathfrak{g}^\alpha$ est supposé *libre*, il existe un $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$. Considérons alors $w_\alpha(\mathrm{X}) \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ (Exp. XX 3.1). On a (*loc. cit.*)

$$\mathrm{int}(w_\alpha(\mathrm{X}))(t) = s_\alpha(t).$$

169 Comme W est engendré par les s_α, $\alpha \in \mathrm{R}$, il résulte des remarques précédentes que si on considère W et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})/\mathrm{T}(\mathrm{S})$ comme des groupes d'automorphismes de T, on a

$$\mathrm{W} \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})/\mathrm{T}(\mathrm{S}) \subset \mathrm{W_G(T)(S)}.$$

Par définition du groupe constant W_S associé à W (cf. I 1.8), on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W_S \arrow[rr] \arrow[dr] & & W_G(T) \arrow[dl] \\ & \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(T) & \end{tikzcd} .$$

Proposition 3.4. — *Soient* S *un schéma,* (G, T, M, R) *un* S*-groupe déployé,* W *le groupe de Weyl de la donnée radicielle* $\mathscr{R}(G)$. *Alors le monomorphisme canonique*

$$W_S \longrightarrow W_G(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/T$$

est un isomorphisme.

Ce sont en effet des groupes étales sur S ; il suffit donc de vérifier que pour tout $s \in S$, $W_S(\overline{s}) \to W_G(T)(\overline{s})$ est un isomorphisme. [(5)] Or cette dernière assertion résulte, par exemple, de *Bible*, § 11.3, th. 2.

Remarque 3.5. — En utilisant 2.3, la proposition précédente donne une nouvelle démonstration du fait que le groupe de Weyl d'un tore maximal d'un S-groupe réductif G est fini sur S (Exp. XIX 2.5 (ii)). [(6)]

3.6. Sous les conditions de 3.1, pour tout $w \in W_G(T)(S)$, on note N_w [(7)] le produit fibré suivant : 170

$$\begin{tikzcd} N_w \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Norm}_G(T) \arrow[d] \\ S \arrow[r, "w"] & W_G(T). \end{tikzcd}$$

C'est un sous-schéma ouvert et fermé de $\underline{\mathrm{Norm}}_G(T)$, qui est un fibré principal homogène sous T à gauche (resp. à droite) par la loi $(t,q) \mapsto tq$ (resp. $(q,t) \mapsto qt$). Si $n \in N_w(S)$, on a

$$N_{ww'} = n \cdot N_{w'}, \qquad N_{w'w} = N_{w'} \cdot n.$$

(5) N.D.E. : En effet, puisque W_S et $W_G(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/T$ sont étales sur S, le morphisme $f : W_S \to W_G(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/T$ est étale (EGA IV_4, 17.3.4) ; si de plus chaque f_s est un isomorphisme alors, d'après *loc. cit.*, 17.9.1, f sera une immersion ouverte surjective, donc un isomorphisme.

(6) N.D.E. : En effet, soit T un tore maximal de G. Le fait que $W_G(T)$ soit fini sur S est local pour la topologie (fpqc) (EGA IV_2, 2.7.1) donc a fortiori pour la topologie étale. D'après 2.3, on peut donc supposer que G est déployé relativement à T, auquel cas l'assertion découle de 3.4.

(7) N.D.E. : On a remplacé Q_w par N_w, de même qu'en XX 3.0 on avait remplacé Q par $N^{\times}$.

3.7. En particulier, si α est une racine de G par rapport à T, N_{s_α} n'est autre que ce qui avait été noté $\mathrm{N}^\times$ en Exp. XX 3.0. Si $\mathfrak{g}^\alpha$ est libre sur S, on a donc $\mathrm{N}_{s_\alpha}(\mathrm{S}) \neq \varnothing$.

Par 3.4 et la condition (D 2) du déploiement, on en déduit le

Corollaire 3.8. — *Sous les conditions de* 3.4*, le morphisme*

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc.cons.}}(\mathrm{S}, \mathrm{W})$$

est surjectif. En particulier, pour tout $w \in \mathrm{W}$*, il existe un* $n_w \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *tel que* $\mathrm{int}(n_w)|_{\mathrm{T}} = w$.

4. Homomorphismes de groupes déployés

171

4.1. La « grosse cellule »

4.1.1. — Soit $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe réductif déployé. Choisissons un *système de racines positives* (Exp. XXI 3.2.1) R_+ de la donnée radicielle $\mathscr{R}(\mathrm{G})$. On pose $\mathrm{R}_- = -\mathrm{R}_+$.

Choisissons un ordre total sur R_+ (resp. R_-) et considérons le morphisme induit par le produit dans G

$$u : \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_-} \mathrm{U}_\alpha \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_+} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{G}.$$

C'est une *immersion ouverte.* En effet, comme les deux membres sont plats et de présentation finie sur S, il suffit de le vérifier sur chaque fibre géométrique (SGA 1, I 5.7 et VIII 5.4) ; on est donc ramené au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos ; mais, par *Bible*, § 13.4, cor. 2 au th. 3, u est radiciel et dominant ; comme l'application tangente à u à l'origine est un isomorphisme (définition d'un système de racines), u est birationnel ; mais G étant normal, on peut appliquer le « Main Theorem » de Zariski (EGA III_1, 4.4.9) et u est une immersion ouverte.

Montrons que l'image Ω de cette immersion ouverte est indépendante de l'ordre choisi sur R_+ (resp. R_-). Comme il s'agit de comparer des ouverts de G, on est ramené à prouver qu'ils ont mêmes points géométriques, donc on peut supposer encore que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Mais alors l'assertion n'est autre que *Bible*, § 13, prop. 1 (c) et th. 1 (a).

172 On a donc prouvé :

Proposition 4.1.2. — *Soit* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé. Soit* R_+ *un système de racines positives de* R*. Il existe un ouvert* Ω_{R_+} *de* G *tel que pour tout ordre total sur* R_+ (*resp.* R_-)*, le morphisme induit par le produit dans* G

$$\prod_{\alpha \in \mathrm{R}_-} \mathrm{U}_\alpha \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_+} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{G}$$

soit une immersion ouverte d'image Ω_{R_+}.

Remarque 4.1.3. — On peut traduire 4.1.2 de la façon suivante : choisissons pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$ un isomorphisme de groupes vectoriels $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\alpha$ (cf. 1.19) ; alors le morphisme (on pose $\mathrm{N} = \mathrm{Card}(\mathrm{R}_+) = \mathrm{Card}(\mathrm{R}_-)$)

$$\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}^{\mathrm{N}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}^{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

défini ensemblistement par

$$((x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}_-}, t, (x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}_+}) \longmapsto \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} p_\alpha(x_\alpha)\cdot t \cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} p_\alpha(x_\alpha)$$

est une immersion ouverte, dont l'image ne dépend que de R_+ (et non du choix des p_α et des ordres sur R_+ et R_-).

Notation 4.1.4. — On note $\Omega_{\mathrm{R}_+} = \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} \mathrm{U}_\alpha \cdot \mathrm{T} \cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} \mathrm{U}_\alpha$. [8]

Proposition 4.1.5. — *Le schéma* Ω_{R_+} *est de présentation finie sur* S (*donc* rétrocompact dans G) *et est* universellement schématiquement dense *dans* G *relativement à* S (cf. Exp. XVIII 1).

La première assertion est triviale. Alors, [9] Ω_{R_+} est plat et de présentation finie sur S, et contient la section unité, donc coupe chaque fibre de G selon un ouvert non **173**
vide donc dense ; la seconde assertion découle donc de Exp. XVIII 1.3.

Corollaire 4.1.6. — *Soit* (G, T, M, R) *un* S-*groupe réductif* déployé. *Alors*

$$\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \bigcap_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha).$$

[10] *Par conséquent,* $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ *est représentable par un sous-groupe fermé de* G, *diagonalisable.*

La seconde assertion découle aussitôt de la première. Pour démontrer celle-ci, on peut invoquer Exp. XII 4.8 et 4.11 ; on peut aussi procéder directement comme suit. [11] Soit $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Si $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ et si $\alpha(t) = 1$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, alors $\mathrm{int}(t)$ induit l'identité sur $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ et sur chaque $(\mathrm{U}_\alpha)_{\mathrm{S}'}$, $\alpha \in \mathrm{R}$, donc aussi sur $(\Omega_{\mathrm{R}_+})_{\mathrm{S}'}$, donc sur $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ par densité schématique, d'où $t \in \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}')$.

Réciproquement, comme $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ (cf. Exp. XIX 2.8), si $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ centralise $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ et les $(\mathrm{U}_\alpha)_{\mathrm{S}'}$, c'est une section de $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ qui annule les $\alpha \in \mathrm{R}$.

Corollaire 4.1.7. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*groupe réductif. Alors le centre de* G *est représentable par un sous-groupe fermé de* G, *de type multiplicatif ; c'est aussi « l'intersection des tores maximaux de* G *» au sens suivant : pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}')$ *est l'ensemble des* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ *dont l'image réciproque dans* $\mathrm{G}(\mathrm{S}'')$, *pour tout* $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$, *est contenue dans tous les* $\mathrm{T}(\mathrm{S}'')$, *où* T *parcourt l'ensemble des tores maximaux de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$.

[8] N.D.E. : Et on l'appelle la « grosse cellule » correspondant à R_+.
[9] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[10] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[11] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Compte-tenu de 2.3, la première assertion découle de 4.1.6 par descente. [12] Démontrons la seconde assertion. Soit H « l'intersection des tores maximaux de G » au sens précédent. On a évidemment $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{H}$. [13] Alors, par descente, il suffit de prouver $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \mathrm{H}$ dans le cas où G est déployé. Comme H est contenu dans l'intersection des tores maximaux de G au sens habituel, cela résulte alors de la remarque suivante : si $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ est un déploiement, $\alpha \in \mathrm{R}$ et $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}$, alors $\mathrm{int}(\exp_{\alpha}(\mathrm{X}))(\mathrm{T}) \cap \mathrm{T} = \mathrm{Ker}(\alpha)$, comme le montre un calcul trivial. (Cf. aussi Exp. XII 8.6 et 8.8 pour un énoncé plus général).

174 ***Remarque 4.1.8***. — Dans la suite, nous identifierons systématiquement dans le cas déployé T à $\mathrm{D_S(M)}$. Alors $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ n'est autre que $\mathrm{D_S}(\mathrm{M}/\Gamma_0(\mathrm{R}))$, où $\Gamma_0(\mathrm{R})$ est le sous-groupe de M engendré par R (cf. Exp. XXI 1.1.6). Si $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ est un système de racines simples de R, on a aussitôt (cf. Exp. XX 1.19) :

$$\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \bigcap \mathrm{Ker}(\alpha_i) = \bigcap \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{Z}_{\alpha_i}).$$

Proposition 4.1.9. — *Soient* S *un schéma,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* Q *un* S*-tore,* α_0 *un caractère de* Q*,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-module inversible,*

$$f : \mathrm{Q} \longrightarrow \mathrm{T}, \qquad p : \mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{G}$$

des morphismes de groupes vérifiant la relation ensembliste

$$p(\alpha_0(q)\, x) = \mathrm{int}(f(q)) \cdot p(x),$$

pour tous $q \in \mathrm{Q}(\mathrm{S}')$, $x \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *Supposons que* f *sépare les éléments de* R *au sens suivant : si* $\alpha, \alpha' \in \mathrm{R}$ *et si* $m, m' \in \mathbb{Z}$ *alors* $m\,\alpha \circ f = m'\alpha' \circ f$ *entraîne* $m\,\alpha = m'\alpha'$. [14] *Soit enfin* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $(\alpha_0)_{\overline{s}} \neq e$ *et* $p_{\overline{s}} \neq e$.

Il existe alors un ouvert U *de* S *contenant* s*, un entier* $q > 0$ *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{U}}$*, une racine* $\alpha \in \mathrm{R}$ *et un isomorphisme de* $\mathscr{O}_\mathrm{U}$*-modules*

$$h : (\mathscr{L}|_\mathrm{U})^{\otimes q} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathfrak{g}^{\alpha}|_\mathrm{U}$$

tels que

(i) $(\alpha \circ f)_\mathrm{U} = (q\,\alpha_0)_\mathrm{U}$,

(ii) $p(\mathrm{X}) = \exp_{\alpha}(h(\mathrm{X}^q))$ *pour tout* $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$.

De plus, une fois U *choisi,* q*,* α *et* h *sont uniquement déterminés.*

175 Quitte à restreindre S, nous pouvons supposer que α_0 est non nul sur chaque fibre de S. Choisissons un système de racines positives R_+ de R et soit $\mathrm{V} = p^{-1}(\Omega_{\mathrm{R}_+})$. C'est un ouvert de $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ contenant la section nulle et stable par multiplication par tout $\alpha_0(q)$, $q \in \mathrm{Q}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Comme α_0 est non trivial sur chaque fibre, il s'ensuit immédiatement que $\mathrm{V} = \mathrm{W}(\mathscr{L})$, donc que p se factorise par Ω_{R_+}. Choisissons un

[12] N.D.E. : En effet, la représentabilité du centre par un sous-schéma fermé de G est locale pour la topologie (fpqc) (SGA 1, VIII 5.2 et 5.4) donc a fortiori pour la topologie étale, et il en est de même de la propriété « de type multiplicatif« .

[13] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[14] N.D.E. : Noter que ceci est équivalent à l'hypothèse : si $\alpha, \alpha' \in \mathrm{R}$ et $m, m' \in \mathbb{Z}$ et si $(m\,\alpha \circ f)_{\overline{s}} = (m'\alpha' \circ f)_{\overline{s}}$ pour tout point géométrique $\overline{s}$ de S, alors $m\,\alpha = m'\alpha'$. En particulier, cette hypothèse de séparation est stable par changement de base.

ordre quelconque sur R_+ et R_- ; tous les produits seront supposés pris dans cet ordre. On a donc des morphismes uniques

$$\begin{aligned} a_\alpha : \mathrm{W}(\mathscr{L}) &\longrightarrow \mathrm{U}_\alpha, \qquad \alpha \in \mathrm{R}, \\ b : \mathrm{W}(\mathscr{L}) &\longrightarrow \mathrm{T} \end{aligned}$$

tels que

$$p(x) = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_-} a_\alpha(x) \cdot b(x) \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_+} a_\alpha(x).$$

Écrivant la condition de covariance sous Q, on obtient aussitôt

$$\begin{aligned} a_\alpha(\alpha_0(q)\,x) &= \alpha(f(q))\,a_\alpha(x), \qquad \alpha \in \mathrm{R} \\ b(\alpha_0(q)\,x) &= b(x) \end{aligned}$$

pour tous $x \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}')$, $q \in \mathrm{Q}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. La seconde condition donne aussitôt $b = e$.

Soit maintenant $\alpha \in \mathrm{R}$ tel que $(a_\alpha)_{\overline{s}} \neq e$ (nous savons qu'il existe un tel α, car $p_{\overline{s}}$ est supposé $\neq e$). Appliquant Exp. XIX 4.12 (a), on en déduit qu'il existe un entier $n > 0$, tel que $(\alpha \circ f)_{\overline{s}} = (n\,\alpha_0)_{\overline{s}}$. Quitte à restreindre S, on peut supposer $\alpha \circ f = n\,\alpha_0$ (Exp. IX 5.3). Mais alors, pour tout $\alpha' \in \mathrm{R}$, $\alpha' \neq \alpha$, on a $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}} \neq m\,\alpha_0$ pour tout entier $m > 0$ en vertu de l'hypothèse faite sur f (et du fait que les seules racines proportionnelles à α sont α et $-\alpha$). Appliquant de nouveau Exp. XIX 4.12 (a), à $a_{\alpha'}$ cette fois, on en déduit que $a_{\alpha'}$ est nul au voisinage de S ; R étant fini, on peut, quitte 176
à restreindre encore S, supposer les $a_{\alpha'}$ nuls pour $\alpha' \in \mathrm{R}$, $\alpha' \neq \alpha$. On a alors $p = a_\alpha$, et on peut lui appliquer Exp. XIX 4.12 (b), puis (c), qui donne le résultat annoncé (les assertions d'unicité sont évidentes).

Remarque 4.1.10. — La condition imposée à f en 4.1.9 est vérifiée en particulier si f est surjectif (= fidèlement plat).

Proposition 4.1.11. — *Soient* (G, T, M, R) *un* S*-groupe déployé,* R_+ *un système de racines positives de* R, Ω_{R_+} *la « grosse cellule » correspondante.*

(i) *Soit* H *un* S*-foncteur en groupes, séparé* [15] *pour* (fppf). *Si* $f, g : \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{H}$ *sont deux morphismes de groupes qui coïncident sur* Ω_{R_+}, *alors* $f = g$.

(ii) *Soient* H *un* S*-faisceau en groupes pour* (fppf) *et* $f : \Omega_{\mathrm{R}_+} \to \mathrm{H}$ *un* S*-morphisme vérifiant la condition suivante : pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* x, $y \in \Omega_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{S}')$ *tels que* $xy \in \Omega_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{S}')$, *on a* $f(xy) = f(x)f(y)$. *Il existe alors un* (unique, par (i)) *morphisme de groupes* $\overline{f} : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *qui prolonge* f.

En effet, par 4.1.5, (i) (resp. (ii)) résulte aussitôt de Exp. XVIII 2.2 (resp. 2.3 et 2.4).

[15] N.D.E. : On rappelle (cf. Exp. IV, 4.3.5) qu'un S-préfaisceau H est séparé pour une topologie $\mathcal{T}$ si pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et toute famille de S-morphismes $(\mathrm{S}'_i \to \mathrm{S}')_{i \in \mathrm{I}}$ couvrante pour $\mathcal{T}$, l'application $\mathrm{H}(\mathrm{S}') \to \prod_i \mathrm{H}(\mathrm{S}'_i)$ est injective.

Remarque 4.1.12. — Si $\alpha \in \mathrm{R}_+$, on a

$$(\dagger) \qquad \Omega_{\mathrm{R}_+} \cap \mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{U}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_\alpha \,.$$

(16) En effet, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, si $g = \prod_{\beta\in\mathrm{R}_-} p_\beta(x_\beta)\cdot t\cdot\prod_{\beta\in\mathrm{R}_+} p_\beta(x_\beta)$ est un élément de $\Omega_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{S}')$ et si $t' \in \mathrm{T}_\alpha(\mathrm{S}'')$, alors

$$t'gt'^{-1} = \prod_{\beta\in\mathrm{R}_-} p_\beta\big(\beta(t')x_\beta\big)\cdot t\cdot \prod_{\beta\in\mathrm{R}_+} p_\beta\big(\beta(t')x_\beta\big)$$

et comme α et $-\alpha$ sont les deux seuls éléments de R qui valent 1 sur T_α, on obtient que g appartient à $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{T}_\alpha)$ si et seulement $x_\beta = 0$ pour $\beta \neq \pm\alpha$.

D'après (†), on déduit de XX 2.1 que si $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{X}, \mathfrak{g}^\alpha)$ et $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})$, on a :

$$\exp_\alpha(\mathrm{X})\exp_\alpha(\mathrm{Y}) \in \Omega_{\mathrm{R}_+}(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow 1 + \mathrm{XY}\text{inversible}.$$

177
4.2. Morphismes de groupes déployés

Définition 4.2.1. — Soient S un schéma (*non vide*), $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ et $(\mathrm{G}',\mathrm{T}',\mathrm{M}',\mathrm{R}')$ deux S-groupes déployés. On dit que le morphisme de S-groupes $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est *compatible* avec les déploiements, ou définit un *morphisme de groupes déployés*, si la restriction de f à T se factorise en un morphisme $f_\mathrm{T} : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ qui soit de la forme $f_\mathrm{T} = \mathrm{D}_\mathrm{S}(h)$, où $h : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ est un morphisme de groupes vérifiant la condition suivante :

> il existe une bijection $d : \mathrm{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}'$ (17) et pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$ un entier $q(\alpha) > 0$ tel que $x \mapsto x^{q(\alpha)}$ soit un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$ et que
> $$h(d(\alpha)) = q(\alpha)\,\alpha, \qquad {}^t h(\alpha^*) = q(\alpha)\, d(\alpha)^*.$$

Remarque 4.2.2. — Il est immédiat que h, d, $q(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathrm{R}$, sont uniquement déterminés par f. On note $h = \mathscr{R}(f)$. Les $q(\alpha)$ sont les *exposants radiciels de f* (ou de h).

Soit p le nombre premier (s'il existe) qui est nul sur S ; posons $p = 1$ s'il n'existe aucun nombre premier nul sur S. Alors $\mathscr{R}(f)$ est un p-*morphisme* de données radicielles réduites au sens de Exp. XXI 6.8. On a donc défini un foncteur $\mathscr{R}$ de la catégorie des S-groupes déployés dans celle des données radicielles réduites (munie des p-morphismes).

Proposition 4.2.3. — *Sous les conditions de* 4.2.1, *on a les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *il existe un isomorphisme unique de* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-modules*

$$f_\alpha : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes q(\alpha)} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{d(\alpha)}$$

tel que

$$f(\exp_\alpha(\mathrm{X})) = \exp_{d(\alpha)}(f_\alpha(\mathrm{X}^{q(\alpha)}))$$

pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

178 (ii) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *on a* $q(-\alpha) = q(\alpha)$ *et* f_α *et* $f_{-\alpha}$ *sont contragrédients l'un de l'autre.*

---

(16) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
(17) N.D.E. : On a remplacé la notation $u : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ par $d : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$.

(iii) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *tout* $\mathrm{Z} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{*}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *on a*

$$f(w_{\alpha}(\mathrm{Z})) = w_{d(\alpha)}(\mathrm{Z}^{q(\alpha)}).$$

Par hypothèse le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "q(\alpha)"'] & \mathrm{T} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_{\mathrm{T}}"'] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[d, "q(\alpha)"'] \\
\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "d(\alpha)^*"] & \mathrm{T}' \arrow[r, "d(\alpha)"] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Il en résulte que f applique $\mathrm{Ker}(\alpha)$ dans $\mathrm{Ker}(d(\alpha))$, donc T_{α} dans $\mathrm{T}'_{d(\alpha)}$, donc Z_{α} dans $\mathrm{Z}'_{d(\alpha)}$. Il n'y a plus alors qu'à appliquer Exp. XX 3.10 et 3.11 aux groupes Z_{α} et $\mathrm{Z}'_{d(\alpha)}$.

Proposition 4.2.4. — *Le morphisme f induit un morphisme f_{N} de* $\underline{\mathrm{Norm}}(\mathrm{T})$ *dans* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')$, *donc un morphisme f_{W} de* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *dans* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')$ *; celui-ci est un isomorphisme. Plus précisément, si on note* $\overline{d} : \mathrm{W}(\mathscr{R}(\mathrm{G})) = \mathrm{W} \to \mathrm{W}' = \mathrm{W}(\mathscr{R}(\mathrm{G}'))$ *l'isomorphisme qui prolonge* $s_{\alpha} \mapsto s_{d(\alpha)}$ (Exp. XXI 6.8.4), *on a un diagramme commutatif d'isomorphismes :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \arrow[r, "f_{\mathrm{W}}", "\sim"'] & \mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}') \\
\mathrm{W}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, "\overline{d}_{\mathrm{S}}", "\sim"'] & \mathrm{W}'_{\mathrm{S}}. \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Cela résulte aussitôt de 3.4, Exp. XXI 6.8.4, et (iii) ci-dessus

Remarque 4.2.5. — Avec les notations de 4.2.3, la restriction de f à Ω_{R_+} (pour un **179**
système de racines positives R_+) s'écrit explicitement : elle applique Ω_{R_+} dans $\Omega'_{d(\mathrm{R}_+)}$ ($d(\mathrm{R}_+)$ est un système de racines positives de R' par Exp. XXI 6.8.7) et est donnée par la formule ensembliste :

$$f\left(\prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} \exp_{\alpha}(\mathrm{X}_{\alpha}) \cdot t \cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} \exp_{\alpha}(\mathrm{X}_{\alpha})\right)$$
$$= \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} \exp_{d(\alpha)}\left(f_{\alpha}(\mathrm{X}_{\alpha}^{q(\alpha)})\right) \cdot f_{\mathrm{T}}(t) \cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} \exp_{d(\alpha)}\left(f_{\alpha}(\mathrm{X}_{\alpha}^{q(\alpha)})\right).$$

Proposition 4.2.6. — (i) *f est surjectif* (= fidèlement plat dans le cas présent, cf. VI_{B} 3.11) *si et seulement si f_{T} l'est.*

(ii) *On a* $\mathrm{Ker}(f) \subset \Omega_{\mathrm{R}_+}$.

Prouvons (i) : si f est surjectif, alors $f_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})$ est un tore maximal de G' (en effet $f(\mathrm{T})$ est un sous-tore d'un tore maximal T' (Exp. IX 6.8) ; pour vérifier que $f(\mathrm{T}) = \mathrm{T}'$, on est ramené au cas d'un corps algébriquement clos, où c'est *Bible*, § 7.3, th. 3 (a)).

Si f_{T} est surjectif, alors la formule précédente montre que f induit une surjection de $\Omega = \Omega_{\mathrm{R}_+}$ sur $\Omega' = \Omega'_{d(\mathrm{R}_+)}$. [18] Comme les fibres de G′ sont connexes, il en résulte (cf. Exp. $\mathrm{VI_A}$, 0.5) que f est surjectif.

Prouvons (ii) et pour cela admettons un résultat qui sera démontré ci-dessous (5.7.4) : choisissons pour chaque $w \in \mathrm{W}$ un $n_w \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ qui le représente ; alors les ouverts $n_w\Omega$ ($w \in \mathrm{W}$) forment un recouvrement de G. Il suffit alors de prouver que $\mathrm{Ker}(f) \cap n_w\Omega \neq \varnothing$ entraîne $w = 1$. Si $x \in \Omega(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $f(n_w x) = 1$, on a $f(x) = f(n_w)^{-1}$; or $f(x) \in \Omega'(\mathrm{S}')$ et $f(n_w)^{-1} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')(\mathrm{S}')$. En vertu de 4.2.4, on est ramené à prouver :

Lemme 4.2.7. — *Sous les conditions de* 4.1.2, *on a* $\Omega \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$.

180 Soit
$$x = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_-} p_\alpha(x_\alpha) \cdot t \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_+} p_\alpha(x_\alpha) = v\,t\,u \in \Omega(\mathrm{S}').$$
Si x normalise $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$, on a pour tout $t' \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$,
$$x\,t'\,x^{-1} = t'' \in \mathrm{T}(\mathrm{S}'),$$
c'est-à-dire $x\,t' = t''\,x$, ce qui s'écrit
$$v\,(tt')\,(t'^{-1}ut') = (t''\,v\,t''^{-1})\,(t''t)\,u,$$
ce qui donne $t'^{-1}\,u\,t' = u$, donc $u \in \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}') = \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, soit $u = 1$. De même $v = 1$.

Corollaire 4.2.8. — *On a*
$$\mathrm{Ker}(f) = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_-} \mathrm{K}_\alpha \cdot \mathrm{Ker}(f_{\mathrm{T}}) \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_+} \mathrm{K}_\alpha,$$
où pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, K_α *désigne le* S*-groupe fini*
$$\mathrm{K}_\alpha = \mathrm{Ker}(\mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{U}_\alpha^{\otimes q(\alpha)}) \simeq \boldsymbol{\alpha}_{q(\alpha),\,\mathrm{S}}.$$

Pour appliquer ce corollaire, posons :

Définition 4.2.9. — Soient S un schéma, G et G′ deux S-groupes réductifs. Un morphisme de S-groupes $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ fidèlement plat et fini (i.e. surjectif et à noyau fini sur S) est appelé une *isogénie.* Si de plus $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe central de G, on dit que f est une *isogénie centrale.*

Proposition 4.2.10. — *Soit* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de groupes déployés. Pour que* f *soit une* isogénie (*resp. une isogénie centrale*) *il faut et il suffit que* f_{T} *soit une isogénie i.e. que* $\mathscr{R}(f)$ *soit injectif de conoyau fini* (*resp. et que pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *on ait* $q(\alpha) = 1$).

181 En effet, par 4.2.8, $\mathrm{Ker}(f)$ est fini sur S si et seulement si $\mathrm{Ker}(f_{\mathrm{T}})$ est fini sur S, et $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{T}$ si et seulement si chaque $q(\alpha)$ vaut 1 ($\mathrm{Ker}(f)$ est alors central car de type multiplicatif et distingué, cf. Exp. IX 5.5).

[18] N.D.E. : On a détaillé la référence à l'Exp. VI dans ce qui suit.

Remarque 4.2.11. — a) On voit donc que $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est une isogénie centrale si et seulement si $\mathscr{R}(f) : \mathscr{R}(\mathrm{G}') \to \mathscr{R}(\mathrm{G})$ est une isogénie au sens de Exp. XXI 6.2 ; de plus on a dans ce cas (avec les notations de *loc. cit.*) :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}\big(\mathrm{K}(\mathscr{R}(f))\big), \qquad \mathrm{K}(\mathscr{R}(f)) = \mathrm{Coker}(\mathscr{R}(f)).$$

b) Si G et G′ sont semi-simples, tout morphisme de groupes déployés $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est une isogénie.

c) Si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est fidèlement plat et fini et si G est réductif (resp. semi-simple), alors G′ l'est aussi. Il est en effet de présentation finie sur S (Exp. V 9.1), affine sur S (EGA II 6.7.1), lisse sur S (Exp. VI 9.2), à fibres géométriques connexes et réductives (resp. semi-simples) par Exp. XIX 1.7.

La définition 4.2.1 peut sembler arbitraire. Elle est justifiée par la proposition qui suit (que nous énoncerons, pour simplifier, pour des groupes semi-simples).

Disons qu'un morphisme $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ de S-groupes réductifs est *déployable* s'il existe des déploiements de G et G′ avec lesquels f soit compatible. On a alors la

Proposition 4.2.12. — *Soient* S *un schéma,* G *et* G′ *deux* S-*groupes semi-simples,* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de groupes. Soit* $s \in \mathrm{S}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{Ker}\, f_{\overline{s}}$ *est fini* ($\Leftrightarrow$ e *est isolé dans* $\mathrm{Ker}\, f(\overline{s})$) *et* $f_{\overline{s}}$ *est surjectif, i.e.* $f_{\overline{s}}$ *est une isogénie.* **182**

(ii) $f_{\overline{s}}$ *est déployable.*

(iii) *Il existe un morphisme étale* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *couvrant* s *tel que* $f_{\mathrm{S}'} : \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{G}'_{\mathrm{S}'}$ *soit déployable.*

On a évidemment (iii) ⇔ (ii) ; (ii) ⇒ (i) résulte de 4.2.10 (b) (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que G et G′ sont semi-simples – les autre implications sont valables pour des groupes réductifs).

Prouvons maintenant (i) ⇒ (iii). On peut supposer G et G′ déployés de telle sorte que f induise un morphisme $f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ (2.3 et Exp. XIX 2.8) ; quitte à restreindre S, on peut supposer que $f_{\mathrm{T}} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(h)$, où h est un morphisme de groupes $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}$. Soit $\alpha \in \mathrm{R}$, considérons le morphisme composé

$$p : \quad \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha}) \xrightarrow{\exp_{\alpha}} \mathrm{G} \xrightarrow{f} \mathrm{G}' .$$

Comme $\mathrm{Ker}(p_{\overline{s}})$ est fini, $p_{\overline{s}} \neq e$. D'autre part $f_{\mathrm{T}_{\overline{s}}}$ est surjectif ; on peut donc appliquer 4.1.9 et il existe un ouvert V_{α} de S contenant s, une racine $\alpha' \in \mathrm{R}'$, un entier $q(\alpha)$ tel que $x \mapsto x^{q(\alpha)}$ soit un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{V}_{\alpha}}$, et un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{V}_{\alpha}}$-modules

$$f_{\alpha} : (\mathfrak{g}^{\alpha})^{\otimes q(\alpha)}|_{\mathrm{V}_{\alpha}} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\alpha'}|_{\mathrm{V}_{\alpha}}$$

tel que $f(\exp_{\alpha}(\mathrm{X}_{\alpha})) = \exp_{d(\alpha)}\Big(f_{\alpha}(\mathrm{X}_{\alpha}^{q(\alpha)})\Big)$ et $\alpha' \circ f_{\mathrm{T}} = h(\alpha') = q(\alpha)\alpha$. On peut remplacer S par l'intersection des V_{α}, pour $\alpha \in \mathrm{R}$. Posons $\alpha' = d(\alpha)$. Il est clair que $d : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ est une bijection, car le noyau de h est fini ($f_{\mathrm{T}_{\overline{s}}}$ étant surjectif). Il ne reste plus qu'à prouver que $f_{\mathrm{T}} \circ \alpha^* = q(\alpha)\, \alpha'^*$, ce qui se fait par une modification triviale de l'argument utilisé en Exp. XX 3.11.

183 De toutes façons, comme on l'a vu au cours de la démonstration, on a (i) $\Rightarrow$ (iii). On a donc :

Corollaire 4.2.13. — *Soient* S *un schéma,* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *une isogénie de groupes réductifs. Alors* f *est* localement déployable pour la topologie étale.

4.3. Quotients centraux de groupes réductifs

Considérons d'abord un cas particulier.

Proposition 4.3.1. — *Soient* S *un schéma,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* N *un sous-groupe de* M *contenant* R*,* $\mathrm{Q} = \mathrm{D_S}(\mathrm{M}/\mathrm{N}) \subset \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$*. Alors :*

(i) $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ *est un* S*-groupe réductif,* $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Q}$ *en est un tore maximal ;*

(ii) *si on identifie* T′ *à* $\mathrm{D_S}(\mathrm{N})$*, alors* $\mathrm{R} \subset \mathrm{N}$ *est un système de racines de* G′ *par rapport à* T′*,* $(\mathrm{G}', \mathrm{T}', \mathrm{N}, \mathrm{R})$ *est un déploiement de* G*, et* $\mathscr{R}(\mathrm{G}')$ *s'identifie canoniquement à la donnée radicielle induite* (Exp. XXI 6.5) $\mathscr{R}(\mathrm{G})_{\mathrm{N}}$ *;*

(iii) *le morphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *est compatible avec les déploiements, d'exposants radiciels* 1*, et donne par fonctorialité le morphisme canonique* (*loc. cit.*) $\mathscr{R}(\mathrm{G})_{\mathrm{N}} \to \mathscr{R}(\mathrm{G})$.

On sait que $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ est représentable par un schéma en groupes affine sur S (Exp. VIII 5.7), lisse sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9.2), à fibres géométriques connexes et réductives (comme quotients de groupes réductifs, cf. Exp. XIX 1.7) ; G′ est donc un S-groupe réductif.

Il est clair que $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Q} \simeq \mathrm{D_S}(\mathrm{N})$ en est un tore maximal. Remarquons ensuite
184 qu'en choisissant un système de racines positives R_+ de R, l'ouvert Ω_{R_+} de 4.2 est stable sous Q et que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Omega_{\mathrm{R}_+}/\mathrm{Q} \simeq \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_-} \mathrm{U}_\alpha \underset{\mathrm{S}}{\times} (\mathrm{T}/\mathrm{Q}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_+} \mathrm{U}_\alpha\,,$$

et que $\Omega_{\mathrm{R}_+}/\mathrm{Q}$ est un ouvert de G′, contenant la section unité (cf. Exp. IV, 4.7.2 et 6.4.1).

Il en résulte que si on note $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie de G′ et α le caractère de T/Q induit par α (ou, ce qui revient au même défini par $\alpha \in \mathrm{N}$ dans l'identification $\mathrm{T}/\mathrm{Q} = \mathrm{D_S}(\mathrm{N})$), le morphisme canonique $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ induit pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$ un isomorphisme

$$\mathfrak{g}^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^\alpha.$$

On a donc prouvé que R est un système de racines de G′ par rapport à T′, et on termine la démonstration sans difficulté.

Corollaire 4.3.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* Q *un sous-groupe* invariant *de type multiplicatif de* G*. Alors* Q *est* central *dans* G*, le quotient* G/Q *est représentable par un* S*-groupe réductif, et le morphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ *est localement déployable pour la topologie étale* (*avec des exposants radiciels égaux à* 1).

La première assertion résulte de Exp. IX 5.5 ; les autres sont locales pour la topologie étale et on est ramené à 4.3.1.

Définition 4.3.3. — Soit G un S-groupe réductif. On dit que G est *adjoint* (resp. *simplement connexe*) si pour tout $s \in \mathrm{S}$, le type de G en s est donné par une donnée radicielle adjointe (resp. simplement connexe), i.e. (Exp. XXI 6.2.6) telle que M soit engendré par R (resp. M^* engendré par R^*).

Proposition 4.3.4. — (i) *Un groupe réductif adjoint* (*resp. simplement connexe*) *est semi-simple.* **185**

(ii) *Si* T *est un tore maximal du groupe réductif adjoint* (*resp. simplement connexe*) G *et si* α *est une racine de* G *par rapport à* T*, alors la racine infinitésimale* $\overline{\alpha}$ *est non nulle sur chaque fibre* (*resp.* α^* *est un monomorphisme et la coracine infinitésimale* H_α *est non nulle sur chaque fibre*).

En effet, (i) est trivial ; (ii) se vérifie sur les fibres géométriques et résulte aussitôt de Exp. XXI 6.2.8.

Proposition 4.3.5. — (i) *Pour que le groupe réductif* G *soit adjoint, il faut et il suffit que* $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \{e\}_\mathrm{S}$.

(ii) *Pour tout groupe réductif* G*, le groupe quotient* $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ *est un groupe réductif adjoint.*

En effet, on peut supposer G déployé, alors (i) est trivial (car $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \mathrm{D_S}(\mathrm{M}/\Gamma_0(\mathrm{R}))$, et (ii) résulte de 4.3.1.

Définition 4.3.6. — Soit G un S-groupe réductif. On appelle *groupe adjoint* de G et on note ad(G) le groupe $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$. On appelle *radical* de G et on note rad(G) le tore maximal (unique par Exp. XII 1.12) de $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$. On appelle *groupe semi-simple associé* à G le quotient $\mathrm{G}/\mathrm{rad}(\mathrm{G})$.

Les définitions précédentes sont compatibles au changement de base. Si $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{rad}(\mathrm{G})_{\overline{s}}$ est bien le radical de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ au sens habituel (Exp. XIX 1.6).

4.3.7. — Si $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ est un groupe déployé, alors $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) = \mathrm{D_S}(\mathrm{M}/\mathrm{N})$, où $\mathrm{N} = \mathrm{M} \cap \mathscr{V}(\mathrm{R})$, donc le groupe semi-simple associé à G (comme d'ailleurs le groupe adjoint **186**
de G) est muni d'un déploiement canonique (4.3.1) et on a un diagramme de groupes déployés

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{ss}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{ad}(\mathrm{G})$$

correspondant au diagramme canonique de données radicielles (Exp. XXI 6.5.5)

$$\mathrm{ad}(\mathscr{R}(\mathrm{G})) \longrightarrow \mathrm{ss}(\mathscr{R}(\mathrm{G})) \longrightarrow \mathscr{R}(\mathrm{G}).$$

Remarque 4.3.8. — Soit $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ un S-groupe déployé *adjoint* (resp. *simplement connexe*), Δ un système de racines simples de R. Alors la famille $\{\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, resp. $\{\alpha^*\}_{\alpha\in\Delta}$, induit un isomorphisme

$$\mathrm{T} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})^\Delta, \qquad \text{resp.} \quad (\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})^\Delta \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}.$$

En effet, $M = \Gamma_0(R)$ (resp...) et Δ est une base du groupe abélien libre $\Gamma_0(R)$ (Exp. XXI 3.1.8).

Remarque 4.3.9. — Le radical d'un groupe réductif est un sous-groupe *caractéristique* (i.e. stable sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G)$), vu sa définition.

5. Sous-groupes de type (R)

Nous nous intéressons spécialement aux groupes réductifs, mais certains des résultats que nous allons établir sont valables plus généralement pour une classe de groupes
187 plus large : les groupes de type (RR).

5.1. Groupes de type (RR)

Définition 5.1.1. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes. On dit que G est de type (RR) s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) G est lisse et de présentation finie sur S et à fibres connexes.

(ii) G possède localement pour la topologie (fpqc) des tores maximaux.

(iii) Pour tout $s \in S$, tout tore maximal T de $G_{\overline{s}}$ et toute racine de $G_{\overline{s}}$ par rapport à $T_{\overline{s}}$ (Exp. XIX 1.10), $\mathscr{L}ie(G_{\overline{s}})^{\alpha}$ est de rang 1 (comme espace vectoriel sur $\overline{\kappa}(s)$).

(iv) Pour tout $s \in S$ et tout tore maximal T de $G_{\overline{s}}$, notons R l'ensemble des racines de $G_{\overline{s}}$ par rapport à T et $\Gamma_0(R)$ le sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\overline{s}\text{-gr.}}(T, \mathbb{G}_{m,\overline{s}})$ engendré par R ; alors le contenu [19] de toute racine $\alpha \in R$ dans le groupe abélien libre $\Gamma_0(R)$ (qui est donc un entier > 0) est *inversible* sur S.

Rappel 5.1.1.1. — [20] Rappelons que si G est un groupe algébrique lisse et connexe sur un corps algébriquement clos k, un *sous-groupe de Cartan* de G est le centralisateur d'un tore maximal de G (XII 1.0), et un tel sous groupe est *lisse et connexe* : pour ceci, ainsi que pour d'autres caractérisations des sous-groupes de Cartan, voir *Bible*, § 7.1, Th. 1 dans le cas G affine et Exp. XII Th. 6.6 dans le cas général). Si S est un schéma arbitraire et G un S-groupe lisse de type fini, on appelle *sous-groupe de Cartan* de G un sous-S-groupe lisse C de G tel que, pour tout $s \in S$, $C_{\overline{s}}$ soit un sous-groupe de Cartan de $G_{\overline{s}}$ (XII Déf. 3.1).

Remarque 5.1.2. — a) En vertu de Exp. XII 7.1 (où l'hypothèse G séparé est vérifiée ici puisque G est à fibres connexes, cf. Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.5), (i) et (ii) entraînent que G possède localement pour la topologie étale des tores maximaux (resp. des sous-groupes de Cartan), conjugués localement pour la topologie étale.

b) Les sous-groupes de Cartan de G sont à fibres connexes (Exp. XII 6.6).

188 c) Si G est affine sur S, (i) et (ii) sont équivalents respectivement à

(i′) G est lisse sur S et à fibres connexes.

(ii′) Le rang réductif des fibres de G est localement constant (Exp. XII 1.7).

---

[19] N.D.E. : Le contenu de la racine α est le générateur positif de l'idéal $\{f(\alpha), f \in \Gamma_0(R)^*\}$ de $\mathbb{Z}$; c'est le plus grand entier $c > 0$ tel que $\alpha/c \in \Gamma_0(R)$.

[20] N.D.E. : On a ajouté ce rappel.

d) Par Exp. XII 8.8 (c) et (d), G possède un centre réductif Z et pour tout $s \in \mathrm{S}$ on a, avec les notations de (iv), [21] $\mathrm{Z}_{\overline{s}} = \bigcap_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha)$, d'où

$$\mathrm{Hom}_{\overline{s}\text{-gr.}}((\mathrm{T}/\mathrm{Z})_{\overline{s}}, \mathbb{G}_{m,\,\overline{s}}) \simeq \Gamma_0(\mathrm{R}).$$

e) La condition (iv) est vérifiée en particulier dans les deux cas suivants :

(1) S est de caractéristique 0 ;
(2) toute racine est un élément indivisible du groupe engendré par les racines.

f) Le fait d'être de type (RR) est stable par changement de base et est local pour la topologie (fpqc).

Des remarques (c) et (e), il résulte aussitôt la

Proposition 5.1.3. — *Un groupe réductif est de type* (RR).

Proposition 5.1.4. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR)*,* Q *un sous-groupe central de* G *de présentation finie sur* S *tel que le quotient* G/Q *soit représentable* (*par exemple* G *affine sur* S *et* Q *de type multiplicatif* (IX 2.3) *ou bien* S *artinien* ($\mathrm{VI_A}$ 3.3.2)) *; alors* G/Q *est un* S*-groupe de type* (RR)*.*

En effet G/Q est lisse sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9.2), de présentation finie sur S (Exp. V 9.1) et à fibres connexes, donc la condition (i) est vérifiée. D'autre part, la condition (ii) résulte de Exp. XII 7.6 ; il reste à vérifier les conditions (iii) et (iv).

Notons $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Q}$, soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ le morphisme canonique, $\mathrm{T}' = u(\mathrm{T})$ le tore maximal de G' image de T (cf. Exp. XII 7.1 (e)) ; pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, notons encore α le caractère de T' défini par α (on a $\mathrm{Q} \cap \mathrm{T} \subset \bigcap_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha)$ d'après 5.1.2 (d)). Prouvons d'abord :

Lemme 5.1.5. — *Sous les conditions de* 5.1.4*, soit* $\mathrm{T} = \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$ *un tore maximal trivialisé de* G*, supposons que la décomposition de* $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G})$ *sous* $\mathrm{Ad}(\mathrm{T})$ *soit de la forme* 189

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha \qquad , \quad \mathrm{R} \subset \mathrm{M} - \{0\},$$

où pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathfrak{g}^\alpha(s) \neq 0$ *pour* $\alpha \in \mathrm{R}$ (*donc* $\mathfrak{g}^\alpha$ *est un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-module inversible pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$ *et* R *est l'ensemble des racines de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *par rapport à* $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}$)*.*

Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ *de* G' *se décompose sous* $\mathrm{Ad}(\mathrm{T}')$ *de la manière suivante :*

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'^0 \bigoplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}'^\alpha$$

et $\mathscr{L}ie(u)$ *induit un isomorphisme de* $\mathfrak{g}^\alpha$ *sur* $\mathfrak{g}'^\alpha$ *.*

[21] N.D.E. : L'original indiquait « sous les conditions de (iv) », mais la dernière condition de (iv) ne semble pas utilisée ici.

En effet, soit $p = \mathscr{L}ie(u) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$. On a aussitôt $p(\mathfrak{g}^{\alpha}) \subset \mathfrak{g}'^{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, et $p(\mathfrak{g}^0) \subset \mathfrak{g}'^0$. Comme

$$\mathrm{Ker}(p) = \mathscr{L}ie(\mathrm{Q}) \subset \mathscr{L}ie(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})) = \mathfrak{g}^0,$$

p induit un monomorphisme de $\mathfrak{g}^{\alpha}$ dans $\mathfrak{g}'^{\alpha}$, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$.

Pour démontrer le lemme, il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos, et en vertu des remarques précédentes, il suffit alors de prouver que $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}') = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}'^0) + \mathrm{Card}(\mathrm{R})$. Or posons $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, $\mathrm{C}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')$; par Exp. XII 7.1 (e), u induit un morphisme fidèlement plat $\mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ de noyau Q. On a donc

$$\dim \mathrm{C}' + \dim \mathrm{Q} = \dim \mathrm{C}.$$

190 Mais G, G′, C et C′ sont lisses, donc

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{G} = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}) &= \mathrm{rg}(\mathfrak{g}^0) + \mathrm{Card}(\mathrm{R}) = \dim \mathrm{C} + \mathrm{Card}(\mathrm{R}) \\ &= \dim \mathrm{Q} + \dim \mathrm{C}' + \mathrm{Card}(\mathrm{R}) = \dim \mathrm{Q} + \mathrm{rg}(\mathfrak{g}'^0) + \mathrm{Card}(\mathrm{R}) \\ \mathrm{rg}(\mathfrak{g}') &= \dim \mathrm{G}' = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{Q} \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{rg}(\mathfrak{g}') = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}'^0) + \mathrm{Card}(\mathrm{R}),$$

c'est-à-dire la relation cherchée.

Revenons à la démonstration de 5.1.4 ; on peut supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Soit T un tore maximal de G ; appliquant 5.1.5, on a aussitôt (iii) et (iv) pour G/Q.

Pour utiliser la proposition précédente, introduisons une définition :

Définition 5.1.6. — On dit que le S-schéma en groupes G est de type (RA), s'il est de type (RR) et s'il vérifie en outre la condition (iv′) (plus forte que (iv)) :

(iv′) Pour tout $s \in \mathrm{S}$ et tout tore maximal T de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$, toute racine de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à T a un contenu dans $\mathrm{Hom}_{\overline{s}\text{-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\overline{s}})$ qui est inversible sur S.

Remarques 5.1.7. — a) Un S-groupe réductif *adjoint* est de type (RA).

b) Si S est de caractéristique 0, tout groupe de type (RR) est de type (RA).

c) Le fait d'être de type (RA) est stable par changement de base et est local pour la topologie (fpqc).

191 La remarque (a) précédente se généralise par :

Proposition 5.1.8. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR)*,* Z *son centre réductif, supposons le quotient* G/Z *représentable* (*par exemple* G *affine sur* S*, ou* S *artinien*) *; alors* G/Z *est de type* (RA).

En effet, cela résulte aussitôt de 5.1.4, 5.1.5 et 5.1.2 (d).

Remarque 5.1.9. — Si G est de type (RR) et si T est un tore maximal de G, on peut appliquer Exp. XIX 6.3. En particulier $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est étale, quasi-fini et séparé sur S.

5.2. Sous-groupes de type (R)

Définition 5.2.1. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes lisse de présentation finie à fibres connexes, [22] H un sous- schéma en groupes de G. On dit que H est de type (R) si :

(i) H est lisse, de présentation finie sur S et à fibres connexes. [22]

(ii) Pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ contient un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$.

Cette notion est stable par changement de base et locale pour la topologie (fpqc).

Rappel 5.2.2. — (cf. Exp. XII 7.9) Sous les conditions précédentes :

a) $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})^0$.

b) Si G contient localement pour la topologie étale des sous-groupes de Cartan
(resp. des tores maximaux), il en est de même de H, et les sous-groupes de Cartan **192**
(resp. les tores maximaux) de H sont des sous-groupes de Cartan (resp. des tores maximaux) de G.

Exemples 5.2.3. — a) *Sous-groupes de Borel* : un sous-groupe de Borel de G est un sous-groupe H de type (R) dont les fibres géométriques sont des sous-groupes de Borel de celles de G. [23]

b) *Sous-groupes paraboliques* : un sous-groupe parabolique de G est un sous-groupe de type (R) dont les fibres géométriques contiennent des sous-groupes de Borel.

D'autres exemples sont donnés par les propositions suivantes.

Proposition 5.2.4. — *Soit* G *comme dans* 5.2.1, $\mathrm{K} \subset \mathrm{H}$ *deux sous-schémas en groupes de* G, H *étant supposé de type* (R). *Alors* K *est un sous-groupe de type* (R) *de* H *si et seulement si c'est un sous-groupe de type* (R) *de* G.

[24] En effet, soit $s \in \mathrm{S}$. Comme H est de type (R), alors tout tore maximal de $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ est un tore maximal de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$, et donc il en est de même pour les sous-groupes de Cartan.

Proposition 5.2.5. — *Soit* G *comme dans* 5.2.1, T *un tore maximal de* G, Q *un sous-tore de* T, $\mathrm{Z} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$. *Si* H *est un sous-groupe de type* (R) *de* G *contenant* T, *alors* $\mathrm{H} \cap \mathrm{Z}$ *est un sous-groupe de type* (R) *de* Z.

Rappelons d'abord que Z est un sous-schéma en groupes fermé de G, de présentation finie (Exp. XI 6.11), à fibres connexes (Exp. XII 6.6), lisse sur S (Exp. XI 2.4), donc vérifie les conditions imposées dans la définition 5.2.1. De même, $\mathrm{H} \cap \mathrm{Z}$ est

[22] N.D.E. : L'hypothèse que G (resp. H) soit de présentation finie sur S est automatiquement vérifiée car G (resp. H) étant lisse sur S et à fibres connexes, il est quasi-compact et séparé sur S (VI_{B} 5.5), donc de présentation finie sur S.

[23] N.D.E. : Il revient au même de dire que H est un sous-groupe lisse de G, dont chaque fibre géométrique $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ (puisque tout sous-groupe de Borel de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est connexe et contient un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$).

[24] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

de présentation finie, lisse et à fibres connexes (car $H \cap Z = \underline{\mathrm{Centr}}_H(Q)$) ; de plus $H \cap Z \supset \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$.

Proposition 5.2.6. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR) (*resp.* (RA)), H *un sous-groupe de type* (R) *de* G. *Alors* H *est un* S*-groupe de type* (RR) (*resp.* (RA)).

193 En effet (i) est clair, (ii) résulte de 5.2.2 (b), (iii) et (iv) (resp. (iv′)) sont à vérifier lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Alors H contient un tore maximal T de G (et donc aussi $C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$ [(25)]) et les assertions à démontrer résultent aussitôt de :

Lemme 5.2.7. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR), T *un tore maximal de* G *muni d'une trivialisation* $T \simeq D_S(M)$, *supposons que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$$

(*les* $\mathfrak{g}^\alpha$ *étant alors des* $\mathscr{O}_S$*-modules inversibles*).

Soit H *un sous-groupe de type* (R) *contenant* $C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$ (*i.e. contenant* T). *Alors* $\mathfrak{h} = \mathscr{L}ie(H/S)$ *est localement sur* S *de la forme*

$$\mathfrak{g}^0 + \coprod_{\alpha \in R'} \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_{R'} \,;$$

de manière précise, soit pour chaque $s \in S$, $R'(s) = \{\alpha \in R \mid \mathfrak{g}^\alpha(s) \subset \mathfrak{h}(s)\}$. *Alors* $R'(s)$ *est une fonction localement constante de* s *; si* U *est un ouvert de* S *sur lequel* $R'(s) = R'$, *on a*

$$\mathfrak{h}_U = \mathfrak{g}^0_U \bigoplus \coprod_{\alpha \in R'} \mathfrak{g}^\alpha_U \,.$$

En effet, $\mathfrak{h}$ est un sous-module de $\mathfrak{g}$, localement facteur direct, contenant $\mathfrak{g}^0$ et stable par T.

5.3. Transporteur strict de deux sous-groupes de type (R). Applications

194 ***Rappel 5.3.0***. — [(26)] Soient S un schéma, G un S-groupe lisse, $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(G/S)$ et $\mathfrak{h}$ un sous-$\mathscr{O}_S$-module de $\mathfrak{g}$ localement facteur direct. La $\mathscr{O}_S$-algèbre $\mathscr{A} = \mathrm{Sym}(\omega^1_{G/S})$ est localement libre, donc le S-schéma $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S) = W(\mathfrak{g}) = \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ est essentiellement libre au sens de Exp. VIII, 6.1. Comme $W(\mathfrak{h})$ est un sous-schéma fermé de $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$, de présentation finie sur $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$, alors $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{h})$ est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de G, de présentation finie sur G, d'après Exp. VIII, 6.5 (a). (Voir aussi les ajouts 6.2.3 et 6.2.4 (a) dans Exp. $\mathrm{VI_B}$.) D'autre part, d'après Exp. II 5.3.1, on a $\underline{\mathrm{Lie}}(N/S) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(\mathfrak{h})$.

Enfin, d'après Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10, si N est lisse sur S aux points de la section unité, alors le sous-foncteur en groupes N^0 (défini en $\mathrm{VI_B}$ 3.1) est représenté par un sous-schéma en groupes ouvert de N, lisse sur S.

(25) N.D.E. : Par hypothèse, H contient $\underline{\mathrm{Centr}}_G(T')$ pour un certain tore maximal T' de G ; alors T et T' sont conjugués dans H, donc H contient aussi $C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$.

(26) N.D.E. : On a ajouté ce rappel, qui est utilisé dans la démonstration de 5.3.1 et 5.3.4.

Proposition 5.3.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe de type* (RA) (5.1.6)*,* H *un sous-groupe de type* (R) *de* G*,* $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ *leurs algèbres de Lie.*

Alors $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h})$ (*qui est représentable par un sous-schéma fermé de* G *de présentation finie sur* S *d'après* 5.3.0) *est* lisse *sur* S en tout point de la section unité *et l'on a*

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h})^0 = \mathrm{H}.$$

[27] *Démonstration.* Posons $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{n} = \mathscr{L}ie(\mathrm{N}/\mathrm{S})$. On a $\mathrm{H} \subset \mathrm{N}$ et, d'après Exp. II 5.3.1, on a pour tout $s \in \mathrm{S}$

$$\mathfrak{h}(s) \subset \mathfrak{n}(s) = \mathrm{Norm}_{\mathfrak{g}(s)}(\mathfrak{h}(s)).$$

Or, d'après 5.3.2 ci-dessous, on a $\mathfrak{h}(s) = \mathrm{Norm}_{\mathfrak{g}(s)}(\mathfrak{h}(s))$, et comme H est lisse sur S, on a $\dim_{\kappa(s)} \mathfrak{h}(s) = \dim \mathrm{H}_s$ (cf. [**DG70**], § II.5, Th. 2.1). On obtient donc que

$$\dim_{\kappa(s)} \mathfrak{n}(s) = \dim_{\kappa(s)} \mathfrak{h}(s) = \dim \mathrm{H}_s \leqslant \dim \mathrm{N}_s$$

d'où $\mathrm{N}_s^0 = \mathrm{H}_s^0 = \mathrm{H}_s$ (H étant à fibres connexes). Il en résulte que le sous-foncteur en groupes N^0 (défini en $\mathrm{VI_B}$, 3.1) est représenté par le S-groupe lisse H. Ceci prouve 5.3.1, modulo le lemme suivant :

Lemme 5.3.2. — *Sous les conditions de* 5.2.7*, si* G *est de type* (RA)*, on a, pour tout* $s \in \mathrm{S}$*,*

$$\mathrm{Norm}_{\mathfrak{g}(s)}(\mathfrak{h}(s)) = \mathfrak{h}(s).$$

En effet, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps, donc où $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ pour un certain $\mathrm{R}' \subset \mathrm{R}$. Mais on a déjà

$$\mathrm{Transp}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}.$$

En effet, si $\mathrm{H} \in \mathfrak{t}$ et $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, on a $[\mathrm{H}, \mathrm{X}] = \overline{\alpha}(\mathrm{H})\,\mathrm{X}$, où $\overline{\alpha} : \mathfrak{t} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ est le morphisme dérivé de α. Or la condition (iv′) dit justement que $\overline{\alpha} \neq 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$.

Corollaire 5.3.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe de type* (RA)*,* H *et* H′ *deux sous-groupes de type* (R) *de* G*,* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{h}'$ *leurs algèbres de Lie. Alors*

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' \Longleftrightarrow \mathfrak{h} = \mathfrak{h}'.$$

Corollaire 5.3.4. — *Sous les conditions de* 5.2.7*,* G *étant de type* (RA)*, les applications* 195

$$\mathrm{H} \mapsto \mathscr{L}ie(\mathrm{H}/\mathrm{S}), \qquad \mathfrak{h} \mapsto \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h})^0$$

réalisent une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-groupes de type (R) *de* G *contenant* T*, et l'ensemble des sous-algèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$ *contenant* $\mathfrak{g}^0$*, stables par* T*, et dont le normalisateur dans* G *est lisse sur* S *en tout point de la section unité.*

[28] En effet, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ vérifiant les propriétés ci-dessus. D'après 5.3.0, $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h})^0$ est un S-schéma en groupes lisse. De plus, comme $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ stabilise chaque $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et est à fibres connexes (XII 6.6), on a $\mathrm{C} \subset \mathrm{H}$. Donc

[27] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[28] N.D.E. : On a ajouté la démonstration qui suit.

H est un sous-groupe de G de type (R). D'après Exp. II 5.3.1, on a $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Enfin, d'après la démonstration de 5.3.2, on a $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Corollaire 5.3.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR) (5.1.1.)*,* T *un tore maximal de* G*,* H *et* H′ *deux sous-groupes de type* (R) *de* G*, contenant* T*. Alors*

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' \iff \mathfrak{h} = \mathfrak{h}'.$$

En vertu des hypothèses de présentation finie, on se ramène comme d'habitude (cf. EGA IV_3, § 8 et Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10) au cas où S est noethérien ; il suffit alors de vérifier que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ implique $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H}'_{\mathrm{S}'}$ pour tout S′ spectre d'un quotient artinien d'un anneau local de S ; (29) on est donc ramené au cas où S est artinien et où on peut appliquer 5.1.8. Soient alors $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ le morphisme canonique et $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Z}$ le tore maximal de G′ correspondant à T. En vertu de Exp. XII 7.12, il existe des sous-groupes de type (R) H_1 et H'_1 de G′, contenant T′, tels que $\mathrm{H} = u^{-1}(\mathrm{H}_1)$ et $\mathrm{H}' = u^{-1}(\mathrm{H}'_1)$. Il suffit de prouver que $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}'_1$. Mais par 5.2.7 et 5.1.5, on a

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{H}_1) = \mathscr{L}ie(\mathrm{H}'_1),$$

et on est ramené à 5.3.3.

196 ***Remarque 5.3.6***. — Le fait que H et H′ contiennent le même tore maximal est essentiel pour la validité de 5.3.5 lorsque G n'est pas de type (RA). Exemple : tores maximaux de $\mathrm{SL}_{2,\,k}$, pour k de caractéristique 2. (30)

Corollaire 5.3.7. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe de type* (RR)*,* T *un tore maximal de* G*,* H *et* H′ *deux sous-groupes de type* (R) *de* G*, contenant* T*. L'ensemble* U *des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* $\mathrm{H}_s = \mathrm{H}'_s$ *est ouvert et fermé dans* S *et* $\mathrm{H}_{\mathrm{U}} = \mathrm{H}'_{\mathrm{U}}$.

En effet, cela résulte aussitôt de 5.3.5 et 5.2.7.

Corollaire 5.3.8. — *Le « foncteur des sous-groupes de type* (R) *contenant* T *», où* T *est un tore maximal donné dans un groupe* G *de type* (RR) *est formellement non ramifié* (Exp. XI 1.1)*.*

Théorème 5.3.9. — *Soient* G *un* S*-groupe de type* (RR) (5.1.1)*,* H *et* H′ *deux sous-groupes de type* (R) (5.2.1)*. Soit* $\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}')$ *le transporteur strict de* H *dans* H′ *défini par*

$$\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}')(\mathrm{S}') = \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid \mathrm{int}(g)\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{H}'_{\mathrm{S}'}\}.$$

Alors $\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}')$ *est représentable par un sous-schéma* fermé *de* G*, qui est* lisse et de présentation finie *sur* S.

(29) N.D.E. : En effet, soient $g \in \mathrm{G}$, s son image dans S, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},g}$, $\mathfrak{n}$ celui de $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, et I (resp. I′) le noyau du morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},g}$ vers $\mathscr{O}_{\mathrm{H},g}$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathrm{H}',g}$) (ce dernier étant l'anneau nul si $g \notin \mathrm{H}$, resp. $g \notin \mathrm{H}'$). Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{G},g}$ est noethérien, I et I′ sont fermés pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, donc a fortiori pour la topologie $\mathfrak{n}$-adique, donc il suffit de montrer que $\mathrm{I} + \mathfrak{n}^n\mathscr{O}_{\mathrm{G},g} = \mathrm{I}' + \mathfrak{n}^n\mathscr{O}_{\mathrm{G},g}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(30) N.D.E. : En effet, si k est algébriquement clos, tous les tores maximaux de $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_{2,\,k}$ sont conjugués sous $\mathrm{G}(k)$, et ont tous pour algèbre de Lie la droite $k\,\mathrm{id} \subset \mathrm{M}_2(k)$ (qui est invariante par l'action adjointe).

Le fait que $\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}')$ soit représentable par un sous-schéma fermé de G, de présentation finie sur S résulte de Exp. XI 6.11 (a). Pour démontrer qu'il est lisse sur S, il faut prouver que si S est affine et si S_0 est le sous-schéma fermé défini par un idéal nilpotent J, et si $g_0 \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$ et $\mathrm{int}(g_0)\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}'_0$, il existe un $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$, se projetant sur g_0 et tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{H} = \mathrm{H}'$. Comme la question de lissité est locale pour la topologie **197**
étale, on peut supposer que H contient un tore maximal T de G.

Alors T_0 est un tore maximal de H_0, donc $\mathrm{int}(g_0)\mathrm{T}_0$ un tore maximal de H'_0. Par Exp. IX 3.6 bis, il existe un tore T' de H' tel que $\mathrm{T}'_0 = \mathrm{int}(g_0)\mathrm{T}_0$; par Exp. IX 3.3 bis, il existe donc un $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$, se projetant sur g_0 et tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{T} = \mathrm{T}'$. Quitte à remplacer H par $\mathrm{int}(g)\mathrm{H}$, on peut donc supposer que H et H' contiennent le même tore maximal T et que $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}'_0$. Mais alors $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$ par 5.3.7. C.Q.F.D.

Corollaire 5.3.10. — *Soient* G *un* S*-groupe de type* (RR)*,* H *un sous-groupe de type* (R) *de* G*. Alors* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de* G*, de présentation finie et* lisse *sur* S.

Utilisant maintenant le raisonnement qui a servi, dans Exp. XI, à déduire 5.4 bis de 5.2 bis, on obtient :

Corollaire 5.3.11. — *Sous les hypothèses de* 5.3.9*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H *et* H' *sont conjugués localement dans* G *pour la topologie étale.*

(i bis) *idem pour la topologie* (fpqc).

(ii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *et* $\mathrm{H}'_{\overline{s}}$ *sont conjugués par un élément de* $\mathrm{G}(\overline{s})$.

(ii bis) *Le morphisme structural* $\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}') \to \mathrm{S}$ *est surjectif.*

(iii) $\underline{\mathrm{Transt}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}')$ *est un fibré principal homogène sous l'action du* S*-schéma en groupes lisse et de présentation finie* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$.

Remarquons simplement que l'assertion non triviale (iii) ⇒ (i) est le lemme de **198**
Hensel.

Utilisant maintenant *Bible*, § 6.4, th. 4 (= [**Ch05**], § 6.5 th. 5) et § 9.3, th. 1, on obtient par 5.3.10 et 5.3.11 :

Corollaire 5.3.12. — *Soient* G *un* S*-groupe de type* (RR)*. Les sous-groupes de Borel de* G *sont fermés dans* G*, leur propre normalisateur, et conjugués localement pour la topologie étale.*

Définition 5.3.13. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes lisse de présentation finie et à fibres connexes. [31] On appelle *couple de Killing* de G un couple $\mathrm{T} \subset \mathrm{B}$, où T est un tore maximal de G et B un sous-groupe de Borel de G contenant T.

Utilisant maintenant la conjugaison des tores maximaux dans B (cf. 5.1.2 (a) et 5.2.6, par exemple), on a :

Corollaire 5.3.14. — *Soit* G *un* S*-groupe de type* (RR)*. Les couples de Killing de* G *sont conjugués localement pour la topologie étale.*

---

[31] N.D.E. : cf. la N.D.E. (22).

Corollaire 5.3.15. — *Soit* G *un* S-*groupe de type* (RR). *Soit* T *un tore maximal de* G, $\mathrm{W_G(T)} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *le groupe de Weyl correspondant* (Exp. XIX 6.3). *Le « foncteur des groupes de Borel de* G *contenant* T *» est formellement principal homogène sous* $\mathrm{W_G(T)}$.

Cela résulte aussitôt de 5.3.14 et du fait que si B est un sous-groupe de Borel de G contenant T, on a

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \bigcap \mathrm{B} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}),$$

cf. Exp. XIV 4.4.

199 ***Proposition 5.3.16***. — *Soient* G *un* S-*groupe de type* (RR), H *un sous-groupe de type* (R), $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *son normalisateur* (5.3.10). *Soient* T *un tore maximal de* H, $\mathrm{W_H(T)}$ *et* $\mathrm{W_N(T)}$ *les groupes de Weyl correspondants* (*étales quasi-finis séparés par* Exp. XIX 6.3). *On a la suite exacte de faisceaux* (*pour la topologie étale*) *suivante* (*les morphismes sont induits par les morphismes* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{T}) \to \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{N}}(\mathrm{T}) \to \mathrm{N/H}$) :

$$1 \longrightarrow \mathrm{W_H(T)} \longrightarrow \mathrm{W_N(T)} \longrightarrow \mathrm{N/H} \longrightarrow 1.$$

Le seul point non trivial est le fait que la dernière flèche soit un épimorphisme. Soit donc $n \in \mathrm{N(S')}$, $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$. Les deux tores maximaux T et $\mathrm{int}(n)\mathrm{T}$ de H sont conjugués dans H localement pour la topologie étale. Il existe donc une famille couvrante $\{\mathrm{S}'_i \to \mathrm{S}'\}$ et pour chaque i un $h_i \in \mathrm{H}(\mathrm{S}'_i)$ tel que $\mathrm{int}(h_i)\mathrm{T} = \mathrm{int}(n)\mathrm{T}$. On a donc $nh_i^{-1} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{N}}(\mathrm{T})$, ce qui entraîne le résultat cherché.

Remarque 5.3.17. — On peut décrire $\mathrm{W_N(T)}$ de la manière suivante : supposons-nous ramenés à la situation de 5.2.7, avec $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$. Alors $\mathrm{W_N(T)}$ égale $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{W}}(\mathrm{R}')$, le faisceau des sections de $\mathrm{W} = \mathrm{W_G(T)}$ qui, opérant sur R, normalisent R′. En effet, par 5.3.5, on a

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{N}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h}) \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}).$$

Corollaire 5.3.18. — *Soient* G *un* S-*groupe de type* (RR), H *un sous-groupe de type* (R). *Supposons « les groupes de Weyl de* G *finis », i.e. que pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tout tore maximal* T *de* $\mathrm{G_{S'}}$, *le* S′-*schéma étale* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G_{S'}}}(\mathrm{T})/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G_{S'}}}(\mathrm{T})$ *soit fini* (cf. Exp. XIX 6.3 (iii)). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H *est* fermé *dans* G.

200 (ii) $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})/\mathrm{H}$ *est représentable par un* S-*schéma* fini étale.

(iii) *« les groupes de Weyl de* H *sont finis ».*

En effet, on peut supposer que H possède un tore maximal T. D'après 5.3.10, $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est fermé dans G, donc $\mathrm{W_N(T)}$ est fermé dans $\mathrm{W_G(T)}$ et donc fini sur S. On a évidemment (i) ⇒ (iii), et l'on a (iii) ⇒ (ii) par la suite exacte de 5.3.16. Enfin, on a (ii) ⇒ (i) car si N/H est fini, il est séparé, donc H est fermé dans N donc dans G.

Remarque 5.3.19. — Lorsque G est réductif, les conditions précédentes sur H semblent toujours vérifiées. Nous les démontrons ci-dessous dans la plupart des cas.

5.4. Sous-groupes de type (R) d'un groupe réductif déployé (généralités)

5.4.1. — Si H est un sous-groupe de type (R) du groupe réductif G, alors H contient localement pour la topologie étale un tore maximal de G (5.2.2). Par 2.3, on peut, localement pour la topologie étale, supposer G déployé par rapport à ce tore. Soit donc $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé, H un sous-groupe de type (R) de G contenant T. Par 5.3.5 un tel sous-groupe est caractérisé par son algèbre de Lie, laquelle (5.2.7) est localement sur S de la forme $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$:

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'} = \mathfrak{t} \bigoplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}'} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

Définition 5.4.2. — Soit $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé. On dira que la partie R' de R est de type (R) si $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de type (R) de G contenant T. Ce sous-groupe, uniquement déterminé par R', est noté $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$.

Lemme 5.4.3. — *Sous les conditions précédentes, on a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} \mathrm{H} \cap \mathrm{Z}_{\alpha} = \mathrm{T} &\Longleftrightarrow \alpha \notin \mathrm{R}', \quad -\alpha \notin \mathrm{R}', \\ \mathrm{H} \supset \mathrm{U}_{\alpha} &\Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}', \\ \mathrm{H} \cap \mathrm{U}_{\alpha} = e &\Longleftrightarrow \alpha \notin \mathrm{R}', \\ \mathrm{H} \supset \mathrm{Z}_{\alpha} &\Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}', \quad -\alpha \in \mathrm{R}'. \end{aligned}$$

En effet, $\mathrm{H} \cap \mathrm{Z}_{\alpha}$ est un sous-groupe de type (R) de Z_{α}, par 5.2.5; mais un sous- **201**
groupe de type (R) de Z_{α}, contenant T, est localement égal à l'un des sous-groupes suivants : T, $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha}$, $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{-\alpha}$, Z_{α}, par 5.3.5.

Lemme 5.4.4. — *Sous les conditions de* 5.4.2, *soit* R_+ *un système de racines positives ; choisissons des ordres sur* $\mathrm{R}' \cap \mathrm{R}_+$ *et* $\mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}_+$. *Le morphisme*

$$\Omega_{\mathrm{R}_+, \mathrm{R}'} = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}_+} \mathrm{U}_{\alpha} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \prod_{\alpha \in \mathrm{R}' \cap \mathrm{R}_+} \mathrm{U}_{\alpha} \longrightarrow \mathrm{G}$$

induit par le produit dans G *induit une immersion ouverte*

$$\Omega_{\mathrm{R}_+, \mathrm{R}'} \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}.$$

En effet, par 5.4.3, ce morphisme se factorise par $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ et induit donc une immersion $\Omega_{\mathrm{R}_+, \mathrm{R}'} \to \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$. On raisonne alors comme dans 4.1.1.

Proposition 5.4.5. — *Soit* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé. Soient* R' *et* R'' *deux parties de* R, *de type* (R).

(i) $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ *est lisse en tout point de la section unité,* $\mathrm{R}' \cap \mathrm{R}''$ *est de type* (R) *et l'on a*

$$(\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}''})^0 = \mathrm{H}_{\mathrm{R}' \cap \mathrm{R}''}.$$

(ii) *On a l'équivalence* **202**

$$\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \subset \mathrm{H}_{\mathrm{R}''} \Longleftrightarrow \mathrm{R}' \subset \mathrm{R}''.$$

En effet, (ii) résulte aussitôt de (i). Pour prouver (i), il suffit de prouver que $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ est lisse en tout point de la section unité : sa composante neutre (cf. Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10) sera alors un groupe de type (R) contenant T, donc égale à $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}$; mais $\Omega_{\mathrm{R}_+,\mathrm{R}'} \cap \Omega_{\mathrm{R}_+,\mathrm{R}''} = \Omega_{\mathrm{R}_+,\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}$ est un ouvert de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ contenant la section unité et lisse sur S.

Corollaire 5.4.6. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*, s un point de* S*. Si* H *et* H′ *sont deux sous-groupes de type* (R) *de* G *contenant* T *tels que* $\mathrm{H}_s \subset \mathrm{H}'_s$*, il existe un ouvert* U *de* S *contenant s tel que* $\mathrm{H}_\mathrm{U} \subset \mathrm{H}'_\mathrm{U}$.

On peut en effet supposer G déployé par rapport à T. L'assertion résulte alors aussitôt de 5.4.5 (ii).

On est conduit à se demander quelles sont les parties R′ de type (R) de R. On peut supposer le groupe adjoint ; il faut alors vérifier que $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ est une algèbre de Lie et que son normalisateur est lisse en tout point de la section unité. Le cas le plus important est donné par le

Théorème 5.4.7. — *Toute partie* close R′ *de* R *est de type* (R). (On rappelle, cf. Exp. XXI 3.1.4, que $\mathrm{R}' \subset \mathrm{R}$ est dite *close* si $\alpha, \beta \in \mathrm{R}'$, $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$ entraîne $\alpha + \beta \in \mathrm{R}'$).

Remarque 5.4.8. — Nous verrons plus tard (Exp. XXIII 6.6) que si $6 \cdot 1_\mathrm{S} \neq 0$ [(32)] (par exemple, si S possède une caractéristique résiduelle distincte de 2 et de 3), le fait que
203 $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ soit une algèbre de Lie entraîne déjà que R′ est close, donc R′ est de type (R) si et seulement si elle est close. Le théorème 5.4.7 donne donc toutes les parties de type (R) « indépendantes de la caractéristique ».

Démontrons d'abord :

Lemme 5.4.9. — *Choisissons pour chaque* $\alpha \in \mathrm{R}$ *un* $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$*. Soient* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$*, avec* $\alpha + \beta \neq 0$ *et soit q le plus grand entier i tel que* $\alpha + i\,\beta \in \mathrm{R}$*. Il existe des sections* $\mathrm{M}_{\alpha,\beta,i} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$*, uniquement déterminées, telles que*

$$\mathrm{Ad}(\exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha))(\mathrm{X}_\beta) = \mathrm{X}_\beta + \sum_{i=1}^{q} \mathrm{M}_{\alpha,\beta,i}\, x^i\, \mathrm{X}_{\beta+i\alpha},$$

pour tout $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

En effet, $x \mapsto \mathrm{Ad}(\exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha))(\mathrm{X}_\beta)$ définit un morphisme $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{W}(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{G}^m_{a,\,\mathrm{S}}$. Il existe donc des sections $\mathrm{Y}_n \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g})$, uniquement déterminées, telles que

$$\mathrm{Ad}(\exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha))(\mathrm{X}_\beta) = \sum_{n\geqslant 0} x^n\, \mathrm{Y}_n.$$

Faisant opérer l'automorphisme intérieur défini par une section t de T, on trouve aussitôt

$$\mathrm{Ad}(t)(\mathrm{Y}_n) = \beta(t)\,\alpha(t)^n\,\mathrm{Y}_n,$$

ce qui entraîne $\mathrm{Y}_n \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha})$. Comme α et β ne sont pas proportionnelles, aucun des $\beta + n\alpha$ n'est nul ; on a donc $\mathrm{Y}_n = 0$ pour $n > q$, $\mathrm{Y}_n = \mathrm{M}_{\alpha,\beta,n}\ \mathrm{X}_{\beta+n\alpha}$ pour

[(32)] N.D.E. : En fait, il suffit (cf. *loc. cit.*) que 2 et 3 soient non nuls sur S.

$0 \leqslant n \leqslant q$, où $M_{\alpha,\beta,n} \in \mathbb{G}_a(S)$ est uniquement déterminé. Faisant $x = 0$ dans la formule obtenue, on trouve $Y_0 = X_\beta$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 5.4.10. — En dérivant pour $x = 0$ la formule précédente, on trouve **204**

$$[X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}, & \text{où } N_{\alpha,\beta} = M_{\alpha,\beta,1}, \quad \text{si } \alpha+\beta \in R, \\ 0 & \text{si } \alpha+\beta \notin R, \qquad \alpha+\beta \neq 0. \end{cases}$$

Démontrons maintenant 5.4.7. Si R' est une partie close de R, alors $\mathfrak{g}_{R'}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, par 5.4.10 et Exp. XX 2.10, formule (3). Par 5.4.9 et Exp. XX 2.10, formule (2), U_α normalise $\mathfrak{g}_{R'}$ pour chaque $\alpha \in R'$. Choisissons un système de racines positives R_+ et considérons l'ouvert Ω_{R_+} de 4.1.2 ; soit $\Omega_{R_+,R'}$ le sous-schéma fermé de Ω_{R_+} défini comme suit :

$$\Omega_{R_+,R'} = \Bigg(\prod_{\alpha\in R'\cap -R_+} U_\alpha\Bigg) \cdot T \cdot \Bigg(\prod_{\alpha\in R'\cap R_+} U_\alpha\Bigg).$$

L'immersion canonique $\Omega_{R_+,R'} \to G$ se factorise par $i : \Omega_{R_+,R'} \to \underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{g}_{R'})$. Supposons G adjoint ; l'application tangente à i en les points de la section unité est bijective par 5.3.2 ; en particulier, le morphisme i est étale en tout point de la section unité donc est une immersion locale [33] en tout point de la section unité, donc $\underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{g}_{R'})$ est lisse en tout point de la section unité, ce qu'il fallait démontrer.

5.5. Sous-groupes de Borel d'un groupe réductif déployé

Proposition 5.5.1. — *Soit* (G, T, M, R) *un* S*-groupe déployé. Pour tout système de racines positives* R_+ *de* R*,* H_{R_+} *(qui existe par* 5.4.7*) est un sous-groupe de Borel de* G *et, pour tout ordre sur* R_+*, le morphisme induit par le produit dans* G

$$T \underset{S}{\times} \prod_{\alpha\in R_+} U_\alpha \longrightarrow G$$

est une immersion fermée d'image H_{R_+}*. On note* $B_{R_+} = H_{R_+}$*.* **205**

Par définition des sous-groupes de Borel, la première assertion peut se vérifier en remplaçant S par le spectre d'un corps algébriquement clos. Soit alors B le sous-groupe de Borel de G contenant T et correspondant au système de racines positives R_+ (*Bible*, § 10.4, prop. 9) ; l'algèbre de Lie de B est $\mathfrak{g}_{R_+}$; on a donc $B = H_{R_+}$ par 5.3.5.

Démontrons la seconde assertion : le morphisme de l'énoncé induit une immersion ouverte $i : T \times_S \prod_{\alpha\in R_+} U_\alpha \to H_{R_+}$ (5.4.4). Or i est surjectif (*Bible*, § 15.1, cor. 1 à la prop. 1).

---

[33] N.D.E. : D'après EGA IV_4, 17.11.2, i est étale en tout point de la section unité (et $\underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{g}_{R'})$ est lisse en tout point de la section unité). De plus, soit V le plus grand ouvert de $\Omega_{R_+,R'}$ sur lequel i est étale ; comme i est un monomorphisme, i_V est une immersion ouverte (*ibid*, 17.9.1).

Corollaire 5.5.2. — *Choisissons un ordre quelconque sur* R_+ *et pour chaque* $\alpha \in \mathrm{R}_+$ *un* $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}_+$. *Pour chaque couple* $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $i\,\alpha + j\,\beta \in \mathrm{R}$, *il existe une section unique*

$$\mathrm{C}_{i,j,\alpha,\beta} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$$

telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *on ait*

$$\exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha)\exp_\beta(y\mathrm{X}_\beta)\exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha)^{-1} = \exp_\beta(y\mathrm{X}_\beta) \prod_{\substack{i,j\in\mathbb{N}^*\\ i\alpha+j\beta\in\mathrm{R}}} \exp_{i\alpha+j\beta}(\mathrm{C}_{i,j,\alpha,\beta}\, x^i\, y^j\, \mathrm{X}_{i\alpha+j\beta}).$$

Si $\alpha = \beta$, l'assertion est triviale. Supposons donc $\alpha \neq \beta$; alors, en vertu de la
206 proposition, il existe des morphismes uniques

$$\mathrm{F}_0 : \mathbb{G}^2_{a,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{T}, \qquad \mathrm{F}_\gamma : \mathbb{G}^2_{a,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \quad (\gamma \in \mathrm{R}_+)$$

tels que l'on ait

$$\exp(x\mathrm{X}_\alpha)\exp(y\mathrm{X}_\beta)\exp(x\mathrm{X}_\alpha)^{-1} = \mathrm{F}_0(x,y) \prod_{\gamma\in\mathrm{R}_+} \exp(\mathrm{F}_\gamma(x,y)\mathrm{X}_\gamma).$$

Soit $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Faisons agir $\mathrm{int}(t)$ sur cette formule ; on a aussitôt les relations

$$\mathrm{F}_0(\alpha(t)\,x, \beta(t)\,y) = \mathrm{F}_0(x,y), \tag{1}$$

$$\mathrm{F}_\gamma(\alpha(t)\,x, \beta(t)\,y) = \gamma(t)\,\mathrm{F}_\gamma(x,y). \tag{2}$$

Comme α et β sont deux caractères linéairement indépendants (sur $\mathbb{Q}$) de T, on conclut comme d'habitude de la première relation que F_0 est constant, donc $\mathrm{F}_0(x,y) = e$. Écrivons ensuite

$$\mathrm{F}_\gamma(x,y) = \sum a_{ij}x^iy^j, \quad \text{avec} \quad a_{ij} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S}).$$

Reportant dans la relation (2) et identifiant les polynômes des deux membres on trouve

$$a_{ij}\big(\alpha(t)^i\beta(t)^j - \gamma(t)\big) = 0.$$

Si $\gamma \neq i\,\alpha + j\,\beta$, on sait (Exp. XIX 4.13) qu'il existe un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fidèlement plat quasi-compact et un $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ tel que $\alpha(t)^i\beta(t)^j - \gamma(t) = 1$. On a donc $a_{ij} = 0$ sur S', donc sur S. Si $\gamma = i\alpha + j\beta$, on pose $a_{ij} = \mathrm{C}_{i,j,\alpha,\beta}$. Faisant $x = 0$ (resp. $y = 0$), on trouve $\mathrm{C}_{0,1,\alpha,\beta} = 1$ (resp. $\mathrm{C}_{1,0,\alpha,\beta} = 0$).

Remarque 5.5.3. — Dérivant pour $y = 0$ et comparant à 5.4.9, on trouve

$$\mathrm{C}_{i,1,\alpha,\beta} = \mathrm{M}_{\alpha,\beta,i}.$$

207 ***Corollaire 5.5.4***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G, $\alpha \neq \beta$ *deux racines de* G *par rapport à* T *telles que* $\alpha + \beta$ *soit non trivial sur chaque fibre. Ordonnons l'ensemble des* $i\alpha + j\beta$ $(i,j \in \mathbb{N}^*)$ *de manière quelconque. Pour tous* $i,j \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $i\alpha+j\beta \in \mathrm{R}$, *il existe un unique morphisme de* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-modules*

$$f_{\alpha,\beta,i,j} : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes i} \otimes (\mathfrak{g}^\beta)^{\otimes j} \longrightarrow \mathfrak{g}^{i\alpha+j\beta}$$

tel que pour tout $S' \to S$ *et tous* $X \in W(\mathfrak{g}^{\alpha})(S')$, $Y \in W(\mathfrak{g}^{s})(S')$ *on ait* (*les* exp *au second membre étant pris au sens de* 1.2 [34]) *:*

$$\exp_{\alpha}(X)\exp_{\beta}(Y)\exp_{\alpha}(-X) = \exp_{\beta}(Y)\prod_{(i,j)}\exp_{i\alpha+j\beta}(f_{\alpha,\beta,i,j}(X^{i}\otimes Y^{j})).$$

L'assertion est locale pour (fpqc). D'après le § 2, on peut donc supposer G déployé relativement à T, α et β constantes dans le déploiement. Comme $\alpha+\beta \neq 0$, il existe un système de racines positives R_+ contenant α et β (Exp. XXI 3.5.4) et on est ramené à 5.5.2.

Corollaire 5.5.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif.*

(i) G *possède localement des sous-groupes de Borel pour la topologie étale. Si* T *est un tore maximal de* G*, alors* G *possède également localement pour la topologie étale des sous-groupes de Borel contenant* T*.*

(ii) *Si* T *est un tore maximal de* G*, le « foncteur des sous-groupes de Borel de* G *contenant* T *» est représentable par un fibré principal homogène sous* $W_G(T)$*.*

(iii) *Si* (G, T, M, R) *est déployé, tout sous-groupe de Borel* B *de* G *contenant* T *est localement sur* S *de la forme* B_{R_+}*, où* R_+ *est un système de racines positives de* R*.*

(iv) *Si* $T \subset B$ *est un couple de Killing de* G*, il existe une famille couvrante* 208
$\{S_i \to S\}$ *pour la topologie étale, et pour chaque i un déploiement* $(G_{S_i}, T_{S_i}, M_i, R_i)$ *et un système de racines positives* R_{i+} *de* R_i *tel que* $B_{S_i} = B_{R_{i+}}$*.*

En effet, (i) résulte de 2.3 et 5.5.1, (ii) de (i) et 5.3.15, (iii) de (ii) et de 5.5.1, (iv) de (iii) et 2.3.

Lemme 5.5.6. — *Choisissons sur le groupe* $\Gamma_0(R)$ *engendré par les racines une structure de groupe totalement ordonné telle que les racines* > 0 *soient les éléments de* R_+ (cf. Exp. XXI 3.5.6) [35]*. Soient* $\alpha_1 < \cdots < \alpha_N$ *les éléments de* R_+*. Considérons l'isomorphisme*

$$f : T \underset{S}{\times} U_{\alpha_1} \underset{S}{\times} \cdots \underset{S}{\times} U_{\alpha_N} \longrightarrow B_{R_+}$$

induit par le produit dans G*. Posons pour* $i = 1, \ldots, N$,

$$U_{\geqslant i} = f(U_{\alpha_i} \underset{S}{\times} \cdots \underset{S}{\times} U_{\alpha_N}).$$

(i) *Chaque* $U_{\geqslant i}$ *est un sous-groupe invariant de* B_{R_+}*.*

(ii) *Pour* $1 \leqslant i \leqslant N-1$, $U_{\geqslant i}$ *s'identifie au produit semi-direct*

$$U_{\geqslant i} = U_{\alpha_i} \cdot U_{\geqslant i+1}\,.$$

(iii) B_{R_+} *s'identifie au produit semi-direct*

$$B_{R_+} = T \cdot U_{\geqslant 1}\,.$$

---

[34] N.D.E. : c.-à-d., si $\mathfrak{g}^{i\alpha+j\beta} = 0$ sur une composante connexe de S, l'exponentielle correspondante vaut 1 sur cette composante.

[35] N.D.E. : Noter qu'un tel ordre est nécessairement compatible avec ord_{Δ}, où $\Delta = \mathscr{S}(R_+)$ (cf. XXI 3.2.15).

(iv) *Pour* $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}-1$, *les automorphismes intérieurs de* $\mathrm{U}_{\geqslant 1}$ *opèrent trivialement dans* $\mathrm{U}_{\geqslant i}/\mathrm{U}_{\geqslant i+1}$ (*qui s'identifie à* U_{α_i} *par* (ii)).

Prouvons d'abord par récurrence sur i l'assertion suivante :

$\mathrm{U}_{\geqslant i}$ est un sous-groupe invariant de $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$, produit semi-direct de U_{α_i} et de $\mathrm{U}_{\geqslant i+1}$.

209 L'assertion est vraie pour $i = \mathrm{N}$; supposons-la vraie pour $i+1$ et prouvons-la pour i. On a (comme schémas)

$$\mathrm{U}_{\geqslant i} = \mathrm{U}_{\alpha_i} \cdot \mathrm{U}_{\geqslant i+1}\,;$$

il est d'abord clair que $\mathrm{U}_{\geqslant i}$ est stable par les automorphismes intérieurs de $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$. C'est clair pour $\mathrm{int}(t)$, $t \in \mathrm{T(S)}$, il suffit de le vérifier pour $\mathrm{int}(x)$, $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})$, $\alpha \in \mathrm{R}_+$. Or $\mathrm{U}_{\geqslant i+1}$ est supposé invariant, donc il suffit de voir que $\mathrm{int}(x)\mathrm{U}_{\alpha_i} \subset \mathrm{U}_{\geqslant i}$. Par 5.5.2, si $y \in \mathrm{U}_{\alpha_i}(\mathrm{S}')$, on a $y^{-1}xyx^{-1} \in \mathrm{U}_{\geqslant i+1}(\mathrm{S}')$, ce qui entraîne $\mathrm{int}(x)(y) \in \mathrm{U}_{\geqslant i}(\mathrm{S}')$.

Prouvons maintenant que $\mathrm{U}_{\geqslant i}$ est un sous-groupe de $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$. Si $x, y \in \mathrm{U}_{\geqslant i}(\mathrm{S})$, on peut écrire $x = px'$, $y = qy'$, avec $p, q \in \mathrm{U}_{\alpha_i}(\mathrm{S})$, et $x', y' \in \mathrm{U}_{\geqslant i+1}(\mathrm{S})$. On a

$$xy = px'qy' = pq(q^{-1}x'q)y' \in \mathrm{U}_{\alpha_i}(\mathrm{S}')\mathrm{U}_{\geqslant i+1}(\mathrm{S}');$$

de même $x^{-1} = p^{-1}(px'^{-1}p^{-1}) \in \mathrm{U}_{\alpha_i}(\mathrm{S}')\mathrm{U}_{\geqslant i+1}(\mathrm{S}')$. Nous avons donc prouvé (i) et (ii), ainsi que (iv) chemin faisant. Quant à (iii), c'est une conséquence triviale de 5.5.1.

Lemme 5.5.7. — *Avec les notations précédentes, choisissons pour chaque* $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$ *un* $\mathrm{X}_i \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha_i})^\times$ *et considérons l'isomorphisme*

$$a : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}^{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathrm{U}_{\geqslant 1}$$

défini ensemblistement par

$$a(x_1 \ldots, x_\mathrm{N}) = \exp_{\alpha_1}(x_1\mathrm{X}_1) \cdots \exp_{\alpha_\mathrm{N}}(x_\mathrm{N}\mathrm{X}_\mathrm{N}).$$

Il existe une famille unique (Q_i), $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, *de polynômes*

$$\mathrm{Q}_i = \mathrm{Q}_i(x_1, \ldots, x_\mathrm{N}, y_1, \ldots, y_\mathrm{N})$$

à coefficients dans $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$ *telle que l'on ait ensemblistement*

$$a(x_1, \ldots, x_\mathrm{N})\, a(y_1, \ldots, y_\mathrm{N}) = a\big(\mathrm{Q}_1(x_1, \ldots, y_\mathrm{N}), \ldots, \mathrm{Q}_\mathrm{N}(x_1, \ldots, y_\mathrm{N})\big).$$

210 *De plus, les* Q_i *sont à coefficients dans le sous-anneau de* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$ *engendré par les* $\mathrm{C}_{i,j,\alpha,\beta}$ *de* 5.5.2 $(\alpha, \beta \in \mathrm{R}_+,\ i, j \in \mathbb{N}^*)$ *et chaque* Q_i *est de la forme*

$$\mathrm{Q}_i(x_1, \ldots, y_\mathrm{N}) = x_i + y_i + \mathrm{Q}'_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_{i-1}).$$

L'existence et l'unicité des Q_i résultent aussitôt du fait que a est un isomorphisme de schémas. Notant z, z', z'' des sections de $\mathrm{U}_{\geqslant i+1}$, on a

$$a(x_1, \ldots, x_\mathrm{N})\, a(y_1, \ldots, y_\mathrm{N}) = \\ a(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots 0) \exp(x_i\mathrm{X}_i)\, z \cdot a(y_1, \ldots, y_{i-1}, 0, \ldots, 0) \exp(y_i\mathrm{X}_i)\, z'\,;$$

utilisant 5.5.6 (i) et (iv), le terme de droite s'écrit

$$a(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots, 0)\, a(y_1 \ldots, y_{i-1}, 0, \ldots, 0)\ \exp((x_i + y_i)\mathrm{X}_i)z'';$$

ce qui donne, réutilisant 5.5.6,

$$\mathrm{Q}_i(x_1, \ldots, x_\mathrm{N}, y_1, \ldots, y_\mathrm{N}) = x_i + y_i + \mathrm{Q}'_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_{i-1}),$$

avec

$$\mathrm{Q}'_i(x_1,\dots,x_{i-1},y_1,\dots,y_{i-1}) = \mathrm{Q}_i(x_i,\dots,x_{i-1},0,\dots,0,y_1,\dots,y_{i-1},\dots,0);$$

soit la forme précise demandée.

Démontrons enfin l'assertion sur les coefficients des polynômes Q_i. Soit A le sous-anneau de $\Gamma(\mathrm{S},\mathscr{O}_\mathrm{S})$ engendré par les $\mathrm{C}_{i,j,\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta\in\mathrm{R}_+,\ i,j\in\mathbb{N}^*)$. Démontrons par récurrence décroissante sur i que si $x_1=\cdots=x_{i-1}=0$ et $y_1=\cdots=y_{i-1}=0$, c'est-à-dire si $a(x_1,\dots,x_\mathrm{N})$ et $a(y_1,\dots,y_\mathrm{N})$ sont des sections de $\mathrm{U}_{\geqslant i}$, alors les polynômes

$$\mathrm{R}_j(x_i,\dots,x_\mathrm{N},y_i,\dots,y_\mathrm{N}) = \mathrm{Q}_j(x_1,\dots,x_\mathrm{N},y_1,\dots,y_\mathrm{N}),$$

sont à coefficients dans A. C'est trivial pour $i=\mathrm{N}$ et aussi pour $j<i$ (car $\mathrm{R}_j=0$ pour $j<i$). Soit $i<\mathrm{N}$, supposons l'assertion vérifiée pour $i+1$ et prouvons-la pour i (et $j\geqslant i$). On a 211

$$a(0,\dots,0,x_i,\dots,x_\mathrm{N}) = \exp(x_i\mathrm{X}_i)\,a(0,\dots,0,x_{i+1},\dots,x_\mathrm{N}) = \exp(x_i\mathrm{X}_i)\,\mathrm{Z}_i.$$

Écrivons de même

$$a(0,\dots,y_i,\dots,y_\mathrm{N}) = \exp(y_i\mathrm{X}_i)\,\mathrm{T}_i.$$

On a

$$a(0,\dots,x_i,\dots,x_\mathrm{N})\,a(0,\dots,y_i,\dots,y_\mathrm{N}) = \exp((x_i+y_i)\mathrm{X}_i)\ \mathrm{int}(\exp(-y_i\mathrm{X}_i))(\mathrm{Z}_i)\cdot\mathrm{T}_i.$$

Or

$$\mathrm{int}(\exp(-y_i\mathrm{X}_i))(\mathrm{Z}_i) = \mathrm{int}(\exp(-y_i\mathrm{Y}_i))\Big(\exp(x_{i+1}\mathrm{X}_{i+1})\cdots\exp(x_\mathrm{N}\mathrm{X}_\mathrm{N})\Big)$$

est un produit de $\mathrm{N}-i-1$ sections de $\mathrm{U}_{\geqslant i+1}$ dont les coefficients dans la décomposition $\mathrm{U}_{\geqslant i+1}=\mathrm{U}_{\alpha_{i+1}}\cdots\mathrm{U}_{\alpha_\mathrm{N}}$ sont des polynômes en y_i et $x_{i+1},\dots,x_\mathrm{N}$ à coefficients dans A (par 5.5.2). Appliquant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que les coefficients de

$$\mathrm{int}(\exp(-y_i\mathrm{X}_i))(\mathrm{Z}_i)\cdot\mathrm{T}_i$$

sont également des polynômes à coefficients dans A, ce qui termine la démonstration.

Remarquons que la récurrence précédente donne aussitôt une démonstration du

Lemme 5.5.8. — *Avec les notations de* 5.5.6, *soit pour chaque* $i=1,\dots,\mathrm{N}$, *un morphisme de groupes*

$$f_i:\mathrm{U}_{\alpha_i}\longrightarrow\mathrm{H},$$

où H *est un* S*-foncteur en groupes. Pour que le morphisme*

$$f:\mathrm{U}_{\geqslant 1}\longrightarrow\mathrm{H}$$

défini par

$$f\big(\exp(x_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(x_\mathrm{N}\mathrm{X}_\mathrm{N})\big) = f_1(\exp(x_1\mathrm{X}_1))\cdots f_\mathrm{N}(\exp(x_\mathrm{N}\mathrm{X}_\mathrm{N}))$$

soit un morphisme de groupes, il faut et il suffit que pour tout couple $i<j$, *on ait* 212

$$f_j(\exp(x_j\mathrm{X}_j))\,f_i(\exp(x_i\mathrm{X}_i))\,f_j(\exp(-x_j\mathrm{X}_j)) = f\Big(\exp(x_j\mathrm{X}_j)\ \exp(x_i\mathrm{X}_i)\ \exp(-x_j\mathrm{X}_j)\Big).$$

5.6. Sous-groupes de type (R) à fibres résolubles

Proposition 5.6.1. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* R' *une partie de* R *de type* (R) (5.4.2)*,* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *le sous-groupe de* G *correspondant. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *est à fibres géométriques résolubles.*

(ii) *Il existe un système de racines positives* R_+ *tel que* $\mathrm{R}' \subset \mathrm{R}_+$*, donc* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$ (*cf.* 5.4.5)*.*

(iii) $\mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}' = \varnothing$*.*

(iv) *Pour tout ordre sur* R'*, le morphisme induit par le produit dans* G

$$\mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \prod_{\alpha \in \mathrm{R}'} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$$

est un isomorphisme.

(v) $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$.

(vi) *Pour toute partie* R'' *de* R*, de type* (R)*, on a* (*cf.* 5.4.5)

$$\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \bigcap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}) = \mathrm{H}_{\mathrm{R}' \cap \mathrm{R}''}.$$

Nous allons démontrer ces équivalences selon le schéma logique

$$\begin{tikzcd}
\text{(iii)} \arrow[dd, Rightarrow] & \text{(ii)} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{(vi)} \arrow[dd, Rightarrow] \\
& \text{(iv)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{(i)} \arrow[uur, Rightarrow] & & \text{(v).} \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

213 On a évidemment (ii) ⇒ (iii) et (vi) ⇒ (v) (prendre $\mathrm{R}'' = \varnothing$). Par 5.4.6, il suffit de vérifier (i) ⇒ (ii) sur les fibres géométriques ; or si S est le spectre d'un corps algébriquement clos, $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ est contenu dans un groupe de Borel contenant T, donc de la forme $\mathrm{H}_{\mathrm{R}_+}$ (5.5.5 (iii)).

De même (iii) ⇒ (i) se vérifie sur les fibres géométriques ; supposons (iii) vérifié ; si $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ n'était pas résoluble, il existerait un sous-tore Q de T, de codimension 1 dans T tel que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}}(\mathrm{Q})$ ne soit pas résoluble (*Bible*, § 10.4, prop. 8) ; or $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}}(\mathrm{Q})$ a comme algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}$, où R'' est l'ensemble des racines de R' s'annulant sur Q, donc $\mathrm{R}'' = \varnothing$ ou $\{\alpha\}$ (en vertu de (iii)) ; donc $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}}(\mathrm{Q})$, qui est un sous-groupe de type (R) de G, est T ou $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_\alpha$, donc résoluble contrairement à l'hypothèse.

De même (ii) ⇒ (iv) se vérifie sur les fibres géométriques (car il s'agit de S-schémas plats et de présentation finie) ; par *Bible*, § 13.2, th. 1 d), le morphisme en question est bijectif ; il induit un isomorphisme sur les espaces tangents à l'origine, et on conclut comme d'habitude (cf. 4.1.1).

On a (iv) ⇒ (v) par 4.2.7. Pour prouver (v) ⇒ (i), on est encore ramené au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos et on conclut par *Bible*, § 10.3, cor. à la prop. 6 et § 9.3, cor. 3 au th. 1.

Il ne reste donc à prouver que l'assertion (ii) ⇒ (vi). On peut se ramener au cas où G est adjoint. On a alors, par 5.3.3

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}) \subset \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}). \qquad {}^{(36)}$$

Par 5.4.5, il suffit de prouver 214

$$\text{(x)} \qquad \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}(\mathrm{S}) \cap \mathrm{Transp}_{\mathrm{G(S)}}(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}) \subset \mathrm{H}_{\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}(\mathrm{S}).$$

Démontrons d'abord un lemme.

Lemme 5.6.2. — *Dans les notations de* 5.5.7, *soit*

$$u = \exp(x_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(x_{\mathrm{N}}\mathrm{X}_{\mathrm{N}})$$

où $x_i \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$. *Soit* m *un entier,* $1 \leqslant m \leqslant \mathrm{N}$, *tel que* $x_i = 0$ *pour* $i < m$.

a) *Si* $\mathrm{H} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{t})$, *la composante de* $\mathrm{Ad}(u)\mathrm{H}$ *sur* $\mathfrak{g}^{\alpha_m}$ *est*

$$-\overline{\alpha}_m(\mathrm{H})\, x_m\, \mathrm{X}_m\,.$$

b) *Si* $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha_m})$, *la composante de* $\mathrm{Ad}(u)\mathrm{Y}$ *sur* $\mathfrak{t}$ *est* (*avec les notations de* Exp. XX 2.6)

$$x_m\, \langle \mathrm{X}_m, \mathrm{Y}\rangle\, \mathrm{H}_{\alpha_m}\,.$$

Notons en effet $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^{\alpha_{m+1}} + \cdots + \mathfrak{g}^{\alpha_{\mathrm{N}}}$. En vertu de 5.4.9, on a

$$\mathrm{Ad}(\exp(x_i\mathrm{X}_i))\mathfrak{u} \subset \mathfrak{u}, \qquad \text{pour} \quad i > m.$$

Par Exp. XX 2.10, on a

$$\mathrm{Ad}(\exp(x_i\mathrm{X}_i))\mathrm{H} = \mathrm{H} - \overline{\alpha}_i(\mathrm{H})\, x_i\, \mathrm{X}_i\,.$$

Cela donne aussitôt, modulo $\mathfrak{u}$,

$$\mathrm{Ad}(u)\mathrm{H} = \mathrm{Ad}(\exp(x_m\mathrm{X}_m))\mathrm{H} = \mathrm{H} - \overline{\alpha}_m(\mathrm{H})\, x_m\, \mathrm{X}_m\,,$$

ce qui entraîne le premier résultat.

De même, notons [37] $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^{\alpha_1} + \cdots + \mathfrak{g}^{\alpha_{\mathrm{N}}}$ et $u_1 = \exp(x_{m+1}\mathrm{X}_{m+1})\cdots\exp(x_{\mathrm{N}}\mathrm{X}_{\mathrm{N}})$. Pour $i > m$, on a $\alpha_i > \alpha_m$ donc, d'après 5.4.9, on a, modulo $\mathfrak{n}$,

$$\mathrm{Ad}(u_1)\mathrm{Y} \equiv \mathrm{Y} \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{Ad}(u)\mathrm{Y} \equiv \mathrm{Ad}(\exp(x_m\mathrm{X}_m))\mathrm{Y}.$$

Appliquant Exp. XX 2.10, on obtient donc, modulo $\mathfrak{n}$,

$$\mathrm{Ad}(u)\mathrm{Y} - \mathrm{Y} \equiv x_m\, \langle \mathrm{X}_m, \mathrm{Y}\rangle\, \mathrm{H}_{\alpha_m}$$

d'où le second résultat.

Revenons à la démonstration de l'inclusion (x). Supposons qu'il existe $h \in \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}(\mathrm{S})$, 215
$h \notin \mathrm{H}_{\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}(\mathrm{S})$, tel que

$$\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}.$$

On peut écrire

$$h = t\exp(x_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(x_{\mathrm{N}}\mathrm{X}_{\mathrm{N}}).$$

---

[36] N.D.E. : L'inclusion suit de $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{R}''}$.

[37] N.D.E. : On a corrigé l'original dans ce qui suit.

Comme $h \notin \mathrm{H}_{\mathrm{R}' \cap \mathrm{R}''}(\mathrm{S})$, il existe un plus petit m tel que

$$t \exp(x_1 \mathrm{X}_1) \cdots \exp(x_{m-1}\mathrm{X}_{m-1}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}(\mathrm{S}) \quad \text{et} \quad \alpha_m \notin \mathrm{R}'', \quad x_m \neq 0.$$

Alors $h' = \exp(x_m \mathrm{X}_m) \cdots \exp(x_{\mathrm{N}}\mathrm{X}_{\mathrm{N}})$ vérifie aussi les conditions imposées à h ci-dessus. Mais par 5.6.2, pour tout $\mathrm{H} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{t})$ la composante de $\mathrm{Ad}(h')\mathrm{H}$ sur $\mathfrak{g}^{\alpha_m}$ est $-\overline{\alpha}_m(\mathrm{X})\, x_m\, \mathrm{X}_m$. En vertu de l'hypothèse sur h et sur m, on a donc $\overline{\alpha}_m(\mathrm{H}) = 0$ pour tout $\mathrm{H} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{t})$, ce qui est impossible (car G est supposé adjoint et $\overline{\alpha}_m$ est donc non nul sur chaque fibre).

Remarque 5.6.2. bis. — Reprenons les notations de 5.6.2. Si $\mathrm{Ad}(u)$ est l'identité sur $\mathfrak{t}$ et sur $\mathfrak{g}^{-\alpha_m}$, on a $x_m = 0$. En effet, on a $x_m\, \overline{\alpha}_m = 0$ et $x_m\, \mathrm{H}_{\alpha_m} = 0$; si $\alpha_m \notin 2\mathrm{M}$, alors $\overline{\alpha}_m$ est non nul sur chaque fibre ; si $\alpha_m \in 2\mathrm{M}$, alors $\alpha_m^* \notin 2\mathrm{M}^*$ et H_{α_m} est non nul sur chaque fibre ; dans chaque cas, cela entraîne $x_m = 0$. Il en résulte que $u = e$ si $\mathrm{Ad}(u)$ opère trivialement sur $\mathfrak{g}$.

Remarque 5.6.3. — Si H est un sous-groupe de type (R) du groupe réductif G, à fibres géométriques résolubles, alors H est *fermé* dans G et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})/\mathrm{H}$ est représentable par un S-schéma séparé *fini étale.*

Cela résulte de 5.3.18 et, au choix, 3.5 ou Exp. XIX 2.5 (ii).

Corollaire 5.6.4. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un groupe réductif déployé. Si* $\mathrm{R}' \subset \mathrm{R}$ *est close et si* $\mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}' = \varnothing$, *alors* R' *est contenu dans un système de racines positives.*

En effet, R' est de type (R) par 5.4.7, donc le résultat découle de 5.6.1.

216 ***Corollaire 5.6.5***. — *Sous les conditions de* 5.6.1, *le produit dans* G *induit un isomorphisme*

$$\prod_{\alpha \in \mathrm{R}'} \mathrm{U}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_{\mathrm{R}'},$$

où $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* G, *lisse sur* S, *à fibres géométriques connexes et unipotentes, indépendant du choix de l'ordre sur* R'. *De plus,* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *est le produit semi-direct* $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$ ($\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$ *invariant*).

En effet, si $\mathrm{R}' \subset \mathrm{R}_+$, alors $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{U}_{\geqslant 1}$ (notations de 5.5.6) est un sous-groupe fermé de G de présentation finie, invariant dans $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$. Par 5.6.1 (iv), on a $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$, ce qui entraîne les autres assertions.

Remarque 5.6.6. — En particulier, $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_+}$ est le groupe $\mathrm{U}_{\geqslant 1}$ de 5.5.6.

Dégageons certains corollaires des résultats précédents concernant les groupes du type $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$.

Corollaire 5.6.7. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un groupe réductif déployé,* R' *et* R'' *deux parties de* R *de type* (R), *avec* $\mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}' = \varnothing$.

(i) *On a*

$$\mathrm{U}_{\mathrm{R}'} \bigcap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}) = \mathrm{U}_{\mathrm{R}'\cap\mathrm{R}''}\,.$$

(ii) *Supposons* R' clos. *Si pour tous* $\alpha \in \mathrm{R}'$, $\beta \in \mathrm{R}''$ *tels que* $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$ *on a* $\alpha + \beta \in \mathrm{R}'$, *alors* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ *normalise* $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$.

En effet, (i) résulte aussitôt de 5.6.5 et 5.6.1 (vi). Pour prouver (ii), il suffit, vu 5.4.4, de montrer que T et chaque U_β, $\beta \in \mathrm{R}''$, normalisent $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$.[38] Pour T, c'est trivial, pour U_β, cela résulte de 5.5.2 et Exp. XXI 3.1.2.[39]

Corollaire 5.6.8. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* R_+ *un système de racines positives,* α *une racine simple de* R_+ (*i.e. un élément de* R_+ *tel que* $\mathrm{R}_+ - \{\alpha\}$ *soit clos*). *Notons*

$$\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R}_+ - \{\alpha\}}.$$

Alors 217

(i) $\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}$ *est un sous-groupe invariant de* $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$.

(ii) $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_+}$ *est le produit semi-direct de* $\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}$ *par* U_α.

(iii) $\mathrm{U}_{-\alpha}$ *normalise* $\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}$.

(iv) Z_α *normalise* $\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}$.

Si on définit de même $\mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R}_- - \{-\alpha\}}$ (*où* $\mathrm{R}_- = -\mathrm{R}_+$), *on a*

$$\Omega_{\mathrm{R}_+} = \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}} \cdot \mathrm{U}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_\alpha \cdot \mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}.$$

En effet, (ii) découle de 5.6.5, et (i) de 5.6.7 (ii). De même, (iii) résulte de 5.5.2 (en effet, si $\beta \in \mathrm{R}_+$, $\beta \neq \alpha$, aucune combinaison $i(-\alpha) + j\beta$, avec i, $j > 0$ ne peut être négative car β contient au moins une racine simple $\neq \alpha$). Puis (iv) résulte de (i) et (iii), car $\mathrm{U}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_\alpha$ est schématiquement dense dans Z_α. Enfin, la dernière assertion découle de (ii) et de son analogue pour $\mathrm{U}_{\mathrm{R}^-}$.

Revenons à la situation générale.

Proposition 5.6.9. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* H *un sous-groupe de type* (R), *à fibres géométriques résolubles.*

(i) $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$ *est représentable par un* S*-groupe constant tordu, dont le type en* $s \in \mathrm{S}$ *est* $\mathbb{Z}^{\mathrm{rgred}(\mathrm{G}_s)}$. *Le morphisme de bidualité* (Exp. VIII § 1)

$$f : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H}))$$

est lisse et surjectif.

(ii) *Le noyau* H^u *de* f *est le plus grand sous-schéma en groupes invariant fermé de* H, *lisse sur* S, *à fibres géométriques connexes et unipotentes. On dit que c'est la* partie unipotente *de* H *et l'on note aussi* $\mathrm{H}^u = \mathrm{rad}^u(\mathrm{H})$.

---

[38] N.D.E. : En effet, G étant à fibres connexes, il est séparé sur S d'après VI_B 5.5, donc d'après XI 6.11 (voir aussi l'ajout 6.5.5 dans VI_B), $\underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{U}_{\mathrm{R}'})$ est représenté par un sous-schéma en groupes fermé N de G. Si N contient T et les U_β, pour $\beta \in \mathrm{R}''$, il contient alors la grosse cellule $\Omega_{\mathrm{R}_+, \mathrm{R}''}$; or celle-ci est schématiquement dense dans $\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ d'après 5.4.4 et EGA IV_3, 11.10.10 (les fibres de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ sont intègres et $\Omega_{\mathrm{R}_+, \mathrm{R}''}$ contient un ouvert non vide de chaque fibre). Il en résulte que $\mathrm{H}_{\mathrm{R}''} \subset \mathrm{N}$, donc $\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ normalise $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$.

[39] N.D.E. : Il s'agit de voir que, sous les hypothèses de (ii), si $\alpha \in \mathrm{R}'$ et $\beta \in \mathrm{R}''$, alors toutes les racines de la forme $i\alpha + j\beta$ avec $i, j \in \mathbb{N}^*$ appartiennent à R', et pour ceci on a remplacé la référence XXI 2.3.5 par XXI 3.1.2. Cela peut aussi se voir directement par inspection des systèmes de racines de rang 2.

Alors H^u *est aussi le* faisceau des commutateurs *de* H *: tout morphisme de groupes de* H *dans un* S*-préfaisceau en groupes commutatifs, séparé pour* (fppf)*, s'annule sur* H^u *et se factorise donc par* $\mathrm{H}/\mathrm{H}^u = \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H}))$.

218 (iii) *Si* T *est un tore maximal de* H*, le morphisme* $\mathrm{T} \to \mathrm{H}$ *induit des isomorphismes* $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{T})$ *et* $\mathrm{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H}))$*. De plus,* H *s'identifie au produit semi-direct de* H^u *par* T.

(iv) *Dans la situation de* 5.6.1*, si* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$*, alors* $\mathrm{H}^u = \mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$.

Les assertions de la proposition sont locales pour la topologie étale (Exp. X 5.5). On peut donc se ramener au cas de 5.6.1. On sait alors (5.6.5) que $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ est le produit semi-direct de $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$ par T. Montrons que $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$ est le faisceau des commutateurs de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$: comme $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}/\mathrm{U}_{\mathrm{R}'} = \mathrm{T}$ est commutatif, il suffit de prouver que tout morphisme de groupes $\phi : \mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \to \mathrm{V}$ comme dans (ii) s'annule sur $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$. Il suffit de prouver que ϕ s'annule sur chaque U_α, $\alpha \in \mathrm{R}'$. Or si $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)(\mathrm{S}')$, on a

$$1 = \phi\big(t \exp_\alpha(\mathrm{X})\, t^{-1} \exp_\alpha(-\mathrm{X})\big) = \phi\big(\exp_\alpha((\alpha(t)-1)\mathrm{X})\big).$$

Comme $\alpha : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est fidèlement plat, on en déduit aussitôt que ϕ s'annule sur $\mathrm{U}_\alpha^\times$; mais toute section de U_α est localement somme de deux sections de $\mathrm{U}_\alpha^\times$. On a donc

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{V}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}/\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}, \mathrm{V})$$

pour tout V comme ci-dessus. Appliquant ce résultat à $\mathrm{V} = \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, on en déduit aussitôt (i) et (iii), puis (iv) et la seconde assertion de (ii). Il nous suffit maintenant de prouver la première assertion de (ii) ; le seul fait non trivial est que tout sous-groupe U fermé invariant de H, lisse sur S à fibres géométriques connexes et unipotentes est un sous-groupe de H^u. Or on a d'abord :

Lemme 5.6.10. — *Soit* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal,* U *un sous-schéma en groupes de* G*, lisse sur* S*, à fibres géométriques unipotentes, normalisé par* T*. Alors* $\mathrm{U} \cap \mathrm{T} = e$.

219 En effet, comme $\mathrm{T} = \underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})$, on a $\mathrm{U} \cap \mathrm{T} = \mathrm{U}^\mathrm{T}$ (invariants sous int(T)). Appliquant Exp. XIX 1.4, on en déduit que $\mathrm{U} \cap \mathrm{T}$ est lisse sur S, mais il est aussi radiciel sur S : pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{U}(\overline{s}) \cap \mathrm{T}(\overline{s})$ est formé d'éléments à la fois unipotents et semi-simples. Ceci prouve le lemme.

Revenons à la démonstration de 5.6.9 (ii). Si U est un sous-groupe invariant de H comme plus haut, alors le produit semi-direct $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}$ est un sous-groupe de type (R) de G, à fibres géométriques résolubles. On peut donc le supposer de la forme $\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$, avec $\mathrm{R}'' \subset \mathrm{R}'$. Il suffit de prouver $\mathrm{U} = \mathrm{U}_{\mathrm{R}''}$ et on est donc ramené au cas où $\mathrm{H} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}$; mais le quotient H/U étant commutatif, U est un sous-faisceau du faisceau des commutateurs de H, qui est H^u. C.Q.F.D.

Remarquons que nous venons en fait de prouver :

Proposition 5.6.11. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*. Les applications*

$$\mathrm{H} \mapsto \mathrm{H}^u, \qquad \mathrm{U} \mapsto \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes H *de type* (R) *de* G*, contenant* T *et à fibres géométriques* résolubles*, et l'ensemble des sous-groupes* U *de* G*, lisses sur* S*, normalisés par* T*, à fibres géométriques connexes et* unipotentes. [40]

En particulier, lorsque (G, T, M, R) *est déployé, les groupes* $H_{R'}$ *et* $U_{R'}$ *se correspondent.*

Corollaire 5.6.12. — *Soient* S *un schéma,* (G, T, M, R) *un* S*-groupe déployé* (*resp. et* R_+ *un système de racines positives de* R *définissant le sous-groupe de Borel* B).

Tout sous-schéma en groupes lisse de G*, à fibres géométriques connexes et unipotentes* (*resp. tout sous-schéma en groupes lisse de* B^u) *normalisé par* T *est localement sur* S *de la forme* $U_{R'}$*, où* R' *est une partie de* R *contenue dans un système de racines positives* (*resp. une partie de* R_+) *de type* (R). 220

Pour le cas « respé », il suffit de remarquer que les fibres géométriques du groupe donné sont unipotentes et connexes par *Bible*, § 13.2, th. 1 (d).

La proposition 5.6.9 a d'autre part le corollaire suivant :

Corollaire 5.6.13. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* H *un sous-groupe de type* (R) *à fibres géométriques résolubles,* $\underline{\mathrm{Tor}}(H)$ *le foncteur des tores maximaux de* H :

$$\underline{\mathrm{Tor}}(H)(S') = \{\textit{tores maximaux de } H_{S'}\}.$$

Alors $\underline{\mathrm{Tor}}(H)$ *est représentable par un* S*-schéma affine et lisse, qui est un fibré principal homogène sous* H^u *pour la loi* $(h, T) \mapsto \mathrm{int}(h)T$. [41]

En effet, si T et T' sont deux tores maximaux de $H_{S'}$, il existe une unique section $h \in H^u(S')$ telle que $\mathrm{int}(h)T = T'$. L'unicité de h résulte aussitôt de l'égalité

$$\underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \cap H^u = e$$

(cf. par exemple 5.6.1) ; il suffit donc de prouver l'existence de h localement pour la topologie étale. D'après 5.2.6 et 5.1.2 (a), on peut supposer T et T' conjugués par une section de H, d'où la conclusion désirée puisque $H = H^u \cdot T$ d'après 5.6.9 (iii). Il s'ensuit que Tor(H) est un faisceau principal homogène sous H^u, qui est affine et lisse sur S, ce qui entraîne aussitôt l'énoncé [42].

5.7. Théorème de Bruhat 221

Rappel 5.7.1. — Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe réductif, B un sous-groupe de Borel de G, T un tore maximal de B, $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)$. Alors

$$G(k) = B(k)\, N(k)\, B(k);$$

---

[40] N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que U soit fermé, qui est automatiquement vérifiée. En effet, pour un tel U, on a $U \cap T = e$ d'après 5.6.10, donc le produit semi-direct $H = T \cdot U$ est un sous-groupe de type (R) de G (cf. 5.2.1), à fibres géométriques résolubles. Donc, d'après 5.6.3, H est *fermé* dans G, et comme U est fermé dans H, il est fermé dans G.

[41] N.D.E. : Ceci redémontre et précise XII 1.10 (pour G réductif).

[42] N.D.E. : d'après SGA 1, VIII 2.1 et EGA IV_4, 17.7.1.

c'est le théorème de Bruhat (*Bible*, § 13.4, cor. 1 au th. 3) ; plus précisément, avec les notations de 3.6, les ensembles

$$\mathrm{B}(k)\,\mathrm{N}_w(k)\,\mathrm{B}(k) = \mathrm{B}^u(k)\,\mathrm{N}_w(k)\,\mathrm{B}^u(k)$$

forment, lorsque w parcourt $(\mathrm{N}/\mathrm{T})(k)$ une partition de $\mathrm{G}(k)$. Si B' est un autre sous-groupe de Borel de G contenant T, les ensembles $\mathrm{B}'(k)\,\mathrm{N}_w(k)\,\mathrm{B}(k)$ forment aussi une partition de $\mathrm{G}(k)$. En effet, si $y \in \mathrm{N}(k)$ est tel que $\mathrm{int}(y)\mathrm{B} = \mathrm{B}'$, on a

$$y\mathrm{B}(k)\,\mathrm{N}_w(k)\,\mathrm{B}(k) = \mathrm{B}'(k)\,\mathrm{N}_{yw}(k)\,\mathrm{B}(k).$$

Définition 5.7.2. — Soient $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ un S-groupe déployé, R_- un système de racines positives de R, $\mathrm{B}' = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_-}$ le groupe de Borel qu'il définit. Pour $w \in \mathrm{W}$, on note (cf. 5.6.5) :

$$\mathrm{R}_-^w = \mathrm{R}_- \cap w(\mathrm{R}_-), \qquad \mathrm{B}'^u_w = \mathrm{U}_{\mathrm{R}_-^w} = \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-^w} \mathrm{U}_\alpha\,.$$

Si $n_w \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ est un représentant de w (3.8), on peut aussi écrire

$$\mathrm{B}'^u_w = \mathrm{B}'^u \cap \mathrm{int}(n_w)\mathrm{B}'^u.$$

222 ***Lemme 5.7.3***. — *Soient* $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* R_+ *un système de racines positives de* R*,* $\mathrm{R}_- = -\mathrm{R}_+$*,* B (*resp.* B') *le sous-groupe de Borel de* G *défini par* R_+ (*resp.* R_-)*. Soient* $w \in \mathrm{W}$*,* N_w *et* B'^u_w *les sous-schémas de* G *correspondants* (3.8 et 5.7.2).

(i) *Le faisceau* $\mathrm{B}'\cdot\mathrm{N}_w\cdot\mathrm{B}$*, image du morphisme*

$$\mathrm{B}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{N}_w \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{G}$$

induit par le produit dans G*, est représentable par un sous-schéma de* G (*et en fait un sous-schéma fermé de l'ouvert* $n_w\,\Omega_{\mathrm{R}_+}$).

(ii) *Le morphisme*

$$\mathrm{B}'^u_w \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{N}_w \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{B}^u \longrightarrow \mathrm{G},$$

induit par le produit dans G*, est une immersion d'image le sous-schéma précédent.*

Montrons d'abord que le morphisme de (ii) est une immersion. Par définition, $\mathrm{int}(n_w)^{-1}$ induit une immersion fermée de B'^u_w dans B'^u, donc le morphisme

$$(u,b) \longmapsto n_w^{-1}u\,n_w\,b$$

induit une immersion fermée

$$\mathrm{B}'^u_w \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{B} \longrightarrow \Omega_{\mathrm{R}_+}.$$

Cela entraîne immédiatement que le morphisme de (ii) induit une immersion fermée du premier membre dans l'ouvert $n_w\,\Omega_{\mathrm{R}_+}$. Pour prouver (i), il suffit de voir que

$$\mathrm{B}'(\mathrm{S})\,\mathrm{N}_w(\mathrm{S})\,\mathrm{B}(\mathrm{S}) = \mathrm{B}'^u_w(\mathrm{S})\,\mathrm{N}_w(\mathrm{S})\,\mathrm{B}^u(\mathrm{S}).$$

223 Or, si $\alpha \in \mathrm{R}$, on a $\mathrm{int}(n_w)\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}) = \mathrm{U}_{w(\alpha)}(\mathrm{S})$, donc si $w^{-1}(\alpha) \in \mathrm{R}_+$,

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})\mathrm{N}_w(\mathrm{S})\mathrm{B}(\mathrm{S}) &= \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})n_w\mathrm{T}(\mathrm{S})\mathrm{B}^u(\mathrm{S})\\ &= n_w\,\mathrm{U}_{w^{-1}(\alpha)}(\mathrm{S})\mathrm{T}(\mathrm{S})\mathrm{B}^u(\mathrm{S})\\ &= n_w\,\mathrm{B}(\mathrm{S}) = \mathrm{N}_w(\mathrm{S})\mathrm{B}^u(\mathrm{S}).\end{aligned}$$

Cela entraîne aussitôt, vu la définition de R_-^w, l'assertion cherchée.

Théorème 5.7.4. — *Soient* S *un schéma,* $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* B *le sous-groupe de Borel défini par le système de racines positives* R_+*,* B' *le sous-groupe de Borel défini par* $\mathrm{R}_- = -\mathrm{R}_+$.

(i) (Théorème de Bruhat) *Les schémas* $\mathrm{B}'^u_w\cdot\mathrm{N}_w\cdot\mathrm{B}$ *forment, pour w parcourant* W*, une partition de l'ensemble sous-jacent à* G.

(ii) *Pour chaque* $w\in\mathrm{W}$*, soit* n_w *un représentant de w dans* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ (3.8) *; alors les ouverts* $n_w\,\Omega = n_w\,\mathrm{B}'^u\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{B}^u$ *forment, pour w parcourant* W*, un recouvrement de* G.

Les deux assertions se vérifient en effet sur les fibres géométriques, où on conclut par 5.7.1 et 5.7.3.

Remarque 5.7.5. — (i) entraîne que si S est le spectre d'un corps, G(S) est la réunion disjointe des $\mathrm{B}'^u_w(\mathrm{S})\cdot\mathrm{T}(\mathrm{S})\cdot\mathrm{B}^u(\mathrm{S})$. L'assertion correspondante pour un S quelconque (même local ou artinien) est évidemment fausse. Remarquons cependant que (ii) entraîne que si S est *local*, G(S) est bien la réunion des $n_w\,\Omega(\mathrm{S})$. En fait :

Corollaire 5.7.6. — *Soit* Δ *un système de racines simples du groupe déployé* G *sur le schéma* local S.

(i) *Alors* G(S) *est engendré par* T(S) *et les* $\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})$*,* $\alpha\in\Delta\cup-\Delta$. **224**

(ii) *Si* G *est simplement connexe*(4.3.3)*,* G(S) *est déjà engendré par les* $\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})$*,* $\alpha\in\Delta\cup-\Delta$.

En effet, soit H le sous-groupe de G(S) engendré par les $\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})$, $\alpha\in\Delta\cup-\Delta$. Remarquons d'abord que H contient un représentant de chaque s_α ($\alpha\in\Delta$) dans $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ (Exp. XX 3.1), donc un représentant n_w de chaque $w\in\mathrm{W}$.

Comme tout $\alpha\in\mathrm{R}$ s'écrit $w(\alpha_0)$ avec $w\in\mathrm{W}$, $\alpha_0\in\Delta$, on a

$$\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}) = \mathrm{int}(n_w)\mathrm{U}_{\alpha_0}(\mathrm{S})\subset\mathrm{H}.$$

Le sous-groupe engendré par H et T(S) contient donc $\Omega(\mathrm{S})$ et est donc G(S) tout entier, par la remarque faite antérieurement.

Si maintenant G est simplement connexe, prouvons que $\mathrm{H}\supset\mathrm{T}(\mathrm{S})$. Par Exp. XX 2.7, H contient $\alpha^*(\mathbb{G}_m(\mathrm{S}))$ pour tout $\alpha\in\Delta$, et il suffit d'appliquer 4.3.8.

Remarque 5.7.6.1. — Au lieu de prendre, pour chaque $\alpha\in\Delta$, $\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})$ et $\mathrm{U}_{-\alpha}(\mathrm{S})$, on peut se contenter de prendre $\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})$ et un représentant w_α de la symétrie s_α, ou bien $\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})$ et une section de $\mathrm{U}_{-\alpha}^\times$, ...

Corollaire 5.7.7. — *Si* G *est de rang semi-simple* 1*, choisissons un* $u_\alpha\in\mathrm{U}_\alpha^\times(\mathrm{S})$*. Alors* Ω *et* $u_\alpha\,\Omega$ *forment un recouvrement de* G.

En effet, si $u_{-\alpha}$ est la section de $\mathrm{U}_{-\alpha}$ appariée à u_α (cf. 1.3), on a, par 5.7.4 (ii),

$$\mathrm{G} = \Omega \cup u_{-\alpha}^{-1} u_\alpha u_{-\alpha}^{-1} \Omega,$$

d'où

$$\mathrm{G} = u_{-\alpha}\mathrm{G} = u_{-\alpha}\Omega \cup u_\alpha u_{-\alpha}^{-1}\Omega = \Omega \cup u_\alpha \Omega.$$

Corollaire 5.7.8. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif. Alors* G *est* essentiellement libre *sur* S (Exp. VIII 6.1). [43]

225 En effet, l'assertion est locale pour la topologie (fpqc), on peut supposer G déployé. Alors G admet un recouvrement par des ouverts isomorphes à $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}^{\mathrm{N}} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}^{n}$, donc essentiellement libres.

Lemme 5.7.9. — *Sous les conditions de* 5.7.4*, soit α une racine simple de* R_+ *et* $u_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha^\times(\mathrm{S})$. *Pour tout* $v \in \mathrm{U}_{-\alpha}(\mathrm{S})$, *on a*

$$\Omega \cdot v \subset \Omega \cup u_\alpha \cdot \Omega$$

On a à comparer deux ouverts de G, il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps k. Il faut donc prouver

$$\Omega(k)v \subset \Omega(k) \cup u_\alpha \Omega(k).$$

Or

$$\begin{aligned}\Omega(k)v = \mathrm{B}'^u(k)\mathrm{T}(k)\mathrm{B}^u(k)v &= \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)\mathrm{U}_{-\alpha}(k)\mathrm{T}(k)\mathrm{U}_\alpha(k)\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k)v\\ &\subset \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)\mathrm{Z}_\alpha(k)\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k)v.\end{aligned}$$

(On utilise la décomposition de 5.6.8). Appliquant maintenant 5.6.8 (iii) et utilisant 5.7.7 pour le groupe Z_α, on obtient

$$\begin{aligned}\Omega(k)v &\subset \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)\mathrm{Z}_\alpha(k)v\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k) \subset \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)\mathrm{Z}_\alpha(k)\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k)\\ &\subset \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)\mathrm{U}_{-\alpha}(k)\mathrm{T}(k)\mathrm{U}_\alpha(k)\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k) \bigcup \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(k)u_\alpha\mathrm{U}_{-\alpha}(k)\mathrm{T}(k)\mathrm{U}_\alpha(k)\mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(k).\end{aligned}$$

Utilisant de nouveau 5.6.8 (iii) (pour R_- au lieu de R_+), on obtient le résultat.

226 ***Proposition 5.7.10***. — *Sous les conditions de* 5.7.4*, choisissons pour chaque racine simple α un* $u_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha^\times(\mathrm{S})$. *Soit* U_1 *le sous-monoïde de* $\mathrm{B}^u(\mathrm{S})$ *engendré par les* u_α. *Les ouverts* $u\Omega$, *pour* $u \in \mathrm{U}_1$, *forment un recouvrement de* G.

Encore une fois, on peut supposer que S est le spectre d'un corps k ; en vertu de 5.7.6, il suffit de prouver que $\bigcup_{u\in\mathrm{U}_1} u\Omega(k)$ est stable par multiplication à droite par $\mathrm{T}(k)$, $\mathrm{U}_\alpha(k)$, $\mathrm{U}_{-\alpha}(k)$ (pour α simple). Dans les deux premiers cas, c'est trivial. Dans le dernier, cela résulte du lemme.

[43] N.D.E. : Voir aussi les ajouts faits dans $\mathrm{VI_B}$, 6.2.1 à 6.2.6 et 6.5.2 à 6.5.5.

Remarque 5.7.11. — Signalons un cas particulier de 5.7.2. Si $w = s_\alpha$ est la symétrie par rapport à la racine simple α, alors

$$\mathrm{R}_- \cap s_\alpha(\mathrm{R}_-) = \mathrm{R}_- - \{-\alpha\}$$

(Exp. XXI 3.3.1), et, dans les notations de 5.6.8, on a donc

$$\mathrm{B}'^{u}_{s_\alpha} = \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}.$$

Remarque 5.7.12. — En fait, la démonstration de 5.7.10 donne aussitôt l'énoncé suivant : sous les conditions de 5.7.10, soit Γ un sous-monoïde de G(S) ; pour que les ouverts $g\Omega$ ($g \in \Gamma$) forment un recouvrement de G, il faut et il suffit que pour tout $s \in \mathrm{S}$ et toute racine simple α, on ait

$$(u_\alpha)_{\overline{s}}\mathrm{B}'^{u}(\overline{s}) \subset \Gamma \cdot \mathrm{B}'^{u}(\overline{s}) \cdot \mathrm{T}(\overline{s}) \cdot \mathrm{B}^{u}(\overline{s}).$$

Remarque 5.7.13. — Par 5.5.5 (iii), raisonnant comme dans 5.7.1, on obtient aussitôt la variante suivante de 5.7.4 : soient (G, T, M, R) un S-groupe déployé, B et B′ deux sous-groupes de Borel de G contenant T ; pour tout $w \in \mathrm{W}$, le faisceau $\mathrm{B}' \cdot \mathrm{N}_w \cdot \mathrm{B}$ est représentable par un sous-schéma de G ; ces sous-schémas forment, pour $w \in \mathrm{W}$, une **227**
partition de l'ensemble sous-jacent à G. On peut aussi donner l'analogue de 5.7.3 (ii) : il faut poser

$$\mathrm{B}'^{u}_{w} = \mathrm{B}'^{u} \bigcap \mathrm{int}(n_w)\widetilde{\mathrm{B}}^{u},$$

où $\widetilde{\mathrm{B}}$ est le sous-groupe de Borel « opposé » à B relativement à T (cf. 5.9.2).

Proposition 5.7.14. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif, et*

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathfrak{g})$$

sa représentation adjointe. Alors Ker(Ad) = $\underline{\mathrm{Centr}}$(G), (*en d'autres termes, l'homomorphisme canonique déduit de* Ad *par passage au quotient :*

$$\overline{\mathrm{Ad}} : \quad \mathrm{G}/\,\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \mathrm{ad}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathfrak{g})$$

est un monomorphisme. [(44)]

On peut supposer G déployé. Choisissons sur $\Gamma_0(\mathrm{R})$ une structure d'ordre total compatible avec la structure de groupe et soit R_+ l'ensemble des racines positives. En vertu de 5.7.4 (ii) et de 4.1.6, il suffit de prouver que si n_w est un représentant de l'élément w de W, si $u \in \mathrm{U(S)}$, $t \in \mathrm{T(S)}$, $v \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S})$, et si $\mathrm{Ad}(n_w vtu) = \mathrm{id}$, alors $w = e$, $v = e$, $u = e$. Pour chaque $m \in \mathrm{R} \cup \{0\}$, posons

$$\mathfrak{g}^{>m} = \coprod_{n>m} \mathfrak{g}^n, \qquad \mathfrak{g}^{<m} = \coprod_{n<m} \mathfrak{g}^n.$$

Soit $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^m)$; écrivons $\mathrm{Ad}(tu)\mathrm{X} = \mathrm{Ad}(v^{-1}n_w^{-1})\mathrm{X}$. Or

$$\mathrm{Ad}(t)\,\mathrm{Ad}(u)\mathrm{X} - m(t)\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{>m}),$$
$$\mathrm{Ad}(v^{-1}n_w^{-1})\mathrm{X} - \mathrm{Ad}(n_w^{-1})\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{<w^{-1}(m)}).$$

(44) N.D.E. : C'est même une immersion fermée, d'après Exp. XVI 1.5 (a).

Si $w \neq e$, il existe un $\alpha \in \mathrm{R}$ tel que $w^{-1}(\alpha) < \alpha$, et faisant $m = \alpha$, on en tire une contradiction car

$$\mathrm{Ad}(tu)\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha} + \mathfrak{g}^{>\alpha}) \bigcap \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{w^{-1}(\alpha)} + \mathfrak{g}^{<w^{-1}(\alpha)}) = 0.$$

228 On a donc $w = e$, et on peut choisir $n_w = e$; on a alors

$$\mathrm{Ad}(v^{-1})\mathrm{X} - \mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{<m} \cap (\mathfrak{g}^{m} + \mathfrak{g}^{>m})) = 0,$$

d'où $\mathrm{Ad}(v)\mathrm{X} = \mathrm{X}$ pour tout $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^m)$, donc $\mathrm{Ad}(v) = \mathrm{id}$. De même $\mathrm{Ad}(u) = \mathrm{id}$. On conclut alors par 5.6.2 bis.

5.8. Schémas associés à un groupe réductif

Théorème 5.8.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif. Soit* $\mathscr{H}$ *le foncteur des sous-groupes de type* (R) *de* G *: pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathscr{H}(\mathrm{S}')$ *est l'ensemble des sous-groupes de type* (R) *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ (*cf.* 5.2.1). *Alors* $\mathscr{H}$ *est représentable par un* S*-schéma* quasi-projectif, de présentation finie *sur* S.

[45] Soient $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ le groupe adjoint de G (4.3.6) et u le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$. D'après Exp. XII 7.12, l'application $\mathrm{H}' \mapsto u^{-1}(\mathrm{H})$ établit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de type (R) de G′ et de G (et ceci reste valable après tout changement de base). Donc, remplaçant G par G′, on peut supposer que G est adjoint. Considérons alors le morphisme

$$u : \mathscr{H} \longrightarrow \underline{\mathrm{Grass}}(\mathfrak{g})$$

qui associe à chaque sous-groupe de type (R) son algèbre de Lie (qui est un sous-module localement facteur direct de $\mathfrak{g}$. [46]). Alors u est un monomorphisme par 5.3.3. Il suffit de prouver qu'il est représentable par une immersion de présentation finie, autrement dit de prouver l'assertion suivante : pour tout $\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}$, étant donné un sous-module localement facteur direct $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_{\mathrm{S}_1}$, les $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}_1$ tels que $\mathfrak{h}_{\mathrm{S}'}$ soit l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de type (R) de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ sont exactement ceux qui se factorisent par un certain sous-schéma Σ de présentation finie de S_1. Remplaçant S_1 par S, on se ramène à $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}$, et l'on peut de plus supposer S affine ; alors il existe un schéma affine noethérien S_0 tel que G (resp. $\mathfrak{h}$) provienne par changement de base d'un S_0-groupe réductif adjoint G_0 (resp. un sous-module localement facteur direct $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{g}_0 = \mathscr{L}ie(\mathrm{G}_0/\mathrm{S}_0)$. Il suffit de montrer qu'il existe un sous-schéma Σ_0 de S_0 ayant les propriétés requises (car alors on aura $\Sigma = \Sigma_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{S}$). Remplaçant S par S_0, on peut donc supposer S affine et noethérien (noter qu'alors tout sous-schéma de S est de présentation finie sur S). Enfin, remplaçant S par un ouvert suffisamment petit, on peut supposer que $\mathfrak{g}$ est libre de rang n et que $\mathfrak{h}$ est un facteur direct, libre de rang r.

On doit d'abord écrire que $\mathfrak{h}_{\mathrm{S}'}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_{\mathrm{S}'}$, i.e. que le morphisme induit par le crochet de Lie :

$$\phi : \quad \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \xrightarrow{[\ ,\ ]} \mathfrak{g}$$

[45] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[46] N.D.E. : cf. Exp. II 4.11.8.

se factorise par $\mathfrak{h}$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathfrak{g}$ telle que $(e_1, \ldots, e_r)$ soit une base de $\mathfrak{h}$, alors ϕ est donné par des sections a_k^{ij} de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ (où $i, j = 1, \ldots, r$ et $k = 1, \ldots, n$), et la condition précédente équivaut à dire que $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par le sous-schéma fermé de S défini par les équations $a_k^{ij} = 0$ pour $k = r+1, \ldots, n$ et $i, j = 1, \ldots, r$. Remplaçons S par ce sous-schéma fermé. 229

Alors, d'après 5.3.0, $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{h})$ est un sous-schéma en groupes fermé de G, de présentation finie sur G. On doit maintenant écrire (cf. 5.3.1) que $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ est lisse en tout point de la section unité, de dimension relative $r = \mathrm{rang}(\mathfrak{h})$, et que l'inclusion de $\mathfrak{h}_{\mathrm{S}'}$ dans $\mathscr{L}ie(\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}')$ est une égalité.

[47] Comme N est affine sur S (étant fermé dans G), la section unité $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{N}$ est une immersion fermée, donc $\varepsilon(\mathrm{S})$ est défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{A}(\mathrm{N})$. Notons que $\mathfrak{n}_{\mathrm{S}/\mathrm{N}} = \mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ s'identifie à $\varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{N}/\mathrm{S}})$, donc sa formation commute à tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. D'après l'équivalence (c′) $\Leftrightarrow$ (a) dans EGA IV_4, 17.12.1 (appliqué à $f : \mathrm{N} \to \mathrm{S}$ et $j = \varepsilon$), $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{S}'$ est lisse, de dimension relative r, en tout point de $\varepsilon(\mathrm{S}')$ si et seulement si $\mathfrak{n}_{\mathrm{S}'/\mathrm{N}'} = \mathfrak{n}_{\mathrm{S}/\mathrm{N}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ est localement libre de rang r et le morphisme $\phi_n(\mathrm{S}') : \mathrm{Sym}^n(\mathfrak{n}_{\mathrm{S}'/\mathrm{N}'}) \to \mathscr{J}^n_{\mathrm{S}'}/\mathscr{J}^{n+1}_{\mathrm{S}'}$ est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 1$. Notons $\mathrm{K}_n(\mathrm{S}') = \mathrm{Ker}\,\phi_n(\mathrm{S}')$. D'après TDTE I, Lemme 3.6, $\mathfrak{n}_{\mathrm{S}/\mathrm{N}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ est localement libre de rang r si et seulement si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par un certain sous-schéma Z de S. Remplaçant S par Z, on peut donc supposer que $\mathfrak{n}_{\mathrm{S}/\mathrm{N}} = \mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est localement libre de rang r. Alors, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, on a $(\mathscr{J}^2/\mathscr{J}^3) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'} = \mathscr{J}^2_{\mathrm{S}'}/\mathscr{J}^3_{\mathrm{S}'}$ et donc $\mathrm{K}_2(\mathrm{S}') = \mathrm{K}_2(\mathrm{S}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$. Il en résulte que $\phi_2(\mathrm{S}')$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par le sous-schéma fermé S_2 de S défini l'idéal engendré par l'image de $\mathrm{Sym}^2(\mathfrak{n}_{\mathrm{S}/\mathrm{N}})^* \otimes \mathrm{K}_2(\mathrm{S})$ dans $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. Alors, au-dessus de S_2, $\mathscr{J}^2/\mathscr{J}^3$ est isomorphe à $\mathrm{Sym}^2(\mathfrak{n}_{\mathrm{S}/\mathrm{N}})$ donc localement libre, et le même argument montre que $\phi_3(\mathrm{S}')$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par un certain sous-schéma fermé S_3 de S, etc. On obtient ainsi que $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{S}'$ est lisse, de dimension relative r, en tout point de $\varepsilon(\mathrm{S}')$ si et seulement si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par le sous-schéma fermé Z intersection des S_n. Mais alors, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{Z}$, $\mathscr{L}ie(\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}')$ est localement un facteur direct de rang r de $\mathfrak{g}_{\mathrm{S}'}$, et donc l'inclusion $\mathfrak{h}_{\mathrm{S}'} \subset \mathscr{L}ie(\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}')$ est une égalité. On pose alors $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0$.

Remplaçant S par Z, il ne nous reste plus qu'à exprimer que $\mathrm{H}_{s'}$ est de même rang réductif que $\mathrm{G}_{s'}$ en tout point $s' \in \mathrm{S}'$, ou, ce qui revient au même, que H_s est de même rang réductif que G_s en tout point s de l'image (ensembliste) de S′ dans S. Or cette condition définit un sous-ensemble ouvert de S (Exp. XIX 6.2).

Remarque. — En général, le schéma $\mathscr{H}$ n'est pas lisse sur S. Il l'est cependant si 6 est inversible sur S, ou s'il existe un nombre premier p tel que $p \cdot 1_{\mathrm{S}} = 0$ (i.e. si S est de caractéristique $p > 0$).

[47] N.D.E. : L'original indiquait ensuite que, notant $\mathfrak{n}_{\mathrm{N}/\mathrm{G}}$ l'image réciproque du faisceau conormal $\mathscr{N}_{\mathrm{N}/\mathrm{G}}$ par la section unité $\mathrm{S} \to \mathrm{N}$, la condition que $\mathfrak{n}_{\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}} \to \omega^1_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}$ soit universellement injectif équivaut au fait que $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par un certain sous-schéma ouvert de S. Nous n'avons pas réussi à justifier ce point, en raison du fait que la formation de $\mathscr{N}_{\mathrm{N}/\mathrm{G}}$ ne commute pas au changement de base, et nous avons remplacé cet argument par celui qui suit, indiqué par O. Gabber.

230 ***Corollaire 5.8.2***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* H *un sous-groupe de type* (R) *de* G. (*On rappelle* (5.3.10), *que* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de* G*, lisse sur* S).

Alors le faisceau quotient $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est représentable par un* S*-schéma* quasi-projectif, lisse et de présentation finie *sur* S (*qui est en fait un ouvert de* $\mathscr{H}$).

En effet, considérons le morphisme

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathscr{H},$$

défini ensemblistement par $f(g) = \mathrm{int}(g)\mathrm{H}$. En vertu de 5.3.9, ce morphisme est lisse et de présentation finie, donc ouvert. Soit $\mathrm{V} = f(\mathrm{G})$ muni de sa structure de sous-schéma ouvert de $\mathscr{H}$. Le morphisme $f : \mathrm{G} \to \mathrm{V}$ est couvrant et de noyau $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ ce qui prouve que $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est représentable par V (cf. Exp. IV 4.6.5).

Corollaire 5.8.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif. Considérons les foncteurs* $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$*,* $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$*,* $\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})$ *définis par*

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}') &= \{\text{tores maximaux de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}\},\\
\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}') &= \{\text{sous-groupes de Borel de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}\},\\
\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}') &= \{\text{couples de Killing de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \text{ (cf. 5.3.13)}\}.
\end{aligned}$$

(i) $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$*,* $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$*,* $\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})$ *sont représentables par des* S*-schémas lisses et de présentation finie, à fibres géométriques intègres, et respectivement* affine, projectif, affine *sur* S.

(ii) *Le morphisme canonique* $\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}) \to \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$ (*resp.* $\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}) \to \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$) *est étale fini surjectif* (*resp. affine lisse surjectif*).

(iii) *Soit* T *un tore maximal de* G (*resp.* B *un sous-groupe de Borel de* G*, resp.* $\mathrm{B} \supset \mathrm{T}$ *un couple de Killing de* G). *Le morphisme*

$$\mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}), \qquad \text{resp. } \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}), \qquad \text{resp. } \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})$$

231 *défini par*

$$g \mapsto \mathrm{int}(g)\mathrm{T}, \qquad \text{resp. } g \mapsto \mathrm{int}(g)\mathrm{B}, \qquad \text{resp. } g \mapsto (\mathrm{int}(g)\mathrm{B}, \mathrm{int}(g)\mathrm{T})$$

induit un isomorphisme

$$\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}), \qquad \text{resp. } \mathrm{G}/\mathrm{B} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}), \qquad \text{resp. } \mathrm{G}/\mathrm{T} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}).$$

On voit d'abord que (iii) résulte du théorème de conjugaison des tores maximaux (resp. sous-groupes de Borel, resp. couples de Killing) et du fait que

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}, \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B}) \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T},$$

tous résultats établis précédemment (5.1.2, 5.3.12, 5.3.14, 5.6.1).

Il s'ensuit d'abord que les morphismes canoniques

$$\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{H}, \qquad \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{H}$$

sont représentables, localement pour la topologie étale, par des immersions ouvertes (5.8.2 et 5.1.2 resp. 5.5.5), donc par descente que $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$ et $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$ sont représentables par des ouverts de $\mathscr{H}$. De même $\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})$ est localement (pour la topologie étale) représentable par un schéma affine sur la base (Exp. IX 2.3), donc représentable par un S-schéma affine, par descente des schémas affines. [48]

Les assertions de (ii) résultent aussitôt de 5.5.5 (ii) et 5.6.13. Il s'ensuit déjà que $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$ est affine sur S (EGA II 6.7.1). Il ne reste donc à prouver que le fait que $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$ **232**
est projectif sur S. On sait déjà qu'il est quasi-projectif, reste à prouver qu'il est propre ; [49] or il est à fibres connexes, donc, d'après EGA IV_3, 15.7.10, on est ramené à le prouver sur les fibres géométriques ; si S est le spectre d'un corps algébriquement clos, on a $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}) = \mathrm{G}/\mathrm{B}$ par (iii) et on conclut par *Bible*, § 6.4, th. 4 (ou [**Ch05**], § 6.5, th. 5).

Remarque 5.8.4. — Sous les conditions de 5.8.3, soit Q un sous-groupe *central* et de type multiplicatif de G. Les morphismes évidents définissent des isomorphismes

$$\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}) \simeq \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}/\mathrm{Q}), \qquad \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}) \simeq \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}/\mathrm{Q}), \qquad \underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}) \simeq \underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}/\mathrm{Q}).$$

Corollaire 5.8.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-schéma en groupes de* G*, lisse et de présentation finie sur* S*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour chaque* $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{P}_{\overline{s}}$ *est un* sous-groupe parabolique *de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ (i.e. *le schéma quotient* $\mathrm{G}_{\overline{s}}/\mathrm{P}_{\overline{s}}$ *est propre sur* $\overline{s}$*, ou encore* $\mathrm{P}_{\overline{s}}$ *contient un groupe de Borel de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$, cf. *Bible*, § 6.4, th. 4 ou [**Ch05**], § 6.5, th. 5).

(ii) *Le faisceau quotient* G/P *est représentable par un* S*-schéma lisse et projectif sur* S.

De plus, sous ces conditions, P *est fermé dans* G*, à fibres connexes et l'on a* $\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$.

On a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i). Si (i) est vérifié, alors $\mathrm{P}(\overline{s}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}(\overline{s})}(\mathrm{P}_{\overline{s}})$ et $\mathrm{P}_{\overline{s}}$ est connexe (pour le premier point, cf. *Bible*, § 12.3, lemme 4 ; [50] le second point en **233**
découle, car $\mathrm{P}' = \mathrm{P}^0_{\overline{s}}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ normalisé par $\mathrm{P}_{\overline{s}}$, d'où $\mathrm{P}'(\overline{s}) = \mathrm{P}(\overline{s})$ et donc $\mathrm{P}' = \mathrm{P}_{\overline{s}}$) ; il s'ensuit que P est de type (R), et que P égale $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$, donc est fermé dans G. Par 5.8.2, $\mathrm{G}/\mathrm{P} = \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$ est représentable par un S-schéma quasi-projectif. Ses fibres sont connexes et propres, il est donc projectif par le raisonnement de 5.8.3.

Remarque 5.8.6. — Les énoncés 5.8.1, 5.8.2, 5.8.5 sont valables pour un S-groupe de type (RA), ou pour un S-groupe de type (RR) vérifiant 5.1.8. [51]

Remarque 5.8.7. — Par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs de G, on a des opérations canoniques :

$$\mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})), \qquad \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})), \qquad \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G})),$$

[48] N.D.E. : cf. SGA 1, VIII 2.1.

[49] N.D.E. : On peut supposer S affine et, comme $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$ est de présentation finie sur S d'après (i), se ramener au cas où S est noethérien ; on est alors sous les hypothèses de EGA IV_3, 15.7.10.

[50] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

[51] N.D.E. : En effet, la démonstration de 5.8.1 n'utilise que 5.3.3 (valable pour un groupe de type (RA)) et XIX 6.2 qui, d'après XII 1.7 (b), est aussi valable pour les groupes de type (RR).

qui, dans la situation de 5.8.3. (iii), s'identifient aux opérations canoniques

$$G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(G/\underline{\mathrm{Norm}}_{G}(T)), \qquad G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(G/B), \qquad G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(G/T).$$

On en conclut en particulier que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\big(G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Tor}}(G))\big) &= \mathrm{Ker}\big(G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Bor}}(G))\big) \\ &= \mathrm{Ker}\big(G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Kil}}(G))\big) \\ &= \underline{\mathrm{Centr}}(G). \end{aligned}$$

Il est en effet clair que $\underline{\mathrm{Centr}}(G)$ opère trivialement sur chacun des trois schémas.
234 Réciproquement, le noyau de $G \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Kil}}(G))$ est « l'intersection des tores maximaux de G » au sens de 4.1.7, donc égale $\underline{\mathrm{Centr}}(G)$ (*loc. cit.*). Pour $\underline{\mathrm{Bor}}(G)$, on remarque que « l'intersection des sous-groupes de Borel de G » est aussi « l'intersection de ses tores maximaux » (voir n° suivant). Pour $\underline{\mathrm{Tor}}(G)$, on utilise Exp. XII 4.11.

5.9. Propriétés particulières aux sous-groupes de Borel

La plupart de ces propriétés seront généralisées dans Exp. XXVI aux sous-groupes paraboliques.

Définition 5.9.1. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, B et B′ deux sous-groupes de Borel de G. On dit que B et B′ sont *en position générale* (ou que B′ est en position générale relativement à B) si $B \cap B'$ est un tore (nécessairement *maximal*) de G.

Si T est un tore maximal de G contenu dans B et B′, on dit que B et B′ sont *opposés* (relativement à T) si $B \cap B' = T$.

Proposition 5.9.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* B *un sous-groupe de Borel de* G*,* T *un tore maximal de* B*. Il existe un* unique *sous-groupe de Borel* B′ *de* G*, opposé à* B *relativement à* T*.*

Si (G, T, M, R) *est un déploiement de* G *par rapport à* T *et si* $B = B_{R_+}$ (5.5.1)*, alors* $B' = B_{-R_+}$*.*

Par descente fidèlement plate, il suffit de prouver la proposition dans le cas déployé, lorsque $B = B_{R_+}$ (5.5.5 (iv)). Alors B_{-R_+} est bien opposé à B (4.1.2) ; montrons que c'est le seul sous-groupe de Borel de G contenant T qui est opposé à B. Si B′ est un
235 sous-groupe de Borel de G contenant T, alors B′ est localement sur S de la forme $B_{R'_+}$, où R'_+ est un deuxième système de racines positives de R (5.5.5 (iii)). Si $R'_+ \neq -R_+$, il existe $\alpha \in R'_+ \cap R_+$, donc tel que $U_\alpha \subset B_{R_+} \cap B_{R'_+}$.

Proposition 5.9.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* B *un sous-groupe de Borel de* G*.*

(i) *Si* B′ *est un sous-groupe de Borel de* G*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) B′ *est en position générale par rapport à* B (5.9.1)*.*
(b) $B'^u \cap B^u = e$*.*
(b′) $B'^u \cap B = e$*.*
(c) *Le produit dans* G *induit une immersion ouverte* $B'^u \times_S B \to G$*.*

(c′) *Le morphisme canonique* $B'^u \to G/B$ *est une immersion ouverte.*

(ii) *Le foncteur* $\underline{\mathrm{Opp}}(B)$ *:*

$$S' \longmapsto \left\{\begin{matrix}\text{sous-groupes de Borel de } G_{S'} \text{ en} \\ \text{position générale par rapport à } B_{S'}\end{matrix}\right\}$$

est représentable par un sous-schéma ouvert de $\underline{\mathrm{Bor}}(G)$ (5.8.3). *Le morphisme*

$$\underline{\mathrm{Opp}}(B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}(B)$$

défini par $B' \mapsto B \cap B'$ *est un isomorphisme. En particulier* (5.6.13) *les automorphismes intérieurs de* B^u *munissent* $\underline{\mathrm{Opp}}(B)$ *d'une structure de fibré principal homogène sous* B^u.

Examinons d'abord (i). On a (a) $\Rightarrow$ (c), en effet, (c) est local pour la topologie **236**
étale ; par 5.5.5 (iv), on se ramène au cas où G est déployé par rapport à $B \cap B'$ et B de la forme B_{R_+} ; par 5.9.2, on a alors $B'^u = U_{-R_+}$ et on est ramené à 4.1.2.

On a trivialement (c′) $\Leftrightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b′) $\Rightarrow$ (b). Il reste donc à prouver (b) $\Rightarrow$ (a). Démontrons d'abord (ii) ; la seconde assertion est une conséquence formelle de 5.9.2, la troisième en résulte aussitôt par 5.6.13 ; démontrons alors la première ; elle est locale pour la topologie étale et on peut donc supposer que B possède un tore maximal T ; soit B'_0 l'opposé à B relativement à T (5.9.2).

D'après qui précède le morphisme $B^u \to \underline{\mathrm{Bor}}(G)$ induit par le morphisme canonique $G \to G/B'_0 \to \underline{\mathrm{Bor}}(G)$ (5.8.3) induit un isomorphisme $B^u \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Opp}}(B)$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B^u \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & G/B'_0 \arrow[d, "\wr"] \\ \underline{\mathrm{Opp}}(B) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Bor}}(G). \end{tikzcd}$$

Or le morphisme $B^u \to G/B'_0$ est une immersion ouverte (par (i) (a) $\Rightarrow$ (c′)), ce qui achève de prouver (ii). Notons tout de suite le corollaire

Corollaire 5.9.4. — *Soient* G *un* S*-groupe réductif et* B *et* B' *deux sous-groupes de Borel de* G. *Si* $s \in S$ *est tel que* $B_{\overline{s}}$ *et* $B'_{\overline{s}}$ *soient en position générale, il existe un ouvert* V *de* S *contenant* s *tel que* B_V *et* B'_V *soient en position générale.*

Il ne nous reste donc qu'à prouver (b) $\Rightarrow$ (a). En vertu du corollaire précédent, il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps k algébriquement clos. On peut supposer G déployé par rapport à un tore maximal T de B. Soit B'_0 le sous-groupe **237**
de Borel opposé à B. Les sous-groupes de Borel de G étant conjugués sous $G(k)$, il existe $g \in G(k)$ tel que $\mathrm{int}(g)B'_0 = B'$. Par le théorème de Bruhat (5.7.4), on peut écrire $g = bnb'$, avec $b \in B(k)$, $b' \in B'_0(k)$, $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(k)$. On a donc

$$B' = \mathrm{int}(b)\,\mathrm{int}(n)\,B'_0$$

et $B' \cap B = \mathrm{int}(b)\big(\mathrm{int}(n)B'_0 \cap B\big)$. Si $n \notin T(k)$, $\mathrm{int}(n)B'^u_0 \cap B^u \neq e$ (cf. preuve de 5.9.2) ; il en résulte que (b) entraîne $B' \cap B = \mathrm{int}(b)(B'_0 \cap B) = \mathrm{int}(b)T$. C.Q.F.D.

Proposition 5.9.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* B *un sous-groupe de Borel de* G, B^u *sa partie unipotente. Il existe une suite de sous-groupes de* B :

$$U_0 = B^u \supset U_1 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) *Chaque* U_i *est lisse, à fibres connexes,* caractéristique dans B *; les automorphismes intérieurs de* B^u *opèrent trivialement dans les (faisceaux) quotients* U_i/U_{i+1}.

(ii) *Pour chaque* $i \geqslant 0$*, il existe un* $\mathscr{O}_S$*-module localement libre* $\mathscr{E}_i$ *et un isomorphisme de* S*-faisceaux en groupes*

$$U_i/U_{i+1} \xrightarrow{\sim} W(\mathscr{E}_i).$$

(iii) *Pour tout* $s \in S$, $(U_n)_s = e$ *pour* $n \geqslant \dim(B^u_s)$.

Supposons d'abord qu'il existe un déploiement (G, T, M, R) de G et un système de
238 racines positives R_+ de R tel que $B = B_{R_+}$. On note Δ l'ensemble des racines simples de R_+ ; pour chaque $\alpha \in R_+$, on note $\mathrm{ord}(\alpha)$ la somme des coefficients de α sur la base Δ de $\Gamma_0(R)$, c'est l'ordre de α relativement à R_+. On a $\mathrm{ord}(\alpha) \leqslant \mathrm{Card}(R_+)$. Pour tout $i > 0$, soit $R^{(i)}$ l'ensemble des racines d'ordre $> i$, c'est un ensemble clos de racines positives, on peut donc construire (5.6.5)

$$U_i = U_{R^{(i)}}.$$

Si $\alpha \in R_+$ et $\beta \in R^{(i)}$, alors $\alpha + \beta \in R^{(i+1)}$. Il s'ensuit, par 5.5.2, que chaque U_i est un sous-groupe invariant de B et que les automorphismes intérieurs de B^u opèrent trivialement dans U_i/U_{i+1}. Ce groupe s'identifie d'ailleurs à

$$\prod_{\mathrm{ord}(\alpha)=i+1} U_\alpha$$

et est donc muni d'une structure vectorielle.

Si B est de la forme $B_{R'}$ pour un autre déploiement (G, T', M', R') de G, montrons que les groupes U'_i construits comme ci-dessus à l'aide du nouveau déploiement coïncident avec les U_i et que les structures vectorielles sur les quotients successifs coïncident également. Par 5.6.13, il existe $b \in B^u(S)$ tel que $T' = \mathrm{int}(b)T$; l'assertion à démontrer est locale sur S et on peut donc supposer que l'isomorphisme $T \xrightarrow{\sim} T'$ induit par $\mathrm{int}(b)$ provient par dualité d'un isomorphisme de données radicielles

$$h : (M', M'^*, R', R'^*) \xrightarrow{\sim} (M, M^*, R, R^*).$$

Il est clair que les racines de R'_+ sont les $\alpha \circ \mathrm{int}(b) = h(\alpha)$, $\alpha \in R_+$, et que les racines simples de R'_+ sont les $\alpha \circ \mathrm{int}(b) = h(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$, donc que $\mathrm{ord}(h(\alpha)) = \mathrm{ord}(\alpha)$ pour $\alpha \in R_+$. D'autre part, il est clair par transport de structure que les groupes vectoriels $U'_{h(\alpha)}$ ne sont autres que les $\mathrm{int}(b)U_\alpha$. On a donc $\mathrm{int}(b)U_i = U'_i$, or U_i étant invariant, cela donne $U_i = U'_i$.

239 De même l'isomorphisme de groupes vectoriels

$$\mathrm{int}(b) : U_i/U_{i+1} \xrightarrow{\sim} U'_i/U'_{i+1}$$

est l'identité, en vertu de ce qu'on a déjà démontré.

Traitons maintenant le cas général. Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \to S\}$ et pour chaque i un déploiement (G_i, T_i, M_i, R_i) et un système de racines positives R_{i+} de R_i tel que $B \times_S S_i = B_{R_{i+}}$ (5.5.5, (iii)). Pour chaque i, on a donc une famille

$$B_{S_i} = U_{i,0} \supset U_{i,1} \supset \cdots \supset U_{i,j} \supset \cdots$$

et des structures vectorielles sur les $U_{i,j}/U_{i,j+1}$. Par descente, il suffit de prouver que pour tout couple (i, i') et tout j, on a

$$U_{i,j} \underset{S_i}{\times} S_{ii'} = U_{i',j} \underset{S_{i'}}{\times} S_{ii'}$$

(on note $S_{ii'} = S_i \times_S S_{i'}$) et que les structures vectorielles sur les quotients

$$(U_{i,j}/U_{i,j+1}) \underset{S_i}{\times} S_{ii'} \qquad \text{et} \qquad (U_{i',j}/U_{i',j+1}) \underset{S_i}{\times} S_{ii'}$$

coïncident. Or si $S_{ii'} = \varnothing$, c'est trivial ; si $S_{ii'} \neq \varnothing$, alors on est dans la situation étudiée précédemment : $B \times_S S_{ii'}$ est défini par le système de racines positives R_{i+} (resp. $R_{i'+}$) dans le déploiement $(G_{S_{ii'}}, T_i \times_{S_i} S_{ii'}, M_i, R_i)$ (resp. dans le déploiement $(G_{S_{ii'}}, T_{i'} \times_{S_{i'}} S_{ii'}, M_{i'}, R_{i'})$).

Corollaire 5.9.6. — *Si* S *est affine,* $H^1(S, B^u) = e$, *i.e. tout fibré principal sous* B^u *possède une section.*

En effet, S se décompose en somme directe de sous-schémas sur chacun desquels B^u est de dimension relative constante. On peut donc, par 5.9.5 (iii), supposer qu'il existe un n tel que $U_n = e$. Comme, par TDTE I, B.1.1, [(52)]

$$H^1(S, U_i/U_{i+1}) = H^1(S, W(\mathscr{E}_i)) = 0,$$

on a $H^1(S, B^u) = 0$.

Corollaire 5.9.7. — *Si* S *est affine,* B *possède des tores maximaux. Si* T *est un tore* **240**
maximal de B, *on a* $H^1(S, T) = H^1(S, B)$.

La première assertion résulte aussitôt de 5.9.6 et 5.6.13 ; la seconde s'en déduit de manière standard. [(53)]

Corollaire 5.9.8. — *Si* G *est un* S*-groupe réductif, le morphisme canonique* (cf. 5.8.3)

$$\underline{\mathrm{Kil}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Bor}}(G)$$

possède des sections au-dessus de tout ouvert affine.

Corollaire 5.9.9. — *Sous les conditions de* 5.9.5, *supposons* S *affine, alors il existe un* $\mathscr{O}_S$*-module localement libre* $\mathscr{E}$ *tel que* B^u *soit,* comme schéma, S*-isomorphe à* $W(\mathscr{E})$.

(52) N.D.E. : Il s'agit du corollaire page 18 de TDTE I.

(53) N.D.E. : En effet, on a une suite exacte $H^1(S, B^u) \to H^1(S, B) \xrightarrow{\pi} H^1(S, B/B^u) = H^1(S, T)$, voir [**Se64**], I § 5.5, Prop. 38 ou [**Gi71**], III Prop. 3.3.1. Or $H^1(S, T) \to H^1(S, B)$ est une section de π, donc π est surjectif ; d'autre part $H^1(S, B^u) = 0$ d'après 5.9.6.

Montrons par récurrence sur i que $\mathrm{B}^u/\mathrm{U}_i$ est S-isomorphe à $\mathrm{W}(\mathscr{E}_0 \oplus \cdots \oplus \mathscr{E}_{i-1})$. C'est clair pour $i = 0$; supposons $i \geqslant 1$. Alors $\mathrm{B}^u/\mathrm{U}_i$ est un fibré principal homogène de base $\mathrm{X} = \mathrm{B}^u/\mathrm{U}_{i-1}$ sous le groupe $(\mathrm{U}_{i-1}/\mathrm{U}_i)_\mathrm{X}$. Comme $\mathrm{B}^u/\mathrm{U}_{i-1}$ est affine, par l'hypothèse de récurrence, et comme $\mathrm{U}_{i-1}/\mathrm{U}_i = \mathrm{W}(\mathscr{E}_{i-1})$, ce fibré est trivial. On a donc (au moins) un isomorphisme de S-schémas

$$\mathrm{B}^u/\mathrm{U}_i \xrightarrow{\sim} (\mathrm{B}^u/\mathrm{U}_{i-1}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{W}(\mathscr{E}_{i-1}) = \mathrm{W}(\mathscr{E}_0 \oplus \cdots \oplus \mathscr{E}_{i-1}).$$

On conclut aussitôt par la condition (iii) de 5.9.5.

Corollaire 5.9.10. — *Soit* S *un schéma* semi-local, $\{s_i\}$ *ses points fermés,* B *un sous-groupe de Borel du* S*-groupe réductif* G*. L'application canonique*

$$\mathrm{B}^u(\mathrm{S}) \longrightarrow \prod_i \mathrm{B}^u(\operatorname{Spec} \kappa(s_i))$$

est surjective.

En effet, si $\mathrm{S} = \operatorname{Spec}(\mathrm{A})$, $\kappa(s_i) = \mathrm{A}/\mathfrak{p}_i$ et si $\mathscr{E}$ est donné par le A-module E, on a

$$\mathrm{B}^u(\mathrm{S}) = \mathrm{E} \otimes \mathrm{A}, \qquad \mathrm{B}^u(\operatorname{Spec} \kappa(s_i)) = \mathrm{E} \otimes_\mathrm{A} (\mathrm{A}/\mathfrak{p}_i).$$

241 L'assertion résulte alors aussitôt du fait que $\mathrm{A} \to \prod_i \mathrm{A}/\mathfrak{p}_i$ est surjectif.

5.10. Sous-groupes de type (R) à fibres réductives

Proposition 5.10.1. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* R' *une partie de* R *de type* (R) (5.4.2)*,* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *le sous-groupe de* G *correspondant. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *est réductif* (*i.e. à fibres géométriques réductives*)*.*

(ii) *On a* $\mathrm{R}' = -\mathrm{R}'$*, i.e.* R' *est symétrique.*

De plus, sous ces conditions, $(\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}')$ *est un déploiement de* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *; pour tout système de racines positives* R_+ *de* R*,* $\mathrm{R}'_+ = \mathrm{R}' \cap \mathrm{R}_+$ *est un système de racines positives de* R' *et*

$$\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}'} = \mathrm{H}_{\mathrm{R}'_+}$$

est un sous-groupe de Borel de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$*, dont la partie unipotente est*

$$\mathrm{U}_{\mathrm{R}_+} \cap \mathrm{H}_{\mathrm{R}'} = \mathrm{U}_{\mathrm{R}'_+}.$$

On a évidemment (i) ⇒ (ii) (il suffit de le vérifier fibre par fibre et R' est un système de racines de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ par rapport à T). Pour prouver (ii) ⇒ (i), on remarque par 5.4.3, que

$$\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} \cap \mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}}(\mathrm{T}_\alpha) = \mathrm{Z}_\alpha$$

pour tout $\alpha \in \mathrm{R}'$ et on applique le critère de Exp. XIX 1.12.

Si R_+ est un système de racines positives de R, alors $\mathrm{R}'_+ = \mathrm{R}_+ \cap \mathrm{R}'$ est évidemment une partie close de R' telle que $\mathrm{R}'_+ \cup -\mathrm{R}'_+ = \mathrm{R}'$ et $\mathrm{R}'_+ \cap -\mathrm{R}'_+ = \varnothing$, donc un système de racines positives de R'. Les deux autres assertions résultent respectivement de 5.6.1 (vi) et 5.6.7 (i).

242 ***Corollaire 5.10.2***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* H *un sous-schéma en groupes réductifs tel que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *et* $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *aient même rang réductif. Alors* H *est fermé dans* G, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est lisse sur* S, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})/\mathrm{H}$ *est représentable par un* S*-schéma fini étale.*

Si T *est un tore maximal de* H *et* B *un groupe de Borel de* G *contenant* T, *alors* $\mathrm{B} \cap \mathrm{H}$ *est un groupe de Borel de* H, *dont la partie unipotente est* $(\mathrm{B} \cap \mathrm{H})^u = \mathrm{B}^u \cap \mathrm{H}$.

Les premières assertions résultent aussitôt de 5.3.10 et 5.3.18, via le fait que les groupes de Weyl de G et de H sont finis (Exp. XIX 2.5). Les autres assertions sont locales pour la topologie étale et se ramènent au cas étudié dans 5.10.1.

Proposition 5.10.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif.*

a) *Si* Q *est un tore de* G, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est un sous-groupe de type* (R) *de* G *à fibres réductives. Si* $\mathrm{Q} \subset \mathrm{Q}'$ *sont deux tores de* G, *alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}) \supset \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}')$.

b) *Si* H *est un sous-groupe de type* (R) *de* G *à fibres réductives, alors* rad(H) (4.3.6) *est un tore de* G. *Si* $\mathrm{H} \subset \mathrm{H}'$ *sont deux sous-groupes de type* (R) *de* G *à fibres réductives, alors* $\mathrm{rad}(\mathrm{H}) \supset \mathrm{rad}(\mathrm{H}')$.

c) *Si* Q *est un tore de* G, *on a*

$$\mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})) \supset \mathrm{Q} \quad \textit{et} \quad \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}).$$

d) *Si* H *est un sous-groupe de type* (R) *de* G *à fibres réductives, on a*

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\mathrm{H})) \supset \mathrm{H} \quad \textit{et} \quad \mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\mathrm{H})) = \mathrm{rad}(\mathrm{H}).$$

En effet, a) résulte aussitôt de Exp. XIX 2.8. Pour prouver b), il suffit de remarquer 243
que $\mathrm{rad}(\mathrm{H}') \subset \mathrm{H}$, car H contient (localement pour (fpqc)) un tore maximal de G, donc de H′. La première assertion de c) (resp. d)) est triviale, la seconde s'ensuit par le raisonnement habituel.

Cette proposition conduit à la définition suivante :

Définition 5.10.4. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, H un sous-groupe réductif de type (R) de G, et Q un sous-tore de G. [54]

1) On dit que H est un sous-groupe *critique* s'il est le centralisateur de son radical.

2) On dit que Q est un tore C-*critique* s'il est le radical de son centralisateur.

Il résulte alors de la proposition 5.10.3 :

Corollaire 5.10.5. — (i) *Pour tout sous-tore* Q *de* G, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est critique.*

(ii) *Pour tout sous-groupe de type* (R) *à fibres réductives* H *de* G, rad(H) *est un tore* C*-critique de* G.

(iii) *Les applications*

$$\mathrm{Q} \mapsto \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}), \qquad \mathrm{H} \mapsto \mathrm{rad}(\mathrm{H})$$

[54] N.D.E. : On a modifié l'original, en introduisant la terminologie « tore C-critique » au lieu de « tore critique », afin d'éviter des confusions dans des références ultérieures (cf. Exp. XXVI, 3.9). On a aussi détaillé l'énoncé de 5.10.5 et ajouté la remarque 5.10.5.1.

sont des bijections inverses l'une de l'autre entre l'ensemble des tores C*-critiques de* G *et celui de ses sous-groupes réductifs de type* (R) *critiques.*

(iv) *Si* Q *est un tore de* G*,* $\mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))$ *est le plus petit tore* C*-critique de* G *contenant* Q.

(v) *Si* H *est un sous-groupe réductif de type* (R) *de* G*,* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\mathrm{H}))$ *est le plus petit sous-groupe réductif de type* (R) *critique de* G *contenant* H.

Remarque 5.10.5.1. — [54] 1) Un tore T de G est un sous-groupe critique de G si et seulement si c'est un tore maximal.

2) Dans la suite, « tore critique » signifie « tore C-critique ».

Proposition 5.10.6. — *Soient* $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* R′ *une partie de* R. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

244 (i) R′ *est de type* (R)*,* $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ *est réductif et critique.*

(ii) *Il existe un système de racines simples* Δ *de* R *et une partie* Δ' *de* Δ *telle que* R′ *soit l'ensemble des éléments de* R *combinaison linéaire des éléments de* Δ'.

(iii) R′ *est clos, symétrique, et tout système de racines simples de* R′ *est l'intersection avec* R′ *d'un système de racines simples de* R.

En effet, d'après Exp. XXI 3.4.8, (ii) et (iii) sont équivalents et équivalent aussi au fait que R′ soit l'intersection de R avec un sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathrm{M}\otimes\mathbb{Q}$. Or cette dernière condition est entraînée par (i) : si $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$, alors R′ est l'ensemble des éléments de R qui s'annulent sur Q (Exp. II 5.2.3 (ii)). Enfin, cette condition entraîne (i), car $\mathrm{rad}(\mathrm{H}_{\mathrm{R}'})$ est le tore maximal de $\bigcap_{\alpha\in\mathrm{R}'}\mathrm{Ker}(\alpha)$, donc $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}))$ n'est autre que $\mathrm{H}_{\mathrm{R}''}$ où R″ est l'intersection de R avec le sous-espace vectoriel engendré par R′.

5.10.7. — Résumons certains des résultats précédents : soit $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ un S-groupe déployé, et soient Δ un système de racines simples de R et R_+ le système de racines positives correspondant ; choisissons une partie Δ' de Δ, notons R′ l'ensemble des éléments de R combinaison linéaire des éléments de Δ' et posons $\mathrm{R}'_+ = \mathrm{R}'\cap\mathrm{R}_+$. Soient $\mathrm{T}_{\Delta'}$ le tore maximal de $\bigcap_{\alpha\in\Delta'}\mathrm{Ker}(\alpha)$ et $\mathrm{Z}_{\Delta'} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_{\Delta'})$.

Alors $\mathrm{Z}_{\Delta'}$ est un sous-groupe réductif de G, de radical $\mathrm{T}_{\Delta'}$; $(\mathrm{Z}_{\Delta'},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R}')$ est un S-groupe déployé ; $\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}\cap\mathrm{Z}_{\Delta'}$ est le groupe de Borel de $\mathrm{Z}_{\Delta'}$ défini par le système de racines positives R'_+ (ou bien le système de racines simples Δ') et sa partie unipotente est $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_+}\cap\mathrm{Z}_{\Delta'} = \mathrm{U}_{\mathrm{R}'_+}$.

245 ***Remarque 5.10.8***. — Sous les conditions de 5.10.4, soit Q un tore critique de G, $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ son centralisateur. Comme $\mathrm{Q} = \mathrm{rad}(\mathrm{L})$, alors Q est un sous-groupe caractéristique de L ; il s'ensuit aussitôt que

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}),$$

donc aussi

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L})/\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}) = \mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}).$$

Par 5.10.2, on en déduit

Proposition 5.10.9. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* Q *un tore critique de* G. *Le groupe de Weyl* $\mathrm{W_G(Q)}$ *est* (étale) fini *sur* S.

Remarque 5.10.10. — Sous les conditions de 5.10.7, on peut expliciter

$$\mathrm{W_G(T_{\Delta'})} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Z}_{\Delta'})/\mathrm{Z}_{\Delta'}.$$

C'est le groupe constant associé au quotient $\mathrm{W_1/W_2}$, où $\mathrm{W_1}$ est le sous-groupe de W formé des éléments qui normalisent le sous-groupe de M engendré par Δ' et $\mathrm{W_2}$ le sous-groupe de W engendré par les s_α, $\alpha \in \Delta'$.

5.11. Sous-groupes de type (RC)

Définition 5.11.1. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif. Un sous-schéma en groupes H de G est dit de type (RC) s'il est de type (R), i.e. (5.2.1) vérifie les deux **246**
conditions suivantes :

(i) H est lisse sur S, à fibres connexes ;

(ii) pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ contient un tore maximal de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$;

et s'il vérifie en outre la condition suivante :

(iii) pour tout $s \in \mathrm{S}$ et tout tore maximal T de $\mathrm{H}_{\overline{s}}$, l'ensemble des racines de $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ par rapport à T est un sous-ensemble clos de l'ensemble de toutes les racines de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à T.

Remarque 5.11.2. — Comme nous l'avons déjà signalé en 5.4.8, la condition (iii) est conséquence des autres lorsque 6 est inversible sur S. [55]

Lemme 5.11.3. — *Soient* $(\mathrm{G, T, M, R})$ *un* S*-groupe déployé et* R' *une partie close de* R. *Soient*

$$\mathrm{R_1} = \{\alpha \in \mathrm{R}',\ -\alpha \in \mathrm{R}'\} \qquad et \qquad \mathrm{R_2} = \{\alpha \in \mathrm{R}',\ -\alpha \notin \mathrm{R}'\}.$$

Alors $\mathrm{R_1}$ *et* $\mathrm{R_2}$ *sont clos. Considérons les groupes* $\mathrm{H_{R'}}$, $\mathrm{H_{R_1}}$ *et* $\mathrm{U_{R_2}}$ (5.4.7 *et* 5.6.5) *qui sont lisses et à fibres connexes.*

(i) *Le groupe* $\mathrm{U_{R_2}}$ *est invariant dans* $\mathrm{H_{R'}}$ *et* $\mathrm{H_{R'}}$ *est le produit semi-direct de* $\mathrm{U_{R_2}}$ *par* $\mathrm{H_{R_1}}$.

(ii) $\mathrm{H_{R_1}}$ *est réductif,* $\mathrm{U_{R_2}}$ *est à fibres géométriques connexes et unipotentes ; tout sous-groupe invariant de* $\mathrm{H_{R'}}$*, lisse sur* S *et à fibres géométriques connexes et unipotentes, est contenu dans* $\mathrm{U_{R_2}}$*, et tout sous-groupe réductif de* $\mathrm{H_{R'}}$ *contenant* T *est contenu dans* $\mathrm{H_{R_1}}$.

(iii) *On a* $\mathrm{U_{R_2}} \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H_{R_1}}) = e$.

On a d'abord (iii) par 5.6.7 (i). La première assertion de (i) résulte de 5.6.7 (ii). **247**
Comme $\mathrm{U_{R_2}} \cap \mathrm{H_{R_1}} = e$ par (iii), le produit semi-direct $\mathrm{H_{R_1}} \cdot \mathrm{U_{R_2}}$ est un sous-groupe de $\mathrm{H_{R'}}$; mais ce sont deux sous-groupes de type (R) de G, contenant T, et ils ont même algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathrm{R'}}$; ils coïncident donc par 5.3.5, ce qui achève de prouver (i).

Démontrons maintenant (ii) ; les deux premières assertions ne sont autres que 5.10.1 et 5.6.5. Soit U un sous-schéma en groupes de $\mathrm{H_{R'}}$, lisse et de présentation finie,

[55] N.D.E. : i.e. lorsque chaque caractéristique résiduelle de S est > 3.

invariant (donc normalisé par T), à fibres géométriques connexes et unipotentes ; par 5.6.12, on a, localement sur S, $U = U_{R''}$, où R'' est une partie de R' telle que $R'' \cap -R'' = \varnothing$. Si $U \not\subset U_{R_2}$, alors $R'' \not\subset R_2$, donc il existe $\alpha \in R''$ tel que $-\alpha \in R'$. Alors $Z_\alpha \subset H_{R'}$ (5.4.3), donc Z_α normalise U. Mais U contient U_α et Z_α possède une section w telle que $\mathrm{int}(w)U_\alpha = U_{-\alpha}$; cela entraîne $-\alpha \in R''$, contredisant l'hypothèse $R'' \cap - R'' = \varnothing$.

Enfin, si L est un sous-groupe réductif de $H_{R'}$ contenant T, on a localement sur S, $L = H_{R'''}$, avec R''' symétrique contenu dans R', donc contenu dans R_1.

Proposition 5.11.4. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* H *un sous-schéma en groupes de* G *de type* (RC).

(i) H *est* fermé *dans* G, $\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)/H$ *est représentable par un* S*-schéma en groupes* fini étale.

(ii) H *possède un plus grand sous-schéma en groupes invariant lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres géométriques connexes et unipotentes ; on dit que c'est le* radical unipotent *de* H *et on le note* $\mathrm{rad}^u(H)$*. Le faisceau-quotient* $H/\mathrm{rad}^u(H)$ *est représentable par un* S*-groupe réductif.*

248 (iii) *Si* T *est un tore maximal de* H, H *possède un sous-groupe réductif* L *contenant* T *de type* (RC) *possédant les deux propriétés suivantes :*

(a) *Tout sous-groupe réductif de* H *contenant* T *est contenu dans* L*.*

(b) H *est le produit semi-direct* $H = L \cdot \mathrm{rad}^u(H)$*, i.e. le morphisme canonique* $L \to H/\mathrm{rad}^u(H)$ *est un isomorphisme.*

De plus, L *est l'unique sous-groupe réductif de* H *contenant* T *et vérifiant l'une ou l'autre des deux conditions précédentes. Enfin, on a les égalités suivantes :*

$$\underline{\mathrm{Norm}}_H(L) = L, \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_H(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_L(T), \qquad W_H(T) = W_L(T),$$

en particulier $W_H(T)$ *est* fini *sur* S.

Démonstration. Notons d'abord que (i) est local pour la topologie étale. Donc, d'après le corollaire 5.3.18, (i) est une conséquence de la dernière assertion de (iii).

Les assertions de (ii) sont locales pour la topologie étale. On peut donc supposer être dans la situation de 5.11.3, où on conclut aussitôt par (i) et (ii).

En vertu des assertions d'unicité qui y sont contenues, (iii) est également local pour la topologie étale et on peut encore se ramener à la situation de 5.11.3, où les propriétés (a) et (b) ont été vérifiées. L'unicité d'un L vérifiant (a) est triviale ; l'unicité d'un L vérifiant (b) est évidente, vu (a). L'égalité $\underline{\mathrm{Norm}}_H(L) = L$ n'est autre que 5.11.3 (iii) ; si une section de H normalise T, alors elle normalise L, par unicité de L, donc est une section de L par ce qu'on vient de démontrer, ce qui prouve la deuxième égalité ; la troisième est alors triviale.

249 ***Proposition 5.11.5***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* $\mathscr{H}_c$ *le foncteur des sous-groupes de type* (RC) *de* G*, qui est un sous-foncteur du foncteur* $\mathscr{H}$ *de* 5.8.1.

(i) $\mathscr{H}_c$ *est représentable par un sous-schéma ouvert de* $\mathscr{H}$*, lisse, quasi-projectif et de présentation finie sur* S.

(ii) *Il existe un* S*-schéma fini étale* $\mathcal{C}\ell_c$ *et un morphisme*

$$c\ell : \mathscr{H}_c \longrightarrow \mathcal{C}\ell_c,$$

lisse, quasi-projectif, de présentation finie, surjectif et à fibres géométriques connexes, ayant la propriété suivante :

Pour tout $S' \to S$ *et tous* $H, H' \in \mathscr{H}_c(S')$, $c\ell(H) = c\ell(H')$ *si et seulement si* H *et* H′ *sont conjugués dans* G *localement pour la topologie étale* (*ou, ce qui revient au même d'après* 5.3.11, *si pour tout* $s \in S$, $H_{\overline{s}}$ *et* $H'_{\overline{s}}$ *sont conjugués par un élément de* $G(\overline{s})$).

(iii) $\mathcal{C}\ell_c$ *et* $c\ell$ *sont déterminés* (*à un isomorphisme unique près*) *par les conditions précédentes.*

(iv) *Si* (G, T, M, R) *est un déploiement de* G, *soit* E *l'ensemble des classes de conjugaison modulo* W *de parties closes de* R *; alors il existe un isomorphisme* $\mathcal{C}\ell_c \xrightarrow{\sim} E_S$ *tel que, pour toute partie close* R′ *de* R, $c\ell(H_{R'})$ *corresponde à l'image canonique de* R′ *dans* $E_S(S) = \mathrm{Hom}_{\text{loc.const.}}(S, E)$.

Il est d'abord clair que $\mathscr{H}_c$ est un faisceau pour la topologie étale et que (ii) entraîne que $\mathcal{C}\ell_c$ n'est autre que le faisceau-quotient de $\mathscr{H}_c$ par la relation d'équivalence définie par la conjugaison.

Cela entraîne d'abord (iii), ainsi que le fait qu'il suffit de vérifier (i) et (ii) localement pour la topologie étale. On se ramène donc à la situation de (iv) ; construisons d'abord un morphisme

$$f : \mathscr{H}_c \longrightarrow E_S.$$

Il suffit de construire une application $\mathscr{H}_c(S) \to E_S(S)$ fonctorielle en S ; soit donc H un **250**
sous-groupe de type (RC) de G ; comme H possède localement pour la topologie étale des tores maximaux, et comme les tores maximaux de G sont conjugués localement pour la topologie étale, il existe une famille couvrante $\{S_i \to S\}$ et pour chaque i un $g_i \in G(S_i)$ et une partie close R_i de R tels que $\mathrm{int}(g_i)(H \times_S S_i) = H_{R_i} \times_S S_i$; chaque R_i définit une section η_i de E_{S_i} i.e. un élément de $E_S(S_i)$; il suffit maintenant de prouver que la famille (η_i) provient d'une section $\eta = f(H)$ de E_S sur S, et que celle-ci ne dépend que de H.

Pour ce faire, on est ramené à prouver que $H_{R'}$ et $H_{R''}$ sont conjugués localement pour la topologie étale si et seulement si R′ et R″ sont conjugués par un élément du groupe de Weyl W, ce qui est trivial.

Pour tout $\eta \in E$, il existe un $H_0 \in \mathscr{H}_c(S)$ tel que $f(H_0) = \eta$: il suffit de prendre $H_0 = H_{R'}$ où R′ est une partie close de R dont l'image dans E est η. Si $H \in \mathscr{H}_0(S')$, $S' \to S$, H est conjugué à H_0 localement pour la topologie étale si et seulement si $f(H) = \eta$ (comme on le voit aussitôt par l'argument précédent), ce qui montre que $f^{-1}(\eta)$ s'identifie au quotient $G/\underline{\mathrm{Norm}}_G(H_0)$, qui par 5.8.2 est un ouvert de $\mathscr{H}$, lisse, quasi-projectif de présentation finie sur S, à fibres connexes et non vides. Comme E_S est la somme des sous-schémas ouverts images des sections correspondants aux $\eta \in E$, $\mathscr{H}_c$ s'identifie à la somme des $f^{-1}(\eta)$, $\eta \in E$, ce qui prouve (i) et (ii). Enfin (iv) est vérifié par construction.

Corollaire 5.11.6. — *Si* $u \in \mathcal{C}\ell_c(S')$, $S' \to S$, $c\ell^{-1}(u)$ *est un* S′*-schéma lisse quasi-projectif de présentation finie à fibres connexes non vides ; c'est un ouvert de* $\mathscr{H}_c$ *et* **251**

un schéma « homogène » sous $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *(par automorphismes intérieurs). En particulier, si* $\mathrm{H} \in c\ell^{-1}(u)(\mathrm{S}')$*, le morphisme* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to (\mathscr{H}_c)_{\mathrm{S}'}$ *défini par* $g \mapsto \mathrm{int}(g)\mathrm{H}$ *identifie* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H})$ *à* $c\ell^{-1}(u)$.

Exemples 5.11.7. — En particulier, on a deux sections canoniques u_t, u_b de $\mathcal{C}\ell_c$ correspondant respectivement aux tores maximaux ($\mathrm{R}' = \varnothing$) et aux sous-groupes de Borel (R' = système de racines positives). Les S-schémas $c\ell^{-1}(u_t)$ et $c\ell^{-1}(u_b)$ ne sont autres que les S-schémas $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$ et $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$ introduits en 5.8.3. Nous verrons dans Exp. XXVI d'autres exemples.

Remarque 5.11.8. — On peut construire un S-schéma $\mathcal{C}\ell$, de présentation finie et non ramifié et un morphisme $\mathscr{H} \to \mathcal{C}\ell$ lisse et surjectif, à fibres géométriques connexes jouissant des propriétés analogues à 5.11.5 (ii) et (iii).

6. Le groupe dérivé

6.1. Préliminaires

Dans ce numéro, on se fixe un schéma S, un S-groupe déployé $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$, un système de racines positives R_+ de R, et on note

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}, \qquad \mathrm{B}^- = \mathrm{B}_{\mathrm{R}_-}, \qquad \mathrm{U} = \mathrm{B}^u, \qquad \mathrm{U}^- = (\mathrm{B}^-)^u,$$
$$\Omega = \Omega_{\mathrm{R}_+} = \mathrm{U}^- \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}.$$

6.1.1. — On note T' le sous-tore de T « image de la famille α^*, $\alpha \in \mathrm{R}$ » ; autrement dit T' est l'image du morphisme de groupes

$$\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}^{\mathrm{R}} \longrightarrow \mathrm{T}$$

252 défini par $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}} \mapsto \prod_{\alpha\in\mathrm{R}} \alpha^*(z_\alpha)$. On voit aussitôt que si Δ désigne l'ensemble des racines simples de R_+, le morphisme

$$\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}^{\Delta} \longrightarrow \mathrm{T}'$$

défini de la même manière est surjectif et de noyau fini. Si on identifie T à $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, alors T' s'identifie à $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}/\mathrm{N})$, où

$$\mathrm{N} = \mathrm{M} \cap \mathscr{V}(\mathrm{R}^*)^{\perp}$$

(on note $\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathscr{V}(\mathrm{R}^*)$ dans la dualité entre V et V^*).

Lemme 6.1.2. — *Le morphisme défini par le produit dans* T

$$\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}' \longrightarrow \mathrm{T}$$

est une isogénie (*cf.* 4.2.9).

En effet, le morphisme canonique $\mathrm{rad}(\mathrm{T}) \to \mathrm{T}/\mathrm{T}'$ provient par dualité du morphisme de groupes commutatifs

$$\mathrm{M} \cap \mathscr{V}(\mathrm{R}^*)^{\perp} \longrightarrow \mathrm{M}/\mathrm{M} \cap \mathscr{V}(\mathrm{R}),$$

que l'on voit aussitôt être injectif de conoyau fini (cf. Exp. XXI 6.3).

Définition 6.1.3. — On pose $\Omega' = \mathrm{U}^- \cdot \mathrm{T}' \cdot \mathrm{U}$; c'est un sous-schéma fermé de $\Omega = \mathrm{U}^- \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}$.

Lemme 6.1.4. — *Soient* α *une racine simple et* $w_\alpha \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *relevant* s_α. *On a*

$$\mathrm{int}(w_\alpha)\Omega' \cap \Omega \subset \Omega'.$$

Il nous suffit de prouver que si $g \in \Omega'(\mathrm{S})$ et si $\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \Omega(\mathrm{S})$, alors $\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \Omega'(\mathrm{S})$. Par 5.6.8, écrivons

$$g = a \exp_{-\alpha}(\mathrm{Y})\, t \exp_\alpha(\mathrm{X})\, b,$$

avec $a \in \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(\mathrm{S})$, $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})$, $t \in \mathrm{T}'(\mathrm{S})$, $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})$, $b \in \mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(\mathrm{S})$. On a alors **253**

$$\mathrm{int}(w_\alpha)g = \mathrm{int}(w_\alpha)a \cdot \mathrm{int}(w_\alpha)\big(\exp_{-\alpha}(\mathrm{Y})t\exp_\alpha(\mathrm{X})\big) \cdot \mathrm{int}(w_\alpha)b.$$

En vertu de 5.6.8 (iv), on a

$$\mathrm{int}(w_\alpha)a \in \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}), \qquad \mathrm{int}(w_\alpha)b \in \mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}).$$

Il en résulte les équivalences suivantes (en posant $h = \exp_{-\alpha}(\mathrm{Y})\, t \exp_\alpha(\mathrm{X})$) :

$$\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \Omega(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \mathrm{int}(w_\alpha)h \in \Omega(\mathrm{S})$$
$$\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \Omega'(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \mathrm{int}(w_\alpha)h \in \Omega'(\mathrm{S}).$$

On est donc ramené au cas où $g = h$. Comme on a (4.1.12)

$$\mathrm{Z}_\alpha \cap \Omega = \mathrm{U}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_\alpha, \qquad \mathrm{Z}_\alpha \cap \Omega' = \mathrm{U}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T}' \cdot \mathrm{U}_\alpha,$$

on est ramené à prouver l'assertion suivante :

$$\mathrm{int}(w_\alpha)h \in (\mathrm{U}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_\alpha)(\mathrm{S}) \Longrightarrow \mathrm{int}(w_\alpha)h \in (\mathrm{U}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T}' \cdot \mathrm{U}_\alpha)(\mathrm{S}).$$

Or cette dernière résulte aussitôt de Exp. XX 3.12, qui montre que la composante sur T de $\mathrm{int}(w_\alpha)h$ est de la forme $t \cdot \alpha^*(z) \in \mathrm{T}'(\mathrm{S})$.

Lemme 6.1.5. — *Pour tout* $w \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$, *il existe un ouvert* V_w *de* G, *contenant la section unité, tel que*

$$\mathrm{int}(w)\Omega' \cap \mathrm{V}_w \subset \Omega'.$$

Choisissons pour chaque racine simple α un $n_\alpha \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ relevant s_α. Pour tout point $s \in \mathrm{S}$, il existe un ouvert V de S contenant s, un $t \in \mathrm{T}(\mathrm{V})$ et sur V une relation

$$w = n_{\alpha_1} \cdots n_{\alpha_p} t, \qquad \text{avec les } \alpha_i \text{ simples.}$$

On peut évidemment se contenter de faire la démonstration pour $\mathrm{V} = \mathrm{S}$; elle se fait **254**
par récurrence sur p. Si $p = 0$, alors $w \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$ et on prend $\mathrm{V}_w = \mathrm{G}$; supposons donc $w = n_\alpha \cdot w'$, w' vérifiant la conclusion du lemme ; il existe donc un ouvert $\mathrm{V}_{w'}$ de G, contenant la section unité, tel que $\mathrm{int}(w')\Omega' \cap \mathrm{V}_{w'} \subset \Omega'$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{int}(w)\Omega' \cap \mathrm{int}(n_\alpha)\mathrm{V}_{w'} \cap \Omega = \mathrm{int}(n_\alpha)\big(\mathrm{int}(w')\Omega' \cap \mathrm{V}_{w'}\big) \cap \Omega& \\ \subset \mathrm{int}(n_\alpha)\Omega' \cap \Omega \subset \Omega'&,\end{aligned}$$

par 6.1.4. On prend alors $\mathrm{V}_w = \mathrm{int}(n_\alpha)\mathrm{V}_{w'} \cap \Omega$ et on a terminé.

Lemme 6.1.6. — *Il existe un ouvert* V_0 *de* G, *contenant la section unité, tel que pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *on ait*

$$\mathrm{U}(\mathrm{S}')\mathrm{U}^-(\mathrm{S}') \cap \mathrm{V}_0(\mathrm{S}') \subset \Omega'(\mathrm{S}').$$

Soit en effet n_0 un élément de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ relevant la symétrie w_0 du groupe de Weyl, [56] c'est-à-dire tel que $\mathrm{int}(n_0)\mathrm{U} = \mathrm{U}^-$ (cf. Exp. XXI 3.6.14) ; alors $n_0^2 \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$. Montrons que l'ouvert $\mathrm{V}_0 = \mathrm{V}_{n_0}$ de 6.1.5 répond à la question. En effet

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(\mathrm{S}')\mathrm{U}^-(\mathrm{S}') &= \mathrm{int}(n_0)\big(\mathrm{int}(n_0)^{-1}\mathrm{U}(\mathrm{S}') \cdot \mathrm{int}(n_0)^{-1}\mathrm{U}^-(\mathrm{S}')\big)\\ &= \mathrm{int}(n_0)\big(\mathrm{U}^-(\mathrm{S}') \cdot \mathrm{U}(\mathrm{S}')\big) \subset \mathrm{int}(n_0)\Omega'(\mathrm{S}').\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{U}(\mathrm{S}')\mathrm{U}^-(\mathrm{S}') \cap \mathrm{V}_0(\mathrm{S}') \subset \mathrm{int}(n_0)\Omega'(\mathrm{S}') \cap \mathrm{V}_0(\mathrm{S}') \subset \Omega'(\mathrm{S}').$$

255 ***Lemme 6.1.7***. — *Considérons le morphisme*

$$f : \quad \Omega = \mathrm{U}^- \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{T}/\mathrm{T}'$$

composé de la seconde projection et du morphisme canonique de T *dans* T/T'. *Alors* f *est « génériquement multiplicatif » : il existe un ouvert* V *de* $\Omega \times_{\mathrm{S}} \Omega$, *contenant la section unité* (*et donc relativement schématiquement dense,* Exp. XVIII 1.3) *tel que pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tout* $(x, y) \in \mathrm{V}(\mathrm{S}')$, *on ait* $xy \in \Omega(\mathrm{S}')$ *et* $f(xy) = f(x)f(y)$.

Soient en effet x et y deux sections de Ω sur S′. Écrivons

$$x = utv, \qquad y = u't'v', \qquad \text{avec} \quad u, u' \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S}'), \quad t, t' \in \mathrm{T}(\mathrm{S}'), \quad v, v' \in \mathrm{U}(\mathrm{S}').$$

Soient V_0 l'ouvert de 6.1.6 et V l'ouvert de $\Omega \times_{\mathrm{S}} \Omega$ défini par « $vu' \in \mathrm{V}_0(\mathrm{S}')$ » (c'est l'image réciproque de V_0 par le morphisme $\Omega \times_{\mathrm{S}} \Omega$ qui s'écrit ensemblistement $(x, y) \mapsto vu'$). Alors V répond à la question. En effet, pour $(x, y) \in \mathrm{V}(\mathrm{S}')$, on a

$$xy = (utv)(u't'v') = (ut)(vu')(t'v').$$

Mais $vu' \in \Omega'(\mathrm{S}')$, d'où

$$xy \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S}')\, t\, \Omega'(\mathrm{S}')\, t'\, \mathrm{U}(\mathrm{S}') \subset \mathrm{U}^-(\mathrm{S}')\, tt'\, \mathrm{T}'(\mathrm{S}')\mathrm{U}(\mathrm{S}'),$$

ce qui montre que $xy \in \Omega(\mathrm{S}')$ et que

$$f(xy) = f(tt') = f(t)f(t') = f(x)f(y).$$

Proposition 6.1.8. — *Il existe un morphisme de groupes*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{T}/\mathrm{T}'$$

induisant sur T *la projection canonique. Le noyau* $\mathrm{Ker}(f)$ *de* f *est un sous-schéma*
256 *en groupes fermé de* G lisse *sur* S *et* à fibres connexes. *Tout morphisme de groupes de* G *dans un préfaisceau en groupes commutatifs sur* S, *séparé pour* (fppf), *s'annule sur* $\mathrm{Ker}(f)$.

[56] N.D.E. : La symétrie w_0 est définie en XXI 3.6.14.

La première assertion résulte aussitôt de 4.1.11. On a immédiatement $\mathrm{Ker}(f)\cap\Omega = \Omega'$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f)$ est lisse sur S en tout point de la section unité. [57] D'après 5.6.9 (ii), tout morphisme ϕ de G dans un préfaisceau en groupes commutatifs séparé pour (fppf) s'annule sur U et U^-. D'après Exp. XX 2.7, ϕ s'annule donc aussi sur T' donc sur Ω'. Prenant les notations de 5.7.10, on voit que le monoïde U_1 est contenu dans $\mathrm{Ker}(f)(\mathrm{S})$, ce qui montre que

$$\mathrm{Ker}(f) = \bigcup_{u\in \mathrm{U}_1} u\,\Omega'.$$

Il en résulte d'une part que tout ϕ comme ci-dessus s'annule sur $\mathrm{Ker}(f)$, et d'autre part que $\mathrm{Ker}(f)$ est à fibres connexes, donc est lisse sur S d'après Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10.

6.2. Groupe dérivé d'un groupe réductif

Théorème 6.2.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif.*

(i) $\mathrm{D_S(G)} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$ *est représentable par un* S*-groupe constant tordu, dont le type en* $s\in\mathrm{S}$ *est* $\mathbb{Z}^{\mathrm{rgred}(\mathrm{G}_s)-\mathrm{rgss}(\mathrm{G}_s)}$.

(ii) *Notons* $\mathrm{corad(G)} = \mathrm{D_S(D_S(G))}$*, qui est donc un* S*-tore. Le morphisme de bidualité* (cf. Exp. VIII § 1)

$$f_0 : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{corad(G)}$$

est lisse et surjectif.

(iii) *Le morphisme composé*

$$\mathrm{rad(G)} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{corad(G)}$$

est une isogénie (*cf.* 4.2.9).

(iv) *Le noyau de* f_0*, noté* 257

$$\mathrm{dér(G)} = \mathrm{Ker}(f_0)$$

est un sous-schéma en groupes fermé de G*, semi-simple sur* S*, que l'on appelle le groupe* dérivé *de* G*. Si* G *est semi-simple, on a* dér(G) = G.

(v) *Tout morphisme de groupes de* G *dans un* S*-préfaisceau en groupes commutatifs, séparé pour* (fppf)*, s'annule sur* dér(G) *et se factorise donc par* f_0.

Démonstration. Toutes les assertions du théorème sont locales pour la topologie étale ; on peut donc se ramener au cas où G est déployé sur S. Considérons alors le morphisme f de 6.1.8. Par la dernière assertion de 6.1.8, on a aussitôt un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}/\mathrm{T}', \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}),$$

[57] N.D.E. : On a ajouté « en tout point de la section unité » ainsi que la référence à $\mathrm{VI_B}$ 3.10 à la fin de la démonstration. D'autre part, dans la phrase suivante on a remplacé « préschéma » par « préfaisceau ».

ce qui démontre (i), puis (ii) et donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "f_0"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{corad}(\mathrm{G}) \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathrm{T}/\mathrm{T}'. \end{tikzcd}$$

On a alors (v) par 6.1.8, et (iii) par 6.1.2. On a aussi $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f_0)$, ce qui par 6.1.8 entraîne que dér(G) est lisse sur S et à fibres connexes ; il reste à vérifier que ses fibres sont semi-simples ; or elles sont réductives par Exp. XIX 1.7, comme sous-groupes invariants de groupes réductifs. Par (iii), $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \cap \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})$ est fini, ce qui entraîne bien que les fibres de dér(G) sont semi-simples.

258 ***Remarque 6.2.2***. — a) Par construction, dans le cas où G est déployé, dér(G) est le sous-faisceau (fppf) de G engendré par les U_α, $\alpha \in \mathrm{R}$. (Il suffit même de prendre les U_α, $\alpha \in \Delta \cup -\Delta$, où Δ est une base de R).

b) [(58)] Soit C le préfaisceau des commutateurs de G, i.e. le S-foncteur en groupes qui à tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ associe le groupe des commutateurs de $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ (i.e. le sous-groupe de $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ engendré par les éléments $xyx^{-1}y^{-1}$, pour $x, y \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$), et soit $\widetilde{\mathrm{C}}$ le faisceau (fppf) associé. Comme le quotient $\mathrm{G}/\,\mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G}) = \mathrm{T}/\mathrm{T}'$ est commutatif, alors dér(G) contient C et donc $\widetilde{\mathrm{C}}$ (cf. Exp. IV 4.3.12).

D'autre part, le préfaisceau quotient $\mathrm{G}/\widetilde{\mathrm{C}}$ est séparé (Exp. IV 4.4.8.1), et donc d'après (v) on a $\mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G}) \subset \widetilde{\mathrm{C}}$, d'où $\mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G}) = \widetilde{\mathrm{C}}$, i.e. dér(G) est le faisceau (fppf) des commutateurs de G.

Notons enfin que C, étant un sous-préfaisceau de G, est séparé, mais n'est pas égal à dér(G) en général : par exemple, $\mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{SL}_2) = \mathrm{SL}_2$ mais $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{S}_3$ n'est pas égal à son groupe dérivé.

c) Lorsque S est le spectre d'un corps k algébriquement clos, $\mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})(k)$ est le groupe des commutateurs de $\mathrm{G}(k)$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 7.10).

6.2.3. — Considérons maintenant les deux suites exactes

$$1 \longrightarrow \mathrm{rad}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{ss}(\mathrm{G}) \longrightarrow 1,$$
$$1 \longrightarrow \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{corad}(\mathrm{G}) \longrightarrow 1.$$

Comme rad(G) est central dans G, le produit dans G définit un morphisme de groupes

$$u : \quad \mathrm{rad}(\mathrm{G}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui est couvrant en vertu de 6.2.1 (iii), donc surjectif et plat (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9.2 (xi)). [(59)] Son noyau est isomorphe à $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \cap \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})$, qui est aussi le noyau de $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \to \mathrm{corad}(\mathrm{G})$, donc est un sous-groupe fini de type multiplicatif de rad(G).

[(58)] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a détaillé l'original, et supprimé l'assertion que « dér(G) est le préfaisceau séparé (fppf) des commutateurs de G ».

[(59)] N.D.E. : En effet, G est le quotient (fppf) de $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})$ par $\mathrm{Ker}(u)$, qui est un groupe de type mutiplicatif, donc plat sur S. Donc, d'après $\mathrm{VI_B}$ 9.2 (xi), le morphisme u est plat.

On raisonne de même pour le morphisme

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{corad(G)} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{ss(G)},$$

dont le noyau est $\mathrm{dér(G)} \cap \mathrm{rad(G)}$. On a donc la

Proposition 6.2.4. — *Soit* G *un* S*-groupe réductif. Les morphismes*

$$\mathrm{rad(G)} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{dér(G)} \longrightarrow \mathrm{G}, \qquad \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{corad(G)} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{ss(G)}, \qquad \mathrm{rad(G)} \longrightarrow \mathrm{corad(G)}$$

sont des isogénies centrales, et leurs noyaux sont isomorphes. **259**

Corollaire 6.2.5. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est le produit d'un groupe semi-simple et d'un tore.*

(ii) $\mathrm{rad(G)} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{dér(G)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}$.

(iii) $\mathrm{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{corad(G)} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{ss(G)}$.

(iv) $\mathrm{rad(G)} \cap \mathrm{dér(G)} = e$.

6.2.6. — Revenons provisoirement au cas d'un groupe déployé. Gardons les notations de 6.1. Posons $\mathrm{N} = \mathrm{M} \cap \mathscr{V}(\mathrm{R}^*)^{\perp}$. On a donc $\mathrm{T}' = \mathrm{D_S(M/N)}$. On a vu que $\mathrm{U}^- \cdot \mathrm{T}' \cdot \mathrm{U}$ était un voisinage ouvert de la section unité de dér(G). On a donc

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{dér(G)/S}) = \mathfrak{t}' \bigoplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

Comme les caractères induits sur T' par les $\alpha \in \mathrm{R}$ sont non nuls et distincts (cf. Exp. XXI 1.2.5 – on a d'ailleurs déjà utilisé ce fait en 6.1.2), R est un système de racines de G par rapport à T. Il est alors immédiat (car $\mathrm{U}_\alpha \subset \mathrm{dér(G)}$) que les morphismes exp de dér(G) « sont » ceux de G et de même pour les coracines.

Il en résulte :

Proposition 6.2.7. — *Dans les notations précédentes,* $(\mathrm{dér(G)}, \mathrm{T}', \mathrm{M/N}, \mathrm{R})$ *est un groupe déployé de donnée radicielle* $\mathrm{dér}(\mathscr{R}(\mathrm{G}))$*. Le morphisme canonique* $\mathrm{dér(G)} \to \mathrm{G}$ *donne par fonctorialité le morphisme canonique de données radicielles* $\mathscr{R}(\mathrm{G}) \to \mathrm{dér}(\mathscr{R}(\mathrm{G}))$ *de* Exp. XXI 6.5.

N. B. Le lecteur pourra à titre d'exercice construire le diagramme de groupes déployés correspondant aux trois colonnes de gauche du diagramme de données radicielles de Exp. XXI 6.5.7. **260**

Proposition 6.2.8. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* dér(G) *son groupe dérivé.*

(i) *Pour tout tore maximal* T *de* G*,* $\mathrm{T} \cap \mathrm{dér(G)}$ *est un tore maximal de* dér(G)*. Pour tout tore maximal* T' *de* dér(G)*,* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}') = \mathrm{rad(G)} \cdot \mathrm{T}'$ *est un tore maximal de* G*. Les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre et établissent une correspondance bijective entre tores maximaux de* G *et de* dér(G)*.*

(ii) *Pour tout sous-groupe de Borel* B *de* G, $\mathrm{B} \cap \mathrm{dér}(\mathrm{G})$ *est un sous-groupe de Borel* B′ *de* dér(G). *On a* $\mathrm{B}'^u = \mathrm{B}^u$. *Pour tout sous-groupe de Borel* B′ *de* dér(G), $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B}') = \mathrm{rad}(\mathrm{G}) \cdot \mathrm{B}'$ *est un sous-groupe de Borel de* G. *Les applications précédentes sont inverses l'une de l'autre et établissent une correspondance bijective entre sous-groupes de Borel de* G *et de* dér(G).

Par le théorème de conjugaison locale des tores maximaux et la construction du groupe dérivé, la seule assertion qui reste à prouver dans (i) est la suivante : si T est un tore maximal de G, alors

$$\mathrm{T} = (\mathrm{T} \cap \mathrm{dér}(\mathrm{G})) \cdot \mathrm{rad}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T} \cap \mathrm{dér}(\mathrm{G})).$$

La première égalité est triviale (car on se ramène au cas déployé) ; la seconde en résulte aussitôt, car rad(G) est central dans G, donc $\mathrm{T} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T} \cap \mathrm{dér}(\mathrm{G}))$. On raisonne de même pour (ii).

261 **6.3. Sous-groupes à quotients commutatifs**

6.3.1. — Soit G un S-groupe réductif. Si H est un sous-faisceau en groupes de G, les conditions suivantes sont équivalentes :

– H contient dér(G).

– H est distingué et G/H est commutatif.

Dans ce cas, le morphisme canonique $f_0 : \mathrm{G} \to \mathrm{corad}(\mathrm{G})$ envoie H sur un sous-faisceau $f_0(\mathrm{H})$ de corad(G) ; on a

$$\begin{aligned} \mathrm{G}/\mathrm{H} &\simeq \mathrm{corad}(\mathrm{G})/f_0(\mathrm{H}), \qquad & \mathrm{H}/\mathrm{dér}(\mathrm{H}) &\simeq f_0(\mathrm{H}),\\ \mathrm{dér}(\mathrm{G}) &= \mathrm{dér}(\mathrm{H}), & \mathrm{H} &= f_0^{-1}(f_0(\mathrm{H})). \end{aligned}$$

Comme dér(G) est lisse sur S et à fibres connexes alors, [60] d'après Exp. IV, 5.3.1 et 6.3.1, et Exp. $\mathrm{IV_B}$ 9.2, l'application $\mathrm{H} \mapsto f_0(\mathrm{H})$ établit une correspondance bijective entre sous-schémas en groupes (resp. sous-schémas en groupes fermés) de G, contenant dér(G), lisses sur S et à fibres connexes et sous-schémas en groupes (resp. sous-schémas en groupes fermés) de corad(G), lisses sur S et à fibres connexes.

Or, si H′ est un sous-schéma en groupes de corad(G), lisse sur S à fibres connexes, alors H′ est de présentation finie sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.5) et ses fibres sont des tores (puisque celles de corad(G) le sont), donc d'après Exp. X 8.2, H′ est un sous-tore de corad(G), donc est fermé dans corad(G) (Exp. IX 2.6).

Par conséquent, tout sous-groupe de G, lisse à fibres connexes et contenant dér(G), est *fermé* dans G.[60]

6.3.2. — Si H est un sous-schéma en groupes fermé de G, lisse sur S, à fibres connexes et distingué dans G, alors H est réductif. Si de plus $\mathrm{H} \supset \mathrm{dér}(\mathrm{G})$, alors dér(H) = dér(G) et $f_0(\mathrm{H})$ s'identifie à corad(H). On a donc démontré la

[60] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit. En particulier, on a ajouté la conclusion (implicite dans l'original) que tout sous-groupe de G, lisse à fibres connexes et contenant dér(G), est *fermé* dans G.

Proposition 6.3.3. — *Soit* G *un* S*-groupe réductif. Tout sous-schéma en groupes* H *de* G*, distingué dans* G*, à quotient commutatif* (*i.e. contenant* dér(G))*, lisse sur* S*, à* 262
fibres connexes [61] *est fermé et réductif. On a* dér(H) = dér(G) *et* f_0(H) *s'identifie à* corad(H) *; on a*

$$\mathrm{G}/\mathrm{H} \simeq \mathrm{corad}(\mathrm{G})/\,\mathrm{corad}(\mathrm{H}), \qquad \mathrm{H} = (\mathrm{H} \cap \mathrm{rad}(\mathrm{G})) \cdot \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G}).$$

De plus, $\mathrm{H} \mapsto f_0(\mathrm{H})$ *définit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes* H *de* G *possédant les propriétés précédentes et l'ensemble des sous-tores de* corad(H)*.*

Par une nouvelle application du théorème de Noether (Exp. IV, 5.3.1 et 6.3.1), on en déduit la

Proposition 6.3.4. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*. Pour tout sous-groupe* H *de* G *comme ci-dessus,* $\mathrm{T} \cap \mathrm{H}$ *est un tore maximal de* G *et on a*

$$\mathrm{G}/\mathrm{H} \simeq \mathrm{T}/\mathrm{T} \cap \mathrm{H}, \qquad \mathrm{H} = (\mathrm{T} \cap \mathrm{H}) \cdot \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G}).$$

De plus, $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{T} \cap \mathrm{H}$ *est une bijection entre l'ensemble des sous-groupes* H *de* G *comme ci-dessus et l'ensemble des sous-tores de* T *contenant* $\mathrm{T} \cap \mathrm{d\acute{e}r}(\mathrm{G})$*.*

Bibliographie

[Ch05] C. Chevalley, *Classification des groupes algébriques semi-simples* (avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard), Collected Works, vol. 3, Springer, 2005.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Gi71] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, 1971.

[Se64] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Springer-Verlag, 1964 ; 5ème éd. 1994.

(61) N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que H soit rétrocompact dans G, qui est automatiquement vérifiée car, d'après $\mathrm{VI_B}$ 5.5, G et H sont séparés et quasi-compacts sur S, donc $\mathrm{H} \hookrightarrow \mathrm{G}$ est quasi-compact d'après EGA IV_1, 1.1.2 (v).

EXPOSÉ XXIII

GROUPES RÉDUCTIFS : UNICITÉ DES GROUPES ÉPINGLÉS

par M. Demazure

Le but de cet exposé est la démonstration du théorème d'unicité (Théorème 4.1). **263**
Celui-ci a été démontré par Chevalley dans le cas d'un corps algébriquement clos ; la méthode de réduction au rang deux utilisée ici est également due à Chevalley (voir *Bible*, exp. 23 et 24). Chemin faisant, nous obtenons une description explicite des groupes réductifs par générateurs et relations (3.5).

1. Épinglages

Définition 1.1. — Soient S un schéma, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé (XXII, 1.13). On appelle *épinglage* [(1)] de ce groupe déployé la donnée d'un système Δ de *racines simples* de R et pour chaque $\alpha \in \Delta$ d'une section $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$.

Autrement dit, un épinglage du groupe réductif G sur le schéma non vide S est la donnée :

(i) d'un tore maximal T,

(ii) d'un groupe abélien M et d'un isomorphisme $\mathrm{T} \simeq \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$,

(iii) d'un système de racines R de G par rapport à T,

(iv) d'un système de racines simples Δ de R,

(v) d'un $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ pour tout $\alpha \in \Delta$, c'est-à-dire d'un

$$u_\alpha = \exp_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) \in \mathrm{U}_\alpha^\times(\mathrm{S}) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Delta,$$

vérifiant la condition (D 1) de Exp. XXII, 1.13 (en effet la condition (D 2) de *loc. cit.* **264**
est automatiquement vérifiée [(2)]).

---

(1) N.D.E. : Demazure nous indique que, derrière cette terminologie, il y a l'image du papillon (que lui a fournie Grothendieck) : le corps est un tore maximal T, les ailes sont deux sous-groupes de Borel opposés par rapport à T, on déploie le papillon en étalant les ailes, puis on fixe des éléments dans les groupes additifs (des *épingles*) pour rigidifier la situation (c.-à-d., pour éliminer les automorphismes).

(2) N.D.E. : Elle est impliquée par la condition (v), i.e. l'existence d'une section $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$.

Tout groupe déployé possède un épinglage ; en particulier, tout groupe réductif est localement épinglable pour la topologie étale.

1.2. Si G est un S-groupe *épinglé*, c'est-à-dire un S-groupe déployé muni d'un épinglage, il est muni canoniquement du système de racines positives R_+ défini par Δ, du sous-groupe de Borel $B = B_{R_+}$ correspondant, du sous-groupe de Borel opposé $B^- = B_{R^-}$, des groupes unipotents $U = B^u$, $U^- = (B^-)^u$, de l'ouvert $U^- \cdot T \cdot U$, etc. De même, pour chaque $\alpha \in \Delta$, on a un isomorphisme canonique de groupes vectoriels

$$p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\alpha\,, \qquad x \mapsto \exp_\alpha(x\mathrm{X}_\alpha) = u_\alpha^x\,,$$

normalisé par T avec le multiplicateur α, et dont la donnée équivaut à celle de X_α (Exp. XXII, 1.1).

Par dualité, on en déduit un $X_{-\alpha} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$ et un isomorphisme

$$p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_{-\alpha}$$

qui est le contragrédient du précédent (Exp. XXII, 1.3). On posera (Exp. XX, 3.1)

$$w_\alpha = w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) = p_\alpha(1)\, p_{-\alpha}(-1)\, p_\alpha(1) = p_{-\alpha}(-1)\, p_\alpha(1)\, p_{-\alpha}(-1).$$

On a alors (*loc. cit.* 3.1, 3.7)

$$w_\alpha^2 = \alpha^*(-1), \qquad \mathrm{int}(w_\alpha)t = s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1}),$$

$$\begin{cases} \mathrm{int}(w_\alpha)\, p_\alpha(x) = p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(x)^{-1}, \\ \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\alpha = -\mathrm{X}_{-\alpha}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathrm{int}(w_\alpha)\, p_{-\alpha}(x) = p_\alpha(-x) = p_\alpha(x)^{-1}, \\ \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{-\alpha} = -\mathrm{X}_\alpha. \end{cases}$$

265 Nous utiliserons systématiquement les notations précédentes dans la suite.

Définition 1.3. — Soient S un schéma, $(G, T, M, R, \Delta, (X_\alpha))$ et $(G', T', M', \ldots)$ deux S-groupes épinglés. On dit que le morphisme de groupes déployés (Exp. XXII, 4.2.1)

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'$$

est compatible avec les épinglages, ou définit un *morphisme de groupes épinglés* si la bijection $d : R \to R'$ qui lui est associée (cf. *loc. cit.*) vérifie $d(\Delta) = \Delta'$ et si, pour tout $\alpha \in \Delta$, on a

$$f(\exp_\alpha(\mathrm{X}_\alpha)) = \exp_{d(\alpha)}(\mathrm{X}'_{d(\alpha)}), \qquad \text{i.e.} \quad f(u_\alpha) = u'_{d(\alpha)}.$$ [3]

---

[3] N.D.E. : On a noté d la bijection $R \xrightarrow{\sim} R'$ (au lieu de u), pour éviter la notation $u'_{u(\alpha)}$.

1.4. Si on note $q(\alpha)$ l'entier de *loc. cit.*, on a donc

$$f(p_\alpha(x)) = p'_{d(\alpha)}(x^{q(\alpha)}) \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Delta,$$

donc aussi

$$f(p_{-\alpha}(x)) = p'_{-d(\alpha)}(x^{q(\alpha)}), \qquad\qquad f(w_\alpha) = w'_{d(\alpha)}\,.$$

Rappelons (Exp. XXII, 4.2) que l'on a pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, et tous $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$:

$$f(\alpha^*(z)) = \big(d(\alpha)^*(z)\big)^{q(\alpha)} = \ d(\alpha)^*(z^{q(\alpha)}), \qquad\qquad d(\alpha)(f(t)) = \alpha(t)^{q(\alpha)}.$$

1.5. Appelons *donnée radicielle épinglée* une donnée radicielle munie d'un système **266**
de racines simples, et *p-morphisme de données radicielles épinglées* un p-morphisme de données radicielles (Exp. XXI, 6.8) transformant racines simples en racines simples.

Si G est un S-groupe épinglé, on note $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ la donnée radicielle *épinglée* correspondante (c'est la donnée radicielle de Exp. XXII, 1.14 munie de Δ). Soit p l'entier défini en Exp. XXII, 4.2.2. On a alors

Scholie 1.6. — La correspondance $\mathrm{G} \mapsto \mathscr{R}(\mathrm{G})$ définit un *foncteur* de la catégorie des S-groupes réductifs épinglés dans celle des données radicielles épinglées (avec pour morphismes les p-morphismes).

1.7. Les groupes épinglés Z_{Δ_1}

Soit Δ_1 une partie du système de racines simples Δ du groupe épinglé G. Soit T_{Δ_1} le tore maximal de $\bigcap_{\alpha\in\Delta_1} \mathrm{Ker}(\alpha)$; posons

$$\mathrm{Z}_{\Delta_1} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_{\Delta_1}).$$

Notons $\mathrm{R}' = \mathbb{Z}\cdot\Delta_1 \cap \mathrm{R}$; on sait (Exp. XXII, 5.10.7) que Z_{Δ_1} est un S-groupe réductif, de radical T_{Δ_1}, que $(\mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}')$ en est un déploiement et Δ_1 un système de racines simples. Il en résulte que $(\mathrm{Z}_{\Delta_1}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}', \Delta_1, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\Delta_1})$ est un S-groupe *épinglé*. Nous munirons toujours Z_{Δ_1} de cet épinglage. En particulier, on considérera les groupes

$$\mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{Z}_{\{\alpha\}}, \qquad\qquad \mathrm{Z}_{\alpha\beta} = \mathrm{Z}_{\{\alpha,\beta\}}.$$

On note $\mathrm{B}_{\Delta_1} = \mathrm{B} \cap \mathrm{Z}_{\Delta_1}$; on sait (*loc. cit.*) que c'est le sous-groupe de Borel canonique [(4)] de Z_{Δ_1}, et que sa partie unipotente est $\mathrm{U}_{\Delta_1} = \mathrm{U} \cap \mathrm{Z}_{\Delta_1}$. En particulier, on a

$$\mathrm{B}_\alpha = \mathrm{T}\cdot\mathrm{U}_\alpha.$$

On notera **267**

$$\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_{\{\alpha,\beta\}} = \mathrm{U} \cap \mathrm{Z}_{\alpha\beta} = \prod_{\gamma\in\mathrm{R}^+_{\alpha\beta}} \mathrm{U}_\gamma,$$

où $\mathrm{R}^+_{\alpha\beta}$ désigne l'ensemble des racines positives combinaison linéaire de α et de β.

Soit maintenant $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de S-groupes *épinglés.* Si $d : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ est la bijection correspondante et si Δ_1 est une partie de Δ, alors $d(\Delta_1) = \Delta'_1$ est une partie de Δ', et il est clair que f envoie T_{Δ_1} dans $\mathrm{T}'_{\Delta'_1}$, donc Z_{Δ_1} dans $\mathrm{Z}'_{\Delta'_1}$. Le S-morphisme correspondant :

[(4)] N.D.E. : c.-à-d., le sous-groupe de Borel de Z_{Δ_1} correspondant à $\mathrm{R}'_+ = \mathrm{R}' \cap \mathrm{R}_+$.

$$f_{\Delta_1} : \mathrm{Z}_{\Delta_1} \longrightarrow \mathrm{Z}'_{d(\Delta'_1)}$$

est compatible avec les épinglages canoniques ; il définit un morphisme de données radicielles épinglées

$$\mathscr{R}(f_{\Delta_1}) : \mathscr{R}(\mathrm{Z}_{\Delta_1}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \ldots) \longrightarrow \mathscr{R}(\mathrm{Z}_{\Delta'_1}, \mathrm{T}', \mathrm{M}', \ldots)$$

et les morphismes $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ sous-jacents à $\mathscr{R}(f)$ et $\mathscr{R}(f_{\Delta_1})$ coïncident.

1.8. Étude du groupe $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$

Pour chaque couple (α, β) de racines simples, notons $n_{\alpha\beta}$ l'ordre de l'élément $s_\alpha s_\beta$ du groupe de Weyl W. En particulier, on a $n_{\alpha\alpha} = 1$. On a donc $(w_\alpha w_\beta)^{n_{\alpha\beta}} \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$.

Définition 1.8.1. — Pour tout $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$, on pose

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^{n_{\alpha\beta}} \in \mathrm{T}(\mathrm{S}).$$

De plus, on pose (Exp. XX, 3.1)

$$t_\alpha = t_{\alpha\alpha} = w_\alpha^2 = \alpha^*(-1) \in \mathrm{T}(\mathrm{S}).$$

268 ***Proposition 1.8.2***. — *Soit* H *un* S*-foncteur en groupes transformant sommes directes de schémas en produits* (*par exemple un faisceau pour la topologie de Zariski*)*. Soient*

$$f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}$$

un morphisme de groupes et h_α $(\alpha \in \Delta)$ *des éléments de* $\mathrm{H}(\mathrm{S})$*. Pour qu'il existe un morphisme de groupes* (*nécessairement unique*)

$$f_{\mathrm{N}} : \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{H}$$

qui induise f_{T} *sur* T *et tel que* $f(w_\alpha) = h_\alpha$ *pour* $\alpha \in \Delta$*, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour tout* $\alpha \in \Delta$*, on a*

$$f_{\mathrm{T}}(s_\alpha(t)) = h_\alpha f_{\mathrm{T}}(t) h_\alpha^{-1}$$

pour tout $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$*,* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (*i.e.* $f_{\mathrm{T}} \circ s_\alpha = \mathrm{int}(h_\alpha) \circ f_{\mathrm{T}}$).

(ii) *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$*, on a*

$$f_{\mathrm{T}}(t_{\alpha\beta}) = (h_\alpha h_\beta)^{n_{\alpha\beta}}.$$

Munissons en effet (**Sch**) de la topologie $\mathscr{C}$ engendrée par la prétopologie dont les familles couvrantes sont les sommes directes ; l'hypothèse de l'énoncé dit que H est un $\mathscr{C}$-faisceau. Soit L le groupe libre de générateurs $(m_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{R}}$ et L_1 le sous-groupe invariant engendré par les éléments $(m_\alpha m_\beta)^{n_{\alpha\beta}}$, $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$. Soit $g : \mathrm{L} \to \mathrm{W}$ le morphisme défini par $g(m_\alpha) = s_\alpha$; on sait (Exp. XXI, 5.1) que g induit un isomorphisme $\overline{g}$ de L/L_1 sur W. Faisons opérer L sur T par l'intermédiaire de g (ou, ce qui revient au même, par $m_\alpha \cdot t = s_\alpha(t)$). Soit L_{S} le groupe constant défini par L, considérons le produit semi-direct $\mathrm{T} \cdot \mathrm{L}_{\mathrm{S}} = \mathrm{N}$ pour l'opération précédente. On a un morphisme de S-groupes

$$h : \quad \mathrm{T} \cdot \mathrm{L}_{\mathrm{S}} = \mathrm{N} \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$$

unique tel que $h(m_\alpha) = w_\alpha$, $h(t) = t$ pour tout $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Soit N_1 le sous-faisceau en groupes distingué de N engendré par les 269

$$t_{\alpha\beta}^{-1} \cdot (m_\alpha m_\beta)^{n_{\alpha\beta}}, \qquad (\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta.$$

On a évidemment $\mathrm{N}_1 \subset \operatorname{Ker} h$; considérons le morphisme induit

$$h_1 : \mathrm{N}/\mathrm{N}_1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}).$$

Prouvons que h_1 est un *isomorphisme.* Comme h induit sur T l'immersion canonique qui est un monomorphisme, le morphisme canonique

$$\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{N}/\mathrm{N}_1.$$

est également un monomorphisme, donc induit un isomorphisme de T sur $\mathrm{TN}_1/\mathrm{N}_1$. Pour la même raison h_1 induit un isomorphisme de $\mathrm{TN}_1/\mathrm{N}_1$ sur T ; pour prouver que h_1 est un isomorphisme, il suffit donc de vérifier que le morphisme correspondant

$$h_2 : \mathrm{N}/\mathrm{TN}_1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$$

est un isomorphisme. Or TN_1 est le sous-$\mathscr{C}$-faisceau en groupes distingué de N engendré par T et les $(m_\alpha m_\beta)^{n_{\alpha\beta}}$, c'est-à-dire le sous-$\mathscr{C}$-faisceau engendré par T et L_1, c'est-à-dire $\mathrm{T} \cdot (\mathrm{L}_1)_{\mathrm{S}}$. Le morphisme h_2 s'identifie donc au morphisme

$$\overline{g} : \mathrm{L}_{\mathrm{S}}/(\mathrm{L}_1)_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{S}}$$

qui est un isomorphisme par construction.

La démonstration de 1.8.2 est maintenant facile ; les conditions sont évidemment nécessaires ; prouvons qu'elles sont suffisantes. La condition (i) montre qu'il existe un morphisme

$$u : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{H}$$

tel que $u(m_\alpha) = h_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$, et $u|_{\mathrm{T}} = f_{\mathrm{T}}$. La condition (ii) dit que u s'annule sur N_1, ce qui entraîne aussitôt le résultat.

1.9. Fidélité du foncteur $\mathscr{R}$ 270

Proposition 1.9.1. — *Le foncteur* $\mathscr{R}$ *de* 1.6 *est fidèle : si*

$$f, g : \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{G}'$$

sont deux morphismes de groupes épinglés tels que $\mathscr{R}(f) = \mathscr{R}(g)$*, alors* $f = g$*.*

En effet, f et g coïncident sur T, U_α $(\alpha \in \Delta)$ et $\mathrm{U}_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Delta)$; il suffit donc d'appliquer :

Lemme 1.9.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif épinglé,* H *un* S*-préfaisceau en groupes, séparé pour* (fppf)*. Soient*

$$f, g : \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{H}$$

deux morphismes de S*-groupes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f = g$.

(ii) *f et g coïncident sur* T*, sur chaque* U_α $(\alpha \in \Delta)$*, sur chaque* $\mathrm{U}_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Delta)$*.*

(iii) *f et g coïncident sur* T*, sur chaque* U_α $(\alpha \in \Delta)$ *et* $f(w_\alpha) = g(w_\alpha)$ *pour chaque* $\alpha \in \Delta$*.*

En effet, (i) $\Rightarrow$ (ii) est trivial, (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte aussitôt de la définition de w_α (1.2). Reste à prouver (iii) $\Rightarrow$ (i). Si $\alpha \in \mathrm{R}$, il existe une suite $\{\alpha_i\} \subset \Delta$ avec $\alpha = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_n}(\alpha_{n+1})$ donc

$$\mathrm{U}_\alpha = \mathrm{int}(w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_n}) \mathrm{U}_{\alpha_{n+1}},$$

ce qui prouve que f et g coïncident sur chaque U_α. Il s'ensuit que f et g coïncident sur Ω, donc coïncident (Exp. XXII, 4.1.11).

Remarque 1.9.3. — Si G est semi-simple, on peut, dans (ii) et (iii) supprimer l'hypothèse que f et g coïncident sur T. En effet, G est engendré comme faisceau (fppf) par les U_α, $\alpha \in \mathrm{R}$ (Exp. XXII, 6.2.2 (a)).

2. Générateurs et relations pour un groupe épinglé

271 Dans cette section, on se fixe un S-groupe épinglé G. Si $\alpha, \beta \in \Delta$, on emploiera les notations Z_α, $\mathrm{Z}_{\alpha\beta}$, $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$, $\mathrm{R}^+_{\alpha\beta}$ de 1.7.

Théorème 2.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe épinglé,* H *un* S*-faisceau en groupes pour* (fppf)*. Soient*

$$f_{\mathrm{N}} : \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad f_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}, \quad \alpha \in \mathrm{R},$$

des morphismes de groupes. Pour qu'il existe un morphisme de groupes (*nécessairement unique*)

$$\overline{f} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$$

prolongeant f_{N} *et les* f_α $(\alpha \in \mathrm{R})$*, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) *Pour tout* $\alpha \in \Delta$ *et tout* $\beta \in \mathrm{R}$*, on a*

$$\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(w_\alpha)) \circ f_\beta = f_{s_\alpha(\beta)} \circ \mathrm{int}(w_\alpha).$$

(ii) *Pour tout* $\alpha \in \Delta$*, il existe un morphisme de groupes*

$$\mathrm{F}_\alpha : \mathrm{Z}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}$$

prolongeant f_α*,* $f_{-\alpha}$ *et* $f_{\mathrm{N}}|_{\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Z}_\alpha}(\mathrm{T})}$*.*

(iii) *Pour tout couple* $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$*, il existe un morphisme de groupes* $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{H}$ *induisant* f_γ *sur* U_γ *pour tout* $\gamma \in \mathrm{R}^+_{\alpha\beta}$ (*i.e.* $\mathrm{U}_\gamma \subset \mathrm{U}_{\alpha\beta}$).

2.1.1. — *Démonstration.* Les conditions de l'énoncé sont évidemment nécessaires. Choisissons d'autre part une structure de groupe totalement ordonné sur $\Gamma_0(\mathrm{R})$ de manière que les racines > 0 soient les éléments de R_+ (Exp. XXI, 3.5.6) ; tout produit
272 indexé par une partie de R sera pris relativement à cet ordre. Notons f_{T} la restriction de f_{N} à T et considérons le morphisme

$$f : \Omega \longrightarrow \mathrm{H}$$

défini ensemblistement par

$$f\left(\prod_{\alpha\in \mathrm{R}_-} y_\alpha \cdot t \cdot \prod_{\alpha\in \mathrm{R}_+} x_\alpha\right) = \prod f_\alpha(y_\alpha)\cdot f_{\mathrm{T}}(t)\cdot \prod f_\alpha(x_\alpha).$$

Tout morphisme vérifiant les conditions de l'énoncé doit prolonger f ; d'autre part tout morphisme de groupes $\overline{f} : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ prolongeant f prolonge aussi f_{N} : en effet, prolongeant f_α et $f_{-\alpha}$, il vérifie $\overline{f}(w_\alpha) = \mathrm{F}_\alpha(w_\alpha) = f_{\mathrm{N}}(w_\alpha)$ et il prolonge f_{T} par hypothèse. Par Exp. XXII, 4.1.11 (ii), on est donc ramené à prouver :

Proposition 2.1.2. — *Le morphisme $f : \Omega \to \mathrm{H}$ défini ci-dessus est « génériquement multiplicatif » ; plus précisément, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tous $x,\ y \in \Omega(\mathrm{S}')$ tels que $xy \in \Omega(\mathrm{S}')$, on a $f(xy) = f(x)f(y)$.*

Lemme 2.1.3. — *Soit $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, et soient $\alpha,\ \beta \in \mathrm{R}$ tels que $\mathrm{int}(n)\mathrm{U}_\alpha = \mathrm{U}_\beta$ (i.e. $\overline{n}(\alpha) = \beta$), alors on a*

$$\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n))\circ f_\alpha = f_\beta \circ \mathrm{int}(n).$$

En effet, il suffit de vérifier la formule pour un système de générateurs du faisceau $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$; elle est vraie pour chaque w_α, $\alpha \in \Delta$ (par 2.1 (i)), il suffit donc de le faire pour $n \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$. C'est trivial par 2.1 (ii) si α est simple ; sinon, on prend un $w \in \mathrm{W}$ tel $w^{-1}(\alpha) \in \Delta$; écrivant w comme produit de réflexions simples, [(5)] on est ramené à prouver que si la formule est vraie pour α et pour tout n, elle l'est aussi pour $w_{\alpha_0}(\alpha)$ et $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, où $\alpha_0 \in \Delta$. Or, par 2.1 (i), on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(t))\circ f_{w_{\alpha_0}(\alpha)} &= \mathrm{int}\left(f_{\mathrm{N}}(tw_{\alpha_0})\right)\circ f_\alpha \circ \mathrm{int}(w_{\alpha_0}^{-1})\\ &= f_{w_{\alpha_0}(\alpha)}\circ \mathrm{int}(tw_{\alpha_0})\circ \mathrm{int}(w_{\alpha_0}^{-1}).\end{aligned}$$

Lemme 2.1.4. — *La restriction de f à U (resp. U^-) est un morphisme de groupes. En particulier, cette restriction est indépendante de l'ordre choisi sur les racines.* **273**

Il suffit de faire la démonstration pour U. En vertu de Exp. XXII, 5.5.8, il suffit de vérifier que pour tout couple $\alpha < \beta$ de racines positives, on a pour tous $x_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $x_\beta \in \mathrm{U}_\beta(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$,

$$f_\beta(x_\beta)f_\alpha(x_\alpha)f_\beta(x_\beta^{-1}) = f(x_\beta x_\alpha x_\beta^{-1}).$$

D'après Exp. XXII, 5.5.2 il existe des $x_\gamma \in \mathrm{U}_\gamma(\mathrm{S}')$ ($\gamma = i\alpha + j\beta \in \mathrm{R}$, $i > 0, j \geqslant 0$ [(6)]) tels que

$$x_\beta x_\alpha x_\beta^{-1} = \prod_\gamma x_\gamma,$$

et on doit donc vérifier la relation

$$f_\beta(x_\beta)f_\alpha(x_\alpha)f_\beta(x_\beta^{-1}) = \prod_{\substack{\gamma = i\alpha + j\beta\\ i>0, j\geqslant 0}} f_\gamma(x_\gamma).$$

---

(5) N.D.E. : On a remplacé « symétries fondamentales » par « réflexions simples ».

(6) N.D.E. : On a corrigé $i, j > 0$ en $i > 0$, $j \geqslant 0$ (puisque x_α apparaît dans le produit de droite).

Par Exp. XXI, 3.5.4, il existe un $w \in \mathrm{W}$ tel que $w(\alpha) = \alpha_0 \in \Delta$, $w(\beta) \in \mathrm{A}_{\alpha_0\beta_0}$ (notations de 1.7), où $\beta_0 \in \Delta$. Relevant w en un $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ (par Exp. XXII, 3.8) il suffit de vérifier la relation précédente après conjugaison par $f_{\mathrm{N}}(n)$. Par 2.1.3, on est donc ramené au cas où $\alpha, \beta \in \mathrm{R}^+_{\alpha_0\beta_0}$, cas où on conclut par la condition 2.1 (iii).

Lemme 2.1.5. — *Soit* $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *tel que* $\mathrm{int}(n)\mathrm{U} = \mathrm{U}^-$ (*i.e. que* $\overline{n}$ *soit la symétrie du groupe de Weyl* [7] (Exp. XXI, 3.6.14)). *Pour tout* $u \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (*resp.* $u \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$), *on a*

$$f(nun^{-1}) = f_{\mathrm{N}}(n)f(u)f_{\mathrm{N}}(n^{-1}).$$

Immédiat par 2.1.3 et 2.1.4.

274 ***Lemme 2.1.6***. — *Soient* $u \in \mathrm{B}(\mathrm{S}')$, $v \in \mathrm{B}^-(\mathrm{S}')$, $g \in \Omega(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *Alors*

$$f(vgu) = f(v)f(g)f(u).$$

En effet, posons $v = v_1t_1$, $g = v_2t_2u_2$, $u = t_3u_3$, avec $v_i \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S}')$, $t_i \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $u_i \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$. On a

$$f(v)f(g)f(u) = f(v_1)f_{\mathrm{T}}(t_1)f(v_2)f_{\mathrm{T}}(t_2)f(u_2)f_{\mathrm{T}}(t_3)f(u_3),$$

d'une part et

$$\begin{aligned} f(vgu) &= f(v_1t_1v_2t_1^{-1}t_1t_2t_3t_3^{-1}u_2t_3u_3) \\ &= f(v_1 \cdot t_1v_2t_1^{-1})f_{\mathrm{T}}(t_1t_2t_3)f(t_3^{-1}u_2t_3 \cdot u_3). \end{aligned}$$

Utilisant 2.1.4 pour décomposer les deux termes extrêmes de cette dernière expression, on obtient

$$f(vgu) = f(v_1)f(t_1v_2t_1^{-1})f_{\mathrm{T}}(t_1t_2t_3)f(t_3^{-1}u_2t_3)f(u_3).$$

On est alors ramené aux formules évidentes

$$f(t_1v_2t_1^{-1}) = f_{\mathrm{T}}(t_1)f(v_2)f_{\mathrm{T}}(t_1)^{-1}, \qquad f(t_3^{-1}u_2t_3) = f_{\mathrm{T}}(t_3)^{-1}f(u_2)f_{\mathrm{T}}(t_3),$$

qui résultent de la définition de f et de 2.1.3.

Lemme 2.1.7. — *Soient* $\alpha \in \Delta$ *et* $g \in \Omega(\mathrm{S}') \cap \mathrm{int}(w_\alpha)^{-1}\Omega(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *Alors*

$$f(w_\alpha g w_\alpha^{-1}) = f_{\mathrm{N}}(w_\alpha)f(g)f_{\mathrm{N}}(w_\alpha)^{-1}.$$

En effet, soit $g \in \Omega(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Écrivons, par Exp. XXII, 5.6.8

$$f = a\, x_{-\alpha}\, t\, x_\alpha\, b,$$

275 avec $a \in \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}')$, $x_{-\alpha} \in \mathrm{U}_{-\alpha}(\mathrm{S}')$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $x_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $b \in \mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}')$. Par 2.1.3, 2.1.4 et le fait que s_α permute les racines positives $\neq \alpha$ (cf. Exp. XXI, 3.3.2), on a

$$\mathrm{int}(w_\alpha)a \in \mathrm{U}_{-\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}'), \qquad \mathrm{int}(w_\alpha)b \in \mathrm{U}_{\widehat{\alpha}}(\mathrm{S}')$$

et la formule à démontrer est vraie pour $g = a$ ou $g = b$. Par 2.1.6, on est donc ramené à démontrer l'assertion cherchée lorsque $g = x_{-\alpha}\, t\, x_\alpha \in \mathrm{Z}_\alpha(\mathrm{S}')$. Mais alors « tout se passe dans Z_α » et on conclut par la condition (ii) de 2.1.

[7]N.D.E. : relativement à Δ.

Lemme 2.1.8. — *Soit* $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$. *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tout* $g \in \Omega(\mathrm{S}')$ *tel que* $\mathrm{int}(n)g \in \Omega(\mathrm{S}')$, *on a*

$$f(ngn^{-1}) = f_{\mathrm{N}}(n)f(g)f_{\mathrm{N}}(n)^{-1}.$$

C'est trivial si $n \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$ (par 2.1.3). Les deux membres de la formule précédente définissent des morphismes de $\Omega \cap \mathrm{int}(n)^{-1}\Omega$ dans H ; pour vérifier qu'ils coïncident, il suffit de vérifier qu'il existe un ouvert V_n de Ω, contenant la section unité tel que $\mathrm{int}(n)\mathrm{V}_n \subset \Omega$, et que $f \circ \mathrm{int}(n)$ et $\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n)) \circ f$ coïncident sur V_n. En vertu de la structure de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, il suffit de prouver que si l'assertion précédente est vraie pour un $n' \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ et si $\alpha \in \Delta$, elle est vraie pour $n = n'w_\alpha$. Posons

$$\mathrm{V}_n = \Omega \cap \mathrm{int}(w_\alpha)^{-1}\mathrm{V}_{n'} .$$

On a $\mathrm{int}(n)\mathrm{V}_n \subset \mathrm{int}(n')\mathrm{V}_{n'} \subset \Omega$. Si $g \in \mathrm{V}_n(\mathrm{S}')$, on a

$$\mathrm{int}(n)g = \mathrm{int}(n')\,\mathrm{int}(w_\alpha)g.$$

Or $\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \mathrm{V}_{n'}(\mathrm{S}')$, donc par hypothèse

$$f\big(\mathrm{int}(n')\,\mathrm{int}(w_\alpha)g\big) = \mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n'))f(\mathrm{int}(w_\alpha)g)\,;$$

comme $\mathrm{int}(w_\alpha)g \in \Omega(\mathrm{S}')$, on peut appliquer 2.1.7, qui donne

$$f(\mathrm{int}(w_\alpha)g) = \mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(w_\alpha))f(g),$$

et on conclut aussitôt. **276**

Démontrons maintenant 2.1.2. Soient x, $x' \in \Omega(\mathrm{S}')$; écrivons comme d'habitude

$$x = vtu, \qquad x' = v't'u',$$

d'où

$$xx' = vt(uv')t'u'.$$

Par 2.1.6 et la relation $\mathrm{U}^-(\mathrm{S}')\Omega(\mathrm{S}')\mathrm{U}(\mathrm{S}') = \Omega(\mathrm{S}')$, on est ramené à prouver que si $uv' \in \Omega(\mathrm{S}')$, on a $f(uv') = f(u)f(v')$. Soit $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}')$ comme dans 2.1.5 (ii). On a

$$f(u) = f_{\mathrm{N}}(n)^{-1}f(nun^{-1})f_{\mathrm{N}}(n), \qquad f(v') = f_{\mathrm{N}}(n)^{-1}f(nv'n^{-1})f_{\mathrm{N}}(n),$$

par *loc. cit.*, d'où

$$f(u)f(v') = f_{\mathrm{N}}(n)^{-1}f(nun^{-1})f(nv'n^{-1})f_{\mathrm{N}}(n).$$

Mais $nun^{-1} \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S}')$, $nv'n^{-1} \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$, de sorte que

$$f(nun^{-1})f(nv'n^{-1}) = f((nun^{-1})(nv'n^{-1})) = f(nuv'n^{-1}),$$

ce qui donne

$$f(u)f(v') = f_{\mathrm{N}}(n)^{-1}f(nuv'n^{-1})f_{\mathrm{N}}(n).$$

Si $uv' \in \Omega(\mathrm{S}')$, on peut appliquer 2.1.8 et on a terminé.

Remarque 2.2. — Au lieu de se donner f_{N}, on peut se donner un morphisme de groupes $f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \to \mathrm{H}$, des sections $h_\alpha \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$ ($\alpha \in \Delta$), vérifiant les conditions de 1.8.2. Il faut alors remplacer la condition (ii) du théorème par

(ii′) Il existe un morphisme de groupes $\mathrm{F}_\alpha : \mathrm{Z}_\alpha \to \mathrm{H}$ qui prolonge **277**

$$f_\alpha, f_{-\alpha}, f_{\mathrm{T}} \quad \text{et vérifie} \quad \mathrm{F}_\alpha(w_\alpha) = h_\alpha.$$

Nous allons maintenant donner au théorème précédent une forme plus explicite. Gardons les notations précédentes.

Théorème 2.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe épinglé. Soient* H *un* S*-faisceau en groupes pour* (fppf),

$$f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad f_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}, \quad \alpha \in \Delta,$$

des morphismes de groupes et

$$h_\alpha \in \mathrm{H}(\mathrm{S}), \qquad (\alpha \in \Delta),$$

des sections de H*. Pour qu'il existe un morphisme de groupes*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$$

(*nécessairement unique*) *induisant* f_{T} *et les* f_α $(\alpha \in \Delta)$ *et vérifiant* $f(w_\alpha) = h_\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \Delta$*, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*, tout* $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$*, tout* $\alpha \in \Delta$ *et tout* $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$*, on a*

$$f_{\mathrm{T}}(t) f_\alpha(x) f_{\mathrm{T}}(t)^{-1} = f_\alpha(\mathrm{int}(t)x). \tag{1}$$

(ii) *Pour tout* $\alpha \in \Delta$*, tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*, tout* $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$*, on a*

$$h_\alpha f_{\mathrm{T}}(t) h_\alpha^{-1} = f_{\mathrm{T}}(s_\alpha(t)) = f_{\mathrm{T}}(t \cdot \alpha^* \alpha(t)^{-1}). \tag{2}$$

(iii) *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$*, on a*

$$(h_\alpha h_\beta)^{n_{\alpha\beta}} = f_{\mathrm{T}}(t_{\alpha\beta}). \tag{3}$$

278 (iv) *Pour tout* $\alpha \in \Delta$*, on a* (*rappelons qu'on note* $u_\alpha = \exp_\alpha(\mathrm{X}_\alpha)$)

$$(h_\alpha f_\alpha(u_\alpha))^3 = e. \tag{4}$$

(v) *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$*,* $\alpha \neq \beta$*, il existe un morphisme de groupes*

$$f_{\alpha\beta} : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{H}$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

a) *On a*

$$f_{\alpha\beta}|_{\mathrm{U}_\alpha} = f_\alpha, \qquad f_{\alpha\beta}|_{\mathrm{U}_\beta} = f_\beta, \tag{5}$$

b) *Pour tout* $\gamma \in \mathrm{R}^+_{\alpha\beta}$*,* $\gamma \neq \alpha$ (*resp.* $\gamma \neq \beta$)*, et tout* $x \in \mathrm{U}_\gamma(\mathrm{S}')$*,* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*, on a*

$$\begin{aligned} &\mathrm{int}(h_\alpha) f_{\alpha\beta}(x) = f_{\alpha\beta}(\mathrm{int}(w_\alpha)x), \\ (\text{resp.}\quad &\mathrm{int}(h_\beta) f_{\alpha\beta}(x) = f_{\alpha\beta}(\mathrm{int}(w_\alpha)x)). \end{aligned} \tag{6}$$

Démonstration. L'unicité est claire par 1.9.2. Prouvons l'existence.

Lemme 2.3.1. — *Il existe un morphisme de groupes*

$$f_{\mathrm{N}} : \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{H}$$

prolongeant f_{T} *et vérifiant* $f_{\mathrm{N}}(w_\alpha) = h_\alpha$.

279 C'est en effet ce qu'affirme 1.8.2, compte tenu des conditions (2) et (3).

Lemme 2.3.2. — *Il existe un morphisme de groupes*

$$\mathrm{F}_\alpha : \mathrm{Z}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad \alpha \in \Delta,$$

prolongeant f_{T}*,* f_α *et vérifiant* $\mathrm{F}_\alpha(w_\alpha) = h_\alpha$*, donc prolongeant* $f_{\mathrm{N}}|_{\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Z}_\alpha}(\mathrm{T})}$.

C'est clair par Exp. XX, 6.2 et les conditions (1), (3) et (4).

Lemme 2.3.3. — *Pour tout* $(\alpha,\beta) \in \Delta \times \Delta$*,* $\alpha \neq \beta$*, tout* $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Z}_{\alpha\beta}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *tel que* $\overline{n}(\alpha) = \alpha$ *(resp.* $\overline{n}(\alpha) = \beta$*), i.e.* $\mathrm{int}(n)\mathrm{U}_\alpha = \mathrm{U}_\alpha$ *(resp.* $\mathrm{int}(n)\mathrm{U}_\alpha = \mathrm{U}_\beta$*), tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tout* $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$*, on a*

$$\begin{aligned} &\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n))f_\alpha(x) = f_\alpha(\mathrm{int}(n)x)\\ \text{resp.}\quad &\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n))f_\alpha(x) = f_\beta(\mathrm{int}(n)x). \end{aligned}$$

En effet, il existe un $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$ et une suite $\{\alpha_i\} \subset \{\alpha,\beta\}$ tels que $n = tw_{\alpha_k}\cdots w_{\alpha_1}$. La condition est vérifiée pour $n = t$ par la condition (1). On peut donc supposer $n = w_{\alpha_k}\cdots w_{\alpha_1}$. Faisons la démonstration par récurrence sur k, i.e. supposons l'assertion prouvée pour tout n qui s'écrit comme un produit de moins de $k-1$ réflexions simples (et vérifie les hypothèses du lemme). Considérons les racines

$$\gamma_i = s_{\alpha_i}\cdots s_{\alpha_1}(\alpha).$$

Si tous les γ_i sont positifs, i.e. appartiennent à $\mathrm{R}^+_{\alpha\beta}$, on peut appliquer la condition (v) de 2.3. ; prenant les notations de 2.3 (v), on conclut aussitôt par récurrence que

$$\mathrm{int}\big(f_{\mathrm{N}}(w_{\alpha_i}\cdots w_{\alpha_1})\big)f_\alpha(x) = f_{\alpha\beta}(\mathrm{int}(w_{\alpha_i}\ldots w_{\alpha_1})x),$$

soit pour $i = k$ la propriété cherchée. Si tous les γ_i ne sont pas positifs, il existe un **280**
indice $j < k$ tel que

$$\gamma_j \in \mathrm{R}_+, \qquad \gamma_{j+1} \notin \mathrm{R}_+.$$

Comme $\gamma_{j+1} = s_{\alpha_j}(\gamma_j)$, il s'ensuit aussitôt que $\gamma_j = \alpha_j$, par Exp. XXI, 3.3.2, donc que γ_j est α ou β, et on peut décomposer n en

$$\begin{aligned} n &= n'\cdot n'',\\ n' &= w_{\alpha_k}\cdots w_{\alpha_{j+1}},\\ n'' &= w_{\alpha_j}\cdots w_{\alpha_1}, \end{aligned}$$

n' et n'' vérifiant les hypothèses du lemme et étant produit de moins de $k-1$ réflexions, donc vérifiant par l'hypothèse de récurrence la conclusion du lemme.

Lemme 2.3.4. — *Soit* $\alpha \in \mathrm{R}$*. Si* $n, n' \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *et* $\beta,\beta' \in \Delta$ *vérifient* $\overline{n}(\alpha) = \beta$ *et* $\overline{n}'(\alpha) = \beta'$*, on a*

$$\mathrm{int}\big(f_{\mathrm{T}}(n)^{-1}\big)\, f_\beta(n\,x\,n^{-1}) = \mathrm{int}\big(f_{\mathrm{T}}(n')^{-1}\big)\, f_{\beta'}(n'\,x\,n'^{-1}),$$

pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$*,* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Il suffit de vérifier que si $\overline{n}(\alpha) = \beta$, α, $\beta \in \Delta$, alors $\mathrm{int}(f_{\mathrm{T}}(n)) \circ f_\alpha = f_\beta \circ \mathrm{int}(n)$. Or d'après le lemme de Tits (Exp. XXI, 5.6), il existe une suite de racines simples $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m = \beta$, et une suite d'éléments $w_i \in \mathrm{W}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, avec

$$\overline{n} = w_{m-1} \cdots w_0,$$
$$w_i(\alpha_i) = \alpha_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots m-1,$$

281 la condition suivante étant en outre vérifiée : pour tout $i = 0, 1, \dots m-1$, il existe une racine simple β_i telle que

$$w_i \in \mathrm{W}_{\alpha_i\beta_i}, \quad \alpha_{i+1} = \alpha_i \quad \text{ou} \quad \beta_i.$$

On est alors ramené par récurrence au cas traité dans le lemme précédent.

Lemme 2.3.5. — *Il existe une famille de morphismes de groupes* $f'_\gamma : \mathrm{U}_\gamma \to \mathrm{H}$, $\gamma \in \mathrm{R}$, *vérifiant*

(i) *Pour* $\alpha \in \Delta$, *on a* $f'_\alpha = f_\alpha$ *et* $f'_{-\alpha} = \mathrm{F}_\alpha|_{\mathrm{U}_{-\alpha}}$ *où* F_α *est défini dans* 2.3.2.

(ii) *Pour* α, $\beta \in \Delta$ *et* $\gamma \in \mathrm{R}^+_{\alpha\beta}$, *on a* $f'_\gamma = f_{\alpha\beta}|_{\mathrm{U}_\gamma}$.

(iii) *Pour tout* $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *et* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ *tels que* $\overline{n}(\alpha) = \beta$, *on a*

$$\mathrm{int}(f_{\mathrm{N}}(n)) f'_\alpha(x) = f'_\beta(\mathrm{int}(n)x)$$

pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Pour toute racine $\alpha \in \mathrm{R}$, il existe un $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ tel que $\overline{n}(\alpha) \in \Delta$. Définissons alors $f'_\alpha(x)$ comme l'expression de 2.3.4. Celle-ci est indépendante du choix de n et f'_α est bien un morphisme de groupes. La propriété (iii) est vérifiée par construction. La première assertion de (i) est claire (prendre $n = e$), la seconde aussi (prendre $n = w_\alpha$ et appliquer 2.3.2) ; si $\gamma \in \mathrm{R}^+_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta \in \Delta)$, il existe $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Z}_{\alpha\beta}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ tel que $\overline{n}(t) = \alpha$ ou β ; on applique alors (iii) et les conditions (5) et (6) et on a prouvé (ii).

2.3.6. — Démontrons maintenant le théorème en prouvant que les conditions de 2.1 sont vérifiées, pour les morphismes f_{N} et f'_α, $\alpha \in \mathrm{R}$.

282 2.1 (i) résulte de 2.3.5 (iii),

2.1 (ii) résulte de 2.3.5 (i) et 2.3.2,

2.1 (iii) résulte de 2.3.5 (ii) et du fait que $f_{\alpha\beta}$ est un morphisme de groupes.

Un corollaire évident est :

Corollaire 2.4. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe épinglé de rang semi-simple* $\geqslant 1$, H *un* S*-faisceau* (fppf) *en groupes. Pour chaque* $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$, *soit*

$$\mathrm{F}_{\alpha\beta} : \mathrm{Z}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{H}$$

un morphisme de groupes. Pour qu'il existe un morphisme de groupes

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$$

induisant les $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$, *il faut et il suffit que pour tout* $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$, *on ait*

$$\mathrm{F}_{\alpha\beta}|_{\mathrm{Z}_\alpha} = \mathrm{F}_{\alpha\alpha}.$$

La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la vérifiée. Posons $f_{\mathrm{T}} = \mathrm{F}_{\alpha\alpha}|_{\mathrm{T}}$ (qui ne dépend pas de α, car $\mathrm{F}_{\alpha\alpha}|_{\mathrm{T}} = \mathrm{F}_{\alpha\beta}|_{\mathrm{T}} = \mathrm{F}_{\beta\beta}|_{\mathrm{T}}$). Posons

$$p_\alpha = \mathrm{F}_{\alpha\alpha}|_{\mathrm{U}_\alpha}, \qquad h_\alpha = \mathrm{F}_{\alpha\alpha}(w_\alpha), \qquad f_{\alpha\beta} = \mathrm{F}_{\alpha\beta}|_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}.$$

Les conditions de 2.3 sont évidemment vérifiées : (1), (2), (4) « se vérifient » dans Z_α, (3), (5) et (6) dans $\mathrm{Z}_{\alpha\beta}$. Il existe donc un morphisme $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ prolongeant f_{T}, les f_α, $\alpha \in \Delta$ et vérifiant $f(w_\alpha) = h_\alpha$; il coïncide avec $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ sur des générateurs de $\mathrm{Z}_{\alpha\beta}$, donc vérifie $f|_{\mathrm{Z}_{\alpha\beta}} = \mathrm{F}_{\alpha\beta}$.

On a également le corollaire technique suivant :

Corollaire 2.5. — *Soient* S *un schéma,* G *et* G′ *deux* S*-groupes épinglés de rang semi-simple* 2*, q un entier > 0 tel que $x \mapsto x^q$ soit un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, $h : \mathscr{R}(\mathrm{G}') \to \mathscr{R}(\mathrm{G})$ un q-morphisme de données radicielles épinglées. Choisissons pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}_+$ un $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ et un $\mathrm{X}'_{d(\alpha)} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}'^{d(\alpha)})^\times$ (prolongeant les choix canoniques pour $\alpha \in \Delta$). Supposons réalisées les conditions suivantes :* 283

(i) *Si $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(h)(t_{\alpha\beta}) = t'_{d(\alpha)d(\beta)}$.*

(ii) *Pour tout $\alpha \in \Delta$ et tout $\beta \in \mathrm{R}_+$, $\beta \neq \alpha$ (d'où $s_\alpha(\beta) \in \mathrm{R}_+$), si $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$ est défini par*

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = z\mathrm{X}_{s_\alpha(\beta)},$$

on a aussi

$$\mathrm{Ad}(w'_{d(\alpha)})\mathrm{X}'_{d(\beta)} = z^{q(\beta)}\mathrm{X}'_{d(s_\alpha(\beta))}.$$

(iii) *Il existe un morphisme de groupes $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ tel que pour tout $\alpha \in \mathrm{R}_+$, on ait pour tout $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.*

$$f(\exp(x\mathrm{X}_\alpha)) = \exp(x^{q(\alpha)}\mathrm{X}'_{d(\alpha)}).$$

Alors il existe un morphisme de groupes épinglés $\mathrm{G} \xrightarrow{g} \mathrm{G}'$ tel que $\mathscr{R}(g) = h$.

En effet, on définit $f_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{G}'$ par

$$f_\alpha(\exp(x\mathrm{X}_\alpha)) = \exp(x^{q(\alpha)}\mathrm{X}'_{d(\alpha)});$$

on pose $f_{\mathrm{T}} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(h)$, $h_\alpha = w'_{d(\alpha)}$. Les conditions de 2.3 sont vérifiées (remarquer que $q(s_\alpha(\beta)) = q(\beta)$ (Exp. XXI, 6.8.4) et que l'on a toujours $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(h)(t_\alpha) = t'_{d(\alpha)}$) et on conclut aussitôt.

Remarque 2.6. — On peut préciser ainsi la condition (v) de 2.3. On doit d'abord vérifier :

(a) Pour tout mot en w_α et w_β tel que le mot correspondant transforme α *ou* β en α *ou* β, la relation du type 2.3.3 correspondante est vérifiée. En fait la démonstration de 2.3.3 montre qu'il suffit de le vérifier pour les mots en w_α et w_β qui sont minimaux (au sens que tout sous-mot initial non trivial ne vérifie pas les conditions imposées). 284

Si la condition (a) est vérifiée, on peut maintenant définir pour chaque $\gamma \in \mathrm{R}^+_{\alpha\beta}$ un $f_\gamma : \mathrm{U}_\gamma \to \mathrm{H}$ comme en 2.3.5 ; on doit alors écrire :

(b) Le morphisme défini par les f_γ

$$\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \prod_{\gamma\in\mathrm{R}^+_{\alpha\beta}} \mathrm{U}_\gamma \longrightarrow \mathrm{H}$$

est un morphisme de groupes. D'après Exp. XXII, 5.5.8, (b) est entraîné par :

(b′) Le morphisme précédent respecte les relations de commutations entre U_γ et U_δ pour $\gamma, \delta \in \mathrm{R}^+_{\alpha\beta}$, $\gamma > \delta$ (i.e. les relations en $\mathrm{C}_{i,j,\gamma,\delta}$ de Exp. XII, 5.5.2).

Il est clair que réciproquement, l'ensemble des conditions (a) et (b′) est équivalent à (v).

On peut même réduire les conditions précédentes à des conditions portant uniquement sur les éléments h_α, h_β, $f_\alpha(u_\alpha)$, $f_\beta(u_\beta)$ de H. Une condition du type (a) s'écrira par exemple, si $s_\alpha s_\beta s_\alpha(\beta) = \alpha$:

$$\mathrm{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha) f_\beta(x) = f_\alpha(\mathrm{int}(w_\alpha w_\beta w_\alpha)x); \tag{1}$$

pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. En particulier, pour $x = u_\beta$, on a $\mathrm{int}(w_\alpha w_\beta w_\alpha)u_\beta = u_\alpha^z$ pour une certaine section z de $\mathbb{G}_m(\mathrm{S})$, et la relation précédente donnera

$$\mathrm{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha) f_\beta(u_\beta) = f_\alpha(u_\alpha)^z. \tag{1′}$$

285 Montrons que réciproquement, en tenant compte des conditions (i) à (iv) de 2.3, (1′) entraîne (1). Si $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, faisons opérer $\mathrm{int}(t)$ sur (1′) ; tenant compte des conditions (i) et (ii), on obtient (1) pour $x = \mathrm{int}(t)u_\beta = u_\beta^{\beta(t)}$. Il suffit de remarquer maintenant que $\beta : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est fidèlement plat, donc que la condition (1) est certainement vraie pour $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')^\times$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Comme elle est additive en x et que toute section de U_α s'écrit localement comme somme de deux sections de $\mathrm{U}_\alpha^\times$, on en conclut bien que (1′) + (i) + (ii) $\Longrightarrow$ (1).

On raisonne de même avec les conditions du type (b). Il faut alors se servir du fait que si γ et γ' sont deux racines positives distinctes (et donc linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$), le morphisme $\mathrm{T} \to \mathbb{G}^2_{m,\mathrm{S}}$ de composantes γ et γ' est fidèlement plat. Nous laissons au lecteur les détails de cette transposition.

3. Groupes de rang semi-simple 2

3.1. Généralités

Lemme 3.1.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe épinglé,* α *et* β *deux racines de* G, *avec* $\alpha + \beta \neq 0$.

(i) *Si* $\alpha + \beta \notin \mathrm{R}$, *on a*

$$\exp(\mathrm{X}_\alpha)\exp(\mathrm{X}_\beta) = \exp(\mathrm{X}_\beta)\exp(\mathrm{X}_\alpha)$$

pour tous $\mathrm{X}_\alpha \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)(\mathrm{S}')$, $\mathrm{X}_\beta \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\beta)(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

(ii) *Si* $\alpha + \beta$ *et* $\alpha - \beta$ *ne sont pas racines, on a*

$$w_\alpha(z_\alpha)\exp(\mathrm{X}_\beta)w_\alpha(z_\alpha)^{-1} = \exp(\mathrm{X}_\beta)$$

286 *pour tous* $\mathrm{X}_\beta \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\beta)(\mathrm{S}')$, $z_\alpha \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *et*

$$w_\alpha(z_\alpha)w_\beta(z_\beta) = w_\beta(z_\beta)w_\alpha(z_\alpha)$$

pour tous $z_\alpha \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(\mathrm{S}')$ *et* $z_\beta \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\beta)^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

(iii) *Soient* $\mathrm{X}_\alpha \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{X}_\beta \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\beta)^\times(\mathrm{S}')$, *et* $w \in \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})(\mathrm{S}')$ *tels que* $\overline{w}(\alpha) = \beta$ *; définissons* $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$ *par*

$$\mathrm{Ad}(w)\mathrm{X}_\alpha = z\mathrm{X}_\beta.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(w)\exp(x\mathrm{X}_\alpha) &= \exp(xz\mathrm{X}_\beta),\\ \mathrm{int}(w)\exp(y\mathrm{X}_\alpha^{-1}) &= \exp(yz^{-1}\mathrm{X}_\beta^{-1}),\\ \mathrm{int}(w)w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) &= \beta^*(z)w_\beta(\mathrm{X}_\beta). \end{aligned}$$

En particulier, si $z = \pm 1$, *on a*

$$\mathrm{int}(w)w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) = w_\beta(\mathrm{X}_\beta)^z.$$

(iv) *Si on pose* $t_\alpha = \alpha^*(-1)$, $t_\beta = \beta^*(-1)$, *on a*

$$s_\alpha(t_\beta) = t_\beta\, t_\alpha^{(\beta^*,\,\alpha)}, \qquad \beta(t_\alpha) = (-1)^{(\alpha^*,\,\beta)}.$$

Démonstration. (i) résulte aussitôt de Exp. XXII, 5.5.2, (ii) de Exp. XX, 3.1 et de (i) appliqué à (β,α), $(\beta,-\alpha)$, $(-\beta,\alpha)$, $(-\beta,-\alpha)$, (iii) est évident sur les définitions ; pour la dernière assertion de (iii), remarquer que $\beta^*(-1) = w_\beta(\mathrm{X}_\beta)^{-2}$. Enfin, (iv) est trivial.

Proposition 3.1.2 **(Groupes de type** $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1$**).** — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe épinglé de type* $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1$, *notons* $\Delta = \mathrm{R}_+ = \{\alpha, \beta\}$.

(i) *On a* **287**

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^2 = t_\alpha t_\beta = (w_\beta w_\alpha)^2 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) *On a*

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = \mathrm{X}_\beta, \qquad \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_\alpha.$$

(iii) U_α *et* U_β *commutent* (*i.e.* U *est commutatif*).

En effet, par l'assertion (ii) du lemme, on a

$$w_\alpha w_\beta = w_\beta w_\alpha,$$

d'où $(w_\alpha w_\beta)^2 = w_\alpha^2 w_\beta^2 = t_\alpha t_\beta$, soit (i). Par l'assertion (ii) du lemme, on a également (ii) ; enfin (iii) est l'assertion (i) du lemme.

3.1.3. — Explicitions ici la condition (v) de 2.3. En utilisant la méthode exposée en 2.6, on obtient les deux groupes de conditions suivants, en posant $v_\alpha = f_\alpha(u_\alpha)$, pour $\alpha \in \Delta$:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} h_\alpha v_\beta h_\alpha^{-1} = v_\beta\\ h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} = v_\alpha \end{cases} \qquad\qquad \text{(B)}\quad v_\alpha v_\beta = v_\beta v_\alpha.$$

3.2. Groupes de type A_2

Proposition 3.2.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe épinglé de type* A_2*, notons* $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{R}_+ = \{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$.

288 (i) *On a*

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^3 = e = (w_\beta w_\alpha)^3 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) *Posons* $\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}$*. Alors*

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = -\mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \qquad \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \mathrm{X}_\beta, \qquad \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = -\mathrm{X}_\alpha.$$

(iii) *Posons* $p_{\alpha+\beta}(x) = \exp(x\mathrm{X}_{\alpha+\beta}) = \mathrm{int}(w_\beta)\, p_\alpha(x)$*. On a :*

$$p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(xy).$$

3.2.2. — La démonstration occupe les numéros 3.2.2 à 3.2.7. D'abord, on a $(\beta^*, \alpha) = (\alpha^*, \beta) = -1$, d'où $\alpha(t_\beta) = \beta(t_\alpha) = -1$.

Posons $\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}$; on a aussitôt

$$\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \alpha(t_\beta)\mathrm{X}_\alpha = -\mathrm{X}_\alpha.$$

Posons

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = z\mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \quad z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}),$$

d'où

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \beta(t_\alpha)z^{-1}\mathrm{X}_\beta = -z^{-1}\mathrm{X}_\beta.$$

Nous savons (Exp. XXII, 5.5.2), qu'il existe une unique section $\mathrm{A} \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$ telle que

$$(+) \qquad p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}xy).$$

Il s'agit donc pour prouver (ii) et (iii) de montrer que $\mathrm{A} = -z = 1$.

289 ***3.2.3***. — Faisons opérer $\mathrm{int}(w_\beta)$ sur la formule (+) précédente, on obtient :

$$(++) \qquad p_{-\beta}(-y)\, p_{\alpha+\beta}(x) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(-y)\, p_\alpha(-\mathrm{A}xy)$$

3.2.4. — Par définition de $p_{\alpha+\beta}$, on a

$$w_\beta\, p_\alpha(x)\, w_\beta^{-1} = p_{\alpha+\beta}(x),$$

ce qui s'écrit

$$p_\beta(1)\, p_{-\beta}(-1)\, p_\beta(1)\, p_\alpha(x)\, p_\beta(-1)\, p_{-\beta}(1)\, p_\beta(-1) = p_{\alpha+\beta}(x).$$

Comme p_β et $p_{\alpha+\beta}$ commutent, $\alpha + 2\beta$ n'étant pas racine, cela s'écrit aussi

$$p_\beta(1)\, p_\alpha(x)\, p_\beta(-1) = p_{-\beta}(1)\, p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(-1).$$

Utilisant maintenant (+) dans le premier membre et (++) dans le second, on obtient :

$$p_\alpha(x)\, p_\beta(1)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\, p_\beta(-1) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(1)\, p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{-\beta}(-1).$$

Comme $\alpha+2\beta$ (resp. $\alpha-\beta$) n'est pas racine, le premier (resp. second) membre s'écrit

$$p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x) \qquad \text{resp.} \quad p_{\alpha+\beta}(x)\, p_\alpha(\mathrm{A}x)$$

et le terme de droite égale $p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{\alpha+\beta}(x)$, puisque $2\alpha+\beta$ n'est pas racine. Donc

$$p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x) = p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{\alpha+\beta}(x)$$

ce qui donne (d'après XXII 4.1.3) $\mathrm{A} = 1$.

3.2.5. — Faisons maintenant opérer $\mathrm{int}(w_\alpha)$ sur la formule (+), on trouve, en utilisant le fait que $\mathrm{A} = 1$,

$$(+{+}+) \qquad p_{\alpha+\beta}(zy)\, p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(-x)\, p_{\alpha+\beta}(zy)\, p_\beta(-z^{-1}xy).$$

3.2.6. — Écrivons maintenant comme tout-à-l'heure

$$w_\alpha\, p_\beta(y)\, w_\alpha^{-1} = p_{\alpha+\beta}(zy),$$

d'où, comme p_α et $p_{\alpha+\beta}$ commutent, **290**

$$p_\alpha(1)\, p_\beta(y)\, p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1)\, p_{\alpha+\beta}(zy)\, p_{-\alpha}(-1).$$

Utilisant maintenant (+) et (+++), cela s'écrit aussi

$$p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(-y) = p_{\alpha+\beta}(zy)\, p_\beta(-z^{-1}y),$$

et comme p_β et $p_{\alpha+\beta}$ commutent, ceci donne $z = -1$.

3.2.7. — On a donc prouvé (ii) et (iii), prouvons (i). On a

$$w_\alpha\, w_\beta\, w_\alpha = w_\alpha\, w_\beta\, w_\alpha^{-1}\, w_\alpha^2 = w_{\alpha+\beta}^{-1}\, t_\alpha,$$

d'où

$$\begin{aligned} w_\beta\, w_\alpha\, w_\beta\, w_\alpha\, w_\beta = w_\beta\, w_{\alpha+\beta}^{-1}\, t_\alpha w_\beta = w_\beta\, w_{\alpha+\beta}^{-1} w_\beta^{-1} \cdot s_\beta(t_\alpha) \cdot t_\beta = \\ = w_\alpha \cdot t_\alpha t_\beta \cdot t_\beta = w_\alpha t_\alpha = w_\alpha^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(w_\alpha\, w_\beta)^3 = (w_\beta\, w_\alpha)^3 = e,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.2.8. — La condition (v) de 2.3 se traduit ici par (notant $v_\alpha = f_\alpha(u_\alpha)$) :

$$(\mathrm{A}) \quad h_\alpha v_\beta^{-1} h_\alpha^{-1} = h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} \qquad\qquad (\mathrm{B}) \begin{cases} v_\beta v_\alpha = v_\alpha v_\beta \cdot h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1}, \\ v_\beta \cdot h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} = h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} \cdot v_\beta, \\ v_\alpha \cdot h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} = h_\beta v_\alpha h_\beta^{-1} \cdot v_\alpha. \end{cases}$$

Posant $v_{\alpha+\beta} = \mathrm{int}(h_\beta) v_\alpha$, les trois dernières conditions s'écrivent aussi **291**

$$(\mathrm{B}) \begin{cases} v_\beta v_\alpha = v_\alpha v_\beta v_{\alpha+\beta}, \\ v_\alpha v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta} v_\alpha, \\ v_\beta v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta} v_\beta. \end{cases}$$

3.3. Groupes de type B_2

Proposition 3.3.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe épinglé de type* B_2*, notons* $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{R}_+ = \{\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta\}$.

(i) *On a*

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^4 = t_\alpha = (w_\beta w_\alpha)^4 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) *Si on pose*

$$\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \qquad \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta},$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} &= -\mathrm{X}_{\alpha+\beta},\\ \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} &= \mathrm{X}_\beta,\\ \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} &= -\mathrm{X}_\alpha,\\ \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} &= \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

(iii) *Posons* $p_{\alpha+\beta}(x) = \exp(x\mathrm{X}_{\alpha+\beta}) = \mathrm{int}(w_\beta)\, p_\alpha(x)$

$$p_{2\alpha+\beta}(x) = \exp(x\mathrm{X}_{2\alpha+\beta}) = \mathrm{int}(w_\alpha)\, p_\beta(x).$$

Alors :

$$\begin{aligned}p_\beta(y)\, p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(xy)\, p_{2\alpha+\beta}(x^2y),\\ p_{\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(x) &= p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(y)\, p_{2\alpha+\beta}(2xy).\end{aligned}$$

3.3.2. — La démonstration occupe les numéros 3.3.2 à 3.3.6. On a $(\beta^*,\alpha) = -1$,
292 $(\alpha^*,\beta) = -2$, d'où $\alpha(t_\beta) = -1$, $\beta(t_\alpha) = 1$. Notons en passant que $\beta(t_\alpha) = \alpha(t_\alpha) = 1$, ce qui montre que t_α est une section de Centr(G). Posons

$$\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \qquad \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}.$$

On a aussitôt

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} &= \alpha(t_\beta)\mathrm{X}_\alpha = -\mathrm{X}_\alpha,\\ \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} &= \beta(t_\alpha)\mathrm{X}_\beta = \mathrm{X}_\beta.\end{aligned}$$

Comme $(2\alpha+\beta)+\beta$ et $(2\alpha+\beta)-\beta$ ne sont pas racines, on a

$$\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}.$$

Il existe un scalaire $k \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$ tel que

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = k\mathrm{X}_{\alpha+\beta}.$$

D'autre part, par Exp. XXII, 5.5.2, il existe des sections A, B, $\mathrm{C} \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$ telles que

$$p_\beta(y)p_\alpha(x) = p_\alpha(x)p_\beta(y)p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}xy)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2y), \tag{1}$$

$$p_{\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(y)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{C}xy). \tag{2}$$

Il s'agit donc, dans (ii) et (iii), de prouver $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 1$, $\mathrm{C} = 2$, $k = -1$.

3.3.3. — Faisons opérer $\mathrm{int}(w_\alpha)$ sur la formule (2). On trouve

$$p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(-x)\, p_{2\alpha+\beta}(y)p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}kxy)p_\beta(\mathrm{B}x^2y). \tag{3}$$

Transformant de même (2), on obtient

$$p_{\alpha+\beta}(ky)\, p_{-\alpha}(-x) = p_{-\alpha}(-x)\, p_{\alpha+\beta}(ky)\, p_\beta(\mathrm{C}xy). \tag{4}$$

293 Transformant (1) par $\mathrm{int}(w_\beta)$, on a

$$p_{-\beta}(-y)\, p_{\alpha+\beta}(x) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(-y)\, p_\alpha(-\mathrm{A}xy)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2y). \tag{5}$$

3.3.4. — Écrivons
$$w_\beta p_\alpha(\mathrm{X}) w_\beta^{-1} = p_{\alpha+\beta}(x).$$
Comme $\alpha + 2\beta$ n'est pas racine, cela donne
$$p_\beta(1)\, p_\alpha(x)\, p_\beta(-1) = p_{-\beta}(1)\, p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(-1).$$
Utilisant (1) au premier membre et (5) au second, on obtient
$$p_\alpha(x)\, p_\beta(1)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2)\, p_\beta(-1) = \\ p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(1)\, p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2)\, p_{-\beta}(-1).$$
Comme p_β commute à $p_{\alpha+\beta}$ et $p_{2\alpha+\beta}$ d'une part, et $p_{-\beta}$ commute à p_α et $p_{2\alpha+\beta}$ d'autre part, cela s'écrit
$$p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2).$$
Transformant le second membre par (2), on obtient
$$p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x) p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2) = p_\alpha(\mathrm{A}x) p_{\alpha+\beta}(x) p_{2\alpha+\beta}((\mathrm{AC}-\mathrm{B})x^2),$$
ce qui donne
$$\mathrm{A} = 1, \qquad \mathrm{C} = 2\mathrm{B}.$$

3.3.5. — Écrivons maintenant
$$w_\alpha p_\beta(y) w_\alpha^{-1} = p_{2\alpha+\beta}(y).$$
Comme $3\alpha + \beta$ n'est pas racine, cela donne
$$p_\alpha(1)\, p_\beta(y)\, p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1)\, p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{-\alpha}(-1).$$
Utilisant (1) au premier membre, (3) au second, on obtient **294**
$$p_\beta(y) p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{A}y) p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}y) = p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}ky)\, p_\beta(\mathrm{B}y).$$
Comme $p_{\alpha+\beta}$, $p_{2\alpha+\beta}$, et p_β commutent, cela donne aussitôt
$$\mathrm{B} = 1, \qquad -\mathrm{A} = \mathrm{A}k,$$
d'où enfin
$$\mathrm{A} = 1, \qquad \mathrm{B} = 1, \qquad \mathrm{C} = 2, \qquad k = -1.$$

3.3.6. — On a donc prouvé (ii) et (iii). Prouvons (i). Tenant compte de l'égalité $s_\beta(t_\alpha) = t_\alpha t_\beta^{(\alpha^*,\beta)} = t_\alpha$ (puisque $(\alpha^*,\beta) = 2$), on a successivement :
$$w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} t_\alpha = w_{2\alpha+\beta} t_\alpha,$$
$$w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta = w_\beta w_{2\alpha+\beta} w_\beta^{-1} \cdot s_\beta(t_\alpha) \cdot t_\beta = w_{2\alpha+\beta} t_\alpha t_\beta,$$
$$w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\alpha w_{2\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} \cdot s_\alpha(t_\alpha t_\beta) \cdot t_\alpha = w_\beta \cdot t_\alpha \cdot t_\beta t_\alpha \cdot t_\alpha = w_\beta^{-1} t_\alpha,$$
d'où
$$(w_\beta w_\alpha)^4 = t_\alpha,$$
et
$$(w_\alpha w_\beta)^4 = s_\beta(t_\alpha) = t_\alpha,$$
ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.3.7. — La condition (v) de 2.3 se traduit ici de la manière suivante, en
295 posant $v_{\alpha+\beta} = \mathrm{int}(h_\beta)v_\alpha$ et $v_{2\alpha+\beta} = \mathrm{int}(h_\alpha)v_\beta$:

$$
(\mathrm{A}) \begin{cases} \mathrm{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha)v_\beta = v_\beta, \\ \mathrm{int}(h_\beta h_\alpha h_\beta)v_\alpha = v_\alpha, \end{cases} \qquad (\mathrm{B}) \begin{cases} v_\beta\, v_\alpha = v_\alpha\, v_\beta\, v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{\alpha+\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}^2, \\ v_{\alpha+\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}. \end{cases}
$$

3.4. Groupes de type G_2

Proposition 3.4.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe épinglé de type* G_2*, notons* $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{R}_+ = \{\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 3\alpha+2\beta\}$.

(i) *On a*

$$t_{\alpha\beta} = (w_\alpha w_\beta)^6 = e = (w_\beta w_\alpha)^6 = t_{\beta\alpha}.$$

(ii) *Si on pose*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}, \\
&\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta = -\mathrm{X}_{3\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{3\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{3\alpha+2\beta},
\end{aligned}
$$

on a :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} = -\mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{3\alpha+\beta} = \mathrm{X}_\beta, \\
&\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{3\alpha+2\beta} = \mathrm{X}_{3\alpha+2\beta}, \quad \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = -\mathrm{X}_\alpha, \\
&\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{3\alpha+2\beta} = -\mathrm{X}_{3\alpha+\beta}.
\end{aligned}
$$

(iii) *Si on pose*

$$
\begin{aligned}
p_{\alpha+\beta}(x) &= \exp(x\mathrm{X}_{\alpha+\beta}) = \mathrm{int}(w_\beta)\, p_\alpha(x), \\
p_{2\alpha+\beta}(x) &= \exp(x\mathrm{X}_{2\alpha+\beta}) = \mathrm{int}(w_\alpha w_\beta)\, p_\alpha(x), \\
p_{3\alpha+\beta}(x) &= \exp(x\mathrm{X}_{3\alpha+\beta}) = \mathrm{int}(w_\alpha)\, p_\beta(-x), \\
p_{3\alpha+2\beta}(x) &= \exp(x\mathrm{X}_{3\alpha+2\beta}) = \mathrm{int}(w_\beta w_\alpha)\, p_\beta(-x),
\end{aligned}
$$

296 *on a :*

$$
\begin{gathered}
p_\beta(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(xy)\, p_{2\alpha+\beta}(x^2y)\, p_{3\alpha+\beta}(x^3y) p_{3\alpha+2\beta}(x^3y^2), \\
p_{\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(y)\, p_{2\alpha+\beta}(2xy)\, p_{3\alpha+\beta}(3x^2y) p_{3\alpha+2\beta}(3xy^2), \\
p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\, p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{3\alpha+\beta}(3xy), \\
p_{3\alpha+\beta}(y)\, p_\beta(x) = p_\beta(x)\, p_{3\alpha+\beta}(y)\, p_{3\alpha+2\beta}(-xy), \\
p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{\alpha+\beta}(x) = p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{2\alpha+\beta}(y)\, p_{3\alpha+2\beta}(3xy).
\end{gathered}
$$

3.4.2. — La démonstration occupe les numéros 3.4.2 à 3.4.9. On a $(\beta^*, \alpha) = -1$, $(\alpha^*, \beta) = -3$, d'où $\beta(t_\alpha) = \alpha(t_\beta) = -1$. Définissons $\mathrm{X}_{\alpha+\beta}$, $\mathrm{X}_{2\alpha+\beta}$, $\mathrm{X}_{3\alpha+\beta}$ et $\mathrm{X}_{3\alpha+2\beta}$

comme dans (ii). On a aussitôt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} &= \alpha(t_\beta)\mathrm{X}_\alpha = -\mathrm{X}_\alpha,\\
\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} &= \alpha(t_\alpha)\beta(t_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = -\mathrm{X}_{\alpha+\beta},\\
\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{3\alpha+\beta} &= -\beta(t_\alpha)\mathrm{X}_\beta = \mathrm{X}_\beta,\\
\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{3\alpha+2\beta} &= \alpha(t_\beta)^3\beta(t_\beta)\mathrm{X}_{3\alpha+\beta} = -\mathrm{X}_{3\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Enfin, comme $(3\alpha+2\beta)\pm\alpha$ et $(2\alpha+\beta)\pm\beta$ ne sont pas racines, on a :

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{3\alpha+2\beta} = \mathrm{X}_{3\alpha+2\beta},\qquad \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta},$$

ce qui achève de démontrer (ii).

3.4.3. — En vertu de Exp. XXII, 5.5.2, il existe des scalaires [(8)] **297**

$$\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G},\mathrm{H},\mathrm{J}\in\mathbb{G}_a(\mathrm{S}),$$

tels que

(1) $p_\beta(y)\,p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}xy)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2y)\,p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{C}x^3y)\,p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{D}x^3y^2).$

(2) $p_{\alpha+\beta}(y)\,p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\,p_{\alpha+\beta}(y)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{E}xy)\,p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{F}x^2y)\,p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{G}xy^2).$

(3) $p_{2\alpha+\beta}(y)\,p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\,p_{2\alpha+\beta}(y)\,p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{H}xy).$

(4) $p_{3\alpha+\beta}(y)\,p_\beta(x) = p_\beta(x)\,p_{3\alpha+\beta}(y)\,p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{J}xy).$

3.4.4. — Faisons opérer $\mathrm{int}(w_\beta)$ sur (1), (3) et (4) :

(5) $p_{-\beta}(-y)\,p_{\alpha+\beta}(x) =$
$$p_{\alpha+\beta}(x)\,p_{-\beta}(-y)\,p_\alpha(-\mathrm{A}xy)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2y)\,p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{C}x^3y)p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{D}x^3y^2).$$

(6) $p_{2\alpha+\beta}(y)\,p_{\alpha+\beta}(x) = p_{\alpha+\beta}(x)\,p_{2\alpha+\beta}(y)\,p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{H}xy).$

(7) $p_{3\alpha+2\beta}(y)\,p_{-\beta}(-x) = p_{-\beta}(-x)\,p_{3\alpha+2\beta}(y)\,p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{J}xy).$

Faisant de même opérer $\mathrm{int}(w_\alpha)$ sur (1), on trouve

(8) $p_{3\alpha+\beta}(-y)\,p_{-\alpha}(-x) =$
$$p_{-\alpha}(-x)\,p_{3\alpha+\beta}(-y)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}xy)\,p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2y)\,p_\beta(\mathrm{C}x^3y)p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{D}x^3y^2).$$

3.4.5. — Écrivons

$$w_\beta p_\alpha(x)w_\beta^{-1} = p_{\alpha+\beta}(x),$$

soit, $\alpha+2\beta$ n'étant pas racine : **298**

(9) $p_\beta(1)p_\alpha(x)p_\alpha(-1) = p_{-\beta}(1)\,p_{\alpha+\beta}(x)p_{-\beta}(-1).$

[(8)] N.D.E. : On introduit ici des constantes absolues A, B,..., J. Ces constantes vont être déterminées dans les pages qui suivent ; leurs valeurs sont A = B = C = D = 1, E = 2, J = −1, F = G = H = 3, cf. 3.4.8 page 195.

Transformant le premier membre de (9) par (1), puis (4), on obtient :

$$
\begin{aligned}
(10)\quad & p_\beta(1)\, p_\alpha(x)\, p_\beta(-1) \\
&= p_\alpha(x)\, p_\beta(1)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{C}x^3)\, p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{D}x^3)\, p_\beta(-1) \\
&= p_\alpha(x)\, p_\beta(1)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x) p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2)\, p_\beta(-1)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{C}x^3)\, p_{3\alpha+2\beta}((\mathrm{D}-\mathrm{CJ})x^3) \\
&= p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{C}x^3)\, p_{3\alpha+2\beta}((\mathrm{D}-\mathrm{CJ})x^3).
\end{aligned}
$$

Transformons le second membre de (9) par (5), puis (7) :

$$
\begin{aligned}
(11)\quad & p_{-\beta}(1)\, p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(-1) \\
&= p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{-\beta}(1)\, p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2)\, p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{C}x^3)\, p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{D}x^3)\, p_{-\beta}(-1) \\
&= p_{\alpha+\beta}(x)\, p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2)\, p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{C}x^3)\, p_{3\alpha+\beta}((\mathrm{CJ}-\mathrm{D})x^3).
\end{aligned}
$$

Utilisant maintenant (2), ce second membre devient

$$
\begin{gathered}
(12)\quad p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{AE}x^2)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{A}^2\mathrm{F}x^3)\, p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{AG}x^3)\, \times \\
p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{B}x^2)\, p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{C}x^3)\, p_{3\alpha+\beta}((\mathrm{CJ}-\mathrm{D})x^3) = \\
p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{2\alpha+\beta}\big((\mathrm{AE}-\mathrm{B})x^2\big)\, p_{3\alpha+\beta}\big((\mathrm{A}^2\mathrm{F}+\mathrm{CJ}-\mathrm{D})x^3\big)\, p_{3\alpha+2\beta}\big((\mathrm{AG}-\mathrm{C})x^3\big).
\end{gathered}
$$

Donc (9) se récrit :

$$
\begin{gathered}
p_\alpha(x)\, p_{\alpha+\beta}(\mathrm{A}x)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}x^2)\, p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{C}x^3)\, p_{3\alpha+2\beta}((\mathrm{D}-\mathrm{CJ})x^3) = \\
p_\alpha(\mathrm{A}x)\, p_{\alpha+\beta}(x)\, p_{2\alpha+\beta}\big((\mathrm{AE}-\mathrm{B})x^2\big)\, p_{3\alpha+\beta}\big((\mathrm{A}^2\mathrm{F}+\mathrm{CJ}-\mathrm{D})x^3\big)\, p_{3\alpha+2\beta}\big((\mathrm{AG}-\mathrm{C})x^3\big)
\end{gathered}
$$

ce qui donne

$$\mathrm{A}=1, \qquad \mathrm{E}=2\mathrm{B}, \qquad \mathrm{C}+\mathrm{D}=\mathrm{F}+\mathrm{CJ}, \qquad \mathrm{F}=\mathrm{G}.$$

3.4.6. — Écrivons maintenant

$$w_\alpha p_\beta(y) w_\alpha^{-1} = p_{3\alpha+\beta}(-y),$$

299 soit, $4\alpha+\beta$ n'étant pas racine :

$$(13)\qquad p_\alpha(1)\, p_\beta(y)\, p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1)\, p_{3\alpha+\beta}(-y)\, p_{-\alpha}(-1).$$

Transformons le premier membre par (1) :

$$p_\alpha(1)\, p_\beta(y)\, p_\alpha(-1) = p_\beta(y)\, p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{A}y)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}y)\, p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{C}y)\, p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{D}y^2).$$

Transformons le second membre de (13) successivement par (8), (6) et (4) :

$$
\begin{aligned}
& p_{-\alpha}(1)\, p_{3\alpha+\beta}(-y)\, p_{-\alpha}(-1) \\
&= p_{3\alpha+\beta}(-y)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}y)\, p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}y)\, p_\beta(\mathrm{C}y)\, p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{D}y^2) \\
&= p_{3\alpha+\beta}(-y)\, p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}y)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}y)\, p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{ABH}y^2)\, p_\beta(\mathrm{C}y)\, p_{3\alpha+2\beta}(\mathrm{D}y^2) \\
&= p_\beta(\mathrm{C}y)\, p_{3\alpha+\beta}(-y) p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}y)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}y)\, p_{3\alpha+2\beta}((\mathrm{D}-\mathrm{CJ}-\mathrm{ABH})y^2) \\
&= p_\beta(\mathrm{C}y)\, p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}y)\, p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}y)\, p_{3\alpha+\beta}(-y)\, p_{3\alpha+2\beta}((\mathrm{D}-\mathrm{CJ}-\mathrm{ABH})y^2).
\end{aligned}
$$

Donc (13) se récrit :

$$p_\beta(\mathrm{C}y)\,p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{B}y)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{A}y)\,p_{3\alpha+\beta}(-y)\,p_{3\alpha+2\beta}((\mathrm{D}-\mathrm{CJ}-\mathrm{ABH})y^2) = \\ p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(-\mathrm{A}y)\,p_{2\alpha+\beta}(\mathrm{B}y)\,p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{C}y)\,p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{D}y^2)$$

d'où

$$\mathrm{C}=1, \qquad \mathrm{A}=\mathrm{B}, \qquad \mathrm{D}-\mathrm{CJ}-\mathrm{ABH}=-\mathrm{D}.$$

Tenons compte des résultats déjà obtenus :

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}=1, \qquad \mathrm{E}=2, \qquad \mathrm{F}=\mathrm{G}, \\ \mathrm{D}+1=\mathrm{F}+\mathrm{J}, \qquad 2\mathrm{D}=\mathrm{H}+\mathrm{J}.$$

3.4.7. — Écrivons

$$w_\beta p_{3\alpha+\beta}(x) w_\beta^{-1} = p_{3\alpha+2\beta}(x),$$

soit

$$p_\beta(1)\,p_{3\alpha+\beta}(x)\,p_\beta(-1) = p_{-\beta}(1)\,p_{3\alpha+2\beta}(x)\,p_{-\beta}(-1).$$

Transformant le premier membre par (4), le second par (7), on obtient : **300**

$$p_{3\alpha+\beta}(x)\,p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{J}x) = p_{3\alpha+2\beta}(x)\,p_{3\alpha+\beta}(-\mathrm{J}x),$$

soit $\mathrm{J}=-1$.

3.4.8. — Écrivons enfin

$$w_\alpha p_{\alpha+\beta}(y) w_\alpha^{-1} = p_{2\alpha+\beta}(y),$$

soit

$$p_\alpha(1)\,p_{\alpha+\beta}(y)\,p_\alpha(-1) = p_{-\alpha}(1)\,p_\alpha(-1)\,p_{2\alpha+\beta}(y)\,p_\alpha(1)\,p_{-\alpha}(-1).$$

Transformant le premier membre par (2), le second par (3), on obtient :

$$p_{\alpha+\beta}(y)\,p_{2\alpha+\beta}(-\mathrm{E}y)\,p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{F}y)\,p_{3\alpha+2\beta}(-\mathrm{G}y^2) = \\ p_{-\alpha}(1)\,p_{2\alpha+\beta}(y)\,p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{H}y)\,p_{-\alpha}(-1).$$

Il est immédiat de voir que si l'on fait commuter $p_{-\alpha}(-1)$ avec $p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{H}y)$, puis $p_{2\alpha+\beta}(y)$, on n'introduit pas dans le second membre de nouveaux termes en $p_{3\alpha+\beta}$. Celui-ci s'écrit donc, en notant par des parenthèses vides les quantités dont la valeur exacte ne nous importe pas :

$$p_{\alpha+\beta}(\,)\,p_{2\alpha+\beta}(\,)\,p_\beta(\,)\,p_{3\alpha+\beta}(\mathrm{H}y)\,p_{3\alpha+2\beta}(\,).$$

Comparant avec le premier membre, on a aussitôt $\mathrm{F}=\mathrm{H}$, d'où par les résultats antérieurs $2\mathrm{D}=\mathrm{D}+1$, soit $\mathrm{D}=1$, et enfin $\mathrm{F}=\mathrm{G}=\mathrm{H}=2\mathrm{D}-\mathrm{J}=3$, ce qui achève le détermination des coefficients $\mathrm{A},\dots,\mathrm{J}$ et la démonstration de (iii).

3.4.9. — Prouvons enfin (i) à la manière habituelle. On a successivement :

$$w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1} t_\alpha = w_{3\alpha+\beta}^{-1} \cdot t_\alpha,$$
$$w_\beta (w_\alpha w_\beta)^2 = w_\beta w_{3\alpha+\beta}^{-1} w_\beta^{-1} \cdot s_\beta(t_\alpha) \cdot t_\beta = w_{3\alpha+2\beta}^{-1} \cdot t_\alpha t_\beta \cdot t_\beta = w_{3\alpha+2\beta}^{-1} \cdot t_\alpha,$$
$$w_\alpha (w_\beta w_\alpha)^3 = w_\alpha w_{3\alpha+2\beta}^{-1} w_\alpha^{-1} = w_{3\alpha+2\beta}^{-1},$$
$$w_\beta (w_\alpha w_\beta)^4 = w_\beta w_{3\alpha+2\beta}^{-1} w_\beta^{-1} \cdot t_\beta = w_{3\alpha+\beta} \cdot t_\beta,$$
$$w_\alpha (w_\beta w_\alpha)^5 = w_\alpha w_{3\alpha+\beta} w_\alpha^{-1} \cdot s_\alpha(t_\beta) \cdot t_\beta = w_\beta \cdot t_\beta t_\alpha \cdot t_\alpha = w_\beta^{-1}.$$

301 D'où

$$(w_\alpha w_\beta)^6 = (w_\beta w_\alpha)^6 = e.$$

Remarque 3.4.10. — La condition (v) de 2.4 est formée de

$$\text{(A)}\ \begin{cases} \operatorname{int}(h_\alpha h_\beta h_\alpha h_\beta h_\alpha) v_\beta = v_\beta, \\ \operatorname{int}(h_\beta h_\alpha h_\beta h_\alpha h_\beta) v_\alpha = v_\alpha, \end{cases}$$

et, posant

$$v_{\alpha+\beta} = \operatorname{int}(h_\beta) v_\alpha, \qquad v_{2\alpha+\beta} = \operatorname{int}(h_\alpha h_\beta) v_\alpha,$$
$$v_{3\alpha+\beta} = \operatorname{int}(h_\alpha) v_\beta^{-1}; \qquad v_{3\alpha+2\beta} = \operatorname{int}(h_\beta h_\alpha) v_\beta^{-1},$$

302 des relations de commutation :

$$\text{(B)}\ \begin{cases} v_\beta\, v_\alpha = v_\alpha v_\beta\, v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{\alpha+\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}^2\, v_{3\alpha+\beta}^3\, v_{3\alpha+2\beta}^3, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{2\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+\beta}^3, \\ v_{3\alpha+\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{3\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta}\, v_\alpha = v_\alpha\, v_{3\alpha+2\beta}, \end{cases}$$

$$\text{(B)}\ \begin{cases} v_{\alpha+\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{\alpha+\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{2\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{3\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}^{-1}, \\ v_{3\alpha+2\beta}\, v_\beta = v_\beta\, v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{2\alpha+\beta}\, v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}^3, \end{cases} \qquad \text{(B)}\ \begin{cases} v_{3\alpha+\beta}\, v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta}\, v_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{3\alpha+\beta}\, v_{2\alpha+\beta} = v_{2\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta}\, v_{2\alpha+\beta} = v_{2\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}, \\ v_{3\alpha+2\beta}\, v_{3\alpha+\beta} = v_{3\alpha+\beta}\, v_{3\alpha+2\beta}. \end{cases}$$

3.5. Forme explicite du théorème de générateurs et relations

Théorème 3.5.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe épinglé,* T *son tore maximal,* Δ *son système de racines simples,* $u_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S})^\times$ *et* $w_\alpha \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$ *les éléments définis par l'épinglage* ($\alpha \in \Delta$). *Soient*

$$f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad f_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}, \quad \alpha \in \Delta$$

303 *des morphismes de groupes,* H *étant un* S*-faisceau en groupes pour* (fppf) *; soient* $h_\alpha \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$, ($\alpha \in \Delta$) *des sections de* H*, posons* $v_\alpha = f_\alpha(u_\alpha)$, $\alpha \in \Delta$. *Pour qu'il existe un morphisme de groupes*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$$

prolongeant f_{T}, f_α $(\alpha \in \Delta)$ *et vérifiant* $f(w_\alpha) = h_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ (*et alors nécessairement unique*), *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *tout* $\alpha \in \Delta$, *tout* $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ *et tout* $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, *on a*

$$\operatorname{int}(f_{\mathrm{T}}(t))f_\alpha(x) = f_\alpha(\operatorname{int}(t)x) = f_\alpha(x^{\alpha(t)}). \tag{1}$$

(ii) *Pour tout* $\alpha \in \Delta$, *tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tout* $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, *on a*

$$\operatorname{int}(h_\alpha)f_{\mathrm{T}}(t) = f_{\mathrm{T}}(s_\alpha(t)) = f_{\mathrm{T}}(t \cdot \alpha^*\alpha(t)^{-1}). \tag{2}$$

(iii) *Pour tout* $\alpha \in \Delta$, *on a* [9]

$$h_\alpha^2 = f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(-1)), \tag{3_1}$$

$$(h_\alpha v_\alpha)^3 = e. \tag{4}$$

(iv) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$, *tels que* $(\alpha^*, \beta) = 0$ (*resp.* $(\alpha^*, \beta) = -1$, *resp.* $(\alpha^*, \beta) = -2$, *resp.* $(\alpha^*, \beta) = -3$), *on a :*

(a) *la relation* **304**

$$\begin{cases} (h_\alpha h_\beta)^2 = f_{\mathrm{T}}\big(\alpha^*(-1)\beta^*(-1)\big) & \textit{si } (\alpha^*, \beta) = 0; \\ (h_\alpha h_\beta)^3 = e, & \textit{si } (\alpha^*, \beta) = -1; \\ (h_\alpha h_\beta)^4 = f_{\mathrm{T}}\big(\alpha^*(-1)\big), & \textit{si } (\alpha^*, \beta) = -2; \\ (h_\alpha h_\beta)^6 = e, & \textit{si } (\alpha^*, \beta) = -3. \end{cases} \tag{3_2}$$

(b) *Les relations* (A) *et* (B) *de* 3.1.3 (*resp.* 3.2.8, *resp.* 3.3.7, *resp.* 3.4.10).

Cela résulte aussitôt de 2.3, 2.6 et des calculs faits dans chaque cas particulier.

Remarque 3.5.2. — On peut présenter de manière légèrement différente les résultats précédents : on se donne des morphismes, pour $\alpha \in \Delta$,

$$a_\alpha : \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad b_\alpha : \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Z}_\alpha}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{H},$$

et l'on pose

$$h_\alpha = b_\alpha(w_\alpha), \qquad v_\alpha = a_\alpha(u_\alpha);$$

alors les conditions à vérifier sont les suivantes :

(1) tous les a_α $(\alpha \in \Delta)$ et tous les b_α $(\alpha \in \Delta)$ ont même restriction à T ;

(2) les conditions (4) et (iv) de 3.5.1 ci-dessus sont vérifiées.

3.5.4. — 3.5.3 On donnera dans l'exposé suivant diverses applications de ce théorème. **305** Signalons-en ici une : le théorème 3.5.1 donne une description par générateurs et relations de G dans la catégorie des S-faisceaux pour (fppf) ; autrement dit, considérons pour chaque $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ le groupe $\mathrm{H}(\mathrm{S}')$ engendré par $\mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $\alpha \in \mathrm{R}$, et w_α, $\alpha \in \mathrm{R}$, soumis aux relations analogues à (1), (2), (3_1), (4), (3_2), (A), (B) ; alors G n'est autre que le faisceau associé au préfaisceau $\mathrm{S}' \mapsto \mathrm{H}(\mathrm{S}')$.

En particulier, si S′ est le spectre d'un corps algébriquement clos k, on a $\mathrm{G}(\mathrm{S}') = \mathrm{H}(\mathrm{S}')$ (conséquence immédiate du Nullstellensatz sous la forme : « un crible d'un corps

[9] N.D.E. : Les relations (3_1) et (3_2) forment la description du normalisateur du tore, (3_1) étant, comme (4), dans un groupe de rang 1, tandis que (3_2) est dans un groupe de rang 2.

algébriquement clos, couvrant pour (fppf), est trivial »), de sorte que 3.5.1 donne aussitôt une description explicite par générateurs et relations du groupe « abstrait » $\mathrm{G}(k)$. [10]

4. Unicité des groupes épinglés : théorème fondamental

Théorème 4.1. — *Soit* S *un schéma non vide. Le foncteur* $\mathscr{R}$ *de* 1.6 *est* pleinement fidèle *: soient* G *et* G′ *deux* S*-groupes épinglés, p* [11] *un entier* > 0 *tel que* $x \mapsto x^p$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$*, et* $h : \mathscr{R}(\mathrm{G}') \to \mathscr{R}(\mathrm{G})$ *un p-morphisme de données radicielles épinglées. Il existe un unique morphisme de groupes épinglés*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'$$

tel que $\mathscr{R}(f) = h$.

L'unicité est démontrée en 1.9. Il suffit de démontrer l'existence. Par hypothèse, on a une bijection $d : \mathrm{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}'$ et une application $\mathbf{q} : \mathrm{R} \to \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ telle que

$$h(d(\alpha)) = \mathbf{q}(\alpha)\alpha \qquad \text{et} \qquad {}^t h(\alpha^*) = \mathbf{q}(\alpha)d(\alpha)^*$$

306 pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$. En particulier, les rangs semi-simples de G et G′ coïncident.

4.1.1. — Supposons $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}') = 0$. Alors G et G′ sont des tores : on a $\mathrm{G} = \mathrm{T} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, $\mathrm{G}' = \mathrm{T}' = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}')$ et h est simplement un morphisme de groupes ordinaires $h : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$. On prend alors $f = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(h)$.

4.1.2. — Supposons $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}') = 1$. Considérons alors

$$f_{\mathrm{T}} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(h) : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{T}'.$$

Par hypothèse on a un diagramme commutatif, où $\alpha' = d(\alpha)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "\mathbf{q}(\alpha)"] & \mathrm{T} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_{\mathrm{T}}"'] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[d, "\mathbf{q}(\alpha)"] \\
\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha'^*"] & \mathrm{T}' \arrow[r, "\alpha'"] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}.
\end{tikzcd}$$

On applique alors Exp. XX, 4.1.

4.1.3. — Supposons $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}') = 2$. Alors, par Exp. XXI, 7.5.3 on connaît toutes les possibilités pour $h : \mathscr{R}(\mathrm{G}') \to \mathscr{R}(\mathrm{G})$. Étudions-les successivement, en vérifiant chaque fois les conditions de 2.5.

Notons $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, $\Delta' = \{\alpha', \beta'\}$ de façon que $d(\alpha) = \alpha'$, $d(\beta) = \beta'$.

---

[10] N.D.E. : Pour un corps arbitraire k et G simplement connexe, R. Steinberg a donné une présentation du groupe $\mathrm{G}(k)$ dans [**St62**], Th. 3.2, voir aussi [**St67**], § 6, Th. 8.

[11] N.D.E. : Pour éviter un problème de notations plus loin, on a remplacé ici q par p, de sorte que dans ce qui suit, q (resp. q_1) est une puissance arbitraire de p.

4.1.4. — G et G′ de type $A_1 \times A_1$. On a alors

$$h(\alpha') = q\alpha, \qquad h(\beta') = q_1\beta.$$

Montrons que les conditions de 2.5 sont vérifiées : (ii) et (iii) découlent de 3.1.2 (ii) et (iii) ; prouvons (i). On a 307

$$D_S(h)t_{\alpha\beta} = D_S(h)(t_\alpha t_\beta) = {}^t h(\alpha^*)(-1)\cdot {}^t h(\beta^*)(-1) = \alpha'^*((-1)^q)\cdot \beta'^*((-1)^{q_1}).$$

[12] Or, l'hypothèse que $x \mapsto x^p$ soit un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,S}$ (et $S \neq \varnothing$) entraîne que $p = 1$ ou que S est de caractéristique p ; dans tous les cas on a $(-1)^q = -1$ (si q est pair, $p = 2$ et $1 = -1$). Par conséquent,

$$D_S(h)t_{\alpha\beta} = \alpha'^*(-1)\cdot\beta'^*(-1) = t'_{\alpha'\beta'}.$$

Ceci montre que la condition 2.5 (i) est vérifiée.

4.1.5. — G et G′ de type A_2. On a alors

$$h(\alpha') = q\alpha, \qquad h(\beta') = q\beta.$$

Posons $X_{\alpha+\beta} = \mathrm{Ad}(w_\beta)X_\alpha$ et $X'_{\alpha'+\beta'} = \mathrm{Ad}(w_{\beta'})X_{\alpha'}$. Vérifions les conditions de 2.5. Pour (i), on raisonne comme ci-dessus, à l'aide de 3.2.1 (i) ; pour (ii), c'est immédiat par 3.2.1 (ii) ; reste à vérifier (iii). On a à vérifier que

$$p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(z) \longmapsto p'_{\alpha'}(x^q)\,p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'+\beta'}(z^q)$$

est un morphisme de groupes. La seule relation de commutation non triviale est celle de 3.2.1 (iii) qui s'écrit

$$p_\beta(y)\,p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(xy),$$
$$p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'}(x^q) = p'_{\alpha'}(x^q)\,p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'+\beta'}(x^q y^q).$$

4.1.6. — On raisonne de même pour G et G′ de type B_2 (resp. G_2), lorsque les exposants radiciels sont égaux, à l'aide de 3.3.1 (resp. 3.4.1) ; il reste donc à traiter, pour achever le cas des groupes de rang 2, les deux cas exceptionnels de Exp. XXI, 7.5.3.

4.1.7. — G et G′ sont de type B_2, S est de caractéristique 2, on a $\mathbf{q}(\alpha) = 2q$, $\mathbf{q}(\beta) = q$. Les racines positives sont $\{\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta\}$ et $\{\alpha', \beta', \alpha'+\beta', \alpha'+2\beta'\}$ (remarquer 308
que les racines simples « courtes » sont α et β'). On a

$$h(\alpha') = 2q\alpha, \quad h(\beta') = q\beta, \quad h(\alpha'+\beta') = q(2\alpha+\beta), \quad h(\alpha'+2\beta') = 2q(\alpha+\beta),$$

ce qui donne

$$d(\alpha+\beta) = \alpha' + 2\beta', \qquad \mathbf{q}(\alpha+\beta) = 2q,$$
$$d(2\alpha+\beta) = \alpha'+\beta', \qquad \mathbf{q}(2\alpha+\beta) = q.$$

Posons

$$X_{\alpha+\beta} = \mathrm{Ad}(w_\beta)X_\alpha, \qquad X_{2\alpha+\beta} = \mathrm{Ad}(w_\alpha)X_\beta,$$
$$X'_{\alpha'+\beta'} = \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\beta'}, \qquad X'_{\alpha'+2\beta'} = \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'}.$$

Vérifions maintenant les conditions de 2.5.

[12] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(i) Comme S est de caractéristique 2, on a $-1 = 1$ sur S, donc $t_{\alpha\beta} = t_\alpha = \alpha^*(-1) = e = \beta'^*(-1) = t'_{\beta'} = t'_{\alpha'\beta'}$ (cf. 3.3.1 (i)).

(ii) On a par construction

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_\beta &= \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}, & \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{\beta'} &= \mathrm{X}'_{\alpha'+\beta'} = \mathrm{X}'_{d(2\alpha+\beta)};\\ \mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_\alpha &= \mathrm{X}_{\alpha+\beta}, & \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{\alpha'} &= \mathrm{X}'_{\alpha'+2\beta'} = \mathrm{X}'_{d(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

Par 3.3.1 (ii) et le fait que $-1 = 1$ sur S, on a de part et d'autre

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{\alpha+\beta}, && \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{d(\alpha+\beta)} = \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{\alpha'+2\beta'} = \mathrm{X}'_{\alpha'+2\beta'} = \mathrm{X}'_{d(\alpha+\beta)};\\ &\mathrm{Ad}(w_\alpha)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{\beta}, && \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{d(2\alpha+\beta)} = \mathrm{Ad}(w'_{\alpha'})\mathrm{X}'_{\alpha'+\beta'} = \mathrm{X}'_{\beta'} = \mathrm{X}'_{d(\beta)};\\ &\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{\alpha}, && \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{d(\alpha+\beta)} = \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{\alpha'+2\beta'} = \mathrm{X}'_{\alpha'} = \mathrm{X}'_{d(\alpha)};\\ &\mathrm{Ad}(w_\beta)\mathrm{X}_{2\alpha+\beta} = \mathrm{X}_{2\alpha+\beta}, && \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{d(2\alpha+\beta)} = \mathrm{Ad}(w'_{\beta'})\mathrm{X}'_{\alpha'+\beta'} = \mathrm{X}'_{\alpha'+\beta'} = \mathrm{X}'_{d(2\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

309 (iii) Par 3.3.1 (iii), on voit que la seule relation de commutation non triviale dans U (resp. U$'$) est

$$p_\beta(y)\,p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(xy)\,p_{2\alpha+\beta}(x^2y),$$

resp.

$$p'_{\alpha'}(y')\,p'_{\beta'}(x') = p'_{\beta'}(x')\,p'_{\alpha'}(y')\,p'_{\alpha'+\beta'}(x'y')\,p'_{\alpha'+2\beta'}(x'^2y').$$

Il nous faut vérifier que le morphisme

$$p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(z)\,p_{2\alpha+\beta}(t) \longmapsto p'_{\alpha'}(x^{2q})\,p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'+2\beta'}(z^{2q})\,p'_{\alpha'+\beta'}(t^q)$$

est un morphisme de groupes ; on voit aussitôt que cela revient à voir que

$$p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'}(x^{2q}) = p'_{\alpha'}(x^{2q})\,p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'+2\beta'}((xy)^{2q})\,p'_{\alpha'+\beta'}((x^2y)^q),$$

ce qui n'est autre que la seconde relation ci-dessus (en posant $y' = x^{2q}$, $x' = y^q$).

4.1.8. — G et G$'$ sont de type G_2, S est de caractéristique 3, on a $\mathbf{q}(\alpha) = 3q$ et
310 $\mathbf{q}(\beta) = q$. Les racines positives sont $\{\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 3\alpha+2\beta\}$ d'une part, $\{\alpha', \beta', \alpha'+\beta', \alpha'+2\beta', \alpha'+3\beta', 2\alpha'+3\beta'\}$ d'autre part (comme dans le cas précédent, les racines simples courtes sont α et β'). On a

$$\begin{gathered} h(\alpha') = 3q\alpha, \qquad h(\beta') = q\beta, \qquad h(\alpha'+\beta') = q(3\alpha+\beta),\\ h(\alpha'+2\beta') = q(3\alpha+2\beta), \qquad h(\alpha'+3\beta') = 3q(\alpha+\beta),\\ h(2\alpha'+3\beta') = 3q(2\alpha+\beta),\end{gathered}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} d(\alpha+\beta) &= \alpha'+3\beta', & \mathbf{q}(\alpha+\beta) &= 3q,\\ d(2\alpha+\beta) &= 2\alpha'+3\beta', & \mathbf{q}(2\alpha+\beta) &= 3q,\\ d(3\alpha+\beta) &= \alpha'+\beta', & \mathbf{q}(3\alpha+\beta) &= q,\\ d(3\alpha+2\beta) &= \alpha'+2\beta', & \mathbf{q}(3\alpha+2\beta) &= q.\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
&X_{\alpha+\beta} = \operatorname{Ad}(w_\beta)X_\alpha, && X_{2\alpha+\beta} = \operatorname{Ad}(w_\alpha)X_{\alpha+\beta},\\
&X_{3\alpha+\beta} = -\operatorname{Ad}(w_\alpha)X_\beta, && X_{3\alpha+2\beta} = \operatorname{Ad}(w_\beta)X_{3\alpha+\beta};\\
&X'_{\alpha'+\beta'} = -\operatorname{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\beta'}, && X'_{\alpha'+2\beta'} = \operatorname{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'+\beta'},\\
&X'_{\alpha'+3\beta'} = \operatorname{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'}, && X'_{2\alpha'+3\beta'} = \operatorname{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\alpha'+3\beta'}.
\end{aligned}$$

Vérifions maintenant les conditions de 2.5.

(i) On a $t_{\alpha\beta} = e$ et $t'_{\alpha'\beta'} = e$ par 3.4.1 (i).

(ii) On a par construction

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ad}(w_\beta)X_\alpha = X_{\alpha+\beta}, && \operatorname{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'} = X'_{\alpha'+3\beta'} = X'_{d(\alpha+\beta)};\\
&\operatorname{Ad}(w_\alpha)X_\beta = -X_{3\alpha+\beta}, && \operatorname{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\beta'} = -X'_{\alpha'+\beta'} = -X'_{d(3\alpha+\beta)};\\
&\operatorname{Ad}(w_\beta)X_{3\alpha+\beta} = X_{3\alpha+2\beta}, && \operatorname{Ad}(w'_{\beta'})X'_{d(3\alpha+\beta)} = \operatorname{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'+\beta'}\\
& && = X'_{\alpha'+2\beta'} = X'_{d(3\alpha+2\beta)};\\
&\operatorname{Ad}(w_\alpha)X_{\alpha+\beta} = X_{2\alpha+\beta}, && \operatorname{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{d(\alpha+\beta)} = \operatorname{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{\alpha'+3\beta'}\\
& && = X'_{2\alpha'+3\beta'} = X'_{d(2\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Par 3.4.1 (ii), on a de part et d'autre : 311

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ad}(w_\alpha)X_{2\alpha+\beta} = -X_{\alpha+\beta}, && \operatorname{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{d(2\alpha+\beta)} = \operatorname{Ad}(w'_{\alpha'})X'_{2\alpha'+3\beta'}\\
& && = -X'_{\alpha'+3\beta'} = -X'_{d(\alpha+\beta)};\\
&\qquad\dots && \qquad\dots\\
&\operatorname{Ad}(w_\beta)X_{3\alpha+2\beta} = -X_{3\alpha+\beta}, && \operatorname{Ad}(w'_{\beta'})X'_{d(3\alpha+2\beta)} = \operatorname{Ad}(w'_{\beta'})X'_{\alpha'+2\beta'}\\
& && = -X'_{\alpha'+\beta'} = -X'_{d(3\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

(Les pointillés remplacent quatre vérifications du même genre).

(iii) Les seules relations de commutation non triviales dans U et U′ sont par 3.4.1 (iii) (et compte tenu de $3 = 0$ sur S) :

$$p_\beta(y)\,p_\alpha(x) = p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(xy)\,p_{2\alpha+\beta}(x^2y)\,p_{3\alpha+\beta}(x^3y)\,p_{3\alpha+2\beta}(x^3y^2),$$

$$p_{\alpha+\beta}(y)p_\alpha(x) = p_\alpha(x)p_{\alpha+\beta}(y)\,p_{2\alpha+\beta}(-xy),$$

$$p_{3\alpha+\beta}(y)\,p_\beta(x) = p_\beta(x)\,p_{3\alpha+\beta}(y)\,p_{3\alpha+2\beta}(-xy);$$

$$\begin{gathered}
p'_{\alpha'}(y')\,p'_{\beta'}(x') =\\
p'_{\beta'}(x')\,p'_{\alpha'}(y')\,p'_{\alpha'+\beta'}(-x'y')\,p'_{\alpha'+2\beta'}(-{x'}^2y')p'_{\alpha'+3\beta'}(-{x'}^3y')p'_{2\alpha'+3\beta'}(-{x'}^3{y'}^2),
\end{gathered}$$

$$p'_{\alpha'+\beta'}(y')\,p'_{\beta'}(x') = p'_{\beta'}(x')\,p'_{\alpha'+\beta'}(y')\,p'_{\alpha'+2\beta'}(x'y'),$$

$$p'_{\alpha'+3\beta'}(y')p'_{\alpha'}(x') = p'_{\alpha'}(x')\,p'_{\alpha'+3\beta'}(y')\,p'_{2\alpha'+3\beta'}(x'y').$$

Nous avons à vérifier que le morphisme φ de U dans U′ défini par 312

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(&p_\alpha(x)\,p_\beta(y)\,p_{\alpha+\beta}(t)\,p_{2\alpha+\beta}(u)\,p_{3\alpha+\beta}(v)\,p_{3\alpha+2\beta}(w)\Big)\\
&= p'_{\alpha'}(x^{3q})\,p'_{\beta'}(y^q)\,p'_{\alpha'+3\beta'}(t^{3q})\,p'_{2\alpha'+3\beta'}(u^{3q})p'_{\alpha'+\beta'}(v^q)\,p'_{\alpha'+2\beta'}(w^q)
\end{aligned}$$

est un morphisme de groupes. Or on vérifie immédiatement que les trois dernières relations de commutation s'écrivent aussi

$$p'_{\beta'}(y^q)\, p'_{\alpha'}(x^{3q}) =$$
$$p'_{\alpha'}(x^{3q})\, p'_{\beta'}(y^q)\, p'_{\alpha'+3\beta'}((xy)^{3q})\, p'_{2\alpha'+3\beta'}((x^2y)^{3q}) p'_{\alpha'+\beta'}((x^3y)^q) p'_{\alpha'+2\beta'}((x^3y^2)^q),$$
$$p'_{\alpha'+3\beta'}(y^{3q})\, p'_{\alpha'}(x^{3q}) = p'_{\alpha'}(x^{3q})\, p'_{\alpha'+3\beta'}(y^{3q})\, p'_{2\alpha'+3\beta'}(-(xy)^{3q}),$$
$$p'_{\alpha'+\beta'}(y^q)\, p'_{\beta'}(x^q) = p'_{\beta'}(x^q)\, p'_{\alpha'+\beta'}(y^q)\, p'_{\alpha'+2\beta'}(-(xy)^q);$$

ce qui montre que φ est bien un morphisme de groupes et achève la démonstration de 4.1.7.

4.1.9. — Cas où G et G′ sont de rang semi-simple > 2. Pour chaque racine $\alpha \in \Delta$, notons $\alpha' = d(\alpha) \in \Delta' = d(\Delta)$. Pour chaque $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$, considérons les groupes épinglés de rang semi-simple $\leqslant 2$, $Z_{\alpha\beta}$ et $Z'_{\alpha'\beta'}$. Le morphisme de groupes $M' \to M$ sous-jacent à h définit un p-morphisme de données radicielles

$$h_{\alpha\beta} : \mathscr{R}(Z_{\alpha\beta}) \longrightarrow \mathscr{R}(Z'_{\alpha'\beta'}).$$

En vertu des résultats précédents, il existe donc un morphisme de groupes épinglés

$$f_{\alpha\beta} : Z_{\alpha\beta} \longrightarrow Z'_{\alpha'\beta'}$$

313 tel que $\mathscr{R}(f_{\alpha\beta}) = h_{\alpha\beta}$. Prouvons que les $f_{\alpha\beta}$ vérifient la condition de recollement de 2.5 ; en effet $f_{\alpha\beta}|_{Z_\alpha}$ et $f_{\alpha\alpha}$ sont deux morphismes de groupes épinglés

$$Z_\alpha \longrightarrow Z'_{\alpha'}$$

correspondant au même morphisme de données radicielles épinglées, et coïncident donc par le résultat d'unicité déjà démontré. Par 2.5 il existe donc un morphisme de groupes

$$f : G \longrightarrow G'$$

prolongeant les $f_{\alpha\beta}$. Celui-ci est évidemment un morphisme de groupes épinglés tel que $\mathscr{R}(f) = h$, ce qui achève la démonstration du théorème 4.1.

5. Corollaires du théorème fondamental

Le plus important est :

Corollaire 5.1. — *Soient* S *un schéma non vide,* G *et* G′ *deux* S*-groupes épinglés,* h *un isomorphisme de données radicielles épinglées*

$$h : \mathscr{R}(G') \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}(G).$$

Il existe un unique isomorphisme de S*-groupes épinglés*

$$f : G \xrightarrow{\sim} G'$$

tel que $\mathscr{R}(f) = h$.

Notons que 5.1 se déduit aussi de 3.5.1 (les relations de 3.5.1 peuvent s'écrire en utilisant uniquement la donnée de $\mathscr{R}(\mathrm{G})$) ; notons aussi que 5.1 se déduit de la partie la plus élémentaire de la démonstration de 4.1 (on n'a pas besoin de considérer les « isogénies exceptionnelles » de 4.1.7 et 4.1.8).

Corollaire 5.2 (« Théorème d'unicité »). — *Soient* S *un schéma,* G *et* G′ *deux* S-*groupes déployables* (Exp. XXII, 1.13). *Si* G *et* G′ *sont de même type* (Exp. XXII, 2.6), *ils sont isomorphes.* 314

Corollaire 5.3. — *Soient* S *un schéma,* G *et* G′ *deux* S-*groupes déployables. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *et* G′ *sont isomorphes.*

(ii) G *et* G′ *sont isomorphes localement pour la topologie* (fpqc).

(iii) *Il existe un* $s \in \mathrm{S}$ *tel que les* $\overline{s}$-*groupes* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *et* $\mathrm{G}'_{\overline{s}}$ *soient de même type.*

En effet, on a évidemment (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii). D'autre part, (iii) entraîne que $\mathscr{R}(\mathrm{G}) = \mathscr{R}(\mathrm{G}_{\overline{s}}) = \mathscr{R}(\mathrm{G}'_{\overline{s}}) = \mathscr{R}(\mathrm{G}')$, donc que G et G′ vérifient la condition de 4.2.

Corollaire 5.4 (« unicité des schémas de Chevalley »). — *Soient* G *et* G′ *deux groupes réductifs sur* $\mathbb{Z}$ *possédant des tores maximaux déployés.* (*) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *et* G′ *sont isomorphes.*

(ii) *Il existe* $s \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ *tel que* G_s *et* G'_s *soient de même type.*

(iii) $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ *et* $\mathrm{G}'_{\mathbb{C}}$ *sont de même type.*

En effet G et G′ sont déployables par Exp. XXII, 2.2.

Corollaire 5.5 (« Existence d'automorphismes extérieurs »). — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*groupe épinglé,* h *un automorphisme de la donnée radicielle épinglée* $\mathscr{R}(\mathrm{G})$. *Il existe un* unique *automorphisme* u *de* G *respectant son épinglage et tel que* $\mathscr{R}(u) = h$.

Explicitons le corollaire précédent :

Corollaire 5.5. bis. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*groupe réductif déployé,* R_+ *un système de racines positives de* G. *Choisissons pour chaque racine simple* α, *un isomorphisme de groupes vectoriels* $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\alpha$. *Soit* h *un automorphisme de* M *permutant les racines positives et les coracines correspondantes : si* $\alpha \in \mathrm{R}_+$, $h(\alpha) \in \mathrm{R}_+$ *et* $h^\vee(\alpha^*) = h(\alpha)^*$. *Il existe un unique automorphisme* u *de* G *induisant* $\mathrm{D_S}(h)$ *sur* T *et tel que* $u \circ p_\alpha = p_{h(\alpha)}$ *pour toute racine simple* α. 315

Corollaire 5.6. — *Soient* G *et* G′ *deux* S-*groupes réductifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *et* G′ *sont isomorphes localement pour la topologie* (fpqc).

(i bis) G *et* G′ *sont isomorphes localement pour la topologie étale.*

(*) En fait, on peut prouver que tout $\mathbb{Z}$-tore est déployé. [13] N.D.E. : cela résulte de ce que tout $\mathbb{Z}$-tore est isotrivial (Exp. X, 5.16) et de ce que tout revêtement étale de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est trivial.

(ii) *Pour tout* $s \in s$, $G_{\overline{s}}$ *et* $G'_{\overline{s}}$ *sont isomorphes.*

(iii) *Les fonctions* $s \mapsto$ *type de* $G_{\overline{s}}$ *et* $s \mapsto$ *type de* $G'_{\overline{s}}$ *sont égales.*

En effet (i bis) $\Rightarrow$ (i) trivialement, (i) $\Rightarrow$ (ii) par le principe de l'extension finie (EGA IV_3, 9.1.4), (ii) $\Rightarrow$ (iii) trivialement, reste à prouver (iii) $\Rightarrow$ (i bis). Or on peut supposer G et G′ déployables (Exp. XXII, 2.3), auquel cas l'assertion résulte de 5.3.

Corollaire 5.7. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* G′ *un* S*-groupe affine, lisse et à fibres connexes. Soit* $s \in S$ *tel que* $G_{\overline{s}}$ *et* $G'_{\overline{s}}$ *soient isomorphes ; il existe alors un* $S' \to S$ *étale et couvrant* s *tel que* $G_{S'}$ *et* $G'_{S'}$ *soient isomorphes.*

En effet, par Exp. XIX 2.5 et Exp. XXII 2.1, on peut supposer G et G′ réductifs déployables et on est ramené à 5.3.

Dans le cas où S est le spectre d'un corps, on déduit de 5.6 et 5.7 :

316 ***Corollaire 5.8***. — *Soient* k *un corps et* G *et* G′ *deux* k*-groupes réductifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :* [14]

(i) G *et* G′ *sont de même type.*

(ii) $G \otimes_k \overline{k}$ *et* $G' \otimes_k \overline{k}$ *sont isomorphes.*

(iii) *Il existe une extension séparable finie* K *de* k *telle que* $G \otimes_k K$ *et* $G' \otimes_k K$ *soient isomorphes.*

Corollaire 5.9. — *Soient* S *un schéma non vide et* $\mathscr{R}$ *une donnée radicielle. Les conditions suivantes sont équivalentes :* [15]

(i) *Il existe un* S*-groupe épinglé de type* $\mathscr{R}$.

(ii) *Il existe un* S*-groupe de type* $\mathscr{R}$.

(iii) *Il existe localement pour* (fpqc) *un* S*-groupe réductif de type* $\mathscr{R}$.

Il s'agit évidemment de prouver (iii) $\Rightarrow$ (i). Pour simplifier la démonstration, supposons qu'il existe un morphisme fidèlement plat quasi-compact $S' \to S$ et un S′-groupe réductif G′ de type $\mathscr{R}$. On peut supposer G′ déployable ; fixons un épinglage E′ de G′ ; notons $\mathscr{R} = \mathscr{R}(G', E')$. Les deux images réciproques de (G', E') sur $S'' = S' \times_S S'$ sont des groupes épinglés (G''_1, E''_1), (G''_2, E''_2) ; on a des isomorphismes canoniques $p_i : \mathscr{R}(G''_i, E''_i) \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}$, d'où un isomorphisme

$$p = p_2^{-1} \circ p_1 : \quad \mathscr{R}(G''_1, E''_1) \longrightarrow \mathscr{R}(G''_2, E''_2).$$

Par le théorème d'unicité, il existe un unique isomorphisme

$$f : (G''_1, E''_1) \xrightarrow{\sim} (G''_2, E''_2)$$

[14] N.D.E. : Une autre démonstration de ce corollaire, n'utilisant pas la réduction au cas des groupes de rang 2, a été donnée par M. Takeuchi ([**Ta83**], Th. 4.6), voir aussi [**Ja87**], II 1.14.

[15] N.D.E. : Ce corollaire est rendu inutile par l'Exp. XXV, qui montre l'existence d'un groupe déployé de type $\mathscr{R}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, donc sur toute base S. (En fait, on trouve après XXV 1.3 un renvoi au présent corollaire pour assurer que le $\mathbb{Z}$-groupe réductif obtenu est déployé, mais cela résulte déjà de XXII 2.2, cf. la N.D.E. (3) de XXV).

tel que $\mathscr{R}(f) = p$. On a donc sur G' une donnée de recollement ; c'est une donnée de descente.

En effet, il faut vérifier une condition de compatibilité entre les images réciproques de f sur S''', mais il suffit de faire cette vérification sur les transformées de ces flèches **317**
par le foncteur $\mathscr{R}$, car ce dernier est pleinement fidèle. Or p est bien une donnée de descente, par construction, ce qui montre que f en est aussi une. Comme G' est affine, cette donnée de descente est effective ; comme l'épinglage de G' est stable par la donnée de descente, on vérifie aisément qu'il existe un S-groupe épinglé (G, E) qui donne $(\mathrm{G}', \mathrm{E}')$ par extension de la base et qui est donc de type $\mathscr{R}$.

N. B. Naturellement, dans le langage des catégories fibrées, la démonstration précédente se simplifie (et se comprend).

Corollaire 5.10. — *Soit* S *un schéma non vide. Soit $\mathscr{R}$ une donnée radicielle épinglée telle qu'il existe un* S*-groupe réductif de type $\mathscr{R}$. Alors il existe un* S*-groupe épinglé de type $\mathscr{R}$,* unique *à un isomorphisme unique près.*

Définition 5.11. — Sous les conditions précédentes, on notera $\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ l'unique S-groupe épinglé de type $\mathscr{R}$, $\mathrm{T}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})$ son tore maximal canonique, $\mathrm{B}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})$ son sous-groupe de Borel canonique, ...

Si on a un morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (S' non vide), on peut identifier $\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ à $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$. En particulier, si $\mathrm{G}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ existe (on verra que c'est toujours le cas), on le note $\mathrm{G}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ et on a

$$\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}) = \mathrm{G}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}) \underset{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}{\times} \mathrm{S}.$$

On dit que $\mathrm{G}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ est le *schéma en groupes de Chevalley* de type $\mathscr{R}$.

5.12. Il revient donc au même de dire que le S-faisceau en groupes G est un S-groupe réductif de type $\mathscr{R}$ ou de dire qu'il est localement isomorphe (pour la topologie étale ou (fpqc)) à $\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$. De même, en vertu des théorèmes de conjugaison, il revient au même de dire que (G, T) est un S-groupe réductif de type $\mathscr{R}$ muni d'un tore maximal ou qu'il est localement isomorphe à $(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}), \mathrm{T}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}))$; de même avec sous-groupes de Borel ou couples de Killing.

6. Systèmes de Chevalley

318

Les calculs explicites du numéro 3 ont des conséquences numériques importantes. Posons d'abord la définition suivante :

Définition 6.1. — Soient S un schéma, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un S-groupe déployé. On appelle *système de Chevalley* de G une famille $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{R}}$ d'éléments

$$\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$$

vérifiant la condition suivante :

(SC) pour tout couple α, $\beta \in \mathrm{R}$, on a

$$\mathrm{Ad}(w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha))\mathrm{X}_\beta = \pm \mathrm{X}_{s_\alpha(\beta)}.$$

On rappelle (Exp. XX, 3.1) que

$$w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) = \exp(\mathrm{X}_\alpha)\exp(-\mathrm{X}_\alpha^{-1})\exp(\mathrm{X}_\alpha).$$

Remarquons que (SC) entraîne en particulier $\mathrm{X}_{-\alpha} = \pm\mathrm{X}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathrm{R}$, en vertu de la relation (Exp. XX, 2.10) $\mathrm{Ad}(w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha))\mathrm{X}_\alpha = -\mathrm{X}_{-\alpha}$.

Proposition 6.2. — *Tout groupe déployé possède un système de Chevalley. Plus précisément, soit* $(\Delta, (\mathrm{X}'_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ *un épinglage* (1.1) *du groupe déployé* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *; il existe alors un système de Chevalley* $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ *de* G *tel que* $\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{X}'_\alpha$ *pour* $\alpha \in \Delta$.

Montrons d'abord qu'il suffit de vérifier la condition (SC) pour $\alpha \in \Delta$; pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, il existe une suite $\{\alpha_i\} \subset \Delta$ telle que $\alpha = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}(\alpha_{n+1})$, d'où en appliquant la condition (SC) pour chacun des α_i,

$$\mathrm{X}_\alpha = \pm\,\mathrm{Ad}\big(w_{\alpha_1}(\mathrm{X}_{\alpha_1})\cdots w_{\alpha_n}(\mathrm{X}_{\alpha_n})\big)\mathrm{X}_{\alpha_{n+1}}.$$

319 Par 3.1.1 (iii), on a

$$w_{\alpha_1}(\mathrm{X}_{\alpha_1})\cdots w_{\alpha_n}(\mathrm{X}_{\alpha_n})w_{\alpha_{n+1}}(\mathrm{X}_{\alpha_{n+1}})w_{\alpha_n}(\mathrm{X}_{\alpha_n})^{-1}\cdots w_{\alpha_1}(\mathrm{X}_{\alpha_1})^{-1} = \alpha^*(\pm1)w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha).$$

Maintenant, il suffit de remarquer que $w_{\alpha_i}(\mathrm{X}_{\alpha_i})^{-1} = \alpha_i^*(-1)w_{\alpha_i}(\mathrm{X}_{\alpha_i})$ et que pour tout couple de racines (β, γ), on a $\beta(\gamma^*(-1)) = (-1)^{(\gamma^*,\beta)} = \pm1$, ce qui entraîne que si (SC) est vérifié pour les couples (α_i, γ) $(\gamma \in \mathrm{R})$, il l'est pour tout couple (α, β), $(\beta \in \mathrm{R})$.

Construisons maintenant un système $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ de la manière suivante. Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, choisissons une suite $\{\alpha_i\} \subset \Delta$ comme ci-dessus et définissons X_α par

$$\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{Ad}\big(w_{\alpha_i}(\mathrm{X}_{\alpha_1})\ldots w_{\alpha_n}(\mathrm{X}_{\alpha_n})\big)\mathrm{X}'_{\alpha_{n+1}}.$$

Pour vérifier (SC), il suffit de prouver :

Lemme 6.3. — *Soit* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}, \Delta, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ *un* S*-groupe épinglé ; soit* α_i $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$ *une suite de racines simples telle que*

$$\mathrm{int}(s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_n})(\alpha_{n+1}) = \alpha_0.$$

Alors

$$\mathrm{Ad}(w_{\alpha_1}\cdots w_{\alpha_n})\mathrm{X}_{\alpha_{n+1}} = \pm\mathrm{X}_{\alpha_0}.$$

Raisonnant comme dans 2.3.4 à l'aide du lemme de Tits (Exp. XXI 5.6), on est ramené à vérifier le lemme 6.3 dans les deux cas suivants :

a) G est de rang semi-simple au plus 2 *ou* b) $w_{\alpha_1}\cdots w_{\alpha_n}$ est une section de T. Dans le cas a), remarquons que 6.3 est une conséquence de 6.2 et que 6.2 a été vérifié dans la partie (i) de 3.1.2 (resp. 3.2.1, resp. 3.3.1, resp. 3.4.1).

320 Reste donc à prouver 6.3 dans le cas b), ou, ce qui revient au même, que si $\{\alpha_i\}$ est une suite de racines simples telle que $s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_n} = \mathrm{id}$, alors $t = w_{\alpha_1}\cdots w_{\alpha_n}$ vérifie $\alpha(t) = \pm1$ pour toute racine $\alpha \in \mathrm{R}$. En vertu de la structure du groupe de Weyl (Exp. XXI, 5.1), le mot $s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_n}$ du groupe libre engendré par les s_α, $\alpha \in \Delta$ est

dans le sous-groupe invariant engendré par les $(s_\alpha s_\beta)^{n_{\alpha\beta}}$, $(\alpha,\beta)\in\Delta\times\Delta$. On est donc ramené au cas où $s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_n}$ est de la forme

$$s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_i}(s_{\alpha_{i+1}}s_{\alpha_{i+2}})^{n_{\alpha_{i+1}\,\alpha_{i+2}}}s_{\alpha_i}\cdots s_{\alpha_1}.$$

Alors on a

$$t = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_i}(t_{\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}}),$$

et on est ramené à vérifier que pour tout couple de racines simples (α_1,α_2) et toute racine $\beta\in\mathrm{R}$, on a $\beta(t_{\alpha_1\alpha_2})=\pm1$, ce qui est trivial, vu les valeurs de $t_{\alpha_1\alpha_2}$ calculées au n°3 (partie (i) de 3.1.2, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1).

Proposition 6.4. — *Soient* $(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$ *un* S*-groupe déployé,* $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ *un système de Chevalley de* G*. Soient* α *et* β *deux racines non proportionnelles ; supposons*

$$\operatorname{long}(\alpha)\leqslant\operatorname{long}(\beta),\quad \textit{i.e.}\quad |(\beta^*,\alpha)|\leqslant|(\alpha^*,\beta)|.$$

Soient q *et* $p-1$ *les entiers* $\geqslant 0$ *tels que l'ensemble des racines de la forme* $\beta+k\alpha$, $k\in\mathbb{Z}$*, soit*

$$\{\beta-(p-1)\alpha,\dots,\beta,\dots,\beta+q\alpha\}.$$

(cf. Exp. XXI, 2.3.5 *; d'après loc. cit., on a donc* $-(\alpha^*,\beta)=q-p+1$*). Alors la relation de commutation entre* U_α *et* U_β *est donnée par le tableau suivant (qui épuise les cas possibles, car la longueur de la chaîne de racines précédentes est* $p+q-1\leqslant 3$*), où* **321**
on note pour chaque $\gamma\in\mathrm{R}$*,* $p_\gamma(x)=\exp(x\mathrm{X}_\gamma)$ *:*

(p,q)	$p_\beta(y)\,p_\alpha(x)\,p_\beta(-y)\,p_\alpha(-x)$
$(-,0)$	$=e$
$(1,1)$	$=p_{\alpha+\beta}(\pm xy)$
$(1,2)$	$=p_{\alpha+\beta}(\pm xy)\,p_{2\alpha+\beta}(\pm x^2y)$
$(1,3)$	$=p_{\alpha+\beta}(\pm xy)\,p_{2\alpha+\beta}(\pm x^2y)\,p_{3\alpha+\beta}(\pm x^3y)\,p_{3\alpha+2\beta}(\pm x^3y^2)$
$(2,1)$	$=p_{\alpha+\beta}(\pm 2xy)$
$(2,2)$	$=p_{\alpha+\beta}(\pm 2xy)\,p_{2\alpha+\beta}(\pm 3x^2y)\,p_{\alpha+2\beta}(\pm 3xy^2)$
$(3,1)$	$=p_{\alpha+\beta}(\pm 3xy)$

Démonstration. En vertu de Exp. XXI, 3.5.4, il existe un système de racines simples Δ de R vérifiant : $\alpha\in\Delta$ et il existe $\alpha'\in\Delta$ et $a,b\in\mathbb{Q}_+$ tels que $\beta=a\alpha+b\alpha'$. Considérons l'épinglage $(\Delta,(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G. La relation de commutation à vérifier est une relation entre éléments de $\mathrm{U}_{\alpha\alpha'}$; on est donc ramené aux calculs explicites du n°3, et on conclut aussitôt par la condition (SC).

Corollaire 6.5 (Règle de Chevalley). — *Soient* S *un schéma,* $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{R}}$ *un système de* **322**
Chevalley du S*-groupe déployé* G*. Si* α*,* β*,* $\alpha+\beta\in\mathrm{R}$*, alors*

$$[\mathrm{X}_\alpha,\mathrm{X}_\beta]=\pm p\,\mathrm{X}_{\alpha+\beta},$$

où p *est le plus petit entier* >0 *tel que* $\beta-p\alpha$ *ne soit pas racine.*

En effet, comme l'assertion est symétrique en α et β, on peut supposer $\operatorname{long}(\alpha)\leqslant\operatorname{long}(\beta)$, et on est ramené à 6.4.

Corollaire 6.6. — *Soient* S *un schéma tel que* $6 \cdot 1_{\mathrm{S}} \neq 0$ *et* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ *un* S-*groupe déployé. Si* R' *est une partie de* R *telle que*

$$(*) \qquad \mathfrak{g}_{\mathrm{R}'} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}'} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

soit une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, *alors* R' *est une partie* close *de* R (Exp. XXI, 3.1.4).

[16] En effet, soit $(\mathrm{X}_\gamma)_{\gamma \in \mathrm{R}^+}$ un système de Chevalley de $\mathfrak{g}$ et soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}'$ tels que $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$. D'après 6.5 et 6.4, on a

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = \pm p \mathrm{X}_{\alpha+\beta}, \qquad \text{avec} \quad p \in \{1, 2, 3\}$$

et comme ni 2 ni 3 ne sont nuls sur S ceci entraîne, d'après $(*)$, que $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}'}$ contient $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$, et donc $\alpha + \beta \in \mathrm{R}'$. [17]

6.7. Il est possible de préciser la valeur exacte des divers $\pm$ de ce numéro, grâce à l'étude du groupe $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ et plus précisément, du « groupe de Weyl étendu » :

$$\mathrm{W}^* = \mathrm{N}(\mathbb{Z}), \quad \text{où} \quad \mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{\acute{E}p}}(\mathscr{R})}(\mathrm{T}_{\mathbb{Z}}(\mathscr{R}))$$

(cf. 5.11) qui est une extension de $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ par un groupe abélien de type $(2, 2, \ldots 2)$, qui est « responsable des signes » [(*)] [18].

Remarque 6.7.1. — [19] Noter que, d'après le point (i) de 3.1.2 et 3.n.1 ($n = 2, 3, 4$), les éléments w_α et w_β de $\mathrm{N}(\mathbb{Z})$ vérifient les « relations de tresses » :

$$w_\alpha w_\beta \cdots = w_\beta w_\alpha \cdots \qquad (n_{\alpha\beta} \text{ facteurs dans chaque terme}).$$

(voir aussi [**Ti66**], [**BLie**], § IX.4, Ex. 12, et [**Sp98**], 9.3.2).

[(*)] cf. J. Tits : *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples*, Publ. Math. I.H.É.S. 31 (1966), 21-58.

[16] N.D.E. : On a ajouté la démonstration qui suit. Notons qu'il suffit que 2 et 3 soient non nuls sur S ; par exemple le résultat est valable pour $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.

[17] N.D.E. : D'autre part, signalons que si $2 = 0$ sur S et si R est de type C_n, alors l'ensemble R' des racines courtes (qui est un système de racines de type D_n) n'est *pas clos* dans R, mais est une partie de type (R) de R, symétrique (cf. XXII 5.4.2 et 5.4.10), i.e. il lui correspond un sous-groupe $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ de type (R) de G à fibres réductives : ceci est en particulier le cas pour le plongement naturel (en caractéristique 2) de $\mathrm{SO}(2n)$ dans $\mathrm{Sp}(2n)$. De même, si $2 = 0$ sur S et R est de type F_4 (resp. si $3 = 0$ sur S et R est de type G_2), l'ensemble R' des racines courtes (qui est un système de racines de type D_4 (resp. A_2)) n'est *pas clos* dans R, mais correspond à un sous-groupe $\mathrm{H}_{\mathrm{R}'}$ de type (R) de G, à fibres réductives.

[18] N.D.E. : voir aussi [**Ti66**].

[19] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

Bibliographie

(20)

[BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. IX, Masson, 1982.

[Ja87] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Academic Press, 1987, 2nd ed., Amer. Math. Soc., 2003.

[Sp98] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, 2nd ed., Birkhaüser, 1998.

[St62] R. Steinberg, *Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques*, Colloque sur la théorie des groupes algébriques (Bruxelles 1962), Univ. Louvain & Gauthier-Villars, 1962 (pp. 133-147 *in* R. Steinberg Collected Papers, Amer. Math. Soc., 1997).

[St67] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University (1967).

[Ta83] M. Takeuchi, *A hyperalgebraic proof of the isomorphism and isogeny theorems for reductive groups*, J. Algebra **85** (1983), 179-196.

[Ti66] J. Tits, *Normalisateurs de tores* I. *Groupes de Coxeter étendus*, J. Algebra **4** (1969), 96-116.

[20] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé.

EXPOSÉ XXIV

AUTOMORPHISMES DES GROUPES RÉDUCTIFS

par M. Demazure

La première partie de cet exposé (n°1 à 5) est une conséquence directe de l'existence **323**
pour un groupe réductif de « suffisamment d'automorphismes extérieurs », résultat qui est une conséquence de la forme la plus faible du théorème d'isomorphisme des groupes épinglés. La seconde partie (n°6 et 7) expose deux applications des résultats plus précis de l'exposé précédent ; en particulier, le n°7 utilise le théorème de générateurs et relations sous sa forme explicite. Enfin, nous avons donné en appendice (n°8) des résultats de cohomologie « galoisienne » utilisés dans le texte.

Précisons nos notations cohomologiques : si S est un schéma et G un S-schéma en groupes, on notera $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G})$ le premier ensemble de cohomologie de S à coefficients dans G, calculé pour la topologie (fpqc) ; c'est aussi l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux (fpqc) principaux homogènes sous G. On notera $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{S},\mathrm{G})$ l'ensemble correspondant pour la topologie étale ; c'est donc la partie de $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G})$ formée des classes de faisceaux homogènes sous G qui sont quasi-isotriviaux (= localement triviaux pour la topologie étale). On notera $\mathrm{Fib}(\mathrm{S},\mathrm{G})$ la partie de $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G})$ formée
des classes de faisceaux représentables (fibrés principaux homogènes). On a donc les **324**
inclusions

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{S},\mathrm{G}) \subset \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G}),$$

$$\mathrm{Fib}(\mathrm{S},\mathrm{G}) \subset \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G}).$$

Si tout faisceau principal homogène sous G est représentable (par exemple si G est quasi-affine sur S, cf. SGA 1, VIII 7.9), on a donc $\mathrm{Fib}(\mathrm{S},\mathrm{G}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G})$.

Si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est un morphisme couvrant pour la topologie (fpqc), on note $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S},\mathrm{G})$ le noyau de l'application canonique $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{S}',\mathrm{G}_{\mathrm{S}'})$. On sait que $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S},\mathrm{G})$ peut se calculer de manière simpliciale (TDTE I, § A.4), ce qui implique que lorsque $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est couvrant pour la topologie étale, $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S},\mathrm{G})$ est aussi le noyau de $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{S},\mathrm{G}) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{S}',\mathrm{G}_{\mathrm{S}'})$.

Enfin, suivant Exp. VIII, 4.5, on appelle « théorème 90 » l'assertion suivante : « tout faisceau principal homogène sous $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est représentable et localement trivial », assertion équivalente à « $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) = \mathrm{Pic}(\mathrm{S})$ », ou encore à « $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) = 0$ pour S local (ou plus généralement semi-local) ».

1. Schéma des automorphismes d'un groupe réductif

1.0. Il convient d'abord de préciser certaines définitions de l'exposé précédent. Soient S un schéma non vide, G un S-groupe réductif, $\mathscr{R} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*, \Delta)$ une donnée radicielle réduite épinglée (Exp. XXIII 1.5). On appelle *épinglage de* G *de type* $\mathscr{R}$, ou $\mathscr{R}$*-épinglage de* G, la donnée :

(i) d'un isomorphisme de $\mathrm{D_S}(\mathrm{M})$ sur un tore maximal T de G (ou, ce qui revient
325 au même, d'un monomorphisme $\mathrm{D_S}(\mathrm{M}) \to \mathrm{G}$ dont l'image soit un tore maximal T de G), identifiant R à un système de racines de G relativement à T (Exp. XIX, 3.6) et R^* à l'ensemble des coracines correspondantes,

(ii) pour chaque $\alpha \in \Delta$, d'un $\mathrm{X}_\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$.

Pour que G possède un $\mathscr{R}$-épinglage, il faut et il suffit qu'il soit déployable et de type $\mathscr{R}$ (Exp. XXII, 2.7).

Si $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est un isomorphisme de S-groupes réductifs, à tout $\mathscr{R}$-épinglage $\mathcal{E}$ de G correspond par « transport de structure » un $\mathscr{R}$-épinglage $u(\mathcal{E})$ de G'. Si $v : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ est un isomorphisme de données radicielles épinglées, à tout $\mathscr{R}'$-épinglage $\mathcal{E}$ de G correspond par transport de structure un $\mathscr{R}$-épinglage $v(\mathcal{E})$ de G.

Appelons *groupe épinglé* un triplet $(\mathrm{G}, \mathscr{R}, \mathcal{E})$ où G est un S-groupe réductif, $\mathscr{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée, et $\mathcal{E}$ un épinglage de G de type $\mathscr{R}$. On appelle *isomorphisme* du groupe épinglé $(\mathrm{G}, \mathscr{R}, \mathcal{E})$ sur le groupe épinglé $(\mathrm{G}', \mathscr{R}', \mathcal{E}')$ un couple (u, v) où u est un isomorphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ et v un isomorphisme de données radicielles épinglées $v : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$, tels que $u(\mathcal{E}) = v(\mathcal{E}')$. [(1)]

N. B. *Si* S *est non vide*, v est uniquement déterminé par u, et on dira aussi par abus de langage que u est un isomorphisme des groupes épinglés. En particulier, si $(\mathrm{G}, \mathscr{R}, \mathcal{E})$ est un groupe épinglé, un automorphisme de $(\mathrm{G}, \mathscr{R}, \mathcal{E})$ est donc un automorphisme u de G tel qu'il existe un automorphisme v de R tel que $u(\mathcal{E}) = v(\mathcal{E})$; c'est donc
326 un automorphisme de G, normalisant T, induisant sur T un automorphisme de la forme $\mathrm{D_S}(h)$, où h est un automorphisme de M, et permutant entre eux les éléments X_α, $\alpha \in \Delta$. (Comme on le voit facilement, les conditions précédentes caractérisent d'ailleurs les automorphismes de $(\mathrm{G}, \mathscr{R}, \mathcal{E})$).

On a un foncteur contravariant évident

$$\mathcal{R} : \quad (\mathrm{G}, \mathscr{R}, \mathcal{E}) \mapsto \mathscr{R}, \qquad (u, v) \mapsto v$$

et le résultat principal de l'exposé précédent (Exp. XXIII, 4.1) nous montre que c'est un foncteur pleinement fidèle (nous verrons d'ailleurs dans l'exposé suivant que c'est une équivalence de catégories). Il s'ensuit en particulier que le groupe des automorphismes de $(\mathrm{G}, \mathscr{R}, \mathcal{E})$ est canoniquement isomorphe au groupe des automorphismes de la donnée radicielle épinglée $\mathscr{R}$ (cf. Exp. XXIII, 5.5).

1.1. Soit S un schéma ; munissons $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ de la topologie (fpqc) et considérons le S-faisceau en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$, où G est un S-schéma en groupes. On a une suite

(1) N.D.E. : Donc $\mathrm{Lie}(u)(\mathrm{X}_{v(\alpha)}) = \mathrm{X}'_\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}'$.

exacte de S-faisceaux en groupes

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G} \xrightarrow{\mathrm{int}} \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$$

qui définit un monomorphisme

$$j : \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}).$$

Le faisceau image de j est le faisceau des automorphismes intérieurs de G ; pour qu'un automorphisme u de G soit intérieur, il faut et il suffit qu'il existe une famille couvrante $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ et pour chaque i un $g_i \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_i)$ tel que $\mathrm{int}(g_i) = u_{\mathrm{S}_i}$. Dans ce cas, si v est un autre automorphisme de G, on voit aussitôt que $\mathrm{int}(v)u = vuv^{-1}$ est l'automorphisme intérieur défini par la famille $g'_i = v(g_i)$. Il s'ensuit que l'image de j 327
est distinguée dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$. Le faisceau en groupes quotient, noté $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$, est le faisceau des automorphismes extérieurs de G. On a donc une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G}) \longrightarrow 1.$$

Les définitions précédentes sont toutes compatibles avec les changements de base. Elles sont naturellement valables dans tout site.

1.2. Soient S un schéma et $(\mathrm{G}, \mathscr{R}, \mathcal{E})$ un groupe réductif épinglé. Soit E le groupe (abstrait) des automorphismes de la donnée radicielle épinglée $\mathscr{R}$, i.e. le groupe des automorphismes de $\mathscr{R}$ normalisant Δ. Par Exp. XXIII, 5.5, on a un monomorphisme canonique

$$\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$$

qui associe à $h \in \mathrm{E}$ l'*unique* automorphisme u du groupe épinglé G tel que $\mathcal{R}(u) = h$. Ce monomorphisme définit canoniquement un monomorphisme de faisceaux

$$(*) \qquad a : \quad \mathrm{E}_{\mathrm{S}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}).$$

Pour qu'un automorphisme u de G soit une section du faisceau image de a, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) u normalise T. On sait alors que u permute les racines de G relativement à T. Si $\alpha \in \mathrm{R}$, alors $u(\alpha) : t \mapsto \alpha(u^{-1}(t))$ est donc localement sur S de la forme $t \mapsto \beta(t)$, avec $\beta \in \mathrm{R}$. La seconde condition s'écrit alors comme suit :

(ii) Si $\alpha \in \Delta$ et si U est un ouvert de S tel que $u(\alpha)_{\mathrm{U}} \in \mathrm{R}$, alors $u(\alpha)_{\mathrm{U}} \in \Delta$ et 328

$$\mathscr{L}ie(u_{\mathrm{U}})(\mathrm{X}_\alpha)_{\mathrm{U}} = (\mathrm{X}_{u(\alpha)})_{\mathrm{U}}.$$

Il résulte aussitôt des définitions que les sections de $a(\mathrm{E}_{\mathrm{S}})$ normalisent les sous-groupes de G définis par l'épinglage : T, B, B^-, U, U^-.

Ces définitions posées, on a :

Théorème 1.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif. Considérons la suite exacte canonique de* S*-faisceaux en groupes* [2]

$$1 \longrightarrow \mathrm{ad}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}) \xrightarrow{p} \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G}) \longrightarrow 1.$$

[2] N.D.E. : On rappelle que $\mathrm{ad}(\mathrm{G}) = \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ désigne le *groupe adjoint* de G, cf. XXII 4.3.6.

(i) $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$ *est représentable par un* S-*schéma* lisse et séparé.

(ii) $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$ *est représentable par un* S-*schéma* constant tordu à engendrement fini (Exp. X, 5.1).

(iii) *Si* G *est déployable, la suite exacte précédente est scindée. Plus précisément, pour tout épinglage de* G, *le morphisme* (cf. 1.2 (∗))

$$p \circ a : \quad \mathrm{E_S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$$

est un isomorphisme.

Montrons d'abord comment le théorème se déduit du lemme suivant :

Lemme 1.4. — *Sous les hypothèses de* (iii), $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$ *est le produit semi-direct* $a(\mathrm{E_S}) \cdot \mathrm{ad}(\mathrm{G})$. [3]

Le lemme entraîne aussitôt le théorème lorsque G est déployable. Comme G est
329 localement déployable pour la topologie étale (Exp. XXII, 2.3), donc aussi pour la topologie (fppf), et que celle-ci est « de descente effective » pour la catégorie fibrée des morphismes constants tordus (Exp. X, 5.5), on en déduit (ii) dans le cas général (cf. Exp. IV, 4.6.8). Pour en déduire (i), on remarque que ad(G) est affine sur S, donc le morphisme p affine lorsque $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$ est représentable, et on conclut par descente des schémas affines. [4]

Il ne nous reste donc qu'à prouver 1.4. Pour ce faire, il suffit de prouver :

Lemme 1.5. — *Si* $(\mathscr{R}, \mathcal{E})$ *et* $(\mathscr{R}', \mathcal{E}')$ *sont deux épinglages du* S-*groupe réductif* G, *il existe un* unique *automorphisme intérieur* u *de* G *sur* S *transformant un épinglage en l'autre* (*i.e. tel qu'il existe* $v : \mathscr{R}' \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}$ *tel que* $u(\mathcal{E}) = v(\mathcal{E}')$, *cf.* 1.0).

1.5.1. Unicité. — Il suffit de prouver que si G est un S-groupe épinglé et si $\mathrm{int}(g)$ est un automorphisme de groupe épinglé ($g \in \mathrm{G(S)}$), alors $\mathrm{int}(g) = \mathrm{id}$. Or on a d'abord $\mathrm{int}(g)\mathrm{T} = \mathrm{T}$, $\mathrm{int}(g)\mathrm{B} = \mathrm{B}$, donc $g \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}) \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B})(\mathrm{S}) = \mathrm{T(S)}$ (cf. par exemple Exp. XXII, 5.6.1). Il s'ensuit que $\mathrm{int}(g)$ normalise chaque U_α et que

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{int}(g))\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{Ad}(g)\mathrm{X}_\alpha = \alpha(g)\,\mathrm{X}_\alpha$$

pour tout $\alpha \in \Delta$. On a donc $\alpha(g) = 1$ pour $\alpha \in \Delta$, donc $g \in \bigcap_{\alpha\in\Delta}(\mathrm{Ker}\,\alpha)(\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})(\mathrm{S})$ (Exp. XXII, 4.1.8). C.Q.F.D.

1.5.2. Existence. — Il suffit de la prouver localement pour la topologie (fpqc). Soient

$$(\mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}, \Delta, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\Delta}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{T}', \mathrm{M}', \mathrm{R}', \Delta', (\mathrm{X}'_{\alpha'})_{\alpha'\in\Delta'})$$

330 les deux épinglages. Par conjugaison des tores maximaux, on peut supposer $\mathrm{T} = \mathrm{T}'$. Quitte à restreindre S, on peut supposer que l'isomorphisme $\mathrm{D_S(M)} \simeq \mathrm{D_S(M')}$ provient d'un isomorphisme $\mathrm{M} \simeq \mathrm{M}'$ transportant R sur R′, et on est ramené à la situation $\mathrm{T} = \mathrm{T}'$, $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$, $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$. Comme les systèmes de racines simples sont conjugués par le groupe de Weyl (Exp. XXI, 3.3.7), on peut également supposer $\Delta =$

[3] N.D.E. : On a remplacé ici et dans la suite la notation int(G) par ad(G).

[4] N.D.E. : cf. SGA 1, VIII 2.1.

Δ'. Il existe alors pour chaque $\alpha \in \Delta$ un scalaire $z_\alpha \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{X}'_\alpha = z_\alpha \mathrm{X}_\alpha$, et il suffit de construire localement pour (fpqc) une section t de T telle que $\alpha(t) = z_\alpha$ pour chaque $\alpha \in \Delta$. Mais le morphisme $\mathrm{T} \to (\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})^\Delta$ de composantes $\{\alpha,\ \alpha \in \Delta\}$ est le dual d'une *injection* $\mathbb{Z}^\Delta \to \mathrm{M}$, donc est fidèlement plat, ce qui achève la démonstration de 1.5.2 et donc de 1.3.

Corollaire 1.6. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*groupe réductif. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$ *est affine* (*resp. de type fini, resp. de présentation finie, resp. quasi-compact*) *sur* S.

(ii) $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$ *est fini sur* S.

(iii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *on a* $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}_s) - \mathrm{rgss}(\mathrm{G}_s) \leqslant 1$.

En effet, comme ad(G) est affine, plat et de présentation finie sur S, le morphisme $p : \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}) \to \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$ est affine, fidèlement plat et de présentation finie.

Si $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$ est fini sur S, il est affine sur S, donc aussi $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$, ce qui prouve (ii) $\Rightarrow$ (i). Si $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$ est quasi-compact sur S, il est de présentation finie sur S (étant de toute façon localement de présentation finie et séparé sur S) ; par Exp. V, **331**
9.1, $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$ est alors de présentation finie sur S, donc fini, ce qui prouve (i) $\Rightarrow$ (ii). Enfin, pour prouver l'équivalence de (ii) et (iii), on peut supposer G déployé, et on est ramené à Exp. XXI, 6.7.8.

Corollaire 1.7. — *Soient* S *un schéma et* G *un* S-*groupe réductif. Alors, on a* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})^0 \simeq \mathrm{ad}(\mathrm{G})$.

Corollaire 1.8. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*groupe réductif,* H *un* S-*schéma en groupes lisse, affine et à fibres connexes sur* S. *Alors le* S-*foncteur*

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$$

est représentable par un S-*schéma lisse et séparé* (*qui est affine sur* S *si* G *est semi-simple*).

En effet, soit U l'ensemble des points s de S tels que $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ soit réductif ; c'est un ouvert (Exp. XIX, 2.6) ; si S′ est un S-schéma, $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ est réductif si et seulement si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par U. Il s'ensuit que le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \to \mathrm{S}$ se factorise par U. On peut donc supposer S = U et on est ramené à :

Corollaire 1.9. — *Soient* S *un schéma,* G *et* G′ *deux* S-*groupes réductifs. Alors*

$$\mathrm{F} = \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$$

est représentable par un S-*schéma lisse et séparé* (*affine si* G *ou* G′ *est semi-simple*).
De plus, S *se décompose en somme de deux sous-schémas ouverts* S_1 *et* S_2 *tels que* **332**
$\mathrm{F}_{\mathrm{S}_1} = \varnothing$ *et que* $\mathrm{F}_{\mathrm{S}_2}$ *soit un fibré principal homogène à gauche* (*resp. droite*) *sous* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S}_2\text{-gr.}}(\mathrm{G}'_{\mathrm{S}_2})$ (resp. $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S}_2\text{-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}_2})$).

En effet, soit S_2 l'ensemble des points de S où G et G′ sont de même type, et soit S_1 son complémentaire.

Comme le type d'un groupe réductif est une fonction localement constante, S_1 et S_2 sont ouverts. Il est clair que $F_{S_1} = \varnothing$, et on peut supposer $S = S_2$. Par Exp. XXIII, 5.6, F est un faisceau principal homogène sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G)$, localement trivial pour la topologie étale. Il s'ensuit que $F_0 = F/\operatorname{ad}(G)$ est un faisceau principal homogène sous $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$, localement trivial pour la topologie étale, donc représentable (Exp. X, 5.5). Comme ad(G) est affine, F est donc aussi représentable.

Remarquons qu'en cours de démonstration, on a obtenu :

Corollaire 1.10. — *Soient* S *un schéma,* G *et* G′ *deux* S*-groupes réductifs de même type en chaque* $s \in S$. *Alors* ad(G) *opère librement (à droite) dans* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G')$, *le faisceau quotient*

$$\underline{\mathrm{Isomext}}(G, G') = \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G')/\operatorname{ad}(G)$$

est représentable par un S*-schéma constant tordu, qui est un fibré principal homogène sous* $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ (*et qui est donc fini sur* S *si* G *est semi-simple*)*. De plus, l'isomorphisme*

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G') \simeq \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G', G)$$

défini par $u \mapsto u^{-1}$ *induit un isomorphisme*

$$\underline{\mathrm{Isomext}}(G, G') \simeq \underline{\mathrm{Isomext}}(G', G).$$

333 ***Remarque 1.11***. — Si $\underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')(S) \neq \varnothing$, on dit que G est une *forme tordue intérieure* de G′ ; alors G′ est une forme tordue intérieure de G ; on peut alors réduire le groupe structural de $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G')$ à ad(G). Plus précisément, soit $u \in \underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')(S)$, considéré comme une section $u : S \to \underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')$. Notons

$$\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G, G')$$

l'image réciproque par le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G') \to \underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')$ du sous-schéma fermé de $\underline{\mathrm{Isomext}}(G, G')$ image de u. L'opération naturelle de ad(G) sur $\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G, G')$ munit ce schéma d'une structure de fibré principal homogène ; par extension du groupe structural[(5)] $\operatorname{ad}(G) \to \underline{\mathrm{Aut}}(G)$, $\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G, G')$ redonne $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G')$.

Par le lemme de Hensel (Exp. XI, 1.11), 1.8 donne aussitôt :

Corollaire 1.12. — *Soient* S *un schéma* local hensélien, G *un* S*-groupe réductif,* G′ *un* S*-groupe lisse affine à fibres connexes, s le point fermé de* S. *Si* G_s *et* G'_s *sont des* $\kappa(s)$*-groupes algébriques isomorphes,* G *et* G′ *sont isomorphes. Plus précisément, tout* $\kappa(s)$*-isomorphisme* $G_s \simeq G'_s$ *provient d'un* S*-isomorphisme* $G \simeq G'$.

Appliquant maintenant 1.7 (resp. 1.12) au schéma des nombres duaux sur un corps, on déduit de Exp. III, 2.10 (resp. 3.10) le point (i) (resp. (ii)) du corollaire suivant.

Corollaire 1.13. — *Soient k un corps et* G *un k-groupe réductif.*

(5)N.D.E. : On a corrigé $\operatorname{ad}(G) \to \underline{\mathrm{Autext}}(G)$ en $\operatorname{ad}(G) \to \underline{\mathrm{Aut}}(G)$.

(i) *Si* G *est adjoint, on a* $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/k)) = 0$. [6]

(ii) *On a* $\mathrm{H}^2(\mathrm{G}, \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/k)) = 0$.

Remarque 1.14. — (i) L'assertion concernant le H^1 était connue (Chevalley) ; celle concernant le H^2 a été démontrée dans la plupart des cas de la classification par **334**
Chevalley.

(ii) En fait, la conjonction de 1.13 et du théorème d'unicité sur un corps algébriquement clos est essentiellement équivalente au théorème d'unicité. Une démonstration directe de 1.13 donnerait donc une manière de déduire le théorème d'unicité général du théorème d'unicité de Chevalley sur un corps.

L'existence de groupes réductifs de tous les types sur tous les schémas (Exp. XXV) montre que les obstructions au relèvement d'un k-groupe réductif G au-dessus des anneaux artiniens à corps résiduel k (qui par Exp. III, 3.8 sont des éléments de

$$\mathrm{H}^3(\mathrm{G}, \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/k) \otimes \mathrm{V}) \simeq \mathrm{H}^3(\mathrm{G}, \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/k)) \otimes \mathrm{V},$$

où V est un certain k-espace vectoriel (muni de l'action triviale de G)) sont nulles. Ceci semble suggérer que $\mathrm{H}^3(\mathrm{G}, \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/k)) = 0$. Là encore, une démonstration directe de ce fait (s'il est vrai) donnerait sans doute une manière de déduire le théorème d'existence général du théorème d'existence sur un corps (Tôhoku de Chevalley).

Corollaire 1.15. — *Soient k un corps,* [7] G *un k-groupe réductif. Considérons k comme* G*-module trivial. Alors*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, k) = \mathrm{H}^2(\mathrm{G}, k) = 0.$$

[8] Comme $\mathrm{H}^i(\mathrm{G}_{\overline{k}}, \overline{k}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{G}, k) \otimes \overline{k}$, on peut supposer k algébriquement clos. Un élément de $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, k)$ n'est autre qu'un morphisme de k-groupes $\phi : \mathrm{G} \to \mathbb{G}_{a,\,k}$. Alors $\phi(\mathrm{G}) = \mathrm{G}/\operatorname{Ker}(\phi)$ est un sous-groupe lisse, connexe et réductif (cf. XIX 1.7) de $\mathbb{G}_{a,\,k}$, donc trivial. Donc $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, k) = 0$.

Considérons maintenant le k-groupe réductif $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times_k \mathbb{G}_{m,\,k}$. On a $\mathscr{L}ie(\mathrm{H}/k) = \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/k) \oplus k$, décomposition stable sous H. Pour un H-module quelconque V, on a

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{H}, \mathrm{V}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{G}, \mathrm{H}^0(\mathbb{G}_{m,\,k}, \mathrm{V}))$$

(cela résulte de la caractérisation des $\mathrm{H}^i(\mathrm{H}, -)$ comme foncteurs dérivés de $\mathrm{H}^0(\mathrm{H}, -) = \mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathrm{H}^0(\mathbb{G}_{m,\,k}, -))$, et du fait que le foncteur $\mathrm{H}^0(\mathbb{G}_{m,\,k}, -)$ est exact, cf. Exp. I, 5.3.1 et 5.3.3). En particulier, on a pour tout i **335**

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{H}, \mathscr{L}ie(\mathrm{H}/k)) = \mathrm{H}^i(\mathrm{G}, \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/k)) \bigoplus \mathrm{H}^i(\mathrm{G}, k)$$

---

[6] N.D.E. : On a corrigé l'original, qui énoncait (i) sans supposer G adjoint. D'après la caractérisation des $\mathrm{H}^i(\mathrm{G}, -)$ comme foncteurs dérivés de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(k, -)$ (Exp. I, 5.3.1, voir aussi [**Ja87**], I 4.16), on a $\mathrm{H}^i(\mathrm{G}, \mathrm{V}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(k, \mathrm{V})$ pour tout G-module V ; or si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et si $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_{p,\,k}$, alors $\mathscr{L}ie(\mathrm{GL}_p/k)$ est une extension non triviale de k par $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{SL}_p/k)$, donc $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathfrak{g}) \neq 0$. Voir aussi l'ajout 1.15.1 ci-dessous.

[7] N.D.E. : On a remplacé « *schéma* » par « *corps* ».

[8] N.D.E. : En raison de la correction effectuée dans 1.13, on a donné une autre démonstration dans le cas de H^1. D'autre part, il résulte d'un théorème de G. Kempf que $\mathrm{H}^i(\mathrm{G}, k) = 0$ pour tout $i > 0$, cf. [**Ja87**], II 4.5 et 4.11.

d'où $\mathrm{H}^2(\mathrm{G}, k) = 0$ en appliquant 1.13 (ii) au groupe réductif H.

Corollaire 1.15.1. — [9] *Soient k un corps,* G *un k-groupe réductif,* Z *son centre et* $\mathscr{R} = (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ *le type de* G. *Alors on a*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/k)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{M}/\Gamma_0(\mathrm{R}), k).$$

En particulier, $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/k)) = 0$ *si et seulement si* Z *est lisse sur* k.

En effet, soit $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{z}$, resp. $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$) l'algèbre de Lie de G (resp. Z, resp. $\mathrm{G}_{\mathrm{ad}} = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$). Il résulte de 1.15 (et de sa démonstration) que

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathfrak{g}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}}, \mathfrak{g}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}}, \mathfrak{g}/\mathfrak{z}).$$

Posons $\mathrm{C} = \mathrm{Coker}(\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$; on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \longrightarrow \mathrm{C} \longrightarrow 0.$$

Comme $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}}, \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) = 0$ (1.13) et $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}}, \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) = 0$ (cf. Exp. II, 5.2.3), on obtient

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}}, \mathfrak{g}/\mathfrak{z}) \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{G}_{\mathrm{ad}}, \mathrm{C}).$$

Pour calculer le terme de droite, on peut supposer k algébriquement clos. Soit $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ un déploiement de G ; alors $\mathrm{Z} = \mathrm{D}_k(\mathrm{M}/\Gamma_0(\mathrm{R}))$ et C s'identifie à

$$\mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{M}, k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_0(\mathrm{R}), k)\big) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{M}/\Gamma_0(\mathrm{R}), k),$$

muni de l'action triviale de G_{ad}. Le corollaire en découle, puisque Z est non lisse sur k si et seulement si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et $\mathrm{M}/\Gamma_0(\mathrm{R})$ possède de la p-torsion (Exp. IX, 2.1).

Définition 1.16. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif. On appelle *forme* de G sur S un S-schéma en groupes G′ localement isomorphe à G pour la topologie (fpqc) (il revient au même de dire (cf. Exp. XXIII, 5.6), que G′ est localement isomorphe à G pour la topologie étale, ou encore que G′ est un S-groupe réductif de même type que G en chaque point de S).

Corollaire 1.17. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif.*

(i) *Le foncteur*

$$\mathrm{G}' \longmapsto \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$$

est une équivalence *entre la catégorie des formes de* G *sur* S *et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$.

(ii) *Si* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *est un morphisme couvrant, formes de* G *trivialisées par* S′ *et fibrés trivialisés par* S′ *se correspondent.*

(iii) *Tout faisceau principal homogène sous* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$ *est représentable et quasi-isotrivial* (*c.-à-d., localement trivial pour la topologie étale*).

[9] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, tiré de remarques de Gabber, qui précise 1.13 (i).

La première assertion est formelle dans la catégorie des faisceaux (pour (fpqc) par exemple). D'autre part, tout faisceau localement isomorphe à G (pour (fpqc)) est représentable (car G est affine sur S) et localement isomorphe à G pour la topologie étale. Enfin, pour toute forme G′ de G, le S-faisceau $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$ est représentable, d'après 1.8. Le corollaire en résulte aussitôt.

Corollaire 1.18. — *L'ensemble des classes d'isomorphisme de formes du groupe réductif* G *sur* S *est isomorphe à*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})) = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{S}, \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})) = \mathrm{Fib}(\mathrm{S}, \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})).$$

Si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *est un morphisme couvrant, le sous-ensemble formé des formes trivialisées* **336**
par S′ *est isomorphe à* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}))$.

Corollaire 1.19. — *Soient* S *un schéma,* $\mathscr{R}$ *une donnée radicielle réduite épinglée telle que* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ [10] *existe (condition automatiquement vérifiée, cf.* Exp. XXV*). Notons*

$$\mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}) = \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})) = \mathrm{ad}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})) \cdot \mathrm{E}(\mathscr{R})_{\mathrm{S}}.$$

(i) *L'ensemble des classes d'isomorphisme de* S*-groupes réductifs de type* $\mathscr{R}$ (Exp. XXII, 2.7) *est isomorphe (d'après* Exp. XXIII, 5.12*) à*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})) = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{S}, \mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})) = \mathrm{Fib}(\mathrm{S}, \mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})).$$

(ii) *Si* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *est un morphisme couvrant, le sous-ensemble formé des classes de groupes déployables sur* S′ *est isomorphe à* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}))$.

Remarque 1.20. — Avec les notations précédentes, à tout S-groupe réductif de type $\mathscr{R}$ est associé canoniquement un fibré principal homogène à droite sous $\mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})$:

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}), \mathrm{G}) = \mathrm{P}.$$

Remarquons que P s'interprète comme le « schéma des épinglages de G de type $\mathscr{R}$ » (cf. 1.0). D'ailleurs P est également un fibré principal homogène (à gauche) sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$, structure qui apparaît aussitôt dans la description ci-dessus.

Proposition 1.21. — *Soient* S *un schéma* local hensélien*, s son point fermé. Le foncteur*

$$\mathrm{G} \longmapsto \mathrm{G}_s$$

induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de S*-groupes réductifs* **337**
sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\kappa(s)$*-groupes réductifs.*

En particulier, pour tout S*-groupe réductif* G*, il existe un morphisme étale fini surjectif* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *tel que* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *soit déployable.*

Utilisant l'existence des $\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ (Exp. XXV), on est ramené à prouver que si on note $\mathrm{H} = \mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})$, l'application canonique

$$\mathrm{Fib}(\mathrm{S}, \mathrm{H}) \longrightarrow \mathrm{Fib}(\kappa(s), \mathrm{H}_s)$$

[10] N.D.E. : cf. XXIII, Définition 5.11.

est bijective (et que tout élément de $\mathrm{Fib}(S, H)$ a la propriété indiquée ci-dessus). Or, toute partie finie de H est contenue dans un ouvert affine (c'est en effet trivial pour un groupe constant, et H est affine au-dessus d'un groupe constant) ; on peut donc utiliser le résultat démontré en appendice (8.1).

2. Automorphismes et sous-groupes

Introduisons une notation : si $H = \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G)$, et si X est un sous-foncteur de G, on note

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, X) = \underline{\mathrm{Norm}}_H(X), \qquad \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, \mathrm{id}_X) = \underline{\mathrm{Centr}}_H(X).$$

Si Y est un second sous-foncteur de G, on définit de même $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, X, Y) = \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, X) \cap \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, Y)$, et si G' est un second S-groupe et X' un sous-foncteur de G, on note $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, X; G', X')$ le sous-foncteur de $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G')$ défini par : pour tout $S' \to S$,

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, X; G', X')(S') = \{u \in \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, G')(S') \mid u(X_{S'}) = X'_{S'}\}$$

et l'on définit de même $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, X, Y; G', X', Y')$, etc. [11]

Proposition 2.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal*
338 *de* G (*resp.* B *un sous-groupe de Borel de* G, *resp.* $B \supset T$ *un couple de Killing de* G). *Notons* T^{ad} (*resp.* B^{ad}) *le tore maximal* (*resp. le sous-groupe de Borel*) *de* $\mathrm{ad}(G)$ *correspondant à* T (*resp.* B) *:*

$$B^{\mathrm{ad}} \simeq B/\underline{\mathrm{Centr}}(G) = B/\underline{\mathrm{Centr}}(B),$$
$$T^{\mathrm{ad}} \simeq T/\underline{\mathrm{Centr}}(G).$$

Alors $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, T)$ (*resp.* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, B)$, *resp.* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, B, T)$) *est représentable par un sous-schéma fermé de* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G)$*,* lisse *sur* S*, et la suite exacte du théorème* 1.3 *induit des suites exactes :*

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{ad}(G)}(T^{\mathrm{ad}}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, T) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G) \longrightarrow 1;$$
$$1 \longrightarrow B^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G) \longrightarrow 1;$$
$$1 \longrightarrow T^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, B, T) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G) \longrightarrow 1.$$

Par descente des sous-schémas fermés, [12] on se ramène aussitôt au cas où G est épinglé et où $B \supset T$ est son couple de Killing canonique (cf. Exp. XXII, 5.5.5 (iv)). Comme le groupe E de 1.2 normalise B et T, le résultat se déduit aussitôt des théorèmes de normalisation dans $\mathrm{ad}(G)$ (Exp. XXII, 5.3.12 et 5.6.1).

Utilisant maintenant les théorèmes de conjugaison (cf. Exp. XXIII, 5.12), et raisonnant comme au n°1, on en déduit :

---

[11] N.D.E. : On a explicité les définitions précédentes (l'original indiquait « On définit de même $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(G, X, Y)$, ..., $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G, X; G', X')$, ... »).
[12] N.D.E. : cf. SGA 1, VIII 1.9.

Corollaire 2.2. — *Soient* S *un schéma,* G *et* G' *deux* S*-groupes réductifs de même type en chaque point. Soit* $\mathrm{B} \supset \mathrm{T}$ (*resp.* $\mathrm{B}' \supset \mathrm{T}'$) *un couple de Killing de* G (*resp.* G').

(i) *Le* S*-foncteur* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}; \mathrm{G}', \mathrm{T}')$ *est représentable par un sous-schéma fermé* **339**
lisse de $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$ *qui est principal homogène sous* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$. *De plus,* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{ad(G)}}(\mathrm{T}^{\mathrm{ad}})$ *opère librement sur ce schéma, et on a un isomorphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}; \mathrm{G}', \mathrm{T}') / \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{ad(G)}}(\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}) \simeq \underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}').$$

(ii) *Le* S*-foncteur* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}; \mathrm{G}', \mathrm{B}')$ *est représentable par un sous-schéma fermé lisse de* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$ *qui est principal homogène sous* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B})$. *De plus,* B^{ad} *opère librement sur ce schéma et on a un isomorphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}; \mathrm{G}', \mathrm{B}') / \mathrm{B}^{\mathrm{ad}} \simeq \underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}').$$

(iii) *Le* S*-foncteur* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}, \mathrm{T}; \mathrm{G}', \mathrm{B}', \mathrm{T}')$ *est représentable par un sous-schéma fermé lisse de* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$, *principal homogène sous* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}, \mathrm{T})$. *De plus,* T^{ad} *opère librement sur ce schéma et on a un isomorphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}, \mathrm{T}; \mathrm{G}', \mathrm{B}', \mathrm{T}') / \mathrm{T}^{\mathrm{ad}} \simeq \underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}').$$

Raisonnant encore comme au n°1, on en déduit :

Corollaire 2.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* $\mathrm{B} \supset \mathrm{T}$ *un couple de Killing de* G. *Le foncteur*

$$(\mathrm{G}', \mathrm{T}') \longmapsto \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}; \mathrm{G}', \mathrm{T}'),$$

resp.

$$(\mathrm{G}', \mathrm{B}') \longmapsto \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}; \mathrm{B}', \mathrm{B}'),$$

resp.

$$(\mathrm{G}', \mathrm{B}', \mathrm{T}') \longmapsto \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}, \mathrm{T}; \mathrm{G}', \mathrm{B}', \mathrm{T}'),$$

est une équivalence entre la catégorie des couples $(\mathrm{G}; \mathrm{T}')$ (*resp. des couples* $(\mathrm{G}', \mathrm{B}')$, **340**
resp. des triplets $(\mathrm{G}', \mathrm{B}', \mathrm{T}')$), *où* G' *est une forme de* G *et* T' *un tore maximal de* G' (*resp.* B' *un groupe de Borel de* G', *resp.* $\mathrm{B}' \supset \mathrm{T}'$ *un couple de Killing de* G'), *et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous le* S*-groupe* H, *où* $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ (*resp.* $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B})$, *resp.* $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}, \mathrm{T})$).

De plus, tout faisceau principal homogène sous H *est représentable et quasi-isotrivial, de sorte qu'on a*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{H}) = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{S}, \mathrm{H}) = \mathrm{Fib}(\mathrm{S}, \mathrm{H}).$$

Remarque 2.4. — Sous les conditions de 2.2, le morphisme noté ensemblistement $u \mapsto u(\mathrm{T})$ (resp. $u \mapsto u(\mathrm{B})$, resp. $u \mapsto (u(\mathrm{B}), u(\mathrm{T}))$) induit un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}') / \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}) \simeq \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}')$$

$$\text{resp.} \quad \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}') / \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}) \simeq \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}'),$$

$$\text{resp.} \quad \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}') / \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}, \mathrm{T}) \simeq \underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}').$$

La démonstration est immédiate : il suffit de la faire localement pour (fpqc), on peut donc supposer $\mathrm{G} \simeq \mathrm{G}'$, et on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3 (iii).

Remarque 2.5. — Les résultats précédents s'interprètent aussitôt en termes de restriction du groupe structural : si G' est une forme de G, correspondant au fibré principal $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$, se donner une restriction du groupe structural de ce fibré à $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ revient à se donner un tore maximal T' de G', les bijections suggé-
341 rées ci-dessus étant celle de 2.4 d'une part, l'application $\mathrm{T}' \mapsto \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}; \mathrm{G}', \mathrm{T}')$ d'autre part. De même pour sous-groupes de Borel et couples de Killing.

Proposition 2.6. — *Soient* S *un schéma,* G *et* G' *deux* S*-groupes réductifs de même type en chaque point,* T (*resp.* T') *un tore maximal de* G (*resp.* G'). *Alors* T^{ad} *opère librement sur* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}; \mathrm{G}', \mathrm{T}')$, *le quotient*

$$\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}; \mathrm{G}', \mathrm{T}')/\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}$$

est représentable ; c'est un fibré principal homogène sous

$$\mathrm{A} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T})/\mathrm{T}^{\mathrm{ad}},$$

où A *est représentable par un* S*-schéma constant tordu, extension de* $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$ *par* $\mathrm{W}_{\mathrm{ad}(\mathrm{G})}(\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{ad}(\mathrm{G})}(\mathrm{T}^{\mathrm{ad}})/\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}$. *De plus, si on fait opérer* A *sur* T *de la manière évidente, le fibré associé à* P *n'est autre que* T'.

La première partie de la proposition résulte aussitôt des résultats précédents. Pour prouver la seconde, on remarque qu'il y a un morphisme évident $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ (défini par $(u, t) \mapsto u(t)$) ; pour démontrer qu'après passage au quotient par A il induit un isomorphisme, on peut encore une fois supposer $(\mathrm{G}, \mathrm{T}) \simeq (\mathrm{G}', \mathrm{T}')$, auquel cas c'est immédiat.

De manière absolument semblable, on a :

Proposition 2.7. — *Soient* S *un schéma,* G *et* G' *deux* S*-groupes réductifs de même type en chaque point,* $\mathrm{B} \supset \mathrm{T}$ (*resp.* $\mathrm{B}' \supset \mathrm{T}'$) *un couple de Killing de* G (*resp.* G'). *Si on fait opérer* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}, \mathrm{T})/\mathrm{T}^{\mathrm{ad}} \simeq \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$ *de la manière évidente sur* T, *le fibré associé à* $\underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$ *n'est autre que* T'.

Corollaire 2.8. — *Soient* G *et* G' *deux* S*-groupes réductifs qui sont des formes tordues*
342 *intérieures l'un de l'autre ; soit* $\mathrm{B} \supset \mathrm{T}$ (*resp.* $\mathrm{B}' \supset \mathrm{T}'$) *un couple de Killing de* G (*resp.* G'). *Alors* T *et* T' *sont isomorphes.*

Remarque 2.9. — Il n'est pas vrai en général que B et B' soient isomorphes ; ce sont cependant des formes tordues intérieures l'un de l'autre (cf. n°5).

On peut développer des variantes « Isomint » [13] des résultats précédents. Signalons-en une :

[13] N.D.E. : Rappelons que $\underline{\mathrm{Isomint}}_u(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$ est défini en 1.11.

Proposition 2.10. — *Soient* S *un schéma,* G *et* G′ *deux* S*-groupes réductifs de même type en chaque point,* B ⊃ T *(resp.* B′ ⊃ T′*) un couple de Killing de* G *(resp.* G′*). Soit* $u \in \underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G},\mathrm{G}')(\mathrm{S})$ *; considérons*

$$\underline{\mathrm{Isomint}}_u(\mathrm{G},\mathrm{B},\mathrm{T};\mathrm{G}',\mathrm{B}',\mathrm{T}') = \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{B},\mathrm{T};\mathrm{G}',\mathrm{B}',\mathrm{T}') \cap \underline{\mathrm{Isomint}}_u(\mathrm{G},\mathrm{G}').$$

C'est un S*-schéma lisse et affine qui est un fibré principal homogène sous* T^{ad}*. En particulier,* $\underline{\mathrm{Isomint}}_u(\mathrm{G},\mathrm{B},\mathrm{T};\mathrm{G}',\mathrm{B}',\mathrm{T}')(\mathrm{S}) \neq \varnothing$ *si et seulement si l'élément correspondant de* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{T}^{\mathrm{ad}})$ *est nul.*

Pour terminer ce numéro, démontrons deux résultats qui nous seront utiles par la suite :

Proposition 2.11. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*. Le morphisme évident*

$$\mathrm{T}^{\mathrm{ad}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{id}_{\mathrm{T}})$$

est un isomorphisme.

Cela résulte des énoncés précédents ; d'ailleurs, on a donné une démonstration directe au cours de la preuve de 1.5.2.

Corollaire 2.12. — *Sous les conditions précédentes, il existe une équivalence entre la catégorie des couples* (G', f)*, où* G′ *est une forme de* G *et* f *un isomorphisme de* T *sur un tore maximal de* G′*, et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous* T^{ad}*.* **343**

Corollaire 2.13. — *Si* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}) = 0$*, et si* G′ *est une forme de* G *possédant un tore maximal isomorphe à* T*, alors* G′ *est isomorphe à* G*.*

Corollaire 2.14. — *Soient* S *un schéma tel que* Pic(S) = 0*, et* G *un* S*-groupe réductif de type constant. Pour que* G *soit déployable, il faut et il suffit que* G *possède un tore maximal déployé.*

Soient G un groupe réductif, rad(G) son radical (Exp. XXII, 4.3.9) ; comme rad(G) est central et caractéristique dans G, on a un morphisme canonique

$$q : \quad \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{rad}(\mathrm{G})).$$

Proposition 2.15. — *Soit* G *un* S*-groupe réductif. La suite suivante est exacte :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{ad}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G};\mathrm{id}_{\mathrm{rad}(\mathrm{G})}) \xrightarrow{p} \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G}) \xrightarrow{q} \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{rad}(\mathrm{G}))$$

et $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$ *est un sous-schéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$*,* fini *sur* S.

On peut supposer G déployé. La première assertion est immédiate ; la seconde résulte de Exp. XXI, 6.7.5 et 6.7.7.

Notant $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{id}_{\mathrm{rad}(\mathrm{G})})$, on en déduit :

Corollaire 2.16. — *Il existe une équivalence entre la catégorie des couples* (G', f)*, où* G' *est une forme de* G *et* f *un isomorphisme de* $\mathrm{rad}(G)$ *sur le radical de* G'*, et la* **344**
catégorie des fibrés principaux sous un certain S*-schéma en groupes* H*, où* H *est tel qu'il existe une suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mathrm{ad}(G) \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow 1,$$

où le S*-groupe* F *est étale et* fini *sur* S.

3. Schéma de Dynkin d'un groupe réductif. Groupes quasi-déployés

3.1. On rappelle (Exp. XXI, 7.4.1) qu'un *diagramme de Dynkin* est un ensemble fini muni de la structure définie par un ensemble de couples d'éléments distincts (liaisons) et d'une application dans $\{1, 2, 3\}$ (longueurs). À chaque donnée radicielle réduite épinglée $\mathscr{R}$ est associé un diagramme de Dynkin $\Delta(\mathscr{R})$, dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des racines simples.

3.2. Soit S un schéma. Un S-*schéma de Dynkin* est un S-schéma constant tordu fini Δ, muni de la structure définie par un sous-schéma L de $\Delta \times_S \Delta$ d'intersection vide avec la diagonale, et d'un morphisme $\Delta \to \{1, 2, 3\}_S$. Pour chaque $S' \to S$, $\Delta(S')$ est muni naturellement d'une structure de diagramme de Dynkin.

On définit aussitôt les notions suivantes : isomorphisme de deux schémas de Dynkin, extension de la base d'un schéma de Dynkin, schéma de Dynkin constant associé à un diagramme de Dynkin.

345 Toute donnée de descente sur un schéma de Dynkin pour la topologie étale est effective.

3.3. On se propose d'associer à chaque S-groupe réductif G un S-schéma de Dynkin. Supposons d'abord G *déployable* sur S ; pour tout épinglage $\mathcal{E}$ de G, notons $\Delta(\mathcal{E})$ le schéma de Dynkin constant associé à la donnée radicielle épinglée définie par $\mathcal{E}$; si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux épinglages de G, il existe par 1.5 un *unique automorphisme intérieur* de G sur S transformant $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$; cet automorphisme de G définit un isomorphisme $a_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} : \Delta(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{E}')$; les $a_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ forment évidemment un système transitif, de sorte qu'on peut identifier les $\Delta(\mathcal{E})$ (i.e. prendre la limite inductive) ; le résultat est un schéma de Dynkin constant noté $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$. Si maintenant G est un S-groupe réductif *quelconque*, il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \to S\}$ telle que G_{S_i} soit déployable. Raisonnant comme précédemment, on a donc une donnée de descente canonique sur les $\underline{\mathrm{Dyn}}(G_{S_i})$, permettant de construire par descente un S-schéma de Dynkin $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$.

3.4. Cette construction vérifie les propriétés suivantes (qui d'ailleurs la caractérisent essentiellement) :

(i) À chaque S-groupe réductif est associé un schéma de Dynkin $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$; à tout isomorphisme $u : G \xrightarrow{\sim} G'$ est associé fonctoriellement un isomorphisme $\underline{\mathrm{Dyn}}(u) : \underline{\mathrm{Dyn}}(G) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Dyn}}(G')$.

346 (ii) Si S' est un S-schéma et G un S-groupe réductif, on a

$$\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}') \simeq \underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'.$$

(iii) Si $\mathscr{E}$ est un épinglage de G, définissant la donnée radicielle épinglée de diagramme de Dynkin Δ, on a

$$\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}) \simeq \Delta_{\mathrm{S}}\,.$$

(iv) Si u est un automorphisme intérieur de G, $\underline{\mathrm{Dyn}}(u)$ est l'automorphisme identique de $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$.

3.5. Soient S un schéma, G un S-groupe réductif. Il est clair que le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$ des automorphismes de $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ pour la structure de schéma de Dynkin est représentable par un S-schéma constant tordu fini. Par 3.4 (i) et (ii), on a un morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})),$$

qui, en vertu de (iv), se factorise par un morphisme

$$\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})).$$

Plus généralement, si G et G' sont deux S-groupes réductifs, on a un morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G},\mathrm{G}') \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}),\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}'));$$

en particulier, si G' est une forme tordue intérieure de G (1.11), les schémas de Dynkin $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ et $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}')$ sont isomorphes.

3.6. Si G est semi-simple (resp. adjoint ou simplement connexe), le morphisme

$$\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme). En effet, on peut supposer G épin- **347**
glé et on est ramené au résultat correspondant pour les données radicielles réduites épinglées (cf. Exp. XXI, 7.4.5).

On a un résultat analogue pour les $\underline{\mathrm{Isom}}$; d'où il résulte en particulier que deux S-groupes semi-simples adjoints (resp. simplement connexes) sont des formes tordues intérieures l'un de l'autre si et seulement si leurs schémas de Dynkin sont isomorphes.

3.7. On peut donner une construction différente du schéma de Dynkin associé à un groupe réductif. Soient $\mathscr{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée, G un S-groupe réductif de type $\mathscr{R}$; notons $\Delta(\mathscr{R})$ le diagramme de Dynkin défini par la donnée radicielle $\mathscr{R}$. On a (3.5) un morphisme canonique

$$\mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}) = \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(\Delta(\mathscr{R})_{\mathrm{S}}).$$

Le S-groupe réductif G correspond (1.17) à un fibré $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}),\mathrm{G})$, principal homogène sous $\mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})$. Le fibré sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(\Delta(\mathscr{R})_{\mathrm{S}})$ associé correspond à une forme sur S de $\Delta(\mathscr{R})_{\mathrm{S}}$: c'est $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$; en d'autres termes, ce fibré associé n'est autre que $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{Dyn}}(\Delta(\mathscr{R})_{\mathrm{S}},\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$. Sous cette dernière forme, la démonstration est immédiate.

3.8. Schéma de Dynkin et couples de Killing. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, $B \supset T$ un couple de Killing de G. Il existe un morphisme canonique

$$i : \underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$$

348 qui identifie $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ au « schéma des racines simples de B relativement à T » ; ce morphisme se définit aussitôt par descente à partir du cas épinglé. Remarquons d'ailleurs que la donnée de T et de i permet de reconstruire B (« correspondance biunivoque entre systèmes de racines simples et systèmes de racines positives »).

Il résulte de la description précédente de $\mathfrak{D} = \underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$, qu'il existe une *racine canonique* de $\mathrm{B}_{\mathfrak{D}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\mathfrak{D}}$: cette racine $\alpha_{\mathfrak{D}}$ est l'image par $i(\mathfrak{D})$ du morphisme identique de $\mathfrak{D}$. On en déduit un *$\mathscr{O}_{\mathfrak{D}}$-module inversible canonique* $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$:

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{g} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{D}})^{\alpha_{\mathfrak{D}}}.$$

Dans le cas épinglé, on a

$$\mathfrak{D} = \coprod_{\alpha \in \Delta} \mathrm{S}_{\alpha},$$

où chaque S_{α} est une copie de S, et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ est alors le $\mathscr{O}_{\mathfrak{D}}$-module qui induit $\mathfrak{g}^{\alpha}$ sur S_{α}, pour tout $\alpha \in \Delta$.

3.9. Quasi-épinglages. Groupes quasi-épinglés. — Si G est un S-groupe réductif, on appelle *quasi-épinglage* de G la donnée :

(i) d'un couple de Killing $B \supset T$ de G,

(ii) d'une section $X \in \Gamma(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}), \mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})^{\times}$.

On dit qu'un S-groupe réductif est *quasi-déployable* s'il possède un quasi-épinglage. On appelle *groupe quasi-épinglé* un groupe réductif muni d'un quasi-épinglage.

349 Soit $B \supset T$ un couple de Killing du S-groupe réductif G, alors G est quasi-épinglable relativement à ce couple de Killing si et seulement si $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ possède une section non nulle en chaque point, i.e. si l'élément de $\mathrm{Pic}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$ défini par $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ est nul. Supposons en particulier S semi-local ; alors $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ l'est également, donc $\mathrm{Pic}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})) = 0$. On en déduit :

Proposition 3.9.1. — *Soient* S *un schéma* semi-local*,* G *un* S*-groupe réductif. Pour que* G *soit quasi-déployable, il faut et il suffit qu'il possède un sous-groupe de Borel.*

[14] En effet, S est affine donc, d'après la première assertion de Exp. XXII, 5.9.7, si G possède un sous-groupe de Borel B, il possède aussi un couple de Killing $B \supset T$. Puis, comme $\mathrm{Pic}(\mathfrak{D}) = 0$, alors $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ possède une section X partout non nulle.

Soient toujours A un anneau semi-local et $S = \mathrm{Spec}(A)$; remarquons maintenant que pour tout S-groupe réductif G le morphisme $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}) \to \mathrm{S}$ est surjectif (car $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ possède des sous-groupes de Borel, pour tout $s \in \mathrm{S}$) et lisse et projectif (Exp. XXII,

[14] N.D.E. : On a détaillé la référence à Exp. XXII, 5.9.7.

5.8.3), donc possède des sections après extension étale finie surjective de la base. [15] On en déduit le

Corollaire 3.9.2. — *Soient* S *un schéma* semi-local*,* G *un* S*-groupe réductif. Il existe un morphisme* $S' \to S$ *étale* fini et surjectif *tel que* $G_{S'}$ *soit* quasi-déployable*.*

Remarque 3.9.3. — Sous les conditions précédentes, soit T un tore maximal de G (cf. Exp. XIV, 3.20) ; alors on peut supposer en outre que $G_{S'}$ est quasi-déployable relativement à $T_{S'}$: il suffit d'appliquer le raisonnement précédent au « schéma des sous-groupes de Borel contenant T », qui est fini et étale sur S (Exp. XXII, 5.5.5 (ii)).

3.10. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux *quasi-épinglages* du S-groupe réductif G. Il existe un *unique automorphisme intérieur* de G transformant $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$. En effet, on se ramène aussitôt **350**
au cas déployé, où l'assertion a déjà été démontrée (1.5, il suffit de remarquer en effet qu'il revient au même pour un automorphisme intérieur de G de respecter un épinglage ou le quasi-épinglage sous-jacent). On en conclut comme au n°1 qu'un quasi-épinglage du S-groupe réductif G définit un scindage h de la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{ad}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}) \underset{p}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G}) \longrightarrow 1,$$

l'image de h étant le sous-groupe de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$ qui laisse invariant le quasi-épinglage.

De même si G et G′ sont deux S-groupes quasi-épinglés, on définit de manière naturelle le sous-foncteur

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr. q-ép.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$$

[15] N.D.E. : L'original renvoyait à EGA IV, § 24, qui n'est pas paru. Il s'agit d'utiliser le « théorème de Bertini ». Détaillons l'argument, qui nous a été indiqué par O. Gabber. Soit $X \to S$ un morphisme surjectif, lisse et projectif ; remplaçant S par une composante connexe, on peut supposer que X/S est en tout point de dimension relative d (cf. EGA IV_4, 17.10.2). On peut aussi supposer que X est un sous-schéma fermé d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}(E)$, où E est un A-module libre de rang $n+1$ (cf. EGA II, 5.3.3). Soient $s_1, \dots, s_r$ les points fermés de S ; d'après le théorème de Bertini (voir par exemple [**Jou83**], I 6.10), il existe un ouvert U du produit $P = \mathbb{P}(E^*)^d$, à fibres non vides, tel que pour tout point $u = (f_1, \dots, f_d)$ de U_{s_i}, l'intersection de $X_{\kappa(u)}$ avec les d hyperplans de $\mathbb{P}^n_{\kappa(u)}$ définis par u soit étale sur $\kappa(u)$. Quitte à rétrécir U, on peut supposer que U est le complémentaire dans l'espace affine $\mathbb{A}^{nd}_S$ du lieu des zéros $\mathscr{V}(Q)$ d'un certain polynôme Q de degré $m > 0$. On voit alors facilement (par récurrence sur le nombre de variables) que $\mathscr{V}(Q)$ ne peut contenir tous les points rationnels de $\mathbb{A}^{nd}_{s_i}$ si $|\kappa(s_i)| > m$. Comme le morphisme $A \to \prod_i \kappa(s_i)$ est surjectif, on peut trouver un polynôme unitaire $R \in A[X]$ de degré m dont l'image dans $\kappa(s_i)[X]$ est irréductible si $\kappa(s_i)$ est fini, et possède m racines distinctes si $\kappa(s_i)$ est infini. Posons $A' = A[X]/(R)$ et $S' = \mathrm{Spec}(A')$; alors $S' \to S$ est étale, fini et surjectif, et le corps résiduel en chacun de ses point fermés $s'_1, \dots, s'_t$ est de cardinal $\geqslant 2^m$. Alors U possède un point rationnel u_i au-dessus de chaque point fermé de S′, et comme $A' \to \prod_i \kappa(s_i)$ est surjectif, ceux-ci se relèvent en une section u de $P_{S'}$. Notons Z l'intersection de $X_{S'}$ avec les d hyperplans de $\mathbb{P}^n_{S'}$ définis par u, et V l'ouvert de Z formé des points en lesquels Z est étale sur S′. D'après EGA IV_3, 11.3.8, V contient les fibres $Z_{s'_i}$ pour tout i ; comme $\pi : Z \to S'$ est propre, il en résulte que le fermé $\pi(Z - V)$ est vide, d'où $V = Z$. Alors $Z \to S'$ est surjectif, étale et propre, donc fini, ainsi que la composée $Z \to S$, et ceci fournit la section désirée de $X \to S$.

de $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$; la projection de $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')$ sur $\underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G}.\mathrm{G}')$ induit un isomorphisme

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr. q-ép.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}') \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}').$$

Théorème 3.11. — *Soient* S *un schéma,* $\mathscr{R}$ *une donnée radicielle réduite épinglée telle que* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ *existe* (*cf.* Exp. XXV), E *le groupe de ses automorphismes. Considérons les trois catégories suivantes :*

(i) *La catégorie* $\underline{\mathrm{Rev}}$ *des revêtements principaux galoisiens de* S *de groupe* E (*les morphismes sont les isomorphismes*).

(ii) *La catégorie* $\underline{\mathrm{Redext}}$ *dont les objets sont les* S*-groupes réductifs de type* $\mathscr{R}$ (Exp. XXII, 2.7)*, les morphismes de* G *dans* G′ *étant les éléments de* $\underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}')(\mathrm{S})$.

351 (iii) *La catégorie* $\underline{\mathrm{Qép}}$ *des* S*-groupes réductifs quasi-épinglés de type* $\mathscr{R}$ (*les morphismes sont les isomorphismes respectant les quasi-épinglages*).

Ces trois catégories sont équivalentes *: plus précisément, on a un diagramme de foncteurs, commutatif à isomorphismes près*

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Rev}} \arrow[rr, "\text{qép}"] & & \underline{\mathrm{Qép}} \arrow[dl, "i"] \\ & \underline{\mathrm{Redext}} \arrow[ul, "\text{rev}"] & \end{tikzcd} \quad .$$

Nous allons décrire ci-dessous ces trois foncteurs, en laissant au lecteur le soin de vérifier la commutativité du diagramme.

3.11.1. Le foncteur i. — C'est le foncteur évident : $i(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$, $i(f) =$ image de f par l'isomorphisme de 3.10 $(*)$.

3.11.2. Le foncteur qép. — Soit S′ un revêtement principal galoisien de S de groupe E. Soit $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}, \Delta, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ un épinglage de $\mathrm{G} = \mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ et soit $(\mathrm{X}'_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ l'épinglage correspondant de $\mathrm{G}' = \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$. D'après Exp. XXIII 5.5 bis, il existe un unique morphisme de S-groupes

$$\theta : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})) = \mathrm{A}(\mathscr{R})(\mathrm{S})$$

tel que, pour tout $h \in \mathrm{E}$, $\theta(h)$ induise $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(h)$ sur T et $\mathscr{L}ie(\theta(h))(\mathrm{X}_\alpha) = \mathrm{X}_{h(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Tenant compte de l'opération de E sur S′, on obtient ainsi une opération de E sur G′, compatible avec l'opération de E sur S′ et qui respecte le quasi-épinglage canonique de G′.[16] Comme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est couvrant pour la topologie (fpqc), c'est un

[16] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui précède, pour faire voir que l'opération de E sur G′ s'obtient en combinant l'opération naturelle de E sur $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ et l'opération donnée sur S′. Le couple de Killing canonique de G′ est préservé par cette opération, ainsi que le quasi-épinglage donné par l'élément $\widetilde{\mathrm{X}}'$ de $\Gamma(\Delta_{\mathrm{S}'}, \mathscr{L}ie(\mathrm{G}'/\mathrm{S}')^{\Delta_{\mathrm{S}'}})$, égal à X'_α sur la copie de S′ indexée par α (en effet, comme E agit sur $\Delta_{\mathrm{S}'}$ par permutation des copies de S′, on a bien $h(\widetilde{\mathrm{X}}') = \widetilde{\mathrm{X}}'$ pour tout $h \in \mathrm{E}$).

morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des morphismes affines, et on note

$$\text{qép}(S') = G^{\text{qÉp}}_{S'/S}(\mathscr{R})$$

le S-groupe *quasi-épinglé* obtenu par descente galoisienne.[(17)]

3.11.3. Le foncteur rev. — Soit G un S-groupe réductif de type $\mathscr{R}$. On note **352**

$$\text{rev}(G) = \underline{\text{Isomext}}(G^{\text{Ép}}_{S}(\mathscr{R}), G),$$

c'est un fibré principal homogène sous E_S (cf. 1.10 et 1.19) , c'est-à-dire un objet de $\underline{\text{Rev}}$.

Développons un des corollaires de 3.11 :

Corollaire 3.12. — *Pour tout* S-*groupe réductif* G*, il existe un* S-*groupe quasi-épinglé* $G_{q\text{-}ép.}$ *et un « isomorphisme extérieur »* $u \in \underline{\text{Isomext}}(G_{q\text{-}ép.}, G)(S)$*. Le couple* $(G_{q\text{-}ép.}, u)$ *est unique à un isomorphisme unique près.*

En effet, on peut supposer G de type constant $\mathscr{R}$, et on prend $G_{\text{q-ép.}} = G^{\text{qÉp}}_{\text{rev}(G)/S}(\mathscr{R})$.

3.12.1. — Remarquons que la donnée de u permet de définir de manière canonique le S-schéma (cf. 1.11)

$$Q = \underline{\text{Isomint}}_u(G_{\text{q-ép.}}, G), \quad ^{(18)}$$

qui est un fibré principal homogène sous $\text{ad}(G_{\text{q-ép.}})$, et dont la donnée « équivaut » à celle de la forme tordue intérieure G de $G_{\text{q-ép.}}$. D'ailleurs Q n'est autre que le « schéma des quasi-épinglages de G », définition qui rend compte de sa structure de fibré principal homogène (à gauche) sous ad(G) (3.10) – comparer avec 1.20.

Proposition 3.13. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*groupe semi-simple adjoint* (*resp. simplement connexe*)*,* $B \supset T$ *un couple de Killing de* G*,* $\underline{\text{Dyn}}(G)$ *le* S-*schéma de* **353** *Dynkin de* G*. Il existe un isomorphisme canonique de* S-*schémas en groupes*

$$T \xrightarrow{\sim} \prod_{\underline{\text{Dyn}}(G)/S} \mathbb{G}_{m,\,\underline{\text{Dyn}}(G)}\,.$$

---

(17) N.D.E. : voir, par exemple, TDTE I, p. 22, Exemple 1. On peut aussi décrire qép(S′) comme suit. Convenons que E opère à gauche sur S′. Comme E agit sur $G = G^{\text{Ép}}_{S}(\mathscr{R})$, on peut tordre G par le E-torseur S′/S, c.-à-d., former le faisceau (fpqc) quotient de $S' \times_S G$ par l'action à gauche de E définie par $h \cdot (s', g) = (h(s'), h(g))$. Comme G est affine sur S, ce faisceau est représentable par un S-groupe $G^\sharp$, qui est une forme « tordue » de G, et $\mathfrak{D}^\sharp = \underline{\text{Dyn}}(G^\sharp)$ est le tordu du schéma de Dynkin constant Δ_S par le torseur S′/S. Comme E normalise B et T, on obtient de même un couple $(B^\sharp, T^\sharp)$ qui est un couple de Killing de $G^\sharp$. D'autre part, soient $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(G/S)$ et $\mathfrak{g}^\sharp = \mathscr{L}ie(G^\sharp/S)$; pour tout $U \to S$, les sections de $\mathfrak{g}^\sharp$ sur U sont les S-morphismes E-équivariants $U \times_S S' \to W(\mathfrak{g})$. Comme $\mathfrak{D}^\sharp \times_S S'$ est E-isomorphe à $\Delta \times S'$, muni de l'action $h \cdot (\alpha, s') = (h(\alpha), h(s'))$, on obtient que le morphisme donné par $(\alpha, s') \mapsto X_\alpha$ est une section de $\mathfrak{g}^\sharp$ sur $\mathfrak{D}^\sharp$ qui est un quasi-épinglage, i.e. une section partout non nulle de $(\mathfrak{g}^\sharp \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{\mathfrak{D}^\sharp})^{\mathfrak{D}^\sharp}$ (cf. 3.8).

(18) N.D.E. : On note $\underline{\text{Isomint}}$ au lieu $\underline{\text{Isomint}}_u$ (cf. 1.11), puisque le couple $(G_{\text{q-ép.}}, u)$ est unique à un isomorphisme unique près.

(*On rappelle* (*cf.* Exp. II, § 1) *que le second membre est par définition le* S-*foncteur qui à* $S' \to S$ *associe* $\mathbb{G}_m(\underline{\mathrm{Dyn}}(G) \times_S S')$, *ou, ce qui revient au même,* $\mathbb{G}_m(\underline{\mathrm{Dyn}}(G_{S'}))$.)

Première démonstration. Faisons-la pour simplifier dans le cas adjoint. Considérons le morphisme composé

$$T \longrightarrow \prod_{\mathfrak{D}/S} T_{\mathfrak{D}} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{D}/S} \mathbb{G}_{m,\mathfrak{D}} \,,$$

où le premier morphisme est le morphisme canonique, le second est $\prod_{\mathfrak{D}/S} \alpha_{\mathfrak{D}}$ (on a noté $\mathfrak{D} = \underline{\mathrm{Dyn}}(G)$). Pour vérifier que ce morphisme est un isomorphisme, on peut supposer G déployé ; or, dans ce cas, ce n'est autre que le morphisme $T \to (\mathbb{G}_{m,S})^{\Delta}$ de composantes α, pour $\alpha \in \Delta$, et celui-ci est un isomorphisme (Exp. XXII, 4.3.8).

Deuxième démonstration. D'après 2.8, 3.5 et 3.11, on peut supposer que $G = G^{\mathrm{q\acute{E}p}}_{S'/S}(\mathscr{R})$, T étant le tore maximal canonique. Sur S′, on a par Exp. XXII 4.3.8, un isomorphisme $T_{S'} \to (\mathbb{G}_{m,S'})^{\Delta}$, défini par les racines simples (resp. les coracines simples). Le groupe E opère au second membre par permutation de Δ. Or le fibré associé à S′/S par $E \to \mathrm{Aut}(\Delta)$ est $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$ (3.7), et on conclut aussitôt.

Utilisant l'appendice 8.1, on en tire :

Corollaire 3.14. — *Sous les conditions précédentes, on a*

$$H^1(S,T) \xrightarrow{\sim} H^1(\underline{\mathrm{Dyn}}(G), \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G)).$$

354 En particulier, $H^1(S,T) = 0$ lorsque S est semi-local.

Remarque 3.15. — Soient S un schéma, G (resp. G′) un S-groupe réductif, $B \supset T$ (resp. $B' \supset T'$) un couple de Killing de G (resp. G′), $u \in \underline{\mathrm{Isomext}}(G,G')(S)$. Posons (cf. 2.10)

$$P = \underline{\mathrm{Isomint}}_u(G,B,T;G',B',T');$$

c'est un fibré principal homogène sous T^{ad} (par $(f,t) \mapsto f \circ \mathrm{int}(t)$).

Soit d'autre part $\mathfrak{D} = \underline{\mathrm{Dyn}}(G) = \underline{\mathrm{Dyn}}(G')$ (identifiés grâce à u (3.5)), et soit $L = \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}, \mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}})$ le fibré principal homogène sous $\mathbb{G}_{m,\mathfrak{D}}$ défini par le $\mathscr{O}_{\mathfrak{D}}$-module inversible

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}, \mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}}) = \mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}} \otimes (\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})^{\vee}.$$

Chaque $f \in P(S')$ définit un isomorphisme de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S'}$ sur $\mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S'}$, d'où un morphisme canonique

$$P \longrightarrow \prod_{\mathfrak{D}/S} L \quad .$$

Ce morphisme est un *isomorphisme*, compatible avec l'isomorphisme d'opérateurs

$$T^{\mathrm{ad}} \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{D}/S} \mathbb{G}_{m,\mathfrak{D}}$$

défini ci-dessus. En effet, il suffit de le vérifier dans le cas où les deux groupes sont épinglés, où c'est facile.

Il s'ensuit en particulier que dans l'isomorphisme

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{T}^{\mathrm{ad}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$$

de 3.14, la classe du fibré P est transformée en $c\ell(\mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}}) - c\ell(\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}})$. Le fibré P est donc trivial si et seulement si $\mathfrak{g}'^{\mathfrak{D}}$ et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{D}}$ sont isomorphes.

Si $(\mathrm{G}, \mathrm{B}, \mathrm{T})$ est quasi-déployable, par exemple si on prend pour G le groupe $\mathrm{G}'_{\text{q-ép.}}$, **355**
avec son couple de Killing canonique, il s'ensuit que l'image de la classe de P n'est autre que l'obstruction au quasi-déploiement de G' définie en 3.9.

3.16. Symétries

3.16.1. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, $\mathrm{B} \supset \mathrm{T}$ un couple de Killing de G. On rappelle (Exp. XXII, 5.9.1) qu'il existe un unique sous-groupe de Borel B^- de G tel que $\mathrm{B} \cap \mathrm{B}^- = \mathrm{T}$. Si $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{D}, \mathfrak{g}^{\mathrm{D}})^\times$ définit un quasi-épinglage de G relativement à (B, T) (3.9), alors $\mathrm{Y} = -\mathrm{X}^{-1} \in \Gamma(\mathrm{D}, (\mathfrak{g}^{\mathrm{D}})^\vee)^\times$ définit un quasi-épinglage de G relativement à $(\mathrm{B}^-, \mathrm{T})$; on dit que c'est le *quasi-épinglage opposé*.

Si $\mathscr{R}$ est une donnée radicielle réduite épinglée et si $\mathcal{E}$ est un $\mathscr{R}$-épinglage du S-groupe réductif G, on définit un $\mathscr{R}$-épinglage $\mathcal{E}^-$ dit *opposé* à $\mathcal{E}$ de la manière suivante : on garde le même tore maximal T, on prend l'opposé de l'isomorphisme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}$, et on « épingle » par $\mathrm{Y}_\alpha = -\mathrm{X}_\alpha^{-1} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$, pour $\alpha \in \Delta$. Le quasi-épinglage sous-jacent à $\mathcal{E}^-$ est le quasi-épinglage opposé au quasi-épinglage sous-jacent à $\mathcal{E}$.

Remarque. — Dans les notations de Exp. XIX, 3.1, si on pose

$$w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) = \exp(\mathrm{X}_\alpha)\exp(-\mathrm{X}_\alpha^{-1})\exp(\mathrm{X}_\alpha),$$

on a $w_\alpha(\mathrm{X}_\alpha) = w_{-\alpha}(\mathrm{Y}_\alpha)$ (*loc. cit.* 3.1 (vi)).

Proposition 3.16.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif.*

(i) *Soit* T *un tore maximal de* G *; il existe un unique*

$$i_{\mathrm{T}} \in \big(\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T})/\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}\big)(\mathrm{S}) \subset \mathrm{Aut}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T})$$

tel que $i_{\mathrm{T}}(t) = t^{-1}$ *pour toute section* t *de* T. **356**

(ii) *Soit* (B, T) *un couple de Killing de* G *; il existe une unique section*

$$w_{\mathrm{B},\mathrm{T}} \in (\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T})(\mathrm{S}) = \mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S})$$

telle que $\mathrm{int}(w_{\mathrm{B},\mathrm{T}})(\mathrm{B}) = \mathrm{B}^-$ (*avec l'abus de langage évident*).

(iii) *Soit* $\mathcal{Q} = (\mathrm{B}, \mathrm{T}, \mathrm{X})$ *un quasi-épinglage de* G*,* $\mathcal{Q}^- = (\mathrm{B}^-, \mathrm{T}, \mathrm{Y})$ *le quasi-épinglage opposé ; il existe un unique automorphisme intérieur de* G

$$n_{\mathcal{Q}} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{ad}(\mathrm{G})}(\mathrm{T}^{\mathrm{ad}})(\mathrm{S}) \subset \mathrm{Aut}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$$

tel que $n_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}^-$*, c'est-à-dire :* $n_{\mathcal{Q}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$*,* $n_{\mathcal{Q}}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}^-$*,* $n_{\mathcal{Q}}(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$.

(iv) *Soit* $(\mathscr{R}, \mathcal{E})$ *un épinglage de* G*,* $(\mathscr{R}, \mathcal{E}^-)$ *l'épinglage opposé ; il existe un unique automorphisme de* G

$$u_{\mathcal{E}} \in \mathrm{Aut}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}) \subset \mathrm{Aut}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$$

tel que $u_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^-$*, c.-à-d.* $u_{\mathcal{E}}(t) = t^{-1}$ *pour toute section* t *de* T*, et* $\mathrm{Ad}(u_{\mathcal{E}})\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{Y}_\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \Delta$.

Démonstration. (ii) résulte de Exp. XXII, 5.5.5 (ii), puis (iii) résulte de 3.10, et (iv) résulte de Exp. XXIII, 4.1. Enfin pour prouver (i), on peut supposer G épinglé. L'existence résulte de (iv) par exemple, l'unicité du fait qu'un automorphisme de G qui induit l'identité sur T est donné par une section de T^{ad} (2.11).

357 ***Corollaire 3.16.3***. — *On a*

$$i_{\mathrm{T}}^2 = w_{\mathrm{B,T}}^2 = n_{\mathcal{Q}}^2 = u_{\mathcal{E}}^2 = e\ .$$

De plus, i_{T} (*resp.* $u_{\mathcal{E}}$) *est* $\neq e$ *si* $\mathrm{G} \neq e$, *et* $w_{\mathrm{B,T}}$ (*resp.* $n_{\mathcal{Q}}$) *est* $\neq e$ *si* G *n'est pas un tore.*

Corollaire 3.16.4. — *Dans la situation de* (iii) (*resp.* (iv)), $n_{\mathcal{Q}}$ *se projette sur* $w_{\mathrm{B,T}}$ (*resp.* $u_{\mathcal{E}}$ *se projette sur* i_{T}) *par le morphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{ad(G)}}(\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}) \longrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{ad(G)}}(\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}) \simeq \mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})\ ,$$

resp.

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{T})/\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}\ .$$

Corollaire 3.16.5. — *Les définitions précédentes sont compatibles avec l'extension de la base, et sont fonctorielles par isomorphisme* (*en un sens évident*).

Proposition 3.16.6. — (i) *On peut définir de manière unique pour chaque groupe réductif* G *sur un schéma* S *un élément*

$$s_{\mathrm{G}} \in \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})(\mathrm{S})$$

de telle manière que cette construction soit fonctorielle en G *par isomorphisme, soit compatible avec les changements de base et que chaque fois que* T *est un tore maximal du* S*-groupe réductif* G, s_{G} *soit l'image de* i_{T} *par le morphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{T})/\mathrm{T}^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G}).$$

(ii) *On a* $s_{\mathrm{G}}^2 = e$, *et* s_{G} *est un élément central de* $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$.

358 (iii) *Sous les conditions de* 3.16.2 (ii), *si on identifie* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{B},\mathrm{T})/\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}$ *à* $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$ (2.2), *on a*

$$w_{\mathrm{B,T}}\, i_{\mathrm{T}} = i_{\mathrm{T}}\, w_{\mathrm{B,T}} = s_{\mathrm{G}}\ .$$

(iv) *Sous les conditions de* 3.16.2 (iv), *si on identifie* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.-ép}}(\mathrm{G},\mathscr{R},\mathcal{E})$ *à* $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$ (1.3 (iii)), *on a*

$$n_{\mathcal{E}} u_{\mathcal{E}} = u_{\mathcal{E}} n_{\mathcal{E}} = s_{\mathrm{G}}\ .$$

Démonstration. (i) se prouve sans difficulté par descente. D'autre part, comme i_{T} est évidemment une section centrale et de carré e dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T})$, (ii) en résulte immédiatement ; (iii) est une conséquence de (iv) par descente. Enfin, sous les conditions de (iv), il est clair que $n_{\mathcal{E}} u_{\mathcal{E}} = u_{\mathcal{E}} n_{\mathcal{E}}$ et que cet automorphisme de G respecte l'épinglage ; modulo l'identification faite, il est donc égal à son image dans $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G})$; mais $n_{\mathcal{E}}$ est intérieur et $u_{\mathcal{E}}$ se projette sur s_{G}.

Remarque 3.16.7. — (i) On détermine explicitement s_G dans chacun des cas de la classification grâce à (iii) : il suffit pour chaque donnée radicielle irréductible épinglée de composer la symétrie par rapport à l'origine avec la symétrie dans le groupe de Weyl (i.e. l'élément w_0 du groupe de Weyl tel que $w_0(\Delta) = -\Delta$). On trouve les résultats suivants : on a $s_G = 1$ sauf pour A_n ($n \geqslant 2$), D_n (n impair) et E_6, auquel cas s_G est l'unique « automorphisme extérieur » non trivial.

(ii) L'automorphisme $u_{\mathcal{E}}$ est celui qui sert à fabriquer « les formes réelles compactes » dans la théorie des algèbres de Lie semi-simples.

Remarque 3.16.8. — On a défini en 3.16.1 une involution dans le S-schéma $Q =$ 359
$\underline{\mathrm{Isomint}}(G_{\text{q-ép.}}, G)$ des quasi-épinglages de G (cf. 3.12.1) ; par transport de structure de $G_{\text{q-ép.}}$ à G, on voit aussitôt que cette involution est donnée par l'action d'un élément de $\mathrm{ad}(G_{\text{q-ép.}})(S)$: l'élément n_0 défini (3.16.2 (iii)) par le quasi-épinglage canonique de $G_{\text{q-ép.}}$.

De la même manière, on a défini une involution dans le S-schéma

$$P = \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(G_S^{\text{Ép}}(\mathscr{R}), G)$$

des $\mathscr{R}$-épinglages de G (cf. 1.20). Raisonnant comme précédemment, on voit que cette involution est donnée par l'action de l'automorphisme u_0 de $G_S^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ défini (3.16.2 (iv)) par l'épinglage canonique de $G_S^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$.

4. Isotrivialité des groupes réductifs et des fibrés principaux sous les groupes réductifs

4.1. Définitions. Théorème d'isotrivialité

Définition 4.1.1. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes, P un fibré principal homogène sous G. On dit que P est *localement isotrivial* (resp. *semi-localement isotrivial*) si pour tout point $s \in S$ (resp. tout ensemble fini F de points de S contenu dans un ouvert affine) il existe un ouvert U de S contenant s (resp. F) et un morphisme *étale fini surjectif* $S' \to U$ tel que $P_{S'}$ soit trivial.

Définition 4.1.2. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif. On dit que G est localement isotrivial (resp. semi-localement isotrivial) si pour tout point $s \in S$ (resp. tout 360
ensemble fini F de points de S contenu dans un ouvert affine) il existe un ouvert U de S contenant s (resp. F) et un morphisme *étale fini surjectif* $S' \to U$ tel que $G_{S'}$ soit déployable.

Remarque 4.1.3. — (i) L'équivalence de catégories de 1.17 respecte par définition l'isotrivialité locale (resp. semi-locale.)

(ii) Ajoutons aux conditions de 4.1.1 : G localement de présentation finie sur S. Alors le fibré principal P (ou le groupe réductif G) est localement isotrivial (resp. semi-localement isotrivial) si et seulement si pour tout $S' \to S$, S' local (resp. semi-local), $P_{S'}$ est isotrivial (ou $G_{S'}$ isotrivial), c'est-à-dire s'il existe $S'' \to S'$ étale fini surjectif tel que $P_{S''}$ soit trivial (ou $G_{S''}$ déployé).

(iii) Dans le cas des tores, la définition 4.1.2 coïncide avec celle de Exp. IX, 1.1.

4.1.4. — Rappelons (Exp. XXII, 4.3 et 6.2) que pour tout groupe réductif G, nous avons introduit les groupes rad(G), corad(G) et dér(G). Les groupes rad(G) et corad(G) sont des tores, qui sont *triviaux*déployés lorsque G est déployé ; de plus, il existe une isogénie rad(G) → corad(G). Le S-groupe dér(G) est semi-simple, on a G/ dér(G) = corad(G) ; il s'ensuit que pour tout fibré principal homogène P sous G, P/ dér(G) est un fibré principal homogène sous corad(G). Ceci dit, on a :

361 ***Théorème 4.1.5***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif de type constant.*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) G *est localement* (*resp. semi-localement*) *isotrivial.*
(b) *Le tore* rad(G) *l'est.*
(b′) *Le tore* corad(G) *l'est.*
(c) *Le revêtement galoisien de* S *associé à* G (3.11) *l'est.*

Si T *est un tore maximal de* G*, ces conditions sont également équivalentes à*

(d) *Le tore* T *est localement* (*resp. semi-localement*) *isotrivial*

(ii) *Soit* P *un fibré principal homogène sous* G *; pour que* P *soit localement* (*resp. semi-localement*) *isotrivial, il faut et il suffit que le* corad(G)*-fibré principal* P/ dér(G) *le soit.*

Corollaire 4.1.6. — *Les conditions de* (i) *sont vérifiées lorsque* G *est semi-simple ou lorsque* S *est localement noethérien et normal* (*ou plus généralement géométriquement unibranche*)*. Les conditions de* (ii) *sont vérifiées lorsque* G *est localement* (*resp. semi-localement*) *isotrivial.*

Pour (i), la première assertion est triviale sur (b), la seconde résulte de (c) et Exp. X, 5.14 et 5.15. Pour (ii), il suffit de remarquer qu'en vertu du théorème 90, un fibré principal sous un tore déployé est semi-localement isotrivial.

4.2. Démonstration : le cas semi-simple

Démontrons d'abord, en vue d'une référence ultérieure :

362 ***Proposition 4.2.1***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G (*resp.* B *un sous-groupe de Borel, resp.* B ⊃ T *un couple de Killing de* G)*,* P *un fibré principal homogène sous* G*,* G′ *la forme tordue de* G *associée à* P (*via le morphisme* int : $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G})$)*. On a des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{P}/\,\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}'), \qquad \mathrm{P}/\mathrm{B} \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}'), \qquad \mathrm{P}/\mathrm{T} \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Kil}}(\mathrm{G}').$$

Par construction, G′ est le quotient de $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ par une certaine opération de G ($(p, g')g = (pg, g^{-1}g'g)$) ; on a donc un morphisme $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$, c'est-à-dire un morphisme

$$\mathrm{P} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}'),$$

qui, comme on le voit aussitôt, se factorise par un morphisme

$$f : \mathrm{P} \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}'),$$

(pour vérifier cette assertion, on peut supposer $G = P$, auquel cas on a $G' = G$, $f = \mathrm{int}$). L'application ensembliste $p \mapsto f(p)(T)$ définit un morphisme

$$P \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}(G').$$

Pour vérifier que ce morphisme induit un isomorphisme $P/\underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tor}}(G')$ comme annoncé, on peut de nouveau supposer $P = G$ auquel cas on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3 (iii). (En fait, *loc. cit.* devrait être remplacé par l'énoncé ci-dessus). On raisonne de même pour $\underline{\mathrm{Bor}}$ et $\underline{\mathrm{Kil}}$.

Proposition 4.2.2. — *Soient* S *un schéma* semi-local, G *un* S-*groupe semi-simple de type constant.* 363

(i) G *est isotrivial.*

(ii) *Tout fibré principal sous* G *est isotrivial.*

Prouvons (i). Quitte à faire une extension étale finie surjective de la base, on peut, par 3.9.2 supposer G quasi-déployé. Mais alors G est isotrivial par construction (3.10, le groupe E est fini). Pour prouver (ii), on peut, en vertu de (i), supposer G déployé ; on est alors ramené à :

Lemme 4.2.3. — *Soit* S *un schéma* semi-local. *Tout fibré principal sous un groupe réductif déployé est isotrivial.*

En effet, avec les notations de 4.2.1, où $B \supset T$ désigne le couple de Killing canonique de G déployé, le S-schéma $\underline{\mathrm{Kil}}(G')$ possède une section, après extension étale finie surjective de la base, en vertu de 3.9.2. On peut donc réduire le groupe structural de G à T, or T est déployé, donc $H^1(S, T) = 0$ (théorème 90).

Corollaire 4.2.4. — *Soient* S *un schéma et*

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow G' \longrightarrow G'' \longrightarrow 1$$

une suite exacte de S-*schémas en groupes* (*pour* (fpqc)), G *étant semi-simple de type constant. Soit* P *un fibré principal homogène sous* G', *supposons le faisceau* [(19)] *associé* P/G *représentable* (*par exemple* G'' *affine sur* S). *Pour que* P *soit localement isotrivial* (*resp. semi-localement isotrivial*), *il faut et il suffit que* P/G *le soit* (*comme fibré sous* G'' [(19)]).

Si P est trivial, P/G l'est aussi, ce qui montre que la condition est nécessaire. 364
Réciproquement, supposons S local (resp. semi-local) et P/G isotrivial, donc trivialisé par une extension S' de S étale finie et surjective. Étendant la base à S', on peut réduire le groupe structural de $P_{S'}$ à $G_{S'}$. Mais S' est encore semi-local et $G_{S'}$ semi-simple de type constant, donc le fibré obtenu est isotrivial (4.2.2).

(19) N.D.E. : On a remplacé « fibré » par « faisceau », et ensuite G' par G''.

4.3. Démonstration : cas général. — Remarquons d'abord que 4.1.5 (ii) résulte aussitôt de l'application de 4.2.4 à la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{dér}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{corad}(\mathrm{G}) \longrightarrow 1 .$$

Démontrons donc (i). Si G est déployé, rad(G) et corad(G) sont déployés, ainsi que rev(G) ; donc (a) implique (b), (b′), et (c).

4.3.1. — On a (c) ⇒ (a). Soit $\mathscr{R}$ le type de G ; on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{ad}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{Ép}}(\mathscr{R})) \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}) \longrightarrow \mathrm{E}_{\mathrm{S}} \longrightarrow 1 .$$

Appliquant 4.2.4. au fibré $\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{Ép}}(\mathscr{R}))$ et au fibré associé $\mathrm{rev}(\mathrm{G}) = \mathrm{P}/\mathrm{ad}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{Ép}}(\mathscr{R}))$, on a (c) ⇒ (a).

4.3.2. — On a (b) ⇒ (a). Il nous suffit de prouver que si rad(G) est déployé, G est semi-localement isotrivial. Or soit $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{Ép}}(\mathscr{R})$; considérons la catégorie des couples (G', f) où G' est une forme de G_0 et f un isomorphisme de $\mathrm{rad}(\mathrm{G}_0)$ sur rad(G).

365 On sait (2.16.) que cette catégorie est équivalente à la catégorie des fibrés principaux homogènes sous un certain S-groupe H extension d'un groupe constant tordu fini par un groupe semi-simple. Il nous suffit de prouver que tout fibré principal sous H est semi-localement isotrivial, or cela résulte aussitôt de 4.2.4.

4.3.3. — On a (b′) ⇒ (a). On peut raisonner comme précédemment (ce sera d'ailleurs le même groupe H qui s'introduira). On peut aussi voir que (b) et (b′) sont équivalentes ; un tore isogène à un tore localement déployé est également localement déployé (cf. Exp. IX, 2.11 (iii)).

4.3.4. — On a (d) ⇒ (a). Il suffit de prouver qu'un groupe de type constant possédant un tore maximal déployé est semi-localement isotrivial ; or cela résulte aussitôt de 2.14.

4.3.5. — On a (a) ⇒ (d). Il suffit de prouver qu'un tore maximal d'un groupe déployé est semi-localement isotrivial. Or on a plus précisément :

Lemme 4.3.6. — *Soient* S *un schéma* semi-local, G *un* S*-groupe réductif,* T_0 *un tore maximal déployé de* G*,* $\mathrm{W}_0 = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0)/\mathrm{T}_0$ (*c'est un* S*-groupe localement constant, et constant si* G *est de type constant, par* 2.14*),* T *un tore maximal de* G*.*

Il existe un morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *qui est principal homogène sous* W_0 (*donc étale fini et surjectif, et même principal galoisien si* G *est de type constant*)*, tel que* $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ *soit conjugué à* $(\mathrm{T}_0)_{\mathrm{S}'}$ *par un élément de* $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ (*et donc en particulier déployé*)*.*

366 En effet, on sait que $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0, \mathrm{T})$ est un fibré principal homogène sous $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0)$ (cf. par exemple Exp. XI, 5.4 bis). Posons $\mathrm{S}' = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0, \mathrm{T})/\mathrm{T}_0$; c'est un fibré principal homogène sous W_0. Étendant la base de S à S′, on peut réduire le groupe structural de $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0, \mathrm{T})$ à T_0. Or S′ est semi-local et T_0 déployé, donc $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0, \mathrm{T})$ possède une section sur S′. C.Q.F.D.

4.4. Utilisation de l'existence de tores maximaux

En utilisant le théorème d'existence de tores maximaux de Grothendieck (Exp. XIV, 3.20), on peut préciser considérablement les résultats précédents. Énonçons tout de suite :

Théorème 4.4.1. — *Soient* S *un schéma* semi-local, $\mathscr{R}$ *une donnée radicielle réduite épinglée,* W *son groupe de Weyl,* E *le groupe de ses automorphismes.* (*On rappelle que* E *opère naturellement sur* W *et que le produit semi-direct* $\mathrm{A} = \mathrm{W} \cdot \mathrm{E}$ *s'identifie au groupe des automorphismes de* $\mathscr{R}$ *non épinglée,* cf. Exp. XXI, 6.7.2).

(i) *Tout fibré principal homogène sous* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})$ *est trivialisé par un revêtement principal galoisien* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *de groupe* W.

(ii) *Soit* G *un* S*-groupe réductif de type* $\mathscr{R}$ *; soit* $\mathrm{rev}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}), \mathrm{G})$ *le revêtement galoisien de* S *de groupe* E *associé. Soit* W_0 *la forme de* W_{S} *associée à* rev(G). *Il existe un morphisme* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *qui est un fibré principal homogène sous* W_0, *tel que* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *soit quasi-déployable* (*i.e. possède un sous-groupe de Borel*).

(iii) *Tout* S*-groupe réductif de type* $\mathscr{R}$ *est déployé par un revêtement principal ga-* **367**
loisien $\overline{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$ *de groupe* A.

Énonçons d'abord :

Proposition 4.4.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G, P *un fibré principal homogène sous* G, G′ *la forme tordue de* G *associée à* P (*on a alors, cf.* 4.2.1, *un isomorphisme canonique* $\mathrm{P}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}'))$. *Soit* T′ *un tore maximal de* G′, *définissant un morphisme composé*

$$\mathrm{S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}).$$

Considérons les morphismes canoniques

$$\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{P}/\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{P}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$$

et prenons-en les images réciproques par le morphisme précédent :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r] & \mathrm{P}/\mathrm{T} \arrow[r] & \mathrm{P}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \\ \mathrm{H} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{S}' \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{S}. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Alors S′ (*resp.* H) *est un fibré principal homogène au-dessus de* S (*resp.* S′) *sous* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ (*resp.* $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$). *De plus, si on fait opérer* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *sur* T *de la manière évidente, le fibré associé à* S′ *est isomorphe à* T′.

Les deux premières assertions sont triviales, la dernière se prouve comme l'assertion correspondante de 2.6.

Corollaire 4.4.3. — *Soient* S *un schéma* semi-local, G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G. *Supposons l'une des deux conditions suivantes satisfaites :* **368**

(i) T *est déployé.*

(ii) T *est contenu dans un sous-groupe de Borel de* G, *et* G *est soit adjoint, soit simplement connexe.*

Soit en outre P *un fibré principal homogène sous* G. *Il existe un* S*-schéma* S′, *qui est un fibré principal homogène sous* $\mathrm{W_G(T)}$, *tel que* $\mathrm{P_{S'}}$ *soit trivial.*

En effet, si G′ est la forme de G associée à P, alors G′ possède un tore maximal T′ (Exp. XIV, 3.20). Reprenant les notations de la proposition précédente, on voit que $\mathrm{H^1(S', T_{S'}) = 0}$ (en vertu du théorème 90 pour (i), de 3.14 pour (ii)). Le morphisme $\mathrm{H \to S'}$ possède une section, donc $\mathrm{P_{S'}}$ possède aussi une section sur S′. C.Q.F.D.

Démontrons maintenant le théorème. L'assertion (i) est un cas particulier du corollaire précédent (prendre $\mathrm{G = G_S^{Ép}}(\mathscr{R})$, muni de son tore déployé canonique). Prouvons (ii). On sait (3.12), que G est une forme tordue intérieure de

$$\mathrm{G_0 = G^{qÉp}_{rev(G)/S}}(\mathscr{R}).$$

Si $\mathrm{T_0}$ est le tore maximal canonique de $\mathrm{G_0}$, $\mathrm{W_{G_0}(T_0)}$ est bien le groupe $\mathrm{W_0}$ décrit dans l'énoncé. La forme G de $\mathrm{G_0}$ correspond à un fibré principal homogène P sous $\mathrm{ad(G_0)}$ ($\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Isomint}}(\mathrm{G_0, G})$). Le groupe $\mathrm{W_{ad(G_0)}(T_0^{ad})}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{W_0}$, et on obtient le résultat voulu en appliquant 4.4.3 à la situation $\mathrm{(ad(G_0), T_0^{ad}, P)}$,
369 l'hypothèse (ii) de 4.4.3 étant bien vérifiée. Démontrons enfin (iii). Reprenons les notations de (ii) ; on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{rev(G)} \arrow[d, "\mathrm{E_S}"'] & \\ \mathrm{S} & \mathrm{S'} \arrow[l, "\mathrm{W_0}"] \end{tikzcd}.$$

On sait que $\mathrm{G_{S'}}$ est isomorphe à $\mathrm{(G_0)_{S'}}$ et que $\mathrm{(G_0)_{rev(G)}}$ est déployable. Si on pose $\overline{\mathrm{S}} = \mathrm{S' \times_S rev(G)}$, $\mathrm{G}_{\overline{\mathrm{S}}}$ est bien déployable, et il ne reste plus qu'à vérifier que $\overline{\mathrm{S}}$ est bien un revêtement principal galoisien de S de groupe A, ce qui résulte du lemme plus général suivant (naturellement valable dans tout site) :

Lemme 4.4.4. — *Soient* S *un schéma,* G *et* H *deux* S*-schémas en groupes,* $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H})$ *une opération de* G *sur* H, E *un* G*-fibré principal homogène,* F *un* $\mathrm{H_0}$*-fibré principal homogène, où* $\mathrm{H_0}$ *est la forme de* H *associée à* E. *Alors* $\mathrm{E \times_S F}$ *est muni naturellement d'une structure de fibré principal homogène sous le produit semi-direct* $\mathrm{H \cdot G}$.

Notons $(e, g) \mapsto eg$ (resp. $(f, u) \mapsto fu$) l'opération (à droite) de G sur E (resp. de $\mathrm{H_0}$ sur F). Notons

$$p : \mathrm{E} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H_0}$$

la projection canonique ($\mathrm{H_0}$ est par définition le quotient de $\mathrm{E \times_S H}$ par G y opérant suivant la formule $(e, h)g = (eg, g^{-1}hg)$. Considérons le morphisme

$$r : \quad \mathrm{E} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{F} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{E} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{F}$$

défini ensemblistement par

$$r(e, f, h, g) = (eg, fp(e, h)).$$

Le morphisme r définit bien une opération du produit semi-direct $\mathrm{H} \cdot \mathrm{G}$ sur $\mathrm{E} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{F}$. **370**
En effet, on a ensemblistement

$$r(r(e, f, h, g)h', g') = (egg', fp(e, h)p(eg, h'));$$

mais

$$p(e, h)p(eg, h') = p(e, h)p(e, gh'g^{-1}) = p(e, hgh'g^{-1}),$$

d'où

$$r(r(e, f, h, g), h', g') = r(e, f, hgh'g^{-1}, gg'),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour prouver maintenant que cette loi est bien une loi de fibré principal homogène, on peut supposer que E et F sont triviaux, auquel cas on voit aussitôt que $\mathrm{E} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{F}$ est également un fibré trivial.

5. Décomposition canonique d'un groupe adjoint ou simplement connexe

Dans ce numéro, nous allons utiliser les résultats du n°1 pour généraliser au cas des schémas une décomposition classique des groupes adjoints (resp. simplement connexes). Pour ne pas surcharger indéfiniment la rédaction, les démonstrations sont esquissées et le détail en est laissé au lecteur ; en fait il s'agit toujours de démonstrations absolument standard de théorie des fibrés principaux : réduction du groupe structural, torsion, ...

5.1. Rappelons (Exp. XXI, 7.4) qu'un diagramme de Dynkin est réunion disjointe de ses composantes connexes, qui sont des diagrammes de Dynkin. De plus, tout **371**
diagramme de Dynkin connexe non vide correspondant à une donnée radicielle est isomorphe à l'un des diagrammes type $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \dots, \mathrm{G}_2)$ qui ont été exhibés en Exp. XXI, 7.4.6. Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à des diagrammes de Dynkin dont les composantes connexes sont de l'un des types précédents. Soit $\mathbf{T}$ l'ensemble de ces diagrammes type. Pour tout diagramme de Dynkin D, soit $n(\mathbf{t}) = n_{\mathrm{D}}(\mathbf{t})$ le nombre de composantes connexes de D isomorphes à $\mathbf{t}$, où $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$. Le type de D est par définition $\sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} n_{\mathrm{D}}(\mathbf{t})\, \mathbf{t}$.

Un diagramme de Dynkin de type $\mathbf{t}$ est dit *simple* de type $\mathbf{t}$, un diagramme de Dynkin de type $n\,\mathbf{t}$ est dit *isotypique* de type $\mathbf{t}$. Soit D_0 l'ensemble des composantes connexes de D et soit

$$a : \mathrm{D}_0 \longrightarrow \mathbf{T}$$

l'application évidente. Le type de D n'est autre que $\sum_{x \in \mathrm{D}_0} a(x)$.

5.2. Soient S un schéma, D un S-*schéma de Dynkin* (vérifiant la condition restrictive énoncée ci-dessus). Le conoyau du couple de morphismes $\mathrm{L} \rightrightarrows \mathrm{D}$ (L = [20] schéma des liaisons de D) est noté D_0. C'est le « schéma des composantes connexes » de D (il existe trivialement lorsque D est constant ; le cas général s'en déduit par descente) ; c'est un S-schéma constant tordu fini. On a un morphisme canonique

$$a : \mathrm{D}_0 \longrightarrow \mathbf{T}_{\mathrm{S}} .$$

Pour $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, posons $a^{-1}(\mathbf{t}) = \mathrm{D}_{0,\mathbf{t}}$; c'est un sous-schéma de D_0, dont l'image réciproque dans D, notée $\mathrm{D}_{\mathbf{t}}$, est la *composante isotypique* de type $\mathbf{t}$ du schéma de Dynkin
372 D. Chaque $\mathrm{D}_{\mathbf{t}}$ est un sous-schéma de D, et on a

$$\mathrm{D} = \coprod_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} \mathrm{D}_{\mathbf{t}} .$$

Remarquons que le degré de $\mathrm{D}_{0,\mathbf{t}}$ en $s \in \mathrm{S}$ est $n(s,\mathbf{t})$, si le type de D en s est $\sum_{\mathbf{t}} n(s,\mathbf{t})\,\mathbf{t}$.

5.3. Dans la suite, nous ne considérerons que des groupes semi-simples adjoints (resp. simplement connexes). Pour simplifier le langage, nous énoncerons les résultats pour des groupes adjoints ; *tous les énoncés resteront valables* si on y substitue partout *simplement connexe* à *adjoint*.

Rappelons qu'une donnée radicielle réduite adjointe est déterminée à isomorphisme près par le type de ses diagrammes de Dynkin. On dira donc qu'une donnée radicielle adjointe $\mathscr{R}$ (resp. un groupe semi-simple adjoint G) est de type $\sum n(\mathbf{t})\,\mathbf{t}$ si ses diagrammes de Dynkin le sont (resp. si son type est donné par une donnée radicielle adjointe de type $\sum n(\mathbf{t})\,\mathbf{t}$). On dira que $\mathscr{R}$ ou G est *simple* de type $\mathbf{t}$ (resp. *isotypique* de type $\mathbf{t}$), si son type est $\mathbf{t}$ (resp. $n\,\mathbf{t}$, $n > 0$).

Si G est un groupe semi-simple adjoint, on utilisera les symboles $\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})$ et $\underline{\mathrm{Dyn}}_{0,\mathbf{t}}(\mathrm{G})$ dans le sens défini en 5.2.

5.4. Soient $\mathbf{t}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, des éléments distincts de $\mathbf{T}$, et soit $\mathscr{R}_i$ une donnée radicielle adjointe épinglée isotypique de type $\mathbf{t}_i$. Considérons le produit $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \times \cdots \times \mathscr{R}_n$ (Exp. XXI, 6.4.1). Soit S un schéma tel que les différents $\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}_i)$ existent (cf. Exp. XXV). On vérifie aussitôt qu'il existe un isomorphisme canonique

$$(*) \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}) = \mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}_1) \underset{\mathrm{S}}{\times} \cdots \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}_n).$$

373 De plus, si E_i désigne le groupe des automorphismes de $\mathscr{R}_i$, E le groupe des automorphismes de $\mathscr{R}$, D_i (resp. D) le diagramme de Dynkin de $\mathscr{R}_i$ (resp. $\mathscr{R}$), on a des isomorphismes :

$$\mathrm{E}_i \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{D}_i), \qquad \mathrm{D} = \coprod \mathrm{D}_i, \qquad \mathrm{E} \simeq \prod \mathrm{E}_i \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{D}).$$

Combinant avec $(*)$ et 1.4, on voit que $(*)$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}) \simeq \mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}_1) \underset{\mathrm{S}}{\times} \cdots \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}_n).$$

[20] N.D.E. : On a remplacé R par L, comme dans 3.2.

Proposition 5.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe semi-simple* adjoint. *Il existe une décomposition unique*

$$\mathrm{G} \simeq \prod_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \mathrm{G}_{\mathbf{t}}\ ,$$

où $\mathrm{G}_{\mathbf{t}}$ *est un* S*-groupe semi-simple adjoint isotypique de type* $\mathbf{t}$. *De plus, la décomposition précédente induit des isomorphismes*

$$\underline{\mathrm{Dyn}}_{\mathbf{t}}(\mathrm{G}) \simeq \underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}_{\mathbf{t}}), \qquad \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}) \simeq \prod_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathbf{t}}).$$

Cela a en effet été démontré ci-dessus lorsque G est déployé. Dans le cas général, on peut supposer G de type constant $\mathscr{R}$. Utilisant la décomposition précédente de $\mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})$ et 1.17, on en déduit la décomposition voulue de G. Les autres résultats se prouvent alors par descente.

Remarque 5.6. — Plus généralement, si G et H sont deux groupes semi-simples ad- **374**
joints, on a comme suit des isomorphismes canoniques (le diagramme est commutatif) :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \prod_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathbf{t}},\mathrm{H}_{\mathbf{t}}) \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \prod_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \underline{\mathrm{Isomext}}(\mathrm{G}_{\mathbf{t}},\mathrm{H}_{\mathbf{t}}) \arrow[d, "\wr"] \\
\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{Dyn}(\mathrm{G}),\mathrm{Dyn}(\mathrm{H})) \arrow[r, "\sim"] & \prod_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}_{\mathbf{t}}),\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{H}_{\mathbf{t}})).
\end{tikzcd}$$

Remarque 5.7. — On peut donner une caractérisation intrinsèque de $\mathrm{G}_{\mathbf{t}}$, que nous énonçons ci-après sans démonstration : c'est le plus grand sous-groupe réductif de G *invariant* (et d'ailleurs caractéristique) et isotypique de type $\mathbf{t}$.

La proposition précédente permet de ramener l'étude des groupes semi-simples adjoints à celle des groupes semi-simples adjoints isotypiques. C'est cette étude que nous allons faire ci-dessous.

5.8. Soient $\mathscr{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée adjointe *simple* de type $\mathbf{t}$, I un ensemble fini non vide, $\mathscr{R}^{\mathrm{I}}$ la donnée radicielle produit de copies $\mathscr{R}_i$ de $\mathscr{R}$, pour $i \in \mathrm{I}$. Notons E le groupe des automorphismes de $\mathscr{R}$, qui s'identifie au groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin D de $\mathscr{R}$. Le diagramme de Dynkin de $\mathscr{R}^{\mathrm{I}}$ s'identifie à D^{I}, ce qui montre que l'on a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{D})^{\mathrm{I}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{D}^{\mathrm{I}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{I}) \longrightarrow 1\ ,$$

où Aut(I) désigne le groupe des permutations de I. Il s'ensuit que l'isomorphisme **375**
canonique

$$\mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R})^{\mathrm{I}} \simeq \mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\text{Ép}}(\mathscr{R}^{\mathrm{I}})$$

induit une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R})^{\mathrm{I}} \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}^{\mathrm{I}}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}) \longrightarrow 1 ,$$

le dernier groupe étant le S-groupe constant associé à Aut(I). Remarquons d'autre part que I s'identifie canoniquement à l'ensemble des composantes connexes de D^{I}. Si G est un S-groupe semi-simple de type $\mathscr{R}^{\mathrm{I}}$, définissant (cf. 1.17) un fibré principal homogène P sous $\mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}^{\mathrm{I}})$, la définition de $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ par descente (3.7), et celle de $\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})$ (5.2), montre que le fibré associé à P par le morphisme $\mathrm{A}_{\mathrm{S}}(\mathscr{R}^{\mathrm{I}}) \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}})$ n'est autre que $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}, \underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G}))$, correspondant à la forme $\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})$ de I_{S}. Utilisant à nouveau l'équivalence de catégories 1.17 et la suite exacte précédente, on en déduit par un raisonnement formel qu'il existe un $\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})$-groupe réductif de type $\mathscr{R}$, soit G_0, et un S-isomorphisme $\mathrm{G} \simeq \prod_{\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})/\mathrm{S}} \mathrm{G}_0$.

Proposition 5.9. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe semi-simple adjoint* isotypique *de type* $\mathbf{t}$*. Il existe un* $\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})$*-groupe semi-simple adjoint* G_0 simple *de type* $\mathbf{t}$*, et un* S*-isomorphisme* (uniques)

$$\mathrm{G} \simeq \prod_{\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})/\mathrm{S}} \mathrm{G}_0.$$

De plus, cet isomorphisme induit une suite exacte

$$1 \longrightarrow \prod_{\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})/\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_0) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})) \longrightarrow 1 .$$

376 On peut évidemment supposer G de type constant $n\,\mathbf{t}$. La première assertion a déjà été démontrée (l'assertion d'unicité est évidente). La seconde se déduit alors du cas déployé par descente.

On peut regrouper 5.5 et 5.9 :

Proposition 5.10. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe semi-simple adjoint,* $\mathfrak{D} = \underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ *son schéma de Dynkin.*

(i) *Il existe une décomposition canonique*

$$\mathrm{G} \simeq \prod_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \prod_{\mathfrak{D}_{0,\mathbf{t}}/\mathrm{S}} \mathrm{G}_{0,t} \simeq \prod_{\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})/\mathrm{S}} \mathrm{G}_0 ,$$

où chaque $\mathrm{G}_{0,\mathbf{t}}$ *est un* $\underline{\mathrm{Dyn}}_{0,\mathbf{t}}(\mathrm{G})$*-groupe simple adjoint de type* $\mathbf{t}$ (*resp. où* G_0 *est un* $\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})$*-groupe semi-simple adjoint dont le type en* $x \in \underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})$ *est* $a(x) \in \mathbf{T}$ (*le morphisme* $a : \underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G}) \to \mathbf{T}_{\mathrm{S}}$ *a été défini en* 5.2)).

(ii) *Les décompositions précédentes induisent des suites exactes isomorphes* (*notées verticalement*) *, où* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S},a}(\mathfrak{D}_0)$ *dénote le schéma des automorphismes de* $\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})$ *qui*
377 *commutent au morphisme* $a : \underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G}) \to \mathbf{T}_{\mathrm{S}}$ *:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
\prod\limits_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \prod\limits_{\mathfrak{D}_{0,\mathbf{t}}/\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}_{0,\mathbf{t}}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \prod\limits_{\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})/\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}_0) \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}\text{-}\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}\text{-}\mathrm{gr.}}(\mathrm{G}) \arrow[d] \\
\prod\limits_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\underline{\mathrm{Dyn}}_{0,\mathbf{t}}(\mathrm{G})) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S},a}(\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})) \arrow[d] \\
1 & 1
\end{tikzcd}$$

Corollaire 5.11. — *Sous les conditions précédentes, les trois catégories suivantes sont équivalentes :*

(i) *la catégorie des fibrés principaux homogènes sous* G.

(ii) *la catégorie des fibrés principaux homogènes sous* G_0.

(iii) *la catégorie produit, pour* $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, *des catégories des fibrés principaux homogènes sous les* $\mathrm{G}_{0,\mathbf{t}}$.

Cela se déduit formellement des décompositions précédentes et de 8.4.

Corollaire 5.12. — *On a des isomorphismes canoniques*

$$\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}) \simeq \prod_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}} \prod_{\mathfrak{D}_{0,\mathbf{t}}/\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}_{0,\mathbf{t}}) \simeq \prod_{\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})/\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}_0),$$

et de même en remplaçant $\underline{\mathrm{Tor}}$ *par* $\underline{\mathrm{Bor}}$ (*resp.* $\underline{\mathrm{Kil}}$).

Trivial à partir du cas déployé.

Remarque 5.13. — Le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})$$

permet de considérer $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ comme un $\underline{\mathrm{Dyn}}_0(\mathrm{G})$-schéma de Dynkin ; en fait c'est le schéma de Dynkin $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}_0)$ de G_0.

De même si $\mathrm{T} \subset \mathrm{B}$ est un couple de Killing de G, correspondant canoniquement au couple de Killing $\mathrm{T}_0 \subset \mathrm{B}_0$ de G_0, on vérifie que les obstructions au quasi-déploiement de G et G_0, qui se trouvent (3.9) dans $\mathrm{Pic}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})) = \mathrm{Pic}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}_0))$ coïncident. On en déduit :

Corollaire 5.14. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :* **378**

(i) G *est quasi-déployable,*

(ii) G_0 *est quasi-déployable,*

(iii) *chaque* $G_{0,\mathbf{t}}$*,* $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$*, est quasi-déployable.*

6. Automorphismes des sous-groupes de Borel des groupes réductifs

Lemme 6.1. — *Soient* S *un schéma,* (G, T, M, R) *un* S*-groupe déployé,* Δ *un système de racines simples de* R*, et* B *le sous-groupe de Borel correspondant. Alors* B^u *est engendré comme faisceau* (fppf) *en groupes par les* U_α*,* $\alpha \in \Delta$*.*

Soit H le sous-faisceau en groupes de B^u engendré par les U_α, $\alpha \in \Delta$. Prouvons $H \supset U_\beta$ ($\beta \in R_+$) par récurrence sur l'entier $\mathrm{ord}(\beta) = \mathrm{ord}_\Delta(\beta) > 0$ (cf. Exp. XXI, 3.2.15). L'assertion est vérifiée par hypothèse pour $\mathrm{ord}(\beta) = 1$. Supposons donc $\mathrm{ord}(\beta) > 1$ et $U_\gamma \subset H$ dès que $\mathrm{ord}(\gamma) < \mathrm{ord}(\beta)$. Il existe $\alpha \in \Delta$ tel que $\beta - \alpha \in R_+$ (Exp. XXI, 3.1.1). Soit p le plus grand entier tel que $\beta - p\,\alpha = \beta' \in R_+$. On a U_α, $U_{\beta'} \subset H$, $\beta' - \alpha \notin R$. On est donc ramené à prouver :

Lemme 6.2. — *Reprenons les notations de* Exp. XXIII, 6.4. *Supposons* $p = 1$*, c'est-à-dire* $\beta - \alpha$ *non racine. Si* H *est un sous-faisceau en groupes de* B^u *tel que* U_α*,* $U_\beta \subset H$*, alors* $U_{i\alpha+j\beta} \subset H$ *chaque fois que* $i\alpha + j\beta \in R$*,* $i > 0$*,* $j > 0$*.*

Distinguons quatre cas suivant la valeur de $q = 0, 1, 2, 3$. Dans la suite x et y désignent deux sections arbitraires de $\mathbb{G}_{a,\,S'}$, $S' \to S$.

Si $q = 0$, il n'y a rien à démontrer.

379 Si $q = 1$, on a $p_{\alpha+\beta}(\pm x) = p_\beta(-y)p_\alpha(-x)p_\beta(y)p_\alpha(x) \in H(S')$, donc $U_{\alpha+\beta} \subset H$.

Si $q = 2$, on a de même

$$p_{\alpha+\beta}(\pm xy)p_{2\alpha+\beta}(\pm x^2y) = p_\beta(-y)p_\alpha(-x)p_\beta(y)p_\alpha(x) \in H(S'),$$

d'où, quitte à changer certains signes

$$F(x, y) = p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y) \in H(S').$$

Comme $p_{\alpha+\beta}$ et $p_{2\alpha+\beta}$ commutent, on a alors $F(x, 1)F(1, -x) = p_{2\alpha+\beta}(x^2 - x)$. [21] Si $a \in \mathbb{G}_a(S)$, l'équation $X^2 - X = a$ définit une extension libre et surjective de S (c'est $\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_S[X]/(X^2 - X - a)$) ; on a donc $p_{2\alpha+\beta}(a) \in H(S')$ donc $U_{2\alpha+\beta} \subset H$, donc aussi $U_{\alpha+\beta} \subset H$ (car $F(1, a) \in H(S')$).

Si $q = 3$, on a de même

$$F(x, y) = p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y)p_{3\alpha+\beta}(x^3y)p_{3\alpha+2\beta}(x^3y^2) \in H(S');$$

et comme

$$p_{3\alpha+2\beta}(\pm x) = F(1, 1)^{-1}p_\beta(-x)F(1, 1)p_\beta(x) \in H(S'),$$

on obtient que $U_{3\alpha+2\beta} \subset H$ et donc

$$K(x, y) = p_{\alpha+\beta}(xy)p_{2\alpha+\beta}(x^2y)p_{3\alpha+\beta}(x^3y) \in H(S').$$

Calculant alors

$$K(x + y, 1)K(-x, 1)K(1, y)^{-1}$$

[21] N.D.E. : On a corrigé $F(-1, x)$ en $F(1, -x)$.

modulo $\mathrm{U}_{3\alpha+2\beta}$, on trouve
$$p_{2\alpha+\beta}(2x^2+y^2+2xy-y)p_{3\alpha+\beta}(y^3+3xy^2+3x^2y-y)\in \mathrm{H}(\mathrm{S}').$$
Si $a\in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$, les « équations »
$$x^2=-xy-y+1-a$$
$$y^2=3y-2+3a$$
définissent une extension libre et surjective de S ; on a alors $y^3+3xy^2+3x^2y-y=0$ et **380**
l'expression précédente donne $p_{2\alpha+\beta}(a)\in \mathrm{H}(\mathrm{S}')$. [22] On a donc prouvé que H contient $\mathrm{U}_{2\alpha+\beta}$ et $\mathrm{U}_{3\alpha+2\beta}$ et que
$$\mathrm{E}(x,y)=p_{\alpha+\beta}(xy)p_{3\alpha+\beta}(x^3y)\in \mathrm{H}(\mathrm{S}').$$
Comme $p_{\alpha+\beta}(xy)$ et $p_{3\alpha+\beta}$ commutent, on est ramené au calcul précédent, c.-à-d., $\mathrm{E}(1,x)\mathrm{E}(1,-x)=p_{3\alpha+\beta}(x^3-x)$, d'où $\mathrm{U}_{3\alpha+\beta}\subset \mathrm{H}$, puis $\mathrm{U}_{\alpha+\beta}\subset \mathrm{H}$.

Remarque 6.2.1. — La démonstration précédente montre qu'on aurait pu remplacer l'hypothèse « H contient U_α et U_β » par « H contient U_α ou U_β, et H est invariant sous $\mathrm{int}(\mathrm{U}_\alpha)$ et $\mathrm{int}(\mathrm{U}_\beta)$ ».

Théorème 6.3. — *Soient* S *un schéma,* G *et* G′ *deux* S*-groupes* semi-simples*,* B (*resp.* B′) *un sous-groupe de Borel de* G (*resp.* G′). *Tout isomorphisme* $\mathrm{B}\xrightarrow{\sim}\mathrm{B}'$ *est induit par un unique isomorphisme* $\mathrm{G}\xrightarrow{\sim}\mathrm{G}'$.

L'assertion est locale pour la topologie étale et on peut supposer G déployé : $\mathrm{G}=(\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R})$, B étant défini par le système de racines positives R_+ de R. L'isomorphisme donné $u:\mathrm{B}\xrightarrow{\sim}\mathrm{B}'$ induit un isomorphisme de T sur un tore maximal T′ de B′, donc de G′. L'isomorphisme donné $\mathrm{T}\simeq \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ donne un isomorphisme $\mathrm{T}'\simeq \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ dans lequel les éléments de R_+ deviennent les racines constantes de B′ par rapport à T′, donc les éléments de R les racines constantes de G′ par rapport à T′. Comme G et G′ sont semi-simples, les coracines sont déterminées par dualité (Exp. XXI, 1.2.5), ce qui prouve que $(\mathrm{T}',\mathrm{M},\mathrm{R})$ est un déploiement de G′ tel que $\mathscr{R}(\mathrm{G})=\mathscr{R}(\mathrm{G}')$.

Appliquant Exp. XXIII, 5.1 (Théorème d'unicité), on en déduit qu'il existe un **381**
unique isomorphisme $\mathrm{G}\xrightarrow{\sim}\mathrm{G}'$ coïncidant avec u sur T et les U_α, $\alpha\in\Delta$. Par 5.1, la restriction de cet isomorphisme à B est u. C.Q.F.D.

Remarque 6.3.1. — (i) Utilisant Exp. XXII, 4.1.9 et raisonnant comme dans *loc. cit.* 4.2.12, on peut dans l'énoncé du théorème remplacer « isomorphisme » par « isogénie » (resp. « isogénie centrale »).

(ii) Le théorème est faux pour les groupes réductifs. Prendre par exemple $\mathrm{G}=\mathrm{G}'=\mathrm{SL}_2\times\mathbb{G}_m$ identifié au groupe des matrices suivantes :
$$\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0\\ c & d & 0\\ 0 & 0 & h\end{pmatrix}\;\middle|\; ad-bc=1,\ h \text{ inversible}\right\};$$

---
[22] N.D.E. : On a corrigé $p_{3\alpha+\beta}(a)$ en $p_{2\alpha+\beta}(a)$, et détaillé la fin de l'argument.

prendre pour $\mathrm{B} = \mathrm{B}'$ le sous-groupe de Borel défini par $c = 0$ et pour u l'automorphisme de B suivant : $u(a, b, d, h) = (a, b, d, ah)$.

Corollaire 6.4. — *Le foncteur* $(\mathrm{G}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{B}$ *de la catégorie formée des couples* (G, B)*, où* G *est un* S*-groupe semi-simple et* B *un sous-groupe de Borel de* G*, dans la catégorie des* S*-schémas en groupes* (*les morphismes sont les isomorphismes*) *est* pleinement fidèle.

Corollaire 6.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe semi-simple,* B *un sous-groupe de Borel de* G*,* B′ *un* S*-groupe localement isomorphe à* B *pour* (fpqc). *Alors* B′ *est localement isomorphe à* B *pour la topologie* étale finie locale [23] *et il existe un* S*-groupe semi-simple* G′ *dont* B′ *soit un groupe de Borel;* G′ *est unique à un unique isomorphisme près induisant l'identité sur* B′.

382 ***Corollaire 6.6***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe semi-simple,* B *un sous-groupe de Borel de* G*. Alors* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{B})$ *est représentable par un* S*-schéma affine et lisse,* $\underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{B})$ *est représentable par un* S*-schéma étale et fini, et les morphismes évidents induisent un isomorphisme de suites exactes*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{B}_{\mathrm{ad}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{B}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{B}_{\mathrm{ad}} \arrow[r] & \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Autext}}(\mathrm{B}) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Cela résulte aussitôt de 2.1 et des résultats précédents. On laisse au lecteur le soin de développer les analogues des résultats des N° 1,2,3,4 dans le cadre ci-dessus.

Remarque 6.7. — Si S est un schéma et B un S-groupe, B ne peut donc être sous-groupe de Borel que d'un unique groupe semi-simple, bien déterminé par B. Il reste
383 donc à caractériser les S-groupes B qui sont bien sous-groupes de Borel de groupes semi-simples. [24]

7. Représentabilité des foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$, pour G réductif

7.1. Le cas déployé

7.1.1. — Soient S un schéma, G un S-groupe épinglé, T son tore maximal, Δ l'ensemble des racines simples et, pour $\alpha \in \Delta$,

$$u_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha^\times(\mathrm{S}), \qquad w_\alpha \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(\mathrm{S}),$$

les éléments définis par l'épinglage.

[23] N.D.E. : notée (étf) dans Exp. IV 6.3. En d'autres mots, pour tout $s \in \mathrm{S}$ il existe un voisinage ouvert U de s et un morphisme *étale fini surjectif* $\mathrm{V} \to \mathrm{U}$ tel que $\mathrm{B}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V} \simeq \mathrm{B} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$.

[24] N.D.E. : On peut se demander si tout S-groupe affine lisse, dont chaque fibre géométrique est un sous-groupe de Borel d'un groupe semi-simple, est un sous-groupe de Borel d'un S-groupe semi-simple. (On a supprimé le « contre-exemple » donné dans l'original, pour S = le schéma des nombres duaux sur un corps k, qui était erroné, comme nous l'a signalé M. Demazure.)

Soit d'autre part H un S-schéma en groupes ; nous nous intéressons au foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$, et plus précisément au morphisme

$$q: \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T},\mathrm{H}).$$

Soit donc

$$f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}$$

un morphisme de S-groupes, considérons $q^{-1}(f_{\mathrm{T}}) = \mathscr{F}$. C'est le foncteur défini par

$$\mathscr{F}(\mathrm{S}') = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'},\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}) \mid f = (f_{\mathrm{T}})_{\mathrm{S}'} \text{ sur } \mathrm{T}_{\mathrm{S}'}\}.$$

On a un morphisme de S-foncteurs **384**

$$i : \mathscr{F} \longrightarrow \mathrm{H}^{2n} ,$$

où $n = \mathrm{Card}(\Delta)$, défini ensemblistement par $i(f) = (f(u_\alpha), f(w_\alpha))_{\alpha\in\Delta}$. En vertu de Exp. XXIII, 1.9, i est d'ailleurs un monomorphisme.

Proposition 7.1.2. — *Si* H *est* séparé *sur* S*,* $\mathscr{F}$ *est représentable et* i *est une* immersion fermée*.*

La technique habituelle de représentabilité relative [25] nous montre qu'il suffit de prouver qu'étant données des sections

$$v_\alpha, h_\alpha \in \mathrm{H}(\mathrm{S}), \qquad \text{pour} \quad \alpha \in \Delta,$$

les S-schémas S′ tels qu'il existe un S′-homomorphisme

$$f : \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$$

prolongeant $(f_{\mathrm{T}})_{\mathrm{S}'}$ et vérifiant $f(u_\alpha) = v_\alpha$, $f(w_\alpha) = h_\alpha$, sont exactement ceux qui se factorisent par un certain sous-schéma fermé de S. On peut évidemment supposer S affine.

Pour simplifier la suite, disons qu'un morphisme $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ [26] de schémas affines vérifie la condition (L) si Y est le spectre d'une $\mathscr{O}(\mathrm{X})$-algèbre qui est un $\mathscr{O}(\mathrm{X})$-module libre. Il est clair que si l'on se restreint à la catégorie des schémas affines, un produit, ou un composé de morphismes vérifiant (L) vérifie (L) et que (L) est stable par extension de la base.

Lemme 7.1.3. — *Supposons* S *affine, et soit* $\alpha \in \Delta$*. Considérons le morphisme*

$$a : \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$$

défini ensemblistement par $a(t,t') = \alpha(t) + \alpha(t')$*.* **385**

(i) *a est fidèlement plat et de présentation finie.*

(ii) *Soit* R *le carré fibré de* a*. Le morphisme structural* $\mathrm{R} \to \mathrm{S}$ *vérifie* (L)*.*

[25] N.D.E. : Voir par exemple la démonstration de XXII 5.8.1.

[26] N.D.E. : On a corrigé $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ en $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$.

Il est d'abord clair que le morphisme a est surjectif, $\alpha : \mathrm{T} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ l'étant. Il est trivial que a est de présentation finie. Comme α vérifie (L), il suffit, pour prouver (i) et (ii) de montrer que le morphisme

$$u : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}^2 \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$$

défini ensemblistement par $u(x,y) = x+y$ vérifie (L). Autrement dit, il suffit de vérifier que pour tout anneau A, l'anneau $\mathrm{A}[\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{X}^{-1},\mathrm{Y}^{-1}]$ est un module libre sur son sous-anneau $\mathrm{A}[\mathrm{X}+\mathrm{Y}]$. [27] Or $\mathrm{A}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ est un module libre de base $\{1,\mathrm{X}\}$ sur le sous-anneau $\mathrm{B} = \mathrm{A}[\mathrm{X}+\mathrm{Y},\mathrm{XY}]$ (on a $\mathrm{X}^2 - (\mathrm{X}+\mathrm{Y})\mathrm{X} + \mathrm{XY} = 0$), donc $\mathrm{A}[\mathrm{X}^{\pm 1},\mathrm{Y}^{\pm 1}] = \mathrm{A}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_{(\mathrm{XY})}$ est libre sur $\mathrm{B}_{\mathrm{XY}} = \mathrm{A}[\mathrm{X}+\mathrm{Y},(\mathrm{XY})^{\pm 1}]$ de base $\{1,\mathrm{X}\}$, et libre sur $\mathrm{A}[\mathrm{X}+\mathrm{Y}]$ de base
386 les éléments $(\mathrm{XY})^p$ et $(\mathrm{XY})^p\mathrm{X}$, pour $p \in \mathbb{Z}$.

Lemme 7.1.4. — *Soit $\alpha \in \Delta$, et soit $b : \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \to \mathrm{H}$ le morphisme défini ensemblistement par*

$$b(t,t') = \big(\operatorname{int}(f_{\mathrm{T}}(t))v_\alpha\big)\big(\operatorname{int}(f_{\mathrm{T}}(t'))v_\alpha\big).$$

Soit $f_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{H}$ un S*-morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :* [28]

(i) *f_α est un morphisme de groupes ; on a $f_\alpha(u_\alpha) = v_\alpha$ et*

$$f_{\mathrm{T}}(t)f_\alpha(x)f_{\mathrm{T}}(t)^{-1} = f_\alpha(\alpha(t)x)$$

pour tous $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $x \in \mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

(ii) *On a $f_\alpha(u_\alpha) = v_\alpha$ et la relation*

$$f_\alpha\big(a(t,t')u_\alpha\big) = b(t,t')$$

pour tous $t,t' \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Si f_α vérifie (i), on a $f_\alpha(\alpha(t)u_\alpha) = \operatorname{int}(f_{\mathrm{T}}(t))v_\alpha$, ce qui entraîne aussitôt (ii). Réciproquement, supposons (ii) vérifiée et démontrons les différentes conditions de (i) ; prouvons d'abord la dernière. Comme a est couvrant pour (fpqc), il suffit de
387 prouver que si $t,t',t'' \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, on a

$$f_{\mathrm{T}}(t)f_\alpha\big(a(t',t'')u_\alpha\big)f_{\mathrm{T}}(t)^{-1} = f_\alpha\big(\alpha(t)a(t',t'')u_\alpha\big);$$

or ceci s'écrit aussi

$$f_{\mathrm{T}}(t)b(t',t'')f_{\mathrm{T}}(t)^{-1} = b(tt',tt''),$$

propriété évidente sur la définition de b. Reste à prouver que f_α est un morphisme de groupes. Or la propriété précédente donne aussitôt

$$\begin{aligned} f_\alpha\big(\alpha(t)u_\alpha\big)f_\alpha\big(\alpha(t')u_\alpha\big) &= (f_{\mathrm{T}}(t)f_\alpha(u_\alpha)f_{\mathrm{T}}(t)^{-1})\cdot(f_{\mathrm{T}}(t')f_\alpha(u_\alpha)f_{\mathrm{T}}(t')^{-1}) \\ &= b(t,t') = f_\alpha\big(\alpha(t)u_\alpha + \alpha(t)\alpha(t')u_\alpha\big). \end{aligned}$$

On a donc $f_\alpha(x+x') = f_\alpha(x)f_\alpha(x')$, chaque fois que x et x' sont des sections de l'ouvert $\mathrm{U}_\alpha^\times$ de U_α, qui est schématiquement dense ; on conclut alors par Exp. XVIII, 1.4.

[27] N.D.E. : On a simplifié la démonstration de l'original.

[28] N.D.E. : Dans ce qui suit, la loi de groupe de U_α est notée additivement, c.-à-d., si l'on note $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\alpha$ l'isomorphisme tel que $p_\alpha(1) = u_\alpha$ et si $x = p_\alpha(z)$, alors $\alpha(t)x$ (resp. $a(t,t')u_\alpha$) désigne $p_\alpha(\alpha(t)z)$ (resp. $p_\alpha(a(t,t')) = \alpha(t)u_\alpha + \alpha(t')u_\alpha$).

7.1.5. — Fixons-nous provisoirement un $\alpha \in \Delta$. Le morphisme a est fidèlement plat quasi-compact, donc $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$ s'identifie au quotient de $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ par la relation d'équivalence R définie par a. Soit

$$\mathrm{R} \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$$

cette relation d'équivalence.

Pour que le morphisme b se factorise par a, [29] il faut et il suffit que $b \circ i_1 = b \circ i_2$; autrement dit, si on note K le noyau du couple de morphismes

$$\mathrm{R} \underset{b \circ i_2}{\overset{b \circ i_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{H}\ ,$$

il faut et il suffit que $\mathrm{K} = \mathrm{R}$. Or H est supposé séparé sur S, donc K est un sous-schéma fermé de R. Rappelons, d'autre part, que R est essentiellement libre sur S (7.1.3).

7.1.6. — D'après ce qui précède, si S' est un S-schéma, pour qu'il existe sur S' un f_α **388**
vérifiant les conditions de 7.1.4 (i) (et alors nécessairement unique), il faut et il suffit que $\mathrm{K}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{R}_{\mathrm{S}'}$, et que le morphisme f_α obtenu vérifie $f_\alpha(u_\alpha) = v_\alpha$.

La première condition est équivalente au fait que $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par un certain sous-schéma fermé de S (Exp. VIII, 6.4 [30]) ; si on remplace S par ce sous-schéma fermé, la seconde condition définit à nouveau un sous-schéma fermé de S (égalité de deux sections de H, or H est supposé séparé sur S).

Quitte à remplacer S par ce sous-schéma fermé, on peut donc supposer qu'il existe un morphisme $f_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{H}$ vérifiant les conditions de 7.1.4 (i). Prenant l'intersection des sous-schémas de S obtenus pour chaque $\alpha \in \Delta$, on peut supposer cette condition vérifiée pour tout $\alpha \in \Delta$.

7.1.7. — De même, considérons pour chaque $\alpha \in \Delta$ les deux morphismes de S-groupes

$$f_{\mathrm{T}} \circ \mathrm{int}(w_\alpha), \ \ \mathrm{int}(h_\alpha) \circ f_{\mathrm{T}} : \quad \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}.$$

Comme H est séparé sur S et T essentiellement libre sur S, le même raisonnement que précédemment montre que, quitte à remplacer S par un sous-schéma fermé, on peut supposer que pour tout $\alpha \in \Delta$ on a

$$f_{\mathrm{T}} \circ \mathrm{int}(w_\alpha) = \mathrm{int}(h_\alpha) \circ f_{\mathrm{T}}.$$

7.1.8. — Utilisant maintenant le théorème de générateurs et relations (Exp. XXIII, 3.5), on voit qu'il existe un homomorphisme de groupes $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ vérifiant les **389**
conditions exigées si et seulement si un certain ensemble fini de relations algébriques entre les sections h_α, v_α, $f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(-1))$ $(\alpha \in \Delta)$ de H est vérifié :

$$\mathrm{R}_i\Big((h_\alpha)_\alpha, (v_\alpha)_\alpha, (f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(-1)))_\alpha\Big) = e, \qquad i = 1, \ldots, n$$

[29] N.D.E. : i.e. pour que la condition (ii) de 7.1.4 soit satisfaite.
[30] N.D.E. : voir aussi l'ajout dans Exp. $\mathrm{VI_B}$, 6.2.3.

Comme H est séparé sur S, cela définit encore un sous-schéma fermé de S, et on a terminé.

Corollaire 7.1.9. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif déployé,* T *son tore maximal,* H *un* S*-schéma en groupes séparé sur* S*. Soit d'autre part* $\mathscr{P}$ *une propriété de morphismes telle que :*

(i) *Une immersion fermée vérifie* $\mathscr{P}$*.*

(ii) *Le composé de deux morphismes vérifiant* $\mathscr{P}$ *vérifie aussi* $\mathscr{P}$*.*

(iii) $\mathscr{P}$ *est stable par changement de base.*

(iv) *Le morphisme structural* $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ *vérifie* $\mathscr{P}$*.*

Alors le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathrm{H})$$

est relativement représentable par un morphisme séparé vérifiant $\mathscr{P}$*.* [31]

En effet, on peut supposer G épinglé ; le morphisme structural $\mathrm{H}^{2n} \to \mathrm{S}$ vérifie $\mathscr{P}$ et on conclut par 7.1.2.

Corollaire 7.1.10. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif déployé, et* H *un* S*-schéma en groupes* lisse et à fibres affines [32]*. Alors le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ *est représentable par un* S*-schéma localement de présentation finie et séparé sur* S*.*

390 En effet, comme H est lisse S, on peut considérer sa composante neutre H^0, qui est à fibres affines, lisse, séparée et de présentation finie sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$, 3.10 et 5.5). Comme G est à fibres connexes, on peut remplacer H par H^0. Comme G et H sont alors de présentation finie, on peut supposer S noethérien, et on applique 7.1.9 en prenant pour $\mathscr{P}$ la propriété « de type fini ». Mais, par Exp. XV, 8.9, on sait que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathrm{H})$ est représentable par un S-schéma séparé et localement de type fini.

Remarque 7.1.11. — Si H est affine sur S, on peut remplacer la référence à Exp. XV par Exp. XI, 4.2.

7.2. Cas général

Proposition 7.2.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*. Soit d'autre part* H *un* S*-schéma en groupes, tel que le morphisme structural* $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ *vérifie la condition suivante :*

(+) *Chaque point* $s \in \mathrm{S}$ *possède un voisinage ouvert* U *tel que le morphisme* $\mathrm{H_U} \to \mathrm{U}$ *soit quasi-projectif.*

Alors le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathrm{H})$$

est relativement représentable par un morphisme vérifiant (+)*.*

---

[31] N.D.E. : i.e. pour tout $\mathrm{S}' \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathrm{H})$, avec S' représentable, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ est représentable et le morphisme de S-schémas $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$ est séparé et vérifie $\mathscr{P}$.

[32] N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que H soit quasi-séparé, qui est superflue.

Lorsque G est déployable relativement à T, on applique 7.1.9 en prenant pour $\mathscr{P}$ la propriété (+) ci-dessus. Lorsque G est localement isotrivial, par exemple semi-simple **391**
(4.2.2), on remarque que l'assertion du théorème est locale pour la topologie étale finie locale (en effet, la propriété d'être quasi-projectif est locale pour la topologie étale finie *globale* et assure l'effectivité de la descente pour cette topologie, cf. SGA 1, VIII, 7.7). Enfin, dans le cas général, on utilise le lemme suivant :

Lemme 7.2.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* G′ *le groupe dérivé de* G (Exp. XXII, 6.2), $\mathrm{T}' = \mathrm{T} \cap \mathrm{G}$ *le tore maximal de* G′ *correspondant à* T (Exp. XXII, 6.2.8). *Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} & \mathrm{G}' \arrow[l] \\ \mathrm{T} \arrow[u] & \mathrm{T}' \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est une somme amalgamée *dans la catégorie des* S*-faisceaux en groupes : c.-à-d., pour tout* S*-faisceau en groupe* H*, le carré suivant est cartésien :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}',\mathrm{H}) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T},\mathrm{H}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}',\mathrm{H}). \end{tikzcd}$$

En effet, si rad(G) est le radical de G, alors $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{T}$, donc

$$\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \cap \mathrm{G}' = \mathrm{rad}(\mathrm{G}) \cap \mathrm{T}' = \mathrm{K},$$

et le produit dans G induit des isogénies (Exp. XXII, 6.2)

$$i : \mathrm{G}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{rad}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G}, \qquad j : \mathrm{T}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{rad}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{T}\,.$$

Soient $f_{\mathrm{G}'} : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}$, $f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \to \mathrm{H}$, et $f_{\mathrm{T}'} : \mathrm{T}' \to \mathrm{H}$ des morphismes de S-groupes tels **392**
que $f_{\mathrm{G}'}|_{\mathrm{T}'} = f_{\mathrm{T}}|_{\mathrm{T}'} = f_{\mathrm{T}'}$. Montrons qu'il existe un unique morphisme de S-groupes $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ induisant $f_{\mathrm{G}'}$ et f_{T}. Soit $f_{\mathrm{rad}} = f_{\mathrm{T}}|_{\mathrm{rad}(\mathrm{G})}$ [33] et soit

$$f_1 = f_{\mathrm{G}'} \cdot f_{\mathrm{rad}} : \quad \mathrm{G}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{rad}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{H}.$$

Pour que f existe (et il sera évidemment unique), il faut et il suffit que f_1 induise l'identité sur le noyau de i, c'est-à-dire que $f_{\mathrm{G}'}$ et f_{rad} coïncident sur K ; mais l'existence de f_{T} montre par le même raisonnement que $f_{\mathrm{T}'}$ et f_{rad} coïncident sur K. Il n'y a plus qu'à remarquer que $f_{\mathrm{G}'}$ et $f_{\mathrm{T}'}$ coïncident évidemment sur $\mathrm{K} \subset \mathrm{T}'$.

Raisonnant maintenant comme en 7.1.10, on déduit de 7.2.1 :

Corollaire 7.2.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* H *un* S*-schéma en groupes,* lisse et quasi-projectif sur S à fibres affines. *Alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ *est représentable par un* S*-schéma localement de présentation finie et séparé sur* S.

[33] N.D.E. : On a remplacé f_r par f_{rad}.

7.3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0

Si G et H sont deux S-groupes lisses, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie, on a un morphisme canonique

$$\mathscr{L}ie : \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),$$

où le second membre a une définition évidente.

393 ***Proposition 7.3.1***. — *Soient* S *un schéma de caractéristique* 0 (*i.e. un* $\mathbb{Q}$*-schéma*), G *un* S*-groupe réductif,* H *un* S*-schéma en groupes lisse et quasi-projectif sur* S *à fibres affines.*

(i) $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ *est représentable par un* S*-schéma* lisse et séparé *sur* S.

(ii) *Si* G *est* semi-simple*, ce schéma est* affine et de présentation finie *sur* S.

(iii) *Si* G *est* simplement connexe (Exp. XXII, 4.3.3), *le morphisme canonique*

$$\mathscr{L}ie : \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

est un isomorphisme.

Lemme 7.3.2. — *Soient k un corps de caractéristique* 0, G *un k-groupe réductif,* V *un k-espace vectoriel de dimension finie,* $\mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ *une représentation linéaire de* G *dans* V. *On a*

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathrm{V}) = \mathrm{H}^0(\mathfrak{g}, \mathrm{V}), \qquad \mathrm{H}^i(\mathrm{G}, \mathrm{V}) = 0, \quad \textit{pour } i > 0.$$

La première égalité est vraie en général pour un groupe lisse et connexe (34) ; dans le cas d'un groupe réductif, on peut la démontrer comme suit : on peut supposer k algébriquement clos, donc G déployable, donc G engendré par des sous-groupes isomorphes à $\mathbb{G}_{m,k}$ (35), et il suffit de vérifier l'assertion pour ce groupe, ce qui est facile.

De cette première égalité résulte que $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathrm{V})$ est un foncteur exact en V lorsque
394 G est semi-simple ; $\mathfrak{g}$ est en effet alors une algèbre de Lie semi-simple et on applique [**BLie**], § I.6, exercice 1 (b). L'assertion reste vraie lorsque G est réductif ; en effet, si l'on introduit le radical R de G (36) et le quotient G/R qui est semi-simple, on a $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathrm{V}) = \mathrm{H}^0(\mathrm{G}/\mathrm{R}, \mathrm{H}^0(\mathrm{R}, \mathrm{V}))$, et $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, -)$ est composé de deux foncteurs exacts. Appliquant alors Exp. I, 5.3.1, on en déduit $\mathrm{H}^i(\mathrm{G}, \mathrm{V}) = 0$ pour $i > 0$.

Remarque 7.3.3. — Sous les conditions précédentes, si G est semi-simple, on a $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \mathrm{V}) = \mathrm{H}^2(\mathfrak{g}, \mathrm{V}) = 0$, cf. Bourbaki, *loc. cit.* (b) et (d).

(34) N.D.E. : En effet, il est clair que $\mathrm{V}^{\mathrm{G}} \subset \mathrm{V}^{\mathfrak{g}}$. D'autre part, $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}^{\mathfrak{g}})$ est un sous-groupe fermé de G, *lisse* puisque $\mathrm{car}(k) = 0$; d'après Exp. II 5.3.1, on a $\mathscr{L}ie(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{V}^{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{g}$, et comme H est lisse et G connexe ceci entraîne H = G, d'où $\mathrm{V}^{\mathfrak{g}} \subset \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$ (voir aussi [**DG70**], § II.6, Prop. 2.1 (c)).

(35) N.D.E. : En effet, la réunion des tores maximaux de G est dense dans G, cf. *Bible*, § 6.5, Th. 5 (= [**Ch05**], § 6.6, Th. 6).

(36) N.D.E. : Noter que R est un tore.

7.3.4. — Démontrons maintenant la proposition. Déjà, par 7.2.3, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ est représentable par un S-schéma localement de présentation finie et séparé sur S ; pour montrer qu'il est lisse, il suffit de prouver qu'il est infinitésimalement lisse (Exp. XI, 1.8) [37], ce qui résulte de Exp. III, 2.8 (i) par 7.3.2. On a donc prouvé (i).

Montrons que (ii) résulte de (iii). Il suffit d'abord de prouver que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ est affine sur S, il sera alors de présentation finie sur S, car il est lisse sur S par (i) ; de toutes façons $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est représentable par un sous-schéma fermé de

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \simeq \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\vee}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathfrak{h})$$

qui est un S-schéma affine, et la conclusion voulue apparaît lorsque G est simplement connexe.

Dans le cas général, on peut supposer G déployé, donc $\mathrm{G} \simeq \mathrm{G}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{\acute{E}p}}(\mathscr{R})$; introduisant la donnée radicielle simplement connexe $\mathrm{sc}(\mathscr{R})$ (Exp. XXI, 6.5.5), et utilisant le théorème d'existence (Exp. XXV, 1.1), on construit un S-groupe simplement connexe $\overline{\mathrm{G}}$ et une isogénie centrale $\overline{\mathrm{G}} \to \mathrm{G}$. Le noyau K de cette isogénie est un S-groupe diagonalisable fini (donc un S-groupe constant tordu, S étant de caractéris- **395**
tique 0) et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{K},\mathrm{H})$ est (trivialement) représentable par un S-schéma séparé (si $\mathrm{K} \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$, alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{K},\mathrm{H})$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}(\mathrm{H} \xrightarrow{n} \mathrm{H})$). On a une suite exacte de « S-schémas pointés » :

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \xrightarrow{u} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\overline{\mathrm{G}},\mathrm{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{K},\mathrm{H}),$$

donc u est une immersion fermée, donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ est affine sur S.

7.3.5. — Démontrons enfin (iii). Raisonnant comme dans la démonstration de (i) et utilisant 7.3.3, on peut montrer que le S-schéma $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est lisse sur S. Pour démontrer (iii), on peut donc supposer que $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 ; il suffit même de prouver que le morphisme $\mathscr{L}ie$ est bijectif sur les points à valeurs dans k et qu'il induit une bijection sur les espaces tangents en deux points correspondants. Montrons d'abord que

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$$

est bijectif.

Si $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est un morphisme de k-groupes, le graphe de u est un sous-groupe connexe de $\mathrm{G}\times_k \mathrm{H}$ qui est déterminé par son algèbre de Lie qui est le graphe de $\mathscr{L}ie(u)$; l'application est donc injective. Réciproquement, si $v : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie, le graphe $\mathfrak{k}$ de v est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$, isomorphe à $\mathfrak{g}$. En particulier, comme $\mathfrak{g}$ est sa propre algèbre dérivée, il en est de même de $\mathfrak{k}$ et donc, d'après un théorème de Chevalley ([**Ch51**], § 14, Th. 15), $\mathfrak{k}$ est **396**

[37] N.D.E. : i.e. que pour tout S-schéma S' *local artinien*, de point fermé s', tout morphisme de $\kappa(s')$-groupes $\mathrm{G}_{s'} \to \mathrm{H}_{s'}$ se relève en un morphisme de S'-groupes $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$. D'après Exp. III 2.8, ceci résulte de la nullité de $\mathrm{H}^2(\mathrm{G}_{s'},\mathrm{V})$, où $\mathrm{V} = \mathscr{L}ie(\mathrm{H}_{s'}/\kappa(s'))$.

l'algèbre de Lie d'un sous-groupe connexe K de $G \times_k H$. [(38)] De plus, comme $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{g}$ est semi-simple, alors G est un k-groupe semi-simple. Comme

$$\dim(K) = \dim(\mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$$

et comme $K \cap H$ est fini (car son algèbre de Lie est nulle), le morphisme canonique $\mathrm{pr}_1 : K \to G$ est fini et dominant ; comme G est connexe, pr_1 est surjectif ; c'est donc une isogénie. Comme G est simplement connexe et K semi-simple alors, d'après Exp. XXI 6.2.7, pr_1 est un isomorphisme, donc K est le graphe d'un morphisme de k-groupes $u : G \to H$ tel que $\mathscr{L}ie(u) = v$.

Enfin, soit $u : G \to H$ un morphisme de k-groupes. L'espace tangent à $\underline{\mathrm{Hom}}_{k\text{-gr.}}(G, H)$ en u s'identifie à $Z^1(G, \mathfrak{h})$ (cf. Exp. II, 4.2 ; G opère sur $\mathfrak{h}$ par $\mathrm{Ad}_H \circ u$) ; de la même manière, on peut prouver que l'espace tangent à $\underline{\mathrm{Hom}}_{k\text{-alg. de Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ en $\mathscr{L}ie(u)$ s'identifie à $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Il nous faut donc prouver que l'application canonique $Z^1(G, \mathfrak{h}) \to Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est bijective. Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{h}^G \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z^1(G, \mathfrak{h}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(G, \mathfrak{h}) \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{h}^{\mathfrak{g}} \arrow[r] & \mathfrak{h} \arrow[r] & Z^1(G, \mathfrak{h}) \arrow[r] & H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})
\end{tikzcd}$$

et d'après 7.3.2 et 7.3.3 on a $\mathfrak{h}^G = \mathfrak{h}^{\mathfrak{g}}$ et $H^1(G, \mathfrak{h}) = 0 = H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, d'où la conclusion désirée.

Remarque 7.3.6. — Il est vraisemblable que si S est un schéma localement noethérien, G un S-groupe semi-simple simplement connexe, H un S-schéma en groupes lisse, $\widehat{G}$ et $\widehat{H}$ leurs complétés formels le long de la section unité, tout homomorphisme $\widehat{G} \to \widehat{H}$ provient d'un unique homomorphisme de G dans H, ce qui généraliserait 7.3.1 (iii). Lorsque S est le spectre d'un corps k et H est affine et de type fini, cela résulte d'un théorème de Dieudonné ([**Di57**], § 15, th. 4). [(39)]

[(38)] N.D.E. : voir aussi [**Bo91**], II 7.9. D'autre part, on a ajouté la phrase qui suit.

[(39)] N.D.E. : Voir Exp. $\mathrm{VII_B}$ pour la définition des groupes formels $\widehat{G}$ et $\widehat{H}$. Supposons que $S = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps. D'après *loc. cit.*, 2.2.1, se donner un morphisme de k-groupes formels $v : \widehat{G} \to \widehat{H}$ équivaut à se donner un morphisme de k-algèbres de Hopf $\phi : \mathrm{Dist}(G) \to \mathrm{Dist}(H)$, où Dist(G) désigne l'algèbre des distributions (à l'origine) de G, cf. Exp. $\mathrm{VII_A}$, 2.1 ou [**DG70**], § II.4, 6.1 ou [**Ja87**], I 7.7 (elle est appelée « l'hyperalgèbre » de G dans [**Di57**] et [**Ta75**]). Le théorème 4 de [**Di57**] (voir aussi [**Ta75**], 0.3.4 (f) et (g)) généralise dans ce contexte le théorème de Chevalley utilisé dans 7.3.5 ; on obtient ainsi qu'il existe un k-sous-groupe fermé connexe K de $G \times H$ tel que $\widehat{K}$ égale le graphe de v ; comme $\mathrm{Dist}(K) \to \mathrm{Dist}(G)$ est un isomorphisme, $K \to G$ est un morphisme étale fini. On en déduit alors que K est semi-simple puis, d'après Exp. XXI 6.2.7, que $K \to G$ est un isomorphisme (puisque G est simplement connexe) ; voir aussi [**Ta75**], 1.8 et 2.2. Plus généralement, *loc. cit.* étudie les k-groupes G ayant la propriété (SC) : tout morphisme étale fini de k-groupes $G' \to G$, avec G' connexe, est un isomorphisme. Notons enfin que ce qui précède montre que tout Dist(G)-module V de dimension finie est, de façon unique, un G-module ; pour une extension au cas d'un k-groupe réductif déployé G (ou même d'un sous-groupe de Borel de G) voir [**Ja87**], II 1.20 (et les références qui s'y trouvent).

7.4. Un exemple

À titre d'exemple, nous allons déterminer **397**

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}, \mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}).$$

7.4.1. — On rappelle (Exp. XX, n°5), que $\mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$ est le S-schéma en groupes formé des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ sur S vérifiant $ad - bc = 1$. Un tore maximal T est défini par le monomorphisme $\alpha^* : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$

$$\alpha^*(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Une racine de G par rapport à T est définie par $\alpha(\alpha^*(z)) = z^2$, un monomorphisme

$$p : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$$

correspondant étant défini par

$$p(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, le représentant du groupe de Weyl correspondant à $u = p(1)$ est

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons d'autre part (Exp. XX, 6.2) que $\mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$ est engendré par T, $p(\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}})$ et w, soumis aux relations **398**

$$\begin{aligned} \alpha^*(z)p(x)\alpha^*(z^{-1}) &= p(z^2x), \\ w\alpha^*(z)w^{-1} &= \alpha^*(z^{-1}), \\ w^2 &= \alpha^*(-1), \\ (wu)^3 &= 1. \end{aligned}$$

7.4.2. — Soit f un endomorphisme de $\mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$. Il définit d'abord un homomorphisme $f \circ \alpha^* : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$. Le noyau $\mathrm{Ker}(f \circ \alpha^*)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$, donc est localement sur S égal à un $\boldsymbol{\mu}_{n,\,\mathrm{S}}$ ($n \geqslant 1$) ou à $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ et un monomorphisme

$$f' : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$$

tels que $f \circ \alpha^*(z) = f'(z^n)$.

En vertu de la conjugaison des monomorphismes $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$, on peut, après une extension de la base couvrante pour la topologie étale, trouver une section g de G telle que $f \circ \alpha^*(z) = \mathrm{int}(g) \circ \alpha^*(z^n)$. Transformant f par $\mathrm{int}(g)$, on est donc ramené au cas où il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \circ \alpha^*(z) = \alpha^*(z^n)$.

7.4.3. — Considérons maintenant le morphisme

$$f \circ p : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}.$$

Il vérifie la condition

$$\alpha^*(z^n)(f \circ p)(x)\alpha^*(z^n)^{-1} = (f \circ p)(z^2 x).$$

Si $n = 0$, il s'ensuit aussitôt que $f \circ p$ est invariant sous les homothéties de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$, donc
399 constant. Si $n \neq 0$, on peut appliquer Exp. XXII, 4.1.9 ; $x \mapsto x^n$ est un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$, il existe un $\lambda \in \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ tel que

$$f \circ p(x) = p(\lambda\, x^n);$$

cette relation est d'ailleurs valable pour $n = 0$, en prenant $\lambda = 1$. Quitte à de nouveau étendre S, on peut trouver un $z \in \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ tel que $z^2 = \lambda$. Remplaçant f par $\mathrm{int}(\alpha^*(z)) \circ f$, on est donc ramené au cas où l'on a

$$f \circ \alpha^*(z) = \alpha^*(z^n), \qquad f \circ p(x) = p(x^n).$$

7.4.4. — Enfin, on doit avoir $f(w)\alpha^*(z^n)f(w)^{-1} = \alpha^*(z^n)^{-1}$ et $(f(w)u)^3 = 1$. En vertu de Exp. XX, 3.8, cela entraîne $f(w) = w^n$. Comme G est engendré par T, $p(\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}})$ et w cela entraîne que pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, on a

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}.$$

7.4.5. — Résumant la discussion précédente, on voit que *localement* sur S pour la topologie étale, on peut trouver pour tout endomorphisme f de $\mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$ un automorphisme (intérieur) u de $\mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$, et un entier $n \geqslant 0$ tel que $f = u \circ \mathrm{F}_n$, où

$$\mathrm{F}_n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que si $f = u \circ \mathrm{F}_n$, l'entier n est bien déterminé par une fibre f_s de f, par exemple par $\mathrm{Ker}(f_s)$. Il s'ensuit que n est une fonction localement constante sur S.

400 ***7.4.6***. — On en déduit aussitôt que si f est un endomorphisme de $\mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$, alors S se décompose canoniquement en somme de sous-schémas ouverts et fermés S_0, S_1, S_{p^n} (où p^n décrit l'ensemble des puissances > 0 des nombres premiers) tels que :

(i) f_{S_0} est le morphisme nul,

(ii) f_{S_1} est un isomorphisme (= un automorphisme intérieur),

(iii) S_{p^n} est de caractéristique p et $f_{\mathrm{S}_{p^n}}$ se décompose de manière unique sous la forme $u \circ \mathrm{F}_p^n$, où u est un automorphisme intérieur et F_p l'endomorphisme de Frobenius de $\mathrm{SL}_{2,\,\mathbb{F}_p}$.

7.4.7. — En d'autres termes, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2,\,\mathbb{Z}}, \mathrm{SL}_{2,\,\mathbb{Z}})$ est le schéma somme :

(i) d'un schéma isomorphe à $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$,

(ii) d'un schéma isomorphe à $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbb{Z}\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2,\,\mathbb{Z}}) \simeq \mathrm{ad}(\mathrm{SL}_{2,\,\mathbb{Z}})$,

(iii) pour chaque nombre premier p et chaque entier $n > 0$ d'un schéma isomorphe à $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbb{F}_p\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2,\mathbb{F}_p}) \simeq \mathrm{ad}(\mathrm{SL}_{2,\mathbb{F}_p})$.

7.4.8. — Il s'ensuit en particulier que

(i) $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{F}_p\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2,\mathbb{F}_p}, \mathrm{SL}_{2,\mathbb{F}_p})$ a un nombre infini de composantes connexes, et donc *n'est pas quasi-compact.*

(ii) Si S est un schéma d'inégales caractéristiques, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{SL}_{2,\mathrm{S}}, \mathrm{SL}_{2,\mathrm{S}})$ *n'est pas plat* sur S.

8. Appendice : Cohomologie d'un groupe lisse sur un anneau hensélien. Cohomologie et foncteur $\prod$

401

Proposition 8.1. — *Soient* S *un schéma* local hensélien*, s son point fermé,* G *un* S-*schéma en groupes lisse tel que tout sous-ensemble fini de* G *soit contenu dans un ouvert affine* (*)*. Alors*

(i) *Si* P *est un fibré principal homogène sous* G*, il existe un* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *étale fini et surjectif qui trivialise* P*. On a* $\mathrm{Fib}(\mathrm{S},\mathrm{G}) \simeq \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{S},\mathrm{G})$.

(ii) *Pour tout morphisme* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *étale fini et surjectif, l'application canonique*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S},\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{S}'\otimes_{\mathrm{S}}\kappa(s)/\kappa(s),\mathrm{G}_s)$$

est bijective.

(iii) *L'application canonique*

$$\mathrm{Fib}(\mathrm{S},\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{Fib}(\kappa(s),\mathrm{G}_s)$$

est bijective.

8.1.2. — Si K est une extension séparable finie de $\kappa(s)$, il existe un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ étale fini surjectif tel que $\mathrm{K} \simeq \mathrm{S}'\otimes_{\mathrm{S}}\kappa(s)$. (40) Si P est un fibré principal homogène sous G, alors P est lisse sur S, donc P_s lisse sur $\kappa(s)$; il existe donc une extension séparable finie K de $\kappa(s)$ telle que P_{K} possède une section (cf. EGA IV$_4$, 17.15.10). Représentant K comme il a été dit ci-dessus, on voit que $\mathrm{P}_{\mathrm{S}'}$ possède une section par le « lemme de Hensel » (cf. EGA IV$_4$, 18.5.17), ce qui prouve la première partie de (i).

Réciproquement, si P est un *faisceau* principal homogène sous G pour la topologie étale, il existe un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ étale fini surjectif qui trivialise P (en effet toute famille couvrante d'un schéma local hensélien pour la topologie étale est majorée par une famille réduite à un morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ de la forme voulue). 402

En vertu de l'hypothèse de descente faite sur G, P est représentable (SGA 1, VIII, 7.6), ce qui achève de prouver (i), et montre que (ii) entraîne (iii). Il ne nous reste donc qu'à prouver (ii).

(*) Cette dernière condition est en fait inutile (cf. A. Grothendieck, *Groupe de Brauer* III, in *Dix Exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, 1968, théorème 11.7 et remarques 11.8.3).

(40) N.D.E. : Noter que S′ est encore local et hensélien. D'autre part, on a conservé la numérotation de l'original : il n'y a pas de n°8.1.1.

8.1.3. — L'application de (ii) est injective : soient P et Q deux fibrés principaux homogènes sous G trivialisés par S′. Considérons le S-faisceau en groupes $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{G-fibrés}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$; comme $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ est isomorphe à $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, H est représentable, en vertu de la deuxième hypothèse sur G cf. ci-dessus. Si $\mathrm{H}(\kappa(s)) \neq \varnothing$, alors $\mathrm{H}(\mathrm{S}) \neq \varnothing$ par le lemme de Hensel, donc P et Q sont isomorphes.

8.1.4. — Prouvons enfin que l'application de (ii) est surjective, ou encore que l'application canonique

$$\mathrm{Z}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{Z}^1(\mathrm{S}' \otimes_{\mathrm{S}} \kappa(s)/\kappa(s), \mathrm{G}_s)$$

est surjective. Soit $\mathbf{Z}^1$ le S-foncteur défini par

$$\mathbf{Z}^1(\mathrm{T}) = \mathrm{Z}^1(\mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}/\mathrm{T}, \mathrm{G}_{\mathrm{T}});$$

l'application précédente s'identifie à l'application

$$\mathbf{Z}^1(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathbf{Z}^1(\kappa(s));$$

par une nouvelle application du lemme de Hensel, il suffit de prouver que $\mathbf{Z}^1$ est représentable par un S-schéma lisse.

403 ***8.1.5***. — Prouvons que $\mathbf{Z}^1$ est représentable par un S-schéma localement de présentation finie. Soit $\mathbf{C}^i$, $i = 0, 1, \ldots$, le S-foncteur défini par

$$\mathbf{C}^i(\mathrm{T}) = \mathrm{C}^i(\mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}/\mathrm{T}, \mathrm{G}_{\mathrm{T}}),$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{C}^i(\mathrm{T}) = \mathrm{G}((\mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}/\mathrm{T})^{i+1}) = \mathrm{G}((\mathrm{S}'/\mathrm{S})^{i+1} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}),$$

ou encore

$$\mathbf{C}^i = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}((\mathrm{S}'/\mathrm{S})^{i+1}, \mathrm{G}).$$

Comme $\mathbf{Z}^1$ est obtenu à partir de $\mathbf{C}^1$ et $\mathbf{C}^2$ par produits fibrés, il suffit de prouver que $\mathbf{C}^i$, $i = 1, 2$, est représentable par un S-schéma localement de présentation finie.

8.1.6. — Si $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un morphisme étale fini surjectif qui décompose S′, alors

$$\mathbf{C}^i \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{T}}((\mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}/\mathrm{T})^{i+1}, \mathrm{G}_{\mathrm{T}})$$

est représentable par un produit de n copies de G_{T}, où n est le degré de $(\mathrm{S}'/\mathrm{S})^{i+1}$. Appliquant une nouvelle fois l'hypothèse sur G, on en déduit que $\mathbf{C}^i$ est bien représentable par un S-schéma localement de présentation finie (SGA 1, VIII, *loc. cit.*).

8.1.7. — Pour prouver que $\mathbf{Z}^1$ est lisse, il nous faut maintenant, par définition, prouver que si T est un S-schéma *affine*, T_0 le sous-schéma fermé défini par un idéal $\mathscr{J}$ de carré nul, l'application canonique

$$\mathbf{Z}^1(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathbf{Z}^1(\mathrm{T}_0)$$

404 est surjective. Comme G est lisse, l'application canonique $\mathrm{G}(\mathrm{T}) \to \mathrm{G}(\mathrm{T}_0)$ est surjec-

tive, et il suffit de prouver que l'application canonique

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}/\mathrm{T}, \mathrm{G}_\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}_0/\mathrm{T}_0, \mathrm{G}_{\mathrm{T}_0})$$

est bijective.

Changeant légèrement de notations et généralisant les hypothèses, il nous suffit maintenant de prouver :

Lemme 8.1.8. — *Soient* S *et* S′ *deux schémas affines,* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme fidèlement plat,* $\mathscr{J}$ *un idéal de carré nul sur* S, S_0 *le sous-schéma fermé qu'il définit,* G *un* S-*groupe* lisse. *Posons* $\mathrm{S}'_0 = \mathrm{S}' \times_\mathrm{S} \mathrm{S}_0$, $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}_0$. *L'application canonique*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{S}'_0/\mathrm{S}_0, \mathrm{G}_0)$$

est bijective.

Remarque 8.1.9. — Si on suppose G commutatif, la même assertion est valable pour tous les H^i, $i > 0$, avec une démonstration analogue.

Démonstration. Soit $\mathscr{M}_0$ le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-module quasi-cohérent $\mathscr{M}_0 = \mathscr{L}ie(\mathrm{G}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{J}$. Pour chaque S_0-préschéma T_0, posons $\mathrm{M}_0(\mathrm{T}_0) = \mathrm{H}^0(\mathrm{T}_0, \mathscr{M}_0 \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0})$, et soient

$$\mathrm{M} = \prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{M}_0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{G}} = \prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{G}_0$$

les S-foncteurs en groupes définis par $\mathrm{M}(\mathrm{T}) = \mathrm{M}_0(\mathrm{T}_0)$ et $\overline{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{G}_0(\mathrm{T}_0)$, où $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}_0$. D'après Exp. III, 0.9 et (0.6.2), il existe pour tout S-schéma affine T une 405
suite exacte, fonctorielle en T :

$$1 \longrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{T}) \longrightarrow \overline{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \longrightarrow 1.$$

Nous avons à étudier l'application

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{S}'_0/\mathrm{S}_0, \mathrm{G}_0) = \mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \overline{\mathrm{G}}).$$

Supposons d'abord G commutatif. On a alors une suite exacte de cohomologie

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \overline{\mathrm{G}}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{M});$$

mais

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{M}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{S}'_0/\mathrm{S}_0, \mathrm{M}_0) = \mathrm{H}^i(\mathrm{S}'_0/\mathrm{S}_0, \mathscr{M}_0),$$

et on sait (TDTE I, B, Lemme 1.1), que $\mathrm{H}^i(\mathrm{S}'_0/\mathrm{S}_0, \mathscr{M}_0) = 0$ pour $i \neq 0$.

Si maintenant G n'est pas commutatif, il nous faut utiliser la suite exacte de cohomologie non abélienne. Si $u \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{G})$, on sait que les éléments de $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{G})$ qui ont même image dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \overline{\mathrm{G}})$ que la classe de u sont dans l'image de l'application cobord correspondante :

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{M}_u) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{G}),$$

où M_u est le S-foncteur M « tordu par u ». De même, si v est un élément de $\mathrm{Z}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \overline{\mathrm{G}})$, il existe un « cobord »

$$\Delta(v) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{M}_v),$$

où M_v est le S-foncteur M « tordu par v », tel que $\Delta(v) = 0$ si et seulement si la classe de v est dans l'image de $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{G})$. Il nous suffit de prouver que l'on a $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{M}_u) = \mathrm{H}^2(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{M}_v) = 0$.

406 Or rappelons (Exp. III 0.8) que l'opération de $\overline{\mathrm{G}}$ sur M définie par la suite exacte n'est autre que celle qui se déduit fonctoriellement de la représentation adjointe de G_0 :

$$\mathrm{ad} : \mathrm{G}_0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\mathscr{L}ie(\mathrm{G}_0/\mathrm{S}_0)).$$

L'élément u (resp. v) opère donc dans $\mathrm{M}_{\mathrm{S}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'}$ par l'intermédiaire d'un $\mathrm{S}'_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{S}'_0$-automorphisme de $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}_0/\mathrm{S}_0)$. Comme u (resp. v) est un cocycle, cet automorphisme est une donnée de descente ; notons $\mathscr{L}_u$ (resp. $\mathscr{L}_v$) le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-module quasi-cohérent obtenu. On vérifie aussitôt que pour $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, on a

$$\mathrm{M}_u(\mathrm{T}) = \mathrm{H}^0(\mathrm{T}_0, \mathscr{L}_u \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0})$$

et la même relation en remplaçant u par v. On a donc

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{M}_u) = \mathrm{H}^1(\mathrm{S}'_0/\mathrm{S}_0, \mathscr{L}_u \otimes \mathscr{J}),$$
$$\mathrm{H}^2(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \mathrm{M}_v) = \mathrm{H}^2(\mathrm{S}'_0/\mathrm{S}_0, \mathscr{L}_v \otimes \mathscr{J}),$$

et les deux sont bien nuls en vertu du résultat déjà utilisé.

Proposition 8.2. — *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie possédant des produits fibrés, munie d'une topologie moins fine que la topologie canonique,* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme de $\mathscr{C}$,* G' *un* S'*-faisceau en groupes,* G *le* S*-faisceau en groupes* $\prod_{\mathrm{S}'/\mathrm{S}} \mathrm{G}'$. *Soit* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{G}') \subset \mathrm{H}^1(\mathrm{S}', \mathrm{G}')$ *l'ensemble des classes de faisceaux principaux homogènes sous* G' *qui sont trivialisés par un crible de* S' *obtenu par changement de base à partir d'un crible couvrant convenable de* S. *L'application canonique* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{G}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{S}', \mathrm{G}')$ *définie par le foncteur*

$$\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'$$

407 *induit une bijection*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{G}');$$

la bijection réciproque est définie par le foncteur $\mathrm{P}' \mapsto \prod_{\mathrm{S}'/\mathrm{S}} \mathrm{P}'$.

Pour tout objet X de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, on a par définition un isomorphisme fonctoriel en X

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}', \mathrm{G}').$$

On a donc pour chaque S-objet T une bijection fonctorielle en T

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathrm{T}'/\mathrm{S}', \mathrm{G}').$$

Remplaçant maintenant l'unique morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ par une famille couvrante quelconque de S et passant à la limite inductive, on en déduit la première partie de l'énoncé. La seconde partie s'en déduit sans difficultés.

Lemme 8.3. — *Sous les conditions de* 8.2, *l'assertion* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{G}') = \mathrm{H}^1(\mathrm{S}', \mathrm{G}')$ *est locale sur* S *: supposons qu'il existe une famille couvrante* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ *telle que pour tout* i, *on ait* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{S}_i}(\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i, \mathrm{G}') = \mathrm{H}^1(\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i, \mathrm{G}')$. *Alors* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{G}') = \mathrm{H}^1(\mathrm{S}', \mathrm{G}')$.

En effet, soit P' un faisceau principal homogène sous G'. Posons

$$P'_i = P \underset{S'}{\times} (S' \underset{S}{\times} S_i);$$

en vertu de l'hypothèse, il existe une famille couvrante $\{S_{ij} \to S_i\}$ telle que pour chaque j, $P' \times_{S'} (S' \times_S S_{ij})$ possède une section. Mais $\{S_{ij} \to S\}$ est une famille couvrante de S, et P' est bien trivialisé par la famille couvrante de S' obtenue à partir de celle-là par changement de base.

Proposition 8.4. — *Soit* $S' \to S$ *un morphisme* étale fini *de schémas. Soient* G' *un* S'*-faisceau en groupes,* G *le* S*-faisceau en groupes* $\prod_{S'/S} G'$. *Pour la topologie étale* (*resp. étale finie locale, resp.* (fpqc)), *les foncteurs* 408

$$\begin{array}{ccc} P & \longmapsto & P \times_S S' \\ \prod_{S'/S} P' & \longleftarrow\!\shortmid & P' \end{array}$$

induisent des bijections réciproques l'une de l'autre :

$$H^1(S, G) \simeq H^1(S', G').$$

Par 8.2, il suffit de montrer que $H^1_S(S', G') = H^1(S', G')$. Par 8.3, il suffit de le faire localement pour la topologie étale finie locale ; on peut donc supposer que S' est une somme directe finie de copies de S, soit I_S, où I est un ensemble fini convenable. Alors G' est donné par une famille $(G_i)_{i\in I}$ de faisceaux sur S et

$$H^1(S', G') \simeq \prod_{i\in I} H^1(S, G_i).$$

D'autre part

$$H^1(S, G) \simeq \prod_{i\in I} H^1(S, G_i),$$

d'où, en vertu de 8.2, $H^1_S(S', G') = H^1(S', G')$. C.Q.F.D.

Remarques 8.5. — On peut interpréter 8.2 et 8.3 par la suite exacte suivante (f est le morphisme $S' \to S$ donné)

$$1 \longrightarrow H^1(S, f_*(G')) \longrightarrow H^1(S', G') \longrightarrow H^0(S, R^1 f_*(G')).$$

Dans le cas commutatif, cette suite exacte résulte de la suite spectrale de Leray ; elle est encore valable dans le cas non commutatif (cf. thèse de Giraud [41]). 409

Sous cette forme, on voit que le résultat est encore valable si f est seulement supposé *fini*, ou simplement *entier*, la topologie étant la topologie *étale*, car pour tout G', on a

$$R^1 f_*(G') = \text{ faisceau final},$$

en vertu de SGA 4, VIII, 5.3. [42]

D'autre part, ce résultat devient faux si on prend une topologie telle que (fpqc) ou (fppf), même si $S = \operatorname{Spec}(k)$, k corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, $S' = \operatorname{Spec}(k[t]/t^2)$, $G' = \boldsymbol{\mu}_p$ ou $\boldsymbol{\alpha}_p$.

[41] N.D.E. : Voir le paragraphe V 3.1.4 de [**Gi71**].

[42] N.D.E. : Cette référence renvoie également au paragraphe V 3.1.4 de [**Gi71**].

De même, 8.2 devient faux, même pour la topologie étale, si on y supprime l'hypothèse que f est fini, comme on le voit en prenant pour f une immersion ouverte ; par exemple si $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{V})$, V anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, S' étant l'ouvert induit au point générique, et G' le groupe constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}'}$, avec n premier à la caractéristique résiduelle de V, on a $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{G}) = 0$, $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}', \mathrm{G}') \neq 0$. Remplaçant d'ailleurs S' par $\mathrm{S} \amalg \mathrm{S}'$, on en déduit un exemple analogue, avec $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ étale surjectif, donc couvrant pour la topologie envisagée.

Bibliographie

[BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I, Hermann, 1960.

[Ch51] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie.* t. II *Groupes algébriques*, Hermann, 1951.

[Di57] J. Dieudonné, *Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic* $p > 0$. VI, Amer. J. Math. **79** (1957), n°2, 331-388. (43)

[Bo91] A. Borel, *Linear algebraic groups*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1991.

[Ch05] C. Chevalley, *Classification des groupes algébriques semi-simples* (avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard), Collected Works, vol. 3, Springer, 2005.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Gi71] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, 1971.

[Ja87] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Academic Press, 1987 ; 2nd edition, Amer. Math. Soc., 2003.

[Jou83] J.-P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Birkhäuser, 1983.

[Ta75] M. Takeuchi, On coverings and hyperalgebras of affine algebraic groups, Trans. Amer. Math. Soc. **211** (1975), 249-275.

[Ta76] M. Takeuchi, On coverings and hyperalgebras of affine algebraic groups II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), 419-434.

(43) N.D.E. : On a ajouté à ces trois références, figurant dans l'original, les références qui suivent.

EXPOSÉ XXV

LE THÉORÈME D'EXISTENCE
par M. Demazure

Pour être complet, nous donnons dans cet exposé une démonstration du théorème **410**
d'existence des groupes déployés. Comme la démonstration originale de Chevalley (« *Sur certains schémas de groupes semi-simples* », Séminaire Bourbaki, Mai 1961, n°219), elle s'appuie sur l'existence de groupes algébriques semi-simples complexes de tous les types possibles. Le principe d'une démonstration plus satisfaisante, prouvant directement l'existence d'un $\mathbb{Z}$-groupe semi-simple déployé simplement connexe correspondant à une matrice de Cartan donnée a été donné par Cartier (non publié). [(1)] Signalons cependant que la difficulté n'est pas de donner une construction explicite d'un schéma en groupes, mais de vérifier que le groupe ainsi construit répond bien aux conditions exigées, c'est-à-dire essentiellement que ses fibres sont bien lisses et réductives.

1. Énonce du théorème

Théorème 1.1. — *Soit* S *un schéma non vide. Le foncteur*

$$\mathrm{G} \longmapsto \mathscr{R}(\mathrm{G})$$

est une équivalence *de la catégorie des* S*-schémas en groupes réductifs* épinglés *avec la catégorie des données radicielles réduites épinglées.*

En vertu du théorème d'unicité (Exp. XXIII, 4.1), l'énoncé précédent équivaut à : **411**

***Corollaire 1.2* (Existence de groupes déployés)**. — *Pour toute donnée radicielle réduite* $\mathscr{R}$*, il existe un* $\mathbb{Z}$*-groupe réductif déployé* G *tel que* $\mathscr{R}(\mathrm{G}) \simeq \mathscr{R}$*.* [(2)]

---

(1) N.D.E. : Un tel principe a aussi été esquissé par B. Kostant [**Ko66**] ; une démonstration complète, utilisant les groupes quantiques, a été donnée récemment par G. Lusztig [**Lu09**].

(2) N.D.E. : Signalons aussi que l'ouvrage [**BT84**] de F. Bruhat et J. Tits contient une variante de la construction de Chevalley (*loc. cit.*, 2.2.3–2.2.5 et § 3.2), qui fournit en particulier un $\mathbb{Z}$-groupe lisse affine à fibres connexes G, possédant un tore maximal déployé, et dont la fibre générique est un $\mathbb{Q}$-groupe réductif de type $\mathscr{R}$; le fait que les fibres géométriques de G sont réductives découle de l'étude du radical unipotent d'une fibre spéciale faite dans *loc. cit.*, 4.6.12 et 4.6.15 (valables pour des G plus généraux, associés à une donnée radicielle valuée), mais il est plus simple de le déduire de la

En particulier :

Corollaire 1.3. — *Soit k un corps. Pour tout k-groupe réductif déployable* G_k*, il existe un $\mathbb{Z}$-groupe réductif* G *tel que* $\mathrm{G} \otimes_{\mathbb{Z}} k \simeq \mathrm{G}_k$.

Réciproquement, remarquons d'abord que pour prouver 1.2, il suffit par Exp. XXII 4.3.1 et Exp. XXI 6.5.10, de considérer le cas où la donnée radicielle $\mathscr{R}$ est simplement connexe (et même irréductible si on y tient, par Exp. XXI, 7.1.6).

D'autre part, sous les conditions de 1.3, le schéma en groupes G est de type constant (car $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est connexe) donc de type $\mathscr{R}(\mathrm{G}_k)$; par Exp. XXIII, 5.9, il s'ensuit que la validité de 1.3 pour un groupe G_k donné entraîne l'existence d'un $\mathbb{Z}$-groupe *déployé* de type $\mathscr{R}(\mathrm{G}_k)$. (3)

Pour démontrer 1.2 et donc 1.1, il suffit donc de prouver 1.3 lorsque k est de caractéristique nulle (par exemple $k = \mathbb{C}$) et G_k simplement connexe (et en particulier semi-simple), ainsi que :

Proposition 1.4. — *Pour toute donnée radicielle réduite* simplement connexe $\mathscr{R}$*, il existe un $\mathbb{C}$-groupe algébrique semi-simple de type $\mathscr{R}$.*

On peut prouver 1.4 de la manière suivante. On sait d'abord qu'il existe une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$ de type $\mathscr{R}$, cf. par exemple, N. Jacobson, *Lie Algebras*, ch. VII, Th. 5. (4) Alors $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^0$ est un $\mathbb{C}$-groupe algébrique semi-simple de type $\mathrm{ad}(\mathscr{R})$. (5) Par *Bible*, § 23.1, prop. 1, on en déduit l'existence d'un $\mathbb{C}$-groupe semi-simple de type $\mathscr{R}$.

Le reste de cet exposé est consacré à la démonstration de 1.3 pour k de caractéristique nulle et G_k semi-simple. Celle-ci se fera en deux temps : construction d'un « morceau de $\mathbb{Z}$-schéma en groupes » (n°2), étude du groupe obtenu par application du « théorème de Weil » (n°3).

412 Pour éviter des confusions, *nous n'utiliserons pas* dans le numéro 2 la notation

description de $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G})$, de Exp. XIX 1.12 (iii) et de l'existence des éléments $w_\alpha(\mathrm{X})$ de Exp. XX 3.1 (iv) (cf. [**BT84**], 3.2.1).

(3) N.D.E. : En fait, Exp. XXIII, 5.9 n'est pas nécessaire car le présent exposé construit, pour tout $\mathbb{Q}$-groupe semi-simple $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}$, un $\mathbb{Z}$-groupe semi-simple G de même type que $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}$ et *muni d'un tore maximal déployé* T ; donc, d'après Exp. XXII 2.2, G est déployé.

(4) N.D.E. : Soient Δ une base de R et $\widetilde{\mathfrak{g}}$ la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie engendrée par des générateurs $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ soumis aux relations $[h_\alpha, h_\beta] = 0$, $[e_\alpha, f_\beta] = h_\alpha$ si $\beta = \alpha$ et $= 0$ sinon, $[h_\alpha, e_\beta] = (\alpha^*, \beta)e_\beta$ et $[h_\alpha, f_\beta] = -(\alpha^*, \beta)f_\beta$. Dans *loc. cit.*, $\mathfrak{g}$ est définie comme le quotient de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par l'intersection des noyaux des représentations irréductibles de dimension finie de $\widetilde{\mathfrak{g}}$; dans [**Se66**], § VI.5, Th. 9 (voir aussi [**BLie**], VIII, § 4.3, Th. 1) il est montré que $\mathfrak{g}$ est le quotient de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par les relations $(\mathrm{ad}(e_\alpha))^{1-(\alpha^*,\beta)}(e_\beta) = 0$ et $\mathrm{ad}(f_\alpha)^{1-(\alpha^*,\beta)}(f_\beta) = 0$). Pour une description explicite des constantes de structure (en particulier le choix des signes), voir Exp. XXIII 6.5 et 6.7 ainsi que [**Ti66**], § 4, Th. 1 et (pour les types A,D,E) [**Sp98**], 10.2.5.

(5) N.D.E. : On peut supposer $\mathscr{R}$ irréductible, donc $\mathfrak{g}$ *simple*. Par un argument général, on sait que Lie(G) est la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$ (cf. [**DG70**], § II.4, Prop. 2.3), or celles-ci sont toutes intérieures (cf. [**BLie**], I § 6.1, cor. 3 de la prop. 1), donc $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathfrak{g}$; par conséquent G n'a pas de sous-groupe invariant de dimension > 0, donc G est semi-simple. Son système de racines est alors le même que celui de $\mathfrak{g}$; de plus le centre de G agit à la fois trivialement et fidèlement sur $\mathfrak{g}$, donc est trivial, donc G est adjoint.

abrégée X_k pour désigner le k-schéma $X \otimes_{\mathbb{Z}} k$, où X est un $\mathbb{Z}$-schéma.

2. Théorème d'existence : construction d'un morceau de groupe

2.1. Choisissons une fois pour toutes un déploiement de G_k, noté

$$(G_k, T_k, M, R)$$

(cf. Exp. XXII, 1.13), un système de racines simples Δ de R (définissant le système de racines positives R_+), un *système de Chevalley* $(X_{\alpha,k})_{\alpha\in R}$ de G_k (Exp. XXIII, 6.1 et 6.2) vérifiant la condition supplémentaire suivante (cf. XX 2.6) : pour tout $\alpha \in R$, on a

$$X_{\alpha,k}\, X_{-\alpha,k} = 1.$$

Choisissons enfin sur le sous-groupe de M engendré par R une relation d'ordre total compatible avec la structure de groupe, telle que les racines > 0 soient les éléments de R_+. On note alors les racines

$$-\alpha_n < -\alpha_{n-1} < \cdots < -\alpha_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n.$$

Pour $\alpha \in R$, on note $U_{\alpha,k}$ le groupe vectoriel correspondant à la racine α et

$$p_{\alpha,k} : \mathbb{G}_{a,k} \xrightarrow{\sim} U_{\alpha,k}$$

l'isomorphisme de groupes vectoriels défini par $X_{\alpha,k}$.

2.2. Le déploiement de G_k comporte en particulier un isomorphisme de k-groupes

$$T_k \simeq D_k(M).$$

Posons $T = D(M)$; c'est un $\mathbb{Z}$-tore, et on peut considérer l'isomorphisme précédent comme un isomorphisme 413

$$T_k \simeq T \otimes_{\mathbb{Z}} k.$$

On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-gr.}}(T, \mathbb{G}_m) = M,$$

et on considérera les éléments de $R \subset M$ comme des caractères de T. On considérera de même les éléments de R^* comme des morphismes de $\mathbb{Z}$-groupes $\mathbb{G}_m \to T$.

2.3. Pour chaque $\alpha \in R_+$, soit $\mathbb{G}_a(\alpha)$ une copie du groupe $\mathbb{G}_a$; considérons le $\mathbb{Z}$-schéma

$$U = \mathbb{G}_a(\alpha_1) \times \cdots \times \mathbb{G}_a(\alpha_n).$$

Si U_k désigne la partie unipotente du groupe de Borel B_k de G_k défini par R_+, notons

$$a : \quad U \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\sim} U_k$$

l'isomorphisme de k-schémas défini par

$$a(x_1, \dots, x_n) = p_{\alpha_1,k}(x_1) \cdots p_{\alpha_n,k}(x_n).$$

2.4. La loi de groupe de U_k se traduit par des relations de la forme

$$a(x_1,\dots,x_n)\cdot a(y_1,\dots,y_n)=a(z_1,\dots,z_n),$$

où chaque z_h $(h=1,\dots,n)$ s'exprime comme un polynôme

$$z_h=x_h+y_h+\mathrm{Q}_h(x_1,\dots,x_{h-1},y_1,\dots,y_{h-1}),$$

les coefficients de Q_h étant *entiers* (Exp. XXII, 5.5.8 et Exp. XXIII, 6.4). De plus $\mathrm{Q}_h(x_1,\cdots,x_{h-1},0,\cdots,0)=0$.

414 Munissons U de la loi composition définie par les formules précédentes (qui sont bien « définies sur $\mathbb{Z}$ »). Comme cette loi induit sur U_k sa loi de groupe, elle est associative, et (0) en est un élément unité (en effet, les deux assertions précédentes s'expriment par des relations entre les polynômes Q_h, et $\mathbb{Z}\to k$ est injectif). Montrons que c'est une loi de groupe : si (x_i) est une section de U (sur un S quelconque), on calcule l'inverse (y_i) de (x_i) par les formules récurrentes :

$$y_i=-x_i-\mathrm{Q}_i(x_i,\cdots,x_{i-1},y_1,\cdots,y_{i-1})$$

qui sont encore « définies sur $\mathbb{Z}$ ».

En résumé, nous avons construit sur U une loi de groupe telle que l'isomorphisme a précédent soit un isomorphisme de groupes.

Pour chaque $\alpha\in\mathrm{R}_+$, considérons le morphisme

$$p_\alpha:\mathbb{G}_a\longrightarrow\mathrm{U}$$

défini par $p_\alpha(x)=(x_i)$ où $\begin{cases}x_i=x & \text{si}\quad \alpha_i=\alpha\\ x_i=0 & \text{si}\quad \alpha_i\neq\alpha.\end{cases}$

C'est une immersion fermée et un homomorphisme de groupes ; on note U_α son image. On a $(x_i)=p_{\alpha_1}(x_1)\cdots p_{\alpha_n}(x_n)$, ce qui prouve que U s'identifie au produit

$$\mathrm{U}=\mathrm{U}_{\alpha_1}\cdot\mathrm{U}_{\alpha_2}\cdots\mathrm{U}_{\alpha_n}.$$

2.5. Faisons opérer $\mathrm{T}=\mathrm{D}(\mathrm{M})$ sur chaque U_α par l'intermédiaire du caractère α ; on vérifie aussitôt que cela définit une opération de T sur le groupe U et on peut construire le produit semi-direct $\mathrm{B}=\mathrm{T}\cdot\mathrm{U}$. On a un isomorphisme canonique de k-groupes

$$\mathrm{B}\otimes_{\mathbb{Z}}k\xrightarrow{\sim}\mathrm{B}_k.$$

415 Si nous prenons maintenant un ordre *quelconque* sur R_+, le morphisme

$$\prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+}\mathrm{U}_\alpha\longrightarrow\mathrm{U}$$

défini par le produit dans U est encore un isomorphisme. En effet, comme les deux membres sont des $\mathbb{Z}$-schémas plats et de présentation finie, on peut se contenter de vérifier l'assertion sur les fibres géométriques ; on est alors ramené à la théorie de Lazard (*Bible*, § 13.1, prop. 1) : on considère U comme groupe à opérateurs T, et on utilise le fait que les U_α sont deux à deux non isomorphes comme groupes à opérateurs (car les caractères $\alpha\in\mathrm{R}_+$ de T sont deux à deux distincts sur chaque fibre).

2.6. Remplaçant R_+ par $\mathrm{R}_- = -\mathrm{R}_+$, on construit de même des groupes U^-, B^-, U_α ($\alpha \in \mathrm{R}_-$) et des isomorphismes

$$p_\alpha : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\alpha, \qquad \alpha \in \mathrm{R}_-.$$

Introduisons enfin le schéma produit

$$\Omega = \mathrm{U}^- \times \mathrm{T} \times \mathrm{U};$$

on a un isomorphisme canonique de k-schémas

$$\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_k^- \times_k \mathrm{T}_k \times_k \mathrm{U}_k \simeq \Omega_k,$$

où Ω_k est la « grosse cellule » de G_k (Exp. XXII, 4.1.2).

À partir de maintenant, nous identifions $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k$ à Ω_k par l'isomorphisme précédent ; nous considérons U^-, T, U comme des sous-schémas de Ω, par l'intermédiaire des sections unités. On note $\underline{e} = ((0), e, (0))$ la « section unité » de Ω.

Notre but est maintenant de mettre une loi de morceau de groupe sur Ω.

Lemme 2.7. — *Soit $\alpha \in \Delta$, et soit $w_{\alpha,k}$ l'élément de* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}_k}(\mathrm{T}_k)(k)$ *défini par* $\mathrm{X}_{\alpha,k}$ 416
(*rappelons que l'on a par définition*

$$w_{\alpha,k} = p_{-\alpha,k}(-1)p_{\alpha,k}(1)p_{-\alpha,k}(-1)\ \big).$$

Il existe un ouvert V_α *de* Ω, *contenant la section* $\underline{e}$, *et un morphisme*

$$h_\alpha : \mathrm{V}_\alpha \longrightarrow \Omega,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) $h_\alpha(\underline{e}) = \underline{e}$,

(ii) $(h_\alpha) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *coïncide avec la restriction de* $int(w_{\alpha,k})$ *à* $\mathrm{V}_\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} k \subset \mathrm{G}_k$.

(iii) *On a* $\mathrm{T} \subset \mathrm{V}_\alpha$ *et* h_α *envoie* T *dans* T. *Pour tout* $\beta \in \mathrm{R}$, *on a* $\mathrm{U}_\beta \subset \mathrm{V}_\alpha$ *et* h_α *envoie* U_β *dans* $\mathrm{U}_{s_\alpha(\beta)}$.

En vertu de la définition d'un système de Chevalley (Exp. XXIII, 6.1), il existe pour chaque $\beta \in \mathrm{R}$ un entier $e_\beta = \pm 1$ tel que

$$\mathrm{int}(w_{\alpha,k})p_{\beta,\,k}(x) = p_{s_\alpha(\beta),\,k}(e_\beta\, x)$$

pour tout $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \to \mathrm{Spec}(k)$.

Soit S un schéma quelconque, écrivons un élément quelconque de $\Omega(\mathrm{S})$ sous la forme

$$u = \left(\Big(\prod_{\substack{\beta \in \mathrm{R}_- \\ \beta \neq -\alpha}} p_\beta(x_\beta)\Big) \cdot p_{-\alpha}(x_{-\alpha}), \quad t, \quad p_\alpha(x_\alpha) \cdot \Big(\prod_{\substack{\beta \in \mathrm{R}_+ \\ \beta \neq \alpha}} p_\beta(x_\beta)\Big)\right),$$

où on a choisi un ordre (quelconque) sur $\mathrm{R}_- - \{-\alpha\}$ et $\mathrm{R}_+ - \{\alpha\}$ (cf. 2.5).

On définit un morphisme $d : \Omega \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ par 417

$$d(u) = \alpha(t) + x_\alpha x_{-\alpha}.$$

Soit V_α l'ouvert Ω_d (c'est-à-dire l'ouvert de Ω défini par « $d(u)$ inversible ») ; il contient $\underline{e}$, T, et chaque U_β, $\beta \in R$. Soit

$$h_\alpha : V_\alpha \longrightarrow \Omega$$

le morphisme défini par $h_\alpha(u) = (a(u), b(u), c(u))$ où

$$a(u) = \left(\prod_{\substack{\beta \in R_- \\ \beta \neq -\alpha}} p_{s_\alpha(\beta)}(e_\beta x_\beta) \right) \cdot p_{-\alpha}\big(- x_\alpha d(u)^{-1} \big)$$

$$b(u) = t \cdot \alpha^*(d(u)),$$

$$c(u) = p_\alpha\big(- x_{-\alpha} d(u)^{-1} \big) \cdot \left(\prod_{\substack{\beta \in R_+ \\ \beta \neq \alpha}} p_{s_\alpha(\beta)}(e_\beta x_\beta) \right).$$

Comme s_α permute les racines positives (resp. négatives) distinctes de α (resp. $-\alpha$), alors $c(u)$ (resp. $a(u)$) est une section de U (resp. U^-) et le morphisme précédent est bien défini. Il vérifie trivialement (i) et (iii). Quant à (ii), cela résulte aussitôt de la définition des e_β, $\beta \in R$, et de Exp. XX, 3.12.

Lemme 2.8. — *Il existe des ouverts* V *et* V′ *de* Ω *et des morphismes*

$$h : V \longrightarrow \Omega, \qquad h' : V' \longrightarrow \Omega,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) V *et* V′ *contiennent* $\underline{e}$, *et* $h(\underline{e}) = h'(\underline{e}) = \underline{e}$.

418 (ii) *Le morphisme induit par* $h' \circ h : h^{-1}(V') \to \Omega$ *est la restriction du morphisme identique.*

(iii) *Les* k*-morphismes* $h \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *et* $h' \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *sont la restriction à* $V \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *et* $V' \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *d'automorphismes du groupe* G_k.

(iv) V *et* V′ *contiennent* U, T *et* U^- *;* h *et* h' *envoient* U *dans* U^-, U^- *dans* U, *et* T *dans* T.

Soit $\overline{w}_0$ l'élément du groupe de Weyl de G_k qui transforme R_+ en R_-. Écrivons

$$\overline{w}_0 = s_{\alpha_n} \cdots s_{\alpha_1}, \qquad \alpha_i \in \Delta$$

(aucun rapport avec la numérotation de 2.1). Posons

$$w_0 = w_{\alpha_n, k} \cdots w_{\alpha_1, k} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{G_k}(T_k)(k).$$

Définissons par récurrence sur $i \leqslant n$ un ouvert V_i de Ω et un morphisme $h_i : V_i \to \Omega$ par $V_0 = \Omega$, $h_0 = \mathrm{id}$, et, pour $i = 0, \dots, n-1$,

$$V_{i+1} = h_i^{-1}(V_{\alpha_{i+1}}), \qquad h_{i+1} = h_{\alpha_{i+1}} \circ h_i,$$

où les notations V_{α_j} et h_{α_j} sont celles de 2.7.

Prenons $\mathrm{V} = \mathrm{V}_n$ et $h = h_n$. Les conditions de (i), (iii) et (iv) portant sur V et h sont bien vérifiées ; pour (i) et (iii) cela résulte aussitôt de 2.8, pour (iv), de ce que $h \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est la restriction de $\mathrm{int}(w_0)$ à $\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{Z}} k$.

Comme $(\overline{w}_0)^2 = 1$, on a aussi

$$\overline{w}_0 = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n} = (s_{\alpha_1}^3) \cdots (s_{\alpha_n}^3).$$

Posant 419

$$w'_0 = (w_{\alpha_1, k})^3 \cdots (w_{\alpha_n, k})^3,$$

et effectuant la même construction que ci-dessus, on en déduit un ouvert V' et un morphisme h' vérifiant également (i), (iii), (iv). De plus, $h' \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est la restriction de $\mathrm{int}(w'_0)$ à $\mathrm{V}' \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Mais pour chaque racine simple $\alpha \in \Delta$, on a $(w_{\alpha, k})^4 = e$ (cf. Exp. XX, 3.1), donc $w'_0 \cdot w_0 = e$, ce qui montre que $h' \circ h$ induit le morphisme identique dans un ouvert non vide de $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Mais Ω étant lisse et de présentation finie sur $\mathbb{Z}$, $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est schématiquement dense dans Ω, ce qui prouve (ii).

Proposition 2.9. — *Il existe un ouvert* V_1 *de* $\Omega\times\Omega$*, un ouvert* V_2 *de* Ω*, des morphismes*

$$\pi : \mathrm{V}_1 \longrightarrow \Omega, \qquad \sigma : \mathrm{V}_2 \longrightarrow \Omega,$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) *Si* $x \in \Omega(\mathrm{S})$*, alors* $(\underline{e}, x)$ *et* $(x, \underline{e})$ *sont des sections de* V_1 *et*

$$\pi(\underline{e}, x) = \pi(x, \underline{e}) = x.$$

(ii) V_2 *contient* $\underline{e}$ *et* $\sigma(\underline{e}) = \underline{e}$.

(iii) π_k *et* σ_k *sont la restriction des morphismes* $\mathrm{G}_k \times_k \mathrm{G}_k \to \mathrm{G}_k$ *et* $\mathrm{G}_k \to \mathrm{G}_k$ *définis par le produit* (*resp. l'inverse*).

Démonstration. Soient (v, t, u) et (v', t', u') deux sections de Ω. Alors $h(u)$ est une section de U^-, $h(v')$ est une section de U par 2.8 (iv) et on peut donc considérer $(h(u), e, h(v'))$ comme une section de Ω. Soit V_1 l'ouvert de $\Omega \times \Omega$ défini par la condition :

$$\big((v, t, u), (v', t', u')\big) \in \mathrm{V}_1(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow (h(u), e, h(v')) \in \mathrm{V}'(\mathrm{S})$$

(notations de 2.8). Si $\big((v, t, u), (v', t', u')\big)$ est une section de V_1, alors $h'(h(u), e, h(v'))$ 420
est défini ; c'est une section de Ω que l'on peut décomposer :

$$h'(h(u), e, h(v'))) = (v'', t'', u'').$$

On pose alors

$$\pi\big((v, t, u), (v', t', u')\big) = (v \cdot tv''t^{-1},\, tt''t',\, t'^{-1}u''t' \cdot u').$$

La vérification de (i) est immédiate (par 2.8 (ii)). Pour vérifier la condition de (iii) portant sur π, on voit que

$$h'(h(u), e, h(v')) = uv' = v''t''u''$$

lorsque $u \in \mathrm{U}(\mathrm{S})$, $v \in \mathrm{U}^-(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \to k$, en vertu de 2.8 (iii) et (ii). On construit σ de manière semblable : si (v, t, u) est une section de Ω, $h(u^{-1})$ est une section de U^-,

$h(v^{-1})$ une section de U, $h(t^{-1})$ une section de T, donc $(h(u^{-1}), h(t^{-1}), h(v^{-1}))$ est une section de Ω et on peut définir un ouvert V_2 de Ω par

$$(v,t,u) \in V_2(S) \Longleftrightarrow (h(u^{-1}), h(t^{-1}), h(v^{-1})) \in V'(S)$$

et un morphisme $\sigma : V_2 \to \Omega$ par

$$\sigma(v,t,u) = h'(h(u^{-1}), h(t^{-1}), h(v^{-1})).$$

On vérifie les conditions sur σ comme ci-dessus.

Corollaire 2.10. — *π est « génériquement associatif » et σ est un « inverse générique » : si x, y, $z \in \Omega(S)$ et si les expressions ci-dessous sont définies (ce qui se produit toujours au-dessus d'un ouvert de Ω contenant la section unité), on a :*

$$\pi(x, \pi(y,z)) = \pi(\pi(x,y),z), \qquad \pi(x,\sigma(x)) = \underline{e} = \pi(\sigma(x),x).$$

421 En effet, les deux membres de chacune de ces formules définissent des morphismes entre $\mathbb{Z}$-schémas lisses et de présentation finie, qui coïncident sur les fibres génériques, par 2.10 (iii).

Corollaire 2.11. — *Soit $\alpha \in$ R. Pour tout S et tous x, $y \in \mathbb{G}_a(S)$ tels que $(p_\alpha(x), p_{-\alpha}(y)) \in V_1(S)$ et $1+xy \in \mathbb{G}_m(S)$ (ce qui définit un ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,S}$ contenant la section $(0,0)$), on a :*

$$\pi(p_\alpha(x), p_{-\alpha}(y)) = \left(p_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\right), \alpha^*(1+xy), p_\alpha\left(\frac{x}{1+xy}\right)\right).$$

La démonstration est la même que précédemment, par Exp. XX, 2.1.

3. Théorème d'existence : fin de la démonstration

Posons pour simplifier le langage la définition suivante.

Définition 3.1. — Soient S un schéma et G un S-schéma en groupes. On dit que G est *admissible* s'il existe une immersion ouverte de S-schémas $i : \Omega_S = \Omega \times S \to G$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(V_1)_S \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \Omega_S \times_S \Omega_S \arrow[r, "i \times_S i"] & G \times_S G \arrow[d, "\pi_G"] \\
\Omega_S \arrow[rr, "i_S"] & & G,
\end{tikzcd}$$

où l'on note π_G le morphisme de multiplication dans G, est commutatif.

(ii) Il existe un ensemble fini de sections $a_j \in \Omega(S)$ tel que les $i(a_j)\cdot i(\Omega_S)$ recouvrent G.

422 Par le « théorème de Weil » (Exp. XVIII, 3.13 (iii) et (iv)), on a :

Lemme 3.2. — *Si pour tout schéma S étale et de type fini sur $\mathbb{Z}$, tout S-groupe admissible est affine, alors il existe un $\mathbb{Z}$-groupe admissible et affine.*

Or on a :

Lemme 3.3. — *Soient* S *un schéma et* G *un* S*-groupe admissible. Alors* G *est lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres affines connexes et semi-simples.*

Comme Ω_{S} est lisse et de présentation finie sur S, à fibres connexes, il en est de même pour G, en vertu de la condition (ii). Pour vérifier 3.3, on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps K. Identifions Ω_{K} à son image dans G. Il est clair que Ω_{K} est le produit

$$\prod_{\alpha\in\mathrm{R}_-} \mathrm{U}_{\alpha,\,\mathrm{K}} \cdot \mathrm{T}_{\mathrm{K}} \cdot \prod_{\alpha\in\mathrm{R}_+} \mathrm{U}_{\alpha,\,\mathrm{K}}$$

des sous-groupes T_{K} et $\mathrm{U}_{\alpha,\,\mathrm{K}}$ ($\alpha \in \mathrm{R}$) de G. L'algèbre de Lie de G s'identifie donc à la somme directe

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{T}_{\mathrm{K}}) \bigoplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathrm{Lie}(\mathrm{U}_{\alpha,\,\mathrm{K}}).$$

Comme l'automorphisme intérieur défini par une section de T_{K} opère dans $\mathrm{U}_{\alpha,\,\mathrm{K}}$, et donc dans $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}_{\alpha,\,\mathrm{K}})$, par l'intermédiaire du caractère

$$\alpha \in \mathrm{R} \subset \mathrm{M} \simeq \mathrm{Hom}_{\text{K-gr.}}(\mathrm{T}_{\mathrm{K}}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{K}}),$$

la décomposition précédente de Lie(G) est exactement la décomposition sous l'opération adjointe de T. Les racines de G_{K} par rapport à T_{K} sont donc les $\alpha \in \mathrm{R}$. Appliquons Exp. XIX, 1.13. Soit T_α le tore maximal de $\mathrm{Ker}(\alpha) \subset \mathrm{T}_{\mathrm{K}}$ et soit $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)$; il nous suffit de prouver que chaque Z_α est réductif. Or $\mathrm{Z}_\alpha \cap \Omega_{\mathrm{K}}$ n'est autre que

$$\prod_{\substack{\beta\in\mathrm{R}_-\\ \beta|_{\mathrm{T}_\alpha}=e}} \mathrm{U}_{\beta,\,\mathrm{K}} \cdot \mathrm{T}_{\mathrm{K}} \cdot \prod_{\substack{\beta\in\mathrm{R}_+\\ \beta|_{\mathrm{T}_\alpha}=e}} \mathrm{U}_{\beta,\,\mathrm{K}};$$

mais les racines nulles sur T_α sont les multiples rationnels de α, donc α et $-\alpha$; ce qui prouve **423**

$$\mathrm{Z}_\alpha \bigcap \Omega_{\mathrm{K}} = \mathrm{U}_{-\alpha,\,\mathrm{K}} \cdot \mathrm{T}_{\mathrm{K}} \cdot \mathrm{U}_{\alpha,\,\mathrm{K}}.$$

Pour prouver que Z_α est réductif il suffit, en vertu de Exp. XX 3.4, de prouver que $\mathrm{U}_{\alpha,\,\mathrm{K}}$ et $\mathrm{U}_{-\alpha,\,\mathrm{K}}$ ne commutent pas, ce qui résulte aussitôt de 2.11.

Il résulte de 3.2 et 3.3 que la démonstration sera achevée si nous prouvons :

Lemme 3.4. — *Si* S *est un schéma localement noethérien de dimension* $\leqslant 1$*, et si* G *est un* S*-groupe lisse et de type fini, à fibres affines connexes et semi-simples, alors* G *est* affine (*et donc semi-simple*).

Nota. — Dans Exp. XVI, on a vu que 3.4 est vrai sans hypothèse sur S, mais la démonstration est relativement délicate ; comme ici nous n'avons besoin que du cas particulier 3.4, nous en donnons une démonstration directe.

Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, qui est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre, et la représentation adjointe de G

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathfrak{g}).$$

Pour prouver que G est affine sur S, il suffit de prouver que le morphisme Ad est affine. Comme G est lisse et à fibres connexes, il est séparé sur S ($\mathrm{VI_B}$ 5.5) donc le morphisme Ad est séparé. Utilisant un résultat démontré en appendice (voir 4.1), il suffit de prouver que le morphisme Ad est quasi-fini. On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un corps ; en ce cas G est affine, donc semi-simple, et on est ramené à Exp. XXII 5.7.14.

4. Appendice

424 Nous avons utilisé en cours de démonstration la proposition suivante :

Proposition 4.1. — *Soient* S *un schéma localement noethérien* de dimension $\leqslant 1$, G *et* H *deux* S*-schémas en groupes de type fini,* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de groupes* quasi-fini et séparé. *Si* G *est plat sur* S, [6] *alors* f *est affine.*

Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où G est lisse sur S, hypothèse qui est bien vérifiée dans l'application que nous avons faite de la proposition.

4.2. Par EGA II, 1.6.4, on peut supposer S réduit. Par les techniques habituelles de passage à la limite, [7] on peut supposer S local. Si $\dim(\mathrm{S}) = 0$, l'assertion est triviale, [8] supposons $\dim(\mathrm{S}) = 1$. Par descente fidèlement plate, on peut supposer que S est complet à corps résiduel algébriquement clos. Quitte à remplacer S par son normalisé $\widetilde{\mathrm{S}}$, on peut (EGA II, 6.7.1 et EGA 0_{IV} 23.1.5) supposer S normal. [9] On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet A à corps résiduel algébriquement clos.

4.3. Soit η (resp. s) le point générique (resp. fermé) de S. Considérons l'image $f_\eta(\mathrm{G}_\eta)$ de G_η dans H_η. C'est un sous- schéma en groupes fermé de H_η. Soit H' l'adhérence schématique dans H de $f_\eta(\mathrm{G}_\eta)$. Comme $\mathrm{H}' \to \mathrm{H}$ est affine (c'est une immersion fermée), on peut remplacer H par H' et donc supposer H plat sur S et f_η surjectif. Comme f_η est fini, G et H plats sur S, on a

$$\dim(\mathrm{G}_s) = \dim(\mathrm{G}_\eta) = \dim(\mathrm{H}_\eta) = \dim(\mathrm{H}_s).$$

4.4. Soient $\mathrm{H}_s^0, \ldots, \mathrm{H}_s^n$ les composantes irréductibles de H_s, où H_s^0 désigne la com-
425 posante neutre, et soient $z_0, \ldots, z_n$ leurs points génériques. Comme chaque anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{H},z_i}$ est de dimension $\leqslant 1$, le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathscr{O}_{\mathrm{H},z_i} \to \mathscr{O}_{\mathrm{H},z_i}$ est affine car quasi-fini et séparé (cf. Exp. XVI, lemme 4.2), donc G est affine sur H au voisinage de z_i. Notant V le plus grand ouvert de H tel que $\mathrm{G}|_{\mathrm{V}}$ soit affine sur V, il en résulte

[6] N.D.E. : Nous avons ajouté l'hypothèse de platitude qui avait été omise.

[7] N.D.E. : cf. EGA IV_3, 8.10.5 (viii).

[8] N.D.E. : En effet, si $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$ (k un corps), alors f est la composée de la projection $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\operatorname{Ker}(f)$ et d'une immersion fermée i, et comme $\operatorname{Ker}(f)$ est fini sur k, alors p est fini ($\mathrm{VI_B}$ 9.2).

[9] N.D.E. : En effet, les composantes irréductibles $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_r$ de S sont des schémas locaux noethériens intègres complets donc, d'après un théorème de Nagata (cf. EGA 0_{IV}, 23.1.5) le normalisé $\widetilde{\mathrm{S}}_i$ est fini sur S_i, et donc $\widetilde{\mathrm{S}}$ est fini sur S. Alors, d'après un théorème de Chevalley (cf. EGA II, 6.7.1), si $f \times_{\mathrm{S}} \widetilde{\mathrm{S}}$ est un morphisme affine, il en est de même de f.

que V contient tous les z_i,[10] donc contient au moins un point fermé $y_i \in \mathrm{H}_s^i$ (et on a $\kappa(y_i) = \kappa(s)$ puisque $\kappa(s)$ est algébriquement clos).

D'autre part, V est évidemment stable par la translation définie par un élément quelconque $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$. Mais on a $\dim(\mathrm{G}_s) = \dim(\mathrm{H}_s)$ et f_s est fini, donc

$$f(s): \quad \mathrm{G}_s^0(s) \longrightarrow \mathrm{H}_s^0(s)$$

est surjectif. Comme A est complet et G lisse sur S, l'application canonique $\mathrm{G}^0(\mathrm{S}) \to \mathrm{G}_s^0(s)$ est surjective ; comme $\mathrm{H}_s^0(s)$ opère transitivement dans chaque $\mathrm{H}_s^i(s)$, il en résulte que $\mathrm{V} \supset \mathrm{H}_s(s)$, donc ($\kappa(s)$ étant algébriquement clos) $\mathrm{V} \supset \mathrm{H}_s$.[11]

Comme on a évidemment $\mathrm{V} \supset \mathrm{H}_\eta$, puisque f_η est fini, on a donc $\mathrm{V} = \mathrm{H}$. C.Q.F.D.

Bibliographie

[12]

[BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I et VII-VIII, Hermann, 1960 et 1975.

[BT84] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local* II. *Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publ. Math. I.H.É.S. **60** (1984), 5-184.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Ko66] B. Kostant, *Groups over* $\mathbb{Z}$, pp. 90-98 *in* : Algebraic groups and their discontinuous subgroups (eds. A. Borel & G. D. Mostow), Proc. Symp. Pure Math. IX, Amer. Math. Soc., 1966.

[Lu09] G. Lusztig, *Study of a* $\mathbb{Z}$*-form of the coordinate ring of a reductive group*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), n°3, 739-769.

[Se66] J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, 1966.

[Sp98] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, 2nd ed., Birkhaüser, 1998.

[Ti66] J. Tits, *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples*, Publ. Math. I.H.É.S. **31** (1966), 21-58.

[10] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[11] N.D.E. : Lorsque G n'est pas supposé lisse sur S, on peut procéder comme suit. Soient h_0 un point rationnel de H_s^0 et g_0 un point rationnel de G_s^0 tel que $f(g_0) = h_0$. D'après $\mathrm{VI_B}$ 5.6.1, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}'' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \mathrm{G} \arrow[d] \\ \mathrm{S}' \arrow[r, "w"] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

où w est étale et surjectif, π fini et surjectif, et $\phi^{-1}(s)$ est formé d'un seul point s'' tel que $g(s'') = g_0$. Alors le morphisme $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''} \to \mathrm{H}_{\mathrm{S}''}$ est affine au-dessus d'un voisinage de $h_0 y_i$, et il en est de même de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ (EGA II, 6.7.1) puis de $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ par descente fidèlement plate (EGA IV_2, 2.7.1 (xiii)). Donc $h_0 y_i \in \mathrm{V}$, et il en résulte que V contient $\mathrm{H}_s(s)$ et donc H_s.

[12] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé.

EXPOSÉ XXVI

SOUS-GROUPES PARABOLIQUES DES GROUPES RÉDUCTIFS

par M. Demazure

Cet exposé étudie les sous-groupes paraboliques d'un S-groupe réductif G. Le résultat essentiel en est le théorème de conjugaison (5.4). L'outil essentiel est la notion de position transversale de deux sous-groupes paraboliques, notion qui est étudiée systématiquement dans le n°4. Un autre fait joue un rôle important : la décomposition du radical unipotent $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$ d'un sous-groupe parabolique P en extensions successives de groupes vectoriels (2.1) [1]. **426**

Différents schémas associés à G sont étudiés dans le n°3 ; le n°6 traite des sous-tores déployés [2] de G et de leurs relations avec les sous-groupes paraboliques.

Enfin, dans le n°7, nous exposons brièvement comment se formule, sur une base semi-locale, la « théorie relative » des groupes réductifs telle qu'elle est exposés dans le cas des corps dans l'article de A. Borel et J. Tits, Groupes réductifs, Publications Mathématiques de l'IHÉS, n°27. Dans cet article, cité [**BT65**] dans la suite, le lecteur trouvera d'ailleurs, dans le cas d'un corps de base, d'autres résultats qui n'ont pas été effleurés ici.

1. Rappels. Sous-groupes de Levi

Définition 1.1. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, P un sous-S-schéma en groupes de G. On dit que P est un *sous-groupe parabolique* de G si

(i) P est lisse sur S, **427**

(ii) pour chaque $s \in \mathrm{S}$, le $\overline{s}$-schéma quotient $\mathrm{G}_{\overline{s}}/\mathrm{P}_{\overline{s}}$ est propre (i.e. *Bible*, § 6.4, th. 4 (= [**Ch05**], § 6.5, th. 5), $\mathrm{P}_{\overline{s}}$ contient un sous-groupe de Borel de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$).

Proposition 1.2 (Exp. XXII, 5.8.5). — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G*. Alors* P *est fermé dans* G*, à fibres connexes, et*

$$\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P}).$$

(1) N.D.E. : Comme les sous-groupes de Levi de P forment un torseur sous $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$ (1.9), ceci entraîne, lorsque S est semi-local, que P possède un sous-groupe de Levi et donc un tore maximal (2.4).

(2) N.D.E. : On a remplacé la terminologie de « tore trivial » par celle de « tore déployé ».

De plus, le faisceau-quotient G/P *est représentable par un* S*-schéma lisse et* projectif *sur* S.

Proposition 1.3 (Exp. XXII, 5.3.9 et 5.3.11). — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *et* P' *deux sous-groupes paraboliques de* G*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) P *et* P' *sont conjugués dans* G*, localement pour la topologie étale* (*resp.* (fpqc)).

(ii) *Pour chaque* $s \in S$, $P_{\overline{s}}$ *et* $P'_{\overline{s}}$ *sont conjugués par un élément de* $G(\overline{s})$.

(iii) *Le transporteur strict* $\underline{\mathrm{Transt}}_G(P, P')$ *de* P *dans* P' (*défini par*

$$\underline{\mathrm{Transt}}_G(P, P')(S') = \{g \in G(S') \mid \mathrm{int}(g)P_{S'} = P'_{S'}\}$$

pour tout $S' \to S$)*, est un sous-schéma fermé de* G*, lisse et de présentation finie sur* S*, qui est un fibré principal homogène à droite sous* P*, et à gauche sous* P'.

Proposition 1.4. — *Soient* S *un schéma non vide,* (G, T, M, R) *un* S*-groupe réductif déployé,* R' *une partie de* R*. Les conditions suivantes sur* R' *sont équivalentes :*

428 (i) $\mathfrak{g}_{R'} = \mathfrak{t} \bigoplus \coprod_{\alpha \in R'} \mathfrak{g}^{\alpha}$ *est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique de* G *contenant* T (*nécessairement unique,* Exp. XXII, 5.3.5).

(ii) R' *est de type* (R) (Exp. XXII, 5.4.2) *et contient un système de racines positives.*

(iii) R' *est une partie close de* R *et vérifie : si* $\alpha \in R - R'$*, alors* $-\alpha \in R'$ (*c.-à-d.,* $R = R' \cup (-R')$).

(iv) *Il existe un système de racines simples* Δ*, et une partie* A *de* Δ *tels que* R' *soit la réunion de l'ensemble des racines positives et de l'ensemble des racines négatives combinaisons linéaires des éléments de* A.

(v) R' *contient un système de racines simples de* R *; de plus, si* $\Delta \subset R'$ *est un système de racines simples de* R *et si on pose*

$$A = (-R') \cap \Delta,$$

alors R' *est la réunion de l'ensemble des racines positives et de l'ensemble des racines négatives combinaisons linéaires des éléments de* A.

On a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) par Exp. XXII, 5.4.5 (ii) et 5.5.1. On a (iii) $\Rightarrow$ (ii) par Exp. XXI, 3.3.6 et Exp. XXII, 5.4.7. On a évidemment (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii). On a (iii) $\Rightarrow$ (v) par Exp. XXI, 3.3.6 et 3.3.10.

Il reste donc à prouver que (i) entraîne que R' est une partie close de R. Or cette dernière assertion peut se vérifier sur une fibre géométrique quelconque ; on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos.

Soit P le sous-groupe parabolique de G contenant T dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_{R'}$. Comme les sous-groupes de Borel de P sont les sous-groupes de Borel de G contenus
429 dans P, il résulte de *Bible*, § 12.3, th. 1, et de Exp. XXII, 5.4.5 (i), que si on note U le radical unipotent de P, alors $T \cdot U$ est le sous-groupe de G contenant T d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g}_{R''} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in R''} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

où R'' est l'intersection des systèmes de racines positives de R contenus dans R'. Il en résulte en particulier que R'' est *close* et que $R'' \cap (-R'') = \varnothing$. D'autre part, le groupe $H = P/U$ est réductif, l'image canonique $\overline{T}$ de T en est un tore maximal ($T \to \overline{T}$ est un isomorphisme), et on a un isomorphisme de T-modules, i.e. d'espaces vectoriels gradués de type M

$$\mathrm{Lie}(H) \simeq \mathfrak{t} \bigoplus \coprod_{\alpha \in R_s} \mathfrak{g}^\alpha,$$

où R_s est le complémentaire de R'' dans R'. Il s'ensuit que R_s s'identifie naturellement à l'ensemble des racines de H relativement à $\overline{T}$, et en particulier vérifie $R_s = -R_s$. Il s'ensuit aussitôt que l'on a

$$R'' = \{\alpha \in R', -\alpha \notin R'\}, \qquad R_s = \{\alpha \in R', -\alpha \in R'\}.$$

Montrons maintenant que R' est clos. Soient $\alpha, \beta \in R'$ tels que $\alpha + \beta \in R$; prouvons que $\alpha+\beta \in R'$. Si $\alpha, \beta \in R''$, alors $\alpha+\beta \in R''$ car R'' est clos. Si $\alpha \in R_s$, $\beta \in R''$, et si $\alpha+\beta \notin R'$, alors $\alpha+\beta \in -R''$, et on a $-\alpha = -(\alpha+\beta)+\beta \in R''$ car R'' est clos, ce qui entraîne $-\alpha \in R'$, donc $-\alpha \in R_s$, et contredit le fait que $R_s \cap R'' = \varnothing$. Il reste donc à étudier le cas où $\alpha, \beta \in R_s$. Si $\alpha+\beta \notin R'$, alors $\alpha+\beta \in -R''$. Mais, comme $\alpha+\beta \neq 0$, il existe un système de racines positives du système de racines R_s contenant α et β, donc un sous-groupe de Borel de $H = P/U$ contenant l'image canonique de U_α et U_β. Son image inverse dans P est un sous-groupe de Borel contenant U_α, U_β et U, donc U_α, U_β et $U_{-(\alpha+\beta)}$, ce qui est impossible.

Corollaire 1.5. — *Un sous-groupe parabolique d'un groupe réductif est de type* (RC) (Exp. XXII, 5.11.1). 430

Proposition 1.6 (Exp. XXII, 5.11.4). — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe de type* (RC) [(3)] *de* G.

(i) P *possède un plus grand sous-schéma en groupes invariant, lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres géométriques connexes et unipotentes. C'est un sous-groupe caractéristique de* P*, appelé le* radical unipotent *de* P*, noté* $\mathrm{rad}^u(P)$*. Le faisceau-quotient* $P/\mathrm{rad}^u(P)$ *est représentable par un* S*-groupe réductif.*

(ii) *Si* T *est un tore maximal de* P, P *possède un sous-groupe réductif* L *contenant* T*, tel que :*

(a) *Tout sous-groupe réductif de* P *contenant* T *est contenu dans* L.

(b) P *est le produit semi-direct* $L \cdot \mathrm{rad}^u(P)$*, i.e. le morphisme canonique* $L \to P/\mathrm{rad}^u(P)$ *est un isomorphisme.*

De plus, L *est* l'unique *sous-groupe* (*resp. sous-groupe réductif*) *de* P*, contenant* T *et vérifiant* (b) (resp. (a))*. Enfin, on a*

$$\underline{\mathrm{Norm}}_P(L) = L, \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_P(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_L(T).$$

(3) N.D.E. : On a remplacé « sous-groupe parabolique » par « sous-groupe de type (RC) », comme dans Exp. XXII, 5.11.4, car il sera utile plus loin (4.5.1, 6.17) de pouvoir appliquer cet énoncé à $P \cap P'$, lorsque P, P' sont deux sous-groupes paraboliques tels que $P \cap P'$ soit de type (RC).

1.7. Un sous-groupe L de P vérifiant la condition (b) ci-dessus est appelé un *sous-groupe de Levi* de P. C'est un sous-groupe réductif maximal de P ; en effet, il est réductif, car isomorphe à $\mathrm{P}/\operatorname{rad}^u(\mathrm{P})$, montrons qu'il est maximal pour cette propriété ; soit L' un sous-groupe réductif de P contenant L ; pour prouver que $\mathrm{L}' = \mathrm{L}$, on peut raisonner localement pour la topologie (fpqc), et donc supposer que L possède un tore maximal T, et on est ramené à 1.6 (ii).

431 Si L et L' sont deux sous-groupes de Levi de P, L et L' sont conjugués dans P, localement pour la topologie (fpqc). En effet, localement pour cette topologie, on peut supposer que L (resp. L') possède un tore maximal T (resp. T') ; comme T et T' sont conjugués dans P localement pour la topologie (fpqc), on peut supposer $\mathrm{T} = \mathrm{T}'$, et on a alors $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$, par 1.6 (ii). Mais comme $\mathrm{P} = \mathrm{L}\cdot\operatorname{rad}^u(\mathrm{P})$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{P}}(\mathrm{L}) = \mathrm{L}$, on en déduit aussitôt :

Corollaire 1.8. — *Soit* P *un sous-groupe de type* (RC) [(4)] *du* S*-groupe réductif* G. *Si* L *et* L' *sont deux sous-groupes de Levi de* P, *il existe un* unique $u \in \operatorname{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})$ *tel que* $\operatorname{int}(u)\mathrm{L} = \mathrm{L}'$.

Notons $\underline{\mathrm{Lev}}(\mathrm{P})$ le foncteur des sous-groupes de Levi de P : pour $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\underline{\mathrm{Lev}}(\mathrm{P})(\mathrm{S}')$ est l'ensemble des sous-groupes de Levi de $\mathrm{P}_{\mathrm{S}'}$. On déduit de 1.8 :

Corollaire 1.9. — *Soit* P *un sous-groupe de type* (RC) [(4)] *du* S*-groupe réductif* G. *Alors* $\underline{\mathrm{Lev}}(\mathrm{P})$ *est un fibré principal homogène sous le* S*-groupe* $\operatorname{rad}^u(\mathrm{P})$, *et en particulier est représentable par un* S*-schéma lisse et affine sur* S, *à fibres géométriques intègres.*

Il résulte immédiatement de 1.6 :

Corollaire 1.10. — *Soit* P *un sous-groupe de type* (RC) [(4)] *du* S*-groupe réductif* G. *Le foncteur* $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{P})$ *des tores maximaux de* P *est représentable par un* S*-schéma lisse et affine, la « relation* $\mathrm{L} \supset \mathrm{T}$ *» définit un morphisme*

$$\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{P}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lev}}(\mathrm{P}),$$

la fibre de ce morphisme au-dessus de $\mathrm{L} \in \underline{\mathrm{Lev}}(\mathrm{P})(\mathrm{S})$ *s'identifie à* $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{L})$ (Exp. XXII, 5.8.3).

La première assertion de 1.10 est conséquence des deux autres et de Exp. XXII, 5.8.3.

432 ***Définition 1.11***. — Soient S un schéma non vide, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G, $\mathcal{E} = (\mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}, \Delta, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ un épinglage de G. On dit que $\mathcal{E}$ est *adapté* à P, ou que $\mathcal{E}$ est un épinglage du couple (G, P) si $\mathrm{P} \supset \mathrm{T}$ et si l'algèbre de Lie de P est de la forme $\mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}'} \mathfrak{g}^\alpha$, où R' est une partie de R contenant R_+.

En particulier, si $\mathrm{T} \subset \mathrm{B}$ est le couple de Killing défini par l'épinglage, on a $\mathrm{T} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{P}$.

Sous les conditions précédentes, on note $\Delta(\mathrm{P}) = \Delta \cap (-\mathrm{R}')$; alors, par Exp. XXII, 5.4.3, on a :

$$\alpha \in \Delta(\mathrm{P}) \iff \alpha \in \Delta \text{ et } \mathrm{U}_{-\alpha} \subset \mathrm{P} \iff \alpha \in \Delta \text{ et } \mathrm{U}_{-\alpha} \cap \mathrm{P} \neq e.$$

(4) N.D.E. : cf. la N.D.E. (3).

Il résulte aussitôt de 1.4 (v) et Exp. XXII, 5.11.3 et 5.10.6 :

Proposition 1.12. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G*,* $(\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R},\Delta,(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ *un épinglage de* G *adapté à* P*,* $\Delta(\mathrm{P})$ *la partie de* Δ *définie ci-dessus.*

(i) *Le radical unipotent* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$ *de* P *n'est autre que*

$$\mathrm{U}_{\mathrm{R}''} = \prod_{\alpha\in\mathrm{R}''} \mathrm{U}_\alpha\,,$$

où R'' *est l'ensemble des racines positives qui dans leur décomposition sur* Δ*, contiennent au moins un élément de* $\Delta - \Delta(\mathrm{P})$ [5] *avec un coefficient non nul.*

(ii) *L'unique sous-groupe de Levi* L *de* P *contenant* T *n'est autre que*

$$\mathrm{Z}_{\Delta(\mathrm{P})} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_{\Delta(\mathrm{P})}),$$

où $\mathrm{T}_{\Delta(\mathrm{P})}$ *est le tore maximal de* $\bigcap_{\alpha\in\Delta(\mathrm{P})}\mathrm{Ker}(\alpha)$ *; de plus on a* $\mathrm{T}_{\Delta(\mathrm{P})} = \mathrm{rad}(\mathrm{L})$.

Corollaire 1.13. — *Tout sous-groupe de Levi* L *du sous-groupe parabolique* P *du groupe réductif* G *est un sous-groupe* critique *de* G*, i.e. vérifie* (Exp. XXII, 5.10.4) *:* 433

$$\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\mathrm{L})).$$

Cela résulte aussitôt de 1.12 et du lemme suivant, contenu dans 1.4 et Exp. XXII, 5.4.1 :

Lemme 1.14. — *Localement pour la topologie étale, tout couple* (G, P)*, où* P *est un sous-groupe parabolique du groupe réductif* G*, peut être* épinglé (1.11).

Notons :

Proposition 1.15. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G*,* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$ *deux épinglages de* G *adaptés à* P*. L'*unique *automorphisme intérieur de* G *sur* S *qui transforme* $\mathcal{E}$ *en* $\mathcal{E}'$ (Exp. XXIV, 1.5) *provient de* P*, par le morphisme*

$$\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{P}/\,\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}/\,\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G}/\,\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}).$$

En effet, il suffit de raisonner comme dans Exp. XXIV, 1.5, en utilisant :

Lemme 1.16 (Exp. XXII, 5.3.14 et 5.2.6). — *Les tores maximaux* (*resp. sous-groupes de Borel, resp. couples de Killing*) *d'un sous-groupe parabolique* P *du* S*-groupe réductif* G *sont conjugués dans* P*, localement pour la topologie étale.*

Proposition 1.17. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *et* P′ *deux sous-groupes paraboliques de* G*,* B *un sous-groupe de Borel contenu dans* P *et* P′*. Si* P *et* P′ *sont conjugués dans* G*, localement pour la topologie étale, alors* P = P′*.*

En effet, on peut supposer qu'il existe $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{P} = \mathrm{P}'$. Alors B et 434

[5] N.D.E. : On a corrigé $\Delta(\mathrm{P})$ en $\Delta - \Delta(\mathrm{P})$.

$\operatorname{int}(g)^{-1}\mathrm{B}$ sont deux sous-groupes de Borel de P. Quitte à étendre S, on peut par 1.16, supposer qu'il existe $p \in \mathrm{P}(\mathrm{S})$ tel que $\operatorname{int}(p)\operatorname{int}(g^{-1})\mathrm{B} = \mathrm{B}$. Alors

$$p\,g^{-1} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B})(\mathrm{S}) = \mathrm{B}(\mathrm{S}),$$

et $g \in \mathrm{B}(\mathrm{S}) \cdot p \subset \mathrm{P}(\mathrm{S})$, donc $\mathrm{P}' = \operatorname{int}(g)\mathrm{P} = \mathrm{P}$.

Remarque 1.18. — Si P et P′ sont deux sous-groupes paraboliques de G contenant un même sous-groupe de Borel, alors $\mathrm{P} \cap \mathrm{P}'$ est encore un sous-groupe parabolique de G. En effet, il est lisse le long de la section unité (Exp. XXII, 5.4.5), et il contient un sous-groupe de Borel.

Proposition 1.19. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* G′ *son groupe dérivé* (Exp. XXII, 6.2.1).

(i) *Les applications*

$$\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' = \mathrm{P} \cap \mathrm{G}' \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' \cdot \operatorname{rad}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P}')$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G *et l'ensemble des sous-groupes paraboliques de* G′. *On a* $\operatorname{rad}^u(\mathrm{P}) = \operatorname{rad}^u(\mathrm{P}')$.

(ii) *Soient* P *un sous-groupe parabolique de* G *et* $\mathrm{P}' = \mathrm{P} \cap \mathrm{G}'$. *Les applications*

$$\mathrm{L} \mapsto \mathrm{L}' = \mathrm{L} \cap \mathrm{G}' = \mathrm{L} \cap \mathrm{P}'$$
$$\mathrm{L}' \mapsto \mathrm{L}' \cdot \operatorname{rad}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\operatorname{rad}(\mathrm{L}'))$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes de Levi de P *et l'ensemble des sous-groupes de Levi de* P′. *De plus, on a* $\operatorname{rad}(\mathrm{L}') = (\operatorname{rad}(\mathrm{L}) \cap \mathrm{G}')^0$.

435 La démonstration (par réduction au cas déployé, par exemple) se fait sans difficulté et est laissée au lecteur, ainsi que celle, immédiate de :

Proposition 1.20. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G*,* L *un sous-groupe de Levi de* P. *Les applications*

$$\mathrm{Q} \mapsto \mathrm{Q} \cap \mathrm{L} = \mathrm{Q}', \qquad \mathrm{Q}' \mapsto \mathrm{Q}' \cdot \operatorname{rad}^u(\mathrm{P})$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G *contenus dans* P *et l'ensemble des sous-groupes paraboliques de* L. *De plus, les sous-groupes de Levi de* Q′ *sont les sous-groupes de Levi de* Q *contenus dans* L.

On peut compléter 1.6 de la manière suivante :

Proposition 1.21. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G.

(i) P *possède un plus grand sous-groupe invariant, lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres géométriques connexes et résolubles. C'est un sous-groupe caractéristique de* P*, appelé le radical de* P*, et noté* $\operatorname{rad}(\mathrm{P})$. *Le faisceau-quotient* $\mathrm{P}/\operatorname{rad}(\mathrm{P})$ *est représentable par un* S*-groupe semi-simple.*

(ii) *Si* L *est un sous-groupe de Levi de* P, rad(P) *est le produit semi-direct de* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$ *et de* rad(L) *; on a* $\mathrm{rad}(\mathrm{L}) = \mathrm{L} \cap \mathrm{rad}(\mathrm{P})$, *donc* $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L} \cap \mathrm{rad}(\mathrm{P}))$, *et* $\mathrm{P}/\mathrm{rad}(\mathrm{P}) \simeq \mathrm{L}/\mathrm{rad}(\mathrm{L})$.

En effet, l'assertion (i) étant locale, on peut supposer que G possède un sous-groupe de Levi L, et on est ramené à prouver que $\mathrm{R} = \mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \cdot \mathrm{rad}(\mathrm{L})$ possède les propriétés annoncées dans (i), ce qui est immédiat. Pour (ii), il ne reste plus qu'à démontrer que **436**
$\mathrm{rad}(\mathrm{L}) = \mathrm{L} \cap \mathrm{rad}(\mathrm{P})$, ce qui résulte aussitôt du fait que $\mathrm{L} \cap \mathrm{rad}(\mathrm{P})$ est lisse et à fibres connexes, L étant le centralisateur d'un tore.

2. Structure du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique

Proposition 2.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G, $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$ *son radical unipotent. Il existe une suite de sous-schémas en groupes de* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$

$$\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) = \mathrm{U}_0 \supset \mathrm{U}_1 \supset \mathrm{U}_2 \supset \cdots \supset \mathrm{U}_n \supset \cdots$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) *Chaque* U_i *est lisse, à fibres connexes, caractéristique et fermé dans* P. *Le commutateur d'une section de* U_i *et d'une section de* U_j *est une section de* U_{i+j+1} (*sur un* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *variable*).

(ii) *Pour chaque* $i \geqslant 0$, *il existe un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module localement libre* $\mathscr{E}_i$ *et un isomorphisme de* S*-faisceaux en groupes*

$$\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(\mathscr{E}_i).$$

De plus, les automorphismes de P (*sur un* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *variable*) *opèrent* linéairement *sur* $\mathrm{W}(\mathscr{E}_i)$.

(iii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *on a* $\mathrm{U}_{n,\,s} = e$ *pour* $n > \dim(\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})_s)$.

2.1.1. — Supposons d'abord le couple (G, P) épinglable. Soit $(\mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}, \Delta, \ldots)$ un épinglage de G adapté à P ; soit $\Delta(\mathrm{P})$ la partie de Δ définie par P. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les **437**
éléments de $\Delta(\mathrm{P})$, $\beta_1, \ldots, \beta_q$ les éléments de $\Delta - \Delta(\mathrm{P})$. Toute racine $\gamma \in \mathrm{R}$ s'écrit de manière unique

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \cdots + a_p\alpha_p + b_1\beta_1 + \cdots + b_q\beta_q\,.$$

Posons

$$a(\gamma) = b_1 + \cdots + b_q\,. \quad ^{(6)}$$

Il résulte aussitôt des définitions les propriétés suivantes (cf. 1.12) :

(i) $\mathrm{U}_\gamma \subset \mathrm{P} \Leftrightarrow a(\gamma) \geqslant 0$.

(ii) $\mathrm{U}_\gamma \subset \mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \Leftrightarrow a(\gamma) > 0$.

(iii) $a(n\gamma + m\gamma') = n\,a(\gamma) + m\,a(\gamma') \qquad$ pour tout $\; n, m \in \mathbb{Z}$.

---

[6] N.D.E. : On a corrigé $a_1 + \cdots + a_p$ en $b_1 + \cdots + b_q$.

Pour $i > 0$, soit R_i l'ensemble des racines $\gamma \in \mathrm{R}$ telles que $a(\gamma) > i$. Chaque R_i est un ensemble clos de racines vérifiant $\mathrm{R}_i \cap (-\mathrm{R}_i) = \varnothing$. Considérons (Exp. XXII, 5.6.5) le S-groupe

$$\mathrm{U}_i = \mathrm{U}_{\mathrm{R}_i} = \prod_{\gamma \in \mathrm{R}_i} \mathrm{U}_\gamma \,.$$

C'est un sous-schéma en groupes fermé de G, lisse sur S, à fibres connexes.

Soient α, $\beta \in \mathrm{R}$, considérons la relation de commutation de Exp. XXII, 5.5.2

$$p_\alpha(x) p_\beta(y) p_\alpha(-x) = p_\beta(y) \prod_{n,m \in \mathbb{N}^*} p_{n\alpha+m\beta}(\mathrm{C}_{n,m,\alpha,\beta}\, x^n y^m),$$

438 où chaque p_γ est un isomorphisme de groupes vectoriels $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\gamma$. Remarquons d'abord que si $a(\alpha) > i$ et $a(\beta) > j$, on a

$$a(n\alpha + m\beta) = n\, a(\alpha) + m\, a(\beta) \geqslant n(i+1) + m(j+1) > i + j + 1$$

lorsque n et m sont > 0. Il s'ensuit que le commutateur d'une section de U_α et d'une section de U_β est une section de U_{i+j+1} (sur un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ variable), ce qui entraîne bien $(\mathrm{U}_i, \mathrm{U}_j) \subset \mathrm{U}_{i+j+1}$. Pour chaque $i \geqslant 0$, le quotient $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}$ est donc commutatif, il s'identifie naturellement à

$$\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1} \simeq \prod_{a(\gamma)=i+1} \mathrm{U}_\gamma \simeq \mathrm{W}(\mathscr{E}_i),$$

où $\mathscr{E}_i$ est la somme directe des $\mathfrak{g}^\gamma$ pour $a(\gamma) = i + 1$.

Revenons à la formule de commutation ci-dessus, et supposons $a(\alpha) \geqslant 0$, $a(\beta) > i$. Si $n, m \in \mathbb{N}^*$,

– ou bien $a(n\alpha + m\beta) > i + 1$

– ou bien $a(n\alpha + m\beta) = i + 1$, auquel cas on a nécessairement $m = 1$.

Cela prouve d'abord que $\mathrm{int}(p_\alpha(x))$ respecte U_i (donc aussi U_{i+1}), puis que dans l'expression de $\mathrm{int}(p_\alpha(x))p_\beta(y)$ n'interviennent modulo U_{i+1} que des termes de la forme $p_{n\alpha+\beta}(\mathrm{C}_{n,1,\alpha,\beta}\, x^n y)$ qui sont donc *linéaires* en y. Il s'ensuit que les automorphismes intérieurs définis par des sections de U_α opèrent linéairement dans le quotient $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}$ identifié à $\mathrm{W}(\mathscr{E}_i)$. Comme c'est également trivialement vrai pour les automorphismes intérieurs définis par des sections de T, et que P est engendré par T et les U_α, $a(\alpha) \geqslant 0$, on en déduit que :

(i) chaque U_i est invariant dans P,

(ii) les automorphismes intérieurs définis par des sections de P opèrent linéairement dans $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1} \simeq \mathrm{W}(\mathscr{E}_i)$.

2.1.2. — Soit maintenant $(\mathrm{T}', \mathrm{M}', \mathrm{R}', \Delta', \ldots)$ un nouvel épinglage de G adapté à P.
439 En vertu de 1.15, il existe un automorphisme intérieur de G provenant de P transformant l'ancien épinglage en le nouveau. Quitte à étendre S, on peut supposer que cet automorphisme intérieur est de la forme $\mathrm{int}(p)$, $p \in \mathrm{P}(\mathrm{S})$. Si l'on reprend les constructions précédentes à l'aide du nouvel épinglage, il est clair que les groupes U'_i et les isomorphismes $\mathrm{U}'_i/\mathrm{U}'_{i+1} \simeq \mathrm{W}(\mathscr{E}'_i)$ obtenus se déduisent de U_i et $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1} \simeq \mathrm{W}(\mathscr{E}_i)$ par transport de structure à l'aide de $\mathrm{int}(p)$. Il résulte des remarques (i) et (ii) ci-dessus

que l'on aura donc $\mathrm{U}'_i = \mathrm{U}_i$, et que les deux structures vectorielles construites sur $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1} = \mathrm{U}'_i/\mathrm{U}'_{i+1}$ coïncident.

Cela nous montre que les groupes U_i et les structures vectorielles sur les quotients $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}$ sont indépendants de l'épinglage considéré (et en particulier invariants par tout automorphisme de P, comme on le voit aisément).

On a donc démontré la proposition lorsque le couple (G, P) est épinglable (la partie (iii) est triviale, car d'après Exp. XXI 3.1.2, l'ensemble $\{a(\gamma) \mid \gamma \in \mathrm{R}\}$ est un intervalle de $\mathbb{Z}$, donc on ne peut avoir $\dim(\mathrm{U}_{i,\,s}) = \dim(\mathrm{U}_{i+1,\,s})$ que si $\mathrm{U}_{i,\,s} = e$).

2.1.3. — Dans le cas général, il existe une famille couvrante pour la topologie (fpqc), $\{\mathrm{S}_j \to \mathrm{S}\}$, telle que chaque couple $(\mathrm{G}_{\mathrm{S}_j}, \mathrm{P}_{\mathrm{S}_j})$ soit épinglable (1.14). En vertu de ce qui précède, on a des données de descente sur les $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}_{\mathrm{S}_j})_i$, compatibles avec les structures vectorielles des quotients, et on conclut par descente des sous-schémas fermés (resp. des modules localement libres). (7)

Corollaire 2.2. — *Soient* S *un schéma* affine*,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G*. On a*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})) = 0,$$

i.e. tout fibré principal homogène sous $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$ *est trivial.*

En effet, S se décompose en somme de sous-schémas sur chacun desquels $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$ **440**
est de dimension relative constante. On peut donc par (iii) supposer qu'il existe un n tel que $\mathrm{U}_n = e$. Comme $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{W}(\mathscr{E}_i)) = 0$ par TDTE I, B, 1.1 (ou SGA 1, XI 5.1), on conclut aussitôt.

Corollaire 2.3. — *Sous les conditions précédentes,* P *possède un sous-groupe de Levi* L*. Si* L *est un sous-groupe de Levi de* P*, l'application canonique*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{P})$$

est bijective (*cf. l'introduction de* Exp. XXIV *pour la définition de* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\ )$).

La première assertion résulte de 2.2 et 1.9. L'application canonique $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{L}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{P})$ est surjective, car P est le produit semi-direct $\mathrm{L} \cdot \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$. Pour prouver qu'elle est injective, il suffit de voir que pour tout fibré principal homogène Q sous L, on a $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})_{\mathrm{Q}}) = 0$, où l'indice Q désigne l'opération de torsion par le L-fibré Q. Ceci peut se prouver de deux manières : on peut reprendre la démonstration de 2.2, en utilisant le fait que les structures vectorielles sur les $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}$ sont invariantes par L ; on peut aussi remarquer que $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})_{\mathrm{Q}}$ s'identifie au radical unipotent du sous-groupe parabolique P_{Q} de G_{Q}, et appliquer 2.2 à P_{Q}.

Corollaire 2.4. — *Soient* S *un schéma* semi-local*,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G*. Il existe un tore maximal* T *de* G *contenu dans* P*.*

En effet, vu 2.3, P possède un sous-groupe de Levi L, et il suffit de prouver que L possède un tore maximal, ce qui résulte de Exp. XIV, 3.20.

(7) N.D.E. : cf. SGA 1, VIII 1.3, 1.9 et 1.10.

441 ***Corollaire 2.5***. — *Soient* S *un schéma* affine, G *un* S-*groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G. *Il existe un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*module localement libre* $\mathscr{E}$ *tel que* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$ *soit isomorphe comme* S-*schéma à* $\mathrm{W}(\mathscr{E})$.

En effet, prouvons par récurrence sur i, que l'on a un isomorphisme de S-schémas

$$\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})/\mathrm{U}_i \simeq \mathrm{W}(\mathscr{E}_0 \oplus \mathscr{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{E}_{i-1}).$$

C'est clair pour $i = 0$. Supposons $i > 0$, alors $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})/\mathrm{U}_i$ est un fibré principal homogène de base $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})/\mathrm{U}_{i-1}$, sous le groupe

$$(\mathrm{U}_{i-1}/\mathrm{U}_i)_{\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})/\mathrm{U}_{i-1}} \simeq \mathrm{W}(\mathscr{E}_{i-1} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})/\mathrm{U}_{i-1}}).$$

Or la base est affine (par exemple par l'hypothèse de récurrence), donc ce fibré est trivial (TDTE I ou SGA 1 XI, *loc. cit.*), et il existe un isomorphisme de S-schémas $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})/\mathrm{U}_i \simeq (\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})/\mathrm{U}_{i-1}) \times_{\mathrm{S}} (\mathrm{U}_{i-1}/\mathrm{U}_i)$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.6. — *Soient* S *un schéma* semi-local, $\{s_i\}$ *l'ensemble de ses points fermés,* G *un* S-*groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G. *L'application canonique*

$$\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S}) \longrightarrow \prod_i \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{Spec}\,\kappa(s_i))$$

est surjective.

En effet, si $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\kappa(s_i) = \mathrm{A}/\mathfrak{p}_i$, et si $\mathscr{E}$ est donné par le module projectif (donc plat) E, il nous faut prouver que l'application

$$\mathrm{E} \longrightarrow \prod_i \mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{p}_i$$

est surjective. Il suffit de le faire lorsque $\mathrm{E} = \mathrm{A}$, auquel cas c'est bien connu (cf. Bourbaki, *Alg. Comm.* Chap. II, § 1, n°2, proposition 5).

442 ***Corollaire 2.7***. — *Soient* k *un corps* infini, G *un* k-*groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G ; *alors* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(k)$ *est dense dans* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$.

Corollaire 2.8. — *Soient* S *un schéma* semi-local, $\{s_i\}$ *l'ensemble de ses points fermés,* G *un* S-*groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G, *et* L_i *un sous-groupe de Levi de* P_{s_i} *pour chaque* i. *Il existe un sous-groupe de Levi* L *de* P *induisant* L_i *pour chaque* i.

Soit en effet L_0 un sous-groupe de Levi de P (2.3). Soit, pour chaque i, $u_i \in \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{Spec}(\kappa(s_i)))$ tel que $\mathrm{int}(u_i)\mathrm{L}_{0,\,s_i} = \mathrm{L}_i$ (1.8) ; si $u \in \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})$ induit u_i pour chaque i (2.6), alors $\mathrm{L} = \mathrm{int}(u)\mathrm{L}_0$ répond à la question.

Corollaire 2.9. — *Dans la situation de* 2.1, *soit de plus* H *un sous-schéma en groupes de* G, *lisse et de présentation finie sur* S, *à fibres connexes, tel que* $\mathrm{P} \cap \mathrm{H}$ *contienne localement pour la topologie* (fpqc) *un tore maximal de* G. *Alors pour chaque* $i \geqslant 0$, *il existe un sous-module localement facteur direct* $\mathscr{F}_i$ *de* $\mathscr{E}_i$ *tel que l'isomorphisme* $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(\mathscr{E}_i)$ *induise un isomorphisme de groupes*

$$(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{H})/(\mathrm{U}_{i+1} \cap \mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(\mathscr{F}_i).$$

En effet, H est un sous-groupe de type (R) de G (Exp. XXII, 5.2.1). D'autre part, l'assertion à démontrer est locale pour la topologie (fpqc), et on peut supposer G déployé relativement à un tore maximal de $\mathrm{P} \cap \mathrm{H}$; on peut même se ramener dans la situation de 2.1.1, H étant défini par une partie R' de R. Reprenant les notations de *loc. cit.*, on voit par Exp. XXII, 5.6.7 (ii) que $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{H} = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_i \cap \mathrm{R}'} \mathrm{U}_\alpha$, donc que $(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{H})/(\mathrm{U}_{i+1} \cap \mathrm{H})$ s'identifie à $\prod_{\alpha \in \mathrm{R}', a(\alpha) = i+1} \mathrm{U}_\alpha$, ce qui entraîne le résultat.

Corollaire 2.10. — *Dans la situation de* 2.9*, les conclusions de* 2.2*,* 2.5*,* 2.6*,* 2.7 *sont également valables en remplaçant* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$ *par* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \cap \mathrm{H}$. 443

Corollaire 2.11. — [8] *Soient* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique,* H *un sous-groupe de type* (RC) *de* P *tel que* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{H}) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \cap \mathrm{H}$*. Alors les énoncés* 2.2 *à* 2.8 *sont également valables en remplaçant* P *par* H.

3. Schéma des sous-groupes paraboliques d'un groupe réductif

3.1. Soit E un S-schéma constant tordu fini (Exp. X, 5.1). Considérons le S-foncteur $\mathrm{Of}(\mathrm{E})$, où $\mathrm{Of}(\mathrm{E})(\mathrm{S}')$ est l'ensemble des sous-schémas ouverts et fermés de $\mathrm{E}_{\mathrm{S}'}$ (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des parties ouvertes et fermées de $\mathrm{E}_{\mathrm{S}'}$) ; alors $\mathrm{Of}(\mathrm{E})$ est représentable par un S-schéma constant tordu fini. En effet, si $\mathrm{E} = \mathrm{A}_\mathrm{S}$, où A est un ensemble fini, on a aussitôt $\mathrm{Of}(\mathrm{E}) \simeq \mathscr{P}(\mathrm{A})_\mathrm{S}$ (où $\mathscr{P}(\mathrm{A})$ désigne l'ensemble des parties de A), et on conclut par descente des sous-schémas ouverts et fermés. On a évidemment :

$$\mathrm{Of}(\mathrm{E}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{Of}(\mathrm{E})_{\mathrm{S}'}, \qquad \mathrm{Of}(\mathrm{E} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{E}') = \mathrm{Of}(\mathrm{E}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Of}(\mathrm{E}').$$

3.2. Soient S un schéma, G un S-groupe réductif. Le foncteur $\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})$ des sous-groupes paraboliques de G est défini par

$$\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})(\mathrm{S}') = \text{ensemble des sous-groupes paraboliques de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}.$$

En particulier $\mathrm{G} \in \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})(\mathrm{S})$, $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G}) \subset \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})$. Nous nous proposons de définir un morphisme

$$\mathbf{t} : \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) $\mathbf{t}$ est fonctoriel en G (par rapport aux isomorphismes) et commute à l'extension de la base.

(ii) Si $(\mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}, \Delta, \ldots)$ est un épinglage de G adapté au sous-groupe parabolique P (1.11), l'isomorphisme canonique $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}) \simeq \Delta_\mathrm{S}$ (Exp. XXIV, 3.4 (iii)) transforme $\mathbf{t}(\mathrm{P})$ en $\Delta(\mathrm{P})_\mathrm{S}$ (notations de 1.11, 1.12).

Soit d'abord P un sous-groupe parabolique de G et $(\mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R}, \Delta, \ldots)$ un épinglage 444
de G adapté à P. On définit $\mathbf{t}(\mathrm{P})$ par (ii) ; le sous-schéma $\mathbf{t}(\mathrm{P})$ de $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ ainsi construit est indépendant de l'épinglage choisi. En effet, si $(\mathrm{T}', \mathrm{M}', \mathrm{R}', \Delta', \ldots)$ est un autre épinglage de G adapté à P, l'unique automorphisme intérieur de G transformant

[8] N.D.E. : On a ajouté le corollaire 2.11, qui sera utilisé en 4.5.1 et 6.17.

le premier épinglage en le second provient de P (1.15) ; l'isomorphisme canonique $\Delta \xrightarrow{\sim} \Delta'$ transforme donc $\Delta(\mathrm{P})$ en $\Delta'(\mathrm{P})$, ce qui entraîne le résultat annoncé.

Si maintenant on ne suppose plus nécessairement (G,P) épinglable, il résulte aussitôt de 1.14 et de la définition de $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ (Exp. XXIV, 3.3) que l'on peut définir par descente un sous-schéma ouvert et fermé $\mathbf{t}(\mathrm{P})$ de $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$, unique, tel que pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ tel que $(\mathrm{G},\mathrm{P})_{\mathrm{S}'}$ soit épinglable, on ait $\mathbf{t}(\mathrm{P})_{\mathrm{S}'} = \mathbf{t}(\mathrm{P}_{\mathrm{S}'})$.

Théorème 3.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,*

$$\mathbf{t} : \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$$

le morphisme défini ci-dessus.

(i) *Pour que deux sous-groupes paraboliques* P *et* P′ *de* G *soient conjugués localement pour la topologie* (fpqc) (*cf.* 1.3)*, il faut et il suffit que* $\mathbf{t}(\mathrm{P}) = \mathbf{t}(\mathrm{P}')$*.*

(ii) $\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})$ *est représentable, et le morphisme* $\mathbf{t}$ *est* lisse, projectif, à fibres géométriques intègres.

En vertu de 3.2 (i), et du fait que les automorphismes intérieurs de G opèrent trivialement sur $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ (Exp. XXIV, 3.4 (iv)), on a bien $\mathbf{t}(\mathrm{P}) = \mathbf{t}(\mathrm{P}')$ lorsque P et P′ sont conjugués. Réciproquement, soient P et P′ deux sous-groupes paraboliques de G tels que $\mathbf{t}(\mathrm{P}) = \mathbf{t}(\mathrm{P}')$; prouvons que P et P′ sont conjugués dans G, localement pour
445 la topologie (fpqc) ; on peut d'abord supposer les couples (G,P) et (G,P') épinglables (1.14) ; par conjugaison des épinglages dans G (Exp. XXIV, 1.5), on peut supposer qu'il existe un épinglage $(\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R},\Delta)$ de G adapté à P et P′. Alors $\mathbf{t}(\mathrm{P}) = \mathbf{t}(\mathrm{P}')$ implique $\Delta(\mathrm{P}) = \Delta(\mathrm{P}')$, donc $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$ (cf. 1.4 (v)). On a donc prouvé (i). Pour démontrer (ii), reprenons les notations de Exp. XXII, 5.11.5. [9]

On a un morphisme canonique $\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) \to \mathscr{H}_c$, et il est clair (par exemple par réduction au cas épinglé) qu'il se place dans un carré cartésien (où les flèches verticales sont des monomorphismes)

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) \arrow[r, "\mathbf{t}"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})) \arrow[d, hook] \\
\mathscr{H}_c \arrow[r, "c\ell"] & \mathcal{C}\ell_c.
\end{tikzcd}$$

Or (*loc. cit.*) $\mathscr{H}_c$ est représentable et le morphisme $c\ell$ est lisse, quasi-projectif, de présentation finie, à fibres géométriques intègres, donc il en est de même de $\mathbf{t}$.

Il reste à prouver que $\mathbf{t}$ est *propre* ; mais c'est maintenant une assertion locale pour la topologie (fpqc), et on peut se ramener au cas épinglé $\mathrm{G} = (\mathrm{G},\mathrm{T},\mathrm{M},\mathrm{R},\Delta,\ldots)$. On a alors $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}) \simeq \Delta_{\mathrm{S}}$, et il suffit de prouver que pour toute partie Δ_1 de Δ, le S-schéma $\mathbf{t}^{-1}((\Delta_1)_{\mathrm{S}})$ est propre sur S. Or si P_1 est le sous-groupe parabolique de G contenant T tel que $\Delta(\mathrm{P}_1) = \Delta_1$, il résulte de (i) que le morphisme $\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})$

[9] N.D.E. : On rappelle (cf. *loc. cit.*) que $\mathscr{H}_c = \mathscr{H}_c(\mathrm{G})$ désigne le foncteur des sous-groupes de G de type (RC), $\mathcal{C}\ell_c = \mathcal{C}\ell_c(\mathrm{G})$ le foncteur des « classes de conjugaison » de tels sous-groupes, et que $c\ell : \mathscr{H}_c \to \mathcal{C}\ell_c$ est la projection canonique.

défini ensemblistement par $g \mapsto \mathrm{int}(g)\mathrm{P}_1$ induit un isomorphisme de $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P}_1)$ sur $\mathbf{t}^{-1}((\Delta_1)_{\mathrm{S}})$. Or, d'après 1.2, $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P}_1) = \mathrm{G}/\mathrm{P}_1$ est projectif sur S.

Définition 3.4. — $\mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$ est appelé le *schéma des types de paraboliques* de G ; $\mathbf{t}(\mathrm{P})$ est appelé le *type* de P.

Corollaire 3.5. — *Le* S-*foncteur* $\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})$ *est représentable par un* S-*schéma* lisse et projectif *sur* S. *La décomposition*

$$\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})) \longrightarrow \mathrm{S}$$

est la factorisation de Stein (EGA III, 4.3.3) *du morphisme structural* $\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) \to \mathrm{S}$. **446**

Corollaire 3.6. — *Pour chaque* $t \in \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))(\mathrm{S})$, *le* S-*schéma*

$$\underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G}) = \mathbf{t}^{-1}(t)$$

des sous-groupes paraboliques de G *de type* t *est lisse et projectif sur* S, *homogène sous* G. *Si* P *est un sous-groupe parabolique de* G, *on a un isomorphisme canonique* $\mathrm{G}/\mathrm{P} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{P})}(\mathrm{G})$. *On a* $\underline{\mathrm{Par}}_{\varnothing}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{G})$, $\underline{\mathrm{Par}}_{\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}$.

Remarque 3.7. — Le S-schéma $\mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$ est muni d'une structure d'ordre naturelle (relation de domination, ici d'inclusion ensembliste, entre sous-schémas). Cette structure d'ordre est réticulée, en particulier la borne inférieure de deux sous-schémas ouverts et fermés de $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})_{\mathrm{S}'}$ est évidemment leur intersection. Remarquons d'ailleurs que si B est un sous-groupe de Borel de G, on peut définir le foncteur X des sous-groupes paraboliques de G contenant B. Le morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$ induit par $\mathbf{t}$ est un isomorphisme (pour la structure de « schéma ordonné »), en vertu de l'assertion $\mathrm{P} \subset \mathrm{Q} \Rightarrow \mathbf{t}(\mathrm{P}) \subset \mathbf{t}(\mathrm{Q})$ et de :

Lemme 3.8. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G, t' *une section de* $\mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))$ *sur* S, *telle que* $\mathbf{t}(\mathrm{P}) \subset t'$. *Il existe un unique sous-groupe parabolique* P' *de* G, *contenant* P, *et tel que* $\mathbf{t}(\mathrm{P}') = t'$.

Quitte à étendre la base, on peut supposer que P contient un sous-groupe de Borel B de G. L'unicité de P' résulte alors de 1.17. Pour démontrer l'existence, on peut se placer dans le cas déployé, auquel cas l'assertion est évidente, cf. n°1.

447

Remarques 3.8.1. — (i) L'assertion analogue à 3.8 obtenue en renversant les inclusions est évidemment fausse. Elle entraînerait par exemple que tout groupe de type A_1 possède un sous-groupe de Borel, ce qui n'est pas, cf. Exp. XX, n°5.

(ii) Il résulte aussitôt de ce qui précède que $\mathbf{t}(\mathrm{P}) \subset \mathbf{t}(\mathrm{Q})$ signifie que localement pour (fpqc) ou (ét), P est conjugué à un sous-groupe de Q (il suffit d'ailleurs de vérifier l'assertion sur les fibres géométriques). De plus, on verra au n°5 que l'on peut remplacer la topologie étale par la topologie de Zariski.

3.9. Les discussions précédentes peuvent se reprendre dans le cas des sous-groupes critiques. Rappelons (Exp. XXII, 5.10.4 et 5.10.5) qu'un sous-groupe réductif H du groupe réductif G est *critique* si $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{rad}(\mathrm{H}))$, qu'un sous-tore Q de G est un *tore* C-*critique* si $\mathrm{Q} = \mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))$ et que sous-groupes critiques et tores C-critiques [10] sont en correspondance biunivoque (par $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{rad}(\mathrm{H})$ et $\mathrm{Q} \mapsto \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$).

Si $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ est un S-groupe déployé, le sous-groupe de G contenant T correspondant à la partie R' de R (Exp. XXII, 5.4.2) est critique si et seulement si R' est « vectorielle » (c'est-à-dire intersection de R avec un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M} \otimes \mathbb{Q}$), cf. Exp. XXII, 5.10.6.

Si G est un S-groupe réductif quelconque, on définira comme dans Exp. XXII, 5.11.5, un S-schéma étale fini $\mathcal{C}\ell_{\mathrm{crit}}$, qui dans le cas déployé sera le schéma constant associé à l'ensemble des parties vectorielles de R modulo l'action du groupe de Weyl. Si $\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G})$ désigne le « foncteur des sous-groupes critiques » de G, on aura un morphisme canonique $\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G}) \xrightarrow{c\ell} \mathcal{C}\ell_{\mathrm{crit}}$, qui se placera dans un diagramme cartésien [11]

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G}) \arrow[r, "c\ell"] \arrow[d, hook] & \mathcal{C}\ell_{\mathrm{crit}} \arrow[d, hook] \\ \mathscr{H}_c \arrow[r, "c\ell"] & \mathcal{C}\ell_c\,. \end{tikzcd}$$

448 ***Proposition 3.10***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*groupe réductif,* $\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G})$ *le foncteur de ses sous-groupes critiques,* $\mathcal{C}\ell_{\mathrm{crit}}$ *et* $c\ell : \underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G}) \to \mathcal{C}\ell_{\mathrm{crit}}$ *le* S-*schéma étale fini et le morphisme définis ci-dessus.*

(i) *Pour que les sous-groupes critiques* H *et* H' *de* G *soient conjugués* (*localement pour la topologie* (fpqc)*, il faut et il suffit que* $c\ell(\mathrm{H}) = c\ell(\mathrm{H}')$.

(ii) $\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G})$ *est représentable et le morphisme* $c\ell$ *est* lisse, affine, à fibres géométriques intègres.

Cela se démontre comme 3.3 excepté l'assertion « $c\ell$ est affine ». Il suffit de prouver que $\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G})$ est affine sur S. Or $\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G})$ s'identifie naturellement au S-foncteur des tores critiques de G, et on a donc un monomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{M}$$

où M est le schéma des sous-groupes de type multiplicatif de G (Exp. XI, 4.1). Pour prouver que $\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G})$ est affine sur S, il suffit, en vertu de Exp. XII 5.3 de montrer que ce morphisme est une immersion ouverte et fermée, où encore en faisant le changement de base $\mathrm{M} \to \mathrm{S}$, de prouver l'assertion suivante : si Q est un sous-groupe de type multiplicatif du groupe réductif G, les $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ tels que $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$ soit un tore critique de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ sont ceux qui se factorisent par un certain sous-schéma ouvert et fermé de S. Or dire que Q est un tore critique, c'est dire :

[10] N.D.E. : On a remplacé ici « tore critique » par « tore C-critique », cf. *loc. cit.* Dans la suite, on écrira simplement « *tore critique* » au lieu de « tore C-critique ».
[11] N.D.E. : cf. 3.3, N.D.E. (9) pour les notations $\mathscr{H}_c$ et $\mathcal{C}\ell_c$.

(1) que Q est un tore,

(2) Q étant un tore, que $\mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))$, qui est aussi un tore, est de même dimension relative que Q.

Or ces deux conditions sont bien du type envisagé.

Corollaire 3.11. — *Le* S-*foncteur* $\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G})$ *est représentable par un* S-*schéma* lisse et affine *sur* S. 449

Corollaire 3.12. — *Soit* H *un sous-groupe critique du* S-*groupe réductif* G. *Alors* $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *et* G/H *sont représentables par des* S-*schémas* affines *et lisses sur* S.

La première assertion résulte de 3.11, la seconde de la première et de Exp. XXII, 5.10.2.

Corollaire 3.13. — *Soit* Q *un sous-tore du* S-*groupe réductif* G. *Alors* $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est représentable par un* S-*schéma lisse et* affine *sur* S. *Il en est de même de* $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *si* Q *est un sous-tore critique de* G.

En effet, $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est critique (Exp. XXII, 5.10.5), et on a $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ si Q est critique (*loc. cit.* 5.10.8).

3.14. En vertu de la conjugaison des sous-groupes de Levi des sous-groupes paraboliques de G, il existe un morphisme unique

$$u : \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathrm{crit}}$$

tel que pour tout sous-groupe parabolique P de G, et tout sous-groupe de Levi L de P, on ait $c\ell(\mathrm{L}) = u(\mathbf{t}(\mathrm{P}))$, et que ceci soit vrai après tout changement de base.

3.15. Soient S un schéma, G un S-groupe réductif. Considérons les S-foncteurs : [12]

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{PL}}(\mathrm{S}') &= \{\text{couples } \mathrm{P} \supset \mathrm{L},\ \ \mathrm{P} \text{ parabolique de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{L} \text{ sous-groupe de Levi de } \mathrm{P}\};\\
\underline{\mathrm{PT}}(\mathrm{S}') &= \{\text{couples } \mathrm{P} \supset \mathrm{T},\ \ \mathrm{P} \text{ parabolique de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{T} \text{ tore maximal de } \mathrm{P}\};\\
\underline{\mathrm{CT}}(\mathrm{S}') &= \{\text{couples } \mathrm{C} \supset \mathrm{T},\ \ \mathrm{C} \text{ sous-groupe critique de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{T} \text{ tore maximal de } \mathrm{C}\};\\
\underline{\mathrm{PLT}}(\mathrm{S}') &= \{\text{triplets } \mathrm{P} \supset \mathrm{L} \supset \mathrm{T},\ \ (\mathrm{P},\mathrm{T}) \in \underline{\mathrm{PT}}(\mathrm{S}'), \mathrm{L} \text{ sous-groupe de Levi de } \mathrm{P}\}
\end{aligned}$$

On a des morphismes évidents entre ces foncteurs et les foncteurs $\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})$, $\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G})$, 450
$\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G})$ déjà introduits, et on a un diagramme commutatif en forme de cube tronqué (voir la figure suivante) :

[12] N.D.E. : On a changé $\underline{\mathrm{LT}}$ en $\underline{\mathrm{CT}}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \underline{\mathrm{CT}} \arrow[dll, "a"', "(\text{aff.})"] \arrow[dd, "k\ (\text{ét.})"] & & \underline{\mathrm{PLT}} \arrow[ll, "g\ (\text{ét.})"'] \arrow[dl, "b"', "(\text{aff.})"] \arrow[dd, "\wr"', "e\ (\text{isom.})"] \\
\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G}) \arrow[d, "c\ell"', "(\text{aff.})"] & & & \underline{\mathrm{PL}} \arrow[lll, "f\ (\text{ét.})"'] \arrow[ddd, "d"', "(\text{aff.})"] & \\
\mathcal{C}\ell_{\mathrm{crit}} \arrow[dr, "q\ (\text{ét.})"] & & \underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{G}) \arrow[dl, "r\ (\text{aff.})"] & & \underline{\mathrm{PT}} \arrow[ll, "h\ (\text{ét.})"'] \arrow[ddl, "c\ (\text{aff.})"] \\
 & \mathrm{S} & & & \\
 & \mathrm{Of}(\mathrm{Dyn}(\mathrm{G})) \arrow[u, "p\ (\text{ét.})"'] \arrow[uul, "u\ (\text{ét.})"] \arrow[rr, dash, "\mathbf{t}\ (\text{proj.})"] & & \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) &
\end{tikzcd}$$

Figure 3.15.1

451 ***Théorème 3.16***. — (cf. figure 3.15.1).

(i) *Tous les morphismes du diagramme sont lisses, surjectifs, et de présentation finie.*

(ii) *Tous les morphismes du diagramme, à l'exception de* $\mathbf{t}$, *sont affines ; le morphisme* $\mathbf{t}$ *est projectif.*

(iii) *Tous les morphismes du diagramme sont soit étales finis, soit à fibres géométriques intègres : les morphismes* f, g, h, k, p, q *et* u *sont étales finis, les morphismes* a, b, c, d, r *et* $c\ell$ *sont à fibres géométriques intègres, le morphisme* e *est un isomorphisme.*

(iv) *Le carré* (a, b, f, g) *est cartésien.*

Démonstration. Il est d'abord clair que e est un isomorphisme, par 1.6 (ii). D'autre part, (iv) est évident.

Le morphisme a est lisse, affine, à fibres géométriques intègres : en effet, par changement de base $\underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G}) \to \mathrm{S}$, il suffit de vérifier que le morphisme $\underline{\mathrm{Tor}}(\mathrm{L}_0) \to \mathrm{S}$, où L_0 est le sous-groupe critique universel, possède ces propriétés ; or L_0 est réductif (par définition), et on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3. Le morphisme b possède donc les mêmes propriétés, en vertu de (iv).

Le morphisme d est également lisse, affine, à fibres géométriques intègres, en vertu de 1.9 ; il en est donc de même de $c = dbe^{-1}$. Le morphisme r possède ces mêmes propriétés (Exp. XXII, 5.8.3), de même que le morphisme $c\ell$ (3.10).

D'autre part, on a déjà prouvé que les morphismes p et q sont étales finis surjectifs (3.1 et 3.9). Si nous prouvons que f et k sont étales finis surjectifs, les mêmes propriétés seront vraies pour g (par (iv)) et pour h (car $h = kge^{-1}$) ; comme les propriétés énoncées de $\mathbf{t}$ ont été démontrées en 3.3 (ii), il ne nous reste donc plus qu'à prouver que f (resp. k) est étale fini surjectif ; faisons la démonstration pour k, celle pour f étant analogue.

Il nous suffit de prouver que si T est un tore maximal de G, le foncteur $\underline{\mathrm{C}}$ des sous- **452**
groupes critiques de G contenant T est représentable par un S-schéma étale fini à fibres non vides ; on peut supposer G déployé par rapport à T ; soit alors E l'ensemble des parties vectorielles de R (système de racines du déploiement) ; $\underline{\mathrm{C}}$ est représentable par E_{S} (3.9), ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.17. — *Tous les foncteurs du diagramme précédent sont représentables par des* S*-schémas* lisses *sur* S*, et ils sont tous affines sur* S*, à l'exception de* $\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})$.

Remarque 3.18. — (i) Le fait que le morphisme $f : \underline{\mathrm{PL}} \to \underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G})$ soit étale surjectif entraîne qu'un sous-groupe de G est critique si et seulement si il est, localement pour la topologie étale, sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G.

En revanche, il ne faut pas croire qu'en général l'application $f(\mathrm{S}) : \underline{\mathrm{PL}}(\mathrm{S}) \to \underline{\mathrm{Crit}}(\mathrm{G})(\mathrm{S})$ soit surjective : il peut très bien arriver qu'un sous-groupe critique C de G ne provienne pas *sur* S d'un sous-groupe parabolique de G ; par exemple, un tore maximal n'est pas toujours contenu dans un groupe de Borel (exemple : une forme non déployée de SL_2, cf. Exp. XX, n°5).

(ii) De même, il peut arriver que le morphisme $u : \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})) \to \mathcal{C}\ell_{\mathrm{crit}}$ ne soit pas un isomorphisme : deux sous-groupes paraboliques de types distincts peuvent avoir des sous-groupes de Levi de même type ; exemple : dans un groupe de type A_2, il y a deux types de sous-groupes paraboliques dont les sous-groupes de Levi sont de rang semi-simple 1 (correspondant aux deux sommets du diagramme), alors qu'il n'y a qu'un seul type de sous-groupes critiques de rang 1.

L'exemple analogue avec un groupe de type A_3 montre que, même sur un corps algébriquement clos, des sous-groupes paraboliques non isomorphes peuvent avoir des sous-groupes de Levi de même type. [13]

Terminons ce numéro par une application à la théorie des fibrés principaux.

Lemme 3.20. — [14] *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* F *un fibré principal* **453**
homogène sous G*,* G^{F} *la forme tordue de* G *correspondante. Identifions* $\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})$ *et*

[13] N.D.E. : i.e. les sous-groupes paraboliques $\mathrm{P} = \left\{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\}$ et $\mathrm{P}' = \left\{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\}$ de GL_4 ne sont pas isomorphes (car $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \not\simeq \mathrm{rad}^u(\mathrm{P}')$), mais leurs sous-groupes de Levi $\mathrm{L} = \left\{\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\}$ et $\mathrm{L}' = \left\{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\}$ sont conjugués par l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[14] N.D.E. : On a conservé la numérotation de l'original : il n'y a pas de n°3.19.

$\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}^{\mathrm{F}})$ (Exp. XXIV, 3.5). *Soit* P *un sous-groupe parabolique de* G. *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{F}/\mathrm{P} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{P})}(\mathrm{G}^{\mathrm{F}}).$$

En particulier, pour que le groupe structural de F *puisse se réduire à* P, *il faut et il suffit que* G^{F} *possède un sous-groupe parabolique de type* $\mathbf{t}(\mathrm{P})$.

Le démonstration se fait exactement comme en Exp. XXIV, 4.2.1.

3.21. Si S est un schéma, G un S-groupe réductif, et si $t \in \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))(\mathrm{S})$, on note $\mathrm{H}^1_t(\mathrm{S},\mathrm{G})$ la partie de $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G})$ formée des classes de fibrés principaux F sous G tels que le groupe associé G^{F} possède un sous-groupe parabolique de type t. Si G possède lui-même un sous-groupe parabolique P de type t, $\mathrm{H}^1_t(\mathrm{S},\mathrm{G})$ n'est autre que l'image de $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{P})$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G})$, image qui ne dépend donc pas du P choisi.

4. Position relative de deux sous-groupes paraboliques

4.1. Un résultat préliminaire

Lemme 4.1.1. — *Soient* k *un* corps, G *un* k*-groupe réductif,* P *et* P′ *deux sous-groupes paraboliques de* G.

(i) *Alors* $\mathrm{P}\cap\mathrm{P}'$ *est* lisse, *de même rang réductif que* G *et contient un tore maximal* T *de* G.

(ii) *L'ensemble* R′ *des racines de* $\mathrm{P}\cap\mathrm{P}'$ *par rapport à* T *est un sous-ensemble* clos *de l'ensemble* R *des racines de* G *par rapport à* T. [15]

Supposons d'abord k *algébriquement clos.* Soit B (resp. B′) un sous-groupe de Borel
454 de P (resp. P′). On sait qu'il existe $g \in \mathrm{G}(k)$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{B} = \mathrm{B}'$. D'autre part, si T_0 est un tore maximal de B et si on pose $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0)$, on sait (théorème de Bruhat, *Bible*, § 13.4, cor. 1 au th. 3) que $\mathrm{G}(k) = \mathrm{B}(k)\mathrm{N}(k)\mathrm{B}(k)$. On voit donc qu'il existe $b, b_1 \in \mathrm{B}(k)$ et $n \in \mathrm{N}(k)$ tels que $g = bnb_1$, donc $\mathrm{int}(b)\,\mathrm{int}(n)\mathrm{B} = \mathrm{B}'$. On a alors

$$\mathrm{P}\cap\mathrm{P}' \supset \mathrm{B}\cap\mathrm{B}' = \mathrm{int}(b)(\mathrm{B}\cap\mathrm{int}(n)\mathrm{B}') \supset \mathrm{int}(b)\mathrm{T}_0\,.$$

Supposons maintenant k quelconque. Appliquant le résultat précédent, on voit que $\mathrm{P}_{\overline{k}}\cap\mathrm{P}'_{\overline{k}}$ contient un tore maximal de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$; par Exp. XXII, 5.4.5, on en déduit que $(\mathrm{P}\cap\mathrm{P}')_{\overline{k}}$ est lisse « le long de la section unité », donc lisse puisque l'on est sur un corps (Exp. $\mathrm{VI_A}$ 1.3.1) donc que $\mathrm{P}\cap\mathrm{P}'$ est lisse. Par Exp. $\mathrm{VI_A}$ 2.3.1, la composante neutre $(\mathrm{P}\cap\mathrm{P}')^0$ de $\mathrm{P}\cap\mathrm{P}'$ est donc un sous-groupe ouvert de $\mathrm{P}\cap\mathrm{P}'$, lisse sur S. On peut alors lui appliquer Exp. XIV, 1.1, d'où (i).

Enfin, l'ensemble $\mathrm{R_P}$ (resp. $\mathrm{R_{P'}}$) des racines de P (resp. P′) par rapport à T est clos et l'on a $\mathrm{R}' = \mathrm{R_P}\cap\mathrm{R_{P'}}$, d'où (ii).

Remarque 4.1.2. — On peut prouver ([**BT65**], 4.5) que $\mathrm{P}\cap\mathrm{P}'$ est *connexe* ; [16] ceci sera utilisé en 4.5.1.

---

(15) N.D.E. : On a ajouté le point (ii), qui sera utile en 4.5.1.

(16) N.D.E. : Compte-tenu des détails ajoutés en 4.5.1, on a modifié ici l'original (qui indiquait « nous n'utiliserons pas ce fait »).

Remarque 4.1.3. — Le lemme précédent n'est pas vrai sur un schéma quelconque. En effet, soit par exemple G un groupe réductif sur un corps k algébriquement clos, et soit B un groupe de Borel de G. Prenons $\mathrm{G} = \mathrm{X}$ comme base et considérons les sous-groupes de Borel B_1 et B_2 de G_{X}, où $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_{\mathrm{X}}$ et $\mathrm{B}_2 = \mathrm{int}(g_0)\mathrm{B}_1$, g_0 étant la section canonique (diagonale) de G_{X}. Pour chaque $g \in \mathrm{X}(k)$, la fibre de $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2$ en g n'est autre que $\mathrm{B} \cap \mathrm{int}(g)\mathrm{B}$. Si on suppose $\mathrm{B} \neq \mathrm{G}$, la dimension de cette fibre varie avec g, donc $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2$ ne peut être lisse sur X.

4.2. Position transversale

Théorème 4.2.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *et* Q *deux sous-groupes paraboliques de* G. *Les conditions suivantes sur le couple* (P, Q) *sont équivalentes :*

(i) $\mathscr{L}ie(\mathrm{P}/\mathrm{S}) + \mathscr{L}ie(\mathrm{Q}/\mathrm{S}) = \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$. **455**

(ii) *Le morphisme canonique* $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Q} \to \mathrm{G}$ *est lisse.*

(ii′) *Le morphisme canonique* $\mathrm{P} \to \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ *est lisse.*

(iii) *Le morphisme canonique* $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Q} \to \mathrm{G}$ *est ouvert.*

(iii′) *Le morphisme canonique* $\mathrm{P} \to \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ *est ouvert.*

(iv) *Le morphisme canonique* $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Q} \to \mathrm{G}$ *est dominant fibre par fibre.*

(iv′) *Le morphisme canonique* $\mathrm{P} \to \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ *est dominant fibre par fibre.*

(v) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *« $\mathrm{P}_{\overline{s}} \cap \mathrm{Q}_{\overline{s}}$ est de dimension minimum », i.e. on a*

$$\dim(\mathrm{P}_{\overline{s}} \cap \mathrm{Q}_{\overline{s}}) = \dim \mathrm{P}_{\overline{s}} + \dim \mathrm{Q}_{\overline{s}} - \dim \mathrm{G}_{\overline{s}}.$$

(vi) *Il existe une famille couvrante pour la topologie étale* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$, *et pour chaque* i *un sous-groupe de Borel* B_i *de* $\mathrm{P}_{\mathrm{S}_i}$ *et un sous-groupe de Borel* B'_i *de* $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}_i}$, *tels que* $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}'_i$ *soit un tore maximal de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$.

(vii) *Il existe une famille couvrante pour la topologie étale* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$, *et pour chaque* i *un déploiement* $(\mathrm{T}_i, \ldots, \mathrm{R}_i)$ *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$ *et un système de racines positives* R_i^+ *de* R_i, *tels que* $\mathrm{P}_{\mathrm{S}_i}$ *(resp.* $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}_i}$*) soit le sous-groupe de type* (R) *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$ *contenant* T_i *et défini par une partie* $\mathrm{R}_i^{(1)}$ *(resp.* $\mathrm{R}_i^{(2)}$*) de* R *contenant* R_i^+ *(resp.* $-\mathrm{R}_i^+$*) (voir* Exp. XXII, 5.4.2 et 5.2.1 *pour les définitions).*

Démonstration. Nous allons démontrer le théorème suivant le diagramme logique

$$\begin{tikzcd}
\text{(i)} \arrow[d, Rightarrow] & \text{(vii)} \arrow[l, Rightarrow] & \text{(vi)} \arrow[l, Rightarrow] & \\
\text{(ii}'\text{)} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{(iii}'\text{)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(iv}'\text{)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(v)} \arrow[ul, Rightarrow] \\
\text{(ii)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(iii)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(iv)} \arrow[ur, Rightarrow] & .
\end{tikzcd}$$

On a trivialement (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (ii′) $\Rightarrow$ (iii′). Si (iii) est vérifié, l'image ensembliste **456** du morphisme $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{G}$ est un ouvert de G qui contient la section unité ; comme les fibres de G sont connexes, cette image est dense sur chaque fibre, ce qui prouve (iv). On a de même (iii′) ⇒ (iv′).

On a (ii′) ⇒ (ii), en vertu du diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Q} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{G} \arrow[d] \\ \mathrm{P} \arrow[r] & \mathrm{G}/\mathrm{Q}, \end{tikzcd}$$

D'autre part (iv) ou (iv′) entraîne (v), en vertu de la théorie de la dimension (cf. EGA IV_2, 5.6.6). On notera que l'on peut en effet supposer $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, k corps algébriquement clos, et que toute fibre non vide du morphisme (iv), resp. (iv′), en un point de $\mathrm{G}(k)$, resp. de $(\mathrm{G}/\mathrm{Q})(k)$, est isomorphe à $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ (comme le montre un calcul immédiat).

On a (vi) ⇒ (vii), par Exp. XXII, 5.5.1 (iv) et 5.9.2.

On a (vii) ⇒ (i), car pour vérifier que $\mathscr{L}ie(\mathrm{P}) + \mathscr{L}ie(\mathrm{Q}) = \mathscr{L}ie(\mathrm{G})$, on peut raisonner localement pour (fpqc), donc si (vii) est vérifié on peut supposer G déployé, $\mathrm{P} \supset \mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}$ et $\mathrm{Q} \supset \mathrm{B}_{-\mathrm{R}_+}$ (notations habituelles), auquel cas on a déjà

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{B}_{\mathrm{R}_+}) + \mathscr{L}ie(\mathrm{B}_{-\mathrm{R}_+}) = \mathscr{L}ie(\mathrm{G}).$$

Prouvons que (i) implique (ii′).

Soit $u : \mathrm{P} \to \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ le morphisme canonique ; pour prouver que u est lisse, on peut se contenter de le faire pour les fibres géométriques de u, car P et G/Q sont lisses sur S, et on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Comme le morphisme u est compatible avec l'action évidente de P (on a $u(pp') = pu(p')$) et comme P est connexe, il suffit (Exp. VI_{A} 1.3.1) de vérifier que u est lisse en $e \in \mathrm{G}(k)$,
457 i.e. (SGA 1, II 4.7) que l'application tangente à u en e est surjective ; mais celle-ci s'identifie naturellement à l'application canonique $\mathscr{L}ie(\mathrm{P}) \to \mathscr{L}ie(\mathrm{G})/\mathscr{L}ie(\mathrm{Q})$, qui est surjective si (i) est vérifié.

Il ne nous reste plus donc qu'à vérifier la dernière assertion, c'est-à-dire (v) ⇒ (vi). Supposons d'abord que S soit le spectre d'un *corps* algébriquement clos. Par 4.1.1, il existe un tore maximal T contenu dans P et Q ; soit R (resp. R_1, resp. R_2) l'ensemble des racines de G (resp. P, resp. Q) relativement à T.

On a :

$$\dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{T}) + \mathrm{Card}(\mathrm{R}), \qquad \dim(\mathrm{P}) = \dim(\mathrm{T}) + \mathrm{Card}(\mathrm{R}_1),$$
$$\dim(\mathrm{Q}) = \dim(\mathrm{T}) + \mathrm{Card}(\mathrm{R}_2), \qquad \dim(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}) = \dim(\mathrm{T}) + \mathrm{Card}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2),$$

par Exp. XXII, 5.4.4 et 5.4.5 par exemple. La condition de (v) est donc équivalente à

$$\mathrm{Card}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2) = \mathrm{Card}(\mathrm{R}_1) + \mathrm{Card}(\mathrm{R}_2) - \mathrm{Card}(\mathrm{R}).$$

c'est-à-dire $\mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2 = \mathrm{R}$. Pour démontrer (vi), il suffit, en vertu de Exp. XXII, 5.9.2 et 5.4.5, de prouver que $\mathrm{R}_1 \cap -\mathrm{R}_2$ contient un système de racines positives de R. On est donc ramené à prouver :

Lemme 4.2.2. — *Soit* R *un « système de racines »* (*par exemple l'ensemble des racines d'une donnée radicielle au sens de l'exposé* XXI). *Soient* R_1 *et* R_2 *deux parties closes de* R *contenant chacune un système de racines positives. Si* $\mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2 = \mathrm{R}$, *alors* $\mathrm{R}_1 \cap -\mathrm{R}_2$ *contient un système de racines positives.*

En effet, comme $\mathrm{R}_1 \cap -\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_3$ est évidemment clos, et en vertu de Exp. XXI, 3.3.6, il suffit de montrer que $\mathrm{R}_3 \cup -\mathrm{R}_3 = \mathrm{R}$. Or on sait que $\mathrm{R}_1 \cup -\mathrm{R}_1 = \mathrm{R} = \mathrm{R}_2 \cup -\mathrm{R}_2$, et on conclut grâce au fait élémentaire suivant : si A, A′, B, B′ sont quatre parties d'un ensemble E, et si $\mathrm{A} \cup \mathrm{A}' = \mathrm{B} \cup \mathrm{B}' = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A}' \cup \mathrm{B}' = \mathrm{E}$, on a $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') \cup (\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}) = \mathrm{E}$.

Ceci achève la démonstration de (v) ⇒ (vi) dans le cas où la base est le spectre **458**
d'un corps algébriquement clos. Revenons maintenant au cas général et supposons (v) vérifié. Soit $s \in \mathrm{S}$; en vertu de ce qui précède, on peut trouver un sous-groupe de Borel $\overline{\mathrm{B}}$ (resp. $\overline{\mathrm{B}}'$) de $\mathrm{P}_{\overline{s}}$ (resp. $\mathrm{Q}_{\overline{s}}$) tel que $\overline{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{B}}'$ soit un tore maximal de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$.

Comme le S-schéma $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{P}) \simeq \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{P}/\operatorname{rad}^u(\mathrm{P}))$ des sous-groupes de Borel de P est lisse, on peut, appliquant le « lemme de Hensel » (cf. Exp. XI 1.10) et raisonnant localement pour la topologie étale (i.e. remplaçant S par un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ étale et couvrant s, et s par un point de sa fibre dans S′) supposer qu'il existe un sous-groupe de Borel B de P se projetant sur $\overline{\mathrm{B}}$; on peut de même supposer qu'il existe un sous-groupe de Borel B′ de Q se projetant sur $\overline{\mathrm{B}}'$. Comme $\overline{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{B}}'$ est un tore maximal de G, il existe un ouvert U de S contenant s et tel que $\mathrm{B}_{\mathrm{U}} \cap \mathrm{B}'_{\mathrm{U}}$ soit un tore maximal de G_{U} (Exp. XXII, 5.9.4), ce qui démontre (vi). C.Q.F.D.

Définition 4.2.3. — Un couple (P, Q) vérifiant les conditions équivalentes (i) à (vii) du théorème 4.2.1 est dit *en position transversale*. On dit aussi que P est *en position transversale relativement à* Q, ou, par abus de langage, que P et Q sont en position transversale (mutuelle).

Vu (vi), cette définition coïncide dans le cas des sous-groupes de Borel avec celle de Exp. XXII, 5.9.1.

Corollaire 4.2.4. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *et* Q *deux sous-groupes paraboliques de* G.

(i) *Pour que* (P, Q) *soit en position transversale, il faut et il suffit que pour chaque point* s *de* S, *le couple* $(\mathrm{P}_{\overline{s}}, \mathrm{Q}_{\overline{s}})$ *soit en position transversale ; si* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *est un morphisme surjectif, et si* $(\mathrm{P}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{Q}_{\mathrm{S}'})$ *est en position transversale, alors* (P, Q) *est en position transversale.*

(ii) *Il existe un sous-schéma ouvert* U *de* S *vérifiant la propriété suivante : pour* **459**
qu'un morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *se factorise par* U, *il faut et il suffit que* $(\mathrm{P}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{Q}_{\mathrm{S}'})$ *soit en position transversale.*

(iii) *Considérons les sous-foncteurs*

$$\underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{G}) \subset \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})$$
$$\underline{\mathrm{Gen}}(/\mathrm{Q}) \subset \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})$$
$$\underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{P}/\mathrm{Q}) \subset \mathrm{G}$$

définis comme suit : pour $S' \to S$, $\underline{\mathrm{Gen}}(G)(S')$ *est l'ensemble des couples de sous-groupes paraboliques de* $G_{S'}$ *en position transversale,* $\underline{\mathrm{Gen}}(/Q)(S')$ *est l'ensemble des sous-groupes paraboliques de* $G_{S'}$ *en position transversale relativement à* $Q_{S'}$*,* $\underline{\mathrm{Gen}}(P/Q)(S')$ *est l'ensemble des* $g \in G(S')$ *tels que* $\mathrm{int}(g)P_{S'}$ *soit en position transversale relativement à* $Q_{S'}$*.*

Chacun de ces foncteurs est représentable par un sous-schéma ouvert universellement schématiquement dense sur S [(17)] (*cf.* Exp. XVIII § 1) *du* S*-schéma correspondant* $\underline{\mathrm{Par}}(G) \times_S \underline{\mathrm{Par}}(G)$*, resp.* $\underline{\mathrm{Par}}(G)$*, resp.* G.

Les assertions (i) résultent aussitôt de la description 4.2.1 (i) du terme « position transversale ». Pour démontrer (ii), on prend $U = S - \mathrm{Supp}(\mathrm{Coker}\, u)$ où u est le morphisme canonique $\mathscr{L}ie(P) \oplus \mathscr{L}ie(G) \to \mathscr{L}ie(G)$.

Comme on a des diagrammes cartésiens

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] & \underline{\mathrm{Par}}(G) \\ \underline{\mathrm{Gen}}(P/Q) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \underline{\mathrm{Gen}}(/Q) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Par}}(G) \arrow[r, "f'"] & \underline{\mathrm{Par}}(G) \times_S \underline{\mathrm{Par}}(G) \\ \underline{\mathrm{Gen}}(/Q) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \underline{\mathrm{Gen}}(G) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

(où $f(g) = \mathrm{int}(g)P$ et $f'(R) = (R, Q)$), il suffit de vérifier (iii) dans le cas de $\underline{\mathrm{Gen}}(G)$.
460 Soit alors P_0 le sous-groupe parabolique canonique de $G_{\underline{\mathrm{Par}}(G)}$; posons

$$X = \underline{\mathrm{Par}}(G) \underset{S}{\times} \underline{\mathrm{Par}}(G), \qquad P = \mathrm{pr}_1^*(P_0), \qquad Q = \mathrm{pr}_2^*(P_0);$$

appliquant aux sous-groupes paraboliques P et Q de G_X l'assertion (ii), on construit un sous-schéma ouvert U de X, qui comme on le vérifie aussitôt s'identifie bien à $\underline{\mathrm{Gen}}(G)$. Il reste à vérifier l'assertion de densité, ce qui peut se faire sur les fibres géométriques [(18)] ; on peut donc supposer $S = \mathrm{Spec}(k)$, k corps algébriquement clos ; comme $\underline{\mathrm{Par}}(G)$ est lisse, il suffit de vérifier que $\underline{\mathrm{Gen}}(G)$ coupe chaque composante irréductible de $\underline{\mathrm{Par}}(G) \times_S \underline{\mathrm{Par}}(G)$; autrement dit, par 3.3, il suffit de voir que si t, $t' \in \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))(S)$, il existe un couple (P, P') en position transversale, avec $\mathbf{t}(P) = t$, $\mathbf{t}(P') = t'$. Or cela est immédiat : on choisit un couple (B, B') de sous-groupes de Borel de G tel que $B \cap B'$ soit un tore maximal (on déploie G et on applique Exp. XXII, 5.9.2) puis on applique 3.8 pour construire $P \supset B$ et $P' \supset B'$, avec $\mathbf{t}(P) = t$, $\mathbf{t}(P') = t'$; P et P' sont des types voulus et sont en position transversale par 4.2.1 (vi).

Corollaire 4.2.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *et* Q *deux sous-groupes paraboliques de* G*, le couple* (P, Q) *étant en position transversale.*

(i) *Soient* P' *et* Q' *deux sous-groupes paraboliques de* G*, de même type que* P *et* Q *respectivement. Pour que le couple* (P', Q') *soit en position transversale, il faut et il suffit qu'il soit conjugué au couple* (P, Q)*, localement pour la topologie étale.* (*N. B. On verra au* § 5 *qu'on peut remplacer la topologie étale par la topologie de Zariski*).

(17) N.D.E. : On a remplacé « *relativement dense* » par « *universellement schématiquement dense sur* S », cf. EGA IV_3, Déf. 11.10.8.
(18) N.D.E. : cf. EGA IV_3, 11.10.10.

(ii) *Le morphisme canonique* $\mathrm{P}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Q}\to\mathrm{G}$ *induit un morphisme lisse et surjectif* $\mathrm{P}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Q}\to\underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{Q}/\mathrm{P})$*, et un isomorphisme*

$$(\mathrm{P}\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathrm{Q})/(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})\simeq\underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{Q}/\mathrm{P})$$

(*où* $\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}=\mathrm{R}$ *opère dans* $\mathrm{P}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Q}$ *par* $(p,q)r=(pr,r^{-1}q)$).

(iii) *Le morphisme canonique* $\mathrm{P}\to\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G})$ (*défini ensemblistement par* $p\mapsto\mathrm{int}(p)\mathrm{Q}$) *induit un morphisme lisse et surjectif* $\mathrm{P}\to\underline{\mathrm{Gen}}(/\mathrm{P})\bigcap\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G})$*, et un isomorphisme* **461**

$$\mathrm{P}/(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})\simeq\underline{\mathrm{Gen}}(/\mathrm{P})\bigcap\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G}).$$

(iv) *Le morphisme canonique* $\mathrm{G}\to\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{P})}(\mathrm{G})\times_{\mathrm{S}}\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G})$ (*défini ensemblistement par* $g\mapsto(\mathrm{int}(g)\mathrm{P},\mathrm{int}(g)\mathrm{Q})$) *induit un morphisme lisse et surjectif* $\mathrm{G}\to\underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{G})\bigcap\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{P})}(\mathrm{G})\times_{\mathrm{S}}\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G})$ *et un isomorphisme*

$$\mathrm{G}/(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})\simeq\underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{G})\bigcap(\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{P})}(\mathrm{G})\underset{\mathrm{S}}{\times}\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G})).$$

Démontrons (i). Il est clair que la condition est suffisante ; prouvons qu'elle est nécessaire. Soit donc $(\mathrm{P}',\mathrm{Q}')$ en position transversale. Comme P et P′ sont conjugués localement pour la topologie étale, on peut supposer $\mathrm{P}=\mathrm{P}'$, et il nous suffit de prouver que si Q et Q′ sont deux sous-groupes paraboliques de G, en position transversale relativement à P, et de même type, alors ils sont conjugués, localement pour la topologie étale, par une section de P. Utilisant 4.2.1 (vi), on peut supposer qu'il existe des sous-groupes de Borel B, B′, B_1, B'_1 de P, P, Q, Q′ respectivement, tels que $\mathrm{B}\cap\mathrm{B}_1=\mathrm{T}$ et $\mathrm{B}'\cap\mathrm{B}'_1=\mathrm{T}'$ soient des tores maximaux de G. Or les couples de Killing (B,T) et $(\mathrm{B}',\mathrm{T}')$ de P sont conjugués localement dans P pour la topologie étale (1.16), et on peut supposer $\mathrm{B}=\mathrm{B}'$, $\mathrm{T}=\mathrm{T}'$, auquel cas on a $\mathrm{B}_1=\mathrm{B}'_1$ par Exp. XXII, 5.9.2, donc $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}'$ par 3.8.

Les assertions (ii), (iii) et (iv) se démontrent de façon parallèle. Démontrons par exemple (ii) ; soit $g\in\underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{Q}/\mathrm{P})(\mathrm{S})$, i.e. soit $g\in\mathrm{G}(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{Q}$ soit en position transversale relativement à P. En vertu de la démonstration qui précède, Q et $\mathrm{int}(g)\mathrm{Q}$ sont conjugués localement pour la topologie étale, par une section de P. Raisonnant localement pour cette topologie, on peut supposer qu'il existe $p\in\mathrm{P}(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{Q}=\mathrm{int}(p)\mathrm{Q}$, donc $p^{-1}g\in\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})(\mathrm{S})=\mathrm{Q}(\mathrm{S})$; ce qui prouve l'existence d'un $q\in\mathrm{Q}(\mathrm{S})$ tel que $g=pq$. On a donc prouvé que le morphisme envisagé dans (ii) est couvrant pour la topologie étale. Comparant avec 4.2.1 (ii), on en déduit qu'il **462**
est lisse et surjectif. D'autre part, un raisonnement immédiat montre que la relation d'équivalence définie dans $\mathrm{P}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Q}$ par le morphisme $\mathrm{P}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Q}\to\mathrm{G}$ est la relation d'équivalence associée à l'action du groupe $\mathrm{R}=\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}$ (opérant par $(p,q)r=(pr,r^{-1}q)$), ce qui démontre la dernière assertion de (ii) (car un morphisme lisse et surjectif est un épimorphisme effectif, par exemple).

Remarque 4.2.6. — Si P et Q sont en position transversale, on notera souvent $\mathrm{P}\cdot\mathrm{Q}$ l'ouvert $\underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{Q}/\mathrm{P})$ de G, notation justifiée par 4.2.5 (ii).

Proposition 4.2.7. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *et* Q *deux sous-groupes paraboliques de* G*, le couple* (P, Q) *étant en position transversale.*

(i) *Le groupe* $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ *est lisse sur* S (*et en fait à fibres connexes par* 4.1.2) *; introduisons alors* $(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})^0$ (cf. Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10) *; c'est un sous-groupe de type* (RC) *de* G (Exp. XXII, 5.11.1)*, dont le radical unipotent* (*loc. cit.* 5.11.4) *se décompose en produit direct*

$$\mathrm{rad}^u((\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})^0) = (\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \cap \mathrm{Q}) \underset{\mathrm{S}}{\times} (\mathrm{P} \cap \mathrm{rad}^u(\mathrm{Q})).$$

(ii) *Si* S *est affine,* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{rad}^u(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})^0) = 0$*. Si* S *est semi-local,* $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ *contient un tore maximal de* G*.*

En effet, $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ est lisse en vertu de 4.2.1 (ii) et du diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Q} \arrow[r] & \mathrm{G} \\ \mathrm{P} \cap \mathrm{Q} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{S}. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

463 Pour vérifier les assertions annoncées sur $(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})^0$, on peut raisonner localement pour la topologie étale, donc en vertu de 4.2.1 (vii), supposer avoir choisi un déploiement $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ de G, tel que P et Q contiennent T et soient définis respectivement par des parties R_1 et R_2 de R, R_1 contenant un système de racines positives R_+, et R_2 contenant le système opposé R_-. Soit Δ l'ensemble des racines simples de R_+ ; notons

$$\mathrm{A}_1 = \Delta \cap -\mathrm{R}_1, \qquad \mathrm{A}_2 = \Delta \cap \mathrm{R}_2, \qquad \mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2.$$

Par 1.4 (v) et 1.12, on a

$$\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_+ \cup \big(\mathrm{R}_- \cap -\mathbb{N}\mathrm{A}_1\big), \qquad \mathrm{R}_2 = \big(\mathrm{R}_+ \cap \mathbb{N}\mathrm{A}_2\big) \cup \mathrm{R}_- \,,$$

$$\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_1,\, \alpha \notin -\mathrm{R}_1} \mathrm{U}_\alpha \,, \qquad \mathrm{rad}^u(\mathrm{Q}) = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_2,\, \alpha \notin -\mathrm{R}_2} \mathrm{U}_\alpha \,.$$

Par Exp. XXII, 5.6.7, on a donc

$$\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \cap \mathrm{Q} = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2,\, \alpha \notin -\mathrm{R}_1} \mathrm{U}_\alpha = \prod_{\alpha \in \mathrm{K}_2} \mathrm{U}_\alpha \,,$$

$$\mathrm{rad}^u(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{P} = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2,\, \alpha \notin -\mathrm{R}_2} \mathrm{U}_\alpha = \prod_{\alpha \in \mathrm{K}_1} \mathrm{U}_\alpha \,,$$

où K_2 est l'ensemble des racines positives, combinaisons linéaires des éléments de A_2, mais non combinaisons linéaires des éléments de A, et K_1 l'ensemble des racines négatives, combinaisons linéaires des éléments de A_1, mais non combinaisons linéaires des éléments de A. Il est clair que si $\alpha \in \mathrm{K}_2$, $\beta \in \mathrm{K}_1$, $\alpha + \beta$ n'est jamais une racine, ni nul, ce qui entraîne que les deux groupes ci-dessus commutent.

464 D'autre part, on sait par Exp. XXII, 5.4.5, que $\mathrm{H} = (\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})^0$ est défini par l'ensemble de racines $\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2$, soit

$$\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 = (\mathrm{R}_+ \cap \mathbb{N}\mathrm{A}_2) \cup (\mathrm{R}_- \cap -\mathbb{N}\mathrm{A}_1).$$

Comme $R_1 \cap R_2$ est *clos*, H est de type (RC) par définition (Exp. XXII 5.11.1), et par *loc. cit.* 5.11.3 et 5.11.4, on a

$$\mathrm{rad}^u(\mathrm{H}) = \prod_{\alpha \in \mathrm{K}} \mathrm{U}_\alpha ,$$

où K est l'ensemble des $\alpha \in R_1 \cap R_2$ tels que $\alpha \notin -(R_1 \cap R_2)$. Comme la partie symétrique de $R_1 \cap R_2$ est évidemment $R \cap \mathbb{Z}A$, on voit aussitôt que $K = K_1 \cup K_2$, ce qui termine la démonstration de (i).

La première assertion de (ii) résulte alors de (i) et de 2.10 ; démontrons la seconde. Comme $(P \cap Q)^0 / \mathrm{rad}^u((P \cap Q)^0)$ est réductif, il possède un tore maximal T si la base est semi-locale. L'image réciproque de T dans $(P \cap Q)^0$ est un sous-groupe N de type (R) de G à fibres résolubles, et on a $N^u = \mathrm{rad}^u((P \cap Q)^0)$ (Exp. XXII, 5.6.9). Le schéma des tores maximaux de N est un fibré principal homogène sous N^u (*loc. cit.* 5.6.13), donc possède une section, car $H^1(S, N^u) = 0$.

4.3. Sous-groupes paraboliques opposés

4.3.1. — Si G est un S-groupe réductif, on a défini en Exp. XXIV, 3.16.6, un « automorphisme extérieur » canonique d'ordre $\leqslant 2$ [(19)] de G, donc un automorphisme canonique s_G d'ordre $\leqslant 2$ de $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$, donc également un automorphisme d'ordre $\leqslant 2$ de $\mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))$, que nous noterons également s_G ou simplement s. Deux types de sous-groupes paraboliques t, $t' \in \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))(S)$ seront dits *opposés* lorsque $t = s_G(t')$.

Théorème 4.3.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G.

(a) *Si* L *est un sous-groupe de Levi de* P*, il existe un unique sous-groupe parabolique* **465**
P' *de* G *tel que* $P \cap P' = L$.

(b) *Pour tout sous-groupe parabolique* Q *de* G*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $s \in S$, $((P \cap Q)_{\overline{s}})^0$ (*qui est lisse par* 4.1.1) *est* réductif.

(ii) $P \cap Q$ *est un sous-groupe de Levi de* P *et de* Q.

(iii) P *et* Q *sont de types opposés, et le couple* (P, Q) *est en position transversale* (*cf.* 4.2.3).

(iv) P *et* Q *sont de types opposés et* $\mathrm{rad}^u(P) \cap Q = e$.

(v) $\mathrm{rad}^u(P) \cap Q = \mathrm{rad}^u(Q) \cap P = e$.

(vi) *Le morphisme canonique* $\mathrm{rad}^u(P) \times_S Q \to G$ *est une immersion ouverte.*

(vi′) *Le morphisme canonique* $\mathrm{rad}^u(P) \to G/Q$ *est une immersion ouverte.*

(vii) *Il existe une famille couvrante pour la topologie étale* $\{S_i \to S\}$*, et pour chaque* i *un déploiement* (T_i, M_i, R_i) *de* G_{S_i}*, et une partie* $R_i^{(1)}$ *de* R_i *telle que* P_{S_i} (*resp.* Q_{S_i}) *soit le sous-groupe de type* (R) *de* G_{S_i} *contenant* T_i *et défini par* $R_i^{(1)}$ (*resp. par* $R_i^{(2)} = -R_i^{(1)}$).

(19) N.D.E. : On a remplacé « d'ordre 2 » par « d'ordre $\leqslant 2$ » car s_G peut être trivial (par exemple si G est de type $A_1, B_n, C_n, \ldots$).

Démonstration. Démontrons d'abord la seconde partie du théorème ; on voit tout d'abord que (iii) $\Leftrightarrow$ (vii) en vertu de 4.2.1 (vii) et de la définition de s_{G} dans le cas déployé (Exp. XXII, 3.16.2 (iv)) ; on a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i) ; on a (vi′) $\Rightarrow$ (vi) par changement de base $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{Q}$.

466 Supposons maintenant (vii) vérifié, et prouvons toutes les autres conditions ; comme elles sont locales pour la topologie étale, on peut supposer $\mathrm{G} = (\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{R})$ déployé, P défini par la partie R' de R et Q par la partie $-\mathrm{R}'$. Si L est le sous-groupe de type (R) de G contenant T défini par $\mathrm{R}' \cap -\mathrm{R}'$, il est clair par Exp. XXII, 5.11.3 que L est un sous-groupe de Levi commun à P et Q. Mais $\mathrm{P} = \mathrm{L} \cdot \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$, $\mathrm{Q} = \mathrm{L} \cdot \mathrm{rad}^u(\mathrm{Q})$, et par Exp. XXII, 5.6.7, $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \cap \mathrm{Q} = \mathrm{Q} \cap \mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) = e$; donc $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q} = \mathrm{L}$, et on a prouvé (ii) et (v). Comme P et Q sont en position transversale, le morphisme canonique $\mathrm{P} \to \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ induit une immersion ouverte $\mathrm{P}/\mathrm{P} \cap \mathrm{Q} \to \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ (4.2.1) ; mais le morphisme canonique $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \to \mathrm{P}/\mathrm{P} \cap \mathrm{Q} = \mathrm{P}/\mathrm{L}$ est un isomorphisme, ce qui fait qu'on a prouvé (vi′). Compte tenu de ce qu'on a déjà vu, toutes les assertions sont donc des conséquences de (vii).

Il nous suffit maintenant de prouver que l'une quelconque des assertions (i), (iv), (v), (vi) implique (vii) ; comme on a déjà prouvé l'équivalence de (ii) et de (iii), il suffit de faire la démonstration sur les fibres géométriques et on peut supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Par 4.1.1, il existe un tore maximal T de G contenu dans $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$. Soit R (resp. R_1, resp. R_2) l'ensemble des racines de G (resp. P, resp. Q) relativement à T.

Soit R_1^a la partie asymétrique de R_1 (i.e. $\mathrm{R}_1^a = \{\alpha \in \mathrm{R}_1,\ -\alpha \notin \mathrm{R}_1\}$). Introduisons de même R_2^a. On doit prouver que $\mathrm{R}_1 = -\mathrm{R}_2$.

– La condition (i) entraîne que $\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2$ est symétrique ; soit $\alpha \in \mathrm{R}_1$; si $\alpha \notin \mathrm{R}_2$, alors $\alpha \in -\mathrm{R}_2$, et si $\alpha \in \mathrm{R}_2$, alors $\alpha \in \mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 = -(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2) \subset -\mathrm{R}_2$; on a donc $\mathrm{R}_1 \subset -\mathrm{R}_2$, donc par symétrie $\mathrm{R}_1 = -\mathrm{R}_2$.

– La condition (iv) entraîne $\mathrm{Card}(\mathrm{R}_1) = \mathrm{Card}(\mathrm{R}_2)$ et $\mathrm{R}_1^a \cap \mathrm{R}_2 = \varnothing$; la deuxième condition est équivalente à $\mathrm{R}_2 \subset -\mathrm{R}_1$; la première donne alors $\mathrm{R}_2 = -\mathrm{R}_1$.

– La condition (v) entraîne $\mathrm{R}_1^a \cap \mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_2^a \cap \mathrm{R}_1 = \varnothing$, donc $\mathrm{R}_2 \subset -\mathrm{R}_1$ et $\mathrm{R}_1 \subset -\mathrm{R}_2$, ce qui donne encore $\mathrm{R}_2 = -\mathrm{R}_1$.

467 – La condition (vi) entraîne $\mathscr{L}ie(\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})) \oplus \mathscr{L}ie(\mathrm{Q}) = \mathscr{L}ie(\mathrm{G})$, ce qui entraîne que R est la réunion disjointe de R_2 et R_1^a donc que $\mathrm{R}_2 = -\mathrm{R}_1$.

Ceci achève la démonstration de la seconde partie du théorème. Prouvons la première ; remarquons d'abord qu'en vertu de (vii) $\Rightarrow$ (ii), on a déjà démontré l'existence localement pour la topologie étale du groupe P' cherché ; il reste donc à en prouver l'unicité, et cela peut se faire également localement pour la topologie étale. On peut donc supposer G déployé relativement à un tore maximal T de L, et P (resp. P') défini par une partie R_1 (resp. R_1') du système R des racines.

Par hypothèse $\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_1'$ est symétrique ; raisonnant comme plus haut, on en tire $\mathrm{R}_1' = -\mathrm{R}_1$, ce qui prouve que P' est déterminé par P et L et achève la démonstration.

Définition 4.3.3. — Deux sous-groupes paraboliques de G vérifiant les conditions équivalentes (i) à (vii) de 4.3.2 sont dits *opposés*. Si P est un sous-groupe parabolique de G, et si L est un sous-groupe de Levi de P (resp. et si T est un tore maximal de P), on appelle sous-groupe parabolique *opposé à* P *relativement à* L (*resp.* T) l'unique sous-groupe parabolique Q de G tel que $P \cap Q = L$ (resp. tel que $P \cap Q$ soit l'unique sous-groupe de Levi de P contenant T, cf. 1.6, ou encore tel que $P \cap Q$ contienne T et que P et Q soient opposés).

En vertu de 4.3.2 (iii), on tire aussitôt de 4.2.4 et 4.2.5 des résultats parallèles ; donnons-en un échantillon.

Corollaire 4.3.4. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *et* Q *deux sous-groupes paraboliques de* G*.* **468**

(i) *Pour que* P *et* Q *soient opposés, il faut et il suffit que pour tout point* $s \in S$, $P_{\overline{s}}$ *et* $Q_{\overline{s}}$ *soient opposés. Si* $S' \to S$ *est un morphisme surjectif, et si* $P_{S'}$ *et* $Q_{S'}$ *sont opposés, alors* P *et* Q *sont opposés.*

(ii) *Le foncteur* $\underline{\mathrm{Opp}}(G)$*, tel que pour* $S' \to S$, $\underline{\mathrm{Opp}}(G)(S')$ *soit l'ensemble des couples de sous-groupes paraboliques opposés de* $G_{S'}$*, est représentable par un sous-schéma ouvert de* $\underline{\mathrm{Par}}(G)^2$*. Le foncteur* $\underline{\mathrm{Opp}}(/P)$ *tel que pour* $S' \to S$, $\underline{\mathrm{Opp}}(/P)(S')$ *soit l'ensemble des sous-groupes paraboliques de* $G_{S'}$ *opposés à* $P_{S'}$ *est représentable par un sous-schéma ouvert universellement schématiquement dense sur* S [20] *de* $\underline{\mathrm{Par}}_{s(\mathbf{t}(P))}(G)$*.*

(iii) *Supposons* P *et* Q *opposés ; soient* P' *et* Q' *deux sous-groupes paraboliques de* G*,* P' *étant de même type que* P*. Pour que* P' *et* Q' *soient opposés, il faut et il suffit que localement pour la topologie étale, le couple* (P', Q') *soit conjugué au couple* (P, Q)*.* (*N. B. On verra au* § 5 *qu'on peut remplacer la topologie étale par la topologie de Zariski*)*.*

Corollaire 4.3.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G*.*

(i) *Le morphisme* $\underline{\mathrm{Opp}}(/P) \to \underline{\mathrm{Lev}}(P)$ (cf. 1.9) *défini ensemblistement par* $Q \mapsto$ **469**
$P \cap Q$*, est un isomorphisme ;* $\underline{\mathrm{Opp}}(/P)$ *est un fibré principal homogène sous* $\mathrm{rad}^u(P)$ ($\mathrm{rad}^u(P)$ *opérant par automorphismes intérieurs*)*. Si* S *est affine, il existe un sous-groupe parabolique de* G *opposé à* P*.*

(ii) *Supposons* S semi-local *; soit* $\{s_i\}$ *l'ensemble de ses points fermés ; soit, pour chaque* i, Q_i *un sous-groupe parabolique de* G_{s_i}*, opposé à* P_{s_i}*. Il existe un sous-groupe parabolique* Q *de* G*, opposé à* P*, et tel que* $Q_{s_i} = Q_i$ *pour chaque* i*.*

(iii) *Le morphisme* $\underline{\mathrm{Opp}}(G) \to \underline{\mathrm{PL}}$ (cf. 3.15) *défini ensemblistement par* $(P, Q) \mapsto (P, P \cap Q)$ *est un isomorphisme.*

Tout cela résulte de la première partie du théorème et de 1.9, 2.3 et 2.8.

Remarque 4.3.6. — Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques opposés de G, et soit $P \cdot Q$ le sous-schéma ouvert de G, image faisceautique de $P \times_S Q$, introduit en

[20] N.D.E. : On a remplacé « *relativement dense* » par « *universellement schématiquement dense sur* S », cf. EGA IV_3, Déf. 11.10.8.

4.2.6. Le « morphisme produit » $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}\to\mathrm{G}$ induit des isomorphismes :

$$\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Q}\xrightarrow{\sim}\mathrm{P}\cdot\mathrm{Q}\xleftarrow{\sim}\mathrm{P}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{rad}^u(\mathrm{Q}).$$

Cela résulte en effet de 4.3.2 (ou de 4.2.5 (ii)) et du fait que $\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}$ est un sous-groupe de Levi de P et de Q, donc que $\mathrm{P}=\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})\cdot(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})$ et $\mathrm{Q}=\mathrm{rad}^u(\mathrm{Q})\cdot(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})$.

470 On a de même un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{G}/\mathrm{Q} \arrow[d, "\wr"] \\
\underline{\mathrm{Opp}}(/\mathrm{P}) \arrow[r, hook] & \underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G}),
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par $g\mapsto\mathrm{int}(g)\mathrm{Q}$.

4.4. Position osculatrice

Proposition 4.4.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *et* Q *deux sous-groupes paraboliques de* G. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}$ *est un sous-groupe parabolique de* G.

(ii) $\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}$ *contient localement pour la topologie étale un sous-groupe de Borel de* G.

(iii) $\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}$ *contient localement pour la topologie étale un tore maximal de* G *et, pour tout* $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ *et tout tore maximal* T *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *contenu dans* $\mathrm{P}_{\mathrm{S}'}$ *et* $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$, *l'opposé de* $\mathrm{P}_{\mathrm{S}'}$ *relativement à* T *est en position transversale relativement à* $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$.

(iv) *Il existe une famille couvrante pour la topologie étale* $\{\mathrm{S}_i\to\mathrm{S}\}$, *et pour chaque* i *un tore maximal* T_i *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$ *contenu dans* $\mathrm{P}_{\mathrm{S}_i}$ *et* $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}_i}$, *et tel que l'opposé de* $\mathrm{P}_{\mathrm{S}_i}$ *relativement à* T_i *soit en position transversale relativement à* $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}_i}$.

471 (v) *Il existe une famille couvrante pour la topologie étale* $\{\mathrm{S}_i\to\mathrm{S}\}$, *et pour chaque* i *un déploiement* $(\mathrm{T}_i,\mathrm{M}_i,\mathrm{R}_i)$ *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$ *tel que* $\mathrm{P}_{\mathrm{S}_i}$ (*resp.* $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}_i}$) *soit le sous-groupe de type* (R) *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$ *contenant* T_i *et défini par un ensemble de racines* $\mathrm{R}_i^{(1)}$ (*resp.* $\mathrm{R}_i^{(2)}$), $\mathrm{R}_i^{(1)}\cap\mathrm{R}_i^{(2)}$ *contenant un système de racines positives de* R.

De plus, si ces conditions sont vérifiées, on a $\mathbf{t}(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})=\mathbf{t}(\mathrm{P})\cap\mathbf{t}(\mathrm{Q})$ (*avec les notations de* 3.2).

On a (v) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (iv) trivialement. D'autre part, (ii) $\Rightarrow$ (i) par 1.18. On a (iv) $\Rightarrow$ (v) : en effet, on peut supposer G déployé, P (resp. Q) défini par l'ensemble de racines R_1 (resp. R_2) ; l'opposé de P est alors défini par $-\mathrm{R}_1$, et on est ramené au lemme 4.2.2. On prouve (i) $\Rightarrow$ (iii) par déploiement de la même manière. Enfin, la dernière assertion du théorème peut se démontrer localement pour la topologie étale ; on peut supposer que $\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}$ contient un sous-groupe de Borel B de G et on est ramené à 3.7.

Définition 4.4.2. — Deux sous-groupes paraboliques de G vérifiant les conditions (i) à (v) de 4.4.1 sont dits *en position osculatrice.*

Corollaire 4.4.3. — *Soient* P *et* Q *deux sous-groupes paraboliques en position osculatrice et soient* P′ *et* Q′ *deux sous-groupes paraboliques de* G, *de même type que* P *et* Q 472
respectivement ; pour que P′ *et* Q′ *soient en position osculatrice, il faut et il suffit que le couple* (P′, Q′) *soit conjugué au couple* (P, Q), *localement pour la topologie étale.*

Il suffit de prouver que si P et P′ sont en position osculatrice par rapport à Q, ils sont conjugués, localement pour (ét), par une section de Q. Or $P \cap Q$ et $P' \cap Q$ sont deux sous-groupes paraboliques de même type contenus dans Q, donc sont conjugués, localement pour (ét) par une section de Q, en vertu de la partie (ii) du lemme ci-dessous. On peut donc supposer $P \cap Q = P' \cap Q$; on a alors $P = P'$, par la partie (i) du même lemme :

Lemme 4.4.4. — *Soient* P, P′ *et* Q *trois sous-groupes paraboliques du* S*-groupe réductif* G.

(i) *Pour que* $P = P'$, *il faut et il suffit que* P *et* P′ *soient en position osculatrice et de même type.*

(ii) *Si* $P \subset Q$, $P' \subset Q$, *et si* $g \in G(S)$ *est tel que* $\mathrm{int}(g)P$ *et* P′ *soient en position osculatrice, alors* $g \in Q(S)$.

La partie (i) résulte trivialement de la dernière assertion de 4.4.1. Démontrons (ii) : Q et $\mathrm{int}(g)Q$ contiennent $P' \cap \mathrm{int}(g)P$, donc sont en position osculatrice ; ils coïncident par (i), donc $g \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)(S) = Q(S)$.

Remarquons que les assertions (iii) et (iv) du théorème donnent aussitôt : 473

Corollaire 4.4.5. — *Soient* P, P′ *et* Q *trois sous-groupes paraboliques du* S*-groupe réductif* G, *contenant le même tore maximal* T *de* G. *Supposons* P *et* P′ *opposés relativement à* T. *Pour que* Q *soit en position osculatrice relativement à* P, *il faut et il suffit qu'il soit en position transversale relativement à* P′. *Sous ces conditions* $P \cap Q$ *est aussi en position transversale relativement à* P′.

Corollaire 4.4.6. — *Soient* P *et* Q *deux sous-groupes paraboliques de* G *contenant le même tore maximal* T. *Pour que* P *et* Q *soient en position transversale, il faut et il suffit qu'il existe deux sous-groupes paraboliques* $P' \subset P$ *et* $Q' \subset Q$ *de* G, *opposés relativement à* T *; on peut même choisir* $\mathbf{t}(P') = \mathbf{t}(P) \cap s(\mathbf{t}(Q))$. [21]

La condition est évidemment suffisante (4.2.1 (i) et 4.3.2 (iii)). Montrons qu'elle est nécessaire ; soit P^- (resp. Q^-) l'opposé de P (resp. Q) relativement à T. Par 4.4.5, $P^- \cap Q$ est en position transversale relativement à P et Q^-, donc aussi relativement à $P \cap Q^-$ par une nouvelle application de 4.4.5, de plus

$$\mathbf{t}(P^- \cap Q) = \mathbf{t}(P^-) \cap \mathbf{t}(Q) = s(\mathbf{t}(P)) \cap s(\mathbf{t}(Q^-)) = s(\mathbf{t}(P) \cap \mathbf{t}(Q^-)) = s(\mathbf{t}(P \cap Q^-)),$$

donc $P^- \cap Q = P'$ et $P \cap Q^- = Q'$ sont opposés (4.3.2 (iii)) ; mais $P' \cap Q' \supset T$, donc 474
ils sont bien opposés relativement à T.

[21] N.D.E. : Rappelons que l'involution s a été définie en 4.3.1.

4.5. Position standard

Dans ce numéro, nous indiquons brièvement comment certains des résultats précédents se généralisent.

Proposition 4.5.1. — *Si* P_1 *et* P_2 *sont deux sous-groupes paraboliques du* S*-groupe réductif* G*, les conditions suivantes sont équivalentes :* [22]

(i) $P_1 \cap P_2$ *est lisse.*

(ii) $P_1 \cap P_2$ *est un sous-groupe de type* (R) (*ou de type* (RC)) *de* G.

(iii) $P_1 \cap P_2$ *contient localement pour la topologie* (fpqc) *un tore maximal de* G.

(iv) $P_1 \cap P_2$ *contient localement pour la topologie de Zariski un tore maximal de* G.

Lorsque S *est* semi-local*, ces conditions équivalent de plus à :*

(v) $P_1 \cap P_2$ *contient un tore maximal de* G.

Démonstration. [22] Évidemment, (iv) $\Rightarrow$ (iii) (et (v) $\Rightarrow$ (iv) lorsque S est semi-local), et (ii) $\Rightarrow$ (i) d'après Exp. XXII, Déf. 5.2.1. On va montrer (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii), puis que (iii) entraîne (i) et (iv) (et aussi (v) lorsque S est semi-local). Posons $K = P_1 \cap P_2$. D'après 4.1.1 et [**BT65**], 4.5, chaque fibre géométrique $K_{\overline{s}}$ contient un tore maximal $T_{\overline{s}}$ de $G_{\overline{s}}$ et est connexe, et l'ensemble des racines de $K_{\overline{s}}$ par rapport à $T_{\overline{s}}$ est un sous-ensemble clos de l'ensemble des racines de $G_{\overline{s}}$ par rapport à $T_{\overline{s}}$. Donc, si K est lisse sur S, alors c'est un sous-groupe de type (RC) (donc a fortiori de type (R)), cf. Exp. XXII 5.2.1 et 5.11.1. On a donc (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Si K est un sous-groupe de type (R), il contient localement pour la topologie étale un tore maximal de G, d'après Exp. XXII 2.2 et Exp. XIX 6.1. Donc (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Supposons (iii) vérifié et montrons que K est lisse. Par descente (fpqc), on peut supposer que $G = (G, T, M, R)$ est déployé, où T est un tore maximal contenu dans $P \cap Q$, et qu'il existe deux parties closes R_1 et R_2 de R telles que $P = H_{R_1}$ et $Q = H_{R_2}$. Comme K est à fibres connexes, il résulte de Exp. XXII 5.4.5 que K égale $H_{R_1 \cap R_2}$, donc est lisse sur S et de type (RC).

Soient R_1^s la partie symétrique de R_1 et $R_1^a = R_1 - R_1^s$; alors $\mathrm{rad}^u(P_1) = H_{R_1^a}$. Comme noté dans la preuve de [**BT65**], 4.4, $R' = (R_1^s \cap R_2) \cup R_1^a$ est une partie close de R telle que $R' \cup (-R') = R$; donc, d'après Exp. XXI 3.3.6, R' contient un système de racines positives de R. De plus, la partie symétrique de R' est $R_1^s \cap R_2^s$, qui est contenue dans $R_1 \cap R_2$.

On déduit de ce qui précède que $P' = K \cdot \mathrm{rad}^u(P)$ est un sous-groupe parabolique de G, et que K est un sous-groupe de type (RC) de P' tel que $\mathrm{rad}^u(K) = K \cap \mathrm{rad}^u(P')$. Donc, d'après 2.11, K possède un sous-groupe de Levi L. Il résulte alors de Exp. XIV 3.20 et 3.21 que K vérifie l'assertions (iv), ainsi que l'assertion (v) lorsque S est semi-local. Ceci prouve 4.5.1.

[22] N.D.E. : On a ajouté la démonstration de l'équivalence de ces conditions (ainsi que la condition (v), utilisée implicitement en 6.17 de l'original) ; en conséquence, on a transformé le n°4.5.1 en la proposition 4.5.1 plus la définition 4.5.1.1.

Définition 4.5.1.1. — [23] Lorsque les conditions précédentes sont réalisées, on dit que P et Q sont en *position mutuelle standard* ; c'est par exemple le cas si P et Q sont en position transversale, ou en position osculatrice, ou si la base est le spectre d'un corps. C'est une notion stable par extension de la base et locale pour la topologie (fpqc).

4.5.2. — Soient (P,Q) et $(\mathrm{P}',\mathrm{Q}')$ deux couples de sous-groupes paraboliques de G, 475
en position standard, et soit H le sous-foncteur de G défini comme suit : $\mathrm{H}(\mathrm{S}')$ est l'ensemble des $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ tels que $\mathrm{int}(g)\mathrm{P} = \mathrm{P}'$ et $\mathrm{int}(g)\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'$. C'est un sous-schéma fermé de G, lisse sur S et formellement principal homogène sous $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$. On en déduit que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) (P,Q) et $(\mathrm{P}',\mathrm{Q}')$ sont conjugués localement pour la topologie (fpqc),

(ii) (P,Q) et $(\mathrm{P}',\mathrm{Q}')$ sont conjugués localement pour la topologie étale.

(iii) (P,Q) et $(\mathrm{P}'\mathrm{Q}')$ sont conjugués sur chaque fibre géométrique.

On dit alors que les couples (P,Q) et $(\mathrm{P}',\mathrm{Q}')$ ont même *type de position mutuelle.* C'est une notion stable par changement de base et locale pour la topologie (fpqc).

4.5.3. — Soit $\underline{\mathrm{Stand}}(\mathrm{G})$ le sous-foncteur de $\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G})$ « formé des couples en position mutuelle standard ». Alors $\underline{\mathrm{Stand}}(\mathrm{G})$ est représentable, il existe un S-schéma étale et fini $\underline{\mathrm{TypeStand}}$ (« schéma des types de position mutuelle standard »), et un morphisme lisse, de présentation finie, à fibres géométriques irréductibles (et donc en particulier fidèlement plat)

$$\mathbf{t}_2 : \underline{\mathrm{Stand}}(\mathrm{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{TypeStand}}$$

qui est un quotient de $\underline{\mathrm{Stand}}(\mathrm{G})$ par l'action de G : deux sections de $\underline{\mathrm{Stand}}(\mathrm{G})$ (sur 476
un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ quelconque), ont même type de position mutuelle si et seulement si elles ont même image par $\mathbf{t}_2$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Stand}}(\mathrm{G}) \arrow[r, "\mathbf{t}_2"] \arrow[d, hook] & \underline{\mathrm{TypeStand}} \arrow[d, hook, "q"] \\
\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G}) \arrow[r, "\mathbf{t}\times\mathbf{t}"] & \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Of}((\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G})),
\end{tikzcd}$$

où le morphisme q peut se décrire par descente de la manière suivante : si (P,Q) est un couple de sous-groupes paraboliques de G, en position relative standard, et si T est un tore maximal de $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$, alors le morphisme $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \to \underline{\mathrm{Stand}}(\mathrm{G})$ défini ensemblistement par $n \mapsto (\mathrm{P}, \mathrm{int}(n)\mathrm{Q})$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{W}_{\mathrm{P}}(\mathrm{T})\backslash \mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{W}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{T}) \simeq q^{-1}(\mathbf{t}(\mathrm{P}), \mathbf{t}(\mathrm{Q})).$$

(Le premier membre désigne le faisceau des doubles classes ...). Ces assertions se démontrent sans difficulté (remarquer en particulier que $\mathbf{t}_2^{-1}(\mathbf{t}_2(\mathrm{P},\mathrm{Q})) \simeq \mathrm{G}/(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})$).

[23] N.D.E. : voir la N.D.E. (22). D'autre part, pour un exemple de sous-groupes paraboliques P,Q qui ne sont pas en position standard, voir 7.11 plus loin.

4.5.4. — Soit maintenant P un sous-groupe parabolique fixé de G, et soit $\underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G};\mathrm{P})$ le foncteur des sous-groupes paraboliques de G, en position standard relativement à P. Pour chaque $t \in \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))(\mathrm{S})$, posons de même $\underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G};\mathrm{P}) = \underline{\mathrm{Par}}(\mathrm{G};\mathrm{P}) \cap \underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G})$. On voit aussitôt que les deux foncteurs précédents s'obtiennent à partir de $\underline{\mathrm{Stand}}(\mathrm{G})$
477 par produits fibrés, donc sont représentables par des S-schémas lisses et de présentation finie sur S, à fibres non vides. On a un morphisme canonique $\mathbf{t}_{\mathrm{P}}$ induit par $\mathbf{t}_2$ (i.e. $\mathbf{t}_{\mathrm{P}}(\mathrm{Q}) = \mathbf{t}_2(\mathrm{P},\mathrm{Q})$)

$$\mathbf{t}_{\mathrm{P}} : \underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G};\mathrm{P}) \longrightarrow q^{-1}(\mathbf{t}(\mathrm{P}), t)$$

qui est lisse et de présentation finie, à fibres géométriques irréductibles. Le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G};\mathrm{P}) \to \underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G})$ est un *monomorphisme surjectif*, et peut donc être considéré comme une décomposition cellulaire de $\underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G})$ (indexée par l'ensemble des composantes connexes de $q^{-1}(\mathbf{t}(\mathrm{P}), t)$).

4.5.5. — Supposons maintenant que le type t soit de la forme $\mathbf{t}(\mathrm{Q})$, où Q est un sous-groupe parabolique de G, en position standard relativement à P, et que $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ contienne un tore maximal T.

Alors $\underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G}) \simeq \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ et $q^{-1}(\mathbf{t}(\mathrm{P}), t) \simeq \mathrm{W}_{\mathrm{P}}(\mathrm{T})\backslash\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{W}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{T})$, ce qui donne un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G};\mathrm{P}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathrm{W}_{\mathrm{P}}(\mathrm{T}) \backslash \mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{W}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{T}) \\
\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{G}/\mathrm{Q}
\end{tikzcd}$$

où i est un monomorphisme surjectif, et où f est lisse et de présentation finie, à fibres géométriques irréductibles. De plus, si Q_1 et Q_2 sont deux sections de $\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G};\mathrm{P})$
478 (sur un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$), c'est-à-dire deux sous-groupes paraboliques de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ conjugués (localement pour (fpqc)) à Q, et en position standard relativement à $\mathrm{P}_{\mathrm{S}'}$, alors Q_1 et Q_2 sont conjugués par une section de P (localement pour (fpqc)) si et seulement si $f(\mathrm{Q}_1) = f(\mathrm{Q}_2)$. Si S est le spectre d'un corps k algébriquement clos, on trouve ainsi la relation

$$\mathrm{P}(k)\backslash\mathrm{G}(k)/\mathrm{Q}(k) \simeq \mathrm{W}_{\mathrm{P}}(\mathrm{T})(k)\backslash\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})(k)/\mathrm{W}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{T})(k).$$

De manière générale, si on suppose que le schéma $\mathrm{W}_{\mathrm{P}}(\mathrm{T})\backslash\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{W}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{T})$ est constant et de la forme E_{S} (ce qui a lieu par exemple lorsque G est déployé relativement à T et S est connexe), les $f^{-1}(e)$, $e \in \mathrm{E}$, forment une décomposition de $\underline{\mathrm{Par}}_{\mathbf{t}(\mathrm{Q})}(\mathrm{G};\mathrm{P})$ en sous-schémas ouverts et fermés, qui sont des espaces homogènes sous P, lisses et de présentation finie sur S, à fibres géométriques irréductibles.

4.5.6. — Revenons à la situation générale de 4.5.4. Le schéma $q^{-1}(\mathbf{t}(\mathrm{P}), t)$ [(24)] possède toujours deux sections particulières, correspondant respectivement aux types « position transversale » et « position osculatrice ». L'image réciproque de la première

[(24)]N.D.E. : On a corrigé $t^{-1}(\mathbf{t}(\mathrm{P}), t)$ en $q^{-1}(\mathbf{t}(\mathrm{P}), t)$ et, plus bas, $\underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G})$ en $\underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G};\mathrm{P})$ (deux fois).

section est un ouvert relativement dense de $\underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G};\mathrm{P})$ comme on l'a vu plus haut, c'est la cellule de dimension relative maximum de la décomposition.

L'image réciproque de la seconde section est vraisemblablement un sous-schéma fermé de $\underline{\mathrm{Par}}_t(\mathrm{G};\mathrm{P})$; c'est la cellule de dimension relative minimum de la décomposition.

5. Théorème de conjugaison

479

Théorème 5.1. — *Soient* S *un schéma* semi-local, G *un* S*-groupe réductif,* P *et* P′ *deux sous-groupes paraboliques opposés* (4.3.3) *de* G. *Alors*

$$\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})\,\mathrm{P}'\cdot\mathrm{P}=\mathrm{G},$$

i.e. la réunion des ouverts $u\mathrm{P}'\cdot\mathrm{P}$ (4.3.6), *pour* u *parcourant* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})$ *est* G *tout entier.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

5.1.1. — Il suffit de faire la démonstration dans le cas où S est le spectre d'un corps k ; cela résulte aussitôt de 2.6.

5.1.2. — Soit $\mathrm{L}=\mathrm{P}\cap\mathrm{P}'$. *Supposons* que L possède un sous-groupe de Borel $\mathrm{B_L}$; soit T un tore maximal de $\mathrm{B_L}$ (Exp. XXII, 5.9.7) ; on vérifie aussitôt que $\mathrm{B}=\mathrm{B_L}\cdot\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})$ est un sous-groupe de Borel de P ; soit B′ le sous-groupe de Borel de G opposé à B relativement à T (i.e. tel que $\mathrm{B}\cap\mathrm{B}'=\mathrm{T}$). On a $\mathrm{B}'\subset\mathrm{P}'$ comme on le vérifie aussitôt en déployant G relativement à T. Prouvons que

$$\mathrm{B}^u(\mathrm{S})\,\mathrm{B}'\cdot\mathrm{B}\subset\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})\,\mathrm{P}'\cdot\mathrm{P}. \tag{x}$$

Comme on a $\mathrm{B}^u(\mathrm{S})\subset\mathrm{P}(\mathrm{S})=\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})\cdot\mathrm{L}(\mathrm{S})\subset\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})\mathrm{P}'(\mathrm{S})$, il suffit de prouver que $\mathrm{B}'\cdot\mathrm{B}\subset\mathrm{P}'\cdot\mathrm{P}$, ce qui est évident. Il résulte de (x) qu'il suffit de démontrer 5.1 480
pour le couple (B,B').

5.1.3. — Le théorème est vrai si k est algébriquement clos ; en effet, la condition de 5.1.2 est vérifiée, et on conclut par Exp. XXII, 5.7.10.

5.1.4. — Le théorème est vrai lorsque k est un corps infini. En effet, $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(k)$ est dense dans $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\overline{k})$ d'après 2.7, et le théorème est vrai pour $\overline{k}$.

5.1.5. — On est donc ramené au cas où k est un corps fini. Or $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{L})$ est un espace homogène *lisse* de L ; il résulte donc du théorème de Lang (Am. J. of Maths., 78, 1956 [(25)]) que L possède un groupe de Borel $\mathrm{B_L}$. Par 5.1.2, on peut donc supposer que $\mathrm{P}=\mathrm{B}$ et $\mathrm{P}'=\mathrm{B}'$ sont des groupes de Borel. On note $\mathrm{T}=\mathrm{B}\cap\mathrm{B}'$.

(25) N.D.E. : voir aussi [**DG70**], § III.5, 7.4.

5.1.6. — Soit K la clôture algébrique de k ; choisissons un épinglage du triplet $(\mathrm{G}_{\mathrm{K}}, \mathrm{B}_{\mathrm{K}}, \mathrm{T}_{\mathrm{K}})$, soit R_{+} (resp. Δ), l'ensemble des racines positives (resp. simples). En vertu de Exp. XXII, 5.7.2, il suffit de prouver que pour tout $\alpha \in \Delta$, on a

$$u_\alpha\, \mathrm{B}'^{u}(\mathrm{K}) \subset \mathrm{B}^{u}(k)\, \mathrm{B}'^{u}(\mathrm{K})\, \mathrm{B}(\mathrm{K}). \tag{1}$$

Soient α_i les différentes racines conjuguées de α sur k (ce sont des éléments de Δ, car B est « défini sur k »), et soit R' l'ensemble des racines combinaison linéaire des α_i.
481 Notons $\mathrm{R}'_{-} = \mathrm{R}_{-} \cap \mathrm{R}'$. Comme « R' est défini sur k », il existe un sous-tore Q de T, tel que Q_{K} soit le tore maximal du noyau commun des α_i.

Notons $\mathrm{Z} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$, $\mathrm{B}_{\mathrm{Z}} = \mathrm{B} \cap \mathrm{Z}$, $\mathrm{B}'_{\mathrm{Z}} = \mathrm{B}' \cap \mathrm{Z}$ (cf. Exp. XXII, 5.10.2). Montrons qu'il suffit de vérifier l'assertion cherchée dans Z, c'est-à-dire

$$u_\alpha \cdot \mathrm{B}'^{u}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{K}) \subset \mathrm{B}^{u}_{\mathrm{Z}}(k)\, \mathrm{B}'^{u}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{K})\, \mathrm{B}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{K}). \tag{2}$$

On a $(\mathrm{B}'^{u}_{\mathrm{Z}})_{\mathrm{K}} = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}'_{-}} \mathrm{U}_\alpha$; soit R'' le complémentaire de R' dans R, posons

$$\mathrm{V} = \prod_{\alpha \in \mathrm{R}'' \cap \mathrm{R}_{-}} \mathrm{U}_\alpha\,.$$

On a aussitôt $(\mathrm{B}'^{u})_{\mathrm{K}} = (\mathrm{B}'^{u}_{\mathrm{Z}})_{\mathrm{K}} \cdot \mathrm{V}$, et $(\mathrm{B}_{\mathrm{Z}})_{\mathrm{K}}$ normalise V (Exp. XXII, 5.6.7). On tire donc de (2) successivement

$$\begin{aligned} u_\alpha \cdot \mathrm{B}'^{u}(\mathrm{K}) = u_\alpha \cdot \mathrm{B}'^{u}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{K})\mathrm{V}(\mathrm{K}) &\subset \mathrm{B}^{u}_{\mathrm{Z}}(k)\, \mathrm{B}'^{u}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{K})\, \mathrm{B}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{K})\, \mathrm{V}(\mathrm{K}) \\ &\subset \mathrm{B}^{u}_{\mathrm{Z}}(k)\, \mathrm{B}'^{u}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{K})\, \mathrm{V}(\mathrm{K})\, \mathrm{B}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{K}) \end{aligned}$$

ce qui entraîne aussitôt (1).

Nous sommes donc ramenés au cas où $\mathrm{G} = \mathrm{Z}$, c'est-à-dire où le groupe de Galois de K sur k opère transitivement sur les racines simples.

482 ***5.1.7***. — L'assertion à démontrer est équivalente au fait que G/B est la réunion des translatés par $\mathrm{B}^{u}(k)$ de l'ouvert image de B'^{u}, assertion qui ne change pas si on remplace G par son groupe adjoint (ou d'ailleurs par n'importe quel groupe donnant le même groupe adjoint). On peut donc supposer G adjoint.

5.1.8. — Considérons alors le diagramme de Dynkin de G_{K}. Le groupe de Galois opère *transitivement* sur ce diagramme de Dynkin. Mais ce groupe de Galois n'a que des quotients cycliques et le diagramme de Dynkin n'a pas de cycles. Il en résulte aussitôt que ce diagramme est de type $n\,\mathrm{A}_1$, $n \geqslant 0$, ou $m\,\mathrm{A}_2$, $m \geqslant 0$. Utilisant la décomposition canonique de Exp. XXIV, 5.9, on peut écrire

$$\mathrm{G} = \prod_{\mathrm{D}/\mathrm{K}} \mathrm{G}_0,$$

où D est un K-schéma *fini* et G_0 est soit un tore, soit de type A_1, soit de type A_2.

Par Exp. XXIV, 5.12, B provient d'un sous-groupe de Borel B_0 de G_0, T d'un tore maximal T_0 de G_0 ; B' provient du sous-groupe de Borel B'_0 de G_0 opposé à B_0

relativement à T_0. On a

$$\mathrm{B}'^u(k) = \mathrm{B}_0^u(\mathrm{D}),$$
$$\mathrm{B}'^u \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{B}^u = \prod_{\mathrm{D}/k} \mathrm{B}'^u_0 \cdot \mathrm{T}_0 \cdot \mathrm{B}_0^u,$$

et il nous suffit de démontrer l'assertion cherchée sur le triplet $(\mathrm{G}_0, \mathrm{B}_0, \mathrm{T}_0)$.

5.1.9. — On peut donc supposer que G est de type $\varnothing$, A_1 ou A_2. Comme G possède un **483**
sous-groupe de Borel B, G est quasi-déployable relativement à B (Exp. XXIV, 3.9.1), donc déployable s'il est de type $\varnothing$ ou A_1. Comme le théorème a déjà été prouvé dans le cas déployé (Exp. XXII 5.7.10), il ne reste plus que le cas A_2 à traiter. Par Exp. XXIV, 3.11 il existe un morphisme $\mathrm{E} \to \mathrm{Spec}(k)$, fibré principal galoisien sous le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des automorphismes du diagramme de Dynkin de type A_2 tel que $\mathrm{G} = \mathrm{G}^{\mathrm{q\acute{E}p}}_{\mathrm{E}/\,\mathrm{Spec}(k)}(\mathrm{A}_2)$. Si E possède une section, G est déployable et le théorème est démontré. Sinon, on a nécessairement $\mathrm{E} = \mathrm{Spec}(k')$, où k' est une extension quadratique de k. Enfin, comme on l'a vu en 5.1.7, on peut supposer G simplement connexe (i.e. que G est une forme de $\mathrm{SL}_{3,\,k}$).

5.1.10. — On est donc dans la situation suivante : on a un corps fini k, une extension quadratique k' de k. Le groupe $\mathrm{SL}_{3,\,k'}$ des matrices 3×3 de déterminant 1 est épinglé comme suit : le tore maximal est le groupe des matrices diagonales, le sous-groupe de Borel est le groupe des matrices triangulaires supérieures, les « épingles » les éléments :

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad u_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit aussitôt que la grosse cellule Ω est définie par

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \Omega(\mathrm{S}) \iff a \text{ et } ae - bd \text{ inversibles},$$

et que **484**

$$\mathrm{B}^u(k) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \overline{x} & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, z \in k', \quad z + \overline{z} = x\overline{x} \right\}.$$

Il nous faut prouver l'inclusion (1) de 5.1.6, c'est-à-dire montrer que pour tous a, b, $c \in \mathrm{K}$ (clôture algébrique de k), il existe $x, z \in k'$ tels que $z + \overline{z} = x\overline{x}$ et

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & \overline{x} & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \subset \Omega(\mathrm{K}).$$

– Si $a \neq -1$, on prend $x = z = 0$.

– Si $a = -1$, les conditions à réaliser s'écrivent

$$\begin{cases} z + \overline{z} = x\overline{x}, \\ bz - \overline{x} \neq 0, \\ (b+c)\overline{z} + bx - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Soit q le nombre d'éléments de k ($q \geqslant 2$). On sait que pour tout $m \in k$, l'équation $z + \overline{z} = m$, avec $z \in k'$, a q solutions.

– Si $b = 0$, prenons $x = 1$; on doit résoudre $z + \overline{z} = 1$, $c\overline{z} \neq 1$, ce qui est toujours possible par la remarque précédente.

– Si $b \neq 0$, prenons $x = 0$; on doit résoudre

$$z + \overline{z} = 0, \qquad z \neq 0, \qquad (b+c)z \neq 1.$$

Cela est toujours possible si $q \geqslant 3$. Si $k = \mathbb{F}_2$, c'est possible si $b + c \neq 1$, on peut prendre $z = 1$.

485 – Il ne reste donc à traiter que le cas $k = \mathbb{F}_2$, $b + c = 1$, $b \neq 0$. Le système s'écrit alors

$$z + \overline{z} = x\overline{x}, \qquad bz \neq \overline{x}, \qquad \overline{z} + bx \neq 1.$$

Si $b = 1$ (resp. $b \notin k'$), faisons $x = 1$; alors les deux dernières conditions s'écrivent $z \neq b^{-1}, 1 - b$, et elles sont conséquences de $z + \overline{z} = 1$ qui a des solutions. Enfin, si $b \in k' - k$, on peut prendre $x = \overline{b}$, $z = b$. C.Q.F.D.

Corollaire 5.2. — *Soient* S *un schéma* semi-local*,* G *un* S*-groupe réductif,* P *et* P′ *deux sous-groupes paraboliques opposés de* G*. L'application canonique*

$$\mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S}) \cdot \mathrm{rad}^u(\mathrm{P}')(\mathrm{S}) \longrightarrow (\mathrm{G/P})(\mathrm{S})$$

est surjective (*en particulier, on a* $(\mathrm{G/P})(\mathrm{S}) = \mathrm{G}(\mathrm{S})/\mathrm{P}(\mathrm{S})$)*. Tout sous-groupe parabolique* Q *de* G*, de même type que* P*, est de la forme* $\mathrm{int}(uu')\mathrm{P}$ *avec* $u \in \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})$ *et* $u' \in \mathrm{rad}^u(\mathrm{P}')(\mathrm{S})$.

La seconde assertion est évidemment équivalente à la première, démontrons celle-ci. Soient s_i les points fermés de S, soit V l'ouvert de G/P image de P′ (et isomorphe à $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}')$, cf. 4.3.6) et soit $x \in \mathrm{G/P}(\mathrm{S})$. Par 5.1, il existe pour chaque i une section $u_i \in \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\kappa(s_i))$ telle que $u_i x_{s_i}$ soit une section de V_{s_i}. Si $u \in \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})$ relève les u_i (2.6), ux est une section de V, car une telle assertion se vérifie sur les fibres fermées. Mais $\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}')(\mathrm{S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}(\mathrm{S})$, est bijectif, et on conclut aussitôt.

486 ***Corollaire 5.3***. — *Soient* S *un schéma* semi-local*,* G *un* S*-groupe réductif,* P, P′ *et* Q *trois sous-groupes paraboliques de* G*. Il existe* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $\mathrm{int}(g)\mathrm{Q}$ *soit en position transversale relativement à* P *et* P′*.*

Avec les notations de 4.2.4 (ii), on doit vérifier que l'ouvert universellement schématiquement dense sur S [26] $\underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{Q/P}) \cap \underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{Q/P}')$ de G possède une section sur S. En fait, choisissons un sous-groupe parabolique de G opposé à Q (4.3.5 (i)), soit Q_1, et

[26] N.D.E. : On a remplacé « *relativement dense* » par « *universellement schématiquement dense sur* S », cf. EGA IV_3, Déf. 11.10.8.

posons $\mathrm{U} = \mathrm{rad}^u(\mathrm{Q})$, $\mathrm{U}' = \mathrm{rad}^u(\mathrm{Q}_1)$. Nous allons montrer qu'il existe $g \in \mathrm{U}(\mathrm{S})\mathrm{U}'(\mathrm{S})$ répondant à la question ; sous cette forme, il résulte de 4.2.4 (i) et 2.6 qu'il suffit de vérifier l'assertion sur les fibres aux points fermés de S, et on peut donc supposer que S est le spectre d'un *corps* k.

Si k est *algébriquement clos*, il existe $g \in \mathrm{G}(k)$ répondant à la question, or g s'écrit $uu'q$ avec $u \in \mathrm{U}(k)$, $u' \in \mathrm{U}'(k)$, $q \in \mathrm{Q}(k)$ (5.2), et l'on a $\mathrm{int}(uu')\mathrm{Q} = \mathrm{int}(g)\mathrm{Q}$.

Si k est *infini*, considérons l'ouvert V de $\mathrm{U} \times_k \mathrm{U}'$ défini par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U} \times_k \mathrm{U}' \arrow[rr] & & \mathrm{G} \\
\mathrm{V} \arrow[r] \arrow[u, hook] & \underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{Q}/\mathrm{P}) \cap \underline{\mathrm{Gen}}(\mathrm{Q}/\mathrm{P}'); \arrow[ur, hook]
\end{tikzcd}$$

comme $\mathrm{V}(\overline{k}) \neq \varnothing$ en vertu de ce qu'on vient de voir, V est dense dans $\mathrm{U} \times_k \mathrm{U}'$, donc possède une section par 2.7.

Si k est *fini*, P (resp. P′) possède un sous-groupe de Borel B (resp. B′), en **487**
vertu du théorème de Lang (cf. 5.1.5), les schémas $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{P}) \simeq \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{P}/\mathrm{rad}^u(\mathrm{P}))$ et $\underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Q}) \simeq \underline{\mathrm{Bor}}(\mathrm{Q}/\mathrm{rad}^u(\mathrm{Q}))$ étant lisses. Si B_1 est un sous-groupe de Borel opposé à B (4.3.5 (i)), il existe $a \in \mathrm{B}^u(k)$ et $a_1 \in \mathrm{B}_1^u(k)$ tels que $\mathrm{int}(aa_1)\mathrm{B} = \mathrm{B}'$ (5.2) ; alors $\mathrm{B}_0 = \mathrm{int}(aa_1)\mathrm{B}_1 = \mathrm{int}(a)\mathrm{B}_1$ est opposé à B′ et à B ; si Q_0 est l'unique sous-groupe parabolique de G contenant B_0 et de même type que Q (3.8), Q_0 est en position transversale relativement à P et P′ (4.2.1 (vi)). D'autre part par 5.2, Q_0 s'écrit $\mathrm{int}(uu')\mathrm{Q}$ avec $u' \in \mathrm{U}'(k)$, $u \in \mathrm{U}(k)$ ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 5.4. — *Soient* S *un schéma* semi-local*,* G *un* S*-groupe réductif,* P *et* Q *deux sous-groupes paraboliques de* G. *Il existe* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $\mathrm{int}(g)\mathrm{P}$ *soit en position osculatrice relativement à* Q*, i.e.* (4.4.2) *que* $\mathrm{int}(g)\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ *soit un sous-groupe parabolique de* G.

En effet, en vertu de 4.3.5 (i), il existe un sous-groupe parabolique P′ de G, opposé à P. En vertu de 5.3, il existe un sous-groupe parabolique P'_1 de G de même type que P′, en position transversale relativement à P et Q. Si T est un tore maximal de $\mathrm{P}'_1 \cap \mathrm{Q}$ (4.2.7 (ii)), et si P_1 est l'opposé de P'_1 relativement à T, alors P_1 et Q sont en position osculatrice, en vertu de 4.4.5. D'autre part, P et P_1 étant opposés à P'_1, il existe $g \in \mathrm{rad}^u(\mathrm{P}'_1)(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{P} = \mathrm{P}_1$ (4.3.5 (i)). C.Q.F.D.

Remarquons d'ailleurs que pour la même raison, il existe $u \in \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})$ tel que **488**
$\mathrm{int}(u)\mathrm{P}' = \mathrm{P}'_1$, donc que g s'écrit $\mathrm{int}(u)u'$ avec $u' \in \mathrm{rad}^u(\mathrm{P}')(\mathrm{S})$, ce qui donne $\mathrm{P}_1 = \mathrm{int}(uu'u^{-1})\mathrm{P} = \mathrm{int}(uu')\mathrm{P}$ et redémontre au passage 5.2.

Les énoncés 5.3 et 5.4 sont les résultats essentiels de ce paragraphe. Énonçons d'abord quelques conséquences de 5.4.

Corollaire 5.5. — *Soient* S *un schéma* semi-local*,* G *un* S*-groupe réductif.*

(i) *Si* P *et* Q *sont deux sous-groupes paraboliques de* G *et si* $\mathbf{t}(\mathrm{P}) \subset \mathbf{t}(\mathrm{Q})$ (cf. 3.3), *il existe* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *tel que* $\mathrm{int}(g)\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$.

(ii) *Soient*

$$\mathrm{P}_1 \supset \mathrm{P}_2 \supset \cdots\cdots \supset \mathrm{P}_n \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{P}'_1 \supset \mathrm{P}'_2 \supset \cdots\cdots \supset \mathrm{P}'_n$$

deux chaînes de sous-groupes paraboliques de G *telles que* $\mathbf{t}(\mathrm{P}_i) = \mathbf{t}(\mathrm{P}'_i)$. *Il existe* $g \in \mathrm{G(S)}$ *tel que* $\mathrm{int}(g)\mathrm{P}_i = \mathrm{P}'_i$ *pour chaque* i.

(iii) *Soient* P, Q, P′, Q′ *quatre sous-groupes paraboliques de* G *tels que* $\mathbf{t}(\mathrm{P}) = \mathbf{t}(\mathrm{P}')$ *et* $\mathbf{t}(\mathrm{Q}) = \mathbf{t}(\mathrm{Q}')$. *Si les couples* $(\mathrm{P}, \mathrm{P}')$ *et* $(\mathrm{Q}, \mathrm{Q}')$ *sont en position transversale*
489 (*resp. osculatrice*), *il existe* $g \in \mathrm{G(S)}$ *tel que* $\mathrm{int}(g)\mathrm{P} = \mathrm{P}'$ *et* $\mathrm{int}(g)\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'$.

(iv) *Soient* P *et* P′ *deux sous-groupes paraboliques de même type,* L (*resp.* L′) *un sous-groupe de Levi de* P (*resp.* P′). *Il existe* $g \in \mathrm{G(S)}$ *tel que* $\mathrm{int}(g)\mathrm{P} = \mathrm{P}'$ *et* $\mathrm{int}(g)\mathrm{L} = \mathrm{L}'$.

Démonstration : (i) résulte aussitôt de 5.4 ; (ii) se démontre par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant trivial ; on peut donc supposer $\mathrm{P}_i = \mathrm{P}'_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$; par 5.2 il existe $g \in \mathrm{G(S)}$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{P}_n = \mathrm{P}'_n$; mais alors P_n et $\mathrm{int}(g)\mathrm{P}_n$ sont contenus dans $\mathrm{P}_{n-1} = \mathrm{P}'_{n-1}$, donc $g \in \mathrm{P}_{n-1}(\mathrm{S})$ (4.4.4 (ii)) et $\mathrm{int}(g)\mathrm{P}_i = \mathrm{P}'_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

D'autre part, (iv) résulte aussitôt de 5.2 et de 1.8. Démontrons (iii) dans le cas « position transversale » ; l'assertion est une conséquence de (iv) lorsque les types de P et Q sont opposés (4.3.3 (iii)) ; dans le cas général, on peut en vertu de 4.2.7 (iii) et 4.4.6, trouver des sous-groupes paraboliques P_1, P'_1, Q_1, Q'_1 de P, P′, Q, Q′ respectivement, tels que P_1 et P'_1 soient opposés, ainsi que Q_1 et Q'_1, et que $\mathbf{t}(\mathrm{P}_1) = \mathbf{t}(\mathrm{P}'_1)$; il existe donc $g \in \mathrm{G(S)}$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}'_1$, $\mathrm{int}(g)\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}'_1$, et on peut supposer $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}'_1$ et $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}'_1$; mais alors P et P′ sont en position osculatrice et de même type, donc $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$ (4.4.4 (i)) ; pour la même raison $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'$.

Il nous reste à démontrer l'assertion (iii) dans le cas « position osculatrice ». En vertu du théorème de conjugaison (5.2), on peut supposer $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$; en vertu du même théorème, on peut trouver $g \in \mathrm{G(S)}$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'$; mais alors $g \in \mathrm{P(S)}$ par 4.4.4 (ii) et l'on a $\mathrm{int}(g)\mathrm{P} = \mathrm{P} = \mathrm{P}'$.

490 ***Définition 5.6***. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G. On dit que P est *minimal* si chaque fois que Q est un sous-groupe parabolique de G contenu dans P, on a Q = P.

On notera que ce n'est pas une notion stable par passage aux fibres en général.

Corollaire 5.7. — *Soient* S *un schéma* semi-local, G *un* S-*groupe réductif.*

(i) *Soient* t, $t' \in \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))(\mathrm{S})$. *S'il existe dans* G *un sous-groupe parabolique de type* t *et un sous-groupe parabolique de type* t', *il existe un sous-groupe parabolique de type* $t \cap t'$. *En particulier, il existe un plus petit élément* $t_{\min}$ *dans l'ensemble des* $\mathbf{t}(\mathrm{P})$, P *parcourant l'ensemble des sous-groupes paraboliques de* G.

(ii) *Tout sous-groupe parabolique de* G *contient un sous-groupe parabolique minimal. Pour qu'un sous-groupe parabolique de* G *soit minimal, il faut et il suffit qu'il soit de type* $t_{\min}$. *Deux sous-groupes paraboliques minimaux de* G *sont conjugués par un élément de* G(S).

Cela résulte aussitôt de 5.4 et 5.5 (i).

Remarque 5.8. — Un sous-groupe parabolique opposé à un sous-groupe parabolique minimal est également minimal ; ceci entraîne $s(t_{\min}) = t_{\min}$. 491

Corollaire 5.9. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G*. Le morphisme canonique*

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G/P} = \mathrm{X}$$

fait de G *un* X*-fibré* localement trivial (*au sens de Zariski*) *de groupe* $\mathrm{P_X}$*. Si* L *est un sous-groupe de Levi de* P*, le morphisme canonique* (cf. 3.12)

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G/L} = \mathrm{Y}$$

fait de G *un* Y*-fibré* localement trivial (*au sens de Zariski*) *de groupe* $\mathrm{L_Y}$*.*

Il suffit de prouver que si on a un morphisme $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$, où $\mathrm{S'}$ est local et un morphisme $\mathrm{S'} \to \mathrm{X}$ (resp. $\mathrm{S'} \to \mathrm{Y}$), il se remonte en un morphisme $\mathrm{S'} \to \mathrm{G}$. Autrement dit, on peut supposer S local et on doit montrer que l'application $\mathrm{G(S)} \to \mathrm{X(S)}$ (resp. $\mathrm{G(S)} \to \mathrm{Y(S)}$) est surjective.

La première assertion a été démontrée en 5.2 ; démontrons la seconde. Soit $y \in \mathrm{Y(S)}$, son image canonique dans X(S) provient d'un $g \in \mathrm{G(S)}$; la projection y' de g dans Y(S) a donc même projection que y dans X(S). Il existe donc un unique $u \in \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})$ tel que $y'u = y$, et la projection de gu dans Y(S) est bien y.

Corollaire 5.10. — *Soient* S *un schéma* semi-local*,* G *un* S*-groupe réductif* 492

(i) *Soient* P *un sous-groupe parabolique de* G*,* L *un sous-groupe de Levi de* P*. Les applications canoniques* (cf. 3.21) *induisent des bijections*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{L}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{P}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\mathbf{t}(\mathrm{P})}(\mathrm{S},\mathrm{G}).$$

(ii) *Soient* $t, t' \in \mathrm{Of}(\underline{\mathrm{Dyn}}(\mathrm{G}))(\mathrm{S})$*, on a* (cf. 3.21)

$$\mathrm{H}^1_t(\mathrm{S},\mathrm{G}) \bigcap \mathrm{H}^1_{t'}(\mathrm{S},\mathrm{G}) = \mathrm{H}^1_{t\cap t'}(\mathrm{S},\mathrm{G}).$$

(iii) *Si* P *et* Q *sont deux sous-groupes paraboliques de* G *en position osculatrice, le diagramme canonique suivant est* cartésien *et composé d'injections :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{P}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G}) \\
\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{Q}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Démontrons (i). L'application $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{L}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{P})$ est bijective par 2.3 ; l'application $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{P}) \to \mathrm{H}^1_{\mathbf{t}(\mathrm{P})}(\mathrm{S},\mathrm{G})$ est surjective (3.21), montrons qu'elle est injective, i.e. que l'application canonique $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{P}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G})$ est injective. Soit Q un fibré principal sous P, Q_1 le fibré principal sous G associé, $\mathrm{P'}$ et $\mathrm{G'}$ les formes tordues de P et G correspondantes. Il est clair que $\mathrm{G'}$ est un S-groupe réductif et que $\mathrm{P'}$ en est un sous-groupe parabolique. L'ensemble des éléments de $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{P})$ qui ont même image 493
que la classe de Q dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G})$ s'identifie naturellement au noyau de l'application canonique $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{P'}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{G'})$, et celui-ci, par la suite exacte de cohomologie, à

l'ensemble des orbites de $G'(S)$ dans $(G'/P')(S)$ (Pour ces raisonnements de cohomologie non abélienne, voir la thèse de Giraud [27]. Mais $G'(S)$ opère transitivement dans $(G'/P')(S)$ par 5.2.

Démontrons (ii) : soient Q un fibré principal homogène sous G et G^Q la forme tordue de G correspondante. Par définition (3.21), il nous faut prouver que G^Q possède un sous-groupe parabolique de type $t \cap t'$ si et seulement si il possède des sous-groupes paraboliques de type t et t', ce qui n'est autre que la conjonction de 3.8 et 5.7 (i). Enfin, (iii) résulte aussitôt de (i) et de (ii).

Énonçons maintenant une conséquence de 5.3.

Corollaire 5.11. — *Soient* S *un schéma* semi-local, G *un* S-*groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G. *Si* $P \neq G$, *il existe au moins* 3 *sous-groupes paraboliques de* G, *distincts, de même type que* P *; autrement dit* $P \neq G$ *entraîne* $(G(S) : P(S)) \geqslant 3$.

En effet, soit P' un sous-groupe parabolique de G opposé à P (4.3.5 (i)). Comme $P \neq G$, on a $\mathrm{rad}^u(P') \neq e$ (par 4.3.2 par exemple). Par 2.1, $\mathrm{rad}^u(P')(S) \neq e$; soit donc $u \in \mathrm{rad}^u(P')(S)$, $u \neq e$. Alors $\mathrm{int}(u)P \neq P$, et en vertu de 5.3, il existe un P_1, de même type que P, et opposé à P et $\mathrm{int}(u)P$; alors P_1, P et $\mathrm{int}(u)P$ sont trois sous-groupes paraboliques distincts de G, de même type que P.

6. Sous-groupes paraboliques et tores déployés

494 ***Proposition 6.1***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*groupe réductif,* $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(G/S)$, *et* Q *un sous-tore déployé de* G. *Écrivons* $Q = D_S(M)$ *et soit*

$$\mathfrak{g} = \coprod_{\alpha \in M} \mathfrak{g}^\alpha$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ *sous l'action de* Q. *Soit* M_1 *une partie de* M *telle que* $0 \in M_1$ *et que* $\alpha, \beta \in M_1 \Rightarrow \alpha + \beta \in M_1$.

(i) *Il existe un unique sous-groupe lisse* H_{M_1} *de* G, *à fibres connexes, contenant* $\underline{\mathrm{Centr}}_G(Q)$, *et dont l'algèbre de Lie soit* $\coprod_{\alpha \in M_1} \mathfrak{g}^\alpha$.

(ii) *On a les implications suivantes :*

$$\begin{aligned} M_1 = \{0\} \quad &\Longrightarrow \quad H_{M_1} = \underline{\mathrm{Centr}}_G(Q), \\ M_1 = -M_1 \quad &\Longrightarrow \quad H_{M_1} \textit{ est réductif}, \\ M_1 \cup (-M_1) = M \quad &\Longrightarrow \quad H_{M_1} \textit{ et } H_{-M_1} \textit{ sont des sous-groupes paraboliques de } G, \\ &\qquad\ \text{opposés}, \textit{ de sous-groupe de Levi commun } H_{M_1 \cap -M_1}. \end{aligned}$$

Pour démontrer (i) et (ii), qui sont locaux pour la topologie (fpqc), on peut sup-
495 poser que Q est contenu dans un tore maximal T de G ; on peut de plus déployer G relativement à T. L'assertion (i) résulte alors aussitôt de Exp. XXII, 5.3.5, 5.4.5 et 5.4.7 ; les assertions de (ii) résultent de Exp. XXII, 5.3.5, 5.10.1, 5.11.3 et de cet exposé, 1.4 et 4.3.2.

[27] N.D.E. : voir [**Gi71**], § III.3.

Corollaire 6.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* Q *un sous-tore déployé de* G*. Il existe un sous-groupe parabolique de* G *dont* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *soit un sous-groupe de Levi.*

En effet, écrivant $\mathrm{Q} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, on choisit une structure d'ordre total sur le groupe M, on appelle M_1 l'ensemble des éléments positifs de M ; le groupe $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_1}$ répond à la question.

Corollaire 6.3. — *Si le* S*-groupe réductif* G *possède un sous-tore déployé non central, il possède un sous-groupe parabolique propre* (*i.e* $\neq$ G)*.*

Par 5.9 et 5.10, on tire de 6.2 :

Corollaire 6.4. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* Q *un sous-tore* déployé *de* G*. Le morphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est une fibration localement triviale.*

Si S *est semi-local, l'application* $\mathrm{G}(\mathrm{S}) \to (\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))(\mathrm{S})$ *est surjective, et l'application* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{G})$ *est injective.*

6.5. Supposons S connexe. Si T est un S-tore et si T′ et T″ sont deux sous-tores déployés de T, leur produit $\mathrm{T}' \cdot \mathrm{T}''$ [28] est également un sous-tore déployé de T. En 496
effet il s'identifie au quotient de $\mathrm{T}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}''$ par $\mathrm{T}' \cap \mathrm{T}''$, quotient qui est déployé par Exp. IX, 2.11. Il en résulte que T possède un plus grand sous-tore déployé ; on le note $\mathrm{T}_{\text{dép}}$.

Lemme 6.6. — *Soient* S *un schéma connexe,* T *un* S*-tore isotrivial,* $\mathrm{T}_{\text{dép}}$ *son plus grand sous-tore déployé. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un homomorphisme* $\mathrm{T} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ *distinct de* e*.*

(ii) $\mathrm{T}_{\text{dép}} \neq e$*.*

Comme T est supposé isotrivial, il existe un groupe fini Γ, un revêtement principal galoisien connexe $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ de groupe Γ, et un isomorphisme $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'} \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{M})$; M est alors muni d'une structure de Γ-module, et on a un isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) = \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{M})$.

D'autre part, soit V le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M} \otimes \mathbb{Q}$ engendré par les éléments de la forme $g(m) - m$, $g \in \Gamma$, $m \in \mathrm{M}$. On vérifie aussitôt que $(\mathrm{T}_{\text{dép}})_{\mathrm{S}'}$ s'identifie à $\mathrm{D}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{M}/\mathrm{M} \cap \mathrm{V})$. L'assertion (i) est donc équivalente à $\mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{M}) \neq 0$, ou encore à $\mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{M} \otimes \mathbb{Q}) \neq 0$, tandis que l'assertion (ii) est équivalente à $\mathrm{M} \neq \mathrm{M} \cap \mathrm{V}$, ou encore à $\mathrm{M} \otimes \mathbb{Q} \neq \mathrm{V}$. Or on a $\mathrm{M} \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{M} \otimes \mathbb{Q}) \oplus \mathrm{V}$, comme on le vérifie aussitôt (considérer le projecteur $\mathrm{M} \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathrm{M} \otimes \mathbb{Q})$ qui envoie x sur la moyenne des transformés de x par Γ).

Lemme 6.7. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe para-* 497
bolique de G *tel que* $\mathrm{P} \neq \mathrm{G}$, L *un sous-groupe de Levi de* P, Q *son radical. Il existe un homomorphisme* $\mathrm{Q} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ *distinct de* e*.*

---

[28] N.D.E. : On a adopté la notation multiplicative, i.e. on a remplacé « leur somme $\mathrm{T}' + \mathrm{T}''$ » par « leur produit $\mathrm{T}' \cdot \mathrm{T}''$ ».

Considérons le radical unipotent U de P ; il est invariant sous int(P), donc sous int(Q). Considérons le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible dét($\mathscr{L}ie$(U)) « puissance extérieure maximum » du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre $\mathscr{L}ie(\mathrm{U})$. La représentation adjointe définit un homomorphisme de groupes

$$f: \quad \mathrm{Q} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{d\acute{e}t}(\mathscr{L}ie(\mathrm{U})) = \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}.$$

Si $\mathrm{P} \neq \mathrm{G}$, alors $\mathrm{U} \neq e$. Choisissons un $s \in \mathrm{S}$ tel que $\mathrm{U}_s \neq e$. Déployant $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ relativement à un tore maximal contenant $\mathrm{Q}_{\overline{s}}$, on voit aussitôt que $f_{\overline{s}} \neq e$.

Proposition 6.8. — *Soient* S *un schéma* semi-local connexe*,* G *un* S*-groupe réductif,* P *un sous-groupe parabolique de* G*,* L *un sous-groupe de Levi de* P*,* Q *son radical,* $\mathrm{Q}_{\mathrm{d\acute{e}p}}$ *le plus grand sous-tore déployé de* Q (*i.e. le plus grand sous-tore central déployé de* L)*. Alors*

$$\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{d\acute{e}p}}).$$

Posons $\mathrm{L}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{d\acute{e}p}})$; c'est un sous-groupe réductif de G contenant L ; de plus, $\mathrm{P}' = \mathrm{P} \cap \mathrm{L}'$ est un sous-groupe parabolique de L', de sous-groupe de Levi L
498 (1.20). Si $\mathrm{L}' \neq \mathrm{L}$, alors $\mathrm{L}' \not\subset \mathrm{P}$ (car L est un sous-groupe réductif maximal de P, cf. 1.7), donc $\mathrm{P}' \neq \mathrm{L}'$.

Soient G_1 le groupe dérivé de G, et $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}' \cap \mathrm{G}_1$. Par 1.19, P_1 est un sous-groupe parabolique du groupe semi-simple G_1, $\mathrm{L}_1 = \mathrm{L} \cap \mathrm{G}_1$ en est un sous-groupe de Levi, et

$$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{rad}(\mathrm{L}_1) = (\mathrm{rad}(\mathrm{L}) \cap \mathrm{G}_1)^0 = (\mathrm{Q} \cap \mathrm{G}_1)^0.$$

Comme L_1 possède un tore maximal T_1 (Exp. XIV, 3.20), et que celui-ci est isotrivial (Exp. XXIV, 4.1.5), Q_1 qui est un sous-tore de T_1 est également isotrivial (Exp. IX, 2.11) ; comme $\mathrm{P}_1 \neq \mathrm{G}_1$, on peut appliquer 6.7 et 6.6 et l'on a donc $(\mathrm{Q}_1)_{\mathrm{d\acute{e}p}} \neq e$, d'où $(\mathrm{Q}_{\mathrm{d\acute{e}p}} \cap \mathrm{G}_1)^0 \neq e$, donc $\mathrm{Q}_{\mathrm{d\acute{e}p}} \not\subset \mathrm{rad}(\mathrm{L}')$ (car $\mathrm{rad}(\mathrm{L}') \cap \mathrm{G}_1$ est fini), ce qui est contradictoire avec la définition de L'.

Corollaire 6.9. — *Soient* S *un schéma* semi-local connexe*,* G *un* S*-groupe réductif,* Q *un sous-tore critique de* G (*i.e. tel que* $\mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})) = \mathrm{Q}$)*. Pour que* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *soit sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de* G*, il faut et il suffit que* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{d\acute{e}p}})$*, c'est-à-dire que* $\mathscr{L}ie(\mathrm{G})^{\mathrm{Q}} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G})^{\mathrm{Q}_{\mathrm{d\acute{e}p}}}$.

Cela résulte de 6.2 et 6.8.

Corollaire 6.10. — *Soient* S *un schéma* semi-local connexe*,* G *un* S*-groupe réductif,* L *un sous-groupe de* G*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un sous-groupe parabolique de* G *dont* L *soit un sous-groupe de Levi.*

(ii) *Il existe un sous-tore déployé de* G *dont* L *soit le centralisateur.*

499 (iii) *Il existe un homomorphisme* $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *dont* L *soit le centralisateur.*

En effet, on a (i) ⇒ (ii) par 6.8, et (iii) ⇒ (i) par 6.1 ; reste à prouver (ii) ⇒ (iii). Supposons donc $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$, avec $\mathrm{Q} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$; écrivons $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ et

$$\mathfrak{g} = \coprod_{\alpha \in \mathrm{M}} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

et soit R l'ensemble des $\alpha \in \mathrm{M} - \{0\}$ tels que $\mathfrak{g}^{\alpha} \neq 0$.

Comme R est fini et ne contient pas 0, il existe un homomorphisme $u : \mathrm{M} \to \mathbb{Z}$ tel que $u(\alpha) \neq 0$ pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$. Par dualité, u donne un homomorphisme $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{Q}$, donc un homomorphisme $f : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$. On a $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(f) \supset \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$; ce sont deux sous-groupes lisses de G, à fibres connexes ; leurs algèbres de Lie coïncident (car égales toutes deux à $\mathfrak{g}^0$) ; ils coïncident donc, par un raisonnement habituel.

Corollaire 6.11. — *Soient* S *un schéma* semi-local connexe, G *un* S-*groupe réductif. Les applications*

$$\mathrm{L} \mapsto \mathrm{rad}(\mathrm{L})_{\text{dép}}, \qquad \mathrm{Q} \mapsto \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre, qui inversent les structures d'ordre naturelles, entre l'ensemble des sous-groupes L *de* G *qui sont des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques de* G *et l'ensemble des sous-tores déployés* Q *de* G *tels que* $\mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))_{\text{dép}} = \mathrm{Q}$.

Corollaire 6.12. — *Soient* S *un schéma* semi-local connexe, G *un* S-*groupe réductif.* 500
Considérons les assertions suivantes :

(i) *Il existe un sous-groupe parabolique de* G *distinct de* G.

(ii) G *possède un sous-tore déployé non central.*

(ii bis) G *possède un sous-tore déployé non central de dimension relative* 1.

(iii) *Il existe un homomorphisme de groupes* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *qui soit une immersion fermée.*

Alors on a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (ii bis) $\Rightarrow$ (iii).

La seule assertion nouvelle est (i) $\Rightarrow$ (iii). Soit donc P un sous-groupe parabolique de G, distinct de G. Alors $\mathrm{U} = \mathrm{rad}^u(\mathrm{P}) \neq e$. Considérons le dernier sous-groupe non trivial U_n de la suite de composition de U (2.1). On a un isomorphisme $\mathrm{U}_n \simeq \mathrm{W}(\mathscr{E}_n)$, où $\mathscr{E}_n$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre, donc libre [29]. Comme $\mathscr{E}_n \neq 0$, il existe un monomorphisme localement facteur direct $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to \mathscr{E}_n$, donc une immersion fermée $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} = \mathrm{W}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}) \hookrightarrow \mathrm{W}(\mathscr{E}_n) \simeq \mathrm{U}_n$, ce qui entraîne aussitôt (iii).

Remarque 6.12.1. — Lorsque S est le spectre d'un corps de caractéristique 0, il résulte du théorème de Jacobson-Morozov que (iii) $\Rightarrow$ (ii bis). Les quatre conditions précédentes sont alors équivalentes (« critère de Godement » cf. [**BT65**], 8.5). [(*)]

Définition 6.13. — Soient S un schéma semi-local connexe, G un S-groupe réductif. 501
On dit que G est *anisotrope* si G ne contient aucun sous-tore déployé non réduit à e.

Corollaire 6.14. — *Soit* S *un schéma* semi-local connexe. *Pour que le* S-*groupe réductif* G *soit anisotrope, il faut et il suffit qu'il ne possède aucun sous-groupe parabolique* $\mathrm{P} \neq \mathrm{G}$, *et que son radical soit anisotrope.*

Utilisant maintenant 6.6, Exp. XXIV, 4.1.5, et Exp. XXII, 6.2, on en déduit :

(*) Cela est plus généralement vrai lorsque S est le spectre d'un *corps parfait* (Tits). [30]

(29) N.D.E. : puisque S est supposé semi-local et connexe.
(30) N.D.E. : il s'agit du corollaire 3.7 de l'article [**BT71**].

Corollaire 6.15. — *Soient* S *un schéma* semi-local connexe*,* G *un* S*-groupe réductif* isotrivial (*par exemple* G *semi-simple, ou* S *normal* (Exp. X 5.16))*. Pour que* G *soit anisotrope, il faut et il suffit que* G *ne possède aucun sous-groupe parabolique* $P \neq G$*, et que* $\mathrm{Hom}_{\text{S-gr}}(G, \mathbb{G}_{m,S}) = e$*.*

Proposition 6.16. — *Soient* S *un schéma* semi-local connexe*,* G *un* S*-groupe réductif. Les sous-tores déployés maximaux de* G *sont les plus grands sous-tores centraux déployés des groupes de Levi des sous-groupes paraboliques minimaux de* G*. Deux tels tores sont conjugués par un élément de* G(S)*.*

Soit Q un sous-tore déployé maximal de G. [31] Alors, d'après 6.2, $L = \underline{\mathrm{Centr}}_G(Q)$ est sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique P de G, et comme $Q \subset \mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_G(Q))_{\text{dép}}$, la maximalité de Q entraîne $Q = \mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Centr}}_G(Q))_{\text{dép}}$. En vertu de 6.11, L est un élément minimal de l'ensemble des sous-groupes de Levi de sous-
502 groupes paraboliques de G, donc P est un sous-groupe parabolique minimal de G par 1.20. Il résulte alors de 5.7 et 5.5 (iv) que deux sous-tores tels que Q sont conjugués par une section de G(S). La conjugaison des Q et des couples (P, L) entraîne alors la première assertion de 6.16.

Corollaire 6.17. — *Soient* S *un schéma* semi-local connexe*,* P *et* P′ *deux sous-groupes paraboliques minimaux en position standard* (4.5.1.1)*. Alors* $P \cap P'$ *contient un sous-groupe de Levi commun à* P *et* P′*.*

En effet, $P \cap P'$ contient un tore maximal T de G, d'après 4.5.1 (v) ; soit L l'unique sous-groupe de Levi de P contenant T. On a

$$\mathrm{rad}(P) \cap T = \mathrm{rad}(P) \cap L = \mathrm{rad}(L)$$

par 1.21, donc $\mathrm{rad}(P) \cap T$ contient $\mathrm{rad}(L)_{\text{dép}}$ qui est un sous-tore déployé maximal de G, donc est nécessairement égal à $T_{\text{dép}}$. On a donc $L = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T_{\text{dép}})$, et par symétrie L est aussi un sous-groupe de Levi de P′.

Remarque 6.18. — Il résulte de 1.21 que le sous-groupe parabolique P de G est minimal si et seulement si rad(P) contient un sous-tore déployé maximal de G ; alors, d'après 6.17, si T est un tore maximal P, $T_{\text{dép}}$ est un tore maximal de G et de rad(P) et $\underline{\mathrm{Centr}}_G(T_{\text{dép}})$ est un sous-groupe de Levi de P. De plus, tout sous-groupe de Levi de P s'obtient de cette manière.

7. Donnée radicielle relative
503

Dans ce paragraphe, S désignera un schéma *semi-local connexe non vide*, G un S-groupe réductif, Q un sous-tore déployé maximal de G, et L le centralisateur de Q dans G, i.e. $L = \underline{\mathrm{Centr}}_G(Q)$.

[31] N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

7.1. Comme Q est le plus grand sous-tore central trivial de L, toute section de G(S) qui normalise L normalise aussi Q. On a donc (cf. 7.1.1)

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L})(\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})(\mathrm{S}).$$

D'autre part, on a vu en 6.4 que l'application $\mathrm{G}(\mathrm{S}) \to (\mathrm{G}/\mathrm{L})(\mathrm{S})$ est surjective. Il s'ensuit qu'on a une identification canonique

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})(\mathrm{S}) = (\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})/\,\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))(\mathrm{S}) \simeq \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L})(\mathrm{S})/\mathrm{L}(\mathrm{S}).$$

On désignera par M le groupe $\mathrm{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathrm{Q}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$, de telle sorte qu'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Q} \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$. On notera W le groupe d'automorphismes de M défini par $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})(\mathrm{S})$. On a donc des isomorphismes

$$\mathrm{W} \simeq \mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})(\mathrm{S}) \simeq \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L})(\mathrm{S})/\mathrm{L}(\mathrm{S}).$$

7.1.1. — On n'a pas en général $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$. Prenons par exemple pour S le spectre d'un corps k, possédant une extension quadratique k', pour G le groupe unitaire $\mathrm{G}^{\mathrm{q\acute{E}p}}_{k'/k}(\mathrm{A}_2)$ (cf. Exp. XXIV, 3.11.2).

Comme les sous-groupes paraboliques minimaux de G sont ses groupes de Borel, leurs sous-groupes de Levi sont des tores maximaux, et on a $(\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L})/\mathrm{L})(\overline{k}) = \mathfrak{S}_3$. **504**

D'autre part, comme G n'est pas déployé, les tores déployés maximaux de G sont de dimension $\leqslant 1$, donc isomorphes à $\mathbb{G}_{m,\,k}$. Comme $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})/\mathrm{L}$ opère fidèlement dans Q, on a $(\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})/\mathrm{Q})(\overline{k}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

7.2. Si P est un sous-groupe parabolique de G de groupe de Levi L (il en existe par 6.2), P est nécessairement minimal (cf. 6.18). En vertu de la conjugaison des sous-groupes paraboliques minimaux de G (5.7), de celle des sous-groupes de Levi d'un sous-groupe parabolique (1.8), et des égalités $\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L}) \cap \mathrm{P} = \mathrm{L}$ (1.6), on obtient : *l'ensemble des sous-groupes paraboliques* (*minimaux*) *de* G *de groupe de Levi* L *est principal homogène sous le groupe* W.

7.3. L'algèbre de Lie de G se décompose sous l'action de Q en

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{G}) = \mathscr{L}ie(\mathrm{L}) \oplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathscr{L}ie(\mathrm{G})^{\alpha},$$

où R est l'ensemble des caractères non nuls de Q tels que $\mathscr{L}ie(\mathrm{G})^{\alpha} \neq 0$ (*racines* de G relativement à Q).

Désignons par M^* le groupe $\mathrm{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{Q})$, qui est en dualité avec M et sur lequel W opère de manière naturelle par transport de structure.

Théorème 7.4. — *Avec les notations de* 7.3, *il existe une unique application* $\alpha \mapsto \alpha^*$ *de* R *dans* M^* *qui définisse dans* $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*)$ *une donnée radicielle* (Exp. XXI, 1.1) *dont le groupe de Weyl soit* W. **505**

De plus, les sous-groupes paraboliques P *de* G *de groupe de Levi* L *et les systèmes de racines positives* R_+ *de* R *se correspondent bijectivement par la relation*

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{P}) = \mathscr{L}ie(\mathrm{L}) \oplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}_+} \mathscr{L}ie(\mathrm{G})^{\alpha}.$$

7.4.1. — Supposons d'abord prouvée l'existence de l'application $\alpha \mapsto \alpha^*$ demandée. En vertu de Exp. XXI, 3.4.10, s_α est l'unique élément de W tel que pour tout $m \in \mathrm{M}$, $s_\alpha(m) - m$ soit un multiple rationnel de α, ce qui montre que s_α est déterminé par α ; comme on a alors [(32)] $\alpha^*(m)\,\alpha = m - s_\alpha(m)$, on voit que α^* est déterminé par α, ce qui prouve l'unicité de l'application $\alpha \mapsto \alpha^*$.

7.4.2. — Soit $\alpha \in \mathrm{R}$ et soit L_α (resp. H_α, resp. $\mathrm{H}_{-\alpha}$) l'unique sous-groupe lisse et à fibres connexes de G contenant L et tel que (cf. 6.1 (i))

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{L}_\alpha) = \mathscr{L}ie(\mathrm{L}) \oplus \coprod_{\gamma\in\mathbb{Z}\alpha\cap\mathrm{R}} \mathscr{L}ie(\mathrm{G})^\gamma$$

resp.

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{H}_\alpha) = \mathscr{L}ie(\mathrm{L}) \oplus \coprod_{\gamma\in\mathbb{N}\alpha\cap\mathrm{R}} \mathscr{L}ie(\mathrm{G})^\gamma,$$

resp.

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{H}_{-\alpha}) = \mathscr{L}ie(\mathrm{L}) \oplus \coprod_{\gamma\in-\mathbb{N}\alpha\cap\mathrm{R}} \mathscr{L}ie(\mathrm{G})^\gamma;$$

506 L_α est un sous-groupe réductif de G, H_α et $\mathrm{H}_{-\alpha}$ en sont des sous-groupes paraboliques de sous-groupe de Levi L, et H_α et $\mathrm{H}_{-\alpha}$ sont opposés relativement à L (cf. 6.1 (ii)).

Par 7.2, il existe donc $s_\alpha \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{L}_\alpha}(\mathrm{Q})(\mathrm{S})/\mathrm{L}(\mathrm{S}) \subset \mathrm{W}$ tel que $s_\alpha(\mathrm{H}_\alpha) = \mathrm{H}_{-\alpha}$. On a $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ (car α (resp. $-\alpha$) est le diviseur commun des éléments de R intervenant dans H_α (resp. $\mathrm{H}_{-\alpha}$)), et on a $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ (car $s_\alpha^2(\mathrm{H}_\alpha)$ et H_α sont tous deux opposés à $\mathrm{H}_{-\alpha}$ relativement à L). On a donc construit un $s_\alpha \in \mathrm{W}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(x) $$s_\alpha(\alpha) = -\alpha, \qquad s_\alpha^2 = \mathrm{id}$$

(xx) s_α peut se représenter par un élément de $\mathrm{L}_\alpha(\mathrm{S})$.

Remarquons d'ailleurs que s_α est construit de manière canonique à partir de α, et en particulier que

(xxx) pour tout $w \in \mathrm{W}$, on a $w s_\alpha w^{-1} = s_{w(\alpha)}$.

7.4.3. — Nous nous proposons maintenant de prouver l'assertion :

(xxxx) pour tout $m \in \mathrm{M}$, $s_\alpha(m) - m \in \mathbb{Z}\alpha$.

Comme S est connexe, cette assertion est locale pour la topologie (fpqc). On peut donc supposer que $\mathrm{L}_\alpha = \mathrm{G}_1$ est déployable relativement à un tore maximal T_1 de L. Soit donc $(\mathrm{G}_1, \mathrm{T}_1, \mathrm{M}_1, \mathrm{R}_1)$ un tel déploiement. Le monomorphisme $\mathrm{Q} \to \mathrm{T}_1$ identifie M à un quotient de M_1, soit $p : \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}$ l'application canonique.

507 L'image de R_1 par p est formée éventuellement de zéro et des racines de G_1 par rapport à Q (donc des éléments de R multiples entiers de α) ; on a donc $p(\mathrm{R}_1) \subset \mathbb{Z}\alpha$. En vertu de (xx), il existe un élément de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{L})(\mathrm{S})$ qui induit s_α sur Q. En vertu de Exp. XXII, 5.10.10, il existe donc une section $w \in (\mathrm{W}_1)_\mathrm{S}(\mathrm{S})$ qui induit s_α sur Q (on dénote par W_1 le groupe de Weyl de la donnée radicielle $(\mathrm{M}_1, \mathrm{R}_1, \ldots)$). Quitte à

[(32)] N.D.E. : On a corrigé $\alpha^*(m)$ en $\alpha^*(m)\,\alpha$.

restreindre S, on peut donc supposer qu'il existe $w \in \mathrm{W}_1$ induisant s_α sur Q, donc vérifiant $p(w(m_1)) = s_\alpha(p(m_1))$ pour tout $m_1 \in \mathrm{M}_1$. Mais, par définition de W_1, w est un produit de symétries par rapport à des éléments de R_1, donc $w(m_1) - m_1$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de R_1. Il s'ensuit que $s_\alpha(p(m_1)) - p(m_1)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de $p(\mathrm{R}_1) \subset \mathbb{Z}\alpha$, donc un multiple entier de α, ce qu'il fallait démontrer.

7.4.4. — On peut donc définir un élément $\alpha^* \in \mathrm{M}^*$ par [33]

$$\alpha^*(m)\,\alpha = m - s_\alpha(m).$$

En vertu de (x), on a $(\alpha^*, \alpha) = 2$; il résulte d'autre part de (xxx) que pour tout couple $(\alpha, \alpha') \in \mathrm{R}\times\mathrm{R}$, on a $s_\alpha(\alpha') \in \mathrm{R}$ et $s_\alpha(\alpha'^*) = s_\alpha(\alpha')^*$, ce qui prouve (cf. Exp. XXI, 1.1) que l'application $\alpha \mapsto \alpha^*$ construite définit bien une donnée radicielle dans $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*)$.

7.4.5. — Soit W' le groupe de Weyl de cette donnée radicielle (groupe de transformations de M engendré par les s_α) ; on a $\mathrm{W}' \subset \mathrm{W}$.

Soit d'autre part $\geqslant$ une relation d'ordre total sur le groupe abélien libre M ; posons **508**
$\mathrm{R}_+ = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \alpha \geqslant 0\}$. On sait que R_+ est un système de racines positives de R. Soit $w \in \mathrm{W}$, représenté par un $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L})(\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})(\mathrm{S})$. Posons $\mathrm{P} = \mathrm{H}_{\mathrm{R}_+}$ (notation de 6.1) ; en vertu de *loc. cit.*, P est un sous-groupe parabolique de G, de sous-groupe de Levi L. On a évidemment $\mathrm{int}(n)\mathrm{P} = \mathrm{H}_{w(\mathrm{R}_+)}$. Il résulte alors de 7.3 que $w(\mathrm{R}_+) = \mathrm{R}_+$ entraîne $w = e$. Comme le groupe W' opère transitivement sur les systèmes de racines positives de R (Exp. XXI, 3.3.7) et que le stabilisateur dans W de R_+ est l'identité, on en conclut aussitôt que $\mathrm{W} = \mathrm{W}'$. On en conclut également que $\mathrm{W} = \mathrm{W}'$ opère de façon simplement transitive à la fois sur l'ensemble des systèmes de racines positives de R et sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G de groupe de Levi L, ce qui entraîne la dernière assertion de 7.4. C.Q.F.D.

7.5. Si P et P_1 sont deux sous-groupes paraboliques minimaux de G, de sous-groupes de Levi L et L_1, et si on désigne par Q et Q_1 les tores centraux déployés maximaux de L et L_1, alors les couples (P, Q) et $(\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1)$ sont conjugués : il existe $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{P} = \mathrm{P}_1$ et $\mathrm{int}(g)\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1$.

En effet, P et P_1 sont conjugués (5.7) et on peut donc supposer $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1$; alors L et L_1 sont conjugués par une section de P(S) (1.8). De plus, si g et g' sont deux sections de G conjuguant les couples (P, Q) et $(\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1)$, alors $g'^{-1}g$ normalise P et Q, donc P et L ; mais

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P}) \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L}) = \mathrm{P} \cap \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L}) = \mathrm{L} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}).$$

L'isomorphisme $\mathrm{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Q}_1$ induit par $\mathrm{int}(g)$ est donc indépendant de g. **509**

Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}_1$ les données radicielles définies grâce à 7.4 dans $\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{Q}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$ et $\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{Q}_1, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$ et soient R_+ et R_{1+} les systèmes de racines positives correspondant à P et P_1. L'isomorphisme canonique $\mathrm{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Q}_1$ défini ci-dessus transforme

[33] N.D.E. : On a corrigé $\alpha^*(m)$ en $\alpha^*(m)\,\alpha$.

$(\mathscr{R}, \mathrm{R}_+)$ en $(\mathscr{R}_1, \mathrm{R}_{1+})$. On en déduit aussitôt que l'on peut définir *la donnée radicielle relative épinglée* [34] de G sur S, en identifiant les différents $(\mathscr{R}, \mathrm{R}_+)$ à l'aide du système transitif d'isomorphismes décrit ci-dessus.

À partir de maintenant, nous noterons $(\underline{\mathrm{M}}, \underline{\mathrm{M}}^*, \underline{\mathrm{R}}, \underline{\mathrm{R}}^*, \underline{\mathrm{R}}_+) = \mathscr{R}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ cette donnée radicielle épinglée ; pour chaque couple $\mathrm{P} \supset \mathrm{Q}$ comme ci-dessus, on a donc un isomorphisme canonique $\underline{\mathrm{M}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{Q}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$ transformant $\underline{\mathrm{R}}$ (resp. $\underline{\mathrm{R}}_+$) en l'ensemble des racines de G (resp. de P) relativement à Q, et $\mathrm{W}(\mathscr{R})$ en $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})(\mathrm{S})$.

7.6. Soit toujours Q un tore déployé maximal de G, P un sous-groupe parabolique (minimal) de G de groupe de Levi $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$, $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*, \mathrm{R}_+)$ la donnée radicielle épinglée correspondante (7.4), et Δ l'ensemble des racines simples de R_+. Pour tout $\mathrm{A} \subset \Delta$, soit $\mathrm{R}_{\mathrm{A}} \subset \mathrm{R}$ l'ensemble

$$\mathrm{R}_{\mathrm{A}} = \mathrm{R}_+ \cup (\mathbb{Z}\mathrm{A} \cap \mathrm{R}_-)$$

formé des racines positives et des racines négatives combinaisons linéaires des éléments
510 de A. C'est un ensemble *clos* (Exp. XXI, 3.1.4) de racines, et tout ensemble clos contenant R_+ se met de façon unique sous cette forme (Exp. XXI, 3.3.10). Par 6.1, il existe un unique sous-groupe P_{A} de G, lisse et à fibres connexes, contenant $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ et tel que

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{P}_{\mathrm{A}}) = \mathscr{L}ie(\mathrm{G})^0 \oplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{A}}} \mathscr{L}ie(\mathrm{G})^{\alpha}.$$

Il résulte alors aussitôt de 6.1, de la conjugaison des paraboliques minimaux, et du fait que l'ensemble des racines d'un sous-groupe parabolique de G contenant Q est clos (qui se déduit aussitôt de 1.4 par déploiement) que :

Proposition 7.7. — (i) *L'application* $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{P}_{\mathrm{A}}$ *est une bijection de l'ensemble des parties de* Δ *sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques de* G *contenant* P. *Cette bijection conserve les relations d'ordre naturelles d'inclusion.*

(ii) *Tout sous-groupe parabolique de* G *est conjugué par une section de* G(S) *à un unique* P_{A}.

7.8. Soit $\mathrm{P} \supset \mathrm{Q}$ comme ci-dessus. Considérons la donnée radicielle relative (7.5) de G sur S et l'isomorphisme canonique

$$f : \quad (\mathrm{M}, \mathrm{M}^*, \mathrm{R}, \mathrm{R}^*, \mathrm{R}_+) \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathrm{M}}, \underline{\mathrm{M}}^*, \underline{\mathrm{R}}, \underline{\mathrm{R}}^*, \underline{\mathrm{R}}_+).$$

L'ensemble Δ des racines simples de R_+ est transformé en l'ensemble $\underline{\Delta}$ des racines simples de $\underline{\mathrm{R}}_+$, donc toute partie A de Δ en une partie $f(\mathrm{A}) \subset \underline{\Delta}$.

511 ***Définition 7.9.0***. — [35] Soit H un sous-groupe parabolique de G quelconque. Par 7.7 (ii), il est conjugué à un unique P_{A}. Notons $\mathbf{t_r}(\mathrm{H}) = f(\mathrm{A}) \subset \underline{\Delta}$. On vérifie aussitôt à l'aide des théorèmes de conjugaison que $\mathbf{t_r}(\mathrm{H})$ est indépendant du choix du couple $\mathrm{P} \supset \mathrm{Q}$. On dit que c'est le *type relatif* de H.

[34] N.D.E. : Rappelons (Exp. XXIII 1.5) qu'une donnée radicielle *épinglée* est une donnée radicielle munie du choix d'un système de racines positives (ou de racines simples).

[35] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 7.9.0 pour mettre en évidence la définition du « type relatif ».

Proposition 7.9. — (i) *L'application* $\mathrm{H} \mapsto \mathbf{t_r}(\mathrm{H})$ *induit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison* (*par* $\mathrm{G(S)}$) *des sous-groupes paraboliques de* G, *et l'ensemble des parties de* $\underline{\Delta}$.

(ii) *Soient* H *un sous-groupe parabolique de* G, P *un sous-groupe parabolique minimal contenu dans* H, Q *le tore déployé central maximal d'un sous-groupe de Levi de* P, Δ *l'ensemble des racines simples de* P *relativement à* Q *et* $f : \Delta \xrightarrow{\sim} \underline{\Delta}$ *l'isomorphisme canonique. Alors, pour tout* $\alpha \in \Delta$, *on a l'équivalence :*

$$f(\alpha) \in \mathbf{t_r}(\mathrm{H}) \iff \mathscr{L}ie(\mathrm{H})^{-\alpha} \neq 0$$

et l'on a $\mathrm{H} = \mathrm{P_A}$, *où* $\mathrm{A} = f^{-1}(\mathbf{t_r}(\mathrm{H}))$.

(iii) *Si* H *et* H′ *sont deux sous-groupes paraboliques de* G *contenant* P, *alors* (*voir* 3.8.1 (ii) *et* 5.5 (i) *pour d'autres conditions équivalentes*) *:*

$$\mathbf{t_r}(\mathrm{H}) \subset \mathbf{t_r}(\mathrm{H'}) \iff \mathbf{t}(\mathrm{H}) \subset \mathbf{t}(\mathrm{H'})$$

7.10. On peut étudier les positions relatives de deux sous-groupes paraboliques mi- **512**
nimaux ; les résultats sont les suivants (on renvoie à 4.5.2 pour la notation $\mathbf{t}_2(\mathrm{P}, \mathrm{P}_1)$) :

(1) Si P, P_1, P′, P'_1 sont quatre sous-groupes paraboliques minimaux de G, alors $\mathbf{t}_2(\mathrm{P}, \mathrm{P}_1) = \mathbf{t}_2(\mathrm{P}', \mathrm{P}'_1)$ (i.e. $(\mathrm{P}, \mathrm{P}_1)$ et $(\mathrm{P}', \mathrm{P}'_1)$ sont conjugués localement pour (fpqc)) si et seulement si il existe $g \in \mathrm{G(S)}$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{P} = \mathrm{P}'$ et $\mathrm{int}(g)\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}'_1$.

(2) Fixons-nous en particulier un sous-groupe parabolique minimal P de sous-groupe de Levi L et soit T un tore maximal de L. Considérons le schéma $\underline{\mathrm{Par}}_{t_{\min}}(\mathrm{G}; \mathrm{P})$ des sous-groupes paraboliques minimaux de G en position standard relativement à P. On a un morphisme (cf. 4.5.5)

$$f : \underline{\mathrm{Par}}_{t_{\min}}(\mathrm{G}; \mathrm{P}) \longrightarrow \mathrm{W_P(T)} \backslash \mathrm{W_G(T)} / \mathrm{W_P(T)}$$

dont les fibres sont « les orbites de P dans $\underline{\mathrm{Par}}_{t_{\min}}(\mathrm{G}; \mathrm{P})$ ». En vertu de (1), f induit donc un monomorphisme

$$\mathrm{P(S)} \backslash \underline{\mathrm{Par}}_{t_{\min}}(\mathrm{G}; \mathrm{P})(\mathrm{S}) \hookrightarrow \big(\mathrm{W_P(T)} \backslash \mathrm{W_G(T)} / \mathrm{W_P(T)}\big)(\mathrm{S}).$$

L'image de ce morphisme s'identifie à W ; c'est le *théorème de Bruhat* : chaque orbite de P(S) dans $\underline{\mathrm{Par}}_{t_{\min}}(\mathrm{G}; \mathrm{P})(\mathrm{S})$ contient un et un seul sous-groupe parabolique de G de groupe de Levi L (c'est-à-dire de la forme $\mathrm{int}(n)\mathrm{P}$, où $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L})$).

(3) En d'autres termes, soit E(S) l'ensemble des $g \in \mathrm{G(S)}$ tels que $\mathrm{int}(g)\mathrm{P}$ et P soient en position mutuelle standard. Alors E(S) possède une partition en doubles classes modulo P(S) indexée par W :

$$\mathrm{E(S)} = \mathrm{P(S)}\,\mathrm{W}\,\mathrm{P(S)}$$

(notation évidente). Posant $\mathrm{U} = \mathrm{rad}^u(\mathrm{P})(\mathrm{S})$, on peut aussi écrire **513**

$$\mathrm{E(S)} = \mathrm{U(S)} \cdot \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L})(\mathrm{S}) \cdot \mathrm{U(S)},$$

mettant ainsi en évidence une partition de E(S) en doubles classes modulo U(S), indexée par $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L})(\mathrm{S})$.

(4) Si S est le spectre d'un corps, alors $\mathrm{E(S)} = \mathrm{G(S)}$, et on retrouve [**BT65**], 5.15.

Contre-exemples 7.11. — Soient $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_{2,\,\mathrm{S}}$. Soit B le sous-groupe de Borel habituel formé des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $c = 0$. Soit $g = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$, posons $\mathrm{B}' = \mathrm{int}(g)\mathrm{B}$. Alors $\mathrm{B}(\mathrm{S}) = \mathrm{B}'(\mathrm{S})$, et $\mathrm{B} \cap \mathrm{B}'$ ne contient pas de tore maximal [36]. Cela montre d'une part que deux sous-groupes paraboliques minimaux distincts peuvent avoir le même groupe de sections, d'autre part qu'il n'existe pas en général de critère permettant de reconnaître si deux sous-groupes paraboliques minimaux P et P′ sont en position standard, à l'aide uniquement des groupes P(S) et P′(S). En particulier, la partie E(S) de G(S) ne semble pas pouvoir être définie à l'aide uniquement de la situation $\{\mathrm{G}(\mathrm{S}), \mathrm{P}(\mathrm{S}), \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L})(\mathrm{S})\}$ (dans le cas précédent, cette partie est définie par $c \neq 2$ [37]).

7.12. On se propose maintenant d'étudier la variation de $\mathscr{R}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ avec S. Soit donc S′ un S-schéma, également semi-local connexe et non vide. Soit Q un tore déployé
514 maximal de G ; alors $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$ est un tore déployé de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, soit Q′ un tore déployé maximal de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ contenant $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$. Posons

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{Q}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-gr.}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}'}) \\ \mathrm{M}' &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-gr.}}(\mathrm{Q}', \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}'}). \end{aligned}$$

Le monomorphisme $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{Q}'$ induit un épimorphisme $u : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$. Notons

$$\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}), \qquad \mathrm{L}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{Q}'),$$

on a $\mathrm{L}' \subset \mathrm{L}_{\mathrm{S}'}$.

Si H est un sous-groupe de G contenant L, alors $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ contient L′, et on a

$$\begin{aligned} \mathscr{L}ie(\mathrm{H}) &= \mathscr{L}ie(\mathrm{L}) \oplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{H}}} \mathscr{L}ie(\mathrm{H})^{\alpha} \\ \mathscr{L}ie(\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}) &= \mathscr{L}ie(\mathrm{L}') \oplus \coprod_{\alpha' \in \mathrm{R}'_{\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}}} \mathscr{L}ie(\mathrm{H}_{\mathrm{S}'})^{\alpha'}, \end{aligned}$$

où R_{H} (resp. $\mathrm{R}'_{\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}}$) désigne l'ensemble des racines de H (resp. $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$) relativement à Q (resp. Q′). On en tire immédiatement que

$$\mathrm{R}_{\mathrm{H}} \subset u(\mathrm{R}'_{\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}}) \subset \mathrm{R}_{\mathrm{H}} \cup \{0\}.$$

Prenant $\mathrm{H} = \mathrm{G}$, on voit d'abord que $\mathrm{R} \subset u(\mathrm{R}') \subset \mathrm{R} \cup \{0\}$; prenant ensuite pour H un sous-groupe parabolique minimal P de sous-groupe de Levi L, on voit que $\mathrm{R}'_{\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}}$ contient un système de racines positives de R′, donc (7.4) qu'il existe un sous-groupe parabolique minimal P′ de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ de sous-groupe de Levi L′ contenu dans $\mathrm{P}_{\mathrm{S}'}$. On a

[36] N.D.E. : En effet, B′ est le sous-groupe de G défini par l'équation $c = 2(a + b)$; alors $\mathrm{B} \cap \mathrm{B}'$ n'est pas plat sur S, donc ne contient pas de tore maximal, d'après 4.5.1.

[37] N.D.E. : Plus généralement, pour tout S-schéma S′, E(S′) est défini par la condition : « c est nul ou bien inversible ».

donc construit un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Q_{S'} & \subset & L_{S'} & \subset & P_{S'} \\ \cap & & \cup & & \cup \\ Q' & \subset & L' & \subset & P'. \end{array}$$

Si R_+ (resp. Δ) est le système de racines positives (resp. simples) de R défini par P 515
et si on définit de même R'_+ et Δ', on vérifie facilement que

$$R_+ \subset u(R'_+) \subset R_+ \cup \{0\}, \qquad \Delta \subset u(\Delta') \subset \Delta \cup \{0\}.$$

Soient maintenant $w \in W \simeq \underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)(S)/\underline{\mathrm{Centr}}_G(Q)(S)$, et $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)(S)$ un représentant de w. On a $\mathrm{int}(n)Q = Q$ donc $\mathrm{int}(n)L = L$, donc $\mathrm{int}(n)L_{S'} = L_{S'}$. Alors Q' et $\mathrm{int}(n)Q'$ sont deux tores déployés maximaux de $L_{S'}$ donc sont conjugués par une section $x \in L(S')$, et on a $\mathrm{int}(nx)Q' = Q'$, donc $nx \in \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}}(Q')(S')$. Soit w' l'image de $n' = nx$ dans $W' \simeq \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}}(Q')(S')/\underline{\mathrm{Centr}}_{G_{S'}}(Q')(S')$. Il est clair que l'opération de w' sur M' est compatible avec la projection $u : M' \to M$ et que l'opération induite sur M coïncide avec celle définie par w.

Utilisant maintenant la définition des données radicielles relatives et les théorèmes de conjugaison, on démontre sans peine :

Théorème 7.13. — *Soient* S *et* S′ *deux schémas* semi-locaux connexes non vides, $S' \to S$ *un morphisme de* S*-schémas,* G *un* S*-groupe réductif,*

$$\mathscr{R}(G/S) = (\underline{M}, \underline{M}^*, \underline{R}, \underline{R}^*, \underline{R}_+), \qquad \mathscr{R}(G_{S'}/S') = (\underline{M}', \underline{M}'^*, \underline{R}', \underline{R}'^*, \underline{R}'_+)$$

les données radicielles épinglées relatives. Il existe un homomorphisme canonique

$$\underline{u} : \underline{M}' \longrightarrow \underline{M}$$

vérifiant les conditions suivantes : 516

(i) $\underline{u}$ *est surjectif.*

(ii) *Pour tout* $w \in W$*, il existe un élément* w' *de* W' *compatible avec* $\underline{u}$ *et qui induise* w *sur* $\underline{M}$*.*

(iii) *Pour toute partie* X *de* $\underline{M}$*, notons* $X^\wedge = X \cap (\underline{M} - \{0\})$*. Alors*

$$\underline{u}(\underline{R}'_+)^\wedge = \underline{R}_+, \qquad \underline{u}(\underline{\Delta}')^\wedge = \underline{\Delta}.$$

(iv) *Pour tout sous-groupe parabolique* H*, considérons* $\mathbf{t_r}(H) \subset \underline{\Delta}$ *et* $\mathbf{t_r}(H_{S'}) \subset \underline{\Delta}'$*. Alors*

$$\mathbf{t_r}(H_{S'}) = \underline{u}^{-1}\big(\mathbf{t_r}(H) \cup \{0\}\big) \cap \underline{\Delta}' = \{\alpha' \in \underline{\Delta}' \mid \underline{u}(\alpha') \in \mathbf{t_r}(H) \quad \textit{ou} \quad \underline{u}(\alpha') = 0\}.$$

Remarque 7.14. — Si G est déployable sur S, ses tores déployés maximaux sont des tores maximaux, et les notions relatives introduites ici coïncident alors avec les notations absolues déjà introduites. Le théorème précédent donne donc une description de la donnée radicielle relative $\mathscr{R}(G/S)$ et du type relatif $\mathbf{t_r}$, à l'aide de la donnée radicielle absolue et du type absolu du groupe $G_{S'}$, S′ étant choisi de telle manière que $G_{S'}$ soit déployable (cf. Exp. XXIV, 4.4.1). Renvoyons à [**BT65**], 6.12 *et sq.* pour cette description.

517 **7.15.** Soient S un schéma *local hensélien*, s_0 son point fermé, S_0 le spectre du corps résiduel de s_0, identifié à un sous-schéma fermé de S ; pour tout objet X au-dessus de S, notons X_0 l'objet au-dessus de S_0 déduit de X par changement de base. Soit enfin G un S-groupe réductif. Pour tout sous-groupe parabolique P de G, P_0 est un sous-groupe parabolique de G_0 ; inversement, pour tout sous-groupe parabolique $\overline{P}$ de G_0, il existe un sous-groupe parabolique P de G tel que $P_0 = \overline{P}$ (cela résulte du lemme de Hensel et de ce que $\underline{\mathrm{Par}}(G)$ est un S-schéma lisse) ; en particulier (cf. 5.7), un sous-groupe parabolique P de G est minimal si et seulement si P_0 est minimal. Un tel sous-groupe P de G étant choisi, un raisonnement analogue montre que les sous-tores déployés maximaux de P_0 sont de la forme T_0, où T est un sous-tore déployé maximal de P. Il s'ensuit sans difficultés que les *données radicielles relatives* de G sur S et de G_0 sur S_0 sont *canoniquement isomorphes,* de sorte que la théorie des sous-groupes paraboliques de G se ramène à celle des sous-groupes paraboliques de G_0.

Remarquons d'ailleurs que tout S_0-groupe réductif est de la forme G_0 (Exp. XXIV, Prop. 1.21), ce qui permet inversement de ramener l'étude des sous-groupes paraboliques d'un S_0-groupe réductif à l'étude correspondante sur S.

Bibliographie

[BT65] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. I.H.É.S. **27** (1965), 55-150. [38]

[BT71] A. Borel, J. Tits, *Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs.* I, Invent. Math. **12** (1971), 95-104.

[Ch05] C. Chevalley, *Classification des groupes algébriques semi-simples* (avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard), Collected Works, vol. 3, Springer, 2005.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Gi71] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, 1971.

[38] N.D.E. : On a ajouté à cette référence, figurant dans l'original, les références qui suivent.

INDEX