

Лабораторная работа 2

Задача о погоне

Бешкуров Михаил Борисович

Содержание

1	Цель работы	3
2	Задание	4
3	Выполнение лабораторной работы	5
3.1	Постановка задачи	5
3.2	Построение траектории движения и точки пересечения	8
4	Выводы	11

1 Цель работы

Научиться решать задачу о погоне, строить графики траектории движения, вывести уравнение, описывающее движение.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 18,4 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,6 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Постановка задачи

1. Место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения: $t_0 = 0, x_0 = 0$. Место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки: $x_0 = 0$
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 (0 = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны (рис. @fig:001)

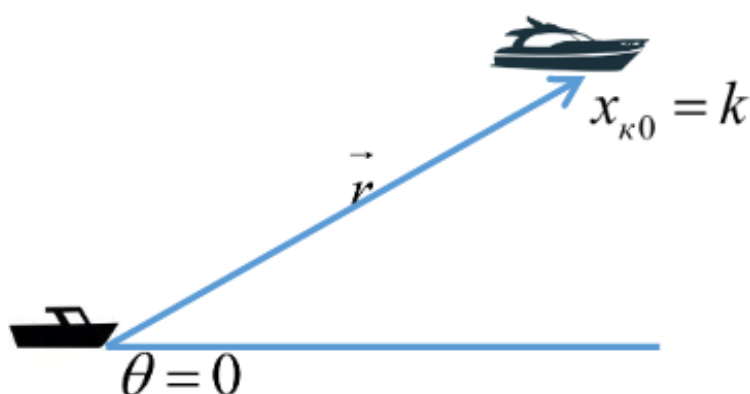


Рис. 3.1: Положение катера и лодки в начальный момент времени

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса, только в этом случае траектория

катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

4. Чтобы найти расстояние X (расстояние, после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер — $k - x$ (или $k + x$ в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x/4.6v$ (во втором случае $k + x/4.6v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k - x}{4.6v}$$

или

$$\frac{x}{v} = \frac{k + x}{4.6v} .$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{k}{5.6}$ и $x_2 = \frac{k}{3.6}$, задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса, удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r — радиальная скорость и v_τ — тангенциальная скорость (рис. 2). Радиальная скорость — это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость — это линейная скорость вращения катера относи-

тельно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ на радиус r , $v_\tau = r \frac{\partial \theta}{\partial t}$

Из рисунка (рис. @fig:002) видно: $v_\tau = \sqrt{21,16v^2 - v^2} = \sqrt{20,16}v$ (учитывая, что радиальная скорость равна v). Тогда получаем $r \frac{\partial \theta}{\partial t} = \sqrt{20,16}v$

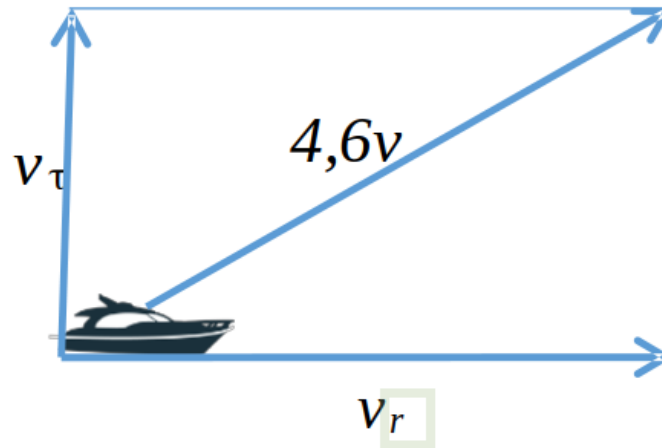


Рис. 3.2: Скорости

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} = v \\ r \frac{\partial \theta}{\partial t} = \sqrt{20,16}v \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{r}{\sqrt{20,16}}.$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

3.2 Построение траектории движения и точки пересечения

Код для обоих случаев на python:

```
k = 18.4 # Начальное расстояние
v = 4.6
fi = 3*math.pi/4
```

```
# Движение охраны
```

```
def dr(r, tetha):
    res = r/math.sqrt((v**2)-1)
    return res
```

```
# Движение браконьеров
```

```
def f2(t):
    xt = math.tan(fi)*t
    return xt
```

```
for vx in [3.6, 5.6]:
    r0 = k/vx # Наши два случая
```



```

tetha = np.arange(0, 2*math.pi, 0.01)

r = odeint(dr, r0, tetha) # Решение дифф. уравнения
t = np.arange(0, 15, 1)

# Переведем всё в полярные координаты
pol = t*t + f2(t)*f2(t)
r2 = np.sqrt(pol)

tetha2 = (np.tan(f2(t)/t))**(-1)

# Построим графики
polar(tetha, r, "g")
polar(tetha2, r2, "b")

```

Графики движения и точки пересечения. Зелёным цветом — охрана, синим — браконьеры.

Оба случая а одном графике (рис. @fig:003)

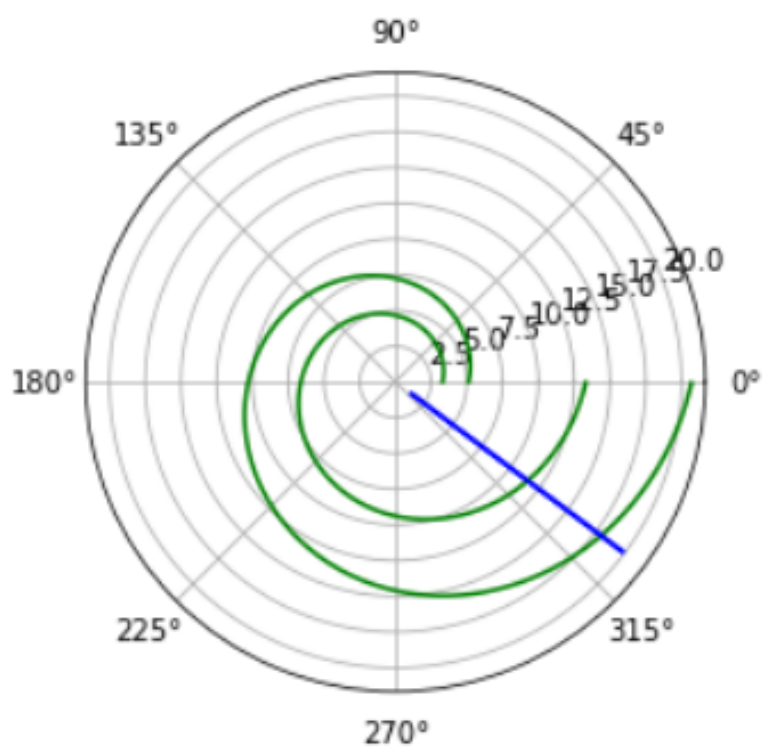


Рис. 3.3: 1

4 Выводы

1. Записал уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построил траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Нашел точку пересечения траектории катера и лодки
4. Научился решать задачу о погоне, строить графики.