



第五章 频域处理





图像变换 — 概念

- 为了有效和快速地对图像进行处理，常常需要将定义在原图像空间上的图像以某种形式转换到另外的一些空间，并利用在这些空间的性质方便地进行一些加工，最后转换到图像空间中以得到所需的效果。
- 这种转换方法叫：图像变换
- 图像空间 \rightarrow 其他空间为**正变换**
- 其他空间 \rightarrow 图像空间为**逆变换**



- **图象变换** — 一种重要的基本概念；是一种常用的、有效的分析工具。
- **图象变换的目的** — 简化图像处理问题的求解；利于取得图图像的特征；从概念上增强对图像信息的理解。
- **图象变换** — 是一种二维正交变换，正交变换必须是可逆的（可逆性），正变换和反变换的算法不能太复杂（计算不复杂，有快速算法），简化问题突出特征（有益于处理）；正交变换的特点是在变换域中，图像的能量集中分布在低频部分，边缘和线信息反映在高频成分上。
- **变换的实例** — 对数变换（乘除变为加减）；拉氏变换（微分方程的求解）；傅立叶变换（频谱分析和滤波）。
- **图像变换的应用** — 图像增强、恢复、特征提取、压缩和形状分析。
- **常见变换** — 沃尔什—哈达玛；哈尔变换；离散余弦变换；傅立叶变换；小波变换。



5.1 频域与频域变换

频域变换的**理论基础**就是“任意波形都可以用单纯的正弦波的加权和来表示”。

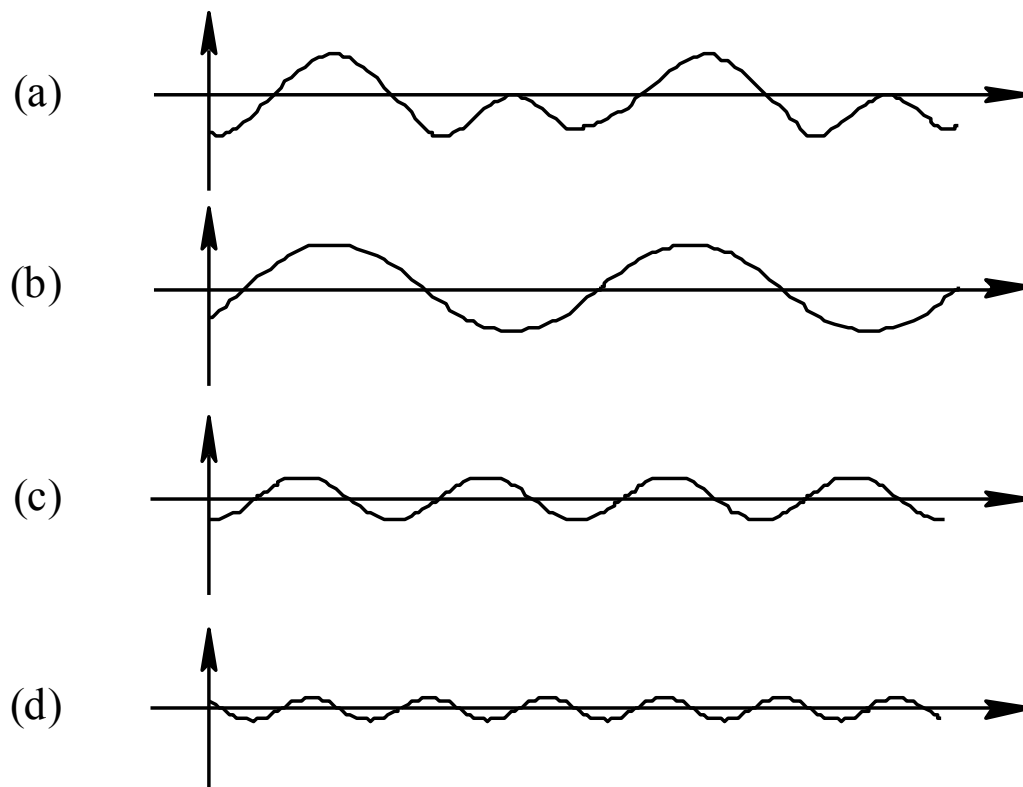


图5-1 任意波形可分解为正弦波的加权和

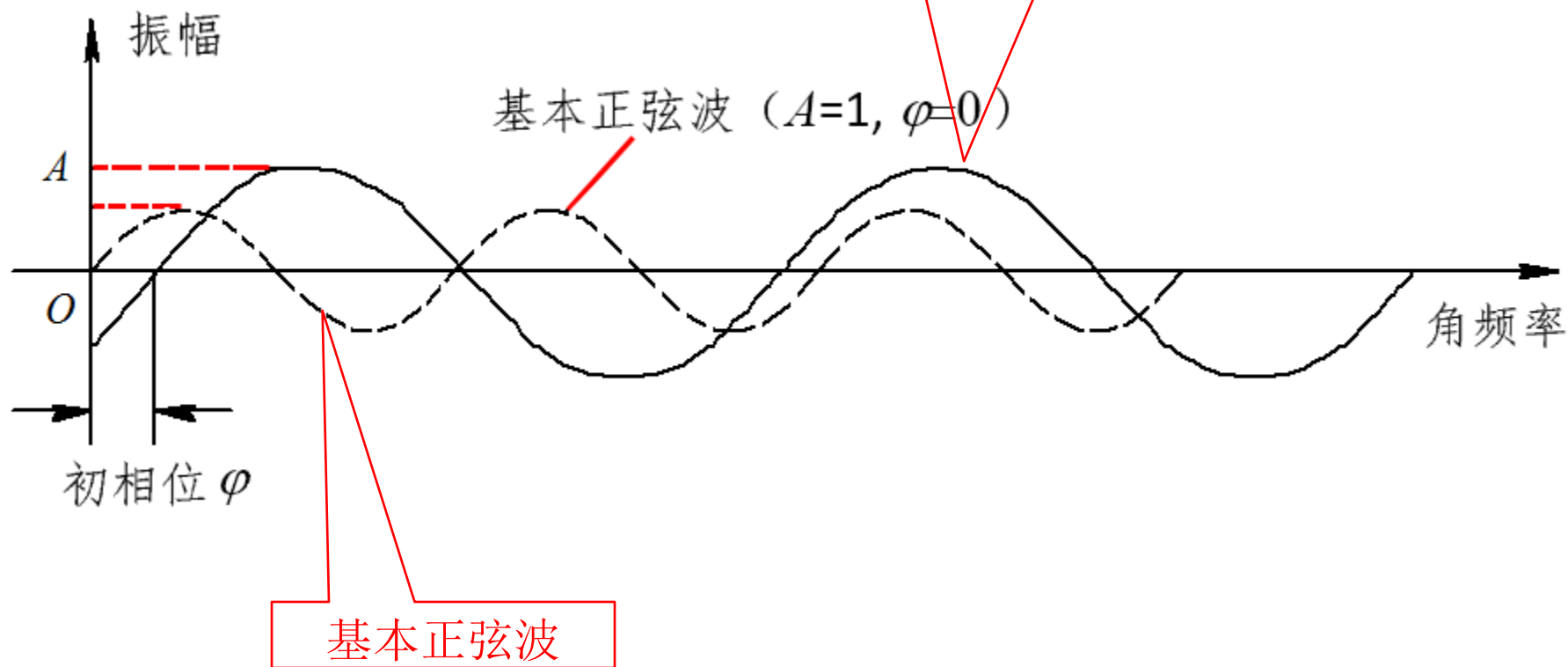
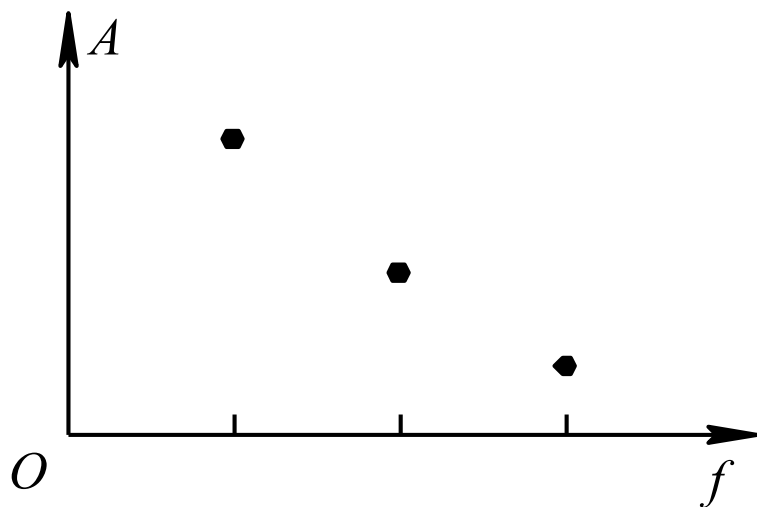


图5-2 正弦波的振幅 A 和相位 φ



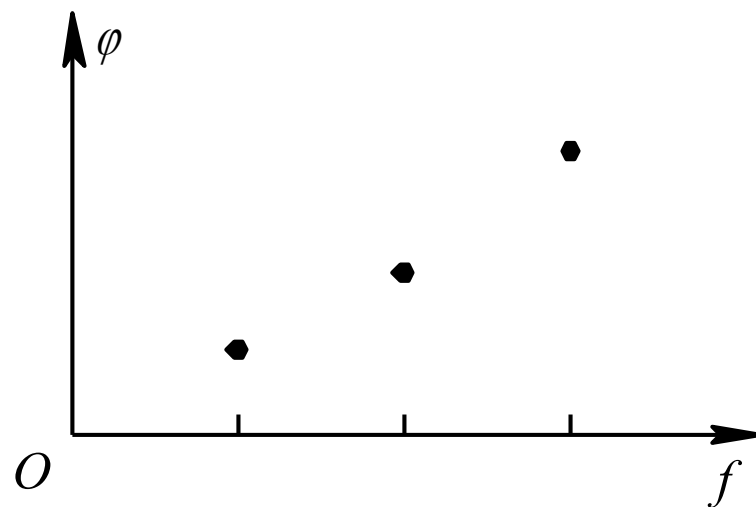
将图5-1 (a) 所示的时域波形 $f(x)$ 变换到图5-3所示的频域 $F(f)$ 。显然，不管波形多么复杂，均可将其变换到频域。

表示振幅与频率之间的关系



(a)

表示初相位与频率之间的关系



(b)

图5-3 图5-1 (a、b、c) 波形的频域表示
(a) 幅频特性; (b) 相频特性



时域和频域之间的变换可用数学公式表示如下：

$$f(x) \underset{\text{逆变换}}{\overset{\text{正变换}}{\rightleftharpoons}} A(f), \phi(f) \quad (5-1)$$

式中： $A(f)$ 、 $\phi(f)$ 分别为幅值和相位与频率 f 之间的关系。

为能同时表示信号的振幅和相位，通常采用复数表示法，因此式（5-1）可用复数表示为

$$f(x) \underset{\text{逆变换}}{\overset{\text{正变换}}{\rightleftharpoons}} F(f) \quad (5-2)$$

式中： $F(f)$ 用复数表示幅值、相位与频率 f 之间的关系。

完成这种变换，一般采用的方法是 **线性正交变换**。





5.2 傅立叶变换

5.2.1 连续函数的傅立叶变换

若把一个一维输入信号作一维傅立叶变换，该信号就被变换到频域上的一个信号，即得到了构成该输入信号的频谱，频谱反映了该输入信号由哪些频率构成。这是一种分析与处理一维信号的重要手段。

当一个一维信号 $f(x)$ 满足狄里赫莱条件，即 $f(x)$

- (1) 具有有限个间断点；
- (2) 具有有限个极值点；
- (3) 绝对可积。



则其傅立叶变换对（傅立叶变换和逆变换）一定存在。在实际应用中，这些条件一般总是可以满足的。

一维傅立叶变换对的定义为

$$F[f(x)] = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{j2\pi ux} dx \quad (5-3)$$

$$F^{-1}[F(u)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{j2\pi ux} du \quad (5-4)$$

式中： $j = -\sqrt{-1}$ ， x 称为时域变量， u 称为频域变量。



以上一维傅立叶变换可以很容易地推广到二维，如果二维函数 $f(x, y)$ 满足狄里赫莱条件，则它的二维傅立叶变换对为

$$F[f(x, y)] = F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (5-5)$$

$$F^{-1}[F(u, v)] = f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (5-6)$$

式中： x, y 为时域变量； u, v 为频域变量。



5.2.2 离散傅立叶变换

数字图像中两个问题：

连续（模拟）信号 \longrightarrow 数字信号（图像数据）；

无穷大概念 \longrightarrow 有限次计算。

通常，将受这种限制的傅立叶变换称为离散傅立叶变换（Discrete Fourier Transform, DFT）。



设 $\{f(x)|f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)\}$ 为一维信号 $f(x)$ 的 N 个抽样，其离散傅立叶变换对为

$$F[f(x)] = F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j2\pi ux/N} \quad \text{正变换} \quad (5-7)$$
$$F^{-1}[F(u)] = f(x) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(u)e^{j2\pi ux/N} \quad \text{逆变换} \quad (5-8)$$

式中： $x, u=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

注：式（5-8）中的系数 $1/N$ 也可以放在式（5-7）中，有时也可在傅立叶正变换和逆变换前分别乘以 $1/\sqrt{N}$ ，这是无关紧要的，只要正变换和逆变换前系数乘积等于 $1/N$ 即可。



由欧拉公式可知

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (5-9)$$

将式（7-9）代入式（7-7），并利用 $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ ，可得

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \left(\cos \frac{2\pi ux}{N} - j \sin \frac{2\pi ux}{N} \right) \quad (5-10)$$

可见，离散序列的傅立叶变换仍是一个离散的序列，**每一个** u **对应的傅立叶变换结果是所有输入序列** $f(x)$ **的加权和**（**每一个** $f(x)$ **都乘以不同频率的正弦和余弦值**）， u 决定了每个傅立叶变换结果的频率。



通常傅立叶变换为复数形式，

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \left(\cos \frac{2\pi ux}{N} - j \sin \frac{2\pi ux}{N} \right)$$

$$F(u) = R(u) + jI(u) \quad (5-11)$$

式中， $R(u)$ 和 $I(u)$ 分别是 $F(u)$ 的实部和虚部。式(5-11)也可表示成指数形式：

$$F(u) = |F(u)| e^{j\varphi(u)} \quad (5-12)$$

其中

$f(x)$ 的频谱或
傅立叶幅度谱

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)} \quad (5-13)$$

$f(x)$ 的相位谱

$$\varphi(u) = \arctan \frac{I(u)}{R(u)} \quad (5-14)$$



$|F(u)|$: $f(x)$ 的频谱或傅立叶幅度谱;

$\varphi(u)$: $f(x)$ 的相位谱。

频谱的平方称为能量谱或功率谱，它表示为

$$E(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u) \quad (5-15)$$



考虑到两个变量，就很容易将一维离散傅立叶变换推广到二维。二维离散傅立叶变换对定义为

$$F[f(x, y)] = F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (5-16)$$

$$F^{-1}[F(u, v)] = f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (5-17)$$

式中： $u, x=0, 1, 2, \dots, M-1$; $v, y=0, 1, 2, \dots, N-1$;

x, y 为时域变量， u, v 为频域变量。



像一维离散傅立叶变换一样，系数 $1/MN$ 可以在正变换或逆变换中，也可以在正变换和逆变换前分别乘以系数 $1/\sqrt{MN}$ ，只要两式系数的乘积等于 $1 / MN$ 即可。

二维离散函数的傅立叶频谱、相位谱和能量谱分别为

式中， $R(u, v)$ $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$ (5-18)

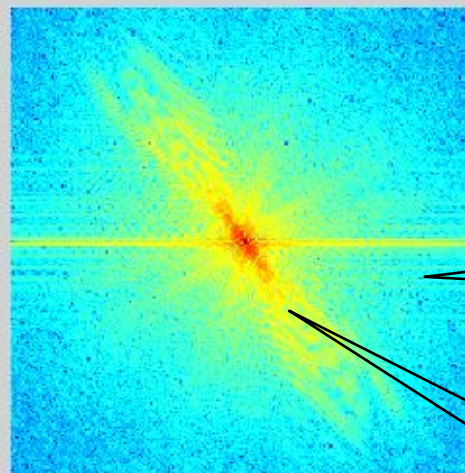
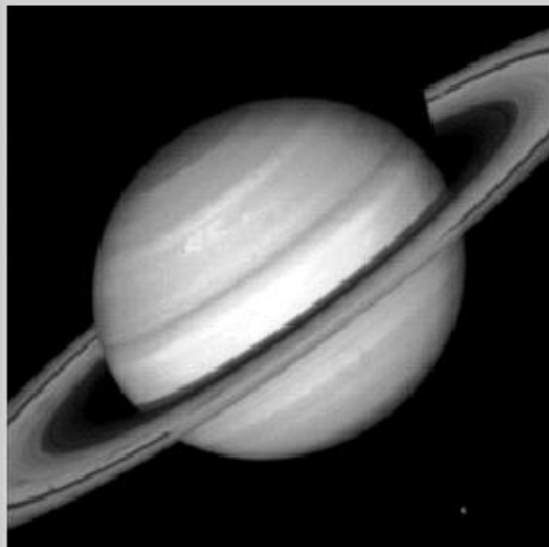
和 $I(u, v)$ 分别是

$F(u, v)$ 的实部

$$\varphi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \quad (5-19)$$

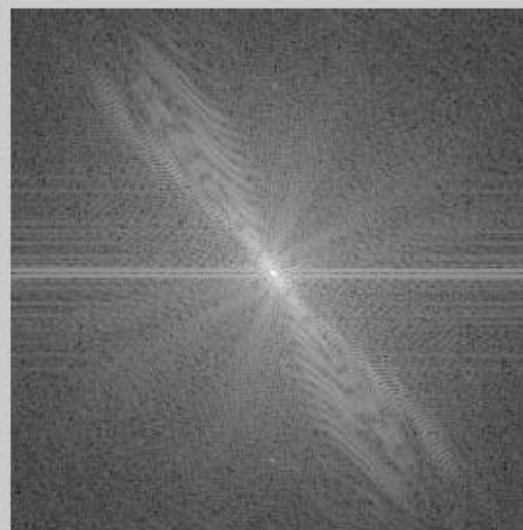
和虚部。

$$E(u, v) = R^2(u, v) + I^2(u, v) \quad (5-20)$$



高频：
反应细节

低频：
反应概貌





- 傅立叶变换的两个好处：可以获得信号的频域特性；可以将卷积运算转换为乘积运算。
- 如果滤波器的结构比较复杂时，直接进行时域中的卷积运算是不可思议的。傅立叶变换可以将卷积运算转换为点乘运算，由此简化运算，提高计算速度。



5.2.3 离散傅立叶变换的性质

表5-1 二维离散傅立叶变换的性质

编号	性 质		数学定义表达式
1	线性性质		$af_1(x, y) \pm bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) \pm bF_2(u, v)$
2	比例性质		$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{ab} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$
3	可分离性		$F(u, v) = F_y\{F_x[f(x, y)]\} = F_x\{F_y[f(x, y)]\}$
			$f(x, y) = F_u^{-1}\{F_v^{-1}[F(u, v)]\} = F_v^{-1}\{F_u^{-1}[F(u, v)]\}$
4	空间位移		$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N}\right)}$
5	平移性质	频率位移	$f(x, y)e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}\right)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$
		图像中心化	当 $u_0 = \frac{M}{2}$ 和 $v_0 = \frac{N}{2}$ 时, $f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2}\right)$
6	周期性		$F(u, v) = F(u+aM, v) = F(u, v+bN) = F(u+aM, v+bN)$ $f(x, y) = f(x+aM, y) = f(x, y+bN) = f(x+aM, y+bN)$
7	共轭对称性		$F(u, v) = F^*(-u, -v), F(u, v) = F(-u, -v) $



8	旋转不变性	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\rho, \varphi + \theta_0)$
9	平均值	$\overline{f(x, y)} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$
10	卷积定理	$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot H(u, v)$ $f(x, y) \cdot h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$
11	相关定理	互相关: $f(x, y) \circ g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G^*(u, v)$ $f(x, y) \cdot g^*(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ H(u, v)$
		自相关: $f(x, y) \circ f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) ^2$ $ f(x, y) ^2 \Leftrightarrow F(u, v) \circ F(u, v)$



1. 可分离性

由可分离性可知，一个二维傅立叶变换可分解为两步进行，其中每一步都是一个一维傅立叶变换。先对 $f(x,y)$ 按**行**进行傅立叶变换得到 $F(x,v)$ ，再对 $F(x,v)$ 按**列**进行傅立叶变换，便可得到 $f(x,y)$ 的傅立叶变换结果。显然对 $f(x,y)$ 先按列进行离散傅立叶变换，再按行进行离散傅立叶变换也是可行的。

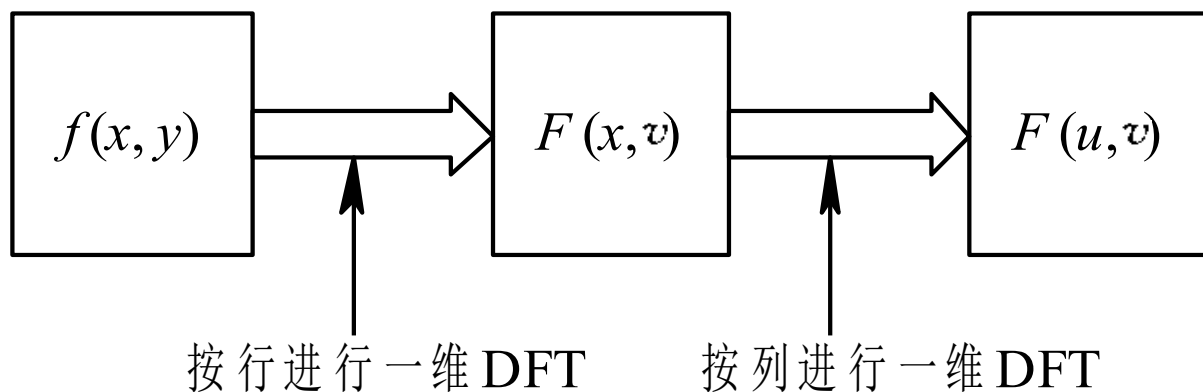
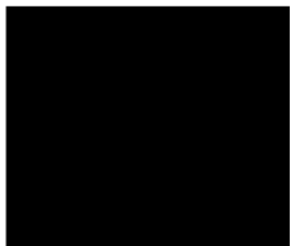


图5-4 用两次一维DFT计算二维DFT

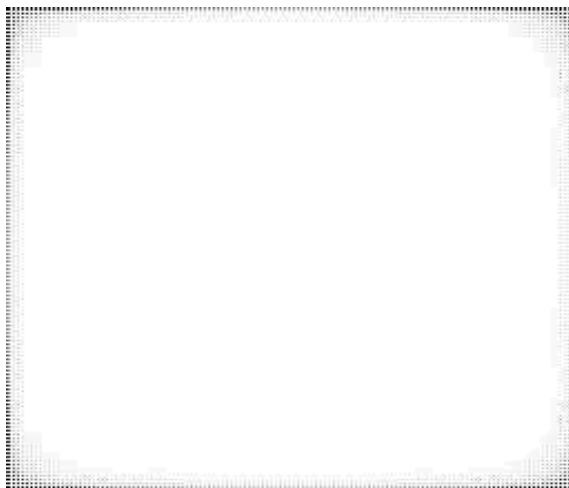


2. 平移性质

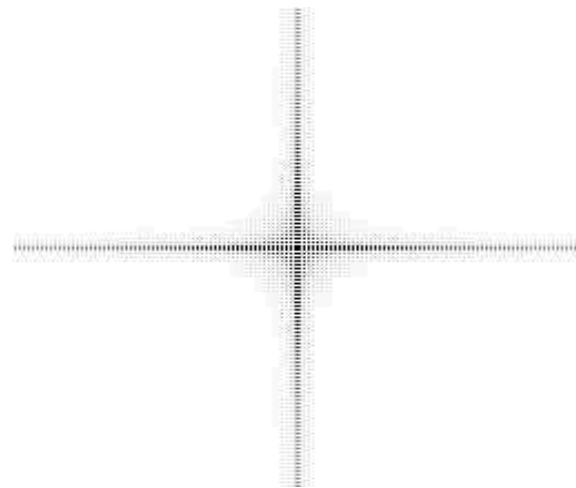
平移性质表明，只要将 $f(x, y)$ 乘以因子 $(-1)^{x+y}$ ，再进行离散傅立叶变换，即可将图像的频谱原点 $(0, 0)$ 移动到图像中心 $(M/2, N/2)$ 处。



(a)



(b)



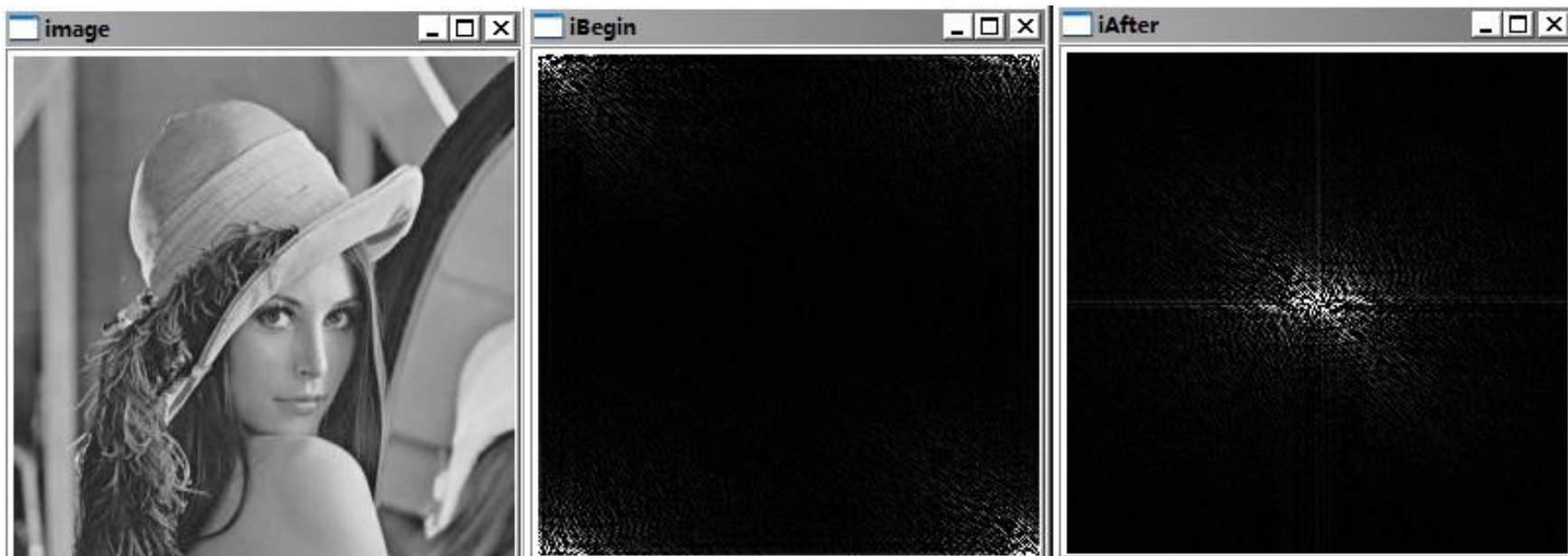
(c)

图5-5 傅立叶频谱平移示意图

(a) 原图像； (b) 无平移的傅立叶频谱； (c) 平移后的傅立叶频谱



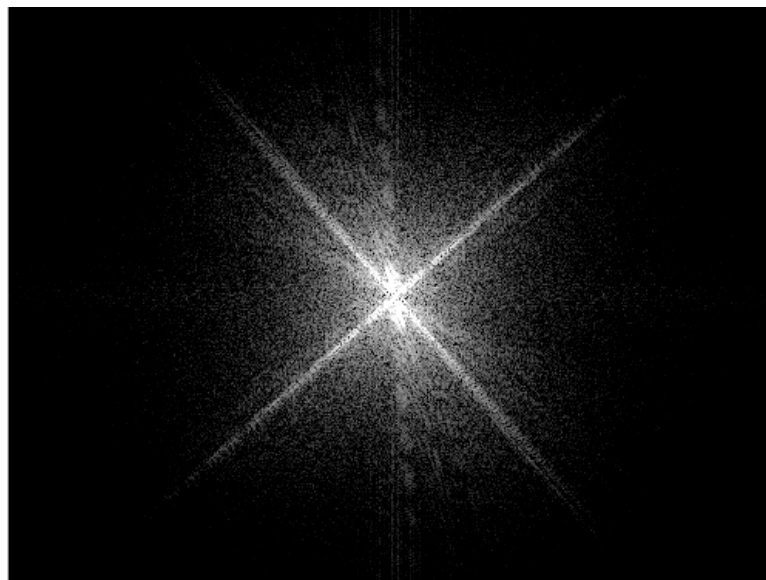
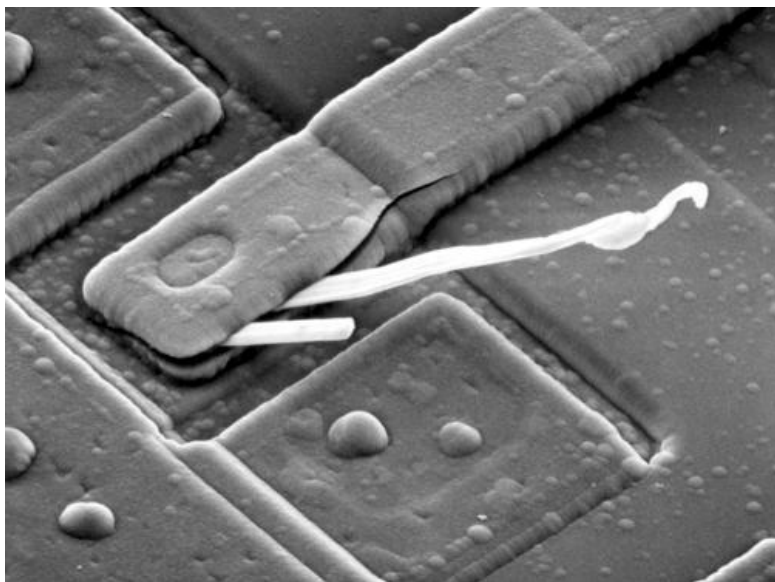
第七章 频域处理





由性质9可知， 图像的频谱原点 $(0,0)$ 代表的是图像灰度的平均值， 是图像信号中的直流分量。

因此， 平移后的频谱中， 图像能量的低频成分将集中到频谱中心， 图像上的边缘、线条细节信息等高频成分将分散在图像频谱的边缘。





3. 旋转不变性

由旋转不变性可知，如果时域中离散函数旋转 θ_0 角度，则在变换域中该离散傅立叶变换函数也将旋转同样的角度。

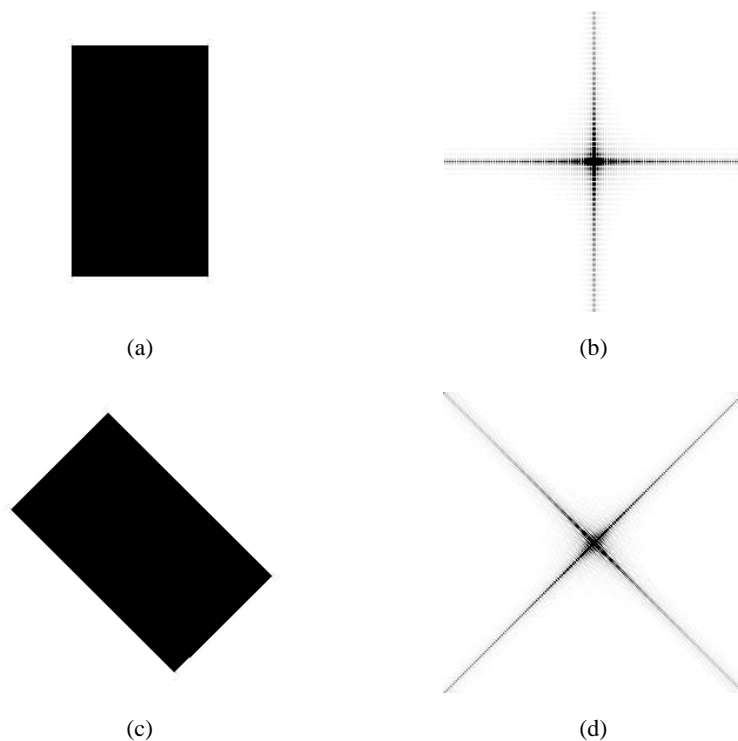
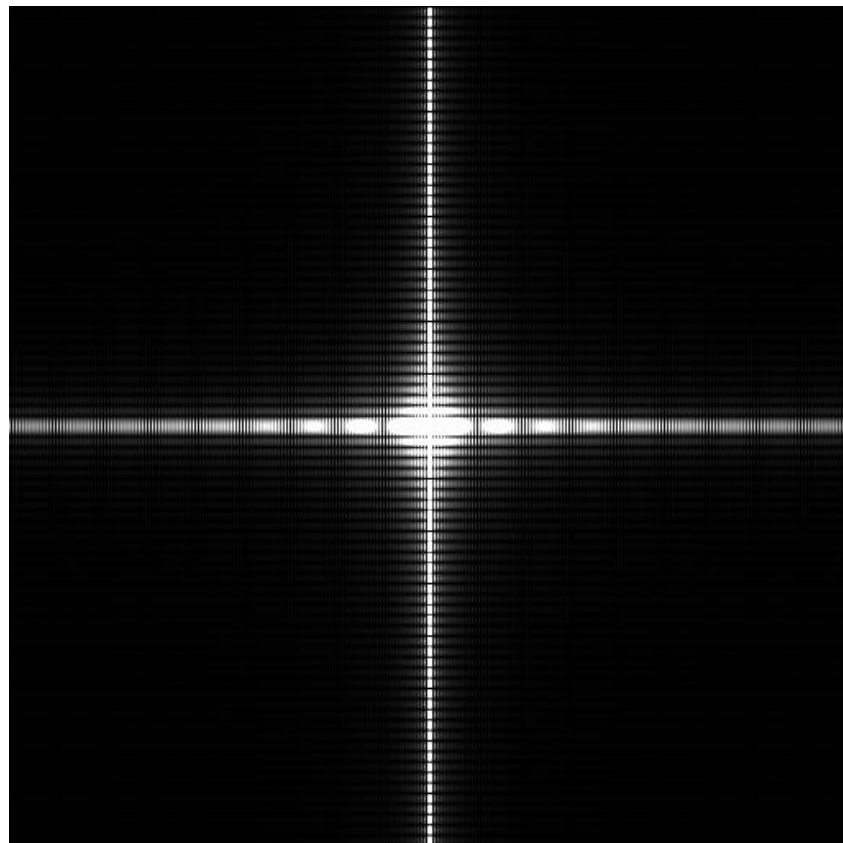
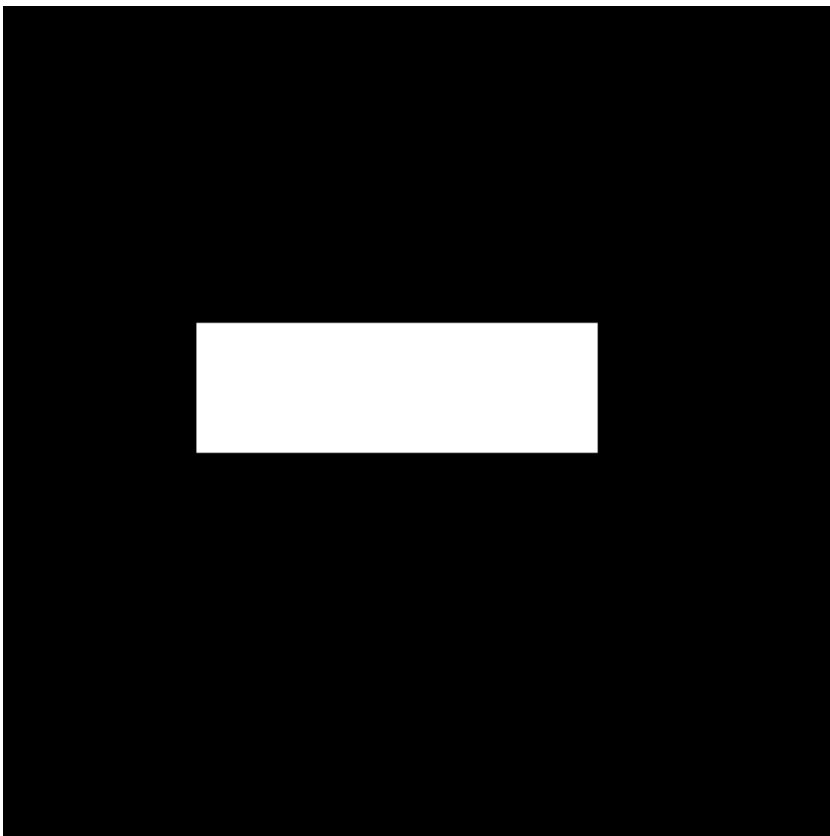


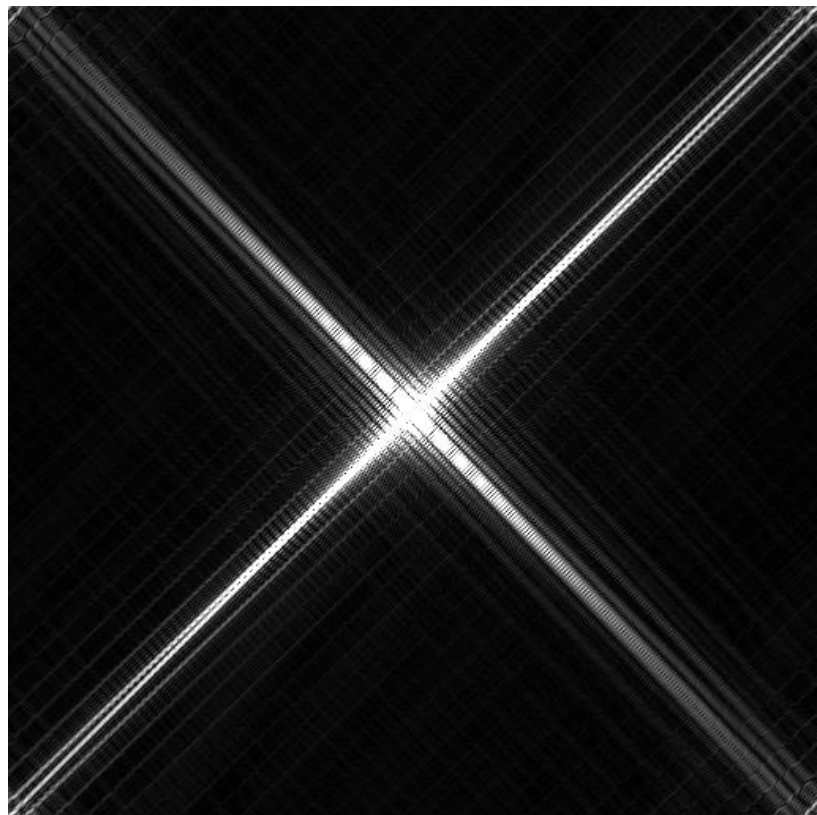
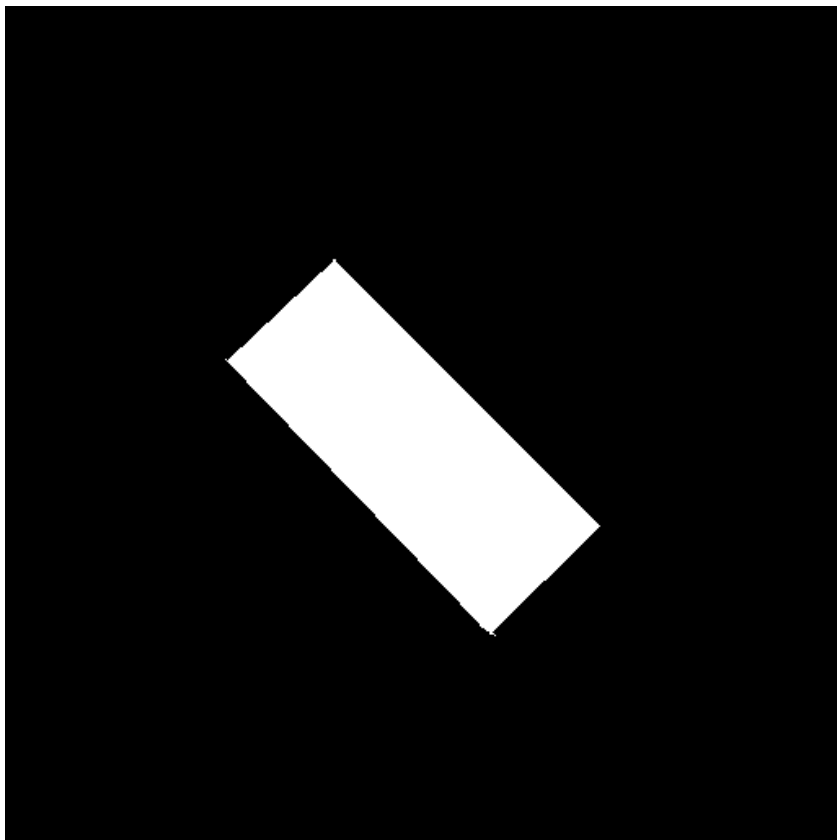
图5-6 离散傅立叶变换的旋转不变性

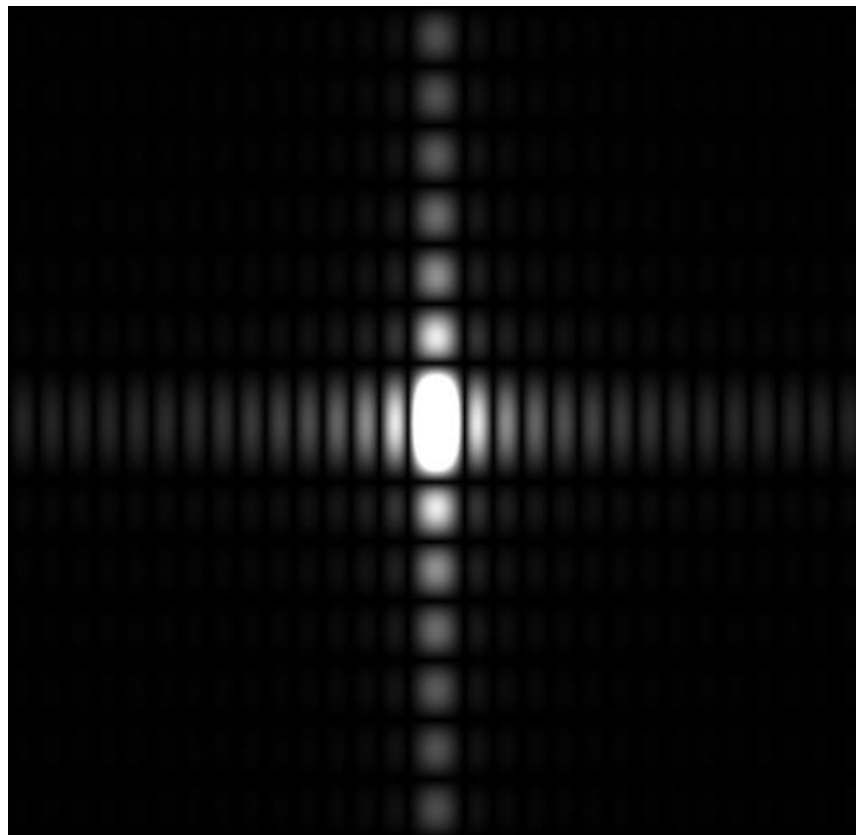
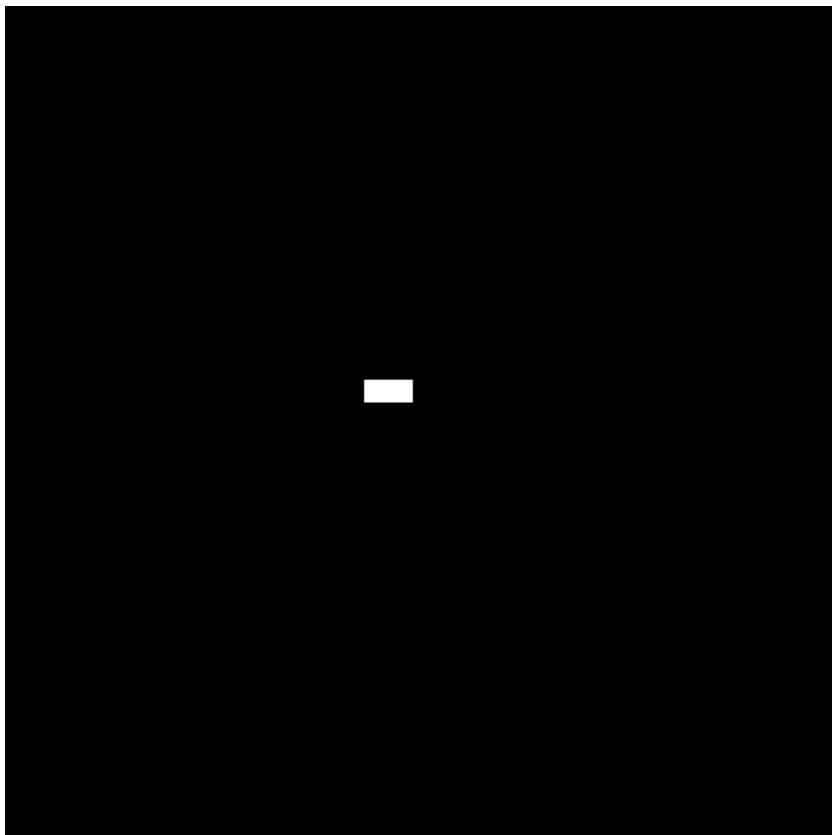
(a) 原始图像； (b) 原始图像的傅立叶频谱；
(c) 旋转 45° 后的图像； (d) 图像旋转后的傅立叶频谱

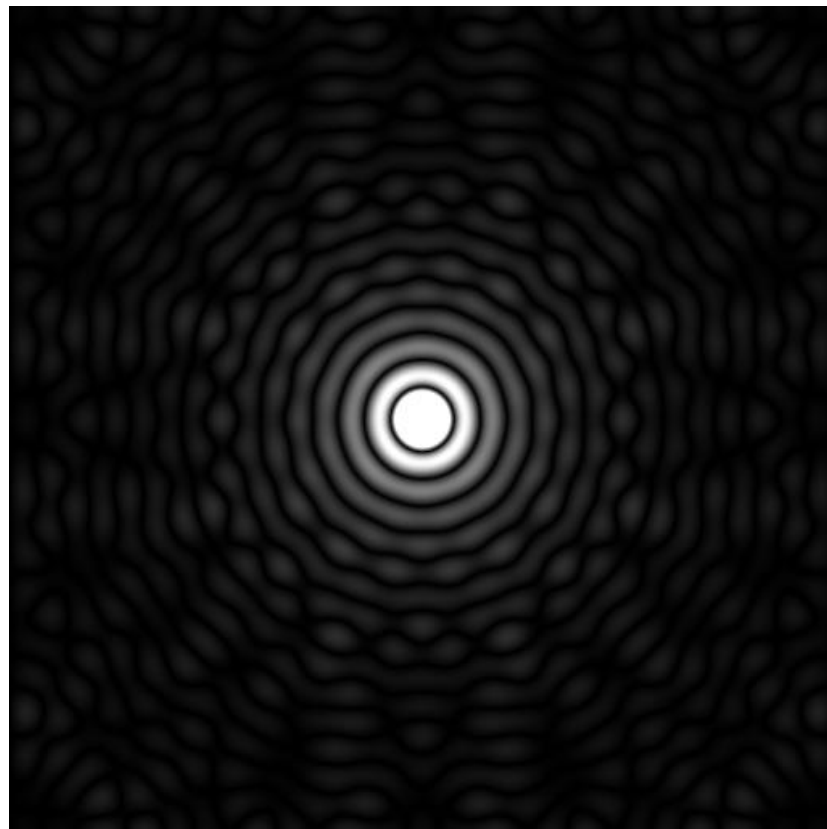
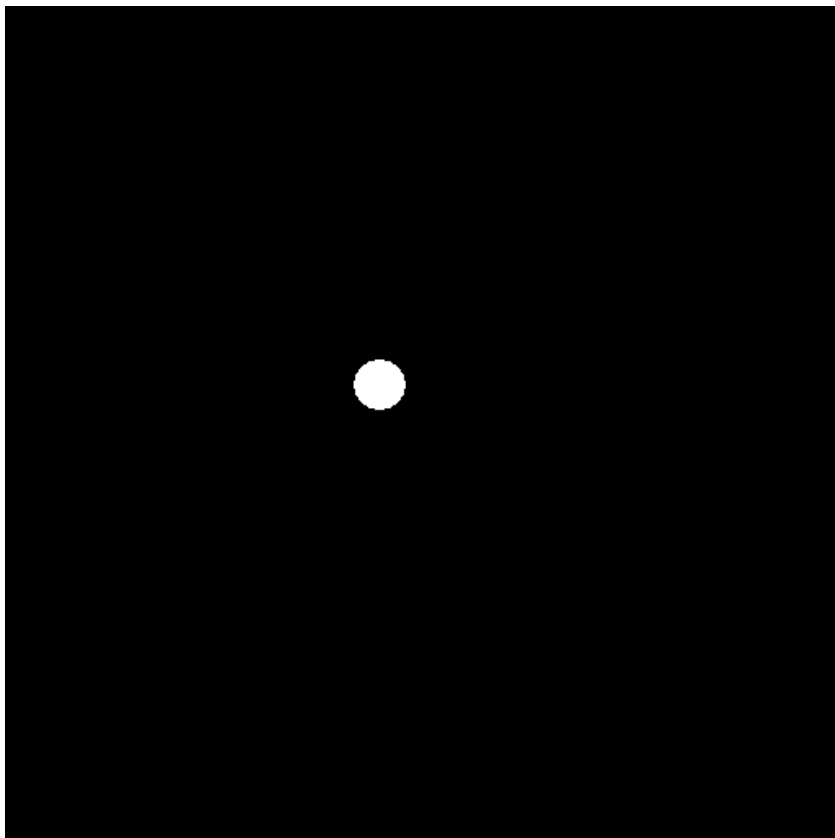


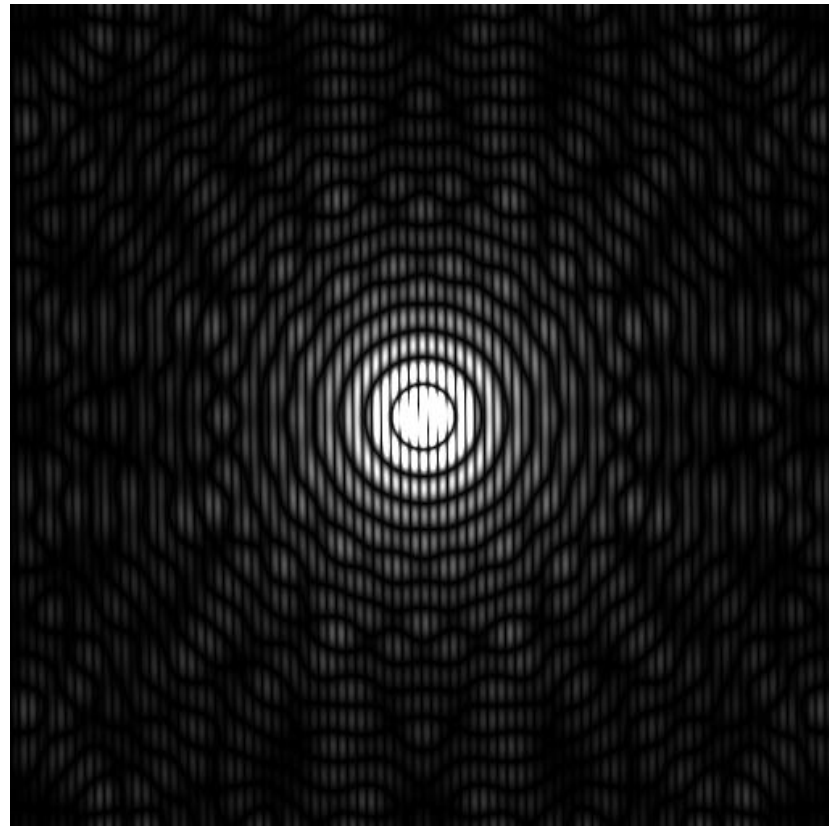
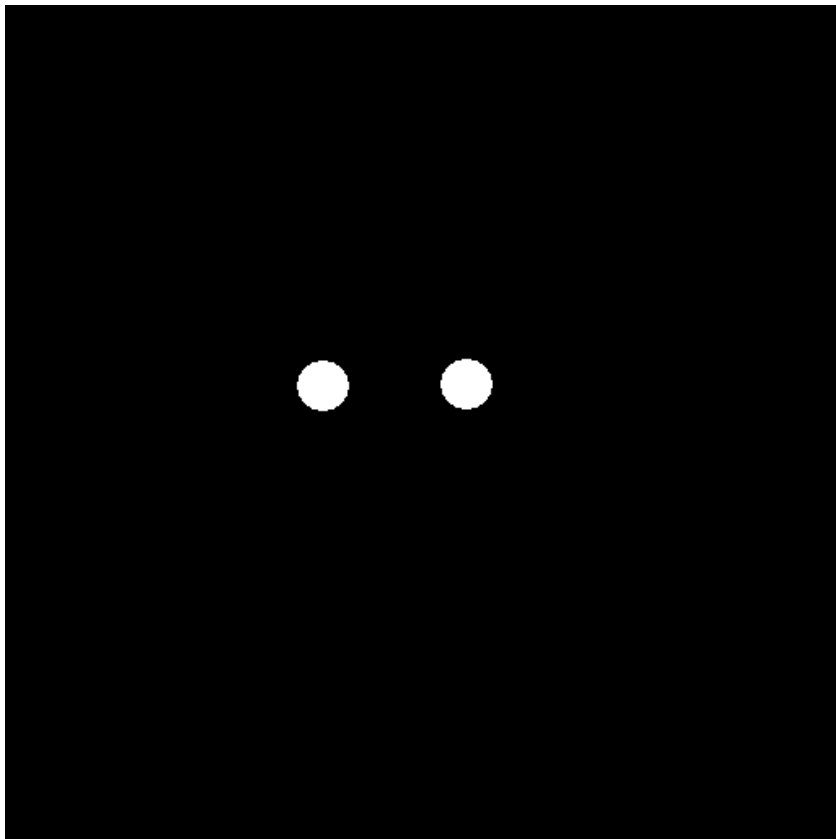
第七章 频域处理

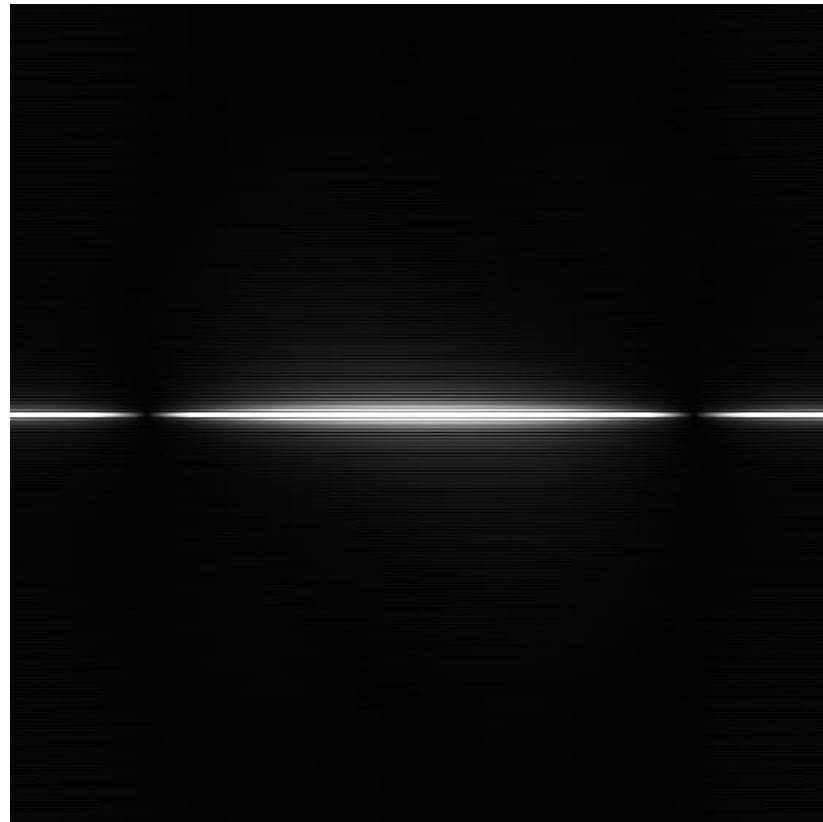
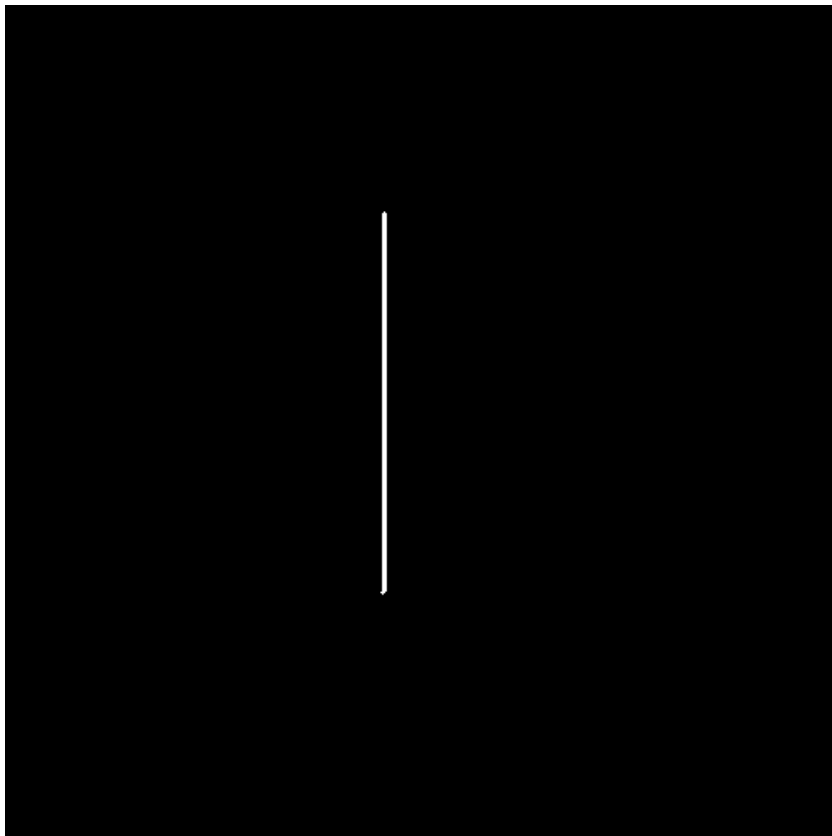






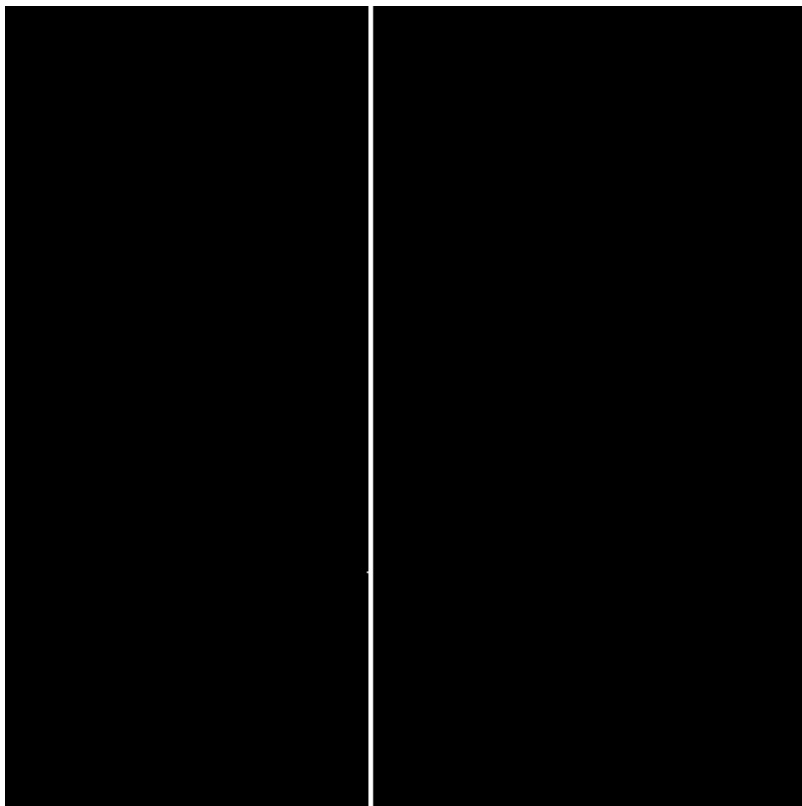






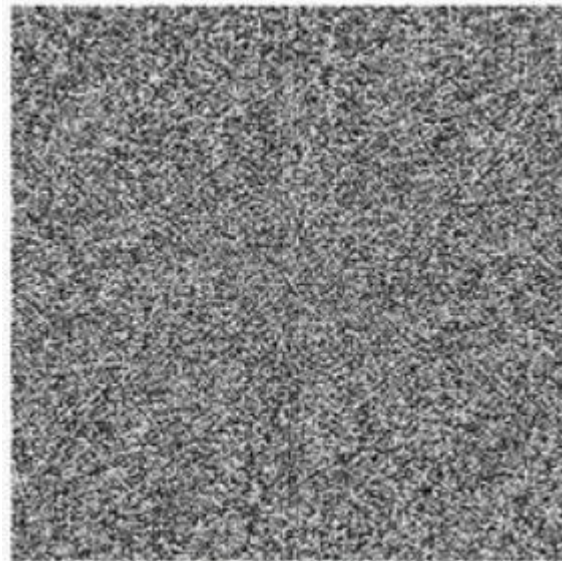
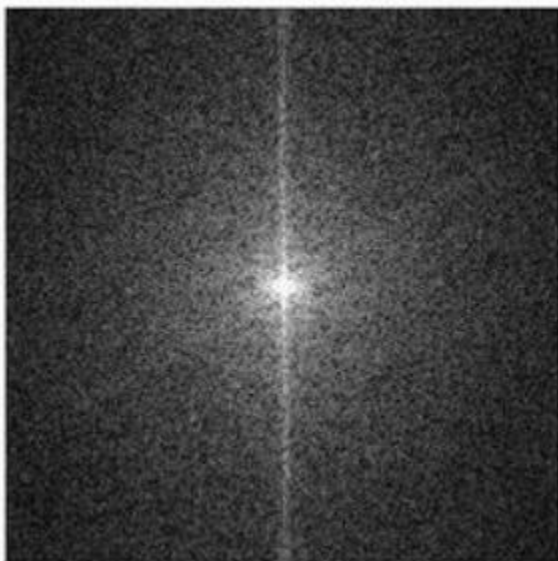


第七章 频域处理



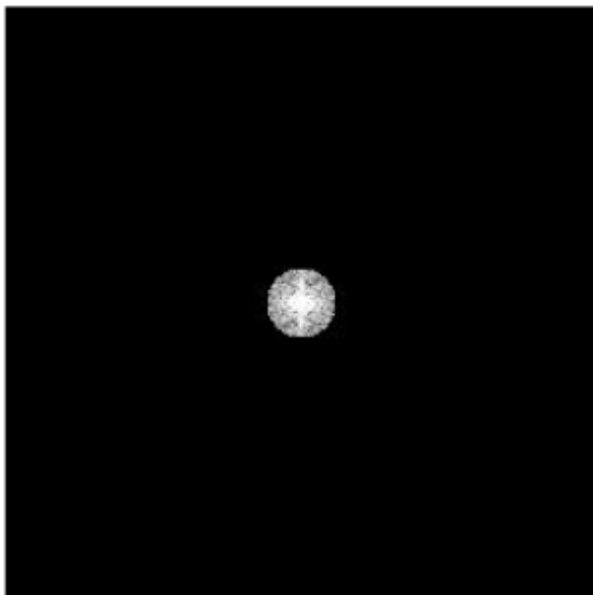


用傅立叶变换处理和分析信号，就像用三棱镜分解光线一样。让一束白光通过三棱镜，可将白光分解成七色的彩虹，若将分解开的七色光再次通过三棱镜，又可以得到白光。从形式上看这是由简单变换出了繁复，实则是将混合的东西分解成了基本的元素，通过对其基本元素的分析与处理，进而完成对信号的处理和分析。因此，傅立叶变换又有“**数字棱镜**”的美誉。

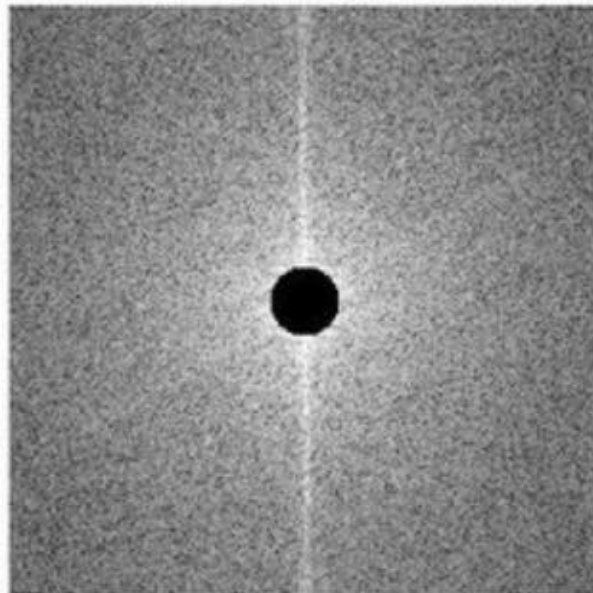


FFT的幅度图

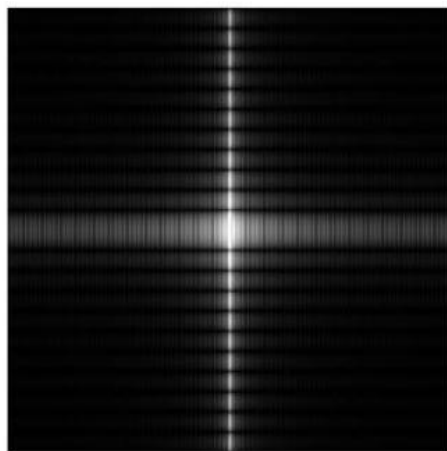
相位图



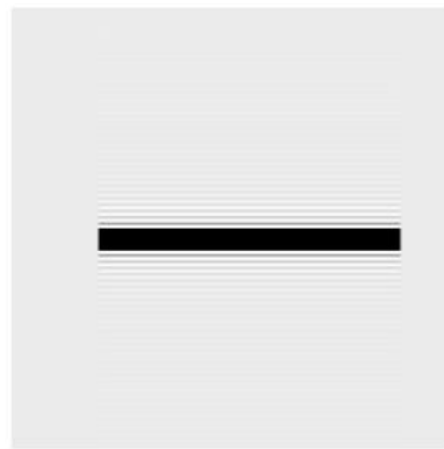
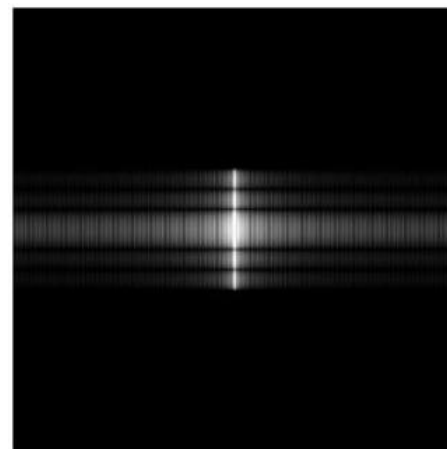
如果只保留靠近中心的幅度，则图像的细节丢失，但是不同区域还是有着不同灰度。



如果保留的是远离中心的幅度，则图像的细节可以看得出来，但是不同区域的灰度都一样了。



背景为白色的黑色矩形的傅立叶变换，



如果对频域中垂直方向高频分量进行截断，则图像中黑白将不那么分明了，表现为振荡。



第七章 频域处理



1幅度+2相位

1相位+2幅度



快速离散傅立叶变换

离散傅立叶变换计算量非常大，运算时间长。可以证明其运算次数正比于 N^2 ，特别是当 N 较大时，其运算时间将迅速增长，以至于无法容忍。为此，研究离散傅立叶变换的快速算法（Fast Fourier Transform, FFT）是非常有必要的。

1965年Cooley和Tukey首先提出了一种称为逐次加倍法的快速傅立叶变换算法(FFT)。

采用该FFT算法，其运算次数正比于 $N \log_2 N$ ，在 N 很大时计算量可以大大减少。

N	FFT / DFT
1024	1 / 102.4
4096	1 / 341.3



5.3 频域变换的一般表达式

5.3.1 可分离变换

二维傅立叶变换可用通用的关系式来表示：

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \underline{g(x, y, u, v)}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \underline{h(x, y, u, v)}$$

式中： $x, u=0, 1, 2, \dots, M-1$ ； $y, v=0, 1, 2, \dots, N-1$ ； $g(x, y, u, v)$ 和 $h(x, y, u, v)$ 分别称为正向变换核和反向变换核。



如果 $g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_2(y, v)$

$$h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_2(y, v)$$

则称正、反变换核是可分离的。进一步，如果 g_1 和 g_2 ， h_1 和 h_2 在函数形式上一样，则称该变换核是对称的。



二维傅立叶变换对是一个特殊情况， 它们的核为

$$g(x, y, u, v) = e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} = e^{-j2\pi\frac{ux}{M}} \cdot e^{-j2\pi\frac{vy}{N}}$$

$$h(x, y, u, v) = \frac{1}{MN} e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} = \frac{1}{M} e^{j2\pi\frac{ux}{M}} \cdot \frac{1}{N} e^{j2\pi\frac{vy}{N}}$$

可见，它们都是可分离的和对称的。



如前所述，二维傅立叶变换可以利用变换核的可分离性，用两次一维变换来实现，即可先对 $f(x,y)$ 的每一行进行一维变换得到 $F(x,v)$ ，再沿 $F(x,v)$ 每一列取一维变换得到变换结果 $F(u,v)$ 。对于其他的图像变换，只要其变换核是可分离的，同样也可用两次一维变换来实现。

如果先对 $f(x,y)$ 的每一列进行一维变换得到 $F(y,u)$ ，再沿 $F(y,u)$ 每一行取一维变换得到 $F(u,v)$ ，其最终结果是一样的。该结论对反变换核也适用。



5.3.2 图像变换的矩阵表示

数字图像都是实数矩阵， 设 $f(x,y)$ 为 $M \times N$ 的图像灰度矩阵，通常为了分析、推导方便，可将可分离变换写成矩阵的形式：

$$F = PfQ$$

$$f = P^{-1}FQ^{-1}$$

其中， F 、 f 是二维 $M \times N$ 的矩阵； P 是 $M \times M$ 矩阵； Q 是 $N \times N$ 矩阵。

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} P(x,u) f(x,y) Q(y,v)$$

式中， $u=0, 1, 2, \dots, M-1$, $v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。



对二维离散傅立叶变换，则有

$$P(x, u) = g_1(x, u) = e^{-j2\pi ux/M}$$

$$P(y, v) = g_2(x, v) = e^{-j2\pi vy/N}$$

实践中，除了DFT变换之外，还采用许多其他的正交变换。

例如：离散余弦变换、沃尔什-哈达玛变换、K-L变换等，下面将对常用的变换作一简要介绍。





5.4 离散余弦变换 (DCT)

离散余弦变换 (Discrete Cosine Transform, DCT) 的变换核为余弦函数。DCT除了具有一般的正交变换性质外，它的变换阵的基向量能很好地描述人类语音信号和图像信号的相关特征。因此，在对语音信号、图像信号的变换中，DCT变换被认为是一种准最佳变换。近年颁布的一系列视频压缩编码的国际标准建议中，都把DCT作为其中的一个基本处理模块。除此之外，DCT还是一种可分离的变换。



5.4.1 一维离散余弦变换

一维DCT的变换核定义为

$$g(x, u) = C(u) \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

式中, $x, u=0, 1, 2, \dots, N-1$;

$$C(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u = 0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

一维DCT定义如下: 设 $\{f(x)|x=0, 1, \dots, N-1\}$ 为离散的信号列。

$$F(u) = C(u) \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

式中, $u, x=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。



将变换式展开整理后，可以写成矩阵的形式，即

$$F = Gf$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ \sqrt{2/N} \begin{bmatrix} \cos(\pi/2N) & \cos(3\pi/2N) & \cdots & \cos((2N-1)\pi/2N) \end{bmatrix} \\ \sqrt{2/N} \begin{bmatrix} \cos(\pi/2N) & \cos(6\pi/2N) & \cdots & \cos((2N-1)\pi/2N) \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \sqrt{2/N} \begin{bmatrix} \cos((N-1)\pi/2N) & \cos((N-1)(3\pi/2N) & \cdots & \cos((N-1)(2N-1)\pi/2N) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$



一维DCT的逆变换IDCT定义为

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=0}^{N-1} C(u) F(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

式中， $x, u=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。可见一维DCT的逆变换核与正变换核是相同的。



5.4.2 二维离散余弦变换

正变换核为

$$g(x, y, u, v) = \frac{2}{\sqrt{MN}} C(u)C(v) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2M} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

式中， $C(u)$ 和 $C(v)$ 的定义同前； $x, u=0, 1, 2, \dots, M-1$ ； $y, v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

二维DCT定义如下：设 $f(x, y)$ 为 $M \times N$ 的数字图像矩阵，则

$$F(u, v) = \frac{2}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) C(u)C(v) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2M} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

式中： $x, u=0, 1, 2, \dots, M-1$ ； $y, v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。



二维DCT逆变换定义如下：

$$f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u)C(v)F(u, v) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2M} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

式中： $x, u=0, 1, 2, \dots, M-1$; $y, v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

二维DCT的矩阵形式如下：

$$F = G f G^T$$



同时，二维DCT的逆变换核与正变换核相同，且是可分离的，即

$$\begin{aligned} g(x, y, u, v) &= g_1(x, u)g_2(y, v) \\ &= \frac{2}{\sqrt{M}} C(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2M} \cdot \frac{2}{\sqrt{N}} C(v) \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \end{aligned}$$

式中： $C(u)$ 和 $C(v)$ 的定义同式（7-48）； $x, u=0, 1, 2, \dots, M-1$ ； $y, v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。



通常根据可分离性，二维DCT可用两次一维DCT来完成，其算法流程与DFT类似，即

$$f(x, y) \rightarrow F_{\text{行}}[f(x, y)] = F(x, v)$$

转置

$$\rightarrow F(x, v)^T \rightarrow F_{\text{列}}[F(x, v)^T] = F(u, v)^T$$

转置

$$\rightarrow F(u, v)$$



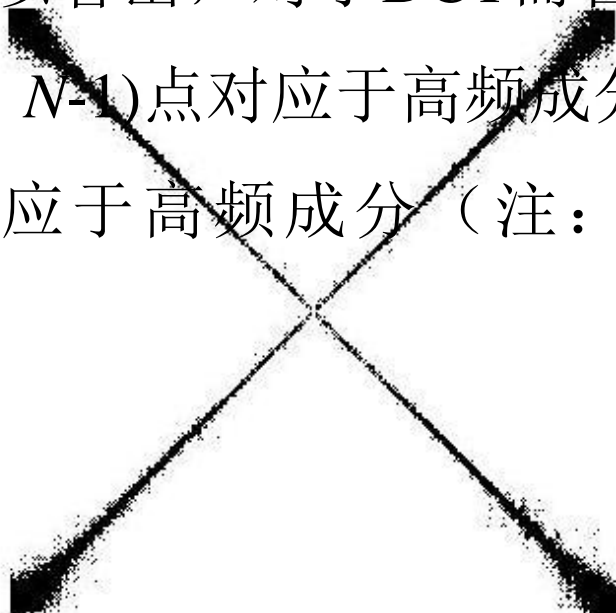
5.4.3 快速离散余弦变换

离散余弦变换的计算量相当大，在实用中非常不方便，也需要研究相应的快速算法。目前已有多种快速DCT（FCT），



二维DCT的频谱分布，其谱域分布与DFT相差一倍。

从图中可以看出，对于DCT而言， $(0, 0)$ 点对应于频谱的低频成分， $(N-1, N-1)$ 点对应于高频成分，而同阶的DFT中， $(N/2, N/2)$ 点对应于高频成分（注：此频谱图中未作频谱中心平移）。



(a)



(b)

DFT和DCT的频谱分布

(a) DFT频谱分布； (b) DCT频谱分布





- **离散余弦变换**—简化傅立叶变换的重要方法，图像压缩与传输中用。虚数傅立叶变换项为零时，不需计算，只需计算余弦项，是傅立叶变换的特例。

$$C(u) = a(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right)$$
$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} a(u) C(u) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right)$$

$$C(u, v) = a(u)a(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right)$$
$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} a(u)a(v) C(u, v) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right)$$



5.5 频域图像处理中的实现

频域图像处理步骤：

1. 计算图像的傅里叶变换，得到 $F(u,v)$ ；
2. 用滤波函数 $H(u,v)$ 乘以 $F(u,v)$ ，得到处理结果 $G(u,v)$ ；
3. 计算滤波后的反傅里叶变换；
4. 取结果中的实部，得到处理后的图像。

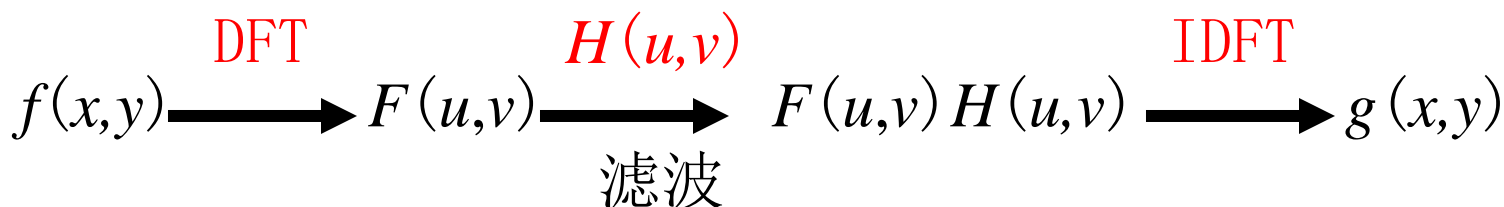


图像的频域增强

图像增强的目的主要包括：①消除噪声，改善图像的视觉效果；②突出边缘，有利于识别和处理。前面是关于图像空间域增强的知识，下面介绍频率域增强的方法。

假定原图像为 $f(x,y)$ ，经傅立叶变换为 $F(u,v)$ 。频率域增强就是选择合适的滤波器 $H(u,v)$ 对 $F(u,v)$ 的频谱成分进行处理，然后经逆傅立叶变换得到增强的图像 $g(x,y)$ 。

频率域增强的一般过程如下：





常见方法：

- ✓ 低通滤波
- ✓ 高通滤波
- ✓ 带通和带阻滤波
- ✓ 同态滤波



图像的平滑除了在进行空间域中进行外，也可以在频率域中进行。由于噪声主要集中在高频部分，为去除噪声改善图像质量，滤波器采用低通滤波器 $H(u,v)$ 来抑制高频成分，通过低频成分，然后再进行逆傅立叶变换获得滤波图像，就可达到平滑图像的目的。

$$f(x,y) \longrightarrow F(u,v) \longrightarrow F(u,v)H(u,v) \longrightarrow g(x,y)$$

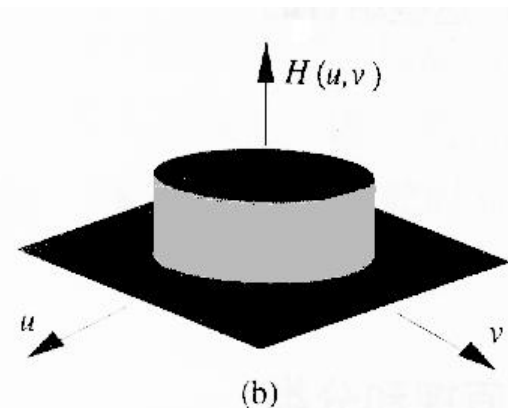
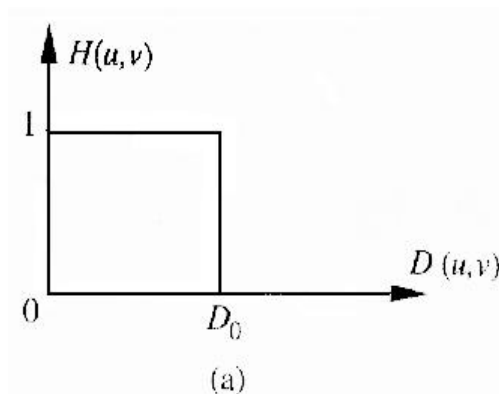


常用的频率域低滤波器 $H(u,v)$ 有四种：

1. 理想低通滤波器

设傅立叶平面上理想低通滤波器离开原点的截止频率为 D_0 ，则理想低通滤波器的传递函数为

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$



由于高频成分包含有大量的边缘信息，因此采用该滤波器在去噪声的同时将会导致边缘信息损失而使图像边模糊。

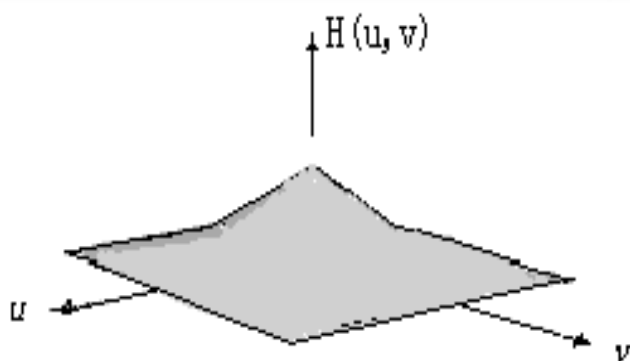


2. Butterworth低通滤波器

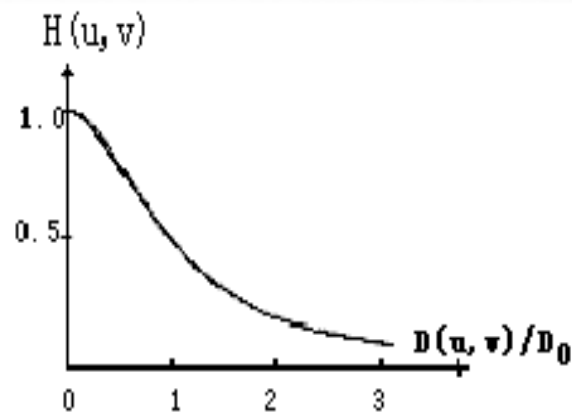
n 阶Butterworth滤波器的传递函数为:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [\frac{D(u, v)}{D_0}]^{2n}}$$

它的特性是连续性衰减，而不象理想滤波器那样陡峭变化，即明显的不连续性。因此采用该滤波器滤波在抑制噪声的同时，图像边缘的模糊程度大大减小，没有振铃效应产生。



(a)



(b)

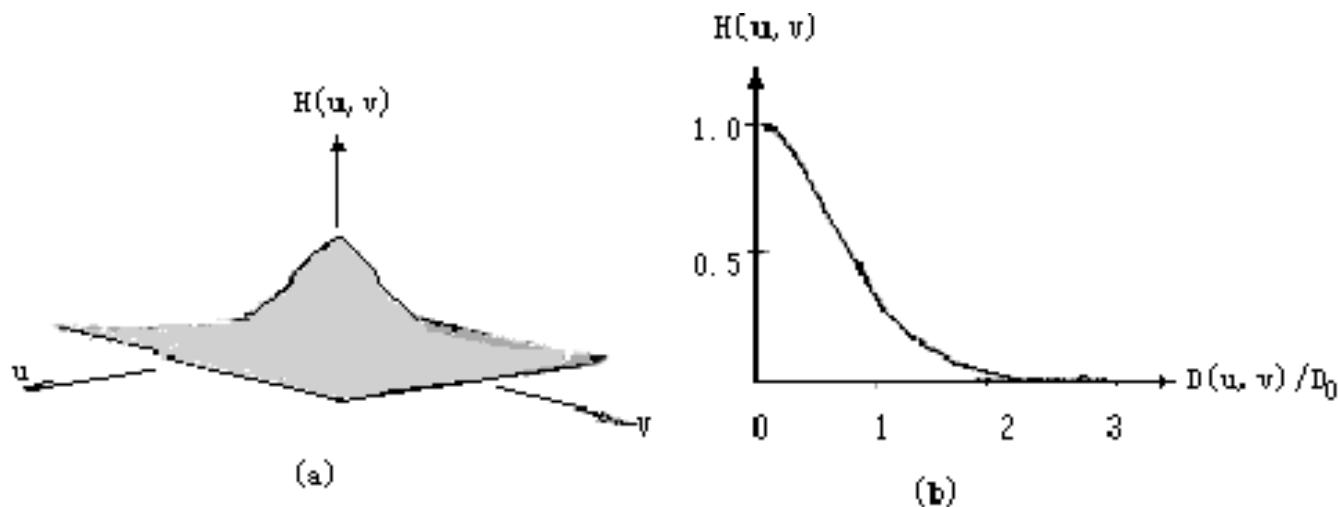


3. 指数低通滤波器

指数低通滤波器是图像处理中常用的另一种平滑滤波器。它的传递函数为：

$$H(u, v) = e^{-\frac{D(u, v)}{D_0}}^n$$

采用该滤波器滤波在抑制噪声的同时，图像边缘的模糊程度较用Butterworth滤波产生的大些，无明显的振铃效应。



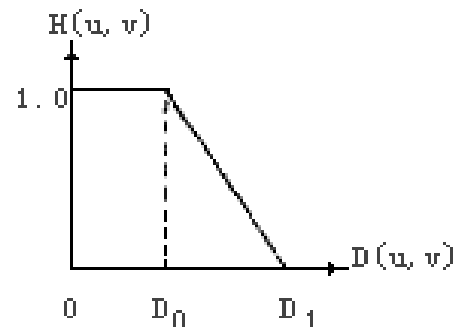
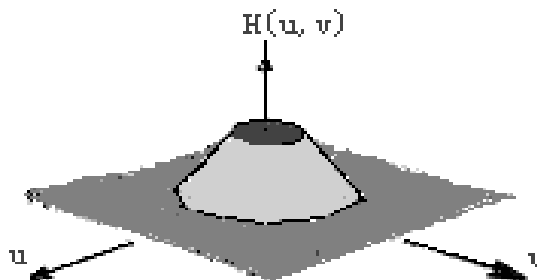


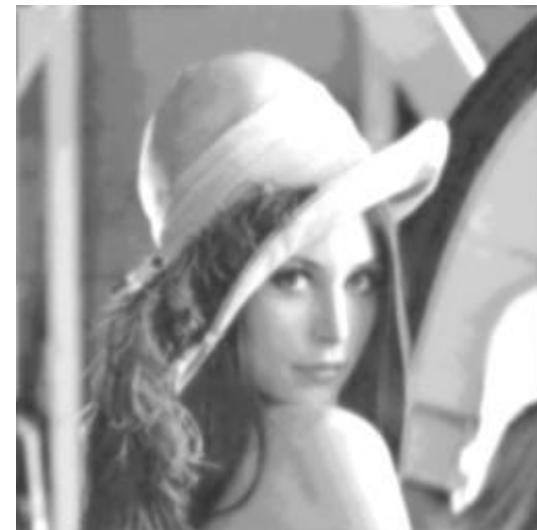
4. 梯形低通滤波器

梯形低通滤波器是理想低通滤波器和完全平滑滤波器的折中。它的传递函数为：

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) < D_0 \\ \frac{D(u, v) - D_1}{D_0 - D_1} & D_0 \leq D(u, v) \leq D_1 \\ 0 & D(u, v) > D_1 \end{cases}$$

它的性能介于理想低通滤波器和指数滤波器之间，滤波的图像有一定的模糊和振铃效应。

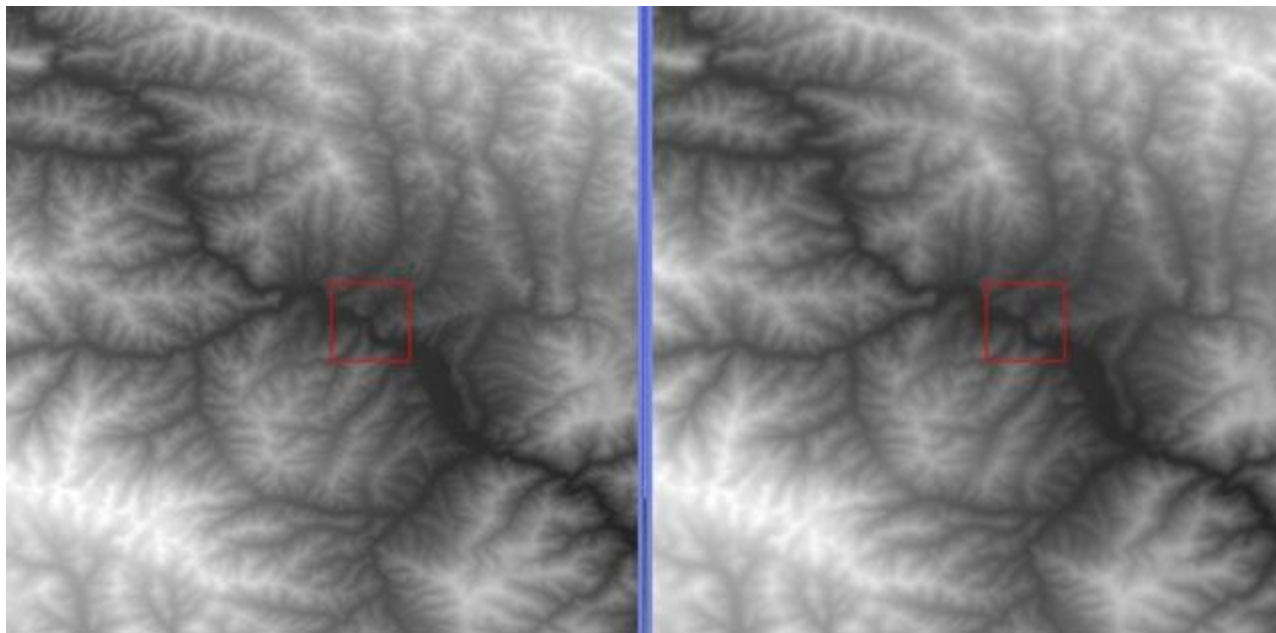




a) 出现虚假轮廓的图 b) 理想低通滤波器平滑结果 c) 巴特沃斯滤波器平滑结果



Low Pass处理



使用低通滤波处理，使得地物的边缘在影像中变得更平滑。如影像中的河流、湖泊边缘的界线较原影像就有所模糊。



图像的边缘、细节主要位于高频部分，而图像的模糊是由于高频成分比较弱产生的。**频率域锐化**就是为了消除模糊，突出边缘。因此采用高通滤波器让高频成分通过，使低频成分削弱，再经逆傅立叶变换得到边缘锐化的图像。

$$f(x,y) \longrightarrow F(u,v) \longrightarrow F(u,v)H(u,v) \longrightarrow g(x,y)$$

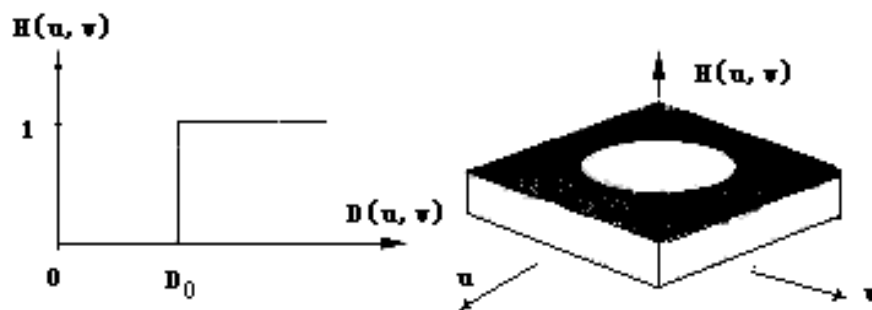


常用的高通滤波器有：

1) 理想高通滤波器

二维理想高通滤波器的传递函数为

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

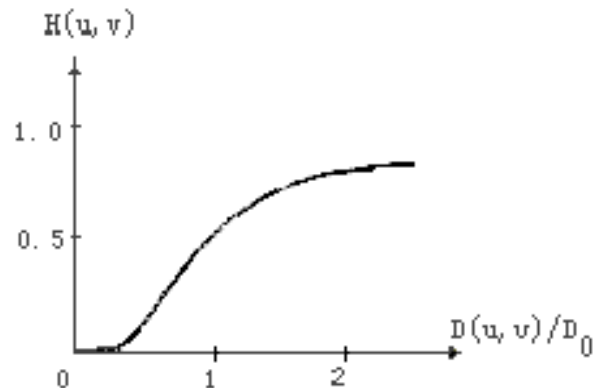




2) 巴特沃斯高通滤波器

n阶巴特沃斯高通滤波器的传递函数定义如下

$$H(u, v) = 1 / [1 + (D_0 / D(u, v))^{2n}]$$

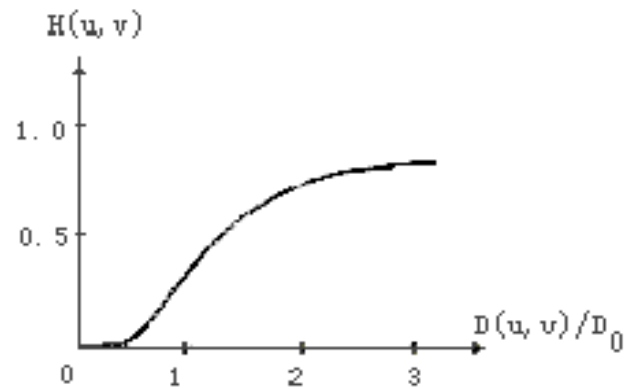




3) 指数滤波器

指数高通滤波器的传递函数为

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D_0}{D(u, v)}\right]^n}$$

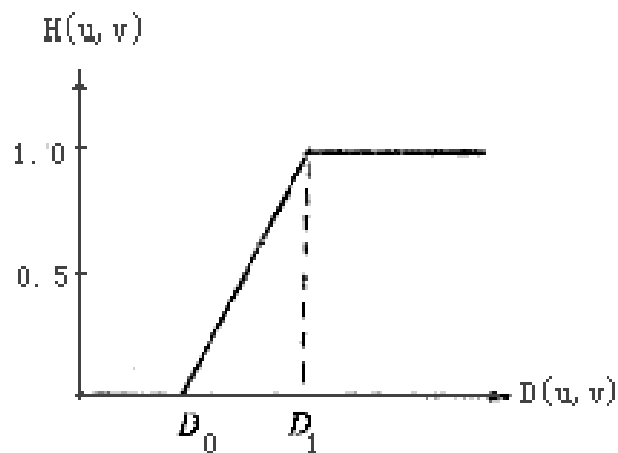




4) 梯形滤波器

梯形高通滤波器的定义为

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) < D_1 \\ \frac{D(u, v) - D_1}{D_0 - D_1} & D_1 \leq D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$



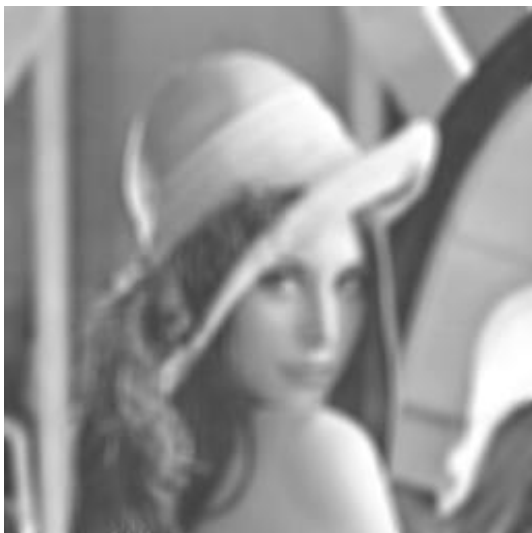


四种滤波函数的选用类似于低通。理想高通有明显振铃现象，即图像的边缘有抖动现象；

Butterworth高通滤波效果较好，但计算复杂，其优点是有少量低频通过， $H(u,v)$ 是渐变的，振铃现象不明显；

指数高通效果比Butterworth差些，振铃现象不明显；梯形高通会产生微振铃效果，但计算简单，较常用。

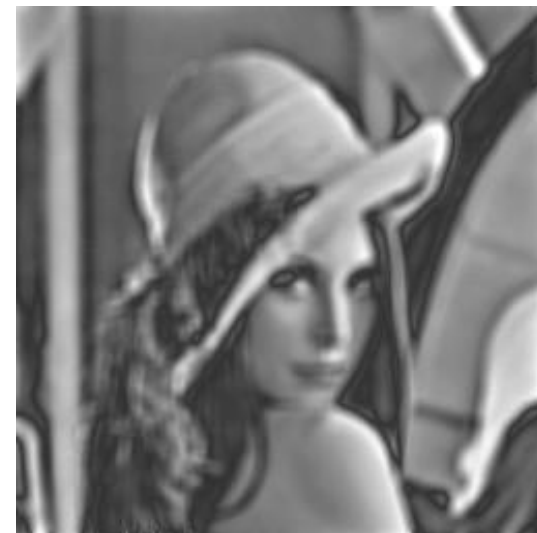
一般来说，不管在图像空间域还是频率域，采用高频滤波不但会使有用的信息增强，同时也使噪声增强。因此不能随意地使用。



a) 原图



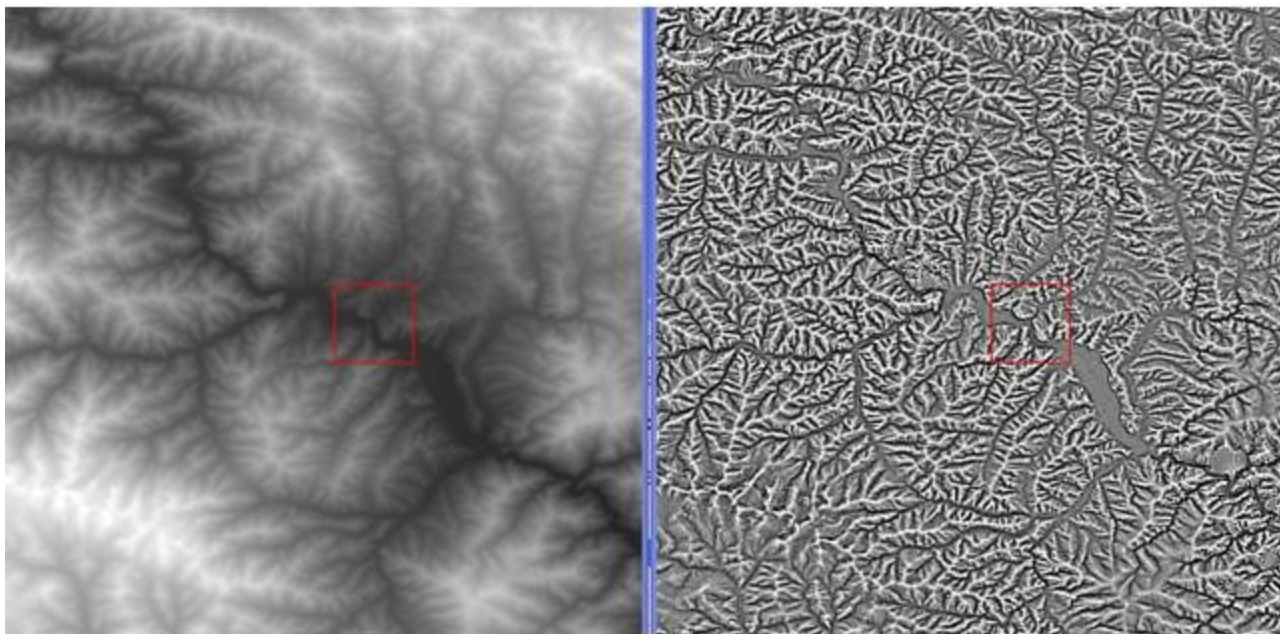
b) 巴特沃斯滤波器增强



c) 转移函数加1个常数得到的结果



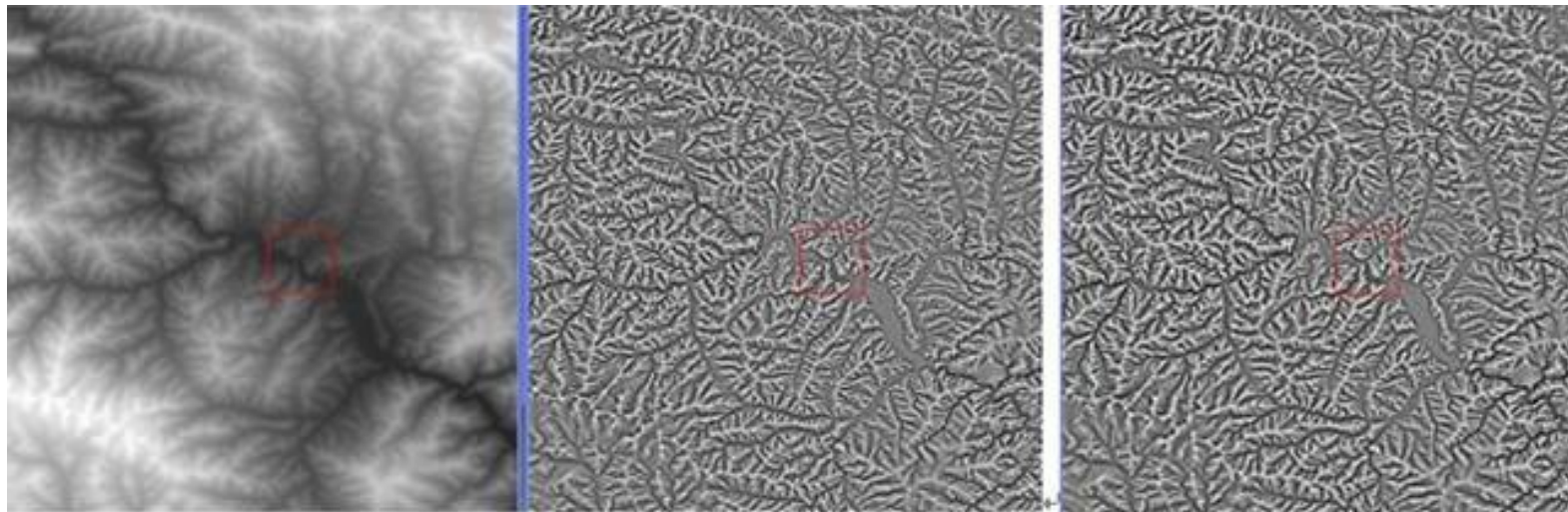
High Pass处理过的影像



通过与原影像的比较我们可以看出，影像经过高通滤波处理后，影像的边缘得到明显的锐化，而且处理后影像呈现出浮雕的效果。这样处理后，使得不同高度的地物得到很好的凸显，如影像中的山脉、山谷、湖泊的特征就更明显。



原影像、Laplacian处理过的影像、High Pass处理过的影像



较原影像，经Laplacian处理过的影像上的地物和高通滤波处理的一样，都浮雕化了，影像中地物的层次感明显增强，如湖泊、河流、山脊线等都得到很大的凸显。但和高通滤波处理的影像相比较，Laplacian处理过的影像，其地物的边缘在一定程度上得到平滑和柔和，锐化效果比高通滤波的稍弱些，整个影像中的线条和对比也稍柔和些。



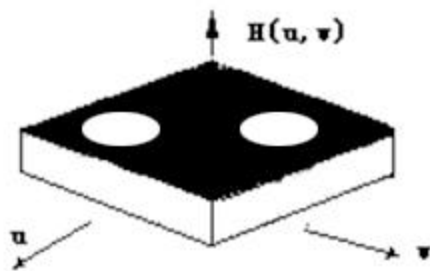
频域滤波——（3）带通和带阻滤波

- 带阻滤波器阻止一定频率范围内的信号通过而允许其它频率范围内的信号通过。

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D_1(u, v) \leq D_0 \text{ 或 } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$$

$$D_1(u, v) = [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2]^{1/2}$$

$$D_2(u, v) = [(u + u_0)^2 + (v + v_0)^2]^{1/2}$$



中心为: (u_0, v_0)

半径为: D_0



频域滤波——（3）带通和带阻滤波

- 去除以原点为中心的频率的放射对称理想带阻滤波器的转移函数：

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) < D_0 - W / 2 \\ 0 & D_0 - W / 2 \leq D(u, v) \leq D_0 + W / 2 \\ 1 & D(u, v) > D_0 + W / 2 \end{cases}$$

带的宽度为： W 放射中心为： D_0

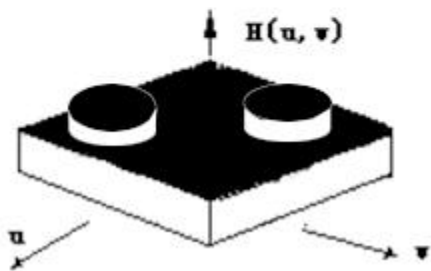
N阶巴特沃斯带阻滤波器：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$



频域滤波——（3）带通和带阻滤波

- 带通滤波器允许一定频率范围内的信号通过而阻止其它频率范围内的信号通过。
- 带通和带阻是互补的，所以：



$$H_P(u, v) = 1 - H_R(u, v)$$



在生活中会得到这样的图像，它的动态范围很大，而我们感兴趣的部分的灰度又很暗，图像细节没有办法辨认，采用一般的灰度级线性变换法是不行的。图像的同态滤波属于图像频率域处理范畴，其作用是对图像灰度范围进行调整，通过消除图像上照明不均的问题，增强暗区的图像细节，同时又不损失亮区的图像细节。



频域滤波——（4）同态滤波

- **同态滤波：**是一种在领域中同时将图象亮度范围进行压缩和将图象对比度进行增强的方法。
- **基于图象成象模型：**1幅图 $f(x,y)$ 可以表示成它的照度分量 $i(x,y)$ 与反射分量 $r(x,y)$ 的乘积。

$$f(x,y) = i(x,y) \cdot r(x,y)$$

- 根据这个模型可用下列方法把两个分量分开分别进行滤波。



1) 先对式两边同时取对数:

$$\ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

2) 两边取傅里叶变换:

$$F(u, v) = I(u, v) + R(u, v)$$

3) 设用1个频域函数 $H(u, v)$ 处理 $F(u, v)$:

$$H(u, v)F(u, v) = H(u, v)I(u, v) + H(u, v)R(u, v)$$

4) 反变换到空域: 增强后的图象是由对应照度分量与反射分量的两部分叠加而成。

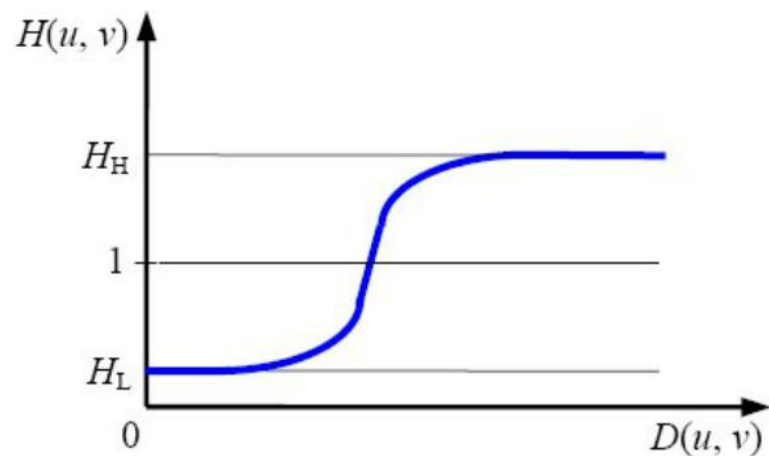
$$h_f(x, y) = h_i(x, y) + h_r(x, y)$$

5) 两边取指数:

$$g(x, y) = \exp|h_f(x, y)| = \exp|h_i(x, y)| \bullet \exp|h_r(x, y)|$$



- $H(u,v)$ 称作同态滤波函数：可以分别作用于照度分量和反射分量上。
- 一般照度分量是在空间缓慢变化的，而反射分量在不同物体的交界处是急剧变化的，所以图象对数傅里叶变换中的低频部分主要对应照度分量，而高频部分主要对应反射分量。
- 可以设计1个对傅里叶变换的高频和低频分量影响不同的滤波函数 $H(u,v)$ 。



同态滤波函数的剖面图

将它绕纵轴转360，可得到完整的2—D的 $H(u, v)$ 。

如果选择 $H_L < 1$ ， $H_H > 1$ ， $H(u, v)$ 就会一方面减弱低频而另一方面加强高频，

最终结果是同时压缩了图象的动态范围和增加了图象各部分之间的对比度。



(a)

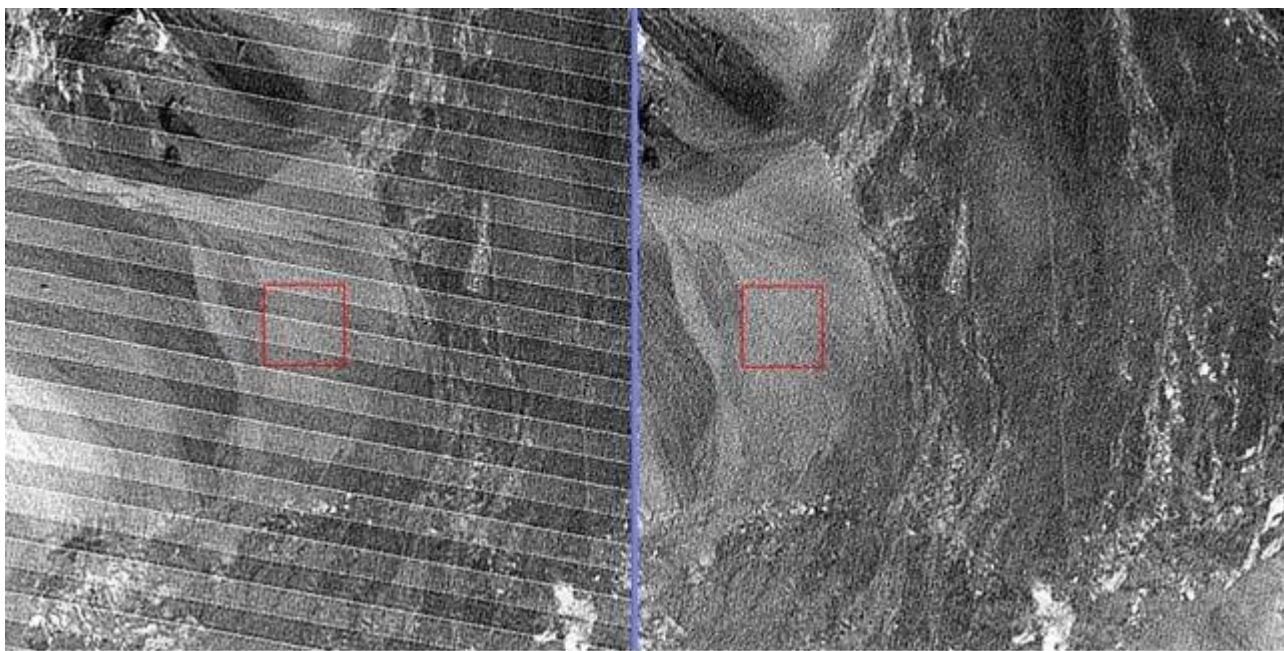


(b)

- (a) 由于单一侧光照明的原因使得人脸在图像的右侧产生阴影，头发的发际线很不清晰。
- (b) 用 $H_L=0.5$, $H_H=2.0$ 进行同态滤波得到的增强。
- (c) 图像增强后，人脸与头发明显分开，衣领也明显了。
- (d) 本例中同态滤波同时使动态范围压缩（如眼睛处），并使对比度增加（如人脸与头发交界处）。



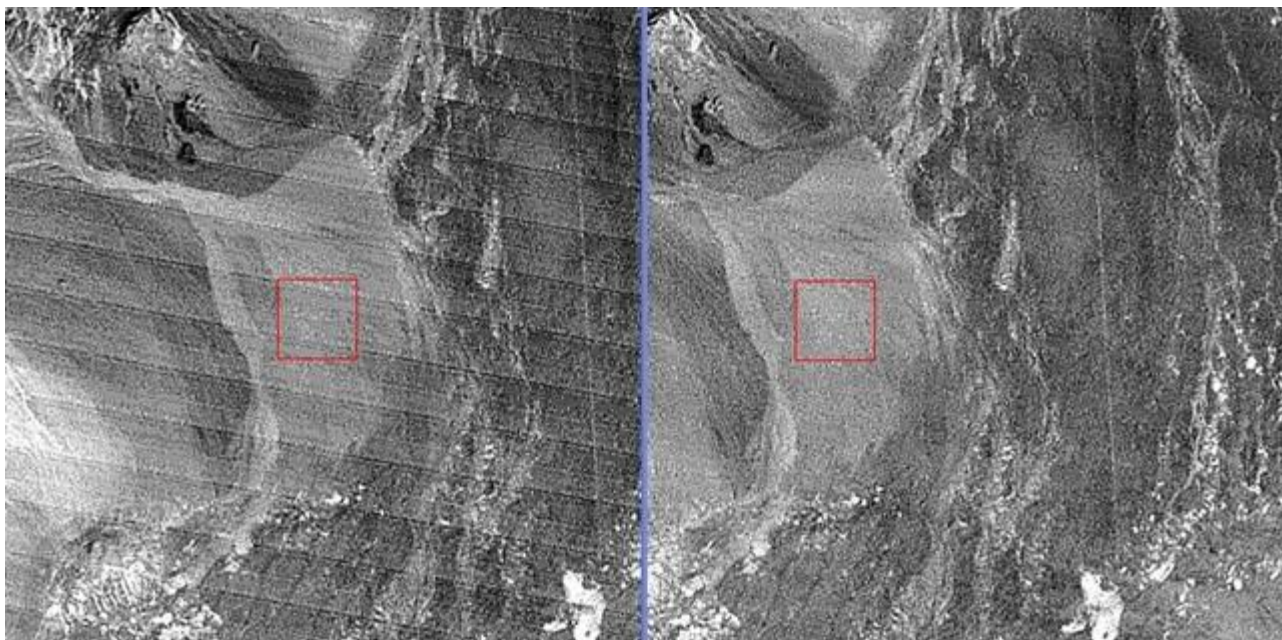
以第1波段现实的TM影像、去噪声处理后的第1波段影像



TM第1波段基本上是蓝光波算，影像在噪声相对较多，条带也就比较密集。经过处理后，TM影像第1波段中的噪声基本上得到很好的处理，不过处理后的影像并不是很饱满，原因在于去噪声处理过程中选取的噪声信息的范围有点大，将一些地物信息也去掉了，以致目标地物的信息量有一定的减少。



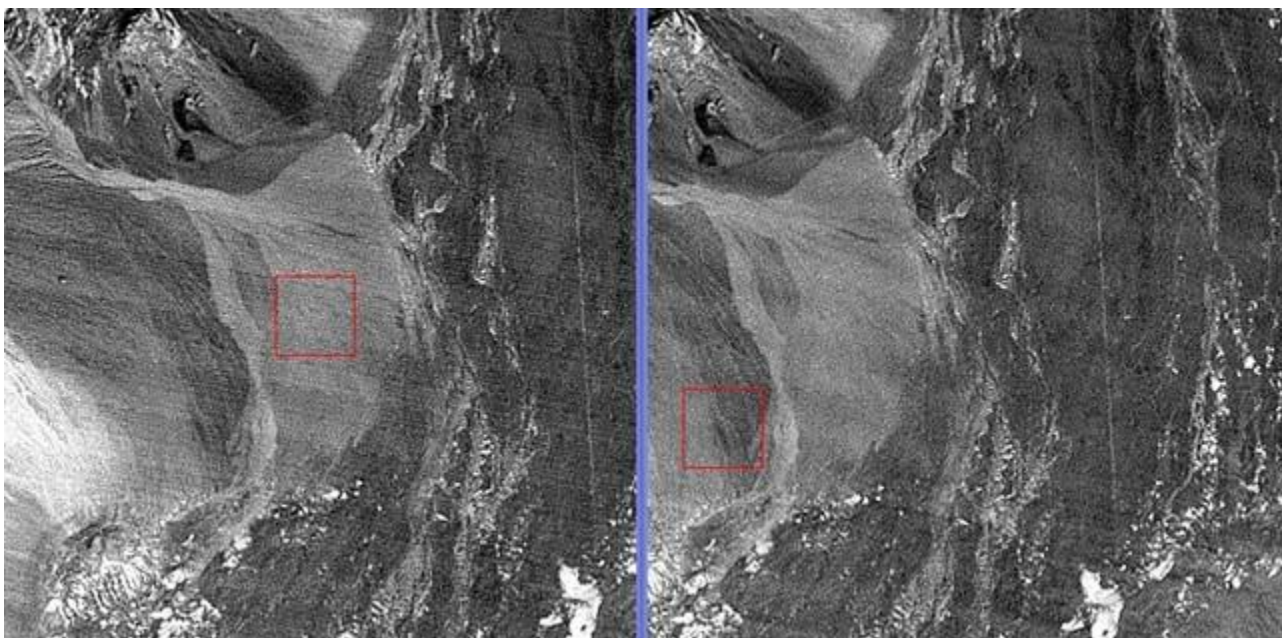
以第2波段现实的TM影像、去噪声处理后的第2波段影像



TM影像第2波段基本上属于绿光波段，噪声相对第1波段的少了些。噪声处理效果比较明显，地物信息量损失也符合要求。



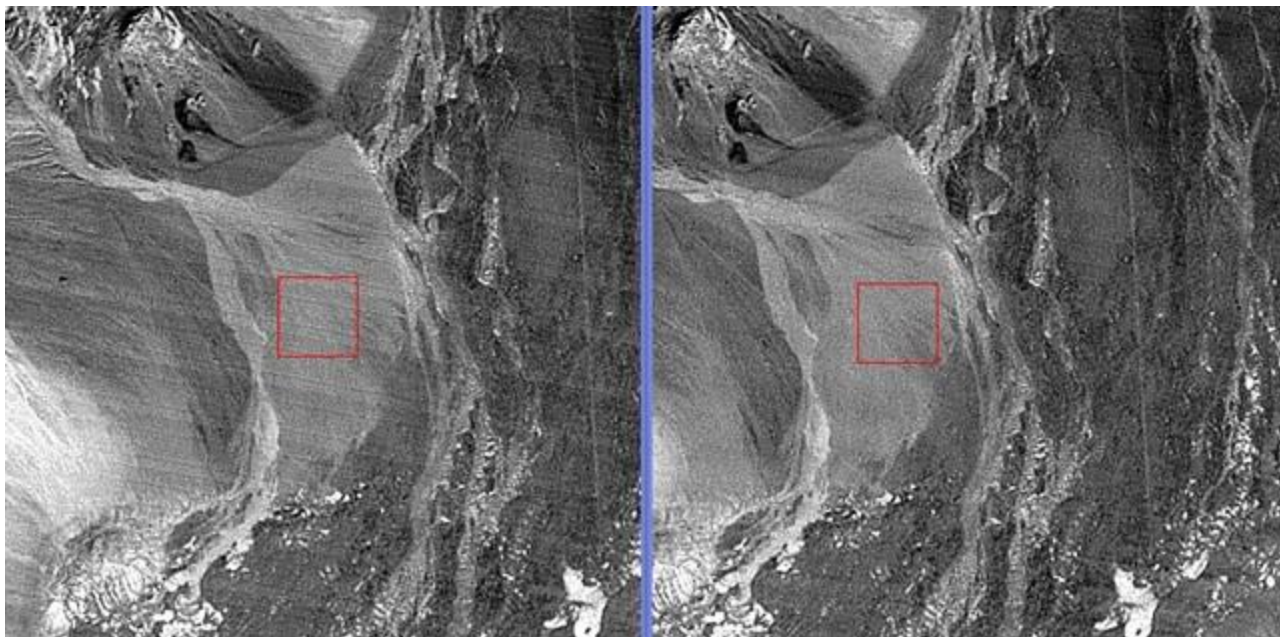
以第3波段现实的TM影像、去噪声处理后的第3波段影像



TM影像第3波段属于红光波段，其噪声相应减少较多，处理的影像中，还是有一定的噪声条带的存在，原因在于选取噪声信息的范围时，选取的不够全面，还有部分噪声信息没有得到有效的处理，以致噪声处理效果并不完美。



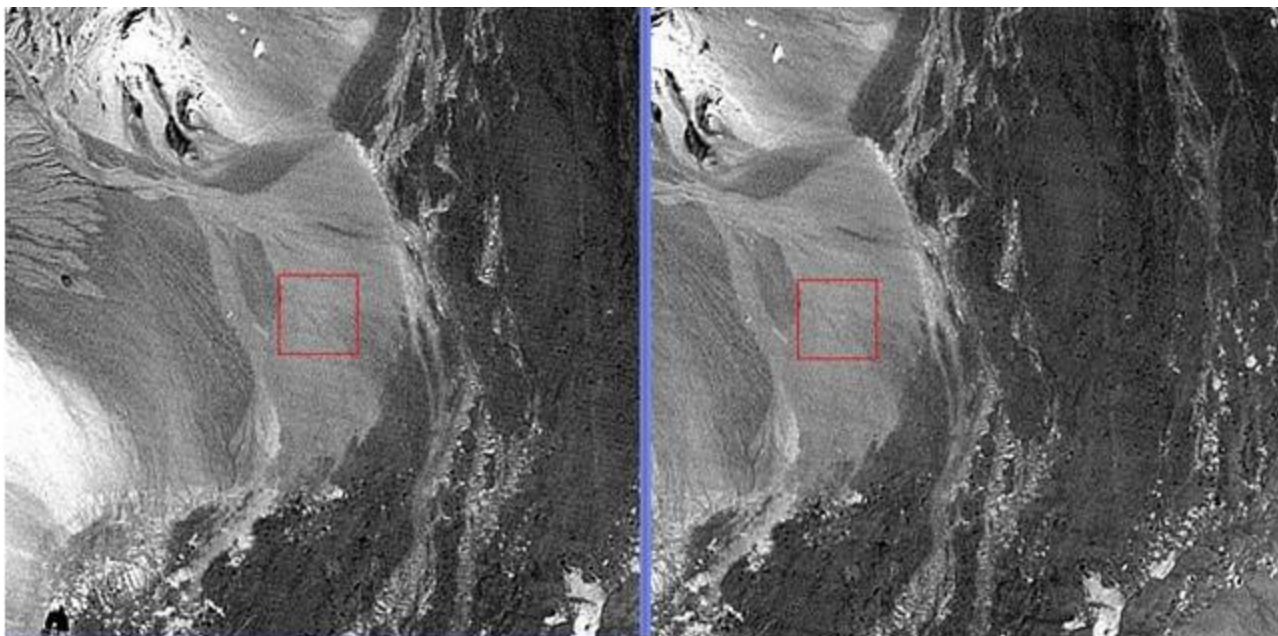
以第4波段现实的TM影像、去噪声处理后的第4波段影像



TM影像中第4波段和第5波段在可见光波段范围内属于较长的，噪声的干扰进一步减少。经去除噪声处理后，二者的效果都差不多，噪声基本上都得到较好的去除，地物信息也得到较好的保存。

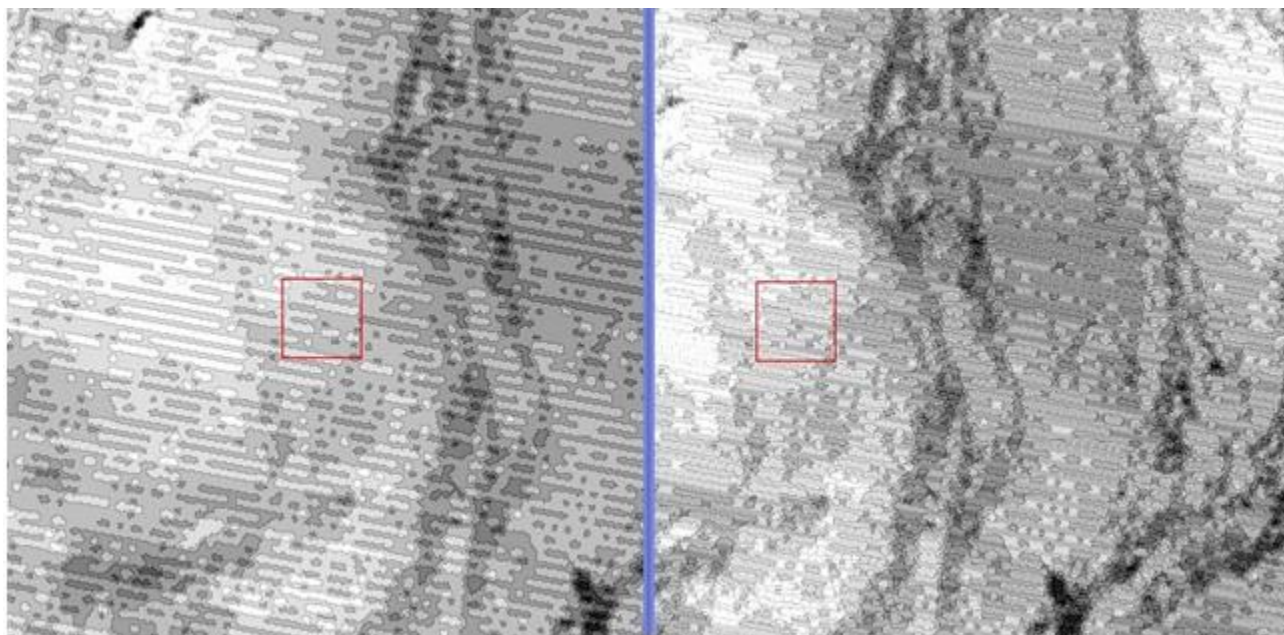


第5波段现实的TM影像、去噪声处理后的第5波段影像





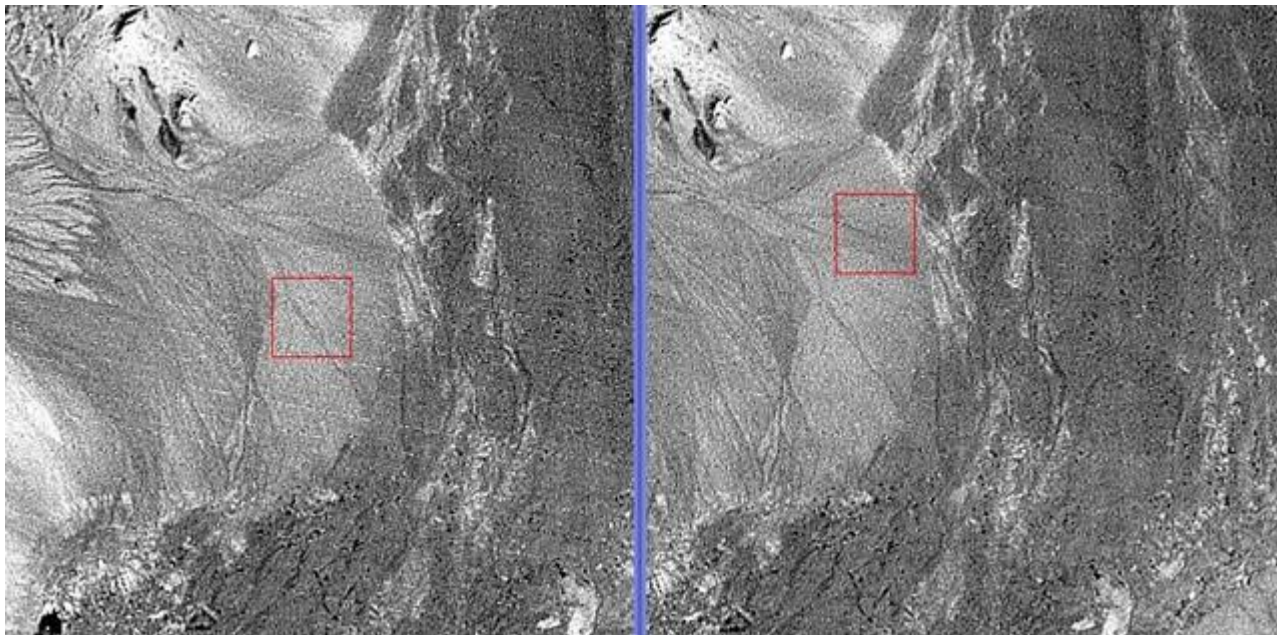
第6波段现实的TM影像、去噪声处理后的第6波段影像



第6波段基本上是热红外波段，而噪声主要集中在热红外的波长范围内，经过热红外波段的重采样处理，该波段的影像地物信息覆盖大量的噪声信息，使得原来的地物信息量极少。该波段也属于噪声波段，其影像对于地物信息的提取基本上没什么用。经去噪声处理后的影像几乎提取不出任何完整的地物信息。



第7波段现实的TM影像、去噪声处理后的第7波段影像



TM影像第7波段接受的光谱的波长最长，受到的噪声干扰比较少，只有少量的噪声信息，基本上不影响地物信息的读取。经过去噪声处理后的影像，少量的条带得到有效的去除，地物特征也表现的更明显。



3. 频率域伪彩色增强

把黑白图像经傅立叶变换到频率域，在频率域内用三个不同传递特性的滤波器分离成三个独立分量；

⊆ 然后对它们进行逆傅立叶变换，便得到三幅代表不同频率分量的单色图像，接着对这三幅图像作进一步的处理（如直方图均衡化）

∈ 最后将它们作为三基色分量分别加到彩色显示器的红、绿、蓝显示通道，得到一幅彩色图像。

