应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2005, 18(4): 654~661

* 一类 Sturm-Liouville 问题特征的渐近分析

王海兵, 刘继军
(东南大学数学系, 江苏 南京 210096)

摘要: 考虑[0, 1]上带第三类边界条件的S-L问题特征值的渐近表示. 利用已有的渐近性结果及Fréchet导数技术, 对特征值进行了精细的分析, 清楚地给出了边界条件中的常数(h, H)对特征值的影响. 本文的工作对S-L问题的一类反谱问题及相关微分方程反问题的唯一性结果有着重要的应用, 也为专著[4, 6]中的某些关键结果提供了一简化的证明途径.

关键词: S-L问题; 特征值; 渐近分析
中图分类号: O175.9　　**AMS(2000)**主题分类: 34B24; 34L20; 34E05
文献标识码: A　　文章编号: 1001-9847(2005)04-0654-08

1. 引言

设实值函数 $q(x)\in L^2(0,1)$, h, H 为实常数. 本文讨论下述Sturm-Liouville问题

$$\begin{cases}-u''(x)+q(x)u(x)=\lambda u(x), 0<x<1,\\ -u'(0)+hu(0)=u'(1)+Hu(1)=0\end{cases}\tag{1.1}$$

的特征值 λ (包括相应的特征函数 $u(x)$)的精细的渐近分析, 工作的直接动因源于微分方程反问题中适定性的研究. 对上述经典的特征值问题, 众所周知, 已有一些特征值分布的结果. 我们用下述引理给出这些结果[1].

引理 **1**　对S-L问题(1.1)的特征值, 下述结果成立:

(i) (1.1)的特征值均为实数, 且它们是离散的, 可数的, 下有界的, $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots\to+\infty$;

(ii) 当 $q(x)$, h, H 均为正值时, 所有特征值均为正数; 否则(1.1)也只有有限多个负的特征值;

(iii) (1.1)的特征值 λ_n 有下述渐近表示:

$$\lambda_n=n^2\pi^2+O(1), n\to\infty.\tag{1.2}$$

该引理是经典的. 结论(i)和(ii)给出了特征值 λ_n 分布的估计, 它们也可由自伴算子 $A=-\dfrac{d^2}{dx^2}+q(x)$, $\mathrm{dom}(A)=\{f(x): -f'(0)+hf(0)=f'(1)+Hf(1)=0\}\subset H^2(0,1)$ 的谱理论得到[2], 而结论(iii)则给出了 $\lambda_n\to\infty$ 速度的一个粗略的描述. 另一个与 λ_n 渐近速度

---

* 收稿日期: 2004-12-13
基金项目: 国家自然科学基金项目(10371018)
作者简介: 王海兵, 男, 汉, 湖南人, 硕士研究生, 研究方向: 数学物理中的反问题.

有关的结果是[3]

$$\lambda_n = m_n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t)\mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.3}$$

其中 $\{m_n\}$ 是某个自然数的序列. 上述对 λ_n 渐近速度的估计是比较粗糙的. 近年来, 由于应用数学领域内很多具体问题的处理需要, 人们迫切感到上述结果的不足, 更需要 λ_n 的比较精细的渐近速度的估计, 尤其是 $q(x)$, h, H 对 λ_n 的影响. 1987 年, [4] 在讨论 S-L 问题

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

的反谱理论时, 其核心工作之一就是要分析 λ_n 的渐近性质. 1997 年, [5] 借助于渐近表示(1.2)和已有的反谱理论的结果, 得到了一类双曲反问题的唯一性结果, 但对函数空间的要求是比较严格的. 1996 年, 专著[6] 利用[4] 中的思想, 对 S-L 问题

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, u'(1) + Hu(1) = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

的特征值 λ_n 的渐近表示给出了描述.

本文讨论(1.1)的特征的渐近分析. 该工作除了把关于 S-L 问题(1.4), (1.5)的渐近结果推广至第三类边界条件和 Neumann 边界条件(相应于 $H = h = 0$)外, 还在反问题适定性分析中起着重要的作用. 例如, [5] 中的唯一性结果由于受到 $q(x)$, h, H 非负的约束, 对函数所在空间的要求是较严的. 利用本文对 λ_n 的精细估计的一般结果, 可使[5] 的唯一性结果在较大的函数空间上成立. 另一方面, 由于本文充分利用了经典的渐近表示(1.2)来得到 λ_n 的更为精细的渐近表示, 其思想方法可使得[4], [6] 中某些关键结果的证明有所简化(如复分析中的 Rouché 定理等理论不再需要). 本文主要结果如下:

定理 1　设 $D\times\Lambda$ 是 $\mathbf{R}^2\times L^2(0,1)$ 中的有界子集, 则对 $(h, H, q(x))\in D\times\Lambda$, S-L 问题(1.1)的特征值 λ_n 和相应的归一化特征函数 $u_n(x)$ ($\|u_n\|_{L^2(0,1)} = 1$) 有

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + 2(h+H) + \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.6}$$

$$u_n(x) = \sqrt{2}\cos n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.7}$$

在 $\lambda_n > h^2$ 后一致成立.

2. 基本解及性质

先对问题(1.1)作等价变换. 令

$$u(x) = \mathrm{e}^{hx}v(x), \tag{2.1}$$

并记 $Q(x) = q(x) - h^2$, $H_1 = h + H$, 则 S-L 问题(1.1)变为

$$\begin{cases} -v''(x) + Q(x)v(x) - 2hv'(x) = \lambda v(x), 0 < x < 1, \\ v'(0) = 0, v'(1) + H_1 v(1) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

显然, 分析(1.1)的特征 $\{\lambda_n, u_n(x)\}$ 的渐近表示等价于分析(2.2)的特征 $\{\lambda_n, v_n(x)\}$.

(2.2)是一个含参数 λ 的边值问题. 引进辅助的初值问题

$$\begin{cases} -V''(x) + Q(x)V(x) - 2hV'(x) = \lambda V(x), 0 < x < 1, \\ V'(0) = 0, V(0) = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

此问题之解依赖于 λ, Q, 记为 $V(x, \lambda, Q)$. 显然当(2.3)中参数 λ 满足

$$V'(1, \lambda, Q) + H_1 V(1, \lambda, Q) = 0 \tag{2.4}$$

时, λ 就是 S-L 问题(2.2)的特征值, 相应的 $V(x, \lambda, Q)$ 也就是(2.2)的特征函数.

初值问题(2.3)之解 $V(x,\lambda,Q)$ 称为(2.2)中方程的基本解,而条件(2.4)则给出了 (λ,V) 成为(2.2)的特征时 λ 的取法.换言之,

$$f(\lambda,Q)=V'(1,\lambda,Q)+H_1V(1,\lambda,Q)=0$$

就是 S-L 问题(2.2)的特征方程.至此,分析(2.2)的特征 $\{\lambda_n,v_n(x)\}$ 化为下述两个相关的问题:

P1:(2.3)之解 $V(\circ,\lambda,Q)$ 的解析性质;

P2:$f(\lambda,Q)=0$ 的根 λ 的分布及渐近性.

关于 $V(\circ,\lambda,Q)$,有下述结果:

引理 2 对 $\lambda\in\mathbf{R}$, $Q(x)\in L^2(0,1)$,定解问题(2.3)定义了 $(\lambda,Q)\in\mathbf{R}\times L^2(0,1)\to V(\circ,\lambda,Q)$ 的一个映射,象函数 V 有下述性质:

(a) $V(x,\lambda,Q)$ 关于 x 在$[0,1]$上是连续的;

(b) $V(\circ,\lambda,Q)$ 关于任意 $(\tilde{\lambda},\tilde{Q})\in\mathbf{R}\times L^2(0,1)$ 是 Fréchet 可导的,其导算子记为

$$\left.\frac{\partial V(\circ,\lambda,Q)}{\partial\lambda}\right|_{(\lambda,Q)=(\tilde{\lambda},\tilde{Q})}=V_\lambda(\circ,\tilde{\lambda},\tilde{Q}),$$

$$\left.\frac{\partial V(\circ,\lambda,Q)}{\partial Q}\right|_{(\lambda,Q)=(\tilde{\lambda},\tilde{Q})}\circ Q=V_Q(\circ,\tilde{\lambda},\tilde{Q});$$

这里 $V_Q(\circ,\tilde{\lambda},\tilde{Q})$ 实际上表示 $V(\circ,\lambda,Q)$ 在 $(\tilde{\lambda},\tilde{Q})$ 点关于 Q 沿 Q 方向的方向导数,且它们分别满足定解问题

$$\begin{cases}-(V_\lambda)''+(\tilde{Q}(x)-\tilde{\lambda})V_\lambda-2h(V_\lambda)'=V(x),\ 0<x<1,\\ (V_\lambda)'(0)=V_\lambda(0)=0,\end{cases}\tag{2.5}$$

$$\begin{cases}-(V_Q)''+(\tilde{Q}(x)-\tilde{\lambda})V_Q-2h(V_Q)'=-Q(x)V(x),\ 0<x<1,\\ (V_Q)'(0)=V_Q(0)=0,\end{cases}\tag{2.6}$$

其中 $V(\circ)$, $V_\lambda(\circ)$, $V_Q(\circ)$ 分别表示 $V(\circ,\tilde{\lambda},\tilde{Q})$, $V_\lambda(\circ,\tilde{\lambda},\tilde{Q})$ 和 $V_Q(\circ,\tilde{\lambda},\tilde{Q})$,而“$''$”和“$'$”是对变量 x 求二阶导数和一阶导数.

证明不难,从略.

引理 3 对函数对 $(u_1(x),u_2(x))$ 记 $[u_1,u_2](x)=\begin{vmatrix}u_1(x)&u_2(x)\\u'_1(x)&u'_2(x)\end{vmatrix}$ 表示其 Wronski 行列式,则 $V(x,\tilde{\lambda},\tilde{Q})$, $V_\lambda(x,\tilde{\lambda},\tilde{Q})$ 和 $V_Q(x,\tilde{\lambda},\tilde{Q})$ 视为 x 的函数时,满足

$$[V_\lambda,V](x)=\int_0^x e^{-2h(x-\tau)}V^2(\tau)d\tau,\tag{2.7}$$

$$[V_Q,V](x)=-\int_0^x e^{-2h(x-\tau)}Q(\tau)V^2(\tau)d\tau,\tag{2.8}$$

其中 $V(\circ)$ 表示 $V(\circ,\tilde{\lambda},\tilde{Q})$.

证 在(2.3)中取 $(\lambda,Q)=(\tilde{\lambda},\tilde{Q})$ 后得

$$\begin{cases}-V''(x)+\tilde{Q}(x)V(x)-2hV'(x)=\tilde{\lambda}V(x,\tilde{\lambda},\tilde{Q}),\ 0<x<1,\\ V'(0)=0,\ V(0)=1.\end{cases}\tag{2.9}$$

$(2.9)\times V_\lambda-(2.5)\times V$ 得

$$\begin{cases}V^2(x)=\dfrac{d}{dx}[V'V_\lambda-(V_\lambda)'V]+2h[V'V_\lambda-(V_\lambda)'V],\\ (V'V_\lambda-(V_\lambda)'V)\big|_{x=0}=0,\end{cases}$$

解此定解问题即得(2.7),类似可得(2.8).

利用引理 3 及特征值的已有结果，可得下述结果，它描述了特征值 λ 对 Q 的变化率.

定理 2　关于 S-L 问题(2.2)的特征值 λ，成立

1）特征值 λ 是离散的，可数的；

2）S-L 问题的第 n 个特征值 $\lambda_n=\lambda_n(Q)$ 在 $Q=Q$ 处是 F-可导的，且 $\lambda_n(Q)$ 在 Q 点沿 Q 的方向导数有表示

$$\lambda'_n(Q)\circ Q=\int_0^1 g_n^2(x,Q)Q(x)\mathrm{d}x, \tag{2.10}$$

其中

$$g_n(x,Q)=\frac{\mathrm{e}^{-h(1-x)}V(x,\hat{\lambda}_n,Q)}{\|\mathrm{e}^{-h(1-\circ)}V(\circ,\hat{\lambda}_n,Q)\|_{L^2(0,1)}}, \tag{2.11}$$

而 $\hat{\lambda}_n=\lambda_n(Q)$.

证　1）是显然的. 当(2.2)中取 $Q(x)=Q(x)$ 时，设其第 n 个特征值为 $\hat{\lambda}_n=\lambda_n(Q)$. 如前所述，它满足 $V'(1,\hat{\lambda}_n,Q)+H_1V(1,\hat{\lambda}_n,Q)=0$. 另一方面，对函数 $f(\lambda,Q)=V'(1,\lambda,Q)+H_1V(1,\lambda,Q)$，由(2.7)知

$$f'_\lambda(\lambda,Q)=(V_\lambda)'(1)+H_1V_\lambda(1)=\frac{1}{V(1)}[(V_\lambda)'(1)V(1)-V_\lambda(1)V'(1)]$$
$$=\frac{-1}{V(1,\lambda,Q)}\int_0^1\mathrm{e}^{-2h(1-\tau)}V^2(\tau)\mathrm{d}\tau\neq 0,$$

即 $f(\lambda,Q)=0$ 的根 λ 是单重根. 故由隐函数存在定理，在 $(\hat{\lambda}_n,Q)$ 的一个邻域内，方程

$$f(\lambda,Q)=V'(1,\lambda,Q)+H_1V(1,\lambda,Q)=0$$

确定了唯一的隐函数 $\lambda_n=\lambda_n(Q)$，使得

$$V'(1,\lambda_n(Q),Q)+H_1V(1,\lambda_n(Q),Q)\equiv 0 \tag{2.12}$$

对 Q 小邻域内的一切 Q 成立，且 $\lambda_n(Q)$ 关于 Q 是连续 F-可微的. 由前述 F-导数的记号，(2.12)在 Q 点沿方向 Q 求方向导数得：

$$[(V_\lambda)'(1,\hat{\lambda}_n,Q)+H_1V_\lambda(1,\hat{\lambda}_n,Q)]\lambda'_n(Q)\circ Q+(V_Q)'(1,\hat{\lambda}_n,Q)+H_1V_Q(1,\hat{\lambda}_n,Q)=0.$$

因此

$$\lambda'_n(Q)\circ Q=-\frac{(V_Q)'(1,\hat{\lambda}_n,Q)+H_1V_Q(1,\hat{\lambda}_n,Q)}{(V_\lambda)'(1,\hat{\lambda}_n,Q)+H_1V_\lambda(1,\hat{\lambda}_n,Q)}. \tag{2.13}$$

另一方面，由引理 3 及(2.4)知

$$\int_0^1\mathrm{e}^{-2h(1-\tau)}V^2(\tau)\mathrm{d}\tau=V_\lambda(1)V'(1)-(V_\lambda)'(1)V(1)=-V(1)[(V_\lambda)'(1)+H_1V_\lambda(1)],$$

$$-\int_0^1\mathrm{e}^{-2h(1-\tau)}Q(\tau)V^2(\tau)\mathrm{d}\tau=V_Q(1)V'(1)-(V_Q)'(1)V(1)=-V(1)[(V_Q)'(1)+H_1V_Q(1)],$$

将此两式代入(2.13)即得(2.10). 定理 2 证毕.

至此，可借助于 $Q(x)\equiv 0$ 时(2.2)的第 n 个特征值 $\lambda_n(0)$ 来估计(2.2)的第 n 个特征值 $\lambda_n(Q)$，即：

$$\lambda_n(Q)=\lambda_n(0)+\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_n(tQ)\mathrm{d}t=\lambda_n(0)+\int_0^1\lambda'_n(tQ)\circ Q\mathrm{d}t$$
$$=\lambda_n(0)+\int_0^1\left[\int_0^1 g_n^2(x,tQ)Q(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t, \tag{2.14}$$

其中 g_n 如(2.11)所示. 由于 g_n 是依赖于 $\lambda_n(Q)$ 的，此式实际上给出了一个循环提高 $\lambda_n(Q)$ 渐近表示精度的方法.

3. 特征值的渐近表示

由(2.14)来导出 $\lambda_n(Q)$ 的渐近分析时, 首先需要知道 $\lambda_n(0)$ 的渐近表示及 g_n 的估计.

定理 3 当 $Q(x)\equiv 0$ 时, (2.2)的第 n 个特征值 $\lambda_n(0)$ 有下述渐近表示

$$\sqrt{\lambda_n(0)-h^2}=n\pi+(h+H)\frac{1}{n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\tag{3.1}$$

在 $\lambda_n(0)>h^2$ 后对 $(h,H)\in D$ 一致成立.

我们将其证明放至下一节.

下面再来给出 g_n 的估计, 即 $g_n(x,Q)$ 和 $\lambda_n(Q)$ 的依赖关系.

引理 4 当 $\lambda_n(Q)>h^2$ 后, $g_n(x,Q)$ 有下述渐近式

$$g_n(x,Q)=\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{\lambda_n(Q)-h^2}\,x-\varphi\right)+O\left(\frac{1}{n}\right),\tag{3.2}$$

其中 $\varphi=\arctan\dfrac{h}{\sqrt{\lambda_n(Q)-h^2}}$.

证 由(2.11)知 $g_n(x,Q)$ 中的 $V(x,\lambda,Q)=V(x,\lambda(Q),Q)$, 即(2.3)中参数 λ 取为 $\lambda(Q)$ 时, 初值问题(2.3)之解. 引进辅助函数 $\tilde{V}(x)$ 满足初值问题

$$\begin{cases}-\tilde{V}''(x)-2h\tilde{V}'(x)=\lambda(Q)\tilde{V}(x),\\ \tilde{V}'(0)=0,\ \tilde{V}(0)=1,\end{cases}\tag{3.3}$$

则易知 $V(x,\lambda(Q),Q)$ 满足积分方程

$$V(x,\lambda(Q),Q)=\tilde{V}(x)+\int_0^x e^{-h(x-\tau)}\frac{\sin\sqrt{\lambda(Q)-h^2}\,(x-\tau)}{\sqrt{\lambda(Q)-h^2}}Q(\tau)V(\tau,\lambda(Q),Q)\mathrm{d}\tau,\tag{3.4}$$

而(3.3)之解是

$$\tilde{V}(x)=\sqrt{\frac{\lambda(Q)}{\lambda(Q)-h^2}}e^{-hx}\cos\left(\sqrt{\lambda(Q)-h^2}\,x-\varphi\right),\tag{3.5}$$

其中 $\varphi=\arctan\dfrac{h}{\sqrt{\lambda(Q)-h^2}}$.

将(3.4)写为算子方程 $V(x)=\tilde{V}(x)+K\circ V(x)$ 后易知(3.4)之解 $V(x)$ 可表示为

$$V(x,\lambda(Q),Q)=\sum_{n=0}^{\infty}K^n\circ\tilde{V}(x),\tag{3.6}$$

其中 Volterra 积分算子

$$K\circ V(x)=\int_0^x e^{-h(x-\tau)}\frac{\sin\sqrt{\lambda(Q)-h^2}\,(x-\tau)}{\sqrt{\lambda(Q)-h^2}}Q(\tau)V(\tau,\lambda(Q),Q)\mathrm{d}\tau.$$

注意到 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda(Q)-h^2}\,x}{\sqrt{\lambda(Q)-h^2}}\right|=\left|\int_0^x\cos\sqrt{\lambda(Q)-h^2}\,\tau\mathrm{d}\tau\right|\leqslant 1,$$

$$|\tilde{V}(x)|\leqslant\sqrt{\frac{\lambda(Q)}{\lambda(Q)-h^2}}e^{|h|x},$$

从而由归纳法可得

$$|K^n\circ\tilde{V}(x)|\leqslant\sqrt{\frac{\lambda(Q)}{\lambda(Q)-h^2}}e^{|h|x}\frac{1}{n!}\bar{Q}^n(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

其中 $\bar{Q}(x)=\int_0^x|Q(t)|\mathrm{d}t$. 至此由(3.6)知

$$|V(x,\lambda(Q),Q)|\leqslant\sqrt{\frac{\lambda(Q)}{\lambda(Q)-h^2}}\mathrm{e}^{|h|x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}Q^n(x)=\sqrt{\frac{\lambda(Q)}{\lambda(Q)-h^2}}\mathrm{e}^{|h|x+\int_0^x|Q(t)|\mathrm{d}t}.$$

据此知, 存在正常数 C_0, 对 $(h,H,q(x))\in D\times\Lambda$ 一致有

$$|V(x,\lambda(Q),Q)|\leqslant C_0 \tag{3.7}$$

成立. 另一方面, 由于 $\lambda_n(Q)$ 就是(1.1)的特征值, 故由引理 1 中结论(iii)知

$$\sqrt{\lambda_n(Q)-h^2}=n\pi+O(1).$$

据此及(3.4)和(3.7)知

$$V(x,\lambda_n(Q),Q)=\tilde{V}(x)+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.8}$$

对 $(x,q)\in[0,1]\times\Lambda$ 一致成立. 据此

$$\begin{aligned}&\int_0^1\mathrm{e}^{-2h(1-t)}V^2(t,\lambda_n(Q),Q)\mathrm{d}t\\&=\frac{\lambda_n(Q)}{\lambda_n(Q)-h^2}\mathrm{e}^{-2h}\int_0^1\cos^2\left[\sqrt{\lambda_n(Q)-h^2}\,t-\varphi\right]\mathrm{d}t+O\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\lambda_n(Q)}{\lambda_n(Q)-h^2}\mathrm{e}^{-2h}+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

据此及(3.8)知

$$\begin{aligned}g_n(x,Q)&=\frac{\mathrm{e}^{-h(1-x)}V(x,\lambda_n,Q)}{\|\mathrm{e}^{-h(1-\circ)}V(\circ,\lambda_n,Q)\|_{L^2(0,1)}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-h}\cos\left(\sqrt{\lambda_n(Q)-h^2}\,x-\varphi\right)\sqrt{\frac{\lambda_n(Q)}{\lambda_n(Q)-h^2}}+O\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}}\circ\sqrt{\frac{\lambda_n(Q)}{\lambda_n(Q)-h^2}}\mathrm{e}^{-h}\sqrt{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}}\\&=\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{\lambda_n(Q)-h^2}\,x-\varphi\right)+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

从而引理 4 得证.

借助于上述准备, 我们可以得到 $\lambda_n(Q)$ 的渐近展开, 它是证明定理 1 的核心.

定理 4　设 $(h,H,q(x))\in D\times\Lambda$, $\lambda_n(Q)$ 是(2.2)的第 n 个特征值, 则下式一致成立

$$\lambda_n(Q)=\lambda_n(0)+\int_0^1Q(x)\mathrm{d}x+\int_0^1Q(x)\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.9}$$

证　由(2.14)及(3.2)知 $\lambda_n(Q)=\lambda_n(0)+O(1)$, 从而根据定理 3 有:

$$\sqrt{\lambda_n(Q)-h^2}=\sqrt{\lambda_n(0)-h^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n(0)-h^2}}\right)=n\pi+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

将此式代入(3.2)并注意到 $\varphi=O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n(Q)-h^2}}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ 得

$$g_n(x,Q)=\sqrt{2}\cos\left(n\pi x+O\left(\frac{1}{n}\right)-\varphi\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt{2}\cos n\pi x+O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.10}$$

此式比渐近式(3.2)更为清楚. 至此

$$g_n^2(x,tQ)=2\cos^2n\pi x+O\left(\frac{1}{n}\right)=1+\cos 2n\pi x+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

对 $t\in[0,1]$, $(h,H,q(x))\in D\times\Lambda$ 一致成立. 将此式代入(2.14)即得(3.9), 定理 4 证毕.

最后, 注意到 $\lambda_n(Q)=\lambda_n(q)$, $Q(x)=q(x)-h^2$, 由定理 3 和定理 4 即得(1.6), 且

$$u_n(x)=\frac{e^{hx}v_n(x)}{\|e^{hx}v_n(x)\|_{L^2(0,1)}}=\|e^{-h}(1-\circ)V(\circ,\lambda_n(Q),Q)\|_{L^2(0,1)}=g_n(x,Q),$$

从而由(3.10)得(1.7),故定理1得证.

4. $\lambda_n(0)$的渐近表示

如前述,当 $Q(x)\equiv0$ 时,$\lambda_n(0)$是方程

$$V'(1,\lambda,0)+H_1V(1,\lambda,0)=0 \tag{4.1}$$

的第 n 个根,其中函数 V 满足

$$\begin{cases}-V''(x)-2hV'(x)=\lambda V(x),0<x<1,\\ V'(0)=0,\ V(0)=1.\end{cases} \tag{4.2}$$

由问题(3.3)的解(3.5)知,方程(4.1)化为

$$H\cos(\sqrt{\lambda-h^2}-\varphi)-\sqrt{\lambda-h^2}\sin(\sqrt{\lambda-h^2}-\varphi)=0. \tag{4.3}$$

这里考虑 $\lambda>h^2$ 的情形,$\varphi=\arctan\dfrac{h}{\sqrt{\lambda-h^2}}$. 因此证明定理3实际上就是分析超越方程(4.3)之根 λ 的分布情况.令 $\sqrt{\lambda-h^2}-\varphi=z$,则由(4.3)知

$$\tan z=\frac{H}{\varphi+z},\ \tan\varphi=\frac{h}{\varphi+z},$$

故

$$\tan(\varphi+z)=\frac{(\varphi+z)(H+h)}{(\varphi+z)^2-Hh}.$$

从而欲求 $\sqrt{\lambda-h^2}=y$,只要求 $y^2\tan y-Hh\tan y-(H+h)y=0$ 之根 y. 由于 $y>0$,考虑

$$F(y)=\left(y-\frac{Hh}{y}\right)\tan y-(H+h)=0 \tag{4.4}$$

之根的分布情况.视 H 为固定常数,作二元函数

$$g(y,\tau)=\left(y-\frac{H}{y}\tau\right)\tan y-(H+\tau),0\leqslant\tau\leqslant h.$$

由 $g(y,\tau)=0$ 确定了 $y=y(\tau)$ 是 τ 的隐函数,即 $g(y(\tau),\tau)\equiv0$.

先考虑 $\tau=0$,此时 $y(0)$ 满足方程

$$y\tan y-H=0. \tag{4.5}$$

易知对充分大的 n,此方程在 $(n\pi-\pi/2,n\pi+\pi/2)$ 上有唯一根 $y_n(0)$,且 $y_n(0)$ 有渐近表示

$$y_n(0)=n\pi+\frac{1}{n\pi}H+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{4.6}$$

事实上,考虑

$$\alpha(x,t)=x\tan x-t,t\in[0,H],x\in(n\pi-\pi/2,n\pi+\pi/2).$$

对任意固定的 t,$\alpha(x,t)=0$ 之根 $x=x(t)$,即 $\alpha(x(t),t)\equiv0$. 由此得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x(t)}{t^2+x^2(t)+t},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=O\left(\frac{1}{x^3}\right)=O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

所以

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{x(0)}=\frac{1}{n\pi},$$

$$x_n(H)-x_n(0)=\left.\frac{dx_n(t)}{dt}\right|_{t=0}H+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2x_n}{dt^2}\right|_{t=\xi}H^2=\frac{1}{n\pi}H+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

此即(4.6)式.另一方面，对函数 $y(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处 Taylor 展开得

$$y(h)-y(0)=\left.\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0}h+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2y(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}\right|_{\tau=\tau_1}h^2. \tag{4.7}$$

而由 $g(y(\tau),\tau)\equiv 0$ 可求出(消去 $\tan y(\tau)$)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=\frac{y^3+yH^2}{(y^2+H\tau)(H+\tau)+y^2(H+\tau)^2+(y^2-H\tau)^2}. \tag{4.8}$$

这是关于 y 的有理函数，对 τ 再求导很方便.所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0}=\frac{1}{n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

这里已用了(4.6)，由(4.8)再对 τ 求导一次得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2}=O\left(\frac{1}{y^2}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从而由(4.6)和(4.7)知

$$y_n(h)=y_n(0)+\frac{1}{n\pi}h+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=n\pi+\frac{1}{n\pi}(h+H)+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

定理 3 证毕.

参考文献：

[1] 柯朗 R，希尔伯特 D.数学物理方法(I)[M].北京：科学出版社，1987.

[2] Friedrichs K O.Spectral Theory of Operators in Hilbert Space[M].New York：Springer-verlag，1973.

[3] Yosida T.Lectures on Differential and Integral Equations[M].New York：Wiley Interscience，1960.

[4] Posche J，Trubowitz E.Inverse Spectral Theory[M].London：Academic Press Inc.，1987.

[5] Liu Jijun，Wang Yuanming.On uniqueness of an inverse problem for a 1-d wave equation from transmission data[J].SIAM.J.Appl.Math.，1997，57(1)：195～204.

[6] Kirsch A.An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems[M].New York：Springer-verlag，1996.

Asymptotic Behavior of Eigenvalues of a Sturm-Liouville Problem with Robin Boundary

WANG Hai-bing，LIU Ji-jun

(*Department of Mathematics，Southeast University，Nanjing* 210096，*China*)

Abstract：In this paper，we consider the asymptotic expansion of eigenvalues for a kind of Sturm-Liouville problems in [0，1] with Robin boundary conditions.By combining the known asymptotic theory and Fréchet derivative technique together，we give a sophisticated analysis for the eigenvalues，which reveals the explicit effect of boundary impedance on eigenvalues. The application of the results in this paper is to study the uniqueness of a kind of inverse spectral problems and some related inverse problems for partial differential equations.

Key words：S-L problem；Eigenvalues；Asymptotic behavior