

Etude des symétries et modèles de plaques en piézoélectricité linéarisée

Thibaut Weller

► To cite this version:

Thibaut Weller. Etude des symétries et modèles de plaques en piézoélectricité linéarisée. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2004. Français. tel-00011243

HAL Id: tel-00011243

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011243>

Submitted on 20 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADEMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITE MONTPELLIER II

— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

THESE

Présentée à l'Université de Montpellier Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le diplôme de DOCTORAT

Spécialité : Mécanique
Formation Doctorale : Mécanique des Matériaux et des Milieux Complexes,
des Structures et des Systèmes.
Ecole Doctorale : Informations, Structures, Systèmes.

ÉTUDE DES SYMÉTRIES ET MODÈLES DE PLAQUES
EN PIÉZOÉLECTRICITÉ LINÉARISÉE

par

Thibaut WELLER

Soutenue le 09 Juin 2004 devant le jury composé de :

MM.	Olivier MAISONNEUVE	Professeur, Montpellier II	Président
	Gérard MAUGIN	Directeur de Recherche, Paris VI	Rapporteur
Mme	Annie RAOULT	Professeur, Grenoble	Rapporteur
MM.	Jean-Jacques MARIGO	Professeur, Paris XIII	Examineur
	Giuseppe GEYMONAT	Directeur de Recherche, Montpellier II	Directeur de Thèse
	Christian LICHT	Directeur de Recherche, Montpellier II	Directeur de Thèse

"Our revels now are ended... These our actors,
As I foretold you, were all spirits, and
Are melted into air, into thin air,
And, like the baseless fabric of this vision,
The cloud-capped towers, the gorgeous palaces,
The solemn temples, the great globe itself,
Yea, all which it inherit, shall dissolve,
And, like this insubstantial pageant faded,
Leave not a rock behind : we are such stuff
As dreams are made on ; and our little life
Is rounded with a sleep..."

William Shakespeare,
The tempest.

"Nos divertissements sont finis. Ces acteurs,
J'eus soin de vous le dire, étaient tous des esprits :
Ils se sont dissipés dans l'air, dans l'air subtil.
Tout de même que ce fantôme sans assises,
Les tours ennuagées, les palais somptueux,
Les temples solennels et ce grand globe même
Avec tous ceux qui l'habitent, se dissoudront,
S'évanouiront tel ce spectacle incorporel
Sans laisser derrière eux ne fût-ce qu'un brouillard.
Nous sommes de l'étoffe dont les songes sont faits
Et notre vie infime est cernée de sommeil..."

William Shakespeare,
La tempête.

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein de l'Équipe de Modélisation Mathématique en Mécanique du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil. J'exprime ici toute ma gratitude envers Christian Licht, André Chrysochoos, Pippo Geymonat et Olivier Maisonneuve pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en m'accueillant au LMGC.

Olivier Maisonneuve m'a de plus fait l'honneur de présider le jury, et Jean-Jacques Marigo a accepté d'être examinateur. Je les en remercie vivement.

J'exprime aussi ma reconnaissance envers Annie Raoult et Gérard Maugin qui ont bien voulu se prêter à la lourde tâche de rapporteur. Je tiens à les remercier de leur lecture attentive du manuscrit ainsi que de leurs précieuses suggestions.

Qu'il me soit aussi permis d'exprimer ma plus sincère gratitude à toutes celles et ceux qui, au sein du LMGC, contribuent en permanence à créer une ambiance agréable et chaleureuse. Je pense notamment à tous les thésards.

Que l'on me permette enfin un *mea culpa* : je ne trouverai, pour finir cette page, ni la tournure idéale ni les mots adéquats qui pourtant, en ce moment, battent secrètement dans ma poitrine. Alors, à Christian et Pippo : "un seul mot, usé, mais qui brille comme une vieille pièce de monnaie : merci!"

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein de l'Équipe de Modélisation Mathématique en Mécanique du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil. J'exprime ici toute ma gratitude envers Christian Licht, André Chrysochoos, Pippo Geymonat et Olivier Maisonneuve pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en m'accueillant au LMGC.

Olivier Maisonneuve m'a de plus fait l'honneur de présider le jury, et Jean-Jacques Marigo a accepté d'être examinateur. Je les en remercie vivement.

J'exprime aussi ma reconnaissance envers Annie Raoult et Gérard Maugin qui ont bien voulu se prêter à la lourde tâche de rapporteur. Je tiens à les remercier de leur lecture attentive du manuscrit ainsi que de leurs précieuses suggestions.

Qu'il me soit aussi permis d'exprimer ma plus sincère gratitude à toutes celles et ceux qui, au sein du LMGC, contribuent en permanence à créer une ambiance agréable et chaleureuse. Je pense notamment à tous les thésards.

Que l'on me permette enfin un *mea culpa* : je ne trouverai, pour finir cette page, ni la tournure idéale ni les mots adéquats qui pourtant, en ce moment, battent secrètement dans ma poitrine. Alors, à Christian et Pippo : "un seul mot, usé, mais qui brille comme une vieille pièce de monnaie : merci!"

Résumé

L'objet de l'étude est double. Dans un premier temps, on s'intéresse à la classification des symétries du phénomène de couplage piézoélectrique linéaire ; on se focalise ensuite sur la dérivation de modèles de plaques, toujours dans le cadre de la piézoélectricité linéarisée. On obtient ainsi des résultats qui permettent de présenter des propriétés de solides piézoélectriques relatives au matériau, à la structure ainsi qu'à leurs interactions.

Les trois premiers Chapitres concernent les symétries. On rappelle d'abord que ces dernières peuvent être de différentes natures. Ensuite, les outils qui permettent de les appréhender et de les lier entre elles sont présentées. Les divers outils utilisés conduisent alors au principal résultat de la première partie : la classification des symétries du phénomène de couplage piézoélectrique linéaire en quinze familles distinctes.

Dans les deux derniers Chapitres, on obtient des modèles de plaques linéairement piézoélectriques à l'aide d'une méthode mathématique rigoureuse consistant à étudier le comportement d'un solide tridimensionnel lorsque son épaisseur, vue comme un paramètre, tend vers zéro. Dans le cas statique, il apparaît deux modèles différents. Ils dépendent en fait du type de chargement électrique et sont reliés aux cas pour lesquels les plaques piézoélectriques sont utilisés comme capteurs ou comme actionneurs. Les cinématiques limites sont précisées et les deux lois de comportement sont explicitement fournies pour tous les types de matériau constitutif. Dans le cas dynamique, on montre que c'est l'ordre de grandeur du rapport entre l'épaisseur et la densité de la plaque qui joue un rôle déterminant.

Mots clés : Symétries, plaques, analyse asymptotique, théories des groupes et des semi-groupes, cristaux.

Résumé

L'objet de l'étude est double. Dans un premier temps, on s'intéresse à la classification des symétries du phénomène de couplage piézoélectrique linéaire ; on se focalise ensuite sur la dérivation de modèles de plaques, toujours dans le cadre de la piézoélectricité linéarisée. On obtient ainsi des résultats qui permettent de présenter des propriétés de solides piézoélectriques relatives au matériau, à la structure ainsi qu'à leurs interactions.

Les trois premiers Chapitres concernent les symétries. On rappelle d'abord que ces dernières peuvent être de différentes natures. Ensuite, les outils qui permettent de les appréhender et de les lier entre elles sont présentés. Les divers outils utilisés conduisent alors au principal résultat de la première partie : la classification des symétries du phénomène de couplage piézoélectrique linéaire en quinze familles distinctes.

Dans les deux derniers Chapitres, on obtient des modèles de plaques linéairement piézoélectriques à l'aide d'une méthode mathématique rigoureuse consistant à étudier le comportement d'un solide tridimensionnel lorsque son épaisseur, vue comme un paramètre, tend vers zéro. Dans le cas statique, il apparaît deux modèles différents. Ils dépendent en fait du type de chargement électrique et sont reliés aux cas pour lesquels les plaques piézoélectriques sont utilisés comme capteurs ou comme actionneurs. Les cinématiques limites sont précisées et les deux lois de comportement sont explicitement fournies pour tous les types de matériau constitutif. Dans le cas dynamique, on montre que c'est l'ordre de grandeur du rapport entre l'épaisseur et la densité de la plaque qui joue un rôle déterminant.

Mots clés : Symétries, plaques, analyse asymptotique, théories des groupes et des semi-groupes, cristaux.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction</i>	5
 <i>partie I ÉTUDE DES SYMÉTRIES</i>	 9
1. <i>Les cristaux</i>	11
1.1 Notions fondamentales sur l'état cristallin	14
1.1.1 Homogénéité d'une phase solide	14
1.1.2 L'anisotropie continue et discontinue	15
1.1.3 Symétrie d'orientation et symétrie de position	17
1.2 Le réseau cristallin	21
1.2.1 Homogénéité microscopique et périodicité	21
1.2.2 Préliminaires à la modélisation mathématique des cristaux	23
1.2.3 Propriétés élémentaires et symétrie globale des réseaux.	29
1.2.4 Les symétries géométriques des réseaux. Classification en systèmes cristallins	33
1.2.5 Les symétries arithmétiques des réseaux et leur classification en réseaux de Bravais	36
1.3 Le cristal en tant que multi-réseau	39
1.3.1 Définition	39
1.3.2 Symétrie affine des cristaux	41
1.3.3 Extension et généralisation : les groupes de couleur	43
2. <i>Vers la symétrie des phénomènes physiques</i>	45
2.1 La fonction énergie interne d'un réseau simple et ses propriétés d'invariance	45
2.2 Passage au continu : l'hypothèse de Cauchy-Born	46
2.3 Relations d'invariance de l'énergie	47
2.4 Restriction des domaines de travail	49
2.4.1 Les voisinages de Pitteri-Ericksen	49
2.4.2 Conséquence sur les relations d'invariance	50

2.4.3	Extension aux multi-réseaux	51
2.5	Conséquences sur la symétrie du tenseur d'élasticité	51
2.6	Propriétés d'invariance des tenseurs piézoélectriques	54
3.	<i>Les Tenseurs</i>	57
3.1	Préliminaires	57
3.1.1	Les sous-groupes fermés de $\mathbf{SO}(\mathbf{3})$	58
3.1.2	Les sous-groupes fermés de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$	60
3.1.3	Grandeurs polaires et axiales	61
3.1.4	Lien entre les notations cristallographiques et mathématiques. Première classification	64
3.2	Les symétries des tenseurs piézoélectriques	65
3.2.1	La décomposition harmonique	68
3.2.2	La décomposition de Cartan	73
3.2.3	Les résultats	81
3.3	Application au piézo magnétisme	85
<i>partie II MODÈLES DE PLAQUES</i>		89
4.	<i>Cas statique</i>	91
4.1	Introduction	91
4.2	Rappels et notations	98
4.3	Position du problème	102
4.3.1	Formulation variationnelle	103
4.4	Changement d'ouvert et hypothèses de "mise à l'échelle"	104
4.4.1	Formulation variationnelle	106
4.4.2	Le comportement asymptotique	108
4.4.3	Équations limites bidimensionnelles. Découplage	119
4.5	Quelques propriétés de la loi de comportement limite	123
4.6	Les équation ponctuelles	129
4.6.1	Équations mécaniques	129
4.6.2	Équations électriques. Cas $p = 1$	130
4.6.3	Équations électriques. Cas $p = 2$	131
4.7	Conclusion : la modélisation proposée	132
5.	<i>Cas dynamique</i>	135
5.1	Introduction	135
5.2	Equations d'évolution et théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires	139
5.3	Première formulation du problème	142

5.3.1	L'approximation quasi-(électro)statique	142
5.3.2	Position du problème	142
5.4	Nouvelle formulation du problème	143
5.5	Les différents comportements asymptotiques	150
5.5.1	Construction du cadre fonctionnel	151
5.5.2	Comportement asymptotique de $s^e(\eta)$	157
5.5.3	Comportement asymptotique de $s^r(\eta)$	158
5.5.4	Résultats finaux	173
5.6	Quelques commentaires	175
5.6.1	Découplage des réponses électrodynamiques	175
5.6.2	La modélisation proposée	176
	<i>Conclusion</i>	177
	<i>Bibliographie</i>	179

INTRODUCTION

Les travaux sur la piézoélectricité se sont considérablement multipliés au cours des dix dernières années. L'intérêt est en effet sans cesse croissant de développer des *matériaux* ou/et des *structures* dites intelligentes dans de nombreuses branches de l'industrie. En ce qui concerne les matériaux piézo-électriques, ils sont abondamment utilisés dans le domaine de l'aérospatiale et du militaire ; on en retrouve aussi dans le matériel Hi-Fi et jusque dans la conception de skis ! Leur très large spectre d'application semble essentiellement dû à la propriété physique qui en fait la particularité, à savoir qu'ils permettent de convertir un chargement mécanique en un signal électrique et réciproquement. Cette réciprocité du phénomène piézoélectrique est ce qui permet d'expliquer, dans une première approche, la division entre *capteurs* et *actionneurs*. Les capteurs convertissent en effet un chargement mécanique en un signal électrique et les systèmes qu'ils composent traduisent ce signal en fonction des besoins : conception de microbalances, de ceintures de sécurité, de dispositifs à air bag, de matériel Hi-Fi... Quant aux actionneurs, ils convertissent un signal électrique en un déplacement qui peut être contrôlé avec précision. Ils permettent de commander finement des machines-outils, des miroirs, des objectifs... Ils servent aussi à la conception de micro-moteurs de plus en plus utilisés dans les applications médicales.

Dans le travail que l'on présente ici, on s'est intéressé à l'étude des *plaques* linéairement piézoélectriques, c'est-à-dire des *structures* de faible épaisseur constituées d'un *matériau* piézoélectrique et utilisées dans une plage de chargement appropriée (ce type de structure apparaît très fréquemment dans les applications industrielles, *cf.* par exemple l'ouvrage de Rogacheva, 1994). Cette étude est une généralisation des méthodes exposées dans le livre de Ciarlet (1997) qui rassemble des résultats obtenus au cours des vingt dernières années, lors de l'étude des plaques élastiques, homogènes et isotropes. On se place donc dans le champ des méthodes asymptotiques qui permettent la résolution ou l'étude d'un grand nombre de problèmes mécaniques dans lesquels interviennent un ou plusieurs *petits paramètres*. Ces méthodes permettent de *fournir des modèles* comportementaux maniables pour le mécanicien.

Des nombreuses études antérieures sur les plaques piézoélectriques, on ci-

tera en particulier les travaux de Maugin & Attou (1990), de Lenczner (1993), de Bisegna & Maceri (1996a, b) et de Sène (2000). Ce sont ces travaux qui nous ont permis de dégager dans les grandes lignes nos objectifs de recherche. Ceux-ci étaient doubles :

1. élargir les hypothèses sur la nature du comportement électro-mécanique de la plaque faites par Sène (2000) ;
2. unifier les points de vue et résultats apparemment divergents obtenus par Maugin & Attou (1990) d'une part, et par Bisegna & Maceri (1996a, b) d'autre part.

Avant d'étudier des modèles de plaques piézoélectriques, nous établissons une classification parmi les matériaux au sein desquels ce phénomène peut prendre naissance. Cette classification a été obtenue à l'aide de deux types d'outils. Tout d'abord, on a modélisé l'édifice cristallin en s'inspirant des résultats obtenus par Ericksen et son école au cours des deux dernières décennies. Un certain nombre de ces résultats sont rassemblés dans l'ouvrage de Pitteri & Zanzotto (2003). Ensuite, on a étudié la symétrie des *tenseurs* piézoélectriques qui interviennent dans la loi de comportement *linéarisée* en étendant la méthode introduite par Forte & Vianello (1996). On sait en effet que la matière cristalline peut être rangée en trente deux grandes familles (qui sont des *classes d'équivalence* pour une certaine relation ; ces points seront précisés ultérieurement) et que seules vingt d'entre elles peuvent être le siège du phénomène piézoélectrique. Il n'est cependant pas clair d'en déduire une classification des symétries du *phénomène* piézoélectrique, c'est-à-dire une classification des tenseurs piézoélectriques en fonction d'une relation d'équivalence à déterminer. Ceci tient au fait que la symétrie des cristaux et la symétrie des tenseurs sont des symétries de *nature* différente (*cf.* Zheng & Boelher, 1994).

Le **premier Chapitre** de cette thèse est donc consacré aux cristaux, sous l'angle de leur classification en fonction de leurs divers types de symétrie. On y rappelle la manière dont il convient de définir les classes d'équivalence qui conduisent aux sept *systèmes cristallins*, quatorze *réseaux de Bravais*, trente deux *groupes ponctuels* et deux cent trente *groupes d'espace*. Ces classes d'équivalence peuvent être de nature géométrique (ce qui est l'approche intuitive et naturelle) ou arithmétique (qui se rapporte à la manière de disposer régulièrement des points dans l'espace ; l'intérêt de ce type de symétrie est moindre ici). Toutes ces symétries sont de nature *microscopique*.

Cependant, l'objectif étant de décrire les symétries du phénomène piézoélectrique - c'est-à-dire des symétries de nature *macroscopique* - le **deuxième Chapitre** expose des arguments énergétiques qui permettent de lier ces deux types de symétries. Ce qui rend possible la mise en oeuvre de ces arguments,

c'est essentiellement l'hypothèse de Cauchy-Born, qui dit que la position des atomes (qui relève *a priori* du domaine microscopique) est donnée par le gradient de la déformation que subit le solide (ce qui est plutôt une donnée de nature macroscopique). Un autre outil très important dans ce passage micro-macro est le Théorème de Pitteri-Ericksen qui permet de réduire le domaine d'étude dans une plage de déformations raisonnable, *i.e.* des déformations qui n'introduisent pas de modifications majeures au sein du réseau cristallin (on parle de voisinages de Pitteri-Ericksen). Ces voisinages possèdent en fait la propriété de permettre un passage micro-macro pour lequel les propriétés de symétrie qui résultent de ce passage forment des groupes finis. A la fin de ce Chapitre, l'action qu'il convient de considérer pour l'étude des symétries des tenseurs apparaît naturellement. Les résultats présentés dans les deux premiers Chapitres constituent une synthèse de résultats éparpillés dans la littérature. Plus particulièrement, pour tout ce qui a trait à la modélisation de l'édifice cristallin, on a suivi de près l'ouvrage de Pitteri & Zanzotto (2003).

Dans le **troisième Chapitre**, on généralise les méthodes introduites par Forte & Vianello (1996) dans le cadre de l'élasticité linéaire. En quelques mots, ces méthodes consistent "à faire tourner" des tenseurs et à observer quand est-ce qu'ils restent inchangés (un peu comme on le ferait avec un Rubik's Cube qui est d'ailleurs une bonne image d'un tenseur piézoélectrique puisque ceux-ci sont des tenseurs 3×3). Cependant, deux étapes intermédiaires rendent ces manipulations plus faciles : il s'agit de la décomposition harmonique et de la décomposition de Cartan. Ces décompositions ont pour but d'associer à tout tenseur un certain nombre de polynômes harmoniques dont le principal avantage réside dans le fait qu'ils permettent de traduire assez facilement l'action des rotations (et, plus largement, des transformations orthogonales). On établit alors que les symétries des tenseurs piézoélectriques se rangent en quinze classes d'équivalence. Ce résultat signifie que sur les vingt familles de cristaux au sein desquelles le phénomène piézoélectrique peut prendre naissance, les tenseurs piézoélectriques distinguent seulement quinze classes d'équivalence.

On a en outre étendu ces résultats au cas du piézo magnétisme, qui présente la particularité de faire intervenir des symétries de nature spatio-temporelle.

Les résultats obtenus dans le troisième Chapitre ont été publiés dans Geymonat & Weller (2002) ainsi que dans Weller & Geymonat (2004).

On s'est ensuite intéressé dans le **quatrième Chapitre** à l'étude statique des plaques piézoélectriques. Pour ce faire, on a suivi la méthode décrite dans l'ouvrage de Ciarlet (1997). Il s'agit en fait de considérer l'épaisseur de la plaque comme un *paramètre* noté ε , puis d'étudier le comportement de la solution du problème piézoélectrique *mis à l'échelle* lorsque ce paramètre

tend vers 0. Bien que ces divers points seront précisés par la suite, il n'est pas inutile de rappeler que cela ne signifie pas que les modèles proposés concernent des corps dont l'épaisseur est nulle.

Les résultats ainsi obtenus permettent de présenter dans un cadre unitaire plusieurs résultats partiels que l'on trouve dans la littérature. En particulier, on montre comment les modèles obtenus par Maugin & Attou (1990) et par Bisegna & Maceri (1996a, b) correspondent respectivement à des modèles de capteurs et d'actionneurs. *Ces modèles sont en fait liés au type de chargement électromécanique considéré* ; on trouve une remarque identique dans Raoult & Sène (2003). De plus, on fournit la loi de comportement limite pour *chaque type de symétrie cristalline*.

Le quatrième Chapitre a fait l'objet de l'article Weller & Licht (2002).

Enfin, le **cinquième Chapitre** traite du comportement dynamique des plaques piézoélectriques. Pour cela, on a utilisé la théorie de Trotter (1958) d'approximation des semi-groupes d'opérateurs linéaires agissant sur des espaces variables. Étant donné que la densité de la plaque intervient dans cette partie, on a considéré un *couple* de paramètres réels et positifs noté (ε, ρ) , où ε représente l'épaisseur de la plaque et où ρ est lié à la densité. Quatre cas de comportement relatif des paramètres ε et ρ sont traités, conduisant chacun à des comportements membranaires et en flexion bien distincts.

Les principaux résultats du cinquième Chapitre ont été publiés dans Weller & Licht (2004).

Les divers résultats obtenus dans ce mémoire permettent donc de présenter, à l'aide d'outils appropriés, des propriétés de solides piézoélectriques relatives au matériau, à la structure ainsi qu'à leurs interactions.

Nota Bene :

On a choisi un système de notations différent pour la rédaction des trois premiers Chapitres d'une part et des deux derniers d'autre part. Chacune de ces deux parties peuvent donc être lues à peu près indépendamment l'une de l'autre.

Concernant les notes historiques en bas de page, elles ont été glanées sur le site d'histoire des mathématiques www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/ ainsi que sur <http://www.lmcp.jussieu.fr/soyer/cristallo/200-ans.html> (pour ce qui est de la cristallographie).

Première partie

ÉTUDE DES SYMÉTRIES

1. LES CRISTAUX

“ En 1781 l’abbé René-Just Haüy¹ se trouvant chez un ami collectionneur de minéraux, examinait avec attention un morceau de “spath d’Islande” (variété de calcite incolore et transparente) quand il s’aperçut en le posant sur un texte imprimé que celui-ci se voyait dédoublé. Surpris par ce phénomène (la double réfraction) il en laissa tomber le morceau de calcite qui se brisa en petits morceaux parallélépipédiques rigoureusement identiques, les rhomboèdres. Il s’agissait en fait du phénomène de clivage. ”

[http ://www.chez.com/pgosse/gem/syscrist.htm](http://www.chez.com/pgosse/gem/syscrist.htm)

Le nom de cristal a d’abord été réservé aux substances minérales naturelles limitées par des formes polyédriques plus ou moins parfaites. L’existence des formes polyédriques était alors considérée comme le critère essentiel de la définition du cristal. C’est ainsi que l’un des premiers traités scientifiques consacrés à l’étude des cristaux a pour titre : *Essai de cristallographie, ou Description des figures géométriques propres à différents corps du règne minéral*. Il date de 1772 et il est dû à Romé de l’Isle².

¹ (1743-1822). Né dans une famille modeste, il étudie les lettres classiques qu’il enseigne de 1760 à 1784. Passionné par les Sciences de la Nature - la botanique, la physique - il découvre la minéralogie à 35 ans, comme auditeur des cours de Daubenton, au Muséum. Partant de l’hypothèse que le clivage fournit la forme géométrique d’un noyau ou “molécule intégrante” pour tous les cristaux, il formule une théorie descriptive de la structure des cristaux dès 1781. Pendant 40 ans, il ne cessera d’approfondir cette théorie, en y introduisant les concepts fondamentaux de maille élémentaire, de réseau périodique, de symétrie. Membre de l’Académie des Sciences dès 1784, puis de nombreuses sociétés savantes étrangères, correspondant avec l’Europe scientifique, reconnu en France comme à l’étranger, l’abbé Haüy restera “toujours modeste, d’une grande civilité, menant une vie très simple”. Le rôle qu’il a joué dans la science de son temps, et en tout premier lieu dans la cristallographie (“Jamais Science n’a été autant l’oeuvre d’un seul homme” a-t-on dit de celui qui est unanimement considéré comme le père de la Minéralogie et de la Cristallographie modernes), l’importance de ses recherches dans l’histoire des idées, font de R.-J. Haüy un chercheur de premier plan, sans doute un peu méconnu.

² (1736-1790). Jean-Baptiste Romé de l’Isle participe comme officier à la guerre des Indes, est fait prisonnier par les Anglais et est rapatrié en 1764 après cinq ans de captivité. Il s’intéresse à la chimie avec Sage, puis sa passion pour la minéralogie se développe et il établit les catalogues de plusieurs collections privées. Suivant les idées de Linné, il pense

Ce sont des minéralogistes qui ont fondé la cristallographie en tant qu'étude des formes extérieures, et ce sont eux aussi qui ont élargi cette définition. R.-J. Haüy, en faisant l'hypothèse que l'existence des formes extérieures n'est qu'une conséquence, spectaculaire, d'un arrangement *régulier périodique* de la matière dans les solides, a précisé la notion d'état cristallin, en la dégagant des considérations de *faciès* polyédriques et en la reportant sur des considérations structurales.

L'étude des propriétés géométriques des arrangements structuraux de la matière compatibles avec les observations macroscopiques faites sur les cristaux a connu au XIX^{ème} siècle un développement remarquable grâce à Haüy, Bravais³, Sohncke, Schöenflies et Fedorov⁴. L'architecture géométrique de l'état cristallin a ainsi été imaginée et décrite en détail bien avant que ne se développent les moyens d'étude de la matière à l'échelle atomique.

Cependant, si l'impulsion a été ainsi donnée, dès le début du XIX^{ème} siècle, pour l'élaboration d'une cristallographie rationnelle, c'est à von Laue⁵ et à W. et L. Bragg⁶ que revient le mérite de la découverte de la diffraction

possible de classer les cristaux d'après leur forme extérieure, idée qui à l'époque suscitait de grandes oppositions. Dans son Essai de Cristallographie de 1772, puis dans sa Cristallographie de 1783, il utilise des notions pertinentes de description, "formes primitives" et "troncatures". Les mesures qu'il fait réaliser par Carangeot, auteur d'un goniomètre qui permet de mesurer précisément les angles dièdres des faces cristallines, l'amènent à énoncer sa "loi de constance des angles". La cristallographie disposait dès lors d'un paramètre quantitatif, l'inclinaison respective des faces, à partir duquel les classifications, d'une part, et les théories de la structure d'autre part, allaient pouvoir se développer et se confronter à la réalité.

³ Auguste Bravais (1811-1863). "D'une très grande curiosité", il a mené des recherches en astronomie, météorologie, physique, botanique et ... cristallographie. Officier de marine, il participe à plusieurs expéditions scientifiques en Algérie puis en Laponie. C'est également pour des observations scientifiques qu'il escalade le Mont-Blanc. Nommé professeur d'astronomie à Lyon (1841), puis de physique à l'École Polytechnique (1845), il entre à l'Académie des Sciences en 1854. Malade, il doit cesser toute activité à partir de 1856. Indépendamment de J.F.C. Hessel et de L. Frankenheim, il démontre l'existence des 32 classes cristallines et des 14 réseaux tridimensionnels qui portent son nom.

⁴ Physicien allemand, Leonhard Sohncke (1842-1897) fut le premier à avoir l'idée de combiner les 14 réseaux de Bravais et les 32 groupes ponctuels, introduisant la notion de groupe spatial. Il en énuméra 65.

C'est essentiellement aux travaux (menés indépendamment) du minéralogiste russe Ievgraf Stepanovitch Fedorov (1853-1919) et du mathématicien allemand Arthur Schöenflies (1853-1928) que l'on doit la classification des cristaux en 230 groupes d'espace vers 1890.

⁵ Max von Laue, physicien allemand connu pour sa méthode de détermination des structures cristallines au moyen de la diffraction des rayons X, 1879-1960. Il établit la théorie de ce phénomène (Prix Nobel en 1914). Diagramme de Laue : figure constituée de points lumineux résultant de la diffraction d'un faisceau de rayons X polychromatique sur un monocristal.

⁶ William Henry Bragg (le père : 1862-1942) et William Lawrence Bragg (le fils : 1890-

des rayons X (1912) et de sa mise en oeuvre (1914) pour les études structurales. Ils ont apporté la preuve expérimentale directe de la *nature périodique de l'arrangement cristallin à l'échelle atomique* et ont ainsi donné une base irréfutable à toutes les considérations géométriques développées avant eux.

Le caractère ordonné, donc périodique, à l'échelle atomique ou moléculaire est le critère caractéristique de l'état cristallin. Rares sont d'ailleurs les solides qui ne satisfont pas à ce critère (verres, corps "amorphes"). L'arrangement ordonné périodique de la matière cristalline à l'échelle microscopique - c'est à dire à l'échelle des dimensions atomiques et moléculaires, soit quelques nanomètres - entraîne le plus souvent des *propriétés de symétrie* qui peuvent être décrites à l'échelle microscopique (on parle de *symétrie de position*, cette idée est formalisée au § 1.3.2 par l'intermédiaire des *groupes d'espace*) et qui se manifestent à l'échelle macroscopique dans les propriétés physiques des cristaux (*symétrie d'orientation*, cf. les *groupes ponctuels* introduits au § 1.2.4).

Les techniques de diffraction des rayons X, d'électrons et de neutrons permettent de déterminer non seulement la forme et les dimensions de la *maille cristalline*, c'est-à-dire du plus petit parallélépipède qui, par simple répétition périodique translatrice, permet de reconstituer tout le cristal⁷, mais aussi l'arrangement précis des atomes à l'intérieur de cette maille⁸. Les

1971) ont reçu le prix Nobel de physique en 1915. La carrière de William Henry Bragg est originale à plus d'un titre. Malgré sa brillante réputation de mathématicien à Cambridge, il n'a aucune formation en physique. Lorsqu'il est nommé professeur de mathématiques et de physique à l'université d'Adélaïde (Australie), en 1886, il doit se former lui-même à cette discipline. Constatant la pénurie de matériel de laboratoire, il décide de fabriquer ses propres appareils, ce qui lui permettra d'obtenir des instruments appropriés à ses recherches. Bien qu'il n'ait songé à se lancer dans la recherche qu'à quarante-deux ans, il obtient très vite la considération du monde scientifique en établissant les lois qui régissent le passage des rayons α à travers la matière. Il rentre en Grande-Bretagne en 1909, est nommé professeur à l'université de Leeds, et étudie alors les rayons γ et β . En 1912, après la publication des premières photographies de la diffraction des rayons X par des cristaux du physicien allemand Max von Laue, il entreprend avec succès de déterminer la structure de différents cristaux. Il construit alors avec son fils le premier spectrographe à haute fréquence. C'est ainsi que William Henry et William Lawrence établissent conjointement les fondements de la radiocristallographie et énoncent une loi dite de Bragg sur la diffraction des rayons X par les corps cristallisés. Leurs travaux leur valurent le prix Nobel de physique en 1915. Cette même année, il est nommé professeur de physique à l'université de Londres. En 1923, il devient professeur résident et directeur des laboratoires de la Royal Institution, poste qu'il conservera jusqu'à sa mort.

⁷ Un cristal donné admet une infinité de mailles cristallines. On verra que cette infinité est en fait une *classe d'équivalence* (cf. Proposition 1.1) dont la nature est à l'origine de toutes les symétries ultérieures du cristal et de ses propriétés. Toutes ces mailles ont cependant un volume identique (cf. (1.20)).

⁸ "La" maille cristalline en tant qu'élément de matière (et pas simplement comme élé-

structures atomiques ainsi établies conduisent à la description des liaisons interatomiques dans la matière solide et à la détermination des structures moléculaires.

En fait, dans un cristal, la périodicité n'est jamais parfaite. Si certaines espèces, telles que le silicium ou la calcite, peuvent être préparées sous forme de monocristaux pratiquement exempts de défauts, la plupart des solides cristallins se présentent sous forme de polycristaux, c'est-à-dire d'agrégats de microcristaux plus ou moins gros (assez fréquemment de l'ordre du micron), orientés au hasard les uns par rapport aux autres. Dans cet état, par effet de moyenne, les propriétés ne présentent plus d'anisotropie. D'autre part, même à l'état monocristallin (ou dans chacun des cristallites formant un solide cristallin) l'arrangement périodique comporte le plus souvent des défauts ; soit des défauts isolés : lacune (un atome manque en un *site* normalement occupé), interstitiel (un atome se trouve en un site anormal) ; soit des défauts étendus : défauts linéiques tels que les *dislocations*, défauts à deux dimensions tels que les fautes d'empilement ou *parois de macles*, défauts à trois dimensions (agitation thermique par exemple).

On se consacre dans la suite à la description de l'architecture des arrangements atomiques cristallins et à l'exposé des conséquences immédiates des propriétés de ces arrangements. On se propose ensuite de replacer ces notions dans un cadre mathématique adapté en utilisant des outils de modélisation récemment développés pour l'étude des transitions de phase.

1.1 Notions fondamentales sur l'état cristallin

1.1.1 Homogénéité d'une phase solide

On dit en général qu'un milieu est *homogène* si deux portions de matière géométriquement égales et de même orientation, prises en deux régions quelconques du milieu, sont physiquement équivalentes.

La notion d'homogénéité ainsi définie peut être appliquée sans ambiguïté à un milieu supposé continu. Il n'est pas possible, en revanche, de l'appliquer sans précisions à un milieu formé d'atomes. Considérons en effet un modèle à deux dimensions très simple constitué par un ensemble infini de sphères identiques posées sur un plan, au contact les unes des autres (fig. 1.1). Définissons une portion V de ce modèle, dont les dimensions sont du même ordre que celle d'une sphère, figurant un atome. En appliquant à cette portion V une translation quelconque, on définit une portion de matière V' , géométriquement égale à V et de même orientation. On voit clairement sur

ment de volume) est appelée *motif*.

la figure qu'on ne peut pas affirmer que V et V' soient physiquement équivalents, et cela quel que soit l'arrangement relatif des sphères (c'est-à-dire des atomes). Examiné à l'échelle atomique, aucun milieu ne peut donc être considéré comme homogène, au sens de la définition ci-dessus.

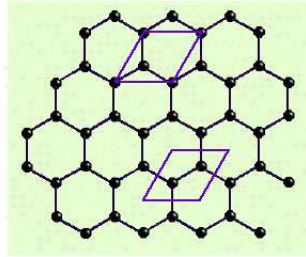


Fig. 1.1: Deux éléments de volume identiques renfermant deux éléments de matière non équivalents dans un milieu cristallin

La définition courante de l'homogénéité n'est en fait acceptable que si le milieu peut être considéré comme continu : c'est le cas d'un solide vu à l'échelle du mètre, du millimètre ou même du micromètre. C'est ainsi que, en ce qui concerne l'élasticité, les propriétés diélectriques, optiques, etc., cette définition est parfaitement utilisable. Il s'agit là de propriétés *macroscopiques* ; les longueurs d'ondes lumineuses, qui sont de l'ordre du micron, sont macroscopiques par rapport aux distances interatomiques : un cristal cubique de sel gemme d'arête $1\mu\text{m}$ pèse $2,17 \cdot 10^{-12}g$ et contient $2,24 \cdot 10^{10}$ groupements atomiques NaCl ; les "portions d'espace" impliquées dans la définition et prises à l'échelle du micromètre comprennent donc un très grand nombre d'atomes, ce qui permet d'assimiler le cristal à un milieu continu.

A l'échelle *microscopique*, c'est-à-dire à l'échelle de l'atome, on sera conduit à donner de la notion d'homogénéité une nouvelle définition, à la fois plus précise et plus restrictive, qui forme la base de la description du milieu cristallin (*cf.* § 1.2.1).

1.1.2 L'anisotropie continue et discontinue

L'étude des propriétés physiques du milieu cristallin à l'échelle macroscopique conduit à la notion d'anisotropie.

Si une propriété peut être représentée en chaque point du milieu par un nombre, elle est dite scalaire. C'est le cas de la masse spécifique. Si le milieu est homogène, ce nombre est par définition le même en tout point du milieu.

Mais il existe d'autres propriétés dont la description complète exige plus que la connaissance d'un scalaire. Ce sont celles qui font intervenir des grandeurs vectorielles ou, plus généralement, tensorielles.

L'aimantation spontanée en tout point d'un cristal ferromagnétique est, par exemple, représentable par un vecteur. Dans un tel milieu et pour cette propriété, toutes les directions de l'espace ne sont donc pas physiquement équivalentes : la direction de l'aimantation se singularise vis-à-vis de toute autre direction, le milieu est anisotrope.

Intéressons-nous, plus généralement, aux lois physiques qui lient entre elles deux grandeurs vectorielles \mathbf{a} et \mathbf{b} , par exemple la loi de la conductibilité électrique qui lie le courant (vecteur) au champ (vecteur), la loi des diélectriques qui lie l'induction au champ, la loi de la conductibilité thermique qui lie le flux de chaleur au gradient de température.

Dans un gaz, un liquide ou un verre, le courant électrique est parallèle au champ appliqué, l'induction parallèle au champ, le flux de chaleur parallèle au gradient de température. Les deux vecteurs sont liés entre eux par un scalaire : $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ (si la loi est linéaire, ce qui est le cas, dans les conditions ordinaires, pour les exemples cités). La valeur du scalaire λ , qui est indépendante de la direction de \mathbf{a} , exprime alors la conductibilité électrique, la constante diélectrique, la conductibilité thermique. Mais, dans un milieu cristallin, il n'en est généralement pas ainsi : d'une part \mathbf{a} n'est pas parallèle à \mathbf{b} , d'autre part la relation entre \mathbf{a} et \mathbf{b} dépend de la direction de \mathbf{a} . La grandeur λ , qui s'exprime alors à l'aide d'un tenseur d'ordre deux, représenté par une matrice 3×3 , concerne une propriété anisotrope de la matière⁹. Ce tenseur est inhérent à la matière et en définit une propriété.

La conductibilité électrique est un exemple d'anisotropie continue : à deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{a}' de même module et très voisins en direction correspondent deux vecteurs \mathbf{b} et \mathbf{b}' très voisins l'un de l'autre en module et en direction (le vecteur \mathbf{b} dépend continûment du vecteur \mathbf{a}). La propriété décrite varie avec la direction, mais sans discontinuité.

Les cristaux possèdent aussi des propriétés anisotropes discontinues. L'exemple le plus frappant est l'existence de faces naturelles planes et d'arêtes (intersection de faces) dans les formes naturelles extérieures des cristaux. Il existe également, dans de nombreuses espèces cristallines (les exemples les plus connus sont le mica, la calcite et le sel gemme), des plans de clivage, c'est-

⁹ Lorsque l'on écrit $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, le scalaire λ désigne en toute rigueur le tenseur identité $\mathbf{1}$ multiplié par λ .

à-dire des directions de plans suivant lesquelles certains cristaux se laissent aisément séparer. Les faces naturelles et les plans de clivage ont des directions rigoureusement déterminées par rapport à la matière cristalline. L'ensemble des directions des normales aux divers plans de clivage observables dans un cristal de sel gemme forme un trièdre orthogonal. Les axes de ce trièdre constituent un ensemble de directions singulières pour ce milieu cristallin (NaCl). Les directions voisines, mêmes infiniment proches, s'en distinguent fondamentalement, en ce qui concerne cette propriété de clivage. Tel est le caractère d'une propriété anisotrope discontinue.

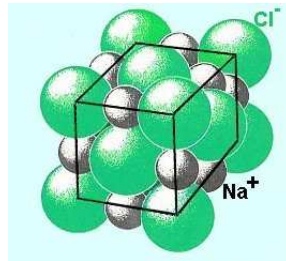


Fig. 1.2: Modélisation d'un cristal de sel gemme

Les propriétés macroscopiques anisotropes sont une conséquence de la structure du cristal à l'échelle microscopique. La relation est particulièrement directe pour les propriétés discontinues anisotropes. Dans le cas déjà évoqué de sphères empilées, les sphères contiguës forment des files rectilignes et les rangées de sphères ont des directions strictement déterminées. Ce sont des directions de cette nature qui se manifesteront, à l'échelle macroscopique, dans le *faciès* polyédrique des cristaux ou dans les phénomènes de clivage.

1.1.3 Symétrie d'orientation et symétrie de position

La symétrie d'une figure ou d'un objet correspond à un concept immédiat. On définit en géométrie élémentaire les transformations de l'espace appelées symétries : symétrie orthogonale par rapport à un plan ("réflexion dans un miroir"); symétrie d'ordre n (n entier) par rapport à un axe, c'est-à-dire rotation d'un angle $2\pi/n$ autour de cet axe ; symétrie par rapport à un point. Si une figure (ou un objet) de l'espace n'est pas modifiée dans son ensemble par une de ces symétries, on dit que cette figure admet le plan, l'axe, le point comme élément de symétrie.

Un ellipsoïde possède par exemple les éléments de symétrie suivants : 3 axes de symétrie d'ordre 2 (axes qui comportent toutes les rotations $n \times 2\pi/2$) suivant les 3 axes principaux, un centre de symétrie, 3 plans de symétrie (ou

miroirs) suivant les 3 plans principaux ; ces éléments sont bien définis, à la fois en orientation et en position.

Considérons maintenant un cristal naturel de sel gemme, NaCl, qui se présente sous la forme d'un cube. Ce cube, considéré comme une figure géométrique, possède les éléments de symétrie suivants : des axes de symétrie d'ordre 3 le long des grandes diagonales, des axes d'ordre 2 passant par les milieux de deux arêtes opposées, des plans de symétrie parallèles aux faces et passant par le centre du cube, des plans de symétrie diagonaux contenant deux arêtes opposées et un centre de symétrie au centre du cube.

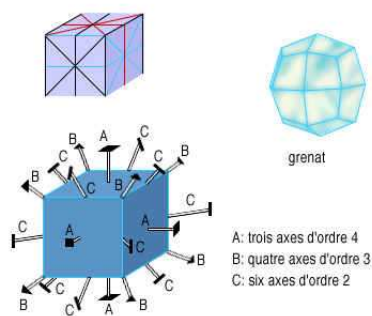


Fig. 1.3: Éléments de symétrie d'un cube

La forme extérieure du cristal étant une des manifestations de la structure du milieu cristallin, on est naturellement tenté d'attribuer au milieu cristallin lui-même la symétrie de la figure constituée par ses formes extérieures¹⁰.

Reprenons l'exemple du NaCl. Il se trouve que, dans ce cristal, les directions des faces du cube sont aussi celles d'un clivage parfait. On peut donc, par simple choc, faire subir au cube des ablations et réduire l'échantillon à un parallélépipède rectangle dont chacune des paires de faces est parallèle à une paire de faces du cube, mais dont les longueurs d'arêtes sont entre elles dans un rapport quelconque. Si, dans ces opérations, les positions des

¹⁰ Cette tentation doit cependant être fermement tenue en bride puisque certains cristaux cubiques (au sens des *systèmes cristallins*, cf. le Corollaire 1.4) se présentent sous la forme assez déroutante de dodécaèdres pentagonaux (un cristal ne peut exhiber une symétrie d'ordre cinq que si celle-ci n'est pas régulière (cf. (1.38)) ; l'exemple le plus répandu est celui des cristaux de pyrite et est illustré sur la figure 1.4). Les traités de cristallographie et de minéralogie décrivent en détail toutes les formes extérieures possibles. Elles sont au nombre de 47. La terminologie associée est la suivante : pinacoïde (de pinax, planche) veut dire deux plans parallèles, rhomboèdre (de rhombe, losange), un parallélépipède à faces losanges, trapézoèdre (de trapézoïde, quadrilatère quelconque) veut dire un solide dont les faces sont des trapézoïdes et pentagonohexaoctaèdre, un solide à (6×8) 48 faces qui sont des pentagones).

faces extérieures ont changé, leur orientation est restée identique. C'est donc à l'orientation qu'il faut s'attacher pour définir la symétrie macroscopique d'un milieu.



Fig. 1.4: Cristaux de pyrite

Ce fait avait d'ailleurs été constaté dès les débuts du développement de la cristallographie. Énoncé par Sténon¹¹, Romé de l'Isle en a gardé ultérieurement la paternité en affirmant que les angles dièdres que font entre elles les faces d'un cristal sont constants pour une même espèce (loi de constance des angles). Mais, alors que les angles entre faces naturelles ou plans de clivage sont rigoureusement constants, le développement relatif de ces faces peut varier largement d'un échantillon à un autre appartenant à la même espèce. Par définition, on appelle *symétrie macroscopique* des faciès toute symétrie de cette figure : c'est une *symétrie d'orientation*. Cette définition de la symétrie d'orientation est applicable quelle que soit la propriété envisagée : il suffit de considérer le faisceau des directions suivant lesquelles la propriété se retrouve identique. On appelle symétrie d'orientation du milieu la symétrie commune à toutes ces propriétés. Cette symétrie d'orientation est aussi appelée *symétrie ponctuelle* (symétrie de la figure représentative des demi-droites issues d'un même point).

La symétrie d'orientation n'est que le reflet d'une symétrie plus fine, à l'échelle microscopique (atomique) que l'on se propose maintenant de définir : la *symétrie de position* ou encore symétrie de recouvrement. Considérons le

¹¹ Personnage haut en couleur, le danois Niels Steensen (1638-1687) est plus connu sous son nom latin de Nicolaus Stenon (ou Steno). À la fois médecin, géologue et naturaliste de valeur, on lui doit, outre des découvertes en Anatomie, des notions exactes sur les causes auxquelles sont attribuables les dépôts géologiques constituant la croûte terrestre. En Minéralogie, il ne fut pas moins perspicace. Il démontre en 1669 le principe de l'invariabilité des angles dièdres des cristaux. Si une découverte de cette importance passa inaperçue, c'est parce que Sténon, partagé entre une multitude d'occupations diverses, ne prit la peine de la vérifier que par l'examen de trois espèces seulement de minéraux. Il ne poursuivit pas plus loin ses expériences à ce sujet. Après avoir séjourné quelques années en Italie, il entra dans les ordres, devint prêtre, puis évêque *in partibus*. Finalement nommé par le Pape vicaire apostolique dans l'Europe septentrionale, il laissa à un autre homme d'église le soin de continuer ses idées précurseuses.

modèle de la figure 1.5. Chacune des billes est régulièrement entourée par six autres dont les centres forment un hexagone régulier.

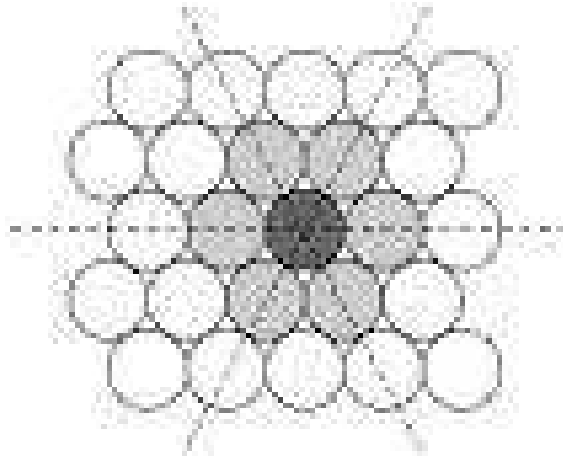


Fig. 1.5: Arrangement compact de sphères identiques sur un plan

La figure, supposée illimitée, de cet arrangement de billes présente des symétries évidentes : par exemple, par le centre de chaque bille passe un axe d'ordre 6. Ces éléments de symétrie sont définis à la fois en orientation et en position. On peut ainsi définir des opérations dites de symétrie de position, ou opérations de recouvrement dans un cristal : ce sont les opérations qui ramènent l'arrangement atomique en coïncidence avec lui-même (en recouvrement sur lui-même). Ces opérations peuvent être de simples translations (par exemple, dans le modèle de la figure 1.5, les translations qui joignent les centres de deux sphères quelconques). Elles peuvent être des déplacements comportant à la fois une translation et un changement d'orientation. On peut aussi définir des opérations de recouvrement inverses, pour lesquels l'édifice atomique est ramené en coïncidence avec lui-même par une inversion (symétrie par rapport à un point, éventuellement accompagné d'un déplacement).

L'un des premiers succès de la cristallographie a consisté dans le dénombrement des opérations de recouvrement effectivement possibles dans les cristaux et de leurs combinaisons¹².

La relation entre symétrie de position et symétrie d'orientation est simple : on passe de l'une à l'autre en passant du point de vue microscopique au point de vue macroscopique. Celui-ci ne retient que les changements d'orientation, puisque la part translatrice des opérations de symétrie de position est à l'échelle de l'atome, donc imperceptible du point de vue macroscopique.

¹² Se référer en particulier au Théorème 1.9.

L'ensemble des opérations de symétrie de position d'un milieu cristallin forme un *groupe* (infini) au sens mathématique du terme¹³. Il en est de même de l'ensemble des opérations de symétrie d'orientation (groupe fini quant à lui)¹⁴. En termes de théorie des groupes, on peut dire que le groupe d'orientation est quotient du groupe de position, le facteur étant le groupe des translations. On reviendra sur ces notions en utilisant le langage de l'algèbre au § 1.2.3.

1.2 Le réseau cristallin

1.2.1 Homogénéité microscopique et périodicité

La définition banale de l'homogénéité est inapplicable, on l'a vu au § 1.1.1, aux milieux considérés à l'échelle atomique. Diverses approches sont possibles pour l'adaptation de cette notion. Une conception statistique conduit à la description des liquides (statistique dans le temps) ou des substances amorphes (statistique dans l'espace) : on dira alors qu'un milieu est homogène si deux portions de matière, géométriquement égales et de même orientation, prises en deux régions quelconques du milieu ont, statistiquement, les mêmes propriétés.

Mais, si l'on renonce à ces concessions statistiques, on doit définir l'homogénéité à l'échelle microscopique à partir de bases nouvelles. C'est ce que fit Bravais avec le postulat suivant, qui constitue aussi une définition de l'homogénéité dans un milieu cristallin :

Postulat de Bravais : étant donné un point P quelconque d'un milieu cristallin, il existe dans ce milieu une infinité, illimitée dans les trois directions de l'espace, de points autour desquels l'arrangement atomique est le même qu'autour de P , avec la même orientation.

À tout point P du milieu cristallin, ce postulat (ou cette définition) associe donc un ensemble infini de points dits *congruents*, autour desquels le "paysage atomique" est le même qu'autour de P , avec la même orientation.

On remarquera la différence fondamentale des points de vue adoptés pour la définition ordinaire de l'homogénéité qui compare entre eux des volumes de matière, et pour la définition de Bravais qui compare des répartitions de matière autour de points ; la première est bien adaptée à la description macroscopique d'un milieu, la seconde à sa description microscopique.

Il est fondamental de voir que cette définition implique que l'ensemble des points congruents à P forme un *réseau spatial périodique*. Soient en effet P_0 et

¹³ On parle de *groupe spatial* (cf. (1.49)).

¹⁴ Ce type de groupe est appelé *groupe ponctuel cristallographique* (cf. § 1.2.4 et le Théorème 1.3).

P_1 deux points de l'ensemble tels qu'ils n'existe pas d'autre point congruent sur le segment $[P_0, P_1]$. Le point P_2 tel que $\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{P_0 P_1} = \vec{a}_1$ fait partie de l'ensemble puisque P_1 est congruent à P_0 (on voit de P_1 le même paysage que de P_0) ; la droite (P_0, P_1) porte ainsi un nombre infini de points congruents à P_0 , équidistants entre eux de la longueur $a_1 = |\vec{a}_1|$. En vertu du postulat de Bravais, il existe nécessairement des points de l'ensemble congruent (illimité dans les trois directions de l'espace) en dehors de la droite (P_0, P_1) . En répétant le raisonnement ci-dessus, on démontre donc que l'ensemble des points congruents à P_0 forme un réseau tridimensionnel qui peut être construit à partir de trois vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ en appliquant à l'un quelconque de ces points l'ensemble des translations :

$$\mathbf{n}_{uvw} := u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}, \quad (1.1)$$

u, v et w prenant toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles.

L'ensemble des points congruents à un point P quelconque du cristal forme donc un *réseau* spatial périodique $\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (cf. la relation (1.18) pour la définition mathématique des réseaux) ; on dit aussi que ses points sont situés aux *noeuds* du réseau dont l'origine est P . Considérons, dans le cristal, un point P' non congruent à P . L'ensemble des points congruents à P' forme un réseau \mathcal{R}' qui est identique à \mathcal{R} (en effet, de chaque noeud de \mathcal{R} , on doit voir le même paysage et, en particulier, le même réseau de points congruents à P') et s'en déduit simplement par la translation $\overrightarrow{PP'}$.

Le réseau est donc une propriété inhérente au cristal. A chaque espèce cristalline correspond un réseau dont la taille et la forme sont bien déterminées. L'ensemble des vecteurs \mathbf{n}_{uvw} définis par (1.1), c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs du réseau, permet d'associer à un point quelconque du milieu cristallin l'ensemble de ses congruents. Mais ce même ensemble de vecteurs peut être considéré aussi comme un ensemble de translations qu'on peut se proposer d'appliquer au cristal rigide dans son ensemble. Du postulat de Bravais résulte que ces déplacements ramènent l'édifice atomique qui constitue le cristal en coïncidence avec lui-même. On voit donc la double signification du réseau cristallin :

1. il définit l'ensemble des points congruents à un point P du milieu, ou encore l'ensemble des translations qu'on peut faire subir à un observateur microscopique, placé d'abord en P , pour qu'il retrouve toujours autour de lui le même paysage atomique qu'en P , orienté de la même façon ;
2. il définit corrélativement l'ensemble des translations qui ramènent l'édifice cristallin en coïncidence avec lui-même ; ces translations consti-

tuent une classe spéciale d'opérations de recouvrement (opérations de symétrie de position) pour le milieu cristallin : ce sont les opérations qui ne comportent ni changement d'orientation, ni inversion ; dans le groupe des opérations de symétrie de position, les translations du réseau forment un sous-groupe invariant.

1.2.2 Préliminaires à la modélisation mathématique des cristaux

On rappelle ici sommairement quelques définitions et résultats de théorie des groupes et d'algèbre linéaire. Pour plus de détail, on peut consulter Godement (1969) et Weigel (1972) par exemple. Pour des approches plus classiques de la cristallographie, on peut, entre beaucoup d'autres, consulter les ouvrages de Bouasse (1929) et de Sirotine & Chaskolskaïa (1984). Citons aussi les ouvrages de Coxeter (1989) et Yale (1968) qui offre une autre approche de la cristallographie mathématique.

Notions élémentaires de théorie des groupes. Conjugaison, actions de groupe et symétrie

En général, les groupes sont dotés d'une opération qui prendra la forme d'un produit. Ce produit n'est en général pas commutatif, et son élément neutre est noté 1. Lorsque le groupe est doté d'une opération commutative, on dit que le groupe lui-même est commutatif et l'opération est alors souvent indiquée par une somme, dont l'élément neutre est 0.

Soient G un groupe et X un sous-ensemble de G . Le sous-groupe de G *généralisé* par X est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant X . Si ce sous-groupe est en fait G lui-même, alors X est un ensemble de *générateurs* de G . Dans ce cas, les éléments de G peuvent tous être obtenus en multipliant convenablement entre eux les éléments de X . Un groupe G généralisé par un unique élément g distinct de l'élément neutre est dit *cyclique*, et le nombre d'éléments que contient G est la *période* ou *l'ordre* de g . En d'autres termes, si $g \in G$ est de période p alors $g^p = 1$.

Considérons maintenant deux éléments quelconque h et g du groupe G . Le *conjugué* de h par g est l'élément $ghg^{-1} \in G$. L'ensemble de tous les conjugués de h est sa *classe de conjugaison* ou *classe d'équivalence*. De manière analogue, pour tout sous-groupe H de G et tout élément $g \in G$, le conjugué de H par g est le sous groupe

$$gHg^{-1} := \{ghg^{-1} : h \in H\}, \quad (1.2)$$

qui est d'ailleurs isomorphe à H . La famille de tous les sous-groupes gHg^{-1} qui sont conjugués à H dans G est appelée la classe de conjugaison ou d'équivalence de H . Cette classe d'équivalence est notée $\{H\}$ et on dit que H est un *représentant* de sa classe d'équivalence. Deux sous-groupes isomorphes ne sont cependant pas nécessairement conjugués ; de plus, les conjugués gHg^{-1} de H peuvent très bien ne pas être tous distincts.

Notons que si la classe d'équivalence de G contient celle de H on considérera souvent, par abus de langage, que G contient H même si H n'est pas un sous-groupe de G . Cet abus signifie en fait que G contient un conjugué de H .

En général, le réflexe d'associer à un objet *une certaine symétrie* peut se traduire mathématiquement par le fait que cet objet est *invariant* sous *l'action* d'un groupe convenable. Afin de formaliser cette idée, si \mathbf{N} est une structure mathématique dont l'ensemble des automorphismes est noté $\text{Aut } \mathbf{N}$, une *action* A d'un groupe G sur \mathbf{N} est un homéomorphisme de groupe $A : G \rightarrow \text{Aut } \mathbf{N}$. Cela signifie qu'à chaque élément $g \in G$ correspond une bijection de $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ qui transforme (*g agit sur*) les éléments de \mathbf{N} de telle sorte qu'au produit de deux éléments de G soit associée la composition des bijections correspondantes. L'image de $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ par l'automorphisme $A(g)$ est noté simplement $g(\mathbf{n})$. La *G -orbite* $G(\mathbf{n})$ de \mathbf{n} rassemble toutes les images de \mathbf{n} sous l'action des éléments de G . Cela et l'image $g(\mathbf{M})$ d'un sous-ensemble $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ sont données par

$$G(\mathbf{n}) := \{g(\mathbf{n}) : g \in G\}, \quad g(\mathbf{M}) := \{g(\mathbf{n}) : \mathbf{n} \in \mathbf{M}\}. \quad (1.3)$$

Les éléments de G qui laissent \mathbf{n} *invariant* forment un sous-groupe de G appelé le *stabilisateur* de \mathbf{n} ; on l'appelle aussi parfois le *groupe de symétrie* de \mathbf{n} . Quant à la stabilisation d'un sous-ensemble \mathbf{M} de \mathbf{N} , elle peut se réaliser de deux manières : on peut soit considérer les éléments de G qui stabilise chaque élément de \mathbf{M} et le sous-groupe

$$\{g \in G : g(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \text{ pour tout } \mathbf{n} \in \mathbf{M}\} \quad (1.4)$$

de G est appelé le *stabilisateur* de \mathbf{M} , soit considérer les éléments de G qui laisse \mathbf{M} globalement invariant et le sous-groupe

$$\{g \in G : g(\mathbf{M}) = \mathbf{M}\} \quad (1.5)$$

est souvent appelé le *groupe de symétrie* de \mathbf{M} .

Lorsque \mathbf{N} est le groupe G lui-même, un exemple naturel d'action de G sur lui-même est donné par la conjugaison introduite *supra*. Dans ce cas, la

G -orbite de h est la classe d'équivalence de h et le stabilisateur de h est le groupe

$$C_G(h) := \{g \in G : ghg^{-1} = h\} \quad (1.6)$$

appelé *centralisateur* de h . Quant aux deux sous-groupes stabilisant H au sens de (1.4) et (1.5), il s'agit respectivement du *centralisateur* $C_G(H)$ et du *normalisateur* $N_G(H)$ définis par :

$$C_G(H) := \cap_{h \in H} C_G(h) = \{g \in G : gh = hg \text{ pour tout } h \in H\}, \quad (1.7)$$

$$N_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}. \quad (1.8)$$

Notons enfin qu'un sous-ensemble d'un espace métrique \mathbf{N} est dit *discret* si son intersection avec tout sous-ensemble borné de \mathbf{N} est un ensemble fini. Un groupe G (agissant sur \mathbf{N}) est *discret* si pour tout $n \in \mathbf{N}$, la G -orbite de n est un sous-ensemble discret de \mathbf{N} .

Un exemple fondamental de groupe (arithmétique) discret pour l'étude des symétries cristallines est $GL(3, \mathbb{Z})$, le groupe infini des matrices 3×3 inversibles à composantes entières. Les éléments m de $GL(3, \mathbb{Z})$ ont nécessairement un déterminant égal à ± 1 puisque l'inverse d'une matrice entière est entière si et seulement si son déterminant vaut ± 1 .

Transformations linéaires et orthogonales. Extension aux transformations anti-orthogonales et aux symétries spatio-temporelles

Jusqu'au § 2.5 et l'introduction des *tenseurs* d'élasticité¹⁵, on entendra par tenseur une *application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3* , c'est-à-dire un élément de l'espace noté Lin . Les tenseurs (respectivement vecteurs) seront notés en majuscules (respectivement minuscules) grasses, à l'exception de l'identité $\mathbf{1}$ et du tenseur nul $\mathbf{0}$.

On associera souvent à un tenseur quelconque \mathbf{A} la matrice (réelle) A qui le représente dans une base donnée. Toute représentation de ce type est un isomorphisme entre l'algèbre des tenseurs et les matrices réelles. Cependant, étant donné que les propriétés de matrices distinctes mais représentant la même application linéaire dans des bases différentes auront un intérêt pour nous, on fera ostensiblement la différence entre les applications linéaires et les matrices. Cette distinction nécessaire pour la modélisation et l'étude des

¹⁵ Un tenseur d'élasticité peut être considéré comme une application linéaire de \mathbb{R}^6 dans \mathbb{R}^6 , un tenseur piézoélectrique (introduit au § 2.6) comme une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^6 . Ces tenseurs seront notés à l'aide de la police Sans Serif.

symétries cristallines n'aura plus lieu d'être au Chapitre 3 où l'on étudiera les *symétries des tenseurs* en se fixant une base d'étude.

L'ensemble $\text{Aut } \mathbb{R}^3$ de tous les tenseurs inversibles est noté Aut pour simplifier¹⁶. Il contient le sous-espace (à six dimensions) des tenseurs symétriques ainsi que le cône convexe des tenseurs symétriques et définis positifs, notés respectivement Sym et $\text{Sym}^>$. On rappelle que Aut muni de la multiplication (non commutative) forme un groupe dont l'élément unité est $\mathbf{1}$. De plus, Sym n'est pas un sous-groupe multiplicatif de Aut mais simplement un sous-espace vectoriel.

D'une manière générale, si P désigne un ensemble quelconque de tenseurs ou de matrices, P^+ sera le sous-ensemble de tous les éléments de P dont le déterminant est positif.

Si A est une matrice, $A = (A_{ab})$ ¹⁷ indique que ces composantes sont les nombres $A_{ab} \in \mathbb{R}$. L'exposant t indique l'opération de transposition de toute matrice ou tenseur, la trace est notée "tr" et le déterminant "det".

L'espace des matrices symétriques (ou *formes quadratiques*) de \mathbb{R}^3 est noté \mathcal{Q}_3 . Le sous-ensemble constitué de toutes les matrices réelles 3×3 symétriques et définies positives forme un cône convexe noté $\mathcal{Q}_3^>$. Les espaces Sym et \mathcal{Q}_3 sont clairement isomorphes, tout comme $\text{Sym}^>$ et $\mathcal{Q}_3^>$.

On note $\mathcal{O}(3)$ l'ensemble des tenseurs orthogonaux (*i.e.* des isométries linéaires) qui par définition préservent le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 . Tout élément \mathbf{Q} de $\mathcal{O}(3)$ satisfait

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^t = \mathbf{1} = \mathbf{Q}^t\mathbf{Q}. \quad (1.9)$$

Les éléments de $\mathcal{O}(3)^+$ (noté $\mathcal{SO}(3)$ - pour *special orthogonal group* - dans la suite) sont appelés *rotations*. Chaque rotation possède un sous-espace propre de dimension un pour la valeur propre 1, dénommé *axe de rotation*. Les deux autres valeurs propres sont $\exp(\pm i\omega)$, où ω est l'*angle de rotation* en radians. Si \mathbf{v} est un vecteur parallèle à l'axe de rotation, la rotation dans le sens direct d'angle ω et d'axe orienté \mathbf{v} est noté

$$\mathbf{Q}(\mathbf{v}, \omega). \quad (1.10)$$

Le plan orthogonal à \mathbf{v} est un sous-espace invariant de $\mathbf{Q}(\mathbf{v}, \omega)$. Dans une base orthonormée dont le troisième axe est colinéaire à \mathbf{v} , $\mathbf{Q}(\mathbf{v}, \omega)$ est représentée par la matrice

¹⁶ Aut est isomorphe à l'algèbre $GL(3, \mathbb{R})$ des matrices réelles 3×3 inversibles.

¹⁷ Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on notera aussi parfois les matrices et leurs composantes $m = (m_{ab})$, voire $F = (f_{ab})$.

$$\begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Les matrices représentant les tenseurs orthogonaux dans une base donnée sont dites *matrices orthogonales*. Leur groupe est noté $\mathbf{O}(\mathbf{3})$ et $\mathbf{SO}(\mathbf{3})$ est la notation usuelle de $\mathbf{O}(\mathbf{3})^+$. On reviendra sur quelques unes des propriétés de ces groupes au Chapitre 3.

Tous ces outils sont bien adaptés à l'étude des symétries d'un grand nombre d'objets réels ou de leurs représentants mathématiques. Cependant, certains phénomènes physiques, et le magnétisme est celui qui nous intéressera plus particulièrement, ne livrent qu'une partie de leurs propriétés s'ils ne sont étudiés que sous l'angle des transformations de $\mathcal{O}(3)$, c'est-à-dire d'une manière exclusivement géométrique. Dans le cas des cristaux présentant la particularité de posséder un moment magnétique, il convient en effet de considérer, en plus des transformations orthogonales introduites ci-dessus, une opération qui sera vue comme inversant le signe du moment d'un cristal lorsqu'elle opère sur lui. Cette opération est le plus souvent notée \mathfrak{R} et peut être considérée comme inversant le cours du temps (*cf.* Landau & Lifchits (1969), Laughlin *et al.* (2000), Sirotine & Chaskolskaïa (1984) et Sivardière, 1995).

La prise en compte de ce degré de liberté interne revient à considérer les cristaux magnétiques comme *bicolores* (*cf.* Shubnikov, 1964), chaque couleur représentant le signe du moment.

On introduit donc le groupe orthogonal élargi rassemblant toutes les transformations orthogonales et anti-orthogonales (c'est à dire associée à un renversement du temps) :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^\mu(3) &:= \mathcal{O}(3) \cup \mathfrak{R} \mathcal{O}(3) \\ &\approx \mathcal{O}(3) \times \{\pm 1\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Un élément de $\mathcal{O}^\mu(3)$ est donc un couple (\mathbf{Q}, δ) , où \mathbf{Q} est une transformation orthogonale associée (si $\delta = -1$) ou non (si $\delta = 1$) à un renversement de l'axe du temps. Dans le cas où $\delta = -1$, on parle de transformation anti-orthogonale.

Si (\mathbf{Q}, δ) et (\mathbf{R}, θ) sont deux éléments $\mathcal{O}^\mu(3)$, la loi de composition est donnée par

$$(\mathbf{Q}, \delta)(\mathbf{R}, \theta) = (\mathbf{QR}, \delta\theta). \quad (1.13)$$

Les matrices représentant les tenseurs anti-orthogonaux dans une base donnée sont dites *matrices anti-orthogonales*, leur groupe est noté $\mathbf{O}^\mu(\mathbf{3})$ ¹⁸.

Transformations affines

On note \mathbb{A}^3 l'espace affine réel à trois dimensions dont les points sont notés P, Q, \dots . Son espace vectoriel associé est celui des *translations* de \mathbb{R}^3 . Le groupe des transformations affines inversibles de \mathbb{A}^3 est noté $\text{Aff}(3)$. Son sous-groupe constitué des *isométries* affines préservant la structure affine Euclidienne de \mathbb{A}^3 est le *groupe Euclidien* noté $E(3)$.

Pour les points de \mathbb{A}^3 et les translations de \mathbb{R}^3 , on utilisera la notation dite de Grassman¹⁹ : on écrira par exemple $\mathbf{v} = P - Q$, $P = Q + \mathbf{v}$, ou encore $\mathbf{v} = QP$, indiquant par là que le point P s'obtient par translation de Q d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. La plupart du temps, on fixe une origine O dans \mathbb{A}^3 et remplace le point P de \mathbb{A}^3 par son *vecteur position* $\mathbf{x} = OP$.

Une fois qu'une origine O est fixée, il est connu que tout élément $a \in \text{Aff}(3)$, et donc en particulier toute isométrie $e \in E(3)$, peut être représenté de manière unique par le biais d'un couple (\mathbf{t}, \mathbf{A}) où $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{A} \in \text{Lin}$ (ou $\mathbf{t} \in \mathcal{O}(3)$ dans le cas des isométries; en fait, \mathbf{A} peut aussi bien être vu comme un couple $(\mathbf{Q}, \lambda) \in \mathcal{O}(3) \times \mathbb{R}^+$, le scalaire λ étant associé à la dilatation, ainsi, lorsque $\lambda = 1$, le couple peut être considéré comme un élément de $\mathcal{O}(3)$). Alors, \mathbf{t} et \mathbf{A} sont définis par

$$\mathbf{t} := Oa(O), \quad \mathbf{A}(OP) := a(O)a(P). \quad (1.14)$$

L'action d'une transformation affine a est alors donnée par :

$$\bar{P} := a(P) = \mathbf{A}(OP) + \mathbf{t} + O. \quad (1.15)$$

De plus, le produit de transformations affines ainsi que la loi d'inversion sont donnés par :

¹⁸ L'ensemble des tenseurs anti-orthogonaux dont le déterminant est positif est noté $\mathcal{SO}^\mu(3)$ et son homologue matriciel est $\mathbf{SO}^\mu(\mathbf{3})$.

¹⁹ Hermann Günter Grassmann, mathématicien prussien, 1809-1877. Il travailla à Stettin, sa ville de naissance (maintenant Szczecin, en Pologne). Il est essentiellement connu pour son développement du calcul vectoriel et est l'inventeur de ce qu'on appelle aujourd'hui les algèbres extérieures. Il écrivit sur de nombreux sujets comme l'électricité, l'acoustique, la linguistique, la botanique et les couleurs. À l'âge de 53 ans, déçu du peu d'écho que recevaient ses idées en mathématiques, il se consacra à l'étude du Sanscrit. Son dictionnaire de Sanscrit est encore de nos jours largement utilisé.

$$\begin{aligned} a \approx (\mathbf{t}, \mathbf{A}), a' \approx (\mathbf{t}', \mathbf{A}') \Rightarrow aa' &\approx (\mathbf{t} + \mathbf{A}(\mathbf{t}'), \mathbf{A}\mathbf{A}'), \text{ et} \\ a^{-1} &\approx (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{t}, \mathbf{A}^{-1}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Il faut bien noter que la représentation d'une transformation affine a par un couple (\mathbf{t}, \mathbf{A}) dépend du point O . Si l'on remplace O par \tilde{O} , l'élément $a \in \text{Aff}(3)$ est associé à un nouveau couple $(\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{A}})$ pour lequel la relation (1.15) est vérifiée. On a en fait

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} + (\mathbf{A} - \mathbf{1})O\tilde{O} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}. \quad (1.17)$$

D'après (1.16) le *sous-groupe des translations* $T(3)$ de $E(3)$ rassemblant tous les couples $(\mathbf{t}, \mathbf{1})_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3}$ est un sous-groupe maximal commutatif de $E(3)$ qui est un espace vectoriel isomorphe à \mathbb{R}^3 . A l'inverse des éléments courants de $\text{Aff}(3)$, la représentation des translations de $\text{Aff}(3)$ en couples de la forme $(\mathbf{t}, \mathbf{1})$ ne dépend pas du choix de l'origine O .

Notons enfin que l'inversion $(\mathbf{O}, -\mathbf{1})$ ne commute en général pas avec les autres éléments de $\text{Aff}(3)$.

1.2.3 Propriétés élémentaires et symétrie globale des réseaux.

On adopte à partir de maintenant le formalisme développé par Pitteri & Zanzotto (2003).

Comme il a été dit au § 1.1.3, un réseau est essentiellement un ensemble de vecteurs de \mathbb{R}^3 , on le définit par²⁰ :

$$\mathcal{R}(\mathbf{e}_a) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = M^a \mathbf{e}_a, a = 1, 2, 3, M^a \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.18)$$

Les trois vecteurs linéairement indépendants \mathbf{e}_a , $a = 1, 2, 3$, de \mathbb{R}^3 sont appelés *vecteurs de base*.

Afin d'alléger les notations, on écrira simplement que \mathbf{e}_a est la base du réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$.

On signale dès à présent que par "réseau", on entend en fait un "réseau simple" ("simple lattice"), terminologie qui prendra son sens lorsque l'on définira les cristaux en tant que "multi-réseau". S'il n'y a pas de risque de confusion, le réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ sera simplement noté \mathcal{R} .

Il est utile d'associer à la base \mathbf{e}_a sa *métrique* C par :

²⁰ A partir de maintenant et sauf mention du contraire, on applique la convention de sommation sur les indices répétés

$$C_{ab} := \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b, \quad C = (C_{ab}) \in \mathcal{Q}_3^>. \quad (1.19)$$

Le parallélépipède $\mathcal{P}(\mathbf{e}_a) = \{\lambda^a \mathbf{e}_a, 0 \leq \lambda^a \leq 1\}$ est une *cellule de base* de \mathcal{R} dont le volume est donné par

$$(\text{vol } \mathcal{P}(\mathbf{e}_a))^2 = \det C. \quad (1.20)$$

En cristallographie, l'étude des symétries des réseaux se résume schématiquement à la question suivante :

(a) Étant donné un réseau \mathcal{R} , quelles sont les transformations orthogonales \mathbf{Q} qui laissent \mathcal{R} invariant, *i.e.* telles que $\mathbf{Q}\mathcal{R} = \mathcal{R}$?

Il s'agit par conséquent de trouver, d'après (1.18) et puisque \mathbf{Q} est linéaire, toutes les transformations \mathbf{Q} telles que

$$\mathcal{R}(\mathbf{Q}\mathbf{e}_a) = \mathcal{R}(\mathbf{e}_a), \quad (1.21)$$

c'est-à-dire telles que les vecteurs *orthogonalement transformés* $\mathbf{Q}\mathbf{e}_a$ forment une base du même réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$. Il s'agit en fait d'un cas particulier d'un problème plus général que l'on peut énoncer comme suit :

(b) Etant donné un réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$, trouver tous les vecteurs *linéairement transformés* $\mathbf{H}\mathbf{e}_a$, où $\mathbf{H} \in \text{Aut}$, qui génèrent ce même réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$.

On se propose dans un premier temps de répondre à la question (b) et ensuite de retourner vers (a).

Cachée à l'intérieur même de sa formulation, le problème (b) trouve son origine dans le fait qu'*un réseau donné admet une infinité de bases différentes*. En d'autres termes, \mathcal{R} ne détermine pas de façon unique sa base, ou sa cellule de base. La figure 1.6 illustre en deux dimensions cette absence d'unicité, totalement décrite par le résultat suivant :

Proposition 1.1: Un réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ détermine sa base à une transformation de $GL(3, \mathbb{Z})$ près :

$$\mathcal{R}(m_{ab}\mathbf{e}_b) = \mathcal{R}(\mathbf{e}_a) \iff m = (m_{ab}) \in GL(3, \mathbb{Z}). \quad (1.22)$$

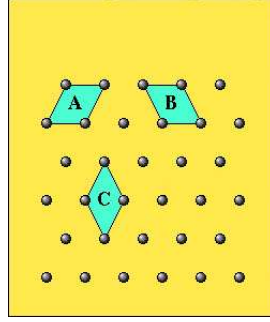


Fig. 1.6: Exemple de trois mailles élémentaires différentes à l'origine d'un même réseau

On rappelle que $GL(3, \mathbb{Z})$ représente le groupe infini et discret de toutes les matrices 3×3 inversibles et à composantes entières (par conséquent, dont le déterminant vaut ± 1). On dit que ces matrices sont *unimodulaires*). Ce groupe est d'une importance fondamentale en cristallographie et on le rencontrera de nombreuses fois par la suite.

Démonstration:

D'après (1.18) tout triplet \mathbf{v}_a de vecteurs linéairement indépendants dans $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ a la forme suivante :

$$\mathbf{v}_a = v_{ab}\mathbf{e}_b, \quad v_{ab} \in \mathbb{Z}, \quad \det(v_{ab}) \neq 0. \quad (1.23)$$

En général, trois tels vecteurs \mathbf{v}_a génèrent un *sous-réseau* de $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$. Tout autre triplet de vecteurs $\bar{\mathbf{e}}_a$ qui génère $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ satisfait nécessairement (1.23) pour un choix (m_{ab}) de coefficients entiers (v_{ab}) constituant une matrice inversible. Pour que les $\bar{\mathbf{e}}_a$ génère \mathcal{R} , il doit aussi être possible d'exprimer les vecteurs \mathbf{e}_a comme combinaison entière des $\bar{\mathbf{e}}_a$; les coefficients de la matrice de transformations sont alors donnés par m^{-1} .

En conclusion, $\bar{\mathbf{e}}_a$ est une autre base de $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ si et seulement si elle est reliée à la base de départ par une matrice unimodulaire entière :

$$\bar{\mathbf{e}}_a = m_{ab}\mathbf{e}_b \text{ avec } m \in GL(3, \mathbb{Z}). \quad (1.24)$$

De façon équivalente on a (1.22). □

Le changement de base (1.24) à l'intérieur d'un réseau induit une action naturelle du groupe de symétrie global $GL(3, \mathbb{Z})$ sur $\mathcal{Q}_3^>$ donnée par :

$$C \mapsto \bar{C} = m^t C m, \quad m \in GL(3, \mathbb{Z}). \quad (1.25)$$

On note alors que, d'après (1.20), (1.22) et (1.25), tout triplet de vecteurs $\bar{\mathbf{e}}_a$ du réseau \mathcal{R} est une base de \mathcal{R} si et seulement si le volume de la cellule $\mathcal{P}(\bar{\mathbf{e}}_a)$ est identique à celui de $\mathcal{P}(\mathbf{e}_a)$, ce qui permet d'énoncer le

Corollaire 1.2: Toutes les cellules de base d'un réseau ont le même volume.

D'après (1.24), on peut répondre au problème (b) posé plus haut en définissant le *groupe de symétrie global* $G(\mathbf{e}_a)$ d'un réseau donné $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ par :

$$G(\mathbf{e}_a) := \{\mathbf{H} \in \text{Aut} : \mathcal{R}(\mathbf{H}\mathbf{e}_a) = \mathcal{R}(\mathbf{e}_a)\}. \quad (1.26)$$

D'après la Proposition 1.1, ce groupe s'écrit aussi

$$\begin{aligned} G(\mathbf{e}_a) &= \{\mathbf{H} \in \text{Aut} : \mathbf{H}\mathbf{e}_a = m_{ab}\mathbf{e}_b, m \in GL(3, \mathbb{Z})\}, \\ &= \{\mathbf{H} \in \text{Aut} : \mathbf{H} = m_{ab}\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b, m \in GL(3, \mathbb{Z})\}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Notons que $G(\mathbf{e}_a)$ est un groupe *infini*, ce qui ressort clairement du fait que les transformations du type de celles introduites *infra* en (1.32) font partie du groupe de symétrie global de n'importe quel réseau.

La représentation par des matrices de $GL(3, \mathbb{Z})$ des éléments de $G(\mathbf{e}_a)$ est aussi appelée groupe de symétrie global.

En général les sous-groupes de Aut ou de $\mathcal{O}(3)$ qui laissent un réseau invariant, ou qui, de façon équivalente, peuvent être représentés par des groupes de matrices entières dans des bases adéquates, sont dits *cristallographiques*. Ainsi, pour toute base \mathbf{e}_a , $G(\mathbf{e}_a)$ est un sous-groupe maximal cristallographique de Aut , et de tels sous-groupes sont tous conjugués. En effet, tout sous-groupe maximal cristallographique est de la forme $G(\mathbf{e}'_a)$, où $\mathbf{e}'_a = \mathbf{F}\mathbf{e}_a = f_{ab}\mathbf{e}_b$, pour un élément adéquat $\mathbf{F} \in \text{Aut}$. D'après (1.27) les éléments de $G(\mathbf{F}\mathbf{e}_a)$ peuvent être écrits comme suit :

$$\mathbf{H}' = h_{ab}\mathbf{e}'_a \otimes \mathbf{e}'_b = (fhf^{-1})_{ab}\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b, \quad (1.28)$$

et donc les groupes $G(\mathbf{F}\mathbf{e}_a)$ et $G(\mathbf{e}_a)$ sont bien conjugués dans Aut :

$$G(\mathbf{F}\mathbf{e}_a) = \mathbf{F}G(\mathbf{e}_a)\mathbf{F}^{-1}. \quad (1.29)$$

Lorsque les vecteurs \mathbf{e}'_a forment une autre base de $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$, les éléments f et g sont dans $GL(3, \mathbb{Z})$, ce qui implique que $G(\mathbf{F}\mathbf{e}_a) = G(\mathbf{e}_a)$. Par conséquent :

$$G(m_{ab}\mathbf{e}_b) = G(\mathbf{e}_a) \text{ pour tout } m \in GL(3, \mathbb{Z}). \quad (1.30)$$

Le groupe $G(\mathbf{e}_a)$ ne dépend donc que du réseau \mathcal{R} lui-même, et non du choix d'une de ses bases.

Il est intéressant de noter dès à présent que $G(\mathbf{e}_a)$ contient des transformations qui ne sont ni orthogonales, ni de période finie. Il suffit par exemple de considérer les transformations représentées par (on utilise la lettre c pour cisaillement) :

$$(c_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ quelconque}, \quad (1.31)$$

ou encore, plus généralement, par

$$(l_{ab}) = \begin{pmatrix} \pm 1 & p & q \\ 0 & \pm 1 & r \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad p, q, r \in \mathbb{Z} \text{ quelconques.} \quad (1.32)$$

1.2.4 Les symétries géométriques des réseaux. Classification en systèmes cristallins

Groupes ponctuels cristallographiques et holoèdres géométriques

On revient maintenant sur la question (a) posée précédemment, l'objectif étant d'étudier les transformations orthogonales qui laissent un réseau invariant. Une base \mathbf{e}_a étant donnée, on cherche les tenseurs orthogonaux \mathbf{Q} telles que $\mathbf{Q}\mathbf{e}_a$ soit encore une base du réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$. Ces transformations sont appelées des *opérations de symétrie* de \mathcal{R} (cf. § 1.1.3) et leurs sous-espaces invariants de dimension 1 ou 2 sont appelés *éléments de symétrie* de \mathcal{R} . Plus précisément, le plan invariant d'une opération de symétrie \mathbf{Q} de déterminant -1 est un *plan de symétrie*, ou *miroir*, de \mathcal{R} , tandis que l'axe de \mathbf{Q} de déterminant $+1$ est appelé *axe de symétrie* de \mathcal{R} (si \mathbf{Q} est de déterminant -1 , cet axe est dit *inverse*).

Par définition, les opérations de symétrie de $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ sont les éléments orthogonaux du groupe $G(\mathbf{e}_a)$ défini en (1.27). Grâce à la relation (1.24), elles peuvent être explicitement définies comme les tenseurs $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3)$ tels que :

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}_a = m_{ab}\mathbf{e}_b \text{ pour un élément } m \in GL(3, \mathbb{Z}). \quad (1.33)$$

L'holoèdre géométrique $P(\mathbf{e}_a) \subset \mathcal{O}(3)$ du réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ ²¹ rassemble toutes ses opérations de symétrie :

²¹ Le groupe $P(\mathbf{e}_a)$ est aussi appelé *groupe ponctuel* (holoèdre) de $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$.

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{e}_a) &:= G(\mathbf{e}_a) \cap \mathcal{O}(3) \\
&= \{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) : \mathcal{R}(\mathbf{Q}\mathbf{e}_a) = \mathcal{R}(\mathbf{e}_a)\} \\
&= \{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) : \mathbf{Q}\mathbf{e}_a = m_{ab}\mathbf{e}_b, \text{ pour un } m \in GL(3, \mathbb{Z})\}. \quad (1.34)
\end{aligned}$$

Puisque $G(\mathbf{e}_a)$ est le sous-groupe maximal de Aut qui laisse $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ invariant, l'holoèdre géométrique $P(\mathbf{e}_a)$ est le sous-groupe maximal de $\mathcal{O}(3)$ qui applique $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ sur lui-même.

En général, tout sous-groupe de $\mathcal{O}(3)$ laissant un réseau invariant est appelé *groupe ponctuel cristallographique*. Il est important de noter que les groupes ponctuels cristallographiques ne sont pas tous holoèdres puisque, d'après (1.34), un sous-groupe cristallographique P de $\mathcal{O}(3)$ est holoèdre si et seulement si il existe une base \mathbf{e}_a telle que $P = P(\mathbf{e}_a)$, c'est-à-dire que P doit être le groupe *maximal* des opérations de symétrie d'un réseau²². On omettra parfois le terme de "cristallographique" pour les groupes ponctuels lorsque l'on parle des réseaux, cependant, dans ce contexte, il sera toujours sous-entendu.

Les holoèdres géométriques répondent à la question (a) posée au § 1.2.3. On dégage dans ce qui suit les principales propriétés des holoèdres géométriques, tels qu'elles peuvent être directement obtenues d'après leur définition (1.34).

Tout d'abord, $G(\mathbf{e}_a) \cap \mathcal{O}(3)$ (donc $P(\mathbf{e}_a)$) possède une propriété analogue à celle établie en (1.30) :

$$P(m_{ab}\mathbf{e}_b) = P(\mathbf{e}_a) \text{ pour tout } m \in GL(3, \mathbb{Z}). \quad (1.35)$$

Cela signifie que, tout comme $G(\mathbf{e}_a)$, l'holoèdre géométrique $P(\mathbf{e}_a)$ de $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ ne dépend que du réseau lui-même et non d'une de ses bases. De plus, d'après (1.29) et (1.34), pour tout $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3)$ on a

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{Q}\mathbf{e}_a) &= G(\mathbf{Q}\mathbf{e}_a) \cap \mathcal{O}(3) = \mathbf{Q}G(\mathbf{e}_a)\mathbf{Q}^t \cap \mathcal{O}(3) \\
&= \mathbf{Q}P(\mathbf{e}_a)\mathbf{Q}^t. \quad (1.36)
\end{aligned}$$

²² En particulier, l'holoèdre géométrique contient nécessairement l'inversion $-\mathbf{1}$ puisqu'on a toujours $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a) = \mathcal{R}(-\mathbf{e}_a)$. Par contre, il est tout à fait possible de construire un groupe qui laisse un réseau invariant sans contenir l'inversion. Il suffit de considérer le réseau construit sur une base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$: le groupe constitué de l'identité et du miroir $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$ laisse le réseau invariant mais ne contient pas l'inversion. Il s'agit d'un groupe ponctuel cristallographique (puisque'il laisse un réseau invariant) non holoèdre (puisque'il n'est pas maximal, ne contenant pas l'inversion). La distinction entre ces deux types de groupes est fondamentale.

Par conséquent, en appliquant une transformation orthogonale à un réseau, on change son holoèdre géométrique en un conjugué dans $\mathcal{O}(3)$.

Ensuite, il est immédiat de déduire de la relation (1.34) que tous les holoèdres géométriques contiennent l'inversion :

$$-\mathbf{1} \in P(\mathbf{e}_a) \text{ pour toute base } \mathbf{e}_a, \quad (1.37)$$

ce qui n'est pas nécessairement le cas des groupes ponctuels cristallographiques (*cf.* la précédente note de bas de page).

Rappelons enfin que les opérations de symétrie \mathbf{Q} d'un réseau possèdent ce que l'on appelle la *restriction cristallographique*, à savoir que

$$\text{la période de ces opérations est de 1, 2, 3, 4 ou 6.} \quad (1.38)$$

Appliqué en deux dimensions, cela signifie qu'on ne peut paver le plan de façon périodique qu'avec des parallélépipèdes, des triangles équilatéraux, des carrés ou des hexagones réguliers. Des pavages avec des pentagones - par exemple - ne sont possibles que de façon *quasi-périodiques*. On trouve dans le livre de Sivardière (1995) une démonstration de ce résultat.

Classes cristallines et systèmes cristallins

Afin de mieux cerner les propriétés de symétrie que captent les groupes ponctuels (holoèdres ou non), il est nécessaire d'introduire un *critère de classification* des sous-groupes de $\mathcal{O}(3)$. En cristallographie, le critère généralement adopté est celui de la *conjugaison dans $\mathcal{O}(3)$* . En fait, d'après (1.36), la transformation orthogonale d'un réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ change $P(\mathbf{e}_a)$ en un conjugué (orthogonal). Par conséquent, les symétries de deux réseaux conjugués ou congruents seront considérées comme essentiellement équivalentes. L'option naturelle est donc de diviser les groupes ponctuels en classes d'équivalence orthogonales. Le théorème suivant, qui anticipe sur les symétries des *cristaux* (et non des réseaux), est un résultat extrêmement classique de la cristallographie ; il établit la classification des classes d'équivalence de tous les groupes ponctuels cristallographiques et, en particulier, de tous les holoèdres :

Théorème 1.3: Il y a trente deux classes d'équivalence de groupes ponctuels cristallographiques dans $\mathcal{O}(3)$.

Ces classes d'équivalence sont appelées les *classes cristallines* (géométriques). La preuve du théorème 1.3 est particulièrement longue et se fait par construction. On peut la trouver par exemple dans Bouasse (1929) et Yale (1968).

Puisqu'on ne considère pour le moment que des réseaux simples, seule la conjugaison dans $\mathcal{O}(3)$ des holoèdres est pour l'instant importante : les classes

d'équivalence qui en résultent sont les *systèmes cristallins* (on parle aussi de classes géométriques de Bravais, qu'il ne faut pas confondre avec les *réseaux de Bravais* définis au § 1.2.5). Par un abus de langage communément admis, on dit qu'une classe cristalline appartient au plus petit système cristallin qui le contient.

Comme il a déjà été signalé, un groupe ponctuel cristallographique P est holoèdre si et seulement si $P = P(\mathbf{e}_a)$ pour une base \mathbf{e}_a . La vérification directe de cette condition aux trente deux classes cristallines conduit au corollaire classique suivant, qui donne la classification des groupes holoèdres et répond à la question (a) :

Corollaire 1.4: Il y a sept systèmes cristallins dans \mathbb{R}^3 : triclinique, monoclinique, orthorhombique, trigonal, tétragonal (ou quadratique), hexagonal et cubique.

Il est important de noter que les informations fournies par les systèmes cristallins ne sont pas suffisantes pour caractériser complètement les réseaux. En effet, alors que deux réseaux congruents appartiennent nécessairement au même système cristallin, cela peut aussi fort bien se produire pour des réseaux non conjugués. On va maintenant voir pourquoi.

1.2.5 Les symétries arithmétiques des réseaux et leur classification en réseaux de Bravais

Les groupes arithmétiques ou groupes-réseaux

Le critère de classification utilisé jusqu'à présent est basé sur l'équivalence des holoèdres géométriques. Il donne une description très utile des propriétés de symétrie des réseaux. Cependant, une autre caractérisation de ces symétries peut être obtenue grâce aux matrices de $GL(3, \mathbb{Z})$ présentes dans la définition (1.34) des holoèdres (géométriques). En effet, les propriétés de congruence dans $GL(3, \mathbb{Z})$ font apparaître de nouveaux types de symétrie, ce qui va permettre d'établir une classification des réseaux plus restrictive que celle des systèmes cristallins.

Ici la question est celle que posa Bravais en 1850 : étant donné un holoèdre géométrique P , trouver tous les types de réseaux différents compatibles avec P . Afin de préciser les choses, on introduit le groupe arithmétique ou *groupe-réseau* $L(\mathbf{e}_a)$ d'une base \mathbf{e}_a ou de son réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$. Il s'agit du sous-groupe fini de $GL(3, \mathbb{Z})$ constitué de toutes les matrices m qui apparaissent dans (1.34) :

$$L(\mathbf{e}_a) := \{m \in GL(3, \mathbb{Z}) : m_{ab}\mathbf{e}_b = \mathbf{Q}\mathbf{e}_a, \mathbf{Q} \in P(\mathbf{e}_a)\}. \quad (1.39)$$

Ainsi, par définition, les groupes arithmétiques étant les représentations entières des holoèdres géométriques dans une base donnée, ce sont les sous-groupes (finis) maximaux de $GL(3, \mathbb{Z})$ qui agissent orthogonalement sur un réseau. Leurs propriétés principales ont été étudiées par de nombreux auteurs (*cf.* par exemple les ouvrages de Engel (1986), Janssen (1973) et Miller, 1972).

On peut vérifier qu'un changement de base dans un réseau donné provoque le changement du groupe-réseau en un conjugué dans $GL(3, \mathbb{Z})$:

$$L(m_{ab}\mathbf{e}_b) = m^{-1}L(\mathbf{e}_a)m \text{ si } m \in GL(3, \mathbb{Z}). \quad (1.40)$$

De plus, une transformation orthogonale ne modifie pas le groupe arithmétique :

$$L(\mathbf{Q}\mathbf{e}_a) = L(\mathbf{e}_a) \text{ si } \mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3). \quad (1.41)$$

On peut donc voir $L(\mathbf{e}_a)$ comme le sous-groupe maximal de $GL(3, \mathbb{Z})$ dont les éléments laissent la métrique C invariante sous l'action (1.25) :

$$L(\mathbf{e}_a) = \{m \in GL(3, \mathbb{Z}) : m^t C m = C\} =: L(C). \quad (1.42)$$

Congruence dans $\mathcal{O}(3)$ (systèmes cristallins) et dans $GL(3, \mathbb{Z})$ (réseaux de Bravais)

D'après la relation (1.40) relative aux transformations des groupes arithmétiques après un changement de base dans un réseau, le groupe-réseau $L(\mathbf{e}_a)$, à l'inverse de l'holoèdre géométrique (*cf.* (1.35)), est déterminé par la base \mathbf{e}_a mais est *indépendant* du réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ lui-même. Les relations (1.22) et (1.40) montrent que $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ détermine en fait une classe d'équivalence de groupes-réseaux dans $GL(3, \mathbb{Z})$.

La $GL(3, \mathbb{Z})$ -congruence d'un sous-groupe fini de $GL(3, \mathbb{Z})$ est appelée *classe d'équivalence arithmétique*, et les groupes de cette classe sont dits *arithmétiquement équivalents*. En particulier, une classe d'équivalence dans $GL(3, \mathbb{Z})$ de groupes arithmétiques est appelée une *classe arithmétique de Bravais*.

Chaque classe arithmétique de Bravais détermine *un seul* système cristallin. À l'inverse, un holoèdre donné $P \subset \mathcal{O}(3)$, ou un système cristallin donné, détermine en général des (classes de) groupes-réseaux *arithmétiquement différents*. La raison principale est que la même opération de symétrie dans $P \subset \mathcal{O}(3)$ peut être représentée dans différentes bases par des matrices entières qui ne sont pas nécessairement liées par une transformation dans $GL(3, \mathbb{Z})$.

Le théorème suivant, qui peut être démontré par des calculs formels, permet d'énumérer les réseaux de Bravais.

Théorème 1.5: Il existe 73 classes d'équivalence de sous-groupes finis dans $GL(3, \mathbb{Z})$ (les classes arithmétiques); parmi elles, quatorze sont des classes arithmétiques de Bravais (classes d'équivalence de groupes-réseaux).

Les classes de Bravais dans $GL(3, \mathbb{Z})$ énumérées dans le Théorème 1.5 donnent un critère *arithmétique* nouveau de classification des réseaux, un critère plus fin que le critère géométrique donnant naissance aux systèmes cristallins introduit au paragraphe précédent. D'après (1.40), puisqu'à tout réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ correspond une classe arithmétique (de Bravais) de groupes-réseaux, il est naturel de considérer comme (arithmétiquement) équivalents tous les réseaux ou toutes les bases dont le groupe-réseau appartient à la même classe de Bravais. D'après cette nouvelle classification, deux bases \mathbf{e}_a et \mathbf{e}'_a (ainsi que les réseaux qu'elles génèrent) sont équivalents lorsque leurs groupes-réseaux sont arithmétiquement équivalents :

$$L(\mathbf{e}'_a) = m^{-1}L(\mathbf{e}_a)m \text{ pour un élément } m \in GL(3, \mathbb{Z}). \quad (1.43)$$

Les bases ou réseaux pour lesquels (1.43) a lieu appartiennent au même *réseau de Bravais*. Ainsi, deux réseaux sont (arithmétiquement) du même type si et seulement si il existe des bases pour lesquelles leurs groupes-réseaux coïncident.

Le résultat suivant, corollaire du Théorème 1.5, permet de classer les réseaux de Bravais et indique la répartition des systèmes cristallins à l'intérieur de ceux-ci :

Corollaire 1.6: Il existe quatorze réseaux de Bravais distincts en trois dimensions. Ils se subdivisent sur les sept systèmes cristallins comme indiqué sur la figure 1.7.

Centrage

D'un point de vue géométrique, la subdivision en réseaux de Bravais des systèmes cristallins telle qu'elle est indiquée sur la figure 1.7 correspond à l'existence de différents types de *centrages* arithmétiquement non-équivalents des réseaux d'un même système. Disons rapidement qu'étant donné un réseau, dit *primitif*, il est souvent possible de préserver l'holoèdre géométrique en ajoutant convenablement des noeuds à des positions adéquates de la cellule de base.

Par exemple, en ajoutant des noeuds aux centres de faces parallèles convenablement choisies, on obtient la version *base centrée* du réseau original. En ajoutant un noeud au centre de chaque face de la maille, on obtient la version *face centrée*. Et si l'on ajoute un noeud au centre la maille, alors c'est la

version *centrée* que l'on obtient. On peut cependant montrer que le centrage ne produit pas nécessairement un autre réseau de Bravais.

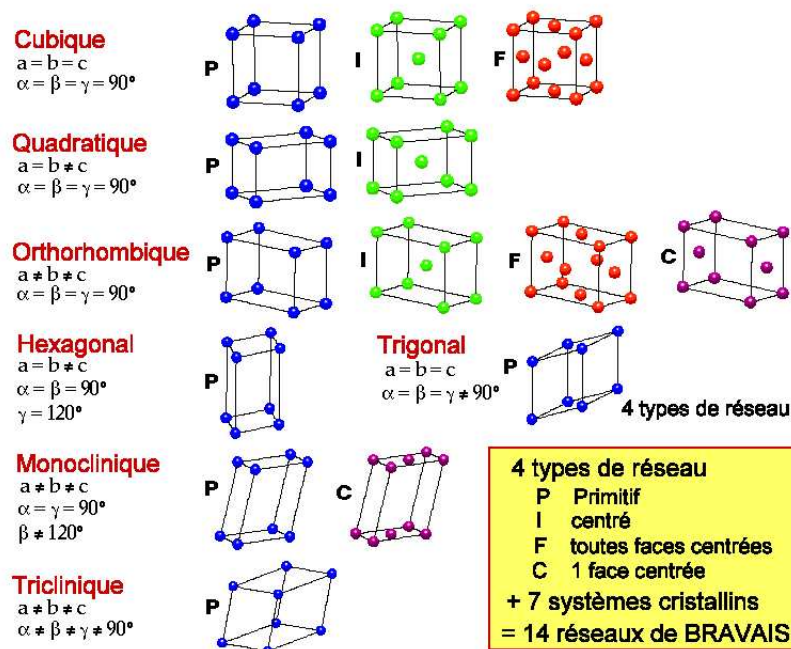


Fig. 1.7: Les sept systèmes cristallins et les quatorze réseaux de Bravais correspondants selon le type de centrage

1.3 Le cristal en tant que multi-réseau

1.3.1 Définition

On considère à partir de maintenant l'espace affine à trois dimensions \mathbb{A}^3 ainsi que le groupe $\text{Aff}(3)$ des applications affines inversibles de \mathbb{A}^3 . Le sous-groupe des éléments de $\text{Aff}(3)$ dont le déterminant est positif sera noté $\text{Aff}(3)^+$. On désigne par $E(3)$ (le groupe Euclidien²³) le sous-groupe des isométries affines de $\text{Aff}(3)$, et par $T(3)$ celui des translations.

²³ Euclide d'Alexandrie, mathématicien grec, environ 325-265 avant J.C. On ne sait pas clairement si ses "Éléments" sont son oeuvre propre ou celle d'une école qui porta son nom, un peu comme ce que fit Bourbaki au vingtième siècle. L'apport d'Euclide doit semble-t-il être nettement distingué de celui des présocratiques comme Thalès de Milet, Parménide, Pythagore ou Empédocle, héritiers et transmetteurs de doctrines plus nettement mystiques et religieuses, plus tard réinterprétées par Aristote.

On modélise un *cristal idéal* par un sous-ensemble infini et discret $\mathcal{M} \subset \mathbb{A}^3$ qui admet un réseau translatore, disons $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$, qui envoie \mathcal{M} sur lui-même. Ceci traduit le fait que \mathcal{M} est tri-périodique et implique (*cf.* Définition 1.7 ci-dessous) que \mathcal{M} est une *union finie* des translatés d'un réseau *affine* donné :

$$\mathcal{R}(P, \mathbf{e}_a) := P + \mathcal{R}(\mathbf{e}_a) \subset \mathbb{A}^3, \text{ avec } P \in \mathbb{A}^3. \quad (1.44)$$

Il est nécessaire d'avoir un critère qui permet de décider quand est-ce que deux points de \mathcal{M} sont occupés par des atomes ou des groupes d'atomes indiscernables. Ce critère est nécessairement une relation d'équivalence qui partitionne les points de \mathcal{M} en classes A_1, \dots, A_r appelés *espèces atomiques* de \mathcal{M} . De plus, deux points quelconques de \mathcal{M} qui diffèrent d'une translation de $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ appartiennent nécessairement à la même espèce atomique. Un cristal dont les points appartiennent tous à la même espèce atomique est dit *monoatomique*. Il est *polyatomique* dans le cas contraire.

On introduit donc la

Définition 1.7: Tout cristal idéal mono ou polyatomique \mathcal{M} est un *multi-réseau* de l'espace affine \mathbb{A}^3 ; cela signifie que \mathcal{M} est un sous-ensemble de \mathbb{A}^3 tel que

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}(P_0, \dots, P_{n-1}, \mathbf{e}_a) = \mathcal{M}(P_i, \mathbf{e}_a) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{R}(P_i, \mathbf{e}_a), \quad (1.45)$$

où $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ (*cf.* (1.44)) est un réseau (simple) de \mathbb{R}^3 . Dans la relation (1.45), n est un entier positif approprié et les points $P_i \in \mathcal{M}$ sont tous distincts et ne diffèrent pas d'un vecteur de $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$. Les points de chaque réseau affine $\mathcal{R}(P_i, \mathbf{e}_a) \subset \mathbb{A}^3$ appartiennent à la même espèce atomique.

On considère donc à partir de maintenant les mots de "cristal" et de "multi-réseau" comme synonymes.

Enfin, en définissant les $n - 1$ vecteurs

$$\mathbf{p}_i := P_0 P_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n - 1, \quad (1.46)$$

on remarque que le n -réseau \mathcal{M} est uniquement déterminé par P_0 et les $n + 2$ vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}$:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(P_0, \mathbf{e}_a, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \{P_0 + \mathbf{p}_i + \mathcal{R}(\mathbf{e}_a)\}. \quad (1.47)$$

On dit que les $(\mathbf{e}_a, \mathbf{p}_i)_{a \in \{1,2,3\}, i \in \{1,2,\dots,n-1\}}$ sont les *descripteurs* du cristal \mathcal{M} . En particulier, ils permettent de localiser les atomes à l'intérieur d'une maille élémentaire, définissant ainsi le *motif* du cristal \mathcal{M} .

1.3.2 Symétrie affine des cristaux

La question classique posée par les cristallographes afin de décrire la symétrie d'un multi-réseau \mathcal{M} de \mathbb{A}^3 est analogue à la question (a) posée au § 1.2.3 concernant les réseaux simples :

(a') Trouver toutes les transformations affines $e \in E(3)$ qui appliquent \mathcal{M} sur lui-même.

Une fois qu'une origine O est choisie dans \mathbb{A}^3 , toute isométrie de $E(3)$ peut être représentée par le couple $e = (\mathbf{t}, \mathbf{Q})$ où \mathbf{t} est le vecteur allant de 0 à $e(0)$ et où $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3)$.

Une isométrie e qui laisse \mathcal{M} invariant est une *opération de symétrie* de \mathcal{M} . Les diverses opérations de symétrie des cristaux sont connues sous les termes de : *axes hélicoïdaux*, *axes inverses*, *miroirs*. Ces derniers peuvent être *translatoires* (on parle aussi de *plans de glissement*) ou ordinaires. On ne s'étendra pas sur ces questions abondamment décrites dans les manuels de cristallographie.

On rappelle enfin que les multi-réseaux sont le plus souvent dénués de centre de symétrie, à l'inverse des réseaux simples.

Groupes spatiaux; classe et système cristallins d'un multi-réseau

Le *groupe spatial* $S(\mathcal{M})$ d'un multi-réseau \mathcal{M} est l'ensemble de *toutes* les isométries affines laissant \mathcal{M} invariant :

$$S(\mathcal{M}) = \{e = (\mathbf{t}, \mathbf{Q}) \in E(3) : e(\mathcal{M}) = \mathcal{M}\}. \quad (1.48)$$

Les sous-groupes suivants de $S(\mathcal{M})$ sont importants :

1. le sous-groupe de toutes les translations qui laissent \mathcal{M} invariant :

$$T(\mathcal{M}) := S(\mathcal{M}) \cap T(3), \quad (1.49)$$

2. le groupe $P(\mathcal{M})$ de toutes les opérations \mathbf{Q} qui apparaissent dans (1.48), *i.e.* le groupe de toutes les transformations orthogonales qui laissent \mathcal{M} invariant lorsqu'elle sont associées à une translation appropriée.

On peut vérifier que $P(\mathcal{M})$ est un groupe ponctuel cristallographique contenu dans l'holoèdre géométrique $P(\mathbf{e}_a)$ du "réseau-origine" $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ de \mathcal{M} :

$$P(\mathcal{M}) \subseteq P(\mathbf{e}_a). \quad (1.50)$$

Le groupe $P(\mathcal{M})$ est appelé *groupe ponctuel* du multi-réseau \mathcal{M} ; comme il a été décrit auparavant, le groupe ponctuel détermine une classe d'équivalence orthogonale (ou géométrique) appelée *classe cristalline* de \mathcal{M} . Puisque $P(\mathcal{M})$ peut tout à fait ne pas être holoèdre, la classe de \mathcal{M} est l'une des trente deux classes mentionnées au Théorème 1.3.

Le système cristallin de \mathcal{M} est généralement défini comme le système le *moins symétrique* auquel appartient la classe cristalline de \mathcal{M} .

La structure des groupes spatiaux a été déterminée par construction à partir de la propriété suivante :

Proposition 1.8: Etant donné un multi-réseau \mathcal{M} , le groupe spatial $S(\mathcal{M})$ est un sous-groupe infini et discret de $E(3)$ dont le sous-groupe de translation $T(\mathcal{M})$ est généré sur le corps \mathbb{Z} par trois vecteurs linéairement indépendants, et dont le groupe quotient $S(\mathcal{M})/T(\mathcal{M})$ est isomorphe au groupe ponctuel cristallographique fini $P(\mathcal{M}) \subset \mathcal{O}(3)$. Inversement, tout sous-groupe de $E(3)$ dont le sous-groupe de translation est comme ci-dessus est le groupe spatial d'un multi-réseau.

De façon analogue à ce qui a été établi en (1.36), si une isométrie affine e est appliquée à \mathcal{M} , le groupe spatial $S(\mathcal{M})$ se transforme en un conjugué dans $E(3)$:

$$S(e\mathcal{M}) = eS(\mathcal{M})e^{-1}. \quad (1.51)$$

De plus, toute dilatation d'un multi-réseau engendre un nouveau multi-réseau dont la symétrie n'est pas essentiellement différente de l'initiale. Ceci plaide en la faveur du critère de classification choisi pour les groupes spatiaux, c'est-à-dire la congruence dans $\text{Aff}(3)$.

Le résultat suivant est classique en cristallographie et est l'analogue du Théorème 1.3. Il a été obtenu à la fin du XIX^{ème} siècle par l'analyse minutieuse de tous les sous-groupes de $E(3)$ ayant les propriétés de la Proposition 1.8 :

Théorème 1.9: Il existe 219 classes d'équivalence de groupes spatiaux dans $\text{Aff}(3)$. Ce nombre est de 230 si la congruence est considérée à travers les éléments de $\text{Aff}(3)^+$.

Il existe de très nombreuses descriptions de groupes spatiaux dans la littérature.

Les groupes spatiaux qui sont conjugués dans $\text{Aff}(3)$ mais pas dans $\text{Aff}(3)^+$ sont dits *énantiomorphes*. Par exemple, (les groupes de symétrie de) la main droite et la main gauche sont conjugués dans $\text{Aff}(3)$ - puisque l'une est l'image de l'autre dans un miroir - mais pas dans $\text{Aff}(3)^+$.

1.3.3 Extension et généralisation : les groupes de couleur

Les 230 groupes spatiaux donnent un cadre exhaustif pour l'étude des symétries des arrangements atomiques dans le milieu cristallin. Cette étude peut être aussi bien celle de la répartition des atomes (directement accessible par la diffraction des neutrons), celle de la densité électronique en tout point du cristal (étude par diffraction des rayons X) ou encore celle de la répartition du potentiel électrique dans le cristal (qu'on peut mesurer par la diffraction des électrons).

Cependant, au cours des dernières décennies, divers auteurs ont proposé de généraliser et d'étendre la notion de groupe d'espace. Parmi les théories qui ont donné lieu aux développements des plus intéressants, on citera en particulier celle des groupes de couleur, ou groupes de Shubnikov. A chaque point de l'espace on attribue une "qualité" repérée soit par le signe $+$ ou $-$, soit par une couleur, ou par toute autre caractéristique. A chaque opération de symétrie on adjoint un opérateur (noté \mathfrak{A} par la suite) qui fait passer d'un signe à l'autre, d'une couleur à l'autre, etc. On peut ainsi construire de nouveaux groupes, qui généralisent les groupes de symétrie introduits jusqu'à maintenant et qui ont reçu des applications en cristallographie. Ils permettent en particulier de décrire les structures magnétiques des cristaux en tenant compte non seulement de la répartition des atomes dans la structure cristalline mais aussi de l'orientation des moments magnétiques portés par les atomes, lorsque ceux-ci sont magnétiquement ordonnés, comme dans les cristaux ferromagnétiques ou antiferromagnétiques. L'opération de changement de qualité consiste alors en un retournement du moment magnétique et équivaut à l'inversion du sens de parcours du temps, d'où la dénomination de *symétrie spatio-temporelle* (pour des développements à la physique de la symétrie temporelle, on peut consulter l'ouvrage de Sachs, 1987).

Dans le cas des cristaux magnétiques (qui peuvent être vus comme des multi-réseaux bicolores), il existe 1421 (classes d'équivalence de) groupes spatiaux et 90 groupes ponctuels (*cf.* Bhagavantam (1966), Birss (1966), Laughlin *et al.* (2000), Shubnikov (1954) et Sivardière, 1995).

2. VERS LA SYMÉTRIE DES PHÉNOMÈNES PHYSIQUES

2.1 *La fonction énergie interne d'un réseau simple et ses propriétés d'invariance*

Pour simplifier le propos on suppose dans un premier temps que la structure des cristaux peut être décrite par le moyen d'un réseau simple. Ce genre d'hypothèse simplificatrice, qui ne prend pas en compte les descripteurs introduits en (1.46) - et donc, par conséquent, pas non plus le motif - permet malgré tout d'obtenir des résultats déjà très significatifs.

Par conséquent, on suppose que l'énergie interne ou *libre* ϕ par maille élémentaire d'un corps déformable cristallin - dont la configuration est supposée être un réseau simple $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ - est donnée par une fonction suffisamment régulière notée $\bar{\phi}$ et dépendant de la base du réseau \mathbf{e}_a et de la température absolue θ :

$$\phi = \bar{\phi}(\mathbf{e}_a, \theta). \quad (2.1)$$

Le domaine de $\bar{\phi}$ est en principe le produit de l'espace \mathcal{B} de toutes les bases et d'un intervalle approprié de températures admissibles \mathcal{I} .

On suppose que ϕ est une quantité invariante sous les transformations Galiléennes¹, ce qui signifie que $\bar{\phi}$ est invariante sous les isométries qui préservent l'orientation, ce que l'on traduit par :

$$\bar{\phi}(\mathbf{e}_a, \theta) = \bar{\phi}(\mathbf{Q}\mathbf{e}_a, \theta) \text{ pour toute base } \mathbf{e}_a \in \mathcal{B}, \mathbf{Q} \in \mathcal{SO}(3), \theta \in \mathcal{I}. \quad (2.2)$$

¹ Galileo Galilei, mathématicien italien, 1564-1642. Il lança l'idée que la langue mathématique permet de lire "le grand livre de la nature", et, en écrivant sur les suites, les sommes infinies et les infiniments petits des pages magistrales, une mathématique entièrement nouvelle se dessina. Malgré ses amitiés parmi les princes de l'Église, il fut condamné en 1633 par le Saint-Office pour avoir pris parti en faveur de la réalité du mouvement de la Terre et ne connut à partir de ce moment et jusqu'à sa mort que des résidences surveillées. Ses écrits et son exemple allaient cependant devenir, à la confusion de ses juges, le ferment de l'Europe savante.

On admet aussi que $\bar{\phi}$ ne dépend pas de la base de \mathcal{B} qui génère le réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$. D'après la Proposition 1.1, on sait que les vecteurs de base \mathbf{e}_a de $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$ sont déterminés à une transformation de $GL(3, \mathbb{Z})$ près; ce résultat et (2.2) impliquent que $\bar{\phi}$ satisfasse à la relation d'invariance

$$\bar{\phi}(\mathbf{e}_a, \theta) = \bar{\phi}(m_{ab}\mathbf{e}_b, \theta) = \bar{\phi}(m_{ab}\mathbf{Q}\mathbf{e}_b, \theta), \quad (2.3)$$

pour toute base $\mathbf{e}_a \in \mathcal{B}$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{SO}(3)$, $m \in GL(3, \mathbb{Z})$ et $\theta \in \mathcal{I}$. La $GL(3, \mathbb{Z})$ -invariance de $\bar{\phi}$ traduit la triple périodicité des réseaux.

Le fait que $GL(3, \mathbb{Z})$ contienne l'inversion -1 implique que (2.3) soit en fait valable pour tout $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3)$. De la même manière, ϕ ne dépend en fait des vecteurs de base \mathbf{e}_a qu'à travers leur produit scalaire, c'est à dire qu'elle est essentiellement fonction de la métrique C (*cf.* (1.19)) :

$$\phi = \bar{\phi}(\mathbf{e}_a, \theta) = \hat{\phi}(C, \theta), \quad C_{ab} := \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b; \quad (2.4)$$

le domaine de $\hat{\phi}$ est le produit de l'espace à six dimensions $\mathcal{Q}_3^>$ de toutes les métriques et de l'intervalle \mathcal{I} . Ainsi (2.3) est équivalent à :

$$\hat{\phi}(C, \theta) = \hat{\phi}(m^t C m, \theta), \quad (2.5)$$

pour toute $C \in \mathcal{Q}_3^>$, toute $m \in GL(3, \mathbb{Z})$ et toute $\theta \in \mathcal{I}$.

2.2 Passage au continu : l'hypothèse de Cauchy-Born

C'est dans le but d'obtenir des modèles phénoménologiques pour les cristaux vus comme un milieu continu que l'on doit établir une connection entre les descriptions atomiques et macroscopiques. Cette connection est réalisée par le biais d'*hypothèses* qui lient la déformation macroscopique du cristal aux modifications des positions atomiques dans le réseau. Les premières tentatives de passage micro-macro ont été réalisées par Cauchy² dans les années 1830. Elles visaient à obtenir les contraintes élastiques ainsi que l'énergie macroscopiques à partir de calculs faits au niveau atomique. Ces calculs étaient basés sur l'hypothèse que les déplacements atomiques “suivaient” la déformation globale. En 1915, Born³ s'aperçu, sur la base de travaux de Lord

² Augustin Louis Cauchy, mathématicien français, 1789-1857. Il travailla à Paris.

³ Max Born, mathématicien et physicien allemand, 1882-1970. Son étude statistique des fonctions d'onde lui valut le prix Nobel en 1954.

Kelvin⁴ qui dataient des années 1880, que les hypothèses de Cauchy étaient souvent mises en défaut. Il les modifia en faisant l'hypothèse physiquement raisonnable que seul le “squelette” atomique du cristal (*i.e.* son réseau) est impliquée dans (ou par) la déformation macroscopique, tandis que le motif est quant à lui libre de s'ajuster de manière à atteindre un équilibre. Cette hypothèse est devenue classique et a pris le nom d'*hypothèse de Cauchy-Born* (qu'on rencontre souvent en anglais sous le terme de *Born rule*).

Considérons par conséquent un cristal se trouvant dans une configuration de référence dans laquelle son réseau \mathcal{R}_0 est construit sur les vecteurs de base \mathbf{e}_a^0 . On suppose maintenant que ce cristal subit une déformation macroscopique dont le gradient est \mathbf{F} . L'hypothèse de Cauchy-Born dit en fait que les vecteurs \mathbf{e}_a donnés par :

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{F}\mathbf{e}_a^0, \quad (2.6)$$

constituent les vecteurs de base sur lesquels est construit le réseau du cristal dans la configuration déformée. On dit aussi parfois que les vecteurs de base de \mathcal{R}_0 se comportent comme des *vecteurs matériels* ou *rigides*, ce qui signifie que \mathcal{R}_0 est comme imbriqué dans le milieu continu et participe à la déformation macroscopique en la suivant.

L'hypothèse de Cauchy-Born est très largement utilisée, et pas seulement dans le cadre de considérations théoriques. On l'utilise par exemple pour lier des mesures de compressibilité ou de dilatation thermique (faites directement sur le réseau cristallin par des techniques microscopiques) aux données obtenues par des méthodes expérimentales macroscopiques.

2.3 Relations d'invariance de l'énergie

Soit R une configuration de référence d'un corps cristallin dont la structure est décrite par le biais d'un réseau simple de référence $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a^0)$. On suppose pour la simplicité des notations que la cellule de base est de volume unité, sans quoi il faut ajouter une constante en facteur de la fonction $\tilde{\phi}$ qui sera définie en (2.7) ci-dessous. En partant de la fonction énergie libre du réseau $\bar{\phi}$ définie en (2.1), on peut définir une fonction macroscopique $\tilde{\phi}$ qui fournit l'énergie libre par unité de volume (de référence) d'un cristal vu comme un milieu continu :

$$\tilde{\phi}(\mathbf{F}, \theta) := \bar{\phi}(\mathbf{F}\mathbf{e}_a^0, \theta) = \bar{\phi}(\mathbf{e}_a, \theta), \quad (2.7)$$

⁴ William Thomson, physicien d'origine irlandaise, 1824-1907. Il fut honoré en 1892 du titre de "Baron Kelvin of Largs". Il travailla en Écosse, à Glasgow.

La fonction d'énergie $\tilde{\phi}$ dépend donc du gradient de la déformation $\mathbf{F} \in \text{Aut}$.

Les propriétés d'invariance de $\tilde{\phi}$ s'obtiennent à partir de sa définition (2.7) et des propriétés d'invariance de $\tilde{\phi}$ établies en (2.3). On a défini au § 1.2.3 le groupe de symétrie globale $G(\mathbf{e}_a)$ de n'importe quel réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$; on rappelle que $G(\mathbf{e}_a)$ est l'ensemble des tenseurs unimodulaires \mathbf{H} qui sont représentés par une matrice entière dans la base \mathbf{e}_a :

$$\mathbf{H}\mathbf{e}_a = m_{ab}\mathbf{e}_b, \text{ ou encore : } \mathbf{H} = m_{ab}\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b, m = (m_{ab}) \in GL(3, \mathbb{Z}). \quad (2.8)$$

Les relations (1.27), (2.3), (2.7) et (2.8) impliquent que $\tilde{\phi}$ possède la propriété d'invariance suivante :

$$\tilde{\phi}(\mathbf{F}, \theta) = \tilde{\phi}(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{H}, \theta) \text{ pour tout } \mathbf{F} \in \text{Aut}, \mathbf{H} \in G(\mathbf{e}_a^0), \theta \in \mathcal{I} \text{ et } \mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3). \quad (2.9)$$

Dans (2.9), l'invariance orthogonale implique que l'énergie libre macroscopique (ou "continue") ne dépend de \mathbf{F} qu'à travers le tenseur \mathbf{U} apparaissant dans sa décomposition polaire⁵ $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, ou encore, de façon équivalente, du tenseur de Cauchy-Green⁶ $\mathbf{C} = \mathbf{F}^t\mathbf{F} = \mathbf{U}^2$:

$$\tilde{\phi}(\mathbf{F}, \theta) = \tilde{\phi}(\mathbf{U}, \theta) =: \check{\phi}(\mathbf{C}, \theta). \quad (2.10)$$

où l'on peut montrer que \mathbf{C} peut être représenté dans la base de référence \mathbf{e}_a^0 par la métrique \mathbf{C} (cf. (2.4) par exemple). Par conséquent :

$$\check{\phi}(\mathbf{C}, \theta) = \hat{\phi}(\mathbf{e}_a^0 \cdot \mathbf{C}\mathbf{e}_b^0, \theta) = \hat{\phi}(C_{ab}\mathbf{e}_a^0 \otimes \mathbf{e}_b^0, \theta). \quad (2.11)$$

La relation (2.5) - ou (2.10) - implique que l'invariance de $\check{\phi}$ se traduit par :

$$\check{\phi}(\mathbf{C}, \theta) = \check{\phi}(\mathbf{H}^t\mathbf{C}\mathbf{H}, \theta), \text{ pour tout } \mathbf{C} \in \text{Sym}^>, \mathbf{H} \in G(\mathbf{e}_a^0), \theta \in \mathcal{I}. \quad (2.12)$$

⁵ On rappelle que tout élément \mathbf{F} de Aut peut être écrit de manière unique sous la forme $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, avec $\mathbf{R} \in \mathcal{O}(3)$ et $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^t\mathbf{F} \in \text{Sym}^>$.

⁶ George Green, mathématicien anglais, 1793-1841. Bien qu'ayant appris seul les mathématiques dans le grenier du moulin familial, il publia en 1828 un des articles majeurs de l'histoire des mathématiques, intitulé "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism".

2.4 Restriction des domaines de travail

2.4.1 Les voisinages de Pitteri-Ericksen

Selon les résultats du § 1.2.3, appliquer un tenseur $\mathbf{F} \in \text{Aut}$ à une base \mathbf{e}_a revient à "déformer" le réseau $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a)$, et si \mathbf{F} appartient au groupe de symétrie globale $G(\mathbf{e}_a)$ du réseau, alors cette déformation laisse le réseau invariant dans le sens où $\mathcal{R}(\mathbf{e}_a) = \mathcal{R}(\mathbf{F}\mathbf{e}_a)$ - cf. (1.27). D'un point de vue physique il n'est cependant pas réaliste de considérer tous les tenseurs de $G(\mathbf{e}_a)$ (ou de Aut) comme des déformations de réseau acceptables : il convient de ne pas prendre en compte les déformations qui sont trop importantes, car elles créent des dommages voire la rupture du cristal, ou conduisent à des phénomènes de plastification pour lesquels on sort du cadre dans lequel on se place ici. Il est en fait possible de restreindre le champ des déformations admissibles grâce à un résultat dû à Pitteri et Ericksen qui permet du même coup de restreindre la symétrie globale d'un cristal à sa symétrie cristallographique.

La proposition 2.1 ci-dessous est de nature purement géométrique. Elle montre qu'il existe, pour toute base \mathbf{e}_a , un voisinage orthogonalement invariant approprié $\mathcal{V}_{\mathbf{e}_a} \subset \mathcal{B}$ sur lequel l'action (1.24) du groupe de symétrie globale $GL(3, \mathbb{Z})$ sur \mathcal{B} coïncide avec l'action du groupe-réseau $L(\mathbf{e}_a)$. De manière équivalente, dans un voisinage approprié de n'importe quelle métrique $\mathcal{V}_C \subset \mathcal{Q}_3^>$, l'action (1.25) de $GL(3, \mathbb{Z})$ se réduit à celle du groupe $L(C)$ défini en (1.39).

On ne démontrera pas ce résultat (on peut en trouver des démonstrations dans Ball & James (1992) et Pitteri & Zanzotto, 2003). On rappelle avant de l'énoncer que pour toute base $\mathbf{e}_a \in \mathcal{B}$ de métrique C , $\bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{e}_a}$ est un voisinage de \mathbf{e}_a dans \mathcal{B} si et seulement si il existe un voisinage $\bar{\mathcal{V}}_1$ de $\mathbf{1}$ dans Aut tel que

$$\bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{e}_a} = \bar{\mathcal{V}}_1 \mathbf{e}_a = \{\mathbf{F}\mathbf{e}_a : \mathbf{F} \in \bar{\mathcal{V}}_1\}. \quad (2.13)$$

De plus, le voisinage $\bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{e}_a}$ est $\mathcal{O}(3)$ -invariant (c'est à dire : $\mathbf{Q}\bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{e}_a} = \bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{e}_a}$ ou $\mathbf{Q}\bar{\mathcal{V}}_1 = \bar{\mathcal{V}}_1$ pour tout $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3)$) lorsque

$$\bar{\mathcal{V}}_1 = \{\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} : \mathbf{R} \in \mathcal{O}(3), \mathbf{U}^2 = \bar{C}_{ab}\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b, \bar{C} \in \bar{\mathcal{V}}_C\}, \quad (2.14)$$

pour un voisinage $\bar{\mathcal{V}}_C \subset \mathcal{Q}_3^>$ de C .

Proposition 2.1: Pour toute base \mathbf{e}_a de métrique C il existe un voisinage \mathcal{V}_C de C dans $\mathcal{Q}_3^>$ tel que :

$$m^t \mathcal{V}_C m = \mathcal{V}_C \text{ pour toute } m \in L(C) \equiv L(\mathbf{e}_a), \quad (2.15)$$

$$m^t \mathcal{V}_C m \cap \mathcal{V}_C = \emptyset \text{ pour toute } m \in GL(3, \mathbb{Z}) \setminus L(C). \quad (2.16)$$

De manière équivalente, il existe un voisinage orthogonalement invariant $\mathcal{V}_{\mathbf{e}_a} = \mathcal{V}_1 \mathbf{e}_a$ dans \mathcal{B} tel que pour $\mathcal{V}_1 \subset \text{Aut}$ on a :

$$\mathcal{V}_1 \mathbf{H} = \mathcal{V}_1 \text{ pour tout } \mathbf{H} \in P(\mathbf{e}_a), \quad (2.17)$$

$$\mathcal{V}_1 \mathbf{H} \cap \mathcal{V}_1 = \emptyset \text{ pour tout } \mathbf{H} \in G(\mathbf{e}_a) \setminus P(\mathbf{e}_a). \quad (2.18)$$

La base \mathbf{e}_a est dite le *centre* de $\mathcal{V}_{\mathbf{e}_a}$, de même que \mathbf{C} pour \mathcal{V}_C et $\mathbf{1}$ pour \mathcal{V}_1 .

2.4.2 Conséquence sur les relations d'invariance

Pour toute base $\bar{\mathbf{e}}_a$ ou toute métrique \bar{C} , on considère la restriction de la fonction $\bar{\phi}$ à un voisinage $\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{e}}_a}$ de $\bar{\mathbf{e}}_a$, ou celle de $\hat{\phi}$ à un voisinage $\mathcal{V}_{\bar{C}}$ de \bar{C} comme dans la Proposition 2.1. Par simplicité, les fonctions et leurs restrictions sont notées avec les mêmes symboles.

Les propriétés des voisinages de la Proposition 2.1 impliquent que les restrictions des fonctions d'énergie ne sont plus invariantes sous l'action des éléments de $GL(3, \mathbb{Z})$ comme dans (2.3) et (2.5), mais seulement sous l'action des opérations qui laissent le voisinage invariant. Ces opérations sont, d'après la Proposition 2.1, celles qui laissent invariant le centre du voisinage. Plus précisément on a :

$$\bar{\phi}(\mathbf{e}_a, \theta) = \bar{\phi}(m_{ab} \mathbf{Q} \mathbf{e}_b, \theta) \text{ pour tout } \mathbf{e}_a \in \mathcal{V}_{\bar{\mathbf{e}}_a}, \mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3), m \in L(\bar{\mathbf{e}}_a) \text{ et } \theta \in \mathcal{I}. \quad (2.19)$$

Et, de façon équivalente :

$$\hat{\phi}(C, \theta) = \hat{\phi}(m^t C m, \theta) \text{ pour tout } C \in \mathcal{V}_{\bar{C}}, m \in L(\bar{\mathbf{e}}_a) \text{ et } \theta \in \mathcal{I}. \quad (2.20)$$

On suppose maintenant que \mathbf{R} est la configuration de référence d'un corps cristallin de réseau $\mathcal{R}(\bar{\mathbf{e}}_a)$ et de métrique \bar{C} . On considère de plus la restriction de $\tilde{\phi}$ et $\check{\phi}$ au voisinage \mathcal{V}_1 qui découle de $\mathcal{V}_{\bar{\mathbf{e}}_a}$ comme dans la Proposition 2.1. Les propriétés (2.18) de \mathcal{V}_1 impliquent que $\tilde{\phi}$ n'est plus invariant sous l'action de $G(\bar{\mathbf{e}}_a)$ comme dans (2.9). En réalité, pour $\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \mathbf{F}$, on a

$$\tilde{\phi}(\mathbf{F}, \theta) = \tilde{\phi}(\mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{H}, \theta) \text{ ou bien } \check{\phi}(\mathbf{C}, \theta) = \check{\phi}(\mathbf{C}, \theta) = \check{\phi}(\mathbf{H}^t \mathbf{C} \mathbf{H}, \theta), \quad (2.21)$$

pour tout $\mathbf{F} \in \mathcal{V}_1$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3)$, $\mathbf{H} \in P(\bar{\mathbf{e}}_a)$ et $\theta \in \mathcal{I}$.

Ainsi, en réduisant le domaine des fonctions d'énergie on simplifie grandement le champ de l'étude puisque les propriétés d'invariance sont désormais données par un groupe ponctuel cristallographique *fini* $P(\bar{\mathbf{e}}_a)$ ⁷.

2.4.3 Extension aux multi-réseaux

Il est en fait possible de réduire encore d'avantage le domaine de travail si l'on travaille sur les multi-réseaux, c'est-à-dire sur les cristaux. On ne rentrera pas dans les détails techniques de la démarche. Disons simplement que l'hypothèse de Cauchy-Born appliquée à une énergie libre de la forme :

$$\phi = \bar{\phi}(\mathbf{e}_a, \mathbf{p}_i, \theta), \quad (2.22)$$

permet, grâce à un résultat semblable à la Proposition 2.1 mais adapté aux multi-réseaux, de réduire les propriétés d'invariance de l'énergie d'un cristal à son groupe spatial. On obtient donc une relation d'invariance analogue à (2.21) où \mathbf{H} est cette fois un élément du groupe ponctuel $P(\mathcal{M})$ du multi-réseau \mathcal{M} .

2.5 Conséquences sur la symétrie du tenseur d'élasticité

On considère ici un matériau *élastique*. L'inégalité de Clausius-Duhem⁸, qui est une manière de traduire le second principe de la thermodynamique, impose que l'énergie $\tilde{\phi}$ définie *supra* soit un potentiel pour le (premier) *tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff* \mathbf{P} (le second tenseur de Piola-Kirchhoff est souvent noté σ)⁹. Notant toujours \mathbf{F} le gradient de la déformation et en introduisant le tenseur des contraintes de Cauchy \mathbf{T} , on a alors

⁷ Ce groupe est ici nécessairement holoèdre puisqu'il contient $-\mathbf{1}$. Il s'agit donc d'un des sept systèmes cristallins énumérés au Corollaire 1.4.

⁸ Rudolf Julius Emmanuel Clausius, physicien prussien, 1822-1888.

Pierre Maurice Marie Duhem, physicien français, 1861-1916. Duhem présenta sa thèse de Doctorat en 1884. Elle portait sur l'étude du potentiel thermodynamique en physique et en chimie. Il proposa de traiter les réactions chimiques en terme d'énergie libre. Ses idées, quoique tout à fait correctes et novatrices, remettaient cependant en cause celles de son influent aîné le chimiste français Marcelin Berthelot (1827-1907). Celui-ci s'arrangea pour que sa thèse soit rejetée. Duhem, se sachant dans le vrai, publia ostensiblement en 1886 sa thèse refusée, ce qui n'arrangea pas ses relations avec Berthelot qui devint Ministre de l'Éducation (!) cette même année. Duhem travailla à Lille et souffrit toute sa carrière de ses relations avec Berthelot. En tant qu'auteur d'articles importants en philosophie (et histoire) des sciences, il eut aussi des échanges virulents avec Poincaré.

⁹ Gabrio Piola, mathématicien italien, 1791-1850. Il travailla à Milan.

Gustav Robert Kirchhoff, physicien allemand, 1824-1887.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \mathbf{F}} = |\det \mathbf{F}| \mathbf{T} \mathbf{F}^{-t} = \mathbf{F} \sigma. \quad (2.23)$$

On écrit alors que $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$ pour reprendre les notations de Gurtin (1981). Cette équation modélise la *loi de comportement* du matériau élastique considéré. Au voisinage de l'identité $\mathbf{1}$, elle est gouvernée par la transformations linéaire

$$\mathbf{C} : \text{Lin} \rightarrow \text{Lin} \quad (2.24)$$

définie par

$$\mathbf{C} := D\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{1}) = \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{1}) = \frac{\partial^2 \check{\phi}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}(\mathbf{1}), \quad (2.25)$$

le symbole D désignant la dérivation.

On dit que \mathbf{C} est le *tenseur élastique* du matériau considéré. C'est un tenseur du quatrième ordre qui s'obtient en dérivant le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff par rapport au gradient de la déformation \mathbf{F} , au “point” $\mathbf{F} = \mathbf{1}$, c'est-à-dire pour de petites déformations. Signalons qu'il est souvent commode de faire l'hypothèse que $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$ qui signifie que la configuration de référence est un état naturel.

Le tenseur des déformations non-linéaires \mathbf{E} s'exprime par la relation

$$\mathbf{E} := (\mathbf{C} - \mathbf{1})/2. \quad (2.26)$$

Bien sûr, si $\mathbf{C} \in \mathcal{V}_1$, \mathbf{E} est dans un voisinage \mathcal{V}_0 de $\mathbf{0}$ dans Sym . On a donc

$$4 \mathbf{C}_{ijkl} = 4 \frac{\partial^2 \check{\phi}}{\partial C_{ij} \partial C_{kh}}(\mathbf{1}) = \frac{\partial^2 \check{\phi}}{\partial E_{ij} \partial E_{kh}}(\mathbf{0}) =: \mathbf{L}_{ijkh}. \quad (2.27)$$

D'après (2.27), \mathbf{L} et \mathbf{C} sont dotées des fameuses petite et grande symétries :

$$\mathbf{L}_{ijkh} = \mathbf{L}_{jikh} = \mathbf{L}_{ijhk} = \mathbf{L}_{khij}. \quad (2.28)$$

D'autre part la relation (2.27) signifie aussi que pour de petites déformations, la fonction énergie libre $\check{\phi}$ est approximée par la forme quadratique

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}[\mathbf{E}]. \quad (2.29)$$

Afin de connecter les relations d'invariance de l'énergie à celles des tenseurs dont ils dérivent, rappelons un résultat d'invariance de la dérivation tel qu'on peut le trouver dans Gurtin (1981) :

Théorème 2.2: (Invariance de la dérivation)

Soit U un sous-espace de Lin , A un ouvert dans U et \mathcal{G} un sous-espace de $\mathcal{O}(3)$. On considère une fonction $\psi : A \rightarrow \text{Lin}$ assez régulière et on suppose que ψ est \mathcal{G} -invariant, *i.e.* $\mathbf{Q}a\mathbf{Q}^t \in A$ pour tout $a \in A$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$ et

$$\mathbf{Q}\psi(a)\mathbf{Q}^t = \psi(\mathbf{Q}a\mathbf{Q}^t) \quad (2.30)$$

pour tout $a \in A$ et $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$.

On a alors

$$\mathbf{Q}D\psi(a)[u]\mathbf{Q}^t = D\psi(\mathbf{Q}a\mathbf{Q}^t)[\mathbf{Q}u\mathbf{Q}^t] \quad (2.31)$$

pour tout $a \in A$, $u \in U$ et $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$.

Alors, la relation (2.21) et les remarques faites au § 2.4.3 impliquent que le tenseur \mathbf{L} (ou \mathbf{C}) des modules élastiques d'un cristal \mathcal{M} vérifie :

$$\mathbf{Q}^t \mathbf{L}[\mathbf{E}] \mathbf{Q} = \mathbf{L}[\mathbf{Q}^t \mathbf{E} \mathbf{Q}] \text{ pour tout } \mathbf{E} \in \text{Sym et tout } \mathbf{Q} \in P(\mathcal{M}), \quad (2.32)$$

ce qui corrobore le *Principe de Curie* dont on reparlera au Chapitre 3.

Grosso-modo - et en accord avec ce principe - la relation (2.32) ci-dessus dit que le tenseur élastique \mathbf{L} est au moins autant symétrique que le cristal \mathcal{M} dont il traduit les propriétés (élastiques). En anticipant sur certaines notions introduites dans le prochain Chapitre, la relation (2.32) équivaut en fait à

$$\mathbf{Q} \star \mathbf{L} = \mathbf{L}, \text{ pour tout } \mathbf{Q} \in P(\mathcal{M}), \quad (2.33)$$

où l'action \star sera définie en (3.3).

La démarche introduite par Forte & Vianello (1996) consiste à poursuivre le processus consistant à énumérer le nombre de classes de symétries propres aux cristaux et de l'étendre aux tenseurs. Il s'agit en fait de remarquer que la

relation (2.33) permet de définir le groupe de symétrie d'un tenseur élastique par

$$\begin{aligned} g(\mathbf{L}) &:= \{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) : \mathbf{Q}^t \mathbf{L} [\mathbf{E}] \mathbf{Q} = \mathbf{L} [\mathbf{Q}^t \mathbf{E} \mathbf{Q}] \text{ pour tout } \mathbf{E} \in \text{Sym}\} \\ &= \{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) : \mathbf{Q} \star \mathbf{L} = \mathbf{L}\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ces groupes sont ensuite ordonnés en classes d'équivalence qui permettent de répondre à la question :

(a'') En combien de classes de symétrie distinctes les tenseurs élastiques se classent-ils ?¹⁰

Le Chapitre suivant consiste à détailler la méthode qui permet de répondre à la question (a'') appliquée aux tenseurs piézoélectriques, puis piézo-magnétiques.

Notons enfin que l'idée de classer les symétries des tenseurs en construisant des classes d'équivalence avait déjà été utilisée par Huo & Del Piero (1991).

2.6 Propriétés d'invariance des tenseurs piézoélectriques

L'énergie que l'on considère habituellement dans le cas de la piézoélectricité (*cf.* Royer & Dieulesaint (1996) par exemple) est fonction du tenseur linéarisé des déformations \mathbf{e} ainsi que du vecteur déplacement électrique \mathbf{d} . Ce dernier est un vecteur polaire¹¹. Le tenseur piézoélectrique \mathbf{p} est alors obtenu par la relation différentielle

$$\mathbf{p}_{ijk} = \frac{\partial^2 \check{\phi}}{\partial e_{ij} \partial d_k}, \quad (2.35)$$

avec

$$\phi =: \check{\phi}(\mathbf{e}, \mathbf{d}). \quad (2.36)$$

¹⁰ Ou encore : quel est le nombre de "symétries élastiques" possibles. La réponse est huit (*cf.* Forte & Vianello (1996) et Chadwick *et al.*, 2001). En d'autres termes, si les (symétries des) cristaux se rangent en 32 classes, les tenseurs traduisant leurs propriétés élastiques n'en voient que huit (familles) distinctes.

¹¹ En ce qui concerne les grandeurs polaires et axiales, *cf. infra* le § 3.1.3.

Le tenseur piézoélectrique \mathbf{p} est donc symétrique vis-à-vis de ses deux premiers indices :

$$\mathbf{p}_{ijk} = \mathbf{p}_{jik}, \quad (2.37)$$

et on peut écrire que

$$\check{\phi}(\mathbf{e}, \mathbf{d}) = \check{\phi}(\mathbf{Q}^t \mathbf{e} \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \mathbf{d}), \text{ pour tout } \mathbf{Q} \in P(\mathcal{M}), \quad (2.38)$$

où \mathcal{M} est le cristal piézoélectrique étudié.

Les relations (2.35) et (2.38) permettent d'aboutir à une relation similaire à (2.32) mais adaptée au cas de la piézoélectricité :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \mathbf{p}[\mathbf{d}] \mathbf{Q}^t &= \mathbf{p}[\mathbf{Q} \mathbf{d}], \\ \mathbf{Q}^t \mathbf{p}[\mathbf{e}] &= \mathbf{p}[\mathbf{Q}^t \mathbf{e} \mathbf{Q}], \end{aligned} \quad (2.39)$$

pour tout élément \mathbf{Q} de $P(\mathcal{M})$, tout \mathbf{d} dans \mathbb{R}^3 et tout tenseur symétrique du deuxième ordre \mathbf{e} .

La relation (2.39) équivaut en fait à

$$\mathbf{Q} \star \mathbf{p} = \mathbf{p}, \text{ pour tout } \mathbf{Q} \in P(\mathcal{M}), \quad (2.40)$$

ce qui nous conduit à définir le groupe de symétrie d'un tenseur piézoélectrique par

$$g(\mathbf{p}) := \{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) : \mathbf{Q} \star \mathbf{p} = \mathbf{p}\}. \quad (2.41)$$

Les propriétés de ce type de groupe vont à partir de maintenant être étudiées dans le détail.

3. LES TENSEURS

Considérons un système physique, c'est-à-dire la réunion d'un objet (atome, molécule, cristal, objet macroscopique,...) et de son environnement (champ extérieur : gravitationnel, électrique ou magnétique ; champ de contraintes ; ...) dont on souhaite étudier une propriété physique. On appelle *cause* le système et *effet* la propriété considérée. Selon Curie¹ "*lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. La réciproque n'est pas vraie, c'est à dire que les effets peuvent être plus symétriques que les causes*".

Par conséquent, si l'on suppose que le système possède une certaine symétrie décrite par le groupe de symétrie G , et que la propriété possède également une certaine symétrie décrite par le groupe K , on a alors nécessairement $K \supseteq G$.

Le principe de Curie (qui implique donc celui de Neumann) permet, avant l'utilisation de toute théorie physique, d'extraire des informations *qualitatives* de la connaissance de la symétrie d'un système et d'en simplifier l'étude ultérieure. Autrement dit, la symétrie ne sert pas seulement à décrire, classer et caractériser (comme en minéralogie), elle sert à prévoir des propriétés physiques.

Avant d'utiliser ce principe à l'étude des symétries piézoélectriques, on rappelle un certain nombre de notions qui nous seront utiles pour la suite.

3.1 Préliminaires

Dans tout ce chapitre on travaillera dans une base orthonormée fixée

$$R = (O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}). \quad (3.1)$$

On s'abstient par conséquent de la distinction effectuée jusqu'à présent entre tenseurs et matrices les représentant. On parlera donc indistinctement de

¹ Pierre Curie, physicien français, 1859-1906. Lui et sa femme Marie Skłodowska Curie, physicienne d'origine polonaise (1867-1934), reçurent conjointement le prix Nobel de physique en 1903. Elle reçut aussi le prix Nobel de chimie en 1911.

ceux-ci en les désignant par des majuscules grasses. On ne distinguera pas non plus les *groupes* de tenseurs des groupes de matrices, et on choisira les notations communément adoptée concernant les *matrices*.

3.1.1 Les sous-groupes fermés de $\mathbf{SO}(3)$

Géométriquement, $\mathbf{SO}(3)$ est le groupe des déplacements rigides² de \mathbb{R}^3 qui fixent l'origine et préservent l'orientation. Ses sous-groupes fermés possèdent d'élégantes propriétés en terme de symétrie de certains sous-ensembles de \mathbb{R}^3 . Choisissons un plan P de \mathbb{R}^3 et un axe A orthogonal à P . Le sous-groupe de toutes les transformations qui laissent P invariant se réduit en fait à l'ensemble des rotations d'axe A combinées aux rotations d'axe les droites contenues dans P . Ce groupe est isomorphe à $\mathbf{O}(2)$, le sous-groupe des rotations qui envoient \mathbf{k} sur $\pm\mathbf{k}$. Si de plus on impose que le sens de l'axe A soit préservée, alors ce groupe est isomorphe à $\mathbf{SO}(2)$, le sous-groupe des rotations qui laissent \mathbf{k} invariant. Ainsi, les éléments de $\mathbf{SO}(2)$ ont la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}(\mathbf{k}, \omega),$$

et ceux de $\mathbf{O}(2)$ s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

où $\omega \in [0, 2\pi[$.

Les symétries d'un n -gone régulier contenu dans P engendrent un sous-groupe de $\mathbf{O}(2)$ isomorphe au *groupe diédral* \mathbf{D}_n . Ce dernier est le sous-groupe fermé généré par $\mathbf{Q}(\mathbf{k}, 2\pi/n)$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \pi)$; il possède $2n$ éléments. Si l'on impose de préserver le sens de A , ce groupe se réduit \mathbf{Z}_n , l'ensemble des rotations d'axe \mathbf{k} et d'angle multiple de $2\pi/n$. Cet ensemble est un groupe cyclique possédant n éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{l} & \sin \frac{2\pi}{l} & 0 \\ -\sin \frac{2\pi}{l} & \cos \frac{2\pi}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}(\mathbf{k}, 2\pi/l), \quad l = 1, \dots, n.$$

² Une bonne fois pour toute, les déplacements rigides doivent en toute rigueur être considérés comme des tenseurs, tandis que $\mathbf{SO}(3)$ est un groupe de matrice. On garde cependant la notation des groupes matriciels conformément aux choix qui viennent d'être énoncés.

Dans ces descriptions, $n = 2$ est autorisé.

Les sous-groupes $\mathbf{O}(2)$, $\mathbf{SO}(2)$, \mathbf{D}_n et \mathbf{Z}_n sont appelés les sous-groupes *planaires* de $\mathbf{SO}(3)$.

En plus de ces sous-groupes, on trouve aussi les groupes (parfois appelés *exceptionnels*) \mathcal{T} , \mathcal{O} et \mathcal{I} des symétries des tétraèdre, octaèdre et icosaèdre réguliers, respectivement. Les groupes \mathcal{O} et \mathcal{I} sont aussi les groupes des symétries du cube et du dodécaèdre, respectivement (*cf.* figure 3.1); cela facilite d'ailleurs la visualisation, mais les termes de groupe octaédrique et groupe icosahédrique sont traditionnels. On note que les groupes $\mathbf{O}(2)$ et $\mathbf{SO}(2)$ sont des groupes infinis, tandis que \mathbf{D}_n , \mathbf{Z}_n , \mathcal{T} , \mathcal{O} et \mathcal{I} sont finis d'ordres $2n$, n , 12, 24 et 60 respectivement.

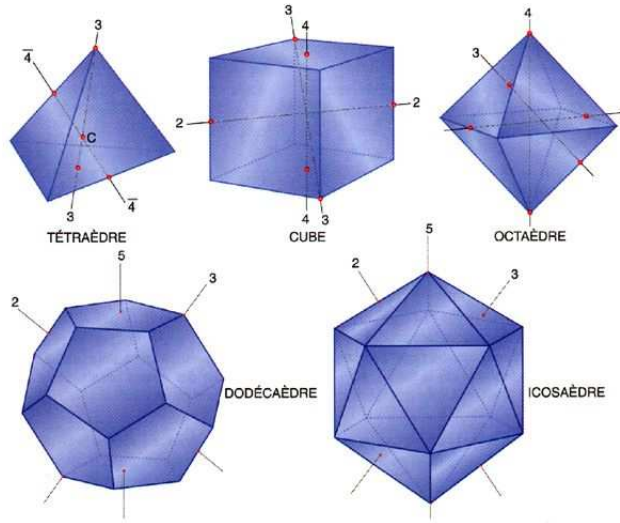


Fig. 3.1: Les polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3 donnant naissance aux sous-groupes exceptionnels de $\mathbf{SO}(3)$

Il est clair d'un point de vue géométrique que pour les sous-groupes planaires, un autre choix de plan P et de sens de l'axe A conduit simplement à un sous-groupe conjugué ou congruent dans $\mathbf{O}(3)$ (de même dans le cas d'une orientation différente des divers polyèdres réguliers). Ces considérations sont à l'origine du

Théorème 3.1: Tout sous-groupe fermé de $\mathbf{SO}(3)$ est conjugué à l'un des groupes suivants : $\mathbf{SO}(3)$, $\mathbf{O}(2)$, $\mathbf{SO}(2)$, \mathbf{D}_n ($n \geq 2$), \mathbf{Z}_n ($n \geq 2$), \mathcal{T} , \mathcal{O} , \mathcal{I} et $\mathbf{1}$.

L'idée principale de la démonstration, qui est classique, est de montrer que tout sous-groupe fermé rassemble les symétries d'une figure donnée puis

de classifier ces figures en utilisant des arguments de nature arithmétique (*cf.* Dubrovin *et al.*, 1984).

3.1.2 Les sous-groupes fermés de $\mathbf{O}(3)$

Algébriquement, le groupe orthogonal $\mathbf{O}(3)$ est la somme directe

$$\mathbf{O}(3) = \mathbf{SO}(3) \oplus \mathbf{Z}_2^c, \quad (3.2)$$

où $\mathbf{Z}_2^c := \{\pm 1\}$ et le *groupe de l'inversion* ; cela conduit à des connections très intimes entre les sous-groupes fermés de $\mathbf{O}(3)$ et ceux déjà définis de $\mathbf{SO}(3)$.

On appelle *propres* les opérations de $\mathbf{O}(3)$ qui conservent l'orientation (*i.e.* de déterminant $+1$) et *impropres* les autres (donc celles de déterminant -1). En fait, à partir des opérations propres et impropres, on peut construire trois types de groupes de symétrie (fermés) : les groupes propres, qui ne contiennent que des opérations propres et qui viennent d'être énumérés ; des groupes centrosymétriques, sommes directes d'un groupe propre par le groupe de l'inversion ; enfin les groupes impropres, qui contiennent des opérations impropres mais non l'inversion elle-même, et construits à partir de certains groupes propres. On range donc les sous-groupes fermés de $\mathbf{O}(3)$ en trois classes :

- (I) Les sous-groupes fermés de $\mathbf{SO}(3)$,
- (II) les sous groupes fermés qui contiennent -1 ,
- (III) les sous groupes fermés qui ne sont pas contenus dans $\mathbf{SO}(3)$ et qui ne contiennent pas -1 .

Comme on vient de le signaler, les sous-groupes de classe (II) sont tous de la forme $G \oplus \mathbf{Z}_2^c$ où G est un sous-groupe de $\mathbf{SO}(3)$. On énonce donc le

Théorème 3.2: Tout sous-groupe fermé de $\mathbf{O}(3)$ est conjugué à l'un des sous-groupes suivants :

- (I) $\mathbf{SO}(3)$, $\mathbf{O}(2)$, $\mathbf{SO}(2)$, \mathcal{T} , \mathcal{O} , \mathcal{I} , \mathbf{D}_n ($n \geq 2$), \mathbf{Z}_n ($n \geq 2$), $\mathbf{1}$.
- (II) $G \oplus \mathbf{Z}_2^c$ où G est l'un des groupes en (I) et où $\mathbf{Z}_2^c = \{\pm 1\}$.
- (III) $\mathbf{O}(2)^-$, \mathcal{O}^- , \mathbf{D}_n^z ($n \geq 2$), \mathbf{D}_{2n}^d ($n \geq 2$), \mathbf{Z}_{2n}^- ($n \geq 1$).

Sans rentrer dans les détails de la construction des sous-groupes de classe (III), disons que $\mathbf{O}(2)^-$, \mathcal{O}^- , \mathbf{D}_n^z ($n \geq 2$), \mathbf{D}_{2n}^d ($n \geq 2$) et \mathbf{Z}_{2n}^- ($n \geq 1$) sont construits respectivement à partir de $\mathbf{SO}(2)$, \mathcal{T} , \mathbf{Z}_n ($n \geq 2$), \mathbf{D}_n ($n \geq 2$) et \mathbf{Z}_n ($n \geq 2$) à nouveau.

Le groupe noté \mathbf{Z}_2^- est généré par

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, les sous-groupes \mathbf{D}_{2m} , \mathbf{D}_{2m}^z et \mathbf{D}_{2m}^d sont trois sous-groupes de $\mathbf{O}(3)$ isomorphes à \mathbf{D}_{2m} mais qui ne sont pas conjugués.

Le sous-groupe \mathbf{Z}_{2m} est présent à l'intérieur de \mathbf{D}_{2m} et de \mathbf{D}_{2m}^z .

Le sous-groupe \mathbf{D}_{2m}^z est généré par \mathbf{Z}_{2m} et la reflexion d'axe x dans le plan (x, y) notée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe cyclique d'ordre $2m$ dans \mathbf{D}_{2m}^d n'est pas le sous-groupe cyclique standard $\mathbf{Z}_{2m} \subset \mathbf{SO}(3)$ mais le sous-groupe de classe (III) \mathbf{Z}_{2m}^- généré par la rotation

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{m} & \sin \frac{\pi}{m} & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{m} & \cos \frac{\pi}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La reflexion d'axe x dans \mathbf{D}_{2m}^d est la même que dans \mathbf{D}_{2m} .

Le sous-groupe noté $\mathbf{O}(2)^-$ est généré par $\mathbf{SO}(2)$ et la réflexion d'axe \mathbf{i} .

Enfin, \mathcal{O}^- est généré par

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1.3 Grandeurs polaires et axiales

Pour décrire la nature, un observateur est amené à introduire de nombreuses conventions : orientation de l'espace, orientation du temps (en pratique du passé vers le futur), signe des charges électriques (par convention, la charge de l'électron est négative). Bien entendu, les phénomènes physiques sont indépendants de ces différentes conventions, de même qu'ils sont indépendants du choix, arbitraire, des unités utilisées dans leur description quantitative. Une convention étant choisie, on peut être amené à en changer : il faut savoir quelles sont les grandeurs affectées par ce changement.

Quand on introduit une distinction entre la droite et la gauche (de la manière classique, c'est-à-dire en orientant les trièdres), on fait immédiatement apparaître deux types de grandeurs géométriques et physiques (*cf.* par exemple Sirotine & Chaskolskaïa (1984) et Sivardière, 1995) :

- les grandeurs *polaires*, ou grandeurs *vraies*, dont le signe est une propriété intrinsèque, une donnée de la nature, c'est-à-dire indépendante de la convention d'orientation de l'espace ;
- les grandeurs *axiales*, ou *pseudo-grandeurs*, dont le signe, sans signification physique et donc arbitraire, est fixé en se référant à la convention d'orientation de l'espace, et change si la convention est inversée.

Ainsi, par exemple, les vecteurs vitesse, accélération et force sont polaires tandis que les vecteurs défini comme produit vectoriel de deux vecteurs polaires est axial, puisque la définition du produit vectoriel fait référence à la convention d'orientation de l'espace (cas des vecteurs surface orientée, moment d'une force par rapport à un point, moment cinétique d'une masse).

On verra dans la suite le rôle important que joue cette distinction dans la classification des symétries macroscopiques.

Afin de formaliser ces idées, considérons un tenseur d'ordre quelconque \mathbf{T} . Ses composantes dans la base de référence $R = (O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sont notées $\mathbf{T}_{...ijk...}$. Soit $\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3})$ une transformation orthogonale. Dans une nouvelle base $R' = (O; \mathbf{Q}\mathbf{i}, \mathbf{Q}\mathbf{j}, \mathbf{Q}\mathbf{k}) = \mathbf{Q} R$, les composantes de \mathbf{T} se transforment en

$$\boxed{(\mathbf{Q} \star \mathbf{T})_{...ijk...} := \cdots Q_{ip} Q_{jq} Q_{kr} \cdots T_{...pqr...}} \quad (3.3)$$

On introduit maintenant le *tenseur d'orientation* ϵ_{ijk} défini par

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \quad (3.4)$$

On voit alors que pour $\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3})$ on a :

$$(\mathbf{Q} \star \epsilon)_{ijk} = Q_{ip} Q_{jq} Q_{kr} \epsilon_{pqr} = \det(\mathbf{Q}) \epsilon_{ijk}. \quad (3.5)$$

Le fait que le déterminant de la transformation orthogonale \mathbf{Q} apparaisse dans cette relation signifie que les composantes du tenseur d'orientation sont sensibles à l'orientation de l'espace. Comme il a été signalé plus haut, on dit que ces composantes sont des pseudo-scalaires ou des scalaires axiaux. On

les notera ${}^{\epsilon}\text{scalaires}$ à partir de maintenant. Pour être tout à fait précis, c'est en tant que ces scalaires représentent le tenseur d'orientation qu'ils sont des ${}^{\epsilon}\text{scalaires}$. *A contrario*, les grandeurs qui ne sont pas sensibles à l'orientation de l'espace, au sens où celles-ci se transforment comme \mathbf{T} dans (3.3), sont donc des variables polaires ou vraies.

Prenons un autre exemple : soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur et soit \mathbf{V} le tenseur antisymétrique défini par $V_{ij} = \epsilon_{ijk} v_k$. On a alors $v_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} V_{ij}$, ce que l'on décide de noter $\mathbf{v} = f(\mathbf{V})$. Il en résulte que

$$f(\mathbf{Q} \star \mathbf{V}) = \det(\mathbf{Q}) f(\mathbf{V}). \quad (3.6)$$

Cette relation signifie que la fonction f , qui associe le vecteur \mathbf{v} au tenseur \mathbf{V} , est une *fonction axiale* ; et c'est en tant que \mathbf{v} représente un tenseur antisymétrique du deuxième ordre \mathbf{V} qu'on l'appellera ${}^{\epsilon}\text{vecteur}$. On dira en fait pour simplifier que \mathbf{v} lui-même est axial. Par extension, on notera ${}^{\epsilon}\mathbf{T}$ les tenseurs qui ne se transforment pas comme \mathbf{T} en (3.3) mais comme les composantes de ϵ en (3.5), traduisant le fait que ce sont des grandeurs axiales, ou pseudo-grandeurs.

Enfin, pour deux tenseurs \mathbf{T} (polaire) et ${}^{\epsilon}\mathbf{T}$ (axial) de même ordre et dont les composantes sont identiques, on écrira

$$\mathbf{T} = {}^{\epsilon}\text{Id}({}^{\epsilon}\mathbf{T}), \quad (3.7)$$

signifiant par là que l'application ${}^{\epsilon}\text{Id}$ change la *qualité* de la grandeur sur laquelle il agit, sans changer quoi que ce soit d'autre. On dira que deux telles grandeurs sont *jumelles* et on introduira plus bas des *tenseurs jumeaux* dans le cadre de l'étude des symétries du phénomène piézomagnétique.

3.1.4 Lien entre les notations cristallographiques et mathématiques.

Première classification

Notation cristallographique	Notation mathématique
1	$\mathbf{1}$
$\bar{1}$	\mathbf{Z}_2^c
2	\mathbf{Z}_2
m	\mathbf{Z}_2^-
$2/m$	$\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2^c$
222	\mathbf{D}_2
$2mm$	\mathbf{D}_2^z
mmm	$\mathbf{D}_2 \oplus \mathbf{Z}_2^c$
3	\mathbf{Z}_3
$\bar{3}$	$\mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_2^c$
32	\mathbf{D}_3
$3m$	\mathbf{D}_3^z
$\bar{3}m$	$\mathbf{D}_3 \oplus \mathbf{Z}_2^c$
4	\mathbf{Z}_4
$\bar{4}$	\mathbf{Z}_4^-
$4/m$	$\mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_2^c$
422	\mathbf{D}_4
$4mm$	\mathbf{D}_4^z
$\bar{4}2m$	\mathbf{D}_4^d
$4/mmm$	$\mathbf{D}_4 \oplus \mathbf{Z}_2^c$
6	\mathbf{Z}_6
$\bar{6}$	\mathbf{Z}_6^-
622	\mathbf{D}_6
$6mm$	\mathbf{D}_6^z
$\bar{6}2m$	\mathbf{D}_6^d
$6/m$	$\mathbf{Z}_6 \oplus \mathbf{Z}_2^c$
$6/mmm$	$\mathbf{D}_6 \oplus \mathbf{Z}_2^c$
23	\mathcal{T}
$\bar{4}3m$	\mathcal{O}^-
432	\mathcal{O}
$m\bar{3}$	$\mathcal{T} \oplus \mathbf{Z}_2^c$
$m\bar{3}m$	$\mathcal{O} \oplus \mathbf{Z}_2^c$
∞	$\mathbf{SO}(2)$
$\infty 2$	$\mathbf{O}(2)$
∞m	$\mathbf{O}(2)^-$
∞/m	$\mathbf{SO}(2) \oplus \mathbf{Z}_2^c$
∞/mmm	$\mathbf{O}(2) \oplus \mathbf{Z}_2^c$
$\infty\infty$	$\mathbf{SO}(3)$
$\infty\infty m$	$\mathbf{O}(3)$

Les sept derniers groupes sont appelés *groupes limites* en cristallographie et leur intérêt a été souligné par Pierre Curie durant ses recherches sur les symétries des phénomènes physiques.

Revenons par conséquent au Principe de Curie énoncé en début de Chapitre. Il est facile d'en déduire d'intéressantes conséquences. Ainsi la symétrie de certaines grandeurs physiques, qu'on peut considérer comme causes dans certaines manifestations et comme effets dans d'autres, peut être encadrée entre deux limites. Si le choix des manifestations peut être en sorte que la limite inférieure de la symétrie soit identique à la limite supérieure, on détermine alors pour la grandeur physique une symétrie intrinsèque.

La symétrie du champ électrique, par exemple, est ∞m et elle est généralement représentée par un cône. Celle du champ magnétique est différente : c'est celle du groupe ∞/m , qui n'est pas correctement représentée par une flèche, mais qui est la symétrie d'une spire circulaire sur laquelle le sens de parcours est fixé. Ainsi, le champ électrique est représenté par un vecteur polaire et le champ magnétique par un vecteur axial.

Proposons-nous, par exemple, de chercher quels sont les cristaux qui, *a priori*, peuvent posséder un moment électrique permanent, résultant de l'arrangement des atomes dans le milieu. Ces cristaux sont dits *pyro-électriques*, car on met facilement en évidence les variations avec la température (pyros en grec) de ce moment électrique permanent. La loi de Curie exige que la symétrie d'orientation de tels cristaux ne contiennent pas d'éléments incompatibles avec celle du champ électrique qui est, dans le cas de ces cristaux, une manifestation spontanée. Donc, seuls les cristaux appartenant aux groupes 1, 2, 3, 4, 6, m , $2m$, $3m$, $4m$ et $6m$ peuvent être pyro-électriques

On peut, dans le même esprit, chercher les groupes ponctuels compatibles avec l'apparition du phénomène piézo-électrique (apparition d'une polarisation électrique sous l'effet d'une contrainte. La symétrie des "causes" est alors celle du milieu cristallin déformé sous l'effet de la contrainte, c'est-à-dire une symétrie inférieure à celle du cristal libre. Les "groupes piézoélectriques" sont donc plus nombreux que les "groupes pyroélectriques". Ce sont les groupes qui ne comportent pas de centre de symétrie, à l'exception du groupe 432 (soit 20 groupes au total).

On se propose désormais de retrouver ces 20 groupes piézoélectriques et de les classer d'un point de vue macroscopique.

3.2 Les symétries des tenseurs piézoélectriques

Soient E_4 l'espace des tenseurs du quatrième ordre L tels que $L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk} = L_{klij}$ et \mathbf{piez} l'espace des tenseurs du troisième ordre p tels que

$p_{ijk} = p_{jik}$. Les éléments de **Ela** sont des tenseurs (*hyper*)élastiques tandis que ceux de **piez** sont des tenseurs *piézoélectriques* (cf. §§ 2.5 et 2.6 ainsi que les relations (2.28) et (2.37)). On va focaliser notre attention sur l'ensemble des transformations orthogonales qui sont des opérations de symétrie d'un tenseur piézoélectrique donné.

Plus précisément, la loi de comportement de la piézoélasticité linéaire relie le tenseur des contraintes **T** et le vecteur déplacement électrique **d** au tenseur des déformations linéarisées **e** et au vecteur gradient du potentiel électrique **g** = $\nabla\varphi$. Elle est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{e}, \mathbf{g}) = \mathbf{L}[\mathbf{e}] - \mathbf{p}[\mathbf{g}], \\ \mathbf{d}(\mathbf{e}, \mathbf{g}) = \mathbf{p}^t[\mathbf{e}] + \mathbf{s}[\mathbf{g}], \end{cases} \quad (3.8)$$

où $(\mathbf{L}, \mathbf{p}, \mathbf{s}) \in \mathbf{Ela} \times \mathbf{piez} \times \mathbf{Sym}$. On appelle **s** le *tenseur diélectrique*.

La classification des symétries qu'est susceptible d'admettre le phénomène piézoélectrique (et non le cristal qui est le siège du phénomène) revient à l'étude de la structure du *groupe de symétrie* d'un élément $\mathbf{p} \in \mathbf{piez}$ déjà défini en (2.39) et (2.41) par :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}) &= \{\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3}) : \mathbf{p}[\mathbf{Q}\mathbf{g}] = \mathbf{Q}\mathbf{p}[\mathbf{g}]\mathbf{Q}^t, \forall \mathbf{g} \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3}) : \mathbf{p}[\mathbf{Q}\mathbf{e}\mathbf{Q}^t] = \mathbf{Q}\mathbf{p}[\mathbf{e}], \forall \mathbf{e} \in \mathbf{Sym}\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Il est clair que les ensembles définis ci-dessus sont bien des groupes.

La fonction qui fait correspondre, à chaque élément $\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3})$, l'automorphisme de **piez** donné par $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{Q} \star \mathbf{p}$ est une *action* de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$ sur l'espace vectoriel **piez**. Ainsi, le groupe de symétrie d'un élément $\mathbf{p} \in \mathbf{piez}$ est en fait l'ensemble de toutes les transformations orthogonales telles que $\mathbf{Q} \star \mathbf{p} = \mathbf{p}$:

$$g(\mathbf{p}) = \{\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3}) : \mathbf{Q} \star \mathbf{p} = \mathbf{p}\}. \quad (3.10)$$

Une conséquence importante de cette définition est que, par continuité, les groupes de symétrie sont des *sous-groupes fermés* de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$. De plus, les sous-groupes $g(\mathbf{p})$ et $g(\mathbf{Q} \star \mathbf{p})$ sont *conjugués* via \mathbf{Q} , i.e. on a :

$$g(\mathbf{Q} \star \mathbf{p}) = \mathbf{Q} g(\mathbf{p}) \mathbf{Q}^t. \quad (3.11)$$

Cette propriété est capitale puisqu'elle va nous permettre de construire des classes d'équivalence d'une manière analogue à celle qui a été utilisée pour la classification des cristaux.

Soit G un sous-groupe de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$. On dit qu'un tenseur piézoélectrique \mathbf{p} est G -symétrique si $g(\mathbf{p}) \supset G$. Pour vérifier une telle propriété, il suffit de montrer que $\mathbf{Q} \star \mathbf{p} = \mathbf{p}$ pour un ensemble de générateurs de G .

On s'intéresse ici à la classification des tenseurs de **piez** selon leur groupe de symétrie. Or, il semble raisonnable de suivre l'intuition physique selon laquelle deux corps possèdent la même *classe* de symétrie dès qu'il existe une transformation de solide rigide qui fait coïncider leurs groupes de symétrie. Ainsi, on dira que \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 de **piez** sont *équivalents* s'il existe une transformation orthogonale \mathbf{Q} telle que $g(\mathbf{p}_1) = g(\mathbf{Q} \star \mathbf{p}_2)$. Comme il a été signalé un peu plus haut, cela signifie que \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 sont équivalents quand leurs groupes de symétrie sont conjugués :

$$\mathbf{p}_1 \sim \mathbf{p}_2 \iff \{\exists \mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3}) : g(\mathbf{p}_1) = \mathbf{Q} g(\mathbf{p}_2) \mathbf{Q}^t\}. \quad (3.12)$$

Puisque cette relation est bien une relation d'équivalence, on écrira simplement que

$$\mathbf{p}_1 \sim \mathbf{p}_2 \iff g(\mathbf{p}_1) \sim g(\mathbf{p}_2). \quad (3.13)$$

Les classes d'équivalence qui résultent de \sim dans **piez** sont appelées *classes de symétrie* et nous écrivons $\{\mathbf{p}\}$ la classe de symétrie du tenseur \mathbf{p} de **piez**. De façon analogue, pour un sous-groupe G de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$, on note $\{G\}$ la collection de tous ses conjugués dans l'ensemble des sous-groupes de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$. La question que l'on se pose maintenant est donc³ :

(a") combien y a-t-il de classes de symétrie dans **piez** et quelles sont-elles ?

Dans les deux paragraphes qui suivent, on introduit les outils et techniques qui permettent de donner une réponse précise à cette question.

On note auparavant que les groupes de symétrie étant des sous-groupes fermés de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$, on a la

Proposition 3.3: A chaque élément $\mathbf{p} \in \mathbf{piez}$, il correspond un unique sous-groupe fermé G de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$ tel que G soit conjugué à $g(\mathbf{p})$.

Soit G un sous-groupe fermé de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$, on définit l'ensemble $\mathbf{piez}(G)$ comme la collection de tous les tenseurs de **piez** dont le groupe de symétrie est conjugué à G :

$$\mathbf{piez}(G) := \{\mathbf{p} \in \mathbf{piez} : g(\mathbf{p}) \in \{G\}\}, G \in \Sigma. \quad (3.14)$$

³ cf. § 2.5 dans lequel une question analogue a été posée concernant \mathbf{Ela} .

Par conséquent, **piez** peut être vu comme l'union disjointe de toutes les classes d'équivalence de la forme **piez**(G), lorsque G décrit l'ensemble Σ des sous-groupes fermés de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$.

Notre étude se réduit donc à la recherche des classes **piez**(G) qui sont ou ne sont pas vides, pour chaque $G \in \Sigma$.

3.2.1 La décomposition harmonique

Il est clair que tout tenseur du deuxième ordre \mathbf{E} est la somme d'un tenseur symétrique $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^t)$ et d'un tenseur antisymétrique $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^t)$. Notons que le tenseur antisymétrique du deuxième ordre \mathbf{W} est associé à un vecteur axial ${}^\epsilon \mathbf{w}$ via la relation suivante :

$$W_{ij} = \epsilon_{ijk} {}^\epsilon w_k, \quad (3.15)$$

où ϵ_{ijk} sont les composantes du tenseur d'orientation.

On note tr l'opérateur trace et \mathbf{S}^d la partie déviatorique de \mathbf{S} . La relation

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}^d + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{S}^d + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

établit un isomorphisme noté ϕ entre Lin et $\text{Dev} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, où Dev est l'espace des tenseurs *symétriques* du deuxième ordre et de *trace nulle*. On écrit par conséquent :

$$\text{Lin} \ni \mathbf{E} \stackrel{\phi}{\approx} (\mathbf{S}^d, {}^\epsilon \mathbf{w}, \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{E})) \in \text{Dev} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

De plus, étant données les relations (3.3) et (3.5), on a :

$$\mathbf{Q} \star \mathbf{E} \approx (\mathbf{Q} \star \mathbf{S}^d, \det(\mathbf{Q})(\mathbf{Q} \star {}^\epsilon \mathbf{w}), \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{E})). \quad (3.18)$$

La relation (3.10) pouvant être considérée comme une définition générale du groupe de symétrie d'un tenseur polaire d'ordre quelconque, on obtient immédiatement que

$$g(\mathbf{E}) = g(\mathbf{S}^d) \cap {}^\epsilon g({}^\epsilon \mathbf{w}), \quad (3.19)$$

où le groupe

$${}^{\epsilon}g({}^{\epsilon}\mathbf{w}) = \{\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3}) : \mathbf{Q} \star {}^{\epsilon}\mathbf{w} = \det(\mathbf{Q}) {}^{\epsilon}\mathbf{w}\}, \quad (3.20)$$

est le groupe de symétrie du vecteur axial ${}^{\epsilon}\mathbf{w}$. La relation (3.20) peut, tout comme (3.10), être considérée comme une définition du groupe de symétrie de n'importe quel tenseur axial.

Exemple 3.4: (Classes de symétrie des tenseurs (polaires) du deuxième ordre)

Soit \mathbf{E} un tenseur du deuxième ordre quelconque. On sait d'après (3.17) que l'on peut écrire

$$\mathbf{E} = (\mathbf{S}^d, {}^{\epsilon}\mathbf{w}, \alpha) \in \text{Dev} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

D'autre part, d'après (3.19), on sait que son groupe de symétrie $g(\mathbf{E})$ est entièrement déterminé par les groupes de symétrie $g(\mathbf{S}^d)$ et ${}^{\epsilon}g({}^{\epsilon}\mathbf{w})$ des éléments de sa *décomposition harmonique*.

Dans ce cas précis, puisque \mathbf{E} est polaire, il est important de remarquer que l'inversion $-\mathbf{1}$ fait nécessairement partie de $g(\mathbf{E})$. Ce dernier est donc nécessairement un sous-groupe fermé de $\mathbf{O}(\mathbf{3})$ de classe (II) et est donc de la forme $G \oplus \mathbf{Z}_c^2$ où G est un sous-groupe fermé de $\mathbf{SO}(\mathbf{3})$ (*cf. supra*). Dans un souci de simplicité des notations, on restreint donc l'étude des classes de symétries de \mathbf{E} aux sous-groupes fermés de $\mathbf{SO}(\mathbf{3})$, c'est-à-dire aux sous-groupes de classe (I).

On trouve dans Forte & Vianello (1996) le résultat suivant, dont on reprend la démonstration :

Théorème 3.5: Soit $\mathbf{E} \in \text{Dev}$. Alors $g(\mathbf{E})$ est conjugué à \mathbf{D}_2 , $\mathbf{O}(\mathbf{2})$ ou $\mathbf{SO}(\mathbf{3})$.

Démonstration:

Tout d'abord, il est clair que $g(\mathbf{0}) = \mathbf{SO}(\mathbf{3})$.

Maintenant, supposons que \mathbf{E} possède trois valeurs propres distinctes. Alors, les seuls éléments du groupe de symétrie de \mathbf{E} sont les rotations d'angle π autour des vecteurs propres⁴. Ce groupe est conjugué à \mathbf{D}_2 .

Si \mathbf{E} ne possède que deux valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres correspondant sont une droite et le plan qui lui est perpendiculaire. Dans ce cas, $\mathbf{Q} \in g(\mathbf{E})$ si et seulement si \mathbf{Q} est une rotation autour de la droite propre ou une rotation d'angle π autour d'une droite quelconque contenu dans le plan propre. Le groupe de symétrie de \mathbf{E} est dans ce cas conjugué à $\mathbf{O}(\mathbf{2})$.

⁴ Ceci découle du fait que $\mathbf{Q} \in g(\mathbf{E})$ si et seulement si \mathbf{Q} envoie chaque espace propre sur lui-même.

□

D'autre part, étant donné un vecteur axial ${}^e\mathbf{w}$ quelconque, son groupe de symétrie ${}^e g({}^e\mathbf{w})$ est conjugué à $\mathbf{SO}(2)$ ou à $\mathbf{SO}(3)$ (s'il est nul) par définition même.

La caractérisation des classes de symétries des tenseurs (polaires) du deuxième ordre est alors donnée par le

Théorème 3.6: Soit $\mathbf{E} = (\mathbf{S}^d, {}^e\mathbf{w}, \alpha)$ un tenseur polaire du deuxième ordre. Le groupe de symétrie $g(\mathbf{E})$ est conjugué à l'un des sous-groupes suivants : $\mathbf{1}$, \mathbf{Z}_2 , \mathbf{D}_2 , $\mathbf{SO}(2)$, $\mathbf{O}(2)$ ou $\mathbf{SO}(3)$.

Démonstration:

(i) C'est le cas général du tenseur du deuxième ordre sans symétrie particulière ou "triclinique". Ce cas correspond à un tenseur traduisant les propriétés des cristaux de classe 1 et $\bar{1}$.

(ii) On choisit un $\mathbf{S}^d \in \text{Dev}$ tel que $g(\mathbf{S}^d) = \mathbf{D}_2$ et un ${}^e\mathbf{w}$ colinéaire à \mathbf{k} , c'est-à-dire tel que ${}^e g({}^e\mathbf{w}) = \mathbf{SO}(2)$. On a alors $g(\mathbf{E}) = \mathbf{Z}_2$. Ce cas correspond à un tenseur traduisant les propriétés des cristaux de classe 2, m ou $2/m$.

(iii) On choisit un \mathbf{S}^d tel que $g(\mathbf{S}^d) = \mathbf{D}_2$ et un ${}^e\mathbf{w}$ nul. On a alors $g(\mathbf{E}) = \mathbf{D}_2$. Ce cas correspond à un tenseur traduisant les propriétés des cristaux de classe 222, $2mm$ et mmm .

(iv) On choisit un \mathbf{S}^d tel que $g(\mathbf{S}^d) = \mathbf{O}(2)$ et un ${}^e\mathbf{w}$ colinéaire à \mathbf{k} . On a alors $g(\mathbf{E}) = \mathbf{SO}(2)$. Ce cas correspond à un tenseur traduisant les propriétés des cristaux de classe 3, $\bar{3}$, 4, $\bar{4}$, $4/m$, 6, $\bar{6}$ et $6/m$.

(v) On choisit un \mathbf{S}^d tel que $g(\mathbf{S}^d) = \mathbf{O}(2)$ et un ${}^e\mathbf{w}$ nul. On a alors $g(\mathbf{E}) = \mathbf{O}(2)$. Ce cas correspond à un tenseur traduisant les propriétés des cristaux de classe 32, $\bar{3}m$, 422, $4mm$, $\bar{4}2m$, $4/mmm$, 622, $6mm$, $\bar{6}m2$ et $6/mmm$.

(vi) On choisit $\mathbf{E} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \alpha)$. On a alors $g(\mathbf{E}) = \mathbf{SO}(3)$. Ce cas correspond à un tenseur traduisant les propriétés des cristaux cubiques de classe 23, $\bar{4}3m$, 432, $m\bar{3}$ et $3m\bar{3}$.

□

Un exemple de phénomène physique que traduisent les tenseurs du deuxième ordre (non nécessairement symétrique) est la thermo-électricité. On trouve dans le livre de Nye (1961) un exemple de classification des tenseurs thermo-électriques en six classes différentes.

La généralisation aux tenseurs d'ordre quelconque de la correspondance ϕ introduite dans la relation (3.17) est appelée *décomposition harmonique*. Elle a été introduite par Spencer (1970) et on en trouve des traces dans Schouten (1951). Récemment, Jarić (2003) a revisité cette décomposition.

Définition 3.7: On dit d'un *tenseur* qu'il est *harmonique* lorsqu'il est *totallement symétrique* (i.e. ses composantes sont invariantes par toute permutation d'indices) et de *trace nulle* (i.e. la trace vis-à-vis de toute paire d'indices est nulle).

Cette terminologie trouvera son explication dans le prochain paragraphe où l'on mettra en évidence la relation entre polynômes harmoniques et tenseurs harmoniques.

Appliquée à l'ensemble **piez** des tenseurs piézoélectriques, cette décomposition se traduit par le

Théorème 3.8: Soit Hrm l'espace des tenseurs harmoniques du troisième ordre et ${}^e\text{Dev}$ l'ensemble des tenseurs du deuxième ordre axiaux, symétriques et de trace nulle (c'est à dire axiaux et harmoniques du deuxième ordre). Il existe un isomorphisme $\mathbf{SO}(3)$ -invariant ϕ entre **piez** et la somme directe $\text{Hrm} \oplus {}^e\text{Dev} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$.

Démonstration:

La méthode utilisée est celle décrite par Spencer (1970). Elle consiste à :

1. décomposer $\mathbf{p} \in \text{piez}$ en un quadruplet de tenseurs totalement symétriques d'ordres inférieurs à celui de \mathbf{p} ,
2. décomposer chaque tenseur symétrique obtenu en tenseur(s) harmonique(s).

Dans le cas général, soit $A_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}$ les composantes d'un tenseur \mathbf{A} d'ordre n . Nous notons $A_{(i_1 i_2 \dots i_r) i_{r+1} \dots i_n}$ le tenseur obtenu par symétrisation de \mathbf{A} vis-à-vis de ses r premiers indices⁵. Il s'agit en fait de la somme des $r!$ composantes de \mathbf{A} obtenues par toutes les permutations des r premiers indices, cette somme étant elle-même divisée par $r!$. On a alors la relation fondamentale suivante, due à Spencer (1970) :

$$\begin{aligned} r A_{(i_1 i_2 \dots i_{r-1}) i_r i_{r+1} \dots i_n} &= r A_{(i_1 i_2 \dots i_r) i_{r+1} \dots i_n} + \epsilon_{i_1 i_r i_s} \epsilon_{i_p i_q i_s} A_{(i_p i_2 i_3 \dots i_{r-1}) i_q i_{r+1} \dots i_n} \\ &+ \epsilon_{i_2 i_r i_s} \epsilon_{i_p i_q i_s} A_{(i_p i_1 i_3 \dots i_{r-1}) i_q i_{r+1} \dots i_n} + \dots + \epsilon_{i_{r-1} i_r i_s} \epsilon_{i_p i_q i_s} A_{(i_p i_1 i_3 \dots i_{r-2}) i_q i_{r+1} \dots i_n}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

où les $\epsilon_{i_p i_q i_r}$, $1 \leq p, q, r \leq n$, sont les composantes du tenseur d'orientation.

En posant $B_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{r-2} i_{r+1} \dots i_n i_s} := \epsilon_{i_p i_q i_s} A_{(i_p i_1 i_2 \dots i_{r-2}) i_q i_{r+1} \dots i_n}$, on remarque que le tenseur $A_{(i_1 i_2 \dots i_{r-1}) i_r \dots i_n}$ est égal à la somme de la symétrisation du tenseur $\mathbf{A} = A_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}$ vis à vis des r premiers indices et de termes obtenus par contraction des $B_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{r-2} i_{r+1} \dots i_n i_s}$ avec le tenseur d'orientation (ces

⁵ Travaillant dans \mathbb{R}^3 , les indices $i_{k(1 \leq k \leq n)}$ valent 1, 2 ou 3.

termes sont donc des pseudo-tenseurs ou tenseurs axiaux). En appliquant par récurrence l'égalité ci-dessus, on peut finalement exprimer $A_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}$ comme la somme de (pseudo)-tenseurs totalement symétriques d'ordres inférieurs ou égaux à n contractés convenablement par des tenseurs isotropes.

Soit maintenant $\mathbf{p} \in \text{piez}$, on a par définition $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(ij)k}$ et on note par conséquent $\mathbf{p}_{ijk} = \mathbf{p}_{(ij)k}$. En appliquant la relation (3.22) ci-dessus on trouve que

$$3\mathbf{p}_{(ij)k} = 3\mathbf{p}_{(ijk)} + \epsilon_{ikp}\epsilon_{abp}\mathbf{p}_{ajb} + \epsilon_{jkp}\epsilon_{abp}\mathbf{p}_{aib}, \quad (3.23)$$

où $\mathbf{p}_{(ijk)}$ est un tenseur du troisième ordre totalement symétrique. Il se décompose à nouveau en un tenseur harmonique du troisième ordre \mathbf{H} et un vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. D'autre part, en posant ${}^e C_{jp} = \epsilon_{abp}\mathbf{p}_{ajb}$ on obtient :

$$2{}^e C_{ij} = 2{}^e C_{(ij)} + \epsilon_{ijp}b_p, \quad (3.24)$$

où b_p sont les composantes d'un vecteur \mathbf{b} de \mathbb{R}^3 .

On voit donc que ${}^e C_{(ij)}$ sont les coordonnées d'un tenseur axial et symétrique du deuxième ordre. Des calculs simples montrent qu'il est de trace nulle : ${}^e \mathbf{C}$ est harmonique.

On démontre ainsi qu'à tout tenseur $\mathbf{p} \in \text{piez}$ correspond un unique quadruplet comprenant un tenseur harmonique \mathbf{H} du troisième ordre (7 composantes), un pseudo-tenseur harmonique ${}^e \mathbf{C}$ du deuxième ordre (5 composantes) et 2 vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} (3 composantes chacun). On retrouve bien que $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(ij)k} \in \text{piez}$ a 18 composantes, d'où sa représentation par une matrice 3×6 . On écrit par conséquent :

$$\text{piez} \ni \mathbf{p} \approx (\mathbf{H}, {}^e \mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Hrm} \times {}^e \text{Dev} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \quad (3.25)$$

Cette correspondance, décrite par l'application ϕ , est linéaire, puisque toutes les opérations intervenant dans la décomposition harmonique sont linéaires. Le noyau de ϕ étant réduit à $\{0\}$, cette application est bien un isomorphisme.

Enfin, la propriété de $\mathbf{SO}(3)$ -invariance est la traduction de la relation suivante, qui découle de (3.3) et (3.5) :

$$\forall \mathbf{Q} \in \mathbf{O}(3), \mathbf{Q} \star \mathbf{p} \approx (\mathbf{Q} \star \mathbf{H}, \det(\mathbf{Q})(\mathbf{Q} \star {}^e \mathbf{C}), \mathbf{Q} \star \mathbf{a}, \mathbf{Q} \star \mathbf{b}). \quad (3.26)$$

□

La conséquence fondamentale du Théorème 3.8 est la relation entre le groupe de symétrie d'un tenseur piézoélectrique et les groupes de symétrie des éléments de sa décomposition harmonique. Cette conséquence découle simplement de la relation (3.26) et s'énonce dans le

Corollaire 3.9: Soient \mathbf{h} un tenseur piézoélectrique et $(\mathbf{H}, {}^e\mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ sa décomposition harmonique. Alors, $g({}^e\mathbf{C})$ ayant été défini en (3.20), on a

$$g(\mathbf{p}) = g(\mathbf{H}) \cap g({}^e\mathbf{C}) \cap g(\mathbf{a}) \cap g(\mathbf{b}), \forall \mathbf{p} \in \text{piez}. \quad (3.27)$$

3.2.2 La décomposition de Cartan

Soit $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ un vecteur de \mathbb{R}^3 et soit \mathcal{P}_n l'espace des polynômes homogènes de degré n en les trois variables x, y et z . Il existe un isomorphisme classique ψ entre \mathcal{P}_n et Sym^n , l'espace des tenseurs totalement symétriques d'ordre n (cf. par exemple Golubitsky *et al.*, 1985) :

$$\begin{aligned} \text{Sym}^n \ni \mathbf{T} &\mapsto \psi(\mathbf{T}) &:= & \mathbf{T}[\mathbf{r}, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}] \\ & &= & T_{i_1 i_2 \dots i_n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n} \in \mathcal{P}_n, \end{aligned} \quad (3.28)$$

la convention de sommation sur les indices répétés étant entendue. Ainsi, au tenseur symétrique du deuxième ordre $\mathbf{S} = S_{(ij)}$ défini en (3.16) on associe

$$\psi(\mathbf{S}) = S_{11}x^2 + 2S_{12}xy + 2S_{13}xz + S_{22}y^2 + 2S_{23}yz + S_{33}z^2, \quad (3.29)$$

dont un calcul simple montre que le Laplacien⁶ est donné par

$$\Delta\psi(\mathbf{S}) = 2\text{tr}(\mathbf{S}). \quad (3.30)$$

Un polynôme $h \in \mathcal{P}_n$ est dit *harmonique* lorsque son Laplacien est nul, *i.e.* lorsque $\Delta h = 0$. On dit alors que $h \in \mathcal{H}_n$ ⁷. On peut vérifier que ψ établit aussi un isomorphisme entre l'espace des tenseurs harmoniques de degré n et \mathcal{H}_n . C'est l'isomorphisme ψ qui justifie l'appellation de "tenseurs harmoniques". Surtout, ψ va nous permettre de travailler sur \mathcal{H}_n et de profiter de certaines propriétés intéressantes de cet espace.

Tout d'abord, on va étendre l'action \star définie en (3.3) à \mathcal{P}_n . En effet, pour tout $t = \psi(\mathbf{T}) \in \mathcal{P}_n$ et tout $\mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3})$, on pose

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q} \star t)(x, y, z) &:= \mathbf{T}[\mathbf{Q}^t \mathbf{r}, \mathbf{Q}^t \mathbf{r}, \dots, \mathbf{Q}^t \mathbf{r}] \\ &= T_{i_1 i_2 \dots i_n} r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_n} Q_{j_1 i_1} Q_{j_2 i_2} \dots Q_{j_n i_n}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

⁶ Pierre-Simon Laplace, mathématicien français, 1749-1827. Il fut fait Comte en 1806 puis Marquis en 1817. Il travailla à Paris.

⁷ On rappelle \mathcal{H}_n est un espace de dimension $2n + 1$. Pour une démonstration de ce résultat, cf. Golubitsky *et al.* (1985) p.109 par exemple.

L'application linéaire ψ est $\mathbf{O}(\mathbf{3})$ -invariante dans le sens où

$$\mathbf{Q} \star \psi(\mathbf{T}) = \psi(\mathbf{Q} \star \mathbf{T}), \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3}). \quad (3.32)$$

Une propriété essentielle de \mathcal{P}_n est qu'il est somme directe de \mathcal{H}_n et de \mathcal{Q}_n , l'espace des polynômes multiples (par des polynômes de \mathcal{P}_{n-2}) de $\rho := x^2 + y^2 + z^2$ (c'est un résultat classique, *cf.* Golubitsky *et al.* (1985) p.109). Cela s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n &= \mathcal{Q}_n \oplus \mathcal{H}_n \\ &= \rho \mathcal{P}_{n-2} \oplus \mathcal{H}_n, \end{aligned} \quad (3.33)$$

ce qui permet de voir \mathcal{H}_n comme l'espace quotient $\mathcal{P}_n / \rho \mathcal{P}_{n-2}$. Par conséquent, on peut associer à chaque $p \in \mathcal{P}_n$ un unique $q \in \mathcal{P}_{n-2}$ tel que $h := (p - \rho q) \in \mathcal{H}_n$. Le polynôme h est appelé la *partie harmonique* de $p \in \mathcal{P}_n$.

Le lien avec la décomposition harmonique est clair : pour $n = 2$ (*cf.* (3.16) ainsi que (3.29)) et $p = \psi(\mathbf{S})$ on a $h = \psi(\mathbf{S}^d)$ et $q = \psi(\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{E}))$.

Il s'agit désormais de décomposer les polynômes harmoniques (et donc par voie de conséquence les tenseurs harmoniques) sur des espaces où l'action \star deviendra élémentaire. Cet objectif est atteint par la *décomposition de Cartan*⁸, qui est une décomposition $\mathbf{SO}(\mathbf{2})$ -invariante de \mathcal{H}_n . Pour en donner une idée simple, considérons un polynôme f de degré 2, harmonique en les trois variables x, y et z . On a alors $f \in \mathcal{H}_2$. Il est clair que f peut s'exprimer comme la somme des éléments de la "base" :

$$u := z^2 - \frac{1}{3}\rho, \quad (s_1, t_1) := (xz, yz), \quad (s_2, t_2) := (x^2 - y^2, 2xy). \quad (3.34)$$

Cette décomposition peut aussi se voir comme la décomposition d'un tenseur déviatorique du deuxième ordre quelconque sur la base :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

⁸ Elie Joseph Cartan, mathématicien français, 1869-1951. Il travailla à Paris.

Bien évidemment, tous ces tenseurs sont symétriques et de trace nulle. De plus, ils présentent l'avantage de traduire extrêmement simplement l'action que peuvent avoir sur eux des transformations orthogonales.

Dans le cas général, soit $w := x + iy$ un nombre complexe. On note $\Re(w) = x$ et $\Im(w) = y$. Pour $0 \leq l \leq n$ on note s_l la partie harmonique de $z^{n-l}\Re(w^l)$ et t_l la partie harmonique de $z^{n-l}\Im(w^l)$. Remarquant que t_0 est toujours nul, on choisit dans la suite de d'écrire u à la place de s_0 . On définit enfin les sous-espaces vectoriels de polynômes

$$K_0 := \text{vect}(u), \quad K_l := \text{vect}(s_l, t_l), \quad 1 \leq l \leq n. \quad (3.35)$$

On peut montrer que s_l et t_l sont linéairement indépendants modulo $\rho\mathcal{P}_{n-2}$ et donc que :

$$\dim K_l = \begin{cases} 2 & (l > 0), \\ 1 & (l = 0). \end{cases} \quad (3.36)$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.10: (Décomposition de Cartan)

On a $\mathcal{H}_n = K_0 \oplus K_1 \oplus \dots \oplus K_n$, où \mathcal{H}_n est identifié à $\mathcal{P}_n / \rho\mathcal{P}_{n-2}$. De plus, chaque rotation $\mathbf{Q}(\mathbf{k}, \theta) \in \mathbf{SO}(2)$ d'axe \mathbf{k} et d'angle θ agit comme une rotation d'angle $l\theta$ sur K_l .

A cause de cette dernière propriété (évidente puisque $e^{i\theta}$ agit bien comme une rotation sur w^l et laisse z invariant), on parle parfois de décomposition $\mathbf{SO}(2)$ -invariante.

On a donc les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{k}, \theta) \star s_l &= s_l \cos(l\theta) + t_l \sin(l\theta), \\ \mathbf{Q}(\mathbf{k}, \theta) \star t_l &= -s_l \sin(l\theta) + t_l \cos(l\theta). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Enfin, $\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \pi)$ agit comme une réflexion sur K_l ($0 \leq l \leq n$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{i}, \pi) \star u &= (-1)^n u, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{i}, \pi) \star s_l &= (-1)^{n-l} s_l, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{i}, \pi) \star t_l &= (-1)^{n-l+1} t_l. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Exemple 3.11: ($n = 3$, $\dim \mathcal{H}_n = 7$.)

Pour trouver une base, on va chercher des cubiques harmoniques de la forme

$$\begin{aligned}
l = 0 & : z^3 + \rho u_0, \\
l = 1 & : \begin{cases} z^2 x + \rho u_1, \\ z^2 y + \rho v_1, \end{cases} \\
l = 2 & : \begin{cases} z(x^2 - y^2) + \rho u_2, \\ z(2xy) + \rho v_2, \end{cases} \\
l = 3 & : \begin{cases} x^3 - 3xy^2, \\ 3x^2y - y^3, \end{cases} \quad (\text{déjà harmoniques}).
\end{aligned}$$

Ci-dessus, les u_i et les v_i sont linéaires, ce qui permet d'appliquer la formule

$$\Delta(\rho^l f) = 2l(2l + 2m + 1)\rho^{l-1}f + \rho^l \Delta f \quad (3.39)$$

et d'obtenir $\Delta(\rho u) = 10u$ (dans la relation (3.39) ci-dessus, m représente le degré de f). Par conséquent, si g est une cubique alors

$$0 = \Delta(g + \rho u) = \Delta g + 10u \quad (3.40)$$

conduit à $u = -\Delta g/10$. On a dès lors la base

$$l = 0 : z^3 - \frac{3}{5}\rho z = u, \quad (3.41)$$

$$l = 1 : \begin{cases} z^2 x - \frac{1}{5}\rho x = s_1, \\ z^2 y - \frac{1}{5}\rho y = t_1, \end{cases} \quad (3.42)$$

$$l = 2 : \begin{cases} z(x^2 - y^2) = s_2, \\ xyz = t_2, \end{cases} \quad (3.43)$$

$$l = 3 : \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = s_3, \\ 3x^2y - y^3 = t_3. \end{cases} \quad (3.44)$$

Une des conséquences immédiates de la décomposition de Cartan est qu'à chaque $h \in \mathcal{H}_n$ correspondent $2n + 1$ réels $\lambda, \alpha_l, \beta_l$ ($1 \leq l \leq n$) tels que

$$h = \lambda u + \alpha_l s_l + \beta_l t_l, \quad 1 \leq l \leq n. \quad (3.45)$$

L'isomorphisme ψ défini en (3.28) nous permet par conséquent de transférer la décomposition de Cartan de \mathcal{H}_n vers l'espace des tenseurs harmoniques de degré n . Ce dernier est alors la somme directe de $n + 1$ sous-espaces $\psi^{-1}(K_l)$ ($0 \leq l \leq n$) que l'on notera à nouveau K_l pour simplifier les notations.

Dans le cas où $n = 3$, on considère un élément $\mathbf{H} \in \text{Hrm}$ et on pose

$$\psi(\mathbf{H}) = h = \lambda u + \alpha_l s_l + \beta_l t_l \quad (1 \leq l \leq 3), \quad (3.46)$$

ainsi que

$$\begin{cases} \mathbf{U} &:= \psi^{-1}(u), \\ \mathbf{S}_l &:= \psi^{-1}(s_l), \\ \mathbf{T}_l &:= \psi^{-1}(t_l). \end{cases} \quad (3.47)$$

Les calculs précédents montrent que ces tenseurs prennent les formes

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_1 &= \begin{pmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_3 &= \begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque 3.12: Afin de justifier les relations ci-dessus, rappelons que les tenseurs du troisième ordre totalement symétriques dont tous les coefficients sont égaux à 1 peuvent être mis en relation avec des polynômes harmoniques de degré 3 par en écrivant que

$$\mathbf{M} \approx \begin{pmatrix} x^3 & xy^2 & xz^2 & 2xyz & 2x^2z & 2x^2y \\ yx^2 & y^3 & yz^2 & 2y^2z & 2xyz & 2y^2x \\ zx^2 & zy^2 & z^3 & 2z^2y & 2z^2x & 2xyz \end{pmatrix}.$$

Pour $H \in \text{Hrm}$, on peut donc écrire $H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3$ où $H_0 := \lambda U$ et, pour $1 \leq l \leq 3$, $H_l := \alpha_l S_l + \beta_l T_l$. La décomposition de Cartan a pour conséquence immédiate la description et la caractérisation des groupes de symétrie d'un élément $H \in \text{Hrm}$ par l'intermédiaire des propriétés de ses "composantes" H_l (on dira que H_l est "horizontal" si c'est un multiple de S_l et "vertical" si c'est un multiple de T_l). Cette description fait l'objet de la

Proposition 3.13: Soit $H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3$ un tenseur harmonique d'ordre 3, on a :

(i)	$g(H) \supset \mathbf{O}(2)^-$	\iff	$H = H_0;$
(ii)	$g(H) \supset \mathbf{SO}(2)$	\iff	$H = H_0;$
(iii)	$g(H) \supset \mathbf{D}_k^z$	\iff	$H = H_0, (k \geq 4);$
(iv)	$g(H) \supset \mathbf{Z}_k$	\iff	$H = H_0, (k \geq 4);$
(v)	$g(H) \supset \mathbf{O}(2)$	\iff	$H = 0;$
(vi)	$g(H) \supset \mathbf{D}_{2k}^d$	\iff	$H = 0, (k \geq 4);$
(vii)	$g(H) \supset \mathbf{Z}_{2k}^-$	\iff	$H = 0, (k \geq 4);$
(viii)	$g(H) \supset \mathbf{D}_k$	\iff	$H = 0, (k \geq 4);$
(ix)	$g(H) \supset \mathbf{Z}_2$	\iff	$H_1 = H_3 = 0;$
(x)	$g(H) \supset \mathbf{D}_2$	\iff	H est vertical dans $K_2;$
(xi)	$g(H) \supset \mathcal{T}$	\iff	H est vertical dans $K_2;$
(xii)	$g(H) \supset \mathbf{D}_4^d$	\iff	H est vertical dans $K_2;$
(xiii)	$g(H) \supset \mathcal{O}^-$	\iff	H est vertical dans $K_2;$
(xiv)	$g(H) \supset \mathbf{Z}_3$	\iff	$H_1 = H_2 = 0;$
(xv)	$g(H) \supset \mathbf{D}_3$	\iff	H est horizontal dans $K_3;$
(xvi)	$g(H) \supset \mathbf{Z}_2^-$	\iff	$H_0 = H_2 = 0;$
(xvii)	$g(H) \supset \mathbf{D}_2^z$	\iff	$H = H_0 + H_2$ avec H_2 horizontal dans $K_2;$
(xviii)	$g(H) \supset \mathbf{Z}_4^-$	\iff	$H = H_2;$
(xvix)	$g(H) \supset \mathbf{D}_6^d$	\iff	$H = H_3$ avec H_3 horizontal dans $K_3;$
(xx)	$g(H) \supset \mathbf{D}_3^z$	\iff	$H = H_0 + H_3$ avec H_3 vertical dans $K_3;$
(xxi)	$g(H) \supset \mathbf{Z}_6^-$	\iff	$H = H_3.$

Démonstration:

Pour bien saisir les propriétés d'invariance des u , s_l et t_l ($1 \leq l \leq 3$) définis en (3.41)-(3.44), on considère dans un premier temps une rotation $\mathbf{Q}(\mathbf{k}, \theta) \in \mathbf{SO}(2)$. On a par définition même :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{k}, \theta)\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{k}, \theta)\mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}. \quad (3.48)$$

Maintenant, de par la relation (3.31), pour tout polynôme p , on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}(\mathbf{k}, \theta) \star p)(x, y, z) &= p(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, z), \\ (\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \pi) \star p)(x, y, z) &= p(x, -y, -z). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Il devient alors clair que $\mathbf{Q}(\mathbf{k}, \theta) \star \rho = \rho$ pour tout angle $\theta \in [0, 2\pi[$. Ainsi, le polynôme u défini en (3.41) est invariant sous toute rotation de $\mathbf{SO}(2)$. Il l'est

aussi pour les miroirs $x \mapsto -x$ et $y \mapsto -y$. Ces considérations démontrent les points (i) – (iv). Par contre, la rotation $\mathbf{Q}(\mathbf{i}, \pi)$ ainsi que le miroir $z \mapsto -z$ transformant u en $-u$ et ne le laissent donc pas invariant, on démontre les points (v) – (vii).

Enfin, les relations (3.37) et (3.37) montrent que s_l et t_l ($1 \leq l \leq 3$) sont invariants sous les rotations $\mathbf{Q}(\mathbf{k}, 2\pi/l)$, ce qui démontre tous les autres points à l'exception de (xi).

Supposons donc que $g(\mathbf{H}) \supset \mathcal{T}$. On pose

$$\tilde{\mathbf{Q}} := \mathbf{Q}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, 2\pi/3). \quad (3.50)$$

Il convient de remarquer que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{i} &= \mathbf{j}, \\ \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{j} &= \mathbf{k}, \\ \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{k} &= \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Puisque $\mathcal{T} \supset \mathbf{D}_2$, la partie (x) implique qu'il existe un réel τ tel que $\mathbf{H} = \tau \mathbf{T}_2$. Inversement, supposons que $\mathbf{H} = \tau \mathbf{T}_2$. Dans ce cas $g(\mathbf{H}) \supset \mathbf{D}_2$ d'après (x). Afin de montrer que $\tilde{\mathbf{Q}} \in g(\mathbf{H})$, on considère le polynôme harmonique h correspondant à \mathbf{H} via l'isomorphisme ψ . Le polynôme $h = \psi(\mathbf{H})$ peut aussi s'écrire $h = \tau t_2$. Il suffit alors de montrer que $\tilde{\mathbf{Q}} \star h = h$. Or, d'après (3.51), pour tout polynôme harmonique p de degré n on a $(\tilde{\mathbf{Q}} \star p)(x, y, z) = p(y, z, x)$. Par conséquent

$$(\tilde{\mathbf{Q}} \star h)(x, y, z) = h(y, z, x) = \tau xyz = h(x, y, z). \quad (3.52)$$

Ainsi, on a que $\tilde{\mathbf{Q}} \in g(\mathbf{H})$.

Enfin, puisque \mathcal{T} est généré par \mathbf{D}_2 et $\tilde{\mathbf{Q}}$, on peut conclure en disant que $g(\mathbf{H}) \supset \mathcal{T}$. □

Remarque 3.14: Un tenseur harmonique du troisième ordre \mathbf{H} est *a priori* la donnée de 7 constantes (les 3 couples $(\alpha_l, \beta_l)_{1 \leq l \leq 3}$ ainsi que λ). La décomposition de Cartan s'applique particulièrement bien à la détermination du nombre de constantes qui découlent d'une symétrie donnée. Ainsi, pour prendre un exemple, la partie (ix) indique que la symétrie \mathbf{Z}_2 nécessite la connaissance de 3 constantes seulement (1 pour \mathbf{H}_0 et 2 pour \mathbf{H}_2). En appliquant cette méthode aux autres éléments de la décomposition harmonique, on obtient le

nombre minimum de constantes d'un tenseur $\mathbf{p} \in \text{piez}$ ayant une symétrie donnée. La détermination du repère optimal dans lequel un tenseur donné s'écrit effectivement avec le minimum de constantes nécessite cependant une étude spécifique (*cf.* Berthaud *et al.* (1998) dans le cas de l'élasticité).

3.2.3 Les résultats

On établit d'abord le

Lemme 3.15: Soit ${}^e\mathbf{C} \in {}^e\text{Dev}$ et soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Alors :

- (a) ${}^e g({}^e\mathbf{C})$ est conjugué à \mathbf{D}_2 , \mathbf{D}_4^d , $\mathbf{O}(2)$ ou $\mathbf{O}(3)$,
- (b) $g(\mathbf{b})$ est conjugué à $\mathbf{O}(2)^-$ ou $\mathbf{O}(3)$,

Démonstration:

(a) C'est une extension du Théorème 3.5 relatif aux classes de symétrie des tenseurs de Dev : si les 3 valeurs propres de ${}^e\mathbf{C}$ sont distinctes et si aucune d'entre elles n'est nulle alors il n'existe pas de rotation qui transforme ${}^e\mathbf{C}$ en $-{}^e\mathbf{C}$. On est alors dans le cas du Théorème 3.5, ce qui signifie que ${}^e g({}^e\mathbf{C})$ est conjugué à \mathbf{D}_2 , $\mathbf{O}(2)$ ou $\mathbf{O}(3)$.

Si l'une seulement des valeurs propres est nulle, alors les deux autres sont opposées et non nulles. Les rotations d'angle π autour des axes propres laissent ${}^e\mathbf{C}$ invariant tandis qu'une interversion des axes propres associés aux valeurs propres non nulles change ${}^e\mathbf{C}$ en $-{}^e\mathbf{C}$. Ce sous-groupe est un conjugué de \mathbf{D}_4^d .

(b) Si \mathbf{b} n'est pas nul alors il existe une rotation \mathbf{Q} telle que $\mathbf{Q} \star \mathbf{b}$ soit parallèle à \mathbf{k} . On a donc $g(\mathbf{b}) = \mathbf{O}(2)^-$.

□

De la Proposition 3.13 et du Lemme 3.15 découle le

Corollaire 3.16: Soit $\mathbf{p} \in \text{piez}$, on a :

- (a) $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{Z}_k \iff g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{SO}(2), (k \geq 4),$
- (b) $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{D}_k \iff g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{O}(2), (k \geq 4),$
- (c) $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{D}_k^z \iff g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{O}(2)^-, (k \geq 4),$
- (d) $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{Z}_{2k}^- \iff g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{D}_{2k}^d \iff g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{O}(3), (k \geq 4),$
- (e) $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{Z}_6^- \implies \{\exists \mathbf{Q} \in \mathbf{SO}(3) : g(\mathbf{Q} \star \mathbf{p}) \supset \mathbf{D}_6^d\},$
- (f) $g(\mathbf{p}) \supset \mathcal{T} \iff g(\mathbf{p}) \supset \mathcal{O}^-.$

Démonstration:

Soit $\mathbf{p} = (\mathbf{H}, {}^e\mathbf{C}, \mathbf{a}, v)$ la décomposition harmonique d'un tenseur piézoélectrique donné. On sait qu'alors $g(\mathbf{p}) = g(\mathbf{H}) \cap {}^e g({}^e\mathbf{C}) \cap g(\mathbf{a}) \cap g(v)$.

(a) Si $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{Z}_k$, $k \geq 4$, alors $g(\mathbf{H}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{2})^-$ d'après les parties (iv) et (i) de la Proposition 3.13, ${}^e g({}^e \mathbf{C}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{2})$ d'après la partie (a) du Lemme 3.15 et $g(\mathbf{a}) \cap g(\mathbf{b}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{2})^-$ d'après la partie (b) de ce même Lemme. Par conséquent $g(\mathbf{p}) = g(\mathbf{H}) \cap {}^e g({}^e \mathbf{C}) \cap g(\mathbf{a}) \cap g(\mathbf{b}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{2})^- \cap \mathbf{O}(\mathbf{2}) \supset \mathbf{SO}(\mathbf{2})$. L'implication inverse est évidente.

(b) Si $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{D}_k$, $k \geq 4$, alors nécessairement $\mathbf{H} = 0$ d'après la partie (viii) de la Proposition 3.13, ce qui signifie que $g(\mathbf{H}) = \mathbf{O}(\mathbf{3})$. On a de plus que ${}^e g({}^e \mathbf{C}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{2})$ et $g(\mathbf{a}) \cap g(\mathbf{b}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{2})^-$ d'après le Lemme 3.15. D'où le résultat.

(c) Si $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{D}_k^z$, $k \geq 4$ alors, d'après les parties (iii) et (i) de la Proposition 3.13 on a $g(\mathbf{H}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{2})^-$. Le Lemme 3.15 implique quant à lui que ${}^e g({}^e \mathbf{C}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{3})$ et que $g(\mathbf{a}) \cap g(\mathbf{b}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{2})^-$ car $\mathbf{D}_k^z \subset \mathbf{O}(\mathbf{2})^-$ pour $k \geq 2$. D'où le résultat.

(d) Si $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{D}_{2k}^d$, $k \geq 4$ alors $g(\mathbf{H}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{3})$ d'après la Proposition 3.13. De plus ${}^e g({}^e \mathbf{C}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{3})$ et $g(\mathbf{a}) \cap g(\mathbf{b}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{3})$ d'après le Lemme 3.15. Le même raisonnement tient aussi dans le cas où $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{Z}_{2k}^-$, $k \geq 4$, d'où le résultat.

(e) Le Lemme 3.15 implique que ${}^e g({}^e \mathbf{C}) \cap g(\mathbf{a}) \cap g(\mathbf{b}) \supset \mathbf{O}(\mathbf{3})$. La partie (xvi) de la Proposition 3.13 implique quant à elle que $\mathbf{H} = \mathbf{H}_3$. On sait que les rotations $\mathbf{Q}(\mathbf{k}, \theta) \in \mathbf{SO}(\mathbf{2})$ agissent sur K_3 comme des rotations d'angle 3θ . Par conséquent il existe un $\bar{\theta}$ tel que $\bar{\mathbf{Q}} := \mathbf{Q}(\mathbf{k}, \bar{\theta})$ rende \mathbf{H}_3 horizontal dans K_3 . Alors, d'après la partie (xvix) de la Proposition 3.13, on a que $g(\bar{\mathbf{Q}} \star \mathbf{H}) \supset \mathbf{D}_6^d$. De plus, puisque $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathbf{SO}(\mathbf{2})$, on a aussi :

$$\begin{aligned} g(\bar{\mathbf{Q}} \star \mathbf{a}) \cap g(\bar{\mathbf{Q}} \star \mathbf{b}) &= \{\bar{\mathbf{Q}}g(\mathbf{a})\bar{\mathbf{Q}}^t\} \cap \{\bar{\mathbf{Q}}g(\mathbf{b})\bar{\mathbf{Q}}^t\} \\ &= \bar{\mathbf{Q}}\{g(\mathbf{a}) \cap g(\mathbf{b})\}\bar{\mathbf{Q}}^t \supset \mathbf{O}(\mathbf{3}). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Par conséquent, $g(\bar{\mathbf{Q}} \star \mathbf{p}) = g(\bar{\mathbf{Q}} \star \mathbf{H}) \cap g(\bar{\mathbf{Q}} \star {}^e \mathbf{C}) \cap g(\bar{\mathbf{Q}} \star \mathbf{a}) \cap g(\bar{\mathbf{Q}} \star \mathbf{b}) \supset \mathbf{D}_6^d$.

(f) C'est une conséquence directe des parties (xi) et (xiii) de la Proposition 3.13. En effet, on a alors nécessairement ${}^e \mathbf{C} = \mathbf{a} = \mathbf{b} = 0$.

□

Exemple 3.17: (Illustration de la partie (e))

Considérons un tenseur piézoélectrique \mathbf{p} traduisant les propriétés d'un cristal dont le groupe ponctuel est $\mathbf{Z}_6^- = \bar{6}$. On a alors (*cf.* les nombreuses nomenclatures présentes dans la littérature : Auld (1973), Eringen & Maugin (1990), Ikeda (1990), Royer & Dieulesaint (1996) et Zelenka (1986) par exemple)

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a & -a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & -b & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

La partie (e) du Corollaire 3.16 indique qu'il existe une rotation $\mathbf{Q}(\mathbf{k}, \theta)$ telle que $g(\mathbf{Q} \star \mathbf{p}) = \mathbf{D}_6^d = \bar{6}m2$. Les cristaux piézoélectriques dont le groupe ponctuel est $\bar{6}m2$ ayant des tenseurs de la forme

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} a' & -a' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

on peut alors vérifier que l'on a bien $\mathbf{Q} \star \mathbf{p} = \mathbf{p}'$ si θ vérifie l'équation

$$a(3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - \sin(\theta)^3) + b(3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - \cos(\theta)^3) = 0$$

On a alors le

Corollaire 3.18: Soient $k \geq 4$ et $m \geq 2$, alors $\text{piez}(\mathbf{Z}_k)$, $\text{piez}(\mathbf{D}_k)$, $\text{piez}(\mathbf{D}_{2k}^d)$, $\text{piez}(\mathbf{D}_k^z)$, $\text{piez}(\mathbf{Z}_{2m}^-)$, $\text{piez}(\mathcal{T})$, $\text{piez}(\mathcal{O})$, $\text{piez}(\mathcal{I})$ et $\text{piez}(\mathbf{SO}(3))$ sont vides. De plus, $\text{piez}(\mathbf{O}(3)) = \{\mathbf{0}\}$.

Ce résultat ne signifie pas qu'aucun tenseur de piez ne peut posséder, par exemple, une symétrie \mathbf{Z}_k pour $k \geq 4$ mais qu'un tel tenseur possède alors nécessairement une symétrie "supérieure".

Démonstration:

Supposons qu'il existe un tenseur $\mathbf{p} \in \text{piez}$ tel que $\mathbf{p} \in \text{piez}(\mathbf{Z}_k)$ pour $k \geq 4$. Il existe alors nécessairement une rotation \mathbf{Q} telle que $\mathbf{Q} g(\mathbf{p}) \mathbf{Q}^t = \mathbf{Z}_k$, ou bien, de façon équivalente, telle que $g(\mathbf{Q} \star \mathbf{p}) = \mathbf{Z}_k$. La partie (a) du Corollaire 3.16 implique que $g(\mathbf{Q} \star \mathbf{p}) \supset \mathbf{SO}(2)$ ou, en d'autres termes, que $g(\mathbf{p}) \supset \mathbf{Q}^t \mathbf{SO}(2) \mathbf{Q}$, ce qui est impossible, car aucun conjugué de \mathbf{Z}_k ne peut être un conjugué de $\mathbf{SO}(2)$.

La méthode est identique pour tous les autres sous-groupes fermés. On détaille simplement le cas où $P \in \text{piez}(\mathcal{I})$: il existe alors une rotation \mathbf{Q} telle que $\mathbf{Q} g(\mathbf{p}) \mathbf{Q}^t = \mathcal{I}$ ou encore telle que $g(\mathbf{Q} \star \mathbf{p}) = \mathcal{I}$. Or on sait qu'il existe une rotation $\tilde{\mathbf{Q}}$ telle que le groupe de symétrie \mathcal{I} du dodécaèdre contienne $\tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{D}_5 \tilde{\mathbf{Q}}^t$, d'où l'on déduit que pour $\hat{\mathbf{Q}} := \tilde{\mathbf{Q}}^t \mathbf{Q}$ on a $g(\hat{\mathbf{Q}}) \supset \mathbf{D}_5$. La partie (b) du Corollaire 3.16 implique que $g(\hat{\mathbf{Q}}) \supset \mathbf{O}(2)$. Mais il n'est pas possible qu'un groupe soit conjugué à \mathcal{I} et à $\mathbf{SO}(2)$, d'où le résultat.

□

On peut alors établir le

Théorème 3.19: Les ensembles $\text{piez}(\mathbf{1})$, $\text{piez}(\mathbf{Z}_2)$, $\text{piez}(\mathbf{Z}_3)$, $\text{piez}(\mathbf{Z}_2^-)$, $\text{piez}(\mathbf{D}_2^z)$, $\text{piez}(\mathbf{D}_3^z)$, $\text{piez}(\mathbf{D}_2)$, $\text{piez}(\mathbf{D}_3)$, $\text{piez}(\mathbf{D}_4^d)$, $\text{piez}(\mathbf{D}_6^d)$, $\text{piez}(\mathcal{O}^-)$, $\text{piez}(\mathbf{SO}(\mathbf{2}))$, $\text{piez}(\mathbf{O}(\mathbf{2}))$ et $\text{piez}(\mathbf{O}(\mathbf{2})^-)$ ne sont pas vides.

Démonstration:

On démontre ce Théorème en construisant, à l'aide des décompositions harmonique et de Cartan, des tenseurs qui possèdent exactement la symétrie désirée.

(i) C'est le cas général du tenseur piézoélectrique sans symétrie particulière ou "triclinique".

(ii) On choisit un \mathbf{H} tel que $H_1 = H_3 = 0$, un ${}^e\mathbf{C}$ tel que ${}^e g({}^e\mathbf{C}) = \mathbf{D}_2$ et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} parallèles à \mathbf{k} . Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{Z}_2$.

(iii) On choisit un \mathbf{H} tel que $H_1 = H_2 = 0$, un ${}^e\mathbf{C}$ tel que ${}^e g({}^e\mathbf{C}) = \mathbf{O}(\mathbf{2})$ et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} parallèles à \mathbf{k} . Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{Z}_3$.

(iv) On choisit un \mathbf{H} tel que $H_0 = H_2 = 0$, un ${}^e\mathbf{C}$ tel que ${}^e g({}^e\mathbf{C}) = \mathbf{D}_4^d$ et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} nuls. Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{Z}_2^-$.

(v) On choisit un \mathbf{H} tel que $H = H_2$, un ${}^e\mathbf{C}$ tel que ${}^e g({}^e\mathbf{C}) = \mathbf{D}_4^d$ et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} nuls. Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{Z}_4^-$.

(vi) On choisit un \mathbf{H} tel que $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_2$ avec \mathbf{H}_2 horizontal dans K_2 , un ${}^e\mathbf{C}$ tel que ${}^e g({}^e\mathbf{C}) = \mathbf{D}_4^d$ et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} parallèles à \mathbf{k} . Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{D}_2^z$.

(vii) On choisit un \mathbf{H} tel que $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_3$ avec \mathbf{H}_3 horizontal dans K_3 , un ${}^e\mathbf{C}$ nul et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} parallèles à \mathbf{k} . Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{D}_3^z$.

(viii) On choisit un \mathbf{H} vertical dans K_2 , un ${}^e\mathbf{C}$ tel que ${}^e g({}^e\mathbf{C}) = \mathbf{D}_2$ et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} nuls. Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{D}_2$.

(ix) On choisit un \mathbf{H} horizontal dans K_3 , un ${}^e\mathbf{C}$ tel que ${}^e g({}^e\mathbf{C}) = \mathbf{O}(\mathbf{2})$ et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} nuls. Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{D}_3$.

(x) On choisit un \mathbf{H} vertical dans K_2 , un ${}^e\mathbf{C}$ tel que ${}^e g({}^e\mathbf{C}) = \mathbf{D}_4^d$ et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} nuls. Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{D}_4^d$.

(xi) On choisit un \mathbf{H} horizontal dans K_3 , un ${}^e\mathbf{C}$ nul et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} nuls. Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{D}_6^d$.

(xii) On choisit un \mathbf{H} vertical dans K_2 , un ${}^e\mathbf{C}$ nul et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} nuls. Alors $g(\mathbf{p}) = \mathcal{O}^-$.

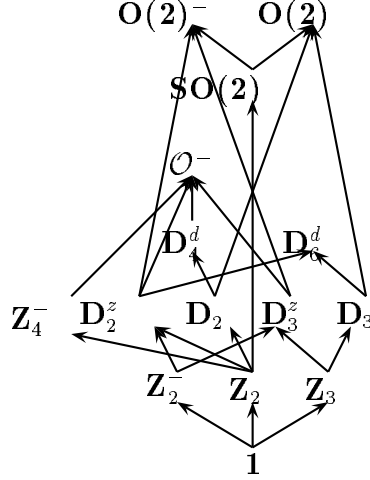
(xiii) On choisit un $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$, un ${}^e\mathbf{C}$ tel que ${}^e g({}^e\mathbf{C}) = \mathbf{O}(\mathbf{2})$ et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} parallèles à \mathbf{k} . Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{SO}(\mathbf{2})$.

(xiv) On choisit un \mathbf{H} nul, un ${}^e\mathbf{C}$ tel que ${}^e g({}^e\mathbf{C}) = \mathbf{O}(\mathbf{2})$ et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} nuls. Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{O}(\mathbf{2})$.

(xv) On choisit un $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$, un ${}^e\mathbf{C}$ nul et des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} parallèles à \mathbf{k} . Alors $g(\mathbf{p}) = \mathbf{O}(\mathbf{2})^-$.

□

Les classes de symétries de **piez** étant maintenant identifiées, on peut les classer selon la relation d'ordre naturelle :



3.3 Application au piézomagnétisme

On appelle ${}^e\mathbf{magn}$ l'ensemble des pseudo-tenseurs du troisième ordre symétriques vis-à-vis de leur deux premiers indices et qui sont impairs par rapport à l'inversion du cours du temps :

$${}^e\mathbf{magn} := \{ {}^e\mathbf{m} : {}^e\mathbf{m}_{ijk} = {}^e\mathbf{m}_{jik}, \mathfrak{R} {}^e\mathbf{m} = -{}^e\mathbf{m} \}. \quad (3.56)$$

On rappelle que **piez** est défini par :

$$\mathbf{piez} := \{ \mathbf{p} : \mathbf{p}_{ijk} = \mathbf{p}_{jik} \}. \quad (3.57)$$

Dans un matériau piézomagnétique⁹, la polarisation magnétique est un pseudo-vecteur ${}^e\mathbf{b}$ relié au tenseur des contraintes \mathbf{T} par la relation simplifiée suivante :

$${}^e b_k = {}^e \mathbf{m}_{ijk} T_{ij}, \quad (3.58)$$

⁹ Contrairement à la piézoélectricité, le piézomagnétisme est un phénomène assez rare dans la nature.

où ${}^e\mathbf{m} \in {}^e\mathbf{magn}$. Par conséquent, lorsqu'une transformation (anti)-orthogonale (*cf.* la définition du groupe orthogonal élargi en (1.12)) agit sur un tenseur piézomagnétique ${}^e\mathbf{m}$, on a :

$$(\mathbf{Q}, \delta) \oplus {}^e\mathbf{m} := \delta \det(\mathbf{Q}) \mathbf{Q} \star {}^e\mathbf{m}, \quad \text{pour } (\mathbf{Q}, \delta) \in \mathbf{O}^\mu(\mathbf{3}), \quad (3.59)$$

où \star est défini en (3.3). Dans cette relation, δ signale que ${}^e\mathbf{m}$ est sensible à l'orientation de l'espace, tandis que $\det(\mathbf{Q})$ rappelle que c'est un tenseur axial.

Comme dans le paragraphe précédent, le groupe de symétrie $\mathcal{G}({}^e\mathbf{m})$ de ${}^e\mathbf{m} \in {}^e\mathbf{magn}$ est défini par :

$$\mathcal{G}({}^e\mathbf{m}) := \{(\mathbf{Q}, \delta) \in \mathbf{O}^\mu(\mathbf{3}) : (\mathbf{Q}, \delta) \oplus {}^e\mathbf{m} = {}^e\mathbf{m}\}, \quad (3.60)$$

i.e. $\mathcal{G}({}^e\mathbf{m})$ consiste en l'ensemble de toutes les transformations orthogonales et anti-orthogonales qui laissent ${}^e\mathbf{m}$ inchangé.

Pour tout ${}^e\mathbf{m} \in {}^e\mathbf{magn}$, on remarque que le groupe de symétrie $\mathcal{G}({}^e\mathbf{m})$ contient l'élément $(-\mathbf{1}, +1)$ de $\mathbf{O}^\mu(\mathbf{3})$. Par conséquent, en définissant le sous-groupe

$${}^\mu\mathbf{1} := \{(\mathbf{1}, +1), (-\mathbf{1}, +1)\}, \quad (3.61)$$

on a nécessairement :

$$\mathcal{G}({}^e\mathbf{m}) = \tilde{\mathcal{G}}({}^e\mathbf{m}) \oplus {}^\mu\mathbf{1}, \quad (3.62)$$

où $\tilde{\mathcal{G}}({}^e\mathbf{m})$ est défini par :

$$\tilde{\mathcal{G}}({}^e\mathbf{m}) := \{(\mathbf{Q}, \delta) \in \mathbf{SO}^\mu(\mathbf{3}) : (\mathbf{Q}, \delta) \oplus {}^e\mathbf{m} = \delta \mathbf{Q} \star {}^e\mathbf{m} = {}^e\mathbf{m}\}, \quad (3.63)$$

et où $\mathbf{SO}^\mu(\mathbf{3}) := \mathbf{SO}(\mathbf{3}) \times \{\pm 1\}$.

On va maintenant montrer que le groupe de symétrie $\mathcal{G}({}^e\mathbf{m})$ du pseudo-tenseur piézomagnétique ${}^e\mathbf{m}$ est intimement relié au groupe de symétrie $g(\mathbf{m}) = g({}^e\text{Id}({}^e\mathbf{m}))$ de son *jumeau* (*cf.* (3.7)) polaire, qui n'est autre qu'un tenseur piézoélectrique. On introduit dans cette optique l'isomorphisme Iso défini par :

$$\mathbf{SO}^\mu(\mathbf{3}) \ni (\mathbf{Q}, \delta) \xrightarrow{\text{Iso}} \delta \mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3}), \quad (3.64)$$

et :

$$\mathbf{O}(\mathbf{3}) \ni \mathbf{Q} \xrightarrow{\text{Iso}^{-1}} (\det(\mathbf{Q}) \mathbf{Q}, \det(\mathbf{Q})) \in \mathbf{SO}^\mu(\mathbf{3}). \quad (3.65)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Iso}(\tilde{g}({}^\epsilon \mathbf{m})) &= \{ \mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3}) : \mathbf{Q} \star {}^\epsilon \text{Id}({}^\epsilon \mathbf{m}) = {}^\epsilon \text{Id}({}^\epsilon \mathbf{m}) \} \\ &= \{ \mathbf{Q} \in \mathbf{O}(\mathbf{3}) : \mathbf{Q} \star \mathbf{m} = \mathbf{m} \} = g(\mathbf{m}). \end{aligned} \quad (3.66)$$

D'après (3.62), le groupe de symétrie $\mathcal{G}({}^\epsilon \mathbf{m}) \subset \mathbf{O}^\mu(\mathbf{3})$ du pseudo-tenseur piézomagnétique ${}^\epsilon \mathbf{m}$ a pour image le groupe de symétrie $g(\mathbf{m}) \subset \mathbf{O}(\mathbf{3})$ de son jumeau polaire, et vice-versa. En d'autres termes, d'après (3.64) et (3.65), la caractérisation des symétries des tenseurs piézomagnétiques est strictement équivalente, via Iso , à celle des tenseurs piézoélectriques. On a alors :

$${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu G) := \{ {}^\epsilon \mathbf{m} \in {}^\epsilon \text{magn} : \mathcal{G}({}^\epsilon \mathbf{m}) \in \{{}^\mu G\} \}. \quad (3.67)$$

Par conséquent, les classes de symétrie de *piez* et celles de ${}^\epsilon \text{magn}$ sont reliées entre elles par les relations :

$$\forall G \subset \mathbf{O}(\mathbf{3}), \text{piez}(G) = {}^\epsilon \text{Id}({}^\epsilon \text{magn}(\text{Iso}^{-1}(G) \oplus {}^\mu \mathbf{1})), \quad (3.68)$$

et :

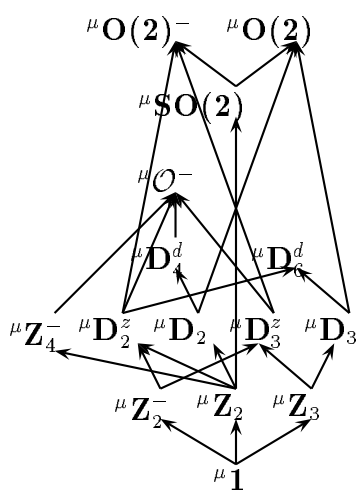
$$\forall {}^\mu G \subset \mathbf{O}^\mu(\mathbf{3}), {}^\epsilon \text{magn}({}^\mu G) = {}^\epsilon \text{Id}(\text{piez}(\text{Iso}({}^\mu G \cap \mathbf{SO}^\mu(\mathbf{3}))). \quad (3.69)$$

Par conséquent, en notant ${}^\mu G$ le sous-groupe de $\mathbf{O}^\mu(\mathbf{3})$ défini par :

$${}^\mu G := \text{Iso}^{-1}(G) \oplus {}^\mu \mathbf{1}, \quad (3.70)$$

on étend sans difficulté à ${}^\epsilon \text{magn}$ la classification des classes de symétries obtenue au paragraphe précédent :

Théorème 3.20: Les ensembles $\text{piez}({}^\mu \mathbf{1})$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{Z}_2)$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{Z}_3)$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{Z}_2^-)$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{D}_2^z)$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{D}_3^z)$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{D}_2)$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{D}_3)$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{D}_4^d)$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{D}_6^d)$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathcal{O}^-)$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{SO}(2))$, ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{O}(2))$ et ${}^\epsilon \text{magn}({}^\mu \mathbf{O}(2)^-)$ ne sont pas vides.



Deuxième partie

MODÈLES DE PLAQUES LINÉAIREMENT
PIÉZOÉLECTRIQUES

4. CAS STATIQUE

4.1 Introduction

Au début du XX^{ème} siècle, le phénomène piézoélectrique a d’abord été appliqué aux Sonars, au contrôle des signaux, à l’interférométrie. De nos jours, la piézoélectricité sert surtout à la détection de déformations ou de déplacements ainsi qu’au contrôle actif des structures. De ce fait, en intégrant des éléments piézoélectriques dans une structure, il devient possible non seulement de mesurer des contraintes ou des déformations, mais aussi d’imposer localement des contraintes par lesquelles il devient possible de contrôler des déformations. On obtient ainsi ce que l’on appelle une structure “intelligente” parce qu’elles *captent* des informations qui en retour permettent *d’actionner* certains mécanismes déterminés, et réciproquement. Ces structures s’adaptent donc, en quelque sorte, à leur environnement.

Nombre de ces dispositifs se présentent sous la forme d’éléments de faible épaisseur, et qui de se fait rentrent dans la catégorie de ce que l’on appelle des plaques ou des coques. On s’intéresse ici spécifiquement aux plaques, *i.e.* des éléments “plats” et de faible épaisseur. Lors de l’analyse de ce type de problème, il est fréquent de rencontrer des théories dites approchées ou approximées (on fait des hypothèses simplificatrices). Ces hypothèses peuvent concerner la direction du champ électrique ou la forme du champ de déformation par exemple (*cf.* Mindlin, 1952 et 1972). De ce fait, l’intérêt de posséder des solutions “exactes” (c’est-à-dire des solutions obtenues - en un sens à préciser - à partir de modèles tri-dimensionnels) apparaît. On sera alors en mesure de vérifier la pertinence des résultats que fournissent les théories approchées.

La méthode utilisée ici pour obtenir des modèles de plaques linéairement piézoélectriques maniables pour le mécanicien consiste à étudier le comportement *limite* d’un corps tridimensionnel lorsque son épaisseur tend vers 0. On dit qu’il s’agit d’une méthode de réduction de dimension. Il s’agit en fait de considérer l’épaisseur comme un *paramètre*, puis d’étudier ce qu’il arrive lorsque ce paramètre tend vers 0. En paraphrasant l’introduction du livre de Sanchez-Palencia (1992), disons que “l’étude mathématique asymptotique d’un problème contenant un petit paramètre ε consiste à décrire les

propriétés de la solution lorsque ε tend vers 0. Cette démarche est souvent déroutante pour l'ingénieur, qui conçoit bien que ε soit petit, mais non pas qu'il tende vers zéro, ε ayant dans le problème réel une valeur fixée. Néanmoins, l'étude asymptotique "consiste simplement" à négliger ε par rapport à 1 et ε^2 par rapport à ε , mais non pas ε par rapport à ε ou $c\varepsilon$ (à moins que c soit très grand, auquel cas il y a un nouveau petit paramètre, $1/c$, à prendre en considération !) Il faut donc voir de près comment s'enchaînent les termes contenant ε , suite à quoi on peut appliquer les résultats à un cas avec ε petit fixé ; plus cette valeur sera petite, plus l'étude asymptotique donnera une description fidèle du phénomène."

Il existe plusieurs manières de mettre en oeuvre cette méthode. Par exemple Attou & Maugin (1987) ont utilisé des développements asymptotiques formels tandis que Bisegna & Maceri (1996a, b) utilisaient une méthode mixte. Les résultats obtenus étant divergents, nous avons ici opté pour une méthode qui rentre dans le cadre des perturbations singulières utilisant des arguments rigoureux de passage à la limite pour tenter de réconcilier ces points de vue.

D'un point de vue historique, si l'idée des développements asymptotiques remonte au XIX^{ème} siècle, il semble que la première mise en oeuvre fructueuse de cette méthode soit le fait de Birkhoff (1922). Il convient aussi de citer l'article de Gol'denveizer (1963).

Remarque 4.1: (**Adaptation des notations**)

Le paramètre ε sera présent tout au long des Chapitres 4 et 5. On sera amené à l'introduire en indice d'un certain nombre de tenseurs, de vecteurs et de données géométriques. Il n'a rien à voir avec le ϵ introduit au Chapitre 3 qui représentait quant à lui le tenseur d'orientation.

D'autre part, on a choisi pour le traitement des deux derniers Chapitres un système de notations indépendant de celui adopté dans les trois premiers. En particulier, les tenseurs qui entrent en jeu dans la loi de comportement de la piézoélectricité (*cf.* la relation (3.8) par exemple) seront rebaptisés afin qu'il ne subsiste pas d'ambiguïté.

Une configuration de référence d'une plaque piézoélectrique est la fermeture dans \mathbb{R}^3 de l'ouvert $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, où ε est un petit paramètre positif et ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 de frontière Lipschitzienne¹ $\partial\omega$. On considère aussi $(\Gamma_{mD}^\varepsilon, \Gamma_{mN}^\varepsilon)$ et $(\Gamma_{eD}^\varepsilon, \Gamma_{eN}^\varepsilon)$, deux partitions de la frontière Ω^ε . La plaque est, d'une part, encastrée sur Γ_{mD}^ε et soumise à un potentiel électrique φ_0^ε sur Γ_{eD}^ε . D'autre part, elle est soumise à des forces de volume mécanique f^ε et électrique F^ε dans Ω^ε , ainsi qu'à des forces de surface mécanique g^ε et

¹ Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, mathématicien allemand, 1832-1903. Il travailla à Bonn.

électrique d^ε sur Γ_{mD}^ε et Γ_{eD}^ε , respectivement. On note n^ε la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega^\varepsilon$ et on suppose que $\Gamma_{mD}^\varepsilon = \gamma_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, avec $\gamma_0 \subset \partial\omega$. Les équations qui déterminent l'état électromécanique $s^\varepsilon = (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ à l'équilibre sont alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^\varepsilon + f^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \sigma^\varepsilon \cdot n^\varepsilon = g^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{mN}^\varepsilon, u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_{mD}^\varepsilon, \\ \operatorname{div} D^\varepsilon + F^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, D^\varepsilon \cdot n^\varepsilon = d^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{eN}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon = \varphi_0^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{eD}^\varepsilon, \\ (\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon) = M^\varepsilon(x)(e(u^\varepsilon), \nabla \varphi^\varepsilon) \text{ dans } \Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

On désigne respectivement par u^ε , φ^ε , σ^ε , $e(u^\varepsilon)$ et D^ε le déplacement mécanique, le potentiel électrique, le tenseur des contraintes, le tenseur des (petites) déformations et le déplacement électrique; l'opérateur M^ε , qui gouverne la loi de comportement, est tel que :

$$\sigma^\varepsilon = a^\varepsilon e(u^\varepsilon) - b^\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon, \quad D^\varepsilon = b^{\varepsilon t} e(u^\varepsilon) + c^\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon,$$

où $b^{\varepsilon t}$ est la transposée de b^ε , tandis que a^ε et c^ε sont symétriques et positifs. A cause du couplage piézoélectrique, M^ε n'est pas symétrique. Cependant, sous des hypothèses réalistes de bornitude de a^ε , b^ε et c^ε , ainsi que d'ellipticité de a^ε et c^ε , si le chargement électromécanique est suffisamment régulier, le problème admet une unique solution. La question est d'en étudier le comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et on montrera en fait que *selon le type de chargement, deux comportements limites, indexés par $p = 1$ ou 2 , peuvent être obtenus* (cf. Raoult & Sène (2003) pour une observation identique).

De manière classique, le comportement asymptotique de la solution du problème physique s'obtient en se ramenant à un ouvert fixe $\Omega = \omega \times (-1, 1)$. Bien que peu naturelle au premier abord, on verra que cette méthode a cependant l'avantage de conserver toutes les informations mécaniques propres au problème considéré. On considère donc l'application π^ε :

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega} \mapsto \pi^\varepsilon x = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \bar{\Omega}^\varepsilon.$$

Les images par $(\pi^\varepsilon)^{-1}$ des données géométriques introduites précédemment perdent l'indice ε et on pose $\Gamma_\pm = \omega \times \{\pm 1\}$, $\Gamma_{lat} = \partial\omega \times (-1, 1)$. On peut généraliser à la piézoélectricité les hypothèses classiques de bornitude et d'ellipticité uniforme faites sur les coefficients d'élasticité. Dans le cas de matériaux hétérogènes, elles prennent la forme suivante :

$$(\mathbf{H}_3) \quad : \quad \begin{cases} \exists M \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H})) \text{ tel que } M^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = M(x), \text{ pp } x \in \Omega \\ \exists \kappa > 0 : M(x) h \cdot h \geq \kappa |h|_{\mathcal{H}}^2, \forall h \in \mathcal{H}, \text{ pp } x \in \Omega. \end{cases}$$

L'ordre de grandeur du chargement extérieur est choisi comme suit :

$$(\mathbf{H}_4^p) : \begin{cases} f_\alpha^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon f_\alpha(x), f_3^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^2 f_3(x), F^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^{2-p} F(x), \forall x \in \Omega, \\ g_\alpha^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^2 g_\alpha(x), g_3^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^3 g_3(x), \forall x \in \Gamma_{mN} \cap \Gamma_\pm, \\ g_\alpha^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon g_\alpha(x), g_3^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^2 g_3(x), \forall x \in \Gamma_{mN} \cap \Gamma_{lat}, \\ d^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^{3-p} d(x), \forall x \in \Gamma_{eN} \cap \Gamma_\pm, \\ d^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^{2-p} d(x), \forall x \in \Gamma_{eN} \cap \Gamma_{lat}, \\ \varphi_0^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^p \varphi_0(x), \forall x \in \Gamma_{eD}. \end{cases}$$

Ici, (f, F, g, d) est un élément de $L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_{mN})^3 \times L^2(\Gamma_{eN})$ indépendant de ε et on suppose que φ_0 possède un prolongement à Ω , toujours noté φ_0 , dans $H^1(\Omega) = \{\psi \in L^2(\Omega); \nabla \psi \in L^2(\Omega)^3\}$. Dans la suite, pour tout domaine G de \mathbb{R}^n , on notera $H_\Gamma^1(G)$ l'ensemble des éléments de l'espace de Sobolev² $H^1(G)$ dont les éléments s'annulent sur $\Gamma \subset \partial G$. A l'état électromécanique $s_p^\varepsilon = (u_p^\varepsilon, \varphi_p^\varepsilon)$ défini sur Ω^ε , est associé l'état électromécanique *mis à l'échelle* $s_p(\varepsilon) = (u_p(\varepsilon), \varphi_p(\varepsilon))$ défini sur Ω par :

$$\forall x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \Omega^\varepsilon \begin{cases} (u_p^\varepsilon)_\alpha(x^\varepsilon) = \varepsilon (u_p)_\alpha(x), \\ (u_p^\varepsilon)_3(x^\varepsilon) = (u_p)_3(x), \\ \varphi_p^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^p \varphi_p(x). \end{cases}$$

Dès lors, $s_p(\varepsilon)$ est solution du problème mathématique $\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)_p$ équivalent au problème physique de départ :

$$\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)_p \begin{cases} \text{Trouver } s_p(\varepsilon) \in (0, \varphi_0) + \mathbf{V} \text{ tel que} \\ m_p(\varepsilon)(s_p(\varepsilon), r) = L(r), \\ \forall r \in \mathbf{V} := \{r = (v, \psi) \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega)\}, \end{cases}$$

avec :

² Sergei L'vovich Sobolev, mathématicien russe, 1908-1989. Il travailla à Akademgorodok. On lit souvent que "les espaces de Sobolev sont devenus un outil indispensable à l'étude des équations aux dérivées partielles". En fait, ces équations aux dérivées partielles modélisant la plupart du temps des phénomènes physiques, les espaces de Sobolev peuvent être vus comme rassemblant des éléments dont l'énergie est finie. Ceci explique en partie la place importante qu'ils occupent en mécanique.

$$\begin{cases} m_p(\varepsilon)(s, r) := \int_{\Omega} M(x) k_p(\varepsilon, s) \cdot k_p(\varepsilon, r) dx, \\ k_p(\varepsilon, r) = k_p(\varepsilon, (v, \psi)) := (e(\varepsilon, v), (\nabla_{(p)}(\varepsilon, \psi))), \\ e(\varepsilon, v)_{\alpha\beta} := e(v)_{\alpha\beta}, e(\varepsilon, v)_{\alpha 3} := \varepsilon^{-1} e(v)_{\alpha 3}, e(\varepsilon, v)_{33} := \varepsilon^{-2} e(v)_{33}, \\ 2e(v)_{ij} := \partial_i v_j + \partial_j v_i, \\ \nabla_{(p)}(\varepsilon, \psi)_{\alpha} := \varepsilon^{p-1} \partial_{\alpha} \psi, \nabla_{(p)}(\varepsilon, \psi)_3 := \varepsilon^{p-2} \partial_3 \psi, \\ L(r) := \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Omega} F \psi dx + \int_{\Gamma_{mN}} g \cdot v ds + \int_{\Gamma_{eN}} d\psi ds. \end{cases}$$

Les indices α, β prennent dans ces expressions les valeurs 1 ou 2 ; les indices i, j valent quant à eux 1, 2 ou 3.

Notons que par linéarité, les hypothèses de mise à l'échelle peuvent être remplacées en multipliant par $\varepsilon^n, n \in \mathbb{N}$, les choix précédents. D'autre part, ces hypothèses de mise à l'échelle sont celles qui permettent à la solution $s_p(\varepsilon)$ de converger vers un état électromécanique non trivial, *i.e.* physique intéressant. Elles sont donc justifiées *a posteriori*. Cependant, elles traduisent qu'un comportement de plaque est la conjugaison de trois facteurs :

1. une géométrie (l'épaisseur doit être fine vis-à-vis des autres dimensions),
2. un matériau (traduit par l'opérateur M^{ε}),
3. un chargement (dont l'intensité est donnée par les hypothèses de mise à l'échelle).

Dans cette optique, les hypothèses de mise à l'échelle expriment la manière dont tous ces éléments sont ou doivent être connectés pour obtenir un comportement de plaque. Ainsi, une feuille d'arbre pourra fort bien se comporter comme une plaque lorsqu'une abeille vient se poser dessus tandis que si une mouche se pose sur un plancher en béton, celui-ci n'aura certes pas le même comportement. Par contre, des étagères bien remplies ou des armoires normandes peuvent entraîner qu'un plancher en béton se comporte comme une plaque, ce qui ne serait pas forcément le cas si ce plancher était construit avec un autre matériau. Les hypothèses de mise à l'échelle, même si elles transforment un problème physique en un problème mathématique apparemment abstrait, sont donc chargées d'informations importantes.

L'objectif principal du Chapitre est d'établir rigoureusement des résultats de convergence. Pour cela, on doit tout d'abord montrer que la famille des uniques solutions $s_p(\varepsilon)$ du problème mis à l'échelle est bornée dans un certain espace fonctionnel. Ce résultat s'obtient grâce à des hypothèses mathématiques qui traduisent un fait physiquement acceptable : le travail du

chargement extérieur doit rester fini. Cela n'est cependant pas toujours automatiquement satisfait et, selon le type de chargement extérieur considéré, on est conduit à faire l'hypothèse :

$$(\mathbf{H}_5^p) \left\{ \begin{array}{l} \text{si } p = 1 : \text{il existe un prolongement de } \varphi_0 \text{ à } \Omega \text{ indépendant de } x_3. \\ \text{si } p = 2 : \text{la fermeture } \bar{\delta} \text{ de la projection de } \Gamma_{eD} \text{ sur } \omega \text{ coïncide avec } \bar{\omega}, \\ \text{de plus, ou bien } d = 0, \text{ ou bien } \Gamma_{eN} = \emptyset. \end{array} \right.$$

Le fait que cette hypothèse soit indexée par p signale au passage qu'elle est propre au couplage piézoélectrique (on rappelle que le cas des plaques purement élastiques ne conduit - par cette méthode - qu'à un seul modèle limite).

Un coup d'oeil attentif à l'hypothèse de mise à l'échelle sur le chargement extérieur (\mathbf{H}_4^p) permet de subodorer le type de modèle limite susceptible d'être obtenu dans chaque cas. En effet, si $p = 2$, ce sont les forces électriques de volume F^ε et le déplacement vertical qui seront prépondérants. Ainsi, un chargement électrique provoquera un déplacement vertical du *même ordre*, ce qui correspond à un *actionneur*. Par contre, si $p = 1$, le déplacement membranaire et le potentiel sont du même ordre (en ε^1), tandis que le déplacement vertical est d'une intensité plus grande (en ε^0). Ainsi, ce type de modèle permet de détecter des petits déplacements (membranaires) en mesurant un potentiel électrique (lui aussi petit), ce qui rentre dans le cadre des capteurs (micro-balances par exemple, où une mesure électrique permet de remonter à un chargement).

Pour préciser ces idées on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_{KL} := \{v \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3; e_{i3}(v) = 0\}, \\ \Phi_1 := \{\psi \in H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega); \partial_3 \psi = 0\}, \\ \Phi_2 := \{\psi \in L^2(\Omega); \partial_3 \psi \in L^2(\Omega), \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_{eD} \cap \Gamma^\pm\}, \\ \mathbf{S}_p := \mathbf{V}_{KL} \times \Phi_p, \\ \mathbf{X}_1 := H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega), \\ \mathbf{X}_2 := H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times \Phi_2, \\ \widetilde{m}_p(s, r) := \int_{\Omega} \widetilde{M}_p k_p(s) \cdot k_p(r) dx, \\ k_1(s) := (e_{\alpha\beta}(u), \partial_\alpha \varphi), \\ k_2(s) := (e_{\alpha\beta}(u), \partial_3 \varphi), \end{array} \right.$$

où \widetilde{M}_p est la condensation de M par rapport aux composantes de $(\varepsilon(v), \nabla \psi)$ maintenues dans $k_p(v, \psi)$. Les opérateurs \widetilde{M}_p gouvernent la loi de comporte-

ment limite et peuvent être explicitement décrits pour toutes les familles de cristaux piézoélectriques. Bien sûr, ils diffèrent selon que la plaque est utilisée comme capteur ou comme actionneur. Les formules exactes de ces opérateurs sont données au § 4.5.

Le principal résultat de ce Chapitre est le :

Résultat de convergence 1: Sous les hypothèses (\mathbf{H}_3) , (\mathbf{H}_5^p) , lorsque ε tend vers 0, la famille $s_p(\varepsilon)$ des uniques solutions de $\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)_p$ converge dans \mathbf{X}_p vers l'unique solution s_p du problème limite :

$$\mathcal{P}(0, \Omega)_p \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } s_p \in (0, \varphi_0) + \mathbf{S}_p \text{ tel que} \\ \widetilde{m}_p(s_p, r) = L(r), \forall r \in \mathbf{S}_p. \end{array} \right.$$

Comme dans le cas des plaques purement élastiques, les champs limites correspondent à une cinématique simplifiée : les déplacements sont de type Kirchhoff-Love et, dans le cas $p = 1$, le potentiel électrique ne dépend pas de x_3 . De par la définition même de \mathbf{S}_1 et de la caractérisation classique des déplacements de Kirchhoff-Love, $\mathcal{P}(0, \Omega)_1$ est en fait un problème bidimensionnel posé dans ω . De plus, sous l'hypothèse de découplage

$$(\mathbf{H}_p^{\text{découpl}}) : \int_{-1}^1 x_3 \widetilde{M}_1(x_1, x_2, x_3) dx_3 = 0 \quad , \quad \widetilde{M}_2 \text{ ne dépend pas de } x_3,$$

qui est impliquée - si $p = 1$ - par des coefficients électromécaniques pairs en x_3 , il apparaît un découplage entre les déplacements membranaires et les déplacements de flexion. Plus précisément, $(\mathbf{H}_p^{\text{découpl}})$ implique que \mathbf{S}_p est la somme directe de deux sous-espaces $\hat{\mathbf{S}}_p$ et $\check{\mathbf{S}}_p$ qui ont la particularité d'être \widetilde{m}_p -polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{S}}_p := \hat{\mathbf{V}}_{KL} \times \hat{\Phi}_p, \\ \check{\mathbf{S}}_p := \check{\mathbf{V}}_{KL} \times \check{\Phi}_p, \\ \hat{\mathbf{V}}_{KL} := \{v \in \mathbf{V}_{KL}; v_3 = 0\}, \\ \check{\mathbf{V}}_{KL} := \{v \in \mathbf{V}_{KL}; v_\alpha := -x_3 \partial_\alpha v_3\}, \\ \hat{\Phi}_1 := \Phi_1, \\ \check{\Phi}_1 := \{0\}, \\ \hat{\Phi}_2 := \{\varphi \in \Phi_2; \varphi \text{ impaire en } x_3\}, \\ \check{\Phi}_2 := \{\varphi \in \Phi_2; \varphi \text{ paire } x_3\}. \end{array} \right.$$

La \widetilde{m}_p -polarité signifie que

$$\tilde{m}_p(\hat{s}, \check{r}) = \tilde{m}_p(\check{r}, \hat{s}) = 0, \forall (\hat{s}, \check{r}) \in \hat{\mathbf{S}}_p \times \check{\mathbf{S}}_p.$$

D'un point de vue strictement mécanique et énergétique, cela signifie que les déplacements membranaires et les déplacements de flexion sont déconnectés. D'un point de vue électrique, la même observation s'applique aux parties paire et impaire (en x_3) du potentiel électrique dans le cas $p = 2$. Cette distinction entre parties paire et impaire apparaît dans l'article de Bisegna & Maceri (1996a, b).

Par conséquent, $\mathcal{P}(0, \Omega)_1$ peut s'écrire sous la forme de deux équations variationnelles indépendantes impliquant d'une part le déplacement en flexion et d'autre part le couple constitué du déplacement membranaire et du potentiel électrique. De manière similaire, $\mathcal{P}(0, \Omega)_2$ se décompose en deux équations variationnelles indépendantes. La première met en jeu le déplacement en flexion et la partie paire du déplacement électrique ; la seconde implique quant à elle le déplacement membranaire et la partie impaire du potentiel électrique.

Enfin, une “mise à l'échelle inverse” permet de se ramener sur un ouvert d'épaisseur 2ε et de donner une signification physique à tous les résultats obtenus.

Enfin, le problème variationnel limite peut s'écrire sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles dont la structure consiste en :

- si $p = 1$, les équations ponctuelles prennent la forme d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre vis-à-vis du déplacement en flexion et d'un système d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre vis-à-vis du déplacement membranaire et du potentiel électrique.
- si $p = 2$, on obtient deux systèmes. Le premier est du second ordre vis-à-vis du déplacement membranaire et de la partie impaire (en x_3) du potentiel électrique ; le second est du quatrième ordre vis-à-vis du déplacement en flexion et de la partie paire du potentiel électrique.

4.2 *Rappels et notations*

Les indices latins prennent leurs valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ et les indices grecs dans $\{1, 2\}$. La convention de sommation sur les indices répétés est entendue.

On rappelle quelques propriétés des espaces L^p . Pour les détails, on peut se référer aux ouvrages de Brezis (1987), Rudin (1978), Schwartz (1970) et Yosida (1964).

Pour $1 \leq p < \infty$ et Ω un domaine³ de \mathbb{R}^N , on définit donc les espaces⁴

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et telle que } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty\}. \quad (4.1)$$

On définit en outre

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et telle qu'il existe } C \in \mathbb{R} \text{ avec } |f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}. \quad (4.2)$$

Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, les ensembles $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach⁵ pour les normes

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} [\int_{\Omega} |f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}, & \text{si } p < +\infty \\ \inf \{C, |f| \leq C \text{ p.p. dans } \Omega\}, & \text{si } p = +\infty. \end{cases} \quad (4.3)$$

D'autre part, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert⁶ pour le produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx. \quad (4.4)$$

Maintenant, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u : u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, N\}, \quad (4.5)$$

où les dérivées sont des dérivées *faibles*, c'est-à-dire des dérivées au sens des distributions.

Lorsque $p = 2$, on note $W^{1,2}(\Omega) =: H^1(\Omega)$, *i.e.*

³ Un *domaine* est un ouvert borné connexe de frontière Lipschitzienne.

⁴ Ici et dans la suite on prendra $N = 3$.

⁵ Stefan Banach, mathématicien polonais, 1892-1945. Il travailla à Lvov (maintenant en Ukraine). Le terme d'"espace de Banach" est dû à Fréchet.

Maurice René Fréchet, mathématicien français, 1878-1973. Il travailla à Paris.

⁶ David Hilbert, mathématicien allemand, 1862-1943. Il travailla à Göttingen. L'appellation "espace de Hilbert" est due à János (John) von Neumann.

John von Neumann, mathématicien d'origine hongroise, 1903-1957. Il émigra aux États Unis et travailla à Princeton.

$$W^{1,2}(\Omega) := \{u : u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, N\}. \quad (4.6)$$

Les $W^{1,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour les normes

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}. \quad (4.7)$$

Pour $1 \leq p < +\infty$, cette norme est équivalente à

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := (\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.8)$$

où on a noté

$$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right), \quad (4.9)$$

et

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.10)$$

De plus, $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(v, w)_{H^1(\Omega)} := (v, w)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v, w \in H^1(\Omega). \quad (4.11)$$

Pour tout ouvert G de \mathbb{R}^N , on note $H_\Gamma^1(G)$ l'ensemble des éléments de $H^1(G)$ dont la trace⁷ sur $\Gamma \subset \partial G$ est nulle :

$$H_\Gamma^1(G) := \{v \in H^1(G) : v|_\Gamma \equiv 0, \Gamma \subset \partial G\}. \quad (4.12)$$

En particulier, on note

⁷ La notion de trace est bien définie lorsque Ω est un domaine.

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega); u_{\partial\Omega} \equiv 0\}. \quad (4.13)$$

L'inégalité de Poincaré⁸, qui affirme l'existence d'une constante C_Ω telle que

$$\boxed{\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega),} \quad (4.14)$$

implique que

$$\|u\| := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.15)$$

définit sur $H_0^1(\Omega)$ une norme équivalente à la norme usuelle.

Enfin, pour $v \in H^1(\Omega)$, on définit

$$e_{ij}(v) := \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (4.16)$$

L'inégalité de Korn⁹ affirme l'existence d'une constante $C_{\Omega,\Gamma}$ telle que

$$\boxed{\|v\|_{H_\Gamma^1(\Omega)} \leq C_{\Omega,\Gamma} \|e(v)\|_{L^2(\Omega)}, \forall v \in H_\Gamma^1(\Omega).} \quad (4.17)$$

Ceci implique que

$$\|u\| := \|e(u)\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.18)$$

définit sur $H_\Gamma^1(\Omega)$ une norme équivalente à la norme usuelle.

Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev, on peut se référer à Ciarlet (1988), Cioranescu & Donato (1999), Maz'ja (1985) et Tartar (2000).

Dans un autre ordre d'idées, il est utile de définir $\mathcal{H} := S^3 \times \mathbb{R}^3$, où S^3 désigne l'ensemble des matrices réelles 3×3 symétriques. On abusera des notations pour écrire le produit scalaire sur \mathcal{H} :

$$(A, u) \cdot (B, v) = A \cdot B + u \cdot v, \quad \forall (A, u), (B, v) \in \mathcal{H}. \quad (4.19)$$

Ainsi, le symbole \cdot désignera à la fois le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 et celui de S^3 , défini par $A \cdot B = \text{tr}(AB^t) = \text{tr}(A^t B)$.

⁸ Jules Henri Poincaré, mathématicien français, 1854-1912. Il travailla à Paris.

⁹ Arthur Korn, physicien allemand 1870-1945. Il travailla à Berlin puis émigra aux États-Unis en 1939.

4.3 Position du problème

Une configuration de référence d'une "plaque piézoélectrique" est la fermeture dans \mathbb{R}^3 de l'ouvert $\Omega^\varepsilon := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, où ω est un domaine de \mathbb{R}^2 de frontière Lipschitzienne $\partial\omega$ et ε un petit paramètre *positif*. Un point courant de $\bar{\Omega}^\varepsilon$ est noté $x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon)$.

La plaque est soumise d'une part à des forces de densités volumique f^ε (dans Ω^ε) et surfacique g^ε (sur Γ_{mN}^ε) et d'autre part à des charges électriques de densités volumique F^ε (dans Ω^ε) et surfacique d^ε (sur Γ_{eN}^ε). La plaque est encastrée sur Γ_{mD}^ε et un potentiel électrique φ_0^ε donné est imposé sur Γ_{eD}^ε . Les couples $(\Gamma_{mD}^\varepsilon, \Gamma_{mN}^\varepsilon)$ et $(\Gamma_{eD}^\varepsilon, \Gamma_{eN}^\varepsilon)$ ¹⁰ réalisent une partition de $\partial\Omega^\varepsilon$ dont la normale unitaire extérieure est notée n^ε . On suppose que chacune des surfaces précédentes est de mesure positive et que $\Gamma_{mD}^\varepsilon = \gamma_0 \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, avec $\gamma_0 \subset \partial\omega$. L'état électromécanique de la plaque est exprimé par un couple $s^\varepsilon := (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ de champs de déplacement u^ε et de potentiel électrique φ^ε . Les équations déterminant une configuration d'équilibre sont alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^\varepsilon + f^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \\ \operatorname{div} D^\varepsilon + F^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \\ (\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon) = M^\varepsilon(x^\varepsilon)(e(u^\varepsilon), \nabla \varphi^\varepsilon) \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \\ \sigma^\varepsilon n^\varepsilon = g^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{mN}^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_{mD}^\varepsilon, \\ D^\varepsilon \cdot n^\varepsilon = d^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{eN}^\varepsilon, \\ \varphi^\varepsilon = \varphi_0^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{eD}^\varepsilon, \end{cases} \quad (4.20)$$

où σ^ε , $e(u^\varepsilon)$ et D^ε désignent respectivement le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations linéarisées et le déplacement électrique. Si on note $\mathcal{L}(V, W)$ l'ensemble des applications linéaires d'un espace V dans un espace W alors $M^\varepsilon(x^\varepsilon)$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ du type :

$$\begin{cases} \sigma^\varepsilon = a^\varepsilon e(u^\varepsilon) - b^\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon, \\ D^\varepsilon = b^{\varepsilon^t} e(u^\varepsilon) + c^\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon, \end{cases} \quad (4.21)$$

¹⁰ Ces notations sont celles introduites par Sène (2000) et nous les reprenons. Le "e" et le "m" signifient "électrique" et "mécanique" respectivement, tout comme "N" et "D", "Neumann" et "Dirichlet".

Franz Ernst Neumann, mathématicien allemand, 1798-1895. Il travailla à Königsberg (maintenant Kaliningrad, Russie).

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathématicien allemand, 1805-1859. Il travailla à Berlin de 1828 à 1855, puis à Göttingen.

où $(a^\varepsilon, b^\varepsilon, c^\varepsilon) \in \mathcal{L}(S^3, S^3) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, S^3) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et où b^{ε^t} est la transposée de b^ε . De plus, a^ε et c^ε sont symétriques et positifs.

Il est à noter, et c'est justement l'une des particularités de la piézoélectricité, que M^ε n'est pas symétrique mais simplement un opérateur positif sur \mathcal{H} .

4.3.1 Formulation variationnelle

Afin de poser le problème (4.20) sous une forme "variationnelle", on fait tout d'abord l'hypothèse de régularité sur les actions extérieures

$$(\mathbf{H}_1) : \begin{cases} (f^\varepsilon, g^\varepsilon, F^\varepsilon, d^\varepsilon) \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3 \times L^2(\Gamma_{mN}^\varepsilon)^3 \times L^2(\Omega^\varepsilon) \times L^2(\Gamma_{eN}^\varepsilon), \\ \varphi_0^\varepsilon \text{ possède un prolongé à } \Omega - \text{noté } \varphi_0^\varepsilon - \text{ de classe } H^1(\Omega^\varepsilon)^3. \end{cases}$$

Ensuite, on définit l'espace des états électromécaniques

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^\varepsilon &:= \{t^\varepsilon = (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 \times H^1(\Omega^\varepsilon) : v_{|\Gamma_{mD}^\varepsilon}^\varepsilon \equiv 0, \psi_{|\Gamma_{eD}^\varepsilon}^\varepsilon \equiv 0\} \\ &= H_{\Gamma_{mD}^\varepsilon}^1(\Omega^\varepsilon)^3 \times H_{\Gamma_{eD}^\varepsilon}^1(\Omega^\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Afin de condenser les notations on introduit la forme bilinéaire sur \mathbf{V}^ε :

$$m^\varepsilon(s^\varepsilon, t^\varepsilon) = m^\varepsilon((u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon), (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)) := \int_{\Omega^\varepsilon} M^\varepsilon(e(u^\varepsilon), \nabla \varphi^\varepsilon) \cdot (e(v^\varepsilon), \nabla \psi^\varepsilon) dx^\varepsilon, \quad (4.23)$$

qui d'après (4.21), possède les propriétés "de symétrie" :

$$\boxed{\begin{cases} m^\varepsilon((u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon), (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)) = m^\varepsilon((v^\varepsilon, -\psi^\varepsilon), (u^\varepsilon, -\varphi^\varepsilon)), \\ \forall u^\varepsilon, v^\varepsilon \in H_{\Gamma_{mD}^\varepsilon}^1(\Omega^\varepsilon)^3, \forall \varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in H_{\Gamma_{eD}^\varepsilon}^1(\Omega^\varepsilon). \end{cases}} \quad (4.24)$$

On pose enfin

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(t^\varepsilon) &:= \int_{\Omega^\varepsilon} (f^\varepsilon \cdot v^\varepsilon + F^\varepsilon \psi^\varepsilon) dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_{mN}^\varepsilon} g^\varepsilon \cdot v^\varepsilon ds^\varepsilon + \int_{\Gamma_{eN}^\varepsilon} d^\varepsilon \psi^\varepsilon ds^\varepsilon, \\ &\quad \forall t^\varepsilon = (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in \mathbf{V}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Le problème *physique* relatif à la plaque *réelle* et formulé sur l'ouvert Ω^ε s'écrit alors

$$\boxed{\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon) \quad : \quad \begin{cases} \text{Trouver } s^\varepsilon = (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \in (0, \varphi_0^\varepsilon) + \mathbf{V}^\varepsilon \text{ tel que} \\ m^\varepsilon(s^\varepsilon, t^\varepsilon) = L^\varepsilon(t^\varepsilon) \quad , \quad \forall t^\varepsilon \in \mathbf{V}^\varepsilon. \end{cases}}$$

Les hypothèses réalistes de bornitude des a^ε , b^ε , c^ε et d'ellipticité uniforme des a^ε et c^ε résumées par

$$(\mathbf{H}_2) \quad : \quad \begin{cases} M^\varepsilon \in L^\infty(\Omega^\varepsilon, \mathcal{L}(\mathcal{H})), \\ \exists \kappa^\varepsilon > 0 : M^\varepsilon(x^\varepsilon) h \cdot h \geq \kappa^\varepsilon |h|_{\mathcal{H}}^2, \forall h \in \mathcal{H}, p.p. x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \end{cases}$$

conduisent alors au

Théorème 4.2: Sous les hypothèses (\mathbf{H}_1) et (\mathbf{H}_2) , le problème $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$ admet une solution unique.

Démonstration:

La forme bilinéaire $m^\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est \mathbf{V}^ε -coercive et \mathbf{V}^ε -continue d'après les inégalités de Korn et de Poincaré. De plus, la forme linéaire $L^\varepsilon(\cdot)$ est clairement \mathbf{V}^ε -continue. Le théorème est ainsi une application directe du théorème de Stampacchia¹¹ (*cf.* Brezis, 1983).

□

Pour revenir à des considérations physiques, la plaque que l'on étudie est une plaque d'épaisseur ε . Concrètement, cela signifie que l'on peut par exemple avoir $\varepsilon = 1\text{mm}$, ou bien $\varepsilon = 1\mu\text{m}$ selon les applications. La démarche mathématique consiste en fait à considérer que ε est un petit paramètre destiné à tendre vers 0, c'est-à-dire que l'on va "plonger" le problème $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$ dans une famille de problèmes paramétrés par ε . On considérera alors que ce que l'on obtient à la limite (lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$) donne une bonne idée du comportement de la plaque originelle (celle d'épaisseur ε fixe).

On a par conséquent à étudier désormais ce qu'il advient de $s^\varepsilon = (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.4 Changement d'ouvert et hypothèses de "mise à l'échelle"

On va établir que, selon le type de chargement, deux comportements limites, indexés par p valant 1 ou 2, peuvent être obtenus (*cf. infra* l'hypothèse sur les ordres de grandeurs des actions extérieures). La démarche utilisée à cette fin est extrêmement classique et ne diffère en rien de celle introduite par

¹¹ Guido Stampacchia, mathématicien italien, 1922-1978. Il travailla à Pise.

Ciarlet (1997). La nouveauté est qu'elle permet d'englober dans une étude mathématique rigoureuse les résultats partiels obtenus par Attou & Maugin (1987) (cas $p = 1$) d'une part et par Sène (2000) (cas $p = 2$) d'autre part. Il s'agit en fait de transformer le problème $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$ posé sur une *famille* d'ouverts par une famille de problèmes posés sur un ouvert *fixe*. La raison de cette transformation tient principalement dans la simplicité de l'analyse mathématique qui en résulte (le matériel théorique permettant d'étudier “directement” le comportement de s^ε lorsque ε tend vers 0 existe mais rend la formulation plus complexe).

On se ramène donc classiquement à un ouvert fixe $\Omega := \omega \times]-1, 1[$ par la bijection π^ε définie par :

$$\pi^\varepsilon : x = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega} \mapsto x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \bar{\Omega}^\varepsilon. \quad (4.26)$$

On note Γ_{mD} , Γ_{mN} , Γ_{eD} , Γ_{eN} les images par $(\pi^\varepsilon)^{-1}$ de Γ_{mD}^ε , Γ_{mN}^ε , Γ_{eD}^ε , Γ_{eN}^ε et on définit

$$\begin{aligned} \Gamma_\pm &:= \omega \times \{\pm 1\}, \\ \Gamma_{lat} &:= \partial\omega \times]-1, 1[. \end{aligned} \quad (4.27)$$

L'ouvert Ω ainsi défini correspond à une plaque “mise à l'échelle” sur laquelle on va travailler afin de simplifier l'analyse.

Les hypothèses qui vont encadrer l'étude et qui permettront d'obtenir des résultats mécaniquement interprétables sont de plusieurs natures. Elles concernent :

- 1 la loi de comportement de la plaque mise à l'échelle :

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_3) : M^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) &= M(x), \\ \text{avec } \begin{cases} M \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H})), \\ \exists \kappa > 0 : M(x) h \cdot h \geq \kappa |h|_{\mathcal{H}}^2, \forall h \in \mathcal{H}, p.p. x \in \Omega, \end{cases} \end{aligned}$$

- 2 le chargement électromécanique :

$$(\mathbf{H}_4^p) : \begin{cases} f_\alpha^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon f_\alpha(x), & f_3^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^2 f_3(x), & \forall x \in \Omega, \\ F^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^{2-p} F(x), & \forall x \in \Omega, \\ g_\alpha^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^2 g_\alpha(x), & g_3^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^3 g_3(x), & \forall x \in \Gamma_{mN} \cap \Gamma_\pm, \\ g_\alpha^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon g_\alpha(x), & g_3^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^2 g_3(x), & \forall x \in \Gamma_{mN} \cap \Gamma_{lat} \\ d^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^{3-p} d(x), & \forall x \in \Gamma_{eN} \cap \Gamma_\pm, \\ d^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^{2-p} d(x), & \forall x \in \Gamma_{eN} \cap \Gamma_{lat}, \\ \varphi_0^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) = \varepsilon^p \varphi_0(x), & \forall x \in \Gamma_{eD}, \end{cases}$$

où $(f, F, g, d) \in L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_{mN})^3 \times L^2(\Gamma_{eN})$.

Enfin, il convient d'associer à l'état électromécanique $s^\varepsilon = (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ défini sur Ω^ε un état électromécanique mis à l'échelle (sans signification physique en quelque sorte) noté $s_p(\varepsilon) := (u_p(\varepsilon), \varphi_p(\varepsilon))$ défini sur Ω par :

$$\begin{cases} u_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon (u_p(\varepsilon))_\alpha(x), \\ u_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = (u_p(\varepsilon))_3(x), \\ \varphi^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^p \varphi_p(\varepsilon)(x), \end{cases} \quad (4.28)$$

et ceci, pour tout $x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x$ dans Ω^ε .

Les hypothèses (\mathbf{H}_3) , (\mathbf{H}_4^p) ainsi que le changement d'inconnues (4.28) sont classiques. Ils sont en réalité justifiés *a posteriori* par les résultats de convergence qu'ils permettent d'obtenir.

En introduisant l'espace des états électromécaniques mis à l'échelle

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &:= \{t = (v, \psi) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_{mD}} \equiv 0, \psi|_{\Gamma_{eD}} \equiv 0\} \\ &= H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega) \end{aligned} \quad (4.29)$$

on peut alors poser sur l'ouvert fixe Ω un nouveau problème variationnel mathématiquement équivalent à $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$.

4.4.1 Formulation variationnelle

Pour tout $(v, \psi) \in \mathbf{V}$ on définit le tenseur mis à l'échelle des déformations $e(\varepsilon, v)$ et le gradient mis à l'échelle du potentiel électrique $\nabla_{(p)}(\varepsilon, \psi)$ par :

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}(\varepsilon, v) := e_{\alpha\beta}(v), \\ e_{\alpha 3}(\varepsilon, v) := \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(v), \\ e_{33}(\varepsilon, v) := \frac{1}{\varepsilon^2} e_{33}(v), \\ \nabla_{(p)}(\varepsilon, \psi)_\alpha := \varepsilon^{p-1} \partial_\alpha \psi, \\ \nabla_{(p)}(\varepsilon, \psi)_3 := \varepsilon^{p-2} \partial_3 \psi, \end{cases} \quad (4.30)$$

et, afin d'alléger l'écriture, on pose

$$k_p(\varepsilon, r) = k_p(\varepsilon, (v, \psi)) := (e(\varepsilon, v), \nabla_{(p)}(\varepsilon, \psi)). \quad (4.31)$$

De façon similaire à ce qui a été fait précédemment, on introduit alors la forme bilinéaire sur \mathbf{V}

$$m_p(\varepsilon)(s, r) := \int_{\Omega} M(x) k_p(\varepsilon, s) \cdot k_p(\varepsilon, r) dx, \quad (4.32)$$

qui possède des propriétés "de symétrie" analogues à (4.24) :

$$\boxed{\begin{cases} m_p(\varepsilon)[(u, \varphi), (v, \psi)] = m_p(\varepsilon)[(v, -\psi), (u, -\varphi)], \\ \forall u, v \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3, \forall \varphi, \psi \in H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega). \end{cases}} \quad (4.33)$$

Enfin, on considère la forme linéaire sur \mathbf{V}

$$L(r) := \int_{\Omega} (f \cdot v + F \psi) dx + \int_{\Gamma_{mN}} g \cdot v ds + \int_{\Gamma_{eN}} d \psi ds. \quad (4.34)$$

Il est alors clair que sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4^p)$, l'état électromécanique mis à l'échelle $s_p(\varepsilon) = (u_p(\varepsilon), \varphi_p(\varepsilon))$ est l'unique solution du problème mathématique $\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)_p$, équivalent au problème physique de départ :

$$\boxed{\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)_p \quad : \quad \begin{cases} \text{Trouver } s_p(\varepsilon) \in (0, \varphi_0) + \mathbf{V} \text{ tel que} \\ m_p(\varepsilon)(s_p(\varepsilon), r) = L(r), \forall r \in \mathbf{V}, \end{cases}}$$

dont on peut désormais étudier le comportement asymptotique.

4.4.2 Le comportement asymptotique

La démarche

De manière tout à fait similaire à ce qui est décrit par Ciarlet (1997), on va démontrer que certaines composantes de $k_p(\varepsilon, s_p(\varepsilon))$ et de $Mk_p(\varepsilon, s_p(\varepsilon))$ admettent des limites nulles lorsque ε tend vers 0. Dans le cas purement mécanique, le résultat classique est que les déplacements obtenus à la limite sont de type Kirchhoff-Love¹², ce qui correspond en fait à des déplacements v dont les composantes $e_{i3}(v)$ sont nulles.

En réalité, il est possible de généraliser ce processus aux couplages multi-physiques en observant que c'est la structure *algébrique* de l'espace \mathcal{H} qui joue ici un rôle fondamental (on rappelle que $\mathcal{H} = S^3 \times \mathbb{R}^3$ où S^3 désigne l'ensemble des matrices réelles 3×3 symétriques). Lors de l'opération de mise à l'échelle des états électromécaniques (*cf.* (4.30)), il apparaît dans le tenseur linéarisé des déformations ainsi que dans le gradient du potentiel électrique des puissances de ε dont le *signe* (*cf.* ci-après les symboles $+$, $-$ et 0) définit des sous-espaces *orthogonaux* notés \mathcal{H}_p^+ , \mathcal{H}_p^- et \mathcal{H}_p^0 dont \mathcal{H} est la *somme directe* :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1^- := \{h = (e, g) : e_{\alpha\beta} = 0, g_\alpha = 0\}, \\ \mathcal{H}_1^0 := \{h = (e, g) : e_{i3} = 0, g_3 = 0\}, \\ \mathcal{H}_1^+ := \{h = (e, g) : e_{ij} = 0, g_i = 0\}, \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_2^- := \{h = (e, g) : e_{\alpha\beta} = 0, g_i = 0\}, \\ \mathcal{H}_2^0 := \{h = (e, g) : e_{i3} = 0, g_\alpha = 0\}, \\ \mathcal{H}_2^+ := \{h = (e, g) : e_{ij} = 0, g_3 = 0\}. \end{cases} \quad (4.36)$$

Afin de visualiser de quoi il s'agit, il suffit de remarquer que les éléments de ces espaces sont de la forme

$$\overbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \times \end{pmatrix} \right]}^{\text{dans } \mathcal{H}_1^-}, \overbrace{\left[\begin{pmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ 0 \end{pmatrix} \right]}^{\text{dans } \mathcal{H}_1^0}, \overbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]}^{\text{dans } \mathcal{H}_1^+},$$

¹² Augustus Edward Hough Love, mathématicien anglais, 1863-1940. Il travailla à Cambridge.

$$\underbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]}_{\text{dans } \mathcal{H}_2^-}, \underbrace{\left[\begin{pmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \times \end{pmatrix} \right]}_{\text{dans } \mathcal{H}_2^0}, \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ 0 \end{pmatrix} \right]}_{\text{dans } \mathcal{H}_2^+},$$

où le symbole \times désigne une composante non nécessairement nulle.

Remarque 4.3: Pour simplifier les notations, on considérera dans la suite qu'un élément de \mathcal{H} peut être vu comme une matrice 3×4 . Ainsi, les composantes d'un élément $h \in \mathcal{H}$ seront données par

$$\left[\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_{14} \\ h_{24} \\ h_{34} \end{pmatrix} \right]. \quad (4.37)$$

Par “orthogonalité”, on entend classiquement que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{H}_p^- \times \mathcal{H}_p^0 \times \mathcal{H}_p^+ \quad , \quad x \cdot y = x \cdot z = y \cdot z = 0. \quad (4.38)$$

Quant à la somme directe, elle signifie :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \exists ! (h_p^-, h_p^0, h_p^+) \in \mathcal{H}_p^- \times \mathcal{H}_p^0 \times \mathcal{H}_p^+ : h = h_p^- + h_p^0 + h_p^+. \quad (4.39)$$

Il est clair que h_1^+ est toujours nul.

Il convient alors de réécrire la loi de comportement M sur la “nouvelle structure” de \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} M h &= M_p^{--} h_p^- & + & & M_p^{-0} h_p^0 & + & & M_p^{-+} h_p^+ \\ &M_p^{0-} h_p^- & + & & M_p^{00} h_p^0 & + & & M_p^{0+} h_p^+ \\ &M_p^{+-} h_p^- & + & & M_p^{+0} h_p^0 & + & & M_p^{++} h_p^+, \end{aligned} \quad (4.40)$$

où $M_p^{kl} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p^l, \mathcal{H}_p^k)$ (on utilise ici exceptionnellement les lettres k et l pour désigner les symboles $+$, $-$ ou 0). Il s'agit en fait d'un simple réarrangement des composantes de l'opérateur M dont on étudiera quelques propriétés au § 4.5.

L'hypothèse (**H**₃) sur les coefficients électromécaniques impliquent que M_p^{00} et M_p^{--} sont des opérateurs positifs sur \mathcal{H}_p^0 et \mathcal{H}_p^- . Par conséquent, l'opérateur

$$\widetilde{M}_p := M_p^{00} - M_p^{0-} (M_p^{--})^{-1} M_p^{-0} \quad (4.41)$$

est bien défini comme élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_p^0, \mathcal{H}_p^0)$. Il faut bien noter que ni M_p^{00} , ni \widetilde{M}_p ne sont nécessairement symétriques, mais que

$$\kappa |h_p^0|_{\mathcal{H}}^2 \leq \widetilde{M}_p(x) h_p^0 \cdot h_p^0, \quad \forall h_p^0 \in \mathcal{H}_p^0, \quad p, p, x \in \Omega. \quad (4.42)$$

En effet, M est coercive (*cf.* **(H₃)**) et

$$(M h)_p^- = h_p^+ = 0 \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{M}_p h_p^0 = (M h)_p^0, \\ \widetilde{M}_p h_p^0 \cdot h_p^0 = M h \cdot h. \end{cases} \quad (4.43)$$

L'un des buts de la démarche asymptotique est de montrer que l'on a bien $(M h)_p^- = h_p^+ = 0$ avec h la limite \bar{k}_p de $k_p(\varepsilon, s_p(\varepsilon))$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On exhibera ainsi \widetilde{M}_p comme opérateur définissant la loi de comportement limite.

Rappel : les déplacements de Kirchhoff-Love

On désigne par \mathbf{V}_{KL} l'ensemble des déplacements de Kirchhoff-Love adapté au problème que l'on se pose. Il est défini par

$$\mathbf{V}_{KL} := \{v \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 : e_{i3}(v) = 0\}. \quad (4.44)$$

Rappelons que pour tout élément $v \in \mathbf{V}_{KL}$ il existe un triplet

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega) \quad (4.45)$$

unique et tel que :

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, \\ v_3 &= \eta_3. \end{aligned} \quad (4.46)$$

La plupart du temps, dans le but de différencier la solution en déplacement u des champs tests v , on utilise la lettre grecque ζ : on note alors $u_\alpha = \zeta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \zeta_3$ et $u_3 = \zeta_3$, avec bien sûr $(\zeta_\alpha, \zeta_3) \in H^1(\omega) \times H^2(\omega)$.

Ce type de déplacement fait clairement apparaître une distinction entre les "composantes membranaires" η_α et la "composante de flexion" η_3 . Afin d'alléger les notations et de faire ressortir ce fait, on décide de poser

$$\hat{x} := (x_1, x_2). \quad (4.47)$$

Dans la suite, le symbole $\hat{\cdot}$ sera toujours reliés aux composantes membranaires. Pour ce qui est de la flexion, *i.e.* de ce qui se passe corrélativement à x_3 (ou à l'indice 3), on adoptera parfois le symbole $\check{\cdot}$ pour alléger les notations. Ainsi, on associera toujours un élément v de \mathbf{V}_{KL} au triplet $(\hat{\eta}, \eta_3)$. L'élément solution u de \mathbf{V}_{KL} sera quant à lui associé au triplet $(\hat{\zeta}, \zeta_3)$ pour établir une distinction.

En résumé, pour un déplacement v de \mathbf{V}_{KL} associé à $(\hat{\eta}, \eta_3)$, le tenseur des déformations linéarisées prend la forme particulière

$$\begin{aligned} e(v) &= \begin{pmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} e_{11}(\hat{\eta}) - x_3 \partial_{11}^2 \eta_3 & e_{12}(\hat{\eta}) - x_3 \partial_{12}^2 \eta_3 & 0 \\ e_{12}(\hat{\eta}) - x_3 \partial_{12}^2 \eta_3 & e_{22}(\hat{\eta}) - x_3 \partial_{22}^2 \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} e_{11}(\hat{\eta}) & e_{12}(\hat{\eta}) & 0 \\ e_{12}(\hat{\eta}) & e_{22}(\hat{\eta}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} \partial_{11}^2 \eta_3 & \partial_{12}^2 \eta_3 & 0 \\ \partial_{12}^2 \eta_3 & \partial_{22}^2 \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &=: \hat{e}(\hat{\eta}) - x_3 (\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3), \end{aligned} \quad (4.48)$$

où $\hat{e}_{\alpha\beta}(\hat{\eta})$ est la fonction de $L^2(\omega)$ définie par

$$\hat{e}_{\alpha\beta}(\hat{\eta}) := \frac{1}{2}(\partial_\alpha \eta_\beta + \partial_\beta \eta_\alpha)(\hat{x}), \quad (4.49)$$

et avec $\partial_{\alpha\beta}^2 := \partial_\alpha \partial_\beta$.

Bien sûr, l'espace des déplacements de Kirchhoff-Love sera l'espace dans lequel vivront les déplacements limites.

Cadre fonctionnel

On définit maintenant les espaces électriques limites par

$$\Phi_1 := \{\psi \in H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega) : \partial_3 \psi = 0\}, \quad (4.50)$$

$$\Phi_2 := \{\psi \in L^2(\Omega) : \partial_3 \psi \in L^2(\Omega), \psi|_{\Gamma_{eD} \cap \Gamma_{\pm}} \equiv 0\}. \quad (4.51)$$

La définition de Φ_2 est moins naturelle que celle de Φ_1 et pose des problèmes techniques - relatifs à l'application trace en particulier - qui seront éclaircis *infra*.

On peut dès lors définir les espaces électromécaniques limites en posant

$$\mathbf{S}_p := \mathbf{V}_{KL} \times \Phi_p. \quad (4.52)$$

Ces espaces électriques limites sont liés à deux types d'hypothèses dont on verra l'utilité dans la démonstration du Théorème 4.4 :

$$(\mathbf{H}_5^p) \begin{cases} \text{si } p = 1 : \varphi_0 \text{ admet un prolongement à } \Omega \text{ indépendant de } x_3. \\ \text{si } p = 2 : \text{la fermeture } \bar{\delta} \text{ de la projection sur } \omega \text{ de } \Gamma_{eD} \text{ coïncide avec } \bar{\omega}, \\ \text{et, de plus, soit } d = 0 \text{ sur } \Gamma_{eN} \cap \Gamma_{lat}, \text{ soit } \Gamma_{eN} \cap \Gamma_{lat} = \emptyset. \end{cases}$$

Si on associe à tout $r = (v, \psi)$ de \mathbf{V} (*cf.* (4.29)) l'élément

$$k(r) := (e(v), \nabla \psi) \in L^2(\Omega, \mathcal{H}), \quad (4.53)$$

alors on remarque en particulier que

$$r \in \mathbf{S}_1 \iff k(r) \in \mathcal{H}_1^0. \quad (4.54)$$

D'autre part, l'espace

$$H_{\partial_3}^1(\Omega) := \{\psi \in L^2(\Omega) : \partial_3 \psi \in L^2(\Omega)\} \quad (4.55)$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par :

$$(\varphi, \psi) \mapsto \int_{\Omega} \varphi \psi \, dx + \int_{\Omega} \partial_3 \varphi \, \partial_3 \psi \, dx. \quad (4.56)$$

L'application trace de $H_{\partial_3}^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_{\pm})$ étant linéaire et continue (cf. la thèse de Sène (2000) par exemple), la définition de Φ_2 introduite en (4.51) a bien un sens. L'hypothèse (\mathbf{H}_2^0) autorise quant à elle à munir Φ_2 du produit scalaire

$$(\varphi, \psi) \mapsto \int_{\Omega} \partial_3 \varphi \partial_3 \psi \, dx \quad (4.57)$$

équivalent à (4.56).

On pose enfin

$$\mathbf{X}_p := \begin{cases} H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega), & \text{si } p = 1, \\ H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times H_{\partial_3}^1(\Omega), & \text{si } p = 2. \end{cases} \quad (4.58)$$

Les inégalités de Poincaré et de Korn permettent de munir \mathbf{S}_p et \mathbf{X}_p des normes hilbertiennes

$$|(v, \psi)|_{\mathbf{S}_1}^2 := |e(v)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla \psi|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.59)$$

$$|(v, \psi)|_{\mathbf{S}_2}^2 := |e(v)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\partial_3 \psi|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.60)$$

$$|(v, \psi)|_{\mathbf{X}_1}^2 := |e(v)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\psi|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla \psi|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.61)$$

$$|(v, \psi)|_{\mathbf{X}_2}^2 := |e(v)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\psi|_{L^2(\Omega)}^2 + |\partial_3 \psi|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.62)$$

Les modèles limites

On rappelle que l'objectif est de déterminer le comportement limite de la solution $s_p(\varepsilon) = (u_p(\varepsilon), \varphi_p(\varepsilon))$ du problème $\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)_p$. Le coeur de la démarche consiste en fait à montrer la bornitude des $s_p(\varepsilon)$ dans des espaces de Hilbert *ad hoc* (les \mathbf{X}_p définis en (4.58)). Cette bornitude impliquera l'existence d'une sous-suite faiblement convergente¹³ qui convergera en fait fortement vers la solution d'un problème dit limite (noté $\mathcal{P}(0, \Omega)_p$, cf. (4.4)). C'est justement cet impératif de bornitude qui suggère deux manières de “mettre φ à l'échelle”. On verra dans la démonstration du Théorème 4.4 les arguments qui génèrent ces deux cas.

On a le résultat de convergence :

¹³ Dans un espace de Banach réflexif, toute suite bornée admet une sous-suite qui converge faiblement ; les espaces de Hilbert sont une classe de Banach réflexifs (cf. Brézis (1983) par exemple).

Théorème 4.4: Sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_5^p)$, et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la famille $(s_p(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ des uniques solutions de $\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)_p$ converge fortement dans \mathbf{X}_p vers l'unique solution $s_p(0)$ de :

$$\mathcal{P}(0, \Omega)_p \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } s \in (0, \varphi_0) + \mathbf{S}_p \text{ tel que} \\ \tilde{m}_p(s, r) := \int_{\Omega} \widetilde{M}_p k(s)_p^0 \cdot k(r)_p^0 dx = L(r) \text{ pour tout } r \in \mathbf{S}_p. \end{array} \right.$$

Démonstration:

On va scinder la démonstration en quatre étapes. On suppose par commodité que $\varepsilon \leq 1$.

Première étape : bornitude des $s_p(\varepsilon)$ dans \mathbf{X}_p .

D'après $\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)_p$, il est clair que $\tilde{s}_p(\varepsilon) := s_p(\varepsilon) - (0, \varphi_0)$ vérifie, pour tout $r \in \mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} m_p(\varepsilon)(\tilde{s}_p(\varepsilon), r) &= L(r) - m_p(\varepsilon)((0, \varphi_0), r) = \tilde{L}(r), \\ \tilde{L}(r) &:= \int_{\Omega} (f \cdot v + F \psi) dx + \int_{\Gamma_{mN}} g \cdot v ds + \int_{\Gamma_{eN}} d \psi ds \\ &\quad - m_p(\varepsilon)((0, \varphi_0), r). \end{aligned} \quad (4.63)$$

L' hypothèse sur les coefficients électromécaniques (\mathbf{H}_3) impliquent donc que $\tilde{s}_p(\varepsilon)$ vérifie :

$$\kappa |\tilde{s}_p(\varepsilon)|_{\mathbf{X}_p}^2 \leq \kappa |k(\varepsilon, \tilde{s}_p(\varepsilon))|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}^2 \leq m_p(\varepsilon)(\tilde{s}_p(\varepsilon), \tilde{s}_p(\varepsilon)) = \tilde{L}(\tilde{s}_p(\varepsilon)). \quad (4.64)$$

Pour établir la bornitude des $\tilde{s}_p(\varepsilon)$ dans \mathbf{X}_p , il ne reste plus qu'à montrer qu'il existe une constante c_p indépendante de ε telle que

$$\tilde{L}(\tilde{s}_p(\varepsilon)) \leq c_p |k(\varepsilon, \tilde{s}_p(\varepsilon))|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}. \quad (4.65)$$

Or, des quatre termes de \tilde{L} , seuls le troisième (dans le cas $p = 2$) et le quatrième (dans le cas $p = 1$) posent problème, problème résolu par les hypothèses (\mathbf{H}_5^p) . En effet, (\mathbf{H}_5^1) permet, en annulant $\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \varphi_0$, de majorer $m_1(\varepsilon)((0, \varphi_0), \tilde{s}_1(\varepsilon))$ indépendamment de ε par $c_1 |k(\varepsilon, \tilde{s}_1(\varepsilon))|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}$; la seule inégalité de Cauchy-Schwarz¹⁴ permet de conclure dans le cas $p = 2$. L'hypothèse (\mathbf{H}_5^2) supprime quant à elle les problèmes liés à la majoration de l'intégrale $\int_{\Gamma_{eN}} d \psi ds$.

¹⁴ Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand, 1843-1921. Il travailla à Berlin.

Par conséquent, φ_0 étant fixé, on a bien que la famille $(s_p(\varepsilon))_{0 < \varepsilon \leq 1}$ est bornée dans l'espace de Hilbert \mathbf{X}_p . Ainsi, il existe une sous-suite, encore indexée par ε , telle que :

$$s_p(\varepsilon) \rightharpoonup s_p(0) \text{ dans } \mathbf{X}_p, \quad (4.66)$$

$$k(\varepsilon, s_p(\varepsilon)) \rightharpoonup \bar{k}_p \text{ dans } L^2(\Omega; \mathcal{H}), \quad (4.67)$$

$$k(s_p(\varepsilon))_p^- \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega; \mathcal{H}), \quad (4.68)$$

$$k(s_p(0))_p^0 = (\bar{k}_p)_p^0, \quad (4.69)$$

où les symboles \rightharpoonup et \rightarrow désignent respectivement les convergences faible et forte.

Deuxième étape : afin d'identifier l'opérateur qui gouverne la loi de comportement limite, on établit que

$$(M \bar{k}_p)_p^- = (\bar{k}_p)_p^+ = 0. \quad (4.70)$$

Tout d'abord, pour obtenir $(M \bar{k}_p)_p^- = 0$, on généralise la méthode développée par Ciarlet (1997) pp. 37, 38 dans le cas de l'élasticité isotrope et linéaire. Les conventions de notations des composantes des éléments de \mathcal{H} ayant été précisées par la relation (4.37) de la Remarque 4.3, il suffit dans un premier temps de choisir, dans l'équation associée à $\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)_p$:

1. r arbitraire tel que $v_3 = \psi = 0$ et de multiplier par ε , on obtient alors

$$\int_{\Omega} (M \bar{k}_p)_{\alpha 3} \partial_3 v_{\alpha} = 0, \forall v = (v_1, v_2, 0) \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3, \quad (4.71)$$

2. r tel que $v_{\alpha} = 0$ et $\psi = 0$ et de multiplier par ε^2 , fournissant

$$\int_{\Omega} (M \bar{k}_p)_{33} \partial_3 v_3 = 0, \forall v = (0, 0, v_3) \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3, \quad (4.72)$$

3. r arbitraire tel que $v = 0$ et de multiplier par ε (uniquement si $p = 1$), ce qui conduit à

$$\int_{\Omega} (M \bar{k}_1)_{34} \partial_3 \psi_3 = 0, \forall \psi \in H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega)^3. \quad (4.73)$$

On conclut grâce au lemme établi par Ciarlet (1997) :

Lemme 4.5: Si $w \in L^2(\Omega)$ vérifie $\int_{\Omega} w \partial_3 v \, dx = 0$, pour tout élément v de $C^\infty(\bar{\Omega})$ tel que $v = 0$ sur $\gamma \times [-1, 1]$, alors $w = 0$.

La relation $(\bar{k}_p)_p^+ = 0$ est quant à elle évidente dans le cas $p = 1$ et se déduit d'un argument classique évoqué par Sène (2000) pp. 71, 72 dans le cas $p = 2$:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \partial_\alpha \varphi(\varepsilon) g \, dx = -\varepsilon \int_{\Omega} \varphi(\varepsilon) \partial_\alpha g \, dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.74)$$

En conclusion, d'après (4.43), on obtient

$$\begin{cases} M \bar{k}_p \cdot \bar{k}_p = \widetilde{M}(\bar{k}_p)_p^0 \cdot (\bar{k}_p)_p^0, \\ (M \bar{k}_p)_p^0 = \widetilde{M}_p (\bar{k}_p)_p^0. \end{cases} \quad (4.75)$$

Troisième étape : le problème limite.

Pour tout $r \in \mathbf{S}_p \cap C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^4)$, $k_p(\varepsilon, r)$ converge fortement vers $k(r)_p^0$ dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$. On en déduit, en passant à la limite dans $\mathcal{P}(\varepsilon, \Omega)_p$ à l'aide successivement de (4.67), (4.75) et (4.69), que

$$\begin{aligned} L(r) &= \int_{\Omega} M \bar{k}_p \cdot k(r)_p^0 \, dx \\ &= \int_{\Omega} (M \bar{k}_p)_p^0 \cdot k(r)_p^0 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \widetilde{M}_p (\bar{k}_p)_p^0 \cdot k(r)_p^0 \, dx, \\ &= \int_{\Omega} \widetilde{M}_p k(s_p(0))_p^0 \cdot k(r)_p^0 \, dx. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Par densité de $\mathbf{S}_p \cap C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^4)$ dans \mathbf{S}_p , on déduit que $s_p(0)$ est bien solution de $\mathcal{P}(0, \Omega)_p$. La forme bilinéaire \tilde{m}_p étant \mathbf{S}_p -elliptique grâce à la relation (4.42), le problème $\mathcal{P}(0, \Omega)_p$ admet une solution unique. Par un argument classique, ceci entraîne que toute la suite $s(\varepsilon)$ converge faiblement vers $s(0)$.

Quatrième étape : convergence forte.

Vu (4.66)-(4.69), la convergence forte de $s_p(\varepsilon)$ vers $s_p(0)$ dans \mathbf{X}_p équivaut à celle de $k(s_p(\varepsilon))_p^0$ vers $k(s_p(0))_p^0$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{H})$. Or

$$\begin{aligned}
\kappa |k(s_p(\varepsilon))_p^0 - k(s_p(0))_p^0|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}^2 &\leq \kappa |k(\varepsilon, s_p(\varepsilon)) - \bar{k}_p|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}^2 \\
&\leq \int_{\Omega} M(k(\varepsilon, s_p(\varepsilon)) - \bar{k}_p) \cdot (k(\varepsilon, s_p(\varepsilon)) - \bar{k}_p) dx \\
&= \int_{\Omega} M(k(\varepsilon, s_p(\varepsilon))) \cdot (k(\varepsilon, s_p(\varepsilon))) dx \\
&\quad - \int_{\Omega} M \bar{k}_p \cdot (k(\varepsilon, s_p(\varepsilon))) dx - \int_{\Omega} M(k(\varepsilon, s_p(\varepsilon)) - \bar{k}_p) \cdot \bar{k}_p dx \\
&= L(\tilde{s}_p(\varepsilon)) + \int_{\Omega} M(k(\varepsilon, s_p(\varepsilon))) \cdot (k(\varepsilon, (0, \varphi_0))) dx \\
&\quad - \int_{\Omega} M \bar{k}_p \cdot (k(\varepsilon, s_p(\varepsilon))) dx - \int_{\Omega} M(k(\varepsilon, s_p(\varepsilon)) - \bar{k}_p) \cdot \bar{k}_p dx. \quad (4.77)
\end{aligned}$$

A l'aide successivement de (4.66), (4.67) et (4.75), on déduit que si $\varepsilon \rightarrow 0$, le membre de droite tend vers

$$\begin{aligned}
l &= L(\tilde{s}_p(0)) + \int_{\Omega} M \bar{k}_p \cdot k(0, \varphi_0) dx - \int_{\Omega} M \bar{k}_p \cdot \bar{k}_p dx \\
&= L(\tilde{s}_p(0)) + \int_{\Omega} \widetilde{M}_p \bar{k}_p^0 \cdot k(0, \varphi_0)_p^0 dx - \int_{\Omega} \widetilde{M}_p \bar{k}_p^0 \cdot \bar{k}_p^0 dx, \quad (4.78)
\end{aligned}$$

de sorte que $l = 0$, ce qui achève la démonstration de la convergence forte. \square

Remarque 4.6: Jusqu'à présent on a considéré un second membre fixe noté $L(r)$. En réalité, rien n'empêche de considérer un second membre variable $L_\varepsilon(r)$, c'est-à-dire un chargement extérieur indexé par ε . La convergence simple de L_ε vers L

$$L_\varepsilon(r) \rightarrow L(r), \quad \forall r \in \mathbf{V} \quad (4.79)$$

i.e. la convergence faible dans le dual de \mathbf{V} suffit alors dans les trois premières étapes de la démonstration du Théorème 4.4.

Cette convergence faible est impliquée par des hypothèses de convergence sur le chargement extérieur mis à l'échelle :

$$\begin{aligned}
f(\varepsilon) &\rightharpoonup f \text{ dans } L^2(\Omega)^3, \\
g(\varepsilon) &\rightharpoonup g \text{ dans } L^2(\Gamma_{mN})^3, \\
F(\varepsilon) &\rightharpoonup F \text{ dans } L^2(\Omega), \\
d(\varepsilon) &\rightharpoonup d \text{ dans } L^2(\Gamma_{\varepsilon N}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{si } p = 1 \quad & \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla_{(1)}(\varepsilon, \varphi_0(\varepsilon))|^2 dx \text{ est borné,} \\ \varphi_0(\varepsilon) \rightharpoonup \varphi_0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ (avec } \partial_3 \varphi_0 = 0!), \end{cases} \\ \text{si } p = 2 \quad & \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla_{(2)}(\varepsilon, \varphi_0(\varepsilon))|^2 dx \text{ est borné,} \\ \varphi_0(\varepsilon) \rightharpoonup \varphi_0 \text{ dans } H_{\partial_3}^1(\Omega). \end{cases} \end{aligned}$$

À l'aide d'une méthode différente utilisant des multiplicateurs de Lagrange¹⁵ pour prendre en compte la condition de Dirichlet sur le potentiel électrique, Lenczner (1993) a traité le cas $p = 1$.

Dans la quatrième étape - celle de la preuve de la convergence forte - ces hypothèses sont insuffisantes et il convient alors d'imposer la convergence uniforme (ou forte dans le dual de \mathbf{V}) du second membre. Ainsi, pour une suite quelconque r_ε de \mathbf{V} qui converge faiblement vers r dans \mathbf{V} on obtient

$$L_\varepsilon(r_\varepsilon) \rightarrow L(r). \quad (4.80)$$

Ceci est obtenu avec les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &\rightharpoonup f \text{ dans } L^2(\Omega)^3, \\ g(\varepsilon) &\rightharpoonup g \text{ dans } L^2(\Gamma_{mN})^3, \\ F(\varepsilon) &\rightharpoonup F \text{ dans } L^2(\Omega) - \text{si } p = 1 -, \\ F(\varepsilon) &\rightarrow F \text{ dans } L^2(\Omega) - \text{si } p = 2 -, \\ d(\varepsilon) &\rightharpoonup d \text{ dans } L^2(\Gamma_{eN}) - \text{si } p = 1 -, \\ d(\varepsilon) &\rightarrow d \text{ dans } L^2(\Gamma_{eN}) - \text{si } p = 2. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{si } p = 1 \quad & \begin{cases} \varphi_0(\varepsilon) \rightarrow \varphi_0 \text{ dans } H^1(\Omega), \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \varphi_0(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega), \end{cases} \\ \text{si } p = 2 \quad & \begin{cases} \varphi_0(\varepsilon) \rightarrow \varphi_0 \text{ dans } H_{\partial_3}^1(\Omega), \\ \widehat{\nabla}_{(2)} \varphi_0(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega). \end{cases} \end{aligned}$$

Les convergences faibles suffisent là où les injections compactes de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma_{mN})$ peuvent s'appliquer.

¹⁵ Joseph-Louis Lagrange, mathématicien d'origine italienne, 1736-1813. Il travailla à Paris.

Remarque 4.7: Par des développements asymptotiques formels, le cas du capteur pur a été traité par Attou & Maugin (1987) dans le cas d'une plaque constituée d'un matériau piézoélectrique de classe $6mm$ et avec $\Gamma_{eD} = \emptyset$. L'analyse mathématique présentée ici s'adapte sans difficulté à ce cas si l'on suppose que les densités de charges électriques ont des moyennes nulles sur leurs supports et si l'on quotiente par les constantes les espaces fonctionnels précédents associés aux potentiels électriques.

4.4.3 Équations limites bidimensionnelles. Découplage

Pour simplifier l'exposition des résultats, on introduit les sous-parties γ_{mN} et γ_{eN} de $\partial\omega$ en écrivant

$$\Gamma_{mN} \cap \Gamma_{lat} =: \gamma_{mN} \times]-1, +1[, \quad (4.81)$$

$$\Gamma_{eN} \cap \Gamma_{lat} =: \gamma_{eN} \times]-1, +1[. \quad (4.82)$$

De plus, on désignera par le symbole \bar{f} l'opération moyenne sur l'épaisseur de la plaque mise à l'échelle :

$$\bar{f} f = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad (4.83)$$

dont le principal intérêt est de transformer une fonction des trois coordonnées de l'espace (\hat{x}, x_3) en une fonction de \hat{x} , ce qui permettra de reformuler le problème limite sur ω et d'en faire par la même occasion - symboliquement - un “problème plan”.

En s'inspirant du livre de Ciarlet (1997), on considère les fonctions g_i^\pm , p_i , q_α , r_i et s_α de $L^2(\omega)$ définies par

$$g_i^\pm(\hat{x}) := \begin{cases} g_i(\hat{x}, \pm 1) & \text{si } x \in \Gamma_{mN} \cap \Gamma_\pm, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.84)$$

$$p_i := 2 \bar{f} f_i + g_i^+ + g_i^-, \quad (4.85)$$

$$q_\alpha := 2 \bar{f} x_3 f_\alpha + g_\alpha^+ - g_\alpha^-, \quad (4.86)$$

$$r_i := 2 \bar{f} g_i, \quad (4.87)$$

$$s_\alpha := 2 \bar{f} x_3 g_\alpha. \quad (4.88)$$

On définit parallèlement et toujours dans $L^2(\omega)$

$$d^\pm(\hat{x}) := \begin{cases} d(\hat{x}, \pm 1) & \text{si } x \in \Gamma_{eN} \cap \Gamma_\pm, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.89)$$

$$p' := 2fF + d^+ + d^-, \quad (4.90)$$

$$r' := 2fd. \quad (4.91)$$

Cas $p = 1$

Soit $(\hat{\eta}, \eta_3)$ le triplet associé à un élément v de \mathbf{V}_{KL} (*cf. supra*). Il en découle de façon naturelle deux sous-espaces

$$\hat{\mathbf{V}}_{KL} := \{v \in \mathbf{V}_{KL} : \eta_3 = 0\}, \quad (4.92)$$

$$\check{\mathbf{V}}_{KL} := \{v \in \mathbf{V}_{KL} : \eta_\alpha = 0\}. \quad (4.93)$$

Ainsi, l'espace limite \mathbf{S}_1 est somme directe des deux sous-espaces

$$\hat{\mathbf{S}}_1 := \hat{\mathbf{V}}_{KL} \times \Phi_1, \quad (4.94)$$

$$\check{\mathbf{S}}_1 := \check{\mathbf{V}}_{KL} \times \{0\}. \quad (4.95)$$

Pour *simplifier*, un élément $r = (v, 0) \in \check{\mathbf{S}}_1$ sera noté $r = \eta_3$.

Enfin, on définit \hat{k}'_1 et \check{k}'_1 en observant que pour tout $r = (v, \psi) \in \mathbf{S}_1$, on

a

$$\begin{aligned} k(r)_1^0 &= \left[\begin{pmatrix} e_{11}(\hat{\eta}) - x_3 \partial_{11}^2 \eta_3 & e_{12}(\hat{\eta}) - x_3 \partial_{12}^2 \eta_3 & 0 \\ e_{12}(\hat{\eta}) - x_3 \partial_{12}^2 \eta_3 & e_{22}(\hat{\eta}) - x_3 \partial_{22}^2 \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_1 \psi \\ \partial_2 \psi \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} e_{11}(\hat{\eta}) & e_{12}(\hat{\eta}) & 0 \\ e_{12}(\hat{\eta}) & e_{22}(\hat{\eta}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_1 \psi \\ \partial_2 \psi \\ 0 \end{pmatrix} \right] - x_3 \left[\begin{pmatrix} \partial_{11}^2 \eta_3 & \partial_{12}^2 \eta_3 & 0 \\ \partial_{12}^2 \eta_3 & \partial_{22}^2 \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &=: [\hat{e}(\hat{\eta})(\hat{x}), \hat{\nabla} \psi(\hat{x})] - x_3 [\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3(\hat{x}), 0] \\ &=: \hat{k}'_1(\hat{x}) - x_3 \check{k}'_1(\hat{x}) \\ &= \hat{k}'_1 - x_3 \check{k}'_1. \quad (4.96) \end{aligned}$$

De même qu'avec les déplacements de Kirchhoff-Love pour lesquels il est commode de distinguer la solution u des champs tests v à l'aide des lettres grecques η et ζ , on utilisera les notations \hat{k}_1 et \check{k}_1 (sans le prime) relativement à la solution $s = (u, \varphi)$.

L'aspect fondamental - et implicite - de ces notations tient dans le fait que \widehat{k}'_1 ne dépend que de $(\widehat{\eta}, \psi) \in \widehat{\mathbf{S}}_1$ tandis que \check{k}'_1 ne dépend que de $\eta_3 \in \check{\mathbf{S}}_1$.
En posant

$$\widetilde{\mathcal{M}}_1 = \widetilde{\mathcal{M}}_1(\widehat{x}) := 2 f \widetilde{M}_1, \quad (4.97)$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_1^{x_3} = \widetilde{\mathcal{M}}_1^{x_3}(\widehat{x}) := 2 f x_3 \widetilde{M}_1, \quad (4.98)$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_1^{x_3^2} = \widetilde{\mathcal{M}}_1^{x_3^2}(\widehat{x}) := 2 f x_3^2 \widetilde{M}_1, \quad (4.99)$$

il devient clair que le problème limite $\mathcal{P}(0, \Omega)_1$ prend la forme

$$\mathcal{P}(0, \Omega)_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \varphi) \in (0, \varphi_0) + \mathbf{S}_1 \text{ tel que} \\ \int_{\omega} [\widetilde{\mathcal{M}}_1 \widehat{k}_1 \cdot \widehat{k}'_1 - \widetilde{\mathcal{M}}_1^{x_3}(\widehat{k}_1 \cdot \check{k}'_1 + \check{k}_1 \cdot \widehat{k}'_1) + \widetilde{\mathcal{M}}_1^{x_3^2} \check{k}_1 \cdot \check{k}'_1] d\widehat{x} \\ = \int_{\omega} [p_i \eta_i + p' \psi] d\widehat{x} - \int_{\omega} q_{\alpha} \partial_{\alpha} \eta_3 d\widehat{x} \\ + \int_{\gamma_{mN}} [r_i \eta_i - s_{\alpha} \eta_{\alpha}] d\widehat{x} - \int_{\gamma_{eN}} r' \psi d\widehat{x}, \\ \forall r = (v, \psi) \in \mathbf{S}_1. \end{array} \right.$$

Il est à noter que $\mathcal{P}(0, \Omega)_1$ est en fait un problème bidimensionnel dans le sens où celui-ci est posé dans ω et où l'espace \mathbf{S}_1 est construit à partir de champs définis sur ω .

On remarque alors qu'avec l'hypothèse supplémentaire

$$\boxed{(\mathbf{H}_1^{\text{découpl}}) \quad : \quad f x_3 \widetilde{M}_1 = 0 = \widetilde{\mathcal{M}}_1^{x_3}}$$

(qui est réalisée si les coefficients électromécaniques sont des fonctions paires de x_3), il y a découplage entre les déplacements membranaires (les ζ_{α} définis *supra*) et de flexion (les ζ_3) au sens où ils sont solutions de deux équations variationnelles indépendantes :

$$\mathcal{P}(0, \Omega)_1 \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\widehat{\zeta}, \varphi) \in (0, \varphi_0) + \widehat{\mathbf{S}}_1 \text{ tel que} \\ \int_{\omega} \widetilde{\mathcal{M}}_1 \widehat{k}_1 \cdot \widehat{k}'_1 d\widehat{x} = \int_{\omega} [p_{\alpha} \eta_{\alpha} + p' \psi] d\widehat{x} + \int_{\gamma_{mN}} [r_{\alpha} \eta_{\alpha} - s_{\alpha} \eta_{\alpha}] d\widehat{x} \\ - \int_{\gamma_{eN}} r' \psi d\widehat{x}, \\ \forall r = (\widehat{\eta}, \psi) \in \widehat{\mathbf{S}}_1. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \zeta_3 \in \check{\mathbf{S}}_1 \text{ tel que} \\ \int_{\omega} \widetilde{\mathcal{M}}_1^{x_3^2} \check{k}_1 \cdot \check{k}'_1 d\widehat{x} = \int_{\omega} p_3 \eta_3 d\widehat{x} - \int_{\omega} q_{\alpha} \partial_{\alpha} \eta_3 d\widehat{x} + \int_{\gamma_{mN}} r_3 \eta_3 d\widehat{x}, \\ \forall \eta_3 \in \check{\mathbf{S}}_1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ce qui est décisif dans l'hypothèse $(\mathbf{H}_1^{\text{découpl}})$ c'est qu'elle implique que les espaces $\widehat{\mathbf{S}}_1$ et $\check{\mathbf{S}}_1$ sont \widetilde{m}_1 -polaires, c'est à dire qu'on a la relation

$$\widetilde{m}_1(\widehat{s}, \check{r}) = \widetilde{m}_1(\check{r}, \widehat{s}) = 0, \quad \forall (\widehat{s}, \check{r}) \in \widehat{\mathbf{S}}_1 \times \check{\mathbf{S}}_1, \quad (4.100)$$

ce qui permet finalement de scinder la formulation variationnelle (4.4) en deux problèmes indépendants.

Cas $p = 2$

On pose

$$\widetilde{\mathcal{M}}_2 = \widetilde{\mathcal{M}}_2(\widehat{x}) := 2 \, \widehat{f} \widetilde{M}_2. \quad (4.101)$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On note

$$\begin{aligned} f^+(\widehat{x}, x_3) &= \frac{1}{2}(f(\widehat{x}, x_3) + f(\widehat{x}, -x_3)), \\ f^-(\widehat{x}, x_3) &= \frac{1}{2}(f(\widehat{x}, x_3) - f(\widehat{x}, -x_3)), \end{aligned} \quad (4.102)$$

les parties paire et impaire en x_3 de f , respectivement. Bien sûr, on a $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. D'autre part, il est important de noter que les fonctions $\partial_3 f^+$ et $\partial_3 f^-$ sont respectivement impaires et paires en x_3 . On a par conséquent

$$\widehat{f} f^- dx = f x_3 f^+ dx = \widehat{f} x_3 \partial_3 f^- = \widehat{f} \partial_3 f^+ = 0. \quad (4.103)$$

On introduit

$$\widehat{\Phi}_2 := \{\text{parties impaires des éléments de } \Phi_2\}, \quad (4.104)$$

$$\check{\Phi}_2 := \{\text{parties paires des éléments de } \Phi_2\}. \quad (4.105)$$

L'espace limite \mathbf{S}_2 est donc somme directe de deux sous-espaces donnés par

$$\widehat{\mathbf{S}}_2 := \widehat{\mathbf{V}}_{KL} \times \widehat{\Phi}_2, \quad (4.106)$$

$$\check{\mathbf{S}}_2 := \check{\mathbf{V}}_{KL} \times \check{\Phi}_2. \quad (4.107)$$

Ainsi, pour reprendre des notations similaires à celles introduites en (4.96), on remarque que pour tout $r = (v, \psi) \in \mathbf{S}_2$

$$k(r)_2^0 = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} e_{11}(\widehat{\eta}) & e_{12}(\widehat{\eta}) & 0 \\ e_{12}(\widehat{\eta}) & e_{22}(\widehat{\eta}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_3 \psi^- \end{pmatrix} \right]}_{\widehat{k}_2', \text{ paire en } x_3} + \underbrace{\left[-x_3 \begin{pmatrix} \partial_{11}^2 \eta_3 & \partial_{12}^2 \eta_3 & 0 \\ \partial_{12}^2 \eta_3 & \partial_{22}^2 \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_3 \psi^+ \end{pmatrix} \right]}_{\check{k}_2', \text{ impaire en } x_3}. \quad (4.108)$$

On verra à l'aide des équations ponctuelles au § 4.6 que le problème limite est en fait “bidimensionnel”. De plus, avec l'hypothèse supplémentaire

$$\boxed{(\mathbf{H}_2^{\text{découpl}}) \quad : \quad \widetilde{M}_2(\widehat{x}, x_3) = \widetilde{M}_2(\widehat{x})}$$

(qui est réalisée si les coefficients électromécaniques sont indépendants de x_3), on constate que $\widehat{\mathbf{S}}_2$ et $\check{\mathbf{S}}_2$ sont \widetilde{m}_2 -polaires au sens de (4.100) où l'indice 1 est remplacé par 2. Cela introduit comme dans le cas $p = 1$ une sorte de découplage entre les déplacement membranaires et de flexion au sens où $(\widehat{\zeta}, \varphi^-)$ et (ζ_3, φ^+) sont solutions de deux équations variationnelles indépendantes :

$$\mathcal{P}(0, \Omega)_2 \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \widehat{s} = (\widehat{\zeta}, \varphi^-) \in (0, \varphi_0^-) + \widehat{\mathbf{S}}_2 \text{ tel que} \\ \widetilde{m}_2(\widehat{s}, \widehat{r}) = L(\widehat{r}), \forall \widehat{r} \in \widehat{\mathbf{S}}_2. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \check{s} = (\zeta_3, \varphi^+) \in (0, \varphi_0^+) + \check{\mathbf{S}}_2 \text{ tel que} \\ \widetilde{m}_2(\check{s}, \check{r}) = L(\check{r}), \forall \check{r} \in \check{\mathbf{S}}_2. \end{array} \right. \end{cases}$$

4.5 Quelques propriétés de la loi de comportement limite

L'opérateur M gouvernant la loi de comportement (4.21) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{IJ} & \underline{b}_{Kl} \\ -\underline{b}_{lK} & c_{mn} \end{pmatrix}, \quad (4.109)$$

où les indices l, m et n prennent leurs valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ et où les indices I, J et K vérifient la convention de contraction de Voigt¹⁶ et prennent leurs valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Rappelons que la convention de contraction de Voigt permet de passer d'un couple d'indices (i, j) à un unique indice I selon la relation

(i, j)	$(1, 1)$	$(2, 2)$	$(3, 3)$	$(2, 3)$	$(3, 1)$	$(1, 2)$
I	1	2	3	4	5	6

Ainsi, le tenseur hyperélastique a prend la forme d'une matrice 6×6 notée \underline{a} tandis que le tenseur piézoélectrique s'écrit sous la forme d'une matrice 6×3 notée \underline{b} . Pour des raisons algébriques qui tiennent essentiellement à la conservation du produit scalaire lors du changement de notation, il apparaît en outre des coefficients supplémentaires et on a les relations

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_{IJ} &= a_{ijkh} \quad \text{si } 1 \leq I, J \leq 3, \\
 \underline{a}_{IJ} &= \sqrt{2} a_{ijkh} \quad \text{si } 1 \leq I, J \leq 3 \text{ et } 4 \leq J, I \leq 6 \\
 \underline{a}_{IJ} &= 2 a_{ijkh} \quad \text{si } 4 \leq I, J \leq 6, \\
 \underline{b}_{Ik} &= b_{ijk} \quad \text{si } 1 \leq I \leq 3, \\
 \underline{b}_{Ik} &= \sqrt{2} b_{ijk} \quad \text{si } 4 \leq I \leq 6.
 \end{aligned}$$

La loi de comportement (4.21) prend alors la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2} \sigma_{23} \\ \sqrt{2} \sigma_{31} \\ \sqrt{2} \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \underline{M} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \sqrt{2} \epsilon_{23} \\ \sqrt{2} \epsilon_{31} \\ \sqrt{2} \epsilon_{12} \\ \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \\ \partial_3 \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.110)$$

On peut se référer à la thèse de François (1995) pour plus de détails.

¹⁶ Woldemar Voigt, physicien allemand, 1850-1919. Il travailla à Göttingen. C'est lui qui introduisit en 1898 le terme de "tenseur" pour désigner le système de six nombres caractérisant les tensions à l'intérieur d'un solide déformé. Ceci rappelle au passage le rôle éminent joué par l'élasticité dans la genèse du calcul tensoriel. C'est aussi W. Voigt qui le premier distingua les vecteurs axiaux et polaires (cf. § 3.1.3).

Ces remarques étant faites, on choisit de noter $\underline{M} = M$ pour ne pas allourdir les notations dans les manipulations qui vont suivre.

Dans le cas $p = 1$, M se recombine sur les sous-espaces orthogonaux \mathcal{H}_1^- et \mathcal{H}_1^0 en

$$M'_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{21} & b_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_{23} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{61} & b_{62} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & b_{63} \\ -b_{11} & -b_{21} & -b_{61} & c_{11} & c_{12} & -b_{31} & -b_{41} & -b_{51} & c_{13} \\ -b_{12} & -b_{22} & -b_{62} & c_{12} & c_{22} & -b_{32} & -b_{42} & -b_{52} & c_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{36} & b_{31} & b_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{46} & b_{41} & b_{42} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & b_{43} \\ a_{15} & a_{25} & a_{56} & b_{51} & b_{52} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & b_{53} \\ -b_{13} & -b_{23} & -b_{63} & c_{13} & c_{23} & -b_{33} & -b_{43} & -b_{53} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que l'on réécrit (4.110) sous la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2} \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2} \sigma_{23} \\ \sqrt{2} \sigma_{31} \\ D_3 \end{pmatrix} = M'_1 \cdot \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ \sqrt{2} e_{12} \\ \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \\ e_{33} \\ \sqrt{2} e_{23} \\ \sqrt{2} e_{31} \\ \partial_3 \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.111)$$

On peut donc écrire

$$M'_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 & G_1 \\ -B_1^t & C_1 & E_1 & H_1 \\ D_1^t & -E_1^t & F_1 & I_1 \\ -G_1^t & H_1^t & -I_1^t & J_1 \end{pmatrix},$$

où on a posé :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{61} & b_{62} \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}, \\
D_1 &= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{36} & a_{46} & a_{56} \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} -b_{31} & -b_{41} & -b_{51} \\ -b_{32} & -b_{42} & -b_{52} \end{pmatrix}, \\
F_1 &= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{63} \end{pmatrix}, H_1 = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix}, \\
I_1 &= \begin{pmatrix} b_{33} \\ b_{43} \\ b_{53} \end{pmatrix}, J_1 = \begin{pmatrix} c_{33} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On remarque en particulier que A_1, C_1, F_1 et J_1 sont symétriques. Ainsi, pour reprendre les notations introduites en (4.40), on a :

$$\begin{aligned}
M_1^{00} &= \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^t & C_1 \end{pmatrix}, M_1^{-0} = \begin{pmatrix} D_1 & G_1 \\ E_1 & H_1 \end{pmatrix}, \\
M_1^{0-} &= \begin{pmatrix} D_1^t & -E_1^t \\ -G_1^t & H_1 \end{pmatrix}, M_1^{--} = \begin{pmatrix} F_1 & I_1 \\ -I_1^t & J_1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

(on rappelle que \mathcal{H}_1^+ est réduit à l'élément nul et n'intervient donc pas dans la décomposition).

Il est important de noter que $(M_1^{--})^{-1}$ a la même structure que M_1^{--} au sens où :

$$(M_1^{--})^{-1} = \begin{pmatrix} K_1 & L_1 \\ -L_1^t & M_1 \end{pmatrix},$$

avec K_1 et M_1 symétriques.

En introduisant les composantes mécaniques (m) et électriques (e) de $k(r)_1^0$, on associe à \widetilde{M}_1 les sous-opérateurs $\widetilde{M}_{1mm}, \widetilde{M}_{1me}, \widetilde{M}_{1em}, \widetilde{M}_{1ee}$ en posant :

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_1 &= M_1^{00} - M_1^{0-} (M_1^{--})^{-1} M_1^{-0} \\
&= \begin{pmatrix} \widetilde{M}_{1mm} & \widetilde{M}_{1me} \\ \widetilde{M}_{1em} & \widetilde{M}_{1ee} \end{pmatrix}, \tag{4.112}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \widetilde{M}_{1mm} &= A_1 - D_1 K_1 D_1^t - D_1 L_1 G_1^t - G_1 L_1^t D_1^t - G_1 M_1 G_1^t, \\
 \widetilde{M}_{1me} &= B_1 + D_1 K_1 E_1^t - D_1 L_1 H_1^t - G_1 L_1^t E_1^t - G_1 M_1 H_1^t, \\
 \widetilde{M}_{1em} &= -B_1^t - E_1 K_1 D_1^t + E_1 L_1 G_1^t + H_1 L_1^t D_1^t + H_1 M_1 G_1^t, \\
 \widetilde{M}_{1ee} &= C_1 - E_1 K_1 E_1^t - E_1 L_1 H_1^t - H_1 L_1^t E_1^t - H_1 M_1 H_1^t.
 \end{aligned}$$

Ces calculs montrent que les opérateurs M et \widetilde{M}_1 ont la même structure, dans le sens où :

$$\widetilde{M}_{1mm} = \widetilde{M}_{1mm}^t, \quad (4.113)$$

$$\widetilde{M}_{1me} = -\widetilde{M}_{1em}^t, \quad (4.114)$$

$$\widetilde{M}_{1ee} = \widetilde{M}_{1ee}^t. \quad (4.115)$$

Dans le cas $p = 2$, la loi de comportement se recombine en

$$M'_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{13} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_{11} & b_{12} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{23} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_{21} & b_{22} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{63} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & b_{61} & b_{62} \\ -b_{13} & -b_{23} & -b_{63} & c_{33} & -b_{33} & -b_{43} & -b_{453} & c_{13} & c_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{36} & b_{33} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_{31} & b_{32} \\ a_{14} & a_{24} & a_{46} & b_{43} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & b_{41} & b_{42} \\ a_{15} & a_{25} & a_{56} & b_{53} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & b_{51} & b_{52} \\ -b_{11} & -b_{21} & -b_{61} & c_{13} & -b_{31} & -b_{41} & -b_{51} & c_{11} & c_{12} \\ -b_{12} & -b_{22} & -b_{62} & c_{23} & -b_{32} & -b_{42} & -b_{52} & c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que l'on a

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2} \sigma_{12} \\ D_3 \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2} \sigma_{23} \\ \sqrt{2} \sigma_{31} \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = M'_2 \cdot \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ \sqrt{2} e_{12} \\ \partial_3 \varphi e_{33} \\ \sqrt{2} e_{23} \\ \sqrt{2} e_{31} \\ \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.116)$$

La structure de M'_2 est exactement la même que celle de M'_1 avec cette fois :

$$A_2 = A_1, B_2 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{63} \end{pmatrix}, C_2 = (c_{33}), D_2 = D_1,$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} -b_{33} & -b_{43} & -b_{53} \end{pmatrix}, F_2 = F_1, G_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{61} & b_{62} \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} c_{13} & c_{23} \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs $M_2^{00}, M_2^{-0}, M_2^{0-}$ et M_2^{--} s'écrivent eux aussi comme les M_1^{ij} et, par voie de conséquence, \widetilde{M}_2 vérifie les relations (4.113)-(4.115).

En résumé, on a la

Proposition 4.8: Soient u, v deux éléments quelconques de \mathbf{V}_{KL} et φ, ψ deux éléments quelconques de Φ_p . On a

$$\widetilde{m}_p((u, \varphi), (v, \psi)) = \widetilde{m}_p((v, -\psi), (u, -\varphi)). \quad (4.117)$$

En considérant l'influence des symétries cristallines (*cf.* Royer & Dieulesaint (1996) p. 145) sur la structure de M lors d'une polarisation perpendiculaire à la plaque, on déduit :

1. $\widetilde{M}_{2_{mm}}$ n'est composé que de termes mécaniques.
2. Pour les classes cristallines $m, 32, 422, \bar{6}, 622$ et $\bar{6}m2$ on a $\widetilde{M}_{1_{mm}} = \widetilde{M}_{2_{mm}}$.
3. En dehors de ces classes, $\widetilde{M}_{1_{mm}}$ est toujours couplé avec des termes électriques.
4. Dans le cas du premier modèle, il y a découplage à la limite entre les équations mécaniques et électriques pour les classes 2, 222, 2mm, 4, $\bar{4}$, 422, 4mm, $\bar{4}2m$, 6, 622, 6mm et 23.
5. Dans le cas du second modèle, ce découplage a lieu pour les classes $m, 32, 422, \bar{6}, 622$ et $\bar{6}m2$. Cependant, bien qu'il y ait découplage, la loi d'élasticité n'est en général pas celle des plaques purement mécaniques puisque dans les opérateurs $\widetilde{M}_{p_{mm}}$ et $\widetilde{M}_{p_{ee}}$, il y a un mélange de coefficients élastiques, piézoélectriques et diélectriques. Bien que ces cas

présentent l'intérêt d'induire une loi de comportement limite donnée par une énergie convexe quadratique, concevoir des actionneurs avec une loi limite découplée n'offre *a priori* aucun intérêt pratique.

Remarque 4.9: Dans leurs articles, Attou & Maugin (1987) ainsi que Bisegna & Maceri (1996b) ont considéré le cas de plaques piézoélectriques dont le matériau constitutif est de classe 6mm. On peut vérifier que dans ce cas particulier, les lois de comportements qu'ils obtiennent sont respectivement données par \widetilde{M}_1 et \widetilde{M}_2 .

4.6 Les équation ponctuelles

On réécrit ici les équations limites sous forme de problèmes aux limites. La normale unitaire extérieure à γ sera notée ν et τ désignera le vecteur unitaire tel que $(\nu, \tau) = +\frac{\pi}{2}$. On note de plus $\partial_\nu \theta := \nu_\alpha \partial_\alpha \theta$ et $\partial_\tau \theta := \tau_\alpha \partial_\alpha \theta$ les dérivées normale et tangentielle de θ , respectivement. Les résultats présentés ici sont obtenus par simple application de la formule de Green (*cf.* Ciarlet (1997) pp. 47-57).

4.6.1 Équations mécaniques

Loi de comportement

Le “tenseur des contraintes généralisées” est noté Σ_p , il peut être vu comme une matrice 2×2 . On a

$$\Sigma_{p\alpha\beta}(\widehat{x}) := \widetilde{\mathcal{M}}_{pmm\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}(\widehat{\zeta}) - \widetilde{\mathcal{M}}_{pmm\alpha\beta\gamma\delta}^{x_3} \partial_{\gamma\delta}^2 \zeta_3 + \widetilde{\mathcal{M}}_{pme\alpha\beta i} \partial_i \varphi. \quad (4.118)$$

Le “tenseur des moments généralisés” est quant à lui noté Ξ_p . Il est donné par

$$\Xi_{p\alpha\beta}(\widehat{x}) := \widetilde{\mathcal{M}}_{pmm\alpha\beta\gamma\delta}^{x_3} e_{\gamma\delta}(\widehat{\zeta}) - \widetilde{\mathcal{M}}_{pmm\alpha\beta\gamma\delta}^{x_3^2} \partial_{\gamma\delta}^2 \zeta_3 + \widetilde{\mathcal{M}}_{pme\alpha\beta i}^{x_3} \partial_i \varphi. \quad (4.119)$$

Équations d'équilibre

Elles sont données par

$$-\widehat{\text{div}} \Sigma_p = p_\alpha + r_\alpha \text{ sur } \omega, \quad (4.120)$$

$$D^2 \Xi_p = p_3 + r_3 + \widehat{\text{div}}(q_\alpha + s_\alpha) \text{ sur } \omega. \quad (4.121)$$

*Conditions aux limites*Condition de Dirichlet

Elle est simplement donnée par

$$(\widehat{\zeta}, \zeta_3) = 0 \text{ sur } \gamma_{mD}. \quad (4.122)$$

Conditions de Neumann

Elles sont un peu plus complexes et s'écrivent

$$\Sigma_{\alpha\beta}\nu_\beta = r_\alpha \text{ sur } \gamma_{mN}, \quad (4.123)$$

$$\Xi_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta = 0 \text{ sur } \gamma_{mN}, \quad (4.124)$$

$$(\partial_\alpha\Xi_{\alpha\beta})\nu_\beta + \partial_\tau(\Xi_{\alpha\beta}\nu_\alpha\tau_\beta) = -q_\alpha\nu_\alpha + \partial_\alpha s_\alpha + r_3 \text{ sur } \gamma_{mN}. \quad (4.125)$$

4.6.2 Équations électriques. Cas $p = 1$ *Loi de comportement*

Le “vecteur déplacement électrique généralisé” est noté \mathcal{D}_1 . On a

$$\mathcal{D}_{1\alpha}(\widehat{x}) := \widetilde{\mathcal{M}}_{1em\beta\gamma\alpha} e_{\beta\gamma}(\widehat{\zeta}) - \widetilde{\mathcal{M}}_{1em\beta\gamma\alpha}^{x_3} \partial_{\beta\gamma}^2 \zeta_3 + \widetilde{\mathcal{M}}_{1ee\alpha\beta} \partial_\beta \varphi_1. \quad (4.126)$$

Équation d'équilibre

$$-\widehat{\text{div}}\mathcal{D}_1 = p' \text{ sur } \omega. \quad (4.127)$$

*Conditions aux limites*Condition de Dirichlet

$$\varphi_1 = \varphi_0 \text{ sur } \gamma_{eD}. \quad (4.128)$$

Conditions de Neumann

$$\mathcal{D}_1\nu = r' \text{ sur } \gamma_{eN}. \quad (4.129)$$

4.6.3 Équations électriques. Cas $p = 2$

Loi de comportement

Le vecteur déplacement électrique généralisé se réduit à un scalaire noté \mathcal{D}_2 défini par

$$\mathcal{D}_2(x) := \widetilde{M}_{2_{em\beta\gamma_3}} e_{\beta\gamma}(\widehat{\zeta}) - x_3 \widetilde{M}_{2_{em\beta\gamma_3}} \partial_{\beta\gamma}^2 \zeta_3 + \widetilde{M}_{2_{ee33}} \partial_3 \varphi_2. \quad (4.130)$$

Équation d'équilibre

$$-\partial_3 \mathcal{D}_2 = F \text{ dans } \Omega. \quad (4.131)$$

Conditions aux limites

Condition de Dirichlet

$$\varphi_2 = \varphi_0 \text{ sur } \gamma_{eD} \cap \Gamma_{\pm}. \quad (4.132)$$

Condition de Neumann

$$\mathcal{D}_1 \nu = d \text{ sur } \gamma_{eN} \cap \Gamma_{\pm}. \quad (4.133)$$

Remarque 4.10: On rappelle que dans le cas $p = 2$, il n'y a pas de conditions aux limites "électriques" sur le bord latéral de Ω .

Remarque 4.11: (équations bidimensionnelles)

Dans le cas $p = 1$, il est clair que les équations locales limites sont posées dans ω et ont donc un caractère bidimensionnel.

Dans le cas $p = 2$, les choses sont moins claires à première vue. Cependant, il suffit de remarquer que $\varphi_2(\widehat{x}, \cdot)$ est solution d'une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{aligned} -\partial_3(\widetilde{M}_{2_{ee}} \partial_3 \varphi_2)(x) &= F(x) - \partial_3[\widetilde{M}_{2_{em\beta\gamma_3}}(x) e_{\beta\gamma}(\widehat{\zeta})(\widehat{x}) \\ &\quad - x_3 \widetilde{M}_{2_{em\beta\gamma_3}}(x) \partial_{\beta\gamma}^2 \zeta_3(\widehat{x})]. \end{aligned} \quad (4.134)$$

À cause des conditions aux limites (4.132), (4.133) et de l'hypothèse (\mathbf{H}_5^p) , φ_2 est parfaitement déterminé comme fonction linéaire des données et du

triplet $(\hat{\zeta}, \zeta_3)$. Le problème étant couplé, on peut alors injecter l'expression obtenue dans les équations mécaniques (qui, elles, sont bidimensionnelles). Le cas $p = 2$ peut donc lui aussi être considéré comme un problème bidimensionnel. Dans sa thèse, Sène (2000) avait obtenu un résultat analogue en considérant un cas particulier.

De la relation (4.134) on déduit de plus la dépendance en x_3 de φ_2 , ce qui permet de positionner certaines hypothèses *a priori* faites dans la littérature (cf. Bernadou & Haenel (1996), Bisegna & Maceri (1996a) et Rogacheva, 1994). En particulier, dans le cas où ni $F(x)$ ni $\widetilde{M}_2(x)$ ne dépendent de x_3 , le potentiel électrique est parabolique.

Remarque 4.12: (découplage)

Dans le cas $p = 1$, l'hypothèse $(\mathbf{H}_p^{\text{découpl}})$ implique évidemment le découplage des équations ponctuelles puisque dans ce cas, Σ_1 et Ξ_1 prennent les formes simplifiées

$$\Sigma_{1\alpha\beta}(\hat{x}) = \widetilde{\mathcal{M}}_{pmm_{\alpha\beta\gamma\delta}} e_{\gamma\delta}(\hat{\zeta}) + \widetilde{\mathcal{M}}_{pme_{\alpha\beta i}} \partial_i \varphi, \quad (4.135)$$

$$\Xi_{1\alpha\beta}(\hat{x}) = -\widetilde{\mathcal{M}}_{pmm_{\alpha\beta\gamma\delta}}^{x_3^2} \partial_{\gamma\delta}^2 \zeta_3. \quad (4.136)$$

Dans le cas $p = 2$, la décomposition des potentiels électriques selon leurs parties paires et impaires implique aussi le découplage des équations ponctuelles.

4.7 Conclusion : la modélisation proposée

Afin de présenter des résultats ayant un sens physique, il est nécessaire de procéder à une “mise à l'échelle inverse” (on parle de *downscaling*) de l'unique couple de solutions du problème limite $\mathcal{P}(0, \Omega)_p$. Jusqu'à présent, les modèles de comportement ont en effet été identifiés par des problèmes posés dans Ω et solutionnés par des limites $s_p(0)$ d'états électromécaniques mis à l'échelle. Si l'on définit sur Ω^ε un état électromécanique *physique* $s_p^\varepsilon(0)$ par

$$\begin{aligned} s_p^\varepsilon(0)(\pi^\varepsilon x) &:= s_p(0)(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ \pi^\varepsilon : (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega} &\mapsto (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \overline{\Omega}^\varepsilon, \end{aligned}$$

cet état électromécanique est solution d'un problème posé dans Ω^ε transporté de $\mathcal{P}(0, \Omega)_p$ par π^ε qui est *notre proposition de modèle* de plaque mince linéairement piézoélectrique d'épaisseur 2ε .

Plus précisément, on va dans un premier temps indexer par ε les espaces fonctionnels utilisés jusqu'à présent afin de signifier que l'on remplace Ω par Ω^ε dans leur définition. En particulier, à tout élément v^ε de $\mathbf{V}_{KL}^\varepsilon$ on peut associer un triplet $(\hat{\eta}^\varepsilon, \eta_3^\varepsilon)$ tel que $\eta_i^\varepsilon : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} v_\alpha^\varepsilon(\hat{x}) &= \eta_\alpha^\varepsilon(\hat{x}) - x_3 \partial_\alpha \eta_3^\varepsilon(\hat{x}), \\ v_3^\varepsilon &= \eta_3^\varepsilon(\hat{x}), \end{aligned}$$

pour tout x de ω . Bien sûr, on a posé de même

$$\varphi_p^\varepsilon(0)(x^\varepsilon) = \varepsilon^p \varphi_p(x). \quad (4.137)$$

Enfin, on note

$$\nabla_p \psi^\varepsilon := \begin{cases} \hat{\nabla} \psi^\varepsilon & \text{si } p = 1, \\ \partial_3 \psi^\varepsilon & \text{si } p = 2, \end{cases} \quad (4.138)$$

pour tout ψ^ε de Φ_p^ε .

Les fonctions $(u_p)_i^\varepsilon(0)$ et $\varphi_p^\varepsilon(0)$ sont respectivement les déplacements et le potentiel limites à l'intérieur de la plaque. On a ajouté "(0)" pour rappeler qu'il s'agit de champs *limites descalés*.

Ensuite, on pose

$$\widetilde{M}_p^\varepsilon(\pi^\varepsilon x) := \widetilde{M}_p^\varepsilon(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.139)$$

On peut alors introduire la forme bilinéaire ("limite descalée") sur \mathbf{S}_p^ε :

$$\begin{aligned} \widetilde{m}_p^\varepsilon(s^\varepsilon, r^\varepsilon) &:= \int_{\omega} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \widetilde{M}_p^\varepsilon(x) \{ [\hat{e}_{\alpha\beta}(\zeta_p^\varepsilon)(\hat{x}) - x_3 \partial_{\alpha\beta}^2 \zeta_{p_3}^\varepsilon(\hat{x})], [\nabla_p \varphi_p^\varepsilon(x)] \} \\ &\quad \cdot \{ [\hat{e}_{\alpha\beta}(\hat{\eta}^\varepsilon)(\hat{x}) - x_3 \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^\varepsilon(\hat{x})], [\nabla_p \psi^\varepsilon(x)] \} dx = L(r^\varepsilon) \\ &\quad, \quad \forall r^\varepsilon = ((\hat{\eta}^\varepsilon, \eta_3^\varepsilon), \psi^\varepsilon) \in \mathbf{S}_p^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.140)$$

Dès lors, le théorème 4.4 admet pour corollaire le

Théorème 4.13: Sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_5^p)$, le couple $s_p^\varepsilon(0) := (u_p^\varepsilon(0), \varphi_p^\varepsilon(0))$ constitué des déplacements et potentiel limites ("descalés") à l'intérieur de la plaque réelle Ω^ε est l'unique solution du problème suivant :

$$\mathcal{P}(0, \Omega^\varepsilon)_p \begin{cases} \text{Trouver } s^\varepsilon \in (0, \varphi_0^\varepsilon) + \mathbf{S}_p^\varepsilon \text{ tel que} \\ \widetilde{m}_p^\varepsilon(s^\varepsilon, r^\varepsilon) = L(r^\varepsilon) \text{ pour tout } r^\varepsilon \in \mathbf{S}_p^\varepsilon. \end{cases}$$

Bien sûr, toutes les remarques faites jusqu'à présent concernant le problème limite mis à l'échelle s'adaptent et s'appliquent au problème limite "descalé" ci-dessus.

Il est capital de noter que l'état électromécanique $s_p^\varepsilon(0)$ est asymptotiquement équivalent à l'unique solution s^ε du problème physique de départ $\mathcal{P}(\Omega^\varepsilon)$ au sens où :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega^\varepsilon} \varepsilon^{-2} |(u_p^\varepsilon)_\alpha(0) - u_\alpha^\varepsilon|^2 + |(u_p^\varepsilon)_3(0) - u_3^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-3} \int_{\Omega^\varepsilon} |e_{\alpha\beta}^\varepsilon((u_p^\varepsilon)_\alpha(0)) - e_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon)|^2 dx^\varepsilon &= 0, \\ \varepsilon^{-3} \int_{\Omega^\varepsilon} |e_{i3}(u^\varepsilon)|^2 dx^\varepsilon &\text{ est borné,} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-3} \int_{\Omega^\varepsilon} |\varphi_1^\varepsilon(0) - \varphi^\varepsilon|^2 + |\partial_\alpha^\varepsilon \varphi_1^\varepsilon(0) - \partial_\alpha^\varepsilon \varphi^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-5} \int_{\Omega^\varepsilon} |\varphi_2^\varepsilon(0) - \varphi^\varepsilon|^2 + \varepsilon^2 |\partial_3^\varepsilon \varphi_2^\varepsilon(0) - \partial_3^\varepsilon \varphi^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon &= 0, \\ \varepsilon^{-3} \int_{\Omega^\varepsilon} |\partial_\alpha^\varepsilon \varphi^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon &\text{ est borné,} \\ \varepsilon^{-3} \int_{\Omega^\varepsilon} |\partial_3^\varepsilon \varphi^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon &\text{ est borné.} \end{aligned}$$

Enfin, soulignons que

1. le premier modèle avec $\varphi_0 = 0$ correspond à la situation physique où la plaque piézoélectrique est utilisée comme capteur,
2. le second modèle correspond à un actionneur.

Lorsque $d^\varepsilon = 0$ et φ_0^ε est indépendant de x_3 , c'est l'intensité seule de φ_0^ε vis à vis de l'épaisseur ε qui gouverne le type de modèle limite.

5. CAS DYNAMIQUE

5.1 Introduction

Dans l'étude du problème d'évolution d'une plaque piézoélectrique, il faut prendre en compte - en plus de l'épaisseur - un autre paramètre. Ce paramètre sera lié à la densité de la plaque et sera noté ρ . Dans cette partie introductive, on simplifie le propos en considérant que ρ est la densité elle-même. Ultérieurement, on choisira une densité inhomogène. Ainsi, les champs et espaces précédemment indexés par ε sont indexés par $\eta = (\varepsilon, \rho)$. Dans le cadre de *l'approximation quasi-électrostatique*, l'équation de l'équilibre électrique est inchangée, tandis que l'équation de l'équilibre mécanique est remplacée par

$$\operatorname{div} \sigma^\eta + f^\eta = \rho \ddot{u}^\eta \text{ dans } \Omega,$$

où le symbole $\dot{\cdot}$ désigne la dérivation par rapport au temps $t \in [0, T]$. Comme précédemment, on peut transformer le problème mécanique en un problème mathématique équivalent noté $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$ et posé dans Ω avec les champs mis à l'échelle $y(\eta) = (s(\eta), v(\eta) := \dot{u}(\eta))$ comme inconnues :

$$\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } y(\eta)(t) \in \mathbf{S}_\eta \times L^2(\Omega)^3, \\ \mathbf{S}_\eta := \{r = (v, \psi) \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega)\}, \text{ tel que} \\ \langle \dot{v}(\eta), w \rangle_\eta + m_p(\varepsilon)(s(\eta), r) = L_\eta(r), \forall r = (v, \psi) \in \mathbf{S}_\eta, \forall t \in (0, T), \\ (u(\eta), v(\eta))(0) = (u^0(\eta), v^0(\eta)) \text{ donné.} \end{array} \right.$$

Dans cette expression, le produit scalaire défini par

$$\langle v, w \rangle_\eta := \int_\Omega \rho(v_\alpha w_\alpha + \varepsilon^{-2} v_3 w_3) dx,$$

est relié à l'énergie cinétique mise à l'échelle, tandis que la forme linéaire

$$L_\eta(r; t) := \int_{\Omega} f_\eta \cdot v \, dx + \int_{\Omega} F_\eta \psi \, dx + \int_{\Gamma_{mN}} g_\eta \cdot v \, ds \\ + \int_{\Gamma_{eN}} w_\eta \psi \, ds - m_p(\varepsilon)((0, \varphi_{0\eta}), r),$$

est reliée au travail des actions extérieures mises à l'échelle qui peuvent dépendre du temps.

L'indice inférieur η correspond aux chargements mis à l'échelle. Sous des hypothèses de régularité sur les données convenables, il est possible de montrer que $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$ admet une unique solution continûment différentiable par rapport au temps sur $[0, T]$.

Afin d'étudier la limite de $s(\eta)$ lorsque $\eta = (\varepsilon, \rho) \rightarrow \bar{\eta} = (0, \bar{\rho})$, on considère quatre cas, indexés par q , de comportements relatifs *limites* des paramètres ε et ρ :

$$\begin{aligned} q &= 1 & : & \quad \rho \rightarrow \bar{\rho} \in (0, \infty) \\ q &= 2 & : & \quad \rho \rightarrow 0 \text{ et } \rho/\varepsilon^2 \rightarrow \infty \\ q &= 3 & : & \quad \rho/\varepsilon^2 \rightarrow \bar{\rho} \in (0, \infty) \\ q &= 4 & : & \quad \rho = o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Cela signifie que le comportement limite obtenu dépend maintenant des ordres de grandeur relatifs de la densité et de l'épaisseur. Cependant, les ordres de grandeur de la densité et des coefficient mécaniques pouvant fort bien ne pas être indépendants, ces quatre cas peuvent aussi être interprétés comme corrélés à l'intensité du chargement extérieur, voire à la fréquence de l'excitation, puisque la densité apparaît devant un terme de dérivation temporelle.

Signalons que le cas de la piézoélectricité dynamique avec des effets magnétiques (*i.e.* sans l'approximation quasi-électrostatique) a été traité par Raoult & Sène dans le cas $q = 2$.

C'est la forme même du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta$, variable avec ε et ρ et relié à l'énergie cinétique mise à l'échelle, qui va jouer un rôle prépondérant dans la construction du cadre mathématique de l'étude. Cela est naturel puisqu'il s'agit de l'étude d'un problème *d'évolution*. Ce que laisse subodorer ce produit scalaire, c'est que les déplacements membranaires et en flexion joueront des rôles bien distincts. En particulier, dans les cas $p = 1$ et $p = 2$, il faudra imposer un déplacement vertical nul pour ne pas faire tendre l'énergie du système vers l'infini. On sera en fait dans tout ce Chapitre mis dans

l'obligation de traiter les déplacements membranaires et les déplacements verticaux de manière indépendante. Par conséquent, l'hypothèse de découplage ($\mathbf{H}_p^{\text{découpl}}$) est sous entendue dans toute la suite.

Il est important de noter que ce problème de couplage multiphysique conduit à considérer des triplets d'objets mathématiques (par exemple, l'état est le triplet déplacement, vitesse, potentiel électrique). Il faut bien observer que la singularité du problème (quasi-statique du point de vue électrique, dynamique du point de vue mécanique) amène à extraire des couples de ces triplets. On se retrouve ainsi avec trois types d'espaces fonctionnels qui présentent la particularité d'être variables avec ε et ρ (plus précisément, ces espaces seront dotés de *normes variables*). On se propose de traiter de manière unitaire 2 types de chargement (indexés par p) associés à 4 types de comportements relatifs de ρ et ε (indexés par q). Ceci nous a amenés à indiquer un certain nombre d'objets mathématiques par un couple (p, q) . Ceci implique l'introduction d'un assez grand nombre de notations. Cependant, celles-ci permettent de saisir la nature physique de ce problème dynamique doublement couplé (électrique / mécanique ; flexion / membrane).

Ainsi, on pose

$$\begin{cases} \mathbf{V}_q := \widehat{\mathbf{V}}_{KL} \text{ si } q = 1, 2 \\ \mathbf{V}_q := \mathbf{V}_{KL} \text{ si } q = 3, 4 \\ \mathbf{S}_{p,q} := \mathbf{V}_q \times \Phi_p, \end{cases}$$

et on définit sur $\mathbf{S}_{p,q}$ la forme linéaire limite :

$$\begin{aligned} L_{\bar{\eta}}(r) := & \int_{\Omega} f_{\bar{\eta}} \cdot v \, dx + \int_{\Omega} F_{\bar{\eta}} \psi \, dx + \int_{\Gamma_{mN}} g_{\bar{\eta}} \cdot v \, ds \\ & + \int_{\Gamma_{eN}} w_{\bar{\eta}} \psi \, ds - \tilde{m}_p((0, \varphi_{0\bar{\eta}}), r). \end{aligned}$$

Reliés au comportement limite de l'énergie cinétique, on introduit les produits scalaires :

$$\begin{cases} K_1(v, w) := \int_{\Omega} v_{\alpha} w_{\alpha} \, dx = 2 \int_{\omega} v_{\alpha} w_{\alpha} \, dx_1 dx_2, \\ K_3(v, w) := \int_{\Omega} v_3 w_3 \, dx = 2 \int_{\omega} v_3 w_3 \, dx_1 dx_2. \end{cases}$$

Sous l'hypothèse de découplage ($\mathbf{H}_p^{\text{découpl}}$) et d'autres hypothèses sur la convergence du chargement et de l'état initial ainsi que sur la régularité en temps de leurs limites on a le résultat suivant :

Résultat de convergence 2: Il existe un unique élément $s = (u, \varphi)$ de $C^1([0, T]; \mathbf{S}_{p,q})$ tel que la famille $s(\eta)$ des uniques solutions de $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers s dans $H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)$ lorsque η tend vers $\bar{\eta}$, et vérifiant, $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} &\cdot \text{si } q = 2 \text{ ou } 4 & \tilde{m}_p(s, r) &= L_{\bar{\eta}}(r), \quad \forall r \in \mathbf{S}_{p,q}, \\ &\cdot \text{si } q = 1 \text{ ou } 3 & K_q(\ddot{u}, w) + \tilde{m}_p(s, r) &= L_{\bar{\eta}}(r), \quad \forall r = (w, \psi) \in \mathbf{S}_{p,q}. \end{aligned}$$

De plus, u_α , si $q = 1$, ou u_3 , si $q = 3$, sont de classe $C^2([0, T]; L^2(\omega))$.

Les difficultés techniques que l'on rencontre dans le traitement des problèmes de dynamique par les méthodes d'équations variationnelles d'évolution (dans cette direction, se reporter aux thèses de Raoult, 1980, 1988) nous ont conduits à opter pour une méthode alternative de "convergence de semi-groupes d'opérateurs linéaires". Cette méthode a déjà été utilisée et popularisée, en particulier grâce au livre de Sanchez-Palencia (1980). Le fait que l'espace des configurations dépende des paramètres nous a orienté vers les travaux de Trotter (1958) qui permettent d'obtenir, une fois le cadre mathématique correctement posé, des propriétés de convergence pour les solutions d'équations d'évolution d'après les seuls résultats associés aux équations stationnaires.

La clé de la démarche est la décomposition de l'état électromécanique $s(\eta)$ en un état (solution d'un problème) quasi-statique $s_e(\eta)$ et un état (solution d'un problème) d'évolution $s_r(\eta)$. Le comportement asymptotique de $s_e(\eta)$ est donné par les résultats obtenus en statique tandis que la théorie de Trotter d'approximation des semi-groupes d'opérateurs linéaires agissant sur des espaces variables permet de traiter le comportement asymptotique de $s_r(\eta)$ *en considérant uniquement des problèmes de type statique*. En effet, le problème d'évolution que solutionne $s_r(\eta)$ peut se reformuler à l'aide d'un opérateur anti-adjoint. La mise en place du cadre mathématique nécessite alors :

1. la construction d'une suite d'espace (de Hilbert) \mathbf{H}_η approchant l'espace limite \mathbf{H} (celui-ci peut être intuité en traduisant mécaniquement le comportement mathématique des objets considérés) ;
2. la construction d'opérateurs P_η , linéaires et continus de \mathbf{H} dans \mathbf{H}_η permettant de comparer leurs éléments ;
3. d'établir la convergence au sens de Trotter (*i.e.* mettant en jeu les P_η) des résolvantes des opérateurs gouvernant les évolutions dans \mathbf{H}_η et \mathbf{H} .

Une fois le cadre fonctionnel mis en place (ce sont les espaces des états possibles d'énergie électromécanique finie normés par ces énergies (dépendant

des paramètres ε et ρ)), la vérification des trois points ci-dessus *n'utilise que les résultats obtenus dans le cadre statique*.

Dans les cas $q = 2$ et $q = 4$, la réponse limite de la plaque au chargement électromécanique est purement quasi-statique, tandis que dans les cas $q = 1$ ou $q = 3$ l'accélération du déplacement intervient.

Les propriétés de \tilde{m}_p -polarité de S_p impliquent que, si $q = 1, 2$, il n'y a pas de flexion tandis que la réponse membranaire est dynamique si $q = 1$, quasi-statique si $q = 2$. Lorsque $q = 3, 4$ la réponse membranaire est quasi-statique tandis que la réponse en flexion est dynamique si $q = 3$ et quasi-statique si $q = 4$.

Le modèle que nous proposons pour approcher le comportement dynamique d'une plaque piézoélectrique d'épaisseur 2ε et de densité ρ est donné par le transport sur Ω^ε par π^ε (et les formules de mise à l'échelle) du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } s = (u, \varphi) \in \mathbf{V}_{KL} \times \Phi_p \text{ tel que} \\ \langle \ddot{u}, w \rangle_\eta + \tilde{m}_p(s, r) = L_\eta(r), \quad \forall r = (w, \psi) \in \mathbf{V}_{KL} \times \Phi_p. \end{cases}$$

5.2 Equations d'évolution et théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires

La théorie des semi-groupes permet de traiter une très large classe de problèmes d'évolution de la forme

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f(t) \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

où A est un opérateur non borné de domaine $D(A)$ dans un espace de Hilbert \mathbf{X} contenant les données u_0 et $f(t)$ pour $t \in [0, T]$. La méthode s'applique avec un opérateur A indépendant du temps qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ fortement continu sur $[0, +\infty[$.

Dans les applications physiques, l'espace \mathbf{X} est souvent choisi de manière à ce que le carré de la norme soit une énergie. Dans ce cas, à partir du moment où il n'y a pas de source dans le système, l'énergie est soit constante, soit décroissante (s'il y a dissipation). Le semi-groupe est alors tel que

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} \leq 1, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.2)$$

et on dit qu'il s'agit d'un *semi-groupe de contraction*.

Si \mathbf{X} est muni d'un produit scalaire noté $[\cdot, \cdot]$, il existe une caractérisation des générateurs des semi-groupes de contraction :

Théorème 5.1: (Lumner-Philips)

Un opérateur \mathbf{A} dans \mathbf{X} est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu de contraction s'il est m-dissipatif, *i.e.*

- (i) $[\mathbf{A}x, x] \geq 0, \quad \forall x \in D(\mathbf{A}).$
- (ii) $\exists \lambda_0 > 0$ tel que $\mathbf{I} - \lambda_0 \mathbf{A}$ est surjectif.

Un cas particulier est celui de la caractérisation des générateurs de groupes unitaires *i.e.* tels que $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} = 1, \forall t \in \mathbb{R} :$

Théorème 5.2: (Stone)

Un opérateur \mathbf{A} dans \mathbf{X} génère un groupe unitaire $\{G(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ si et seulement si \mathbf{A} est anti-adjoint.

Rappelons qu'un opérateur \mathbf{A} est anti-adjoint (*i.e.* \mathbf{A} est l'opposé de son adjoint) lorsque $\pm \mathbf{A}$ est m-dissipatif.

On dit que $u(t)$ est une solution *classique* de (5.1) si

$$\begin{cases} u \in C^1([0, T]; X), \\ u(t) \in D(\mathbf{A}), \forall t \in [0, T], \\ (5.1) \text{ a lieu.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Les résultats suivants sont importants :

Théorème 5.3: Si $f \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{X})$, l'espace des fonctions Lipschitziennes sur $[0, T]$ à valeurs dans \mathbf{X} , et si $u_0 \in D(\mathbf{A})$ alors (5.1) possède une solution classique qui s'écrit

$$u(t) = G(t) u_0 + \int_0^t G(t-s) f(s) ds. \quad (5.4)$$

Théorème 5.4: Si $u_0 \in D(\mathbf{A})$, si $f \in C^0([0, T], X)$, $f(t) \in D(\mathbf{A})$ *pp* $t \in [0, T]$ et $\mathbf{A}f \in L^1(0, T; \mathbf{X})$ alors (5.1) possède une solution classique donnée par (5.4).

Enfin, la théorie développée par Trotter (1958) dans le cadre de l'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles va se révéler particulièrement utile dans l'étude des problèmes d'évolution de plaques. Cette théorie est basée sur la notion de suite approchante d'espaces de Hilbert :

Définition 5.5: (i) Une suite d'espaces de Hilbert \mathbf{X}_n associée à une suite d'opérateurs linéaires $P_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_n$ est appelée suite d'espaces de Hilbert approchant \mathbf{X} si :

$$\begin{cases} \exists c > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \|P_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_n)} \leq c, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n f\|_{\mathbf{X}_n} = \|f\|_{\mathbf{X}}, \quad \forall f \in \mathbf{X}. \end{cases} \quad (5.5)$$

(ii) On dit que $x_n \in \mathbf{X}_n$ converge vers $x \in \mathbf{X}$ au sens de Trotter si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n x - x_n\|_{\mathbf{X}_n} = 0. \quad (5.6)$$

Dans ce contexte, on a le résultat de convergence suivant

Théorème 5.6: La solution du problème d'évolution dans \mathbf{X}_n

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} = A_n u_n + f_n, \\ u_n(0) = u_{n0}, \end{cases} \quad (5.7)$$

converge, uniformément sur $[0, T]$, au sens de Trotter vers l'élément $u \in \mathbf{X}$ solution de

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = A u + f, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (5.8)$$

si

$$\begin{cases} (i) \lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - \lambda A_n)^{-1} P_n x - P_n (I - \lambda A)^{-1} x\|_{\mathbf{X}_n} = 0, \quad \forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbf{X} \\ (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n u_0 - u_{n0}\|_{\mathbf{X}_n} = 0, \quad \text{où } (u_0, u_{n0}) \in D(A) \times D(A_n) \\ (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|P_n f(t) - f_n(t)\|_{\mathbf{X}_n} dt = 0, \quad \text{où } (f, f_n) \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{X} \times \mathbf{X}_n), \end{cases} \quad (5.9)$$

Pour plus de détails sur la théorie des semi-groupes linéaires, on peut consulter Brézis (1976, 1987), Dautray & Lions (1988), Grisvard (1969), Lions (1968), Sanchez (1980) et Belleni-Morante (1994). Signalons aussi l'ouvrage de Banks *et al.* (1996) et l'article de Blanchard & Francfort (1987), consacrés respectivement à la modélisation des structures intelligentes et à l'obtention d'un modèle de plaques dans le cas de la thermoélasticité. Ce sont deux exemples d'utilisation de la méthode des semi-groupes en mécanique. Pour ce qui est de la théorie développée par Trotter (1958), on peut consulter la thèse de Licht (1980).

5.3 Première formulation du problème

5.3.1 L'approximation quasi-(électro)statique

Dans un solide piézoélectrique, le couplage entre le champ élastique et le champ électromagnétique introduit des termes électriques dans les équations de la dynamique et des termes mécaniques dans les équations de la (magnéto)électrodynamique. Le problème de la propagation de ces champs ne peut en principe être traité qu'en résolvant simultanément ces équations couplées. En fait, les vibrations élastiques nécessitant un déplacement de matière, la vitesse avec laquelle se déplace une déformation ou une contrainte est très inférieure à celle avec laquelle se déplace un champ électrique. En effet, les solutions du problème de propagation sont des ondes mixtes élasto-électromagnétiques, c'est à dire des ondes élastiques de vitesse V accompagnées d'un champ électrique, et des ondes électromagnétiques de vitesse v de l'ordre de 10^5 fois celle de V accompagnées d'une déformation mécanique. Le champ magnétique B associé aux vibrations mécaniques ne joue donc aucun rôle : l'énergie magnétique, par exemple, produite par une déformation est négligeable devant l'énergie électrique. L'équation de Maxwell¹ se réduit alors à :

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \approx 0. \quad (5.10)$$

Le champ électrique E dérive donc d'un potentiel scalaire φ comme en électrostatique.

Ainsi, même dans un matériau fortement piézoélectrique, l'interaction entre les ondes élastiques et les ondes électromagnétiques est faible. En conséquence, leur propagation peut se traiter de manière indépendante.

Les vibrations d'une plaque piézoélectrique sont donc étudiées ici avec l'hypothèse que le champ électrique est statique vis-à-vis des phénomènes électromagnétiques, c'est à dire dans *l'approximation quasi-électrostatique*.

Pour un traitement de la piézoélectricité d'évolution en tenant compte des effets magnétiques, on peut se reporter à l'article de Raoult & Sène (2003).

5.3.2 Position du problème

La configuration de référence ainsi que le partitionnement de sa frontière sont identiques aux définitions du Chapitre précédent. Cependant, on considère maintenant que la densité de la plaque en $x = (\hat{x}, x_3)$ s'écrit $\rho\delta(\hat{x}, x_3/\varepsilon)$ avec δ et $1/\delta$ positifs dans $L^\infty(\omega \times]-1, 1[)$.

¹ James Clerk Maxwell, physicien écossais, 1831-1979. Il travailla à Cambridge.

Alors que le problème statique était uniquement paramétré par l'épaisseur ε de la plaque, il convient donc à partir de maintenant de considérer un *couple* η de paramètres réels et positifs (ε, ρ) .

De même que le comportement statique limite était obtenu en faisant tendre ε vers 0, ici, le couple de paramètres η est appelé à tendre vers $\bar{\eta} = (0, \bar{\rho})$, où $\bar{\rho} \in [0, +\infty[$. On verra en fait que c'est le comportement relatif entre l'épaisseur ε et le paramètre ρ lié à la densité qui joue un rôle déterminant en transposant, comme dans le cas statique, le problème mécanique sur un ouvert fixe après les mêmes hypothèses de mise à l'échelle.

L'état électromécanique de la plaque est donné par un triplet $y^\eta(t) = (u^\eta, \varphi^\eta, v^\eta)(t)$ de champs de déplacement $u^\eta(t)$, de potentiel électrique $\varphi^\eta(t)$ et de vitesse $v^\eta(t) := \dot{u}^\eta(t)$, le symbole $\dot{\cdot}$ désignant la dérivation relativement au temps t variant de 0 à T . Les équations gouvernant l'évolution du système sont alors données par le système

$$\mathcal{P}_\eta(\Omega^\varepsilon) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \sigma^\eta + f^\eta = \rho \delta \ddot{u}^\eta & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ \operatorname{div} D^\eta + F^\eta = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ (\sigma^\eta, D^\eta) = M^\varepsilon(x^\varepsilon)(\epsilon(u^\eta), \nabla \varphi^\eta) & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ \sigma^\eta n^\varepsilon = g^\eta & \text{sur } \Gamma_{mN}^\varepsilon, \\ u^\eta = 0 & \text{sur } \Gamma_{mD}^\varepsilon, \\ D^\eta \cdot n^\varepsilon = d^\eta & \text{sur } \Gamma_{eN}^\varepsilon, \\ \varphi^\eta = \varphi_0^\eta & \text{sur } \Gamma_{eD}^\varepsilon, \\ (u^\eta, v^\eta)(0) = (u^{\eta 0}, v^{\eta 0}) & \text{donné.} \end{cases}$$

L'indice ε n'affecte ci-dessus et dans la suite que les données géométriques et la loi de comportement. Par contre, le champ de contraintes et de déplacements, les champs électriques, etc. sont affectés de l'indice η . On peut d'autre part noter que le problème d'évolution étant quasi-électrostatique, les conditions initiales ne portent que sur le déplacement et la vitesse, non sur le potentiel électrique.

On se propose de montrer que $\mathcal{P}_\eta(\Omega^\varepsilon)$ admet une unique solution et d'en étudier le comportement lorsque η tend vers $\bar{\eta} = (0, \bar{\rho})$.

5.4 Nouvelle formulation du problème

Les hypothèses de mise à l'échelle $(\mathbf{H}_3) - (\mathbf{H}_4^p)$ ainsi que le changement d'inconnues (4.28) permettent de reformuler le problème $\mathcal{P}_\eta(\Omega^\varepsilon)$ en un problème noté $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$, mathématiquement équivalent mais posé sur l'ouvert fixe $\Omega = \omega \times]-1, 1[$.

On introduit alors les espaces

$$\mathbf{Y}_\eta := H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)^3, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{S}_\eta := H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega), \quad (5.12)$$

$$\mathbf{U}_\eta := H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3. \quad (5.13)$$

La présence du paramètre η sera justifiée plus loin par *l'introduction de normes dépendant de η* .

On désigne par

$$y(\eta) := (u(\eta), \varphi(\eta), v(\eta) := \dot{u}(\eta)) \in \mathbf{Y}_\eta \quad (5.14)$$

l'état électromécanique mis à l'échelle dont on privilégiera, en fonction des besoins, les couples

$$s(\eta) := (u(\eta), \varphi(\eta)) \in \mathbf{S}_\eta, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{U}(\eta) := (u(\eta), v(\eta)) \in \mathbf{U}_\eta. \quad (5.16)$$

Afin de donner un sens aux formulations traduisant le problème que l'on se pose, et dans le but d'obtenir des solutions assez régulières, on fait les hypothèses de régularité sur le chargement électromécanique mis à l'échelle :

$$(\mathbf{H}_6) \quad : \quad (f_\eta, g_\eta, F_\eta, d_\eta, \varphi_{0\eta}) \in C^2([0, T]; L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Gamma_{mN})^3 \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_{eN}) \times H^1(\Omega)).$$

Enfin, pour alléger les notations, on pose

$$\langle v, w \rangle_\eta := \rho \int_\Omega (v_\alpha w_\alpha + \varepsilon^{-2} v_3 w_3) \delta(x) dx. \quad (5.17)$$

Il faut noter dès à présent que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta$ définit sur $L^2(\Omega)^3$ un produit scalaire associé à l'énergie cinétique mise à l'échelle. C'est le rôle que joue le paramètre η sur cette énergie (plus précisément : sur sa limite ponctuelle) qui conduira à dégager quatre types de comportements limites.

En introduisant la forme linéaire

$$L_\eta(r; t) := \int_\Omega f_\eta(t) \cdot w dx + \int_{\Gamma_{mN}} g_\eta(t) \cdot w ds + \int_\Omega F_\eta(t) \psi dx + \int_{\Gamma_{eN}} d_\eta(t) \psi ds, \\ \forall r = (w, \psi) \in \mathbf{S}_\eta \quad (5.18)$$

le problème mis à l'échelle $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$ s'écrit :

$$\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } y(\eta) \in (0, \varphi_{0_\eta}, 0) + \mathbf{Y}_\eta \text{ tel que :} \\ \langle \dot{v}(\eta), w \rangle_\eta + m_p(\varepsilon)(s(\eta), r) = L_\eta(r; t), \\ \quad \quad \quad \forall r = (w, \psi) \in \mathbf{S}_\eta, \forall t \in]0, T[, \\ \mathbf{U}(\eta)(0) = (u^0(\eta), v^0(\eta)) =: \mathbf{U}^0(\eta) \text{ donné dans } \mathbf{U}_\eta. \end{array} \right.$$

Il s'agit d'abord d'établir l'existence et l'unicité de la solution de $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$; ensuite, on s'intéressera au comportement asymptotique de cette solution.

Pour montrer que $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$ admet une unique solution $y(\eta)$, on ne va pas l'attaquer de front mais le scinder en deux sous-problèmes, ce qui va nous permettre de rechercher la solution de $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$ sous la forme

$$y(\eta) = y^e(\eta) + y^r(\eta). \quad (5.19)$$

Le premier de ces sous-problèmes est un problème quasi-statique qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } s^e(\eta) \in (0, \varphi_{0_\eta}) + \mathbf{S}_\eta \text{ tel que} \\ m_p(\varepsilon)(s^e(\eta), r) = L_\eta(r; t), \forall (r, t) \in \mathbf{S}_\eta \times [0, T], \end{array} \right. \quad (5.20)$$

L'existence, l'unicité, mais aussi le comportement asymptotique de $s^e(\eta)$ découlent de l'étude menée au Chapitre précédent. A partir de $s^e(\eta)$, on définit donc $y^e(\eta)$ (cf. les relations (5.14)-(5.16)) qui n'est qu'une "partie" de la solution de $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$. Il est à noter que, d'après (\mathbf{H}_6) , on a

$$s^e(\eta) \in C^2([0, T]; \mathbf{S}_\eta). \quad (5.21)$$

Quant au second sous-problème, il s'agit d'un problème d'évolution qui nécessite un peu plus de travail. Il s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } s^r(\eta) \in \mathbf{S}_\eta \text{ tel que} \\ \langle \ddot{u}^r(\eta), w \rangle_\eta + m_p(\varepsilon)(s^r(\eta), r) = - \langle \ddot{u}^e(\eta), w \rangle_\eta, \\ \quad \quad \quad \forall r = (w, \psi) \in \mathbf{S}_\eta, \forall t \in]0, T[, \\ u^r(\eta)(0) = u^0(\eta) - u^e(\eta)(0), \\ \dot{u}^r(\eta)(0) = v^0(\eta) - \dot{u}^e(\eta)(0). \end{array} \right. \quad (5.22)$$

A nouveau, la solution de ce problème, une fois établie son existence et son unicité, permettra de définir $y^r(\eta)$, l'autre "partie" de la solution de $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$.

De l'équation d'évolution variationnelle ci-dessus on peut en particulier extraire

$$m_p(\varepsilon)((u^r(\eta), \varphi^r(\eta)), (0, \psi)) = \int_{\Omega} [b^t e(u^r(\eta)) \nabla \psi + c \nabla \varphi^r(\eta) \nabla \psi] dx = 0, \\ \forall \psi \in H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega). \quad (5.23)$$

Il est par conséquent possible de définir un opérateur noté \mathcal{S}_η qui va permettre de réécrire le problème d'évolution sur \mathbf{U}_η , c'est à dire que d'une certaine manière, on va s'affranchir du potentiel électrique dont le "souvenir" sera conservé par le biais de l'opérateur \mathcal{S}_η :

$$\mathcal{S}_\eta : u \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \mapsto \mathcal{S}_\eta u := \varphi_\eta \in H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega) \text{ tel que } \\ m_p(\varepsilon)((u, \varphi_\eta), (0, \psi)) = 0, \forall \psi \in H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega). \quad (5.24)$$

Grâce au Lemme de Lax-Milgram² (on rappelle que c est défini positif), cette définition a bien un sens. On peut de plus affirmer que \mathcal{S}_η est *linéaire, continu et bijectif*. En introduisant l'opérateur \mathbf{A}_η défini par :

$$\begin{cases} D(\mathbf{A}_\eta) := \{\mathbf{U} = (u, v) \in \mathbf{U}_\eta : v \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3, \exists ! z \in L^2(\Omega)^3 \text{ tel que } \\ \quad \langle z, w \rangle_\eta + m_p(\varepsilon)((u, \mathcal{S}_\eta u), (w, 0)) = 0, \forall w \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3\}, \\ \mathbf{A}_\eta \mathbf{U} := (v, z), \end{cases} \quad (5.25)$$

on peut alors associer au problème (5.91) l'équation d'évolution dans \mathbf{U}_η :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}^r(\eta) = \mathbf{A}_\eta \mathbf{U}^r(\eta) + \mathbf{F}(\eta), \\ \mathbf{U}^r(\eta)(0) = \mathbf{U}^0(\eta) - \mathbf{U}^e(\eta)(0), \end{cases}} \quad (5.26)$$

où le second membre noté $\mathbf{F}(\eta)$ est défini par :

² Peter D. Lax, mathématicien d'origine hongroise, né en 1925. Il émigra aux États-Unis avant la seconde guerre mondiale et reçu le prix Wolf en 1987. Il travaille au Courant Institute of Mathematical Sciences de l'Université de New York.
Arthur Norton Milgram, mathématicien américain né en 1912.

$$\boxed{F(\eta) := (0, -\ddot{u}^e(\eta)).} \quad (5.27)$$

L'hypothèse (\mathbf{H}_6) donne bien un sens à $\mathbf{U}^r(\eta)(0)$ et $F(\eta)$.

Il n'y a dès lors plus qu'à faire l'hypothèse de compatibilité entre chargement et état électromécanique initiaux

$$(\mathbf{H}_7) \quad : \quad \mathbf{U}^r(\eta)(0) \in D(\mathbf{A}_\eta),$$

avant de démontrer la

Proposition 5.7: Sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_7)$, l'équation d'évolution (5.26) admet une unique solution de classe $C^1([0, T]; \mathbf{U}_\eta)$.

Démonstration:

L'objectif est d'abord de montrer que l'opérateur \mathbf{A}_η est m-dissipatif (en fait anti-adjoint). Plus précisément, il va suffire de doter \mathbf{U}_η d'une structure hilbertienne pour laquelle \mathbf{A}_η est anti-adjoint. On introduit pour cela la forme bilinéaire

$$\boxed{\llbracket \mathbf{U}, \mathbf{U}' \rrbracket_\eta = \llbracket (u, v), (u', v') \rrbracket_\eta := m_p(\varepsilon)((u, \mathcal{S}_\eta u), (u', 0)) + \langle v, v' \rangle_\eta.} \quad (5.28)$$

Cette forme jouit des propriétés suivantes :

(i) : Symétrie

Par définition on a, pour tout $\mathbf{U}, \mathbf{U}' \in \mathbf{U}_\eta$

$$\llbracket \mathbf{U}, \mathbf{U}' \rrbracket_\eta = \int_{\Omega} [a e(u) \cdot e(u') - b \nabla(\mathcal{S}_\eta u) e(u')] dx + \langle v, v' \rangle_\eta. \quad (5.29)$$

Il n'y a par conséquent qu'à montrer la symétrie de la forme bilinéaire

$$(u, u') \mapsto \int_{\Omega} b \nabla(\mathcal{S}_\eta u) e(u') dx. \quad (5.30)$$

Or, par définition de la transposée :

$$\int_{\Omega} b \nabla(\mathcal{S}_{\eta} u) e(u') dx = \int_{\Omega} \nabla(\mathcal{S}_{\eta} u) b^t e(u') dx, \quad \forall u, u' \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega), \quad (5.31)$$

et, d'après (5.24) :

$$\int_{\Omega} b^t e(u) \nabla \psi + c \nabla(\mathcal{S}_{\eta} u) \nabla \psi dx = 0, \quad \forall (u, \psi) \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega). \quad (5.32)$$

Par conséquent, en prenant $\psi = \mathcal{S}_{\eta} u'$ dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$\int_{\Omega} \overbrace{c \nabla(\mathcal{S}_{\eta} u) \nabla(\mathcal{S}_{\eta} u')}^{\text{symétrique}} + b^t e(u) \nabla(\mathcal{S}_{\eta} u') dx = 0, \quad \forall u, u' \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3, \quad (5.33)$$

ce qui établit la symétrie de

$$(u, u') \in (H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3)^2 \mapsto \int_{\Omega} b^t e(u) \nabla(\mathcal{S}_{\eta} u') dx \quad (5.34)$$

et donc celle, recherchée, de la forme bilinéaire définie par (5.30).

(ii) : $\ll \cdot, \cdot \gg_{\eta}$ est un produit scalaire équivalent à celui, usuel, de $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$

Soit $\mathbf{U} = (u, v) \in \mathbf{U}_{\eta}$, on a

$$\begin{aligned} \ll \mathbf{U}, \mathbf{U} \gg_{\eta} &= m_p(\varepsilon)((u, \mathcal{S}_{\eta} u), (u, 0)) + \langle v, v \rangle_{\eta} \\ &= m_p(\varepsilon)((u, 0), (u, 0)) + m_p(\varepsilon)((0, \mathcal{S}_{\eta} u), (u, 0)) + \langle v, v \rangle_{\eta}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Or, des propriétés “de symétrie” (4.33) de $m_p(\varepsilon)$ et de la définition (5.24) de \mathcal{S}_{η} on tire successivement

$$\begin{aligned} m_p(\varepsilon)((0, \mathcal{S}_{\eta} u), (u, 0)) &= -m_p(\varepsilon)((u, 0), (0, \mathcal{S}_{\eta} u)) \\ &= m_p(\varepsilon)((0, \mathcal{S}_{\eta} u), (0, \mathcal{S}_{\eta} u)). \end{aligned} \quad (5.36)$$

L'équivalence des produits scalaires se déduit alors de l'hypothèse (\mathbf{H}_3) et de la bicontinuité³ de \mathcal{S}_η .

On montre à présent que l'opérateur \mathbf{A}_η est antiadjoint.

D'après le Théorème de Lummer-Phillips (Théorème 5.1) et de la caractérisation des opérateurs antiadjoints, il s'agit en premier lieu de montrer que $\ll \mathbf{A}_\eta \mathbf{U}, \mathbf{U} \gg_\eta = 0$. Ceci découle immédiatement de la définition de $\ll \cdot, \cdot \gg_\eta$ et de (5.25) :

$$\begin{aligned} \ll \mathbf{U}, \mathbf{A}_\eta \mathbf{U} \gg_\eta &= \ll (u, v), (v, z) \gg_\eta \\ &= m_p(\varepsilon)((u, \mathcal{S}_\eta u), (v, 0)) + \langle v, z \rangle_\eta \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ce résultat signifie que, vis-à-vis du cadre "énergétique" choisi en (5.28), le système électromécanique est conservatif.

Il ne reste plus qu'à montrer que l'opérateur $\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}$ est surjectif pour tout $\lambda \neq 0$.

Considérons un élément arbitraire $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$ de $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$, il s'agit de résoudre le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U}_\eta \in D(\mathbf{A}_\eta) \text{ vérifiant :} \\ (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}_\eta) \mathbf{U}_\eta = \mathbf{F}. \end{cases} \quad (5.38)$$

En d'autres termes, on veut trouver $(u, v) \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$ tel que

$$\begin{cases} u - \lambda v = f_1, \\ v - \lambda z = f_2, \end{cases} \quad (5.39)$$

ce qui implique que $u - \lambda^2 z = f_1 + \lambda f_2$. D'après (5.25) on a donc

$$\langle u, w \rangle_\eta + \lambda^2 m_p(\varepsilon)((u, \mathcal{S}_\eta u), (w, 0)) = \langle f_1 + \lambda f_2, w \rangle_\eta, \quad \forall w \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3. \quad (5.40)$$

D'après le Lemme de Lax-Milgram, on sait qu'il existe un unique $\bar{u} \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3$ tel que (5.40) soit réalisée. En utilisant (5.39), on constate alors que $\bar{\mathbf{U}} := (\bar{u}, (\bar{u} - f_1)/\lambda)$ est un élément de $D(\mathbf{A}_\eta)$ qui vérifie (5.38).

³ D'après le Lemme d'isomorphisme de Banach, toute transformation linéaire, bijective et continue entre deux espaces de Banach est bicontinue (*cf.* Rudin (1978) par exemple).

L'opérateur A_η génère donc un groupe unitaire sur \mathbf{U}_η d'après le Théorème de Stone (Théorème 5.2).

Maintenant, on sait d'après (5.21) que $F(\eta)$ est de classe $C^0([0, T]; \mathbf{U}_\eta)$. Il est important de noter que $F(\eta)$ est à tout instant t dans le domaine de A_η et que

$$A_\eta F(\eta) = (-\ddot{u}^e(\eta), 0). \quad (5.41)$$

Le théorème 5.4 achève la démonstration de la Proposition. □

La Proposition ci-dessus, le résultat de régularité (5.21) et la décomposition (5.19) impliquant que $y^e(\eta) \in C^1([0, T]; \mathbf{Y}_\eta)$, on a le

Théorème 5.8: Sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_7)$, le problème $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$ admet une unique solution de classe $C^1([0, T]; \mathbf{Y}_\eta)$

Un résultat analogue est montré dans Miara (2001).

La question est maintenant d'étudier le comportement de la solution de $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$ lorsque $\eta \rightarrow \bar{\eta}$.

Remarque 5.9: En modifiant la définition de s^e , il est possible de choisir des forces de volume f_η dans $W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega)^3)$ (cf. Weller & Licht, 2004). Ce type d'hypothèse conduit alors à des complications techniques lors de l'analyse asymptotique qui sont exposées dans ce dernier article. Afin de clarifier le propos, on choisit ici une méthode plus directe.

5.5 Les différents comportements asymptotiques

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de l'unique solution $y(\eta)$ de $\mathcal{P}(\eta, \Omega)_p$. On traitera en fait indépendamment le comportement de $y^e(\eta)$ et celui de $y^r(\eta)$. En tant que solution d'un problème quasi-statique, $y^e(\eta)$ a un comportement asymptotique décrit par les résultats obtenus dans le Chapitre précédent. Par contre, on a choisi le cadre de la théorie de Trotter (1958) d'approximation des semi-groupes d'opérateurs agissant sur des *espaces variables* pour traiter l'asymptotique de $y^r(\eta)$.

Pour généraliser le propos, on va considérer quatre cas, indexés par q , de comportements relatifs des paramètres ε et ρ :

$$q = 1 \quad : \quad \rho \rightarrow \bar{\rho} \in]0, +\infty[, \quad (5.42)$$

$$q = 2 \quad : \quad \rho \rightarrow 0 \text{ et } \rho/\varepsilon^2 \rightarrow +\infty, \quad (5.43)$$

$$q = 3 \quad : \quad \rho/\varepsilon^2 \rightarrow \bar{\bar{\rho}} \in]0, +\infty[, \quad (5.44)$$

$$q = 4 \quad : \quad \rho = o(\varepsilon^2). \quad (5.45)$$

Enfin, on fera dans toute la suite l'hypothèse de convergence et de régularité

$$(\mathbf{H}_8^q) \left\{ \begin{array}{l} \cdot (f_\eta, g_\eta, F_\eta, d_\eta, \varphi_{0_\eta}) \text{ converge fortement vers } (f, g, F, d, \varphi_0) \text{ dans} \\ \quad W^{2,1}([0, T], L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Gamma_{mN})^3 \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_{eN}) \times H^1(\Omega)), \\ \cdot (f, g, F, d, \varphi_0) \in C^2([0, T], L^2(\Gamma_{mN})^3 \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_{eN}) \times H^1(\Omega)) \\ \quad \text{si } q = 1, 3. \\ \cdot \frac{\sqrt{\rho}}{\varepsilon}(u^e(\eta))_3 \text{ converge vers } 0 \text{ dans } W^{2,1}([0, T], L^2(\Omega)) \\ \quad \text{si } q = 1, 2. \end{array} \right.$$

Remarque 5.10: Dans les cas $q = 1$ et 2 , le terme $\frac{\sqrt{\rho}}{\varepsilon}$ tend vers $+\infty$ lorsque η tend vers $\bar{\eta}$. Le dernier point de (\mathbf{H}_8^q) est donc une hypothèse assez forte. Sans doute est-il possible de l'interpréter comme proche d'une hypothèse de mise à l'échelle sur le chargement extérieur. Dans cette optique le dernier point de (\mathbf{H}_8^q) demanderait alors au chargement de ne pas induire une réponse quasi-statique dont l'énergie cinétique pourrait tendre vers l'infini, ce qui paraît raisonnable.

5.5.1 Construction du cadre fonctionnel

Les choix concernant les comportement relatifs des paramètres ε et ρ sont directement connectés à la forme que prend l'énergie cinétique mise à l'échelle (5.17). On va voir qu'ils induisent une décomposition particulière de l'espace des déplacements de Kirchhoff-Love en sous-espaces de déplacements bloqués, quasi-statiques ou dynamiques. Cependant, on sera dans l'obligation de traiter chacun de ces sous-espaces indépendamment, **on fera par conséquent dans toute la suite l'hypothèse de découplage** $(\mathbf{H}_p^{\text{découpl}})$.

En fait, la forme que va prendre l'opérateur anti-adjoint limite - noté \mathbf{A} et qui commande au comportement *dynamique* asymptotique de $y(\eta)$ - est dictée par les résultats obtenus en statique ainsi que par la limite de l'énergie cinétique mise à l'échelle (*cf.* (5.17)). On s'emploie dans la suite à montrer comment ces deux éléments permettent "d'intuiter" la définition

de l'opérateur \mathbf{A} en construisant un cadre fonctionnel adapté au problème d'évolution. D'une certaine manière, ce cadre devra ensuite être muni d'une "topologie" relative à la manière dont il convient de comparer les espaces limites aux espaces variables introduits en (5.11)-(5.13). Les convergences qui en résulteront feront partie du cadre opérationnel.

Les espaces limites

On rappelle donc (*cf.* § 4.4.2) que le comportement électromécanique statique limite est donné par une forme bilinéaire sur \mathbf{S}_η :

$$\tilde{m}_p(s, r) = \int_{\Omega} \widetilde{M}_p k(s)_p^0 \cdot k(r)_p^0 dx,$$

avec

$$\begin{aligned} k(w, \psi)_1^0 &= (e_{\alpha\beta}(w), \partial_\alpha \psi) = \left[\begin{pmatrix} e_{11}(w) & e_{12}(w) & 0 \\ e_{12}(w) & e_{22}(w) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_1 \psi \\ \partial_2 \psi \\ 0 \end{pmatrix} \right], \\ k(w, \psi)_2^0 &= (e_{\alpha\beta}(w), \partial_3 \psi) = \left[\begin{pmatrix} e_{11}(w) & e_{12}(w) & 0 \\ e_{12}(w) & e_{22}(w) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_3 \psi \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

et où \widetilde{M}_p est la condensation de M relativement aux composantes de $(e(w), \nabla \psi)$ maintenues dans k_p^0 (*cf.* (4.41) en particulier). Cette forme n'est pas symétrique en général mais elle est coercive sur $\mathbf{V}_{KL} \times \Phi_p$, avec

$$\begin{aligned} \Phi_1 &:= \{\psi \in H_{\Gamma_{eN}}^1(\Omega) : \partial_3 \psi = 0\}, \\ \Phi_2 &:= \{\psi \in L^2(\Omega) : \partial_3 \psi \in L^2(\Omega), \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_{eD} \cap \Gamma_{\pm}\}, \end{aligned}$$

et où l'espace noté \mathbf{V}_{KL} désigne l'ensemble des déplacements de Kirchhoff-Love sur Ω . On rappelle que pour tout élément v de \mathbf{V}_{KL} il existe un unique couple $(\eta_\alpha, \eta_3) \in H^1(\omega) \times H^2(\omega)$ tel que

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, \\ v_3 &= \eta_3, \end{aligned}$$

et qu'il est alors commode de définir

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{V}}_{KL} &:= \{v \in \mathbf{V}_{KL} : \eta_3 = 0\}, \\ \check{\mathbf{V}}_{KL} &:= \{v \in \mathbf{V}_{KL} : \eta_\alpha = 0\}.\end{aligned}$$

L'expression même de la limite ponctuelle de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta$ définie en (5.17) conduit à introduire les espaces

$$\mathbf{V}_q := \widehat{\mathbf{V}}_{KL}, \quad q = 1, 2, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{V}_q := \check{\mathbf{V}}_{KL}, \quad q = 3, 4, \quad (5.47)$$

abritant des éléments dont l'énergie est du coup nécessairement finie.

On peut alors introduire les "espaces des déplacements dynamiques limites" :

$$\mathbf{V}_1^{\text{dyn}} := \widehat{\mathbf{V}}, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{V}_3^{\text{dyn}} := \check{\mathbf{V}}, \quad (5.49)$$

ainsi que les "espaces dynamiques limites" :

$$\mathbf{S}_{p,q}^{\text{dyn}} := \mathbf{V}_q^{\text{dyn}} \times \Phi_p, \quad (5.50)$$

qui portent ce nom parce ce sont les espaces sur lesquels seront posées, dans les cas $q = 1$ et 3 , les équations d'évolution limite découplées.

On introduit enfin l'espace des états électromécaniques limites :

$$\mathbf{S}_{p,q} := \mathbf{V}_q \times \Phi_p, \quad (5.51)$$

et la forme linéaire limite sur $\mathbf{S}_{p,q}$:

$$L_{\bar{\eta}}(r; t) := \int_{\Omega} f(t) \cdot w \, dx + \int_{\Gamma_{mN}} g(t) \cdot w \, ds + \int_{\Omega} F(t) \psi \, dx + \int_{\Gamma_{eN}} d(t) \psi \, ds. \quad (5.52)$$

Remarque 5.11: Dans les cas $q = 2$ et $q = 4$ on va voir que le comportement asymptotique est en fait purement quasi-statique. Ceci explique pourquoi les $\mathbf{V}_q^{\text{dyn}}$ ne sont définis que pour $q = 1$ et 3 .

Comparaison entre les espaces limites et les espaces variables

A cause de la Proposition 4.8 relative aux propriétés de "symétrie" de \tilde{m}_p , les parties symétriques de $m_p(\varepsilon)$ et de \tilde{m}_p définissent des produits scalaires sur \mathbf{S}_η et $\mathbf{S}_{p,q}$ dont les normes sont respectivement notées

$$\|s(\eta)\|_\eta^2 := m_p(\varepsilon)(s(\eta), s(\eta)) \quad (5.53)$$

et

$$\|s\|_{p,q}^2 := \tilde{m}_p(s, s). \quad (5.54)$$

Afin d'établir la convergence des états électromécaniques, on doit pouvoir comparer les éléments de \mathbf{S}_η à ceux de $\mathbf{S}_{p,q}$. On introduit à cette fin l'opérateur P_η :

$$\begin{cases} P_\eta : s \in \mathbf{S}_{p,q} \mapsto P_\eta s \in \mathbf{S}_\eta \text{ tel que :} \\ m_p(\varepsilon)(P_\eta s, r) = \tilde{m}_p(s, r), \quad \forall r \in \mathbf{S}_\eta. \end{cases} \quad (5.55)$$

Le Lemme de Lax-Milgram donne un sens à cette définition.

On a alors la

Proposition 5.12: Les espaces \mathbf{S}_η associés aux opérateurs P_η forment une suite d'espaces de Hilbert approchant $\mathbf{S}_{p,q}$ au sens de Trotter.

Démonstration:

Il s'agit en fait d'établir que :

$$\begin{cases} (i) \exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \|P_\eta s\|_\eta \leq c \|s\|_{p,q}, \quad \forall s \in \mathbf{S}_{p,q}, \\ (ii) \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|P_\eta s\|_\eta = \|s\|_{p,q}, \quad \forall s \in \mathbf{S}_{p,q}. \end{cases} \quad (5.56)$$

Partie (i) :

Tout d'abord, par définition de l'opérateur P_η , on a :

$$\begin{aligned} \|P_\eta s\|_\eta &= m_p(\varepsilon)(P_\eta s, P_\eta s) = \tilde{m}_p(s, P_\eta s) \\ &\leq |\widetilde{M}_p|_{L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))} |k(s)_p^0|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})} |k(P_\eta s)_p^0|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}, \quad \forall s \in \mathbf{S}_{p,q}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Puis, (4.42) implique :

$$|k(s)_p^0|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})} \leq \left\{ \frac{1}{\kappa} \tilde{m}_p(s, s) \right\}^{1/2}, \quad \forall s \in \mathbf{S}_{p,q}. \quad (5.58)$$

Enfin, pour comparer $|k(\mathbf{P}_\eta s)_p^0|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}$ à $m_p(\varepsilon)(\mathbf{P}_\eta s, \mathbf{P}_\eta s)$, il suffit d'utiliser l'hypothèse (\mathbf{H}_3) et de remarquer que, pour $\varepsilon \leq 1$

$$\begin{aligned} |k(\mathbf{P}_\eta s)_p^0|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})} &\leq |k(\varepsilon, \mathbf{P}_\eta s)|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})} \\ &\leq \left\{ \frac{1}{\kappa} m_p(\varepsilon)(\mathbf{P}_\eta s, \mathbf{P}_\eta s) \right\}^{1/2}, \quad \forall s \in \mathbf{S}_{p,q}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Il existe donc une constante positive C indépendante de ε telle que

$$m_p(\varepsilon)(\mathbf{P}_\eta s, \mathbf{P}_\eta s) \leq C \tilde{m}_p(s, s), \quad \forall s \in \mathbf{S}_{p,q}, \quad (5.60)$$

ce qui prouve le point (i).

Partie (ii) :

C'est une conséquence immédiate des résultats obtenus en statique. En effet, l'application $r \mapsto \tilde{m}_p(s, r)$ étant une forme linéaire continue sur \mathbf{S}_η indépendante de η , le Théorème 4.4 permet d'affirmer que l'unique élément $\mathbf{P}_\eta s \in \mathbf{S}_\eta$ défini par (5.55) converge fortement - dans \mathbf{X}_p , cf. (4.58) - vers $s \in \mathbf{S}_{p,q}$. Prenant $r = \mathbf{P}_\eta s$ dans (5.55), on a alors

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{P}_\eta s\|_\eta^2 &= \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} m_p(\varepsilon)(\mathbf{P}_\eta s, \mathbf{P}_\eta s) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \tilde{m}_p(s, \mathbf{P}_\eta s) = \tilde{m}_p(s, s) = \|s\|_{p,q}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

□

Il est important de noter que la convergence de $s(\eta)$ vers s au sens où $\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{P}_\eta s - s(\eta)\|_\eta = 0$ *équivalut* à la convergence forte de $s(\eta)$ vers s dans des espaces "classiques" et à la convergence des "énergies". Plus précisément, on a le

Théorème 5.13: Soit s un élément quelconque de $\mathbf{S}_{p,q}$ et $s(\eta)$ une suite de \mathbf{S}_η . Alors :

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{P}_\eta s - s(\eta)\|_\eta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s(\eta) \rightarrow s \text{ dans } \mathbf{X}_p, \\ \|\mathbf{P}_\eta s - s(\eta)\|_\eta \rightarrow \|s\|_{p,q}. \end{cases} \quad (5.62)$$

Démonstration:

\Rightarrow :

Tout d'abord, \widetilde{M}_p étant dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, il existe une constante C telle que (ε est inférieur à 1) :

$$\|P_\eta s - s(\eta)\|_{p,q}^2 \leq C |k_p^0(P_\eta s - s(\eta))|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |k_p(\varepsilon, (P_\eta s - s(\eta)))|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.63)$$

La coercivité de $m_p(\varepsilon)$ (cf. l'hypothèse (\mathbf{H}_3)) fournit alors :

$$\|P_\eta s - s(\eta)\|_{p,q}^2 \leq \frac{C}{\kappa} \|P_\eta s - s(\eta)\|_\eta^2. \quad (5.64)$$

De plus, puisque $P_\eta s$ converge fortement vers s dans \mathbf{X}_p , on a

$$\|P_\eta s - s\|_{p,q} \rightarrow 0. \quad (5.65)$$

L'inégalité du triangle donne alors

$$\|s(\eta) - s\|_{p,q} \rightarrow 0. \quad (5.66)$$

Par conséquent

$$k_p^0(s(\eta)) \rightarrow k_p^0(s) \text{ dans } L^2(\Omega, \mathcal{H}_p^0). \quad (5.67)$$

Notant que

$$|k_p(\varepsilon, s(\eta))|_{L^2(\Omega)} \leq C \|s(\eta)\|_{p,q} \sim C \|P_\eta s\|_\eta \sim C \|s\|_{p,q}, \quad (5.68)$$

on déduit que $k_p^-(s(\eta)) \rightarrow 0 = k_p^-(s)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{H}_p^-)$. Les inégalités de Korn et de Poincaré fournissent alors le résultat.

\Leftarrow :

Pour ce résultat, cf. *infra* la démonstration du Théorème 5.15.

□

5.5.2 Comportement asymptotique de $s^e(\eta)$

Il est donné par le résultat suivant :

Proposition 5.14: Sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_5^p)$, et lorsque $\eta \rightarrow \bar{\eta}$, la famille $(s^e(\eta)(t))_\eta$ des uniques solutions de (5.20) converge fortement dans \mathbf{X}_p vers l'unique solution $s^e(t)$ de :

$$\begin{cases} \text{Trouver } s \in (0, \varphi_0) + \mathbf{S}_{p,q} \text{ tel que} \\ \tilde{m}_p(s, r) = L_{\bar{\eta}}(r; t) \text{ pour tout } (r, t) \in \mathbf{S}_{p,q} \times [0, T]. \end{cases} \quad (5.69)$$

Démonstration:

Il y a deux différences entre ce théorème et le Théorème 4.4 démontré au Chapitre précédent :

- Le second membre dans (5.20) varie avec η , il était fixe au Chapitre précédent.
- Le dernier point de l'hypothèse (\mathbf{H}_8^q) impose à la partie en flexion du déplacement de converger fortement vers 0 dans $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)$ si $q = 1$.

Ces deux différences n'induisent pas de difficultés car :

- L'hypothèse (\mathbf{H}_8^q) indique que $L_\eta(r, t)$ converge uniformément sur $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega) \times [0, T]$ vers $L_{\bar{\eta}}(r; t)$. On est donc dans le cadre élargi de l'étude statique comme indiqué dans la Remarque 4.6.
- La construction du cadre fonctionnel au Paragraphe précédent, la définition de $\mathbf{S}_{p,q}$ et les hypothèses de découplage $(\mathbf{H}_p^{\text{découpl}})$ permettent de traduire que la partie en flexion du déplacement limite est nulle lorsque $q = 1$.

□

Notons de plus que les hypothèse de convergence et de régularité résumées en (\mathbf{H}_8^q) impliquent que

Dans les cas $q = 1$ et 3 , u^e est de classe $C^2([0, T]; \mathbf{S}_{p,q})$.

(5.70)

On préfère retenir les résultats de convergence de $s^e(\eta)$ sous la forme du

Théorème 5.15: Soient $(s^e(\eta))_\eta \in \mathbf{S}_\eta$ la famille des uniques solutions de (5.20) et s^e l'unique solution de (5.69), on a :

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|P_\eta s^e(t) - s^e(\eta)(t)\|_\eta = 0, \quad (5.71)$$

uniformément sur $[0, T]$.

Démonstration:

Ce résultat s'obtient à partir des convergences fortes

$$P_\eta s^e \rightarrow s^e \text{ dans } \mathbf{S}_p, \quad (5.72)$$

$$s^e(\eta) \rightarrow s^e \text{ dans } \mathbf{S}_p, \quad (5.73)$$

obtenues précédemment. Elles impliquent que $P_\eta s^e - s^e(\eta)$ converge fortement vers 0 dans \mathbf{S}_p .

On écrit alors

$$\begin{aligned} 2\|P_\eta s^e - s^e(\eta)\|_\eta &= m_p(\varepsilon)[P_\eta s^e - s^e(\eta), P_\eta s^e - s^e(\eta)] \\ &= m_p(\varepsilon)[P_\eta s^e, P_\eta s^e - s^e(\eta)] - m_p(\varepsilon)[s^e(\eta), P_\eta s^e - s^e(\eta)] \\ &= \tilde{m}_p[s^e, P_\eta s^e - s^e(\eta)] - L_\eta(P_\eta s^e - s^e(\eta)). \end{aligned} \quad (5.74)$$

On obtient le résultat en remarquant que, grâce à l'hypothèse (\mathbf{H}_8^q) , les $\|P_\eta s^e - s^e(\eta)\|_\eta$ forment une suite équicontinue sur $[0, T]$.

□

5.5.3 Comportement asymptotique de $s^r(\eta)$

Dans un premier temps, on étudie le comportement asymptotique des $U^r(\eta)$, car les équations d'évolution ne concernent pas le potentiel électrique. Cette étude nécessite l'introduction de son propre cadre opérationnel, différent du précédent et permettant une formulation en terme de semi-groupes d'opérateurs linéaires. On verra à la fin de la section que le comportement asymptotique des $s^r(\eta)$ découlera de celui des $U^r(\eta)$.

Cadre opérationnel

On associe aux comportements limites de l'énergie cinétique les espaces

$$\mathbf{K}_1 := \{v \in L^2(\Omega)^3 : v = (v_1, v_2, 0), v_\alpha(x) = v_\alpha(\hat{x}), v_\alpha \in L^2(\omega)\} \quad (5.75)$$

$$\mathbf{K}_3 := \{v \in H^{-1}(\Omega)^3 : \exists \eta \in L^2(\omega), v_\alpha = -x_3 \partial_\alpha \eta, v_3 = \eta\}, \quad (5.76)$$

munis des produits scalaires :

$$\begin{cases} K_1(v, w) := \bar{\rho} \int_\Omega v_\alpha w_\alpha \delta(x) dx, \text{ sur } \mathbf{K}_1, \\ K_3(v, w) := \bar{\rho} \int_\Omega v_3 w_3 \delta(x) dx, \text{ sur } \mathbf{K}_3. \end{cases} \quad (5.77)$$

Pour $q = 1$ ou 3 , on définit enfin l'espace limite des phases (mécaniques) :

$$\mathbf{U}_{p,q} := \mathbf{V}_q^{\text{dyn}} \times \mathbf{K}_q. \quad (5.78)$$

Procédant comme en (5.24), on définit un opérateur *linéaire, continu et bijectif* \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : u \in \mathbf{V}_{KL} &\mapsto \mathcal{S}u := \varphi \in \Phi_p \\ &\text{tel que } \tilde{m}_p((u, \varphi), (0, \psi)) = 0, \quad \forall \psi \in \Phi_p, \end{aligned} \quad (5.79)$$

qui permet (*cf.* en particulier (5.28) et la Proposition 5.7) de munir $\mathbf{U}_{p,q}$ d'une structure hilbertienne avec le produit scalaire

$$\boxed{\llbracket \mathbf{U}, \mathbf{U}' \rrbracket_{p,q} := \tilde{m}_p((u, \mathcal{S}u), (u', 0)) + k_q(v, v').} \quad (5.80)$$

On note $\|\cdot\|_{p,q}$ la norme associée.

Remarque 5.16: (**IMPORTANTE**)

On rappelle tout d'abord que

$$\hat{\Phi}_1 = \Phi_1, \quad (5.81)$$

$$\check{\Phi}_1 = \{0\}, \quad (5.82)$$

$$\hat{\Phi}_2 = \{\varphi \in \Phi_2 : \varphi \text{ impaire en } x_3\}, \quad (5.83)$$

$$\check{\Phi}_2 = \{\varphi \in \Phi_2 : \varphi \text{ paire en } x_3\}, \quad (5.84)$$

représentent les “espaces électriques limites découplés”.

Il faut noter que \mathcal{S} applique $\hat{\mathbf{V}}_{KL}$ dans $\hat{\Phi}_p$ et $\check{\mathbf{V}}_{KL}$ dans $\check{\Phi}_p$. Ceci découle de l'hypothèse de découplage ($\mathbf{H}_p^{\text{découpl}}$), qui implique la relation suivante :

$$\tilde{m}_p(s, r) = \tilde{m}_p(\hat{s}, \hat{r}) + \tilde{m}_p(\check{s}, \check{r}), \quad \forall s, r \in \mathbf{S}_p. \quad (5.85)$$

Ainsi, $\widehat{\mathcal{S}u} = \mathcal{S}\widehat{u}$, $\check{\mathcal{S}u} = \mathcal{S}\check{u}$ et

$$\boxed{(u, \mathcal{S}u) = (\widehat{u}, \mathcal{S}\widehat{u}) + (\check{u}, \mathcal{S}\check{u}), \quad \forall u \in \mathbf{V}_{KL}.} \quad (5.86)$$

L'étude de la convergence des phases nécessite comme précédemment l'introduction d'un opérateur permettant de comparer les éléments de \mathbf{U}_η à ceux de $\mathbf{U}_{p,q}$. Cet opérateur est noté \mathbf{Q}_η et est défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_\eta : \mathbf{U} \in \mathbf{U}_{p,q} = (u, v) \mapsto \mathbf{Q}_\eta \mathbf{U} := (u_\eta, v_\eta) \in \mathbf{U}_\eta \text{ tel que :} \\ \cdot m_p(\varepsilon)((u_\eta, \mathcal{S}_\eta u_\eta), (w, 0)) = \tilde{m}_p((u, \mathcal{S}u), (w, 0)), \quad \forall w \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3, \\ \cdot v_\eta = v \text{ si } q = 1 \text{ et } v_\eta = (0, v_3) \text{ si } q = 3. \end{cases} \quad (5.87)$$

En résumé, cela signifie que, pour tout \mathbf{U} dans $\mathbf{U}_{p,q}$ et tout \mathbf{U}' dans \mathbf{U}_η :

$$\boxed{\ll \mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}, \mathbf{U}' \gg_\eta = \ll \mathbf{U}, \mathbf{U}' \gg_{p,q}.} \quad (5.88)$$

Les arguments développés dans la démonstration de la Proposition 5.12 (résultats de convergence obtenus en statique associés à l'hypothèse (\mathbf{H}_3) et à (4.42)) permettent d'aboutir à la

Proposition 5.17: Les espaces \mathbf{U}_η associés aux opérateurs de projection \mathbf{Q}_η forment une suite d'espaces de Hilbert approchant $\mathbf{U}_{p,q}$.

On rappelle que cela signifie :

$$\begin{cases} \exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}\|_\eta \leq c \|\mathbf{U}\|_{p,q}, \\ \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}\|_\eta = \|\mathbf{U}\|_{p,q}, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbf{U}_{p,q}. \end{cases} \quad (5.89)$$

Dans les cas $q = 1$ et $q = 3$, le problème limite va mettre en jeu une équation d'évolution analogue à (5.26) mais gouvernée par un opérateur que l'on notera \mathbf{A} .

L'opérateur \mathbf{A}

Il est défini par

$$\begin{cases} D(\mathbf{A}) = \{ \mathbf{U} = (u, v) \in \mathbf{U}_{p,q} : v \in \mathbf{V}_{p,q}^{\text{dyn}}, \exists ! z \in \mathbf{K}_q \text{ tel que} \\ \quad k_q(z, w) + \tilde{m}_p((u, \mathcal{S} u), (w, 0)) = 0, \forall w \in \mathbf{V}_{p,q}^{\text{dyn}} \}, \\ \mathbf{A} \mathbf{U} = (v, z). \end{cases} \quad (5.90)$$

Des arguments absolument similaires à ceux de la démonstration de la Proposition 5.7 conduisent alors à la

Proposition 5.18: L'opérateur \mathbf{A} est antiadjoint.

Ainsi, tout comme \mathbf{A}_η le faisait dans \mathbf{U}_η , l'opérateur \mathbf{A} génère un groupe unitaire sur $\mathbf{U}_{p,q}$.

On peut alors considérer le problème limite

$$\boxed{\begin{cases} \text{Trouver } s^r \in \mathbf{S}_{p,q}^{\text{dyn}} \text{ tel que} \\ K_q(\ddot{u}^r, w) + \tilde{m}_p(s^r, r) = -K_q(\ddot{u}^e, w), \\ \quad \forall r = (w, \psi) \in \mathbf{S}_{p,q}^{\text{dyn}}, \forall t \in]0, T[, \\ u^r(0) = u^0 - u^e(0), \\ \dot{u}^r(0) = v^0 - \dot{u}^e(0), \end{cases}} \quad (5.91)$$

et le reformuler en

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}^r = \mathbf{A} \mathbf{U}^r + \mathbf{F}^r, \\ \mathbf{U}^r(0) = \mathbf{U}^0 - \mathbf{U}^e(0), \end{cases}} \quad (5.92)$$

avec un second membre \mathbf{F}^r défini par :

$$\boxed{\mathbf{F}^r := (0, -\ddot{u}^e).} \quad (5.93)$$

Etant donné que \ddot{u}^e est $C^0([0, T]; \mathbf{S}_{p,q})$ (cf. (5.70)), le Théorème 5.4 implique le

Théorème 5.19: Sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_9)$ et $(\mathbf{H}_p^{\text{découpl}})$, l'équation d'évolution (5.92) admet une unique solution de classe $C^1([0, T]; \mathbf{U}_{p,q})$.

On va maintenant montrer que cette unique solution décrit le comportement asymptotique dynamique de $\mathbf{U}^r(\eta)$.

Résultats de convergence des $U^r(\eta)$

En formulant l'hypothèse supplémentaire de compatibilité entre l'état et le chargement électromécaniques à l'instant initial :

$$(\mathbf{H}_9) \begin{cases} \cdot \text{ si } q = 1, 3 : & \exists U^{r0} \in -U^e(0) + D(A) \text{ tel que} \\ & \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|Q_\eta U^0 - U^0(\eta)\|_\eta = 0, \\ \cdot \text{ si } q = 2, 4 : & \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|U_\eta^{r0}\|_\eta = 0, \end{cases}$$

on peut énoncer le

Théorème 5.20: Sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_9)$ et $(\mathbf{H}_p^{\text{découpl}})$, l'unique solution de (5.26) (notée $U^r(\eta)$ et de classe $C^1([0, T]; \mathbf{U}_\eta)$) vérifie

$$\begin{cases} \text{si } q = 2 \text{ ou } 4 : \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|U^r(\eta)\|_\eta = 0, \\ \text{si } q = 1 \text{ ou } 3 : \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|Q_\eta U^r - U^r(\eta)\|_\eta = 0. \end{cases} \quad (5.94)$$

Démonstration:

Comme on l'a dit précédemment, il s'agit de démontrer que (5.92)-(5.93) décrit le comportement dynamique limite $U^r(\eta)$, ce que la théorie de Trotter d'approximation des semi-groupes d'opérateurs agissant sur des espaces variables va permettre sans trop de difficultés.

Dans ce cadre bien précis, on rappelle (*cf.* § 5.2) que trois conditions sont nécessaires à l'obtention du résultat de convergence désiré :

- 1. Convergence des résolvantes :

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|(I - \lambda A_\eta)^{-1} Q_\eta V - Q_\eta (I - \lambda A)^{-1} V\|_\eta = 0, \quad \forall (\lambda, V) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbf{U}_{p,3}. \quad (5.95)$$

- 2. Convergence des conditions initiales :

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|Q_\eta U^r(0) - U^r(\eta)(0)\|_\eta = 0. \quad (5.96)$$

- 3. Convergence des seconds membres :

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \int_0^T \|Q_\eta F^r - F^r(\eta)\|_\eta dt = 0. \quad (5.97)$$

Le cas $q = 3$ correspondant au cas classique en théorie des plaques purement élastiques, on commence par celui-ci.

Cas $q = 3$:

Démonstration de la convergence des résolvantes :

Considérons un élément quelconque $V := (\mathcal{V}, \mathcal{W})$ de $\mathbf{U}_{p,3}$. On pose $\mathbf{Q}_\eta V = V(\eta) := (\mathcal{V}(\eta), \mathcal{W}(\eta)) \in \mathbf{U}_\eta$. Les opérateurs \mathbf{A}_η et \mathbf{A} étant maximaux, on sait qu'il existe $\mathbf{U}(\eta) = (u(\eta), v(\eta)) \in D(\mathbf{A}_\eta)$ et $\mathbf{U} = (u, v) \in D(\mathbf{A})$ tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(\eta) = (I - \lambda \mathbf{A}_\eta)^{-1} \mathbf{Q}_\eta \mathbf{V}, \\ \mathbf{U} = (I - \lambda \mathbf{A})^{-1} \mathbf{V}. \end{cases} \quad (5.98)$$

Ces éléments sont donnés par (*cf.* (5.40)) :

$$\begin{cases} \langle u(\eta), w \rangle_\eta + \lambda^2 m_p(\varepsilon)[(u(\eta), \mathcal{S}_\eta u(\eta)), (w, 0)] = \langle \mathcal{V}(\eta) + \lambda \mathcal{W}(\eta), w \rangle_\eta, \\ \quad \forall w \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3, \\ v(\eta) = (u(\eta) - \mathcal{V}(\eta))/\lambda, \end{cases} \quad (5.99)$$

et

$$\begin{cases} k_3(u, w) + \lambda^2 \tilde{m}_p[(u, \mathcal{S} u), (w, 0)] = k_3(\mathcal{V} + \lambda \mathcal{W}, w), & \forall w \in V_{p,3}^{dyn}, \\ v = (u - \mathcal{V})/\lambda. \end{cases} \quad (5.100)$$

Il convient donc de montrer que

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U} - \mathbf{U}(\eta)\|_\eta = 0, \quad (5.101)$$

i.e. il faut étudier le comportement asymptotique de (5.99), étude qui ne va pas nécessiter d'autres arguments que ceux utilisés dans le cas de la statique et mis en oeuvre dans la démonstration du Théorème 4.4. Cependant, bien que les arguments utilisés soient identiques, il convient de sérier les différences d'avec le cas statique, *i.e.* les différences entre (5.99) et (4.4.1) :

- i) Le second membre dans (5.99) est variable, il est fixe dans (4.4.1).
- ii) Il apparaît dans la forme bilinéaire du membre de gauche de (5.99) un terme supplémentaire “d’énergie cinétique”.

La difficulté concernant le second membre variable a déjà été évoquée dans la Remarque 4.6 ainsi que dans l’étude du comportement asymptotique quasi-statique lors de la démonstration de la Proposition 5.14. Il n’est pas inutile de remarquer qu’ici, le second membre est construit sur le produit scalaire relatif l’énergie cinétique mise à l’échelle. Il s’agit donc d’une forme linéaire continue sur $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3$.

Rappelons d’autre part que :

- $\mathcal{V}(\eta)$ converge fortement vers \mathcal{V} dans $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3$ lorsque $\eta \rightarrow \bar{\eta}$ (cf. la partie (ii) de la démonstration de la Proposition 5.12),
- $\mathcal{W}(\eta) = (0, \mathcal{W}_3)$,

et qu’ainsi la forme linéaire $\langle \mathcal{V}(\eta) + \lambda \mathcal{W}(\eta), \cdot \rangle_\eta$ converge uniformément sur $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3$ vers la forme linéaire $K_3(\mathcal{V} + \lambda \mathcal{W}, \cdot)$.

Quant au terme (dit “d’énergie cinétique”) supplémentaire dans le membre de gauche de (5.99), il s’intègre à la démarche classique (majoration *a priori*, convergence faible, convergence forte) utilisée pour la démonstration du Théorème 4.4 :

- Le terme supplémentaire étant défini positif (c’est un produit scalaire), on peut obtenir des résultats de bornitude en suivant les arguments développés dans la première partie de la démonstration du Théorème (4.4).
- La méthode développée par Ciarlet (1997) pp. 37, 38 peut être utilisée telle quelle pour dégager la forme bilinéaire limite \tilde{m}_p puisque le terme $\varepsilon^\alpha \langle u(\eta), w \rangle_\eta$ tend vers 0 dès que α est positif.
- Puisque $\rho \int_\Omega u(\eta)_\alpha w_\alpha \delta(x) dx \xrightarrow{\eta \rightarrow \bar{\eta}} 0$ pour tout élément w de $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3$, le terme d’énergie cinétique utilisé dans (5.100) est justifié.
- Les résultats de convergence forte peuvent être obtenu en utilisant, là aussi, les arguments avancés dans la quatrième partie de la démonstration du Théorème 4.4, augmentés de l’injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ pour passer à la limite sur $\langle u(\eta), u(\eta) \rangle_\eta$.

Enfin, la forme linéaire limite s’annulant sur $\mathbf{V}_{p,3}^{\text{stat}}$, l’hypothèse de découplage ($\mathbf{H}_p^{\text{découpl}}$) permet d’affirmer que $u(\eta)$ converge fortement - dans $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3$ - vers un élément u de $\mathbf{V}_{p,3}^{\text{dyn}}$ lorsque $\eta \rightarrow \bar{\eta}$. De la définition de $v(\eta)$ et de v , on déduit que

$$\mathbf{U}(\eta) \xrightarrow[\eta \rightarrow \bar{\eta}]{} \mathbf{U} \text{ dans } \mathbf{U}_\eta. \quad (5.102)$$

Par conséquent, en posant $w = u(\eta)$ dans (5.99) on obtient, en passant à la limite sur η :

$$\langle u(\eta), u(\eta) \rangle_\eta \rightarrow K_3(u, u), \quad (5.103)$$

$$\langle v(\eta), v(\eta) \rangle_\eta \rightarrow K_3(v, v), \quad (5.104)$$

$$\langle \mathcal{V}(\eta) + \lambda \mathcal{W}(\eta), u(\eta) \rangle_\eta \rightarrow K_3(\mathcal{V} + \lambda \mathcal{W}, u). \quad (5.105)$$

On en tire donc que

$$\begin{aligned} \langle v(\eta), v(\eta) \rangle_\eta + m_p(\varepsilon)[(u(\eta), \mathcal{S}_\eta u(\eta)), (u(\eta), 0)] \\ \rightarrow K_3(v, v) + \tilde{m}_p[(u, \mathcal{S}u), (u, 0)]. \end{aligned} \quad (5.106)$$

En d'autres termes, on a

$$\|\mathbf{U}(\eta)\|_\eta \xrightarrow[\eta \rightarrow \bar{\eta}]{} \|\mathbf{U}\|_{p,3}. \quad (5.107)$$

En procédant comme dans la partie (ii) de la preuve de la Proposition 5.12, on observe que $\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}$ converge fortement vers \mathbf{U} dans $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U} - \mathbf{U}(\eta)\|_\eta^2 &= \|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}\|_\eta^2 + \|\mathbf{U}(\eta)\|_\eta^2 - 2 \ll \mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}, \mathbf{U}(\eta) \gg_\eta \\ &= \|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}\|_\eta^2 + \|\mathbf{U}(\eta)\|_\eta^2 - 2 \ll \mathbf{U}, \mathbf{U}(\eta) \gg_{p,3}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

De (5.102) et (5.107) découle alors le résultat recherché :

$$\|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U} - \mathbf{U}_\eta\|_\eta^2 \rightarrow \|\mathbf{U}\|_{p,3}^2 + \|\mathbf{U}\|_{p,3}^2 - 2\|\mathbf{U}\|_{p,3}^2 = 0. \quad (5.109)$$

Convergence des conditions initiales :

Elle est donnée par l'hypothèse (**H**₉) qui traduit une condition de compatibilité entre l'état et le chargement électromécaniques à l'instant initial. Elle signifie que

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}^r(0) - \mathbf{U}^r(\eta)(0)\|_\eta = 0. \quad (5.110)$$

Convergence des seconds membres :

De (5.93) et (5.87), on tire que $\mathbf{Q}_\eta \mathbf{F}^r = \mathbf{F}^r$. Par conséquent

$$\|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{F}^r - \mathbf{F}^r(\eta)\|_\eta^2 = \|\mathbf{F}^r - \mathbf{F}^r(\eta)\|_\eta^2 = \langle \ddot{u}^e - \ddot{u}^e(\eta), \ddot{u}^e - \ddot{u}^e(\eta) \rangle_\eta. \quad (5.111)$$

L'hypothèse (\mathbf{H}_8^q) impliquant la convergence uniforme sur $[0, T]$ de $\ddot{u}^e(\eta)$ vers \ddot{u}^e dans $L^1(\Omega)$, on a le résultat.

Cas $q = 1$:

La démarche est sensiblement identique, il convient cependant de travailler "en vitesse" pour traiter la convergence des résolvantes.

Démonstration de la convergence des résolvantes :

On considère ici un élément quelconque $\mathbf{V} := (\mathcal{V}, \mathcal{W})$ de $\mathbf{U}_{p,1}$ et on pose

$$\begin{cases} \mathbf{U}_\eta = (I - \lambda \mathbf{A}_\eta)^{-1} \mathbf{Q}_\eta \mathbf{V}, \\ \mathbf{U} = (I - \lambda \mathbf{A})^{-1} \mathbf{V}. \end{cases} \quad (5.112)$$

Ces éléments sont donnés par :

$$\begin{aligned} & \langle v(\eta), w \rangle_\eta + \lambda^2 m_p(\varepsilon) [(v(\eta), \mathcal{S}_\eta v(\eta)), (w, 0)] \\ &= \langle \mathcal{W}(\eta), w \rangle_\eta - \lambda m_p(\varepsilon) [(\mathcal{V}(\eta), \mathcal{S}_\eta \mathcal{V}(\eta)), (w, 0)] \\ &= \ll \mathbf{Q}_\eta \mathbf{V}, (\lambda w, w) \gg_\eta, \forall w \in H_{\Gamma_{m_D}}^1(\Omega)^3, \end{aligned} \quad (5.113)$$

et

$$\begin{aligned} & k_1(v, w) + \lambda^2 \tilde{m}_p[(v, \mathcal{S} v), (w, 0)] \\ &= k_1(\mathcal{W}, w) - \lambda \tilde{m}_p[(\mathcal{V}, \mathcal{S} \mathcal{V}), (w, 0)], \\ &= \ll \mathbf{V}, (\lambda w, w) \gg_{p,1}, \forall w \in V_{p,1}^{\text{dyn}}, \end{aligned} \quad (5.114)$$

ainsi que par :

$$u(\eta) = \mathcal{V}(\eta) + \lambda v(\eta), \quad (5.115)$$

$$u = \mathcal{V} + \lambda v. \quad (5.116)$$

Contrairement au cas $q = 3$, le terme “d’énergie cinétique” est ici un peu problématique car ρ/ε^2 tend vers $+\infty$. Cependant, les techniques de majoration *a priori* pouvant être mises en oeuvre, on peut tout d’abord conclure à la bornitude de $\langle v(\eta), v(\eta) \rangle_\eta$. Ceci implique que :

$$v_3(\eta) \rightarrow 0 \text{ dans } H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3. \quad (5.117)$$

Ainsi, en considérant un élément quelconque $w = (0, w_3)$ dans $H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega)^3$, on remarque que $\varepsilon^2 \langle v(\eta), w \rangle_\eta$ tend vers 0. Ainsi, comme dans le cas $q = 3$ (et comme en statique), la méthode développée par Ciarlet (1997) pp. 37, 38 peut être utilisée telle quelle pour dégager la forme bilinéaire limite \tilde{m}_p . Malgré sa forme, le terme supplémentaire dit “d’énergie cinétique” ne pose donc pas de difficulté.

Remarquant ensuite que $\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}(\eta)_3 = 0$ par définition même, on conclut à la convergence des résolvantes exactement comme dans le cas $q = 3$.

Convergence des conditions initiales :

Elle est donnée là aussi par l’hypothèse (**H**₉) traduisant la compatibilité entre l’état et le chargement électromécaniques à l’instant initial.

Convergence des seconds membres :

La difficulté est ici que $\frac{\rho}{\varepsilon^2} \xrightarrow[\eta \rightarrow \bar{\eta}]{} +\infty$, difficulté résolue par l’hypothèse (**H**₈^q). On a en effet :

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{F}^r - \mathbf{F}^r(\eta)\|_\eta^2 = \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{F}^r - \mathbf{F}^r(\eta)\|_\eta^2 = \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \frac{\rho}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (u^\varepsilon(\eta)_3)^2 \delta(x) dx = 0. \quad (5.118)$$

Cas $q = 2$:

Les deux cas restants sont singuliers. On va en effet montrer que pour $q = 2$ et $q = 4$, il n’y a pas d’équation d’évolution à la limite. Plus

précisément, montrons que $\|\mathbf{U}^r(\eta)(t)\|_\eta$ converge uniformément vers 0 sur $[0, T]$.

On note $(\mathcal{G}_\eta(t))_{t \in \mathbb{R}}$ le groupe unitaire engendré par l'opérateur \mathbf{A}_η . La solution classique de (5.26) s'écrit alors sous la forme

$$\mathbf{U}^r(\eta)(t) = \mathcal{G}_\eta(t) \mathbf{U}^r(\eta)(0) + \int_0^t \mathcal{G}_\eta(t - \tau) \mathbf{F}^r(\eta)(\tau) d\tau, \quad (5.119)$$

et on a

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathcal{G}_\eta(t - \tau) \mathbf{F}^r(\eta)(\tau) d\tau \right\|_\eta &\leq \int_0^t \|\mathbf{F}^r(\eta)(\tau)\|_\eta d\tau \\ &= \rho \int_0^t (|\ddot{u}^e(\eta)_\alpha|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\ddot{u}^e(\eta)_3|_{L^2(\Omega)}^2) d\tau. \end{aligned} \quad (5.120)$$

De par l'hypothèse (\mathbf{H}_8^q) , le membre droite tend vers 0 lorsque η tend vers $\bar{\eta}$.

D'autre part, on a, d'après (\mathbf{H}_9) :

$$\|\mathcal{G}_\eta(t) \mathbf{U}^r(\eta)(0)\|_\eta \leq \|\mathbf{U}^r(\eta)(0)\|_\eta \rightarrow 0. \quad (5.121)$$

On en déduit que $\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{U}^r(\eta)(t)\|_\eta = 0$ uniformément sur $[0, T]$.

Cas $q = 4$:

Ce cas ne diffère du précédent que sur un point. Dans (5.120), puisque $\frac{\rho}{\varepsilon^2}$ tend désormais vers 0, on obtient que

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}_\eta(t - \tau) \mathbf{F}^r(\eta)(\tau) d\tau \right\|_\eta \leq \int_0^t \|\mathbf{F}^r(\eta)(\tau)\|_\eta d\tau \rightarrow 0, \quad (5.122)$$

sans avoir recours à une hypothèse sur le chargement extérieur.

On peut donc aussi dans le cas $q = 4$ conclure que $\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{U}^r(\eta)(t)\|_\eta = 0$ uniformément sur $[0, T]$.

□

Conséquence : résultats de convergence des $s^r(\eta)$

Récapitulons, on connaît désormais le comportement asymptotique de $s^e(\eta) = (u^e(\eta), \varphi^e(\eta))$ ainsi que celui de $\mathbf{U}^r(\eta) = (u^r(\eta), \dot{u}^r(\eta))$. Désirant

présenter le comportement asymptotique de l'état électromécanique $s(\eta) = (u(\eta), \varphi(\eta))$, il nous manque celui du potentiel électrique $\varphi^r(\eta) = \mathcal{S}_\eta u^r(\eta)$. L'idéal serait que la limite de $\mathcal{S}_\eta u^r(\eta)$ soit liée à $\mathcal{S}u^r$. C'est effectivement le cas et on a la

Proposition 5.21: On note $\varphi^r(\eta) := \mathcal{S}_\eta u^r(\eta)$ et $\varphi^r := \mathcal{S}u^r$. Dans les cas $q = 1, 2, 3$ et 4 , on a le résultat de convergence :

$$\mathcal{S}_\eta u^r(\eta) \rightarrow \mathcal{S}u^r \text{ dans } H_{\Gamma_{eD}}^1(\Omega). \quad (5.123)$$

Démonstration:

Il s'agit d'une variante de la preuve de la convergence faite dans le cas statique (*cf.* le Théorème 4.4).

On note $s^r(\eta) := (u^r(\eta), \varphi^r(\eta))$.

Résultats de bornitude des $s^r(\eta)$:

Dans les cas $q = 1$ et $q = 3$, on a vu que $\|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}^r - \mathbf{U}^r(\eta)\|_\eta$ tendait vers 0. Ceci implique en particulier la bornitude de $\|\mathbf{U}^r(\eta)\|_\eta$ puisque

$$\|\mathbf{U}^r\|_{p,q} = \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}^r\|_\eta = \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{U}^r(\eta)\|_\eta. \quad (5.124)$$

(Dans les cas $q = 2$ et $q = 4$, $\|\mathbf{U}^r(\eta)\|_\eta$ est aussi borné car cette norme tend vers 0).

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}^r\|_\eta &\geq m_p(\varepsilon)[(u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta)), (u^r(\eta), 0)] \\ &= m_p(\varepsilon)[(u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta)), (u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta))] \\ &= m_p(\varepsilon)(s^r(\eta), s^r(\eta)). \end{aligned} \quad (5.125)$$

La coercivité de M implique par conséquent la bornitude dans $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ de $k_p(\varepsilon)(s^r(\eta))$. A son tour, ceci implique la bornitude de $s^r(\eta)$ dans \mathbf{S}_p .

A l'extraction une sous-suite près, on a donc les résultats de convergence suivants :

$$s^r(\eta) \rightharpoonup s := (u^r, \mathcal{F}) \text{ dans } \mathbf{S}_p, \quad (5.126)$$

$$k_p(\varepsilon)(s^r(\eta)) \rightharpoonup \bar{k}_p \text{ dans } L^2(\Omega, \mathcal{H}), \quad (5.127)$$

$$(k(s^r(\eta)))_p^- \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega, \mathcal{H}), \quad (5.128)$$

$$(k(s))_p^0 = (\bar{k}_p)_p^0. \quad (5.129)$$

Notons que la relation $(\bar{k}_p)_p^+ = 0$ est acquise.

On établit que $(M\bar{k}_p)_p^- = 0$:

Il faut vérifier que les points (i), (ii) et (iii) de la démonstration du Théorème 4.4 permettent d'obtenir le résultat souhaité (il s'agit de mettre en oeuvre la méthode développée par Ciarlet (1997) pp. 37, 38).

On note tout d'abord que, pour tout $r \in \mathbf{S}_p$, la bornitude de $k_p(\varepsilon)(s^r(\eta))$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ implique celle $m_p(\varepsilon)(s^r(\eta), r)$. En effet, ceci découle de

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M k_p(\varepsilon)(s^r(\eta)) \cdot k_p(\varepsilon)(r) \, dx \\ \leq |M|_{L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}))} \|k_p(\varepsilon)(s^r(\eta))\|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})} \|k_p(\varepsilon)(r)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})} \\ \leq C \|k_p(\varepsilon)(r)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}, \quad \forall r \in \mathbf{S}_p. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Par conséquent, les points (i) et (ii) peuvent être utilisés.

Ayant de plus par définition

$$m_p(\varepsilon)(s^r(\eta), (0, \psi)) = \int_{\Omega} M k_p(\varepsilon)(s^r(\eta)) \cdot k_p(\varepsilon)(0, \psi) \, dx = 0, \quad \forall \psi \in H_{\Gamma_{mD}}^1(\Omega), \quad (5.131)$$

on est assuré que le point (iii) est utilisable (il suffit de multiplier par ε et de le faire tendre vers 0).

Ces résultats montrent que

$$(M\bar{k}_p)_p^- = 0. \quad (5.132)$$

On montre que $\mathcal{F} = \mathcal{S}u^r$:

Procédant comme dans la troisième étape de la démonstration du Théorème 4.4, on déduit que pour tout $r \in \mathbf{S}_p$:

$$m_p(\varepsilon)(s^r(\eta), r) \rightarrow \tilde{m}_p(s^r, r). \quad (5.133)$$

Mais comme on a aussi

$$m_p(\varepsilon)(s^r(\eta), (0, \psi)) = 0, \quad \forall \psi \in \Phi_p, \quad (5.134)$$

on déduit que

$$0 = \tilde{m}_p(s^r, (0, \psi)) \quad (5.135)$$

$$= \tilde{m}_p((u, \mathcal{F}), (0, \psi)), \forall \psi \in \Phi_p. \quad (5.136)$$

Par conséquent, on a bien que $\mathcal{F} = \mathcal{S}u^r$. On établit ainsi que toute la suite $\mathcal{S}_\eta u_\eta^r$ converge faiblement vers $\mathcal{S}u^r$ dans Φ_p .

La convergence est forte :

La démarche est identique à la quatrième étape de la démonstration du Théorème 4.4. Il suffit d'établir la convergence forte de $(k(s^r(\eta)))_p^0$ vers $(k(s^r))_p^0$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{H})$. On écrit donc que

$$\begin{aligned} \eta |(k(s^r(\eta)))_p^0 - (k(s^r))_p^0|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}^2 &\leq \eta |k(s^r(\eta)) - \bar{k}(s^r)|_{L^2(\Omega, \mathcal{H})}^2 \\ &\leq \int_{\Omega} M(k(\varepsilon, s^r(\eta)) - \bar{k}_p) \cdot (k(\varepsilon, s^r(\eta)) - \bar{k}_p) dx \\ &\leq \int_{\Omega} M k(\varepsilon, s^r(\eta)) \cdot k(\varepsilon, s^r(\eta)) dx - \int_{\Omega} M \bar{k}_p \cdot k(\varepsilon, s^r(\eta)) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} M (k(\varepsilon, s^r(\eta)) - \bar{k}_p) \cdot \bar{k}_p dx. \quad (5.137) \end{aligned}$$

Sachant que $k(\varepsilon, s^r(\eta))$ converge faiblement vers \bar{k}_p dans $L^2(\Omega, \mathcal{H})$, les deux derniers termes tendent respectivement vers $-\int_{\Omega} M \bar{k}_p \cdot \bar{k}_p dx$ et 0. Or,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M \bar{k}_p \cdot \bar{k}_p dx &= \int_{\Omega} \widetilde{M}_p(\bar{k}_p)_p^0 \cdot (\bar{k}_p)_p^0 dx \\ &= \tilde{m}_p[(u, \mathcal{S}u), (u, \mathcal{S}u)] \\ &= \tilde{m}_p[(u, \mathcal{S}u), (u, 0)] \\ &= \|(u, 0)\|_{p,q}^2. \quad (5.138) \end{aligned}$$

Enfin, la convergence vers 0 de $\|\mathbf{Q}_\eta \mathbf{U}^r - \mathbf{U}^r(\eta)\|_\eta$ implique

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|(u^r(\eta), 0)\|_\eta &= \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{Q}_\eta(u^r(\eta), 0)\|_\eta \\ &= \|(u^r, 0)\|_{p,q}. \quad (5.139) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
m_p(\varepsilon)[(u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta)), (u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta))] &= m_p(\varepsilon)[(u^r(\eta), \mathcal{S} u^r(\eta)), (u^r(\eta), 0)] \\
&= \|(u^r(\eta), 0)\|_\eta^2,
\end{aligned}$$

et donc

$$m_p(\varepsilon)[(u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta)), (u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta))] \rightarrow \|(u^r, 0)\|_{p,q}. \quad (5.140)$$

Ceci prouve la convergence forte vers 0 dans $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ de $(k(s^r(\eta)))_p^0 - (k(s^r))_p^0$, qui a son tour implique la convergence forte de $s^r(\eta) = (u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta))$ vers $s^r = (u, \mathcal{S}u)$ dans \mathbf{X}_p .

□

Étant donné la forme du Théorème 5.15 on préfère retenir ce résultat sous la forme du

Théorème 5.22: On a

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|P_\eta(u^r, \mathcal{S}u^r) - (u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta))\|_\eta = 0. \quad (5.141)$$

Démonstration:

On pose $s^r(\eta) = (u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta))$ et $s^r(\eta)' = P_\eta(u^r, \mathcal{S}u^r)$.

On écrit que

$$\begin{aligned}
&\|P_\eta(u^r, \mathcal{S}u^r) - (u^r(\eta), \mathcal{S}_\eta u^r(\eta))\|_\eta \\
&= \int_\Omega M(k(\varepsilon, s^r(\eta)) - k(\varepsilon, s^r(\eta)')) \cdot (k(\varepsilon, s^r(\eta)) - k(\varepsilon, s^r(\eta)')) dx \\
&= \int_\Omega M k(\varepsilon, s^r(\eta)) \cdot k(\varepsilon, s^r(\eta)) dx - \int_\Omega M k(\varepsilon, s^r(\eta)') \cdot k(\varepsilon, s^r(\eta)) dx \\
&\quad - \int_\Omega M(k(\varepsilon, s^r(\eta)) - k(\varepsilon, s^r(\eta)')) \cdot k(\varepsilon, s^r(\eta)') dx. \quad (5.142)
\end{aligned}$$

D'après la relation (5.140), le premier terme tend vers

$$\int_\Omega \widetilde{M}_p(\bar{k}_p)_p^0 \cdot (\bar{k}_p)_p^0 dx. \quad (5.143)$$

De plus, on a vu que

$$k(\varepsilon, s^r(\eta)) \rightharpoonup \bar{k}_p \text{ dans } L^2(\Omega, \mathcal{H}). \quad (5.144)$$

Enfin, $s^r(\eta)'$ vérifie la relation

$$m_p(\varepsilon)(s^r(\eta)', r) = \tilde{m}_p(s, r), \quad \forall r \in \mathbf{S}_\eta. \quad (5.145)$$

Par conséquent, le Théorème 4.4 entraîne que $k(\varepsilon, s^r(\eta)')$ converge fortement vers \bar{k}_p dans $L^2(\Omega, \mathcal{H})$. Ainsi, le troisième terme de (5.142) tend vers 0 et le deuxième vers $-\int_\Omega M\bar{k}_p \cdot \bar{k}_p dx = -\int_\Omega \widetilde{M}(\bar{k}_p)_p^0 \cdot (\bar{k}_p)_p^0 dx$.

On a donc bien le résultat annoncé.

Il est à noter que cette démonstration fournit la preuve de la seconde partie (\Leftarrow) du Théorème 5.13.

□

5.5.4 Résultats finaux

On peut maintenant synthétiser tous les résultats de convergence obtenus précédemment dans le

Théorème 5.23: Sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_9)$ et $(\mathbf{H}_p^{\text{découpl}})$, il existe un élément unique $s = (u, \varphi)$ de $C^1([0, T]; (0, \varphi_0) + \mathbf{S}_{p,q})$ tel que $\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \| \mathbf{P}_\eta s(t) - s(\eta)(t) \|_\eta = 0$ uniformément sur $[0, T]$ et vérifiant, $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \text{si } q = 2 \text{ ou } 4 : & \tilde{m}_p(s, r) = L(r), \quad \forall r = (w, \psi) \in \mathbf{S}_{p,q}, \\ \text{si } q = 1 \text{ ou } 3 : & K_q(\ddot{u}, w) + \tilde{m}_p(s, r) = L(r), \quad \forall r = (w, \psi) \in \mathbf{S}_{p,q}, \end{cases} \quad (5.146)$$

u_α (si $q = 1$) et u_3 (si $q = 3$) étant en outre de classe $C^2([0, T]; L^2(\omega))$.

Démonstration:

Il suffit de récapituler les résultats obtenus.

Au § 5.5.2, on a montré la convergence de l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } s^e(\eta) \in (0, \varphi_{0_\eta}) + \mathbf{S}_\eta \text{ tel que} \\ m_p(\varepsilon)(s^e(\eta), r) = L_\eta(r; t), \quad \forall (r, t) \in \mathbf{S}_\eta \times [0, T], \end{cases}$$

vers l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } s^e \in (0, \varphi_0) + \mathbf{S}_{p,q} \text{ tel que} \\ \tilde{m}_p(s^e, r) = L_{\bar{\eta}}(r; t) \text{ pour tout } (r, t) \in \mathbf{S}_{p,q} \times [0, T]. \end{array} \right.$$

au sens où

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|P_{\eta} s^e(t) - s^e(\eta)(t)\|_{\eta} = 0,$$

uniformément sur $[0, T]$. Ces uniques solutions jouissent en outre de la propriété suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} s^e(\eta)(t) \in C^2([0, T]; \mathbf{S}_{\eta}), \\ s^e(t) \in C^2([0, T]; \mathbf{S}_{p,q}). \end{array} \right.$$

Ensuite, au § 5.5.3, on a montré que, dans les cas $q = 1$ et 3 , l'unique solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } s^r(\eta) \in \mathbf{S}_{\eta} \text{ tel que} \\ < \ddot{u}^r(\eta), w >_{\eta} + m_p(\varepsilon)(s^r(\eta), r) = - < \ddot{u}^e(\eta), w >_{\eta}, \\ & \qquad \qquad \qquad \forall r = (w, \psi) \in \mathbf{S}_{\eta}, \forall t \in]0, T[, \\ u^r(\eta)(0) = u^0(\eta) - u^e(\eta)(0), \\ \dot{u}^r(\eta)(0) = v^0(\eta) - \dot{u}^e(\eta)(0). \end{array} \right.$$

convergeait vers l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } s^r \in \mathbf{S}_{p,q}^{\text{dyn}} \text{ tel que} \\ K_q(\ddot{u}^r, w) + \tilde{m}_p(s^r, r) = -K_q(\ddot{u}^e, w), \\ & \qquad \qquad \qquad \forall r = (w, \psi) \in \mathbf{S}_{p,q}^{\text{dyn}}, \forall t \in]0, T[, \\ u^r(0) = u^0 - u^e(0), \\ \dot{u}^r(0) = v^0 - \dot{u}^e(0), \end{array} \right.$$

au sens où

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|P_{\eta} s^r(t) - s^r(\eta)(t)\|_{\eta} = 0,$$

uniformément sur $[0, T]$.

Rappelons enfin que dans les cas $q = 2$ et $q = 4$, on a obtenu que

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{U}^r(\eta)\|_{\eta} = 0,$$

ce qui signifie qu'il n'y a pas d'équation d'évolution à la limite dans ces cas-ci.

L'hypothèse de découplage et la Remarque 5.16 montrent dès lors que

$$\begin{aligned} s = (u, \varphi) &= s^e + s^r \\ &= (u^e, \varphi^e) + (u^r, \mathcal{S}u^r) \end{aligned}$$

vérifie bien l'équation (5.146). Le fait que

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{P}_{\eta} s(t) - s(\eta)(t)\|_{\eta} = 0,$$

uniformément sur $[0, T]$ découle alors simplement de l'inégalité triangulaire.

□

5.6 Quelques commentaires

5.6.1 Découplage des réponses électrodynamiques

Dans les cas $q = 2$ et 4 , la relation

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \|\mathbf{U}^r(\eta)\|_{\eta} = 0, \quad (5.147)$$

signifie que la réponse limite de la plaque au chargement électromécanique est purement quasi-statique. Par contre, dans les cas $q = 1$ et $q = 3$, l'accélération du déplacement intervient.

Il apparaît en outre un découplage entre les déplacements membranaires et de flexion essentiellement dû à l'hypothèse de découplage ($\mathbf{H}_p^{\text{découpl}}$). Plus précisément, cette dernière hypothèse entraîne (on l'a vu dans le Chapitre précédent) que $\mathbf{S}_{p,q}$ est la somme directe de deux sous-espaces \tilde{m}_p -polaires $\hat{\mathbf{S}}_p \ni \hat{r}$ et $\check{\mathbf{S}}_p \ni \check{r}$. Rappelons à nouveau que cela signifie que

$$\tilde{m}_p(s, r) = \tilde{m}_p(\hat{s}, \hat{r}) + \tilde{m}_p(\check{s}, \check{r}), \quad \forall s = \hat{s} + \check{s}, r = \hat{r} + \check{r} \in \mathbf{S}_p.$$

Ainsi, si $q = 1, 2$ il n'y a pas de flexion. De plus, la réponse membranaire est dynamique si $q = 1$, quasi-statique si $q = 2$.

Si $q = 3, 4$ la réponse membranaire est quasi-statique. De plus, la réponse en flexion est dynamique si $q = 3$ et quasi-statique si $q = 4$. Dans ces deux

derniers cas, l'équation fournissant la flexion ne met pas en jeu le potentiel électrique limite si $p = 1$.

On résume la situation dans le tableau

	Réponse (mécanique)	
	En membrane	En flexion
q=1	Dynamique	Bloquée
q=2	Quasi-statique	Bloquée
q=3	Quasi-statique	Dynamique
q=4	Quasi-statique	Quasi-statique

5.6.2 La modélisation proposée

Le transport sur Ω^ε , par π^ε et “une mise à l'échelle inverse” des états, du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } s^\varepsilon = (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \in (0, \varphi_0) + \mathbf{S}_p^\varepsilon \text{ tel que} \\ \langle \ddot{u}^\varepsilon, w^\varepsilon \rangle_\eta + \tilde{m}_p^\varepsilon(s^\varepsilon, r^\varepsilon) = L_\eta(r^\varepsilon), \quad \forall r^\varepsilon = (w^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in \mathbf{S}_p^\varepsilon, \end{cases} \quad (5.148)$$

fournit une modélisation du comportement dynamique d'une plaque piézo-électrique mince d'épaisseur 2ε et de densité ρ (pour la définition de la forme bilinéaire $\tilde{m}_p^\varepsilon(\cdot, \cdot)$, se reporter au § 4.7).

CONCLUSION

La piézoélectricité est essentiellement un phénomène *anisotrope*. Cette propriété a été le point de départ des questions et problèmes que nous nous sommes posés.

Dans la première partie, on s'est efforcé de montrer comment il était possible de lier entre elles les symétries microscopiques et macroscopiques. Les diverses méthodes utilisées ont en particulier permis de classer les tenseurs piézoélectriques en quinze classes d'équivalence distinctes. La différence qu'il convient de faire entre les symétries des cristaux et celles des phénomènes physiques qu'ils peuvent induire a été expliquée. Il nous semble que ces résultats permettent d'éclairer la lecture des tableaux qu'on peut trouver dans la littérature et qui présentent la forme d'un tenseur donné en fonction de la classe du cristal dont il traduit les propriétés.

L'étude asymptotique des plaques linéairement piézoélectriques a ensuite été menée avec le souci d'intégrer les informations liées aux symétries du matériau (éventuellement hétérogène) constitutif. Ce parti pris nous a permis de généraliser un certain nombre de résultats obtenus par des modélisations antérieures. En particulier, la loi de comportement de la plaque est donnée par la condensation de la loi de comportement du milieu tridimensionnel relativement aux composantes effectives décrivant les cinématiques limites. De plus, on voit que les découplages ainsi que l'écriture bidimensionnelle des modèles obtenus peuvent être étendus à des cas réalistes combinant l'anisotropie et l'hétérogénéité.

En ce qui concerne les quelques suites possibles à donner à ce travail, elles peuvent s'énumérer comme suit :

1. Tenter de retrouver l'approximation quasi-électrostatique en tant que limite (en un sens à déterminer) de l'approche dynamique globale, *i.e.* avec la prise en compte des effets magnétiques.
2. Étude de la contrôlabilité.
3. Étude de la convergence des spectres.
4. Étude des singularités : ici, la prise en compte de l'anisotropie peut justement introduire des complications.

5. Étude de l'influence des symétries cristallines sur la valeur du coefficient de couplage des capteurs et des actionneurs.
6. Étude du collage de deux plaques piézoélectriques.
7. Extension des modèles de plaques obtenus à d'autres cas de couplages multi-physiques avec des lois de comportement de même structure que celle de la piézoélectricité (c'est-à-dire mettant en jeu un opérateur du type $\begin{bmatrix} a & -b \\ b^t & c \end{bmatrix}$).
8. Extension à la piézoélectricité non-linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

Attou D. & Maugin G.A. (1987). Une théorie asymptotique des plaques minces piézoélectriques, *C. R. Acad. Sci. Série II*, **304**, 865–868.

Auld B.A. (1973). *Acoustic fields and waves in solids, Vol. I*, John Wiley & Sons.

Ball J.M. & James R.D. (1992). Proposed experimental test of a theory of fine microstructure and the two well problem, *Phil. Trans. R. Soc. London*, **A338**, 389–450.

Banks H.T., Smith R.C. & Wang Y. (1996). *Smart material structures. Modeling, estimation and control*, Research in Applied Mathematics, Ciarlet P.G. & Lions J.-L. Editors, Masson.

Belleni-Morante A. (1994). *A concise guide to semigroups and evolution equations*, Series on advances in mathematics for applied sciences, World Scientific Publishing.

Bernadou M. & Haenel C. (1996). Numerical analysis of piezoelectric shells, *Proceedings of the summer seminar on plates and shells*, Québec.

Berthaud Y., François M. & Geymonat G. (1998). Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor : application to acoustic measurements, *Int. J. Solids Structures* **35**, 4091–4106.

Bhagavantam S. (1966). *Crystal symmetry and physical properties*, Academic Press.

Birkhoff G. D. (1922). Circular plates of variable thickness. *Philosophical Magazine*, **43**, 963–962.

Birss R. (1966). *Symmetry and magnetism*, North Holland.

Bisegna P. & Maceri F. (1996a). An exact three-dimensional solution for simply supported rectangular piezoelectric plates, *J. Appl. Mech.*, **63**, 628–637.

Bisegna P. & Maceri F. (1996b). A consistent theory of thin piezoelectric plates, *J. Intelligent Material System and Structures*, **7**, 372–389.

Blanchard D. & Francfort G.A. (1987). Asymptotic thermoelastic behavior of flat plates, *Quat. Appl. Math.* **45**, 645–667.

Bouasse H.P.M. (1929). *Cristallographie géométrique. Groupes de déplacements*, Librairie Delagrave.

Brezis H. (1976). Semi-groupes linéaires. *Cours de DEA de l'Université de Paris VI*, 1976.

Brezis H. (1987). *Analyse fonctionnelle : théorie et application*, Masson.

Chadwick P., Vianello M. & Cowin S.C. (2001). A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight, *Journal of the Mech. and Phy. of Sol.* **49**, 2471–2492.

Ciarlet P.G. (1988). *Mathematical elasticity, vol. I : three-dimensional elasticity*, North Holland.

Ciarlet P.G. (1997). *Mathematical elasticity, vol. II : theory of plates*, North Holland.

Cioranescu D. & Donato P. (1999). *An introduction to homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Application, 17, Oxford University Press.

Coxeter H.S.M. (1989). *Introduction to geometry*, John Wiley & Sons.

Dautray R. & Lions J.L. (1988). *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, vol. 8, évolution, semi-groupe, variationnel*, Masson.

Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P. (1984). *Modern geometry - methods and applications*, Springer-Verlag.

- Engel P. (1986). *Geometric crystallography*. D. Reidel Publishing & Co.
- Eringen A.C. & Maugin G.A. (1990). *Electrodynamics of continua, vol. I : foundations and solid media*, Springer-Verlag.
- Forte S. & Vianello M. (1996). Symmetry classes for elasticity tensors, *J. Elasticity* **43**, 81–108.
- Forte S. & Vianello M. (1997). Symmetry classes and harmonic decomposition for photoelasticity tensors, *Int. J. Engng Sci.* **35**, 1317–1326.
- François M. (1995). *Identification des symétries matérielles des matériaux anisotropes*, Thèse, Université Paris Pierre et Marie Curie, Paris.
- Geymonat G. & Weller T. (2002). Classes de symétrie des solides piézoélectriques, *C. R. Acad. Sci. Série I* **335**, 847–852.
- Godement R. (1969). *Cours d'algèbre*, Hermann.
- Gol'denveizer A.L. (1963). Derivation of an approximate theory of bending of a plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity, *Prikl. Mat. Meh.*, **26**, 668–686 (en russe); traduit dans *J. Appl. Math. Mech.* **26**, 1000–1025.
- Golubitsky M., Stewart I. & Schaeffer D.G. (1985). *Singularities and groups in bifurcation theory, vol. 2*, Springer-Verlag.
- Grisvard P. (1969). *Les semi-groupes : cours A.E.A*, Département de Mathématiques de l'Université de Tunis.
- Gurtin M.E. (1981). *An introduction to continuum mechanics*, Academic Press .
- Huo Y.-Z. & Del Piero G. (1991). On the completeness of the crystallographic symmetries in the description of the symmetries of the elastic tensor, *J. Elasticity* **25**, 203–246.
- Ikeda T. (1990). *Fundamentals of piezoelectricity*, Oxford University Press.

Janssen T (1973). *Crystallographic groups*. North Holland.

Jarić J.P. (2003). On the decomposition of symmetric tensors into traceless symmetric tensors, *Int. J. Engng Sci.* **41**, 2123–2141.

Landau L. & Lifchitz E. (1969). *Électrodynamique des milieux continus*, Éditions Mir.

Laughlin D.E., Willard M.A. & McHenry M.E. (2000). Magnetic ordering : some structural aspects, in *Phase Transformations and Evolution in Materials*, 121–137, P.Turchi & A. Gonis Editors, The Minerals, Metals and Materials Society.

Lenczner M. (1993). Modèle d'assemblage de plaques piézoélectriques, *Rapport d'activité du Laboratoire de Calcul Scientifique, équipe de Mathématiques*, Université de Franche Comté, Besançon.

Licht C. (1980). *Étude théorique et numérique de l'évolution d'un système fluide-flotteur*, Thèse, Université de Nantes.

Lions J.L. (1968). *Semi-groupes : applications*, Secrétariat mathématique de l'École normale supérieure.

Maugin G.A. & Attou D. (1990). An asymptotic theory of thin piezoelectric plates, *Quat. J. Mech. Appl. Math.* **43**, 347–362.

Maz'ja V.G. (1985). *Sobolev spaces*, Springer-Verlag.

Miara B. (2001). Contrôlabilité d'un corps piézoélectrique, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, **333**, 267–270.

Miller W. (1972). *Symmetry groups and their applications*. Academic Press.

Mindlin R. D. (1952). Forced thickness-shear and flexural vibrations of piezoelectric crystal plates, *J. Appl. Phys.*, **23**, 83–88.

Mindlin R. D. (1972). High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates, *Int. J. Solids Structures*, **8**, 895–906.

-
- Nicolle J. (1950). *La symétrie et ses applications*, Albin Michel.
- Nye J.F. (1961). *Physical properties of crystals : their representation by tensors and matrices*, Clarendon Press.
- Pitteri M. & Zanzotto G. (2003). *Continuum models for phase transitions and twinning in crystals*, Chapman & Hall/CRC.
- Raoult A. (1980). *Contributions à l'étude des modèles d'évolution de plaques et à l'approximation d'équations d'évolution linéaires du second ordre par des méthodes multipas*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- Raoult A. (1988). *Analyse mathématique de quelques modèles de plaques et de poutres élastiques ou élasto-plastiques*, Thèse d'État, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- Raoult A. & Sène A. (2003). Modelling of piezoelectric plates including magnetic effects, *Asymptotix Analysis*, **34**, 1–40.
- Rogacheva N.N. (1994). *The theory of piezoelectric shells and plates*, CRC Press.
- Royer D. & Dieulesaint E. (1996). *Ondes élastiques dans les solides, tome I*, Masson.
- Rudin W. (1978). *Analyse réelle et complexe*, Masson.
- Sachs R. G. (1987). *The physics of time reversal*, University of Chicago Press.
- Sanchez-Palencia E. (1980). *Non homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, 127, Springer-Verlag.
- Sanchez-Palencia E. (1992). *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Masson.
- Schouten J.A. (1951). *Tensor analysis for physicists*, Clarendon Press.
- Schwartz L. (1970). *Analyse : topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann.

Sène A. (2000). *Modélisation asymptotique de plaques : contrôlabilité exacte frontière, piézoélectricité*, Thèse, Université Joseph Fourier-Grenoble I.

Shubnikov A.V. (1964). *Colored symmetry*, Pergamon Press.

Sirotine Y. & Chaskolskaïa M. (1984). *Fondements de la physique des cristaux*, Éditions Mir.

Sivardière J. (1995). *La Symétrie en mathématiques, physique et chimie*, Presses Universitaires de Grenoble.

Spencer A.J.M. (1970). A note on the decomposition of tensors into traceless symmetric tensors, *Int. J. Engng Sci.* **8**, 475–481.

Tartar L. (2000). *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, téléchargeable sur [http ://www.math.cmu.edu/cna/publications/SOB+Int.pdf](http://www.math.cmu.edu/cna/publications/SOB+Int.pdf).

Trotter H.F. (1958). Approximation of semi-groups of operators, *Pacific J. of Math.*, **28**, 887–919.

Weigel D. (1972). *Cristallographie et structure des solides, tome 1 : algèbre et géométrie cristalline et moléculaire*, Masson.

Weller T. & Geymonat G. (2004). Piezomagnetic tensors symmetries : an unifying tentative approach, in *Configurational Mechanics*, Kalpakides & Maugin Editors, A.A. Balkema Publishers.

Weller T. & Licht C. (2002). Analyse asymptotique de plaques minces linéairement piézoélectriques, *C. R. Acad. Sci. Série I*, **335**, 309–314.

Weller T. & Licht C. (2004). Réponse dynamique asymptotique de plaques minces linéairement piézoélectriques dans l'approximation quasi-électrostatique, *C. R. Mécanique*, **332**, 519–524.

Yale P.B. (1968). *Geometry and symmetry*, Holden-Day.

Yosida K. (1964). *Functional analysis*, Springer-Verlag.

Zelenka J. (1986). *Piezoelectric resonators and their applications*, Studies in electrical and electronic engineering, Elsevier.

Zheng Q.-S. & Boelher J.P. (1994). The description, classification and reality of material and physical symmetries, *Acta Mechanica* **102**, 73–89.