Usuń i wygraj - projekt AAL
Dokumentacja końcowa

Piotr Zmyślony, nr albumu 268833

1 Opis problemu

1.1 Treść zadania

Gra „Usuń i wygraj" polega na uzyskaniu jak największego wyniku przy sukcesywnym usuwaniu liczb z (ustalonej przed rozpoczęciem gry) listy liczb całkowitych N, dopóki nie pozostanie nam zbiór pusty. Operacja usunięcia liczby *N[i]* powoduje uzyskanie liczby punktów równej wybranej liczbie. Po usunięciu jednej liczby, wszystkie dwie sąsiednie (*N[i]-1* oraz *N[i]+1*) liczby, jeśli istnieją, również są usuwane - tym razem bez uzyskiwania jakichkolwiek punktów.

Problem polega na znalezieniu maksymalnej liczby punktów do zdobycia dla konkretnej listy.

1.2 Analiza

1.2.1 Warianty listy

Pierwszym krokiem jest posortowanie listy wstępnej rosnąco, co znacząco ułatwi dalszą analizę zagadnienia, stąd dalej przedstawione listy będą już posortowane.

Przypadkiem trywialnym problemu jest taka lista unikalnych liczb, w której żadna z liczb nie posiada sąsiadów, na przykład *N1 = [-3,-1,1,3,5,7]*. W takim wypadku kolejność wyboru liczb nie ma znaczenia, ponieważ nigdy nie „tracimy" punktów poprzez usuwanie.

Przypadkiem ogólnym jest lista, w której liczby mogą posiadać sąsiadów, na przykład *N2 = [-10,-9,-8,1,2,3,4,5,7,8,9]*. Teraz musimy rozważać rozłączne, rosnące listy liczb sąsiadujących. Lista *N2* rozkłada się na listy: *[-10,-9,-8]*, *[1,2,3,4,5]*, *[7,8,9]*. Wynikiem jest suma maksymalnych ilości punktów, jaką można uzyskać w każdej z podlist.

1.2.2 Problem duplikatów

Problem duplikatów, czyli liczb występujących w liście po klika razy, można rozwiązać sumując wszystkie wystąpienia i zastępując je tą właśnie sumą. Na przykład dla *N3 = [1,1,2,3,3,3,4,4,4,6,7,7,8]* dostajemy: *[2,2,9,12]*, *[6,14,8]*. Dla tych list, operacja usuwania zmienia się nieznacznie - usunięcie liczby *N[i]* powoduje usunięcie *N[i-1]* i *N[i+1]*.

2 Algorytm

2.1 Przetwarzanie wstępne danych

Na wstępie algorytm dostaje listę liczb całkowitych i tworzy rozłączne listy sąsiadujących i posortowanych rosnąco liczb. Na każdej z nich dokonywana jest operacja usuwania duplikatów opisana powyżej. Wynik sumaryczny właściwego algorytmu (opisanego poniżej) dla każdej z list jest odpowiedzią na to, jaki jest maksymalny możliwy do uzyskania wynik na liście początkowej.

2.2 Działanie algorytmu

Na początku algorytm dokonuje sprawdzenia, jakiego typu jest lista, czyli porównuje pierwszą (min) i ostatnią (max) liczbę w liście N

- **Typ A** - $min \geqslant 0$
- **Typ B** - $min < 0$

2.2.1 Rozwiązanie dla typu A

Jest to najprostszy z przypadków, którego rozwiązanie ma złożoność $O(n)$. Służy do tego poniższy algorytm:

Algorytm House Robber:

```
def house_robber(array):
    incl = 0
    excl = 0

    for i in array:
        new_excl = excl if excl >= incl else incl
        incl = excl + i
        excl = new_excl
    return excl if excl > incl else incl
```

2.2.2 Rozwiązanie dla typu B

W tym wypadku algorytm powyższy (nawet z modyfikacjami) nie jest w stanie policzyć największej wartości.

W pierwszym kroku, sprawdzamy czy lista posiada również wartości większe bądź równe 0. Jeśli nie, wynik daje nam rekurencyjny *Algorytm I* opisany pokrótce poniżej.

Jeżeli tak - część rozwiązania dla liczb nieujemnych możemy dostać poprzez algorytm *House Robber*. Istnieją 3 możliwe sposoby podziału takiej listy: usuwamy 0, usuwamy liczbę na lewo od 0, usuwamy liczbę na prawo od 0. Dla każdego z tych podziałów część dodatnią rozwiązujemy algorytmem *House Robber*, a część ujemną *Algorytmem I*. Z tych 3 wyników wybieramy największy jako końcowy.

Algorytm I:

```
1. wynik := 0
2. Sprawdź które liczby mają maksymalny BU*.
3. Jeśli jest tylko jedna liczba M[i] o największym BU,
   wynik += M[i], usuń M[i-1], M[i] i M[i+1] i przejdź do kroku 2.
4. Utwórz tablicę max[n], gdzie n to ilość liczb o maksymalnym BU.
5. Dla każdego i=0..(n-1) kolejno:
 5.1. z := rezultat Algorytmu I dla listy bez M[i] i sąsiadów
 5.2. max[i] := wynik + M[i] + z.
6. wynik += maksymalna wartość z tablicy max[]
7. Zwróć wynik.

*Bilans Usunięcia dla liczby N[i] równy jest N[i]-N[i-1]-N[i+1].
```

2.3 Testowanie

2.3.1 Złożoność obliczeniowa

Złożoność algorytmu *House Robber* jest liniowa, wymaga jedynie sortowania w pre-processingu danych. Stąd dla samych liczb dodanich złożoność obliczeniowa wynosi *O(nlogn)*, co jest przedstawione na Rysunku 1.

Złożoność obliczeniowa *Algorytmu I* jest równa *O(n!)*, o ile jesteśmy w stanie wygenerwować taką listę, aby przy każdej rekurencji wszystkie liczby miały tą samą wartość *BU*. Taka lista jest prawdopodobnie niemożliwa do wygenerowania.

Ilość duplikatów w liście wstępnej ma znaczny wpływ na czas działania - przykładowo, jeżeli 50% listy stanowią duplikaty, to efektywnie, nasze *n* jest mniejsze o 50%. Stąd, czym większa długość podlist utworzonych z listy wstępnej, tym znacznie większy czas obliczeń.

Na Rysunku 2 można zaobserwować wpływ *Algorytmu I* dla wartości bliskich 0 - gwałtowny wzrost czasu wykonania, aż do momentu, kiedy ilość liczb będzie większa od liczności zakresu z którego te liczby są generowane. Widać, że po tym wzroście, wpływ na kształt funkcji ma jedynie sortowanie liczb z listy początkowej. Dzieje się tak dlatego, że po sortowaniu i usunięciu duplikatów możemy otrzymać zbiór, który maksymalnie ma liczność taką samą jak zakres generacji - czas działania *Algorytmu I* jest z grubsza niezmienny.

2.3.2 Testowanie dla ciągłych list

Lista ciągła to lista wstępna, która po sortowaniu i usunięciu duplikatów daje tylko jedną, długą podlistę. Takie listy gwarantują, że część ujemnych liczb będzie liczona przez tylko jedno uruchomienie *Algorytmu I*, co pozwala lepiej zobrazować jego złożoność obliczeniową.

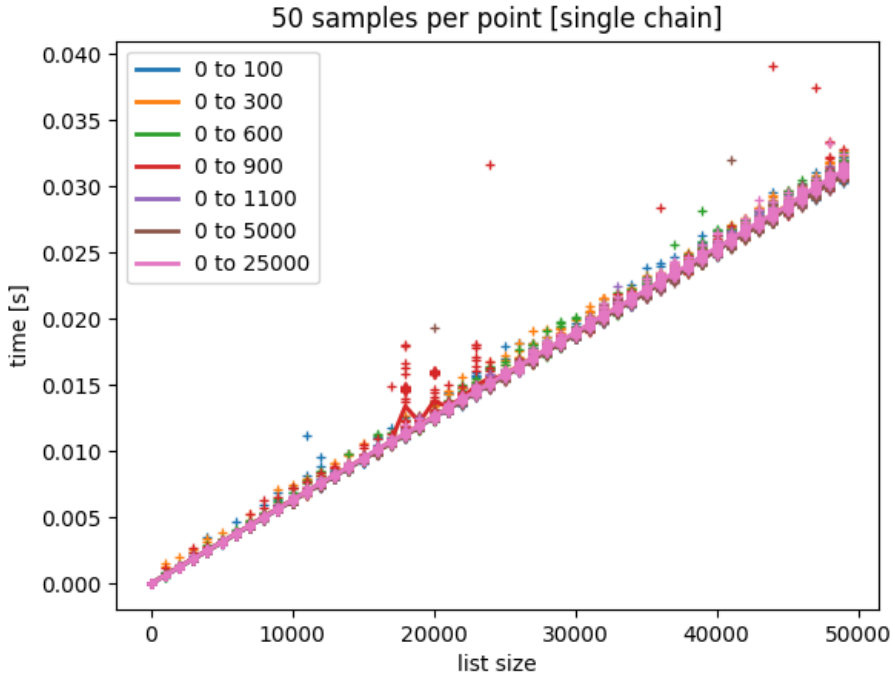
Wykres efektu testowania takich list jest przedstawiony na Rysunku 3. Możemy zaobserwować pojedyncze listy, dla których algorytm wykonywał się w czasie o kilka rzędów wielkości większym niż średnia. Są to przypadki, dla których *Algorytm I* często musi się rozgałęziać poprzez rekurencję, innymi słowy - częste są sytuacje, w których BU jest równe dla dużej ilości liczb pozostałych w liście.

Program potrafi generować takie listy po podaniu opcji *--evil*.

Interesującym porównaniem jest Rysunek 4. Tutaj liczby generowane są losowo, z równym prawdopodobieństwem, więc ilość podlist również jest losowa. Porównując linię czerwoną i zieloną, możemy zaobserwować, że od pewnego momentu, czas wykonania dla mniejszego zakresu liczb

zaczyna być większy (długość listy ok. 13000). Sugeruje to, że dla zakresu [-1000, 1000] zaczynają się generować bardzo długie ciągi liczb sąsiednich, przez co czas wykonania *Algorytmu I* znacznie wzrasta. Dla tej samej długości listy, ale zakresu [-3000, 3000], istnieje mniejsze prawdopodobieństwo utworzenia równie długich ciągów sąsiednich liczb. Jednak dla jeszcze większych długości listy (nie przedstawionych na Rysunku 4), zagęszczenie liczb z zakresu reprezentowanego przez czerwoną linię będzie wystarczająco duże, żeby często tworzyć ciągi sąsiadów dłuższe niż 1000 (maksymalny ciąg ujemnych sąsiadów dla zakresu [-1000, 1000]) i od tego momentu czas wykonania będzie z powrotem większy.

Rysunek 1: Czas działania algorytmu dla list liczb dodanich



2.3.3 Program

Program potrafi działać w 4 trybach, definiowanych przez podanie opcji *-m <tryb>*.

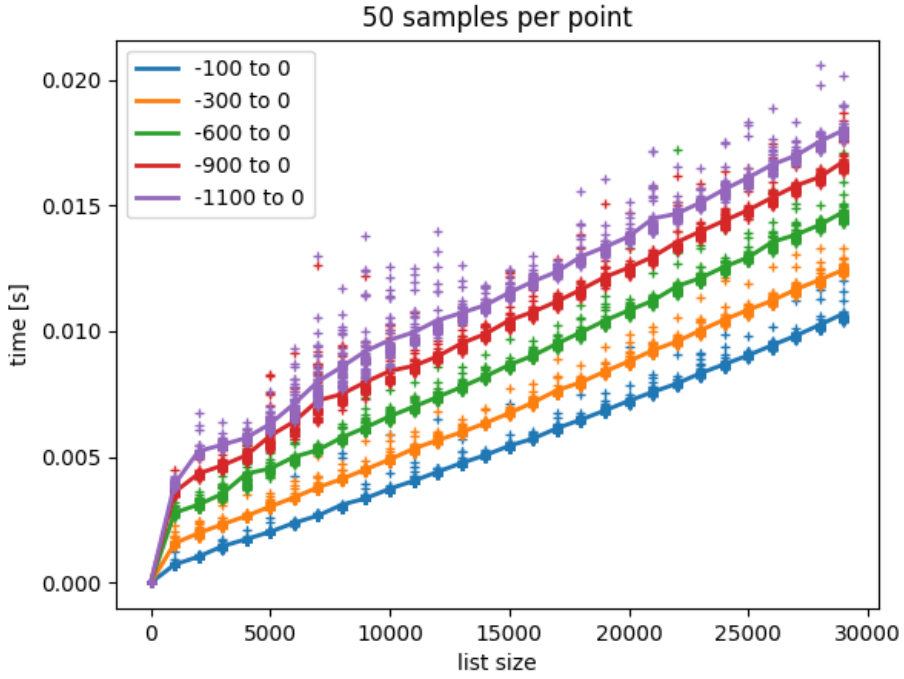
Tryb 1 Odczytuje dane z stdin, każdą linię interpretując jako jedną instancję problemu (jedną listę liczb). Można go używać jako tryb interaktywny odczytujący dane z klawiatury lub wsadowy, jeśli dane mamy w pliku.

Tryb 2 Program sam generuje jedną instancję danych losowych o parametrach, takich jak np. zakres liczb, ilość liczb w liście.

Tryb 3 Program generuje dane losowe i testuje czasy działania algorytmu dla rosnącej ilości liczb w liście. Możliwe jest wyświetlenie wyniku działania na wykresie.

Tryb 4 Program przyjmuje na wejście pary liczb, które definiują zakres generacji liczb w liście wstępnej. Dla każdego zakresu wykonywany jest Tryb 3 programu, a końcowy wynik przedsta-

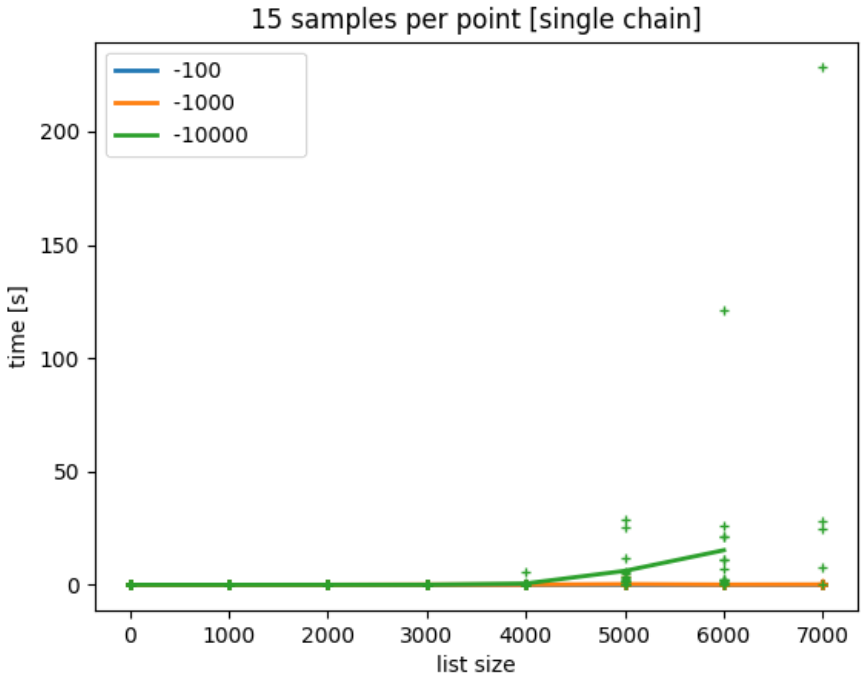
Rysunek 2: Czas działania algorytmu dla list liczb ujemnych



wiany jest na wykresie. Tryb 4 najlepiej służy jako narzędzie do kompleksowego sprawdzania złożoności *Algorytmu I*.

Wszystkie atrybuty, które użytkownik może modyfikować są dostępne po podaniu opcji (*--help python main.py --help*).

Rysunek 3: Czas działania algorytmu dla listy, która zawiera tylko jedną, długą podlistę. Listy zaczynają się od -100, -1000 lub -10000



Rysunek 4: Wpływ zagęszczenia i długich podlist na czas wykonania