V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, Asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1984, Volume 48, Issue 2, 347–371

УДК 517.9

МАЗЬЯ В. Г., НАЗАРОВ С. А., ПЛАМЕНЕВСКИЙ Б. А.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ОБЛАСТЯХ С МАЛЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

В 1948 г. А. А. Самарский показал [1], что возмущение собственного числа λ_n задачи Дирихле для оператора Лапласа при удалении из области $\Omega\subset R^3$ малого множества ω_ε допускает асимптотически точную оценку

$$\Delta\lambda_n\leqslant 4\pi\varkappa_n^2\,\mathrm{cap}(\omega_\varepsilon;\ \Omega)+O(\mathrm{cap}(\omega_\varepsilon;\ \Omega)^2),$$

где $\varkappa_n$ — максимальное значение нормированной n-ой собственной функции на $\overline{\omega}_\varepsilon$, $\mathrm{cap}(\omega_\varepsilon;\ \Omega)$ — гармоническая емкость множества ω_ε относительно Ω. Позднее аналогичные результаты и асимптотические представления для главных членов асимптотики собственных чисел были получены в [2—5].

В настоящей работе найдены полные асимптотические разложения первых собственных чисел и соответствующих собственных функций классических краевых задач для оператора Лапласа в двумерных и трехмерных областях с малыми отверстиями.

В § 1 подробно рассмотрена смешанная краевая задача с условиями Неймана на границе исходной области Ω и условиями Дирихле на границе отверстия $\omega_\varepsilon=\{x\in\mathbf{R}^3:\ \varepsilon^{-1}x\in\omega\}$. Полученное здесь асимптотическое представление в трехмерном случае имеет вид

$$\lambda(\varepsilon)\sim\varepsilon\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k\varepsilon^k, \tag{0.1}$$

где $\lambda_0=4\pi|\Omega|^{-1}\,\mathrm{cap}\,\omega$,

$$\lambda_1=4\pi|\Omega|^{-1}\,\mathrm{cap}(\omega)^2\left\{|\Omega|^{-1}\int_\Omega|x|^{-1}dx-4\pi H(0,0)\right\}.$$

Здесь $|\Omega|$ — мера Ω, $\mathrm{cap}(\omega)$ — гармоническая емкость ω, H — регулярная часть функции Неймана.

В плоском случае асимптотическое разложение имеет более сложную структуру:

$$\lambda(\varepsilon)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k(|\log\varepsilon|^{-1})\,\varepsilon^k,$$

где λ_k — мероморфные функции, $\lambda_0(t)=2\pi|\Omega|^{-1}t+O(t^2)$ (см. формулу (1.33)).

Второй параграф посвящен другим краевым задачам в трехмерной области. В п. 1° для первого собственного числа задачи Дирихле найдено представление

$$\lambda(\varepsilon) \sim \Lambda + 4\pi \operatorname{cap}(\omega)\, \Phi(0)^2 \varepsilon + [4\pi \Phi(0) \operatorname{cap}(\omega)]^2 \times$$
$$\times \left\{ \Gamma(0) + \frac{\Phi(0)}{4\pi} \int_\Omega \Phi(x)\, |x|^{-1}\, dx \right\} \varepsilon^2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \lambda_k \varepsilon^{k+1},$$

где Λ — первое собственное число задачи Дирихле в области Ω, Φ — соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, а Γ — ортогональная Φ регулярная часть решения задачи

$$\Delta G(x) + \Lambda G(x) = \delta(x) - \Phi(0)\Phi(x), \quad x \in \Omega; \qquad G(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

В п. 2° результаты, полученные в § 1, обобщаются на случай смешанной задачи в области с несколькими малыми отверстиями, на границах которых выполнены условия Дирихле (значения коэффициентов λ_0 и λ_1 в (0.1) даются формулами (2.23), (2.26)). В п. 3° рассмотрена смешанная краевая задача с условиями Дирихле на $\partial\Omega$ и условиями Неймана на границе отверстия ω_ε. Показано, что $\lambda(\varepsilon) \sim \Lambda + \varepsilon^3 \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \varepsilon^k$, причем

$$\lambda_0 = |\omega| \{\Lambda \Phi(0)^2 - |\nabla \Phi(0)|^2\} -$$
$$- \nabla\Phi(0) \cdot \left\| \int_{\mathbf{R}^3 \setminus \omega} \nabla z_j(\xi)\, \nabla z_k(\xi)\, d\xi \right\|_{j,k=1}^{3} \cdot \nabla\Phi(0),$$

z_k — гармонические функции в $\mathbf{R}^3 \setminus \omega$, удовлетворяющие на $\partial\omega$ краевому условию $\partial z_k / \partial\nu = \cos(\nu, \xi_k)$, ν — нормаль к $\partial\omega$.

Последняя асимптотическая формула показывает, между прочим, что при появлении в области Ω отверстия, на границе которого предписаны условия Неймана, первое собственное число Λ задачи Дирихле может как увеличиться, так и уменьшиться. В частности, $\lambda(\varepsilon) \downarrow \Lambda$ при $\varepsilon \to +0$, если отверстие содержит стационарную точку собственной функции Φ. Если точка 0 близка к $\partial\Omega$, то величина $|\Phi(0)|$ мала, а модуль градиента функции Φ в точке 0 отделен от нуля. Следовательно, если отверстие расположено вблизи $\partial\Omega$, то $\lambda(\varepsilon) \uparrow \Lambda$ при $\varepsilon \to +0$.

В п. 4° показано, что при помощи несложной модификации рассуждений из п. 3° § 1 можно найти асимптотику первого собственного числа задачи Дирихле для области, полученной удалением малого множества из риманова многообразия. Простейшим следствием общей асимптотической формулы, полученной здесь, является представление

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{1}{2|\log\varepsilon|} \left\{ 1 - \frac{\log c_{\log}(\omega)}{|\log\varepsilon|} + O\left(\frac{1}{|\log\varepsilon|^2} \right) \right\} \tag{0.2}$$

в случае $\Omega_\varepsilon = S^2 \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$, $\omega_\varepsilon = \{y\colon \varepsilon^{-1} y \in \omega\}$. Через $c_{\log}(\omega)$ обозначена логарифмическая емкость множества ω.

В работе существенно используется процедура построения асимптотических разложений решений эллиптических краевых задач в областях с малыми сингулярными возмущениями, развитая в [6] и представляющая собой модификацию метода составных разложений. Отметим, что другие подходы к исследованию решений краевых задач в областях с малыми полостями были использованы в [7—11].

§ 1. Асимптотическое разложение первого собственного числа смешанной краевой задачи для оператора Лапласа

1°. Постановка задачи. Пусть Ω и ω — области в $\mathbf{R}^3$ с компактными замыканиями и гладкими (класса C^∞) границами. Предположим, что Ω и ω содержат начало координат 0, и введем зависящие от малого положительного параметра ε области: $\omega_\varepsilon=\{x\in\mathbf{R}^3: \varepsilon^{-1}x\in\omega\}$, $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\overline{\omega}_\varepsilon$. В области Ω_ε с малым отверстием ω_ε рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\Delta\varphi(\varepsilon, x)+\lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon, x)=0, \quad x\in\Omega_\varepsilon; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\varepsilon, x)=0, \quad x\in\partial\Omega; \tag{1.2}$$

$$\varphi(\varepsilon, x)=0, \quad x\in\partial\omega_\varepsilon, \tag{1.3}$$

где ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Найдем полное асимптотическое разложение первого собственного числа $\lambda(\varepsilon)$ и соответствующей собственной функции.

2°. Случай $n=3$ (формальная асимптотика). Предельной (при $\varepsilon\to0$) задачей для (1.1)—(1.3) является задача Неймана для оператора Лапласа в области Ω, которая имеет нулевое собственное число и собственную функцию $u_0(x)=1$. Возьмем u_0 в качестве главного приближения к $\varphi(\varepsilon, \cdot)$ вдали от 0. Функция u_0 оставляет невязку в граничном условии (1.3), которую можно компенсировать при помощи решения задачи

$$\Delta v_0(\xi)=0, \quad \xi\in\mathbf{R}^3\setminus\overline{\omega}; \quad v_0(\xi)=-1, \quad \xi\in\partial\omega. \tag{1.4}$$

Заметим, что функция v_0 допускает представление

$$v_0(\xi)=\sum_{j=1}^{J}\rho^{-j}v_0^{(j)}(\theta)+\tilde{v}_0^{(J)}(\xi), \tag{1.5}$$

где $v_0^{(j)}$ — сферические функции, $-v_0^{(1)}$ — гармоническая емкость cap ω, $\rho=|\xi|$, $\theta=\xi|\xi|^{-1}$ и

$$|D_\xi^\alpha\tilde{v}_0^{(J)}(\xi)|=O(\rho^{-J-1-|\alpha|}), \quad \xi\in\mathbf{R}^3\setminus\omega, \tag{1.6}$$

для любого мультииндекса α.

Будем искать главное приближение $\varepsilon\lambda_0$ к собственному числу $\lambda(\varepsilon)$ из условия разрешимости задачи

$$\Delta u_1(x)+\lambda_0=0, \quad x\in\Omega; \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\nu}(x)=-\frac{\partial}{\partial\nu}\{r^{-1}v_0^{(1)}\}, \quad x\in\partial\Omega. \tag{1.8}$$

Указанное условие имеет вид

$$\lambda_0|\Omega|=v_0^{(1)}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial r^{-1}}{\partial\nu}ds$$

или, что равносильно,

$$\lambda_0=4\pi|\Omega|^{-1}\,\mathrm{cap}\,\omega; \tag{1.9}$$

здесь $|\Omega|$ — объем Ω.

Полные асимптотические разложения собственного числа $\lambda(\varepsilon)$ и собственной функции φ будем искать в виде

$$\lambda(\varepsilon) \sim \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k, \tag{1.10}$$

$$\varphi(\varepsilon, x) \sim 1 + v_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \left(u_{p+1}(x) + v_{p+1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right), \tag{1.11}$$

где функции u_k и v_k допускают асимптотические представления

$$u_k(x) = \sum_{j=0}^{J} r^j u_k^{(j)}(\theta) + \widetilde{u}_k^{(J)}(x), \tag{1.12}$$

$$v_k(\xi) = \sum_{j=1}^{J} \rho^{-j} v_k^{(j)}(\theta) + \widetilde{v}_k^{(J)}(\xi). \tag{1.13}$$

Здесь $r=|x|$, $\rho=|\xi|$, $u_k^{(j)}(\theta)$, $v_k^{(j)}(\theta)$ — гладкие функции на S^2. Для остатков $\widetilde{u}_k^{(J)}$ и $\widetilde{v}_k^{(J)}$ в формулах (1.12), (1.13) справедливы неравенства

$$|D_x^{\alpha}\widetilde{u}_k^{(J)}(x)| \leqslant c_{k,\alpha} r^{J+1-|\alpha|}, \quad |D_\xi^{\alpha}\widetilde{v}_k^{(J)}(\xi)| \leqslant c_{k,\alpha}\rho^{-J-1-|\alpha|}. \tag{1.14}$$

Для того чтобы сделать более понятной схему построения общих членов асимптотик (1.10), (1.11), покажем как определяются λ_1 и u_2, v_1. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\{\Delta + \varepsilon(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1) I\}\{1 + v_0(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \\
&+ \varepsilon^2 v_2(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^3 u_3(x) + \varepsilon^3 v_3(\varepsilon^{-1}x)\} = \varepsilon^{-2}\Delta_\xi v_0(\xi) + \\
&+ \varepsilon^{-1}\Delta_\xi v_1(\xi) + \Delta_\xi v_2(\xi) + \varepsilon\{\Delta_\xi v_3(\xi) + \lambda_0 v_0(\xi)\} + O(\varepsilon^3 r^{-1}) + \\
&+ \varepsilon\{\Delta_x u_1(x) + \lambda_0\} + \varepsilon^2\{\Delta_x u_2(x) + \lambda_1 + \lambda_0 u_1(x)\} + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Для того чтобы величина (1.15) была малой, необходимо считать функции v_0, v_1, v_2 гармоническими. Равенство нулю второго коэффициента при ε в (1.15) выполнено в силу уравнения (1.7). Рассмотрим второй коэффициент при ε: $\Delta_\xi v_3(\xi) + \lambda_0 v_0(\xi)$. Приравнять его нулю нельзя, так как $v_0(\xi) \sim \mathrm{const}\,|\xi|^{-1}$ при $|\xi| \to +\infty$ и, следовательно, функция v_3 не могла бы стремиться к нулю на бесконечности. Поэтому, используя (1.13), перепишем указанное слагаемое в виде

$$\Delta_\xi v_3(\xi) + \lambda_0 \widetilde{v}_0^{(2)}(\xi) + \lambda_0 \varepsilon v_0^{(1)} r^{-1} + \lambda_0 \varepsilon^2 v_0^{(2)}(\theta) r^{-2}.$$

Теперь можно считать, что $\Delta_\xi v_3(\xi) = -\lambda_0 \widetilde{v}_0^{(2)}(\xi)$. (В силу второй из оценок (1.14), $k=0$, функция v_3 допускает разложение (1.13).)

Учитывая сказанное, перепишем правую часть (1.15) в виде

$$\varepsilon^2\{\Delta_x u_2(x) + \lambda_1 + \lambda_0 u_1(x) + \lambda_1 v_0^{(1)} r^{-1}\} + O(\varepsilon^3 r^{-2}).$$

Итак, функция u_2 и число λ_1 должны удовлетворять уравнению

$$\Delta_x u_2(x) + \lambda_1 = -\lambda_0(u_1(x) + v_0^{(1)} r^{-1}), \quad x \in \Omega. \tag{1.16}$$

В силу (1.8) при $x \in \partial\Omega$ получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \nu}\left\{1 + v_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2(x) + \varepsilon^2 v_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 u_3(x) + \right.\\
&\left. + \varepsilon^3 v_3\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \nu}\{u_2(x) + r^{-2} v_0^{(2)}(\theta) + r^{-1} v_1^{(1)}\} + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Следовательно, краевое условие для уравнения (1.16) имеет вид

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu}(x) = -\frac{\partial}{\partial \nu}\{r^{-2}v_0^{(2)}(\theta) + r^{-1}v_1^{(1)}\}, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.17}$$

Условием разрешимости задачи (1.16), (1.17) является равенство

$$\lambda_1 |\Omega| + \lambda_0 \int_\Omega u_1(x)\,dx + \lambda_0 v_0^{(1)} \int_\Omega r^{-1} dx +$$
$$+ \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \nu}\left\{r^{-2}v_0^{(2)}(\theta)\right\} ds + v_1^{(1)} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial r^{-1}}{\partial \nu} ds = 0.$$

Так как $r^{-2}v_0{}^{(2)}(\theta)$ и r^{-1} — гармонические функции на $\mathbf{R}^3 \setminus 0$, то

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu}\{r^{-2}v_0^{(2)}(\theta)\}\,ds = 0, \qquad -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial r^{-1}}{\partial \nu} ds = 4\pi.$$

Решение u_1 задачи (1.7), (1.8) определено с точностью до константы. Будем считать, что оно ортогонально единице. Тогда

$$\lambda_1 |\Omega| = 4\pi v_1^{(1)} - \lambda_0 v_0^{(1)} \int_\Omega r^{-1} dx. \tag{1.18}$$

Так как $v_0(\xi) = -1$ при $\xi \in \partial\omega$ (см. (1.4)), то

$$1 + v_0(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \varepsilon^2 v_2(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^3 u_3(x) +$$
$$+ \varepsilon^3 v_3(\varepsilon^{-1}x) = \varepsilon\,[u_1(0) + v_1(\xi)] + O(\varepsilon^2) \text{ при } x \in \partial\omega_\varepsilon.$$

Поэтому гармоническая функция v_1 должна удовлетворять краевому условию $v_1(\xi) = -u_1(0)$ на $\partial\omega$ и, следовательно,

$$v_1(\xi) = -u_1(0)\,\mathrm{cap}(\omega)\,|\xi|^{-1} + O(|\xi|^{-2}), \quad \xi \in \mathbf{R}^3 \setminus \omega.$$

Таким образом, в силу (1.9) формулу (1.18) можно переписать в виде

$$\lambda_1 = 4\pi |\Omega|^{-1} \mathrm{cap}(\omega)^2 \left\{ |\Omega|^{-1} \int_\Omega r^{-1} dx - \frac{u_1(0)}{\mathrm{cap}(\omega)} \right\}.$$

Теперь из (1.7) и (1.8) вытекает формула

$$\lambda_1 = 4\pi |\Omega|^{-1} \mathrm{cap}(\omega)^2 \left\{ |\Omega|^{-1} \int_\Omega r^{-1} dx - 4\pi H(0, 0) \right\}, \tag{1.19}$$

где $H(x, y)$ — регулярная часть функции Неймана $N(x, y) = -\{4\pi|x-y|\}^{-1} + H(x, y)$; среднее $H(x, 0)$ по Ω равно нулю.

Применим ту же процедуру к построению следующих членов асимптотики $\lambda(\varepsilon)$ и $\varphi(x, \varepsilon)$. С этой целью подставим ряды (1.10) и (1.11) в краевую задачу (1.1)—(1.3). В уравнении (1.1) перепишем выражения вида $\varepsilon^{p+k+1}\lambda_p v_k(\xi)$ следующим образом:

$$\varepsilon^{p+k+1}\lambda_p v_k(\xi) = \varepsilon^{p+k+1}\lambda_p \widetilde{v}_k^{(2)}(\xi) + \varepsilon^{p+k+2}\lambda_p r^{-1} v_k^{(1)}(\theta) + \varepsilon^{p+k+3}\lambda_p v_k^{(2)}(\theta).$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, записанные в координатах x или ξ, получим рекуррентную последовательность уравнении

$$\Delta_x u_k(x) + \lambda_{k-1} = -\sum_{p=0}^{k-2} \lambda_p \{u_{k-p-1}(x) + r^{-1} v_{k-p-2}^{(1)}(\theta)\} -$$

$$-\sum_{p=0}^{k-3} \lambda_p r^{-2} v_{k-p-3}^{(2)}(\theta) = 0 \ \text{ в } \Omega; \tag{1.20}$$

$$\Delta_\xi v_k(\xi) + \sum_{p=0}^{k-3} \lambda_p \widetilde{v}_{k-p-3}^{(2)}(\xi) = 0 \ \text{ в } \mathbf{R}^3 \diagdown \overline{\omega}. \tag{1.21}$$

Из краевого условия (1.2) получаем:

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu}(x) = -\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial \nu} r^{-1} v_{k-j}^{(j)}(\theta) \ \text{ на } \partial\Omega. \tag{1.22}$$

В свою очередь условие (1.3) приводит к равенствам

$$v_k(\xi) = -\sum_{j=0}^{k} \rho^j u_{k-j}^{(j)}(\theta) \ \text{ на } \ \partial\omega. \tag{1.23}$$

Так как решение задачи (1.20), (1.22) определено с точностью до постоянного слагаемого, то будем считать выполненным равенство

$$\int_\Omega u_k(x)\,dx = 0. \tag{1.24}$$

Как и в случаях $k=1$, 2, числа λ_{k-1} находятся из условия разрешимости задачи (1.20), (1.22):

$$\lambda_{k-1} = -\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \left\{\sum_{p=0}^{k-2} \lambda_p r^{-1} v_{k-p-2}^{(1)}(\theta) + \sum_{p=0}^{k-3} \lambda_p r^{-2} v_{k-p-3}^{(2)}(\theta)\right\} dx -$$

$$-\frac{1}{|\Omega|}\sum_{j=1}^{k}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu}\{r^{-j} v_{k-j}^{(j)}(\theta)\}\,ds. \tag{1.25}$$

3°. Случай $n=2$ (формальная асимптотика). Первая предельная краевая задача — задача Неймана для оператора Лапласа в плоской области Ω — имеет нулевое собственное число и собственную функцию $U_0=1$. Однако, в отличие от трехмерного случая, вторая предельная задача (1.4) не разрешима в классе убывающих функций. Поэтому взять U_0 в качестве нулевого приближения к φ нельзя и необходимо изменить алгорифм построения асимптотики.

Отметим сначала, что однородная задача (1.4) имеет решение V_0 такое, что $V_0(\xi) \sim -\log|\xi|$ при $|\xi| \to \infty$. Так как мы ищем собственную функцию, близкую к единице вдали от ω_ε, то в качестве основного приближения к ней можно взять $v_0(\xi, (\log\varepsilon)^{-1}) = (\log\varepsilon)^{-1} V_0(\xi)$. Как известно, при $|\xi| = \rho \to +\infty$

$$V_0(\xi) = -\log\rho + \mu + \sum_{q=1}^{Q} \rho^{-q} V_0^{(q)}(\theta) + O(\rho^{-Q-1}), \tag{1.26}$$

где $V_0^{(q)}(\theta) = a_q\cos(q\theta) + b_q\sin(q\theta)$, μ — постоянная.

Приближение к φ с точностью $O(\varepsilon^{1-\delta})$ будем искать в виде $u_0(x, (\log\varepsilon)^{-1})+v_0(\varepsilon^{-1}x, (\log\varepsilon)^{-1})$, а приближение к λ — с той же точностью в виде $\lambda_0((\log\varepsilon)^{-1})$. Подставляя сумму $u_0(x, (\log\varepsilon)^{-1})+$ $+v_0(\varepsilon^{-1}x, (\log\varepsilon)^{-1})$ в уравнение (1.1) и отбрасывая слагаемые порядка $O(\varepsilon^{1-\delta})$, получим уравнение

$$\Delta u_0+\lambda_0(u_0+(\log\varepsilon)^{-1}(\log\varepsilon-\log r+\mu))=0, \tag{1.27}$$

которое будем считать выполненным в области Ω. Поступая аналогично с условием (1.2), находим краевое условие для u_0 на $\partial\Omega$:

$$\frac{\partial u_0}{\partial\nu}=\frac{1}{\log\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\nu}\log r \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{1.28}$$

Найдем решение u_0 задачи (1.27), (1.28), подчиненное дополнительному условию:

$$u_0(0)=0. \tag{1.29}$$

Необходимым условием разрешимости задачи (1.27), (1.28) является равенство

$$\lambda_0\int\limits_\Omega\{u_0+(\log\varepsilon)^{-1}(\log\varepsilon-\log r+\mu)\}\,dx=\frac{1}{|\log\varepsilon|}\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial\nu}\log r\,ds,$$

или, что эквивалентно,

$$\lambda_0=\frac{2\pi}{|\log\varepsilon|}\left\{|\Omega|\left(1+\frac{\mu}{\log\varepsilon}\right)+\int\limits_\Omega\left(u_0-\frac{\log r}{\log\varepsilon}\right)dx\right\}^{-1}. \tag{1.30}$$

Отсюда и из (1.27) находим:

$$\Delta u_0-\frac{2\pi}{\log\varepsilon}\left\{|\Omega|\left(1+\frac{\mu}{\log\varepsilon}\right)+\int\limits_\Omega\left(u_0-\frac{\log r}{\log\varepsilon}\right)dx\right\}^{-1}\times$$
$$\times(u_0+(\log\varepsilon)^{-1}(\log\varepsilon-\log r+\mu))=0. \tag{1.31}$$

Обозначим через $\mathfrak{R}$ обратный оператор задачи

$$\Delta u=F \text{ в } \Omega;\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}=\Phi \text{ на } \partial\Omega;\quad u(0)=0,$$

определенный на функциях Φ, F, удовлетворяющих условиям

$$\int\limits_\Omega F(x)\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}\Phi(x)\,ds.$$

Тогда задачу (1.31), (1.28), (1.29) можно записать в виде нелинейного операторного уравнения

$$u_0=(\log\varepsilon)^{-1}T((\log\varepsilon)^{-1}, u_0),$$

где

$$T(z, U)=\mathfrak{R}\left(2\pi\left\{|\Omega|(1+\mu z)+\int\limits_\Omega(U-z\log r)\,dx\right\}^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times\left(U+1-z(\log r-\mu)\right);\ \frac{\partial}{\partial\nu}\log r\right).$$

Ясно, что оператор-функция $(z, U) \to U - zT(z; U)$ аналитична в точке $(z, U) = (0, 0)$ и существует производная $T'_U(0, 0)$. Поэтому решение $u_0((\log\varepsilon)^{-1})$ существует, единственно и аналитически зависит от $(\log\varepsilon)^{-1}$ (см., например, [12, с. 327]). Принимая это во внимание, мы можем рассматривать (1.31) как линейное уравнение вида $\Delta u_0 + cu_0 = d_1 + d_2 \log r$, где c, d_1, d_2 — аналитические функции от $(\log\varepsilon)^{-1}$. Применяя известную процедуру построения асимптотики решений эллиптических краевых задач вблизи особой точки [13], получим, что

$$u_0(x, (\log\varepsilon)^{-1}) = \sum_{k=1}^{N} r^k u_0^{(k)}(\theta, \log r, (\log\varepsilon)^{-1}) + \tilde{u}_0^{(k)}(x, (\log\varepsilon)^{-1}), \quad (1.32)$$

где $\tilde{u}_0^{(k)}(x, z)$, $u_0^{(k)}(\theta, t, z)$ аналитически зависят от z в точке $z=0$, $u_0^{(k)}(\theta, t, z)$ — полином от t; $|D_x^\alpha \tilde{u}_0^{(k)}(x, z)| = O(r^{N+1-|\alpha|-\delta})$, $\delta > 0$ (ср. стр. 181—184 [6] или § 2 [14]).

Подставляя полученное решение u_0 в (1.30), находим представление для λ_0 в виде аналитической функции от $(\log\varepsilon)^{-1}$.

Отметим, что из соотношения

$$u_0(x, (\log\varepsilon)^{-1}) = (\log\varepsilon)^{-1} \mathfrak{R}\left(\frac{2\pi}{|\Omega|}; \frac{\partial}{\partial\nu}\log r\right) + O(|\log\varepsilon|^{-2})$$

и из (1.30) вытекает, что первые два члена ряда по обратным степеням $\log\varepsilon$ для $\lambda_0((\log\varepsilon)^{-1})$ имеют вид

$$\frac{2\pi}{|\Omega|}\frac{1}{|\log\varepsilon|} - \frac{2\pi}{|\Omega|^2}\frac{1}{(\log\varepsilon)^2}\left(\mu + \int_\Omega \mathfrak{R}\left(\frac{2\pi}{|\Omega|}; \frac{\partial}{\partial\nu}\log r\right)dx - \int_\Omega \log r\, dx\right). \quad (1.33)$$

Перейдем к построению полных асимптотических разложений собственной функции φ и собственного числа λ:

$$\varphi(\varepsilon, x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left\{u_k(x, (\log\varepsilon)^{-1}) + v_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, (\log\varepsilon)^{-1}\right)\right\}, \quad (1.34)$$

$$\lambda(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k((\log\varepsilon)^{-1}). \quad (1.35)$$

Функции u_k и v_k при $k \geqslant 1$ должны допускать представления:

$$u_k(x, z) = \sum_{j=1}^{J} r^j u_k^{(j)}(\theta, \log r, z) + \tilde{u}_k^{(J)}(x, z), \quad (1.36)$$

$$v_k(\xi, z) = \sum_{j=0}^{J} \rho^{-j} v_k^{(j)}(\theta, z) + \tilde{v}_k^{(J)}(\xi, z). \quad (1.37)$$

Зависимость всех приведенных функций от θ — гладкая, от z — мероморфная, а от $\log r$ — полиномиальная. Остаточные члены в формулах (1.36), (1.37) удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{gathered} |D_x^\alpha \tilde{u}_k^{(J)}(x, z)| \leqslant c_{k,\alpha}^{(J)}(z, \delta)\, r^{J+1-\delta-|\alpha|}, \\ |D_\xi^\alpha \tilde{v}_k^{(J)}(\xi, z)| \leqslant c_{k,\alpha}^{(J)}(z, \delta)\, \rho^{-J-1+\delta-|\alpha|}, \end{gathered} \quad (1.38)$$

где δ — произвольное положительное число.

Подставим ряды (1.34), (1.35) в уравнение (1.1) и представим слагаемые $\varepsilon^k\lambda_k((\log\varepsilon)^{-1})\varepsilon^p v_k(\varepsilon^{-1}x, (\log\varepsilon)^{-1})$ в виде

$$\varepsilon^{k+p}\lambda_k((\log\varepsilon)^{-1})\widetilde{v}_k^{(2)}(\xi, (\log\varepsilon)^{-1}) + \varepsilon^{k+p}\lambda_k((\log\varepsilon)^{-1})v_k^{(0)}(\theta, \log r - \log\varepsilon, (\log\varepsilon)^{-1}) + \\ + \varepsilon^{k+p+1}\lambda_k((\log\varepsilon)^{-1})r^{-1}v_k^{(1)}(\theta, \log r - \log\varepsilon, (\log\varepsilon)^{-1}).$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, записанные в координатах x или ξ, получим рекуррентную последовательность уравнений:

$$\Delta_\xi v_k(\xi, z) = -\sum_{p=0}^{k-2}\lambda_p(z)\widetilde{v}^{(2)}_{k-p-2}(\xi, z) \text{ в } \mathbf{R}^2\diagdown\omega, \tag{1.39}$$

$$\Delta u_k(x, z) + \lambda_0(z)u_k(x, z) + \lambda_k(z)\{v_0^{(0)}(\theta, \log r - z^{-1}, z) + u_0(x, z)\} = \\ = -\sum_{p=1}^{k-1}\lambda_p(z)u_{k-p}(x, z) - \sum_{p=0}^{k-1}\lambda_p(z)\{v^{(0)}_{k-p}(\theta, z) + r^{-1}v^{(1)}_{k-p-1}(\theta, z)\} \text{ в } \Omega. \tag{1.40}$$

Здесь и далее в этом разделе $z = (\log\varepsilon)^{-1}$.

Из краевого условия (1.3) получаем:

$$v_k(\xi, z) = -\sum_{j=1}^{k}\rho^j u^{(j)}_{k-j}(\theta, \log\rho + z^{-1}, z) \text{ на } \partial\omega. \tag{1.41}$$

Условие (1.2) приводит к равенствам

$$\frac{\partial u_k}{\partial\nu}(x, z) = -\sum_{j=0}^{k}\frac{\partial}{\partial\nu}\{r^{-j}v^{(j)}_{k-j}(\theta, z)\} \text{ на } \partial\Omega. \tag{1.42}$$

В силу (1.37) правая часть $\Phi_k(\xi, z)$ уравнения (1.39) допускает асимптотическое разложение

$$\Phi_k(\xi, z) \sim \sum_{j=0}^{\infty}\rho^{-j-2}\Phi_k^{(j)}(\theta, z).$$

При помощи индукции проверяем, что

$$v_p^{(j)}(\theta, z) = \sum_{q=0}^{[p/2]}\{\alpha^{(j)}_{qp}(z)\sin(j+2q)\theta + \beta^{(j)}_{qp}(z)\cos(j+2q)\theta\} \tag{1.43}$$

при $p=0, \ldots, k-1$. Поэтому

$$\Phi_k^{(j)}(\theta, z) = \sum_{q=1}^{[k/2]+1}\{A^{(j)}_{qp}(z)\sin(j+2q)\theta + B^{(j)}_{qp}(z)\cos(j+2q)\theta\}$$

и, следовательно, (1.43) имеет место и при $p=k$. Из мероморфности по z правых частей равенств (1.39), (1.41) следует, что решение v_k и коэффициенты $v_k^{(j)}$ его разложения (1.37) также мероморфны по z.

Интегрируя уравнение (1.40) по Ω и учитывая (1.42), находим:

$$\lambda_k(z) = \left\{\int_\Omega(v_0^{(0)}(\theta, \log r - z^{-1}, z) + u_0(x, z))\,dx\right\}^{-1} \times \\ \times\left\{\sum_{j=0}^{k}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}(r^{-j}v^{(j)}_{k-j}(\theta, z))\,ds - \int_\Omega\left[\sum_{p=1}^{k-1}\lambda_p(z)u_{k-p}(x, z) + \right.\right. \\ \left.\left. + \sum_{p=0}^{k-1}\lambda_p(z)(v^{(0)}_{k-p}(\theta, z) + r^{-1}v^{(1)}_{k-p-1}(\theta, z))\right]dx + \lambda_0(z)\int_\Omega u_k(x, z)\,dx\right\}, \tag{1.44}$$

или короче:

$$\lambda_k(z) = \Xi_1(z) + \lambda_0(z)\,\Xi_2(z)\int\limits_{\Omega} u_k(x, z)\,dx,$$

где Ξ_1 — мероморфная, а Ξ_2 — аналитическая функции (по индукционному предположению о λ_p и u_p, $p=1, \ldots, k-1$). Теперь задача (1.40), (1.42) принимает вид:

$$\Delta u_k(x, z) + \lambda_0(z)\Big\{u_k(x, z) + \Xi_2(z)\int\limits_{\Omega} u_k(x, z)\,dx \times$$
$$\times (v_0^{(0)}(\theta, \log r - z^{-1}, z) + u_0(x, z))\Big\} = \Psi_k(x, z) \text{ в } \Omega; \qquad (1.45)$$
$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu}(x, z) = \psi_k(x, z) \text{ на } \Omega.$$

Здесь Ψ_k — функция, допускающая разложение

$$\Psi_k(x, z) \sim \sum_{j=1}^{\infty} r^{j-2}\Psi_k^{(j)}(\theta, \log r, z);$$

коэффициенты $\Psi_k^{(j)}$ и сама функция Ψ_k мероморфно зависят от z; функция ψ_k определена формулой (1.42).

Перепишем задачу (1.45) в виде операторного уравнения

$$u_k = \mathfrak{R}\left(\Psi_k - \lambda_0\Big\{u_k - \Xi_2\int\limits_{\Omega} u_k\,dx\,(v_0^{(0)} + u_0)\Big\};\ \psi_k\right). \qquad (1.46)$$

Так как $\lambda_0(z) = O(|\log\varepsilon|^{-1})$ и

$$\Xi_2(z) = \Big\{\int\limits_{\Omega}(v_0^{(0)}(\theta, \log r - z^{-1}, z) + u_0(x, z))\,dx\Big\}^{-1} = \frac{1}{|\Omega|} + O(|\log\varepsilon|^{-1}),$$

то существует единственное решение уравнения (1.46), являющееся мероморфной функцией в окрестности точки $z=0$. Как и в случае $k=0$, можно убедиться в справедливости разложений (1.36) и мероморфной зависимости коэффициентов $u_k^{(j)}$ от z.

4°. Обоснование асимптотических разложений. Рассмотрим сначала случай $n=3$. Положим

$$\mathfrak{S}_N(\varepsilon, x) = \sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j(u_j(x) + v_j(\varepsilon^{-1}x)),$$
$$\Lambda_N(\varepsilon) = \varepsilon\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_j\varepsilon^j. \qquad (1.47)$$

Имеем:

$$\Delta\mathfrak{S}_N(\varepsilon, x) + \Lambda_N(\varepsilon)\,\mathfrak{S}_N(\varepsilon, x) = \sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\Big[\Delta u_j(x) + \sum_{p=0}^{j-1}\lambda_p u_{j-p-1}(x) +$$
$$+ \sum_{p=0}^{j-2}\lambda_p r^{-1}v_{j-p-2}^{(1)}(\theta) + \sum_{p=0}^{j-3}\lambda_p r^{-2}v_{j-p-3}^{(2)}(\theta)\Big] +$$

$$
+\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^{j-2}\left[\Delta_\xi v_j(\xi)+\sum_{p=0}^{j-3}\lambda_p\widetilde{v}^{(2)}_{j-p-3}(\xi)\right]+
$$

$$
+\varepsilon\sum_{j=0}^{N-1}\varepsilon^j\lambda_j\left\{\sum_{p=N-j}^{N}\varepsilon^p u_p(x)+\sum_{p=N-j-2}^{N}\varepsilon^p\widetilde{v}^{(2)}_p(\varepsilon^{-1}x)+\right.
$$

$$
\left.+\sum_{p=N-j-1}^{N}\varepsilon^{p+1}r^{-1}v_p^{(1)}(\theta)+\sum_{p=N-j-2}^{N}\varepsilon^{p+2}r^{-2}v_p^{(2)}(\theta)\right\}. \tag{1.48}
$$

Каждое выделенное в квадратные скобки слагаемое из правой части равенства (1.48) равно нулю в силу уравнений (1.20) и (1.21). Поэтому из асимптотических формул (1.12), (1.13) и оценок (1.14) для коэффициентов суммы (1.47) получаем при $x\in\overline{\Omega}_\varepsilon$:

$$
|\Delta\mathfrak{S}_N(\varepsilon,x)+\Lambda_N(\varepsilon)\mathfrak{S}_N(\varepsilon,x)|\leqslant\text{const}\,\varepsilon\sum_{j=0}^{N-1}\varepsilon^j\{\varepsilon^{N-j}+\varepsilon^{N-j+1}r^{-3}+
$$

$$
+\varepsilon^{N-j}r^{-1}+\varepsilon^{N-j}r^{-2}\}=O(\varepsilon^{N+1}r^{-2}). \tag{1.49}
$$

Аналогично, используя граничные условия (1.22), (1.23), находим, что

$$
\frac{\partial}{\partial\nu}\mathfrak{S}_N(\varepsilon,x)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[\frac{\partial u_j}{\partial\nu}(x)+\sum_{p=1}^{j}\frac{\partial}{\partial\nu}(r^{-p}v^{(p)}_{j-p}(\theta))\right]+
$$

$$
+\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\frac{\partial}{\partial\nu}\widetilde{v}_j^{(N-j)}(\varepsilon^{-1}x)=O(\varepsilon^{N+1})\ \text{при}\ x\in\partial\Omega; \tag{1.50}
$$

$$
\mathfrak{S}_N(\varepsilon,x)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[v_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\sum_{p=0}^{j}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^p u^{(p)}_{j-p}(\theta)\right]+
$$

$$
+\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\widetilde{u}_j^{(N-j)}(x)=O(\varepsilon^{N+1})\ \text{при}\ x\in\partial\omega_\varepsilon. \tag{1.51}
$$

Введем функцию $\mathfrak{S}_N{}^*$ при помощи равенства

$$
\mathfrak{S}^*_N(\varepsilon,x)=c(\varepsilon)\left\{\mathfrak{S}_N(\varepsilon,x)-\zeta_1(x)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\widetilde{v}_j^{(N-j)}(\varepsilon^{-1}x)-\zeta_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\widetilde{u}_j^{(N-j)}(x)\right\}, \tag{1.52}
$$

где $\zeta_1\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$; $\zeta_1(x)=1$ в окрестности $\partial\Omega$ и $\zeta_1(x)=0$ в окрестности 0; $\zeta_2\in C_0{}^\infty(\mathbf{R}^3)$, $\zeta_2(\xi)=1$ в окрестности $\overline{\omega}$. Так как

$$
\int_\Omega\mathfrak{S}_N(\varepsilon,x)\,dx=|\Omega|+O(\varepsilon)
$$

и обе суммы в (1.52) малы, то константу $c(\varepsilon)$ можно выбрать так, чтобы среднее значение $\mathfrak{S}_N{}^*$ в Ω_ε равнялось единице. Функция $\mathfrak{S}_N{}^*$ удовлетворяет краевой задаче

$$
\Delta\mathfrak{S}^*_N(\varepsilon,x)+\Lambda_N(\varepsilon)\mathfrak{S}^*_N(\varepsilon,x)=\mathfrak{F}_N(\varepsilon,x)\ \text{в}\ \Omega_\varepsilon;
$$

$$
\mathfrak{S}^*_N(\varepsilon,x)=0\ \text{на}\ \partial\omega_\varepsilon;\quad \frac{\partial\mathfrak{S}^*_N}{\partial\nu}(\varepsilon,x)=0\ \text{на}\ \partial\Omega, \tag{1.53}
$$

где

$$|D_x^\alpha \mathfrak{F}_N(\varepsilon, x)| \leqslant c\varepsilon^{N+1} r^{-2-|\alpha|}. \tag{1.54}$$

Пусть, как и ранее, $\lambda(\varepsilon)$ — первое собственное число краевой задачи (1.1)—(1.3); под $\varphi(\varepsilon, \cdot)$ будем понимать соответствующую собственную функцию, среднее значение которой в Ω_ε равно единице. Имеем:

$$\begin{gathered} -\Delta(\mathfrak{S}_N^* - \varphi) - \Lambda_N(\mathfrak{S}_N^* - \varphi) + (\lambda - \Lambda_N)\varphi = -\mathfrak{F}_N \text{ в } \Omega_\varepsilon; \\ \mathfrak{S}_N^* - \varphi = 0 \text{ на } \partial\omega_\varepsilon; \quad \frac{\partial}{\partial\nu}(\mathfrak{S}_N^* - \varphi) = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{gathered} \tag{1.55}$$

Отсюда следует равенство

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\mathfrak{S}_N^* - \varphi)|^2 dx - \Lambda_N \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathfrak{S}_N^* - \varphi|^2 dx +$$

$$+ (\lambda - \Lambda_N) \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi(\mathfrak{S}_N^* - \varphi)\, dx = -\int_{\Omega_\varepsilon} \mathfrak{F}_N(\mathfrak{S}_N^* - \varphi)\, dx.$$

В силу неравенства Пуанкаре для функции $\mathfrak{S}_N^* - \varphi$, продолженной нулем на ω_ε,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\mathfrak{S}_N^* - \varphi)|^2 dx \geqslant c \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathfrak{S}_N^* - \varphi|^2 dx.$$

Отсюда и из оценки $\Lambda_N(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ находим:

$$\frac{c}{2} \| \mathfrak{S}_N^* - \varphi; L_2(\Omega_\varepsilon)\| \leqslant |\Lambda_N - \lambda| (\|\mathfrak{S}_N^*; L_2(\Omega_\varepsilon)\| + \|\mathfrak{S}_N^* - \varphi; L_2(\Omega_\varepsilon)\|) + O(\varepsilon^{N-1}). \tag{1.56}$$

Подставляя в отношение Рэлея для $\lambda(\varepsilon)$ функцию $1 + (1 - \zeta_1(x))v_0(\varepsilon^{-1}x)$, где v_0 — решение задачи (1.4), получаем оценку $\lambda(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Поэтому

$$\|\mathfrak{S}_N^* - \varphi; L_2(\Omega_\varepsilon)\| = O(\varepsilon).$$

Из (1.53) вытекает:

$$(\Lambda_N - \lambda) \int_\Omega \mathfrak{S}_N^* \varphi dx = \int_\Omega \mathfrak{F}_N \mathfrak{S}_N^* dx + \int_\Omega \mathfrak{F}_N(\varphi - \mathfrak{S}_N^*)\, dx.$$

Ясно, что

$$\int_\Omega \mathfrak{S}_N^* \varphi dx = \int_\Omega |\mathfrak{S}_N^*|^2 dx + \int_\Omega \mathfrak{S}_N^* (\varphi - \mathfrak{S}_N^*)\, dx \geqslant |\Omega| - O(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$|\Lambda_N - \lambda| \leqslant c\varepsilon^{N-1}. \tag{1.57}$$

Подставляя эту оценку в (1.56), находим:

$$\|\mathfrak{S}_N^* - \varphi; L_2(\Omega_\varepsilon)\| \leqslant c\varepsilon^{N-1}.$$

Отсюда, из (1.54), (1.47) и из известных локальных оценок производных решения $\mathfrak{S}_N^* - \varphi$ уравнения

$$\Delta(\mathfrak{S}^* - \varphi) + \lambda(\mathfrak{S}^* - \varphi) = \mathfrak{F}_N + (\lambda - \Lambda_N)\mathfrak{S}_N^* \text{ в } \Omega_\varepsilon$$

с граничными условиями (1.55) получаем, что

$$|D_x^\alpha(\mathfrak{S}_N^* - \varphi)(\varepsilon, x)| \leqslant c\varepsilon^{N-1-|\alpha|}. \tag{1.58}$$

Оценки (1.57) и (1.58) можно уточнить, увеличивая число членов в частичных суммах (1.47). В результате получим:

$$|\Lambda_N(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon)| \leqslant c_N \varepsilon^{N+1};$$

$$|D_x^\alpha(\mathfrak{S}_N(\overline{\mathfrak{S}}_N)^{-1} - \varphi)(\varepsilon, x)| \leqslant c_{N,\alpha}\varepsilon^{N+1} r^{-|\alpha|}, \tag{1.59}$$

где $\overline{\Phi}$ — среднее значение функции Φ в Ω_ε.

Итак, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $n=3$. Первое собственное число задачи* (1.1)—(1.3) *может быть представлено в виде*

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}),$$

где $\lambda_0 = 4\pi|\Omega|^{-1}\mathrm{cap}(\omega)$, коэффициент λ_1 определен формулой (1.19), *а остальные коэффициенты находятся из* (1.25).

Для первой собственной функции φ, нормированной равенством $\overline{\varphi} = 1$, справедлива оценка (1.59), *где $\mathfrak{S}_N$ — частичная сумма* (1.47) *ряда* (1.19).

Замечание. *Согласно теореме* 1.1

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{4\pi}{|\Omega|}\left\{\mathrm{cap}(\omega_\varepsilon) + \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{dx}{|x|} - 4\pi H(0, 0)\right)(\mathrm{cap}(\omega_\varepsilon)^2)\right\} + O(\mathrm{cap}(\omega_\varepsilon)^3),$$

и может показаться, что существует разложение по степеням емкости ω_ε с коэффициентами, зависящими лишь от области Ω. Однако уже анализ третьего члена асимптотики $\lambda(\varepsilon)$ выявляет зависимость коэффициента при $\mathrm{cap}(\omega_\varepsilon)^3$ *от положения области ω относительно координатных осей.*

Обоснование асимптотики λ и φ при $n=2$ проводится так же, как и для трехмерного случая. Необходимо принять во внимание, что функция

$$\mathfrak{S}_N(\varepsilon, x) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j (u_j(x, (\log\varepsilon)^{-1}) + v_j(\varepsilon^{-1}x, (\log\varepsilon)^{-1})) \tag{1.60}$$

и число

$$\Lambda_N((\log\varepsilon)^{-1}) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j((\log\varepsilon)^{-1})\,\varepsilon^j$$

удовлетворяют соотношениям:

$$\Delta\mathfrak{S}_N(\varepsilon, x) + \Lambda_N(z)\mathfrak{S}_N(\varepsilon, x) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \Bigg[\Delta u_j(x) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{j} \lambda_p(z)\{u_{j-p}(x, z) + v_{j-p}^{(0)}(\theta, \log r - z^{-1}, z)\} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{j-1} \lambda_p(z)\, r^{-1} v_{j-p-1}^{(1)}(\theta, z)\Bigg] + \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^{j-2}\left[\Delta_\xi v_j(\xi, z) + \sum_{p=0}^{j-2}\lambda_p(z)\, v_{j-p-2}^{(1)}(x, z)\right] +$$

$$+\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\lambda_j(z)\left\{\sum_{p=N-j+1}^{N}\varepsilon^p u_p(x, z)+\sum_{p=N-j-1}^{N}\varepsilon^p\widetilde{v}_p^{(1)}(\varepsilon^{-1}x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=N-j+1}^{N}\varepsilon^p v_p^{(0)}(\theta, z)+\sum_{p=N-j}^{N}\varepsilon^{p+1}r^{-1}v_p^{(1)}(\theta, z)\right\},$$

где $z=(\log\varepsilon)^{-1}$. Выражения в квадратных скобках обращаются в нуль в силу (1.27) и (1.39), (1.40) и, следовательно, в силу (1.36)—(1.38)

$$\Delta\mathfrak{S}_N(\varepsilon, x)+\Lambda_N((\log\varepsilon)^{-1})\mathfrak{S}_N(\varepsilon, x)=O(\varepsilon^{N+1-\delta}r^{-2}),$$

где δ — произвольное положительное число.

Аналогично, используя граничные условия (1.28), (1.41), (1.42), находим, что

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\mathfrak{S}_N(\varepsilon, x)=\left[\frac{\partial u_0}{\partial\nu}(x)+\frac{\partial}{\partial\nu}v_0^{(0)}(\theta, \log r-z^{-1}, z)\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^j\left[\frac{\partial u_j}{\partial\nu}(x)+\sum_{p=0}^{j}\frac{\partial}{\partial\nu}(r^{-p}v_{j-p}^{(p)}(\theta, z))\right]+$$

$$+\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\frac{\partial}{\partial\nu}\widetilde{v}_j^{(N-j)}(\varepsilon^{-1}x, z)=O(\varepsilon^{N+1-\delta})\quad\text{при}\quad x\in\partial\Omega;$$

$$\mathfrak{S}_N(\varepsilon, x)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[v_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\sum_{p=1}^{j}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^p u_{j-p}^{(p)}(\theta)\right]+$$

$$+\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\widetilde{u}_j^{(N-j)}(x)=O(\varepsilon^{N+1-\delta})\quad\text{при}\quad x\in\partial\omega_\varepsilon.$$

Далее следует дословно повторить рассуждения, проведенные для $n=3$, начиная с формулы (1.52). Единственное существенное отличие возникает при получении оценки для $\lambda(\varepsilon)$, соответствующей $\lambda(\varepsilon)=O(\varepsilon)$ в трехмерном случае. При $n=2$ она имеет вид $\lambda(\varepsilon)=O(|\log\varepsilon|^{-1})$ и получается после подстановки в отношение Рэлея функции $1+((\log\varepsilon)^{-1}\cdot\cdot V_0(\varepsilon^{-1}x)-1)(1-\zeta_1(x))$, где V_0— функция (1.26).

Окончательно получается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть* $n=2$. *Первое собственное число задачи* (1.1)—(1.3) *может быть представлено в виде*

$$\lambda(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\lambda_k((\log\varepsilon)^{-1})\varepsilon^k+O(\varepsilon^{N+1-\delta})$$

при любом $\delta>0$. *Здесь* λ_k — *мероморфные функции в окрестности начала*; $\lambda_0(0)=0$, $\lambda_0'(0)=-2\pi|\Omega|^{-1}$, *значение* $\lambda_0''(0)$ *содержится в формуле* (1.33).

Для первой собственной функции φ, *нормированной равенством* $\overline{\varphi}=1$, *справедлива оценка*

$$|D_x^\alpha(\mathfrak{S}_N(\overline{\mathfrak{S}}_N)^{-1}-\varphi)(\varepsilon, x)|\leqslant c_{N,\alpha,\delta}\,\varepsilon^{N+1-\delta}r^{-|\alpha|-\delta},$$

где $\mathfrak{S}_N$ — *частичная сумма* (1.60) *ряда* (1.34).

§ 2. Асимптотика собственных чисел некоторых других краевых задач

Использованная в § 1 методика построения асимптотических разложений собственных чисел смешанной задачи имеет более широкую область приложения. Не стремясь к общности и имея целью подчеркнуть алгорифмическую сторону методики, покажем это на нескольких примерах, представляющих и самостоятельный интерес. Мы ограничиваемся простейшими самосопряженными краевыми задачами с положительными операторами и случаем некратного собственного числа, когда обоснование формальных разложений проводится так же, как в п. 4° § 1.

1°. Задача Дирихле в трехмерной области с малым отверстием. Пусть $\lambda(\varepsilon)$ — первое собственное число краевой задачи

$$\Delta\varphi(\varepsilon, x)+\lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon, x)=0, \quad x\in\Omega_\varepsilon; \quad \varphi(\varepsilon, x)=0, \quad x\in\partial\Omega_\varepsilon. \tag{2.1}$$

Аналогично п. 2° § 1 будем искать асимптотику $\lambda(\varepsilon)$ и $\varphi(\varepsilon, x)$ в виде

$$\lambda(\varepsilon)\sim\Lambda+\varepsilon\lambda_0+\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varepsilon^k, \tag{2.2}$$

$$\varphi(\varepsilon, x)\sim\Phi(x)+V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon^p\left(u_{p+1}(x)+v_{p+1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right), \tag{2.3}$$

где Λ и Φ — первое собственное число и соответствующая собственная функция оператора $-\Delta$ в Ω с данными Дирихле на $\partial\Omega$, а u_k, v_k — функции, допускающие представления (1.12)—(1.14).

Поскольку процедура построения коэффициентов рядов (2.2), (2.3) — та же, что и в случае смешанной задачи из п. 2° § 1, ограничимся лишь нахождением λ_0 и λ_1.

Для компенсации главного члена невязки функции Φ в краевом условии Дирихле на $\partial\omega_\varepsilon$ следует положить $V(\xi)=\Phi(0)v_0(\xi)$, где v_0 — решение задачи (1.4). Подставив суммы $\Lambda+\varepsilon\lambda_0$ и $\Phi(x)+V(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon u_1(x)$ в задачу (2.1) и выделив слагаемые порядка ε (записанные в координатах x), получаем задачу

$$\Delta u_1(x)+\Lambda u_1(x)+\lambda_0\Phi(x)+\Lambda\Phi(0)\,r^{-1}v_0^{(1)}=0, \quad x\in\Omega; \tag{2.4}$$

$$u_1(x)=-\Phi(0)\,r^{-1}v_0^{(1)}, \quad x\in\partial\Omega. \tag{2.5}$$

Напомним, что $v_0^{(1)}=-\mathrm{cap}(\omega)$. Умножим уравнение (2.4) на $\Phi(x)$ и проинтегрируем по Ω. С учетом граничных условий (2.5) имеем:

$$\lambda_0\int_\Omega\Phi(x)^2dx=-\int_\Omega\Phi(x)\{\Delta u_1(x)+\Lambda u_1(x)\}\,dx+$$
$$+\int_\Omega\Phi(0)\,v_0^{(1)}r^{-1}\Delta\Phi(x)\,dx=\Phi(0)\,v_0^{(1)}\left\{\int_\Omega r^{-1}\Delta\Phi(x)\,dx-\right.$$
$$\left.-\int_{\partial\Omega}r^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x)\,ds\right\}=-4\pi\Phi(0)^2v_0^{(1)}.$$

Таким образом,

$$\lambda_0=4\pi\,\mathrm{cap}(\omega)\,\Phi(0)^2\|\Phi;L_2(\Omega)\|^{-2}. \tag{2.6}$$

Перейдем к вычислению λ_1. Подставим $\Lambda+\varepsilon\lambda_0+\varepsilon^2\lambda_1$ и $\Phi(x)+\Phi(0)v_0(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon^2 u_2(x)$ в задачу (2.1) и выделим слагаемые порядка ε, записанные в ξ-координатах, и порядка ε^2, записанные в x-координатах. В результате получим краевые задачи для функций v_1 и u_2:

$$\Delta_\xi v_1(\xi)=0, \quad \xi\in \mathbf{R}^3\setminus\overline{\omega}; \quad v_1(\xi)=u_1(0)+\xi\cdot\nabla\Phi(0), \quad \xi\in\partial\omega; \tag{2.7}$$

$$\Delta u_2(x)+\Lambda u_2(x)+\lambda_1\Phi(x)+\lambda_0 u_1(x)+$$
$$+\Lambda(\Phi(0)r^{-2}v_0^{(2)}(\theta)+r^{-1}v_1^{(1)})+\lambda_0\Phi(0)r^{-1}v_0^{(1)}=0, \quad x\in\Omega; \tag{2.8}$$

$$u_2(x)=-\Phi(0)r^{-2}v_0^{(2)}(\theta)-r^{-1}v_1^{(1)}, \quad x\in\partial\Omega. \tag{2.9}$$

Умножим уравнение (2.8) на $\Phi(x)$ и проинтегрируем по Ω. Принимая во внимание (2.9), находим:

$$\lambda_1\int_\Omega\Phi(x)^2dx=-\lambda_0\int_\Omega\Phi(x)u_1(x)\,dx-\int_\Omega\Phi(x)(\Delta u_2(x)+\Lambda u_2(x))\,dx+$$
$$+\int_\Omega\Delta\Phi(x)(\Phi(0)r^{-2}v_0^{(2)}(\theta)+r^{-1}v_1^{(1)})\,dx-\lambda_0\Phi(0)v_0^{(1)}\int_\Omega\Phi(x)\frac{dx}{r}=$$
$$=-\lambda_0\int_\Omega\Phi(x)u_1(x)\,dx-\lambda_0\Phi(0)v_0^{(1)}\int_\Omega\Phi(x)\frac{dx}{r}+$$
$$+\int_\Omega\Delta\Phi(x)(\Phi(0)r^{-2}v_0^{(2)}(\theta)+r^{-1}v_1^{(1)})\,dx+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x)u_2(x)\,ds. \tag{2.10}$$

Так как решение задачи (2.4), (2.5) определено с точностью до слагаемого $\operatorname{const}\Phi$, то можно считать функцию u_1 ортогональной Φ. Так как

$$v_0(\xi)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\omega}\frac{\partial v_0}{\partial\nu}(\zeta)\,|\,\xi-\zeta\,|^{-1}\,ds_\zeta,$$

то

$$v_0(\xi)=-\frac{1}{4\pi|\xi|}\int_{\partial\omega}\frac{\partial v_0}{\partial\nu}(\zeta)\,ds_\zeta-\frac{1}{4\pi}\frac{\xi}{|\,\xi\,|^3}\cdot\int_{\partial\omega}\zeta\frac{\partial v_0}{\partial\nu}(\zeta)\,ds_\zeta+O(|\,\xi\,|^{-3}).$$

Поэтому $v_0^{(1)}=-\operatorname{cap}(\omega)$,

$$r^{-2}v_0^{(2)}(\theta)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\xi}{|\,\xi\,|^3}\cdot\int_{\partial\omega}\zeta\frac{\partial v_0}{\partial\nu}\,ds_\zeta=-\frac{\xi}{|\,\xi\,|^3}\cdot\int_{\partial\omega}\zeta\,d\mu(\zeta), \tag{2.11}$$

где μ — емкостная мера области ω. Для того чтобы определить $v_1^{(1)}$, заметим, что в силу (2.7)

$$0=\int_{\mathbf{R}^3\setminus\omega}(1+v_0(\xi))\,\Delta v_1(\xi)\,d\xi=-\int_{\partial\omega}v_1(\xi)\frac{\partial v_0}{\partial\nu}(\xi)\,ds_\xi+$$
$$+\lim_{R\to+\infty}\int_{|\xi|=R}\frac{\partial v_1}{\partial\rho}(\xi)\,ds_\xi.$$

Поэтому

$$v_1^{(1)}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\omega}v_1(\xi)\frac{\partial v_0}{\partial\nu}(\xi)\,ds_\xi=u_1(0)\operatorname{cap}(\omega)+\nabla\Phi(0)\cdot\int_{\partial\omega}\xi\,d\mu(\xi). \tag{2.12}$$

Из (2.9) и формулы Грина вытекает равенство:

$$\int_{\Omega} \Delta\Phi(x)\left(\Phi(0)\, r^{-2} v_0^{(2)}(\theta) + r^{-1} v_1^{(1)}\right) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x)\, u_2(x)\, ds_x =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|x|=\delta} \left\{ \Phi(x) \frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi(0)\, r^{-2} v_0^{(2)}(\theta) + r^{-1} v_1^{(1)}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\Phi}{\partial r}(x)\, \Phi(0)\, r^{-2} v_0^{(2)}(\theta) \right\} ds_x =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{|x|=\delta} \{[\Phi(0) + \nabla\Phi(0)\cdot x]\,[-2\Phi(0)\, r^{-3} v_0^{(2)}(\theta)] - \Phi(0)\, r^{-2} v_1^{(1)} -$$

$$- \nabla\Phi(0)\cdot x\Phi(0)\, r^{-3} v_0^{(2)}(\theta)\}\, ds_x =$$

$$= -\Phi(0) \lim_{\delta\to 0} \int_{|x|=\delta} \{r^{-2} v_1^{(1)} + 3\nabla\Phi(0)\cdot x r^{-3} v_0^{(2)}(\theta)\}\, ds_x.$$

В силу (2.11), (2.12) предел справа равен

$$\Phi(0) \left\{ 4\pi u_1(0)\, \mathrm{cap}(\omega) + 4\pi\nabla\Phi(0)\cdot \int_{\partial\omega} \zeta d\mu(\zeta) - \right.$$

$$\left. - 3\nabla\Phi(0)\cdot \int_{|y|=1} y\left(y\cdot \int_{\partial\omega} \zeta d\mu(\zeta)\right) ds_y \right\} = 4\pi\Phi(0)\, u_1(0)\, \mathrm{cap}(\omega).$$

Окончательно, из (2.10) вытекает, что

$$\lambda_1 = 4\pi\Phi(0)^3 \mathrm{cap}(\omega)^2 \int_{\Omega} \Phi(x)\, r^{-1} dx\, \|\Phi;\, L_2(\Omega)\|^{-4} +$$

$$+ 4\pi\Phi(0)\, u_1(0)\, \mathrm{cap}(\omega)\, \|\Phi;\, L_2(\Omega)\|^{-2}. \qquad (2.13)$$

Итак, первое собственное число задачи (2.1) имеет асимптотику

$$\lambda(\varepsilon) = \Lambda + 4\pi\, \mathrm{cap}(\omega)\, \Phi(0)^2 \varepsilon + [4\pi\Phi(0)\, \mathrm{cap}(\omega)]^2 \times$$

$$\times \left\{ \Gamma(0) + \frac{\Phi(0)}{4\pi} \int_{\Omega} \Phi(x)\, r^{-1} dx \right\} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

где Λ — первое собственное число задачи Дирихле в области Ω, Φ — соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, а Γ — ортогональная функции Φ регулярная часть решения задачи

$$\Delta G(x) + \Lambda G(x) = \delta(x) - \Phi(0)\Phi(x), \quad x\in\Omega; \quad G(x) = 0, \quad x\in\partial\Omega;$$

т. е. $\Gamma(x) = G(x) + (4\pi r)^{-1}$.

2°. Смешанная краевая задача в области с несколькими малыми отверстиями. Пусть Ω — та же область, что и в п. 1° § 1, а $\omega^{(\tau)}$ — содержащие начало координат подобласти $\mathbf{R}^3$ с компактными замыканиями и гладкими (класса $\mathbf{C}^\infty$) границами; $\tau = 1, \ldots, T$. Пусть $O^{(1)}, \ldots, O^{(T)}$ — набор различных точек в Ω, а (r_τ, θ_τ) — сферические координаты с центрами в этих точках. Введем зависящие от малого параметра ε области $\omega_\varepsilon^{(\tau)} = \{x\in\mathbf{R}^3\colon \varepsilon^{-1}(x - O^{(\tau)}) \in \omega^{(\tau)}\}$, $\tau = 1, \ldots, T$, и $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{\tau=1}^{T} \overline{\omega}_\varepsilon^{(\tau)}$. В Ω_ε рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\Delta\varphi(\varepsilon, x) + \lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon; \ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \tag{2.14}$$

$$\varphi(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\omega_\varepsilon^{(\tau)}, \quad \tau = 1, \ldots, T. \tag{2.15}$$

Как и в § 1, предельной (при $\varepsilon \to 0$) задачей для (2.14), (2.15) является задача Неймана для оператора Лапласа в области Ω, которая имеет нулевое собственное число и собственную функцию $u_0(x) = 1$. Эта функция оставляет невязки в граничных условиях (2.15), которые аналогично п. 2° § 1 компенсируются при помощи пограничного слоя, возникающего вблизи каждого из отверстий $\omega_\varepsilon^{(\tau)}$. Обозначим через $v_0^{(\tau)}$ решения краевых задач

$$\Delta_{\xi_\tau} v_0^{(\tau)}(\xi_\tau) = 0, \quad \xi_\tau \in \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\omega}^{(\tau)}; \quad v_0^{(\tau)}(\xi_\tau) = -1, \quad \xi_\tau \in \partial\omega^{(\tau)},$$

$\tau = 1, \ldots, T$, где $\xi_\tau = \varepsilon^{-1}(x - O^{(\tau)})$. Функции $v_0^{(\tau)}$ допускают асимптотические представления

$$v_0^{(\tau)}(\xi_\tau) = \sum_{j=1}^{J} \rho_\tau^{-j} v_0^{(\tau, j)}(\theta_\tau) + O(\rho_\tau^{-J-1}) \text{ при } \rho_\tau \to +\infty, \tag{2.16}$$

где $\rho_\tau = \varepsilon^{-1} r_\tau$, $v_0^{(\tau,1)} = -\mathrm{cap}(\omega^{(\tau)})$ (ср. (1.5), (1.6)).

Аналогично п. 2° § 1 будем искать асимптотику $\lambda(\varepsilon)$ и $\varphi(\varepsilon, x)$ в виде

$$\lambda(\varepsilon) \sim \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k, \tag{2.17}$$

$$\varphi(\varepsilon, x) \sim 1 + \sum_{\tau=1}^{T} v_0^{(\tau)}(\varepsilon^{-1}(x - O^{(\tau)})) + \varepsilon \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \left\{ u_{p+1}(x) + \sum_{\tau=1}^{T} v_{p+1}^{(\tau)}(\varepsilon^{-1}(x - O^{(\tau)})) \right\}, \tag{2.18}$$

где функции u_q и $v_q^{(\tau)}$ допускают представления:

$$v_q^{(\tau)}(\xi_\tau) = \sum_{j=1}^{J} \rho_\tau^{-j} v_0^{(\tau, j)}(\theta_\tau) + O(\rho_\tau^{-J-1}) \text{ при } \rho_\tau \to \infty;$$

$$u_q^{(\tau)}(x) = \sum_{j=0}^{J} r_\tau^j u_q^{(\tau,\nu,j)}(\theta_\tau) + O(r_\nu^{J+1}) \text{ при } r_\nu \to 0, \quad \nu = 1, \ldots, T. \tag{2.19}$$

Коэффициенты рядов (2.17) и (2.18) отыскиваются так же, как и в п. 2° § 1, необходимо лишь учесть пограничные слои всех T отверстий, а не один, как в задаче (1.1)—(1.3). Ограничимся вычислением λ_0 и λ_1. С этой целью подставим суммы $\varepsilon\lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_1$ и

$$U(\varepsilon, x) = 1 + \sum_{\tau=1}^{T} v_0^{(\tau)}(\varepsilon^{-1}(x - O^{(\tau)})) + \varepsilon u_1(x) +$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{T} \varepsilon v_1^{(\tau)}(\varepsilon^{-1}(x - O^{(\tau)})) + \varepsilon^2 u_2(x)$$

в краевую задачу (2.14), (2.15). Имеем:

$$\{\Delta+\varepsilon(\lambda_0+\varepsilon\lambda_1)\}U(\varepsilon,x)=\varepsilon(\Delta u_1(x)+\lambda_0)+\varepsilon^2(\Delta u_2(x)+$$
$$+\lambda_0 u_1(x)+\lambda_1+\lambda_0\sum_{\tau=1}^{T} r_\tau^{-1}v_1^{(\tau,0)})+O(\varepsilon^3)+$$
$$+\varepsilon^2\sum_{\tau=1}^{T}\{\Delta_{\xi_\tau}v_0^{(\tau)}(\xi_\tau)+\varepsilon\Delta_{\xi_\tau}v_1^{(\tau)}(\xi_\tau)+O(\varepsilon^3 r_\tau^{-2})\}. \tag{2.20}$$

Для граничных условий получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}U(\varepsilon,x)=\varepsilon\left(\frac{\partial u_1}{\partial\nu}(x)+\sum_{\tau=1}^{T}\frac{\partial}{\partial\nu}(r_\tau^{-1}v_0^{(\tau,1)})\right)+$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial\nu}(x)+\sum_{\tau=1}^{T}\frac{\partial}{\partial\nu}(r_\tau^{-2}v_0^{(\tau,2)}(\theta_\tau)+r_\tau^{-1}v_1^{(\tau,1)})\right)+O(\varepsilon^3),\quad x\in\partial\Omega; \tag{2.21}$$

$$U(\varepsilon,x)=\varepsilon(v_1(\xi_\tau)+u_1(O^{(\tau)})+\sum_{\nu=1,\dots,T,\nu\neq\tau}v_0^{(\tau,1)}|O^{(\tau)}-O^{(\nu)}|^{-1})+$$
$$+O(\varepsilon^2),\quad x\in\partial\omega^{(\tau)},\quad \tau=1,\dots,T. \tag{2.22}$$

Учитывая (2.20), (2.21), находим, что u_1 и λ_0 удовлетворяют уравнениям

$$\Delta u_1(x)+\lambda_0=0,\quad x\in\Omega;\qquad \frac{\partial u_1}{\partial\nu}(x)=\sum_{\tau=1}^{T}\operatorname{cap}(\omega^{(\tau)})\frac{\partial}{\partial\nu}r_\tau^{-1},\quad x\in\partial\Omega.$$

Поэтому

$$\lambda_0=4\pi|\Omega|^{-1}\sum_{\tau=1}^{T}\operatorname{cap}(\omega^{(\tau)}),\quad u_1(x)=\sum_{\tau=1}^{T}4\pi\operatorname{cap}(\omega^{(\tau)})H(x,O^{(\tau)}), \tag{2.23}$$

где $H(x, y)$ — регулярная часть функции Неймана $N(x, y)=-\{4\pi|x-y|\}^{-1}+H(x, y)$; средние $H(x, O^{(\tau)})$ по Ω равны нулю (ср. (1.7)—(1.9)).

Функцию u_2 и число λ_1 в силу (2.20), (2.21) следует подчинить требованиям:

$$\begin{aligned}&\Delta u_2(x)+\lambda_1+\lambda_0 u_1(x)+\lambda_0\sum_{\tau=1}^{T}r_\tau^{-1}v_1^{(\tau,0)}=0,\quad x\in\Omega,\\ &\frac{\partial u_2}{\partial\nu}(x)=-\sum_{\tau=1}^{T}\frac{\partial}{\partial\nu}(r_\tau^{-2}v_0^{(\tau,2)}(\theta_\tau)+r_\tau^{-1}v_1^{(\tau,1)}),\quad x\in\partial\Omega.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Условием разрешимости задачи (2.24) является равенство

$$\lambda_1|\Omega|+\lambda_0\int_\Omega u_1(x)\,dx+\sum_{\tau=1}^{T}\left\{\lambda_0 v_0^{(\tau,1)}\int_\Omega r_\tau^{-1}dx+\right.$$
$$\left.+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\{r_\tau^{-2}v_0^{(\tau,2)}(\theta_\tau)+r_\tau^{-1}v_1^{(\tau,1)}\}\,ds\right\}=0.$$

Учитывая (2.23) и проделывая те же выкладки, что и при выводе формулы (1.18), получаем, что

$$\lambda_1 |\Omega| = \sum_{\tau=1}^{T} \left\{ 4\pi v_1^{(\tau,1)} - \lambda_0 v_0^{(\tau,1)} \int_\Omega r_\tau^{-1} dx \right\}. \qquad (2.25)$$

Согласно (2.16), $v_0^{(\tau,1)} = -\mathrm{cap}(\omega^{(\tau)})$. Кроме того, из (2.20), (2.21) находим, что функции $v_1^{(\tau)}$ должны удовлетворять краевым задачам:

$$\Delta_{\xi_\tau} v_1^{(\tau)}(\xi_\tau) = 0, \quad \xi_\tau \in \mathbf{R}^3 \setminus \omega^{(\tau)};$$

$$v_1^{(\tau)}(\xi_\tau) = -u_1(O^{(\tau)}) - \sum_{\nu=1,\ldots,T;\ \nu\neq\tau} v_0^{(\tau,1)} |O^{(\tau)} - O^{(\nu)}|^{-1}, \quad \xi_\tau \in \partial\omega^{(\tau)},$$

и, следовательно, допускают аналогичные (2.19) разложения, в которых

$$v_1^{(\tau,1)} = -\mathrm{cap}(\omega^{(\tau)}) \Big\{ 4\pi\, \mathrm{cap}(\omega^{(\tau)}) H(O^{(\tau)}, O^{(\tau)}) +$$

$$+ \sum_{\nu=1,\ldots,T;\ \nu\neq\tau} (4\pi\, \mathrm{cap}(\omega^{(\nu)}) H(O_\tau, O_\nu) - \mathrm{cap}(\omega^{(\nu)}) |O^{(\tau)} - O^{(\nu)}|^{-1}) \Big\}.$$

Отсюда и из (2.25) выводим равенство

$$\lambda_1 = \frac{4\pi}{|\Omega|} \sum_{\tau=1}^{T} \left\{ \left(\sum_{\mu=1}^{T} \mathrm{cap}(\omega^{(\mu)}) \right) \frac{\mathrm{cap}(\omega^{(\tau)})}{|\Omega|} \int_\Omega \frac{dx}{|x - O^{(\tau)}|} - \right.$$

$$- 4\pi \sum_{\nu=1}^{T} \mathrm{cap}(\omega^{(\tau)}) H(O^{(\tau)}, O^{(\nu)}) \mathrm{cap}(\omega^{(\nu)}) +$$

$$\left. + \sum_{\nu=1,\ldots,T;\ \nu\neq\tau} \mathrm{cap}(\omega^{(\nu)}) |O^{(\tau)} - O^{(\nu)}|^{-1} \mathrm{cap}(\omega^{(\tau)}) \right\}. \qquad (2.26)$$

3°. Смешанная краевая задача с условиями Неймана на границе малого отверстия. Обозначим через $\lambda(\varepsilon)$ первое собственное число краевой задачи

$$\Delta\varphi(\varepsilon, x) + \lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon; \qquad (2.27)$$

$$\varphi(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\omega_\varepsilon. \qquad (2.28)$$

Как и ранее, асимптотику $\lambda(\varepsilon)$ и $\varphi(\varepsilon, x)$ будем искать в виде (2.2), (2.3). Покажем, как вычисляются первые члены этих рядов. Подставим суммы

$$\Lambda + \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_1 \text{ и } \Phi(x) + V(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 u_2(x)$$

в краевую задачу (2.27), (2.28). Имеем:

$$(\Delta + (\Lambda + \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_1)\,\mathrm{I})(\Phi(x) + V(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}x) +$$

$$+ \varepsilon u_2(x)) = \varepsilon^{-2}(\Delta_\xi V(\xi) + \varepsilon\Delta_\xi v_1(\xi)) + O(|\xi|^{-3}) +$$

$$+ \varepsilon(\Delta u_1(x) + \Lambda u_1(x) + \lambda_0\Phi(x) + \Lambda r^{-1}V^{(1)}) +$$

$$+ \varepsilon^2(\Delta u_2(x) + \Lambda u_2(x) + \lambda_0 u_1(x) + \lambda_1\Phi(x) +$$

$$+ \Lambda(r^{-1}v_1^{(1)} + r^{-2}V^{(2)}(\theta)) + \lambda_0 r^{-1}V^{(1)}) + O(\varepsilon^3). \qquad (2.29)$$

Отсюда следует, что V и v_1 — гармонические функции. Так как $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}= O(\varepsilon)$ на $\partial\omega_\varepsilon$, то $\frac{\partial V}{\partial\nu}=O$ на $\partial\omega$ и поэтому $V=0$ в $\mathbf{R}^3\setminus\omega$. Для функции u_1 имеем задачу

$$\Delta u_1(x)+\Lambda u_1(x)+\lambda_0\Phi(x)=0,\quad x\in\Omega;\quad u_1(x)=0,\quad x\in\partial\Omega.$$

Следовательно, $u_1=0$ в Ω и $\lambda_0=0$. Гармоническая функция v_1 удовлетворяет краевому условию

$$\frac{\partial v_1}{\partial\nu}(\xi)=-\nabla\Phi(0)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\ \text{на}\ \partial\omega.$$

Так как правая часть этого равенства ортогональна единице на $\partial\omega$, то $v_1(\xi)=O(|\xi|^{-2})$, т. е. $v_1^{(1)}=0$. Возвращаясь к (2.29), находим, что u_2 удовлетворяет той же задаче, что и u_1, т. е. что $u_2=0$, $\lambda_1=0$.

Итак, мы должны положить

$$\lambda(\varepsilon)\sim\Lambda+\varepsilon^3\lambda_2,\qquad \varphi(\varepsilon,x)\sim\Phi(x)+\varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon^2 v_2(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon^3 u_3(x).$$

Аналогично (2.28) имеем:

$$\begin{aligned}(\Delta+(\Lambda+\varepsilon^3\lambda_2)\,1)(\Phi(x)&+\varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon^2 v_2(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon^3 u_3(x))=\\&=\varepsilon^3(\Delta u_3+\Lambda u_3+\lambda_2\Phi+\Lambda(r^{-2}v_1^{(2)}(\theta)+r^{-1}v_2^{(1)}))+\\&+O(\varepsilon^4)+\varepsilon^{-1}(\Delta_\xi v_1(\xi)+\varepsilon\Delta_\xi v_2(\xi))+O(\varepsilon^4 r^{-3}).\end{aligned}\tag{2.30}$$

Кроме того, при $x\in\partial\Omega$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}\Phi(x)&+\varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon^2 v_2(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon^3 u_3(x)=\\&=\varepsilon^3(u_3(x)+r^{-2}v_1^{(2)}(\theta)+r^{-1}v_2^{(1)})+O(\varepsilon^4).\end{aligned}\tag{2.31}$$

Здесь $v_j^{(p)}(\theta)$ — коэффициенты из представлений (1.13) функций v_j.

Из (2.30), (2.31) вытекает, что функция u_3 удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned}&\Delta u_3(x)+\Lambda u_3(x)+\lambda_2\Phi(x)+\Lambda(r^{-2}v_1^{(2)}(\theta)+r^{-1}v_2^{(1)})=0,\quad x\in\Omega;\\&u_3(x)=-r^{-2}v_1^{(2)}(\theta)-r^{-1}v_2^{(1)},\quad x\in\partial\Omega.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Функции v_1 и v_2 в силу (2.30) и соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\nu}(\Phi(x)+\varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon^2 v_2(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon^3 u_3(x))=\left(\nabla\Phi(0)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\nu_\xi}+\frac{\partial v_1}{\partial\nu_\xi}(\xi)\right)+\\+\varepsilon\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}(0)\xi_j\xi_k+\frac{\partial v_2}{\partial\nu_\xi}(\xi)\right)+O(\varepsilon^2),\quad \xi\in\partial\omega,\end{aligned}$$

являются решениями краевых задач

$$\Delta_\xi v_1(\xi)=0,\quad \xi\in\mathbf{R}^3\setminus\overline{\omega};\quad \frac{\partial v_1}{\partial\nu}(\xi)=-\nabla\Phi(0)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\nu},\quad \xi\in\partial\omega;\tag{2.33}$$

$$\Delta_\xi v_2(\xi)=0,\quad \xi\in\mathbf{R}^3\setminus\overline{\omega};\quad \frac{\partial v_2}{\partial\nu}(\xi)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}(0)\xi_j\xi_k,\quad \xi\in\partial\omega.\tag{2.34}$$

Постоянная $v_2^{(1)}$ в асимптотике решения задачи (2.34) при $|\xi|\to\infty$ вычисляется по формуле

$$v_2^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\omega}\frac{\partial v_2}{\partial\nu}(\xi)\,ds = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\omega}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}(0)\,\Delta_\xi\xi_j\xi_k d\xi =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\Delta\Phi(0)|\omega| = \frac{1}{4\pi}\Lambda\Phi(0)|\omega|.$$

Решение задачи (2.33) представимо в виде суммы $\sum\limits_{j=1}^{3}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(0)z_j(\xi)$, где z_j — решение задачи

$$\Delta z_j(\xi) = 0,\quad \xi\in \mathbf{R}^3\setminus\overline{\omega};\quad \frac{\partial z_j}{\partial\nu}(\xi) = -\frac{\partial\xi_j}{\partial\nu},\quad \xi\in\partial\omega.$$

Ясно, что при $|\xi|\to\infty$

$$z_j(\xi) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{3} m_{jk}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{\rho} + O(\rho^{-3}).$$

Для того чтобы найти матрицу $M = \|m_{jk}\|_{j,k=1}^{3}$, воспользуемся формулой Грина:

$$\int\limits_{R^3\setminus\omega}\nabla z_j(\xi)\cdot\nabla z_p(\xi)\,d\xi = \int\limits_{\partial\omega} z_j(\xi)\frac{\partial z_p}{\partial\nu}(\xi)\,ds.$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\int\limits_{\partial\omega} z_j(\xi)\frac{\partial z_p}{\partial\nu}(\xi)\,ds = \int\limits_{\partial\omega}(\xi_j + z_j(\xi))\frac{\partial z_p}{\partial\nu}(\xi)\,ds +$$

$$+\int\limits_{\partial\omega}\xi_j\frac{\partial\xi_p}{\partial\nu}(\xi)\,ds = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\partial B_R}\left\{(\xi_j + z_j(\xi))\frac{\partial z_p}{\partial\rho}(\xi) - z_p(\xi)\frac{\partial}{\partial\rho}(\xi_j + z_j(\xi))\right\}ds -$$

$$-\int\limits_{\omega}\nabla\xi_j\cdot\nabla\xi_p\,d\xi = \lim_{R\to\infty}\frac{3}{4\pi}\int\limits_{\partial B_R}\left\{\sum_{q=1}^{3} m_{p,q}\xi_j\xi_q\rho^{-4} + O(\rho^{-5})\right\}ds -$$

$$-\delta_{pj}|\omega| = \frac{3}{4\pi}\sum_{q=1}^{3} m_{pq}\int\limits_{B_1}\frac{\partial\xi_q}{\partial\xi_j}\,d\xi - \delta_{pj}|\omega| = m_{pj} - \delta_{pj}|\omega|.$$

Таким образом,

$$M = \mathbf{1}|\omega| + \|(\nabla z_j, \nabla z_p)\|_{j,p=1}^{3}, \tag{2.35}$$

где (,) — скалярное произведение в $L_2(\mathbf{R}^3\setminus\omega)$.

Вернемся к рассмотрению задачи (2.32). Условием ее разрешимости является равенство

$$\lambda_2\|\Phi; L_2(\Omega)\|^2 = -\Lambda\int\limits_{\Omega}\Phi(x)\,(r^{-2}v_1^{(2)}(\theta) + r^{-1}v_2^{(1)})\,dx -$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x)\,(r^{-2}v_1^{(2)}(\theta) + r^{-1}v_2^{(1)})\,ds.$$

В силу формулы Грина правая часть имеет вид

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\partial B_\delta}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial r}(x)\left(r^{-2}v_1^{(2)}(\theta)+r^{-1}v_2^{(1)}\right)-\Phi(x)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-2}v_1^{(2)}(\theta)+r^{-1}v_2^{(1)}\right)\right\}ds=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\partial B_\delta}\left\{\nabla\Phi(0)\cdot\frac{x}{r}\left(r^{-2}v_1^{(2)}(\theta)+r^{-1}v_2^{(1)}\right)+\left(\Phi(0)+\nabla\Phi(0)\cdot x\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(2r^{-3}v_1^{(2)}(\theta)+r^{-2}v_2^{(1)}\right)\right\}ds.$$

Так как функция $v^{(2)}$ ортогональна единице на ∂B_1, то последний предел равен

$$\int\limits_{\partial B_1}\{3\nabla\Phi(0)\cdot xv_1^{(2)}(\theta)+\Phi(0)v_2^{(1)}\}\,ds=\Lambda\Phi(0)^2|\omega|-\nabla\Phi(0)\cdot M\nabla\Phi(0).$$

Итак,

$$\lambda(\varepsilon)\sim\varepsilon^3(\Lambda\Phi(0)^2|\omega|-\nabla\Phi(0)\cdot M\nabla\Phi(0)),$$

где M — матрица (2.35), а Φ — первая собственная функция задачи Дирихле в Ω, нормированная в $L_2(\Omega)$.

4°. Задача Дирихле на римановом многообразии с вырезанной малой областью. Пусть Ω — двумерное компактное риманово многообразие без края; $0\in\Omega$, $\mathscr{V}$ — окрестность точки 0 в Ω с локальными координатами y. Обозначим через ω ограниченную область на плоскости $\mathbf{R}^2$, а через ω_ε и Ω_ε — области $\{x\in\Omega\colon \varepsilon^{-1}y\in\omega\}$ и $\Omega\setminus\overline{\omega}_\varepsilon$.

Пусть $\lambda(\varepsilon)$ — первое собственное число задачи Дирихле для оператора Лапласа на Ω_ε:

$$\Delta\varphi(\varepsilon, x)+\lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon, x)=0 \text{ на } \Omega_\varepsilon;\quad \varphi(\varepsilon, x)=0 \text{ на } \partial\omega_\varepsilon. \tag{2.36}$$

Согласно работам [3, 15], $\lambda(\varepsilon)=2\pi|\Omega|\,|\log\varepsilon|^{-1}+O(|\log\varepsilon|^{-2})$ при $\varepsilon\to+0$, где $|\Omega|$ — площадь Ω. Несложная модификация проведенного в пункте 3° § 1 рассуждения показывает, что

$$\lambda(\varepsilon)=\lambda_0(|\log\varepsilon|^{-1})+O(\varepsilon^{1-\sigma}) \text{ при } \varepsilon\to+0, \tag{2.37}$$

где λ_0 — аналитическая функция, $\lambda_0(0)=0$, $\lambda_0'(0)=2\pi|\Omega|$; $\sigma>0$. Приведем построение функции λ_0.

Пусть Γ — ортогональное единице решение уравнения

$$\Delta\Gamma(x)=-2\pi\delta(x)+2\pi|\Omega|^{-1} \text{ на } \Omega,$$

где δ — функция Дирака. Вблизи точки 0

$$\Gamma(x)=-\log|y|+\gamma+O(|y|),\quad \gamma=\mathrm{const}. \tag{2.38}$$

Главный член асимптотики собственной функции φ задачи (2.36) ищем в виде

$$1+\alpha(z)\Gamma(x)+U_0(x, z)+W_0(\varepsilon^{-1}y, z)\chi(y), \tag{2.39}$$

где $z=|\log\varepsilon|^{-1}$, $\chi\in C_0^\infty(\mathscr{V})$, $\chi(0)=1$; α и U_0, W_0 — постоянная и функции, которые будут определены далее; $U_0(0, z)=0$; $W_0(\infty, z)=0$.

Подставляя (2.37), (2.39) в задачу (2.36), получим, что функция U_0 должна удовлетворять уравнению

$$\Delta U_0(x, z) + \lambda_0(z)\{1 + \alpha(z)\Gamma(x) + U_0(x, z)\} = 2\pi\alpha(z)|\Omega|^{-1} \text{ на } \Omega, \quad (2.40)$$

а функция W_0, описывающая пограничный слой,— краевой задаче

$$\begin{gathered} \Delta_\xi W_0(\xi, z) = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^2 \setminus \omega, \\ W_0(\xi, z) = -1 - \alpha(z)(\log\varepsilon - \log|\xi| + \gamma), \quad \xi \in \partial\omega. \end{gathered} \quad (2.41)$$

Решение задачи (2.41) выражается через функцию V_0, определенную в начале п. 3° § 1, формулой

$$W_0(\xi, z) = -1 - \alpha(z)(\log\varepsilon - V_0(\xi) - \log|\xi| + \gamma)$$

и, следовательно (см. (1.26)),

$$W_0(\xi, z) = -1 - \alpha(z)(\log\varepsilon - \mu + \gamma) + O(|\xi|^{-1}) \text{ при } |\xi| \to +\infty.$$

Учитывая условие убывания пограничного слоя W_0, находим постоянную $\alpha(z)$:

$$\alpha(|\log\varepsilon|^{-1}) = (|\log\varepsilon| + \mu - \gamma)^{-1}. \quad (2.42)$$

Рассмотрим уравнение (2.40). Интегрируя по Ω, имеем:

$$\lambda_0(z)\int_\Omega \{1 + U_0(x, z)\}\,dx = 2\pi\alpha(z). \quad (2.43)$$

Поэтому U_0 удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\begin{aligned} \Delta U_0(x, z) - 2\pi\alpha(z)\left\{|\Omega| + \int_\Omega U_0(x, z)\,dx\right\}^{-1}\{1 + \alpha(z)\Gamma(x) + U_0(x, z)\} &= \\ = 2\pi|\Omega|^{-1} \text{ на } \Omega & \quad (2.44) \end{aligned}$$

(ср. (1.31)). При помощи рассуждений, использованных при решении уравнения (1.31) в п. 3° § 1, получаем, что функция U_0 существует, единственна и аналитически зависит от $\alpha(z)$, что в силу (2.42), (2.43) дает асимптотику (2.37).

Из (2.42)—(2.44) последовательно вычисляются все значения производных функций U_0 и λ_0 при $z=0$. Приведем несколько первых членов разложений. В силу (2.44)

$$\begin{aligned} U_0(x, z) &= \alpha(z)^2\Gamma_1(x) + \alpha(z)^3\Gamma_2(x) + \\ &+ \alpha(z)^4\left\{\Gamma_3(x) - |\Omega|^{-1}\Gamma_1(x)\int_\Omega \Gamma_1(x)\,dx\right\} + O(\alpha(z)^5). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Здесь Γ_1, Γ_2, Γ_3 — обращающиеся в нуль при $x=0$ решения уравнений

$$\Delta\Gamma_j(x) = 2\pi|\Omega|^{-1}\left(\Gamma_{j-1}(x) - |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Gamma_{j-1}(q)\,dq\right) \text{ на } \Omega,$$

причем $\Gamma_0=\Gamma$. Подставляя (2.45) в (2.43), получаем следующее представление для собственного числа $\lambda(\varepsilon)$:

$$\lambda(\varepsilon)=\frac{2\pi}{|\Omega|}\alpha(z)\Big\{1-\alpha(z)^2\int_\Omega\Gamma_1(x)\,dx-\alpha(z)^3\int_\Omega\Gamma_2(x)\,dx-$$

$$-\alpha(z)^4\Big[\int_\Omega\Gamma_3(x)\,dx-2\Big(\int_\Omega\Gamma_1(x)\,dx\Big)^2\Big]\Big\}+O(\alpha(z)^5). \qquad (2.46)$$

Разумеется, это выражение может быть легко преобразовано в сумму полинома от $|\log\varepsilon|^{-1}$ и остаточного члена $O(|\log\varepsilon|^{-5})$. В частности,

$$\lambda(\varepsilon)=\frac{2\pi}{|\Omega|}\frac{1}{|\log\varepsilon|}\Big\{1+\frac{\gamma-\mu}{|\log\varepsilon|}+O\Big(\frac{1}{|\log\varepsilon|^2}\Big)\Big\}.$$

Если $\Omega=S^2$, то $\Gamma(x)=-\log\{2\sin(\theta/2)\}$, где $(0,\pi]\ni\theta$ — «широта» точки $x\in S^2$. Отметим еще, что $\exp\mu=c_{\log}(\omega)$ — логарифмическая емкость (внешний конформный радиус) области $\omega\subset\mathbf{R}^2$ (см. [16, 17]). Итак, для области Ω_ε на сфере получаем асимптотику (0.2).

Литература

1. *Самарский А. А.* О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов.— Докл. АН СССР, 1948, т. 63, № 6, с. 631—634.
2. *Днестровский Ю. Н.* Об изменении собственных значений при изменении границы областей.— Вестник МГУ, 1964, № 9, с. 61—74.
3. *Swanson C. A.* Asymptotic variational formulae for eigenvalues.— Canad. Math. Bull., 1963, v. 6, № 1, p. 15—25.
4. *Ozawa Shin.* Singular Hadamard's variation of domains and eigenvalues of Laplacian 1.— Proc. Jap. Acad., 1980, v. A56, p. 351—357. 2 — Proc. Jap. Acad., 1981, A57, № 5, p. 242—246.
5. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Об однородных решениях задачи Дирихле во внешности тонкого конуса.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 281—284.
6. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981. 208 с.
7. *Geer J. F., Keller J. B.* Uniform asymptotic solutions for potential flow around a thin airfoil and the electrostatic potential about a thin conductor.— SIAM J. Appl. Math., 1968, v. 16, № 1, p. 75—101.
8. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с тонкой щелью. 1. Двумерный случай.— Матем. сб., 1976, т. 99, № 4, с. 514—537.
9. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с тонкой щелью. 2. Область с малым отверстием.— Матем. сб., 1977, т. 103, № 2, с. 265—284.
10. *Ильин А. М.* Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи с малым отверстием.— В кн.: Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 6. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 57—82.
11. *Федорюк М. В.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, т. 45, № 1, с. 167—186.
12. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
13. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Труды Московского матем. об-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
14. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Об асимптотике решений одного квазилинейного уравнения при нерегулярном возмущении области.— В кн.: Дифференциальные уравнения и их применения, вып. 27, Вильнюс, 1980, с. 17—50.
16. *Ozawa S.* The first eigenvalue of the Laplacian on two dimensional Riemannian manifolds.— Tôhoku Math. Journ., 1982, v. 34, № 1, p. 7—14.
16. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 380 с.
17. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 516 с.

Поступила в редакцию
23.XI.1982